THESE DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUES

PRESENTEE

A

L'UNIVERSITE DE METZ

PAR

Ludovic KIS

pour obtenir le grade de Docteur en Mathématiques

SOUTENUE A METZ LE 25 SEPTEMBRE 1998

Sujet de la thèse:

PERTURBATIONS DU PROBLEME DE DIRICHLET

Examinateur	M. AMANN Herbert	Université de Zürich
Examinateur	M. BRAUNER Claude-Michel	Université de Bordeaux
Examinateur	M. BRIGHI Bernard	Université de Metz
Directeur de Thèse:	M. CHIPOT Michel	Université de Zürich
Rapporteur:	Mme CIORANESCU Doïna	Université de ParisVI
Rapporteur:	Mme HILHORST Danielle	Université de Paris-Sud

à Nathalie,
Ingrid et Milan

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse M. Michel Chipot pour la grande liberté qu'il m'a laissée dans mes recherches et qui m'a permis de développer des facultés d'autonomie dans mon travail. Je tiens aussi à le remercier pour l'intérêt qu'il a pris aux résultats que j'ai obtenus, puisque cela nous a déjà valu de travailler ensemble à l'élaboration de trois articles.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. Herbert Amann qui a accepté de présider le jury de cette thèse. Et je le remercie vivement pour certaines discussions intéressantes que j'ai eues avec lui pendant mon séjour à Zürich.

Je remercie tout particulièrement Mme Doîna Cioranescu de m'avoir suivi dans mon parcours tout au long de mon doctorat et qui m'a fait l'honneur de participer au jury au titre de rapporteur.

Je remercie le second rapporteur Mme Danielle Hilhorst pour sa présence chaleureuse et pour l'intérêt manifeste qu'elle a témoigné pour mon travail lors de ma soutenance.

Je remercie mes examinateurs en la personne de M. Claude-Michel Brauner et de M. Bernard Brighi qui ont bien voulu participer au jury.

Enfin, je tiens à rendre hommage à M. Haïm Brézis pour la qualité de ses travaux qui ont été pour moi une source constante d'inspiration.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

$\mathbb{N}$ – l'ensemble des nombres naturels ;

$\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ – l'espace euclidien de dimension n ; on note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;

Ω – un domaine de $\mathbb{R}^n$ c'est-à-dire un ouvert borné et connexe ;

$L^1(\Omega)$ – l'ensemble des fonctions sur Ω intégrables Lebesgue ;

$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)(p \geq 1)$ – l'ensemble des fonctions sur Ω ayant la p-ième puissance dans $L^1(\Omega)$;

$u_{\underbrace{x_1 \cdots x_1}_{\alpha_1 \text{fois}} \cdots \underbrace{x_i \cdots x_i}_{\alpha_i \text{fois}} \cdots \underbrace{x_n \cdots x_n}_{\alpha_n \text{fois}}}$ – la dérivée partielle d'ordre $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq 0$ avec une multiplicité α_i par rapport à la variable x_i .

$W^{k,p}(\Omega)(k \in \mathbb{N})$ – l'ensemble des fonctions sur Ω ayant des dérivées partielles au sens des distributions d'ordre inférieur à k dans $L^p(\Omega)$; on note par $|\circ|_p$ la norme de $L^p(\Omega)$ et par $|\circ|_{W^{k,p}(\Omega)}$ la norme usuelle de $W^{k,p}(\Omega)$ pour $k \geq 1$; on adopte la notation $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sera l'espace des fonctions de $H^1(\Omega)$ s'annulant sur le bord.

A – dénote un opérateur elliptique du second ordre de la forme

$$Au = -\sum_i (\sum_j a_{ij} u_{x_j})_{x_i}$$

avec des coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ si l'on considère des estimations de type $L^p(\Omega)$ ou $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ si l'on veut obtenir des estimations de type $W^{2,p}(\Omega)$. Ces coefficients satisfaisant aussi la condition d'ellipticité

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi^i \xi^j \geq \alpha_A |\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ avec $\alpha_A > 0$ une constante ;

β – désignera en général un graphe maximal monotone sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

$2^{\mathbb{R}}$ – l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$;

$1_{\mathbb{R}}$ – la fonction identique sur $\mathbb{R}$;

$\omega \subset\subset \Omega$ – un sous-domaine ω strictement inclus dans Ω : $\overline{\omega} \subset \Omega$;

p.p. Ω – signifie presque partout dans Ω par rapport à la mesure de Lebesgue ;

$|\Lambda|$ – la mesure de l'ensemble mesurable Λ ;

$a \vee b$ et $a \wedge b$ – signifient respectivement $\max\{a, b\}$ et $\min\{a, b\}$ lorsque a, $b \in \mathbb{R}$;

$u(x_1, \cdots, \circ, \cdots, x_k)$ – le symbole $\circ$ sous un argument dénote une variable courante les autres variables étant fixées ; on note aussi par $u \circ v$ la composition de deux fonctions u, v composables ;

$[u = v]$ – l'ensemble $\{x \in \Omega : u(x) = v(x)\}$ lorsque u, v sont des fonctions définies sur Ω ; selon le contexte on met aussi entre parenthèses droites une indication bibliographique ou une justification ;

$(u, v)_\Omega$ – dénote la valeur $\int_\Omega uv dx$ lorsque $uv \in L^1(\Omega)$ et dx la mesure de Lebesgue ; on va noter souvent (u, v) si il n'y a pas danger de confusion ;

$\int_\Omega u$ – signifie la valeur $\int_\Omega u dx$ lorsque $u \in L^1(\Omega)$;

"convergence à une sous-suite près" – on sous-entend que la convergence (avec un sens à préciser selon le contexte) a lieu à une sous-suite extraite près ;

Δ – marque la fin de l'énoncé d'un théorème, d'une démonstration, d'un commentaire etc.

Introduction

On sait que si les coefficients de l'opérateur elliptique du second ordre A sont assez réguliers et $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet admet les formulations équivalentes :
inégalité variationnelle

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 & \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

équation fonctionnelle

$$\begin{cases} Au = f & \text{p.p. } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

On peut perturber le problème de Dirichlet selon la formulation considérée.

On remplace l'ensemble $H_0^1(\Omega)$ par un convexe non vide $K \subset H_0^1(\Omega)$ et on s'intéresse à l'existence et à la régularité de la solution de l'inégalité variationnelle correspondant à K (**perturbations variationnelles**).

Dans l'équation fonctionnelle on ajoute une fonction ou un opérateur dépendant de u et on étudie l'existence et la régularité de la solution de l'équation perturbée (**perturbations fonctionnelles**).

Si la perturbation fonctionnelle est une fonction monotone croissante ou un graphe maximal monotone par rapport à la solution on parle d'une **perturbation monotone**.

Il peut arriver que l'inégalité variationnelle perturbée équivaut à une équation fonctionnelle perturbée. C'est le cas par exemple de certaines perturbations monotones croissantes.

Si le convexe K de l'inégalité variationnelle perturbée et l'équation fonctionnelle perturbée dépendent d'un ou plusieurs paramètres on dit qu'il y a **perturbation paramétrique**.

Bien sûr, au lieu du problème de Dirichlet on peut utiliser tout autre problème admettant des formulations fonctionnelles ou variationnelles.

Dans le premier chapitre nous étudierons des perturbations monotones multivoques et dépendantes du domaine (fortement non linéaires), le second chapitre traite des perturbations monotones et paramétriques, tandis que dans le chapitre 3 on s'intéresse à des perturbations variationnelles paramétriques (non nécessairement du problème de Dirichlet) correspondant à des problèmes non locaux.

Lorsque l'unique paramètre ε de la perturbation paramétrique est dans $(0, \infty)$, alors on appelle **équation limite** l'équation obtenue pour la valeur $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = \infty$.

Si dans un espace approprié (**espace de convergence**) l'équation limite admet une **solution limite** et la solution perturbée converge vers la solution limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (ou $\varepsilon \to \infty$) alors on a des **perturbations régulières**.

Si une des situations suivantes arrive : le problème limite n'admet pas de solutions (par rapport à l'espace de convergence considéré) ou bien la solution perturbée ne converge pas vers la solution limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (ou $\varepsilon \to \infty$), alors on a des **perturbations singulières**.

Notons que l'on admet des espaces de convergence ayant comme support un sous-ensemble du domaine Ω et que notre notion de perturbation singulière est relative à l'espace de convergence considéré. Lorsqu'on prend un espace de convergence ayant comme support le domaine Ω et où il y a perturbation singulière, il se peut que le même espace de convergence défini localement sur Ω admet des perturbations régulières et en ce cas il y a phénomène de **couches limite**. On peut avoir aussi la situation où le même espace de convergence induit des perturbations singulières sur le domaine entier mais des perturbations régulières sur une partie du domaine.

L'intêret des considérations à venir est d'obtenir des espaces de convergence où il y a perturbation régulière.

Une classe importante de perturbations régulières est obtenue par la méthode de pénalisation au sens de [Lions[2]] ou [Sibony]. Si X est un espace de Banach réflexif ayant pour dual X^*, K un convexe fermé de X, $f \in X^*$, on cherche $u \in X$ solution de l'inégalité $(Au - f, v - u) \geq 0$ pour tout $v \in K$. Lorsque K admet la forme $K = \{v \in X : Bv = 0\}$ avec B un opérateur monotone et hemicontinu, A est un opérateur hemicontinu et elliptique, alors le problème pénalisé $\varepsilon Au_\varepsilon + Bu_\varepsilon = \varepsilon f$ avec $u_\varepsilon \in X$ admet une solution unique et l'on a une perturbation régulière avec l'espace de convergence X fort car u_ε converge vers u dans X fort lorsque ε tend vers 0. On remarque que la résolution de l'inégalité variationnelle avec des contraintes est convertie en la résolution des équations fonctionnelles en obtenant l'existence et la régularité de la solution par passage à la limite.

Lorsqu'on approche une équation fonctionnelle par des équations plus faciles à manier du point de vu de l'existence et de la régularité, on se place dans le cadre de la méthode de **régularisation** au sens de [Lions[2]] et **pénalisation** au sens de [Kinderlehrer et Stampacchia]. Dans toute la suite lorsqu'on évoque une pénalisation on va la sous-entendre en ce dernier sens.

En réalité les pénalisations sont souvent des perturbations paramétriques avec un paramètre implicite comme par exemple la régularisation Yosida lorsqu'on étudie des problèmes semilinéaires et multivoques.

Une pénalisation fréquemment utilisée dans ce travail consiste à considérer l'équation $\varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega)$ avec $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et de regarder le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$, u_ε dans certains espaces de convergence avec introduction du problème limite $Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f$ où $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\widetilde{\beta}$ est le graphe maximal monotone le plus proche de β et constant sauf à l'origine.

D'abord on établit des résultats d'existence et de régularité concernant les perturbations monotones et fortement non linéaires.

Chapitre 1

Section 1.1 On donne une démonstration de l'inégalité de Poincaré pour avoir une constante de l'inégalité dépendant seulement du domaine. Cette constante sera souvent impliquée dans nos constantes explicites et dans certaines situations, si une estimation est obtenue dans un espace $L^p(\Omega)$ avec un bon contrôle de la constante de l'estimation, on peut faire tendre p vers l'infini pour avoir une estimation uniforme (voir l'exemple 2.9.2).

Section 1.2 On montre un résultat de coercivité dans $L^p(\Omega)(p \geq 2)$ d'un opérateur elliptique du seconde ordre A : on a $(Av, \varphi(v)) \geq C|v|^p$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi(v) = v|v|^{p-2} \in H_0^1(\Omega)$ et la constante C indépendante de v mais dépendante de la constante de l'inégalité de Poincaré ci-dessus.

Ce fait va nous permettre de développer une **méthode de monotonie** dans les espaces $L^p(\Omega)$ analogue à celle avec $p = 2$ devenue classique [Lions[1]].

Aux théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 on étudie la stabilité dans $L^p(\Omega)$ et $W^{2,p}(\Omega)$ de la solution du problème de Dirichlet avec une perturbation monotone. Si $u_i \in L^p(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sont les solutions des équations $Au_i + \beta(u) \ni f_i \in L^p(\Omega)$, alors $|u_1 - u_2|_p \leq C^{-1}\,|f_1 - f_2|_p$ avec la constante explicite C ci-dessus et on parle de **stabilité**. Avec cet outil on sera un mesure de comparer systématiquement des solutions perturbées.

On rappelle aussi le résultat de [Brézis[1]] (théorème 1.2.4) : si le problème de Dirichlet est perturbé par un graphe maximal monotone β, alors on a une régularité $u \in W^{2,p}(\Omega)$ pour la solution avec l'estimation $|f - Au|_p \leq |f|_p$. Ce fait va nous permettre de travailler dans beaucoup de situations avec des **perturbations monotones multivoques** même dépendantes du domaine, via la théorie sur l'existence et la régularité exposée dans la section 1.4.

Section 1.3 On rappelle d'une part un résultat concernant l'existence et la régularité d'ordre supérieur pour la solution du problème de Dirichlet basé sur un résultat de [Simader[1]] et d'autre part un principe du maximum faible pour les perturbations monotones.

Section 1.4 On s'occupe du point de vue de l'existence et la régularité de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de **l'équation semilinéaire fortement non linéaire** $Au + \beta(x, u) \ni f \in L^p(\Omega)$ avec $\beta(x, \circ)$ un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$.

Dans cette introduction on omet des conditions de mesurabilité sur β qui seront introduites dans le travail développé.

L'existence de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème étudié au théorème 1.4.1 est due à un résultat de [Brézis[8]]. Si la fonction monotone multivoque dépendante du domaine β sépare , à une addition de fonctions $b_i \in L^p(\Omega)$ près, deux fonctions monotones indépendantes du domaine β_i , $\beta_1 + b_1 \geq \beta(x, \mathrm{o}) \geq \beta_2 + b_2$, alors les solutions u, u_i des problèmes correspondantes aux fonctions β, β_i vérifient $u_1 \leq u \leq u_2$ en utilisant le principe du maximum. Les solutions u_i sont dans $W^{2,p}(\Omega)$ [Brézis[1]] et bornées à l'aide des injections de Sobolev. On déduit que la perturbation monotone $\beta(\mathrm{o}, u)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ d'où la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ de u en tant que solution d'un problème de Dirichlet. Notre technique est un mixage d'une approche variationnelle de [Brézis[8]], d'un bon contrôle de la régularité lorsque β est indépendante du domaine et du principe du maximum.

On observe une certaine analogie avec la méthode des sous- et sur-solutions au sens de [Amann] : à l'aide du principe du maximum u_1 sera une sous-solution et u_2 une sur-solution du problème étudié. Dans ce contexte nous allons traiter aussi des problèmes avec $\beta(x, \mathrm{o})$ non monotone et univoque car en ce cas on peut encore assurer l'existence des sous- et sur-solutions lorsque $\beta(x, \mathrm{o})$ est dominée par deux fonctions β_1, β_2 croissantes et indépendantes du domaine (voir théorème 1.4.7 et 1.4.8). Notre approche permet aussi d'aborder les perturbations multivoques monotones et indépendantes du domaine.

Pour le cas multivoque on considère les pénalisées Yosida $\beta_\lambda(x, \mathrm{o})$, $\beta_{i\lambda}$ des graphes maximaux monotones $\beta(x, \mathrm{o})$, β_i avec les solutions u_λ, $u_{i\lambda}$ des problèmes perturbés correspondants. En notant que la pénalisée Yosida laisse invariant l'ordre quand le paramètre λ est fixé, on aura $\beta_{2\lambda} + b_2 \leq \beta_\lambda(x, \mathrm{o}) \leq \beta_{1\lambda} + b_1$ lorsque $\beta_2 + b_2 \leq \beta(x, \mathrm{o}) \leq \beta_1 + b_1$. Ceci permet d'appliquer le théorème 1.4.1 et ensuite de passer à la limite quand λ tend vers 0 dans l'esprit de [Brézis[1]] car on dispose de bonnes estimations sur les perturbations monotones impliquées. On donne une estimation ponctuelle pour $f - Au$ avec un bon contrôle des constantes par rapport aux données du problème. Si de plus 0 sépare les graphes maximaux monotones β_i , on donne une estimation ponctuelle pour la perturbation monotone $\beta(\mathrm{o}, u)$ avec des constantes indépendantes de β .

Au théorème 1.4.3 l'hypothèse introduit une notion de proportionnalité pour les graphes maximaux monotones qui reste invariante sous l'action de la pénalisée Yosida.

Si la fonction monotone univoque β dépendante du domaine sépare, à une addition de fonctions g_i, $h_i \in L^p(\Omega)$ près, deux fonctions β_i monotones proportionnelles (au sens ci-dessus) et indépendantes du domaine, alors on obtient une estimation de la perturbation monotone $\beta(\mathrm{o}, u)$ dans $L^p(\Omega)$ avec une constante explicite indépendante de β, β_i . On utilise des multiplications bien choisies (spécifiques aux méthodes de monotonie utilisées dans ce travail) et à l'aide des proportions sur les fonctions β, β_i on obtient des estimations dans $L^p(\Omega)$ pour toutes les perturbations monotones impliquées.

Si la fonction monotone multivoque β dépendante du domaine sépare, à une addition de fonctions g_i, $h_i \in L^p(\Omega)$ près, deux graphes maximaux monotones proportionnels et indépendants du domaine β_i (théorème 1.4.4), alors on obtient une estimation ponctuelle de $f - Au$ dans $L^p(\Omega)$ avec une constante explicite indépendante de β, β_i . Comme l'ordre des graphes maximaux monotones et la proportionnalité utilisée restent invariants sous l'action de la pénalisée Yosida, le résultat s'ensuit via un passage à la limite comme au théorème 1.4.2.

On peut aborder les problèmes des théorèmes précédents par une méthode classique combinée avec le principe du maximum (théorème 1.4.5). L'idée est de montrer qu'une certaine inégalité variationnelle du type $F(v) \geq F(u)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ avec F une fonctionnelle (non nécessairement convexe) semicontinue inférieurement admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$, de prouver que cette solution vérifie aussi notre équation et enfin améliorer la régularité via le principe du maximum. L'existence de la solution de l'inégalité variationnelle est due à des résultats classiques. Le passage à la limite est plus délicat car la fonctionnelle F n'est pas forcément dérivable au sens Gateaux. Le travail avec des fonctions multivoques nécessite certaines précautions sur la différentiabilité des fonctions convexes impliquées ce qui nous oblige d'imposer aux fonctions définies sur le domaine Ω d'avoir l'ensemble des valeurs dans un compact fixe. Une condition suffisante pour que la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ soit bornée est la continuité réalisée lorsque $n = 1$ via les injections de Sobolev. La régularité de la solution est une conséquence du fait que la domination du graphe maximal monotone β dépendant du domaine par deux graphes maximaux monotones indépendants du domaine implique la domination de la solution u par deux fonctions continues et bornées d'où par "feedback" $\beta(\circ, u)$ sera bornée dans $L^p(\Omega)$.

Lorsque $\beta(x, \circ)$ est non monotone et univoque (théorème 1.4.6), on utilise la même technique qu'au théorème précédent en notant que la fonctionnelle F n'était pas exigée convexe et un regard attentif montre que la continuité des fonctions $\beta(x, \circ)$, β_i est suffisante pour rendre la perturbation monotone $\beta(\circ, u)$ bornée dans $L^p(\Omega)$.

On travaille avec β non monotone et dominée par deux fonctions croissantes β_i . Dans ces conditions on se place dans la théorie des sous- et sur-solutions via [Kazdan] et on obtient l'existence et la régularité $W^{2,p}(\Omega)$. Nous donnons une estimation avec un bon contrôle de la dépendance des constantes par rapport aux perturbations impliquées. Ce fait va permettre le traitement du cas où $\beta(x, \circ)$ est discontinue (voir théorème 1.4.10).

Pour établir le théorème 1.4.8 on multiplie l'équation étudiée par des fonctions de la forme $\partial j(u)$ où j est une fonction convexe positive. On obtient des estimations du type $\int_\Omega j \circ \beta_2(+u^+) \leq \int_\Omega j(f - b_2)$ et $\int_\Omega j \circ \beta_2(-u^-) \leq \int_\Omega j(f - b_1)$ lorsque $\beta_2 + b_2 \leq \beta \leq \beta_1 + b_1$ avec β_i croissantes et indépendantes du domaine. Notons que $\beta(x, \circ)$ n'est pas supposée croissante. L'idée des multiplications de ce type remonte à [Brézis[9]]. Il y a ici une certaine filiation avec les espaces de Orlicz.

Au théorème 1.4.9 on suppose β univoque, continue, croissante telle que $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème $Au + \beta(u) = f \in L^p(\Omega)$. Si il existe un $\theta \in (0,1)$ tel que f est situé dans l'espace de Orlicz associé à la fonction convexe $(\theta j)_*$ qui est la duale de la fonction convexe θj telle que $\beta = \partial j$ et $j(0) = 0$, alors on obtient une estimation de la forme $|u|_{L^1(\Omega)} \leq C$ où C est une constante indépendante de u, A . Même si au théorème 1.4.10 on obtient une estimation identique sans contraintes sur $f \in L^p(\Omega)$, l'intêret de ce résultat vient du fait qu'on met en évidence les espaces de Orlicz comme adéquats pour obtenir des estimations sur u dans $L^1(\Omega)$.

Lorsque $\beta(x, \circ)$ non monotone est continue dans un ouvert mais discontinue sur $\mathbb{R}$ on suppose l'existence d'une suite régularisante $\beta_\varepsilon(x, \circ)$ approchant uniformément $\beta(x, \circ)$ dans tout compact où $\beta(x, \circ)$ est continue (théorème 1.4.9). Si la suite régularisante rempli les conditions du théorème 1.4.8 en étant dominée par des fonctions monotones indépendantes de ε , alors on aura une estimation dans $L^p(\Omega)$ avec une constante indépendante de ε pour $\beta_\varepsilon(x, u_\varepsilon)$ où u_ε est la solution correspondante à la perturbation $\beta_\varepsilon(x, \circ)$. Dans ces conditions on peut passer à la limite en utilisant le fait que la convergence uniforme des $\beta_\varepsilon(x, \circ)$ équivaut à la convergence continue dans un compact où la fonction $\beta(x, \circ)$ est continue et que la limite faible L^p coïncide avec la limite ponctuelle. On obtient que la suite u_ε converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible vers la solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ du problème $Au + \beta(\circ, u) = f$ p.p. dans $\Omega - S(u, \beta)$ où $S(u, \beta)$ est la fermeture de l'ensemble $\{x \in \Omega : u(x) \in S_x(\beta)\}$ avec $S_x(\beta)$ l'ensemble des discontinuités de la fonction $\beta(x, \circ)$ qui est continue dans un ouvert. La remarque 1.4.9 montre que l'hypothèse du théorème 1.4.9 est consistante car on donne une situation où l'on peut construire une suite régularisante.

Chapitre 2

Section 2.1 On procède à une **identification formelle** dans l'équation $A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ en supposant que la solution u_ε admet un développement asymptotique en fonction du paramètre ε , i. e. $u_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varepsilon^k$ et la perturbation monotone β un développement asymptotique autour de 0 . On utilise quelques outils du calcul formel comme la puissance d'une série infinie.

On verra dans la suite que lorsque β est non bornée le comportement asymptotique analytique suit le comportement asymptotique algébrique de u_ε à l'intérieur de Ω.

Section 2.2 Soit le problème pénalisé $\varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ avec $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et β **non bornée** telle que $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On montre que ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ et lorsque ε tend vers 0, $\varepsilon u_\varepsilon$ converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort vers 0 et $\beta(u_\varepsilon)$ converge dans $L^p(\Omega)$ fort vers f.

Section 2.3 Lorsque $u_0 = \beta^{-1}(f) \in H_0^1(\Omega)$ on montre via une **méthode de monotonie classique** que u_ε tend vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ fort quand ε tend vers 0. Ce résultat est obtenu dans [Lions[1]] au cas où $\beta = 1_\mathbb{R}$, la condition coercivité sur β étant essentielle. On s'aperçoit donc que le résultat persiste sans condition de coercivité sur β. A remarquer "l'égalisation" des espaces de u_ε et de u_0, on a $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni u_0$. Dés que les espaces de u_ε et de u_0 sont différents (à une fermeture près) la convergence de u_ε recule à l'intérieur du domaine. C'est là un phénomène spécifique aux problèmes de ce type.

Si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ on obtient des estimations pour u_ε dans $L^p(\Omega)$ à l'aide des résultats de **stabilité**. On a la convergence forte dans $L^p(\Omega)(p \geq 2)$ sans vitesse de convergence lorsque β n'est pas supposée lipschitzienne mais on contrôle très bien la convergence de $\varepsilon u_\varepsilon$ et de la perturbation monotone $\beta(u_\varepsilon)$ lorsque β est lipschitzienne.

Si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ alors on montre que la suite u_ε converge vers u_0 dans $L^p(\Omega)$ fort. La technique utilisée consiste à obtenir la **convergence presque partout** par une approche variationnelle et ensuite **dominer la suite** via le principe du maximum ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ on obtient la convergence de u_ε vers u_0 dans $L^q(\Omega)$ fort avec $q \geq 1$ par la technique précédente.

Lorsque $u_0 \in L^\infty(\omega \subset\subset \Omega)$ alors u_ε tend vers u_0 dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\omega)$. Les ingrédients de la démonstration sont le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la commutativité d'une fonction croissante, continue et impaire avec la norme $|\circ|_\infty$ et le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$, $\beta(u_\varepsilon)$. On remarque que la nature bornée de β n'est pas impliquée ce qui va nous permettre d'établir une version (théorème 2.10.7) avec β bornée.

La démonstration du théorème 2.3.5 est basée sur les estimations du théorème 1.4.8. Ces estimations ne dépendent pas de l'opérateur εA et permettent d'avoir une estimation de la forme $|u_\varepsilon|_p \leq C$ avec C une constante indépendante de ε lorsque $|\beta^{-1}|^p$ est convexe.

Il serait intéressant de savoir si u_ε converge toujours vers $u_0 \in L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ fort lorsque $f \in L^p(\Omega)$.

Section 2.4 Dans cette section on suppose β **coercive** (pour une introduction de ce concept voir les préliminaires 2.2).

On montre d'abord que si u_0 est dans l'espace $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ de u_ε, alors u_ε tend vers u_0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0. Les outils de la démonstration sont les résultats de **stabilité** des théorèmes 1.2.2 et 1.3.1. On note que β est à la fois **coercive** et **lipschitzienne**.

Si u_0, $u_1 = -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)}$ sont dans l'espace $H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ de u_ε et β est coercive et lipschitzienne, alors $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ tend vers u_1 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0. La technique utilisée peut être adaptée pour reconstituer d'une manière analytique le développement algébrique obtenu lors de l'identification formelle (voir le théorème 2.1.1 et la remarque 2.4.2). Le cas $\beta = 1_\mathbb{R}$ a été étudié intensément dans la littérature. Des résultats de ce type mais via une approche différente (perturbation opératorielle) sont obtenus dans [Huet .D[2]], [Friedman A.[2]], [Ton B.A.], [Tanabe H.], [Visik M.J. and Liusternik L.A.].

Enfin, on note que l'on peut affaiblir la notion de coercivité globale sur β, en supposant seulement β coercive en dehors d'un compact, pour avoir une estimation de type $|u_\varepsilon|_p \leq C$ et la convergence forte de u_ε vers u_0 dans les espaces $L^q(\Omega)$ avec $q < p$.

Section 2.5 Dans cette section on suppose β **localement coercive**.

Si $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ alors u_ε converge vers u_0 dans $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ quand ε tend vers 0. On utilise le fait que, avec des fonctions de comparaison bien choisies, **le principe du maximum s'applique pour un paramètre suffisamment petit** ε et on tire une estimation ponctuelle dans Ω, estimation qui est aussi uniforme à l'intérieur du domaine. Pour établir les comparaisons nécessaires on a besoin de la propriété suivante que β vérifie : une fonction localement coercive est coercive dans tout compact de $\mathbb{R}$. Le concept de coercivité locale subsiste aussi pour les fonctions bornées ce qui permet d'utiliser cette technique pour l'étude des perturbations singulières bornées (voir les théorèmes 2.10.1-2.10.4).

Lorsque $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni u_1$ alors $\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}$ converge vers u_1 dans $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ quand ε tend vers 0. La même technique. Un raffinement des fonctions de comparaison sur des domaines emboîtés permet, en utilisant le théorème précédent, de récupérer l'estimation uniforme pour $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ à l'intérieur du domaine.

Si $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni u_1$ alors les résultats locaux des théorèmes précédents suffisent pour améliorer les convergences considérées. Ce fait est aussi possible grâce à la structure de l'équation pénalisée : $Au_\varepsilon = (\beta(u_0) - \beta(u_\varepsilon))\varepsilon^{-1}$ puisque le contrôle de Au_ε est ramené au contrôle de $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ et de u_ε.

Section 2.6 On donne une **identification formelle** dans l'équation $A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ en supposant que la solution u_ε admet un développement asymptotique en fonction du paramètre v, i. e. $u_\varepsilon = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k\varepsilon^k$ et la perturbation monotone β un développement asymptotique autour de $-\infty$, 0, $+\infty$. On utilise quelques outils du calcul formel comme la puissance et l'inversion d'une série infinie.

On verra dans la suite que lorsque β est bornée le comportement asymptotique analytique de u_ε suit le comportement asymptotique algébrique de u_ε au sens suivant :

A l'intérieur de $[u_{-1} > 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de $+\infty$,

A l'intérieur de $[u_{-1} = 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de 0,

A l'intérieur de $[u_{-1} < 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de $-\infty$.

En fait, l'identification formelle est un bon support intuitif pour dégager la théorie qui suit.

Section 2.7 On étudie le problème pénalisé $\varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ avec $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ et **β bornée.**

On montre que ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ et lorsque ε tend vers 0, $\varepsilon u_\varepsilon$ converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort vers u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t < 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(+\infty) & t > 0 \end{cases}$$

où $\beta(-\infty) \in (-\infty, 0]$ et $\beta(+\infty) \in [0, \infty)$.

Sur la différence $\varepsilon u_\varepsilon - u$ on a un peu mieux, à savoir $\varepsilon u_\varepsilon - u$ converge vers 0 dans $W^{2,q}(\Omega)$ fort pour tout $q \geq 2$.

En ce qui concerne la perturbation monotone, $\beta(u_\varepsilon)$ converge vers $f - Au$ dans $L^q(\Omega)$ fort avec $q \geq 2$ lorsque ε tend vers 0 et on a les estimations $|\beta(u_\varepsilon)|_q \leq |f - Au|_q$ et $|f - Au|_p \leq |f|_p$.

Section 2.8 Si β est bornée on note d'abord que l'ensemble $[u = 0]$ peut être non vide et de mesure non nulle même dans les régions où f est non nulle. Nous donnons plusieurs critéres pour avoir une zone libre $[u = 0]$ avec intérieur non vide en utilisant d'une part, une technique proche de la **théorie du potentiel** et d'autre part une **approche variationnelle** basée sur l'estimation $|f - Au|_p \leq |f|_p$.

Section 2.9 On commence par estimer le taux de la convergence de $\varepsilon u_\varepsilon$ vers u lorsque

ε tend vers 0. Pour cela on utilise deux méthodes différentes. La première consiste à utiliser une **méthode de monotonie** proche de celle de [Lions[1], [2]] et [Brauner et Nicolaenko] en procédant à des décompositions successives de domaine selon le signe de la solution limite u en notant que la structure de Au est aussi réglée par le signe de u ; un outil essentiel pour obtenir les estimations étant la propriété de coercivité $L^p(\Omega)$ que A vérifie : $(Av, \varphi(v)) \geq C\,|v|_p^p$ pour toute fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\varphi(v) = v|v|^p \in H_0^1(\Omega)$ et C une constante indépendante de v. La deuxième méthode est basée sur le **principe de maximum** avec l'utilisation de **fonctions barrières** bien choisies et discussion des comparaisons en fonction du signe de u.

Dans les deux cas le comportement asymptotique de β autour de $\pm\infty$ est essentiel.

On obtient que $|\varepsilon u_\varepsilon - u|_q \leq C\varepsilon^{\frac{q-1}{p}}$ si β admet un comportement asymptotique d'ordre q autour de $\pm\infty$ et $p - q \in N$.

Avec la première méthode on obtient aussi que u_ε converge vers u_0 dans $L^s(\omega \subset\subset [u=0])$ fort pour tout $s < q-1$ lorsque ε tend vers 0 et $u_0 \in L^\infty(\omega)$.

Section 2.10 Quand $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0])$ (on comprend en ce cas par $[u=0]$ son intérieur non vide) on utilise une technique basée sur le **principe du maximum en présence de petit paramètre** ε et qui comporte sept temps :

1. On introduit les fonctions d'approximation $u_\varepsilon^\pm$ ou dans l'esprit de la théorie du potentiel, fonctions barrières, à l'aide de la fonction régulière φ. Les fonctions barrière sont indépendantes de ε dans le sous-domaine $\omega \subset\subset [u=0]$.
2. Les fonctions d'approximation sont de classe $W^{2,\infty}([u=0])$ et encadrent u_ε sur le bord $\partial[u=0]$ et u_0 uniformément dans $[u=0]$.
3. Puisqu'on connaît le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0, notamment que $\varepsilon u_\varepsilon$ tend uniformément vers 0 dans $[u=0]$, on voit que $Au_\varepsilon^\pm$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Ceci est possible aussi parce que la construction des fonctions d'approximation utilise d'une façon linéaire la seule quantité dépendant de ε qui est la norme $|u_\varepsilon|_{L^\infty([u=0])}$, une constante.
4. Comme β est localement coercive on peut établir des comparaisons qui vont servir de support au principe du maximum. Le fait que β est coercive sur tout compact de $\mathbb{R}$ est essentiel pour maintenir les inégalités pour ε suffisamment petit mais strictement positif.
5. Le principe du maximum s'applique pour ε petit et l'on a $u_\varepsilon^+ \geq u_\varepsilon \geq u_\varepsilon^-$ p.p. $[u=0]$.
6. Comme les fonctions barrières sont indépendantes de ε dans ω et elles encadrent uniformément u_0, on obtient que $|u_\varepsilon - u_0| \leq \delta$ pour ε petit.
7. Il reste à faire tendre δ vers 0 ce qui force la convergence uniforme de u_ε vers u_0 dans ω lorsque ε tend vers 0.

On obtient d'abord que u_ε converge vers u_0 dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}([u=0])$ lorsque ε tend vers 0 avec $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0])$. Si $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_1$ on montre que $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ converge vers u_1 dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}([u=0])$ et on améliore la convergence de u_ε vers u_0 dans $W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}([u=0])$.

Une autre approche (théorème 2.10.8) consiste à utiliser des multiplications du type $\partial j(u_\varepsilon)$ où j est une fonction convexe positive arbitraire ayant le sous-différentiel lipschitzien. Comme on connaît le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ et β est bornée, on obtient des estimations de la forme $\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \leq \int_\omega j(f - Au)$ pour tout domaine $\omega \subset \Omega$ de classe $\omega \in C^{1,1}$. Lorsque $\omega \subset [u=0]$, $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$ et $|\beta^{-1}|^p \leq j$ pour une fonction convexe j, on est en mesure de donner une estimation sur u_ε dans $L^p(\omega)$. Il y a une certaine filiation entre ce résultat et les théorèmes 1.4.9 et 2.3.5, le travail de [Brézis[9]] et les espaces de Orlicz.

Ce résultat confirme la tendance de u_ε vers u_0 dans $[u=0]$ lorsque ε tend vers 0.

Section 2.11 C'est le début de l'étude du problème pénalisé avec β **tronquée**.

Dans ce cas le théorème 2.11.1 montre que $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$ est uniformément bornée. On obtient via le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le comportement de la perturbation monotone, qu'il y a convergence forte (à une sous-suite près) dans les espaces $L^q(\omega \subset [u=0])$ lorsque $u_0 \in L^q(\omega)$.

Toujours avec β tronquée on arrive à obtenir la convergence locale de $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$ respectivement dans les espaces $W^{2,q}_{\mathrm{loc}}([u>0])$ et $W^{2,q}_{\mathrm{loc}}([u<0])$. La technique exposée au théorème 2.11.2 permet de localiser les points limites seulement par la condition $Au_\pm = 0$.

En imposant la condition $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ au théorème 2.11.3, on montre que $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} - u_0$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et on arrive à contrôler la vitesse de convergence de $\beta(u_\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)$ par $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Il serait intéressant de savoir, en se rapportant au théorème 2.2.1 et les commentaires 2.2, si il n'y a pas de convergence forte dans $H^1_0(\Omega)$ pour $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$. La condition $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ transpose les convergences dans $L^2(\Omega)$ en convergences dans $L^q(\Omega)$ (voir en ce sens le théorème 2.3.2 où β est non bornée). La technique utilisée est basée sur la **méthode de monotonie** où le théorème 1.2.1 est indispensable. Ce résultat est un analogue des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2.

Le théorème 2.11.4 introduit le **premier invariant**.

On suppose que β admet un comportement asymptotique d'ordre q autour de $\pm\infty$.

On rappelle quelques théorèmes pour mieux saisir l'hypothèse invariante dont il est question. Cet invariant s'impose aussi par la démonstration naturelle du théorème 2.11.5. Si on regarde l'hypothèse de base de ce théorème, que les problèmes $(\varepsilon > 0)$

$$\begin{cases} u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & [u=0] \\ u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & [u<0] \end{cases}$$

admettent une solution $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ indépendante de ε , on voit qu'elle se retrouve sous des formes spécifiques dans chaque résultat cité.

On établit les estimations

$$u_0 \in H^1_0(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H^1_0(\Omega)} \le C \\ \left|\beta(u_\varepsilon) - \beta\left(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_2 \le C \quad \text{(si } \beta \text{ lipschitzienne)} \end{cases}$$

$$u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)(q \ge 2) \Longrightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \le C \\ \left|\beta(u_\varepsilon) - \beta\left(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_q \le C \quad \text{(si } \beta \text{ lipschitz.)} \end{cases}$$

pour diverses constantes C indépendantes de ε .

La démonstration est une extension de la preuve du théorème 2.11.3.

Le théorème 2.11.5 introduit le **deuxième invariant**.

On suppose toujours que β admet un comportement asymptotique d'ordre q autour de $\pm\infty$.

On voit que l'hypothèse de base : $\frac{1}{u} \in L^q([u \ne 0])$ et le problème

$$H^1_0(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega) \ni u_0 \begin{cases} u_0 \ge 0 & \text{dans } [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & \text{dans } [u=0] \\ u_0 \le 0 & \text{dans } [u<0] \end{cases}$$

admet une solution u_0 , se retrouve sous des formes diverses dans les théorèmes cités.

Des conditions particulièrement contraignantes sur u ($\frac{1}{u} \in L^q([u \ne 0])$) mais naturelles si on regarde l'identification formelle selon le théorème 2.6.1 où $\frac{1}{u}$ intervient dans les coefficients du développement.

Dans ces conditions on a les estimations

$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \le C \quad , \quad \left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H^1_0(\Omega)} \le C$$

et lorsque β est lipschitzienne

$$\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q \le \varepsilon^{\frac{1}{q}} C$$

pour diverses constantes C indépendantes de ε . La démonstration est un mixage de la **méthode de monotonie et le principe de maximum.**

Les résultats consécutifs aux deux invariants rappellent l'identification formelle (théorème 2.6.1).

On peut confronter les résultats de cette section avec le théorème 2.9.4, les commentaires 2.9 et l'identification formelle (théorème 2.6.1 et commentaires 2.6). Si le nombre de coefficients non nuls dans le développement asymptotique de β autour de $\pm\infty$ diminue, alors l'exponent γ qui dirige la vitesse de convergence de $\varepsilon u_\varepsilon - u$ dans $L^q(\Omega)$, augmente. C'est la tendance de tous les résultats concernant $\varepsilon u_\varepsilon - u$. Le meilleur résultat est obtenu lorsque β est tronquée donc tous les coefficients d'ordre supérieur à 1 sont nuls dans le développement asymptotique de β autour de $\pm\infty$, dans ce cas on a $\gamma = 1$ (d'après le théorème 2.11.1).

Section 2.12 Au théorème 2.12.1 on étudie le problème pénalisé $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ avec $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et β **bornée mixte** : $\beta(-\infty) = -\infty$ et $\beta(+\infty) \in [0,\infty)$ ou $\beta(-\infty) \in (-\infty, 0]$ et $\beta(+\infty) = \infty$.

On montre que ce problème (avec $\beta(-\infty) = -\infty$) admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ et lorsque ε tend vers 0 , $\varepsilon u_\varepsilon$ converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort vers u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \emptyset & t > 0 \\ \in [\beta(-\infty), 0] & t = 0 \\ \beta(-\infty) & t < 0 . \end{cases}$$

On utilise une **méthode de compacité** au sens de [Lions[2]] basée sur des estimations a priori et la réflexivité des espaces impliqués.

On obtient aussi (théorème 2.12.2) la convergence dans $L^p(\Omega)(p > n)$ de $\beta(u_\varepsilon)$ vers $f - Au$ et, ce qui rappelle le cas β bornée, la convergence dans $L^q(\Omega)$ de $\beta(u_\varepsilon^-)$ vers $(f - Au)^-$. Au niveau des estimations on a $|f - Au|_p \leq |f|_p$ ce qui permet de développer les considérations sur la consistance de $[u = 0]$ comme au cas β borné.

En s'appuyant sur ces deux résultats, on peut élaborer un analogue de chaque résultat avec β bornée si l'hypothèse " β bornée" n'est pas essentielle. Par exemple, la technique du **principe de maximum en présence de petit paramètre** s'applique car on n'utilise que l'hypothèse de coercivité locale sur β , même pas des conditions sur le bord pour u_ε . Voir aussi les commentaires 2.10.

Section 2.13 Cette section est une unification des résultats obtenus sur u_ε, $\varepsilon u_\varepsilon$.

On met en évidence le problème de Dirichlet comme un problème limite.

Soit $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème pénalisé $A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)$.

Si on synthétise les résultats obtenus sur le comportement de u_ε lorsque ε tend respectivement vers 0, $0 < \varepsilon_0 < \infty$, ∞ alors on voit que la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème limite $Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ est une déformation régulière de la solution $u^\infty \in H_0^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet $Au^\infty = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ au sens où l'application $[0,\infty] \ni \varepsilon \longmapsto \varepsilon u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ fort est continue et

$$u \xleftarrow[0 \leftarrow \varepsilon]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} \varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} u^\infty .$$

De même, la fonction nulle $u_\infty = 0$ est déformée d'une façon régulière par u_ε de ∞ jusqu'à 0 :

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0 \in (0,\infty]]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} u_{\varepsilon_0}$$

mais au point $\varepsilon_0 = 0$ il y a une dislocation de l'intérieur du domaine Ω avec modification de l'espace de convergence, selon la tendance de u_ε , en $[u < 0] \cup [u = 0] \cup [u > 0]$.

Section 2.14 Une approche variationnelle du problème qui suit, avec étude du comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ seulement, a été faite dans [Hilhorst[1], [2]].

On étudie du point de vue analytique l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\quad \text{avec } C \text{ une constante fixé} \\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ainsi que le comportement de u_ε, $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0 avec β **bornée.**

Ceci conduira au problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{où} \quad \widetilde{\beta}(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0] \end{cases}$$

avec existence, unicité et régularité de la solution limite.

On obtient à l'aide d'une **méthode de continuité** semblable a celle du troisième chapitre que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ est la limite de $\varepsilon u_\varepsilon$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 .

Le principe du maximum en présence du petit paramètre ε est encore une fois efficace car il n'exige pas des conditions pour u_ε sur le bord de $[u = 0]$ et le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ est le même que dans le cas où il n'y a pas de contrainte sur $\beta(u_\varepsilon)$ et $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ (voir le théorème 2.7.1). Pour les théorèmes 2.14.5, 2.14.6 et 2.14.7 voir les commentaires 2.10.

Chapitre 3

Le troisième chapitre traite des problèmes non locaux qui sont des perturbations variationnelles obtenues à l'aide d'une fonction convexe qui peut agir sur la solution (sur le bord ou dans le domaine entier ou une partie), sur le gradient ou sur un opérateur dépendant de la solution.

Section 3.1 On impose des **contraintes convexes sur la solution dans le domaine.**

Le problème non local étudié dans cette section a été posé par [Brézis[2]] pour le cas d'une fonction convexe ayant un sous-différentiel univoque et développé par [Chipot [2]] pour un sous-différentiel multivoque mais indépendant du domaine.

On considère le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0, \; f \in L^p(\Omega) \; (p > n) \;\; \forall \;\; v \in K_\alpha \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) : \; (j(x,u), 1) \leq \alpha\} \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$ est une constante et le sous-différentiel $\partial j(x, \circ)$ de la fonction convexe positive $j(x, \circ)$ satisfait les conditions du théorème 1.4.4.

Nous montrons que la solution de ce problème existe et vérifie $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

En disposant d'un résultat de régularité [théorème 1.4.4] avec une estimation explicite pour les perturbations monotones multivoques et dépendantes du domaine, on développe une **méthode de continuité** qui consiste en plusieurs étapes :

1. Pénalisation avec existence, unicité et régularité de la solution pénalisée ;
2. Stabilité de la solution pénalisée par rapport au paramètre ;
3. Continuité de la contrainte pénalisée par rapport au paramètre ;
4. La solution du problème non local sera une certaine solution pénalisée car l'application ayant comme argument le paramètre et comme valeur la contrainte est continue et surjective.
5. Le problème du double obstacle s'obtient comme un problème limite lorsque le paramètre de la pénalisation tend vers l'infini car dans ce cas on peut donner une estimation de la perturbation monotone indépendante du paramètre.

Lorsque le sous-différentiel de la fonction convexe j est univoque mais dépendant du domaine et satisfait les conditions du théorème 1.4.3, on utilise un argument basé sur les **multiplicateurs de Lagrange** en obtenant la même régularité. Cette approche est d'ailleurs suggérée sans développement dans [Brézis[2]] et [Chipot[2]].

Notons que la fonction convexe j spécifique au double obstacle ne satisfait pas les hypothèses du théorème 1.4.4 donc des préliminaires 3.1, par conséquent on est obligées d'établir des estimations à priori par une autre voie et on obtient la régularité classique pour ce problème.

Le problème du double obstacle a été beaucoup étudié dans la littérature, voir par exemple [Chipot [1]], [Rodrigues], [Kinderlehrer et Stampacchia] pour des résultats concernant la régularité et la frontière libre.

Section 3.2 C'est le traitement des **contraintes convexes de la solution sur le bord.**

Nous considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{x_j} (v-u)_{x_i}, 1)_\Omega + (au, v-u)_\Omega \geq (f, v-u)_\Omega \ \forall\, v \in K_\alpha \\ u \in K_\alpha = \{v \in H^1(\Omega) : \ (j(v), 1)_{\partial\Omega} \leq \alpha\}, \ f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

avec a, a_{ij} satisfaisant les conditions des préliminaires 3.2, $\alpha \geq 0$ une constante et j une fonction convexe positive.

On étudie l'existence et la régularité de la solution de ce problème quand $f \in L^p(\Omega)$ avec $n > p > \frac{n}{2}$ et $p \geq 2$.

On trouve que $u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

En se basant sur des estimations concises et optimales obtenue dans [Brézis [5]] on peut appliquer la **méthode de continuité** pour les contraintes convexes sur le bord ayant un sous-différentiel multivoque.

Pour avoir des problèmes bien posés sur le bord on est obligé de travailler en parallèle dans $H^2(\Omega)$ et $W^{1,p^*}(\Omega)$.

Le cas local avec le problème du double obstacle sur le bord est résolu avec une régularité $W^{1,p^*}(\Omega)$. On pense que la régularité optimale pour ce problème est $W^{2,p}(\Omega)$ car le sous-différentiel de la fonction convexe spécifique au double obstacle est univoque et lipschitzienne et dans [Brézis[5]] pour ce type de fonction on obtient une régularité $W^{2,p}(\Omega)$ mais la constante de l'estimation dépend du sous-différentiel ce qui avec notre technique ne permet pas de passer à la limite lorsque le paramètre de la pénalisation tend vers l'infini.

Enfin, on remarque que la fonction convexe j a été supposée partout indépendante du domaine. Il serait intéressant de développer une théorie analogue pour de telles fonctions dépendantes du domaine, en ce cas il faudrait refaire l'approche de [Brézis[5]] avec un bon contrôle des estimations.

Section 3.3 Cette section traite les perturbations variationnelles avec une **contrainte convexe sur le gradient.**

On étudie l'existence et la régularité de la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall \ v \in K_\alpha, \ f \in L^p(\Omega), \ p \geq 2 \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ (j(\circ, \nabla v), 1) \leq \alpha\}, \ \alpha \geq 0 \text{ constante} \end{cases}$$

avec $j(x.\circ)$ convexe et positive.

On obtient que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ si α est situé dans un certain intervalle des valeurs.

Les estimations nécessaires à la **méthode de continuité** sont restreintes à un intervalle borné pour le paramètre α à cause de la difficulté de contrôler la constante du théorème 1.3.1.

Le cas du double obstacle pour le gradient est seulement posé sans traitement car on ne dispose pas d'une estimation uniforme avec un paramètre de la pénalisation allant jusqu'à l'infini.

On donne aussi une approche basée sur les **multiplicateurs de Lagrange** en arrivant à la même régularité.

Des résultats d'existence et de régularité pour le problème de l'obstacle sur le module du gradient, en particulier le problème de la torsion elasto-plastique, sont obtenus dans [Brézis[3]] et [Williams, G. H.]. La régularité de la solution de ces problèmes (avec la donnée $f \in L^p(\Omega)$) est $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Il est naturel de poser le problème non local pour le gradient avec une fonction convexe plus générale mais un ce cas le problème pénalisé sera quasilinéaire et il faudrait déjà assurer une régularité $W^{2,p}(\Omega)$ de la solution pénalisée avec un bon contrôle de l'estimation, ce qui promet d'être difficile.

Section 3.4 C'est le commencement du traitement des inéquations variationnelles du **quatrième ordre.**

Nous donnons une version non locale à une approche dans [Brézis[2]] du problème du double obstacle pour un opérateur du deuxième ordre A avec des obstacles constants.

On s'intéresse à l'existence, à l'unicité et à la régularité de la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \ v \in K_\alpha, \ f \in L^p(\Omega), \ p > n \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \ (j(o, Av), 1) \leq \alpha\} \ \alpha \geq 0 \text{ constante} \end{cases}$$

avec $j(x, o)$ convexe et positive comme aux préliminaires 3.4.

On obtient que $u \in W^{3,p}(\Omega)$ avec une situation (indiquée ci-dessous) où $u \in W^{4,p}(\Omega)$.

La **méthode de continuité** développée jusque là s'applique d'une manière naturelle car la pénalisation est facile à manier et on dispose des estimations explicites et indépendantes du paramètre.

On arrive à capter aussi le cas local avec en particulier le **problème du double obstacle pour l'opérateur A avec des obstacles non constants.**

La régularité naturelle pour ces problème est $W^{3,p}(\Omega)$ mais on met en évidence la situation suivante : si la solution $u_* \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $A^* u_* = f$ satisfait la condition réalisable $\partial j(o, u_*) \in W^{2,p}(\Omega)$ où $\partial j(x, o)$ est le sous-différentiel de la fonction convexe qui contrôle la perturbation variationnelle, alors on a une régularité $W^{4,p}(\Omega)$ pour le problème local et non local.

Section 3.5 C'est le **problème de l'obstacle bilatéral pour l'opérateur biharmonique** avec A un opérateur elliptique du deuxième ordre au lieu du laplacien.

Pour une étude du problème de l'obstacle unilatéral pour l'opérateur biharmonique on peut consulter [Caffarelli[1]] et pour l'obstacle bilatéral [Caffarelli[2]] où on obtient la régularité $H^2(\Omega)$ avec $A = -\Delta$ et une fonction générique $f = 0$.

A notre connaissance jusqu'à maintenant la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ avec une fonction générique $f \in L^p(\Omega)$ n'a pas été abordée.

Via une pénalisation bien choisie on montre que la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \ v \in K \\ u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \ \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ et les fonctions obstacles $\psi_i \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que $\psi_1 \leq 0 \leq \psi_2$ sur $\partial\Omega$, $\psi_1 \leq \psi_2$, $A\psi_1 \leq 0 \leq A\psi_2$ p.p. Ω, admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

La même régularité est obtenue pour le problème unilatéral

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \ v \in K_1 \\ u \in K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \ v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)$ et la fonction obstacle $\psi_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\psi_1 \leq 0$ sur $\partial\Omega$, $A\psi_1 \in L^\infty(\partial\Omega)$, $A^* A\psi_1 \in L^p(\Omega)$. Δ

A.M.S Subject classification (1991) : 35J85, 35B45, 35B50, 35B65, 35B25, 35J20, 35J25, 35J35

Mots clés : perturbation, variationnelle, fonctionnelle, monotone, paramétrique, singulière, régulière, équation semilinéaire, fortement non linéaire, multivoque, graphe maximal monotone, régularisée Yosida, identification formelle, stabilité, méthode de monotonie, méthode de compacité, régularisation, principe du maximum, petit paramètre, théorie du potentiel, inégalité variationnelle, contraintes, convexes, locales, non locales, pénalisation, méthode de continuité. Δ

1 Perturbations monotones

1.1 L'inégalité de Poincaré

Problème 1.1

On obtient l'inégalité

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C\,|u|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

avec C une constante indépendante de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et p. △

1.1.1 L'inégalité de Poincaré avec une constante indépendante du domaine

Théorème 1.1.1

Le domaine Ω sera supposé borné par rapport à la direction x_i. Ω_i est la projection de Ω sur l'axe de direction x_i.

On a

$$|u|_p \leq C_i|u_{x_i}|_p \leq C_i|\nabla u|_p$$

pour toute $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$ où $C_i = |\Omega_i|$. △

Preuve :

Nous avons successivement avec $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ prolongée par 0 :

$$|u|^p = \left|\int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}dx_i\right|^p \leq \left[\int_{\Omega_i} |u_{x_i}|dx_i\right]^p \leq C_i^{p-1}\int_{\Omega_i} |u_{x_i}|^p dx_i\ .$$

On a utilisé l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $j(t) = |t|^p$ $(p \geq 1)$.

En intégrant sur Ω d'abord par rapport à x_i on obtient

$$|u|_p^p = \int_\Omega |u|^p \leq C_i \cdot C_i^{p-1}\int_\Omega |u_{x_i}|^p = C_i^p|u_{x_i}|_p^p$$

d'où

$$|u|_p \leq C_i|u_{x_i}|_p \leq C_i|\nabla u|_p$$

le résultat. △

Remarque 1.1.1

Dans toute la suite on désigne par C_P une constante indépendante de p, v telle que

$$|v|_2 \leq C_P\,|\nabla v|_2 \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Si Ω est borné on peut prendre pour C_P le diamètre de Ω.

L'indépendance de C_P par rapport à p sera utile dans la suite (voir l'exemple 2.9.2) lorsqu'on veut obtenir des estimations uniformes en faisant tendre p vers l'infini. △

1.2 Estimations de type $L^p(\Omega)$

Coercivité d'un opérateur elliptique du second ordre dans $L^p(\Omega)$

Préliminaires 1.2

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ sera supposé borné et l'opérateur A défini par $Au = -\sum_i^n (\sum_j^n a_{ij}u_{x_j})_{x_i}$ $\forall\, u \in H^1(\Omega)$ sera elliptique :

$$\sum_{i,j}^n a_{ij}\xi^i\xi^j \geq \alpha_A|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

où $\alpha_A > 0$ est une constante et $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

Des conditions supplémentaires peuvent être requises sur a_{ij} et Ω.

Pour l'introduction des graphes monotones voir [Brézis[4]]. △

Problème 1.2

On étudie la stabilité dans $L^p(\Omega)$ par rapport à f de la solution u ainsi que de la perturbation monotone $\beta(u)$ pour le problème perturbé

$$\begin{cases} Au + \beta(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où β est en général un graphe monotone maximal tel que $\beta(0) \ni 0$.

Toutes les estimations utilisent des constantes explicites. $\triangle$

1.2.1 Estimation avec régularité $L^\infty(\Omega)$ a priori

Théorème 1.2.1

Si la fonction $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ vérifie

$$\begin{cases} (Au - f, \varphi(u)) \leq 0 \\ f \in L^p(\Omega),\ p \geq 2,\ \varphi(u) = u|u|^{p-2} \end{cases}$$

alors

$$|u|_p^p \leq C_P^2 |\nabla |u|^{\frac{p}{2}}|_2^2 \leq C_p^A (Au, \varphi(u)) \leq C_p^A |f|_p |u|_p^{p-1}$$

et en particulier

$$|u|_p \leq C_p^A |f|_p$$

avec $C_p^A = \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1}$ où α_A est la constante d'ellipticité de l'opérateur A et C_P la constante de l'inégalité de Poincaré telle que $|v|_2 \leq C_P |\nabla v|_2 \ \ \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega)$. $\triangle$

Preuve :

On a successivement

$$(Au, \varphi(u)) \underset{\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=\!=} \left(\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}, \varphi'(u)\right) \geq \frac{\varphi \text{ croissante}(p \geq 2)}{A \text{ elliptique}} \geq$$

$$\geq \alpha_A(|\nabla u|^2, \varphi'(u)) \underset{\varphi'(u)=(p-1)|u|^{p-2}}{=\!=\!=\!=} (p-1)\alpha_A(|u|^{p-2}, |\nabla u|^2) =$$

$$\underset{u \in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=} (p-1)\left(\frac{2}{p}\right)^2 \alpha_A(|\nabla |u|^{\frac{p}{2}}|^2, 1) = \boxed{(p-1)\left(\frac{2}{p}\right)^2 \alpha_A \left||u|^{\frac{p}{2}}\right|_{H_0^1(\Omega)}^2}$$

donc

$$(Au, \varphi(u)) \geq (p-1)\left(\frac{2}{p}\right)^2 \alpha_A \left||u|^{\frac{p}{2}}\right|_{H_0^1(\Omega)}^2 .$$

D'autre part

$$(f, \varphi(u)) \leq \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{\text{Hölder}} \leq |f|_p |\varphi(u)|_{p'} = \boxed{|f|_p |u|_p^{p-1}}$$

et l'hypothèse

$$(Au, \varphi(u)) \leq (f, \varphi(u))$$

devient

$$\left||u|^{\frac{p}{2}}\right|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \alpha_A^{-1} |f|_p |u|_p^{p-1} .$$

Ceci entraîne

$$|u|_p^p = ||u|^{\frac{p}{2}}|_2^2 \leq \underset{\text{Poincaré}}{=\!=\!=} \leq C_P^2 |\nabla |u|^{\frac{p}{2}}|_2^2 \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1} (Au, \varphi(u)) \leq$$

$$\leq \boxed{\frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1} |f|_p |u|_p^{p-1}}$$

donc

$$|u|_p \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1} |f|_p$$

et il suffit de poser $C_p^A = \frac{1}{p-1}\left(\frac{p}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1}$. $\triangle$

1.2.2 Estimation avec régularité $L^p(\Omega)$ a posteriori via troncature

Stabilité de la solution du problème de Dirichlet

Théorème 1.2.2

Si on a au sens faible

$$\begin{cases} (Au - f, \psi) \le 0 & \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } u\psi \ge 0 \text{ p.p. } \Omega \\ u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega), & f \in L^p(\Omega)\ (p \ge 2) \end{cases}$$

alors

$$|u|_{L^p(\Omega)} \le C_p^A |f|_p + |\Omega|^{\frac{1}{p}} |u|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

où C_p^A est la constante du théorème 1.2.1.

Si les fonctions $u_i \in H^1(\Omega)$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_i = f_i \in L^p(\Omega) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$|u_1 - u_2|_p \le C_p^A |f_1 - f_2|_p$$

et

$$|u_1 - u_2|_p^p \le C_p^A (A(u_1 - u_2), \varphi(u_1 - u_2)) \ .$$

△

Preuve :

On rappelle les notations $v \vee w = \max\{v, w\}$, $v \wedge w = \min\{v, w\}$.

Soit

$$\begin{aligned} k &= |u|_{L^\infty(\partial\Omega)} \\ u^k &= (u - k) \vee 0 + (u + k) \wedge 0 \\ u_\varepsilon^k &= (u^k \wedge \varepsilon) \vee (-\varepsilon),\ \varepsilon > 0 \\ \varphi(u_\varepsilon^k) &= u_\varepsilon^k |u_\varepsilon^k|^{p-2}\ . \end{aligned}$$

Alors $u_\varepsilon^k \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ni \varphi(u_\varepsilon^k)$ et $u\varphi(u_\varepsilon^k) \ge 0$ p.p. Ω , $\forall\ \varepsilon > 0$ donc

$$0 \ge (Au - f, \varphi(u_\varepsilon^k)) = (\varphi'(u_\varepsilon^k), \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_j} u_{\varepsilon x_i}^k) - (f, \varphi(u_\varepsilon^k)) \overset{\text{de par la définition de } u_\varepsilon^k}{\underset{\text{on a } u_{\varepsilon x_j}^k = 0 \text{ ou } u_{x_j}}{=\!=\!=}}$$

$$= (\varphi'(u_\varepsilon^k), \sum_{i,j} a_{ij} u_{\varepsilon x_j}^k u_{\varepsilon x_i}^k) - (f, \varphi(u_\varepsilon^k)) =$$

$$= (Au_\varepsilon^k - f, \varphi(u_\varepsilon^k))$$

et on peut appliquer le théorème 1.2.1 pour obtenir

$$|u^k|_{L^p(\Omega)} = \overline{\lim}_{\varepsilon \to \infty} |u_\varepsilon^k|_{L^p(\Omega)} \le \overline{\lim}_{\varepsilon \to \infty} C_p^A |f|_{L^p(\Omega)} = C_p^A |f|_{L^p(\Omega)}\ .$$

Ceci implique

$$|u|_{L^p(\Omega)} \le \overset{|u| \le |u^k| + |k|}{=\!=\!=} \le |u^k|_{L^p(\Omega)} + |k|_{L^p(\Omega)} \le \overset{k = |u|_{L^\infty(\partial\Omega)}}{=\!=\!=} \le$$

$$\le C_p^A |f|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{1/p} |u|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

ce qu'on voulait montrer.

Pour la dernière partie de l'hypothèse par soustraction on a

$$\begin{cases} A(u_1 - u_2) = f_1 - f_2 \in L^p(\Omega)\ \ (p \ge 2) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et il suffit d'observer que

$$\begin{cases} (A(u_1 - u_2) - f, \psi) \le 0 & \forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega), & f \in L^p(\Omega)\ (p \ge 2)\ . \end{cases}$$

△

Remarque 1.2.2

Pour se placer dans le contexte du théorème 1.2.1 on introduit $u^k \in L^\infty(\Omega)$.

En général $\varphi(u^k)$ *n'est pas dans* $H_0^1(\Omega)$ *si* $u^k \in H_0^1(\Omega)$ *d'où l'intérêt de considérer* u_ε^k *qui vérifie* $\varphi(u_\varepsilon^k) \in H_0^1(\Omega)$.

Pour un développement de la technique de troncature voir [Stampacchia[1]] où l'on obtient une estimation $|u|_q \le C\,|f|_p$ *avec* $q = \infty$ *si* $p > n$, $1/q = 1/p - 1/n$ *si* $2 \le p < n$, q *arbitraire si* $p = n = 2$, *et* C *une constante implicite indépendante de* u, f . *Dans toute la suite, lorsqu'on considère des estimations obtenues à l'aide du théorème 1.2.2 et qui n'exigent pas une constante explicite, elles seront susceptibles d'améliorations en fonction de la position de* p *par rapport à* n . *Notre approche avec* $q = p$ *a l'avantage d'une constante* C *explicite qui est également une constante de coercivité dans* $L^p(\Omega)$ *pour l'opérateur* A *au sens suivant :* $(Au, \varphi(u)) \ge C^{-1}\,|u|_p^p$ *pour tout* $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ *tel que* $\varphi(u) = u|u|^{p-2} \in H_0^1(\Omega)$. *Ce fait va nous permettre de développer une méthode de monotonie dans* $L^p(\Omega)(p \ge 2)$ *analogue à celle de [Lions[1]] lorsque* $p = 2$. △

1.2.3 Stabilité de la solution du problème de Dirichlet perturbé.

Pour des résultats d'existence et de régularité concernant le problème de Dirichlet perturbé voir [Brézis[1]].

Théorème 1.2.3

Soit β un graphe maximal monotone tel que $0 \in \beta(0)$.

Si les $u_i \in H^1(\Omega)$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta(u_i) \ni f_i \in L^p(\Omega) \ \ (p \ge 2) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$|u_1 - u_2|_p \le C_p^A |f_1 - f_2|_p$$

où C_p^A est la constante du théorème 1.2.1 indépendante de u_i, f_i, β.

Si β est coercive :

$$|x_1 - x_2| \ge \alpha_\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \in \beta(t_1),\ x_2 \in \beta(t_2),\ \alpha_\beta > 0 \text{ constante,}$$

alors

$$|u_1 - u_2|_p \le C^\beta |f_1 - f_2|_p$$

où $C^\beta = \alpha_\beta^{-1}$ est une constante indépendante de u_i, f_i, A. △

Preuve :

Par soustraction

$$\begin{cases} A(u_1 - u_2) + \beta(u_1) - \beta(u_2) \ni f_1 - f_2 \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Dans la suite on note par $\beta(u_1) - \beta(u_2)$ la fonction $f_1 - f_2 - A(u_1 - u_2)$ telle que

$$f_1 - f_2 - A(u_1 - u_2) \in \beta(u_1(x)) - \beta(u_2(x)) \ \ \text{p.p. } x \in \Omega \ .$$

On a

$$(A(u_1 - u_2) - (f_1 - f_2), \psi) = -(\beta(u_1) - \beta(u_2), \psi) \le \underset{\forall\ \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \psi(u_1 - u_2) \ge 0}{\overset{\beta \text{ croissante}}{=\!=\!=\!=\!=}} \le 0$$

donc le théorème 1.2.2 permet d'avoir :

$$|u_1 - u_2|_p \le C_p^A |f_1 - f_2|_p$$

et C_p^A ne dépend pas de u_i, f_i, β.

On suppose d'abord $u_1 - u_2 \in L^\infty(\Omega)$.

En multipliant l'équation

$$A(u_1 - u_2) + \beta(u_1) - \beta(u_2) = f_1 - f_2$$

par $\varphi(u_1 - u_2) = |u_1 - u_2|^{p-2}(u_1 - u_2) \in H_0^1(\Omega)$, on obtient après une intégration par parties

$$\Big(\sum_{i,j} a_{ij}(u_1 - u_2)_{x_i}(u_1 - u_2)_{x_j}, \varphi'(u_1 - u_2)\Big) + (\beta(u_1) - \beta(u_2)(u_1 - u_2), |u_1 - u_2|^{p-2})$$
$$=$$
$$(f_1 - f_2, \varphi(u_1 - u_2)) \ .$$

Mais

$(\sum_{i,j} a_{ij}(u_1-u_2)_{x_i}(u_1-u_2)_{x_j}, \varphi'(u_1-u_2)) \geq 0$ (A elliptique, φ croissante, $p \geq 2$)

$((\beta(u_1)-\beta(u_2))(u_1-u_2), |u_1-u_2|^{p-2}) \geq \alpha_\beta |u_1-u_2|_p^p$ (β coercive)

$(f_1-f_2, \varphi(u_1-u_2)) \leq |f_1-f_2|_p |u_1-u_2|_p^{p-1}$ (Hölder)

d'où

$$\alpha_\beta |u_1-u_2|_p^p \leq |f_1-f_2|_p |u_1-u_2|_p^{p-1}$$

c'est-à-dire

$$|u_1-u_2|_p \leq \alpha_\beta^{-1} |f_1-f_2|_p \ .$$

Si $u_1 - u_2 \notin L^\infty(\Omega)$ on procède à une troncature comme dans la démonstration du théorème 1.2.2.

On pose $C^\beta = \alpha_\beta^{-1}$.

△

1.2.4 Estimations spécifiques aux perturbations monotones

Théorème 1.2.4

Soit β un graphe maximal monotone tel que $\beta(0) \ni 0$.

On suppose que le domaine Ω est borné et les coefficients de l'opérateur A satisfont $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique avec les estimations a priori

$$|u|_p \leq C_p^A |f|_p$$
$$|f - Au|_p \leq |f|_p$$
$$|Au|_p \leq 2|f|_p$$

où C_p^A est la constante du théorème 1.2.1. △

Preuve :

Ce problème admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ d'après [Brézis[1]] avec les estimations

$$|f - Au|_p \leq |f|_p$$
$$|Au|_p \leq 2|f|_p \ .$$

On observe aussi que $(\varphi(u) = u|u|^{p-2})$

$$(Au - f, \varphi(u)) \leq 0$$

car β est croissante avec $0 \in \beta(0)$ et l'estimation

$$|u|_p \leq C_p^A |f|_p$$

découle du théorème 1.2.2. △

1.3 Estimations de type $W^{k,p}(\Omega)$ pour le problème de Dirichlet

Préliminaires 1.3

La régularité du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ sera spécifiée au fur et à mesure de l'exposé. Soit l'opérateur A défini par

$$Au = -\sum_i (\sum_j a_{ij} u_{x_j})_{x_i}$$

avec $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et

$$\sum_{i,j} a_{ij} \xi^i \xi^j \geq \alpha_A |\xi|^2 \qquad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_A > 0 \text{ constante}$$

$$\alpha^A = \max_{i,j,k} |a_{ij}|_\infty \vee |a_{ijx_k}|_\infty < \infty\ .$$

Ces conditions rendent A lipschitzien de $W^{2,p}(\Omega)$ fort dans $L^p(\Omega)$ fort :

$$|Au|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha^A |u|_{W^{2,p}(\Omega)} \quad \forall\ u \in W^{2,p}(\Omega)$$

avec les normes usuelles des espaces $L^p(\Omega)$ et $W^{2,p}(\Omega)$.

Dans toute la suite on désigne par opérateur de type elliptique un tel opérateur A.

$\triangle$

Problème 1.3

On énonce un résultat sur l'existence, l'unicité et la stabilité dans $W^{k+2,p}(\Omega)(k \in N,\ p \geq 2)$ de la solution u par rapport à f dans $W^{k,p}(\Omega)$ pour le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au = f \in W^{k,p}(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega)\ . \end{cases}$$

Nous préparons la section 1.4 en démontrant un principe du maximum pour les problèmes elliptiques du second ordre ayant une perturbation monotone multivoque. $\triangle$

1.3.1 Existence et régularité d'ordre supérieur pour le problème de Dirichlet Stabilité de la solution

Pour le théorème qui suit, on suppose que les coefficients de l'opérateur A satisfont $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ avec $\partial\Omega \in C^{k+1}$, $k \in N$.

Théorème 1.3.1

Le problème

$$\begin{cases} Au = f \in W^{k,p}(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique avec l'estimation

$$|u|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C_A^{kp} |f|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

où C_A^{kp} est une constante indépendante de u et f .

Si les $u_i \in H^1(\Omega)(i \in \{1,2\})$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_i = f_i \in W^{k,p}(\Omega) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$|u_1 - u_2|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C_A^{kp} |f_1 - f_2|_{W^{k,p}(\Omega)}\ .$$

$\triangle$

Preuve :

Selon [Simader[1], théorème 9.12] il existe une constante C indépendante de u telle que

$$|u|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C(|f|_{W^{k,p}(\Omega)} + |u|_{L^p(\Omega)})$$

et en utilisant le théorème 1.2.2 on a aussi une autre constante C indépendante de u telle que

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|f|_{L^p(\Omega)}$$

donc le résultat. $\triangle$

1.3.2 Principe du maximum faible

Pour la comparaison sur le bord au sens $H^1(\Omega)$ voir [Kinderlehrer D. et Stampacchia G., pg. 35, def. 5.1].

On note par $2^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.3.2

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ une fonction multivoque telle que $\beta(x, \circ)$ est un graphe maximal monotone avec $0 \in \beta(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$.

Si les $u_i \in H^1(\Omega)$, $i \in \{1, 2\}$, sont solutions (au sens faible) des problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta(\circ, u_i) \ni f_i \in L^2(\Omega) & f_1 \leq f_2 \text{ p.p. } \Omega \\ u_1 - u_2 \leq 0 & \partial\Omega \text{ au sens } H^1(\Omega) \end{cases}$$

alors p.p. Ω

$$u_1 \leq u_2 \ .$$

$\triangle$

Preuve :

On rappelle la notation $v \vee w = \max\{v, w\}$ pour v, $w \in H^1(\Omega)$.

Par soustraction

$$A(u_1 - u_2) - (f_1 - f_2) \in \beta(\circ, u_2) - \beta(\circ, u_1)$$

et une multiplication par $(u_1 - u_2)^+ \overset{\text{notation}}{=\!=\!=} (u_1 - u_2) \vee 0 \in H_0^1(\Omega)$ donne

$$(A(u_1 - u_2)^+, (u_1 - u_2)^+) = (A(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)^+) \leq (f_1 - f_2, (u_1 - u_2)^+) \leq 0$$

d'où avec A elliptique p.p. Ω

$$(u_1 - u_2)^+ = 0$$

c'est-à-dire p.p. Ω

$$u_1 \leq u_2 \ .$$

On a utilisé le fait que p.p. $x \in \Omega$ avec $\forall\ t,\ s \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \beta(x, t)$, $s_0 \in \beta(x, s)$ on a

$$(t_0 - s_0)(t - s) \geq 0 \quad \text{et} \quad (t_0 - s_0)^+(t - s) \geq 0 \ .$$

$\triangle$

1.4 Problèmes semilinéaires multivoques

Étude du problème $\mathbf{Au} + \widetilde{\beta}(\mathbf{u}) \ni \mathbf{f} \in \mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\Omega}), \ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\boldsymbol{\Omega})$

Préliminaires 1.4

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine de classe C^1.

Soit l'opérateur A défini par $Au = -\sum_i^n (\sum_j^n a_{ij} u_{x_j})_{x_i} \ \forall\, u \in H^1(\Omega)$ satisfaisant la condition d'ellipticité :

$$\sum_{i,j}^n a_{ij}\xi^i\xi^j \geq \alpha_A |\xi|^2 \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

où $\alpha_A > 0$ est une constante et $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Pour une introduction des graphes monotones voir [Brézis[4]] ou [Barbu].

