



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b126048

S/M2

98/3

3

Université de Metz

UFR MIM

0155

Application des observateurs non linéaires à la commande des bioprocédés

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 février 1998

pour l'obtention du

Doctorat de l'université de Metz

(spécialité mathématiques appliquées - automatique)

par

Marco Pengov

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19980065
Cote	S/M2 98/3
Loc	Maydon

Composition du jury

Président : M. Fick, Professeur ENSAIA Nancy

Rapporteurs : J.-L. Gouzé, Directeur de Recherche INRIA Sophia-Antipolis
H. Hammouri, Professeur Université de Lyon

Examineurs : I. Marc, Professeur ENSIC Nancy
E. Richard, Maître de Conférences CRAN IUT Longwy
Université de Metz, *Directeur de Thèse*
Recherche INRIA Lorraine

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 190301 0

a projet CONGE

INRIA-LORRAINE & CNRS UPRES-A-7035

Remerciements

Cette thèse a été faite au sein de l'équipe CONGÉ (INRIA -Lorraine & CNRS UPRS-A-7035). Je tiens à remercier Monsieur Gauthier Sallet, Professeur à l'université de Metz et responsable scientifique du projet CONGÉ, d'avoir accueilli dans ce laboratoire. Je tiens aussi à le remercier pour m'avoir donné les moyens d'effectuer cette thèse et d'avoir été mon directeur de thèse.

C'est un grand honneur que me font Monsieur Jean-Luc Gouzé, Directeur de recherche INRIA - Sophia Antipolis et Monsieur Hassan Hammouri, Professeur à l'université Claude Bernard Lyon I, d'accepter d'être rapporteurs de ce travail. Je les remercie très vivement.

J'exprime ma gratitude à Monsieur Ivan Marc, responsable du laboratoire de Génie des procédés biotechnologiques et alimentaires (LSGC), et à Monsieur Michel Fick, Professeur à l'ENSIA, pour avoir accepté de prendre part à ce jury.

Je remercie Jean-Claude Vivalda, Chargé de recherche INRIA-Lorraine, pour toute l'aide et les conseils éclairés qu'il m'a apportés et pour avoir accepté de juger ce travail.

Je n'oublie pas Monsieur Edouard Richard, Maître de Conférence à l'I.U.T. de Longwy. Qu'il trouve ici l'expression de mes sentiments de très vive reconnaissance et d'amitié pour son aide indispensable et constante.

Pour n'oublier personne, je remercie tous les membres de l'équipe CONGÉ pour la bonne ambiance de travail et d'amitié dans laquelle j'ai pu travailler.

Finalement, c'est surtout grâce à mes parents que j'ai pu suivre convenablement de longues études. Je ne leur serai jamais trop reconnaissant. Je n'oublie pas ma famille et future belle famille pour leur soutien et leurs encouragements. Qu'ils en soient remerciés.

Ce travail est dédié à Patricia. Son amour, soutien et aide de tout temps m'ont permis de mener à bien cette thèse.

à Patricia

Table des matières

Introduction	1
1 Sur la modélisation de la croissance de <i>Saccharomyces cerevisiae</i>	4
1.1 Introduction	4
1.2 Rappels sur la modélisation de bioprocédés	4
1.2.1 Le bioréacteur - bilan de la matière	4
1.2.2 Définition de la vitesse spécifique de croissance	6
1.2.3 Modélisation des échanges gazeux	8
1.2.4 Schéma réactionnel - modèle général	9
1.3 Un état de l'art sur les modèles de <i>Saccharomyces cerevisiae</i>	10
1.3.1 Introduction	10
1.3.2 Modèle de Bastin et Dochain	11
1.3.3 Modèle de Reyman	12
1.3.4 Modèle de Rajab	13
1.4 Étude du modèle de Rajab	17
1.4.1 Introduction	17
1.4.2 Intégrale première	17
1.4.3 Définition du domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$	18
1.4.4 Ensemble d'équilibre	19
1.4.5 Résolution numérique	21
1.5 Variations autour du modèle de Rajab	25
1.5.1 Simplifications - Modifications	25
1.5.2 Modèles conditionnels	27
1.6 Conclusion	29
2 Sur les Observateurs continu-discrets	30
2.1 Introduction	30
2.2 Observabilité, entrées universelles	31
2.3 Observateurs continus-continus	34
2.3.1 Observateurs de type Kalman	34
2.3.2 Observateurs à grand gain	35
2.4 Sur l'observateur de Deza <i>et al.</i>	40
2.4.1 Estimateur Kalman étendu continu-continu	40

2.4.2	Sur la bornitude de l'équation de Ricatti	42
2.5	Observateurs continu-discrets	43
2.5.1	Introduction	43
2.5.2	Un observateur continu-discret de type Luenberger	44
2.5.3	Observateur continu-discret de Deza <i>et al.</i>	45
2.5.4	Un observateur non linéaire continu-discret	46
2.5.5	Application aux bioprocédés	49
2.6	Conclusion	49
3	Sur le Principe de Séparation	51
3.1	Introduction	51
3.2	Rappels sur la stabilité des systèmes non linéaires	51
3.2.1	Systèmes non linéaires temps continu	51
3.2.2	Systèmes non linéaires temps discret	53
3.3	Un état de l'art	54
3.4	Trois résultats de séparation	59
3.4.1	Présentation	59
3.4.2	Sorties en temps continu	59
3.4.3	Sorties temps discret	61
3.4.4	Sorties temps discret apériodiques avec retard	65
3.5	Conclusion	71
4	Applications - Simulations	72
4.1	Introduction	72
4.2	Exemple linéaire	72
4.3	Bioréacteur de base	73
4.4	Applications au modèle de Rajab	80
4.4.1	Introduction	80
4.4.2	Observabilité	80
4.4.3	Synthèse d'une loi de commande	81
4.4.4	Application d'un observateur à grand gain	82
4.4.5	Application d'un observateur de type Kalman étendu	89
4.5	Conclusion	94
	Conclusion générale	95
	Bibliographie	97

Table des figures

1.1	Schéma d'un bioréacteur	5
1.2	Courbe de croissance microbienne	7
1.3	Modèle à trois états physiologiques	16
1.4	Point d'équilibre biomasse totale en fonction de S	22
1.5	Point d'équilibre biomasse X_1 en fonction de S	23
1.6	Point d'équilibre biomasse X_2 en fonction de S	23
1.7	Point d'équilibre biomasse X_3 en fonction de S	23
1.8	Point d'équilibre concentration éthanol en fonction de S	24
1.9	Point d'équilibre concentration acétate en fonction de S	24
1.10	Valeur de la vitesse de dilution D à l'équilibre en fonction de S	24
2.1	Principe de l'observateur	30
3.1	Exemple de commande par retour d'état estimé	55
3.2	Le fonctionnement de l'observateur continu-discret avec retards sur la sortie	66
4.1	Exemple observateur continu-discret linéaire - évolution de x et $\hat{x}$	73
4.2	Domaine physique	75
4.3	Concentration en biomasse et en substrat	78
4.4	Évolution de la commande en dilution sans ou avec bruit	79
4.5	Concentration en biomasse et en substrat en présence de bruit	79
4.6	Concentration en biomasse et en substrat - mesures temps discret avec retard	79
4.7	La concentration en biomasse X (g/l)	85
4.8	La concentration état physiologique X_1 (g/l)	86
4.9	La concentration état physiologique X_2 (g/l)	86
4.10	La concentration état physiologique X_3 (g/l)	86
4.11	La concentration en éthanol E (g/l)	87
4.12	La concentration en glucose S (g/l)	87
4.13	La concentration en acétate A (g/l)	87
4.14	Le volume V (l)	88
4.15	La commande en dilution D (l)	88
4.16	La concentration en biomasse X (g/l)	90
4.17	La concentration état physiologique X_1 (g/l)	91
4.18	La concentration état physiologique X_2 (g/l)	91
4.19	concentration état physiologique X_3 (g/l)	91
4.20	La concentration en éthanol E (g/l)	92
4.21	La concentration en glucose S (g/l)	92
4.22	La concentration en Acétate A (g/l)	92
4.23	Le volume V (l)	93
4.24	La commande en dilution D (l/h)	93

Introduction

L'objectif de ce travail consiste à résoudre certains problèmes d'Automatique et/ou de Mathématiques appliquées issus de procédés biotechnologiques.

La biotechnologie utilise la matière vivante soit pour dégrader, soit pour synthétiser divers produits en vue d'une activité agronomique ou industrielle avec une bonne faisabilité et un bon rendement économique. Il est question de maîtriser et d'optimiser ces processus. Pour cela, il faut conjuguer trois approches :

- une approche biologique où l'on cherche l'amélioration des performances par la sélection ou la modification des cellules et par l'optimisation des milieux de culture;
- une approche technologique où l'on cherche d'une part à maîtriser la réaction biologique en recherchant le mode de fonctionnement le plus approprié et, d'autre part, à concevoir des outils (bioréacteurs, capteurs, ...);
- une approche automatique où l'on cherche une conduite adéquate pour satisfaire les impératifs de fonctionnement du procédé, améliorer sa productivité, garantir une production optimale et de qualité.

Un procédé biologique peut être caractérisé par les valeurs d'un certain nombre de variables (pH, concentrations, ...). L'ensemble de ces variables étant appelé état du système. Notre approche consiste à considérer un modèle décrivant l'évolution au cours du temps de ces variables. Ce modèle consiste généralement en un système d'équations différentielles ordinaires portant sur l'état muni d'une équation d'observation :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur état, $u \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur de commande appliqué au système, $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de mesures, f est l'expression de l'équation différentielle modélisant la dynamique du procédé, et h est l'expression de l'équation d'observation modélisant les mesures.

Si l'on dispose d'un modèle et de la connaissance d'un état initial à l'instant t_0 , $x(t_0)$, il est possible, en théorie, de prévoir l'état futur $x(t)$ du système à n'importe quel instant t . Cependant pour les systèmes fonctionnant en continu la notion d'état initial n'a, à proprement parler, pas de sens. De plus, chaque perturbation (non mesurée) affecte le système et peut être considérée comme une réinitialisation de celui-ci.

En général, pour de raisons techniques, financières, ..., le nombre de variables mesurées est inférieur à la dimension de l'état ($p < n$). Ceci entraîne l'impossibilité de déduire à un instant donné, la valeur de $x(t)$ (l'état) de celle de $y(t)$ (les variables mesurées) à l'aide d'une opération algébrique. Le manque de mesures constitue donc une limitation à la conduite optimale de ces procédés. Par ailleurs, les mesures biologiques sont fortement bruitées et les modèles et les paramètres sont peu ou mal connus d'autant plus que les organismes vivants ont un comportement dynamique fortement non linéaire et non stationnaire.

Pour pallier à ces limitations une solution consiste à développer des outils qui, à partir des mesures expérimentales reconstitueront ou donneront une estimation des variables non mesurées ou des termes mal connus. On parlera alors de capteur logiciel ou encore dans le langage de l'Automatique d'observateur. Cet

outil, l'observateur ou le reconstituteur d'état, pouvant servir d'estimateur de paramètres. Sa conception permet à partir des grandeurs mesurées, de reconstruire l'état du système (biologique dans notre cas) de façon numérique, d'où son nom de capteur logiciel. L'estimation de l'état x du système issu d'un observateur sera noté $\hat{x}$.

En dehors de l'intérêt pour les biotechniciens d'accéder à certaines mesures, l'estimateur de l'état peut-il être utilisé pour faire de la commande, en particulier stabiliser avec un retour d'état estimé par un observateur ? Autrement dit, si une commande par retour d'état $u(x)$ stabilise le système, $u(\hat{x})$ stabilisera-t-il encore le procédé ? Ce principe dit de «séparation» bien établi en Automatique linéaire n'est plus vrai en non linéaire.

Ce travail s'inscrit dans ce cadre et a pour origine la résolution de problèmes de commande d'un procédé pilote se trouvant au Laboratoire Scientifique du Génie Chimique à Nancy. Le but est de produire la levure de boulangerie *Saccharomyces cerevisiae*. Le principal problème vient du manque de mesures : soit les sorties du système sont disponibles en temps discret et avec retards (le procédé lui évolue en temps continu), soit certains états du système ne peuvent pas être mesurés. Tout d'abord nous étudions la modélisation de ce procédé, ensuite nous fournissons un ensemble d'observateurs pour une classe de systèmes particuliers dont les bioréacteurs font partie. Les mesures biologiques sont souvent discrètes. C'est pourquoi nous développons des observateurs qui fournissent une estimation pour des mesures discrètes. Nous avons choisi une approche non linéaire des observateurs continu-discret, notion empruntée à la théorie du filtrage. Le passage du «linéaire au non linéaire» étant comme d'habitude la principale difficulté. Nous étudions finalement le principe de séparation pour ces observateurs.

Ce travail est articulé comme suit : dans le premier chapitre, nous commencerons par un rappel sur les bioprocédés et leurs modélisations en nous basant sur les classiques Bailey et Ollis (1986), Scriban (1988) et Bastin et Dochain (1990). Parmi ces bioprocédés, la levure de boulangerie *Saccharomyces cerevisiae* est beaucoup étudiée afin d'améliorer le taux de production de biomasse sur consommation en substrats. Après une description de sa croissance, on rappelle les modèles donnés par Bastin et Dochain (1990) et par Reyman (1992). Finalement, nous étudions plus particulièrement (Pengov *et al.*, 1995), le modèle développé au Laboratoire Scientifique du Génie Chimique principalement par Rajab (1983). À partir de ce modèle, nous proposons des modifications qui conduisent à différents nouveaux modèles (Pengov, 1996b). Ceux-ci sont soit plus simples, soit tiennent mieux compte, à notre avis, de la réalité biologique.

Le chapitre 2 est consacré à la problématique des observateurs. Les difficultés, dans la conception d'un observateur pour un système non linéaire, sont multiples. C'est ainsi que, contrairement aux systèmes linéaires, il n'existe pas de forme canonique d'observabilité. Par ailleurs, l'observabilité et la convergence de l'observateur peuvent dépendre de la nature des entrées ...

Après un rappel des définitions courantes, un état de l'art des observateurs continus est fait. Ceux-ci se basent sur une sortie disponible en temps continu. Malheureusement, comme cela est très souvent le cas dans les bioprocédés, les mesures ne sont disponibles qu'en temps discret (périodiquement ou non). Pour contourner cette difficulté, on peut soit concevoir des observateurs discrets, soit extrapoler les mesures discrètes pour engendrer une sortie continue. Il existe également une alternative fournie par la notion d'observateur continu-discret. C'est cette notion que nous développons. Nous analysons et reprenons l'observateur continu-discret proposé par Deza *et al.* (1992). Nous proposons également un nouvel observateur non linéaire continu-discret (Pengov *et al.*, 1998b; Pengov *et al.*, 1998a) qui fonctionne pour une classe de systèmes non linéaire et d'application simple.

Dans le troisième chapitre, nous démontrons un principe de séparation pour une classe de systèmes non linéaires en temps continu pour lesquels il existe une commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement. Nous obtenons trois résultats de séparation :

- les mesures sont disponibles en temps continu et il existe un observateur continu-continu;
- Les mesures sont périodiques et il existe un observateur continu-discret;
- il existe un observateur continu-discret et les mesures sont disponibles en temps discret avec retards.

Ce premier résultat est une extension du résultat de principe de séparation de Hammami (1993) et il est entre autre donné dans Pengov *et al.* (1997a). Par contre, nous avons donné, à notre connaissance, le premier résultat de séparation avec les observateurs continu-discrets (Pengov *et al.*, 1997b). Celui-ci a été ensuite amélioré en prenant compte des mesures accessibles en temps discrets et avec retards (Pengov *et al.*, 1998a).

Dans le dernier et quatrième chapitre, les résultats précédents sont appliqués à un cas linéaire et un modèle classique de bioprocédés. Nous donnons aussi des conditions d'applications d'observateurs non linéaires à un modèle de la croissance de la levure de boulangerie (Pengov *et al.*, 1995; Pengov, 1996a).

Finalement nous concluons ce travail par des perspectives de recherches futures.

Chapitre 1

Sur la modélisation de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons dans un premier temps, à la modélisation de bioprocédés. En nous basant sur les ouvrages de Bailey et Ollis (1986), de Scriban (1988) et de Bastin et Dochain (1990), nous expliquons brièvement ce qu'est un réacteur biologique, et nous définissons les principaux éléments de modélisation. Une attention particulière est donnée à la vitesse spécifique de croissance et à la modélisation des échanges gazeux.

La partie suivante concerne la modélisation de la croissance de la levure de boulangerie *Saccharomyces cerevisiae*. Nous présentons un état de l'art en décrivant entre autres trois modèles de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*. La particularité du premier modèle (Bastin et Dochain, 1990) est d'être assez générale et permet de mieux comprendre le fonctionnement de la croissance, mais il ne donne pas en détail les vitesses spécifiques de croissance. Le deuxième modèle, donné par Reyman (1992), est plus précis quant aux phases de latence et prend en compte l'oxygène dissous. Enfin, le troisième modèle est celui développé au Laboratoire Scientifique du Génie Chimique de l'I.N.P.L. de Nancy et prend en compte l'influence de l'acétate.

C'est ce modèle que nous avons particulièrement étudié. Celui-ci est utilisé en pratique sur un réacteur pilote. Nous en avons fait une étude mathématique et proposons des modifications. Ceci conduit à de nouveaux modèles.

1.2 Rappels sur la modélisation de bioprocédés

1.2.1 Le bioréacteur - bilan de la matière

Nous voulons décrire la dynamique de croissance microbienne issue de diverses réactions biologiques. Ces réactions peuvent être classées en deux catégories :

- réaction de croissance microbienne

Un micro-organisme (cellules vivantes comme par exemple une levure, des bactéries, ...) se développe par consommation de nutriments. On peut compter parmi les nutriments l'oxygène, le carbone apporté par une solution glucosée par exemple, l'azote, etc. Ces éléments sont utilisés par le micro-organisme et sont donc nommés substrats ou réactants. L'environnement (température, pH, ...) dans lequel évolue le micro-organisme influence sa croissance.

- réactions enzymatiques

Ce sont les réactions biochimiques qui permettent à partir d'enzymes intra ou extra-cellulaires, de transformer des réactants en produits. Ces réactions ont des vitesses très différentes de celle de la

croissance du micro-organisme.

Nous considérons que ces réactions ont lieu dans un réacteur. La figure 1.1 représente schématiquement un réacteur de volume liquide V (l) contenant un micro-organisme de concentration X (g/l), un substrat de concentration S (g/l), et un produit, synthétisé par le micro-organisme, de concentration P (g/l). Dans le liquide d'alimentation de débit F_{in} (l/h), le substrat a une concentration de S_{in} (g/l). Il n'y a ni biomasse ni produit. Il est aussi possible de soustraire du liquide avec un débit F_{out} (l/h).

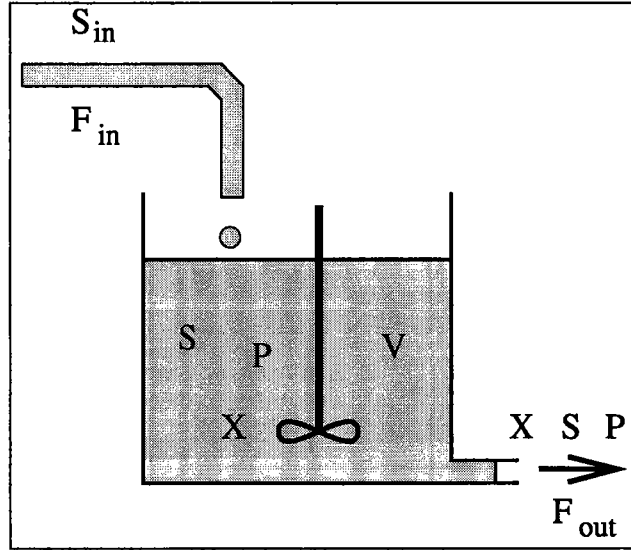


FIG. 1.1: Schéma d'un bioréacteur

Nous considérons la croissance d'un micro-organisme, ou biomasse, sur un substrat avec fabrication d'un produit.

Hypothèse 1.2.1 *Il est supposé que le bioréacteur est parfaitement mélangé, ce qui implique que la composition du milieu est homogène.*

À partir des bilans de matière, nous obtenons le comportement dynamique de la croissance du micro-organisme. Les bilans de masse s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d(VX)}{dt} = \mu VX - F_{out} X \\ \frac{d(VS)}{dt} = -Y_{S/X} \mu VX + F_{in} S_{in} - F_{out} S \\ \frac{d(VP)}{dt} = Y_{P/X} \mu VX - F_{out} P \\ \frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{out} \end{cases} \quad (1.1)$$

où μ désigne la vitesse spécifique de croissance de la biomasse en h^{-1} , $Y_{S/X}$ et $Y_{P/X}$ représentent respectivement le rendement en g/g par biomasse produite de la consommation de substrat et de la fabrication du produit. Ces équations sont obtenues sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.2.2 *Le terme de croissance de la biomasse est proportionnel à celle-ci.*

Le terme de consommation et celui de production sont proportionnels au terme de la croissance de la biomasse.

Les termes de maintenance et de mortalité de la biomasse sont négligeables.

Ces hypothèses sont communément acceptées. De plus, nous avons négligé dans les équations précédentes, les termes de maintenance et de mortalité de la biomasse comme c'est souvent le cas pour les procédés industriels.

La vitesse de dilution (h^{-1}) est définie par le rapport :

$$D = \frac{F_{in}}{V} \quad (1.2)$$

et ceci permet de réécrire les équations précédentes en considérant que D est l'entrée du système.

$$\begin{cases} \dot{X} &= (\mu - D) X \\ \dot{S} &= -Y_{S/X} \mu X + D (S_{in} - S) \\ \dot{P} &= Y_{P/X} \mu X - D P \end{cases} \quad (1.3)$$

Un bioréacteur fonctionne principalement sous trois voies :

- réacteur continu : $F_{in} = F_{out} = F$ ($\Rightarrow D = F/V$)

Dans ce cas le débit d'alimentation est égal au débit de soutirage et le volume reste constant. La modélisation du réacteur est donnée par les équations précédentes. Le principal problème de ce mode de fonctionnement est celui de la stérilité.

- réacteur semi-continu : $F_{out} = 0$ ($\Rightarrow D = F_{in}/V$)

Le réacteur est alimenté jusqu'à un certain niveau. Ceci permet une alimentation programmée ou contrôlée des nutriments. La modélisation du réacteur est encore donnée par les équations précédentes.

- réacteur discontinu : $F_{in} = F_{out} = 0$ ($\Rightarrow D = 0$)

Initialement la cuve est remplie avec le micro-organisme et les substrats. Le volume ne varie pas et on laisse la réaction se faire jusqu'à la consommation de substrat désirée par exemple. L'inconvénient pour certains processus de fermentation est le phénomène d'inhibition ou de répression dû à la trop grande concentration initiale de certains substrats (effet Crabtree).

1.2.2 Définition de la vitesse spécifique de croissance

La vitesse spécifique de croissance μ est définie, pour $F_{in} \equiv F_{out} \equiv 0$, par $\mu = \frac{d(VX)}{dt} \frac{1}{VX}$. C'est l'établissement de la loi de vitesse (μ) qui est le plus difficile. L'étude de croissance classique d'une population microbienne dans un réacteur fermé ($F_{in} \equiv F_{out} \equiv 0$) sur un substrat dans des conditions optimales donne l'évolution donnée par la figure 1.2. De cette évolution, nous distinguons six phases différentes :

1. la phase de latence

Suite à l'ensemencement du micro-organisme dans le milieu de culture, celui-ci s'adapte au milieu afin de créer les enzymes qui lui sont nécessaires pour métaboliser le substrat présent. Ce temps d'adaptation dépend de l'ancien milieu des cellules, et de leur âge. Pendant cette phase, il n'y a pas de croissance, d'où la vitesse spécifique de croissance μ est nulle.

2. la phase de départ

Au fur et à mesure, des cellules se sont adaptées au milieu présent et elles commencent à se reproduire. μ croît et la vitesse de croissance (dX/dt) augmente.

3. la phase exponentielle de croissance

Pendant cette phase, nous observons une croissance constante en échelle logarithmique. La vitesse spécifique de croissance est constante et a atteint son maximum $\mu^{\max}$.

4. la phase de ralentissement

L'arrivée dans cette phase s'explique par le manque progressif de composés nécessaires à la croissance ainsi que l'inhibition possible de composants produits lors de la croissance. La vitesse spécifique μ diminue et il en est de même pour la vitesse de croissance.

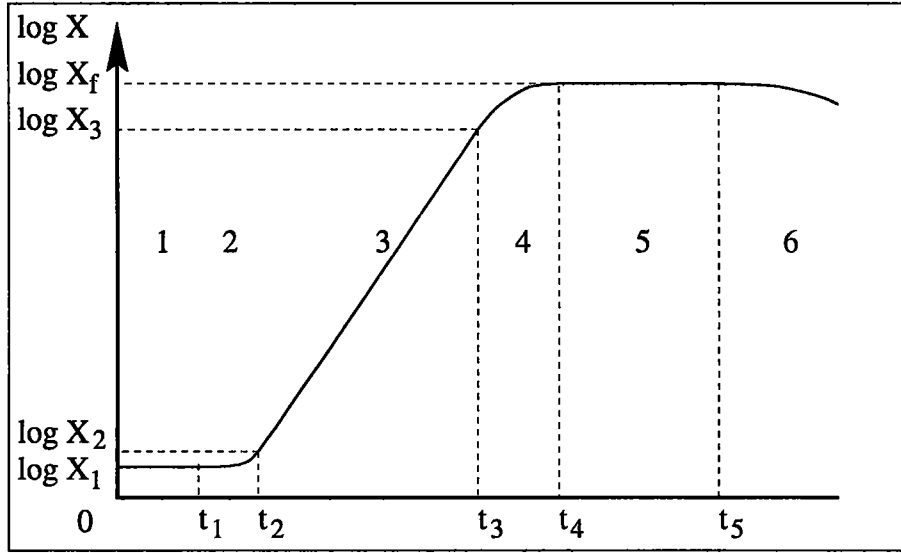


FIG. 1.2: Courbe de croissance microbienne

5. la phase stationnaire

La concentration cellulaire a atteint son maximum et il n'y a plus de croissance : $\frac{dX}{dt} = 0$.

6. la phase de déclin

Vu le manque de substrat, les cellules commencent progressivement à mourir. La concentration en biomasse décroît par suite de l'autolyse sous l'action des enzymes des cellules elles-mêmes.

L'évolution de la croissance microbienne a été faite dans des conditions optimales : aucun paramètre extérieur n'influence cette croissance. On suppose que la vitesse spécifique de croissance, μ , qui permet de décrire l'évolution de la biomasse, est une fonction des différents paramètres extérieurs et s'exprime comme une multiplication de termes individuels :

$$\mu = \mu(X) \mu(S) \mu(P) \mu(pH) \mu(\text{Température}) \mu(\text{O}_2 \text{ dissous}) \dots \quad (1.4)$$

La modélisation la plus utilisée de l'influence du substrat sur la vitesse spécifique est celle proposée par Monod (1942) :

$$\mu(S) = \mu^{\max} \frac{S}{K + S}$$

où K est la constante de Michaelis-Menten. Il existe de nombreux modèles différents de la vitesse spécifique de croissance. Nous citerons celui de Contois (1959) qui permet de prendre en compte également l'inhibition due à la concentration de la biomasse (K_c est une constante) :

$$\mu(X, S) = \mu^{\max} \frac{S}{K_c X + S}$$

Enfin, l'inhibition due à la concentration d'un produit est souvent décrite par :

$$\mu(P) = \frac{K_p}{K_p + P} = \frac{1}{1 + \frac{P}{K_p}}$$

avec K_p une constante à identifier.

Généralement, afin de limiter les effets des paramètres extérieurs, une régulation est faite. Si x est un des paramètres régulés, alors $\mu(x)$ est constante. Par exemple, supposons que seule la concentration du substrat influence la vitesse spécifique de croissance, alors $\mu \equiv \mu(S)$.

1.2.3 Modélisation des échanges gazeux

Le dioxygène (O_2) et le dioxyde de carbone (CO_2) interviennent beaucoup dans les processus fermentaires. Le premier, sous la forme d'oxygène dissous, est un nutriment, tandis que le second est le produit d'une réaction.

Il est assez aisé de faire des mesures en ligne des gaz sortants (Boudrant *et al.*, 1994). Ces deux gaz sont donc des indicateurs très précieux quant à l'évolution d'une réaction microbienne. Pour le bon fonctionnement des analyseurs de gaz d' O_2 et de CO_2 , le réacteur doit être fortement aéré : on injecte de l'air dans le réacteur et on mesure la composition sortante.

Nous allons d'abord étudier la dynamique de l'oxygène dissous (DO). La concentration d'oxygène dissous est très souvent notée C . En considérant l' O_2 comme un nutriment, un bilan de la matière permet d'écrire :

$$\dot{C} = OTR - OUR + D (C_{in} - C) \quad (1.5)$$

où C_{in} est la concentration d'oxygène dissous dans le liquide d'alimentation. Les deux termes OTR et OUR sont des vitesses de transfert telles que

OTR oxygen transfer rate

C'est la vitesse de passage de l'oxygène de la bulle gazeuse dans le milieu liquide. A partir de la loi d'Henry de modélisation des dynamiques de transfert liquide-gaz, on a (Scriban, 1988) avec $C < C^s$

$$OTR = k_L a (C^s - C) \quad (1.6)$$

où $k_L a$ est le coefficient de transfert de masse et C^s est la concentration de saturation en oxygène dissous. Les mesures de $k_L a$ et de C^s sont fortement tributaires des conditions physiques et chimiques du milieu. Négliger la dynamique de transfert liquide-gaz revient à pouvoir écrire

$$OTR = Q_{in,C} - Q_{out,C} \quad (1.7)$$

où $Q_{in,C}$ et $Q_{out,C}$ représentent respectivement la vitesse d'entrée et de sortie du gaz O_2 par unité de volume.

OUR oxygen uptake rate

C'est la vitesse de consommation de dioxygène. Elle est évidemment proportionnelle à la vitesse de croissance de la biomasse

$$OUR = Y_{C/X} \mu X \quad (1.8)$$

où $Y_{C/X}$ est le rendement (g/g) de consommation O_2 par production de biomasse. Si la demande en oxygène pour la maintenance de la biomasse n'est pas négligeable, il suffit de soustraire à l'équation (1.5) le terme $Y_{C_m} X$, avec Y_{C_m} le rendement approprié.

Ainsi l'équation dynamique de la concentration d'oxygène dissous est

$$\dot{C} = -Y_{C/X} \mu X + Q_{in,C} - Q_{out,C} + D (C_{in} - C) \quad (1.9)$$

La modélisation dynamique de production de CO_2 ressemble à celle de la consommation d' O_2 , si ce n'est que nous considérons le CO_2 comme un produit. C'est pourquoi usuellement la concentration en CO_2 dissous est notée P . La vitesse de production, selon l'hypothèse 1.2.2, est proportionnelle à la vitesse de croissance de la biomasse :

$$CPR = Y_{P/X} \mu X \quad (1.10)$$

avec $Y_{P/X}$ le rendement (g/g) de production du CO_2 sur biomasse produite, et avec CPR signifiant *carbon production rate*. Contrairement à l'oxygène, le gaz carbonique n'est que très peu présent dans l'air. De plus, afin d'avoir un maximum de concentration d'oxygène dissous ou pour des conditions de stérilité, le gaz de l'aération est une combinaison d'oxygène et de gaz neutres. Par conséquent, la vitesse d'entrée de gaz carbonique est supposée nulle : $Q_{in,P} = 0$. La concentration de saturation de CO_2 dissous

(P^s) est très faible. C'est une raison supplémentaire pour négliger la dynamique de transfert liquide-gaz. Ainsi l'équation dynamique de concentration de CO_2 dissous est

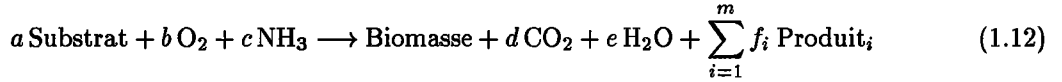
$$\dot{P} = Y_{P/X} \mu X - Q_{out,P} + D (P_{in} - P) \quad (1.11)$$

avec P_{in} la concentration de CO_2 dissous dans le liquide d'alimentation (celle-ci est voisine de 0), et $Q_{out,P}$ la vitesse de sortie de gaz par unité de volume.

Remarque : Dans les processus de fermentation, le quotient respiratoire (RQ) est un indicateur très précieux. Ce quotient est défini par le rapport de la vitesse de production de CO_2 (CPR) sur la vitesse de consommation d' O_2 (OUR) soit $RQ = Y_{P/X}/Y_{C/X}$. Ce quotient n'est pas constant; il dépend du mode de culture qui peut changer au cours du temps.

1.2.4 Schéma réactionnel - modèle général

Une croissance microbienne peut être vue comme un ensemble de réactions chimiques en chaîne, conduisant en fin d'opération, à la synthèse des constituants du micro-organisme. Lors d'une fermentation en présence d'une source azotée, le substrat est métabolisé en biomasse, gaz carbonique, eau et différents produits. L'équation générale de la réaction est :



où a, b, c, d, e , et les f_i sont les quantités molaires de substrat ou de produits en équivalence avec la formation d'une mole de biomasse. Nous avons $5 + m$ quantités molaires.

La biomasse est constituée à plus de 90 % de carbone, d'oxygène, d'hydrogène et d'azote. Si nous considérons de même, que le substrat et les produits sont uniquement constitués de ces quatre éléments, alors le bilan stochiométrique obéit quasiment au principe de la conservation de la matière. Ce bilan impose quatre relations et permet d'écrire quatre quantités molaires en fonction de $m + 1$ quantités molaires restantes. La connaissance des rendements de conversion «gramme de biomasse (X) produite par gramme de substrat (S) métabolisé» et des rendements de conversion «gramme de produit (P_i) fabriqué par gramme de substrat métabolisé», détermine les $m + 1$ inconnues.

Bastin et Dochain ont donné une forme générale unifiée de la modélisation des bioprocédés. La première étape consiste à écrire les schémas réactionnels. Ceux-ci ne représentent pas un bilan stochiométrique comme dans l'équation (1.12), mais une relation d'équivalence entre micro-organismes, substrats et produits. Par exemple, le schéma réactionnel du réacteur décrit par la figure 1.1 est



Le substrat S est appelé réactant. La biomasse X est un pseudo-réactant (retour de flèche sur le schéma). Le pseudo-réactant n'est pas consommé par la réaction mais peut être accumulé dans le réacteur. P est bien entendu le produit de la réaction. La vitesse de réaction est désignée par φ . C'est la vitesse de consommation du substrat qui est égale au rendement près à celle de la formation du produit. Comme précédemment, dans le cas d'une croissance d'un micro-organisme sur un substrat avec fabrication d'un produit, nous avons $\varphi = \mu(S, P, X) X$ avec $\mu(S, P, X)$ la vitesse spécifique de croissance.

Un bioprocédé dans un bioréacteur parfaitement homogène est une interaction de n composants (micro-organismes, substrats, ..., notés $\xi_i, i = 1, \dots, n$) où m réactions se déroulent. A chaque réaction j ($j = 1, \dots, m$) est associée une vitesse de réaction φ_j . Par exemple, dans le schéma réactionnel ci-dessus, nous avons $n = 3$ composants ($\xi_1 = S, \xi_2 = X$ et $\xi_3 = P$) et $m = 1$ réaction ($\varphi_1 = \varphi$).

Supposons maintenant un bioprocédé avec n composants et m réactions, et écrivons la dynamique de la concentration du composant ξ_i :

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j \sim i} (\pm) k_{ij} \varphi_j - D \xi_i - Q_i + F_i \quad (1.14)$$

La vitesse de réaction φ_j est prise dans la sommation $j \sim i$ si et seulement si le composant ξ_i apparaît dans la réaction j soit en tant que réactant, pseudo-réactant ou produit. Le terme k_{ij} représente un coefficient de rendement et il est donc positif. Il est précédé par un signe «-», respectivement par un signe «+», si le composant ξ_i est un réactant, respectivement un pseudo-réactant ou un produit. La vitesse de dilution est toujours D . Q_i représente la vitesse de sortie sous forme de gaz par unité de volume du composant ξ_i . F_i représente la vitesses d'alimentation en substrat ξ_i . Si ξ_i est un substrat extérieur, il peut être apporté sous forme liquide de concentration $S_{in,i}$ à la vitesse $D S_{in,i}$, et/ou sous forme de gaz de vitesse d'entrée par unité de volume $Q_{in,i}$. Si ce n'est pas le cas, on met $S_{in,i} = 0$ ou $Q_{in,i} = 0$.

Ainsi avec le vecteur d'état $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T$, la matrice $n \times m$ K des coefficients de rendement ($\pm$) k_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), le vecteur vitesse $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]^T$, le vecteur vitesse de sortie des gaz $Q_{out} = [Q_{out,1}, \dots, Q_{out,n}]^T$ et le vecteur vitesse d'alimentation $F = D S_{in} + Q_{in}$ où $S_{in} = [S_{in,1}, \dots, S_{in,n}]^T$ et $Q_{in} = [Q_{in,1}, \dots, Q_{in,n}]^T$, finalement le modèle dynamique général s'écrit sous la forme matricielle :

$$\dot{\xi} = K \varphi - D \xi - Q + F. \quad (1.15)$$

1.3 Un état de l'art sur les modèles de *Saccharomyces cerevisiae*

1.3.1 Introduction

Dans cette partie nous nous intéressons à la croissance de *Saccharomyces cerevisiae* dite levure de boulangerie. C'est un processus fermentaire très utilisé dans l'industrie agro-alimentaire. Afin d'augmenter la productivité et d'améliorer la qualité, ce procédé est beaucoup étudié. Dans la littérature de nombreux modèles sont proposés. Le tableau 1.1 recense une petite partie des modèles existants. Ceux-ci ont pour but de mieux comprendre la croissance de la levure. Suivant les modèles, les auteurs respectifs prennent en compte ou non certains substrats (S : glucose, C : O_2 dissous, E : éthanol, A : acide acétique), certains produits (E : éthanol, P : CO_2), la biomasse sous forme unique (X) ou sous différents états physiologiques ($X_1, X_2, \dots$), des enzymes, etc.

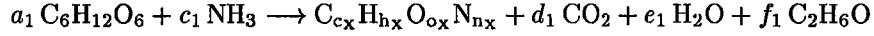
Références	Variables d'états	Objectifs de la modélisation
Axelson <i>et al.</i> (1982)	S	Régulation du glucose sur un procédé pilote. La mesure du glucose est disponible en temps continu mais avec retard.
Rajab <i>et al.</i> (1984)	X_1, X_2, X_3, E, S, A	Description physiologique en vue de simuler la croissance de la levure dans différents modes de culture.
Sonnleitner et Käppeli (1986)	X, S, E, C	Modèle basé sur la limitation de la capacité respiratoire de la levure.
Steinmeyer et Shuler (1989)	18 équations >130 constantes	Description quasi exhaustive fondée sur un modèle de fonctionnement intra-cellulaire.
Bastin et Dochain (1990)	X, S, E, C, P	Modèle mis sous forme unifiée.
Reyman (1992)	X, E, S, C	modélise les phases de latences en se basant sur le modèle de Sonnleitner et Käppeli (1986).
Zhang <i>et al.</i> (1994)	X, S, E, C	Les vitesses spécifiques de croissance varient en fonction de 5 états physiologiques que peut prendre la levure.
Dantigny (1995)	X_1, X_2, S, E	Deux états physiologiques (croissance sur glucose et croissance sur éthanol), avec rendements fonction de la composition du milieu.

TAB. 1.1: Quelques modèles de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*

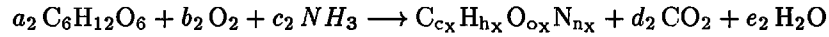
En résumé, la croissance de *Saccharomyces cerevisiae* s'effectue principalement sous trois voies métaboliques différentes qui dépendent du mode de culture et de la concentration en source carbonée. A

partir d'une certaine concentration en glucose ($S > S_{cri} \approx 0,1$ g/l) (effet Cabtree), ou par manque d'oxygène dissous, le métabolisme est fermentaire avec excrétion d'éthanol comme produit principal. Dans le cas d'une faible concentration en glucose, celui-ci est métabolisé sans accumulation de produit : c'est la respiration du glucose. Au cours de cette phase, la levure se développe avec un rendement maximal mais elle nécessite suffisamment de dioxygène dissous. Une fois le glucose consommé, l'éthanol excrété lors de la phase fermentaire peut à son tour être respiré. Wang *et al.* (Wang *et al.*, 1979) donnent comme formule brute à la cellule de la levure $C_{cX}H_{hX}O_{oX}N_{nX}$ avec les constantes suivantes : $c_X = 6$, $h_X = 10,9$, $o_X = 3,06$, et $n_X = 1,03$, et donnent les trois équations stœchiométriques suivantes

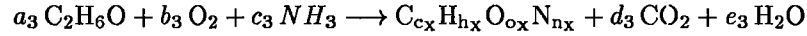
– **voie 1 : fermentation du glucose**



– **voie 2 : respiration du glucose**



– **voie 3 : respiration de l'éthanol**



Un modèle de la croissance de la levure doit être capable de représenter ces différentes voies de croissance. De plus, le passage d'une voie à une autre se fait après un certain temps d'adaptation de la levure.

1.3.2 Modèle de Bastin et Dochain

Partant du modèle de Sonnleitner et Käppeli (1986), ils donnent sous forme généralisée un modèle des trois réactions métaboliques. Nous avons renuméroté les équations pour faire correspondre aux mêmes numéros des trois voies métaboliques décrites précédemment.



avec X , S , C , E et P respectivement la concentration de la levure, de glucose, d'oxygène dissous, d'éthanol et de dioxyde de carbone dissous. φ_1 est la vitesse de réaction de la fermentation du glucose, φ_2 la vitesse de réaction de la respiration du glucose, φ_3 la vitesse de réaction de la respiration de l'éthanol. Les équations sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{S} \\ \dot{E} \\ \dot{C} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & -k_4 \\ 0 & -k_5 & -k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} X \\ S \\ E \\ C \\ P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{out,P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D S_{in} \\ 0 \\ Q_{in,C} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

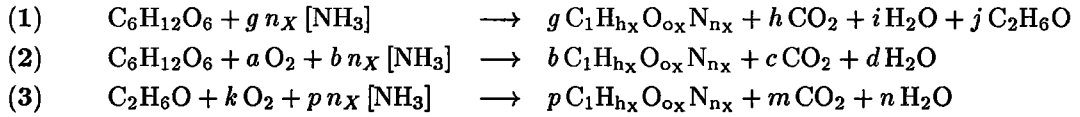
où $Q_{in,C}$ est la vitesse d'alimentation en O_2 gazeux par unité de volume, $Q_{out,P}$ est la vitesse de sortie du gaz dioxyde de carbone, S_{in} est la concentration de glucose d'alimentation, et les k_i ($i = 1, \dots, 9$) sont des coefficients de rendement. Nous pouvons aussi exprimer les vitesses de réaction sous la forme : $\varphi_1 = \mu_1(S, C, X) X$, $\varphi_2 = \mu_2(S, X) X$, et $\varphi_3 = \mu_3(E, C, X) X$. Les μ_i ($i = 1 \dots 3$) étant les vitesses spécifiques de réaction.

Ce modèle permet de bien comprendre le comportement. La modélisation des vitesses de réactions φ_i ($i = 1, 2, 3$) n'est pas donnée. Elle est difficile et doit prendre en compte des temps de latence lors des changement de métabolisme. Chaque vitesse de réaction dépend fortement du milieu et de l'évolution de celui-ci. Vu les remarques faites à la section 1.2.3, les équations d'échanges gazeux doivent être réécrites comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{C} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_5 & -k_6 \\ k_7 & k_8 & k_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} C \\ P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{out,C} \\ Q_{out,P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{in,C} + D C_{in} \\ Q_{in,P} + D P_{in} \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

1.3.3 Modèle de Reyman

Il s'inspire aussi de Sonnleitner et Käppeli (1986), et donne un modèle qui tient compte des phases de latence. Les équations stœchiométriques de la croissance de la levure sur le glucose et l'éthanol sont classiques. Il existe deux voies oxydatives (voie 2, respiration du glucose, et voie 3, respiration de l'éthanol) et une voie réductive (voie 1, fermentation du glucose). Ces voies sont représentées par les équations stœchiométriques suivantes avec comme constantes stœchiométriques $a, b, c, d, g, h, i, j, k, m, n$ et p :



Par contre, la concentration en oxygène dissous est un facteur important. L'hypothèse sur les réactions, se base sur une capacité respiratoire limite au dessus de laquelle la levure fermente. Cette capacité respiratoire Q_c , dépend essentiellement de la concentration en oxygène dans le milieu, et peut être représentée par un goulot d'étranglement tel que $Q_c = Q_{c,max} \frac{C}{C+K_c}$, C étant la concentration en oxygène dissous. Trois cas se présentent :

1. flux de glucose subcritique

Les flux de glucose, Q_s , et d'éthanol, Q_e , ne requièrent pas le maximum de respiration. Alors la vitesse spécifique μ_2^s de la voie oxydative (2) est donnée par la vitesse de consommation de glucose et par une classique loi de Monod. Il n'y a pas d'éthanol produit, d'où la vitesse μ_1^s est nulle. Comme il n'y pas de limitation en oxygène, la consommation en éthanol suit aussi une loi de Monod mais avec priorité à la consommation du glucose d'où le terme inhibiteur $\frac{K_i}{S+K_i}$. Soit :

$$\begin{cases} \mu_1^s = 0 \\ \mu_2^s = Q_s = Q_{s,max} \frac{S}{S+K_s} \\ \mu_3^s = Q_e = Q_{e,max} \frac{E}{E+K_e} \frac{K_i}{S+K_i} \end{cases} \quad (1.21)$$

2. flux de glucose critique

Contrairement au cas précédent, si la concentration en glucose augmente ou si la capacité respiratoire diminue, alors la croissance sur l'éthanol est maintenant limitée par le reste de la capacité respiratoire. Soit :

$$\begin{cases} \mu_1^s = 0 \\ \mu_2^s = Q_s = Q_{s,max} \frac{S}{S+K_s} \\ \mu_3^s = \frac{Q_c - a Q_s}{k} \end{cases} = \frac{1}{k} Q_{c,max} \frac{C}{C+K_c} - \frac{a}{k} Q_{s,max} \frac{S}{S+K_s} \quad (1.22)$$

3. flux de glucose supracritique

Le flux de glucose est suffisamment important pour dépasser la capacité respiratoire. Dans ce cas, il ne reste plus d'oxygène pour la respiration de l'éthanol. Nous avons :

$$\begin{cases} \mu_1^s = \frac{Q_c}{a} = \frac{1}{a} Q_{c,max} \frac{C}{C+K_c} \\ \mu_2^s = Q_s - \frac{Q_c}{a} = Q_{s,max} \frac{S}{S+K_s} - \frac{1}{a} Q_{c,max} \frac{C}{C+K_c} \\ \mu_3^s = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Afin de modéliser les phases de latence, les vitesses spécifiques de croissance maximum ne sont pas constantes. Elles obéissent à la loi suivante :

$$\dot{Q}_{i,\max} = \frac{1}{s_i} (Q_{i,\max}^s f_{ic} - Q_{i,\max}) \quad (1.24)$$

pour $i = c, s, e$. La vitesse de consommation maximum saturée est $Q_{i,\max}^s$. Le coefficient s_i est un temps de relaxation et f_{ic} est un facteur qui dépend des conditions actuelles de l'environnement :

$$\begin{cases} f_{sc} = \frac{S}{S+K_s} \\ f_{ec} = \left(\frac{E}{E+K_e} \right) \left(\frac{K_i}{S+K_i} \right) \left(\frac{C}{C+K_c} \right) \\ f_{cc} = \left(\frac{C}{C+K_c} \right) \left(\frac{2S+E}{2S+E+K_m} \right) \end{cases} \quad (1.25)$$

Le bilan de la matière donne :

$$\begin{cases} \dot{S} = (-\mu_1^s - \mu_2^s) X - D (S - S_{in}) \\ \dot{X} = (g \mu_1^s + b \mu_2^s + p \mu_3^s - \frac{m_s}{b}) X - D X \\ \dot{E} = (j \mu_1^s - \mu_3^s) X - D E \\ \dot{C} = (-a \mu_2^s - k \mu_3^s - m_s a) X + OTR - D (C - C_{in}) \\ \dot{V} = \frac{D}{V} = F \end{cases} \quad (1.26)$$

où S , X , E et C respectivement, est la concentration en glucose, en biomasse, en éthanol, et en oxygène dissous; V est le volume; m_s est le terme de maintenance.

