Nicolas LOUVET

Phénomènes de rigidité pour un réseau dans un produit de groupes

Septembre 1998

Jury:

Prof. Claire ANANTHARAMAN–DELAROCHE (Université d'Orléans)
Prof. Didier ARNAL (Université de Metz)
Prof. Bachir BEKKA (Directeur de Thèse – Université de Metz)
Prof. André ROUX (Université de Metz)
Prof. Georges SKANDALIS (Rapporteur – Université de Paris VII)
Prof. Alain VALETTE (Rapporteur – Université de Neuchatel)

ue d'obtenir le titre de docteur en
niversité de Metz

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, une représentation unitaire d'un groupe localement compact G est un morphisme π du groupe G dans le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les représentations seront supposées *fortement continues* (*i.e.* telles que l'application $G \times \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} : (g, \xi) \mapsto \pi(g)\xi$ soit continue) et à valeurs dans des espaces de Hilbert non nuls.

Pour un groupe localement compact G, on note $\mathrm{Rep}(G)$ la classe de toutes les classes d'équivalences de représentations unitaires de G et $\widehat{G}$, le dual unitaire de G, l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de G. La représentation triviale de dimension un de G est notée 1_G.

L'ensemble $\mathrm{Rep}(G)$ sera muni de la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) (voir [19], section 2). Cette topologie peut être décrite en terme de contenance faible (voir section 1.2).

D'autre part, nous dirons qu'une représentation π est contenue ou *fortement contenue* dans une représentation ρ s'il existe une sous-représentation de ρ équivalente à π.

Une classe remarquable de groupes localement compacts a été découverte par Kazhdan en 1967 [30]. Il s'agit des groupes possédant la propriété (T) (appelés aussi groupes de Kazhdan).

Ces groupes jouissent d'innombrables propriétés de rigidité et ont des applications en géométrie, théorie des graphes, algèbre d'opérateurs,...

Il existe différentes manières de caractériser les groupes de Kazhdan. On trouvera dans la monographie [15] une très bonne introduction à la propriété (T) ainsi que l'équivalence des définitions suivantes.

Un groupe G localement compact et dénombrable à l'infini possède la propriété (T) de Kazhdan s'il vérifie une des propriétés (équivalentes) suivantes :

(i) toute action de G par isométries affines sur un espace de Hilbert affine réel $\mathcal{H}$ possède un point fixe ;

(ii) pour toute représentation π de G, le premier espace de cohomologie de G à coefficients dans π est trivial ;

(iii) la représentation triviale de dimension un de G est un point isolé dans $\widehat{G}$

(iv) une représentation unitaire qui contient faiblement 1_G contient fortement 1_G.

Rappelons que pour une représentation π du groupe localement compact G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on note $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ l'espace vectoriel des *cocycles* continus de G à coefficients dans π et $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ l'ensemble des *cobords.* Le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π est le quotient

$$\mathrm{H}^1(G;\pi) = \mathrm{Z}^1(G;\pi)/\mathrm{B}^1(G;\pi).$$

Si Γ est un réseau dans un groupe G (*i.e.* un sous-groupe discret tel que le quotient G/Γ admette une mesure G-invariante finie) alors Γ possède la propriété (T) si et seulement si le groupe G possède la propriété (T) (voir [52], Theorem 3.7).

A présent, considérons deux groupes localement compacts G_1 et G_2 et un réseau Γ dans le produit direct $G_1 \times G_2$. Pour que la structure de produit soit réellement intéressante, on veut éviter les cas où Γ est un produit direct $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où Γ_i est un réseau dans G_i. Pour cela, nous demandons que Γ soit *irréductible* dans $G_1 \times G_2$. Si $p_i : G_1 \times G_2 \mapsto G_i$ désigne la projection canonique, l'irréductibilité de Γ signifie que $p_i(\Gamma)$ doit être dense dans G_i. On trouvera des exemples de réseaux irréductibles à la fin de ce travail (Section 5.2).

Si σ_i est une représentation unitaire irréductible de G_i, la représentation $(\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$ est unitaire irréductible et σ_i est déterminée (à équivalence unitaire près) par $(\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$. On peut donc voir $\widehat{G}_1$ et $\widehat{G}_2$ comme des sous-ensembles de $\widehat{\Gamma}$.

Dans ce travail, nous obtenons, pour des réseaux Γ comme ci-dessus, des résultats du type « propriété (T) affaiblie »: annulation du premier espace de cohomologie pour une famille de représentations ou isolation de la représentation triviale dans un sous ensemble naturel de représentations, ou du type « super-rigidité des représentations »: telles représentations de Γ proviennent de restrictions de représentations du groupe ambiant $G_1 \times G_2$.

Une façon naturelle de définir une propriété (T) faible est la suivante (voir Lubotzky [33] ou Lubotzky et Zimmer [33] et aussi [6]). Soit $\mathcal{R}$ un sous-ensemble de $\widehat{\Gamma}$ qui contient 1_Γ, la représentation triviale de dimension un de Γ. On dit que Γ possède la propriété (T,$\mathcal{R}$) ou que Γ possède la propriété (T) relativement à $\mathcal{R}$ si la représentation 1_Γ est un point isolé dans $\mathcal{R}$. Par exemple, le groupe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ a la propriété (T; $\mathcal{R}$) où $\mathcal{R}$ désigne l'ensemble des représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{Z})$ qui factorisent à travers un quotient par un sous-groupe de congruence. Cela découle de la célèbre inégalité de Selberg $\lambda_1 \geq \frac{3}{16}$ pour la première valeur propre λ_1 du Laplacien sur les surfaces $\mathbb{H}/\Gamma(n)$ où $\Gamma(n)$ est un sous-groupe de congruence de $SL(2,\mathbb{Z})$ et $\mathbb{H}$ est le plan hyperbolique (voir section 1.2).

Nous obtenons un résultat du type propriété (T) faible lorsque (au moins) un des facteurs G_1 ou G_2 possède la propriété (T). Le cas où les deux facteurs ont la propriété (T) n'apporte rien de nouveau car alors Γ possède la propriété (T). Par contre, si un seul des facteurs, par exemple G_2, a la propriété (T) alors le groupe Γ a la propriété (T; $\mathcal{R}$) où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de Γ composé de 1_Γ et des représentations qui ne proviennent pas de restrictions de représentations de G_1 (Théorème 1.1).

Ce résultat a été publié dans [6] et généralise le théorème 2.2 de Lubotzky et Zimmer [34]. Il faut observer que Margulis obtient un résultat analogue [36].

Le théorème 1.1 peut être vu comme un résultat de super-rigidité des représentations. En effet, il affirme qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\widehat{\Gamma}$ de la représentaton 1_Γ telle que toute représentation dans $\mathcal{U}$ se relève en une représentation de $G_1 \times G_2$.

Ce résultat possède le corollaire suivant, déjà obtenu par Lubotzky et Zimmer [34]. Supposons que le groupe G_1 est minimalement presque périodique (*i.e.* ne possède pas de représentations irréductibles de dimension finie différente de la représentation triviale), alors Γ possède la propriété (T; $\mathcal{FD}$) où $\mathcal{FD}$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires de dimension finie de Γ. En particulier, le groupe abélianisé Γ^{ab} de Γ est alors fini.

De plus, Margulis a montré que des réseaux vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 sont de type fini et ne peuvent s'écrire de manière non triviale comme produit amalgamé de deux sous-groupes ouverts que si le groupe G_1 est lui-même un amalgame de façon non triviale [36].

Une première application du théorème 1.1 est la construction de graphes extenseurs: ce sujet a été développé par Lubotzky dans son livre [33]. Une autre conséquence est le résultat de rigidité infinitésimale de Lubotsky et Zimmer [34]. Pour des énoncés précis de ces résultats, voir les théorèmes 1.12 et 3.5.

Comme troisième application, nous montrons que, si G_1 n'a pas la propriété (T), la C^*-algèbre maximale de Γ n'admet pas de trace finie fidèle (Théorème 1.11).

D'une part, ce résultat est à comparer au travail de M.D. Choi qui montre que la C^*-algèbre d'un groupe libre non-abélien admet une trace finie fidèle [12]. D'autre part, B. Bekka a montré que la C^*-algèbre du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ n'admet pas de trace finie fidèle pour $n \geq 3$ (voir [3] pour un résultat plus faible).

Remarquons que cette étude est motivée par une question de E. Kirchberg [31]: existe-t-il une trace finie fidèle sur la C^*-algèbre du produit direct $\Gamma = F \times F$ de deux copies du groupe libre non abélien F?

Une autre façon de caractériser la propriété (T) de Kazhdan est l'annulation du premier espace de cohomologie de Γ à coefficients dans π pour toute représentation unitaire π. Nous avons donc cherché, pour un réseau dans un produit, quelles représentations avaient une 1-cohomologie triviale.

Le lien le plus direct entre l'existence d'une représentation de cohomologie non nulle et la topologie du dual du groupe Γ dans un voisinage de 1_Γ est sans doute donné par un résultat de Vershik et Karpushev [50] : une représentation π de cohomologie non nulle est *infinitésimalement* proche de 1_Γ *i.e.* il existe une suite σ_n de représentation de Γ telle que $\sigma_n \to \pi$ et $\sigma_n \to 1_\Gamma$.

Reprenant des notes non publiées de B. Bekka, nous donnons une démonstration qui comble une lacune dans la preuve de Vershik et Karpushev. De plus, les arguments développés montrent que ce théorème est en fait valable pour toute représentation factorielle (et pas seulement irréductible) du groupe Γ (Théorème 2.8).

En utilisant ce résultat et sous les hypothèses du théorème 1.1, nous donnons une nouvelle preuve d'un théorème de Lubotzky et Zimmer : le premier espace de cohomologie à valeurs dans une représentation de dimension finie est trivial (Théorème 2.16).

La structure de réseau dans un produit est particulièrement intéressante lorsqu'on cherche à savoir quelles représentations possèdent de la cohomologie non-triviale.

Guichardet a montré que lorqu'une représentation π contient faiblement mais pas fortement la représentation triviale, l'ensemble des cobords n'est pas fermé dans l'ensemble des cocycles, et donc $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi) \neq 0$.

Dans le cas d'un réseau Γ cocompact et irréductible dans un produit non trivial $G_1 \times G_2$, nous montrons, sous des hypothèses naturelles, que la seule autre possibilité pour qu'une représentation irréductible π possède de la cohomogie non nulle est que π se relève en une représentation σ de $G_1 \times G_2$ qui est triviale sur un des facteurs, disons G_2, et telle que $\mathrm{H}^1(G_1;\sigma|_{G_1}) \neq 0$ (Théorème 3.6).

Ce résultat original est l'objet d'une note acceptée pour publication au CRAS [32]. Remarquons que Y. Shalom annonce un résultat similaire même dans le cas non-uniforme lorsque G_1 et G_2 sont des groupes algébriques simples et sous des hypothèses plus faibles dans le cas uniforme. De plus, Y. Shalom obtient des applications remarquables de ce résultat [48].

Rappelons que lorsque les G_i sont des groupes de Lie semi-simples réels ou des groupes d'automorphismes d'arbres homogènes, les représentations unitaires irréductibles dont la 1-cohomologie n'est pas nulle sont connues (voir Théorème 2.14 et Théorème 2.15 pour des énoncés précis de ces résultats).

La première section du chapitre 3 illustre, à l'aide de résultats de Weil et Stowe, le fait que l'annulation du premier espace de cohomologie est un phénomène de rigidité.

En utilisant ce théorème de A. Weil, Rapinchuk obtient en corollaire un résultats de rigidité locale pour les représentations unitaires de dimension finie des groupes de Kazhdan [43]. Ce résultat est à rapprocher des résultats de rigidité que Wang a obtenus précédemment pour les représentations unitaires irréductibles des groupes de Kazhdan [52]. Nous remarquons que les résultats de Rapinchuk et Wang s'étendent aux réseaux que nous considérons (Théorème 3.4 et Proposition 3.3).

Les restrictions de représentations à un réseau ont occupé notre attention pour la quatrième partie de ce travail. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple sans facteur compact et Γ un réseau dans G. Si σ est une représentation de G alors $\sigma|_\Gamma$, sa restriction à Γ, est une représentation unitaire de Γ. Lorsque σ est irréductible et n'est pas contenue dans un multiple de la représentation régulière λ_G de G, Cowling et Steger ont montré dans [14] que la représentation $\sigma|_\Gamma$ est irréductible et déterminée à équivalence unitaire près par σ (Théorème 4.12).

La réunion des supports des représentations obtenues par restriction forme un sous-ensemble de $\widehat{\Gamma}$ que nous notons $\mathrm{supp}_\Gamma \widehat{G}$. Si G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact nous apportons une réponse positive à la conjecture que Bekka et Valette ont formulée dans [7]. En effet, nous montrons que les représentations de dimension finie de Γ ne sont pas faiblement contenues dans $\mathrm{supp}_\Gamma \widehat{G}$ *i.e.* une représentation de dimension finie de Γ n'est jamais limite de restrictions de représentations de G (Théorème 4.14).

Ceci équivaut à dire que l'application naturelle j_Γ de $C^*(\Gamma)$ dans $M(C^*(G))$, l'algèbre des multiplicateurs de $C^*(G)$, n'est jamais injective (voir [7]).

Enfin, nous donnons un calcul explicite du rang du groupe $SO(n)$ sur le corps des p-adiques (Théorème 5.1). Ce calcul nous permet de construire des exemples de réseaux dans différents types de produits de groupes (section 5.2).

Chapitre 1

Variante de la propriété (T) de Kazhdan

Dans ce travail, les groupes que nous considérons seront toujours supposés localement compacts et dénombrables à l'infini.

1.1 Topologie sur le dual

Nous considérons la topologie de Fell (inner hull-kernel topology) sur la classe $\mathrm{Rep}(G)$ des (classes d'équivalence de) représentations unitaires du groupe localement compact G. Cette topologie est définie comme ceci. Une *fonction de type positif associée à une représentation* unitaire π dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une fonction sur G définie par $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$ pour un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$. Soient π dans $\mathrm{Rep}(G)$, $\varepsilon > 0$, K un ensemble compact de G, et des fonctions de type positif $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ associées à π, on note $\mathcal{W}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; K; \varepsilon; \pi)$ l'ensemble des représentations ρ pour lesquelles il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, chacune étant la somme de fonctions de type positif associées à ρ, telles que

$$|\varphi_i(x) - \psi_i(x)| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, \ldots, n \quad \forall x \in K.$$

Les sous ensemble du type $\mathcal{W}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; K; \varepsilon; \pi)$ forment un système fondamental de voisinages de la représentation π dans $\mathrm{Rep}(G)$ (voir [20], Section 2).

Cette topologie peut aussi être décrite en termess de contenance faible. Rappelons que π est *faiblement contenue* dans un ensemble $\mathcal{S}$ de représentations de G si toute fonction de type positif associée à π est limite, uniformément sur les compacts de G, de sommes de fonctions de type positif associées à des représentation de $\mathcal{S}$. Avec ces définitions, une suite (généralisée) π_n de représentation unitaires de G converge vers π si et seulement si, pour toute sous-suite $\pi_{n'}$ de π_n, π est faiblement contenue dans $\{\pi_{n'}\}$.

La topologie induite sur $\widehat{G}$, le dual unitaire de G est la topologie initiale pour l'application

$$\widehat{G} \mapsto \mathrm{Prim}\, C^*(G)$$

où l'ensemble Prim $C^*(G)$ des idéaux primitifs de $C^*(G)$ est muni de la topologie de Fell-Jacobson. Si on désigne par la même lettre une représentation du groupe G et son extension à $C^*(G)$, la C^*-algèbre de G, alors une représentation π est faiblement contenue dans un ensemble S de représentations de G si et seulement si

$$\cap_{\rho\in S} C^* - \ker\rho \subset C^* - \ker\pi$$

où $C^* - \ker\pi$ désigne le noyau de l'extension de π à $C^*(G)$ (voir [18], § 18).

D'autre part, nous dirons qu'une représentation π est contenue ou *fortement contenue* dans une représentation ρ s'il existe une sous-représentation de ρ équivalente à π.

1.2 La propriété (T) relative à une famille de représentations

Un groupe localement compact G possède la propriété (T) de Kazhdan si la représentation triviale de dimension un de G est un point isolé (pour la topologie de Fell) dans le dual unitaire $\widehat{G}$ de G.

Lubotzky et Zimmer considèrent dans [34] la variante suivante de la propriété (T). Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de (classes d'équivalence de) représentations unitaires de G contenant la représentation triviale de dimension un.

On dit que le groupe G possède la propriété (T; $\mathcal{R}$) ou que G possède la propriété (T) relativement à la famille $\mathcal{R}$ si 1_G est isolée dans $\mathcal{R}$. Lorsque $\mathcal{R} = \widehat{G}$, il s'agit de la propriété (T) de Kazhdan.

Il existe des exemples intéressants de groupes (discrets) qui n'ont pas la propriété (T) mais qui satisfont à une propriété (T;$\mathcal{R}$) pour des classes naturelles de représentations $\mathcal{R}$.

Exemple 1 On considère le groupe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ et la famille de ses sous-groupes de congruence

$$\Gamma(m) = \ker\left(SL(2,\mathbb{Z}) \mapsto SL(2,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\right)$$

pour $m \in \mathbb{N}$. En tant que sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$, le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit sur le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

par

$$g\cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{où} \qquad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

Le théorème de Selberg [44] affirme que, si Γ' est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ contenant un sous-groupe de congruence, alors la plus petite valeur propre non nulle $\lambda_1\,(\Gamma'\backslash\mathbb{H})$

de l'opérateur Laplacien sur la surface de congruence $\Gamma'\backslash\mathbb{H}$ est minorée par la constante $\frac{3}{16}$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{Z})$ qui factorisent à travers un quotient par un sous-groupe de congruence. Interprêté à l'aide du théorème 1.12, le théorème de Selberg implique que le groupe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ a la propriété $(\mathrm{T};\mathcal{R})$.

D'autre part, le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété (T) de Kazhdan car il contient le sous-groupe libre sur deux générateurs comme sous-groupe d'indice fini et un groupe libre non abélien ne possède pas la propriété (T) [15].

Exemple 2 Un autre exemple intéressant est le groupe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$, où p est un nombre premier et $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $\mathbb{Z}$ et $1/p$. Comme Γ est dense dans $SL(2,\mathbb{R})$, il ne peut pas avoir la propriété (T) de Kazhdan. D'autre part, Γ possède la propriété (T;$\mathcal{R}$) où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des représentations qui factorisent à travers un quotient par un sous-groupe d'indice fini. C'est une conséquence du théorème de Selberg et du fait que $SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$ possède une réponse positive au problème des sous-groupes de congruence *i.e.* tout sous-groupe distingué d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$ contient un sous-groupe de congruence

$$\Gamma(m) = \ker\left(SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]) \mapsto SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]/m\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])\right)$$

pour $m \in \mathbb{N}$ premier avec p (voir [33], section 4.4, exemple E).

Comme les représentations unitaires de dimension finie de Γ sont d'image finie, ceci implique que $SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$ possède la propriété $(\mathrm{T};\mathcal{FD})$ pour l'ensemble $\mathcal{FD}$ des représentations de dimensions finies de $SL(2,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right])$ (voir [2] et [45]).

Pour un groupe de type fini Γ, cette propriété d'isolation est liée à l'existence d'une constante minorant les valeurs propres du Laplacien sur les graphes de Schreier qui sont des quotients de Γ par une famille de sous-groupes. Ceci permet de construire des familles infinies de graphes extenseurs de même constante d'extension (voir [33] et théorème 1.12).

Dans [34], Lubotzky et Zimmer obtiennent de nouveaux exemples de groupes possédant la propriété (T) relativement à une famille de représentations $\mathcal{R}$. Ils procèdent de la façon suivante. Soit Γ un réseau dans un produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes. Supposons que Γ se projette de façon dense dans G_1 et que G_2 possède la propriété (T) de Kazhdan. Si G_1 est minimalement presque périodique, alors le groupe Γ possède la propriété $(\mathrm{T};\mathcal{FD})$ pour l'ensemble $\mathcal{FD}$ des représentations de dimensions finies de Γ [34].

1.3 Un théorème de rigidité des représentations

Plus généralement, considérons un groupe localement compact G, un sous-groupe fermé (non nécessairement discret) H et un sous-groupe distingué N de G. Nous allons supposer que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(I) HN est dense dans G ;

(II) l'espace homogène G/H possède une mesure G-invariante finie.

Si on note p la projection canonique $G \to G/N$, la condition (I) signifie que le groupe $p(H)$ est dense dans G/N.

Si π est une représentation irréductible de G/N, il est clair que $(\pi \circ p)|_H$ est une représentation irréductible de H et que π est déterminée (à équivalence unitaire près) par $(\pi \circ p)|_H$. De ce point de vue, on peut voir le dual unitaire $\widehat{G/N}$ du groupe G/N comme un sous-ensemble de $\widehat{H}$.

On peut alors formuler le

Problème 1 Quelles représentations unitaires de H peut-on obtenir de cette manière *i.e.* comme restriction d'une représentation de G/N?

En général, il peut être difficile de décrire (topologiquement) le sous-ensemble de $\widehat{H}$ obtenu par restriction de représentation de G/N mais le résultat suivant indique que, lorsque N a la propriété (T) de Kazhdan, les représentations irréductibles de H qui sont suffisamment proches de la représentation triviale 1_H sont en fait des représentations de G/N. Plus précisément, nous avons le

Théorème 1.1
Soient G, H et N des groupes satisfaisant les hypothèses (I) et (II) ci-dessus. Supposons de plus que N possède la propriété (T) de Kazhdan. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $1_{G/N}$ dans $\widehat{G/N}$. Alors l'ensemble des représentations $(\pi \circ p)|_H$, où π parcourt $\mathcal{U}$, est un voisinage de 1_H dans $\widehat{H}$.

En d'autres mots, le groupe H a la propriété $(T;\mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de H composé de 1_H et des représentations qui ne factorisent pas à travers le quotient G/N.

Bien entendu, si le groupe G lui-même a la propriété (T) de Kazhdan, on peut prendre $N = G$ et le théorème 1.1 est alors une généralisation du fait que la propriété (T) est héritée par les sous-groupes de covolume fini (voir [15], Chapitre 3, Théorème 4).

Le théorème 1.1 est également un résultat de rigidité dans le sens suivant. Il affirme qu'une représentation de H qui est suffisamment proche de la représentation triviale 1_H s'étend en une représentation de G (dont la restriction au sous-groupe N est triviale).

Problème 2 On peut se demander si ce phénomène de rigidité peut avoir lieu en général pour un réseau (irréductible) dans un produit non trivial de groupes de Lie simples. Rappelons que les seuls groupes de Lie simples qui n'ont pas la propriété (T) de Kazhdan sont ceux qui sont localement isomorphes à $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$.

Avant de donner une preuve du théorème 1.1, nous en donnons quelques conséquences.

La première est un corollaire immédiat (voir aussi [34]). Notons $\mathcal{FD}$ le sous-ensemble de $\widehat{H}$ constitué des représentations de dimension finie de H.

Définition 1 Un groupe localement compact G est dit *minimalement presque périodique* si 1_G est l'unique représentation irréductible de dimension finie de G.

Corollaire 1.2 *Sous les hypothèses du théorème 1.1, si G/N est minimalement presque périodique alors H a la propriété $(T, \mathcal{FD})$.*

Il y a de nombreux exemples de groupes minimalement presque periodiques, en effet on a la proposition suivante, due à von Neumann et Wigner [51]. Nous proposons un argument qui repose sur le comportement asymptotique des coefficients des représentations des groupes de Lie semi-simples.

Proposition 1.3 *Les groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts sont minimalement presque périodiques.*

Preuve. Les coefficients des représentations non triviales d'un tel groupe G sont des fonctions dans $C_0(G)$ *i.e.* qui tendent vers 0 à l'infini de G (voir par exemple [28]). D'autre part, les coefficients d'une représentation unitaire de dimension finie n sont des coefficients de matrices du groupe unitaire $\mathbf{U}(n)$. Comme le module du déterminant de ces matrices est toujours un, elles ne peuvent tendre vers zéro. □

Lubotzky et Zimmer obtiennent également le résultat suivant, bien connu pour les groupes de Kazhdan.

Proposition 1.4 *Si Γ est un groupe discret qui possède la propriété (T, $\mathcal{FD}$) alors le groupe abélianisé $\Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini.*

Preuve. Comme Γ^{ab} est un groupe commutatif, son dual $\widehat{\Gamma^{ab}}$ est un groupe commutatif également. Le fait que Γ possède la propriété (T, $\mathcal{FD}$) implique que $\widehat{\Gamma^{ab}}$ est discret. Par dualité, le groupe Γ^{ab} est donc compact. Il est aussi discret car Γ est discret. On en conclut que Γ^{ab} est fini. □

De plus, pour des groupes G, H et N vérifiant les hypothèses du théorème 1.1, Margulis obtient le résultat suivant ([36], Chapter III, Theorem 6.5), classique pour les groupes de Kazhdan ([15], Chapitre 1, Théorème 11).

Théorème 1.5 (Margulis)
Si G/N est compactement engendré alors H est compactement engendré. En particulier, si le groupe H est discret il est de type fini.

Le fait que H soit de type fini n'est cependant pas une conséquence de la propriété $(\mathrm{T}, \mathcal{FD})$. Lubotzky et Zimmer donnent en effet dans [34] un exemple de groupe discret Γ qui est résiduellement fini et possède la propriété $(\mathrm{T}, \mathcal{FD})$ mais n'est pas de type fini.

Les exemples « hyperboliques » de la fin du chapitre 3 de [15] montrent qu'il existe des groupes de Kazhdan qui ne sont pas de présentation finie.

Avant d'énoncer un autre résultat de Margulis concernant des groupes G, H et N vérifiant les hypothèses du théorème 1.1, nous rappellons les définitions suivantes.

Définition 2 Soit un groupe G et deux sous-groupes G_1 et G_2 de G. On note $A = G_1 \cap G_2$ leur intersection. Si le groupe G est engendré par $G_1 \cup G_2$ alors tout élément g de G s'écrit

$$g = x_1 y_1 \dots x_n y_n a \tag{$*$}$$

où $x_i \in G_1 \setminus A$ pour $1 \leq i \leq n$, $y_i \in G_2 \setminus A$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $x_n \in G_2$.

On dit que G est un *produit libre des groupes G_1 et G_2 amalgamé sur A* (et on écrit $G = G_1 *_A G_2$) si G est engendré par $G_1 \cup G_2$ et que pour chaque élément $g \in G$, l'écriture $(*)$ est unique.

On dira que G est un *amalgame* lorsque $G = G_1 *_A G_2$ où les G_i sont des sous-groupes ouverts de G et que $A = G_1 \cap G_2 \subsetneq G_i \subsetneq G$.

Ce résultat est également classique pour les groupes de Kazhdan (voir, par exemple, [36], Chapter III, Theorem 3.9).