Si β_1, β_2 sont deux graphes maximaux monotones sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on note $\beta_1 \leq \beta_2$ et $|\beta_1| \leq |\beta_2|$ si on a respectivement $t_1 \leq t_2$ et $|t_1| \leq |t_2|$ $\forall\, t_1 \in \beta_1(t)$, $\forall\, t_2 \in \beta_2(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Dans toute la suite on note par $\partial\beta$ le sous-différentiel (au sens de [Brézis[4]]) du graphe monotone maximal β et par β' la différentielle usuelle (lorsqu'elle existe) de la fonction β.

Le symbole o sous un argument signifie variable courante, les autres variables étant fixées.

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.4.1

Soit $c \geq 0$ une constante.

Si j_1, j_2 sont deux fonctions convexes et propres sur $\mathbb{R}$ telles que

$$j_1(0) = 0 = j_2(0)$$
$$\partial j_1(0) \ni 0 \in \partial j_2(0)$$
$$c{+}|\partial j_1| \geq |\partial j_2|$$

alors

$$c|t| + j_1(t) \geq j_2(t)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Preuve :

On note par $1_{\mathbb{R}}$ la fonction identique sur $\mathbb{R}$.

Selon [Rockafellar, pg. 86, théorème 10.4] une fonction convexe définie sur un compact de $\mathbb{R}$ est lipschitzienne donc dérivable presque partout. Si le domaine de définition est non borné alors la convexité ne suffit pas pour assurer le caractère lipschitzien de la fonction.

On va montrer que $c|1_{\mathbb{R}}| + j_1 - j_2$ est croissante dans $(0, +\infty)$ et décroissante dans $(-\infty, 0)$.

Comme $j_i(\ i \in \{1,2\})$ est lipschitzienne (donc différentiable p.p.) dans chaque compact $K \subset [0, \infty)$ on aura p.p. K

$$\partial j_1 \ni j_1' \ , \ j_2' \in \partial j_2$$

et en notant que l'hypothèse

$$c{+}|\partial j_1| \geq |\partial j_2|$$
$$\partial j_1(0) \ni 0 \in \partial j_2(0)$$

devient dans $K \subset [0, \infty)$

$$c{+}\ \partial j_1 \geq \partial j_2$$

on aura

$$(c1_{\mathbb{R}} + j_1 - j_2)' \geq 0$$

donc la fonction $c1_{\mathbb{R}} + j_1 - j_2$ sera croissante dans tout compact $K \subset [0, \infty)$.

Pour $t \in [0, \infty)$ on peut prendre $K = [0, t]$ et nous aurons

$$ct + j_1(t) - j_2(t) \geq c0 + j_1(0) - j_2(0) = 0$$

car $j_1(0) = 0 = j_2(0)$.

De la même manière, comme j_i est lipschitzienne (donc différentiable p.p.) dans chaque compact K de $(-\infty,0]$ on aura p.p. K
$$\partial j_1 \ni j_1' \ , \ j_2' \in \partial j_2$$
et puisque l'hypothèse
$$c+|\partial j_1| \geq |\partial j_2|$$
$$\partial j_1(0) \ni 0 \in \partial j_2(0)$$
devient dans $K \subset (-\infty,0]$
$$-c+ \partial j_1 \leq \partial j_2$$
on aura
$$(-c1_{\mathbb{R}} + j_1 - j_2)' \leq 0$$
donc la fonction $-c1_{\mathbb{R}} + j_1 - j_2$ sera décroissante dans tout compact K de $(-\infty,0]$.

Pour $t \in (-\infty,0]$ on peut prendre $K = [t,0]$ et nous aurons
$$-ct + j_1(t) - j_2(t) \geq -c0 + j_1(0) - j_2(0) = 0$$
car $j_1(0) = 0 = j_2(0)$.

Finalement pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$c|t| + j_1(t) \geq j_2(t)$$
ce qu'on voulait montrer. △

On introduit la régularisée Yosida d'un graphe maximal monotone par le :

Lemme 1.4.2

Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Alors l'image de $\mathbb{R}$ par $1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta$ est égale à $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda > 0$ et $(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}$ est une contraction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La régularisée Yosida β_λ de β, définie par $\beta_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(t - (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}t)$ a les propriétés suivantes :

(1) β_λ est univoque, monotone, croissante et lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$;

(2) $(\beta_\lambda)_\mu = \beta_{\lambda+\mu}$ pour tous λ, $\mu > 0$;

(3) On a $\beta_\lambda(t) \in \beta((1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;

(4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\beta(t)$ est un intervalle fermé ;

(5) On pose $D(\beta) = \{t \in \mathbb{R} : \beta(t) \neq \emptyset\}$ et $\beta_0(t) =$ la projection de 0 sur $\beta(t)$. On remarque que $\beta_0(t)$ est l'élément ayant la norme minimale dans $\beta(t)$. De la même manière on peut introduire la fonction univoque $\beta^0(t) =$ l'élément ayant la norme maximale dans $\beta(t)$ lorsque $D(\beta)$ est un ouvert. On a pour tout $t \in D(\beta)$, $|\beta_\lambda(t)|$ décroissante par rapport au paramètre λ avec
$$|\beta_\lambda(t)| \leq |\beta_0(t)|$$
et
$$\beta_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \beta_0(t) \ ;$$
(6) Si $u_k \in L^2(\Omega) \ni v_k$, $v_k \in \beta(u_k)$ p.p. sur Ω , $u_k \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ fort, $v_k \longrightarrow v$ dans $L^2(\Omega)$ faible, alors $v \in \beta(u)$ p.p. sur Ω . Si x_k, $y_k \in \mathbb{R}$ sont telles que $x_k \longrightarrow x$, $y_k \longrightarrow y$ et $y_k \in \beta(x_k)$ alors $y \in \beta(x)$;

(7) Si deux graphs maximaux monotones β_i sont tels que $\beta_1 \leq \beta_2 + \delta$ pour une constante $\delta \geq 0$, alors on a aussi $\beta_{1\lambda} \leq \beta_{2\lambda} + \delta$ ou $\beta_{i\lambda}$ est la régularisation Yosida du graphe maximal monotone β_i . △

Preuve :

Pour les points (1)-(6) voir [Brézis[1],[4]] et [Crandall M. et Pazy A.].

En ce qui concerne le point (7), on sait que $(1_{\mathbb{R}}+\lambda\beta_1)^{-1}$ est une contraction croissante donc on a avec $\delta \geq 0$
$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_1)^{-1}(t) - (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_1)^{-1}(t + \lambda\delta) \geq -\lambda\delta$$
d'où après une opération sur l'inverse d'une fonction
$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_1)^{-1}(t) \geq (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_2)^{-1}(t + \lambda\delta) - \lambda\delta = (1_{\mathbb{R}} + \lambda(\beta_1 - \delta))^{-1}(t) - \lambda\delta \ .$$
Maintenant $\beta_1 - \delta \leq \beta_2$ et en notant que l'inversion des fonctions inverse aussi l'ordre des fonctions, on obtient
$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_1)^{-1}(t) \geq (1_{\mathbb{R}} + \lambda(\beta_1 - \delta))^{-1}(t) - \lambda\delta \geq (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta_2)^{-1}(t) - \lambda\delta$$

et la définition de la régularisation Yosida implique

$$\beta_{1\lambda} \leq \beta_{2\lambda} + \delta$$

ce qu'on voulait montrer. $\triangle$

Lemme 1.4.3(Browder)

Soit X un espace de Banach réflexif (réel) ayant pour dual X^* .

Soit $K \subset X$ un ensemble non-vide, convexe et fermé.

On suppose que l'opérateur $A : X \longmapsto X^*$ est hemicontinu et monotone, envoie les ensembles bornés de X dans les ensembles bornés de X^* et satisfait la condition d'ellipticité

$$(Au, u)_X \geq \alpha_A \left|u\right|_X^2, \ \alpha_A > 0 \ \textit{constante} \ .$$

Si l'application $\varphi : X \longmapsto (-\infty, +\infty]$ est convexe, semicontinue inférieurement et $\varphi \not\equiv \infty$ alors le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u)_X \geq \varphi(u) - \varphi(v) & \forall \ v \in X \\ u \in X, \ f \in X^* \end{cases}$$

admet une solution. $\triangle$

Preuve :

Voir [Browder]. $\triangle$

Lemme 1.4.4

Soit j une fonction convexe et propre définie sur $\mathbb{R}$ telle que $j(0) = 0$ et le sous-différentiel univoque ∂j satisfait $\lim_{s \to \pm\infty} \partial j(s) = \pm\infty$.

On introduit la fonction duale j_* par $j_*(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}}\{st - j(s)\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Alors j_* est une fonction bien définie, convexe, propre et on a l'inégalité de Young :

$$j(t) + j_*(s) \geq ts \quad \forall \ s, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Voir [Adams, pg. 228]. $\triangle$

On dit que la suite de fonctions g_ε sur $\mathbb{R}$ converge continûment vers g si pour toute suite $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ convergeant vers x on a $g_\varepsilon(x_\varepsilon)$ converge vers $g(x)$ lorsque ε tend vers 0 .

Lemme 1.4.5

Dans un compact la convergence uniforme équivaut à la convergence continue. $\triangle$

Preuve :

Voir [Lojasiewicz, pg. 48, théorème 3.1.9]. $\triangle$

Problème 1.4

On étudie l'existence, l'unicité et la régularité avec des estimations a priori, pour la solution du problème perturbé

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) \ni f \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où β est un graphe monotone maximal dépendant du domaine Ω . $\triangle$

1.4.1 Perturbations monotones univoques

Théorème 1.4.1

Soit $p \geq 2$.

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction univoque telle que

$\beta(x, \circ)$ est une fonction croissante et continue avec $0 \in \beta(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\beta(\circ, t) \in L^1(\Omega) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1, 2\})$,

des fonctions croissantes et continues $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2(x) \leq \beta(x, t) \leq \beta_1(t) + b_1(x) \ .$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation ponctuelle

$$\beta_2(-C\,|f - b_1|_p) + b_2 \leq \beta(\circ, u) \leq \beta_1(+C\,|f - b_2|_p) + b_1$$

où C est une constante indépendante de u, f, β, β_i, b_i. $\triangle$

Preuve :

Selon un résultat de [Brézis[8]] le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - \beta(\circ, u) - f, v - u) \geq 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution satisfaisant aussi $u\beta(\circ, u) \in L^1(\Omega) \ni \beta(\circ, u)$.

En observant que $k\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour $k \in N$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, l'inéquation variationnelle devient

$$(Au - \beta(\circ, u) - f, \varphi) \geq \frac{1}{k}(Au - \beta(\circ, u) - f, u)$$

et en faisant tendre k vers l'infini on obtient $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(Au - \beta(\circ, u) - f, \varphi) \geq 0$$

d'où p.p. Ω

$$Au - \beta(\circ, u) - f = 0 \ .$$

Comme $\beta(x, \circ)$ est monotone la solution du problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

sera unique.

Il reste à établir la régularité.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta_i(u_i) = f - b_i \in L^p(\Omega) \\ u_i \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Selon le théorème 1.2.4 ces problèmes admettent une solution unique u_i avec les estimations

$$|\beta_i(u_i)|_p \leq |f - b_i|_p \quad \text{et} \quad |Au_i|_p \leq 2\,|f - b_i|_p$$

d'où via le théorème 1.3.1 et les injections de Sobolev il existe une constante indépendante de u_i, β_i, b_i, f telle que

$$|u_i|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,|f - b_i|_p \ .$$

On observe que

$$Au + \beta(\circ, u) = f \begin{cases} \geq Au + \beta_2(u) + b_2 \\ \leq Au + \beta_1(u) + b_1 \end{cases}$$

car
$$\beta_2(u) + b_2 \leq \beta(\circ, u) \leq \beta_1(u) + b_1$$
et le principe du maximum [voir théorème 1.3.2] appliqué aux inégalités
$$\begin{cases} Au_1 + \beta_1(u_1) = f - b_1 \leq Au + \beta_1(u) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
$$\begin{cases} Au_2 + \beta_2(u_2) = f - b_2 \geq Au + \beta_2(u) & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
donne p.p. Ω
$$u_1 \leq u \leq u_2 \ .$$
On a aussi
$$\beta_2(u_1) + b_2 \leq \beta_2(u) + b_2 \leq \beta(\circ, u) \leq \beta_1(u) + b_1 \leq \beta_1(u_2) + b_1$$
puisque β_1, β_2 sont croissantes et $\beta_2 + b_2(x) \leq \beta(x, \circ) \leq \beta_1 + b_1(x)$ donc
$$\beta_2(-|u_1|_\infty) + b_2 \leq \beta(\circ, u) \leq \beta_1(+|u_2|_\infty) + b_1$$
et en utilisant les estimations sur u_i
$$\beta_2(-C\,|f - b_1|_p) + b_2 \leq \beta(\circ, u) \leq \beta_1(+C\,|f - b_2|_p) + b_1$$
avec C une constante indépendante de u, u_i, f, β, β_i, b_i.

Maintenant avec $b_i \in L^p(\Omega)$ on aura
$$\begin{cases} f - Au = \beta(\circ, u) \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$
d'où le théorème 1.3.1 donne $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ce qu'on voulait montrer. $\triangle$

Remarque 1.4.1

Si l'opérateur A est symétrique, $b_i \in L^\infty(\Omega)$ et $\beta(x, \circ) \in C^1(\mathbb{R})$ p.p. $x \in \Omega$ alors le théorème 1.4.1 est une conséquence d'un résultat de [Amann] car les fonctions $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$ de la démonstration du théorème 1.4.1 seront des sous- et sur-solutions du problème étudié et on voit que $\beta(x, \circ)$ admet l'estimation $|\beta(x,t)| \leq c(|t|)$ avec la fonction croissante c définie par $c(|t|) = \max\{\beta_1(|t|), -\beta_2(-|t|)\} + \max\{|b_1|_\infty, |b_2|_\infty\}$. Dans [Amann] on donne aussi une estimation de la forme $|u|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \gamma(|u|_{C^0(\overline{\Omega})})$ avec γ une fonction croissante implicite. Le théorème 1.4.1 permet un bon contrôle de la dépendance de γ par rapport aux perturbations monotones impliquées.

Lorsque l'opérateur A est symétrique et $\beta(x,t)$ continue en t et mesurable en x, l'existence de la solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ du problème étudié au théorème 1.4.1 résulte de [Kazdan, théorème 6.5] sans contrôle de l'estimation.

On verra au théorème 1.4.7 que les sous- et sur-solutions au sens de [Amann] existent même si on renonce à l'hypothèse de monotonie sur $\beta(x, \circ)$ ce qui va nous encore permettre d'assurer l'existence d'une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec une bonne estimation. $\triangle$

1.4.2 Perturbations monotones multivoques

Théorème 1.4.2

Soit $p \geq 2$.

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ une fonction multivoque telle que

$\beta(x, \circ)$ est un graphe maximal monotone avec $0 \in \beta(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$,

la régularisation Yosida $\beta_\lambda(x, \circ)$ de $\beta(x, \circ)$ est telle que $\beta_\lambda(\circ, t) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1, 2\})$,

des graphes maximaux monotones $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

tels que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a
$$\beta_2(t) + b_2 \leq \beta(x, t) \leq \beta_1(t) + b_1 \ .$$
Alors le problème
$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation ponctuelle

$$\beta_{20}(-C\,|f-b_1|_p)+b_2 \le f-Au \le \beta_{10}(+C\,|f-b_2|_p)+b_1$$

où $\beta_{i0}(t)=\inf\{s\in\mathbb{R} : s\in\beta_i(t)\}$ et C est une constante indépendante de u, f, β, β_i, b_i. △

Preuve :
Soit $\lambda>0$.
On considère p.p. $x\in\Omega$ la régularisée Yosida du graphe maximal monotone $\beta(x,\circ)$:

$$\beta_\lambda(x,\circ)=\frac{1_{\mathbb{R}}-(1_{\mathbb{R}}+\lambda\beta(x,\circ))^{-1}}{\lambda}\,.$$

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_\lambda+\beta_\lambda(\circ,u_\lambda)\ni f\in L^p(\Omega)(p>n)\\ u_\lambda\in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

L'estimation

$$\beta_2(t)+b_2(x)\le\beta(x,t)\le\beta_1(t)+b_1(x)$$

entraîne à l'aide du [lemme 1.4.2, point (7)]

$$\beta_{2\lambda}(t)+b_2(x)\le\beta_\lambda(x,t)\le\beta_{1\lambda}(t)+b_1(x)\ .$$

D'après l'hypothèse $\beta_\lambda(\circ,t)\in L^1(\Omega)$ p.p. $t\in\mathbb{R}$.
Le théorème 1.4.1 assure l'existence d'une solution unique $u_\lambda\in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$\beta_{2\lambda}(-C\,|f-b_1|_p)+b_2\le\beta_\lambda(\circ,u)\le\beta_{1\lambda}(+C\,|f-b_2|_p)+b_1$$

où C est une constante indépendante de u, f, β_λ, $\beta_{i\lambda}$, b_i.
Maintenant on observe que d'après [lemme 1.4.2, point (5)] on a $\forall\,\lambda>0$ p.p. $\mathbb{R}$

$$|\beta_{i\lambda}|\le|\beta_{i0}|$$

où les fonctions $\beta_{i0}(t)=\mathrm{proj}_{\beta_i(t)}0$ restent bornées dans un compact car le graphe des β_i est fermé et borné dans un compact si $D(\beta_i)$ est un ouvert.
Dans ces conditions on a

$$\beta_{20}(-C\,|f-b_1|_p)+b_2\le\beta_\lambda(\circ,u)\le\beta_{10}(+C\,|f-b_2|_p)+b_1$$

donc $\beta_\lambda(\circ,u_\lambda)$ reste bornée dans $L^p(\Omega)$ d'où via la réflexivité de $L^p(\Omega)$, à une sous-suite près,

$$\beta_\lambda(\circ,u_\lambda)\xrightarrow[\lambda\to0]{L^p(\Omega)\text{ faible}}w\ .$$

On déduit aussi que Au_λ reste bornée dans $L^p(\Omega)$ lorsque λ tend vers 0 et via le théorème 1.3.1 u_λ sera bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour λ petit.
La réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ donne

$$u_\lambda\xrightarrow[\lambda\to0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}}u_0$$

et via les injections de Sobolev $(p>n)$

$$u_\lambda\xrightarrow[\lambda\to0]{L^p(\Omega)\text{ fort}}u_0$$

et de plus les valeurs de u_λ sont contenues dans un compact indépendant de λ.
Le passage à la limite au sens des distributions dans l'équation vérifiée par u_λ donne $w=f-Au_0$.
Montrons aussi que $\beta_\lambda(\circ,u_\lambda)$ converge ponctuellement vers w. En effet pour tout $x\in\Omega$ à l'aide du [lemme 1.4.2, point (5)] on a

$$|\beta_\lambda(x,u_\lambda)|\le|\beta_0(x,u_\lambda)|\le C_0$$

avec C_0 une constante indépendante de λ car on a vu que u_λ parcours un compact fixe et $\beta_0(x,\circ)$ est bornée dans tout compact de $\mathbb{R}$. On déduit que $\forall\,x\in\Omega$, à une sous-suite près,

$$\beta_\lambda(x,u_\lambda)\xrightarrow[\lambda\to0]{}v(x)$$

et la coïncidence de la limite ponctuelle avec la limite faible lorsque $p>1$ (voir [Kavian]) assure $v=w$.

Nous allons trouver aussi la limite ponctuelle de $(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x,\circ))^{-1}$.

De par la définition de $\beta_\lambda(x,\circ)$ on a

$$\left|u_\lambda - (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x,\circ))^{-1}(u_\lambda)\right|_p = \lambda\,|\beta_\lambda(x,u_\lambda)|_p \leq \lambda C_0$$

où C_0 est une constante indépendante de λ petit et on déduit qu'avec

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u_0$$

l'on a

$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x,\circ))^{-1}(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u_0$$

et

$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x,\circ))^{-1}(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{\text{p.p. }\Omega} u_0 \ .$$

D'après [lemme 1.4.2, points (4), (6)] on a $\beta_\lambda(x,u_\lambda) \in \beta(x,(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x,\circ))^{-1}(u_\lambda))$ d'où en passant à la limite ponctuelle il vient que $w \in \beta(x,u_0)$ p.p. $x \in \Omega$.

En notant que l'ensemble

$$K = \{g \in L^p(\Omega) : \beta_{20}(-C\,|f-b_1|_p) + b_2 \leq g \leq \beta_{10}(+C\,|f-b_2|_p) + b_1 \text{ p.p. } \Omega\}$$

est convexe et faiblement fermé, on a aussi

$$\beta_{20}(-C\,|f-b_1|_p) + b_2 \leq f - Au_0 \leq \beta_{10}(+C\,|f-b_2|_p) + b_1$$

où C est une constante indépendante de u, f, β, β_i, b_i.

Le passage à la limite au sens des distributions dans le problème

$$\begin{cases} Au_\lambda + \beta_\lambda(\circ,u_\lambda) = f \in L^p(\Omega)(p>n) \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{cases} Au_0 + \beta(\circ,u_0) \ni f \in L^p(\Omega)(p>n) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et la solution de ce problème sera unique car $\beta(x,\circ)$ est monotone p.p. $x \in \Omega$. $\triangle$

Remarque 1.4.2

La condition $\beta_\lambda(\circ,t) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ est remplie lorsque $\beta_0(\circ,t) \in L^1(\Omega) \ni \beta^0(\circ,t)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ où $\beta_0(x,t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s \in \beta(x,t)\}$ et $\beta^0(x,t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s \in \beta(x,t)\}$ p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. $\triangle$

Pour la définition de la fonction univoque β^0 associée à un graphe maximal monotone voir [lemme 1.4.2, point (5)].

Remarque 1.4.2

On se place dans les conditions du théorème 1.4.2 avec $\beta_1 \geq 0 \geq \beta_2$.

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ,u) \ni f \in L^p(\Omega)(p>n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et on a l'estimation

$$\beta(\circ,u) \begin{cases} \geq \beta_2^0(-\,|u_{01}|_\infty - \beta_1^0(+\,|u_{01}|_\infty)\,|u_*|_\infty) + b_2 \\ \leq \beta_1^0(+\,|u_{02}|_\infty - \beta_2^0(-\,|u_{02}|_\infty)\,|u_*|_\infty) + b_1 \end{cases}$$

où $u_{0i} \in L^\infty(\Omega) \ni u_*$ sont respectivement les solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_{0i} = f - b_i \in L^p(\Omega)(p>n) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} Au_* = 1 \in L^p(\Omega)(p>n) \\ u_* \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

Si on reprend la démonstration du théorème 1.4.2 avec les mêmes notations, alors on obtient l'existence et l'unicité de la solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

On note d'abord que $u_{0i} \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ni u_*$ en tant que solutions d'un problème de Dirichlet et via les injections de Sobolev $(p > n)$.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta_i(u_i) \ni f - b_i \in L^p(\Omega) \\ u_i \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Dans la suite on note par $\beta(\text{o}, u)$, $\beta_i(u_i)$ respectivement les fonctions g, g_i telles que p.p. $x \in \Omega$

$$g = f - Au \in \beta(x, u(x))$$
$$g_i = f - b_i - Au_i \in \beta_i(u_i(x)) \ .$$

Selon le théorème 1.2.4 ces problèmes admettent une solution unique u_i .

Si on considère le premier problème avec β_1 positive alors le principe du maximum assure p.p. Ω

$$u_1 \le u_{01}$$

et

$$\beta_1(u_1) \le \beta_1(u_{01})$$

car β_1 est croissante.

Avant d'utiliser la fonction β_i^0 on note que β_i^0 est bornée dans chaque compact lorsque $D(\beta_i)$ est un ouvert.

On déduit que

$$Au_1 \in f - \beta_1(u_1) \ge f - \beta_1(u_{01}) \ge f - \beta_1^0(+|u_{01}|_\infty)$$

et de nouveau le principe du maximum donne p.p. Ω

$$u_1 \ge u_{01} - \beta_1^0(+|u_{01}|_\infty)u_*$$

d'où

$$u_1 \ge -|u_{01}|_\infty - \beta_1^0(+|u_{01}|_\infty)\,|u_*|_\infty \ .$$

Finalement

$$|u_{01}|_\infty \ge |u_1|_\infty \ge |u_{01}|_\infty - \beta_1^0(+|u_{01}|_\infty)\,|u_*|_\infty \ .$$

De la même manière, si on considère le seconde problème avec β_2 négative alors le principe du maximum assure p.p. Ω

$$u_2 \ge u_{02}$$

et

$$\beta_2(u_2) \ge \beta_2(u_{02})$$

car β_2 est croissante.

On déduit que

$$Au_2 \in f - \beta_2(u_2) \le f - \beta_2(u_{02}) \le f - \beta_2^0(-|u_{02}|_\infty)$$

et de nouveau le principe du maximum donne p.p. Ω

$$u_2 \le u_{02} - \beta_2^0(-|u_{02}|_\infty)u_*$$

d'où

$$u_2 \le |u_{02}|_\infty - \beta_2^0(-|u_{02}|_\infty)\,|u_*|_\infty \ .$$

Finalement

$$|u_{02}|_\infty \le |u_2|_\infty \le |u_{02}|_\infty - \beta_2^0(-|u_{02}|_\infty)\,|u_*|_\infty \ .$$

On observe aussi que

$$Au + \beta(\text{o}, u) = f \begin{cases} \ge Au + \beta_2(u) + b_2 \\ \le Au + \beta_1(u) + b_1 \end{cases}$$

car

$$\beta_2(u) + b_2 \le \beta(\text{o}, u) \le \beta_1(u) + b_1$$

et le principe du maximum appliqué à

$$\begin{cases} Au_1 + \beta_1(u_1) = f - b_1 \le Au + \beta_1(u) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au_2 + \beta_2(u_2) = f - b_2 \ge Au + \beta_2(u) & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donne p.p. Ω

$$u_1 \le u \le u_2 \ .$$

Dans ces conditions p.p. Ω

$$\beta(\circ,u) \begin{cases} \ge \beta(\circ,u_1) \ge \beta_2(u_1) + b_2 \ge \beta_2^0(|u_{01}|_\infty - \beta_1^0(+|u_{01}|_\infty)\,|u_*|_\infty) + b_2 \\ \le \beta(\circ,u_2) \le \beta_1(u_2) + b_1 \le \beta_1^0(|u_{02}|_\infty - \beta_2^0(-|u_{02}|_\infty)\,|u_*|_\infty) + b_1 \end{cases}$$

puisque $\beta(x,\circ)$, β_i sont croissantes, donc on a obtenu l'estimation désirée. $\triangle$

1.4.3 Perturbations monotones univoques. Suite

Théorème 1.4.3

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\beta(x,\circ)$ est une fonction croissante et continue avec $0 \in \beta(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\beta(\circ,t) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des constantes $a_1 \ge b_1 > 0 < a_2 \le b_2$,

des fonctions h_i, $g_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des fonctions croissantes et dérivables p.p. $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} b_1\beta_1(t) + g_1 \le \beta(x,t) \le a_1\beta_1(t) + h_1 & \forall\, t \ge 0 \\ b_2\beta_2(t) + g_2 \le \beta(x,t) \le a_2\beta_2(t) + h_2 & \forall\, t \le 0 \ . \end{cases}$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ,u) = f \in L^p(\Omega)(p \ge 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$|\beta(\circ,u)|_p \le \left(\frac{a_1}{b_1}\right)|f - g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)|f - h_2|_p + |g_2|_p \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Selon un résultat de [Brézis[8]] le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - \beta(\circ,u) - f, v - u) \ge 0 & \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution satisfaisant aussi $u\beta(\circ,u) \in L^1(\Omega) \ni \beta(\circ,u)$.

En observant que $k\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ pour $k \in N$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, l'inéquation variationnelle devient

$$(Au - \beta(\circ,u) - f, \varphi) \ge \frac{1}{k}(Au - \beta(\circ,u) - f, u)$$

et en faisant tendre k vers l'infini on obtient $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(Au - \beta(\circ,u) - f, \varphi) \ge 0$$

d'où p.p. Ω

$$Au - \beta(\circ,u) - f = 0 \ .$$

Comme $\beta(x,\circ)$ est monotone la solution du problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ,u) = f \in L^p(\Omega)(p \ge 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

sera unique.

Il reste à établir la régularité et l'estimation.

On suppose d'abord $u \in L^\infty(\Omega)$ et soient les fonctions $u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$.

Une multiplication par $|\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1(u^+) \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $Au+\beta(\circ,u)-g_1 = f-g_1$ suivie d'une intégration par parties donne

$$(p-1)(|\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1'(u^+), \sum_{i,j} a_{ij}u^+_{x_i}u_{x_j}) + (\beta(\circ,u)-g_1, |\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1(u^+)) = \\ = (f-g_1, |\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1(u^+))$$

et on va estimer chaque terme de cette identité.

On a successivement

$$(|\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1'(u^+), \sum_{i,j} a_{ij}u^+_{x_i}u_{x_j}) = (|\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1'(u^+), \sum_{i,j} a_{ij}u^+_{x_i}u^+_{x_j}) \geq 0$$

car A est elliptique et $\beta_1(\circ^+)$ dérivable p.p. et croissante ;

$$(\beta(\circ,u)-g_1, |\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1(u^+)) \geq b_1 \left|\beta_1(u^+)\right|_p^p$$

à l'aide de l'hypothèse $\beta(x,t)-g_1 \geq b_1\beta_1(t)$ pour $t \geq 0$ et p.p. $x \in \Omega$;

$$(f-g_1, |\beta_1(u^+)|^{p-2}\beta_1(u^+)) \leq |f-g_1|_p \left|\beta_1(u^+)\right|_p^{p-1}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder.

Dans ces conditions l'identité devient

$$b_1 \left|\beta_1(u^+)\right|_p^p \leq |f-g_1|_p \left|\beta_1(u^+)\right|_p^{p-1}$$

d'où

$$\left|\beta_1(u^+)\right|_p \leq \frac{1}{b_1} |f-g_1|_p \quad .$$

De la même manière, une multiplication par $|\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2(-u^-) \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $Au+\beta(\circ,u)-h_2 = f-h_2$ suivie d'une intégration par parties donne

$$(p-1)(|\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2'(-u^-), \sum_{i,j} a_{ij}(-u^-_{x_i})u_{x_j}) + (\beta(\circ,u)-h_2, |\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2(-u^-)) = \\ = (f-h_2, |\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2(-u^-))$$

et on va estimer chaque terme de cette identité.

On a successivement

$$(|\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2'(-u^-), \sum_{i,j} a_{ij}(-u^-_{x_i})u_{x_j}) = (|\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2'(-u^-), \sum_{i,j} a_{ij}u^-_{x_i}u^-_{x_j}) \geq 0$$

car A est elliptique et $\beta_2(-\circ^-)$ dérivable p.p. et croissante ;

$$(\beta(\circ,u)-h_2, |\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2(-u^-)) \geq a_2 \left|\beta_2(-u^-)\right|_p^p$$

à l'aide de l'hypothèse $\beta(x,t)-h_2 \leq a_2\beta_2(t)$ pour $t \leq 0$ et p.p. $x \in \Omega$;

$$(f-h_2, |\beta_2(-u^-)|^{p-2}\beta_2(-u^-)) \leq |f-h_2|_p \left|\beta_2(-u^-)\right|_p^{p-1}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder.

Dans ces conditions l'identité précédente devient

$$a_2 \left|\beta_2(-u^-)\right|_p^p \leq |f-h_2|_p \left|\beta_2(-u^-)\right|_p^{p-1}$$

d'où

$$\left|\beta_2(-u^-)\right|_p \leq \frac{1}{a_2} |f-h_2|_p \quad .$$

Maintenant en observant que $\beta(\circ,t)t \geq 0$ on a

$$|\beta(\circ,u)|_p = \left|\beta(\circ,u^+)+\beta(\circ,-u^-)\right|_p \leq \left|\beta(\circ,u^+)\right|_p + \left|\beta(\circ,-u^-)\right|_p$$

et d'après l'hypothèse

$$0 \leq \beta(\circ, \quad u^+) \leq a_1\beta_1(u^+) + h_1$$

$$b_2\beta_2(-u^-) + g_2 \leq \beta(\circ,-u^-) \leq 0$$

donc en utilisant les estimations ci-dessus sur $\beta_1(u^+)$ et $\beta_2(-u^-)$ on obtient

$$|\beta(\mathrm{o},u)|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)|f-g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)|f-h_2|_p + |g_2|_p$$

l'estimation qu'on voulait montrer.

Si $u \notin L^\infty(\Omega)$ alors on considère la fonction de troncature $\psi_\varepsilon(t) = (-\varepsilon)\vee t \wedge \varepsilon$ qui est croissante et lipschitzienne.

On observe que

$$\begin{cases} b_1\beta_1 \circ \psi_\varepsilon(t) + g_1 \leq \beta(x,\psi_\varepsilon(t)) \leq a_1\beta_1 \circ \psi_\varepsilon(t) + h_1 & \forall\, t \geq 0 \\ b_2\beta_2 \circ \psi_\varepsilon(t) + g_2 \leq \beta(x,\psi_\varepsilon(t)) \leq a_2\beta_2 \circ \psi_\varepsilon(t) + h_2 & \forall\, t \leq 0 \end{cases}$$

avec $\beta_1 \circ \psi_\varepsilon$, $\beta_2 \circ \psi_\varepsilon$ croissantes et comme plus haut on obtient l'estimation

$$|\beta(\mathrm{o},\psi_\varepsilon(u_\varepsilon))|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)|f-g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)|f-h_2|_p + |g_2|_p$$

où u_ε est la solution du problème

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \beta(\mathrm{o},\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

On déduit d'une part que

$$\beta(\mathrm{o},\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{L^p(\Omega)\text{ faible}} w$$

avec l'estimation

$$|w|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right)|f-g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)|f-h_2|_p + |g_2|_p$$

car $L^p(\Omega)$ est réflexif et la norme de $L^p(\Omega)$ est semicontinue inférieurement dans la topologie faible et d'autre part

$$|Au_\varepsilon|_p \leq C$$

et via le théorème 1.3.1

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

avec C une constante indépendante de ε d'où

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} u \quad , \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u \quad , \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{\text{p.p. }\Omega} u$$

en utilisant la réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ et les injections de Sobolev.

Mais on a aussi avec $\beta(x,\mathrm{o})$ continue

$$\beta(\mathrm{o},\psi_\varepsilon(u_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{\text{p.p. }\Omega} \beta(\mathrm{o},u)$$

et étant donné que la limite faible dans $L^p(\Omega)(p>1)$ coïncide avec la limite ponctuelle on obtient $w = \beta(\mathrm{o},u)$.

Le passage à la limite au sens des distributions dans le problème vérifié par u_ε donne $w = \beta(\mathrm{o},u) = f - Au$ c'est-à-dire u est une solution du problème étudié.

Pour la régularité on observe que $Au = f - \beta(\mathrm{o},u) \in L^p(\Omega)$ et via le théorème 1.3.1 on a $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ce qui complète le résultat. $\triangle$

1.4.4 Perturbations monotones multivoques. Suite

Théorème 1.4.4

Soit $p \geq 2$.

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ une fonction multivoque telle que

$\beta(x,\mathrm{o})$ est un graphe maximal monotone avec $0 \in \beta(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

la régularisation Yosida $\beta_\lambda(x,\mathrm{o})$ de $\beta(x,\mathrm{o})$ est telle que $\beta_\lambda(\mathrm{o},t) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des constantes $a_1 \geq b_1 > 0 < a_2 \leq b_2$,

des fonctions $g_i,\ h_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des graphes maximaux monotones $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

tels que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} b_1\beta_1(t) + g_1 \leq \beta(x,t) \leq a_1\beta_1(t) + h_1 & \forall t \geq 0 \\ b_2\beta_2(t) + g_2 \leq \beta(x,t) \leq a_2\beta_2(t) + h_2 & \forall t \leq 0 \ . \end{cases}$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$|f - Au|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) |f - g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right) |f - h_2|_p + |g_2|_p \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Soit $\lambda > 0$.

On considère p.p. $x \in \Omega$ la régularisée Yosida du graphe maximal monotone $\beta(x, \circ)$:

$$\beta_\lambda(x, \circ) = \frac{1_{\mathbb{R}} - (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}}{\lambda} \ .$$

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_\lambda + \beta_\lambda(\circ, u_\lambda) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

L'estimation

$$\begin{cases} b_1\beta_1(t) + g_1 \leq \beta(x,t) \leq a_1\beta_1(t) + h_1 & \forall t \geq 0 \\ b_2\beta_2(t) + g_2 \leq \beta(x,t) \leq a_2\beta_2(t) + h_2 & \forall t \leq 0 \end{cases}$$

entraîne à l'aide du [lemme 1.4.2, point (7)]

$$\begin{cases} (b_1\beta_1)_\lambda(t) + g_1 \leq \beta_\lambda(x,t) \leq (a_1\beta_1)_\lambda(t) + h_1 & \forall t \geq 0 \\ (b_2\beta_2)_\lambda(t) + g_2 \leq \beta_\lambda(x,t) \leq (a_2\beta_2)_\lambda(t) + h_2 & \forall t \leq 0 \ . \end{cases}$$

Mais la régularisation Yosida est aussi décroissante en valeur absolue par rapport au paramètre λ et $(a\beta)_\lambda = a\beta_{a\lambda}$ pour une constante $a > 0$ et un graphe maximal monotone β.

Dans ces conditions l'estimation précédente permet d'avoir $(a_1 \geq b_1 > 0 < a_2 \leq b_2)$

$$\beta_\lambda(x,t) \begin{cases} \geq (b_1\beta_1)_\lambda(t) + g_1 = b_1\beta_{1b_1\lambda}(t) + g_1 \geq b_1\beta_{1a_1\lambda}(t) + g_1 \\ \leq (a_1\beta_1)_\lambda(t) + h_1 = a_1\beta_{1a_1\lambda}(t) + h_1 \end{cases}$$

lorsque $t \geq 0$ et

$$\beta_\lambda(x,t) \begin{cases} \geq (b_2\beta_2)_\lambda(t) + g_2 = b_2\beta_{2b_2\lambda}(t) + g_2 \geq b_2\beta_{2a_2\lambda}(t) + g_2 \\ \leq (a_2\beta_2)_\lambda(t) + h_2 = a_2\beta_{2a_2\lambda}(t) + h_2 \end{cases}$$

lorsque $t \leq 0$ donc

$$\begin{cases} b_1\beta_{1a_1\lambda}(t) + g_1 \leq \beta_\lambda(x,t) \leq a_1\beta_{1a_1\lambda}(t) + h_1 & \forall t \geq 0 \\ b_2\beta_{2a_2\lambda}(t) + g_2 \leq \beta_\lambda(x,t) \leq a_2\beta_{2a_2\lambda}(t) + h_2 & \forall t \leq 0 \ . \end{cases}$$

Selon l'hypothèse $\beta_\lambda(\circ, t) \in L^1(\Omega)$ p.p. $t \in \mathbb{R}$.

Le théorème 1.4.3 assure l'existence d'une solution unique $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$|\beta_\lambda(\circ, u_\lambda)|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) |f - g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right) |f - h_2|_p + |g_2|_p = C$$

et on note que la constante C de l'estimation est indépendante de λ.

La réflexivité de $L^p(\Omega)$ asure, à une sous-suite près,

$$\beta_\lambda(\circ, u_\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} w \ .$$

On déduit aussi que Au_λ reste bornée dans $L^p(\Omega)$ lorsque λ tend vers 0 et via le théorème 1.3.1 u_λ sera bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour λ petit.

La réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ donne

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u_0$$

et via les injections de Sobolev $(p > n)$

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u_0$$

et de plus les valeurs de u_λ sont contenues dans un compact indépendant de λ.

Le passage à la limite au sens des distributions dans l'équation vérifiée par u_λ donne $w = f - Au_0$.

Montrons aussi que $\beta_\lambda(\circ, u_\lambda)$ converge ponctuellement vers w. En effet pour tout $x \in \Omega$ à l'aide du [lemme 1.4.2, point (5)] on a

$$|\beta_\lambda(x, u_\lambda)| \leq |\beta_0(x, u_\lambda)| \leq C_0$$

avec C_0 une constante indépendante de λ car on a vu que u_λ parcours un compact fixe et $\beta_0(x, \circ)$ est bornée dans tout compact de $\mathbb{R}$. On déduit que $\forall\, x \in \Omega$, à une sous-suite près,

$$\beta_\lambda(x, u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} v(x)$$

et la coïncidence de la limite ponctuelle avec la limite faible lorsque $p > 1$ (voir [Kavian]) assure $v = w$.

Nous allons trouver aussi la limite ponctuelle de $(1_\mathbb{R} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}$.

De par la définition de $\beta_\lambda(x, \circ)$ on a

$$\left|u_\lambda - (1_\mathbb{R} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}(u_\lambda)\right|_p = \lambda\, |\beta_\lambda(x, u_\lambda)|_p \leq \lambda C$$

où C est une constante indépendante de λ et on déduit qu'avec

$$u_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u_0$$

l'on a

$$(1_\mathbb{R} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} u_0$$

et

$$(1_\mathbb{R} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{\text{p.p. }\Omega} u_0 \ .$$

D'après [lemme 1.4.2, points (4), (6)] on a $\beta_\lambda(x, u_\lambda) \in \beta(x, (1_\mathbb{R} + \lambda\beta(x, \circ))^{-1}(u_\lambda))$ d'où en passant à la limite ponctuelle il vient que $w \in \beta(x, u_0)$ p.p. $x \in \Omega$.

La semicontinuité inférieure de la norme de $L^p(\Omega)$ dans la topologie faible permet d'avoir

$$|f - Au_0|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) |f - g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right) |f - h_2|_p + |g_2|_p$$

en se basant sur l'estimation

$$|\beta_\lambda(\circ, u_\lambda)|_p \leq \left(\frac{a_1}{b_1}\right) |f - g_1|_p + |h_1|_p + \left(\frac{b_2}{a_2}\right) |f - h_2|_p + |g_2|_p \ .$$

Le passage à la limite au sens des distributions dans le problème

$$\begin{cases} Au_\lambda + \beta_\lambda(\circ, u_\lambda) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{cases} Au_0 + \beta(\circ, u_0) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et la solution de ce problème sera unique car $\beta(x, \circ)$ est monotone p.p. $x \in \Omega$. $\triangle$

1.4.5 Perturbations monotones multivoques. Une autre approche

Théorème 1.4.5

Soit $n = 1$.

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto 2^\mathbb{R}$ une fonction multivoque telle que

$\beta(x, \circ)$ est un graphe maximal monotone avec $0 \in \beta(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$,

la fonction convexe et propre $j(x, \circ)$ telle que $\partial j(x, \circ) = \beta(x, \circ)$ p.p. $x \in \Omega$,

vérifie la condition : $j(\circ, t)$ est mesurable Borel sur Ω $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des graphes maximaux monotones $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

tels que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2(x) \le \beta(x,t) \le \beta_1(t) + b_1(x) \ .$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$. △

Preuve :
Soit $X = H_0^1(\Omega)$, $f \in X^*$.

Selon [Barbu, pg. 50, théorème 2.3 et pg. 60, ex. 1] il existe les fonctions uniquement déterminées j_i, $j(x,\circ)$ convexes, positives, propres et semicontinues inférieurement p.p. $x \in \Omega$ telles que

$$\partial j_i = \beta_i, \ j_i(0) = 0$$

$$\partial j(x,\circ) = \beta(x,\circ), \ j(x,0) = 0 \ .$$

L'inégalité

$$\beta_2(t) + b_2(x) \le \beta(x,t) \le \beta_1(t) + b_1(x)$$

implique

$$|\beta(x,t)| \le |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| + |b_1(x)| + |b_2(x)|$$

et on peut appliquer le lemme 1.4 en notant que $|\partial\beta_1 + \partial\beta_2| = |\partial\beta_1| + |\partial\beta_2|$ lorsque $\beta_1(0) \ni 0 \in \partial\beta_2(0)$, pour avoir

$$j(x,t) \le j_1(t) + j_2(t) + |t||b_1(x)| + |t||b_2(x)|$$

p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Soit l'application $\varphi : X \longmapsto (-\infty, +\infty]$ définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega j(x,u)dx & \text{si } j(x,u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si non .} \end{cases}$$

Comme $j(x,\circ)$ est semicontinue inférieurement donc mesurable Borel sur $\mathbb{R}$ et $j(\circ,t)$ est mesurable Borel sur Ω par hypothèse, on déduit que j sera mesurable Borel sur $\Omega \times \mathbb{R}$.

D'après [McShane, pg. 558, théorème 3-2 et corollaire 3-3] la composition d'une fonction mesurable Borel sur $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $n+1$ fonctions mesurables sur Ω est mesurable donc $h(x,u)$ sera mesurable pour toute fonction u mesurable en notant que les projections $\Omega \ni x \overset{p_i}{\longmapsto} x_i \in \mathbb{R}$ sont mesurables.

On observe aussi que j_i semicontinue inférieurement (donc mesurable Borel) induit $j_i(u)$ mesurable et comme j_i est aussi continue sur chaque compact de $\mathbb{R}$ (voir [Rockafellar, pg. 86, théorème 10.4.]) on aura $j_i(u) \in L^\infty(\Omega)$ lorsque $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Dans ces conditions l'inégalité

$$j(x,u) \le j_1(u) + j_2(u) + |ub_1| + |ub_2|$$

implique $j(x,u) \in L^p(\Omega)$ avec $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donc $\varphi \not\equiv +\infty$.

En notant que j est positive on aura aussi $\varphi \ge 0$.

On voit que la convexité de j implique φ convexe.

Pour prouver que φ est semicontinue inférieurement par rapport à la topologie forte de $H_0^1(\Omega)$ il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$C_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega j(x,u) \le \lambda\}$$

est un fermé de $H_0^1(\Omega)$.

Si $v_n \in H_0^1(\Omega)$ est une suite telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_0^1(\Omega)\text{ fort}} v$$

alors, à une sous-suite près,

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.p. } \Omega} v$$

et avec $j(x,\circ)$ positive et semicontinue inférieurement, on aura p.p. $x \in \Omega$

$$\liminf_{n\to\infty} j(x, v_n(x)) \geq j(x, v(x))$$

et via le lemme de Fatou

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega j(x, v_n(x)) \geq \int_\Omega j(x, v(x))$$

c'est-à-dire φ est semicontinue inférieurement.

On observe aussi que l'opérateur A est linéaire, hemicontinu et monotone, envoie les ensembles bornés de X dans les ensembles bornés de X^* et satisfait la condition d'ellipticité

$$(Au, u)_X \geq \alpha_A \left|u\right|_X^2 \quad .$$

Selon un résultat de [Browder](voir lemme 1.4.3), le problème variationnel

$$(Au - f, v - u)_X \geq \varphi(u) - \varphi(v) \; \forall\, v \in X$$

admet une solution.

Maintenant on va vérifier que la solution de ce problème variationnel coïncide avec une solution du problème de l'énoncé.

D'après les injections de Sobolev $(p > n = 1)$ on a $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\omega)$ pour tout sous-domaine ω de Ω.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\omega)$.

On observe que $v = u + \varepsilon\psi \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et l'inéquation variationnelle donne

$$\varepsilon \int_\omega (Au - f)\psi dx \geq \int_\omega j(x,u)dx - \int_\omega j(x, u + \varepsilon\psi)dx$$

d'où ($\psi \in C_0^\infty(\omega)$, $j(x,0) = 0$)

$$\int_\omega (Au - f)\psi dx + \int_\omega \frac{j(x, u + \varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon} dx \geq 0 \quad .$$

Selon [Rockafellar, pg. 86, théorème 10.4.] la fonction convexe et propre $j(x,\circ)$ sera lipschitzienne (donc dérivable p.p.) dans chaque compact K de $\mathbb{R}$.

Si on prend $K = [-\left|u\right|_{L^\infty(\omega)} - \delta\left|\psi\right|_{L^\infty(\omega)}, \left|u\right|_{L^\infty(\omega)} + \delta\left|\psi\right|_{L^\infty(\omega)}]$ avec $\delta > 0$ une constante, alors p.p. $x \in \omega$ $j(x,\circ)$ sera dérivable p.p. dans K avec

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{j(x, u + \varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon} = j'(x,u)\psi \in \partial j(x,u)\psi = \beta(x,u)\psi \quad .$$

Comme les fonctions $\frac{j(x,u+\varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon}$ sont mesurables sur ω, la fonction $j'(x,u)\psi$ le sera aussi en tant que limite ponctuelle de fonctions mesurables.

Les inégalités de l'hypothèse permettent d'avoir

$$|\beta(x, u + \varepsilon\psi)| \leq |\beta_1(u + \varepsilon\psi)| + |\beta_2(u + \varepsilon\psi)| + |b_1(x)| + |b_2(x)|$$

et avec $u \in L^\infty(\omega) \ni \psi$, $\varepsilon \in [0,\delta]$ on aura $u + \varepsilon\psi \in K$ et comme les graphes monotones β_i sont bornés sur un compact de $\mathbb{R}$ en ayant les graphes fermés, on déduit que $L^p(\omega) \ni j'(x,u)\psi \in \beta(x,u)\psi$ et via la convexité de $j(x,\circ)$ la suite de fonctions $\frac{j(x,u+\varepsilon\psi)-j(x,u)}{\varepsilon}$ telle que

$$\beta(x,u)\psi \leq \frac{j(x, u + \varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon} \leq \beta(x, u + \varepsilon\psi)\psi$$

reste bornée dans $L^p(\omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Dans ces conditions le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure

$$\frac{j(x, u + \varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\omega) \text{ fort}} j'(x,u)\psi \in \beta(x,u)\psi \quad .$$

En revenant à l'inégalité

$$\int_\omega (Au - f)\psi dx + \int_\omega \frac{j(x, u + \varepsilon\psi) - j(x,u)}{\varepsilon} dx \geq 0$$

et en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\int_\omega (Au - f + j'(x,u))\psi dx \geq 0$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ donc p.p. ω

$$f - Au = j'(x,u) \in \beta(x,u) \ .$$

On peut couvrir Ω par des ω donc p.p. Ω

$$f - Au = j'(x,u) \in \beta(x,u) \ .$$

Comme $\beta(x,\text{o})$ est monotone la solution du problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\text{o},u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

sera unique.

Il reste à établir la régularité.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta_i(u_i) \ni f - b_i \in L^p(\Omega) \\ u_i \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Dans la suite on note par $\beta(\text{o},u)$, $\beta_i(u_i)$ respectivement les fonctions g, g_i telles que p.p. $x \in \Omega$

$$g = f - Au \in \beta(x, u(x))$$
$$g_i = f - b_i - Au_i \in \beta_i(u_i(x)) \ .$$

Selon le théorème 1.2.4 ces problèmes admettent une solution unique u_i avec les estimations

$$|\beta_i(u_i)|_p \leq |f - b_i|_p \ .$$

On observe que

$$Au + \beta(\text{o},u) = f \begin{cases} \geq Au + \beta_2(u) + b_2 \\ \leq Au + \beta_1(u) + b_1 \end{cases}$$

car

$$\beta_2(u) + b_2 \leq \beta(\text{o},u) \leq \beta_1(u) + b_1$$

.

Le principe du maximum appliqué aux inégalités

$$\begin{cases} Au_1 + \beta_1(u_1) = f - b_1 \leq Au + \beta_1(u) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au_2 + \beta_2(u_2) = f - b_2 \geq Au + \beta_2(u) & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donne p.p. Ω

$$u_1 \leq u \leq u_2 \ .$$

Les injections de Sobolev $(p > n)$ assurent $u_i \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ donc p.p. Ω

$$\beta(\text{o},u) \begin{cases} \leq \beta(\text{o},u_2) \leq \beta_1(u_2) + b_1 \leq \beta_1(+|u_2|_\infty) + b_1 \\ \geq \beta(\text{o},u_1) \geq \beta_2(u_1) + b_2 \geq \beta_2(-|u_1|_\infty) + b_2 \end{cases}$$

puisque $\beta(x,\text{o})$, β_1, β_2 sont croissantes et $\beta_2 + b_2(x) \leq \beta(x,\text{o}) \leq \beta_1 + b_1(x)$.

Mais d'après [Barbu, pg. 44, théorème 1.5] les graphes monotones β_i sont localement bornés en chaque point de $\mathbb{R}$ lorsque $D(\beta_i)$ sont des ouverts donc

$$-\infty < \inf\{t \in \mathbb{R} : t \in \beta_2(-|u_1|_\infty)\} \ , \ \sup\{t \in \mathbb{R} : t \in \beta_1(|u_2|_\infty)\} < \infty$$

et avec $b_i \in L^p(\Omega)$ on aura

$$\begin{cases} f - Au = \beta(\text{o},u) \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

d'où le théorème 1.3.1 donne $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ce qu'on voulait montrer. $\triangle$

1.4.6 Perturbations non monotones univoques

Théorème 1.4.6

Soit $n = 1$.

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction univoque telle que p.p. $x \in \Omega$ la fonction $\beta(x, \circ)$ est continue avec $0 = \beta(x, 0)$ et la fonction $h(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)ds$ est mesurable Borel sur Ω p.p. $t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des fonctions croissantes et continues $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 = \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2(x) \leq \beta(x,t) \leq \beta_1(t) + b_1(x) \ .$$

Si l'opérateur A est symétrique, alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$. $\triangle$

Preuve :

Soit $X = H_0^1(\Omega)$, $f \in X^*$.

On introduit les fonctions h_i, $h(x, \circ)$ continues p.p. $x \in \Omega$

$$h_i(t) = \int_0^t \beta_i(s)ds = + \int_0^{t^+} \beta_i(s)ds - \int_{-t^-}^0 \beta_i(s)ds$$

$$h(x,t) = \int_0^t \beta(x,s)ds = + \int_0^{+t^+} \beta(x,s)ds - \int_{-t^-}^0 \beta(x,s)ds$$

telles que $h_i' = \beta_i$, $h_i(0) = 0$ et $h'(x, \circ) = \beta(x, \circ)$, $h(x, 0) = 0$.

On note que $h(\circ, t)$ est mesurable Borel sur Ω par hypothèse et les fonctions h_i sont convexes positives.

L'inégalité

$$\beta_2(t) + b_2(x) \leq \beta(x,t) \leq \beta_1(t) + b_1(x)$$

implique après une intégration

$$\int_0^{+t^+} \beta_2(s)ds + \int_0^{+t^+} b_2(x)ds \leq \int_0^{+t^+} \beta(x,s)ds \leq \int_0^{+t^+} \beta_1(s)ds + \int_0^{+t^+} b_1(x)ds$$

et

$$\int_{-t^-}^0 \beta_2(s)ds + \int_{-t^-}^0 b_2(x)ds \leq \int_{-t^-}^0 \beta(x,s)ds \leq \int_{-t^-}^0 \beta_1(s)ds + \int_{-t^-}^0 b_1(x)ds$$

d'où

$$h_2(+t^+) + b_2(x)t^+ \leq h(x, +t^+) \leq h_1(+t^+) + b_1(x)t^+$$
$$h_1(-t^-) - b_1(x)t^- \leq h(x, -t^-) \leq h_2(-t^-) - b_2(x)t^-$$

et par sommation

$$h_2(+t^+) + b_2(x)t^+ + h_1(-t^-) - b_1(x)t^- \leq h(\circ, t) \leq h_1(+t^+) + b_1(x)t^+ + h_2(-t^-) - b_2(x)t^-$$

donc

$$|h(x,t)| \leq |h_1(t)| + |h_2(t)| + |b_1(x)||t| + |b_2(x)||t|$$

p.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Soit l'application $\varphi : X \longmapsto (-\infty, +\infty]$ définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_\Omega h(x,u)dx & \text{si } h(x,u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{si non .} \end{cases}$$

Comme $h(x, \circ)$ est continue donc mesurable Borel sur $\mathbb{R}$ et $h(\circ, t)$ est mesurable Borel sur Ω par hypothèse, on déduit que h sera mesurable Borel sur $\Omega \times \mathbb{R}$.

D'après [McShane, pg. 558, théorème 3-2 et corollaire 3-3] la composition d'une fonction mesurable Borel sur $\mathbb{R}^{n+1}$ avec $n+1$ fonctions mesurables sur Ω est mesurable donc $h(x,u)$ sera mesurable pour toute fonction u mesurable en notant que les projections $\Omega \ni x \overset{p_i}{\longmapsto} x_i \in \mathbb{R}$ sont mesurables.

On observe aussi que h_i continue induit $h_i(u)$ mesurable et comme h_i est aussi bornée sur chaque compact de $\mathbb{R}$, on aura $h_i(u) \in L^\infty(\Omega)$ lorsque $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Dans ces conditions l'inégalité

$$|h(x,u)| \leq |h_1(u)| + |h_2(u)| + |b_1(x)||u| + |b_2(x)||u|$$

implique $h(x,u) \in L^p(\Omega)$ avec $u \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donc $\varphi \not\equiv +\infty$.

On observe aussi que l'inégalité (h_i convexe positive, $b_i \in L^p(\Omega)$)

$$h(x,t) \geq h_2(+t^+) + h_1(-t^-) + b_2(x)t^+ - b_1(x)t^- \geq b_2(x)t^+ - b_1(x)t^-$$

implique

$$h(x,u) \geq b_2(x)u^+ - b_1(x)u^-$$

d'où $\varphi(u) > -\infty$ pour $u \in H_0^1(\Omega)$ donc φ est bien définie.

Pour prouver que φ est semicontinue inférieurement par rapport à la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$, il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$C_\lambda = \{u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega h(x,u) \leq \lambda\}$$

est faiblement fermé dans $H_0^1(\Omega)$.

Si $v_n \in H_0^1(\Omega)$ est une suite telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_0^1(\Omega) \text{ faible}} v$$

alors à l'aide des injections de Sobolev

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\Omega) \text{ fort}} v$$

d'où, à une sous-suite près,

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.p. } \Omega} v$$

et avec $h(x,\circ)$ continue vérifiant aussi $h(x,t) - (b_2t^+ - b_1t^-) \geq h(x,t) - \{h_2(+t^+) + h_1(-t^-) + b_2t^+ - b_1t^-\} \geq 0$ car h_i est positive, on aura p.p. $x \in \Omega$

$$\lim_{n\to\infty} \inf\{h(x,v_n) - (b_2v_n^+ - b_1v_n^-)\} \geq h(x,v) - (b_2v^+ - b_1v^-)$$

et via le lemme de Fatou

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega h(x,v_n) \geq \int_\Omega h(x,v)$$

c'est-à-dire φ est semicontinue inférieurement.

Soit aussi l'application $J : X \longmapsto]-\infty,+\infty]$ définie par

$$J(u) = (Au,u) = \tfrac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \quad .$$

Comme A est elliptique on aura $J \geq 0$ sur $H_0^1(\Omega)$ donc J est bien définie.

On va montrer que J est semicontinue inférieurement par rapport à la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$.

Si $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ est une suite telle que

$$v_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H_0^1(\Omega) \text{ faible}} v$$

alors $(j \in \{1,n\})$

$$v_{\varepsilon x_j} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(\Omega) \text{ faible}} v_{x_j}$$

et avec l'ellipticité de l'opérateur symétrique A on a

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\{J(v_\varepsilon) - J(v)\} = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left[\tfrac{1}{2} \sum_{i,j}^n a_{ij}(v_\varepsilon - v)_{x_i}(v_\varepsilon - v)_{x_j} + \sum_{i,j}^n a_{ij}(v_{\varepsilon x_j} - v_{x_j})v_{x_i}\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \sum_{i,j}^n a_{ij}(v_\varepsilon - v)_{x_i}(v_\varepsilon - v)_{x_j} \geq \tfrac{1}{2}\alpha_A\, \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0} |v_\varepsilon - v|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq 0$$

c'est-à-dire J est semicontinue inférieurement.

Il est évident que l'application

$$H_0^1(\Omega) \ni u \longrightarrow \int_\Omega fudx \in \mathbb{R}$$

est semicontinue inférieurement par rapport à la topologie faible de $H_0^1(\Omega)$ lorsque $f \in L^p(\Omega)$ avec $p \geq 2$.

Soit la fonctionnelle $F : X \longmapsto]-\infty, +\infty]$ définie par

$$F(u) = J(u) + \varphi(u) - \int_\Omega fudx \ .$$

En utilisant successivement l'ellipticité de l'opérateur A, les inégalités de Hölder et de Poincaré, l'inégalité $h(x,t) \geq b_2 t^+ - b_1 t^-$, on a

$$\begin{aligned} F(u) \geq & \tfrac{1}{2}\alpha_A |u|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (b_2 u^+ - b_1 u^- - fu)dx \geq \\ \geq & \tfrac{1}{2}\alpha_A |u|^2_{H_0^1(\Omega)} - |u|_2 \left(|b_2|_2 + |b_1|_2 + |f|_2\right) \geq \\ \geq & \tfrac{1}{2}\alpha_A |u|^2_{H_0^1(\Omega)} - |u|_{H_0^1(\Omega)} C_P(|b_2|_2 + |b_1|_2 + |f|_2) = \\ = & \alpha_A |u|_{H_0^1(\Omega)} \left(\tfrac{1}{2} |u|_{H_0^1(\Omega)} - C_P(|b_2|_2 + |b_1|_2 + |f|_2)\right) \end{aligned}$$

donc $F(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|u|_{H_0^1(\Omega)}$ tend vers $+\infty$.

Dans ces conditions la fonctionnelle $F : X \longmapsto]-\infty, +\infty]$ est semicontinue inférieurement dans X (convexe et fermé) muni de la topologie faible, $F \not\equiv +\infty$ et $F(u)$ tend vers $+\infty$ lorsque $|u|_{H_0^1(\Omega)}$ tend vers $+\infty$.

D'après un résultat de [Sibony, pg. 509, théorème 2.2], le problème variationnel

$$F(v) \ \geq \ F(u) \, \forall \, v \in X$$

admet une solution (non nécessairement unique).

Maintenant on va vérifier que la solution de ce problème variationnel coïncide avec une solution du problème de l'énoncé.

D'après les injections de Sobolev on a u continue lorsque $n = 1$ donc $u \in L^\infty(\omega)$ pour tout sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$.

Soit $\psi \in C_0^\infty(\omega)$.

On observe que $v = u + \varepsilon\psi \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et l'inéquation variationnelle donne

$$J(u+\varepsilon\psi) - J(u) - \varepsilon \int_\Omega f\psi dx \geq \int_\Omega h(x,u)dx - \int_\Omega h(x, u+\varepsilon\psi)dx$$

d'où ($\psi \in C_0^\infty(\omega)$, $h(x,0) = 0$)

$$\frac{J(u+\varepsilon\psi) - J(u)}{\varepsilon} + \int_\omega \frac{h(x,u+\varepsilon\psi) - h(x,u)}{\varepsilon} dx - \int_\omega f\psi dx \geq 0 \ .$$

Mais on a ($h(x,\mathrm{o})$ est différentiable p.p. $x \in \Omega$ avec $h'(x,\mathrm{o}) = \beta(x,\mathrm{o})$ continue)

$$\frac{h(x,u+\varepsilon\psi) - h(x,u)}{\varepsilon} = \beta(x, u+\theta\varepsilon\psi)\psi$$

avec $\theta \in [0,1]$ (dépendant de x) et à l'aide des inégalités de l'hypothèse

$$|\beta(x,u+\theta\varepsilon\psi)| \leq |\beta_1(u+\theta\varepsilon\psi)| + |\beta_2(u+\theta\varepsilon\psi)| + |b_1(x)| + |b_2(x)| \in L^p(\omega)$$

car $u \in L^\infty(\omega) \ni \psi$, $\theta \in [0,1]$ et les fonctions β_i sont continues et bornées sur un compact de $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions

$$\frac{h(x,u+\varepsilon\psi) - h(x,u)}{\varepsilon} = \beta(x, u+\theta\varepsilon\psi)\psi$$

reste bornée dans $L^p(\omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et avec $\beta(x,\mathrm{o})$ continue

$$\frac{h(x,u+\varepsilon\psi) - h(x,u)}{\varepsilon} = \beta(x, u+\theta\varepsilon\psi)\psi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} \beta(x,u)\psi \ .$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$\frac{h(x,u+\varepsilon\psi)-h(x,u)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\omega)\text{ fort}} \beta(x,u)\psi \ .$$

D'autre part il est facile de voir qu'avec l'opérateur A symétrique on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(u+\varepsilon\psi)-J(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \sum_{i,j}^{n} a_{ij}u_{x_i}\psi_{x_j}dx = \int_\omega \psi A u dx \ .$$

En revenant à l'inégalité

$$\frac{J(u+\varepsilon\psi)-J(u)}{\varepsilon} + \int_\omega \frac{h(x,u+\varepsilon\psi)-h(x,u)}{\varepsilon}dx - \int_\omega f\psi dx \geq 0$$

et en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\int_\omega (Au - f + \beta(x,u))\psi dx \geq 0$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ donc p.p. ω

$$Au - f + \beta(x,u) = 0 \ .$$

Comme on peut couvrir Ω par des ω on déduit que p.p. Ω

$$Au - f + \beta(x,u) = 0 \ .$$

Il reste à établir la régularité.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta_i(u_i) = f - b_i \in L^p(\Omega) \\ u_i \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Selon le théorème 1.2.4 ces problèmes admettent une solution unique $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$.

On observe que

$$Au + \beta(o,u) = f \begin{cases} \geq Au + \beta_2(u) + b_2 \\ \leq Au + \beta_1(u) + b_1 \end{cases}$$

car

$$\beta_2(u) + b_2 \leq \beta(o,u) \leq \beta_1(u) + b_1$$

et le principe du maximum [voir théorème 1.3.2] appliqué aux inégalités

$$\begin{cases} Au_1 + \beta_1(u_1) = f - b_1 \leq Au + \beta_1(u) & \text{dans } \Omega \\ u_1 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au_2 + \beta_2(u_2) = f - b_2 \geq Au + \beta_2(u) & \text{dans } \Omega \\ u_2 = 0 = u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donne p.p. Ω

$$u_1 \leq u \leq u_2 \ .$$

Les injections de Sobolev $(p > n = 1)$ assurent $u_i \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ donc $u \in L^\infty(\Omega)$ et les inégalités de l'hypothèse permettent d'avoir avec β_i croissantes

$$\beta_2(-|u|_\infty) + b_2(x) \leq \beta_2(u) + b_2(x) \leq \beta(x,u) \leq \beta_1(u) + b_1(x) \leq \beta_1(+|u|_\infty) + b_1(x)$$

c'est-à-dire $\beta(o,u) \in L^p(\Omega)$ lorsque $b_i \in L^p(\Omega)$ et on aura

$$\begin{cases} Au = f - \beta(o,u) \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

d'où le théorème 1.3.1 permet d'avoir $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ce qu'on voulait montrer. Δ

1.4.7 Perturbations univoques non monotones. Estimation a priori

Théorème 1.4.7

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction univoque telle que

$\beta(x,t)$ est une fonction continue en t et mesurable en x avec $\beta(x,0) = 0$ p.p. $x \in \Omega$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des fonctions croissantes et continues $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $\beta_i(0) = 0$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2(x) \leq \beta(x,t) \leq \beta_1(t) + b_1(x) \ .$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation ponctuelle

$$\beta_2(-C\,|f - b_1|_p) + b_2 \leq \beta(\circ,u) \leq \beta_1(+C\,|f - b_2|_p) + b_1$$

où C est une constante indépendante de u, f, β, β_i, b_i . $\triangle$

Preuve :

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta_i(u_i) = f - b_i \in L^p(\Omega) \\ u_i \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Selon le théorème 1.2.4 ces problèmes admettent une solution unique $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$ avec les estimations

$$|\beta_i(u_i)|_p \leq |f - b_i|_p \quad \text{et} \quad |Au_i|_p \leq 2\,|f - b_i|_p$$

d'où via le théorème 1.3.1 et les injections de Sobolev il existe une constante indépendante de u_i, β_i, b_i, f telle que

$$|u_i|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\,|f - b_i|_p \ .$$

On observe que

$$\begin{aligned} Au_2 + \beta_1(u_2) + b_1 \geq f = Au_2 + \beta_2(u_2) + b_2 =& f \leq Au_2 + \beta(\circ, u_2) \\ \geq f = Au_1 + \beta_1(u_1) + b_1 =& f \geq Au_1 + \beta(\circ, u_1) \end{aligned}$$

car

$$\beta_2(t) + b_2 \leq \beta(\circ,t) \leq \beta_1(t) + b_1$$

donc u_2 sera une sur-solution et u_1 une sous-solution au sens de [Amann] parce que le principe du maximum assure $u_2 \geq u_1$ en notant que β_1 est croissante.

D'après [Kazdan, théorème 6.5] il existe au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ du problème de l'énoncé et de plus $u_1 \leq u \leq u_2$.

On a aussi

$$\beta_2(u_1) + b_2 \leq \beta_2(u) + b_2 \leq \beta(\circ,u) \leq \beta_1(u) + b_1 \leq \beta_1(u_2) + b_1$$

avec β_i croissantes et $\beta_2(t) + b_2 \leq \beta(\circ,t) \leq \beta_1(t) + b_1$ donc

$$\beta_2(-|u_1|_\infty) + b_2 \leq \beta(\circ,u) \leq \beta_1(+|u_2|_\infty) + b_1$$

et en utilisant les estimations sur u_i

$$\beta_2(-C\,|f - b_1|_p) + b_2 \leq \beta(\circ,u) \leq \beta_1(+C\,|f - b_2|_p) + b_1$$

avec C une constante indépendante de u, u_i, f, β, β_i, b_i . $\triangle$

1.4.8 Perturbations non monotones univoques. Suite

Théorème 1.4.8

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\beta(x,t)$ est une fonction continue en t et mesurable en x avec $0 \in \beta(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\beta(\circ,0) \in L^p(\Omega)$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1,2\})$,

des fonctions croissantes de classe $C^1(\mathbb{R})$, $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$ on a

$$\beta_2 + b_2 \le \beta(x,\circ) \le \beta_1 + b_1 \ .$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ,u) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ et l'on a selon les situations :

i)

$$\int_\Omega j \circ \beta_2(+u^+) \le \int_\Omega j(f - b_2) \quad \text{et} \quad \int_\Omega j \circ \beta_1(-u^-) \le \int_\Omega j(f - b_1)$$

pour toute fonction convexe positive et propre j telle que $j(0) = 0$ et $j(f-b_1) \in L^1(\Omega) \ni j(f-b_2)$;

ii) si les fonctions β_i sont inversibles et il existe les fonctions convexes j_i comme au point i) telles que

$$j_1 \ge |\beta_2 \circ \beta_1^{-1}|^p \quad \text{et} \quad j_2 \ge |\beta_1 \circ \beta_2^{-1}|^p$$

alors on a

$$|\beta(\circ,u)|_p \le |\int_\Omega j(f - b_1)|^{\frac{1}{p}} + |\int_\Omega j(f - b_2)|^{\frac{1}{p}} + 2(|b_1|_p + |b_2|_p) + |\beta(\circ,0)|_p \ ;$$

iii) si les fonctions β_i sont inversibles et il existe les fonctions convexes j_i comme au point i) telles que

$$j_1 \ge |\beta_1^{-1}|^p \quad \text{et} \quad j_2 \ge |\beta_2^{-1}|^p$$

alors on a

$$|u|_p \le |\int_\Omega j(f - b_1)|^{\frac{1}{p}} + |\int_\Omega j(f - b_2)|^{\frac{1}{p}} \ .$$

△

Preuve :

On note $\varphi = \partial j$ et on suppose d'abord φ lipschitzienne.

L'existence et la régularité de la solution est une conséquence du théorème 1.4.7.

Comme on travaille avec $p > n$, φ lipschitzienne et $\beta_i \in C^1(\mathbb{R})$ on aura $\varphi \circ \beta_2(+u^+) \in H_0^1(\Omega) \ni \varphi \circ \beta_1(-u^-)$.

Une multiplication par $\varphi \circ \beta_2(+u^+)$ de l'inégalité

$$Au = f - \beta(\circ,u) \le (f - b_2) - \beta_2(u)$$

donne après une intégration dans Ω

$$(Au, \varphi \circ \beta_2(+u^+)) \le ((f - b_2) - \beta_2(u), \varphi \circ \beta_2(+u^+)) \ .$$

On va estimer chaque terme de cette inégalité.