En sortie, les mesures disponibles sont :

$$\begin{cases} OUR : & y_1 = (a \mu_2^s + k \mu_3^s + m_s b) X \\ CPR : & y_2 = (h \mu_1^s + c \mu_2^s + m \mu_3^s + m_s b) X \\ ETC : & y_3 = E \\ DOC : & y_4 = C \end{cases}$$

avec OUR = vitesse de consommation de l'oxygène; CPR = vitesse de production de dioxyde de carbone; CTR = vitesse de transfert de dioxyde de carbone; OUT = vitesse de consommation d'oxygène; ETC = mesure de concentration d'éthanol; DOC = mesure de concentration d'oxygène dissous.

C'est un modèle assez complet se basant sur la limitation de la concentration en oxygène dissous, mais dans la pratique on aère le fermenteur pour augmenter au maximum cette concentration. Il faut donc en tenir compte dans l'établissement du modèle. En outre, ce modèle ne prend pas en compte la dynamique du dioxyde de carbone. Il reste aussi un problème d'identifiabilité des paramètres, surtout pour les constantes dans les fonctions f_{sc} , f_{ec} et f_{oc} .

1.3.4 Modèle de Rajab

Le L.S.G.C. a développé un modèle différent des précédents. Il propose une modélisation distinguant les trois états physiologiques correspondant chacun à un métabolisme. Le modèle a été initié par Glomon (1982), mais Rajab a modifié ce modèle en prenant en compte l'influence de l'acide acétique dans ses thèses (Rajab, 1983; Rajab, 1986). Ce modèle a été validé sur un procédé pilote et les paramètres ont été affinés au fur et à mesure; des recherches d'application d'algorithmes de commande fondés sur ces modèles ont été faites (Dantigny, 1989; Bicking, 1991; Mostrati, 1993; Abidi, 1994; Lucena, 1996). Le principal objectif du modèle est de représenter la culture de la levure dans différentes conditions de fermentation.

La croissance de la levure *Saccharomyces cerevisiae* est représentée par la combinaison de trois états physiologiques limites (X_1 , X_2 , X_3). Les trois états du modèle ont des fonctions métaboliques différentes :

- l'état physiologique X_1 correspond à la fermentation du glucose et conduit à la formation d'éthanol et d'acide acétique;

- l'état physiologique X_2 correspond à la respiration du glucose et n'accumule ni éthanol ni acide acétique;
- l'état physiologique X_3 correspond à celui de la respiration de l'éthanol puis de l'acide acétique.

Le passage d'un état à l'autre s'opère suivant des lois d'activation michaeliennes et/ou d'inhibition. Ces transformations réversibles entre les états sont déterminées par la composition du milieu.

Les expressions cinétiques du modèle correspondent à une croissance aérobie, en l'absence de limitation par l'oxygène. Toutes les vitesses de croissance, d'utilisation du substrat ou d'utilisation de métabolites sont exprimées en g/l/h.

- Lois cinétiques pour chaque état physiologique.

– **Premier état (X_1) :**

La vitesse de croissance de l'état X_1 est caractérisée par une limitation possible par le glucose et une inhibition par l'acide acétique. Le glucose est consommé et il y a production d'éthanol et d'acide acétique. La vitesse d'utilisation du glucose R_{1s} , la vitesse de production d'éthanol R_{1E} et la vitesse de production d'acide acétique R_{1A} sont proportionnelles à la vitesse de croissance R_1 .

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X_1 \\ R_{1s} &= \frac{1}{Y_{X/S}^1} R_1 \\ R_{1E} &= \frac{Y_{E/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1 \\ R_{1A} &= \frac{Y_{A/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1 \end{aligned}$$

avec

- $\mu_{\max}^1$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})
- K_S^1 : constante de Monod pour la fermentation du glucose (g/l)
- K_A^1 : constante d'inhibition de l'état X_1 par l'acide acétique (g/l)
- S : concentration en glucose (g/l)
- A : concentration en acide acétique (g/l)
- X_1 : concentration de biomasse dans l'état X_1 (g/l)
- $Y_{X/S}^1$: rendement biomasse-glucose (g/g)
- $Y_{E/S}^1$: rendement éthanol-glucose (g/g)
- $Y_{A/S}^1$: rendement acide acétique-glucose (g/g)

– **Deuxième état (X_2) :**

La respiration du glucose n'accumule pas d'éthanol. Il n'y a pas de formation d'acide acétique et on néglige l'effet inhibiteur de l'acide acétique sur la croissance. La respiration de glucose est normalement une cinétique lente mais le rendement «biomasse produite sur glucose dégradé» est plus important que précédemment. La vitesse d'utilisation du glucose R_{2s} est proportionnelle à la vitesse de croissance R_2 .

$$\begin{aligned} R_2 &= \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} X_2 \\ R_{2s} &= \frac{1}{Y_{X/S}^2} R_2 \end{aligned}$$

avec

- $\mu_{\max}^2$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})

K_S^2 : constante de Monod pour la respiration du glucose (g/l)

X_2 : concentration de biomasse dans l'état X_2 (g/l)

$Y_{X/S}^2$: rendement biomasse-glucose (g/g)

– **Troisième état (X_3) :**

L'acide acétique n'est pas produit par l'état X_3 . Par contre, il est consommé après la respiration de l'éthanol. L'acide acétique inhibe aussi la croissance sur l'éthanol. Les vitesses d'utilisation d'éthanol R_{3_E} et d'acide acétique R_{3_A} sont proportionnelles à la vitesse de croissance R_3 .

$$\begin{aligned} R_3 &= \mu_{\max}^3 \left(\frac{E}{K_E^3 + E} + \Phi(E) \frac{A}{K_A^3 + A} \right) \frac{K_A^3}{K_A^3 + A} X_3 \\ R_{3_E} &= (1 - \Phi(E)) \frac{1}{Y_{X/E}^3} R_3 \\ R_{3_A} &= \Phi(E) \frac{1}{Y_{X/A}^3} R_3 \end{aligned}$$

avec

$\mu_{\max}^3$: vitesse spécifique maximale de croissance (h^{-1})

K_E^3 : constante de Monod pour la respiration de l'éthanol (g/l)

K_A^3 : constante d'inhibition de la croissance sur l'éthanol par l'acide acétique (g/l)

X_3 : concentration de biomasse dans l'état X_3 (g/l)

$Y_{X/E}^3$: rendement biomasse-éthanol (g/g)

$Y_{X/A}^3$: rendement biomasse-acétate (g/g) supposé égal à $Y_{X/E}^3$

$\Phi(E)$: fonction de répression de la consommation de l'acide acétique par l'éthanol donnée par :

$$\Phi(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E > 0, \\ 1 & \text{si } E = 0. \end{cases}$$

Les transitions entre les divers états physiologiques sont déterminées par la composition du milieu. En l'absence de limitation par l'oxygène, ce sont les concentrations de glucose et d'éthanol qui sont supposées orienter le métabolisme de la levure.

• **Lois cinétiques du passage de la cellule d'un état physiologique à un autre.**

– **Transition entre les états X_1 et X_2**

On suppose l'existence d'un seuil critique $S_{cri} = 0.1$ g/l de la concentration de glucose tel que si $S < S_{cri}$ le passage de X_1 à X_2 est favorisé, et inversement. La fonction $F(S) = \frac{S_{cri}}{1 + \frac{S}{S_{cri}}}$ peut représenter cette modulation de passage.

– Passage $X_1 \rightarrow X_2$: $R_{12} = k_{12} (1 - F(S)) X_1$

– Passage $X_2 \rightarrow X_1$: $R_{21} = k_{21} F(S) X_2$

– **Transition entre les états X_1 et X_3**

Les lois de passage entre X_1 et X_3 sont des lois michaeliennes, favorisées par l'éthanol et inhibées par le glucose dans le sens $X_1 \rightarrow X_3$ et favorisées par le glucose dans le sens $X_3 \rightarrow X_1$

– Passage $X_1 \rightarrow X_3$: $R_{13} = k_{13} \frac{E}{K_{13} + E} (1 - F(S)) X_1$

– Passage $X_3 \rightarrow X_1$: $R_{31} = k_{31} \frac{S}{K_{31} + S} X_3$

– **Transition entre les états X_2 et X_3**

Les lois de passage entre X_2 et X_3 sont des lois michaeliennes, favorisées par l'éthanol dans le sens $X_2 \rightarrow X_3$ et par le glucose dans le sens $X_3 \rightarrow X_2$.

– Passage $X_2 \rightarrow X_3$: $R_{23} = k_{23} \frac{E}{K_{23} + E} X_2$

- Passage $X_3 \rightarrow X_2$: $R_{32} = k_{32} \frac{S}{K_{32} + S} X_3$

où les coefficients k_{ij} désignent les vitesses spécifiques de transition $i \rightarrow j$ (h^{-1}), et les K_{ij} désignent les constantes de Michaelis pour les transitions $i \rightarrow j$ entre X_i et X_j (g/l)

La figure 1.3 représente schématiquement les différentes voies de croissance. Pour un réacteur discontinu

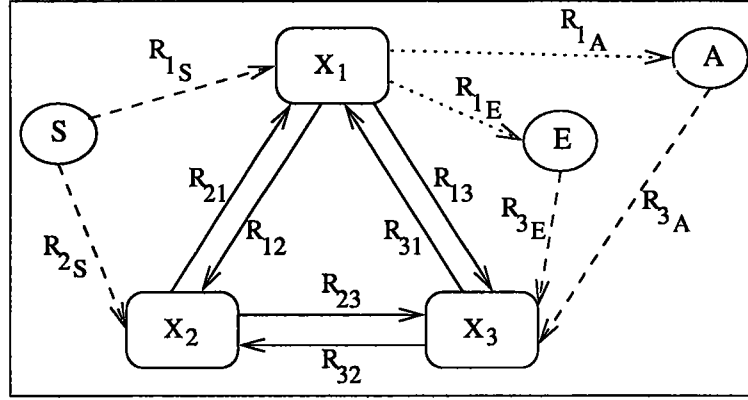


FIG. 1.3: Modèle à trois états physiologiques

ou semi-continu, le bilan de matière s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = R_1 + R_{21} + R_{31} - R_{12} - R_{13} - D X_1 \\ \dot{X}_2 = R_2 + R_{12} + R_{32} - R_{21} - R_{23} - D X_2 \\ \dot{X}_3 = R_3 + R_{13} + R_{23} - R_{31} - R_{32} - D X_3 \\ \dot{E} = \frac{Y_{E/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1 - \frac{1}{Y_{X/E}^3} R_3 - D E \\ \dot{S} = -\frac{1}{Y_{X/S}^1} R_1 - \frac{1}{Y_{X/S}^2} R_2 + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} = \frac{Y_{A/S}^1}{Y_{X/S}^1} R_1 - D A \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\text{avec } \begin{cases} R_1 = \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X_1 \\ R_{12} = k_{12} (1 - F(S)) X_1 \\ R_{13} = k_{13} \frac{E}{K_{13} + E} (1 - F(S)) X_1 \\ R_2 = \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} X_2 \\ R_{21} = k_{21} F(S) X_2 \\ R_{23} = k_{23} \frac{E}{K_{23} + E} X_2 \\ R_3 = \mu_{\max}^3 \left(\frac{E}{K_E^3 + E} + \Phi(E) \frac{A}{K_E^3 + A} \right) \frac{K_A^3}{K_A^3 + A} X_3 \\ R_{31} = k_{31} \frac{S}{K_{31} + S} X_3 \\ R_{32} = k_{32} \frac{S}{K_{32} + S} X_3 \\ F(S) = \frac{S/S_{cri}}{1 + S/S_{cri}} \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} F(S) = \frac{S/S_{cri}}{1 + S/S_{cri}} \\ \text{et} \\ \Phi(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E = 0, \\ 0 & \text{si } E > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous ne prenons pas en compte le cas où il n'y a plus de glucose ni d'éthanol. Ainsi la fonction de répression de la consommation de l'acide acétique par l'éthanol sera prise comme nulle ($\Phi(E) = 0$).

1.4 Étude du modèle de Rajab

1.4.1 Introduction

Préalablement à la synthèse d'un observateur et d'une loi de commande, il convient d'étudier les propriétés du modèle afin de démontrer son adéquation aux propriétés physiques fondamentales du procédé. Par exemple, il faut vérifier qu'à partir de conditions initiales positives, le modèle évolue dans l'orthant positif. Cette étude permet également de définir les points d'équilibre du système non bouclé. Nous avons étudié les propriétés du modèle de Rajab avec les valeurs numériques des paramètres du modèle données par Bicking (1991) indiquées dans les tableaux 1.2 et avec $S_{cri} = 0,1$ g/l. Les équations du modèle telles

Etape cinétique	paramètre	valeur	unité
X_1	$\mu_{\max}^1$	0,6	h^{-1}
	K_S^1	0,5	g/l
	K_A^1	0,4	g/l
	$Y_{X/S}^1$	0,14	g/g
	$Y_{E/S}^1$	0,45	g/g
	$Y_{A/S}^1$	0,01	g/g
X_2	$\mu_{\max}^2$	0,29	h^{-1}
	K_S^2	0,004	g/l
	$Y_{X/S}^2$	0,5	g/g
X_3	$\mu_{\max}^3$	0,25	h^{-1}
	K_E^3	0,02	g/l
	K_A^3	0,2	g/l
	$Y_{X/S}^3$	0,55	g/g

transition	paramètre	valeur	unité
$1 \longleftrightarrow 2$	k_{12}	2	h^{-1}
	k_{21}	0,1	h^{-1}
$1 \longleftrightarrow 3$	k_{13}	0,2	h^{-1}
	k_{31}	0,5	h^{-1}
	K_{13}	0,2	g/l
	K_{31}	0,01	g/l
$2 \longleftrightarrow 3$	k_{23}	0,4	h^{-1}
	k_{32}	2	h^{-1}
	K_{23}	0,5	g/l
	K_{32}	0,05	g/l

TAB. 1.2: Résumé des paramètres cinétiques

qu'elles seront utilisées ici sont :

$$\dot{x} = f(x) + u g(x) \quad (1.28)$$

où $x = [X_1, X_2, X_3, E, S, A]^T$,

$$f = \begin{bmatrix} R_1 + R_{21} + R_{31} - R_{12} - R_{13} \\ R_2 + R_{12} + R_{32} - R_{21} - R_{23} \\ R_3 + R_{13} + R_{23} - R_{31} - R_{32} \\ \frac{45}{14}R_1 - \frac{20}{11}R_3 \\ -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 \\ \frac{1}{14}R_1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -X_1 \\ -X_2 \\ -X_3 \\ -E \\ +S_{in} - S \\ -A \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

et avec

$$\begin{cases} R_1 = \frac{12}{5} \frac{S X_1}{(1+2S)(2+5A)} & R_{12} = 2 \frac{X_1}{1+10S} & R_{13} = \frac{E X_1}{(1+5E)(1+10S)} \\ R_2 = \frac{145}{2} \frac{S X_2}{1+250S} & R_{21} = \frac{S X_2}{1+10S} & R_{23} = \frac{4}{5} \frac{E X_2}{1+2E} \\ R_3 = \frac{25}{2} \frac{E X_3}{(1+50E)(1+5A)} & R_{32} = 40 \frac{S X_3}{1+20S} & R_{31} = 50 \frac{S X_3}{1+100S} \end{cases} \quad (1.30)$$

Puisque le procédé évolue en semi-continu, la commande u représentera la commande en dilution D . Physiquement, la commande en dilution est positive, $D \geq 0$.

1.4.2 Intégrale première

On cherche une intégrale première de la dérive, c'est-à-dire une fonction $Z_i(x)$ telle que $\frac{\partial Z_i}{\partial x} \cdot f = 0$. Cette intégrale première caractérise un bilan en masse. On la cherche sous la forme d'une combinaison

linéaire des concentrations. En posant $Z_i = 10(S_{\text{in}} - S) - 20X_1 - 20X_2 - 20X_3 - 11E - 225A$, la dérivée par rapport au temps de Z_i conduit à :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_i &= \left(-10\frac{(-50)}{7} - 20 - 11\frac{45}{14} - 225\frac{1}{14}\right) R_1 + (-10(-2) - 20) R_2 + \left(-20 - 11\frac{-20}{11}\right) R_3 \\ &\quad - D(10(S_{\text{in}} - S) - 20X_1 - 20X_2 - 20X_3 - 11E - 225A) \\ \dot{Z}_i &= -D Z_i\end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{d}{dt}(V Z_i) = 0$, que $Z_i(t) = Z(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t D(\sigma) d\sigma\right)$ et que les trajectoires du système ne peuvent pas traverser l'hyperplan $Z_i = 0$, en effet :

- si $Z_i(0) < 0$ alors $Z_i(t) < 0 \forall t \geq 0$;
- si $Z_i(0) = 0$ alors $Z_i(t) = 0 \forall t \geq 0$;
- si $Z_i(0) > 0$ alors $Z_i(t) > 0 \forall t \geq 0$.

1.4.3 Définition du domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$

On définit le domaine physique qui est l'orthant positif

$$\left\{(X_1, X_2, X_3, E, S, A) \in \mathbb{R}^6 \mid X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, E \geq 0, S \geq 0, A \geq 0\right\},$$

et on regarde si le champ est rentrant sur les six hyperplans constituant la frontière. Sur chacun de ces hyperplans on a :

- $X_1 = 0 \rightarrow \dot{X}_1 = \frac{S X_2}{1+10S} + \frac{50 S X_3}{1+100S} \geq 0$, car X_2, X_3 et S sont positifs.
- $X_2 = 0 \rightarrow \dot{X}_2 = \frac{2 X_1}{1+10S} + \frac{40 S X_3}{1+20S} \geq 0$, car X_1, X_3 , et S sont positifs.
- $X_3 = 0 \rightarrow \dot{X}_3 = \frac{E X_1}{(1+5E)(1+10S)} + \frac{4}{5} \frac{E X_2}{1+2E} \geq 0$, car X_1, X_2, E , et S sont positifs.
- $E = 0 \rightarrow \dot{E} = \frac{54}{7} \frac{S X_1}{(1+2S)(2+5A)} \geq 0$, car A, X_1 et S sont positifs.
- $S = 0 \rightarrow \dot{S} = D S_{\text{in}}$. Comme notre procédé évolue en semi-continu et que nous commandons en dilution, alors physiquement $D \geq 0$ et nous avons alors $\dot{S} \geq 0$ donc $S \geq 0$.
- $A = 0 \rightarrow \dot{A} = \frac{3}{35} \frac{S X_1}{(1+2S)} \geq 0$, car X_1 et S sont positifs.

En conclusion, si nous initialisons le modèle avec des conditions initiales positives, ce qui est le cas physiquement, alors les concentrations restent positives.

Reprenons notre intégrale première Z_i . Nous avons vu que $\dot{Z}_i = -D Z_i$, et que les concentrations ainsi que la commande sont positives. De plus dans la pratique seul le cas $Z_i(0) > 0$ est à prendre en considération. Alors

$$Z_i(t) = Z_i(0) \exp\left(-\int_0^t D(s) ds\right) \quad (1.31)$$

La commande D étant positive, alors $\exp\left(-\int_0^t D(s) ds\right) \in [0, 1]$ et $0 \leq Z_i(t) \leq Z_i(0)$. Ce qui revient à

$$\begin{aligned}10S_{\text{in}} &\geq 10S(t) + 20X_1(t) + 20X_2(t) + 20X_3(t) + 11E(t) + 225A(t) \\ &\geq 10S(0) + 20X_1(0) + 20X_2(0) + 20X_3(0) + 11E(0) + 225A(0) > 0\end{aligned}$$

Comme les concentrations sont positives et qu'une somme pondérée de celles-ci est bornée, alors les concentrations sont bornées. En ce qui concerne le substrat $S(t)$ on a : $S(t) \leq S_{\text{in}}$. Pour les autres concentrations on a : $X_1 \leq \frac{1}{2}S_{\text{in}}$, $X_2 \leq \frac{1}{2}S_{\text{in}}$, $X_3 \leq \frac{1}{2}S_{\text{in}}$, $E \leq \frac{10}{11}S_{\text{in}}$ et $A \leq \frac{10}{225}S_{\text{in}}$. De plus on est assuré de l'inégalité stricte dès qu'une des autres concentrations est non nulle.

Nous avons vu que les concentrations X_1, X_2, X_3, E, S, A restent positives si elles le sont initialement. Nous avons montré ensuite que les concentrations sont bornées. C'est pourquoi, si nous initialisons notre système tel que $Z_i(0) > 0$, alors les concentrations restent dans le domaine $\mathcal{D}_\varphi$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varphi = \left\{ X_1, X_2, X_3, E, S, A \mid X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, E \geq 0, S \geq 0, A \geq 0, \right. \\ \left. 20X_1(0) + 20X_2(0) + 20X_3(0) + 11E(0) + 10S(0) + 225A(0) \right. \\ \left. \leq 20X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 11E + 10S + 225A \leq 10 S_{\text{in}} \right\} \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.4.4 Ensemble d'équilibre

Notons par $x^\circ = [X_1^\circ, X_2^\circ, X_3^\circ, E^\circ, S^\circ, A^\circ]^T$ et par D° respectivement la valeur des différentes concentrations et de la commande en dilution à l'équilibre. L'ensemble d'équilibre est défini par :

$$\mathcal{E} = \left\{ (x^\circ, D^\circ) \in \mathcal{D}_\varphi \times \mathbb{R}_+ / f(x^\circ) + D^\circ g(x^\circ) = 0 \right\}. \quad (1.33)$$

Il s'agit de résoudre, avec les R_i et R_{ij} définis par les équations (1.30) :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = R_1 + R_{21} + R_{31} - R_{12} - R_{13} - D X_1 & = 0 \\ \dot{X}_2 = R_2 + R_{12} + R_{32} - R_{21} - R_{23} - D X_2 & = 0 \\ \dot{X}_3 = R_3 + R_{13} + R_{23} - R_{31} - R_{32} - D X_3 & = 0 \\ \dot{E} = \frac{45}{14} R_1 - \frac{20}{11} R_3 - D E & = 0 \\ \dot{S} = -\frac{50}{7} R_1 - 2 R_2 + D (S_{\text{in}} - S) & = 0 \\ \dot{A} = \frac{1}{14} R_1 - D A & = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Cette résolution donne trois ensembles triviaux ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$) plus un autre assez complexe.

1. Lorsque $D^\circ = 0$

On est dans la cas où le système n'est pas commandé. On a :

$$\begin{aligned} \dot{A} = 0 &\Rightarrow \text{soit } S = 0, \text{ soit } X_1 = 0, \\ S = 0 &\quad \text{Alors } \dot{S} = 0 \Rightarrow 0 = 0, \\ \dot{E} = 0 &\Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } E = 0, \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{E} = 0 &\quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 \text{ et } \dot{X}_2 = 0 \Rightarrow R_{12} = 0 \Rightarrow X_1 = 0, \\ &\quad X_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0, \\ &\quad \mathbf{X}_1 = 0 \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, X_2^\circ, X_3^\circ, 0, 0, A^\circ\}. \end{aligned} \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 = 0 &\quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 \Rightarrow R_{12} + R_{13} = 0 \\ &\Rightarrow \text{soit } X_1 = 0, \text{ soit } E = -\frac{2}{11} X_1 \notin \mathcal{D}_\varphi, \\ \mathbf{X}_1 = 0 &\quad \text{Alors } \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 \Rightarrow R_{23}^\circ = 0 \\ &\Rightarrow \text{soit } X_2 = 0, \text{ soit } E = 0, \\ &\quad \mathbf{X}_2 = 0 \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, 0, E^\circ, 0, A^\circ\}. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, X_2^\circ, 0, 0, 0, A^\circ\}. \quad (\text{C})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 = 0 &\quad \text{Alors } \dot{S} = 0 \Rightarrow R_2 = 0 \Rightarrow \text{soit } S = 0, \text{ soit } X_2 = 0, \\ S = 0 &\quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 \Rightarrow 0 = 0, \\ \dot{E} = 0 &\Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } E = 0, \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{E} = 0 &\quad \text{d'où } x^\circ = \{0, X_2^\circ, X_3^\circ, 0, 0, A^\circ\}. \quad (\text{idem A}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_3 = 0 &\quad \text{Alors } \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 \Rightarrow R_{12}^\circ = 0 \\ &\Rightarrow \text{soit } X_2 = 0, \text{ soit } E = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, 0, E^\circ, 0, A^\circ\}. \quad (\text{D})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, X_2^\circ, 0, 0, 0, A^\circ\}. \quad (\text{E})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{E} = 0 \Rightarrow R_3 = 0 \Rightarrow \text{soit } X_3 = 0, \text{ soit } E = 0, \\ \mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = 0 \text{ et } \dot{X}_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0, \\ \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, 0, E^\circ, S^\circ, A^\circ\}. \end{aligned} \quad (\text{F})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{Alors } \dot{X}_1 = 0 \Rightarrow R_{31} = 0, \dot{X}_2 = 0 \Rightarrow R_{31} = 0 \\ \text{et } \dot{X}_3 = 0 \Rightarrow R_{32} + R_{31} = 0 \text{ alors} \\ \Rightarrow \text{soit } S = 0, \text{ soit } X_3 = 0, \\ \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, X_3^\circ, 0, 0, A^\circ\}. \end{aligned} \quad (\text{G})$$

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{0} \quad \text{d'où } x^\circ = \{0, 0, 0, 0, S^\circ, A^\circ\}. \quad (\text{H})$$

On remarque que (C), (E), et (G) $\subset$ (A) et que (B), (D) et (H) $\subset$ (F), ce qui donne deux ensembles :

- $\mathcal{E}_1 = \{(x^\circ, D^\circ) = (0, 0, 0, E_0 \geq 0, S_0 \geq 0, A_0 \geq 0, 0)\}$
Cet ensemble correspond à l'absence de biomasse. Cette situation ne présentant évidemment aucun intérêt pratique, il s'agit donc de l'éviter.
- $\mathcal{E}_2 = \{(x^\circ, D^\circ) = (0, X_{20} \geq 0, X_{30} \geq 0, 0, 0, A_0 \geq 0)\}$
Cet ensemble correspond à l'absence de substrat. Cette situation est également à éviter.

2. Lorsque $S^\circ = S_{\text{in}}$

À l'équilibre les concentrations sont constantes, et par conséquent Z_i l'est aussi. Alors $\dot{Z}_i^\circ = -D^\circ Z_i^\circ = 0$, ce qui implique que soit $D^\circ = 0$ (cas précédent) soit $Z_i^\circ = 0$.

Comme $Z_i^\circ = 10(S_{\text{in}} - S^\circ) - 20X_1^\circ - 20X_2^\circ - 20X_3^\circ - 11E^\circ - 225A^\circ$ et que les concentrations sont positives alors si $S^\circ = S_{\text{in}}$ on obtient l'ensemble suivant :

- $\mathcal{E}_3 = \{(x^\circ, D^\circ) = (0, 0, 0, 0, S_{\text{in}}, 0, D_0 > 0)\}$
Ce qui correspond à une commande quelconque et à $S^\circ = S_{\text{in}}$; cette situation ne présente également aucun intérêt pratique. C'est une situation à éviter que l'on appelle le lésivage.

3. Cas non triviaux

Enfin, le quatrième ensemble est donné par la résolution de 6 équations avec 7 variables, ce qui impose au moins un paramétrage par rapport à l'une de ces variables. Nous cherchons à tout exprimer en fonction du glucose (S).

L'équation $\dot{A} = 0$ nous donne la commande D en fonction de X_1 , E , S et A :

$$D = \frac{6S}{35A(2+5A)(1+2S)} X_1$$

Nous réinjectons D dans les équations (1.34). Ensuite, l'équation $\dot{S} = 0$ nous donne l'état physiologique X_2 en fonction de X_1 , E , S , S_{in} et A :

$$X_2 = \frac{6(1+250S)(S_{\text{in}} - S - 100A)}{5075A(2+5A)(1+2S)} X_1$$

et l'équation $\dot{E} = 0$ nous donne l'état physiologique X_3 en fonction de X_1 , E , S et A :

$$X_3 = \frac{33(1+5A)(1+50E)(45A-E)S}{4375A(2+5A)E(1+2S)} X_1$$

Enfin en réinjectant les expressions de X_2 et X_3 obtenues ci-dessus dans les équations $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$ et $\dot{X}_3 = 0$, nous obtenons les trois relations :

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 = 0 &\rightarrow \tilde{f}_1(E, A, S) X_1 + \bar{f}_1(E, A, S) X_1^2 = 0 \\ \dot{X}_2 = 0 &\rightarrow \tilde{f}_2(E, A, S) X_1 + \bar{f}_2(E, A, S) X_1^2 = 0 \\ \dot{X}_3 = 0 &\rightarrow \tilde{f}_3(E, A, S) X_1 + \bar{f}_3(E, A, S) X_1^2 = 0\end{aligned}$$

où $\tilde{f}_i$ et $\bar{f}_i$ désignent des polynômes en E , A et S .

Deux solutions se présentent : la première $X_1 = 0$ implique que $X_2 = X_3 = D = 0$ ce qui correspond à un cas déjà traité; la deuxième solution, nous donne trois relations :

$$\begin{aligned}X_1 &= -\frac{\tilde{f}_1(E, A, S)}{\bar{f}_1(E, A, S)} = f_1(E, A, S) \\ X_1 &= -\frac{\tilde{f}_2(E, A, S)}{\bar{f}_2(E, A, S)} = f_2(E, A, S) \\ X_1 &= -\frac{\tilde{f}_3(E, A, S)}{\bar{f}_3(E, A, S)} = f_3(E, A, S)\end{aligned}$$

En égalant f_1 et f_2 et f_1 et f_3 , nous obtenons deux polynômes :

$$\begin{aligned}P_{12}(E, A, S) &= a_{12-0}(E, S) + a_{12-1}(E, S)A + a_{12-2}(E, S)A^2 + a_{12-3}(E, S)A^3 + a_{12-4}(E, S)A^4 \\ &= 0 \\ P_{13}(E, A, S) &= a_{13-0}(E, S) + a_{13-1}(E, S)A + a_{13-2}(E, S)A^2 + a_{13-3}(E, S)A^3 + a_{13-4}(E, S)A^4 \\ &= 0\end{aligned}$$

où les a_{12-i} et a_{13-i} ($i = 0, \dots, 4$) sont des polynômes en E et S , avec

$$\begin{aligned}d_E^\circ a_{12-i, i=0, \dots, 4} &= \{4, 4, 4, 4, 3\}, \quad d_S^\circ a_{12-i, i=0, \dots, 4} = \{7, 6, 6, 5, 5\}, \\ d_E^\circ a_{13-i, i=0, \dots, 4} &= \{6, 6, 6, 5, 4\}, \quad d_S^\circ a_{13-i, i=0, \dots, 4} = \{6, 6, 6, 5, 5\}.\end{aligned}$$

À partir d'ici nous ne réussissons pas à aller plus loin. Nous ne parvenons pas à isoler une des trois variables. Les approches suivantes (Chenciner, 1978; Migotte, 1989) ont été tentées mais sans succès :

- résolution de P_{12} et de P_{13} en tant que polynôme de degré 4 par rapport à A ;
- résolution du résultant de P_{12} et P_{13} ;
- suite de Sturm sur P_{12} , P_{13} et sur le résultant;
- théorème de Puiseux sur P_{12} et P_{13} .

Il est nécessaire de pouvoir démontrer l'unicité ou non d'un point d'équilibre. Ceci influence sur la stabilité du système et sur la synthèse d'une loi de commande.

1.4.5 Résolution numérique

Précédemment nous avons cherché formellement les points d'équilibre en fonction de la concentration en glucose. Remplaçons S_{in} par 300 g/l et S par $\frac{71}{1000}$ g/l dans les polynômes P_{12} et P_{13} . $S_{in} = 300$ g/l est la concentration de glucose dans l'alimentation utilisée par Bicking (1991) et qui préconise la valeur de 0,071 g/l pour la consigne de glucose à maintenir pour obtenir un meilleur rendement «croissance de biomasse sur consommation de glucose». Le résultant de P_{12} et P_{13} conduit alors à un polynôme en la variable E de degré 35.

La recherche numérique des racines de ce polynôme donne alors 35 valeurs, dont une seule $E^\circ = 0.0741901$ g/l vérifie $0 < E < \frac{10}{11} S_{in}$. Ensuite en réinjectant cette valeur dans P_{12} et P_{13} , on obtient une

seule racine commune $A^\circ = 0.0900993$ g/l. On en déduit alors X_1° , puis X_2° et X_3° . Nous en déduisons un seul point d'équilibre :

$$\underline{x}^\circ = \begin{bmatrix} X_1^\circ \\ X_2^\circ \\ X_3^\circ \\ E^\circ \\ S^\circ \\ A^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.44356 \text{ g/l} \\ 139.229 \text{ g/l} \\ 4.23736 \text{ g/l} \\ 0.0741901 \text{ g/l} \\ 0.071 \text{ g/l} \\ 0.0900993 \text{ g/l} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

avec la valeur de la commande correspondante $D^\circ = 0.262774 \text{ h}^{-1}$. Donner 6 chiffres significatifs n'a pas beaucoup de sens, mais la commande en dilution à l'équilibre est très sensible.

Le système d'équations (1.34) peut également être résolu directement numériquement pour chaque valeur de S . Cependant dans ce cas on n'est pas assuré de l'unicité de la solution. La résolution par la méthode de Gauss-Newton avec MATLAB pour de nombreuses valeurs de S et pour $S_{\text{in}} = 300$ g/l conduit aux figures 1.4 à 1.10. Les figures 1.4 à 1.9 donnent la concentration à l'équilibre de $X = X_1 + X_2 + X_3$, X_1 , X_2 , X_3 , E et A pour différentes concentrations de glucose variant de 0 à 300 g/l (figure de gauche) et de 0 à 0,5 g/l (figure de droite). La figure 1.10 représente, pour chaque point d'équilibre, la valeur de la commande. Elle montre que le rendement est maximum (maximum de biomasse, vitesse de dilution la plus grande) pour une concentration de glucose proche de 0,070 g/l. L'intérêt est de montrer que, pour une commande en dilution fixée, il existe plusieurs concentrations d'équilibre de glucose possibles. On a donc calculé les différentes valeurs propres de la matrice jacobienne du système évaluée en chaque point d'équilibre. Il existe toujours, pour $0 < S < S_{\text{in}}$, au moins une valeur propre à partie réelle non négative. Ceci montre que ces points d'équilibre sont instables et qu'il y a nécessité d'avoir une commande par retour d'état afin de garantir la stabilité du système ainsi bouclé.

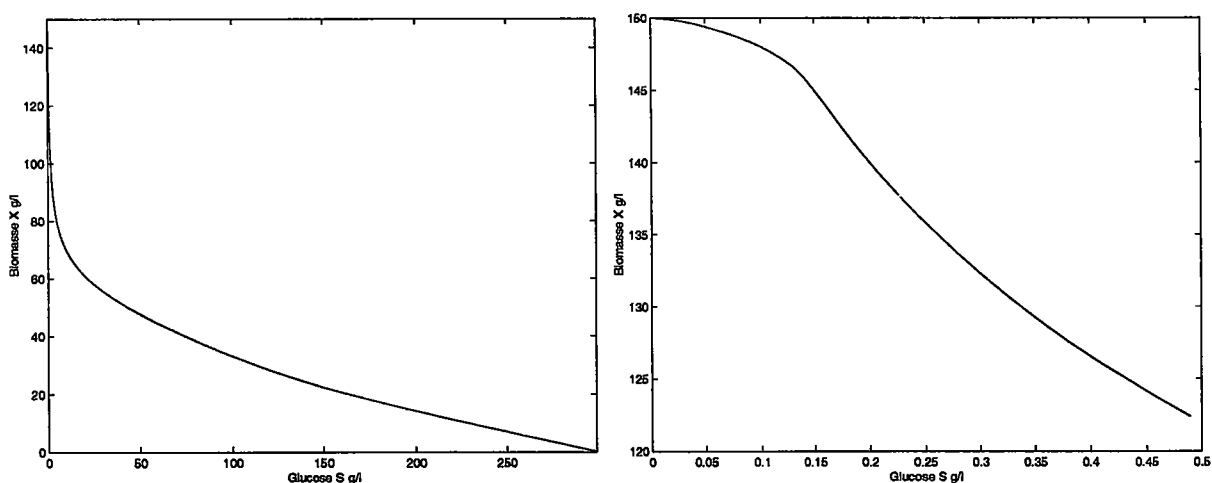
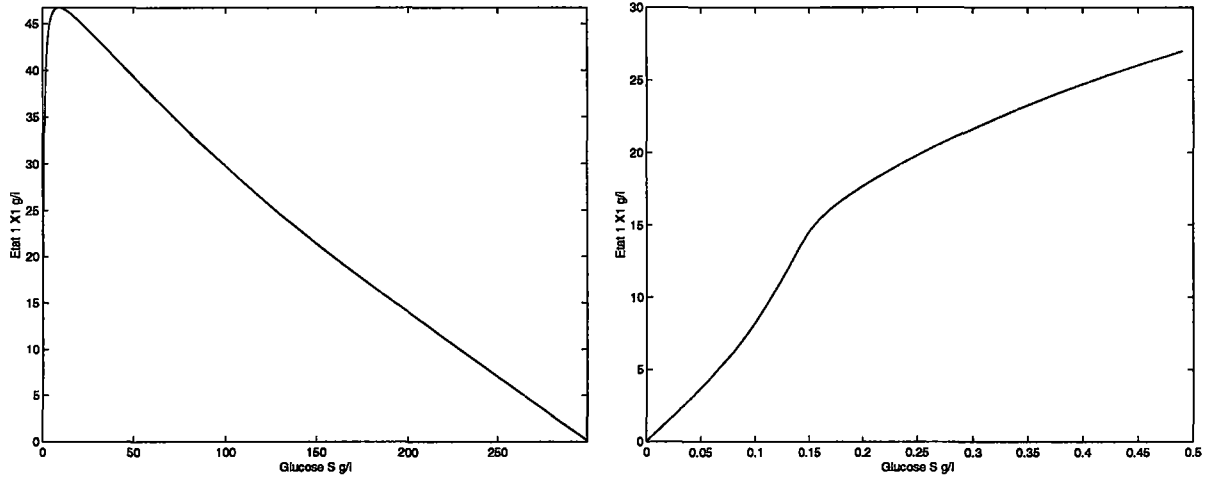
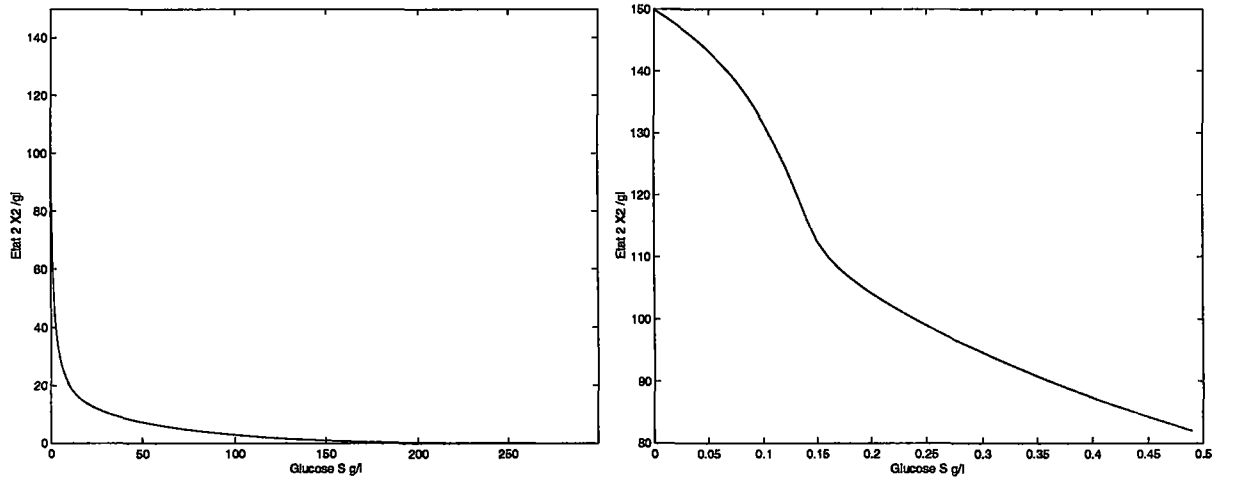
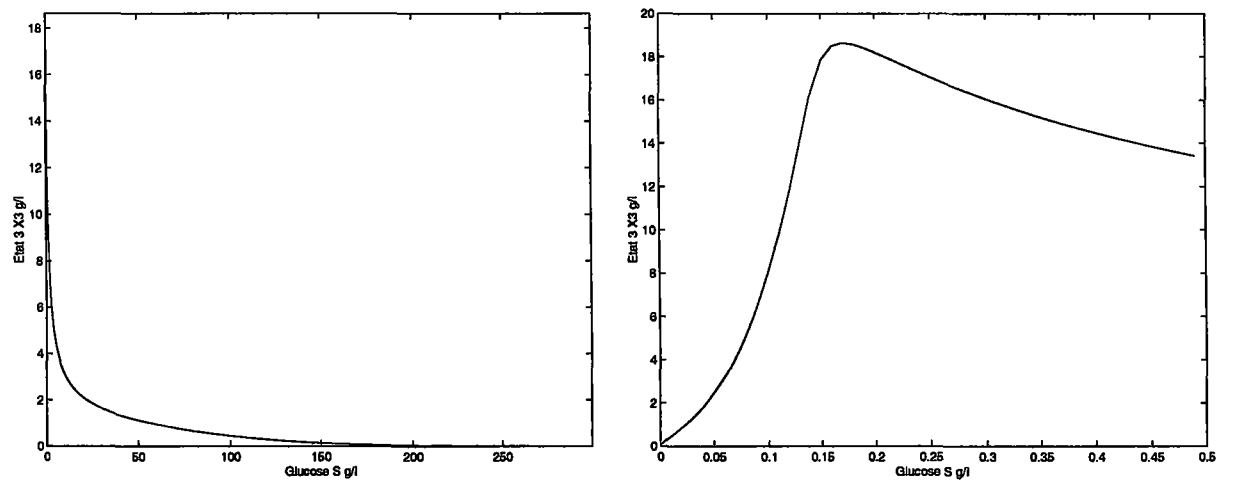
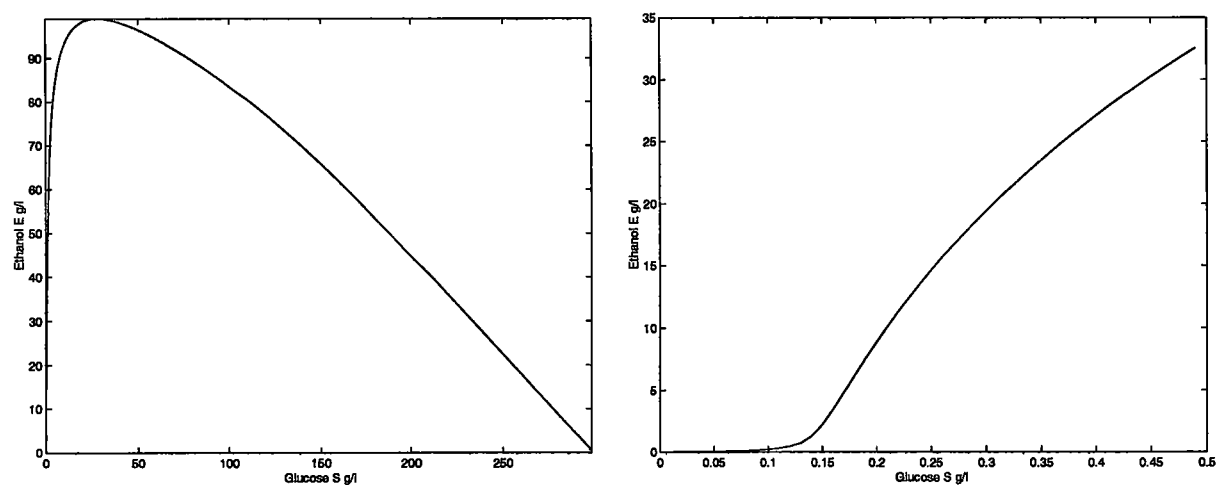
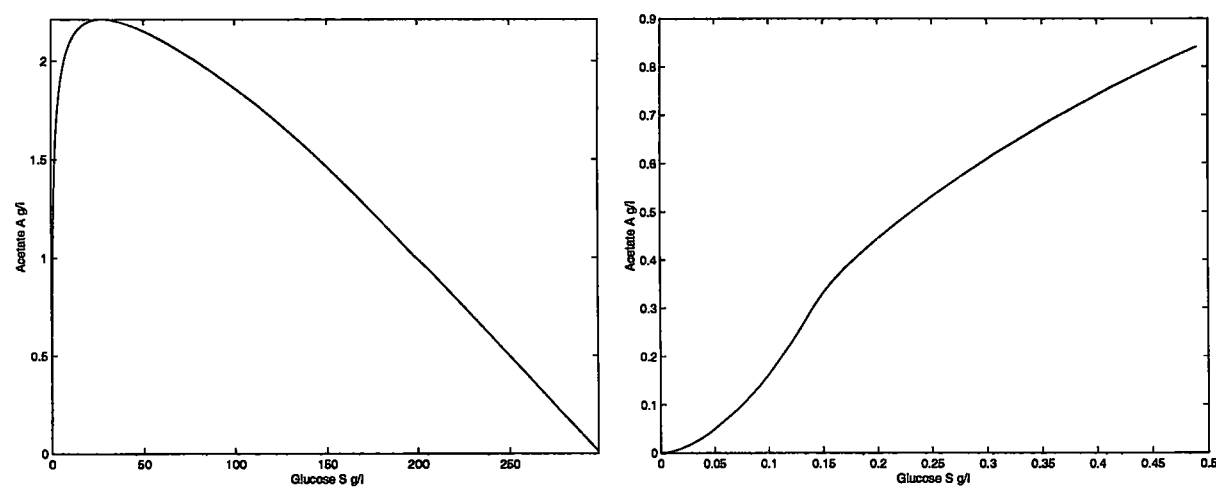
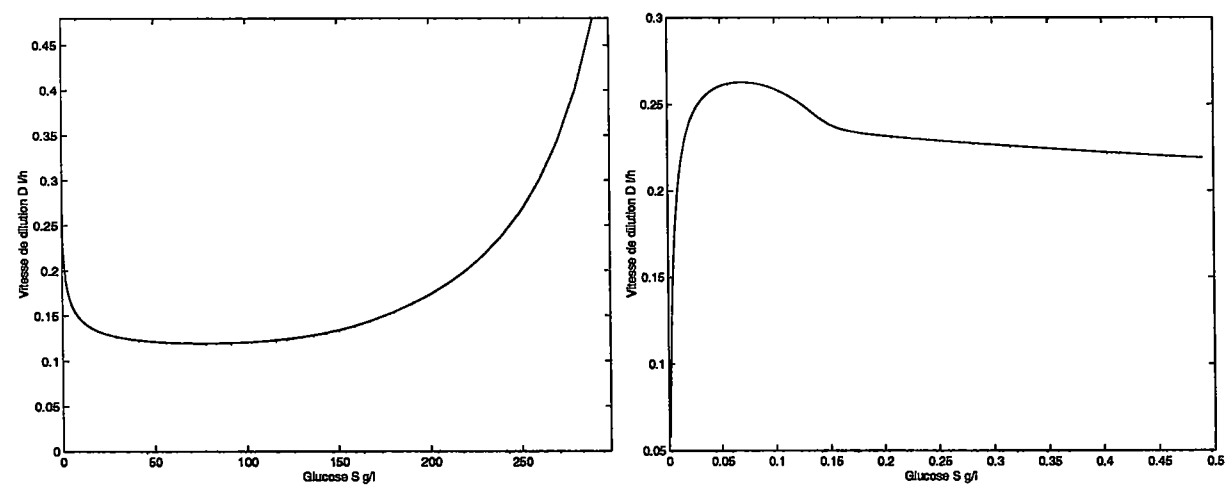


FIG. 1.4: Point d'équilibre biomasse totale en fonction de S

FIG. 1.5: Point d'équilibre biomasse X_1 en fonction de S FIG. 1.6: Point d'équilibre biomasse X_2 en fonction de S FIG. 1.7: Point d'équilibre biomasse X_3 en fonction de S

FIG. 1.8: Point d'équilibre concentration éthanol en fonction de S FIG. 1.9: Point d'équilibre concentration acétate en fonction de S FIG. 1.10: Valeur de la vitesse de dilution D à l'équilibre en fonction de S

1.5 Variations autour du modèle de Rajab

1.5.1 Simplifications - Modifications

Nous avons vu précédemment que le modèle de Rajab est difficile à étudier : il faut monter l'unicité du point d'équilibre dans le domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$. Or ce point d'équilibre est tributaire de toutes les constantes. Se pose donc la question de l'identifiabilité de ces paramètres. Vu le nombre de paramètres et la complexité du modèle, nous ne sommes pas parvenus en utilisant les techniques d'identifiabilité (Walter, 1987; Walter et Pronzato, 1993; Walter et Pronzato, 1994), à identifier les paramètres k_{ij} et K_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) du modèle (1.27), d'autant plus que la constante K_A^3 n'est pas identifiable. Considérons le cas où il n'y a pas de glucose ($S = 0$) mais présence d'éthanol ($E > 0$) et d'acétate ($A > 0$) depuis un certain temps. La biomasse n'est donc pas dans l'état 1 ni dans l'état 2, mais elle a eu le temps de passer totalement dans l'état 3. Supposons que la biomasse totale X , l'éthanol et l'acétate puissent être mesurés, et qu'aucune commande ne soit appliquée, alors $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = X$, $S = 0$, $D = 0$ et le modèle se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{X}_3 &= \mu_{\max}^3 \frac{E}{K_S^E + E} \frac{K_A^3}{K_A^3 + A} X_3 \\ \dot{E} &= -Y_{E/X}^3 \mu_{\max}^3 \frac{E}{K_S^E + E} \frac{K_A^3}{K_A^3 + A} X_3 \\ \dot{A} &= 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Nous revenons en fait, à une croissance microbienne X_3 sur un substrat E en réacteur discontinu. Le cas d'identifiabilité des paramètres de ce type de croissance a été étudié dans Chouakri *et al.* (1994a) et Chouakri *et al.* (1994b), et il est évident que le paramètre K_A^3 n'est pas identifiable.