Théorème 1.6 (Margulis)
Si H_1 et H_2 sont des sous-groupes ouverts propres de H tel que H s'écrive comme amalgame $H = H_1 *_B H_2$ où $B = H_1 \cap H_2 \subsetneq H_i \subsetneq H$, alors il existe deux sous-groupes ouverts G_1 et G_2 de G/N tel que $H_i = p^{-1}(G_i) \cap H$, $A = G_1 \cap G_2 \subsetneq G_i \subsetneq G$ et $G/N = G_1 *_A G_2$. En particulier, H ne peut être un amalgame que si G/N en est un.

Serre a définit la propriété (FA) de la façon suivante [47].

Définition 3 Le groupe G possède la propriété (FA) si toute action sans inversion de G sur un arbre $\mathcal{T}$ possède un point fixe.

Watatani a montré que la propriété (T) de Kazhdan implique la propriété (FA) de Serre mais que la réciproque est fausse [53].

En fait, pour les groupes dénombrables, Serre obtient la caractérisation suivante de la propriété (FA) (voir [47] Théorème 15).

Proposition 1.7 (Serre) *Le groupe dénombrable Γ possède la propriété (FA) si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Γ n'est pas un amalgame ;

(ii) le groupe abélianisé $\Gamma^{ab} = \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini ;

(iii) Γ est de type fini.

Par conséquent, on a alors le

Théorème 1.8
Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. Supposons que G possède un sous-groupe distingué N qui a la propriété (T) de Kazhdan et que Γ se projette de façon dense sur G/N.

Si le groupe G/N est minimalement presque périodique et engendré par un compact, mais n'est pas un amalgame alors Γ possède la propriété (FA) de Serre.

Preuve. Le théorème 1.6, la proposition 1.4 et la proposition 1.5 montrent respectivement que les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 1.7 sont vérifiées. □

1.4 Preuve du théorème 1.1

La preuve du théorème 1.1 est élémentaire et basée sur le lemme suivant qui est d'un intérêt indépendant et sera encore utilisé par la suite (voir [6] et aussi [36]).

Lemme 1.9 *Soit G, H, et N satisfaisant aux hypothèses (I) et (II) ci-dessus. Soit π une représentation unitaire de H. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) π contient une sous-représentation qui factorise par la projection canonique $p : G \to G/N$ i.e. il existe une représentation σ de G/N telle que π contient $(\sigma \circ p)|_H$

(ii) la représentation induite $\operatorname{Ind}_H^G \pi$ possède un vecteur N-invariant non nul.

Rappelons la formule suivante, valable pour des représentations unitaires quelconques σ de G et π d'un sous groupe fermé H,

$$\operatorname{Ind}_H^G(\sigma|_H \otimes \pi) \simeq \sigma \otimes \operatorname{Ind}_H^G \pi$$

(voir, par exemple, [20], Lemma 4.2).

Preuve du lemme 1.9. Supposons qu'une représentation π de H possède une sous-représentation de la forme

$$(\sigma \circ p)|_H$$

où σ est une représentation de G/N et p désigne la projection canonique de G sur G/N.

La représentation induite $\operatorname{Ind}_H^G \pi$ contient alors la représentation

$$\operatorname{Ind}_H^G\Big((\sigma \circ p)|_H\Big) = (\sigma \circ p) \otimes \operatorname{Ind}_H^G 1_H.$$

Comme G/H admet une mesure invariante finie, $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$ a des vecteurs invariants. Donc, $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ contient la représentation $\sigma \circ p$. En restreignant à N, cela donne la condition (ii) du lemme.

La preuve de la réciproque est plus délicate. Soit π une représentation de H, d'espace $\mathcal{H}_\pi$, telle que $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ possède un vecteur N-invariant ξ de norme un, c'est-à-dire, une application mesurable

$$\xi : G \to \mathcal{H}_\pi$$

telle que

(i) pour tout $h \in H$, $\xi(xh) = \pi(h^{-1})\xi(x)$ pour presque tout $x \in G$;

(ii) pour tout $n \in N$, $\xi(n^{-1}x) = \xi(x)$ pour presque tout $x \in G$;

(iii)
$$\int_{G/H} \|\xi(\dot{x})\|^2 d\dot{x} = 1$$
où $\dot{x} = xH$ et $d\dot{x}$ désigne la mesure G-invariante sur G/H.

Désignons par ρ la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ et $\mathcal{H}_\rho$ son espace. Nous allons utiliser un procédé de régularisation classique pour construire un vecteur N-invariant continu dans $\mathcal{H}_\rho$. Pour tout voisinage compact U de l'identité dans G, choisissons une fonction positive continue φ_U sur G dont le support est contenu dans U et telle que $\int_G \varphi_U(g)dg = 1$.

Considérons l'application

$$\xi_U : G \to \mathcal{H}_\pi$$

définie par

$$\xi_U(x) = \int_G \varphi_U(xg)\xi(g^{-1})dg.$$

Alors ξ_U possède les propriétés suivantes.

(a) ξ_U est continue sur G.

Pour voir cela, observons d'abord que la fonction

$$G \to \mathbb{R}, \qquad g \mapsto \|\xi(g)\|$$

est intégrable sur tout sous-ensemble compact K de G. En effet, soit dh la mesure de Haar sur H normalisée pour que $dg = dh\, d\dot{g}$. Alors, désignant par χ_K la fonction caractéristique de K, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_K \|\xi(g)\|\,dg &= \int_G \|\xi(g)\|\,\chi_K(g)\,dg \\
&= \int_{G/H} \Big(\int_H \|\xi(gh)\|\,\chi_K(gh)\,dh\Big)\,d\dot{g} \\
&= \int_{G/H} \|\xi(\dot{g})\|\,\Big(\int_H \chi_K(gh)\,dh\Big)\,d\dot{g} \\
&= \int_{G/H} \|\xi(\dot{g})\|\,\mu_H(H\cap g^{-1}K)\,d\dot{g},
\end{aligned}$$

où $\mu_H(H\cap g^{-1}K)$ désigne la mesure de $H\cap g^{-1}K$ dans H qui dépend seulement de $\dot{g}$. Observons que $H\cap g^{-1}K$ n'est pas vide si et seulement si $\dot{g}=\dot{k}$ pour un k dans K. Donc, $\mu_H(H\cap g^{-1}K)\leq \mu_H(H\cap K^{-1}K)$. Notons aussi que $\mu_H(H\cap K^{-1}K)<\infty$ car $H\cap K^{-1}K$ est compact. Donc, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
&\int_K \|\xi(g)\|\,dg \\
&\leq\ \mu_H(H\cap K^{-1}K)\int_{G/H}\|\xi(\dot{g})\|\,d\dot{g} \\
&\leq\ \mu_H(H\cap K^{-1}K)\sqrt{\mathrm{vol}(G/H)}\,\Big(\int_{G/H}\|\xi(\dot{g})\|^2\,d\dot{g}\Big)^{1/2} \\
&<\ \infty.
\end{aligned}$$

Maintenant, fixons un voisinage compact V de l'élément neutre e de G. Soient x dans G et y dans Vx. Désignons par K l'ensemble compact $x^{-1}(U\cup V^{-1}U)$. Comme le support de φ_U est contenu dans U, on a

$$\begin{aligned}
&\|\xi_U(x)-\xi_U(y)\| \\
&\leq\ \int_G \Big\|\varphi_U(xg)\xi(g^{-1})-\varphi_U(yg)\xi(g^{-1})\Big\|\,dg \\
&=\ \int_{x^{-1}(U\cup V^{-1}U)} \Delta(g^{-1})\,\Big|\varphi_U(xg^{-1})-\varphi_U(yg^{-1})\Big|\,\|\xi(g)\|\,dg \\
&\leq\ \sup_{g\in K}\Delta(g^{-1})\,\Big|\varphi_U(xg^{-1})-\varphi_U(yg^{-1})\Big|\int_K\|\xi(g)\|dg,
\end{aligned}$$

où Δ désigne la fonction module sur G. Soit $\varepsilon>0$. Comme φ_U est uniformément continue, il existe un voisinage W de e contenu dans V tel que

$$|\varphi_U(g)-\varphi_U(zg)|<\varepsilon$$

pour tout z dans W et tout g dans G. Donc, pour tout y dans Wx,

$$\|\xi_U(x)-\xi_U(y)\|\leq C\varepsilon,$$

où $C=\sup_{g\in K}\Delta(g^{-1})\int_K\|\xi(g)\|dg$ est une constante qui dépend seulement de x, U et V. Par suite, ξ_U est continue.

(b) ξ_U appartient à l'espace $\mathcal{H}_\rho$ de la représentation induite $\rho = \mathrm{Ind}_H^G \pi$.

En effet, soit x dans G et h dans H. Grâce à (i) ci-dessus, on a pour presque tout $g \in G$,

$$\xi(g^{-1}xh) = \pi(h^{-1}) \cdot \xi(g^{-1}x)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\xi_U(xh) &= \int_G \varphi_U(g)\xi(g^{-1}xh)dg \\
&= \int_G \varphi_U(g)\pi(h^{-1}) \cdot \xi(g^{-1}x)dg \\
&= \pi(h^{-1}) \cdot \int_G \varphi_U(g)\xi(g^{-1}x)dg \\
&= \pi(h^{-1}) \cdot \xi_U(x).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&|\langle \xi_U(x), \xi_U(x)\rangle| \\
&\leq \int_G \int_G \varphi_U(g)\varphi_U(g')\Big|\langle \xi(g^{-1}x), \xi(g'^{-1}x)\rangle\Big|dgdg' \\
&\leq \int_G \int_G \varphi_U(g)\varphi_U(g')\Big\|\xi(g^{-1}x)\Big\|\Big\|\xi(g'^{-1}x)\Big\|dgdg',
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathrm{L}^2(G/H)$, on a aussi

$$\begin{aligned}
\|\xi_U\|^2 &\leq \int_G \varphi_U(g) \int_G \varphi_U(g') \int_{G/H} \Big\|\xi(g^{-1}x)\Big\|\Big\|\xi(g'^{-1}x)\Big\|d\dot{x}dgdg' \\
&\leq \int_G \varphi_U(g) \int_G \varphi_U(g')\|\rho(g)\xi\|\|\rho(g')\xi\|dgdg' \\
&\leq \Big(\int_G \varphi_U(g)\|\rho(g)\xi\|dg\Big)^2 \\
&= \|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

(c) ξ_U est invariant par N.

En effet, pour $n \in N$, $x \in G$ et $\eta \in \mathcal{H}_\rho$

$$\begin{aligned}
&\int_{G/H} \langle \xi_U(n\dot{x}), \eta(\dot{x})\rangle d\dot{x} \\
&= \int_{G/H} \langle \int_G \varphi_U(g)\xi(g^{-1}n\dot{x})dg, \eta(\dot{x})\rangle d\dot{x} \\
&= \int_G \varphi_U(g)\Big(\int_{G/H} \langle \xi((g^{-1}ng)g^{-1}\dot{x}), \eta(\dot{x})\rangle d\dot{x}\Big)dg \\
&= \int_G \varphi_U(g)\Big(\int_{G/H} \langle \rho(g)\rho(g^{-1}n^{-1}g)\xi(\dot{x}), \eta(\dot{x})\rangle d\dot{x}\Big)dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_G \varphi_U(g)\Big(\int_{G/H}\langle\rho(g)\xi(\dot{x})),\eta(\dot{x})\rangle d\dot{x}\Big)dg \\
&= \int_{G/H}\int_G \varphi_U(g)\langle\xi(g^{-1}\dot{x}),\eta(\dot{x})\rangle d\dot{x}dg \\
&= \int_{G/H}\langle\xi_U(\dot{x}),\eta(\dot{x})\rangle d\dot{x}
\end{aligned}$$

car N est un sous-groupe normal et ξ est invariant par N.

(d) ξ_U n'est pas nul, pour U suffisamment petit.

C'est clair puisque $\|\xi_U - \xi\| \to 0$ lorsque $U \to \{e\}$ et que $\xi \neq 0$.

Soient $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $g_1, \dots, g_n \in G$, $k \in N$, $h \in H$. En utilisant la continuité de ξ_U, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_ihk) &= \sum_{i=1}^n c_i\xi_U((g_ih)k(g_ih)^{-1}g_ih) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i\rho((g_ih)k(g_ih)^{-1})\xi_U(g_ih) \\
&= \sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_ih)
\end{aligned}$$

et

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_ih)\right\| = \left\|\pi(h^{-1})\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_i)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_i)\right\|$$

Dès lors, comme HN est dense dans G et, de nouveau, grâce à la continuité de ξ_U,

$$\left\|\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_ig)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_i)\right\|$$

pour tout g dans G.

Soit $\mathcal{W}_\pi$ le sous-espace fermé (non nul) de $\mathcal{H}_\pi$ engendré par $\xi_U(G)$. Alors, pour tout g dans G,

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\pi &\longmapsto \mathcal{W}_\pi \\
\sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_i) &\longmapsto \sum_{i=1}^n c_i\xi_U(g_ig^{-1})
\end{aligned}$$

est un opérateur unitaire dépendant seulement de la classe de g dans G/N. Ceci définit une représentation unitaire σ de G/N. Comme ξ_U est continue, σ est continue. De plus, puisque

$$(\sigma \circ p)(h)\ \xi_U(g) = \xi_U(gh^{-1}) = \pi(h)\ \xi_U(g),$$

il est clair que

$$(\sigma \circ p)(h) = \pi(h)$$

sur $\mathcal{W}_\pi$, pour tout h dans H. □

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Lemme 1.10 *Soit G, N et H comme dans le lemme 1.9. Soit λ la représentation quasirégulière de G sur $\mathrm{L}^2(G/H)$. Les fonctions invariantes par N dans $\mathrm{L}^2(G/H)$ sont constantes.*

Preuve. Le lemme affirme que l'action de N (par multiplication à gauche) sur l'espace homogène G/H est ergodique. Grâce au théorème de dualité de Moore, l'ergodicité de l'action de N sur G/H est équivalente à l'ergodicité de l'action de H sur G/N par multiplication à gauche (voir [54], Corollary 2.2.3). Comme HN est dense dans G, le sous-groupe $p(H)$ est dense dans le groupe G/N, et cela est équivalent à l'ergodicité de l'action de H sur G/N (voir [54], Lemma 2.2.13). □

Nous pouvons à présent donner la
Preuve du théorème 1.1. Soit π_n une suite de représentations irréductibles de H qui converge vers 1_H dans $\widehat{H}$. Alors, grâce à la continuité de l'induction (voir [20], Theorem 4.1),

$$\mathrm{Ind}_H^G \pi_n \to \mathrm{Ind}_H^G 1_H$$

dans $\mathrm{Rep}(G)$. Comme H est de covolume fini, 1_G est contenu dans $\mathrm{Ind}_H^G 1_H$ et cela implique

$$\mathrm{Ind}_H^G \pi_n \to 1_G.$$

Comme N a la propriété (T) de Kazhdan, nous pouvons supposer que $\mathrm{Ind}_H^G \pi_n$ possède des vecteurs N-invariants pour tout n. Donc, grâce au Lemme 1.9, il existe des représentations irréductibles σ_n de G/N telles que $\pi_n = (\sigma_n \circ p)|_H$ où $p : G \to G/N$ est la projection canonique.

Pour achever la preuve, nous allons montrer que

$$\sigma_n \circ p \to 1_G$$

dans $\widehat{G}$. Comme H est de covolume fini, on a

$$\mathrm{Ind}_H^G \pi_n = \mathrm{Ind}_H^G (\sigma_n \circ p)|_H = (\sigma_n \circ p) \otimes \lambda = (\sigma_n \circ p) \oplus \left((\sigma_n \circ p) \otimes \lambda^0\right), \qquad (*)$$

où $\lambda = \mathrm{Ind}_H^G 1_H$ et λ^0 est la restriction de λ à l'orthogonal des constantes dans $\mathrm{L}^2(G/H)$.

La restriction à N de $(\sigma_n \circ p) \otimes \rho^0$ est un multiple de $\rho^0|_N$. Puisque N a la propriété (T) de Kazhdan, le lemme 1.10 ci-dessus implique que $\rho^0|_N$ ne peut pas faiblement contenir la représentation triviale 1_N. Ainsi, $(\sigma_n \circ p) \otimes \rho^0$ ne peut converger vers 1_G. Comme

$$\mathrm{Ind}_H^G \pi_n \to 1_G,$$

nous concluons grâce à $(*)$ que

$$\sigma_n \circ p \to 1_G.$$

□

1.5 Application: Traces finies sur $C^*(\Gamma)$

Pour un groupe discret Γ, on note $C^*(\Gamma)$ la C^* algèbre maximale de Γ *i.e.* la complétion de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[\Gamma]$ pour la norme

$$\left\|\sum\nolimits_\gamma c_\gamma \cdot \gamma\right\| = \sup_{\pi \in \mathrm{Rep}(\Gamma)} \left\|\sum\nolimits_\gamma c_\gamma \cdot \pi(\gamma)\right\|.$$

Définition 4 Une *trace* sur $C^*(\Gamma)^+$ est une application $\tau : C^*(\Gamma)^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ telle que $\tau(x+y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$ pour tout $x,\ y \in C^*(\Gamma)^+$ et $\lambda \geq 0$, et $\tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ pour tout $x \in C^*(\Gamma)$.

Une trace τ est dite *fidèle* si $\tau(x^*x) = 0$ implique $x = 0$.

Si une trace τ est finie (*i.e.* $\tau(x)$ est fini pour tout $x \in C^*(\Gamma)^+$) alors τ est la restriction à $C^*(\Gamma)^+$ d'une forme linéaire positive et centrale ($\tau(xy) = \tau(yx)$) sur $C^*(\Gamma)$ ([18],§ 6.8.1).

Rappelons qu'une fonction à valeurs complexes φ sur le groupe Γ est *de type positif* si, pour tout $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, la matrice $\left(\varphi(\gamma_j^{-1}\gamma_i)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est hermitienne positive *i.e.* pour tout $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda_i} \varphi(\gamma_j^{-1}\gamma_i) \geq 0.$$

On note $CP(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions φ de type positif sur Γ, centrales et telles que $\varphi(e) = 1$. Le sous-ensemble $CP(\Gamma)$ de $\ell^\infty(\Gamma)$ est convexe et compact pour la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$. On note $E(\Gamma)$ l'ensemble des points extrémaux de $CP(\Gamma)$.

Enfin, il existe une correspondance biunivoque (construction GNS) entre $E(\Gamma)$ et l'ensemble des classes de quasi-équivalence des représentations unitaires continues factorielles de type fini de Γ ([18], § 17.3.4).

Définition 5 Une représentation π de Γ est *factorielle* si l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_\pi$ engendrée par les opérateurs $\{\pi(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ est un facteur *i.e.* le centre de $\mathcal{N}_\pi$ est réduit aux scalaires. Une représentation π de Γ est de *type fini* si $\mathcal{N}_\pi$ est un facteur fini *i.e.* s'il existe sur $\mathcal{N}_\pi$ une trace normale finie ([17], chapitre I, § 6).

On a alors le

Théorème 1.11
Soient Γ un réseau dans un groupe G et N un sous-groupe normal et fermé dans G tel que Γ se projette de façon dense sur G/N. Si N possède la propriété (T) et G/N est un groupe minimalement presque périodique de type I qui ne possède pas la propriété (T) alors il n'existe pas de trace fidèle finie sur $C^*(\Gamma)$.

Preuve. Soit τ une forme linéaire positive et centrale sur $C^*(\Gamma)$. A une normalisation près, la restriction $\varphi = \tau|_\Gamma$ de τ à Γ est une fonction de type positif sur Γ, centrale et telle que $\varphi(e) = 1$. Autrement dit, φ est un élément de $CP(\Gamma)$.

Donc, φ est limite pour la topologie $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ de combinaisons linéaires convexes de fonctions de type positif «indécomposables» $\varphi_t \in E(\Gamma)$.

Pour chaque t, notons respectivement π_t la représentation factorielle de type fini associée à φ_t et $\mathcal{N}_t$ le facteur de type fini engendré par $\pi_t(\Gamma)$.

Notons π_φ la représentation de Γ (ou de $C^*(\Gamma)$) associée à φ par la construction GNS. Pour rappel, on considère la forme sesquilinéaire positive

$$\langle f, h\rangle_\varphi = \sum_{x,y\in\Gamma} f(x)\overline{h(y)}\varphi(y^{-1}x).$$

sur $\mathbb{C}[\Gamma]$. L'espace $\mathcal{H}_\varphi$ de la représentation π_φ associée à φ est l'espace de Hilbert obtenu en complétant pour la norme donnée par $\|f\|_\varphi = \langle f, f\rangle_\varphi$ le quotient de $\mathbb{C}[\Gamma]$ par l'idéal

$$I_\varphi = \{x \in C^*(\Gamma) \mid \tau(x^*x) = 0\}$$

qui est ici réduit à zéro.

L'action π_φ de Γ sur $\mathcal{H}_\varphi$ est l'action induite par l'action naturelle gauche de Γ sur $\mathbb{C}[\Gamma]$:

$$(\gamma \cdot f)(x) = f(\gamma^{-1}x) \quad \text{où} \quad f \in \mathbb{C}[\Gamma], \gamma, x \in \Gamma.$$

Pour tout $x \in \Gamma$, on a $\langle \pi_\varphi(x)\delta_e, \delta_e\rangle = \varphi(x)$ où δ_e désigne l'image dans $\mathcal{H}_\varphi$ de la fonction de Dirac en e.

Si τ est fidèle alors $C^*\!-\!\ker \pi_\varphi = 0$. En particulier, π_φ contient faiblement toutes les représentations de Γ.

Comme G/N n'a pas la propriété (T) de Kazhdan, le groupe Γ ne l'a pas non plus. Il existe donc une suite ρ_n de représentations de Γ, irréductibles, non triviales et telles que $\lim_n \rho_n = 1_\Gamma$. Donc, la fonction constante 1 est limite de fonctions de type positif associées aux représentations ρ_n.

Comme chaque ρ_n est faiblement contenue dans π_φ, les fonctions de type positif associées à ρ_n sont limites de sommes finies de fonctions de type positif associées à π_φ.

Comme $\varphi = \langle \pi_\varphi(.)\delta_e, \delta_e\rangle$ est limite de combinaisons linéaires convexes de fonctions de type positif φ_t et que δ_e est un vecteur totalisateur pour $\mathcal{H}_f$, les fonctions de type positif associées à π_φ sont limites de sommes de fonctions de type positif associées aux représentations π_t ([18], proposition 18.1.4).

Finalement, pour chaque n, la représentation ρ_n est faiblement contenue dans l'ensemble $\{\pi_t\}$ *i.e.* les fonctions de type positif associées à ρ_n sont limites de sommes finies de fonctions de type positif associées à des représentations π_t.

Comme chaque représentation ρ_n est irréductible, il n'est pas nécessaire ci-dessus de considérer des sommes finies ([20], Lemma 2.2 et remarque au Theorem 2.2). De plus, comme chaque ρ_n est non triviale, quitte à passer à des sous-représentations factorielles des π_t, on peut supposer que les fonctions de type positif associées à ρ_n sont limites de fonctions de type positif associées à des représentations π_t factorielles et sans vecteur invariant.

On conclut qu'on peut extraire une suite de représentations factorielles π_t sans vecteur invariant telle que $\lim \pi_t = 1_\Gamma$.

Grâce au théorème 1.1, il existe, à partir d'un certain indice t, une représentation σ_t de G/N telle que si $p : G \mapsto G/N$ est la projection canonique alors π_t admet une sous-représentation $\widetilde{\pi}_t$ vérifiant $\widetilde{\pi}_t(\gamma) = (\sigma_t \circ p)(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Comme $\widetilde{\pi}_t$ est une sous-représentation non nulle de π_t et que π_t est factorielle, la représentation $\widetilde{\pi}_t$ est quasiéquivalente à π_t ([18], § 5.3.5) et donc factorielle ([18], § 5.3.4).

De plus, les représentations σ_t ne sont pas triviales. En effet, sinon, la représentation triviale 1_Γ serait contenue dans les représentations factorielles π_t.

L'algèbre de von Neumann $\widetilde{\mathcal{N}_t}$ engendrée par $\widetilde{\pi}_t(\Gamma)$ est donc un facteur de type fini isomorphe à $\mathcal{N}_t$ ([18], § 5.3.1 (ii)). La densité de $p(\Gamma)$ dans G/N, nous permet d'identifier $\sigma_t(G/N)''$, l'algèbre de von Neumann engendrée par σ_t, avec $\widetilde{\mathcal{N}_t}$. Comme G/N est un groupe de type I, toute représentation de G/N est de type I et l'algèbre de von Neumann $\sigma_t(G/N)'' = \widetilde{\mathcal{N}_t}$ est donc un facteur de type I admettant une trace normale finie fidèle.

Or, les seuls facteurs de type I admettant une trace finie fidèle sont les algèbres de matrices carrées à coefficients complexes ([39] Corollaire 5.5.8).

Donc, pour chaque t il existe une dimension $n_t \in \mathbb{N}$ telle que $\widetilde{\mathcal{N}_t} \simeq M_{n_t}(\mathbb{C})$. Autrement dit, la représentation σ_t est de dimension finie.

Comme G/N est minimalement presque périodique, σ_t serait alors triviale, d'où une contradiction. □

1.6 Application : les graphes extenseurs

1.6.1 Constante d'extension

Définition 6 1. Un *graphe* $\mathcal{G}$ est la donnée d'un ensemble de sommets $\mathrm{Som}(\mathcal{G})$ et d'un ensemble d'arêtes $\mathrm{Ar}(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Som}(\mathcal{G}) \times \mathrm{Som}(\mathcal{G})$.

2. Deux sommets x et y sont dit *adjacents* si (x, y) est une arête. Pour une arête $e = (x, y)$, on dit que x est l'*origine* de e et que y est l'*extrémité* de e. On note $x = e^-$ et $y = e^+$.

3. Le *degré* $\deg(x)$ d'un sommet est le nombre de sommets qui lui sont adjacents.

4. Un *chemin* c de longueur $n \in \mathbb{N}^*$ reliant les sommets x et y dans $\mathcal{G}$ est une suite finie d'arêtes $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $x = e_1^-$, $e_i^+ = e_{i+1}^-$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $y = e_n^+$.

5. La *distance* $d(x, y)$ entre les deux sommets x et y est la longueur du chemin le plus court reliant x et y.

6. Un graphe $\mathcal{G}$ est dit *connexe* s'il existe un chemin reliant toute paire de sommets.

7. Le bord ∂S d'un sous-ensemble S de sommets de $\mathcal{G}$ est défini par

$$\partial S = \{y \in \mathrm{Som}(\mathcal{G}) \mid d(y, S) = 1\}.$$

Nous pouvons à présent définir les *graphes extenseurs* qui apparaissent pour modéliser des réseaux d'informations qui sont de « bons propagateurs d'information » (voir [8] et [33]).

Définition 7 Soit c un réel positif et n, k deux entiers naturels. Un graphe $\mathcal{G}$ composé de n sommets dont les degrés sont majorés par k est un (n, k, c)-*extenseur* si pour tout sous-ensemble S de $\mathrm{Som}(\mathcal{G})$, on a

$$|\partial S| \geq c \left(1 - \frac{|S|}{n}\right) |S|.$$

La constante $c > 0$ est appelée constante d'extension.

