



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b 146032

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE SCIENCES ET TECHNIQUES - METZ -	
N° Inv.	19981285
Cote	S/M3 98/62
Loc.	Majara
Cat.	

THÈSE

présentée par

Boumediène CHENTOUF

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

sujet:

**CONTRIBUTION À LA STABILITÉ ET À
LA STABILISATION DE SYSTÈMES
À PARAMÈTRES RÉPARTIS**

Soutenue le 30 Novembre 1998
devant le jury composé de:

- B. D'ANDRÉA-NOVEL. Professeur à l'École des Mines de Paris. Présidente.
- F. CONRAD. Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy I. Rapporteur.
- V. KOMORNIK. Professeur à l'Université Louis Pasteur (Strasbourg). Rapporteur.
- J.-F. COUCHOURON. Maître de conférence à l'Université de Metz. Examineur.
- G. SALLET. Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
- C.Z. XU. Chargé de recherche à l'INRIA-Lorraine. Examineur.

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE
INRIA-LORRAINE & UPRES A 7035.

A MES PARENTS

A MA SOEUR

ET A MES DEUX FRERES.

Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet CONGE de l'INRIA-Lorraine sous la direction du Professeur Gauthier SALLET.

Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma reconnaissance à SALLET qui m'a accueilli au sein de son équipe. J'ai beaucoup profité de son aide et de sa gentillesse.

J'adresse mes vifs remerciements au Professeur Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse et de s'intéresser à ce travail.

Je tiens à remercier les Professeurs Francis CONRAD et Vilmos KOMORNIK d'avoir bien voulu être rapporteurs et témoigner ainsi leur profonde attention à ce mémoire.

Je suis très heureux de compter parmi les membres de ce jury Jean-François COUCHOURON. J'ai eu l'occasion de travailler avec lui et j'ai apprécié sa passion pour notre travail, ses précieux conseils et sa gentillesse.

Je remercie également Cheng-Zhong XU pour l'intérêt qu'il a montré à l'égard de mes travaux et de m'avoir consacré une partie de son temps chaque fois que l'occasion se présentait.

Mes remerciements vont à toute l'équipe du projet CONGE et tous les membres du département de Mathématiques de l'université de Metz.

Chacun sait que le chemin qui mène à la thèse est long et passionnant et le soutien reçu de toute personne est appréciable. Je saisi cette occasion pour remercier toutes celles et tous ceux qui m'ont soutenu et encouragé.

Et je ne saurais finir sans penser à ma petite famille pour leur soutien si réconfortant et leurs encouragements durant toute ma carrière étudiante.

Table des matières

I	Introduction Générale	5
II	Généralités	9
II.1	Introduction	9
II.2	Semi-groupes d'opérateurs linéaires	9
II.2.1	Semi-groupes continus	9
II.2.2	Groupe d'opérateurs bornés	10
II.2.3	Equations d'évolution linéaires	11
II.3	Semi-groupes de contractions non linéaires	11
II.3.1	Notion d'opérateur maximal monotone	11
II.3.2	Semi-groupes de contractions non linéaires	12
II.3.3	Equations d'évolution non linéaires	13
II.4	Comportement asymptotique des semi-groupes	15
II.4.1	Notion de stabilité	16
II.4.2	Principe d'invariance de LaSalle	16
II.4.3	Quelques critères de stabilité uniforme	17
III	Stabilité de l'Échangeur Thermique	19
III.1	Introduction	19
III.2	Dispositif expérimental et hypothèses	20
III.2.1	Description de l'échangeur	20
III.2.2	Hypothèses et équations	21
III.3	Stabilité d'une classe de systèmes linéaires hyperboliques	24
III.3.1	Introduction	24
III.3.2	Régularisation du système initial (3.1)-(3.3)	26
III.3.3	Stabilité du système à coefficients régularisés	31
III.3.4	Stabilité du système initial (3.1)-(3.3)	39
III.4	Application à l'échangeur thermique	43

IV Stabilisation d'un Système Hybride: une Variante du Modèle SCOLE	47
IV.1 Introduction	47
IV.2 Le premier problème est bien posé	52
IV.3 Stabilité asymptotique	56
IV.4 Stabilité uniforme	58
IV.5 Non stabilisation uniforme	74
IV.6 Analyse asymptotique de la partie réelle du spectre	76
IV.6.1 Définitions et résultats préliminaires	76
IV.6.2 Application	78
IV.6.3 Résultats numériques	82
IV.7 Le deuxième problème est bien posé	97
IV.8 Stabilité forte	100
IV.9 Stabilité uniforme	101
IV.10 Analyse spectrale	111
V On The Stabilization of a Vibrating Equation	119
V.1 Introduction and main results	120
V.2 Proof of the main results	125
V.2.1 Well-posedness of the system (Σ)	125
V.2.2 Proof of Theorem V.1	128
V.2.3 Proof of Theorem V.2 and Theorem V.3	132
V.3 Conclusion	141
Bibliographie	145
VI Non Linear Feedback Stabilization of a Rotating Body-Beam System	147
VI.1 Introduction and main result	148
VI.2 Proof of the main result	153
VI.2.1 The subsystem (1.6)	153
VI.2.2 Well posedness of the global system (1.7)	154
VI.2.3 Exponential stability of the global system (1.7)	154
Bibliographie	159
VII Perspectives	163
Bibliographie	165

Notations

$\dot{E}(t)$	dérivée de $E(t)$
f^h	fonction régularisée de f
\rightharpoonup	convergence faible
\rightharpoonup^*	convergence faible *
J_λ	résolvante de l'opérateur A
$\mathcal{D}(A)$	domaine de l'opérateur A
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	adhérence de $\mathcal{D}(A)$
$Im(A)$	image de l'opérateur A
$\rho(A)$	ensemble résolvant de l'opérateur A
$\sigma(A)$	spectre de l'opérateur A
A^*	adjoint de l'opérateur A
I	l'application identité
H_0^n	$\{f \in H^n(0, 1); f(0) = f_x(0) = 0\}$, $n = 2, 3, \dots$
$\mathcal{L}(E, F)$	espace des opérateurs linéaires continus de E dans F
ch	fonction cosinus hyperbolique
sh	fonction sinus hyperbolique
$\mathcal{O}(f(k))$	une fonction g telle que $ g(k) \leq C f(k) $ avec C une constante indépendante de k
$\Re \lambda$	partie réelle de la valeur propre λ
$\arg(\lambda)$	argument du complexe λ
v^T	transposé du vecteur v
$\ \cdot \ _\infty$	norme de L^∞
$\ \cdot \ _2$	norme de L^2
$\langle \cdot \rangle_X$	produit scalaire dans l'espace X

I

Introduction Générale

L'étude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes a fait l'objet au cours des dernières années d'un très large développement dans la qualité des résultats ainsi que leurs applications. Beaucoup de ces résultats concernent les systèmes à paramètres localisés: systèmes décrits mathématiquement par des équations différentielles ordinaires linéaires ou non linéaires. En réalité, un grand nombre de systèmes sont tels que les variables caractéristiques sont des fonctions de la variable d'espace: ce sont les systèmes à paramètres répartis ou distribués. Sur le plan mathématique, ce type de systèmes est régi par des équations aux dérivées partielles ou intégrales ou intégral-différentielles. L'étude même de l'existence des solutions de ces systèmes pose de nombreux problèmes.

Par ailleurs, l'étude de la stabilité des systèmes est basée sur leur comportement asymptotique au voisinage de l'infini. D'autre part, la stabilisation est une notion qui consiste à assurer, en boucle fermée, des objectifs de stabilité, de régulation etc.

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a pour objet l'étude de la stabilité et la stabilisation de certains systèmes à paramètres répartis.

Le chapitre II est consacré à la présentation des brefs rappels sur la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires et non linéaires. Celle-ci représente un outil de base pour l'étude de l'existence et de la régularité des solutions d'une large classe de systèmes d'évolution. On y trouve également le concept de la stabilité des systèmes d'évolution considérés. On rappelle enfin le principe d'invariance de LaSalle et les résultats standards sur le comportement asymptotique d'une classe de semi-groupes linéaires et non linéaires.

Au chapitre III, on aborde le problème de la stabilité exponentielle d'un système composé de deux échangeurs thermiques à contre-courant. C'est un procédé courant dans l'industrie de transformation (génie chimique, génie des procédés, énergétique,..). Le phénomène de transferts thermiques se modélise par des équations aux dérivées partielles que nous formulons sous une forme abstraite de systèmes linéaires hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Cette approche nous a permis de mener une

étude théorique de la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes hyperboliques. En effet, on montre dans un cadre assez large la stabilité exponentielle de systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Ainsi, nous améliorons les résultats bien connus de [58] (dans le cas d'une seule variable espace) et [66]. Enfin, nous adoptons ces résultats théoriques obtenus au système d'échangeurs thermiques. Ceci donne une réponse positive à la question posée par J. P. Gauthier et C. Z. Xu [31].

Ce travail a fait l'objet d'un article qui sera présenté à *IEEE Conf. on Decision and Control 98* [76].

Le chapitre IV traite la stabilisation frontière d'un système hybride qui peut être vu comme une variante du modèle SCOLE. Celui-ci a été introduit par les ingénieurs de la NASA pour modéliser certaines structures de l'aérospatiale. Il est composé d'une poutre flexible de longueur $L = 1$, encastrée en l'une de ses extrémités alors qu'une antenne rigide de masse m est fixée en son extrémité libre. Les vibrations élastiques de la poutre sont régies par une équation aux dérivées partielles (modèle d'Euler-Bernoulli) tandis que les oscillations de l'antenne sont gouvernées par deux équations différentielles ordinaires (équations de Newton-Euler). Il existe pour ce système deux contrôles, à savoir le contrôle moment $\Theta_1(t)$ et le contrôle force $\Theta_2(t)$ appliqués à l'extrémité libre de la poutre.

Des résultats de stabilité forte mais non uniforme ont été obtenus par des feedback usuels [49], [60]. Ce même résultat a été établi avec des contrôles frontières à priori bornés [70], [61]. En revanche, la stabilisation uniforme est assurée si le feedback est d'ordre supérieur [60]. D'autres résultats ont été obtenus pour des variantes du système (voir [23], [62] et [63]). En effet, en négligeant le moment d'inertie J , F. Conrad et O. Morgül [23] ont établi la stabilisation uniforme du système moyennant **un contrôle de force d'ordre supérieur** appliqué sur la poutre. De plus, le taux optimal de décroissance de l'énergie a été obtenu dans le cas où les coefficients du contrôle vérifient une certaine relation [23]. Notons que ce même résultat de stabilisation uniforme a été obtenu, moyennant **deux** contrôles, pour un modèle simplifié (moment négligé) d'une équation de plaque [62].

L'objectif de ce chapitre est double:

Premièrement, traiter le problème posé par Rao [62], c'est-à-dire: trouver les contrôles $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$ qui stabilisent le système dans le cas où **le terme accélération de l'antenne est négligé**.

Deuxièmement, répondre à la question suivante: Peut-on obtenir un résultat analogue à celui de Conrad et Morgül [23] si on applique seulement un feedback de moment ?

Concernant le premier problème (terme accélération négligé), on montre que le système considéré est uniformément stabilisable par feedback frontière. Dans un premier temps, on propose une loi de commande (contrôle de force + contrôle de moment) qui stabilise uniformément le système. En se basant sur ce résultat, on montre également la stabilisation uniforme avec seulement le contrôle de force mais sous une certaine condition sur les paramètres physiques du système. Ces deux résultats obtenus donnent une réponse positive à la question posée par Rao pour le cas d'une seule variable espace (voir [62] et [63]). Cependant, on montre que ce même système n'est pas uniformément stabilisable par feedback de moment. Enfin, on présente une étude asymptotique de la partie réelle du spectre de l'opérateur contrôlé. Ces résultats sont illustrés par des simulations numériques.

L'essentiel de ces résultats a été résumé sous forme d'article sur le point d'être soumis [16].

Par ailleurs, on donne dans la deuxième partie de ce chapitre une réponse partielle à la question posée ci-dessus. En effet, en considérant le système étudié dans [23], nous montrons que celui-ci est uniformément stabilisable par un contrôle de moment. L'avantage de cette loi de commande est qu'elle est simple, d'ordre usuel et donc plus facile à réaliser en pratique. Afin de répondre à la question posée, on présente une étude du comportement asymptotique du spectre de l'opérateur contrôlé et non contrôlé. On montre aussi que les valeurs propres de grand module de l'opérateur contrôlé sont algébriquement simples et isolées les unes des autres. Actuellement, nous essayons de montrer que la famille des fonctions propres de l'opérateur contrôlé est quadratiquement proche de celle des fonctions propres de l'opérateur non contrôlé. Ceci fait l'objet de travaux en cours.

Une partie de ces résultats a donné lieu à un article accepté pour publication au *14th World Congress of IFAC 1999* [44].

Le chapitre V est consacré à l'étude de la stabilisation par feedback frontière **non linéaire** d'une équation de vibration modélisant un bras flexible en torsion de longueur unité et de raideur variable.

Plus précisément, on s'intéresse à la stabilisation d'une équation de vibration où deux termes sont présents: un terme de dissipation exprimant la présence des forces de frottements; et un terme dit de "compensation".

Ce bras flexible est supposé libre en ses deux extrémités où deux contrôles $U_1(t)$ et $U_2(t)$ sont appliqués. On montre que ce type de système est asymptotiquement stabilisable par une loi de commande non linéaire dépendant seulement de la vitesse aux bords, i.e,

$$\begin{cases} U_1(t) = f(y_t(0, t)), \\ U_2(t) = g(y_t(1, t)), \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions bien choisies.

De plus, on établit des estimations du taux de décroissance exponentielle et rationnelle de l'énergie selon les propriétés des fonctions f et g .

Ces résultats ont donné lieu à plusieurs publications: un article qui apparaîtra à *Nonlinear Analysis TMA* [17], une note qui sera présentée au congrès *CDC'98* [18] et un *rapport de recherche INRIA* [19].

Au chapitre VI, on se propose d'étudier le problème de stabilisation par feedback **non linéaire** d'un système "objet rigide + structure flexible" en rotation. Ce système a été introduit par Baillieul et Levi [3] pour modéliser certains systèmes de l'aérospatiale (satellite avec antenne). Il est composé d'un disque au centre duquel est attaché perpendiculairement au plan de celui-ci une poutre flexible. Le disque tourne autour de son axe et le mouvement de la poutre est alors confiné dans le plan perpendiculaire à celui du disque. La dynamique du système est modélisée par une équation aux dérivées partielles non linéairement couplée avec une équation différentielle ordinaire.

L'objectif de ce chapitre est de chercher des contrôles **non linéaires** qui stabilisent le système de telle manière que la poutre reste perpendiculaire au disque alors que celui-ci tourne à une vitesse angulaire ω^* donnée.

On propose un contrôle **non linéaire** du couple appliqué au disque alors qu'un contrôle **non linéaire** de force et/ou un contrôle **non linéaire** du moment sont appliqués à l'extrémité libre de la poutre. On montre dans ce cas que pour toute vitesse angulaire donnée ω^* inférieure à une certaine constante (dépendant uniquement des paramètres physiques de la poutre), le système est exponentiellement stable. Ce résultat est une extension de la classe de contrôles proposée dans [45] à une classe plus large. Cette extension n'est pas dépourvue d'intérêt pratique dans la mesure où la classe de contrôles qu'on propose permet de prendre en compte les phénomènes de saturation des actionneurs.

Ce travail est présenté sous forme d'article qui sera présenté à *14th World Congress of IFAC 1999* [13]. Pour plus de détails, le lecteur pourra éventuellement consulter [14] et [15].

II

Généralités

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente brièvement la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires [55], [40], [11] et non linéaires [10], [6], [73], [7]. On y rappelle aussi quelques résultats importants pour ce qui concerne l'existence, la régularité des solutions associées à une classe d'équations d'évolution linéaires et non linéaires. Enfin, nous présentons des notions de stabilité des semi-groupes ainsi que la version du principe d'invariance de LaSalle [46] en dimension infinie [34] et [27] qu'on utilisera tout le long de ce travail.

II.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Cette partie est consacré à un bref rappel de la notion de semi-groupes linéaires et des résultats standard pour une classe d'équations d'évolution linéaires.

Soit X un espace de Banach. On notera par I l'application identité sur X .

II.2.1 Semi-groupes continus

Définition II.1 . *Un semi-groupe continu (C_0 semi-groupe) d'opérateurs linéaires sur X est une famille de fonctions $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ vérifiant:*

- i) $S(0) = I$ et $S(t)S(\tau) = S(t + \tau)$, $\forall t, \tau \geq 0$.*
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x$, $\forall x \in X$.*

Définition II.2 . *On appelle générateur du semi-groupe $S(t)$, l'opérateur A défini par:*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, $Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{h}$.

Théorème II.1 [55]. Soit $S(t)$ un C_0 semi-groupe sur X , A son générateur et x un élément de $\mathcal{D}(A)$. Alors

- 1) Il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ pour $t \geq 0$.
- 2) $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t \geq 0$ et $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$.
- 3) A est un opérateur fermé de domaine dense dans X .

Si $\omega = 0$ alors le semi-groupe est dit **uniformément borné** et si de plus $M = 1$ alors il est dit de **contractions**.

On rappelle que si A est un opérateur linéaire, l'ensemble résolvant de A est l'ensemble des complexes λ pour lesquels $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné.

Théorème II.2 (Hille-Yosida). Un opérateur linéaire A engendre un C_0 semi-groupe de contractions $S(t)$ si et seulement si

- 1) A est fermé de domaine dense.
- 2) La résolvante $\rho(A)$ de A contient \mathbb{R}^+ et $\|J_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\forall \lambda > 0$.

Le théorème précédent donne une caractérisation du générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions. Il existe des résultats de ce type dans des espaces de Banach. Cependant, on va se contenter d'énoncer deux autres caractérisations d'un générateur dans le cas où X est un Hilbert sur \mathbb{R} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

Théorème II.3 (Lumer-Phillips). Soit A un opérateur de domaine dense sur un Hilbert X .

- 1) Si A est dissipatif ($\langle Ax, x \rangle \leq 0$, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$) et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ alors A est générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X .
- 2) Si A est générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X alors A est dissipatif et $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$.

Corollaire II.1. Soit A un opérateur fermé de domaine dense. Si A et l'opérateur adjoint A^* sont dissipatifs, alors A engendre un semi-groupe C_0 de contractions.

II.2.2 Groupe d'opérateurs bornés

Définition II.3. Soit X un espace de Banach. Un C_0 groupe d'opérateurs bornés sur X est une famille $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs bornés de X dans X vérifiant:

- i) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$, et $T(0) = I$.
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x$, $\forall x \in X$.

Théorème II.4 (Stone). Soit X un espace de Hilbert. A est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur X si et seulement si A est anti-adjoint.

II.2.3 Equations d'évolution linéaires

Considérons l'équation d'évolution suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), \forall t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (C)$$

Le théorème suivant assure l'existence globale des solutions de ce problème dans le cas où l'opérateur A est m -dissipatif, i.e., A est dissipatif et $\text{Im}(\lambda I - A) = X$, $\forall \lambda > 0$.

Théorème II.5 (Hille-Yosida-Phillips). *Soit X un Banach et A un opérateur m -dissipatif dans X , de domaine dense. Alors il existe un unique semi-groupe de contractions $S(t)$ tel que:*

1) *Pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u(t) = S(t)u_0$ est l'unique solution "forte" du problème de Cauchy (C). De plus,*

$$u \in C([0, \infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, \infty); X).$$

2) *Pour tout $u_0 \in X$, $u(t) = S(t)u_0$ est l'unique solution "faible" du problème de Cauchy (C). De plus,*

$$u \in C([0, \infty); X).$$

Pour la résolution des équations d'évolution linéaires non homogènes, on pourra consulter [55], [11].

II.3 Semi-groupes de contractions non linéaires

Dans tout ce qui suit, on suppose, sauf indication contraire, que \mathcal{H} désigne un espace de Hilbert sur \mathbb{R} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$. De plus, A désigne un opérateur non linéaire (univoque) de domaine $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$.

Cependant, la théorie des semi-groupes non linéaires existe pour des espaces de Banach et la plupart des définitions et des résultats présentés dans cette section demeurent valables pour un Banach \mathcal{H} et un opérateur non linéaire multivoque A .

II.3.1 Notion d'opérateur maximal monotone

Définition II.4 . *Soit A un opérateur non linéaire et $\lambda > 0$.*

i) *A est dit monotone si*

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A).$$

ii) *L'opérateur $J_\lambda : \text{Im}(I + \lambda A) \rightarrow \mathcal{H}$ est appelé résolvante de A .*

Le lemme suivant met en évidence une caractérisation d'un opérateur monotone.