Une simplification d'un point de vue paramètres est à effectuer. Ce sont les transitions inter-états R_{ij} qu'il faut modifier. Au départ, la fonction $F(S)$ est une fonction définie par Glomon (1982) telle que $F(S) = 0$ si $S \leq S_{cri}$ et $F(S) = 1$ si $S > S_{cri}$, puis elle est remplacée (Rajab, 1983) par $F(S) = \frac{S/S_{cri}}{1 + S/S_{cri}}$. En fait, c'est une fonction seuil qu'il faut remplacer par l'expression suivante :

$$F(S) = \frac{(S/S_{cri})^m}{1 + (S/S_{cri})^m} = \frac{S^m}{S_{cri}^m + S^m} \quad (1.37)$$

avec $m \geq 2$. Plus m est grand plus la pente en $S = S_{cri}$ est grande. Cette fonction est présente pour rendre continu le modèle et éviter une modélisation de type conditionnel comme, par exemple,

$$R_{21} = 0 \quad \text{si } S \leq S_{cri}, \quad (1.38)$$

$$R_{21} = k_{21} X_2 \quad \text{si } S > S_{cri}. \quad (1.39)$$

Les autres transitions inter-états sont modélisées par des lois de Monod. Cela permet une transition un peu plus «douce» d'un état vers un autre. On peut les remplacer par des fonctions seuils, comme par exemple :

$$F_c(S) = \frac{(S/S_{cri})^2}{1 + (S/S_{cri})^2} = \frac{S^2}{S_{cri}^2 + S^2} \quad (1.40)$$

$$F_\epsilon(S) = \frac{(S/\epsilon_S)^2}{1 + (S/\epsilon_S)^2} = \frac{S^2}{\epsilon_S^2 + S^2} \quad (1.41)$$

avec $S_{cri} = 0,1$ g/l et $\epsilon_S = 0,01$ g/l. Pour toute concentration de glucose supérieure à S_{cri} , la levure est dans l'état 1 (fermentation du glucose). En dessous de la concentration ϵ_S , on suppose qu'il n'y a plus de glucose, et les cellules passent dans l'état physiologique 3. Les passages inter-états peuvent être modélisés comme suit :

$$R_{12} = k_{12} (1 - F_c(S)) X_1 \quad (1.42)$$

$$R_{13} = k_{13} (1 - F_\epsilon(S)) X_1 \quad (1.43)$$

$$R_{21} = k_{21} F_c(S) X_2 \quad (1.44)$$

$$R_{23} = k_{23} (1 - F_e(S)) X_2 \quad (1.45)$$

$$R_{31} = k_{31} F_e(S) X_3 \quad (1.46)$$

$$R_{32} = k_{32} F_e(S) X_3 \quad (1.47)$$

$$(1.48)$$

Cependant le modèle reste encore très difficile à étudier.

Une autre approche consiste à construire un difféomorphisme afin d'avoir une vue différente du modèle. Posons $X_1 = \alpha_1 X$, $X_2 = \alpha_2 X$, $X_3 = \alpha_3 X$. Comme $X_1 + X_2 + X_3 = X$, alors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ et $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$. Posons aussi, pour simplifier l'écriture $r_i = \frac{R_i}{X_i}$ et $r_{ij} = \frac{R_{ij}}{X_i}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$.

Alors le modèle de Rajab avec les notations et simplifications précédentes, devient :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = (r_1 - r_{12} - r_{13} - r_1 \alpha_1 - r_2 \alpha_2 - r_3 \alpha_3) \alpha_1 + r_{21} \alpha_2 + r_{31} \alpha_3 \\ \dot{\alpha}_2 = (r_2 - r_{21} - r_{23} - r_1 \alpha_1 - r_2 \alpha_2 - r_3 \alpha_3) \alpha_2 + r_{12} \alpha_1 - r_{32} \alpha_3 \\ \dot{X} = (r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3) X - D X \\ \dot{E} = (Y_{E/X}^1 r_1 \alpha_1 - Y_{E/X}^3 r_3 \alpha_3) X - D E \\ \dot{S} = (-Y_{S/X}^1 r_1 \alpha_1 - Y_{S/X}^2 r_2 \alpha_2) X + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} = (Y_{A/X}^1 r_1 \alpha_1) X - D A \end{cases} \quad (1.49)$$

avec $\alpha_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, $m \geq 2$,

$$\begin{cases} r_1 = \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} \\ r_2 = \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} \\ r_3 = \mu_{\max}^3 \frac{E}{K_E^3 + E} \end{cases}, \quad \begin{cases} r_{12} = k_{12} \frac{1}{1 + (S/S_{cri})^m} \\ r_{21} = k_{21} \frac{(S/S_{cri})^m}{1 + (S/S_{cri})^m} \\ r_{31} = k_{12} \frac{(S/\epsilon_S)^m}{1 + (S/\epsilon_S)^m} \end{cases}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_{13} = k_{13} \frac{1}{1 + (S/\epsilon_S)^m} \\ r_{23} = k_{23} \frac{1}{1 + (S/\epsilon_S)^m} \\ r_{33} = k_{13} \frac{(S/\epsilon_S)^m}{1 + (S/\epsilon_S)^m} \end{cases}. \quad (1.50)$$

Le système reste complexe, mais nous avons obtenu un modèle en cascade. Cette façon de modéliser permet de mettre en facteur la biomasse X . Les termes en facteur devant la biomasse représentent une «vitesse spécifique de croissance».

L'expression des $\dot{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, 3$) dans l'équation (1.49) est assez compliqué. Afin de simplifier ces équations nous prenons un autre point de vue sur la croissance de la biomasse : la vitesse de croissance de X_i ($i = 1, 2, 3$) est proportionnelle à celle de la biomasse plus ou moins les vitesses de transitions entre états. Soit $\alpha_i = \frac{X_i}{X}$ ($i = 1, 2, 3$) représentant ici des proportions. On a pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$ et $k \in \{1, 2, 3\} - \{i, j\}$:

$$\dot{X}_i = \alpha_i \dot{X} - (r_{ij} + r_{ik}) \alpha_i + r_{ji} \alpha_j + r_{ki} \alpha_k \quad (1.51)$$

d'où

$$\dot{\alpha}_i = -(r_{ij} + r_{ik}) \alpha_i + r_{ji} \alpha_j + r_{ki} \alpha_k \quad (1.52)$$

et le modèle devient

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1 = -(r_{12} + r_{13}) \alpha_1 + r_{21} \alpha_2 + r_{31} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ \dot{\alpha}_2 = r_{12} \alpha_1 - (r_{21} + r_{23}) \alpha_2 + r_{32} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \\ \dot{X} = (r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) X - D X \\ \dot{E} = (Y_{E/X}^1 r_1 \alpha_1 - Y_{E/X}^3 r_3 (1 - \alpha_1 - \alpha_2)) X - D E \\ \dot{S} = (-Y_{S/X}^1 r_1 \alpha_1 - Y_{S/X}^2 r_2 \alpha_2) X + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} = (Y_{A/X}^1 r_1 \alpha_1) X - D A \end{cases} \quad (1.53)$$

Les vitesses r_i et r_{ij} sont celles données par l'équation (1.50). Les constantes k_{ij} représentent des inverses de temps de latence.

En réduisant le nombre de moitié, par exemple en posant $k_{12} = k_{21}$, $k_{13} = k_{31}$ et $k_{23} = k_{32}$, alors nous pouvons montrer que les constantes sont identifiables. Ces égalités signifient que la vitesse de passage de l'état i à l'état j est identique à celle du passage de l'état j à l'état i , $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$. Ceci ne correspond pas forcément à la réalité.

1.5.2 Modèles conditionnels

Mis à part le modèle de Reyman, les autres modèles présentés sont tous mono blocs : il n'y a pas de termes conditionnels. Les fonctions seuils ont été introduites afin d'assurer la continuité du modèle.

La prise en compte de l'acétate et l'utilisation des fonctions seuils sont les deux différences principales entre le modèle de Glomon (1982) et celui de Rajab (1983). En supposant que toute la biomasse n'est que dans un seul état physiologique, on obtient les trois modèles limites (1.54)–(1.56). Si de plus on considère qu'il n'y a pas de temps de latence entre les transitions inter-états, les réactions de passage d'un état à l'autre sont remplacées par des conditions sur le glucose. On obtient alors une version simplifiée du modèle de Rajab.

1. Si $S > S_c$ (fermentation du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X - D X \\ \dot{E} = Y_{E/X}^1 \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X - D E \\ \dot{S} = -Y_{S/X}^1 \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X + D (S_{\text{in}} - S) \\ \dot{A} = Y_{A/X}^1 \mu_{\max}^1 \frac{S}{K_S^1 + S} \frac{K_A^1}{K_A^1 + A} X - D A \end{cases} \quad (1.54)$$

2. Si $S_c \geq S \geq \epsilon_S$ (respiration du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} X - D X \\ \dot{E} = -D E \\ \dot{S} = -Y_{S/X}^2 \mu_{\max}^2 \frac{S}{K_S^2 + S} X + D (S_{\text{in}} - S) \\ \dot{A} = -D A \end{cases} \quad (1.55)$$

3. Si $\epsilon_S > S \approx 0$ (respiration de l'éthanol)

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu_{\max}^3 \frac{E}{K_E^3 + E} X - D X \\ \dot{E} = -Y_{E/X}^3 \mu_{\max}^3 \frac{E}{K_E^3 + E} X - D E \\ \dot{S} = D (S_{\text{in}} - S) \\ \dot{A} = -D A \end{cases} \quad (1.56)$$

Comme un des objectifs est de maximiser le rendement de production de biomasse, il faut commander le procédé de façon que la levure soit toujours dans l'état physiologique 2, ce qui correspond à une concentration en glucose inférieure à S_c . En supposant que l'éthanol et l'acétate n'ont pas d'effet dans cette croissance, alors un modèle tout simple (Monod, 1942)

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu^{\max} \frac{S}{K_S + S} X - D X \\ \dot{S} = -Y_{S/X} \mu^{\max} \frac{S}{K_S + S} X + D (S_{\text{in}} - S) \end{cases} \quad (1.57)$$

peut être utilisé. C'est ce qu'à fait Lucena (1996).

Deux problèmes se présentent. Premièrement avant d'être dans la voie 2, le procédé était soit dans la voie métabolique 1 (fermentation du glucose), soit dans la voie métabolique 3 (respiration de l'éthanol). Ainsi avant de revenir dans la voie métabolique 2 de la respiration du glucose, et avant que les cellules ne s'adaptent à leur nouveau milieu, il existe un certain temps d'adaptation. Deuxièmement, lors de la commande du procédé un incident peut se produire (panne de la pompe d'alimentation, dérèglement, ...). Le procédé risque alors de se retrouver dans une voie métabolique autre que celle de la respiration du glucose. Le modèle doit donc tenir compte des autres voies métaboliques et des autres modes de culture (fermenteur discontinu). Il faut modéliser le temps d'adaptation et les voies métaboliques. Nous proposons deux modèles conditionnels. Le premier tient plus compte des différentes voies de croissance. Quelle que soit la concentration en glucose nous avons :

$$\begin{cases} \dot{E} &= Y_{E/X}^1 \mu_1 X_1 - Y_{E/X}^3 \mu_3 X_3 - D E \\ \dot{S} &= -Y_{S/X}^2 \mu_1 X_1 - Y_{S/X}^2 \mu_2 X_2 + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} &= Y_{A/X}^1 \mu_1 X_1 - D A \end{cases} \quad (1.58)$$

et suivant la concentration en glucose trois cas se présentent :

1. Si $S > S_c$ (fermentation du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= \mu_1 X_1 + k_{21} X_2 + k_{31} X_3 - D X_1 \\ \dot{X}_2 &= -k_{21} X_2 - D X_2 \\ \dot{X}_3 &= -k_{31} X_3 - D X_3 \end{cases} \quad (1.59)$$

2. Si $S_c \geq S \geq \epsilon_S$ (respiration du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= -k_{12} X_1 - D X_1 \\ \dot{X}_2 &= \mu_2 X_2 + k_{12} X_1 + k_{32} X_3 - D X_2 \\ \dot{X}_3 &= -k_{32} X_3 - D X_3 \end{cases} \quad (1.60)$$

3. Si $\epsilon_S > S$ (respiration de l'éthanol)

$$\begin{cases} \dot{X}_1 &= -k_{13} X_1 - D X_1 \\ \dot{X}_2 &= -k_{23} X_2 - D X_2 \\ \dot{X}_3 &= \mu_3 X_3 + k_{13} X_1 + k_{23} X_2 - D X_3 \end{cases} \quad (1.61)$$

Dans ce modèle, nous avons toujours de la fermentation du glucose avec production d'éthanol et d'acétate, de la respiration sur glucose et de la respiration sur l'éthanol. Mais suivant la concentration en glucose, une voie métabolique deviendra principale et les deux autres s'atténueront jusqu'à devenir nulles.

Le micro-organisme ne sera plus que dans un seul état physiologique. Il reste à faire un choix des vitesses spécifiques de croissance.

La seconde proposition modélise différemment les phases de latence. De même que précédemment, il faudra changer de modèle suivant la concentration en glucose. La phase de latence est obtenue par une évolution de la vitesse de croissance μ_i selon une équation différentielle du premier ordre, initialisée en 0, et par la constante τ_i qui représente un temps de relaxation.

1. Si $S > S_c$ (fermentation du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X} &= \mu_1 X - D X \\ \dot{E} &= Y_{E/X}^1 \mu_1 X - D E \\ \dot{S} &= -Y_{S/X}^1 \mu_1 X + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} &= Y_{A/X}^1 \mu_1 X - D A \\ \dot{\mu}_1 &= \frac{1}{\tau_1} (\mu_1^{\max} - \mu_1) \end{cases} \quad (1.62)$$

2. Si $S_c \geq S \geq \epsilon_S$ (respiration du glucose)

$$\begin{cases} \dot{X} &= \mu_2 X - D X \\ \dot{E} &= -D E \\ \dot{S} &= -Y_{S/X}^2 \mu_2 X + D (S_{in} - S) \\ \dot{A} &= -D A \\ \dot{\mu}_2 &= \frac{1}{\tau_2} (\mu_2^{\max} - \mu_2) \end{cases} \quad (1.63)$$

3. Si $\epsilon_S > S$ (respiration de l'éthanol)

$$\begin{cases} \dot{X} &= \mu_3 X - D X \\ \dot{E} &= -Y_{E/X}^3 \mu_3 X - D E \\ \dot{S} &= D S_{in} \\ \dot{A} &= -D A \\ \dot{\mu}_3 &= \frac{1}{\tau_3} (\mu_3^{\max} - \mu_3) \end{cases} \quad (1.64)$$

Ce type de modèle est plus simple. Dans le cas où les concentrations X , E , S , A sont mesurables, et où on peut faire fonctionner le procédé uniquement dans une des trois voies métaboliques, alors les constantes $Y_{E/X}^1$, $Y_{E/X}^3$, $Y_{S/X}^1$, $Y_{S/X}^2$, $Y_{A/X}^1$, τ_i , $\mu_i^{\max}$, pour $i = 1, 2, 3$, sont identifiables. Considérons le cas 1 : il n'y a que fermentation du glucose. Supposons que l'on puisse mesurer les concentrations X , E , S , et A et la commande D . Si les paramètres ne sont pas identifiables alors deux mesures différentes de la sortie entraînent la non identifiabilité de paramètres.

1. Si $X = X'$, alors $\dot{X} = \dot{X}' \implies \mu_1 = \mu_1'$
2. Comme $\mu_1 = \mu_1'$ alors $\dot{\mu}_1 = \dot{\mu}_1'$ et $\ddot{\mu}_1 = \ddot{\mu}_1'$. Un simple calcul montre alors que $\tau_1 = \tau_1'$ et $\mu_1^{\max} = \mu_1^{\max'}$.
3. $\rightarrow E = E' \implies \dot{E} = \dot{E}'$ et $Y_{E/X}^1 = Y_{E/X'}^1$;
4. $\rightarrow S = S' \implies \dot{S} = \dot{S}'$ et $Y_{S/X}^1 = Y_{S/X'}^1$;
5. $\rightarrow A = A' \implies \dot{A} = \dot{A}'$ et $Y_{A/X}^1 = Y_{A/X'}^1$;

Ceci montrent que les paramètres dans le cas 1 sont identifiables. Un raisonnement analogue permet de conclure pour les cas 2 et 3.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la croissance de la levure de boulangerie. Après avoir fait quelques rappels sur la modélisation en général de bioprocédés, nous avons donné un état de l'art des modèles existants sur la croissance de la levure de boulangerie. La croissance de *Saccharomyces cerevisiae* est très complexe d'où l'existence de ces nombreux modèles. L'établissement d'un modèle se base sur les objectifs et sur les hypothèses que l'on se donne. Ainsi Bastin et Dochain ont voulu donner un modèle assez général et qui se met sous une forme unifiée afin de pouvoir appliquer des commandes adaptatives (Bastin et Dochain, 1990; Chen, 1992). Le modèle de Reyman modélise plus précisément les vitesses spécifiques de croissance et les phases de latence. Quant au modèle de Rajab, il se base sur les états physiologiques de la croissance de la levure et tient compte de l'influence de l'acétate. Il a été élaboré à partir du comportement d'un procédé pilote.

C'est ce modèle que nous avons particulièrement étudié. Malheureusement, l'utilisation du modèle tel quel, en vue d'une synthèse de loi de commande, est difficile. Il s'agit de montrer l'adéquation du modèle mathématique à l'évolution réelle du procédé. Nous suggérons différentes simplifications et modifications. Ces modèles ont été construits dans le but de rendre les paramètres plus facilement identifiables, et/ou dans le but de les utiliser afin de synthétiser des lois de commande, des estimateurs d'états, L'étape suivante consisterait à confronter ces modèles à des mesures expérimentales existantes.

Chapitre 2

Sur les Observateurs continu-discrets

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux observateurs, autrement dit reconstituteurs d'état. Soit un système dynamique modélisé par le formalisme d'état

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur entrée, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. À ce système est associée une équation d'observations, le vecteur de sortie de valeur dans $\mathbb{R}^p$

$$y = h(x). \quad (2.2)$$

Un observateur est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée, $u(t)$, et de sortie, $y(t)$, du système (2.1). L'observateur a pour rôle de donner une estimation $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état $x(t)$ du système considéré. Un tel système peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u, y) \\ \hat{x} = \bar{h}(\bar{x}, u, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec $\bar{x} \in \mathbb{R}^q$, $\bar{f} : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, et $\bar{h} : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ceci peut être schématisé par la figure 2.1.

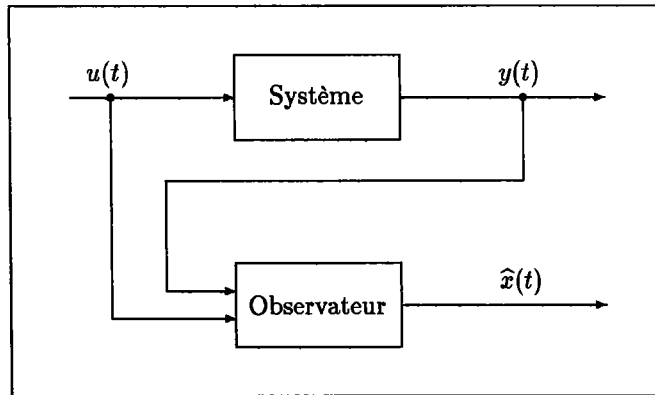


FIG. 2.1: Principe de l'observateur

Le reconstituteur d'état (2.3) doit avoir certaines propriétés. Plus particulièrement, l'erreur d'estimation, notée $\varepsilon = \hat{x} - x$, doit tendre vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\| = 0. \quad (2.4)$$

Généralement on souhaite que, si l'observateur est initialisé aux mêmes conditions initiales que le système à observer ($\hat{x}(0) = x(0)$) alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\hat{x}(t) = x(t)$. Ainsi, un estimateur d'état peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{f}(\tilde{x}, u, y) \\ \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + k(\tilde{x}, h(\hat{x}) - y) \end{cases} \quad (2.5)$$

avec $k(\tilde{x}(t), 0) = 0$, $\forall t \geq 0$, et les fonctions f et h sont les mêmes que celles du système (2.1)-(2.2) à observer et $\tilde{x}$ représente un système dynamique associé comme par exemple une équation de Lyapunov et de Ricatti.

Ce chapitre est décomposé en trois parties. La première est un rappel (Bornard *et al.*, 1993) des principales définitions et des conditions à vérifier avant de synthétiser un reconstruteur d'état.

Ensuite nous présenterons différents observateurs non linéaires déjà existants. Nous commencerons par les estimateurs d'état déduits des résultats de Kalman pour finir avec les observateurs à grand gain. Ces observateurs se basent sur les mesures des sorties disponibles en temps continu pour donner une estimation en temps continu.

La troisième et dernière partie concerne les observateurs «continu-discrets». A partir des mesures de sorties disponibles en temps discret, une estimation des variables d'état est donnée en temps continu. Cette estimation aura bien sûr la propriété de converger vers l'état réel du système.

2.2 Observabilité, entrées universelles

Avant de construire un estimateur d'état, on doit se demander dans quelles conditions ceci est possible. Par exemple, considérons les systèmes linéaires stationnaires (temps invariant) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (2.6)$$

où A (respectivement B et C) est une matrice de dimension $n \times n$ (respectivement $n \times m$ et $p \times n$). Sous des conditions d'observabilité bien connues :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.7)$$

le système linéaire (2.6) est observable.

Il faut définir cette notion d'observabilité pour les systèmes qui ne sont pas linéaires stationnaires. En effet, cette condition du rang n'existe plus. Notons par $x_u(t, x_0, t_0)$ la trajectoire à l'instant t , solution du système (2.1) issue de la condition initiale $x_0 = x(t_0)$ ($t_0 \geq 0$) et des commandes appliquées $u(t)$, pour tout $t \geq t_0$. Pour mieux définir cette notion d'observabilité, on définit tout d'abord la notion d'indiscernabilité :

Définition 2.2.1 (indiscernabilité) Soit le système non linéaire (2.1) avec pour équation de sortie l'équation (2.2). Soient deux états initiaux x_0 et x_0' distincts. Ils sont dits indiscernables si, pour toute fonction d'entrée $u(t)$ et pour tout $t \geq t_0 \geq 0$, les sorties $h(x_u(t, x_0, t_0))$ et $h(x_u(t, x_0', t_0))$ qui en résultent sont égales.

C'est-à dire qu'à partir de deux conditions initiales différentes, la sortie du système est la même dans les deux cas et ceci pour une même commande appliquée. Ainsi

Définition 2.2.2 (observabilité) Le système (2.1)-(2.2) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts indiscernables.

Ceci définit donc la notion d'observabilité. Si un système est observable, on pourra alors essayer de construire un estimateur d'état associé. Malheureusement, cette condition d'observabilité n'est pas aisément vérifiable. Il faut pouvoir intégrer le système (2.1)! Il n'existe pas de critère aussi simple et aussi fort tel que la condition du rang (2.7) pour les systèmes linéaires stationnaires. Une condition de rang existe pour les systèmes non linéaires mais elle est locale et n'est valable que pour certaines entrées appliquées. Cette condition est basée sur la notion d'espace d'observation.

Définition 2.2.3 *L'espace d'observation $\mathcal{O}$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les sorties $h_1, h_2, \dots, h_p$ fermé sous l'opération de la dérivation de Lie par rapport aux champs de vecteur $f_u(x) = f(x, u)$ du système (2.1) pour un $u(t)$ constant $\in \mathbb{R}^m$.*

Définition 2.2.4 *On dit que le système (2.1) est observable au sens du rang en x_0 si la dimension de l'espace des différentielles des éléments de $\mathcal{O}$ évalué en x_0 est de rang n .*

Les systèmes linéaires temps variants, avec les matrices $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ bornées,

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{cases} \quad (2.8)$$

bénéficient aussi d'un critère assez pratique à vérifier. Soit $\Phi(t, t_0)$ la matrice de transition d'état de la partie autonome du système (2.8) définie par $\Phi(t_0, t_0) = I$ et

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0). \quad (2.9)$$

Définition 2.2.5 *Le système (2.8) est dit complètement uniformément observable s'il existe $\alpha > 0$ et $t_0 > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait*

$$\Gamma(t, t+t_0) = \int_t^{t+t_0} \Phi^T(\sigma, t) C^T(\sigma) C(\sigma) \Phi(\sigma, t) d\sigma \geq \alpha I. \quad (2.10)$$

La matrice $\Gamma(t, t+t_0)$ est appelée le Grammien d'observabilité du système (2.8). La complète observabilité signifie que le système est observable à chaque instant, c'est-à-dire $\forall x_0, \forall x_0', x_0 \neq x_0', \exists t > t_0 \geq 0$ tel que $C(t)x_u(t, x_0, t_0) \neq C(t)x_u(t, x_0', t_0)$. De plus la complète uniforme stabilité garantit que dans un intervalle de temps donné, la sortie $C(t)x_u(t, x_0, t_0)$ fournit toujours assez d'informations pour reconstruire l'état du système.

En général pour les systèmes non linéaires, l'entrée $u(t)$ appliquée peut rendre celui-ci inobservable.

Définition 2.2.6 (entrée universelle) *Une fonction d'entrée $u(t)$ est dite universelle sur $[0, t]$ si elle distingue sur $[0, t]$, tout couple d'état initiaux distincts.*

Inversement, une fonction entrée est dite singulière sur $[0, t]$ si elle n'est pas universelle. Soit le système affine en l'état

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(u)x + B(u) \\ y &= C(u)x \end{cases} \quad (2.11)$$

et soit la matrice de transition $\Phi_u(t, t_0)$ telle que $\Phi_u(t_0, t_0) = 0$ et

$$\frac{d}{dt}\Phi_u(t, t_0) = A(u)\Phi_u(t, t_0) \quad (2.12)$$

On définit l'indice d'universalité $\gamma_u(t, t_0)$ par la plus petite valeur singulière de

$$\Gamma_u(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi_u^T(\sigma, t) C^T(\sigma, t) C(\sigma, t) \Phi_u^T(\sigma, t) d\sigma.$$

Définition 2.2.7 *Une entrée $u(t)$ est universelle sur $[0, t]$ pour le système (2.11) si $\gamma_u(t, 0) > 0$.*

Très souvent, pour les systèmes affines en l'état, l'entrée universelle n'est pas suffisante pour la construction de certains observateurs. Il faut que la commande excite suffisamment le système. On parle alors d'entrée persistante, notion introduite pour les systèmes bilinéaires par Celle *et al.* (1989) et étendue pour les systèmes affines en l'état par Couenne (1990).

Définition 2.2.8 Une fonction entrée u est dite régulièrement persistante pour le système (2.11) s'il existe $t_0 > 0$, $t_1 > 0$, et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $\gamma_u(t + t_1, t) \geq \alpha$.

Finalement, on dit qu'un système est uniformément observable si toutes les entrées sont universelles. Il existe un résultat très pratique, dû à Gauthier et Bornard (1981), qui donne des conditions nécessaires et suffisantes pour vérifier qu'un système est localement uniformément observable. On considère les systèmes non linéaires affines en la commande mono sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (2.13)$$

avec $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ et où $\mathcal{X}$ est le domaine physique (ouvert, borné) dans lequel évolue l'état du système, et $\mathcal{U}$ est l'ensemble des valeurs admissibles de l'entrée. Soit la fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = z \quad (2.14)$$

et qui transforme (2.13) en :

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + \tilde{\varphi}(z) + u \bar{\varphi}(z) \\ y = C z \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \tilde{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\varphi}_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_f^n h(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \bar{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(z) \\ \bar{\varphi}_2(z) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_g h(\Phi^{-1}(z)) \\ L_g L_f h(\Phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_g L_f^{n-1} h(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.2.1 (Gauthier et Bornard (1981)) Supposons que la fonction Φ choisie soit un difféomorphisme de $\mathcal{X}$ sur $\Phi(\mathcal{X})$, que les fonctions Φ , $\tilde{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ puissent être étendues de $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{R}^n$ par une fonction de classe C^∞ et que le système (2.15) soit complet pour toutes les fonctions entrées admissibles (mesurables bornées) à valeur dans $\mathcal{U}$, alors le système (2.13) est uniformément localement observable si et seulement si la fonction $\bar{\varphi}$ est de la forme

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1(z) &= \bar{\varphi}_1(z_1) \\ \bar{\varphi}_2(z) &= \bar{\varphi}_1(z_1, z_2) \\ &\vdots \\ \bar{\varphi}_{n-1}(z) &= \bar{\varphi}_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}). \end{cases} \quad (2.16)$$

Ainsi les systèmes non linéaires mono-sortie pouvant se mettre sous la forme

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \phi(u, x_1) \\ x_3 + \phi(u, x_1, x_2) \\ x_4 + \phi(u, x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ x_n + \phi(u, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \phi(u, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

sont localement uniformément observables. Le système (2.17) représente une forme canonique d'observabilité. Gauthier et Kupka (1994) ont étendu ce résultat comme suit :

Théorème 2.2.2 (Gauthier et Kupka (1994)) *Tout système localement U-uniformément observable se met sous la forme canonique suivante :*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(u, x_1, x_2) \\ \vdots \\ f_i(u, x_1, \dots, x_{i+1}) \\ \vdots \\ f_n(u, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = f(u, x) \\ y = f_0(u, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.18)$$

avec $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$ et $\forall (u, x) \in \mathcal{U} \times \mathcal{X}$, $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_i(u, x_1, \dots, x_{i+1}) \neq 0.$$

La notion de U-uniforme observabilité a été introduite par Hammouri, Busawon et Farza (Busawon, 1996). Elle caractérise les systèmes où les entrées ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs. Physiquement les actionneurs peuvent limiter la valeur des entrées, ou par exemple dans les bioprocédés la commande en dilution est forcément positive. Un système est dit localement U-uniformément observable en un point x si, le système restreint à un voisinage de x , toute entrée $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ est universelle

La complexité des systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties ne permet pas de fournir de forme canonique générale d'observabilité. Pour certaines classes de systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties, le résultat précédent a été étendu (voir par exemple Busawon (1996)).

2.3 Observateurs continus-continus

2.3.1 Observateurs de type Kalman

Actuellement, les observateurs ne sont qu'une extension des observateurs pour les systèmes linéaires donnés par Luenberger et par Kalman. Par exemple, pour les systèmes linéaires temps variant (système (2.8)) la version déterministe du filtre de Kalman est :

Théorème 2.3.1 *Si le système (2.8) est complètement uniformément observable, alors*

$$\begin{cases} \dot{P}(t) = P(t) A^T(t) + A(t) P(t) + R - P(t) C^T(t) Q C(t) P(t) \\ \hat{\hat{x}}(t) = A(t) \hat{\hat{x}}(t) - P(t) C^T(t) Q (C(t) \hat{\hat{x}}(t) - y(t)) \end{cases} \quad (2.19)$$

est un observateur pour le système (2.8) à convergence exponentielle où les matrices $P_0 = P(0)$, R et Q sont choisies arbitrairement dans l'ensemble des matrices définies positives.

En posant $S(t) = P^{-1}(t)$, l'équation dynamique du gain se réécrit :

$$\dot{S}(t) = -A^T(t) S(t) - S(t) A(t) + C^T(t) Q C(t) - S(t) R S(t) \quad (2.20)$$

et la correction appliquée à l'estimation est changée en $-S^{-1}(t) C^T(t) Q (C(t) \hat{x}(t) - y(t))$.

L'origine de cet observateur vient d'une minimisation d'un critère quadratique. Couenne (1990) a amélioré ce critère en ajoutant une valeur du critère à l'instant initial, un facteur d'oubli exponentiel et en considérant les systèmes affines en l'état (2.11). Cette introduction du terme «d'oubli exponentiel» permet aussi de travailler avec $R = 0$. Le critère est le suivant :

$$J(\xi) = e^{-\theta t} \left(e^{-\theta t_0} \|\xi_0 - \xi\|_{S_0}^2 + \int_{t_0}^t e^{-\theta \tau} \|y(\tau) - C \Phi_u(\tau, t_0) \xi_0\|_Q^2 d\tau \right) \quad (2.21)$$

où $\|\cdot\|_{S_0}^2$ et $\|\cdot\|_Q^2$ désignent les formes quadratiques : $\|\xi\|_{S_0}^2 = \xi^T S_0 \xi$ et $\|\xi\|_Q^2 = \xi^T Q \xi$ (S_0 et Q sont des matrices symétriques définies positives). Comme $J(\xi)$ est un critère strictement convexe, le minimum existe et est unique. Soit ξ^* ce minimum; il est donné par $\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0$. En posant $\hat{x} = \Phi_u(t, t_0) \xi^*$, le calcul de la dérivée de $\hat{x}$ par rapport au temps conduit, après simplification, aux équations :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) &= -\theta S(t) - A^T(u(t)) S(t) - S(t) A(u(t)) + C^T(t) Q C(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A(u(t)) \hat{x}(t) + B(u(t)) u(t) - S^{-1}(t) C^T(t) Q (C(t) \hat{x}(t) - y(t)) \end{cases} \quad (2.22)$$

Ainsi, en faisant la remarque que toute entrée $u(\cdot)$ mesurable bornée appliquée au système affine en la commande (2.11) engendre un système linéaire dont les paramètres varient dans le temps, nous avons :

Théorème 2.3.2 *Si l'entrée $u(\cdot)$ est régulièrement persistante, alors pour tout $\theta > 0$, le système (2.22) est un observateur non initialisé pour le système affine en la commande (2.11).*

La vitesse de convergence de cet observateur est exponentielle et est arbitrairement choisie en fonction de θ . Une preuve de ce théorème se trouve dans Bornard *et al.* (1989). De Leon Morales (1992) a donné une démonstration plus courte en utilisant comme fonction de Lyapunov $\varepsilon^T S \varepsilon$ ($\varepsilon = \hat{x} - x$ l'erreur d'estimation) et en introduisant la notion d'entrée θ -strictement persistante : une entrée $u(\cdot)$ mesurable bornée est dite θ -strictement persistante si $\theta > 0$ étant donné, $\exists \alpha > 0$, $\exists t \geq 0$, $\forall t \geq t_0$, $S(t) \geq \alpha I$. Comme il en a fait la remarque, une entrée régulièrement persistante est aussi une entrée θ -strictement persistante. Mais ce qui est plus intéressant, c'est qu'il a étendu ce résultat aux systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(u, y) x + B(u, y) \\ y &= C x \end{cases} \quad (2.23)$$

en considérant que si l'entrée $v = (u, y)$ est une entrée régulièrement persistante pour ce système alors le système

$$\begin{cases} \dot{S} &= -\theta S - A^T(u, y) S - S A(u, y) + C^T Q C \\ \dot{\hat{x}} &= A(u, y) \hat{x} + B(u, y) - S^{-1} C^T Q (C \hat{x} - y) \end{cases} \quad (2.24)$$

avec $\theta > 0$, est un observateur à convergence exponentielle pour le système (2.23). Ce type de système est particulièrement intéressant pour les bioprocédés modélisés sous la forme unifiée de Bastin et Dochain (1990) (voir chapitre 1) dans le cas où les concentrations en substrat et en produit sont mesurées et où on est en présence de plusieurs micro-organismes ou plusieurs états physiologiques.

Très souvent dans la pratique, le système non linéaire est linéarisé au point de fonctionnement. Sur ce système linéarisé est appliqué l'observateur de Kalman : c'est-ce qu'on appelle l'observateur de Kalman étendu. Deza *et al.* (1992) ont donné un résultat de convergence de cet observateur. Nous réexaminerons ce résultat à la section 2.4.

2.3.2 Observateurs à grand gain

Nous avons vu précédemment qu'une synthèse d'observateurs de type Kalman est possible pour les systèmes affines en la commande, sous des conditions sur les entrées. L'estimateur d'état ainsi construit

augmente la dimension du système de $n(n+1)$ équations différentielles. L'approche grand gain, permet de fixer définitivement les coefficients de la matrice de gain S^{-1} , et de travailler avec une classe plus vaste de systèmes : les systèmes uniformément localement observables.

Le principe d'un observateur à grand gain est de décomposer le système en une partie affine en l'état et une partie non linéaire. La synthèse de l'observateur est réalisée sur la base du système linéaire. Sous des conditions de structure, l'utilisation d'un gain suffisamment grand permet de traiter des non linéarités.

Cas mono-sortie

Nous avons vu que les systèmes non linéaires affines en la commande mono-sortie localement uniformément observables se mettent sous la forme canonique (2.15). Ces systèmes sont inclus dans le système plus général :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z, u) \\ y = Cz. \end{cases} \quad (2.25)$$

On rappelle que A est la matrice anti-shift $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$ et $C = [1 \ 0 \dots \ 0]$. Gauthier

et al. (1992) ont donné pour ces systèmes un observateur à grand gain. La matrice de gain sera $K \Lambda^{-1}(T)$. K est une matrice $n \times 1$ dont les n coefficients sont choisis tels que la matrice $[A - KC]$ soit Hurwitz. La constante T^{-1} est le gain qui doit être pris suffisamment grand pour assurer la convergence de l'observateur

$$(0 < T < 1). \text{ La matrice } \Lambda(T) \text{ est donnée par } \Lambda(T) = \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & T^n \end{bmatrix}.$$

Théorème 2.3.3 (Gauthier et al. (1992)) Soit Λ définie comme ci-dessus et soit K telle que la matrice $[A - KC]$ ait toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Si

1. la fonction $\varphi(z, u)$ est globalement lipschitzienne par rapport à z , uniformément par rapport à u ;
2. $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \equiv 0$ pour $i = 1, \dots, n-1$, $j = i+1, \dots, n$;

alors le système est uniformément localement observable, et il existe T_0 tel que, pour tout T qui satisfait $0 < T \leq T_0$, le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) - \Lambda^{-1}(T) K (C\hat{z} - y) \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.26)$$

est un observateur pour le système. De plus, la norme de l'erreur d'observation est bornée par une exponentielle dont la vitesse de décroissance peut être choisie arbitrairement grande.

Preuve

En utilisant le changement de base $\bar{z} = \Lambda(T)z$, $\tilde{z} = \Lambda(T)\hat{z}$, on a $\bar{\varepsilon} = \bar{z} - \tilde{z}$. La dépendance de ψ par rapport à x et u étant omise dans la notation : $\psi(\bar{\varepsilon}) = \varphi(\tilde{z}, u) - \varphi(\hat{z}, u)$, on calcule alors facilement que $\bar{A} = \Lambda(T)A\Lambda^{-1}(T) = T^{-1}A$, $\bar{C} = C\Lambda^{-1}(T) = T^{-1}C$. Il en résulte :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\bar{z}} = T^{-1}A\bar{z} + \Lambda(T)\varphi(\Lambda^{-1}(T)\bar{z}, u) \\ y = T^{-1}C\bar{z} \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\tilde{z}} = T^{-1}A\tilde{z} + \Lambda(T)\varphi(\Lambda^{-1}(T)\tilde{z}, u) + T^{-1}KC(\bar{z} - \tilde{z}) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = T^{-1}(A - KC)\bar{\varepsilon} + \Lambda(T)\psi(\Lambda^{-1}(T)\bar{\varepsilon}) \end{cases} \end{cases}$$

Soit S une matrice définie positive solution de l'équation de Lyapunov :

$$[A - K C]^T S + S [A - K C] = -I. \quad (2.27)$$

On prend comme fonction de Lyapunov candidate : $\bar{v} = \bar{\varepsilon}^T S \bar{\varepsilon}$. On peut majorer la dérivée par rapport au temps de $\bar{v}$, comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &= 2\bar{\varepsilon}^T S \dot{\bar{\varepsilon}} \\ \dot{\bar{v}} &= 2\bar{\varepsilon}^T S \left(T^{-1} (A - K C) \bar{\varepsilon} + \Lambda(T) \psi(\Lambda^{-1}(T) \bar{\varepsilon}) \right) \\ \dot{\bar{v}} &= -T^{-1} \|\bar{\varepsilon}\|^2 + 2\bar{\varepsilon}^T S \Lambda(T) \psi(\Lambda^{-1}(T) \bar{\varepsilon}) \\ \dot{\bar{v}} &\leq -T^{-1} \|\bar{\varepsilon}\|^2 + 2\|S\| \|\bar{\varepsilon}\| \alpha_\varphi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} T^{i-j} \|\bar{\varepsilon}\|, \end{aligned} \quad (2.28)$$

où α_φ est la constante associée à la fonction φ , qui est la même que ψ . On a défini $\chi_{ij} = 0$ si $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \equiv 0$, sinon $\chi_{ij} = 1$. Alors $\chi_{ij} T^{i-j} > 1$ pour $T < 1$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. On note respectivement λ_I, λ_S les valeurs propres minimale et maximale de S . On obtient

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}} &\leq \frac{-T^{-1}}{\lambda_S} \bar{v} + 2\lambda_S \|\bar{\varepsilon}\| \alpha_\varphi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} T^{i-j} \|\bar{\varepsilon}\| \\ \dot{\bar{v}} &\leq \left(\frac{-T^{-1}}{\lambda_S} + 2\frac{\lambda_S}{\lambda_I} \alpha_\varphi \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} T^{i-j} \right) \bar{v} \\ \dot{\bar{v}} &\leq \left(\frac{-T^{-1}}{\lambda_S} + 2\frac{\lambda_S}{\lambda_I} \alpha_\varphi n^2 \right) \bar{v}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Donc, pour tout $\gamma > 0$, il existe T , $0 < T < 1$, tel que $\dot{\bar{v}} \leq -\gamma \bar{v}$. L'observateur converge donc exponentiellement et on peut choisir arbitrairement la vitesse de convergence. On remarque que l'entrée du système n'imposant aucune condition, le système est alors uniformément localement observable.

Remarques :

- La condition ii) revient en fait à dire que $\varphi(z, u)$ a une forme triangulaire.
- La matrice $\Lambda^{-1}(T)K$ peut être choisie identique à $S_\theta^{-1}C^T$, avec S_θ^{-1} solution de l'équation algébrique de Riccati. S_θ est la solution stationnaire de $\dot{S}_\theta = -\theta S_\theta - A^T S_\theta - S_\theta A + C^T C$ pour θ assez grand (on a ici $\theta = \frac{1}{T}$). Une écriture explicite de S_θ est donnée dans Othman (1992).
- Si on a effectué un changement de variable pour obtenir le système (2.25), on n'a pas besoin de la connaissance explicite de Φ^{-1} qui est souvent difficilement calculable. Lorsque l'on écrit l'observateur dans son repère de départ, il suffit de connaître $\left[\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} \right]$. Dans le repère initial l'observateur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\hat{x}) + \left[\frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial x} \right]^{-1} \Lambda^{-1}(T) K (y - C \hat{x}) \\ y &= C \hat{x} \end{cases} \quad (2.30)$$

- On parle de grand gain puisque lorsque l'on choisit T^{-1} suffisamment grand (T suffisamment petit), on cache l'effet de la partie non-linéaire dans la synthèse de l'observateur.

Cas multi-sorties

Considérons le système non linéaire affine en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.31)$$

avec $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Supposons que ce système soit observable et que l'entrée $u(t) \equiv 0$ soit une entrée universelle. Le Jacobien de $\{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n-1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{n-1} h_p\}$ par rapport à x est de rang n presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Au voisinage d'un point régulier on peut sélectionner un sous-ensemble de rang plein :

$$\Phi = \{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{\eta_1} h_1, \dots, h_p, \dots, L_f^{\eta_p} h_p\} \quad (2.32)$$

Nous avons l'entrée $h_k(x)$ qui intervient à l'ordre η_k . Ceci détermine un difféomorphisme local où le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \bar{\varphi}(z) + \bar{\varphi}(z)u \\ y = Cz \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\text{où : } A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{bmatrix}, \text{ avec } A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_p \end{bmatrix}, \text{ avec } C_k = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \bar{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(z) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_p(z) \end{bmatrix}, \text{ avec } \bar{\varphi}(z)_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \check{\varphi}_k(z) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \bar{\varphi}(z) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1(z) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_p(z) \end{bmatrix}, \text{ avec } \bar{\varphi}_k(z) = \begin{bmatrix} \check{\varphi}_{1k}(z) \\ \vdots \\ \check{\varphi}_{\eta_k k}(z) \end{bmatrix}. \text{ Nous avons } \check{\varphi}_k(z) = L_f^{\eta_k} h_k(\Phi^{-1}(z)), \text{ et } \check{\varphi}_{ik}(z) =$$

$L_g L_f^{i-1} h_k(\Phi^{-1}(z))$. La taille de chaque bloc k est η_k , $k = 1, \dots, p$, avec $\sum_{i=1}^p \eta_k = n$, et on pose $\mu_1 = 1$, $\mu_{k+1} = \mu_k + \eta_k$, $k = 1, \dots, p-1$. Pour le théorème qui suit, issu de Bornard et Hammouri (1991), nous n'avons pas besoin de la linéarité en u , et nous considérons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(z, u) \\ y = Cz, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\text{et la matrice } n \times p, K = \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_p \end{bmatrix} \text{ où les matrices } K_k \text{ sont de dimension } \eta_k \times 1.$$

Théorème 2.3.4 (Bornard et Hammouri (1991)) *Soit la matrice K choisie telle que pour chaque bloc k , la matrice $(A_k - K_k C_k)$ ait toutes les valeurs propres à partie réelle négative. Si*

1. *la fonction $\varphi(z, u)$ est globalement lipschitzienne par rapport à x , uniformément par rapport à u .*
2. *on suppose qu'il existe deux ensembles d'entiers $\sigma = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$ et $\delta = \{\delta_1 \dots \delta_p\}$, avec $\delta_i > 0$, $i = 1 \dots p$, tels que :*

$$(a) \ \sigma_{\mu_k+l} = \sigma_{\mu_k+l-1} + \delta_k, \ k = 1 \dots p, \ l = 1 \dots \eta_k - 1,$$

$$(b) \ \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \neq 0 \Rightarrow \sigma_i \geq \sigma_j, \ i = 1 \dots n, \ j = 1 \dots n, \ j \neq \mu_k, \ k = 1 \dots p.$$

Alors le système est uniformément localement observable, et il existe $T_0 > 0$ tel que, pour tout T , $0 < T < T_0$, le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \varphi(\hat{z}, u) + \Lambda^{-1}(T, \delta)K(y - C\hat{z}) \\ y &= Cz \end{cases} \quad (2.35)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{z}_{\mu_k} &= y_k, \\ \hat{z}_j &= \hat{z}_j, \quad j \neq \mu_k, \\ \Lambda(T, \delta) &= \begin{bmatrix} T^{\delta_1} \Delta(T^{\delta_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & T^{\delta_p} \Delta(T^{\delta_p}) \end{bmatrix}, \quad \text{où } \Delta_k(T) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & T & \\ & & \ddots \\ & & & T^{\eta_k-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

est un observateur pour le système. De plus, la norme de l'erreur d'observation est bornée par une exponentielle dont la vitesse de décroissance peut être choisie arbitrairement grande.