Problème 3 Tout graphe k-régulier (*i.e.* dont tous les sommets sont de degré k) et connexe est un extenseur pour une constante d'extension c bien choisie. Le problème intéressant est de construire des familles infinies de tels graphes. Plus précisément, on cherche à construire une suite $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(|\mathcal{G}_n|, k, c)$-extenseurs où le nombre de sommets $|\mathcal{G}_n|$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini mais où k et c sont constants.

Pour un graphe $\mathcal{G}$, on définit également une constante «isopérimétrique», analogue discret de la constante de Cheeger pour les variétés Riemanniennes. Nous verrons ci-dessous que cette constante est liée à la constante d'extension.

Définition 8 La constante de Cheeger du graphe fini $\mathcal{G}$, notée $h(\mathcal{G})$, est définie par

$$h(\mathcal{G}) = \inf\left\{\frac{|E(S_1,S_2)|}{\min(|S_1|,|S_2|)} \text{ où } \mathrm{Som}(\mathcal{G}) = S_1 \sqcup S_2\right\}$$

où, pour une partition $S_1 \sqcup S_2$ de $\mathrm{Som}(\mathcal{G})$, $E(S_1,S_2)$ désigne l'ensemble des arêtes reliant un sommet de S_1 à un sommet de S_2 *i.e.*

$$E(S_1,S_2) = \{e \in \mathrm{Ar}(\mathcal{G}) \mid (e^- \in S_1 \text{ et } e^+ \in S_2) \text{ ou } (e^- \in S_2 \text{ et } e^+ \in S_1)\}.$$

Remarque 1 Si M est une variété Riemannienne connexe de volume fini et de dimension n, on définit la constante de Cheeger $h(M)$ de la façon suivante : soit S une sous-variété de M de dimension $n-1$ telle que $M \setminus S$ s'écrive comme union disjointe de deux variétés A et B. On note $\mu(S)$ la «surface» de S et $\lambda(A)$ (resp. $\lambda(B)$) le «volume» de A (resp. de B). Alors

$$h(M) = \inf \frac{\mu(S)}{\min(\lambda(A),\lambda(B))}$$

où l'infimum est pris sur toutes les combinaisons de sous-variétés S, A et B comme ci-dessus.

1.6.2 L'opérateur Laplacien combinatoire

Pour un graphe (non nécessairement fini) $\mathcal{G}$ de degré maximum k, on définit un opérateur $\Delta : \mathrm{L}^2(\mathrm{Som}(\mathcal{G})) \longmapsto \mathrm{L}^2(\mathrm{Som}(\mathcal{G}))$ par

$$\Delta f(x) = \deg(x)\, f(x) - \sum_{y \text{ adjacent à } x} f(y)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^2(Som(\mathcal{G}))$ et $x \in \mathrm{Som}(\mathcal{G})$.

C'est un opérateur auto-adjoint et positif appelé Laplacien combinatoire du graphe $\mathcal{G}$.

Définition 9 L'infimum des valeurs spectrales positives de l'opérateur Laplacien est appelée *bas du spectre* de $\mathcal{G}$ et notée $\lambda_1(\mathcal{G})$.

Remarque 2 Ceci est l'analogue discret de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne M. Soit g la métrique Riemannienne de M. On note $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ la matrice de g en coordonnées locales, g^{ij} son inverse et $|g| = |\det(g_{ij})|$. L'opérateur $\Delta : \mathrm{L}^2(M) \longmapsto \mathrm{L}^2(M)$ est alors défini par

$$\Delta f = \frac{-1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

De même, on note $\lambda_1(M)$ L'infimum des valeurs spectrales positives de l'opérateur Δ.

1.6.3 Extenseurs et propriété (T)

Définition 10 Soit Γ un groupe discret engendré par une partie finie S. Supposons que S est symétrique *i.e.* $S = S^{-1}$. Soit N un sous-groupe (resp. un sous-groupe distingué) d'indice fini de Γ. Le graphe de *Schreier* (resp. de *Cayley*) de Γ/N par rapport à S est le graphe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Gamma/N; S)$ dont les sommets sont $\mathrm{Som}(\mathcal{G}) = \Gamma/N$ et les arêtes

$$\mathrm{Ar}(\mathcal{G}) = \Big\{(xN, yN) \mid x^{-1}y \in S \text{ et } xN \neq yN\Big\}.$$

Les degrés des sommets de $\mathcal{G}$ est alors borné par $|S|$.

Par des arguments de type combinatoire, on peut montrer que, pour une constante c donnée, pour chaque $k \geq 5$ et chaque n, la «majorité» des graphes k-réguliers à n sommets sont des (n, k, c)-extenseurs (voir [33], § 1.2 pour un énoncé plus précis).

Si ces arguments de comptage suffisent pour montrer l'existence de familles répondant au problème 3, ils ne permettent en aucun cas de construire explicitement une seule de ces familles.

La première réponse constructive au problème 3 a été donnée par Margulis [35]. La famille construite par cette méthode est composée de graphes de Cayley d'un groupe Γ de type fini possédant la propriété (T) relativement à un ensemble $\mathcal{R}$ de représentations de Γ.

Plus généralement, on a le résultat suivant dont on trouvera la preuve dans ([33], Theorem 4.3.2).

Théorème 1.12
Soient Γ un groupe discret engendré par une partie finie S et $\mathcal{L} = \{N_i\,; i \in \mathbb{N}\}$ une suite de sous-groupes d'indice fini dans Γ. On note

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \Big\{\pi \in \widehat{\Gamma} \mid \text{il existe } i \in \mathbb{N} \text{ tel que } N_i \subseteq \ker \pi\Big\}$$

l'ensemble des représentations de Γ qui quotientent par un des sous-groupes de $\mathcal{L}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) le groupe Γ a la propriété (T;$\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$) (i.e. il existe un $\varepsilon_1 > 0$ tel que si π est une représentation de Γ d'espace $\mathcal{H}$ sans vecteur invariant et dont le noyau contient un des N_i alors pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = 1$, il existe $s \in S$ tel que $\|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \varepsilon_1$) ;

(ii) il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que les graphes de Schreier $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}(\Gamma/N_i\,; S)$ forment une suite de $(|\Gamma/N_i|, |S|, \varepsilon_2)$-extenseurs ;

(iii) il existe $\varepsilon_3 > 0$ tel que $h(\mathcal{G}_i) \geq \varepsilon_3$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;

(iv) il existe $\varepsilon_4 > 0$ tel que $\lambda_1(\mathcal{G}_i) \geq \varepsilon_4$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Si, de plus, le groupe Γ est le groupe fondamental d'une variété Riemannienne M de volume fini, alors si on note M_i les revêtements à un nombre fini de feuillets correspondant aux sous-groupes N_i, les conditions précédentes sont encore équivalentes à celles-ci :

(v) il existe $\varepsilon_5 > 0$ tel que $h(M_i) \geq \varepsilon_5$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;

(vi) il existe $\varepsilon_6 > 0$ tel que $\lambda_1(M_i) \geq \varepsilon_6$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Chapitre 2

Cohomologie

2.1 Actions par isométries affines

Nous rappelons ce qu'est une action par isométries affines d'un groupe topologique sur un espace de Hilbert affine et établissons le lien entre l'existence de point fixe pour ces actions et l'annulation du premier espace de cohomologie à coefficients dans une représentation.

Définition 11 Une *action par isométries affines* d'un groupe topologique G sur un espace de Hilbert affine $\mathcal{H}$ (identifié à l'espace de Hibert de ses translations par le choix d'une origine) est un morphisme α de G dans le groupe $\operatorname{Iso}\operatorname{Aff}(\mathcal{H})$ des isométries affines de $\mathcal{H}$ tel que l'application

$$G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} : (g, \xi) \to \alpha(g)\xi$$

est continue.

Les points fixes d'une telle action sont caractérisés par le lemme suivant (voir [15], Chapitre 4, Lemme 3).

Lemme 2.1 *Soit α une action par isométries affines du groupe G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) α possède un point fixe ;

(ii) α possède une orbite bornée ;

(iii) toute orbite de α est bornée.

On note $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ le groupe des isométries linéaires de $\mathcal{H}$. On a alors l'identification

$$\operatorname{Iso}\operatorname{Aff}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{H} \rtimes \mathcal{U}(\mathcal{H}).$$

Soit α une action par isométries affines de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout g dans G, et tout élément ξ de $\mathcal{H}$, on peut écrire

$$\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$$

où $\pi(g) \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ et $b(g) \in \mathcal{H}$. En imposant la continuité et la condition de morphisme pour α, on trouve que π est une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$, appelée partie linéaire de α et que b est une application continue de G dans $\mathcal{H}$ sujette à la condition de cocycle

$$b(gh) = b(g) + \pi(g)b(h) \qquad \text{pour tout } g, h \in G.$$

Réciproquement, la donnée d'une représentation unitaire de G sur $\mathcal{H}$ et d'une application continue b de G dans $\mathcal{H}$ vérifiant la condition ci-dessus définit par la formule $\alpha(g)\xi = \pi(g)\xi + b(g)$ une action par isométries affines de G sur $\mathcal{H}$.

Définition 12 Pour une représentation π d'un groupe localement compact G d'espace $\mathcal{H}$, on note $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ l'espace vectoriel des *cocycles* continus de G à coefficients dans π, *i.e.* des applications continues $a : G \to \mathcal{H}$ telles que, pour x, y dans G,

$$a(xy) = a(x) + \pi(x)a(y)$$

et $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ l'ensemble des *cobords*, *i.e.* les cocycles de la forme

$$b(x) = \pi(x)\xi - \xi \qquad \text{pour tout } \ x \in G$$

où ξ est un vecteur dans $\mathcal{H}$. Le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π est défini par

$$\mathrm{H}^1(G;\pi) = \mathrm{Z}^1(G;\pi)/\mathrm{B}^1(G;\pi).$$

Avec ces définitions, on a la

Proposition 2.2 *Soit π une représentation du groupe G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) Les actions affines de G sur $\mathcal{H}$ de partie linéaire π possèdent un point fixe,

(ii) $\mathrm{H}^1(G;\pi) = \{0\}$.

2.2 Résultats de Guichardet

2.2.1 L'adhérence des cobords

On munit $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de G, et $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ de la topologie induite. On note $\overline{\mathrm{B}^1}(G;\pi)$ l'adhérence de $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$.

On cherche alors à répondre aux

Problème 4 $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est-il fermé dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$?

Problème 5 $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est-il dense dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$?

Une réponse au problème 4 est apportée par l'enoncé suivant, dû a Guichardet. Nous en reproduisons la preuve ci-après (voir [24], § 3, Théorème 1).

Théorème 2.3 (Guichardet)
Soit π une représentation unitaire du groupe G qui ne possède pas de vecteur invariant. Supposons que G est σ-compact i.e. réunion dénombrable d'ensembles compacts. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) la représentation π ne contient pas faiblement 1_G, la représentation triviale de dimension un.

(ii) $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est fermé dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$.

Preuve. On note $C(G;\mathcal{H})$ l'ensemble des applications du groupe topologique G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, continues pour la topologie normique de $\mathcal{H}$. On munit $C(G;\mathcal{H})$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G. Comme G est σ-compact, l'espace $C(G;\mathcal{H})$ est un espace métrisable complet. Le sous-espace $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$, qui est fermé dans $C(G;\mathcal{H})$, est donc aussi complet.

Considérons l'application $\delta : \mathcal{H} \to \mathrm{Z}^1(G;\pi)$ définie par $\delta\xi(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout g dans G. L'image de δ est $\mathrm{B}^1(G;\pi)$. On vérifie que

- δ est continue: en effet, pour tout sous-ensemble compact K de G, on a
$$\sup_{g\in K}\|\delta\xi(g)\| = \sup_{g\in K}\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq 2\|\xi\|\,;$$
- comme π ne possède pas de vecteur invariant, δ est injective;
- pour $\xi \in \mathcal{H}$ et $g \in G$, on a $\|\delta\xi(g)\|^2 = 2\,(1 - \mathrm{Re}\,\langle\pi(g)\xi,\xi\rangle)$, où Re désigne la partie réelle.

Pour que $\delta : \mathcal{H} \to \mathrm{B}^1(G;\pi)$ soit ouverte, il faut et il suffit que π ne contienne pas faiblement 1_G. En effet, π contient faiblement 1_G si et seulement s'il existe une suite de vecteurs ξ_n de norme un dans $\mathcal{H}$ tels que les fonctions de type positif $\langle\pi(.)\xi_n,\xi_n\rangle$ tendent vers un uniformément sur les compacts de G. Ceci est équivalent au fait que la suite $\delta\xi_n$ tende vers zéro dans $\mathrm{B}^1(G;\pi)$. Enfin, une telle suite existe si et seulement si l'application δ n'est pas ouverte.

Supposons à présent que π ne contienne pas faiblement 1_G, alors l'application δ : $\mathcal{H} \mapsto \mathrm{B}^1(G;\pi)$ est ouverte et son image est complète donc fermée dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$.

D'autre part, si $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est fermé dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$, alors $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est métrisable et complet et
$$\delta : \mathcal{H} \to \mathrm{B}^1(G;\pi)$$
est continue et bijective. Le théorème de l'application ouverte implique que δ est ouverte. Donc, π ne contient pas faiblement 1_G. □

2.2.2 Désintégration des cocycles

Afin de voir dans quelle mesure on peut ramener l'étude des problèmes 4 et 5 au cas des représentations irréductibles, il est intéressant de considérer des intégrales hilbertiennes directes de représentations irréductibles.

Le lemme qui suit est encore dû à Guichardet (voir [25], Appendix I, p. 183).

Lemme 2.4 (Désintégration des cocycles) *Soit π une représentation unitaire du groupe G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Supposons qu'on puisse écrire $\mathcal{H}$ et π comme intégrales hilbertiennes directes*

$$\mathcal{H} = \int_T^{\oplus} \mathcal{H}_t d\mu(t) \qquad \text{et} \qquad \pi = \int_T^{\oplus} \pi_t d\mu(t)$$

où μ est une mesure positive bornée sur un espace borelien standard T et $\mathcal{H}_t$ (resp. π_t) est un champ mesurable d'espaces de Hilbert (resp. de représentations unitaires continues sur $\mathcal{H}_t$)

Si b est un 1-cocycle continu à valeurs dans π alors, pour tout $t \in T$, il existe un 1-cocycle continu b_t, à valeurs dans π_t, tel que

$$b(g) = \int_T^{\oplus} b_t(g) d\mu(t) \qquad \text{pour tout } g \in G.$$

De plus, l'application $G \times T \to \mathcal{H} : (g,t) \to b_t(g)$ est mesurable.

On note $\mathrm{L}^2_c(G;\mathcal{H})$ l'espace des fonctions de G dans $\mathcal{H}$ de carré intégrable et à support compact. Guichardet a caractérisé l'espace $\overline{\mathrm{B}^1}(G;\pi)$ de la façon suivante (voir [24], § 5, théorème 2).

Proposition 2.5 *Soit $b \in \mathrm{Z}^1(G;\pi)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $b \in \overline{\mathrm{B}^1}(G;\pi)$

(ii) pour toute fonction $\psi \in \mathrm{L}^2_c(G;\mathcal{H})$ telle que

$$\int_G \left(\pi(g)^{-1}\psi(g) - \psi(g)\right) dg = 0$$

on a

$$\int_G \langle b(g), \psi(g)\rangle \, dg = 0$$

où $\langle \xi, \eta \rangle$ désigne le produit hilbertien des vecteurs $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Guichardet obtient alors la proposition suivante dont on reproduit la preuve ([24], § 5, Proposition 4).

Proposition 2.6 (Guichardet) *Soient*

$$\mathcal{H} = \int_T^{\oplus} \mathcal{H}_t d\mu(t) \quad et \quad \pi = \int_T^{\oplus} \pi_t d\mu(t)$$

comme dans le lemme 2.4.

Si $Z^1(G; \mathcal{H}_t) = \overline{B^1}(G; \mathcal{H}_t)$ *pour tout* $t \in T$ *alors* $Z^1(G; \mathcal{H}) = \overline{B^1}(G; \mathcal{H})$.

Preuve. Soit $b \in Z^1(G; \mathcal{H})$. Pour appliquer la proposition 2.5, considérons une fonction $\psi \in L^2_c(G; \mathcal{H})$ telle que

$$\int_G \left(\pi(g)^{-1}\psi(g) - \psi(g)\right) dg = 0.$$

On note K le support (compact) de ψ. On a

$$L^2(K; \mathcal{H}) \simeq \int_T^{\oplus} L^2(K; \mathcal{H}_t) d\mu(t),$$

et ψ s'écrit

$$\psi = \int_T^{\oplus} \psi_t d\mu(t)$$

où $\psi_t \in L^2(K; \mathcal{H}_t)$ pour tout $t \in T$ et l'application

$$G \times T \to \mathcal{H} : (g, t) \to \psi_t(g)$$

est mesurable (voir [25], Appendix I, Lemme 1 ou [9], § 7, lemme).

On a alors

$$\int_G \int_T^{\oplus} \left(\pi_t(g)^{-1}\psi_t(g) - \psi_t(g)\right) d\mu(t)\, dg = \int_G \left(\pi(g)^{-1}\psi(g) - \psi(g)\right) dg = 0$$

et par Fubini,

$$\int_G \left(\pi_t(g)^{-1}\psi_t(g) - \psi_t(g)\right) dg = 0 \qquad \text{pour presque tout } t \in T.$$

Comme par hypothèse $b_t \in \overline{B^1}(G; \mathcal{H}_t)$ pour presque tout $t \in T$, on a

$$\int_G \langle b_t(g), \psi_t(g) \rangle\, dg = 0 \qquad \text{pour presque tout } t \in T$$

et de nouveau grâce à Fubini,

$$\int_G \langle b(g), \psi(g) \rangle\, dg = \int_G \int_T^{\oplus} \langle b_t(g), \psi_t(g) \rangle d\mu(t)\, dg = 0.$$

La proposition 2.5 implique alors que $b \in \overline{B^1}(G; \mathcal{H})$. □

2.3 Cohomologie et propriété (T)

2.3.1 Caractérisation cohomologique de la propriété (T)

Soit π une représentation d'un groupe G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous avons vu que l'annulation du premier espace de cohomologie de π à valeurs dans $\mathcal{H}$ était équivalente à l'existence de point fixe pour les actions par isométries affines qui admettent π comme partie linéaire.

La propriété (T) de Kazhdan possède une caractérisation en termes de points fixes pour les actions par isométries affines *i.e.* d'annulation du premier groupe de cohomologie (voir [15], chapitre 4, Théorème 7).

Théorème 2.7
Soit G un groupe localement compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) G possède la propriété (T) ;

(ii) pour toute représentation unitaire π de G, l'espace $\mathrm{H}^1(G;\pi)$ est réduit à $\{0\}$;

(iii) pour toute représentation unitaire π de G, tout cocycle à coefficients dans π est borné en tant que fonction sur G ;

(iv) toute action par isométrie affine de G sur un espace de Hilbert possède un point fixe (on dit que G possède la propriété (FH) de Serre).

L'implication (ii) $\Rightarrow$(i) résulte du théorème 2.3. En effet, une représentation π sans vecteur invariant non nul pour laquelle $\mathrm{H}^1(G;\pi) = \{0\}$ vérifie aussi $\mathrm{B}^1(G;\pi) = \overline{\mathrm{B}^1}(G;\pi) = \mathrm{Z}^1(G;\pi)$ et ne peut donc contenir faiblement 1_G.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (iv) est due à Delorme [16]. On en trouvera une preuve basée sur la construction d'exponentielle d'espace de Hilbert dans [15], chapitre 4.

L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) résulte de la proposition 2.2 et (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est due au fait que tout cocycle borné est trivial *i.e.* toute action affine d'orbite bornée possède un point fixe (voir [15], Chapitre 4, lemme 3).

Lorsque le groupe G n'a pas la propriété (T), on peut formuler le

Problème 6 Peut-on trouver des sous-ensembles intéressants $\mathcal{R}$ de $\widehat{G}$ tels que toute représentation $\pi \in \mathcal{R}$ ait une 1-cohomologie triviale?

Si G est un groupe de Lie réel simple ou un groupe d'automorphismes d'arbre, les représentations unitaires irréductibles avec une 1-cohomologie *non* triviale sont connues (voir Théorème 2.14 et Théorème 2.15).

Pour un réseau dans des (produits de) groupes comme ci-dessus, nous obtenons des résultats d'annulation pour les représentations de dimension finie (Théorème 2.16) ou de rigidité (Théorème 3.6).

2.3.2 Un théorème de Vershik et Karpushev

Comme la propriété (T) est équivalente à l'isolation de la représentation triviale dans le dual unitaire du groupe, pour un groupe qui n'a pas la propriéte (T), on peut poser le

Problème 7 Caractériser directement l'existence d'une représentation unitaire avec une 1-cohomologie non triviale en terme de topologie de Fell dans un voisinage de la représentation triviale.

Vershik and Karpushev (voir [50], Theorem 2) ont montré que si $\mathrm{H}^1(G, \pi) \neq 0$ pour une représentation irréductible π, alors π est *infinitésimalement petite, i.e.* «inséparable» de la représentation triviale. Ce résultat avait été conjecturé par Guichardet dans [26] et un résulat partiel fut obtenu par Delorme dans [16].

Suivant des notes non publiées de B. Bekka, nous en donnons une preuve qui reprend l'essentiel des idées de Vershik et Karpushev et qui comble une lacune de l'article original.

De plus, cette preuve montre que les arguments s'étendent aux cas des représentations unitaires factorielles.

Définition 13 Le *support* d'une représentation π est l'ensemble

$$\operatorname{supp} \pi = \{\sigma \in \widehat{G} \mid \sigma \text{ est faiblement contenue dans } \pi\}.$$

Le *cortex* $\mathrm{Cor}(G)$ du groupe localement compact G est le sous-ensemble de $\widehat{G}$ formé des représentations π pour lesquelles il existe une suite (généralisée) π_n dans $\widehat{G}$ telle que $\lim \pi_n = 1_G$ et $\lim \pi_n = \pi$.

Théorème 2.8 (Vershik et Karpushev)
Soit π une représentation unitaire factorielle d'un groupe localement compact séparable G. Si $\mathrm{H}^1(G; \pi) \neq 0$ alors

$$\operatorname{supp} \pi \subseteq \mathrm{Cor}(G)$$

Remarque 3 (Décomposition de Choquet) Soient E un espace localement convexe séparé et métrisable et K une partie convexe et compacte de E. On note $\mathrm{ex}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K, qui est un G_δ de K. Pour tout $x \in K$ il existe une mesure de probabilité μ sur K, concentrée sur $\mathrm{ex}(K)$, telle que

$$x = \int_{\mathrm{ex}(K)} y \, d\mu(y)$$

au sens de la topologie $*$-faible *i.e.*

$$f(x) = \int_{\mathrm{ex}(K)} f(y) \, d\mu(y)$$

pour toute forme linéaire continue f sur E (voir [27]). Une telle décomposition est appelée *décomposition de Choquet* du point x.

Lemme 2.9 *Soit K un compact convexe dans un espace métrisable. Soient $\varphi \in \operatorname{ex} K$ un point extrémal de K et φ_t une suite d'éléments de K telle que $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$. Pour chaque t, on se donne*

$$\varphi_t = \int_{\operatorname{ex} K} \eta \, d\mu_t(\eta)$$

une décomposition de Choquet du point φ_t où μ_t est une mesure de probabilité concentrée sur $\operatorname{ex} K$. Alors, pour tout voisinage $\mathcal{W}$ de φ dans K, on a

$$\lim_{t\to 0} \mu_t\left(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K\right) = 1.$$

Preuve. Comme l'ensemble $M(K)$ des mesures de probabilité sur K est compact pour la topologie faible, il existe une sous-suite μ_{t_k} de μ_t qui converge faiblement sur K vers une mesure $\overline{\mu}$. Comme $\lim_{t\to 0} \varphi_t = \varphi$, on peut écrire

$$\varphi = \int_{\operatorname{ex} K} \eta \, d\overline{\mu}(\eta).$$

D'autre part, φ est un point extremal de K donc $\overline{\mu}$ coïncide avec la mesure de Dirac δ_φ au point φ. En conséquence, la suite (μ_t) admet un unique point adhérent δ_φ et donc $\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W}) = 1$ pour tout voisinage $\mathcal{W}$ contenant φ. Comme le support de μ_t est contenu dans $\operatorname{ex} K$, on a

$$\lim_{t\to 0} \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} K) = 1$$

comme annoncé. □

Preuve du théorème 2.8. Pour un groupe localement compact G, on note $E_0(G)$ l'ensemble des fonctions sur G continues de type positif φ telles que $\varphi(e) \leq 1$, $E(G)$ l'ensemble des états *i.e.* des fonctions continues de type positif sur G telles que $\varphi(e) = 1$ et $P(G) = \operatorname{ex}(E_0(G))\backslash\{0\}$ l'ensemble des états purs de G. On a

$$P(G) \subset E(G) \subset E_0(G) \subset \mathrm{L}^\infty(G).$$

Soit $\widetilde{\mathcal{V}}$ un voisinage de 1_G dans $\widehat{G}$. On note $\mathcal{V}$ le voisinage de la fonction 1 dans $P(G)$ qui est l'image inverse de $\widetilde{\mathcal{V}}$ par l'application

$$\theta : P(G) \mapsto \widehat{G}$$

qui associe à un état pur la représentation irréductible correspondante. On note $\mathcal{W}$ le voisinage de la fonction 1 dans $E_0(G)$ tel que $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$.

Soit b un 1-cocycle continu et non trivial pour la représentation π. La fonction ψ définie par

$$\psi(g) = -\|b(g)\|^2$$

pour tout $g \in G$, est réelle, conditionnellement de type positif, normalisée (*i.e.* $\psi(e) = 0$) et symétrique (*i.e.* $\psi(g) = \psi(g^{-1})$).

Pour tout $t > 0$ et $g \in G$, on pose $\varphi_t(g) = e^{t\psi(g)}$. Les fonctions φ_t définies comme cela sont de type positif (Théorème de Schoenberg). De plus,

$$\varphi_t \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi_t - 1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \psi$$

uniformément sur les compacts de G.

Comme $E_0(G)$ est convexe et compact pour la topologie faible dans $\mathrm{L}^\infty(G)$, il existe pour tout $t > 0$ une mesure de probabilité μ_t sur $E_0(G)$, dont le support est concentré sur $P(G)$ et telle que

$$\varphi_t = \int_{P(G)} \eta \, d\mu_t(\eta)$$

au sens faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$ *i.e.*

$$\langle \varphi_t, f \rangle = \int_{P(G)} \langle \eta, f \rangle \, d\mu_t(\eta)$$

pour tout $f \in \mathrm{L}^1(G)$ (voir [18], § 13.6.8).

On pose

$$\varphi_t^{\mathcal{W}} = \frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})} \int_{\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta)$$

au sens $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et

$$\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \displaystyle\int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \eta \, d\mu_t(\eta) & \text{si } \mu_t(\mathcal{W}) \neq 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au lemme qui précède, on a

$$\mu_t(\mathcal{W}) = \mu_t(\mathcal{W} \cap \operatorname{ex} E_0(G)) \xrightarrow[t\to 0]{} 1.$$

Comme $\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} \in E_0(G)$ et que $E_0(G)$ est compact pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, il existe (quitte à passer à une sous-suite) un élément $\varphi_0 \in E_0(G)$ tel que

$$\lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} = \varphi_0$$

pour la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

On en déduit:

(1) $\varphi_0 \not\equiv 1$.