Lemme II.1 [73]. *Un opérateur A est monotone ssi pour tout $\lambda > 0$, la résolvente J_λ est une contraction de $\text{Im}(I + \lambda A)$ dans \mathcal{H} .*

Définition II.5 . *Un opérateur A est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones.*

Le résultat ci-contre est fondamental dans l'étude des opérateurs maximaux monotones.

Proposition II.1 [10]. *Soit A un opérateur de \mathcal{H} . Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- i) A est maximal monotone.
- ii) A est monotone et $\text{Im}(I + \lambda A) = \mathcal{H}$.
- iii) Pour tout $\lambda > 0$, J_λ est une contraction définie sur \mathcal{H} tout entier.

II.3.2 Semi-groupes de contractions non linéaires

Définition II.6 . *Une famille de fonctions $\{S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, t \geq 0\}$ est dite semi-groupe continu de contractions si:*

- i) $S(0) = I$ et $S(t)S(\tau) = S(t + \tau)$, $\forall t, \tau \geq 0$.
- ii) $\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x$, $\forall x \in \mathcal{H}$.
- iii) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$ et $\forall t \geq 0$.

Etant donné un semi-groupe de contractions $S(t)$ sur \mathcal{H} , on peut lui associer, comme dans le cas linéaire (voir Définition II.2), un unique générateur A . De plus, on a alors le théorème suivant:

Théorème II.6 [6]. *Soit $S(t)$ un semi-groupe de contractions sur \mathcal{H} et soit A son générateur. Si x est un élément de $\mathcal{D}(A)$ alors*

- 1) $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$, $\forall t \geq 0$ et la fonction $t \rightarrow AS(t)x$ est continue à droite sur $[0, \infty[$.
- 2) $S(t)x$ admet une dérivée à droite $\frac{d}{dt}S(t)x$ pour chaque $t \geq 0$ et

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = AS(t)x, \forall t \geq 0.$$

- 3) $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x$ existe et est continue sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de $t \geq 0$.

II.3.3 Equations d'évolution non linéaires

Soit A un opérateur maximal monotone sur \mathcal{H} . Considérons l'équation d'évolution homogène suivante:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = 0. \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (PC)$$

On a le théorème suivant qui est bien connu lorsque A est linéaire (Théorème de Hille-Yosida).

Théorème II.7 [10]. *Pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, il existe une unique fonction $u(t) \in \mathcal{H}$ telle que*

- 1) $u(0) = u_0$ et $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, pour tout $t > 0$.
- 2) $\frac{du}{dt} \in L^\infty([0, \infty[; \mathcal{H})$ et $\|\frac{du}{dt}\|_{L^\infty([0, \infty[; \mathcal{H})} \leq \|Au_0\|$.
- 3) $u(t)$ est solution (forte) de (PC) p.p. sur $]0, \infty[$. De plus, u admet en tout $t \in [0, \infty[$ une dérivée à droite et $\frac{d^+u}{dt}(t) + Au(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.
- 4) La fonction $t \rightarrow Au(t)$ est continue à droite et la fonction $t \rightarrow \|Au(t)\|$ est décroissante.

Remarque II.1 . *On désigne par $S(t)$ le prolongement par continuité à $\overline{\mathcal{D}(A)}$ de l'application contractante $u_0 \rightarrow u(t)$. On vérifie aisément que $S(t)$ définit un semi-groupe continu de contractions sur $\overline{\mathcal{D}(A)}$. On dit alors que $S(t)$ est le semi-groupe engendré par $-A$.*

Dans les applications, on rencontre de nombreuses équations avec un second membre. C'est la raison pour laquelle on va considérer l'équation d'évolution non homogène suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = F(t), & 0 < t < T, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (PCF)$$

où

$$A \text{ est un opérateur maximal monotone sur } \mathcal{H} \text{ et } F \in L^1((0, T); \mathcal{H}). \quad (H)$$

Définition II.7 *On appelle solution forte de (PCF) toute fonction $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$, absolument continue sur tout compact de $(0, T)$ vérifiant $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ et $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t)$ p.p. sur $(0, T)$.*

Nous allons énoncer un résultat classique qui permet d'assurer l'existence des solutions fortes du problème (PCF). On suppose dans la suite que l'hypothèse (H) est satisfaite.

Théorème II.8 [73]. *Pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $F \in W^{1,1}((0, T); \mathcal{H})$, il existe une unique solution forte u de (PCF) sur $(0, T)$ telle que $u(0) = u_0$, $u \in W^{1,1}((0, T); \mathcal{H})$ et*

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\| = \|Au(t) + F(t)\| \leq \|Au_0 + F(0)\| + \int_0^t \left\| \frac{dF}{ds}(s) \right\| ds, \text{ p.p. } t \in (0, T).$$

Si $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$ alors le problème (PCF) n'admet pas toujours une solution forte (voir [26]). C'est la raison pour laquelle des nouveaux types de solutions ont été introduits.

Définition II.8 . *On dit que $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ est une solution faible de (PCF) s'il existe des fonctions $(F_n, u_n) \in L^1((0, T); \mathcal{H}) \times C([0, T]; \mathcal{H})$ telles que*

- i) u_n soit une solution forte de (PCF) avec F_n au lieu de F .*
- ii) $\lim_n u_n = u$ dans $C([0, T]; \mathcal{H})$ et $\lim_n F_n = F$ dans $L^1((0, T); \mathcal{H})$.*

On a le résultat suivant

Théorème II.9 [10]. *Pour tout $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, il existe une solution faible unique de (PCF) telle que $u(0) = u_0$.*

Définition II.9 . *Une fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ est dite solution intégrale de (PCF) si $u \in C((0, T); \mathcal{H})$, et*

$$\|u(t) - x\|^2 \leq \|u(s) - x\|^2 + 2 \int_s^t \langle F(\tau) - Ax, u(\tau) - x \rangle d\tau,$$

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Remarque II.2 . *On démontre que u est une solution faible de (PCF) ssi u est une solution intégrale [10]. Néanmoins, lorsque \mathcal{H} est seulement un espace de Banach alors toute solution faible est une solution intégrale [73].*

Nous allons définir un autre type de solutions du problème (PCF) dans un espace de Banach \mathcal{H} . Dans un premier temps, nous avons besoin des définitions suivantes:

Définition II.10 . *Soit $\epsilon > 0$. $D_A(\epsilon; t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n)$ est dit ϵ -discrétisation du problème (PCF) si*

$$(D_1) \ 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq T \text{ et } f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H};$$

$$(D_2) \ t_0 \leq \epsilon, \ t_1 - t_{i-1} \leq \epsilon, \ T - t_n \leq \epsilon \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$(D_3) \ \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|F(s) - F_i\| \leq \epsilon.$$

Définition II.11 . Soit $\epsilon > 0$ et $D_A(\epsilon; t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n)$ une ϵ -discrétisation de (PCF). Une fonction $v : [t_0, t_n] \rightarrow \mathcal{H}$ est dite solution de $D_A(\epsilon; t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n)$ s'il existe $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathcal{D}(A)$ telles que

$$(S_1) \frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Av_i = F_i, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(S_2) v(t_0) = v_0, v(t) = v_i \text{ pour tout } t \in]t_{i-1}, t_i[\text{ et } i = 1, 2, \dots, n.$$

Si A est maximal monotone alors pour toute ϵ -discrétisation de (PCF), il existe une unique solution v de $D_A(\epsilon; t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n)$ [73].

Définition II.12 . Une fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ est dite "bonne solution" de (PCF) si $u \in C((0, T); \mathcal{H})$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe au moins une ϵ -discrétisation de (PCF) et une solution $v : [t_0, t_n] \rightarrow \mathcal{H}$ de $D_A(\epsilon; t_0, \dots, t_n; f_1, \dots, f_n)$ telle que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \epsilon, \forall t \in [t_0, t_n].$$

Le résultat suivant montre le lien entre une solution intégrale et une "bonne solution".

Théorème II.10 [73]. Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$. Si u est une "bonne solution" de (PCF) telle que $u(0) = u_0$ alors u est l'unique solution intégrale de (PCF).

En revanche, l'hypothèse (H) est suffisante pour avoir des "bonne solutions".

Théorème II.11 [73]. Pour tout $u_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, il existe une unique "bonne solution" de (PCF) telle que $u(0) = u_0$.

II.4 Comportement asymptotique des semi-groupes

On aborde dans ce paragraphe le problème de l'étude de la stabilité des semi-groupes. On présente aussi le principe d'invariance de LaSalle qui s'avère un outil commode pour étudier le comportement asymptotique d'une large classe de semi-groupes linéaire ou non linéaire.

Dans toute cette section A désigne un opérateur (linéaire ou non linéaire) qui engendre un semi-groupe continu $S(t)$ sur un espace de Banach X . Considérons le système d'évolution suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (\Sigma)$$

II.4.1 Notion de stabilité

Définition II.13 . On dira que $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ est un point d'équilibre pour (Σ) si $Ax_0 = 0$.

On suppose dans la suite que 0 est un point d'équilibre pour (Σ) .

Définition II.14 . i) Le semi-groupe $S(t)$ est dit asymptotiquement (fortement) stable si $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)x = 0, \forall x \in X$.

ii) Il est dit exponentiellement (ou uniformément) stable s'il existe deux constantes positives M et α telles que $\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$.

Définition II.15 (Trajectoires, ensembles ω -limite)

Pour tout $x \in X$,

i) La courbe continue $t \rightarrow S(t)x$ est appelée trajectoire issue de x .

ii) L'ensemble

$$\omega(x) = \{y \in X; \exists (t_n) \rightarrow +\infty \text{ telle que } S(t_n)x \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$$

est appelé ensemble ω -limite de x .

II.4.2 Principe d'invariance de LaSalle

Dans le cas où A est un opérateur linéaire, on a les deux propositions suivantes:

Proposition II.2 [34]. Pour tout $x \in X$ et pour tout $t \geq 0$, on a

- $\omega(S(t)x) = \omega(x)$.
 - $S(t)(\omega(x)) \subset \omega(x)$ ($\omega(x)$ est dit alors positivement invariant par $S(t)$).
- Si de plus, $\cup_{t \geq 0} S(t)x$ est relativement compacte dans X , alors
- $S(t)(\omega(x)) = \omega(x) \neq \emptyset$ ($\omega(x)$ est dit invariant par $S(t)$).
 - $\omega(x)$ est un compact connexe de X et $S(t)x$ tend fortement vers $\omega(x)$.

Proposition II.3 (Principe d'invariance de LaSalle).

S'il existe une fonction V telle que $\frac{dV}{dt} \leq 0$ le long des trajectoires de $S(t)$, et un réel $\lambda > 0$ tel que la résolvante J_λ soit compacte, alors pour tout $x \in X$,

1) La trajectoire $\{S(t)x\}_{t \geq 0}$ est précompacte dans X .

2) Si $x \in \mathcal{D}(A)$, l'ensemble $\omega(x)$ est contenu dans M , où M est le plus grand sous ensemble invariant de $\{u \in \mathcal{D}(A); \frac{dV}{dt}u(t) = 0, \forall t \geq 0\}$.

Le principe d'invariance de LaSalle est souvent utilisé pour montrer la stabilité forte. En pratique, on montre que l'ensemble M est réduit à $\{0\}$. De plus, le principe d'invariance admet une version non linéaire due à Dafermos et Slemrod [27].

Théorème II.12 [27]. Soit A un opérateur non linéaire maximal monotone qui engendre un C_0 semi-groupe de contractions $S(t)$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Si $0 \in \text{Im}(A)$ et si J_λ est compacte $\forall \lambda > 0$ alors pour tout $x_0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, l'élément $x(t) = S(t)x_0$ approche quand $t \rightarrow +\infty$ un sous ensemble compact Ω de la sphère $\{y \in \mathcal{H}; \|y - a\| = \sigma\}$ où $\sigma \leq \|x_0 - a\|$ et $a \in A^{-1}(0)$. De plus, Ω est minimal et invariant. Si $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ alors l'ensemble $\Omega \subset \mathcal{D}(A)$.

II.4.3 Quelques critères de stabilité uniforme

Par ailleurs, on dispose d'un résultat qui permet de caractériser la stabilité exponentielle pour une classe de semi-groupes linéaires. Celui-ci peut être utile dans le cas où la technique de multiplicateurs ne permet pas de conclure la stabilité exponentielle.

Théorème II.13 (Huang) [35]. Soit A un opérateur linéaire qui engendre un C_0 semi-groupe $S(t)$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On suppose que $S(t)$ est uniformément borné. Alors le semi-groupe $S(t)$ est exponentiellement (uniformément) stable si et seulement si

- i) $\{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$,
- ii) $\sup \left\{ \|(i\omega - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; \omega \in \mathbb{R} \right\} < +\infty$.

On a aussi une condition suffisante de stabilité exponentielle.

Théorème II.14 [72]. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, et soit A un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S_A(t)$ fortement stable. Soit B un opérateur compact de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $S_{A+B}(t)$ le semi-groupe engendré par $A+B$. Si $S_{A+B}(t)$ est exponentiellement stable alors $S_A(t)$ l'est aussi.

Enfin le théorème suivant est parfois appliqué pour prouver un résultat de non stabilité uniforme.

Théorème II.15 [68]. Soit X un espace de Banach de dimension infinie, et soit G un générateur d'un groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur X . Alors, il ne peut exister d'opérateurs linéaires compacts D_1, D_2 , de nombres réels strictement positifs T_1, T_2 et de réels $0 \leq \gamma_1 < 1, 0 \leq \gamma_2 < 1$ tels que les deux groupes $S_1(t)$ et $S_2(t)$ engendrés par $G + D_1$, et $G + D_2$ respectivement, vérifient simultanément

$$\|S_1(t)\| \leq \gamma_1, t \geq T_1 \quad \text{et} \quad \|S_2(t)\| \leq \gamma_2, t \leq -T_2.$$

III

Stabilité de l'Échangeur Thermique

On aborde dans ce chapitre le problème de la stabilité exponentielle d'un système composé de deux échangeurs thermiques à contre-courant. Celui-ci sera formulé sous une forme abstraite de systèmes linéaires hyperboliques à coefficients dans L^∞ . On montre dans un cadre assez large la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Ce résultat généralise ceux de [58] (dans le cas d'une seule variable espace) et [66]. Enfin, nous adoptons ces résultats théoriques obtenus à notre système d'échangeurs thermiques.

III.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est multiple. Notre motivation principale est d'étudier le problème de stabilité exponentielle d'un système composé de deux échangeurs thermiques à contre-courant. Ce problème, posé par J. P. Gauthier et C. Z. Xu [31], a un intérêt dans l'industrie de transformation (chimie, génie des procédés, énergétique,...). L'échangeur thermique simple a d'ores et déjà fait l'objet de nombreuses recherches et études [30], [57], [77], [78], [48]. Nous présenterons dans un premier temps notre dispositif expérimental ainsi que les hypothèses qui nous permettront d'obtenir une forme simple des équations du système. Ensuite, nous formulerons les équations de l'échangeur sous une forme standard de systèmes linéaires hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Il est important de noter qu'il existe une littérature riche sur l'étude de la stabilité et la contrôlabilité des systèmes linéaires hyperboliques (voir [58], [65], [66], [67], [21],...). Néanmoins, ces résultats font appel à des conditions de régularité des coefficients du système. Or, les coefficients de l'échangeur peuvent être discontinus (voir [30], [31]). C'est la raison pour laquelle nous avons saisi l'occasion, plutôt que de nous limiter au cadre restreint de l'échangeur, de mener une étude générale de la stabilité d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Nous

développerons alors dans la ligne des travaux de C. Z. Xu [74] des outils pouvant s'adapter à notre système d'échangeur. Cette approche nous a permis de montrer la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Finalement, nous appliquerons sur l'échangeur les résultats théoriques obtenus. L'intérêt des résultats de ce travail est double: primo, étendre les résultats bien connus sur la stabilité des systèmes linéaires hyperboliques à coefficients réguliers à des systèmes hyperboliques à coefficients dans L^∞ . Secundo, donner une réponse positive à la question posée par J. P. Gauthier et C. Z. Xu [31].

III.2 Dispositif expérimental et hypothèses

III.2.1 Description de l'échangeur

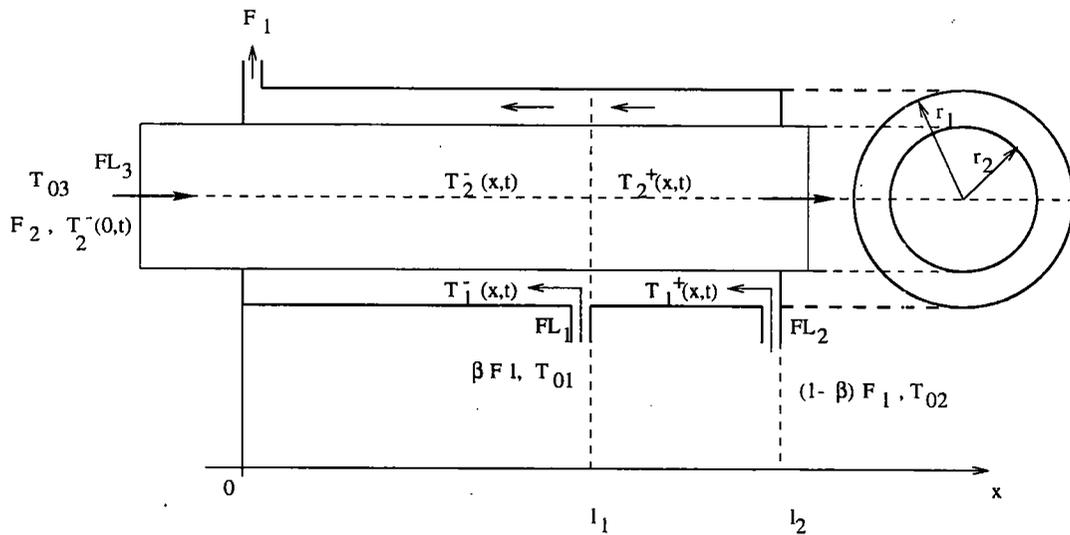


Figure III.1. L'échangeur thermique.

Nous allons consacrer notre étude à un système de deux échangeurs thermiques couplés, à contre-courant. Ce système, illustré par la figure III.1, fonctionne avec trois fluides d'entrée FL_1 , FL_2 et FL_3 . Le fluide FL_1 est éjecté dans l'échangeur en $x = l_1$ où il sera mélangé avec le fluide FL_2 qui parvient de l'extrémité $x = l_2$. Le but du processus est de chauffer le fluide FL_3 en mélangeant les fluides FL_1 et FL_2 . Les caractéristiques physiques et thermiques du système sont regroupées dans le tableau suivant:

Désignation	Fluides		
	FL_1	FL_2	FL_3
Masse volumique	ρ_1	ρ_1	ρ_2
Chaleur massique	C_{p1}	C_{p1}	C_{p2}
Section	s_1	s_1	s_2
Températures $0 \leq x \leq l_1$ $l_1 \leq x \leq l_2$	$T_1^-(x, t)$	$T_1^-(x, t)$ $T_1^+(x, t)$	$T_2^-(x, t)$ $T_2^+(x, t)$
Coefficient de transmission de chaleur	k	k	k
Vitesse du fluide	βF_1	$(1 - \beta)F_1$	F_2
Température d'entrée	T_{01}	T_{02}	T_{03}

Table 1: Paramètres et caractéristiques du système.

III.2.2 Hypothèses et équations

Notre objectif étant d'étudier la stabilité de l'échangeur, nous allons préciser les hypothèses qui permettront d'obtenir une forme simple des équations de l'échangeur et de montrer comment ce système appartient à une classe de systèmes linéaires hyperboliques.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

- Les caractéristiques physiques des fluides et des matériaux sont constantes tout au long de l'échangeur.
- Les débits des fluides sont constants.
- Les phénomènes de diffusion dans les fluides sont négligés.
- Les fluides FL_1 et FL_2 ont les mêmes caractéristiques physiques.

