



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE
Présentée à
L'UNIVERSITE de METZ

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

Spécialité :
INFORMATIQUE

K U S N O

=====

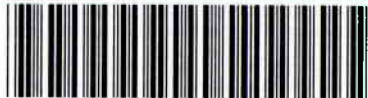
CONTRIBUTION A LA SOLUTION DU PROBLEME
DE CONSTRUCTION
ET
DE RACCORDEMENT GEOMETRIQUE
DE SURFACES DEVELOPPABLES REGULIERES
A L'AIDE DES CARREAUX DE BEZIER

Soutenue à Metz le 3 Décembre 1998

Composition du jury :

| | | |
|-----------------------------|--|---|
| Directeur de thèse : | Yvon GARDAN | Professeur à l'I.F.T.S. de Charleville-Mézières, Université de Reims |
| Rapporteurs : | Michel VERON Denis VANDORPE | Professeur à l'Université de Nancy I Professeur à l'Université de Lyon I |
| Examineurs : | Jean-Pierre JUNG Dominique MICHEL Ahmed ZIDNA | Professeur à l'Université de Metz Maître de conférences à l'Université de Metz Maître de conférences à l'Université de Metz |

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 255491 4

LAI

FORMATIQUE DE METZ

b 141 638

THESE

Présentée à
l'UNIVERSITE de METZ

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de l'UNIVERSITE de METZ

Spécialité :
INFORMATIQUE

KUSNO

=====

| | |
|--|---------------|
| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE SCIENCE ET TECHNIQUES - METZ | |
| N° Inv. | 1998.1065 |
| Cote | S/M3 98/51 |
| Loc. | Magasin |
| Cat. | |

CONTRIBUTION A LA SOLUTION DU PROBLEME
DE CONSTRUCTION
ET
DE RACCORDEMENT GEOMETRIQUE
DE SURFACES DEVELOPPABLES REGULIERES
A L'AIDE DES CARREAUX DE BEZIER

Soutenue à Metz le 3 Décembre 1998

Composition du jury :

| | | |
|-----------------------------|--|---|
| Directeur de thèse : | Yvon GARDAN | Professeur à l'I.F.T.S. de Charleville-Mézières, Université de Reims |
| Rapporteurs : | Michel VERON Denis VANDORPE | Professeur à l'Université de Nancy I Professeur à l'Université de Lyon I |
| Examineurs : | Jean-Pierre JUNG Dominique MICHEL Ahmed ZIDNA | Professeur à l'Université de Metz Maître de conférences à l'Université de Metz Maître de conférences à l'Université de Metz |

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE METZ

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord **Monsieur Yvon GARDAN**, mon directeur de thèse. J'adresse mes premiers remerciements pour la confiance qu'il m'a accordée et parce qu'il m'a guidé tout au long de la préparation de cette thèse.

Je tiens également à remercier **Monsieur Jean-Pierre JUNG** qui m'a accepté dans son laboratoire et de participer à ce jury.

Merci surtout à **Monsieur Michel VERON** et **Monsieur Denis VANDORPE** d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce travail.

Je remercie **Ahmed ZIDNA**, à qui revient sans doute le plus de mérite pour sa patience, sa disponibilité, ses conseils et ses critiques constructives.

A **Dominique MICHEL** merci pour ses suggestions et critiques constructives des différentes versions durant les nombreuses discussions.

Je remercie **l'ensemble des membres du Laboratoire de Recherche en Informatique de Metz** pour m'avoir aidé à la réalisation de ce rapport.

Enfin, mes pensées les plus chaleureuses s'adressent à ma femme **Indriyani** et mes enfants **Guido-Dias-Kalandro**, **Sénato-Erasandi** et **Planéta-Monika**, grâce à qui j'ai pu mener à bien ces nombreuses années d'études en France et qui m'ont toujours soutenu, particulièrement pendant la préparation de cette thèse.

K u s n o

SOMMAIRE

| | |
|--|-----|
| REMERCIEMENTS | ii |
| SOMMAIRE | iii |
| NOTATIONS | v |
| CHAPITRE I INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE II ETUDE GENERALE ET ETAT DE L'ART SUR LES SURFACES DEVELOPPABLES | 5 |
| 2.1 Courbe et Surface de Bézier et B-Spline | 5 |
| 2.1.1 Courbe et Surface de Bézier..... | 6 |
| 2.1.2 Courbe et Surface B-Spline..... | 8 |
| 2.2 Etude Générale sur les Surfaces Développables | 10 |
| 2.2.1 Courbure Principale de Surface Paramétrée..... | 11 |
| 2.2.2 Propriétés Locales des Surfaces Développables..... | 16 |
| 2.2.3 Surfaces Régliées Développables | 19 |
| 2.2.4 Définitions et Propriétés des Surfaces Développables | 22 |
| 2.3 Etat de l'Art sur les Surfaces Développables | 23 |
| 2.3.1 Construction et Raccordement de Surface Développable | 23 |
| 2.3.2 Développement de Surface Développable | 34 |
| 2.4 Solution Proposée Pour le problème de la Thèse | 39 |
| CHAPITRE III CONDITION SUFFISANTE DE REGULARITE ET CLASSIFICATION DE SURFACE DEVELOPPABLE | 41 |
| 3.1 Condition Suffisante de Régularité de Surface Développable | 42 |
| 3.1.1 Premier Cas | 43 |
| 3.1.2 Deuxième Cas | 51 |
| 3.1.3 Troisième Cas..... | 52 |
| 3.1.4 Synthèse..... | 53 |
| 3.2 Classification de Surface Développable | 54 |

| | |
|---|----------------|
| CHAPITRE IV CONSTRUCTION DES SURFACES DEVELOPPABLES REGULIERES A L'AIDE DES CARREAUX DE BEZIER..... | 55 |
| 4.1 Position du Problème | 55 |
| 4.2 Caractérisation des carreaux de Bézier Développables Réguliers | 56 |
| 4.2.1 Conditions de Développabilité de $S(u,v)$ | 56 |
| 4.2.2 Conditions de Régularité de $S(u,v)$ | 60 |
| 4.3 Construction de carreaux de Bézier Développables Réguliers | 62 |
| 4.3.1 Cas $\rho(u)$ Constant..... | 62 |
| 4.3.2 Cas $\rho(u)$ Linéaire..... | 63 |
| 4.3.3 Cas $\rho(u)$ Quadratique | 75 |
| 4.3.4 Cas $\rho(u)$ Cubique | 81 |
| 4.3.5 Cas $\rho(u)$ Général | 89 |
| 4.4 Approximation à l'Aide CBDR[(n,m),1] | 93 |
| 4.5 Conclusion..... | 94 |
| CHAPITRE V RACCORDEMENT GEOMETRIQUE ENTRE DEUX CARREAUX DE BEZIER DEVELOPPABLES REGULIERS..... | 95 |
| 5.1 Position du Problème | 95 |
| 5.2 Raccordement Géométrique..... | 96 |
| CHAPITRE VI CONCLUSION GENERALE | 105 |
| REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES | 107 |
| ANNEXE-A..... | 110 |
| ANNEXE-B..... | 112 |
| ANNEXE-C..... | 114 |

NOTATIONS

| | |
|-----------------------|---|
| $S(u,v)$ | surface à traiter de paramètres (u,v) |
| S^u, S^v | dérivées partielles de la fonction $S(u,v)$ |
| n_s | vecteur unitaire normal à S |
| $r \wedge t$ | produit vectoriel des vecteurs r et t |
| k_c | courbure de courbe |
| κ_n | courbure normale |
| K | courbure gaussienne |
| H | courbure moyenne |
| $ n $ | norme euclidienne du vecteur n |
| $f'(u)$ | dérivée première $f(u)$ |
| $\det(.)$ | déterminant $(.)$ |
| $B_i^n(u)$ | $i^{\text{ème}}$ polynôme de Bernstein de degré n |
| CAO | C onception A ssistée par O rdinateur |
| CBDR | C arreau de B ézier D éveloppable R égulier |
| CFAO | C onception et F abrication A ssistée par O rdinateur |
| CG² | C ontinuité G éométrique d'ordre deux |

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Les objets fabriqués dans l'industrie peuvent être de très grandes dimensions. C'est le cas des avions, des bateaux, des locomotives, etc. La fabrication de tels objets pose un certain nombre de problèmes. Il est en effet impossible de fabriquer ces objets en une seule pièce. Il est clair qu'on ne peut pas construire la coque d'un pétrolier par emboutissage d'une tôle ou par usinage d'un volume brut! (car il faudrait d'abord construire l'outil qui permet de faire cette opération). La seule solution consiste à créer un squelette, puis une charpente de l'objet par assemblage de poutres, enfin à habiller la peau à l'aide de plaques (tôles). La fabrication d'objets de grande taille est donc organisée en deux phases:

❶ Construction du squelette

❷ Habillage du squelette à l'aide de plaques

Dans cet exposé, on ne s'intéresse qu'à la deuxième phase; on suppose donc la charpente déjà conçue.

La phase d'habillage doit respecter les deux types de contraintes suivantes:

a. Contraintes Géométriques

La forme des plaques à poser peut être très variée. Les plaques peuvent être quasiment planes (par exemple sur le flanc d'un bateau ou sur le dessus d'une aile d'avion) ou bien plus complexes (celles qui constituent le nez d'un avion ou celles situées à proximité de la proue). Ces plaques doivent également respecter des contraintes de continuité géométrique. En effet l'ajustement des plaques ne doit pas perturber l'écoulement des fluides (air, eau). Les raccordements transversaux à la direction de l'écoulement doivent donc respecter des conditions particulières (continuité du plan tangent, des courbures, etc.).

b. Contraintes de Fabrication

Pour des raisons économiques et de facilité de fabrication, il est nécessaire que ces plaques soient mises en forme sans emboutissage, ni étirement, ni moulage. Par conséquent, il est souhaitable que les seules opérations effectuées soient:

- le découpage de la tôle dans le plan,
- la mise en forme par enroulement,
- la pose et la fixation sur le support.

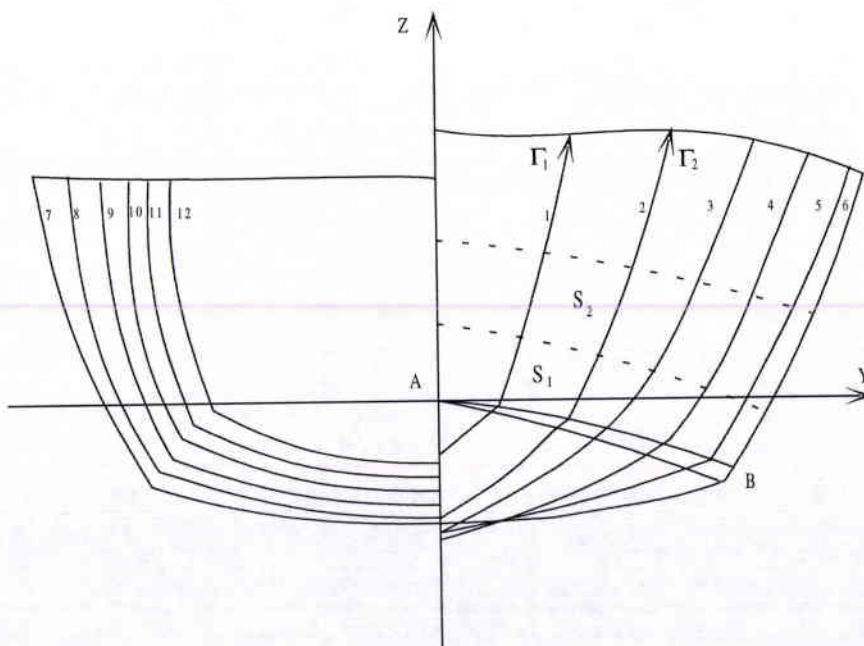
Cette définition de plaque correspond à *la définition mathématique de surface développable*. Dans la suite de l'exposé, n'est envisagé que l'aspect modélisation mathématique des plaques. Définissons, à l'aide de l'exemple d'une coque de navire, la position du problème.

Soient deux courbes spatiales données: $u \rightarrow \Gamma_1(u)$ et $u \rightarrow \Gamma_2(u)$. Elles représentent par exemple deux courbes de support consécutives sur la coque. Elles peuvent être transversales (cf. figure-a), longitudinales (cf. figure-b) ou autres (cf. figure-c). **Le but est de définir une suite de plaques S_i qui s'appuient sur $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$.** Ces plaques peuvent être représentées par une définition paramétrique:

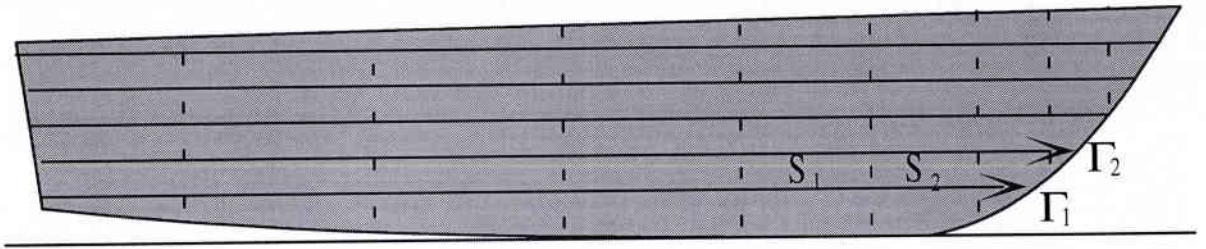
$$(u,v) \rightarrow S_i(u,v).$$

Pour l'ensemble de notre travail, ces plaques doivent vérifier les propriétés suivantes:

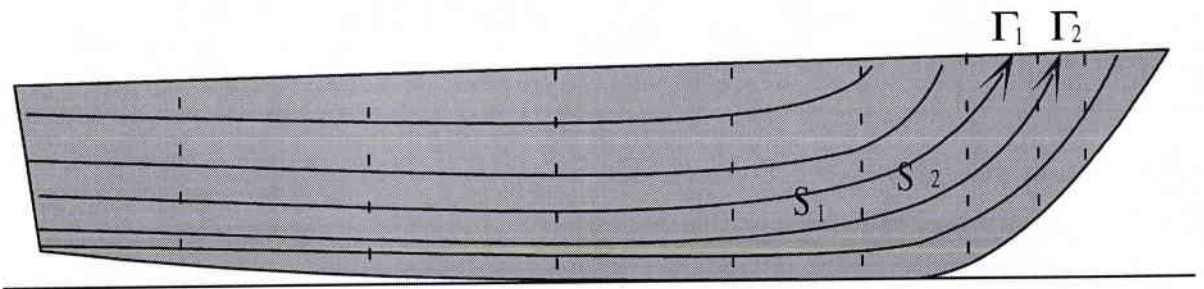
- ❶ Chaque plaque doit être **une surface développable**.
- ❷ Le raccordement entre deux surfaces consécutives doit présenter **une continuité géométrique d'ordre deux (CG^2)**, c'est à dire la continuité du plan tangent, la continuité des courbures et des directions principales de courbure (cf. plaques S_1 et S_2 de la figure-d).
- ❸ Chaque plaque doit être **un carreau de Bézier**.



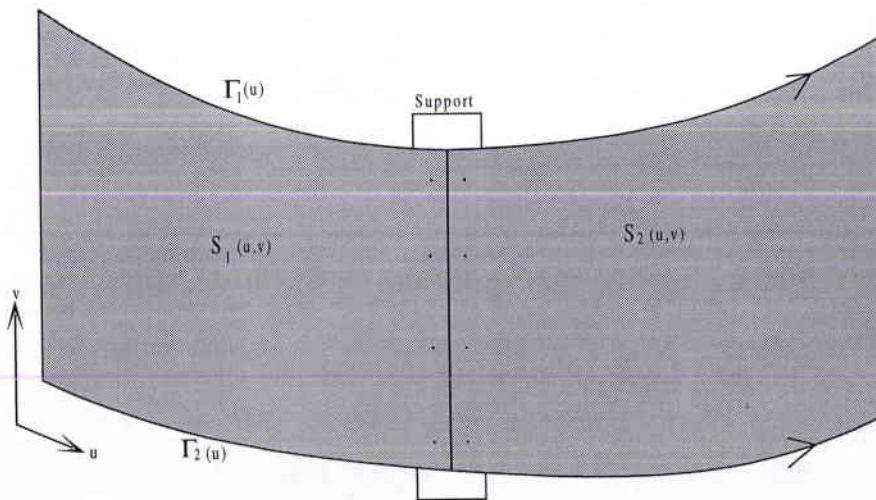
(a) Division de Longueur du Bateau



(b) Division de Hauteur du Bateau



(c) Division du Côté du Bateau



(d) Maquette Entre Deux Surface

Techniques de Division du Corps du Bateau

La dernière propriété est imposée pour des raisons de compatibilité avec les modèles surfaciques utilisés dans les systèmes de CAO, car les carreaux de Bézier constituent un modèle standard et bien maîtrisé de définition de surface. Les propriétés (❶) et (❸) sont contradictoires dans le cas général, car contrairement aux carreaux de Bézier, les surfaces développables ne sont généralement pas polynomiales. Donc, il faut trouver un compromis entre le caractère polynomial et le caractère développable. *L'objet de cette thèse est de définir les surfaces S_i qui satisfassent la contrainte (❷) et réalisent le meilleur compromis possible entre les contraintes (❶) et (❸).*

Finalement, nous introduisons le plan de la thèse suivante:

- **le chapitre-I** présente la position du problème de modélisation mathématique des plaques.
- **le chapitre-II** introduit l'étude générale et l'état de l'art sur les surfaces développables.
- **le chapitre-III** propose une recherche de la condition suffisante de régularité et présente une classification tous les types de surface développable.
- **le chapitre-IV** présente une méthode de construction des surfaces développables régulières à l'aide des carreaux de Bézier.
- **le chapitre-V** montre les équations qui caractérisent la continuité géométrique d'ordre-0,1,2 ($CG^{0,1,2}$) du problème de raccordement entre deux carreaux de Bézier développables réguliers adjacents.
- **le chapitre-VI** propose la conclusion générale et met en évidence des intérêts des méthodes proposées.

CHAPITRE II

ETUDE GENERALE ET ETAT DE L'ART SUR LES SURFACES DEVELOPPABLES

Dans la pratique, chaque objet est en général obtenu à partir de plusieurs types de construction. Il est en effet difficile de trouver une définition de courbe ou de surface qui permet de le réaliser avec une seule méthode. Pour cela, pour obtenir une solution satisfaisante et le meilleur compromis possible pour le problème présenté, nous discutons d'abord dans ce chapitre les sujets suivants:

Premièrement, nous rappelons la représentation des formes de courbe et de surface qui sont souvent utilisées en CFAO, en particulier les courbes et les surfaces non rationnelles de Bézier et B-splines.

Deuxièmement, nous parlons sur un plan fondamental des surfaces développables. Dans cette étude, on a deux objectifs. *D'abord*, concernant le problème de construction de surface développable, on va poser une définition mathématique de cette surface. *Ensuite*, pour traiter la continuité $CG^{1,2}$ de la surface, on a besoin de résumer et formuler la propriété géométrique locale de cette surface.

Troisièmement, nous introduisons l'état de l'art des surfaces développables lié à la méthode de construction, de raccordement et de développement de la surface sur le plan. Le but est de présenter les avantages et les inconvénients des méthodes dans leurs applications en CFAO. L'évaluation apportée ici permet de développer ou de choisir une meilleure méthode pour traiter le problème de la thèse.

Finalemment, grâce à ces études, nous proposons une solution au problème de la thèse.

2.1 Courbe et Surface de Bézier et B-Spline

Nous rappelons rapidement dans cette partie les propriétés des courbes et des surfaces de Bézier et B-splines.

2.1.1 Courbe et Surface de Bézier

a) Courbe de Bézier

La courbe non rationnelle de Bézier de degré n s'écrit sous la forme:

$$c(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad \text{et } 0 \leq t \leq 1 \dots\dots\dots(1)$$

où: $B_i^n(t) = C_i^n (1-t)^{n-i} \cdot t^i$ et $C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Dans cette équation, les points P_i s'appellent **coefficient géométrique (point de contrôle)** de courbe $C(t)$. Ils sont de valeur réelle.

Propriétés

Pour tout $t \in [0,1]$, la courbe a des propriétés:

❶ **invariant Affine**: soit f une application affine de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , alors

$$f(c(t)) = \sum_{i=0}^n f(P_i) B_i^n(t)$$

❷ **convexe** et $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$

❸ **positive**: $B_i^n(t) \geq 0; \forall i = 0, \dots, n$

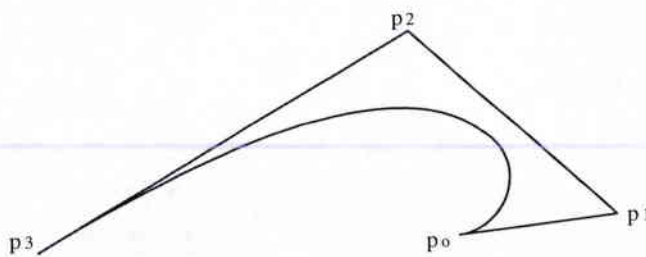


Figure-1 : Courbe Cubique de Bézier

❹ **linéaire**: $B_i^n(t) = t B_{i-1}^{n-1}(t) + (1-t) B_i^{n-1}(t)$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$.

$$B_0^n(t) = (1-t) B_0^{n-1}(t) \quad \text{et} \quad B_n^n(t) = t B_{n-1}^{n-1}(t)$$

Dérivées

La dérivée d'ordre r de la courbe $C(t)$, notée $C^{(r)}(t)$, a l'expression:

$$C^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} (\Delta^r P_i) B_i^{n-r}(t) \dots \dots \dots (2)$$

où:

$$\Delta^0 P_i = P_i$$

$$\Delta^1 P_i = (P_{i+1} - P_i)$$

$$\Delta^2 P_i = (P_{i+2} - 2 P_{i+1} + P_i)$$

.....

$$\Delta^{(r)} P_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} C_j^r P_{i+r-j}.$$

b) Surface de Bézier

La surface non rationnelle de Bézier de degré m, n s'exprime par le produit tensoriel comme suit:

$$S(u, v) = \sum_{i,j=0}^{m,n} P_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v); 0 \leq u, v \leq 1 \dots \dots \dots (3)$$

Les propriétés de cette surface sont identiques à celles de la courbe de Bézier.

2.1.2 Courbe et Surface B-Spline

a) Courbes B-Splines

La courbe non rationnelle B-spline d'ordre k sur les noeuds:

$$[t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t_{n+1} \dots < t_{n+k}]$$

s'écrit sous la forme:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^k(t) \text{ et } n \geq k-1, \dots \dots \dots (4)$$

Les coefficients P_i s'appellent points de contrôle ou points de de-Boor. Pour B-spline normalisé, le polynôme de base $N_i^k(t)$ a des propriétés ci-après:

❶ **partition de l'unité:** $\sum_{i=0}^{n-k} N_i^k(t) \equiv 1;$

② **positive:** $N_i^k(t) > 0$; pour $t \in [t_i, t_{i+k}]$;

③ **support local:** $N_i^k(t) = 0$, si $t \notin [t_i, t_{i+k}]$;

④ **continue:** $N_i^k(t)$ est d'ordre k et continu C^{k-2} en chaque noeud;

⑤ **réursive:**

$$N_i^k(t) = (t - t_i) \frac{N_i^{k-1}(t)}{(t_{i+k-1} - t_i)} + (t_{i+k} - t) \frac{N_{i+1}^{k-1}(t)}{(t_{i+k} - t_{i+1})} \dots \dots \dots (5)$$

où:

$$N_i^1(t) = 1, \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}];$$

$$0, \text{ si } t \notin [t_i, t_{i+1}].$$

Propriétés des Courbes B-Splines

En plus des propriétés de courbe de Bézier, la courbe B-spline a les propriétés suivantes:

- ① la propriété locale concernant les changements des points de contrôle,
- ② la multiplicité des points de contrôle ou des noeud influence la continuité de cette courbe.

Algorithme de de-Boor

L'algorithme de de-Boor est aux courbes B-splines ce que l'algorithme de Casteljau est aux courbes de Bézier. Il permet d'évaluer la position en un point courant d'une courbe et de les subdiviser en courbes de même degré.

Pour évaluer la courbe en valeur $t = s \in [t_r, t_{r+1}]$, on détermine d'abord l'équation d'insertion qui est calculée par l'équation (4) et la propriété (⑤). On trouvera l'expression:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n+j} P_i^j(t) N_i^{k-j}(t); \text{ avec } j = 0, \dots, (k-1)$$

Dans cette forme, les points de de-Boor s'expriment sous la forme d'interpolation linéaire réursive:

$$P_i^j = (1 - \alpha_i^j) P_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j P_i^{j-1} \text{ avec } \alpha_i^j = \frac{s - t_i}{t_{i+k-j} - t_i} \text{ et } P_i^0 = P_j.$$

Si $k = j+1$, nous trouverons la base N_r^1 . Cela signifie que, pour $t = s \in [t_r, t_{r+1}]$, on obtient:

$$Q(s) = P_r^{k-1}.$$

b) Surfaces B-Splines

La surface non rationnelle B-spline d'ordre k et l , s'exprime sous la forme du produit de tenseur:

$$R(u, v) = \sum_{i,j=0}^{m,n} P_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v) \dots\dots\dots(6)$$

Les propriétés de cette surface sont analogues de la courbe B-Spline.

2.2 Etude Générale sur les Surfaces Développables

Toutes les surfaces développables sont une certaine classe (sous-classe) de surface réglée qui est engendrée par une droite déplacée sur une courbe dans l'espace. Elles ont une particularité, car elles peuvent être développées *isométriquement* sur un plan sans force, ni étirement.

Dans cette partie, nous présenterons la définition mathématique et les propriétés locales des surfaces développables. Pour cela, nous commençons d'abord par l'étude des propriétés locales d'une surface paramétrée: l'équation de courbure principale et de paraboloïde osculateur. On discute, ensuite, la quantité de courbure gaussienne, l'équation de Weingarten et l'expression de Olinde Rodrigues d'une surface régulière $S(u,v)$. Celles-ci permettent de caractériser les normales le long d'une génératrice d'une surface de courbure gaussienne nulle, c'est à dire une surface développable. Plus tard, après avoir défini une surface réglée développable, on calcule la courbure moyenne et la forme locale de la surface qui s'écrit sous la forme d'équation de paraboloïde osculateur. Enfin, nous proposons une synthèse de cette discussion.

Cette partie assez théorique est indispensable pour situer les outils et les concepts mathématiques utiles pour la suite de notre travail.

2.2.1 Courbure Principale de Surface Paramétrée

Supposons un point M_0 sur une surface paramétrée $S(u,v)$ avec son plan tangent en ce point, soit V_0 . Si le point M_0 se déplace vers le point $M_0 + d\mathbf{r}$ sur cette surface, on a alors la quantité scalaire, notée ds , de vecteur d'approximation du vecteur $d\mathbf{r}$ qui se trouve dans V_0 avec l'origine du point de départ M_0 suivant:

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \approx ds^2$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= [S^u(u_0,v_0) du + S^v(u_0,v_0) dv] \cdot [S^u(u_0,v_0) du + S^v(u_0,v_0) dv] \\ &= |S^u(u_0,v_0)|^2 du^2 + 2 [S^u(u_0,v_0) \cdot S^v(u_0,v_0)] du dv + |S^v(u_0,v_0)|^2 dv^2 \end{aligned}$$

ou encore:

$$ds^2 = e du^2 + 2 f du dv + g dv^2 \dots\dots\dots(7)$$

où: $e = |S^u(u_0,v_0)|^2$, $f = [S^u(u_0,v_0) \cdot S^v(u_0,v_0)]$, $g = |S^v(u_0,v_0)|^2$.

L'équation (7) s'appelle "**Première Forme Fondamentale de Gauss**".

Si $S^u(u_0,v_0)$ et $S^v(u_0,v_0)$ sont orthogonaux, alors $f = 0$. D'autre part, la normale unitaire orientée au point M_0 de cette surface s'exprime par :

$$\mathbf{n}_s(u_0,v_0) = [S^u(u_0,v_0) \wedge S^v(u_0,v_0)] / |S^u(u_0,v_0) \wedge S^v(u_0,v_0)|$$

Considérons une courbe Γ sur la surface $S(u,v)$ et elle passe par le point M_0 avec \mathbf{t} son vecteur unité tangentiel en ce point. D'où, le vecteur \mathbf{t} est orthogonal au vecteur normal unité \mathbf{n}_s de la surface, c'est à dire : $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_s = 0$. En dérivant par rapport à la longueur d'arc s de la courbe Γ , on obtient alors:

$$d\mathbf{t} / ds \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{t} \cdot d\mathbf{n}_s / ds = 0,$$

$$[\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{n}_s] + \mathbf{t} \cdot d\mathbf{n}_s / ds = 0$$

ou:

$$[(\kappa_c \mathbf{n}_c) \cdot \mathbf{n}_s] + \mathbf{t} \cdot d\mathbf{n}_s / ds = 0 \dots\dots\dots(8)$$

où \mathbf{k}_c , κ_c , et \mathbf{n}_c sont respectivement *le vecteur de courbure, la courbure et le vecteur normal unité* de cette courbe en M_o . Si la quantité $\kappa_n = [\mathbf{k}_c \cdot \mathbf{n}_s]$ exprime *la courbure normale*, c'est à dire la projection du vecteur de courbure \mathbf{k}_c de cette courbe au vecteur normal unité \mathbf{n}_s de cette surface au point M_o , on peut donc simplifier la forme (8) de manière:

$$\kappa_n = \kappa_c \cos \varphi = - \mathbf{t} \cdot d\mathbf{n}_s/ds = - (d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{n}_s)/ds^2 \dots\dots\dots(9)$$

L'angle φ est l'angle formé entre le vecteur normal unité de la surface et le vecteur normal principal de la courbe Γ . En substituant l'équation (7) dans l'équation (9), on trouve:

$$\kappa_n = \kappa_c \cos \varphi = (E du^2 + 2 F du dv + G dv^2) / [e du^2 + 2 f du dv + g dv^2] \dots\dots\dots(10)$$

où:

$$E = - \mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^u,$$

$$F = - 1/2 (\mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^v + \mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^u),$$

$$G = - \mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^v.$$

La quantité $E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$ s'appelle "**Deuxième Forme Fondamentale de Gauss**".

La forme (10) indique que κ_n est une application de variable du et dv . Il dépend uniquement de proportion $du : dv$, à savoir la direction de droite tangente de la courbe au point M_o .

Remarque: Les différentielles $\mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s = 0$ et $\mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s = 0$ donnent quatre équations:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{uu} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^u &= 0 & \mathbf{s}^{vu} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^u &= 0 \\ \text{et} & & & \\ \mathbf{s}^{uv} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^v &= 0 & \mathbf{s}^{vv} \cdot \mathbf{n}_s + \mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^v &= 0 \end{aligned}$$

Or, les coefficients E , F et G peuvent s'exprimer par:

$$E = \mathbf{s}^{uu} \cdot \mathbf{n}_s \quad F = \mathbf{s}^{uv} \cdot \mathbf{n}_s \quad G = \mathbf{s}^{vv} \cdot \mathbf{n}_s \dots\dots\dots(11)$$

Considérons tous les plans passant par le point M_0 sur la surface $S(u,v)$ et contenant \mathbf{n}_s . Alors, les normales de courbes d'intersection entre ces plans et la surface sont parallèles à \mathbf{n}_s . Soit Γ_1 une courbe passant par le point M_0 . On appelle "**section normale**" de la courbe Γ_1 en M_0 sur une surface, toute la section arbitraire du plan passant par la normale \mathbf{n}_s au point M_0 et ayant la même tangente que la courbe Γ_1 . Dans ce cas, notons: κ_c est la *courbure de la courbe* Γ_1 et ρ est la *courbure de la section normale*. Puisque toutes les courbes ont la même tangente, l'équation (10) donne alors:

$$\kappa_n = \kappa_c \cos \varphi = \pm \rho$$

Donc, on a le théorème de **Meusnier** suivant:

Théorème-1: toutes les courbes qui ont la même droite tangente au point M_0 sur une surface, ont la même courbure normale en ce point. Concrètement, la valeur de la courbure normale au point M_0 de la courbe Γ_1 sur une surface est égale à la courbure de la section normale qui passe par la tangente de la courbe en ce point.

De l'équation (10), on peut déduire que tous les courbures normales κ_n de courbes sur une surface avec la direction d sur le plan tangent vérifient:

$$(\kappa_n e - E) du^2 + 2 (\kappa_n f - F) du dv + (\kappa_n g - G) dv^2 = 0 \dots\dots\dots(12)$$

Si $t = du/dv$ et $t^* = dv/du$ expriment les directions tangentielles de la section normale, alors cette équation peut s'écrire par:

$$Q(\kappa_n, t) = A t^2 + 2 B t + C = 0$$

et

$$Q(\kappa_n, t^*) = A + 2 B t^* + C t^{*2} = 0$$

où: $A = (\kappa_n e - E)$ $B = (\kappa_n f - F)$

$$C = (\kappa_n g - G)$$

En dérivant respectivement ces deux équations par rapport à t et t^* , on trouve:

$$(\kappa_n e - E) du + (\kappa_n f - F) dv = 0$$

$$(\kappa_n f - F) du + (\kappa_n g - G) dv = 0 \dots\dots\dots(13)$$

Ce système possède des solutions non nulles si et seulement si:

$$\begin{vmatrix} \kappa_n e - E & \kappa_n f - F \\ \kappa_n f - F & \kappa_n g - G \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

Celle-ci est l'équation de second degré en κ_n . Les solutions sont les valeurs extrêmes qui ont deux différentes courbures principales κ_1 et κ_2 ou bien la courbure principale unique de second multiplicité, à savoir la courbure au point ombilique. Donc, on a le théorème suivant:

Théorème-2: La quantité κ est la courbure principale si et seulement si κ est la solution de l'équation:

$$[eg - f^2] \kappa^2 - [eG - 2fF + gE] \kappa + [EG - F^2] = 0 \dots\dots\dots(15)$$

Les deux directions par rapport à la solution d'équation (15) s'appellent "*directions principales*".

