



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6156712

757
981395



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1998/1165
Cote	S/M ₂ 98756
Loc	Magasin

PAR

EL HASSANIA KAMAL

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
OPTION : Mécanique

ÉTUDE NUMÉRIQUE ET EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT
DES POUTRES
À PAROIS MINCES ET À SECTIONS OUVERTES

soutenu le 02 Décembre 1998 devant le jury composé de

G.Dhatt
P.Morlier
A.Zegloul
A.Khelil
F.Mohri
J-C.Roth

Université de Technologie de Compiègne
Université de Bordeaux
Université de Metz
UHP Nancy 1-IUT NB
UHP Nancy 1-IUT NB
Université de Metz

Rapporteur
Rapporteur
Président
Examineur
Codirecteur de thèse
Directeur de thèse

Laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux
U.R.A C.N.R.S. 1215
Université de Metz, île du Saulcy, 57045 Cedex 01

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux sous la direction du professeur Jean Claude Roth que je remercie vivement de m'avoir accueilli dans son équipe.

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude au professeur F. Mohri qui a su dirigé ce travail avec enthousiasme et intelligence. Sa patience et son goût pour la recherche m'ont beaucoup aidé à comprendre le sens scientifique du mot "recherche".

Je tiens aussi à remercier les professeurs G. Dhatt et P. Morlier d'avoir accepté la lourde responsabilité de rapporter ce travail.

J'adresse également mes remerciements aux professeurs A. Zeghloul et A. Khelil d'honorer cette thèse par leur participation au jury et de l'intérêt qui ont porté au présent travail.

Je ne saurai oublier de remercier ma famille de leur soutien pour réaliser ce travail. Mes remerciements vont également à tous mes amis et collègues avec qui j'ai passé de bons moments durant ces années d'études.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
Chapitre I: Étude bibliographique de la torsion des poutres	3
I. A INTRODUCTION	3
I.A.1 Les profilés laminés à chaud	3
I.A.2 Profilés formés à froid	4
I.A.3 Profilés reconstitués soudés	6
I.B RAPPEL BIBLIOGRAPHIQUE DES DIFFÉRENTS MODÈLES	7
I.B.1 Introduction	7
I.B.2.1 Torsion uniforme (saint-venant)	7
I.B.2.2 Torsion non uniforme (Vlassov)	9
a) Importance du gauchissement	11
b) Équation d'équilibre en torsion	14
I.B.2.3 Torsion de Bencoter	15
I.C HYPOTHÈSES ET RELATIONS ASSOCIÉES AU GAUCHISSEMENT SELON LA THÉORIE DE VLASSOV	16
I.C.1 Hypothèses de Vlassov	16
I.C.2 Moments d'inertie	18
I.C.3 Surface sectorielle	19
I.C.4 Centre de torsion	20
I.C.5 Caractéristiques géométriques de la torsion pour quelques sections ouvertes	21
I.C.6 Bimoment	23
a) Bimoment causé par les charges longitudinales	
b) Bimoment causé par les charges transversales	
I.D Conclusion	30
Chapitre II Simulation numérique et étude expérimentale des poutres à parois minces et à sections ouvertes en torsion	31
II.A ÉLÉMENTS FINIS DES POUTRES À PAROIS MINCES EN TORSION	31

II.A.1 Introduction	31
II.A.2 Modèle de Vlassov pour les poutres à parois minces et à sections ouvertes	31
II.A.2.1 Cinématique des poutres à parois minces en torsion	32
II.A.3 Application du principe du travail virtuel	34
II.A.3.1 Énergie interne	34
II.A.3.2 Matrice et vecteurs élémentaire suivant le modèle exact de Vlassov	35
II.A.3.3 Matrice et vecteurs élémentaires suivant le modèle de Vlassov avec une approximation cubique	38
II.A.3.4 Comparaison entre de l'élément cubique et hyperbolique	39
II.A.3.5 Élément de poutre 3D avec gauchissement	39
II.A.6 Résultats numériques	41
II.A.6.1 Présentation du code de calcul	41
II.A.6.2 Étude comparative	42
a) Étude du console de section un IPE300 en torsion	
b) Étude du portique	
II.A.7 Conclusion	50
II.B Étude expérimentale des structures à parois minces et à sections ouvertes en torsion.	51
II.B.1 Introduction à l'extensiométrie	51
II.B.2 Description des essais expérimentaux	54
II.B.2.1 Poutre bi-articulée en flexion-torsion	54
a) Description générale	
b) Étude comparative pour deux excentricités (0 à 10 cm)	
c) Effet de l'excentricité	
II.B.2.2 Étude d'un poteau sous charges longitudinales	61
a) Description générale	61
b) Étude du poteau pour le cas du chargement [a] et [b]	62
c) Étude du poteau pour le cas du chargement [c]	66
d) Effet de l'excentricité	70
II.B.2.3 Console de section en T	73
II.B.3 Conclusion	75

Chapitre III Étude des instabilités des poutres à parois

minces et à sections ouvertes. Aspect numérique et réglementaire	76
III.A.1 Introduction	76
III.A.2 Définition du déversement	77
III.A.3 Formule générale du déversement	77
III.A.4 Cas des sections bisymétriques	80
III.A.5 Influence de la forme de la section transversale	81
III.A.6 Importance du point d'application des charges	83
III.A.7 Importance des conditions aux limites	85
III.A.8 Analyse numérique et réglementaire du déversement des poutres biencastrées	86
III.A.8.1 Charge concentrée au milieu d'une poutre biencastrée	
a) Charge appliquée au centre de gravité	
b) Charge appliquée au niveau de la semelle supérieure	
III.A.8.2 Charge répartie appliquée à une poutre biencastrée	91
a) Charge appliquée au centre de gravité	
b) Charge appliquée au niveau de la semelle supérieure	
III.A.9 Conclusion	101
III.B COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DES POUTRES À PAROIS MINCES ET A SECTIONS OUVERTES	101
III.B.1 Introduction	101
III.B.2 Description générale des calculs	102
a) Influence du point d'application de la charge	103
b) Influence du chargement excentré	106
III.B.3 Conclusion	108
CONCLUSION GÉNÉRALE	109
BIBLIOGRAPHIE	111

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les structures formées de poutres sont largement utilisées dans la réalisation industrielles. Dans les constructions métalliques, ces structures font appel aux éléments longs à parois minces, où la torsion est un facteur déterminant pour la conception et le calcul.

La théorie générale de torsion pour les poutres à parois minces et à sections ouvertes a été développée dans sa forme finale par Vlassov [V1]. Pour l'étude du comportement et de stabilité des poutres à parois minces et à sections ouvertes, des modèles théoriques basés sur des études analytiques de la torsion sont présentées dans beaucoup de travaux : [B2], [B4],[B5], [C1], [C2], [M1],[G1],[K1], [T1], [T2], [L1], [D4].

Du point de vue numérique, la méthode des éléments finis est la plus utilisée. Le modèle élément finis des poutres en torsion a fait l'objet de travaux de recherche relativement récents : Barssoum et Gallager [B6] ont présenté un élément poutre à sept degrés de liberté qui tient compte du gauchissement. Bazant [B7] a utilisé un élément fini pour le calcul des poutres courbes et à sections variables. On cite les références de différents travaux des poutres [B2], [D1], [D2], [D3], [C3], [S1], [S2], [K2], [R1], [G2], [E2].

Le but de ce travail est l'étude du comportement et des instabilités des poutres à parois minces et à sections ouvertes sollicitées en torsion. Le modèle élément finis des poutres 3D est utilisé et des essais expérimentaux ont été effectués.

Dans le premier chapitre, on rappelle les différents types de torsion. Nous portons une attention particulière à la torsion non uniforme des poutres à parois minces et à sections ouvertes. La théorie de Vlassov [V1] est adoptée et des exemples sont donnés afin de montrer l'importance de l'effet du gauchissement pour ces éléments.

Le deuxième chapitre est composé de deux parties :

La première est consacrée à modéliser deux éléments de poutre en torsion non uniforme. La méthode des éléments finis est utilisée. Le premier élément utilise des fonctions d'interpolation hyperbolique. Le second utilise des fonctions cubiques. Nous superposons ensuite les effets de membrane et de la flexion à des éléments finis en torsion pour obtenir les éléments poutres 3D avec gauchissement. Afin de montrer la fiabilité de cet élément 3D, une étude comparative entre les différents éléments finis est présentée : L'élément 3D sans gauchissement (B31), l'élément poutre 3D avec

gauchissement (B31OS) et l'élément coque (S8R). Les calculs sont effectués avec le code de calcul ABAQUS.

La deuxième partie est consacrée à une étude expérimentale des poutres à parois minces et à sections ouvertes où l'effet des chargements excentré est étudié. Ces résultats sont comparés aux résultats numériques d'ABAQUS (B31OS, S8R). L'étude de la stabilité des poutres à parois minces et à sections ouvertes fait l'objet du chapitre III.

Dans un premier temps, on discute la solution réglementaire du problème de déversement proposé par l'Eurocode3. L'influence du point d'application de la charge, le type de la section transversale , les conditions aux limites est discutée. Une comparaison entre les solutions numériques et réglementaires est ensuite étudiée dans le cas des poutres biencastées à sections ouvertes bisymétriques.

Dans un second temps, on s'intéresse au comportement post critique. L'influence de quelques paramètres a été étudiée, à savoir le point d'application de la charge et l'excentrement par rapport à l'axe de symétrie. Pour illustrer ce fait un exemple numérique basé sur la méthode de Riks a été présenté .

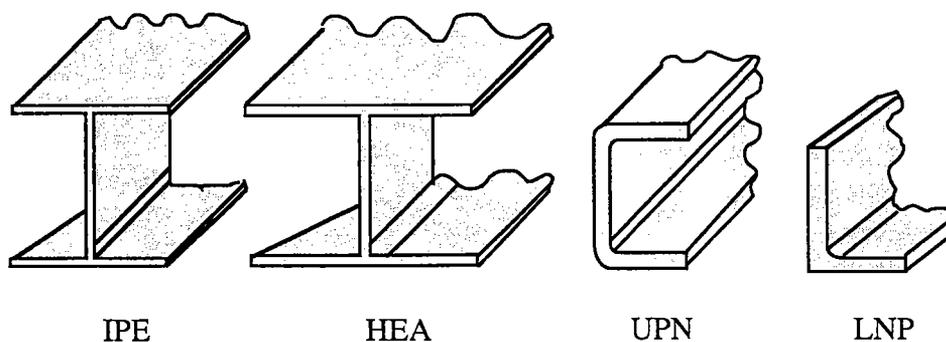
I.A INTRODUCTION

La construction métallique légère s'est taillée une place de toute première importance au cours des dernières décennies parce que ses caractéristiques (fabrications en séries, possibilités de standardisation, légèreté) correspondent aux impératifs du bâtiment industriel. Cette large réputation est due à une grande utilisation des avantages des éléments de construction présentant des parois minces. Ces éléments de construction dont les parois doivent le plus souvent être affectées du qualificatif "minces" se divisent en trois catégories.

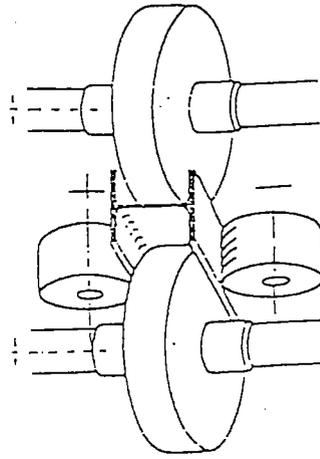
- Les profilés laminés à chaud
- Les profilés formés à froid
- Les profilés reconstitués soudés

I.A.1 Les profilés laminés à chaud

La procédure du laminage se déroule de la façon suivantes : entraîner et écraser le métal chaud (lingot ou ébauche de coulée continue) entre deux cylindres tournants en sens inverse. Les cylindres sont lisses pour les produits plats, à cannelures pour les profilés (figI.2). En répétant plusieurs fois l'opération, on obtient un produit de plus en plus mince et de plus en plus long, à la forme souhaitée (figI.1). Les laminés à chaud comprennent une large variété de produits de différentes formes, on cite par exemple les IPE, IPN, ...etc. Les dimensions standards de ces profilés sont données sous forme de catalogues par les constructeurs.



FigI.1 Sections laminées à chaud

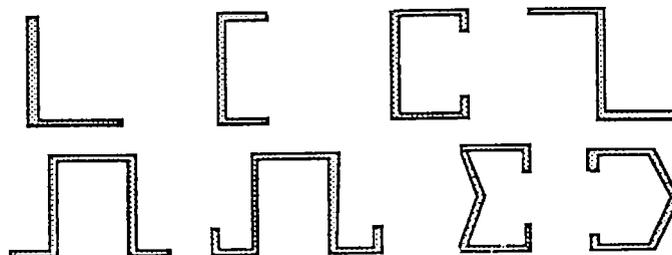


FigI.2 : Procédure de laminage à chaud

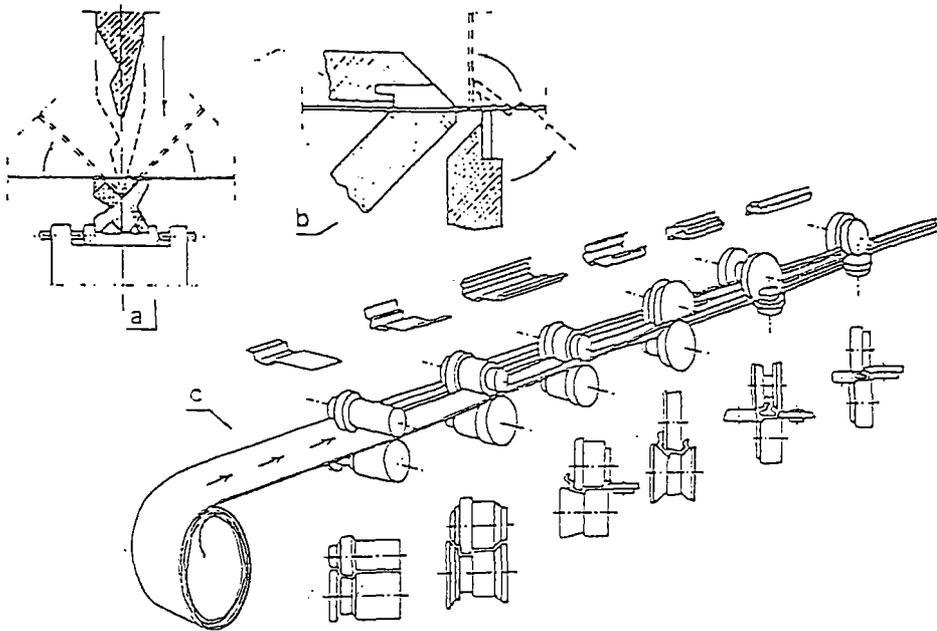
I.A.2 Profilés formés à froid

Actuellement, les profilés formés à froid sont assez régulièrement utilisés par les constructeurs, bien qu'ils restent du domaine du "non traditionnel". Il est certain que leur calcul est plus compliqué que celui des profilés laminés à chaud, surtout que leurs sections ne présentent jamais deux axes de symétrie, et même rarement un. La figI.3 montre plusieurs types de profilés couramment fabriqués par formage à froid.

La mise au point de profils économiquement plus rentables favorise l'utilisation des profilés à froid dans la construction. On doit pourtant différencier deux types de produits fabriqués par pliage et par profilage à froid (figI.4). Les produits de type "sections" sont utilisés en général comme éléments principaux ou secondaires des charpentes (poutres et colonnes par exemple).



FigI.3 : Profilés formés à froid

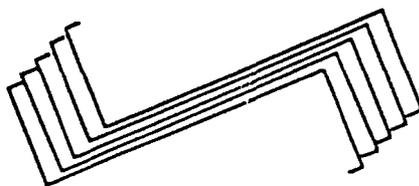


a) : Pliage par presse, b) : Pliage par plieuse

c) : Pliage par profilage

FigI.4 : Procédure de formation à froid

Les produits de type "tôles" servent pour la couverture et le bardage des constructions industrielles. Comme application bien connue des profilés à froid, on peut citer, entre autres pour les sections, les pannes U ou Z, les rayonnages pour le stockage industriel et les éléments de treillis. Ces profilés peuvent être utilisés en toitures ou en planchers, et également dans la réalisation de l'ossature principale du bâtiment, notamment dans le cas des petites portées (< 20 m). Il est intéressant de revenir sur l'intérêt qu'offre les profilés formés à froid vis à vis des autres sections. Du fait qu'ils peuvent être empilés (figI.5), ces profilés conduisent à une réduction du volume nécessaire à leur transport. Du point de vue résistance, les problèmes majeurs rencontrés dans l'utilisation de ces profilés sont leur faible résistance à la torsion. Du fait des faibles épaisseurs mises en oeuvre, il est difficile de résister à la torsion.

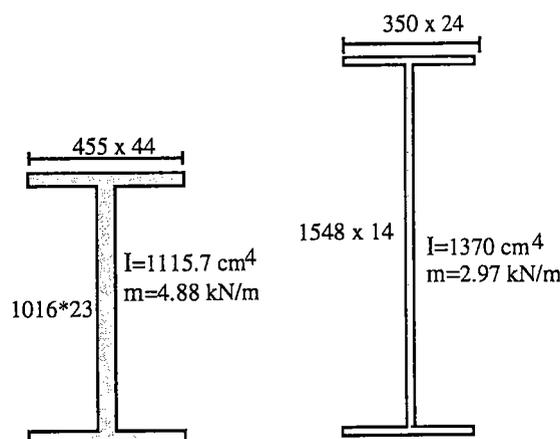


FigI.5 : Encombrement minimal des profilés formés à froid

I.A.3 Profilés reconstitués soudés

La fabrication des P.R.S (Profilés Reconstitués Soudés) se fait d'une manière plus simple avec l'assemblage de plaques à parois minces soit par soudage, ou bien au moyen de rivets. Par exemple, une poutre en I reconstituée à partir de plaques prédécoupées aux dimensions voulues, se révèle très économique, si on utilise de grandes hauteurs et de faibles épaisseurs d'âme, et que l'on évite les raidisseurs transversaux, dont la pose génère des coûts qui font perdre tout l'avantage dû au gain de poids inhérent à ce type de fabrication.

Les P.R.S sont des éléments tout à fait particuliers de la construction métallique, parce qu'ils permettent l'inertie variable que l'on peut employer pour l'âme. Ceci permet d'adapter la hauteur de l'âme de la poutre à la sollicitation. Souvent les poutres principales d'un pont, sont des P.R.S à inertie variable. Une autre caractéristique importante des P.R.S est l'utilisation des plaques minces pour la fabrication. Un rapport hauteur / épaisseur pour l'âme égal à 200 n'est pas rare. Ces profilés minces, de sections diverses (Z, U, ..), sont plus légers, et donc plus économiques, que les laminés usuels (IPE par exemple). Mais ce gain de poids, est obtenu au détriment de l'inertie, principalement de l'inertie transversale. La faible rigidité de la torsion est ainsi à l'origine de nombreux incidents. Ces inconvénients en font des profilés qui résistent très mal aux phénomènes d'instabilités. La figure (I.6) montre que pour une même inertie transversale, on obtient un profilé plus léger et plus élancé.



FigI.6 : Profilés laminés à chaud et profilés reconstitués soudés

I.B RAPPEL BIBLIOGRAPHIQUE DES DIFFÉRENTS MODÈLES

I.B.1 Introduction

Les éléments à parois minces et à sections ouvertes sont largement utilisés en construction métallique. Ce type de construction est parmi les plus modernes et les plus rationnels, puisqu'il permet d'atteindre le maximum de rigidité avec le minimum de poids.

On les qualifie de minces du fait que l'épaisseur est généralement très inférieure aux dimensions de la section droite (de l'ordre du 1/10), mais leur inconvénient est surtout leur très faible résistance à la torsion. En conséquence, on évite autant que possible de les solliciter et les calculer en torsion, en supposant que le chargement est appliqué au niveau de la ligne moyenne liant les centres de gravités des sections droites de l'élément.

Dans la pratique, les charges extérieures ne sont jamais appliquées au centre de gravité. La torsion est souvent présente et elle est la source des désordres créés dans les structures du fait de l'augmentation importante des déplacements. D'où l'intérêt que nous portons à la torsion.

Le but de ce chapitre est de rappeler les différents aspects de la torsion et de donner un outil mathématique fiable pour l'élaboration de l'élément fini de type poutre.

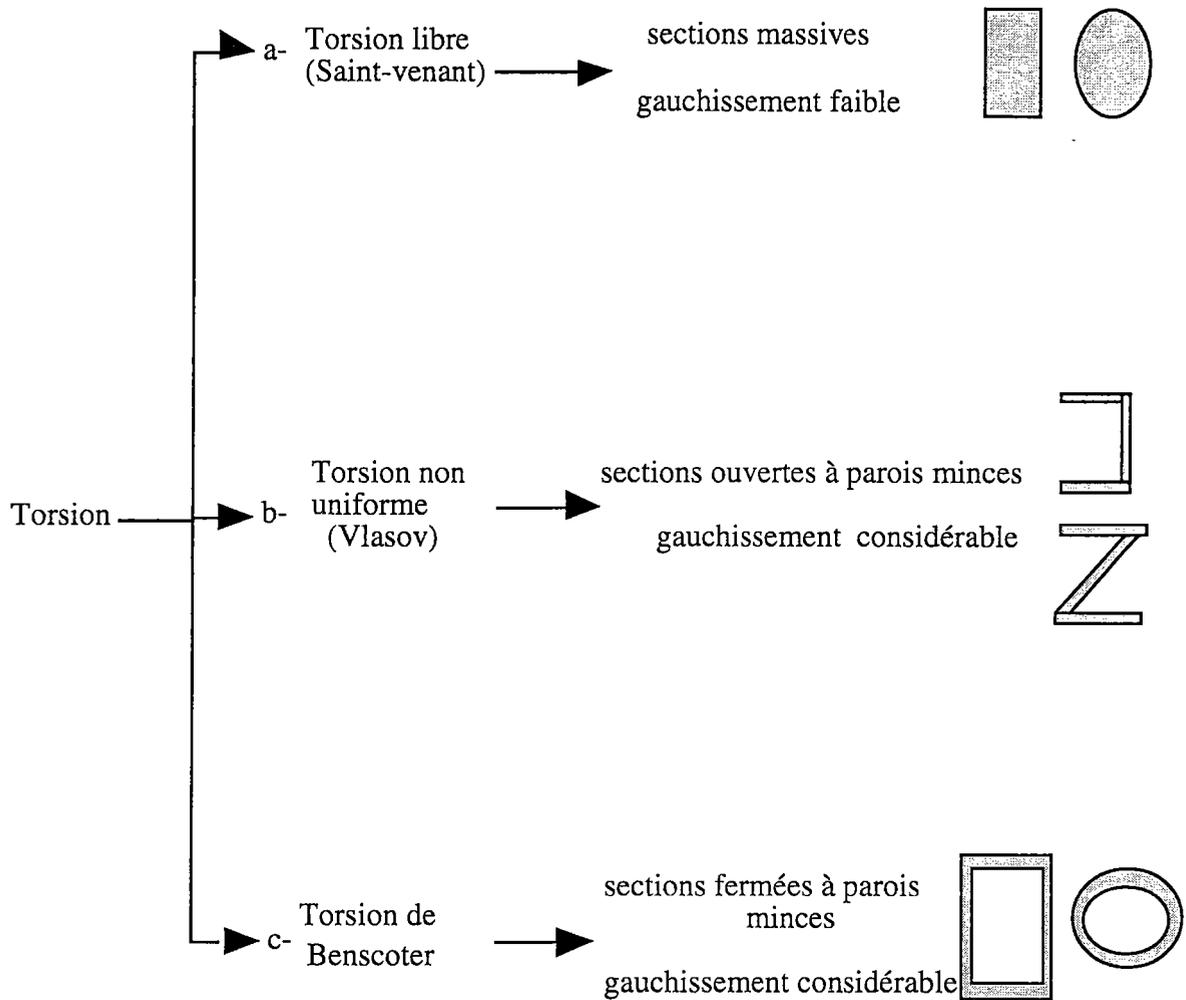
I.B.2 Généralités sur la torsion

Une poutre dans l'espace est soumise à la fois à la traction (ou la compression), à la flexion biaxiale et à la torsion. les deux premiers types d'efforts sont bien connus et maîtrisés depuis longtemps, la torsion fait apparaître un comportement plus complexe. On peut se risquer à avancer quelques raisons :

- l'hypothèse de la conservation des sections planes doit être abandonnée. En effet, en torsion, les éléments poutres subissent un gauchissement plus ou moins important.

- le comportement dépend fortement de la forme de la section suivant qu'elle est pleine massive, à parois minces ouverte ou fermée.

Des modèles de calcul en torsion sont présentés dans différentes références: [V1], [B4],[B5], [A1], [A2], [S1], [S2]. Ces modèles sont développés pour les différentes formes de sections pour tenir compte de leurs particularités vis à vis de la torsion. Ils peuvent être classés en trois catégories (FigI.7) :



FigI.7 : Différents modèles de calcul en torsion d'une poutre

a) Le modèle de la torsion uniforme est développé suivant les hypothèses de Saint-Venant. Pour une poutre sollicitée en torsion, le gauchissement est constant le long de la poutre. Les contraintes axiales σ_x dues à la torsion sont faibles ([B1],[B2], [T1]). Ce modèle est applicable dans le cas des sections massives et il est le plus connu dans le calcul des poutres.

b) Le modèle de torsion non uniforme de Vlasov. Il est utilisé pour le calcul en torsion des poutres à parois minces et section ouvertes ([B2],[L1],[V1]). Ce modèle est développé pour tenir compte du gauchissement qui est très important quand ces sections sont sollicitées en torsion. Pour le développement de ce modèle, les déformations de cisaillement dans le feuillet moyen de la paroi, dues à la torsion, sont négligées. Pour ces sections, l'effet du gauchissement est très important.

c) Le modèle de torsion de Bencoter où l'on tient compte des déformations de cisaillement transversal dans le feuillet moyen de la paroi dues à la torsion . Ce dernier modèle reste donc valable pour toutes les sections à parois minces ouvertes ou fermées [B5],[D3],[G1],[D4], [S2].

I.B.2.1 Torsion uniforme (saint-venant)

La théorie de la torsion des sections massives est développée par Saint-Venant en 1855. Dans ce modèle, on suppose que la section gauchit librement hors de son plan et le taux de torsion de la section est considéré constant. Ce modèle a été développé à partir de la généralisation du problème de torsion des poutres cylindriques (figI.8).

Lors de la torsion d'une poutre à section cylindrique, on considère l'équilibre d'un élément de longueur dx . Le seul déplacement est l'angle de torsion θ_x . Le moment de torsion est équilibré par les seules contraintes de cisaillement développées dans la section. Les sections d'extrémité de l'élément subissent la rotation $\theta_x(x)$ et $\theta_x+d\theta_x$. La déformation (tangentielle) en un point de la section est proportionnelle à la distance r du centre. En élasticité linéaire, l'équilibre de l'élément s'écrit:

$$M_x = \int_A \tau \cdot r \, dA = \int_A G r \frac{d\theta_x}{dx} \cdot r \, dA = G \frac{d\theta_x}{dx} \int_A r^2 \, dA$$

Avec G le module de cisaillement et $J = \int_A r^2 \, dA$ est le moment d'inertie polaire. Il est appelé aussi moment d'inertie de torsion uniforme.

La relation liant le taux de variation de torsion $\frac{d\theta_x}{dx}$ (appelé gauchissement) au moment de torsion M_x est donnée par :

$$\frac{d\theta_x}{dx} = \frac{M_x}{GJ} \quad (I.1)$$

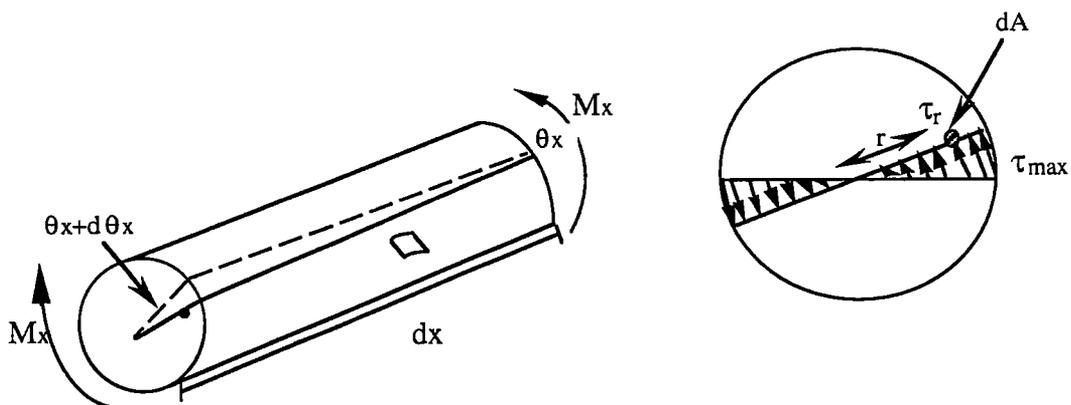
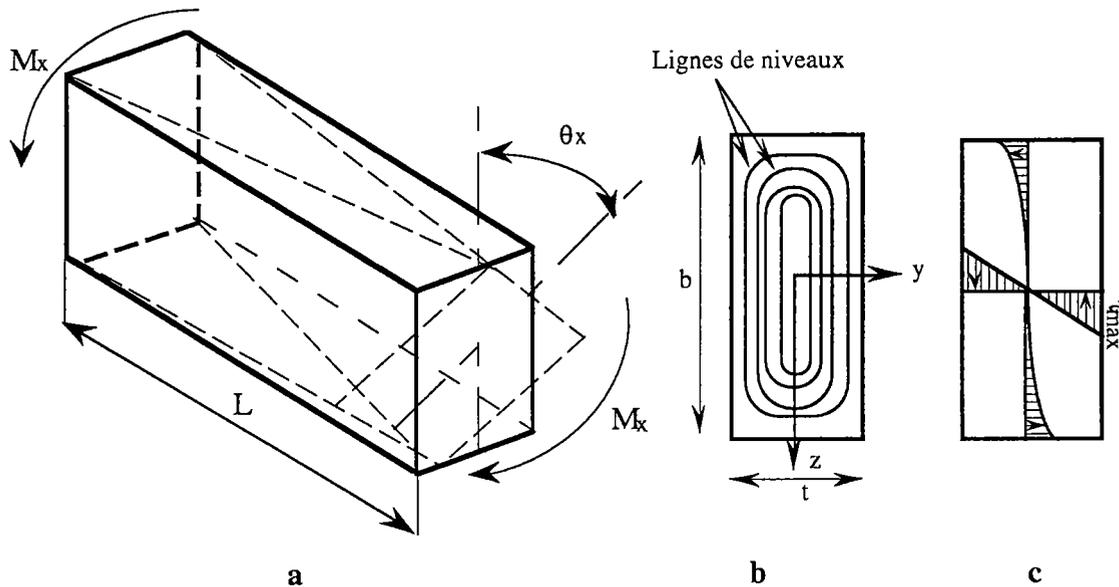


Fig I.8 : Torsion de Saint Venant

La solution de l'équation 1.1 donne un angle de torsion linéaire le long de la poutre.

La torsion des sections cylindriques de Saint-Venant a été étendue aux autres formes de sections massives, en utilisant l'analogie de membrane. On trouve ainsi la répartition des contraintes tangentielles le long de la section en fonction de sa forme. Ainsi pour un section rectangulaire (FigI.9), selon Zbirohowski-Koscia [Z1], [T2] et [M1], la variation des contraintes se fait suivant les lignes de niveaux de contraintes de cisaillement.



FigI.9 Répartition des contraintes tangentielles

La contrainte de cisaillement maximale a été donnée par [Z1], elle a pour expression :

$$\tau_{\max} = M_x \frac{t}{\alpha \frac{bt^3}{3}} = M_x \frac{3}{\alpha bt^2} \quad (I.2)$$

Où :

b est la hauteur de la section.

t la largeur de la section

α est un coefficient qui dépend du rapport b/t des dimensions de la section. La valeur de α varie de $\alpha = 0.624$ pour $b/t = 1$ à $\alpha = 1$ pour $b/t > 10$. La formule 1.2 peut s'étendre à des poutres ayant des sections transversales quelconques et en particulier, les profilés ouverts à parois minces (FigI.10).

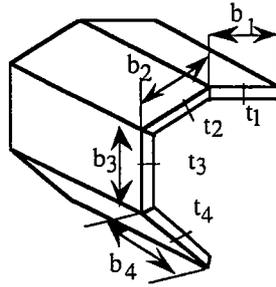


Fig I.10 Profil à paroi mince

La généralisation de l'équation I.2 s'écrit sous la forme :

$$\tau_{\max} = \frac{M_x t}{J} \quad (I.3)$$

où

$$J = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{b_k t_k^3}{3} \quad (I.4)$$

avec :

- n : Nombre du segment qui compose la section.
- b_k : Longueur du segment "k".
- t_k : Épaisseur du segment "k".

Dans le cas des profilés ouverts à parois minces $\alpha = 1$.

I.B.2.2 Torsion non uniforme (Vlassov)

a) Importance du gauchissement

La théorie générale de la torsion des poutres à sections ouvertes a été développée dans sa forme finale par V.Z Vlassov dans les années 1930 [V1].

Dans le cas de la théorie des poutres (théorie classique), les contraintes normales et tangentielles sont calculées à partir des éléments de réductions (N , T_y , T_z , M_y , M_z , M_x). Ces efforts sont calculés au niveau de la fibre moyenne, pour un chargement spatial. Les contraintes normales sont dues à l'effort normal N et aux moments fléchissants M_y et M_z , agissant autour des axes principaux de la section. Les contraintes tangentielles sont dues aux efforts de cisaillement T_y , T_z et au moment de torsion M_x .

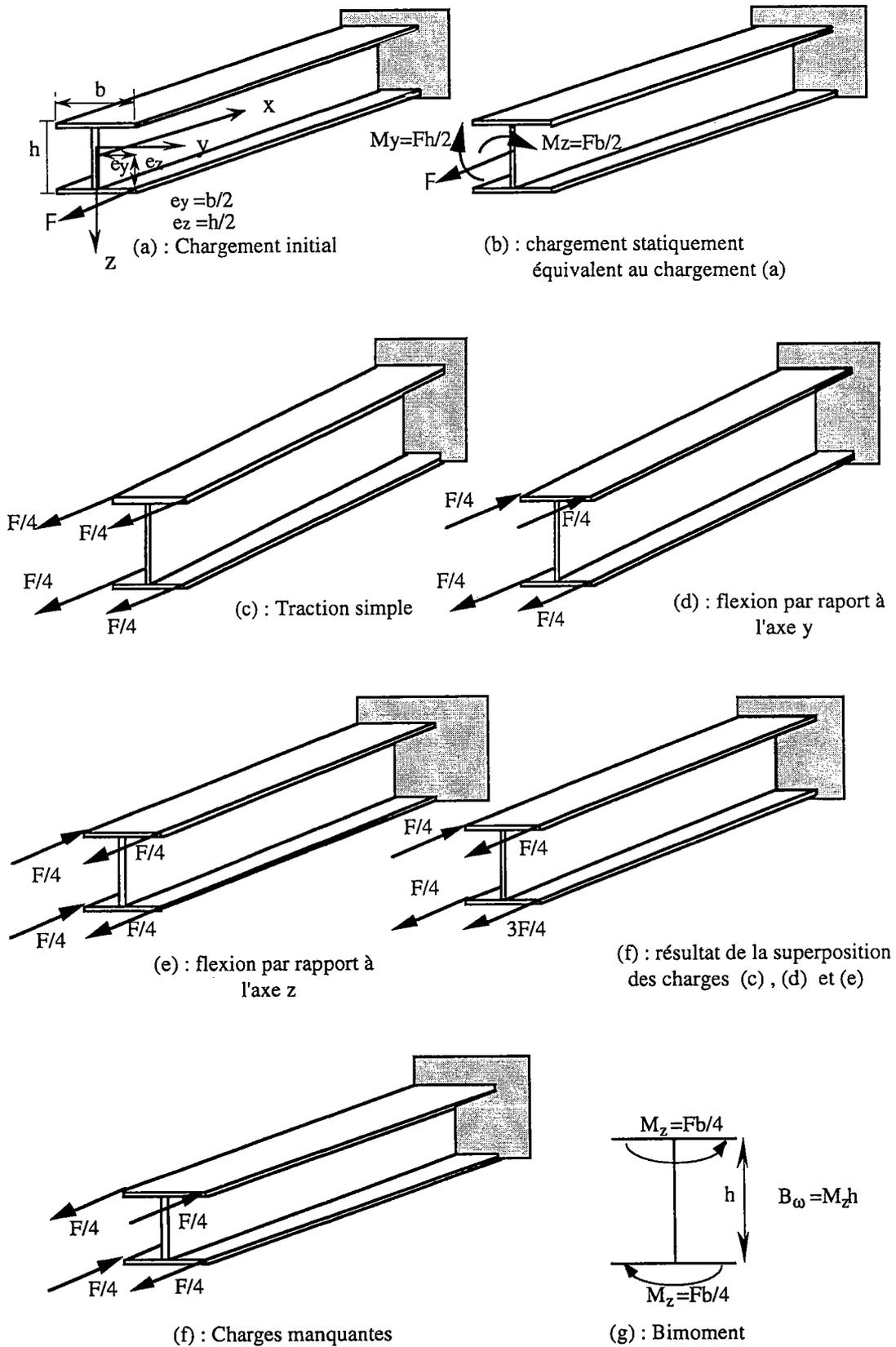
Dans le cas des profilés ouverts à parois minces type (I, U, C, Z), les différents points de la section peuvent avoir, en plus des déplacements régis par la torsion uniforme, des déplacements longitudinaux complémentaires, dûs au gauchissement de la section.

Dans ce même cas, la réduction des efforts au niveau de la ligne moyenne, doit prendre en compte l'effet du gauchissement, aussi bien pour les charges longitudinales que transversales.

Nous illustrons ce problème, en considérant une poutre console en I. A l'extrémité de la poutre est appliquée une force longitudinale F au niveau de la semelle inférieure. Les excentricités de la charge par rapport au centre de gravité sont $e_y = b/2$ et $e_z = h/2$ (Fig I.11-a). D'après la théorie classique, ce chargement ramené à la fibre moyenne, est statiquement équivalent à un effort normal $N = F$ et deux moments de flexion $M_y = Fe_z$ et $M_z = Fe_y$ (Fig I.11-b). La charge longitudinale donnant la traction seule est représentée par le chargement statiquement équivalent appliqué au niveau des semelles (Fig I.11-c). De la même manière, les charges longitudinales dues aux moments de flexion M_y et M_z sont représentées dans les figures (I.11-d et I.11-e.)

Lorsqu'on superpose les trois cas de chargement (Fig I.11-c, d et e), on trouve un état de chargement (Fig I.11-f) différent de la sollicitation initiale (Fig I.11-a). Pour retrouver le chargement initialement imposé, on doit ajouter celui de la Fig I.11-f. Une telle charge équivaut à deux moments fléchissants égaux et de signes contraires, agissant dans les deux plans des ailes de la poutre et provoquant leur flexion dans des sens opposés (Fig I.11-g), Vlassov [V1] l'a appelé Bimoment de dimension $(N.m^2)$ Par suite de cette double flexion, les sections transversales de la poutre subiront un gauchissement.

On voit que dans le cas des sections ouvertes, la réduction des charges par la théorie classique n'est pas suffisante. En présence du gauchissement, on doit calculer un effort supplémentaire appelé bimoment [V1]. De ce fait le nombre d'éléments de réduction devient sept ($N, T_y, T_z, M_y, M_z, M_x, B$).