Par application du premier principe de la thermodynamique et le bilan énergétique, on obtient deux systèmes d'équations aux dérivées partielles décrivant la dynamique des températures des fluides (voir [31]):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^-(x, t)}{\partial t} &= \frac{F_1}{\rho_1 s_1} \frac{\partial T_1^-(x, t)}{\partial x} - \frac{kl}{C_{p1} \rho_1 s_1} [T_1^-(x, t) - T_2^-(x, t)], \\ \frac{\partial T_2^-(x, t)}{\partial t} &= -\frac{F_2}{\rho_2 s_2} \frac{\partial T_2^-(x, t)}{\partial x} + \frac{kl}{C_{p2} \rho_2 s_2} [T_1^-(x, t) - T_2^-(x, t)], \end{aligned} \right\}, x \in]0, l_1[$$

et

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1^+(x, t)}{\partial t} &= (1 - \beta) \frac{F_1}{\rho_1 s_1} \frac{\partial T_1^+(x, t)}{\partial x} - \frac{kl}{C_{p1} \rho_1 s_1} [T_1^+(x, t) - T_2^+(x, t)], \\ \frac{\partial T_2^+(x, t)}{\partial t} &= -\frac{F_2}{\rho_2 s_2} \frac{\partial T_2^+(x, t)}{\partial x} + \frac{kl}{C_{p2} \rho_2 s_2} [T_1^+(x, t) - T_2^+(x, t)], \end{aligned} \right\}, x \in]l_1, l_2[$$

avec $0 < \beta < 1$. Les conditions aux bords sont données par

$$\left\{ \begin{aligned} T_1^-(l_1, t) &= (1 - \beta)T_1^+(l_1, t) + \beta T_{01}, \\ T_2^-(l_1, t) &= T_2^+(l_1, t), \\ T_1^+(l_2, t) &= T_{02}, \\ T_2^-(0, t) &= T_{03}, \end{aligned} \right.$$

où T_{01} , T_{02} et T_{03} sont des constantes positives.

De plus, les conditions initiales sont :

$$\left. \begin{aligned} T_1^-(x, 0) &= \phi_1^-(x), \\ T_2^-(x, 0) &= \phi_2^-(x), \end{aligned} \right\}, x \in]0, l_1[\quad \& \quad \left. \begin{aligned} T_1^+(x, 0) &= \phi_1^+(x), \\ T_2^+(x, 0) &= \phi_2^+(x), \end{aligned} \right\}, x \in]l_1, l_2[.$$

Nous noterons $m_i = \frac{F_i}{\rho_i s_i}$ et $K_i = \frac{kl}{C_{pi} \rho_i s_i}$ pour $i = 1, 2$. Dans [31], il a été démontré qu'autour du point d'équilibre le système ci-dessus peut s'écrire après un changement de variables comme suit:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial t} &= m_1 \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial x} - K_1(R_1(x, t) - R_2(x, t)), \\ \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial t} &= -m_2 \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial x} + K_2(R_1(x, t) - R_2(x, t)), \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

pour tout $x \in (0, l_1)$,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial t} &= (1 - \beta)m_1 \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} - K_1(T_1(x, t) - T_2(x, t)), \\ \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial t} &= -m_2 \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} + K_2(T_1(x, t) - T_2(x, t)), \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

pour tout $x \in (l_1, l_2)$.

Les conditions aux bords ainsi que les conditions initiales sont:

$$T_1(l_2, t) = R_2(0, t) = 0 \quad \& \quad R_2(l_1, t) = T_2(l_1, t), \quad R_1(l_1, t) = (1 - \beta)T_1(l_1, t) \quad (2.3)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} R_1(x, 0) = \tau_1(x), \\ R_2(x, 0) = \tau_2(x), \end{array} \right\}, x \in]0, l_1[\quad \& \quad \left. \begin{array}{l} T_1(x, 0) = \xi_1(x), \\ T_2(x, 0) = \xi_2(x), \end{array} \right\}, x \in]l_1, l_2[. \quad (2.4)$$

Nous allons désormais considérer le système (2.1)-(2.4) qui sera formulé sous la forme standard d'équation d'évolution. Pour cela, soit Π , η_1 et η_2 les fonctions suivantes:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1; & x \in (0, l_1) \\ 1 - \beta; & x \in (l_1, l_2) \end{cases}, \quad \eta_1(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} R_1(x, t); & x \in (0, l_1) \\ (1 - \beta) \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} T_1(x, t); & x \in (l_1, l_2) \end{cases},$$

$$\eta_2(x, t) = \begin{cases} R_2(x, t); & x \in (0, l_1) \\ T_2(x, t); & x \in (l_1, l_2). \end{cases}$$

Il est alors facile de vérifier que le système (2.1)-(2.4) est équivalent à:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial t} = m_1 \Pi(x) \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial x} - K_1 \eta_1(x, t) + \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \eta_2(x, t) \\ \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial t} = -m_2 \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} \eta_1(x, t) - K_2 \eta_2(x, t) \end{cases} \quad (2.5)$$

pour $(x, t) \in (0, l_2) \times (0, +\infty)$. Les conditions aux bords et les conditions initiales deviennent:

$$\begin{cases} \eta_1(l_2, t) = \eta_2(0, t) = 0, \\ \eta_1(x, 0) = \phi_1(x), \quad \eta_2(x, 0) = \phi_2(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

Comme nous l'avons déjà signalé, le système (2.5)-(2.6) est un système linéaire hyperbolique à deux variables indépendantes x et t (voir [25], [32], [38]). En effet, il est aisé de voir que ce système (2.5)-(2.6) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \left(F \frac{\partial}{\partial x} + B \right) \eta(t), \\ \eta(0) = \phi, \end{cases} \quad (2.7)$$

où $\eta(t) = (\eta_1(\cdot, t), \eta_2(\cdot, t))$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et

$$F(x) = \begin{bmatrix} m_1 \Pi(x) & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} -K_1 & \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \\ \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} & -K_2 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

De plus, l'opérateur $F \frac{\partial}{\partial x} + B$ a pour domaine

$$D = \{(\eta_1, \eta_2) \in H^1(0, l_2) \times H^1(0, l_2); \eta_1(l_2) = \eta_2(0) = 0\}.$$

Néanmoins, la particularité de notre système est la discontinuité de certains coefficients tels que $m_1 \Pi(x)$ et $\sqrt{K_1 K_2} \Pi(x)$

Dès lors, on est amené à étudier la stabilité d'une classe de systèmes hyperboliques à coefficients discontinus.

III.3 Stabilité d'une classe de systèmes linéaires hyperboliques

III.3.1 Introduction

Motivés par la forme du système (2.7)-(2.8), nous nous intéressons dans ce paragraphe à la stabilité exponentielle du système suivant:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x) \frac{\partial R_1(x, t)}{\partial x} \\ -F_2(x) \frac{\partial R_2(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(x, t) \\ R_2(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_1(l, t) = 0 \ \& \ R_2(0, t) = 0 \quad (\text{conditions frontières}), \quad (3.2)$$

$$R_1(x, 0) = \phi_1(x) \ \& \ R_2(x, 0) = \phi_2(x) \quad (\text{conditions initiales}), \quad (3.3)$$

où l est une constante strictement positive et $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$. Posons

$$F(\cdot) = \begin{bmatrix} F_1(\cdot) & 0 \\ 0 & -F_2(\cdot) \end{bmatrix}, \quad B(\cdot) = \begin{bmatrix} B_{11}(\cdot) & B_{12}(\cdot) \\ B_{21}(\cdot) & B_{22}(\cdot) \end{bmatrix}, \quad N(\cdot) = \begin{bmatrix} N_1(\cdot) & 0 \\ 0 & N_2(\cdot) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

On suppose ensuite que les hypothèses suivantes sont satisfaites pour le système (3.1)-(3.3).

H.I : Les fonctions $F_i, B_{ij} \in L^\infty(0, l)$ pour $i, j = 1, 2$.

H.II : Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $F_i(x) \geq \alpha$ p.p. $x \in (0, l)$, $i = 1, 2$.

H.III : Il existe des fonctions de pondération $N_1, N_2 \in L^\infty(0, l)$ avec $N_i(x) \geq \alpha > 0$, $i = 1, 2$ telles que

H.IIIa : pour tout $y \in \mathbb{R}^2$, $y^\top N(x)B(x)y \leq 0$ p.p. $x \in (0, l)$.

H.IIIb : la fonction $N_1(x)F_1(x)$ est p.p. monotone non-décroissante, i.e., pour chaque $h > 0$, $N_1(x+h)F_1(x+h) - N_1(x)F_1(x) \geq 0$ p.p. $x \in (0, l)$ et $N_2(x)F_2(x)$ est p.p. monotone non-croissante.

Prenons pour espace d'état du système l'espace de Hilbert réel

$$\mathcal{H} = L^2(0, l) \times L^2(0, l)$$

muni du produit scalaire usuel. Le système (3.1)-(3.3) s'écrit alors:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = AR(t), \\ R(0) = \phi \end{cases} \quad (3.5)$$

où $R(t) = (R_1(\cdot, t), R_2(\cdot, t))$, $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et A est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{D}(A) = \{(f_1, f_2) \in H^1(0, l) \times H^1(0, l); f_1(l) = f_2(0) = 0\},$$

et

$$A = F \frac{\partial}{\partial x} + B.$$

Dans un premier temps, il est essentiel de situer notre étude par rapport aux travaux bien connus sur la stabilité des systèmes hyperboliques. En effet, nous disposons de résultats de [58], [65], [66],.....De façon plus précise, dans [58], les auteurs ont montré la stabilité exponentielle pour des systèmes hyperboliques dissipatifs à $n + 1$ variables indépendantes: n variables espace x_1, x_2, \dots, x_n et la variable temps t . Les coefficients devant l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sont indépendants de t et suffisamment différentiables. Par ailleurs, dans [65] et [66], D.L. Russel a considéré des systèmes hyperboliques à deux variables indépendantes et à coefficients continûment différentiables en x . Il démontre grâce à la méthode des caractéristiques que le système considéré est exponentiellement stable.

Dans le cas où les coefficients F_1 et F_2 du système (3.1)-(3.3) sont pris comme entrées et donc dépendent du temps t , la situation est différente dans la mesure où le système est vu comme un système bilinéaire (voir [74]).

Les techniques de calcul que nous utiliserons ultérieurement sont analogues à celles utilisées dans les travaux de [65] et [74]. En effet, en utilisant la méthode classique de régularisation et la méthode des caractéristiques, nous prouvons des nouveaux résultats de régularité et de stabilité exponentielle du système (3.1)-(3.3) sans supposer aucune hypothèse de différentiabilité des coefficients F_i , $i = 1, 2$.

Soit $Q_T = \{(x, t); x \in (0, l), t \in (0, T)\}$ pour chaque $T > 0$.

Définition III.1 . Une fonction $R(x, t)$ est dite solution régulière du système (3.1)-(3.3) si $R_i(\cdot, \cdot) \in H^1(Q_T)$, $i = 1, 2$ et satisfait les équations (3.1) dans $L^2(Q_T)$ ainsi que les conditions aux bords (3.2) dans $L^2(0, T)$ et les conditions initiales dans $L^2(0, l)$.

III.3.2 Régularisation du système initial (3.1)-(3.3)

En s'inspirant de la méthode de régularisation, il paraît plausible que les techniques utilisées par Xu [74] peuvent être adaptées à notre cas. Nous exposerons tout d'abord les outils de base qui nous seront utiles par la suite.

Lemme III.1 . Soit $f \in L^\infty(0, l)$ telle que $0 < \alpha < f(x)$ p.p. $x \in (0, l)$. Il existe alors un prolongement de f sur \mathbb{R} , noté \hat{f} , tel que $\alpha \leq \hat{f}(x) \leq \|f\|_\infty$. De plus, si f est monotone sur $(0, l)$ alors il est de même pour \hat{f} sur \mathbb{R} .

Preuve du Lemme III.1. Définissons la fonction \hat{f} comme suit:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, l), \\ f(x - nl), & x \in (nl, (n+1)l), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Il est alors aisé de montrer le Lemme III.1. \square

Dans la suite de ce paragraphe, on notera par f^h la fonction régularisée de f définie par

$$f^h(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \omega_h(y - x) dy,$$

où $\omega_h(x)$, $h > 0$ est la fonction régularisante [51].

Posons $\tilde{B}(x) = N(x)B(x)$, $\tilde{F}_1(x) = N_1(x)F_1(x)$, $\tilde{F}_2(x) = N_2(x)F_2(x)$. Considérons ensuite le système régularisé associé à (3.1)-(3.3):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1^h(x, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial R_2^h(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{F}_1^h(x)}{N_1^h(x)} \frac{\partial R_1^h(x, t)}{\partial x} \\ -\frac{\tilde{F}_2^h(x)}{N_2^h(x)} \frac{\partial R_2^h(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{N_1^h(x)} & \frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{N_1^h(x)} \\ \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{N_2^h(x)} & \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{N_2^h(x)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^h(x, t) \\ R_2^h(x, t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$R_1^h(l, t) = 0 \text{ \& } R_2^h(0, t) = 0, \quad (3.7)$$

$$R_1^h(x, 0) = \phi_1(x) \text{ \& } R_2^h(x, 0) = \phi_2(x), \quad (3.8)$$

pour tout $(x, t) \in (0, l) \times (0, +\infty)$.

Il est important de préciser que les variables d'état R_1^h et R_2^h représentent les solutions correspondantes au système à coefficients régularisés et non pas les solutions régularisées du problème d'origine (3.1)-(3.3).

Les propriétés des fonctions régularisées du système (3.6)-(3.8) sont résumées dans le lemme ci-dessous

Lemme III.2 . 1) Les coefficients du système (3.6)-(3.8) sont C^∞ et vérifient les hypothèses H.I-H.III avec les fonctions de pondération N_1^h et N_2^h .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $i, j = 1, 2$, on a:

$$\frac{\alpha^2}{\|N_i\|_\infty} \leq \frac{\tilde{F}_i^h(x)}{N_i^h(x)} \leq \|N_i\|_\infty \frac{\|F_i\|_\infty}{\alpha}, \quad \|\tilde{B}_{ij}^h(x)/N_i^h(x)\|_\infty \leq \|N_i\|_\infty \frac{\|B_{ij}\|_\infty}{\alpha}.$$

3) Pour tout entier $1 \leq p < +\infty$ et pour toute constante $b > a$,

$$\left\| \tilde{F}_i^h / N_i^h - \hat{F}_i \right\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \quad \left\| \tilde{B}_{ij}^h / N_i^h - \hat{B}_{ij} \right\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \quad i, j = 1, 2.$$

4) Pour tout entier $i, j = 1, 2$ et pour toute constante $b > a$, on a

$$\tilde{F}_i^h / N_i^h \xrightarrow{*} F_i, \quad \tilde{B}_{ij}^h / N_i^h \xrightarrow{*} B_{ij},$$

dans $L^\infty(a, b)$ pour $h \rightarrow 0^+$.

Preuve du Lemme III.2. Les trois premières assertions résultent immédiatement des définitions des fonctions régularisées, du lemme III.1 et des résultats classiques des fonctions régularisées [51].

D'autre part, pour tout $g \in L^2(a, b)$, l'inégalité de Hölder implique

$$\left| \int_a^b \left[\tilde{F}_i^h / N_i^h - \hat{F}_i \right] (x) g(x) dx \right| \leq \left\| \tilde{F}_i^h / N_i^h - \hat{F}_i \right\|_{L^2(a,b)} \|g\|_{L^2(a,b)}.$$

Comme $L^2(a, b)$ est dense dans $L^1(a, b)$, ceci entraîne grâce à l'assertion 3) que \tilde{F}_i^h / N_i^h converge faiblement* vers F_i dans $L^\infty(a, b)$ pour $h \rightarrow 0^+$. De la même manière, on démontre que $\tilde{B}_{ij}^h / N_i^h \xrightarrow{*} B_{ij}$, dans $L^\infty(a, b)$. L'assertion 4) est alors démontrée. Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Ecrivons maintenant le système (3.6)-(3.8) sous la forme d'équation d'évolution. Pour cela, nous ferons les notations suivantes:

$$F_h = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{F}_1^h}{N_1^h} & 0 \\ 0 & -\frac{\tilde{F}_2^h}{N_2^h} \end{bmatrix}, \quad B_h = \left[\tilde{B}_{ij}^h / N_i^h \right], \quad i, j = 1, 2.$$

Soit $\mathcal{H} = L^2(0, l) \times L^2(0, l)$ l'espace d'état. Il est alors naturel de définir l'opérateur linéaire A_h par

$$\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{D}(A) = \{(R_1, R_2) \in H^1(0, l) \times H^1(0, l); R_1(l) = R_2(0) = 0\}, \quad (3.9)$$

et

$$A_h = F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h. \quad (3.10)$$

En utilisant les notations ci-dessus, le système (3.6)-(3.8) devient:

$$\begin{cases} \dot{R}^h(t) = A_h R^h(t), \\ R^h(0) = \phi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour tout $h > 0$, on munit l'espace \mathcal{H} du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g \rangle_h = \int_0^l [f_1 g_1 N_1^h + f_2 g_2 N_2^h] dx.$$

Remarque III.1 . La norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ sur \mathcal{H} est notée $\| \cdot \|_h$. En utilisant le Lemme III.2, on montre facilement que la norme $\| \cdot \|_h$ est équivalente à la norme usuelle de \mathcal{H} et ceci indépendamment du paramètre h .

Lemme III.3 . L'opérateur $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ de domaine $\mathcal{D}(A_h) = \mathcal{D}(A)$ est générateur d'un C_0 semi-groupe de contractions $W_{F_h}(t)$ dans \mathcal{H} (muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$).

Preuve du Lemme III.3.

• $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est dissipatif:

En effet, soit $R^h = (R_1^h, R_2^h) \in \mathcal{D}(A_h)$. Une intégration par parties donne:

$$\begin{aligned} 2 \left\langle F_h \frac{\partial R^h}{\partial x}, R^h \right\rangle_h &= -\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0))^2 - \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l))^2 \\ &+ \int_0^l \left[-\tilde{F}_{1x}^h(x) (R_1^h(x))^2 + \tilde{F}_{2x}^h(x) (R_2^h(x))^2 \right] dx, \end{aligned}$$

où F_x désigne la dérivée de F . En utilisant la monotonie de F_i^h , $i = 1, 2$ (voir l'assertion 1) du Lemme III.2), la dernière égalité implique

$$\left\langle F_h \frac{\partial R^h}{\partial x}, R^h \right\rangle_h \leq -\frac{1}{2} \left(\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0))^2 + \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l))^2 \right) \leq 0.$$

D'où la dissipativité de $F_h \frac{\partial}{\partial x}$.

• $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est maximal:

Soit $f^h = (f_1^h, f_2^h) \in \mathcal{H}$. Il s'agit de trouver $R^h = (R_1^h, R_2^h) \in \mathcal{D}(A_h)$ tel que $(I - F_h \frac{\partial}{\partial x})R^h = f^h$. Cette dernière équation s'écrit:

$$\begin{cases} R_1^h(x) - \frac{\tilde{F}_1^h}{N_1^h}(x)R_{1x}^h(x) = f_1^h(x), \\ R_2^h(x) - \frac{\tilde{F}_2^h}{N_2^h}(x)R_{2x}^h(x) = f_2^h(x), \\ R_1^h(l) = R_2^h(0) = 0, \\ R_1, R_2 \in H^1(0, l). \end{cases}$$

On vérifie facilement que les équations différentielles ci-dessus admettent deux solutions uniques. Ce qui prouve la maximalité de $F_h \frac{\partial}{\partial x}$. Par conséquent, $F_h \frac{\partial}{\partial x}$ est m -dissipatif. Ceci implique que le domaine $\mathcal{D}(A_h)$ est dense dans \mathcal{H} [11]. Dès lors, notre lemme découle du théorème II.3 de Lumer-Phillips. \square

Nous avons aussi le résultat suivant:

Lemme III.4 . *L'opérateur A_h défini par (3.9)-(3.10) est m -dissipatif.*

Preuve du Lemme III.4. Soit $R^h \in \mathcal{D}(A_h)$. On a d'après le lemme III.3 et l'hypothèse H.IIIa,

$$\begin{aligned} 2 \langle A_h R^h, R^h \rangle_h &= 2 \left\langle \left(F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h \right) R^h, R^h \right\rangle_h \\ &\leq \tilde{F}_1^h(0) \left(R_1^h(0) \right)^2 - \tilde{F}_2^h(l) \left(R_2^h(l) \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

La dissipativité de A_h est alors prouvée.

Il reste à montrer que A_h est maximal. Or, on sait que $A_h = F_h \frac{\partial}{\partial x} + B_h$. De plus, l'opérateur B_h étant dissipatif et borné dans \mathcal{H} , la maximalité de A_h est une conséquence immédiate du corollaire 3.3, pp. 82, [55]. \square

La preuve de la proposition ci-dessous résulte de la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires [11], [55].

Proposition III.1 . 1) L'opérateur A_h défini par (3.9)-(3.10) est générateur d'un C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ sur \mathcal{H} . De plus, la relation entre $U_{F_h, B_h}(t)$ et $W_{F_h}(t)$ est donnée par la formule de la variation de la constante suivante

$$U_{F_h, B_h}(t)\phi = W_{F_h}(t)\phi + \int_0^t W_{F_h}(t-\tau)B_h U_{F_h, B_h}(\tau)\phi d\tau,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{H}$ et $0 \leq \tau \leq t$.