Considérons la surface $S(u,v)$ de classe C^2 avec son plan tangent au point $M_0 = S(u_0, v_0)$ soit V_0 et son vecteur normal unité n_s . On a le **développement de Taylor** au voisinage de $S(u_0, v_0)$:

$$S(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) = S(u_0, v_0) + [S^u(u_0, v_0) \Delta u + S^v(u_0, v_0) \Delta v] +$$

$$1/2! [S^{uu}(u_0, v_0) \Delta u^2 + 2 S^{uv}(u_0, v_0) \Delta u \Delta v + S^{vv}(u_0, v_0) \Delta v^2] +$$

$$O(\Delta u^2 + \Delta v^2).$$

Or, la distance algébrique δ , du point $P = S(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$ au plan tangent V_0 est donnée par (cf. figure-2):

$$\delta = \Delta S \cdot \mathbf{n}_s = [S(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - S(u_0, v_0)] \cdot \mathbf{n}_s$$

$$= 1/2 [S^{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n}_s \Delta u^2 + 2 S^{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n}_s \Delta u \Delta v + S^{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{n}_s \Delta v^2] + o(\Delta u^2 + \Delta v^2).$$

On a alors:

$$\delta = 1/2 (E \Delta u^2 + 2 F \Delta u \Delta v + G \Delta v^2) + o(\Delta u^2 + \Delta v^2) \dots\dots\dots(16)$$

où:

$$E = S^{uu} \cdot \mathbf{n}_s \quad F = S^{uv} \cdot \mathbf{n}_s \quad G = S^{vv} \cdot \mathbf{n}_s$$

Les coefficients E, F et G sont caractérisés comme les coefficients de la deuxième forme fondamentale de Gauss [cf. l'équation (11)]

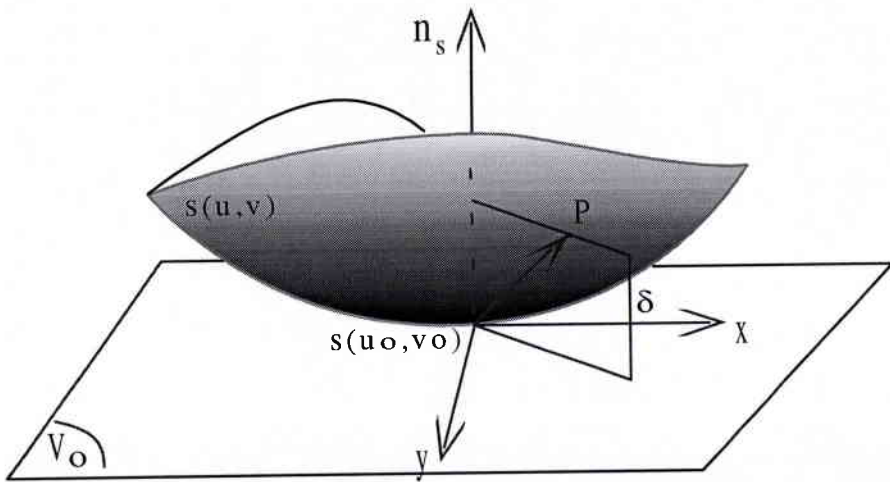


Figure-2 : Repère Local

Soit maintenant dans ce plan tangent, on considère le vecteur X dans la direction $S^u(u_0, v_0)$; le vecteur Y dans la direction $S^v(u_0, v_0)$, et $\mathbf{n}_s(u_0, v_0)$ son vecteur normal au point $S(u_0, v_0)$. Dans le repère d'origine $S(u_0, v_0)$ et d'axe $[S^u(u_0, v_0), S^v(u_0, v_0), \mathbf{n}_s(u_0, v_0)]$, on peut donc confondre localement la surface avec la surface qui s'écrit sous la forme d'équation de **paraboloïde osculateur** suivante:

$$z = 1/2 (E x^2 + 2 F x y + G y^2) \dots\dots\dots(17)$$

2.2.2 Propriétés Locales des Surfaces Développables

Nous avons vu que les valeurs de courbures principales de surface régulière $S(u,v)$ sont déterminées par l'équation (15), à savoir:

$$[eg - f^2] \kappa^2 - [eG - 2fF + gE] \kappa + [EG - F^2] = 0.$$

Un calcul de cette équation avec $\kappa^2 - [\kappa_1 + \kappa_2] \kappa + [\kappa_1 \cdot \kappa_2] = 0$ conduit à:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = [EG - F^2] / [eg - f^2] \dots \dots \dots (18)$$

$$H = 1/2 \cdot [\kappa_1 + \kappa_2] = 1/2 \cdot [eG - 2fF + gE] / [eg - f^2] \dots \dots \dots (19)$$

Le terme $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ est appelé **courbure gaussienne**, tandis que $H = 1/2 \cdot [\kappa_1 + \kappa_2]$ est dit **courbure moyenne**. Dans le cas $K > 0$, le point $M_o \in S(u,v)$ considéré est appelé **point elliptique**. Si $K < 0$, le point M_o s'appelle **point hyperbolique**. Enfin, si $\kappa_1 = 0$ ou $\kappa_2 = 0$, et K s'annule, le point M_o est appelé **point parabolique**. Dans le cas particulier où K et H s'annulent simultanément, on parle **d'un point plat**.

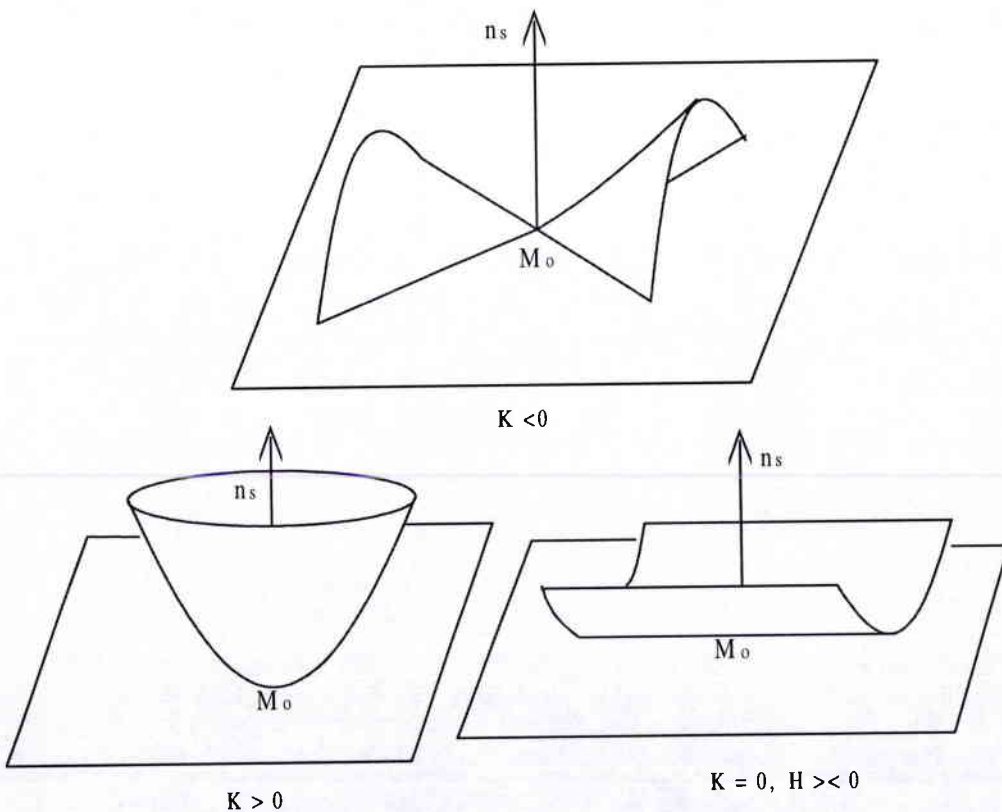


Figure-3 : Types de Point sur une Surface

Considérons une courbe $\Gamma(t) = S(u(t), v(t))$ sur la surface $S(u, v)$ et \dot{t} son *vecteur tangentiel* au point M_0 est sous la forme: $\dot{t} = S^u du + S^v dv$. En ce point, la différentielle du vecteur normal \mathbf{n}_s est $d\mathbf{n}_s = \mathbf{n}_s^u du + \mathbf{n}_s^v dv$. Puisque \mathbf{n}_s^u et \mathbf{n}_s^v sont dans le plan tangent au point M_0 de cette surface, alors on peut les écrire sous la forme de la combinaison linéaire $[S^u, S^v]$ de manière:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_s^u &= a_{11} S^u + a_{21} S^v \\ \mathbf{n}_s^v &= a_{12} S^u + a_{22} S^v \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(20)$$

D'autres part, dans la même base $[S^u, S^v]$, la deuxième forme fondamentale de gauss est donnée par l'expression (10), c'est à dire : $E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$ avec $E = -S^u \cdot \mathbf{n}_s^u$, $F = -1/2 (S^u \cdot \mathbf{n}_s^v + S^v \cdot \mathbf{n}_s^u)$, $G = -S^v \cdot \mathbf{n}_s^v$. Puisque pour toute la valeur (u, v) , les vecteurs S^u et S^v sont orthogonaux à \mathbf{n}_s , on a donc:

$$\begin{aligned} (S^u \cdot \mathbf{n}_s)^u &= 0 \Rightarrow -E = a_{11} e + a_{21} f \quad \dots\dots\dots(21) \\ (S^v \cdot \mathbf{n}_s)^u &= 0 \Rightarrow -F = a_{11} f + a_{21} g \\ (S^u \cdot \mathbf{n}_s)^v &= 0 \Rightarrow -F = a_{12} e + a_{22} f \\ (S^v \cdot \mathbf{n}_s)^v &= 0 \Rightarrow -G = a_{12} f + a_{22} g \end{aligned}$$

où e , f et g sont les coefficients de la première forme fondamentale de gauss qui sont trouvés dans l'expression (7). Sous la forme matricielle, ce système peut s'écrire par:

$$-\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

On trouve donc les coefficients pour l'équation (20) comme suit:

$$\begin{aligned} a_{11} &= [fF - gE] / [eg - f^2], & a_{12} &= [fG - gF] / [eg - f^2], \\ a_{21} &= [fE - eF] / [eg - f^2], & \text{et} & & a_{22} &= [fF - eG] / [eg - f^2]. \end{aligned}$$

L'expression (20) ci-dessus est appelée *équation de Weingarten*.

Réécrivons les coefficients de la première et deuxième forme fondamentale de gauss:

$$\begin{aligned}
 e &= \mathbf{s}^u \cdot \mathbf{s}^u & E &= -(\mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^u), \\
 f &= \mathbf{s}^u \cdot \mathbf{s}^v & F &= -(\mathbf{s}^u \cdot \mathbf{n}_s^v) = -(\mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^u), \\
 g &= \mathbf{s}^v \cdot \mathbf{s}^v & G &= -(\mathbf{s}^v \cdot \mathbf{n}_s^v).
 \end{aligned}$$

D'ailleurs, nous avons le système pour calculer les courbures principales dans la forme:

$$\begin{aligned}
 (\kappa e - E) du + (\kappa f - F) dv &= 0 \\
 \text{et} \\
 (\kappa f - F) du + (\kappa g - G) dv &= 0.
 \end{aligned}$$

De ces quantités, nous trouverons le système suivant:

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{n}_s^u du + \mathbf{n}_s^v dv) + \kappa \cdot (\mathbf{s}^u du + \mathbf{s}^v dv)] \cdot \mathbf{s}^u &= 0 \\
 [(\mathbf{n}_s^u du + \mathbf{n}_s^v dv) + \kappa \cdot (\mathbf{s}^u du + \mathbf{s}^v dv)] \cdot \mathbf{s}^v &= 0
 \end{aligned}$$

ou

$$[\mathbf{d}\mathbf{n}_s + \kappa \cdot \mathbf{d}\mathbf{S}] \cdot \mathbf{s}^u = 0 \text{ et } [\mathbf{d}\mathbf{n}_s + \kappa \cdot \mathbf{d}\mathbf{S}] \cdot \mathbf{s}^v = 0$$

Puisque $[\mathbf{d}\mathbf{n}_s + \kappa \cdot \mathbf{d}\mathbf{S}]$ est parallèle au plan tangent au point M_0 et les vecteurs $[\mathbf{s}^u, \mathbf{s}^v]$ sont indépendants, on trouve alors $[\mathbf{d}\mathbf{n}_s + \kappa \cdot \mathbf{d}\mathbf{S}] = 0$, à savoir:

| |
|---|
| $ \mathbf{d}\mathbf{n}_s = -\kappa \cdot \mathbf{d}\mathbf{S} \dots\dots\dots(22) $ |
|---|

Cela veut dire que, dans la direction de la direction principale, le vecteur $\mathbf{d}\mathbf{n}_s$ est parallèle au vecteur $\mathbf{d}\mathbf{S}$. Cette expression s'appelle *équation de Rodrigues*.

Dans la suite de cette équation, nous étudions les propriétés locales d'une surface de courbure gaussienne nulle. Nous les présentons comme suit.

Supposons que, sur la surface $S(u,v)$ qui contient un point M_0 , la courbure gaussienne $K = \kappa_1 \kappa_2 \equiv 0$. Puisque $K = [EG - F^2] / [eg - f^2] \equiv 0$, on a $[EG - F^2] = 0$. Si la courbure moyenne $H \neq 0$, alors chaque point sur cette surface est **un point parabolique avec une seule direction asymptotique** $du : dv$. Il vérifie l'équation: $E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (\sqrt{E} du + \sqrt{G} dv)^2 = 0$. Donc, au voisinage de point M_0 , cette équation exprime **une famille des droites asymptotiques** d'un paramètre où dans ce cas, on peut la supposer comme les courbes de paramètre v avec $u = \text{constant}$. Notons que, en ce point parabolique, la direction asymptotique coïncide avec la direction principale et, alors, les courbes de paramètre v sont aussi les droites de courbures. On démontre que, pour tous les points sur ces courbes, leurs normales sont constantes. D'abord, le long de ces courbes, nous avons $du = 0$ et $(\sqrt{G} dv) = 0$. Puisque $dv \neq 0$, on trouve $G = 0$. D'ailleurs, avec $[EG - F^2] = 0$, on obtient $F = 0$. On a donc: $G \equiv F \equiv 0$. Si on les substitue à l'équation de Weingarten, on trouvera $\mathbf{n}_s^v = 0$. Cela veut dire que, le long de chaque courbe de paramètre v , la normale est constante. Plus tard, puisque ces courbes sont aussi les lignes de courbure, on obtient, de l'équation de Rodrigues, $\mathbf{n}_s^v = -\kappa S^v$ et, alors $\kappa = 0$. En effet, grâce à la forme: $\mathbf{n}_s^v = 0$ et $\kappa = 0$, le voisinage du point M_0 forme **une surface développable** et toutes les courbes de paramètre v sont **sous la forme de droite (génératrice)**. D'ailleurs, pour tous les points sur ces droites, **les normales sont constantes**. On a donc le théorème suivant:

Théorème-3: Si la courbure gaussienne d'une surface n'ayant pas un point plat pour l'ordre $n \geq 3$ est identiquement nulle, alors tous les voisinages de chaque point sur la surface sont les surfaces développables.

2.2.3 Surfaces Réglées Développables

Une surface réglée engendrée par **une courbe directrice** $f(u)$ est l'ensemble des points $X = f(u) + v g(u)$, c'est à dire une droite qui s'appelle **génératrice**. Cette surface, ensuite, s'exprime sous la forme:

$$S(u,v) = f(u) + v g(u).$$

D'autre part, les vecteurs dérivés partiels de la surface sont:

$$S^u(u,v) = f'(u) + v g'(u) \quad \text{et} \quad S^v(u,v) = g(u)$$

D'où, le plan tangent P_t au point $M_0 = S(u_0, v_0)$ sur la génératrice est engendré par le vecteur:

$$S^u(u_0, v_0) = f'(u_0) + v_0 g'(u_0) \quad \text{et} \quad S^v(u_0, v_0) = g(u_0).$$

Le résultat précédemment établi, exprime que, pour toute la surface développable, la normale en tout point sur chaque génératrice est constante. Autrement dit, le long d'une génératrice, le plan tangent doit être unique. Pour cela, une surface développable peut être définie par une surface réglée suivante. **Une surface réglée $S(u, v)$ est dite développable, si et seulement si les trois vecteurs $[g'(u), f'(u), g(u)]$ sont dépendants (liés), à savoir:**

$$\det(g', f', g) = 0 \quad \text{ou} \quad [g' \wedge f' \cdot g] = 0.$$

Soit maintenant une surface réglée développable régulière: $D(u, v) = f(u) + v g(u)$.
Etudions, ensuite, les propriétés géométriques locales par rapport à la courbure gaussienne, la courbure moyenne et le calcul de paraboloïde osculateur de la surface.
En utilisant l'expression:

$$|a \wedge b|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$$

on trouvera la normale unité de la surface:

$$\begin{aligned} n_D &= [D^u \wedge D^v] / |D^u \wedge D^v| \\ &= [(f' \wedge g) + v (g' \wedge g)] / [\sqrt{(e \cdot g - f^2)}] \end{aligned}$$

où e , f et g sont les coefficients de *la première fondamentale de Gauss* de la forme:

$$e = |f'|^2 + 2v(f' \cdot g') + v^2 |g'|^2$$

$$f = [f' \cdot g]$$

$$g = |g|^2 = 1.$$

D'autre part:

$$D^{uu} = f'' + v g'', \quad D^{uv} = g' \quad \text{et} \quad D^{vv} = 0.$$

Or, on obtient les coefficients de la deuxième fondamentale de Gauss:

$$E = D^{uu} \cdot n_D$$

$$= \frac{([f'' \cdot f' \wedge g] + v [f'' \cdot g' \wedge g] + v [g'' \cdot f' \wedge g] + v^2 [g'' \cdot g' \wedge g])}{[\sqrt{(e \cdot g - f^2)}]}$$

$$F = D^{uv} \cdot n_D = [g' \wedge f' \cdot g] / [\sqrt{(e \cdot g - f^2)}]$$

$$G = D^{vv} \cdot n_D = 0.$$

Puisque la surface $D(u,v)$ est développable, alors les trois vecteurs $[g', f', g]$ sont liés et vérifient l'expression $[g' \wedge f' \cdot g] = 0$, c'est à dire $F = 0$. En substituant les valeurs $F = 0$ et $G = 0$ dans l'expression de la quantité de courbure gaussienne:

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = [EG - F^2] / [eg - f^2],$$

on obtient $K = 0$. Donc, on a le théorème:

Théorème-4: En tout point régulier de surface développable, la courbure gaussienne est identiquement nulle.

D'ailleurs, puisque $F = G = 0$, les solutions pour l'équation des courbures principales:

$$[eg - f^2] \kappa^2 - [eG - 2fF + gE] \kappa + [EG - F^2] = 0,$$

sont données par:

$$\kappa_1 = [E/(e-f^2)] \quad \text{et} \quad \kappa_2 = 0.$$

Donc la courbure moyenne de la surface réglée développable s'exprime sous la forme:

$$\begin{aligned} H &= 1/2 [\kappa_1 + \kappa_2] = 1/2 \cdot \kappa_1 \\ &= 1/2 [E/(e-f^2)] \end{aligned}$$

ou:

$$H = \frac{g \cdot [f'' \wedge f'] + v \cdot g \cdot [f'' \wedge g' + g'' \wedge f'] + v^2 \cdot g \cdot [g'' \wedge g']}{2 [|f'|^2 + 2v(f' \cdot g') + v^2 |g'|^2 - (g \cdot f')^2]^{3/2}} \dots(23)$$

D'autre part, si on substitue ces coefficients de la deuxième fondamentale de Gauss dans l'équation (17), nous trouverons **l'équation de parabolôide osculateur** de surface développable:

$$z = 1/2 \cdot [E x^2] = (1/2) [D^{uu} \cdot n_D x^2] \dots\dots\dots(24)$$

2.2.4 Définitions et Propriétés des Surfaces Développables

On aboutit au résumé des définitions et des propriétés géométriques locales des surfaces développables ci-dessous:

- Une surface $S(u,v)$ est dite développable si et seulement si la courbure gaussienne sans un point plat de cette surface est identiquement nulle.
- Une surface réglée $S(u,v) = f(u) + v g(u)$ est dite développable, si et seulement si en tous les points sur chaque génératrice de la surface, les normales sont constantes (uniques). En d'autre terme, si et seulement si les trois vecteurs $[g'(u), f'(u), g(u)]$ sont liés, à savoir

$$\det(g', f', g) = 0 \text{ ou } [g' \wedge f' \cdot g] = 0.$$

- Le calcul de courbure moyenne et l'équation de parabolôide osculateur des surfaces développables $D(u,v) = f(u) + v g(u)$ sont déterminés respectivement par l'expression:

$$H = 1/2 [E/(e-f^2)] \quad \text{et} \quad z = 1/2 \cdot [E x^2]$$

2.3 Etat de l'Art sur les Surfaces Développables

Nous proposons dans cette partie une étude des différents travaux dans le domaine des surfaces développables. A partir des critiques que l'on peut formuler sur chaque méthode, nous en déduisons les aspects les plus intéressants pour notre problème.

2.3.1 Construction et Raccordement de Surface Développable

a) Méthode de Calcul Analytique

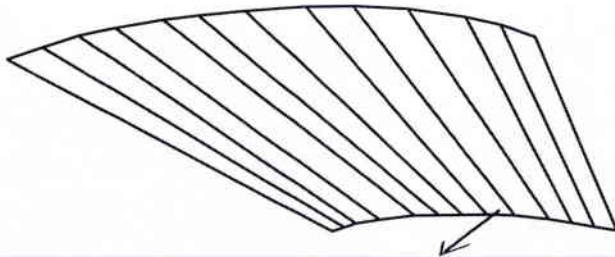
Ferris'68 construit une surface développable à partir de l'équation générale de plan sous la forme non paramétrique:

$$\Omega: Ax + By + Cz + D = 0$$

avec A, B, C et D constants réels. Ensuite, pour obtenir une famille d'enveloppes de plan de paramètre unique t, il présente cette équation de manière:

$$\Psi: z = F_1(t)x + F_2(t)y + F_3(t).$$

Le choix de la fonction F qui supporte l'existence de l'enveloppe de plan peut être polynomiale, trigonométrique ou transcendante. Dans cette méthode, il étudie uniquement la fonction F de polynôme quadratique.



$$\Psi: z = F_1(t)x + F_2(t)y + F_3(t)$$

Figure-4 : Suite de Plan de Paramètre Unique

D'où, soit données deux valeurs différentes t_1 et t_2 du paramètre t, on obtient une droite d'intersection de deux plans engendrés par le plan Ψ en faisant varier t de t_1 à t_2 . En général, si les valeurs t_i sont sous la forme d'une suite monotone avec des valeurs successives $[t_i, t_{i+1}]$ très proches, nous trouverons alors une suite des droites d'intersection de plans engendrées par le déplacement Ψ ou une famille d'enveloppes du plan, c'est à dire une surface développable (cf. figure-4).

Nolan'71 présente la méthode de construction d'une surface développable en cherchant les deux vecteurs normaux parallèles n_1 et n_2 aux points (cf. figure-5):

$$p_1 = (x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)}) \quad \text{et} \quad p_2 = (x_{(2)}, y_{(2)}, z_{(2)}).$$

Ceux-ci se trouvent respectivement sur la courbe de bord donnée $f_1(x_{(1)})$ et $f_2(x_{(2)})$. Le but de la recherche est de trouver la génératrice de la surface bordée approximativement par ces deux courbes. Le calcul est ci-après.

Supposons t_1 et t_2 soient respectivement le vecteur tangent de la courbe $f_1(x_{(1)})$ et $f_2(x_{(2)})$ au point p_1 et p_2 tels que:

$$n_1 = r \wedge t_1 \quad \text{et} \quad n_2 = r \wedge t_2.$$

Si en ces points on vérifie $n_1 // n_2$, cela signifie que le vecteur $r = (p_2 - p_1)$ se trouve dans le même plan Ψ avec t_1 et t_2 . En effet, le plan Ψ peut être considéré comme le plan tangent (unique) de surface développable et, alors, r exprime la génératrice de cette surface. Or, la condition pour trouver r s'écrit par:

$$|n_1 \wedge n_2| = |n_1| |n_2| \sin \phi = 0$$

ou

$$|(r \wedge t_1) \wedge (r \wedge t_2)| = 0.$$

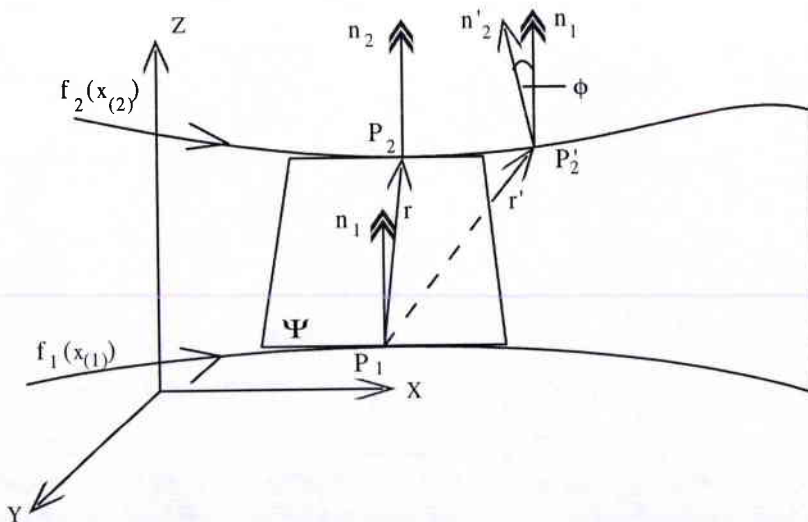


Figure-5: Génératrice de Surface Développable

Supposons, ensuite, le point $p_1 = (x_{(1)}, y_{(1)}, z_{(1)})$ fixé sur la courbe $f_1(x_{(1)})$, tandis que $y_{(2)}$ et $z_{(2)}$ sont l'application de variable $x_{(2)}$. Alors, cette condition peut être simplifiée de manière:

$$\sin \phi(x_{(2)}) = |\mathbf{n}_1 \wedge \mathbf{n}_2| / \{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|\}.$$

De cette forme, on peut donc déterminer r en détectant la valeur ϕ selon le choix de la valeur $x_{(2)}$. Dans ce traitement, pour trouver la solution x_0 , il propose la méthode d'itération de la droite tangente successive dans le plan $[\sin \phi(x_{(2)}), x_{(2)}]$. Malheureusement, cette méthode ne donne pas la garantie d'obtenir une surface développable, car le caractère de la forme $\sin \phi(x_{(2)})$ au voisinage x_0 est très variée et la solution est donc délicate à trouver.

En général, si les surfaces construites sont quasiment planes et naturelles, les deux méthodes présentées sont applicables, car elles peuvent se représenter facilement en une seule surface. Par contre, si les surfaces définies sont plus complexes, la construction avec une seule représentation est très difficile à réaliser, car on a besoin de traiter localement par morceau toutes les parties de cette surface.

b) Méthode de Quatre Points Coplanaires

Weiss'88 présente la méthode de construction des surfaces développables selon les étapes suivantes (cf. figure-6a):

- ❶ fixons deux courbes paramétriques $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ dans l'espace,
- ❷ prenons arbitrairement un point P sur la courbe $\Gamma_1(u)$ et deux points P_l et P_r à la gauche et à la droite du point P respectivement,
- ❸ comme l'étape (❷), fixons sur la courbe $\Gamma_2(u)$ les points: Q_l , Q et Q_r ,
- ❹ examinons, si P_l , P_r , Q_l et Q_r sont coplanaires, alors on garde les coordonnées de P et Q , les indices de la génératrice PQ et sinon,
- ❺ fixons "trois nouveaux points suivants": Q_l' , Q' , Q_r' et répétons (❹) jusqu'à ce qu'ils deviennent coplanaires,
- ❻ continuons l'étape (❷) pour "le point suivant" P sur $\Gamma_1(u)$.

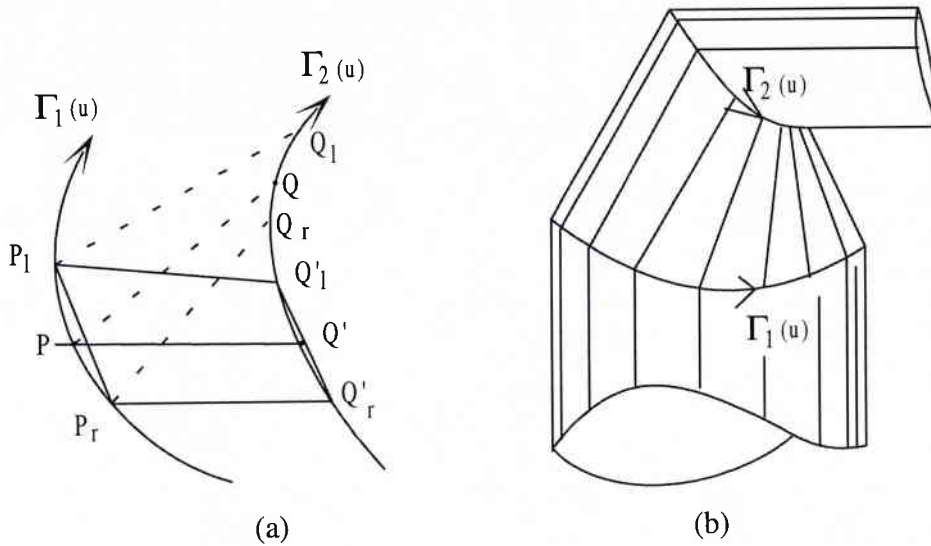


Figure-6 : Méthode de Quatre Points Coplanaires

Le but du calcul est de trouver une suite de génératrice paramétrée PQ_i telles qu'en tous points de chaque génératrice, les normales sont constantes. Ensuite, à partir de cette suite, on reconstruit une surface développable. Bien que cette méthode soit applicable pour lier et construire des surfaces développables à l'objet de la forme de tuyau (cf. figure-6b), elle a des inconvénients. Par exemple, dans l'étape (4) et (5), le calcul expérimental avec *étape par étape* pour trouver quatre points coplanaires (déterminant zéro) provoque des complexités, car il n'y a pas de garantie que, avec le choix du point P sur $\Gamma_1(u)$, on va trouver rapidement le point Q sur $\Gamma_2(u)$ qui vérifie la condition coplanaire. Ainsi qu'on doit changer un nouveau point P sur $\Gamma_1(u)$ et recommencer à chercher et à calculer un point Q sur $\Gamma_2(u)$.

c) Méthode d'Interpolation de Carreau de Bézier

Aumann'91 étudie la surface en utilisant le carreau de Bézier dans la forme d'interpolation de deux courbes de Bézier $C_1(u)$ et $C_2(u)$ de degré trois et quatre. Celles-ci se trouvent respectivement dans **deux plans parallèles particuliers**:

$$Y1: y1 = k1 \in \mathbb{R};$$

et

$$Y2: y2 = k2 \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad k1 \neq k2.$$

Par ailleurs, la projection du carreau dans le plan XOY doit être sous la forme rectangulaire. L'expression du carreau est donnée par:

$$S(u,v) = (1-v) C_1(u) + v C_2(u), 0 \leq u,v \leq 1$$

$$\text{avec: } C_1(u) = \sum_{i=0}^3 a_i B_i^3(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^4 b_i B_i^4(u)$$

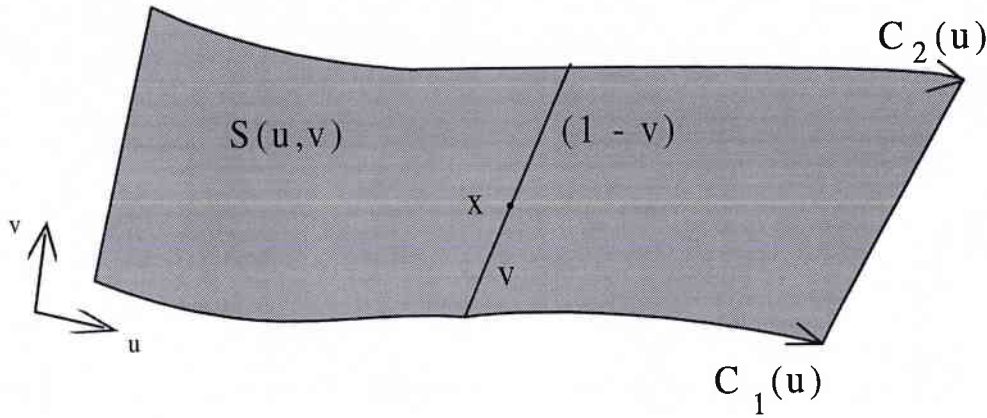


Figure-7 : Carreau d'Interpolation de Bézier

Pour obtenir le carreau développable, il propose d'abord la condition où, pour toute valeur $u \in [0,1]$, les deux vecteurs tangents $C_1'(u)$ et $C_2'(u)$ doivent être parallèles, c'est à dire:

$$C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u)$$

avec $\rho(u) = k u + h$, et $k, h \in \mathbb{R}$. En effet, sa solution est:

$$C_2(u) - b_0 = (k u + h) C_1(u) - k \int_0^u C_1(t) dt - h a_0 \dots\dots\dots(25)$$

Ensuite, en supposant tous les points de contrôle $[a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_4]$ donnés, il introduit le calcul des points de contrôle $[b_1, b_2, b_3]$ avec la condition (25). Dans ce cas, **pour obtenir la régularité du carreau, il pose: $\rho(u) > 0$.**

Dans le traitement de problème de raccordement géométrique $CG^{1,2}$ entre deux carreaux de Bézier développables régulières, Aumann utilise deux critères, à savoir la condition de mesure de plan tangent et de courbure du carreau le long de génératrice commune. Concrètement entre ces deux carreaux, leurs plans tangents doivent être uniques en tous les points sur la génératrice commune et, puis, leurs courbures doivent être égales le long de cette génératrice commune.

D'autre part, Frey'93 développe la méthode pour deux courbes de Bézier $C_1(u)$ et $C_2(u)$ de degré différent jusqu'aux n et $n+2$ et le scalaire $\rho(u)$ **quadratique de forme polynomiale de Bézier**. Ces courbes sont trouvées respectivement dans **deux plans parallèles différents de l'équation particulière**: $Y_1 : y_1 = k_1 \in \mathbb{R}$ et $Y_2 : y_2 = k_2 \in \mathbb{R}$ avec le contour du carreau dans le plan XOY sous la forme trapézoïde.

En général, les méthodes présentées ont beaucoup d'avantages pour des applications. D'abord, la représentation de surface sous la forme d'interpolation de courbes de bord de Bézier $[C_1(u), C_2(u)]$ a des propriétés naturelles. En effet, elle est très pratique et facile à utiliser pour la conception. La méthode du calcul est simple et on peut trouver et détecter directement le résultat du calcul et la forme de surface, grâce à la possibilité de choix et de changement des points de contrôle des courbes de bord. Pourtant, on trouve quelques particularités dans cette définition. Par exemple, le choix de degré des courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ et le choix de paramètre dans le scalaire réel $\rho(u)$ sont limités. En effet, à cause de ces contraintes, il est sûr qu'elle ne permet pas de traiter parfaitement à l'approximation d'une surface réglée donnée avec ce carré.

d) Méthode de Dualité

Bodduluri'93 présente cette méthode selon les termes suivants:

❶ *Dualité Entre les Points et les Plans dans l'Espace Projectif.*

- Les coordonnées homogènes de point (p, q, r, s) peuvent se considérer comme un point ou un plan dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 . Un point p défini par ces coordonnées est:

$$p = (x, y, z) = (p/s, q/s, r/s)$$

et un plan u se donne par:

$$u: p x + q y + r z = s.$$

En effet, le point p et le plan u sont duaux entre l'un et l'autre.

- Deux coordonnées homogènes $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ et $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ peuvent être considérées comme deux points ou deux plans. Deux points déterminent une droite, tandis que deux plans s'intersectent à une droite. Si on utilise interprétation de plan, on a une droite l de l'intersection de deux plans:

$$p: p_1 x + p_2 y + p_3 z = p_4$$

$$q: q_1 x + q_2 y + q_3 z = q_4$$

avec les coordonnées pluckeriens sous la forme:

$$l = \begin{Bmatrix} \alpha \wedge \beta \\ q_4 \cdot \alpha - p_4 \cdot \beta \end{Bmatrix}$$

où $\alpha = (p_1, p_2, p_3)$ et $\beta = (q_1, q_2, q_3)$. D'autre part, avec l'interprétation de point, les coordonnées pluckeriens sont:

$$l' = \begin{Bmatrix} q_4 \cdot \alpha - p_4 \cdot \beta \\ -\alpha \wedge \beta \end{Bmatrix}.$$

Donc, les deux coordonnées pluckeriens l et l' sont duaux.

- Trois points homogènes p , q et r sont considérés comme trois points ou trois plans. Ils déterminent respectivement un plan u et un point d'intersection x où u et x sont duaux.
- En général, une famille de points de seul paramètre qui forme une courbe, est duale à une famille de plans de seul paramètre, c'est à dire une surface développable.

② Courbe Cubique Paramétrique Duale de Bézier et de B-spline.