FigI.11: Réduction des charges selon Vlassov

b) Équation d'équilibre en torsion

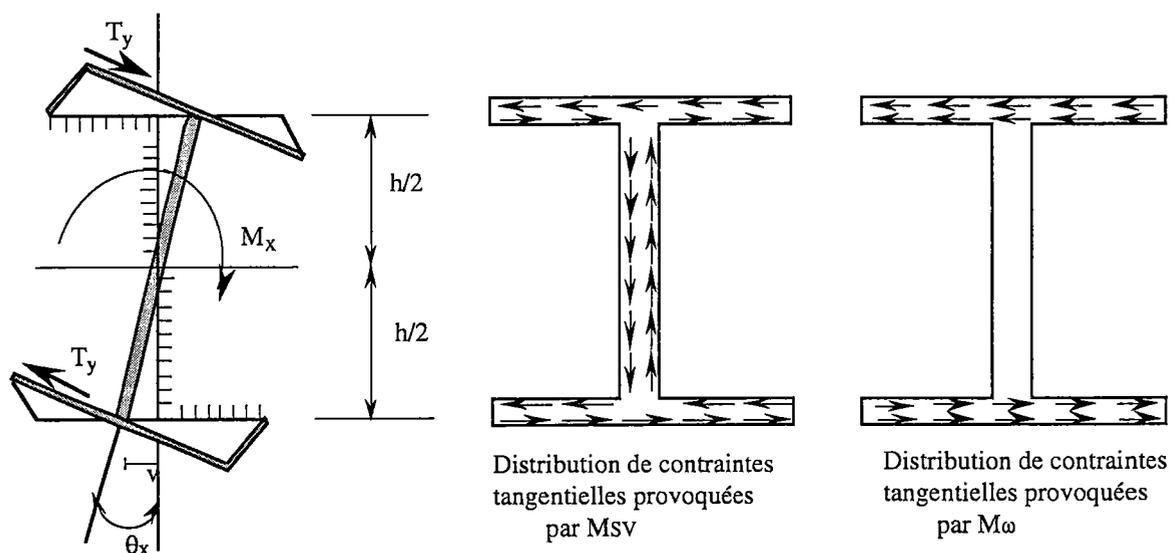
Dans le cas des sections ouvertes à parois minces (section en I) sollicitée en torsion, on remarque que, en plus de l'angle de torsion, il y a un déplacement transversal v qui provoque la flexion et le cisaillement des semelles (Fig I.12). Le moment de torsion est équilibré par les contraintes tangentielles de Saint Venant et par le moment dû aux efforts de cisaillement T_y dans les semelles. Ceci se traduit par:

$$M_x = M_{SV} + M_{\omega} = GJ \frac{d\theta_x}{dx} + T_y h \quad (I.5)$$

Où :

M_{SV} : le moment de torsion de Saint venant, il est donné par l'équation I.1

M_{ω} : le moment de la torsion gauchissement.



FigI.12: distribution des contraintes de cisaillement dans une section en I

Dans l'hypothèse des petits déplacements, on peut exprimer v en fonction de θ_x par la relation :

$$v = \theta_x h / 2 \quad (I.6)$$

Le déplacement latéral de la semelle v est relié au moment fléchissant M_z par :

$$M_z = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2} \quad (I.7)$$

I_z est le moment d'inertie d'une semelle par rapport à l'axe z .

L'effort de cisaillement T_y sollicitant les semelles est lié au moment de flexion M_z , par

$$T_y = \frac{dM_z}{dx} \quad (I.8)$$

En tenant compte de (I.6) et (I.7), (I.8) devient :

$$T_y = -EI_z \frac{h}{2} \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (I.9)$$

Le moment de la torsion de gauchissement développé au niveau d'une semelle s'écrit :

$$M_\omega = T_y h \quad (I.10)$$

Donc M_ω s'écrit :

$$M_\omega = T_y h = -EI_z \frac{h^2}{2} \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (I.11)$$

On définit I_ω comme étant le moment d'inertie sectorielle de dimension m^6 :

$$I_\omega = \frac{I_z h^2}{2} \quad (I.12)$$

En remplaçant (I.12) par sa valeur, l'équation (I.11) devient

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (I.13)$$

En fin, l'équation différentielle reliant le moment de torsion M_x et l'angle de torsion est donnée par :

$$M_x = M_{SV} + M_\omega = GJ \frac{d\theta_x}{dx} - EI_\omega \frac{d^3\theta_x}{dx^3} \quad (I.14)$$

I_ω est le moment d'inertie de gauchissement, EI_ω est la rigidité de gauchissement de la section.

J est le moment d'inertie de torsion uniforme, son expression est déjà donnée dans (I.4)

Ainsi M_{SV} provoque l'apparition d'une première distribution de contraintes tangentielles, en accord avec la théorie de Saint Venant et M_ω d'une seconde à cause du gauchissement de la section. La solution de l'équation I.14 donne un taux de torsion non constant le long de la poutre. Les fonctions hyperboliques sont souvent utilisées pour résoudre ces équations [V1], [M2].

I.B.2.3 TORSION DE BENSCOTER:

S.U. Bencoter [B4], [B5],[D3], [D4], [G1], [S2] a étudié le problème de la torsion en distinguant les déformations de cisaillement transversal dues à la torsion uniforme (Saint-Venant) de celles dues au gauchissement (torsion non uniforme).

Une fonction de gauchissement ψ distincte de $\theta_{x,x}$ est introduite. Le déplacement axiale due à la torsion est alors définie comme suit:

$$u = \omega(s, \zeta) \psi(x) \quad (I.15)$$

La fonction de répartition des déplacements axiaux $\omega(s, \zeta)$ est identique à celle adoptée en torsion de Vlassov, par contre l'amplitude de ces déplacements axiaux n'est plus proportionnelle à l'accroissement de l'angle de torsion mais à la fonction $\psi(x)$ qui permet de prendre en compte des déformations de cisaillement transversal sur le feuillet moyen qui peuvent jouer un rôle pour les poutres courtes et encastées [C5], et pour les poutres à parois minces et à sections fermés. Les résultats obtenus en [C4] indiquent cependant que les déformations de cisaillement sur le feuillet moyen peuvent influencer plus les déplacements de flexion que ceux de torsion.

De ville de Goyet [D3] a traité quelques exemples et a comparé les trois modèles de torsion pour des sections fermées. Il a comparé les résultats analytiques aux résultats d'un modèle en éléments finis de coques. Les résultats obtenus montrent l'efficacité du modèle de Bescoter.

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera aux profilés à parois minces et à sections ouvertes.

Le modèle de Vlassov est adopté.

I.C HYPOTHÈSES ET RELATIONS ASSOCIÉES AU GAUCHISSEMENT SELON LA THÉORIE DE VLASSOV

Dans le calcul des profilés ouverts à parois minces sous l'action combinée de la flexion et de la torsion, on a besoin, en plus, de la connaissance des caractéristiques géométriques utilisées par la théorie classique: position du centre de gravité, l'aire de la section et les moments d'inertie statiques et quadratiques, des caractéristiques géométriques de la torsion non uniforme introduites par Vlassov tels que: le centre de torsion, la coordonnée sectorielle, le moment d'inertie de torsion uniforme et de gauchissement.

Ci après, on s'intéresse au calcul des profilés à parois minces et à sections ouvertes. La théorie de Vlassov est adoptée dans les calculs.

I.C.1 Hypothèses de Vlassov

Soient deux bases cartésiennes. La première base est fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de coordonnées x, y, z (Fig I.13- a). La deuxième $(\vec{i}, \vec{t}, \vec{n})$ est mobile, de coordonnées (x, s, ζ) (Fig I.13- b). Soit C le centre de la torsion de coordonnées (y_c, z_c) et G le centre de gravité de la section de coordonnées (y_G, z_G) . On nomme l'axe élastique de la poutre comme étant le lieu des centres de torsion et l'axe neutre celui des centres de gravité.

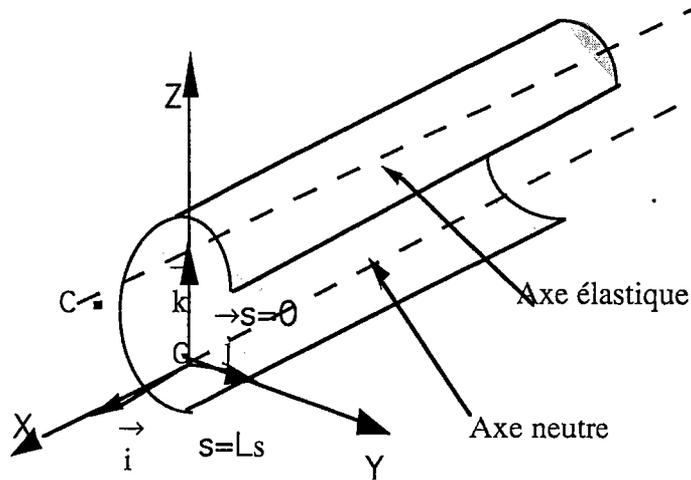
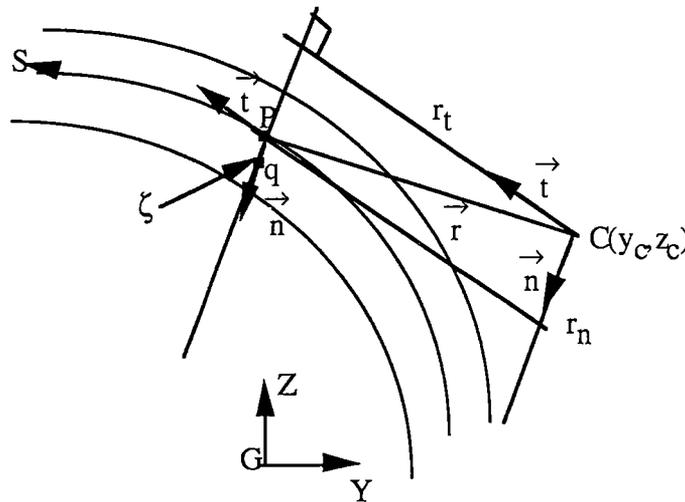


Fig I.13- a : poutre à parois minces ouvertes: repère de définition



$$\begin{aligned}
 \vec{GC} &= y_c \vec{i} + z_c \vec{j} & \vec{r}_t &= \vec{r} * \vec{t} & (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) & \text{base cartésienne fixe} \\
 & & & & & \text{coordonnées } (x, y, z) \\
 \vec{r} &= \vec{CP} & \vec{r}_n &= \vec{r} * \vec{n} & (\vec{i}, \vec{t}, \vec{n}) & \text{base cartésienne mobile} \\
 \vec{Pq} &= \zeta \vec{n} & & & & \text{coordonnées } (x, s, z) \\
 & & & & \omega_s(s) &= \int_0^s r_n ds \text{ coordonnée d'aire sectorielle}
 \end{aligned}$$

Fig I.13- b : repère mobile et relations géométriques relatives

Les hypothèses de Vlassov sont les suivantes:

1- On néglige les déformations de cisaillement dans le feuillet moyen de la paroi, dues à la torsion:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x\zeta} &= 0 & \forall s \text{ et } \zeta \\ \varepsilon_{xs} &= 0 & \forall s \text{ et } \zeta = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

2- La section transversale est indéformable dans son plan (la forme de la section droite est conservée)

3- Matériau homogène et isotrope.

I.C.2 Moments d'inertie

Les moments statiques et quadratiques classiques (liés à la théorie des poutres), sont donnés par les relations suivantes :

$$A = \int_A dA \quad , \quad S_y = \int_A z dA \quad , \quad S_z = \int_A y dA \quad (\text{I.17})$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (\text{I.18})$$

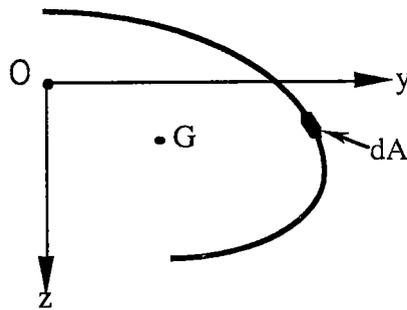


Fig I.14. Profilé ouvert.

Dans l'analyse des poutres à parois minces et profils ouverts, les coordonnées d'un point se trouvant sur le contour de la section transversale, sont repérées par rapport aux axes principaux centraux. La position de l'origine et la direction de ces axes principaux sont définies par les trois conditions suivantes :

$$S_y = \int_A z dA = 0 \quad (\text{I.19-a})$$

$$S_z = \int_A y dA = 0 \quad (\text{I.19-b})$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \quad (\text{I.19-c})$$

Les deux équations (I.19-a et I.19-b) sont utilisées pour localiser l'origine des coordonnées principales. Ce point particulier est appelé: "Centre de gravité de la section transversale". L'équation (I.19-c) donne la direction des axes principaux.

I.C.3 Surface sectorielle

La coordonnée sectorielle ω est une variable qui intervient dans le calcul de la torsion non uniforme. Elle se réfère par rapport à la ligne moyenne de la section transversale du profilé ouvert. La coordonnée sectorielle du point M , mesurée à partir du centre de torsion C et du point initial M_1 (en $s=0$) est représentée par deux fois l'aire formée par les deux segments CM , CM_1 et l'arc MM_1 (FigI.15).

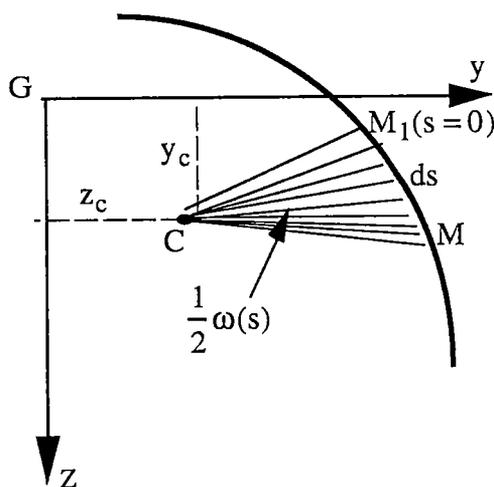


Fig I.15: Coordonnée sectorielle

Elle s'écrit comme suit (fig.I6-b): $\omega(s, \zeta) = \omega_s(s) + \omega_D - r_t(s)\zeta \quad (\text{I.20})$

où

$$\omega_s(s) = \int_s r_n ds = \int_s h ds \quad \omega_D = \omega(s=0) \quad (\text{I.21})$$

De nombreux auteurs [A1], [B8], [G3],[K1], [M3] négligent le terme linéaire en ζ dans l'expression de ω . Ce terme linéaire contribue à ce qu'on appelle le gauchissement

secondaire [O1]. Il peut jouer un rôle pour certaines sections comme les cornières et les section en T où la coordonnée sectorielle est uniquement fonction du gauchissement secondaire. Car pour ces sections la coordonnée sectorielle principale est nulle ($\omega(s) = 0$).

Le moments d'inertie de la coordonne sectorielle ω dite moment d'inertie sectorielle s'écrit comme suit:

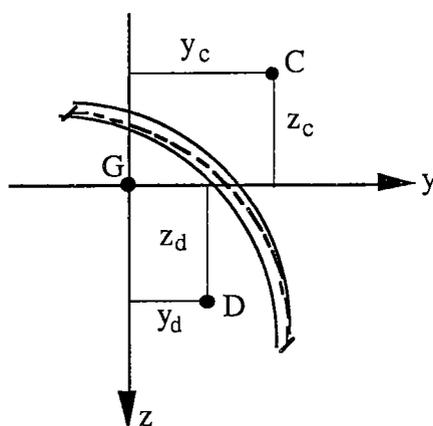
$$I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (I.22)$$

I.C.4 Centre de torsion

Le centre de torsion est un point caractéristique de la section transversale mince, ouverte ou fermée. Lorsque les charges appliquées à la poutre ne passent pas la ligne élastique, la flexion de la poutre s'accompagne nécessairement de la torsion.

Le centre de torsion a pour propriétés de rendre la surface sectorielle ω orthogonale aux coordonnées (y, z) , mesurées dans les axes principaux centraux d'inertie. Ce qui se traduit par :

$$\int_A y\omega dA = 0 \quad \int_A z\omega dA = 0 \quad (I.23)$$



FigI.16 Centre de torsion

Les coordonnées du centre de torsion sont données comme suit:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= y_d + \frac{I_z \int_A \omega_d z dA - I_{yz} \int_A \omega_d y dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \\ z_c &= z_d - \frac{I_y \int_A \omega_d y dA - I_{yz} \int_A \omega_d z dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \end{aligned} \right\} \quad (I.24)$$

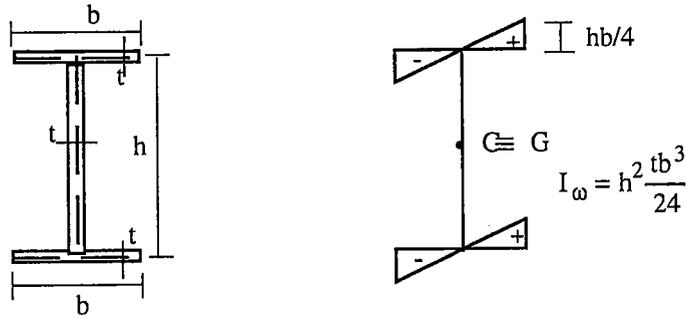
Dans ces relations, ω_d est la coordonnée sectorielle calculée par rapport à un pôle auxiliaire D (fig.I.16). Dans le cas particulier où les axes y et z de la section sont des axes principaux, l'équation (I.24) devient :

$$\left. \begin{aligned} y_c &= y_d + \frac{\int \omega_d z dA}{I_y} \\ z_c &= z_d - \frac{\int \omega_d y dA}{I_z} \end{aligned} \right\} \quad (I.25)$$

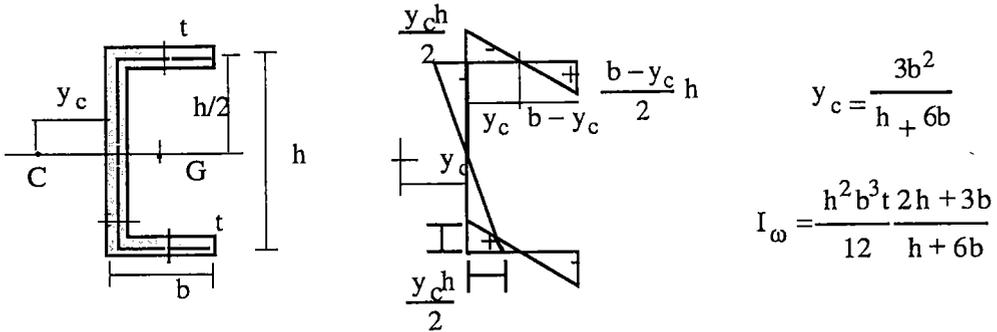
Il est aisé de se rendre compte que pour les profilés ouverts simples ou composés, ayant un axe de symétrie dans la section transversale, le centre de torsion se trouve sur cet axe. Si la section a deux axes de symétrie le centre de torsion et de gravité se trouvent à l'intersection de ces axes.

I.C.5 Caractéristiques géométriques de la torsion pour quelques sections ouvertes

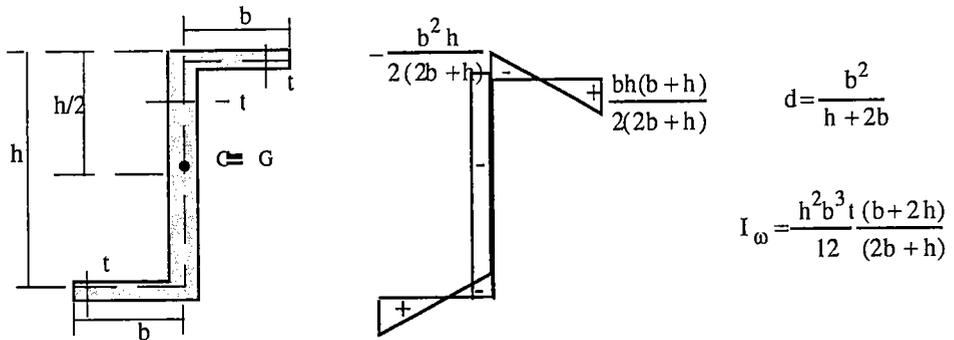
Pour les profilés qui suivent, on donne la répartition de la coordonnée sectorielle principale, la position du centre de torsion et l'expression du moment d'inertie de gauchissement en fonction des caractéristiques géométriques de la section.(Fig I.17 a, b, c, d). Pour les sections en I, C et Z, l'effet du gauchissement secondaire est faible. La coordonnée sectorielle est calculée à partir de la coordonnée sectorielle principale de Vlassov. Pour les sections L et T la coordonnée sectorielle principale de Vlassov est nulle, seule la coordonnée sectorielle secondaire intervient.



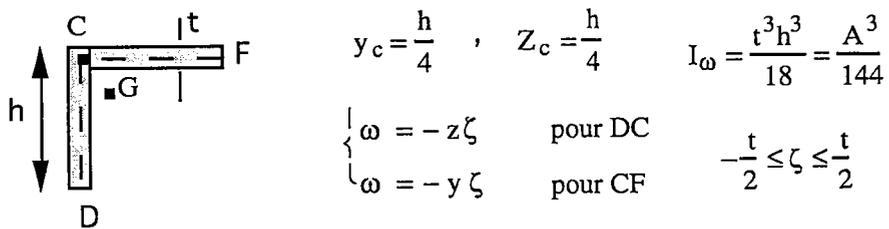
a: Profilés en I symétrique



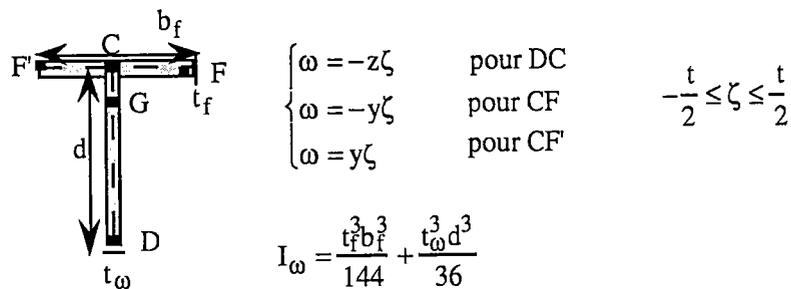
b: Section en C



c: Profilés en Z



d: Cornière



e : Profilés en T Fig.I.17: Caractéristiques géométriques de gauchissement des sections ouvertes.

I.C.6 Bimoment

Vlassov [V1] a introduit une nouvelle quantité statique appelée "bimoment" définie comme étant un couple de moments de flexion égaux, mais opposés, agissant dans deux plans parallèles. Il se produit lors de l'application des charges transversales ou longitudinales suite, au gauchissement.

a) Bimoment causé par les charges longitudinales

Le bimoment dû à une force longitudinale F appliquée en un point k d'une section (fig.I-18) de la poutre est donné par [V1]:

$$B = F\omega_k \quad (I.26)$$

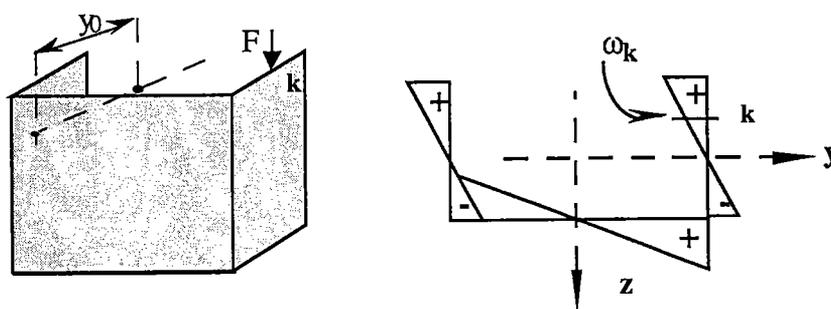


Fig I.18: Bimoment causé par une charge longitudinale

Où ω_k est la coordonnée sectorielle de la section au point k . À partir de cette relation, on remarque que le bimoment dû à une force longitudinale dépend de la coordonnée sectorielle ω_k du point d'application de la charge.

Soit une poutre à section en C, sollicitée par une force normale F (figI.19). La variation de la coordonnée sectorielle ω est donnée par la figure (I.19). Le bimoment maximal est celui correspondant au point où ω est maximale. Dans le cas de la section C, la coordonnée sectorielle maximale est située aux extrémités des semelles et les points de liaison aux semelles. Si la charge est appliqué en S_2 , le bimoment est $B = F\omega_{s_2}$. Si la charge est appliquée en S_1 ou S_3 où ω est nul, le bimoment est nul.

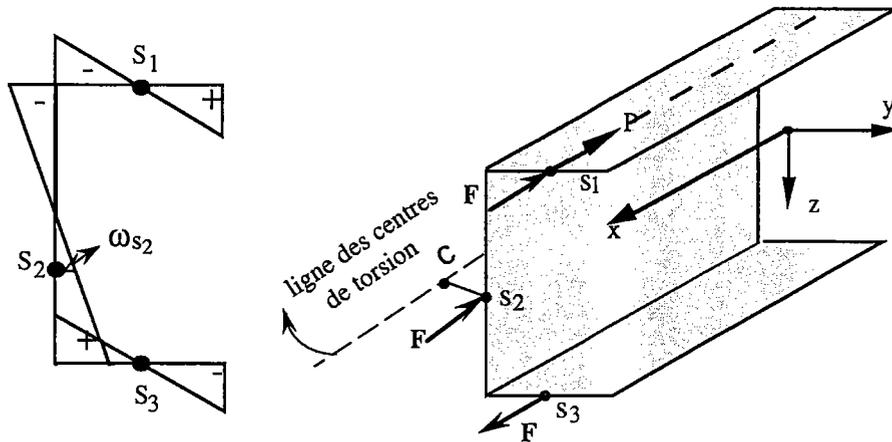


Fig I.19: Répartition de la coordonnée sectorielle

b) Bimoment causé par les charges transversales

Généralement, les sections gauchissent toujours quand elles sont sollicitées en torsion induite par les charges transversales excentrées par rapport à la ligne élastique. Ainsi le gauchissement est accompagné nécessairement par un bimoment. Le bimoment est lié au gauchissement par la relation suivante:

$$B_{\omega} = EI_{\omega} \theta_x'' \quad (I.27)$$

Cette relation est équivalente à celle liant les moments de flexion à la courbure ($M_y = EI_y w''$). Aussi, le bimoment peut être calculé à partir des déformations normales par intégration le long de la section droite. On a:

$$B_{\omega} = \int_A E \omega \epsilon_x \quad (I.28)$$

Cette équation est aussi équivalente à celle donnée par la théorie classique ($M_y = \int_A E z \epsilon_x$).

c) Exemples

Pour illustrer l'influence de l'excentricité et le type de chargement sur le bimoment, on prend des poutres dont les sections transversales sont constituées d'un IPE200 et d'une section en Z (Fig. I.20).

La poutre de section en Z est sollicitée par une force longitudinale $F=120$ kN passant par le centre de gravité. Comme la coordonnée sectorielle n'est pas nulle au centre de gravité de la section transversale de la panne Z, l'effort normal F provoque le gauchissement de la section. La valeur du bimoment est calculée par l'équation (I.26) et son intensité est:

$$B = F\omega_G = 120000 \times 4.119 \times 10^{-04} = 49.4 \text{ Nm}^2.$$

La figure (I.21), donne la variation du bimoment le long de la poutre suivant la solution de Vlassov. On constate que le bimoment est maximale au niveau des appuis. Sa valeur est quasiment nulle à mi travée.

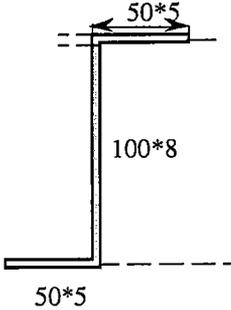
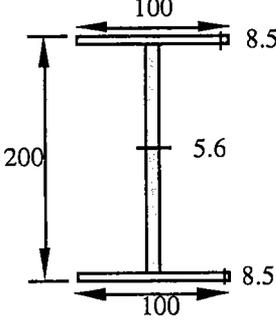
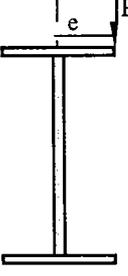
	$A = 1.22 \cdot 10^{-03} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6094 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 3.2444 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 2. \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ $I_\omega = 5.25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$
	$A = 9.9026 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6284 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 1.5805 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 8.9304 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 3.5137 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$
 <p>Charge appliquée avec une excentricité $e=25\text{mm}$</p>	 <p>Charge appliquée avec une excentricité $e=50 \text{ mm}$</p>

Fig I.20: Caractéristiques géométriques des sections utilisées dans le calcul

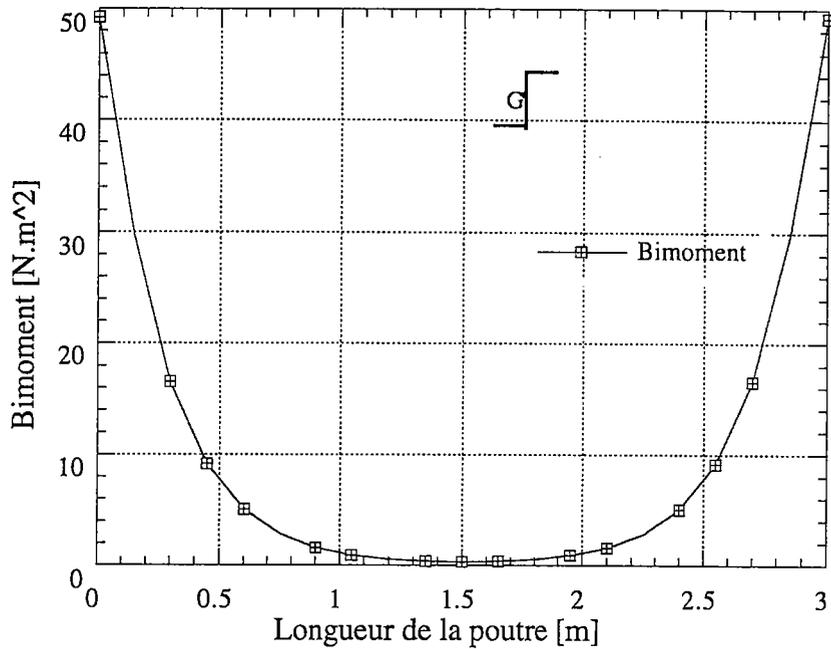
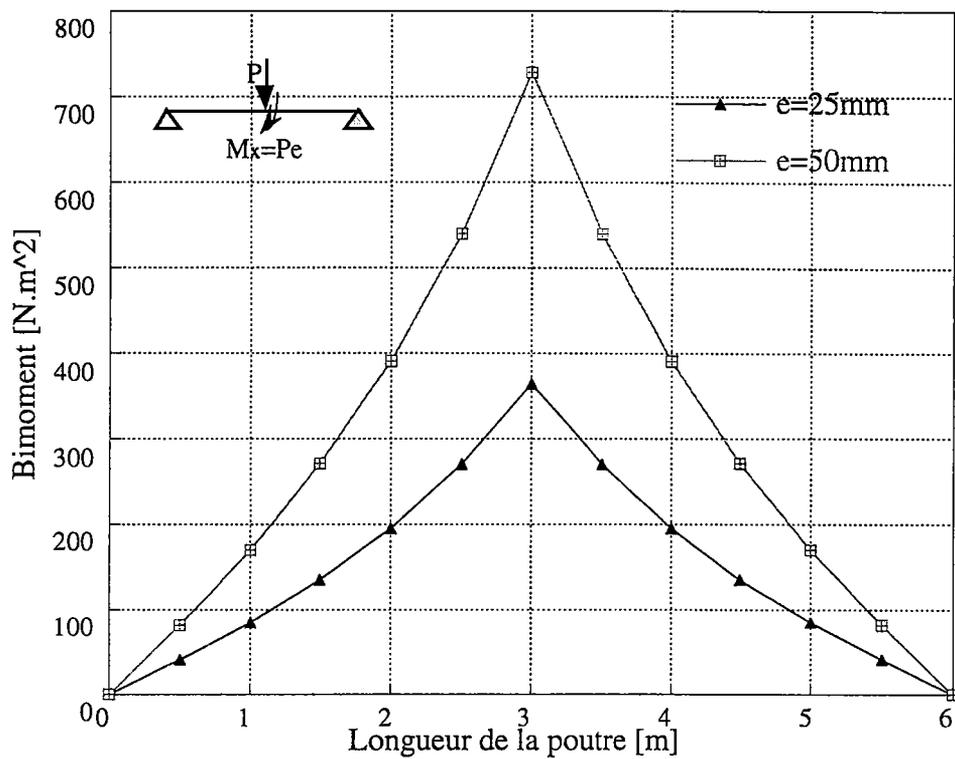


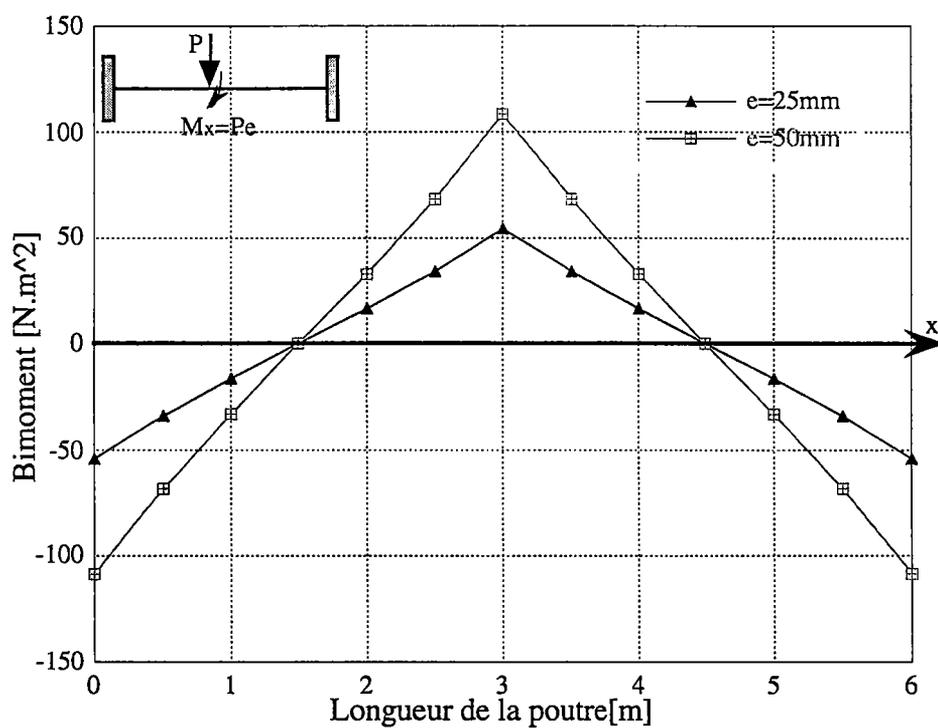
Fig I.21: Variation du bimoment le long d'une poutre de section en Z.

La poutre en IPE200 est sollicitée, soit par une charge concentrée ($P = 3500 \text{ N}$), soit par une charge répartie ($q = 3500 \text{ N/m}$). Pour avoir de la torsion, on suppose que les charges sont excentrées par rapport à l'âme. La valeur de l'excentricité e est de 25mm et 50mm. Pour les conditions aux limites, nous considérons une poutre bi-articulée en flexion-torsion, une poutre bi-encastée et une poutre console. La portée des poutres sur deux appuis est de 6m, celles de la poutre console est de 2m.

Les figures I.22 (a, b, c, d, e et f) donnent la variation du bimoment le long de l'axe de la poutre en fonction de l'excentricité, pour différents chargements et conditions d'appuis. Ces courbes sont obtenues par la méthode analytique de Vlassov [V1].

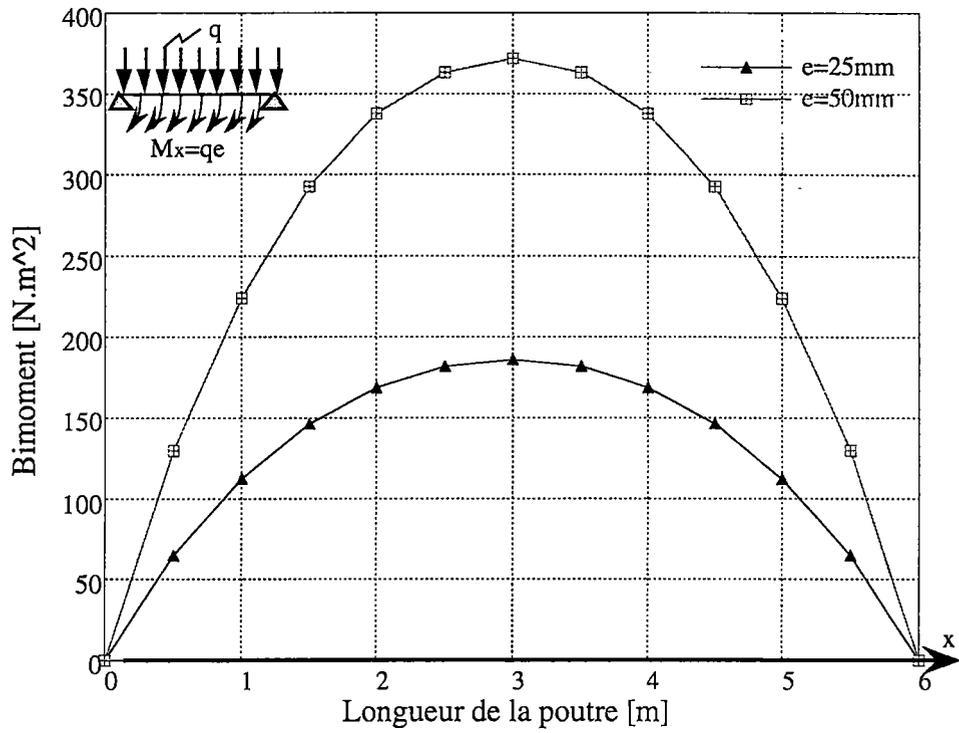


(a)

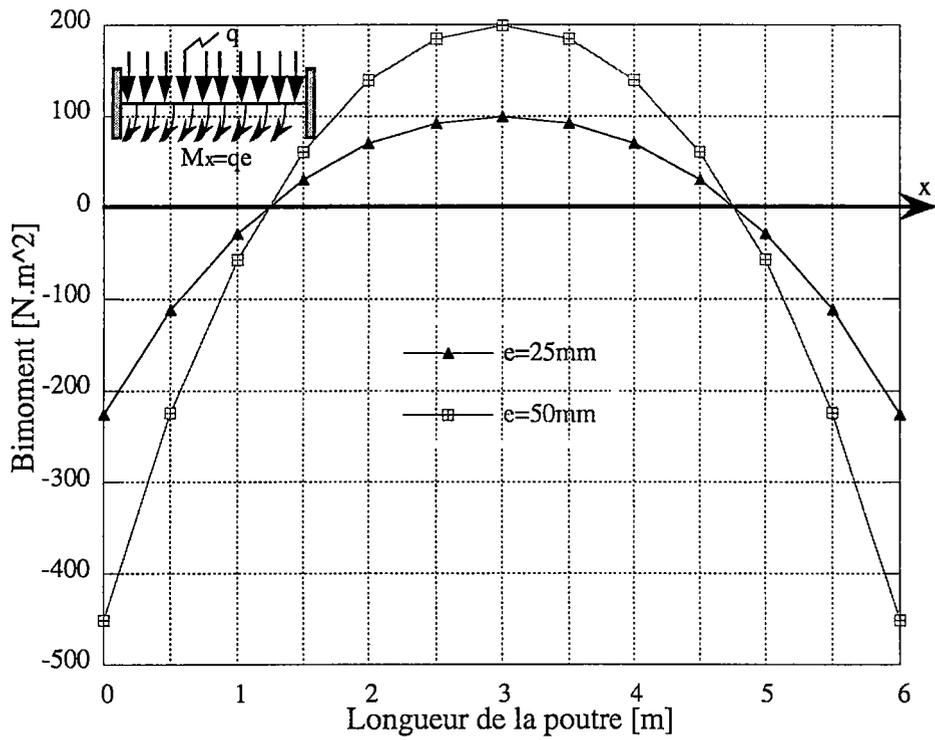


(b)

Fig I.22

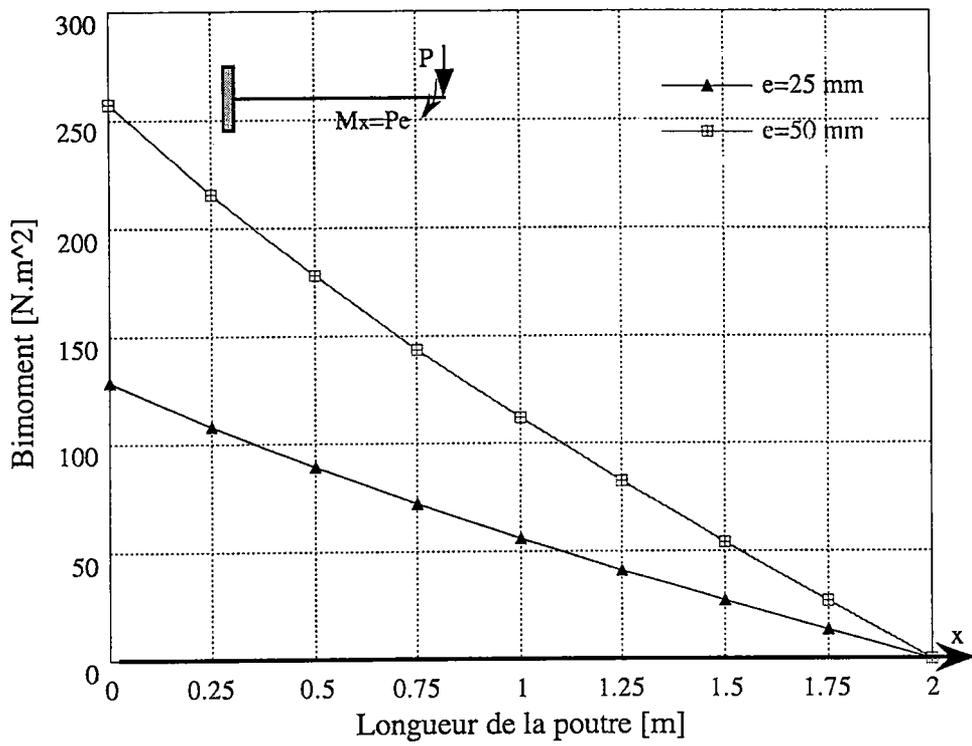


(c)

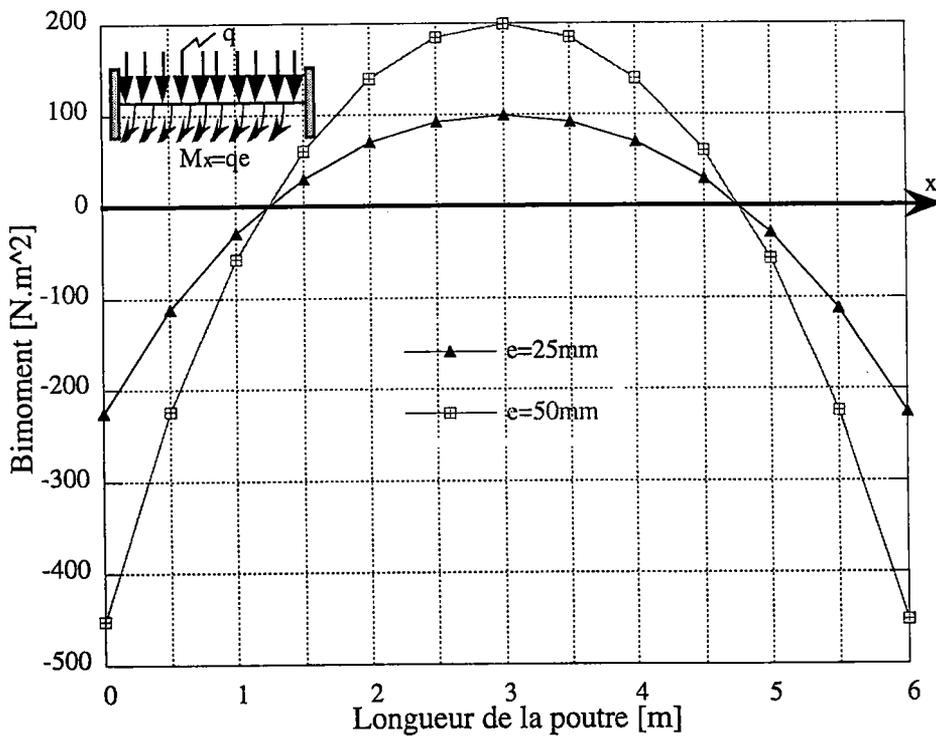


(d)

Fig I.22



(e)



(f)

FigI.22 : Variation du bimoment le long de la poutre en fonction de l'excentricité.