D'abord on a

$$(Au, \varphi \circ \beta_2(+u^+)) =$$

[intégration par parties, $\varphi \circ \beta_2(+u^+) \in H_0^1(\Omega)$, φ lipschitzienne, β_2 dérivable p.p.]

$$= (\varphi' \circ \beta_2(+u^+)\beta_2'(+u^+), \sum_{i,j}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}) \ge$$

[φ, $\beta_2(+\circ^+)$ croissantes, A elliptique]

$$\ge 0 \ .$$

Ensuite

$$((f - b_2) - \beta_2(u), \varphi \circ \beta_2(+u^+)) =$$

[regroupement]

$$= (f - b_2, \varphi \circ \beta_2(u)) - (\beta_2(u), \varphi \circ \beta_2(+u^+)) =$$

[β_2 et φ conservent le signe]

$$= (f - b_2, \varphi \circ \beta_2(+u^+)) - (\beta_2(+u^+), \varphi \circ \beta_2(+u^+)) =$$

[factorisation]

$$= ((f - b_2) - \beta_2(+u^+), \varphi \circ \beta_2(+u^+)) \leq$$

[j convexe et $\partial j = \varphi$]

$$\leq (j(f - b_2) - j(\beta_2(+u^+)), 1) =$$

[mise en évidence de l'intégration]

$$= \int_\Omega j(f - b_2) - \int_\Omega j(\beta_2(+u^+)) \ .$$

Dans ces conditions l'inégalité du départ devient

$$\int_\Omega j \circ \beta_2(+u^+) \leq \int_\Omega j(f - b_2) \ .$$

De la même manière, une multiplication par $\varphi \circ \beta_1(-u^-)$ de l'inégalité

$$Au = f - \beta(o, u) \geq (f - b_1) - \beta_1(u)$$

donne après une intégration dans Ω

$$(Au, \varphi \circ \beta_1(-u^-)) \leq ((f - b_1) - \beta_1(u), \varphi \circ \beta_2(-u^-)) \ .$$

D'abord on a

$$(Au, \varphi \circ \beta_1(-u^-)) =$$

[intégration par parties, $\varphi \circ \beta_1(-u^-) \in H_0^1(\Omega)$, φ lipschitzienne, β_1 dérivable p.p.]

$$= (\varphi' \circ \beta_1(-u^-)\beta_1'(-u^-), \sum_{i,j}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \geq$$

[φ, $\beta_1(-o^-)$ croissantes, A elliptique]

$$\geq 0 \ .$$

Ensuite

$$((f - b_1) - \beta_2(u), \varphi \circ \beta_1(-u^-)) =$$

[regroupement]

$$= (f - b_1, \varphi \circ \beta_1(-u^-)) - (\beta_1(-u^-), \varphi \circ \beta_1(-u^-)) =$$

[β_2 et φ conservent le signe]

$$= (f - b_1, \varphi \circ \beta_1(-u^-)) - (\beta_1(-u^-), \varphi \circ \beta_1(-u^-)) =$$

[factorisation]

$$= ((f - b_1) - \beta_1(-u^-), \varphi \circ \beta_1(-u^-)) \leq$$

[j convexe et $\partial j = \varphi$]

$$\leq (j(f - b_1) - j(\beta_1(-u^-)), 1) =$$

[mise en évidence de l'intégration]

$$= \int_\Omega j(f - b_1) - \int_\Omega j(\beta_1(-u^-)) \ .$$

Dans ces conditions l'inégalité du départ devient

$$\int_\Omega j \circ \beta_1(-u^-) \leq \int_\Omega j(f - b_1) \ .$$

Lorsque $\varphi = \partial j$ n'est pas lipschitzienne on peut approximer ponctuellement j par des fonctions convexes positives $j_\lambda \leq j$ ayant le sous-différentiel lipschitzien. On obtient que

$$\int_\Omega j_\lambda \circ \beta_2(+u^+) \leq \int_\Omega j_\lambda(f - b_2) \quad \text{et} \quad \int_\Omega j_\lambda \circ \beta_1(-u^-) \leq \int_\Omega j_\lambda(f - b_1)$$

et le lemme de Fatou conduit au résultat.

ii) le point i) assure les estimations

$$\int_\Omega |\beta_1(+u^+)|^p \leq \int_\Omega j_2 \circ \beta_2(+u^+) \leq \int_\Omega j_2(f-b_2)$$

$$\int_\Omega |\beta_2(-u^-)|^p \leq \int_\Omega j_1 \circ \beta_1(-u^-) \leq \int_\Omega j_1(f-b_1) \ .$$

L'inégalité de l'hypothèse

$$\beta_2(u)+b_2 \leq \beta(\circ,u) \leq \beta_1(u)+b_1$$

implique

$$b_2 \leq \beta(\circ,+u^+) \leq \beta_1(+u^+)+b_1$$

$$\beta_2(-u^-)+b_2 \leq \beta(\circ,-u^-) \leq b_1$$

donc

$$\begin{aligned}|\beta(\circ,u)|_p &= \left|\beta(\circ,u^+)+\beta(\circ,0)+\beta(\circ,-u^-)\right|_p \leq \\ &\leq \left|\beta(\circ,u^+)\right|_p + |\beta(\circ,0)|_p + \left|\beta(\circ,-u^-)\right|_p \leq \\ &\leq \left|\beta_1(+u^+)\right|_p + \left|\beta_2(-u^-)\right|_p + 2(|b_1|_p+|b_2|_p) + |\beta(\circ,0)|_p \leq \\ &\leq \left|\int_\Omega j(f-b_1)\right|^{\frac{1}{p}} + \left|\int_\Omega j(f-b_2)\right|^{\frac{1}{p}} + 2(|b_1|_p+|b_2|_p) + |\beta(\circ,0)|_p \ .\end{aligned}$$

iii) en appliquant le point i) avec les fonctions convexes j_i on obtient

$$\left|u^+\right|_p \leq \left|\int_\Omega j_2 \circ \beta_2(+u^+)\right|^{\frac{1}{p}} \leq \left|\int_\Omega j(f-b_2)\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\left|u^-\right|_p \leq \left|\int_\Omega j_1 \circ \beta_1(-u^-)\right|^{\frac{1}{p}} \leq \left|\int_\Omega j(f-b_1)\right|^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$|u|_p \leq \left|\int_\Omega j(f-b_1)\right|^{\frac{1}{p}} + \left|\int_\Omega j(f-b_2)\right|^{\frac{1}{p}} \ .$$

△

Remarque 1.4.8

Notons que nos estimations ne dépendent pas de l'opérateur A. Ce fait sera utile lors de l'étude des perturbations singulières de la forme $A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ avec $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On obtient des estimations sur u_ε dans $L^p(\Omega)$. △

1.4.9 Perturbations monotones univoques. Estimations de type $\mathbf{L^1(\Omega)}$

Pour une introduction des fonctions duales et des espaces de Orlicz voir le lemme 1.4.4. et [Adams, pg. 228].

Théorème 1.4.9

Soit $\beta : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On suppose que une des situations suivantes a lieu :

i) il existe un $\theta \in (0,1)$ et une fonction convexe et propre j telle que $\beta(t)t \geq j(t)\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, $j(0) = 0$ et $f \in L^p(\Omega)$ appartient à l'espace de Orlicz associé à la fonction convexe $(\theta j)_*$ c'est-à-dire $j_*(f) \in L^1(\Omega)$;

ii) il existe une fonction convexe et propre j telle que $\lim_{t\to\pm\infty} \partial j(t) = \pm\infty$ et $|\beta| \geq j \geq 0$.

Alors le problème

$$\begin{cases} Au+\beta(u) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique avec l'estimation

$$|u|_{L^1(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de u, A. △

Preuve :

Selon le théorème 1.2.4 ce problème admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

On rappelle les notations $u^{\pm} = \max\{\pm u, 0\}$.

i) Si on multiplie l'équation $Au + \beta(u) = f$ par $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ on obtient après une intégration dans Ω

$$(Au, u^+) + (\beta(u), u^+) = (f, u^+) \ .$$

On va estimer chaque terme de cette égalité.

D'abord on a

$$(Au, u^+) =$$

[intégration par parties, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$]

$$= (\sum\nolimits_{i,j}^n a_{ij} u^+_{x_i} u_{x_j}, 1) = (\sum\nolimits_{i,j}^n a_{ij} u^+_{x_i} u^+_{x_j}, 1) \geq$$

[A elliptique]

$$\geq 0 \ .$$

Ensuite

$$(\beta(u), u^+) =$$

[β conserve le signe]

$$= (\beta(u^+), u^+) \geq$$

[on a par hypothèse $\beta(t)t \geq j(t) \ \forall\, t \in \mathbb{R}$]

$$\geq (j(u^+), 1) \ .$$

Nous avons aussi

$$(f, u^+) \leq$$

[l'inégalité de Young (voir lemme 1.4.4)]

$$\leq (\theta j(u^+), 1) + ((\theta j)_*(f), 1) = \theta (j(u^+), 1) + ((\theta j)_*(f), 1) \ .$$

Dans ces conditions l'égalité du départ

$$(Au, u^+) + (\beta(u), u^+) = (f, u^+)$$

devient l'inégalité

$$(j(u^+), 1) \leq \theta (j(u^+), 1) + ((\theta j)_*(f), 1)$$

d'où avec $\theta \in (0, 1)$

$$(j(u^+), 1) \leq (1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1) \ .$$

L'inégalité de Jensen assure

$$(j(u^+), 1) \geq j\big(|\Omega|^{-1} (u^+, 1)\big)$$

donc

$$j\big(|\Omega|^{-1} (u^+, 1)\big) \leq (1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)$$

d'où

$$(u^+, 1) \leq |\Omega| \max j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big) \ .$$

De la même manière, une multiplication par $-u^-$ de l'équation

$$Au + \beta(u) = f$$

mène à

$$(-u^-, 1) \geq |\Omega| \min j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big)$$

ou sous une autre forme

$$(u^-, 1) \leq -|\Omega| \min j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big) \ .$$

Finalement par sommation

$$|u|_{L^1(\Omega)} = (u^+, 1) + (u^-, 1) \leq$$

$$\leq |\Omega| \max j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big) - |\Omega| \min j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big)$$

et on pose $C = |\Omega| \max j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big) - |\Omega| \min j^{-1}\big((1 - \theta)^{-1} ((\theta j)_*(f), 1)\big)$.

ii) Nous avons d'abord

$$\int_\Omega j(+u^+) + \int_\Omega j(-u^-) = \int_\Omega j(u) \leq \int_\Omega |\beta(u)| = \int_\Omega |f - Au| \leq \int_\Omega |f| + \int_\Omega |Au|$$

d'où

$$\int_\Omega j(+u^+) + \int_\Omega j(-u^-) \leq \int_\Omega |f| + \int_\Omega |Au| \ .$$

Ensuite en appliquant l'inégalité de Jensen on obtient

$$\int_\Omega j(+u^+) \geq |\Omega| j\big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega u^+\big)$$

et

$$\int_\Omega j(-u^-) \geq |\Omega| j\big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega -u^-\big) \ .$$

D'autre part selon le théorème 1.2.4 on a l'estimation

$$|Au|_p \leq 2\,|f|_p$$

d'où

$$|Au|_1 \leq C$$

pour une constante C indépendante de u, A.

Dans la suite on note par C une constante indépendante de u, A.

En s'appuyant sur les inégalités précédentes il vient

$$|\Omega| j\big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega +u^+\big) + |\Omega| j\big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega -u^-\big) \leq C$$

donc avec j positive

$$\int_\Omega u^+ \leq +\max |\Omega| j^{-1}\big(|\Omega|^{-1} C\big)$$

et

$$\int_\Omega u^- \leq -\min |\Omega| j^{-1}\big(|\Omega|^{-1} C\big)$$

d'où par sommation

$$\int_\Omega |u| = \int_\Omega u^+ + \int_\Omega u^- \leq \max |\Omega| j^{-1}\big(|\Omega|^{-1} C\big) - \min |\Omega| j^{-1}\big(|\Omega|^{-1} C\big)$$

ce qu'on voulait montrer. △

1.4.10 Perturbations non monotones discontinues

On dit qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est **continue par morceaux** si elle est continue sur un ouvert dense dans $\mathbb{R}$.

Lorsque la fonction v est définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$ avec $v(x,\circ)$ continue sur un ouvert non vide p.p. $x \in \Omega$ on note par $\mathbf{S_x(v)}$ l'ensemble des points de discontinuité de l'application $v(x,\circ)$ et soit $\mathbf{S(w,v)}$ **la fermeture de l'ensemble** $\{\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} : \mathbf{w(x)} \in \mathbf{S_x(v)}\}$ pour toute fonction $w \in H_0^1(\Omega)$. Si $w(x) \notin S(w,v)$ alors $w(x)$ est un point de continuité pour $v(x,\circ)$. Si $v(x,\circ)$ est continue p.p. $x \in \Omega$ alors $S(w,v)$ est de mesure nulle. △

Théorème 1.4.10

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$\beta(x,\circ)$ est continue sur un ouvert non vide avec $0 \in \beta(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\beta(x,\circ)$ admet une suite régularisante $\beta_\varepsilon(x,\circ)$ telle que :

$\beta_\varepsilon(x,t)$ est une fonction continue en t et mesurable en x avec $0 \in \beta_\varepsilon(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\beta_\varepsilon(x,\circ)$ converge uniformément vers $\beta(x,\circ)$ dans tout compact où

$\beta(x,\circ)$ est continue lorsque ε tend vers 0 pour presque tout $x \in \Omega$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega) (i \in \{1,2\})$,

des fonctions croissantes et dérivables p.p. $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2 \leq \beta_\varepsilon(x,t) \leq \beta_1(t) + b_1 \ .$$

Alors le problème

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f & \text{p.p. } \Omega - S(u,\beta) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)(p > n)$ admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$. △

Preuve :
Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \beta_\varepsilon(\circ, u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Le théorème 1.4.7 assure l'existence d'une solution $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$\beta_2(-C\,|f - b_2|_p) + b_2 \leq \beta_\varepsilon(\circ, u_\varepsilon) \leq \beta_1(+C\,|f - b_1|_p) + b_1$$

où C est une constante indépendante de ε, u, f, β, β_i, b_i .

La réflexivité de l'espace $L^p(\Omega)$ assure

$$\beta_\varepsilon(\circ, u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} w \ .$$

On déduit aussi que Au_ε reste bornée dans $L^p(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0 et via le théorème. 1.3.1 u_ε sera bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$.

La réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ donne

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u_0$$

et via les injections de Sobolev

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{C^1(\overline{\Omega})} u_0 \ .$$

Soit maintenant un point $x_0 \in \Omega - S(u,\beta)$.

De par la construction de $S(u,\beta)$ et la continuité de $\beta(x_0, \circ)$ dans un ouvert il existe un voisinage compact K de x_0 tel que $\beta(x_0, \circ)$ soit continue dans K .

On note aussi que par hypothèse la suite $\beta_\varepsilon(x, \circ)$ tend uniformément vers $\beta(x, \circ)$ dans tout compact où $\beta(x, \circ)$ est continue donc en particulier dans K et d'après le lemme 1.4.5 la convergence uniforme sera aussi continue dans le compact K d'où avec u_ε convergeant ponctuellement vers u_0 on aura

$$\beta_\varepsilon(x_0, u_\varepsilon(x_0)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \beta(x_0, u_0(x_0)) \ .$$

On déduit que

$$\beta_\varepsilon(\circ, u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega - S(u,\beta)} \beta(\circ, u_0) \ .$$

Mais la limite faible dans $L^p(\Omega - S(u,\beta))$ coïncide avec la limite ponctuelle donc $w = f - Au_0 = \beta(\circ, u_0)$ dans $\Omega - S(u,\beta)$ c'est-à-dire u_0 sera une solution du problème étudié. △

Pour une justification des hypothèses du théorème précédent on considère la situation suivante :

Remarque 1.4.10
Soit une fonction continue par morceaux

$$\beta(t) = \begin{cases} +1 & si \ \ t > 0 \\ a \in \mathbb{R} & si \ \ t = 0 \\ -1 & si \ \ t < 0 \ . \end{cases}$$

Alors le problème

$$\begin{cases} (Au + \beta(u) - f)u = 0 & p.p. \ \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)(p > n)$ admet au moins une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$. △

Preuve :
On observe que la suite régularisante

$$\beta_\varepsilon(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } \ t > +\varepsilon \\ \sin\frac{t}{\varepsilon}\frac{\pi}{2} & \text{si } \ |t| \le \varepsilon \\ -1 & \text{si } \ t < -\varepsilon \end{cases}$$

rempli les conditions du th. 1.4.10 avec $\beta_i = 0$, $b_2 = -1$, $b_1 = +1$. Il est évident que $\beta_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ tend uniformément vers β dans tout compact où β est continue lorsque ε tend vers 0. On a aussi $S(u, \beta) = [u = 0]$ car 0 est le seul point de discontinuité de β.

Dans ces conditions on peut appliquer le th. 1.4.10 pour avoir l'existence de la solution du problème équivalent au problème de l'énoncé

$$\begin{cases} Au + \beta(\circ, u) = f & \text{p.p. } \Omega - [u = 0] \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \, . \end{cases}$$

△

Remarque 1.4.11
La classe des fonctions $\beta(x, \circ)$ continues par morceaux est susceptible de satisfaire, à une construction de suite régularisante près, les conditions du th. 1.4.10. △

Commentaires 1.4

1.4 Existence et régularité des solutions des problèmes non-linéaires.

1.4.1 Perturbations monotones univoques

L'existence de la solution est due à un résultat de [Brézis[8]]. Si la fonction monotone dépendante du domaine β sépare, à une addition de fonctions de $L^p(\Omega)$ près, deux fonctions monotones indépendantes du domaine $\beta_1 \ge \beta_2$, alors les solutions u, u_i des problèmes correspondantes aux fonctions β, β_i vérifient $u_1 \le u \le u_2$ en utilisant le principe de maximum. Les solutions u_i sont dans $W^{2,p}(\Omega)$ [Brézis[1]] et bornées à l'aide des injections de Sobolev. On déduit que la perturbation monotone $\beta(\circ, u)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ d'où la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ de u en tant que solution d'un problème de Dirichlet. Notre technique est un mixage d'une approche variationnelle de [Brézis[8]], un bon contrôle de la régularité lorsque β est indépendante du domaine et le principe du maximum.

On observe une certaine analogie avec la méthode des sous- et sur-solutions au sens de [Amann] : à l'aide du principe du maximum u_1 sera une sous-solution et u_2 une sur-solution du problème étudié. Par rapport à cette dernière méthode, notre approche permet de fournir une classe entière de problèmes admettant des sous- et sur-solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$ et enfin de donner un analogue de ce résultat pour les perturbations monotones multivoques et dépendantes du domaine. △

1.4.2 Perturbations monotones multivoques

On considère les régularisées Yosida $\beta_\lambda(x, \circ)$, $\beta_{i\lambda}$ des graphes maximaux monotones $\beta(x, \circ)$ et β_i avec les solutions u_λ, $u_{i\lambda}$ des problèmes perturbés correspondants. En notant que la régularisée Yosida laisse invariant l'ordre quand le paramètre λ est fixé, on aura $\beta_{2\lambda} \le \beta_\lambda(x, \circ) \le \beta_{1\lambda}$ lorsque $\beta_2 \le \beta(x, \circ) \le \beta_1$. Ceci permet d'appliquer le théorème 1.4.1 et ensuite de passer à la limite quand λ tend vers 0 dans l'esprit de [Brézis[1]] car on dispose de bonnes estimations sur les perturbations monotones impliquées. On donne une estimation ponctuelle pour $f - Au$ avec un bon contrôle des constantes par rapport aux données du problème. Si de plus 0 sépare les graphes maximaux monotones β_i, on donne une estimation ponctuelle pour la perturbation monotone $\beta(\circ, u)$ avec des constantes indépendantes de β. △

1.4.3 Perturbations monotones univoques. Suite

On introduit une notion de proportionnalité pour les graphes maximaux monotones qui reste invariante sous l'action de la régularisée Yosida.

Si la fonction monotone univoque β dépendante du domaine sépare, à une addition de fonctions g_i, $h_i \in L^p(\Omega)$ près, deux fonctions monotones proportionnelles (au sens ci-dessus) et indépendantes du domaine β_i, alors on obtient une estimation de la perturbation monotone $\beta(\circ, u)$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ avec une constante explicite indépendante de β, β_i. On utilise des multiplications bien choisies (spécifiques aux méthodes de monotonie utilisées dans ce travail) et à l'aide des proportions sur les fonctions β, β_i on obtient des estimations dans $L^p(\Omega)$ pour toutes les perturbations monotones impliquées. $\triangle$

1.4.4 Perturbations monotones multivoques. Suite

Si la fonction monotone multivoque β dépendante du domaine sépare, à une addition de fonctions g_i, $h_i \in L^p(\Omega)$ près, deux graphes maximaux monotones proportionnels et indépendants du domaine β_i , alors on obtient une estimation de $f - Au$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ avec une constante explicite indépendante de β, β_i . Comme l'ordre des graphes maximaux monotones et la proportionnalité utilisée restent invariants sous l'action de la régularisée Yosida, le résultat s'ensuit via un passage à la limite comme au théorème 1.4.2.

1.4.5 Perturbations monotones multivoques. Une autre approche

On aborde le problème des sections précédentes par une méthode classique combinée avec le principe du maximum. L'idée est de montrer qu'une certaine inégalité variationnelle du type $F(v) \geq F(u)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ avec F une fonctionnelle (non nécessairement convexe) semicontinue inférieurement admet une solution $u \in H_0^1(\Omega)$, de prouver que cette solution vérifie aussi notre équation et enfin améliorer la régularité via le principe de maximum. L'existence de la solution de l'inégalité variationnelle est due à des résultats classiques. Le passage à la limite est plus délicat car la fonctionnelle F n'est pas forcément dérivable au sens Gateaux. Le travail avec des fonctions multivoques nécessite certaines précautions sur la différentiabilité des fonctions convexes impliquées ce qui nous oblige d'imposer aux fonctions définies sur le domaine Ω d'avoir l'ensemble des valeurs dans un compact fixe. Une condition suffisante pour que la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ soit bornée c'est la continuité réalisée lorsque $n = 1$ via les injections de Sobolev. La régularité de la solution est une conséquence du fait que la domination du graphe maximal monotone β dépendant du domaine par deux graphes maximaux monotones indépendants du domaine implique la domination de la solution u par deux fonctions continues et bornées d'où par "feedback" $\beta(\circ, u)$ sera bornée dans $L^p(\Omega)$. $\triangle$

1.4.6 Perturbations non monotones univoques.

La même technique qu'au théorème précédent en notant que la fonctionnelle F n'était pas exigée convexe et un regard attentif montre que la continuité des fonctions β_i est suffisante pour rendre la perturbation monotone $\beta(\circ, u)$ bornée dans $L^p(\Omega)$. $\triangle$

1.4.7 Perturbations univoques non monotones. Estimation a priori

On travaille avec β non monotone et dominée par deux fonctions croissantes β_i . Dans ces conditions on se place dans la théorie des sous- et sur-solutions via [Kazdan] et on obtient l'existence et la régularité $W^{2,p}(\Omega)$. Nous donnons une estimation avec un bon contrôle de la dépendance des constantes par rapport aux perturbations impliquées. Ce fait va permettre le traitement du cas où $\beta(x, \circ)$ est discontinue (voir théorème 1.4.9). $\triangle$

1.4.8 Perturbations non monotones univoques. Suite

On multiplie l'équation étudiée par des fonctions de la forme $\partial j(u)$ où j est une fonction convexe positive. On obtient des estimations du type $\int_\Omega j \circ \beta_2(+u^+) \leq \int_\Omega j(f - b_2)$ et $\int_\Omega j \circ \beta_2(-u^-) \leq \int_\Omega j(f - b_1)$ lorsque $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_1$ avec β_i croissantes et indépendantes du domaine. Notons que $\beta(x, \circ)$ n'est pas supposée croissante. Il y a ici une certaine filiation avec le travail de [Brézis[9]] et les espaces de Orlicz [Adams]. $\triangle$

1.4.9 Perturbations monotones univoques. Estimations de type $\mathbf{L^1(\Omega)}$

On suppose β univoque, continue, croissante telle que $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et soit $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution du problème $Au + \beta(u) = f \in L^p(\Omega)$. Si une des situations suivantes est réalisée : i) il existe un $\theta \in (0, 1)$ tel que f est situé dans l'espace de Orlicz associé à la fonction convexe $(\theta j)_*$ qui est la duale de la fonction convexe θj telle que $\beta = \partial j$ et $j(0) = 0$; ii) il existe une fonction convexe et propre j telle que $\lim_{t \to \pm\infty} \partial j(t) = \pm\infty$ et $|\beta| \geq j \geq 0$, alors à l'aide des inégalités de Young et de Jensen on obtient une estimation de la forme $|u|_{L^1(\Omega)} \leq C$ où C est une constante indépendante de u, A . L'intêret de ce résultat vient du fait qu'on met en évidence les espaces de Orlicz comme adéquats pour obtenir des estimations sur u dans $L^1(\Omega)$ et la constante C est indépendante de u, A ce qui sera efficace lors de l'étude des perturbations singulières $\varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)$ avec $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car en ce cas la constante C ci-dessus est indépendante de ε (voir aussi le théorème 2.3.5). $\triangle$

1.4.10 Perturbations non monotones discontinues

Lorsque $\beta(x, \circ)$ non monotone est continue dans un ouvert mais discontinue sur $\mathbb{R}$ p.p. $x \in \Omega$, on suppose l'existence d'une suite régularisante $\beta_\varepsilon(x, \circ)$ approchant uniformément $\beta(x, \circ)$ dans tout compact où $\beta(x, \circ)$ est continue. Si la suite régularisante rempli les conditions du théorème 1.4.7 en étant dominée par des fonctions monotones indépendantes de ε, alors on aura une estimation dans $L^p(\Omega)$ avec une constante indépendante de ε pour $\beta_\varepsilon(x, u_\varepsilon)$ où u_ε est la solution correspondante à la perturbation $\beta_\varepsilon(x, \circ)$. Dans ces conditions on peut passer à la limite en utilisant le fait que la convergence uniforme des $\beta_\varepsilon(x, \circ)$ équivaut à la convergence continue dans un compact où la fonction $\beta(x, \circ)$ est continue et que la limite faible L^p coïncide avec la limite ponctuelle. On obtient que la suite u_ε converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible vers la solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ du problème $Au + \beta(\circ, u) = f$ p.p. dans $\Omega - S(u, \beta)$ où $S(u, \beta)$ est la fermeture de l'ensemble $\{x \in \Omega : u(x) \in S_x(\beta)\}$ avec $S_x(\beta)$ l'ensemble des discontinuités de la fonction $\beta(x, \circ)$ qui est continue dans un ouvert. La remarque 1.4.9 montre que l'hypothèse du théorème 1.4.9 est consistante car on donne une situation où l'on peut construire une suite régularisante. $\triangle$

2 Perturbations singulières

Perturbations monotones non bornées

2.1 Identification formelle

Préliminaires 2.1

Soit u_ε la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

On suppose que β admet le développement asymptotique

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$$

et nous notons $\beta^{(k)}$ la dérivée formelle d'ordre k de β .

Pour une suite ordonnée $(i_m)_0^\infty$ de nombres naturels tels que $\sum_{m=0}^{\infty} i_m = k \in N$ on note $C_k^{i_m} = k![\prod_{m=0}^{\infty} i_m!]^{-1}$ et l'on a toujours $\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i\right)^k = \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} x_m^{i_m}$ lorsque $x_k \in \mathbb{R}$.

$\triangle$

Problème 2.1

On cherche u_ε sous la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varepsilon^k \ .$$

$\triangle$

2.1.1 Identification formelle. Un cas particulier

Théorème 2.1.1

L'identification formelle de ε en portant

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_k \varepsilon^k$$

dans

$$\mathbf{A}\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon + \beta(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbf{f}$$

conduit aux formules suivantes :

$$\beta(\mathbf{u}_0) - \mathbf{f} = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1\beta^{(1)}(\mathbf{u}_0) = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\beta^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \frac{\mathbf{u}_1^2}{2!}\beta^{(2)}(\mathbf{u}_0) = 0$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3\beta^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \frac{\mathbf{u}_1^3}{3!}\beta^{(3)}(\mathbf{u}_0) + \frac{\mathbf{u}_1}{1!}\frac{\mathbf{u}_2}{1!}\beta^{(2)}(\mathbf{u}_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{u}_j\beta^{(1)}(\mathbf{u}_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}_m^{i_m} = 0 \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Si $\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$ et $u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon^i$ alors en injectant dans $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ on obtient

$$\sum_{k=1} A u_{k-1} \varepsilon^k + \sum_{k=0} \beta_k \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon^i\right)^k = f \ .$$

Des dérivations formelles successives avec l'initialisation $\varepsilon = 0$ suivies d'une récurrence conduisent aux formules de l'énoncé.

Une autre approche consiste à utiliser le calcul formel avec des puissances des séries.

$$\beta(u_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_\varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \Big(\sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^{m i_m} \Big) =$$

[regroupement des puissances identiques de ε]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum_{j=0}^{\infty} \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^j =$$

[commutativité de la sommation]

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^j$$

et

$$\varepsilon A u_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j+1} A u_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j A u_{j-1} .$$

En remplaçant dans l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ on obtient

$$\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} A u_{j-1}(1-\delta_{0j})\varepsilon^j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^j = \delta_{0j} f$$

où δ est le symbole de Kronnecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si non.

Après les identifications des coefficients des puissances de ε

$$A u_{j-1}(1-\delta_{0j}) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^j = \delta_{0j} f$$

pour tout $j \geq 0$.

Si $j \geq 1$ alors

$$0 = A u_{j-1}(1-\delta_{0j}) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

[partition des indices]

$$= A u_{j-1}(1-\delta_{0j}) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 1,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

[forme explicite de la sommation]

$$= A u_{j-1} + u_j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k-1)!1!} \beta_k u_0^k + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m}$$

d'où

$$A u_{j-1} + u_j \beta^{(1)}(u_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} = 0 .$$

Selon les valeurs de j on a successivement :

$\boxed{j = 0}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_0^k = \beta(u_0) = f .$$

$\boxed{j = 1}$

$$A u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = 1,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

$$= A u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{i_1 = 1,\ i_0 = k-1, i_l = 0, l \notin \{0,1\}} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

$$= Au_0 + u_1 \sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k u_0^{k-1} = Au_0 + u_1\beta^{(1)}(u_0) = 0 \ .$$

$\boxed{j=2}$

$$Au_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = 2,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum^{(i_m)}_{\substack{i_0=k-2,\ i_1=2,\ i_l=0, l\notin\{0,1\} \\ i_0=k-1,\ i_2=1,\ i_l=0, l\notin\{0,2\}}} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} =$$

$$= Au_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k \frac{k!}{2!(k-2)!} u_1^2 u_0^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{k!}{1!(k-1)!} u_2 u_0^{k-1} =$$

$$= Au_1 + u_2\beta^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}\beta^{(2)}(u_0) = 0$$

ce qui complète le résultat. △

Un cas particulier

Pour des raisons intuitives on va considérer la situation où $\beta = 1_{\mathbb{R}}$, $u_k = (-1)^k A^k f \in L^1(\Omega)$ avec $u_0 = A^0 f = f$.

Remarque 2.1.1

Soit $u_k \in L^1(\Omega)$, $k \geq 0$ *et les coefficients de l'opérateur* A *tels que* $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$. *Si* u_ε *est la solution du problème*

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \in L^p(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors $\forall\ k \geq 0$

$$\frac{1}{\varepsilon^k}\{u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{k-1} u_i \varepsilon^i\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{D'(\Omega)\ faible} u_k \ .$$

△

Preuve :

On observe que

$$u_\varepsilon^k = \frac{1}{\varepsilon^k}\{u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{k-1} u_i\varepsilon^i\} =$$

[on exprime u_ε à l'aide de l'équation pénalisée et les u_i en fonction de f]

$$= \frac{1}{\varepsilon^k}\{f - \varepsilon A u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i f \varepsilon^i\} =$$

[réductions car $A^0 f = f$]

$$= -A(\frac{1}{\varepsilon^{k-1}}\{u_\varepsilon - \sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i A^i f\varepsilon^i\}) =$$

$$= -Au_\varepsilon^{k-1}$$

et en réitérant

$$u_\varepsilon^k = (-1)^k A^k u_\varepsilon \ .$$

Selon le théorème 1.2.4 on a l'estimation $|u_\varepsilon|_p \leq |f|_p$ donc u_ε converge, à une sous-suite près, vers g dans $L^p(\Omega)$ faible et en passant à la limite au sens des distributions dans l'équation pénalisée on aura $f = g$.

Comme les coefficients de l'opérateur A sont dans $C^\infty(\Omega)$ la convergence de u_ε vers f au sens des distributions implique la convergence de $(-1)^k A^k u_\varepsilon$ vers $(-1)^k A^k u_0$ dans le même sens, ce qu'on voulait montrer. △

Commentaires 2.1

2.1 Identification formelle

Dans le domaine des perturbations singulières l'identification formelle reste toujours un bon support intuitif. L'amélioration du calcul algébrique permet le traitement des perturbations monotones avec β une fonction très générale.

On verra dans la suite que lorsque β est non bornée le comportement asymptotique analytique suit le comportement asymptotique algébrique de u_ε à l'intérieur de Ω.

2.2 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$

Préliminaires 2.2

On suppose que $\beta : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Selon les situations β sera supposée coercive :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq \alpha_\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1,\ t_2 \in \mathbb{R},\ a_\beta > 0 \text{ une constante.}$$

Si β est lipschitzienne :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \leq \alpha^\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1,\ t_2 \in \mathbb{R},\ a^\beta > 0 \text{ une constante}$$

alors β laisse invariants les espaces $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)(1 \leq p \leq \infty)$ munis de la topologie forte.

Enfin, on remarque la dualité des concepts coercive et lipschitzien par rapport à l'inversion des fonctions :

β est lipschitzienne :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \leq \alpha^\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1,\ t_2 \in \mathbb{R},\ a^\beta > 0 \text{ une constante}$$

si et seulement si β^{-1} est coercive :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq (\alpha^\beta)^{-1} |t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}\ .$$

On introduit aussi les versions locales des concepts ci-dessus, versions qui jouent un rôle important lorsque β est bornée.

La fonction β est localement coercive si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $\alpha_\beta^K > 0$ telle que $\forall\, t_1,\ t_2 \in K$

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq \alpha_\beta^K |t_1 - t_2|\ .$$

De même la fonction β est localement lipschitzienne si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $\alpha_K^\beta > 0$ telle que $\forall\, t_1,\ t_2 \in K$

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \leq \alpha_K^\beta |t_1 - t_2|\ .$$

On vérifie qu'une fonction localement coercive laisse invariante la séparation des points dans $\mathbb{R}$ et qu'une fonction localement lipschitzienne laisse invariants l'espace $L^\infty(\Omega)$ ainsi que la convergence uniforme dans $L^\infty(\Omega)$.

L'opérateur A sera de type elliptique avec, sauf spécification contraire, les coefficients $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et le domaine Ω tel que les injections de Sobolev s'appliquent. $\triangle$

Problème 2.2

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases} \qquad (P_\varepsilon)$$

On montre que ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ et on analyse le comportement respectivement de $\varepsilon u_\varepsilon$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ et $\beta(u_\varepsilon)$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0. $\triangle$

2.2.1 Convergence de $\varepsilon u_\varepsilon$ sans contrainte sur β

Théorème 2.2.1

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Le problème pénalisé P_ε admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ et $\varepsilon u_\varepsilon$ converge vers 0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0. $\triangle$

Preuve :
L'existence, l'unicité et la régularité $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ est une conséquence du théorème 1.4.1.
On a les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4)
$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p \ , \qquad |A\varepsilon u_\varepsilon|_p \leq 2\,|f|_p$$
d'où la seconde estimation assure via le théorème 1.3.1
$$|\varepsilon u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2C_A\,|f|_p$$
et avec $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif on aura, à une sous-suite près,
$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} v \ .$$
Cette convergence implique via les injections de Sobolev
$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} v$$
et encore, à une sous-suite près,
$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\Omega} v$$
Nous montrons que $v = 0$.
Si on suppose que $|[v \neq 0]| > 0$ alors avec β continue $|\beta(u_\varepsilon)|^p$ converge ponctuellement vers $+\infty$ dans $[v \neq 0]$. D'autre part on a aussi
$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$
et via le lemme de Fatou
$$+\infty = \int_{[v\neq 0]} \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega |f|^p dx < +\infty$$
absurde.
On aura
$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} 0$$
à cause de l'unicité du point d'adhérence. $\triangle$

2.2.2 Comportement de la perturbation monotone

Théorème 2.2.2
On suppose que l'opérateur elliptique A a des coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.
Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε. Alors la perturbation monotone $\beta(u_\varepsilon)$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$ fort et $\varepsilon u_\varepsilon$ converge vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ faible quand ε tend vers 0. $\triangle$

Preuve :
En multipliant l'équation (au sens faible) $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ par $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, on obtient
$$(\varepsilon \sum_{i,j}^n a_{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j}, 1) + (\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon)$$
d'où avec A elliptique, β croissante telle que $\beta(0) = 0$ et les inégalités de Hölder et de Poincaré on a
$$\alpha_A \varepsilon\, |u_\varepsilon|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |f|_2\, |u_\varepsilon|_2 \leq C_P\, |f|_2\, |u_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)}$$
c'est-à-dire
$$|\varepsilon u_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$
avec C une constante indépendante de ε.
On déduit via la réflexivité de l'espace $H_0^1(\Omega)$ que $\varepsilon u_\varepsilon$ converge, à une sous-suite près, vers $u \in H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et à l'aide des injections de Sobolev dans $L^2(\Omega)$ fort et ponctuellement lorsque ε tend vers 0. Nous montrons que $u = 0$.
Si on suppose que $|[u \neq 0]| > 0$ alors avec β continue $|\beta(u_\varepsilon)|^p$ converge ponctuellement vers $+\infty$ dans $[u \neq 0]$. D'autre part, les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4) assurent
$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$

et via le lemme de Fatou

$$+\infty = \int_{[u\neq 0]} \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega |f|^p dx < +\infty$$

absurde.

On a obtenu

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{H_0^1(\Omega)\text{ faible}} 0 \ .$$

Maintenant on observe que l'estimation $|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$ entraîne aussi

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\text{ faible}} g$$

où g est une fonction à localiser.

On voit que pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$(\sum\nolimits_{i,j}^n a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon)_{x_i}\varphi_{\varepsilon x_j}, 1) = (f-\beta(u_\varepsilon), \varphi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

lorsque $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et $\varepsilon u_\varepsilon$ converge vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$ faible, donc $\beta(u_\varepsilon)$ converge vers f au sens des distributions et l'unicité du point d'adhérence faible implique $f = g$.

La semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_p$ dans la topologie faible, assure

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_p \geq |f|_p \ .$$

D'autre part, l'estimation $|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$ permet d'avoir

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p \ .$$

En réunissant

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\text{ faible}} f \quad \text{et} \quad |\beta(u_\varepsilon)|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |f|_p$$

dans l'espace uniformément convexe et réflexif $L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ donc

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} f \ .$$

△

2.2.3 Amélioration de la convergence de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$

Théorème 2.2.3

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Si u_ε est la solution du problème P_ε alors $\varepsilon u_\varepsilon$ converge vers 0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers 0. △

Preuve :

A l'aide des théorèmes 1.3.1 et 2.2.2 on a

$$|\varepsilon u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A\,|A\varepsilon u_\varepsilon|_p = C_A\,|\beta(u_\varepsilon) - f|_p \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

avec C_A indépendante de ε, d'où le résultat. △

Commentaires 2.2

2.2.1 Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$ sans contrainte sur β

On utilise une méthode de compacité au sens de [Lions[2]] utilisant des estimations a priori et la réflexivité des espaces impliqués. △

2.2.2 Comportement de la perturbation monotone

On améliore la convergence faible de $\beta(u_\varepsilon)$ en obtenant la convergence en norme $L^p(\Omega)$. C'est un procédé classique dans le calcul variationnel basé sur la semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_p$ dans la topologie faible $L^p(\Omega)$.

Il y aura un résultat analogue si β est bornée (voir le théorème 2.5.1). △

2.2.3 Amélioration de la convergence de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$

On obtient la convergence forte de $\varepsilon u_\varepsilon$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ via la convergence forte de la perturbation monotone $\beta(u_\varepsilon)$ et le théorème 1.3.1. On verra que la convergence forte dans $W^{2,p}(\Omega)$ est préservée aussi lorsque la fonction β est bornée (voir la remarque 2.9.1). △

2.3 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ selon la régularité de $\mathbf{u}_0$

Préliminaires 2.3

Les mêmes conditions qu'aux préliminaires 2.2.

On a besoin aussi des lemmes suivants :

Lemme 2.3.1(Stabilité de la perturbation monotone)

Soit $\beta : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

$\beta(x, \circ)$ *croissante p.p.* $x \in \Omega$

$\beta(x, \circ)$ *uniformément lipschitzienne* :

$|\beta(x,t_1) - \beta(x,t_2)| \leq \alpha^\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall\ x \in \Omega,\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R},\ \alpha^\beta > 0$ *constante* .

Si les $u_i \in H^1(\Omega),\ i \in \{1,2\}$, *sont solutions des problèmes*

$$\begin{cases} Au_i + \beta(\circ, u_i) = f_i \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$|\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2)|_p \leq (\alpha^\beta C_p^A)^{\frac{1}{p'}}\ |f_1 - f_2|_p$$

où $p' + p = p'p$. $\triangle$

Preuve :

Par soustraction

$$\begin{cases} A(u_1 - u_2) + \beta(\circ, u_1) - \beta(\circ, u_2) = f_1 - f_2 \in L^p(\Omega) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ . \end{cases}$$

En multipliant par $\varphi(u_1 - u_2) = (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|^{p-2} \in H_0^1(\Omega)$ on obtient

$$(A(u_1 - u_2), \varphi(u_1 - u_2)) + (\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2), \varphi(u_1 - u_2)) = (f_1 - f_2, \varphi(u_1 - u_2))$$

où

$$(A(u_1 - u_2), \varphi(u_1 - u_2)) \geq \underset{\text{th 1.2.2}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \geq \boxed{(C_p^A)^{-1}|u_1 - u_2|_p^p}$$

$$(\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2), \varphi(u_1 - u_2)) \underset{\beta(x,\circ)\ \text{croissante}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} (|\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2)|, |\varphi(u_1 - u_2)|) \geq$$

$$\geq \underset{\beta(x,\circ)\ \text{lipschitzienne de constante}\ \alpha^\beta}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \geq \boxed{(\alpha^\beta)^{1-p}|\beta(\circ,u_1)) - \beta(\circ,u_2)|_p^p}$$

$$(f_1 - f_2, \varphi(u_1 - u_2)) \leq \overset{\varphi(t)=t|t|^{p-2}}{\underset{\text{Hölder}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \leq \boxed{|f_1 - f_2|_p |u_1 - u_2|_p^{p-1}} \ .$$

Dans ces conditions, l'égalité

$$(A(u_1 - u_2), \varphi(u_1 - u_2)) + (\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2), \varphi(u_1 - u_2)) = (f_1 - f_2, \varphi(u_1 - u_2))$$

devient l'inégalité :

$$(C_p^A)^{-1}|u_1 - u_2|_p^p + |\alpha^\beta|^{1-p}|\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2)|_p^p \leq |f_1 - f_2|_p |u_1 - u_2|_p^{p-1}$$

d'où en combinant

$$|u_1 - u_2|_p \leq C_p^A\,|f_1 - f_2|_p$$

$$|\beta(\circ,u_1) - \beta(\circ,u_2)|_p \leq (\alpha^\beta C_p^A)^{\frac{1}{p'}} |f_1 - f_2|_p^{\frac{1}{p}} |f_1 - f_2|_p^{\frac{1}{p'}} = (\alpha^\beta C_p^A)^{\frac{1}{p'}}\ |f_1 - f_2|_p \ .$$

$\triangle$

On sait que si une suite de fonctions mesurables est convergente p.p. vers une fonction de $L^p(\Omega)$ et dominée par une autre fonction de $L^p(\Omega)$ alors la suite converge dans $L^p(\Omega)$ fort.

Si on remplace la domination ponctuelle par la domination en norme $L^p(\Omega)$, alors la convergence forte dans $L^p(\Omega)$ peut être compromise (voir par exemple [Evans, pg. 9-10] en notant que si la suite est bornée dans $L^p(\Omega)$ alors, à une sous-suite près, elle converge dans $L^p(\Omega)$ faible).

Le lemme suivant montre que la convergence forte subsiste dans les espaces $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < p$.

Lemme 2.3.2

Soit $p > 1$.

Si u_ε est une suite de fonctions mesurables bornée dans $L^p(\Omega)$ et convergeant p.p. vers $u \in L^p(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0, alors u_ε converge vers u dans $L^q(\Omega)$ fort pour tout $1 \leq q < p$. △

Preuve :

Selon le théorème d'Egoroff, pour tout δ il existe un ensemble mesurable et fermé Λ tel que $|\Omega - \Lambda| < \delta$ et u_ε converge uniformément vers u dans Λ.

Pour tout $q < p$ on peut écrire (on omet le symbole dx sous l'intégrale)

$$|u_\varepsilon - u|_q^q = |u_\varepsilon - u|_{L^q(\Omega-\Lambda)}^q + \int_\Lambda |u_\varepsilon - u|^q \leq$$

$$\leq |\Omega - \Lambda|^{1-\frac{q}{p}} |u_\varepsilon - u|_{L^p(\Omega-\Lambda)}^{\frac{q}{p}} + \int_\Lambda |u_\varepsilon - u|^q \leq$$

$$\leq |\delta|^{1-\frac{q}{p}} C^{\frac{q}{p}} + \int_\Lambda |u_\varepsilon - u|^q$$

en notant que l'application $p \longmapsto |\circ|_{L^p(\Omega-\Lambda)} |\Omega - \Lambda|^{-\frac{1}{p}}$ est croissante avec l'inégalité de Hölder et la suite $u_\varepsilon - u$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ par une constante C indépendante de ε et δ.

En faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon - u|_q^q \leq |\delta|^{1-\frac{q}{p}} C^{\frac{q}{p}}$$

car la suite $|u_\varepsilon - u|^q$ converge uniformément vers 0 dans Λ.

Si on fait tendre δ vers 0 on déduit que la suite u_ε converge vers u dans $L^q(\Omega)$ fort ce qu'on voulait montrer. △

Problème 2.3

On étudie le comportement de u_ε lorsque ε tend vers 0 avec respectivement $u_0 = \beta^{-1}(f) \in H_0^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ et $u_0 \in L^\infty(\partial\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. △

2.3.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Théorème 2.3.1

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit $u_0 = \beta^{-1}(f) \in H_0^1(\Omega)$.

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors u_ε converge vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers 0. △

Preuve :

Une multiplication par $u_\varepsilon - u_0 \in H_0^1(\Omega)$ de l'égalité (au sens faible) $\varepsilon A(u_\varepsilon - u_0) + \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0) = -\varepsilon A u_0$ conduit à l'identité

$$\varepsilon\Big(\sum_{i,j} a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)_{x_i}(u_\varepsilon - u_0)_{x_j}, 1\Big) + (\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0), u_\varepsilon - u_0) =$$

$$= -\varepsilon\Big(\sum_{i,j} a_{ij} u_{0x_j}(u_\varepsilon - u_0)_{x_i}, 1\Big)$$

d'où (β croissante , A elliptique)

$$|u_\varepsilon - u_0|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C\, |u_\varepsilon - u_0|_{H_0^1(\Omega)}$$

avec C une constante indépendante de ε.

On déduit que

$$|u_\varepsilon - u_0|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$$

et via la réflexivité de l'espace $H_0^1(\Omega)$ on aura, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{H_0^1(\Omega) \text{ faible}} u$$

d'où en utilisant les injections de Sobolev

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(\Omega) \text{ fort}} u \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} u \ .$$

D'autre part le théorème 2.2.2 assure

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(\Omega) \text{ fort}} \beta(u_0) = f$$

la convergence étant aussi ponctuelle à une sous-suite près, donc avec β^{-1} continue on aura

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} u_0$$

c'est-à-dire $u = u_0$.

Un retour à l'identité

$$\varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}(u_\varepsilon - u_0)_{x_i}(u_\varepsilon - u_0)_{x_j}, 1) + (\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0), u_\varepsilon - u_0) =$$
$$= -\varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}u_{0x_j}(u_\varepsilon - u_0)_{x_i}, 1)$$

permet d'améliorer la convergence de u_ε vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$ faible en convergence forte.
$\triangle$

2.3.2 Comportement de $\mathbf{u_\varepsilon}$ avec $\mathbf{u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)}$ ou $\mathbf{u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)}$

Théorème 2.3.2

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec $p > n$.

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors on a l'estimation

$$|u_\varepsilon - u_0|_p \le C$$

où C est une constante indépendante de ε.

Si β est lipschitzienne on a aussi

$$|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0)|_p \le C\varepsilon^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \left|\varepsilon^{\frac{1}{p'}} u_\varepsilon\right|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C$$

pour diverses constantes C indépendantes de ε et $p' + p = p'p$.

Si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ et β n'est pas forcément lipschitzienne alors u_ε converge vers u_0 dans $L^p(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers 0. $\triangle$

Preuve :

A l'aide des injections de Sobolev on a $u_\varepsilon,\ u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Le théorème 1.2.2 appliqué au couple de problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon A u_0 + \beta(u_0) = f + \varepsilon A u_0 \in L^p(\Omega) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

donne

$$|u_\varepsilon - u_0|_p \le C_p^{\varepsilon A} |f - f - \varepsilon A u_0|_p \overset{C_p^{\varepsilon A} = \varepsilon^{-1} C_p^A}{\underset{C_p^A = Cpp'\alpha_A^{-1}}{=\!=\!=\!=}} C_p^A \varepsilon^{-1} |\varepsilon A u_0|_p = C_p^A |A u_0|_p \ .$$

Si β est lipschitzienne, alors à l'aide du lemme 2.3.1 on a

$$|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0)|_p \le$$

[on rappelle que $\beta(u_0) = f$]

$$\le (C_p^{\varepsilon A}\alpha^\beta)^{\frac{1}{p'}} |f - (f - \varepsilon A u_0)|_p =$$

[on observe que $C_p^{\varepsilon A} = \varepsilon^{-1} C_p^A$]

$$= \varepsilon^{-\frac{1}{p'}} \varepsilon (C_p^A \alpha^\beta)^{\frac{1}{p'}} |A u_0|_p =$$

[avec $p + p' = p'p$]

$$= \varepsilon^{\frac{1}{p}} (C_p^A \alpha^\beta)^{\frac{1}{p'}} |A u_0|_p =$$

[en posant $C_0 = (C_p^A \alpha^\beta)^{\frac{1}{p'}} \, |Au_0|_p$]

$$= \varepsilon^{\frac{1}{p}} C_0 \ .$$

Il reste à observer que

$$|\varepsilon A u_\varepsilon|_p = |f - \beta(u_\varepsilon)|_p = |\beta(u_0) - \beta(u_\varepsilon)|_p \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}} C_0$$

c'est-à-dire

$$\left| A \varepsilon^{\frac{1}{p'}} u_\varepsilon \right|_p \leq C_0$$

et le théorème 1.3.1 permet d'avoir

$$\left| \varepsilon^{\frac{1}{p'}} u_\varepsilon \right|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A C_0 \ .$$

Dans la suite β n'est pas supposée lipschitzienne.

Si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ soit u la solution du problème

$$\begin{cases} Au = |Au_0| \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \ . \end{cases}$$

Le principe du maximum assure $u \geq 0$ p.p. Ω .

Si on note $u_\pm = u_0 \pm u \pm |u_0|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ alors on a les comparaisons

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \begin{cases} \geq \varepsilon A u_- + \beta(u_-) \\ \leq \varepsilon A u_+ + \beta(u_+) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \begin{cases} \geq u_- \\ \leq u_+ \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

car p.p. Ω

$$\varepsilon A u_+ + \beta(u_+) = \varepsilon(Au_0 + |Au_0|) + \beta(u_0 + u + |u_0|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \geq \overset{u \geq 0}{=\!=\!=\!=} \geq \beta(u_0) = f$$

$$\varepsilon A u_- + \beta(u_-) = \varepsilon(Au_0 - |Au_0|) + \beta(u_0 - u - |u_0|_{L^\infty(\partial\Omega)}) \leq \overset{u \geq 0}{=\!=\!=\!=} \leq \beta(u_0) = f$$

et sur $\partial\Omega$

$$u_+ = u_0 + u + |u_0|_{L^\infty(\partial\Omega)} \geq 0$$

$$u_- = u_0 - u - |u_0|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq 0 \ .$$

Le principe du maximum donne $u_- \leq u_\varepsilon \leq u_+$ d'où p.p. Ω

$$|u_\varepsilon| \leq |u_-| \vee |u_+| \in L^p(\Omega) \ .$$

D'autre part le théorème 2.2.2 assure

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f = \beta(u_0)$$

d'où, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} \beta(u_0)$$

et avec β^{-1} continue

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} u_0 \ .$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} u_0 \ .$$

△

2.3.3 Comportement de $\mathbf{u_\varepsilon}$ avec $\mathbf{u_0 \in L^\infty(\Omega)}$

Théorème 2.3.3

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\Omega)$.

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors u_ε converge vers u_0 dans $L^q(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers 0 pour tout $q \geq 1$. △

Preuve :
Soient les constantes $u_\pm = \pm|u_0|_\infty$.
On observe que

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f = \beta(u_0) \begin{cases} \leq \beta(u_+) = \varepsilon A u_+ + \beta(u_+) \\ \geq \beta(u_-) = \varepsilon A u_- + \beta(u_-) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \begin{cases} \leq u_+ \\ \geq u_- \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec β croissante et inversible.
Le principe du maximum donne p.p. dans Ω

$$u_- \leq u_\varepsilon \leq u_+$$

et après un retour aux notations p.p. dans Ω

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Selon le théorème 2.2.2 ($p = 2$)

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f = \beta(u_0)$$

et, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} \beta(u_0) .$$

Comme β , β^{-1} sont continues, on aura

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} u_0 .$$

En réunissant, on a obtenu

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\Omega)}$$

et

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} u_0 .$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans $L^q(\Omega)$ assure $\forall\, q \geq 1$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} u_0 .$$

$\triangle$

2.3.4 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}^\infty_{loc}(\boldsymbol{\Omega})$

Théorème 2.3.4

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, impaire, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε avec $p > n$.
Si $\omega \subset\subset \omega_0 \subset \Omega$ est une suite de domaines telle que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$, alors

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

et u_ε converge vers u_0 dans $L^q(\omega)$ fort pour tout $q \geq 1$. $\triangle$

Preuve :
Soit un domaine ω_0 tel que $\omega \subset\subset \omega_0 \subset \Omega$ et une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\omega_0)$ telle que $\omega \subset [\varphi = 1]$ et $0 \leq \varphi \leq 1$ p.p. dans ω_0 .
Alors la fonction $\psi = 1 - \varphi$ vérifie

$$\psi \begin{cases} = 1 & \text{sur } \partial\omega_0 \\ \geq 0 & \text{dans } \omega_0 \\ = 0 & \text{dans } \omega \, . \end{cases}$$

Comme $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$, $A\psi \in L^\infty(\omega_0)$ on aura $\beta^{-1}(f \pm \delta A\psi) \in L^\infty(\omega_0)$ pour une constante $\delta > 0$ suffisamment petite.
Soient les fonctions

$$v_\pm = \pm\varepsilon|\beta^{-1}(f \pm \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \pm \delta\psi$$

telles qu'on ait sur $\partial\omega_0$

$$v_+ \geq \delta > 0 > -\delta \geq v_- \, .$$

Alors on a les comparaisons

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(\frac{\varepsilon u_\varepsilon}{\varepsilon}) = f \begin{cases} \leq Av_+ + \beta(\frac{v_+}{\varepsilon}) \\ \geq Av_- + \beta(\frac{v_-}{\varepsilon}) \end{cases} & \text{dans } \omega_0 \\ \varepsilon u_\varepsilon \begin{cases} \leq \delta \leq v_+ \\ \geq \delta \leq v_- \end{cases} & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

pour ε petit car d'une part selon le théorème 2.2.1 ($p > n$, Sobolev)

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} 0 \Longrightarrow \varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\Omega})} 0$$

et en particulier

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\omega}_0)} 0$$

et d'autre part il est visible que p.p. ω_0

$$Av_+ + \beta(\frac{v_+}{\varepsilon}) = \delta A\psi + \beta(|\beta^{-1}(f - \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} + \frac{\delta}{\varepsilon}\psi) \geq \overline{\overline{\underset{\beta\text{ croissante}}{\psi\geq 0 \text{ p.p. } \omega_0}}} \geq$$

$$\geq \delta A\psi + \beta(|\beta^{-1}(f - \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}) \geq f$$

$$Av_- + \beta(\frac{v_-}{\varepsilon}) = -\delta A\psi + \beta(-|\beta^{-1}(f + \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} - \frac{\delta}{\varepsilon}\psi) \leq \overline{\overline{\underset{\beta\text{ croissante}}{\psi\geq 0 \text{ p.p. } \omega_0}}} \leq$$

$$\leq -\delta A\psi + \beta(-|\beta^{-1}(f + \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}) \leq f.$$

Le principe du maximum permet d'avoir p.p. ω_0 avec ε petit

$$v_- \leq \varepsilon u_\varepsilon \leq v_+$$

et vu la construction des $v_\pm$, ψ, φ p.p. ω

$$-\varepsilon|\beta^{-1}(f + \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \leq \varepsilon u_\varepsilon \leq \varepsilon|\beta^{-1}(f - \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}$$

d'où

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |\beta^{-1}(f - \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \vee |\beta^{-1}(f + \delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}$$

pour ε petit (dépendant de δ et $\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$) et en faisant tendre δ vers 0 on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega_0)} .$$

Si il existe un ω_0 tel que $\omega \subset\subset \omega_0 \subset \Omega$ alors on peut approximer ω par des sous-domaines ω^0 du même type que ω_0 tels que $\omega \subset\subset \omega^0 \subset\subset \omega_0$.

En approchant ω par des ω^0 on tire

$$\boxed{\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)}}.$$

Pour montrer que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

on observe que d'après le théorème 2.2.2, $\forall\, q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} f$$

et en particulier

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega\subset\Omega)\text{ fort}} f$$

avec convergence des normes

$$|\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |f|_{L^q(\omega)} .$$

On déduit que

$$|f|_{L^q(\omega)} = \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\omega)} \leq |\omega|^{\frac{1}{q}} \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)}$$

et en faisant tendre q vers l'infini

$$|f|_{L^\infty(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)}$$

d'où avec β croissante, continue et impaire $(\beta(0)=0)$

$$|f|_{L^\infty(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \beta(|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)}) = \beta(\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)})$$

et encore avec β inversible et impaire, β^{-1} croissante, continue et impaire

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq \beta^{-1}(|f|_{L^\infty(\omega)}) = |\beta^{-1}(f)|_{L^\infty(\omega)} = |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq |u_0|_{L^\infty(\omega)}}.$$

Finalement

$$\boxed{|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u_0|_{L^\infty(\omega)}}.$$

Pour la dernière partie de la conclusion on voit que d'après le théorème 2.2.2 $\forall\, q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} f$$

et en particulier dans $\omega \subset \Omega$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega) \text{ fort}} f$$

d'où, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} f$$

donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} u_0$$

car $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$ et β est continue.

L'estimation

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

permet d'avoir pour une constante $\sigma > 0$ et ε petit

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma$$

donc p.p. ω

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma \in L^\infty(\omega)$$

pour ε petit.

On a obtenu

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} u_0$$

et

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma \in L^\infty(\omega)$$

pour ε petit.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans $L^q(\omega)(q \geq 1)$ assure

$$\boxed{u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega) \text{ fort}} u_0}$$

ce qui complète le résultat. △

2.3.5 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$. Une autre approche

Pour une introduction des fonctions duales et des espaces de Orlicz voir le lemme 1.4.4. et [Adams, pg. 228].

Théorème 2.3.5

Soit $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction continue non bornée, croissante, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε. Alors on a selon les situations :

i) si il existe une fonction convexe positive et propre j telle que $j(0) = 0$, $j \geq |\beta^{-1}|^p$, $j(f) \in L^1(\Omega)$ alors on a

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} u_0$$

pour tout $1 \leq q < p$;

ii) si la fonction $|\beta^{-1}|^p$ est convexe alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} u_0 \ ;$$

iii) si une des situations suivantes a lieu :
il existe un $\theta \in (0,1)$ et une fonction convexe et propre j telle que $\beta(t)t \geq j(t)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, $j(0) = 0$ et $f \in L^p(\Omega)$ appartient à l'espace de Orlicz associé à la fonction convexe $(\theta j)_*$ c'est-à-dire $j_*(f) \in L^1(\Omega)$ ou il existe une fonction convexe et propre j telle que $\lim_{t\to\pm\infty} \partial j(t) = \pm\infty$ et $|\beta| \geq j \geq 0$, alors on a l'estimation

$$|u_\varepsilon|_{L^1(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de ε, A. △

Preuve :
On va montrer d'abord que u_ε converge ponctuellement vers u_0 lorsque ε tend vers 0.

En effet le théorème 2.2.2 permet d'avoir

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f$$

d'où on déduit

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} f$$

et avec β^{-1} continue

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} u_0 \ .$$

i) Tout d'abord on observe que les conditions $j \geq |\beta^{-1}|^p$, $j(f) \in L^1(\Omega)$ impliquent $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^p(\Omega)$.

En appliquant le théorème 1.4.8 point iii) on obtient que

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^p \leq \int_\Omega j(f)$$

avec u_ε convergeant p.p. vers u_0 lorsque ε tend vers 0 et le résultat s'ensuit avec le lemme 2.3.2.

ii) Le même théorème 1.4.8 point iii) permet d'avoir

$$\int_\Omega |u_\varepsilon|^p \leq \int_\Omega |u_0|^p$$

donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} v \ .$$

D'autre part on a vu que u_ε converge ponctuellement vers u_0 et la coïncidence de la limite faible dans $L^p(\Omega)(p > 1)$ avec la limite ponctuelle donne $v = u_0$.

La semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_{L^p(\Omega)}$ dans la topologie faible assure

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p \geq \int_\Omega |u_0|^p$$

ce qui confronté avec l'estimation antérieure sur u_ε donne

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p = \int_\Omega |u_0|^p \ .$$

Il reste a observer que la convergence faible et en norme dans l'espace uniformément convexe $L^p(\Omega)$ implique convergence forte donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} u_0 \ .$$

iii) Une conséquence directe du théorème 1.4.9. △

Commentaires 2.3

2.3.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u_0} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Ce résultat est obtenu dans [Lions[1]] au cas où $\beta = 1_{\mathbb{R}}$, la condition de coercivité étant essentielle. On s'aperçoit donc que le résultat persiste avec β non nécessairement coercive. A remarquer "l'égalisation" des espaces de u_ε et u_0, on a $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni u_0$. Dés qu'il y a asymétrie des espaces de u_ε et u_0 (à une fermeture près) la convergence de u_ε recule à l'intérieur du domaine. C'est là un phénomène spécifique aux problèmes de ce type. △

2.3.2 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u_0} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ou $\mathbf{u_0} \in \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \cap \mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)$

On obtient des estimations pour u_ε dans $L^p(\Omega)$ lorsque u_0 est dans l'espace $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ de u_ε.

On a la convergence forte dans $L^p(\Omega)(p \geq 2)$ sans vitesse de convergence lorsque β n'est pas supposée lipschitzienne mais on contrôle très bien la convergence de $\varepsilon u_\varepsilon$ et de la perturbation monotone $\beta(u_\varepsilon)$ lorsque β est lipschitzienne.

Si $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ alors on montre que la suite u_ε converge vers u_0 dans $L^p(\Omega)$ fort.

La technique utilisée consiste à obtenir la convergence presque partout par une approche variationnelle et ensuite dominer la suite via le principe du maximum ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. △

2.3.3 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u_0} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ on obtient la convergence de u_ε vers u_0 dans $L^q(\Omega)(q \geq 1)$ avec la technique ci-dessus. △

2.3.4 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec $\mathbf{u_0} \in \mathbf{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

Ce résultat est une version locale du théorème précédent. Les ingrédients de la démonstration sont le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la commutativité d'une fonction croissante, continue et impaire avec la norme $|\circ|_\infty$ et le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$, $\beta(u_\varepsilon)$. On remarque que la nature bornée de β n'est pas impliquée ce qui va nous permettre d'établir une version (théorème 2.10.7) avec β bornée. △

2.3.5 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$. Une autre approche

La démonstration de ce théorème est basée sur les estimations des théorèmes 1.4.9 et 1.4.10. Ces estimations ne dépendent pas de l'opérateur εA et permettent d'avoir $|u_\varepsilon|_p \leq C$ avec C une constante indépendante de ε lorsque $|\beta^{-1}|^p$ est convexe et $f \in L^p(\Omega)$. On obtient aussi $|u_\varepsilon|_1 \leq C$ sans contrainte sur β. △

2.4 Perturbations monotones non-bornées

Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β coercive

Préliminaires 2.4

Les mêmes hypothèses qu'aux préliminaires 2.2.

On travaille avec β coercive et lipschitzienne.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4.1

On suppose β une fonction lipschitzienne :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \leq \alpha^\beta |t_1 - t_2| \ \ \forall \ t_1, \ t_2 \in \mathbb{R}, \ \alpha^\beta > 0 \text{ constante.}$$

Si les $u_i \in H^1(\Omega)$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_i + \beta(u_i) = f_i \in L^p(\Omega) \quad (p \geq 2) \\ u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$|u_1 - u_2|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C|f_1 - f_2|_{L^p(\Omega)}$$

avec C une constante indépendante de u_i, f_i ayant la forme explicite

$$C = C_A(1 + C_p^A \alpha^\beta)$$

où C_p^A, C_A sont respectivement les constantes des théorèmes 1.2.3 et 1.3.1 $(k=0)$.

Si β est coercive :

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq \alpha_\beta |t_1 - t_2| \qquad \forall \ t_1, \ t_2 \in \mathbb{R}, \ \alpha_\beta > 0 \text{ constante}$$

alors on peut remplacer C_p^A par α_β^{-1}. △

Preuve :

Selon [Brézis[1]] les u_i existent et $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$.

Le théorème 1.2.3 s'applique pour ce problème donc

$$|u_1 - u_2|_p \leq C_p^A |f_1 - f_2|_p$$

avec C_p^A indépendante de u_i, f_i, β.

Si β est coercive, on a aussi

$$|u_1 - u_2|_p \leq \alpha_A^{-1} |f_1 - f_2|_p \ .$$

Par soustraction

$$A(u_1 - u_2) + \beta(u_1) - \beta(u_2) = f_1 - f_2$$

d'où

$$|A(u_1 - u_2)|_p \leq$$

[l'inégalité de la norme]

$$\leq |f_1 - f_2|_p + |\beta(u_1) - \beta(u_2)|_p \leq$$

[β lipschitzienne de constante α^β]

$$\leq |f_1 - f_2|_p + \alpha^\beta \, |u_1 - u_2|_p \leq |f_1 - f_2|_p \, (1 + \alpha^\beta C_p^A) \ .$$

Le théorème 1.3.1 permet d'avoir

$$|u_1 - u_2|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A \, |A(u_1 - u_2)|_p \leq C_A(1 + \alpha^\beta C_p^A) \, |f_1 - f_2|_p$$

avec C_A indépendante de u_i, f_i.

Si β est coercive, au lieu de C_p^A on peut utiliser α_β^{-1}. △

△

Problème 2.4

On étudie le comportement de u_ε, $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ dans l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 avec respectivement $u_0 = \beta^{-1}(f) \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ et $u_0 = \beta^{-1}(f) \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \ni -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} = u_1$. △

2.4.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$

Théorème 2.4.1

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On suppose β coercive et lipschitzienne, $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Si u_ε est solution du problème pénalisé P_ε alors u_ε tend vers u_0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0. △

Preuve :

A l'aide du lemme 2.4.1 (β coercive, $u_1 = u_\varepsilon$, $u_2 = u_0$) on a

$$|u_\varepsilon - u_0|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A\big(1 + \frac{\alpha^{\varepsilon^{-1}\beta}}{\alpha_{\varepsilon^{-1}\beta}}\big) \left|\frac{1}{\varepsilon} f - \frac{1}{\varepsilon}(A\varepsilon u_0 + \beta(u_0))\right|_p =$$

[en observant que $\alpha^{\varepsilon^{-1}\beta} = \varepsilon^{-1}\alpha^\beta$, $\alpha_{\varepsilon^{-1}\beta} = \varepsilon^{-1}\alpha_\beta$, $\beta(u_0) = f$ et en posant $C = C_A\big(1 + \frac{\alpha^\beta}{\alpha_\beta}\big) \, |Au_0|_p$]

$$= C \, |Au_0|_p$$

avec C une constante indépendante de ε .

Ceci permet d'avoir ($W^{2,p}(\Omega)$ réflexif) , à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

et encore

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} u$$

avec les injections de Sobolev.

La fonction lipschitzienne β laisse invariante la convergence forte

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} \beta(u)$$

puisque

$$|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u)|_p \leq \alpha^\beta \, |u_\varepsilon - u|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \, .$$

En passant à la limite au sens des distributions quand ε tend vers 0 dans

$$\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) - \beta(u) = f - \beta(u)$$

on obtient $f - \beta(u) = 0$ d'où $u = \beta^{-1}(f) = u_0$ et u_0 sera le seul point d'adhérence faible de u_ε . △

2.4.2 Comportement de $(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\varepsilon^{-1}$ avec $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{W}^{2,p}(\Omega) \ni \mathbf{u}_1$

Théorème 2.4.2

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On suppose $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ coercive et lipschitzienne, $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ni \frac{-Au_0}{\beta'(u_0)} = u_1$.

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ converge vers u_1 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0. △

Preuve :

Le lemme 2.4.1 s'applique au couple de problèmes :

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} A(u_0 + \varepsilon u_1) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_0 + \varepsilon u_1) = \frac{1}{\varepsilon} f_\varepsilon \\ u_0 + \varepsilon u_1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

d'où

$$|u_\varepsilon - (u_0 + \varepsilon u_1)|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq$$

[β coercive et lipschitzienne]

$$\leq C_A\big(1 + \frac{\alpha^{\beta/\varepsilon}}{a_{\beta/\varepsilon}}\big)\frac{1}{\varepsilon}\, |f - f_\varepsilon|_p =$$

[$\alpha_{\beta/\varepsilon} = \alpha_\beta/\varepsilon$ et $\alpha^{\beta/\varepsilon} = \alpha^\beta/\varepsilon$ à cause de l'homogénéité des constantes α_β et α^β]

$$= \frac{1}{\varepsilon} C_A \big(1 + \frac{\alpha^\beta}{\alpha_\beta}\big) \, |f - f_\varepsilon|_p =$$

[avec les notations $A(u_0 + \varepsilon u_1) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_0 + \varepsilon u_1) = \frac{1}{\varepsilon} f_\varepsilon$, $\beta(u_0) = f$ et $C = C_A\big(1 + \frac{\alpha^\beta}{\alpha_\beta}\big)$]

$$= \frac{1}{\varepsilon} C \left|\beta(u_0 + \varepsilon u_1) - \beta(u_0) + \varepsilon A u_0 + \varepsilon^2 A u_1\right|_p =$$

$$= C \left|\frac{\beta(u_0 + \varepsilon u_1) - \beta(u_0)}{\varepsilon} + A u_0 + \varepsilon A u_1\right|_p =$$

[on a $-Au_0 = u_1 \beta'(u_0)$ et $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ donc il existe $\theta_0^\varepsilon \in [0,1]$ telle que]

$$= C \left|u_1 \beta'(u_0 + \varepsilon \theta_0^\varepsilon u_1) - u_1 \beta'(u_0) + \varepsilon A u_1)\right|_p =$$

[on a $\beta' \in C^1(\mathbb{R})$ donc il existe $\theta_1^\varepsilon \in [0,1]$ telle que]

$$= C \left|\varepsilon u_1^2 \theta_0^\varepsilon \beta''(u_0 + \varepsilon \theta_0^\varepsilon \theta_1^\varepsilon u_1) + \varepsilon A u_1\right|_p \le$$

[l'inégalité de la norme]

$$\le C\varepsilon\big(\left|u_1^2 \theta_0^\varepsilon \beta''(u_0 + \theta_0^\varepsilon \theta_1^\varepsilon u_1)\right|_p + |Au_1|_p\big) \le$$

[l'inégalité de Hölder avec $\frac{p}{2} + (\frac{p}{2})' = \frac{p}{2}(\frac{p}{2})'$]

$$\le C\varepsilon\big(\left|u_1^2\right|_{p/2} \left|\theta_0^\varepsilon \beta''(u_0 + \varepsilon \theta_0^\varepsilon \theta_1^\varepsilon u_1)\right|_{(p/2)'} + |Au_1|_p\big) \le$$

[opérations sur la norme]

$$\le C\varepsilon\big(|u_1|_p^2 \left|\theta_0^\varepsilon \beta''(u_0 + \varepsilon \theta_0^\varepsilon \theta_1^\varepsilon u_1)\right|_\infty |\Omega|^{(p/2)'} + |Au_1|_p\big) \le$$

[on rappelle que $u_1 \in W^{2,p}(\Omega)$, $\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$]

$$\le C\varepsilon\big(|u_1|_p^2 \, |\beta|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R})} \, |\Omega|^{(p/2)'} + |Au_1|_p\big) \ .$$

On a obtenu

$$\left|\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u_1\right|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\big(|u_1|_p^2 \, |\Omega|^{(p/2)'} \, |\beta|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R})} + |Au_1|_p\big)$$

donc, à une sous-suite près, ($W^{2,p}(\Omega)$ réflexif)

$$\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

et avec les injections de Sobolev

$$\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u_1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} u \ .$$

Si on montre que

$$\left|\frac{\beta(u_0 + \varepsilon(u + u_0)) - \beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}\right|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0 \xleftarrow[0 \leftarrow \varepsilon]{} \left|\frac{\beta(u_0) - \beta(u_0 + \varepsilon(u + u_1))}{\varepsilon} + (u + u_1)\beta'(u_0)\right|_p$$

alors un passage à la limite au sens des distributions dans l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ écrite sous la forme

$$\varepsilon A\big(\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u_1\big)$$
$$=$$
$$\frac{\beta(u_0 + \varepsilon(u + u_1)) - \beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{\beta(u_0) - \beta(u_0 + \varepsilon(u + u_1))}{\varepsilon}$$
$$+$$
$$(u + u_1)\beta'(u_0) - (u + u_1)\beta'(u_0) - Au_0 - \varepsilon A u_1$$

donne $(u + u_1)\beta'(u_0) = -Au_0$ d'où $u\beta'(u_0) = 0$ avec $\beta' > 0$ donc $u = 0$.