Une courbe paramétrique cubique dans l'espace s'exprime par:

$$p(t) = f^T M G \quad \text{avec} \quad f^T = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3] \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

où: V_0, V_1, V_2 et V_3 sont les points de contrôle. Dans ce cas la matrice $M_{4 \times 4}$ est la matrice de base constante de Bézier ou de B-spline. Si les points de contrôle V_i se remplacent par les plans de contrôle U_0, U_1, U_2 et U_3 , on trouvera une famille de plans avec un seul paramètre:

$$U(t) = f^T M H.$$

③ *Construction Par l'Algorithme de Casteljau.*

En utilisant la dualité, l'algorithme de Casteljau pour une famille de plan dans \mathbb{R}^3 est identique à l'algorithme d'une famille de points dans \mathbb{R}^4 . Alors, la construction d'une courbe de Bézier dans \mathbb{R}^4 définit une surface développable dans \mathbb{R}^3 . Si on suppose que U_0, U_1, U_2 et U_3 soient les plans de contrôle qui peuvent être traités comme les points dans \mathbb{R}^4 , alors la construction de la courbe de Bézier avec cet algorithme est la suivante (cf. figure-8):

- pour construire le point intermédiaire V_i : $V_i = (1-t) U_i + t U_{i+1}$, $i = 0, 1, 2$
- pour construire le point intermédiaire W_i : $W_i = (1-t) V_i + t V_{i+1}$, $i = 0, 1$
- la valeur $U(t) = (1-t) W_0 + t W_1$.

Donc, le plan qui correspond au point $U(t)$ dans \mathbb{R}^4 est le plan de la famille de plans de seul paramètre t .

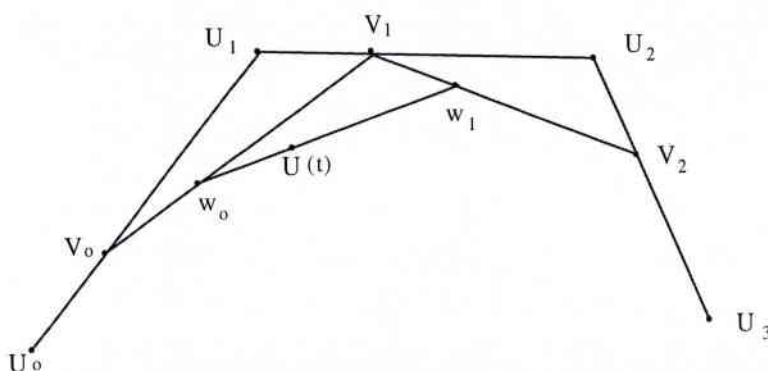


Figure-8 : Construction Par Algorithme de Casteljau

④ *Continuité Géométrique CG^2 .*

On suppose deux ensembles de plans de contrôle U_i et V_i pour $i = 0, \dots, 3$ qui correspondent respectivement à la surface de Bézier $R(s,t)$ et $S(s,t)$. Ensuite, les deux surfaces vérifient la condition C^2 où:

$$U(1) = V(0) \dots\dots\dots(26)$$

$$U'(1) = V'(0)$$

$$U''(1) = V''(0).$$

La condition de continuité géométrique CG^2 entre les deux surfaces est obtenue dans le terme du plan de contrôle de l'expression:

$$U(t) = f^T M H_1 \dots\dots\dots(27)$$

et

$$V(t) = f^T M H_2.$$

De l'équation (26) et (27), on obtient la condition de CG^2 suivante:

$$V_0 = U_3 ,$$

$$V_1 = U_2 + 2 (U_3 - U_2)$$

$$V_2 = U_1 + 4 (U_3 - U_2)$$

Sans doute dans l'aspect mathématique la méthode présentée est très intéressante. Par contre dans l'application, on trouve des difficultés liées à la détermination et l'organisation de données de deux courbes de bord de surface construite.

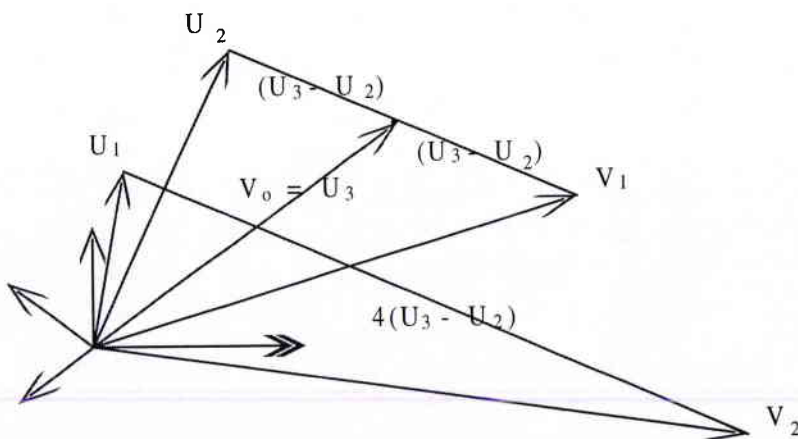


Figure-9 : Condition CG^2

Pottmann'95 développe cette méthode pour définir les surfaces développables Nurbs. Il implique les plans de contrôle, le plan de trame et deux plans de références. D'autre part, il propose une méthode pour transformer une surface de Nurbs duale à la forme de produit de tenseur. Dans l'application, malheureusement cet algorithme n'est pas simple, ni proche des besoins des utilisateurs.

e) **Méthode d'Approximation Isoparamétrique**

Pour obtenir des surfaces développables, **Elber'95** présente la méthode d'approximation isoparamétrique d'une surface de la forme de B-spline non uniforme. L'idée est la suivante. Supposons une surface polynomiale non uniforme B-spline $S(u,v)$ avec deux courbes de bords:

$$C_1(u) = S(u, v_{\min}), \quad C_2(u) = S(u, v_{\max}) \quad \text{et} \quad C_1(u) \neq C_2(u).$$

Soit $r(u,v)$ une surface réglée qui est construite par ces courbes. On cherche, ensuite, des surfaces développables $Q(u,v)$ de raffinement $r(u,v)$ qui permettent d'approcher isoparamétriquement la surface $S(u,v)$ selon l'algorithme suivant:

Entrée : $S(u,v)$, surface divisée en direction du paramètre v .

τ , écart d'approximation utilisé

Sortie : \mathfrak{R} , ensemble de surface réglée qui approche $S(u,v)$ avec l'écart τ

SurfRégléeApproximation (S, τ)

Début

$C_1(u)$ et $C_2(u) \Leftarrow v_{\min}$ et v_{\max} du bord de S

$r \Leftarrow$ surface réglée entre $C_1(u)$ et $C_2(u)$

$q \Leftarrow r$ raffinée et enlevée son degré en v

Si [Distance-max(S, q) < τ] alors retour { r }

Sinon

 Début

 Diviser S en deux SousSurf S_1, S_2 le long de v

 Retour

 SurfRégléeApproximation (S_1, τ) \cup SurfRégléeApproximation (S_2, τ)

 Fin

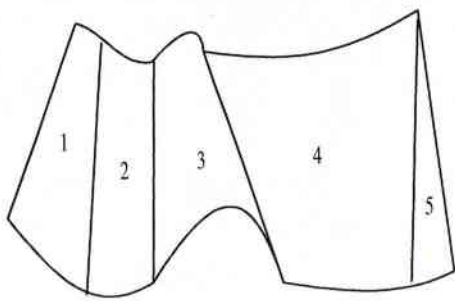
Fin

Dans la conception et la fabrication des objets à peau mince, cette méthode peut être efficace, mais pour des objets à peau épaisse, par exemple les bateaux, elle n'est pas utile, car il est risqué de diviser la surface en sous deux petites surfaces. Donc, cette méthode ne s'applique pas, en général, au problème présenté.

f) Méthode de Subdivision

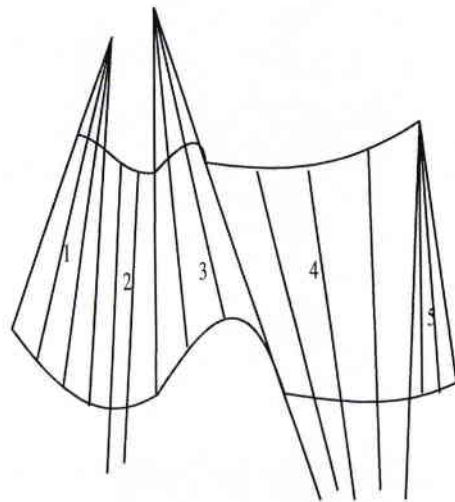
La méthode est introduite par Sun'96. Il la propose pour modéliser un objet dans une visualisation et une animation graphique. L'idée de base de cette méthode est la suivante:

- ❶ diviser une surface développable observée selon la forme conique (cf figure-10a) en quelques morceaux de surface,
- ❷ approcher les morceaux avec le type conique généralisé (cf figure-10b). Celui-ci est déterminé par un sommet et une courbe de section transversale de la surface observée sous la forme de courbe de Bézier,
- ❸ définir une surface développable de continuité géométrique CG^1 à partir des morceaux de surface du traitement (❷).



Morceaux de Surface

(a)



Cône Généralisé

(b)

Figure-10 : Subdivision en Morceau de Surface Développable Conique

Dans la visualisation graphique, cette méthode est assez efficace. Par contre au niveau de la précision du calcul, cela n'est pas évident, car, dans la détermination des sommets de cône d'approximation (cf. l'étape ❷), le choix de deux génératrices qui déterminent ces sommets, peut être très varié.

2.3.2 Développement de Surface Développable

Bien que cela ne soit pas le coeur de notre sujet, il nous paraît intéressant de faire un point sur les travaux existant dans le domaine du développement des surfaces développables.

Gurunathan'87 présente la méthode de développement de surface développable de type: $r(u,v) = r_1(u) + v g(u)$ et $r(u,u',v) = (1-v) r_1(u) + v r_2(u')$. Son algorithme est le suivant:

- ❶ calculer la longueur de la génératrice de cette surface
- ❷ évaluer numériquement le long de la courbe directrice:
 - la courbure géodésique et la longueur d'arc s à partir du point de départ,
 - l'angle d'arc tangent. Celui-ci est déterminé par la tangente de la courbe directrice en un point calculé et la tangente de cette courbe au point de départ,
 - l'angle entre la tangente d'arc et la génératrice.
- ❸ pour transformer isométriquement la courbe directrice de la surface r dans le plan de développement XOY , calculer l'intégral de l'équation de Serret-Frenet:

$$d^2x/ds^2 + \kappa_g(s) dy/ds = 0 \quad \text{et} \quad d^2y/ds^2 - \kappa_g(s) dx/ds = 0$$

où $\kappa_g(s)$ est la courbure géodésique de cette courbe, tandis que x et y sont les coordonnées de la courbe développée dans le plan XOY .

- ❹ transformer la génératrice de la surface sur le plan XOY et reconstruire, ensuite, la surface de développement dans ce plan.

Clement'87 propose la méthode de développement isométrique de la surface développable régulière: $S(s,t) = f(s) + t r(s)$ sur plan XOY en utilisant la courbe géodésique: $g(s) = f(s) + t^*(s) r(s)$ avec $s \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ et $t^*(s) \in C^2[a,b]$. L'idée de base de cette méthode est la suivante (cf figure-11):

- ❶ calculer numériquement la courbe géodésique $g(s)$ sur la surface $S(s,t)$ en utilisant la condition de cette courbe dont: $\det[g', (g'' \wedge n)] = 0$. On trouvera, ici, un système d'équations différentielles d'ordre deux avec deux conditions initiales qui doivent être fixées.

② évaluer la transformation isométrique $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas, on peut effectuer le calcul en quatre étapes:

➤ définir $\mathbf{h}(s) = \mathbf{S}(s,1) = \mathbf{f}(s) + \mathbf{r}(s)$ avec $s \in [a,b]$,

➤ évaluer numériquement l'image de courbe géodésique de la surface $\mathbf{S}(s,t)$ dans le plan XOY :

$$I_n = \int_{s_0}^{s_n} |\mathbf{g}'(s)| ds$$

avec $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$.

➤ calculer l'image de génératrice $\mathbf{r}(s)$ de surface $\mathbf{S}(s,t)$ dans le plan XOY en utilisant l'expression I_i et:

$$\alpha_i = |\mathbf{g}(s_i) - \mathbf{f}(s_i)| = t^*(s_i) |\mathbf{r}(s_i)|$$

$$\beta_i = |\mathbf{g}(s_i) - \mathbf{h}(s_i)|$$

$$\theta_i = \text{Cos}^{-1} [(\mathbf{g}(s_i) \cdot \mathbf{r}(s_i)) / (|\mathbf{g}'(s_i)| |\mathbf{r}(s_i)|)] \text{ pour tout } i = 0, 1, \dots, n.$$

➤ reconstruire la surface de développement dans le plan XOY.

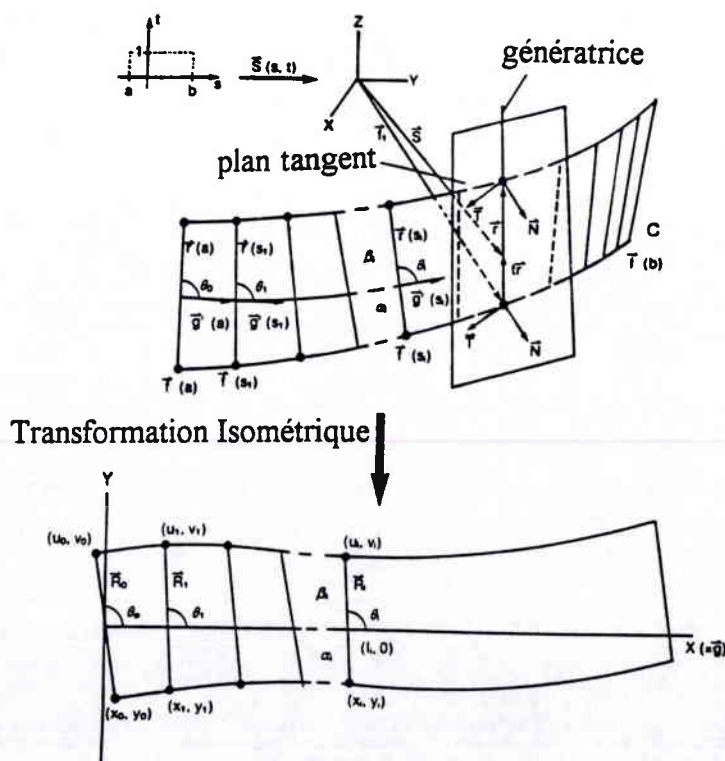


Figure-11 : Transformation Isométrique de Surface Développable

Weiss'88 introduit le développement de surface développable d'objets de type tuyau. Dans ce cas, il propose le traitement:

❶ numériser respectivement les deux courbes de bord $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ avec le polygone p et q (cf figure -12a) et l'erreur d'approximation $< \epsilon$.

❷ concernant au point $P(i)$ sur la courbe $\Gamma_1(u)$ et le point $Q(i)$ sur la courbe $\Gamma_2(u)$ avec $i = 1, \dots, n$, évaluer:

➤ la longueur $[P(i-1)P(i)]$, $[P(i)Q(i)]$

et

$[P(i)P(i+1)]$,

➤ l'angle $A(i) = \angle Q(i)P(i)P(i+1)$

et

$B(i) = \angle P(i-1)P(i)Q(i)$,

❸ calculer le point de développement $P(i)^d$ et $Q(i)^d$ dans plan de développement U-V (cf figure-12b) selon l'expression:

$$UP(i) = [P(i-1)P(i)] \cdot \text{Cos}[G(i-1)],$$

$$VP(i) = [P(i-1)P(i)] \cdot \text{Sin}[G(i-1)],$$

$$UQ(i) = [P(i)Q(i)] \cdot \text{Cos}[F(i)],$$

$$VQ(i) = [P(i)Q(i)] \cdot \text{Sin}[F(i)],$$

où:

$$F(1) = 0; \quad G(0) = 0;$$

$$F(i) = \pi - G(i-1) - B(i)$$

et

$$G(i) = F(i) + A(i).$$

❹ reconstruire la surface de développement dans le plan U-V.

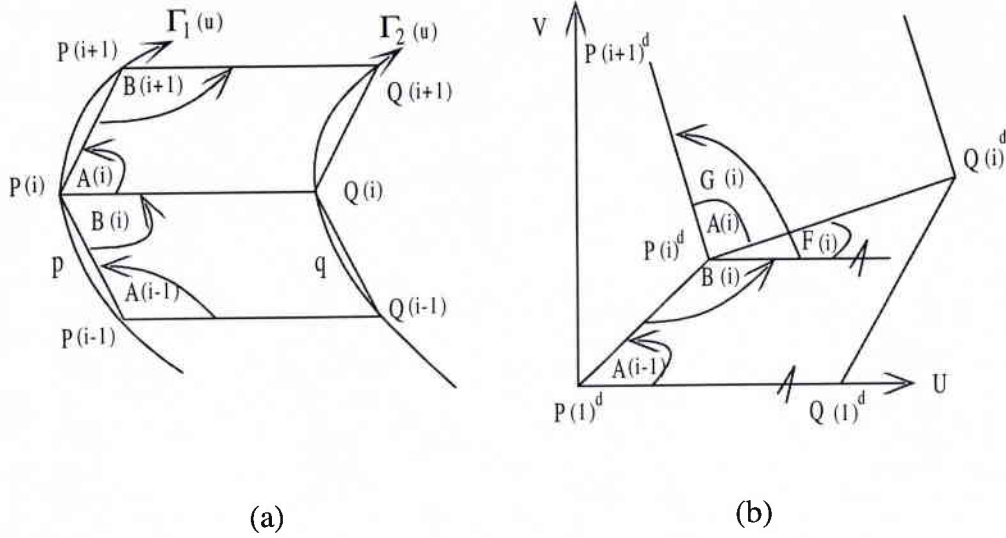


Figure-12 : Calcul de Développement de Surface Développable dans le Plan

D'autre part, **Kreyszig'94** introduit l'algorithme suivant. Soit une surface développable:

$$S: \mathbf{x}(s,t) = \mathbf{y}(s) + t \mathbf{z}(s), \quad t_1(s) \leq t \leq t_2(s), \quad s \in [a,b]$$

$$\mathbf{z}(s) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j(s) \mathbf{v}_j(s), \quad \sum_{j=1}^3 [\alpha_j(s)]^2 = 1$$

avec $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ le trièdre de la courbe $C: \mathbf{y}(s)$. L'image S^* dans le plan de développement p-q peut être déterminée par:

❶ calculer la courbure géodésique κ_g de la courbe C sur la surface S .

❷ évaluer l'intégral: $L(s) = \int_0^s \kappa_g(u) du$

❸ calculer $\mathbf{v}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \cos(L(s)) \\ \sin(L(s)) \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{v}_2^*(s) = \begin{bmatrix} -\sin(L(s)) \\ \cos(L(s)) \end{bmatrix}$$

④ évaluer l'intégral:

$$y^*(s) = \int_0^s v_1^*(\sigma) d\sigma$$

⑤ calculer:

$$z^*(s) = \alpha_1 v_1^*(s) + (1 - \alpha_1^2)^{1/2} v_2^*(s)$$

et

$$x^*(s,t) = y^*(s) + t z^*(s), \quad t_1(s) \leq t \leq t_2(s).$$

Elber'95 utilise l'approximation de triangle pour développer une surface développable $S(u,v)$ dans le plan de développement. Dans ce cas, il approche d'abord les deux courbes de bord de la surface avec n segment de droite (cf. figure-13). Il construit, ensuite, une suite de triangles d'approximation de cette surface qui s'appuient par ces segments. Enfin, les $2n$ triangles se transforment dans le plan de développement.

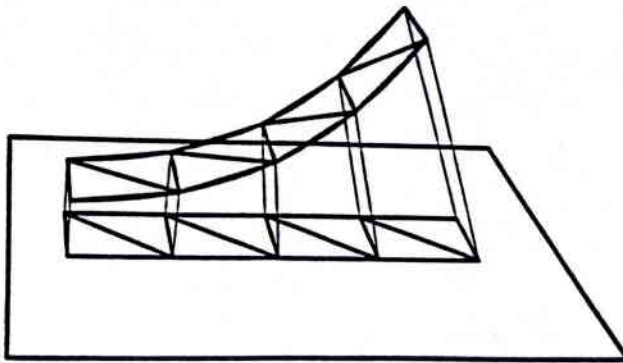


Figure-13 : Approximation de Triangle

De ces études, on peut résumer que, pour développer une surface développable sur le plan, on a besoin d'effectuer trois phases de traitement suivant:

- ① **numérisation** de la surface dans la forme de suite de polygone ou bien avec le calcul de la courbe géodésique (la courbure géodésique), la courbe directrice et la génératrice de la surface.
- ② **transformation** du résultat (①) dans le plan de développement,
- ③ **reconstruction** de l'image numérique de la surface développée sur le plan de développement.

2.4 Solution Proposée Pour le Problème de la Thèse

Grâce aux études des méthodes de construction, de raccordement et de développement de surface développable précédemment vues, nous apportons enfin des considérations, des raisons et des suggestions liées à la solution du problème de la thèse. Nous les présentons comme suit (cf. figure-14).

A partir de deux courbes arbitraires $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]$ dans l'espace, en général, il n'y a pas de réponse positive pour l'existence de surface développable qui se trouve et se borde par ces courbes. Pour obtenir une telle surface, il est préférable de chercher une méthode d'approximation. Donc, si les courbes $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]$ déterminent la surface réglée $S(u, v)$, le problème est de chercher deux courbes d'approximation $[C_1(u), C_2(u)]$ qui permettent de définir la surface développable $D(u, v)$. Celle-ci approche la surface $S(u, v)$.

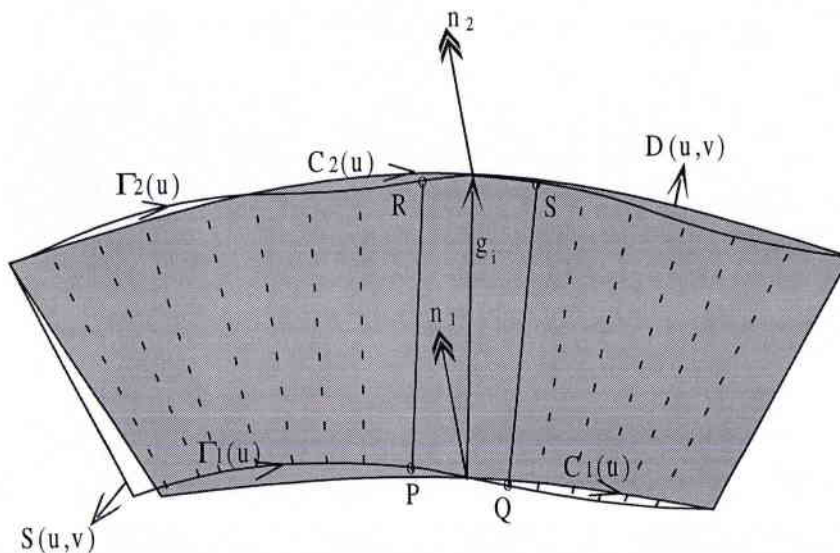


Figure-14 : Surface Développable d'Approximation

La recherche de courbes $[C_1(u), C_2(u)]$ est identique à la recherche de génératrices g_i de la surface développable $D(u, v)$ dont toutes les normales doivent être constantes en tout les points sur chaque génératrice. Pour l'effectuer, on peut utiliser *la méthode locale expérimentale* de Nolan'71 avec la recherche de deux normales parallèles $[n_1, n_2]$ de la génératrice g_i aux points de courbe $[C_1(u), C_2(u)]$, malheureusement, on trouve l'incertitude de solution: $\sin \phi = |n_1 \wedge n_2| / \{|n_1| |n_2|\}$ quand ϕ vers zéro.

D'autre part, si on applique *la méthode de quatre points coplanaires PQRS* pour que les génératrices g_i et les deux tangents de courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ soient liées, cette méthode ne permet pas de trouver facilement les formes exactes quadrilatérales de points PQRS. C'est évident, car les quatre points coplanaires $[P, Q]$

et $[R,S]$ ne doivent pas se trouver respectivement sur la courbe $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$. En plus, si la forme de courbe $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]$ est complexe, alors la forme quadrilatérale de points PQRS de génératrice g_i peut être très variée (quasiment triangulaire, rectangulaire, trapézoïdale, etc.). C'est la raison pour laquelle la réalisation de cette surface avec cette méthode est délicate. A cause de l'inconvénient des méthodes présentées, *on ne s'intéresse qu'à la construction en plusieurs morceaux des surfaces développables pour la définir*. Dans ce cas, pour obtenir une forme générale de surface développable d'approximation $D(u,v)$, on décompose d'abord la surface réglée $S(u,v)$ donnée en quelques morceaux de surface réglée $[S(u,v)]_i$. Pour chaque morceau $[S(u,v)]_i$, on approche, ensuite, avec un morceau de surface développable $[D(u,v)]_i$. Entre les deux morceaux adjacents $[D(u,v)]_i$, $[D(u,v)]_{i+1}$ construits, nous les traitons avec la continuité géométrique $CG^{1,2}$. Enfin, on peut la développer sur le plan, pour détecter sa taille et sa forme.

Dans la mesure où notre objectif est une application réelle, avec une certaine efficacité, nous préférons développer et généraliser la méthode de Frey et Aumann sous les deux suppositions suivantes. *Premièrement*, les deux courbes $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]$ traitées sont trouvées respectivement dans **deux plans parallèles arbitraires différents** $[\Psi_1,\Psi_2]$ et *deuxièmement*, le degré de la courbe $C_1(u)$ et $C_2(u)$ ne doivent pas être différents pour tous les paramètres u .

De cette considération, **nous précisons le problème à résoudre**; *il s'agit de la définition d'une suite de plaque $S_i(u,v)$ qui s'appuient sur deux courbes de bord $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ données dans deux plans parallèles différents à la forme de définition mathématique de surface développable*. D'ailleurs, cette surface doit être **continue CG^2 et sous la forme de carreau de Bézier**. Nous la proposons en trois étapes de traitement suivant:

- **chercher** la condition suffisante de régularité sous la forme d'équation explicite de surface développable et **classifier** toutes les surfaces trouvées
- **présenter** la méthode de construction et d'approximation de cette surface avec les carreaux de Bézier
- **chercher** les conditions limitées de raccordement géométrique $CG^{0,1,2}$ entre deux carreaux de Bézier développables réguliers adjacents.

Les détails concernant la position du problème, l'hypothèse et le but de ces solutions, sont discutés dans les chapitres suivants.

CHAPITRE III

CONDITION SUFFISANTE DE REGULARITE ET CLASSIFICATION DE SURFACE DEVELOPPABLE

Dans ce chapitre, nous discutons la condition suffisante de régularité et la classification de surfaces développables. Pour clarifier la représentation, nous réécrivons d'abord la définition formelle de surface réglée et de surface développable dans le chapitre-II. Nous introduisons, ensuite, la position du problème qui doit être traité, puis nous cherchons sa solution. Enfin, en raison d'application à la CFAO et de traitement du problème de la thèse, on fait le choix des classes de surfaces développables régulières trouvées.

Définition-1: on appelle surface réglée toute surface géométrique $S(u,v)$ de classe $C^{n \geq 1}$ qui admet une paramétrisation: $(u,v) \in I \times R \longrightarrow f(u) + v g(u)$ avec $f: I \longrightarrow R^3$ et $g: I \longrightarrow R^3$ étant de classe C^n sur I , la seconde ne s'annulant pas sur I (c'est à dire $0 \notin g(I)$).

Le couple (I,f) se nomme "courbe directrice" de la surface réglée $S(u,v)$. L'ensemble des points $X_p = f(u) + v g(u)$ quand v parcourt R est une droite que l'on nomme "génératrice" de cette surface.

On déduit les vecteurs dérivés partiels de la définition ci-dessus pour une surface paramétrée réglée $S(u,v) = f(u) + v g(u)$ avec comme résultat:

$$S^u(u,v) = f'(u) + v g'(u)$$

et

$$S^v(u,v) = g(u).$$

En adoptant la définition de surface développable étudiée dans la page 22, on a donc l'expression:

Définition-2: une surface réglée $S(u,v) = f(u) + v g(u)$ est dite développable, si et seulement si pour tout $u \in I$, les trois vecteurs $[g'(u), f'(u), g(u)]$ sont liés, c'est à dire $\det(g'(u), f'(u), g(u)) = 0$ ou $[g'(u) \wedge f'(u) \cdot g(u)] = 0$.

Ci-après, nous trouverons la position de problème qui doit être traitée avec l'hypothèse proposée.

Donnée : une surface (réglée) développable $S(u,v) = f(u) + v g(u)$.

Problème : chercher la condition suffisante de régularité de la surface développable $S(u,v)$ et classer toutes les surfaces trouvées.

Hypothèse : $S(u,v)$ de classe $C^{n \geq 2}$ avec v appartenant à un intervalle fermé et borné.

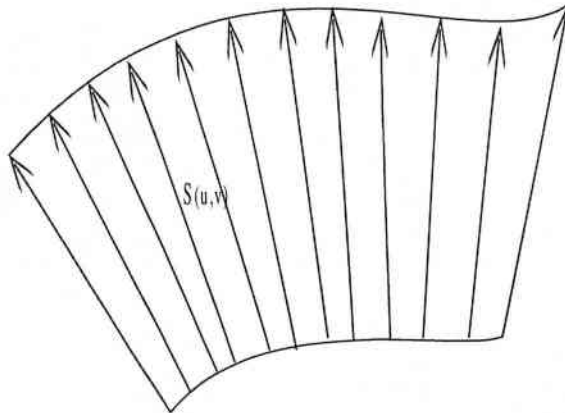


Figure-1 : Surface Développable

But : obtenir une expression générale de type de surface développable qui permet d'appliquer la CFAO et, en particulier, de traiter le problème de la thèse.

Nous discutons à présent la condition suffisante explicite de régularité et la classification de surface réglée développable qui vérifie $\det(g'(u), f'(u), g(u)) = 0$.

3.1 Condition Suffisante de Régularité de Surface Développable

A partir de ces données, supposons P un point sur cette surface $S(u,v)$ et, en ce point, on a la condition de développabilité $\det(g'(u), f'(u), g(u)) = 0$. Puisque ces trois vecteurs $[g'(u), f'(u), g(u)]$ déterminent l'existence du plan tangent P_t au point P , alors, **pour examiner la régularité du point P** , nous prenons d'abord deux vecteurs libres (supposés comme la base de P_t) parmi ces trois vecteurs $[g'(u), f'(u), g(u)]$ et, puis, nous utilisons ces deux vecteurs pour analyser **l'existence de vecteur normal n_p du point P** . Cela veut dire que nous avons trois cas qui doivent être traités, respectivement dans la partie (3.1.1), (3.1.2) et (3.1.3) suivante.

3.1.1 Premier Cas

Soit $[f'(u), g(u)]$ libre comme la base du plan tangent P_t au point P . Le vecteur $g'(u)$ s'exprime sous la forme de combinaison linéaire de vecteurs $f'(u)$ et $g(u)$:

$$g'(u) = \delta(u) f'(u) + \lambda(u) g(u)$$

où $\delta(u)$ et $\lambda(u)$ sont deux scalaires réels uniques. On a les possibilités suivantes:

- si $\delta(u) = 0$, alors $g'(u) = \lambda(u) g(u)$.

Pour tout $u \in I$, on a:

$$n_p = ([f'(u) + (\lambda(u)) g(u)] \wedge g(u)) \neq 0.$$

La surface trouvée est donc régulière et de type cylindrique.

L'illustration de ce type cylindrique est la suivante. D'abord, puisque la développabilité d'une surface est seulement une propriété locale de cette surface, alors pour l'analyser, on a besoin de diviser I en plusieurs intervalles de petite longueur. Ensuite, puisque chaque intervalle vérifie la même condition de développabilité, il suffit d'évaluer un intervalle quelconque $I_f = [a, b]$ de la division, pour généraliser I . L'intervalle I_f définit localement le point p_i sur la courbe directrice $f(u)$ à la figure-2a, sous la forme $p_i = f(u_i)$ et u_i strictement monotone dans I_f , c'est à dire: $a = u_0 < u_1 < u_2 \dots < u_i < u_{i+1} \dots < u_{n-1} < u_n = b$. Une génératrice en ce point, on l'exprime:

$$x_{p_i} = p_i + v g(u_i) \quad \text{ou} \quad [x_{p_i} - p_i] = v g(u_i) \dots \dots \dots (1)$$

Si le point p_i se déplace au point p_{i+1} , par la condition $g'(u) = \lambda(u) g(u)$ pour tout $u \in I$, on obtient alors une génératrice:

$$\begin{aligned} x_{p_{i+1}} &= p_{i+1} + v g(u_{i+1}) \\ &= p_{i+1} + v [g(u_i) + (u_{i+1} - u_i) g'(u_i)] \\ &= p_{i+1} + v [g(u_i) + \Delta u_i g'(u_i)] \\ &= p_{i+1} + v [[1 + (\Delta u_i) \lambda(u_i)] g(u_i)] \\ [x_{p_{i+1}} - p_{i+1}] &= [v \cdot k(u_i)] g(u_i) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Or, pour tout u_i et v , de l'équation (1) et (2), on obtient:

$$[(x_{p_i} - p_i) \wedge (x_{p_{i+1}} - p_{i+1})] = v^2 \cdot k(u_i) [g(u_i) \wedge g(u_i)] = 0.$$

Ce qui signifie que, pour chaque déplacement successive de point p_i au point p_{i+1} , on trouve toujours deux génératrices parallèles. D'ailleurs, avec la condition:

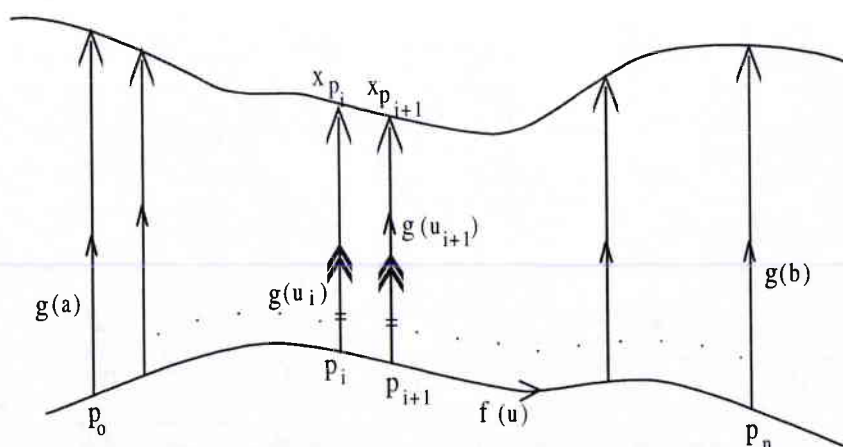
$$g'(u) = \lambda(u) g(u) \text{ et } x_{p_i} = p_i + v g(u_i),$$

on obtient l'équation qui est valable pour tout i suivante:

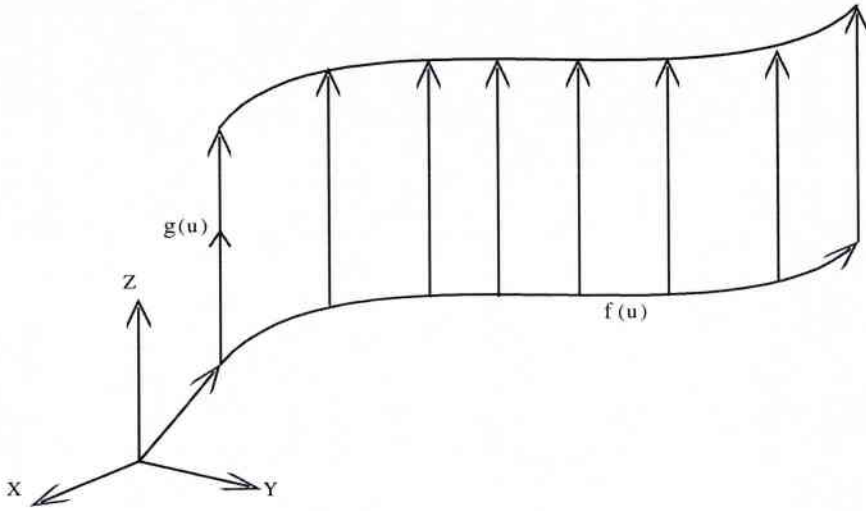
$$(x_{p_i})' = (p_i)' + v g'(u_i) = (p_i)' + v [\lambda(u_i) \cdot g(u_i)] \dots \dots \dots (3)$$

Dans le cas où:

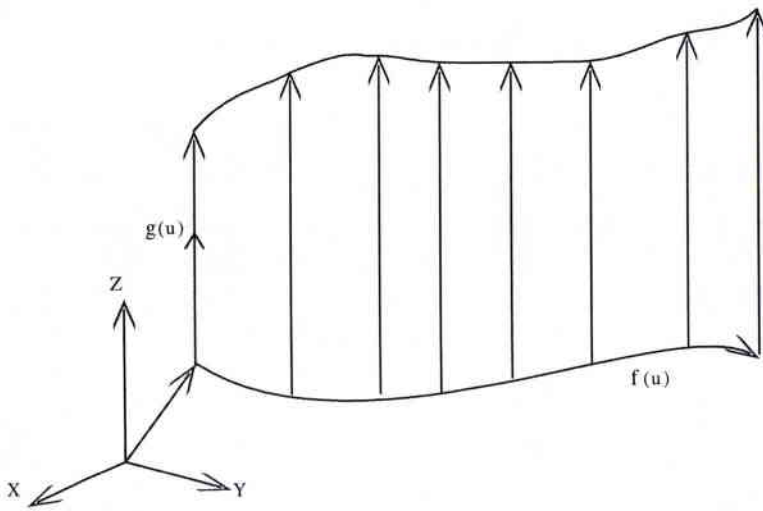
- $f(u)$ est une courbe et $\lambda(u) = 0$, c'est à dire $g'(u) = 0$ ou $g(u) =$ vecteur constant, on obtient alors une surface dont les génératrices et tous les vecteurs tangents au point x_{p_i} et p_i sont respectivement parallèles. Ceci signifie que les courbes de bord de la surface sont réciproquement parallèles. Elle s'appelle *surface cylindrique extraordinaire* (figure-2b),
- $f(u)$ est une courbe et $\lambda(u) \neq 0$, à savoir $g'(u) \neq 0$, on trouve une surface où les deux courbes de bord ne sont pas parallèles, mais les génératrices sont parallèles. Cette surface s'appelle *surface cylindrique* (figure-2c),
- $f(u)$ est une droite, on obtient *un plan* (figure-2d).