Le bimoment est proportionnel à l'excentricité. Ainsi, ce paramètre a une grande influence sur le bimoment qui peut atteindre des valeurs importantes.

Dans le cas des poutres bi-articulées, le bimoment atteint une valeur maximale au milieu de la travée et nulle aux appuis (figures I.15-a et I.15c). Pour les poutres bi-encastées, les valeurs maximales sont obtenues en travée et aux appuis (figures I.15-b et I.15-d).

En fin, dans le cas des poutres consoles, le bimoment varie hyperboliquement. Il diminue en allant de l'encastrement vers l'extrémité libre (figures I.15-e et I.15-f)

I.D CONCLUSION

Dans le calcul des poutres spatiales, la torsion joue un rôle très important et non négligeable. Dans ce chapitre on a présenté les différents modèles théoriques de la torsion en montrant à chaque fois leurs domaines de validité :

-La torsion de Saint-Venant est applicable pour les sections massives.

-La torsion de Bencotter a introduit une variable indépendante $\psi(x)$ au lieu de $\theta_{x,x}$ ce qui permet de prendre en compte des déformations de cisaillement transversal dans le feuillet moyen. Ces déformations peuvent jouer un rôle pour les poutres courtes à sections ouvertes, encastées et pour les poutres à parois minces et à sections fermées

- La torsion de Vlassov néglige les déformations de cisaillement transversal. Ceci est valable pour le cas des poutres à parois minces et à sections ouvertes.

Dans ce chapitre on a donné une importance particulière à cette théorie qu'on adoptera dans les chapitres qui suivent. La théorie de Vlassov fait appel à de nouvelles quantités cinématique, statiques et géométriques tel que:

-Le gauchissement représente le septième degré de liberté dans le vecteur déplacement

-Le bimoment peut être interprété comme un moment de second ordre. Il représente l'ensemble des contraintes dues au gauchissement ayant tendance à empêcher la torsion pure. Cette nouvelle variable statique représente le septième élément de réduction dans le vecteur des forces. Il peut être engendré aussi bien par les charges transversales que par les charges longitudinales.

II.A ÉLÉMENTS FINIS DES POUTRES À PAROIS MINCES EN TORSION

II.A.1 Introduction

L'objectif de cette partie est de modéliser des éléments unidimensionnels de poutre à parois minces et à sections ouvertes en torsion par la méthode des éléments finis.

Suite à l'étude bibliographique de ce travail on adopte la torsion non uniforme des poutres à parois minces et à sections ouvertes selon le modèle de Vlassov. On utilise la méthode des éléments finis pour développer deux éléments de poutre droite unidimensionnelle. Le premier utilise des fonctions d'interpolation hyperbolique. Le deuxième utilise des fonctions d'interpolation polynomiales.

De nombreux modèles d'éléments finis basés sur le modèle de Vlassov ont été développés dans différents travaux [L2], [S1], [B2], [D2], [B6].

Dans [C5] la matrice de rigidité $[K]$ a été développée pour les sections à parois minces fermées où la base polynomiale cubique a été utilisée. Les auteurs des travaux [C5], [C6] ont introduit une variable indépendante ψ au lieu de $\theta_{x,x}$ pour tenir compte des déformations de cisaillement transversales dans le feuillet moyen. Ces déformations peuvent jouer un rôle important dans le cas des poutres à parois minces courtes et encastrées. (Modèle de Benscoter) [B5].

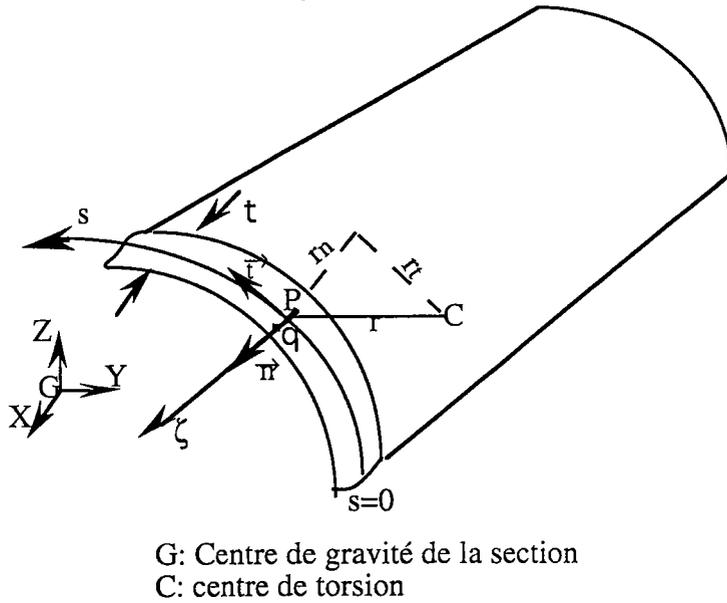
Les auteurs de [B1] et [K1] ont suivi les travaux de [T3]. Ils ont modélisé un élément 3D de type C^0 qui prend en compte les déformations de cisaillement dues à la torsion. Quelques autres références sont données dans la bibliographie. Notons que des livres intéressants pour étudier la torsion sont donnés dans [B1], [T2], [K1]. Dans la référence [B1] les auteurs ont employé un modèle des éléments finis des poutres en torsion tandis que [T2], [K1] ont utilisé le modèle analytique de la poutre en torsion.

II.A.2 Modèle de Vlassov pour les poutres à parois minces et à sections ouvertes

Dans ce paragraphe, on établit les formulations essentielles élastique pour obtenir l'équation de travail virtuel qui est nécessaire pour calculer la matrice de rigidité de l'élément poutre sollicité en torsion. Toutes les formulations sont basées sur le modèle de Vlassov qui néglige les déformations de cisaillement transversal dans le feuillet moyen de la paroi due à la torsion (équation (I.6)). Pour la formulation de la matrice de rigidité, on ne considère que la torsion de la poutre et on suppose connus les termes dus à la flexion et à l'effort normal.

II.A.2.1 Cinématique des poutres à parois minces en torsion

Considérons une poutre droite dont l'axe longitudinal est l'axe X et les axes principaux sont respectivement l'axe Y et Z. Soit C le centre de torsion et G le centre de gravité de la section. A chaque point P appartenant à la surface moyenne de la section, nous définissons un repère local $(\vec{i}, \vec{t}, \vec{n})$ associé aux coordonnées (x, s, ζ) et un repère fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé aux coordonnées (x, y, z) (Fig.II.1). L'origine du repère local est en G. L'origine du repère mobile est un point P situé sur la fibre moyenne du contour de la section.



FigII.1: Relations géométriques pour une poutre à parois minces

Les déplacements

En tenant compte du gauchissement, le champ de déplacement d'un point quelconque de la section $q(x, s, \zeta)$ où $(\zeta \neq 0)$ est défini par la relation vectorielle [H1]:

$$\vec{u}_q(x, s, \zeta) = \theta_x(x) \vec{i} \wedge \vec{r}_q(s, \zeta) + \omega(s, \zeta) \theta_{x,x}(x) \vec{i} \quad (II.1)$$

avec θ_x L'angle de torsion.
 $\theta_{x,x}$ Le gauchissement
 $\omega(s, \zeta)$ La coordonnée sectorielle

tel que :

$$\vec{r}_q = \vec{c}_q = \vec{c}_p + \zeta \vec{n} = r_t \vec{t} + (r_n + \zeta) \vec{n} \quad (II.2)$$

$$\vec{r} = \vec{c}_p = r_t \vec{t} + r_n \vec{n} \quad (II.3)$$

où $\zeta = 0$ définit la surface moyenne de la section.

Soient u, v_{qt}, v_{qn} les composantes du déplacement \vec{u}_q dans la base $(\vec{i}, \vec{t}, \vec{n})$.

La relation (II.1) s'écrit ainsi:

$$\begin{cases} u(x,s,\zeta) = \omega(s,\zeta)\theta_{x,x} \\ v_{qt}(x,s,\zeta) = -(r_n(s) + \zeta)\theta_x \\ v_{qn}(x,s,\zeta) = r_t(s)\theta_x \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Les déformations

En se limitant à sa partie linéaire, le tenseur de déformation est défini par :

$$\begin{cases} \epsilon_x = u_{,x} = \omega(s,\zeta)\theta_{x,xx} \\ 2\epsilon_{xs} = u_{,s} + v_{qt,x} = (\omega_{,s} - r_n - \zeta)\theta_{x,x} \\ 2\epsilon_{x\zeta} = u_{,\zeta} + v_{qn,x} = (\omega_{,\zeta} + r_t)\theta_{x,x} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Dans cette expression, ϵ_x est la déformation axiale, ϵ_{xs} et $\epsilon_{x\zeta}$ sont les déformations de cisaillement.

Les contraintes

En élasticité linéaire, la loi de Hooke nous permet d'écrire les contraintes d'une poutre en torsion sous la forme suivante

$$\begin{cases} \sigma_x = E\omega\theta_{x,xx} \\ \sigma_{xs} = G(\omega_{,s} - r_n - \zeta)\theta_{x,x} \\ \sigma_{x\zeta} = G(\omega_{,\zeta} + r_t)\theta_{x,x} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

où E est le module d'Young et G le module de cisaillement. σ_x est la contrainte normale, σ_{xs} et $\sigma_{x\zeta}$ sont les contraintes de cisaillement.

Dans le cas où la poutre est sollicitée en flexion-torsion, les contraintes normales s'écrivent en superposant les effets de membrane et de flexion à ceux de la torsion:

$$\sigma_x = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\substack{\text{traction} \\ \text{ou} \\ \text{compression}}} + \underbrace{\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z}_{\substack{\text{flexion dans} \\ \text{les deux plans}}} + \underbrace{\frac{B_\omega}{I_\omega}\omega}_{\substack{\text{gauchissement}}} \quad (\text{II.7})$$

Tel que N est l'effort normal, M_y , M_z sont les moments de flexion et B_ω est le bimoment.

II.A.3 Application du principe du travail virtuel

Le principe du travail virtuel est utilisé pour obtenir la matrice de rigidité de torsion. Son expression s'écrit sous la forme suivante:

$$w_{\text{int}} - w_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{II.8})$$

où w_{int} et w_{ext} sont les travaux virtuels respectivement des efforts internes et des efforts externes.

II.A.3.1 Énergie interne

Le travail virtuel des efforts internes est donné par :

$$w_{\text{int}} = \int_v (\epsilon_x^* \sigma_x + 2\epsilon_{xs}^* \sigma_{xs}) dv \quad (\text{II.9})$$

où (*) signifie que la quantité est virtuelle.

Substituons les relations des déformation (II.5) et des contraintes (II.6) dans l'expression de l'énergie interne (II.9), on obtient:

$$w_{\text{int}} = \int_0^L \left[\int_A \omega^2 dA \right] E \theta_{x,xx}^* \theta_{x,xx} dx + \int_0^L \left[\int_A 2(\omega_{,s} - r_n - \zeta)^2 dA \right] G \theta_{x,x}^* \theta_{x,x} dx \quad (\text{II.10})$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad \text{moment d'inertie sectoriel}$$

$J = \int_A (\omega_s - r_n - \zeta)^2 dA$ en remplaçant ω_s (Fig I.6-b et I.20) on trouve

$$\omega_s - r_n - \zeta = -\zeta(1 + r_{t,s}) \text{ avec } r_{t,s} = (\vec{r} \cdot \vec{t})_{,s} = 1 + \vec{r} \cdot \vec{t}_{,s} = 1 + \frac{r_n}{R}, \quad \vec{t} = \vec{r}_{,s} \text{ et } \vec{t}_{,s} = \frac{1}{R} \vec{n}$$

d'où

$$J = \int_A \zeta^2 \left(2 + \frac{r_n}{R}\right) dA \quad \text{moment d'inertie de torsion de Saint -Venant}$$

L'expression de l'énergie interne s'écrit ainsi:

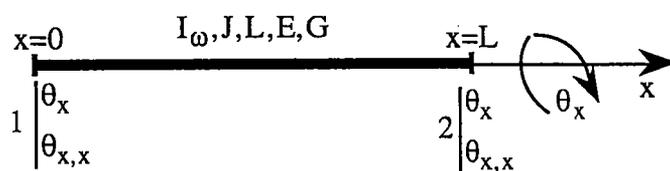
$$w_{\text{int}} = \int_0^L [EI_\omega \theta_{x,xx}^* \theta_{x,xx} + GJ \theta_{x,x}^* \theta_{x,x}] dx \quad (\text{II.11})$$

La description du principe du travail virtuel fait intervenir deux variables indépendantes θ_x et $\theta_{x,x}$ qu'on utilise comme variables nodales après discrétisation.

II.A.3.2 Matrice et vecteurs élémentaires suivant le modèle exact de Vlassov

En utilisant l'équation (II.11), le terme w_{int}^e s'écrit pour un élément de longueur L, de noeud 1 et 2 (FigII.2), comme suit:

$$w_{\text{int}}^e = \int_0^L EI_\omega [\theta_{x,xx}^* \theta_{x,xx} + \alpha^2 \theta_{x,x}^* \theta_{x,x}] dx \quad \text{avec} \quad \alpha^2 = \frac{GJ}{EI_\omega} \quad (\text{II.12})$$



FigII.2: Élément de torsion non uniforme

L'approximation de θ_x et de θ_x^* est de type C^1 . Après deux intégrations par parties, on a:

$$W_{\text{int}}^e = EI_\omega \int_0^L (\theta_{x,xxxx}^* - \alpha^2 \theta_{x,xx}^*) \theta_x dx + EI_\omega [(\alpha^2 \theta_{x,x}^* - \theta_{x,xxx}^*) \theta_x + \theta_{x,xx}^* \theta_{x,x}]_2 - EI_\omega [(\alpha^2 \theta_{x,x}^* - \theta_{x,xxx}^*) \theta_x + \theta_{x,xx}^* \theta_{x,x}]_1 \quad (\text{II.13})$$

On obtient une formulation de type hybride si l'approximation de $\theta^*(x)$ vérifie:

$$\theta_{x,xxxx}^* - \alpha^2 \theta_{x,xx}^* = 0 \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.13) s'écrit alors:

$$W_{\text{int}}^e = EI_{\omega} \langle [\theta_{x,xxx}^* - \alpha^2 \theta_{x,x}^*]_1, [-\theta_{x,xx}^*]_1, [\theta_{x,xxx}^* + \alpha^2 \theta_{x,x}^*]_2, [\theta_{x,xx}^*]_2 \rangle \{\theta_n\} \quad (\text{II.15})$$

$$\langle \theta_n \rangle = \langle \theta_{x1}, (\theta_{x,x})_1, \theta_{x2}, (\theta_{x,x})_2 \rangle \quad (\text{II.16})$$

Il apparaît plus simple d'écrire l'approximation de θ_x^* , respectant (II.14) en fonction des paramètres généralisés $\{a^*\}$:

$$\theta_x^* = \langle P \rangle \{a^*\} \quad \langle a^* \rangle = \langle a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^* \rangle \quad (\text{II.17})$$

$$\langle P \rangle = \left\langle 1, x, \frac{1 - \text{ch}\alpha x}{\alpha^2}, \frac{\alpha x - \text{sh}\alpha x}{\alpha^3} \right\rangle \quad (\text{I.18})$$

L'expression s'écrit ainsi:

$$W_{\text{int}}^e = EI_{\omega} \langle \langle a^* \rangle [k_a] \{\theta_n\} - \alpha^2 [\theta_{x,x}^*]_1 \theta_{x1} + \alpha^2 [\theta_{x,x}^*]_2 \theta_{x2} \rangle \quad (\text{II.19})$$

$$\text{avec} \quad [k_a] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \text{sh}\alpha L & -\text{ch}\alpha L \\ -1 & 0 & \text{ch}\alpha L & -1/\alpha \text{sh}\alpha L \end{bmatrix}$$

La relation entre les paramètres généralisés et les paramètres nodaux $\{\theta_n^*\}$ est obtenue en écrivant (II.17), (II.18) en $x=0$ et $x=L$:

$$\begin{aligned} \{\theta_n^*\} &= [P_n] \{a^*\}; & \{a^*\} &= [P_n]^{-1} \{\theta_n^*\} \\ & & & \text{(II.20)} \end{aligned}$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 & (\alpha L - \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 \\ 0 & 1 & -\text{sh}\alpha L / \alpha & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 \end{bmatrix}$$

(II.21)

En inversant $[P_n]$ on obtient:

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ -(1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 & (\alpha L \text{ch}\alpha L - \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 & (-\alpha L + \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 \\ -\text{sh}\alpha L / \alpha & -(1 - \text{ch}\alpha L + \alpha L \text{sh}\alpha L) / \alpha^2 & \text{sh}\alpha L / \alpha & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$b = (2 - 2\text{ch}\alpha L + \alpha L \text{sh}\alpha L) / \alpha^4$$

L'expression (II.19) s'écrit ainsi:

$$W_{\text{int}}^e = \langle \theta_n^* \rangle [k] \{\theta_n\}$$

(II.22)

avec

$$[k] = EI_\omega [P_n]^{-1} [k_a] + EI_\omega \alpha^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \frac{EI_\omega}{b} \begin{bmatrix} \text{sh}\alpha L / \alpha & -(1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 & \text{sh}\alpha L / \alpha & -(1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 \\ & (\alpha L \text{ch}\alpha L - \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 & -(\alpha L - \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 \\ \text{SYM} & & \text{sh}\alpha L / \alpha & (1 - \text{ch}\alpha L) / \alpha^2 \\ & & & (\alpha L \text{ch}\alpha L - \text{sh}\alpha L) / \alpha^3 \end{bmatrix} \quad \text{(II.23)}$$

En utilisant (II.17) et (II.20), on peut définir les fonctions de forme N_i :

$$\theta_x^* = \langle N \rangle \{ \theta_n^* \} \quad \text{avec} \quad \langle N \rangle = \langle P \rangle [P_n]^{-1} \quad (\text{II.24})$$

$$N_1 = \frac{1}{\alpha^4 b} \left[\alpha^4 b - (1 - \text{ch}\alpha L)(1 - \text{ch}\alpha x) - (\alpha x - \text{sh}\alpha x)\text{sh}\alpha L \right]$$

$$N_2 = \frac{1}{\alpha^5 b} \left[\alpha^5 b x - (1 - \text{ch}\alpha L)(\alpha L \text{ch}\alpha L - \text{sh}\alpha L) - (\alpha x - \text{sh}\alpha x)(1 - \text{ch}\alpha L + \alpha L \text{sh}\alpha L) \right]$$

$$N_3 = \frac{1}{\alpha^4 b} \left[(1 - \text{ch}\alpha L)(1 - \text{ch}\alpha x) + (\alpha x - \text{sh}\alpha x)\text{sh}\alpha L \right]$$

$$N_4 = \frac{1}{\alpha^5 b} \left[(1 - \text{ch}\alpha x)(\text{sh}\alpha L - \alpha L) + (\alpha x - \text{sh}\alpha x)(1 - \text{ch}\alpha L) \right]$$

Ces fonctions de forme peuvent être utilisées pour définir le vecteur des charges équivalentes. On se limite pour le cas où la seule charge appliquée est le moment de torsion réparti m_x .

$$W_{\text{ext}} = \int_0^L \theta_x^* m_x dx = m_x \int_0^L \theta_x^* dx = m_x \int_0^L \langle N \rangle \{ \theta_n^* \} dx = \langle \theta_n^* \rangle \{ f_n \} \quad (\text{II.25})$$

$$\langle f_n \rangle = \langle f_1 \quad f_2 \quad f_1 \quad -f_2 \rangle \quad (\text{II.26})$$

$$f_1 = m_x \frac{L}{2} \quad f_2 = \frac{m_x}{\alpha^5 J_p} \left[\left(\frac{\alpha L^2}{2} - \frac{2}{\alpha} \right) + \left(\frac{\alpha L^2}{2} + \frac{2}{\alpha} \right) \text{ch}\alpha L - 2L \text{sh}\alpha L \right]$$

II.A.3.3 Matrice et vecteurs élémentaires suivant le modèle de Vlassov avec une approximation cubique

En utilisant une approximation cubique de type Hermite pour θ_x dans le modèle de Vlassov, la matrice de rigidité, les fonctions de forme et le vecteur équivalent de charge sont [S4],

$$[\text{B2}]: [k_\omega] = (EI_\omega / L^3) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{SYM} & & & 4L^2 \end{bmatrix} + (GJ / 30L) \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ & & 36 & -3L \\ \text{SYM} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Les fonctions de forme utilisées sont:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) \quad N_2 = \frac{1}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) \quad N_4 = \frac{1}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$$

Avec $\xi = x / L$

le vecteur de force équivalent est:

$$\langle f_n \rangle = m_x \left\langle \frac{L}{2} \quad \frac{-L^2}{12} \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \right\rangle$$

(II.28)

II.A.3.4 Comparaison entre l'élément cubique et l'élément hyperbolique

En considérant (II.18), on remarque que si $\alpha \rightarrow 0$ on obtient une approximation cubique en x:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \text{ch}\alpha x}{\alpha^2} = -\frac{x^2}{2} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha x - \text{sh}\alpha x}{\alpha^3} = -\frac{x^3}{6}$$

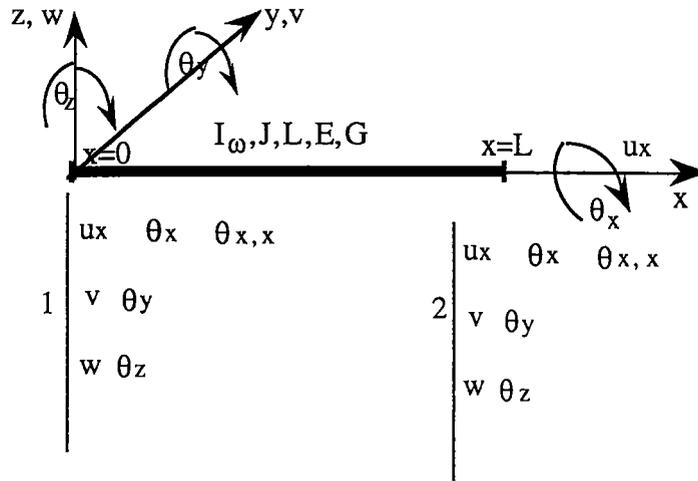
(II.29)

donc $\langle P \rangle = \left\langle 1 \quad x \quad \frac{-x^2}{2} \quad \frac{-x^3}{6} \right\rangle$ (pour α très faible)

La relation précédente montre que l'on peut obtenir les mêmes résultats avec les deux éléments (cubique et hyperbolique) si $GJ \ll EI_\omega$. L'élément hyperbolique est compatible avec la solution analytique de Vlassov.

II.A.3.5 Élément de poutre 3D avec gauchissement

L'élément utilisé pour le calcul des poutres 3D à parois minces et à sections ouvertes est un élément à sept degrés de liberté par noeud (FigII.3). Il est obtenu en superposant les effets de membrane de flexion et de torsion avec gauchissement.



FigII.3 Élément de poutre 3D avec gauchissement.

Le vecteur des degrés de liberté locaux est :

$$\langle \mathbf{u}_n \rangle = \langle (u_{xi}, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}, \theta_{x,xi}), i = 1, 2 \rangle \quad (II.30)$$

L'élément de poutre de flexion a été décrit en détail dans [B2]. Le modèle de Navier-Euler-Bernoulli est alors adopté pour la flexion. Une approximation cubique de type Hermite est utilisée et permet d'obtenir des résultats exacts aux noeuds [B2]. Pour l'effet de membrane, un élément classique à un degré de liberté est utilisé [B2].

La matrice de rigidité [k] (14,14) est obtenue en suivant la démarche [B2] et en remplaçant la contribution de la torsion libre par celle de la torsion non uniforme.

La matrice [K_e] s'exprime alors sous la forme suivante:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_u] & & & \\ & [K_v] & & \\ & & [K_w] & \\ & & & [K_\omega] \end{bmatrix} \quad (II.31)$$

Avec :

$$[K_u] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_v] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \text{Sym} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix}, \quad [K_w] = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ & & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \text{Sym} & & & \frac{4}{L} \end{bmatrix}$$

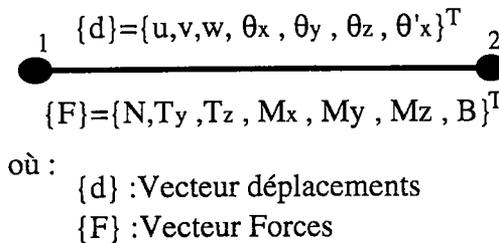
et $[K_\omega]$ est donnée par l'équation (II. 27).

II.A.6 Résultats numériques

II.A.6.1 Présentation du code de calcul

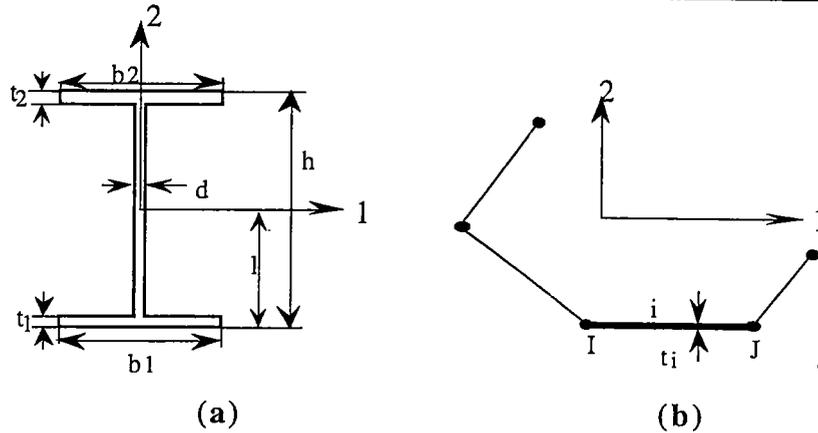
Tous nos calculs numériques ont été faits par le code de calcul des éléments finis ABAQUS [A2], [A3]. Ce code est appliqué à l'analyse des éléments à parois minces et à sections ouvertes où la torsion non uniforme est prise en compte.

Une poutre est topologiquement définie par les deux noeuds décrivant sa fibre neutre, 1 et 2. Les éléments utilisés ont sept degrés de liberté par noeud. Le septième degré de liberté est le gauchissement pour les déplacements, le bimoment pour les forces (Fig II.3).



FigII.4: Degrés de liberté de l'élément utilisé

Pour la définition des caractéristiques géométriques des sections ouvertes, on a plusieurs possibilités. Dans le cas des formes classiques (I, L), on donne les largeurs et les épaisseurs des semelles et de l'âme (Fig II.5). Pour des sections quelconques on définit les différents segments composant la section, par la donnée dans un repère local (1-2) des coordonnées des extrémités de chaque segment et son épaisseur (figure3.9.b).



FigII.5: Section ouverte

Les caractéristiques géométriques de flexion et de torsion sont calculées par intégration le long de la section. Elles sont sorties dans le fichier de résultat, y compris la position des centres de gravité et de torsion.

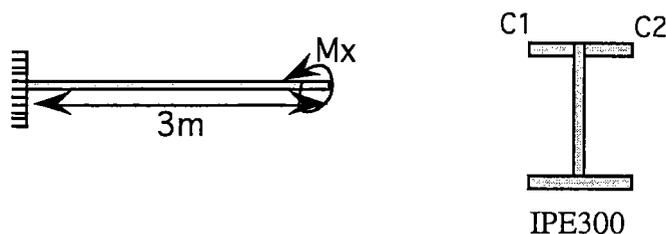
Avec ce code on traite les problèmes de comportement linéaire, non linéaires (géométriques et matériels) et les instabilités.

II.A.6.2 Étude comparative

Dans cette section, on présente une étude comparative entre la théorie de Vlassov et les résultats obtenue par ABAQUS.

Les types d'éléments utilisés sont des éléments poutre à deux noeuds. Le premier est le B31OS à sept degrés de liberté par noeud, il tient compte du gauchissement et il utilise des fonctions de forme cubique. Le second est l'élément de poutre B32 à deux noeuds et à six degrés de liberté par noeud. Il suit la théorie d'Euler Bernoulli et utilise des fonctions de forme cubique. En fin on utilise l'élément coque S8r à huit noeuds et à six degré de liberté par noeud.

a) Étude d'une console de section ipe300 en torsion



FigII.6: caractéristiques géométriques

On présente les résultats de calcul d'une poutre console de 3m en acier IPE300 soumise à un moment de torsion de 1kN.m appliqué à son extrémité libre. Dans un premier lieu on compare les résultats théoriques à l'élément poutre B31OS.

La figure (Fig.II.7) présente la variation de l'angle de torsion, la figure (Fig.II.8) présente celle du gauchissement, la figure (Fig.II.9) présente celle du bimoment et la figure (Fig.II.10) présente celle des contraintes normales au niveau des extrémités des semelles.(point de section C1 et C2) tous le long de la poutre.

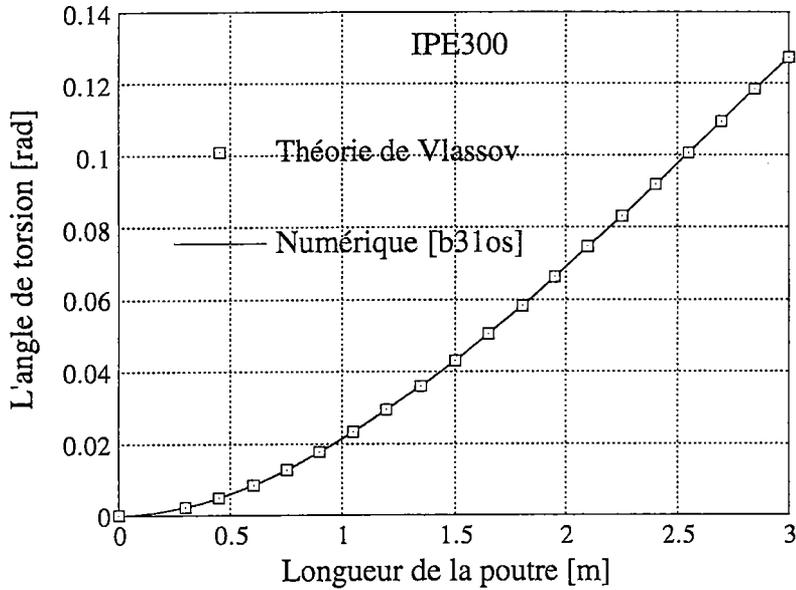


Fig.II.7: Variation de l'angle de torsion le long de la poutre

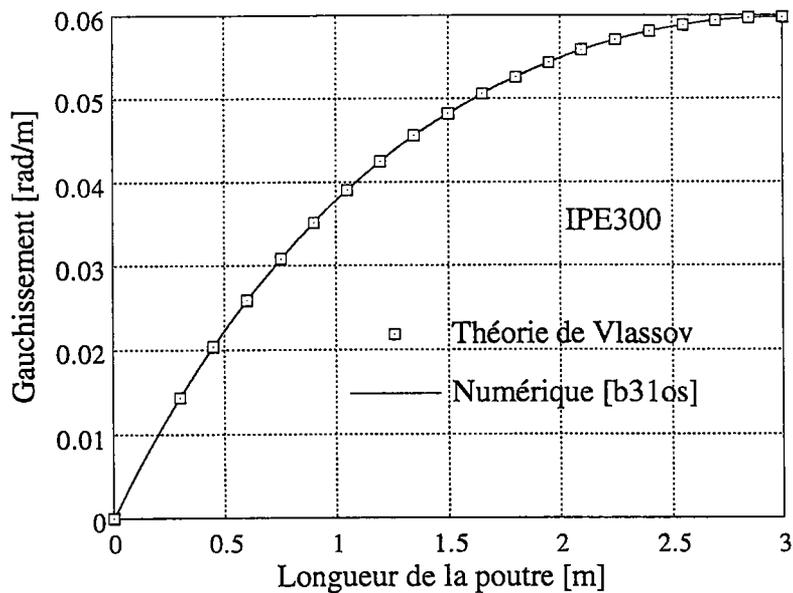


Fig.II.8: Variation du gauchissement le long de la poutre

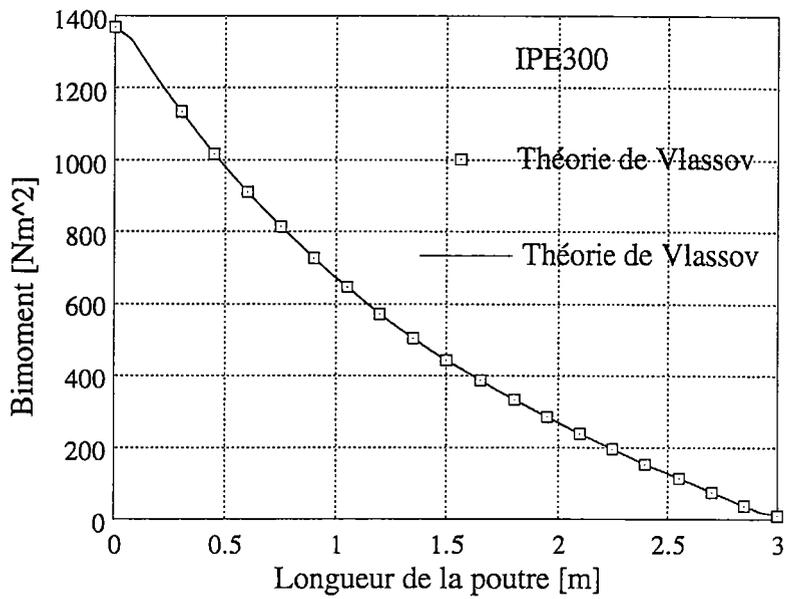


Fig.II.9: Variation du Bimoment le long de la poutre

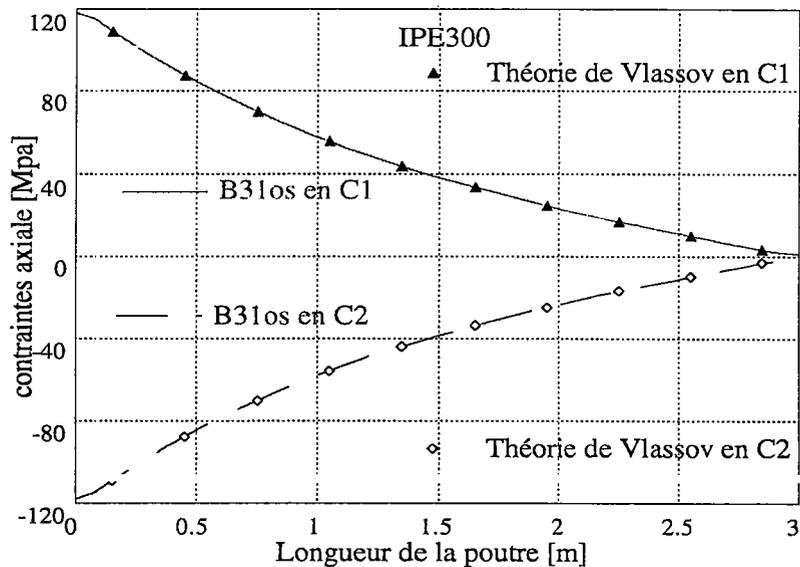


Fig.II.10: Variation des contraintes normales aux extrémités des semelles le long de la poutre

On remarque que pour les différentes variables, les courbes théoriques et numériques se superposent parfaitement, ce qui montre un très bon accord entre la théorie de Vlassov et l'élément de poutre avec gauchissement B31OS.

Dans un second temps, on compare les résultats de l'élément B31OS et l'élément coque à huit noeuds S8R.

Les figures (Fig.II.11a) et (Fig.II.11.b) suivantes présentent le maillage utilisé et la structure déformée modélisé par l'élément coque

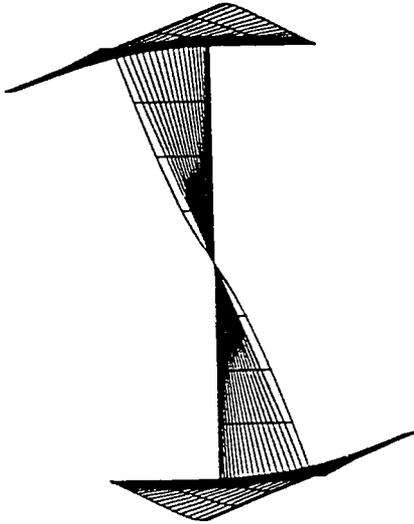


Fig.II.11.a

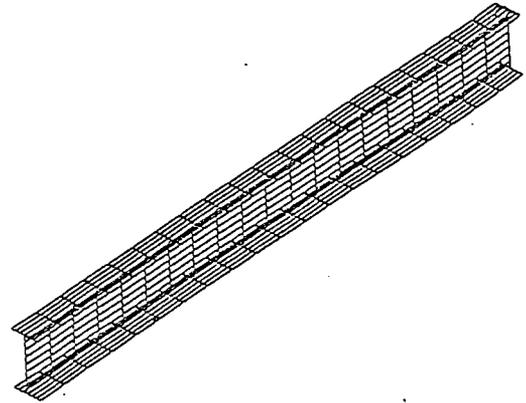


Fig.II.11.b

Ceci nous permet de bien voir le gauchissement et la flexion des semelles par suite la non validité de la théorie classique des poutres qui suppose que les sections restent planes après déformation. La figure (Fig.II.12) donne la variation le long de la poutre des contraintes normales aux extrémités des semelles. Ces contraintes sont données par le modèle poutre B31OS et le modèle coque. On remarque que ces deux courbes sont très proches l'une de l'autre sauf au point d'application des charges.