Sinon, la mesure de probabilité σ qui donne une décomposition de Choquet de φ_0 serait la mesure de Dirac en 1 et vérifierait

$$\sigma = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1 - \mu_t(\mathcal{W})} \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} d\mu_t.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1=\sigma(\mathcal{W}) &= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{1}{1-\mu_t(\mathcal{W})}\int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} d\mu_t\Big)(\mathcal{W}) \\ &= \lim_{t\to 0}\Big(\frac{1}{1-\mu_t(\mathcal{W})}\int_{(E_0(G)\setminus\mathcal{W})\cap\mathcal{W}} d\mu_t\Big)(\mathcal{W}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ uniformément sur les compacts.

Comme $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ et la fonction constante 1 appartiennent à $E(G)$ et que sur $E(G)$ les topologies $*$-faible et de la convergence uniforme sur les compacts coïncident ([18], § 13.5.2), il suffit de montrer que $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_t^{\mathcal{W}} = 1$ pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Soit $f \in \mathrm{L}^1(G)$,

$$\langle \varphi_t, f\rangle = \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}} \langle \eta, f\rangle \, d\mu_t(\eta) + \int_{\mathcal{W}} \langle \eta, f\rangle \, d\mu_t(\eta).$$

Grâce au lemme, d'une part

$$\mu_t(\mathcal{W}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \mu_t(E_0(G)\setminus\mathcal{W}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et d'autre part

$$\lim_{t\to 0}\langle \varphi_t, f\rangle = \langle 1, f\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\langle \varphi_t^{\mathcal{W}}, f\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})}\Big(\langle \varphi_t, f\rangle - \int_{E_0(G)\setminus\mathcal{W}}\langle \eta, f\rangle\, d\mu_t(\eta)\Big) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\mu_t(\mathcal{W})}\langle \varphi_t, f\rangle = \langle 1, f\rangle. \end{aligned}$$

(3) Si on pose $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W})$ alors il existe $t_0 > 0$ tel que $\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)_{t_0>t>0}$ est borné.

Pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_t - 1}{t} &= \frac{(1-\lambda_t)\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} + \lambda_t\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} \\ &= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \frac{(1-\lambda_t)\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} - (1-\lambda_t)\varphi_t^{\mathcal{W}}}{t} \\ &= \frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t} + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)\left(\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} - \varphi_t^{\mathcal{W}}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)_{t_0>t>0}$ n'est pas borné. Alors, quitte à extraire une suite que l'on indice toujours par t, on peut supposer que $\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$. Choisissons alors un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ dans G tel que

$$\mathrm{Re}(\varphi_0(g) - 1) < 0 \qquad \text{pour tout } g \in \mathcal{U}$$

(c'est possible grâce à (1)), et une fonction $f \in L^1(G)$, non nulle, positive et telle que $\operatorname{supp} f \subseteq \mathcal{U}$. D'une part, l'équation $(*)$ donne

$$\langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\rangle = \langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\rangle + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)\langle \mathrm{Re}\left(\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} - {\varphi_t}^{\mathcal{W}}\right), f\rangle.$$

D'autre part,

$$\lim_{t\to 0}\langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\rangle = \langle \mathrm{Re}(\psi), f\rangle,$$
$$\lim_{t\to 0}\langle \mathrm{Re}\left(\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} - {\varphi_t}^{\mathcal{W}}\right), f\rangle = \langle \mathrm{Re}(\varphi_0 - 1), f\rangle < 0$$

et

$$\langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t^{\mathcal{W}} - 1}{t}\right), f\rangle \leq 0.$$

Donc, si $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = +\infty$ alors

$$\lim_{t\to 0}\langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\rangle = +\infty,$$

ce qui contredit

$$\lim_{t\to 0}\langle \mathrm{Re}\left(\frac{\varphi_t - 1}{t}\right), f\rangle = \langle \mathrm{Re}(\psi), f\rangle.$$

On peut donc supposer, quitte à passer à une sous-suite, que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right) = \lambda,$$

avec $\lambda \geq 0$ car $\lambda_t = \mu_t(\mathcal{W}) \leq 1$.

(4) Les fonctions de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ appartiennent à l'adhérence pour la topologie uniforme sur les compacts de l'enveloppe convexe de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

En effet, pour tout $t > 0$, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit, par définition, comme une limite pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ de combinaisons linéaires convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap \overline{P(G)}$, où $\overline{P(G)}$ désigne l'adhérence de $P(G)$ pour la topologie $*$-faible. Comme $\mathcal{W} \cap \overline{P(G)} \subseteq \overline{\mathcal{W} \cap P(G)}$ et que sur $E(G)$ les topologies uniformes sur les compacts et $\sigma(L^\infty, L^1)$ coïncident, la fonction $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ s'écrit aussi comme une limite pour la topologie uniforme sur les compacts de combinaisons linéaires convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$.

(5) Soit $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ le triple GNS associé à la fonction conditionnellement de type positif ψ où π_ψ est une représentation orthogonale de G dans l'espace de Hilbert (réel) $\mathcal{H}_\psi$ et b_ψ est un 1-cocycle à coefficients dans $\mathcal{H}_\psi$ tel que $b_\psi(G)$ soit total dans $\mathcal{H}_\psi$ et

$$\psi(g) = -\frac{1}{2}\|b_\psi(g)\|^2 \qquad \text{pour tout } g \in G.$$

Remarquons que π_ψ est une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$. Ceci sera utilisé en (8).

Pour rappel, si V désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : G \mapsto \mathbb{C}$ de support fini et telles que $\sum_{x\in G} f(x) = 0$ alors $\mathcal{H}_\psi$ est l'espace de Hilbert obtenu en séparant et complétant V pour la forme bilinéaire

$$\langle f, h\rangle = \sum_{x,y\in G} f(x)\overline{h(y)}\psi(y^{-1}x).$$

Soit $g \in G$, on note $\mu_g = \delta_g - \delta_e = b_\psi(g) \in \mathcal{H}_\psi$. On a

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\psi(x)\mu_g, \mu_g\rangle &= \langle \pi_\psi(x)b_\psi(g), b_\psi(g)\rangle \\
&= \langle b_\psi(xg) - b_\psi(x), b_\psi(g)\rangle \\
&= \langle \delta_{xg} - \delta_x, \delta_g - \delta_e\rangle \\
&= \langle \delta_{g^{-1}xg} - \delta_{g^{-1}x}, \delta_e\rangle - \langle \delta_{xg} - \delta_x, \delta_e\rangle \\
&= \psi(g^{-1}xg) - \psi(g^{-1}x) - \psi(xg) + \psi(x) \\
&= \lim_{t\to 0}\Big(\varphi_t(g^{-1}xg) - \varphi_t(g^{-1}x) - \varphi_t(xg) + \varphi_t(x)\Big)
\end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant un ensemble compact de G. En utilisant l'égalité $(*)$ de (3), on trouve

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\psi(x)\mu_g, \mu_g\rangle = \lim_{t\to 0}\Bigg\{ &\frac{1}{t}\left[\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\right] \\
&+ \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)\Bigg[\Big(\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(xg) + \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(x)\Big) \\
&- \Big(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}xg) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(g^{-1}x) - \varphi_t^{\mathcal{W}}(xg) + \varphi_t^{\mathcal{W}}(x)\Big)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}$$

uniformément pour x parcourant un ensemble compact de G.

Si ϕ est une fonction de type positif sur G, on note $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \xi_\phi)$ le triple GNS associé à ϕ où π_ϕ est une représentation unitaire d'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\phi$ et ξ_ϕ est un vecteur totalisateur pour π_ϕ tel que $\phi(g) = \langle \pi_\phi(g)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle$.

Pour tout $t > 0$, on note $(\mathcal{H}_t, \pi_t, \xi_t)$ (resp. $(\widetilde{\mathcal{H}_t}, \widetilde{\pi_t}, \widetilde{\xi_t})$) le triple GNS associé à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ (resp. $\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}$). Soient

$$\eta_t^g = \frac{1}{\sqrt{t}}(\pi_t(g)\xi_t - \xi_t), \qquad \alpha_t^g = \widetilde{\pi_t}(g)\widetilde{\xi_t} - \widetilde{\xi_t} \qquad \text{et} \qquad \beta_t^g = \pi_t(g)\xi_t - \xi_t,$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\psi(.)\mu_g, \mu_g\rangle = \lim_{t\to 0}\Bigg\{&\langle \pi_t(.)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle \\
&+ \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)\left(\langle \widetilde{\pi_t}(.)\alpha_t^g, \alpha_t^g\rangle - \langle \pi_t(.)\beta_t^g, \beta_t^g\rangle\right)\Bigg\} \qquad (**)
\end{aligned}$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

(6) Soit $(\mathcal{H}_0, \pi_0, \xi_0)$ le triple GNS associé à la fonction de type positif φ_0.

Comme

$$\varphi_0 = \lim_{t\to 0} \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}} = \lim_{t\to 0} \langle \widetilde{\pi}_t(.)\widetilde{\xi}_t, \widetilde{\xi}_t\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, si on pose $\alpha_0^g = \pi_0(g)\xi_0 - \xi_0$, on a

$$\langle \pi_0(.)\alpha_0^g, \alpha_0^g\rangle = \lim_{t\to 0} \langle \widetilde{\pi}_t(.)\alpha_t^g, \alpha_t^g\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

D'après (2), on a aussi,

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t{}^{\mathcal{W}} = \lim_{t\to 0} \langle \pi_t(.)\xi_t, \xi_t\rangle = 1$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, et donc

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(.)\beta_t^g, \beta_t^g\rangle = 0$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$.

Pour tout $g \in G$, on peut passer à la limite (pour une suite extraite) dans $(**)$ et supposer que

$$\lim_{t\to 0} \langle \pi_t(.)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle$$

existe pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$. On note cette limite φ^g et on obtient

$$\langle \pi_\psi(.)\mu_g, \mu_g\rangle = \varphi^g + \lambda \langle \pi_0(x)\alpha_0^g, \alpha_0^g\rangle \qquad (***)$$

(7) Il existe $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$.

Supposons le contraire, alors d'une part

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(x)\mu_g, \mu_g\rangle\|_\infty &= \sup_{x\in G} |\langle \pi_\psi(x)\mu_g, \mu_g\rangle| \\ &= \langle \pi_\psi(e)\mu_g, \mu_g\rangle = -2\psi(g) = 2\|b(g)\|^2, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \|\langle \pi_\psi(x)\mu_g, \mu_g\rangle\|_\infty &= \lambda \langle \pi_0(e)\alpha_0^g, \alpha_0^g\rangle \\ &= \lambda \langle \pi_0(g)\xi_0 - \xi_0, \pi_0(g)\xi_0 - \xi_0\rangle \\ &= 2\lambda (1 - \mathrm{Re}\, \varphi_0(g)) \end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. Comme φ_0 est une fonction de type positif, elle est bornée et l'égalité $\|b(g)\|^2 = \lambda(1 - \mathrm{Re}\,\varphi_0(g))$ implique que b est un cocycle borné sur G, donc un cocycle trivial.

(8) Choisissons $g \in G$ tel que $\varphi^g \not\equiv 0$ et notons $(\mathcal{K}, \rho, \xi)$ le triple GNS associé à φ^g.

Grâce à l'égalité $(***)$, la représentation ρ est équivalente à une sous-représentation de π_ψ. Comme b est un cocycle pour la représentation π et que $\psi = -\|b\|^2$, la représentation π_ψ est elle-même équivalente à une sous-représentation de $\pi \oplus \overline{\pi}$ où $\overline{\pi}$ désigne la représentation conjuguée de π (voir [16], remarque V.3). Il en résulte que ρ possède une sous-représentation σ qui est équivalente à une sous-représentation de π.

(9) Les fonctions de types positifs $\langle \pi_t(.)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle$ sont uniformément bornées pout $t > 0$ *i.e.* $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|\langle \pi_t(.)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle\|_\infty$ est fini.

En effet, écrivons $(**)$ au point $x = e$,

$$\begin{aligned}\|b_\psi\|^2 &= \langle \pi_\psi(e)\mu_g, \mu_g\rangle \\ &= \lim_{t\to 0}\left\{\langle \pi_t(e)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle + \left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right)\left(\langle \widetilde{\pi_t}(e)\alpha_t^g, \alpha_t^g\rangle - \langle \pi_t(e)\beta_t^g, \beta_t^g\rangle\right)\right\}.\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\langle \alpha_t^g, \alpha_t^g\rangle - \langle \beta_t^g, \beta_t^g\rangle &= 2\left(1 - \mathrm{Re}\langle \widetilde{\pi_t}(g)\widetilde{\xi_t}, \widetilde{\xi_t}\rangle\right) - 2(1 - \mathrm{Re}\langle \pi_t(g)\xi_t, \xi_t\rangle) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(\varphi_t^{\mathcal{W}}(g) - \widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(g)\right),\end{aligned}$$

et que

$$\left(\frac{1-\lambda_t}{t}\right), \qquad \left|\varphi_t^{\mathcal{W}}(g)\right| \qquad \text{et} \qquad \left|\widetilde{\varphi_t}^{\mathcal{W}}(g)\right|$$

sont uniformément bornés en t, on a le résultat annoncé.

(10) Comme

$$\varphi^g = \lim_{t\to 0}\langle \pi_t(.)\eta_t^g, \eta_t^g\rangle$$

pour la topologie $\sigma(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^1)$, la fonction de type positif φ^g est limite pour la topologie $*$-faible de fonctions de type positif uniformément bornées (d'après (9)) associées aux représentations π_t. Grâce à ([19], lemma 1.5), il existe une suite θ_t de fonctions de type positif associées aux représentations π_t telle que

$$\varphi^g = \lim_{t\to 0}\theta_t$$

uniformément sur les compacts de G.

D'autre part, π_t est la représentation GNS associée à la fonction de type positif $\varphi_t^{\mathcal{W}}$ qui, d'après (4), est limite uniforme sur les compacts de combinaisons linéaires convexes d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Donc, les fonctions de type positif associées à π_t sont limites uniformes sur les compacts de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{W} \cap P(G)$. Finalement, φ^g elle-même est limite uniforme sur les compacts de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap P(G)$.

Comme ρ est la représentation GNS associée à φ^g, le support topologique de ρ est contenu dans $\overline{\widetilde{\mathcal{V}}}$, l'adhérence pour la topologie de Fell du voisinage $\widetilde{\mathcal{V}}$. Enfin, la représentation σ qui apparaît en (8) est une sous-représentation de ρ et donc, $\operatorname{supp}\sigma \subseteq \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}$.

(11) Comme la représentation σ est équivalente à une sous-représentation de π et que π est une représentation factorielle de G, σ et π sont quasiéquivalentes (voir [18], proposition 5.3.5) et $\operatorname{supp}\sigma = \operatorname{supp}\pi$. La conclusion de (10) implique que $\operatorname{supp}\pi \subseteq \overline{\widetilde{\mathcal{V}}}$.

Ce raisonnement est valable pour tout voisinage $\widetilde{\mathcal{V}}$ de 1_G, donc

$$\operatorname{supp}\pi \subseteq \operatorname{Cor}(G).$$

□

2.3.3 Résultats d'annulation

Le lemme suivant, qui sera fréquemment utilisé par la suite, est dû à Guichardet [24]. La preuve que nous en donnons est plus «géometrique» que la preuve originale de Guichardet.

Lemme 2.10 *Soit N un sous-groupe distingué de G et π une représentation unitaire de G telle que la restriction $\pi|_N$ de π à N ne possède pas de vecteurs invariants non nuls. Si $b \in \mathrm{Z}^1(G,\pi)$ est tel que $b|_N \in \mathrm{B}^1(N,\pi|_N)$ alors $b \in \mathrm{B}^1(G,\pi)$.*

Preuve. Nous avons vu qu'à la représentation π et au cocycle b correspondent une action par isométries affines que nous notons α. Comme $b|_N \in \mathrm{B}^1(N,\pi|_N)$, l'action α possède (au moins) un point fixe par N, nous allons montrer que ce point est unique et fixé par le groupe G tout entier.

Notons $\mathcal{H}$ l'espace de π et $\mathcal{H}^{\alpha(N)}$ le sous-espace affine des points fixes pour $\alpha(N)$. Soit $\xi,\eta \in \mathcal{H}^{\alpha(N)}$, pour tout $n \in N$, on a

$$\pi(n)(\xi-\eta) = \alpha(n)\xi - \alpha(n)\eta = \xi - \eta.$$

Donc $\xi - \eta$ est un vecteur N-invariant pour π et $\xi = \eta$.

Le sous-espace affine $\mathcal{H}^{\alpha(N)}$ est donc réduit à un point. Comme N est normal dans G, $\mathcal{H}^{\alpha(N)}$ est stable par $\alpha(G)$ et l'unique point de $\mathcal{H}^{\alpha(N)}$ est donc un point fixe par G pour l'action α. □

Corollaire 2.11 *Si $\pi = 1_{G_1} \otimes \pi_2$ où $\pi_2 \in \widehat{G_2}$ et π_2 ne contient pas de vecteurs invariants, alors*

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \pi_2) \simeq \mathrm{H}^1(G_2;\pi_2).$$

Preuve. La restriction à G_2 des cocycles à coefficients dans $1_{G_1} \otimes \pi_2$ définit une application surjective de $\mathrm{Z}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \pi_2)$ dans $\mathrm{Z}^1(G_2; \pi_2)$ qui transforme les cobords en cobords. En effet, si $b_2 \in \mathrm{Z}^1(G_2; \pi_2)$ alors $b_2 = b|_{G_2}$ où $b \in \mathrm{Z}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \pi_2)$ est défini par $b(g_1, g_2) = b_2(g_2)$ pour tout $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$. Grâce au lemme 2.10, l'application correspondante de $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \pi_2)$ dans $\mathrm{H}^1(G_2; \pi_2)$ est injective. □

Les paires de Gelfand

Dans cette section, nous sommes amenés à considérer des groupes G vérifiant l'hypothèse

(Gel) G est localement compact, séparable, unimodulaire et possède un sous-groupe compact K tel que l'algèbre de convolution $\mathrm{L}^1(K\backslash G/K)$ des fonctions intégrables sur G et bi-K-invariantes est commutative. On dit alors que (G, K) est une *paire de Gelfand.*

Des exemples de groupes vérifiant ces hypothèses sont les groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini pour lesquels le sous-groupe K est un sous-groupe compact maximal et les groupes d'automorphismes d'arbres pour lesquels le sous-groupe K est le fixateur d'un sommet de l'arbre (voir [22] Chapter II).

Définition 14 Pour une paire de Gelfand (G, K), une représentation π de G est dite de classe I si la restriction $\pi|_K$ de π à K possède des vecteurs invariants non nuls. On note $\widehat{G}_K$ le sous-ensemble de $\widehat{G}$ constitué des représentations irréductibles de classe I.

Remarque 4 Si $\widehat{G}_K$ désigne l'ensemble des représentations unitaires de G qui sont de classe I, alors $\widehat{G}_K$, qui est appelé le dual sphérique de G, est un voisinage ouvert de 1_G dans $\widehat{G}$. En effet, soit π_i une suite (généralisée) de représentations irréductibles de G telle que $\lim \pi_i = 1_G$, alors $\lim (\pi_i|_K) = 1_K$ et, comme le groupe compact K a la propriété (T), les restrictions de π_i à K contiennent 1_K *i.e.* les représentations π_i sont de classe I.

La proposition suivante est due à Delorme [16], nous en reproduisons la preuve.

Proposition 2.12 *Soit G un groupe vérifiant l'hypothèse* **(Gel)***. Si π est une représentation unitaire irréductible de G non-triviale et de classe I, alors tout 1-cocycle de G à coefficient dans π est un cobord i.e.* $\mathrm{H}^1(G; \pi) = 0$.

Remarque 5 Ce résultat peut aussi se déduire du théorème 2.8. En effet, supposons qu'il existe une représentation unitaire irréductible et de classe I possédant une 1-cohomologie non nulle. Le théorème de Vershik et Karpushev implique alors que $\widehat{G}_K$ (qui est ouvert dans $\widehat{G}$) n'est pas de Hausdorff. Or, l'ensemble $\widehat{G}_K$ s'identifie topologiquement au spectre de l'algèbre de Banach commutative $\mathrm{L}^1(K\backslash G/K)$ ([16], § V.B).

Comme le spectre d'une algèbre de Banach commutative est de Hausdorff, ceci mène à une contradiction.

Preuve de la proposition 2.12. On note $\mathcal{H}^K$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé des vecteurs invariants par K. Comme π est irréductible et de classe I, $\mathcal{H}^K$ est de dimension un. On note $P_K = \int_K \pi(k)\, dk$ le projecteur orthogonal sur $\mathcal{H}^K$ où dk désigne la mesure de Haar sur K normalisée pour que le volume de K soit un.

Pour une fonction f continue et à support compact sur G, on note

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)\, dg.$$

Si f appartient à l'algèbre (commutative pour la convolution) $C_c(K\backslash G/K)$ des fonctions continues sur G, à support compact et bi-K-invariantes alors

$$\pi(f) : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^K \qquad i.e. \qquad \pi(f) = P_K\pi(f).$$

Soit b un cocycle de G à coefficient dans π. La restriction $b|_K$ de b à K est un cocycle du groupe compact K. C'est donc un cobord pour K et il existe un vecteur ξ dans l'espace $\mathcal{H}$ de π tel que $b(k) = \delta\xi(k) = \pi(k)\xi - \xi$ pour tout $k \in K$. En remplacant b par $b - \delta\xi$ on peut supposer que b est nul sur K.

Soit

$$B : C_c(K\backslash G/K) \mapsto \mathcal{H} : f \mapsto B(f) = \int_G f(g)b(g)\, dg.$$

Pour tout $f, h \in C_c(K\backslash G/K)$, on a alors

$$\begin{aligned} P_K B(f) &= \int_K \pi(k) \int_G f(g)b(g)\, dg\, dk \\ &= \int_K \int_G f(g)\pi(k)b(g)\, dg\, dk \\ &= \int_K \int_G f(g)b(kg)\, dg\, dk \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_K B(f * h) &= P_K \int_G f * h(g)b(g)\, dg \\ &= P_K \int_G \int_G f(x)h(x^{-1}g)b(g)\, dx\, dg \\ &= P_K \int_G \int_G f(x)h(g)b(xg)\, dx\, dg \\ &= P_K \int_G h(g) \int_G f(x)b(x)\, dx\, dg \\ &\qquad + P_K \int_G f(x)\pi(x) \int_G h(g)b(g)\, dg\, dx \\ &= P_K \int_G h(g)B(f)\, dg + P_K \int_G f(x)\pi(x)B(h)\, dx \\ &= \left(\int_G h(g)\, dg\right) P_K B(f) + P_K\pi(f)B(h). \end{aligned}$$

Si $\xi_K \in \mathcal{H}^K$ est tel que $\|\xi_K\| = 1$ alors $P_K(\eta) = \langle \eta, \xi_K \rangle \xi_K$. On a alors

$$P_K(\pi(f)B(h)) = \chi(f)P_K B(h)$$

où $\chi(f) = \langle \pi(f)\xi_K, \xi_K \rangle$. Donc,

$$P_K B(f * h) = I(h)P_K B(f) + \chi(f)P_K B(h)$$

où $I(h) = \int_G h(g)\, dg$. Comme $f * h = h * f$, on a également

$$P_K B(f * h) = I(f)P_K B(h) + \chi(h)P_K B(f).$$

De plus, la représentation π n'est pas triviale, donc il existe au moins une fonction $f \in C_c(K\backslash G/K)$ telle que $\pi(f)\xi_K \neq \xi_K$ *i.e.* $\chi(f) \neq I(f)$. Pour cette fonction f, on a

$$P_K B(h) = \frac{I(h) - \chi(h)}{I(f) - \chi(f)} P_K B(f)$$

pour tout $h \in C_c(K\backslash G/K)$.

On pose $\eta = (I(f) - \chi(f))^{-1} P_K B(f)$ et $b' = b + \delta\eta \in \mathrm{Z}^1(G; \pi)$. Comme $\eta \in \mathcal{H}^K$, b' est nul sur K. Comme ci-dessus, on définit

$$B' : C_c(K\backslash G/K) \to \mathcal{H} : f \to B'(f) = \int_G f(g)b'(g)\, dg.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
P_K B'(h) &= P_K B(h) + P_K \left(\int_G h(g)(\pi(g)\eta - \eta)\, dg \right) \\
&= (I(h) - \chi(h))\eta + P_K(\pi(h)\eta - I(h)\eta)) \\
&= (I(h) - \chi(h))\eta + (\chi(h) - I(h))\eta = 0.
\end{aligned}$$

Pour $h \in C_c(G)$, on note ${}^K h^K$ la fonction bi-K-invariante définie par

$${}^K h^K(g) = \int_K \int_K h(kgk')\, dk\, dk'.$$

Comme $b'(gk) = b'(g)$ et $b'(kg) = \pi(k)b'(g)$ pour tout $g \in G$ et $k \in K$, on a

$$\begin{aligned}
P_K B'(h) &= \int_K \int_G h(g)\pi(k)b'(g)\, dg\, dk \\
&= \int_K \int_G h(g)b'(kg)\, dg\, dk \\
&= \int_K \int_G h(k^{-1}g)b'(g)\, dg\, dk \\
&= \int_G \int_K \int_K h(kg)b'(gk'^{-1})\, dk\, dk'\, dg \\
&= \int_G \int_K \int_K h(kgk')b'(g)\, dk\, dk'\, dg \\
&= P_K B'({}^K h^K) = 0
\end{aligned}$$

pour tout $h \in C_c(G)$. Comme

$$P_K\left(\int_G h(g)\pi(k)b'(g)\,dg\right) = 0$$

pour tout $h \in C_c(G)$, on a $P_K b' = 0$ *i.e.* l'image de b' est orthogonale à $\mathcal{H}^K$.

Le sous-espace fermé $\mathcal{W}$ de $\mathcal{H}$ engendré par l'image de b' est donc propre et invariant par π. L'irréductibilité de π implique que $\mathcal{W} = \{0\}$. En particulier, $b' = 0$ et $b = -\delta\eta$ est un cobord, ce qui termine la démonstration □

Lorsque G est un produit non trivial de groupes vérifiant l'hypothèse **(Gel)**, les représentations de G qui admettent une 1-cohomologie non triviale sont très particulières. En effet, dans cette situation, pour que la cohomologie d'une représentation π soit non triviale, il faut nécessairement que π factorise par un des facteurs du groupe G. Plus précisément, on a la

Proposition 2.13 (Delorme) *Pour $i = 1$ et 2, soit (G_i, K_i) une paire de Gelfand. Soit π une représentation unitaire irréductible du produit direct $G_1 \times G_2$ qui s'écrit $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ (produit tensoriel des représentations) avec $\pi_i \in \widehat{G}_i$ pour $i = 1, 2$.*

Si π_1 et π_2 ne sont pas triviales alors

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \pi_1 \otimes \pi_2) = 0.$$

Preuve. On distingue deux cas

1^er cas: La représentation π_1 est de classe I.