La preuve du théorème suit la même démarche que celle du théorème précédent. Il suffit de reprendre et d'écrire par blocs k . La majoration de $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_{ij} T^{i-j} \|\bar{\varepsilon}\|$ dans le cas mono sortie est n^2 . Ici, dans le cas multi sorties, nous majorons $\sum_{i=\mu_k}^{\mu_k+\eta_k-1} \sum_{j=1}^n \chi_{ij} T^{i-j} \|\bar{\varepsilon}\|$ par $\eta_k \times n$ sachant que $\chi_{ij} = 0$ si $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \equiv 0$ ou si $j = \mu_k$, sinon $\chi_{ij} = 1$, d'où $\chi_{ij} T^{\sigma_i - \sigma_j} > 1$, pour $T < 1$, $\forall i = \mu_k \dots \mu_k + \eta_k - 1$, $\forall j = 1 \dots n$. Et nous majorons $\|S_k\|$ par $s_0 = \sup\{\|S_1\|, \dots, \|S_k\|\}$, $k = 1 \dots p$.

Remarques:

- Les conditions *ii* sont assez contraignantes sur $\varphi(z, u)$. En effet, pour certains couples (i, j) , il faut que $\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \equiv 0$, lorsque l'on a $\sigma_i < \sigma_j$. Cela impose une certaine configuration de la matrice jacobienne de $\varphi(x, u)$. Par exemple au sein de chaque bloc, on retrouve la condition triangulaire du cas mono-sortie.
- Comme dans le cas mono-sortie, on parle de grand gain puisque lorsqu'on choisit T^{-1} suffisamment grand (T suffisamment petit), on cache l'effet de la partie non-linéaire dans la synthèse de l'observateur.
- On a aussi $\sigma_{\mu_k+l} = \sigma_{\mu_k} + (l-1)\delta_k$, $l = 1 \dots \eta_k$. Le choix des ensembles $\sigma = \{\sigma_1 \dots \sigma_n\}$ et $\delta = \{\delta_1 \dots \delta_p\}$, revient donc en fait à choisir $\delta_1 \dots \delta_p$ et $\sigma_{\mu_1} \dots \sigma_{\mu_p}$.
- Pour savoir si le système (2.34) est observable, il suffit d'écrire les conditions *ii* et de résoudre ce système d'inéquations. Si on a $\sigma_i \geq \sigma_j$ avec $\mu_{k_i} \leq i \leq \mu_{k_i} + \eta_{k_i} - 1$, $\mu_{k_j} \leq j \leq \mu_{k_j} + \eta_{k_j} - 1$, avec $\mu_{k_i} \neq \mu_{k_j}$, et $j \neq \mu_k$, $k = 1 \dots p$, alors il vient que $\sigma_l > \sigma_j$ pour l tel que $i+1 \leq l \leq \mu_{k_i} + \eta_{k_i} - 1$, et $\sigma_i > \sigma_{l'}$ pour l' tel que $\mu_{k_j} \leq l' < j-1$.
- Contrairement au cas mono-sortie, il n'existe pas une seule forme canonique, mais plusieurs. Cela dépend du difféomorphisme choisi. Pour un système donné, il est possible qu'un difféomorphisme choisi ne permette pas de dire si ce système est observable, par contre pour un autre difféomorphisme ce système peut satisfaire aux critères d'observabilité.

Nous allons utiliser ce théorème pour l'appliquer à un modèle de la levure de boulangerie. Pour cela, nous faisons la remarque que le théorème reste valable si les conditions *ii - b* sont changées comme suit

$$(b) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_j} \neq 0 \Rightarrow \sigma_i \geq \sigma_j, \quad i = 1 \dots n-1, \quad j = 1 \dots n, \quad j \neq \mu_k, \quad k = 1 \dots p.$$

Ce qui signifie que la dépendance de $\varphi(x, u)$ par rapport aux $x_i, i = 1, \dots, n$ n'a pas d'importance. Cette dernière remarque permet d'appliquer sous certaines conditions cet observateur aux bioprocédés modélisés sous la forme unifiée de Bastin et Dochain (voir chapitre 1 (1.15)) :

$$\dot{\xi} = K \varphi - D \xi - Q + F. \quad (2.37)$$

Il faut pour cela que

- la vitesse d'alimentation (gaz et liquide) F_i ne dépende que de la commande (vitesse de dilution D), de la concentration $S_{in,i}$ constante et connue et du débit gazeux entrant $Q_{in,i}$ mesuré;
- le débit gazeux sortant Q_i est mesuré ou est fonction uniquement de l'état ξ_i ;
- la vitesse spécifique de croissance φ est positive, bornée et ne dépend que du vecteur état ξ et de constantes connues;
- la matrice des rendements est connue;
- la commande D appliquée (par exemple $0 < D_{\min} \leq D(t) \leq D_{\max}$) permet d'assurer que le système vit dans un compact et qu'il est éloigné des bords ($\xi > 0$) pour éviter les problèmes d'observabilité;
- au moins $n/2$ états sont mesurés.
- alors les fonctions φ sont partout Lipschitz dans le compact et peuvent être rendues globales Lipschitz, par un raccordement continu par exemple.

Notons par $\xi_m = y = C \xi = [\xi_{m,1}, \dots, \xi_{m,p}]$ les p états mesurés, et $\xi_l = [\xi_{l,1}, \dots, \xi_{l,q}]$ les q états qui ne le sont pas, avec $p + q = n$ et $p \geq q$. Alors sous les conditions précédentes et si

$$\Phi = \{ \xi_{m,\kappa_1}, L_f \xi_{m,\kappa_1}, \dots, \xi_{m,\kappa_{\bar{p}}}, L_f \xi_{m,\kappa_{\bar{p}}}, \xi_{m,\lambda_1}, \dots, \xi_{m,\lambda_{\bar{p}}} \}$$

(avec $2\bar{p} + \bar{p} = n$, $1 \leq \kappa_i \leq p$, $1 \leq \lambda_j \leq p$, et $\kappa_i \neq \lambda_j$ pour $i = 1, \dots, \bar{p}$ et pour $j = 1, \dots, \bar{p}$) est un difféomorphisme alors l'observateur grand gain peut être appliqué au bioprocédé.

2.4 Sur l'observateur de Deza et al.

2.4.1 Estimateur Kalman étendu continu-continu

Nous allons revenir sur l'observateur présenté par Deza et al. (1992). La stabilité d'un estimateur Kalman étendu continu-continu et continu-discret y est présenté. Dans sa thèse, Viel (1994) améliore le premier résultat et donne une meilleure explication de la démonstration de la convergence de cet estimateur. Pour plus de clarté, nous allons prendre la classe de système considérée par Deza et al.. Ce sont les systèmes non linéaires mono sortie localement uniformément observable affines en la commande. Ils se mettent sous la forme canonique :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \tilde{\varphi}(x) + u \bar{\varphi}(x) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.38)$$

où A est la matrice anti-schift, $\tilde{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ sont triangulaires et globales Lipschitz. Ce système vérifie les conditions du théorème 2.2.1. Ils considèrent une matrice symétrique définie positive Q , une constante

$r > 0$ et une matrice $n \times n$ de gain $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\theta} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\theta^{n-1}} \end{bmatrix}$. Ils notent $Q_\theta = \theta^2 \Delta^{-1} Q \Delta$, $\tilde{\varphi}^* = \frac{d\tilde{\varphi}}{dx}$ et

$\bar{\varphi}^* = \frac{d\bar{\varphi}}{dx}$. Alors

Théorème 2.4.1 (Deza et al. (1992)) Pour θ assez grand, le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \tilde{\varphi}(\hat{x}) + \bar{\varphi}(\hat{x})u - S^{-1}C^T r^{-1}(C\hat{x} - y) \\ \dot{\hat{S}} &= -S Q_\theta S - (A + \tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \bar{\varphi}^*(\hat{x})u)^T S - S(A + \tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \bar{\varphi}^*(\hat{x})u) + C^T r^{-1}C \end{cases} \quad (2.39)$$

est un estimateur Kalman étendu pour le système (2.38).

La démonstration se base sur la fonction de Lyapunov $\varepsilon^T S \varepsilon$, où $\varepsilon = \hat{x} - x$, et utilise les notations suivantes :

- $\Gamma = \tilde{\varphi}(\hat{x}) + \bar{\varphi}(\hat{x})u - \tilde{\varphi}(\hat{x}) - \bar{\varphi}(\hat{x}) - (\tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \bar{\varphi}^*(\hat{x})u)$;
- $\delta(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \Delta (\tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \bar{\varphi}^*(\hat{x})u) \Delta^{-1}$
- $z = \Delta \varepsilon$;
- $\tilde{S} = \theta \Delta^{-1} S \Delta^{-1}$.

Alors

$$\dot{\tilde{S}} = \theta \left(-\tilde{S} Q \tilde{S} - (A + \delta(t, \theta))^T S - S(A + \delta(t, \theta)) + C^T r^{-1}C \right) \quad (2.40)$$

$$\frac{d}{dt}(z^T \tilde{S} z) = -\theta z^T \tilde{S} Q \tilde{S} z + 2z^T \tilde{S} \Delta \Gamma - \frac{\theta}{r} z^T C^T C z \quad (2.41)$$

Il s'agit maintenant de majorer le terme positif dans l'équation de la dérivée de la fonction de Lyapunov. En utilisant les propriétés que les fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$ sont global Lipschitz et triangulaire, et que la commande est bornée $|u(t)| \leq u_{\max}$, alors nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} |z^T \tilde{S} \Delta \Gamma| &\leq \|z^T \tilde{S}\| \|\Delta \Gamma\| \\ &\leq \|z^T \tilde{S}\| P(\theta) \|z\| \\ &\leq P(1/\theta) B(\tilde{S}) z^T \tilde{S} z \end{aligned}$$

où $P(1/\theta)$ est un polynôme fonction de θ^{-1} , des constantes de Lipschitz et de $u_{\max}$; $B(\tilde{S}) = \frac{\lambda_{\max}(\tilde{S})}{\lambda_{\min}(\tilde{S})}$. Il faut donc majorer ces deux termes. Par construction, $P(\theta)$ est une fonction décroissante lorsque θ croît. Pour pouvoir majorer $B(\tilde{S})$ il faut montrer que $\tilde{S}$ est bornée. En posant $\bar{S}(t) = \tilde{S}(t/\theta)$, il invoque un résultat classique de la bornitude de l'équation de Ricatti donné dans Jazwinsky (1970) (on discutera sur cette bornitude dans la section suivante). Ainsi en posant $F(t) = A - \delta(t/\theta, \theta)$, il existe $\theta_0 > 0, \exists T > 0, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0$ telles que $\forall \theta > \theta_0, \forall t \geq T$, l'équation de Ricatti

$$\dot{\bar{S}} = -\bar{S} Q \bar{S} - F^T \bar{S} - \bar{S} F + C^T r^{-1}C \quad (2.42)$$

est bornée comme suit :

$$c_1 I \leq \bar{S}(t) \leq c_2 I. \quad (2.43)$$

Par conséquent $B(\tilde{S}) \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}$ et comme $\exists \lambda = \frac{c_1}{\|\tilde{Q}^{-1}\|} > 0, \forall \theta$ telle que $\lambda \bar{S} \leq \bar{S} Q \bar{S}$, alors $\forall t \geq T$,

$$\frac{d}{dt}(z^T \tilde{S} z) \leq -\theta z^T \tilde{S} Q \tilde{S} z + 2z^T \tilde{S} \Delta \Gamma \quad (2.44)$$

$$\leq \left(-\lambda \theta + 2P(1/\theta) \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \right) (z^T \tilde{S} z) \quad (2.45)$$

d'où en choisissant θ assez grand, la fonction de Lyapunov décroît exponentiellement vers 0.

□

2.4.2 Sur la bornitude de l'équation de Ricatti

Afin d'appliquer cet observateur, il serait utile de connaître les valeurs que peut prendre θ . Il faut donc avoir une idée sur les constantes c_1, c_2, λ et la majoration de $P(1/\theta)$. Une première majoration de $P(\theta)$ est

$$P(1/\theta) \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\theta^{i-j}} \right) \bar{L} u_{\max} + \frac{1}{\theta^{n-i}} \tilde{L} \right) + \bar{L} u_{\max} + \tilde{L} \right) \|z\| \quad (2.46)$$

où n est la dimension du vecteur d'état, $\bar{L}$, respectivement $\tilde{L}$, est la constante de Lipschitz de $\bar{\varphi}$, respectivement de $\tilde{\varphi}$. Cette majoration peut être faite dès que $\theta \geq 1$, avec L la plus grande des constantes de Lipschitz des fonction $\tilde{\varphi}$ et $\bar{\varphi}$:

$$P(\theta) \leq \frac{1}{2} L \left(u_{\max} n^2 + (u_{\max} + 2) n + u_{\max} + 1 \right). \quad (2.47)$$

Le problème est la détermination des constantes c_1 et c_2 . En effet la référence sur le livre de Jazwinsky (1970), nous ramène à la section 7.7 «Bounds and Stability - Continuous Filter» pages 243–244. Cette section fait référence aux lemmes 7.1 et 7.2 sur la bornitude de l'équation de Ricatti discrète et dit que le même principe peut être employé. Viel (1994) ajoute comme référence le livre de Bucy et Joseph (1968) où une démonstration est faite. On considère l'équation de Ricatti

$$\dot{P} = F P + P F^T - P H^T R^{-1} H P + Q \quad (2.48)$$

avec $P(t_0) = P_0$ matrice symétrique positive, et où $F(t), H(t), R(t), Q(t)$ sont supposés continus et pour tout $t \geq 0$, $Q(t) \geq 0$ et $R(t) > 0$. L'équation admet une solution, définie sur $[0, +\infty[$, $P(t)$ et telle que $P(t) \geq 0$. On note $\Phi(t, t_0)$ la matrice résolvante de $\dot{\Pi} = F \Pi$. Avec $\Phi(t_0, t_0) = I$, elle est solution de

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = F(t) \Phi(t, t_0). \quad (2.49)$$

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= F(t) x \\ y &= H(t) x \end{cases} \quad (2.50)$$

Si ce système est uniformément observable sur l'intervalle de temps $[0, T]$, alors il existe quatre constantes positives (a_1, a_2, b_1, b_2) telles que

$$a_1 I \leq \int_{t-T}^t \Phi^T(\tau, t_0) H^T R^{-1} H \Phi(\tau, t_0) d\tau \leq b_1 I \quad (2.51)$$

$$a_2 I \leq \int_{t-T}^t \Phi(t, \tau) Q \Phi^T(t, \tau) d\tau \leq b_2 I \quad (2.52)$$

En notant

$$C_R(t, t-T) = \int_{t-T}^t \Phi^T(\tau, t_0) H^T R^{-1} H \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (2.53)$$

et

$$W_Q(t, t-T) = \int_{t-T}^t \Phi(t, \tau) Q \Phi^T(t, \tau) d\tau \quad (2.54)$$

le lemme 5.4 (Bucy et Joseph, 1968) affirme que

$$P(t) \leq W_Q^{-1}(t, t-T) + C_R(t, t-T), \quad (2.55)$$

d'où à partir des inégalités (2.51) et (2.52) on prétend démontrer l'encadrement de $P(t)$ et, par conséquent celui de $S(t) = P^{-1}(t)$:

$$\frac{a_2}{1 + a_2 b_1} \leq P(t) \leq \frac{1 + a_1 b_2}{a_1}. \quad (2.56)$$

Le problème est que l'inégalité (2.55) n'est pas vraie. Voici un contre exemple : Soient $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $R = 1$. Nous sommes en présence d'un système linéaire stationnaire. Il est évident que l'équation (2.50) est uniformément observable. Par un logiciel de calcul formel, nous pouvons calculer $P(t)$ vérifiant l'équation de Ricatti (2.48) en faisant la remarque que $P = Y X^{-1}$ avec X et Y vérifiant le système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F^T & H^T R^{-1} H \\ Q & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

où $X(0) = I$ et $Y(0) = P(0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Nous verrons que pour une constante $a > 0$ prise suffisamment grande et pour un temps donné, l'inégalité (2.55) n'est pas vérifiée. Un calcul permet d'exprimer W_Q et C_R :

$$W_Q(t, t-T) = \begin{bmatrix} T & -\frac{T^2}{2} \\ -\frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$C_R(t, t-T) = \begin{bmatrix} 2T + \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

L'inégalité (2.55) affirme que la matrice $P - W_Q^{-1} - C_R$ est négative. Or pour $T = 1$, $t = 1.01$ et $a = 150$ alors un terme de la diagonale de cette matrice est strictement positif.

Donc cette inégalité n'est pas vraie, et on ne peut pas l'utiliser pour définir les bornes supérieures et inférieures de la matrice $\bar{S}$.

L'erreur dans la démonstration de Bucy et Joseph peut venir du fait qu'on suppose que si $A \leq B$, avec A et B des matrices symétriques positives, alors ceci entraîne que $A^2 \leq B^2$. Prenons par exemple $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 20 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. Il est clair que $A \leq B$, mais $A^2 \not\leq B^2$.

Donc l'inégalité (2.55) est fausse, cependant il est possible de majorer grossièrement la solution de l'équation de Ricatti, mais il serait souhaitable de trouver une majoration plus fine. On peut montrer que

$$P(t) \leq C_R^{-1}(0, T) + K(0, T) \quad (2.60)$$

où

$$K(0, T) = \int_0^T \Phi^T(0, \tau) V(\tau) C_R^{-1}(0, \tau) d\tau \quad (2.61)$$

et

$$V(\tau) = \int_\tau^T \Phi^T(\sigma, 0) H^T(\sigma) R^{-1}(\sigma) H(\sigma) \Phi(\sigma, 0) d\sigma. \quad (2.62)$$

T étant fixé et fini, $C_R(0, T)$ étant borné par les inégalités (2.51), $K(0, T)$, fonction continue sur un intervalle de temps fixe, peut être borné en prenant les "sup" et les "min" des fonctions Φ , C_Q et V , alors $P(t)$ est borné mais les bornes sont très difficilement identifiables.

2.5 Observateurs continu-discrets

2.5.1 Introduction

Jusqu'à présent nous avons considéré des estimateurs d'état basés sur les sorties disponibles en temps continu. Dans la pratique, les mesures sont rarement disponibles en temps continu. Ce cas est courant dans les bioprocédés (Busawon, 1996; Lucena *et al.*, 1995).

Comme les procédés sont quasi continus, une approche consiste à discrétiser le modèle mathématique obtenu et à appliquer un observateur discret (Grizzle et Moraal, 1990b; Grizzle et Moraal, 1990a; Ciccarella *et al.*, 1993; Lee et Nam, 1991; Ciccarella *et al.*, 1995; Moraal et Grizzle, 1995). Une autre alternative consiste à supposer que l'intervalle de temps entre deux mesures est négligeable par rapport à la dynamique du système.

Finalement Deza *et al.* (1992) ont remis au goût du jour l'utilisation d'observateurs continu-discrets. Cette idée d'observateur continu-discret provient de la théorie du filtrage (Jazwinsky, 1970; Labarrere *et al.*, 1988) et le principe est comme suit : une estimation des états du système est donnée en temps continu, alors que les mesures ne sont disponibles qu'en temps discret.

Considérons les systèmes non linéaires de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (2.63)$$

munis d'une équation d'observations faites aux instants t_i , $i \in \mathbb{N}$

$$y(t_i) = h(x(t_i)), \quad y \in \mathbb{R}^p \quad (2.64)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Vu les remarques faites précédemment, un observateur continu-discret s'écrit comme suit pour chaque pas i :

1. Entre deux instants de mesures, t_i et t_{i+1} , l'estimateur est une recopie du modèle du système initialisé par la condition initiale $x(t_i)$, et pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$ on a :

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)). \quad (2.65)$$

L'intégration numérique donnera une estimation de l'état du système à l'instant t_{i+1} . Cette estimation est notée $\hat{x}^-(t_{i+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{i+1}, t < t_{i+1}} \hat{x}(t)$.

2. À l'instant t_{i+1} , nous avons la mesure $y(t_{i+1}) = h(x(t_{i+1}))$ et l'estimation de l'état $\hat{x}^-(t_{i+1})$. Il s'agit à partir de ces informations de donner une nouvelle condition initiale pour le système (2.65) pour $t \in [t_{i+1}, t_{i+2}[$. Cette nouvelle condition initiale ($\hat{x}(t_{i+1})$) est donnée par l'équation :

$$\hat{x}(t_{i+1}) = \hat{x}^-(t_{i+1}) + g_i(\hat{x}^-(t_{i+1}), y(t_{i+1})). \quad (2.66)$$

où $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Cette fonction g doit être choisie telle que le système (2.65)-(2.66) vérifie certaines propriétés. Soit l'erreur d'estimation $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, on désire que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t)\| = 0$ et ce pour tout t . Ceci est possible si on arrive à démontrer que $\lim_{t_i, i \rightarrow \infty} \|\varepsilon(t_i)\| = 0$ en choisissant correctement la fonction g_i et en utilisant des propriétés sur les fonctions f et h .

Généralement on demandera que la fonction f soit Lipschitz et que la fonction g s'écrit sous la forme $K[h(\hat{x}(t_i)) - y(t_i)]$ où la matrice K peut être temps dépendante. En résumé, un observateur continu-discret s'écrit en considérant le système (2.63) et les mesures (2.64), pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) \\ \hat{x}(t_{i+1}) &= \hat{x}(t_{i+1}) - K[h(\hat{x}^-(t_{i+1})) - y(t_{i+1})]. \end{cases} \quad (2.67)$$

2.5.2 Un observateur continu-discret de type Luenberger

Pour en illustrer le fonctionnement, nous allons donner un observateur continu-discret de type Luenberger pour les systèmes linéaires stationnaires avec équation d'observation discrète de période T_s :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A : n \times n, B : n \times m, \\ y(kT_s) &= Cx(kT_s), & y \in \mathbb{R}^p, C : p \times n. \end{cases} \quad (2.68)$$

Théorème 2.5.1 *Si la paire $(\exp[AT_s], C \exp[AT_s])$ est observable alors il existe une matrice K telle que le système*

$$\begin{cases} y(k T_s) &= C x(k T_s) \\ \hat{x}(k^+ T_s) &= \hat{x}(k^- T_s) - K [C \hat{x}(k^- T_s) - y(k T_s)] \\ \hat{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \end{cases} \quad (2.69)$$

pour tout $t \in [k T_s, (k+1) T_s[$, $\forall k \in \mathbb{N}$, est un estimateur d'état pour le système (2.68) dont l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers 0.

Preuve :

Écrivons l'équation d'erreur d'estimation avec $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, $\varepsilon_k = \hat{x}_k - x_k$ et $\varepsilon_k^- = \hat{x}_k^- - x_k$ pour $t \in [k T_s, (k+1) T_s[$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \varepsilon_k &= [I - K C] \varepsilon_k^- \\ \dot{\varepsilon}(t) &= A \varepsilon(t) \end{cases} \quad (2.70)$$

Comme $\varepsilon(t) = \exp[A(t - k - 1) T_s] \varepsilon_{k-1}$ pour $t \in [k T_s, (k+1) T_s[$, alors

$$\varepsilon_k = [I - K C] \varepsilon_k^- \quad (2.71)$$

$$= [\exp[AT_s] - K C \exp[AT_s]] \varepsilon_{k-1}. \quad (2.72)$$

Puisque par hypothèse la paire $(\exp[AT_s], C \exp[AT_s])$ est observable, alors il existe K telle que la matrice $[\exp[AT_s] - K C \exp[AT_s]]$ a tous ses pôles compris entre 0 et 1. Ceci implique la convergence de la suite ε_k et de $\varepsilon(t)$.

□

Nous verrons un exemple de simulation dans la section 4.2.

2.5.3 Observateur continu-discret de Deza *et al.*

Analogiquement à l'estimateur continu-continu à la section 2.4.1, Deza *et al.* (1992) proposent une extension en continu-discret. Celui-ci est obtenu par une discrétisation d'Euler de l'observateur continu-continu (2.39) en séparant la partie temps continue et la partie temps discrète.

On considère le système non linéaire (2.38) et l'équation d'observations avec T_s la période de mesure :

$$y(k T_s) = y_k = C x(k T_s) = C x_k. \quad (2.73)$$

L'estimateur s'écrit en deux parties : une équation de correction à l'instant de mesure, et une équation de propagation :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + \tilde{\varphi}(\hat{x}) + \tilde{\varphi}(\hat{x}) u \\ \dot{S} &= -S Q_\theta S - (A + \tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \tilde{\varphi}^*(\hat{x}))^T S - S (A + \tilde{\varphi}^*(\hat{x}) + \tilde{\varphi}^*(\hat{x})) \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- - (S_{k+1})^{-1} C^T r^{-1} T_s (C \hat{x}_{k+1}^- - y_{k+1}) \\ S_{k+1} &= S_{k+1}^- + C^T r^{-1} C T_s \end{cases} \end{cases} \quad (2.74)$$

Théorème 2.5.2 *Sous les mêmes hypothèse que le théorème précédent et pour une période T_s assez petite, il existe un intervalle $[\theta_0, \theta_1]$ tel que pour tout $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ le système (2.74) est un observateur à convergence exponentiel.*

Le démonstration suit la même voie que celle du théorème 2.4.1 et donc utilise toujours cette majoration de l'équation de Ricatti. Ainsi pour un système donné, il est très difficile de connaître une approximation des valeurs de θ_0 et de θ_1 .

2.5.4 Un observateur non linéaire continu-discret

Nous proposons ici un nouvel observateur continu-discret sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) \\ \hat{x}(t_{i+1}) &= \hat{x}^-(t_{i+1}) - K [C \hat{x}^-(t_{i+1}) - y(t_{i+1})] \end{cases} \quad (2.75)$$

où K est une matrice constante $\in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{R})$. Cet estimateur est alors basé sur une structure particulière du système non linéaire. Nous verrons ensuite que cette structure se retrouve généralement sous certaines conditions dans les bioprocédés.

Nous considérons donc les systèmes non linéaires

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m \quad (2.76)$$

munis d'une équation d'observations temps discret

$$y(t_i) = C x(t_i) \quad (2.77)$$

où les instants de mesure vérifient pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 < T_{\min} \leq t_{i+1} - t_i \leq T_{\max} < \infty$. Le résultat nécessite trois hypothèses.

Hypothèse 2.5.1 *La fonction $f(x, u)$ est globalement Lipschitz par rapport à x uniformément en u . C'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha_f > 0$ telle que*

$$\|f(\tilde{x}, u) - f(\bar{x}, u)\| \leq \alpha_f \|\tilde{x} - \bar{x}\|. \quad (2.78)$$

Cette hypothèse permet de garantir la complétion du système : entre deux instants de mesure le système ne va pas exploser. L'hypothèse suivante exprime la particularité désirée du système.

Hypothèse 2.5.2 *Soit le système (2.76). Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}(n - p, n, \mathbb{R})$ telle que*

$$1. \quad M \cdot f(x(t), u(t)) = -g(u(t)) (M x(t) + v_0);$$

$$2. \quad \text{si } P = \begin{bmatrix} C \\ M \end{bmatrix}, \text{ alors } \text{rang}(P) = n.$$

où $g(u(t)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et v_0 est un vecteur de dimension p .

Si on pose $v(t) = M x(t) + v_0$, alors $\dot{v}(t) = -g(u(t))$. Ainsi cette hypothèse signifie qu'il existe suffisamment d'intégrales premières de la dérive du système (2.76), et permet de diviser ce système en deux sous-systèmes dont l'un est détectable et l'autre est observé. La fonction g dépend de la commande et doit vérifier :

Hypothèse 2.5.3 *Entre deux instants de mesures faites à t_i et à t_{i+1} , il existe une constante $\beta > 0$ telle que la loi de commande appliquée vérifie pour tout $i \geq 0$*

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u(\sigma)) d\sigma \geq \beta > 0. \quad (2.79)$$

Soit alors, pour $i \in \mathbb{N}$, $\rho_i = \exp\left(-\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u(\sigma)) d\sigma\right)$, nous avons $\rho_{\max} = \exp(-\beta)$ et $0 < \rho_i \leq \rho_{\max} < 1$. Par exemple, l'hypothèse 2.5.3 est vraie dès que la fonction $g(u)$ est définie positive.

Maintenant que les hypothèses sont clairement définies et en définissant I pour la matrice identité et 0 pour la matrice dont tous les coefficients sont nuls, nous avons :

Théorème 2.5.3 *Si les hypothèses 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3 sont vérifiées, alors il existe deux constantes $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$, $0 < \theta_{\min} < \theta_{\max}$, telles que, pour tout $\theta \in]\theta_{\min}, \theta_{\max}[$, le système (2.75) avec la matrice de gain*

$$K = \theta P^{-1} \begin{bmatrix} I_{p \times p} \\ 0_{n-p \times p} \end{bmatrix} \text{ est un observateur pour le système (2.76)-(2.77).}$$

La vitesse de convergence de la norme de l'erreur d'estimation converge globalement exponentiellement vers 0, mais la dynamique est donnée par la fonction $g(u(t))$.

Preuve : Tout d'abord d'après l'hypothèse 2.5.2-(2), on peut faire le changement de variables

$$z(t) = P x(t). \quad (2.80)$$

Ainsi décomposons le vecteur $z(t)$, de dimension n , en deux parties telles que $z(t) = \begin{bmatrix} z_a(t) = C x(t) \\ z_b(t) = M x(t) \end{bmatrix}$.

Nous pouvons alors réécrire le système et l'observateur comme suit :

$$\dot{z} = P \dot{x} = P f(P^{-1} z, u) = f_z(z, u) = \begin{bmatrix} f_a(z_a, z_b, u) \\ f_b(z_a, z_b, u) \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Dans ces nouvelles coordonnées avec le gain PK du théorème 2.5.3, l'observateur (2.75) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[, \forall i \in \mathbb{N}, \\ & \begin{cases} \begin{cases} \dot{\hat{z}}_a(t) &= f_a(\hat{z}_a(t), \hat{z}_b(t), u(t)) \\ \dot{\hat{z}}_b(t) &= f_b(\hat{z}_a(t), \hat{z}_b(t), u(t)) - g(u(t)) (\hat{z}_b(t) + v_0) \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{z}_a(t_{i+1}) &= \hat{z}_a^-(t_{i+1}) - \theta (\hat{z}_a^-(t_{i+1}) - y(t_{i+1})) \\ \hat{z}_b(t_{i+1}) &= \hat{z}_b^-(t_{i+1}). \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Soient les erreurs d'estimation $\varepsilon_z(t) = \hat{z}(t) - z(t)$, $\varepsilon_a(t) = \hat{z}_a(t) - z_a(t)$ et $\varepsilon_b(t) = \hat{z}_b(t) - z_b(t)$. Alors $\hat{z}_a^-(t_i) - z_a(t_i) = \varepsilon_a^-(t_i)$, $\hat{z}_b^-(t_i) - z_b(t_i) = \varepsilon_b^-(t_i)$ et l'équation d'erreur est pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_z(t) = f_z(\hat{z}(t), u(t)) - f_z(\hat{z}(t) - \varepsilon_z(t), u(t)) \\ \begin{cases} \varepsilon_a(t_{i+1}) &= (1 - \theta) \varepsilon_a^-(t_{i+1}) \\ \varepsilon_b(t_{i+1}) &= \varepsilon_b^-(t_{i+1}). \end{cases} \end{cases} \quad (2.83)$$

Entre deux instants de mesure ($\forall t \in [t_i, t_{i+1}[$), nous avons

$$\|\varepsilon_z(t)\| \leq \|\varepsilon_z(t_i)\| + \int_{t_i}^t \|f_z(\hat{z}(s), u(s)) - f_z(\hat{z}(s) - \varepsilon_z(s), u(s))\| ds. \quad (2.84)$$

Selon l'hypothèse 2.5.1, la fonction $f(x, u)$ est globalement Lipschitz en x uniformément par rapport à u . Ceci est aussi valable pour la fonction $f_z(x, u)$ avec la constante de Lipschitz $\alpha_z = \|P\| \|P^{-1}\| \alpha_f$. Rappelons rapidement le lemme de Gronwall (Vidyasagar, 1993) :

Lemme 2.5.1 Soient une fonction continue $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, et deux constantes $b, c \geq 0$. Si

$$g(t) \leq b + \int_0^t c g(\tau) d\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.85)$$

alors

$$g(t) \leq b \exp(ct), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.86)$$

En utilisant ce lemme, nous majorons $\varepsilon_z(t)$ par

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_z(t)\| &\leq \|\varepsilon_z(t_i)\| \exp(\alpha_z(t - t_i)) \\ &\leq \exp(\alpha_z T_{\max}) \|\varepsilon_z(t_i)\|. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ainsi $\varepsilon_z(t)$ converge vers zéro si $\varepsilon_z(t_i)$ converge vers zéro aussi. Nous allons maintenant démontrer qu'il existe une constante γ , $0 < \gamma < 1$, telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\|\varepsilon_z(t_{i+1})\| \leq \gamma \|\varepsilon_z(t_i)\|$.

Nous utilisons l'hypothèse 2.5.2-(1), c'est-à-dire qu'il existe une matrice M telle que si $v(t) = M x(t) + v_0$ alors $\dot{v}(t) = M \dot{x}(t) = -g(u(t)) v(t)$. Comme $M x(t) = z_b(t)$, $M \hat{x}(t) = \hat{z}_b(t)$, $M (x(t) - \hat{x}(t)) = M \varepsilon_x(t) = \varepsilon_b(t)$, alors il en résulte que

$$\dot{\varepsilon}_b(t) = -g(u(t)) \varepsilon_b(t). \quad (2.88)$$

intégrons cette équation entre deux instants t_0 et t :

$$\varepsilon_b(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t g(u(s)) ds \right) \varepsilon_b(t_0) \quad (2.89)$$

par conséquent pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$

$$\|\varepsilon_b(t)\| \leq \exp \left(- \int_{t_i}^t g(u(s)) ds \right) \|\varepsilon_b(t_i)\|. \quad (2.90)$$

et plus particulièrement

$$\|\varepsilon_b^-(t_{i+1})\| \leq \rho_{\max} \|\varepsilon_b(t_i)\|, \quad (2.91)$$

Comme $\varepsilon_b(t_i) = \varepsilon_b^-(t_i)$, nous avons la majoration suivante

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_b(t_{i+1})\| &\leq \rho_{\max} \|\varepsilon_b(t_i)\| \\ &\leq \rho_{\max} \|\varepsilon_z(t_i)\|. \end{aligned} \quad (2.92)$$

De plus $\|\varepsilon_a(t)\| \leq \|\varepsilon_z(t)\|$, il vient

$$\|\varepsilon_a^-(t_{i+1})\| \leq \exp(\alpha_z T_{\max}) \|\varepsilon_z(t_i)\|. \quad (2.93)$$

Par les équations (2.83),

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_a(t_{i+1})\| &\leq |1 - \theta| \|\varepsilon_a^-(t_{i+1})\| \\ &\leq |1 - \theta| \exp(\alpha_z T_{\max}) \|\varepsilon_z(t_i)\|. \end{aligned} \quad (2.94)$$

et comme $\|\varepsilon_z(t_i)\|^2 = \|\varepsilon_a(t_i)\|^2 + \|\varepsilon_b(t_i)\|^2$, alors

$$\|\varepsilon_z(t_{i+1})\| \leq \gamma \|\varepsilon_z(t_i)\| \quad (2.95)$$

où la constante $\gamma = \left(|1 - \theta|^2 \exp(2\alpha_z T_{\max}) + \rho_{\max}^2 \right)^{1/2}$.

Nous devons maintenant choisir la constante θ telle que $\gamma < 1$. En définissant

$$\theta_{\min} = 1 - \left(1 - \rho_{\max}^2 \right)^{1/2} \exp(-\alpha_f \|P\| \|P^{-1}\| T_{\max}) > 0 \quad (2.96)$$

et

$$\theta_{\max} = 1 + \left(1 - \rho_{\max}^2 \right)^{1/2} \exp(-\alpha_f \|P\| \|P^{-1}\| T_{\max}) > 1, \quad (2.97)$$

un choix de $\theta \in]\theta_{\min}, \theta_{\max}[$ permet de conclure à la convergence globale exponentielle de $\|\varepsilon_z(t_i)\|$ puisque $0 < \gamma < 1$. Par la majoration (2.87) et le changement de variable effectué, on a finalement $\|\varepsilon_x(t)\|$ converge vers 0 globalement asymptotiquement à vitesse exponentielle.

□

La vitesse de convergence est maximum lorsque γ est minimum, c'est-à-dire lorsque $\theta = 1$. On peut choisir une valeur de θ légèrement différent de 1 pour effectuer un "filtrage" des mesures.

2.5.5 Application aux bioprocédés

Nous allons maintenant voir que ce type d'observateur continu-discret s'applique à une classe de bioprocédés modélisés sous la forme

$$\dot{\xi} = K\varphi(\xi) - D(\xi - S_{\text{in}}). \quad (2.98)$$

Nous supposons que les mesures disponibles sont sous la forme

$$y(t_i) = C\xi(t_i), \quad y \in \mathbb{R}^p. \quad (2.99)$$

Supposons que le rang de la matrice de rendement est $\text{rang}(K) = l$, alors il existe une matrice M de dimension $(n - l) \times n$ et de rang $n - l$ telle que le produit $MK = 0$. Nous pouvons alors poser $v(t) = M\xi(t) - MS_{\text{in}}$, et il vient

$$\dot{v}(t) = M\dot{\xi}(t) \quad (2.100)$$

$$= MK\varphi(\xi) - MD(t)(\xi - S_{\text{in}}) \quad (2.101)$$

$$= -D(t)v(t) \quad (2.102)$$

et ainsi l'hypothèse 2.5.2-(1) est vérifiée. De plus si $\text{rang}[C, M]^T = n$, alors on peut extraire une matrice $P = [\tilde{C}, \tilde{M}]^T$ de rang n telle que l'hypothèse 2.5.2-(2) est aussi vérifiée.

La commande en dilution est par définition positive. En garantissant une valeur minimale $0 < D_{\min} \leq D(t)$, alors l'hypothèse 2.5.3 est vérifiée. Comme cette commande dans la pratique est bornée, on peut montrer que l'état vit dans un domaine invariant. Dans ce domaine, les vitesses spécifiques de croissance φ sont continues et bornées. Elles sont locales Lipschitz partout. On peut donc construire une extension qui les rendent globales Lipschitz.

Finalement avec $\mathbf{I}_{\tilde{C}}$ la matrice identité de dimension $\dim(\tilde{C}) \times \dim(\tilde{C})$ et $0_{\tilde{C}}$ la matrice à coefficients nuls de dimension $(n - \dim(\tilde{C})) \times \dim(\tilde{C})$, le système suivant pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}(t) &= K\varphi(\hat{\xi}) - D(\hat{\xi} - S_{\text{in}}) \\ \hat{\xi}(t_{i+1}) &= \hat{\xi}^-(t_{i+1}) - \theta \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\tilde{C}} \\ 0_{\tilde{C}} \end{bmatrix} [C\hat{\xi}^-(t_{i+1}) - y(t_{i+1})] \end{cases} \quad (2.103)$$

est un observateur continu discret pour le bioprocédé.

2.6 Conclusion

Ce chapitre était consacré aux estimateurs d'état. Un rappel sur les principales définitions et les principaux observateurs existants a été fait. Nous avons mis plus en avant l'application de ces observateurs pour les bioprocédés.

Ces observateurs, tous à convergence exponentielle, se basent sur une disponibilité des sorties en temps continu. Mais ce n'est pas le cas dans la pratique. Deza *et al.* (1992) ont réintroduit les observateurs continu-discrets : une estimation de l'état est donnée en temps continu par l'intégration du modèle mathématique du procédé considéré; cette estimation est réinitialisée dès lors que les mesures sont disponibles.

Nous avons repris l'observateur Kalman étendu proposé par Deza pour connaître précisément les majorations afin de déterminer un paramètre de gain. Mais la démonstration de leurs théorèmes se base sur un résultat erroné donné dans Bucy et Joseph (1968) (on a donné un contre exemple). Par contre, le principe est juste : il suffit d'avoir la bornitude d'une équation de Ricatti. Nous montrons que c'est le cas, mais la majoration n'est pas assez fine. Ainsi pour un système donné, il est quasi impossible de donner

les conditions exacts (choix du gain θ dans les théorèmes 2.4.1 et 2.5.2) pour que les observateurs (2.39) et (2.74) fonctionnent.

En reprenant l'idée d'observateurs continu-discrets, nous avons présenté un exemple linéaire pour en comprendre le principe. Puis nous avons proposé un nouvel observateur continu-discret qui est assez simple à implémenter. Il se base sur une particularité du système : intégrales premières à dérive dissipative.

Nous avons aussi montré que sous certaines conditions réalistes, cet observateur peut être appliqué aux bioprocédés.

Chapitre 3

Sur le Principe de Séparation

3.1 Introduction

L'origine du terme «Principe de Séparation» vient de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires autonomes par commande par retour d'états estimés. Soit un procédé modélisé selon le formalisme d'état par des équations différentielles ordinaires. Soit une commande par retour d'état qui stabilise le procédé considéré. Pour des raisons techniques, de coûts, ..., la connaissance de tout l'état n'est pas disponible. On ne peut alors pas calculer cette loi de commande stabilisante. Une issue réside dans la construction d'un estimateur des variables d'état : un observateur. La question fondamentale qui se pose est la suivante : est-ce que la commande calculée à partir des estimations stabilise encore le procédé ainsi bouclé? Pour les systèmes non linéaires ce n'est généralement pas le cas.

Dans ce chapitre, quelques rappels de stabilité des systèmes non linéaires en temps continu et en temps discret sont d'abord donnés. Ensuite, un état de l'art sur le principe de séparation est fait. Et enfin, trois résultats sont donnés. Le premier ressemble à celui de Vidyasagar (1980) mais permet de mieux comprendre les deux résultats suivants. Ceux-ci sont entièrement nouveaux et traitent le cas de la stabilisation avec des estimations de l'état issues d'observateurs continu-discrets.

3.2 Rappels sur la stabilité des systèmes non linéaires

3.2.1 Systèmes non linéaires temps continu

Soient les systèmes non linéaires non autonomes de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (3.1)$$

où $t \geq t_0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue. Dans toute cette section, nous considérons que $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Le point d'équilibre $\bar{x}$ du système (3.1) est défini par $f(t, \bar{x}) = 0$, $\forall t \geq t_0$. Nous supposons que le point d'équilibre est unique et que $\bar{x} = 0$. Dans cette section, lorsque nous parlons de l'origine ($x = 0$) on entend l'unique point d'équilibre du système (3.1). Nous notons par $x(t, x_0, t_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ issue du système (3.1) initialisé au point x_0 à l'instant initial t_0 .

On peut définir les notions de stabilité en utilisant les fonctions appelées de classe K et de classe L, dont nous rappelons les définitions d'un point de vue local, respectivement global (Hahn, 1967; Vidyasagar, 1993).

Définition 3.2.1 Une fonction $\phi(r) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe K si $\phi(0) = 0$, si elle est continue et strictement croissante sur $0 \leq r \leq r_1 < \infty$, resp. $0 \leq r < \infty$.

Définition 3.2.2 Une fonction $\sigma(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite de classe L, si elle est continue, strictement décroissante sur $0 \leq s_0 \leq s < \infty$, resp. $0 \leq s < \infty$ et si $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = 0$.

Les trois définitions suivantes donnent les définitions de stabilité, d'attractivité et d'asymptotique stabilité. Ces théorèmes sont valables localement $\forall x_0 \in B_r$, c'est-à-dire pour un état initialisé dans une boule centrée en 0 et de rayon r . L'extension globale se fait aisément en remplaçant dans les théorèmes " $\forall x_0 \in B_r$ " par " $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ".

Définition 3.2.3 *L'origine est stable si et seulement si, quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une constante $d(t_0) > 0$ et une fonction, ϕ_{t_0} , de classe K telles que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \phi_{t_0}(\|x_0\|), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_{d(t_0)}. \quad (3.2)$$

Définition 3.2.4 *L'origine est attractive si et seulement si, quelque soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une constante $n(t_0) > 0$ et une fonction, σ_{t_0} de classe L telles que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \sigma_{t_0}(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_{n(t_0)}. \quad (3.3)$$

Nous avons *uniforme stabilité*, respectivement *uniforme attractivité*, de l'origine, si dans la définition 3.2.3 la constante d et la fonction ϕ , dans la définition 3.2.4 la constante n et la fonction σ , existent et sont indépendants de t_0 . Ainsi

Définition 3.2.5 *L'origine est uniformément asymptotiquement stable si et seulement si, il existe une constante $r > 0$, une fonction ϕ de classe K , et une fonction σ de classe L , telles que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \phi(\|x_0\|) \sigma(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_r. \quad (3.4)$$

Calculer explicitement la trajectoire du système (3.1) afin de démontrer l'asymptotique stabilité n'est évidemment pas aisé. C'est par des techniques dites de Lyapunov, n'utilisant que les équations différentielles et non pas une forme explicite de la solution, que nous pouvons analyser la stabilité de systèmes tels que (3.1). Nous donnons donc de nouvelles définitions de la stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 3.2.6 *L'origine est stable (au sens de Lyapunov) si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une constante $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ telle que*

$$\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.5)$$

Définition 3.2.7 *L'origine est instable si elle n'est pas stable.*

Définition 3.2.8 *L'origine est attractive si, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe un $\eta(t_0) > 0$, tel que*

$$\|x_0\| < \eta(t_0) \Rightarrow x(t, x_0, t_0) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

D'une part, la notion de stabilité garantit que la norme de la trajectoire du système reste bornée si nous l'initialisons proche de l'équilibre. D'autre part, l'attractivité assure "qu'à la fin" l'état du système atteint son état d'équilibre; mais rien ne garantit que nous ayons une stabilité comme définie ci-dessus. Ainsi donc, la notion d'asymptotique stabilité définie ci-dessus, permet d'assurer que la trajectoire d'un système converge vers un équilibre sans s'en s'éloigner trop.

Définition 3.2.9 *L'origine est asymptotiquement stable (AS) si elle est stable et attractive.*

Nous parlons d'uniforme stabilité, respectivement d'uniforme attractivité, si la constante δ dans la définition 3.2.6, respectivement la constante η dans la définition 3.2.8, ne dépend pas de l'instant initial t_0 . Bien sûr, pour que l'origine du système (3.1) soit uniformément asymptotiquement stable, il faut qu'elle soit uniformément stable et uniformément attractive. La propriété suivante est plus forte que celle d'uniforme asymptotique stabilité, puisque la vitesse de convergence y est définie.

Définition 3.2.10 *L'origine est exponentiellement stable s'il existe des constantes $r, a, b > 0$ telles que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq a \exp(-b(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_r. \quad (3.7)$$

Les définitions précédentes sont valables localement. Pour une utilisation globale, nous retiendrons les définitions suivantes.

Définition 3.2.11 *L'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable (GUAS) si*

1. *elle est uniformément stable;*
2. *et, pour toute paire de constantes positives M, ϵ avec M arbitrairement grand et ϵ arbitrairement petit, il existe un nombre $T = T(M, \epsilon) < \infty$ tel que*

$$\|x_0\| < M \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq T(M, \epsilon). \quad (3.8)$$

Définition 3.2.12 *L'origine est globalement exponentiellement stable (GES) s'il existe des constantes $a, b > 0$ telles que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq a \exp(-b(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

Deux théorèmes vont être donnés: le premier, appelé méthode directe ou 2^e méthode de Lyapunov, donne des conditions pour démontrer la globale exponentielle stabilité d'un système; le second, appelé méthode inverse, donne l'existence d'une fonction de Lyapunov lorsque nous sommes en présence d'un système globalement exponentiellement stable. Par abus, une fonction $V(t, x(t))$ est dite fonction de Lyapunov, si cette fonction est propre et définie positive :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{cases} V(t, x(t)) > 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \\ V(t, x(t)) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Théorème 3.2.1 *Le point d'équilibre du système (3.1) est globalement exponentiellement stable, s'il existe des constantes $a_1, a_2, a_3 > 0, p \geq 0$, et une fonction de classe C^1 , $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$:*

1. $a_1 \|x\|^p \leq V(t, x) \leq a_2 \|x\|^p$
2. $\dot{V}(t, x) = \nabla V(t, x) \cdot f(t, x(t)) + \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) \leq -a_3 V(t, x)$

Théorème 3.2.2 *Supposons que le point d'équilibre du système (3.1) soit globalement exponentiellement stable, et supposons que la fonction $f(t, x(t))$ soit de classe C^k , ($k \geq 1$) et qu'elle soit globale Lipschitz par rapport à x uniformément à t , alors il existe une fonction de Lyapunov de classe C^k , $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et des constantes $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$:*

1. $a_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq a_2 \|x\|^2$;
2. $\dot{V}(t, x) \leq -a_3 V(t, x)$;
3. $\|\nabla V(t, x)\| \leq a_4 \|x\|$.