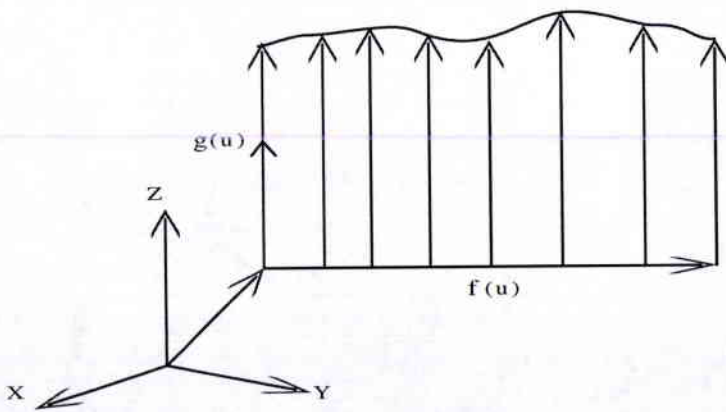
(a) Génératrices de Type Cylindrique



(b). Surface Cylindrique Extraordinaire



(c). Surface Cylindrique



(d). Plan

Figure-2 : Surfaces de Type Cylindrique

❷ si $\delta(u) \neq 0$ et $\lambda(u) = 0$, alors $g'(u) = \delta(u) f'(u)$.

Pour tout $u \in I$ et $\delta(u) \neq -1/v$, on trouve:

$$n_p = ((1 + v \delta(u)) [f'(u) \wedge g(u)]) \neq 0.$$

Donc, *la surface trouvée est régulière et de type conique simple ou une surface engendrée par des tangentes de courbe.*

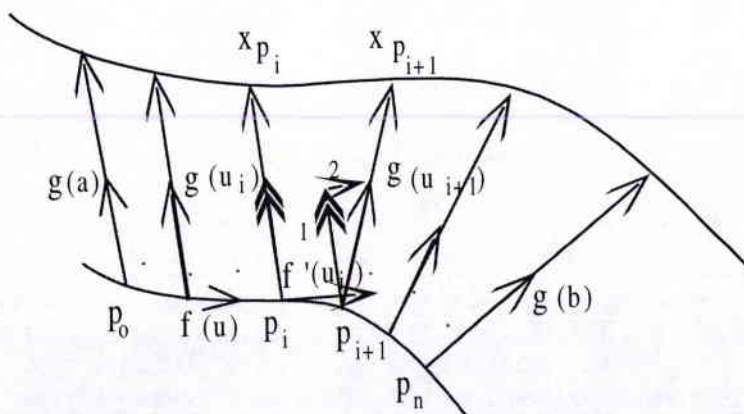
L'illustration de ces types est la suivante. Traitons un intervalle quelconque $I_f = [a,b]$ de la subdivision de I , pour généraliser I . L'intervalle I_f définit localement le point p_i sur la courbe directrice $f(u)$ à la figure-3a, sous la forme $p_i = f(u_i)$ et u_i strictement monotone dans I_f . Une génératrice en ce point, on l'exprime:

$$x_{p_i} = p_i + v g(u_i) \text{ ou } [x_{p_i} - p_i] = v g(u_i) \dots\dots\dots(4)$$

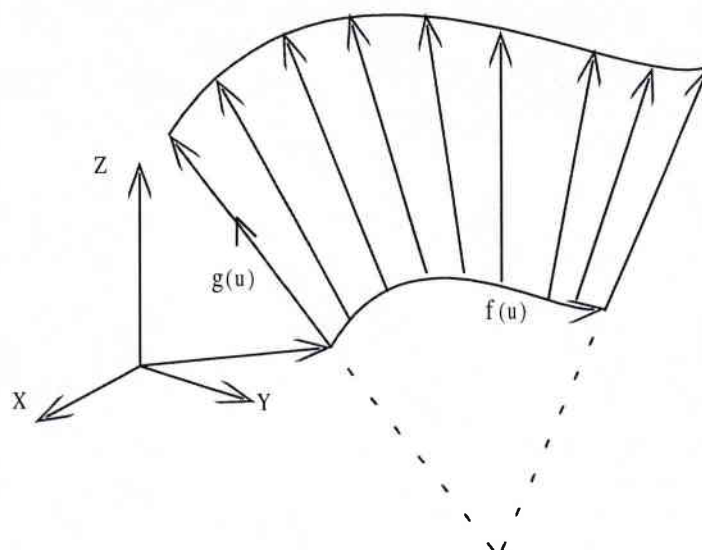
Pour une valeur $u_{i+1} = u_i + (u_{i+1} - u_i) = u_i + \Delta u_i$, on a un point $p_{i+1} = f(u_{i+1})$. Par la condition $g'(u) = \delta(u) f'(u)$ avec $\delta(u) \neq 0$ pour tout $u \in I$, une génératrice en point p_{i+1} peut s'exprimer par:

$$\begin{aligned} x_{p_{i+1}} &= p_{i+1} + v g(u_{i+1}) \\ x_{p_{i+1}} &= p_{i+1} + v [g(u_i) + \Delta u_i \cdot g'(u_i)] \\ x_{p_{i+1}} &= p_{i+1} + v [g(u_i) + ((\Delta u_i) \cdot \delta(u_i)) f'(u_i)] \\ [x_{p_{i+1}} - p_{i+1}] &= v [g(u_i) + k(u_i) f'(u_i)] \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

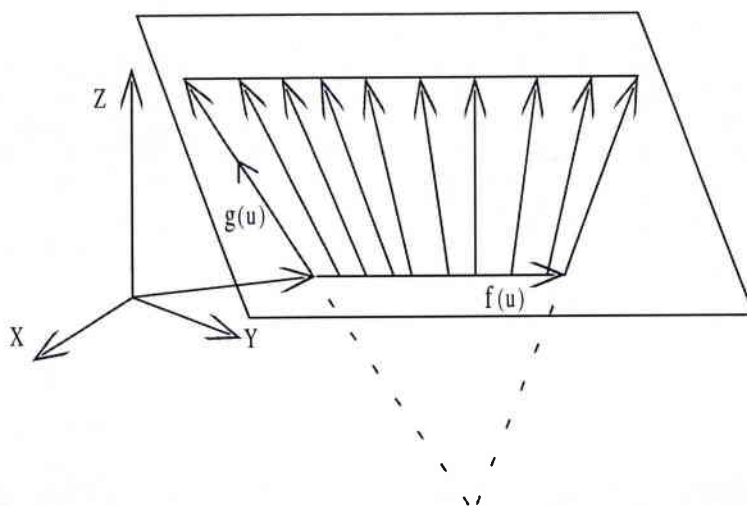
❶
❷



(a) Génératrices de Type Conique Simple et de Surface de Tangentes



(b) Surface Conique Simple



(c) Plan

Figure-3 : Surface de Type Conique Simple

Puisque, pour tout i , $k(u_i) \neq 0$, alors de la forme (4) et (5), pour tout $v \neq 0$, on trouve:

$$[(X_{p_i} - p_i) \wedge (X_{p_{i+1}} - p_{i+1})] = v^2 \cdot k(u_i) [g(u_i) \wedge f'(u_i)] \neq 0.$$

Ce qui signifie que pour chaque déplacement successive du point p_i au point p_{i+1} , on trouve toujours deux génératrices différentes où leur différence sont déterminées par le vecteur $[k(u_i) \cdot f'(u_i)]$. Démontrons, ensuite, que l'intersection des génératrices peut être un point ou sous la forme de courbe ci-après.

Soit $f^*(u) = f(u) - [1/\delta(u)] g(u)$,(6a)

alors:

$$\begin{aligned} f^{*'}(u) &= f'(u) - [1/\delta(u)]' g(u) - [1/\delta(u)] g'(u) \\ &= [1/\delta(u)] g'(u) + \{- [1/\delta(u)]' g(u) - [1/\delta(u)] g'(u)\} \\ &= - [1/\delta(u)]' g(u) \dots\dots\dots(6b) \end{aligned}$$

Premier cas, si $-[1/\delta(u)]' = 0$, c'est à dire $\delta(u)$ constant, alors $f^{*'}(u) = 0$ ou $f^*(u) = \text{constant}$. De l'équation (6a), on a $f(u) = \text{constant} + [1/\delta(u)] g(u)$. Donc,

$$S(u,v) = \text{constant} + \{ v + [1/\delta(u)] \} g(u) \dots\dots\dots(7a)$$

exprime un type de plan ou un type conique (généralisé). **Deuxième cas**, si $-[1/\delta(u)]' \neq 0$, alors $f^{*'}(u) \neq \text{constant}$. De l'équation (6a), on obtient $f(u) = f^*(u) + [1/\delta(u)] g(u)$ et, alors:

$$\begin{aligned} S(u,v) &= f^*(u) + \{ v + [1/\delta(u)] \} g(u) \\ &= f^*(u) + [\{ v + [1/\delta(u)] \} / [-1/\delta(u)]'] f^{*'}(u) \dots\dots\dots(7b) \end{aligned}$$

définit une surface engendrée par des tangents de courbe $f^*(u)$.

D'autre part, avec la condition: $g'(u) = \delta(u) f'(u)$ et $x_{p_i} = p_i + v g(u_i)$, on trouve l'expression qui est valable pour tout i suivante:

$$\begin{aligned} x_{p_i} &= p_i + v g(u_i) \\ (x_{p_i} - p_i)' &= [v g(u_i)]' = v \delta(u_i) f'(u_i) \\ (x_{p_i} - p_i)' &= v \delta(u_i) p_i' \\ (x_{p_i})' &= [1 + v \cdot \delta(u_i)] p_i', \text{ avec } \delta(u_i) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, puisque tous les vecteurs tangents au point x_{p_i} et p_i sont toujours dans la même direction, alors nous trouverons parallèlement deux courbes de bord de la surface. Dans le cas où:

- $f(u)$ est une courbe et $\delta(u) = \text{constant}$, on obtient **une surface conique simple** (figure-3b),
- $f(u)$ est une droite et $\delta(u) = \text{constant}$, on obtient **un plan** (figure-3c).

③ si $\delta(u) \neq 0$ et $\lambda(u) \neq 0$, alors $g'(u) = \delta(u) f'(u) + \lambda(u) g(u)$.

Pour tout $u \in I$ et $\delta(u) \neq -1/v$, on obtient:

$$n_p = ([(1 + v \delta(u)) f'(u) + (v \lambda(u)) g(u)] \wedge g(u)) \neq 0.$$

En effet, *la surface définie est régulière et de type conique complexe ou une surface engendrée par des tangentes de courbe.*

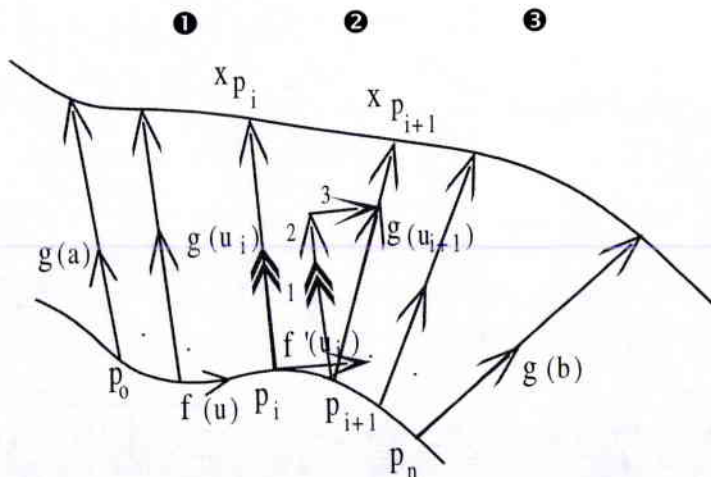
L'illustration de ces types est la suivante. Supposons un intervalle quelconque $I_f = [a,b]$ de la subdivision de I , pour généraliser I . L'intervalle I_f définit localement le point p_i sur la courbe directrice $f(u)$ à la figure-4a, sous la forme $p_i = f(u_i)$ et u_i strictement monotone dans I_f . Une génératrice en ce point, on l'exprime:

$$x_{p_i} = p_i + v g(u_i) \text{ ou } [x_{p_i} - p_i] = v g(u_i) \dots\dots\dots(8)$$

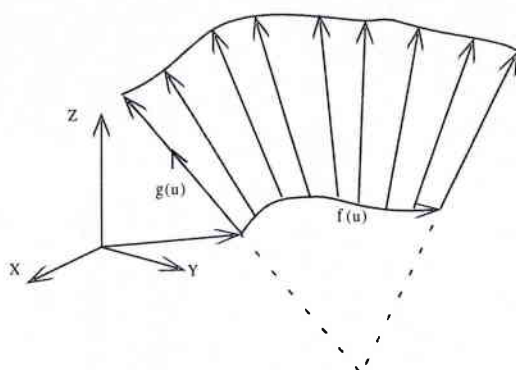
Si le point p_i déplace au point p_{i+1} , par la condition $g'(u) = \delta(u) f'(u) + \lambda(u) g(u)$ avec $\delta(u) \neq 0$ et $\lambda(u) \neq 0$ pour tout $u \in I$, on obtient alors une génératrice:

$$\begin{aligned} x_{p_{i+1}} &= p_{i+1} + v g(u_{i+1}) \\ &= p_{i+1} + v [g(u_i) + \Delta u_i g'(u_i)] \\ &= p_{i+1} + v [g(u_i) + [(\Delta u_i) \cdot \lambda(u_i)] g(u_i) + [(\Delta u_i) \cdot \delta(u_i)] f'(u_i)] \end{aligned}$$

$$[x_{p_{i+1}} - p_{i+1}] = v [g(u_i) + k_1(u_i) g(u_i) + k_2(u_i) f'(u_i)] \dots\dots\dots(9)$$



(a) Génératrices de Type Conique Complexe et de Surface de Tangentes



(b) Surface Conique Complexe

Figure-4 : Surface de Type Conique Complexe

Puisque, pour tout i , $k_2(u_i) \neq 0$, alors, pour tout $v \neq 0$, on trouve:

$$[(X_{p_i} - P_i) \wedge (X_{p_{i+1}} - P_{i+1})] = v^2 .k_2(u_i) [g(u_i) \wedge f'(u_i)] \neq 0.$$

Cela veut dire que pour chaque changement de la valeurs u_i à u_{i+1} , les deux génératrices en ces points sont toujours différentes. La différence entre eux est déterminée par un vecteur qui s'exprime par la combinaison linéaire de deux vecteurs $[g(u_i), f'(u_i)]$. Comme le type conique simple, il n'existe jamais une forme cylindrique. Démontrons, ensuite, que l'intersection des génératrices peut être un point ou une forme de courbe ci-dessous.

Soit $f^*(u) = f(u) - [1/\delta(u)] g(u)$,(10a)

alors:

$$\begin{aligned} f^{*'}(u) &= f'(u) - [1/\delta(u)]' g(u) - [1/\delta(u)] g'(u) \\ &= \{ [1/\delta(u)] g'(u) - [\lambda(u)/\delta(u)] g(u) \} + \{ - [1/\delta(u)]' g(u) - [1/\delta(u)] g'(u) \} \\ &= - \{ [\lambda(u)/\delta(u)] + [1/\delta(u)]' \} g(u) = \sigma(u) g(u) \dots\dots\dots(10b) \end{aligned}$$

Premier cas, si $\sigma(u) = 0$, on a $f^*(u) = \text{constant}$ et, de l'équation (10a), on trouve $f(u) = \text{constant} + [1/\delta(u)] g(u)$. D'où,

$$S(u,v) = \text{constant} + \{ v + [1/\delta(u)] \} g(u) \dots\dots\dots(11a)$$

exprime un type de plan ou un type conique (généralisé). **Deuxième cas**, si $\sigma(u) \neq 0$, on obtient $f^*(u) \neq \text{constant}$. De l'équation (10a), on a: $f(u) = f^*(u) + [1/\delta(u)] g(u)$ et, alors:

$$\begin{aligned} S(u,v) &= f^*(u) + \{v + [1/\delta(u)]\} g(u) \\ &= f^*(u) + [\{v + [1/\delta(u)]\}/\sigma(u)] f^*(u) \dots\dots\dots(11b) \end{aligned}$$

définit une surface engendrée par des tangents de courbe $f^*(u)$.

D'autres part, avec la condition: $g'(u) = \delta(u) f'(u) + \lambda(u) g(u)$ et l'expression $x_{p_i} = p_i + v g(u_i)$, on a l'équation qui est valable pour tout i suivante:

$$\begin{aligned} x_{p_i} &= p_i + v g(u_i) \\ (x_{p_i} - p_i)' &= [v g(u_i)]' = v [\delta(u_i) f'(u_i) + \lambda(u_i) g(u_i)] \\ (x_{p_i} - p_i)' &= v \delta(u_i) p_i' + v \lambda(u_i) g(u_i) \\ (x_{p_i})' &= [1 + v \delta(u_i)] p_i' + v \lambda(u_i) g(u_i), \text{ avec } \delta(u_i), \lambda(u_i) \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, tous les vecteurs tangents au point x_{p_i} et p_i sont toujours dans la direction différente. En effet, entre deux courbes de bord de la surface, elles ne sont pas parallèles. Pour $\delta(u) = \text{constant}$, toute la surface trouvée s'appelle *surface conique complexe* (figure-4b).

3.1.2 Deuxième Cas

Soit $[f'(u), g'(u)]$ libre comme la base du plan tangent P_t au point P . Le vecteur $g(u)$ s'exprime sous la forme de combinaison linéaire de vecteurs $f'(u)$ et $g'(u)$:

$$g(u) = \delta_1(u) f'(u) + \lambda_1(u) g'(u)$$

où $\delta_1(u)$ et $\lambda_1(u)$ sont deux scalaires réels uniques. D'où, on a les possibilités suivantes:

❶ si $\delta_1(u) = 0$ et $\lambda_1(u) \neq 0$, alors $g(u) = \lambda_1(u) g'(u)$.

Cette expression est analogue au cas (3.1.1-❶) où, pour tout $u \in I$, *la surface est régulière*, car:

$$n_p = ([f'(u) + v g'(u)] \wedge \lambda_1(u) g'(u)) \neq 0.$$

❷ si $\delta_1(u) \neq 0$ et $\lambda_1(u) = 0$, alors $g(u) = \delta_1(u) f'(u)$.

Pour tout $u \in I$, $v \neq 0$ et $S(u,v)$ de classe C^2 , c'est à dire $f''(u) \neq \eta(u) f'(u)$, on obtient *une surface régulière*, car:

$$n_p = [(f'(u) + v g'(u)) \wedge \delta_1(u) f'(u)] \neq 0.$$

Cette surface est *un type de surface développable régulière engendrée par des tangentes à une courbe* (cf. figure-5).

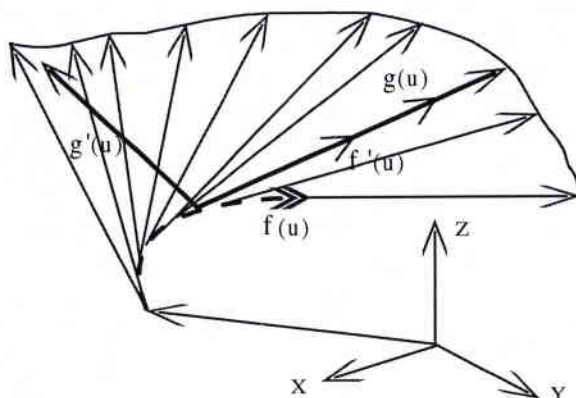


Figure-5 : Surface des Tangentes

❸ si $\delta_1(u) \neq 0$ et $\lambda_1(u) \neq 0$, alors $\mathbf{g}(u) = \delta_1(u) \mathbf{f}'(u) + \lambda_1(u) \mathbf{g}'(u)$.

Celle-ci est identique au cas (3.1.1-❸). Pour tout $u \in I$ et $\lambda_1(u) \neq v \delta_1(u)$, on obtient *une surface régulière*, car:

$$\mathbf{n}_p = ([\mathbf{f}'(u) + v \mathbf{g}'(u)] \wedge [\delta_1(u) \mathbf{f}'(u) + \lambda_1(u) \mathbf{g}'(u)]) \neq \mathbf{0}.$$

3.1.3 Troisième Cas

Soit $[\mathbf{g}'(u), \mathbf{g}(u)]$ libre comme la base du plan tangent P_t au point P . Le vecteur $\mathbf{f}'(u)$ s'exprime sous la forme de combinaison linéaire de vecteurs $\mathbf{g}'(u)$ et $\mathbf{g}(u)$:

$$\mathbf{f}'(u) = \delta_2(u) \mathbf{g}'(u) + \lambda_2(u) \mathbf{g}(u)$$

où $\delta_2(u)$ et $\lambda_2(u)$ sont deux scalaires réels uniques. On a les possibilités suivantes:

❶ si $\delta_2(u) = 0$, alors $\mathbf{f}'(u) = \lambda_2(u) \mathbf{g}(u)$.

Pour tout $u \in I$ et $v \neq 0$, on obtient *une surface régulière*, car:

$$\mathbf{n}_p = ([\lambda_2(u) \mathbf{g}(u) + v \mathbf{g}'(u)] \wedge \mathbf{g}(u)) \neq \mathbf{0}.$$

Pour $\lambda_2(u) \neq 0$, c'est le type du cas (3.1.2-❷). D'autre part si $\lambda_2(u) = 0$, on a alors $\mathbf{f}'(u) = \mathbf{0}$, à savoir $\mathbf{f}(u) = \text{constant}$. Puisque $v \neq 0$, on trouvera la surface du *type conique sans point au sommet*. On peut la figurer comme suit:

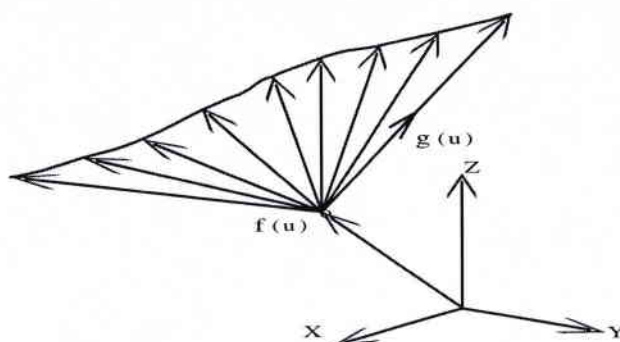


Figure-6 : Surface Conique (sans Point au Sommet)

❷ si les scalaires $\delta_2(u) \neq 0$ et $\lambda_2(u) = 0$, alors $\mathbf{f}'(u) = \delta_2(u) \mathbf{g}'(u)$.

Pour tout $u \in I$ et $\delta_2(u) \neq -v$, on trouve:

$$\mathbf{n}_p = ([\delta_2(u) + v] \mathbf{g}'(u) \wedge \mathbf{g}(u)) \neq \mathbf{0}.$$

La surface définie est donc régulière [identique au cas (3.1.1-❷)].

❸ si $\delta_2(u) \neq 0$ et $\lambda_2(u) \neq 0$, alors $\mathbf{f}'(u) = \delta_2(u) \mathbf{g}'(u) + \lambda_2(u) \mathbf{g}(u)$.

Cette équation est identique au cas (3.1.1-❸). Pour tout $u \in I$ et $\delta_2(u) \neq -v$, on obtient *une surface régulière*, car:

$$\mathbf{n}_p = ([\delta_2(u) \mathbf{g}'(u) + \lambda_2(u) \mathbf{g}(u) + v \mathbf{g}'(u)] \wedge \mathbf{g}(u)) \neq \mathbf{0}.$$

De ces études, on peut déduire *la condition suffisante de régularité de surface développable* sous l'expression, ci-dessous:

3.1.4 Synthèse

Résumé-I:

Une surface réglée développable $\mathbf{S}(u,v) = \mathbf{f}(u) + v \mathbf{g}(u)$ de classe $C^{n \geq 2}$ est dite régulière, si, pour tout point $\mathbf{p} \in \mathbf{S}$, elle vérifie la condition suivante:

- si le plan tangent en ce point est engendré par deux vecteurs libres $[\mathbf{f}'(u), \mathbf{g}(u)]$, alors le vecteur $\mathbf{g}'(u)$ doit être: $\mathbf{g}'(u) = \delta(u) \mathbf{f}'(u) + \lambda(u) \mathbf{g}(u)$ avec $\delta(u) \neq -1/v$ et $\lambda(u)$ deux scalaires réels uniques, ou bien:
- si le vecteur $\mathbf{f}'(u)$ est colinéaire $\mathbf{g}(u)$, alors, pour tout $u \in I$, les deux vecteurs $[\mathbf{f}'(u), \mathbf{g}'(u)]$ ou $[\mathbf{g}(u), \mathbf{g}'(u)]$ doivent être libres et $v \neq 0$ pour que, en ce point, le plan tangent de surface des tangentes $\mathbf{S}(u,v)$ soit défini.

3.2 Classification de Surface Développable

On a démontré que toutes les surfaces développables sont localement dans la forme plane, cylindrique, conique et les surfaces engendrées par des tangentes de courbe. Selon le *résumé-I* de (3.1.4), on peut classier les surfaces trouvées dans les deux situations suivantes:

Résumé-II:

- ❶ *pour la condition (a), on obtient les plans, les surfaces de type cylindrique, de type conique (simple ou complexe) ou les surfaces engendrées par des tangentes de courbe.*
- ❷ *pour la condition (b), on obtient les plans, les surfaces engendrées par des tangentes de courbe ou les surfaces de type conique (sans point au sommet).*

De la classification de surface développable régulière, on peut donc déterminer l'expression générale de type de surface développable qui permet d'appliquer la CFAO et, en particulier, de traiter le problème de la définition d'une suite de plaques $S_j(u,v)$. Dans ce cas, en raison *de facilité et de compatibilité* de représentation de surface à construire, *on préfère choisir tous les types de surface développable de la première expression de résumé-I*. Nous discutons, dans le chapitre suivant en détail, la construction et la réalisation de ces surfaces.

CHAPITRE IV

CONSTRUCTION DES SURFACES DEVELOPPABLES REGULIERES A L'AIDE DES CARREAUX DE BEZIER

Dans cette partie, nous étudions une méthode de construction des surfaces développables régulières avec des carreaux de Bézier. Nous exposons cette méthode dans quatre étapes de discussion suivante:

Premièrement, nous introduisons les données, l'hypothèse et la position du problème qui doit être analysé.

Deuxièmement, nous discutons la condition de développabilité d'un carreau réglé de Bézier bordé par deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$ et, puis, on présente la condition de régularité du carreau. Le but de cette étude est de choisir les scalaires réels dans la condition de développabilité qui permet de réaliser efficacement ce carreau.

Troisièmement, nous présentons la méthode de construction de carreaux de Bézier développables réguliers engendrés par les deux courbes de bord.

Quatrièmement, nous proposons la méthode d'approximation d'une surface réglée régulière avec des carreaux de Bézier développables réguliers.

Finalement, nous terminons ce chapitre par la conclusion générale de la discussion.

4.1 Position du Problème

Données : Soient deux courbes de Bézier de classe C^n ($n \geq 1$):

$$c_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad c_2(u) = \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(u).$$

Soit $S(u,v)$, le carreau réglé engendré par ces deux courbes et tel que:

$$S(u,v) = (1-v) C_1(u) + v C_2(u) \quad \text{où} \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

ou bien:

$$S(u,v) = C_1(u) + v g(u) \quad \text{avec} \quad g(u) = C_2(u) - C_1(u).$$

Hypothèse : On suppose que les deux courbes $C_1(u)$, $C_2(u)$ de degrés respectifs n et m se trouvent respectivement dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$. La courbe $C_1(u)$ est connue par ses points de contrôles, quand à $C_2(u)$ seuls les points de contrôle de départ q_0 et d'arrivée q_m sont connus (cf. figure-1).

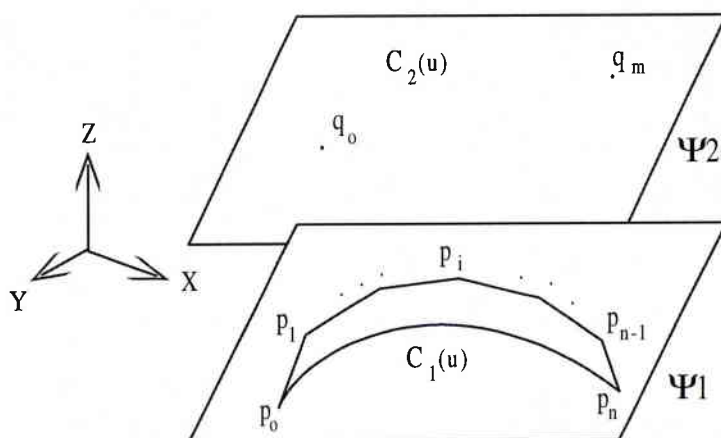


Figure-1: Hypothèse du Problème

But/Problème : Le but est de déterminer les carreaux de Bézier développables réguliers $S(u,v)$ engendrés par ces deux courbes sous les hypothèses ci-dessus.

4.2 Caractérisation des Carreaux de Bézier Développables Réguliers

4.2.1 Conditions de Développabilité de $S(u,v)$

Le carreau réglé $S(u,v)$ est développable si et seulement si les vecteurs $g'(u)$, $C_1'(u)$ et $g(u)$ sont coplanaires c'est à dire, s'il existe le scalaire réel $\delta(u)$ et $\lambda(u)$ tel que:

$$g'(u) = \delta(u) C_1'(u) + \lambda(u) g(u)$$

ou bien:

$$C_2'(u) = [1 + \delta(u)] C_1'(u) + \lambda(u) g(u)$$

$$= \rho(u) C_1'(u) + \lambda(u) g(u) \dots\dots\dots(1)$$

Soit $C_2(0) = C_0$ dans le plan Ψ_2 avec $\Psi_2 // \Psi_1$ et $\Psi_2 \neq \Psi_1$. Après, de l'équation (3), analysons les possibilités de la position de courbes de bord $C_1(u)$ et $C_2(u)$ relative au plan Ψ_2 selon la valeur du scalaire $\lambda(u)$ ci-dessous:

a) Si $\lambda(u) = 0$,

on trouve l'expression:

$$g(u_{i+1}) = \underset{\textcircled{1}}{[g(u_i)]} + \underset{\textcircled{3}}{[(\Delta u_i) \cdot \delta(u_i)] C_1'(u_i)} \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{Or, } \{ [g(u_{i+1}) - g(u_i)] / (\Delta u_i) \} = g'(u_i) = \delta(u_i) C_1'(u_i)$$

ou

$$C_2'(u_i) = [1 + \delta(u_i)] C_1'(u_i) = \rho(u_i) C_1'(u_i) \dots\dots\dots(5)$$

Donc, puisque pour tout u_i , les deux vecteurs tangents $C_2'(u_i)$ et $C_1'(u_i)$ de la courbe $C_2(u)$ et $C_1(u)$ sont parallèles, alors, pour tout $u \in (0,1]$, la courbe $C_2(u) = C_2(u)^A$ se trouve dans le plan Ψ_2 . Dans ce cas, écrivons, ensuite, la génératrice au point p_i et p_{i+1} en $g(u_i)^A$ et $g(u_{i+1})^A$. L'équation (4) devient:

$$g(u_{i+1})^A = \underset{\textcircled{1}}{[g(u_i)^A]} + \underset{\textcircled{3}}{[(\Delta u_i) \cdot \delta(u_i)] C_1'(u_i)} \dots\dots\dots(6)$$

b) Si $\lambda(u) > 0$,

on obtient la forme:

$$g(u_{i+1}) = \underset{\textcircled{1}}{[g(u_i)]} + \underset{\textcircled{3}}{[(\Delta u_i) \cdot \delta(u_i)] C_1'(u_i)} + \underset{\textcircled{2}}{[(\Delta u_i) \cdot \lambda(u_i)] g(u_i)} \dots\dots\dots(7)$$

et

$$C_2'(u_i) = \rho(u_i) C_1'(u_i) + \lambda(u_i) g(u_i) \dots\dots\dots(8)$$

De l'équation (6) et (7), exprimons respectivement d'abord la génératrice $g(u_i)^A$ et $g(u_i)$ en $u_0 = 0$, c'est à dire au point de départ p_0 , sous la forme $g(0)^A$ et $g(0)$ avec $g(0)^A = g(0)$. Ensuite, calculons itérativement ces deux équations dans ce domaine strictement monotone : $0 = u_0 < u_1 < u_2 \dots < u_i < u_{i+1} \dots < u_{n-1} < u_n = 1$. Or, puisque, pour chaque u_i , on a la valeur $[(\Delta u_i) \cdot \lambda(u_i)] > 0$, alors, pour chaque point p_{i+1} , on trouve la relation entre les deux génératrices: $|g(u_{i+1})^A| < |g(u_{i+1})|$. D'ailleurs, de l'équation (8), puisque $\lambda(u) > 0$, on la déduit que l'orientation de la direction de tous

les vecteurs tangents $C_2'(u_i)$ de la courbe $C_2(u)$ au point X_{p_i} , s'écarte du plan Ψ_1 et Ψ_2 . En effet, pour tout $u \in (0,1]$, la courbe $C_2(u)$ se trouve hors du plan Ψ_2 et oppose à la courbe $C_1(u)$ du plan Ψ_2 .

c) Si $\lambda(u) < 0$,

pour tout $u \in (0,1]$, on a la courbe $C_2(u) = C_2(u)^B$ trouvée hors du plan Ψ_2 , du même côté avec la courbe $C_1(u)$ du plan Ψ_2 .

Conclusion:

Le carreau réglé $S(u,v)$ bordé par deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$ est développable si les tangentes $C_2'(u)$ et $C_1'(u)$ sont parallèles pour tout $u \in [0,1]$.