Il reste à observer que

$$\left|\frac{\beta(u_0 + \varepsilon(u + u_1)) - \beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}\right|_p \le \alpha^\beta \left|\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} - u_1 - u\right|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

et

$$\left|\frac{\beta(u_0 + \varepsilon(u + u_1)) - \beta(u_0)}{\varepsilon} - (u + u_1)\beta'(u_0)\right|_p =$$

[$\beta \in C^2(\mathbb{R})$ donc il existe $\theta_0^\varepsilon \in [0,1]$ telle que]

$$= |(u+u_1)(\beta'(u_0+\varepsilon\theta_0^\varepsilon(u+u_1)) - \beta'(u_0))|_p =$$

[$\beta' \in C^1(\mathbb{R})$ donc il existe $\theta_1^\varepsilon \in [0,1]$ telle que]

$$= \varepsilon \left|(u+u_1)^2\theta_0^\varepsilon\beta''(u_0+\varepsilon\theta_0^\varepsilon\theta_1^\varepsilon(u+u_1))\right|_p \leq$$

[car $\beta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$]

$$\leq \varepsilon\,|u+u_1|_p^2\,|\beta|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R})} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 .$$

$\triangle$

Remarque 2.4.2

Avec les notations du théorème 2.1.1 si

$$u_j \in W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \qquad \forall\ j \geq 0$$

$$\beta^{(j)} \in C^0(\overline{\mathbb{R}}) \qquad \forall\ j \geq 1$$

alors on peut montrer par récurrence que $\forall\ k \geq 0$

$$\frac{1}{\varepsilon^k}\left\{u_\varepsilon - \sum_{j=0}^{k-1} u_j\varepsilon^j\right\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\ faible} u_k .$$

$\triangle$

2.4.3 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β coercive en dehors d'un compact

Définition 2.4.3

On dit que la fonction $\beta : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est coercive en dehors d'un compact si il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ et une constante $\alpha_\beta^K > 0$ tels que

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq \alpha_\beta^K|t_1 - t_2|$$

$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} - K$. $\triangle$

Théorème 2.4.3

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On suppose β coercive en dehors d'un compact.

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors on a l'estimation

$$|u_\varepsilon|_p \leq C$$

où C est une constante indépendante de ε .

Si $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^p(\Omega)(p > 1)$ alors u_ε converge vers u_0 dans $L^q(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers 0 , pour tout $1 \leq q < p$. $\triangle$

Preuve :

Pour la simplicité on va noter $\alpha = \alpha_\beta^K$ la constante de coercivité de β dans $\mathbb{R} - K$.

Si on multiplie l'équation pénalisée par $\varphi(u_\varepsilon) = u_\varepsilon|u_\varepsilon|^{p-2}$ on obtient après une intégration dans $\omega = [u_\varepsilon \in \mathbb{R} - K]$:

$$(f,\varphi(u_\varepsilon))_\omega = (\beta(u_\varepsilon),\varphi(u_\varepsilon))_\omega + (\varepsilon A u_\varepsilon,\varphi(u_\varepsilon))_\omega$$

où

$$(\beta(u_\varepsilon),\varphi(u_\varepsilon))_\omega \geq \overset{\beta \text{ coercive dans } \mathbb{R}-K}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \geq \alpha\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^p$$

$$(f,\varphi(u_\varepsilon))_\omega \leq \overset{\text{Hölder}}{=\!=\!=} \leq |f|_{L^p(\omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1} \leq |f|_{L^p(\Omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1}$$

$$(\varepsilon A u_\varepsilon,\varphi(u_\varepsilon))_\omega \leq \overset{\text{Hölder}}{=\!=\!=} \leq |A\varepsilon u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1} \leq |A\varepsilon u_\varepsilon|_{L^p(\Omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1}$$

donc

$$\alpha\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^p \leq |f|_{L^p(\Omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1} + |A\varepsilon u_\varepsilon|_{L^p(\Omega)}\,|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)}^{p-1}$$

et après une simplification

$$|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)} \leq \alpha^{-1}(|f|_{L^p(\Omega)} + |A\varepsilon u_\varepsilon|_{L^p(\Omega)}) \leq 3\alpha^{-1}\,|f|_{L^p(\Omega)}$$

en notant que $|A\varepsilon u_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leq 2\,|f|_{L^p(\Omega)}$ d'après le théorème 1.2.4.

On voit aussi que
$$|u_\varepsilon|_{L^p(\Omega-\omega)} \underset{\Omega-\omega=[u_\varepsilon\in K]}{\leq} (\sup_{t\in K} t)|\Omega-\omega|^{\frac{1}{p}} \leq (\sup_{t\in K} t)|\Omega|^{\frac{1}{p}} < \infty$$
car un compact de $\mathbb{R}$ est borné.

Nous avons obtenu
$$|u_\varepsilon|_{L^p(\omega)} \leq 3\alpha^{-1}\,|f|_{L^p(\Omega)}$$
et
$$|u_\varepsilon|_{L^p(\Omega-\omega)} \leq (\sup_{t\in K} t)|\Omega|^{\frac{1}{p}}$$
d'où par addition
$$|u_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leq 3\alpha^{-1}\,|f|_{L^p(\Omega)} + (\sup_{t\in K} t)|\Omega|^{\frac{1}{p}} \overset{\text{notation}}{=\!=} C$$
c'est-à-dire la première partie du résultat.

On a l'estimation $|u_\varepsilon|_p \leq C$ et d'après le théorème 2.2.2 la suite $\beta(u_\varepsilon)$ converge fortement dans $L^p(\Omega)$ (donc ponctuellement, à une sous-suite près) vers $\beta(u_0)$ d'où avec β^{-1} continue u_ε converge ponctuellement vers $u_0 \in L^p(\Omega)$.

Le lemme 2.3.2 assure que u_ε converge vers u_0 dans $L^q(\Omega)$ fort ce qui complète le résultat. $\triangle$

Remarque 2.4.3

La coercivité en dehors d'un compact peut remplacer la coercivité globale chaque fois qu'il s'agit d'obtenir une estimation à priori sur u_ε dans $L^p(\Omega)$. $\triangle$

Commentaires 2.4

2.4.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$

Ce résultat montre que si u_0 est dans l'espace $H^1_0(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ de u_ε et β est coercive, alors u_ε tend vers u_0 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 . Les outils de la démonstration sont respectivement les théorèmes 1.2.2 et 1.3.1. On note que β est à la fois coercive et lipschitzienne. $\triangle$

2.4.2 Comportement de $(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\varepsilon^{-1}$ avec β coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)\cap\mathbf{W}^{2,p}(\Omega)$

Si u_0, u_1 sont dans l'espace $H^1_0(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ de u_ε et β est coercive et lipschitzienne, alors $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ tend vers u_1 dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 . La technique utilisée peut être adaptée pour reconstituer d'une manière analytique le développement algébrique obtenu lors de l'identification formelle (voir le théorème 2.1.1 et la remarque 2.4.2). Le cas $\beta = 1_{\mathbb{R}}$ a été étudié intensément dans la littérature. Des résultats de ce type mais via une approche différente (perturbation opératorielle) sont obtenus dans [Huet .D[2]], [Friedman A.[2]], [Ton B.A.], [Tanabe H.], [Visik M.J. and Liusternik L.A.]. $\triangle$

2.4.3 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β coercive en dehors d'un compact

Ce résultat montre qu'on peut affaiblir la notion de coercivité globale sur β pour avoir une estimation du type $|u_\varepsilon|_p \leq C$ sur u_ε et l'on a aussi la convergence de u_ε vers u_0 dans les espaces $L^q(\Omega)$ avec $1 \leq q < p$ lorsque $p > 1$. $\triangle$

Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive

Préliminaires 2.5

L'hypothèse β localement coercive sera exigée. Pour l'introduction de ce concept voir les préliminaires 2.2.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5.1(Régularité locale)

Pour $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que $[\varphi_1 \neq 0] \subset [\varphi_2 = 1]$, il existe une constante C indépendante de $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que

$$|\varphi_1 u|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(|\varphi_2 Au|_{L^p(\Omega)} + |\varphi_2 u|_{L^p(\Omega)}) \ .$$

△

Preuve :

Voir [Stein, pg. 266]. △

Problème 2.5

On étudie le comportement de u_ε, $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ dans $L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ quand ε tend vers 0 avec l'hypothèse $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}(\Omega)$ ou $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni u_1 = \frac{-Au_1}{\beta'(u_0)}$. β sera localement coercive. △

2.5.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega)$

Théorème 2.5.1

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
On suppose β inversible, localement coercive et $\mathrm{u}_0 = \beta^{-1}(\mathrm{f}) \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)$.
Si u_ε est solution du problème pénalisé P_ε alors u_ε converge vers u_0 dans $\mathrm{L}^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ quand ε tend vers 0. △

Preuve :

Fonctions d'approximation

Soit ω un sous-domaine de Ω et la fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi = 1$ dans ω et $0 \leq \varphi \leq 1$. On introduit les fonctions ($\lambda > 0$ constante)

$$u_\pm = u_0 \pm (1-\varphi)\sup_{\overline{\Omega}} |u_0| \pm \lambda$$

et on voit que $u_+ \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni u_-$ si $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Comportement à l'intérieur et sur la frontière

Dans ces conditions on a $Au_\pm \in L^\infty(\Omega)$ car A a des coefficients $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, et

$$\begin{aligned} u_+ &\geq u_0 + \lambda \qquad \text{p.p. } \Omega \\ u_- &\leq u_0 - \lambda \qquad \text{p.p. } \Omega \\ u_+ &\geq 0 \geq u_- \qquad \text{sur } \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Comportement à la limite

Les fonctions d'approximation ne dépendent pas du paramètre ε .

Comparaison

Si on regarde (†) alors les inégalités

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \begin{cases} \geq \varepsilon Au_- + \beta(u_-) \\ \leq \varepsilon Au_+ + \beta(u_+) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \begin{cases} \geq u_- \\ \leq u_+ \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(†) Si β est localement coercive alors

$$\beta(u_+) - \beta(u_0) \geq \overset{\beta \text{ croissante}}{\underset{u_+ \geq u_0 + \lambda}{=\!=\!=}} \geq \beta(u_0+\lambda) - \beta(u_0) \geq \underset{K = [-|u_0|_\infty - \lambda, |u_0|_\infty + \lambda]}{=\!=\!=\!=\!=} \geq +\alpha_\beta^K \lambda > 0 \ .$$

De la même manière

$$\beta(u_-) - \beta(u_0) \leq \overset{\beta \text{ croissante}}{\underset{u_- \leq u_0 - \lambda}{=\!=\!=}} \leq \beta(u_0-\lambda) - \beta(u_0) \geq \underset{]K = [-|u_0|_\infty - \lambda, |u_0|_\infty + \lambda]}{=\!=\!=\!=\!=} \geq -\alpha_\beta^K \lambda < 0 \ .$$

Notons aussi que
$\beta(u_0) = f,\ Au_\pm \in L^\infty(\Omega)$.

deviennent valables pour ε petit.

Principe du maximum

Le principe du maximum permet d'avoir p.p. Ω

$$u_- \leq u_\varepsilon \leq u_+ \ .$$

Restriction de domaine et estimation uniforme

Si on regarde la construction des $u_\pm$ on aura p.p. ω :

$$u_0 - \lambda \leq u_\varepsilon \leq u_0 + \lambda$$

pour ε petit ou sous une autre forme p.p. ω

$$|u_\varepsilon - u_0| \leq \lambda$$

avec ε suffisamment petit.

Limite uniforme

En faisant tendre λ vers 0 ($\lambda \to 0$ force $\varepsilon \to 0$) on tire

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega)} u_0 \ .$$

Comme ω était arbitraire dans Ω, on a le résultat. $\triangle$

2.5.2 Comportement de $(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\varepsilon^{-1}$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega) \ni \mathbf{u}_1$

Théorème 2.5.2

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ inversible, localement coercive et $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} = u_1$.
Si u_ε est la solution du problème pénalisé alors $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ converge vers u_1 dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ lorsque ε tend vers 0. $\triangle$

Preuve :

Fonctions d'approximation

Soient ω, φ, λ comme dans la démonstration du théorème précédent et on pose $\omega_0 = [\varphi \neq 0]$. Soient les fonctions

$$\begin{aligned} u^1_{\pm\varepsilon} &= u_1 \pm \lambda \pm (1-\varphi)(|u_1|_{L^\infty(\omega_0)} + |\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}|_{L^\infty(\omega_0)}) \\ &= u^1_\pm \pm (1-\varphi)|\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}|_{L^\infty(\omega_0)} \ . \end{aligned}$$

Comportement à l'intérieur et sur la frontière de ω_0

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} &u_1,\ u^1_\pm,\ \ u^1_{\pm\varepsilon} \in W^{2,\infty}(\Omega) \\ &u^1_{+\varepsilon} - \lambda \geq u_1 \geq u^1_{-\varepsilon} + \lambda \qquad \text{p.p. } \omega_0 \\ &u^1_{+\varepsilon} \geq 0 \geq u^1_{-\varepsilon} \qquad\qquad\quad \text{sur } \partial\omega_0 \ . \end{aligned}$$

Comportement à la limite

Le théorème 2.5.1 assure ($[\varphi \neq 0] = \omega_0 \subset\subset \Omega$)

$$\varepsilon u^1_{\pm\varepsilon} \overset{u^1_\pm \in L^\infty(\Omega)}{=\!=\!=\!=} \varepsilon u^1_\pm + (1-\varphi)|u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega_0)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$A\varepsilon u^1_{\pm\varepsilon} \overset{u^1_\pm \in W^{2,\infty}(\Omega)}{=\!=\!=\!=} A\varepsilon u^1_\pm + |u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega_0)} A(1-\varphi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ .$$

Comparaison

Le tableau (*) permet d'avoir la comparaison

$$\begin{cases} \varepsilon^2 Au^1_\varepsilon + \beta(\varepsilon u^1_\varepsilon + u_0) = f - \varepsilon Au_0 \begin{cases} \geq \varepsilon^2 Au^1_{-\varepsilon} + \beta(\varepsilon u^1_{-\varepsilon} + u_0) \\ \leq \varepsilon^2 Au^1_{+\varepsilon} + \beta(\varepsilon u^1_{+\varepsilon} + u_0) \end{cases} & \text{dans } \omega_0 \\ u^1_\varepsilon = 0 \begin{cases} \geq u^1_{-\varepsilon} \\ \leq u^1_{+\varepsilon} \end{cases} & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

(*)

$$\frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{+\varepsilon})-f}{\varepsilon} = \frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{+\varepsilon})-\beta(u_0)}{\varepsilon} \overset{\theta\in[0,1]}{\underset{\beta\in C^1(\mathbb{R})}{=}} u^1_{+\varepsilon}\beta'(u_0+\theta\varepsilon u^1_{+\varepsilon}) \overset{\beta'\geq 0,\ \beta \text{ croissante}}{\underset{u^1_{+\varepsilon}\geq u^1_{+}\geq u_1+\lambda}{\geq}} (u_1+\lambda)\beta'(u_0+\theta\varepsilon u^1_{+\varepsilon})$$

$$\Big\downarrow\ L^\infty(\omega_0)\quad \varepsilon u^1_{+\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

$$(u_1+\lambda)\beta'(u_0) = Au_0+\lambda\beta'(u_0) \overset{\beta \text{ localement coercive}}{\underset{\inf_{\mathbb{R}}\beta'=\alpha^K_\beta>0,\ K=[-|u_0|_\infty,|u_0|_\infty]}{\geq}} Au_0+\lambda\alpha^K_\beta$$

et

$$-Au_0-\varepsilon Au^1_{+\varepsilon}\xrightarrow{L^\infty(\omega_0)} -Au_0 \qquad A\varepsilon u^1_{+\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

ε petit $\Downarrow$ p.p. ω_0

$$\frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{+\varepsilon})-\beta(u_0)}{\varepsilon}\geq -Au_0-\varepsilon Au^1_{+\varepsilon}$$

$$\frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{-\varepsilon})-f}{\varepsilon} = \frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{-\varepsilon})-\beta(u_0)}{\varepsilon} \overset{\theta\in[0,1]}{\underset{\beta\in C^1(\mathbb{R})}{=}} u^1_{-\varepsilon}\beta'(u_0+\theta\varepsilon u^1_{-\varepsilon}) \overset{\beta'\geq 0,\ \beta \text{ croissante}}{\underset{u^1_{-\varepsilon}\leq u^1_{-}\leq u_1-\lambda}{\leq}} (u_1-\lambda)\beta'(u_0+\theta\varepsilon u^1_{-\varepsilon})$$

$$\Big\downarrow\ L^\infty(\omega_0)\quad \varepsilon u^1_{-\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

$$(u_1-\lambda)\beta'(u_0) = Au_0-\lambda\beta'(u_0) \overset{\beta \text{ localement coercive}}{\underset{\inf_{K}\beta'=\alpha^K_\beta>0,\ K=[-|u_0|_\infty,|u_0|_\infty]}{\leq}} Au_0-\lambda\alpha^K_\beta$$

et

$$-Au_0-\varepsilon Au^1_{-\varepsilon}\xrightarrow{L^\infty(\omega_0)} -Au_0 \qquad A\varepsilon u^1_{+\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

ε petit $\Downarrow$ p.p. ω_0

$$\frac{\beta(u_0+\varepsilon u^1_{-\varepsilon})-\beta(u_0)}{\varepsilon}\leq -Au_0-\varepsilon Au^1_{-\varepsilon}$$

avec ε suffisamment petit et $u^1_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon-u_0}{\varepsilon}$.

Principe du maximum

Le principe du maximum implique p.p. ω_0

$$u^1_{-\varepsilon}\leq u^1_\varepsilon\leq u^1_{+\varepsilon}$$

lorsque ε est petit.

Restriction de domaine et estimation uniforme

On a p.p. ω

$$u_1-\lambda\leq u^1_\varepsilon\leq u_1+\lambda \quad \text{donc} \quad |u^1_\varepsilon-u_1|\leq\lambda$$

vu la construction des $u^1_{\pm\varepsilon}$.

Limite uniforme

En faisant tendre λ vers 0 ($\lambda\to 0$ force $\varepsilon\to 0$), on obtient

$$\frac{u_\varepsilon-u_0}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega)} u_1$$

et avec ω arbitraire dans Ω on aura le résultat. $\triangle$

2.5.3 Amélioration de la convergence de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega) \ni \mathbf{u}_1$

Théorème 2.5.3

Soit β une fonction continue non bornée, croissante, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ localement coercive et $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \ni u_1$. Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε avec $p \geq 2$, alors u_ε converge vers u_0 dans $W^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 pour tout $q \geq 2$. $\triangle$

Preuve :

Soient $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que
$$[\varphi_1 \neq 0] \subset\subset [\varphi_2 = 1]\ .$$
Le lemme 2.5.1 assure une constante C indépendante de $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que
$$|\varphi_1 u|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(|\varphi_2 A u|_p + |\varphi_2 u|_p)\ .$$
En particulier, l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ permet d'avoir
$$|\varphi_1 u_\varepsilon|_{2,p} \leq C\left(\left|\varphi_2 \frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0)}{\varepsilon}\right|_p + |\ \varphi_2 u_\varepsilon|_p\right)\ .$$
Les théorèmes 2.5.1 et 2.5.2 montrent que
$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u_0 \quad \text{et} \quad u_\varepsilon^1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u_1$$
donc
$$\varphi_2 \frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\Omega)} \varphi_2 \beta'(u_0) u_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2 u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\Omega)} \varphi_2 u_0$$
et on conclut que $\varphi_1 u_\varepsilon$ sera bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif d'où, à une sous-suite près,
$$\varphi_1 u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} \varphi_1 u_0\ .$$
Pour un sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$ on peut choisir φ_1 telle que $\overline{\omega} \subset [\varphi_1 = 1]$ d'où le résultat. $\triangle$

Commentaires 2.5

2.5.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega)$

On utilise le fait que, avec des fonctions de comparaison bien choisies, le principe du maximum s'applique pour ε suffisamment petit et on tire une estimation ponctuelle dans Ω, estimation qui est aussi uniforme à l'intérieur du domaine. Pour établir les comparaisons nécessaires on a besoin de la propriété suivante que β vérifie : une fonction localement coercive est coercive dans tout compact de $\mathbb{R}$. Le concept de coercivité locale subsiste aussi pour les fonctions bornées ce qui permet d'utiliser cette technique pour l'étude des perturbations singulières bornées (voir les théorèmes 2.10.1-2.10.4). $\triangle$

3.5.2 Comportement de $(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\varepsilon^{-1}$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega) \ni \mathbf{u}_1$

La même technique. Un raffinement des fonctions de comparaison sur des domaines emboîtés permet, en utilisant le théorème précédent, de récupérer l'estimation uniforme pour $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ à l'intérieur du domaine. $\triangle$

2.5.3 Amélioration de la convergence de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive et $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}(\Omega) \ni \mathbf{u}_1$

Les résultats locaux des théorèmes précédents suffisent pour améliorer les convergences considérées.

Ce fait est aussi possible grâce à la structure de l'équation pénalisée :
$$A u_\varepsilon = \frac{\beta(u_0) - \beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon}$$
puisque le contrôle de $A u_\varepsilon$ est ramené au contrôle de $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ et de u_ε. $\triangle$

Perturbations monotones bornées

2.6 Identification formelle

Préliminaires 2.6

La fonction β admet un développement asymptotique autour de $+\infty$ si les limites suivantes existent

$$\lim_{t\to\infty} t^k\{\beta(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i^+ t^{-i}\} = \beta_k^+ \in \mathbb{R},\ k \geq 0\ .$$

De même on parle d'un développement asymptotique autour de $-\infty$ si les limites suivantes existent :

$$\lim_{t\to-\infty} t^k\{\beta(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i^- t^{-i}\} = \beta_k^- \in \mathbb{R},\ k \geq 0\ .$$

La fonction β admet un développement asymptotique autour de 0 si les limites suivantes existent

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^k}\{\beta(t) - \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i t^i\} = \beta_k \in \mathbb{R},\ k \geq 0\ .$$

$\triangle$

Exemple 2.6.1

$\beta(t) = \frac{t}{1+|t|},\ \beta_k^+ = (-1)^k,\ \beta_k^- = -1,\ k \geq 0\ .$ $\triangle$

Problème 2.6

On cherche u_ε sous la forme

$$u_\varepsilon = \sum_{k=-1}^{\infty} u_k \varepsilon^k$$

quand β admet un développement asymptotique autour de $-\infty,\ 0,\ +\infty$:

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^- t^{-k} \quad , \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k \quad , \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ t^{-k}\ .$$

Le calcul qui suit sera purement algébrique. $\triangle$

2.6.1 Identification formelle. Calcul formel

Théorème 2.6.1

L'identification formelle des puissances de ε en portant

$$\mathsf{u}_\varepsilon = \sum_{k=-1}^{\infty} \mathsf{u}_k \varepsilon^k$$

dans

$$\varepsilon \mathsf{A}\mathsf{u}_\varepsilon + \beta(\mathsf{u}_\varepsilon) = \mathsf{f}$$

conduit aux formules suivantes selon le développement de β et la position de u_{-1} par rapport à 0 :

1. $\boxed{\beta(\mathsf{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ \mathsf{t}^{-k} \quad \text{et} \quad \mathsf{u}_{-1} \neq 0}$

$$\mathsf{A}\mathsf{u}_{-1} + \beta_0^+ = \mathsf{f}$$

$$\mathsf{A}\mathsf{u}_0 + \frac{\beta_1^+}{\mathsf{u}_{-1}} = 0$$

$$\mathsf{A}\mathsf{u}_1 - \beta_1^+ \frac{\mathsf{u}_0}{\mathsf{u}_{-1}} + \frac{\beta_2^+}{\mathsf{u}_{-1}^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\mathsf{A}\mathsf{u}_{j-1} + \sum_{k=0}^{j} \mathsf{u}_{jk}^* \beta_k^+ = 0$$

où

$$\sum_{i+j=n}^{n} \mathsf{u}_{ik} \mathsf{u}_{jk}^* = \delta_{n0} \quad \forall\ \mathsf{n},\ \mathsf{k} \geq 0, \quad \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \mathsf{n} = \mathsf{m} \\ 0 & \mathsf{n} \neq \mathsf{m} \end{cases}$$

$$u_{jk} = \sum_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m = k,\ \sum_{m=-1}^{\infty} m i_m = j}^{(i_m)_{-1}^{\infty}} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} \quad , \quad C_k^{(i_m)} = k! \left[\prod_{m=-1}^{\infty} i_m! \right]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} u_{0k}^* \\ u_{1k}^* \\ \vdots \\ u_{nk}^* \end{bmatrix} = U_{nk}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \quad U_{nk} = \begin{bmatrix} u_{0k} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ u_{1k} & u_{0k} & 0 & & & & \vdots \\ u_{2k} & u_{1k} & u_{0k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & u_{0k} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & u_{1k} & u_{0k} & 0 \\ u_{nk} & u_{n-1,k} & u_{n-2,k} & \cdots & u_{2k} & u_{1k} & u_{0k} \end{bmatrix} .$$

2. $\boxed{\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k \quad \text{et} \quad u_{-1} = 0}$

$$\beta(u_0) - f = 0$$

$$Au_0 + u_1 \beta^{(1)}(u_0) = 0$$

$$Au_1 + u_2 \beta^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \beta^{(2)}(u_0) = 0$$

$$Au_2 + u_3 \beta^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \beta^{(3)}(u_0) + \frac{u_1}{1!} \frac{u_2}{1!} \beta^{(2)}(u_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$Au_{j-1} + u_j \beta^{(1)}(u_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum_{\sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k}^{(i_m)} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} = 0 .$$

3. $\boxed{\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^- t^{-k} \quad \text{et} \quad u_{-1} \neq 0}$

$$Au_{-1} + \beta_0^- = f$$

$$Au_0 + \beta_1^- \frac{1}{u_1} = 0$$

$$Au_1 - \beta_1^- \frac{u_0}{u_1^2} + \beta_2^- \frac{1}{u_{-1}^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$Au_{j-1} + \sum_{k=0}^{j} u_{jk}^* \beta_k^- = 0$$

avec u_{jk}^* comme au point 1. $\triangle$

Preuve :

1. $\boxed{\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ t^{-k} \quad \text{et} \quad u_{-1} \neq 0}$

On a

$$\beta(u_\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ u_\varepsilon^{-k} =$$

[lorsque $u_\varepsilon = \sum_{i=-1}^{\infty} u_i \varepsilon^i$]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ \Big(\sum_{i=-1}^{\infty} u_i \varepsilon^i \Big)^{-k} =$$

[car on a toujours $\left(\sum_{i=-1}^{\infty} x_i\right)^k = \sum_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m = k}^{(i_m)_{-1}^{\infty}} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} x_m^{i_m}$ pour $x_m \in \mathbb{R}$]

$$= \sum_{k=0} \beta_k^+ \Big(\sum_{\sum_{m=-1}^{+\infty} i_m = k}^{(i_m)_{-1}^{\infty}} C_k^{(i_m)} \sum_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^{m i_m} \Big)^{-1} =$$

[regroupement des puissances identiques de ε]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ \Big(\sum_{j=-k}^{\infty} \sum_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m = k,\ \sum_{m=-1}^{\infty} m i_m = j}^{(i_m)_{-1}^{\infty}} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} \varepsilon^j \Big)^{-1} =$$

[avec la notation $\sum^{(i_m)_{-1}^{\infty}}_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m=k,\ \sum_{m=-1}^{\infty} m i_m=j} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} = u_{jk}$]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ (\sum_{j=-k}^{\infty} u_{jk}\varepsilon^j)^{-1} =$$

[inversion d'une série]

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^+ \sum_{i=k}^{\infty} u_{ik}^* \varepsilon^i =$$

[regroupement des puissances identiques de ε]

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} u_{jk}^* \beta_k^+) \varepsilon^j$$

où

$$\begin{bmatrix} u_{0k}^* \\ u_{1k}^* \\ \vdots \\ u_{nk}^* \end{bmatrix} = U_{nk}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_{nk} = \begin{bmatrix} u_{0k} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ u_{1k} & u_{0k} & 0 & & & & \vdots \\ u_{2k} & u_{1k} & u_{0k} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & u_{0k} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & u_{1k} & u_{0k} & 0 \\ u_{nk} & u_{n-1,k} & u_{n-2,k} & \cdots & u_{2k} & u_{1k} & u_{0k} \end{bmatrix}.$$

D'autre part

$$\varepsilon A u_\varepsilon = \varepsilon \sum_{i=-1}^{\infty} A u_i \varepsilon^i = \sum_{i=-1}^{\infty} A u_i \varepsilon^{i+1} = \sum_{j=0}^{\infty} A u_{i-1} \varepsilon^j .$$

Par identification dans l'équation

$$\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$$

on obtient

$j = 0$ $\qquad A u_{-1} + u_{00}^* \beta_0^+ = f$

$j \geq 1$ $\qquad A u_{j-1} + \sum_{k=0}^{j} u_{jk}^* \beta_k^+ = 0 .$

Selon les valeurs de j on a :

$\boxed{j = 0}$

$$A u_{-1} + u_{00}^* \beta_0^+ = f$$

$$\sum_{i+j=n} u_{i0} u_{j0}^* = \delta_{n0} \Rightarrow u_{00}^* = \frac{1}{u_{00}}$$

$$u_{00} = \sum^{(i_m)_{-1}^{\infty}}_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m=0,\ \sum_{m=-1}^{\infty} m i_m=0,\ i_l=0,\ \forall\ l\geq -1} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} = 1$$

donc

$$\boxed{A u_{-1} + \beta_0^+ = f}.$$

$\boxed{j = 1}$

$$A u_0 + u_{10}^* \beta_0^+ u_{11}^* \beta_1^+ = 0$$

$$\sum_{i+j=n} u_{i0} u_{j0}^* = \delta_{n0} \Rightarrow u_{00}^* = \frac{1}{u_{00}} = 1,\ u_{10} = 0,\ u_{10}^* = 0$$

$$\sum_{i+j=n} u_{i1} u_{j1}^* = \delta_{n0} \Rightarrow u_{-11} u_{11}^* = 1,\ u_{11}^* = \frac{1}{u_{-11}}$$

$$u_{-11} = \sum^{(i_m)_{-1}^{\infty}}_{\sum_{m=-1}^{\infty} i_m=1,\ \sum_{m=-1}^{\infty} m i_m=-1,\ i_{-1},\ i_l=0,\ l\neq -1} C_k^{(i_m)} \prod_{m=-1}^{\infty} u_m^{i_m} = u_{-1}$$

$$\boxed{A u_0 + \beta_1^+ \tfrac{1}{u_{-1}} = 0}.$$

$\boxed{j=2}$

$$Au_1 + u_{20}^*\beta_0^+ + u_{21}^*\beta_1^+ + u_{22}^*\beta_2^+ = 0$$

$$\sum\nolimits_{i+j=n} u_{i2}u_{j2}^* = \delta_{20} \Rightarrow u_{-22}u_{22}^* = 1 \Rightarrow u_{22}^* = \frac{1}{u_{-22}} = \frac{1}{u_{-1}^2}$$

$$u_{-11}u_{21}^* + u_{01}u_{11}^* = 0 \Rightarrow u_{21}^* = -\frac{u_{01}}{u_{-11}}u_{11}^* = -\frac{u_0}{u_{-1}^2}$$

$$\boxed{Au_1 - \beta_1^+ \tfrac{u_0}{u_{-1}} + \tfrac{\beta_2^+}{u_{-1}^2} = 0}\ .$$

2. $\boxed{\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k \quad \text{et} \quad u_{-1} = 0}$

Dans ce cas le théorème 2.1.1 s'applique avec $\Omega = [u_{-1} = 0]$ et on obtient

$$\beta(u_0) - f = 0$$

$$Au_0 + u_1\beta^{(1)}(u_0) = 0$$

$$Au_1 + u_2\beta^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^2}{2!}\beta^{(2)}(u_0) = 0$$

$$Au_2 + u_3\beta^{(1)}(u_0) + \frac{u_1^3}{3!}\beta^{(3)}(u_0) + \frac{u_1}{1!}\frac{u_2}{1!}\beta^{(2)}(u_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$Au_{j-1} + u_j\beta^{(1)}(u_0) + \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum\nolimits_{\substack{(i_m) \\ \sum_{m=0}^{\infty} m i_m = j,\ i_j = 0,\ \sum_{m=0}^{\infty} i_m = k}} C_k^{i_m} \prod_{m=0}^{\infty} u_m^{i_m} = 0\ .$$

3. Traitement analogue au point 1 : au lieu des β_k^+ on prend β_k^- . △

Commentaires 2.6

On verra dans la suite que lorsque β est bornée le comportement asymptotique analytique de u_ε suit le comportement asymptotique algébrique de u_ε au sens suivant :

A l'intérieur de $[u_{-1} > 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de $+\infty$,

A l'intérieur de $[u_{-1} = 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de 0 ,

A l'intérieur de $[u_{-1} < 0]$ le comportement de u_ε est réglé par le développement asymptotique de β autour de $-\infty$.

En fait, l'identification formelle est un bon support intuitif pour dégager la théorie qui suit. △

Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$

Préliminaires 2.7

Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera tel que les injections de Sobolev s'appliquent.

L'opérateur A est toujours de type elliptique avec les coefficients a_{ij} dans $W^{1,\infty}(\Omega)$.

La fonction $\beta : \mathbb{R} \longmapsto]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[$ avec $\beta(-\infty) > -\infty$, $\beta(+\infty) < +\infty$ sera croissante et continue, telle que $\beta(0) = 0$.

Selon les situations, on exigera β localement coercive :

La fonction β est localement coercive si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $\alpha_\beta^K > 0$ telle que $\forall\, t_1,\ t_2 \in K$

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \geq \alpha_\beta^K |t_1 - t_2| \ .$$

De même, la fonction β est localement lipschitzienne si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe une constante $\alpha_K^\beta > 0$ telle que $\forall\, t_1,\ t_2 \in K$

$$|\beta(t_1) - \beta(t_2)| \leq \alpha_K^\beta |t_1 - t_2| \ .$$

On remarque qu'une fonction lipschitzienne est localement lipschitzienne.

On vérifie qu'une fonction localement lipschitzienne laisse invariant l'espace $L^\infty(\Omega)$ ainsi que la convergence uniforme dans $L^\infty(\Omega)$.

Nous rappelons le résultat de Lions-Stampacchia par le lemme suivant :

Lemme 2.7.1

Soit X un espace de Hilbert (réel) ayant pour dual X^* .

Soit $K \subset X$ un ensemble non-vide, convexe, fermé et $A :\ K \longrightarrow X^*$ un opérateur (non nécessairement linéaire) lipschitzien :

$$(Au - Av, \psi)_X \leq \alpha^A \left|u - v\right|_X \left|\psi\right|_X \qquad \forall\ \psi \in X,\ \ \forall\ \ u,\ v \in K,\ \alpha^A > 0 \text{ constante}$$

et elliptique :

$$(Au - Av, u - v)_X \geq \alpha_A \left|u - v\right|_X^2 \qquad \forall\ \ u,\ v \in K,\ \alpha_A > 0 \text{ constante} .$$

Alors pour $f \in X^*$ le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u)_X \geq 0 & \forall\ \ v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

admet une solution unique. △

Preuve :

Voir [Rodrigues, pg. 93]. △

Problème 2.7

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

On montre que ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$.

On étudie le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ dans $L^p(\Omega)(2 \leq p \leq \infty)$ ce qui conduira au problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{où} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t < 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(+\infty) & t > 0 \end{cases}$$

avec existence et régularité de la solution limite. △

2.7.1 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ sans contrainte sur β Existence et régularité de la solution limite

Théorème 2.7.1
Soit une fonction β bornée, croissante, continue telle que $\beta(0) = 0$.
Le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution unique et l'on a $\forall \ q \geq 2$

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}(\Omega) \text{ faible}} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

où u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t < 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(+\infty) & t > 0 \, . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :
On note d'abord l'existence et l'unicité de la solution $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ grâce au théorème 1.4.1.

On rappelle la notation $t^+ = \max\{t, 0\}$ et $t^- = \max\{-t, 0\}$.

Soit la fonction convexe

$$j(t) = \beta(+\infty)t^+ - \beta(-\infty)t^-$$

satisfaisant

$$\partial j = \widetilde{\beta} \, .$$

Alors via le théorème de Lions-Stampacchia (voir lemme 2.7.1) u existe et vérifie le problème variationnel $\forall \ v \in H_0^1(\Omega)$

$$(Au, v - u) + (j(v) - j(u), 1) \geq (f, v - u)$$

et pour $v = \varepsilon u_\varepsilon$ on obtient

$$(Au, \varepsilon u_\varepsilon - u) + (j(\varepsilon u_\varepsilon) - j(u), 1) \geq (f, \varepsilon u_\varepsilon - u) \, .$$

En multipliant $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ par $u - \varepsilon u_\varepsilon$ on aura

$$(\varepsilon A u_\varepsilon, u - \varepsilon u_\varepsilon) + (\beta(u_\varepsilon), u - \varepsilon u_\varepsilon) \geq (f, u - \varepsilon u_\varepsilon)$$

et en additionnant les deux dernières inégalités

$$\alpha_A \left|\nabla(\varepsilon u_\varepsilon - u)\right|_2^2 \leq \underset{A \text{ elliptique}}{=\!=\!=} \leq (A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varepsilon u_\varepsilon - u) \leq$$

$$\leq (\beta(u_\varepsilon), u - \varepsilon u_\varepsilon) + (j(\varepsilon u_\varepsilon) - j(u), 1) \overset{\text{notation}}{=\!=\!=} X_\varepsilon \, .$$

Nous transformons X_ε :

$$X_\varepsilon =$$

[décomposition de signe de $\varepsilon u_\varepsilon$ et u]

$$= (-\beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^+ - u^+ - \varepsilon u_\varepsilon^- + u^-) + (\beta(+\infty)(\varepsilon u_\varepsilon^+ - u^+) - \beta(-\infty)(\varepsilon u_\varepsilon^- - u^-), 1) =$$

[regroupement]

$$= (-\beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^+ - u^+) + (\beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^- - u^-) + (\beta(+\infty), \varepsilon u_\varepsilon^+ - u^+) - (\beta(-\infty), \varepsilon u_\varepsilon^- - u^-) =$$

[suite regroupement]

$$= (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^+ - u^+) + (-\beta(-\infty) + \beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^- - u^-) \leq$$

[où $\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon) \leq 0, \ -u^- \leq 0, \ \beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon) \geq 0, \ u^+ \geq 0$ donc]

$$\leq (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^+) + (-\beta(-\infty) + \beta(u_\varepsilon), \varepsilon u_\varepsilon^-) =$$

[avec la notation $Y_\varepsilon = (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)\varepsilon u_\varepsilon^+ + (-\beta(-\infty) + \beta(u_\varepsilon))\varepsilon u_\varepsilon^-$]

$$= (Y_\varepsilon, 1) \, .$$

Maintenant on observe que

$$\left|A(\varepsilon u_\varepsilon - u)\right|_q =$$

[équation pénalisée $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$]

$$= |f - Au - \beta(u_\varepsilon)|_q \leq$$

[inégalité de la norme]

$$\leq |f - Au|_q + |\beta(u_\varepsilon)|_q \leq$$

[avec $f - Au \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ p.p. Ω , β bornée]

$$\leq (|f - Au|_\infty + |\beta|_\infty)|\Omega|^{\frac{1}{q}}$$

et à l'aide du théorème 1.3.1

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_A\, |A(\varepsilon u_\varepsilon - u)|_q \leq C_A\{|f - Au|_\infty + |\beta|_\infty\}|\Omega|^{\frac{1}{q}}$$

ce qui donne, à une sous-suite près, $\forall\ q \geq 2$

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}(\Omega) \text{ faible}} w \quad , \quad \varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} w \quad , \quad \varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} w$$

via la réflexivité de l'espace $W^{2,q}(\Omega)$ et les injections de Sobolev.

Dans ces conditions on aura

$$\varepsilon u_\varepsilon^+ \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u \leq 0]} 0 \quad \text{et} \quad |\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)| \leq |\beta(+\infty)| + |\beta(-\infty)| < \infty$$

$$\varepsilon u_\varepsilon^- \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u \geq 0]} 0 \quad \text{et} \quad |\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)| \leq |\beta(+\infty)| + |\beta(-\infty)| < \infty$$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u > 0]} +\infty \quad \text{d'où} \quad \beta(u_\varepsilon) - \beta(+\infty) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u > 0]} 0$$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u < 0]} -\infty \quad \text{d'où} \quad \beta(u_\varepsilon) - \beta(-\infty) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [w+u < 0]} 0$$

donc

$$Y_\varepsilon = \varepsilon u_\varepsilon^+(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)) - \varepsilon u_\varepsilon^-(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} 0$$

et Y_ε est borné dans $L^q(\Omega)$.

La réflexivité de $L^q(\Omega)(q \geq 2)$ assure

$$Y_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\Omega) \text{ faible}} Y \ .$$

Comme la limite faible dans $L^q(\Omega)(q > 1)$ coïncide avec la limite ponctuelle on aura $Y = 0$ donc

$$\alpha_A\, |\nabla(\varepsilon u_\varepsilon - u)|_2^2 \leq X_\varepsilon \leq (Y_\varepsilon, 1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

et

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{H_0^1(\Omega) \text{ fort}} u$$

c'est-à-dire $w = 0$, d'où le résultat. △

Remarque 2.7.1

En anticipant les résultats du théorème 2.9.1 et de la remarque 2.9.1, on peut montrer que $\forall\ q \geq 2$

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}(\Omega) \textit{ fort}} 0$$

et

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \textit{ fort}} u \ .$$

△

Commentaires 2.7

2.7.1 Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$ selon la nature asymptotique de β

Existence de la solution du problème limite

Cette démonstration suit de près une approche de ce problème dans [Brauner C.M. et Nicolaenko B.] .

En fait, il s'agit d'une variante de la méthode de monotonie au sens de [Lions[2]] où l'hypothèse de monotonie sur β et le contexte variationnel des problèmes, pénalisé et limite, sont essentiels.

On peut donner aussi une démonstration qui utilise une méthode de compacité (au sens [Lions[2]]) basée sur des estimations spécifiques aux perturbations monotones et qui n'utilisent pas le fait que β est bornée (voir en ce sens les théorème 2.2.1 et 2.12.1).

On a choisi la méthode de monotonie pour une introduction naturelle de ce qui suit.

Comme la remarque 2.7.1 l'indique, on peut obtenir aussi la convergence forte dans $W^{2,p}(\Omega)$. $\triangle$

2.8 Perturbations monotones bornées. Sur la solution du problème limite

Préliminaires 2.8

On travaille sous les mêmes hypothèses qu'aux préliminaires 2.7.

On aura besoin du :

Lemme 2.8.1

Soit $u \in H^2(\Omega)$ *et soit* D *un sous-ensemble dénombrable de* $\mathbb{R}$. *Alors* $Au = 0$ *p.p. sur* $\{x \in \Omega : u(x) \in D\}$. $\triangle$

Preuve :

Lorsque $A = -\Delta$ le résultat est établi dans [Brézis[1], lemme 2]. Pour A général la démonstration est identique. $\triangle$

Problème 2.8

On étudie le comportement dans $L^q(\Omega) (q \geq 2)$ de la perturbation monotone $\beta(u_\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.

On obtient une estimation permettant de dégager un critère de consistance (mesure non nulle) pour la zone libre $[u = 0]$.

On analyse le contexte variationnel du problème limite ainsi que la stabilité dans $W^{2,p}(\Omega)$ de la solution limite u par rapport à f dans $L^p(\Omega)$.

Nous décrivons le comportement ponctuel de la perturbation monotone lorsque la zone libre est consistante mais sans intérieur.

Enfin, on établit des critères suffisants pour avoir une zone libre avec intérieur non vide. $\triangle$

2.8.1 Comportement de la perturbation monotone

Théorème 2.8.1

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Si u vérifie

$$\begin{cases} A\, u + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t > 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(+\infty) & t < 0 \end{cases}$$

alors $\forall \ q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} f - Au$$

et on a les estimations

$$|\beta(u_\varepsilon)|_q \leq |f - Au|_q$$
$$|f - Au|_p \leq |f|_p \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Soit $\varphi(t) = t \mid t \mid^{q-2} = \partial j(t), \ j(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q$.

On distingue les situations :

1. **β lipschitzienne**.

On observe d'abord que $\varepsilon u_\varepsilon - u \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \forall\, q \geq 2$ (voir th 2.7.1) et via les injections de Sobolev $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ donc $\varphi(\beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})) \in H_0^1(\Omega)$ lorsque β est lipschitzienne.

On peut écrire

$$A(\varepsilon u_\varepsilon - u) = f - Au - \beta(u_\varepsilon)$$

et une multiplication par $\varphi(\beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})) \in H_0^1(\Omega)$ donne

$$(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{0}$$
$$=$$
$$(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))$$
$$=$$
$$(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]} \longleftarrow \boxed{1}$$
$$+$$
$$(f - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]} \longleftarrow \boxed{2}$$
$$+$$
$$(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} \longleftarrow \boxed{3}$$

où

$$(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{0}$$
$$=$$
$$\varepsilon(\varphi' \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})\beta'(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j} a_{ij}(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})_{x_i}(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})_{x_j}) \geq$$

[φ, β croissantes, $q \geq 2$ et A elliptique]

$$\geq \boxed{0} \longleftarrow \boxed{00}$$

$$\boxed{1} \longrightarrow (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]} \leq$$

[β, φ croissantes, $\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon) \geq 0$]

$$\leq (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u>0]} \leq$$

[$\varphi = \partial j$]

$$\leq (f - Au - \beta(u_\varepsilon), \partial j \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u>0]} \leq$$

[j convexe]

$$\leq (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u>0])} =$$

[$j(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q$]

$$= \boxed{\frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u>0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u>0])}} \longleftarrow \boxed{11}$$

$$\boxed{3} \longrightarrow (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} \leq$$

[β, φ croissantes et $\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon) \leq 0$]

$$\leq (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u<0]} =$$

[$\varphi = \partial j$]

$$= (f - Au, \partial j \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u<0]} \leq$$

[j convexe]

$$\leq (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u<0]} =$$

[$j(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q$]

$$= \boxed{\frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u<0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u<0])}} \longleftarrow \boxed{33}$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (f - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]} =$$

[$\varphi = \partial j$]

$$= (f - \beta(u_\varepsilon), \partial j \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]} \leq$$

[j convexe]

$$\leq (j(f) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u=0]} =$$

$[\,j(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q]$

$$= \boxed{\frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u=0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u=0])}} \cdot \longleftarrow \boxed{22}$$

Dans ces conditions l'égalité

$$\begin{gathered}(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{0} \\ = \\ (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]} \longleftarrow \boxed{1} \\ + \\ (f - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]} \longleftarrow \boxed{2} \\ + \\ (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} \longleftarrow \boxed{3}\end{gathered}$$

devient l'inégalité :

$$\begin{gathered}0 \longleftarrow \boxed{00} \\ \leq \\ \frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u>0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u>0])} \longleftarrow \boxed{11} \\ + \\ \frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u=0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u=0])} \longleftarrow \boxed{22} \\ + \\ \frac{1}{q} \mid f - Au \mid^q_{L^q([u<0])} - \frac{1}{q} \mid \beta(u_\varepsilon) \mid^q_{L^q([u<0])} \longleftarrow \boxed{33}\end{gathered}$$

d'où par addition

$$|\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\Omega)} \leq |f - Au|_{L^q(\Omega)} \cdot$$

2. β **générale.**

Soit $\lambda > 0$.

On considère la régularisée Yosida du graphe monotone maximal univoque β :

$$\beta_\lambda = \frac{1_\mathbb{R} - (1_\mathbb{R} + \lambda\beta)^{-1}}{\lambda} \cdot$$

Soient les problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\lambda \in H^1_0(\Omega) \,. \end{cases}$$

D'après [lemme 1.4.2, points 1, 3, 5] β_λ est lipschitzienne, $\beta_\lambda = \beta((1_\mathbb{R} + \lambda\beta)^{-1}) \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ donc $\beta_\lambda(\pm\infty) = \beta(\pm\infty)$ car $(1_\mathbb{R} + \lambda\beta)^{-1}(\pm\infty) = \pm\infty$.

Le point précédent assure l'estimation

$$|\beta_\lambda(u_\lambda)|_q \leq |f - Au|_q$$

pour tout $q \geq 2$.

La réflexivité de l'espace $L^q(\Omega)$ donne, à une sous-suite près,

$$\beta_\lambda(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0]{L^q(\Omega) \text{ faible}} w \ .$$

On déduit aussi que $A(\varepsilon u_\lambda - u) = f - Au - \beta_\lambda(u_\lambda)$ reste bornée dans $L^q(\Omega)$ lorsque λ tend vers 0 (car $f - Au \in L^\infty(\Omega)$) et via le théorème 1.3.1 $\varepsilon u_\lambda - u$ sera bornée dans $W^{2,q}(\Omega)$.

La réflexivité de l'espace $W^{2,q}(\Omega)$ donne, à une sous-suite près,

$$\varepsilon u_\lambda - u \xrightarrow[\lambda \to 0]{W^{2,q}(\Omega) \text{ faible}} \varepsilon v - u$$

et via les injections de Sobolev

$$\varepsilon u_\lambda - u \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} \varepsilon v - u$$

d'où

$$u_\lambda - v \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} 0 \ .$$

On a aussi

$$A(\varepsilon u_\lambda - u) \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^q(\Omega)\text{ faible}} A(\varepsilon v - u)$$

donc $w = f - A\varepsilon v$ et la semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_q$ dans la topologie faible donne

$$|f - \varepsilon Av|_q \leq |f - Au|_q \ .$$

De par la définition de β_λ on a

$$\left|u_\lambda - (1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}(u_\lambda)\right|_q = \lambda\,|\beta_\lambda(u_\lambda)|_q \leq \lambda\,|f - Au|_q$$

et on déduit que

$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}(u_\lambda) - u_\lambda \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} 0$$

et, à une sous-suite près,

$$(1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}(u_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{\text{p.p. }\Omega} v$$

lorsque

$$u_\lambda - v \xrightarrow[\lambda\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} 0 \ .$$

D'après [lemme 1.4.2, points (4), (6)] on a $\beta_\lambda(u_\lambda) = \beta((1_{\mathbb{R}} + \lambda\beta)^{-1}(u_\lambda))$ d'où en notant que β est continue et la limite ponctuelle coïncide avec la limite faible dans $L^q(\Omega)$, on aura $w = f - A\varepsilon v = \beta(v)$ p.p. Ω.

Le passage à la limite au sens des distributions $(\lambda \to 0)$ dans le problème

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\lambda + \beta_\lambda(u_\lambda) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\lambda \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{cases} \varepsilon A v + \beta(v) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et du fait de l'unicité de la solution de ce problème $u_\varepsilon = v$.

Finalement on a l'estimation

$$|\beta(u_\varepsilon)|_q = |f - A\varepsilon u_\varepsilon|_q \leq |f - Au|_q$$

pour tout $q \geq 2$.

D'autre part, le théorème 2.7.1 assure $\forall\, q \geq 2$

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,q}(\Omega)\text{ faible}} 0$$

et en passant à la limite faible dans

$$A(\varepsilon u_\varepsilon - u) + \beta(u_\varepsilon) = f - Au$$

on obtient

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ faible}} f - Au \ .$$

L'estimation

$$|\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\Omega)} \leq |f - Au|_{L^q(\Omega)}$$

combinée avec la semicontinuité inférieure de la norme de $L^q(\Omega)$ dans la topologie faible donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_q = |f - Au|_q \ .$$

Comme l'espace $L^q(\Omega)$ est uniformément convexe $(2 \leq q < \infty)$ on aura

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} f - Au \ .$$

On a aussi

$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$

via les estimations spécifiques aux problèmes ayant une perturbation monotone [voir théorème 1.2.4].

La semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_{L^p(\Omega)}$ dans la topologie faible $L^p(\Omega)$ donne

$$|f - Au|_p \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$

donc

$$|f - Au|_p \leq |f|_p .$$

△

Remarque 2.8.1

En écrivant $A(\varepsilon u_\varepsilon - u) = f - Au - \beta(u_\varepsilon)$ *, le théorème 1.3.1 permet d'avoir* $\forall\, q \geq 2$

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_A\,|A(\varepsilon u_\varepsilon - u)|_q = C_A\,|f - Au - \beta(u_\varepsilon)|_q \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{théorème 2.8.1}} 0$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,q}(\Omega)\ \text{fort}} 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\ \text{fort}} u$$

donc on a amélioré le résultat du théorème 2.7.1. △

Remarque 2.8.2

On note qu'au point 2 de la démonstration du théorème 2.8.1, lorsque $p = q$ *on peut travailler sans impliquer la nature bornée de* β *car en ce cas l'estimation* $|\beta_\lambda(u_\lambda)|_p \leq |f|_p$ *spécifique aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4) assure* $|\varepsilon Au_\lambda|_p \leq 2\,|f|_p$ *puisque* $f \in L^p(\Omega)$ *.*

Ce fait sera utile lors de l'étude du cas β *non bornée mixte (voir théorème 2.12.2).*

△

2.8.2 Critère de consistance (mesure non nulle) pour $[u = 0]$

Théorème 2.8.2

Soit $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ telle que $|\,f\,|_p < \|\beta(+\infty)| \wedge |\beta(-\infty)\|_p$.

Si u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors $|[u = 0]| \neq 0$ et on peut contrôler $|[u = 0]|$ par l'estimation

$$|[u = 0]| \geq |\Omega|\,\|\beta(-\infty)| \wedge |\beta(+\infty)\|_{L^p(\Omega)}^{-p}\,\{\|\beta(-\infty)| \wedge |\beta(+\infty)\|_{L^p(\Omega)}^p - |f|_p^p + |f|_{L^p([u=0])}^p\} .$$

On a aussi

$$\frac{1}{|[u = 0]|}\int_{[u=0]} |f|^p \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f|^p .$$

Si en plus

$$f \notin K = \{g \in L^p(\Omega) :\ g \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] \text{ p.p. } \Omega\}$$

alors $|[u \neq 0]| \neq 0$ et

$$\frac{1}{|[u = 0]|}\int_{[u=0]} |f|^p \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f|^p \leq \frac{1}{|[u \neq 0]|}\int_{[u\neq 0]} |f|^p .$$

△

Preuve :

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Selon le théorème 2.8.1

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f - Au$$

avec l'estimation

$$|f - Au|_p \leq |f|_p \ .$$

On a successivement

$$|f|_p^p$$
$$\geq$$
$$|f - Au|_{L^p(\Omega)}^p$$
$$\boxed{\text{décomposition de domaine selon le signe de } u} \longrightarrow =$$
$$|f - Au|_{L^p([u>0])}^p + |f - Au|_{L^p([u=0])}^p + |f - Au|_{L^p([u<0])}$$
$$\boxed{\text{décomposition fonctionnelle}} \longrightarrow = \xrightarrow[f-Au=\beta(+\infty),\ [u>0]]{f-Au=\beta(-\infty),\ [u<0]} \leq \longleftarrow \boxed{f-Au=f \text{ p.p. } [u=0]}$$
$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]| + \int_{[u=0]} |f|^p + |\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$
$$=$$
$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]| + |f|_{L^p([u=0])}^p + |\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$
$$\geq$$
$$(|\beta(+\infty)|^p \wedge |\beta(-\infty)|^p)\{|[u>0]| + |[u<0]|\} + |f|_{L^p([u=0])}^p$$
$$\boxed{|[u>0]|+|[u=0]|+|[u<0]|=|\Omega|} \longrightarrow =$$
$$(|\beta(+\infty)|^p \wedge |\beta(-\infty)|^p)(|\Omega| - |[u=0]|) + |f|_{L^p([u=0])}^p$$
$$=$$
$$||\beta(+\infty)| \wedge |\beta(-\infty)||_p^p - \frac{|[u=0]|}{|\Omega|}||\beta(+\infty)| \wedge |\beta(-\infty)||_p^p + |f|_{L^p([u=0])}^p$$

d'où

$$|[u=0]| \geq |\Omega| \, ||\beta(-\infty)| \wedge |\beta(+\infty)||_{L^p(\Omega)}^{-p} \{||\beta(-\infty)| \wedge |\beta(+\infty)||_{L^p(\Omega)}^p - |f|_p^p\} > 0 \ .$$

En s'appuyant sur les inégalités précédentes on a aussi

$$|f|_p^p$$
$$\geq$$
$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]| + \int_{[u=0]} |f|^p + |\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$
$$=$$
$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]| + (\frac{1}{|[u=0]|}\int_{[u=0]} |f|^p)|[u=0]| + |\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$
$$\geq$$
$$\{|\beta(+\infty)|^p \wedge (\frac{1}{|[u=0]|}\int_{[u=0]} |f|^p) \wedge |\beta(-\infty)|^p\}\{|[u>0]| + |[u=0]| + |[u<0]|\}$$
$$= \longleftarrow \boxed{|[u>0]|+|[u=0]|+|[u<0]|=|\Omega|}$$
$$\{|\beta(+\infty)|^p \wedge (\frac{1}{|[u=0]|}\int_{[u=0]} |f|^p) \wedge |\beta(-\infty)|^p\}|\Omega|$$

$$=$$

$$\left(\frac{|\Omega|}{|[u=0]|}\int_{[u=0]}|f|^p\right)\wedge \||\beta(+\infty)|\wedge|\beta(-\infty)|\|_p^p$$

$$= \longleftarrow \boxed{|f|_p<\||\beta(+\infty)|\wedge|\beta(-\infty)|\|_p \text{ par hypothèse}}$$

$$\frac{|\Omega|}{|[u=0]|}\int_{[u=0]}|f|^p$$

d'où

$$\frac{1}{|[u=0]|}\int_{[u=0]}|f|^p \le \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f|^p \ .$$

Si $f\notin K$ et $|[u\neq 0]|=0$ alors $[u=0]=\Omega$ et le problème limite

$$\begin{cases} Au+\widetilde{\beta}(u)\ni f\in L^p(\Omega)\ (p\ge 2)\\ u\in H_0^1(\Omega)\end{cases} \qquad \beta(u)=\begin{cases}\beta(+\infty) & [u>0]\\ \in[\beta(-\infty),\beta(+\infty)] & [u=0]\\ \beta(-\infty) & [u<0]\end{cases}$$

force $f\in[\beta(-\infty),\beta(+\infty)]$ p.p. $[u=0]=\Omega$ c'est-à-dire $f\in K$ une contradiction donc $|[u\neq 0]|\neq 0$.

De nouveau

$$|f|_p^p$$

$$\ge$$

$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]|+\int_{[u=0]}|f|^p+|\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$

$$=$$

$$|\beta(+\infty)|^p|[u>0]|+|f|^p_{L^p([u=0])}+|\beta(-\infty)|^p|[u<0]|$$

$$\ge$$

$$(|\beta(+\infty)|^p\wedge|\beta(-\infty)|^p)\{|[u>0]|+|[u<0]|\}+|f|^p_{L^p([u=0])}$$

$$\boxed{|[u>0]|+|[u<0]|=|[u\neq 0]|}\longrightarrow =$$

$$(|\beta(+\infty)|^p\wedge|\beta(-\infty)|^p)(|[u\neq 0]|)+|f|^p_{L^p([u=0])}$$

$$=$$

$$\||\beta(+\infty)|\wedge|\beta(-\infty)|\|_p^p\frac{|[u\neq 0]|}{|\Omega|}+|f|^p_{L^p(\Omega)}-|f|^p_{L^p([u\neq 0])}$$

d'où

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f|^p \underset{\text{hypothèse}}{=\!=\!=} < \frac{1}{|\Omega|}\||\beta(+\infty)|\wedge|\beta(-\infty)|\|_p^p \le \frac{1}{|[u\neq 0]|}\int_{[u\neq 0]}|f|^p$$

ce qui complète le résultat. △

2.8.3 Contexte variationnel du problème limite

Théorème 2.8.3

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0)=0$.

Soit le problème limite

$$\begin{cases} \mathrm{A}u+\widetilde{\beta}(u)\ni f\in \mathrm{L}^p(\Omega)\ (p\ge 2)\\ u\in \mathrm{H}_0^1(\Omega)\end{cases}$$

avec $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Si j est une fonction convexe telle que $\partial j=\widetilde{\beta}$ alors u vérifie les problèmes quasivariation-

nels :

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 & \forall\ v \in K_1(u) \\ u \in K_1(u) = \{v \in H_0^1(\Omega)\ :\ (j(v), 1) \leq (j(u), 1)\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 & \forall\ v \in K_2(u) \\ u \in K_2(u) = \{v \in H_0^1(\Omega)\ :\ -u^- \leq v \leq u^+ \quad \text{p.p. } \Omega\} \end{cases}$$

où $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$. △

Preuve :

Par vérification.

D'abord $\forall\ v \in K_1(u)$

$$(Au - f, v - u) \geq (j(u) - j(v), 1) \geq 0$$

à cause de la convexité de j.

Ensuite, compte tenu du fait que

$$Au - f = -\chi_{[u>0]}\beta(+\infty) - \chi_{[u=0]}f - \beta(-\infty)\chi_{[u<0]}$$

on a $\forall\ v \in K_2(u) = \{w \in H_0^1(\Omega)\ :\ -u^- \leq w \leq u^+ \quad \text{p.p. } \Omega\}$

$$\begin{aligned}(Au - f, v - u) =& (\beta(+\infty), u - v)_{[u>0]} + (\beta(-\infty), u - v)_{[u<0]} + (f, u - v)_{[u=0]} = \\ =& (\beta(+\infty), u^+ - v)_{[u>0]} + (\beta(-\infty), -u^- - v)_{[u<0]} \geq 0\end{aligned}$$

d'où le résultat. △

Remarque 2.8.3

Si $f \geq 0$ p.p. Ω alors le principe du maximum [théorème 1.3.2] assure $u \geq 0$ p.p. Ω.

Dans ces conditions d'après le théorème 2.8.3 u sera la solution du problème à double obstacle

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall\ v \in K_2(u) \\ u \in K_2(u) = \{v \in H_0^1(\Omega)\ :\ 0 \leq v \leq u \quad p.p.\ \Omega\} \end{cases}$$

avec les obstacles 0, $u \in W^{2,p}(\Omega)$ [pour la régularité de u voir le théorème 2.7.1].

Cette interprétation permet d'aborder l'existence et la régularité de la frontière libre $\partial[u = 0]$ et la consistance de la zone libre $[u = 0]$ dans le cadre de la théorie sur le problème du double obstacle bien représentée dans la littérature (voir par exemple [Chipot[1]], [Rodrigues], [Díaz], [Friedman], [Troianiello], [Kinderlehrer et Stampacchia]). △

2.8.4 Stabilité de la solution du problème limite

Théorème 2.8.4

Soit l'application

$$f \in L^p(\Omega) \text{ fort} \xmapsto{T} W^{2,p}(\Omega) \text{ faible} \ni Tf$$

définie par

$$\begin{cases} ATf + \beta(Tf) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p \geq 2) \\ Tf \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où β est un graphe maximal monotone tel que $\beta(0) \ni 0$.

Alors T est continue.

Si β est univoque alors T est continue de $L^q(\Omega)$ fort dans $W^{2,q}(\Omega)$ fort pour tout $1 \leq q < p$. △

Preuve :

Soit $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite telle que

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f \ .$$

On note $Tf_\varepsilon = u_\varepsilon$ et nous montrons que

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

où $u = Tf$.

D'après le théorème 1.2.4 on a l'existence et l'unicité d'une solution $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que

$$|f_\varepsilon - Au_\varepsilon|_p \leq |f_\varepsilon|_p \quad , \quad |Au_\varepsilon|_p \leq 2|f_\varepsilon|_p \ .$$

On a aussi à l'aide du théorème 1.3.1

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A |Au_\varepsilon|_p \leq C$$

avec C indépendante de ε .

L'espace réflexif $W^{2,p}(\Omega)$ permet d'avoir, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} w$$

et via les injections de Sobolev $(p \geq 2)$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} w \ .$$

On a aussi

$$Au_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} Aw \ .$$

Le lemme 1.4.2 (point 6) assure p.p. Ω

$$f - Aw \in \beta(w)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} Aw + \beta(w) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et du fait de l'unicité de la solution de ce problème

$$w = u = Tf \ .$$

Si β est univoque alors le lemme 2.3.2 assure

$$f_\varepsilon - Au_\varepsilon = \beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} \beta(u) = f - Au$$

car u_ε converge vers u dans $L^p(\Omega)$ fort donc ponctuellement à une sous-suite près, β est continue, $\beta(u_\varepsilon)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ car $|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$ et enfin $\beta(u_\varepsilon) \in L^p(\Omega) \ni \beta(u)$ car $u_\varepsilon, u \in W^{2,p}(\Omega)$.

On déduit que

$$Au_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega) \text{ fort}} Au$$

et via le théorème 1.3.1 on obtient

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,q}(\Omega) \text{ fort}} u$$

pour tout $1 \leq q < p$. $\triangle$

2.8.5 Zone libre sans intérieur

Théorème 2.8.5

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

On suppose que $[u = 0]$ est de mesure non nulle et d'intérieur vide.

Si u_ε vérifie

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors, à une sous suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [u=0]} u_0$$

où $u_0 = \beta^{-1}(f)$ avec la convention $\beta^{-1}(\beta(\pm\infty)) = \pm\infty$. △

Preuve :

Selon te théorème 2.8.1 on a la convergence

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f - Au$$

et à une sous-suite près

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} f - Au \quad .$$

A l'aide du lemme 2.8.1 nous avons $Au = 0$ p.p. $[u = 0]$ donc avec β^{-1} continue et $f \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ dans $[u = 0]$ il vient

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [u=0]} u_0 = \beta^{-1}(f)$$

ce qu'on voulait montrer. △

2.8.6 Zone libre avec intérieur non vide

Théorème 2.8.6

Soit $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Soit des fonctions $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ avec $\varphi \geq 0 \geq \psi$ p.p. Ω et ayant les supports disjoints.

On considère la fonction de $L^p(\Omega)$

$$f \begin{cases} = (A\varphi + \beta(+\infty))\chi_{[\varphi \neq 0]} + (A\psi + \beta(-\infty))\chi_{[\psi \neq 0]} & \text{dans } [\varphi \neq 0] \cup [\psi \neq 0] \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où χ dénote la fonction caractéristique d'un ensemble.

Alors la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet la forme

$$u = \varphi + \psi$$

avec

$$[u = 0] = [\varphi = 0] \cup [\psi = 0]$$

un fermé de mesure non nulle et ayant l'intérieur non vide. △

Preuve :
Par vérification.
On rappelle la forme de $\widetilde{\beta}$:

$$\widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t<0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t=0 \\ \beta(+\infty) & t>0\ . \end{cases}$$

Dans $[\varphi \neq 0]$ on a $u=\varphi>0$ et $f = A\varphi + \beta(+\infty)$ donc

$$Au + \widetilde{\beta}(u) = A\varphi + \beta(+\infty) = f\ .$$

Dans $[\psi \neq 0]$ on a $u=\psi<0$ et $f = A\psi + \beta(-\infty)$ donc

$$Au + \widetilde{\beta}(u) = A\psi + \beta(-\infty) = f\ .$$

Dans $[\varphi = \psi = 0]$ on a $u=0$ et $f \in Au + \widetilde{\beta}(u) = [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ en utilisant le lemme 2.8.1.

Comme le problème limite admet une solution unique on déduit que

$$u = \varphi + \psi\ .$$

Il est évident que l'intérieur de $[u=0] = [\varphi = 0] \cup [\psi = 0]$ est non vide lorsque les supports des fonctions φ, ψ sont disjoints. $\triangle$

2.8.7 Zone libre avec intérieur non vide. Suite

Théorème 2.8.7
Soit $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1 et $f \in L^p(\Omega)(p>n)$.
Soit l'opérateur elliptique A de la forme

$$Av = -\sum_{i,j}^{n} a_{ij} v_{x_i x_j}$$

avec les coefficients a_{ij} constants.
Soient les ensembles

$$N_\lambda = \{x \in \Omega : \beta(-\infty) + \lambda \le f(x) \le \beta(+\infty) - \lambda\}\ .$$

Si u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p>n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors on a l'estimation suivante pour la zone libre :

$$[u=0] \supset \{x \in N_\lambda : d(x, \mathbb{R}^n - N_\lambda) \ge L\}$$

où $L = \left(|u|_\infty c^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ avec $c = \lambda(2\sum_i^n a_{ii})^{-1}$. $\triangle$

Preuve :
On voit d'abord que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ via le théorème 2.7.1 et les injections de Sobolev lorsque $p>n$.
Soit $x_0 \in N_\lambda$ et $\omega = \{x \in \Omega : d(x_0, x) < r\}$ avec $r = d(x_0, \mathbb{R}^n - N_\lambda)$.
On introduit la fonction

$$u_0(x) = v(x)c$$

avec $v(x) = |x-x_0|^2$ et $c>0$ une constante qui sera fixée ultérieurement.
On note que $-Av = 2\sum_i^n a_{ii} > 0$ est une constante.
Dans ces conditions nous avons p.p. dans ω (en notant que $u_0>0$ sauf en x_0)

$$Au_0 + \widetilde{\beta}(u_0) \ge cAv + \beta(+\infty) \ge -\lambda + \beta(+\infty) \ge f$$

et sur $\partial\omega$

$$u_0 = cr^2 \ge u$$

lorsque $c = -\frac{\lambda}{Av}$ et $r = \left(\frac{|u|_\infty}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$.
Le principe du maximum donne p.p. ω

$$u \le u_0\ .$$

On a aussi p.p. dans ω

$$A(-u_0) + \widetilde{\beta}(-u_0) \le -cAv + \beta(-\infty) \le +\lambda + \beta(-\infty) \le f$$

et sur $\partial\omega$

$$-u_0 = -cr^2 \leq u \ .$$

Le principe du maximum donne p.p. ω

$$u \geq -u_0 \ .$$

Finalement on a obtenu p.p. ω

$$-u_0 \leq u \leq u_0$$

d'où pour $x = x_0$ on tire $u(x_0) = 0$ c'est-à-dire $x_0 \in [u = 0]$. △

Remarque 2.8.7

La démonstration du théorème 2.8.7 est classique dans la théorie du potentiel, pour le cas du pseudo-laplacien on trouve cette approche dans [Díaz, théorème 2.17, pg 144].

Selon le théorème 2.8.1 on a l'estimation

$$|f - Au|_p \leq |f|_p$$

d'où

$$|Au|_p \leq 2\,|f|_p$$

et via le théorème 1.3.1

$$|u|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2C_A\,|f|_p$$

avec C_A *indépendante de* $u,\ f,\ \widetilde{\beta}$.

A l'aide des injections de Sobolev $(p > n)$ *il vient*

$$|u|_\infty \leq C\,|f|_p$$

avec C *indépendante de* $u,\ f,\ \widetilde{\beta}$.

D'après le théorème 2.8.7 on aura

$$[u = 0] \supset \{x \in N_\lambda : d(x, \mathbb{R}^n - N_\lambda) \geq L\}$$

où $L = \left(C\,|f|_p\, c^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ *avec* $c = \lambda(2\sum_i^n a_{ii})^{-1}$.

On déduit que pour $\beta(\pm\infty)$ *assez grands et* f *continue on peut choisir* λ *tel que la zone libre contienne un ouvert.* △

2.8.8 Seuil de régularité pour la solution limite

Théorème 2.8.8

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} \mathrm{A\,u} + \widetilde{\beta}(\mathrm{u}) \ni \mathrm{f} \in \mathrm{L^p}(\Omega)\ (\mathrm{p} \geq 2) \\ \mathrm{u} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \beta(-\infty) & \mathrm{t} < 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & \mathrm{t} = 0 \\ \beta(+\infty) & \mathrm{t} > 0\,. \end{cases}$$

Alors en général $\mathrm{u} \notin \mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega)$ si $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $\mathrm{a_{ij}} \in \mathrm{C}^2(\Omega)$.

Si $\mathrm{A} = -\Delta$ et $\mathrm{f} \in \mathrm{L^p}(\Omega) \cap \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$ alors $\mathrm{Au} \in \mathrm{L^p}(\Omega) \cap \mathrm{W}^{1,1}(\Omega)$.

Si de plus $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, alors $\mathrm{u} \in \mathrm{W^{s,p}}(\Omega)$ pour tout $1 < \mathrm{p} < \infty$ et tout $\mathrm{s} < 2 + \frac{1}{\mathrm{p}}$. △

Preuve :

On sait qu'en général $v \notin W^{2,\infty}(\Omega)$ si $Av \in L^\infty(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ (voir [Trudinger]) et soient $g \in L^\infty(\Omega)$ et $v \notin W^{2,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telles que $Av = g$.

Nous considérons la solution $u_* \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $A\,u_* = 1$.

Selon le théorème 1.3.1 et les injections de Sobolev on aura $v \in W^{2,q}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ et $u_* \in W^{2,\infty}(\Omega)$ pour tout $n < q < \infty$.

Le principe du maximum de [Bony] assure $u_* > 0$ et $v + |g|_\infty u_* \geq 0$ p.p. Ω.

Il est évident que la fonction $u = v + |g|_\infty u_* + u_* \notin W^{2,\infty}(\Omega)$ est strictement positive p.p. Ω et satisfait

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) = f = g + |g|_\infty + 1 \in L^\infty(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

La suite de la conclusion est due à [Brézis [1]]. Sa démonstration est susceptible d'une version avec A un opérateur elliptique général. △

Commentaires 2.8

2.8.1 Comportement de la perturbation monotone

Ce résultat est la version avec β bornée du théorème 2.2.2 où β était non bornée. On observe que $f - A0$ a été remplacée par $f - Au$ ce qui est naturel. La technique utilisée est une variante de la méthode de monotonie qui permet d'estimer $|\beta(u_\varepsilon)|_q$ via une multiplication par $\varphi(\beta(u_\varepsilon))$ où φ est le sous-différentiel de la fonction convexe $j(t) = \frac{1}{q}|t|^q$ qui réalise $L^q(\Omega)$ comme un espace de Orlicz [Adams]. On utilise une décomposition de domaine Ω selon le signe de u, décomposition qui suit la structure de $f - Au$ aussi réglée par le signe de u. Le théorème 1.2.1 permet d'équilibrer toutes les inégalités impliquées. La suite de la démonstration utilise des techniques variationnelles classiques.