D'autres résultats sur la stabilité asymptotique, locale ou globale, et sur la stabilité exponentielle locale se trouve dans le livre de Vidyasagar (1993). Les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 ont été énoncés puisqu'ils sont utilisés dans la section 3.4. Les démonstrations des deux théorèmes sont aussi disponibles dans le livre de Vidyasagar. Le théorème 3.2.2 se base sur le lemme de Gronwall.

3.2.2 Systèmes non linéaires temps discret

Les théorèmes précédents sont facilement transposés en temps discret. Le système discret suivant est considéré :

$$x_{k+1} = f_k(x_k) = f(k, x_k) \quad (3.10)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \geq 0$, et $f(.,.) : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le point d'équilibre est défini par $f(k, \bar{x}) = \bar{x}, \forall k \geq 0$. Nous considérons l'origine comme seul point d'équilibre du système (3.10), alors $f(k, 0) = 0, \forall k \geq 0$. Nous notons $p(k, x, k_0)$ la solution à l'instant $k \geq k_0$ du système (3.10) initialisé en x à l'instant

k_0 . D'où $p(k_0, x, k_0) = x$ et $p(k+1, x, k_0) = f(k, p(k, x, k_0))$. On peut montrer par récurrence que $p(k_1 + k_2, p(k_1, x, k_0), k_1) = p(k_1 + k_2, x, k_0)$.

Définition 3.2.13 *L'origine est globalement exponentiellement stable s'il existe des constantes $a > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que*

$$\|p(k, x, k_0)\| \leq a \|x\| \rho^{(k-k_0)}, \quad \forall k \geq k_0, k_0 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.11)$$

Théorème 3.2.3 (Vidyasagar (1993)) *Le point d'équilibre du système (3.10) est globalement exponentiellement stable s'il existe une fonction $V : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et des constantes $a_1, a_2, a_3 > 0$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 0$:*

1. $a_1 \|x\|^2 \leq V(k, x) \leq a_2 \|x\|^2$;
2. $\Delta V(k, x) = V(k+1, p(k+1, x, k)) - V(k, x) \leq -a_3 V(k, x)$.

Théorème 3.2.4 *Si l'origine est globalement exponentiellement stable, alors il existe une fonction V et des constantes $a_1, a_2, a_3 > 0$, telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geq 0$:*

1. $a_1 \|x\|^2 \leq V(k, x) \leq a_2 \|x\|^2$;
2. $\Delta V(k, x) \leq -a_3 V(k, x)$.

Preuve En effet, prenons comme fonction de Lyapunov $V(k, x) = \sum_{i=k}^{\infty} \|p(i, x, k)\|^2$. D'après la définition 3.2.13, nous avons $\|p(i, x, k)\| \leq a \|x\| \rho^{i-k}$. Nous pouvons alors encadrer la fonction de Lyapunov comme suit :

$$\|x\|^2 = \|p(k, x, k)\|^2 \leq V(k, x) \leq \sum_{i=k}^{\infty} a^2 \|x\|^2 \rho^{2(i-k)} \leq \frac{a^2}{1-\rho^2} \|x\|^2. \quad (3.12)$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x) &= V(k+1, p(k+1, x, k)) - V(k, x) \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \|p(i, p(k+1, x, k), k+1)\|^2 \right) - \left(\sum_{j=k}^{\infty} \|p(j, x, k)\|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \|p(i, x, k)\|^2 \right) - \left(\sum_{j=k}^{\infty} \|p(j, x, k)\|^2 \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \|p(i, x, k)\|^2 \right) - \|p(k, x, k)\|^2 \\ &\leq -\frac{1-\rho^2}{a^2} V(k, x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

□

3.3 Un état de l'art

Soit un système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

où $t \in \mathbb{R}^+$ désigne le temps, $x \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur commande, $y \in \mathbb{R}^p$ la sortie, et où A , respectivement B et C , est une matrice de dimension $n \times n$, respectivement $n \times m$ et $p \times n$. Sous des conditions de commandabilité (rang de la matrice $[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n$) il

existe une matrice F de dimension $m \times n$ telle que la matrice $[A - B F]$ soit Hurwitz (c'est-à dire que toutes les valeurs propres de cette matrice sont à partie réelle strictement négative). Alors la commande $u(t) = -F x(t)$ stabilise le système (3.14) au point $x = 0$, mais son calcul nécessite la connaissance du vecteur d'état. Généralement la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle du vecteur d'état ($p \leq n$). Dans le cas où le système est observable (rang de la matrice $[C, CA, \dots, CA^{n-1}]^T = n$), on peut construire un estimateur d'état linéaire sous la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) - K [C \hat{x}(t) - y(t)] \quad (3.15)$$

où $\hat{x}(t)$ est l'estimation du vecteur d'état $x(t)$, et l'erreur d'estimation est noté $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Si la matrice K , de dimension $n \times p$, est choisie telle que la matrice $[A - K C]$ soit Hurwitz, alors cette estimation converge globalement exponentiellement. On se propose alors de remplacer dans le calcul de la commande, le vecteur d'état par son estimé. Ceci est schématisé par la figure 3.1.

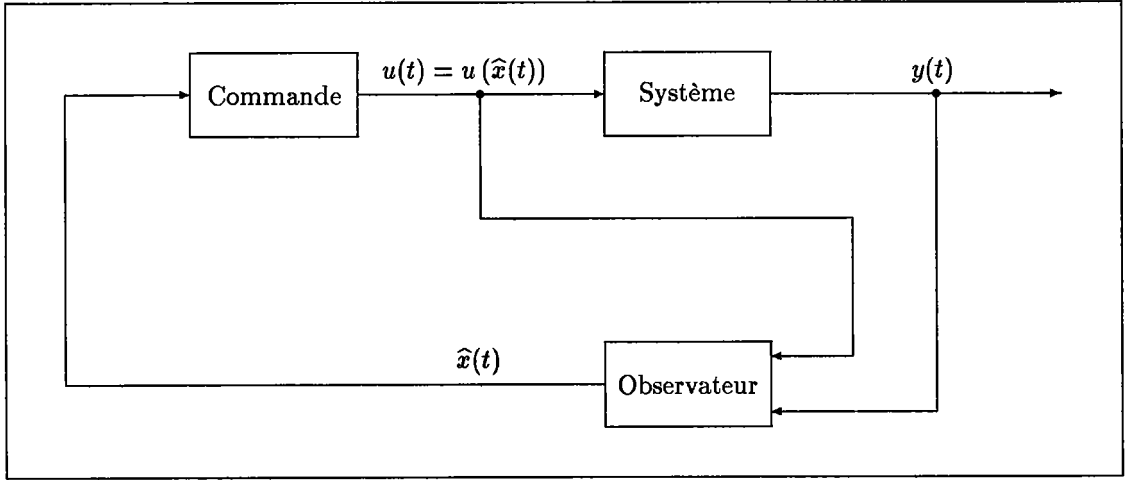


FIG. 3.1: Exemple de commande par retour d'état estimé

La question fondamentale qui se pose est : est-ce que le système ainsi bouclé est encore stabilisé? L'étude de la stabilité de ce système revient à l'étude de la stabilité de :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A - B F] & [-B F] \\ \mathbf{0}_{n \times n} & [A - K C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ou du système

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A - B F] & [-K C] \\ \mathbf{0}_{n \times n} & [A - K C] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Il est alors évident que la stabilité du système ainsi bouclé dépend uniquement de la stabilité du système bouclé sans état estimé ($[A - B F]$) et de la stabilité de l'observateur ($[A - K C]$). On peut donc concevoir séparément la commande et l'estimateur d'état, d'où le nom de principe de séparation.

Malheureusement ce principe n'est généralement pas vérifié pour les systèmes non linéaires généraux. Un des premiers résultats a été donné par Vidyasagar (1980). Il a étudié les cas de locale et globale, asymptotique et exponentielle stabilité par retour d'état estimé. On présente ici le cas de globale exponentielle stabilité. Il considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) = h(t, x(t)) \end{cases} \quad (3.18)$$

où f et h sont des fonctions continûment dérivables qui s'annulent lorsque tous leur arguments, excepté le temps t , s'annulent. Son théorème nécessite trois hypothèses et nous allons rappeler ce qu'il entend par *détectabilité faible* :

Définition 3.3.1 Le système (3.18) est dit faiblement détectable s'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($g(t, 0, 0, 0) = 0, \forall t \geq 0$) et une fonction $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifient la propriété suivante :

Il existe trois fonctions, ψ_1, ψ_2, ψ_3 de classe K telles que $\forall t \geq 0, \forall x, \hat{x}, u \in B_c$

$$\begin{aligned} \psi_1(\|\hat{x} - x\|) &\leq v(t, x, \hat{x}) \leq \psi_2(\|\hat{x} - x\|) \\ \text{et} \quad \frac{\partial v(t, x, \hat{x})}{\partial t} + \nabla_x v(t, x, \hat{x}) \cdot f(t, x, u) + \nabla_{\hat{x}} v(t, x, \hat{x}) \cdot g(t, \hat{x}, y, u) &\leq -\psi_3(\|\hat{x} - x\|). \end{aligned}$$

Ainsi si le système (3.18) est faiblement détectable, alors le système dynamique suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(t, \hat{x}(t), y(t), u(t)) \quad (3.19)$$

est un estimateur d'état du système (3.18).

Hypothèse 3.3.1 Il existe une commande $u_s(t, x(t)) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, continûment différentiable telle que, pour le système (3.18), le point $x(t) = 0$ soit globalement exponentiellement stable, et qui vérifie les propriétés suivantes pour tout $t \geq 0$:

1. $u_s(t, 0) = 0$;
2. $\|u_s(t, x(t))\| \leq \phi(\|x(t)\|), \forall x \in \mathbb{R}^n$ et où ϕ est une fonction de classe K .

Hypothèse 3.3.2 Le système (3.18) est faiblement détectable. Il existe deux constantes $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ telles que les trajectoires solution du système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u_s(t, \hat{x}(t))) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= g(t, \hat{x}(t), h(t, x(t)), u_s(t, \hat{x}(t))) \end{cases} \quad (3.20)$$

vérifient

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \alpha_1 \|\hat{x}(t_0) - x(t_0)\| \exp(-\alpha_2(t - t_0)). \quad (3.21)$$

Hypothèse 3.3.3 Soient

- $\eta_1 = \frac{\partial}{\partial x(t)} f(t, x(t), u_s(t, x(t)))$,
- $\eta_{21} = \frac{\partial}{\partial x(t)} f(t, x(t), u_s(t, \hat{x}(t)))$ et $\eta_{22} = \frac{\partial}{\partial x(t)} f(t, x(t), u_s(t, \hat{x}(t)))$,
- $\eta_{23} = \frac{\partial}{\partial x(t)} g(t, \hat{x}(t), h(t, x(t)), u_s(t, \hat{x}(t)))$ et $\eta_{24} = \frac{\partial}{\partial x(t)} g(t, \hat{x}(t), h(t, x(t)), u_s(t, \hat{x}(t)))$.

Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que les fonctions f et g vérifient

1. $\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\eta_1\| < \infty$;
2. $\sup_{t \geq 0} \sup_{x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n} \max\{\eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23}, \eta_{24}\} \leq \lambda$.

Théorème 3.3.1 (Vidyasagar (1980)) Si les hypothèses 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3 sont vérifiées alors le système (3.20) est globalement exponentiellement stable à l'origine ($x = 0$ et $\hat{x} = 0$).

Vidyasagar propose aussi des résultats de stabilisation asymptotique (locale et globale) par retour d'état estimé, mais une des principales contraintes de ces résultats est la régularité exigée sur les fonctions f et u_s . Il faut que la fonction f soit Lipschitz par rapport à u_s uniformément par rapport à t et x , et il faut que la commande u_s soit Lipschitz et continue. Tsiniakos en propose une amélioration dans le cas de locale et globale asymptotique stabilité. Il considère non plus le système (3.18) mais le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= h(x(t)) \end{cases} \quad (3.22)$$

avec f et h continues et $f(0,0) = 0$.

Théorème 3.3.2 (Tsinias (1991)) *Si le système (3.22) est détectable et s'il existe une commande $u = u_s(x)$, $u_s(0) = 0$, qui stabilise localement asymptotiquement l'origine du système considéré, alors la commande calculée à partir de l'état estimé $u_s(\hat{x})$ stabilise asymptotiquement localement en $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ le système*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_s(\hat{x}(t))) \quad (3.23)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t)), y(t)). \quad (3.24)$$

Quant au résultat de stabilité globale, il nécessite plus d'hypothèses :

Hypothèse 3.3.4 *Il existe une loi de commande continue par retour d'état, $u_s(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine du système (3.23).*

Hypothèse 3.3.5 *Le système (3.22) est faiblement détectable.*

Hypothèse 3.3.6 *Il existe trois fonctions réelles continues de classe K ($\psi_i, i = 1, 2, 3$) telles que pour $i = 1, 2$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \psi_i(s) = +\infty$. Il existe une fonction de Lyapunov continûment différentiable V vérifiant*

1. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$;
2. $DV(x) \cdot f(x, u_s(x)) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - 0$.

Il existe une fonction continûment différentiable, $W : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, vérifiant $\forall (x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

1. $\psi_1(\|x - \hat{x}\|) \leq W(x, \hat{x}) \leq \psi_2(\|x - \hat{x}\|)$;
2. $\nabla_x W(x, \hat{x}) \cdot f(x, u) + \nabla_{\hat{x}} W(x, \hat{x}) \cdot g(\hat{x}, y, u) \leq -\psi_3(\|x - \hat{x}\|)$.

Finalement il existe une constante q_0 telle que pour tout $(x, \hat{x}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $x \neq \hat{x}$, il existe une autre constante q , $q > q_0$ qui vérifie

$$q DV(x) \cdot f(x, u_s(\hat{x})) < \psi_3(\|x - \hat{x}\|).$$

Théorème 3.3.3 (Tsinias (1991)) *Si les conditions 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.6 sont vérifiées, alors la loi de commande $u = u_s(\hat{x})$ stabilise globalement asymptotiquement à l'origine le système (3.23)-(3.24).*

Gauthier et Kupka ont aussi donné un résultat général. Ils considèrent les systèmes bi-linéaires mono-entrée mono-sortie

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)(Bx(t) + b) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

avec dérive dissipative ($x^T Ax \leq 0, \forall x$), et la loi de commande par retour d'état avec $r > 0$

$$u_r(x) = -r x^T (Bx + b). \quad (3.26)$$

Leur résultat est vrai même si le système linéarisé en l'origine n'est pas contrôlable, ce qui n'est pas le cas avec le résultat de Vidyasagar. Soit l'ensemble $W = \{x \mid x^T Ax \leq 0\} \cap \{x^T (Bx + b) = 0\}$.

Hypothèse 3.3.7 *Le système (3.25) vérifie, pour tout $x \in W - \{0\}$*

$$\text{span} \{Ax, \text{ad}_{Ax}^0(Bx + b), \dots, \text{ad}_{Ax}^k(Bx + b), \dots\} = \mathbb{R}^n$$

Hypothèse 3.3.8 *Le système (3.25) avec la commande $u(t) = 0$ est observable.*

On considère la commande appliquée au système

$$u_{r,u_0}(x) = \text{sgn}(u_r(x)) \inf(u_0, |u_r(x)|), \quad (3.27)$$

u_0 étant positive.

Théorème 3.3.4 (Gauthier et Kupka (1992)) *Si les hypothèses 3.3.7 et 3.3.8 sont vérifiées, alors le système*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + u_{r,u_0}(Bx(t) + b) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + u_{r,u_0}(Bx(t) + b) - K[C\hat{x} - Cx] \end{cases} \quad (3.28)$$

est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Dans le même article, ils donnent un résultat similaire pour les systèmes bi-linéaires qui sont observables pour toute entrée, et proposent alors aussi un observateur de type de Kalman.

Le résultat précédent a été amélioré par Chabour et Hammouri (1993a), Chabour et Hammouri (1993b) dans le cas où la dérive n'est pas dissipative et $b = 0$.

D'autres résultats existent, mais se basent sur des classes de systèmes non linéaires particuliers. Hammouri et Busawon (1993) montrent un principe de séparation pour une classe de systèmes linéarisables par retour d'état. Ils donnent un observateur à vitesse de convergence exponentielle, et, sous l'hypothèse que la loi de commande calculée à partir des estimations reste bornée, le système ainsi bouclé est asymptotiquement stable.

Considérons la classe de systèmes non linéaires multi-entrées multi sorties uniformément observable à laquelle s'applique l'observateur grand gain de Bornard et Hammouri (1991). Ces systèmes sont sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.29)$$

avec A, C et $\varphi(x, u)$ donnés comme au chapitre 2 (équations (2.33)). Busawon *et al.* (1993) donnent un résultat général pour ces systèmes. Rappelons que $\varphi(x, u)$ doit être globale Lipschitz.

Hypothèse 3.3.9 *Il existe une commande par retour d'état $u_s(x)$ qui stabilise le système (3.29) à l'origine avec :*

- soit $u_s(x)$ bornée $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- soit $\varphi(x, u) = F(x) + Bu_s(x)$ (B est une matrice constante).

Hypothèse 3.3.10 *Le système bouclé par $u_s(x)$ étant stable, il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$. On suppose qu'il existe une constante λ , telle que $V(x)$ vérifie : $\|\frac{\partial}{\partial x}V(x)\| \leq \lambda(1 + V(x))$.*

Théorème 3.3.5 (Busawon *et al.* (1993)) *Si les hypothèses 3.3.9 et 3.3.10 sont vérifiées, alors la loi de commande par retour d'état calculée à partir des estimées issues de l'observateur Bornard et Hammouri (1991) stabilise globalement asymptotiquement le système (3.29) à l'origine.*

Ce qui est également intéressant, c'est qu'avec une certaine connaissance a priori sur les conditions initiales, ils ont montré pour une classe de systèmes non linéaires que la condition de global Lipschitz de la fonction $\varphi(x, u)$ peut être omise.

Enfin trois autres résultats existent. Iggidr et Sallet (1993) ont donné, pour une classe de systèmes non linéaires sous certaines hypothèses, une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement et un observateur à convergence exponentielle. Ils ont montré que cette loi de commande calculée à partir des estimations stabilise encore le système globalement exponentiellement.

Viel *et al.* (1995) donnent un observateur de type Kalman étendu pour une classe de systèmes non linéaires. En utilisant une loi de commande linéarisante entrée/sortie stabilisante, ils montrent que si celle-ci est calculée à partir de estimations issues de leur observateur, elle stabilise asymptotiquement le système considéré. Enfin, Hammami (1993) donne un observateur et montre, sous l'hypothèse d'existence d'une loi de commande par retour d'état globalement stabilisante, un résultat de séparation. Son résultat va être étendu dans la première partie qui suit.

3.4 Trois résultats de séparation

3.4.1 Présentation

Dans cette partie, trois résultats de principe de séparation seront donnés. On considère un procédé modélisé par des équations différentielles ordinaires non linéaires sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.30)$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ est le temps, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état de dimension n , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur de commande appliqué au procédé, et $f(.,.)$ est une fonction analytique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le système considéré est associé à une équation d'observation

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.31)$$

où généralement $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Chaque résultat est différent selon la sortie considérée. Le premier cas traite des sorties disponibles en temps continu, le deuxième traite le cas des sorties disponibles périodiquement, et le dernier cas concerne des sorties disponibles aperiodiquement et avec retard.

3.4.2 Sorties en temps continu

Ce résultat est une extension du résultat de Hammami (1993), où il donne un principe de séparation pour un observateur bien précis. En se basant sur sa démonstration, on va donner un principe de séparation lorsqu'on est en présence d'un observateur à convergence globale exponentielle et d'une commande à stabilisation globale exponentielle. Ce résultat est quasi analogue à celui de Vidyasagar (1980), mais il possède moins d'hypothèses sur la commande et permettra de mieux comprendre les deux cas suivants.

On considère des sorties linéaires par rapport à l'état, telles que

$$y(t) = C x(t) \quad (3.32)$$

où C est une matrice $p \times n$ de rang plein p . Considérons aussi le système (3.30) avec les sorties (3.32). Soit un observateur du système s'écrivant

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - K [C \hat{x}(t) - y(t)] \quad (3.33)$$

où K est la matrice gain qui peut être temps variant. Dans ce cas il faudra supposer que $\|K C\|$ est bornée. Posons $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, l'équation dynamique de l'erreur s'écrit

$$\dot{\varepsilon}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - f(x(t), u(t)) \quad (3.34)$$

Deux hypothèses sont nécessaires :

Hypothèse 3.4.1 *Il existe une commande par retour d'état $u_s(x(t))$ telle que*

1. *le point $x(t) = 0$ est le point d'équilibre globalement exponentiellement stable du système $\dot{x}(t) = f(x(t), u_s(x(t))) \equiv \tilde{f}(x(t))$;*
2. *la fonction $x(t) \rightarrow \tilde{f}(x(t))$ est globale Lipschitz de constante k_m .*

Hypothèse 3.4.2 *L'observateur (3.33) est tel que*

1. *le point d'équilibre du système (3.34) est $\varepsilon(t) = 0$. Ce point est globalement, uniformément en $x(t)$ et en $u(t)$, exponentiellement stable;*
2. *la fonction $f(x(t), u(t))$ est globalement par rapport à $x(t)$, uniformément en $u(t)$, Lipschitz. Ou bien, si l'entrée $u(t)$ est bornée, la fonction $f(x(t), u(t))$ est globalement par rapport à $x(t)$ Lipschitz. La constante de Lipschitz est k_e .*

Théorème 3.4.1 Lorsque les hypothèses 3.4.1 et 3.4.2 sont vérifiées alors la loi de commande dynamique

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u(t)) - K [C \hat{x}(t) - y(t)] \\ u(t) &= u_s(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (3.35)$$

appliquée au système (3.30) rend le système ainsi bouclé globalement exponentiellement stable à l'origine.

Preuve Appliquons la loi de commande (3.35) au système (3.30), ceci donne le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u_s(x(t))) - K C \varepsilon(t) \\ \dot{\varepsilon}(t) &= f(\hat{x}(t), u_s(x(t))) - f(\hat{x}(t) - \varepsilon(t), u_s(x(t))) - K C \varepsilon(t). \end{cases} \quad (3.36)$$

Il faut démontrer que $(\hat{x}, \varepsilon) = (0, 0)$ est le point d'équilibre globalement exponentiellement stable du système (3.36). L'hypothèse 3.4.1 permet de dire qu'il existe une fonction de Lyapunov $V_m(x)$ pour le système (3.30) (équation du modèle) avec la commande $u = u_s(x)$. L'hypothèse 3.4.2 permet d'avoir aussi une fonction de Lyapunov $V_e(\varepsilon)$ pour le système (3.34) (équation d'erreur d'estimation). La fonction $V_m(x)$, respectivement $V_e(\varepsilon)$, vérifie les conditions du théorème 3.2.2 avec les constantes m_1, m_2, m_3, m_4 , respectivement e_1, e_2, e_3, e_4 . Il est clair que $V_m(\hat{x})$ possède les mêmes propriétés que $V_m(x)$ avec les même constantes.

Ainsi, soit comme fonction de Lyapunov candidate pour le système bouclé (3.36)

$$W(\hat{x}, \varepsilon) = V_m(\hat{x}) + \eta V_e(\varepsilon) \quad (3.37)$$

avec η une constante positive qui sera précisée par suite. Il est évident de par sa construction que la fonction $W(\hat{x}, \varepsilon)$ est définie positive. Le calcul de sa dérivée le long des trajectoires du système bouclé est

$$\begin{aligned} \dot{W}(\hat{x}, \varepsilon) &= \dot{V}_m(\hat{x}) + \eta \dot{V}_e(\varepsilon) \\ &= \nabla V_m(\hat{x}) \cdot \left(f(\hat{x}, u_s(\hat{x})) - K C \varepsilon \right) + \eta \dot{V}_e(\varepsilon) \\ &\leq \nabla V_m(\hat{x}) \cdot f(\hat{x}, u_s(\hat{x})) + |\nabla V_m(\hat{x})| K C \|\varepsilon\| - \eta e_3 V_e(\varepsilon) \\ &\leq -m_3 V_m(\hat{x}) + \|\nabla V_m(\hat{x})\| \|K C\| \|\varepsilon\| - \eta e_1 e_3 \|\varepsilon\|^2 \\ &\leq -m_1 m_3 \|\hat{x}\|^2 + m_4 \|K C\| \|\hat{x}\| \|\varepsilon\| - \eta e_1 e_3 \|\varepsilon\|^2 \\ &\leq - \begin{bmatrix} \|\hat{x}\| \\ \|\varepsilon\| \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \|\hat{x}\| \\ \|\varepsilon\| \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

où M est la matrice $\begin{bmatrix} m_1 m_3 & -\frac{1}{2} \|K C\| m_4 \\ -\frac{1}{2} \|K C\| m_4 & \eta e_1 e_3 \end{bmatrix}$. Avec un choix de $\eta > \frac{(m_4 \|K C\|)^2}{4 m_1 m_3 e_1 e_3}$, M est une matrice symétrique définie positive, d'où la fonction $\dot{W}(\hat{x}, \varepsilon)$ est définie négative. De plus,

$$\begin{aligned} \dot{W}(\hat{x}, \varepsilon) &= -\lambda_{\min}(M) \left(\|\hat{x}\|^2 + \|\varepsilon\|^2 \right) \\ &\leq -\lambda_{\min}(M) \left(\frac{V_m(\hat{x})}{m_2} + \frac{\eta V_e(\varepsilon)}{\eta e_2} \right) \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{m_2, \eta e_2\}} \left(V_m(\hat{x}) + \eta V_e(\varepsilon) \right) \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{m_2, \eta e_2\}} W(\hat{x}, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.39)$$

ainsi le système bouclé avec la loi de commande calculée à partir de l'état estimé issu de l'observateur, est globalement exponentiellement stable à l'origine.

□

3.4.3 Sorties temps discret

Maintenant on considère le système non linéaire (3.30) avec comme équation d'observation

$$y(k T_s) = C x(k T_s) \quad (3.40)$$

où C est une matrice $p \times n$ de rang plein p , et T_s est la période des mesures effectuées. La sortie est donc supposée linéaire par rapport à l'état et disponible périodiquement.

Notons $t_k = k T_s$, $x_k = x(k T_s)$, $\hat{x}_k = \hat{x}(k T_s)$ et $\hat{x}_k^- = \hat{x}^-(k T_s) = \lim_{t \rightarrow t_k, t < t_k} \hat{x}(t)$. On suppose l'existence d'un observateur continu-discret pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}[, \forall k \in \mathbb{N} \\ \hat{\dot{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) \\ \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- - K [C \hat{x}_{k+1}^- - y_{k+1}] \end{cases} \quad (3.41)$$

avec K la matrice de gain qui peut dépendre du temps. Dans ce cas, on supposera que $\|K C\|$ est bornée. Posons $\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, alors $\varepsilon_k = \hat{x}_k - x_k$, $\varepsilon_k^- = \hat{x}_k^- - x_k$, et l'équation dynamique de l'erreur s'écrit

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}[, \forall k \in \mathbb{N} \\ \dot{\varepsilon}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - f(\hat{x}(t) - \varepsilon(t), u(t)) \\ \varepsilon_{k+1} = [I - K C] \varepsilon_{k+1}^- \end{cases} \quad (3.42)$$

et conduit au système discret suivant

$$\varepsilon_{k+1} = \Phi(\varepsilon_k, \hat{x}(\cdot), u(\cdot)) \quad (3.43)$$

L'hypothèse 3.4.1 du théorème précédent sera utilisée ici aussi. Par contre l'hypothèse 3.4.2 est remplacée par

Hypothèse 3.4.3 *L'observateur (3.41) est tel que*

1. *le point d'équilibre du système discret (3.43) est $\varepsilon_k = 0$.*

Ce point est globalement, uniformément en $x(t)$ et en $u(t)$, exponentiellement stable;

2. *la fonction $f(x(t), u(t))$ est globalement, uniformément en $x(t)$ et en $u(t)$, Lipschitz.*

Ou bien, si l'entrée $u(t)$ est bornée, la fonction $f(x(t), u(t))$ est globalement par rapport à $x(t)$, Lipschitz. La constante de Lipschitz est k_e .

Théorème 3.4.2 *Lorsque les hypothèses 3.4.1 et 3.4.3 sont vérifiées, alors la loi de commande dynamique*

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}[, \forall k \in \mathbb{N} \\ \hat{\dot{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) \\ u(t) = u_s(\hat{x}(t)) \\ \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- - K [C \hat{x}_{k+1}^- - y_{k+1}] \end{cases} \quad (3.44)$$

appliquée au système (3.30) rend le système ainsi bouclé globalement exponentiellement stable à l'origine.

Preuve Elle se fait en deux temps. Premièrement, on montre que la divergence du système entre deux instants de mesure dépend de l'erreur faite à la précédente mesure. Ensuite la convergence exponentielle aux instants discrets permettra de conclure.

Appliquons la loi de commande (3.44) au système (3.30), ceci donne le système bouclé

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_k, t_{k+1}[, \forall k \in \mathbb{N} \\ \begin{cases} \hat{\dot{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))) \\ \dot{\varepsilon}(t) = f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))) - f(\hat{x}(t) - \varepsilon(t), u_s(\hat{x}(t))) \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- - K C \varepsilon_{k+1}^- \\ \varepsilon_{k+1} = [I - K C] \varepsilon_{k+1}^- \end{cases} \end{cases} \quad (3.45)$$

Alors entre deux mesures, nous avons pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$,

$$\dot{\varepsilon}(t) = f\left(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))\right) - f\left(\hat{x}(t) - \varepsilon(t), u_s(\hat{x}(t))\right), \quad (3.46)$$

alors

$$\|\dot{\varepsilon}(t)\| = \left\| f\left(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))\right) - f\left(\hat{x}(t) - \varepsilon(t), u_s(\hat{x}(t))\right) \right\| \quad (3.47)$$

et en intégrant

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon_k\| + \int_{t_k}^t \left\| f\left(\hat{x}(s), u_s(\hat{x}(s))\right) - f\left(\hat{x}(s) - \varepsilon(s), u_s(\hat{x}(s))\right) \right\| ds. \quad (3.48)$$

On déduit de l'hypothèse 3.4.3-(2), il vient

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon_k\| + k_e \int_{t_k}^t \|\varepsilon(s)\| ds \quad (3.49)$$

et en utilisant le lemme de Gronwall 2.5.1

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\| &\leq \|\varepsilon_k\| \exp\left(k_e(t - t_k)\right) \\ &\leq \exp(k_e T_s) \|\varepsilon_k\|. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Étant donné que $\hat{x}(t) = 0$ est le point d'équilibre de $\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{f}(\hat{x}(t))$, alors $\tilde{f}(0) = 0$ et nous pouvons écrire

$$\dot{\hat{x}}(t) = \tilde{f}(\hat{x}(t)) - \tilde{f}(0) \quad (3.51)$$

et pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\|\dot{\hat{x}}(t)\| \leq \|\tilde{f}(\hat{x}(t)) - \tilde{f}(0)\|. \quad (3.52)$$

Alors en intégrant les deux membres, en utilisant la propriété de Lipschitz (hypothèse 3.4.1-(2)) et le lemme de Gronwall, nous pouvons écrire pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t)\| &\leq \|\hat{x}_k\| + \int_{t_k}^t \|\tilde{f}(\hat{x}(s)) - \tilde{f}(0)\| ds \\ &\leq \|\hat{x}_k\| + k_m \int_{t_k}^t \|\hat{x}(s) - 0\| ds \\ &\leq \exp(k_m(t - t_k)) \|\hat{x}_k\| \\ &\leq \exp(k_m T_s) \|\hat{x}_k\| \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ainsi, entre deux mesures t_k et t_{k+1} , la norme de l'estimation ($\|\hat{x}(t)\|$), respectivement de l'erreur d'estimation ($\|\varepsilon(t)\|$), est majorée par une constante multipliée par la norme de l'estimation, de l'erreur de l'estimation, au temps t_k . Et finalement des équations (3.50) et (3.53), on a

$$\|\varepsilon_{k+1}^-\| \leq \exp(k_e T_s) \|\varepsilon_k\|, \quad (3.54)$$

$$\|\hat{x}_{k+1}^-\| \leq \exp(k_m T_s) \|\hat{x}_k\|. \quad (3.55)$$

Dans l'étape suivante, nous démontrons que $\|\hat{x}_k\|$ et que $\|\varepsilon_k\|$ tendent vers zéro globalement exponentiellement. Rappelons que l'hypothèse 3.4.1, respectivement l'hypothèse 3.4.3, permet de dire qu'il existe une fonction de Lyapunov $V_m(x(t))$, respectivement $V_e(\varepsilon(t))$, pour le système (3.30) bouclé avec la commande $u_s(x(t))$, respectivement pour le système discret (3.43). Ainsi la fonction $V_m(x(t))$ vérifie le théorème 3.2.2 avec les constantes m_1, m_2, m_3 et m_4 . Tandis que la fonction $V_e(\varepsilon(t))$ vérifie le théorème 3.2.4 avec les constantes e_1, e_2 et e_3 . La même remarque peut être faite pour la fonction $V_m(\hat{x}(t))$ qui vérifie les mêmes propriétés que la fonction $V_m(x(t))$.

Soit alors la fonction candidate de Lyapunov temps discrète

$$W(\varepsilon_k, \hat{x}_k) = \eta V_e(\varepsilon_k) + V_m(\hat{x}_k) \quad (3.56)$$

où η est une constante qui sera définie ci après. Il s'agit de démontrer que

$$\Delta W_k(\varepsilon_k, \hat{x}_k) = W(\varepsilon_{k+1}, \hat{x}_{k+1}) - W(\varepsilon_k, \hat{x}_k) \leq -\gamma W(\varepsilon_k, \hat{x}_k) \quad (3.57)$$

avec γ une constante strictement positive.

Posons

$$\Delta W_k(\varepsilon_k, \hat{x}_k) = \eta \Delta V_e(\varepsilon_k) + \Delta V_m(\hat{x}_k) \quad (3.58)$$

où

$$\Delta V_e(\varepsilon_k) = V_e(\varepsilon_{k+1}) - V_e(\varepsilon_k) \quad (3.59)$$

et

$$\Delta V_m(\hat{x}_k) = V_m(\hat{x}_{k+1}) - V_m(\hat{x}_k). \quad (3.60)$$

Majorons d'abord $\Delta V_e(\varepsilon_k)$ en utilisant la propriété 2 puis la 1 du théorème 3.2.4 :

$$\begin{aligned} \Delta V_e(\varepsilon_k) &= V_e(\varepsilon_{k+1}) - V_e(\varepsilon_k) \\ &\leq -e_3 V_e(\varepsilon_k) \\ &\leq -e_1 e_3 \|\varepsilon_k\|^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Soit $c_1 = e_1 e_3 > 0$, alors

$$\eta \Delta V_e(\varepsilon_k) \leq -\eta c_1 \|\varepsilon_k\|^2. \quad (3.62)$$

Maintenant nous allons écrire

$$\Delta V_m(\hat{x}_k) = V_m(\hat{x}_{k+1}) - V_m(\hat{x}_k) \quad (3.63)$$

$$= V_m(\hat{x}_{k+1}) - V_m(\hat{x}_{k+1}^-) + V_m(\hat{x}_{k+1}^-) - V_m(\hat{x}_k) \quad (3.64)$$

$$= \Delta V_m^d(\hat{x}_k) + \Delta V_m^c(\hat{x}_k) \quad (3.65)$$

où $\Delta V_m^c(\hat{x}_k)$ est due à l'évolution continue entre deux mesures, et, $\Delta V_m^d(\hat{x}_k)$ est due à la discontinuité à l'instant t_k .

1. Majorons $\Delta V_m^c(\hat{x}_k) = V_m(\hat{x}_{k+1}^-) - V_m(\hat{x}_k)$

Étant donné que, pour $\hat{x}(t) = \tilde{f}(\hat{x}(t))$, l'origine est exponentiellement stable pour $t \in [t_{k-1}, t_k[$, alors en intégrant

$$\dot{V}_m(\hat{x}(t)) \leq -m_3 V_m(\hat{x}(t)) \quad (3.66)$$

il vient

$$\begin{aligned} V_m(\hat{x}_{k+1}^-) &\leq \exp(-m_3(t_{k+1} - t_k)) V_m(\hat{x}_k) \\ &\leq \exp(-m_3 T_s) V_m(\hat{x}_k) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_m(\hat{x}_{k+1}^-) - V_m(\hat{x}_k) &\leq -(1 - \exp(-m_3 T_s)) V_m(\hat{x}_k) \\ &\leq -m_1 (1 - \exp(-m_3 T_s)) \|\hat{x}_k\|^2 \end{aligned}$$

En posant $c_2 = m_1 (1 - \exp(-m_3 T_s)) > 0$, nous avons

$$\Delta V_m^c(\hat{x}_k) \leq -c_2 \|\hat{x}_k\|^2 \quad (3.67)$$

2. Majorons $\Delta V_m^d(\hat{x}_k) = V_m(\hat{x}_{k+1}) - V_m(\hat{x}_{k+1}^-)$
 Utilisons le théorème des accroissements finis :
 Il existe $\lambda \in [0, 1]$, tel que $\hat{x}_p = \hat{x}_{k+1}^- + \lambda (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)$ et

$$V_m(\hat{x}_{k+1}) - V_m(\hat{x}_{k+1}^-) = \left(\frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right) \times (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-). \quad (3.68)$$

Nous avons alors

$$\Delta V_m^d(\hat{x}_k) \leq |V_m^d(\hat{x}_k)| \leq \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\| \quad (3.69)$$

par la propriété 3 du théorème 3.2.2 et comme $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| &\leq m_4 \|\hat{x}_p\| \\ &\leq m_4 \|\hat{x}_{k+1} + \lambda (\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-)\| \\ &\leq m_4 \|\hat{x}_{k+1}^-\| + m_4 \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\|. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Comme nous avons

$$\|\hat{x}_{k+1}^-\| \leq \exp(k_m T_s) \|\hat{x}_k\|, \quad (3.71)$$

il reste à majorer $\|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\|$ en utilisant le système (3.45) et l'inégalité (3.54) :

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\| &= \|-K C \varepsilon_{k+1}^-\| \\ &\leq \|K C\| \|\varepsilon_{k+1}^-\| \\ &\leq \exp(k_e T_s) \|K C\| \|\varepsilon_k\|. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\Delta V_m^d(\hat{x}_k)| &\leq \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| \times \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\| \\ &\leq (m_4 \|\hat{x}_{k+1}^-\| + m_4 \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\|) \|\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_{k+1}^-\| \\ &\leq (m_4 \exp(k_m T_s) \|\hat{x}_k\| + m_4 \exp(k_e T_s) \|K C\| \|\varepsilon_k\|) \exp(k_e T_s) \|K C\| \|\varepsilon_k\| \\ &\leq c_3 \|\hat{x}_k\| \|\varepsilon_k\| + c_4 \|\varepsilon_k\|^2 \end{aligned} \quad (3.73)$$

où $c_3 = m_4 \exp((k_m + k_e) T_s) \|K C\| > 0$ et $c_4 = m_4 \exp(2k_e T_s) \|K C\|^2 > 0$.

Alors

$$\begin{aligned} \Delta W_k(\varepsilon_k, \hat{x}_k) &\leq (c_4 - \eta c_1) \|\varepsilon_k\|^2 + c_3 \|\hat{x}_k\| \|\varepsilon_k\| - c_2 \|\hat{x}_k\|^2 \\ &\leq -((\eta c_1 - c_4) \|\varepsilon_k\|^2 - c_3 \|\hat{x}_k\| \|\varepsilon_k\| + c_2 \|\hat{x}_k\|^2) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} \eta c_1 - c_4 & -\frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2}c_3 & c_2 \end{bmatrix}$. Elle est définie positive lorsque $\eta c_1 - c_4 > 0$ et lorsque $(\eta c_1 - c_4) c_2 - \frac{1}{4}c_3^2 > 0$, c'est-à-dire pour un choix de η tel que

$$\eta > \frac{c_3^2}{4 c_1 c_2} + \frac{c_4}{c_1}. \quad (3.75)$$

Si η est alors choisi suffisamment grand et > 1

$$\begin{aligned}
 \Delta W_k(\varepsilon_k, \hat{x}_k) &\leq - \begin{bmatrix} \|\varepsilon_k\| \\ \|\hat{x}_k\| \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \|\varepsilon_k\| \\ \|\hat{x}_k\| \end{bmatrix} \\
 &\leq -\lambda_{\min}(M) \left(\|\varepsilon_k\|^2 + \|\hat{x}_k\|^2 \right) \\
 &\leq -\lambda_{\min}(M) \left(\frac{\eta V_e(\varepsilon_k)}{\eta e_2} + \frac{V_m(\hat{x}_k)}{m_2} \right) \\
 &\leq -\frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{\eta e_2, m_2\}} (\eta V_e(\varepsilon_k) + V_m(\hat{x}_k)) \\
 &\leq -\frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{\eta e_2, m_2\}} W(\varepsilon_k, \hat{x}_k) \\
 &\leq -\gamma W(\varepsilon_k, \hat{x}_k)
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

avec $\gamma = \frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{\eta e_2, m_2\}} > 0$. Ceci permet de conclure que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\varepsilon(k T_s)\|$ et $\|\hat{x}(k T_s)\|$ tendent globalement exponentiellement vers zéro et entraîne, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\hat{x}(t)\|$ et $\|\varepsilon(t)\|$ tendent aussi globalement exponentiellement vers zéro. Ainsi l'origine du système (3.30) bouclé avec la loi de commande (3.44) calculée à partir des estimations de l'état issues de l'observateur (3.41) est globalement exponentiellement stable.

□

3.4.4 Sorties temps discret apériodiques avec retard

Dans cette partie, nous considérons toujours le système non linéaire (3.30). Par contre, les mesures sont disponibles apériodiquement aux instants t_i , et avec un retard noté τ_i . Ceci correspond à un problème de commande du procédé pilote au L.S.G.C.. Des mesures, issues du chromatographe liquide haute pression, ne sont disponibles que tous les quarts d'heure avec un retard d'un quart d'heure (Bicking, 1991).

Si nous supposons que les sorties sont linéaires par rapport à l'état, alors l'équation d'observation peut s'écrire

$$y(t_i) = C x(t_i - \tau_i) \tag{3.77}$$

où C est une matrice $p \times n$. Ces instants de mesure et le retard doivent vérifier l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.4.4 *Il existe des constantes $T_{\min}$ et $T_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$:*

1. $T_{\min} \leq t_{i+1} - t_i \leq T_{\max}$;
2. $t_i \leq t_{i+1} - \tau_{i+1} \leq t_{i+1}$.

L'hypothèse 3.4.1 sur l'existence d'une loi de commande globalement exponentiellement stabilisante et sur la condition de Lipschitz de la fonction $\hat{f}(x(t))$ sera de nouveau utilisée. Nous supposons aussi l'existence d'un observateur continu-discret basé sur le système non linéaire (3.30) et sur l'équation d'observation (3.77) où le retard τ_i est nul pour tout $i \in \mathbb{N}$. L'estimée de l'état est notée $\hat{x}(t)$, et l'erreur d'estimation est $\varepsilon_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Les notations suivantes seront aussi utilisées : $\hat{x}^-(t_i) = \lim_{t \rightarrow t_i, t < t_i} \hat{x}(t)$, $\varepsilon_x(t_i) = \hat{x}(t_i) - x(t_i)$, et $\varepsilon_x^-(t_i) = \hat{x}^-(t_i) - x(t_i)$. Ainsi considérons comme observateur continu-discret le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ \hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) \\ \hat{x}(t_{i+1}) = \hat{x}^-(t_{i+1}) - K [C \hat{x}^-(t_{i+1}) - y(t_{i+1})] \end{cases} \tag{3.78}$$

où K est la matrice gain. Si celle-ci est temps dépendante alors nous supposons que $\|K C\|$ est bornée. Écrivons l'équation dynamique de l'erreur :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[, \\ \dot{\varepsilon}_x(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) - f(\hat{x}(t) - \varepsilon_x(t), u(t)) \\ \varepsilon_x(t_{i+1}) = [I - K C] \varepsilon_x^-(t_{i+1}) \end{cases} \tag{3.79}$$

et nous avons alors le système discret

$$\varepsilon_x(t_{i+1}) = \Phi(\varepsilon_x(t_i), \hat{x}(\cdot), u(\cdot)) \quad (3.80)$$

La dernière hypothèse sera maintenant explicitée, puis on expliquera comment prendre en considération le retard avant de donner le dernier théorème.

Hypothèse 3.4.5 *Considérons le système non linéaire (3.30) avec les sorties (3.77) sans retard ($\forall i, \tau_i = 0$). Il existe un observateur continu-discret (3.78) tel que*

1. *le point d'équilibre du système discret (3.80) est $\varepsilon_x(t_i) = 0$, et il est globalement, uniformément en $\hat{x}$ et en u , exponentiellement stable;*
2. *la fonction $f(\hat{x}(t), u(t))$ est globalement par rapport à $\hat{x}(t)$ uniformément en $u(t)$ Lipschitz. Ou bien, si l'entrée $u(t)$ est bornée, alors la fonction $f(x(t), u(t))$ est globalement par rapport à $x(t)$ Lipschitz. La constante de Lipschitz est k_e .*

Maintenant nous prenons en compte le retard ($\tau_i \neq 0$). Afin de rendre plus lisible les équations suivantes, nous noterons le temps ($t_i - \tau_i$) par le temps (i), par exemple $x(t_i - \tau_i) \equiv x(i)$. Le même observateur (3.78) est utilisé deux fois (voir figure 3.2) : l'un, $\hat{x}(t)$, fonctionne en "temps réel" et présente une discontinuité aux instants t_i ; l'autre, $\hat{z}(t)$, fonctionne en "temps virtuel" et est discontinu aux instants $t_i - \tau_i$.

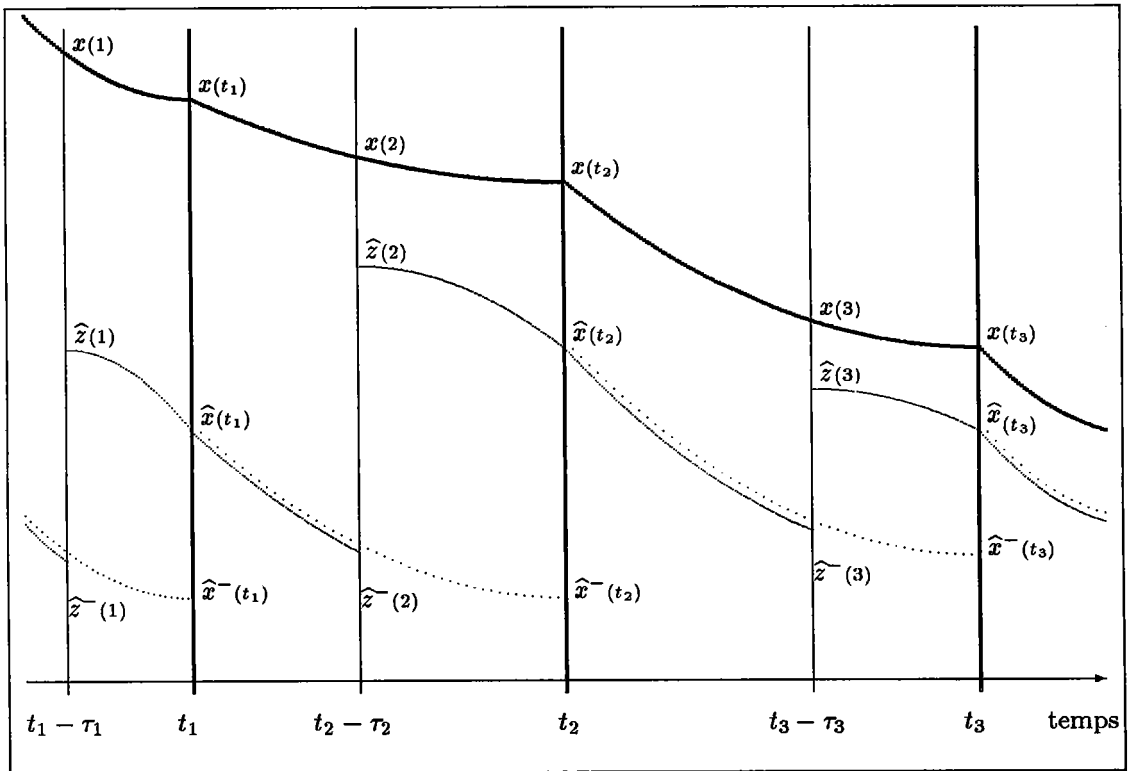


FIG. 3.2: Le fonctionnement de l'observateur continu-discret avec retards sur la sortie. (trait épais : vecteur état "réel" $x(t)$; pointillé : vecteur état estimé $\hat{x}(t)$ synchrone avec $x(t)$; trait fin : vecteur état estimé $z(t)$ en temps "virtuel") À l'instant $t(2)$, $\hat{x}^-(t_2)$ et $\hat{x}(t_1)$ permettent le calcul de $\hat{z}^-(2)$ puis de $\hat{z}(2)$, qui eux donnent $\hat{x}(t_2)$ et permettent de calculer $\hat{x}(t)$ pour $t \in [t_2, t_3[$ ce qui donne $\hat{x}^-(t_3)$.