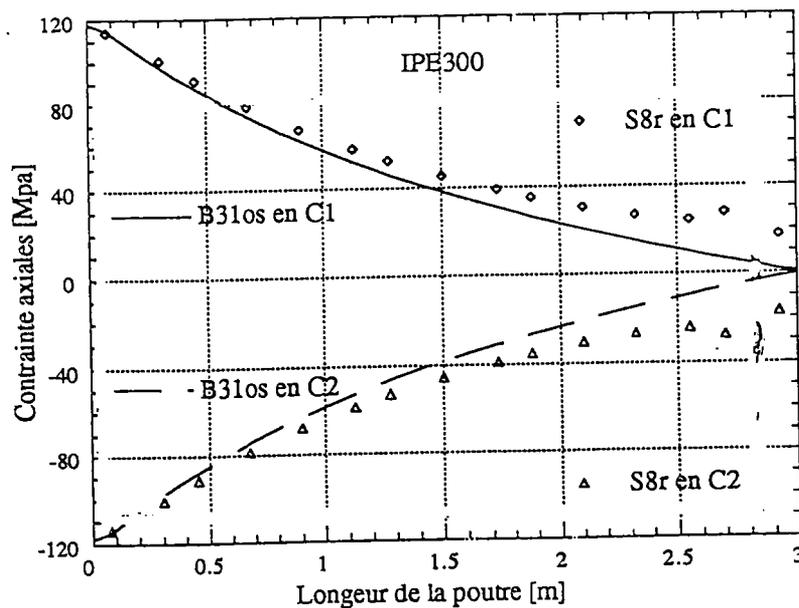


Fig.II.12: Variation des contraintes normales aux extrémités des semelles le long de la poutre

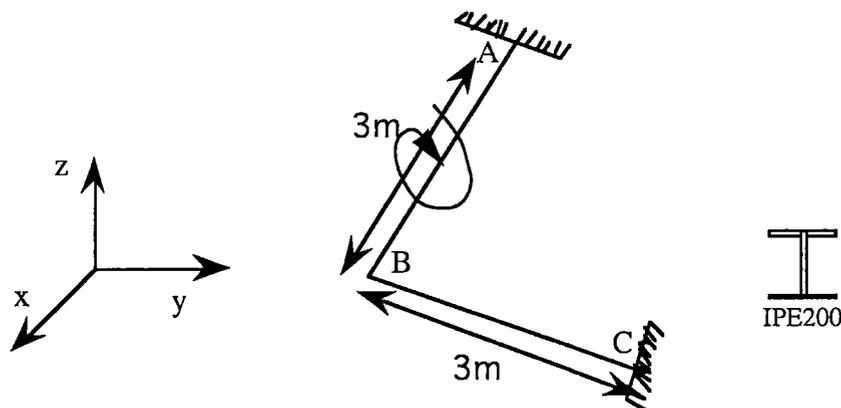
L'élément B31OS reste facile à manipuler et permet d'avoir la variation des variables introduites par Vlassov tel que le gauchissement et le Bimoment.

b) Étude du portique

Dans cette section, on donne deux exemples numériques avec des conditions aux limites et de chargements différentes afin de comparer entre deux théories. La théorie de Vlassov et la théorie classique des poutres utilisant les hypothèses d'Euler Bernoulli.

Les exemples sont traités numériquement en utilisant les éléments poutres B31OS et B31.

Portique 1: On présente l'étude du comportement d'un portique (ABC) encastré à ces deux extrémités A et C. Il est soumis à un moment de torsion 1 KN.m concentré au milieu de la poutre AB (FigII.13).

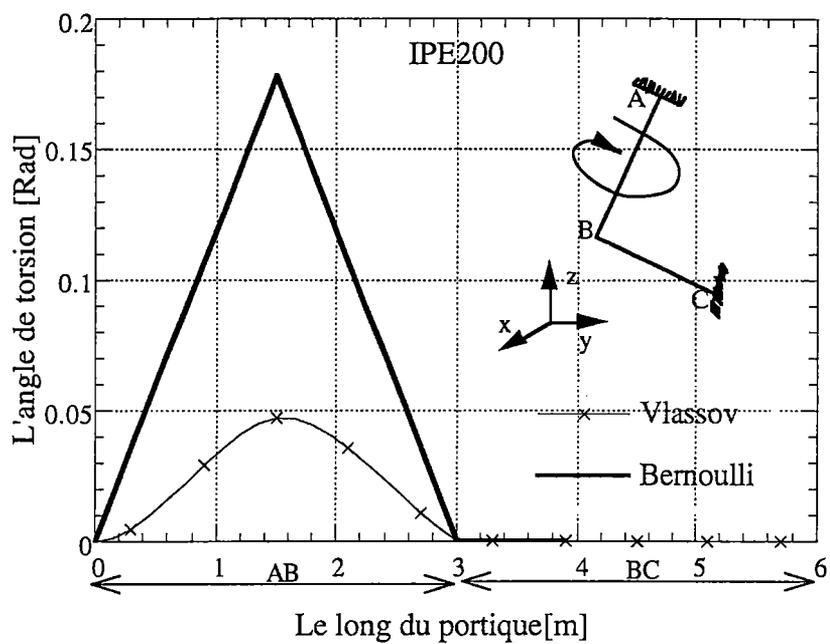


FigII.13: Portique ABC de section un IPE200

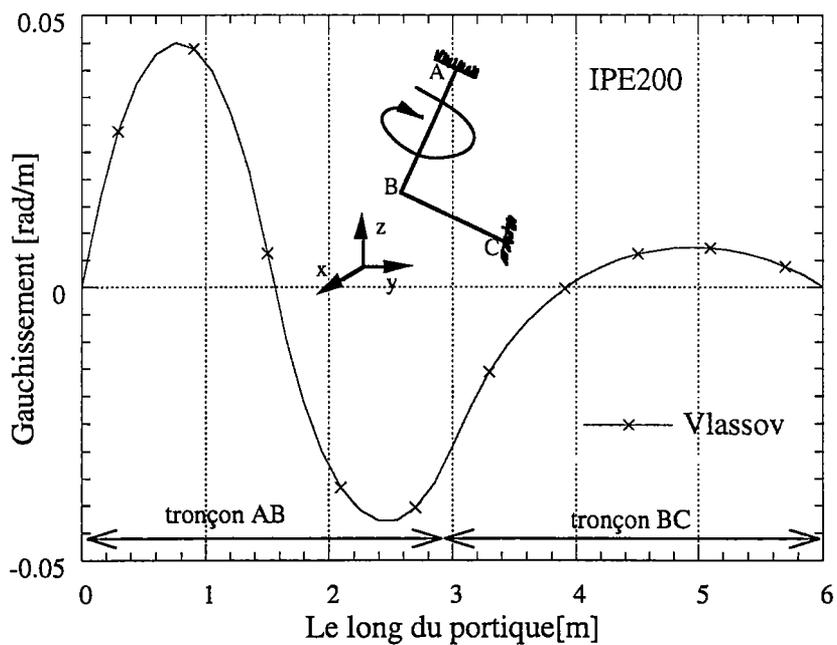
La figure II.14 représente la variation de l'angle de torsion le long de la poutre pour les éléments B31 et B31OS. La figure (FigII.15) donne celle du gauchissement et la figure (FigII.16) celle du bimoment pour le cas de l'élément B31OS seulement .

D'après ces courbes, on remarque une importante variation de l'angle de torsion, du gauchissement et du bimoment au niveau du tronçon AB où le moment de torsion est appliqué. Ceci n'est pas valable pour le tronçon BC. Ce résultat a été vérifié expérimentalement par [M4].

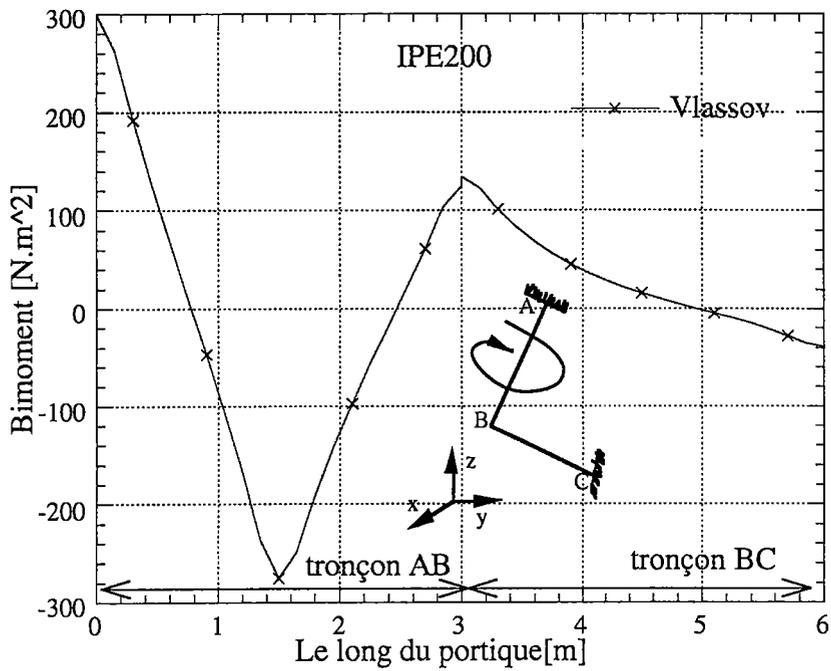
On remarque une nette différence entre les deux types d'éléments (FigII.14) utilisés. Ceci est dû à l'importance du gauchissement (FigII.15) selon les types de sections utilisées.



FigII.14: Variation de l'angle de torsion le long du portique

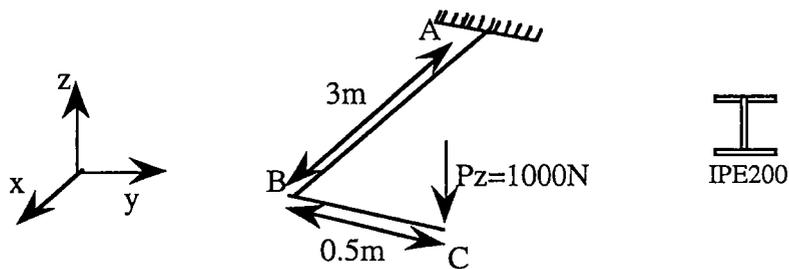


FigII.15: Variation du gauchissement le long du portique



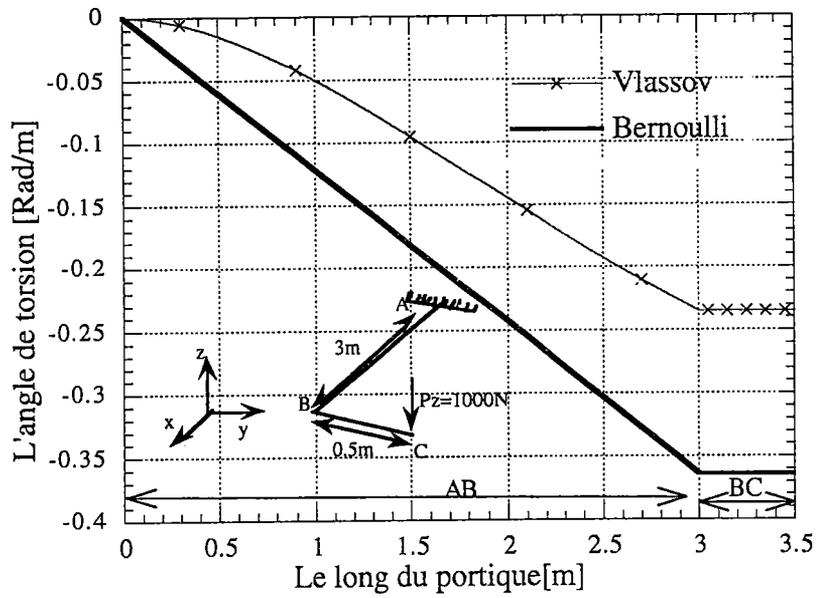
FigII.16: Variation du Bimoment le long du portique

Portique 2: On présente l'étude du comportement d'un portique dont la section est l'IPE200, encastré à son extrémité A. Il est soumis à l'action d'une force F_z de 1kN à son extrémité libre C (voir FigII.17).

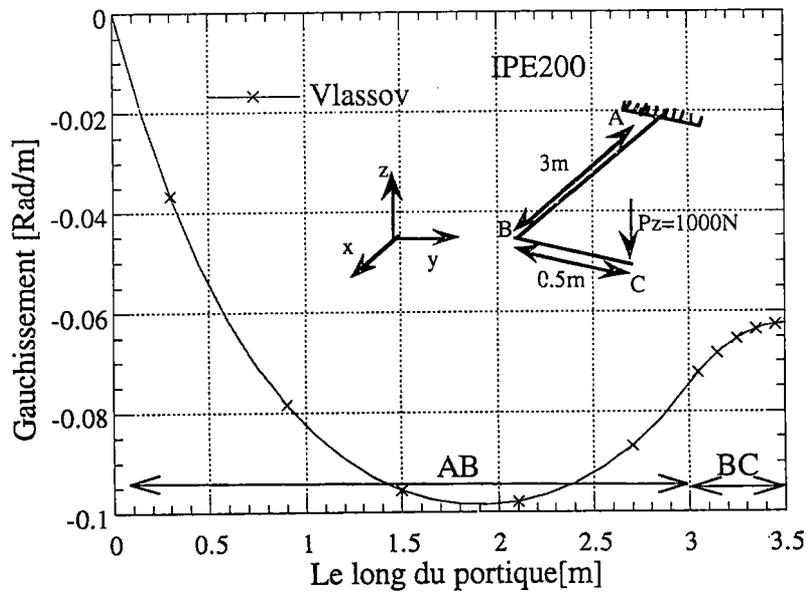


FigII.17 Portique 2, ABC de section un IPE200

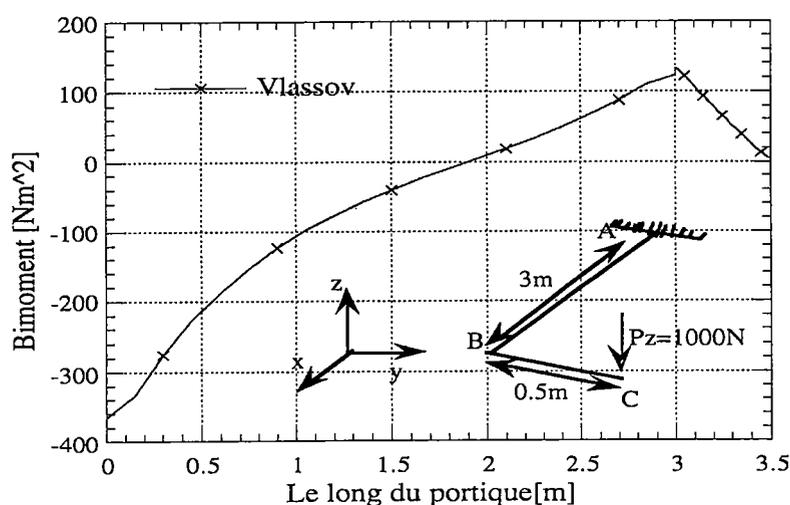
Les courbes suivantes donnent la variation le long du portique de l'angle de torsion (FigII.18), du gauchissement (FigII.19) et le bimoment (FigII.20).



FigII.18: Variation de l'angle de torsion le long du portique



FigII.19: Variation du gauchissement le long du portique



FigII.20: Variation du Bimoment le long du portique

D'après ces courbes et contrairement au cas précédent, on remarque une importante variation de l'angle de torsion, du gauchissement et du bimoment au niveau de la poutre AB. La poutre BC est soumise essentiellement à la flexion. Le gauchissement est très faible. La différence entre les grandeurs de torsion calculées avec les deux types d'éléments est très importante. Ceci est lié au gauchissement.

II.A.7 Conclusion

Dans cette partie, on a présenté une étude de la torsion des poutres à parois minces et à sections ouvertes par la méthode des éléments finis. La théorie de Vlassov a été adoptée. Deux éléments poutres en torsion ont été présentés en considérant deux bases d'interpolation hyperbolique et cubique. Par suite, un élément poutre 3D à sept degrés de liberté a été présenté. Les résultats numériques de cette partie ont été traités par le code ABAQUS.

Une étude comparative du comportement en torsion des éléments poutres 3D a été présentée. L'élément B31OS est basé sur la théorie de Vlassov. L'élément B31 est basé sur le principe de Saint-Venant. Les éléments coque sont aussi utilisés dans les calculs. Il découle de ces calculs les conclusions suivantes:

- En présence de la torsion, les résultats obtenus avec l'élément poutre B31OS sont en accord avec ceux de l'élément coque. De plus avec l'élément B31OS, on a accès aux paramètres liés au gauchissement. Son utilisation est plus simple. Par contre avec cet élément, le code ne permet pas le calcul des contraintes tangentielles. Seules les contraintes normales sont données.

- Dans le cas des sections ouvertes en torsion, le gauchissement est très important. Par suite, l'utilisation de l'élément poutre B31 est insuffisante.

II.B ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES STRUCTURES À PAROIS MINCES ET À SECTIONS OUVERTES EN TORSION

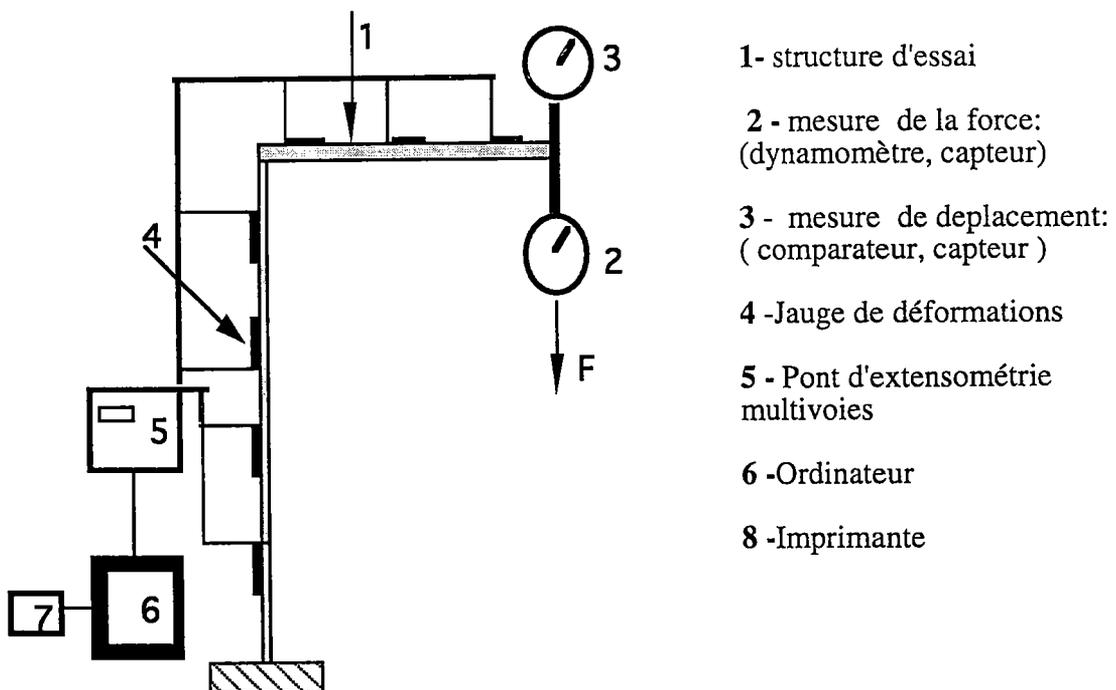
II.B.1 Introduction à l'extensométrie

Dans les essais des structures, on étudie le comportement des éléments de structures de base dans le domaine élastique: Poutre droite , poteaux et portiques sous différentes sollicitations

(effort normal , flexion simple, flexion composée et torsion).

Les pièces d'essais sont de dimensions réduites qui nécessitent des moyens de charges réduits: poids et vérins manuels de faible puissance.

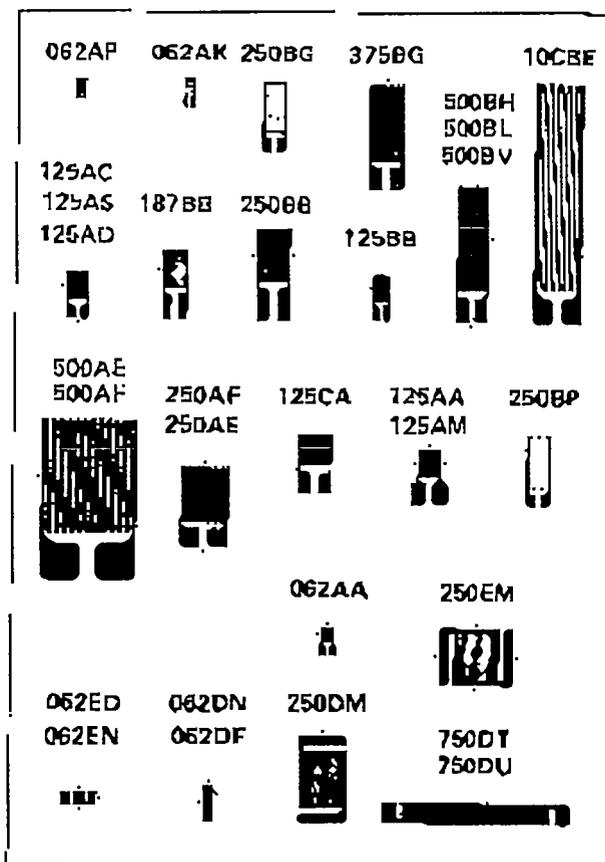
Le dispositif de mesure du chargement est composé de dynamomètres ou des capteurs de forces ayant différentes gammes de mesure. La réponse de la structure est mesurée en déplacements et en déformations. Les déplacements sont mesurés à l'aide des comparateurs ou des capteurs de déplacements. Les déformations sont mesurées à l'aide des jauges électriques, collées en différents points de la structure et liées a une chaîne de mesure (FigII.21). La lecture des mesures est manuelle ou en acquisition automatique sur ordinateur.



FigII.21 : Chaîne générale de mesure

Expérimentalement, plusieurs techniques sont appliquées pour mesurer les déformations des structures. La technique la plus répandue est l'extensomètre, où les jauges électriques sont utilisées. De ce fait, elles sont aussi appelées jauges de déformations ou jauges de contraintes. Ces jauges sont des fils électriques collés sur la pièce d'essai en différents points. Il existe différents types de jauges de déformations qui diffèrent par leur forme, par leur longueur ou alors par leur résistance. Le choix d'un type de jauge dépend de la taille de la pièce à étudier, de l'encombrement et de l'importance de l'information que l'on veut obtenir. On distingue:

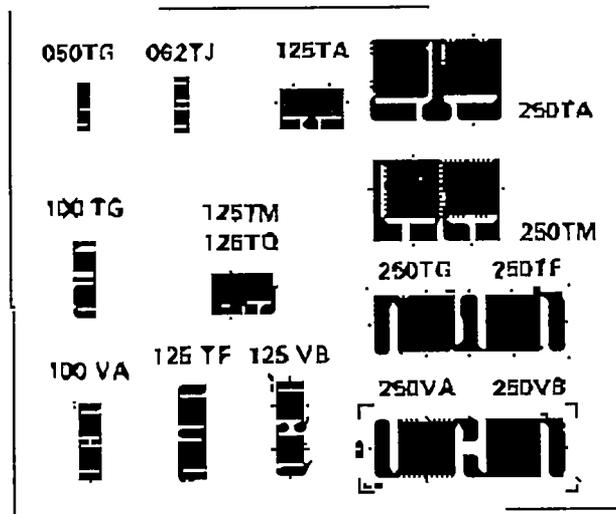
-Les jauges simples: elles sont utilisées pour la mesure des déformations dans une seule direction privilégiée, elles sont de forme classiques avec une grille en forme de rectangle allongée dans le sens des brins.(FigII.22)



FigII.22 : Jauges simples

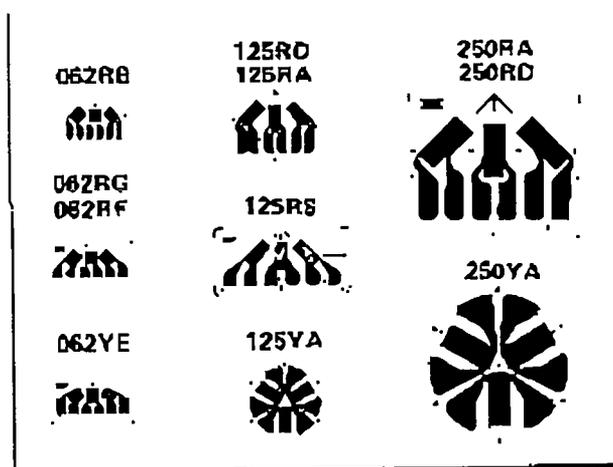
Les rosettes de jauges : On distingue les rosettes à deux et à trois jauges.

Les rosettes à deux jauges sont disposées sur deux directions orthogonales. Elles sont utilisées quand les directions principales des déformations principales sont connues (FigII.23)



FigII.23 : Rosettes à deux jauges

Les rosettes à trois jauges sont disposées sur un support suivant trois directions. Elles sont utilisées lorsque les directions principales ne sont pas connus. On distingue les rosettes à 45°, 60° et à 120° (FigII.24)



FigII.24 : Rosettes à trois jauges

II.B.2 Description des essais expérimentaux

Afin de tester le comportement des structures à parois minces et à sections ouvertes du point de vue expérimentale, on présente les résultats des mesures faits sur trois structures:

Une poutre de section en U bi-articulée sollicitée en flexion -torsion.

Un poteau de section un IPE80 soumis à l'action des forces longitudinales sollicitant le poteau en flexion composée et provoquant son gauchissement.

Une poutre console de section en T sollicitée en flexion -torsion.

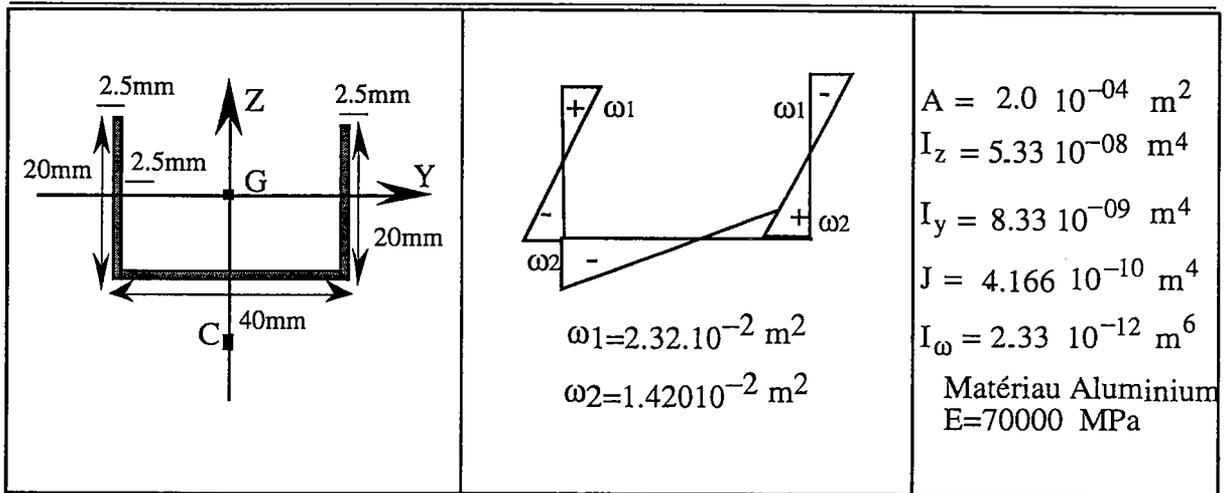
Nous avons procédé à la mesure des déplacements et des déformations normales. Les déformations sont mesurées à l'aide des jauges collées en différents points le long de la structure. Ces points sont choisis judicieusement de façon à mesurer aussi bien les déformations de flexion que celles dûes à la torsion.

Les résultats expérimentaux sont comparés au modèle éléments finis basé sur la théorie de Vlassov.

II.B.2.1 Poutre bi-articulée en flexion-torsion

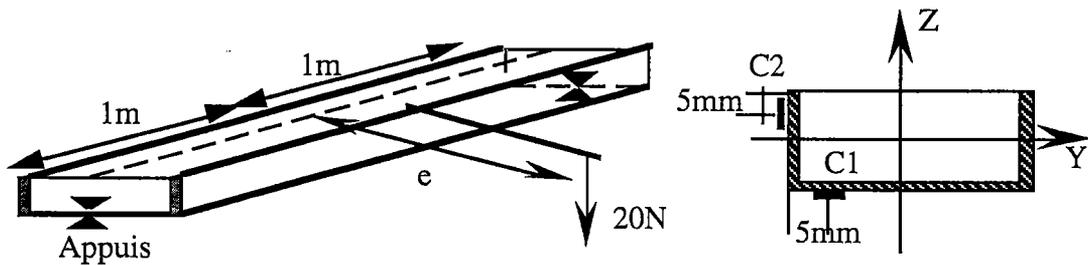
a) Description générale

Une poutre en aluminium de 2m de portée a été utilisée. La section est de la forme en U dont les caractéristiques géométriques sont données dans la figII.25. Dans ce tableau, on donne les dimensions de la section, la coordonnée sectorielle suivant le contour et les caractéristiques géométriques utilisées dans le calcul.



FigII.25: Caractéristiques géométriques de la section .

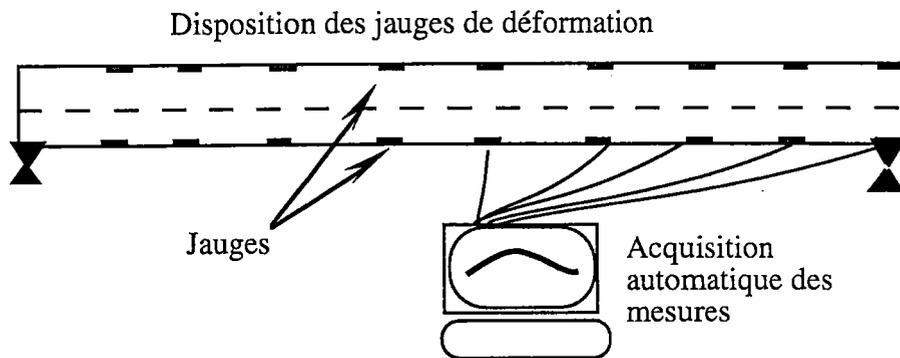
Elle est sollicitée au milieu par une force qui peut être excentrée par rapport au centre de torsion, par l'intermédiaire d'un bras. Au niveau des appuis, la poutre est articulée en flexion et en torsion FigII.26 .



FigII.26: Poutre de section en U sous la flexion-torsion

Plusieurs essais ont été réalisés en faisant varier l'excentricité e de 5 cm à 20 cm, avec un pas de 5 cm. Du point de vue pratique, les points de section les plus adaptés pour mesurer les déformations de flexion et de torsion sont les points C1 et C2.

Le point C1 est situé sur l'âme, très proche de l'angle de la section en U. Le point C2 est situé à l'extrémité d'une semelle Fig II.26. Neuf jauges ont été collées le long de la poutre au niveaux de l'âme (point C1) et neuf autres jauges ont été collées au bord de la semelle (point C2) (Fig.II.27).



FigII.27 : Disposition des jauges de déformations

Les contraintes normales de flexion-torsion dans la poutre obéissent à la relation suivante:

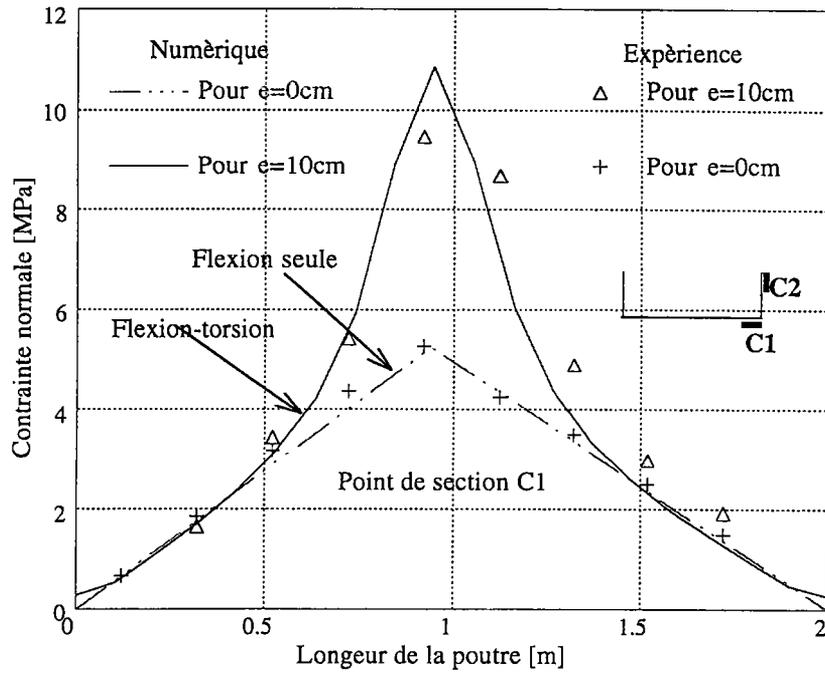
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega$$

(II.32)

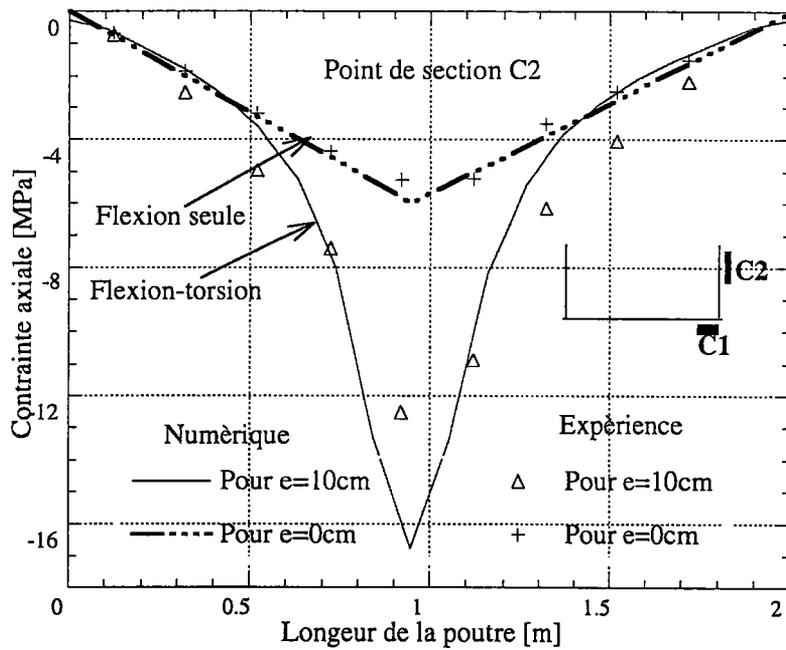
où z et ω sont la cote par rapport à G et la coordonnée sectorielle du point $C1$ et $C2$.

b) Étude comparative pour deux excentricités (0 à 10 cm)

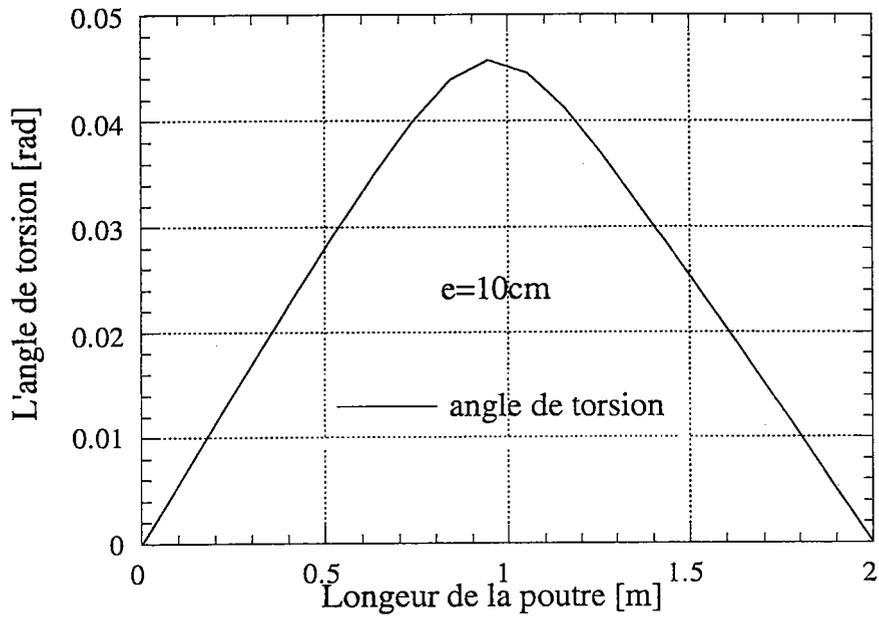
On compare les résultats numériques et expérimentaux pour deux excentricités (0,10cm). La figure (fig II.28) donne la variation des contraintes numériques et expérimentales pour les deux excentricités ($e=0$ flexion seule) et ($e=10$ cm flexion -torsion) au point $C1$ de la section et la figure (Fig II.29) représente les résultats pour le point $C2$. On remarque qu'en flexion-torsion les contraintes ont doublé au milieu de la poutre par rapport à celles de la flexion seule pour les $C1$ et $C2$ points de la section. Ceci est dû à la présence de la torsion non uniforme. La figure II.30 donne la variation de l'angle de torsion et la figure II.31 le bimoment pour $e=10$ cm. Ils sont au maximum au point d'application de la charge et tendent vers zéro au niveau des appuis. La figure II.32 donne la variation du gauchissement le long de la poutre pour $e=10$ cm, il est à son maximum au niveau des appuis et nul au point d'application de la charge.