Autrement dit :

$$C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u) \dots\dots\dots(9)$$

On peut simplement retrouver les différentes formes obtenues dans le chapitre-III. D'où, on peut écrire le scalaire $\rho(u)$ de manière:

$$\rho(u) = |C_2'(u)| / |C_1'(u)| \dots\dots\dots(9a)$$

Etudions, ensuite, la signification géométrique $\rho(u) = [1 + \delta(u)]$ liées aux vecteurs vitesses $C_1'(u)$ et $C_2'(u)$ ci-dessous [cf. équation (6) et (7) dans le chapitre-III]:

❶ $\rho(u) = \text{constant}$

➤ Si $\rho(u) = 1$, on a $\delta(u) = 0$ et $|C_2'(u)| = |C_1'(u)|$. Alors, on trouve $g'(u) = 0$ ou $g(u) = \text{constant}$. En effet, $S(u,v)$ est sous la forme cylindrique (généralisée).

➤ Si $\rho(u) \neq 1$, on a $|C_2'(u)| \neq |C_1'(u)|$. D'ailleurs, puisque $\delta(u) = \text{constant}$, tous les génératrices s'intersectent en un point. En effet, $S(u,v)$ exprime un type conique (généralisé).

❷ $\rho(u) \neq \text{constant}$

Pour $\rho(u) \neq \text{constant}$, ce qui signifie que $\delta(u) \neq \text{constant}$ et l'intersection des génératrices est sous la forme de courbe. Or, $S(u,v)$ est un type de surface engendrée par des tangentes à cette courbe.

4.2.2 Conditions de Régularité de $S(u,v)$

Réécrivons d'abord $S(u,v)$ sous la forme:

$$S(u,v) = (1-v) C_1(u) + v C_2(u) \dots\dots\dots(10)$$

avec ses dérivées partielles:

$$S^u(u,v) = (1-v) C_1'(u) + v C_2'(u) \quad \text{et} \quad S^v(u,v) = C_2(u) - C_1(u) = g(u).$$

Cette surface est régulière, si et seulement si $[S^u(u,v) \wedge S^v(u,v) \neq O]$. Puisque $C_1(u)$ et $C_2(u)$ sont dans deux plans parallèles différents, alors $S^v(u,v) = g(u)$, c'est à dire la génératrice, n'est pas nulle pour tout $u \in [0,1]$. En effet, la singularité de cette surface va apparaître si seulement le vecteur $S^u(u,v) = O$, à savoir:

$$S^u(u,v) = (1-v) C_1'(u) + v C_2'(u) = (1-v) C_1'(u) + v [\rho(u) C_1'(u)] = O$$

ou

$$[(1-v) + v \rho(u)] C_1'(u) = O \dots\dots\dots(11a)$$

Si la courbe $C_1(u)$ est régulière pour tout $u \in [0,1]$, on a $C_1'(u) \neq O$ et on trouve alors l'équation linéaire du paramètre v comme suit:

$$[(1-v) + v \rho(u)] = 0 \dots\dots\dots(11b)$$

Cela veut dire que la solution de cette équation est unique pour chaque $u \in [0,1]$ dans la forme:

$$v(u) = \frac{1}{1-\rho(u)} \quad \text{et} \quad \rho(u) \neq 0 \dots\dots\dots(12)$$

En substituant l'équation (12) dans (10), on peut donc localiser tous les points singuliers de la surface développable $S(u,v)$ sous la forme d'équation de courbe:

$$\underline{S}(u) = S(u, v(u)) = [C_2(u) - \rho(u) C_1(u)]/[1 - \rho(u)] \dots\dots\dots(13)$$

ou identiquement:

$$C_2(u) = [1 - \rho(u)] \underline{s}(u) + \rho(u) C_1(u) \dots\dots\dots(14)$$

Ce signifie que la courbe $C_2(u)$ peut être exprimée par l'interpolation de courbes $[\underline{s}(u), C_1(u)]$ relative au scalaire $\rho(u)$.

Remarque: l'expression (13) est la forme de courbe:

$$\underline{s}(u) = C_1(u) + [-1/\delta(u)] \underline{g}(u) \dots\dots\dots(14a)$$

qui définit une surface développable engendrée par des tangentes de cette courbe [cf. équation (6a) dans le chapitre-III]. La singularité existe uniquement juste le long de la courbe $\underline{s}(u)$ (cf. résumé I-b dans le chapitre-III).

Si on fixe, ensuite, le scalaire $\rho(u)$ dans l'équation (14), on trouve des possibilités de la position $\underline{s}(u)$ sur les génératrices engendrées par les deux courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ ci-dessous:

Résumé:

- a) Si $0 < \rho(u) < 1$, la courbe $\underline{s}(u)$ se trouve hors du segment $[C_1(u), C_2(u)]$, vers $C_2(u)$
- b) Si $1 < \rho(u)$, la courbe $\underline{s}(u)$ se trouve hors du segment $[C_1(u), C_2(u)]$, vers $C_1(u)$
- c) Si $\rho(u) = 0$, la courbe $\underline{s}(u) = C_2(u)$
- d) Si $\rho(u) < 0$, la courbe $\underline{s}(u)$ dans le segment $[C_1(u), C_2(u)]$.

Conclusion (cf. résumé I-a dans le chapitre-III):

Pour que la surface $S(u,v)$ engendrée par deux courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$ soit développable régulière, le choix du scalaire réel $\rho(u)$ dans la condition $C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u)$ doit être $\rho(u) > 0$

4.3 Construction de Carreaux de Bézier Développables Réguliers

Notation :

Tout carreau de Bézier développable régulier engendré par les deux courbes de Bézier $C_1(u)$ et $C_2(u)$ de degré respectifs n et m est noté $\text{CBDR}[(n,m),1]$.

Dans cette partie, on se propose de construire les carreaux de Béziens développables réguliers $\text{CBDR}[(n,m),1]$ engendrés par les deux courbes de bords. L'étude porte essentiellement sur le choix du scalaire $\rho(u)$ qui permet de contrôler les deux vecteurs vitesses $C_1'(u)$ et $C_2'(u)$.

4.3.1 Cas $\rho(u)$ Constant

Supposons que $C_1(u)$ et $C_2(u)$ soient de degré n avec:

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^n q_i B_i^n(u).$$

Le scalaire $\rho(u)$ est fixé sous la forme constante positive, c'est à dire $\rho(u) = \alpha \in \mathbb{R}^+$.

De la condition (9), nous avons:

$$n \sum_{i=0}^{n-1} (q_{i+1} - q_i) B_i^{n-1}(u) = \alpha \cdot n \sum_{i=0}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) B_i^{n-1}(u)$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n-1} [(q_i - q_{i+1}) + \alpha \cdot (p_{i+1} - p_i)] B_i^{n-1}(u) = 0.$$

Puisque pour tout $i = 0, \dots, (n-1)$ les polynômes $B_i^{n-1}(u)$ ne sont pas nuls, alors:

$$[(q_i - q_{i+1}) + \alpha \cdot (p_{i+1} - p_i)] = 0 \dots\dots\dots(15)$$

pour tout $i = 0, \dots, (n-1)$

Si nous ajoutons ces équations, nous trouverons l'équation de barycentre (vecteurs de contrôle) de polygone de Bézier de la courbe $C_1(u)$ et $C_2(u)$ ci-dessous:

$$(q_n - q_0) = \alpha \cdot (p_n - p_0) \dots\dots\dots(16)$$

De ces deux contraintes (15) et (16), on en déduit que, pour construire une forme CBDR[(n,n),1] avec les deux vecteurs vitesses $C_1'(u)$ et $C_2'(u)$ proportionnels au scalaire $\rho(u) = \alpha \in \mathbb{R}^+$, il faut que:

- ❶ le scalaire réel α soit calculé par deux vecteurs parallèles $(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_0)$ et $(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)$ de la même orientation.
- ❷ les points de contrôle $(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{n-1})$ soient déterminés par le système (15) tels que, pour chaque $i = 0, \dots, (n-1)$, les deux vecteurs $(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i)$ et $(\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i)$ sont parallèles et proportionnels au scalaire réel α .

Dans ce cas, si on trouve $\alpha = 1$, c'est à dire $|(\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_0)| = |(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)|$, la surface définie est la forme cylindrique généralisé. Sinon, la surface est un type conique généralisé.

4.3.2 Cas $\rho(u)$ Linéaire

Supposons que $C_1(u)$, respectivement $C_2(u)$ soit de degré n respectivement $n+1$:

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^{n+1} q_i B_i^{n+1}(u)$$

avec $\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + \alpha_1 u] > 0$. De l'équation (9), on obtient donc:

$$C_2'(u) = [\alpha_0 (1-u) + \alpha_1 u] C_1'(u) \dots \dots \dots (17)$$

D'autre part, nous avons l'identité:

$$(1-u) \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i^{n-1}(u) = \sum_{i=0}^n \left\langle \frac{n-i}{n} \right\rangle a_i B_i^n(u)$$

$$u \sum_{i=0}^{n-1} a_i B_i^{n-1}(u) = \sum_{i=0}^n \left\langle \frac{i}{n} \right\rangle a_{i-1} B_i^n(u)$$

En utilisant cette identité, on a l'expression:

$$C_2'(u) = (n+1) \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i) B_i^n(u)$$

et

$$[\alpha_0 (1-u) + \alpha_1 u] C_1'(u) = \alpha_0 \sum_{i=0}^n (n-i) \cdot (p_{i+1} - p_i) B_i^n(u) + \alpha_1 \sum_{i=0}^n (i) \cdot (p_i - p_{i-1}) B_i^n(u)$$

En effet, on peut simplifier l'équation (17) de manière que:

$$\sum_{i=0}^n [(n+1)(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 (n-i)(p_{i+1} - p_i) + \alpha_1 (i)(p_i - p_{i-1})] B_i^n(u) = 0$$

De cette expression, les $B_i^n(u)$ forment une base de l'espace des polynômes de degré n . Par conséquent, chaque terme dans ce crochet doit être nul. On obtient alors les équations dans la forme symétrique suivante:

$$[(n+1)(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 (n-i)(p_{i+1} - p_i) + \alpha_1 (i)(p_i - p_{i-1})] = 0 \dots\dots\dots(18)$$

pour tout $i = 0, 1, \dots, n$.

Pour illustrer et faciliter la compréhension, on prend le cas particulier $n = 3$.

Cas Particulier $n = 3$

De l'équation (18), nous discutons la construction CBDR[(3,4),1]. Puisque $n = 3$, on a les équations:

$$i = 0 : 4 (q_0 - q_1) + 3\alpha_0 (p_1 - p_0) = 0 \dots\dots\dots(19a)$$

$$i = 1 : 4 (q_1 - q_2) + 2\alpha_0 (p_2 - p_1) + \alpha_1 (p_1 - p_0) = 0 \dots\dots\dots(19b)$$

$$i = 2 : 4 (q_2 - q_3) + \alpha_0 (p_3 - p_2) + 2\alpha_1 (p_2 - p_1) = 0 \dots\dots\dots(19c)$$

$$i = 3 : 4 (q_3 - q_4) + 3\alpha_1 (p_3 - p_2) = 0 \dots\dots\dots(19d)$$

Si on ajoute toutes ces équations, on obtient l'équation de barycentre de polygone de Bézier qui détermine la forme générale de la surface développable ci-dessous:

$$\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_1 (p_3 - p) = (q_4 - q_0) \dots\dots\dots(20a)$$

ou:

$$\alpha_0 a_1 + \alpha_1 a_2 = (q_4 - q_0) \dots\dots\dots(20b)$$

avec:

$$a_1 = (p - p_0), \quad a_2 = (p_3 - p) \quad \text{et} \quad p = (1/4) [p_0 + p_1 + p_2 + p_3]$$

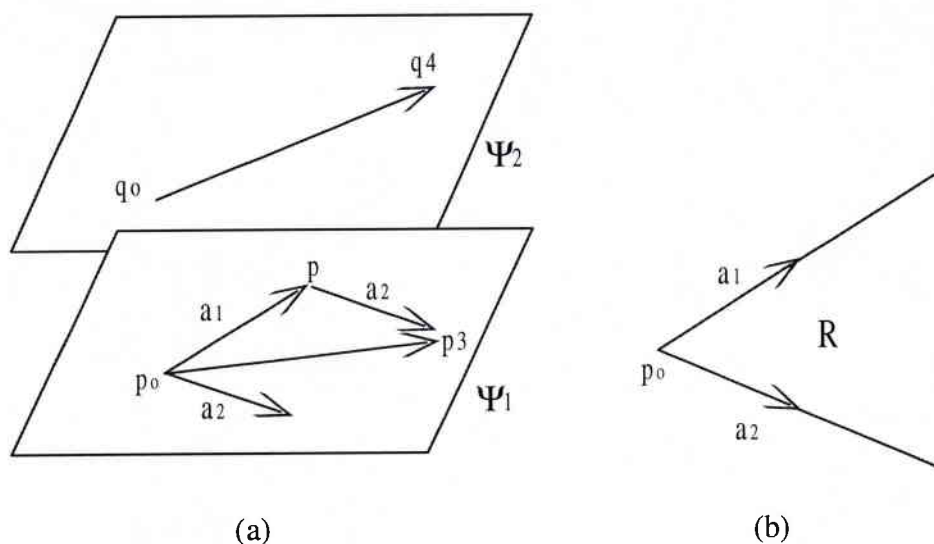


Figure-3: Vecteurs de Contrôle CBRD[(3,4),1]

La construction de la surface peut être effectuée donc par les calculs suivants:

- ❶ fixer les points de contrôle $[p_0, p_1, p_2, p_3]$ dans le plan Ψ_1 et deux points de contrôle q_0 et q_4 dans le plan Ψ_2
- ❷ calculer α_0 et α_1 dans l'expression (20)
- ❸ en utilisant l'équation (19a-b-c-d), calculer q_1, q_2 et q_3 .

L'expression (20) signifie que les paramètres α_0 et α_1 sont respectivement les composants du vecteur $(q_4 - q_0)$ par rapport aux vecteurs de base a_1 et a_2 . On a vu que pour que la surface construite soit développable régulière, il faut que $\rho(u) > 0$. Autrement dit, α_0 et α_1 doivent être strictement positifs. En d'autres termes, le vecteur $(q_4 - q_0)$ doit être trouvé dans l'intérieur de la région R (figure-3b). Donc, *l'avantage apporté* au choix $\rho(u)$ linéaire plutôt que constant, est **de faciliter le positionnement du vecteur $(q_4 - q_0)$ relatif au vecteur $(p_3 - p_0)$** , car dans le cas où $\rho(u)$ est constant, ces deux vecteurs doivent être strictement parallèles.

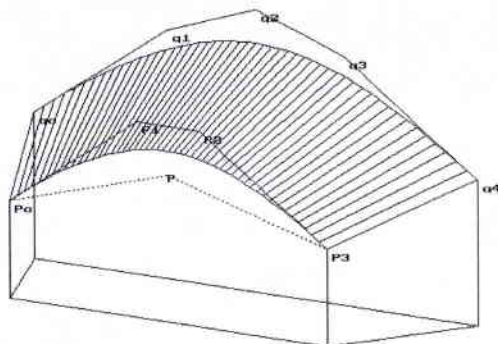


Figure-4 : CBDR[(3,4),1]

Pour justifier la singularité de la surface à cause de la condition (20) ou précisément de la position $(q_4 - q_0)$ dans le plan Ψ_2 et la position p dans le plan Ψ_1 , nous apportons *l'interprétation géométrique* suivante.

Soit le vecteur $(q_4' - p_0)$ un vecteur du plan Ψ_1 tel que celui-ci soit équipollent au vecteur $(q_4 - q_0) \subset \Psi_2$. Analysons, ensuite:

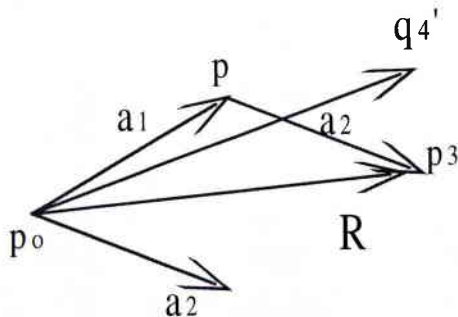


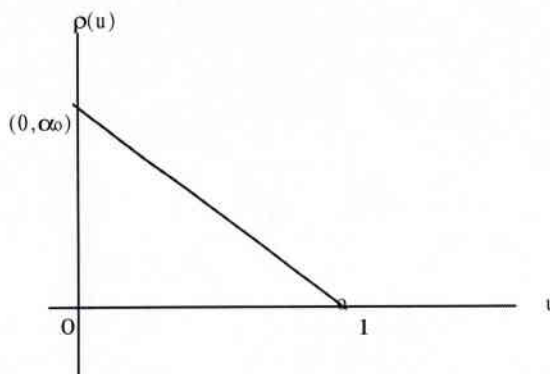
Figure-5 : Etude de Singularité

a) q_4' appartient au bord de la région R.

Il y a deux possibilités:

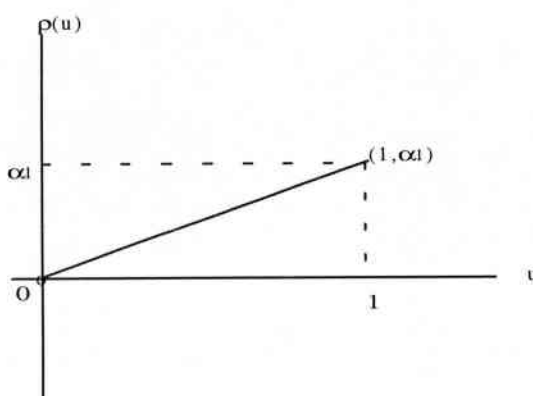
● $(q_4' - p_0)$ est colinéaire a_1 :

De l'équation (20), on obtient $\alpha_1 = 0$ et donc $\alpha_0 a_1 = (q_4 - q_0)$. Comme $\rho(u) = [\alpha_0(1-u)]$, une singularité apparaît en $u = 1$, c'est à dire $\rho(1) = 0$.

Figure-6 : Singularité en $u = 1$

② $(\mathbf{q}_4' - \mathbf{q}_0)$ est colinéaire \mathbf{a}_2 :

De l'équation (20), on obtient $\alpha_0 = 0$ et donc $\alpha_1 \mathbf{a}_2 = (\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_0)$. Comme $\rho(u) = [\alpha_1 u]$, une singularité apparaît en $u = 0$, c'est à dire $\rho(0) = 0$.

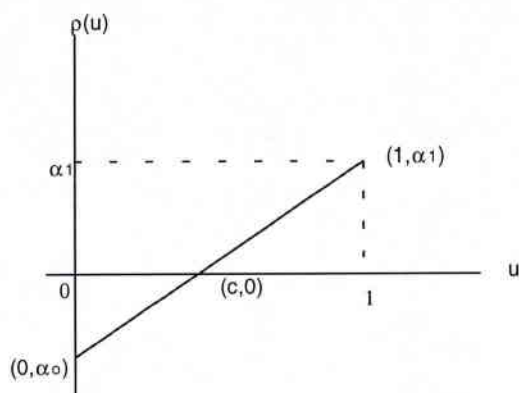
Figure-7 : Singularité en $u = 0$

b) \mathbf{q}_4' est à l'extérieur de la région R .

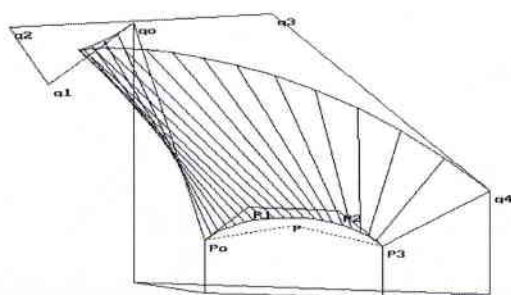
On a les trois possibilités suivantes:

① $\alpha_0 < 0$ et $\alpha_1 > 0$.

En effet, $\rho(0) = \alpha_0 < 0$ et $\rho(1) = \alpha_1 > 0$. Donc, puisque $\rho(u)$ est continu pour tout $u \in [0, 1]$, il existe $c \in (0, 1)$ tel que $\rho(c) = [\alpha_0(1-c) + \alpha_1 c] = 0$ ou $c = [(\alpha_0)/(\alpha_0 - \alpha_1)]$. Cela veut dire que, dans l'intervalle $[0, c]$, les deux courbes $[C_1(u), C_2(u)]$ sont orientées dans la direction opposée, puis dans le deuxième intervalle $(c, 1]$, elles sont orientées dans la même direction (cf. figure-8). En effet, la singularité de la surface existe uniquement dans l'intervalle $[0, c]$, c'est à dire pour tout $u \in [0, c]$ le scalaire réel $\rho(u) \leq 0$.



(a)



(b)

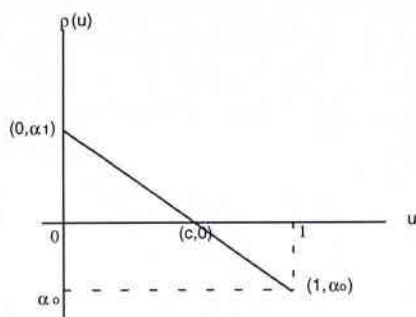
Figur-8 : Singularité dans l'Intervalle $[0,c]$

② $\alpha_0, \alpha_1 < 0$.

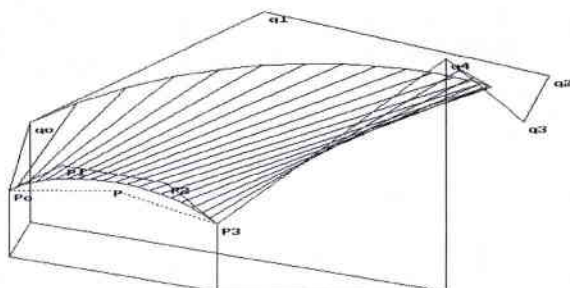
En effet, pour tout $u \in [0,1]$, on a $\rho(u) < 0$. Donc, globalement, les deux courbes $[C_1(u), C_2(u)]$ sont orientées dans la direction opposée et la singularité existe pour tout $u \in [0,1]$.

③ $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 < 0$

C'est le contraire du cas (①) où, dans le premier intervalle $[0,c)$ avec $c = [(\alpha_0)/(\alpha_0 - \alpha_1)]$, les deux courbes $[C_1(u), C_2(u)]$ sont orientées dans la même direction, puis dans le deuxième intervalle $(c,1]$, elles sont orientées dans la direction opposée (cf. figure-9). Alors dans ce cas, la singularité existe dans l'intervalle $[c,1]$.



(a)



(b)

Figur-9 : Singularité dans l'Intervalle [c,1]

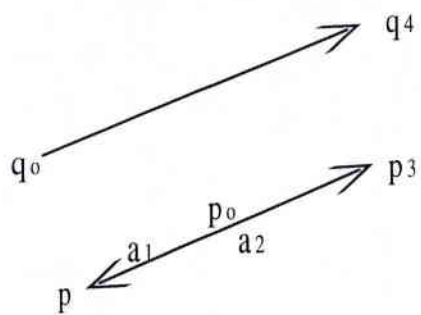
c) p est aligné avec p_0 et p_3 .

On a deux possibilités suivantes. Premièrement, il n'y a pas de solution pour l'équation (20), car $(q_4 - q_0)$ n'est pas trouvé dans l'intérieure de la région R . Deuxièmement, ces trois points vérifient la condition dans l'ordre:

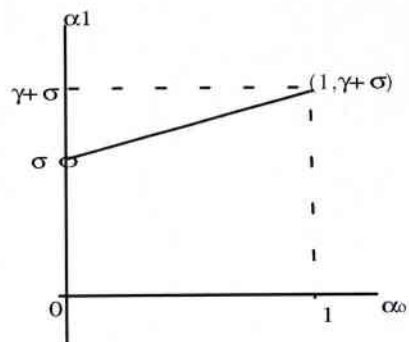
- $[p, p_0, p_3]$ et $(q_4 - q_0)$ sous la forme $(q_4 - q_0) = \sigma (p_3 - p)$ avec $\sigma > 0$.
 Ecrivons $p_0 = (1 - \gamma) p + \gamma p_3$ avec $\gamma \in [0, 1)$. En substituant ces deux expressions dans l'équation (20), on a la relation: $(\alpha_1 - \gamma \alpha_0) (p_3 - p) = \sigma (p_3 - p)$.
 Nous obtenons donc une équation avec deux variables α_0 et α_1 ci-dessous:

$$(\alpha_1 - \gamma \alpha_0) = \sigma \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = (\gamma \alpha_0 + \sigma) \dots\dots\dots(21)$$

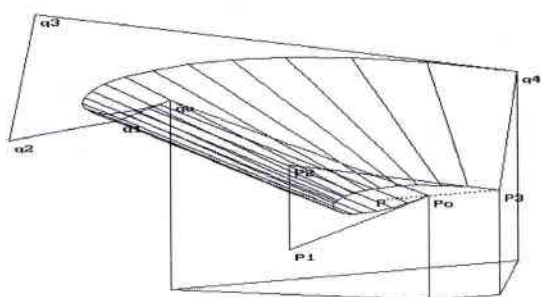
La solution de cette équation existe si seulement un de deux paramètres α_0 et α_1 est indépendant. Si on fixe $\alpha_0 > 0$, puisque $0 \leq \gamma < 1$ et $\sigma > 0$, on obtient $\alpha_1 > 0$ et $p(u) > 0$. Donc, la surface définie est régulière (cf. figure-10).



(a)

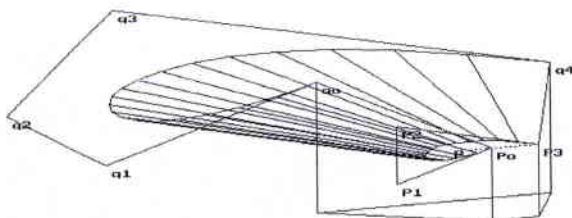


(b)



$$\alpha_0 = 0,5 \quad \gamma = 0,4 \quad \sigma = 2,9 \quad \alpha_1 = 3,1$$

(c)



$$\alpha_0 = 3,0 \quad \gamma = 0,4 \quad \sigma = 2,9 \quad \alpha_1 = 4,1$$

(d)

Figure-10 : Carreau de Bézier Développable avec $[p, p_0, p_3]$ Alignés

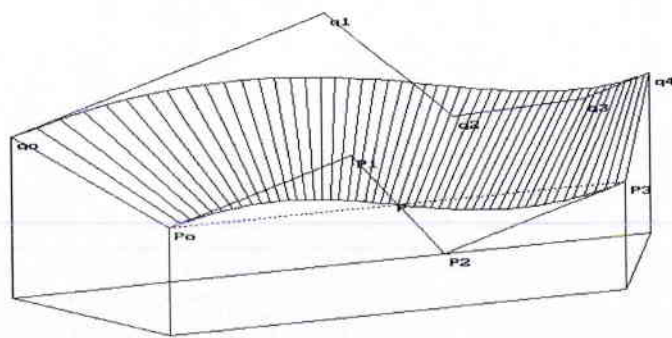
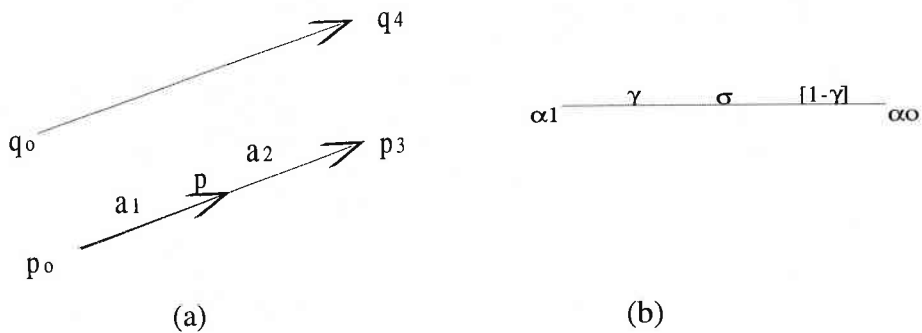
② $[p_0, p, p_3]$ et $(q_4 - q_0)$ sous la forme $(q_4 - q_0) = \sigma (p_3 - p_0)$ avec $\sigma > 0$. Soit $p = (1 - \gamma) p_0 + \gamma p_3$ avec $\gamma \in (0, 1)$. En substituant ces deux expressions dans l'équation (20), on a la relation:

$$\gamma \alpha_0 + (1 - \gamma) \alpha_1 = \sigma \dots\dots\dots(22)$$

D'où, on peut considérer σ sous la forme d'interpolation de la valeur α_1 et α_0 relatif au γ (cf. figure-11). Si nous fixons, ensuite, $0 < \alpha_1 \leq \sigma$, de l'équation (22), on a la solution:

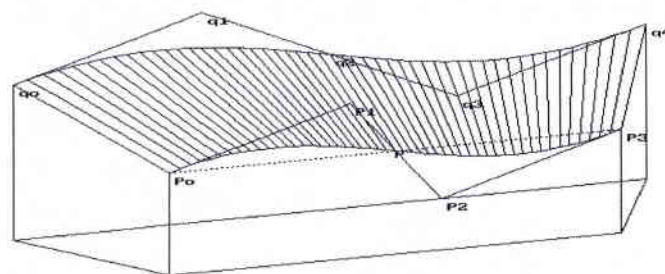
$$\alpha_0 = (1/\gamma) [\sigma - (1 - \gamma) \alpha_1] > 0 \text{ et } \rho(u) > 0.$$

En effet, la surface est régulière. Une solution naturelle se produit si la valeur $\alpha_1 = \alpha_0 = \sigma$ (cf. figure-11d). Dans ce cas, si $\sigma = 1$ la surface est cylindrique, sinon, on obtient la surface conique.



$$\alpha_1 = 0,5 \quad \gamma = 0,4 \quad \sigma = 1,8 \quad \alpha_0 = 3,8$$

(c)



$$\gamma = 0,5 \quad \alpha_1 = \alpha_0 = \sigma = 1.4$$

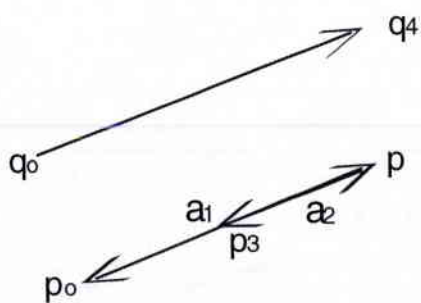
(d)

Figure-11 : Carreau de Bézier Développable avec $[p_0, p_1, p_3]$ Alignés

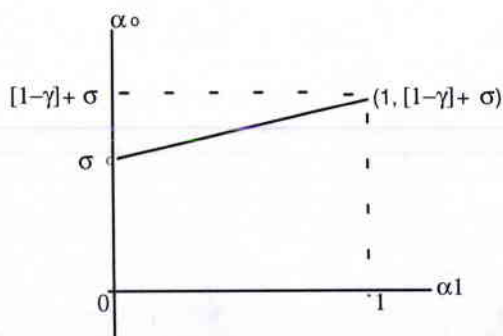
③ $[p_0, p_3, p]$ et $(q_4 - q_0)$ sous la forme $(q_4 - q_0) = \sigma (p - p_0)$ avec $\sigma > 0$.
 Ecrivons $p_3 = (1 - \gamma) p_0 + \gamma p$ avec $\gamma \in (0, 1]$. En substituant ces deux expressions dans l'équation (20), on a la relation:

$$[\alpha_0 - (1 - \gamma)\alpha_1] = \sigma \quad \text{ou} \quad \alpha_0 = [(1 - \gamma)\alpha_1 + \sigma] \dots\dots\dots(23)$$

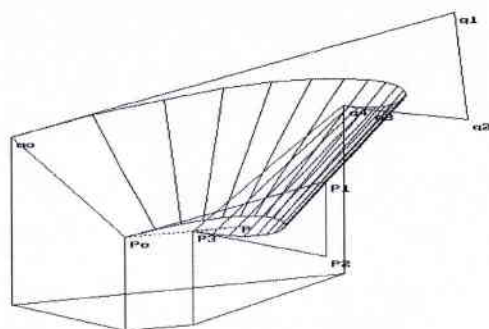
Si on fixe $\alpha_1 > 0$, puisque $0 < \gamma \leq 1$ et $\sigma > 0$, on obtient $\alpha_0 > 0$ et $\rho(u) > 0$.
 Alors, la surface définie est régulière (cf. figure-12).



(a)

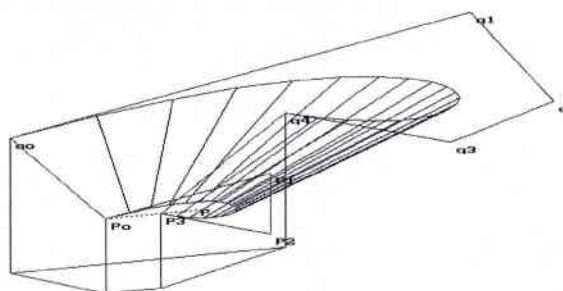


(b)



$$\alpha_1 = 0,25 \quad \gamma = 0,6 \quad \sigma = 2,9 \quad \alpha_0 = 3,0$$

(c)



$$\alpha_1 = 2,0 \quad \gamma = 0,6 \quad \sigma = 2,9 \quad \alpha_0 = 3,7$$

(d)

Figure-12 : Carreau de Bézier Développable avec $[p_0, p_3, p]$ Alignés

Donc, pour obtenir une surface développable régulière liée à la condition (20), on suggère de choisir des points: $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \Psi_1$ et $q_0, q_4 \in \Psi_2$ qui vérifient l'une de quatre situations suivantes:

- 1) si les trois points dans l'ordre $[p, p_0, p_3]$ sont alignés, on doit fixer $(q_4 - q_0) = \sigma (p_3 - p)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_0 > 0$ et $\gamma \in [0, 1)$ tel que, de l'équation (21), $\alpha_1 > 0$.
- 2) si les trois points dans l'ordre $[p_0, p, p_3]$ sont alignés, on doit fixer $(q_4 - q_0) = \sigma (p_3 - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $0 < \alpha_1 \leq \sigma$ et $\gamma \in (0, 1)$ tel que, de l'équation (22), $\alpha_0 > 0$.

3) si les trois points dans l'ordre $[p_0, p_3, p]$ sont alignés, on doit fixer $(q_4 - q_0) = \sigma(p - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_1 > 0$, et $\gamma \in (0, 1]$ tel que, de l'équation (23), $\alpha_0 > 0$.

4) sinon, $(q_4 - q_0)$ doit se trouver dans l'intérieur de l'angle $[(p - p_0), p_0, (p_3 - p)]$.

En général pour la courbe de bord $c_1(u)$ de degré n , si on ajoute les équations (18), on trouvera l'équation de barycentre de polygone de Bézier:

$$\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_1 (p_n - p) = (q_{n+1} - q_0) \dots \dots \dots (24)$$

$$\text{avec } p = [1/(n+1)] \sum_{i=0}^n p_i.$$

La construction de la surface est analogue à celle du cas $n = 3$, c'est à dire:

- a) fixer les points de contrôle p_i avec $i = 0, \dots, n$ dans le plan Ψ_1 et deux points de contrôle q_0 et q_{n+1} dans le plan Ψ_2
- b) calculer α_0 et α_1 dans l'expression (24)
- c) en utilisant les équations (18), calculer q_i avec $i = 1, \dots, n$. Ici, on a $(n+1)$ équation vectorielle pour déterminer le vecteur q_i .