Le calcul de l'estimation de l'état se déroule en quatre étapes :

1° équation (3.81)

L'état est estimé avec l'aide du modèle, et la loi de commande par retour d'état est calculée. Les

conditions initiales proviennent d'une étape 4 précédente.

$$\begin{aligned} & \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ & \begin{cases} \hat{x}(t_i) = \hat{z}(t_i) \\ \dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))) \\ u(t) = u_s(\hat{x}(t)) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.81)$$

2° équation (3.82)

Maintenant, on est à l'instant t_{i+1} et on dispose de la mesure d'une partie de l'état faite à l'instant $t_{i+1} - \tau_{i+1}$

$$\begin{aligned} & \text{À } t = t_{i+1} \\ & \{ y(t_{i+1}) = C x(t_{i+1} - \tau_{i+1}) = C x(i+1) \end{aligned} \quad (3.82)$$

3° équation (3.83)

Le second observateur est calculé en temps virtuel $\bar{t}$. On est toujours à l'instant t_{i+1} . On remarque que pour $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1} - \tau_{i+1}[$, $\hat{z}(\bar{t}) = \hat{x}(\bar{t})$. Cette équation sert à donner la valeur de $\hat{x}(t_{i+1} - \tau_{i+1})$ puisqu'avant le temps t_{i+1} , on suppose ne pas connaître le retard τ_{i+1} et il est difficile de garder en mémoire toutes les valeurs de la commande appliquée $u(t)$, et des estimations de l'état $\hat{x}(t)$.

$$\begin{aligned} & \text{À } t = t_{i+1}, \text{ pour } \bar{t} \in [t_i, t_{i+1} - \tau_{i+1}[\\ & \begin{cases} \hat{z}(t_i) = \hat{x}(t_i) \\ \dot{\hat{z}}(\bar{t}) = f(\hat{x}(\bar{t}), u_s(\hat{z}(\bar{t}))) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Cette équation donne la valeur de $\hat{z}^-(t_{i+1} - \tau_{i+1})$ qui est égale à $\hat{x}(t_{i+1} - \tau_{i+1})$.

4° équation (3.84)

On est toujours à l'instant t_{i+1} . On dispose de la mesure $y(t_{i+1}) = C x(i+1)$, et de l'estimation faite à l'instant $t_{i+1} - \tau_{i+1}$: $\hat{z}^-(i+1) = \hat{x}(i+1)$. À partir de l'erreur d'estimation, l'observateur en z est réinitialisé au temps $t_{i+1} - \tau_{i+1}$. Ceci permet de calculer la nouvelle prédiction de $\hat{x}(t_{i+1})$.

$$\begin{aligned} & \text{À } t = t_{i+1}, \text{ pour } \bar{t} \in [t_{i+1} - \tau_{i+1}, t_{i+1}[\\ & \begin{cases} \hat{z}(i+1) = \hat{z}^-(i+1) - K [C \hat{z}^-(i+1) - y(t_{i+1})] \\ \dot{\hat{x}}(\bar{t}) = f(\hat{x}(\bar{t}), u_s(\hat{x}(\bar{t}))) \\ u_s(\bar{t}) = u_s(\hat{x}(\bar{t})) \\ \dot{\hat{z}}(\bar{t}) = f(\hat{z}(\bar{t}), u_s(\bar{t})). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Ainsi nous avons la nouvelle valeur de $\hat{x}(t_{i+1})$:

$$\hat{x}(t_{i+1}) = \hat{z}(t_{i+1}) \quad (3.85)$$

et nouvelle étape 1 peut commencer.

Le théorème s'énonce alors comme suit :

Théorème 3.4.3 *Lorsque les hypothèses 3.4.1, 3.4.4 et 3.4.5 sont vérifiées, alors la loi de commande dynamique par retour d'état (équations (3.81) à (3.84)) appliquée au système non linéaire (3.30) stabilise globalement exponentiellement celui-ci à l'origine.*

Preuve On va utiliser la même méthode que pour le théorème précédent, si ce n'est qu'on commencera par démontrer que les suites $\hat{x}(t_i)$ et $\varepsilon_z(t_i)$, où $\varepsilon_z(t) = \hat{z}(t) - x(t)$, convergent globalement exponentiellement vers zéro. Ensuite en utilisant les conditions de Lipschitz et le lemme de Gronwall, on démontrera que $\varepsilon_x(t_i)$ converge aussi globalement exponentiellement vers zéro. On pourra alors conclure pour $\hat{x}(t)$ et $\varepsilon_x(t)$ pour tout t .

Soustrayons x de part et d'autre de l'équation (3.81) et de l'équation (3.84) en considérant les équations (3.82) et (3.83). Cela revient à écrire :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ \dot{\varepsilon}_x(t) = f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))) - f(\hat{x}(t) - \varepsilon_x(t), u_s(\hat{x}(t))) \\ \varepsilon_x(t_{i+1}) = \varepsilon_x(t_{i+1}) \end{cases} \quad (3.86)$$

et

$$\begin{cases} \text{pour } \bar{t} \in [t_i - \tau_i, t_{i+1} - \tau_{i+1}[\\ \dot{\varepsilon}_z(\bar{t}) = f(\hat{z}(\bar{t}), u_s(\bar{t})) - f(\hat{z}(\bar{t}) - \varepsilon_z(\bar{t}), u_s(\bar{t})) \\ \varepsilon_z(i+1) = [\mathbf{I} - K C] \varepsilon_z^-(i+1) \end{cases} \quad (3.87)$$

Rappelons que, premièrement, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\hat{x}(t_i) = \hat{z}(t_i)$, $\varepsilon_x(t_i) = \varepsilon_z(t_i)$, $\hat{z}^-(i) = \hat{x}(i)$ et $\varepsilon_z^-(i) = \varepsilon_x(i)$, deuxièmement que l'observateur en z est comme un observateur continu-discret sans retard sur les mesures de la sortie. Alors selon l'hypothèse 3.4.5, il existe une fonction de Lyapunov $V_e(\varepsilon_z(t))$ vérifiant les conditions du théorème 3.2.4 avec les constantes $e_1, e_2, e_3 > 0$. L'hypothèse 3.4.1 permet aussi de dire qu'il existe une fonction de Lyapunov $V_m(x(t))$ vérifiant les conditions du théorème 3.2.2 avec les constantes m_1, m_2, m_3, m_4 .

Soient η et γ deux constantes positives précisées ultérieurement, et soit la fonction de Lyapunov candidate :

$$W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_{i+1})) = \eta V_e(\varepsilon_z(i)) + V_m(\hat{x}(t_i)) \quad (3.88)$$

On doit d'abord démontrer que

$$\begin{aligned} \Delta W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) &= W(\varepsilon_z(i+1), \hat{x}(t_{i+1})) - W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) \\ &\leq -\gamma W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Écrivons $\Delta W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) = \eta \Delta V_e(\varepsilon_z(i+1)) + \Delta V_m(\hat{x}(t_i))$ où

1. $\Delta V_e(\varepsilon_z(i)) = V_e(\varepsilon_z(i+1)) - V_e(\varepsilon_z(i))$, or par la condition 2 puis la 1 du théorème 3.2.4, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \Delta V_e(\varepsilon_z(i)) &= V_e(\varepsilon_z(i+1)) - V_e(\varepsilon_z(i)) \\ &\leq -e_3 V_e(\varepsilon_z(i)) \\ &\leq -e_1 e_3 \|\varepsilon_z(i)\|. \end{aligned} \quad (3.90)$$

En posant $c_1 = e_1 e_3 > 0$, il vient

$$\eta \Delta V_e(\varepsilon_z(i+1)) \leq -\eta c_1 \|\varepsilon_z(i)\| \quad (3.91)$$

2. $\Delta V_m(\hat{x}(t_i)) = \Delta V_m^c(\hat{x}(t_i)) + \Delta V_m^d(\hat{x}(t_i))$ où le premier terme, $\Delta V_m^c(\hat{x}(t_i))$, est du à l'évolution continue et le second terme, $\Delta V_m^d(\hat{x}(t_i))$, est du à la discontinuité à l'instant t_{i+1} . Chaque terme va être majoré comme suit :

$$(a) \Delta V_m^c(\hat{x}(t_i)) = V_m^c(\hat{x}^-(t_{i+1})) - V_m^c(\hat{x}(t_i))$$

Par la stabilité exponentielle de $\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t)))$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, nous avons

$$\begin{aligned} V_m(\hat{x}^-(t_{i+1})) &\leq \exp(-c_3(t_{i+1} - t_i)) V_m(\hat{x}(t_i)) \\ &\leq \exp(-c_3 T_{min}) V_m(\hat{x}(t_i)) \end{aligned} \quad (3.92)$$

ainsi en posant $c_2 = m_1 (1 - \exp(-c_3 T_{min})) > 0$,

$$\Delta V_m^c(\hat{x}(t_i)) \leq c_2 \|\hat{x}(t_i)\|^2 \quad (3.93)$$

(b) $\Delta V_m^d(\hat{x}(t_i)) = V_m(\hat{x}(t_{i+1})) - V_m(\hat{x}^-(t_{i+1}))$.

On va utiliser le théorème des accroissements finis : $\exists \lambda \in [0, 1]$, tel que $\hat{x}_p = \hat{x}^-(t_{i+1}) + \lambda(\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1}))$ et

$$V_m(\hat{x}(t_{i+1})) - V_m(\hat{x}^-(t_{i+1})) = \left(\frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right) \times (\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1})) \quad (3.94)$$

alors

$$\Delta V_m^d \leq |\Delta V_m^d| \leq \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| \times \|\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1})\| \quad (3.95)$$

et on majore

$$- \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| \text{ en utilisant la propriété 3 du théorème 3.2.2.}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V_m}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{x}=\hat{x}_p} \right\| &\leq c_4 \|\hat{x}_p\| \\ &\leq c_4 \|\hat{x}^-(t_{i+1}) + \lambda(\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1}))\| \\ &\leq c_4 \|\hat{x}^-(t_{i+1})\| + c_4 \|\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1})\|. \end{aligned}$$

En utilisant la condition de Lipschitz puis le lemme de Gronwall, l'équation (3.81) devient

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t)\| &\leq \|\hat{x}(t_i)\| + \int_{t_i}^t \|\tilde{f}(\hat{x}(\sigma)) - \tilde{f}(0)\| d\sigma \\ &\leq \|\hat{x}(t_i)\| + k_c \int_{t_i}^t \|\hat{x}(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \exp(k_c(t_{i+1} - t_i)) \|\hat{x}(t_i)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|\hat{x}^-(t_{i+1})\| \leq \exp(k_c T_{\max}) \|\hat{x}(t_i)\| ; \quad (3.96)$$

- $\|\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1})\|$ en utilisant le fait que $\hat{x}(t_{i+1}) = \hat{z}(t_{i+1})$, $\varepsilon_z(t_{i+1}) = \hat{z}(t_{i+1}) - x(t_{i+1})$, et $\varepsilon_x^-(t_{i+1}) = \hat{x}^-(t_{i+1}) - x(t_{i+1})$. D'où

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t_{i+1}) - \hat{x}^-(t_{i+1})\| &= \|\varepsilon_z(t_{i+1}) - \varepsilon_x^-(t_{i+1})\| \\ &\leq \|\varepsilon_z(t_{i+1})\| + \|\varepsilon_x^-(t_{i+1})\|. \end{aligned}$$

$\varepsilon_z(t_{i+1})$ va être majoré en utilisant, pour $\bar{t} \in [t_{i+1} - \tau_{i+1}, t_{i+1}]$, l'équation (3.87) avec la propriété de Lipschitz puis l'inégalité de Gronwall :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_z(\bar{t})\| &\leq \|\varepsilon_z(i+1)\| + k_e \int_{t_{i+1}-\tau_{i+1}}^{\bar{t}} \|\varepsilon_z(\sigma)\| d\sigma \\ &\leq \exp(k_e(\bar{t} - t_{i+1} + \tau_{i+1})) \|\varepsilon_z(i+1)\| \end{aligned}$$

d'où

$$\|\varepsilon_z(t_{i+1})\| \leq \exp(k_e \tau_{i+1}) \|\varepsilon_z(i+1)\|. \quad (3.97)$$

Ensuite nous avons aussi

$$\|\varepsilon_z(i+1)\| \leq \|\mathbf{I} - K C\| \|\varepsilon_z^-(i+1)\| \quad (3.98)$$

et comme $\|\varepsilon_z^-(i+1)\| = \|\varepsilon_x(i+1)\|$ et $\|\varepsilon_x(t_i)\| = \|\varepsilon_z(t_i)\|$ alors

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_z^-(i+1)\| &= \|\varepsilon_x(i+1)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - \tau_{i+1} - t_i)) \|\varepsilon_x(t_i)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - \tau_{i+1} - t_i)) \|\varepsilon_z(t_i)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - \tau_{i+1} - t_i)) \exp(k_e \tau_i) \|\varepsilon_z(i)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - \tau_{i+1} - t_i + \tau_i)) \|\varepsilon_z(i)\|. \end{aligned}$$

Ainsi en posant $b_1 = \exp(2k_e T_{\max}) \|\mathbf{I} - K C\| > 0$, il vient

$$\|\varepsilon_z(t_{i+1})\| \leq b_1 \|\varepsilon_z(i)\|. \quad (3.99)$$

D'une manière quasi analogue, on peut montrer que

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_x^-(t_{i+1})\| &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - t_i)) \|\varepsilon_x(t_i)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - t_i)) \|\varepsilon_z(t_i)\| \\ &\leq \exp(k_e(t_{i+1} - t_i)) \exp(k_e \tau_i) \|\varepsilon_z(i)\|. \end{aligned}$$

En posant $b_2 = \exp(2k_e T_{\max}) > 0$, il vient

$$\|\varepsilon_x^-(t_{i+1})\| \leq b_2 \|\varepsilon_z(i)\|. \quad (3.100)$$

Soient les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} c_3 &= m_4 (b_1 + b_2) \exp(k_c T_{\max}) > 0 \\ c_4 &= m_4 (b_1 + b_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

Alors nous avons la majoration suivante :

$$\Delta V_m^d \leq c_3 \|\hat{x}(t_i)\| \|\varepsilon_z(i)\| + m_4 \|\varepsilon_z(i)\|^2 \quad (3.101)$$

D'après les majorations (3.91), (3.93) et (3.101)

$$\Delta W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) \leq -(\eta c_1 - c_4) \|\varepsilon_z(i)\|^2 + c_3 \|\hat{x}(t_i)\| \|\varepsilon_z(i)\| - c_2 \|\hat{x}(t_i)\|^2. \quad (3.102)$$

Si M est la matrice symétrique $\begin{bmatrix} \eta c_1 - c_4 & -\frac{1}{2}c_3 \\ -\frac{1}{2}c_3 & c_2 \end{bmatrix}$, pour un choix de $\eta > \frac{c_4}{c_1} + \frac{c_3^2}{c_1 c_2}$, alors M est une matrice définie positive. En notant $\lambda_{\min}(M) > 0$ la plus petite des valeurs propres de la matrice M , il résulte que

$$\Delta W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(M)}{\max\{\eta c_2, c_2\}} W(\varepsilon_z(i), \hat{x}(t_i)) \quad (3.103)$$

Ceci permet de conclure que les suites $\hat{x}(t_i)$ et $\varepsilon_z(i)$ convergent globalement exponentiellement vers zéro.

La dernière étape sert à montrer qu'il en est de même pour $\hat{x}(t)$ et $\varepsilon_x(t)$ pour tout t . Entre deux mesures, $\forall t \in [t_i, t_{i+1}[$,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(t)\| &\leq \exp(k_c(t - t_i)) \|\hat{x}(t_i)\| \\ &\leq \exp(k_c T_{\max}) \|\hat{x}(t_i)\|, \end{aligned} \quad (3.104)$$

et

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_x(t)\| &\leq \exp(k_e(t-t_i)) \|\varepsilon_x(t_i)\| \leq \exp(k_e(t-t_i+\tau_i)) \|\varepsilon_z(i)\| \\ &\leq \exp(2k_e T_{\max}) \|\varepsilon_z(i)\|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Par la convergence de $\hat{x}(t_i)$ et de $\varepsilon_z(i)$, on peut donc conclure que $\hat{x} = 0$ et $\varepsilon_x = 0$ sont des points d'équilibre globalement exponentiellement stables du système bouclé. $x = \hat{x} - \varepsilon_x = 0$ est le point d'équilibre du système et il est globalement exponentiellement stable.

□

Remarque sur l'implémentation : Afin de calculer la loi de commande (équations (3.81) à (3.84)), il semble nécessaire de stocker en mémoire toutes les valeurs précédentes de $\hat{x}(t)$ et de $u(t)$. En fait, à partir des mesures $Cx(t_{i+1} - \tau_{i+1})$ et des estimations de l'état $\hat{x}(t_i)$, on peut reconstruire les estimations faites et la commande appliquée au procédé. Soit t_c le temps de calcul supposé connu et constant. Supposons aussi qu'à l'instant $t_{i+1} - t_c$ la mesure $Cx(t_i - \tau_i)$ et le retard τ_{i+1} soient disponibles, et que la commande qui sera appliquée entre $t_{i+1} - t_c$ et t_{i+1} , soit déjà calculée. Premièrement intégrons pour $\bar{t} \in [t_i, t_{i+1} - \tau_{i+1}]$

$$\dot{\hat{z}}(\bar{t}) = f(\hat{z}(\bar{t}), u_s(\hat{z}(\bar{t}))) \quad (3.106)$$

avec $\hat{z}(t_i) = \hat{x}(t_i)$. Ce calcul permet de donner la valeur de $\hat{z}^-(t_{i+1} - \tau_{i+1})$ et à partir de la mesure faite à l'instant $t_{i+1} - \tau_{i+1}$, on réinitialise l'observateur en $\hat{z}$:

$$\hat{z}(i+1) = \hat{z}^-(i+1) - K[C\hat{z}^-(i+1) - Cx(i+1)] \quad (3.107)$$

Maintenant, on recalcule la commande appliquée entre $t_{i+1} - \tau_{i+1}$ et t_{i+1} , en intégrant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(\bar{t}) &= f(\hat{x}(\bar{t}), u_s(\hat{x}(\bar{t}))) \\ u_s(\bar{t}) &= u_s(\hat{x}(\bar{t})) \\ \dot{\hat{z}}(\bar{t}) &= f(\hat{z}(\bar{t}), u_s(\bar{t})) \end{cases} \quad (3.108)$$

avec $\hat{x}(t_{i+1} - \tau_{i+1}) = \hat{z}^-(t_{i+1} - \tau_{i+1})$. Ainsi on a la valeur de $\hat{x}(t_{i+1}) (= \hat{z}(t_{i+1}))$, et on peut calculer la commande future pour $t \in [t_{i+1}, t_{i+1} + T_{\max}]$ en intégrant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(\hat{x}(t), u_s(\hat{x}(t))) \\ u_s(x(t)) &= u_s(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (3.109)$$

3.5 Conclusion

Après avoir fait quelques rappels sur la stabilité et fait un état de l'art, nous donnons trois résultats assez généraux.

En effet, considérons un système pour lequel on peut synthétiser une loi de commande par retour d'état qui le stabilise globalement exponentiellement, et pour lequel on peut appliquer un estimateur d'état global à convergence exponentielle; alors ce système bouclé par la loi de commande calculée à partir des estimations, stabilise encore globalement exponentiellement. Nous pouvons séparer la synthèse de la loi de commande et de celle de l'observateur. Les résultats avec l'observateur continu-discret sont intéressants d'un point de vue pratique. En effet, génériquement pour les bioprocédés, les mesures sont disponibles en temps discret. L'utilisation d'un observateur continu-discret donne une estimation en temps réel des variables d'état du système. Cet estimateur bien que corrigé périodiquement peut être utilisé avec une loi de commande par retour d'état afin de stabiliser le système. Nous avons aussi étudié le cas où les mesures sont disponibles en temps discret et avec retards. Nous montrons comment utiliser deux observateurs continu-discrets afin de stabiliser le système.

Une des principales restrictions de nos résultats réside dans la nécessité de synthétiser une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement un système donné. Il faut savoir aussi construire un estimateur d'état à convergence globale exponentielle. Ensuite, nous utilisons l'hypothèse de globale Lipschitzité. D'une part la construction d'observateurs à convergence exponentielle nécessite cette hypothèse, et, d'autre part cette hypothèse assure que le système n'explose pas en temps fini.

Chapitre 4

Applications - Simulations

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application d'observateurs et à des simulations sur des bioprocédés. Tout d'abord, nous étudierons un cas linéaire où nous appliquons notre observateur continu-discret de type Luenberger et le principe de séparation.

Ensuite, c'est sur un cas d'un bioréacteur classique que nous nous y intéressons. Ce cas permet de mettre en oeuvre de façon correcte l'application d'observateurs et le principe de séparation. Le modèle mathématique d'un procédé étant donné, il s'agit de vérifier son adéquation avec la réalité (concentration positives par exemple), de proposer un loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement le système, de proposer un observateur et de démontrer que le tout fonctionne.

Ensuite, nous passerons au modèle de Rajab. Ce modèle, comme nous l'avons vu, est très difficile à étudier. Néanmoins nous proposons l'application de deux estimateurs d'états. Nous donnerons des conditions d'applications d'un observateur à grand gain et un observateur de type Kalman étendu.

4.2 Exemple linéaire

Nous présentons une application de notre observateur continu-discret de type Luenberger à un système linéaire. Nous avons choisi un système linéaire oscillatoire instable en boucle ouverte avec une grande période d'échantillonnage, afin de montrer que la stabilité peut être obtenue même avec des conditions difficiles. Soit donc le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A x + B u &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6\pi^2 & 2\sqrt{2}\pi \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y_k &= C x_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k \end{cases} \quad (4.1)$$

où bien sur $y_k = y(kT_s)$ et $x_k = x(kT_s)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et T_s la période d'échantillonnage. Dès que les conditions initiales du système ne sont pas nulles, les états du système sans commande sont des sinusoïdes à croissance exponentielle avec pour pseudo-fréquence $\omega_0 = 2\pi$. Le système bouclé par la loi de commande

$$u = G x = \begin{bmatrix} 6\pi^2 - 4 & -2\sqrt{2}\pi - 4 \end{bmatrix} x \quad (4.2)$$

possède deux valeurs propres égales à -2 . Cette loi de commande stabilise donc le système en $x = 0$.

Prenons notre observateur de type Luenberger avec la notations $\hat{x}_k^- = \lim_{t \rightarrow kT_s, t < kT_s} \hat{x}(t)$. Alors pour $t \in [kT_s, (k+1)T_s[$, $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + B u \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- - K [C \hat{x}_{k+1}^- - y_{k+1}] \end{cases} \quad (4.3)$$

Pour démontrer la convergence de l'observateur, nous avons vu (section 2.5.2) qu'il faut que la paire $(C \exp[A T_s], \exp[A T_s])$ soit observable. C'est à dire que

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \exp[A T_s] \\ C \exp[A T_s] \exp[A T_s] \\ \vdots \\ C (\exp[A T_s])^n \end{bmatrix} = n. \quad (4.4)$$

Dans notre cas le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} C \exp[A T_s] \\ C (\exp[A T_s])^2 \end{bmatrix}$ est égal à $\frac{1}{2\pi} \exp(3\sqrt{2}\pi k) \sin(2\pi k)$. Il est clair qu'il ne s'annule que pour $k = i/2, i \in \mathbb{N}^*$.

Pour la simulation, nous avons choisi la période d'échantillonnage $T_s = 3/4$. La matrice $K = [0.99998582916257, 4.49012504142664]$ est calculée afin d'obtenir $\exp(1,5*(-2)*T_s)$ comme valeur propre double de la matrice $[I - KC] \exp[A T_s]$. La dynamique de l'observateur est ainsi 50 % plus rapide que celle imposée par la commande.

Les simulations ont été réalisées avec le logiciel MATLAB en utilisant comme méthode d'intégration Runge-Kutta (4,5) et avec pour erreur relative 10^{-6} , et 10^{-9} pour l'erreur absolue. Les figures 4.1 représentent l'évolution de l'état x_1 et x_2 en trait continu, et des estimés $\hat{x}_1$ et $\hat{x}_2$ en tirets. L'erreur faite sur les conditions initiales est grande: $x(0) = [1, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [2, 10]^T$. C'est une des raisons pour laquelle l'évolution transitoire n'est pas très bonne. De plus la période de mesure de la sortie T_s est choisie proche de celle de la pseudo-période.

De meilleurs résultats sont obtenus si la période de mesure est prise plus petite et si l'erreur sur les conditions initiales est moins importante. Si nous prenons une période d'échantillonnage plus grande que la pseudo-période ($\frac{\omega_0}{2\pi} = 1$), on obtient encore la stabilité du système bouclé à condition de conserver l'observabilité de la matrice $[C \exp[A T_s], C (\exp[A T_s])^2]^T$.

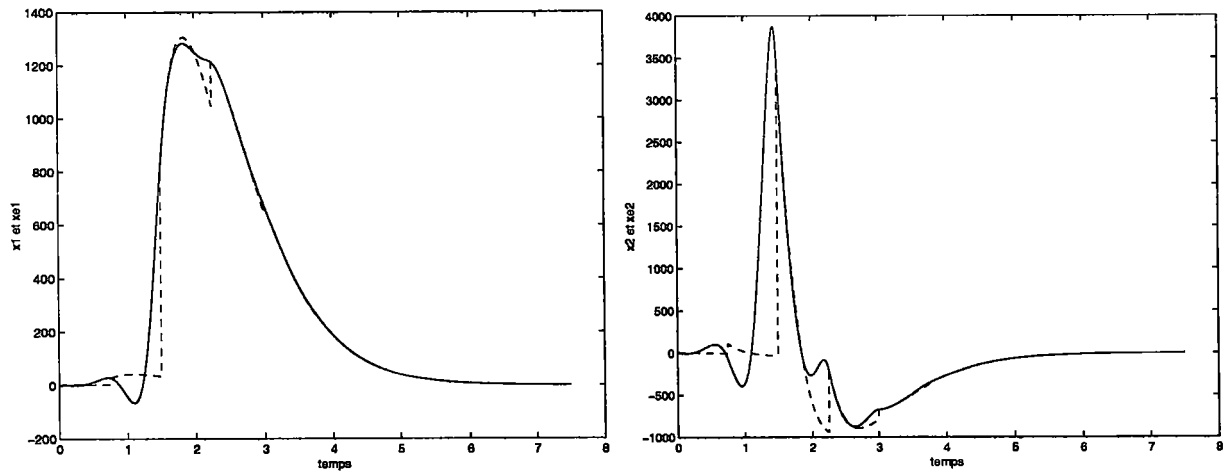


FIG. 4.1: Exemple observateur continu-discret linéaire - évolution de x et $\hat{x}$

4.3 Bioréacteur de base

Le bioréacteur considéré est celui déjà partiellement étudié par Othman (1992): la croissance d'un micro-organisme sur un substrat dans un réacteur continu ($F_{in} = F_{out}$) parfaitement mélangé et avec comme modèle de vitesse spécifique de croissance celui donné par Contois (1959). Le schéma réactionnel

est le suivant :



Le micro-organisme est présent dans le réacteur avec une concentration de X g/l, et le substrat avec S g/l. Nous supposons que ces concentrations sont très faibles. Le bilan de la matière donne comme équation dynamique :

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu X - D X \\ \dot{S} = -r \mu X + D (S_{\text{in}} - S) \end{cases} \quad (4.6)$$

où μ (h^{-1}) est la vitesse spécifique de croissance, r est le coefficient de rendement (g/g) «consommation de substrat sur production de biomasse», et S_{in} g/l est la concentration constante en substrat dans l'alimentation dont le débit est F_{in} . Le système est commandé par la vitesse de dilution $D = \frac{F_{\text{in}}}{V}$, V étant le volume de liquide contenu dans le réacteur. Ce volume est constant ($F_{\text{in}} = F_{\text{out}}$). Le modèle choisis pour la vitesse spécifique de croissance est celui proposé par Contois (1959) :

$$\mu = \mu^{\max} \frac{S}{K X + S} \quad (4.7)$$

où K est une constante de saturation et $\mu^{\max}$ la vitesse spécifique de croissance maximum.

Afin d'effectuer la synthèse d'une loi de commande et d'un observateur, nous étudions ce modèle. Remarquons que si on pose $Z = S_{\text{in}} - r X - S$, alors

$$\dot{Z} = -r \dot{X} - \dot{S} \quad (4.8)$$

$$= -r \mu X + D r X + r \mu X - D (S_{\text{in}} - S) \quad (4.9)$$

$$= -D Z \quad (4.10)$$

Comme $Z(t) = Z(0) \exp\left(-\int_0^t D(\sigma) d\sigma\right)$, alors si $Z(0) > 0$ et si $D(t) \geq 0$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $Z(0) \geq Z(t) > 0$ et $S_{\text{in}} > S(t) + r X(t) \geq S(0) + r X(0)$. Cette intégrale première de la dérive va permettre de définir le domaine de fonctionnement du modèle. En effet, les concentrations sont positives tout comme la vitesse de dilution. Si nous initialisons le modèle dans des conditions correspondant à la réalité, nous voulons que les trajectoires solutions du modèle restent dans un domaine réel possible.

Il faut vérifier que les trajectoires initialisées dans l'orthant positif restent dans cet orthant. Nous voulons un domaine positivement invariant.

si $S = 0$, nous avons $\dot{S}|_{S=0} = D S_{\text{in}} \geq 0$ dès que $D \geq 0$;

si $X = 0$, nous avons $\dot{X}|_{X=0} = 0$.

Ainsi en utilisant l'intégrale première nous avons le domaine de définition

$$\mathcal{D} = \{X, S / X \geq 0, S \geq 0, S_{\text{in}} \geq S + r X\} \quad (4.11)$$

Pour des raisons de commandabilité et d'observabilité, on souhaite éviter les concentrations nulles. On se donne à priori une commande en dilution maximum telle que $D^{\max} < \mu^{\max}$. Prendre une commande $D > \mu^{\max}$ entraînerait un comportement anormal du procédé ($X \rightarrow 0$). On choisit une concentration minimum de substrat : $S \geq \epsilon_S > 0$. Nous allons chercher des conditions sur la commande pour garantir que $S(t) \geq \epsilon_S > 0$ et $X(t) \geq \epsilon_X > 0$ pour tout $t \geq 0$.

si $S = \epsilon_S > 0$, on veut $\dot{S}|_{S=\epsilon_S} > 0$.

Ceci entraîne une valeur minimum de la commande telle que $D > \frac{1}{S_{\text{in}} - \epsilon_S} \frac{r \mu^{\max} \epsilon_S X}{K X + \epsilon_S}$. Comme $X > 0$ et $\frac{X}{K X + \epsilon_S} < \frac{1}{K}$, en posant $D^{\min} = \frac{r \mu^{\max}}{K(S_{\text{in}} - \epsilon_S)} \epsilon_S \left(> \frac{1}{S_{\text{in}} - \epsilon_S} \frac{r \mu^{\max} \epsilon_S X}{K X + \epsilon_S} \right)$, et si on garantit que $D(t) \geq D^{\min}$ alors $\dot{S}|_{S=\epsilon_S} > 0$.

si $X = \epsilon_X > 0$, on veut que $\dot{X}|_{X=\epsilon_X} > 0$.

Ceci entraîne que $\epsilon_X < \frac{(\mu^{\max} - D)S}{KD}$ et une valeur maximum de la commande : $D < D_{\max} < \mu^{\max}$. Comme $S > \epsilon_S$, alors pour un choix de ϵ_X tel que $0 < \epsilon_X = \frac{\mu^{\max} - D_{\max}}{KD_{\max}} \epsilon_S \leq \frac{(\mu^{\max} - D)S}{KD}$, et si on garantit que $D(t) < D_{\max}$, alors on a $\dot{X}|_{X=\epsilon_X} > 0$.

Nous avons finalement le domaine positivement invariant (représenté par la figure 4.2)

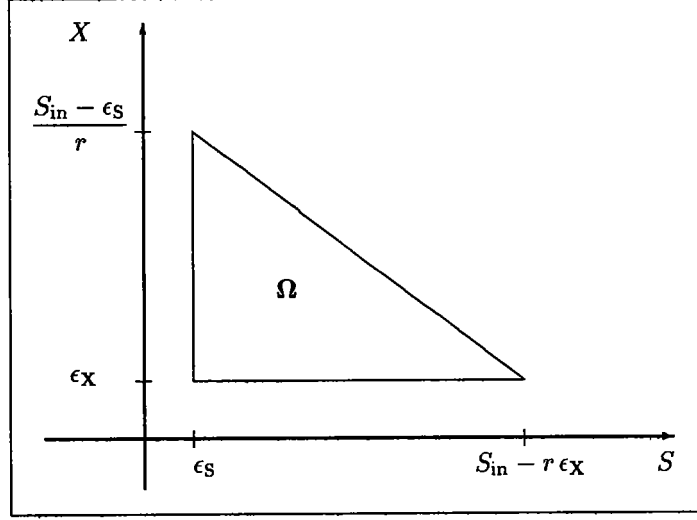


FIG. 4.2: *Domaine physique*

$$\Omega(\epsilon_S, D^{\max}) = \left\{ X, S \mid X > \frac{\mu^{\max} - D^{\max}}{KD^{\max}} \epsilon_S, S > \epsilon_S, S_{\text{in}} > rX + S \right\} \quad (4.12)$$

Remarque : d'après la figure 4.2 nous avons bien évidemment $\epsilon_X < X \leq \frac{S_{\text{in}} - \epsilon_S}{r}$ et $\epsilon_S < S \leq S_{\text{in}} - r\epsilon_X$. Les valeurs de ϵ_X et de $D^{\min}$ sont rendues aussi petites que l'on désire par un choix de ϵ_S . L'adhérence de $\Omega(\epsilon_S, D^{\max})$ ($\bar{\Omega}$) est un compact. Le système est visiblement local Lipschitz partout dans ce compact. Par un raccordement continu, on peut alors étendre les fonctions à des fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}^2$.

Avant de construire une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement le système, il faut déterminer le lieu des points singuliers potentiels. Les solutions de ce système peuvent se paramétrer avec la concentration en biomasse à l'équilibre X° :

$$\begin{cases} S^\circ &= \mu^{\max} (S_{\text{in}} - rX^\circ) \\ D^\circ &= \frac{\mu^{\max} (S_{\text{in}} - rX^\circ)}{(K-r)X^\circ + S_{\text{in}}} \end{cases} \quad (4.13)$$

Nous allons démontrer que le système peut être stabilisé en n'importe quel point $(X_c, S_{\text{in}} - rX_c)$, où X_c représente une consigne en concentration de biomasse telle que $\epsilon_X < X_c < \frac{S_{\text{in}} - \epsilon_S}{r}$. Pour cela, nous proposons la loi de commande :

$$D = \frac{\mu^{\max} S X}{KX + S} \frac{1}{S_{\text{in}} - S} \left(r + \frac{1}{\lambda} (S_{\text{in}} - S - rX_c) \right). \quad (4.14)$$

Le système ainsi bouclé s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X} &= \frac{\mu^{\max} S X}{(KX + S)(S_{\text{in}} - S)} (S_{\text{in}} - S - rX - \frac{X}{\lambda} (S_{\text{in}} - S - rX_c)) \\ \dot{S} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\mu^{\max} S X}{KX + S} (S_{\text{in}} - S - rX_c). \end{cases} \quad (4.15)$$

Cette commande peut être interprétée comme une loi de commande linéarisante multipliée par un facteur non linéaire. Il faut maintenant montrer que cette commande est positive et qu'elle laisse le domaine Ω positivement invariant. Les concentration X et S étant dans Ω , alors $\frac{\mu^{\max} S X}{K X + S} \frac{1}{S_{\text{in}} - S} > 0$ et cela implique qu'il faut que $r + \frac{1}{\lambda} (S_{\text{in}} - S - r X_c) > 0$, soit $\lambda > \frac{-S_{\text{in}} + S + r X_c}{r}$. Or $\max_{\Omega}(S) \leq S_{\text{in}} - r \epsilon_X$, alors si on choisit $\lambda > X_c - \epsilon_X \geq 0$, la commande D est strictement positive.

– Sur le segment $X = \epsilon_X$ ($S \in \Omega$), nous désirons que $\dot{X}|_{X=\epsilon_X} > 0$.

Dès que $\lambda \geq \epsilon_X \geq 0$, alors $(S_{\text{in}} - S - r \epsilon_X - \frac{\epsilon_X}{\lambda} (S_{\text{in}} - S - r X_c)) > 0 \Rightarrow \dot{X} > 0$.

– Sur le segment $S = \epsilon_S$ ($X \in \Omega$), nous désirons que $\dot{S}|_{S=\epsilon_S} > 0$.

Comme $(X, S) \in \Omega \Rightarrow (S_{\text{in}} - \epsilon_S - r X_c) > 0$ et comme $\lambda > 0$ alors $\dot{S} > 0$.

Le système bouclé possède un unique point d'équilibre dans $\bar{\Omega} : (X_c, S_{\text{in}} - r X_c)$. Pour un choix de $\lambda \geq \max\{X_c - \epsilon_X, \epsilon_X\}$, la loi de commande proposée laisse le domaine positivement invariant. Si on choisit $S(0) \leq S_{\text{in}} - r X_c$, alors $S(t) \leq S_{\text{in}} - r X_c$ et il suffit alors de prendre $\lambda \geq \epsilon_X$ pour que $D > 0$.

Soit la fonction de Lyapunov :

$$V(X, S) = \frac{1}{2}(S_{\text{in}} - S - r X)^2 + \frac{1}{2}(S_{\text{in}} - S - r X_c)^2. \quad (4.16)$$

Il est clair que V est une fonction quadratique définie positive et elle ne s'annule que pour le point $(X_c, S_{\text{in}} - r X_c)$. Un simple calcul permet d'écrire

$$\dot{V}(X, S) = -D (S_{\text{in}} - S - r X)^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{\mu^{\max} S X}{K X + S} (S_{\text{in}} - S - r X_c)^2. \quad (4.17)$$

Or la commande $D(X, S)$ et le terme $\frac{\mu^{\max} S X}{K X + S}$ sont strictement positifs pour $(X, S) \in \Omega$. Vu la compacité de Ω , il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que

$$\dot{V}(X, S) \leq -c_1 (S_{\text{in}} - S - r X)^2 - c_2 (S_{\text{in}} - S - r X_c)^2 \quad (4.18)$$

$$\leq -2 \min\{c_1, c_2\} V(S, X). \quad (4.19)$$

Nous avons donc la globale exponentielle stabilité du point $(X_c, S_{\text{in}} - r X_c)$. Ceci est rendu possible parce que nous avons pris la précaution de s'éloigner des bords (axes $X = 0$, $S = 0$ et $S_{\text{in}} - S - r X = 0$).

Afin de pouvoir commander le système à partir des mesures discrètes du substrat, nous allons appliquer l'observateur continu-discret donné par le théorème 2.5.3. Nous supposons que le substrat S est mesuré périodiquement aux instants $k T_s$, $k \in \mathbb{N}$:

$$y(k T_s) = y_k = C x(k T_s) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} X_k \\ S_k \end{bmatrix} = S_k. \quad (4.20)$$

Nous allons montrer que le système suivant, où k_1 et k_2 sont deux constantes précisées ultérieurement,

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\hat{X}} &= \hat{\mu} \hat{X} - D \hat{X} \\ \dot{\hat{S}} &= -r \hat{\mu} \hat{X} + D (S_{\text{in}} - \hat{S}) \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{X}_{k+1} &= \hat{X}_{k+1}^- - k_1 (\hat{S}_{k+1}^- - S_k) \\ \hat{S}_{k+1} &= \hat{S}_{k+1}^- - k_2 (\hat{S}_{k+1}^- - S_k) \end{cases} \end{cases} \quad (4.21)$$

consiste en un observateur pour le système (4.6) pour $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $\forall k \in \mathbb{N}$. L'équation de l'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{\epsilon}_X &= \hat{\mu} \hat{X} - \mu X - D \epsilon_X \\ \dot{\epsilon}_S &= -r (\hat{\mu} \hat{X} - \mu X) - D \epsilon_S \end{cases} \\ \begin{cases} \epsilon_{X_{k+1}} &= \epsilon_{X_{k+1}}^- - k_1 \epsilon_{S_{k+1}}^- \\ \epsilon_{S_{k+1}} &= (1 - k_2) \epsilon_{S_{k+1}}^- \end{cases} \end{cases} \quad (4.22)$$

Soit α la constante de Lipschitz de la fonction $f(X, S) = \left[\frac{\mu^{\max} S X}{K X + S}, -r \frac{\mu^{\max} S X}{K X + S} \right]^T$. En posant $\varepsilon = [\varepsilon_X, \varepsilon_S]^T$, un simple calcul permet d'écrire $\forall t \in [t_k, t_{k+1}[$

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \|\varepsilon_k\| \exp \left((\alpha + D^{\max}) T_s \right). \quad (4.23)$$

Reprenons l'intégrale première $Z = S_{\text{in}} - S - r X$ avec $(X, S) \in \Omega$ et posons $\rho_k = \exp \left(- \int_{t_k}^{t_{k+1}} D(\sigma) d\sigma \right)$. Comme $\dot{Z}(t) = -D(t) Z(t)$, nous avons

$$Z_{k+1}^- = \rho_k Z_k. \quad (4.24)$$

pour l'observateur, si $(\hat{X}, \hat{S}) \in \Omega$, nous avons aussi $\hat{Z} = S_{\text{in}} - \hat{S} - r \hat{X}$ et

$$\hat{Z}_{k+1}^- = \rho_k \hat{Z}_k. \quad (4.25)$$

En soustrayant les deux équations précédentes, on a :

$$Z_{k+1}^- - \hat{Z}_{k+1}^- = \rho_k (Z_k - \hat{Z}_k) \quad (4.26)$$

$$= \rho_k (\varepsilon_{S_k} + r \varepsilon_{X_k}). \quad (4.27)$$

Par un choix de $k_1 = -1/r$ et de $k_2 = 1$, il découle alors

$$\begin{cases} \varepsilon_{X_{k+1}} &= \varepsilon_{X_{k+1}}^- + \frac{1}{r} \varepsilon_{S_{k+1}}^- = \frac{1}{r} (Z_{k+1}^- - \hat{Z}_{k+1}^-) = \frac{\rho_k}{r} (\varepsilon_{S_k} + r \varepsilon_{X_k}) \\ \varepsilon_{S_{k+1}} &= 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Ce choix particulier de k_1 et k_2 permet de faire une correction «pile» sur le substrat, alors $\varepsilon_{S_{k+1}} = 0$, $\forall k \geq 1$. On en déduit alors :

$$\varepsilon_{X_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k+1} \rho_i \frac{1}{r} (\varepsilon_S(0) + r \varepsilon_X(0)). \quad (4.29)$$

Comme $0 < \rho_{\min} = \exp(-T_s D^{\max}) \leq \rho_i \leq \rho_{\max} = \exp(-T_s D^{\min}) < 1$, cela prouve la convergence exponentielle des suites $\varepsilon_{S_{k+1}}$ et $\varepsilon_{X_{k+1}}$. À partir de l'équation (4.23), nous avons aussi $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ globalement exponentiellement.

Il convient de faire observer, que lorsque l'on réinitialise à l'instant t_{k+1} , les nouvelles conditions initiales de l'observateur sont dans Ω . Au départ $\hat{X}(0)$ et $\hat{S}(0)$ sont choisis dans Ω . Raisonnons par récurrence et supposons que $\hat{X}_k$ et $\hat{S}_k$ soient dans Ω . On a alors

$$\begin{cases} \hat{X}_{k+1} &= \hat{X}_{k+1}^- + \frac{1}{r} (\hat{S}_{k+1}^- - S_{k+1}) \\ \hat{S}_{k+1} &= S_{k+1}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Comme $(\hat{X}_k, \hat{S}_k)$ est dans Ω et puisque Ω est positivement invariant par le système considéré, alors $(\hat{X}_{k+1}^-, \hat{S}_{k+1}^-)$ est aussi dans Ω et compte tenu de l'équation (4.30), on a :

$$S_{\text{in}} - \hat{S}_{k+1} - r \hat{X}_{k+1} = S_{\text{in}} - \hat{S}_{k+1}^- - r \hat{X}_{k+1}^- > 0. \quad (4.31)$$

Comme $\hat{S}_{k+1} = S_{k+1}$ et $(X_{k+1}, S_{k+1}) \in \Omega$, il en découle :

$$\hat{S}_{k+1} > \varepsilon_S. \quad (4.32)$$

À partir de l'équation (4.29), si $\varepsilon_S(0) + r \varepsilon_X(0) > 0$ alors pour tout $k \geq 1$, $\varepsilon_{X_{k+1}} = \hat{X}_{k+1} - X_{k+1} > 0$ et

$$\hat{X}_{k+1} > X_{k+1} > \varepsilon_X. \quad (4.33)$$

Les relations (4.31), (4.32) et (4.29) permettent de conclure que si on choisit $(\hat{X}(0), \hat{S}(0)) \in \Omega$ et $\epsilon_S(0) + r\epsilon_X(0) > 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\hat{X}_{k+1}, \hat{S}_{k+1}) \in \Omega$.

Compte tenu du résultat de séparation du théorème 3.4.2, la loi de commande (4.14) calculée à partir des états estimés par l'observateur (4.21) conduit à la stabilité exponentielle globale du point d'équilibre $(X_c, S_{in} - rX_c)$, de plus tous les états estimés restent dans le domaine Ω .

Des simulations sont données pour illustrer les résultats. Elles sont réalisées avec le logiciel MATLAB, en utilisant comme méthode d'intégration Runge-Kutta (4,5) et avec pour erreur relative 10^{-6} , et 10^{-9} pour l'erreur absolue. L'état du système "réel" est en trait continu tandis que celui de l'observateur est en traits pointillés. Les paramètres sont choisis tels que $\mu^{\max} = 1 \text{ h}^{-1}$, $r = 1 \text{ g/g}$, $S_{in} = 0,1 \text{ g/l}$, $X(0) = 0,01 \text{ g/l}$, $S(0) = 0,03 \text{ g/l}$, $\hat{X}(0) = 0,03 \text{ g/l}$, $\hat{S}(0) = 0,02 \text{ g/l}$, $D^{\max} = 0,5 \text{ h}^{-1}$, $\epsilon_S = 0,01 \text{ g/l}$. La période d'échantillonnage est $T_s = 2 \text{ h}$ et on choisit $\lambda = 0,08$. Notre but est de stabiliser le système au point $(X_c = 0,08, S_c = 0,02)$. Nous obtenons les figures 4.3 et 4.4. De bons résultats sont obtenus. Plus la constante λ est petite, plus vite tend le système bouclé vers le point d'équilibre souhaité.