2) Pour tout $\phi \in D_\infty = \cap_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}(A_h^n)$, la solution $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) appartient à D_∞ et $R^h(x, t) = (U_{F_h, B_h}(t)\phi)(x)$ est dans $C^\infty([0, T] \times [0, l])$.

III.3.3 Stabilité du système à coefficients régularisés

Le but de ce paragraphe est de démontrer la stabilité exponentielle du système à coefficients régularisés (3.6)-(3.8); plus précisément, nous allons établir une inégalité d'observabilité du type

$$\int_0^{T_0} \left[\tilde{F}_1^h(0) \left(R_1^h(0, t) \right)^2 + \tilde{F}_2^h(l) \left(R_2^h(l, t) \right)^2 \right] dt \geq K \|\phi\|_h^2,$$

avec T_0 et K deux constantes positives indépendantes de h . La méthode utilisée, introduite par Russell [65], est basée sur la technique des courbes caractéristiques du système. Cette technique a été utilisée par Xu pour des systèmes bilinéaires [74].

Considérons les deux courbes caractéristiques C_1 et C_2 du système (3.6)-(3.8) (voir figure III.2).

Ces deux courbes sont solutions des équations différentielles suivantes:

$$C_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{\tilde{F}_1^h}{N_1^h}(x_1), \\ x_1(0) = l, \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \frac{\tilde{F}_2^h}{N_2^h}(x_2), \\ x_2(t_1) = 0, \end{cases}$$

avec t_1 vérifiant $x_1(t_1) = 0$. D'autre part, on choisit t_2 tel que $x_2(t_2) = l$ (voir fig. III.2). Etant donné que $F_i, N_i \geq \alpha > 0$, $i = 1, 2$, il est clair que les fonctions $x_i(t)$,

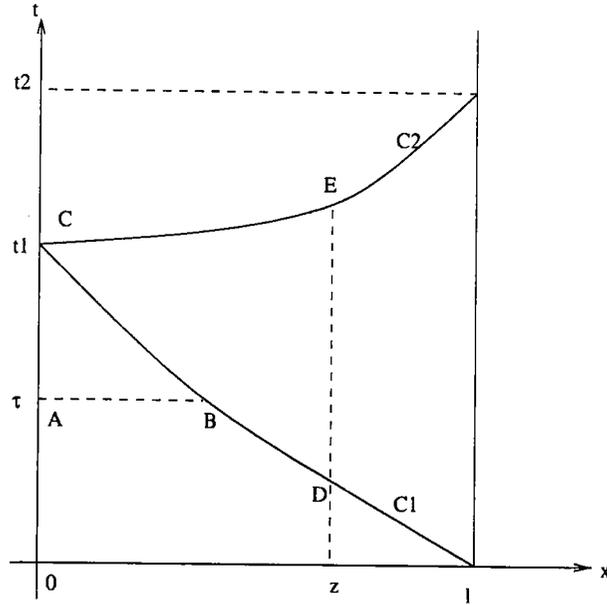


Figure III.2. Les caractéristiques du système (3.6)-(3.8).

$i = 1, 2$, sont respectivement des fonctions C_1 -difféomorphismes sur $(0, t_i)$, $i = 1, 2$. Notons alors par x_i^{-1} l'inverse de x_i . Un calcul direct montre que

$$t_1 \leq t_2 \leq \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}.$$

Dans la suite du paragraphe, $\Delta(IJK)$ représente la surface limitée par les courbes joignant les points I, J et K . On note aussi par $\partial(IJK)$ le bord de la surface $\Delta(IJK)$. D'après la Proposition III.1, pour chaque $\phi \in D_\infty$ la solution correspondante appartient à $C^\infty(\Delta(IJK))$. L'application de la formule de Green est donc justifiée.

Lemme III.5. *La solution régulière $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) issue de la condition initiale $\phi \in D_\infty$ satisfait l'inégalité suivante:*

$$\int_0^l \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) \phi_1^2(x) + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) \phi_2^2(x) \right] dx \leq e^{\gamma t_1} \int_0^{t_1} \left[(R_1^h(0, t))^2 + \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 \right] dt, \quad (3.12)$$

$$\text{où } \gamma_1 = \frac{1}{\alpha} \max \left\{ \|N_1\|_\infty \left(2\|B_{11}\|_\infty + \|B_{12}\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} \|B_{21}\|_\infty \|N_2\|_\infty \|F_1\|_\infty \right), \right. \\ \left. \|N_1\|_\infty \left(2\|B_{22}\|_\infty + \|B_{21}\|_\infty + \frac{1}{\alpha^2} \|B_{12}\|_\infty \|N_1\|_\infty \|F_2\|_\infty \right) \right\}.$$

Preuve du Lemme III.5. On vérifie facilement que les deux équations du système (3.6)-(3.8) donnent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial x} [(R_1^h(x, t))^2] + 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 \\ &+ 2 \frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} R_1^h(x, t) R_2^h(x, t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] &= -\frac{\partial}{\partial x} [(R_2^h(x, t))^2] + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \\ &+ 2 \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} R_1^h(x, t) R_2^h(x, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

En additionnant membre à membre (3.13) et (3.14) et en intégrant la somme sur le domaine $\Delta(ABC)$ (voir fig. III.2), on déduit que

$$\begin{aligned} &\iint_{\Delta(ABC)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(R_1^h(x, t))^2 - (R_2^h(x, t))^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] \right\} dx dt \\ &= \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} + \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} \right) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt. \end{aligned}$$

L'application de la formule de Green au membre gauche de la dernière égalité permet d'écrire:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial(ABC)} [(R_1^h(x, t))^2 - (R_2^h(x, t))^2] dt \\
& + \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] dx \\
& = \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} + \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} \right) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Par ailleurs, en intégrant le long des trois chemins de $\partial(ABC)$ et en utilisant la condition au bord $R_2^h(0, t) = 0$, (3.15) devient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x_1(\tau)} \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] dx \\
& - \int_\tau^{t_1} \left[\left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 + (R_1^h(0, t))^2 \right] dt \\
& = \iint_{\Delta(ABC)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} + \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} \right) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right\} dx dt.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Soit

$$M(\tau) = \int_0^{x_1(\tau)} \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] dx.$$

En dérivant alors (3.16) par rapport à τ , il suit que:

$$\begin{aligned}
\dot{M}(\tau) &= - \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h N_2^h}{\tilde{F}_2^h N_1^h}(x_1(\tau)) \right) (R_2^h(x_1(\tau), \tau))^2 - (R_1^h(0, \tau))^2 \\
& + \int_0^{x_1(\tau)} \left\{ 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, \tau))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, \tau))^2 \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} + \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} \right) R_1^h(x, \tau) R_2^h(x, \tau) \right\} dx.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

D'autre part, on sait d'après le Lemme III.2 que le système (3.6)-(3.8) satisfait les hypothèses H.II et H.III. Dès lors, on peut démontrer l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, \tau))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{22}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, \tau))^2 + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} + \frac{\tilde{B}_{21}^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} \right) R_1^h(x, \tau) R_2^h(x, \tau) \\ & \geq \gamma_1 \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 + \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right], \end{aligned}$$

où γ_1 a été définie dans l'énoncé du Lemme III.5.

En combinant cette dernière inégalité avec (3.17), on obtient:

$$\dot{M}(\tau) \geq - \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h}{\tilde{F}_2^h} \frac{N_2^h}{N_1^h}(x_1(\tau)) \right) (R_2^h(x_1(\tau), \tau))^2 - (R_1^h(0, \tau))^2 - \gamma_1 M(\tau).$$

Finalement, en résolvant cette inéquation différentielle on déduit l'inégalité voulue. \square

Lemme III.6 . *La solution régulière $R^h(t)$ du système (3.6)-(3.8) issue de la condition initiale $\phi \in D_\infty$ vérifie l'inégalité suivante:*

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \\ & \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^l e^{\gamma_2 z} \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) \left[(R_1^h(z, x_2^{-1}(z)))^2 + (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 \right] dz, \end{aligned} \quad (3.18)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{1}{\alpha^2} & \left(\|N_2\|_\infty \|B_{21}\|_\infty + \|N_1\|_\infty \|B_{12}\|_\infty \right. \\ & \left. + 2 \max\{\|N_1\|_\infty \|B_{11}\|_\infty, \|N_2\|_\infty \|B_{22}\|_\infty\} \right). \end{aligned}$$

Preuve du Lemme III.6. La soustraction membre à membre de (3.13) et (3.14) nous donne:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{N_1^h(x)}{\tilde{F}_1^h(x)} (R_1^h(x, t))^2 - \frac{N_2^h(x)}{\tilde{F}_2^h(x)} (R_2^h(x, t))^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[(R_1^h(x, t))^2 + (R_2^h(x, t))^2 \right] \\ & = -2 \frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 + 2 \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 + 2 \left(\frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h} - \frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

De façon analogue à la preuve du lemme précédent, on intègre l'équation (3.19) sur le domaine $\Delta(CDE)$ (voir fig. III.2) et ensuite on applique la formule de Green. On déduit après un calcul direct que:

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^z \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (x) \left[(R_1^h(x, x_2^{-1}(x)))^2 + (R_2^h(x, x_1^{-1}(x)))^2 \right] dx \\ &= 2 \iint_{\Delta(CDE)} \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) (R_2^h(x, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) (R_1^h(x, t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h}(x) - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h}(x) \right) R_1^h(x, t) R_2^h(x, t) \right] dt dx \end{aligned}$$

avec

$$G(z) = \int_{x_1^{-1}(z)}^{x_2^{-1}(z)} \left[(R_1^h(z, t))^2 + (R_2^h(z, t))^2 \right] dt.$$

Ce qui entraîne après dérivation par rapport à z :

$$\begin{aligned} \dot{G}(z) &= \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) \left[(R_1^h(z, x_2^{-1}(z)))^2 + (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 \right] dx \\ &= 2 \int_{x_1^{-1}(z)}^{x_2^{-1}(z)} \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) (R_2^h(z, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) (R_1^h(z, t))^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) \right) R_1^h(z, t) R_2^h(z, t) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Compte tenu du Lemme III.2 1), on a l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} &2 \left[\frac{\tilde{B}_{22}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) (R_2^h(z, t))^2 - \frac{\tilde{B}_{11}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) (R_1^h(z, t))^2 + \left(\frac{\tilde{B}_{21}^h}{\tilde{F}_2^h}(z) - \frac{\tilde{B}_{12}^h}{\tilde{F}_1^h}(z) \right) R_1^h(z, t) R_2^h(z, t) \right] \\ &\geq -\gamma_2 \left[(R_1^h(z, t))^2 + (R_2^h(z, t))^2 \right], \end{aligned}$$

où γ_2 a été introduit dans l'énoncé du Lemme III.6

Enfin, en reportant l'inégalité ci-dessus dans (3.20) et en résolvant l'inéquation différentielle obtenue, on aboutit à l'inégalité (3.18). \square

Avant d'énoncer notre premier résultat principal, récrivons l'inégalité (3.18). Tout d'abord, il est clair que (3.18) entraîne que:

$$\int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^l \left(\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h} + \frac{\tilde{N}_2^h}{\tilde{F}_2^h} \right) (z) (R_2^h(z, x_1^{-1}(z)))^2 dz.$$

Ce qui implique grâce au changement de variables $t = x_1^{-1}(z)$ que

$$\int_0^{t_2} (R_2^h(l, t))^2 dt \geq e^{-\gamma_2 l} \int_0^{t_1} \left(1 + \frac{\tilde{F}_1^h}{\tilde{F}_2^h} \frac{N_2^h}{N_1^h}(x_1(t)) \right) (R_2^h(x_1(t), t))^2 dt. \quad (3.21)$$

Le premier résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant:

Théorème III.1 . Soit $T_0 = \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}$. Pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, on a:

- 1) Le système (3.6)-(3.8) est T_0 -observable.
- 2) Le système (3.6)-(3.8) est exponentiellement stable.

Preuve du Théorème III.1. Par un argument standard de continuité et de densité de D_∞ dans \mathcal{H} , il suffit de démontrer le théorème pour tout $\phi \in D_\infty$. Soit $\phi \in D_\infty$ et soit $R^h(t)$ la solution du système (3.6)-(3.8) issue de ϕ . En combinant les inégalités (3.12) et (3.21) et en utilisant le fait que $t_1 \leq t_2 \leq T_0 = \max \left\{ \frac{l}{\alpha^2} \|N_1\|_\infty, \frac{l}{\alpha^2} \|N_2\|_\infty \right\}$, il en découle

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[\frac{N_1^h}{\tilde{F}_1^h}(x) \phi_1^2(x) + \frac{N_2^h}{\tilde{F}_2^h}(x) \phi_2^2(x) \right] dx &\leq e^{\gamma_1 T_0} \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + e^{\gamma_2 l} (R_2^h(l, t))^2 \right] dt \\ &\leq e^{\gamma_1 T_0 + \gamma_2 l} \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + (R_2^h(l, t))^2 \right] dt \end{aligned}$$

Ce qui implique d'après le Lemme III.2 que:

$$\|\phi\|_h^2 = \int_0^l \left[N_1^h \phi_1^2(x) + N_2^h \phi_2^2(x) \right] dx \leq C \int_0^{T_0} \left[(R_1^h(0, t))^2 + (R_2^h(l, t))^2 \right] dt, \quad (3.22)$$

où C est une constante positive **indépendante** du paramètre h telle que:

$$C = \frac{e^{\gamma_1 T_0 + \gamma_2 l}}{\min \left\{ \frac{1}{\|F_1\|_\infty \|N_1\|_\infty}, \frac{1}{\|F_2\|_\infty \|N_2\|_\infty} \right\}}.$$

Le système (3.6)-(3.8) est donc T_0 -observable.

Il est important de remarquer que l'hypothèse H.I implique que $\|F_i\|_\infty \|N_i\|_\infty \geq \alpha^2$, $i = 1, 2$. Dès lors, $C > \alpha^2$.

La preuve de l'assertion 2) est essentiellement basée sur l'inégalité d'observabilité (3.22). On rappelle d'abord qu'en vertu du Lemme III.4, on a pour tout $t > 0$,

$$\frac{d}{dt} \|R^h(t)\|_h^2 = 2 \langle A_h R^h(t), R^h(t) \rangle_h \leq -\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0, t))^2 - \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l, t))^2.$$

Par conséquent,

$$\|R^h(t)\|_h^2 - \|\phi\|_h^2 \leq -\int_0^t \left[\tilde{F}_1^h(0) (R_1^h(0, \tau))^2 + \tilde{F}_2^h(l) (R_2^h(l, \tau))^2 \right] d\tau,$$

ou encore grâce au Lemme III.2

$$\|R^h(t)\|_h^2 - \|\phi\|_h^2 \leq -\alpha^2 \int_0^t \left[(R_1^h(0, \tau))^2 + (R_2^h(l, \tau))^2 \right] d\tau.$$

La combinaison de cette inégalité avec la deuxième inégalité de (3.22) donne le résultat suivant:

$$\|R^h(T_0)\|_h^2 \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{C}\right) \|\phi\|_h^2.$$

Enfin, en utilisant le fait que $C > \alpha^2$ et la contraction du semi-groupe $U_{F_h, B_h}(t)$, on déduit que pour tout $t \geq T_0$,

$$\|R^h(t)\|_h \leq M e^{-\omega t} \|\phi\|_h,$$

avec M et ω sont deux constantes positives **indépendantes** du paramètre h telles que:

$$M = \left(1 - \frac{\alpha^2}{C}\right)^{-1/2} > 0 \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{\ln\left(1 - \frac{\alpha^2}{C}\right)}{2T_0} > 0.$$

□

III.3.4 Stabilité du système initial (3.1)-(3.3)

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la stabilité exponentielle du système (3.1)-(3.3).

Dans ce qui suit, on notera par

$$S_{a,b}^{\infty}(0, l) = \{f \in L^{\infty}(0, l); a \leq f(x) \leq b \text{ p.p}\}$$

et

$$C^{\infty} \cap S_{a,b}^{\infty}(0, l) = \{f \in S_{a,b}^{\infty}(0, l); f \text{ est continûment différentiable}\}.$$

On va maintenant énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme III.7 . [11] 1) Toute partie bornée de $L^{\infty}(0, l)$ est précompacte pour la topologie faible *. En particulier, $S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ est précompacte pour la topologie faible *. 2) L'ensemble $C^{\infty} \cap S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ est dense dans $S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ pour la topologie faible *.

Pour une raison de clarté, on notera $E = (E_1, E_2) \in L^{\infty}(0, l) \times L^{\infty}(0, l)$ et on écrira $E \in S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ au lieu de $E \in S_{a,b}^{\infty}(0, l) \times S_{a,b}^{\infty}(0, l)$.

Proposition III.2 . Soit $T > 0$. Etant donnés N et F dans $S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ vérifiant H.II et H.III, il existe un C_0 -semi-groupe de contractions $W_F(t)$ dans \mathcal{H} engendré par l'opérateur $F \frac{\partial}{\partial x}$. De plus, pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, l'application $F \rightarrow W_F(\cdot)\phi$ est continue pour la topologie faible * de $S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ et pour la topologie forte de $C((0, T); \mathcal{H})$.

Preuve de la Proposition III.2. Soit N et F dans $S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ vérifiant H.II et H.III. Il découle du Lemme III.7 l'existence de suites de fonctions $L^n, N^n \in C^{\infty} \cap S_{a,b}^{\infty}(0, l)$ telles que pour tout $i = 1, 2$, $L_i^n \xrightarrow{*} F_i$ dans $L^{\infty}(a, b)$ pour $n \rightarrow +\infty$. En d'autres termes

$$F_i^n = \tilde{F}_i^n / N_i^n \xrightarrow{*} F_i \text{ dans } L^{\infty}(a, b) \text{ pour } n \rightarrow +\infty,$$

où $\tilde{F}_i^n = N_i^n L_i^n$.

Compte tenu du lemme III.3, il existe un C_0 semi-groupe de contractions $W_{F^n}(t)$, sur \mathcal{H} , engendré par l'opérateur $F^n \frac{\partial}{\partial x}$. Prenons maintenant $\phi \in D_{\infty}$. En s'inspirant des techniques de calcul utilisées par Xu [74], on peut montrer que la suite $W_{F^n}(\cdot)\phi$ est une suite de Cauchy dans $C((0, T); \mathcal{H})$, i.e, pour tout $\phi \in D_{\infty}$,

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sup_{t \in (0,T)} \|W_{F^n}(t)\phi - W_{F^m}(t)\phi\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Comme D_∞ est dense dans \mathcal{H} , on déduit alors que $W_{F^n}(t)$ converge fortement dans \mathcal{H} uniformément sur $(0, T)$ vers $W_F(t)$. La suite de la preuve de notre proposition est identique à celle de Xu [74]. \square

Remarque III.2 . Pour tout $F, B, N \in S_{a,b}^\infty(0, l)$ vérifiant H.I-H.III, on peut définir un C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F,B}(t)$ dans \mathcal{H} engendré par l'opérateur $F \frac{\partial}{\partial x} + B$ tel que

$$U_{F,B}(t)\phi = W_F(t)\phi + \int_0^t W_F(t-\tau)BU_{F,B}(\tau)\phi d\tau.$$

De plus, on peut construire à partir de F, B et N les fonctions F_h, B_h et N_h vérifiant le Lemme III.2, à lesquelles on associe le semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ (voir Proposition III.1).

Vu cette remarque, on a le résultat suivant

Lemme III.8 . Soit $T > 0$. Pour tout $\phi \in \mathcal{H}$, le C_0 -semi-groupe de contractions $U_{F_h, B_h}(t)$ converge fortement vers $U_{F,B}(t)$ dans $C((0, T); \mathcal{H})$.

Preuve du Lemme III.8. Soit $0 \leq t \leq T$ et $\phi \in D_\infty$. On sait que

$$\begin{cases} U_{F_h, B_h}(t)\phi = W_{F_h}(t)\phi + \int_0^t W_{F_h}(t-s)B_h U_{F_h, B_h}(s)\phi ds, \\ U_{F,B}(t)\phi = W_F(t)\phi + \int_0^t W_F(t-s)BU_{F,B}(s)\phi ds. \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U_{F_h, B_h}(t)\phi - U_{F,B}(t)\phi &= \int_0^t W_{F_h}(t-s)B_h [U_{F_h, B_h}(s)\phi - U_{F,B}(s)\phi] ds \\ &+ \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] BU_{F,B}(s)\phi ds \\ &+ \int_0^t W_{F_h}(t-s)(B_h - B)U_{F,B}(s)\phi ds \\ &+ W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Posons $\psi_h(t) = \|U_{F_h, B_h}(t)\phi - U_{F, B}(t)\phi\|$. Ceci entraîne grâce à (3.23) et la contraction du semi-groupe $W_{F_h}(t)$ que:

$$\begin{aligned} \psi_h(t) &\leq \int_0^t \|B_h\|\psi_h(s) ds + \int_0^t \|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| ds \\ &\quad + \left\| \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] BU_{F, B}(s)\phi ds \right\| \\ &\quad + \|W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi\|. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En utilisant le lemme de Gronwall et la densité de D_∞ dans \mathcal{H} , il est clair que pour conclure le Lemme III.8 il nous suffit de montrer que les trois derniers termes de (3.24) tendent vers zéro quand $h \rightarrow 0^+$.