Pour obtenir une surface régulière liée à la condition (24), il suffit que le choix de points q_0 , q_{n+1} et p_i avec $i = 0, \dots, n$ vérifie l'une de quatre conditions:

- 1) si les trois points dans l'ordre $[p, p_0, p_n]$ sont alignés, on doit fixer: $(q_{n+1} - q_0) = \sigma(p_n - p)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_0 > 0$ et $\gamma \in [0, 1)$ telle que la forme (21) est $\alpha_1 > 0$.
- 2) si les trois points dans l'ordre $[p_0, p, p_n]$ sont alignés, on doit fixer: $(q_{n+1} - q_0) = \sigma(p_n - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $0 < \alpha_1 \leq \sigma$ et $\gamma \in (0, 1)$ telle que la forme (22) est $\alpha_0 > 0$.
- 3) si les trois points dans l'ordre $[p_0, p_n, p]$ sont alignés, on doit fixer: $(q_{n+1} - q_0) = \sigma(p - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_1 > 0$, et $\gamma \in (0, 1]$ telle que la forme (23) est $\alpha_0 > 0$.
- 4) sinon, $(q_{n+1} - q_0)$ doit se trouver dans l'intérieur d'angle $[(p - p_0), p_0, (p_n - p)]$.

En utilisant l'identité (Du'88, P.65):

$$(1-u)^{k_1} u^{k_2} \sum_{i=0}^n a_i B_i^n(u) = \sum_{i=0}^{n+k_1+k_2} \frac{N_1 \cdot N_2}{D} a_{i-k_2} B_i^{n+k_1+k_2}(u) \dots\dots\dots(25)$$

avec:

$$N_1 = (n + k_2 + 1 - i) (n + k_2 + 2 - i) \dots (n + k_2 + k_1 - i) \text{ si } k_1 \geq 1, \text{ sinon } 1$$

$$N_2 = (i - k_2 + 1) (i - k_2 + 2) \dots (i) \text{ si } k_2 \geq 1, \text{ sinon } 1$$

$$D = (n + 1) (n + 2) \dots (n + k_1 + k_2) \text{ si } k_1 + k_2 \geq 1, \text{ sinon } 1$$

nous discutons la construction CBRD[(n,m),1] avec le choix $\rho(u)$ quadratique, cubique et le choix général $\rho(u)$ de degré $k = m-n$. Dans ce cas, puisque notre objectif est une application réelle avec une certaine efficacité du calcul, nous préférons fixer $\rho(u)$ sous la forme ci-après.

4.3.3 Cas $\rho(u)$ Quadratique

Premièrement, fixons respectivement les deux courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ de degré n et $n+2$:

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^{n+2} q_i B_i^{n+2}(u)$$

avec $\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + 2 \alpha_1 (1-u) u + \alpha_2 u] > 0$. On trouvera l'équation (9) comme suit:

$$C_2'(u) = [\alpha_0 (1-u) + 2 \alpha_1 (1-u) u + \alpha_2 u] C_1'(u) \dots\dots\dots(26)$$

En utilisant l'identité (25), nous calculons:

$$\textcircled{1} \quad C_2'(u) = (n+2) \sum_{i=0}^{n+1} (q_{i+1} - q_i) B_i^{n+1}(u)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \alpha_0 (1-u) C_1'(u) &= \alpha_0 (1-u) [(1-u) + u] C_1'(u) = \alpha_0 [(1-u)^2 + (1-u) u] C_1'(u) \\ &= \frac{\alpha_0}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} [(n-i) \cdot (n+1-i) \cdot (p_{i+1} - p_i) + \\ &\quad (n+1-i) \cdot (i) \cdot (p_i - p_{i-1})] B_i^{n+1}(u) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad 2 \alpha_1 (1-u) u C_1'(u) = \frac{2\alpha_1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} (n+1-i) \cdot (i) \cdot (p_i - p_{i-1}) B_i^{n+1}(u)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad \alpha_2 u \, C_1'(u) &= [(1-u) + u] \alpha_2 u \, C_1'(u) = \alpha_2 [(1-u) u + u^2] C_1'(u) \\ &= \frac{\alpha_2}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} [(n+1-i) \cdot (i) \cdot (p_i - p_{i-1}) + (i-1) \cdot (i) \cdot (p_{i-1} - p_{i-2})] B_i^{n+1}(u) \end{aligned}$$

En effet, on peut écrire l'équation (26) de manière que:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n+1} \{ [(n+1)(n+2)] \cdot (q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 [(n-i) \cdot (n+1-i)] \cdot (p_{i+1} - p_i) + \\ &(\alpha_0 + 2 \alpha_1 + \alpha_2) \cdot (i) \cdot [(n+1-i)] \cdot (p_i - p_{i-1}) + \\ &\alpha_2 \cdot (i) \cdot [(i-1)] \cdot (p_{i-1} - p_{i-2}) \} B_i^{n+1}(u) = 0 \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

Puisque tous les polynômes $B_i^{n+1}(u)$ ne sont pas nuls pour tout $i = 0, \dots, n+1$, on obtient alors les équations des points de contrôle de courbes de bord des carreaux dans la forme symétrique suivante:

$$\begin{aligned} &\{ [(n+1)(n+2)] \cdot (q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 [(n-i) \cdot (n+1-i)] \cdot (p_{i+1} - p_i) + \\ &(\alpha_0 + 2 \alpha_1 + \alpha_2) \cdot (i) \cdot [(n+1-i)] \cdot (p_i - p_{i-1}) + \\ &\alpha_2 \cdot (i) \cdot [(i-1)] \cdot (p_{i-1} - p_{i-2}) \} = 0 \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Pour faciliter la compréhension, on prend le cas particulier $n = 3$.

Cas Particulier $n = 3$

De cette expression, nous discutons, ensuite, la construction CBDR[(3,5),1].
Puisque $n = 3$, on a le système:

$$20 (q_0 - q_1) + 12 \alpha_0 (p_1 - p_0) = 0 \dots \dots (29a)$$

$$20 (q_1 - q_2) + 6 \alpha_0 (p_2 - p_1) + 3(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2) (p_1 - p_0) = 0 \dots \dots (29b)$$

$$20 (q_2 - q_3) + 2 \alpha_0 (p_3 - p_2) + 4(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2) (p_2 - p_1) +$$

$$2\alpha_2 (p_1 - p_0) = 0 \dots\dots(29c)$$

$$20 (q_3 - q_4) + 3(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2) (p_3 - p_2) +$$

$$6\alpha_2 (p_2 - p_1) = 0 \dots\dots(29d)$$

$$20 (q_4 - q_5) +$$

$$12 \alpha_2 (p_3 - p_2) = 0 \dots\dots(29e)$$

Si on ajoute ces équations, on obtient l'équation de barycentre de polygone de Bézier ci-dessous:

$$\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_2 (p_3 - p) = [(q_5 - q_0) - \alpha_1 v_1] = u \dots\dots\dots(30)$$

$$\text{avec: } p = (1/4) [p_0 + p_1 + p_2 + p_3] \text{ et } v_1 = \frac{2}{20} \sum_{i=1}^3 (4-i)^i (p_i - p_{i-1})$$

Evaluons, ensuite, l'existence du paramètre α_1 dans le scalaire réel

$$\begin{aligned} \rho(u) &= [\alpha_0 (1-u) + 2 \alpha_1 (1-u) u + \alpha_2 u] \\ &= (-2\alpha_1) u^2 + (-\alpha_0 + 2 \alpha_1 + \alpha_2) u + \alpha_0 \\ &= a u^2 + b u + c \end{aligned}$$

lié à la forme (30) ci-après (cf. figure-13):

❶ Si on fixe $\alpha_1 = 0$, le scalaire $\rho(u)$ est sous la forme linéaire $\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + \alpha_2 u]$ et, alors, la forme (30) est identique l'équation (20). Pour que, pour tout $u \in [0,1]$, la valeur $\rho(u)$ soit positive, les deux paramètres $\alpha_0 = \rho(0)$ et $\alpha_2 = \rho(1)$ dans la condition (30) doivent être donc positifs.

❷ Si on fixe $\alpha_1 > 0$, les deux paramètres $\alpha_0 = \rho(0)$ et $\alpha_2 = \rho(1)$ dans l'équation (30) doivent être positifs pour que, pour tout $u \in [0,1]$, le scalaire $\rho(u)$ soit positif. Dans ce cas, le graphe $\rho(u)$ est maximum au point $E([-b/2a], [-D/4a])$ où D est le discriminant de la forme: $a u^2 + b u + c$.

- ③ Si on fixe $\alpha_1 < 0$, pour que $\rho(u) > 0$, les deux paramètres $\alpha_0 = \rho(0)$ et $\alpha_2 = \rho(1)$ dans l'équation (30) doivent être positifs et, si $[-b/2a] \in (0,1)$, le discriminant D doit être $D < 0$ tel que le point minimum $E([-b/2a], [-D/4a])$ du graphe $\rho(u)$ est au-dessus de l'axe des u .

C'est la raison pour laquelle on considère ici le scalaire α_1 dans l'équation (30) comme la mesure de déviation entre $\rho(u)$ linéaire et quadratique. Ainsi qu'on évalue α_1 comme un paramètre fixé qui permet de modifier la forme de carreau selon une valeur choisie.

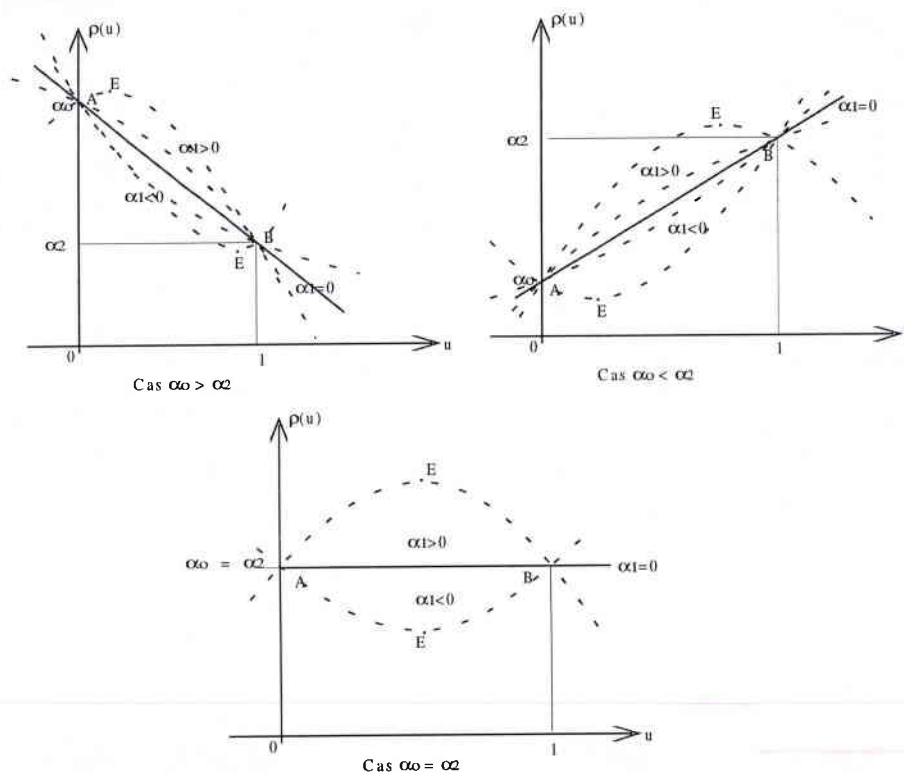


Figure-13 : Evaluation du Paramètre α_1

Si on réalise ce carreau avec la même méthode du cas $\rho(u)$ linéaire, on suffit de déterminer d'abord les points de contrôle $[p_0, p_1, p_2, p_3] \in \Psi_1$, $[q_5, q_6] \in \Psi_2$ et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Ensuite, on calcule deux quantités scalaires $[\alpha_0, \alpha_2]$ dans l'équation (30) et douze composants scalaires q_1, \dots, q_4 dans le système (29). D'ailleurs, pour obtenir la régularité du carreau, le traitement est tel dans la section (4.3.2). Si \mathbf{p} est aligné avec \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_3 , le vecteur \mathbf{u} et α_0 ou α_2 dans l'équation (30) doivent être fixés tel qu'on obtient l'expression identique (21), (22) ou (23) qui vérifie la condition $\rho(u) > 0$. Sinon, le vecteur \mathbf{u} doit se trouver dans l'intérieure de l'angle $[\mathbf{p}-\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_3-\mathbf{p}]$ tels que α_0, α_1 et α_2 vérifient $\rho(u) > 0$. Dans la figure-14, nous trouverons des exemples de carreau développable défini par des valeurs α_1 différentes et la même courbe de bord $C_1(u)$ cubique.

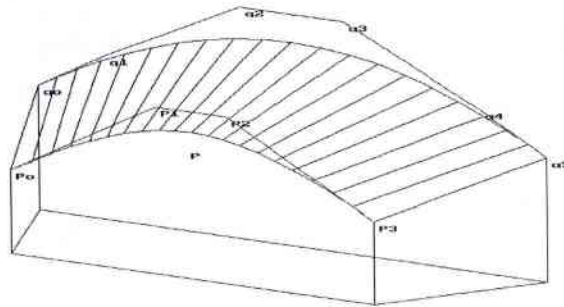
En général, si $C_1(u)$ est de degré n , on a l'équation de barycentre de polygone de Bézier:

$$\alpha_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \alpha_2 (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}) = [(\mathbf{q}_{n+2} - \mathbf{q}_0) - \alpha_1 \mathbf{v}_1] = \mathbf{v} \dots \dots \dots (31)$$

$$\text{avec: } \mathbf{p} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=1}^n (n+1-i)i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1})$$

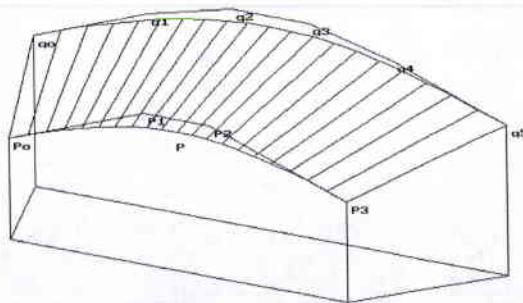
Pour réaliser ce carreau, le traitement est analogue le cas de courbe $C_1(u)$ cubique.

L'avantage apporté à la détermination $\rho(u)$ quadratique plutôt que constant ou linéaire est la possibilité du choix α_1 . Celui-ci permet de déformer (modifier) la surface définie avec les mêmes données (cf. figure-14a,b,c,d). Malheureusement avec le choix α_1 , la direction de la déformation du carreau traité, n'est que vers la partie centrale de la surface du carreau, c'est à dire unique (cf. figure-14e). Voilà pourquoi, ci-après, on a besoin de déterminer $\rho(u)$ cubique afin qu'on puisse avoir des paramètres fixés qui permettent de déformer la surface du carreau en plusieurs directions.



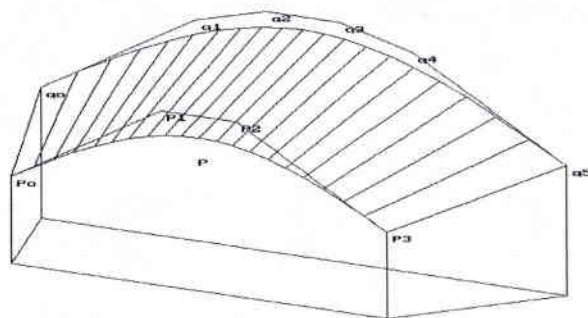
$$\alpha_1 = 2$$

(a)



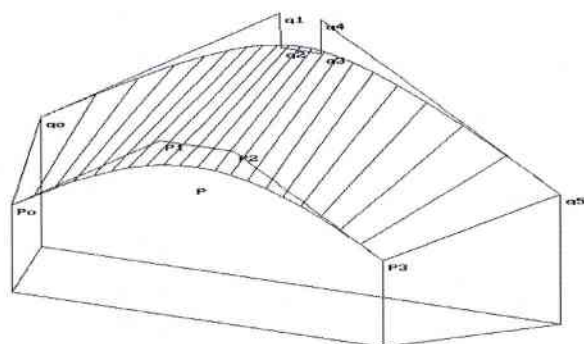
$$\alpha_1 = 0$$

(b)



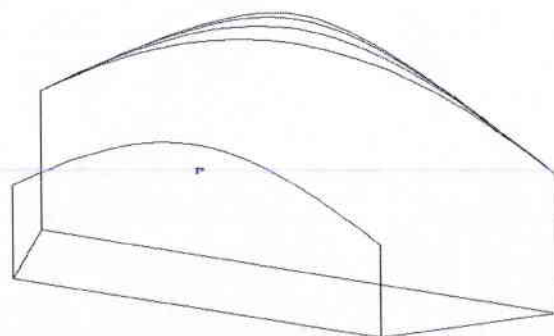
$$\alpha_1 = -3$$

(c)



$$\alpha_1 = -4$$

(d)



Courbes de Déformation du Choix $\alpha_1 = 2, 0, -3, -4$

(e)

Figure-14 : Construction CBDR[(3,5),1]

4.3.4 Cas $\rho(u)$ Cubique

Déterminons les deux courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ respectivement de degré n et $n+3$:

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^{n+3} q_i B_i^{n+3}(u)$$

avec $\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + 3 \alpha_1 (1-u)^2 u + 3 \alpha_2 (1-u) u^2 + \alpha_3 u]$ et $\rho(u) > 0$. On a, ensuite, de l'équation (9):

$$C_2'(u) = [\alpha_0 (1-u) + 3 \alpha_1 (1-u)^2 u + 3 \alpha_2 (1-u) u^2 + \alpha_3 u] C_1'(u) \dots \dots \dots (32)$$

En utilisant l'identité (25), nous exprimons:

$$\textcircled{1} C_2'(u) = (n+3) \sum_{i=0}^{n+2} (q_{i+1} - q_i) B_i^{n+2}(u)$$

$$\textcircled{2} \alpha_0 (1-u) C_1'(u) = \alpha_0 (1-u) [(1-u) + u]^2 C_1'(u)$$

$$= \alpha_0 [(1-u)^3 + 2(1-u)^2 u + (1-u) u^2] C_1'(u)$$

$$= \frac{\alpha_0}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n+2} \{(n-i).(n+1-i).(n+2-i).(p_{i+1} - p_i) +$$

$$2(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) +$$

$$(n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})\} B_i^{n+2}(u)$$

$$\textcircled{3} 3 \alpha_1 (1-u)^2 u C_1'(u) = \frac{3\alpha_1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n+2} (n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) B_i^{n+2}(u)$$

$$\textcircled{4} 3 \alpha_2 (1-u) u^2 C_1'(u) = \frac{3\alpha_2}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n+2} (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2}) B_i^{n+2}(u)$$

$$\textcircled{5} \alpha_3 u C_1'(u) = [(1-u) + u]^2 \alpha_3 u C_1'(u)$$

$$= \alpha_3 [(1-u)^2 u + 2(1-u)u^2 + u^3] C_1'(u)$$

$$= \frac{\alpha_3}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n+2} \{(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) +$$

$$2(n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2}) +$$

$$(i-2).(i-1).(i).(p_{i-2} - p_{i-3})\} B_i^{n+2}(u)$$

En effet, l'équation (32) devient:

$$\sum_{i=0}^{n+2} \{(n+1).(n+2).(n+3).(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 [(n-i).(n+1-i).(n+2-i)].(p_{i+1} - p_i) +$$

$$\langle \alpha_0 [2(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})]$$

$$+ 3 \alpha_1 (n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + 3 \alpha_2 (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})$$

$$+ \alpha_3 [(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + 2(n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})] \rangle +$$

$$\alpha_3 [(i-2).(i-1).(i)].(p_{i-2} - p_{i-3})\} B_i^{n+2}(u) = 0 \dots \dots \dots (33)$$

Puisque $B_i^{n+2}(u)$ ne sont pas nuls pour tout $i = 0, \dots, n+2$, nous trouvons alors les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
& [(n+1).(n+2).(n+3).(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 [(n-i).(n+1-i).(n+2-i)].(p_{i+1} - p_i) + \\
& \langle \alpha_0 [2(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})] \\
& + 3 \alpha_1 (n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + 3 \alpha_2 (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2}) \\
& + \alpha_3 [(n+1-i).(n+2-i).(i).(p_i - p_{i-1}) + 2 (n+2-i).(i-1).(i).(p_{i-1} - p_{i-2})] \rangle + \\
& \alpha_3 [(i-2).(i-1).(i)].(p_{i-2} - p_{i-3})] = 0 \dots \dots \dots (34)
\end{aligned}$$

pour tout $i = 0, 1, \dots, n+2$.

Pour illustrer et faciliter la compréhension, on prend le cas particulier $n = 3$.

Cas Particulier $n = 3$

De l'équation (34), nous discutons la construction CBDR[(3,6),1]. Puisque $n = 3$, nous avons donc le système des points de contrôle de courbes de bord CBDR[(3,6),1] sous la forme:

$$120 (q_0 - q_1) + 60 \alpha_0 (p_1 - p_0) = 0 \dots (35a)$$

$$\begin{aligned}
120 (q_1 - q_2) + 24 \alpha_0 (p_2 - p_1) + \{ 24\alpha_0 (p_1 - p_0) + \\
36\alpha_1 (p_1 - p_0) + \\
12\alpha_3 (p_1 - p_0) \} = 0 \dots (35b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
120 (q_2 - q_3) + 6 \alpha_0 (p_3 - p_2) + \\
\{ \alpha_0 [24 (p_2 - p_1) + 6 (p_1 - p_0)] + \\
36\alpha_1 (p_2 - p_1) + 18\alpha_2 (p_1 - p_0) + \\
\alpha_3 [12 (p_2 - p_1) + 12 (p_1 - p_0)] \} = 0 \dots (35c)
\end{aligned}$$

$$120 (q_3 - q_4) + \{ \alpha_0 [12(p_3 - p_2) + 12(p_2 - p_1)] + 18\alpha_1 (p_3 - p_2) + 36\alpha_2 (p_2 - p_1) + \alpha_3 [6(p_3 - p_2) + 24(p_2 - p_1)] \} + 6\alpha_3 (p_1 - p_0) = 0 \dots (35d)$$

$$120 (q_4 - q_5) + \{ 12\alpha_0 (p_3 - p_2) + 36\alpha_2 (p_3 - p_2) + 24\alpha_3 (p_3 - p_2) \} + 24\alpha_3 (p_2 - p_1) = 0 \dots (35e)$$

$$120 (q_5 - q_6) + 60\alpha_3 (p_3 - p_2) = 0 \dots (35f)$$

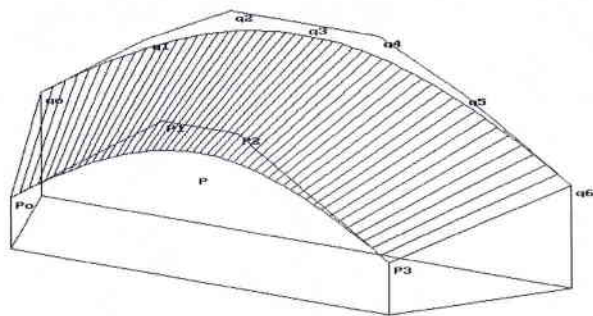
En ajoutant ces équations, nous trouverons l'équation de barycentre de polygone de Bézier dans la forme:

$$\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_3 (p_3 - p) = [(q_6 - q_0) - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2] = u \dots (36)$$

avec: $p = (1/4) [p_0 + p_1 + p_2 + p_3]$.

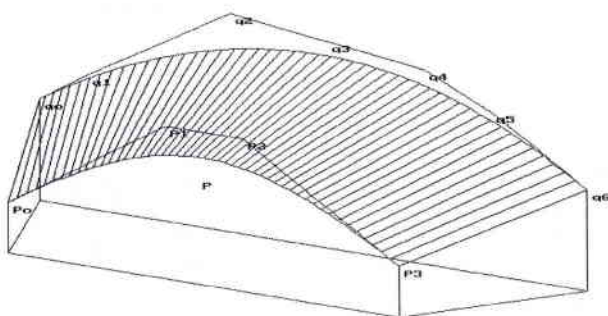
$$v_1 = \frac{3}{120} \sum_{i=1}^3 (4-i)(5-i)i (p_i - p_{i-1}) \text{ et } v_2 = \frac{3}{120} \sum_{i=2}^4 (5-i)(i-1)i (p_{i-1} - p_{i-2})$$

D'où, nous avons deux paramètres fixés α_1 et α_2 qui permettent de modifier la forme de carreau. Dans ce cas, en raison de régularité, $\alpha_0 = \rho(0)$ et $\alpha_3 = \rho(1)$ doivent être positifs et tous les paramètres choisis $[\alpha_1, \alpha_2]$ et calculés $[\alpha_0, \alpha_3]$ doivent vérifier $\rho(u) > 0$ pour tout $u \in [0, 1]$. Par exemple, en utilisant la même méthode de traitement du cas $\rho(u)$ linéaire et quadratique, dans la figure-15, nous présentons des carreaux développables définis par des valeurs $[\alpha_1, \alpha_2]$ différentes et la même courbe de bord $C_1(u)$ cubique. De cet exposé, on peut donc remarquer que, **grâce au choix du paramètre α_1 et α_2** , la direction de la déformation produite n'englobe pas seulement la partie centrale, mais également vers les deux côtés du carreau (cf. figure-15e). En effet, *l'avantage* du choix $\rho(u)$ cubique plutôt que constant, linéaire ou quadratique, est **de modifier le carreau presque toute la partie de surface du carreau.**



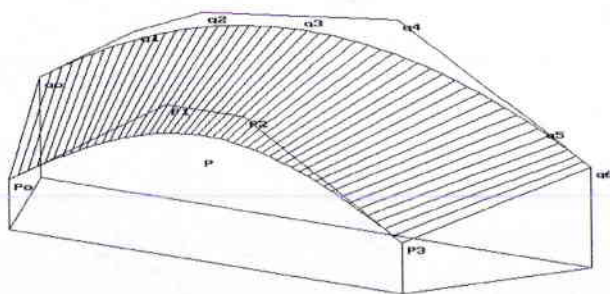
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

(a)



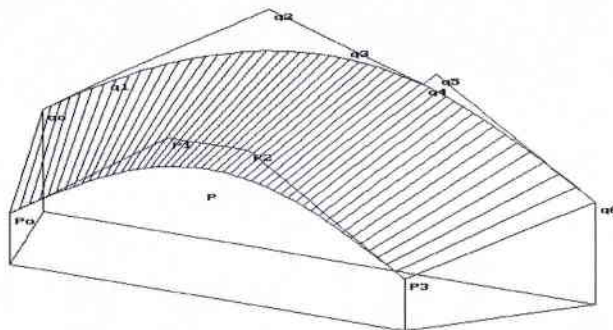
$$\alpha_1 = 2 \text{ et } \alpha_2 = 0$$

(b)

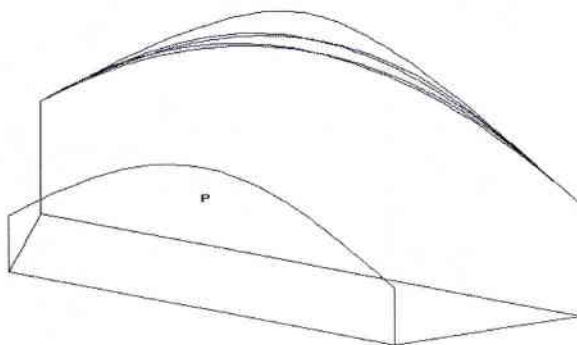


$$\alpha_1 = 0 \text{ et } \alpha_2 = 2$$

(c)



$\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -2$
(d)



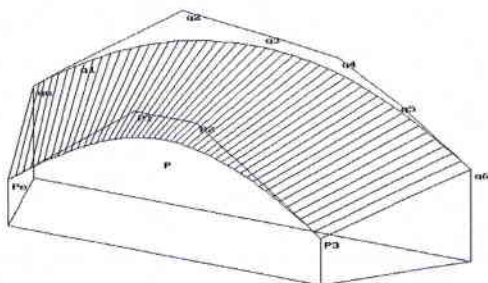
Choix $[\alpha_1, \alpha_2] = [0,0], [2,0], [0,2], [2,-2], [-2,-2]$
(e)

Figure-15 : Construction CBDR[(3,6),1]

En raison d'application, si nous préférons déformer le carreau vers ses deux côtés en linéaire équilibre, réécrivons, ensuite, les deux paramètres fixés α_1 et α_2 sous la forme $\alpha_1 = \alpha (1 - \beta)$ et $\alpha_2 = \alpha \beta$ de manière que, l'équation (36) devient:

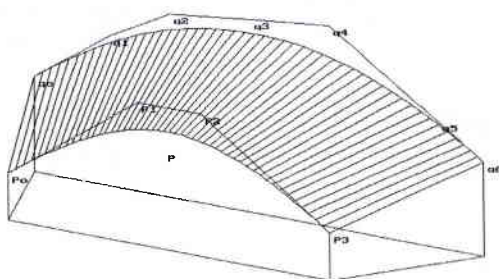
$\alpha_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \alpha_3 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}) = [(\mathbf{q}_6 - \mathbf{q}_0) - \alpha \mathbf{w}] = \mathbf{u} \dots\dots\dots(37)$
avec: $\mathbf{w} = [(1 - \beta) \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On obtient alors le nouveau vecteur W qui peut être compté comme une valeur d'interpolation linéaire entre les deux vecteurs $[V_1, V_2]$ et relative au paramètre β . En utilisant les mêmes données de la figure-15, ci-dessous, nous trouverons plusieurs déformations du carreau grâce au choix de paramètres fixés α et β .



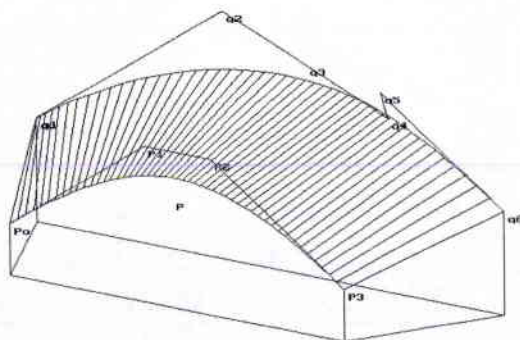
$$\alpha = 2 ; \beta = 0,1$$

(a)



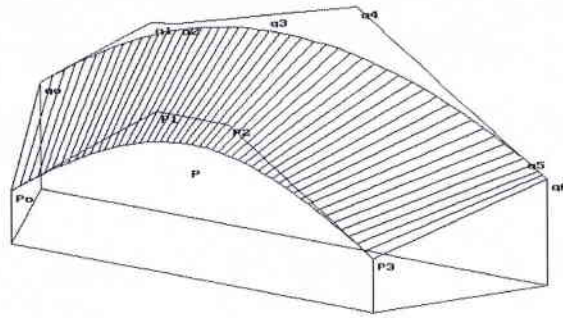
$$\alpha = 2 ; \beta = 0,9$$

(b)



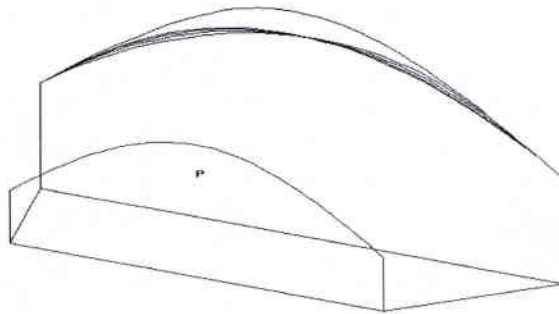
$$\alpha = 2 ; \beta = -1$$

(c)



$$\alpha = 2 ; \beta = 1,5$$

(d)



$$\text{Choix } [\alpha, \beta] = [2, (0,1)], [2, (0,9)], [2, -1], [2, (1,5)], [-2, 0]$$

(e)

Figure-16 : Déformations CBDR[(3,6),1]

Enfin, nous terminons cette partie par le calcul d'équation de barycentre de polygone de Bézier pour $C_1(u)$ de degré n suivant:

$$\alpha_0 (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + \alpha_3 (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}) = [(\mathbf{q}_{n+3} - \mathbf{q}_0) - \alpha_1 \mathbf{v}_1 - \alpha_2 \mathbf{v}_2] = \mathbf{v} \dots \dots \dots (38)$$

où:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{i=1}^n (n+1-i)(n+2-i)i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1})$$

et

$$\mathbf{v}_2 = \frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sum_{i=2}^{n+1} (n+2-i)(i-1)i (\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{p}_{i-2}) .$$

4.3.5 Cas $\rho(u)$ Général

Fixons le scalaire réel $\rho(u)$ sous la forme:

$$\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i B_i^k(u) + \alpha_k u] > 0 \dots\dots\dots(39a)$$

Déterminons respectivement les deux courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ de degré n et m :

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u) \quad \text{et} \quad C_2(u) = \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(u)$$

avec $m = (n+k)$. Or, on a la condition du carreau développable régulier:

$$C_2'(u) = [\alpha_0 (1-u) + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i B_i^k(u) + \alpha_k u] C_1'(u) \dots\dots\dots(39b)$$

Exprimons, ensuite, les quantités suivantes avec l'équation (25):

$$\triangleright C_2'(u) = m \sum_{i=0}^{m-1} (q_{i+1} - q_i) B_i^{m-1}(u) = (n+k) \sum_{i=0}^{n-1+k} (q_{i+1} - q_i) B_i^{n-1+k}(u)$$

$$\triangleright \alpha_0 (1-u) C_1'(u) = \alpha_0 (1-u) [(1-u) + u]^{k-1} C_1'(u)$$

$$= \alpha_0 [C_0^{k-1} (1-u)^k + C_1^{k-1} (1-u)^{k-1} u + \dots + C_{k-1}^{k-1} (1-u) u^{k-1}] C_1'(u)$$

$$= \frac{\alpha_0}{(n+1)(n+2)\dots(n-1+k)} \sum_{i=0}^{n-1+k} [C_0^{k-1} (n-i).(n+1-i)\dots(n-1+k-i).(p_{i+1} - p_i) +$$

$$C_1^{k-1} \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+(k-1)-i) \rangle .i.(p_i - p_{i-1}) + \dots\dots\dots +$$

$$C_{k-1}^{k-1} (n-1+k-i).\langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1).i \rangle .(p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})] B_i^{n-1+k}(u)$$

$$\begin{aligned} \triangleright \alpha_1 C_1^k (1-u)^{k-1} u C_1'(u) &= \frac{\alpha_1}{(n+1)(n+2)\dots(n-1+k)} \sum_{i=0}^{n-1+k} [C_1^k \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots \\ &\quad (n+(k-1)-i) \rangle . i . (p_i - p_{i-1})] B_i^{n-1+k}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \alpha_2 C_2^k (1-u)^{k-2} u^2 C_1'(u) &= \frac{\alpha_2}{(n+1)(n+2)\dots(n-1+k)} \sum_{i=0}^{n-1+k} [C_2^k \langle (n+2-i).(n+3-i)\dots \\ &\quad (n+1+(k-2)-i) \rangle . (i-1) . i . (p_{i-1} - p_{i-2})] B_i^{n-1+k}(u) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \triangleright \alpha_{k-1} C_{k-1}^k (1-u) u^{k-1} C_1'(u) &= \frac{\alpha_{k-1}}{(n+1)(n+2)\dots(n-1+k)} \sum_{i=0}^{n-1+k} [C_{k-1}^k (n-1+k-i) . \\ &\quad \langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1) . i \rangle . (p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})] B_i^{n-1+k}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \alpha_k u C_1'(u) &= [(1-u) + u]^{k-1} \alpha_k u C_1'(u) \\ &= \alpha_k [C_0^{k-1} (1-u)^{k-1} u + C_1^{k-1} (1-u)^{k-2} u^2 + \dots + C_{k-1}^{k-1} u^k] C_1'(u) \\ &= \frac{\alpha_k}{(n+1)(n+2)\dots(n-1+k)} \sum_{i=0}^{n-1+k} [C_0^{k-1} \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+k-1-i) \rangle . i . (p_i - p_{i-1}) + \\ &\quad \dots + C_{k-2}^{k-1} (n-1+k-i) . \langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1) . i \rangle . (p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)}) + \\ &\quad C_{k-1}^{k-1} (i-k+1) . (i-k+2)\dots(i-1) . i . (p_{i-(k-1)} - p_{i-k})] B_i^{n-1+k}(u) \end{aligned}$$

Des résultats trouvés, si nous les substituons dans l'expression (39b), nous obtenons alors les équations des points de contrôle des courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]$ sous la forme:

$$\begin{aligned}
 & (n+1)(n+2)\dots(n+k) (q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 (n-i).(n+1-i)\dots(n-1+k-i).(p_{i+1} - p_i) + \\
 & \{ \alpha_0 [C_1^{k-1} \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+(k-1)-i) \rangle .i.(p_i - p_{i-1}) + \dots + \\
 & \quad C_{k-1}^{k-1} (n-1+k-i).\langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1).i \rangle .(p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})] + \\
 & \quad [\alpha_1 C_1^k \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+(k-1)-i) \rangle .i.(p_i - p_{i-1}) + \\
 & \quad \dots + \\
 & \alpha_{k-1} C_{k-1}^k (n-1+k-i).\langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1).i \rangle .(p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})] + \\
 & \quad \alpha_k [C_0^{k-1} \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+(k-1)-i) \rangle .i.(p_i - p_{i-1}) + \dots + \\
 & \quad \quad C_{k-2}^{k-1} (n-1+k-i).\langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1).i \rangle .(p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})] \} + \\
 & \alpha_k (i-k+1).(i-k+2)\dots(i-1).i.(p_{i-(k-1)} - p_{i-k}) = 0 \dots \dots \dots (40)
 \end{aligned}$$

pour tout $i = 0, \dots, (n-1+k)$ et $k \geq 1$.