Un essai avec bruit sur la mesure est présenté par les figures 4.4 et 4.5. Le bruit à été simulé en multipliant la mesure par un bruit blanc d'espérance 1 et d'écart type 10%, puis en arrondissant le résultat à 0.002 unités près. Nous obtenons des résultats corrects, cependant nous ne pouvons pas garantir que les états estimés restent dans Ω sauf si on corrige les mesures. C'est-à-dire si on obtient $y(t_i) < \epsilon_S$, respectivement $y(t_i) > S_{in} - r\epsilon_X$, alors on fixe $y(t_i)$ à ϵ_S , et à $S_{in} - r\epsilon_X$.

Finalement, nous appliquons le résultat de séparation dans le cas où les mesures de la sortie sont faites en temps discret et disponibles avec retard (section 3.4.4). Rappelons que l'on considère deux observateurs : l'un $\hat{x}$ fonctionnant en temps réel et donnant les estimations de l'état pour le calcul de la loi de commande; l'autre $\hat{z}$ est synchronisé avec le retard. À l'instant t_i , nous disposons de la mesure partielle de l'état faite à l'instant $t_i - \tau_i$. Les figures 4.6 illustrent le résultat pour une période d'échantillonnage fixe et égale à $T_s = 2 \text{ h}$ ($t_i = i, T_s$). Le retard est aussi constant et vaut $1 \text{ h } 30$ ($\tau_i = 1.5, \forall i$). L'équation de sortie est, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$y(t_i) = y(iT_s) = y(2i) = Cx(t_i - \tau_i) = X(2i - 1.5) \quad (4.34)$$

Le système a été initialisé avec les mêmes constantes que précédemment. L'état initial du système, de l'observateur en $\hat{x}$ et de l'observateur en $\hat{z}$, est $(X(0), S(0)) = (0,01; 0,03)$, $(\hat{X}(0), \hat{S}(0)) = (0,03; 0,02)$ et $(\hat{z}_X(0), \hat{z}_S(0)) = (0,03; 0,02)$. Le système réel, respectivement le x -observateur et le z -observateur, est représenté en trait continu, en tirets et en points. L'allure de la commande est donnée par la figure 4.4. De bon résultats sont obtenus compte tenu d'un retard et d'une période d'échantillonnage assez grand.

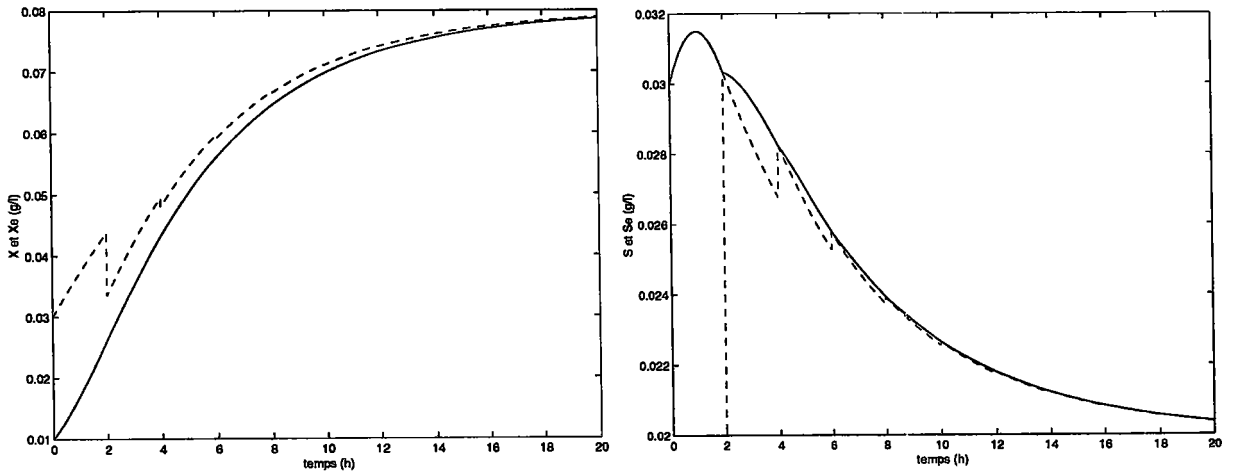


FIG. 4.3: Concentration en biomasse et en substrat

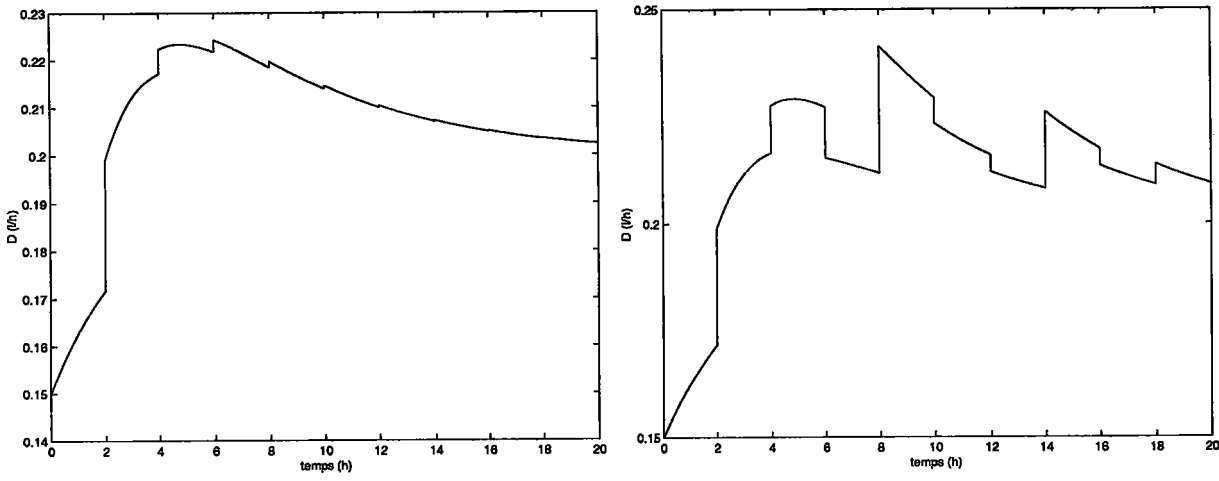


FIG. 4.4: Évolution de la commande en dilution sans ou avec bruit

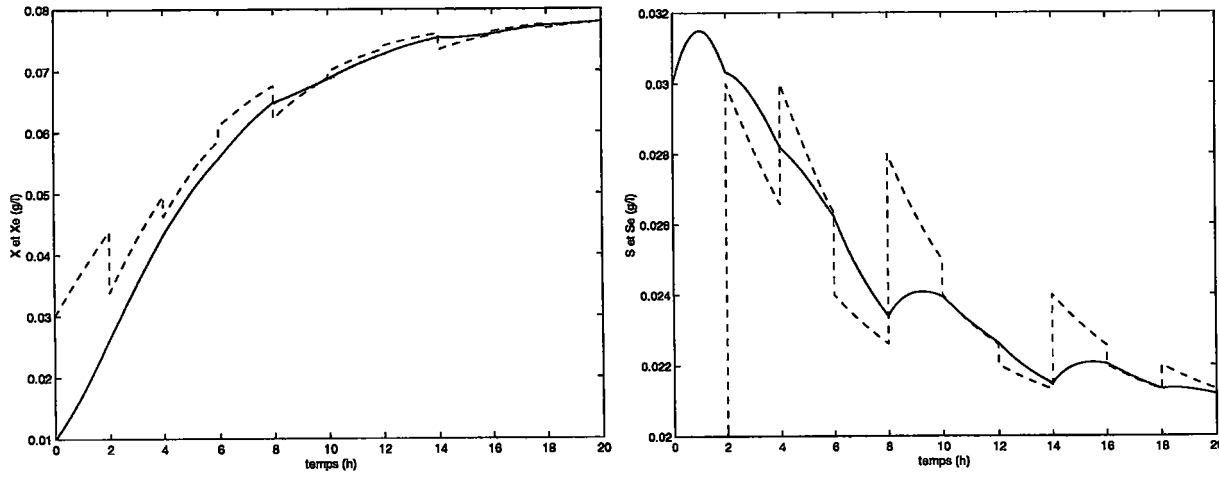


FIG. 4.5: Concentration en biomasse et en substrat en présence de bruit

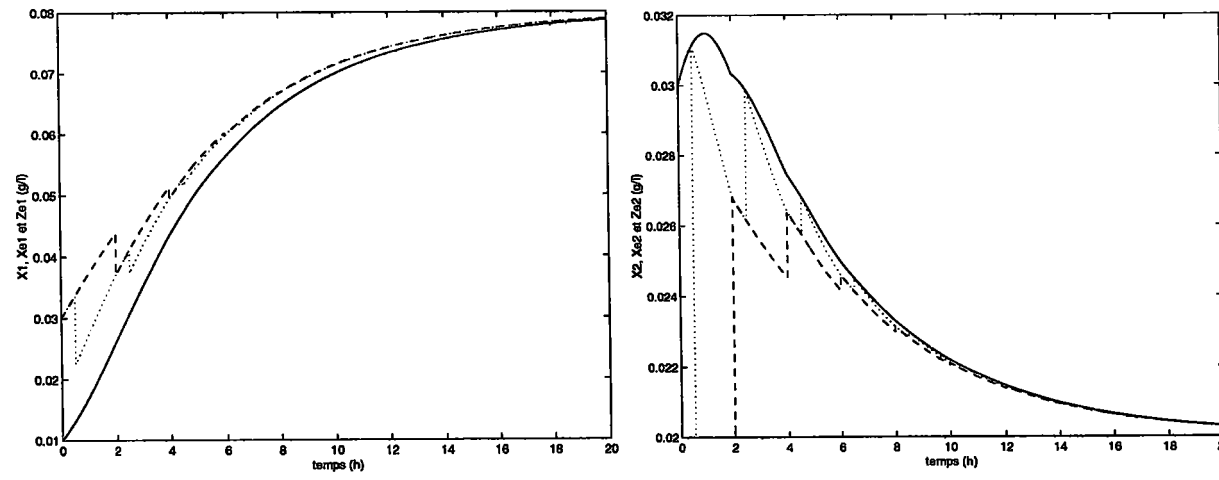


FIG. 4.6: Concentration en biomasse et en substrat - mesures temps discrèt avec retard

4.4 Applications au modèle de Rajab

4.4.1 Introduction

Cette section concerne l'application d'un observateur à grand gain et d'un observateur de type Kalman étendu au modèle de Rajab. C'est le modèle que nous avons étudié au chapitre 1 section 1.4. :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = R_1 + R_{21} + R_{31} - R_{12} - R_{13} - D X_1 & \dot{E} = \frac{45}{14} R_1 - \frac{20}{11} R_3 - D E \\ \dot{X}_2 = R_2 + R_{12} + R_{32} - R_{21} - R_{23} - D X_2 & \dot{S} = -\frac{50}{7} R_1 - 2 R_2 + D (S_{in} - S) \\ \dot{X}_3 = R_3 + R_{13} + R_{23} - R_{31} - R_{32} - D X_3 & \dot{A} = \frac{1}{14} R_1 - D A \end{cases} \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{cases} R_1 = \frac{12}{5} \frac{S X_1}{(1+2S)(2+5A)} & R_{12} = \frac{2 X_1}{1+10S} & R_{13} = \frac{E X_1}{(1+5E)(1+10S)} \\ R_2 = \frac{145}{2} \frac{S X_2}{1+250S} & R_{21} = \frac{S X_2}{1+10S} & R_{23} = \frac{4 E X_2}{5(1+2E)} \\ R_3 = \frac{25}{2} \frac{E X_3}{(1+50E)(1+5A)} & R_{32} = 40 \frac{S X_3}{1+20S} & R_{31} = 50 \frac{S X_3}{1+100S} \end{cases} \quad (4.36)$$

Tout d'abord nous étudierons des conditions d'observabilité, puis nous proposons une loi de commande. Vu la complexité du modèle, il reste plusieurs points en suspens.

4.4.2 Observabilité

On doit préalablement savoir si le système est observable ou non. A partir de la définition d'indiscernabilité, on cherche à trouver des conditions suffisantes pour que le système (4.35)-(4.36) soit observable : deux sorties identiques ($y(t) \equiv y'(t)$) doivent permettre de retrouver les mêmes états ($x(t) \equiv x'(t)$). Soient deux trajectoires $x(t)$ et $x'(t)$, on écrit alors l'égalité des mesures provenant de ces trajectoires.

- si on mesure le glucose S :

$S(t) \equiv S'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{S}(t) \equiv \dot{S}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} -\frac{50}{7} R_1 - 2 R_2 + D.(S - S_{in}) &\equiv -\frac{50}{7} R'_1 - 2 R'_2 + D.(S' - S_{in}) \\ \Leftrightarrow -\frac{50}{7} R_1 - 2 R_2 &\equiv -\frac{50}{7} R'_1 - 2 R'_2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

- si on mesure l'éthanol E :

$E(t) \equiv E'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{E}(t) \equiv \dot{E}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{45}{14} R_1 - \frac{20}{11} R_3 - D.E &\equiv \frac{45}{14} R'_1 - \frac{20}{11} R'_3 - D.E' \\ \equiv \frac{45}{14} R_1 - \frac{20}{11} R_3 &\equiv \frac{45}{14} R'_1 - \frac{20}{11} R'_3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

- si on mesure l'acétate A :

$A(t) \equiv A'(t) \forall t \geq 0$ alors $\dot{A}(t) \equiv \dot{A}'(t) \forall t \geq 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{14} R_1 - D.A &\equiv \frac{1}{14} R'_1 - D.A' \\ \Leftrightarrow \frac{1}{14} R_1 &\equiv \frac{1}{14} R'_1 \end{aligned} \quad (4.39)$$

D'après (4.39) et en explicitant R_1 (voir (4.36)), si $S(t) \neq 0 \forall t$, on a $X_1(t) \equiv X'_1(t)$. Ensuite d'après (4.38) et en explicitant R_3 , si $E(t) \neq 0 \forall t$, on a $X_3(t) \equiv X'_3(t)$. Et de (4.37), il vient $X_2(t) \equiv X'_2(t)$.

Sous les conditions où on mesure le glucose, l'éthanol et l'acétate et que la concentration en glucose et en éthanol soient non nulles, alors le système est observable. De plus il n'existe pas de commande rendant le système (4.35) inobservable, le modèle est donc uniformément observable. L'espace d'observation est donné par $\mathcal{O} = \{S, L_f S, E, L_f E, A, L_f A\}$ avec, lorsque $S \neq 0$ et $E \neq 0$, $\text{rang}(\text{d}\mathcal{O}) = 6$.

Trois mesures ont été utilisées, ce qui est beaucoup pour un système de dimension 6. Si on enlève une mesure, cela impliquera des calculs très complexes ($S^{(2)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ par exemple) et peut être une perte d'observabilité uniforme. Une autre solution envisageable consiste à utiliser les mesures des gaz qui sont une combinaison de R_1 , R_2 et R_3 , mais il faudra aussi travailler avec des dérivées de ces expressions.

4.4.3 Synthèse d'une loi de commande

Le but consiste à produire le maximum de levure dans le temps le plus court et au moindre coût. Il s'agit donc d'obtenir une concentration maximale de levure tout en alimentant le moins possible en glucose. La levure se développe principalement par fermentation sur glucose. La fermentation sur éthanol est possible, mais le rendement est moindre. La concentration en glucose joue un rôle important. En effet sans glucose et aussi sans éthanol la levure ne se développe plus. Si la concentration en glucose est trop élevée, il y a aussi production d'éthanol, et le rendement diminue. Inversement une concentration trop faible de glucose ne permet pas à la levure de se développer beaucoup.

D'après Dantigny (1989) lorsque la concentration de glucose reste constante au cours du temps, le rendement biomasse/substrat, le taux de croissance et la productivité en biomasse sont plus importants. Il est montré qu'une consigne de glucose à 0.071 g/l permet d'avoir le meilleur développement de la levure (Mosrati *et al.*, 1991; Bicking, 1991). La procédure de conduite du procédé est constituée de deux phases. D'abord le fermenteur est initialement rempli d'un milieu de culture ainsi qu'un inoculum réalisé à partir de la levure. Ensuite, le contrôle en apport de solution glucosée commence dès que les concentrations en éthanol et glucose sont très faibles (< 0.05 g/l).

Un objectif de la loi de commande consiste à réguler la concentration en glucose à la valeur de consigne $S \equiv S_c = 0.071$ g/l. Cette valeur de consigne permet d'obtenir un des meilleurs rendements consommation de glucose sur production de levure.

Une première méthode de contrôle envisagée consiste en la commande linéarisante avec placement de pôle (Isidori, 1989). Nous choisissons comme sortie à réguler la concentration en glucose $h(x) = S$. Ce choix conduit à un degré relatif unité ($\rho = 1$, $L_g L_f^{\rho-1} S \neq 0$). En boucle fermée, nous obtenons alors un sous espace inobservable de dimension $6 - 1 = 5$.

Étant donné que $\dot{S} = -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + D(S_{in} - S)$, la commande linéarisante est donnée par :

$$D = -\frac{1}{S_{in} - S} \left(-\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + \beta_S (S - S_c) \right) \quad (4.40)$$

ce qui conduit à $\dot{S} = -\beta_S (S - S_c)$, avec β_S et S_c constantes > 0 . Dans ce cas $S(t) = S_c + (S(0) - S_c) \times \exp(-\beta_S t)$.

Afin que D reste positive, on utilise alors la loi de commande :

$$D = \begin{cases} -\frac{1}{S_{in} - S} \left(-\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 + \beta_S (S - S_c) \right) = g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) < 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Dans la pratique, on ne commence à appliquer une commande à l'instant t_0 où $E < 0.05$ g/l et $S < 0.05$ g/l. Alors $S(t) < S_c$ d'où la commande $g(x)$ reste positive et $D > 0$. On a $\dot{S} = -\beta_S (S - S_c) > 0$ et S tends exponentiellement vers S_c par valeur inférieure.

Un problème se pose lorsque $S = S_{in}$. Suivant la condition initiale sur S , on a

- $0 \leq S(0) < S_c$ la commande D est toujours positive, S tends vers S_c et on a toujours $S(t) < S_c < S_{in}$.
- $S(0) = S_c$ alors $S(t) = S_c \forall t \geq 0$.
- $S_c < S(0) < S_{in}$ si la commande est positive alors $S(t)$ tends vers S_c , sinon $D = 0$ donne $\dot{S} = -\frac{50}{7}R_1 - 2R_2 \leq 0$, donc $S(t) \leq S(0) < S_{in}$.

On a montré précédemment que fixer la consigne S_c à 0.071 g/l nous donne le point d'équilibre suivant :

$$\underline{x}^o = \begin{bmatrix} X_1^o \\ X_2^o \\ X_3^o \\ E^o \\ S^o \\ A^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.44356 \text{ g/l} \\ 139.229 \text{ g/l} \\ 4.23736 \text{ g/l} \\ 0.0741901 \text{ g/l} \\ 0.071 \text{ g/l} \\ 0.0900993 \text{ g/l} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne du système (4.35), bouclée par la loi de commande précédente, évaluée au point $\underline{x}^0$ sont

$$(-2.666 + 2.4673i, -2.666 - 2.4673i, -1.154, -0.303, -0.263, -\beta_S). \quad (4.43)$$

Celles-ci sont toutes à partie réelle strictement négatives. On peut donc conclure à la stabilité asymptotique locale de ce point d'équilibre.

Nous n'avons pas réussi à prouver la stabilité asymptotique globale dans le domaine physique $\mathcal{D}_\varphi$ (chapitre 1) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\varphi = \left\{ X_1, X_2, X_3, E, S, A \mid X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, E \geq 0, S \geq 0, A \geq 0, \right. \\ \left. 20X_1(0) + 20X_2(0) + 20X_3(0) + 11E(0) + 10S(0) + 225A(0) \right. \\ \left. \leq 20X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 11E + 10S + 225A \leq 10 S_{in} \right\} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour cela, on cherche une fonction de Lyapunov.

4.4.4 Application d'un observateur à grand gain

Un problème au départ se pose. Le domaine de définition $\mathcal{D}_\varphi$ n'est pas un ouvert. Nous remarquons d'ailleurs que les problèmes d'observabilité se situent sur les bords du domaine. Une recherche sur l'éloignement des trajectoires du système (4.35) des bords à partir d'une commande adaptée reste à effectuer.

Dans la suite, et dans l'optique d'avoir une première approche, nous supposons que ce problème d'ouvert est résolu par une commande appropriée. Nous mesurons le glucose, l'éthanol, l'acétate et le volume. Nous choisissons le changement de variables :

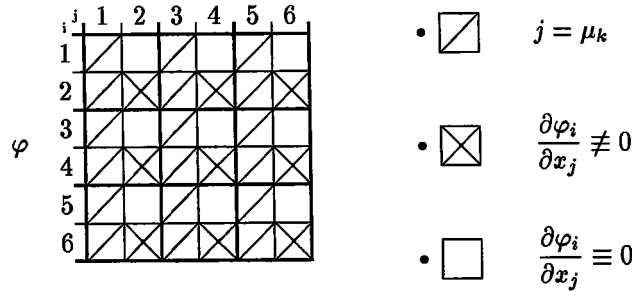
$$\phi(x) = [S, L_f S, E, L_f E, A, L_f A]^T = [z_1, \dots, z_6]^T \quad (4.45)$$

En utilisant les notations du théorème 2.3.4, nous avons ici le nombre d'états $n = 6$, le nombre de mesures $p = 3$, la taille de chaque bloc $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 2$ d'où $\mu_1 = 1, \mu_2 = 3, \mu_3 = 5$.

Après ce changement de variables, le système (4.35) se met sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \varphi_1(z_1, D) & = z_2 + D(S_{in} - z_1) \\ \dot{z}_2 = \varphi_2(z_1, \dots, z_6, D) \\ \dot{z}_3 = z_4 + \varphi_3(z_3, D) & = z_4 - D z_3 \\ \dot{z}_4 = \varphi_4(z_1, \dots, z_6, D) \\ \dot{z}_5 = z_6 + \varphi_5(z_5, D) & = z_6 - D z_5 \\ \dot{z}_6 = \varphi_6(z_1, \dots, z_6, D) \end{cases} \quad (4.46)$$

Dans ce cas la structure de $\partial\varphi/\partial x_x$ correspond à la figure suivante :



avec $i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, 6, k = 1, \dots, 3$.

En examinant le schéma précédent, le respect de la condition (b) du théorème 6 conduit aux conditions suivantes :

$$\sigma_2 \geq \sigma_4, \sigma_2 \geq \sigma_6, \sigma_4 \geq \sigma_2, \sigma_4 \geq \sigma_6, \sigma_6 \geq \sigma_2, \sigma_6 \geq \sigma_4 \implies \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6$$

d'où nous pouvons choisir $\{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5\} = \{1, 1, 1\}$ et $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{1, 1, 1\}$, on a alors $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 2$.

Sous réserve que $S \neq 0$ et $E \neq 0$,

$$(\Sigma_O) : \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + u g(\hat{x}) + \left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})] \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.47)$$

où $x^T = [X_1, X_2, X_3, E, S, A]$, est un observateur pour le système (4.35).

Le terme de correction $\left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})]$ s'explique alors de la manière suivante :

$$\left[\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right]_{\hat{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\hat{X}_1}{\hat{S}(1+2\hat{S})} & 0 & 0 & 0 & \frac{5\hat{X}_1}{2+5\hat{A}} & \frac{35}{6} \frac{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})}{\hat{S}} \\ \frac{-\hat{X}_2}{\hat{S}(1+250\hat{S})} & \frac{-1}{145} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-20}{29} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} \\ 0 & 0 & \frac{-\hat{X}_3}{(1+50\hat{E})\hat{E}} & \frac{-11}{250} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} & \frac{5\hat{X}_3}{1+5\hat{A}} & \frac{99}{50} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T^{-2\delta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^{-\delta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{-2\delta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T^{-\delta_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T^{-2\delta_3} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \\ 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & k_5 \\ 0 & 0 & k_6 \end{bmatrix},$$

$$[y - h(\hat{x})] = \begin{bmatrix} S - \hat{S} \\ E - \hat{E} \\ A - \hat{A} \end{bmatrix}, \text{ d'où } \Lambda^{-1} K [y - h(\hat{x})] = \begin{bmatrix} k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) \\ k_2 T^{-2\delta_1} (S - \hat{S}) \\ k_3 T^{-\delta_2} (E - \hat{E}) \\ k_4 T^{-2\delta_2} (E - \hat{E}) \\ k_5 T^{-\delta_3} (A - \hat{A}) \\ k_6 T^{-2\delta_3} (A - \hat{A}) \end{bmatrix}. \text{ La correction à apporter}$$

au système, est alors :

$$\begin{bmatrix} -\frac{\hat{X}_1}{\hat{S}(1+2\hat{S})} k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) + \left(\frac{5\hat{X}_1}{2+5\hat{A}} k_5 T^{-\delta_3} + \frac{35}{6} \frac{(1+2\hat{S})(2+5\hat{A})}{\hat{S}} k_6 T^{-2\delta_3} \right) (A - \hat{A}) \\ - \left(\frac{\hat{X}_2}{\hat{S}(1+250\hat{S})} k_1 T^{-\delta_1} + \frac{1}{145} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} k_2 T^{-2\delta_1} \right) (S - \hat{S}) - \frac{20}{29} \frac{1+250\hat{S}}{\hat{S}} k_6 T^{-2\delta_3} (A - \hat{A}) \\ - \left(\frac{\hat{X}_3}{(1+50\hat{E})\hat{E}} k_3 T^{-\delta_2} + \frac{11}{250} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} k_4 T^{-2\delta_2} \right) (E - \hat{E}) + \left(\frac{5\hat{X}_3}{1+5\hat{A}} k_5 T^{-\delta_3} + \frac{99}{50} \frac{(1+5\hat{A})(1+50\hat{E})}{\hat{E}} k_6 T^{-2\delta_3} \right) (A - \hat{A}) \\ + k_3 T^{-\delta_2} (E - \hat{E}) \\ + k_1 T^{-\delta_1} (S - \hat{S}) \\ + k_5 T^{-\delta_3} (A - \hat{A}) \end{bmatrix}.$$

On a besoin que les matrices $A_i - K_i C_i$ ($i = 1, \dots, 3$) $\begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -k_3 & 1 \\ -k_4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -k_5 & 1 \\ -k_6 & 0 \end{bmatrix}$ soient Hurwitz.

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_{2i-1} = \frac{1}{2} \left(-k_{2i-1} + \sqrt{k_{2i-1}^2 - 4k_{2i}} \right), \quad \lambda_{2i} = \frac{1}{2} \left(-k_{2i-1} - \sqrt{k_{2i-1}^2 - 4k_{2i}} \right)$$

pour $i = 1, 2, 3$. On peut alors choisir les $k_j > 0$, pour $j = 1, \dots, 6$. Par exemple pour avoir $\lambda_1 = \dots = \lambda_6 = -5$, alors $k_1 = k_3 = k_5 = 10$ et $k_2 = k_4 = k_6 = 25$.

Le gain T^{-1} doit être choisi tel que $0 < T \leq T_0 < 1$. T_0 est défini suivant différents paramètres (n^2 , constante de Lipschitz de la fonction $\varphi(u, z)$ définie par changement de variables, ...).

Alors on a le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_1 = \frac{12}{8} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2S)(2+5A)} + \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+10S} + \frac{50 \hat{S} \hat{X}_3}{1+100S} - \frac{2 \hat{X}_1}{1+10S} - \frac{\hat{E} \hat{X}_1}{(1+5E)(1+10S)} - D \hat{X}_1 - k_1 T^{-\delta_1} \frac{\hat{X}_1}{S(1+2S)} (S-\hat{S}) \\ \quad + k_5 T^{-\delta_3} \frac{5 \hat{X}_1}{2+5A} (A-\hat{A}) + k_6 T^{-2\delta_3} \frac{35}{8} \frac{(1+2S)(2+5A)}{S} (A-\hat{A}) \\ \hat{X}_2 = \frac{145}{3} \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+250S} + \frac{2 \hat{X}_1}{1+10S} + \frac{40 \hat{S} \hat{X}_3}{1+20S} - \frac{\hat{S} \hat{X}_2}{1+10S} - \frac{4}{5} \frac{\hat{E} \hat{X}_2}{1+2E} - D \hat{X}_2 - k_1 T^{-\delta_1} \frac{\hat{X}_2}{S(1+250S)} (S-\hat{S}) \\ \quad - k_2 T^{-2\delta_1} \frac{1}{145} \frac{1+250S}{S} (S-\hat{S}) - k_6 T^{-2\delta_3} \frac{20}{29} \frac{1+250S}{S} (A-\hat{A}) \\ \hat{X}_3 = \frac{25}{3} \frac{\hat{E} \hat{X}_3}{(1+50E)(1+5A)} + \frac{\hat{E} \hat{X}_1}{(1+5E)(1+10S)} + \frac{4}{5} \frac{\hat{E} \hat{X}_2}{1+2E} - \frac{50 \hat{S} \hat{X}_3}{1+100S} - \frac{40 \hat{S} \hat{X}_3}{1+20S} - D \hat{X}_3 - k_3 T^{-\delta_2} \frac{\hat{X}_3}{(1+50E)E} (E-\hat{E}) \\ \quad - k_4 T^{-2\delta_2} \frac{11}{250} \frac{(1+5A)(1+50E)}{E} (E-\hat{E}) + k_5 T^{-\delta_3} \frac{5 \hat{X}_3}{1+5A} (A-\hat{A}) + k_6 T^{-2\delta_3} \frac{99}{50} \frac{(1+50E)(1+5A)}{E} (A-\hat{A}) \\ \hat{E} = \frac{54}{7} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2S)(2+5A)} - \frac{250}{11} \frac{\hat{E} \hat{X}_3}{(1+50E)(1+2A)} - D \hat{E} + k_3 T^{-\delta_2} (E-\hat{E}) \\ \hat{S} = -\frac{120}{7} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2S)(2+5A)} - \frac{145 \hat{S} \hat{X}_2}{1+250S} + D S_{in} - \hat{S} + k_1 T^{-\delta_1} (S-\hat{S}) \\ \hat{A} = \frac{6}{35} \frac{\hat{S} \hat{X}_1}{(1+2S)(2+5A)} - D \hat{A} + k_5 T^{-\delta_3} (A-\hat{A}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \begin{bmatrix} S \\ E \\ A \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Comme l'observateur est construit à partir d'une recopie du système plus une correction qui dépend du gain et de l'erreur entre les estimées et les mesures, alors il ne conserve pas nécessairement les propriétés du système. En particulier l'invariance en temps positif du domaine physique est perdue, ce qui peut entraîner, de façon transitoire, des concentrations estimées négatives.

Nous savons que le système (4.35) est inobservable lorsque soit $S = 0$ soit $E = 0$, ce qui entraîne que la matrice $\begin{bmatrix} \partial \phi \\ \partial \hat{x} \end{bmatrix}$ est mal conditionnée pour S ou E proche de zéro. Dans ces conditions le calcul numérique pose des difficultés.

Nous avons réalisé des simulations du système bouclé en utilisant les estimations fournies par l'observateur. Ces simulations ont été réalisées avec l'aide du logiciel MATLAB dans les conditions suivantes :

- conditions initiales, en g/l, du système (Bicking, 1991):
 $x(0) = [X_1(0), X_2(0), X_3(0), E(0), S(0), A(0)]^T = [17.4, 0, 0, 1.8, 2.5, 0]^T$;
- conditions initiales, en g/l, de l'observateur : $\hat{x}(0) = [6, 6, 6, 2, 2, 0.02]^T$;
- le gain $T^{-1} = 10$ h, consigne $S_c = 0.071$ g/l et $S_{in} = 300.0$ g/l;
- les valeurs des constantes sont : $k_1 = k_3 = k_5 = 10$, $k_2 = k_4 = k_6 = 25$, et $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$.

La méthode d'intégration utilisée est celle de Runge-Kutta (4,5) $t = 0$ h à $t = 20$ h, avec une erreur relative de 10^{-6} et une erreur absolue de 10^{-9} . La commande utilisée est $D = -\frac{1}{L_g S} [L_f S + \beta_S \cdot (S - S_c)]$ (avec ici $\beta_S = 1$), à partir de l'instant où $E < 0.05$ g/l et $S < 0.05$ g/l, ce qui correspond à $t \simeq 1.86$ h. De plus $D(t) \geq D_{min} = 0.02$ l/h pour tout t .

Les courbes des figures 4.7 à 4.15 représentent l'évolution des variables d'état du système en trait continu et des variables d'état de l'observateur en tirets sur un intervalle de temps de $[0, 20$ h] et de $[0, 0.25$ h]. Les conditions initiales du modèle correspondent à des conditions utilisées expérimentalement par Bicking (1991). Quant à celles de l'observateur, nous avons ajouté une erreur d'au moins 10 % sur les concentrations mesurées et une erreur beaucoup plus grande pour les micro-organismes.

Nous constatons que l'observateur converge très vite (< 0.2 h) et bien avant que la commande ne soit appliquée (~ 1.9 h). Cependant l'erreur d'observation présente un régime transitoire d'assez grande amplitude. On remarque que la concentration en biomasse X_3 devient négative au cours du transitoire. Cela provient du fait que l'observateur est une copie du modèle plus une correction amplifiée par le gain. Ce phénomène est fonction du choix du gain T^{-1} et des différentes constantes ($\delta_1, \dots, \delta_3$ et $k_1, \dots, k_6$).

Le choix du gain permet d'accélérer ou de diminuer la vitesse de convergence de l'observateur. Prendre un gain trop important accentue l'effet du "grand saut" au départ. Et à l'inverse un gain trop petit ne garantit plus la convergence.

Lors des simulations, nous avons aussi remarqué que l'observateur est assez sensible à l'écart entre $A(0)$ et $\hat{A}(0)$. Une sous-estimation de $A(0)$ entraîne un dépassement important de $\hat{X}_1$ et de $\hat{X}_2$ vers les valeurs négatives, et une sur-estimation entraîne un dépassement important de $\hat{X}_3$ vers les valeurs négatives. D'après les simulations, il vaut mieux avoir au départ un minimum d'acétate ($A(0) > 0$).

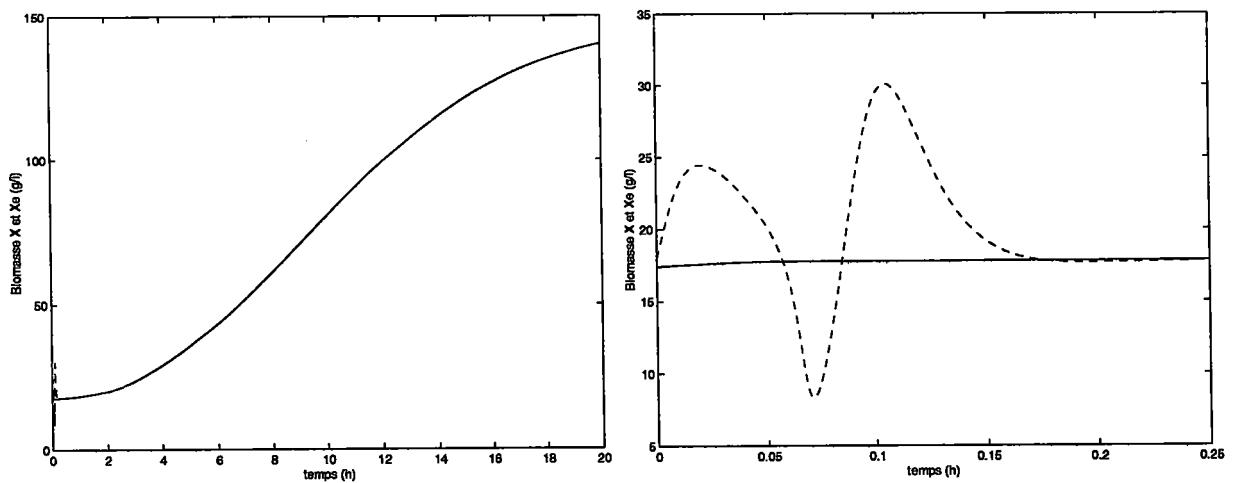


FIG. 4.7: La concentration en biomasse X (g/l)

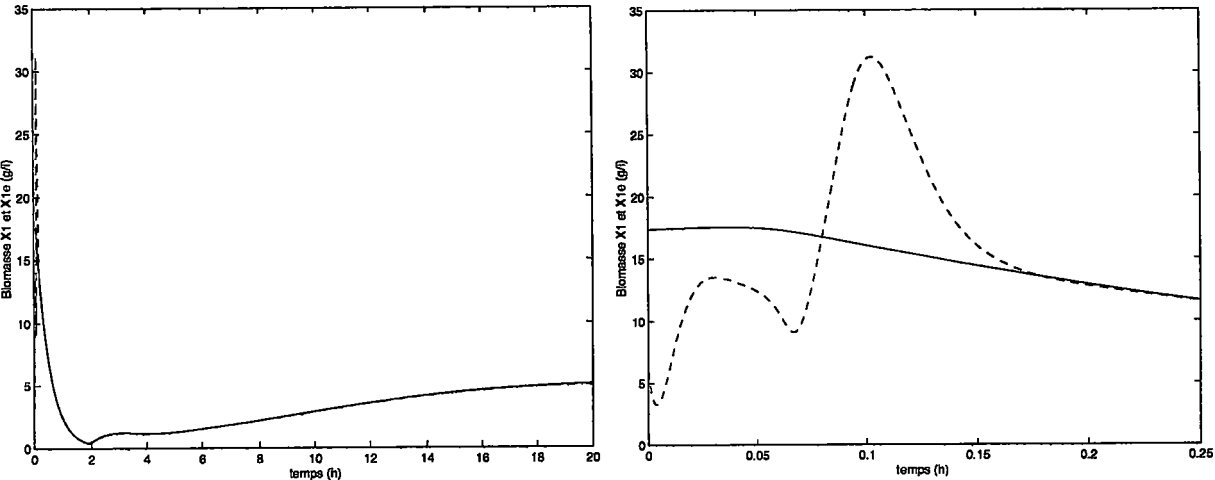


FIG. 4.8: La concentration état physiologique X_1 (g/l)

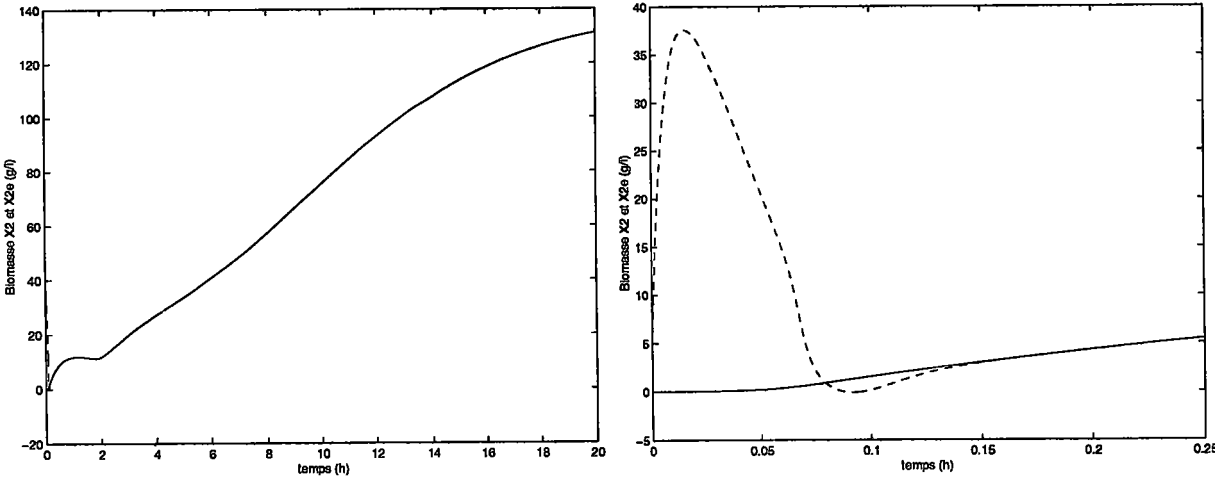


FIG. 4.9: La concentration état physiologique X_2 (g/l)

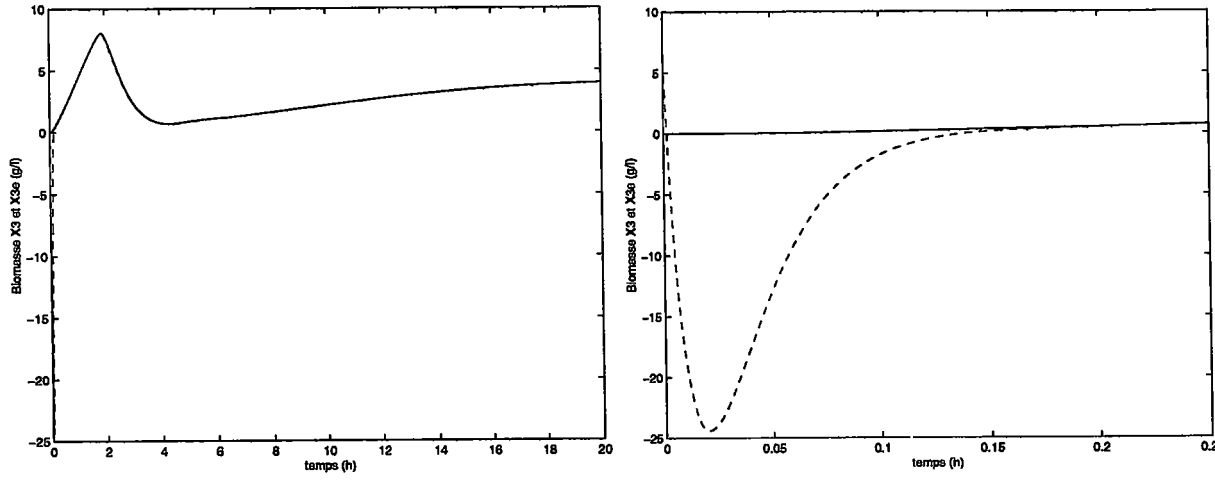


FIG. 4.10: La concentration état physiologique X_3 (g/l)

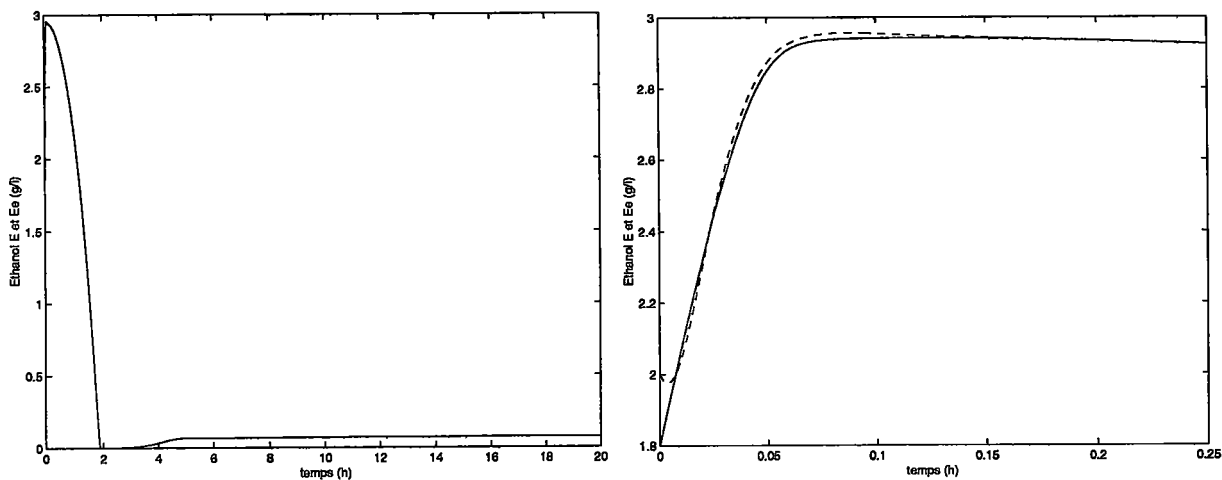


FIG. 4.11: La concentration en éthanol E (g/l)

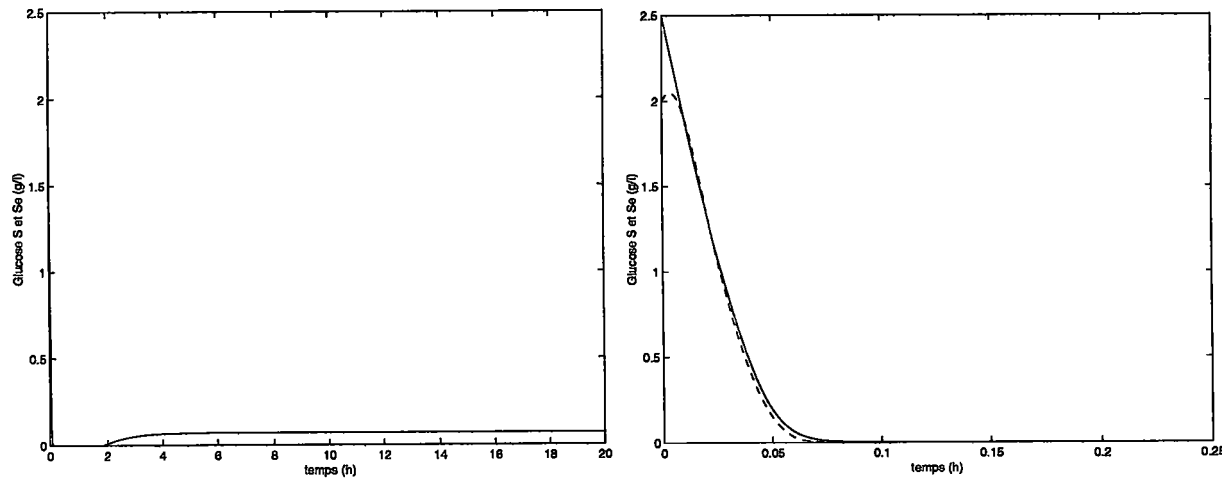


FIG. 4.12: La concentration en glucose S (g/l)

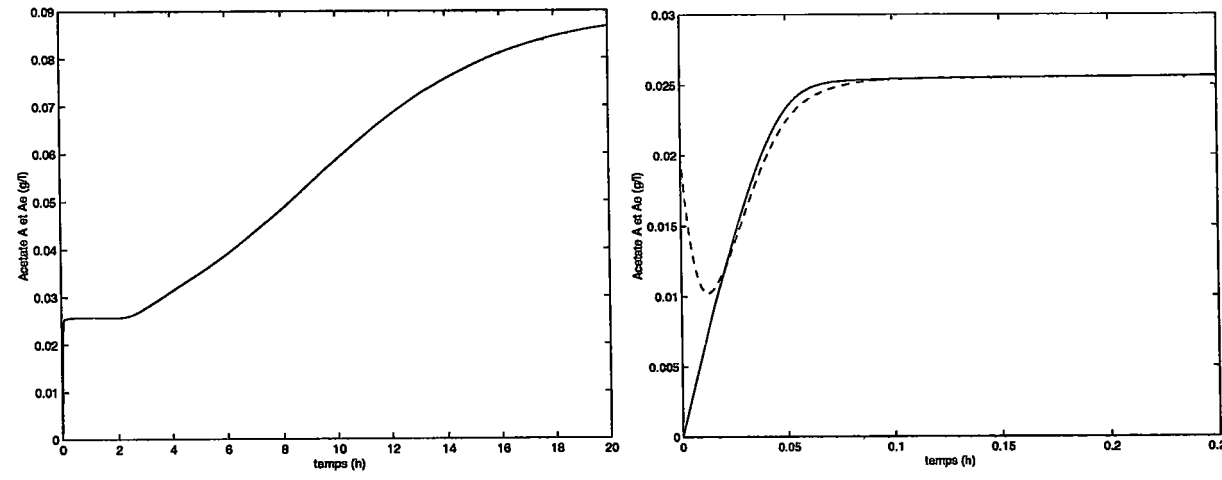


FIG. 4.13: La concentration en acétate A (g/l)

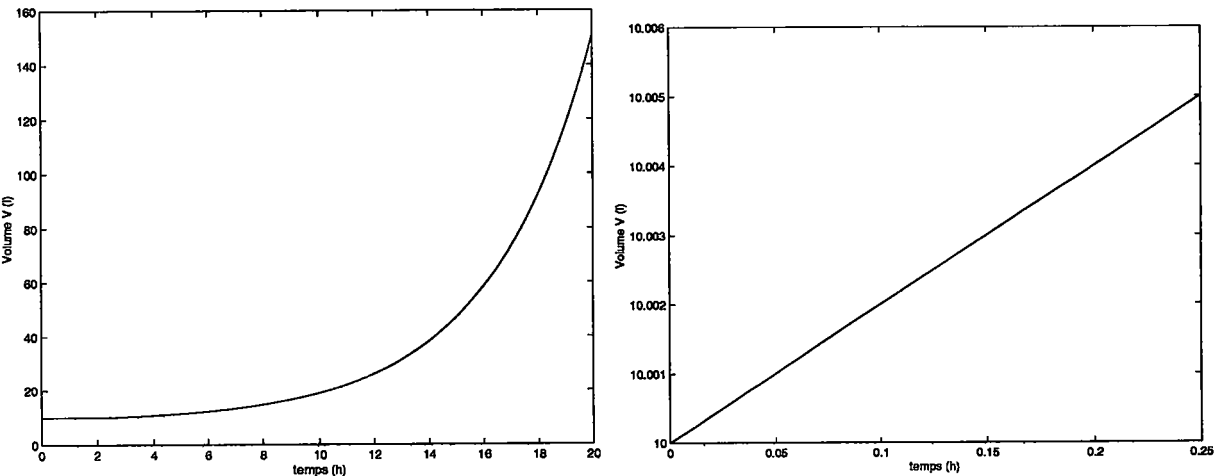


FIG. 4.14: Le volume V (l)

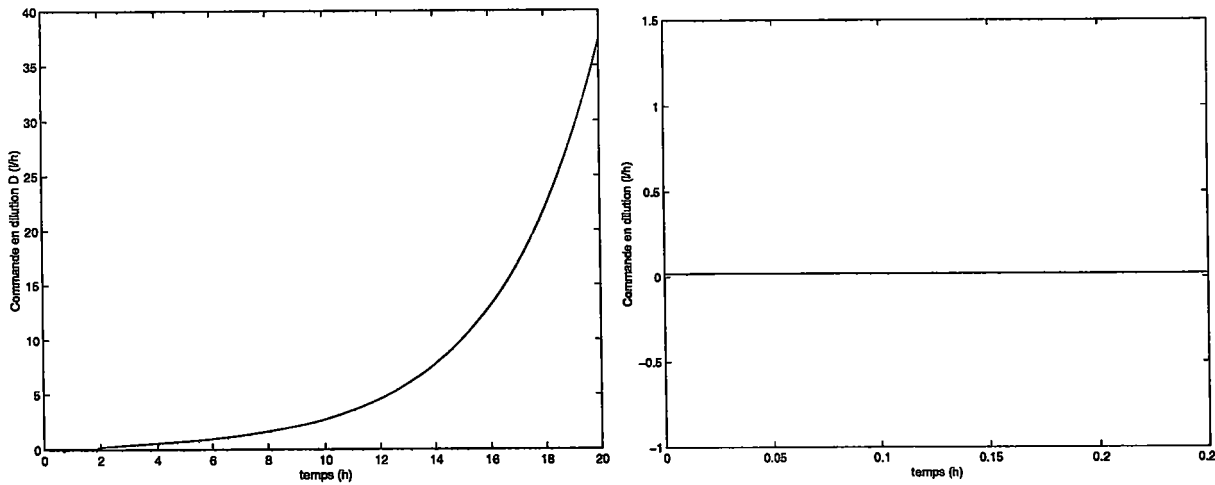


FIG. 4.15: La commande en dilution D (l)

4.4.5 Application d'un observateur de type Kalman étendu

Nous considérons ici toujours le modèle de Rajab (équations (4.35)) bouclé avec la loi de commande (4.41). Dans notre cas, si nous prenons comme vecteur d'état $z^T = [E, S, A, X_1, X_2, X_3]$ et comme mesures $y^T = [E, S, A]$, et si nous posons $r_1 = R_1/X_1, r_2 = R_2/X_2, r_3 = R_3/X_3, r_4 = R_4/X_4, r_5 = R_5/X_2, r_6 = R_6/X_2, r_7 = R_7/X_3, r_8 = R_8/X_1, r_9 = R_9/X_3$, alors le système est sous la forme donnée par l'équation (2.23) (section 2.3.1) :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(u, y)x + B(u, y) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\text{où } A(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{45}{14}r_1 & 0 & -\frac{20}{11}r_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{50}{7}r_1 & -2r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14}r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_1 - r_4 - r_8 - D & r_5 & r_9 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & r_2 - r_5 - r_6 - D & r_7 \\ 0 & 0 & 0 & r_8r_1 & r_6 & r_3 - r_9 - r_7 - D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{61} & \cdots & a_{66} \end{bmatrix},$$

$$B(u, y) = \begin{bmatrix} -E \\ (S_{in} - S) \\ -A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette forme permet d'utiliser avec un choix de θ assez grand, l'observateur Kalman étendu (2.24) :

$$\begin{cases} \dot{S} = -\theta S - A^T(u, y)S - SA(u, y) + C^T Q C \\ \dot{\hat{x}} = A(u, y)\hat{x} + B(u, y) - S^{-1} C^T Q (C\hat{x} - y) \end{cases} \quad (4.49)$$

La matrice S étant symétrique définie positive, on peut écrire $S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & & s_{26} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{16} & s_{26} & \cdots & s_{66} \end{bmatrix}.$

Nous avons alors augmenté le système de 21 équations d'état. Tels que nous avons choisi le vecteur d'état et le vecteur de sortie, nous explicitons les s_{ij} :

- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = i$: $\dot{s}_{ii}(t) = -\theta s_{ii}(t) + 1$
par intégration il vient $s_{ii}(t) = \frac{1}{\theta} + \left(s_{ii}(0) - \frac{1}{\theta}\right) \exp(-\theta t)$;
- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = 1, \dots, 3, j \neq i$: $\dot{s}_{ij}(t) = -\theta s_{ij}(t)$
Par intégration il vient $s_{ij}(t) = s_{ij}(0) \exp(-\theta t)$;
- Pour $i = 1, \dots, 3$ et $j = 4, \dots, 6$: $\dot{s}_{ij}(t) = -\theta s_{ij}(t) - \sum_{k=1}^7 s_{ik} \cdot a_{kj}$
- Pour $i = 4, \dots, 6$ et $j = i$: $\dot{s}_{ii}(t) = -\theta s_{ii}(t) - 2 \sum_{k=1}^7 s_{ki} \cdot a_{ki}$
- Pour $i = 4, \dots, 5$ et $j = i + 1, \dots, 6$: $\dot{s}_{ij}(t) = -\theta s_{ij}(t) - \sum_{k=1}^7 (s_{kj} \cdot a_{ki} - s_{ik} \cdot a_{kj})$

Le choix de la matrice initiale, $S(0)$, étant libre (sous réserve d'être symétrique définie positive) nous prenons $S(0) = 2I$ par exemple.