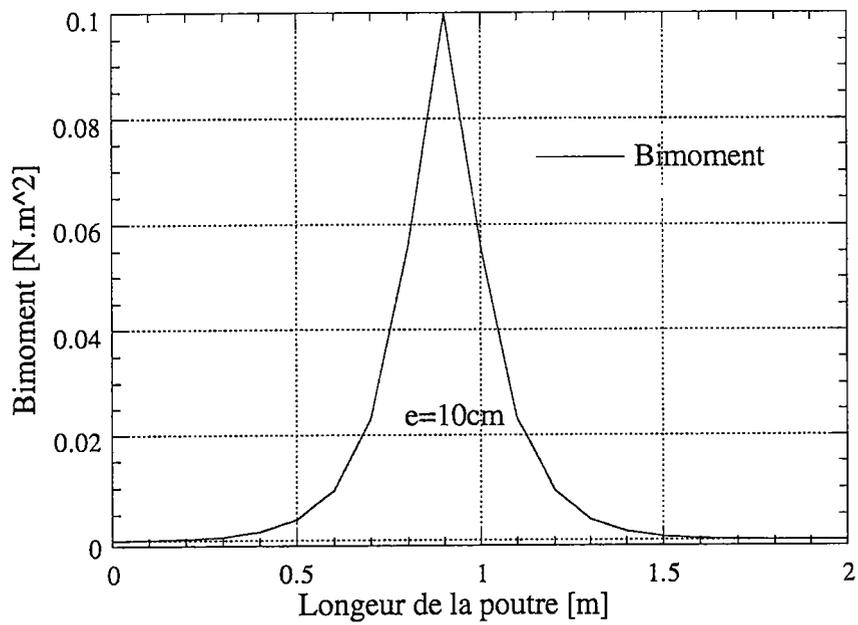
FigII.28: Variation des contraintes normales numériques et expérimentales le long de la poutre au point de section C1



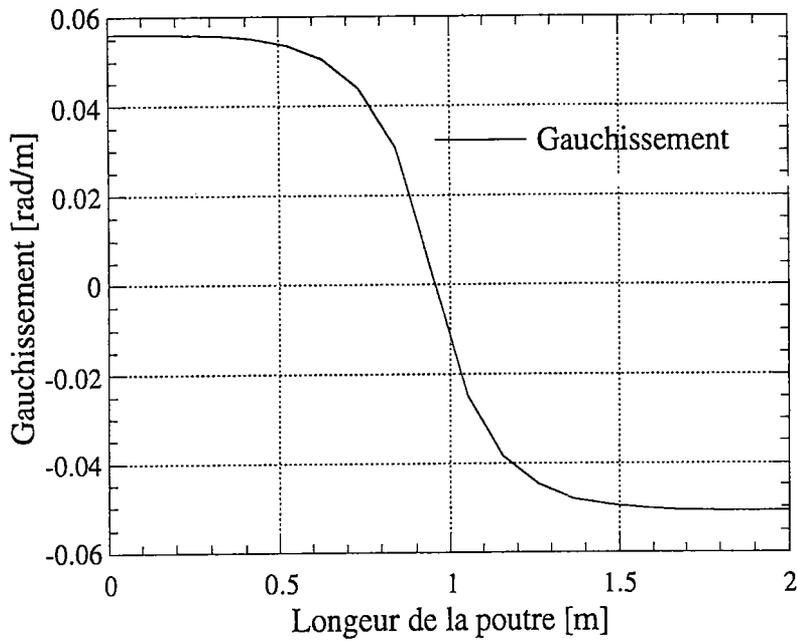
FigII.29: Variation des contraintes normales numériques et expérimentales le long de la poutre au point de section C2



FigII.30: Variation de l'angle de torsion le long de la poutre



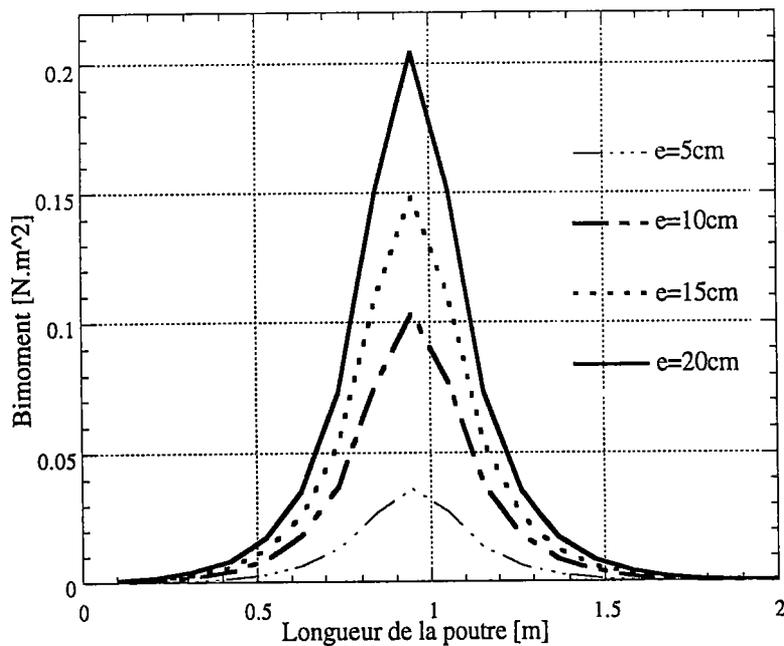
FigII.31: Variation du Bimoment le long de la poutre



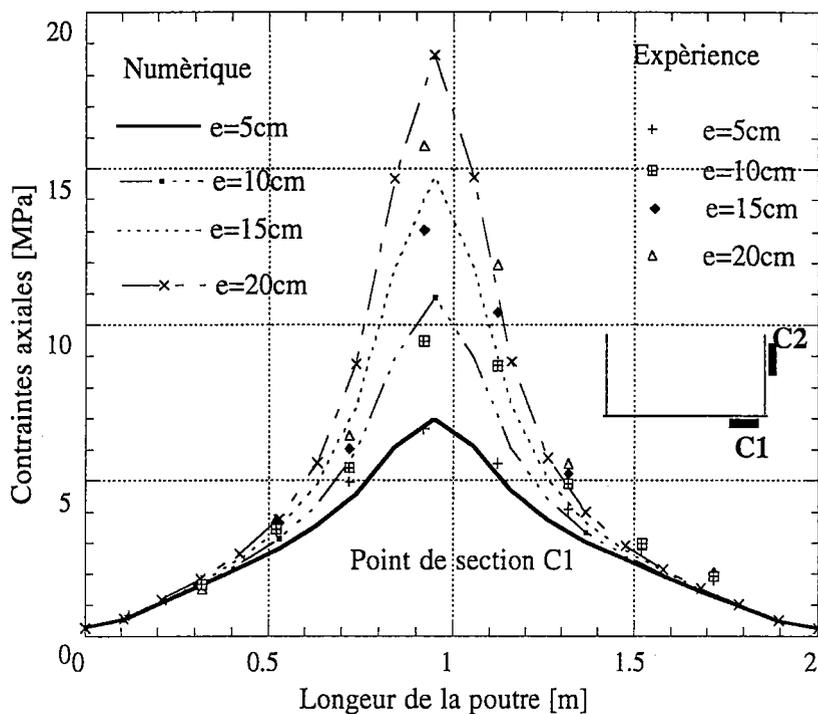
FigII.32: Variation du gauchissement le long de la poutre

c) Effet de l'excentricité

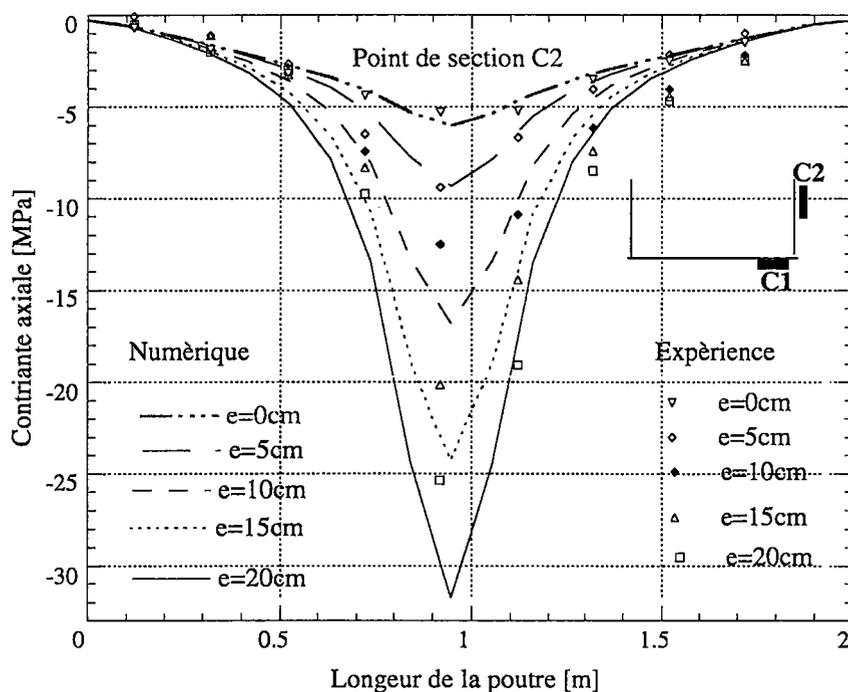
Quand l'excentricité e augmente, le moment de torsion augmente et le bimoment augmente proportionnellement (Fig II.33). En faisant varier l'excentricité, on remarque une augmentation des contraintes normales, ceci est vrai pour les différentes excentricités $e= 5, 10, 15$ et 20cm (Fig.II.34 et 35). Pour les points de sections C1 et C2, on a une bonne concordance entre le modèle des éléments finis et l'expérience.



FigII.33: Variation du bimoment en fonction de l'excentricité



FigII.34: Variation des contraintes normales le long de la poutre au point de section C1 pour différentes excentricités



FigII.35: Variation des contraintes normales le long de la poutre au point de section C2 pour différentes excentricités

II.B.2.2 Étude d'un poteau sous charges longitudinales

a) description générale

Le poteau est en acier IPE80 de 1.40m de hauteur, encastré à sa base et libre au sommet. La (Fig II.36) donne les caractéristiques géométriques de la section. Au sommet, sont fixés deux bras aux semelles afin de pouvoir appliquer des charges longitudinales excentrées.

La fig II.37 donne le dispositif de chargement utilisé. L'excentricité de la charge varie de 30, 40 et 50 cm par rapport au centre de gravité de la section. Des jauges sont collées le long du poteau au niveau des semelles (ligne S1 et S2) à cinq centimètres des extrémités (Fig II.37).

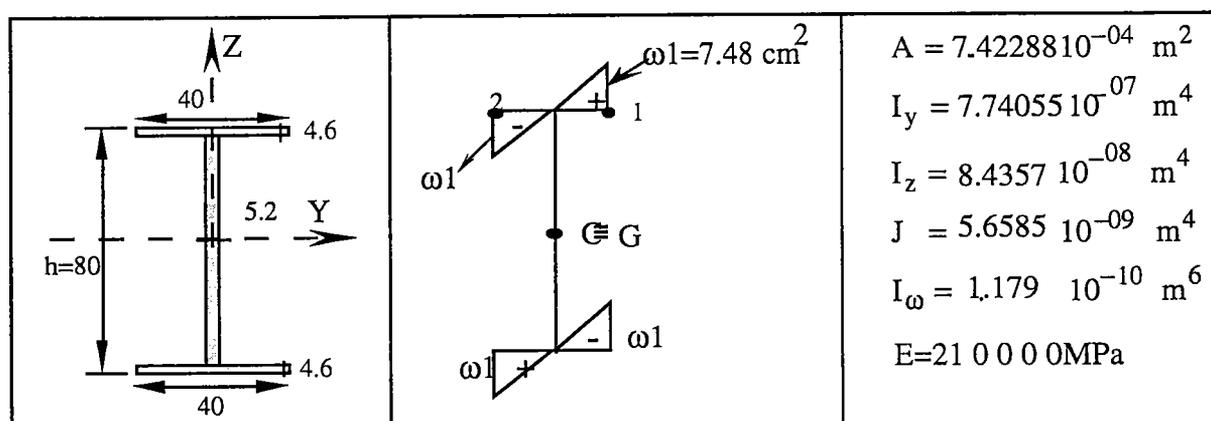
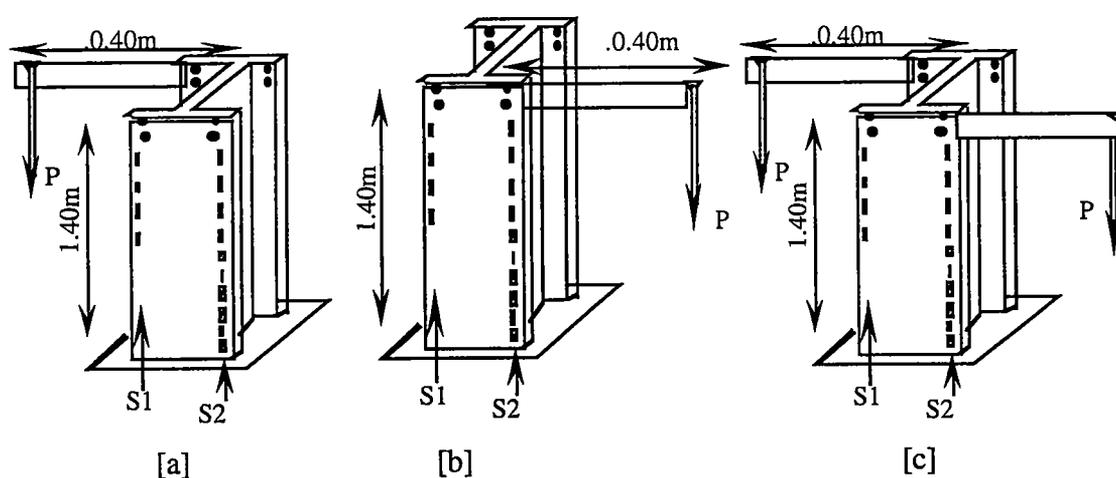


Fig II.36 : Caractéristiques géométriques de IPE80



FigII.37 : Le poteau IPE80 sous différents chargements

Trois chargements ont été étudiés :

Le premier correspond à une force longitudinale excentrée de 60daN appliquée sur le bras gauche seul (FigII.37a.).

Le second correspond à une force longitudinale excentrée de 60daN appliquée sur le bras droit seul (Fig.37.b).

Le troisième correspond à deux forces longitudinales excentrées de 60 daN appliquées sur le bras droit et le bras gauche (Fig.37.c).

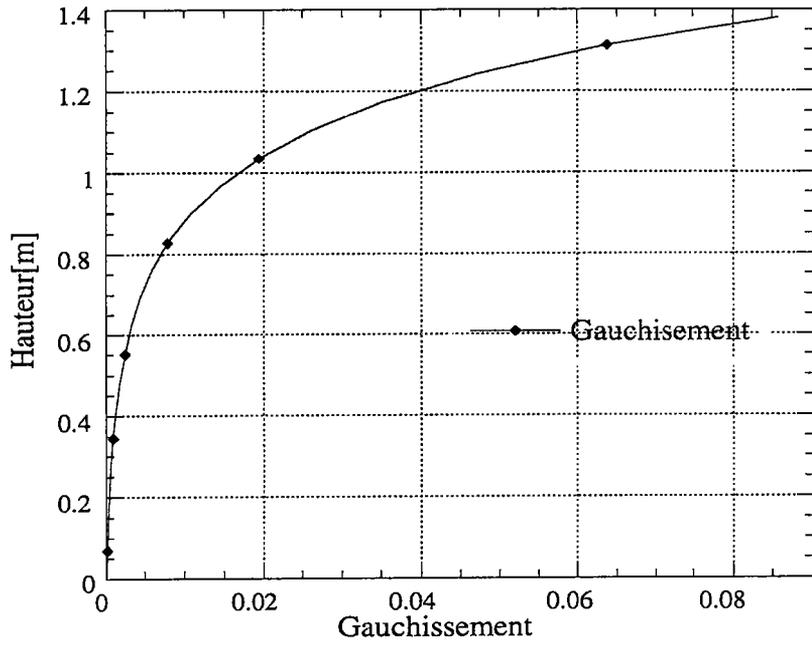
L'excentricité e varie de 30cm à 50cm avec un pas de 10 cm pour les trois cas de chargements.

b) Étude du poteau pour le cas du chargement [a] et [b]

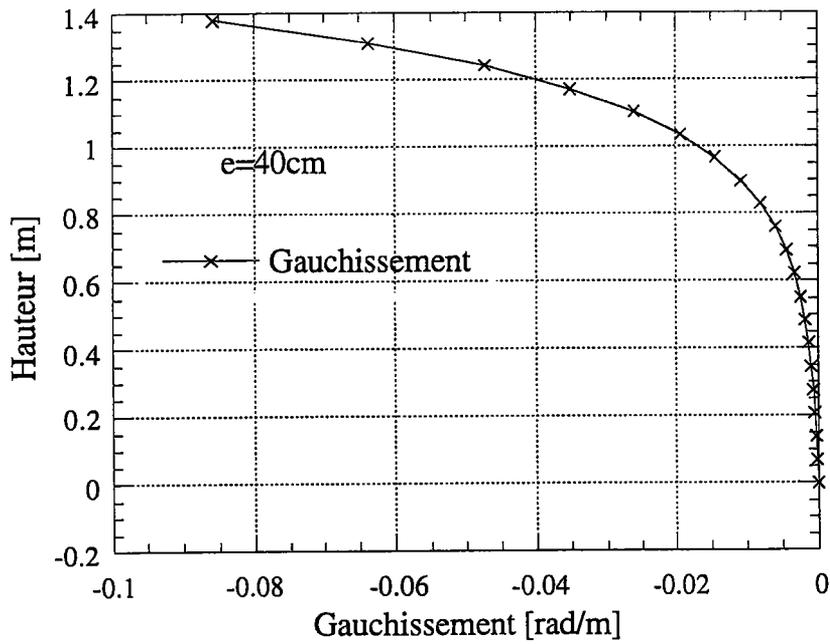
Pour ces chargements et d'après la théorie classique, le poteau est ainsi sollicité par deux moments de flexions M_y et M_z et un effort normal de 120 daN. Ce qui donne des contraintes normales constantes au niveau des semelles le long du poteau. En se basant sur la théorie de Vlassov, et en plus des efforts calculés par la théorie classique, un bimoment induit par le gauchissement sera pris en compte [V1]

La fig II.38 donne pour l'excentricité de 40cm la variation du gauchissement le long du poteau pour le chargement [a] . La figII.39 donne celui du chargement [b]. La figII.40 donne la variation du bimoment pour le chargement [a] et la figII.41 donne celui du chargement [b].

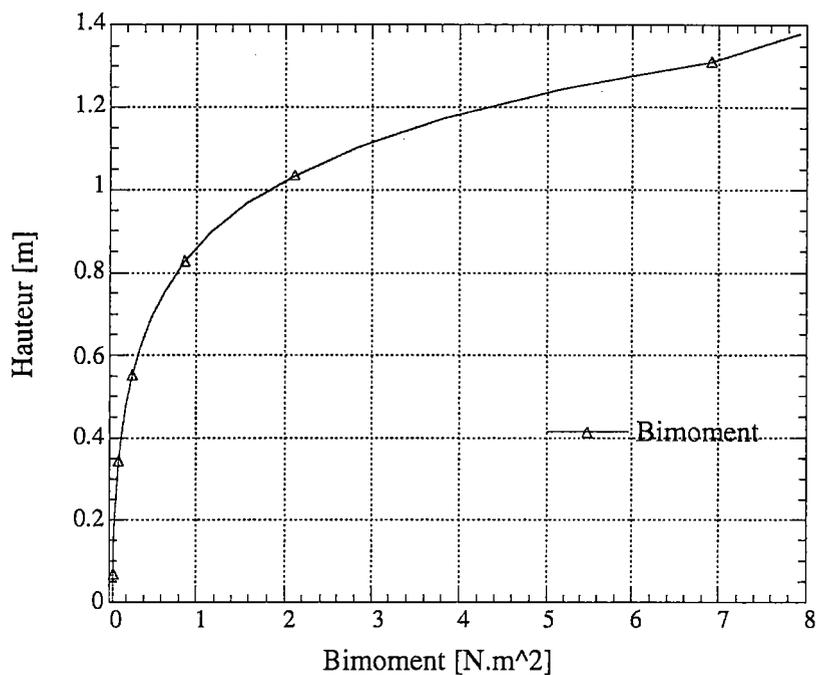
On remarque que ces deux grandeurs (gauchissements et Bimoments) sont maximales à la tête du poteau et elles tendent vers zéro à la base. Ce qui montre le rôle du gauchissement dans le comportement du poteau pour ce type de chargements.



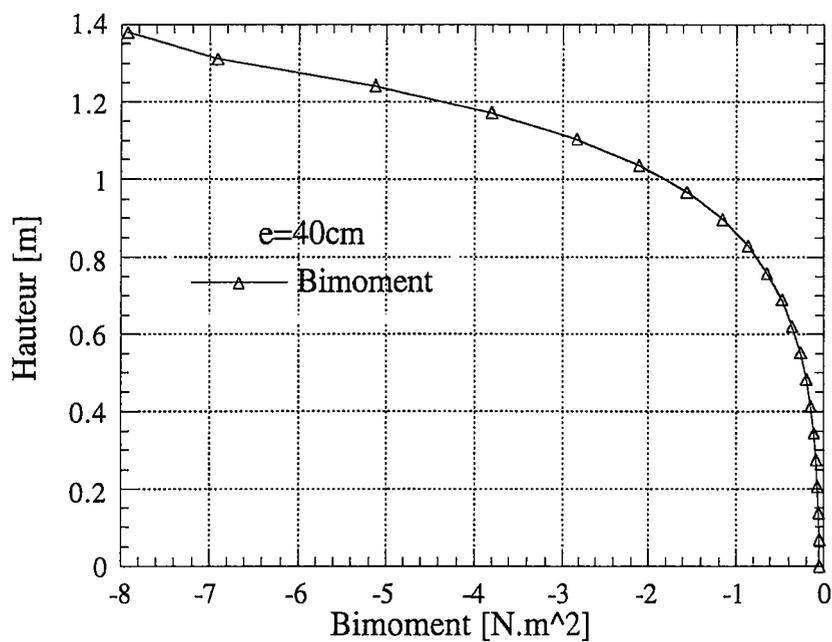
FigII.38: Variation du gauchissement le long du poteau [a]



FigII.39: Variation du gauchissement le long du poteau [b]



FigII.40: Variation du bimoment le long du poteau [a]

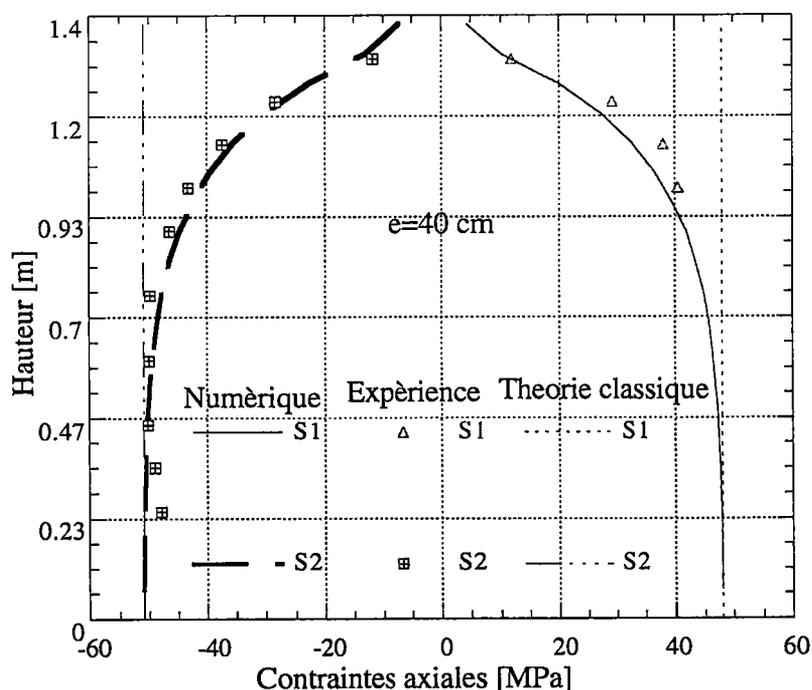


FigII.41: Variation du bimoment le long du poteau [b]

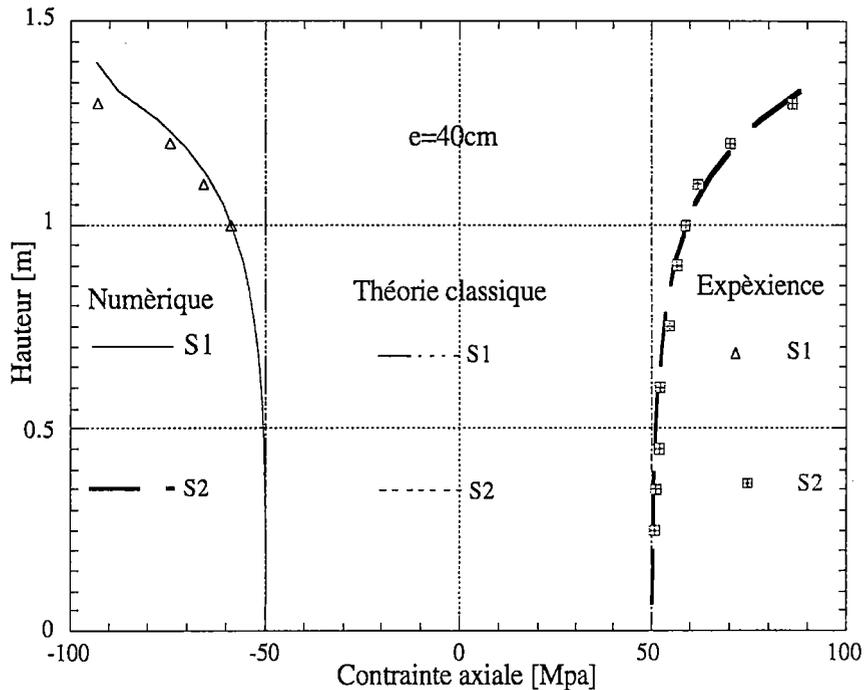
Pour les chargements [a] et [b], les contraintes normales le long du poteau sont calculées d'après la relation suivante:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{B_\omega}{I_\omega} \quad \text{II.33}$$

La FigII.42 donne la variation des contraintes le long du poteau dans le cas du chargement [a] pour deux points des sections S1 et S2. On compare les résultats donnés par la théorie classique, la théorie de Vlassov et le modèle d'élément finis. La figII.43 donne cette comparaison pour le cas du chargement [b]. On remarque le bon accord entre le modèle de Vlassov et celui d'ABAQUS. La théorie classique est valable seulement à la base du poteau où le gauchissement est très faible.



FigII.42: Variation numérique et expérimentale des contraintes normales le long du poteau[a]



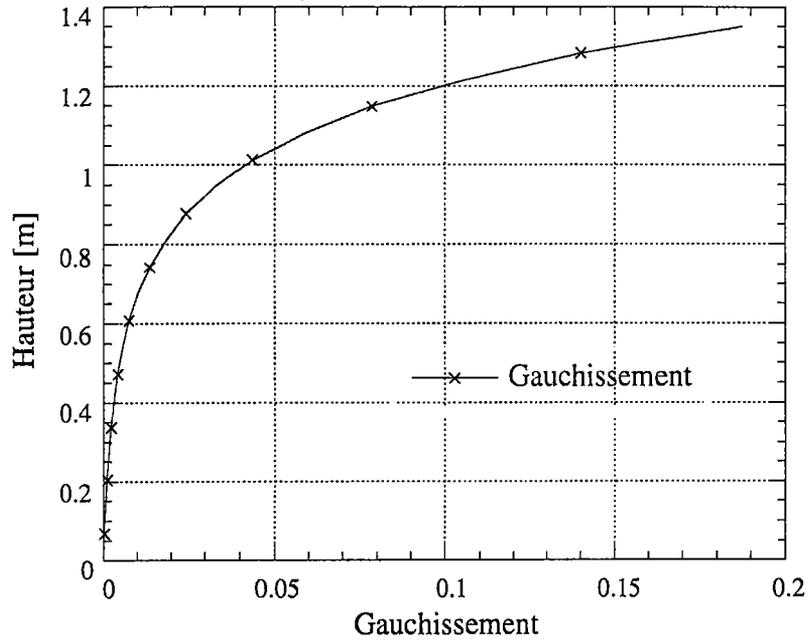
FigII.43: Variation numérique et expérimentale des contraintes normales le long du poteau[b]

c) Étude du poteau pour le cas du chargement [c]

Le troisième chargement est dû à deux forces excentrées égales de 60 daN, appliquées aux deux bras pour une excentricité e variant entre 30 cm et 50 cm par un pas de 10 cm (Fig.II.37.c). Le poteau est ainsi sollicité par un effort normal de 120 daN et par un bimoment. Pour les calculs numériques les éléments coques à huit noeuds S8R et les éléments poutre B31OS ont été utilisés.

La figure.(Fig.II.44.) donne la variation du gauchissement le long du poteau. La figII.45 donne celle du bimoment. On remarque que ces variables atteindront le maximum à la tête du poteau. Elles sont très faibles dans la zone proche de la base. Pour ce chargement le bimoment et le gauchissement ont doublé par rapport à ceux des chargements [a] et [b].

La figII.46 montre le gauchissement de la section transversale pour le cas du poteau sollicité par le chargement [c]. Le poteau est modélisé par les élément coque S8R. On observe que le gauchissement est très important à la tête du poteau.



FigII.44 : Variation du Gauchissement le long du poteaux [c]

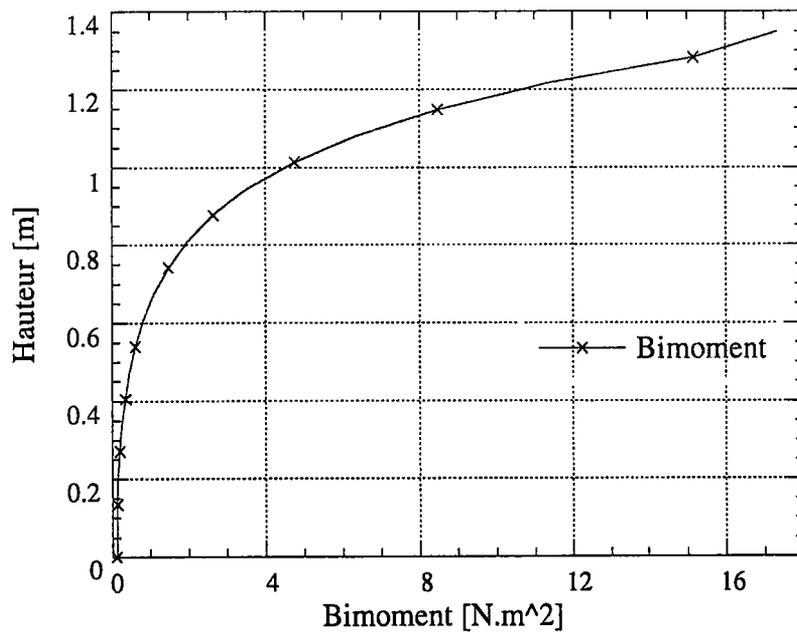


Fig II.45 : Variation du Bimoment le long du poteau [c]

Pour le chargement [c], les contraintes obéissent à la formule suivante (la flexion est nulle) :

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega$$

(II.34)

La figII.47 donne la variation numérique et expérimentale des contraintes normales le long du poteau, pour l'excentricité $e=40\text{cm}$. Dans la figII.48, on compare les contraintes calculées avec l'élément poutre B31OS et l'élément coque S8R. On voit un bon accord entre l'expérience et l'élément fini. Pour ce chargement les contraintes calculées selon la théorie classique n'est vérifié qu'a la base du poteau. On remarque que les contraintes normales sont maximales à la tête du poteau et atteignent la valeur de 100 MPa. A la base du poteau, elle ne sont que de quelque MPa ($\approx 5\text{MPa}$).

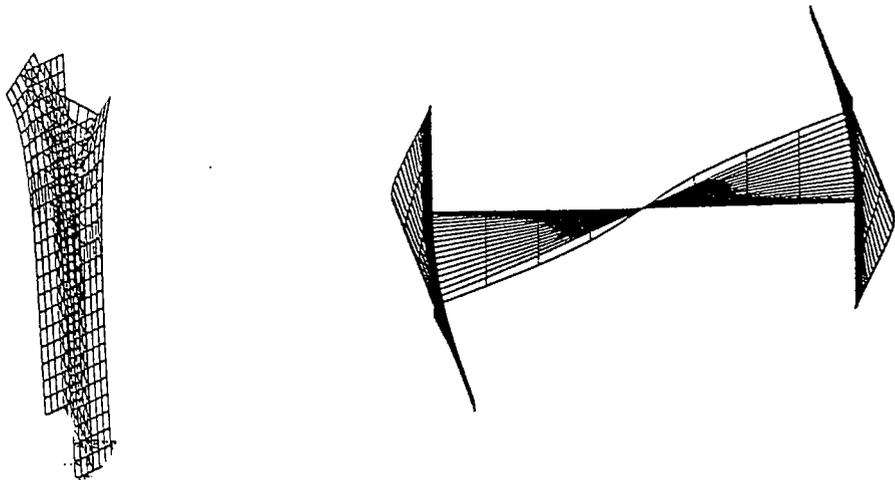
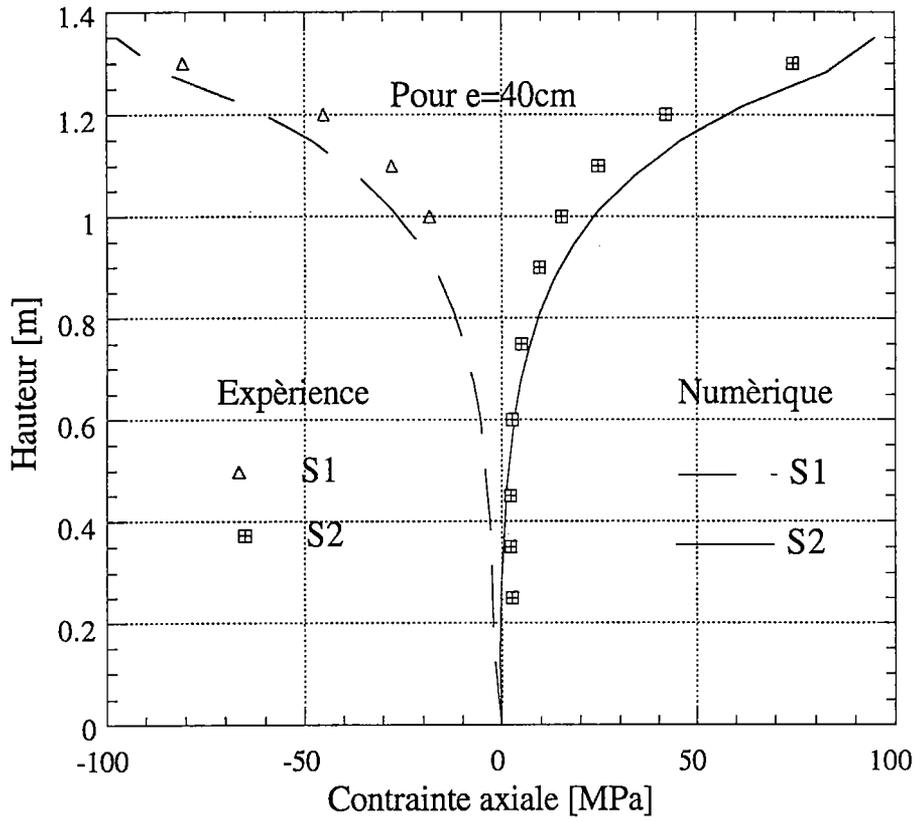
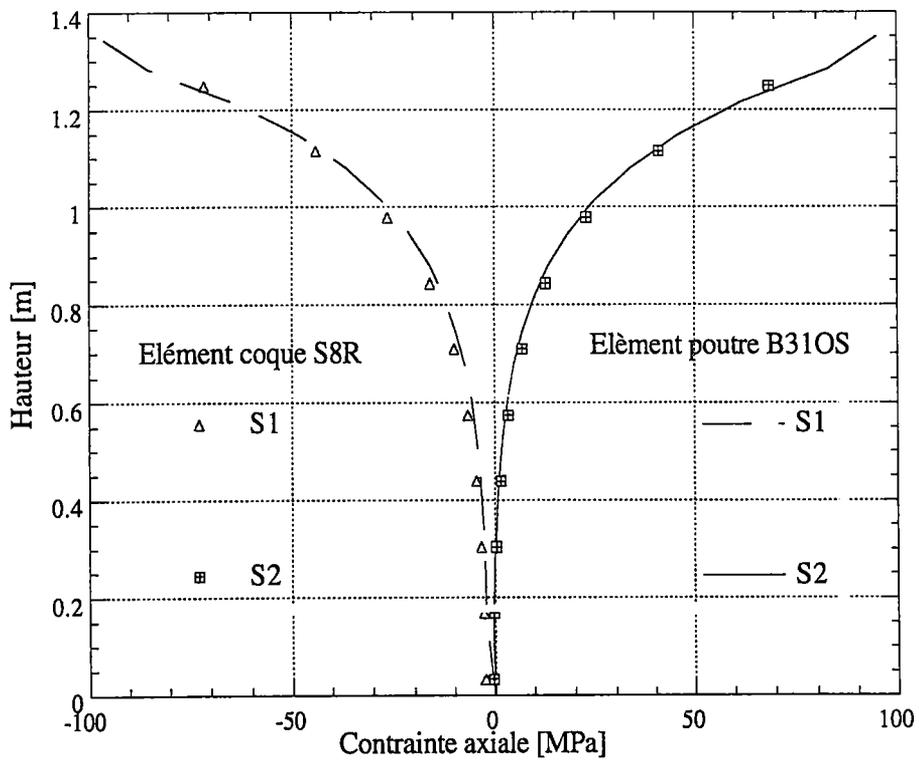


Fig II.46 Gauchissement du poteau.



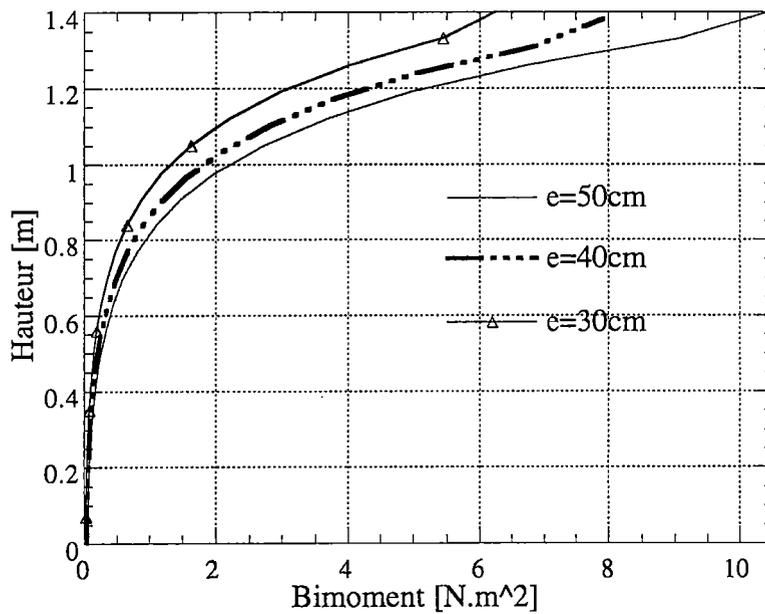
FigII.47 Variation de contraintes numériques et expérimentales le long du poteau [c]



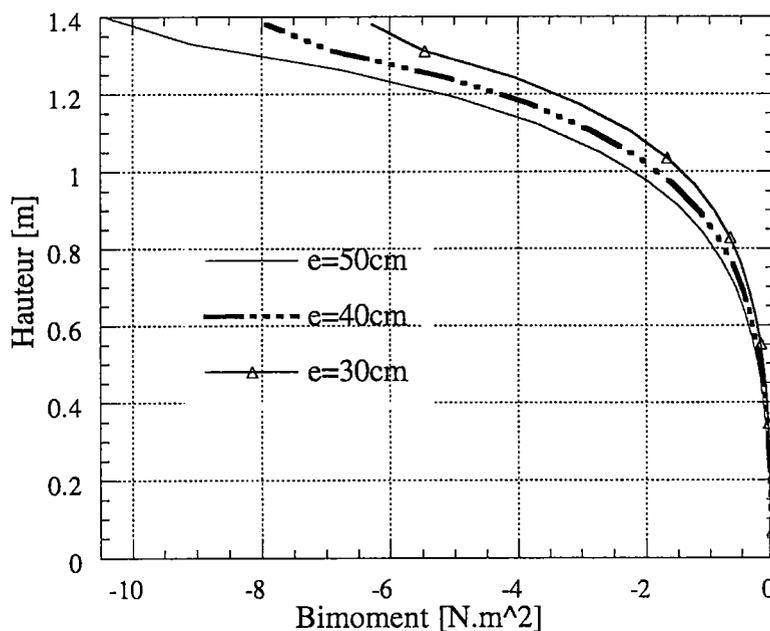
FigII.48 Variation des contraintes numériques, B31OS et S8R

d) Effet de l'excentricité

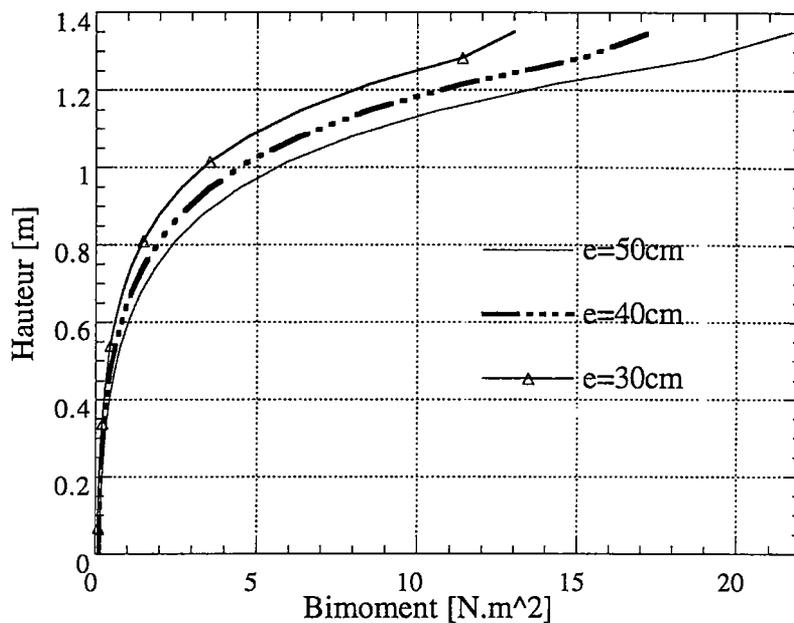
De même pour le cas du poteau, on fait varier les excentricités "e" (e=30, 40, 50cm). Pour les trois cas de chargement quand e augmente le gauchissement et le bimoment le long du poteau augmente. Les figII.49,50,51 donnent la variation du bimoment en fonction de l'excentricité "e" pour les trois cas de chargement. Les fig. II.52,53,54 donnent la variation des contraintes le long du poteau en fonction de "e", pour les trois chargements. On remarque une augmentation des contraintes en fonction de l'excentricité, surtout à la tête du poteau.