- Convergence de $\int_0^t \|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| ds$:

Comme $\|\tilde{B}_{ij}^h/N_i^h - \hat{B}_{ij}\|_{L^p(a,b)} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$, $i, j = 1, 2$ (voir Lemme III.2), il est facile d'établir grâce à l'inégalité de Hölder que pour tout $t > 0$, $\|(B_h - B)U_{F, B}(s)\phi\| \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$. On obtient alors en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue le résultat désiré.

- Convergence de $\left\| \int_0^t [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] BU_{F, B}(s)\phi ds \right\|$:

Soit

$$w_h(t, s) = [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] BU_{F, B}(s)\phi.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, considérons une subdivision $(t_1 = 0, t_2, \dots, t_N = T)$ de l'intervalle $[0, T]$ en $N - 1$ sous-intervalles telle que

$$i) \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} w_h(t, s) ds \right\| \leq 2(t_{i+1} - t_i) \|B\| \|\phi\| < \epsilon.$$

Par ailleurs, la fonction $U_{F, B}(t)\phi$ étant continue de $[0, T]$ dans \mathcal{H} elle y est uniformément continue. Donc

ii) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall s \in [t_k, t_{k+1}], |t_{k+1} - t_k| < \delta \implies \|U_{F,B}(s)\phi - U_{F,B}(t_k)\phi\| \leq \epsilon.$

Il découle alors des propriétés i)-ii):

$$\begin{aligned} \int_0^t w_h(t, s) ds &= \int_0^{t_k} w_h(t, s) ds + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B [U_{F,B}(s) - U_{F,B}(t_i)] \phi ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [W_{F_h}(t-s) - W_F(t-s)] B U_{F,B}(t_i) \phi ds + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} 2\epsilon(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=1}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) \chi_h + \int_{t_k}^t w_h(t, s) ds, \end{aligned}$$

avec

$$\chi_h = \sup_{[0, T]} \|[W_{F_h}(s) - W_F(s)] B U_{F,B}(t_i) \phi\|$$

est telle que $\chi_h \leq \epsilon, i = 1, 2, \dots, N$ pour h suffisamment petit. Un calcul direct montre que pour tout $\epsilon > 0,$

$$\int_0^t w_h(t, s) ds \leq \epsilon, \text{ pour } h \text{ assez petit.}$$

• Convergence de $\|W_{F_h}(t)\phi - W_F(t)\phi\|:$

C'est une conséquence directe de la Proposition III.2. □

Maintenant on peut énoncer notre deuxième résultat principal.

Théorème III.2 . *Sous les hypothèses H.I-H.III, le système (3.1)-(3.3) est exponentiellement stable dans \mathcal{H} .*

Preuve du Théorème III.2. Nous allons montrer le théorème pour tout $\phi \in D_\infty$. Soit F, B et N les matrices définies par (3.4) et qui vérifient les hypothèses H.I-H.III. Il découle du Lemme III.2 et du Théorème III.1 qu'on peut construire des matrices F_h, B_h et N_h telles que

$$\|U_{F_h, B_h}(t)\phi\|_h \leq M e^{\omega t} \|\phi\|_h,$$

pour tout $\phi \in D_\infty$.

On rappelle que M et ω sont deux constantes positives **indépendantes** du paramètre h (voir Preuve du Théorème III.1). En utilisant ensuite la Remarque III.1 et le Lemme III.8, on obtient après passage à la limite $h \rightarrow 0^+$,

$$\|U_{F, B}(t)\phi\| \leq M e^{\omega t} \|\phi\|.$$

Enfin, par un argument standard de densité, le résultat s'étend pour tout $\phi \in \mathcal{H}$. La preuve du Théorème III.2 est complète. \square

III.4 Application à l'échangeur thermique

Ce paragraphe est consacré à l'application du Théorème III.2 à notre modèle physique, l'échangeur thermique, régi par les équations (2.1)-(2.4) ou encore par les équations (2.5)-(2.6). Nous avons le résultat suivant:

Proposition III.3 . *Le système (2.5)-(2.6) est exponentiellement stable dans \mathcal{H} .*

Preuve de la Proposition III.3. Tout d'abord, il convient de rappeler les équations (2.5)-(2.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial t} = m_1 \Pi(x) \frac{\partial \eta_1(x, t)}{\partial x} - K_1 \eta_1(x, t) + \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \eta_2(x, t), \\ \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial t} = -m_2 \frac{\partial \eta_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} \eta_1(x, t) - K_2 \eta_2(x, t), \\ \eta_1(l_2, t) = \eta_1(0, t) = 0, \\ \eta_1(x, 0) = \phi_1(x), \quad \eta_2(x, 0) = \phi_2(x), \end{array} \right.$$

pour $(x, t) \in (0, l_2) \times (0, +\infty)$. De plus, m_i et K_i , $i = 1, 2$ sont des constantes positives et pour tout $\beta \in (0, 1)$,

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1; & x \in (0, l_1) \\ 1 - \beta; & x \in (l_1, l_2) \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe 2.3 (voir (2.7)-(2.8)), le système ci-dessus s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = \left(F \frac{\partial}{\partial x} + B \right) \eta(t), \\ \eta(0) = \phi, \end{cases}$$

où

$$F(x) = \begin{bmatrix} m_1 \Pi(x) & 0 \\ 0 & -m_2 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} -K_1 & \sqrt{K_1 K_2} \Pi(x) \\ \frac{\sqrt{K_1 K_2}}{\Pi(x)} & -K_2 \end{bmatrix}.$$

Il nous suffit donc d'utiliser le Théorème III.2. Pour cela, on doit vérifier que les hypothèses H.I-H.III sont satisfaites. Clairement, pour tout $i, j = 1, 2$, les coefficients F_i et B_{ij} vérifient l'hypothèse H.I. De plus, il est facile de voir que pour tout $i = 1, 2$, $F_i(x) \geq \alpha$ p.p. $x \in (0, l_2)$ avec $\alpha = \min\{(1 - \beta)m_1, m_2\} > 0$. L'hypothèse H.II est alors satisfaite. Concernant l'hypothèse H.III, nous allons définir les fonctions de pondérations N_1 et N_2 comme suit:

$$N_1(x) = \frac{\alpha}{\Pi(x)(1 - \beta)} \quad \& \quad N_2(x) = \frac{\alpha \Pi(x)}{(1 - \beta)}.$$

Vu la définition de $\Pi(x)$, il est évident que $N_i \in L^\infty(0, l_2)$ pour $i = 1, 2$. D'autre part, la matrice NB est:

$$NB(x) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{\Pi(x)(1 - \beta)} K_1 & \frac{\alpha}{1 - \beta} \sqrt{K_1 K_2} \\ \frac{\alpha}{1 - \beta} \sqrt{K_1 K_2} & -\frac{\alpha \Pi(x)}{(1 - \beta)} K_2 \end{bmatrix}.$$

Dès lors, un calcul direct montre que pour tout $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$y^\top N(x) B(x) y = -\frac{\alpha}{1 - \beta} \left(\sqrt{\frac{K_1}{\Pi(x)}} - \sqrt{K_2 \Pi(x)} \right)^2 \leq 0 \text{ p.p. } x \in (0, l_2).$$

L'hypothèse H.III est manifestement vérifiée. D'après le Théorème III.2 le système (2.5)-(2.6) est exponentiellement stable. \square

Remarque III.3 .

- *Il est intéressant de noter que le résultat de stabilité exponentielle obtenu pour un système couplé de deux échangeurs thermiques reste valable pour tout système composé d'un nombre fini d'échangeurs thermiques.*

IV

Stabilisation d'un Système Hybride: une Variante du Modèle SCOLE

Ce chapitre traite la stabilisation frontière d'un système hybride qui est une variante du modèle SCOLE. Ce dernier est composé d'une poutre flexible de longueur $L = 1$ encastrée en l'une de ses extrémités alors qu'une antenne rigide de masse m est fixée en son extrémité libre. Il existe pour ce système deux contrôles, à savoir le contrôle moment $\Theta_1(t)$ et le contrôle force $\Theta_2(t)$ appliqués à l'extrémité libre de la poutre. Notre contribution principale est de montrer que si le terme accélération de l'antenne est négligé alors le système considéré est uniformément stabilisable par feedback frontière (contrôle force et/ou moment).

Par ailleurs, en négligeant le moment d'inertie, on montre que le système est également uniformément stabilisable par un contrôle de moment simple et d'ordre usuel.

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilisation uniforme par feedback frontière d'une variante du modèle SCOLE. Ce système, introduit par les ingénieurs de la NASA pour modéliser certaines structures de l'aérospatiale, est composé d'une poutre flexible (P), encastrée en l'une de ses extrémités alors qu'une antenne rigide (A) de masse m est fixée en son extrémité libre (voir figure IV.1).

Les vibrations élastiques de la poutre sont régies par une équation aux dérivées partielles (modèle d'Euler-Bernoulli) tandis que les oscillations de l'antenne sont gouvernées par deux équations différentielles ordinaires (équations de Newton-Euler). Le système global est donc un système hybride dont la dynamique est décrite par les équations suivantes:

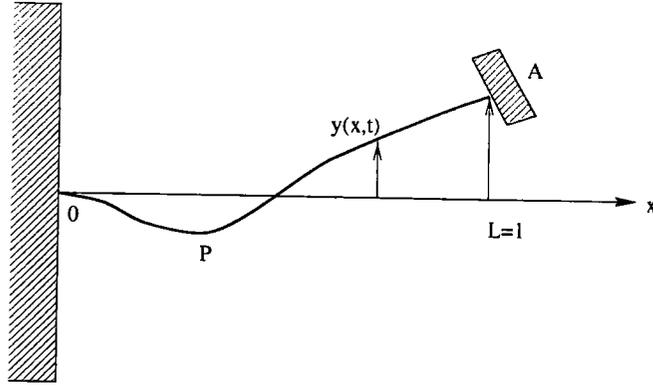


Figure IV.1. Système hybride

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + EI y_{xx}(1, t) = \Theta_1(t), \\ m y_{tt}(1, t) - EI y_{xxx}(1, t) = \Theta_2(t). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

- $y(x, t)$ représente le déplacement transversal, à l'instant t , d'un point de la poutre d'abscisse x .
- Les paramètres physiques ρ , EI et J sont des constantes réelles positives qui désignent respectivement la densité linéique de la structure flexible, la rigidité en flexion et le moment d'inertie de l'antenne.
- $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$ représentent respectivement la commande du moment et la commande de la force appliquées à l'extrémité libre de la poutre.

L'objectif de ce travail est de trouver des lois de commandes $\Theta_1(t)$ et $\Theta_2(t)$ qui stabilisent le système (1.1) dans l'un des deux cas suivants:

Premier cas: le terme accélération $m y_{tt}(1, t)$ est négligé.

Deuxième cas: On néglige le moment d'inertie J .

Dans le premier cas, le problème revient à stabiliser le système suivant:

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + EI y_{xx}(1, t) = \Theta_1(t), \\ -EI y_{xxx}(1, t) = \Theta_2(t). \end{cases} \quad (1.2)$$

On montre alors que ce type de système (1.2) est stabilisable si on applique simultanément un feedback de force et un feedback de moment. Ce premier résultat sera prouvé en utilisant le principe d'invariance de LaSalle et le théorème de Huang [35] (voir chap. 1). Notons que nous avons essayé d'utiliser la méthode du multiplicateur mais en vain. En revanche, la présence du feedback de force seul est suffisante pour garantir la stabilisation du système (1.2) mais sous une condition sur les constantes physiques ρ , EI et J . La preuve de ce deuxième résultat est essentiellement basée sur un théorème de perturbation dû à Triggiani [72]. Ces deux résultats obtenus donnent une réponse positive à la question posée par Rao [62]. Par ailleurs en utilisant un théorème de perturbation compacte [68] et en s'inspirant des techniques de calcul de Rao (voir [60] ou [62]), on démontre que le système (1.2) n'est pas uniformément stabilisable si on applique seulement un feedback de moment. Ceci met en évidence le rôle primordial du contrôle force.

La stabilisation du système (1.1) a fait l'objet de différentes recherches. En effet, si $mJ \neq 0$, Littman et Markus ont montré le résultat suivant:

Théorème IV.1 [49] *Soient α , β , γ et δ des constantes réelles telles que:*

$$\gamma, \beta > 0; 4\alpha\beta > (\delta + \alpha)^2.$$

Alors pour

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = -\alpha u_t(1, t) + \beta u_{tx}(1, t), \\ \Theta_2(t) = \gamma u_t(1, t) - \delta u_{tx}(1, t), \end{cases}$$

le système (1.1) en boucle fermée est fortement stable. De plus, si

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = -u_{tx}(1, t) \\ \Theta_2(t) = -u_t(1, t), \end{cases}$$

le système (1.1) n'est pas uniformément stable.

La méthode développée dans [49] est basée sur l'analyse du spectre du système. Ensuite, dans le cas particulier $m = J = 1$, un résultat de stabilisation forte de (1.1) a été obtenu par Slemrod [70] avec $\Theta_1(t)$ un contrôle de moment à priori borné et $\Theta_2(t) = 0$.

Plus tard, en se basant sur un théorème de perturbation compacte de Russell [68], B. Rao [60] a prouvé le théorème suivant:

Théorème IV.2 [60]

Si

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = -\delta_{11}u(1, t) - \delta_{12}u_x(1, t) - \nu_{11}u_t(1, t) - \nu_{12}u_{xt}(1, t) \\ \Theta_2(t) = -\delta_{21}u(1, t) - \delta_{22}u_x(1, t) - \nu_{21}u_t(1, t) - \nu_{22}u_{xt}(1, t), \end{cases}$$

avec $\delta_{ij}, \nu_{ij}, i, j = 1, 2$ des constantes réelles alors le système (1.1) en boucle fermée n'est pas uniformément stable.

Ce résultat généralise celui de Littman et Markus [49] dans la mesure où leur feedback peut être obtenu en prenant dans le théorème ci-dessus $\nu_{12} = \nu_{21} = 1$ et $\delta_{ij} = \nu_{ii} = 0$, pour $i, j = 1, 2$. De plus, l'avantage de la méthode utilisée dans [60] est qu'elle s'applique à des problèmes de dimension d'espace supérieure à un (voir par exemple [62]).

En revanche, la stabilisation uniforme de (1.1) est assurée si le feedback est d'ordre supérieur [60]. Plus exactement, Rao a montré par la méthode du multiplicateur que:

Théorème IV.3 [60] (Stabilisation uniforme par feedback d'ordre supérieur)

Pour

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = -u_{xxt}(1, t) \\ \Theta_2(t) = u_{xxx}(1, t), \end{cases}$$

le système (1.1) est uniformément stable.

Dans [61], Rao a amélioré le résultat de stabilisation forte de Slemrod [70] dans le sens où le résultat reste valable pour une poutre de longueur $L < 3$. De plus, Rao a établi que le système (1.1) est fortement stabilisable par un contrôle de force à priori borné, i.e, $\Theta_1(t) = 0$ et $\Theta_2(t)$ un contrôle à priori borné.

Concernant le deuxième cas $J = 0$, le système hybride s'écrit:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} + EI u_{xxxx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ EI u_{xx}(1, t) = \Theta_1(t), & t > 0, \\ mu_{tt}(1, t) - EI u_{xxx}(1, t) = \Theta_2(t), & t > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Récemment, F. Conrad et O. Morgül dans [23] se sont intéressés au problème de stabilisation du système (1.3) par le seul feedback de force appliqué sur l'antenne ($\Theta_1(t) = 0$). Ils ont obtenu le théorème suivant:

Théorème IV.4 [23] *Pour toute constante $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la loi de commande*

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = 0, \\ \Theta_2(t) = -\alpha u_t(1, t) + \beta u_{xxxt}(1, t), \end{cases}$$

stabilise uniformément le système (1.1) dans le cas où $J = 0$.

De plus, une estimation du taux optimal de décroissance est donnée dans le cas particulier $\alpha = \beta/m$.

On rappelle que notre objectif est d'obtenir un résultat similaire à l'aide **d'un seul feedback de moment**, i.e, $\Theta_2(t) = 0$.

On note que le résultat de Conrad et Morgül [23] a été obtenu auparavant par Rao pour un modèle simplifié d'une équation de plaque (voir [62] et [63]). Cependant la loi de commande proposée par Rao est composée de **deux** contrôles frontières usuels.

Dans ce travail, on se propose d'étudier le problème de stabilisation du système (1.3), par un seul feedback du moment. En appliquant le théorème de Huang [35], nous obtenons la stabilisation uniforme du système (1.3), par une loi de commande simple. Nous n'avons pas été capables d'obtenir ce résultat par la méthode des multiplicateurs. La loi de commande proposée ici est simple et ne fait pas intervenir le contrôle de force.

Ce chapitre est organisé comme suit:

Dans la première partie, on traite le premier cas où le terme accélération $my_{tt}(1, t)$ est négligé. Au §2, on propose une loi de commande (feedback de force+feedback de moment) pour le système (1.2) puis on démontre que le système en boucle fermée est bien posé au sens des semi-groupes. Au §3, on utilise le principe d'invariance de LaSalle pour établir la stabilité asymptotique (forte) du système en boucle fermée. Ensuite, au §4 on montre la stabilité uniforme. En se basant sur ce résultat, on obtient aussi la stabilité uniforme avec seulement le feedback de force mais sous une condition sur les paramètres physiques du système. Finalement, au §5 on prouve que le système hybride n'est pas uniformément stable si on applique un feedback de moment. Enfin, au §6, on termine par une étude asymptotique de la partie réelle du spectre de l'opérateur contrôlé et par présenter une brève étude numérique.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse au deuxième cas $J = 0$. En effet, au §7, on donne les équations du nouveau système puis on détermine une loi de commande pour

laquelle le problème est bien posé au sens des semi-groupes de contractions. Ensuite, au (§8) on obtient la stabilité forte du système. La preuve de ce résultat est basée sur le principe d'invariance de LaSalle et un résultat d'unicité établi par Rao [61]. Au (§9), on donne une étude spectrale de l'opérateur contrôlé et non contrôlé.

Première partie.

Etude du système (1.2): terme accélération négligé

IV.2 Le premier problème est bien posé

Dans cette section, on propose une loi de commande qui rend l'énergie du système dissipative puis on montre que le système en boucle fermée est bien posé au sens des semi-groupes.

Tout d'abord, il est facile de vérifier que la stabilisation du système (1.2) revient, quitte à faire un changement des constantes physiques, à la stabilisation du système suivant:

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = \Theta_1(t), \\ -y_{xxx}(1, t) = \Theta_2(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

L'énergie de ce système est

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 (\rho y_t^2 + EI y_{xx}^2) dx + J EI y_{xt}^2(1, t) \right\}.$$

Un calcul formel de la dérivée de $E(t)$ le long des solutions de (2.1) donne après une double intégration par parties:

$$\dot{E}_t(t) = -EI \left(y_{xt}(1, t) \Theta_1(t) + y_t(1, t) \Theta_2(t) \right).$$

On choisit alors

$$\begin{cases} \Theta_1(t) = -\alpha y_{xt}(1, t); \alpha > 0, \\ \Theta_2(t) = -\beta y_t(1, t); \beta > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

de telle manière que

$$E_t(t) = -EI \left(\alpha y_{xt}^2(1, t) + \beta y_t^2(1, t) \right).$$

Dès lors, le système en boucle fermée (2.1)-(2.2) est dissipatif dans le sens où son énergie est décroissante.

Ecrivons le système en boucle fermée:

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = -\alpha y_{xt}(1, t), \\ y_{xxx}(1, t) = \beta y_t(1, t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Par la suite, on notera pour tout $n = 2, 3, \dots$,

$$H_0^n = \{f \in H^n(0, 1); f(0) = f_x(0) = 0\}.$$

On considère alors l'espace de phase suivant

$$\mathcal{H} = H_0^2 \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R},$$

muni du produit scalaire

$$\langle (f, g, \xi), (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\xi}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 \left(\rho g(x) \tilde{g}(x) + EI f_{xx} \tilde{f}_{xx} \right) dx + J EI \xi \tilde{\xi}. \quad (2.4)$$

Un calcul direct montre que la norme induite par le produit scalaire (2.4) est équivalente à la norme usuelle de l'espace $H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R}$. Par conséquent, l'espace de phase \mathcal{H} est un espace de Hilbert.