Pour l'instant il reste encore à démontrer que notre commande est θ -strictement persistante, cependant nous avons effectué des simulations afin d'évaluer le comportement dynamique de l'observateur.

Nous avons effectué des simulations du système bouclé en utilisant les estimations fournies par l'observateur. Ces simulations ont été réalisées en utilisant le logiciel MATLAB avec les mêmes conditions initiales que dans le cas de l'observateur "grand gain" de la section précédente et dans les conditions suivantes :

- Conditions initiales (Bicking, 1991): $x(0)^T = [17.4, 0, 0, 1.8, 2.5, 0]$
- Conditions initiales de l'observateur : $\hat{x}(0) = [6, 6, 6, 2, 2, 0.02]$
- Le paramètre θ est choisi égal à 30 h^{-1} , la condition initiale de l'équation de Ricatti vaut $2.I$. La concentration en glucose du débit d'alimentation vaut $S_{in} = 300 \text{ g/l}$.

La méthode d'intégration utilisée est celle de Runge-Kutta (4,5) $t = 0 \text{ h}$ à $t = 20 \text{ h}$, avec une erreur relative de 10^{-6} et une erreur absolue de 10^{-9} . La commande utilisée est $D = -\frac{1}{L_g S} [L_f S + \beta_S \cdot (S - S_c)]$ (avec ici $\beta_S = 1$ et $S_c = 0.071 \text{ g/l}$), à partir de l'instant où $E < 0.05 \text{ g/l}$ et $S < 0.05 \text{ g/l}$, ce qui correspond à $t \simeq 1.86 \text{ h}$. De plus $D(t) \geq D_{min} = 0.02 \text{ l/h}$ pour tout t .

Les figures 4.16 à 4.24 suivantes représentent les évolutions des variables d'état (en trait continu) et des variables d'état estimées (en tirets) sur une durée de 20 h ainsi que sur une durée de 2 h.

Les conditions initiales du modèle et de l'observateur sont les mêmes que celles définies lors des simulations de l'observateur grand gain.

La convergence est moins rapide ($\sim 1 \text{ h}$) qu'avec l'observateur grand gain, mais elle se produit toujours avant le début de l'application de la commande ($\sim 1.9 \text{ h}$). La vitesse de convergence peut être réglée à partir du gain θ , mais un trop grand gain donne un saut au départ et nous pouvons avoir transitoirement des estimations des concentrations négatives. Un gain trop petit ($\theta = 10$), n'assure plus la convergence de l'observateur. Cependant les amplitudes du régime transitoire sont beaucoup plus faibles que pour l'observateur à grand gain.

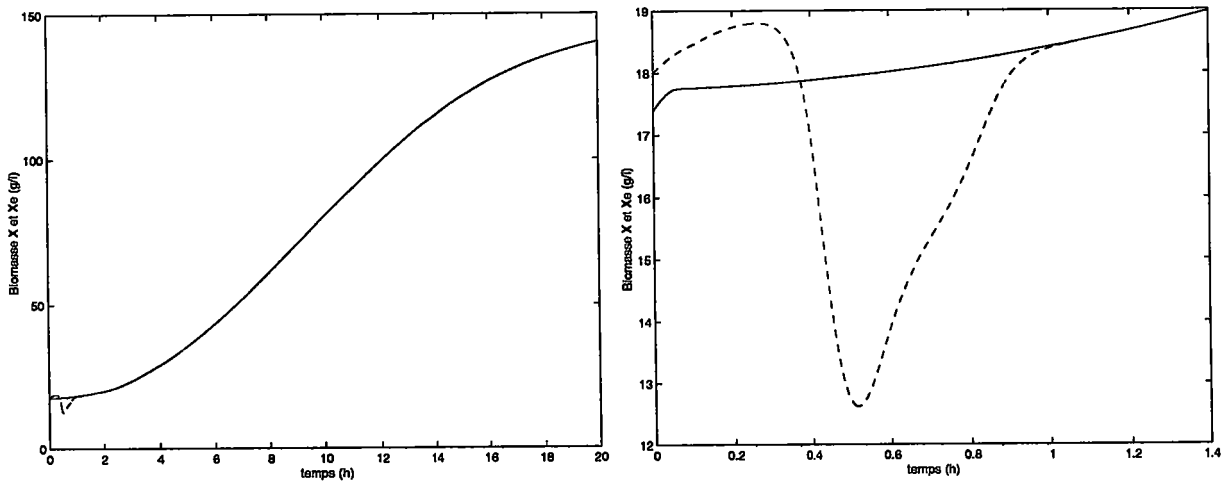


FIG. 4.16: La concentration en biomasse X (g/l)

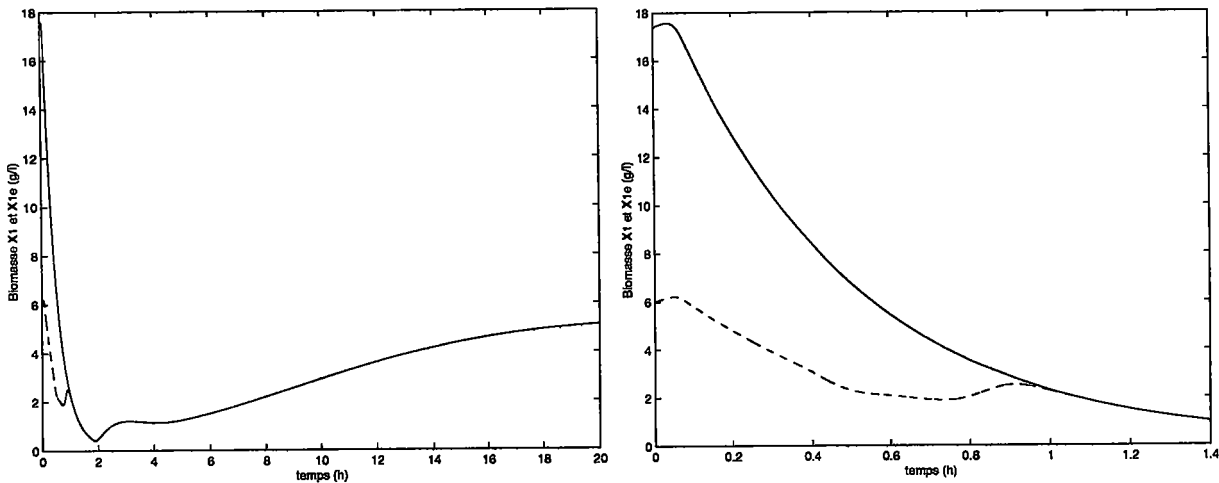


FIG. 4.17: La concentration état physiologique X_1 (g/l)

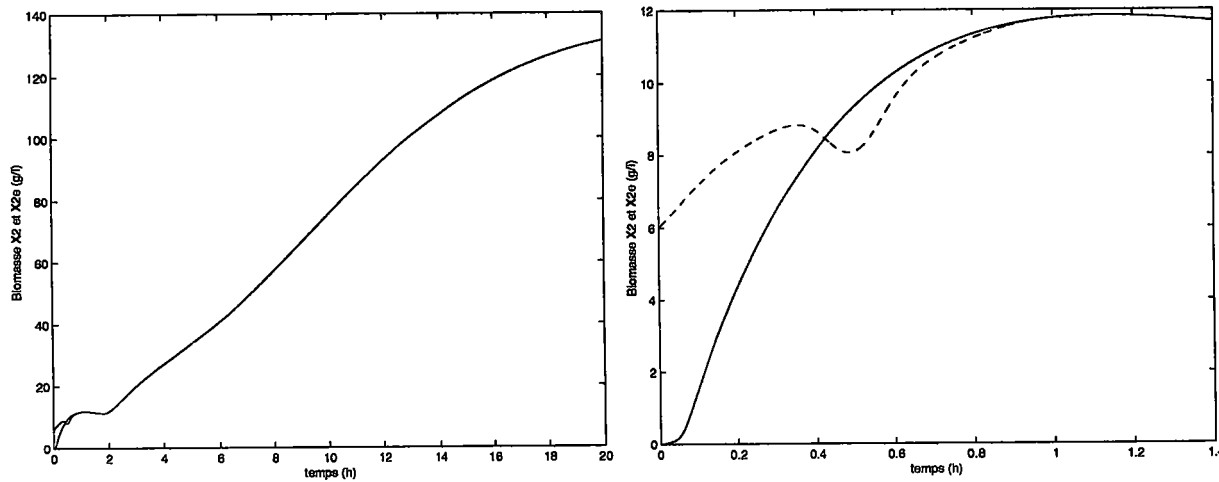


FIG. 4.18: La concentration état physiologique X_2 (g/l)

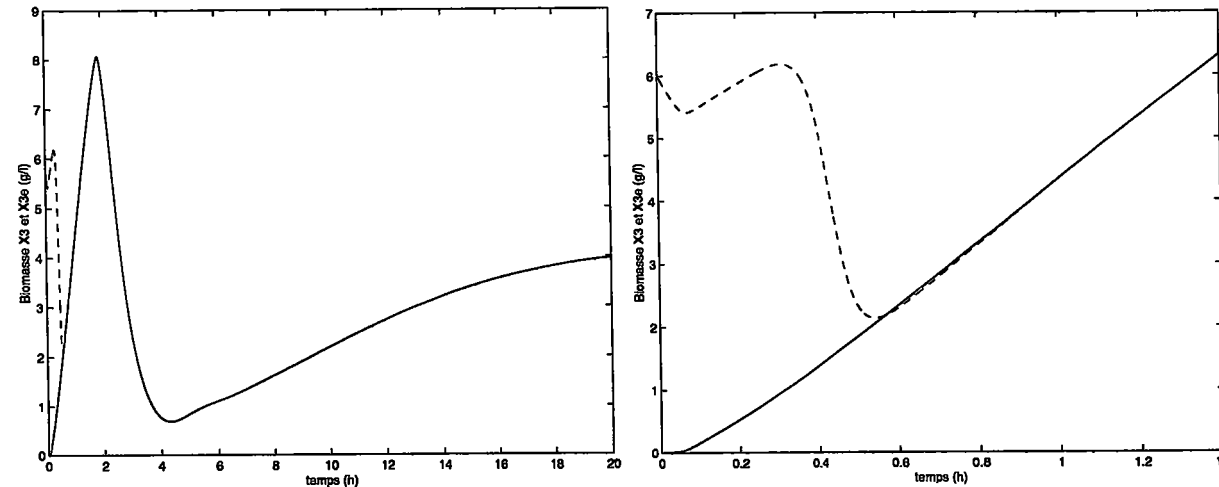


FIG. 4.19: concentration état physiologique X_3 (g/l)

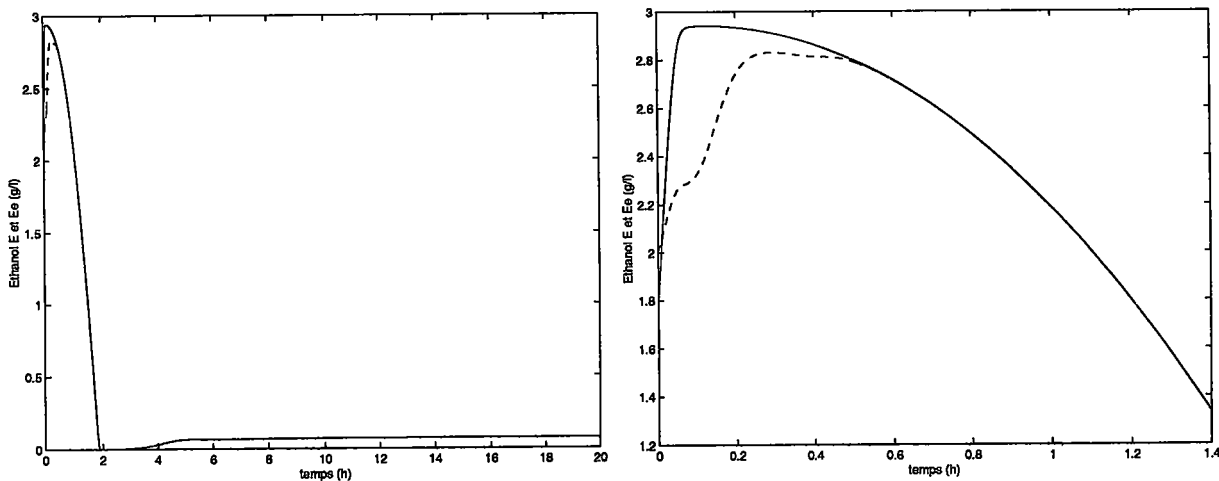


FIG. 4.20: La concentration en éthanol E (g/l)

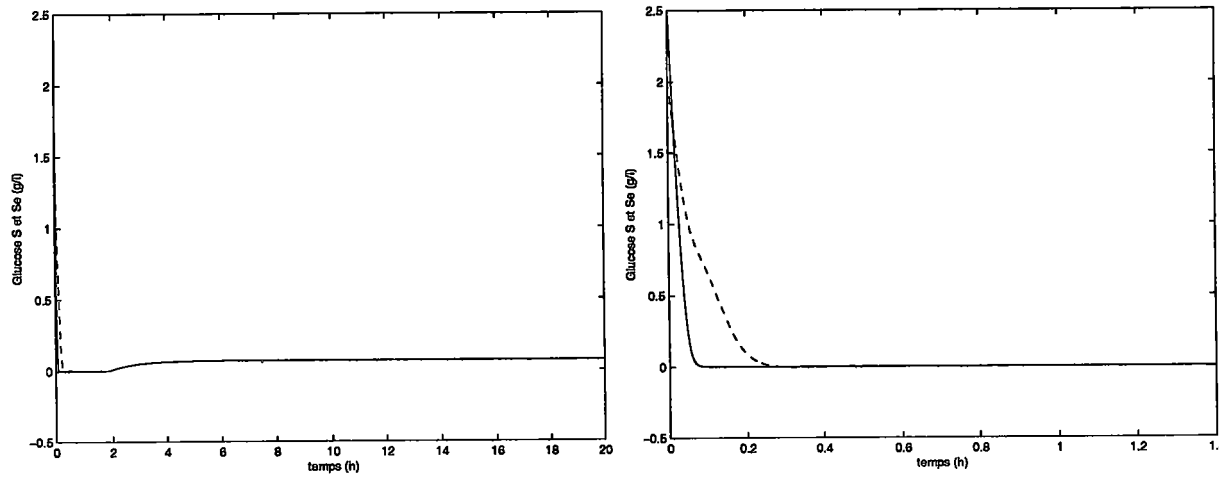


FIG. 4.21: La concentration en glucose S (g/l)

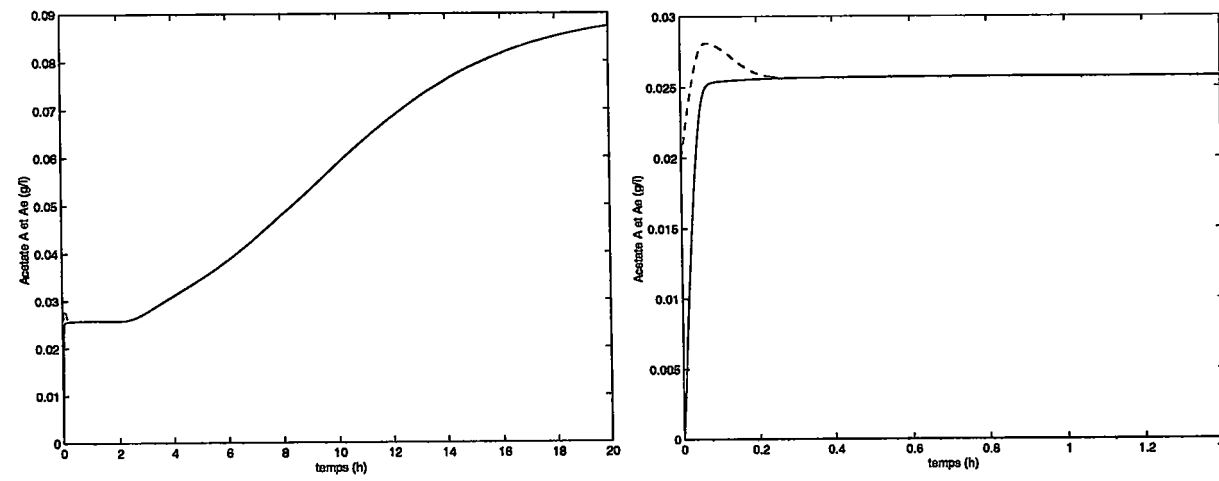


FIG. 4.22: La concentration en Acétate A (g/l)

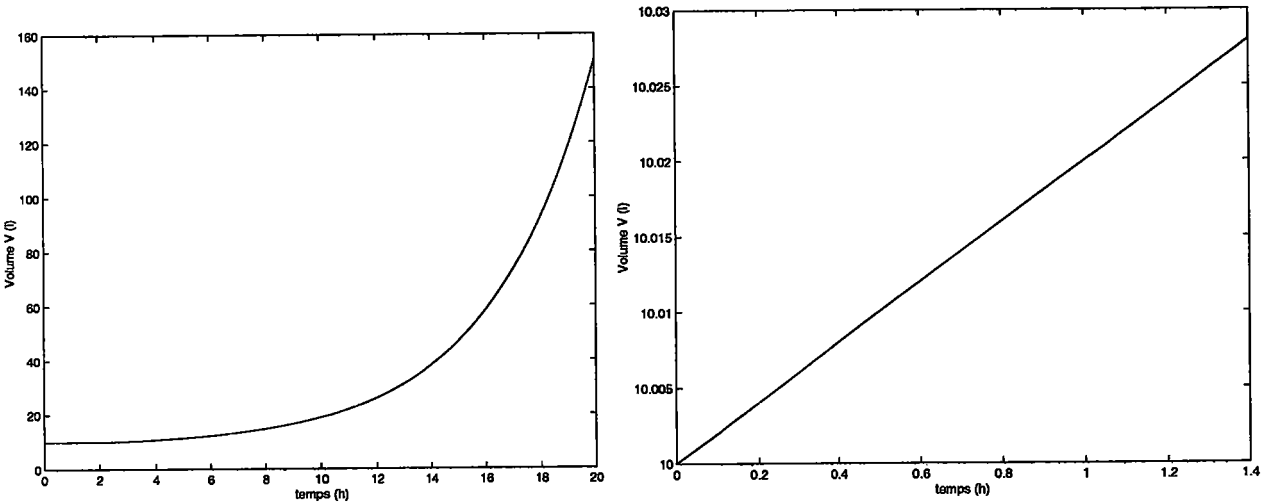


FIG. 4.23: *Le volume V (l)*

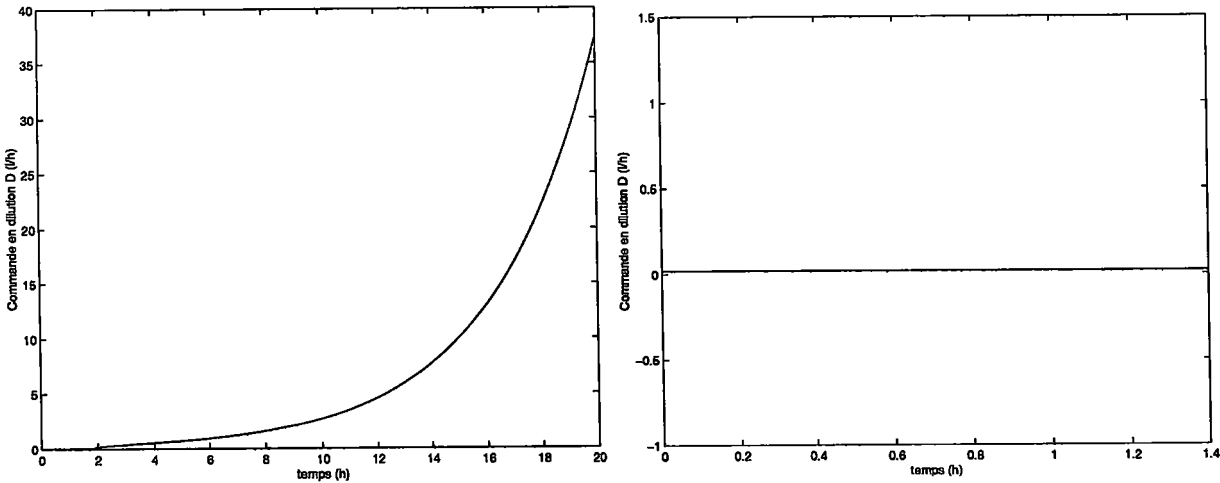


FIG. 4.24: *La commande en dilution D (1/h)*

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons premièrement appliqué l'observateur continu discret de type Luenberger développé au chapitre 2 à un système linéaire. Il est facile pour les systèmes linéaires de donner une loi de commande stabilisante. Nous avons vérifié par simulation que notre principe de séparation fonctionne bien. Nous l'avons testé dans des conditions difficiles.

Ensuite, un bioréacteur de base a été étudié. Une étude du système a permis de donner les conditions d'existence d'un domaine positivement invariant. Nous avons alors proposé une loi de commande qui stabilise globalement exponentiellement le système considéré à une consigne désirée. Nous avons vérifié que cette loi de commande laisse le domaine positivement invariant. Nous redémontrons la convergence d'un observateur continu discret. Ceci permet de fixer des constantes et ainsi de montrer que cet observateur reste dans le domaine considéré. Le principe de séparation établi au chapitre 3 s'applique. Des simulations mettent en évidence les performances obtenues.

Finalement, nous reprenons le modèle de Rajab *et al.* (1984). Nous donnons des conditions pour appliquer l'observateur à grand gain de Bornard et Hammouri (1991) et pour appliquer l'observateur de type Kalman étendu de De Leon Morales (1992). Vue la complexité du modèle, des questions restent en suspens. Néanmoins, les simulations montrent la faisabilité de la méthode.

Conclusion générale

Ce travail de recherche avait pour objet de résoudre des problèmes d'observation et de commande d'un bioréacteur modélisé par le modèle de Rajab. Ce modèle a été construit sur un procédé pilote au L.S.G.C. Comme c'est souvent le cas, les mesures sont disponibles en temps discret et avec retards.

Cette thèse est composée de quatre parties. La première concerne la modélisation des bioprocédés. L'accent a été mis sur la modélisation des échanges gazeux. Ensuite, nous avons fait un état de l'art de la croissance de la levure de boulangerie *Saccharomyces cerevisiae*. Après une présentation du modèle de Rajab, nous en avons fait une étude mathématique. Vue la complexité du modèle, nous proposons diverses simplifications et de nouveaux modèles basés sur un point de vue différent.

Le deuxième chapitre concerne les observateurs : ce sont des systèmes dynamiques auxiliaires donnant une estimation des variables d'état d'un système considéré. Après quelques rappels, nous redonnons des observateurs non linéaires déjà existants et des conditions d'application à des modèles de bioprocédés. Une section est dédiée à l'observateur continu-continu et continu-discret de Deza *et al.* (1992). L'application de ces estimateurs d'état nécessite la connaissance assez précise des majorations faites lors de la démonstration des résultats. Ils font référence un résultat classique de filtrage (Jazwinsky, 1970) de majoration de l'équation de Ricatti. Dans ce livre, ce résultat n'est pas démontré. Viel (1994), qui a étendu en partie les résultats de Deza *et al.* (1992), cite en plus le livre de Bucy et Joseph (1968). Une lecture attentive permet de voir une erreur dans la démonstration. De plus, un contre exemple à cette majoration est donné. Néanmoins, l'idée d'observateur continu-discret, issue de la théorie du filtrage, est très intéressante. C'est un système qui, à partir de mesures faites en temps discret (c'est presque toujours le cas dans la pratique), donne une estimation en temps continu des variables d'état du système. Cet estimateur d'état est très pratique mais n'est quasiment pas développé pour les systèmes non linéaires. Nous en proposons un qui est facilement implémentable, ce qui a pour conséquence de restreindre la classe de systèmes non linéaires auxquels il s'applique. Nous montrons que, sous certaines conditions, cet observateur s'applique aisément aux bioprocédés.

Un des buts d'un observateur est de donner une estimation des variables d'état du système considéré. On désire ensuite utiliser ces estimations pour calculer une commande qui sera appliquée au système. Une question fondamentale se pose : si une loi de commande par retour d'état stabilise un système, et si il existe un estimateur des variables d'état du système, est-ce que la loi de commande calculée à partir des estimations issues de l'observateur stabilise encore le système ? Pour les systèmes non linéaires, ce n'est généralement pas le cas ; tandis que pour les systèmes linéaires, cela s'appelle le principe de séparation. Nous démontrons trois résultats pour les systèmes non linéaires. Le premier concerne l'existence d'une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement et l'existence d'un observateur à convergence exponentielle. Ensuite, nous considérons le cas des estimations issues d'un observateur continu-discret. Nous démontrons qu'un principe de séparation est valable s'il existe une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement dans le cas où les mesures sont disponibles en temps discret sans retard puis avec retards. Ces deux derniers résultats sont nouveaux.

Finalement, le dernier chapitre concerne des applications des résultats précédents et des simulations sont présentées. Nous étudions d'abord un cas linéaire dans des conditions difficiles. Ensuite, une étude complète est faite pour un bioprocédé classique. Nous démontrons comment l'observateur continu-discret s'applique à ce système non linéaire. Enfin, nous revenons au modèle de Rajab pour lequel nous donnons des conditions d'application d'observateurs non linéaires. Compte tenu de la complexité du modèle, des questions restent ouvertes, néanmoins les simulations montrent la faisabilité de la méthode.

En conclusion, ce travail est un élément de réponse au problème initial. Nous avons développé un outil théorique permettant de répondre au problème de la commande de systèmes où des mesures ne sont disponibles qu'en temps discret et avec retards. Étant donné la complexité du modèle de Rajab, nous n'avons pu donner une réponse définitive. Pour cela, il faudrait travailler sur deux aspects. Il s'agit premièrement de valider les modèles proposés, et deuxièmement d'étendre les résultats obtenus. Ainsi, nous pourrions prendre en compte d'autres classes de systèmes non linéaires pour lesquels un observateur continu-discret peut être construit. Une convergence asymptotique de l'estimateur d'état peut ainsi être envisagée. Ensuite, les hypothèses sur les résultats de séparation sont assez contraignantes. Un affaiblissement de ces hypothèses permettrait sûrement de donner de nouveaux résultats locaux ou globaux dans le cas de commandes par retour d'état stabilisant globalement asymptotiquement ou exponentiellement. Développer ces deux aspects permettrait de répondre plus élégamment au problème initialement posé.

Bibliographie

- Abidi, K. (1994). Observateurs d'état et commande non linéaire de réacteurs chimiques discontinus. Thèse. INPL Nancy.
- Axelsson, J. P., P. Hagander, C. F. Mandenius et B. Mattiasson (1982). Computer control of sucrose concentration in a fermentor with continuous flow. In: *Modeling and Control of Biotechnical Processes*. IFAC. pp. 273–280. Helsinki, Finland.
- Bailey, J. E. et D. F. Ollis (1986). *Biochemical Engineering Fundamentals*. 2nd ed.. Mac-Graw Hill.
- Bastin, G. et D. Dochain (1990). *On-line estimation and adaptive control of bioreactors*. Elsevier.
- Bicking, F. (1991). Définition et mise au point d'un nouvel algorithme de type génétique: application à la conduite d'un bioprocédé semi-continu. Thèse. INPL Nancy.
- Bornard, D., N. Couenne et F. Celle (1989). Regularly persistent observers for bilinear systems. In: *Control and Information Sciences* (J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori et D. Leborgne, Eds.). pp. 130–140. Springer-Verlag.
- Bornard, G. et H. Hammouri (1991). A high gain for a class of uniformly observable systems. In: *IEEE 30th Conference on Decision and Control*. pp. 1494–1496.
- Bornard, G., F. Celle-Couenne et G. Gilles (1993). Observabilité et observateurs. In: *Systèmes Non linéaires. Tome 1: Modélisation - Estimation* (A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot, Eds.). Masson.
- Boudrant, J., Corrieu, G. et Coulet, P., Eds.) (1994). *Capteurs et mesures en biotechnologie*. Technique et Documentation - Lavoisier.
- Bucy, R. S. et P. D. Joseph (1968). *Filtering for stochastic processes with applications to guidance*. Interscience publishers.
- Busawon, K. (1996). Sur les observateurs des systemes non linéaires et le principe de séparation. Thèse. Université Claude Bernard Lyon I. 117 pages.
- Busawon, K., A. El Assoudi et H. Hammouri (1993). Dynamical output feedback stabilisation of a class of nonlinear systems. *IEEE 32nd Conference on Decision and Control* pp. 1966–1971.
- Celle, F., J. P. Gauthier et G. Sallet (1989). Synthesis of nonlinear observers: a harmonic analysis approach. In: *Control and Information Sciences* (J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori et D. Leborgne, Eds.). Springer-Verlag. pp. 119–129.
- Chabour, R. et H. Hammouri (1993a). Stabilization of bilinear systems using an observer configuration. *IEEE Mediterranean Symposium on New Direction in Control Theory and Application, Crete, Greece*. 4 pages.
- Chabour, R. et H. Hammouri (1993b). Stabilization of planar bilinear systems using an observer configuration. *Appl. Math. Letters* 6, 7–10.
- Chen, L. (1992). Modelling, identifiability and control of complex biotechnological systems. Thèse. Université Catholique de Louvain, CESAME.

- Chenciner, A. (1978). *Courbes Algébriques Planes*. UER de Mathématiques de l'Université Paris VII. chap. VIII-IX.
- Chouakri, N., C. Fonteix, J. P. Corriou et I. Marc (1994a). Parameter estimator of a monod-type model. Part II: Use of a neural network with associative mesurments.. *Biotechnology Techniques* **8**(10), 689–694.
- Chouakri, V., C. Fonteix, I. Marc et J. P. Corriou (1994b). Parameter estimation of a monod-type model. Part I: Theoretical identifiability and sensitivity analysis. *Biotechnology Techniques* **8**(10), 683–688.
- Ciccarella, G., M. Dalla Mora et A. Germani (1993). Observers for discrete-time nonlinear systems. *Systems & Control Letters* **20**, 373–382.
- Ciccarella, G., M. Dalla Mora et A. Germani (1995). A robust observer for discrete time nonlinear systems. *Systems & Control Letters* **24**, 291–300.
- Contois, D. (1959). Kinetics of bacterial growth relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures. *Journal of Genetic Microbiology* **21**, 40–50.
- Couenne, N. (1990). Synthèse d'observateurs de systèmes affines en l'état. Thèse. INPG - Grenoble.
- Dantigny, P. (1989). Cinétique, modélisation de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*. Commande non-linéaire de type L/A d'un procédé semi-continu. Thèse. INPL Nancy.
- Dantigny, P. (1995). Modeling of the aerobic growth of *Saccharomyces cerevisiae* on mixtures of glucose and ethanol in continuous culture. *Journal of Biotechnology* **43**, 213–220.
- De Leon Morales, J. (1992). Construction des observateurs pour les systèmes non linéaires et application aux procédés. Thèse. UCB Lyon I.
- Deza, F., E. Busvelle, J. P. Gauthier et D. Rakotopara (1992). High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* **18**, 295–299.
- Gauthier, J. P. et G. Bornard (1981). Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-26**(4), 922–926.
- Gauthier, J. P. et I. A. K. Kupka (1994). Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization* **32**(4), 975–997.
- Gauthier, J.-P., H. Hammouri et S. Othman (1992). A simple observer for nonlinear systems. Application to bioreactors. *IEEE Trans. Auto. Control* **37**(6), 875–880.
- Gauthier, J.P. et I. Kupka (1992). A separation principle for bilinear systems with dissipative drift. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(12), 1970–1974.
- Glomon, J. F. (1982). Modélisation de la croissance de levure de fermentation continue et discontinue. Thèse. INPL Nancy.
- Grizzle, J. M. et P. E. Moraal (1990a). Newton, observers and nonlinear discrete-time control. In: *IEEE 29th Conference on Decision and Control*. pp. 760–767. Honolulu, Hawaii.
- Grizzle, J. M. et P. E. Moraal (1990b). On observers for smooth nonlinear digital systems. In: *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (A. Benssoussan et J. L. Lions, Eds.). pp. 401–410. Springer-Verlag.
- Hahn, W. (1967). *Stability of Motions*. Springer-Verlag.
- Hammami, M. A. (1993). Stabilization of a class of nonlinear systems using an observer design. In: *IEEE 32nd Conference on Decision and Control*. pp. 1954–1959.
- Hammouri, H. et K. Busawon (1993). A global stabilization of a class of nonlinear systems by means of an observer. *Appl. Math. Lett.* **6**(1), 31–34.

- Iggidr, A. et G. Sallet (1993). Exponential stabilization of nonlinear systems by an estimated state feedback. In: *ECC*. pp. 2015–2018.
- Isidori, A. (1989). *Nonlinear control systems*. 2nd ed.. Springer-Verlag.
- Jazwinsky, A. (1970). *Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York.
- Labarrere, M., J. P. Krief et B. Gimonet (1988). *Le filtrage et ses applications*. Cepadues - edition, France.
- Lee, W. et K. Nam (1991). Observer design for autonomous discrete-time nonlinear systems. *Systems & Control Letters* **17**, 49–58.
- Lucena, S. (1996). Commande non linéaire d'un réacteur biologique semicontinu de production de levure. Thèse. INPL Nancy.
- Lucena, S., C. Fonteix, I. Marc et J. P. Corriou (1995). Nonlinear control of a fedbatch bioreactor with measurements delays and estimation. In: *IMACS - IFAC First International Symposium on Mathematical Modelling and Simulation in Agriculture & Bio-Industries*. Vol. VI-B.2. pp. 1–6.
- Migotte, M. (1989). *Mathématiques pour le calcul formel*. PUF Math.
- Monod, J. (1942). *Recherche sur la croissance des cultures bactériennes*. Herman, Paris.
- Moraal, P. E. et J. M. Grizzle (1995). Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**, 395–404.
- Mosrati, R., C. Fonteix et I. Marc (1991). Recherche analytique des conditions de conduite optimale d'une fermentation semi-continue de levure. *Récents progrès en génie des procédés* **5**(13), 275–280.
- Mostrati, R. (1993). Nouvelle approche de la cinétique fermentaire de *Saccharomyces cerevisiae* et de la conduite d'un procédé semi-continu : Modélisation de la croissance basée le bilan énergétique de la levure. Commande prédictive et floue. Thèse. INPL Nancy.
- Othman, S. (1992). Sur les observateurs des systèmes non linéaires. PhD thesis. UCB Lyon 1.
- Pengov, M. (1996a). Deux observateurs non linéaires. Application à un procédé biotechnologique. Colloque: Théorie et Application des Observateurs Non linéaires. GDR CNRS Automatique, Pôle Non-Linéaire. Paris, FRANCE, 8 et 9 février 1996.
- Pengov, M. (1996b). Modélisation d'un procédé semi-continu. Application d'un observateur à grand gain. Colloque «Ecologie des communautés»: théorie et modèles. GDR CNRS 1107 du programme Environnement. Luminy, FRANCE, 15–19 avril 1996.
- Pengov, M., E. Richard et J.-C. Vivalda (1995). Etude de la croissance de la *saccharomyces cerevisiae*. contrôle et observation d'un bioprocédé semi-continu. RR-2696 INRIA. 38 p.
- Pengov, M., E. Richard et J.-C. Vivalda (1997a). Stabilization of nonlinear systems through continuous-discrete observer. soumis à *Automatica*, numéro 97-TB-085.
- Pengov, M., E. Richard et J.-C. Vivalda (1997b). Un principe de séparation pour les systèmes non linéaires. soumis aux Comptes Rendues de l'Académie des Sciences I 259 (1970264).
- Pengov, M., E. Richard et J.-C. Vivalda (1998a). A continuous-discrete observer for a class of nonlinear systems. In: *IFAC NOLCOS'98*. Enschede, NL, 1–3 july 1998. 6 p.
- Pengov, M., E. Richard et J.-C. Vivalda (1998b). A separation result for non linear systems with lagged discrete time outputs measurements. In: *IFAC NOLCOS'98*. Enschede, NL, 1–3 july 1998. 6 p.
- Rajab, A. (1983). Un modèle physiologique de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae* en fermenteur continu et discontinu. Thèse. ENSIC - INPL - NANCY.
- Rajab, A. (1986). Modélisation et conduite automatique de la fermentation de *Saccharomyces cerevisiae*. Thèse. INPL Nancy.

- Rajab, A., J.-M. Engasser, P. Germain et A. Miclo (1984). A physiological model of yeast aerobic growth. In: *Third European Congress on biotechnology*. München, Germany.
- Reyman, G. (1992). Modelling and control of fed-batch fermentation of bakers' yeast. *Food Control* **3**(1), 33–44.
- Scriban, R. (1988). *Biotechnologie*. Technique et Documentations (Lavoisier).
- Sonnleitner, B. et O. Käppeli (1986). Growth of *Saccharomyces cerevisiae* is controlled by its limited respiratory capacity: Formulation and verification of a hypothesis. *Biotechnology and Bioengineering* **28**, 927–937.
- Steinmeyer, D. E. et M. L. Shuler (1989). Structured model for *Saccharomyces cerevisiae*. *Chemical Engineering Science* **44**(9), 2017–2030.
- Tsinias, J. (1991). A generalization of Vidyasagar's theorem on stability using state detection. *Systems & Control Letters* **17**, 37–42.
- Vidyasagar, M. (1980). On the stabilization of nonlinear systems using state detection. *IEEE Transactions on Automatic Control* **25**(3), 501–509.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. 2nd ed.. Prentice Hall.
- Viel, F. (1994). Stabilité des systèmes nonlinéaires contrôlés par retour d'état estimé. Application aux réacteurs de polymérisation et aux colonnes à distiller. Thèse. Université de Rouen.
- Viel, F., E. Busvelle et J. P. Gauthier (1995). Stability of polymerization reactors using i/o linearization and a high-gain observer. *Automatica* **31**(7), 971–984.
- Walter, E. et L. Pronzato (1993). Identifiabilité et non linéarité. In: *Systèmes non linéaires. Tome 1 : modélisation, estimation* (A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot, Eds.). Chap. 3. Masson.
- Walter, E. et L. Pronzato (1994). *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson. Chap. 1 & 2.
- Walter, E., Ed.) (1987). *Identifiability of parametric models*. Pergamon Press.
- Wang, Henry Y., Charles L. Cooney et Daniel I. Wang (1979). Computer control of bakers' yeast production. *Biotechnology and Bioengineering* **XXI**, 975–995.
- Zhang, X.-C., A. Visala, A. Halme et P. Linko (1994). Functional state modelling approach for bioprocess : local models for aerobic yeast growth processes. *J. Proc. Cont.* **4**(3), 127–134.

Résumé

Cette thèse est composée de quatre parties. La première concerne la modélisation de bioprocédés, et plus particulièrement celle de la croissance de la levure de boulangerie *Saccharomyces cerevisiae*.

Le deuxième chapitre concerne les observateurs non linéaires. La construction d'estimateurs d'état est intensivement étudiée pour les systèmes continus avec sorties continues. F. Deza a récemment proposé un observateur continu-discret : il s'agit d'un système auxiliaire qui, à partir de mesures faites en temps discret, donne une estimation en temps continu des variables d'état du système considéré. Il n'existe que peu d'exemple de tels observateurs dans la littérature. La démonstration de convergence de l'observateur de Deza, comme celle de plusieurs observateurs non linéaires existants, utilise une inégalité portant sur la solution de l'équation de Riccati. La démonstration de cette inégalité qui figure dans le livre de Bucy et Joseph est fautive. Nous donnons un contre-exemple. Nous proposons alors un nouveau observateur continu-discret qui peut être facilement appliquée pour les bioprocédés.

Dans le troisième chapitre est consacré au principe de séparation, et nous donnons trois résultats. Nous montrons que, s'il existe une loi de commande par retour d'état stabilisant globalement exponentiellement un système, et, s'il existe un observateur à convergence exponentielle, alors, la loi de commande, calculée à partir des estimations issues de l'observateur, stabilise globalement exponentiellement encore le système. Ce résultat est démontré dans trois cas suivant la sortie disponible : mesures disponibles en temps continu, mesures disponibles en temps discret, mesures disponibles en temps discret avec retards.

Finalement, l'application de ces résultats est effectuée pour un bioprocédé classique. Des conditions d'application d'observateurs non linéaires sont proposées pour un modèle de la croissance de *Saccharomyces cerevisiae*.

Mots-clés: Automatique non linéaire, Bioprocédés, Capteurs logiciels, Contrôle, Observateurs, Principe de séparation, Stabilisation dynamique.

Abstract

Title: Application of nonlinear observers for bioprocesses control.

In this work, the first part consists of bioprocess modeling. We study the growth of *Saccharomyces cerevisiae* (baker's yeast) and give new models.

In the second part, our interest is in the construction of observers. The construction of state estimator for continuous time systems with continuous time output has been extensively studied. However, there is a few results concerning continuous time systems with discrete time available outputs. An observer for such systems is called continuous-discrete observer. A pioneer work in this direction has been done by F. Deza. Unfortunately, the proof of the observer's convergence (as well as some other continuous time nonlinear observers) is based on a property of the solution of Riccati equation. This property has been proved in Bucy and Joseph's book. But their proof is false: we have given a counter example. We, then, give a new continuous-discrete observer which can be easily applied to bioprocesses.

The third chapter is devoted to the separation principle problem. We solve this problem in three situations. More precisely, we show that if a system can be globally exponentially stabilized by a state feedback, and, if it admits an exponential observer, then it can also be globally exponentially stabilized thanks to an estimated state feedback. We prove this result whatever the nature of the output is: continuous-time output, discrete-time output, and discrete-delayed time output.

Finally, we applied our results to a classical bioprocess. We consider also an other bioprocess (growth of *Saccharomyces cerevisiae*) for which sufficient conditions are given in order to construct nonlinear observers.

Keywords: Bioprocesses, Dynamic stabilization, Control, Observers, Separation Principle.

Thèse préparée dans le cadre du Projet CONGÉ, INRIA-Lorraine & CNRS UPRES-A-7035, Ile du Saulcy, ISGMP Bât A, 57045 Metz cedex 01, FRANCE.