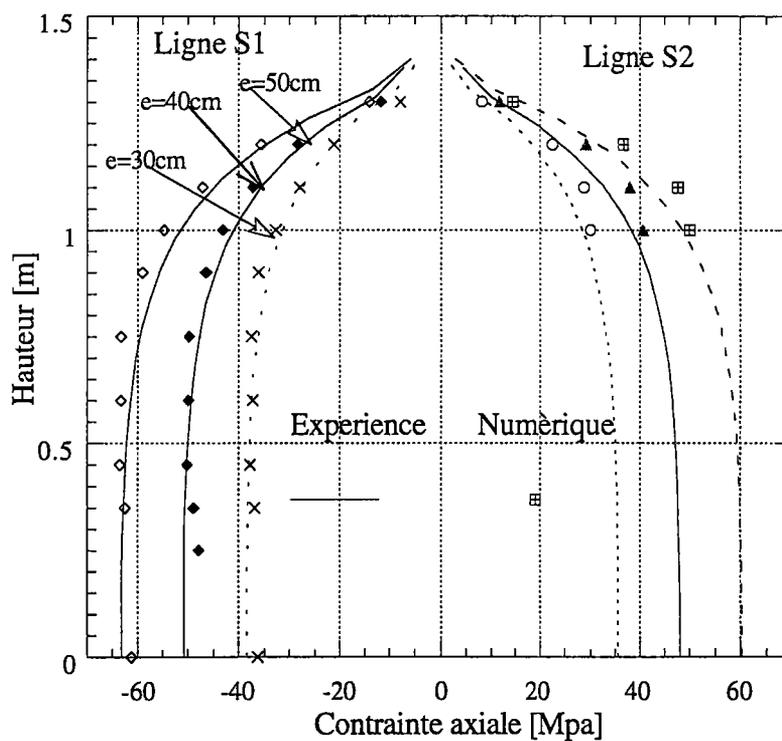
FigII.49 Variation du bimoment en fonction de l'excentricité [a]



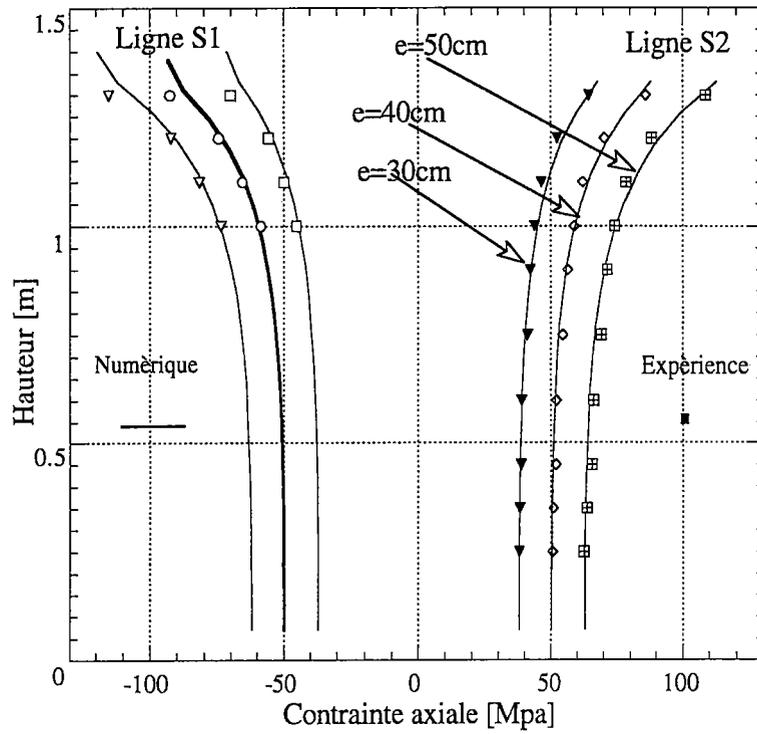
FigII.50 Variation du bimoment en fonction de l'excentricité [b]



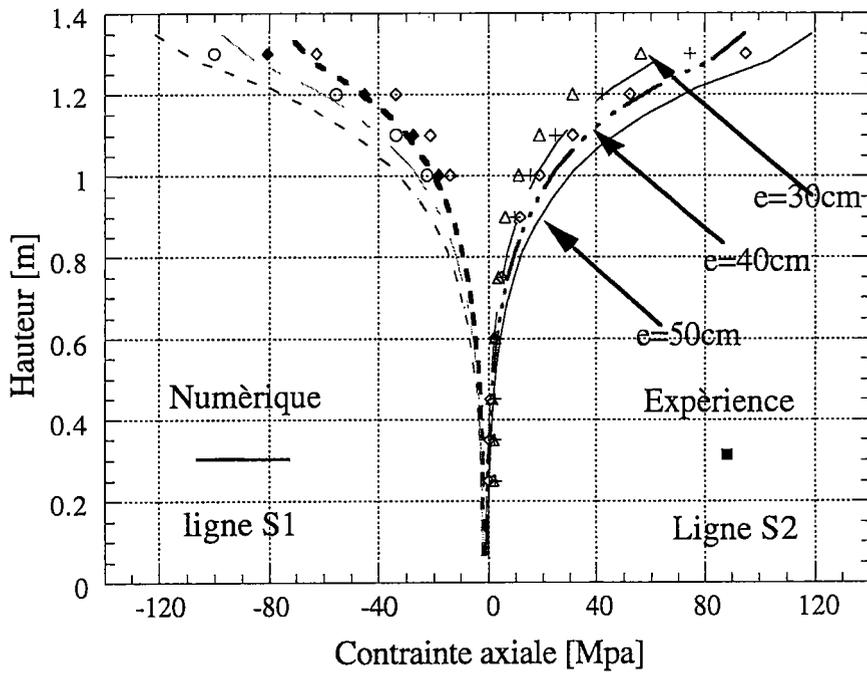
FigII.51: Variation du bimoment en fonction de l'excentricité [c]



FigII.52: Variation des contraintes normales le long du poteau pour les différentes excentricités [a]



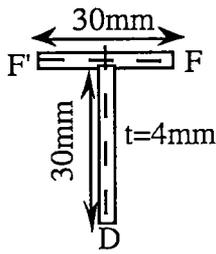
FigII.53: Variation des contraintes normales le long du poteau pour les différentes excentricités [b]



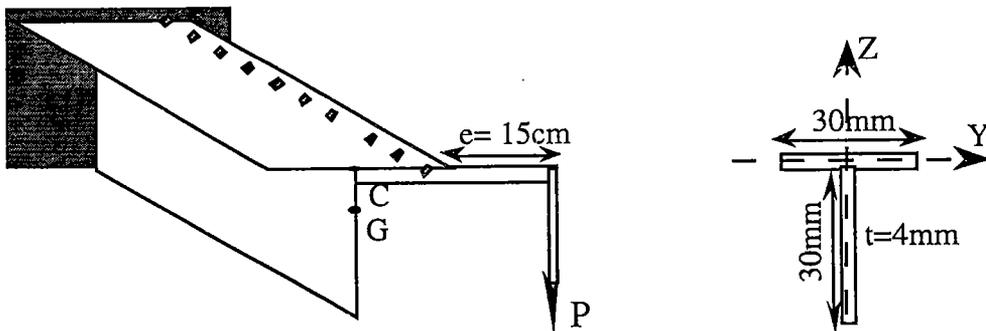
FigII.54: Variation des contraintes normales le long du poteau pour les différentes excentricités [c]

I.B.2.3 Console de section en T

C'est une poutre console en acier de section en T, de longueur 1.40m. Ces caractéristiques géométriques sont données dans le tableau II.55. Pour les sections en T, la coordonnée sectorielle principale est nulle. La coordonnée sectorielle donnée dans le tableau correspond à celle due au gauchissement secondaire. La structure est sollicitée à son extrémité libre par une force de 150 N qui peut être excentrée par rapport au centre de gravité. L'excentricité "e" varie entre $e = 0$ cm, $e = 15$ cm et $e = -15$ cm. FigII.56.

	$\omega_{F'} = -3.10^{-5} \text{ m}^2$	$I_y = 1.88 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$
	$\omega_F = 3.10^{-5} \text{ m}^2$	$I_z = 9.13 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$
	$\omega_D = 6.10^{-5} \text{ m}^2$	$J = 1.28 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$
		$I_\omega = 0.078 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6$ $E=210000\text{MPa}$

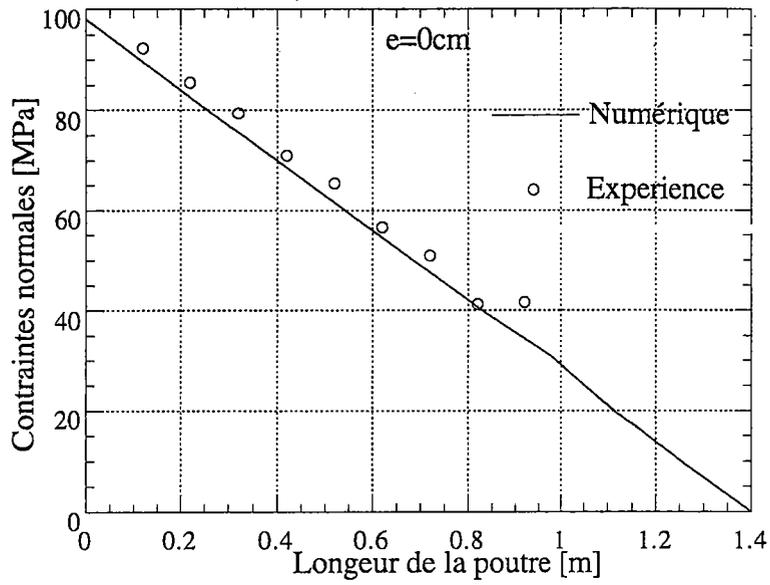
FigII.55 Caractéristiques géométriques de la section en T



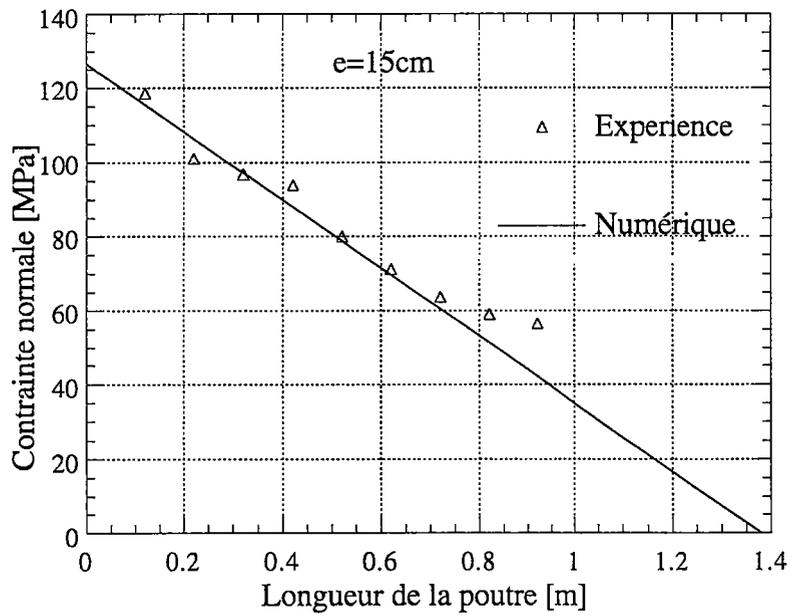
FigII.56 : Console de section en T sous la flexion-torsion

Neuf jauges ont été collées le long de la poutre suivant l'extrémité de la semelle. La figure (FigII.57) donne la variation des contraintes numériques et expérimentales le long de la poutre pour le cas de la flexion seule et les FigII.58, FigII.59 pour les deux excentricités 15 cm et -15 cm.

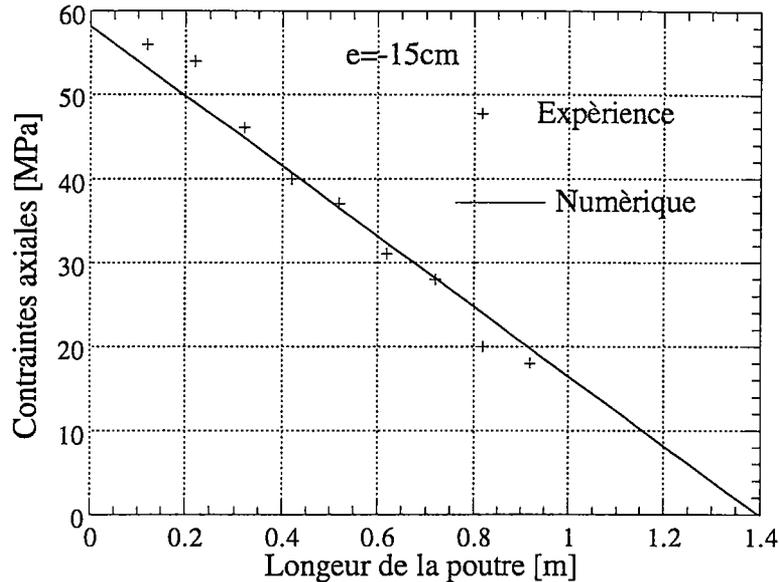
On remarque qu'en flexion-torsion les contraintes ont augmenté légèrement par rapport à la flexion simple. Ceci est dû à la contribution de ce qu'on appelle l'effet du gauchissement secondaire. Cependant ce gauchissement reste faible comparé à celui des autres sections types U et I.



FigII.57 Variation des contraintes normales le long de la poutre pour e=0cm



FigII.58 Variation des contraintes normales le long de la poutre pour e=15cm



FigII.59: Variation des contraintes normales le long de la poutre pour $e=-15\text{cm}$

II.B.3 CONCLUSION

De cette partie numérique et expérimentale, on peut tirer les conclusions suivantes:

Le modèle éléments finis du code Abaqus est en très bon accord avec les résultats expérimentaux.

La réduction des efforts au niveau de la ligne moyenne d'un élément n'est valable que dans le cas où on inclue le bimoment induit par le gauchissement. Dans une section, le gauchissement et le bimoment peuvent être induits aussi bien par les forces transversales (cas de la section en U) que par les forces longitudinales (cas du poteau).

L'augmentation du bimoment, gauchissement et les contraintes en fonction de l'excentricité par rapport au centre de torsion.

Les résultats obtenus montrent l'importance du gauchissement dans le cas de ces éléments sauf pour le cas de la section en T où son gauchissement est dû à la contribution de ce qu'on appelle l'effet du gauchissement secondaire. Ce gauchissement reste faible comparé à celui des autres sections types U et I.

III.A.1 Introduction

La construction moderne utilisant le matériau acier est caractérisée dans tous les domaines (génie civil, aéronautique, automobile), par l'emploi de structures minces. Ces structures bénéficient des avancées technologiques et des procédés de fabrication très performants. Ainsi, on arrive à fabriquer des éléments de plus en plus minces avec une résistance beaucoup meilleure. Ce qui conduit à des structures très légères. Cette réduction du poids a pour conséquence la réduction des moyens de transport et des moyens de levage nécessaires pour la réalisation sur chantier.

Cependant, l'emploi massif des éléments minces et élancés rend les structures très sensibles aux instabilités de forme. Les instabilités peuvent être globales ou locales. L'instabilité est globale quand l'élément est concerné par l'instabilité sur toute sa longueur. C'est le cas du flambement des poteaux (instabilité par effort normal) ou du déversement des poutres (instabilité par flexion). L'instabilité est locale quand elle concerne une zone restreinte d'un élément. Ce phénomène est appelé voilement. C'est le cas du voilement d'une partie de la semelle comprimée d'une poutre.

L'étude des instabilités consiste à trouver les charges maximales qu'une structure peut supporter sans perte d'équilibre. On parle alors de charges critiques. Généralement, les instabilités globales peuvent être traitées par la théorie des poutres. Pour le calcul des charges critiques correspondant aux instabilités locales, la théorie des plaques ou coques doit être appliquée.

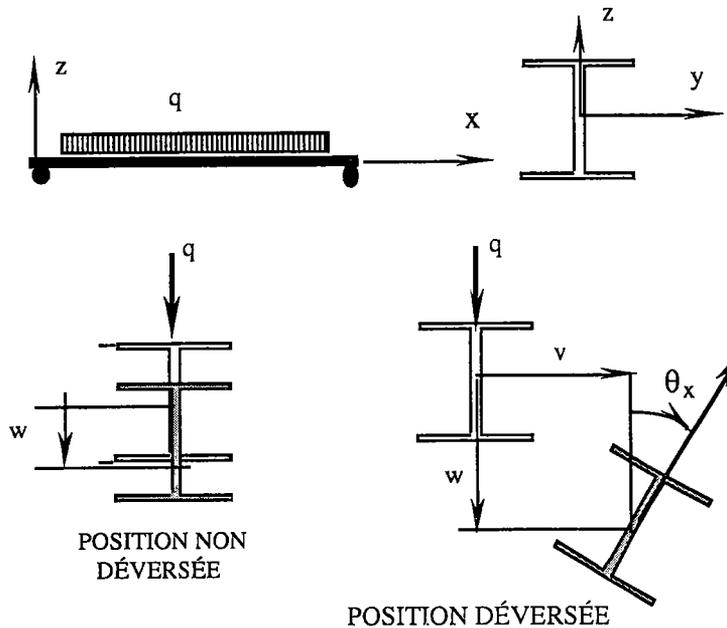
De nombreux travaux s'intéresse au déversement des poutres, on cite parmi eux [A4], [A5], [A6], [A7]. [E4].

Dans ce chapitre, le déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes est étudié. Après la description du phénomène, une étude comparative est faite entre les charges critiques de déversement calculées numériquement par ABAQUS et les charges critiques réglementaires données par les solutions analytiques proposées dans l'Eurocode 3 [E3]. Le comportement post critique des poutres est ensuite étudié. On étudie en particulier :

- l'effet de l'excentricité de la charge par rapport au centre de torsion,
- l'effet du point d'application de la charge.

III.A.2 Définition

Le déversement est le flambage latéral de la membrure comprimée de la poutre dans le plan horizontal. Il survient, lorsqu'une poutre soumise à un chargement vertical la sollicitant en flexion par rapport à l'axe fort, se déforme perpendiculairement à l'axe de faible inertie. La poutre se dérobe latéralement. Suite au déversement, les déplacements v et θ_x naissent (Fig.III.1), le comportement de la poutre devient spatial et le déversement les flexion et la torsion sont toujours couplés.



FigIII.1: Déplacements de déversement (v , θ_x)

Les premiers travaux sur les instabilités des poutres à parois minces et à sections ouvertes ont été rapportés par Timoshenko et Gere [T1]. Les charges critiques de déversement des poutres à sections bisymétriques sous différentes conditions aux limites sont données. Vlassov [V1] a étudié aussi le déversement des poutres à partir des équations d'équilibre linéaires. Djalaly [D5] a donné les charges critiques de déversement des poutres à sections monosymétriques. Ces solutions ont été obtenues à partir des équations d'équilibre. Ces équations ont été obtenues à partir des relations non linéaires entre les déplacements d'une part et entre les déplacements et les déformations d'autre part. Ces solutions ont été adoptées par l'EC3 [E3].

Elles vont être discutées ci-dessous.

III.A.3 Formule générale du déversement

Soit une poutre droite de longueur L et de conditions d'appuis données. La section transversale est une section ouverte monosymétrique. L'axe fort d'inertie est noté y . L'axe

faible est z. Le centre de gravité et l'axe de torsion sont situés sur l'axe de symétrie z. Les moments critiques élastiques de déversement, pour un chargement appliqué suivant l'axe z à la côte zg par rapport au centre de torsion (fig.III-2), sont donnés par la relation suivante:

$$M_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{(kL)^2} \left\{ \pm \sqrt{\left[\frac{k}{k_\omega} \right]^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2} - (C_2 z_g - C_3 z_j) \right\}$$

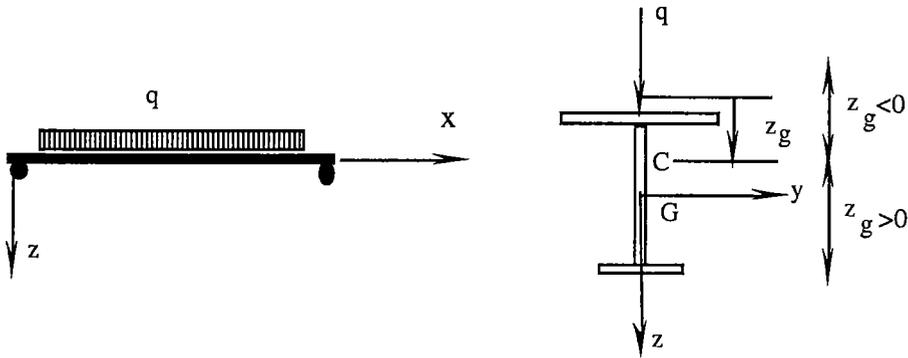
Dans cette relation:

où C_1 , C_2 et C_3 sont des coefficients qui dépendent du chargement et des conditions d'appuis.

I_z : moment d'inertie par rapport à l'axe faible,

J : moment d'inertie de torsion uniforme

I_ω : moment d'inertie de gauchissement



FigIII.2: section monosymétrique et point d'application de la charge.

k est un coefficient qui dépend des conditions d'appuis dans le plan x-y. Il est égal à 1 pour une poutre bi-articulée et 0.5 pour une poutre encastree. (Fig.III-3)

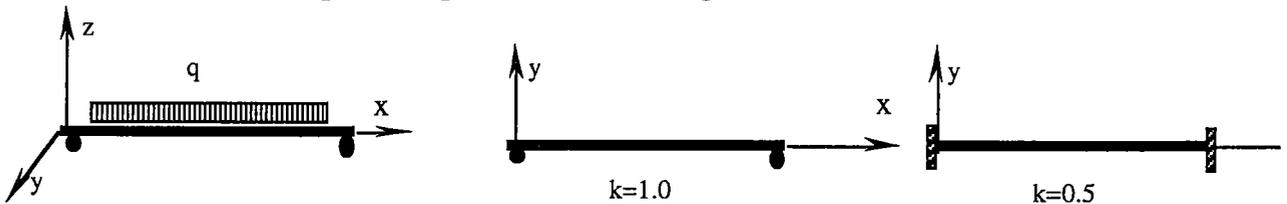


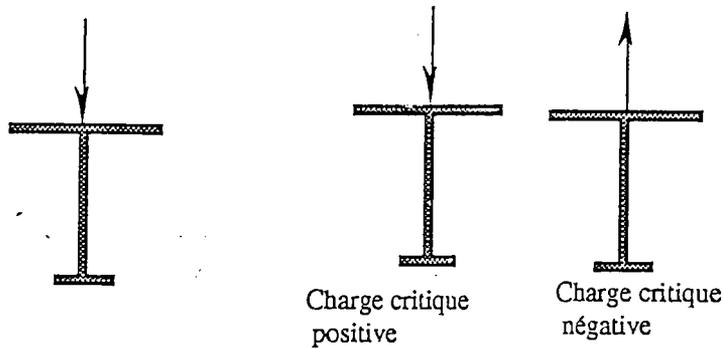
Fig.III.3: Choix du coefficient k

k_ω : coefficient qui dépend des conditions d'appui de gauchissement. Il est égal à 1 pour un gauchissement libre et 0.5 pour un gauchissement empêché, au niveau des deux appuis.

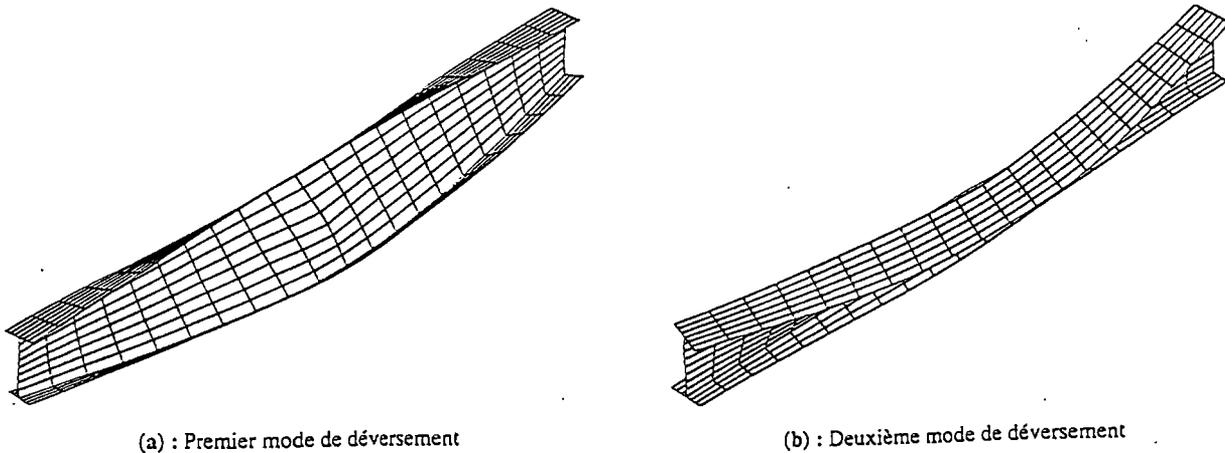
$z_j = z_c - \frac{1}{2I_{yA}} \int z(y^2 + z^2) dA$ est un coefficient d'asymétrie. Il est appelé aussi coefficient de

Wagner. Ce coefficient est nul pour une section bisymétrique.

On note que, l'équation générale du déversement (III.1) donne deux solutions différentes, une positive et l'autre négative. Contrairement au flambement, où seule la charge critique positive est prise en compte, pour le déversement, la charge critique négative est aussi considérée. On a alors deux modes de déversement correspondant aux charges critiques positive et négative. Le premier mode correspondant à la solution positive comprime les fibres supérieures de la section transversale. Le deuxième mode correspondant à la solution négative est un mode qui comprime les fibres inférieures de la section (Fig III.4). La figure (Fig III.5) donne les premiers modes de déversement pour un IPE 100 modélisé avec l'élément coque.



FigIII.4: Interprétation des charges critiques de déversement



(a) : Premier mode de déversement

(b) : Deuxième mode de déversement

Fig III.5: Modes de déversement d'une poutre biarticulée (élément coque)

III.A.4 Cas des sections bisymétriques

Pour le cas des poutres à section transversale constante et doublement symétrique, le coefficient de Wagner est nul ($z_j = 0$). Les moments critiques sont alors donnés par:

$$M_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{(kL)^2} \left\{ \pm \sqrt{\left[\frac{k}{k_\omega} \right]^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{\pi^2 EI_z} + (C_2 z_g)^2} - C_2 z_g \right\} \quad (III.2)$$

Dans ce cas, seuls les coefficients C_1 et C_2 interviennent dans le calcul des moments critiques. Ces valeurs sont données dans le tableau III.1 pour des poutres sollicitées par des chargements transversaux et pour différentes conditions aux limites.

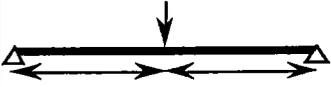
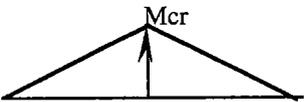
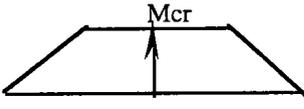
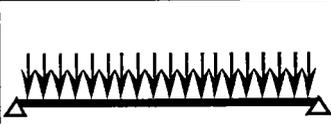
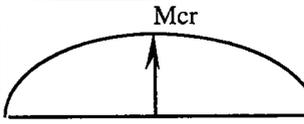
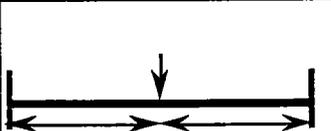
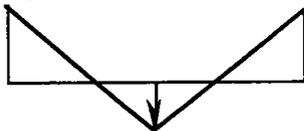
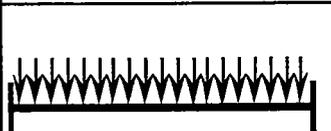
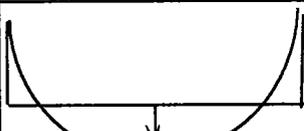
N°	Chargement	Moment critique de calcul	k	C1	C2
1			1	1.36	0.55
			0.5	1.070	0.432
2			1	1.05	0.43
			0.5	1.01	0.41
3			1	1.13	0.46
			0.5	0.972	0.304
4			1	1.565	1.267
			0.5	0.938	0.715
5			1	1.285	1.562
			0.5	0.712	0.652

Tableau III.1: valeurs de C_1 et C_2 pour les charges transversales

Les solutions analytiques de l'équation (III.2) proposées par l'Eurocode3 [E3] pour une section bisymétrique, montrent que lorsque la charge est appliquée au centre de torsion ($z_g = 0$) les deux solutions sont égales et de signes opposées ($|M_{cr1}| = |M_{cr2}|$). Quand la charge est appliquée à un point quelconque de la section, sauf au centre de torsion ($z_g \neq 0$), les deux solutions sont différentes ($|M_{cr1}| \neq |M_{cr2}|$).

Le tableau (III.4) donne les charges critiques du déversement d'un IPE100 sollicitée par une charge concentrée au milieu. La charge est appliqué respectivement au centre de gravité, au niveau de la semelle supérieure et au niveau de la semelle inférieure. Différentes longueurs sont considérées. Ces résultats montrent que les valeurs des charges critiques de déversement, quand la charge est appliquée à la semelle supérieure, suffisent pour trouver celles de la charge quand elle est appliquée au niveau de la semelle inférieure. Ces charges sont égales au signe près. Les caractéristiques géométriques et élastiques utilisées dans les calculs sont données dans le tableau (III.5) (voir paragraphe III-9 ci après).

L(m)	charge en G		Charge au niveau de la semelle supérieure		Charge au niveau de la semelle inférieure	
	Pcr >0 (kN)	Pcr <0 (kN)	Pcr >0 (kN)	Pcr <0 (kN)	Pcr >0 (kN)	Pcr <0 (kN)
3	9.7296	-9.7296	+7.9949	-11.787	+11.787	-7.9949
4	5.3424	-5.3424	+4.5861	-6.2015	+6.2015	-4.5861
5	3.3787	-3.3787	+2.9830	-3.8159	+3.8159	-2.9830
6	2.3305	-2.3305	+2.0982	-2.582	+2.582	-2.0982

Tableau III.4 : Charges critiques en fonction du point d'application de la charge

III.A.5 Influence de la forme de la section transversale

L'expression générale du moment critique de déversement (III.1) est fonction de la longueur de la poutre et des caractéristiques géométriques de sa section transversale. Pour améliorer la résistance d'une poutre au déversement, on doit augmenter les caractéristiques géométriques intervenant dans le déversement à savoir : le moment d'inertie par rapport à l'axe faible I_z et la résistance à la torsion (J et I_ω). Ainsi, certaines poutres P.R.S sont avantageuses par rapport aux sections laminées à chaud en I ou en H de hauteur similaire parce que, soit les semelles sont plus larges, soit la poutre a une section fermée, ce qui a pour effet d'augmenter la résistance à la torsion. Ceci explique pourquoi la résistance des poutres à sections fermées est très rarement gouvernée par le déversement. On remarque aussi, que la position de la section monosymétrique transversale, affectera la résistance au déversement de la poutre (Fig III.6)

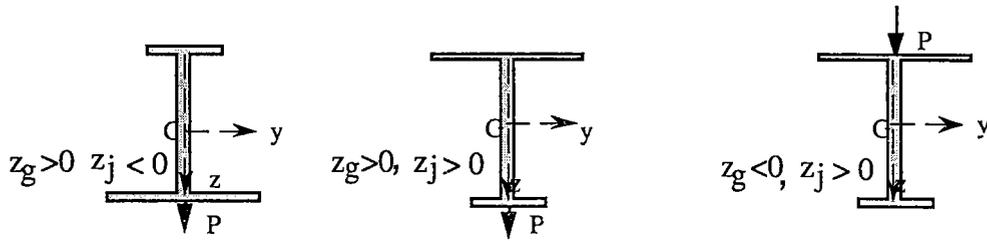


Fig III.6: Influence de la position de la section transversale.

La figure (III.7) représente la variation, en fonction de la longueur, du rapport du moment de déversement au moment plastique pour deux poutres sollicitées par une charge concentrée au milieu de la travée. Deux sections droites sont considérées, à semelles étroites (IPE400) et à semelles plus larges (HEA300). Ces sections ont sensiblement la même résistance plastique en flexion autour de l'axe fort y. Par contre, les caractéristiques intervenant dans l'instabilité au déversement (I_z , J et I_ω) sont très grandes dans le cas du HEA 300 par rapport à celles de l'IPE (tableau III.2). Pour le HEA, les moments critiques sont supérieurs au moment plastique pour toutes les longueurs ($M_{cr}/M_{pl} > 1$). Ceci s'explique par le fait que les instabilités se produisent dans le domaine plastique. Elles ne sont pas dangereuses dans le cas où on limite l'étude de la poutre au moment plastique. Par contre dans le cas de L'IPE, le moment critique peut être inférieur au moment plastique de la poutre (pour $L > 6m$). L'instabilité est très redoutable dans ce cas.

	IPE400	HEA300
$w_{pl} (m^3)$	$1.3070 \cdot 10^{-03}$	$1.3830 \cdot 10^{-03}$
$I_z (m^4)$	$1.3180 \cdot 10^{-05}$	$6.3110 \cdot 10^{-05}$
$I_y (m^4)$	$2.3128 \cdot 10^{-04}$	$1.8264 \cdot 10^{-04}$
J (m^4)	$5.1000 \cdot 10^{-07}$	$8.5000 \cdot 10^{-07}$
$I_\omega (m^6)$	$4.9005 \cdot 10^{-07}$	$1.19977 \cdot 10^{-06}$

Tableau III.2 : Propriétés des sections IPE400 et HEA 300
(résistances plastiques égales)

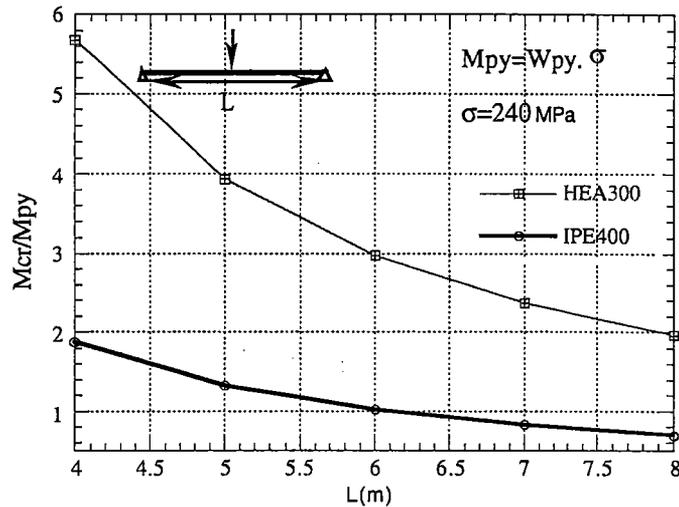


Fig III.7 : Importance de la forme de la section sur le moment critique ($z_g=0$)

III.A.6 Importance du point d'application des charges

La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de torsion de la section transversale de la poutre, joue un rôle important dans la stabilité au déversement. La figure (III.8) montre que les charges transversales appliquées à la semelle inférieure créent un moment secondaire stabilisant. Ce moment va augmenter la résistance de la poutre. Par contre une charge agissant à la semelle supérieure a un effet déstabilisateur. On peut donc, tirer profit de l'augmentation de la résistance au déversement lorsque les charges transversales sont appliquées au niveau de la semelle tendue (Ce cas est rencontré notamment lorsque le galet de roulement d'un monorail se déplace sur la semelle inférieure)

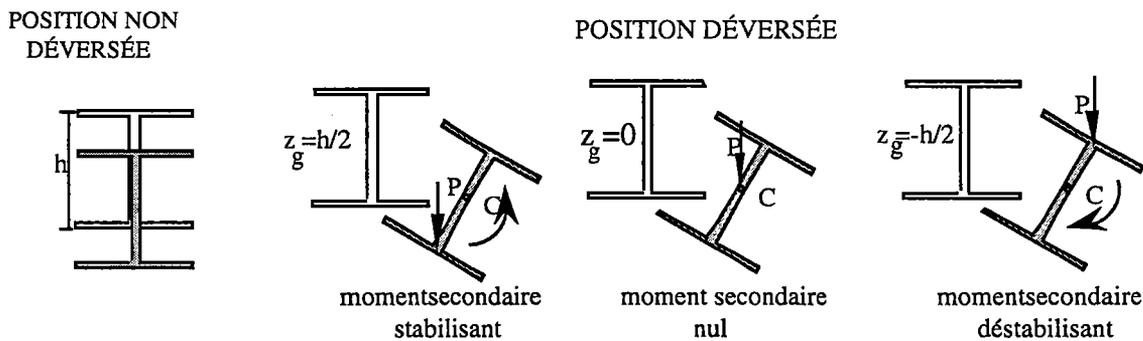


Fig III.8 Effet du point d'application de la charge

Dans la figure (III.9), on représente la variation de la charge critique de déversement M_{CR} en fonction de la longueur de la poutre L et du point d'application z_g pour un IPE100 chargée au milieu. La figure (III.10) reproduit celui de l'IPE300. Une meilleure résistance au déversement est obtenue pour $z_g=h/2$ (semelle inférieure). Par contre une charge appliquée à $z_g=-h/2$ (semelle supérieure) affaiblie la résistance de la poutre au déversement. Pour la poutre en IPE100,

l'augmentation de la résistance au déversement, cas où la charge est appliquée au niveau de la semelle inférieure, peut atteindre la proportion de 80% par rapport à la semelle supérieure. Pour la poutre en IPE300, cette augmentation peut dépasser le double.

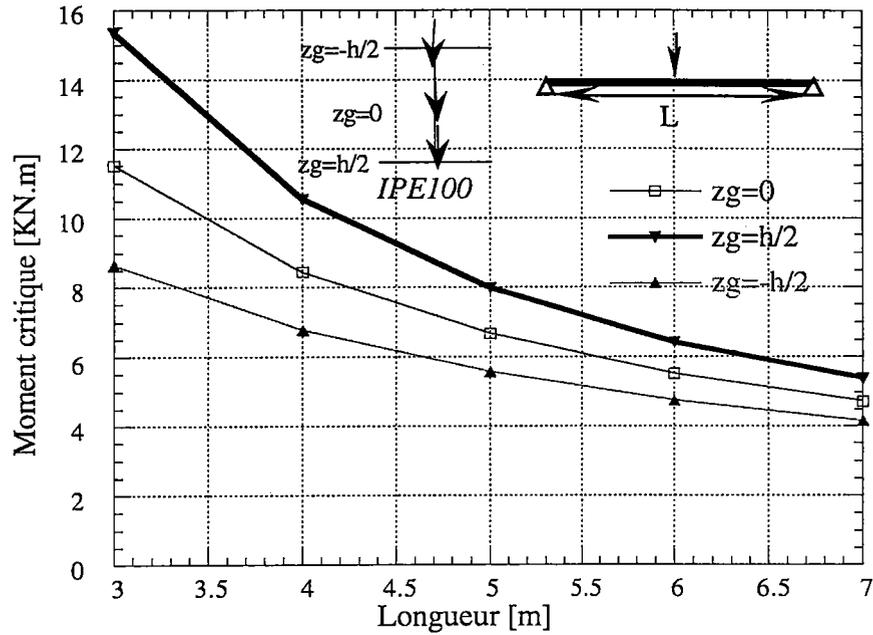


Figure III.9 : Variation de la charge critique en fonction du point d'application de la charge transversale (IPE100)

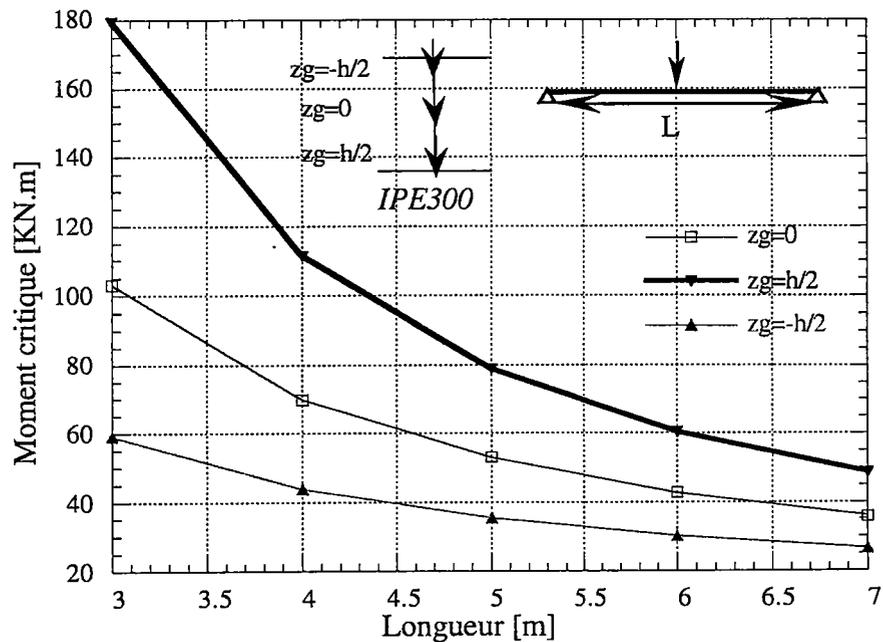


Figure III.10: Variation de la charge critique en fonction du point d'application de la charge transversale (IPE300)

III.A.7 Importance des conditions aux limites

A partir de l'équation (III.2), la contribution des conditions aux limites dans le calcul du moment critique, intervient avec (k, k_{ω}) . Pour illustrer ce fait, on présente dans le tableau(III.3) la charge critique de déversement d'une poutre sollicitée par une charge concentrée appliquée en son milieu. Différentes conditions d'appuis sont prévues. La longueur de la poutre est égale à $L=5m$. Deux sections sont utilisées, une poutre en IPE100 et une autre en IPE200. Les cas N°1 et N°2 correspondent à une poutre biarticulée avec gauchissement libre (cas 1) et gauchissement empêché (cas 2). Les cas N°3 et N°4 correspondent à une poutre biencastrée avec gauchissement libre (cas 3) et gauchissement empêché (cas 4). Pour tous les calculs, le point d'application de la charge est en G. On remarque que la charge critique dépend fortement des conditions aux limites. Elle augmente avec le blocage des degrés de liberté. De plus, l'effet du gauchissement est très important, surtout pour les IPE de grande hauteur (comme l'IPE 200). On remarque que la charge critique a doublé entre le cas 1 et le cas 4 pour les deux sections.