Grâce à la proposition 2.12, on a $\mathrm{H}^1(G_1; \pi_1) = 0$ *i.e.* $\mathrm{H}^1(G_1; (\pi_1 \otimes \pi_2)|_{G_1}) = 0$. Comme G_1 est un sous groupe distingué de $G_1 \times G_2$ et que π_1 et donc $\pi_1 \otimes \pi_2$ n'admet pas de vecteur invariant par G_1, le lemme 2.10 implique le résultat annoncé.

2^e cas: La représentation π_1 n'est pas de classe I *i.e.* la représentation $\pi_1|_{K_1}$ ne contient pas la représentation triviale 1_{K_1} de K_1.

Dans ce cas, d'une part la représentation $(\pi_1 \otimes \pi_2)|_{K_1}$ ne contient pas 1_{K_1}, et d'autre part, le groupe compact K_1 possède la propriété (T) et donc

$$\mathrm{H}^1(K_1; (\pi_1 \otimes \pi_2)|_{K_1}) = 0.$$

Le lemme 2.10 donne alors

$$\mathrm{H}^1(K_1 \times G_2; (\pi_1 \otimes \pi_2)|_{K_1 \times G_2}) = 0.$$

Si $b \in \mathrm{Z}^1(G_1 \times G_2; \pi_1 \otimes \pi_2)$, alors $b|_{K_1 \times G_2}$ est un cobord et en particulier $b|_{G_2}$ est un cobord. Comme $\pi_2 \simeq (\pi_1 \otimes \pi_2)|_{G_2}$ ne contient pas 1_{G_2}, on termine en appliquant à nouveau le lemme 2.10. □

Remarque 6 Lorsque, par exemple, $\pi_1 = 1_{G_1}$ et π_2 est non triviale, le corollaire 2.11 donne alors

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \pi_2) \simeq \mathrm{H}^1(G_2; \pi_2).$$

Les groupes de Lie réels simples

Soit G un groupe de Lie réel simple connexe. Si G est de rang déployé supérieur à 2 alors il a la propriété (T) (voir [15], chapitre 2). C'est également le cas si G admet $\mathfrak{sp}(n,1)$ comme algèbre de Lie ou si G est le groupe exceptionnel $F_{4(-20)}$ (voir [15], chapitre 9). Dans cette situation, on a vu que toute représentation unitaire de G admet une 1-cohomologie triviale (Théorème 2.7). Pour les autres cas, Delorme [16] obtient le

Théorème 2.14 (Delorme)
Si G un groupe de Lie réel simple connexe d'algèbre de Lie

(i) $\mathfrak{so}(2,1) \simeq \mathfrak{su}(1,1)$ *ou* $\mathfrak{su}(n,1)$, $n \geq 2$, *il existe exactement deux représentations unitaires irréductibles, conjuguées l'une de l'autre, ayant une 1-cohomologie non triviale.*

(ii) $\mathfrak{so}(n,1)$, $n \geq 3$, *il existe exactement une représentation unitaire irréductible, ayant une 1-cohomologie non triviale.*

De plus, la dimension du H^1 *de ces représentations est égale à un.*

Le groupe d'automorphismes d'un arbre

Lorsque $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_q)$, le groupe d'automorphismes de l'arbre homogène de degré q, à l'aide de la classification de Ol'shanskii des représentations unitaires irréductibles de $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_q)$ [38], on obtient un résultat similaire.

Théorème 2.15
Il existe exactement une représentation unitaire irréductible de $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_q)$ *ayant une 1-cohomologie non triviale. C'est une représentation spéciale pour la classification de Ol'shanski, appelée représentation de Steinberg et notée St.*

De plus, $\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}_q; St) = 1$.

Ce résultat est bien connu des experts, O. Amann en donne une preuve limpide qui utilise des formules de multiplicités pour la décomposition de $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)$ pour différents réseaux Γ dans le groupe $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_q)$ ([1], Proposition 5.0.4).

Comme l'espace homogène associé à un groupe algébrique p-adique de rang un est un arbre (semi-)homogène, le théorème 2.15 s'applique aussi dans cette situation.

2.3.4 Cohomologie des représentations de dimension finie

Le théorème qui suit apparait dans [34] pour le cas des produits de groupes simples. La preuve plus élémentaire donnée ici est celle de [6]. Elle utilise les théorèmes 2.8 et 1.1.

Théorème 2.16
Soient G un groupe localement compact et N un sous-groupe de G fermé, distingué et possédant la propriété (T) de Kazhdan. Soit H un sous-groupe fermé de G qui se projette de façon dense dans G/N et tel que le quotient G/H admette une mesure G-invariante finie (comme pour le Théorème 1.1). Supposons de plus que le quotient G/N est minimalement presque périodique. Alors, pour toute représentation unitaire de dimension finie π de H, nous avons

$$\mathrm{H}^1(H,\pi) = 0.$$

Preuve. La représentation de dimension finie π se décompose en une somme finie

$$\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$$

de sous-représentations irréductibles π_i. Dans cette situation,

$$\mathrm{H}^1(H,\pi) \simeq \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{H}^1(H,\pi_i),$$

et nous pouvons supposer que π est irréductible.

Traitons d'abord le cas où π est la représentation triviale 1_H. Dans ce cas, $\mathrm{H}^1(H,\pi)$ est le groupe des homomorphismes continus de H dans le groupe additif des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soit $\overline{[H,H]}$ l'adhérence du groupe des commutateurs de H. Le théorème 1.1 implique que le groupe dual du groupe abelien $H/\overline{[H,H]}$ est discret, puisque le caractère trivial est isolé. Donc, par dualité, $H/\overline{[H,H]}$ est compact. Ceci implique $\mathrm{H}^1(H,1_H) = 0$.

A présent, considérons une représentation $\pi \neq 1_H$ et, raisonnant par l'absurde, supposons que

$$\mathrm{H}^1(H,\pi) \neq 0.$$

Grâce au théorème 2.8 de Vershik et Karpushev il existe une suite généralisée π_n dans $\widehat{H}$ telle que

$$\pi_n \to \pi \qquad \text{et} \qquad \pi_n \to 1_H.$$

Grâce au théorème 1.1, on peut supposer que $\pi_n = (\sigma_n \circ p)|_H$ pour des représentations irréductibles σ_n of G/N.

Soit $\bar{\pi}$ la représentation conjuguée de π. Par continuité du produit tensoriel (voir [21], Theorem 1),

$$\pi_n \otimes \bar{\pi} \to \pi \otimes \bar{\pi}.$$

Donc, par continuité de l'induction

$$(\sigma_n \circ p) \otimes \mathrm{Ind}_H^G \bar{\pi} = \mathrm{Ind}_H^G(\pi_n \otimes \bar{\pi}) \to \mathrm{Ind}_H^G(\pi \otimes \bar{\pi}).$$

En restreignant à N, cela implique que $(\mathrm{Ind}_H^G \bar{\pi})|_N$ contient faiblement la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(\pi \otimes \bar{\pi})|_N$.

Puisque π est de dimension finie, il est bien connu que $\pi \otimes \bar{\pi}$ possède un vecteur invariant. Dès lors, comme H est de covolume fini, $(\mathrm{Ind}_H^G \bar{\pi})|_N$ contient faiblement 1_N. Nous en concluons que $\mathrm{Ind}_H^G \bar{\pi}$ possède des vecteurs N-invariants. Mais alors, le lemme 1.9 implique que π se factorise en une représentation σ de G/N, et donc, $\pi = (\sigma \circ p)|_H$. Comme G/N est minimalement presque périodique, cela donne $\sigma = 1_{G/N}$ et donc $\pi = 1_H$, une contradiction. □

Chapitre 3

Rigidité

3.1 Rigidité locale

On verra dans cette section pourquoi la cohomologie triviale est liée à l'absence de déformation.

3.1.1 Point fixe

Soient G un groupe localement compact et M une variété (de dimension finie) de classe C^1. On note $\mathrm{Diff}^1(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^1 de M. Pour $\phi \in \mathrm{Diff}^1(M)$, et $x \in M$, on note $d_x\phi$ la différentielle de ϕ au point x et $d\phi$ l'homéomorphisme du fibré tangent TM définit par

$$d\phi : TM \mapsto TM : \xi \in T_xM \mapsto d_x\phi\xi \in T_{\phi(x)}M.$$

On munit $\mathrm{Diff}^1(M)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des homéomorphismes de TM correspondants. Plus précisement, soient (U, φ) une carte de M centrée en $x = \varphi^{-1}(0)$, un compact $K \subset U$ de M et ε un réel positif. On définit $\mathcal{N}((U,\varphi), K, \varepsilon)$ comme l'ensemble des fonctions $f \in C^1(M, M)$ telles que

(i) $f(K) \subset U$,

(ii) $\sup_{y \in K} \|\varphi \circ f(y) - \varphi(y)\| < \varepsilon$,

(iii) $\sup_{y \in K} \left\| \frac{\partial}{\partial x^j}(\varphi^i \circ f \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(y)} - \delta_{ij} \right\| < \varepsilon$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Les intersections finies de ces ensembles $\mathcal{N}((U,\varphi), K, \varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinages de l'application identique Id_M dans $C^1(M, M)$. C'est la topologie induite par cette dernière qu'on considère sur le groupe $\mathrm{Diff}^1(M)$.

Définition 15 Une *action de classe* C^1 de G sur M est un morphisme continu

$$\alpha : G \mapsto \mathrm{Diff}^1(M).$$

L'ensemble $A(G,M)$ des actions de G sur M est alors muni de la topologie compacte-ouverte. Pour une action α, on considère un compact K de G et un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathrm{Diff}^1(M)$ tels que $\alpha(K) \subset \mathcal{U}$. Soit

$$\mathcal{N}(K,\mathcal{U};\alpha) = \{\beta \in A(G,M) \mid \beta(K) \subset \mathcal{U}\}.$$

Ces ensembles $\mathcal{N}(K,\mathcal{U};\alpha)$ définissent une base de voisinages de α dans $A(G,M)$.

Définition 16 Une *déformation locale* d'une action α est la donnée, pour un $\varepsilon > 0$, d'un chemin continu

$$(-\varepsilon,+\varepsilon) \mapsto A(G,M) : t \mapsto \alpha_t$$

tel que $\alpha_0 = \alpha$.

Définition 17 On appelle *point fixe* pour l'action α de G sur M un point $p \in M$ tel que $\alpha(g)p = p$ pour tout $g \in G$. Un point fixe p est dit *stable* (ou *persistant*) si, pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de p, il existe un voisinage $\mathcal{N}$ de α tel que toute action $\beta \in \mathcal{N}$ possède un point fixe dans $\mathcal{U}$. En particulier, si une action α possède un point fixe persistant alors, pour ε suffisamment petit, une déformation locale de l'action α possède également un point fixe.

Si l'action α possède un point fixe p, la différentielle $d_p\alpha$ de l'action α au point p définit une représentation linéaire (mais non nécessairement unitaire) du groupe G sur l'espace tangent T_pM :

$$d_p\alpha : G \mapsto T_pM \simeq \mathbb{R}^n : g \mapsto (d_p\alpha(g)).$$

Pour une représentation linéaire π du groupe G sur un espace vectoriel de dimension finie E *i.e.* un morphisme continu $\pi : G \mapsto \mathrm{GL}(E)$, on définit l'ensemble des cocycles $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ et l'ensemble des cobords $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ comme dans le cas des représentations unitaires. De la même manière, on écrit $\mathrm{H}^1(G;\pi) = \mathrm{Z}^1(G;\pi)/\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ pour le premier espace de cohomologie de G à valeurs dans E.

Le théorème ci-dessous, dû a Stowe [49], donne un lien entre l'annulation de la 1-cohomologie et la persistance de point fixe.

Théorème 3.1 (Stowe)
Soit G un groupe localement compact. On suppose que G est ou bien un groupe discret de type fini ou bien un groupe de Lie connexe. Soit α une action de G sur une variété M possédant un point fixe p.

Si $\mathrm{H}^1(G;d_p\alpha) = 0$ alors le point p est persistant.

3.1.2 Rigidité de Weil

Soient G un groupe localement compact et H un groupe de Lie connexe. On munit l'ensemble $\mathrm{Hom}(G,H)$ des morphismes continus de G dans H de la topologie compacte-ouverte.

Définition 18 Le groupe H agit sur $\mathrm{Hom}(G,H)$ par conjugaison *i.e.* pour π dans $\mathrm{Hom}(G,H)$ et $h \in H$ on définit $\pi^h \in \mathrm{Hom}(G,H)$ par $\pi^h(g) = h.\pi(g).h^{-1}$.

Le morphisme π est dit *localement rigide* si l'orbite π^H de π sous l'action de H est ouverte.

Définition 19 Une *déformation locale* de π dans $\mathrm{Hom}(G,H)$ est la donnée, pour $\varepsilon > 0$, d'un chemin continu

$$(-\varepsilon,+\varepsilon) \mapsto \mathrm{Hom}(G,M) : t \mapsto \pi_t$$

tel que $\pi_0 = \pi$.

Pour un chemin continu $(-\varepsilon,+\varepsilon) \mapsto H : t \mapsto h_t$ et un homomorphisme $\pi \in \mathrm{Hom}(G,M)$, on définit une déformation locale $\pi_t = \pi^{h_t}$ de π par conjugaison *i.e.* $\pi_t(g) = h_t.\pi(g).h_t^{-1}$ pour tout $g \in G$.

Pour un morphisme localement rigide π, toute déformation π_t de π est, pour ε suffisamment petit, une déformation par conjugaison.

Le lien avec la persistance d'un point fixe est le suivant : soit σ un morphisme dans un voisinage de $\pi \in \mathrm{Hom}(G,H)$ alors
σ appartient à l'orbite π^Hde π

$\Longleftrightarrow$ il existe un élément $h \in H$ tel que $\sigma(g) = h.\pi(g).h^{-1}$ pour tout $g \in G$

$\Longleftrightarrow$ il existe un élément $h \in H$ tel que $h = \sigma(g)^{-1}.h.\pi(g)$ pour tout $g \in G$

$\Longleftrightarrow$ il existe un élément h de H qui est un point fixe pour l'action α de G sur la variété H définie par $\alpha(g) : H \mapsto H : h \mapsto \sigma(g^{-1}).h.\pi(g)$.

En terme de déformation locale, ceci exprime le fait que π_t est une déformation par conjugaison du morphisme π si et seulement si, pour tout $t \in (-\varepsilon,+\varepsilon)$, l'élément h_t de H est un point fixe pour l'action α_t de G définie par $\alpha_t(g) : H \mapsto H : h \mapsto \pi_t(g)^{-1}.h.\pi(g)$

L'action α_t décrite ci-dessus est une déformation locale de l'action α_0 donnée par $\alpha_0(g) : H \mapsto H : h \mapsto \pi(g)^{-1}\, h\, \pi(g)$.

Pour tout $x \in H$, on note $\mathrm{Int}(x)$ l'automorphisme de H défini par $\mathrm{Int}(x) : H \mapsto H : h \mapsto x^{-1}\, h\, x$. L'application Int est alors un morphisme différentiable de H dans le groupe des automorphismes de H *i.e.* une action de classe C^∞ du groupe H sur lui-même.

Cette action admet l'élément neutre e du groupe H comme point fixe. On note $\mathrm{Ad}(x) = d_e\,\mathrm{Int}(x)$ la différentielle de $\mathrm{Int}(x)$ au point e. L'application Ad est alors une représentation linéaire (appelée représentation adjointe) de H sur $T_eH \simeq \mathfrak{h}$ l'espace tangent à H au point e.

L'action α_0 définie ci-dessus n'est autre que $\mathrm{Int} \circ \pi$ et admet donc l'élément neutre e de H comme point fixe. Donc, avec les notations ci-dessus, on a

$$d_e\alpha_0 = \mathrm{Ad} \circ \pi.$$

En appliquant le théorème de Stowe, on obtient le théorème de rigidité de Weil (voir, par exemple, [42], Theorem 6.7).

Théorème 3.2 (Weil)
Soit G un groupe discret de type fini et H un groupe de Lie. Si $\pi \in \mathrm{Hom}(G, H)$ est un morphisme tel que $\mathrm{H}^1(G; \mathrm{Ad} \circ \pi) = \{0\}$ alors π est localement rigide.

3.2 Représentations de dimension finie

Nous observons ici que des résultats de rigidité de Wang et Rapinchuk pour les représentations de dimension finie s'étendent aux groupes que nous considérons.

Soit Γ un groupe discret de type fini.

On note $\mathrm{Rep}_n(\Gamma)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations linéaires de dimension n *i.e.*

$$\mathrm{Rep}_n(\Gamma) = \mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n)/GL_n$$

où GL_n agit par conjugaison. Plus précisément, si ρ est une représentation de Γ de dimension n (*i.e.* un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, GL_n)$) et g un élément de GL_n, l'action de g sur ρ est donnée par

$$\rho^g(\gamma) = g\rho(\gamma)g^{-1} \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

On note $\widehat{\Gamma}_n$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires de dimension n *i.e.*

$$\widehat{\Gamma}_n = \mathrm{Hom}(\Gamma, U_n)/U_n$$

où U_n agit par conjugaison.

On note $\mathcal{FD}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires de dimension finie. On a

$$\mathcal{FD} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Gamma}_n.$$

Le résultat qui suit est connu pour les groupes de Kazhdan (voir, par exemple [52]). La preuve est directement inspirée de celle de Wang.

Proposition 3.3 *Si Γ est un groupe discret possédant la propriété (T, $\mathcal{FD}$) (par exemple, un groupe vérifiant les hypothèses du corollaire 1.2) alors*

(i) toute représentation unitaire de dimension finie est un point isolé dans $\mathcal{FD}$;

(ii) pour toute dimension $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\widehat{\Gamma}_n$ est fini.

Preuve. Soit π une représentation unitaire de dimension finie de Γ. Supposons qu'on puisse approcher π par une suite $\{\rho_n\}$ de représentations unitaires de dimension finie de Γ.

Par continuité du produit tensoriel [21], on a alors

$$\rho_n \otimes \overline{\pi} \to \pi \otimes \overline{\pi}$$

où $\overline{\pi}$ désigne la représentation conjuguée de π.

Comme π est de dimension finie, $\pi \otimes \overline{\pi}$ possède un vecteur invariant non-trivial et

$$\rho_n \otimes \overline{\pi} \to 1_\Gamma.$$

Comme 1_Γ est isolée dans $\mathcal{FD}$, à partir d'un certain indice n, la représentation $\rho_n \otimes \overline{\pi}$ contient la représentation triviale 1_Γ. Ceci implique que la représentation π est équivalente à ρ_n et achève la preuve de (i).

Pour (ii), remarquons d'une part que, comme le groupe Γ est discret, son dual $\widehat{\Gamma}$ est quasicompact ([18], proposition 3.1.8). D'autre part, $\cup_{1\leq i\leq n}\widehat{\Gamma}_i$ est fermé dans $\widehat{\Gamma}$ ([18], proposition 3.6.3) et nous venons de montrer que $\mathcal{FD}$ est discret. L'ensemble $\cup_{1\leq i\leq n}\widehat{\Gamma}_i$ est donc quasicompact et discret, donc fini. □

La résultat suivant, que Rapinchuk a montré pour les groupes de Kazhdan, est une conséquence du théorème 3.2 ([43], Theorem 1). Rapinchuk donne également une version améliorée de ce résultat pour les groupes qui possèdent une propriété (T) relative (voir [43], proposition 1).

Théorème 3.4
Si $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π de dimension finie alors toute représentation unitaire de dimension finie $\rho : \Gamma \mapsto U_n$ est localement rigide i.e. pour tout n, chaque $\rho \in \widehat{\Gamma}_n$ est un point isolé dans $\mathrm{Rep}_n(\Gamma)$.

Preuve. Soit $\rho : \Gamma \mapsto U_n$ une représentation unitaire de dimension n. Grâce au théorème de rigidité de Weil, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^1(\Gamma;\, \mathrm{Ad} \circ \rho) = 0$.

Comme ρ est unitaire, le groupe $\rho(\Gamma)$ est contenu dans le groupe unitaire U_n. Il est donc relativement compact et l'espace $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ de la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$ admet donc un produit scalaire $\mathrm{Ad}\,\rho(\Gamma)$-invariant. En d'autres mots, la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$ est « unitarisable ».

Comme $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π de dimension finie, on a le résultat annoncé. □

Pour illustrer le fait qu'on ne peut pas étendre ce résultat à toute les représentations linéaires de dimension finie d'un groupe de Kazhdan, Rapinchuk donne l'exemple d'une déformation continue non triviale d'une représentation $\rho : \Gamma \mapsto \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ du groupe de Kazhdan $\Gamma = \mathbb{Z}^m \rtimes SL_n(\mathbb{Z})$.

3.3 Rigidité infinitésimale

Soit M une variété riemannienne compacte et Γ un groupe discret de type fini. On note m_y la métrique riemannienne au point $y \in M$ et ν la mesure associée. On considère une action α de Γ sur M qui est

(i) différentiable *i.e.* $\alpha(\gamma)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ sur M pour tout $\gamma \in \Gamma$,

(ii) isométrique *i.e.* pour tout $x \in M$, $\xi \in T_x M$ et $\gamma \in \Gamma$, on a

$$m_{\alpha(x)}\left(d\alpha(\gamma)_x \xi, d\alpha(\gamma)_x \xi\right) = m_x\left(\xi, \xi\right)$$

(iii) ergodique *i.e.* il n'existe pas de fonction Γ-invariante dans

$$\mathrm{L}_0^2(M) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(M) \mid \int_M f d\nu = 0 \right\}$$

Si on note $\mathrm{Vect}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M, l'action α de Γ sur M définit par différentiation une représentation unitaire de Γ sur l'espace pré-hilbertien $\mathrm{Vect}(M)$.

Dans [34], Lubotzky et Zimmer introduisent la notion de rigidité infinitésimale.

Définition 20 L'action α de Γ sur M est *infinitésimalement rigide* si et seulement si

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; \mathrm{Vect}(M)) = 0$$

où Γ agit sur $\mathrm{Vect}(M)$ par la différentielle $d\alpha$ de α.

Au regard de la section précédente, on peut interpréter cette définition de la manière suivante. On regarde l'ensemble $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de classe C^∞ comme un groupe de Lie de dimension infinie pour lequel l'espace tangent à l'élément neutre (*i.e.* l'algèbre de Lie) est

$$T_{id}\,\mathrm{Diff}(M) \simeq \mathrm{Vect}(M).$$

Supposons qu'on puisse démontrer un énoncé analogue au résultat de Stowe-Weil dans le cas de la dimension infinie, une action infinitésimalement rigide serait alors aussi localement rigide, ce qui peut justifier la définition.

Dans [34], Lubotzky et Zimmer démontrent le

Théorème 3.5
Soit Γ un groupe discret de type fini agissant sur une variété compacte M comme ci-dessus. Supposons en outre que Γ vérifie les hypothèses suivantes:

(i) Γ possède la propriété $(T,\mathcal{FD})$ et

(ii) $\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) = 0$ pour toute représentation unitaire de dimension finie π de Γ.

alors l'action de Γ *sur* M *est infinitésimalement rigide i.e.* $\mathrm{H}^1(\Gamma;\ \mathrm{Vect}(M)) = 0$.

Remarquons que les hypothèses (i) et (ii) du théorème sont vérifiées pour les groupes de Kazhdan et pour des groupes vérifiant les hypothèses des théorèmes 1.1 et 2.16.

3.4 Rigidité cohomologique

3.4.1 Super-rigidité des représentations

Nous allons nous intéresser à présent aux phénomènes qui peuvent avoir lieu lorsque le premier espace de cohomologie d'une représentation unitaire n'est pas trivial. Dans ce cas, nous obtenons un résultat de rigidité du type «super-rigidité des représentations unitaires». Plus précisément, considérons un réseau cocompact et irréductible Γ dans un produit $G_1 \times G_2$ de groupes localement compacts G_1 et G_2. Nous allons montrer que, sous des hypothèses raisonnables concernant G_1 et G_2, une représentation unitaire irréductible de Γ qui possède une 1-cohomologie non triviale s'étend en une représentation du groupe ambiant ou contient faiblement 1_Γ.

Rappelons que, pour une représentation π d'un groupe localement compact G d'espace $\mathcal{H}$, on note $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ (resp. $\mathrm{B}^1(G;\pi)$) l'espace vectoriel des cocycles (resp. des cobords) continus de G à coefficients dans $\mathcal{H}$. Le premier espace de cohomologie de G à coefficients dans π est toujours noté $\mathrm{H}^1(G;\pi) = \mathrm{Z}^1(G;\pi)/\mathrm{B}^1(G;\pi)$.

Comme au chapitre 2, on munit $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-ensembles compacts de G. Guichardet a montré que, lorsque π ne contient pas de vecteurs invariants, $\mathrm{B}^1(G;\pi)$ est fermé dans $\mathrm{Z}^1(G;\pi)$ si et seulement si π ne contient pas faiblement la représentation triviale 1_G (voir Théorème 2.3).

Soit Γ un réseau irréductible dans le produit direct $G_1 \times G_2$ de deux groupes localement compacts G_1 et G_2.

Si σ_i est une représentation irréductible de G_i, la représentation $(\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$ est irréductible et σ_i est déterminée (à équivalence unitaire près) par $(\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$. Nous avons montré (lemme 1.9) qu'une représentation π dans $\widehat{\Gamma}$ est de la forme, disons, $(\sigma_1 \circ p_1)|_\Gamma$ pour $\sigma_1 \in \widehat{G_1}$ si et seulement si l'induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2}\pi$ possède des vecteurs G_2-invariants non triviaux.

Dans cette situation, $\mathrm{H}^1(G_1;\sigma_1)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi)$.

Donc, il y a au moins deux possibilités pour qu'une représentation π de Γ ait un premier groupe de cohomologie non trivial: d'abord lorsque π contient faiblement mais pas fortement 1_Γ de sorte que $\mathrm{B}^1(\Gamma;\pi)$ n'est pas fermé dans $\mathrm{Z}^1(\Gamma;\pi)$, et ensuite lorsque π est de la forme $(\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$ avec σ_i une représentation dans $\widehat{G_i}$ satisfaisant à $\mathrm{H}^1(G_i\,;\sigma_i) \neq 0$.

Nous allons montrer que, pour π irréductible et sous des hypothèses naturelles, ce sont en fait les deux seules possibilités.