Les inégalités spécifiques aux perturbations monotones permettent d'obtenir une l'inégalitée $|f - Au|_p \leq |f|_p$ à l'aide de laquelle on va d'établir un critère de consistance pour $[u = 0]$ ce qui est l'objet du théorème 2.8.2. △

2.8.2 Critère de consistance pour $[u = 0]$

De nouveau, des décompositions de domaine selon le signe de u permettent d'isoler $|[u = 0]|$ en s'appuyant sur l'estimation $|f - Au|_p \leq |f|_p$. Sous des hypothèses qui rendent $|[u \neq 0]|$ consistant, on met en évidence la propriété de séparation suivante :

$$\frac{1}{|[u=0]|}\int_{[u=0]} |f|^p \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} |f|^p \leq \frac{1}{|[u \neq 0]|}\int_{[u\neq 0]} |f|^p \ .$$

L'importance de ce résultat est multiple : d'abord il légitimise tous les résultats obtenus dans ce travail et qui impliquent la consistance de $[u = 0]$, ensuite, vu la difficulté de contrôler $|[u = 0]|$ par des méthodes directes, on utilise des techniques proches de la théorie du potentiel basées sur le principe du maximum avec des fonctions barrières, techniques qui sont laborieuses et qui impliquent des données globales sur u déjà difficile à contrôler, en ce sens à voir, par exemple, [Díaz] et le théorème 2.8.7. Ici on impose seulement une contrainte globale sur f qui est connue.

Notons que l'ensemble $[u = 0]$ peut avoir l'intérieur vide. Le théorème 2.8.5 précise le comportement de la solution perturbée en ce cas. △

2.8.3 Contexte variationnel du problème limite

Le premier problème variationnel place le problème limite au cadre du troisième chapitre de ce travail sur les problèmes avec des contraintes non locales. Le deuxième problème variationnel interprète le problème limite comme un problème à double obstacle.

Notons que les contraintes variationnelles sont dépendantes de la solution et en ce cas on a un problème quasivaritionnel. Ce type de problème est abordé par exemple dans [Baiocchi C. et Capelo A.] et [Hanouzet B. et Joly J. L.]. △

2.8.4 Stabilité de la solution du problème limite

Ce résultat permet d'approximer dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort la solution u du problème limite lorsqu'on approche f dans $L^p(\Omega)$ fort. On peut travailler avec des fonctions f plus simples à manipuler et des fonctions $Tf = u$ peut être plus faciles à caractériser. △

2.8.5 Zone libre sans intérieur de mesure non nulle

On établit la convergence ponctuelle de la solution pénalisée u_ε vers $u_0 = \beta^{-1}(f)$ lorsque la zone libre $[u = 0]$ est de mesure non-nulle avec l'intérieur vide.

Notons que la zone libre est un fermé si u est continue et un fermé de $\mathbb{R}^n$ peut avoir l'intérieur vide et la mesure non vide. Il est possible de construire une telle zone libre en remarquant que p.p. $[u = 0] \subset [\beta(-\infty) \leq f \leq \beta(+\infty)]$ et prendre f comme dans le théorème 2.8.2 avec $[\beta(-\infty) \leq f \leq \beta(+\infty)]$ un ensemble de type Cantor : compact, totalement disconnexe et parfait (voir [Holmgren], pg. 73). Pour une construction systématique et déterministe des ensembles de type Cantor voir la théorie des fractals [Mandelbrot]. Le théorème 2.8.2 assure une zone libre de mesure non nulle mais ne donne aucune précision sur la structure de l'ensemble

$[u = 0]$. Pour des critères assurant l'intérieur non vide voir [Díaz, théorème 2.17, pg. 144] et les théorèmes 2.8.6 et 2.8.7. △

2.8.6 Zone libre avec intérieur non vide

On construit une classe de fonctions f pour lesquelles la solution limite u admet une forme explicite ; en particulier avec une zone libre $[u = 0]$ d'intérieur non vide. On peut affaiblir les conditions sur les fonctions φ, ψ en exigeant seulement φ, $\psi \in W^{2,p}(\Omega)(p > n)$ avec i dans un ensemble dénombrable.

Ce résultat suggère la réciproque suivante :

Est que la solution limite $u \in W^{2,p}(\Omega)(p > n)$ peut ce représenter comme limite (par exemple dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible) de fonctions de la forme $\varphi + \psi$ avec $\varphi, \psi \in W^{2,p}(\Omega)$ ayant les supports disjoints et $\varphi \geq 0 \geq \psi$?

Une condition nécessaire et suffisante pour réaliser ceci (en observant le théorème 2.8.4) serait que toute $f \in L^p(\Omega)$ soit la limite dans $L^p(\Omega)$ fort de fonctions g admettant une décomposition de la forme suivante : $g \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ dans $\Omega - ([\varphi \neq 0] \cup [\psi \neq 0])$ et $g = (A\varphi + \beta(+\infty))\chi_{[\varphi \neq 0]} + (A\psi_i + \beta(-\infty))\chi_{[\psi \neq 0]}$ ailleurs. △

2.8.7 Zone libre avec intérieur non vide. Suite

On donne un critère basé sur des techniques de la théorie du potentiel. On trouve cette approche dans [Díaz, théorème 2.17] pour le cas du pseudo-laplacien. On utilise le fait qu'on dispose d'une estimation uniforme (indépendante de $\widetilde{\beta}$) sur la solution limite à l'aide du théorème 2.8.1 et les injections de Sobolev.

La technique utilisée permet aussi d'aborder les problèmes de l'obstacle pour lesquels on dispose d'une estimation uniforme indépendante de la perturbation monotone impliquée (voir aussi [Díaz, remarque 2.8, pg.146]). △

2.8.8 Seuil de régularité pour la solution limite

On montre que pour la donnée $f \in L^\infty(\Omega)$ on n'a pas en général $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$. La démonstration est basée sur le fait qu'en général la solution du problème de Dirichlet $Aw \in L^\infty(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ n'est pas dans $W^{2,\infty}(\Omega)$. Le résultat décrivant la régularité maximale de u lorsque $f \in L^p(\Omega)$ est du à [Brézis[1]]. △

2.9 Perturbations monotones bornées

Comportement de $\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon$ selon la nature asymptotique de β

Préliminaires 2.9

La même base des hypothèses qu'aux préliminaires 2.7.

On exige pour β un comportement asymptotique d'ordre $q \geq 1$ autour de $\pm\infty$ (voir aussi les préliminaires 2.6). $\triangle$

Problème 2.9

Soient les problèmes

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

avec $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

On veut obtenir des estimations pour $\varepsilon u_\varepsilon - u$ dans les espaces $H_0^1(\Omega)$, $L^p(\Omega)(2 \leq p \leq \infty)$ avec contrôle de la vitesse de convergence. $\triangle$

2.9.1 Comportement de $\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon$ selon la nature asymptotique de β .

Estimation de $\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}$

Théorème 2.9.1

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Soit β telle que

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))t \leq \beta_1^+ \quad \forall\ t \geq 0, \quad \beta_1^+ > 0 \text{ constante}$$
$$(\beta(-\infty) - \beta(t))t \leq \beta_1^- \quad \forall\ t \leq 0, \quad \beta_1^- > 0 \text{ constante} .$$

Alors

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{H_0^1(\Omega)} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} C$$

avec C une constante indépendante de ε et u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

Comme dans la démonstration du théorème 2.7.1 on obtient

$$\alpha_A |\varepsilon u_\varepsilon - u|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq X_\varepsilon = (Y_\varepsilon, 1)$$

avec $Y_\varepsilon = \varepsilon Y(u_\varepsilon) = \varepsilon u_\varepsilon^+(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)) - \varepsilon u_\varepsilon^-(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon))$.

Les conditions sur β permettent d'avoir $\forall\ a \in \mathbb{R}$

$$Y(a) \leq \begin{cases} \beta_1^+ & \text{si } a \geq 0 \\ \beta_1^- & \text{si } a \leq 0 \ . \end{cases}$$

Si on pose $C_\infty = \max\{\beta_1^+, \beta_1^-\}$ on aura

$$\frac{1}{\varepsilon} Y_\varepsilon = Y(u_\varepsilon) = u_\varepsilon^+(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)) - u_\varepsilon^-(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon)) \leq C_\infty$$

ce qui entraîne

$$a_A |\varepsilon u_\varepsilon - u|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq X_\varepsilon = (Y_\varepsilon, 1) \leq |\Omega| C_\infty \varepsilon$$

d'où le résultat pour $C = (\alpha_A^{-1} |\Omega| C_\infty)^{\frac{1}{2}}$. $\triangle$

2.9.2 Estimations sans contrainte sur u_0. Un exemple

Théorème 2.9.2

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit $\varphi_q(t) = t|t|^{q-2}$, $q > 2$, $q + q' = q'q$ et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Soit β telle que

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \le \beta_q^+ \quad \forall\ t \ge 0, \quad \beta_q^+ > 0 \text{ constante}$$
$$(\beta(-\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \le \beta_q^- \quad \forall\ t \le 0, \quad \beta_q^- > 0 \text{ constante}.$$

Soient les problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^2(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Alors pour tout domaine $\omega \subset [u = 0]$ tel que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$ on a, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^r(\omega)\text{ fort}} u_0$$

pour tout $1 \le r < q - 1$ avec les estimations

$$|u_\varepsilon|_{L^{q-1}(\omega \subset [u=0])} \le C$$

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon^{\frac{1}{q'}} C$$

où la constante C est indépendante de ε. △

Preuve :

D'après le théorème 2.7.1 et les injections de Sobolev on a $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega})$.

En multipliant par $\varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u) \in H_0^1(\Omega)$ l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ écrite sous la forme $A(\varepsilon u_\varepsilon - u) = f - Au - \beta(u_\varepsilon)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u)) \\
&\overset{\text{décomposition de domaine selon le signe de } u}{=} \\
&(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u>0]} \\
&+ \\
&(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u=0]} \\
&+ \\
&(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u<0]} \\
&= \\
&(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u>0]} \\
&+ \\
&(f - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u=0]} \\
&+ \\
&(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u<0]}\,.
\end{aligned}$$

décomposition fonctionnelle

$$f - Au \begin{cases} = \beta(-\infty) & [u<0] \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & [u=0] \\ = \beta(+\infty) & [u>0] \end{cases}$$

On va estimer chaque terme de l'égalité

$$\begin{aligned}
&(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u)) \longleftarrow \boxed{0} \\
&= \\
\boxed{1} \longrightarrow &(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u>0]} \\
&+ \\
&(f - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u=0]} \longleftarrow \boxed{2} \\
&+ \\
\boxed{3} \longrightarrow &(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u<0]}\,.
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$\boxed{0} \longrightarrow (A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u)) \ge$$

[via le théorème 1.2.2]

$$\geq \boxed{(C_q^A)^{-1}\,|\varepsilon u_\varepsilon - u|_q^q} \longleftarrow \boxed{00}$$

$$\boxed{1} \longrightarrow (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u>0]} \leq$$

[φ_q croissante ($q \geq 2$), $\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon) \geq 0$ et $u > 0$ dans $[u > 0]$]

$$\leq (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u>0]} \leq$$

[φ_q homogène]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u>0]} \leq$$

[$\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon) \geq 0$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u>0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]} \leq$$

[par hypothèse $(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq \beta_q^+ \ \ \forall\ t \geq 0$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta_q^+, 1)_{[u>0]} \leq$$

$$\leq \boxed{\varepsilon^{q-1}\beta_q^+ |[u > 0]|} \longleftarrow \boxed{11}$$

$$\boxed{3} \longrightarrow (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon - u))_{[u<0]} \leq$$

[φ_q croissante ($q \geq 2$), $\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon) \leq 0$]

$$\leq (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u<0]} \leq$$

[φ_q homogène]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u<0]} \leq$$

[$\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon) \leq 0$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u<0]\cap[u_\varepsilon\leq 0]} \leq$$

[par hypothèse $(\beta(-\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq \beta_q^- \ \ \forall\ t \leq 0$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(\beta_q^-, 1)_{[u<0]} \leq$$

$$\leq \boxed{\varepsilon^{q-1}\beta_q^- |[u < 0]|} \longleftarrow \boxed{33}$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (f - \beta(u_\varepsilon), \varphi(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u=0]} =$$

[φ_q homogène]

$$= \varepsilon^{q-1}(f - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]} =$$

[décomposition de $[u = 0]$ selon la position de u_ε par rapport à 0]

$$\boxed{2.1} \longrightarrow = \varepsilon^{q-1}(f - \beta(+\infty), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]}$$
$$+$$
$$\varepsilon^{q-1}(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]} \longleftarrow \boxed{2.2}$$
$$+$$
$$\boxed{2.3} \longrightarrow \varepsilon^{q-1}(f - \beta(-\infty), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon<0]}$$
$$+$$
$$\varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon<0]} \longleftarrow \boxed{2.4}$$

où

$$\boxed{2.1} \longrightarrow \varepsilon^{q-1}(f - \beta(+\infty), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]} \leq$$

[$f - \beta(+\infty) \leq 0$ dans $[u = 0]$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(f - \beta(+\infty), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]\cap\omega} \leq$$

[par hypothèse $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$, $|f|_{L^\infty(\omega)} - \beta(+\infty) < 0$]

$$\leq \varepsilon^{q-1}(|f|_{L^\infty(\omega)} - \beta(+\infty), \varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\geq 0]\cap\omega} =$$

[$\omega \subset [u = 0]$]

$$= \boxed{\varepsilon^{q-1}(|f|_{L^\infty(\omega)} - \beta(+\infty))\,|u_\varepsilon|^{q-1}_{L^{q-1}([u_\varepsilon\geq 0]\cap\omega)}} \longleftarrow \boxed{21}$$

$$\boxed{2.3} \longrightarrow \varepsilon^{q-1}(f-\beta(-\infty),\varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon<0]} \le$$

$[\, f-\beta(-\infty)\ge 0$ dans $[u=0]\,]$

$$\le \varepsilon^{q-1}(f-\beta(-\infty),\varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\le 0]\cap\omega} \le$$

$[-|f|_{L^\infty(\omega)}\le f$ et $u_0=\beta^{-1}(f)\in L^\infty(\omega)\,]$

$$\le \varepsilon^{q-1}(-|f|_{L^\infty(\omega)}-\beta(-\infty),\varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\le 0]\cap\omega} =$$

$[\,\omega\subset[u=0]\,]$

$$= \boxed{\varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty)+|f|_{L^\infty(\omega)})\,|u_\varepsilon|_{L^{q-1}([u_\varepsilon\le 0]\cap\omega)}} \longleftarrow \boxed{23}$$

$$\boxed{2.2} \longrightarrow \varepsilon^{q-1}(\beta(+\infty)-\beta(u_\varepsilon),\varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon\ge 0]} \le$$

[par hypothèse $(\beta(+\infty)-\beta(t))t\le\beta_1^+ \ \ \forall\ t\ge 0$]

$$\le \boxed{\varepsilon^{q-1}\beta_q^+|[u=0]|} \longleftarrow \boxed{22}$$

$$\boxed{2.4} \longrightarrow \varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty)-\beta(u_\varepsilon),\varphi_q(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap[u_\varepsilon<0]} \le$$

[par hypothèse $(\beta(-\infty)-\beta(t))t\le\beta_q^- \ \ \forall\ t\le 0$]

$$\le \boxed{\varepsilon^{q-1}\beta_q^-|[u=0]|} \longleftarrow \boxed{24}$$

Dans ces conditions, l'égalité du départ

$$\begin{gathered}
(A(\varepsilon u_\varepsilon-u),\varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon-u)) \longleftarrow \boxed{0}\\
=\\
\boxed{1}\longrightarrow(\beta(+\infty)-\beta(u_\varepsilon),\varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon-u))_{[u>0]}\\
+\\
(f-\beta(u_\varepsilon),\varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon))_{[u=0]}\longleftarrow\boxed{2}\\
+\\
\boxed{3}\longrightarrow(\beta(-\infty)-\beta(u_\varepsilon),\varphi_q(\varepsilon u_\varepsilon-u))_{[u<0]}
\end{gathered}$$

devient l'inégalité

$$\begin{gathered}
\boxed{00}\longrightarrow(C_q^A)^{-1}\,|\varepsilon u_\varepsilon-u|^q_{L^q(\Omega)}\\
\le\\
\varepsilon^{q-1}\beta_q^+|[u>0]|\longleftarrow\boxed{11}\\
+\\
\boxed{21}\longrightarrow\varepsilon^{q-1}(|f|_{L^\infty(\omega)}-\beta(+\infty))\,|u_\varepsilon|^{q-1}_{L^{q-1}([u_\varepsilon\ge 0]\cap\omega)}\\
+\\
\varepsilon^{q-1}(\beta(-\infty)+|f|_{L^\infty(\omega)})\,|u_\varepsilon|_{L^{q-1}([u_\varepsilon\le 0]\cap\omega)}\longleftarrow\boxed{22}\\
+\\
\boxed{23}\longrightarrow\varepsilon^{q-1}\beta_q^+|[u=0]|\\
+\\
\varepsilon^{q-1}\beta_q^-|[u=0]|\longleftarrow\boxed{24}\\
+\\
\boxed{33}\longrightarrow\varepsilon^{q-1}\beta_q^-|[u<0]|
\end{gathered}$$

d'où

$$|u_\varepsilon|^{q-1}_{L^{q-1}(\omega)} =$$

[décomposition de ω selon la position de u_ε par rapport à 0]

$$= |u_\varepsilon|^{q-1}_{L^{q-1}([u_\varepsilon\ge 0]\cap\omega)} + |u_\varepsilon|^{q-1}_{L^{q-1}([u_\varepsilon\le 0]\cap\omega)} \le$$

$$\le |\Omega|(\beta_q^++\beta_q^-)\times\{(\beta(+\infty)-|f|_{L^\infty(\omega)})^{-1}+(|f|_{L^\infty(\omega)}+\beta(-\infty))^{-1}\}$$

et

$$|\varepsilon u_\varepsilon-u|^q_{L^q(\Omega)} \le \varepsilon^{q-1}C_q^A|\Omega|\{\beta_q^++\beta_q^-\}\,.$$

D'après le théorème 2.7.1 $\forall\, q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} f - Au$$

d'où, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\Omega} f - Au$$

et avec β^{-1} continue en particulier

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\omega\subset[u=0]} u_0 = \beta^{-1}(f) \ .$$

L'estimation

$$|u_\varepsilon|_{L^{q-1}(\omega)} \leq C$$

avec C indépendante de ε permet d'appliquer le lemme 2.3.2 pour avoir

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^r(\omega)\text{ fort}} u_0$$

pour tout $1 \leq r < q-1$ ce qui complète le résultat.

$\triangle$

Remarque 2.9.2

Dans la démonstration du théorème 2.9.1 on a obtenu l'estimation

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{L^q(\Omega)} \leq \varepsilon^{\frac{1}{q'}} C$$

où la constante C indépendante de ε admet la forme explicite :

$$C = (C_q^A)^{\frac{1}{q}} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \{\beta_q^+ + \beta_q^-\}^{\frac{1}{q}}$$

$$C_q^A = \frac{1}{q-1}\left(\frac{q}{2}\right)^2 C_P^2 \alpha_A^{-1}$$

C_P = constante de l'inégalité de Poincaré indépendante de q voir théorème 1.1.1 .

Si

$$\infty > \lim_{q\to\infty} (\beta_q^+ + \beta_q^-)^{\frac{1}{q}}$$

alors la seconde estimation du théorème 2.9.2 permet d'avoir en faisant tendre q vers l'infini

$$\left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lim_{q\to\infty} (\beta_q^+ + \beta_q^-)^{\frac{1}{q}}$$

car

$$\lim_{q\to\infty} (C_p^A)^{\frac{1}{q}} \overset{\text{voir théorème 1.2.1}}{\underset{C_q^A = \alpha_A^{-1} q q' C,\ C \text{ constante indépendante de } q}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} 1 \ .$$

$\triangle$

Si on se place dans les conditions du théorème 2.9.2, alors on a l'exemple :

Exemple 2.9.2(Homographie exponentielle)

Si $\boxed{\beta(t) = \frac{e^t-1}{e^t+1},\ \beta(\pm\infty) = \pm 1}$, *alors* $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de ε .

$\triangle$

Preuve :

Si on pose $c_\pm = \pm 1$, on a pour tout q entier tel que $q \geq 2$

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \overset{t\geq c_+}{=\!=\!=} \frac{2t^q}{1+e^t} = \frac{2t^q}{1+\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k} \leq \frac{2t^q}{t^q \sum\limits_{k=q}^{\infty} \frac{1}{k!}t^{k-q}} =$$

$$= \frac{2}{\sum\limits_{k=q}^{\infty} \frac{1}{k!}t^{k-q}} \leq \underset{t\geq 1}{=\!=\!=} \leq \sum_{k=q}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{2}{e - \sum\limits_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!}} \ .$$

Nous montrons par récurrence que $\forall\ q \geq 2$

$$e - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \geq \frac{2}{q} \ .$$

Pour $q = 2,\ e - \frac{1}{1!} \geq \frac{2}{2}$ puisque $e \geq 2$.
Si on suppose vraie l'inégalité $\forall\ q \geq 2$

$$e - \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} \geq \frac{2}{q}$$

alors

$$e - \sum_{k=0}^{q+1} \frac{1}{k!} \geq \frac{2}{q} - \frac{1}{(q+1)!} \geq \frac{2}{q+1}$$

étant donné que

$$\frac{2}{q} - \frac{1}{(q+1)!} \geq \frac{2}{q+1}$$

revient à

$$2(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}) = \frac{2}{q(q+1)} \geq \frac{1}{(q+1)!}$$

ou

$$2 \geq \frac{1}{(q-1)!}$$

ce qui est évident $\forall\ q \geq 2$.

Tout ceci entraîne

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq q \vee \left(\beta(+\infty)|c_+|^{q-1}\right) = q \vee \beta(+\infty) \underset{\text{notation}}{=\!=\!=} \beta_q^+ \qquad \forall\ t \geq 0 \ .$$

De la même manière on obtient que

$$(\beta(-\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq q \vee \left(\beta(-\infty)|c_-|^{q-1}\right) = q \vee |\beta(-\infty)| \underset{\text{notation}}{=\!=\!=} \beta_q^- \qquad \forall\ t \leq 0 \ .$$

Dans ces conditions

$$\lim_{q\to\infty} (\beta_q^+ + \beta_q^-)^{\frac{1}{q}} = \lim_{q\to\infty} 2^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} = 1 \ .$$

La remarque 2.9.2 assure

$$\left| u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \right|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$$

et on peut prendre $C = 1$. △

2.9.3 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ selon la nature asymptotique de β. Estimation de $\varepsilon u_\varepsilon - u$ dans $L^p(\Omega)$

Théorème 2.9.3

Soit une fonction β continue, croissante telle que $\beta(0) = 0$ et

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq \beta_q^+ \quad \forall\ t \geq 0, \quad \beta_q^+ > 0 \text{ constante}$$
$$(\beta(-\infty) - \beta(t))\varphi_q(t) \leq \beta_q^- \quad \forall\ t \leq 0, \quad \beta_q^- > 0 \text{ constante}$$

où $\varphi_q(t) = t|t|^{q-2}$, $q \geq 2$.

Si u_ε, u sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^2(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors $\forall\, p \geq q$ tel que $p - q \in N$ on a

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{L^p(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{q-1}{p}}$$

où C est une constante indépendante de ε . △

Preuve :
D'après le théorème 2.7.1 et les injections de Sobolev on a $\varepsilon u_\varepsilon - u \in L^\infty(\Omega)$.
Soit $\varphi(t) = t|t|^{p-2}$ et $j(t) = \beta(+\infty)t^+ - \beta(-\infty)t^-$ telle que $\partial j = \widetilde{\beta}$.
En multipliant l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ par $\varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)$ et en posant $v = u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)$ dans l'inégalité variationnelle vérifiée par u :

$$(Au, v-u) + (j(v) - j(u), 1) \geq (f, v-u) \qquad \forall \; v \in H_0^1(\Omega)$$

on obtient

$$(A\varepsilon u_\varepsilon, \varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)) + (\beta(u_\varepsilon), \varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)) = (f, \varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon))$$
$$(Au, \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)) + (j(u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)) - j(u), 1) \geq (f, \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u))$$

d'où par addition

$$Z_\varepsilon \overset{\text{notation}}{=\!=\!=} (A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u))$$
$$\leq$$
$$(\beta(u_\varepsilon), \varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)) + (j(u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)) - j(u), 1) \underset{\text{notation}}{=\!=\!=} X_\varepsilon \, .$$

On a à l'aide du théorème 1.2.1

$$Z_\varepsilon = (A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)) \geq C_p^A \, |\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \, .$$

D'autre part,

$$X_\varepsilon = (\beta(u_\varepsilon), \varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)) + (j(u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u)) - j(u), 1)$$
$$=$$

[décomposition de signe de $\varphi(u - \varepsilon u_\varepsilon)$ et u avec $j(t) = \beta(+\infty)t^+ - \beta(-\infty)t^-$]

$$=$$
$$(-\beta(u_\varepsilon), \varphi^+(\varepsilon u_\varepsilon - u) - \varphi^-(\varepsilon u_\varepsilon - u))$$
$$+$$
$$(\beta(+\infty)\{(u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u))^+ - u^+\} \; - \; \beta(-\infty)\{(u + \varphi(\varepsilon u_\varepsilon - u))^- - u^-\}, 1)$$
$$\leq$$

[en observant que $a^+ + b^+ \geq (a+b)^+$ et $a^- + b^- \leq (a+b)^-$ $\forall \; a, \; b \in \mathbb{R}$ et β vérifie $\beta(+\infty \geq \beta(t) \geq \beta(-\infty) \quad \forall \; t \in \mathbb{R}$]

$$\leq$$
$$(-\beta(u_\varepsilon), \varphi^+(\varepsilon u_\varepsilon - u)) + (\beta(u_\varepsilon), \varphi^-(\varepsilon u_\varepsilon - u))$$
$$+$$
$$(\beta(+\infty), \varphi^+(\varepsilon u_\varepsilon - u)) - (\beta(-\infty), \varphi^-(\varepsilon u_\varepsilon - u))$$
$$=$$
$$(\varphi^+(\varepsilon u_\varepsilon - u), \beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)) \; + \; (\varphi^-(\varepsilon u_\varepsilon - u), -\beta(-\infty) + \beta(u_\varepsilon))$$
$$\leq$$

[β bornée : $\beta(+\infty) \geq \beta \geq \beta(-\infty)$]

$$\leq$$
$$(\varphi(|\varepsilon u_\varepsilon - u|), \beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon)) + (\varphi(|\varepsilon u_\varepsilon - u|), \beta(u_\varepsilon) - \beta(-\infty))$$
$$\leq$$

[$\gamma \geq 1$ et l'inégalité de Hölder]

$$\leq$$
$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{(p-1)\gamma}^{p-1} \Big| 2 \, |\beta|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big|_{\gamma'} + |\varepsilon u_\varepsilon - u|_{(p-1)\gamma}^{p-1} \Big| 2 \, |\beta|_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big|_{\gamma'}$$
$$=$$
$$\boxed{4 \, |\beta|_{L^\infty(\mathbb{R})} \, |\Omega|^{\frac{1}{\gamma'}} \, |\varepsilon u_\varepsilon - u|_{(p-1)\gamma}^{p-1}} \, .$$

On a obtenu

$$C_p^A \, |\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \leq Z_\varepsilon \leq X_\varepsilon \leq 4 \, |\beta|_{L^\infty(\mathbb{R})} \, |\Omega|^{\frac{1}{\gamma'}} \, |\varepsilon u_\varepsilon - u|_{(p-1)\gamma}^{p-1}$$

d'où

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \le C\,|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{(p-1)\gamma}^{p-1}$$

avec $C = 4(C_p^A)^{-1}\,|\beta|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,|\Omega|^{\frac{1}{\gamma'}}$ indépendante de ε .

Dans la suite on désignera par C une constante indépendante de ε .

En prenant $\gamma = 1$ il vient

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \le C\,|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{p-1}^{p-1}$$

et une réitération de p jusqu'à q (en notant que $p-q \in N$) donne

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \le C\,|\varepsilon u_\varepsilon - u|_q^q \quad .$$

Le théorème 2.9.2 assure

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p^p \le C\varepsilon^{\frac{q}{q'}}$$

d'où

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p \le C\varepsilon^{\frac{q-1}{p}}$$

ce qu'on voulait montrer. △

2.9.4 "Short way". Estimation ponctuelle

Théorème 2.9.4

Soient $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_*$ les solutions des problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon \mathsf{A}\mathsf{u}_\varepsilon + \beta(\mathsf{u}_\varepsilon) = \mathsf{f} \in \mathsf{L}^2(\Omega) \\ \mathsf{u}_\varepsilon \in \mathsf{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\mathsf{u} + \widetilde{\beta}(\mathsf{u}) \ni \mathsf{f} \in \mathsf{L}^2(\Omega) \\ \mathsf{u} \in \mathsf{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\mathsf{u}_* = 1 \\ \mathsf{u}_* \in \mathsf{H}_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Alors $\forall\,\theta > 0$ on a l'estimation ponctuelle p.p. Ω

$$-\beta(\theta)\mathsf{u}_* + \varepsilon\beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) \le \varepsilon\mathsf{u}_\varepsilon - \mathsf{u} \le \varepsilon\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) + \beta(\theta)\mathsf{u}_* \ .$$

△

Preuve :

Soient $u_{+\theta} = u + \beta(\theta)u_*$ et $u_{-\theta} = u - \beta(\theta)u_*$ des perturbations de u .

Le principe du maximum assure $u_* > 0$ p.p. Ω et la régularité de la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au_* = 1 \\ u_* \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

sera $u_* \in W^{2,p}(\Omega)\ \forall\, p \ge 2$ (voir le théorème 1.3.1) et via les injections de Sobolev $u_* \in C^1(\overline{\Omega})$.

On peut écrire respectivement

$$\begin{aligned}\varepsilon A\Big(u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}\Big) + \beta\Big(u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon} + \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}\Big) &= f - Au_{+\theta} = \\ &= f - Au - \beta(\theta) \in [\beta(-\infty) - \beta(\theta), \beta(+\infty) - \beta(\theta)]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon A\Big(u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}\Big) + \beta\Big(u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon} + \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}\Big) &= f - Au_{-\theta} = \\ &= f - Au + \beta(\theta) \in [\beta(-\infty) + \beta(\theta), \beta(+\infty) + \beta(\theta)]\end{aligned}$$

puisque la solution du problème

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^2(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(+\infty) & t > 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(-\infty) & t < 0 \end{cases}$$

vérifie $f - Au \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ p.p. Ω .

Notons

$$g_{+\theta} = \beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) \quad \text{et} \quad g_{-\theta} = \beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) \ .$$

Dans ces conditions on a les comparaisons

$$\begin{cases} \varepsilon A(u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}) + \beta(u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon} + \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}) \le \varepsilon A g_{+\theta} + \beta(g_{+\theta} + \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon} \le g_{+\theta} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

car

$$\varepsilon A g_{+\theta} + \beta(g_{+\theta} + \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}) =$$

[$Ag_{+\theta} = 0$ avec $g_{+\theta}$ constante]

$$= \beta(g_{+\theta} + \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon}) =$$

[on a $g_{+\theta} = \beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta))$ et $u_{+\theta} = u + \beta(\theta)u_*$ avec $\theta > 0,\ u_* > 0$]

$$= \beta(\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) + \frac{u + \beta(\theta)u_*}{\varepsilon}) \geq$$

[on a selon le signe de u]

$$\geq \begin{cases} \beta(\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta))) = \beta(+\infty) - \beta(\theta) \geq f - Au - \beta(\theta) = f - Au_{+\theta} & \text{dans } [u \geq 0] \\ \beta(-\infty) \geq \underset{\theta>0}{=\!=\!=} \geq \beta(-\infty) - \beta(\theta) \geq f - Au - \beta(\theta) = f - Au_{+\theta} & \text{dans } [u < 0]\ . \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{cases} \varepsilon A\big(u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}\big) + \beta(u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon} + \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}) \geq \varepsilon A g_{-\theta} + \beta(g_{-\theta} + \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon} \geq g_{-\theta} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

car

$$\varepsilon A g_{-\theta} + \beta(g_{-\theta} + \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}) =$$

[$Ag_{-\theta} = 0$ avec $g_{-\theta}$ constante]

$$= \beta(g_{-\theta} + \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}) =$$

[$g_{-\theta} = \beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta))$ et $u_{-\theta} = u - \beta(\theta)u_*$ avec $\theta > 0,\ u_* > 0$]

$$= \beta(\beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) + \frac{u - \beta(\theta)u_*}{\varepsilon}) \leq$$

[on a selon le signe de u]

$$\leq \begin{cases} \beta(\beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta))) = \beta(-\infty) + \beta(\theta) \leq f - Au + \beta(\theta) = f - Au_{-\theta} & \text{dans } [u \leq 0] \\ \beta(+\infty) \leq \underset{\theta>0}{=\!=\!=} \leq \beta(+\infty) + \beta(\theta) \leq f - Au + \beta(\theta) = f - Au_{-\theta} & \text{dans } [u > 0]\ . \end{cases}$$

Le principe du maximum (voir théorème 1.3.2) permet d'avoir p.p. Ω

$$u_\varepsilon - \frac{u_{+\theta}}{\varepsilon} \leq g_{+\theta}$$

$$g_{-\theta} \leq u_\varepsilon - \frac{u_{-\theta}}{\varepsilon}$$

d'où après un retour aux notations p.p. Ω

$$-\beta(\theta)u_* + \varepsilon\beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) + \beta(\theta)u_*$$

le résultat. △

Remarque 2.9.4

Si on pose successivement

$$\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) = \varepsilon^{-s} \quad \text{et} \quad \beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) = -\varepsilon^{-s}$$

pour $s > 0$, $\varepsilon > 0$ *alors l'estimation du théorème 2.9.4*

$$-\beta(\theta)u_* + \varepsilon\beta^{-1}(\beta(-\infty) + \beta(\theta)) \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon\beta^{-1}(\beta(+\infty) - \beta(\theta)) + \beta(\theta)u_*$$

devient $\forall\ s > 0$ *p.p.* Ω

$$(\beta(-\infty) - \beta(-\varepsilon^{-s}))u_* - \varepsilon^{1-s} \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon^{1-s} + (\beta(+\infty) - \beta(\varepsilon^{-s}))u_*\ .$$

△

2.9.5 "Short way". Estimations ponctuelles et uniformes

Théorème 2.9.5

Soient u_ε, u, u_* les solutions des problèmes

$$\begin{cases}\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\end{cases} \qquad \begin{cases}Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^2(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega)\end{cases} \qquad \begin{cases}Au_* = 1 \\ u_* \in H_0^1(\Omega)\ .\end{cases}$$

Soit la fonction $\varphi(t) = t|t|^{q-2}$ avec $q \geq 2$, $q + q' = qq'$.

On suppose que β satisfait

$$(\beta(+\infty) - \beta(t))\varphi(t) \leq \beta_q^+ \quad \forall\ t \geq 0,\ \beta_q^+ > 0 \text{ constante}$$

$$(\beta(-\infty) - \beta(t))\varphi(t) \leq \beta_q^- \quad \forall\ t \geq 0,\ \beta_q^- > 0 \text{ constante}\ .$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a l'estimation ponctuelle p.p. Ω

$$-\varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^- u_*) \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^+ u_*)\ .$$

$\triangle$

Preuve :

D'après la remarque précédente p.p. $x \in \Omega$, $\forall\ s > 0$

$$(\beta(-\infty) - \beta(-\varepsilon^{-s}))u_* - \varepsilon^{1-s} \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon^{1-s} + (\beta(+\infty) - \beta(\varepsilon^{-s}))u_*$$

et l'on a

$$\varepsilon^{1-s} + (\beta(+\infty) - \beta(\varepsilon^{-s}))u_* = \varepsilon^{1-s} + (\beta(+\infty) - \beta(+\varepsilon^{-s}))\varphi(+\varepsilon^{-s})\frac{u_*}{\varphi(+\varepsilon^{-s})}$$

$$\leq \underset{\varepsilon^{-s}>0,\ s>0}{=\!=\!=\!=} \leq +\varepsilon^{1-s} + \frac{\beta_q^+ u_*}{\varphi(+\varepsilon^{-s})} = +\varepsilon^{1-s} + \beta_q^+ u_* \varepsilon^{(q-1)s}$$

$$(\beta(-\infty) - \beta(-\varepsilon^{-s}))u_* - \varepsilon^{1-s} = -\varepsilon^{1-s} + (\beta(-\infty) - \beta(-\varepsilon^{-s}))\varphi(-\varepsilon^{-s})\frac{u_*}{\varphi(-\varepsilon^{-s})}$$

$$\geq \underset{-\varepsilon^{-s}<0,\ s>0}{=\!=\!=\!=} \geq -\varepsilon^{1-s} + \frac{\beta_q^- u_*}{\varphi(-\varepsilon^{-s})} = -\varepsilon^{1-s} - \beta_q^- u_* \varepsilon^{(q-1)s}$$

d'où pour $s = \frac{1}{q}$ p.p. Ω

$$-\varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^- u_*) \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^+ u_*)$$

ce qu'on voulait montrer.

Remarque 2.9.5

L'estimation du théorème 2.9.5

$$-\varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^- u_*) \leq \varepsilon u_\varepsilon - u \leq \varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \beta_q^+ u_*)$$

permet d'avoir pour tout $\varepsilon > 0$

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon^{\frac{1}{q'}} \left|1 + \beta_q^- u_*\right|_{L^\infty(\Omega)} \vee \left|1 + \beta_q^+ u_*\right|_{L^\infty(\Omega)} =$$

$$= \varepsilon^{\frac{1}{q'}}(1 + \{\beta_q^- \vee \beta_q^+\}\,|u_*|_{L^\infty(\Omega)})$$

sans aucune restriction sur f . $\triangle$

Commentaires 2.9

2.9.1 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ selon la asymptotique de β

Estimation de $|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{H_0^1(\Omega)}$

C'est la même démonstration que dans [Brauner C.M. et Nicolaenko B.] , un prolongement de la démonstration du théorème 2.7.1 avec l'hypothèse supplémentaire visant le comportement asymptotique de β autour de $\pm\infty$. $\triangle$

2.9.2 Estimation de $|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{L^q(\Omega)}$, $|u_\varepsilon|_{L^q(\omega \subset [u=0])}$

On utilise une méthode de monotonie au sens de [Lions[2]] et de [Brauner et Nicolaenko] avec des décompositions successives de domaine selon la nature asymptotique de β autour de $\pm\infty$. $\triangle$

2.9.2 Exemple

La particularité de cet exemple est un bon contrôle des paramètres exigés par le théorème 2.9.2 ce qui permet le passage à la limite dans l'esprit de la remarque 2.9.2. $\triangle$

2.9.3 Estimation de $|\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}|_\mathbf{p}$

C'est un exemple typique de technique "bootstrap". Le fait que β est bornée assure un excès de régularité pour $\varepsilon u_\varepsilon - u$ et on arrive à contrôler la régularité $L^p(\Omega)$ par une régularité $L^q(\Omega)(q \leq p)$ ce qui permet d'impliquer le théorème 2.9.2. $\triangle$

2.9.4 "Short way". Estimation ponctuelle

L'idée est de remplacer u par des perturbations "naturelles" $u_{\pm\theta} = u \pm \beta(\theta)u_*$, établir des comparaisons et laisser agir le principe du maximum.

La solution u_* du problème de Saint-Venant via l'opérateur A permet de rajuster la fonction $f - Au \in L^\infty(\Omega)$ et de contrôler les constantes considérées. Cette fonction est souvent impliquée dans la construction des fonctions barrières.

Le principe du maximum exige seulement f dans $L^2(\Omega)$, l'estimation obtenue permettant ultérieurement d'impliquer le comportement asymptotique de β autour de $\pm\infty$. En ce sens, la remarque 2.9.4 est une transition vers le théorème 2.9.5. $\triangle$

2.9.5 "Short way". Estimations ponctuelles et uniformes

Une illustration de la force du principe du maximum lorsqu'on manipule des perturbations monotones du problème de Dirichlet.

La remarque 2.9.5 transforme l'estimation ponctuelle en estimation uniforme lorsque ε est petit. Aucune restriction sur f.

Le problème de déterminer le meilleur exposant γ de ε tel que $|\varepsilon u_\varepsilon - u|_p \leq \varepsilon^\gamma$ reste ouvert. Les approches antérieures et postérieures dans ce travail laissent penser que $\gamma = \frac{q-1}{p}$.
$\triangle$

2.10 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive et selon la régularité de $\mathbf{u}_0$

Préliminaires 2.10

On travaille avec $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ localement coercive.

Dans toute la suite on suppose que la zone libre $[u=0]$ est de mesure non nulle avec l'intérieur non vide où u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u\ ) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Pour des critères réalisant ces conditions voir les théorèmes 2.9.2, 2.9.6, 2.9.7 et [Díaz, théorème 2.17, pg. 144].

Quand on note $L^\infty([u=0])$, $W^{2,\infty}([u=0])$ etc., on sous-entend par $[u=0]$ l'intérieur non vide de la zone libre. △

Problème 2.10

On étudie le comportement de u_ε, $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ dans $L^\infty_{\text{loc}}([u=0])$ lorsque ε tend vers 0 avec respectivement $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u=0])$ et $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_1 = -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)}$. La remarque 2.10.1 montre que ces conditions sur u_0 sont réalisables. △

2.10.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ quand $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}^{2,\infty}([\mathbf{u}=0])$

Théorème 2.10.1

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0)=0$.
Soit $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ inversible, localement coercive et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.
Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u\ ) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

On suppose que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u=0])$.
Si u_ε est la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)\ (p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{\text{loc}}([u=0])} u_0\ .$$

△

Preuve :

Fonctions d'approximation

Soit un sous-domaine $\omega \subset\subset [u=0]$ et $\varphi \in C_0^\infty([u=0])$ telle que

$$0 \leq \varphi \leq 1,\ [\varphi = 1] \supset \overline{\omega}\ .$$

Pour $\delta > 0$, on définit les fonctions

$$u_\varepsilon^+ = u_0 + (1-\varphi)(|u_\varepsilon|_{L^\infty([u=0])} + |u_0|_{L^\infty([u=0])}) + \delta$$
$$u_\varepsilon^- = u_0 - (1-\varphi)(|u_\varepsilon|_{L^\infty([u=0])} + |u_0|_{L^\infty([u=0])}) - \delta\ .$$

Comportement à l'intérieur et sur la frontière

On a

$$u_\varepsilon^+ \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_\varepsilon^-$$
$$\delta + u_\varepsilon^- \leq u_0 \leq u_\varepsilon^+ - \delta \quad \text{dans } [u=0]$$
$$u_\varepsilon^- \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^+ \quad \text{sur } \partial[u=0]\ .$$

Comportement à la limite

De plus,

$$\varepsilon A u_\varepsilon^\pm \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty([u=0])} 0$$

car $\varepsilon u_\varepsilon$ converge vers u dans $C^1(\overline{\Omega})$ d'après le théorème 2.7.1 et les injections de Sobolev ($p > n$).

Comparaison

Le tableau (†) permet d'avoir la comparaison

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f = \beta(u_0) \begin{cases} \leq \varepsilon A u_\varepsilon^+ + \beta(u_\varepsilon^+) \\ \geq \varepsilon A u_\varepsilon^- + \beta(u_\varepsilon^-) \end{cases} & \text{dans } [u=0] \\ u_\varepsilon \begin{cases} \leq u_\varepsilon^+ \\ \geq u_\varepsilon^- \end{cases} & \text{sur } \partial[u=0] \end{cases}$$

pour ε suffisamment petit et β localement coercive.

Principe de maximum

Le principe du maximum assure si ε petit p.p. $[u=0]$

$$u_\varepsilon^- \leq u_\varepsilon \leq u_\varepsilon^+ \ .$$

Restriction de domaine et estimation uniforme

On a p.p. ω

$$u_0 - \delta \leq u_\varepsilon \leq u_0 + \delta \quad \text{donc} \quad |u_\varepsilon - u_0| \leq \delta$$

vu la construction de φ, $u_\varepsilon^\pm$.

Limite uniforme

En faisant tendre δ vers 0 ($\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$),

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega)} u_0 \ .$$

Comme $\omega \subset\subset [u=0]$ était arbitraire,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{\text{loc}}([u=0])} u_0$$

le résultat. △

Remarque 2.10.1

La condition $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u=0])$ est remplie, par exemple, si la fermeture du graphe de f n'intersecte pas les droites $y = \beta(+\infty)$, $y = \beta(-\infty)$ et la fonction β^{-1} est régulière (on rappelle que $f \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)]$ dans $[u=0]$). Dans les portions du domaine Ω où le graphe de f est connexe, on peut imposer la régularité que l'on veut sur f . △

2.10.2 Comportement de u_ε sans contrainte sur u_0

Théorème 2.10.2

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ localement coercive et u comme au théorème 2.7.1.

La solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p > n) \\ u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

satisfait

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} |u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega)} \leq |\hat{u}_0 - u_0|_{L^\infty(\omega)} \vee |u_0 - \check{u}_0|_{L^\infty(\omega)}$$

pour tous domaines $\omega \subset\subset \omega_0 \subset [u=0]$ tels que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$ et $\hat{u}_0$, $\check{u}_0 \in W^{2,\infty}(\omega_0)$ telles que $\check{u}_0 \leq u_0 \leq \hat{u}_0$ p.p. ω_0 . △

(†)

Si β est localement coercive alors
$\inf\limits_K \beta' = \alpha_\beta^K > 0 \ \forall \ K \subset \mathbb{R}$ compacte.
Dans ces conditions
$$\beta(u_\varepsilon^+) - \beta(u_0) \geq \frac{\beta \text{ croissante}}{u_\varepsilon^+ \geq u_0 + \delta} \geq \beta(u_0+\delta) - \beta(u_0) \frac{\beta \in C^1(\mathbb{R})}{\theta \in [0,1] K = [-|u_0|_\infty - \delta\theta, |u_0|_\infty + \delta\theta]} + \delta\beta'(u_0 + \delta\theta) > +\alpha_\beta^K \delta > 0 \ .$$
De la même manière
$$\beta(u_\varepsilon^-) - \beta(u_0) \leq \frac{\beta \text{ croissante}}{u_\varepsilon^- \leq u_0 - \delta} \leq \beta(u_0-\delta) - \beta(u_0) \frac{\beta \in C^1(\mathbb{R})}{\theta \in [0,1] K = [-|u_0|_\infty - \delta\theta, |u_0|_\infty + \delta\theta]} - \delta\beta'(u_0 - \delta\theta) < -\alpha_\beta^K \delta < 0 \ .$$
Notons aussi que
$\beta(u_0) = f$, $A u_\varepsilon^\pm \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve :

Fonctions d'approximation

En notant que $u_\varepsilon,\ u_0 \in C^0(\overline{\omega})$, (Sobolev, $p > n$) on pose

$$\hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_0 + (1-\varphi)\{|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega_0)} + |u_0|_{L^\infty(\omega_0)}\} + \delta$$
$$\check{u}_\varepsilon = \check{u}_0 - (1-\varphi)\{|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega_0)} + |u_0|_{L^\infty(\omega_0)}\} - \delta$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\omega_0)$ est telle que $0 \le \varphi \le 1,\ [\varphi = 1] \supset \overline{\omega},\ [\varphi \ne 0] \subset \omega_0$.

Comportement sur la frontière et à l'intérieur

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \le \check{u}_0 \le u_0 \le \hat{u}_0 \le u_\varepsilon \qquad & \text{sur } \partial\omega_0 \\ -\delta + \check{u}_0 = \check{u}_\varepsilon\ ,\ \hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_0 + \delta \qquad & \text{dans } \omega \\ u_0 \in L^\infty(\omega_0) & \\ \check{u}_0,\ \check{u}_\varepsilon \in W^{2,\infty}(\omega_0) \ni \hat{u}_\varepsilon,\ \hat{u}_0\ . & \end{aligned}$$

Comportement à la limite.

Nous avons

$$\varepsilon\hat{u}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^0(\omega_0 \complement [u=0])} 0$$
$$\varepsilon\check{u}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^0(\omega_0 \complement [u=0])} 0$$
$$\varepsilon A\hat{u}_\varepsilon = \varepsilon A\hat{u}_0 + \{|\varepsilon u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega_0)} + |\varepsilon u_0|_{L^\infty(\omega_0)}\}A(1-\varphi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$
$$\varepsilon A\check{u}_\varepsilon = \varepsilon A\check{u}_0 + \{|\varepsilon u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega_0)} + |\varepsilon u_0|_{L^\infty(\omega_0)}\}A(1-\varphi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

car selon le théorème 2.7.1 on a $\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\Omega})} u$ lorsque $p > n$.

Comparaison

En sachant que β est croissante et localement coercive il existe des constantes $\hat{c},\ \check{c} > 0$ indépendantes de ε telles qu'on ait p.p. ω_0

$$\check{u}_\varepsilon \le \check{u}_0 - \delta \le u_0 \le \hat{u}_0 + \delta \le \hat{u}_\varepsilon\ ,$$
$$\beta(\hat{u}_\varepsilon) - \beta(\hat{u}_0) \ge \beta(\hat{u}_0 + \delta) - \beta(\hat{u}_0) = \ \delta\beta'(\hat{u}_0 + \theta\delta) > \hat{c} > 0$$

car $\theta \in [0,1],\ \beta \in C^1(\mathbb{R}),\ \hat{u}_0 \in L^\infty(\omega_0)$,

$$\beta(\check{u}_\varepsilon) - \beta(\check{u}_0) \le \beta(\check{u}_0 - \delta) - \beta(\check{u}_0) = -\delta\beta'(\check{u}_0 - \theta\delta) < \check{c} < 0$$

car $\theta \in [0,1],\ \beta \in C^1(\mathbb{R}),\ \hat{u}_0 \in L^\infty(\omega_0)$.

Dans ces conditions

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f = \beta(u_0) \begin{cases} \le \beta(\hat{u}_0) \le \varepsilon A\hat{u}_\varepsilon + \beta(\hat{u}_\varepsilon) \\ \ge \beta(\check{u}_0) \ge \varepsilon A\check{u}_\varepsilon + \beta(\check{u}_\varepsilon) \end{cases} & \text{dans } \omega_0 \\ u_\varepsilon \begin{cases} \le \check{u}_\varepsilon \\ \ge \check{u}_\varepsilon \end{cases} & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

pour ε suffisamment petit.

Principe de maximum

Le principe du maximum assure avec ε petit p.p. ω_0

$$\check{u}_\varepsilon \le u_\varepsilon \le \hat{u}_\varepsilon\ .$$

Restriction de domaine et estimation uniforme

On a pour ε petit p.p. ω

$$\check{u}_0 - \delta = \check{u}_\varepsilon \le u_\varepsilon \le \hat{u}_\varepsilon = \hat{u}_0 + \delta$$
$$\check{u}_0 - u_0 - \delta \le u_\varepsilon - u_0 \le \check{u}_0 - u_0 + \delta$$

d'où

$$|u_\varepsilon - u_0| \le |\hat{u}_0 - u_0 + \delta| \vee |\check{u}_0 - u_0 - \delta| = \delta + |\hat{u}_0 - u_0| \vee |\check{u}_0 - u_0|$$

et

$$|u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega)} \le \delta + |\hat{u}_0 - u_0|_{L^\infty(\omega)} \vee |\hat{u}_0 - u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

vu la construction de $\varphi,\ \check{u}_\varepsilon,\ \hat{u}_\varepsilon$.

Limite uniforme

En faisant tendre δ vers 0 ($\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$), on obtient

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} |u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega)} \leq |\hat{u}_0 - u_0|_{L^\infty(\omega)} \vee |\check{u}_0 - u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

le résultat. △

2.10.3 Comportement de $\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}$ quand $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_1$

Théorème 2.10.3

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.

On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ inversible, localement coercive et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Si u, u_ε sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} A\, u + \widetilde{\beta}(\, u\,) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} = u_1$ alors

$$u_\varepsilon^1 = \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{loc}([u=0])} u_1 \ .$$

△

Preuve :

Fonctions d'approximation

Soit un domaine $\omega \subset\subset [u = 0]$.

Pour $\delta > 0$ on considère les fonctions

$$u_\varepsilon^+(u_1, u_\varepsilon^1) = u_1 + (1 - \varphi)(|u_\varepsilon^1|_{L^\infty(\omega_0)} + |u_1|_{L^\infty(\omega_0)}) + \delta$$

$$u_\varepsilon^-(u_1, u_\varepsilon^1) = u_1 - (1 - \varphi)(|u_\varepsilon^1|_{L^\infty(\omega_0)} + |u_1|_{L^\infty(\omega_0)}) - \delta$$

où $\varphi \in C_0^\infty([u=0])$ est telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $[\varphi = 1] \supset \overline{\omega}$, $[\varphi \neq 0] = \omega_0 \subset\subset [u = 0]$.

Comportement à l'intérieur et sur la frontière de ω_0

Il est facile de voir que

$$u_\varepsilon^+ \in W^{2,\infty}(\omega_0) \ni u_\varepsilon^-$$

$$u_\varepsilon^+ - u_1 \geq \delta \geq u_1 - u_\varepsilon^- \qquad \text{dans } \omega_0$$

$$u_\varepsilon^+ \geq u_\varepsilon^1 \geq u_\varepsilon^- \qquad \text{sur } \partial\omega_0 \ .$$

Comportement à la limite

Nous avons

$$\varepsilon u_\varepsilon^+ = \varepsilon u_1 + \{|u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega_0)} + |\varepsilon u_1|_{L^\infty(\omega_0)}\}(1 - \varphi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

$$\varepsilon A u_\varepsilon^+ = \varepsilon A u_1 + \{|u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega_0)} + |\varepsilon u_1|_{L^\infty(\omega_0)}\} A(1 - \varphi) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$

car d'après le th 2.10.2 on a $\varepsilon u_\varepsilon^1 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$.

Comparaison

Si on regarde le tableau (*) on a avec ε petit

$$\varepsilon^2 A u_\varepsilon^+ + \beta(u_0 + \varepsilon u_\varepsilon^+) \geq \varepsilon^2 A u_\varepsilon^1 + \beta(u_0 + \varepsilon u_\varepsilon^1) \qquad \text{dans } \omega_0,$$

et

$$\varepsilon^2 A u_\varepsilon^- + \beta(u_0 + \varepsilon u_\varepsilon^-) \leq \varepsilon^2 A u_\varepsilon^1 + \beta(u_0 + \varepsilon u_\varepsilon^1) \qquad \text{dans } \omega_0.$$

(*)

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon^2 Au_\varepsilon^+ + \beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^+) - \left(\varepsilon^2 Au_\varepsilon^1 + \beta(\varepsilon u_\varepsilon^1 + u_0)\right)\right\}$$
$$=$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon^2 Au_\varepsilon^+ + \beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^+) - f + \varepsilon Au_0\right\}$$
$$\overset{f=\beta(u_0)}{=}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^+ + \frac{\beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^+)-\beta(u_0)}{\varepsilon} + Au_0$$
$$\underset{\beta\in C^1(\mathbb{R})}{\overset{\theta\in[0,1]}{=}}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^+\beta'(u_0+\theta\varepsilon u_\varepsilon^+) + Au_0$$
$$\underset{\beta \text{ croissante, } \beta'>0}{\overset{u_\varepsilon^+ \geq u_1+\delta}{\geq}}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^+ + (u_1+\delta)\beta'(u_0+\theta\varepsilon u_\varepsilon^+) + Au_0$$
$$\Big\downarrow L^\infty(\omega_0) \qquad A\varepsilon u_\varepsilon^+ \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0, \quad \varepsilon u_\varepsilon^+ \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$
$$(u_1+\delta)\beta'(u_0) + Au_0$$
$$=$$
$$u_1\beta'(u_0) + Au_0 + \delta\beta'(u_0)$$
$$\overset{u_1 = \frac{-Au_0}{\beta'(u_0)}}{=}$$
$$\delta\beta'(u_0)$$
$$\underset{\beta \text{ localement coercive}}{\overset{u_0\in L^\infty(\omega_0),\ K=[-|u_0|_\infty, |u_0|_\infty]}{>}}$$
$$\delta\alpha_\beta^K > 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon^2 Au_\varepsilon^- + \beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^-) - \left(\varepsilon^2 Au_\varepsilon^1 + \beta(\varepsilon u_\varepsilon^1 + u_0)\right)\right\}$$
$$=$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon^2 Au_\varepsilon^- + \beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^-) - f + \varepsilon Au_0\right\}$$
$$\overset{f=\beta(u_0)}{=}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^- + \frac{\beta(u_0+\varepsilon u_\varepsilon^-)-\beta(u_0)}{\varepsilon} + Au_0$$
$$\underset{\beta\in C^1(\mathbb{R})}{\overset{\theta\in[0,1]}{=}}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^+ + u_\varepsilon^-\beta'(u_0-\theta\varepsilon u_\varepsilon^-) + Au_0$$
$$\underset{\beta \text{ croissante, } \beta'>0}{\overset{u_\varepsilon^- \geq u_1-\delta}{\leq}}$$
$$\varepsilon Au_\varepsilon^- + (u_1-\delta)\beta'(u_0-\theta\varepsilon u_\varepsilon^-) + Au_0$$
$$\Big\downarrow L^\infty(\omega_0) \qquad A\varepsilon u_\varepsilon^- \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0, \quad \varepsilon u_\varepsilon^- \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega_0)} 0$$
$$(u_1-\delta)\beta'(u_0) + Au_0$$
$$=$$
$$u_1\beta'(u_0) + Au_0 - \delta\beta'(u_0)$$
$$\overset{u_1 = \frac{-Au_0}{\beta'(u_0)}}{=}$$
$$-\delta\beta'(u_0)$$
$$\underset{\beta \text{ localement coercive}}{\overset{u_0\in L^\infty(\omega_0),\ K=[-|u_0|_\infty, |u_0|_\infty]}{<}}$$
$$-\delta\alpha_\beta^K < 0$$

Dans ces conditions

$$\begin{cases} \varepsilon^2 Au_\varepsilon^1 + \beta(\varepsilon u_\varepsilon^1 + u_0) = f - \varepsilon Au_0 \begin{cases} \leq \varepsilon^2 Au_\varepsilon^+ + \beta(\varepsilon u_\varepsilon^+ + u_0) \\ \geq \varepsilon^2 Au_\varepsilon^- + \beta(\varepsilon u_\varepsilon^- + u_0) \end{cases} & \text{dans } \omega_0 \\ u_\varepsilon^1 \begin{cases} \leq u_\varepsilon^+ \\ \geq u_\varepsilon^- \end{cases} & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

lorsque ε est petit.

Principe du maximum

En appliquant le principe du maximum

$$u_\varepsilon^- \leq u_\varepsilon^1 \leq u_\varepsilon^+ \qquad \text{dans } \omega_0.$$

Restriction de domaine, estimation uniforme

On voit que pour ε petit p.p. ω

$$u_1 - \delta = u_\varepsilon^- \leq u_\varepsilon^1 \leq u_\varepsilon^+ = u_1 + \delta$$

parce que $[\varphi = 1] \supset \overline{\omega}$.

On tire pour ε petit p.p. ω

$$|u_\varepsilon^1 - u_1| \leq \delta \quad \text{et} \quad |u_\varepsilon^1 - u_1|_{L^\infty(\omega)} \leq \delta\ .$$

Convergence uniforme

En faisant tendre δ vers 0 ($\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$) on obtient

$$u_\varepsilon^1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\omega)} u_1$$

d'où le résultat puisque $\omega \subset\subset [u=0]$ était arbitraire. $\triangle$

2.10.4 Amélioration de la convergence de u_ε quand $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_1$

Théorème 2.10.4

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0)=0$.

On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ inversible, localement coercive et $\widetilde{\beta}$ comme au th 2.7.1.

Si u, u_ε sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} A\,u + \widetilde{\beta}(\,u\,) = f \in L^p(\Omega)\ (p>n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)\ (p>n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

avec $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} = u_1$ alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}_{\mathrm{loc}}([u=0])} u_0\ .$$

△

Preuve :

Soit un domaine $\omega \subset\subset [u=0]$ et $\varphi_1,\ \varphi_2 \in C_0^\infty([u=0])$ telles que $\overline{\omega} \subset [\varphi_1 \neq 0] \subset\subset [\varphi_2 = 1] \subset\subset [\varphi_2 \neq 0] \subset\subset [u=0]$.

Le lemme 2.5.1 permet d'avoir

$$|\varphi_1(u_\varepsilon - u_0)|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\{|\varphi_2(Au_\varepsilon - u_0)|_{L^p(\Omega)} + |\varphi_2(u_\varepsilon - u_0)|_{L^p(\Omega)}\}$$

avec C une constante indépendante de ε.

Mais

$$|\varphi_2 A(u_\varepsilon - u_0)|_{L^p(\Omega)} \leq$$

$[\,A(u_\varepsilon - u_0) = \frac{\beta(u_0)-\beta(u_\varepsilon)}{\varepsilon} - Au_0\,]$

$$\leq \left|\varphi_2 \frac{\beta(u_\varepsilon)-\beta(u_0)}{\varepsilon}\right|_{L^p(\Omega)} + |\varphi_2 A u_0|_{L^p(\Omega)} =$$

[on a $\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0) = (u_\varepsilon - u_0)\beta'(u_0 + \theta(u_\varepsilon - u_0))$ avec $\theta \in (0,1)$ et $u_0 \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([u=0])$]

$$= \left|\varphi_2 \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}\beta'(u_0 + \theta(u_\varepsilon - u_0))\right|_{L^p(\Omega)} + |\varphi_2 A u_0|_{L^p(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longmapsto} |\varphi_1 u_1 \beta'(u_0)|_{L^p(\Omega)} + |\varphi_2 A u_0|_{L^p(\Omega)}$$

car d'après le théorème 2.10.3 on a

$$\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty_{\mathrm{loc}}([u=0])} u_1\ .$$

Dans ces conditions

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} |\varphi_1(u_\varepsilon - u_0)|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

avec C une constante indépendante de ε d'où, à une sous-suite près, ($W^{2,p}(\Omega)$ réflexif)

$$\varphi_1(u_\varepsilon - u_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\ \text{faible}} v$$

et avec les injections de Sobolev

$$\varphi_1(u_\varepsilon - u_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\ \text{fort}} v\ .$$

D'autre part

$$\varphi_1(u_\varepsilon - u_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty(\Omega)} 0$$

avec le théorème 2.10.1 donc $v = 0$.

On a obtenu

$$\varphi_1(u_\varepsilon - u_0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\ \text{faible}} 0$$

et compte tenu du fait que $\overline{w} \subset [\varphi_1 = 1]$,

$$u_\varepsilon - u_0 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\omega)\ \text{faible}} 0$$

avec w arbitraire dans $[u=0]$ d'où le résultat.

△

2.10.5 Le cas où f est une constante

Théorème 2.10.5
Soit une fonction β bornée, croissante, continue, inversible, avec $\beta(0) = 0$.
La solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \quad \text{constante} \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

vérifie selon les situations :

1. $\boxed{f \geq \beta(+\infty)}$
$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ **il existe un** $\varepsilon_\varphi > 0$ **tel que p.p.** Ω, $\forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_\varphi$

$$u_\varepsilon \geq \varphi \ .$$

2. $\boxed{f \leq \beta(-\infty)}$
$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ **il existe un** $\varepsilon_\varphi > 0$ **tel que p.p.** Ω, $\forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_\varphi$

$$u_\varepsilon \leq \varphi \ .$$

3. $\boxed{f \in \beta(\mathbb{R}),\ u_0 = \beta^{-1}(f)}$
$\forall\ \varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{loc}(\Omega)} u_0$$

$$u_\varepsilon \in [\beta^{-1}(f \wedge 0), \beta^{-1}(f \vee 0)] \ni u_0 \ .$$

$\triangle$

Preuve :

1. On peut écrire $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \geq \beta(+\infty) \geq \varepsilon A\varphi + \beta(\varphi) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec ε suffisamment petit et dépendant de φ car $\varphi \in L^\infty(\Omega) \ni A\varphi$ et β est strictement croissante en tant que fonction inversible.

Le principe du maximum permet d'avoir p.p. Ω

$$u_\varepsilon \geq \varphi$$

pour ε petit.

2. Cette fois-ci $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \leq \beta(-\infty) \leq \varepsilon A\varphi + \beta(\varphi) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

lorsque ε est petit.

Comme au point précédent p.p. Ω

$$u_\varepsilon \leq \varphi$$

pour ε suffisamment petit.

3. Notons $u_0 = \beta^{-1}(f)$.

D'après le théorème 2.7.1 on a $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)\ \forall\, p \geq 2$ car $f \in L^\infty(\Omega)$ et via les injections de Sobolev $u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$.

Dans ces conditions les ensembles ouverts $[u_0 > u_\varepsilon]$ et $[u_0 < u_\varepsilon]$ sont bien définis.

Maintenant l'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f = \beta(u_0)$ entraîne

$$\begin{cases} A u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\{\beta(u_0) - \beta(u_\varepsilon)\} > 0 = A(u_0 \wedge 0) & \text{dans } [u_0 > u_\varepsilon] \\ u_\varepsilon \geq u_0 \wedge 0 & \text{sur } \partial[u_0 > u_\varepsilon] \end{cases}$$

en notant que u_0 est constante et le principe du maximum donne p.p. $[u_0 \geq u_\varepsilon]$

$$u_\varepsilon \in [u_0 \wedge 0, u_0] \ .$$

On a aussi

$$\begin{cases} A u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\{\beta(u_0) - \beta(u_\varepsilon) < 0 = A(u_0 \vee 0) & \text{dans } [u_0 < u_\varepsilon] \\ u_\varepsilon \leq u_0 \vee 0 & \text{sur } \partial[u_0 < u_\varepsilon] \end{cases}$$

d'où p.p. $[u_0 < u_\varepsilon]$

$$u_\varepsilon \in [u_0, u_0 \vee 0] \ .$$

Finalement, $\forall \ \varepsilon > 0$, p.p. Ω

$$u_\varepsilon \in [u_0 \wedge 0, u_0 \vee 0] \ .$$

Soit un sous-domaine $\omega \subset\subset \Omega$, $\delta > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que

$$0 \leq \varphi \leq 1 \text{ et } \overline{\omega} \subset [\varphi = 1] \ .$$

Si on note

$$-\delta + (1-\varphi)|u_0| + u_0 = u_0^- \text{ et } u_0^+ = u_0 + (1-\varphi)|u_0| + \delta$$

alors en regardant le tableau (*) on a

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f = \beta(u_0) \begin{cases} \leq \varepsilon A u_0^+ + \beta(u_0^+) \\ \geq \varepsilon A u_0^- + \beta(u_0^-) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \begin{cases} \leq u_0^+ \\ \geq u_0^- \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec ε suffisamment petit et le principe de maximum assure p.p. Ω

$$u_0^- \leq u_\varepsilon \leq u_0^+$$

ou encore vu la construction de φ, $u_0^\pm (u_0^\pm = u_0 \pm (1-\varphi)|u_0| \pm \delta,\ \overline{\omega} \subset [\varphi = 1])$ p.p. ω

$$|u_\varepsilon - u_0| \leq \delta$$

pour ε petit dépendant de δ.

En faisant δ tendre vers 0 ($\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$),

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty(\omega)} u_0$$

d'où le résultat. $\triangle$

2.10.6 Comportement de u_ε sans nature coercive de β et sans contrainte sur u_0

Théorème 2.10.6

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, impaire, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit le problème

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Si $\omega \subset\subset \omega_0 \subset [u = 0]$ est une suite de domaines telle que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$, alors

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

et l'on a $\forall\, q \geq 1$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\omega)\text{fort}} u_0 \ .$$

$\triangle$

Preuve :

Soit un domaine ω_0 tel que $\omega \subset\subset \omega_0 \subset [u = 0]$ et une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\omega}_0)$ telle que $\omega \subset [\varphi = 1]$ et $0 \leq \varphi \leq 1$ p.p. ω_0.

Alors la fonction $\psi = 1 - \varphi$ vérifie

$$\psi \begin{cases} = 1 & \text{sur } \partial\omega_0 \\ \geq 0 & \text{dans } \omega_0 \\ = 0 & \text{dans } \omega \ . \end{cases}$$

Comme $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$, $A\psi \in L^\infty(\omega_0)$ on aura $\beta^{-1}(f \pm \delta A\psi) \in L^\infty(\omega_0)$ pour une constante $\delta > 0$ suffisamment petite.

(*) on voit que (u_0 constante) $u_0^- \leq u_0 - \delta < u_0 < u_0 + \delta \leq u_0^+$
et avec β strictement croissante $\beta(u_0^-) \leq \beta(u_0 - \delta) < \beta(u_0) < \beta(u_0 + \delta) \leq \beta(u_0^+)$,
de plus $Au_0^\pm = \pm |u_0| A\varphi \in L^\infty(\Omega)$ si A est de type elliptique.

Soient les fonctions

$$v_+ = +\varepsilon|\beta^{-1}(f+\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} + \delta\psi$$
$$v_- = -\varepsilon|\beta^{-1}(f-\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \pm \delta\psi$$

telles qu'on ait sur $\partial\omega_0$

$$v_+ \geq \delta > 0 > -\delta \geq v_- .$$

Alors on a les comparaisons

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(\frac{\varepsilon u_\varepsilon}{\varepsilon}) = f \begin{cases} \leq Av_+ + \beta(\frac{v_\pm}{\varepsilon}) \\ \geq Av_- + \beta(\frac{v_-}{\varepsilon}) \end{cases} & \text{dans } \omega_0 \\ \varepsilon u_\varepsilon \begin{cases} \leq \delta \leq v_+ \\ \geq \delta \leq v_- \end{cases} & \text{sur } \partial\omega_0 \end{cases}$$

pour ε petit car d'une part selon le théorème 2.7.1 (avec les injections de Sobolev)

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} 0 \Longrightarrow \varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\Omega})} 0$$

et en particulier

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\omega}_0)} 0$$

et d'autre part il est visible que p.p. ω_0

$$Av_+ + \beta(\frac{v_+}{\varepsilon}) = \delta A\psi + \beta(|\beta^{-1}(f-\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} + \frac{\delta}{\varepsilon}\psi) \geq \overline{\overline{\underset{\beta\text{ croissante}}{\psi\geq 0\text{ p.p. }\omega_0}}} \geq$$
$$\geq \delta A\psi + \beta(|\beta^{-1}(f-\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}) \geq f$$
$$Av_- + \beta(\frac{v_-}{\varepsilon}) = -\delta A\psi + \beta(-|\beta^{-1}(f+\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} - \frac{\delta}{\varepsilon}\psi) \leq \overline{\overline{\underset{\beta\text{ croissante}}{\psi\geq 0\text{ p.p. }\omega_0}}} \leq$$
$$\leq -\delta A\psi + \beta(-|\beta^{-1}(f+\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}) \leq f.$$

Le principe du maximum permet d'avoir p.p. ω_0 avec ε petit

$$v_- \leq \varepsilon u_\varepsilon \leq v_+$$

et vu la construction des $v_\pm$, ψ, φ p.p. ω

$$-\varepsilon|\beta^{-1}(f+\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \leq \varepsilon u_\varepsilon \leq \varepsilon|\beta^{-1}(f-\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}$$

d'où

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |\beta^{-1}(f-\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)} \vee |\beta^{-1}(f+\delta A\psi)|_{L^\infty(\omega_0)}$$

pour ε petit (dépendant de δ et $\delta \to 0$ force $\varepsilon \to 0$) et en faisant tendre δ vers 0 on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega_0)} .$$

Si il existe un ω_0 tel que $\omega \subset\subset \omega_0 \subset \Omega$ alors on peut approximer ω par des sous-domaines ω^0 du même type que ω_0 tels que $\omega \subset\subset \omega^0 \subset\subset \omega_0$.

En approchant ω par des ω^0 on tire

$$\boxed{\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)}}.$$

Pour montrer que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

on observe que d'après le théorème 2.8.1, $\forall\, q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} f - Au$$

et en particulier

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega\subset[u=0])\text{ fort}} f$$

avec convergence des normes

$$|\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |f|_{L^q(\omega)} .$$

On déduit que

$$|f|_{L^q(\omega)} = \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^q(\omega)} \leq |\omega|^{\frac{1}{q}} \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)}$$

et en faisant tendre q vers l'infini

$$|f|_{L^\infty(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)}$$

d'où avec β croissante, continue et impaire $(\beta(0)=0)$

$$|f|_{L^\infty(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(\omega)} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \beta(|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)}) = \beta(\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)})$$

et encore avec β inversible et impaire, β^{-1} croissante, continue et impaire

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq \beta^{-1}(|f|_{L^\infty(\omega)}) = |\beta^{-1}(f)|_{L^\infty(\omega)} = |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\liminf_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \geq |u_0|_{L^\infty(\omega)}}\,.$$

Finalement

$$\boxed{|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u_0|_{L^\infty(\omega)}}\,.$$

Pour la dernière partie de la conclusion on voit que d'après le théorème 2.8.1 $\forall\, q \geq 2$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} f - Au$$

et en particulier dans $\omega \subset [u=0]$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega)\text{ fort}} f$$

d'où, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\omega} f$$

donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\omega} u_0$$

car $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$ et β est continue.

L'estimation

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

permet d'avoir pour une constante $\sigma > 0$ et ε petit

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma$$

donc p.p. ω

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma \in L^\infty(\omega)$$

pour ε petit.

On a obtenu

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. }\omega} u_0$$

et

$$|u_\varepsilon| \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} + \sigma \in L^\infty(\omega)$$

pour ε petit.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans $L^q(\omega) (q \geq 1)$ assure, à une sous-suite près,

$$\boxed{u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega)\text{ fort}} u_0}$$

ce qui complète le résultat. $\triangle$

2.10.7 Comportement de u_ε. Une autre approche

Théorème 2.10.7

Soit une fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ bornée, croissante, continue, inversible avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} A\,u + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(-\infty) & t < 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t = 0 \\ \beta(+\infty) & t > 0\,. \end{cases}$$

Si u_ε est la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

alors on a :

i)

$$\int_\Omega j(\beta(u_\varepsilon)) \leq \int_\Omega j(f - Au) \quad \text{et} \quad \limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \leq \int_\omega j(f - Au)$$

pour toute fonction convexe positive et propre $j : [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ telle que $j(0) = 0$ ayant le sous-différentiel lipschitzien et tout domaine $\omega \subset \Omega$ de classe $C^{1,1}$;

ii) si la fonction $|\beta^{-1}|^p$ est convexe satisfaisant les conditions du point i) et $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^p(\omega)$ avec le domaine $\omega \subset [u = 0]$, alors on a

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\omega)\text{fort}} u_0 \ ;$$

iii) si il existe une fonction convexe j comme au point i) telle que $|\beta^{-1}|^p \leq j$ et $j(f) \in L^1(\omega)$ avec $\omega \subset [u = 0]$ alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\omega)\text{ fort}} u_0$$

pour tout $1 \leq q < p$. $\triangle$

Preuve :

i) Notons $\partial j = \varphi$.