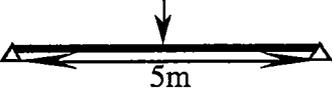
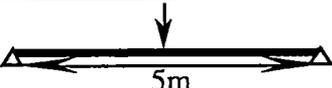
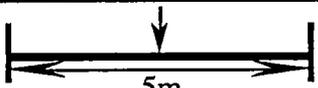
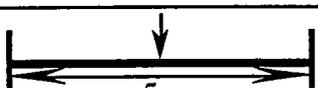
N°	Condition au limite et chargement	Moment	Moment
		critique [KN.m] IPE100	critique [KN.m] IPE200
1	 Gauchissement libre	52.93	228.36
2	 Gauchissement empêché	67.228	387.81
3	 Gauchissement libre	87.366	483.79
4	 Gauchissement empêché	98.118	567.614

Tableau III.3 Influence des conditions aux limites sur la charge critique.

III.A.8 Analyse numérique et réglementaire du déversement des poutres biencastrées

Le déversement des poutres biarticulées à sections monosymétriques a été étudié du point de vue théorique et numérique par Brouki [B9], [M5] Pour les calculs numériques, les éléments poutres avec gauchissement B31OS et les les éléments coques d'Abaqus ont été utilisés.

Ci après, on se limite à étudier le déversement des poutres bisymétriques et biencastrées. L'effet du gauchissement sur les charges critiques élastiques est étudié. Les solutions numériques d'Abaqus [A2], [A3] sont comparées à celles de l'EC3. Pour les calculs numériques, l'élément poutre 3D avec gauchissement (B31OS) a été utilisé.

Les calculs sont faits pour des poutres ayant une portée allant de 3 à 10 m. Les sections IPE100, IPE200 et IPE300 sont considérées. Ces poutres sont sollicitées par les chargements des cas 4 et 5 du tableau (III.1). On calcule à chaque fois les charges critiques pour un gauchissement libre et un gauchissement empêché. Pour les calculs analytiques, la relation (III.2) a été utilisée avec les coefficients ($k = 0.5$, $k_{\omega} = 1$) pour le gauchissement libre et ($k = 0.5$, $k_{\omega} = 0.5$) pour le gauchissement empêché. Les coefficients C1 et C2 correspondant à $k=0.5$ sont tirés du tableau (III.1) pour les deux cas de chargements étudiés. Les caractéristiques géométriques et élastiques des sections utilisées sont données dans le tableau (III.5).

III.8.1 Charge concentrée au milieu d'une poutre biencastrée

a) Charge appliquée au centre de gravité ($z_g=0$)

Sur les figures (III.11a et b), on représente respectivement la variation du moment critique de déversement numérique et réglementaire, en fonction de la longueur pour un IPE100. Le point d'application de la charge est au centre de gravité. La figure.(III.11a) correspond au gauchissement libre. La figure.(III.11b) correspond au gauchissement empêché. De la même manière, on porte respectivement dans les figures.(III.12a et b) et (III.13a et b) celles des IPE200 et IPE300. A partir de ces courbes on constate:

- Dans le cas du gauchissement libre, les solutions réglementaires sont vérifiées numériquement, pour les trois sections.
- Dans le cas du gauchissement empêché, on observe une légère différence entre les solutions réglementaires et numériques.
- La résistance au déversement d'une poutre augmente quand le gauchissement est empêché. Pour les IPE 200 et 300, la résistance augmente du double

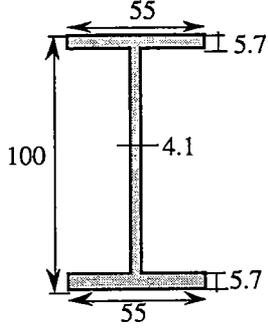
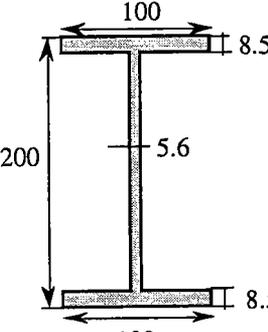
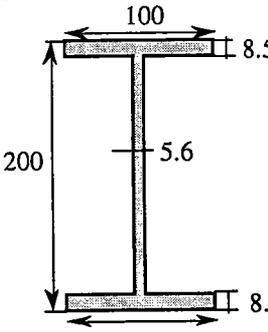
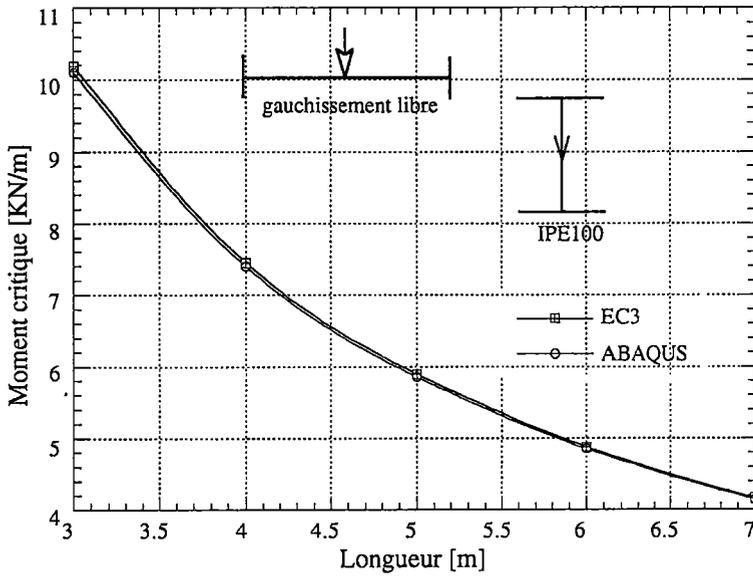
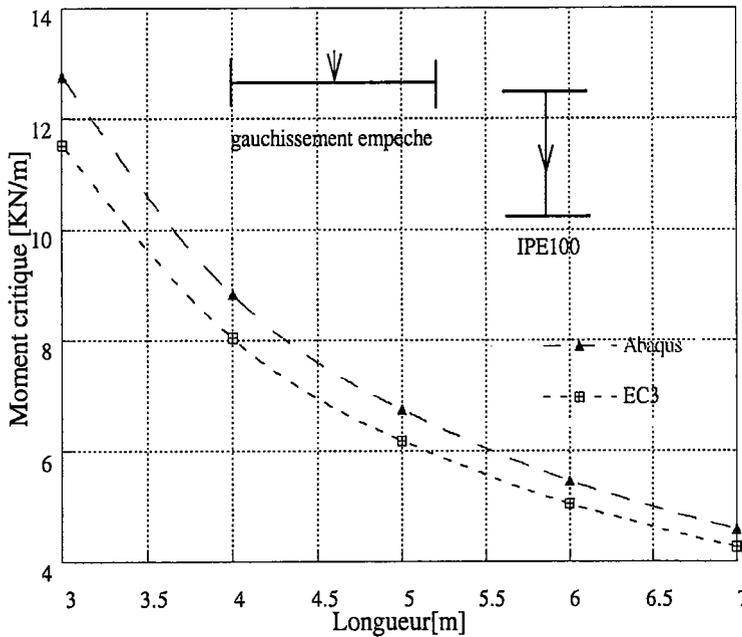
Section transversale (Acier)	Caractéristiques géométriques $\left\{ \begin{array}{l} E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right\}$
 <p style="text-align: center;">IPE100</p>	$A = 9.9026 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6284 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 1.5805 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 8.9304 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 3.5137 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$ $z_j = 0.0$
 <p style="text-align: center;">IPE200</p>	$A = 28.50 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.94 \cdot 10^{-05} \text{ m}^4$ $I_z = 1.42 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $J = 6.85 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $I_\omega = 1.301 \cdot 10^{-08} \text{ m}^6$ $z_j = 0.0$
 <p style="text-align: center;">IPE300</p>	$A = 51.80 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 7.90 \cdot 10^{-05} \text{ m}^4$ $I_z = 6.018 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $J = 1.56 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $I_\omega = 1.25 \cdot 10^{-07} \text{ m}^6$ $z_j = 0.0$

Tableau III.5 : caractéristiques géométriques des sections utilisées dans les calculs.

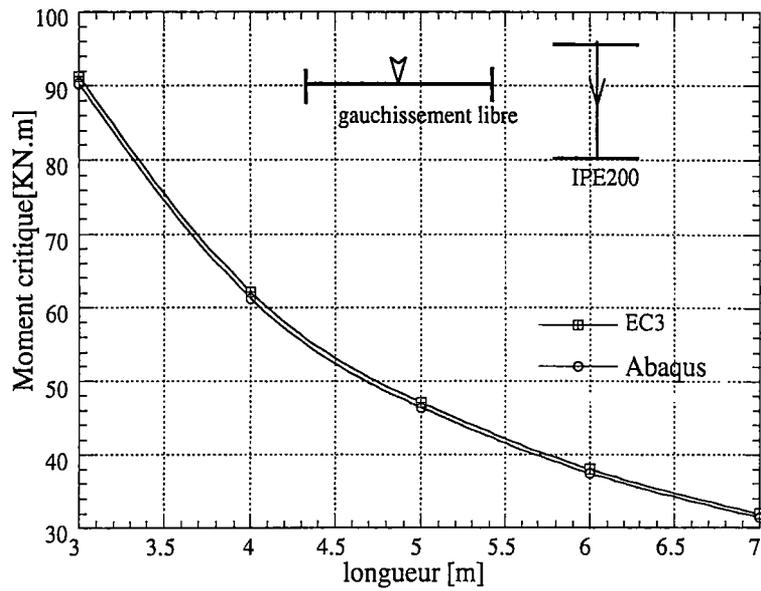


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

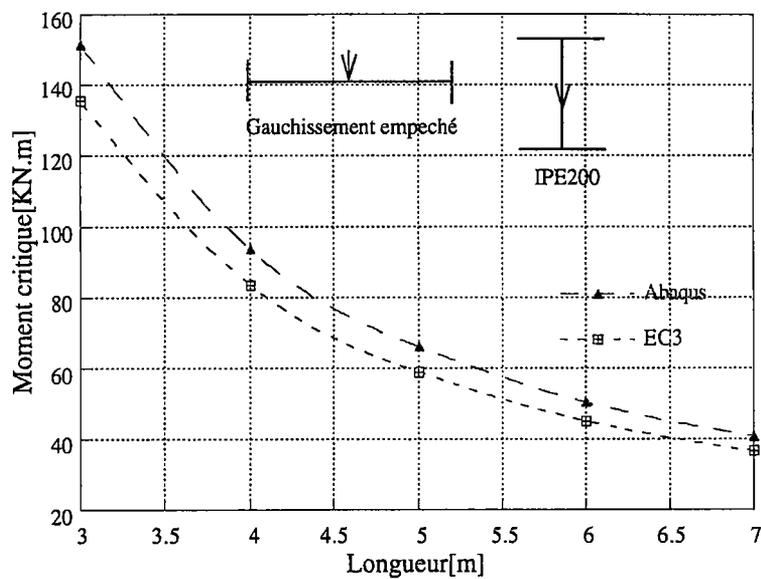


(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

Fig III.11: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à une charge transversale en G

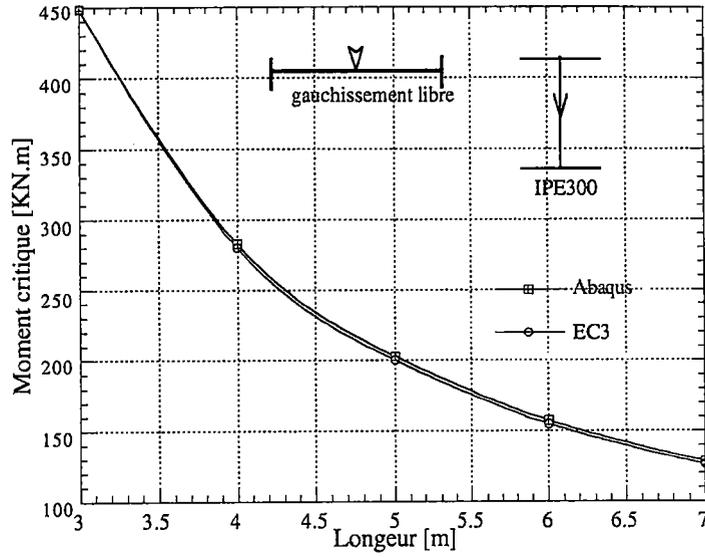


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

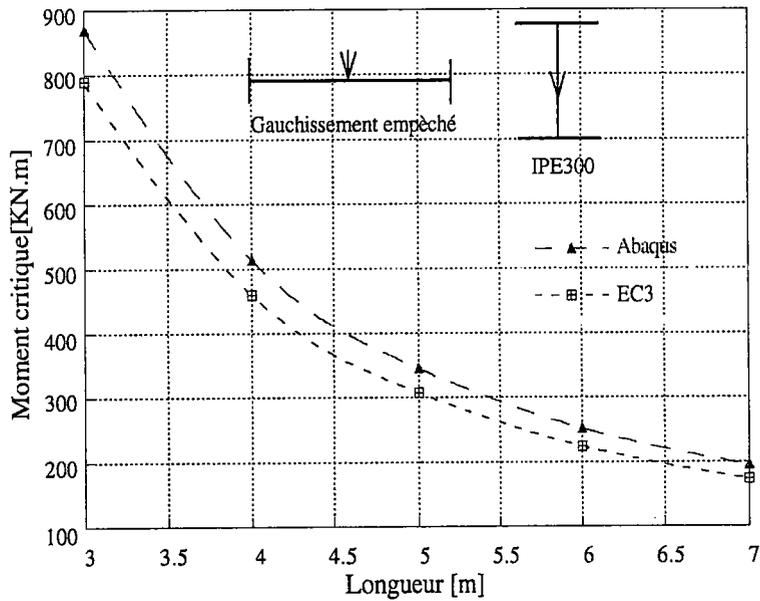


(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

FigIII.12 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE200 soumise à une charge transversale en G



(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre



(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

FigIII.13: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE300 soumise à une charge transversale en G

b) Charge appliquée au niveau de la semelle supérieure ($z_g = -h/2$)

Les figures (III.14a et b) traduisent la variation du moment critique de déversement numérique et réglementaire, en fonction de la longueur, pour un IPE 100. Le point d'application de la charge est au niveau de la semelle supérieure. La figure.(III.14a) correspond au gauchissement libre. La figure.(III.14b) correspond au gauchissement empêché. De la même manière, on porte respectivement dans les figures (.III.15a et b) et les figures (III.16a et b), celles des IPE200 et IPE300. A partir de ces courbes on tire les conclusions suivantes:

- Aussi bien pour le gauchissement libre que pour le gauchissement empêché, les solutions numériques et réglementaires sont assez proches .
- Dans le cas du gauchissement empêché, on observe une légère différence entre les solutions réglementaires et numériques.
- La résistance au déversement d'une poutre augmente quand le gauchissement est empêché. Pour l'IPE200, la résistance est presque le double et pour l'IPE300, la résistance a augmenté beaucoup plus que le double.

III.8.2 Charge répartie appliquée à une poutre biencastée

a) Charge appliquée au centre de gravité ($z_g=0$)

Les figures (III.17a et b) représentent la variation du moment critique de déversement numérique et réglementaire, en fonction de la longueur pour un IPE 100. Le point d'application de la charge est au centre de gravité. La figure.(III.17a) correspond au gauchissement libre. La figure (III.17b) correspond au gauchissement empêché. Dans les figures (III.18a et b) et la figure (III.19a et b), on donne celles des IPE200 et IPE300. En analysant ces figures on remarque que:

- Dans le cas du gauchissement libre, les solutions réglementaires et numériques sont en bon accord, pour les trois sections.
- Dans le cas du gauchissement empêché, les solutions numériques réglementaires sont approchées.
- La résistance au déversement d'une poutre augmente quand le gauchissement est empêché. Dans le cas de l'IPE 300, la résistance augmente du double.

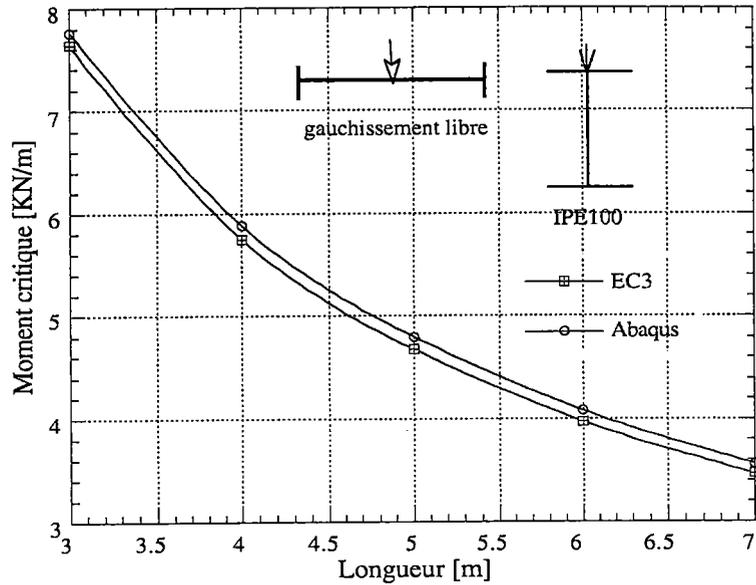
b) Charge appliquée au niveau de la semelle supérieure ($z_g = -h/2$)

Sur les figures (III.20a et b), on reporte la variation du moment critique de déversement numérique et réglementaire, en fonction de la longueur pour un IPE 100. Le point d'application de la charge est au niveau de la semelle supérieure. La figure.(III.20a) correspond au gauchissement libre. La figure (III.20b) correspond au gauchissement empêché. De la même manière, on porte respectivement dans les figures (.III.21 a et b) et (III.22a et b), celle des IPE200 et IPE300.

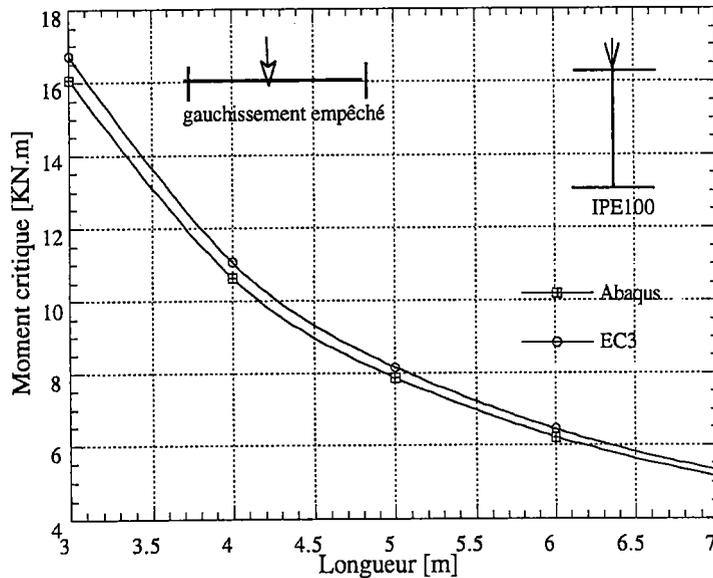
De ces figures on constate que:

-Aussi bien pour le gauchissement libre que pour le gauchissement empêché, les solutions numériques et réglementaires sont proches, surtout pour le gauchissement empêché.

-La résistance au déversement de la poutre est beaucoup meilleure quand le gauchissement est empêché.

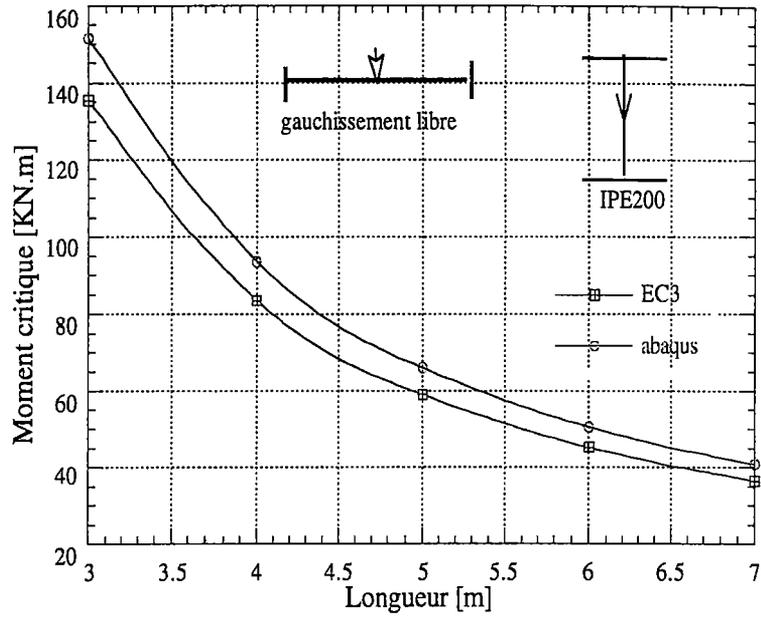


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

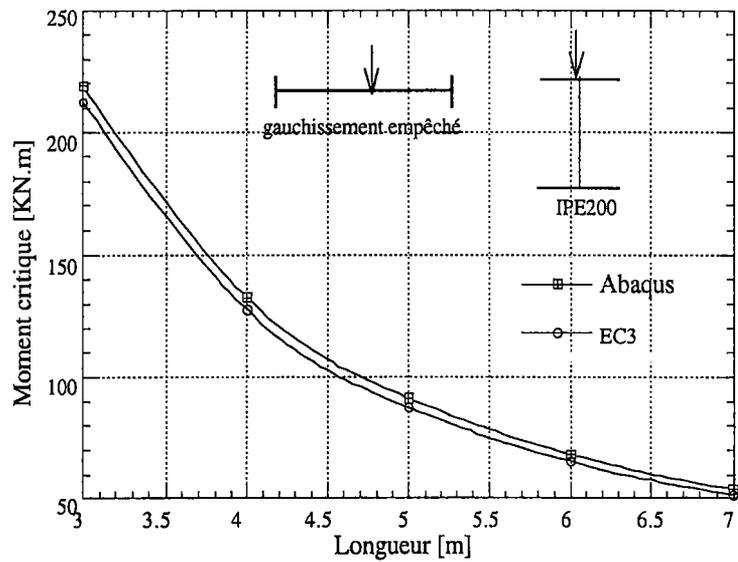


(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

Fig III.14: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à une charge transversale en semelle supérieure.

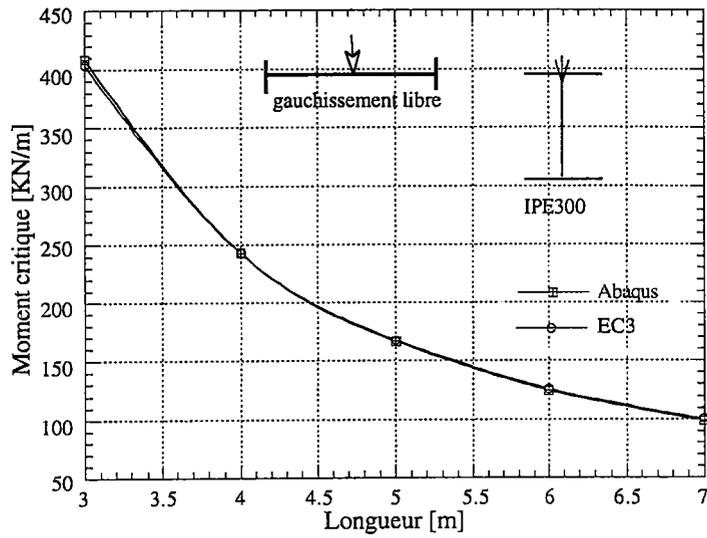


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

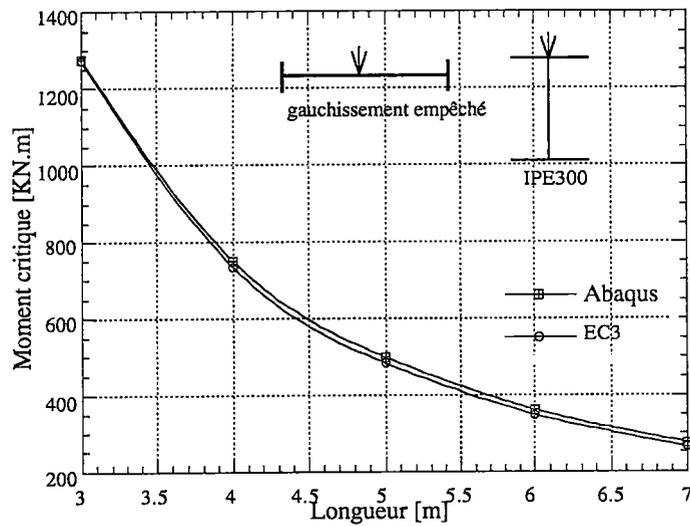


(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

FigIII.15: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE200 soumise à une charge transversale en semelle supérieure.

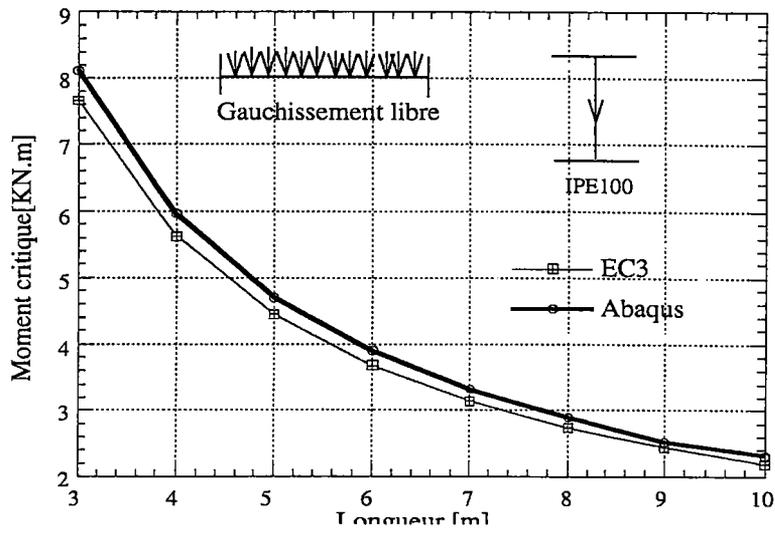


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

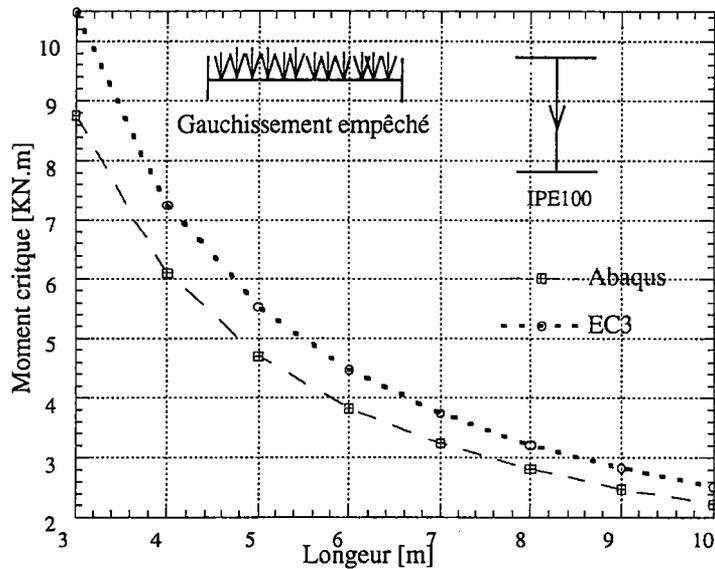


(b) Encastrement parfait avec gauchissement empêché

Fig III.16: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE300 soumise à une charge transversale en semelle supérieure.

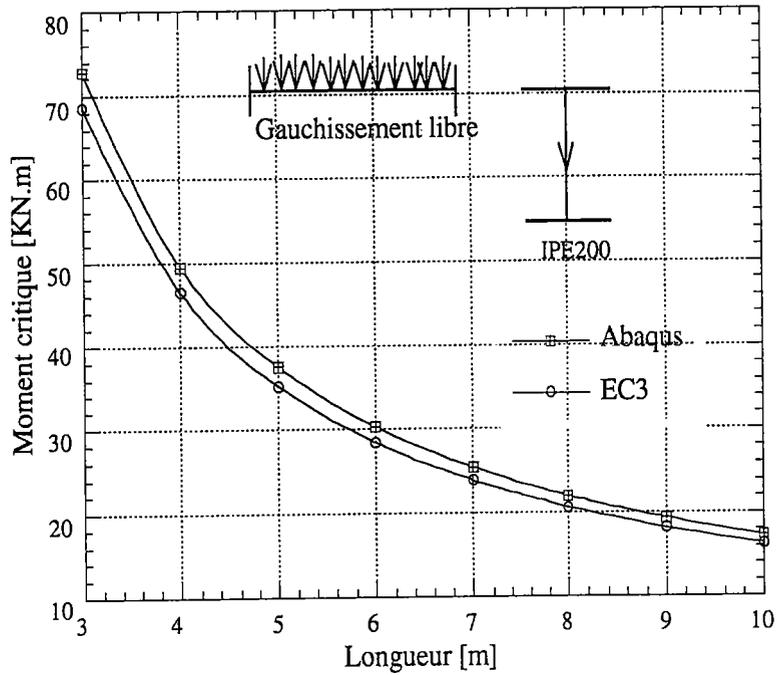


(a) Encastrement parfait avec gauchissement libre

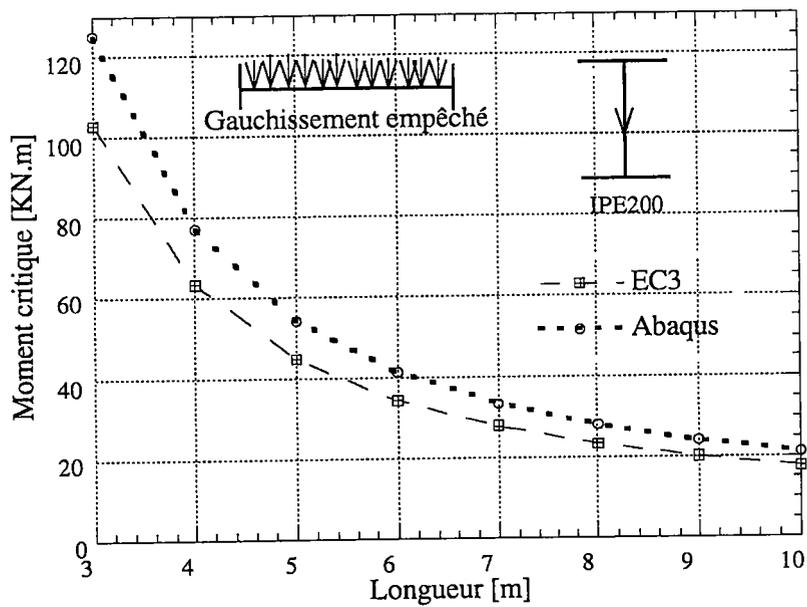


(b) encastrement avec gauchissement empêché.

FigIII.17: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à une charge répartie appliquée en G

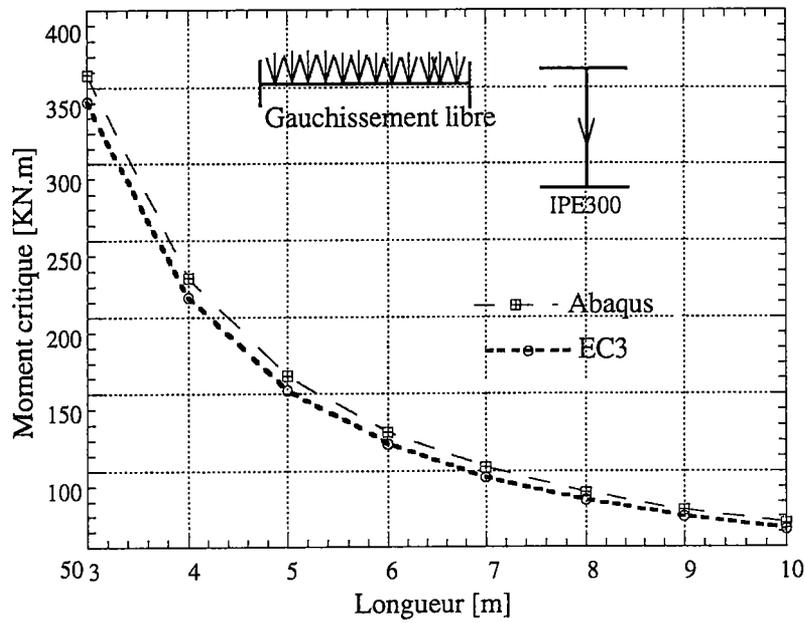


(a) Encastrement avec gauchissement libre

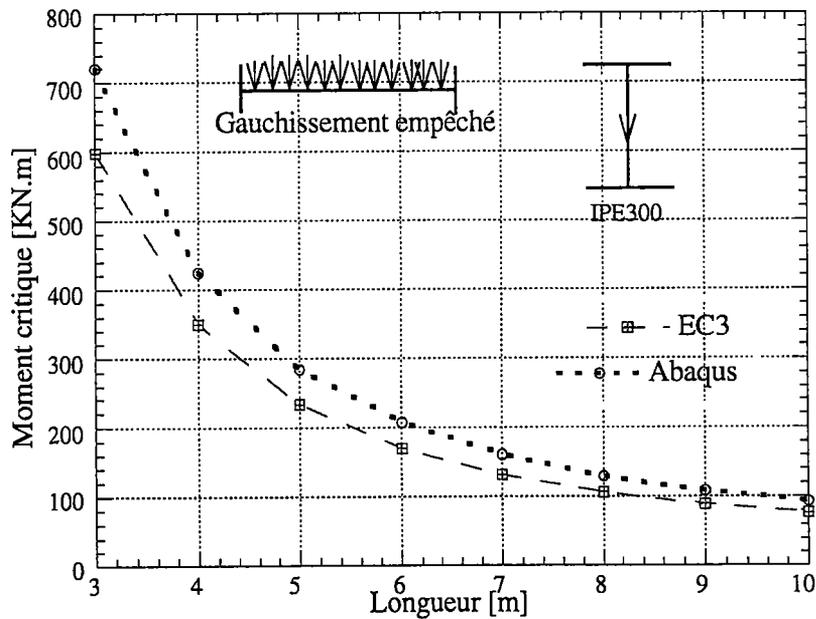


(b) Encastrement avec gauchissement empêché

FigIII.18: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE200 soumise à une charge répartie appliquée en G

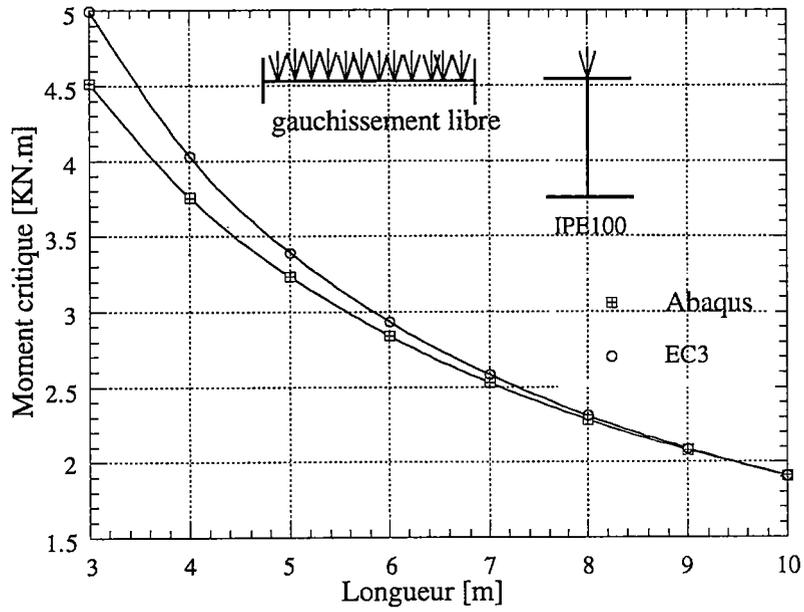


(a) Encastrement avec gauchissement libre

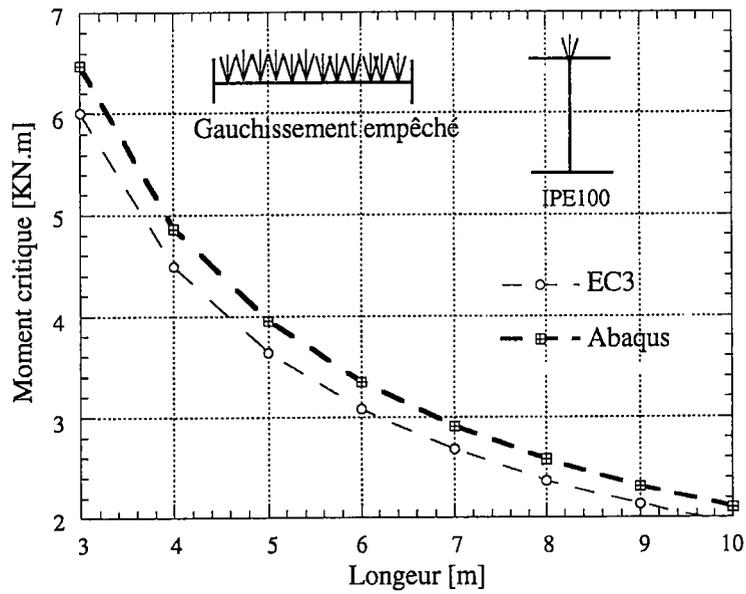


(b) Encastrement avec gauchissement empêché

FigIII.19: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE300 soumise à une charge répartie appliquée en G

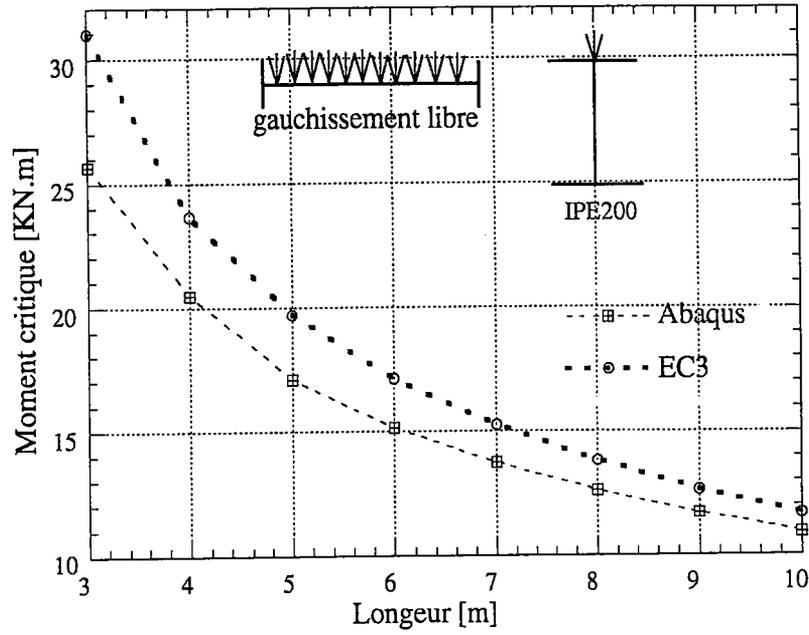


(a) Encastrement avec gauchissement libre

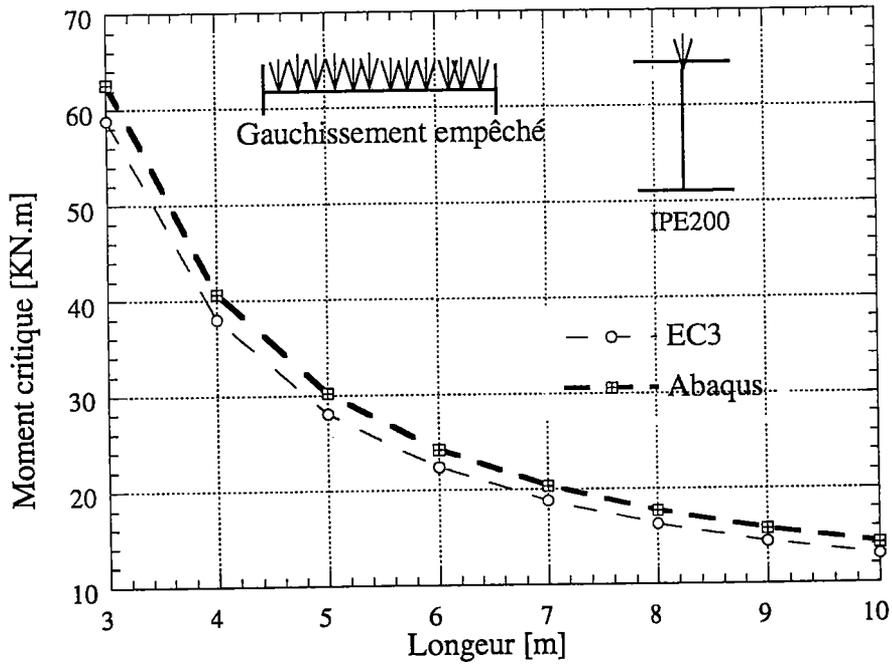


(b) Encastrement avec gauchissement empêché

FigIII.20: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à une charge répartie appliquée en semelle supérieure.