Plus précisement, pour $i = 1$ et 2, supposons que G_i est un groupe localement compact, séparable et unimodulaire possédant un sous-groupe compact K_i tel que l'algèbre de convolution $\mathrm{L}^1(K_i \backslash G_i / K_i)$, des fonctions intégrables et K_i-biinvariantes sur G_i, est commutative (voir condition **(Gel)** page 35). Supposons de plus que, les groupes G_i sont de type I. Sous ces hypothèses, nous montrons le

Théorème 3.6
Soient G_1 et G_2 satisfaisant les hypothèses précédentes et Γ un réseau irréductible et cocompact dans $G_1 \times G_2$. Si π est une représentation irréductible non triviale de Γ telle que

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \neq 0$$

alors (au moins) une des deux assertions suivantes est vérifiée

(i) π contient faiblement 1_Γ, la représentation triviale de dimension un ;

(ii) π se relève en une représentation de G_1 ou G_2 avec une 1-cohomologie non nulle i.e. pour $i = 1$ ou 2, il existe une représentation $\sigma_i \in \widehat{G_i}$ telle que $\mathrm{H}^1(G_i; \sigma_i) \neq 0$ et $\pi = (\sigma_i \circ p_i)|_\Gamma$.

Remarque 7 Nous verrons en 3.4.3 comment, même si les hypothèses **(Gel)** et « de type I» ne sont pas vérifiées, le théorème 3.6 est encore valable pour un réseau cocompact Γ dans un produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes totalement discontinus et engendrés par une partie compacte.

Remarque 8 En fait, lorsque le cas (ii) se produit, la preuve du théorème permet de préciser le lien entre la cohomologie de la représentation π et de la représentation «relevée» de π. Différents cas se présentent :

1. si $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ possède des vecteurs non nuls invariants par G_2 mais pas par G_1, alors

$$\pi = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2})|_\Gamma$$

pour une représentation $\sigma_1 \in \widehat{G}_1$ et

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \simeq \mathrm{H}^1(G_1; \sigma_1) ;$$

2. si $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ possède des vecteurs non nuls invariants par G_1 mais pas par G_2, alors

$$\pi = (1_{G_1} \otimes \sigma_2)|_\Gamma$$

pour une représentation $\sigma_2 \in \widehat{G}_2$ et

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \simeq \mathrm{H}^1(G_2; \sigma_2) ;$$

3. si $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ possède des vecteurs non nuls invariants par G_1 et des vecteurs non nuls invariants par G_2, alors

$$\pi = (1_{G_1} \otimes \sigma_2)|_\Gamma = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2})|_\Gamma$$

pour des représentations $\sigma_1 \in \widehat{G}_1$ et $\sigma_2 \in \widehat{G}_2$. De plus

$$\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi) \simeq \mathrm{H}^1(G_1;\sigma_1) \oplus \mathrm{H}^1(G_2;\sigma_2)\,.$$

Remarque 9 On note λ^0 la restriction de la représentation quasi-régulière de G au sous-espace de $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)$ orthogonal aux fonctions constantes. Comme on le verra dans la preuve, notre résultat pourrait être étendu au cas non uniforme si on peut prouver une forme faible du lemme de Shapiro : Si Γ est un réseau faiblement cocompact dans $G = G_1 \times G_2$, c'est-à-dire si λ^0 ne contient pas faiblement 1_G, alors il existe une injection $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi) \mapsto \mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1\times G_2}\pi)$.

3.4.2 Preuve du théorème 3.6

On remarquera que les conditions **(Gel)** et « de type I » pour les groupes G_i sont utilisées uniquement dans la preuve du lemme qui suit et ne le sont plus dans la suite de la preuve du théorème. De plus, Y. Shalom donne une preuve de ce résultat qui n'utilise pas la condition **(Gel)** [48].

Lemme 3.7 *Soit G_1 et G_2 satisfaisant les hypothèses précédantes et ρ une représentation unitaire quelconque de $G_1 \times G_2$. Si ρ ne possède pas de vecteur invariant non nul et $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2;\rho) \neq 0$ alors, pour $i = 1$ ou 2, la représentation $\rho|_{G_i}$ possède un vecteur invariant non nul.*

Preuve. Soit

$$\rho = \int_T^\oplus \rho_t d\mu(t)$$

une décomposition de ρ en intégrale directe de représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$. Puisque un des G_i est de type I, pour tout $t \in T$ nous pouvons écrire $\rho_t = \rho_t^{(1)} \otimes \rho_t^{(2)}$ où $\rho_t^{(i)}$ appartient à $\widehat{G_i}$ (voir [18], proposition 13.1.8).

Supposons par l'absurde que, pour tout $t \in T$, $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2;\rho_t) = 0$. Alors, la proposition 2.6 donne

$$\mathrm{Z}^1(G_1 \times G_2;\rho) = \overline{\mathrm{B}^1}(G_1 \times G_2;\rho).$$

Puisque $1_{G_1\times G_2}$ n'est pas faiblement contenu dans ρ, on en déduit que $\mathrm{B}^1(G_1\times G_2;\rho)$ est fermé et donc

$$\mathrm{Z}^1(G_1 \times G_2;\rho) = \mathrm{B}^1(G_1 \times G_2;\rho).$$

Ceci contredit le fait que $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2;\rho)$ est non trivial.

Donc, il existe un sous-ensemble S de T avec une mesure non nulle et tel que, pour tout $t \in S$ nous avons $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho_t) \neq 0$. Mais Delorme a montré qu'une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ avec un premier groupe de cohomologie non nul est nécessairement triviale sur un des facteurs G_1 ou G_2 (Proposition 2.13). Ceci implique que, pour $i = 1$ ou 2 il existe un sous-ensemble S_i de mesure non nulle tel que pour $t \in S_i$ la représentation $\rho_t^{(i)}$ est triviale. Donc, la représentation ρ possède des vecteurs G_i-invariants non nuls. □

Remarque 10 Si un des facteurs possède la propriété (T) de Kazhdan, la preuve du lemme devient plus élémentaire. En effet, supposons que G_2 est un groupe de Kazhdan. Pour n'importe quelle représentation ρ de $G_1 \times G_2$, on a alors $\mathrm{H}^1(G_2; \rho|_{G_2}) = 0$. Grâce au lemme 2.10, la seule possibilité pour que $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho) \neq 0$ est que $\rho|_{G_2}$ possède des vecteurs invariants non nuls.

Preuve du Théorème 3.6. Supposons que $\pi \in \widehat{\Gamma}$ ne contient pas faiblement 1_Γ et admet un premier groupe de cohomologie non trivial. Le lemme de Shapiro (voir [41] ou [40]), nous donne

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} \pi) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \neq 0.$$

Notons ρ la représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} \pi$, λ la représentation quasirégulière de G sur $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)$ et λ^0 la restriction de λ à

$$\mathrm{L}^2_0(G/\Gamma) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(G/\Gamma) \mid \int_{G/\Gamma} f = 0 \right\}.$$

Puisque Γ est compact, $1_{G_1 \times G_2}$ n'est pas faiblement contenue dans λ^0 (Proposition 4.8 du chapitre suivant). Comme 1_Γ n'est pas faiblement contenue dans π, ceci implique que $1_{G_1 \times G_2}$ n'est pas faiblement contenue dans ρ (Proposition 4.10 du chapitre suivant).

Le lemme 3.7 implique que, disons, la représentation induite $\rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} \pi$ possède des vecteurs G_1-invariants. Grâce au lemme 1.9, π s'étend en une représentation irréductible σ_2 de G_2. C'est-à-dire $\pi = (1_{G_1} \otimes \sigma_2)\,|_\Gamma$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} \pi &\simeq \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} (1_{G_1} \otimes \sigma_2)\,|_\Gamma \\ &\simeq (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \otimes \lambda \\ &\simeq (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \oplus \left((1_{G_1} \otimes \sigma_2) \otimes \lambda^0 \right) \end{aligned} \tag{1}$$

Notons $\rho_2 = (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \otimes \lambda^0$ le second terme du membre de droite. L'action de G_1 sur G/Γ est ergodique (Lemme 1.10). Ainsi, ρ_2 possède des vecteurs G_1-invariants non nuls.

Grâce au corollaire 2.11, la restriction à G_2 de cocycles à coefficients dans $1_{G_1} \otimes \sigma_2$ définit un isomorphisme entre $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1} \otimes \sigma_2)$ et $\mathrm{H}^1(G_2; \sigma_2)$. Donc, l'équation (1) donne

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho) \simeq \mathrm{H}^1(G_2; \sigma_2) \oplus \mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho_2).$$

Si $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho_2)$ est trivial, nous avons

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \simeq \mathrm{H}^1(G_2; \sigma_2)$$

et ce dernier n'est donc pas nul.

Sinon, le lemme 3.7 implique que ρ_2 possède un vecteur G_2-invariant non nul. En particulier, la représentation induite ρ possède un vecteur G_2-invariant non nul. En utilisant à nouveau le lemme 1.9, nous voyons qu'il existe une représentation irréductible σ_1 de G_1 telle que

$$\pi = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2})\,|_\Gamma.$$

Comme nous l'avons fait pour σ_2, écrivons,

$$\rho \simeq (\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \oplus \left((\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \otimes \lambda^0\right), \tag{2}$$

notons $\rho_1 = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \otimes \lambda^0$ et remarquons que ρ_1 ne possède pas de vecteurs G_2-invariants non triviaux.

Comme $\sigma_1 \neq 1_{G_1}$ et $\sigma_2 \neq 1_{G_2}$, nous comparons (1) et (2) pour voir que $1_{G_1} \otimes \sigma_2$ est une sous-représentation de ρ_1 et $\sigma_1 \otimes 1_{G_2}$ est une sous-représentation de ρ_2. En particulier, nous pouvons écrire

$$\rho_1 = (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \oplus \rho_1' \qquad \text{et} \qquad \rho_2 = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \oplus \rho_2'$$

où ρ_1' et ρ_2' sont des représentations de $G_1 \times G_2$ telles que $\rho_1'|_{G_2}$ et $\rho_2'|_{G_1}$ ne possèdent pas de vecteurs invariants nonnuls. En tenant compte de (1) et (2), ceci montre que

$$\begin{aligned} \rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^{G_1 \times G_2} &= (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \oplus (\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \oplus \rho_2' \\ &= (\sigma_1 \otimes 1_{G_2}) \oplus (1_{G_1} \otimes \sigma_2) \oplus \rho_1'. \end{aligned} \tag{3}$$

Les représentations ρ_1' et ρ_2' sont donc équivalentes et ne possèdent de vecteurs invariants ni par G_1, ni par G_2. Appliquant de nouveau le lemme 3.7, nous avons

$$\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho_1') \simeq \mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho_2') = 0$$

et (3) donne

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) &\simeq \mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \rho) \\ &\simeq \mathrm{H}^1(G_2; \sigma_2) \oplus \mathrm{H}^1(G_1; \sigma_1). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{H}^1(\Gamma;\pi)$ est non trivial, ceci implique qu'au moins un des termes $\mathrm{H}^1(G_i;\sigma_i)$ est non trivial, pour $i=1$ ou 2. □

Remarque 11 Si π est la représentation triviale 1_Γ, alors

$$\rho = \mathrm{L}^2(G/\Gamma) \simeq \lambda^0 \oplus 1_G$$

et, grâce au lemme de Shapiro,

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; 1_\Gamma) \simeq \mathrm{H}^1(G;\lambda^0) \oplus \mathrm{H}^1(G; 1_G).$$

Si $\mathrm{H}^1(G;\lambda^0) \neq 0$ alors le lemme 3.7 implique que, pour $i=1$ ou 2, la restriction $\lambda^0|_{G_i}$ possède des vecteurs invariants mais ceci n'est pas possible car l'action de G_i sur G/Γ est ergodique (lemme 1.10). Nous avons donc $\mathrm{H}^1(G;\lambda^0)=0$ et

$$\mathrm{H}^1(\Gamma; 1_\Gamma) \simeq \mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; 1_{G_1\times G_2}).$$

3.4.3 A propos des exemples

Des exemples intéressants de groupes G_i vérifiant les hypothèses du théorème 3.6 sont les groupes de Lie simples (réels ou p-adiques) de centre fini ainsi que les groupes d'automorphismes d'arbres homogènes. On trouvera des exemples de réseaux cocompacts et irréductibles dans des produits de tels groupes au dernier chapitre de ce travail.

Groupes de Lie

Si $G = G_1 \times G_2$ est un groupe de Lie semi-simple de centre fini et sans facteurs compacts, les assertions (i) et (ii) du théorème ne peuvent avoir lieu simultanément.

En effet, supposons que σ soit une représentation irréductible non triviale de G telle que $\pi = \sigma|_\Gamma$ possède presque des vecteurs Γ-invariants. La continuité de l'induction implique que 1_G est faiblement contenue dans $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \sigma|_\Gamma = \sigma \oplus (\sigma\otimes\lambda^0)$. Donc, 1_G est faiblement contenue dans σ ou dans $(\sigma\otimes\lambda^0)$.

Pour qu'un produit tensoriel $\rho\otimes\sigma$ de deux représentations ρ et σ de G contienne faiblement 1_G, il faut que chacune des représentations ρ et σ possède presque des vecteurs invariants (voir la proposition 4.6 au prochain chapitre). Au moins une des représentations σ ou λ^0 ci-dessus possède donc presque des vecteurs invariants.

Cependant, d'une part Γ est cocompact dans G et 1_G n'est donc pas faiblement contenue dans λ^0 (voir la proposition 4.8 du chapitre suivant).

D'autre part, une représentation irréductible σ d'un groupe de Lie réel connexe semi-simple est *liminaire* ou *CCR i.e.* la représentation de l'algèbre $\mathrm{L}^1(G)$ associée à σ agit par opérateurs compacts ([18], §15.5.6). De plus, pour une représentation liminaire irréductible σ, le point $\{\sigma\}$ est fermé dans $\widehat{G}$ ([19], Lemma 1.11) et σ ne peut donc pas contenir faiblement 1_G. Par suite, une représentation irréductible non triviale ne peut contenir faiblement 1_G.

Groupes totalement discontinus

Les groupes totalement discontinus (*i.e.* qui possèdent un système fondamental de voisinages de l'identité constitué de sous-groupes compacts et ouverts) ne vérifient pas nécessairement les hypothèses **(Gel)** et «de type I» du théorème 3.6. Cependant, grâce à une construction qui nous a été montrée par Marc Burger, les conclusions du théorème 3.6 restent valables lorsque Γ est un réseau cocompact dans un produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes totalement discontinus et engendrés par des parties compactes.

Nous présentons d'abord cette construction.

Nous montrons ensuite comment elle permet de ramener la preuve du théorème 3.6 pour des groupes G_i totalement discontinus au cas où Γ est un réseau cocompact dans le produit de deux sous-groupes fermés et cocompacts dans des groupes d'automorphismes de graphes réguliers.

Enfin, nous montrons pourquoi la validité du lemme 3.7 pour un réseau dans un produit de groupes d'automorphismes d'arbres implique la conclusion du lemme 3.7 pour un réseau dans un produit de sous-groupes de groupes d'automorphismes de graphes réguliers.

Soit G un groupe totalement discontinu, engendré par un compact C et U un sous-groupe compact ouvert de G. On considère alors le graphe $\mathcal{G} = \mathcal{G}(C, U)$ dont l'ensemble des sommets est donné par $\mathrm{Som}(\mathcal{G}) = G/U$ et l'ensemble des arêtes par $\mathrm{Ar}(\mathcal{G}) = \{(xU, yU) \in G/U \times G/U \mid x^{-1}y \in C \cup C^{-1},\ xU \neq yU\}$. Il s'agit du graphe de Schreier de G/U relativement à C. Ce graphe $\mathcal{G}$ est connexe et régulier de degrés $d = |(C \cup C^{-1})U/U|$.

On a un morphisme naturel $m : G \mapsto \mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$ défini par $m(g) \cdot xU = gxU$ pour tout $g, x \in G$. Le noyau de m est donné par

$$\ker m = K_U = \cap_{g \in G} gUg^{-1}.$$

On munit $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$, le groupe des automorphismes de $\mathcal{G}$, de la topologie suivante. Pour $A \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$ et S un sous-ensemble fini de $\mathrm{Som}(\mathcal{G})$, on pose

$$\mathcal{V}_S(A) = \{A' \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{G} \mid A.s = A'.s\ \forall s \in S\}.$$

Les sous-ensembles $\mathcal{V}_S(A)$ de $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$ forment un système fondamental de voisinages de A dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$.

Pour cette topologie, le morphisme m est continu et l'image G_U de G par m est fermée dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$. En effet, considérons un voisinage de l'identité dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$

$$\mathcal{V}_S(I) = \{A \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{G} \mid A.x = x\ \forall s \in S\}.$$

où $S = \{x_1U, \ldots, x_nU\}$ est un ensemble fini de sommets de $\mathcal{G}$. On a alors

$$\mathcal{V}_S(I) \cap m(G) = m\left(\cap_{1 \leq i \leq n} U^{x_i}\right)$$

et $\mathcal{W} = \bigcap_{1\leq i\leq n} U^{x_i}$ est un voisinage compact ouvert de e dans G.

Ceci montre d'une partque l'application m est continue en e, donc partout car m est un morphisme de groupe et d'autre part que les voisinages $\mathcal{V}_S(I) \cap m(G)$ forment un système fondamental de voisinage compact de I dans G_U. Le groupe $G_U = m(G)$ est donc un sous-groupe localement compact du groupe localement compact $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$. Ceci implique que G_U est fermé dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$.

En fait, comme les images par la projection canonique $G \mapsto G/K_U$ des voisinages du type $\bigcap_{1\leq i\leq n} U^{x_i}$ forment un système fondamental de voisinage l'identité dans le groupe localement compact G/K_U, l'isomorphisme $\overline{m} : G/K_U \mapsto G_U$ induit par m est un homéomorphisme. Le morphisme m est donc ouvert et continu.

De plus, comme G_U est transitif sur les sommets de $\mathcal{G}$ et que les stabilisateur de sommets dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$ sont compact, le quotient $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}/G_U$ est compact

Le revêtement universel du graphe $\mathcal{G}$ est l'arbre régulier $\mathcal{T}$ de degré d. A la projection canonique $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{G}$ correspond la suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}) \longrightarrow N \xrightarrow{p} \mathrm{Aut}\,\mathcal{G} \longrightarrow 1$$

où $\pi_1(\mathcal{G})$ est le groupe fondamental de $\mathcal{G}$ et N le normalisateur de $\pi_1(\mathcal{G})$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}$. Le sous-groupe $\widetilde{G} = p^{-1}(G_U)$ de $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}$ est fermé et cocompact. A la suite exacte ci-dessus correspond une nouvelle suite exacte

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{G}) \cap \widetilde{G} \longrightarrow \widetilde{G} \xrightarrow{p} G_U \longrightarrow 1.$$

Soit Γ un réseau cocompact et irréductible dans le produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes totalement discontinus et de génération compacte. Pour $i = 1$ et 2, on choisit un sous-groupe U_i compact et ouvert dans G_i tel que $\Gamma \cap (U_1 \times U_2) = \{e\}$ et C_i une partie compacte qui engendre G_i. On définit les graphes $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}(U_i, C_i)$ et les sous-groupes G_{i,U_i} de $\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}_i$ comme ci-dessus. Soit

$$m = m_1 \times m_2 : G_1 \times G_2 \mapsto G_{1,U_1} \times G_{2,U_2}$$

l'homomorphisme correspondant. On a alors les suite exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \to K_{1,U_1} \times K_{2,U_2} & \longrightarrow & G_1 \times G_2 & \xrightarrow{m} & G_{1,U_1} \times G_{2,U_2} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\uparrow \text{cocompact} & & \Big\uparrow \text{cocompact} & & \\
1 & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{m|_\Gamma} & m(\Gamma) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

La restriction $m|_\Gamma$ est un isomorphisme de groupes. Supposons que la conclusion du théorème 3.6 soit valable pour le réseau $m(\Gamma)$ dans $G_{1,U_1} \times G_{2,U_2}$, et montrons qu'elle est aussi valable pour le réseau Γ dans $G_1 \times G_2$.

Soit $\pi \in \widehat{\Gamma}$ une représentation sans vecteur presque invariant telle que $\mathrm{H}^1(\Gamma; \pi)$ n'est pas nul, on a

$$\mathrm{H}^1(m(\Gamma); \pi \circ m|_{\Gamma}^{-1}) \simeq \mathrm{H}^1(\Gamma; \pi) \neq 0.$$

Notre hypothèse implique alors qu'il existe une représentation, σ_1 de G_{1,U_1} par exemple, telle que $\mathrm{H}^1(G_{1,U_1}; \sigma_1)$ n'est pas nul et

$$\pi \circ (m|_{\Gamma}^{-1}) = (\sigma_1 \otimes 1_{G_2})|_{m(\Gamma)}.$$

Comme $m_1 = m|_{G_1}$ induit une injection de $\mathrm{H}^1(G_{1,U_1}; \sigma_1)$ dans $\mathrm{H}^1(G_1; \sigma_1 \circ m_1)$, la représentation π s'écrit $((\sigma_1 \circ m_1) \otimes 1_{G_2})|_{\Gamma}$, avec $\mathrm{H}^1(G_1; \sigma_1 \circ m_1) \neq 0$.

A présent, on peut donc supposer que Γ est un réseau dans le produit $G_1 \times G_2$ où G_1 et G_2 sont des sous-groupes fermés et cocompacts des groupes d'automorphismes des graphes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$. On a alors la suite exacte

$$\begin{array}{ccccc} 1 \to \pi_1(\mathcal{G}_1) \times \pi_1(\mathcal{G}_2) \to & N_1 \times N_2 & \xrightarrow{p=p_1 \times p_2} & \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_1) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_2) & \to 1 \\ & \uparrow & & \uparrow \scriptstyle{\text{cocompact}} & \\ & \widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2 & \xrightarrow{p=p_1 \times p_2} & G_1 \times G_2 & \end{array}$$

où les arbres $\mathcal{T}_i$ sont les revêtements universels des graphes $\mathcal{G}_i$ et N_i est le normalisateur de $\pi_1(\mathcal{G}_i)$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}_i$.

Comme ci-dessus, on remarquera que les groupes $\widetilde{G}_i$ sont cocompacts dans $\mathrm{Aut}\,\mathcal{T}_i$.

Montrons que le lemme 3.7 est encore valable pour ces groupes G_1 et G_2. Soit σ une représentation de $G_1 \times G_2$ telle que $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \sigma)$ n'est pas nul. Comme la projection p est un morphisme continu et surjectif, elle définit une injection de $\mathrm{H}^1(G_1 \times G_2; \sigma)$ dans $\mathrm{H}^1(\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2; \sigma \circ p)$. Par le lemme de Shapiro, on a alors

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_1) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2); \mathrm{Ind}_{\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2}^{\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_1) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2)}(\sigma \circ p)) \neq 0.$$

Les groupes d'automorphismes d'arbres réguliers vérifient les hypothèses **(Gel)** et «de type I» du lemme 3.7 (voir [22] chapitre II). Donc, la représentation induite

$$\mathrm{Ind}_{\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2}^{\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_1) \times \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2)}(\sigma \circ p)$$

possède un vecteur $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_2)$-invariant non trivial. Par suite, la représentation $(\sigma \circ p)|_{\widetilde{G}_2}$ possède également un vecteur $\widetilde{G}_2$-invariant non trivial. On conclut que σ possède un vecteur invariant par G_2. La conclusion du lemme 3.7 est ainsi valable et on peut recopier à la lettre la preuve du théorème 3.6.

Chapitre 4

Restrictions de représentations

Soit G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G. Si σ est une représentation irréductible de G, on considère la restriction $\sigma|_H$ qui est une représentation de H.

Problème 8 La restriction $\sigma|_H$ est-elle toujours une représentation irréductible de H? Si la réponse est positive, l'application $\widehat{G} \mapsto \widehat{H} : \sigma \mapsto \sigma|_H$ est-elle injective?

Problème 9 Une représentation $\pi \in \widehat{H}$ est-elle faiblement contenue dans la restriction $\sigma|_H$ d'une certaine représentation $\sigma \in \widehat{G}$?

Plus généralement, l'ensemble $\left\{\sigma|_H \mid \sigma \in \widehat{G}\right\}$ est-il dense dans l'ensemble $\mathrm{Rep}(H)$ des représentations unitaires de H?

On verra qu'on peut apporter des réponses à ces questions lorsque le groupe G est un groupe de Lie réel semi-simple sans facteurs compacts et que le sous-groupe H est un réseau dans G.

4.1 Représentations de carré intégrable

Pour un groupe localement compact G, on note λ_G la représentation régulière de G sur $\mathrm{L}^2(G)$. La référence pour cette section est ([18] § 14).

Définition 21 Soit π une représentation de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, on note $u_{\xi,\eta}$ le *coefficient de π associé à ξ et η* défini par

$$u_{\xi,\eta} : G \mapsto \mathbb{C} : g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle.$$

Un coefficient du type $\phi_\xi = u_{\xi,\xi}$ est une *fonction de type positif associée à π*.

Proposition 4.1 *Soit π une représentation de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si G est unimodulaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) π est équivalente à une sous-représentation d'un multiple de λ_G ;

(ii) tout coefficient associé à π est de carré intégrable.

Définition 22 Une représentation π qui vérifie une des conditions de la proposition précédente est dite *de carré intégrable.*

Proposition 4.2 *Si π est une représentation irréductible de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ alors les assertions de la proposition 4.1 sont encore équivalentes aux suivantes :*

(i) π est équivalente à une sous-représentation de λ_G ;

(ii) il existe deux vecteurs $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$, tels que le coefficient associé $u_{\xi,\eta}$ appartienne à $\mathrm{L}^2(G)$;

Pour les représentations qui sont faiblement contenue dans la représentation régulière on a les caractérisations suivantes (voir [18], § 18.3.5).

Proposition 4.3 *Soit π un représentation unitaire du groupe G. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) π est faiblement contenue dans λ_G ;

(ii) toute fonction de type positif associée à π est limite uniforme sur les compacts de fonctions de type positif de carré intégrable ;

(iii) toute fonction de type positif associée à π est limite uniforme sur les compacts de fonctions de type positif à support compact.

Comme $\sigma \otimes \lambda_G \simeq (\dim \sigma)\lambda_G$, on a le

Corollaire 4.4 *Si la représentation π est faiblement contenue dans λ_G, alors, pour toute représentation unitaire σ, la représentation $\pi \otimes \sigma$ est faiblement contenue dans λ_G.*

Lorsque les coefficients associés à une représentation ne sont pas de carré intégrable, on a néanmoins le résultat suivant dû à Moore ([37], Proposition 3.6).

Proposition 4.5 (Moore) *Soit G un groupe de Lie réel simple non compact et de centre fini et π une représentation de G. Si π ne contient pas faiblement la représentation triviale de G alors il existe un entier N tel que la N-ième puissance tensorielle $\pi^{\otimes^N}$ de π est contenue dans un multiple de λ_G.*

Remarque 12 Si G a la propriété (T) de Kazhdan, l'entier N de la proposition est le même pour toutes les représentations π de G (Théorèmes 2.4.2 et 2.5.3 de [13]).

Une conséquence de la proposition 4.5 est la proposition suivante ([5], lemme 4) qui sera fréquemment utilisée par la suite. Nous en reproduisons la preuve ci-après.