Heureusement, après un long calcul, on trouve l'équation de barycentre de polygone de Bézier:

$$\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_k (p_n - p) = [(q_m - q_0) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i] = v \dots \dots \dots (41)$$

où:

$$p = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_i,$$

$$v_1 = \frac{C_1^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \sum_{i=1}^n \langle (n+1-i).(n+2-i)\dots(n+(k-1)-i) \rangle .i.(p_i - p_{i-1})$$

$$v_2 = \frac{C_2^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \sum_{i=2}^{n+1} \langle (n+2-i).(n+3-i)\dots(n+1+(k-2)-i) \rangle .(i-1).i.(p_{i-1} - p_{i-2})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_{k-1} = \frac{C_{k-1}^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \sum_{i=(k-1)}^{(n-1)+(k-1)} (n-1+k-i).\langle (i-(k-1)+1)\dots(i-1).i \rangle .(p_{i-(k-2)} - p_{i-(k-1)})$$

La construction CBDR[(n,m),1] peut être donc effectuée par le calcul suivant:

- ❶ fixer les points de contrôle $[p_0, p_1, \dots, p_n]$ dans le plan Ψ_1 , deux points de contrôle $[q_0, q_m]$ dans le plan Ψ_2 et les paramètres $\alpha_i \in \mathbb{R}$ avec $i = 1, \dots, (k-1)$
- ❷ calculer α_0 et α_k dans l'équation (41)
- ❸ trouver $3(m-1)$ quantités scalaires de composants: $q_1, q_2, \dots, q_{(m-1)}$ dans le système (40).

D'ailleurs, pour obtenir le carreau régulier, nous vérifions la condition:

- ❶ si les trois points dans l'ordre $[p, p_0, p_n]$ sont alignés, on doit fixer:
 $v = \sigma (p_n - p)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_0 > 0$ et $\gamma \in [0,1)$ tel que:
 $\alpha_k = (\gamma\alpha_0 + \sigma) > 0$ et $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ vérifient $\rho(u) > 0$.
- ❷ si les trois points dans l'ordre $[p_0, p, p_n]$ sont alignés, on doit fixer:
 $v = \sigma (p_n - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $0 < \alpha_k \leq \sigma$ et $\gamma \in (0,1)$ tel que:
 $\alpha_0 = (1/\gamma) [\sigma - (1-\gamma)\alpha_k] > 0$ et $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ vérifient $\rho(u) > 0$.
- ❸ si les trois points dans l'ordre $[p_0, p_n, p]$ sont alignés, on doit fixer:
 $v = \sigma (p - p_0)$ avec $\sigma > 0$, $\alpha_k > 0$, et $\gamma \in (0,1]$ tel que:
 $\alpha_0 = [(1-\gamma)\alpha_k + \sigma] > 0$ et $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ vérifient $\rho(u) > 0$.
- ❹ sinon, v doit se trouver dans l'intérieur de l'angle $[(p-p_0), p_0, (p_n - p)]$ tels que $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k]$ vérifient $\rho(u) > 0$.

Bien que dans la pratique, les expressions générales (40) et (41) ne soient pas utiles en raison du choix de courbe $C_2(u)$ de degré dix considéré assez élevé, *elles permettent de choisir α_i avec au moins cinq paramètres*. Ces derniers nous permettent de faciliter la construction des surfaces développables sous la forme complexe.

4.4 Approximation à l'Aide CBDR[(n,m),1]

Dans cette section, nous discutons l'application de la *méthode de construction* CBDR[(n,m),1] à l'*approximation d'une surface réglée régulière donnée*. Pour la présenter, nous posons d'abord la position du problème suivant.

Données : deux courbes paramétriques $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]$ se trouvent respectivement dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$. Ces deux courbes déterminent une surface réglée régulière $S(u,v)$ qui peut être décomposée sous la forme d'une suite de carreau $[S(u,v)]_i$.

Problème : trouver une suite de surfaces développables régulières $[D(u,v)]_i$ avec leurs courbes de bord $[C_1(u), C_2(u)]_i$ qui approchent respectivement les courbes de bord $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]_i$ de la suite $[S(u,v)]_i$ dans le même plan $[\Psi_1, \Psi_2]$.

On a défini des carreaux développables sous la forme de carreau de Bézier. En effet, pour obtenir une solution efficace du problème exposé, il suffit de réaliser la suite $[D(u,v)]_i$ sous la forme de suite CBDR[(n,m),1]_i. Cela veut dire qu'on doit approcher respectivement les deux courbes de bord de chaque morceau $[S(u,v)]_i$ avec les deux courbes de bord CBDR[(n,m),1]_i. Voilà pourquoi, si dans la décomposition $S(u,v)$ en suite $[S(u,v)]_i$, on considère pour chaque morceau $[S(u,v)]_i$ déjà suffisamment fin ou approché par CBDR[(n,m),1]_i choisi, alors nous proposons la solution du problème en quatre étapes de traitement suivant (cf. figure-17):

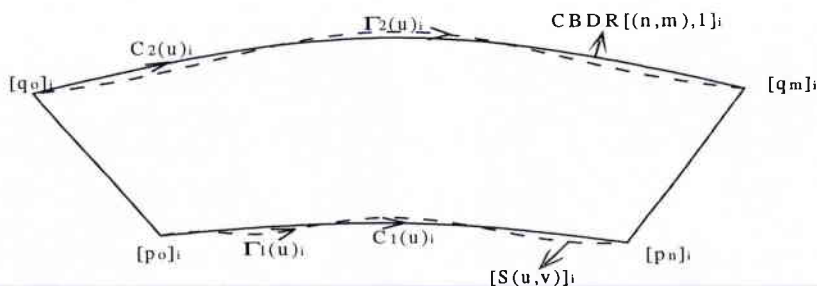


Figure-17 : Approximation du Carreau Réglé Régulier par CBDR[(n,m),1]

- ❶ **fixer** les quatre points de bord coïncidents pour chaque morceau $[S(u,v)]_i$ et CBDR[(n,m),1]_i respectivement des points: $[p_0, p_n, q_0, q_m]_i$
- ❷ **construire** CBDR[(n,m),1]_i en fixant d'abord des points de contrôle $[p_1, p_2, \dots, p_{n-1}]_i$ de la courbe $[C_1(u)]_i$ vers la courbe approchée $[\Gamma_1(u)]_i$ et, puis, des paramètres du scalaire $[p(u)]_i$ pour que la courbe cherchée $[C_2(u)]_i$ puisse approcher la courbe donnée $[\Gamma_2(u)]_i$

- ③ **évaluer** le contrôle d'erreur fixé ε de différences entre les deux courbes de bord $[\Gamma_1(u), C_1(u)]_i$ et $[\Gamma_2(u), C_2(u)]_i$ du carreau approché $[S(u,v)]_i$ et $\text{CBDR}[(n,m),1]_i$
- ④ **modifier** les points de contrôle ou les paramètres fixés dans l'étape (②) de manière que, nous trouvons la surface et l'erreur souhaité.

Dans ce cas, pour déterminer la distance entre deux courbes $[\Gamma_1(u), C_1(u)]_i$ dans le plan Ψ_1 et entre deux courbes $[\Gamma_2(u), C_2(u)]_i$ dans le plan Ψ_2 , il suffit d'utiliser la définition de fonction distance Euclidienne (Eck'93, Bogacki'95):

$$\delta = d_{\infty}(\Gamma, \mathbf{c}) = \max \{ \|\Gamma(u) - \mathbf{c}(u)\| : u \in [0,1] \}$$

4.5 Conclusion

De l'étude de construction et d'approximation des surfaces développables régulières présentées, nous obtenons finalement la conclusion suivante:

- ① La condition $C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u)$ permet de construire un carreau développable de Bézier bordé par deux courbes de Bézier $C_1(u)$ et $C_2(u)$. Celles-ci se trouvent respectivement dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$. Si le scalaire réel $\rho(u)$ posé dans l'équation (39a), est un constant, le carreau défini peut être sous la forme cylindrique ou conique généralisée. Sinon, ce carreau est un type de surface développable engendrée par des tangentes de courbe.
- ② Pour que le carreau de Bézier défini par la condition $C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u)$ soit régulier, le choix du scalaire réel $\rho(u)$ doit être positif.
- ③ La construction d'une suite des carreaux développables $[D(u,v)]_i$ qui se définissent approximativement à partir de courbes $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]$ trouvées respectivement dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$, peut être effectuée par l'approximation d'une suite $\text{CBDR}[(n,m),1]_i$. Pourtant, pour obtenir la meilleur forme de surface d'approximation, on suggère de traiter la continuité géométrique $\text{CG}^{1,2}$ de raccordement entre les deux carreaux adjacents de Bézier $\text{CBDR}[(n,m),1]_i$ et $\text{CBDR}[(n,m),1]_{i+1}$.

CHAPITRE V

RACCORDEMENT GEOMETRIQUE ENTRE DEUX CARREAUX DE BEZIER DEVELOPPABLES REGULIERS

Pour traiter le problème du raccordement géométrique entre deux carreaux de Bézier développables réguliers, nous présentons **d'abord** les données, la position de problème, l'hypothèse et l'objectif de cette étude. **Ensuite**, après avoir trouvé l'expression explicite de condition limitée $CG^{0,1,2}$ de raccordement entre deux CBDR[(n,m),1], nous discutons le cas particulier de raccordement entre les deux carreaux bordés par deux plans parallèles différents [Ψ_1, Ψ_2].

5.1 Position du Problème

Données : deux CBDR[(n,m),1] de classe $C^{n \geq 2}$ s'écrivent respectivement par $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$, où:

$$D^L(u,v) = [(1-v)C_1(u) + vC_2(u)]^L; 0 \leq u, v \leq 1$$

et

$$D^R(u,v) = [(1-v)C_1(u) + vC_2(u)]^R; 0 \leq u, v \leq 1,$$

avec deux courbes de bord $C_1(u)$ et $C_2(u)$ sous la forme:

$$C_1(u) = \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(u)$$

et

$$C_2(u) = \sum_{i=0}^m q_i B_i^m(u)$$

D'autre part, la génératrice et les dérivés partielles de ces deux carreaux sont:

$$g(u) = C_2(u) - C_1(u);$$

$$D^u(u,v) = C_1'(u) + v g'(u); \quad D^v(u,v) = g(u);$$

$$D^{uu}(u,v) = C_1''(u) + v g''(u); \quad \text{et} \quad D^{vv}(u,v) = 0.$$

Problème : trouver la condition suffisante sous la forme explicite de continuité géométrique $CG^{0,1,2}$ de raccordement entre deux CBDR $[(n,m),1]$ qui sont bordés par deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$.

Hypothèse : les deux courbes de bord de ces carreaux sont orientées vers la même direction pour tout $u \in [0,1]$.

But : construire une suite des surfaces développables $[D(u,v)]_i$ continues $CG^{1,2}$ du type CBDR $[(n,m),1]_i$.

5.2 Raccordement Géométrique

De ces données, nous cherchons successivement la condition suffisante de continuité géométrique CG^0 , CG^1 et CG^2 de raccordement entre deux carreaux de Bézier développables réguliers adjacents $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ suivants:

Condition De Continuité CG^0

Les deux carreaux de Bézier développables réguliers $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ se raccordent C^0 ou CG^0 , s'ils partagent un bord de génératrice commune $\Lambda(v)$, c'est à dire:

$$\Lambda(v) = D^L(1,v) = D^R(0,v)$$

$$[p_n + v(q_n - p_n)]^L = [p_o + v(q_o - p_o)]^R.$$

Donc, ils doivent vérifier:

$$[p_n]^L = [p_o]^R = p$$

et

$$[q_n]^L = [q_o]^R = q$$

ou:

$$[g(1)]^L = [g(0)]^R = (q - p) \dots\dots\dots(1)$$

Condition De Continuité CG¹

Les deux carreaux de Bézier développables réguliers $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ continus C^1 se raccordent CG^1 si, en chaque point, le long de leur génératrice commune $\Lambda(v)$, leur plan tangent coïncide. Cela veut dire que les trois vecteurs $[D^{Lu}(1,v), D^{Ru}(0,v), \Lambda'(v)]$ sont coplanaires pour tout $v \in [0,1]$ sous la forme:

$$\sigma_1(v) D^{Lu}(1,v) + \sigma_2(v) D^{Ru}(0,v) + \sigma_3(v) \Lambda'(v) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

où les trois scalaires $[\sigma_1(v), \sigma_2(v), \sigma_3(v) \neq 0]$ sont polynomiaux $v \in [0,1]$.

Puisque $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ sont développables, alors le plan tangent en tout point de chaque génératrice de ces carreaux doit être constant (unique). En effet, pour tout $u \in [0,1]$, les trois vecteurs $[g'(u), c_1'(u), g(u)]^L$ et $[g'(u), c_1'(u), g(u)]^R$ sont liés respectivement (cf. définition-2 dans le chapitre-III). On a donc les équations de plan qui sont valables pour tout $u \in [0,1]$:

$$\Omega 1 : [g'(u) \wedge c_1'(u) \cdot g(u)]^L = [c_2'(u) \wedge c_1'(u) \cdot g(u)]^L = 0 \dots\dots\dots(3a)$$

et

$$\Omega 2 : [g'(u) \wedge c_1'(u) \cdot g(u)]^R = [c_2'(u) \wedge c_1'(u) \cdot g(u)]^R = 0 \dots\dots\dots(3b)$$

Or, les deux carreaux de Bézier développables réguliers $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ se raccordent CG^1 si, le long de leur génératrice commune $\Lambda(v)$, tous les plans tangents de la forme (2) sont uniques suivants:

$$\Omega : \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 + \sigma_3 g(1)^L = 0 \dots\dots\dots(4a)$$

où: $V_1 = [c_1'(1) + \sigma g'(1)]^L$, $V_2 = [c_1'(0) + \sigma g'(0)]^R$ avec: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in R$, **ou bien**, les deux plans tangents $\Omega 1$ et $\Omega 2$ qui contiennent respectivement la génératrice $g(1)^L$ et $g(0)^R$ doivent être identiques, c'est à dire:

$$\Omega : [c_2'(1) \wedge c_1'(1) \cdot g(1)]^L = k \cdot [c_2'(0) \wedge c_1'(0) \cdot g(0)]^R \equiv 0 \dots\dots\dots(4b)$$

avec $k \neq 0$ et $k \in R$. En utilisant l'équation (1) de la condition CG^0 , on trouve donc la condition CG^1 :

$$[c_2'(1) \wedge c_1'(1)]^L = k \cdot [c_2'(0) \wedge c_1'(0)]^R \dots\dots\dots(4c)$$

De cette étude, on peut déduire l'expression suivante. *Puisque*, avec la condition des carreaux développables $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$, on a la garantie que les trois vecteurs $[C_2'(1), C_1'(1), g(1)]^L$ et $[C_2'(0), C_1'(0), g(0)]^R$ sont respectivement liés dans leur plan tangent unique Ω_1 et Ω_2 qui contiennent la génératrice commune $g(1)^L = g(0)^R$, *alors*, pour obtenir la continuité CG^1 des deux carreaux continus CG^0 , il suffit de vérifier les quatre vecteurs $[[C_2'(1), C_1'(1)]^L, [C_2'(0), C_1'(0)]^R]$ trouvés dans le même plan tangent $\Omega \equiv \Omega_1 \equiv \Omega_2$ (cf. figure-2a,b). Voilà pourquoi, en raison de facilité de traitement CG^1 entre deux carreaux $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$, nous préférons simplifier la condition de la continuité CG^1 dans la forme:

$$[C_1'(0)]^R = [k_1 C_1'(1) + k_2 C_2'(1)]^L \dots \dots \dots (5)$$

et

$$[C_2'(0)]^R = [k_3 C_1'(1) + k_4 C_2'(1)]^L$$

avec chaque couple scalaire $[k_1, k_2]$ et $[k_3, k_4]$ s'annulent pas simultanément.

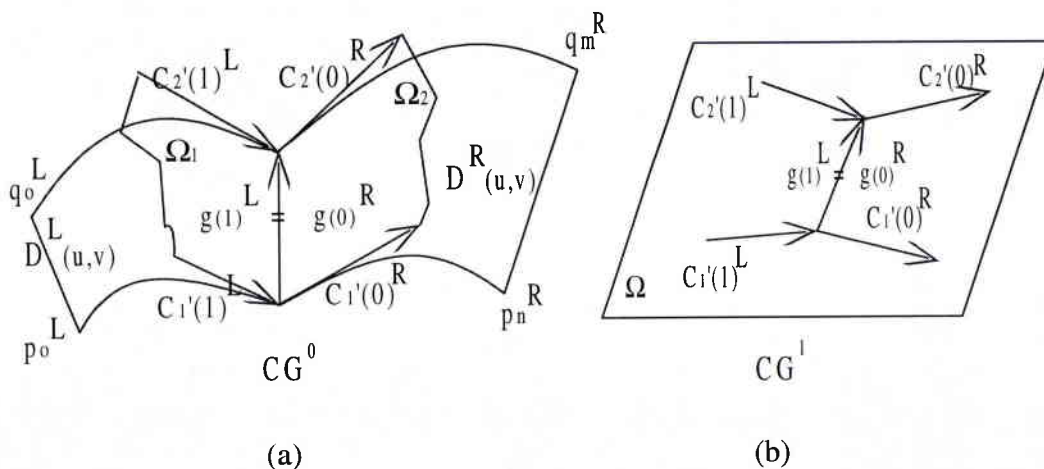


Figure-2 : Condition $CG^{0,1}$

De la suite de l'équation (5), nous traitons la continuité CG^1 de raccordement entre deux carreaux adjacents $CBDR[(n,n+1),1]$ bordés par deux plans parallèles $[\Psi_1, \Psi_2]$.

Supposons $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ sous la forme $CBDR[(n,n+1),1]$ avec la condition de surface développable $[C_2'(u) = \rho(u) C_1'(1)]$ et $\rho(u) = [\alpha_0 (1-u) + \alpha_1 u] > 0$. D'où, on obtient le système des points de contrôle de deux courbes de bord du carreau et l'équation de barycentre de polygone de Bézier [cf. équation (18) et (24) dans le chapitre-IV]:

a) pour CBDR[(n,n+1),1]^L :

$$[(n+1)(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 (n-i).(p_{i+1} - p_i) + \alpha_1 (i).(p_i - p_{i-1}) = 0]^L \dots\dots\dots(6a)$$

avec $i = 0, 1, \dots, n$

et

$$[\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_1 (p_n - p) = (q_{n+1} - q_0)]^L \dots\dots\dots(6b)$$

avec $[p = [1/(n+1)] \sum_{i=0}^n p_i]^L$.

b) pour CBDR[(n,n+1),1]^R :

$$[(n+1)(q_i - q_{i+1}) + \alpha_0 (n-i).(p_{i+1} - p_i) + \alpha_1 (i).(p_i - p_{i-1}) = 0]^R \dots\dots\dots(7a)$$

avec $i = 0, 1, \dots, n$

et

$$[\alpha_0 (p - p_0) + \alpha_1 (p_n - p) = (q_{n+1} - q_0)]^R \dots\dots\dots(7b)$$

avec $[p = [1/(n+1)] \sum_{i=0}^n p_i]^R$.

D'après l'équation (5), la condition CG¹ entre ces deux carreaux est:

$$[n(p_1 - p_0)]^R = [k_1(n).(p_n - p_{n-1}) + k_2(n+1).(q_{n+1} - q_n)]^L \dots\dots\dots(8a)$$

et

$$[(n+1)(q_1 - q_0)]^R = [k_3(n).(p_n - p_{n-1}) + k_4(n+1).(q_{n+1} - q_n)]^L \dots\dots\dots(8b)$$

De l'équation (8a,b), on déduit que, le long de génératrice commune $g(1)^L = g(0)^R$, le système (6a) et (7a) ne partagent la continuité CG¹ que respectivement la dernière et première équation, c'est à dire:

$$[(n+1)(q_n - q_{n+1}) + \alpha_1(n).(p_n - p_{n-1}) = 0]^L \dots\dots\dots(9a)$$

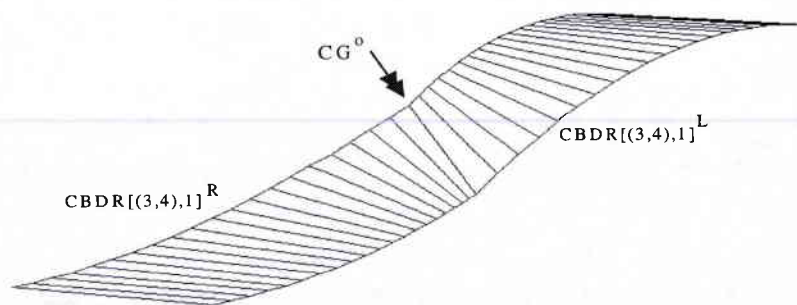
et

$$[(n+1)(q_0 - q_1) + \alpha_0(n).(p_1 - p_0) = 0]^R \dots\dots\dots(9b)$$

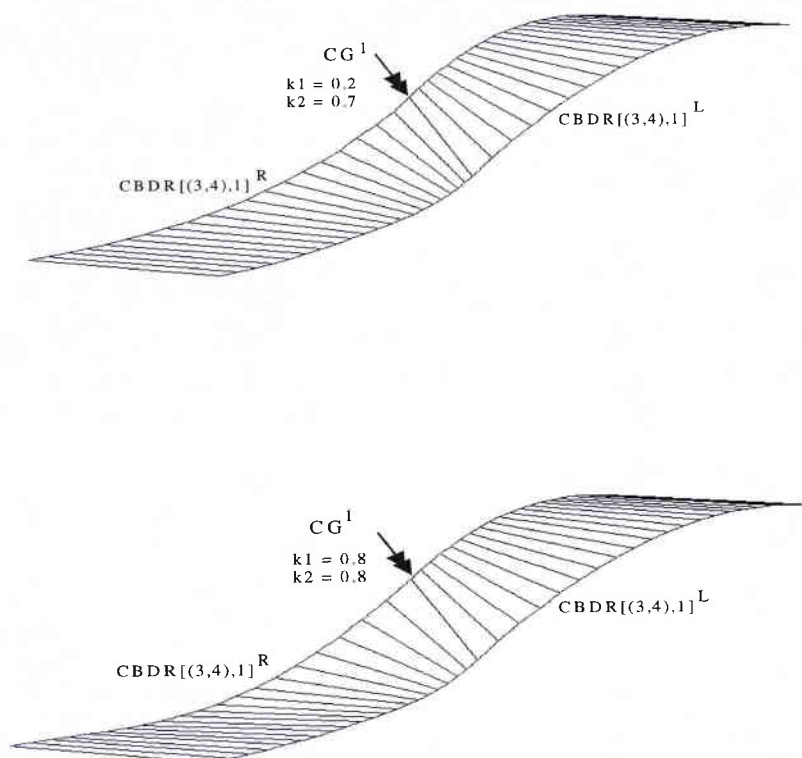
En effet, **pour réaliser une surface CG^1** , on peut utiliser le traitement suivant:

- ❶ construire $CBDR[(n,n+1),1]^L$ avec les données des points de contrôle du carreau $[p_0, \dots, p_n, q_0, q_{n+1}]^L$ selon la méthode présentée dans le chapitre-IV
- ❷ déterminer les scalaire k_1 et k_2 dans l'équation (8a) de la condition CG^1 , pour trouver le point de contrôle $[p_1]^R$
- ❸ calculer $[\alpha_0, \alpha_1]^R$ dans l'équation (7b) avec les points de contrôle données $\{[p_n, q_{n+1}]^L, [p_2, \dots, p_n, q_{n+1}]^R\}$ et le point de contrôle calculé $[p_1]^R$
- ❹ pour obtenir le point de contrôle $[q_1]^R$ trouvé dans le même plan tangent avec les points de contrôle $[p_{n-1}, p_n, q_n, q_{n+1}]^L$ et $[p_1]^R$, utiliser le calcul suivant:
 - a) substituer l'équation (8a,b) de la condition CG^1 dans l'équation (9b) de la condition développable, nous trouvons les scalaires $k_3 = \alpha_0 k_1$ et $k_4 = \alpha_0 k_2$
 - b) déterminer $[q_1]^R$ en substituant les deux scalaires k_3 et k_4 dans l'équation (8b)
- ❺ calculer les points de contrôle $[q_2, \dots, q_n]^R$ avec les équations (7a) restant, puis, construire le carré $CBDR[(n,n+1),1]^R$ avec ces points de contrôle donnés et les points de contrôle calculés $[p_1, q_1, \dots, q_n]^R$.

Remarque: correspondant à l'étape (❷) et (❹), pour garder l'orientation de la direction des courbes de bord de ces carreaux (cf. hypothèse du problème), on suffit de fixer les scalaires ($k_1 > 0$ et $k_2 \geq 0$) ou ($k_1 \geq 0$ et $k_2 > 0$).



(a)



(b)

Figure-3 : Continuité $CG^{0,1}$ Entre Deux $CDBR[(3,4),1]$

Pour traiter le cas général de la continuité CG^1 de raccordement entre deux $CDBR[(n,m),1]$ de condition $[C_2'(u) = \rho(u) C_1'(u)]$ avec le scalaire $\rho(u)$ fixé dans le chapitre-IV, il suffit d'utiliser la même méthode présentée ci-dessus, car, sa structure est identique.

Condition De Continuité CG^2

Les deux carreaux de Bézier développables réguliers $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ continus C^2 se raccordent CG^2 , si en plus de la continuité CG^1 entre ces carreaux, **la courbure gaussienne et moyenne** ou **les directions et les courbures principales** de deux carreaux sont identiques en tous les points sur la génératrice commune $\Lambda(v)$. En d'autre terme, si **les plans tangents et les paraboloïdes osculateurs** de ces surfaces se coïncident en tous les points sur cette génératrice. Sous la forme explicite, puisque, l'équation de leur courbure de gaussienne est identiquement nulle, alors, il suffit d'utiliser l'équation de leur courbure moyenne ou, l'équation de leur paraboloïde osculateur suivant [cf. équation (23, 24) dans le chapitre-II]:

$$H^L = H^R$$

$$\frac{[c_1''(1) \wedge c_1'(1) + v \cdot [c_1''(1) \wedge g'(1) + g''(1) \wedge c_1'(1)] + v^2 \cdot g''(1) \wedge g'(1)]^L}{[|c_1'(1)|^2 + 2 \cdot v \cdot [c_1'(1) \cdot g'(1)] + v^2 \cdot |g'(1)|^2 - (c_1'(1) \cdot g(1))^2]^{3/2}}]^L =$$

$$\frac{[c_1''(0) \wedge c_1'(0) + v \cdot [c_1''(0) \wedge g'(0) + g''(0) \wedge c_1'(0)] + v^2 \cdot g''(0) \wedge g'(0)]^R}{[|c_1'(0)|^2 + 2 \cdot v \cdot [c_1'(0) \cdot g'(0)] + v^2 \cdot |g'(0)|^2 - [c_1'(0) \cdot g(0)]^2]^{3/2}}]^R \dots\dots(10a)$$

ou bien,

$$z^R = z^L$$

$$1/2 \cdot [E x^2]^R = 1/2 \cdot [E x^2]^L$$

$$[D^{uu}(0,v) \cdot n_D x^2]^R = [D^{uu}(1,v) \cdot n_D x^2]^L \dots\dots\dots(10b)$$

En raison de la complexité de calcul de l'équation (10a), on préfère analyser l'expression (10b).

Supposons que l'orientation de ces deux carreaux (vecteurs normaux unités $[n_D]^R$ et $[n_D]^L$) est la même en chaque point de la génératrice commune $\Lambda(v)$. Puisque, dans le plan tangent unique Ω , les deux vecteurs $[[c_1'(1) + \sigma g'(1)], g(1)]^L$ et $[[c_1'(0) + \sigma g'(0)], g(0)]^R$ sont respectivement indépendants pour toute la valeur $v \in [0,1]$, alors tous les vecteurs tangents $\Lambda'(v) = \Gamma$ à chacune des surfaces au point de la génératrice commune $\Lambda(v)$ peuvent être exprimés localement par:

$$\Gamma = [x]^L \cdot [c_1'(1) + \sigma g'(1)]^L + [y]^L \cdot [g(1)]^L \dots\dots\dots(11)$$

$$= [x]^R \cdot [c_1'(0) + \sigma g'(0)]^R + [y]^R \cdot [g(0)]^R$$

D'autre part, d'après l'équation (4a) de la condition CG^1 , on a

$$[c_1'(1) + \sigma g'(1)]^L = -(\sigma_2/\sigma_1) [c_1'(0) + \sigma g'(0)]^R - (\sigma_3/\sigma_1) g(1)^L$$

Or, on peut écrire la forme (11) de manière que:

$$\begin{aligned}\Gamma &= -(\sigma_2/\sigma_1) [x]^L [c_1'(0) + \sigma g'(0)]^R + [-(\sigma_3/\sigma_1) [x]^L + [y]^L] \cdot [g(1)]^L \\ &= [x]^R \cdot [c_1'(0) + \sigma g'(0)]^R + [y]^R \cdot [g(0)]^R\end{aligned}$$

Puisque, selon la condition CG^0 , on a $[g(1)]^L = [g(0)]^R$, on obtient alors la relation ci-dessous:

$$\begin{aligned}[x]^R &= -(\sigma_2/\sigma_1) [x]^L \\ [y]^R &= -(\sigma_3/\sigma_1) [x]^L + [y]^L\end{aligned}$$

En effet, pour que, le long de la génératrice commune $\Lambda(v)$, les courbures de ces deux surfaces développables vérifient la continuité géométrique CG^2 , on déduit, ensuite, l'équation (10b) sous la forme:

$$D^{Ruu}(0,v) \cdot [x^2]^R = D^{Ruu}(0,v) \cdot (\sigma_2/\sigma_1)^2 \cdot [x^2]^L = D^{Luu}(1,v) \cdot [x^2]^L$$

ou:

$$D^{Ruu}(0,v) = \beta D^{Luu}(1,v)$$

$$[c_1''(0) + v g''(0)]^R = \beta [c_1''(1) + v g''(1)]^L$$

$$[(1-v)c_1''(0) + v c_2''(0)]^R = \beta [(1-v)c_1''(1) + v c_2''(1)]^L$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. Donc, nous trouvons **la condition de continuité CG^2** de raccordement entre deux carreaux adjacents $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ suivants:

$$[c_1''(0)]^R = \beta [c_1''(1)]^L \dots\dots\dots(12)$$

et

$$[c_2''(0)]^R = \beta [c_2''(1)]^L$$

Pour obtenir la continuité CG^2 de raccordement entre deux CBDR $[(n,n+1),1]$ continus CG^1 précédemment traités, on suffit de calculer les deux points de contrôle $[p_2, q_2]^R$ avec l'expression (12) et la deuxième équation du système (7a), c'est à dire:

$$[(p_2 - p_1) - (p_1 - p_0)]^R = \beta [(p_n - p_{n-1}) - (p_{n-1} - p_{n-2})]^L \dots\dots\dots(13a)$$

$$[(q_2 - q_1) - (q_1 - q_0)]^R = \beta [(q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n-1})]^L \dots\dots\dots(13b)$$

$$[(n+1)(q_1 - q_2) + \alpha_0(n-1)(p_2 - p_1) + \alpha_1(p_1 - p_0) = 0]^R \dots\dots\dots(13c)$$

Dans ce cas, on fixe d'abord le scalaire β dans l'équation (13a) pour trouver $[p_2]^R$, puis, après avoir calculé α_0 et α_1 avec la forme (7b), on détermine $[q_2]^R$ en utilisant l'expression (13b,c).

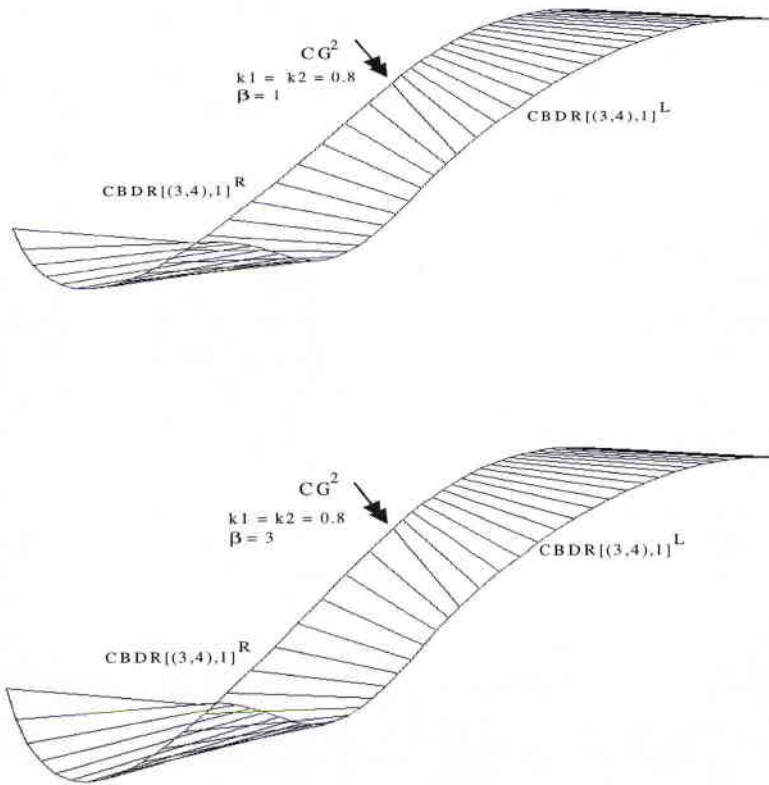


Figure-4 : Continuité CG^2 Entre Deux $CBDR[(3,4),1]$

De la solution du problème de raccordement $CG^{0,1,2}$ entre deux $CBDR[(n,m),1]$ adjacents , on a donc le résumé:

Résumé:

Soient $D^L(u,v)$ et $D^R(u,v)$ deux $CBDR[(n,m),1]$ de classe $C^{n \geq 2}$ avec leurs courbes de bord de la même direction. Les deux carreaux se raccordent CG^0 , CG^1 et CG^2 s'ils vérifient l'expression (1), (5) et (12).

CHAPITRE VI

CONCLUSION GENERALE

Dans cette thèse, nous posons **le problème de la définition d'une suite de plaques** $S_i(u,v)$ qui s'appuient sur deux courbes de bord données $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ trouvées respectivement dans deux plans parallèles différents $[\Psi_1, \Psi_2]$ **à la forme de définition mathématique de surface développable**. La suite définie doit être **continue CG^2** et chaque plaque doit être **sous la forme de carreau de Bézier**.