Selon le théorème 2.7.1 on a $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et avec φ lipschitzienne et $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ bornée on aura $\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$.

Une multiplication par $\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})$ de l'équation pénalisée réécrite

$$A(\varepsilon u_\varepsilon - u) = f - Au - \beta(u_\varepsilon)$$

donne après une intégration dans ω

$$(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_\omega = (f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_\omega \ .$$

On va estimer chaque terme de cette égalité.

On a

$$(A(\varepsilon u_\varepsilon - u), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_\omega =$$

[intégration par parties, $\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$, φ lipschitzienne donc dérivable p.p., $\beta \in C^1(\mathbb{R})$]

$$= \varepsilon(\varphi' \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})\beta'(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^n a_{ij}(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})_{x_i}(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon})_{x_j})_\omega + (\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^n a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon - u)_{x_j} n_i)_{\partial\omega} \geq$$

[φ, β croissantes, A elliptique]

$$\geq (\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^n a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon - u)_{x_j} n_i)_{\partial\omega} \ .$$

Ensuite

$$(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_\omega =$$

[décomposition de domaine et de $f - Au$ selon le signe de u, on a $Au = 0$ dans $[u = 0]$ avec le lemme 2.8.1]

$$=(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]\cap\omega} + (f - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap\omega}$$
$$+(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]\cap\omega}$$

où

$$(\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]\cap\omega} \leq$$

[$\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon) \geq 0$, $\frac{u}{\varepsilon} > 0$ dans $[u > 0]$]

$$\leq (\beta(+\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u>0]\cap\omega} \leq$$

[j est convexe avec $\partial j = \varphi$]

$$\leq (j(\beta(+\infty)) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u>0]\cap\omega} =$$

[$f - Au = \beta(+\infty)$ dans $[u > 0]$]

$$= (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u>0]\cap\omega} \;;$$

$$(f - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u=0]\cap\omega} \leq$$

[j est convexe avec $\partial j = \varphi$]

$$\leq (j(f) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u=0]\cap\omega} \leq$$

[$f - Au = f$ p.p. dans $[u = 0]$ avec le lemme 2.8.1]

$$\leq (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u=0]\cap\omega} \;;$$

$$(\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]\cap\omega} \leq$$

[$\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon) \leq 0$, $\frac{u}{\varepsilon} < 0$ dans $[u < 0]$]

$$\leq (\beta(-\infty) - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon))_{[u<0]\cap\omega} \leq$$

[j est convexe avec $\partial j = \varphi$]

$$\leq (j(\beta(-\infty)) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u<0]\cap\omega} =$$

[$f - Au = \beta(-\infty)$ dans $[u < 0]$]

$$= (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_{[u<0]\cap\omega} \;;$$

donc après une sommation

$$(f - Au - \beta(u_\varepsilon), \varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}))_\omega \leq (j(f - Au) - j(\beta(u_\varepsilon)), 1)_\omega \;.$$

Dans ces conditions l'égalité du départ devient l'inégalité

$$\int_\omega j(f - Au) - \int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \geq (\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon - u)_{x_j} n_i)_{\partial\omega} \;.$$

Pour évaluer le troisième terme on observe qu'il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{1,p}(\partial\omega)} \leq C\,|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,p}(\omega)}$$

car les injections $W^{2,p}(\omega) \subset W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\omega) \subset W^{1,p}(\partial\omega)$ sont compactes selon [Baiocchi et Capelo, pg. 93] lorsque $\omega \in C^{1,1}$ et d'autre part en utilisant le théorème 2.7.1 $\varepsilon u_\varepsilon - u$ converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ fort vers 0 lorsque ε tend vers 0 donc on aura

$$(\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon - u)_{x_j} n_i)_{\partial\omega} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

avec β bornée. $\triangle$

Ceci permet d'avoir

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \le \int_\omega j(f - Au) \ .$$

On voit aussi que lorsque $\omega = \Omega$ on a avec $\varepsilon u_\varepsilon - u \in H_0^1(\Omega)$

$$(\varphi \circ \beta(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}), \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(\varepsilon u_\varepsilon - u)_{x_j} n_i)_{\partial\omega} = 0$$

donc

$$\int_\Omega j(\beta(u_\varepsilon)) \le \int_\Omega j(f - Au) \ .$$

ii) On pose $j(t) = |\beta^{-1}(t)|^p$ pour $t \in (\beta(-\infty), \beta(+\infty))$ et $j(\beta(\pm\infty)) = \infty$. Alors j satisfait les conditions du point i) et on aura via le lemme 2.8.1

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_\omega |u_\varepsilon|^p \le \int_\omega |u_0|^p$$

donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\omega)\text{ faible}} v \ .$$

D'autre part le théorème 2.8.1 permet d'avoir

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\Omega)\text{ fort}} f - Au$$

d'où on déduit

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} f - Au$$

et avec β^{-1} continue et $\omega \subset [u = 0]$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} u_0$$

et la coïncidence de la limite faible dans $L^p(\omega)(p > 1)$ avec la limite ponctuelle donne $v = u_0$.

La semicontinuité inférieure de la norme $|\circ|_{L^p(\omega)}$ dans la topologie faible assure

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\omega |u_\varepsilon|^p \ge \int_\omega |u_0|^p$$

ce qui confronté avec l'estimation antérieure sur u_ε donne

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\omega |u_\varepsilon|^p = \int_\omega |u_0|^p \ .$$

Il reste a observer que la convergence faible et en norme dans l'espace uniformément convexe $L^p(\omega)$ implique convergence forte donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p(\omega)\text{ fort}} u_0 \ .$$

iii) L'estimation $|\beta^{-1}|^p \le j$ combinée avec le point i) et le lemme 2.8 donne

$$\int_\omega |u_\varepsilon|^p \le \int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \le \int_\omega j(f) < \infty \ .$$

On obtient comme au point ii) la convergence ponctuelle de u_ε vers u_0 lorsque ε tend vers 0.

En appliquant le lemme 2.3.2 on obtient le résultat. △

Remarque 2.10.7

Dans l'énoncé du théorème 2.10.7 on entend par $\int_\omega j(f - Au)$ l'intégrale de $j(f - Au)$ lorsque $j(f - Au) \in L^1(\omega)$ et $+\infty$ si non.

Au point ii) l'hypothèse $|\beta^{-1}|^p$ convexe est réalisée par exemple lorsque $|\beta|$ est concave respectivement dans $(-\infty, 0]$ et $[0, +\infty)$ car dans ce cas $|\beta^{-1}|$ sera convexe et d'autant plus $|\beta^{-1}|^p$.

La démonstration du théorème 2.10.8 reste valable lorsque $\beta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, en ce cas on a $[u = 0] = \overline{\Omega}$ et l'on travaille avec la fonction convexe j définie sur $\mathbb{R}$ telle que $j(f) \in L^1(\omega)$ avec $\omega = \Omega$. △

Commentaires 2.10

2.10.1 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ quand $\mathbf{u_0} \in \mathbf{W}^{2,\infty}([\mathbf{u}=0])$

On reprend la technique utilisée à la section 2.5 où on remarquait que la nature de u_ε sur le bord de Ω n'était pas impliquée. Ici Ω est remplacé par $[u=0]$ et les contraintes sur u_0 sont restreintes dans $[u=0]$. La remarque 2.10.1 indique que ces contraintes sont réalisables.

On travaille toujours en sept temps :

1. On introduit les fonctions d'approximation $u_\varepsilon^\pm$ ou dans l'esprit de la théorie du potentiel, fonctions barrières, à l'aide de la fonction régulière φ. Les fonctions barrières sont indépendantes de ε dans le sous-domaine $\omega \subset\subset [u=0]$.
2. Les fonctions d'approximation sont de classe $W^{2,\infty}([u=0])$ et encadrent u_ε sur le bord $\partial[u=0]$ et u_0 uniformément dans $[u=0]$.
3. Puisqu'on connaît le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0, notamment que $\varepsilon u_\varepsilon$ tend uniformément vers 0 dans $[u=0]$, on voit que $Au_\varepsilon^\pm$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Ceci est possible aussi parce que la construction des fonctions d'approximation utilise d'une façon linéaire la seule quantité dépendant de ε qui est la norme $|u_\varepsilon|_{L^\infty([u=0])}$, une constante.
4. Comme β est localement coercive on peut établir des comparaisons qui vont servir de support au principe du maximum. Le fait que β est coercive sur tout compact de $\mathbb{R}$ est essentiel pour maintenir les inégalités pour ε suffisamment petit mais strictement positif.
5. Le principe du maximum s'applique pour ε petit et on a $u_\varepsilon^+ \geq u_\varepsilon \geq u_\varepsilon^-$ p.p. $[u=0]$.
6. Comme les fonctions barrières sont indépendantes de ε dans ω et elles encadrent uniformément u_0, on obtient que $|u_\varepsilon - u_0| \leq \delta$ pour ε petit.
7. Il reste à faire tendre δ vers 0 ce qui force la convergence uniforme de u_ε vers u_0 dans ω lorsque ε tend vers 0.

Cette technique exige une régularité de u_0 comparable à celle de u_ε pour obtenir la convergence uniforme. Il serait intéressant de voir si on peut diminuer la régularité sur u_0 pour préserver un résultat comparable. C'est l'objet du théorème 2.10.2. △

2.10.2 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ sans contrainte sur $\mathbf{u_0}$

Dans les domaines ω où $u_0 \in L^\infty(\omega)$ on montre que $|u_\varepsilon - u_0|_{L^\infty(\omega)}$ reste bornée pour ε petit. On utilise la même technique, à quelques modifications près, sans aboutir à la convergence uniforme. Ce résultat est susceptible d'améliorations (voir le théorème 2.10.7).

On peut élaborer une version de ce type pour tous les résultats basés sur cette technique du principe du maximum actif lorsque le paramètre est petit. △

2.10.3 Comportement de $\frac{\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u_0}}{\varepsilon}$ quand $\mathbf{u_0} \in \mathbf{W}^{2,\infty}([\mathbf{u}=0]) \ni \mathbf{u_1}$

Le domaine qui sert de support pour les comparaisons recule à l'intérieur de $[u=0]$ pour rendre possible l'action du théorème 2.10.2. Ensuite les mêmes étapes avec un calcul plus laborieux. △

2.10.4 Amélioration de la convergence de $\mathbf{u}_\varepsilon$ quand $\mathbf{u_0} \in \mathbf{W}^{2,\infty}([\mathbf{u}=0]) \ni \mathbf{u_1}$

Sous l'hypothèse de régularité $u_0 \in W^{2,\infty} \ni u_1$ on arrive à améliorer la convergence localement uniforme du théorème 2.10.1 en convergence locale dans $W^{2,p}([u=0])$ faible grâce au lemme 2.5.2. △

2.10.5 Le cas particulier où $\mathbf{f}$ est constante

Dans le cas où f est une constante, on peut caractériser très bien le comportement de u_ε avec la technique du principe du maximum en présence de petit paramètre ε (voir les théorèmes 2.10.1-2.10.4). Ici on a renoncé à hiérarchiser les étapes vu la simplicité du cas.

Si $f \geq \beta(+\infty)$ p.p. Ω, alors u_ε tend uniformément vers $+\infty$.

Si $f \leq \beta(-\infty)$ p.p. Ω, alors u_ε tend uniformément vers $-\infty$.

Si $f \in (\beta(-\infty), \beta(+\infty))$, alors u_ε tend uniformément et localement vers $u_0 = \beta^{-1}(u_0)$.

On donne aussi une estimation uniforme pour u_ε toujours à l'aide du principe de maximum. △

2.10.6 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ sans contrainte sur $\mathbf{u}_0$

On obtient que $\forall\, \omega \subset\subset \omega_0 \subset [u=0]$ tels que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$ on a

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u_0|_{L^\infty(\omega)}$$

et $\forall\, q \geq 1$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega)\ \text{fort}} u_0\,.$$

Il n'y a pas de contrainte sur u_0. La commutativité d'une fonction croissante, continue et impaire avec la norme $|\circ|_\infty$ est utile ici. On remarque aussi que la nature bornée de β n'intervient pas dans la démonstration ce qui permet une version (théorème 2.3.4) de ce théorème lorsque β est non bornée. $\triangle$

2.10.7 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$. Une autre approche

On utilise des multiplications du type $\partial j(u_\varepsilon)$ où j est une fonction convexe positive arbitraire ayant le sous-différentiel lipschitzien. Comme on connaît le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ et β est bornée, on obtient des estimations de la forme $\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_\omega j(\beta(u_\varepsilon)) \leq \int_\omega j(f-Au)$ pour tout domaine $\omega \subset \Omega$ de classe $\omega \in C^{1,1}$. Lorsque $\omega \subset [u=0]$, $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega)$ et $|\beta^{-1}|^p \leq j$ pour une fonction convexe j, on est en mesure de donner une estimation sur u_ε dans $L^p(\omega)$. Il y a une certaine filiation entre ce résultat, les théorèmes 1.4.9 et 2.3.5, le travail de [Brézis[9]] et les espaces de Orlicz [Adams].

Ce résultat confirme la tendance de u_ε vers u_0 dans $[u=0]$ lorsque ε tend vers 0.

$\triangle$

2.11 Perturbations monotones tronquées. Évolution vers des invariants.

Préliminaires 2.11

La base des hypothèses est toujours celle des préliminaires 2.7.

On travaille avec β une fonction de troncature :

On dit que la fonction β est tronquée si

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta(+\infty) & t \geq c_+ > 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t \in [c_-, c_+] \\ \beta(-\infty) & t \leq c_- < 0 \end{cases} \qquad c_\pm \text{ constantes.}$$

Dans certaines situations on supposera β inversible dans $[c_-, c_+]$ avec inverse continu. $\triangle$

Problème 2.11

On étudie le cas où β est une fonction de troncature.

On dégage deux invariants qui rappellent l'approche algébrique de l'identification formelle (voir le théorème 2.6.1). $\triangle$

2.11.1 Estimation ponctuelle pour $\mathbf{u}_\varepsilon - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}$ et comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$

Théorème 2.11.1

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, inversible dans la partie non constante avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

On suppose β tronquée et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Si u, u_ε sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors p.p. Ω

$$c_- \leq u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \leq c_+$$

et l'on a, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\omega) \text{ fort}} u_0$$

pour tout domaine $\omega \subset [u = 0]$ tel que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^q(\omega)$. $\triangle$

Preuve :

L'équation $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ permet les comparaisons

$$\begin{cases} \varepsilon A\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right) + \beta\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} + \frac{u}{\varepsilon}\right) = f - Au \begin{cases} \leq \beta\left(c_+ + \frac{u}{\varepsilon}\right) = \varepsilon A c_+ + \beta\left(c_+ + \frac{u}{\varepsilon}\right) \\ \geq \beta\left(c_- + \frac{u}{\varepsilon}\right) = \varepsilon A c_- + \beta\left(c_- + \frac{u}{\varepsilon}\right) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} = 0 \begin{cases} \leq c_+ \\ \geq c_- \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

vu les propriétés de β, u. (*)

Le principe du maximum (voir théorème 1.3.2) assure p.p. Ω

$$c_- \leq u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \leq c_+ \ .$$

Pour la dernière partie de la conclusion on observe que d'après le théorème 2.8.1

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f - Au$$

(*)

$$f - Au = \begin{cases} \beta(+\infty) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_+) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_+ + \frac{u}{\varepsilon}) & [u>0] \\ f \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} [\beta(c_-), \beta(c_+)] \ni f \leq \beta(+\infty) = \beta(c_+) = \beta(c_+ + \frac{u}{\varepsilon}) & [u=0] \\ \beta(-\infty) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_-) \leq \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \leq \beta(c_+ + \frac{u}{\varepsilon}) & [u<0] \end{cases}$$

$$f - Au = \begin{cases} \beta(+\infty) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_+) \geq \underset{\beta \text{ tronquée}}{\overset{\beta(+\infty) = \beta(c_+)}{=\!=}} \geq \beta(c_- + \frac{u}{\varepsilon}) & [u>0] \\ f \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} [\beta(c_-), \beta(c_+)] \ni f \geq \beta(-\infty) = \beta(c_-) = \beta(c_- + \frac{u}{\varepsilon}) & [u=0] \\ \beta(-\infty) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_-) \underset{\beta \text{ tronquée}}{=\!=} \beta(c_- + \frac{u}{\varepsilon}) & [u<0] \end{cases}$$

et, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \Omega} f - Au$$

d'où avec β^{-1} continue et $u_0 \in L^q(\omega \subset [u=0])$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } \omega} u_0 \,.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans $L^q(\omega)$ assure

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^q(\omega) \text{ fort}} u_0 \,.$$

△

Remarque 2.11.1
On observe que l'estimation $c_- \leq u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \leq c_+$ est obtenue sans l'hypothèse d'inversibilité sur β dans $[c_-, c_+]$. △

2.11.2 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}$

Théorème 2.11.2
Soit une fonction β bornée, croissante, continue, inversible dans la partie non constante avec inverse continu, telle que $\beta(0) = 0$.

On suppose β tronquée et $\widetilde{\beta}$ comme au théorème 2.7.1.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega) \; (p > n) \\ u \in H_0^1(\Omega) \,. \end{cases}$$

Si u_ε est la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) \ni f \in L^p(\Omega) \; (p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors $\forall\, q \geq 2$

$$u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,q}_{loc}([u>0]) \text{ faible}} u_0^+$$

$$u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,q}_{loc}([u<0]) \text{ faible}} u_0^-$$

où $Au_0^\pm = 0$ dans $[u > 0]$(resp. $[u < 0]$). △

Preuve :
Soit un domaine $\omega \subset\subset [u > 0]$ et les fonctions $\varphi_1 \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \ni \varphi_2$ telles que $\overline{\omega} \subset [\varphi_1 \neq 0] \subset [\varphi_2 = 1] \subset\subset [\varphi_2 \neq 0] \subset\subset [u > 0]$.

L'équation $\varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ se réécrit comme

$$\varepsilon A\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right) = f - Au - \beta(u_\varepsilon) \,.$$

D'après le théorème 2.7.1

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

et avec les injections de Sobolev $(p > n)$

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{C^1(\overline{\Omega})} u$$

d'où (au sens de la convergence des normes)

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty_{loc}([u>0])} \infty$$

car si $K \subset [u > 0]$ est un compact et $\delta = \inf_K u > 0$ alors pour ε assez petit on a sur K

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u| \leq \frac{\delta}{2}$$

d'où

$$\varepsilon u_\varepsilon - u \geq -\frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon u_\varepsilon \geq u - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$$

donc

$$u_\varepsilon \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}$$

et u_ε tend uniformément vers $+\infty$ dans K lorsque ε tend vers 0.

Ceci entraîne (β tronquée)

$$\beta(u_\varepsilon) = \beta(+\infty) \qquad \text{dans } [\varphi_2 \neq 0] \subset\subset [u > 0]$$

avec ε suffisamment petit.

On a aussi

$$f - Au = \beta(+\infty) \qquad \text{dans } [u > 0]\,.$$

Dans la suite C dénote une constante indépendante de ε.

Nous avons avec ε petit

$$\varepsilon A\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right) = f - Au - \beta(u_\varepsilon) = 0 \qquad \text{dans } [\varphi_2 \neq 0]$$

et le lemme 2.5.1 assure

$$\left|\varphi_1\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_{W^{2,q}(\Omega)}$$
$$\leq$$
$$C\left\{\left|\varphi_2 A\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_{L^q(\Omega)} + \left|\varphi_2\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_{L^q(\Omega)}\right\}$$
$$=$$
$$C\left|\varphi_2\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_{L^q(\Omega)}$$
$$\leq$$
$$C\left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{L^q(\Omega)}\,.$$

En utilisant le théorème 2.11.1 on a $\left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{L^q(\Omega)} < C$ donc

$$\left|\varphi_1\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_{W^{2,q}(\Omega)} < C\,.$$

On aura, à une sous-suite près, ($W^{2,q}(\Omega)$ réflexif)

$$\varphi_1\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}(\Omega) \text{ faible}} \varphi_1 u_0^+$$

et avec $[\varphi_1 = 1] \supset \overline{\omega}$

$$u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}(\omega) \text{ faible}} u_0^+\,.$$

En passant à la limite au sens des distributions quand ε tend vers 0 dans l'équation

$$A\left(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}\right) = 0 \qquad \text{dans } \omega$$

on tire $Au_0^+ = 0$ p.p. ω.

Comme ω était arbitraire dans $[u > 0]$ on aura

$$u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}_{\text{loc}}([u>0]) \text{ faible}} u_0^+$$

avec $Au_0^+ = 0$ p.p. $[u > 0]$.

De la même manière on obtient

$$u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,q}_{\text{loc}}([u<0]) \text{ faible}} u_0^-$$

avec $Au_0^- = 0$ p.p. $[u < 0]$. $\triangle$

2.11.3 Un analogue des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2

Théorème 2.11.3

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

On suppose β tronquée :

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta(+\infty) & t \geq c_+ > 0 \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & t \in [c_-, c_+] \\ \beta(-\infty) & t \leq c_- < 0 \,. \end{cases}$$

On considère les problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \ (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Si

$$H_0^1(\Omega) \ni u_0 = \begin{cases} c_+ & [u > 0] \\ \beta^{-1}(f) & [u = 0] \\ c_- & [u < 0] \end{cases}$$

alors

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} - u_0\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \\ |\beta(u_\varepsilon) - (f - Au)|_2 \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad \text{si } \beta \text{ lipschitzienne} \end{cases}$$

et

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)(q \geq 2) \Rightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} - u_0\right|_q \leq C \\ |\beta(u_\varepsilon) - (f - Au)|_q \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } \beta \text{ lipschitz.} \\ |\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{q}} \end{cases}$$

où C est une constante générique indépendante de ε . $\triangle$

Preuve :

Soit $\varphi(t) = t|t|^{q-2}$.

D'après le théorème 2.7.1 on a $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ via les injections de Sobolev donc avec $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ si $q > 2$ nous aurons $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$.

On observe que p.p. Ω

$$\beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = f - Au$$

et une soustraction des problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon A(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) + \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = f + \varepsilon A u_0 \\ u_0 + \frac{u}{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

suivie d'une multiplication par $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$ donne

$$\boxed{0} \longrightarrow \varepsilon(A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{1}$$
$$=$$
$$\boxed{2} \longrightarrow \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

où

$$\boxed{0} \longrightarrow ((Au_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \geq$$

[on applique le théorème 1.2.2]

$$\geq \boxed{(C_q^A)^{-1} \left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_q^q} \longleftarrow \boxed{00}$$

$$\boxed{1} \longrightarrow (\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) =$$

[β croissante]

$$= (|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})|, |\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})|) \leq$$

[si β lipschitzienne de constante α^β]

$$\leq \boxed{(\alpha^\beta)^{1-q}|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \tfrac{u}{\varepsilon})|_q^q} \longleftarrow \boxed{11}$$

$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \geq$$

[si β est seulement croissante]

$$\geq \boxed{0}$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq \boxed{|Au_0|_q \left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_q^{q-1}} \longleftarrow \boxed{22}$$

$$\boxed{3} \longrightarrow (-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) =$$

[avec $q = 2$]

$$= (-Au_0, u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \leq$$

[on note $|a|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|_\infty$]

$$\leq \boxed{n\,|a|_\infty\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}\,\left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)}}\,. \longleftarrow \boxed{33}$$

Dans ces conditions l'égalité du départ

$$\boxed{0} \longrightarrow \varepsilon(Au_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

$$+$$

$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \longleftarrow \boxed{1}$$

$$=$$

$$\boxed{2} \longrightarrow \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

permet d'avoir

$$\boxed{00} \longrightarrow \varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_q^q + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \tfrac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \leq \longleftarrow \boxed{11}$$

[via le théorème 1.2.1]

$$\leq \alpha_A(\left|\nabla(u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon})\right|^2, \varphi'(u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon})) + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \tfrac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \leq$$

[selon la position de q par rapport à 2]

$$\leq \begin{cases} \varepsilon\,|Au_0|_q\left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_q^{q-1} & \text{si } q \geq 2 \\ \varepsilon\left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} n\,|a|_\infty\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)} & \text{si } q = 2\,. \end{cases}$$

En combinant on obtient

$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \leq C_q^A\,|Au_0|_q$$

$$\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q \leq \varepsilon^{\frac{1}{q}}\,|Au_0|_q\,(\alpha^\beta C_q^A)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq n\,|a|_\infty\,\alpha_A^{-1}\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}$$

et à l'aide du théorème 1.3.1

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C_A\,|A(\varepsilon u_\varepsilon - u)|_q = C_A\,|f - Au - \beta(u_\varepsilon)|_q \overset{\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon})=f-Au}{=\!=\!=}$$

$$= C_A\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q \leq \varepsilon^{\frac{1}{q}} C_A\,|Au_0|_q\,(\alpha^\beta C_q^A)^{\frac{1}{q'}}$$

le résultat. △

2.11.4 Premier invariant

Si on regarde les théorèmes 2.3.1, 2.3.2, 2.11.1, 2.11.3 on voit que l'hypothèse : les problèmes

$$\begin{cases} u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & \text{dans } [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & \text{dans } [u=0] \\ u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & \text{dans } [u<0] \end{cases}$$

admettent une solution $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ indépendante de ε, se retrouve sous des formes spécifiques dans chaque résultat cité.

Une continuation naturelle de tout ceci sera le

Théorème 2.11.4

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0)=0$.

Soit u_ε, u telles que

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)\ (p \ge 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p \ge 2) \\ u \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$

Si les problèmes $(\varepsilon > 0)$

$$\begin{cases} u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & \text{dans } [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & \text{dans } [u=0] \\ u_\varepsilon \le u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & \text{dans } [u<0] \end{cases}$$

admettent une même solution $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ indépendante de ε, alors

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \Longrightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} \le C \\ \left|\beta(u_\varepsilon) - \beta\left(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_2 \le C\varepsilon^{\frac12} \quad \text{si } \beta \text{ lipschitzienne} \end{cases}$$

$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)(q \ge 2) \Longrightarrow \begin{cases} \left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \le C \\ \left|\beta(u_\varepsilon) - \beta\left(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}\right)\right|_q \le C\varepsilon^{\frac1q} \quad \text{si } \beta \text{ lips.} \end{cases}$$

où C est une constante générique indépendante de ε. $\triangle$

Preuve :

Soit $\varphi(t) = t|t|^{q-2}$.

D'après le théorème 2.7.1 on a $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ via les injections de Sobolev donc avec $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ si $q > 2$ nous aurons $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$.

En considérant les problèmes (au sens faible)

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon A(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) + \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = Au + \varepsilon A u_0 + \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) \\ u_0 + \frac{u}{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

par soustraction on arrive à

$$\varepsilon A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) + \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = f - Au - \varepsilon A u_0 - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})$$

et une multiplication par $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})$ conduit à

$$\boxed{0} \longrightarrow \varepsilon\big(A\big(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\big), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})\big)$$
$$+$$
$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi((u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{1}$$
$$=$$
$$\boxed{2} \longrightarrow (f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$\varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{3}$$

Maintenant

$$\boxed{0} \longrightarrow \big(A\big(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\big), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})\big) \ge$$

[en appliquant le théorème 1.2.2]

$$\geq \boxed{(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon}\right|_q^q} \longleftarrow \boxed{00}$$

$$\boxed{1} \longrightarrow (\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \leq$$

[si β croissante et lipschitzienne de constante α^β]

$$\leq \boxed{(\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \tfrac{u}{\varepsilon})\right|_q^q} \longleftarrow \boxed{11}$$

$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \geq$$

[si β est seulement croissante]

$$\geq \boxed{0}$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) =$$

[décomposition de domaine selon le signe de u]

$$=(\beta(+\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]}$$

$$+$$

$$(f - \beta(u_0), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u=0]}$$

$$+$$

$$(\beta(-\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} =$$

[on a $u_0 = \beta^{-1}(f)$ dans $[u = 0]$]

$$=(\beta(+\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]}$$

$$+$$

$$(\beta(-\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} \leq$$

[on a par hypothèse $\beta(-\infty) \leq \beta(u_\varepsilon) \leq \beta(+\infty)$ et respectivement $u_\varepsilon \leq u_0 + \frac{u}{\varepsilon}$ dans $[u > 0]$ et $u_\varepsilon \geq u_0 + \frac{u}{\varepsilon}$ dans $[u < 0]$]

$$\leq \boxed{0}$$

et tout ceci transforme l'égalité

$$\boxed{0} \longrightarrow \varepsilon(A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

$$+$$

$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi((u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{1}$$

$$=$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

$$+$$

$$\varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{3}$$

en

$$\boxed{00} \longrightarrow \varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q \leq$$

[en utilisant le théorème 1.2.1]

$$\leq \alpha_A(|\nabla u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}|^2, \varphi'(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \leq$$

$$\boxed{3} \longrightarrow \leq \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) + 0 = \longleftarrow \boxed{22}$$

$$= \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

ou

$$\boxed{00}\longrightarrow \varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \leq \longleftarrow \boxed{1}$$

[à l'aide du théorème 1.2.1]

$$\leq \alpha_A(|\nabla u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}|^2, \varphi'(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \leq$$

$$\boxed{3}\longrightarrow \leq \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) + 0 = \longleftarrow \boxed{22}$$

$$= \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

lorsque β est lipschitzienne.

On distingue plusieurs situations :

1. $\boxed{u_0 \in H_0^1(\Omega)}$

Pour $q = 2$, les inégalités précédentes deviennent

$$\varepsilon\alpha_A\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq -\varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}u_{0x_j}(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})_{x_i}, 1) \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq \varepsilon n\,|a|_\infty\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)}$$

ou

$$\varepsilon\alpha_A\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} + (\alpha^\beta)^{-1}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_2^2 \leq$$

$$\leq\ -\varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}u_{0x_j}(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})_{x_i}, 1) \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq \varepsilon n\,|a|_\infty\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)}$$

si β est lipschitzienne.

En combinant

$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} \leq n\,|a|_\infty\,\alpha_A^{-1}\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}$$

et lorsque β est lipschitzienne

$$\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_2^2 \leq \varepsilon(n\,|a|_\infty)^2\alpha_A^{-1}\,|u_0|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad .$$

2. $\boxed{u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,q}(\Omega)}$

On a

$$(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq\ |Au_0|_q\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^{q-1}$$

et les inégalités

$$\varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q \leq \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

et si β est lipschitzienne

$$\varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \leq \varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$

permettent d'avoir

$$\varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q \leq \varepsilon\,|Au_0|_q\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^{q-1}$$

ou
$$\varepsilon(C_q^A)^{-1}\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^q + (\alpha^\beta)^{1-q}\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q^q \le \varepsilon\,|Au_0|_q\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q^{q-1}$$
d'où en combinant
$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \le C_q^A\,|Au_0|_q$$
et lorsque β est lipschitzienne
$$\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q \le \varepsilon^{\frac{1}{q}}(\alpha^\beta C_q^A)^{\frac{1}{q^*}}$$
ce qui complète le résultat. △

2.11.5 Deuxième invariant

Si on regarde les théorèmes 2.3.1, 2.3.2, 2.11.2, 2.11.3, on voit que l'hypothèse de base : $\frac{1}{u} \in L^q([u \neq 0])$ et le problème
$$H_0^1(\Omega)\cap W^{2,q}(\Omega) \ni u_0 \begin{cases} u_0 \ge 0 & \text{dans } [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & \text{dans } [u=0] \\ u_0 \le 0 & \text{dans } [u<0] \end{cases}$$
admet une solution $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ avec $q \ge 2$, se retrouve sous des formes spécifiques dans chaque résultat cité.

Une continuation naturelle de tout ceci sera le

Théorème 2.11.5

Soit une fonction β bornée, croissante, continue avec $\beta(0) = 0$.

On suppose que
$$\beta_1^+ \ge (\beta(+\infty) - \beta(t))t \qquad \forall\ t \ge 0$$
$$\beta_1^- \ge (\beta(-\infty) - \beta(t))t \qquad \forall\ t \le 0\,.$$
Soient les problèmes
$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)\ (p>n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$
$$\begin{cases} A\,u\, + \widetilde{\beta}(u\,) \ni f \in L^p(\Omega)\ (p>n) \\ u \in H_0^1(\Omega)\,. \end{cases}$$
Si $\frac{1}{u} \in L^q([u \neq 0])$ et le problème
$$H_0^1(\Omega)\cap W^{2,q}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \ni u_0 \begin{cases} u_0 \ge 0 & \text{dans } [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & \text{dans } [u=0] \\ u_0 \le 0 & \text{dans } [u<0] \end{cases}$$
admet une solution, alors
$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_q \le C$$
$$\left|u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)} \le C$$
$$\left|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\right|_q \le \varepsilon^{\frac{1}{q}}C \quad (\text{ si } \beta \text{ lipschitzienne})$$
pour diverses constantes C indépendantes de ε. △

Preuve :

On note d'abord que d'après les injections de Sobolev et le théorème 2.7.1 on a $u \in W^{2,p}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ donc les ensembles $[u>0]$, $[u<0]$ sont des ouverts donc la condition $\frac{1}{u} \in L^q([u \neq 0])$ est bien posée.

D'après le théorème 2.7.1 on a $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$ via les injections de Sobolev et avec $u_0 \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ nous aurons $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) \in H_0^1(\Omega)$.

Une soustraction des problèmes
$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon A(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) + \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = Au + \varepsilon Au_0 + \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) \\ u_0 + \frac{u}{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

conduit à

$$\begin{cases} \varepsilon A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}) + \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) = f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) - \varepsilon A u_0 \\ u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et une multiplication par $\varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})$ donne

$$\boxed{0} \longrightarrow \varepsilon(A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$(\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \longleftarrow \boxed{1}$$
$$=$$
$$\boxed{2} \longrightarrow (f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$\varepsilon(-Au_0, \varphi(u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} - u_0)) \; . \longleftarrow \boxed{3}$$

On va estimer chaque terme de cette égalité :

$$\boxed{0} \longrightarrow (A(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) =$$

[intégration par parties]

$$= (\sum_{i,j} a_{ij}(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})_{x_j}(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})_{x_i}, \varphi'(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \geq$$

[en appliquant le théorème 1.2.2]

$$\geq \boxed{(C_q^A)^{-1} \left| u_\varepsilon - u_0 - \tfrac{u}{\varepsilon} \right|_q^q} \longleftarrow \boxed{00}$$

$$\boxed{1} \longrightarrow (\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) \geq$$

[on a $\varphi(t) = t|t|^{q-2}$ croissante et lorsque β est croissante et lipschitzienne de constante α^β]

$$\geq \boxed{(\alpha^\beta)^{1-q} \left| \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \tfrac{u}{\varepsilon}) \right|_q^q} \longleftarrow \boxed{11}$$

$$\boxed{2} \longrightarrow (f - Au - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon})) =$$

[décomposition de domaine selon le signe de u et décomposition fonctionnelle de $f - Au$: on a respectivement $f - Au = \beta(+\infty)$ dans $[u > 0]$, $f - Au = f$ dans $[u = 0]$ et $f - Au = \beta(-\infty)$ dans $[u < 0]$]

$$= (\beta(+\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]}$$
$$+$$
$$(f - \beta(u_0), \varphi(u_\varepsilon - u_0))_{[u=0]}$$
$$+$$
$$(\beta(-\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}), \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} =$$

[on a $\beta(u_0) = f$ p.p. $[u = 0]$ et respectivement $u_0 \geq 0$ p.p. $[u > 0]$, $u_0 \leq 0$ p.p. $[u < 0]$ donc l'inversion $\frac{1}{u+\varepsilon u_0}$ dans $[u \neq 0]$ a un sens]

$$= \varepsilon((\beta(+\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}))(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\frac{1}{u + \varepsilon u_0}, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u>0]}$$
$$+$$
$$\varepsilon((\beta(-\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}))(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\frac{1}{u + \varepsilon u_0}, \varphi(u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon}))_{[u<0]} \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq \varepsilon \left| (\beta(+\infty) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}))(u_0 + \frac{u}{\varepsilon})\frac{1}{u + \varepsilon u_0} \right|_{L^q([u>0])} \left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_{L^q([u>0])}^{q-1}$$

$$+$$

$$\varepsilon\left|(\beta(-\infty)-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon}))(u_0+\frac{u}{\varepsilon})\frac{1}{u+\varepsilon u_0}\right|_{L^q([u<0])}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|^{q-1}_{L^q([u<0])}\leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq\varepsilon\left|(\beta(+\infty)-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon}))(u_0+\frac{u}{\varepsilon})\right|_{L^\infty([u>0])}\left|\frac{1}{u+\varepsilon u_0}\right|_{L^q([u>0])}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|^{q-1}_{L^q([u>0])}$$

$$+$$

$$\varepsilon\left|(\beta(-\infty)-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon}))(u_0+\frac{u}{\varepsilon})\right|_{L^\infty([u<0])}\left|\frac{1}{u+\varepsilon u_0}\right|_{L^q([u<0])}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|^{q-1}_{L^q([u<0])}\leq$$

[on a $u_0\geq 0$ p.p. $[u>0]$, $u_0\leq 0$ p.p. $[u<0]$, $\frac{1}{u}\in L^q([u\neq 0])$ et d'après le comportement asymptotique de β autour de $\pm\infty$ il vient $\beta_1^+\geq(\beta(+\infty)-\beta(t))t\ \forall\ t\geq 0$, $\beta_1^-\geq(\beta(-\infty)-\beta(t))t\ \forall\ t\leq 0$]

$$\leq\boxed{\varepsilon(|\beta_1^+|+|\beta_1^-|)\left|\tfrac{1}{u}\right|_{L^q([u\neq 0])}\left|u_\varepsilon-u_0-\tfrac{u}{\varepsilon}\right|^{q-1}_{L^q(\Omega)}}\longleftarrow\boxed{22}$$

$$(-Au_0,\varphi(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}))\leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq\boxed{|Au_0|_q\left|u_\varepsilon-u_0-\tfrac{u}{\varepsilon}\right|^{q-1}_q}$$

$$\boxed{3}\longrightarrow(-Au_0,\varphi(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}))=$$

[lorsque $q=2$]

$$=(-Au_0,u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon})=$$

[intégration par parties]

$$=(\sum_{i,j}a_{ij}u_{0x_j}(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon})_{x_i},-1)\leq$$

[on applique l'inégalité de Hölder en notant $|a|_\infty=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|_\infty$]

$$\leq n|a|_\infty|u_0|_{H_0^1(\Omega)}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Dans ces conditions, l'identité

$$\varepsilon(A(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}),\varphi(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$(\beta(u_\varepsilon)-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon}),\varphi(u_\varepsilon-(u_0+\frac{u}{\varepsilon})))$$
$$=$$
$$(f-Au-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon}),\varphi(u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}))$$
$$+$$
$$\varepsilon(-Au_0,\varphi(u_\varepsilon-\frac{u}{\varepsilon}-u_0))$$

permet d'avoir selon les situations :

1. $\boxed{q=2}$

$$\varepsilon\alpha_A\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|^2_{H_0^1(\Omega)}+(\alpha^\beta)^{-1}\left|\beta(u_\varepsilon)-\beta(u_0+\frac{u}{\varepsilon})\right|^2_2\leq$$

$$\leq\varepsilon(|\beta_1^+|+|\beta_1^-|)\left|\frac{1}{u}\right|_{L^2([u\neq 0])}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|_2+\varepsilon n\,|a|_\infty|u_0|_{H_0^1(\Omega)}\left|u_\varepsilon-u_0-\frac{u}{\varepsilon}\right|_{H_0^1(\Omega)}\leq$$

[l'inégalité de Poincaré]

$$\leq \varepsilon \left\{ (|\beta_1^+| + |\beta_1^-|) \left| \frac{1}{u} \right|_{L^2([u\neq 0])} C_P + n\,|a|_\infty\, |u_0|_{H_0^1(\Omega)} \right\} \left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où en combinant

$$\left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_{H_0^1(\Omega)} \leq (|\beta_1^+| + |\beta_1^-|) \left| \frac{1}{u} \right|_{L^2([u\neq 0])} C_P \alpha_A^{-1} + n \alpha_A^{-1}\, |a|_\infty\, |u_0|_{H_0^1(\Omega)} = \alpha_A^{-1} C_0$$

et lorsque β est lipschitzienne

$$\left| \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) \right|_2^2 \leq \varepsilon \alpha^\beta \alpha_A^{-1} C_0 \,.$$

2. $\boxed{q \geq 2}$

$$\varepsilon (C_q^A)^{-1} \left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_q^q + (\alpha^\beta)^{1-q} \left| \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) \right|_q^q \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\{ (|\beta_1^+| + |\beta_1^-|) \left| \frac{1}{u} \right|_{L^q([u\neq 0])} + |Au_0|_q \right\} \left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_q^{q-1}$$

d'où en combinant

$$\left| u_\varepsilon - u_0 - \frac{u}{\varepsilon} \right|_q \leq C_q^A \left\{ (|\beta_1^+| + |\beta_1^-|) \left| \frac{1}{u} \right|_{L^q([u\neq 0])} + |Au_0|_q \right\} \underset{\text{notation}}{=\!=\!=} C_1$$

et lorsque β est lipschitzienne

$$\left| \beta(u_\varepsilon) - \beta(u_0 + \frac{u}{\varepsilon}) \right|_q \leq \varepsilon^{\frac{1}{q}} (\alpha^\beta C_1)^{\frac{1}{q'}}$$

ce qui complète le résultat. △

Commentaires 2.11

2.11.1 Troncature. Estimation ponctuelle

C'est le début de l'étude du problème pénalisé avec β tronquée.

Dans ce cas on obtient que $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$ est uniformément bornée. On montre via le théorème de convergence dominée de Lebesgue et le comportement de la perturbation monotone, qu'il y a convergence forte (à une sous-suite près) dans les espaces $L^q(\omega \subset [u=0])$ avec $q \geq 1$. △

2.11.2 Troncature. Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon - \frac{\mathbf{u}}{\varepsilon}$

On obtient la convergence locale de $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$ respectivement dans les espaces $W^{2,q}_{\text{loc}}([u>0])$ et $W^{2,q}_{\text{loc}}([u<0])$. La technique exposée permet de localiser les points limite seulement par la condition $Au_\pm = 0$.

2.11.3 Troncature. Un analogue des théorèmes 2.3.1 et 2.3.2

En imposant la condition $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, on montre que $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon} - u_0$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et on arrive à contrôler la vitesse de convergence de $\beta(u_\varepsilon)$ dans $L^2(\Omega)$ par $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Il serait intéressant de savoir, en se rapportant au théorème 2.2.1 et les commentaires 2.2, si il n'y a pas de convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$ pour $u_\varepsilon - \frac{u}{\varepsilon}$. La condition $u_0 \in W^{2,q}(\Omega)$ transpose les convergences dans $L^2(\Omega)$ en convergences dans $L^q(\Omega)$ (voir en ce sens le théorème 2.3.2 où β est non bornée). La technique utilisée est basée sur la méthode de monotonie où le théorème 1.2.2 est indispensable. △

2.11.4 Premier invariant

Si on regarde l'hypothèse de base de ce théorème, que les problèmes $(\varepsilon > 0)$

$$\begin{cases} u_\varepsilon \leq u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & [u>0] \\ u_0 = \beta^{-1}(f) & [u=0] \\ u_\varepsilon \leq u_0 + \frac{u}{\varepsilon} & [u<0] \end{cases}$$

admettent une solution, on voit qu'elle se retrouve sous des formes spécifiques dans chaque résultat cité.

La démonstration est une extension de la preuve du théorème 2.11.3. △

2.11.5 Deuxième invariant

Des conditions particulièrement contraignantes sur u ($\frac{1}{u} \in L^q([u \neq 0])$) mais naturelles si on regarde l'identification formelle selon le théorème 2.6.1 où $\frac{1}{u}$ joue un rôle de structure.

On voit que l'hypothèse de base se retrouve sous des formes diverses dans les théorèmes cités.

La démonstration est un mixage de la méthode de monotonie et le principe de maximum.

Les résultats consécutifs aux deux invariants rappellent l'identification formelle (théorème 2.6.1). $\triangle$

On peut confronter les résultats de cette section avec le théorème 2.9.4, les commentaires 2.9 et l'identification formelle (théorème 2.6.1 et commentaires 2.6). Si le nombre de coefficients non nuls dans le développement asymptotique de β autour de $\pm\infty$ diminue, alors l'exponent γ qui dirige la vitesse de convergence de $\varepsilon u_\varepsilon - u$ dans $L^q(\Omega)$, augmente. C'est la tendance de tous les résultats concernant $\varepsilon u_\varepsilon - u$. Le meilleur résultat est obtenu lorsque β est tronquée donc tous les coefficients d'ordre supérieur à 1 sont nuls dans le développement asymptotique de β autour de $\pm\infty$, dans ce cas on a $\gamma = 1$ (d'après le théorème 2.11.1). $\triangle$

2.12 Perturbations monotones non bornées mixtes

2.12.1 Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$

Existence et unicité de la solution du problème limite

Préliminaires 2.12

La fonction $\beta : \mathbb{R} \longmapsto (\beta(-\infty), +\infty)$ ou $\beta : \mathbb{R} \longmapsto (-\infty, \beta(+\infty))$ avec $\beta(-\infty) > -\infty$, $\beta(+\infty) < \infty$ sera croissante et continue, telle que $\beta(0) = 0$. Sur des éventuelles hypothèses supplémentaires voir les préliminaires 2.7. $\triangle$

Problème 2.12

La même problématique que dans le cas où β est bornée. $\triangle$

Théorème 2.12.1

Soit β croissante et continue telle que $\beta(0) = 0$, $\beta(+\infty) = +\infty$, $\beta(-\infty) > -\infty$.
Si u_ε est la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

où u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} f - Au \geq \beta(-\infty) & \text{dans } [u = 0] \\ f - Au = \beta(-\infty) & \text{dans } [u < 0] \\ u \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

Tout d'abord le problème pénalisé admet une solution unique grâce au théorème 1.4.1.
On a les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4)

$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p \quad , \quad |A\varepsilon u_\varepsilon|_p \leq 2\,|f|_p$$

d'où la deuxième estimation assure via le théorème 1.3.1

$$|\varepsilon u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq 2C_A\,|f|_p$$

et avec $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif on aura, à une sous-suite près,

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v \quad .$$

La première estimation entraîne avec la réflexivité de $L^p(\Omega)$, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} w \quad .$$

Comme le convexe

$$K = \{g \in L^p(\Omega) \ : \ g \in [\beta(-\infty), \infty[\text{ p.p. dans } \Omega\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$ réflexif donc aussi faiblement fermé, on aura $w \in K$.

D'autre part, la convergence

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v$$

implique via les injections de Sobolev

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} v$$

et encore

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } \Omega} v \quad .$$

Comme β est continue

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{p.p. } [v<0]} \beta(-\infty) \quad .$$

En combinant avec la convergence faible

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{p.p. } [v<0]} \beta(-\infty)$$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^p([v<0]) \text{ faible}} w$$

et la coïncidence de la limite faible avec la limite ponctuelle mène à $w = \beta(-\infty)$ dans $[v<0]$.

En passant à la limite au sens des distributions dans le problème pénalisé lorsque ε tend vers 0 , on obtient

$$\begin{cases} f - Av = w \geq \beta(-\infty) & \text{dans } [v=0] \\ f - Av = \beta(-\infty) & \text{dans } [v<0] \\ v \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \,. \end{cases}$$

Nous montrons que $v \leq 0$.

Si on suppose que $|[v>0]| > 0$ alors avec β continue, $\beta(+\infty) = +\infty$ et $\varepsilon u_\varepsilon$ convergeant ponctuellement vers v lorsque ε tend vers 0 , il vient que $|\beta(u_\varepsilon)|^p$ converge ponctuellement vers $+\infty$ dans $[v>0]$. D'autre part, les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4) assurent

$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$

et via le lemme de Fatou

$$+\infty = \int_{[v>0]} \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega \liminf_{\varepsilon\to 0} |\beta(u_\varepsilon)|^p dx \leq \int_\Omega |f|^p dx < +\infty$$

absurde.

Finalement v est solution du problème

$$\begin{cases} f - Av \geq \beta(-\infty) & \text{dans } [v=0] \\ f - Av = \beta(-\infty) & \text{dans } [v<0] \\ v \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ v \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et on vérifie que ce problème admet une solution unique.

Pour cela, soient v_1, v_2 solutions du problème en question. On a

$$\begin{cases} f - Av_1 = \beta(-\infty) \leq \overline{\overline{\quad f-Av_2 \geq \beta(-\infty) \text{ p.p. } \Omega \quad}} \leq f - Av_2 & \text{dans } [v_1<0] \\ v_1 = 0 \geq \underline{\underline{\quad v_2 \leq 0 \text{ p.p. } \Omega \quad}} \geq v_2 & \text{sur } \partial[v_1<0] \end{cases}$$

et après une simplification

$$\begin{cases} Av_1 \geq Av_2 & \text{dans } [v_1<0] \\ v_1 \geq v_2 & \text{sur } \partial[v_1<0] \,, \end{cases}$$

le principe du maximum donne $v_1 \geq v_2$ p.p. $[v_1<0]$ d'où, en prolongeant v_1 par 0, $v_1 \geq v_2$ p.p. dans Ω .

Échangeant le rôle de v_1, v_2 il vient $v_2 \geq v_1$ d'où le résultat.

$\triangle$

Par symétrie, on établit d'une manière tout à fait analogue le résultat suivant :

Remarque 2.12.1

Soit β croissante et continue telle que $\beta(0)=0$, $\beta(+\infty) < +\infty$, $\beta(-\infty) = -\infty$.
Si u_ε est la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) (p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

où u *est solution du problème limite*

$$\begin{cases} f - Au \leq \beta(+\infty) & \textit{dans } [u=0] \\ f - Au = \beta(+\infty) & \textit{dans } [u>0] \\ u \geq 0 & \textit{sur } \Omega \\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

△

2.12.2 Comportement de la perturbation monotone

Théorème 2.12.2

Soit β croissante et continue telle que $\beta(0)=0$, $\beta(+\infty)=+\infty$, $\beta(-\infty)>-\infty$.

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \mathsf{A}\varepsilon \mathsf{u}_\varepsilon + \beta(\mathsf{u}_\varepsilon) = \mathsf{f} \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\Omega) \ (\mathsf{p} > \mathsf{n}) \\ \mathsf{u}_\varepsilon \in \mathsf{H}_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Si u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} \mathsf{f} - \mathsf{Au} \in \widetilde{\beta}(\mathsf{u}) \\ \mathsf{u} \in \mathsf{W}^{2,\mathsf{p}}(\Omega) \cap \mathsf{H}_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(\mathsf{t}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mathsf{t} > 0 \\ [\beta(-\infty), +\infty] & \text{si } \mathsf{t} = 0 \\ \beta(-\infty) & \text{si } \mathsf{t} < 0 \end{cases}$$

alors

$$\beta(\mathsf{u}_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathsf{L}^\mathsf{p}(\Omega) \text{ fort}} \mathsf{f} - \mathsf{Au}$$

et $\forall$ q ≥ 2

$$\beta(\mathsf{u}_\varepsilon^-) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathsf{L}^\mathsf{q}(\Omega) \text{ fort}} (\mathsf{f} - \mathsf{Au})^-$$

et on a les estimations

$$\left|\beta(\mathsf{u}_\varepsilon^-)\right|_\mathsf{q} \leq \left|(\mathsf{f} - \mathsf{Au})^-\right|_\mathsf{q}$$
$$|\beta(\mathsf{u}_\varepsilon)|_\mathsf{p} \leq |\mathsf{f} - \mathsf{Au}|_\mathsf{p}$$
$$|\mathsf{f} - \mathsf{Au}|_\mathsf{p} \leq |\mathsf{f}|_\mathsf{p} .$$

△

Preuve :

En ce qui concerne les estimations

$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f - Au|_p$$
$$|f - Au|_p \leq |f|_p$$

et la convergence

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} f - Au \tag{*}$$

elles s'obtiennent avec $q=p$ exactement de la même façon que dans la démonstration du théorème 2.8.1 où l'hypothèse β bornée ne servait (voir aussi la remarque 2.8.2 lorsque $q=p$) que pour obtenir $\varepsilon u_\varepsilon - u \in C^1(\overline{\Omega})$ et en notant qu'ici $|[u>0]|=0$ et $p>n$ donc $\varepsilon u_\varepsilon - u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ via les injections de Sobolev et le théorème 2.12.1.

Soit $\varphi(t) = t^- \mid t^- \mid^{q-2} = \partial j(t)$, $j(t) = \frac{1}{q} \mid t^- \mid^q$ $(q \geq 2)$, $t^- = \max\{-t, 0\}$.

Si dans la démonstration du même théorème 2.8.1 on travaille avec $j(t) = \frac{1}{q} \mid t^- \mid^q$, alors on obtient

$$\left|\beta(u_\varepsilon^-)\right|_q \leq \left|(f - Au)^-\right|_q$$

en remarquant que $\beta^- = \beta \wedge 0$ est bornée et $|[u>0]| = 0$.

La convergence (*) implique, à une sous-suite près,

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow{\text{p.p. } \Omega} f - Au$$

et encore

$$\beta(u_\varepsilon)^- \xrightarrow{\text{p.p. } \Omega} (f - Au)^-$$

puisque la fonction $t \to t^-$ est continue.

Maintenant on observe que p.p. Ω

$$|\beta(u_\varepsilon)^-| \le |\beta(-\infty)|$$

et on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans $L^q(\Omega)$ pour avoir

$$\beta(u_\varepsilon^-) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^q(\Omega)\text{ fort}} (f - Au)^-$$

et il reste de remarquer que $\beta(u_\varepsilon^-) = \beta(u_\varepsilon)^-$ car β est croissante avec $\beta(0) = 0$. △

Remarque 2.12.2
En écrivant $A(\varepsilon u_\varepsilon - u) = f - Au - \beta(u_\varepsilon)$, *le théorème 1.3.1 permet d'avoir*

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C_A\,|A(\varepsilon u_\varepsilon - u)|_p = C_A\,|f - Au - \beta(u_\varepsilon)|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\text{théorème 2.12.1}} 0$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} u$$

donc on a amélioré le résultat du théorème 2.12.1. △

Commentaires 2.12

2.12.1 Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$

Existence et unicité de la solution du problème limite

Ce théorème est l'analogue des théorèmes 2.2.1 et 2.7.1.

On utilise une méthode de compacité au sens de [Lions[2]] basée sur des estimations a priori et la réflexivité des espaces impliqués. △

2.12.2 Comportement de la perturbation monotone

L'analogue des théorèmes 2.2.2 et 2.8.1.

On obtient la convergence dans $L^p(\Omega)$ de $\beta(u_\varepsilon)$ vers $f - Au$ et, ce qui rappelle le cas β bornée, la convergence dans $L^q(\Omega)$ de $\beta(u_\varepsilon^-)$ vers $(f - Au)^-$. Au niveau des estimations on a $|f - Au|_p \le |f|_p$ ce qui permet de développer les considérations sur la consistance de $[u = 0]$ comme au cas β non borné.

En s'appuyant sur ces deux résultats, on peut élaborer un analogue de chaque résultat avec β bornée si l'hypothèse " β bornée" n'est pas essentielle. Par exemple, la technique du principe de maximum en présence de petit paramètre s'applique car on n'utilise que l'hypothèse de coercivité locale sur β , même pas des conditions sur le bord pour u_ε . Voir aussi les commentaires 2.10. △

2.13 Déformations régulières de la solution du problème de Dirichlet

Préliminaires 2.13

La fonction β sera supposée croissante et continue telle que $\beta(0) = 0$. Chaque théorème cité sur le comportement de u_ε suscite des hypothèses spécifiques sur β (voir aussi les préliminaires 2.7). △

Problème 2.13

On met en évidence le théorème de Dirichlet comme un problème limite. △

2.13.1 Stabilité par rapport au paramètre . Déformations continues

Théorème 2.13.1

Soit une fonction $\beta \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ croissante, avec $\beta(0) = 0$.
Soit $\mathbf{u}_\varepsilon$ la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{A}\mathbf{u}_\varepsilon + \beta(\mathbf{u}_\varepsilon) = \mathbf{f} \in \mathrm{L}^\mathbf{p}(\Omega)(\mathbf{p} > \mathbf{n}) \\ \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Alors les applications

$$(0, \infty) \ni \varepsilon \overset{\mathrm{T_0}}{\longmapsto} \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathrm{W}^{2,\mathbf{p}}(\Omega) \text{ fort}$$

$$(0, \infty) \ni \varepsilon \overset{\mathrm{T_1}}{\longmapsto} \varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \in \mathrm{W}^{2,\mathbf{p}}(\Omega) \text{ fort}$$

sont continues. △

Preuve :

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé.

Les équations $\varepsilon_0 A u_{\varepsilon_0} + \beta(u_{\varepsilon_0}) = f$ et $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ permettent d'écrire après soustraction

$$A(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}) = (\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0})f + \frac{1}{\varepsilon_0}\beta(u_{\varepsilon_0}) - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) .$$

Le théorème 1.3.1 assure

$$|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A \left| (\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0})f + \frac{1}{\varepsilon_0}\beta(u_{\varepsilon_0}) - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) \right|_{L^p(\Omega)} \leq$$

$$\leq C_A(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}) |f|_{L^p(\Omega)} + C_A \frac{1}{\varepsilon_0} |\beta(u_{\varepsilon_0})|_{L^p(\Omega)} + C_A \frac{1}{\varepsilon} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^p(\Omega)}$$

avec C_A indépendante de ε .

Mais les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4) donnent

$$|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$$

donc

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} v$$

et

$$|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \frac{2C_A}{\varepsilon} |f|_p .$$

En faisant tendre ε vers $\varepsilon_0 > 0$, $u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}$ reste bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif donc on aura, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} w$$

et encore

$$u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{C^1(\overline{\Omega})} w$$

avec les injections de Sobolev.

Le lemme 1.4.2 (point 6) assure $v = \beta(u_{\varepsilon_0} + w)$.

Le passage à la limite au sens des distributions dans l'équation pénalisée donne

$$\begin{cases} \varepsilon_0 A(u_{\varepsilon_0} + w) + \beta(u_{\varepsilon_0} + w) = f \\ u_{\varepsilon_0} + w \in H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

L'unicité de la solution du problème pénalisé implique $w = 0$.

Finalement

$$u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} 0$$

et cette convergence est globale.

Des équations en ε, ε_0 on déduit également

$$A(u_\varepsilon - u_0) = (\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0})f + \frac{1}{\varepsilon_0}(\beta(u_{\varepsilon_0}) - \beta(u_\varepsilon)) + (\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon})\beta(u_\varepsilon)$$

d'où

$$C_A^{-1}\,|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{W^{2,p}(\Omega)} \underset{\text{th 1.3.1}}{\leq} |A(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})|_p =$$

$$= \left|(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0})f + \frac{1}{\varepsilon_0}(\beta(u_{\varepsilon_0}) - \beta(u_\varepsilon)) + (\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon})\beta(u_\varepsilon)\right|_p \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right| |f|_p + \frac{1}{\varepsilon_0}\,|\beta(u_{\varepsilon_0}) - \beta(u_\varepsilon)|_p + \left|\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right| |\beta(u_\varepsilon)|_p \leq$$

[on a $|\beta(u_\varepsilon)|_p \leq |f|_p$ d'après le théorème 1.2.4, β' est continue, il existe un $\theta \in [0,1]$ tel que $\beta(u_{\varepsilon_0}) - \beta(u_\varepsilon) = (u_{\varepsilon_0} - u_\varepsilon)\beta'(\theta u_{\varepsilon_0} + (1-\theta)u_\varepsilon)$, il existe une constante C indépendante de ε telle que $|\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})| \leq C|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|$ pour ε proche de ε_0 car u_ε tend uniformément vers u_{ε_0} lorsque ε tend vers ε_0]

$$\leq \left|\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right| |f|_p + \frac{C}{\varepsilon_0}\,|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_p + \left|\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right| |f|_p \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} 0$$

donc

$$u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} u_{\varepsilon_0}$$

le résultat. △

2.13.2 Stabilité par rapport au paramètre. Déformations régulières

Par commodité on impose β, β' lipschitziennes dans l'hypothèse du théorème 2.13.2, mais le même résultat reste valable avec $\beta \in C^2(\mathbb{R})$ et $p > n$ en utilisant les arguments de la démonstration du théorème 2.13.1.

Théorème 2.13.2

Soit β, β' lipschitziennes, β croissante, $\beta(0) = 0$.

Soit u_ε la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

Alors les applications

$$(0,\infty) \ni \varepsilon \overset{T_0}{\longmapsto} u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)\ \text{fort}$$

$$(0,\infty) \ni \varepsilon \overset{T_1}{\longmapsto} \varepsilon u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)\ \text{fort}$$

sont dérivables avec $T_0'(\varepsilon)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon A T_0'(\varepsilon) + \beta'(u_\varepsilon) T_0'(\varepsilon) = -A u_\varepsilon \\ T_0'(\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

et

$$T_1'(\varepsilon) = \varepsilon T_0'(\varepsilon) + T_0(\varepsilon)\ .$$

△

Preuve :

Soit $\varepsilon_0 > 0$ fixé.

Le théorème 1.2.2 appliqué au couple de problèmes pénalisés

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_{\varepsilon_0}) = \frac{1}{\varepsilon}f + \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0} \\ u_{\varepsilon_0} \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

donne

$$|u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_p \le C_p^A \frac{|\varepsilon - \varepsilon_0|}{\varepsilon} |Au_{\varepsilon_0}|_p$$

ou sous une autre forme

$$\left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p \le C_p^A \frac{1}{\varepsilon} |Au_{\varepsilon_0}|_p \quad .$$

Une soustraction des mêmes équations permet d'écrire

$$\left|A\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p = \left|\frac{1}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0} + \frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p \le$$

[l'inégalité de la norme]

$$\le \frac{1}{\varepsilon}|Au_{\varepsilon_0}|_p + \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p \le$$

[β est lipschitzienne de constante α^β]

$$\le \frac{1}{\varepsilon}|Au_{\varepsilon_0}|_p + \frac{\alpha^\beta}{\varepsilon}\left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p \le$$

[on a déjà vu que $\left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_p \le C_p^A \frac{1}{\varepsilon}|Au_{\varepsilon_0}|_p$]

$$\le \frac{1}{\varepsilon}|Au_{\varepsilon_0}|_p + \frac{\alpha^\beta C_p^A}{\varepsilon^2}|Au_{\varepsilon_0}|_p$$

et via le théorème 1.3.1

$$\left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\right|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C_A\left\{\left|\frac{1}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0}\right|_p + \alpha^\beta C_p^A \frac{1}{\varepsilon}|Au_{\varepsilon_0}|_p\right\} \quad .$$

On conclut que $\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}$ reste bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif lorsque $\varepsilon \to \varepsilon_0 \in (0,\infty)$ donc, à une sous-suite près,

$$\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} w$$

et encore

$$\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^p(\Omega) \text{ fort}} w$$

grâce aux injections de Sobolev.

La soustraction des équations pénalisées permet encore

$$-A\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon - \varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w + \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w$$

et nous préparons un passage à la limite au sens des distributions dans cette équation.

On observe que

$$\left|\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon - \varepsilon_0} - \beta'(u_{\varepsilon_0})w\right|_p =$$

[on a $\beta \in C^1(\overline{\Omega})$ et il existe un $\theta \in [0,1]$ tel que]

$$= \left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0}\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})) - \beta'(u_{\varepsilon_0})w\right|_p =$$

[réarrangement]

$$= \left|\left(\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon - \varepsilon_0} - w\right)\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})) + w(\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})) - \beta'(u_{\varepsilon_0}))\right|_p \le$$

[l'inégalité de la norme]

$$\leq \left|\left(\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} - w\right)\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}))\right|_p + |w(\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})) - \beta'(u_{\varepsilon_0}))|_p \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq \left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} - w\right|_p |\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}))|_{p^*} + |w|_p\, |(\beta'(u_{\varepsilon_0} + \theta(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})) - \beta'(u_{\varepsilon_0}))|_{p^*} \leq$$

[β, β' sont lipschitziennes respectivement de constantes α^β, $\alpha^{\beta'}$]

$$\leq \alpha^\beta \left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} - w\right|_p + \theta\alpha^{\beta'}\, |w|_p\, |u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{p^*} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ .$$

Maintenant on peut passer à la limite lorsque $\varepsilon \to \varepsilon_0$ au sens des distributions dans

$$-A\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon-\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w + \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w$$

et nous aurons

$$\begin{cases} \varepsilon_0 Aw + \beta'(u_{\varepsilon_0})w = -Au_{\varepsilon_0} \\ w \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

et ce problème admet une solution unique (voir théorème 1.4.1) en notant que β est croissante et lipschitzienne.

On a obtenu

$$\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} w$$

et il reste à améliorer cette convergence.

Une soustraction des équations

$$-\,A\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon}Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon-\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w + \frac{1}{\varepsilon}\beta'(u_{\varepsilon_0})w$$

$$-\,Aw = \frac{1}{\varepsilon_0}Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0}\beta'(u_{\varepsilon_0})w$$

conduit à

$$C_A^{-1}\left|\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} - w\right|_{W^{2,p}(\Omega)} \underset{\text{théorème 1.3.1}}{\leq} \left|A\left(\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} - w\right)\right|_p =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)Au_{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon-\varepsilon_0} - \beta'(u_{\varepsilon_0})w\right\} + \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right)\beta'(u_{\varepsilon_0})\right|_p \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right| |Au_{\varepsilon_0}|_p + \frac{1}{\varepsilon}\left|\left\{\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon-\varepsilon_0} - \beta'(u_{\varepsilon_0})w\right\}\right|_p + \left|\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right| |\beta'(u_{\varepsilon_0})|_p \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} 0$$

car

$$\left|\frac{\beta(u_\varepsilon) - \beta(u_{\varepsilon_0})}{\varepsilon-\varepsilon_0} - \beta'(u_{\varepsilon_0})w\right|_p \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} 0$$

$$|\beta'(u_{\varepsilon_0})|_p = |\beta'(u_{\varepsilon_0}) - \beta'(0) + \beta'(0)|_p \leq$$

$$|\beta'(u_{\varepsilon_0}) - \beta'(0)|_p + |\beta'(0)|_p \underset{\beta'\text{ lipschitzienne de cte }\alpha^{\beta'}}{\leq} \alpha^{\beta'}\, |u_{\varepsilon_0}|_p + |\beta'(0)|_p$$

donc

$$\frac{u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}}{\varepsilon-\varepsilon_0} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} w$$

et l'application T_0 est dérivable avec $T_0'(\varepsilon) = w$. $\triangle$

2.13.3 Comportement de u_ε lorsque ε tend vers ∞

Théorème 2.13.3

Soit β croissante et continue telle que $\beta(0) = 0$.

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} u_\infty$$

avec $u_\infty = 0$. △

Preuve :

Les estimations spécifiques aux perturbations monotones (voir théorème 1.2.4) assurent

$$|Au_\varepsilon|_p \leq \frac{2}{\varepsilon} |f|_p$$

et via le 1.3.1

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \frac{2C_A}{\varepsilon} |f|_p$$

d'où

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} 0 \ .$$

△

2.13.4 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers ∞

Théorème 2.13.4

Soit β une fonction croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.

Soit le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Alors

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} u^\infty$$

où u^∞ est la solution du problème de Dirichlet primaire

$$\begin{cases} A u^\infty = f \in L^p(\Omega) \\ u^\infty \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \ . \end{cases}$$

△

Preuve :

Les équations $\varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f$ et $Au^\infty = f$ permettent d'avoir par soustraction

$$A(\varepsilon u_\varepsilon - u^\infty) = -\beta(u_\varepsilon)$$

et en appliquant le théorème 1.3.1

$$|\varepsilon u_\varepsilon - u^\infty|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A \, |A(\varepsilon u_\varepsilon - u^\infty)|_p = C_A \, |\beta(u_\varepsilon)|_p \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{} 0$$

puisque β est continue et u_ε converge uniformément vers 0 lorsque ε tend vers l'infini selon le théorème 2.13.3 et les injections de Sobolev.

Dans ces conditions

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ fort}} u^\infty$$

le résultat. △

Commentaires 2.13

2.13.1 Stabilité par rapport au paramètre . Déformations continues

On montre que les applications $(0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ fort et $(0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ fort sont continues.

La démonstration utilise beaucoup d'estimations qui sont spécifiques aux perturbations monotones. Ces estimations engendrent convergence faible via la réflexivité des espaces impliqués. Les injections de Sobolev et la structure même de l'équation pénalisée permettent d'améliorer la convergence faible en convergence forte. $\triangle$

2.13.2 Stabilité par rapport au paramètre. Déformations régulières

La même technique qu'au théorème précédent mais on estime des rapports relatifs. On exige une régularité plus forte sur β .

L'existence et l'unicité de la solution du problème limite est garantie par le théorème 1.4.1 qui régit la plupart des résultats d'existence, unicité et régularité dans ce travail.

Encore une fois la convergence faible est améliorée en convergence forte. $\triangle$

2.13.3 Comportement de u_ε lorsque ε tend vers ∞

Une conséquence immédiate des théorèmes 1.3.1 et 1.2.4. $\triangle$

2.13.4 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers ∞

On met en évidence le problème de Dirichlet comme un problème limite.

Soit u_ε la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} A\varepsilon u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Si on regarde les résultats obtenus sur le comportement de u_ε (théorèmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4, 2.4.1, 2.5.1, 2.5.3, 2.10.1, 2.10.4, 2.9.2, 2.10.6, 2.10.7, 2.13.1, 2.13.2, 2.13.3, 2.13.4) et de $\varepsilon u_\varepsilon$ (théorèmes 2.2.3, 2.12.1 (remarques 2.12.1 et 2.12.1), 2.7.1 et remarque 2.8.1, 2.13.1, 2.13.2, 2.13.3, 2.13.4) lorsque ε tend respectivement vers 0, $0 < \varepsilon_0 < \infty$, ∞ alors on observe que la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

est une déformation régulière de la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au^\infty = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u^\infty \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

au sens où l'application $[0,\infty] \ni \varepsilon \longmapsto \varepsilon u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ fort est continue et

$$u \xleftarrow[0 \leftarrow \varepsilon]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} \varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} u^\infty \ .$$

De même, la fonction nulle $u_\infty = 0$ est déformée d'une façon régulière par u_ε de ∞ jusqu'à 0 :

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0 \in (0,\infty]]{W^{2,p}(\Omega)\text{ fort}} u_{\varepsilon_0}$$

mais au point $\varepsilon_0 = 0$ il y a une dislocation de l'intérieur du domaine Ω , selon la tendance de u_ε , en $[u < 0] \cup [u = 0] \cup [u > 0]$. $\triangle$

2.14 Perturbations paramétriques sur le bord

Préliminaires 2.14

La fonction $\beta:\ \mathbb{R} \longmapsto]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[$ sera continue, bornée, telle que $\beta(0) = 0$ et $\beta(+\infty) < \infty$, $\beta(-\infty) > -\infty$.

L'hypothèse naturelle sur f sera $f \in L^p(\Omega)(p > n)$.

Le domaine Ω sera tel que les injections de Sobolev s'appliquent.

L'opérateur A est toujours de type elliptique avec des coefficients $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Des conditions sur β seront imposées au fur et à mesure de l'exposé. △

Problème 2.14

On étudie du point de vue analytique l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ainsi que le comportement de u_ε, $\varepsilon u_\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0.

Ceci conduira au problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{où} \quad \widetilde{\beta}(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0] \end{cases}$$

avec existence et régularité de la solution limite.

Une approche variationnelle de ces problèmes, avec étude du comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ seulement, a été faite dans [Hilhorst [1],[2]]. △

2.14.1 Continuité de la solution et de la perturbation monotone par rapport au paramètre du bord

Théorème 2.14.1

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

Pour ε fixé on considère le problème

$$\begin{cases} \varepsilon \mathbf{A}\mathbf{u}^\alpha + \beta(\mathbf{u}^\alpha) = \mathbf{f} \in \mathbf{L}^\mathbf{p}(\Omega)(\mathbf{p} > \mathbf{n},\ \alpha \in \mathbb{R}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^\alpha \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \varepsilon \mathbf{u}^\alpha = \alpha & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Alors les applications

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{u}^\alpha \in \mathbf{W}^{2,\mathbf{p}}(\Omega) \text{ faible (resp. } \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}))$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto (\beta(\mathbf{u}^\alpha), 1) \in \mathbb{R}$$

sont continues. △

Preuve :

On peut écrire

$$\begin{cases} \varepsilon A(u^\alpha - \alpha) + \beta(u^\alpha - \alpha + \alpha) - \beta(\alpha) = f - \beta(\alpha) \\ u^\alpha - \alpha \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et ce problème admet toujours une solution unique $u^\alpha - \alpha \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (voir théorème 1.4.1).

Le théorème 1.2.4 assure

$$|A\varepsilon u^\alpha|_p \le 2\,|f - \beta(\alpha)|_p$$

d'où

$$|Au^\alpha|_{L^p(\Omega)} = \frac{2}{\varepsilon}\,|f - \beta(\alpha)|_{L^p(\Omega)} \le \frac{2}{\varepsilon}(|f|_{L^p(\Omega)} + |\beta(\alpha)|_p) \underset{\text{notation}}{=\!=\!=} C_\alpha$$

avec C_α continue par rapport à α car β est continue.

Le th 1.3.1 assure

$$C_A^{-1}\left|u^\alpha - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right|_{W^{2,p}(\Omega)} \le \left|A(u^\alpha - \frac{\alpha}{\varepsilon})\right|_{L^p(\Omega)} = |Au^\alpha|_{L^p(\Omega)} \le C_\alpha$$

d'où $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$|u^\alpha|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A C_\alpha \ .$$

Soit $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

On a $C_\alpha \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{} C_{\alpha_0}$ et $|u^\alpha|_{W^{2,p}(\Omega)}$ reste bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif donc, à une sous-suite près,

$$u^\alpha \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} u$$

et encore (Sobolev, $p > n$)

$$u^\alpha \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{C^1(\overline{\Omega})} u \ .$$

En passant à la limite au sens des distributions ($\alpha \to \alpha_0$) dans le problème

$$\begin{cases} \varepsilon A u^\alpha + \beta(u^\alpha) = f \in L^p(\Omega)(p > n,\ \alpha \in \mathbb{R}) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon u^\alpha = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \varepsilon A u + \beta(u) = f \in L^p(\Omega) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon u = \alpha_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et du fait de l'unicité de la solution de ce problème $u = u^{\alpha_0}$.