Proposition 4.6 *Soit G un groupe de Lie semi-simple sans facteurs compacts et de centre fini. Si σ une représentation de G qui ne contient pas faiblement la représentation triviale 1_G alors, pour toute représentation ρ de G, le produit tensoriel $\sigma \otimes \rho$ ne contient pas faiblement 1_G.*

Lemme 4.7 *Si 1_G est faiblement contenue dans $\sigma \otimes \rho$, alors il existe deux suites $(\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de représentations irréductibles de G tel que*

(i) pour tout $i \in \mathbb{N}$, la représentation σ_i est faiblement contenue dans σ et la représentation ρ_i est faiblement contenue dans ρ ;

(ii) $\lim_i (\sigma_i \otimes \rho_i) = 1_G$.

Preuve. Si 1_G est faiblement contenue dans $\sigma \otimes \rho$, alors la fonction constante 1 est limite uniforme sur les compacts de fonctions de type positif associées à $\sigma \otimes \rho$.

Ces dernières sont limites uniformes sur les compacts de produits de fonctions de type positif associées à σ avec des fonctions de type positif associées à ρ. Or, toute fonction de type positif associée à σ (resp. à ρ) est limite uniforme sur les compacts de fonctions de type positif pures associées à des représentations du support de σ (resp. de ρ).

Donc les fonctions de type positif associées à $\sigma \otimes \rho$ sont limites uniformes sur les compacts de produits de fonctions de type positif associées à des représentations irréductibles faiblement contenues dans σ et de fonctions de type positif associées à des représentations irréductibles faiblement contenues dans ρ.

Finalement, il existe une suite de représentations σ_i (resp. ρ_i) faiblement contenues dans σ (resp. ρ) telle que la fonction constante 1 est limite uniforme sur les compacts de produits de fonctions de type positif associées aux σ_i et aux ρ_i *i.e.* de fonctions de type positif associées a $\sigma_i \otimes \rho_i$. □

Preuve de la proposition 4.6.

On traite d'abord le cas d'un groupe simple G.

Supposons que G a la propriété (T) de Kazhdan. Si 1_G est faiblement contenue dans le produit tensoriel $\sigma \otimes \rho$ alors $\sigma \otimes \rho$ possède un vecteur invariant non nul et les représentations σ et ρ possèdent une sous-représentation de dimension finie. Comme G n'a pas de facteur compact, cela implique que σ et ρ contiennent la représentation triviale.

Supposons que G est localement isomorphe à $SO_o(1,n)$ ou $SU(1,n)$. Soit σ une représentation de G qui ne contient pas faiblement 1_G. Grâce à la proposition 4.5, il existe un entier N tel que la N-ième puissance tensorielle

$$\sigma^{\otimes^N} = \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$$

est contenue dans un multiple de la représentation réguliére λ_G. Donc,

$$(\sigma \otimes \rho)^{\otimes^N} = \sigma^{\otimes^N} \otimes \rho^{\otimes^N}$$

est contenue dans un multiple de

$$\lambda_G \otimes \rho^{\otimes^N}$$

qui est elle-même un multiple de λ_G. Donc, $(\sigma \otimes \rho)^{\otimes^N}$ est faiblement contenue dans λ_G. Si 1_G était faiblement contenue dans $\sigma \otimes \rho$, alors 1_G serait faiblement contenue dans λ_G et ceci contredit le fait que G n'est pas moyennable.

Considérons à présent un groupe de Lie G semi-simple sans facteur compact et de centre fini. Quitte à remplacer G par un revêtement à un nombre fini de feuillets, on peut supposer que G est le produit direct

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n$$

de n groupes simples non compacts $G_1, \ldots, G_n$.

Supposons que 1_G soit faiblement contenue dans $\sigma \otimes \rho$. Grâce au lemme précédent, il existe des suites de représentations

$$\sigma_1^i \in \widehat{G_1}, \qquad \ldots \quad , \qquad \sigma_n^i \in \widehat{G_n}$$

et

$$\rho_1^i \in \widehat{G_1}, \qquad \ldots \quad , \qquad \rho_n^i \in \widehat{G_n}$$

telles que, si on note $\times$ le produit tensoriel « externe » de représentations, alors la représentation $\sigma^i = \sigma_1^i \times \cdots \times \sigma_n^i$ est faiblement contenue dans σ, la représentation $\rho^i = \rho_1^{(i)} \times \cdots \times \rho_n^{(i)}$ est faiblement contenue dans ρ et

$$\lim_i \left(\left(\sigma_1^i \times \cdots \times \sigma_n^i\right) \otimes \left(\rho_1^i \times \cdots \times \rho_n^i\right)\right) = 1_G.$$

Donc,

$$\lim_i \left((\sigma_1^i) \otimes (\rho_1^i) \times \cdots \times (\sigma_n^i) \otimes (\rho_n^i)\right) = 1_G.$$

En restreignant à chaque facteur G_k, on trouve

$$\lim_i \left(\sigma_1^i \otimes \rho_1^i\right) = 1_{G_1}, \qquad \ldots \quad , \qquad \lim_i \left(\sigma_n^i \otimes \rho_n^i\right) = 1_{G_n}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une injection et

$$\left(\sigma_k^{\varphi(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}, \qquad \left(\rho_k^{\varphi(i)}\right)_{i \in \mathbb{N}}$$

les sous-suites extraites correspondantes pour chaque $k = 1, \ldots, n$. On note

$$\sigma_1(\varphi) = \oplus_{i \in \mathbb{N}} \sigma_1^{\varphi(i)}, \qquad \ldots \quad , \qquad \sigma_n(\varphi) = \oplus_{i \in \mathbb{N}} \sigma_n^{\varphi(i)}$$

et

$$\rho_1(\varphi) = \oplus_{i\in\mathbb{N}}\, \rho_1^{\varphi(i)}, \qquad \dots \quad , \qquad \rho_n(\varphi) = \oplus_{i\in\mathbb{N}}\, \rho_n^{\varphi(i)}.$$

Pour chaque $k = 1, \dots, n$ la représentation 1_{G_k} est faiblement contenue dans

$$\oplus_{i\in\mathbb{N}} \left(\sigma_k^{\varphi(i)} \otimes \rho_k^{\varphi(i)}\right)$$

qui est équivalente à une sous-représentation de $\sigma_k(\varphi) \otimes \rho_k(\varphi)$.

Comme chacun des G_k est simple, on en déduit que 1_{G_k} est faiblement contenue dans $\sigma_k(\varphi)$ pour toute sous-suite φ. Donc

$$\lim_i \sigma_1^i = 1_{G_1}, \qquad \dots \quad , \qquad \lim_i \sigma_n^i = 1_{G_n}$$

et

$$\lim_i \sigma^i = \lim_i (\sigma_1^i \times \dots \times \sigma_n^i) = 1_G.$$

Comme σ^i est faiblement contenue dans σ, ceci implique que 1_G est faiblement contenue dans σ, ce qui est une contradiction. □

4.2 Réseaux faiblement cocompacts

Margulis a défini la notion de *réseau faiblement cocompact* (voir [36], Chapter III, section 1). Soit Γ un réseau dans un groupe localement compact G. On note λ la représentation quasirégulière de G dans $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)$. Comme le volume de G/Γ est fini, les fonctions constantes appartiennent à $\mathrm{L}^2(G/\Gamma)$ et forment un sous-espace invariant par G. On note

$$\mathrm{L}_0^2(G/\Gamma) = (\mathbb{C}1_{G/\Gamma})^\perp = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(G/\Gamma) \mid \int_{G/\Gamma} f d\mu = 0 \right\}$$

où μ est la mesure G-invariante finie sur G/Γ et λ_0 la restriction de λ à $\mathrm{L}_0^2(G/\Gamma)$.

Définition 23 Le réseau Γ est dit *faiblement cocompact* dans G si la représentation triviale 1_G de G n'est pas faiblement contenue dans λ_0 *i.e.* $\mathrm{L}_0^2(G/\Gamma)$ ne possède pas presque des vecteurs invariants.

Cette définition est motivée par la

Proposition 4.8 *Un réseau cocompact est faiblement cocompact.*

Ceci est une conséquence des faits suivants. D'une part, lorsque Γ est cocompact dans G, la représentation (encore notée λ) de l'algèbre de convolution $\mathrm{L}^1(G)$ associée à la représentation λ du groupe est *liminaire* ou *CCR i.e.* pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(G)$, l'opérateur $\lambda(f)$ est compact ([23], § 2.2). D'autre part, les représentations liminaires possèdent un spectre discret ([23] § 2.3 ou [19], Theorem 1.8).

La proposition 4.8 peut également être vue comme une conséquence directe du lemme 4.11 ci-dessous. En effet, si Γ est un réseau cocompact dans le groupe G, il existe un compact K de G qui se projette surjectivement sur G/Γ. Pour un tel K, les conditions (ii.1) et (ii.3) du lemme 4.11 sont alors contradictoires.

Une classe importante d'exemples de réseaux faiblement cocompacts est donnée par la proposition suivante qu'on comparera avec ([36], Chapter III, section 1.12, remark 1) et dont on trouvera une preuve dans ([5], lemma 3). Le cas des groupes simples est traité dans ([37], proposition 3.6) et ([7], proposition 4.1).

Proposition 4.9 *Si Γ est un réseau dans un groupe de Lie semi-simple réel G sans facteurs compacts et de centre fini alors Γ est faiblement cocompact.*

Si une représentation π d'un réseau Γ dans un groupe G contient (faiblement) 1_Γ alors la représentation induite $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contient faiblement $\mathrm{Ind}_\Gamma^G 1_\Gamma = \lambda = 1_G \oplus \lambda_0$. En particulier, $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contient faiblement 1_G.

Réciproquement, on a la proposition suivante ([36], chapitre III, proposition 1.11) dont on reproduira la preuve ci-après.

Proposition 4.10 (Margulis) *Soit Γ un réseau faiblement cocompact dans un groupe G et π une représentation de Γ. Si $\mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contient faiblement 1_G alors π contient faiblement 1_Γ.*

Lemme 4.11 *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) le réseau Γ n'est pas faiblement cocompact;

(ii) il existe une suite η_n dans $L^2(G/\Gamma)$ telle que pour tout compact K de G

$$\inf_{n\in\mathcal{N}} \|\eta_n\| > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in K} \frac{\|\lambda(k)\eta_n - \eta_n\|}{\|\eta_n\|} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{k\in K} |\eta_n(k)|^2\, dk = 0, \tag{3}$$

Preuve. Si $L_0^2(G/\Gamma)$ possède presque des vecteurs invariants, alors il existe une suite ξ_n dans $L_0^2(G/\Gamma)$, tel que $\|\xi_n\| = 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in K} \|\lambda(k)\xi_n - \xi_n\| = 0. \tag{$*$}$$

Soit f une fonction sur G continue à support compact, on définit

$$\lambda(f)\xi_n = \int_G f(g)\lambda(g)\xi_n\, dg.$$

Comme dans la preuve du lemme 1.9, on a, pour tout compact K de G,

$$\int_K \|\xi_n(g)\|\,dg \leq \mu_\Gamma(\Gamma \cap K^{-1}K)\,\sqrt{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}\,\|\xi_n\|, \tag{a}$$

$$\|\lambda(f)\xi_n(g)\| \leq (\sup_{y\in\operatorname{supp} f} |f(y)|)\int_{\operatorname{supp} f}\|\xi_n(g)\|\,dg, \tag{b}$$

$$\|\lambda(f)\xi_n - \xi_n\| \leq (\int_G |f(g)|\,dg)\,\sqrt{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}\sup_{g\in\operatorname{supp} f}\|\lambda(g)\xi_n - \xi_n\|, \tag{c}$$

De plus, si V est un voisinage compact de l'élément neutre de G, pour $x \in G$ et $y \in V.x$, on a

$$\|\lambda(f)\xi_n(x) - \lambda(f)\xi_n(y)\| \leq \sup_{g\in C}\left|\Delta(g^{-1})\right|\left|f(xg^{-1}) - f(yg^{-1})\right|\int_C \|\xi_n(g)\|\,dg \tag{d}$$

où Δ désigne la fonction modulaire sur G et C est le compact $x^{-1}(\operatorname{supp} f \cap V^{-1}.\operatorname{supp} f)$.

Alors, quitte à remplacer ξ_n par $\frac{\lambda(f)\xi_n}{\|\lambda(f)\xi_n\|}$ pour une fonction f bien choisie, on peut supposer que $\|\xi_n\| = 1$ et que la suite (ξ_n) est

1. équicontinue sur les compacts : cela est dû aux inégalités (d) et (a), et à la continuité uniforme de f (voir preuve du lemme 1.9) ;
2. uniformément bornée sur les compacts *i.e.* pour chaque compact K, il existe une constante $c(K)$ telle que $\sup_{k\in K}\|\xi_n(k)\|^2 \leq c(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: cela est dû aux inégalités (a) et (b).

En appliquant une version adaptée du théorème d'Ascoli, on trouve qu'il existe une sous-suite de (ξ_n) qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction continue ξ sur G/Γ. L'équation $(*)$ impose $\lambda(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$. La fonction ξ est donc constante et orthogonale aux ξ_n.

On pose $\eta_n = \xi_n - \xi$. D'une part, on a

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in K}\frac{\|\lambda(k)\eta_n - \eta_n\|}{\|\eta_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et

$$\int_K \|\eta_n(k)\|^2 dk \leq \mathrm{vol}(K)\sup_{k\in K}\|\xi_n(k) - \xi(k)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part, comme

$$\|\xi_n - \xi\|^2 = \|\xi_n\|^2 + \|\xi\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle\xi_n,\xi\rangle = \|\xi_n\|^2 + \|\xi\|^2,$$

on a

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\|\eta_n\| \geq 1.$$

Réciproquement, considérons une suite η_n comme dans *(ii)*. On écrit

$$\eta_n = \widetilde{\eta}_n + \Big(\int_{G/\Gamma} \eta_n(\dot{x})\, d\dot{x}\Big)\, 1_{G/\Gamma}$$

où $\widetilde{\eta}_n$ désigne la projection de η_n sur $\mathrm{L}^2_0(G/\Gamma)$. On a

$$\|\eta_n - \widetilde{\eta}_n\| \leq \Big(\int_{G/\Gamma} |\eta_n(\dot{x})|\, d\dot{x}\Big)\ \sqrt{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}$$

et, pour tout compact K de G/Γ,

$$\begin{aligned}\int_{G/\Gamma} |\eta_n(\dot{x})|\, d\dot{x} &\leq \Big(\int_K |\eta_n(\dot{x})|\, d\dot{x}\Big) + \Big(\int_{G/\Gamma - K} |\eta_n(\dot{x})|\, d\dot{x}\Big)\\ &\leq \Big(\int_K |\eta_n(\dot{x})|^2\, d\dot{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{vol}(K)}\\ &\qquad + \Big(\int_{G/\Gamma} |\eta_n(\dot{x})|^2\, d\dot{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{vol}(G/\Gamma - K)}\\ &\leq \Big(\int_K |\eta_n(\dot{x})|^2\, d\dot{x}\Big)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{vol}(K)}\\ &\qquad + \|\eta_n\|\, \sqrt{\mathrm{vol}(G/\Gamma - K)}.\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de G/Γ tel que $\mathrm{vol}(G/\Gamma - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme

$$\frac{1}{\|\eta_n\|} \int_K |\eta_n(\dot{x})|^2\, d\dot{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

on a

$$\frac{\|\eta_n - \widetilde{\eta}_n\|}{\|\eta_n\|} \leq \frac{1}{\|\eta_n\|}\ \Big(\int_K |\eta_n(\dot{x})|^2\, d\dot{x}\Big)^{\frac{1}{2}}\ \sqrt{\mathrm{vol}(K)}\ +\ \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

pour n assez grand. Donc,

$$\left|\frac{\|\widetilde{\eta}_n\|}{\|\eta_n\|} - 1\right| < \varepsilon$$

pour n assez grand et

$$\sup_{k\in K} \frac{\|\lambda(k)\widetilde{\eta}_n - \widetilde{\eta}_n\|}{\|\widetilde{\eta}_n\|} \leq \sup_{k\in K} \frac{\|\lambda(k)\eta_n - \eta_n\|}{\|\eta_n\|}.\frac{\|\widetilde{\eta}_n\|}{\|\widetilde{\eta}_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en conclut que $\mathrm{L}^2_0(G/\Gamma)$ possède presque des vecteurs invariants. □

Preuve de la proposition 4.10. Soit π une représentation de Γ sans vecteurs presque invariants mais telle que $\rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ contient faiblement 1_G. Soit (ξ_n) une suite de vecteurs dans l'espace de $\rho = \mathrm{Ind}_\Gamma^G \pi$ telle que

$$\sup_{k\in K} \frac{\|\lambda(k)\xi_n - \xi_n\|}{\|\xi_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme dans la preuve du lemme 4.11, on peut supposer que $\|\xi_n\| = 1$ et régulariser les ξ_n afin que $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit une famille équicontinue et uniformément bornée sur les compacts de fonctions sur G à valeur dans l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π. Les familles de fonctions

$$\{c_n : G \mapsto \mathbb{R} : g \mapsto \|\xi_n(g)\| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

et

$$\{d_n : G \times G \mapsto \mathbb{R} : (g, g') \mapsto \|\xi_n(g) - \xi_n(g')\| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sont alors équicontinues et uniformément bornées sur les compacts. De nouveau, une version adaptée du théorème d'Ascoli montre qu'il existe des sous-suites de (c_n) et (d_n) qui convergent uniformément sur les compacts vers des fonctions continues c et d.

Comme

$$\sup_{k \in K} \|\rho(k)\xi_n - \xi_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

pour tout compact K de G, les fonctions d_n tendent vers zéro uniformément sur les compacts de G et $d(g, g') = 0$ pour tout $g \in G$.

Comme π ne contient pas faiblement 1_Γ, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et un compact S de Γ tels que

$$\sup_{s \in S} \|\xi_n(g) - \pi(s) \cdot \xi_n(g)\| > \varepsilon \|\xi_n(g)\|$$

pour tout $g \in G$, donc

$$\sup_{s \in S} d_n(g, gk) > \varepsilon c_n(g)$$

pour tout $g \in G$. Finalement, on a $c(g) = 0$ pour tout $g \in G$.

Puisque

$$\|\rho(g)\xi - \xi\| = 2(\|\xi\| - \mathrm{Re}\langle\rho(g)\xi, \xi\rangle)$$

et

$$|\langle\rho(g)\xi_n, \xi_n\rangle| \leq \langle\lambda(g)c_n, c_n\rangle$$

on a

$$\sup_{k \in K} |\lambda(k)c_n - c_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

pour tout compact K de G et les fonctions c_n vérifient les conditions *(ii)* du lemme. Ceci contredit le fait que Γ est faiblement cocompact dans G. □

4.3 Irréductibilité des restrictions de représentations

Dans [14], Cowling et Steger obtiennent la réponse suivante au problème 8 pour un réseau Γ dans un groupe de Lie réel semi-simple G.

Théorème 4.12 (Cowling–Steger)
Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et Γ un réseau irréductible dans G. Soient π et π' deux représentations irréductibles de G. Si π et π' ne sont pas fortement contenues dans λ_G (i.e. de carré intégrable) alors

(i) la restriction $\pi|_\Gamma$ est irréductible;

(ii) $\pi|_\Gamma$ et $\pi'|_\Gamma$ sont unitairement équivalentes si et seulement si π et π' le sont.

La preuve qui suit est celle de [4] dans le cas de groupes simples. Le cas général est traité dans [14]. On trouvera un raffinement du point *(ii)* de ce théorème dans le Theorem B de [4].

Lemme 4.13 *Soit Γ un réseau dans G et $\pi \in \widehat{G}$. Si π n'est pas équivalente à une sous-représentation de $\lambda_0 \otimes \pi$ alors $\pi|_\Gamma$ est irréductible.*

Preuve. Pour σ et ρ deux représentations de G, on note $\mathrm{Hom}_G(\sigma, \rho)$ (resp. $\mathrm{Hom}_\Gamma(\sigma, \rho)$) l'ensemble des opérateurs unitaires qui entrelacent σ et ρ (resp. $\sigma|_\Gamma$ et $\rho|_\Gamma$). Avec ces notations, on peut injecter $\mathrm{Hom}_\Gamma(\pi, \pi)$ dans $\mathrm{Hom}_G(\pi, \lambda \otimes \pi)$ (voir par exemple [14], proposition 1.1).

Soit P la projection orthogonale naturelle de $\mathcal{H}_{\lambda\otimes\pi} \simeq \mathrm{L}^2(G/\Gamma, \mathcal{H}_\pi)$ sur $\mathcal{H}_{\lambda_0\otimes\pi} \simeq \mathrm{L}^2_0(G/\Gamma, \mathcal{H}_\pi)$. Si $A \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \lambda \otimes \pi)$ alors, comme π n'est pas équivalente à une sous-représentation de $\lambda_0 \otimes \pi$, $P \circ A = 0$. Donc, $A \in \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$ et $\mathrm{Hom}_G(\pi, \pi)$ est de dimension 1 car π est irréductible (lemme de Schur). On en conclut que $\dim \mathrm{Hom}_\Gamma(\pi, \pi) = \dim \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi) = 1$. Donc, $\pi|_\Gamma$ est irréductible. □

Preuve du théorème 4.12 pour un groupe simple G.

(i) Soit π une représentation irréductible de G qui n'est pas contenue dans λ_G. Grâce au lemme, il suffit de montrer que π n'est pas équivalente à une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0$.

Supposons le contraire : π est équivalente à une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0$ qui elle-même est équivalente à une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0 \otimes \lambda_0$ et en itérant, on trouve que π est équivalente à une sous représentation de $\pi \otimes \lambda_0^{\otimes^N}$ pour tout entier naturel N.

Comme Γ est faiblement cocompact dans G (proposition 4.9), $\lambda_0^{\otimes^N}$ est fortement contenue dans un multiple de λ_G pour N assez grand (proposition 4.5). La représentation π serait alors contenue dans λ_G, d'où une contradiction.

(ii) Soient π et π' deux représentations irréductibles et inéquivalentes de G telles que au moins une d'entre elles, disons π, n'est pas faiblement contenue dans la régulière. Supposons, par l'absurde, que $\pi|_\Gamma$ et $\pi'|_\Gamma$ sont équivalentes. Les représentations induites

$$\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi|_\Gamma) \simeq \pi \otimes \mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma) \simeq \pi \oplus (\pi \otimes \lambda_0)$$

et

$$\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi'|_\Gamma) \simeq \pi' \otimes \mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma) \simeq \pi' \oplus (\pi' \otimes \lambda_0)$$

serait alors équivalentes. Comme π et π' sont irréductibles et inéquivalentes, on en déduit que π est équivalente à une sous-représentation de $\pi' \otimes \lambda_0$ et π' est équivalente à une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0$. Donc, π est équivalente à une sous-représentation de $\pi \otimes \lambda_0 \otimes \lambda_0$ et en itérant, π est équivalente à une sous représentation de $\pi \otimes \lambda_0^{\otimes^{2N}}$ pour tout N. Pour N suffisamment grand, $\lambda_0^{\otimes^{2N}}$ est contenue dans un multiple de λ_G et π serait alors faiblement contenue dans λ_G, d'où une contradiction.

□

4.4 Restrictions et représentations de dimension finie

Dans [7], Bekka et Valette ont étudié le problème 9 de la page 56 : si H est un sous-groupe fermé dans un groupe localement compact G, une représentation $\pi \in \widehat{H}$ est-elle toujours faiblement contenue dans la restriction $\sigma|_H$ d'une représentation σ de G?

Si G est un groupe de Lie réel semi-simple non compact de centre fini, et qu'on considère comme sous-groupe fermé un réseau Γ de G, ils ont conjecturé qu'il existe toujours une représentation irréductible π de Γ qui n'est faiblement contenue dans aucune restriction de représentation de G.

Ils obtiennent le résultat voulu dans les deux cas suivants :

1. le groupe G possède la propriété (T) de Kazhdan. Dans ce cas, toute représentation π de dimension finie de Γ est isolée dans $\left\{\sigma|_H \mid \sigma \in \widehat{G}\right\}$;

2. le groupe G est localement isomorphe à $SO_0(n,1)$ ou $SU(n,1)$ et la représentation triviale de Γ *n'est pas* isolée parmi les représentations de dimension finie de Γ. Cette fois, un nombre infini de représentations de dimension finie de Γ ne sont pas faiblement contenues dans des restrictions de représentations de G.

Nous généralisons ces résultats grâce au théorème suivant qui répond à la conjecture et qui est basé sur la proposition 4.6.

Théorème 4.14
Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie semi-simple réel sans facteurs compacts et de centre fini G. Alors aucune représentation irréductible, non triviale et de dimension finie de Γ n'est faiblement contenue dans la restriction d'une représentation de G.

Preuve. Supposons que π est une représentation irréductible de dimension finie de Γ et qu'il existe une suite σ_n de représentations de G telle que $\lim(\sigma_n|_\Gamma) = \pi$. Grâce à la continuité du produit tensoriel, nous trouvons

$$\lim(\sigma_n|_\Gamma \otimes \overline{\pi}) = \pi \otimes \overline{\pi}$$

où $\overline{\pi}$ est la représentation conjuguée de π.

Comme π est de dimension finie, $\pi \otimes \overline{\pi}$ contient la représentation triviale 1_Γ. Grâce à la continuité de l'induction, d'une part $\mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi \otimes \overline{\pi})$ contient faiblement $\mathrm{Ind}_\Gamma^G 1_\Gamma$, et d'autre part nous obtenons

$$\lim(\sigma_n \otimes \mathrm{Ind}_\Gamma^G \overline{\pi}) = \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi \otimes \overline{\pi}).$$

En particulier,

$$\lim \sigma_n \otimes \operatorname{Ind}_\Gamma^G \overline{\pi} = 1_G.$$

La proposition 4.6 implique que $\lim \sigma_n = 1_G$ et $\operatorname{Ind}_\Gamma^G \overline{\pi}$ contient faiblement 1_G.

Comme le réseau Γ est faiblement cocompact (proposition 4.9), nous concluons à l'aide de la proposition 4.10 que $\overline{\pi}$ (et donc π) contient faiblement 1_Γ. Puisque π est irréductible et de dimension finie, cela impose $\pi = 1_\Gamma$. □

Chapitre 5

Exemples

5.1 Rang de $SO(n)$ sur les p-adiques

5.1.1 Indice de Witt

Soient $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur le corps de rationnels $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{k}$ une extension de $\mathbb{Q}$. Le rang de $\mathbf{G}$ sur le corps $\mathbb{k}$ est la dimension d'un tore maximal déployé sur $\mathbb{k}$. Lorsque $\mathbf{G} = SO(q)$, le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve une forme quadratique q, le $\mathbb{k}$-rang de $\mathbf{G}$ coïncide avec l'indice de Witt $W_{\mathbb{k}}$ de la forme q sur le corps $\mathbb{k}$ *i.e.* la dimension d'un sous-espace maximal de $\mathbb{k}^n$ qui est isotrope pour la forme quadratique q [11].

5.1.2 Calcul

Nous calculons ce nombre pour le groupe $SO(n)$ sur le corps des p-adiques.

Soit q une forme quadratique à coefficients entiers sur n variables. On dit que q représente zéro dans l'anneau A si et seulement si il existe un élément non nul $x \in A^n$ tel que $q(x) = 0$.

Pour un nombre premier p différent de 2, la forme q représente zéro dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si q représente zéro dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([46], chapter II, § 2.2).