En posant $u(t) = (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t), y_{xt}(1, t))$, le système (2.3) s'écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$\dot{u}(t) = Au(t),$$

où A est l'opérateur linéaire non borné défini par:

$$\mathcal{D}(A) = \{(y, z, \xi) \in H_0^4 \times H_0^2 \times \mathbb{R}; -y_{xxx}(1) + \beta z(1) = 0, \xi = z_x(1)\}, \quad (2.5)$$

et pour tout $(y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A)$,

$$A(y, z, \xi) = \left(z, -\frac{EI}{\rho} y_{xxxx}, -\frac{1}{J} (y_{xx}(1) + \alpha \xi) \right). \quad (2.6)$$

On a le lemme suivant:

Lemme IV.1 . *L'opérateur A défini par (2.5)-(2.6) est m -dissipatif.*

Preuve du Lemme IV.1. Soit $u = (y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A)$. Il découle après un simple calcul

$$\langle Au, u \rangle = -EI (\alpha \xi^2 + \beta z^2(1)) \leq 0.$$

L'opérateur A est donc dissipatif.

Il s'agit maintenant d'établir la maximalité de A , i.e, $\text{Im}(I - A) = \mathcal{H}$. Pour cela, soit $(f, g, \gamma) \in \mathcal{H}$. Le problème consiste alors à trouver $(y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A)$ telle que

$$(I - A)(y, z, \xi) = (f, g, \gamma),$$

qui s'écrit

$$\begin{cases} y - z = f, \\ z + \frac{EI}{\rho} y_{xxxx} = g, \\ \frac{1}{J} y_{xx}(1) + \left(\frac{\alpha}{J} + 1 \right) \xi = \gamma, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{cases} \beta z(1) - y_{xxx}(1) = 0, \\ \xi = z_x(1), \\ (y, z) \in H_0^4 \times H_0^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

En éliminant z dans la première équation de (2.7), on déduit que

$$\begin{cases} \rho y + EI y_{xxxx} = \rho(f + g), \\ y(0) = y_x(0) = 0, \\ \beta y(1) - y_{xxx}(1) = \beta f(1), \\ \frac{1}{J} y_{xx}(1) + \left(\frac{\alpha}{J} + 1\right) y_x(1) = \gamma + \left(\frac{\alpha}{J} + 1\right) f_x(1). \end{cases} \quad (2.9)$$

Soit $\psi \in H_0^2$. Multiplions la première équation de (2.9) par ψ . Une double intégration par parties entraîne que:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (EI y_{xx} \psi_{xx} + \rho u \psi) dx + EI(\alpha + J) y_x(1) \psi_x(1) + EI \beta y(1) \psi(1) \\ &= \int_0^1 \rho(f + g) \psi dx + EI[(\alpha + J) f_x(1) + J\gamma] \psi_x(1) + EI \beta f(1) \psi(1), \quad \forall \psi \in H_0^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

qu'on peut écrire

$$a(y, \psi) = J(\psi),$$

avec

$$\begin{aligned} a : H_0^2 \times H_0^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, \psi) &\longmapsto a(y, \psi) = \int_0^1 (EI y_{xx} \psi_{xx} + \rho u \psi) dx \\ &\quad + EI(\alpha + J) y_x(1) \psi_x(1) + EI \beta y(1) \psi(1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J : H_0^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto J(\psi) = \int_0^1 \rho(f + g) \psi dx + EI[(\alpha + J) f_x(1) + J\gamma] \psi_x(1) \\ &\quad + EI \beta f(1) \psi(1). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $a(y, \psi)$ est une forme bilinéaire continue, coercive sur $H_0^2 \times H_0^2$ et que $J(\psi)$ est une forme linéaire continue sur H_0^2 . En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit l'existence d'un élément $y \in H_0^2$ solution de (2.10). Ensuite,

par un raisonnement standard souvent utilisé pour la résolution d'équations elliptiques linéaires, on montre que y vérifie (2.9). Par conséquent, le triplet $(y, y - f, y_x(1) - f_x(1))$ satisfait manifestement le système (2.7)- (2.8). D'où la maximalité de l'opérateur A . \square

Remarque IV.1 . *Du fait que A est m -dissipatif sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} , son domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans \mathcal{H} [11].*

Le lemme suivant est une conséquence directe du lemme précédent et de la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires (voir [55] et [11]).

Lemme IV.2 .

i) Pour toute donnée initiale $u_0 = (y_0, z_0, \xi_0) \in \mathcal{D}(A)$, il existe une unique solution forte $u(t) = (y, z, \xi)(t) \in \mathcal{D}(A)$ de

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.11)$$

La solution $u(t)$ est donnée par $u(t) = S(t)u_0$, où $S(t)$ est le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur A . De plus,

$$u(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)),$$

et la fonction

$$t \longmapsto \|Au(t)\|_{\mathcal{H}}$$

est décroissante.

ii) Pour toute condition initiale $u_0 = (y_0, z_0, \xi_0) \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution faible $u(t) = (y, z, \xi)(t) \in \mathcal{H}$ solution de (2.11). De plus,

$$u(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

IV.3 Stabilité asymptotique

En utilisant le principe d'invariance de LaSalle, nous allons démontrer dans ce paragraphe que le système (2.11) est asymptotiquement stable, i.e, $S(t)u_0 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $u_0 \in \mathcal{H}$.

On établit dans un premier temps le résultat suivant:

Lemme IV.3 . Soit le domaine $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe. Alors l'injection canonique $i : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ est compact.

Preuve du Lemme IV.3. Un calcul direct permet de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_{H^4(0,1)}^2 + \|z\|_{H^2(0,1)}^2 + |\xi|^2 \leq C\|(y, z, \xi)\|_{\mathcal{D}(A)}, \quad \forall (y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A). \quad (3.1)$$

Soit maintenant $\{(y^n, z^n, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathcal{D}(A)$. Compte tenu de (3.1), la suite $\{(y^n, z^n, \xi^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est également bornée dans $H^4(0,1) \times H^2(0,1) \times \mathbb{R}$. Comme l'injection $H^m(0,1) \longrightarrow H^{m-1}(0,1)$ est compacte pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ [28], on en déduit qu'il existe une sous suite $\{(y^{n_k}, z^{n_k}, \xi^{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers (y, z, ξ) dans $H^2(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R}$. Enfin, le théorème de trace nous permet de conclure que $y(0) = y_x(0) = 0$. Dès lors $(y, z, \xi) \in \mathcal{H}$. Le lemme est ainsi démontré. \square

Nous avons le théorème suivant:

Théorème IV.5 . Le semi-groupe $S(t)$ engendré par l'opérateur A est asymptotiquement stable sur \mathcal{H} .

Preuve du Théorème IV.5. Etant donné que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans \mathcal{H} et que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, il suffit de démontrer le théorème pour toute condition initiale dans $\mathcal{D}(A)$.

Soit $u_0 = (y_0, z_0, \xi_0) \in \mathcal{D}(A)$ et $u = (y, z, \xi)$ la solution de (2.11). Compte tenu du Lemme IV.2, la trajectoire des solutions $\{S(t)u_0\}_{t \geq 0}$ est un borné pour la norme du graphe et donc en vertu du Lemme IV.3 précompact dans \mathcal{H} . D'après le principe d'invariance de LaSalle (Proposition II.3), l'ensemble ω -limite $\omega(u_0)$ est un compact non vide invariant par le semi-groupe $S(t)$; de plus

$$S(t)u_0 \longrightarrow \omega(u_0) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Afin de conclure la stabilité asymptotique, il nous suffit de vérifier que $\omega(u_0)$ est réduit à $\{0\}$.

Soit $\tilde{u}_0 = (\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\xi}_0) \in \omega(u_0)$. En utilisant le Lemme IV.2, on peut affirmer que $\tilde{u}(t) = (\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\xi})(t) = S(t)\tilde{u}_0$ est solution forte du système (2.11) et que

$$\tilde{u}(t) \in \omega(\tilde{u}_0) \subset \mathcal{D}(A).$$

D'autre part, on sait que $\|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}$ est une constante et par conséquent $\frac{d}{dt}\|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ (voir [35]). Ceci implique que \tilde{y} satisfait le système suivant:

$$\begin{cases} \rho \tilde{y}_{tt} + EI \tilde{y}_{xxxx} = 0, \\ \tilde{y}(0, t) = \tilde{y}_x(0, t) = 0, \\ \tilde{y}_{xt}(1, t) = \tilde{y}_{xx}(1, t) = 0, \\ \tilde{y}_{xxx}(1, t) = \tilde{y}_t(1, t) = 0, \\ (\tilde{y}(\cdot, 0), \tilde{y}_t(\cdot, 0)) \in H_0^4 \times H_0^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ce système n'est autre que celui d'Euler-Bernoulli avec les conditions $\tilde{y}_{xt}(1, t) = \tilde{y}_t(1, t) = 0$. Dans [23], Conrad et Pierre ont montré que $\tilde{y} = 0$ est la seule solution de (3.2) et par suite $\tilde{u} = 0$. Ce qui achève la preuve du théorème. \square

Remarque IV.2 .

- Il est bien connu que compte tenu du Lemme IV.3 et du Théorème IV.5, la résolvante $\rho(A)$ contient $\{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\}$.
- En fait, Conrad et Pierre [23] ont établi que la solution triviale est l'unique solution du système (3.2) dans le cas où l'une des fonctions traces $\tilde{y}_{xt}(1, t)$ ou $\tilde{y}_t(1, t)$ est nulle.

IV.4 Stabilité uniforme

Dans cette partie, nous allons énoncer et démontrer le résultat principal de cette section, i.e, la stabilité uniforme du semi-groupe $S(t)$. Comme la preuve est basée sur le théorème de F. L. Huang [35], il convient de le rappeler.

Théorème IV.6 [35]. *Soit A un opérateur linéaire qui engendre un C_0 semi-groupe de contractions $S(t)$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq K, \quad \forall t \geq 0.$$

Alors le semi-groupe $S(t)$ est exponentiellement (uniformément) stable si et seulement si

$$i) \{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A),$$

$$ii) \sup \{ \|(i\omega - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; \omega \in \mathbb{R} \} < +\infty.$$

Notre résultat est:

Théorème IV.7 . *Le semi-groupe $S(t)$ engendré par l'opérateur A est uniformément stable sur \mathcal{H} .*

Preuve du Théorème IV.7. En tenant compte de la remarque IV.2 et la contraction du semi-groupe $S(t)$, il nous reste à montrer que la condition ii) du Théorème IV.6 est satisfaite. Cela revient à montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et $(f, g, \gamma) \in \mathcal{H}$, il existe $(y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A)$ et une constante $M > 0$ indépendante de ω telles que

$$(i\omega - A)(y, z, \xi) = (f, g, \gamma) \quad (4.1)$$

$$\|(y, z, \xi)\|_{\mathcal{H}} \leq M \|(f, g, \gamma)\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.2)$$

On supposera sans perte de généralité que $EI = \rho = 1$.

Comme la fonction $\lambda \mapsto \|(\lambda - A)^{-1}\|$ est continue pour tout $\lambda \in \rho(A)$, il suit que pour tout réel $a < b$,

$$\sup \left\{ \|(i\omega - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}; \omega \in [a, b] \right\} < +\infty.$$

Dès lors, il suffit de montrer l'estimation (4.2) pour $|\omega|$ assez grand. Dans la suite de ce chapitre on adoptera la notation suivante: $\|u\| = \|u\|_{L^2(0,1)}$ et pour des raisons de clarté, on suivra les étapes suivantes

Etape 1: Donner la solution de (4.1).

Etape 2: Estimer $\|y_{xx}\|$.

Etape 3: Estimer $\|z\| + J|\xi|$.

Etape 4: Etablir l'estimation (4.2).

Les techniques de calcul que nous utiliserons s'inspirent de celles de Chen et al. [12].

Etape 1: Solution de l'équation (4.1).

Prenons $\omega = \eta^2$ (le cas $\omega = -\eta^2$ se traite de la même manière). L'équation (4.1) s'écrit

$$\begin{cases} y_{xxxx} - \eta^4 y = i\eta^2 f + g, \\ y_{xx}(1) + (i\alpha\eta^2 - J\eta^4)y_x(1) = (iJ\eta^2 + \alpha)f_x(1) + \gamma J, \\ i\beta\eta^2 y(1) - y_{xxx}(1) = \beta f(1), \\ y(0) = y_x(0) = 0, \\ z = i\eta^2 y - f, \\ \xi = i\eta^2 y_x(1) - f_x(1). \end{cases} \quad (4.3)$$

Considérons ensuite les deux systèmes suivants:

$$\begin{cases} \hat{y}_{xxxx} - \eta^4 \hat{y} = i\eta^2 f + g, \\ \hat{y}(0) = \hat{y}_x(0) = \hat{y}_{xx}(0) = \hat{y}_{xxx}(0) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{y}_{xxxx} - \eta^4 \tilde{y} = 0, \\ \tilde{y}_{xx}(1) + \eta^2(i\alpha - J\eta^2)\tilde{y}_x(1) = l_1, \\ i\beta\eta^2 \tilde{y}(1) - \tilde{y}_{xxx}(1) = l_2, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_x(0) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

avec

$$\begin{cases} l_1 = -\eta^2(i\alpha - J\eta^2)\hat{y}_x(1) - \hat{y}_{xx}(1) + (iJ\eta^2 + \alpha)f_x(1) + \gamma J, \\ l_2 = -i\beta\eta^2 \hat{y}(1) + \hat{y}_{xxx}(1) + \beta f(1). \end{cases} \quad (4.6)$$

Il est clair que si \hat{y} et \tilde{y} sont solutions de (4.4) et (4.5) respectivement alors $y = \hat{y} + \tilde{y}$ est solution de (4.3).

D'une part, on vérifie aisément que la solution de (4.4) est

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \eta^{-3} [\text{sh}(\eta(x - \tau)) - \sin(\eta(x - \tau))] (i\eta^2 f(\tau) + g(\tau)) d\tau. \quad (4.7)$$

D'autre part, la solution générale de (4.5) est donnée par

$$\tilde{y}(x) = Ae^{\eta x} + Be^{i\eta x} + Ce^{-\eta x} + De^{-i\eta x}, \quad (4.8)$$

où A, B, C et D sont des constantes réelles telles que les conditions initiales de (4.5) soient vérifiées. Ce qui est équivalent à

$$M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

où $M = (\mathbf{m}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$ est une matrice dont les éléments sont:

$$\mathbf{m}_{11} = 1, \mathbf{m}_{12} = 1, \mathbf{m}_{13} = 1, \mathbf{m}_{14} = 1,$$

$$\mathbf{m}_{21} = 1, \mathbf{m}_{22} = i, \mathbf{m}_{23} = -1, \mathbf{m}_{24} = -i,$$

$$\mathbf{m}_{31} = (\eta^2 + i\alpha\eta^3 - J\eta^5)e^\eta, \mathbf{m}_{32} = (-\eta^2 - \alpha\eta^3 - iJ\eta^5)e^{i\eta},$$

$$\mathbf{m}_{33} = (\eta^2 - i\alpha\eta^3 + J\eta^5)e^{-\eta}, \mathbf{m}_{34} = (-\eta^2 + \alpha\eta^3 + iJ\eta^5)e^{-i\eta}, \mathbf{m}_{41} = (i\beta\eta^2 - \eta^3)e^\eta,$$

$$\mathbf{m}_{42} = i(\beta\eta^2 + \eta^3)e^{i\eta}, \mathbf{m}_{43} = (i\beta\eta^2 + \eta^3)e^{-\eta}, \mathbf{m}_{44} = i(\beta\eta^2 - \eta^3)e^{-i\eta}.$$

En calculant explicitement le déterminant de M qu'on notera $\det M$, on peut affirmer que pour η assez grand, $\det M \neq 0$ (voir (4.19) et (4.20)). Par conséquent, (4.9) implique

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = (\det M)^{-1} \operatorname{cof}(M^t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

où $\operatorname{cof}(M^t)$ désigne le cofacteur de la transposée de M . Un calcul direct montre que:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = (i+1)\eta^2(\det M)^{-1} \begin{pmatrix} \times & \times & \mu_{13} & -\mu_{14} \\ \times & \times & -\mu_{23} & -\mu_{24} \\ \times & \times & -\mu_{33} & \mu_{34} \\ \times & \times & -\mu_{43} & -\mu_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

où \times dénote des éléments non importants dans nos calculs et

$$\begin{aligned}
\mu_{13} &= (\beta + \eta)e^{i\eta} + i(\eta - \beta)e^{-i\eta} + [(i-1)\beta + (i+1)\eta]e^{-\eta}, \\
\mu_{14} &= (i + i\alpha\eta - J\eta^3)e^{i\eta} + (1 - \alpha\eta - iJ\eta^3)e^{-i\eta} + [(i+1)(1 + J\eta^3) + (1-i)\alpha\eta]e^{-\eta}, \\
\mu_{23} &= (\beta + i\eta)e^\eta + (i+1)(\eta - \beta)e^{-i\eta} + (i\beta + \eta)e^{-\eta}, \\
\mu_{24} &= (i - \alpha\eta - iJ\eta^3)e^\eta + [(i-1)(1 - \alpha\eta) + (i+1)J\eta^3]e^{-i\eta} + (-1 + i\alpha\eta - J\eta^3)e^{-\eta}, \\
\mu_{33} &= -i(\beta + \eta)e^{i\eta} + [(i-1)\beta - (i+1)\eta]e^\eta + (\beta - \eta)e^{-i\eta}, \\
\mu_{34} &= (1 + \alpha\eta + iJ\eta^3)e^{i\eta} + [(i+1)(1 - J\eta^3) + (i-1)\alpha\eta]e^\eta + (i - i\alpha\eta + J\eta^3)e^{-i\eta}, \\
\mu_{43} &= (i+1)(\beta + \eta)e^{i\eta} + (\eta - i\beta)e^\eta + (i\eta - \beta)e^{-\eta}, \\
\mu_{44} &= [(1-i)(1 + \alpha\eta) + (i+1)J\eta^3]e^{i\eta} + (1 + i\alpha\eta - J\eta^3)e^\eta - (i + \alpha\eta + iJ\eta^3)e^{-\eta}.
\end{aligned}$$

Etape 2: Estimation de $\|y_{xx}\|$.

Dans un premier temps, on montre grâce à une double intégration par parties que la solution \hat{y} donnée par (4.7) vérifie

$$\hat{y}_{xx}(x) = \frac{\eta^{-1}e^{\eta x}}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}\left(\eta^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right). \quad (4.11)$$

Du fait que $y_{xx} = \hat{y}_{xx} + \tilde{y}_{xx}$, il nous suffit maintenant d'estimer $\|\tilde{y}_{xx}\|$. Ceci revient, d'après l'étape 1, à l'estimation des constantes l_1, l_2, A, B, C et D .