Grosso modo, la méthode de calcul analytique et de quatre points coplanaires permettent de traiter ce problème, mais, dans la limite de surface développable sous la forme simple et naturelle. Ensuite, à cause de la particularité du choix des courbes et des scalaires réels dans la condition de développabilité de la méthode d'interpolation de carreau de Bézier, il est en effet difficile de réaliser cette surface de manière approximative. Plus tard, les méthodes restantes, c'est à dire la méthode de dualité, d'approximation isoparamétrique et la méthode de subdivision, en pratique, ne sont pas utiles pour traiter le problème en raison de la complexité, de la précision du calcul et des contraintes de fabrication. Pour cela, nous avons besoin de trouver une solution satisfaisante et le meilleur compromis possible pour résoudre ce problème.

A partir de telles courbes, en général, il n'y a pas de réponse positive pour l'existence de surface développable qui se trouve et se borde par ces courbes. En effet pour résoudre ce problème, il est préférable d'appliquer une méthode d'approximation. Nous la proposons comme suit:

- ❶ **décomposer** $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]$ en suite de segments de courbe $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]_i$ qui définissent les morceaux de surface réglée $[S(u,v)]_i$. Chaque morceau $[S(u,v)]_i$ correspond au problème de la définition de plaque $S_i(u,v)$.
- ❷ **approcher** chaque couple $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]_i$ de courbe de bord $[S(u,v)]_i$ avec $[C_1(u), C_2(u)]_i$ de courbe de bord CBDR $[(n,m), 1]_i$. Dans le cas où le morceau d'approximation CBDR $[(n,m), 1]_i$ qui définit la plaque $S_i(u,v)$ n'est pas satisfait, **décomposer et traiter encore** $[\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)]_i$ en plusieurs sous morceaux pour que nous trouvons des morceaux d'approximation souhaités pour la plaque $S_i(u,v)$.
- ❸ **traiter** la continuité $CG^{1,2}$ pour ajuster les raccordements successives entre deux CBDR $[(n,m), 1]$ définis
- ❹ **construire** les carreaux du traitement (❷) et (❸) pour réaliser la définition de la suite de plaque $S_i(u,v)$.

Nous apportons, ci-après, des intérêts de la méthode proposée en faisant la comparaison avec les travaux existant à la conception du bateau:

- ① Le scalaire réel $\rho(u)$ qui nous avons choisi dans la condition de développabilité $\text{CBDR}[(n,m),1]_i$, permet de réaliser tout les types de surface développable qui définit la plaque $S_i(u,v)$ bordée par deux plan parallèles arbitraires différents.
- ② Nous autorisons de fixer le scalaire $\rho(u)$ de degré $k > 2$, afin que nous avons plusieurs paramètres réels fixés qui permettent de faciliter l'approximation de la courbe $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]_i$ avec $[C_1(u),C_2(u)]_i$ de courbe de bord $\text{CBDR}[(n,m),1]_i$.
- ③ Nous autorisons de choisir les courbes $[C_1(u),C_2(u)]_i$ de degré plus élevé, pour que le traitement d'approximation $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]_i$ soit efficace.
- ④ Nous formulons la condition de la continuité $\text{CG}^{1,2}$ de raccordement entre les deux $\text{CBDR}[(n,m),1]$ de manière simple et, alors, le traitement de calcul de la surface peut être plus facile.

Pour valider cette approche, nous avons réalisé un certain nombre de programme (Annexe-A et Annexe-B). Les illustrations proposées dans ce manuscrit sont issus de ces programmes.

Du problème et la solution proposée, nous concluons que la methode d'approximation en utilisant $\text{CBDR}[(n,m),1]$ permet de traiter les surfaces du bateau sous la forme plus complexe. Dans cette méthode, le polynôme choisi ne doit pas être de degré élevé, car chaque plaque $S_i(u,v)$ peut être traitée en plusieurs carreaux et, en effet, le calcul peut être plus simple.

Si les problèmes de la modélisation mathématique de plaques $S_i(u,v)$ qui s'appuient sur $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ dans deux plans parallèles sont déjà traités, il reste alors le problème du cas $\Gamma_1(u)$ et $\Gamma_2(u)$ dans deux plans interceptés. Le traitement peut être analogue avec la méthode présentée, mais, il faut que le choix $\lambda(u)$ dans la condition de développabilité [équation (1) dans le chapitre-IV] soit $\lambda(u) \neq 0$. Sinon, il est possible de construire d'abord une surface développable d'approximation déterminée par deux courbes dans deux plans parallèles $[\Psi_1,\Psi_2]$ dont la première courbe est $\Gamma_1(u)$ dans Ψ_1 et la deuxième courbe est une courbe d'intersection entre le plan Ψ_2 et une surface réglée définie par $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]$. Ensuite, on coupe cette surface développable d'approximation avec un plan Ψ qui contient $\Gamma_2(u)$ pour que la surface développable trouvée soit bordée approximativement par $[\Gamma_1(u),\Gamma_2(u)]$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Aumann G., 1991, *Interpolation With Developable Bézier Patches*, CAGD, Vol 8 (409-420) Karlsruhe.
- Bartels R.H. et al., 1987, *B-Spline*, Hermes, Paris.
- Bass J.O., 1978, *Cours De Mathématique; Tome 1 Faciscule 2*, Masson, Paris.
- Beeker E., 1986, *Smoothing Of Shape Designed With Free-Form Surfaces*, CAD, Vol 18 (224-232).
- Bellart O. et Moreau P., 1990, *Modélisation Des Courbes et Des Surfaces Dans Le Système CATIA (Revue Internationale de CFAO et d'Infographie - Yvon GARDAN)*, V5, Hermes, Paris.
- Bennis C. et al, 1991, *Piecewise Surface Ftattening For Non-Distorted Texture Mapping*, Computer Graphics, Vol 25, No 4 (273-245).
- Bézier P., 1987, *Courbe Et Surface*, Hermes, Paris.
- Bogacki P. et al., 1995, *Degree Reduction Of Bézier Curves By Uniform Approximation With Endpoint Interpolation*, CAD, Vol 27 (651-661), USA.
- Bodduluri R.M.C. et Ravani B, 1993, *Design Of Developable Surfaces Using Dualites Between Plane And Point Geometries*, CAD, Vol 25 (621-632), California.
- Boehm W., et al., 1984, *A Survey Of Curve And Surface Methodes In CAGD*, CAGD, Vol 1 (1-60); North Holland.
- Boehm W., et al., 1994, *Geometric Conseptes For Geometric Design*, AK Peter, Wesley.
- Clements J., 1981, *A Computer System To Derive Developable Hull Surface And Tables Of Offsets*, Marine Technology Vol 8 (227-233).
- Clement J. and Leon L.J., 1987, *A Fast Accurate Algorithm For The Isometric Mapping Of Developable Surafces*, Siam J. Math. Analysis Vol 8 (966-971).
- Démidovitch B. et Maron I., 1973, *Element De Calcul Numérique*, Mir, Moscou.
- DeRose T.D. And Barsky B.A., 1988, *Geometric Continuity, Shape Parameter, And Geometric Construction For Catmull-Rom Splines*, ACM Transaction On Graphics Vol 7(1-41).
- do Carmo M.P., 1976, *Differential Geometry Of Curves And Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey.
- Doneddu A., 1986, *Algèbre Et Géométrie*, Vuibert, Paris.
- Du Wen Hui, 1988, *Etude Sur La Représentation Des Surfaces Complexes: Application à La Reconstruction De Surfaces Echantillonées*, Sup. Télécom (ENST) - Paris.

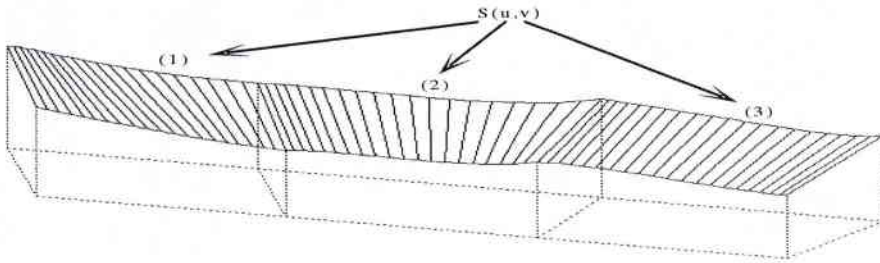
- Du Wen Hui And Schmitt J.M., 1990, *On The G^1 Continuity Of Piecewise Bézier Surface*, CAGD, Vol 22-9 (556-570).
- Eck M., 1993, *Degree Reduction Of Bézier Curve*, CAGD, Vol 10 (273-251).
- Elber G., 1995, *Model Fabrication Using Surface Layout Projection*, CAD, Vol 27 (283-291) Utah, USA.
- Farin G., 1982, *A Construction For Visual C^1 Continuity Of Polynomial Surface Patches*, Computer Graphics An Image Processing, Vol 20 (272-282).
- Farin G., 1990, *Curves And Surfaces For CAGD*, Academic Press, Tempe, Arizona.
- Faux I.D. and Pratt M.J., 1980, *Computational Geometry For Design And Manufacture*, Ellis Horwood, UK.
- Ferris W., 1968, *A Standard Series Of Developable Surface*, Marine Technology, Vol 5 No.1, USA.
- Florent P. et al., 1978, *Equations Et Systèmes Différentiels*, Vuibert, Paris.
- Frey W.H. et al., 1993, *Computer Aided Design Of Class Of Developable Bézier Surfaces*, GM Publication R&D-8057, USA.
- Golub G.H. and Loan C.F., 1983, *Matrix Computation*, Baltimor.
- Gourret J.P., 1994, *Modélisation d'Images Fixes Et Animées*, Masson, Paris.
- Gurunathan B. and Dhande S.G., 1987, *Algorithm For Development Of Certain Classes Of Ruled Surfaces*, Computer & Graphics Vol 11, No 2 (105-112).
- Hind B.K. et al., 1991, *Pattern Development For 3D Surfaces*, CAD, Vol 23 (583-592) Belfast.
- Hoffmann C And Hopcroft J., 1987, *Geometric Modeling: Algorithms And New Trend (Farin G.)*, (347-365) Siam, Utah.
- Hoshcek J. et al., 1993, *Fundamental Of CAGD*, AK Peter, Wellesly, Massachusetts.
- Kebrat J. et Braemer J.M., 1976, *Géométrie Des Courbes Et Des Surfaces*, Hermann, Paris, France.
- Kocie L.M., 1991, *Modification Of Bézier Curve And Surface By Degree-Elevation Technique*, CAD, Vol 23 (692-699), Yugoslavia.
- Kreyszig E., 1994, *A New Standart Isometry Of Developable Surfaces In CAD/CAM*, Siam J. Math. Analysis, Vol 25, No 1 (174-178).
- Lang J. And Röschel O., 1992, *Developable (1,n)-Bézier Surfaces*, CAGD, Vol 9 (291-298) North-Holland.
- Laurent P.J., 1991, *Curve And Surface*, Academic Press, Boston, USA.
- Leon J.C., 1991, *Modélisation Et Costruction De Surfaces Pour La CFAO*, Hèrmes, Paris.
- Lipschutz M.M., 1969, *Differential Geometry*, McGraw-Hill, New York, USA.

- Luo R. et al., 1995, *Tracing Tangential Surface-Surface Intersection, (Third Symposium On Solid Modeling And Applications)*, (255-262), Proceedings, Utah, USA.
- Manning J.R., 1980, *Computerized Pattern Cutting (methods Based On An Isometric Tree)*, CAD, Vol 12, No 1 (43-47).
- Martin P., 1967, *Application De l'Algebre Et De l'Analyse A La Géométrie*, Armand Colin, Paris.
- Mortenson M.E., 1985, *Geometric Modelling*, John Wiley & Sons, New York.
- Nolan T.J., 1971, *Computer-Aided Design Of Developable Hill Surfaces*, Marine Technology, Vol 8, USA.
- O'Neill B., 1966, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, London.
- Pottmann H., Farin G., 1995, *Developable Rational Bézier and B-Spline Surfaces*, CAGD Vol 12 (513-531).
- Protter M.H., et al., 1977, *A First Course In Real Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- Scheid F., 1986, *Analyse Numérique (Schaum's Outline Series)*, McGraw-Hill, Paris.
- Sibony M. & Mardon C., 1988, *Systèmes Linéaires Et Non Linéaires*, Hemann, Paris.
- Smirnov V.I., 1964, *Course Of Higher Mathematics II*, Pergamon Press Ltd, London.
- Stoer J. and Burlich R., 1993, *Introduction To Numerical Analysis*, Springer Verlag.
- Struik D.J., 1950, *Lecture On Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading.
- Sun M. And Fiume E., 1996, *A Technique for Constructing Developable Surfaces* (Proceeding Graphics Interface'95: Dawis W.A. et al), Toronto.
- Veron M. et al., 1976, *Continuity Of Biparametric Surface Patches*, CAD, Vol 8 No.8 (267-273).
- Watkins M.A., 1988, *Problem In Geometric Continuity*, CAGD, Vol 20 (499-501), Salt Lake City, USA.
- Weiss G. And Furtner P., 1988, *Computer-Aided Treatment Of Developable Surfaces*, Computer & Graphics, Vol 12 (39-51).

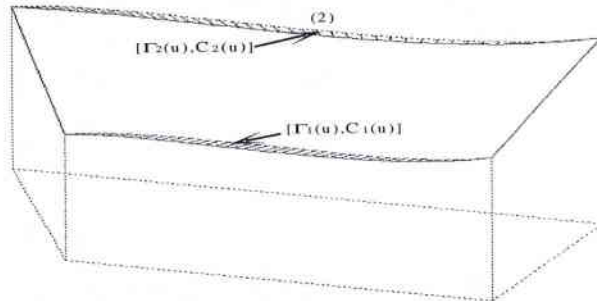
ANNEXE-A

SURFACE REGLÉE $S(u,v)$ DE COURBE DE BORD POLYNOMIALE DE BEZIER TRAITEE PAR CBDR[(3,4),1]

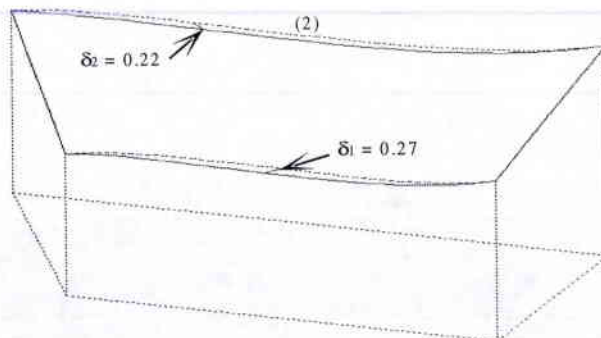
a) Décomposition de Surface Régée $S(u,v)$ en Trois Morceaux

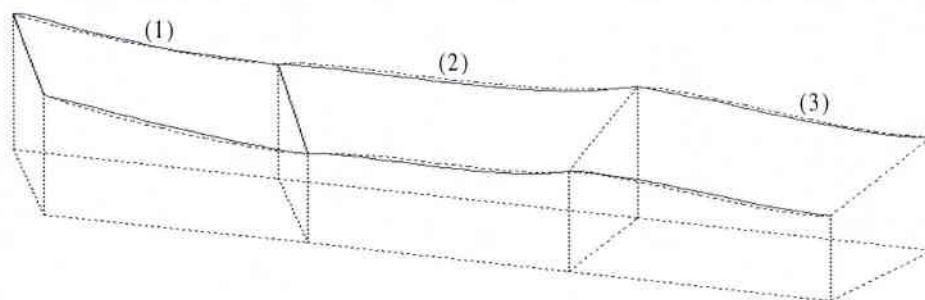
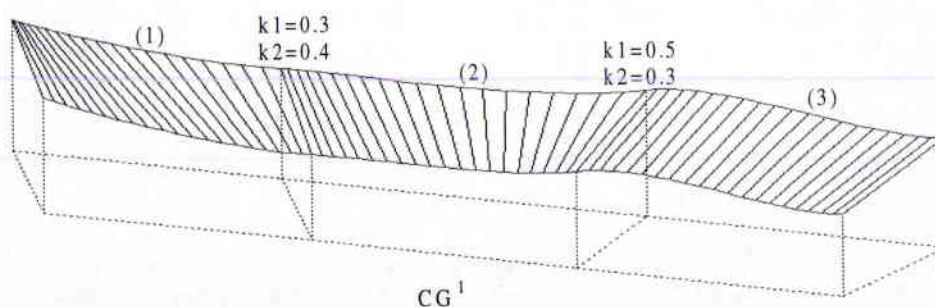
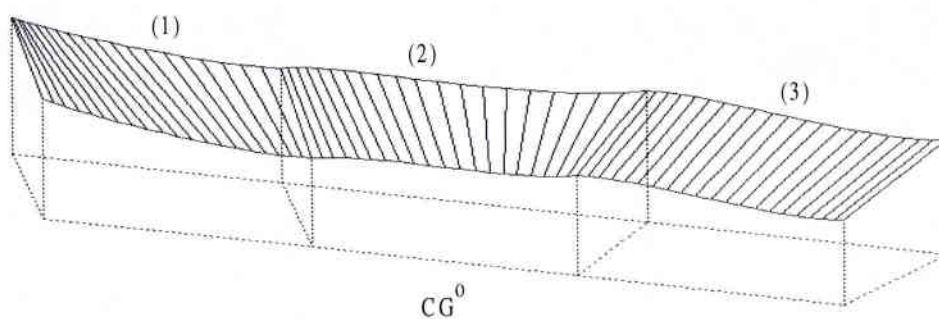


b) Distance Euclidienne $[\Gamma_1(u), C_1(u)]$ et $[\Gamma_2(u), C_2(u)]$ en u



c) Détection d'Erreur Maximum $\delta = \max \{ \|\Gamma(u) - c(u)\| : u \in [0,1] \}$

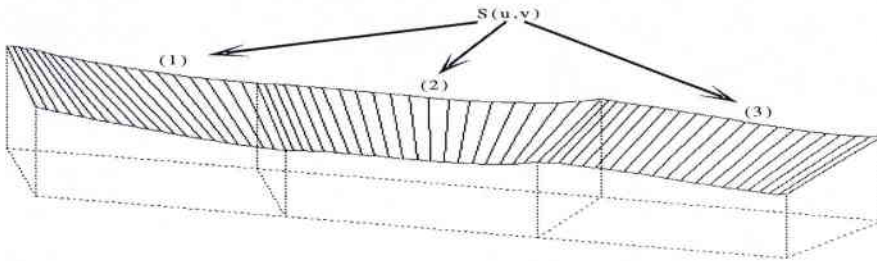


d) Courbes de Bord d'Approximation CBDR[(3,4),1]**e) Suite CBDR[(3,4),1]**

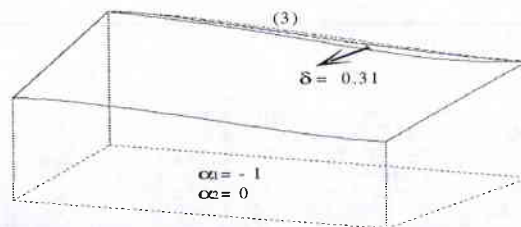
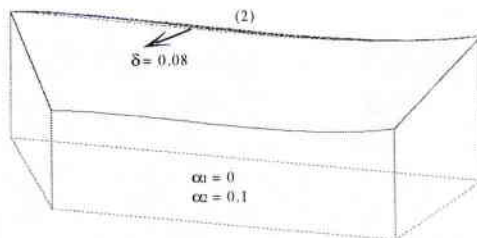
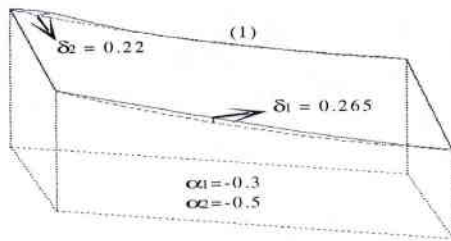
ANNEXE-B

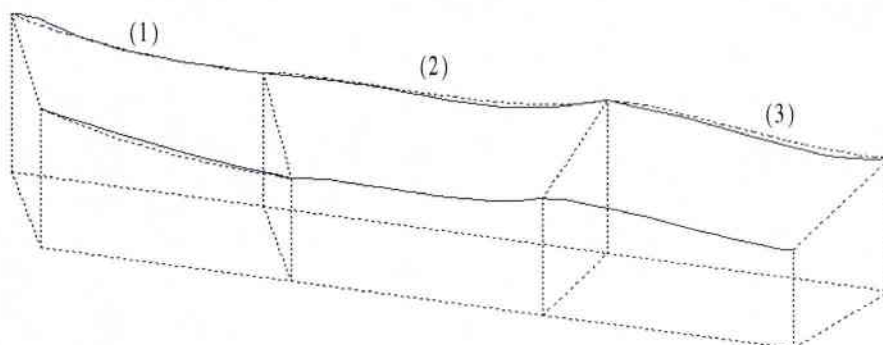
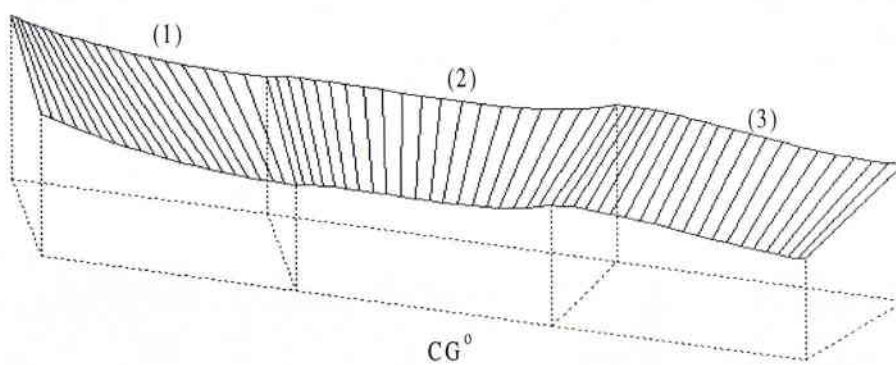
SURFACE REGLEE $S(u,v)$ DE COURBE DE BORD POLYNOMIALE DE BEZIER TRAITEE PAR CBDR[(3,6),1]

a) Décomposition de Surface Régée $S(u,v)$ en Trois Morceaux



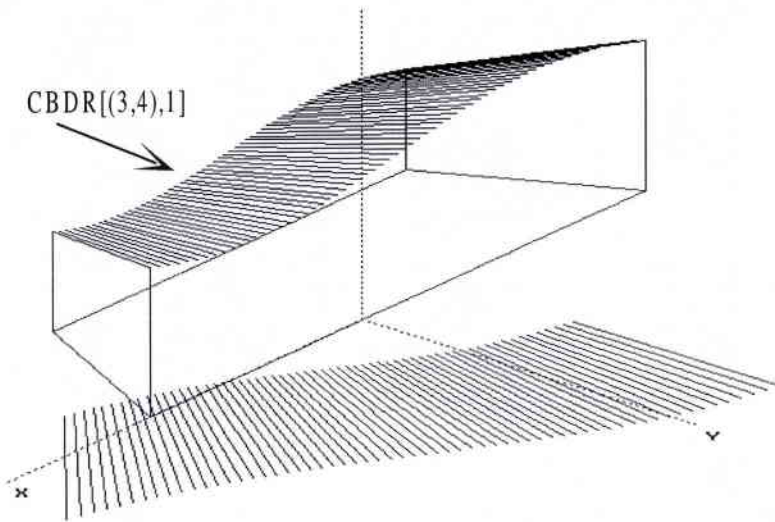
b) Détection d'Erreur Maximum $\delta = \max \{ \|\Gamma(u) - c(u)\| : u \in [0,1] \}$



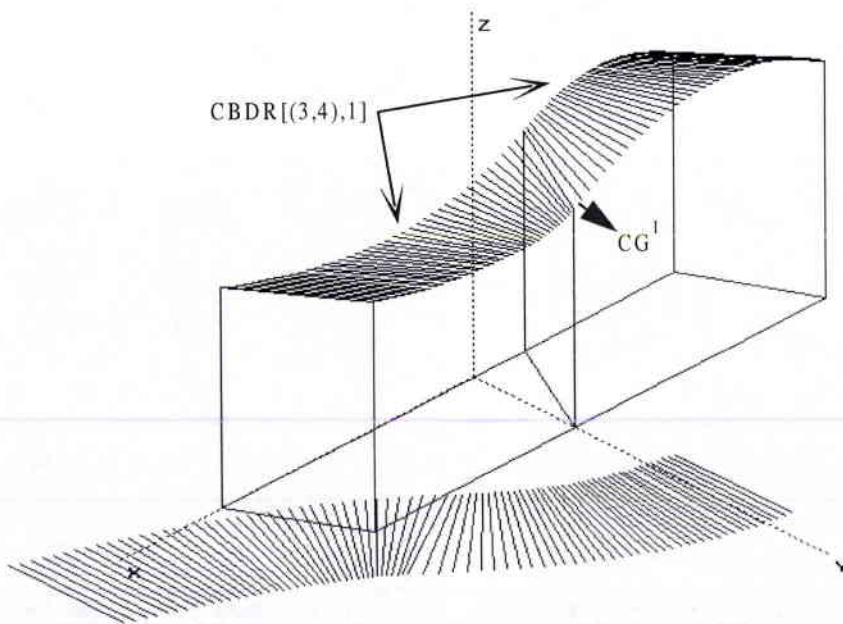
c) Courbes de Bord d'Approximation CBDR[(3,6),1]**d) Suite CBDR[(3,6),1]**

ANNEXE-C

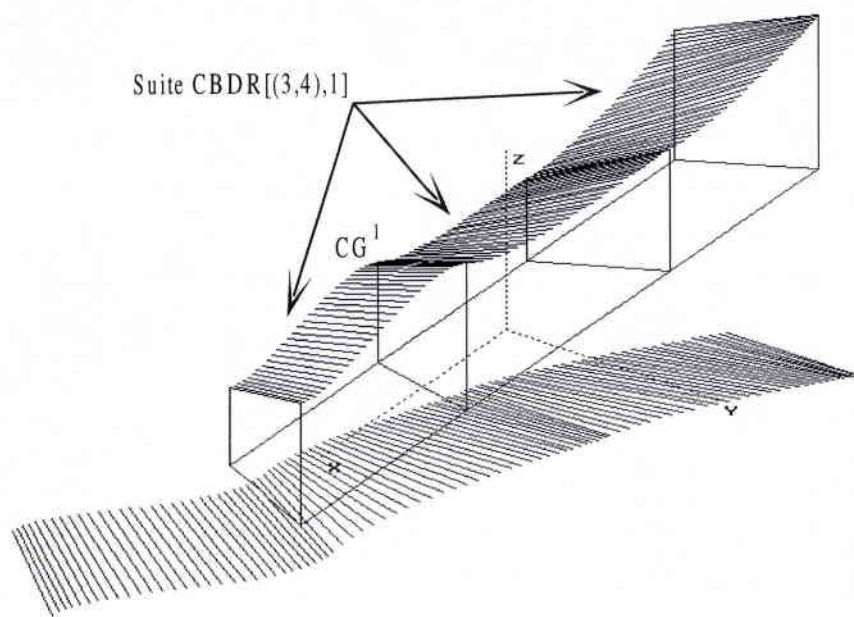
❶ Développement CDR[(3,4),1] et CDR[(3,6),1] Sur le Plan



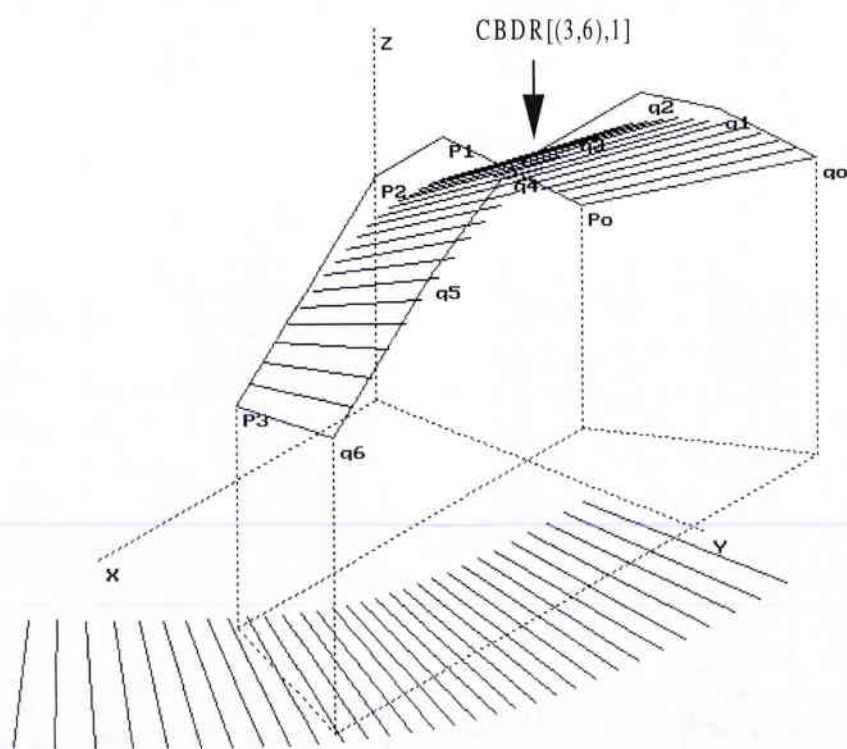
(a)



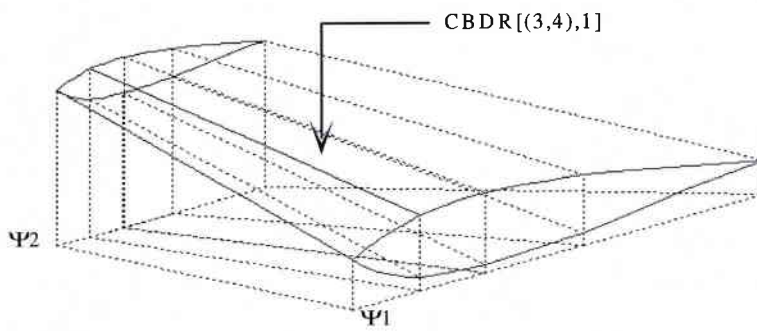
(b)



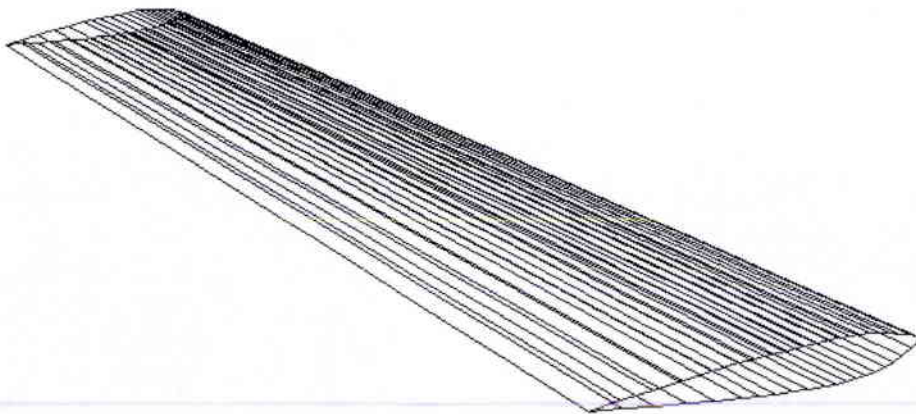
(c)



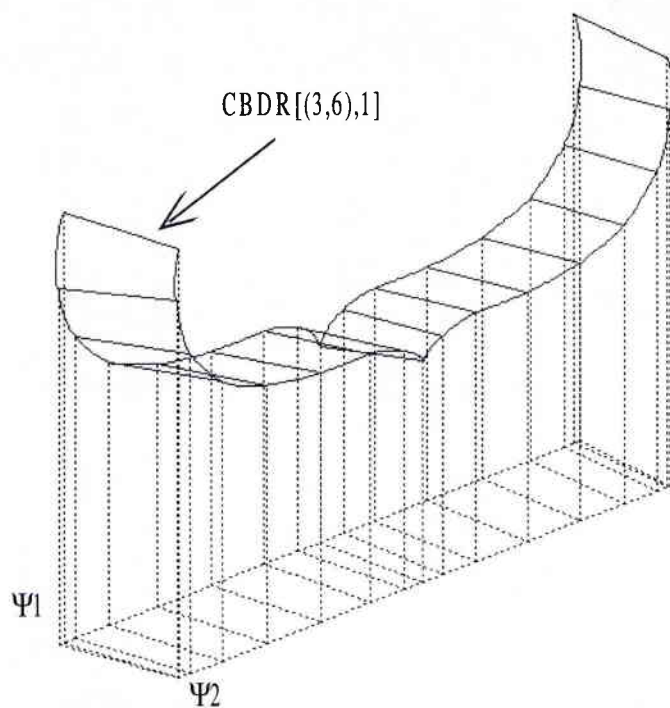
(d)

② Application

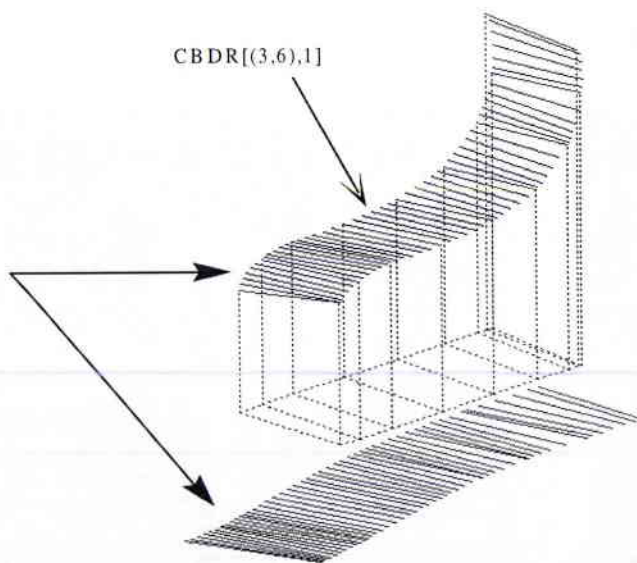
(a) Aile d'Avion Défini Par 8 $\text{CBDR}[(3,4),1]$



(b) Représentation Surfaccique d'une Aile d'Avion



(c) Tronçon Transversal d'une Coque de Bateau Défini Par 16 $\text{CBDR}[(3,6),1]$



(d) Développement Sur le Plan

Résumé:

L'objectif de cette thèse est d'apporter une solution aux problèmes de construction et de raccordement géométrique $CG^{1,2}$ de surface développable régulière bordée par deux plans parallèles à l'aide des carreaux de Bézier.

Le premier chapitre aborde les problèmes de la définition d'une suite des plaques qui s'appuient sur deux courbes paramétriques données.

Le second chapitre présente l'étude générale et l'état de l'art sur les surfaces développables. Ce chapitre permet de situer les outils mathématiques pour résoudre le problème et de souligner les aspects les plus intéressants des travaux existants pour notre problème.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la condition suffisante de régularité et la classification de surface développable. Le but est d'obtenir une expression générale de type de surface développable qui permet d'appliquer la CFAO et, en particulier, de traiter le problème de la thèse.

Le quatrième chapitre propose la méthode de construction des carreaux de Bézier développables réguliers engendrés par deux courbes de bord trouvées respectivement dans deux plans parallèles différents. L'étude porte essentiellement sur le choix du scalaire réel qui permet de contrôler les deux vecteurs vitesses de courbes de bord. Cette méthode permet de traiter le problème d'approximation d'une surface réglée régulière bordée par deux plans parallèles.

Le cinquième chapitre montre les équations qui caractérisent la continuité géométrique $CG^{1,2}$ du problème de raccordement entre deux carreaux de Bézier développables réguliers adjacents.

Le sixième chapitre met en évidence des intérêts des méthodes proposées en faisant la comparaison avec les travaux existants à la conception du bateau.

Mots Clés:

Surface Développable Régulière, Carreaux de Bézier Développables Réguliers, Construction, Approximation, Raccordement Géométrique.