D'une part, si $p \equiv 1 \pmod 4$ alors -1 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([46], chapter I, § 3.2, Theorem 5) et donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède une solution dans $\mathbb{Z}_p$. D'autre part, si $p \equiv 3 \pmod 4$ alors -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([46], chapter I, § 3.2, Theorem 5) et l'équation $x^2 + 1 = 0$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{Z}_p$ mais -1 est la somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ([46], chapter I, § 2.2, Corollary 2) et donc l'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ possède une solution dans $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Enfin, si $p = 2$ alors pour tout $n \geq 1$, -1 est un carré dans le corps à 2^n éléments $\mathbb{F}_{2^n}$. En particulier, l'équation $x^2+1 = 0$ possède une solution dans $\mathbb{F}_8$ et donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède une solution dans $\mathbb{Q}_2$ ([46], chapter II, § 2.2, Corollary 3).

Théorème 5.1
Pour la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

et le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$,

si $p = 2$ *ou* $p \equiv 1 \pmod 4$ *alors* $W_{\mathbb{Q}_p} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
si $p \equiv 3 \pmod 4$ *alors si* $n \equiv 0 \pmod 4$, *on a* $W_{\mathbb{Q}_p} = \frac{n}{2}$;
si $n \equiv 1 \pmod 4$, *on a* $W_{\mathbb{Q}_p} = \frac{n-1}{2}$;
si $n \equiv 2 \pmod 4$, *on a* $W_{\mathbb{Q}_p} = \frac{n-2}{2} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$;
si $n \equiv 3 \pmod 4$, *on a* $W_{\mathbb{Q}_p} = \frac{n-1}{2}$.

Preuve. Distinguons les différents cas.

Si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod 4$ alors, dans ce cas comme dans le cas où $\Bbbk = \mathbb{C}$, il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ tel que $\lambda^2 + 1 = 0$. Une base d'un sous-espace isotrope maximal est alors donnée par

$$(\lambda, 1, 0, \ldots, 0),\ (0, 0, \lambda, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \begin{cases} (0, \ldots, 0, \lambda, 1) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (0, \ldots, 0, \lambda, 1, 0) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ceci montre le résultat annoncé. On remarque que pour un corps $\Bbbk$ comme ci-dessus, on a toujours $W_\Bbbk \leq W_\mathbb{C} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Si $p \equiv 3 \pmod 4$ alors différents cas se présentent.

En effet, il existe $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ et $\mu \in \mathbb{Q}_p$ tels que $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$, si bien que le sous-espace engendré par

$$(\lambda, \mu, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad (-\mu, \lambda, 0, 1)$$

est isotrope dans $\mathbb{Q}_p^4$.

- Si $n \equiv 0 \pmod 4$, notons $n = 4m$. Une base du sous-espace isotrope maximal est donnée par

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(\lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0), \\
(-\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0), \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & -\mu & \lambda, & 0, & 1).
\end{array}$$

Donc $W_{\mathbb{Q}_p} = 2m = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Si $n \equiv 1 \pmod 4$, notons $n = 4m+1$. Une base du sou-espace isotrope maximal est donnée par

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
(\lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0), \\
(-\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0), \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0).
\end{array}
$$

Donc $W_{\mathbb{Q}_p} = 2m = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Si $n \equiv 3 \pmod 4$, notons $n = 4m+3$. Une base du sous espace isotrope maximal est donnée par

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
(\lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
(-\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
(0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1).
\end{array}
$$

Donc $W_{\mathbb{Q}_p} = 2m+1 = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Si $n \equiv 2 \pmod 4$, notons $n = 4m+2$. Considérons le sous-espace isotrope $\mathcal{W}$ engendré par

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
\bar{e}_1 = & (\lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0), \\
\bar{f}_1 = & (-\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0), \\
\bar{e}_2 = & (0, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0), \\
\bar{f}_2 = & (0, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0), \\
& \vdots & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\bar{e}_m = & (0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \lambda, & \mu, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0), \\
\bar{f}_m = & (0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & -\mu, & \lambda, & 0, & 1, & 0, & 0).
\end{array}
$$

Soit

$$\bar{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1, x_2, y_2, z_2, t_2, \ldots, x_m, y_m, z_m, t_m, a, b)$$

un vecteur dans $\mathbb{Q}_p^n$.

Si $\bar{u}$ est orthogonal à $\mathcal{W}$ alors

$$\begin{cases} \lambda x_i + \mu y_i + z_i = 0 \\ -\mu x_i + \lambda y_i + t_i = 0, \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m.$$

Comme $\lambda^2 + \mu^2 + 1 = 0$, on a $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ et donc,

$$\begin{cases} (\lambda^2 + \mu^2) y_i + \mu z_i + \lambda t_i = 0 \\ (\lambda^2 + \mu^2) x_i + \lambda z_i - \mu t_i = 0, \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m.$$

Finalement,

$$\begin{cases} x_i = \lambda z_i - \mu t_i \\ y_i = \mu z_i + \lambda t_i, \end{cases} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m,$$

c'est-à-dire

$$\bar{u} = \bar{v} + \sum_{i=1}^{m} (z_i \bar{e}_i + t_i \bar{f}_i)$$

où $\bar{v} = (0, \ldots, 0, a, b)$.

Si le vecteur $\bar{u}$ est de plus isotrope, alors $\bar{u}$ s'écrit comme somme d'un vecteur $\bar{w} \in \mathcal{W}$ et d'un vecteur $\bar{v} = (0, \ldots, 0, a, b)$ avec $a^2 + b^2 = 0$. Comme -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}_p$, ceci implique que a et b sont nuls.

On en conclut que $\mathcal{W}$ est un sous-espace isotrope maximal et que

$$W_{\mathbb{Q}_p} = 2m = \frac{n-2}{2} < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

$\square$

5.2 Exemples de réseaux dans un produit

Nous donnons des exemples de réseaux irréductibles Γ dans un produit direct $G_1 \times G_2$ de deux groupes localement compacts G_1, G_2. On trouvera la théorie se rapportant à ces exemples dans [36].

5.2.1 Réseau dans un produit $G_1 \times G_2$ de deux groupes de Kazhdan

Uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SO(n, \mathbb{Z}[1/p_1, 1/p_2])}$ **dans** $\boldsymbol{SO(n, \mathbb{Q}_{p_1}) \times SO(n, \mathbb{Q}_{p_2})}$

Pour $n \geq 2$, soit q la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

et soit $\mathbf{G} = SO(q)$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve le forme q. Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts et $\mathbb{Z}[1/p_1, 1/p_2]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $1/p_1$ et $1/p_2$. L'image de $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Z}[1/p_1, 1/p_2])$ par le plongement diagonal

$$\Gamma \mapsto \mathbf{G}(\mathbb{Q}_{p_1}) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}_{p_2}) : g \mapsto (g, g)$$

est un réseau irréductible. Comme le rang de $\mathbf{G} = SO(q)$ sur $\mathbb{Q}$ est zéro, le réseau Γ est cocompact.

Si $p_1 \equiv 1 \pmod 4$ et $p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $n \geq 4$ alors les groupes $SO(n, \mathbb{Q}_{p_i})$ sont de $\mathbb{Q}_{p_i}$-rang supérieur à deux et possèdent donc la propriété (T) de Kazhdan.

Si $p_1 \equiv 3 \pmod 4$ et $p_2 \equiv 3 \pmod 4$ et $n \geq 5$ alors les groupes $SO(n, \mathbb{Q}_{p_i})$ sont de $\mathbb{Q}_{p_i}$-rang supérieur à deux et possèdent donc la propriété (T) de Kazhdan.

Non-uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SL(n, \mathbb{Z}[1/p])}$ **dans** $\boldsymbol{SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{Q}_p)}$ **pour** $\boldsymbol{n \geq 3}$

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Z}[1/p]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $1/p$. L'image de $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Z}[1/p])$ par le plongement diagonal

$$\Gamma \mapsto SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{Q}_p) : g \mapsto (g, g)$$

est un réseau irréductible. Si $n \geq 3$, alors $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{Q}_p)$ sont de rang au moins deux et possèdent donc la propriété (T) de Kazhdan.

5.2.2 Réseau dans un produit $G_1 \times G_2$ où seulement G_2 est un groupe de Kazhdan

Uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SO_q(\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}])}$ **dans** $\boldsymbol{SO(n-1,1) \times SO(n-1,1) \times SO(n-2,2)}$

Pour $n \geq 5$, soit q la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \sqrt{3}x_{n-1}^2 + \sqrt{2}x_n^2.$$

Soit $\mathbb{k}$ le corps de nombres $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, et soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'anneau des entiers de $\mathbb{k}$. Soit $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme q. Le groupe $\mathbf{G}$ est défini sur $\mathbb{k}$, le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $SO(n)$ et le rang réel de $\mathbf{G}$ ainsi que le rang de $\mathbf{G}$ sur $\mathbb{k}$ est nul.

Soient σ_2, σ_3 et $\sigma_{2,3}$ les automorphismes de $\mathbb{k}$ définis par

$$\begin{aligned} \sigma_2(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sigma_2(\sqrt{3}) = \sqrt{3}; \\ \sigma_3(\sqrt{2}) &= \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sigma_2(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}; \\ \sigma_{2,3}(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sigma_{2,3}(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

On note respectivement $\mathbf{G}^{\sigma_2}$, $\mathbf{G}^{\sigma_3}$ et $\mathbf{G}^{\sigma_{2,3}}$ les sous-groupes de $SL(n)$ qui préservent les formes quadratiques

$$\begin{aligned} q^{\sigma_2}(x) &= x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \sqrt{3}x_{n-1}^2 - \sqrt{2}x_n^2, \\ q^{\sigma_3}(x) &= x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - \sqrt{3}x_{n-1}^2 + \sqrt{2}x_n^2, \end{aligned}$$

et

$$q^{\sigma_{2,3}}(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - \sqrt{3}x_{n-1}^2 - \sqrt{2}x_n^2.$$

Alors $\mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{G}^{\sigma_3}(\mathbb{R}) \simeq SO(n-1,1)$ sont de rang un et n'ont pas la propriété (T) de Kazhdan mais $\mathbf{G}^{\sigma_{2,3}}(\mathbb{R}) \simeq SO(n-2,2)$ est de rang réel 2 et a la propriété (T) de Kazhdan. Le groupe $\Gamma = \mathbf{G}(\mathcal{O})$ plongé dans $\mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_3}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_{2,3}}(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathcal{O}) &\mapsto \mathbf{G}^{\sigma_2}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_3}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}^{\sigma_{2,3}}(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (\sigma_2(g), \sigma_3(g), \sigma_{2,3}(g)), \end{aligned}$$

est un réseau irréductible et cocompact dans

$$(SO(n-1,1) \times SO(n-1,1)) \times SO(n-2,2).$$

Non-uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SL(n, \mathbb{Q})}$ **dans** $\boldsymbol{SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{A}_f)}$

Il est classique que $\Gamma = SL(n, \mathbb{Q})$ est, par plongement diagonal, un réseau dans

$$SL(n, \mathbb{A}) = SL(n, \mathbb{R}) \times SL(n, \mathbb{A}_f),$$

où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f$ le sous-anneau des adèles finies. Par le Théorème d'Approximation Fort (voir, par exemple [29], 14.3), $SL(n, \mathbb{Q})$ est dense $SL(n, \mathbb{A}_f)$. Lorsque $n \geq 3$, $SL(n, \mathbb{R})$ a la propriété (T) de Kazhdan.

Ce qui précède peut être généralisé au cas où $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Q})$, l'ensemble des points rationnels d'un groupe algébrique simple connexe $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{Q}$. Le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ est un réseau dans

$$\mathbf{G}(\mathbb{A}) = \mathbf{G}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f),$$

et lorsque $\mathbf{G}$ est simplement connexe et $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ n'est pas compact, $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ se projette de manière dense sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ (voir [10], § 5.6. Theorem et [36], Chapter II, § 6.8 Theorem).

• $\Gamma = SO(n-1,1)(\mathbb{Z}[1/p])$ dans $SO(n-1,1)(\mathbb{R}) \times SO(n-1,1)(\mathbb{Q}_p)$

Soit $\mathbf{G} = SO_q$ le sous-groupe de $SL(n)$ préservant la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2.$$

Pour $n \geq 4$, le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \simeq SO(n-1,1)$ est de rang réel un. Si $p \equiv 1 \pmod 4$, l'équation $x^2 + 1 = 0$ a une solution dans $\mathbb{Q}_p$. Cela implique que le $\mathbb{Q}_p$-rang de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est au moins deux et $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ a la propriété (T) de Kazhdan. L'image de $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Z}[1/p])$ par plongement diagonal est un réseau irréductible dans $\mathbf{G}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$.

L'équation $x^2 + y^2 + 1 = 0$ a une solution dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout nombre premier p, et donc, lorsque $n \geq 5$, le $\mathbb{Q}_p$-rang de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)$ est au moins deux.

• $\Gamma = SO_q(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ dans $SO(n-1,1) \times SO(n-2,2)$

Pour $n \geq 4$, soit q la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 + \sqrt{2}x_n^2$$

Soit $\Bbbk$ le corps de nombres $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'anneau des entiers de $\Bbbk$. Soit $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme q. Alors $\mathbf{G}$ est défini sur $\Bbbk$, le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est isomorphe à $SO(n-1,1)$ et le rang réel de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ est un.

Considérons σ l'automorphisme de $\Bbbk$ défini par $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ et notons $\mathbf{G}^\sigma$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme quadratique

$$q^\sigma(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 - \sqrt{2}x_n^2$$

Comme le groupe $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \simeq SO(n-2,2)$ est de rang réel deux, il possède la propriété (T) de Kazhdan. Le groupe $\Gamma = \mathbf{G}(\mathcal{O})$ se plonge dans $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathcal{O}) &\mapsto \mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (\sigma(g), g), \end{aligned}$$

ce qui en fait un réseau irréductible dans ce produit.

5.2.3 Réseau dans un produit $G_1 \times G_2$ où ni G_1, ni G_2 n'a la propriété (T) de Kazhdan

Uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SO_q(\mathbb{Z}[\delta])}$ **dans** $\boldsymbol{SO(n,1) \times SO(n,1)}$

Soit P un polynôme de degrés trois, à coefficients rationnels, irréductible sur $\mathbb{Q}$ et admettant deux racines positives δ et δ' et une négative δ''. On peut prendre par exemple $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Notons $\mathbb{k}$ le corps de nombres $\mathbb{Q}(\delta)$ et $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\delta]$ l'anneau des entiers de $\mathbb{k}$. Soient σ_+ et σ_- les morphismes injectifs de $\mathbb{k}$ dans $\mathbb{R}$ définis respectivement par $\sigma_+(\delta) = \delta'$ et $\sigma_-(\delta) = \delta''$.

Pour $n \geq 3$, soit q la forme quadratique définie par

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - \delta x_n^2$$

et soit $\mathbf{G} = SO_q$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme q. Notons $\mathbf{G}^{\sigma_+}$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme

$$q^{\sigma_+}(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - \delta' x_n^2.$$

et $\mathbf{G}^{\sigma_-}$ le sous groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme

$$q^{\sigma_-}(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - \delta'' x_n^2.$$

Puisque δ et δ' sont positives les groupes $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{G}^{\sigma_+}(\mathbb{R})$ sont isomorphes à $SO(n-1,1)$ et puisque δ'' est négative, $\mathbf{G}^{\sigma_-}(\mathbb{R})$ est compact et isomorphe à $SO(n)$.

De plus, le groupe $\mathbf{G}(\mathbb{k})$ est de rang nul sur $\mathbb{k}$. En effet, supposons qu'il existe $y \in \mathbb{k} = \mathbb{Q}(\delta)$ tel que $q(y) = 0$ alors $\sigma_-(y) \in \mathbb{R}$ et $q^{\sigma_-}(\sigma_-(y)) = 0$, ce qui est impossible.

Le groupe $\Gamma = \mathbf{G}(\mathcal{O})$ se plonge dans $\mathbf{G}^{\sigma_+}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbf{G}(\mathcal{O}) \to \mathbf{G}^{\sigma_+}(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R}) \ : \ g \to (g^{\sigma_+}, g)$$

ce qui en fait un réseau irréductible et cocompact dans le produit $SO(n-1,1) \times SO(n-1,1)$.

• $\boldsymbol{\Gamma = SO(n, \mathbb{Z}[1/p_1, 1/p_2])}$ **dans** $\boldsymbol{SO(n, \mathbb{Q}_{p_1}) \times SO(n, \mathbb{Q}_{p_2})}$

Reprenons les groupes du premier exemple.

Si $p_1 \equiv 1 \pmod 4$ et $p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $n = 2$ ou 3 alors les groupes $SO(n)(\mathbb{Q}_{p_i})$ sont de $\mathbb{Q}_{p_i}$-rang un et n'ont pas la propriété (T).

Si $p_1 \equiv 3 \pmod 4$ et $p_2 \equiv 1 \pmod 4$ et $n = 2$, 3 ou 4 alors les groupes $SO(n)(\mathbb{Q}_{p_i})$ sont de $\mathbb{Q}_{p_i}$-rang un et n'ont pas la propriété (T).

Non-uniforme

• $\boldsymbol{\Gamma = SL(2,\mathbb{Q})}$ **dans** $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{A}_f)}$

Comme ci-dessus, on plonge diagonalement $\Gamma = SL(2,\mathbb{Q})$ dans

$$SL(2,\mathbb{A}) = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{A}_f),$$

où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}_f$ le sous-anneau des adèles finies.

Cette fois, $SL(2,\mathbb{R})$ est de rang un et n'a pas la propriété (T) de Kazhdan.

• $\boldsymbol{\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}[1/p])}$ **dans** $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{Q}_p)}$

Soit p un nombre premier et $\mathbb{Z}[1/p]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ engendré par $1/p$. Comme ci-dessus, l'image de $\Gamma = \mathbf{G}(\mathbb{Z}[1/p])$ par le plongement diagonal

$$\Gamma \mapsto SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{Q}_p) : g \mapsto (g,g)$$

est un réseau irréductible. Cette fois, les groupes $SL(2,\mathbb{R})$ et $SL(2,\mathbb{Q}_p)$ sont de rang un et ne possèdent donc pas la propriété (T) de Kazhdan.

• $\boldsymbol{\Gamma = SO(n-1,1)(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])}$ **dans** $\boldsymbol{SO(n-1,1) \times SO(n-1,1)}$

Pour $n \geq 3$, soit q la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2$$

Soit $\mathbb{k}$ le corps de nombres $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, et soit $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ l'anneau des entiers de $\mathbb{k}$. Soit $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $SL(n)$ défini sur $\mathbb{k}$ qui préserve la forme q.

Considérons σ l'automorphisme de $\mathbb{k}$ défini par $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ et notons $\mathbf{G}^\sigma$ le sous-groupe de $SL(n)$ qui préserve la forme quadratique $q^\sigma = q$. Alors les groupes $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R})$ sont isomorphes à $SO(n-1,1)$ qui est de rang réel un et ne possède pas la propriété (T) de Kazhdan. Le groupe $\Gamma = \mathbf{G}(\mathcal{O})$ se plonge dans $\mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathcal{O}) &\mapsto \mathbf{G}^\sigma(\mathbb{R}) \times \mathbf{G}(\mathbb{R}) \\ g &\mapsto (\sigma(g), g), \end{aligned}$$

ce qui en fait un réseau irréductible dans ce produit.

Bibliographie

[1] O. AMANN. « Sur les représentations unitaires du groupe des automorphismes de l'arbre homogène ». Travail de diplôme, Université de Lausanne, Juillet 1996.

[2] H. BASS, J. MILNOR, et J-P. SERRE. «Solution of the congruence subgroup problem for SL_n and Sp_n». *Publ. Math. IHES*, (33):59–137, 1967.

[3] B. BEKKA. « On the full C^* algebra of arithmetic groups and the congruence subgroup problem». Preprint, 1997.

[4] B. BEKKA. « Restrictions of unitary representations to lattices and associated C^*-algebras». *J. Functionnal Analysis*, (143):33–41, 1997.

[5] B. BEKKA. « On uniqueness of invariant means ». *Proc. Amer. Math. Soc.*, (126):507–514, 1998.

[6] B. BEKKA et N. LOUVET. « On a variant of Kazhdan's property for subgroups of semisimple groups». *Ann. Inst. Fourier*, 4(47):1065–1078, 1997.

[7] B. BEKKA et A. VALETTE. «Lattices in semi-simple Lie groups, and multipliers of group C^*-algebras». Dans *Proceedings of ALGOP, Orléans july 1992*, numéro 232 dans Astérique, page 67. Soc. Math. France, 1995.

[8] F. BIEN. «Construction of telephone networks by group representations». *Notices Amer. Math. Soc.*, 1(36):5–22, 1989.

[9] P. BLANC. «Sur la cohomologie continue des groupes localement compacts». *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4^{e} série.

[10] A. BOREL. «Some finiteness properties of adèles groups over number fields». *Publ. Math. IHES*, (16):1–30, 1963.

[11] A. BOREL. *Introduction aux groupes arithmétiques.* Hermann, 1969.

[12] M.D. CHOI. « The full C^*-algebra of the free group on two generators». *Pac. J. Math.*, (87):41–48, 1980.

[13] M. COWLING. Sur les coefficients des représentations unitaires des groupes de Lie simples. Dans *Analyse Harmonique*, numéro 739 dans Lect. Notes Math., pages 132–178. Springer, 1979.

[14] M. COWLING et T. STEGER. « The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices». *J. reine angew. Math.*, (420):85–98, 1991.

[15] P. de la HARPE et A. VALETTE. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Numéro 175 dans Astérisque. Soc. Math. de France, 1989.

[16] P. DELORME. « 1–cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi–simples et résolubles – Produits tensoriels continus de représentations». *Bull. Soc. Math. France*, (105):281–336, 1977.

[17] J. DIXMIER. *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbre de von Neumann).* Gauthier-Villars, 1969.

[18] J. DIXMIER. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthier-Villars, 1969.

[19] J.M.G. FELL. «Dual spaces of C^* -algebras». *Trans. AMS*, (94):365–403, 1960.

[20] J.M.G. FELL. «Weak containment and induced representations of groups». *Canad. J. Math*, (14):237–268, 1962.

[21] J.M.G. FELL. « Weak containment and Kronecker products of group representations». *Pac. J. Math.*, (13):503–510, 1963.

[22] A. FIGA-TALAMANCA et C. NEBBIA. *Harmonic analysis and representation theory for group acting on homogeneous trees.* Numéro 162 dans London Math. Soc. Lectures Notes. Cambridge University Press, 1991.

[23] I.M. GEL'FAND, M.I. GRAEV, et I.I. PYATETSKII-SHAPIRO. *Representation theory and automorphic functions.* Saunders, 1969.

[24] A. GUICHARDET. « Cohomologie des groupes topologiques II». *Bull. Soc. Math. Fr. 2e série*, (96):305–332, 1972.

[25] A. GUICHARDET. *Symmetric Hilbert spaces and related topics.* Numéro 261 dans Lectures Notes in Math. Springer, 1972.

[26] A. GUICHARDET. « Cohomologie des groupes localement compacts et produits tensoriels continus de représentations». *J. Multivariate Anal*, (6):138–158, 1976.

[27] M. HERVÉ. «Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact métrisable». *C.R. Acad. Sc.*, (235):366–368, 1961.

[28] R.E. HOWE et C.C. MOORE. « Asymptotic properties ofunitary representations». *J. Funct. Anal.*, (32):72–96, 1979.

[29] J.E. HUMPHREYS. *Arithmetic groups.* Numéro 789 dans Lectures Notes in Math. Springer, 1980.

[30] D. KAZHDAN. « Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups ». *Funct. Anal. and its Appl.*, (1):63–65, 1967.

[31] E. KIRCHBERG. « On non-split extensions, tensor products and exacteness of group C^*-algebras ». *Invent. Math.*, (112):449–489, 1993.

[32] N. LOUVET. « Rigidité cohomologique pour un réseau dans un produit ». *C. R. Acad. Sc.*, 1998. à paraitre.

[33] A. LUBOTZKY. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.* Numéro 125 dans Progress in Math. Birkhäuser, 1994.

[34] A. LUBOTZKY et R.J. ZIMMER. « Variants of Kazhdan property for subgroup of semisimple groups ». *Israel J. of Math*, (66):289–298, 1989.

[35] G.A. MARGULIS. « Explicit construction of concentrators ». *Problems Inform. transmission*, 4(9):325–332, 1973.

[36] G.A. MARGULIS. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups.* Springer, 1991.

[37] C.C. MOORE. « Exponential decay of correlations coefficients for geodesic flows, in Group Representations ». Dans C.C. MOORE, éditeur, *Ergodic Theory, Operator Algebras and Mathematical Physics, Proc. Conf. in honor of G.W. Mackey*, MSRI Publications, pages 163–181. Springer, 1987.

[38] G.I. OL'SHANSKII. « Classification of irreducibles representation of groups of automorphims of Bruhat-Tits trees ». *Functional Anal. Appl.*, (11):26–34, 1977.

[39] G.K. PEDERSEN. *C^*-algebras and their automrphism groups.* Academic Press, 1979.

[40] J. PICHAUD. « 1–cohomologie des représentations induites ». *J. Math. pures et appl.*, (56):339–366, 1977.

[41] G. PINCZON et J. SIMON. « Sur la 1–cohomologie des groupes de Lie semi-simples ». *C. R. Acad. Sc. Paris : Série A*, (279):455–458, 1974.

[42] M.S. RAGUNATHAN. *Discrete subgroups of Lie groups.* Springer, 1972.

[43] A. RAPINCHUK. « On the finite-dimensional unitary representations of Kazhdan groups ». *Proc. Amer. Math. Soc*, 1998. à paraitre.

[44] A. SELBERG. « On the estimation of Fourier coefficients of modular forms ». *Proc. Symp. Pure Math.*, (VIII):1–15, 1965.

[45] J.-P. SERRE. « Le problème des sous-groupes de congruences pour SL_2 ». *Ann. Math.*, (92):489–527, 1970.

[46] J.-P. SERRE. *A course in arithmetic*. Numéro 7 dans Graduate Texts in math. Springer, 1973.

[47] J.-P. SERRE. *Arbres, amalgames, SL_2*. Numéro 46 dans Astérisque. Soc. Math. France, 1977.

[48] Y. SHALOM. « Cohomology of discrete groups and superrigidity of unitary representations ». research announcement, october 1997.

[49] D. STOWE. « The stationnary set of a group action ». *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, 79(1):139–146, 1980.

[50] A.M. VERSHIK et S.I. KARPUSHEV. « Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity and conditionally positive definite functions ». *Math. USSR Sbornik*, (47):513–526, 1984.

[51] J. von NEUMANN et E.P. WIGNER. « Minimally almost periodic groups ». *Ann. of Math.*, (41):746–750, 1940.

[52] S.P. WANG. « On isolated point in the dual spaces of locally compact groupe ». *Math. Ann.*, (218):19–34, 1975.

[53] Y. WATATANI. « Property (T) of Kazhdan implies property (FA) of Serre ». *Math. Japan*, (27):97–103, 1982.

[54] R.J. ZIMMER. *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser, 1984.