Finalement

$$u^\alpha \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{W^{2,p}(\Omega)\text{ faible}} u^{\alpha_0}$$

et cette convergence est globale à cause de l'unicité du point d'adhérence.

Comme β est continue et

$$u^\alpha \xrightarrow[\alpha\to\alpha_0]{C^1(\overline{\Omega})} u^{\alpha_0}$$

avec les injections de Sobolev($p > n$), l'application

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto (\beta(u_\varepsilon), 1) \in \mathbb{R}$$

sera continue puisque l'intégrale transforme la convergence uniforme en convergence. △

2.14.2 Estimations ponctuelles de la solution $\mathbf{u}^\alpha$. Image d'une application

Théorème 2.14.2

On se place sous les hypothèses du théorème 2.14.1.

L'application

$$\alpha \longmapsto \mathsf{u}^\alpha$$

est croissante.

L'application

$$\alpha \longmapsto \mathsf{u}^\alpha - \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

est décroissante.

On a l'estimation ponctuelle p.p. Ω

$$\frac{\mathsf{u}_0 - \beta(-\infty)\mathsf{u}_* + \alpha}{\varepsilon} \geq \mathsf{u}^\alpha \geq \frac{\mathsf{u}_0 - \beta(+\infty)\mathsf{u}_* + \alpha}{\varepsilon}$$

où u_0, u_* sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} A\mathsf{u}_0 = f \in L^p(\Omega) \\ \mathsf{u}_0 \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \quad \begin{cases} A\mathsf{u}_* = 1 \\ \mathsf{u}_* \in H^1_0(\Omega) \end{cases} .$$

En particulier

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} (\beta(\mathsf{u}^\alpha), 1) = \beta(\pm\infty)|\Omega| \ .$$

△

Preuve :
Soit $\alpha_1 > \alpha_2$.
Les problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon A u^{\alpha_i} + \beta(u^{\alpha_i}) = f \in L^p(\Omega)(p>n) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon u^{\alpha_i} = \alpha_i & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le principe du maximum (voir théorème 1.3.2) donnent p.p. Ω

$$u^{\alpha_1} \geq u^{\alpha_2}$$

quand $\alpha_1 > \alpha_2$ donc l'application $\alpha \longmapsto u^\alpha$ est croissante.

On a aussi

$$\begin{cases} \varepsilon A\big(u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon}\big) + \beta(u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}) = f \leq \overset{\beta \text{ croissante}}{\underset{\alpha_1>\alpha_2}{=\!=\!=\!=\!=}} \leq \\ \leq f + \beta(u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}) - \beta(u^{\alpha_2}) = \\ \qquad = \varepsilon A\big(u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon}\big) + \beta(u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon} = 0 = u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon A\big(u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon}\big) + \beta(u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}) \leq \varepsilon A\big(u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon}\big) + \beta(u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon} = u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le même principe du maximum donne p.p. Ω

$$u^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \leq u^{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\varepsilon}$$

avec $\alpha_1 > \alpha_2$ donc l'application $\alpha \longmapsto u^\alpha - \frac{\alpha}{\varepsilon}$ est décroissante.

Si u_0, u_* sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_0 = f \in L^p(\Omega) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \qquad \begin{cases} Au_* = 1 \\ u_* \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors on a les comparaisons

$$\begin{cases} \varepsilon A u^\alpha + \beta(u^\alpha) = f \begin{cases} \geq \underset{\beta(+\infty)\geq\beta}{=\!=\!=\!=} \geq f - \beta(+\infty) + \beta(\frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) = \\ \qquad = \varepsilon A \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} + \beta(\frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \\ \leq \underset{\beta(-\infty)\leq\beta}{=\!=\!=\!=} \leq f - \beta(-\infty) + \beta(\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) = \\ \qquad = \varepsilon A \frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} + \beta(\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \end{cases} \\ u^\alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon} \begin{cases} = \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} & \text{sur } \partial\Omega \\ = \frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \varepsilon A u^\alpha + \beta(u^\alpha) \begin{cases} \geq \varepsilon A \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} + \beta(\frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) \\ \leq \varepsilon A \frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} + \beta(\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}) \end{cases} & \text{dans } \Omega \\ u^\alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon} \begin{cases} = \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} \\ = \frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} \end{cases} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le principe du maximum donne p.p. Ω

$$\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon} \geq u^\alpha \geq \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}.$$

Dans ces conditions

$$\beta(+\infty)|\Omega| \geq (\beta(u^\alpha), 1) \geq (\beta(\frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}), 1) \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{u_0,\, u_* \in C^1(\overline{\Omega})(p>n,\ \text{Sobolev})} \beta(+\infty)|\Omega|$$

et

$$\beta(-\infty)|\Omega| \leq (\beta(u^\alpha), 1) \leq (\beta(\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha}{\varepsilon}), 1) \xrightarrow[\alpha \to -\infty]{u_0,\, u_* \in C^1(\overline{\Omega})(p>n,\ \text{Sobolev})} \beta(-\infty)|\Omega|$$

ce qui complète le résultat. $\triangle$

2.14.3 Existence de la solution du problème pénalisé via continuité

Théorème 2.14.3

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, avec $\beta(0) = 0$.

Le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$. △

Si β est injective alors u_ε est unique.

Preuve :

Existence

Soit u^α la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon A u^\alpha + \beta(u^\alpha) = f \in L^p(\Omega)(p > n, \ \alpha \in \mathbb{R}) & \text{dans } \Omega \\ u^\alpha \in H^1(\Omega) & \\ \varepsilon u^\alpha = \alpha & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

D'après les théorèmes précédents, l'application

$$\mathbb{R} \ni \alpha \longmapsto (\beta(u^\alpha), 1) \in \mathbb{R}$$

est continue et

$$\beta(-\infty)|\Omega| \xleftarrow[-\infty \leftarrow \alpha]{} (\beta(u^\alpha), 1) \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} \beta(+\infty)|\Omega| \ .$$

Comme $C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[$, par continuité on trouve un α_ε tel que

$$(\beta(u^{\alpha_\varepsilon}), 1) = C$$

et de plus

$$\begin{cases} \varepsilon A u^{\alpha_\varepsilon} + \beta(u^{\alpha_\varepsilon}) = f & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon u^{\alpha_\varepsilon} = \alpha_\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega . \end{cases}$$

On prend $u_\varepsilon = u^{\alpha_\varepsilon}$.

Unicité

Selon le théorème 2.14.2 l'application $\alpha \longmapsto u^\alpha$ est croissante et avec β monotone l'application $\alpha \longmapsto \beta(u^\alpha)$ sera aussi croissante.

Soient u_1, u_2 deux solutions du problème pénalisé telles que $\varepsilon u_1 = \alpha_1$, $\varepsilon u_2 = \alpha_2$ sur $\partial\Omega$.

Si on suppose $\alpha_1 \neq \alpha_2$ alors

$0 = (C - C)(\alpha_1 - \alpha_2) = [(\beta(u_1), 1) - (\beta(u_2), 1)](\alpha_1 - \alpha_2) = (\beta(u_1) - \beta(u_2), \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ avec $(\beta(u_1) - \beta(u_2))(\alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ d'où $\beta(u_1) = \beta(u_2)$ et $u_1 = u_2$ puisque β est supposée injective.

Si $a_1 = a_2$ alors évidemment $u_1 = u_2$ via le principe de maximum. △

2.14.4 Comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$

Existence de la solution du problème limite

Théorème 2.14.4

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, injective avec $\beta(0) = 0$.

Si u_ε est une solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors, à une sous-suite près,

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

où u est l'unique solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec } \widetilde{\beta}(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0]\ . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

Existence

Tout d'abord on montre que α_ε est bornée.

En effet, si une sous-suite de α_ε (encore notée α_ε) vérifie

$$\alpha_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$$

alors d'après le théorème 2.14.2 on obtient p.p. Ω

$$\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha_\varepsilon}{\varepsilon} \geq u_\varepsilon \geq \frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha_\varepsilon}{\varepsilon}$$

où u_0, u_* sont les solutions des problèmes

$$\begin{cases} Au_0 = f \in L^p(\Omega) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad \begin{cases} Au_* = 1 \\ u_* \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

Dans ces conditions en notant que u_0, $u_* \in C^1(\overline{\Omega})(p > n$ Sobolev$)$ on a

$$]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\ni C = (\beta(u_\varepsilon), 1) \geq (\beta(\frac{u_0 - \beta(+\infty)u_* + \alpha_\varepsilon}{\varepsilon}), 1) \xrightarrow[\alpha_\varepsilon \to +\infty]{} \beta(+\infty)|\Omega|$$

absurde.

La situation duale

$$\alpha_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -\infty$$

donne

$$]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\ni C = (\beta(u_\varepsilon), 1) \leq (\beta(\frac{u_0 - \beta(-\infty)u_* + \alpha_\varepsilon}{\varepsilon}), 1) \xrightarrow[\alpha_\varepsilon \to -\infty]{} \beta(-\infty)|\Omega|$$

absurde.

La suite bornée α_ε dans $\mathbb{R}$ aura au moins un point limite

$$\alpha_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \alpha_0\ .$$

On a

$$|A(\varepsilon u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)|_p = |f - \beta(u_\varepsilon)|_p \underset{\beta \text{ bornée}}{\leq} \leq |f|_p + |\beta|_\infty$$

et via le théorème 1.3.1

$$|\varepsilon u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A\{|f|_p + |\beta|_\infty\}$$

d'où en notant que $W^{2,p}(\Omega)$ est réflexif, à une sous-suite près,

$$\varepsilon u_\varepsilon - \alpha_\varepsilon \xrightarrow[\alpha \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v - \alpha_0$$

avec α_ε bornée et

$$\alpha_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \alpha_0$$

donc

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\alpha \to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v\ .$$

On va passer à la limite dans le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \end{cases}$$

pour trouver

$$\begin{cases} Av + \widetilde{\beta}(v) \ni f \in L^p(\Omega) \\ (f - Av, 1) = C \\ v = \alpha_0\ . \end{cases}$$

En effet, la convergence

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v$$

donne avec les injections de Sobolev $(p > n)$

$$\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{C^1(\overline{\Omega})} v \ ;$$

en particulier

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{\text{p.p. } [v>0]} +\infty \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\alpha\to 0]{\text{p.p. } [v<0]} -\infty \ .$$

Compte tenu du fait que β est continue

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\alpha\to 0]{\text{p.p. } [v>0]} \beta(+\infty)$$

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\alpha\to 0]{\text{p.p. } [v<0]} \beta(-\infty) \ .$$

Comme β est bornée, on a aussi

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\alpha\to 0]{L^p(\Omega) \text{ faible}} w \ ;$$

en particulier

$$\beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\alpha\to 0]{L^p([v>0]) \text{ faible}} w \quad \text{et} \quad \beta(u_\varepsilon) \xrightarrow[\alpha\to 0]{L^p([v<0]) \text{ faible}} w \ .$$

Mais dans $L^p(\Omega)(p > 1)$ la limite faible coïncide avec la limite ponctuelle (si elle existe) donc $g = \beta(-\infty)$ dans $[u < 0]$ et $g = \beta(+\infty)$ dans $[u > 0]$.

D'autre part, le convexe

$$K = \{g \in L^p(\Omega) \ : \ g \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] \text{ p.p. } \Omega\}$$

est fermé dans $L^p(\Omega)$ réflexif donc aussi faiblement fermé d'où $w \in K$.

Finalement en passant à la limite $(\varepsilon \to 0)$ au sens des distributions dans le problème pénalisé

$$\begin{cases} \varepsilon A u_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} Av + \widetilde{\beta}(v) \ni f \in L^p(\Omega) \\ (f - Av, 1) = C \\ v = \alpha_0 \end{cases}$$

et il suffit de poser $v = u$.

Unicité

Notons par u_α une solution du problème limite correspondant à α telle que $u_\alpha = \alpha$ sur $\partial\Omega$.

A l'aide du principe du maximum (voir théorème 1.3.2) l'application $\alpha \longmapsto u_\alpha$ est croissante.

Soient u_1, u_2 deux solutions du problème limite telles que $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$ sur $\partial\Omega$.

Si on suppose $\alpha_1 \geq \alpha_2$ alors $u_1 \geq u_2$ et nous allons montrer que $Au_1 \leq Au_2$.

En effet en rappelant que le graphe maximal monotone $\widetilde{\beta}$ admet la forme

$$\widetilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [t > 0] \\ \in [\beta(-\infty), \beta(+\infty)] & [t = 0] \\ \beta(-\infty) & [t < 0] \end{cases}$$

et en tenant compte du fait que $f - Au_i \in \widetilde{\beta}(u_i)$ avec $u_1 \geq u_2$ il suffit de vérifier que $f - Au_1 \geq f - Au_2$ dans $[u_1 = 0 = u_2]$ pour avoir $f - Au_1 \geq f - Au_2$ dans Ω . Mais $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$ et le lemme 2.8.1 assure $Au_i = 0$ dans $[u_i = 0]$ donc $f - Au_i = f$ dans $[u_1 = 0 = u_2]$ ce qui implique $f - Au_1 \geq f - Au_2$ et $Au_1 \leq Au_2$ dans Ω .

D'autre part on a aussi

$$0 = C - C = (f - Au_1, 1) - (f - A_2, 1) = (Au_2 - Au_1, 1)$$

avec $Au_1 \leq Au_2$ d'où $Au_1 = Au_2$.

Maintenant nous écrivons

$$\begin{cases} A(u_1 - \alpha_1) = A_2(u_2 - \alpha_2) & \text{dans } \Omega \\ u_1 - \alpha_1 = 0 = u_2 - \alpha_2 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et le principe du maximum assure $u_1 - \alpha_1 = 0 = u_2 - \alpha_2$ ce qui introduit dans les problèmes vérifiés par u_i donne $f \in \widetilde{\beta}(\alpha_i)$ avec $\alpha_1 \neq a_2$ d'où les conditions $(f - Au_1, 1) = C = (f - Au_2, 1)$ entraînent $C \in \{\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|\}$ une contradiction.

Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors on raisonne de la même façon.

Lorsque $\alpha_1 = \alpha_2$ il est évident que $u_1 = u_2$ car le problème

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) & \text{dans } \Omega \\ u = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique via le principe du maximum (voir théorème 1.3.2). △

2.14.5 Comportement de u_ε avec β localement coercive et $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0])$

Théorème 2.14.5

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.

On suppose β localement coercive et inversible.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0] \ . \end{cases}$$

On suppose que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in W^{2,\infty}([u = 0])$.

Si u_ε est la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^\infty_{loc}([u=0])} u_0 \ .$$

△

Preuve :

La démonstration est identique avec celle du théorème 2.10.1 sauf qu'au lieu du théorème 2.7.1 on utilise le théorème 2.14.4. △

2.14.6 Comportement de $(u_\varepsilon - u_0)\varepsilon^{-1}$ avec β localement coercive et $u_0 \in W^{2,\infty}([u = 0]) \ni u_1$

Théorème 2.14.6

Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.

On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ localement coercive et inversible.

Soit u la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \widetilde{\beta}(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0] \ . \end{cases}$$

On suppose que $u_1 = -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} \in W^{2,\infty}([u = 0]) \ni \beta^{-1}(f) = u_0$.

Si u_ε est la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors, à une sous-suite près,

$$\frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^\infty_{loc}([u=0])} u_1 \ .$$

$\triangle$

Preuve :
La même démonstration qu'au théorème 2.10.3 mais au lieu du théorème 2.10.1 on utilise le théorème 2.14.5. $\triangle$

2.14.7 Amélioration de la convergence de u_ε avec β localement coercive et $u_0 \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni u_1$

Théorème 2.14.7
Soit une fonction β bornée, croissante, continue, telle que $\beta(0) = 0$.
On suppose $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ localement coercive et inversible.
Soit u est la solution du problème limite

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta(u) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(-\infty) & [u < 0] \ . \end{cases}$$

On suppose que $u_1 = -\frac{Au_0}{\beta'(u_0)} \in W^{2,\infty}([u=0]) \ni \beta^{-1}(f) = u_0$.
Si u_ε est la solution du problème

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^2(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors $\forall\, p > n$, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{W^{2,p}_{loc}([u=0]) \text{ faible}} u_0$$

$\triangle$

Preuve :
La même démonstration qu'au théorème 2.10.4 mais au lieu des théorèmes 2.10.1 et 2.10.3 on utilise les théorèmes 2.14.5 et 2.14.6. $\triangle$

2.14.8 Comportement de u_ε sans nature coercive de β et sans contrainte sur u_0

Théorème 2.14.8
Soient les problèmes

$$\begin{cases} \varepsilon Au_\varepsilon + \beta(u_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ (\beta(u_\varepsilon), 1) = C \in]\beta(-\infty)|\Omega|, \beta(+\infty)|\Omega|[\\ \varepsilon u_\varepsilon = \alpha_\varepsilon \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au + \widetilde{\beta}(u) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u \in H^1(\Omega) \\ (f - Au, 1) = C \\ u = \alpha \text{ constante sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \beta(t) = \begin{cases} \beta(+\infty) & [u > 0] \\ \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[& [u = 0] \\ \beta(+\infty) & [u > 0] \ . \end{cases}$$

Si $\omega \subset\subset \omega_0 \subset [u=0]$ est une suite de domaines telle que $u_0 = \beta^{-1}(f) \in L^\infty(\omega_0)$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} \ .$$

$\triangle$

Preuve :
On reproduit exactement la première partie de la démonstration du théorème 2.10.7 mais au lieu du théorème 2.7.1 on utilise l'analogue théorème 2.14.4. $\triangle$

Commentaires 2.14

Ce problème a une origine en physique et a été étudié par une approche variationnelle dans [Hilhorst[1],[2].] . △

2.14.1 Continuité de la solution et de la perturbation monotone par rapport au paramètre du bord

L'existence de la solution est toujours une conséquence du théorème 1.4.1.

On montre la continuité par rapport au paramètre du bord des applications

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto u^\alpha \in W^{2,p}(\Omega) \text{ faible (resp. } C^1(\overline{\Omega}))$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \longmapsto (\beta(u^\alpha), 1) \in \mathbb{R} .$$

La démonstration est basée sur le fait que le théorème 1.3.1 reste vrai à une translation par α près. △

2.14.2 Image de l'application $\alpha \longmapsto (\beta(\mathbf{u}^\alpha), 1)$

Le but de ce résultat et d'établir la surjectivité de l'application

$$(-\infty, +\infty) \ni \alpha \longmapsto (\beta(u_\alpha), 1) \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[\ .$$

On utilise le principe de maximum avec des fonctions barrières bien choisies. On remarque la présence de la solution du problème de Saint-Venant u_* qui permet la construction de telles fonctions. △

2.14.3 Existence de la solution du problème pénalisé avec la contrainte $(\beta(\mathbf{u}_\varepsilon), 1) = \mathbf{C}$

L'existence du problème pénalisé est une conséquence du fait que l'application

$$(-\infty, +\infty) \ni \alpha \longmapsto (\beta(u_\alpha), 1) \in]\beta(-\infty), \beta(+\infty)[$$

est continue et surjective. La contrainte $(\beta(u_\varepsilon), 1) = C$, la monotonie de l'application précédente et l'injectivité de β assurent l'unicité de la solution pénalisée. △

2.14.4 Comportement de $\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$ Existence de la solution du problème limite

On introduit le problème limite via pénalisation. Nous notons que la solution de ce problème est unique grâce à la forme particulière du graphe monotone maximal $\widetilde{\beta}$. △

2.14.5-7 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ avec β localement coercive

Le principe du maximum en présence du petit paramètre ε est encore une fois efficace car il n'exige pas des conditions pour u_ε sur le bord de $[u = 0]$ et le comportement de $\varepsilon u_\varepsilon$ est le même que dans le cas où il n'y a pas de contrainte sur $\beta(u_\varepsilon)$ et $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ (voir le théorème 2.7.1). Pour les théorèmes 2.14.5, 2.14.6 et 2.14.7 voir aussi les commentaires 2.10. △

2.14.8 Comportement de $\mathbf{u}_\varepsilon$ sans contrainte sur $\mathbf{u}_0$

Par rapport au théorème 2.10.7 on ne dispose pas de la convergence de $\beta(u_\varepsilon)$ dans $L^p(\Omega)$ fort donc on ne peut extrapoler que le résultat

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} |u_\varepsilon|_{L^\infty(\omega)} \leq |u_0|_{L^\infty(\omega)} \ .$$

△

La méthode de continuité révélée par les théorèmes 2.14.1, 2.14.2, 2.14.3 est une transition vers le troisième chapitre où elle permet l'étude systématique des problèmes non locaux. △

3 Perturbations variationnelles. Problèmes non locaux Second ordre

3.1 Contrainte sur la solution dans le domaine. Cas non-local $(\alpha > 0)$

Préliminaires 3.1

Soit $j : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$j(x, \circ)$ est une fonction convexe positive avec $j(x,0) = 0$ p.p. $x \in \Omega$,

$\partial j(x, \circ) = \beta(x, \circ)$ est un graphe maximal monotone avec $0 \in \partial j(x,0)$ p.p. $x \in \Omega$,

la régularisation Yosida $\beta_\lambda(x, \circ)$ de $\beta(x, \circ)$ est telle que $\beta_\lambda(\circ, t) \in L^1(\Omega)$ p.p. $t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

les constantes $a_1 \geq b_1 > 0 < a_2 \leq b_2$,

les graphes maximaux monotones $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto 2^{\mathbb{R}}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

tels que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} b_1\beta_1(t) \leq \beta(x,t) \leq a_1\beta_1(t) & \forall\, t \geq 0 \\ b_2\beta_2(t) \leq \beta(x,t) \leq a_2\beta_2(t) & \forall\, t \leq 0 \end{cases} .$$

On a besoin de quelques préparations pour introduire les multiplicateurs de Lagrange.

Soit ω une partie d'un espace de Banach X et $F : X \longmapsto \mathbb{R}$.

Si $u \in \omega$ et $v \in X$ sont telles que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a $u + \varepsilon v \in X$, on dit que F admet (au point u) une dérivée dans la direction v si la limite

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{F(u+\varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}$$

existe. On note cette limite $F'_v(u)$.

Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de Gateaux en u , si il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$, la dérivée fonctionnelle $F'_v(u)$ existe et

$$F'_v(u) = \langle l, v\rangle$$

où $\langle \circ, \circ \rangle$ signifie le crochet dual.

On va noter $l = F'(u)$.

Si $u \in \omega$, F est dérivable au sens Fréchet si il existe un unique $l \in X'$ tel que

$$\lim_{\substack{\|v-u\| \to 0 \\ v \in \omega}} \frac{|F(v) - F(u) - \langle l, v-u\rangle|}{\|v-u\|} = 0$$

où $\|\circ\|$ désigne la norme de l'espace de Banach X .

On va adopter la notation unifiée $l = F'(u)$ puisqu'on vérifie qu'une fonctionnelle dérivable au sens Gateaux et continue est aussi dérivable au sens Fréchet.

L'ensemble des fonctions dérivables de ω dans $\mathbb{R}$ sera noté $C^1(\omega, \mathbb{R})$.

Soit aussi

$$\partial S = \{v \in S : \ F(v) = 0\}$$

l'ensemble des éléments saturés de $S \subset X$.

Lemme 3.1.1(Multiplicateurs de Lagrange)

Soient X un espace de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes :

$$S = \{v \in X : \ F(v) \geq 0\} .$$

On suppose que $\forall\, u \in \partial S$, $F'(u) \neq 0$.

Si $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et u_0 est tel que

$$J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v),$$

alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0) .$$

Si u_0 est un élément non-saturé $(F(u_0) > 0)$, alors $\lambda = 0$.

On dit que $J(u_0)$ est une valeur critique de J , u_0 un point critique, λ un multiplicateur de Lagrange pour le point critique u_0 .

$\triangle$

Preuve :
Voir [Kavian, théorème 14.2]. $\triangle$

Lemme 3.1.2(Lions-Stampacchia)
Soit X un espace de Hilbert (réel) de dual X^*.
Soit $K \subset X$ un ensemble non-vide, convexe, fermé et $A: K \longrightarrow X^*$ un opérateur (non nécessairement linéaire) lipschitzien :

$$(Au - Av, \psi)_X \leq \alpha^A |u-v|_X |\psi|_X \qquad \forall\ \psi \in X,\ \forall\ u,\ v \in K,\ \alpha^A > 0 \text{ constante}$$

et elliptique :

$$(Au - Av, u - v)_X \geq \alpha_A |u-v|_X^2 \qquad \forall\ u,\ v \in K,\ \alpha_A > 0 \text{ constante}.$$

Alors le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u)_X \geq 0 & \forall\ v \in K \\ u \in K,\ f \in X^* \end{cases}$$

admet une solution unique. $\triangle$

Preuve :
Voir [Rodrigues, pg. 93]. $\triangle$

Problème 3.1
On considère le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0,\ f \in L^p(\Omega)\ (p > n)\ \ \forall\ v \in K_\alpha \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega):\ (j(x,u),1) \leq \alpha\} \end{cases} \qquad VI_\alpha$$

où $\alpha > 0$ est une constante.
Nous allons montrer que la solution de VI_α existe et vérifie $u \in W^{2,p}(\Omega)$. $\triangle$

Observation 3.1
Si la solution du problème

$$\begin{cases} Au_0 = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

satisfait $u_0 \in K_\alpha$, alors u_0 vérifie VI_α. $\triangle$
Dans toute la suite de cette section, on suppose $u_0 \notin K_\alpha$.

3.1.1 Pénalisation. Estimation a priori

Théorème 3.1.1
Le problème pénalisé

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(\circ, u_\varepsilon) \ni f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega),\ \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad P_\varepsilon$$

admet une solution unique et

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

où la constante C est indépendante de ε. $\triangle$

Preuve :
Ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ [voir théorème 1.4.4] avec l'estimation

$$|f - Au_\varepsilon|_p \leq (\frac{\varepsilon a_1}{\varepsilon b_1} + \frac{\varepsilon b_2}{\varepsilon a_2})\,|f|_p = (\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{a_2})\,|f|_p$$

d'où

$$|Au_\varepsilon|_p \leq |f|_p + (\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{a_2})\,|f|_p$$

et via le théorème 1.3.1

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_A\,|f|_p + C_A(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{a_2})\,|f|_p$$

avec C_A indépendante de ε.
Il suffit de prendre $C = C_A\,|f|_p + C_A(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{a_2})\,|f|_p$. $\triangle$

3.1.2 Stabilité de la solution pénalisée

Théorème 3.1.2

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application

$$[0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}$$

est continue avec

$$\begin{cases} Au_0 = f \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

D'après le théorème 3.1.1, on a l'estimation

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

où la constante C est indépendante de ε .

Quand ε tend vers $\varepsilon_0 \in [0,\infty)$, u_ε reste bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$ réflexif d'où, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} w$$

et en utilisant les injections de Sobolev

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^1(\overline{\Omega})} w \quad .$$

Le problème pénalisé équivaut au problème variationnel (voir aussi la démonstration du théorème 1.4.1)

$$(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq \varepsilon(j(\circ, u_\varepsilon), 1) - \varepsilon(j(\circ, v), 1) \; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

et en notant que la fonction convexe et propre $j(x, \circ)$ est continue p.p. $x \in \Omega$ on peut passer à la limite $(\varepsilon \to \varepsilon_0)$ pour obtenir

$$(Aw - f, v - w) \geq \varepsilon_0(j(\circ, w), 1) - \varepsilon_0(j(\circ, v), 1) \; \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} Aw + \varepsilon_0 \partial j(\circ, w) \ni f \\ w \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

donc $w = u_{\varepsilon_0}$ du fait de l'unicité de la solution de ce problème . $\triangle$

3.1.3 Continuité de la contrainte

Théorème 3.1.3

Si u_ε est la solution du problème P_ε , alors la fonction

$$\varepsilon \in [0,\infty) \longmapsto (j(\circ, u_\varepsilon), 1) \in \mathbb{R}$$

est continue et décroissante. De plus on a l'estimation

$$(j(\circ, u_\varepsilon), 1) \leq C\varepsilon^{-1}$$

où la constante C est indépendante de ε . $\triangle$

Preuve :

Le théorème 3.1.2 et les injections de Sobolev ($p > n$) assurent pour $\varepsilon_0 \in [0,\infty)$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^1(\overline{\Omega})} u_{\varepsilon_0}$$

d'où avec $j(x, \circ)$ continue p.p. $x \in \Omega$

$$(j(\circ, u_\varepsilon), 1) \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} (j(\circ, u_{\varepsilon_0}), 1)$$

car l'intégrale transforme la convergence uniforme en convergence.

Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 \partial j(\circ, u_{\varepsilon_1}) \ni f, & u_{\varepsilon_1} \in H_0^1(\Omega) \\ Au_{\varepsilon_2} + \varepsilon_2 \partial j(\circ, u_{\varepsilon_2}) \ni f, & u_{\varepsilon_2} \in H_0^1(\Omega) . \end{cases}$$

Dans la suite on note par $\partial j(\mathrm{o}, u_\varepsilon)$, $\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_i})$ respectivement les fonctions g, g_i telles que p.p. $x \in \Omega$

$$g = f - Au_\varepsilon \in \varepsilon \partial j(x, u_\varepsilon(x))$$
$$g_i = f - Au_{\varepsilon_i} \in \varepsilon_i \partial j(x, u_{\varepsilon_i}(x)) \ .$$

Une soustraction conduit à

$$A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2 \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}) = 0$$

ou sous une autre forme

$$A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + \varepsilon_2\{\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2})\} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) = 0 \ .$$

Une multiplication par $u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}$ permet d'avoir

$$\begin{aligned}&(A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + \\ &\quad + \varepsilon_2(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) = 0\end{aligned}$$

où

$$(A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \underset{A \text{ elliptique}}{\overline{\overline{\qquad\qquad}}} \geq \alpha_A \left|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\right|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

$$(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \geq \frac{\partial j \text{ monotone}}{j \text{ convexe}} \geq 0$$

$$(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \underset{j \text{ convexe}}{\overline{\overline{\qquad\qquad}}} \geq (j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), 1) \ .$$

Dans ces conditions l'égalité

$$(Au_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + \varepsilon_2(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\partial j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) = 0$$

devient avec $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$$(j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), 1) - (j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}), 1) \geq \alpha_A \left|u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}\right|^2_{H^1_0(\Omega)} \geq 0$$

donc

$$(j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_2}), 1) \underset{\varepsilon_1 > \varepsilon_2}{\overline{\overline{\qquad}}} \geq (j(\mathrm{o}, u_{\varepsilon_1}), 1)$$

et l'application

$$\varepsilon \longmapsto (j(\mathrm{o}, u_\varepsilon), 1)$$

est décroissante.

En multipliant l'équation $Au_\varepsilon + \partial j(\mathrm{o}, u_\varepsilon) = f$ par u_ε on obtient

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon(\partial j(\mathrm{o}, u_\varepsilon), u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon) \ .$$

Mais

$$(Au_\varepsilon, u_\varepsilon) = (\sum_{i,j} a_{ij} u_{\varepsilon x_i} u_{\varepsilon x_j}, 1) \underset{A \text{ elliptique}}{\overline{\overline{\qquad\qquad}}} \geq \alpha_A \mid u_\varepsilon \mid^2_{H^1_0(\Omega)}$$

$$(\partial j(\mathrm{o}, u_\varepsilon), u_\varepsilon) \underset{j(x,\mathrm{o}) \text{ convexe p.p. } \Omega}{\overline{\overline{\qquad\qquad}}} \geq (j(\mathrm{o}, u_\varepsilon), 1) \underset{j \geq 0}{\overline{\overline{\qquad}}} 0$$

$$(f, u_\varepsilon) \underset{\text{Hölder}}{\overline{\overline{\qquad}}} \leq \mid f \mid_2 |u_\varepsilon|_2 \underset{\text{Poincaré}}{\overline{\overline{\qquad}}} \leq C_P \left|f\right|_2 |u_\varepsilon|_{H^1_0(\Omega)}$$

d'où en combinant

$$|u_\varepsilon|_2 \leq C_P \left|u_\varepsilon\right|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_P \alpha_A^{-1} \left|f\right|_2$$

et $\forall\ \varepsilon > 0$

$$(j(\mathrm{o}, u_\varepsilon), 1) \leq \frac{1}{\varepsilon}(f, u_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} C_P \alpha_A^{-1} \left|f\right|^2_2$$

ce qu'on voulait montrer si on pose $C = C_P \alpha_A^{-1} \left|f\right|^2_2$. $\triangle$

3.1.4 Existence et régularité de la solution de VI_α

Théorème 3.1.4

Soit $\mathbf{u}_\varepsilon$ la solution du problème pénalisé $\mathbf{P}_\varepsilon$.

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{cases} \mathsf{Au}_\varepsilon + \varepsilon \partial \mathsf{j}(\mathrm{o}, \mathsf{u}_\varepsilon) \ni \mathsf{f} \in \mathsf{L}^\mathsf{p}(\Omega) \ (\mathsf{p} > \mathsf{n}) \\ (\mathsf{j}(\mathrm{o}, \mathsf{u}_\varepsilon), 1) = \alpha \\ \mathsf{u}_\varepsilon \in \mathsf{H}^1_0(\Omega) \cap \mathsf{W}^{2,\mathsf{p}}(\Omega) \ . \end{cases}$$

De plus, $\mathbf{u}_\varepsilon$ vérifie $\mathbf{VI}_\alpha$. $\triangle$

Preuve :
D'après les théorèmes 3.1.2 et 3.1.3, si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application

$$\varepsilon \in [0,\infty) \longmapsto (j(\circ,u_\varepsilon),1) \in \mathbb{R}$$

est continue et décroissante d'où

$$(j(\circ,u_\varepsilon),1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (j(\circ,u_0),1) > \underset{u_0 \notin K_\alpha \text{ voir obs. } 3.1}{=\!=\!=} \alpha > 0 \xleftarrow[\infty\leftarrow\varepsilon]{} (j(\circ,u_\varepsilon),1) \ .$$

Par continuité on trouve un $\varepsilon > 0$ tel que

$$(j(\circ,u_\varepsilon),1) = \alpha \ .$$

En posant $u_\varepsilon = u \in W^{2,p}(\Omega) \cap K_\alpha$ on voit que $\forall \ v \in K_\alpha$

$$(Au - f, v-u) \geq \varepsilon\{(j(\circ,u),1) - (j(\circ,v),1)\} = \varepsilon\{\alpha - (j(\circ,v),1)\} \geq 0$$

donc u vérifie VI_α.
Le théorème de Lions-Stampacchia (voir lemme 3.1.2) montre que $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap K_\alpha$ est l'unique solution de VI_α. △

3.1 Contrainte sur la solution dans le domaine. Cas local $(\alpha = 0)$

3.1.5 Existence et régularité de la solution de VI_0.

Soit j comme au cas non-local mais sans aucune condition sur le sous-différentiel.

Théorème 3.1.5
Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε.
Si il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$|f - Au_\varepsilon|_p \leq C$$

alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u_\infty$$

où $u_\infty \in W^{2,p}(\Omega)$ est solution du problème variationnel local

$$\begin{cases} (Au - f, v-u) \geq 0, \ f \in L^p(\Omega) \ (p > n) \ \ \forall \ v \in K_0 \\ u \in K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ j(\circ,v) = 0 \text{ p.p. dans } \Omega\} \ . \end{cases}$$

△

Preuve :
L'estimation

$$|f - Au_\varepsilon|_p \leq C$$

entraîne

$$|Au_\varepsilon|_p \leq C + |f|_p \ .$$

A l'aide du théorème 1.3.1 et des injections de Sobolev on a

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{C^1(\overline{\Omega})} u_\infty \ .$$

Le problème pénalisé devient l'inégalité $\forall \ v \in K_0$:

$$(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq \varepsilon(j\circ,u_\varepsilon),1) - \varepsilon(j(\circ,v),1) \underset{(j(\circ,v),1)=0}{\overset{v\in K_0}{=\!=\!=}} \varepsilon(j(\circ,u_\varepsilon),1) \geq \underset{j\geq 0}{=\!=\!=} \geq 0$$

et en passant à la limite quand ε tend vers $+\infty$ respectivement dans

$$\begin{cases} (Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq 0 \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \ \ \forall \ \varepsilon > 0, \ \ \forall \ v \in K_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq (j(\circ,u_\varepsilon),1) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega), \ \ \forall \ \varepsilon > 0, \ \ \forall \ v \in K_0 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} (Au_\infty - f, v - u_\infty) \geq 0 \quad \forall \ v \in K_0 \\ (j(\circ,u_\infty),1) = 0 \\ u_\infty \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

ce qu'on voulait montrer. △

3.1.6 Double obstacle

Soient $\varphi_1,\ \varphi_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} \varphi_1 \geq 0 \geq \varphi_2 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi_1 \geq \varphi_2 & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

et

$$j(x,t) = j_1(t-\varphi_1(x)) + j_2(t-\varphi_2(x)) \qquad \forall\ t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega$$

où les fonctions convexes suffisamment régulières $j_1,\ j_2$ vérifient

$$j_1(t) = 0,\ \ \forall\ t \leq 0,\ j_2(t) = 0,\ \ \forall\ t \geq 0\ .$$

On note $\partial j_1 = \beta_1,\ \partial j_2 = \beta_2$.

Théorème 3.1.6

Le problème pénalisé P_ε admet une solution unique $\mathsf{u}_\varepsilon \in \mathsf{W}^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$|\varepsilon\partial\mathsf{j}(\mathsf{o},\mathsf{u}_\varepsilon)|_{\mathsf{p}} \leq \mathsf{C}$$

où C est une constante indépendante de ε . △

Preuve :

D'abord on observe que p.p. $x \in \Omega,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$ on a

$$t - \varphi_1 \leq \partial j(\mathrm{o},t) \leq t - \varphi_2$$

et le théorème 1.4.1 assure l'existence, l'unicité et la régularité de la solution.

On note que les ensembles $[u_\varepsilon > \varphi_1]$ et $[u_\varepsilon < \varphi_2]$ sont des ouverts bien définis car $u_\varepsilon\ ,\ \varphi_1\ ,\ \varphi_2 \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ avec les injections de Sobolev ($p > n$).

Ensuite

$$u_\varepsilon - \varphi_1 \in H_0^1([u_\varepsilon > \varphi_1])$$

et on peut écrire

$$\begin{cases} Au_\varepsilon - \varphi_1 + \varepsilon\beta_1(u_\varepsilon - \varphi_1) = f - A\varphi_1 & [u_\varepsilon > \varphi_1] \\ u_\varepsilon - \varphi_1 = 0 & \partial[u_\varepsilon > \varphi_1]\ . \end{cases}$$

Grâce au théorème 1.2.4 on a l'estimation

$$|\varepsilon\beta_1(u_\varepsilon - \varphi)|_{L^p([u_\varepsilon>\varphi_1])} \leq |f - A\varphi_1|_{L^p([u_\varepsilon>\varphi_1])} \leq |f - A\varphi_1|_{L^p(\Omega)}\ .$$

De même,

$$u_\varepsilon - \varphi_2 \in H_0^1([u_\varepsilon < \varphi_2])$$

vérifie

$$\begin{cases} Au_\varepsilon - \varphi_2 + \varepsilon\beta_2(u_\varepsilon - \varphi_2) = f - A\varphi_2 & [u_\varepsilon < \varphi_2] \\ u_\varepsilon - \varphi_2 = 0 & \partial[u_\varepsilon < \varphi_2] \end{cases}$$

et le même théorème 1.2.4 assure

$$\varepsilon|\beta_2(u_\varepsilon - \varphi_2)|_{L^p([u_\varepsilon<\varphi_2])} \leq |f - A\varphi_2|_{L^p([u_\varepsilon<\varphi_2])} \leq |f - A\varphi_2|_{L^p(\Omega)}\ .$$

Le cumul donne

$$|\varepsilon\partial j(\mathrm{o},u_\varepsilon)|_{L^p(\Omega)} \leq |\beta_1(u_\varepsilon - \varphi_1)|_{L^p([u_\varepsilon>\varphi_1])} + |\beta_2(u_\varepsilon - \varphi_2)|_{L^p([u_\varepsilon<\varphi_2])} \leq$$
$$\leq |f - A\varphi_1|_{L^p(\Omega)} + |f - A\varphi_2|_{L^p(\Omega)}\ .$$

△

Remarque 3.1.6

En appliquant le théorème 3.1.5, on obtient que la solution du problème à double obstacle

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 \quad f \in L^p(\Omega)(p > n) \ \ \forall\ \ v \in K_0 \\ u \in K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) :\ \ j(\mathrm{o},v) = 0 \ \ \textit{p.p. dans } \Omega\} = \\ = \{v \in H_0^1(\Omega) :\ \varphi_2 \leq v \leq \varphi_1 \ \ \textit{p.p. dans } \Omega\} \end{cases}$$

vérifie $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

On note que ce résultat est connu (voir [Chipot [1]]). △

3.1.7 Vitesse de la convergence dans $L^\infty(\Omega)$

Théorème 3.1.7

Soit

$$j(o,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-\varphi_1)^2 & t > \varphi_1 \\ 0 & \varphi_1 \le t \le \varphi_2 \\ \frac{1}{2}(t-\varphi_2)^2 & t > \varphi_2 \end{cases}$$

avec $\varphi_i \in W^{2,p}(\Omega)$.

Si la solution du problème de l'obstacle

$$\begin{cases} (Au-f, v-u) \ge 0 \quad f \in L^p(\Omega)(p>n) \ \ \forall \ v \in K_0 \\ u \in K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ j(o,v) = 0 \ \text{ p.p. dans } \Omega\} = \\ = \{v \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi_2 \le v \le \varphi_1 \ \text{ p.p. dans } \Omega\} \end{cases}$$

vérifie $f - Au \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

et

$$\varepsilon\, |u_\varepsilon - u|_{L^\infty(\Omega)} \le |f - Au|_{L^\infty(\Omega)}$$

où u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε . $\triangle$

Preuve :

La convergence est une conséquence des théorèmes 3.1.5 et 3.1.6 .

Soient les fonctions

$$u_\pm = \pm\, |f - Au|_\infty \quad .$$

Alors on a les comparaisons

$$\frac{1}{\varepsilon}A(u_\varepsilon - u)\varepsilon + \partial j(\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - u)\varepsilon + u) = f - Au$$

$$f - Au \begin{cases} = f - A\varphi_1 \le u_+ = u_+ + \varepsilon(\varphi_1 - \varphi_1) \underset{u_+ \text{ constante}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\varepsilon}Au_+ + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_+ + u) & [u=\varphi_1] \\ = 0 \le \frac{1}{\varepsilon}Au_+ + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_+ + u) & [\varphi_2<u<\varphi_1] \\ = f - A\varphi_2 \le 0 = \frac{1}{\varepsilon}Au_+ + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_+ + u) & [u=\varphi_2] \\ = f - A\varphi_2 \ge u_- = u_- + \varepsilon(\varphi_2 - \varphi_2) \underset{u_- \text{ constante}}{=\!=\!=\!=} \frac{1}{\varepsilon}Au_- + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_- + u) & [u=\varphi_2] \\ = 0 \ge \frac{1}{\varepsilon}Au_- + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_- + u) & [\varphi_2<u<\varphi_1] \\ = f - A\varphi_1 \ge 0 = \frac{1}{\varepsilon}Au_- + \varepsilon\partial j(\frac{1}{\varepsilon}u_- + u) & [u=\varphi_1] \end{cases}$$

et le principe du maximum s'applique (voir théorème 1.3.2) pour avoir p.p. dans Ω

$$-|f - Au|_\infty = u_- \le \varepsilon(u_\varepsilon - u) \le u_+ = |f - Au|_\infty$$

d'où

$$|\varepsilon(u_\varepsilon - u)|_{L^\infty(\Omega)} \le |f - Au|_\infty \quad .$$

$\triangle$

Remarque 3.1.7

Comme

$$f - Au = \begin{cases} f - A\varphi_1 & [u = \varphi_1] \\ 0 & [\varphi_2 < u < \varphi_1] \\ f - A\varphi_2 & [u = \varphi_2] \end{cases}$$

la condition $f - Au \in L^\infty(\Omega)$ *est remplie si* $\varphi_i \in W^{2,\infty}(\Omega)$ *et* $f \in L^\infty(\Omega)$. $\triangle$

3.1 Contrainte sur la solution dans le domaine. Cas non local
"Short way". Multiplicateurs de Lagrange

3.1.8 Le problème variationnel VI_α équivaut à une équation fonctionnelle

Soit $j : \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ une fonction positive telle que

$\partial j(x, \circ)$ est une fonction croissante et continue avec $0 \in \partial j(x, 0)$ p.p. $x \in \Omega$,

$\partial j(\circ, t) \in L^1(\Omega)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe

des fonctions $b_i \in L^p(\Omega)(i \in \{1, 2\})$,

des fonctions croissantes et continues $\beta_i : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ avec $0 \in \beta_i(0)$,

telles que p.p. $x \in \Omega$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\beta_2(t) + b_2(x) \leq \partial j(x, t) \leq \beta_1(t) + b_1(x) \ .$$

Théorème 3.1.8

On suppose que l'opérateur de type elliptique A est symétrique.
Le problème variationnel VI_α avec $\mathsf{f} \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega)$ admet une solution unique $\mathsf{u}^\alpha \in \mathsf{H}^1_0(\Omega)$ et il existe une constante $\varepsilon_\alpha \geq 0$ telle que

$$\begin{cases} \mathsf{Au}^\alpha + \varepsilon_\alpha \partial \mathsf{j}(\circ, \mathsf{u}^\alpha) = \mathsf{f} \in \mathsf{H}^{-1}(\Omega) \\ \mathsf{u}^\alpha \in \mathsf{K}_\alpha \ . \end{cases}$$

Si $(\mathsf{j}(\circ, \mathsf{u}^\alpha), 1) < \alpha$, alors $\varepsilon_\alpha = 0$. $\triangle$

Preuve :

Selon le théorème de Lions-Stampacchia (voir lemme 3.1.2), le problème variationnel VI_α avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ admet une solution unique $u^\alpha \in H^1_0(\Omega)$.

Dans ces conditions le problème de minimisation

$$J(u^\alpha) = \inf_{v \in K_\alpha} J(v)$$

admet une solution unique où J est la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) \quad \forall\ v \in H^1_0(\Omega)$$

agissant sur l'ensemble convexe et non-vide des contraintes

$$K_\alpha = \{v \in X : \ F(v) \geq 0\}$$

avec $F(v) = \alpha - (j(\circ, v), 1)$, $X = H^1_0(\Omega)$.

Les dérivées au sens Gateaux des fonctionnelles J et F seront données respectivement par

$$(J'(w), v) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{J(w + \varepsilon v) - J(w)}{\varepsilon} \xlongequal[A \text{ symétrique}]{} (Aw - f, v) \quad \forall\ v \in H^1_0(\Omega)$$

et

$$(F'(w), v) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{F(w + \varepsilon v) - F(w)}{\varepsilon} \xlongequal[j \text{ convexe}]{j(x,\circ) \in C^1(\mathbb{R}) \text{ p.p. } x \in \Omega} (-\partial j(\circ, w), v) \quad \forall\ v \in H^1_0(\Omega) \ .$$

On voit que si $w \in \partial K_\alpha$ alors

$$(F'(w), w) = (-\partial j(\circ, w), w) \underset{j \text{ convexe}}{\overset{j(\circ,0)=0}{\leq}} \leq (-j(\circ, w), 1) \xlongequal[w \in \partial K_\alpha]{\text{élément saturé de } K_\alpha} = -\alpha < 0$$

donc $F' \neq 0$ sur ∂K_α .

Le théorème de Lagrange (voir lemme 3.1.1) avec

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v), \quad F(v) = \alpha - (j(\circ, v), 1)$$

$$X = H^1_0(\Omega), \quad S = K_\alpha$$

assure l'existence d'un $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(u^\alpha) = \varepsilon_\alpha F'(u^\alpha)$$

c'est-à-dire

$$Au^\alpha + \varepsilon_\alpha \partial j(\circ, u^\alpha) = f \ .$$

Vérifions que $\varepsilon_\alpha \geq 0$ si $u^\alpha \in \partial K_\alpha$.

En multipliant l'équation

$$Au^\alpha - f = -\varepsilon_\alpha \partial j(\mathrm{o}, u^\alpha)$$

par $\varepsilon_\alpha(v - u^\alpha)$, $v \in K_\alpha$, on obtient

$$\varepsilon_\alpha(Au^\alpha - f, v - u^\alpha) = \varepsilon_\alpha^2(\partial j(\mathrm{o}, u^\alpha), u^\alpha - v) \geq \underset{j \text{ convexe}}{=\!=\!=} \geq$$

$$\geq \varepsilon_\alpha^2\{(j(\mathrm{o}, u^\alpha), 1) - (j(\mathrm{o}, v), 1)\} \underset{u^\alpha \in \partial K_\alpha}{=\!=\!=}$$

$$= \varepsilon_\alpha^2\{\alpha - (j(\mathrm{o}, v), 1)\} \geq \underset{v \in K_\alpha}{=\!=\!=} \geq 0$$

d'où l'on tire $\varepsilon_\alpha \geq 0$ puisque $(Au^\alpha - f, v - u^\alpha) \geq 0 \ \forall \ v \in K_\alpha$.

Si u^α est un élément non-saturé de K_α , alors $\varepsilon_\alpha = 0$ et u^α coïncide avec la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

△

3.1.9 Régularité de la solution de l'équation fonctionnelle et de VI_α

Théorème 3.1.9

Le problème variationnel VI_α avec $\mathrm{p} > \mathrm{n}$ admet une solution unique $\mathrm{u}^\alpha \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega)$.

△

Preuve :

D'après le théorème précédent, u^α est solution du problème

$$\begin{cases} Au^\alpha + \varepsilon_\alpha \partial j(\mathrm{o}, u^\alpha) = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u^\alpha \in H_0^1(\Omega), \ \varepsilon_\alpha \geq 0 \end{cases}$$

et il suffit d'appliquer le théorème 1.4.1. △

Commentaires 3.1

Le problème non local étudié dans cette section a été posé par [Brézis et Stampacchia] pour le cas d'une fonction convexe ayant un sous-différentiel univoque et développée par [Chipot [2]] pour un sous-différentiel multivoque mais indépendant du domaine.

En disposant d'un résultat de régularité [théorème 1.4.3 et théorème 1.4.4] avec une estimation explicite pour les perturbations monotones multivoques et dépendantes du domaine, on développe une méthode de continuité qui consiste en plusieurs étapes :

1. Pénalisation avec existence, unicité et régularité de la solution pénalisée ;
2. Stabilité de la solution pénalisée par rapport au paramètre ;
3. Continuité de la contrainte pénalisée par rapport au paramètre ;
4. La solution du problème non local sera une certaine solution pénalisée car l'application ayant comme argument le paramètre et comme valeur la contrainte est continue et surjective.
5. Le problème du double obstacle s'obtient comme un problème limite lorsque le paramètre tend vers l'infini car dans ce cas on peut donner une estimation de la perturbation monotone indépendante du paramètre.

Lorsque le sous-différentiel de la fonction convexe utilisé pour la perturbation variationnelle est univoque mais dépendant du domaine et satisfait les conditions du théorème 1.4.3, on utilise un argument basé sur les multiplicateurs de Lagrange en obtenant la même régularité. Cette approche est d'ailleurs suggérée sans développement dans [Brézis et Stampacchia] et [Chipot[2]].

Notons que la fonction convexe spécifique au double obstacle ne satisfait pas les hypothèses du théorème 1.4.4 donc des préliminaires 3.1, par conséquent on est obligés d'établir les estimations à priori par une autre voie et on obtient la régularité classique.

Le problème du double obstacle a été beaucoup étudié dans la littérature, voir par exemple [Chipot [1]], [Rodrigues], [Kinderlehrer et Stampacchia], [Troianiello G. M.] pour des résultats concernant la régularité et la frontière libre.

Notre méthode de continuité s'impose dans ce qui suit par le traitement unitaire des problèmes variationnels visant des contraintes convexes de la solution dans le domaine et sur le bord, du gradient et d'un opérateur dépendant de la solution. △

3.2 Contrainte sur la solution sur le bord. Cas non-local ($\alpha > 0$)

Préliminaires 3.2

Soit $j : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ une fonction convexe et positive telle que $j(0) = 0$ ayant le sous-différentiel $\beta = \partial j$ tel que $0 \in \beta(0)$.

Soit l'opérateur elliptique A défini par

$$Au = -\sum_i (\sum_j a_{ij} u_{x_j})_{x_i} + au$$

où $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $a \in L^\infty(\Omega)$ telle que p.p. Ω

$$a \geq \lambda > 0$$

avec $\lambda > 0$ une constante.

On note la dérivée conormale de u associée à l'opérateur A par

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_i (\sum_j a_{ij} u_{x_j}) n_i$$

où n est la normale extérieure à Ω.

On introduit l'ensemble convexe

$$K_\alpha = \{v \in H^1(\Omega) : (j(v), 1)_{\partial\Omega} \leq \alpha\}$$

où $\alpha > 0$ est une constante.

Nous considérons le problème variationnel

$$\begin{cases} (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{x_j} (v-u)_{x_i}, 1)_\Omega + (au, v-u)_\Omega \geq (f, v-u)_\Omega \ \forall\, v \in K_\alpha \\ u \in K_\alpha, \ f \in H^{-1}(\Omega) . \end{cases} \qquad VI_\alpha$$

Ce problème admet toujours une solution unique d'après le théorème de Lions-Stampacchia (voir lemme 2.1.2). $\triangle$

Problème 3.2

On va étudier la régularité de la solution de VI_α quand $f \in L^p(\Omega)$ avec $n > p > \frac{n}{2}$ et $p \geq 2$.

On trouve que $u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

$\triangle$

Observation 3.2

D'après [Brézis[5], pg. 33, théorème I7 et pg. 40, théorème I9] le problème de Neumann

$$\begin{cases} Au = f \in L^p(\Omega) \\ u \in H^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

admet une solution unique $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ en notant que $a \geq \lambda > 0$ p.p. Ω.

Si $u_0 \in K_\alpha$, alors u_0 vérifie VI_α.

Dans la suite de cette section on suppose

$$(j(u_0), 1)_{\partial\Omega} > \alpha .$$

$\triangle$

3.2.1 Pénalisation. Estimation a priori

Théorème 3.2.1

Le problème pénalisé

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f \in L^p(\Omega) (\frac{n}{2} < p < n) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon \in H^2(\Omega), \ \varepsilon > 0 & \\ -\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in \varepsilon\beta(u_\varepsilon) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad P_\varepsilon$$

admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{1,p^*}(\Omega)$ et on a les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad |u_\varepsilon|_{H^2(\Omega)} \leq C$$

où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ et C est une constante dépendant seulement de Ω, n, p et A. $\triangle$

Preuve :
Selon [Brézis[5], pg. 49, théorème I11, pg. 43 théorème I10 et pg. 33 théorème I7] ce problème admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{1,p^*}(\Omega)$ avec les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad |u_\varepsilon|_{H^2(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante dépendant seulement de Ω, n, p et A . △

Remarque 3.2.1
L'estimation

$$|u_\varepsilon|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C$$

est optimale d'après [Brézis[5], pg. 55, remarque I30] . △

3.2.2 Stabilité de la solution pénalisée

Théorème 3.2.2
Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε .
Alors les applications

$$[0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in W^{1,p^*}(\Omega) \text{ faible}$$

$$[0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in H^2(\Omega) \text{ faible}$$

sont continues avec

$$\begin{cases} Au_0 = f \in L^p(\Omega) \\ u_0 \in H^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \,. \end{cases}$$

△

Preuve :
Selon le théorème précédent on a les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C \quad \text{et} \quad |u_\varepsilon|_{H^2(\Omega)} \leq C \ .$$

La faible compacité des boules de $W^{1,p^*}(\Omega)$ et de $H^2(\Omega)$ permet d'avoir, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0\in[0,\infty)]{W^{1,p^*}(\Omega)\text{ faible}} u \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0\in[0,\infty)]{H^2(\Omega)\text{ faible}} u$$

et encore

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\Omega})} u$$

donc

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\partial\Omega})} u$$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega)\text{ fort}} u$$

avec les injections de Sobolev $(p > \frac{n}{2})$.

D'abord en multipliant l'équation

$$Au_\varepsilon = f$$

par $w \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, on obtient

$$(Au_\varepsilon - f, w)_\Omega = (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{\varepsilon x_j} w_{x_i}, 1)_\Omega + (au_\varepsilon, w)_\Omega - (f,w)_\Omega = 0$$

et avec

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0\in[0,\infty)]{W^{1,p^*}(\Omega)\text{ faible}} u$$

à la limite $\forall \ w \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$

$$(Au - f, w)_\Omega = (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{x_j} w_{x_i}, 1)_\Omega + (au, w)_\Omega - (f,w)_\Omega = 0$$

c'est-à-dire

$$Au = f \ .$$

Ensuite si $w \in C^\infty(\Omega)$ alors

$$(Au_\varepsilon - f, w)_\Omega = (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{\varepsilon x_j} w_{x_i}, 1)_\Omega - (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, w)_{\partial\Omega} + (au_\varepsilon, w)_\Omega - (f, w)_\Omega = 0$$

et après une réécriture en notant que $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\partial\Omega)$ avec $u \in H^2(\Omega)$ on a

$$(\sum_i \sum_j a_{ij}(u_\varepsilon - u)_{x_j} w_{x_i}, 1)_\Omega - (\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}, w)_{\partial\Omega} + (a(u_\varepsilon - u), w)_\Omega = (f - Au, w)_\Omega = 0$$

et le passage à la limite $(\varepsilon \to \varepsilon_0)$ permet d'avoir $\forall\, w \in C^\infty(\Omega)$

$$(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}, w)_{\partial\Omega} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{} 0$$

d'où

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ faible}} \frac{\partial u}{\partial n} \ .$$

D'autre part $\forall\, w \in C^\infty(\partial\Omega)$ on a

$$(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, w - u_\varepsilon)_{\partial\Omega} \leq \varepsilon(j(w) - j(u_\varepsilon), 1)_{\partial\Omega}$$

puisque sur le bord

$$-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in \varepsilon\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon\partial j(u_\varepsilon)$$

avec j convexe.

En observant que

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{C^0(\overline{\partial\Omega})} u$$

$$w - u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ fort}} w - u$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ faible}} \frac{\partial u}{\partial n}$$

et j est convexe et propre donc continue, on peut passer à la limite sur le bord $(\varepsilon \to \varepsilon_0)$ pour avoir

$$(-\frac{\partial u}{\partial n}, w - u)_{\partial\Omega} \leq \varepsilon_0(j(w) - j(u), 1)_{\partial\Omega}$$

c'est-à-dire p.p. $\partial\Omega$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \in \varepsilon_0\beta(u) = \varepsilon_0\partial j(u) \ .$$

On a utilisé aussi le fait que

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ fort}} f_{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ faible}} g_{\varepsilon_0}$$

implique

$$f_\varepsilon g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0]{L^2(\partial\Omega) \text{ faible}} f_{\varepsilon_0} g_{\varepsilon_0} \ .$$

Finalement u vérifie

$$\begin{cases} Au = f \in L^p(\Omega)(\frac{n}{2} < p < n) & \text{dans } \Omega \\ u \in H^2(\Omega) & \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \varepsilon_0\beta(u) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et du fait de l'unicité de la solution de ce problème on aura $u = u_{\varepsilon_0}$. Δ

3.2.3 Continuité de la contrainte

Théorème 3.2.3

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application

$$[0,\infty) \ni \varepsilon \longmapsto (j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega} \in \mathbb{R}$$

est continue et décroissante. De plus

$$(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega} \leq C\varepsilon^{-1}$$

où C est une constante indépendante de ε .

△

Preuve :

Comme toute fonction convexe et propre est continue, le théorème 3.2.2 et les injections de Sobolev ($p > \frac{n}{2}$) assurent

$$\begin{array}{c}
u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\Omega})} u_{\varepsilon_0} \\
\downarrow \\
j(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\Omega})} j(u_{\varepsilon_0}) \\
\downarrow \\
j(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\partial\Omega})} j(u_{\varepsilon_0}) \\
\downarrow \\
(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} (j(u_{\varepsilon_0}),1)_{\partial\Omega}
\end{array}$$

car l'intégrale sur le bord transforme la convergence uniforme en convergence.

Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Soient les problèmes

$$\begin{cases} Au_{\varepsilon_1} = f & \text{dans } \Omega \\ u_{\varepsilon_1} \in H^2(\Omega) & \\ -\dfrac{\partial u_{\varepsilon_1}}{\partial n} \in \varepsilon_1 \partial j(u_{\varepsilon_1}) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Au_{\varepsilon_2} = f & \text{dans } \Omega \\ u_{\varepsilon_2} \in H^2(\Omega) & \\ -\dfrac{\partial u_{\varepsilon_2}}{\partial n} \in \varepsilon_2 \partial j(u_{\varepsilon_2}) & \text{sur } \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Dans la suite on note par $\varepsilon\beta(u_\varepsilon)$, $\varepsilon_i\beta(u_{\varepsilon_i})(i \in \{1,2\})$ respectivement les fonctions g, $g_i \in L^2(\partial\Omega)$ telles que p.p. $x \in \partial\Omega$

$$g = -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in \varepsilon\beta(u_\varepsilon(x))$$

$$g_i = -\frac{\partial u_{\varepsilon_i}}{\partial n} \in \varepsilon_i\beta(u_{\varepsilon_i}(x))\ .$$

Une soustraction conduit à

$$\begin{cases} A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})}{\partial n} + \varepsilon_1\beta(u_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2\beta(u_{\varepsilon_2}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et après une multiplication par $u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}$ combinée avec une intégration par parties

$$(\sum_i\sum_j a_{ij}(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{x_j}(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{x_i},1)_\Omega + (a(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_\Omega +$$
$$+ (\varepsilon_1\beta(u_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2\beta(u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega} = 0$$

car on a sur le bord

$$\frac{\partial(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})}{\partial n} + \varepsilon_1\beta(u_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2\beta(u_{\varepsilon_2}) = 0\ .$$

Comme A est elliptique on aura

$$(\varepsilon_1\beta(u_{\varepsilon_1}) - \varepsilon_2\beta(u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega} \leq 0$$

et une réécriture permet d'avoir

$$\varepsilon_2(\beta(u_{\varepsilon_1}) - \beta(u_{\varepsilon_2}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\beta(u_{\varepsilon_1}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega} \leq 0$$

d'où
$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\beta(u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega}\le 0$$
puisque β est croissante.

Une nouvelle transcription ($\beta=\partial j$) mène à
$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\partial j(u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega}\le 0$$
et comme la convexité de j force
$$(j(u_{\varepsilon_1}),1)_{\partial\Omega}-(j(u_{\varepsilon_2}),1)_{\partial\Omega}\le(\partial j(u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})_{\partial\Omega}$$
on aura avec $\varepsilon_1>\varepsilon_2$
$$(j(u_{\varepsilon_1}),1)_{\partial\Omega}-(j(u_{\varepsilon_2}),1)_{\partial\Omega}\le 0$$
donc l'application
$$\varepsilon\longmapsto(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}$$
est décroissante.

En multipliant l'équation $Au_\varepsilon=f$ par u_ε on obtient après une intégration par parties
$$(\sum_i\sum_j a_{ij}u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon x_i},1)_\Omega+(au_\varepsilon,u_\varepsilon)_\Omega+\varepsilon(\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon)_{\partial\Omega}=(f,u_\varepsilon)_\Omega$$
car sur le bord
$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}=-\varepsilon\beta(u_\varepsilon)\,.$$

Mais
$$(\sum_i\sum_j a_{ij}u_{\varepsilon x_j}u_{\varepsilon x_i},1)_\Omega\ge\xlongequal{A\text{ elliptique}}\ge 0$$
$$(au_\varepsilon,u_\varepsilon)_\Omega\ge\xlongequal[\text{hypothèse}]{a\ge\lambda>0}\ge\lambda\left|u_\varepsilon\right|_2^2$$
$$(\beta(u_\varepsilon),u_\varepsilon)_{\partial\Omega}\ge\xlongequal[j\text{ convexe}]{\beta=\partial j}\ge(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}-(j(0),1)_{\partial\Omega}\xlongequal{j(0)=0}(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}$$
$$(f,u_\varepsilon)_\Omega\le\xlongequal{\text{Hölder}}\le\left|f\right|_2\left|u_\varepsilon\right|_2$$
et en combinant dans l'identité précédente on obtient
$$\left|u_\varepsilon\right|_2\le\lambda^{-1}\left|f\right|_2$$
$$(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}\le\varepsilon^{-1}\lambda^{-1}\left|f\right|_2^2$$
ce qui complète le résultat. △

3.2.4 Existence et régularité de la solution de $\mathbf{VI}_\alpha$

Théorème 3.2.4

Si $\mathbf{u}_\varepsilon$ dénote la solution du problème pénalisé $\mathbf{P}_\varepsilon$, alors il existe un $\varepsilon>0$ tel que
$$\begin{cases}\mathbf{Au}_\varepsilon=\mathbf{f}\in\mathbf{L}^{\mathbf{p}}(\Omega)(\mathbf{n}>\mathbf{p}>\frac{\mathbf{n}}{2})\\ \mathbf{u}_\varepsilon\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{W}^{1,\mathbf{p}^*}(\Omega)\\ -\frac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon}{\partial\mathbf{n}}\in\varepsilon\beta(\mathbf{u}_\varepsilon)\\ (\mathbf{j}(\mathbf{u}_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}=\alpha\,.\end{cases}$$
De plus, $\mathbf{u}_\varepsilon$ est la solution de $\mathbf{VI}_\alpha$. △

Preuve :

D'après les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3, l'application
$$[0,\infty)\ni\varepsilon\longmapsto(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}\in\mathbb{R}$$
est continue et décroissante et
$$(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}\underset{\varepsilon\to 0}{\longmapsto}(j(u_0),1)_{\partial\Omega}>\xlongequal[u_0\notin K_\alpha\text{ voir obs. 3.2}]{}>\alpha>0\underset{\infty\leftarrow\varepsilon}{\longleftarrow}(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}\,.$$
Par continuité on obtient un $\varepsilon>0$ dépendant de α tel que
$$(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega}=\alpha\,.$$

On note $u_\varepsilon=u\in K_\alpha$.

Alors $\forall\ v \in K_\alpha = \{v \in H^1(\Omega):\ (j(v),1)_{\partial\Omega} \le \alpha\}$ on a

$$(\sum_i \sum_j a_{ij}u_{x_j}(v-u)_{x_i},1)_\Omega + (au,v-u)_\Omega \xlongequal{\text{intégration par parties}}$$

$$= (Au-f,v-u)_\Omega - \varepsilon(-\frac{\partial u}{\partial n},v-u)_{\partial\Omega} \ge \xlongequal[Au=f]{-\frac{\partial u}{\partial n}\in\varepsilon\beta(u)=\varepsilon\partial j(u)} \ge$$

$$\ge \varepsilon\{(j(u),1)_{\partial\Omega} - (j(v),1)_{\partial\Omega}\} \xlongequal[v\in K_\alpha]{(j(u),1)_{\partial\Omega}=\alpha} \ge 0\ .$$

Comme VI_α admet une solution unique, on a le résultat. $\triangle$

3.2 Contrainte sur la solution sur le bord. Cas local $(\alpha = 0)$

3.2.5 Existence et régularité de la solution de VI_0 . Double obstacle sur le bord

Théorème 3.2.5

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε , alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{1,p^*}(\Omega)\ \text{faible}} u \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{H^2(\Omega)\ \text{faible}} u$$

où $u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est la solution du problème variationnel local

$$\begin{cases} (\sum_i \sum_j a_{ij}u_{x_j}(v-u)_{x_i},1)_\Omega + (au,v-u)_\Omega \ge (f,v-u)_\Omega\ \forall\, v \in K_0 \\ u \in K_0 = \{v \in H^1(\Omega) : j(v) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \end{cases}$$

satisfaisant aussi le problème

$$\begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ u\dfrac{\partial u}{\partial n} \le 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\ . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

D'après le théorème 3.2.1, $\forall\ \varepsilon \in [0,\infty)$ on a les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \le C \quad \text{et} \quad |u_\varepsilon|_{H^2(\Omega)} \le C$$

où C est indépendante de ε et avec le théorème 3.2.3

$$(j(u_\varepsilon),1)_{\partial\Omega} \le \frac{C}{\varepsilon}$$

où C est une autre constante indépendante de ε .

En faisant tendre ε vers ∞ on obtient via la réflexivité des espaces $W^{1,p^*}(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{1,p^*}(\Omega)\ \text{faible}} u_\infty \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{H^2(\Omega)\ \text{faible}} u_\infty$$

et à l'aide des injections de Sobolev $(n > p > \frac{n}{2})$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{C^0(\overline{\Omega})} u_\infty\ .$$

Comme j est continue, on aura

$$(j(u_\infty),1)_{\partial\Omega} = 0\ .$$

La condition sur le bord

$$-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in \varepsilon\beta(u_\varepsilon)$$

permet d'avoir

$$u_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \le 0$$

car β est croissante avec $\beta(0) \ni 0$.

Le passage à la limite comme dans la démonstration du théorème 3.2.2 assure

$$u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial n} \le 0\ .$$

On a aussi $\forall\ v \in K_0$

$$(\sum_i \sum_j a_{ij} u_{\varepsilon x_j} (v-u_\varepsilon)_{x_i}, 1)_\Omega + (au_\varepsilon, v-u_\varepsilon)_\Omega \xlongequal{\text{intégration par parties}}$$

$$= (Au - f, v - u_\varepsilon)_\Omega - \varepsilon(-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, v-u_\varepsilon)_{\partial\Omega} \xlongequal[Au_\varepsilon = f]{-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in \varepsilon\beta(u_\varepsilon) = \varepsilon\partial j(u)} \geq$$

$$\geq \varepsilon\{(j(u_\varepsilon), 1)_{\partial\Omega} - (j(v), 1)_{\partial\Omega}\} \xlongequal[v \in K_0]{j \geq 0} \geq 0\ .$$

En passant à la limite avec $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{} u_\infty$ respectivement dans $C^0(\overline{\Omega})$, $W^{1,p^*}(\Omega)$ faible et $H^2(\Omega)$ faible, on obtient $\forall\ v \in K_0$

$$\begin{cases} (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{\infty x_j} (v-u_\infty)_{x_i}, 1)_\Omega + (au_\infty, v-u_\infty)_\Omega \geq 0 & \\ (j(u_\infty), 1)_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u_\infty \in K_0 & \\ Au_\infty = f & \text{dans } \Omega \\ u_\infty \dfrac{\partial u_\infty}{\partial n} \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\infty \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega) & \end{cases}$$

le résultat. $\triangle$

Exemple. Double obstacle sur le bord

Soit $a_1 \geq 0 \geq a_2$ deux constantes et

$$j(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-a_1)^2 & t > a_1 \\ 0 \in & [a_2, a_1] \\ \frac{1}{2}(t-a_2)^2 & t < a_2\ . \end{cases}$$

Alors le problème du double obstacle

$$\begin{cases} (\sum_i \sum_j a_{ij} u_{x_j} (v-u)_{x_i}, 1)_\Omega + (au, v-u)_\Omega \geq 0\ \forall\, v \in K_0 \\ u \in K_0 = \{v \in H^1(\Omega) : j(u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} = \{v \in H^1(\Omega) : a_1 \leq u \leq a_2 \text{ sur } \partial\Omega\} \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ satisfaisant le problème

$$\begin{cases} Au = f \text{ dans} & \text{dans } \Omega \\ u\dfrac{\partial u}{\partial n} \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u \in W^{1,p^*}(\Omega) \cap H^2(\Omega)\ . & \end{cases}$$

$\triangle$

Remarque 3.2.5

Il serait intéressant de savoir si la régularité obtenue est optimale.

$\triangle$

Commentaires 3.2

En se basant sur des estimations concises et optimales obtenue dans [Brézis [5]] on peut appliquer la méthode de continuité pour les contraintes convexes sur le bord ayant un sous-différentiel multivoque.

Pour avoir des problèmes bien posés sur le bord on est obligés de travailler en parallèle dans $H^2(\Omega)$ et $W^{1,p^*}(\Omega)$.

Le cas local avec le problème du double obstacle sur le bord est résolu avec une régularité $W^{1,p^*}(\Omega)$. On pense que la régularité optimale pour ce problème est $W^{2,p}(\Omega)$ car le sous-différentiel de la fonction convexe j spécifique au double obstacle est univoque et lipschitzien et dans [Brézis[5]] pour ce type de fonction on obtient une régularité $W^{2,p}(\Omega)$ mais la constante de l'estimation dépend du sous-différentiel ce qui avec notre technique ne permet pas de passer à la limite lorsque le paramètre ε de la pénalisation tend vers l'infini.

Enfin on remarque que la fonction convexe j a été supposée partout indépendante du domaine. Il serait intéressant de développer une théorie analogue pour de telles fonctions dépendantes du domaine, en ce cas il faudrait refaire l'approche de [Brézis[5]] avec un bon contrôle des estimations. $\triangle$

3.3 Contrainte sur le gradient. Cas non local $(\alpha > 0)$

Préliminaires 3.3

Soit $j : \Omega \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que p.p. $x \in \Omega$ et $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$

$$j(x, \bar{t}) = \sum_{i,j}^{n} b_{ij} t_i t_j$$

avec $b_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

On voit que

$j(x, \circ)$ convexe et $j(x, \bar{0}) = 0$,

$\partial j(x, \circ)$ univoque et uniformément lipschitzienne :

$|\partial j(\circ, t_1) - \partial j(\circ, t_2)| \leq \alpha^j |t_1 - t_2| \quad \forall\ t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que l'opérateur A est de type elliptique.