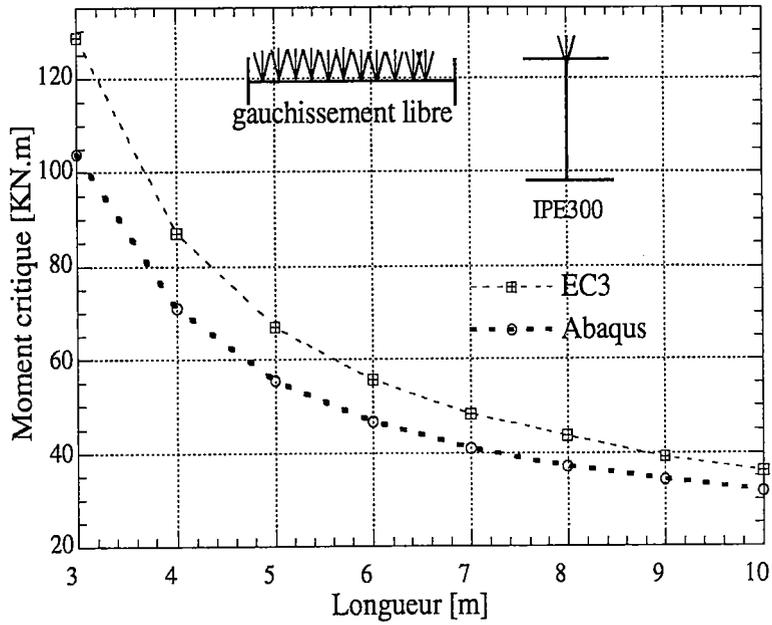


(a) Encastrement avec gauchissement libre

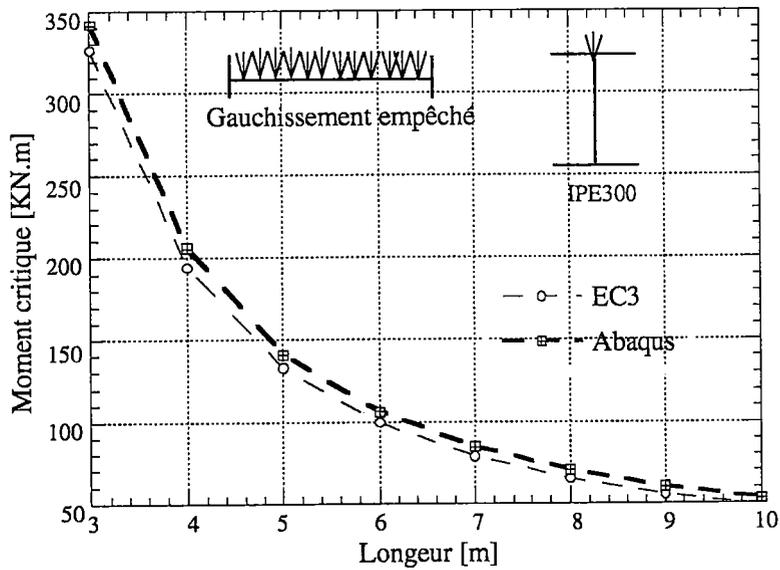


(b) Encastrement avec gauchissement empêché

FigIII.21: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE200 soumise à une charge répartie appliquée en semelle supérieure.



(a) Encastrement avec gauchissement libre



(b) Encastrement avec gauchissement empêché

FigIII.22: Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à une charge répartie appliquée en semelle supérieure.

III.A.10 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une analyse du déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes. Beaucoup de paramètres interviennent dans le calcul des charges critiques du déversement ou (moments critiques). Les principaux paramètres intervenant sont la forme de la section transversale (le moment d'inertie par rapport à l'axe faible (I_z) et les caractéristiques géométriques de torsion (J et I_ω). Le point d'application de la charge par rapport au centre de torsion joue un rôle très important dans la résistance au déversement. Les conditions aux limites de la poutre vis à vis de la flexion et du gauchissement interviennent aussi. Quand le gauchissement est empêché, la stabilité de la poutre est meilleure que dans le cas du gauchissement libre et surtout pour les profilés de grandes hauteurs. Ce qui montre l'importance à donner pour la détermination des conditions d'appuis dans les cas pratiques.

Une étude comparative entre l'Eurocode3 et le modèle éléments finie Abaqus a été présentée. On remarque une légère différence entre les deux solutions proposées par l'Eurocode3 et Abaqus. Cependant, aussi bien dans le calcul numérique que réglementaire, les charges critiques sont globales. Les instabilités locales ne sont pas prises en compte. Cependant ces instabilités peuvent exister surtout pour les poutres courtes, avec beaucoup de conditions aux limites (cas des poutres biencastrées).

III.B COMPORTEMENT POST-CRITIQUE DES POUTRES A PAROIS MINCES ET A SECTIONS OUVERTES

III.B.1 Introduction

Dans le chapitre II, nous avons présenté la formulation linéaire des poutres minces. La matrice de rigidité a été donnée dans le cas des hypothèses des petits déplacements et des petites déformations. La loi d'élasticité linéaire était alors suffisante pour définir les relations entre les déplacements, les déformations et les contraintes. Dans le cas des grandes déplacements, des non linéarités géométriques apparaissent et une formulation plus précise est nécessaire afin de tenir en compte de ces non linéarités. Le calcul non linéaire des poutres à parois minces en grandes rotations a été largement discuté dans les travaux de [A8] [A9] [B10] ,[B11] [R1], [E1], [C6], [C7] ,[K2] [Y2] [F1].

La matrice de rigidité est désormais composée de la matrice de rigidité élastique $[K_e]$ calculée précédemment et d'une matrice de rigidité tenant en compte de ces non linéarités

géométriques, notée $[K_g]$. Cette dernière est discutée dans plusieurs travaux parmi eux on cite [B6],[B10], [G3] [C7].

De nos jours, la résolution d'un problème non linéaire est largement dominée par les méthodes itératives. Ainsi les calculs sont faits par étapes successives. Le chargement appliqué est divisé en plusieurs pas de charges. Pour chaque pas, une solution est recherchée en faisant plusieurs itérations jusqu'à atteindre la charge totale. La méthode de Newton-Raphson est la plus utilisée. Cette méthode consiste à chercher l'incrément de déplacements correspondant à un incrément de charge donnée. Cela nécessite souvent l'inversion de la matrice de rigidité à chaque itération et en tout incréments de charge. Pour qu'une solution soit possible, la matrice de rigidité doit être non singulière. Dans le cas contraire, la matrice de rigidité est non inversible et la solution obtenue peut correspondre à un point limite ou un point de bifurcation.

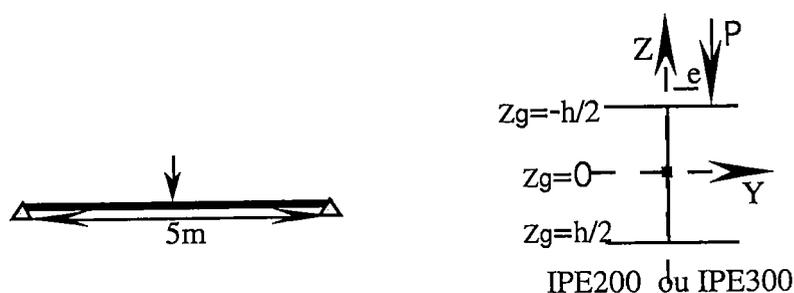
Dans la littérature, plusieurs méthodes existent pour surmonter les problèmes de singularité de la matrice de rigidité et permettent aussi d'étudier le comportement post critique des structures. On peut citer la méthode de Riks [A2] [R2] et les méthodes asymptotiques numériques [P1] ,[D6].

Dans cette partie, on présente le comportement des poutres en flexion au delà de la charge critique de déversement. On étudie en particulier l'influence du point d'application de la charge par rapport au centre de gravité et du chargement excentré par rapport à l'axe de symétrie. L'effet de ces paramètres sous chargements cycliques a été étudié expérimentalement par [F] et [H].

Nos calculs sont effectués avec le code Abaqus, en utilisant la méthode de Riks avec un pas adaptatif. Initialement la géométrie de la structure est légèrement perturbé afin d'éviter les bifurcations pures .Les calculs sont arrêtés en fixant une condition sur le déplacement d'un nœud dans une direction donné et une condition sur la charge maximale à ne pas dépasser.

III.B.2 Description générale des calculs

Le problème considéré dans ce paragraphe est celui de poutre biarticulé à sections bisymétriques (IPE200) et soumise à une charge concentrée au milieu de la poutre (FigIII.23).



FigIII.23: Poutre biarticulé sous le chargements concerné

Ici, nous nous intéressons spécialement à l'étude de l'influence du point d'application de la charge ainsi qu'à son excentricité sur le comportement de la poutre.

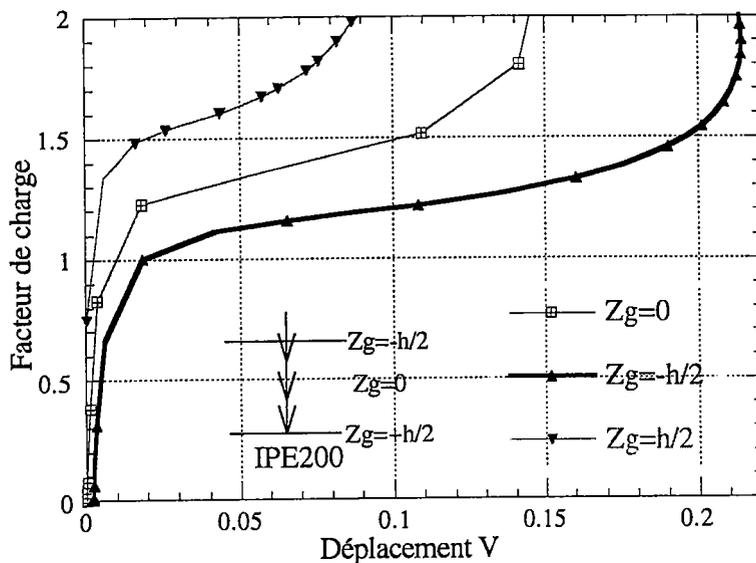
a) Influence du point d'application de la charge

Pour mettre en évidence, l'influence du point d'application de la charge sur le comportement de la poutre nous avons réalisé plusieurs testes numériques sur la poutre IPE200 pour différentes hauteurs de la charge appliqué. Les hauteurs considérées sont caractérisées par $z_g = 0, h/2$ et $-h/2$.

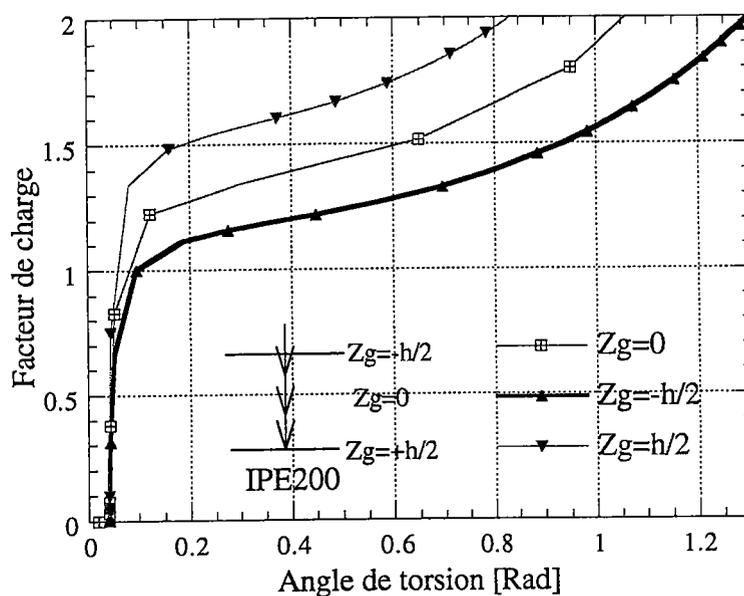
Pour de telles hauteurs, nous représentons respectivement sur les figures (III.24 a, b, c et d) la variation du facteur de chargement en fonction de déplacement, de l'angle de rotation, du gauchissement et du bimoment au noeud d'application du chargement.

D'après ces figures, on remarque que les différentes hauteurs et pour des petits déplacements, nous avons une zone linéaire caractérisant le pré-déversement de la poutre. Ceci s'explique par le fait qu'on est toujours dans la zone de stabilité de la poutre et que la charge critique n'est pas atteinte et la poutre est en flexion pure.

Après avoir atteindre la charge critique, on a une deuxième zone caractérisant le comportement post-critique de la poutre où apparaissent la torsion non uniforme avec un gauchissement et par suite un bimoment considérable. On remarque une meilleure stabilité des solutions post-critique dans le cas où le charge est appliqué au niveau de la semelle inférieur. D'après ces résultats, on comfirme que le point d'application de la charge a une grande influence sur le comportement post critique.

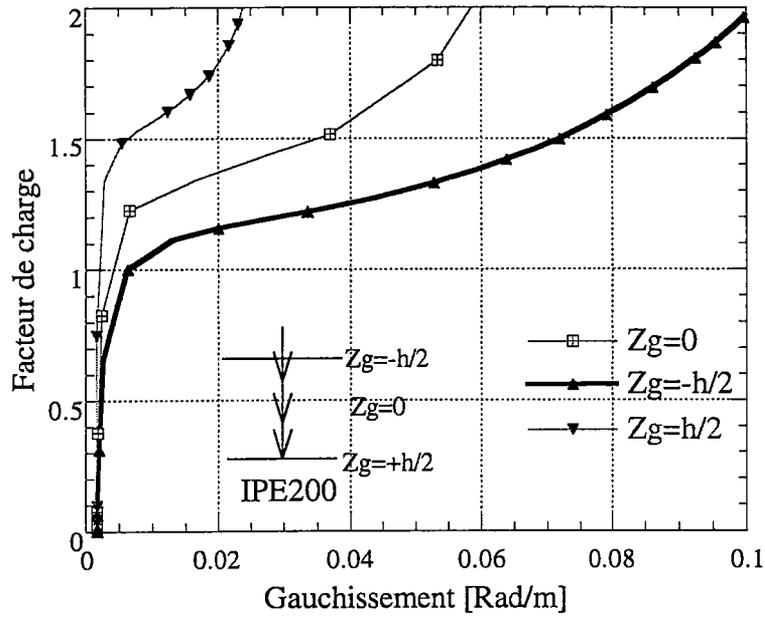


(a) Diagramme représentant la variation du facteur de la charge en fonction du déplacement V du noeud d'application de la force

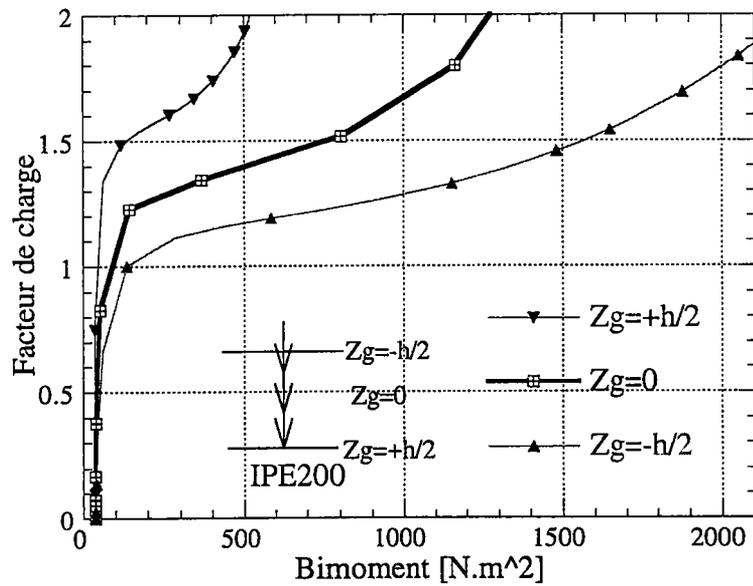


(b) Diagramme représentant la variation du facteur de la charge en fonction de l'angle de torsion du noeud d'application de la force

Fig III.24



(c) Diagramme représentant la variation du facteur de la charge en fonction du gauchissement du noeud d'application de la force



(d) Diagramme représentant la variation du facteur de la charge en fonction du bimoment du noeud d'application de la force

FigIII.24. Effet du point d'application de la charge pour le comportement post critique, cas de IPE200

b) Influence du chargement excentré

De la même manière que dans le paragraphe précédent, et pour étudier l'influence l'excentricité du point d'application du chargement sur le comportement de la poutre, nous avons réalisé plusieurs testes numériques sur la poutre IPE200 pour les différentes excentricités suivantes "e", e = 0, 25 et 50.

Sur les figures (III.25 a, b, c et d), nous reportons respectivement la variation du facteur de chargement en fonction du déplacement, de l'angle de torsion, du gauchissement et du bimoment au noeud d'application du chargement pour ces différentes excentricités.

L'analyse de ces figures nous permet d'extraire deux remarques importantes. la première, traduit la forte réduction de la charge critique du déversement pour les excentricités croissantes. Ceci montre, qu'une meilleure stabilité est obtenue pour des excentricités faibles.

La deuxième remarque, se traduit par le fait de constater qu'au delà de la charge critique, l'influence des excentricités diminue et peut disparaître pour des grandes valeurs de celles ci.

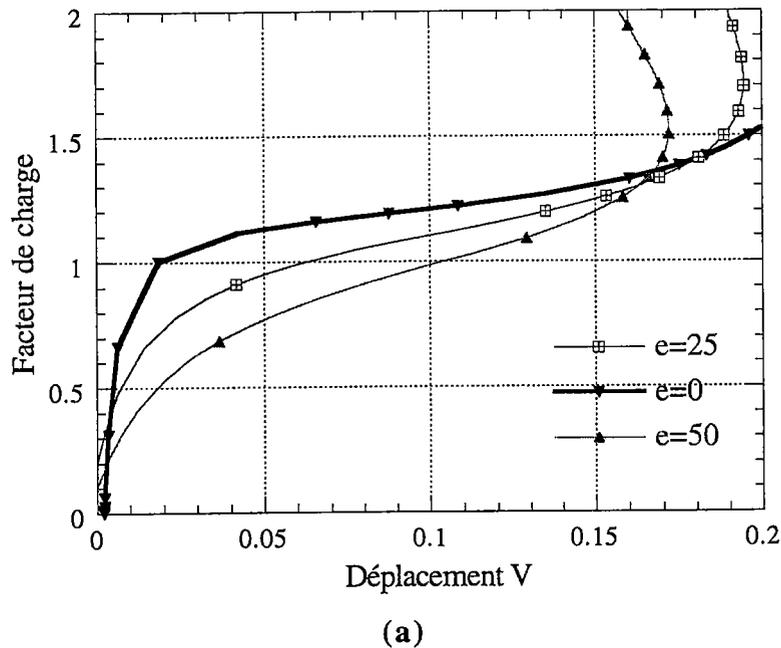
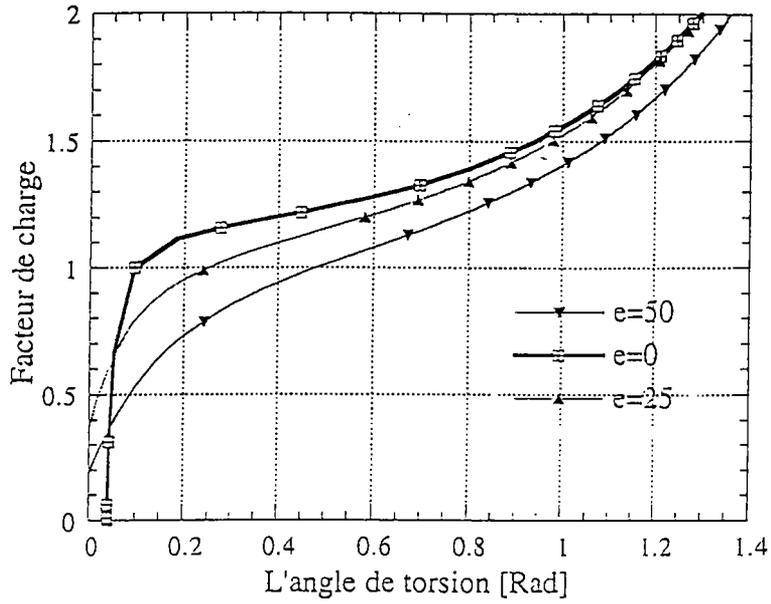
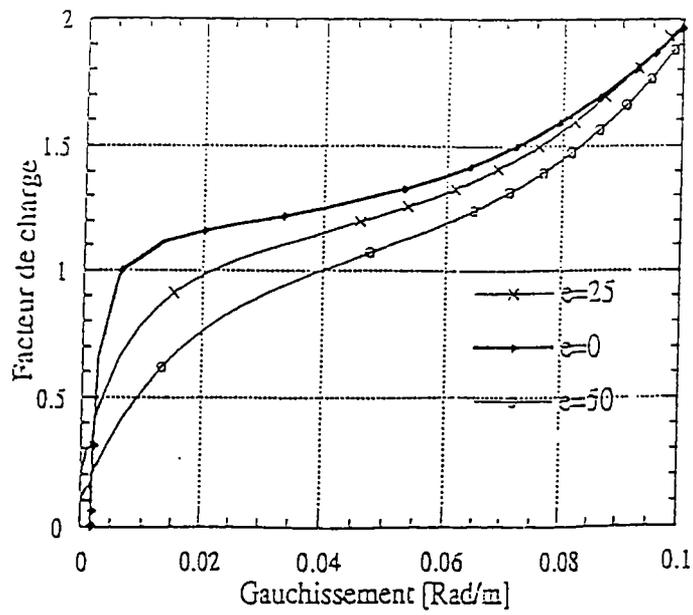


Fig III.25

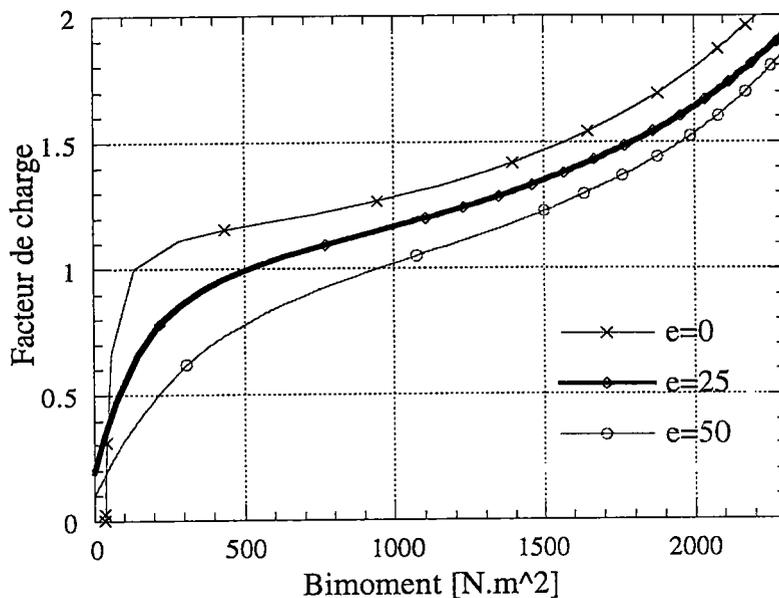


(b)



(c)

FigIII.25



(d)

FigIII.25 Effet du chargement excentré pour le comportement post critique cas de IPE200

II.B.4 Conclusion

Dans cette partie, Nous nous sommes limités à analyser l'influence de quelques imperfections géométriques sur le comportement de la poutre et en particulier celle du point d'application du chargement et de son excentricité. Sans trop entrée dans les détails, nous concluons que ces imperfections ont une grande influence sur le comportement de la poutre et plus précisément, on déduit qu'on a:

Une très grande influence de la torsion non uniforme au delà de la charge critique. Cette dernière diminue avec la hauteur du point d'application de la charge.

Une réduction considérable de l'effet de la torsion pour les excentricités croissantes. L'influence de ces excentricités sur le comportement post-critique peut disparaître pour de grands déplacements.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement et de la stabilité des poutres à parois minces et à sections ouvertes.

Dans le premier chapitre on a présenté les différents modèles théoriques de la torsion en montrant à chaque fois leurs domaine de validité. Dans le cas des poutres à parois minces et à sections ouvertes sollicitées en torsion, le gauchissement joue un rôle très important : la théorie de Vlassov est adoptée pour cette étude. .

Dans le deuxième chapitre, deux éléments poutres de torsion ont été présentés. Une étude comparative du comportement en torsion des structures poutres a été faite. Le code de calcul Abaqus est utilisé pour les calculs numériques. Les résultats des calculs avec les éléments B31 (St Venant) et les éléments B31OS (Vlassov) sont comparés. On conclue que dans le cas où le gauchissement est important (sections ouvertes), les éléments B31OS et les éléments coques S8R donnent de très bons résultats contrairement à l'élément B31 qui ne tient pas compte du gauchissement.

Une étude expérimentale des poutres à parois minces et à sections ouvertes a été réalisée. Des sections de différentes formes ont été utilisées (section en U, I et T). Le modèle éléments finis Abaqus donne des résultats en accord avec les résultats expérimentaux.

Dans une section, le gauchissement et le bimoment peuvent être induit aussi bien par les forces transversales (cas de la section en U) que par les forces longitudinales (cas du poteaux). L'augmentation des contraintes dues au gauchissement est très importante en fonction de l'excentricité par rapport au centre de torsion. Pour les section en T, l'effet du gauchissement secondaire est faible comparé à celui observé sur les sections en U et en I.

Dans le dernier chapitre, la stabilité élastique des poutres à parois minces et à sections bisymétriques ouvertes a été étudiée d'un point de vue numérique et réglementaire. Une discussion sur les paramètres intervenant dans le calcul des charges critiques du déversement a été présentée d'où les conclusions suivante :

- Le point d'application de la charge par rapport au centre de torsion joue un rôle très important dans la résistance au déversement,
- les conditions aux limites de la poutre vis à vis de la flexion et du gauchissement jouent un rôle important. Quand le gauchissement est empêché, la stabilité de la poutre est meilleure que dans le cas où le gauchissement est libre, surtout pour les profilés de grandes hauteurs,

- les résultats numériques obtenus par la méthode des éléments finis sont généralement en bon accord avec les résultats de l'Eurocode3.

Le comportement post critique du déversement a fait l'objet de la seconde partie du dernier chapitre. Des exemples numériques basés sur la méthode de Riks nous ont permis de mettre en évidence l'importance de l'effet de la torsion non uniforme au delà de la charge critique qui augmente en fonction du point d'application de la charge, et également la réduction considérable de l'effet de la torsion pour les excentricités croissantes. Pour les grands déplacements, l'influence de l'excentricité peut disparaître.

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] AHMAD, S., IRONS, B.M., ZIENKIEWICZ, O. C., Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, IJNME, Vol.2, p. 419-451,1970.
- [A2] ABAQUS Theory manuel, Hibbit, Karlsonn &Sorensen, Inc, Pawtucket.
- [A3] ABAQUS User's manuel, Hibbit, Karlsonn &Sorensen, Inc, Pawtucket.
- [A4] ALWIS W. A . M.; USAMI T. - Elastic Lateral Torsional Buckling Of Unbraced and braced Planar Frames. Computers & Structures. Vol.10, pp.517-529, 1979.
- [A5] ANDERSON M. ; TRAHAIR.NICOLAS .S - Stability of Monosymmetric Beams and Contilivers. Journal of the Proceedings of the Americain Society of Civil Engineers. January, 1972.
- [A6] ATTARD MARIO . M; SOMERVAILLE . IAN .J- Stability of Thin-Walled Open Beams Under Nonconservative Loads. Mech. Struct. & Mach. Vol.15 (3), pp.395-412, 1987.
- [A7] ATTARD MARIO .M - Lateral Buckling Analysis of Beams by The FEM, Computer & Structures, Vol. 23, No. 2, pp. 217-231, 1986.
- [A8] AKOUSSAH. K . E - Analyse Non Linéaire des Structures a Parois Minces par Éléments finis et son Application aux Bâtiments Industriels. Thèse présentée à l'École des gradués de l'Université de Laval Pour l'obtention du Grade de Philosophiae Doctor, juin 1987.
- [A9] ARGYRIS .J.H.; DUNNF . P. C and SCHARPF .D .W- On Large Displacement-Small Strain of Structures With Rotational Degrees of Fredom. Computer Methods in A plied Mechanics and Engineering , Vol 15, pp 99-135, 1978.
- [B1] BATOZ .J.L ; DHATT .G.- Modélisation des Structures par Éléments finis. Vol.1 1, Solides élastique, Hermès, Paris, 1990.
- [B2] BATOZ .J.L ; DHATT .G.- Modélisation des Structures par Éléments finis. Vol.2 Poutres et plaques, Hermès, Paris, 1990.
- [B3] BATOZ .J.L ; DHATT .G.- Modélisation des Structures par Éléments finis. Vol 3 Coques et palques, Hermés, Paris, 1992..
- [B4] BLEICH .F - Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [B5] BENSCOTER,S.U., A theory of torsion bending for multicell beams, JAM, N°21,P25-34, 1954.
- [B6] BARSOUM . R. S ; GALLAGHER .R.H - Finite Element Analysis Of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.2, pp. 335-352, 1970.
- [B7] BAZANT. ZDENEK.P and EL NIMEIRI.M -Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99,no.EM6, pp.1259-1280, Dcember 1973.
- [B8] BAHUAUD, J., VIALATON, G., -Flexion et torsion des poutres à parois minces et à sections droites ouvertes, INSA-Lyon/CTICM, 1980.

-
- [B9] BROUKI, A -Déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes, Aspect numérique et réglementaire.Thèse, Université de Metz, 1998.
- [B10] BATHE.KLAUS-JÜRGEN ; BOLOURCHISAÏD - Large Displacement Analysis Of Three-Dimensional Beam Structures. International Journal for Numerical Methods In Engineering. Vol.14, pp 961-986, 1979.
- [B11] BAZANT. ZDENEK.P and EL NIMEIRI.M -Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99,no.EM6, pp.1259-1280, Dcember 1973.
- [C1] CALGARO .J.A ; VIRLOGEUX .M - Projets et Construction des Ponts. Presses de l'ECPC, 1994.
- [C2] CHEN, W.F., ATSUTA, T. Théory of beam-columns, Vol. 2 Space behavior and design, Mc Graw-Hill, New-York, 1977
- [C3] CHEN, H., BLANDFORD, G.E., - AC^o finite element formulation for thin-walled beams-, IJ NME, Vol.28, p.2239-2255, 1989.
- [C4] CRISFIELD, M.A., -Non-linear finite element analysis of solids and sructures- Vol. 1, John Wiley et Sons, 1991.
- [C5] CHEN, B.Z., HU, Y.R., -The torsional stiffness martix of a thin-Walled beam and its application to beams under combined loading- Comput. and Struct., Vol.28, N° 3,p.421-431, 1988.
- [C6] CONCI, A., GATTASS, M., Natural approach for geometric non linear analysis of thin-walled frames-, IJNME, Vol.30, p. 207-231, 1992.
- [C7] CONCI, A., - Large displacement analysis of thin-walled beams with generic open section-, IJNME, Vol.33, P. 2109-2127, 1992
- [D1] DHATT, G., TOUZOT, G., - Une présentation de la méthode des éléments finis- Maloine S. A Éditeur, Paris, 2éme, p. 2403-2438, 1988.
- [D2] DVORKIN, E.N., et al. - A Vlassov beam element-, Comput. and Struct., Vol.33, N1, p.187-196, 1989.
- [D3] DE VILLE DE GOYET, V. - L'analyse statique non linéaire par la méthode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres à section non symétrique-, Thèse de Doctorat, Université de liège, 1989.
- [D4] DZIEWOLSKI, R.,- Torsion nom uniforme des poutres à parois minces et à profils composées d'élément fermées et ouverts- Construction métallique, N° 1, 1964.
- [D5] DJALALY .H - Calcul de La résistance Ultime au Déversement . Construction Métallique N° 1, 1974.
- [D6] DAMIL. N. , POTIER-FERRY M. A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures- International Journal of Engineering and Sciences, Vol. 28, N° 9, p 943-957. 1990.
- [E1] ELIAS, Z.M., Théory and methods of structural analysis. Wiley et son, 1986.
-

-
- [E2] **EL-HAMMASI .S.A** -Numerical Method for Analysing Open Thin-Walled Structures Under Interaction of bending and Torsion. *Computers &Structures* Vol 37, pp. 947-956, 1990.
- [E3] **EUROCODE3** - Calcul des Structures en Acier et Document d'Application Nationale, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour le Bâtiment, Paris, Eyrolles 1997.
- [E4] **ELY DIALLO .B** - Étude Théorique et Expérimentale de la Stabilité Appliquée au Déversement des pannes Zeds. Thèse Présentée à l'Université de Paris VI, en Vue de l'Obtention du Titre Scientifique de Docteur - Ingénieur, Juin 1973.
- [F1] **FAFARD, M. DHATT, G., BEAULIEU, D.,** -Calcul automatique des configurations pré et post-flambement en calcul non linéaire des structures.- Rapport GCT-87-06, Université Laval, Québec, Canada, 1987.
- [G1] **GJELSVIK, A.** -Atheory of thin walled bars., John Wiley et Son, 1981
- [G2] **GUNNLAUGSSON, G. A., PETERSEN, P. T.,** - A finite element formulation for beam with thin walled cross-sections-. *Comput and sruct*, Vol. 15, N° 6, p.691-699, 1982.
- [G3] **GUNNLAUGSSON, G.A., PEDERSEN, P.T.,** A finite element formulation for beams with thin-walled cross-sections, *Comput.Struct.*, Vol. 15, +N°6,p.691-699,1982.
- [G4] **GUO, Y.Q.,** -Analyse non linéaire statique et dynamique des poutres tridimensionnelles élasto-plastique. -Thèse de Doctorat, Université de Technologie de compiégne, 1987
- [H1] **HEPPLER, G.R., HANSEN, J.S.,** Timoshenko beam finite elements using trigonometric basic functions, *AIAAJ*, Vol. 26, n° 11, p. 1378-1386,1988.
- [K1] **KOLLBRUNNER, C.F, BASLER, K.** - Torsion in structures, Springer-Verlsag,Berlin, 1969
- [K2] **KITIPORNCHAI .S , CHAN .S.L** - Nonlinear Analysis of Asymetric Thin-Walled Beam-Columns. *Engineering Structures*, Vol.9, October 1987.
- [L1] **LEMAIRE, M., REYNOUARD, J.M.** - Torsion-flexion des profils minces ouverts-, INSA de Lyon, GC, 4FCU, 1974.
- [L2] **LEMAIRE, M. DUHAU, R. CUBAUD, J.C.,** - Matrice de rigidité d'un rigidité d'un élément de poutre sollicité à la tosion-flexion-, *Construction Métallique*, N°3, p. 19-26, Sept. 1973.
- [M1] **MASSONNET .CE,** -A new approach (including shear LAG) TO elementary machanics of material, *IJSS*, Vol. 19, N°1, p.33-54, 1983.
- [M2] **MURRAY .N.WT .** - Introduction To The Theory Of Thin-Walled Structures. Clarendon Press Oxford, 1986 .
- [M3] **MOTTERSHEAD, J.E.,** Warping torsion in thin walled open section beams using the semiloof beam element, *IJNME*, Vol. 26, p.231-243, 1988.
- [M4] **MORREL. P J B.,** - The influence of joint detail on the torsional behaviour of thin-walled structures having an axial discontinuity- School of Engineering and Applied Sciences, University of Sussex, p. 539-556, 1979.
-

-
- [M5] **MOHRI .F** - Torsion des Éléments minces à sections ouvertes sur ABAQUS. La Conférence Utilisateurs ABAQUS, Paris, 7 Octobre 1997.
- [O1] **ODEN, J.T., RIPPERGER, E.A.,** Mechanics of elastic structures, 2nd Edition, Hemisphere Publishing Corporation, 1981
- [P1] **POTIER-FERRY. M.** - Foundations of elastic post-buckling theory-, in Buckling and Post-buckling, Lecture Notes in Physics, 288,1-82, Springer-Verlag. 1987.
- [S1] **SHAKOURZADEH, H.,** -Torsion génée (non uniforme) des poutres à parois minces.
Mémoire de DEA, UTC, MNM, 1990.
- [S2] **SHAKOURZADEH, H.,** - Modélisation des structures-poutres tridimensionnelles à parois minces et simulation du comportement non linéaire géométrique et elasto-plastique.-
Thèse de Doctorat, Université de compiegne, 1994.
- [R1] **RAMM, E. OSTERRIEDER, P.,** -Ultimate load analysis of tree-dimensional beam structures with thin-walled cross sections using finite elements -Stability of metal structures, Preliminary Report, Paris, p. 1094-1111, 1989.
- [R2] **RIKS. E.** - An incremental approach to the solution of snapping and bucking problems- International Journal of Solid and Structures, Vol. 15, p 529-551. 1979.
- [T1] **TIMOSHENKO .S.P; GERE , J.M** - Theory of Elastic Stability. New-York,Mc Graw-Hill, 1961.
- [T2] **TRAHAIR .N.S** - Flexural-Torsional Buckling of Structures. Published By E & FN Spon, An imprint Of Chapman & Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN.
- [T3] **TRALLI. A.;** - A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beam-
Computers and structures Vol.22 N°4, P. 649-658, 1986.
- [Y1] **YANG.YEONG-BIN ; MCGUIRE .W-** Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis. Journal Of Structural Engineering, Vol. 112, No. 4, april 1986.
- [Y2] **YANG.,Y.B., Mc GUIRE, W;** -Stiffness matrix for geomertic nonlieair analysis-, J. S.Struct. Eng., Vol.112, N°4;p. 853-877, 1986.
- [Y3] **YANG .YEONG-BIN ; MCGUIRE .W** - A Work Control Method For Geometrically Nonlinear Analysis. Proceedings Of The NUMETA '85 Conference/ Swansea/ 7-11, pp. 913-921,january 1985.
l'Obtention du Titre Scientifique de Docteur - Ingénieur, Juin 1973.
- [Z1] **ZBIROHOWSKI-KOSCIA** - Thin-Walled Beams. First Published By Crosby Lockwood & Son Ltd, 1967.

Le travail de la présente thèse se résume en deux grandes parties. La première concerne l'étude numérique et expérimentale du comportement des poutres à parois minces et à sections ouvertes en torsion non uniforme. Le modèle théorique est basé sur le modèle de Vlasov. La partie numérique présente le modèle élément finis de type poutre 3D à sept degrés de liberté par nœud ; dont le septième degré de liberté est le gauchissement. Les calculs numériques sont traités par le code d'éléments finis Abaqus et comparés d'une part aux résultats théoriques de Vlasov et d'autre part à nos résultats expérimentaux. L'effet du gauchissement est similaire à celui de la flexion.

Dans la seconde partie on s'intéresse au phénomène de déversement des poutres à parois minces et à sections ouvertes. Cette instabilité fait intervenir le comportement des poutres en flexion torsion avec gauchissement. On étudie en particulier l'incidence des conditions aux limites vis à vis du gauchissement et l'effet du point d'application des charges sur la résistance des poutres au déversement. Les solutions numériques par éléments finis sont comparées aux solutions analytiques proposées dans le règlement européen EC3. Le comportement post critique est ensuite étudié en utilisant la méthode de Riks. On étudie en particulier :

- L'effet de l'excentricité de la charge par rapport au centre de torsion
- L'effet du point d'application de la charge.

Mots clés:

Poutres à parois minces, gauchissement, élément finis, instabilité, déversement, comportement post critique, méthode de Riks.

This work contains two parts. The first one concerns the experimental and numerical study of behavior of thin walled beams with a non-uniform torsion. It is based on the Vlasov's theory. The numerical part uses the finite element method. A 3D beam with warping are considered. The numerical simulations are treated on Abaqus code are compared to theoretical and to experimental results. The warping effect is the same as the flexion.

In the second part, the lateral-buckling phenomenon of thin walled beam is studied. The impact of boundary conditions, and especially the warping on the resistance of beams to lateral buckling is exposed. The load height effect is also considered. Numerical solutions by finite element method are compared to analytical solutions proposed in the European regulation EC3. The post critical behavior is then studied by using the method of Riks. We studies especially:

- the loading eccentricity effect by report to the center of twist
- The load height effect.

Key words:

Thin walled beams, warping, finite element method, instability, lateral buckling, post critical behavior, method of Riks.