Estimation de l_1 et l_2

Le même argument utilisé pour (4.11) permet d'avoir:

$$\begin{cases} \hat{y}(x) = -\frac{i}{\eta^2}f(x) + \frac{\eta^{-3}}{4} \int_0^1 e^{\eta(x-\tau)} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}\left(\eta^{-3}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right), \\ \hat{y}_x(x) = -\frac{i}{\eta^2}f_x(x) + \frac{\eta^{-2}}{4} \int_0^1 e^{\eta(x-\tau)} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}\left(\eta^{-2}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right), \\ \hat{y}_{xxx}(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 e^{\eta(x-\tau)} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|). \end{cases} \quad (4.12)$$

Ceci, avec (4.6) et (4.11), entraîne que

$$\begin{aligned}
l_1 &= -\eta^2(i\alpha - J\eta^2) \left[-\frac{i}{\eta^2} f_x(1) + \frac{\eta^{-2}}{4} \int_0^1 e^{\eta(1-\tau)} (i f_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\eta^{-2}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) \right] - \frac{\eta^{-1} e^\eta}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (i f_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad + \mathcal{O}(\eta^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) + (iJ\eta^2 + \alpha) f_x(1) + \gamma J \\
&= \gamma J + \frac{e^\eta}{4} (J\eta^2 - i\alpha - \eta^{-1}) \int_0^1 e^{-\eta\tau} (i f_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad + \mathcal{O}(\eta^2[\|f_{xx}\| + \|g\|]). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

De la même manière, on démontre que

$$l_2 = \frac{e^\eta}{4} (1 - i\beta\eta^{-1}) \int_0^1 e^{-\eta\tau} (i f_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|). \tag{4.14}$$

Estimation de $\det M$ et $(\det M)^{-1}$

Nous avons affirmé précédemment que $\det M \neq 0$ pour $|\eta|$ assez grand. En effet, en utilisant la définition de la matrice M , on a

$$\begin{aligned}
\det M &= -2\eta^4 e^{(1-i)\eta} [(i-1)J\eta^4 + \beta J\eta^3 + (i+1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta + (i-1)\beta] \\
&\quad - 2\eta^4 e^{(i-1)\eta} [(1-i)J\eta^4 + \beta J\eta^3 - (i+1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta + (1-i)\beta] \\
&\quad - 2\eta^4 e^{(i+1)\eta} [(1+i)J\eta^4 + \beta J\eta^3 + (-i+1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta - (i+1)\beta] \\
&\quad - 2\eta^4 e^{-(i+1)\eta} [-(1+i)J\eta^4 + \beta J\eta^3 + (i-1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta + (i+1)\beta] \\
&\quad + 8\eta^4 [\beta J\eta^3 + i(1-\alpha\beta)\eta]. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Factorisons la première et la troisième ligne de (4.15) par $-\eta^3 e^\eta$. On obtient

$$\begin{aligned} \det M &= -\eta^3 e^\eta \left((i+1)A^* - e^{-\eta} [2(1-i)\beta J\eta^4 + 2(\alpha\beta - 1)(i+1)\eta^2] \right) \\ &\quad - 2\eta^4 e^{(i-1)\eta} [(1-i)J\eta^4 + \beta J\eta^3 - (i+1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta + (1-i)\beta] \\ &\quad - 2\eta^4 e^{-(i+1)\eta} [-(1+i)J\eta^4 + \beta J\eta^3 + (i-1)\alpha\eta^2 - i(1+\alpha\beta)\eta + (i+1)\beta] \\ &\quad + 8\eta^4 [\beta J\eta^3 + i(1-\alpha\beta)\eta], \end{aligned} \tag{4.16}$$

avec

$$\begin{aligned} A^* &= \eta^2 \left[(J\eta^2 - i\alpha - \eta^{-1}) \mu_{13} - (1 - i\beta\eta^{-1}) \mu_{14} \right] \\ &= e^{-i\eta} [2iJ\eta^5 + \beta J(1-i)\eta^4 + 2\alpha\eta^3 - \eta^2(i+1)(1+\alpha\beta) + 2i\beta\eta] \\ &\quad + e^{i\eta} [2J\eta^5 + \beta J(1-i)\eta^4 - 2i\alpha\eta^3 - \eta^2(i+1)(1+\alpha\beta) - 2\beta\eta] \\ &\quad + e^{-\eta} [2(1-i)\beta J\eta^4 + 2(\alpha\beta - 1)(i+1)\eta^2]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Un calcul simple montre que le terme dominant de A^* est η^5 et que $|A^*| \geq \mathcal{O}(\eta^4)$. Plus précisément, on a

$$|A^*| = \mathcal{O}(\eta^5), \quad |A^*| \geq \sqrt{2}\beta J\eta^4. \tag{4.18}$$

Revenons maintenant à l'estimation de $\det M$. Tout d'abord, on remarque d'après (4.16) qu'à l'exception du terme $-\eta^3 e^\eta A^*$, tous les autres termes de $\det M$ sont bornés par $\mathcal{O}(\eta^7)$. On déduit alors la relation entre A^* et $\det M$:

$$\det M = -(i+1)\eta^3 e^\eta A^* + \mathcal{O}(\eta^7), \tag{4.19}$$

qui implique grâce à la deuxième estimation de (4.18) que

$$(\det M)^{-1} = -\frac{\eta^{-3}}{i+1} e^{-\eta} (A^*)^{-1} + \mathcal{O}(\eta^{-7} e^{-2\eta}) = \mathcal{O}(\eta^{-7} e^{-\eta}). \tag{4.20}$$

Estimation de A

Compte tenu de (4.10), (4.13) et (4.14), on a:

$$\begin{aligned}
A &= (i+1)\eta^2(\det M)^{-1}(\mu_{13}l_1 - \mu_{14}l_2) \\
&= (i+1)\eta^2(\det M)^{-1}\left\{[(J\eta^2 - i\alpha - \eta^{-1})\mu_{13} - (1 - i\beta\eta^{-1})\mu_{14}] \right. \\
&\quad \times \frac{e^\eta}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad \left. + \mu_{13}(\gamma J + \mathcal{O}(\eta^2[\|f_{xx}\| + \|g\|])) - \mu_{14}\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)\right\}.
\end{aligned}$$

Ceci implique grâce à (4.17) que:

$$\begin{aligned}
A &= (i+1)(\det M)^{-1}A^* \frac{e^\eta}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad + (i+1)\eta^2(\det M)^{-1}\left\{\mu_{13}(\gamma J + \mathcal{O}(\eta^2[\|f_{xx}\| + \|g\|])) - \mu_{14}\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)\right\}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

On sait qu'en vertu de la première estimation de (4.20):

$$\begin{aligned}
(\det M)^{-1}A^* \frac{e^\eta}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau &= -\frac{1}{4\eta^3(i+1)} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad + \frac{e^\eta}{4} A^* \mathcal{O}(\eta^{-7}e^{-2\eta}) \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

et donc d'après (4.18)

$$\begin{aligned}
(\det M)^{-1}A^* \frac{e^\eta}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau &= -\frac{1}{4\eta^3(i+1)} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\eta^{-2}e^{-\eta} \left| \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \right| \right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

D'autre part, il est facile de voir que

$$\mu_{13} = \mathcal{O}(\eta), \quad \mu_{14} = \mathcal{O}(\eta^3),$$

ce qui donne grâce à la deuxième estimation de (4.20)

$$\begin{aligned}
&(i+1)\eta^2(\det M)^{-1}\left\{\mu_{13}(\gamma J + \mathcal{O}(\eta^2[\|f_{xx}\| + \|g\|])) - \mu_{14}\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)\right\} \\
&= \gamma J \mathcal{O}(\eta^{-4}e^{-\eta}) + \mathcal{O}(\eta^{-2}e^{-\eta}[\|f_{xx}\| + \|g\|]).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Insérons (4.23) et (4.22) dans (4.21). Il en découle que

$$A = -\frac{1}{4\eta^3} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}(\eta^{-2}e^{-\eta}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-4}e^{-\eta}). \quad (4.24)$$

Estimation de B , C , et D

On rappelle que

$$B = -(i+1)\eta^2(\det M)^{-1}(\mu_{23}l_1 + \mu_{24}l_2).$$

En remplaçant μ_{23} et μ_{24} par leurs expressions respectives et en utilisant (4.13) et (4.14), il suit après regroupement des termes en $e^{2\eta}$

$$\begin{aligned} \mu_{23}l_1 + \mu_{24}l_2 &= \frac{e^{2\eta}}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau \\ &\times \{(\beta + i\eta)(J\eta^2 - i\alpha - \eta^{-1}) + (1 - i\beta\eta^{-1})(i - \alpha\eta - iJ\eta^3)\} \\ &+ \gamma J\mathcal{O}(\eta e^\eta) + \mathcal{O}(\eta^3 e^\eta[\|f_{xx}\| + \|g\|]). \end{aligned}$$

Un simple calcul montre que l'expression entre $\{ \}$ est nulle et par conséquent

$$\mu_{23}l_1 + \mu_{24}l_2 = \gamma J\mathcal{O}(\eta e^\eta) + \mathcal{O}(\eta^3 e^\eta[\|f_{xx}\| + \|g\|]). \quad (4.25)$$

En reportant cette dernière estimation dans l'expression de B et en utilisant la deuxième estimation de (4.20), on obtient:

$$B = \mathcal{O}(\eta^{-2}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-4}). \quad (4.26)$$

Un raisonnement analogue permet d'établir que

$$\begin{cases} C = \mathcal{O}(\eta^{-2}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-4}), \\ D = \mathcal{O}(\eta^{-2}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-4}). \end{cases} \quad (4.27)$$

Comme on l'a déjà mentionné, notre but est d'estimer $\|y_{xx}\|$. Or (4.8) et (4.11) impliquent

$$\begin{aligned} y_{xx} &= \hat{y}_{xx} + \tilde{y}_{xx} \\ &= \frac{\eta^{-1}e^{\eta x}}{4} \int_0^1 e^{-\eta\tau} (if_{xx}(\tau) + g(\tau)) d\tau + \mathcal{O}(\eta^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]) \\ &+ A\eta^2 e^{\eta x} - B\eta^2 e^{i\eta x} C\eta^2 e^{-\eta x} - D\eta^2 e^{-i\eta x}. \end{aligned}$$

Ceci entraîne compte tenu de (4.24), (4.26) et (4.27) que

$$\begin{aligned}
y_{xx} &= \mathcal{O}\left(\eta^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right) + \left[\mathcal{O}\left(e^{-\eta}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2}e^{-\eta})\right] e^{\eta x} \\
&+ \left[\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2})\right] e^{i\eta x} \\
&+ \left[\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2})\right] e^{-\eta x} \\
&+ \left[\mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2})\right] e^{-i\eta x}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|y_{xx}\| &\leq \left[\mathcal{O}\left(e^{-\eta}[\|f_{xx}\| + \|g\|]\right) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2}e^{-\eta})\right] \left(\int_0^1 e^{2\eta x} dx\right)^{1/2} \\
&+ \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2}) \left(\int_0^1 e^{-2\eta x} dx\right)^{1/2} \\
&+ \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + \gamma J\mathcal{O}(\eta^{-2}).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Du fait que

$$\left(\int_0^1 e^{2\eta x} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}\left(\eta^{-\frac{1}{2}}e^{\eta}\right) \text{ et } \left(\int_0^1 e^{-2\eta x} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{O}\left(\eta^{-\frac{1}{2}}\right),$$

l'estimation (4.28) devient

$$\|y_{xx}\| = \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) + J|\gamma|. \tag{4.29}$$

Etape 3: Estimation de $\|z\| + J|\xi|$.

Tout d'abord, on sait d'après (4.3) que $z = i\eta^2 y - f$ et $\xi = i\eta^2 y_x(1) - f_x(1)$. Dès lors, on a

$$\|z\| + J|\xi| \leq \eta^2 (\|y\| + J|y_x(1)|) + \|f\|.$$

Ainsi, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\eta^2 (\|y\| + J|y_x(1)|) \leq C (\|f_{xx}\| + \|g\| + J|\gamma|).$$

Comme dans le travail de Chen et al. [12], multiplions la première équation de (4.3) par \bar{y} (le conjugué de y) et intégrons entre 0 et 1. On aboutit après un calcul direct à:

$$\eta^4 (\|y\|^2 + J |y_x(1)|^2) = \|y_{xx}\|^2 + \Re \left\{ - \int_0^1 (g\bar{y} + i\eta^2 f\bar{y}) dx - \beta f(1)\bar{y}(1) - (iJ\eta^2 + \alpha) f_x(1)\bar{y}_x(1) - \gamma J\bar{y}_x(1) \right\}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \left| - \int_0^1 g\bar{y} dx \right| &\leq \frac{1}{2} (\|g\|^2 + \|y_{xx}\|^2), \\ \left| \int_0^1 i\eta^2 f\bar{y} dx \right| &\leq \frac{1}{2} (\eta^4 \|y\|^2 + \|f_{xx}\|^2), \\ |-\beta\bar{y}(1)f(1)| &\leq \frac{\beta}{2} (\|f_{xx}\|^2 + \|y_{xx}\|^2), \\ \left| -iJ\eta^2\bar{y}_x(1)f_x(1) \right| &\leq \frac{J}{2} (\eta^4 |\bar{y}_x(1)|^2 + \|f_{xx}\|^2), \\ |-\alpha\bar{y}_x(1)f_x(1)| &\leq \frac{\alpha}{2} (\|y_{xx}\|^2 + \|f_{xx}\|^2), \\ |-\gamma J\bar{y}_x(1)| &\leq \frac{J}{2} (|\gamma|^2 + \|y_{xx}\|^2). \end{aligned}$$

Par suite, la dernière égalité implique

$$\begin{aligned} \frac{\eta^4}{2} (\|y\|^2 + J |y_x(1)|^2) &\leq \frac{1}{2} (3 + J + \alpha + \beta) \|y_{xx}\|^2 + \frac{1}{2} (1 + J + \beta + \alpha) \|f_{xx}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|g\|^2 + \frac{J}{2} \gamma^2. \end{aligned}$$

Ceci, avec (4.29), donne

$$\eta^2 (\|y\| + J |y_x(1)|) \leq C (\|f_{xx}\| + \|g\| + J|\gamma|), \quad (4.30)$$

C étant une constante strictement positive.

Etape 4: Estimation de $\|(y, z, \xi)\|_{\mathcal{H}}$.

Etant donné que $\|(y, z, \xi)\|_{\mathcal{H}} = \|y_{xx}\| + \|z\| + J|\xi|$, il est clair que les estimations (4.29) et (4.30) donnent $\|(y, z, \xi)\|_{\mathcal{H}} \leq M \|(f, g, \gamma)\|_{\mathcal{H}}$. Ce qui nous permet d'obtenir l'estimation voulue (4.2). Ainsi la preuve du Théorème IV.7 est complète. \square

A présent, il est naturel de se poser la question suivante:

Si l'un des coefficients gains de (2.2) est nul, la stabilité uniforme du système ainsi

obtenu est-elle conservée ?

Dans un premier temps, nous allons considérer le système hybride dans le cas où seul le feedback force est présent dans (2.2), i.e, $\Theta_1(t) = 0$ et $\Theta_2(t) = \beta y_t(1, t)$, $\beta > 0$. Le système en boucle fermée s'écrit alors:

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = 0, \\ y_{xxx}(1, t) = \beta y_t(1, t). \end{cases} \quad (4.31)$$

On va montrer que le système ci-dessus est uniformément stable. Pour cela, on notera A_0 l'opérateur linéaire de domaine $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$ (voir (2.5)) tel que pour tout $(y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A_0)$,

$$A_0(y, z, \xi) = \left(z, -\frac{EI}{\rho} y_{xxxx}, -\frac{1}{J} y_{xx}(1) \right). \quad (4.32)$$

Autrement dit, A_0 n'est autre que l'opérateur linéaire A (voir (2.5)-(2.6)) tel que $\alpha = 0$.

Il est évident que le nouveau système (4.31) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = A_0 u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

D'après l'étude faite au §2, on peut affirmer que l'opérateur A_0 engendre un C_0 -semi-groupe de contractions noté $S_0(t)$. Notre résultat est:

Théorème IV.8 . Soit $\mu > 0$ une constante telle que

$$\mu \varphi_{xx}^2(1) \leq \int_0^1 \varphi_{xxxx}^2(x) dx, \quad (*)$$

pour tout φ dans

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi \in H_0^5; \varphi(1) = \varphi_{xxx}(1) = \varphi_{xxxx}(0) = \varphi_{xxxx}(1) = 0 \right\}.$$

On suppose que $3\mu EI J^2 > \rho$. Alors le semi-groupe $S_0(t)$ est uniformément stable.

Preuve du Théorème IV.8. Rappelons que l'opérateur A engendre un C_0 -semi-groupe de contractions $S(t)$. D'autre part, il est clair que

$$A = A_0 + B,$$

où B est un opérateur sur \mathcal{H} défini par

$$B(y, z, \xi) = \left(0, 0, -\frac{\alpha}{J}\xi\right), \quad \forall (y, z, \xi) \in \mathcal{H}. \quad (4.33)$$

En remarquant que B est un opérateur compact et en utilisant le fait que le semi-groupe $S(t)$ engendré par $A = A_0 + B$ est exponentiellement stable (voir Théorème IV.7), la stabilité uniforme de $S_0(t)$ est équivalente à la stabilité asymptotique [72]. Le problème revient donc à montrer la stabilité asymptotique du système (4.31) dans \mathcal{H} . On procède alors comme dans la preuve du Théorème IV.5 et on est amené à montrer que si $u_0 = (y_0, z_0, \xi_0) \in \mathcal{D}(A_0)$ alors pour tout $\tilde{u}_0 = (\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\xi}_0) \in \omega(u_0)$, $\tilde{u}_0 = 0$. Or, on peut montrer que la solution $\tilde{u}(t) = (\tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\xi})(t) = S_0(t)\tilde{u}_0$ vérifie

$$i) \tilde{u}(t) \in \omega(\tilde{u}_0) \subset \mathcal{D}(A),$$

$$ii) \|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \text{ est une constante pour tout } t \geq 0.$$

Par conséquent, \tilde{y} satisfait le système suivant

$$\begin{cases} \rho \tilde{y}_{tt} + EI \tilde{y}_{xxxx} = 0, \\ \tilde{y}(0, t) = \tilde{y}_x(0, t) = 0, \\ J \tilde{y}_{xtt}(1, t) + \tilde{y}_{xx}(1, t) = 0, \\ \tilde{y}_{xxx}(1, t) = \tilde{y}_t(1, t) = 0. \\ \tilde{y}(\cdot, 0) = \tilde{y}_0, \tilde{y}_t(\cdot, 0) = \tilde{z}_0, \tilde{y}_{xt}(1, 0) = \tilde{\xi}_0. \end{cases} \quad (4.34)$$

Il s'agit donc de montrer que la solution triviale est l'unique solution de (4.34). Ce résultat désiré a déjà été établi par Rao [62]. Néanmoins, pour mettre en évidence la condition $3\mu EI J^2 > \rho$, nous allons reprendre brièvement la preuve de Rao [62]. Tout d'abord, on peut prendre $\tilde{u}_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. Notre but est d'établir l'inégalité suivante:

$$\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}} dt \leq K \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}, \quad \forall T > 0,$$

avec K une constante positive. Il est alors clair que cette inégalité implique, grâce à la propriété ii) ci-dessus, que $\tilde{u} = 0$.

Multiplions la première équation de (4.34) par $x^2(x-3)$ et intégrons par rapport à x entre 0 et 1 et par rapport à t entre 0 et T . Un calcul facile permet de montrer que

$$\tilde{y}(1, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Ensuite, en multipliant (4.34) par $x\tilde{y}_{xxx}$ et en intégrant par parties, on obtient:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 (3\rho\tilde{y}_{xt}^2 + EI\tilde{y}_{xxx}^2) dx dt = \frac{\rho}{2} \int_0^T \tilde{y}_{xt}^2(1, t) dt + \rho \int_0^1 [x\tilde{y}_t\tilde{y}_{xxx}]_0^T dx. \quad (4.35)$$

Or, la condition $\tilde{y}_{xxx}(1, t) = 0$ implique

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\tilde{y}_t\tilde{y}_{xxx} dx &= \int_0^1 x\tilde{y}_t \int_1^x \tilde{y}_{\xi\xi\xi\xi} d\xi dx \\ &\leq C_2 \int_0^1 (\tilde{y}_t^2 + \tilde{y}_{xxxx}^2) dx \\ &\leq C_2 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A)}^2, \end{aligned}$$

$C_2 > 0$ étant une constante.