Alors l'opérateur B défini par

$$Bu = -\mathrm{div}\partial j(\circ, \nabla u) = -\sum_{i}^{n} (\sum_{j}^{n} b_{ij} u_{x_j})_{x_i}$$

sera lipschitzien de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$:

$$|Bu|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha^B |u|_{W^{2,p}(\Omega)} \quad \forall\ u \in W^{2,p}(\Omega),\ \alpha^B > 0 \text{ constante}$$

avec $A + B$ de type elliptique. △

Problème 3.3

On étudie la régularité de la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au - f, v - u) \geq 0 \quad \forall\ v \in K_\alpha,\ f \in L^p(\Omega),\ p \geq 2 \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) :\ (j(\circ, \nabla v), 1) \leq \alpha\},\ \alpha > 0 \text{ constante} . \end{cases} \qquad VI_\alpha$$

Ce problème admet une unique solution grâce au théorème de Lions-Stampacchia.
△

Observation 3.3

Si la solution du problème

$$\begin{cases} Au_0 = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

vérifie $u_0 \in K_\alpha$, alors u_0 satisfait VI_α .

Dans toute la suite de cette section on supposera $u_0 \notin K_\alpha$, c'est-à-dire

$$(j(\circ, \nabla u_0), 1) > \alpha .$$

△

3.3.1 Pénalisation. Estimation a priori

Théorème 3.3.1

Le problème pénalisé

$$\begin{cases} \mathrm{Au}_\varepsilon - \varepsilon\, \mathrm{div}\, \partial \mathrm{j}(\circ, \nabla \mathrm{u}_\varepsilon) = \mathrm{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega) \\ \mathrm{u}_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\Omega),\ \mathrm{p} \geq 2,\ \varepsilon > 0 \end{cases} \qquad \mathrm{P}_\varepsilon$$

admet une solution unique et il existe un $\sigma \in]0, \infty[$ tel que $\forall\ \varepsilon \in [0, \sigma]$ on a l'estimation

$$|\mathrm{u}_\varepsilon|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)} \leq \mathrm{C}$$

où C est une constante indépendante de ε . △

Preuve :

Soit l'opérateur B défini par

$$Bu = -\mathrm{div}\partial j(\circ, \nabla u) \;.$$

Comme $A+B$ et A sont de type elliptique alors $A+\varepsilon B$ le sera aussi en notant que $j(x,\circ)$ est convexe p.p. $x \in \Omega$, d'où l'existence et l'unicité de la solution (voir théorème 1.3.1).

On a

$$C_A^{-1} |u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \underset{\text{théorème 1.3.1}}{\leq} \leq |Au_\varepsilon|_p = |f - \varepsilon B u_\varepsilon|_p \leq$$

$$\leq |f|_p + \varepsilon |Bu_\varepsilon|_p \underset{\text{de } W^{2,p}(\Omega) \text{ dans} L^p(\Omega)}{\overset{B \text{ lipschitzien}}{\leq}} \leq |f|_p + \varepsilon\alpha^B |u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)}$$

et pour $\varepsilon < (C_A\alpha^B)^{-1}$

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq \frac{|f|_p}{C_A^{-1} - \varepsilon\alpha^B}$$

donc un choix de σ sera $\sigma \in]0, (C_A\alpha^B)^{-1}[$ et $C = \frac{|f|_p}{C_A^{-1} - \sigma\alpha^B}$. △

3.3.2 Stabilité de la solution pénalisée

Théorème 3.3.2

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application

$$[0,\sigma] \ni \varepsilon \longmapsto \mathrm{u}_\varepsilon \in \mathrm{W}^{2,p}(\Omega) \text{ faible}$$

est continue avec

$$\begin{cases} \mathrm{Au}_0 = \mathrm{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega), \; p \geq 2 \\ \mathrm{u}_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,p}(\Omega) \;. \end{cases}$$

△

Preuve :

D'après le théorème 3.3.1, $\forall\ \varepsilon \in [0,\sigma]$ on a l'estimation a priori

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

où C est indépendante de ε et la réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$ permet d'avoir, à une sous-suite près, respectivement

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0 \in [0,\sigma]]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} v$$

et

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \varepsilon_0 \in [0,\sigma]]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} v$$

en utilisant les injections de Sobolev $(p \geq 2)$.

En passant à la limite au sens des distributions $(\varepsilon \to \varepsilon_0)$ dans le problème pénalisé écrit sous la forme

$$\begin{cases} Au_\varepsilon - \varepsilon\{\mathrm{div}\partial j(\circ, \nabla u_\varepsilon) - \mathrm{div}\,\partial j(\circ, \nabla v)\} = f + \varepsilon\,\mathrm{div}\,\partial j(\circ, \nabla v) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} Av - \varepsilon_0\mathrm{div}\partial j(\circ, \nabla v) = f \in L^p(\Omega), \; p \geq 2 \\ v \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

car $\forall\ w \in C_0^\infty(\Omega)$

$$|(\mathrm{div}\partial j(\circ, \nabla u_\varepsilon) - \mathrm{div}\,\partial j(\circ, \nabla v), w)| =$$

[linéarité de l'opérateur divergence]

$$= |(\mathrm{div}\{\partial j(\circ, \nabla u_\varepsilon - \partial j(\circ, \nabla u_{\varepsilon_0})\}, w)| =$$

[intégration par parties]

$$= |(\{\partial j(\circ, \nabla u_\varepsilon) - \partial j(\circ, \nabla v)\}.\nabla w, 1)| \leq$$

[l'inégalité de Hölder]

$$\leq |\partial j(\circ, \nabla u_\varepsilon) - \partial j(\circ, \nabla v)|_2 \, |w|_{H_0^1(\Omega)} \leq$$

[∂j est uniformément lipschitzienne de constante α^j]
$$\leq \alpha^j \, |u_\varepsilon - v|_{H_0^1(\Omega)} \, |w|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} 0$$
en notant que la suite u_ε converge vers u_{ε_0} dans $W^{1,p}(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers ε_0.

Du fait de l'unicité de la solution du problème
$$\begin{cases} Au_{\varepsilon_0} - \varepsilon_0 \mathrm{div}\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0}) = f \in L^p(\Omega), \ p \geq 2, \ \varepsilon > 0 \\ u_{\varepsilon_0} \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \ . \end{cases}$$
on obtient $v = u_{\varepsilon_0}$. △

3.3.3 Continuité de la contrainte

Théorème 3.3.3

Si $\mathbf{u}_\varepsilon$ est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application
$$[0,\sigma] \ni \varepsilon \longmapsto (\mathbf{j}(\mathrm{o}, \nabla \mathbf{u}_\varepsilon), 1)$$
est continue et décroissante. De plus on a l'estimation
$$(\mathbf{j}(\mathrm{o}, \nabla \mathbf{u}_\varepsilon), 1) \leq \mathrm{C}\varepsilon^{-1}$$
où C est une constante indépendante de $\varepsilon \in [0,\sigma]$. △

Preuve :

On a
$$|(j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon), 1) - (j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0}), 1)| \leq$$
[conversion en norme $L^1(\Omega)$]
$$\leq |j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon) - j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0})|_{L^1(\Omega)} \leq$$
[j est convexe]
$$\leq ||\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0}).\nabla(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})| \vee |\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon).\nabla(u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0})||_1 \leq$$
[on a $|u \vee v|_1 \leq 2|u|_1 \vee |v|_1$ pour $u, \ v \in L^1(\Omega)$]
$$\leq 2(|\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0}|_2 \, |u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{H_0^1(\Omega)}) \vee (|\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon)|_2 \, |u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{H_0^1(\Omega)}) \leq$$
[$\max\{\lambda a, \lambda b\} = \lambda \max\{a, b\}$ lorsque $a, \ b, \ \lambda > 0$]
$$\leq 2(|\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0}|_2 \vee |\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon)|_2) \, |u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{H_0^1(\Omega)} \leq$$
[∂j uniformément lipschitzienne de constante α^j]
$$\leq \alpha^j (|u_{\varepsilon_0}|_{H_0^1(\Omega)} \vee |u_\varepsilon|_{H_0^1(\Omega)}) \, |u_\varepsilon - u_{\varepsilon_0}|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$
car le théorème précédent assure via les injections de Sobolev ($p \geq 2$)
$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0 \in [0,\sigma]]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} u_{\varepsilon_0} \ ,$$
donc l'application en question est continue.

Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Une soustraction des problèmes
$$Au_{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 \operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_1}) = f, \ u_{\varepsilon_1} \in H_0^1(\Omega)$$
$$Au_{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 \operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_2}) = f, \ u_{\varepsilon_2} \in H_0^1(\Omega)$$
conduit à
$$A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) - \varepsilon_1 \operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_2}) = 0$$
ou sous une autre forme
$$A(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) - \varepsilon_2 \operatorname{div}(\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_2})) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_1}) = 0 \ .$$
Une multiplication par $u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}$ permet d'avoir
$$(Au_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) + \varepsilon_2(-\operatorname{div}(\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_1}) - \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_2})), u_{\varepsilon_1}) u_{\varepsilon_2}) =$$
$$=(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\operatorname{div} \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_1}), u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})$$
où
$$(Au_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}) \geq$$
[A elliptique]
$$\geq \alpha_A \, |u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2}|^2_{H_0^1(\Omega)} \ ;$$

$$(-\operatorname{div}(\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1})-\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_2}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})\geq$$

[intégration par parties]

$$\geq(\{\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1})-\partial(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_2})\}.(\nabla u_{\varepsilon_1}-\nabla u_{\varepsilon_2}),1)\geq$$

[j convexe et ∂j monotone]

$$\geq 0\ ;$$

$$(\operatorname{div}\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})=$$

[intégration par parties]

$$=(\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_2}-u_{\varepsilon_1})\geq$$

[j convexe]

$$\geq(j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_2})-j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1}),1)\ .$$

Dans ces conditions l'égalité

$$(Au_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2},u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})+\varepsilon_2(-\operatorname{div}(\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1})-\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_2})),u_{\varepsilon_1})u_{\varepsilon_2})$$
$$=$$
$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\operatorname{div}\partial j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1}),u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2})$$

devient avec $\varepsilon_1>\varepsilon_2$

$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_2}),1)-(j(\mathrm{o},\nabla u_{\varepsilon_1}),1)\geq\alpha_A\left|u_{\varepsilon_1}-u_{\varepsilon_2}\right|^2_{H_0^1(\Omega)}\geq 0$$

donc on a obtenu aussi la décroissance.

En multipliant l'équation $Au_\varepsilon+\partial j(\mathrm{o},u_\varepsilon)=f$ par u_ε on obtient

$$(Au_\varepsilon,u_\varepsilon)+\varepsilon(-\operatorname{div}\partial j(\mathrm{o},\nabla u_\varepsilon),u_\varepsilon)=(f,u_\varepsilon)\ .$$

Mais

$$(Au_\varepsilon,u_\varepsilon)=(\textstyle\sum_{i,j}a_{ij}u_{\varepsilon x_i}u_{\varepsilon x_j},1)\geq\underset{A\text{ elliptique}}{=\!=\!=\!=}\geq\alpha_A\mid u_\varepsilon\mid^2_{H_0^1(\Omega)}$$

$$(-\operatorname{div}\partial j(\mathrm{o},\nabla u_\varepsilon),u_\varepsilon)\underset{\text{intégration par parties}}{=\!=\!=\!=}(\partial j(\mathrm{o},\nabla u_\varepsilon).\nabla u_\varepsilon,1)\geq$$

$$\geq\underset{j(x,\mathrm{o})\text{ convexe p.p. }\Omega}{=\!=\!=\!=}\geq(j(\mathrm{o},\nabla u_\varepsilon),1)\geq\underset{j\geq 0}{=\!=}0$$

$$(f,u_\varepsilon)\leq\underset{\text{Hölder}}{=\!=}\leq\mid f\mid_2\left|u_\varepsilon\right|_2\leq\underset{\text{Poincaré}}{=\!=}\leq C_P\left|f\right|_2\left|u_\varepsilon\right|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où en combinant

$$\left|u_\varepsilon\right|_2\leq C_P\left|u_\varepsilon\right|_{H_0^1(\Omega)}\leq C_P\alpha_A^{-1}\left|f\right|_2$$

et $\forall\ \varepsilon>0$

$$(j(\mathrm{o},\nabla u_\varepsilon),1)\leq\frac{1}{\varepsilon}(f,u_\varepsilon)\leq\frac{1}{\varepsilon}C_P\alpha_A^{-1}\left|f\right|_2^2$$

ce qu'on voulait montrer si on pose $C=C_P\alpha_A^{-1}\left|f\right|_2^2$. △

3.3.4 Existence, unicité et régularité de la solution du problème pénalisé

Théorème 3.3.4

Si $\alpha\in[(\mathrm{j}(\mathrm{o},\nabla\mathrm{u}_\sigma),1),(\mathrm{j}(\mathrm{o},\nabla\mathrm{u}_0),1)[$, il existe un $\varepsilon\in]0,\sigma]$ tel que

$$\begin{cases}\mathrm{Au}_\varepsilon-\varepsilon\operatorname{div}\partial\mathrm{j}(\mathrm{o},\nabla\mathrm{u}_\varepsilon)=\mathrm{f}\in\mathrm{L^p}(\Omega)\\ \mathrm{u}_\varepsilon\in\mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega)\cap\mathrm{K}_\alpha\ .\end{cases}$$

De plus u_ε vérifie VI_α . △

Preuve :

D'après les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3, l'application

$$[0,\sigma] \ni \varepsilon \longmapsto (j(\circ,\nabla u_\varepsilon),1)$$

est continue et décroissante avec

$$(j(\circ,\nabla u_\varepsilon),1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (j(\circ,\nabla u_0),1) > \underset{u_0\notin K_\alpha}{\overset{\text{voir observation 3.3}}{=\!=\!=}} > (j(\circ,\nabla u_\sigma),1) \xleftarrow[\sigma\leftarrow\varepsilon]{} (j(\circ,\nabla u_\varepsilon),1)\ .$$

Par continuité on trouve un $\varepsilon \in]0,\sigma]$ dépendant de α tel que

$$(j(\circ,\nabla u_\varepsilon),1) = \alpha\ .$$

Posons $u = u_\varepsilon$.

Alors $\forall\ \varepsilon \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) :\ (j(\circ,\nabla v),1) \le \alpha\}$ on a

$$(Au - f, v - u) = \varepsilon(\mathrm{div}\partial j(\circ,\nabla u), v - u) = (\partial j(\circ,\nabla u).(\nabla u - \nabla v),1) \ge$$
$$\ge \underset{j(x,\circ)\ \text{convexe p.p.}\ x\in\Omega}{=\!=\!=\!=\!=} \ge \varepsilon\{(j(\circ,\nabla u),1) - (j(\circ,\nabla v),1)\} =$$
$$= \varepsilon\{\alpha - (j(\circ,\nabla v),1)\} \ge 0$$

donc u vérifie VI_α .

De plus, u sera l'unique solution de ce problème d'après le théorème de Lions-Stampacchia (voir lemme 2.1.2). $\triangle$

Optimalité

Le théorème 3.3.4 montre que VI_α admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$$\forall\, \alpha \in [(j(\circ,\nabla u_\sigma),1),(j(\circ,\nabla u_0),1)[\ .$$

On conclut via l'observation 3.3 que VI_α admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$

$$\forall\ \alpha \in [(j(\circ,\nabla u_\sigma),1),+\infty[\ .$$

$\triangle$

3.3 Contrainte sur le gradient. Cas local $(\alpha = 0)$

3.3.5 Existence, unicité et régularité de la solution du VI_α

Double obstacle et capacité

Théorème 3.3.5

Soit $\mathrm{B}u = -\,\mathrm{div}\,\partial \mathrm{j}(\circ,\nabla \mathrm{u})$ avec $\mathrm{j}(\mathrm{x},\circ)$ une forme quadratique dégénérée p.p. $\mathrm{x} \in \Omega$.

On suppose que le problème pénalisé

$$\begin{cases} \mathrm{Au}_\varepsilon - \varepsilon\,\mathrm{div}\,\partial \mathrm{j}(\circ,\nabla \mathrm{u}_\varepsilon) = \mathrm{f} \in \mathrm{L^p}(\Omega)(\mathrm{p} \ge 2) \\ \mathrm{u}_\varepsilon \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega) \end{cases}$$

admet une solution.

Si il existe une constante C indépendante de ε telle que

$$|\mathrm{u}_\varepsilon|_{\mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega)} \le \mathrm{C}$$

alors

$$\mathrm{u}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{\mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega)\ \text{faible}} \mathrm{u}_\infty$$

où u_∞ vérifie le problème variationnel

$$\begin{cases} (\mathrm{Au} - \mathrm{f}, \mathrm{v} - \mathrm{u}) \ge 0 \qquad \forall\ \mathrm{v} \in \mathrm{K}_0,\ \mathrm{f} \in \mathrm{L^p}(\Omega),\ \mathrm{p} \ge 2 \\ \mathrm{u} \in \mathrm{K}_0 = \{\mathrm{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) :\ \mathrm{j}(\circ,\nabla \mathrm{v}) = 0 \quad \text{p.p. } \Omega\}\ . \end{cases}$$

$\triangle$

Preuve :

L'estimation

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

permet d'avoir via la réflexivité de l'espace $W^{2,p}(\Omega)$

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} w$$

et encore

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} w$$

grâce aux injections de Sobolev.

L'équation pénalisée

$$Au_\varepsilon - \varepsilon \mathrm{div}\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon) = f$$

devient l'inégalité $\forall\ v \in K_0,\ \forall\ \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) = \varepsilon(\mathrm{div}\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) = \\
&= \varepsilon(\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon).\nabla(u_\varepsilon - v), 1) \geq \overline{\overline{}}_{j(x,\mathrm{o}) \text{ convexe}} \geq \\
&\geq \varepsilon\{(j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon), 1) - (j(\mathrm{o}, \nabla v), 1)\} \overset{v\in K_0}{\underset{(j(\mathrm{o},\nabla v),1)=0}{=\!=\!=}} \\
&= \varepsilon(j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon), 1) \geq \overline{\overline{}}_{j(x,\mathrm{o})\geq 0 \text{ p.p. } x\in\Omega} \geq 0.
\end{aligned}$$

En passant à la limite $(u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} w)$ respectivement dans

$$\begin{cases} (Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq 0 \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\ \ \forall\ v \in K_0,\ \ \forall\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \geq (j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon), 1) - (j(\mathrm{o}, \nabla w), 1) + (j(\mathrm{o}, \nabla w), 1) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)\ \ \forall\ v \in K_0,\ \ \forall\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

on obtient $\forall\ v \in K_0$

$$\begin{cases} (Aw - f, v - w) \geq 0 \\ w \in W^{2,p}(\Omega) \cap K_0 \end{cases}$$

puisque

$$\begin{aligned}
&|(\mathrm{div}\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon) - \mathrm{div}\,\partial j(\mathrm{o}, \nabla v), w)| \\
&= \\
&|(\mathrm{div}\{\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon - \partial j(\mathrm{o}, \nabla u_{\varepsilon_0})\}, w)| \\
&\boxed{\text{intégration par parties}} \longrightarrow = \\
&|(\{\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon) - \partial j(\mathrm{o}, \nabla v)\}.\nabla w, 1)| \\
&\leq \longleftarrow \boxed{\text{Hölder}} \\
&|\partial j(\mathrm{o}, \nabla u_\varepsilon) - \partial j(\mathrm{o}, \nabla v)|_2\, |w|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\boxed{\partial j \text{ est unif. lipschitz. de cte } \alpha^j} \longrightarrow \leq \\
&\alpha^j\, |u_\varepsilon - v|_{H_0^1(\Omega)}\, |w|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} 0
\end{aligned}$$

car on a vu que u_ε converge vers u_{ε_0} dans $W^{1,p}(\Omega)$ fort lorsque ε tend vers ε_0 . $\triangle$

Du fait de l'unicité de la solution de ce problème $w = u_\infty$.

Exemple. Double obstacle

Sous réserve des estimations exigées par le théorème précédent on pose les problèmes suivants :

Double obstacle

Soit

$$j(x,t) = \sum_{i=1}^{n} j_i(x,t), \quad x \in \Omega,\ t = (t_1,\dots,t_n)$$

$$j_i(x,t) = \begin{cases} (t_i - \psi_i(x))^2 & t_i > \psi_i(x) \\ 0 & t_i \in [\varphi_i(x), \psi_i(x)] \\ (t_i - \varphi_i(x))^2 & t_i < \varphi_i(x) \end{cases}$$

$\varphi,\ \psi \in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^n),\ \varphi = (\varphi_i)_{1\le i\le n},\ \psi = (\psi_i)_{1\le i\le n},\ \varphi_i \le 0 \le \psi_i$ p.p. dans Ω .

On aura

$$K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) :\ j(\circ,\nabla v) = 0\} =$$
$$= \{v \in H_0^1(\Omega) :\ \varphi_i \le v_{x_i} \le \psi_i \text{ p.p. dans } \Omega,\ i \in \{1,n\}\}$$

c'est-à-dire un problème d'obstacle bilatéral pour le gradient. $\triangle$

3.3 Contrainte sur le gradient. Cas non local $(\alpha > 0)$

"Short way". Multiplicateurs de Lagrange

3.3.6 Le problème variationnel $\mathbf{VI}_\alpha$ équivaut à une équation fonctionnelle

Théorème 3.3.6

On suppose que l'opérateur de type elliptique A est symétrique et l'opérateur B de la forme $Bu = -\operatorname{div}\partial j(\circ,\nabla u)$ est lipschitzien où p.p. $x \in \Omega$, $j(x,\circ) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convexe et $j(x,0) = 0$ comme aux préliminaires 3.3 .

Le problème variationnel VI_α avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ admet une solution unique $u^\alpha \in H_0^1(\Omega)$ et il existe une constante $\varepsilon_\alpha \ge 0$ telle que

$$\begin{cases} Au^\alpha + \varepsilon_\alpha \partial j(\circ,u^\alpha) = f \in H^{-1}(\Omega) \\ u^\alpha \in K_\alpha \ . \end{cases}$$

$\triangle$

Si $(j(\circ,u^\alpha),1) < \alpha$, alors $\varepsilon_\alpha = 0$.

Preuve :

Comme l'opérateur A est lipschitzien et elliptique , B lipschitzien, K_α non-vide et convexe, d'après le théorème de Lions-Stampacchia le problème variationnel VI_α avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ admet une solution unique $u^\alpha \in H_0^1(\Omega)$.

Dans ces conditions le problème de minimisation

$$J(u^\alpha) = \inf_{v\in K_\alpha} J(v)$$

admet une solution unique où J est la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av,v) - (f,v) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

agissant sur l'ensemble convexe et non-vide des contraintes

$$K_\alpha = \{v \in X :\ F(v) \ge 0\}$$

avec $F(v) = \alpha - (j(\circ,\nabla v),1),\ X = H_0^1(\Omega)$.

Les dérivées au sens Gateaux des fonctionnelles J et F seront données respectivement par

$$(J'(w),v) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{J(w+\varepsilon v) - J(w)}{\varepsilon} \xlongequal[A \text{ symétrique}]{} (Aw - f, v) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

et

$$(F'(w),v) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{F(w+\varepsilon v) - F(w)}{\varepsilon} \xlongequal[j \text{ unif. convexe}]{j(x,\circ)\in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ p.p. } x\in\Omega} (+\operatorname{div}\partial j(\circ,\nabla w),v) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

On voit que si $w \in \partial K_\alpha$ alors

$$(F'(w),w) = -(\partial j(\circ,\nabla w).\nabla w,1) \underset{j \text{ unif. convexe}}{\overset{j(\circ,\bar{0})=0}{\le}} -(j(\circ,\nabla w),1) \xlongequal[w\in\partial K_\alpha]{\text{élément saturé de } K_\alpha} -\alpha < 0$$

donc $F' \neq 0$ sur ∂K_α .

Le théorème de Lagrange (voir lemme 3.1.1) avec

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v), \quad F(v) = \alpha - (j(\circ, \nabla v), 1)$$
$$X = H_0^1(\Omega), \quad S = K_\alpha$$

assure l'existence d'un $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$J'(u^\alpha) = \varepsilon_\alpha F'(u^\alpha)$$

c'est-à-dire

$$Au^\alpha - \varepsilon_\alpha \operatorname{div} \partial j(\circ, \nabla u^\alpha) = f \quad .$$

Vérifions que $\varepsilon_\alpha \geq 0$ si $u^\alpha \in \partial K_\alpha$.

En multipliant l'équation

$$Au^\alpha - f = \varepsilon_\alpha \operatorname{div} \partial j(\circ, \nabla u^\alpha)$$

par $\varepsilon_\alpha(v - u^\alpha)$, $v \in K_\alpha$, on obtient

$$\varepsilon_\alpha(Au^\alpha - f, v - u^\alpha) = \varepsilon_\alpha^2(-\operatorname{div} \partial j(\circ, \nabla u^\alpha), u^\alpha - v) \underset{\text{intégration par parties}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\varepsilon_\alpha^2(\partial j(\circ, \nabla u^\alpha).\nabla(u^\alpha - v), 1) \geq \underset{j \text{ convexe}}{=\!=\!=} \geq \varepsilon_\alpha^2\{(j(\circ, \nabla u^\alpha), 1) - (j(\circ, \nabla v), 1)\} \underset{u^\alpha \in K_\alpha}{=\!=\!=}$$

$$\varepsilon_\alpha^2\{\alpha - (j(\circ, \nabla v), 1)\} \geq \underset{v \in K_\alpha}{=\!=\!=} \geq 0$$

d'où l'on tire $\varepsilon_\alpha \geq 0$ puisque $(Au^\alpha - f, v - u^\alpha) \geq 0 \ \forall \ v \in K_\alpha$.

Si u^α est un élément non-saturé de K_α , alors $\varepsilon_\alpha = 0$ et u^α coïncide avec la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

$\triangle$

3.3.7 Régularité de la solution de l'équation fonctionnelle et de VI_α

Théorème 3.3.7

Si l'opérateur $A + B$ est de type elliptique et A symétrique, alors le problème variationnel VI_α admet une solution unique $u^\alpha \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$. $\triangle$

Preuve :

D'après le théorème précédent, u^α est solution du problème

$$\begin{cases} Au^\alpha - \varepsilon_\alpha \operatorname{div} \partial j(\circ, \nabla u^\alpha) = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u^\alpha \in H_0^1(\Omega), \ \varepsilon_\alpha \geq 0 \ . \end{cases}$$

On observe que si $A + B$ est de type elliptique, alors $A + \varepsilon_\alpha B$ le sera aussi donc le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Au^\alpha + \varepsilon_\alpha Bu^\alpha = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) \\ u^\alpha \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

aura une solution unique $u^\alpha \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ (voir théorème 1.3.1). $\triangle$

Commentaires 3.3

Cette section traite les perturbations variationnelles avec une contrainte convexe sur le gradient.

Les estimations nécessaires à la méthode de continuité sont restreintes dans un intervalle borné pour le paramètre α à cause de la difficulté de contrôler la constante du théorème 1.3.1 et on obtient l'existence d'une solution unique dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Un argument basé sur les multiplicateurs de Lagrange permet d'obtenir la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout $\alpha > 0$ mais avec j plus régulière.

Le cas du double obstacle pour le gradient est seulement posé sans traitement car on ne dispose pas d'une estimation uniforme avec le paramètre ε de la pénalisation allant jusqu'à l'infini et les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas appliquables en ce cas.

Des résultats d'existence et de régularité pour le problème de l'obstacle sur le module du gradient, en particulier le problème de la torsion elasto-plastique, sont obtenus dans [Brézis[3]] et [Williams, G. H.]. La régularité naturelle de la solution de ces problèmes (avec la donnée $f \in L^p(\Omega)$) est $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

On peut poser le problème non local pour le gradient avec une fonction convexe plus générale mais un ce cas le problème pénalisé sera quasilinéaire et il faudrait déjà assurer une régularité $W^{2,p}(\Omega)$ de la solution pénalisée avec un bon contrôle de l'estimation, ce qui promet d'être difficile. $\triangle$

Quatrième ordre

3.4 Contrainte sur l'opérateur. Cas non local $(\alpha > 0)$

Préliminaires 3.4

L'opérateur A et le domaine Ω seront tels que le théorème 1.3.1 s'applique :

$$|u|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C_A^{kp} \, |Au|_{W^{k,p}(\Omega)} \qquad \forall \;\; u \in W^{k,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

avec C_A^{kp} une constante indépendante de u où l'on exigera selon les situations $k = 1$ ou $k = 2$.

Soit $j : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ une fonction positive telle que p.p. $x \in \Omega$

$$j(0) = 0$$

j convexe et propre

∂j est univoque et lipschitzienne.

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.1

Soit $1_{\mathbb{R}}$ *la fonction identique sur* $\mathbb{R}$.

L'application $1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j$ *est inversible et* $\forall \, u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on a*

$$\{1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j\}^{-1}(u) \in W^{1,p}(\Omega)$$

avec l'estimation

$$\left|\{1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j\}^{-1}(u)\right|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq |u|_{W^{1,p}(\Omega)} \;\; .$$

$\triangle$

Preuve :

Selon le lemme 1.4.2 $(1_{\mathbb{R}} + \partial j)^{-1}$ est une contraction ayant la dérivée comprise dans l'intervalle $[0, 1]$ d'où le résultat. $\triangle$

Problème 3.4

On s'intéresse à l'existence, à l'unicité et à la régularité de la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \;\; v \in K_\alpha, \;\; f \in L^p(\Omega), \;\; p > n \\ u \in K_\alpha = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \;\; (j(Av), 1) \leq \alpha\} \;\; \alpha > 0 \text{ constante} \; . \end{cases} \qquad VI_\alpha$$

$\triangle$

Observation 3.4

Soit $u_0 \in W^{4,p}(\Omega)$ la solution du problème

$$\begin{cases} A^* A u_0 = f \in L^p(\Omega) \\ u_0 \in H_0^1(\Omega) \ni Au_0 \; . \end{cases}$$

Si $u_0 \in K_\alpha$, il est facile de voir que u_0 vérifie VI_α .

Dans toute la suite de cette section on suppose $u_0 \notin K_\alpha$, c'est-à-dire

$$(j(Au_0), 1) > \alpha \; .$$

On note avec u_* la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} A^* u_* = f \in L^p(\Omega)(p > n) \\ u_* \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega) \end{cases}$$

où A^* est l'adjoint de A . $\triangle$

3.4.1 Pénalisation. Estimation a priori

Théorème 3.4.1

Le problème pénalisé

$$\begin{cases} A^* Au_\varepsilon + \varepsilon A^* \partial j(Au_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega), \;\; p > n, \;\; \varepsilon > 0 \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\varepsilon \end{cases} \qquad P_\varepsilon$$

admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{3,p}(\Omega)$ avec l'estimation

$$|u_\varepsilon|_{W^{3,p}(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de ε . $\triangle$

Preuve :

Comme

$$\begin{cases} A^*(Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(Au_\varepsilon)) = f = A^*u_* \\ Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(Au_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \ni u_* \end{cases}$$

on aura par unicité

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(Au_\varepsilon) = u_* \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\varepsilon \end{cases}$$

donc il suffit de résoudre ce problème.

D'après le lemme 3.4.1 on peut extraire Au_ε :

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = (1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j)^{-1}(u_*) \in W^{1,p}(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

et selon le théorème 1.3.1 $u_\varepsilon \in W^{3,p}(\Omega)$ sera l'unique solution de ce problème de Dirichlet.

On a aussi l'estimation (via le théorème 1.3.1 et le lemme 3.4.1)

$$|u_\varepsilon|_{W^{3,p}(\Omega)} \leq C\,|Au_\varepsilon|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\left|(1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j)^{-1}(u_*)\right|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\,|u_*|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

avec C une constante indépendante de ε . △

3.4.2 Stabilité de la solution pénalisée

Théorème 3.4.2

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors l'application

$$[0,\infty] \ni \varepsilon \longmapsto u_\varepsilon \in W^{3,p}(\Omega) \text{ faible}$$

est continue avec u_0, u_∞ solutions des problèmes

$$\begin{cases} A^*Au_0 = f \\ Au_0 \in H_0^1(\Omega) \ni u_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (Au_\infty, Av - Au_\infty) \geq (f, v - u_\infty) \quad \forall\, v \in K_0 \\ u_\infty \in K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) :\ j(\circ, Av) = 0\} \\ u_\infty \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\infty\,. \end{cases}$$

△

Preuve :

Soit $\varepsilon_0 \in [0,\infty]$.

L'estimation a priori du théorème précédent

$$|u_\varepsilon|_{W^{3,p}(\Omega)} \leq C$$

permet d'avoir via la réflexivité de $W^{3,p}(\Omega)$, à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0\in[0,\infty]]{W^{3,p}(\Omega)\text{ faible}} w$$

et encore

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^2(\overline{\Omega})} w$$

en utilisant les injections de Sobolev $(p > n)$. Il reste à trouver w .

On distingue les situations suivantes :

1. $\varepsilon_0 \in [0,\infty)$.

En passant à la limite au sens des distributions dans le problème pénalisé avec $\partial j(x,\circ)$ continue p.p. $x \in \Omega$, on obtient

$$\begin{cases} A^*Aw + \varepsilon_0 A^*\partial j(Aw) = f \\ Aw \in H_0^1(\Omega) \ni w \end{cases}$$

d'où $w = u_{\varepsilon_0}$ du fait de l'unicité de la solution du problème pénalisé .

2. $\varepsilon_0 = \infty$.

Si $v \in K_0$, on a

$$(Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \underset{Au_\varepsilon,\ v-u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=\!=}$$

$$= (A^* Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) \underset{\text{voir le problème pénalisé}}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \varepsilon(A^* \partial j(Au_\varepsilon), u_\varepsilon - v) \overset{\partial j(Au_\varepsilon)\in H_0^1(\Omega)}{\underset{u_\varepsilon - v\in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= \varepsilon(\partial j(Au_\varepsilon), Au_\varepsilon - Av) \geq \underset{j(x,o)\text{ convexe p.p. } x\in\Omega}{=\!=\!=\!=} \geq$$

$$\geq \varepsilon(j(Au_\varepsilon) - j(Av), 1) \overset{(j(Av),1)=0}{\underset{v\in K_0}{=\!=\!=\!=}} \varepsilon(j(Au_\varepsilon), 1) \geq \overset{j\geq 0}{=\!=\!=} \geq 0 \, .$$

En passant à la limite $(u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{C^2(\overline{\Omega})} w)$ avec $j(x,o)$ continue p.p. $x \in \Omega$ dans

$$\begin{cases} (Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \geq \varepsilon(j(Au_\varepsilon), 1) \geq 0 \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\varepsilon, \quad \forall \ v \in K_0 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} (Aw, Av - Aw) - (f, v - w) \geq 0 \qquad \forall \ v \in K_0 \\ (j(Aw), 1) = 0 \Longrightarrow j(Aw) = 0 \Longrightarrow w \in K_0 \\ w \in H_0^1(\Omega) \ni Aw \end{cases}$$

et il suffit de poser $w = u_\infty$.

L'unicité de la solution de ce problème résulte de la théorie des inéquations variationnelles. $\triangle$

3.4.3 Continuité de la contrainte

Théorème 3.4.3

Soit u_ε la solution du problème pénalisé P_ε .

Alors l'application

$$[0, \infty] \ni \varepsilon \longmapsto (j(Au_\varepsilon), 1)$$

est continue. $\triangle$

Preuve :

D'après le théorème 3.4.2 et les injections de Sobolev

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^2(\overline{\Omega})} u_{\varepsilon_0}$$

d'où successivement (j continue)

$$j(Au_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{C^0(\overline{\Omega})} j(Au_{\varepsilon_0})$$

$$(j(Au_\varepsilon), 1) \xrightarrow[\varepsilon\to\varepsilon_0]{} (j(Au_{\varepsilon_0}), 1)$$

puisque l'intégrale transforme la convergence uniforme en convergence. $\triangle$

3.4.4 Existence, unicité et régularité de la solution de VI_α

Théorème 3.4.4

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\begin{cases} A^* Au_\varepsilon + \varepsilon A^* \partial j(Au_\varepsilon) = f \in L^p(\Omega) (p > n) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\varepsilon, \ u_\varepsilon \in K_\alpha \cap W^{3,p}(\Omega) \, . \end{cases}$$

De plus u_ε est l'unique solution de VI_α . . $\triangle$

Preuve :
Les théorèmes 3.4.2 et 3.4.3 montrent que l'application

$$[0,\infty] \ni \varepsilon \longmapsto (j(Au_\varepsilon),1) \in \mathbb{R}$$

est continue et l'on a

$$(j(Au_\varepsilon),1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} (j(Au_0),1) > \alpha \ (u_0 \notin K_\alpha \text{ voir obs. } 3.4)$$

$$(j(Au_\varepsilon),1) \xrightarrow[\varepsilon\to \infty]{} (j(Au_\infty),1) = 0 \ (u_\infty \in K_0)$$

et par continuité on trouve un $\varepsilon > 0$ tel que

$$(j(Au_\varepsilon),1) = \alpha$$

c'est-à-dire $u_\varepsilon \in K_\alpha \cap W^{3,p}(\Omega)$.

Posons $u_\varepsilon = u \in K_\alpha$. Pour $v \in K_\alpha$ on a

$$(Au, Av - Au) - (f, v-u) \underset{Au,\ v-u\in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=\!=} (A^*Au - f, v-u) \underset{\text{voir pb. pénalisé}}{=\!=\!=\!=}$$

$$\varepsilon(A^*\partial j(Au), u-v) \underset{\partial j(Au)\in H_0^1(\Omega)}{=\!=\!=\!=} \varepsilon(\partial j(Au), Au - Av) \geq \underset{j(x,o)\text{ convexe p.p.}x\in\Omega}{=\!=\!=\!=} \geq$$

$$\varepsilon(j(Au) - j(Av),1) \geq \overset{v\in K_\alpha,\ u \text{ élément saturé de } K_\alpha}{\underset{(j(Av),1)\leq\alpha=(j(Au),1)}{=\!=\!=\!=}} \geq 0$$

donc u est une solution de VI_α vérifiant aussi le problème explicite :

$$\begin{cases} A^*Au + \varepsilon A^*\partial j(Au) = f \in L^p(\Omega),\ p > n,\ \varepsilon > 0 \\ Au \in H_0^1(\Omega) \ni u \in W^{3,p}(\Omega) \\ (j(Au),1) = \alpha\ . \end{cases}$$

△

3.4 Quatrième ordre. Contrainte sur l'opérateur . Cas local $(\alpha = 0)$

3.4.5 Existence, unicité et régularité de la solution de VI_0 . Double obstacle

Soient les fonctions obstacle $\varphi_1,\ \varphi_2 \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} \varphi_2 \leq 0 \leq \varphi_1 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi_2 \leq 0 \leq \varphi_1 & \text{p.p. dans } \Omega\ . \end{cases}$$

On introduit la fonction

$$j:\ \Omega \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$$

telle que

$$j(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-\varphi_1(x))^2 & t > \varphi_1(x) \\ 0 & t \in [\varphi_2(x),\varphi_1(x)] \\ \frac{1}{2}(t-\varphi_2(x))^2 & t < \varphi_2(x) \end{cases}$$

ayant le sous-différentiel par rapport à t :

$$\partial j(x,t) = \begin{cases} t-\varphi_1(x) & t > \varphi_1(x) \\ 0 & t \in [\varphi_2(x),\varphi_1(x)] \\ t-\varphi_2(x) & t < \varphi_2(x)\ . \end{cases}$$

Théorème 3.4.5
Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{3,p}(\Omega)\text{ faible}} u_\infty$$

où $u_\infty \in W^{3,p}(\Omega)$ est l'unique solution du problème à double obstacle pour l'opérateur A :

$$\begin{cases} (Au_\infty, Av - Au_\infty) \geq (f, v - u_\infty) \qquad \forall\ \varepsilon \in K_0 \\ u_\infty \in K_0 = \{v \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega):\ (j(o,Av),1) = 0\} \\ \qquad\qquad = \{v \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega):\ j(o,Av) = 0 \text{ p.p. } \Omega\} \\ \qquad\qquad = \{v \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega):\ \varphi_2 \leq Av \leq \varphi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \\ u_\infty \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\infty\ . \end{cases}$$

Soit u_* comme à l'observation 3.4.

Si $\partial j(o,u_*) \in W^{2,p}(\Omega)$, alors le problème variationnel VI_0 admet une solution unique $u_\infty \in W^{4,p}(\Omega)$. △

Preuve :

On observe que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$(1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j(o, 1_{\mathbb{R}}))^{-1} = 1_{\mathbb{R}} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\partial j(o, 1_{\mathbb{R}}) \tag{$*$}$$

puisqu'on peut toujours extraire t de l'équation $t + \varepsilon\partial j(o,t) = s$:

Si $t \in [\varphi_1, \varphi_2]$ on a $t = s$, $\partial j(0,t) = 0$ donc $(*)$ est vrai.

Si $t \notin [\varphi_1, \varphi_2]$ on a $t + \varepsilon\partial j(o,t) = t + \varepsilon(t - \varphi_i) = s$ si et seulement si $t = s - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}(s - \varphi_i) = s - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\partial j(o,s)$.

Dans ces conditions la démonstration du théorème 3.4.2 révisée devient :

Comme

$$\begin{cases} A^*(Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(o, Au_\varepsilon)) = f = A^* u_* \\ Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(o, Au_\varepsilon) \in H_0^1(\Omega) \ni u_* \end{cases}$$

on aura par unicité

$$\begin{cases} Au_\varepsilon + \varepsilon\partial j(o, Au_\varepsilon) = u_* \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \ni Au_\varepsilon \end{cases}$$

donc il suffit de résoudre ce problème.

Mais on peut extraire Au_ε puisque l'application $1_{\mathbb{R}} + \partial j(x, 1_{\mathbb{R}})$ est inversible p.p. $x \in \Omega$ et avec $\partial j(x, o)$ lipschitzienne p.p. $x \in \Omega$ on aura

$$Au_\varepsilon = (1_{\mathbb{R}} + \varepsilon\partial j(o, 1_{\mathbb{R}}))^{-1}(u_*) = u_* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\partial j(o, u_*) \in W^{1,p}(\Omega)$$

d'où le théorème 1.3.1 assure $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$|u_\varepsilon|_{W^{3,p}(\Omega)} \le C_A^{1p}\, |Au_\varepsilon|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_A^{1p}(|u_*|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\, |\partial j(o, u_*)|_{W^{1,p}(\Omega)}) \le$$
$$\le C_A^{1p}(|u_*|_{W^{1,p}(\Omega)} + |\partial j(o, u_*)|_{W^{1,p}(\Omega)})$$

donc

$$|u_\varepsilon|_{W^{3,p}(\Omega)} \le C$$

avec C une constante indépendante de ε .

Lorsque $\partial j(o, u_*) \in W^{2,p}(\Omega)$ à l'aide du même théorème 1.3.1 on a

$$|u_\varepsilon|_{W^{4,p}(\Omega)} \le C_A^{2p}\, |Au_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C_A^{2p}(|u_*|_{W^{2,p}(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\, |\partial j(o, u_*)|_{W^{2,p}(\Omega)}) \le$$
$$\le C_A^{2p}(|u_*|_{W^{2,p}(\Omega)} + |\partial j(o, u_*)|_{W^{2,p}(\Omega)})$$

c'est-à-dire

$$|u_\varepsilon|_{W^{4,p}(\Omega)} \le C$$

avec C une autre constante indépendante de ε .

Ensuite la théorie développée jusque là s'applique avec $W^{3,p}(\Omega)$ et $W^{4,p}(\Omega)$ comme espaces ambiants de u_ε et on aura respectivement $u_\infty \in W^{3,p}(\Omega)$ et $u_\infty \in W^{4,p}(\Omega)$. △

Remarque 3.4.5

Le cas du problème à double obstacle avec φ_1, φ_2 constantes, $f \in L^p(\Omega)$ est traité dans [Brézis et Stampacchia [2]] où l'on obtient la régularité $u_\infty \in W^{3,p}(\Omega)$. Le cas non-local ainsi que la situation $u_\infty \in W^{4,p}(\Omega)$ ne sont pas abordés.

△

Commentaires 3.4

C'est le commencement du traitement des inéquations variationnelles du quatrième ordre.

Nous donnons une version non locale à une approche dans [Brézis[2]] du problème du double obstacle pour un opérateur du deuxième ordre A avec des obstacles constants.

La méthode de continuité développée jusque là s'applique d'une manière naturelle car la pénalisation est facile à manier et on dispose des estimations explicites et indépendantes du paramètre.

On arrive à capter aussi le cas non local avec un particulier le problème du double obstacle pour l'opérateur A avec des obstacles non constants.

La régularité naturelle pour ces problèmes est $W^{3,p}(\Omega)$ mais on met en évidence la situation suivante : si la solution $u_* \in H_0^1(\Omega)$ de l'équation $A^*u_* = f$ satisfait la condition réalisable $\partial j(u_*) \in W^{2,p}(\Omega)$ où ∂j est le sous-différentiel de la fonction convexe qui contrôle la perturbation variationnelle, alors on a une régularité $W^{4,p}(\Omega)$ pour le problème local et non local. $\triangle$

3.5 Quatrième ordre. Contrainte sur la solution

3.5.1 Pénalisation. Estimation a priori

Préliminaires 3.5

Soient les fonctions obstacle $\psi_i \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que

$$\psi_1 \leq 0 \leq \psi_2 \text{ sur } \partial\Omega, \ \psi_1 \leq \psi_2 \text{ p.p. } \Omega, \ A\psi_1 \leq 0 \leq A\psi_2 \text{ p.p. } \Omega \ .$$

Pour l'obstacle unilatéral on peut travailler aussi avec la fonction obstacle $\psi_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que

$$\psi_1 \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega, \ A\psi_1 \in L^\infty(\partial\Omega), \ A^*A\psi_1 \in L^p(\Omega) \ .$$

La fonction bornée et continue $\beta : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ satisfait $\beta(t) = 0 \, \forall \, t \leq 0$ et soit j la fonction positive, convexe et propre telle que $\partial j = \beta$ et $j(0) = 0$. On voit que j est croissante, lipschitzienne et $j(t) = 0 \, \forall \, t \leq 0$.

Dans toute la suite on note $t^+ = \max\{t, 0\}, \ t^- = \max\{-t, 0\}$.

△

Problème 3.5

On s'intéresse à l'existence, à l'unicité et à la régularité de la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \ v \in K \\ u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \ \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases} \qquad VI$$

lorsque $f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$.

Nous allons montrer que $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Pour le problème de l'obstacle unilatéral on montre que le problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall \ v \in K_1 \\ u \in K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) : \ v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases} \qquad VI_1$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

△

3.5.1 Pénalisation. Estimation a priori

Théorème 3.5.1

Soit $f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$.

Le problème pénalisé P_ε

$$\begin{cases} A^*Au_\varepsilon - \varepsilon\beta(\psi_1 - u_\varepsilon)(Au_\varepsilon - A\psi_1)^- + \varepsilon\beta(u_\varepsilon - \psi_2)(Au_\varepsilon - A\psi_2)^+ = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon \in H^3(\Omega) & \\ Au_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique telle que $u_\varepsilon \in W^{4,p}(\Omega)$ avec les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \text{ et } |Au_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leq C$$

où C est une constante indépendante de $\varepsilon, \ \beta, \ \psi_1, \ \psi_2$.

△

Preuve :

Soit le convexe

$$K = \{v \in L^p(\Omega) : \ |v|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha\}$$

où $\alpha > 0$ sera fixé ultérieurement.

On introduit l'application

$$v \in L^p(\Omega) \overset{T}{\longmapsto} Tv \in L^p(\Omega)$$

qui associe à chaque $v \in L^p(\Omega)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} A^*ATv - \varepsilon\beta(\psi_1 - v)(ATv - A\psi_1)^- + \\ \qquad + \varepsilon\beta(v - \psi_2)(ATv - A\psi_2)^+ = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) & \text{dans } \Omega \\ Tv \in H^3(\Omega) & \\ ATv = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ Tv = 0 & \text{sur } \partial\Omega \ . \end{cases}$$

Nous montrons que l'application T est bien définie.

Pour cela on note
$$\beta_\varepsilon(\text{o},t) = -\varepsilon\beta(\psi_1 - v)(t - A\psi_1)^- + \varepsilon\beta(v - \psi_2)(t - A\psi_2)^+$$
et on observe que
$$-\varepsilon\,|\beta|_\infty t^- \le -\varepsilon\,|\beta|_\infty (t - A\psi_1)^- + 0 \le \beta_\varepsilon(\text{o},t) \le 0 + \varepsilon\,|\beta|_\infty (t - A\psi_2)^+ \le \varepsilon\,|\beta|_\infty t^+$$
d'après la croissance de l'application $t \longmapsto t^+$.

En particulier $\beta_\varepsilon(x,\text{o})$ est uniformément lipschitzienne :
$$|\beta_\varepsilon(\text{o},t)| \le \varepsilon\,|\beta|_\infty\,|t|$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit le problème
$$\begin{cases} A^*u + \beta_\varepsilon(\text{o},u) = f \\ u \in H_0^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

Le théorème 1.3.1 assure l'existence d'une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$ car $\beta_\varepsilon(x,\text{o})$ est croissante et $\beta_\varepsilon(\text{o},0) = 0$ (par hypothèse $(-A\psi_1)^- = 0 = (-A\psi_2)^+$ dans Ω) .

On observe aussi que
$$(A^*u - f, \psi) \le 0 \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } u\psi \ge 0$$
et le théorème 1.2.2 assure
$$|u|_p \le C\,|f|_p$$
où C est indépendante de u et β_ε .

On conclut que $ATv = u \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $Tv \in H_0^1(\Omega)$ et selon le théorème 1.3.1 on aura $Tv \in W^{4,p}(\Omega)$.

De plus on a l'estimation
$$|ATv|_p \le C\,|f|_p$$
avec C indépendante de v et ε .

Nous montrons que

1. T est $\boxed{\text{contractive}}$: $T(K) \subset K$ pour un α bien choisi,

2. T est $\boxed{\text{continue}}$,

3. T est $\boxed{\text{compacte}}$.

En effet,

1. On peut poser $\alpha = C\,|f|_p$.

2. Soit $(v_n)_{\varepsilon>0}$ une suite telle que
$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p(\Omega) \text{ fort}} v \ .$$

Dans la suite C dénote une constante indépendante de $v,\ v_n$.

Par soustraction
$$\begin{cases} A^*A(Tv_n - Tv) = \beta_\varepsilon(\text{o},v) - \beta_\varepsilon(\text{o},v_n) \\ Tv_n - Tv \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$
d'où avec la nature lipschitzienne de β_ε le théorème 1.3.1 assure ($ATv_n - ATv \in H_0^1(\Omega)$)
$$|ATv_n - ATv|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C|\beta_\varepsilon(\text{o},v) - \beta_\varepsilon(\text{o},v_n)|_p \le \varepsilon C\,|\beta|_\infty\,|v_n - v|_{L^p(\Omega)}$$
et encore une fois le même théorème 1.3.1 donne ($Tv_n - Tv \in H_0^1(\Omega)$)
$$|Tv_n - Tv|_{W^{4,p}(\Omega)} \le C|ATv_n - ATv|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C|\beta_\varepsilon(\text{o},v) - \beta_\varepsilon(\text{o},v_n)|_p \le$$
$$\le \varepsilon C\,|\beta|_\infty\,|v_n - v|_{L^p(\Omega)}$$
avec C indépendante de $v_n,\ v$.

On conclut que
$$Tv_n - Tv \xrightarrow[n\to\infty]{W^{4,p}(\Omega) \text{ fort}} 0 \quad \text{et} \quad Tv_n - Tv \xrightarrow[n\to\infty]{L^p(\Omega) \text{ fort}} 0$$
donc T sera continue.

3. Comme l'injection
$$W^{4,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$
est compacte si $p \ge 2,\ T$ sera compacte.

Le théorème de point fixe de Schauder donne une fonction $u_\varepsilon \in W^{4,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que

$$Tu_\varepsilon = u_\varepsilon$$

c'est-à-dire une solution du problème P_ε.

De plus on a les estimations (voir théorème 1.3.1)

$$|Au_\varepsilon|_p \leq C\,|f|_p \text{ et } |u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\,|f|_p$$

avec C indépendante de ε, β, ψ_1, ψ_2. △

Remarque 3.5.1

Dans le cas de l'obstacle unilatéral, l'hypothèse $A\psi_1 \leq 0$ p.p. Ω peut être remplacée par $A\psi_1 \in L^\infty(\partial\Omega)$, $A^*A\psi_1 \in L^p(\Omega)$ pour avoir toujours les estimations

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \text{ et } |Au_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leq C$$

où u_ε est la solution du problème pénalisé Q_ε

$$\begin{cases} A^*Au_\varepsilon - \varepsilon\beta(\psi_1 - u_\varepsilon)(Au_\varepsilon - A\psi_1)^- = f \in L^p(\Omega)(p \geq 2) & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon \in H^3(\Omega) & \\ Au_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

△

Preuve :

En effet, on montre comme dans la démonstration du théorème 3.5.1 que le problème pénalisé admet une solution unique $u_\varepsilon \in W^{4,p}(\Omega)$ avec la seule différence qu'on peut écrire

$$\begin{cases} A^*A(u_\varepsilon - \psi_1) - \varepsilon\beta(\psi_1 - u_\varepsilon)(Au_\varepsilon - A\psi_1)^- = f - A^*A\psi_1 \in L^p(\Omega)(p \geq 2) & \text{dans } \Omega \\ A(u_\varepsilon - \psi_1) = -A\psi_1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et l'on a

$$(A^*A(u_\varepsilon - \psi_1) - (f - A^*A\psi_1), \psi) \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que } \psi A(u_\varepsilon - \psi_1) \geq 0$$

avec $A(u_\varepsilon - \psi_1) = -A\psi_1 \in L^\infty(\partial\Omega)$ et le théorème 1.2.2 assure

$$|A(u_\varepsilon - \psi_1)|_{L^p(\Omega)} \leq C_p^A\,|f|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\,|A\psi_1|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

d'où

$$|Au_\varepsilon|_{L^p(\Omega)} \leq |A\psi_1|_{L^p(\Omega)} + C_p^A\,|f|_{L^p(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\,|A\psi_1|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

et via le théorème 1.3.1

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\;.$$

Ensuite on développe la même théorie que pour le double obstacle. △

3.5.2 Passage à la limite et existence

Théorème 3.5.2

Si u_ε est la solution du problème pénalisé P_ε alors u_ε converge vers u dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible quand ε tend vers 0 où $u \in W^{2,p}(\Omega)$ est l'unique solution de VI. △

Preuve :

L'estimation a priori du théorème précédent

$$|u_\varepsilon|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C$$

permet (réflexivité), à une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u$$

et encore

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} u$$

en utilisant les injections de Sobolev. Il reste à trouver u.

On observe que $\forall\, v \in K$ on a

$$(Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \xlongequal[v-u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\ni Au_\varepsilon]{\text{intégrations par parties}} (A^*Au_\varepsilon - f, v - u_\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon(-(Au_\varepsilon - A\psi_1)^-\beta(\psi_1 - u_\varepsilon), u_\varepsilon - v) +$$
$$+ \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+\beta(u_\varepsilon - \psi_2), u_\varepsilon - v) \xlongequal[j(t)=0\ \forall\ t\leq 0]{\beta=\partial j,\ j(0)=0}$$

$$= \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, \partial j(\psi_1 - u_\varepsilon)\{(\psi_1 - u_\varepsilon) - (\psi_1 - v)\}) +$$
$$+ \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, \partial j(u_\varepsilon - \psi_2)\{(u_\varepsilon - \psi_2) - (v - \psi_2)\}) \geq \xlongequal{j \text{ convexe}} \geq$$

$$\geq \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon) - j(\psi_1 - v)) +$$
$$+ \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2) - j(v - \psi_2)) \xlongequal[j(t)=0\ \forall\ t\leq 0]{\psi_1\leq v\leq\psi_2 \text{ p.p } \Omega}$$

$$= \varepsilon((Au_\varepsilon - \psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon((Au_\varepsilon - \psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2)) \geq \xlongequal{j\geq 0} \geq 0$$

et après un réarrangement :

$$(Av, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \geq (Av - Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2)) \geq$$
$$\geq \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2)) \geq 0\ .$$

Le passage à la limite avec

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{2,p}(\Omega) \text{ faible}} u \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} u$$

donne $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ et $\forall\, v \in K$

$$(Av, Av - Au) - (f, v - u) \geq 0\ .$$

Mais $\forall\, t \in [0,1]$ on a $u + t(v - u) \in K$ car K est convexe donc

$$(Au + t(v - u), Av - Au) - (f, v - u) \geq 0$$

et en faisant tendre t vers 0

$$(Au, Av - Au) - (f, v - u) \geq 0\ \forall\, v \in K\ .$$

De l'inégalité

$$(Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \geq \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2))$$

on tire (j est lipschitzienne et $j(t) = 0\ \forall\, t \leq 0$, $\psi_1 \leq 0 \leq \psi_2$ sur $\partial\Omega$)

$$(Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) \geq$$
$$\geq \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_1)^-, j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon((Au_\varepsilon - A\psi_2)^+, j(u_\varepsilon - \psi_2)) \geq \xlongequal{j\geq 0} \geq$$
$$\geq \varepsilon(A(u_\varepsilon - \psi_1), j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon(A(u_\varepsilon - \psi_2), j(u_\varepsilon - \psi_2)) \xlongequal[j(\psi_1-u_\varepsilon)\in H_0^1(\Omega)\ni j(u_\varepsilon-\psi_2)]{\text{intégration par parties}}$$

$$= \varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}(\psi_1 - u_\varepsilon)_{x_i}(\psi_1 - u_\varepsilon)_{x_j}, \partial j(\psi_1 - u_\varepsilon)) +$$
$$+ \varepsilon(\sum_{i,j} a_{ij}(u_\varepsilon - \psi_2)_{x_i}(u_\varepsilon - \psi_2)_{x_j}, \partial j(u_\varepsilon - \psi_2)) \geq \xlongequal[j \text{ croissante}]{A \text{ elliptique}} \geq$$
$$\geq \varepsilon\alpha_A(|\nabla(\psi_1 - u_\varepsilon)|^2, \partial j(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon\alpha_A(|\nabla(u_\varepsilon - \psi_2)|^2, \partial j(u_\varepsilon - \psi_2)) =$$
$$= \varepsilon\alpha_A(|\nabla(\psi_1 - u_\varepsilon)|^2, \beta(\psi_1 - u_\varepsilon)) + \varepsilon\alpha_A(|\nabla(u_\varepsilon - \psi_2)|^2, \beta(u_\varepsilon - \psi_2)) =$$
$$\xlongequal[h_1(t)=\int_0^t \beta^{\frac{1}{2}}(-s)ds]{h_2(t)=\int_0^t \beta^{\frac{1}{2}}(s)ds} \varepsilon\alpha_A\{|\nabla h_1(u_\varepsilon - \psi_1)|_2^2 + |\nabla h_2(u_\varepsilon - \psi_2)|_2^2\}$$

ou sous une autre forme

$$\frac{1}{\varepsilon}\{(Av, Av - Au_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon)\} \geq \frac{1}{\varepsilon}(Av - Au_\varepsilon, Av - Au_\varepsilon) +$$
$$+ \alpha_A\{|\nabla h_1(u_\varepsilon - \psi_1)|_2^2 + |\nabla h_2(u_\varepsilon - \psi_2)|_2^2\} \geq$$
$$\geq \alpha_A\{|\nabla h_1(u_\varepsilon - \psi_1)|_2^2 + |\nabla h_2(u_\varepsilon - \psi_2)|_2^2\}$$

d'où le passage à la limite $(\varepsilon \to \infty)$ donne $(i \in \{1,2\})$

$$h_i(u_\varepsilon - \psi_i) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{H_0^1(\Omega) \text{ fort}} 0 \ .$$

D'autre part

$$u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} u$$

et avec $h_i \in C^1(\mathbb{R})$ lipschitzienne $(h_i'(t) = \beta^{\frac{1}{2}}(\pm t) \leq |\beta|_\infty^{\frac{1}{2}} < \infty$, β bornée)

$$h_i(u_\varepsilon - \psi_i) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{W^{1,p}(\Omega) \text{ fort}} h_i(u - \psi_i)$$

en particulier

$$h_i(u_\varepsilon - \psi_i) \xrightarrow[\varepsilon \to \infty]{H_0^1(\Omega) \text{ fort}} h_i(u - \psi_i)$$

donc

$$|\nabla h_i(u - \psi_i)|_2 = 0$$

c'est-à-dire $(\Omega$ connexe)

$$h_i(u - \psi_i) = k_i \text{ une constante .}$$

On observe aussi que h_i est croissante $(h_i'(t) = \beta^{\frac{1}{2}}(\pm t) \geq 0)$ avec $h_i(0) = 0$ donc h_i laisse invariant le signe.

Si on suppose $k_1 < 0$ alors sur le bord on a (avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et l'hypothèse $\psi_1 \leq 0$, $u - \psi_1 \geq 0$) $0 > k = h_1(u - \psi_1) = h_1(-\psi_1) \geq 0$ absurde.

De même si $k_2 > 0$ alors sur le bord on a (avec $u \in H_0^1(\Omega)$ et l'hypothèse $\psi_2 \geq 0$, $u - \psi_2 \leq 0$) $0 > k_2 = h_2(u - \psi_2) = h_2(-\psi_2) \leq 0$ absurde.

Il reste $h_1(u - \psi_1) = k_1 \geq 0$ et $h_2(u - \psi_2) = k_2 \leq 0$ donc $w \geq \psi_1$ et $w \leq \psi_2$ p.p. Ω c'est-à-dire $u \in K$ donc u vérifie VI .

Pour l'unicité supposons que u_1, u_2 vérifient VI .

Alors

$$(Au_1, Au_2 - Au_1) \geq (f, u_2 - u_1) \text{ et } (Au_2, Au_1 - Au_2) \geq (f, u_1 - u_2)$$

et par addition

$$-(Au_1 - Au_2, Au_1 - Au_2) \geq 0$$

donc $A(u_1 - u_2) = 0$ p.p. Ω et $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$.

L'unicité de la solution de ce problème de Dirichlet force $u_1 - u_2 = 0$ p.p. Ω donc u sera l'unique solution de VI .

$\triangle$

Remarque 3.5.2

La solution du problème pénalisé Q_ε converge vers u dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible lorsque ε tend vers 0 avec $u \in W^{2,p}(\Omega)$ vérifiant VI_1 .

$\triangle$

Preuve :

Comme dans la démonstration du théorème 3.5.2 on montre la convergence et que u est la solution de VI_1 .

$\triangle$

Commentaires 3.5

C'est le problème de l'obstacle bilatéral pour l'opérateur biharmonique avec A un opérateur elliptique du deuxième ordre au lieu du laplacien.

Pour une étude du problème de l'obstacle unilatéral pour l'opérateur biharmonique on peut consulter [Caffarelli[1]] et pour l'obstacle bilatéral [Caffarelli[2]] où on obtient la régularité $H^2(\Omega)$ avec $A = -\Delta$ et une fonction générique $f = 0$.

A notre connaissance, jusqu'à maintenant, la régularité $W^{2,p}(\Omega)$ n'a pas été abordée avec une fonction générique $f \in L^p(\Omega)$ et A un opérateur elliptique général.

Via une pénalisation bien choisie on montre que la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall\ v \in K \\ u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) :\ \psi_2 \geq v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)(p \geq 2)$ et les fonctions obstacles $\psi_i \in W^{2,p}(\Omega)$ telles que $\psi_1 \leq 0 \leq \psi_2$ sur $\partial\Omega$, $\psi_1 \leq \psi_2$, $A\psi_1 \leq 0 \leq A\psi_2$ p.p. Ω, admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

La même régularité est obtenue pour le problème unilatéral

$$\begin{cases} (Au, Av - Au) \geq (f, v - u) \quad \forall\ v \in K_1 \\ u \in K_1 = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) :\ v \geq \psi_1 \text{ p.p. } \Omega\} \end{cases}$$

avec $f \in L^p(\Omega)$ et $\psi_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ telle que $\psi_1 \leq 0$ sur $\partial\Omega$, $A\psi_1 \in L^\infty(\partial\Omega)$, $A^*A\psi_1 \in L^p(\Omega)$. $\triangle$

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS ROBERT A.— *Sobolev Spaces*— Pure and Applied Mathematics— — Academic Press— New York— — 1975

AMANN H. and CRANDALL M.G.— *On some Existence Theorems for Semi-linear Elliptic Equations*— Indiana Univ. Math. J.— vol. 27, no. 5— Departement of. Math. Indiana Univ.— Indiana— 779'791— 1978

BAIOCCHI CLAUDIO and CAPELO ANTÓNIO— *Variational and Quasivariational Inequalities*— — — John Wiley and Sons— New York— — 1984

BARBU VIOREL— *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*— — — Noordhoff International Publishing— Leyden The Netherlands— — 1976

BONY JEAN-MICHEL— *Principe du maximum dans les espaces de Sobolev*— C. R. Acad. Sc. Paris— vol. 265, série A— Academie des Sciences— Paris— 333'337— 1967

BRAUNER C.M. and NICOLAENKO B.— *Regularisation and bounded penalisation in free boundary problems*— Lecture Notes in Mathematics— 942— Springer Verlag— New York — 19'42— 1982

[1] BRÉZIS H.— *Nouveaux théorèmes de régularité pour les problèmes unilatéraux*— Rencontres entre physiciens théoriciens et mathématiciens— 12— Strasbourg— — — 1971

[2] BRÉZIS H. and STAMPACCHIA G.— *Remarks on some fourth order variational inequalities*— Ann. Scuola Norm. Sup— 4— — Pisa— 363'371— 1977

[3] BRÉZIS H. et STAMPACCHIA G.— *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*— Bull. Soc. Math. France— 96— — Paris— 153'180— 1968

[4] BRÉZIS H.— *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*— Mathematics Studies— 5— North Holland— New York— — 1973

[5] BRÉZIS H.— *Problèmes unilatéraux*— J. Pure & Appl. Math.— 51— Gauthier-Villars— Paris— 1'162— 1972

[6] BRÉZIS H. and BERESTYCKI H.— *On a free boundary problem arising in plasma physics* — Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications— vol. 4, No. 3— Pergamon Press — Oxford— 415'436— 1980

[7] BRÉZIS H. and BROWDER E.F.— *Some properties of higher order Sobolev spaces*— J. Math. pures et appl.— 61— Gauthier-Villars— Paris— 245'259— 1982

[8] BRÉZIS H. and BROWDER E.F.— *Strongly Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems* — Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa— Serie 4, vol. 5, 1— Scuola Normale Sup. Pisa— Pisa— 587'603— 1978

[9] BRÉZIS H. and STRAUSS W. A.— *Semi-linear second-order elliptic equations*— J. Math. Soc. Japan— Vol. 25, No. 4— — — 567'590— 1973

BROWDER F.E.— *Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities*— Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A.— 56— The National Academy of Sciences U.S.A.— Washington— 1080'1086— 1966

[1] CAFFARELLI L.A. and FRIEDMAN A.— *The obstacle problem for the biharmonic operator*— Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa— 4— — Pisa— 151'184— 1979

[2] CAFFARELLI L.A., FRIEDMAN A., TORELLI, A.— *The two-obstacle problem for the biharmonic operator*— Pacific J. Math.— 103— — Tokyo— 325'335— 1982

[3] CAFFARELLI L.A. and FRIEDMAN A.— *Asymptotic estimates for the plasma problem*— Duke Math. Journal— vol. 47, no. 3— Duke University Press— Duke — 705'742— 1980

CÁC NGUYEN PHUONG — *On Bounded Solutions of a Strongly Nonlinear Elliptic Equation*— Pacific J. of Math.— vol. 57, no. 1— International Academic Printing— Tokyo— 53'58— 1975

[1] CHIPOT M.— *Variational Inequalities and Flow in Porous Media*— — — Springer Verlag — New York— — 1984

[2] CHIPOT M. and ELLATIFI A.— *Regularity Results for Nonlocal Variational Inequalities* — Communications in Applied Analysis 2— no. 1— Dynamic Publishers— New York— 1'9— 1998

[3] CHIPOT M. and KIS L.— *Existence Results for Monotone Perturbations of the Dirichlet Problem*— University of Zürich— Preprint— — — — 1998

[4] CHIPOT M. and KIS L.— *On a Class of Nonlinear Singular Perturbation Problems* — Asymptotic Analysis— — — — — a paraître

[5] CHIPOT M. and KIS L.— *On some Class of Variational Inequalities and their Regularity Properties* — Communications in Applied Analysis— à paraître— — — —

CRANDALL M. and PAZY A. — *Semi groups of non linear contractions and dissipative sets*— J. Fonct. Anal.— 3— — — 376'418— 1969

DÍAZ J. I.— *Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol. 1 : Elliptic equations* — 141— Pitmann— London— — — 1985

EVANS LAWRENCE C.— *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*— Conference board of the mathematical sciences, regional conference series in mathematics— 74— A.M.S— Providence, Rhode Island— — 1990

[1] FRIEDMAN AVNER— *Variational principles and free-boundary problems*— — — Robert E. Krieger Publishing Company— Florida— — 1988

[2] FRIEDMAN A.— *Singular Perturbations for Partial Differential Equations*— Arch. Rational Mech. Anal.— vol. 29— — — 289'303— 1968

GILBARG D. and TRUDINGER N.L.— *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*— — — Springer Verlag— New York— — 1983

GREENLEE W.M.— *Rate of convergence in singular perturbations*— Technical Report— no. 12— Univ. of Kansas— Kansas— — *June*'1967

HANOUZET B. and JOLY J. L.— *Un résultat de régularité pour une inéquation quasivariationnelle du type de Neumann intervenant dans un problème de contrôle impulsionnel*— J. Math. Pures Appl.— 9— — New York— 327'337— 1975

HILHORST D.— *A perturbed free boundary problem arising in the physics of ionised gases* — Lecture Notes in Mathematics— 942— Springer Verlag— New York— 308'317— 1982

HILHORST D. and DIEKMANN O.— *Variational analysis of a perturbed free boundary problem*— Comm. in P.D.E— 7— — New York— 1309'1336— 1981

HOLMGREN A. RICHARD— *A first course in discrete dynamical systems*— Universitext — — Springer — New York— — 1996

[1] HUET D.— *Perturbations singulières*— C.R. Acad. Sci. Paris— 259— — Paris— 4213' 4215— 1964

[2] HUET D.— *Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites*— Ann. Inst. Fourier— 10— — Grenoble— 61'150— 1960

KAVIAN OTARED— *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*— Mathématiques & Applications— 13— Springer-Verlag— New York — — 1993

KAZDAN JERRY and KRAMER RICHARD J.— *Invariant Criteria for Existence of Solutions to Second-Order Quasilinear Elliptic Equations*— Comm. Pure Appl. Math.— 31 — John Wiley & Sons— New York— 619'645— 1978

KINDERLEHRER D. and STAMPACCHIA G.— *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*— Pure and Applied Mathematics— 88— Academic Press— London— — 1980

[1] LIONS J.L.— *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*— Lecture Notes in Mathematics— 323— Springer-Verlag— New York— — 1973

[2] LIONS J.L.— *Quelques Méthodes de Résolution dans des Problèmes aux Limites non linéaires*— Études Mathématiques— — Dunod, Gauthier-Villars— Paris— — 1969

LOJASIEWICZ STANISLAW— *An Introduction to the Theory of Real Fonctions*— — — John Wiley & Sons— New York— — 1988

LANDES RÜDIGER and MUSTONEN VESA— *Boundary Value Problems for Strongly Nonlinear Second Order Elliptic Equations*— Bollettino dela U.M.I— (6) 4-B— Nicola Zanichelli— Bologna— 15'32— 1985

MANDELBROT B. BENOIT— *Fractals, form, chance, and dimension*— W. H. Freeman and Company— 107— Academic Press, Inc.— San Francisco— — 1977

McSHANE E. J.— *Unified Integration*— Pure and Applied Mathematics— 107— Academic Press, Inc.— New York— — 1983

ROCKAFELLAR R. T.— *Convex Analysis*— — — Princeton University Press— New Jersey— — 1970

RODRIGUES J-F— *Obstacle problems in Mathematical Physics*— Mathematical Studies — 134— North-Holland— — — 1987

SBURLAN Silviu— *The Topological degree. Lectures on nonlinear equations*— — — Editura Academiei— Bucuresti— — 1983

SCHWARTZ GÜNTER— *Hodge Decomposition-A method for solving Boundary Value Problems*— Lecture Notes in Mathematics— 1607— Springer-Verlag— New York— — 1995

SIBONY MOÏSE— *Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone*— J. of Mathematical Analysis and Applications— 34— Academic Press— New York— 502'564— 1971

[1] SIMADER G. CHRISTIAN— *On Dirichlet's Boundary Value Problem*— Lecture Notes in Mathematics— 268— Springer-Verlag— New York— — 1983

[2] SIMADER G. CHRISTIAN— *Remarks on uniqueness and stability of weak solutions of strongly nonlinear elliptic equations*— Bayreuther Math. Schr.— 11— Bayreuth University — Bayreuth— 67'79— 1982

[1] STAMPACCHIA G.— *Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus*— Presse de l'Université de Montreal— — Université de Montreal— Montreal— — 1965

STEIN E.M.— *Harmonic analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscilatory Integrals*— — — Princeton University Press— New Jersey— — 1993

TAYLOR S. J.— *Introduction to Measure and Integration*— — — Cambridge University Press— London— — 1966

TANABE H.— *Note on singular perturbation for abstract differential equations*— Osaka J. Math. — 1— — Osaka— 239'252— 1964

TON B.A— *Elliptic boundary problems with a small parameter*— J. Math. Anal. Appl.— 14— — — 341'358— 1966

TROIANIELLO G. MARIA— *Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems*— The University series in mathematics— — Plenum Press— New York— — 1987

VISIK M.J. and LIUSTERNIK L.A.— *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*— Amer. Math. Soc. Translations— 20, (2)— — — 239'364— 1962

WEBB J.R.L— *Boundary Value Problems for Strongly Nonlinear Elliptic Equations*— J. London Math. Soc.— 21, (2)— C. F. Hodgson & Son Ltd— London— 123'132— 1980