Reportons cette dernière inégalité dans (4.35), il suit que

$$\int_0^T \int_0^1 (3\rho\tilde{y}_{xt}^2 + EI\tilde{y}_{xxx}^2) dx dt \leq \rho \int_0^T \tilde{y}_{xt}^2(1, t) dt + C_3 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A)}^2. \quad (4.36)$$

Comme on a supposé que $\tilde{u}_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, on peut d'une part remplacer \tilde{y} par \tilde{y}_t dans (4.36). Il en découle d'après (4.34) que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (3EI\tilde{y}_{xxxxx}^2 + EI\tilde{y}_{xxxxt}^2) dx dt &\leq \rho \int_0^T \tilde{y}_{xtt}^2(1, t) dt + C_3 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2 \\ &\leq \frac{\rho}{J^2} \int_0^T \tilde{y}_{xx}^2(1, t) dt + C_3 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2. \end{aligned}$$

Et d'autre part, la solution \tilde{y} de (4.34) appartient à \mathcal{E} ; par suite \tilde{y} satisfait la condition (*) (voir Théorème IV.8). Dès lors, la dernière inégalité devient

$$\int_0^T \int_0^1 (3EI\tilde{y}_{xxxxx}^2 + EI\tilde{y}_{xxxxt}^2) dx dt \leq \frac{\rho}{J^2\mu} \int_0^T \int_0^1 \tilde{y}_{xxxxx}^2 dx dt + C_3 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2.$$

L'hypothèse $3\mu EIJ^2 > \rho$ permet alors de conclure que

$$\int_0^T \int_0^1 \tilde{y}_{xxxt}^2 dt \leq C_3 \|u_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2. \quad (4.37)$$

Par ailleurs, comme $\tilde{y} \in \mathcal{E}$

$$\begin{cases} \tilde{y}_{xt}(1, t) = \int_0^1 (1-x)x\tilde{y}_{xxxt} dx, \\ \tilde{y}_{xx}(1, t) = \int_0^1 x(2-x)x\tilde{y}_{xxx} dx. \end{cases}$$

Ceci implique grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{cases} \tilde{y}_{xt}^2(1, t) \leq C_4 \int_0^1 \tilde{y}_{xxxt}^2(x, t) dx, \\ \tilde{y}_{xx}^2(1, t) \leq C_5 \int_0^1 \tilde{y}_{xxx}^2(x, t) dx. \end{cases} \quad (4.38)$$

En combinant (4.37) et (4.38), on a

$$JEI \int_0^T \tilde{y}_{xt}^2(1, t) dt \leq C_6 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2. \quad (4.39)$$

Ainsi, on a obtenu une estimation du troisième terme de $\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}} dt$. De plus, en vertu de (4.39), l'inégalité (4.36) devient:

$$\int_0^T \int_0^1 (3\rho \tilde{y}_{xt}^2 + EI \tilde{y}_{xxx}^2) dx dt \leq C_7 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2. \quad (4.40)$$

Il est clair que

$$\int_0^1 \tilde{y}_t^2 dx \leq \int_0^1 \tilde{y}_{xt}^2 dx. \quad (4.41)$$

Par ailleurs, de l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la seconde inégalité de (4.38) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{y}_{xx}^2(x, t) dx &= \int_0^1 \left(\int_1^x \tilde{y}_{\xi\xi\xi}(\xi, t) d\xi + \tilde{y}_{\xi\xi}(1, t) \right)^2 dx \\
&\leq 2|\tilde{y}_{\xi\xi}(1, t)|^2 + 2 \int_0^1 \tilde{y}_{xxx}^2(x, t) dx \\
&\leq C_8 \int_0^1 \tilde{y}_{xxx}^2(x, t) dx.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

En rassemblant (4.39), (4.41) et (4.42) il vient que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt &= \int_0^T \left(\int_0^1 (\rho \tilde{y}_t^2 + EI \tilde{y}_{xx}^2) dx + JEI \tilde{y}_{xt}^2(1, t) \right) dt \\
&\leq C_9 \int_0^T \int_0^1 (\tilde{y}_{xt}^2 + \tilde{y}_{xxx}^2) dx dt + C_6 \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2.
\end{aligned}$$

Finalement, on conclut grâce à (4.40) que

$$\int_0^T \|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq C_{10} \|\tilde{u}_0\|_{\mathcal{D}(A^2)}^2, \quad \forall T > 0.$$

Enfin, comme $\|\tilde{u}(t)\|_{\mathcal{H}}$ est constant, on déduit après passage à la limite dans la dernière inégalité que $\tilde{y} = 0$ est l'unique solution de (4.34). Ce qui achève la preuve du Théorème IV.8. \square

Remarque IV.3 . On peut facilement voir que pour tout $y \in \mathcal{E}$ (voir Théorème IV.8), on a

$$y_{xx}(1, t) = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right) y_{xxxxx}(x, t) dx.$$

En appliquant alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}
y_{xx}^2(1, t) &\leq \frac{1}{9} \int_0^1 x^6 \left(-\frac{x}{4} + 1 \right)^2 dx \int_0^1 y_{xxxxx}^2(x, t) dx \\
&\leq \frac{11}{1134} \int_0^1 y_{xxxxx}^2(x, t) dx.
\end{aligned}$$

De ce fait, on peut choisir $\mu = \frac{1134}{11}$ dans notre Théorème IV.8.

Remarque IV.4 . On démontrera ultérieurement que si $\alpha = 0$ et si la condition $3\mu EIJ^2 > \rho$ n'est pas satisfaite alors le système (4.31) n'est pas stable (voir paragraphe 6).

Afin de compléter notre étude sur le problème de la stabilisation du système hybride (2.1), nous allons montrer dans le paragraphe suivant que ce dernier n'est pas uniformément stabilisable par le feedback de moment ($\beta = 0$ et $\alpha > 0$ dans (2.2)).

IV.5 Non stabilisation uniforme

Supposons que seul le contrôle moment est présent dans la loi de commande (2.2) ($\beta = 0$ et $\alpha > 0$). Le système en boucle fermée s'écrit:

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = -\alpha y_{xt}(1, t), \\ y_{xxx}(1, t) = 0, \\ y(\cdot, 0) = y_0, y_t(\cdot, 0) = z_0, y_t(1, 0) = \xi_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = (A_1 + B)u(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

B étant l'opérateur compact défini par (4.33) et A_1 l'opérateur linéaire défini comme suit:

$$\mathcal{D}(A_1) = \{(y, z, \xi) \in H_0^4 \times H_0^2 \times \mathbb{R}; y_{xxx}(1) = 0, \xi = z_x(1)\}, \quad (5.3)$$

et pour tout $(y, z, \xi) \in \mathcal{D}(A_1)$,

$$A_1(y, z, \xi) = \left(z, -\frac{EI}{\rho} y_{xxxx}, -\frac{1}{J} y_{xx}(1) \right), \quad (5.4)$$

On a le lemme suivant:

Lemme IV.4 . L'opérateur A_1 défini par (5.3)-(5.4) est m -dissipatif, anti-adjoint sur \mathcal{H} et par suite il engendre un groupe d'isométrie unitaire que l'on notera $S_1(t)$.

Preuve du Lemme IV.4. Il est clair que

$$\langle A_1 u, u \rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A_1), \quad (5.5)$$

et que A_1 est maximal.

Par ailleurs, on a en vertu de (5.5)

$$\langle A_1(u + v), (u + v) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A_1),$$

et donc

$$\langle A_1 u, v \rangle = - \langle u, A_1 v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A_1).$$

Ceci entraîne que l'opérateur A_1 est anti-symétrique. D'autre part, il est aisé de montrer que $\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_1^*)$ et que $A_1^* = -A_1$. Ainsi, A_1 est anti-adjoint. Le reste de la preuve du lemme découle du Théorème de Stone [55]. \square

Maintenant, on peut énoncer le théorème suivant qui met en évidence le rôle primordial du contrôle force.

Théorème IV.9 . *Le système (5.1) n'est pas uniformément stable.*

Preuve du Théorème IV.9. On s'inspire de la méthode, introduite par Rao, qui consiste à utiliser le résultat de perturbation compacte de Russell [68].

Soit $S_{A_1+B}(t)$ et $S_{A_1-B}(t)$ les groupes engendrés par $A_1 + B$ et $A_1 - B$ respectivement. Notons par $u(t) = (y, z, \xi)(t)$ la solution de (5.2) issue de la condition initiale $u_0 \in \mathcal{D}(A_1)$, i.e, $u(t) = S_{A_1+B}(t)u_0$. On définit alors $\tilde{u}(t) = (\tilde{y}(t), \tilde{z}(t), \tilde{\xi}(t))$ où

$$\tilde{y}(x, t) = y(x, -t), \quad \tilde{z}(x, t) = -z(x, -t), \quad \tilde{\xi}(t) = -\xi(t).$$

Il est facile de voir que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{u}(t) = (A_1 - B) \tilde{u}(t), \\ \tilde{u}(0) = (y(0), -z(0), -\xi(0)), \end{cases}$$

et par suite $\tilde{u}(t) = S_{A_1-B}(t) \tilde{u}(0)$. Comme B est compact, le résultat de Russell (Théorème II.15) nous permet d'affirmer qu'il n'existe pas de constantes $0 \leq \mu < 1$ et $T > 0$ telles qu'on ait simultanément

$$\|S_{A_1+B}(t)\| \leq \mu \quad \text{et} \quad \|S_{A_1-B}(-t)\| \leq \mu, \quad \forall t \geq T. \quad (5.6)$$

Or, il est clair que $\|\tilde{u}(-t)\| = \|\tilde{u}(t)\|$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et donc $\|S_{A_1+B}(t)\| = \|S_{A_1-B}(-t)\|$. On en déduit alors d'après (5.6) qu'il n'existe pas $0 \leq \mu < 1$ et $T > 0$ telles que

$$\|S_{A_1+B}(t)\| \leq \mu, \quad \forall t \geq T.$$

Le Théorème IV.9 est donc démontré. □

IV.6 Analyse asymptotique de la partie réelle du spectre

Le but de cette section est de montrer que la partie réelle du spectre de grand module de l'opérateur A tend à s'aligner le long d'une asymptote verticale.

Dans de nombreuses recherches du spectre d'un opérateur non borné (ce qui est le cas pour notre système), on rencontre des expressions du type

$$\phi(\omega) = \sum_{j=0}^{j=n} A_j(\omega) e^{c_j \omega},$$

où ω est un complexe "à déterminer", les $A_j(\omega)$ sont des polynômes complexes et les c_j des constantes complexes. Dans le travail de R. E. Langer [43], on trouve un exposé exhaustif des différents cas possibles de $\phi(\omega)$. C'est pourquoi on utilisera les résultats de Langer [43] pour établir l'asymptote de la partie réelle du spectre de grand module de notre opérateur A . Ceci nous donnera une relation explicite entre le feedback gain β et les parties réelles du spectre de grand module. Il convient alors de rappeler l'essentiel des résultats de Langer. Ceci fera l'objet du premier paragraphe. Au second paragraphe, on appliquera ces résultats à notre système. Enfin, on présente dans le dernier paragraphe quelques résultats numériques.

IV.6.1 Définitions et résultats préliminaires

Les définitions ainsi que les résultats de ce paragraphe font référence à [43]. On considère l'expression suivante:

$$\phi(\omega) = \sum_{j=0}^{j=n} A_j(\omega) e^{c_j \omega},$$

où ω , $A_j(\omega)$ et c_j sont définis auparavant. Le but est de mettre en évidence les termes dominants de $\phi(\omega)$.

Définition IV.1 [43] *Dans le plan complexe, reportons les points \bar{c}_j , $j = 0, \dots, n$. On définit ensuite le polygone P comme suit:*

- i) P est convexe.
- ii) Les sommets de P ne sont situés qu'en des points \bar{c}_j .
- iii) P contient tous les points \bar{c}_j soit sur son périmètre soit en son intérieur.

Les côtés du polygone P sont désignés par l_r , $r = 1, \dots, q$ et l'angle extérieur au côté l_r est noté ω_r . Par ailleurs, les points \bar{c}_j situés sur le côté l_r sont notés c_{rh} , $h = 1, \dots, h_r$ alors que ceux qui sont situés à l'intérieur de P sont notés c_{0h} , $h = 1, \dots, h_0$. Le théorème suivant nous renseigne sur la distribution des zéros de grand module de $\phi(\omega)$.

Théorème IV.10 [43] *Les zéros de $\phi(\omega)$ sont confinés pour $|\omega| > M$ dans un nombre fini de bandes, chacune étant de largeur asymptotiquement constante. Chaque bande est associée à une normale extérieure à un côté du polygone P et tend à y être parallèle.*

Citons une autre définition

Définition IV.2 [43] *Soit f une fonction définie sur une partie T de \mathbb{C} contenant le point $z = \infty$ à valeur dans \mathbb{C} . On dira que f est une ϵ -fonction si elle est analytique dans toute partie finie de T et elle tend uniformément vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$.*

Nous avons aussi le résultat suivant

Théorème IV.11 [43] *Soit M une constante positive assez grande. Supposons que pour tout ω dans*

$$S_1 = \{\omega \in \mathbb{C}; |z| > M \text{ et } -\pi \leq \arg(z) \leq \pi\},$$

les coefficients $A_j(\omega)$ sont de la forme

$$A_j(\omega) = \omega^{\mu_j}(a_j + \epsilon_j(\omega)),$$

où pour $j = 0, \dots, n$,

- μ_j sont des constantes réelles,

- a_j sont des constantes complexes,
- e_j sont des ϵ -fonctions dans le secteur S_1 .

Alors les zéros de $\phi(\omega)$ sont asymptotiques à ceux de $\sum_{j=0}^{j=n} a_j \omega^{\mu_j} e^{e_j \omega}$.

IV.6.2 Application

On rappelle que notre système hybride est donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = 0, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ J y_{xtt}(1, t) + y_{xx}(1, t) = -\alpha y_{xt}(1, t), \\ y_{xxx}(1, t) = \beta y_t(1, t), \end{cases}$$

avec α et β deux constantes strictement positives. De plus, on sait que ce système s'écrit sous la forme

$$\dot{u}(t) = Au(t),$$

où A est l'opérateur linéaire non borné défini par (2.5)-(2.6) et dont le spectre est discret. On a le théorème suivant:

Théorème IV.12 . Soit λ_k une valeur propre de l'opérateur A . Alors,

$$\Re \lambda_k \longrightarrow -\beta \frac{EI}{\rho}, \quad \text{quand } k \longrightarrow \infty.$$

Preuve du Théorème IV.12. Il est facile de voir que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un élément non nul $y \in H^4(0, 1)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{EI}{\rho} y_{xxxx} + \lambda^2 y = 0, \\ y(0) = y_x(0) = 0, \\ y_{xx}(1) + (\alpha \lambda + J \lambda^2) y_x(1) = 0, \\ \beta \lambda y(1) - y_{xxx}(1) = 0. \end{cases}$$

Posons $\lambda = i\omega^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$, ($\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), $\tilde{\beta} = \beta \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$, $\tilde{\alpha} = \alpha \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ et $\tilde{J} = J \frac{EI}{\rho}$. Le système ci-dessus est alors équivalent au suivant

$$\begin{cases} y_{xxxx} - \omega^4 y = 0, \\ y(0) = y_x(0) = 0, \\ y_{xx}(1) + (i\tilde{\alpha}\omega^2 - \tilde{J}\omega^4)y_x(1) = 0, \\ i\tilde{\beta}\omega^2 y(1) - y_{xxx}(1) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Le même argument utilisé pour la résolution du système (4.3) permet d'affirmer que ω est racine de

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & e^{(1-i)\omega} [(i-1)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + (i+1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega + (i-1)\tilde{\beta}] \\ & + e^{(i-1)\omega} [(1-i)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 - (i+1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega + (1-i)\tilde{\beta}] \\ & + e^{(i+1)\omega} [(1+i)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + (-i+1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega - (i+1)\tilde{\beta}] \\ & + e^{-(i+1)\omega} [-(1+i)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + (i-1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega + (i+1)\tilde{\beta}] \\ & - 4[\tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + i(1 - \tilde{\alpha}\tilde{\beta})]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Il est aisé de voir que si ω est racine de $\phi(\omega)$ alors il est de même pour $-\omega$ et $i\bar{\omega}$. Par conséquent, l'ensemble des racines de $\phi(\omega)$ admet les deux bissectrices du plan complexe comme axe de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Il suffit alors de chercher les racines dans un secteur d'angle $\pi/2$ du plan complexe et on déduira par symétrie les racines situées en dehors de ce secteur. D'autre part, il découle de (6.2) que le polygone P est un carré centré en O et dont les côtés l_r sont parallèles aux axes. De plus, les angles ω_r valent $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (voir figure IV.2). D'après le Théorème IV.10, les racines de grand module de (6.2) vont être confinées dans des bandes centrées sur les axes.

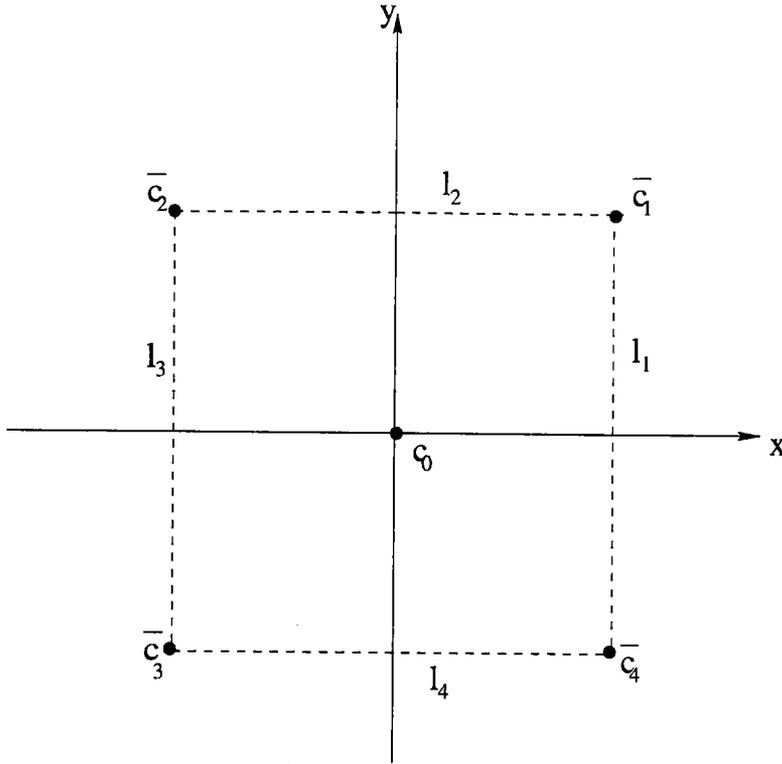
En vertu des propriétés de symétrie citées précédemment, il nous suffit de chercher les zéros de (6.2) dans une seule bande. Soit alors la bande

$$S_1 = \{z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}; |z| \text{ assez grand et } \epsilon \leq \theta < \pi/2 + \epsilon\}.$$

Dans la suite du paragraphe, on supposera que $\omega \in S_1$. Un calcul direct montre que

$$\phi(\omega) = A_1(\omega)e^{(1-i)\omega} + A_2(\omega)e^{-(1+i)\omega} + e^{(1-i)\omega}\epsilon(\omega), \quad (6.3)$$

avec

Figure IV.2. Polygone P .

$$A_1(\omega) = (i - 1)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + (i + 1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega + (i - 1)\tilde{\beta},$$

$$A_2(\omega) = -(1 + i)\tilde{J}\omega^4 + \tilde{\beta}\tilde{J}\omega^3 + (i - 1)\tilde{\alpha}\omega^2 - i(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta})\omega + (i + 1)\tilde{\beta},$$

et $\epsilon(\omega)$ une ϵ -fonction dans le secteur S_1 .

Or, le terme dominant dans A_j , $j = 1, 2$ est ω^4 et par suite on peut écrire que

$$A_1(\omega) = \omega^4 [(i - 1)\tilde{J} + \epsilon_1(\omega)],$$

$$A_2(\omega) = \omega^4 [-(1 + i)\tilde{J} + \epsilon_2(\omega)],$$

où $\epsilon_j(\omega)$ est une ϵ -fonction dans le secteur S_1 pour $j = 1, 2$.

On déduit alors du Théorème IV.11 que dans le secteur S_1 , les zéros de $\phi(\omega)$ (voir (6.3)) sont asymptotiques à ceux de

$$\hat{\phi}(\omega) = (i-1)\tilde{J}\omega^4 e^\omega - (i+1)\tilde{J}\omega^4 e^{-\omega}.$$

Ces racines sont données par

$$\omega_k = i\pi \left(\frac{3}{4} + k \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ceci suggère de chercher un développement de ω_k sous la forme suivante

$$\omega_k = i\pi \left(\frac{3}{4} + k \right) + \frac{z_1}{k} + \frac{z_2}{k^2} + \frac{z_3}{k^3} + \frac{z_4}{k^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^5}\right), \quad (6.4)$$

où z_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sont des constantes complexes qu'on déterminera ultérieurement.

Par ailleurs, vu (6.3), les zéros de $\phi(\omega)$ sont ceux de

$$\tilde{\phi}(\omega) = A_1(\omega)e^\omega + A_2(\omega)e^{-\omega} + e^\omega \epsilon(\omega).$$

Le problème revient donc à établir un développement de $\tilde{\phi}(\omega)$ pour ω donné par (6.4). A présent, il suffit d'insérer (6.4) dans l'expression de $\tilde{\phi}(\omega)$. On obtient après un calcul

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\omega) &= (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 2i\tilde{J}\pi^3(\tilde{\beta} - 2\pi z_1)k^3 + \tilde{J}\pi^3 \left[2(\tilde{\beta} - 6i\pi)z_1 - 4i\pi z_2 + \frac{9}{2}i\tilde{\beta} \right] k^2 \right. \\ &+ k \left[(-6\tilde{\beta}\tilde{J} + 4\tilde{\alpha} - 16\pi + i\tilde{\beta}\tilde{J}\pi z_1)\pi^2 z_1 + 2(\tilde{\beta} - 6i\pi)\tilde{J}\pi^3 z_2 - 4i\tilde{J}\pi^4 z_3 \right. \\ &\left. \left. - \frac{9}{8}i\tilde{\beta}\tilde{J}\pi^3 - \frac{27}{2}i\tilde{J}\pi^4 - 2\pi(1 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}) \right] + Z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right\} + e^\omega \epsilon(\omega), \quad (6.5) \end{aligned}$$

avec Z un complexe dépendant de z_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Finalement, pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, on choisit le complexe z_i de manière à annuler le coefficient de k^{4-i} . Ensuite, on remplace la valeur trouvée de z_i dans (6.4). On obtient

$$\omega_k = i\pi \left(\frac{3}{4} + k \right) + \frac{\tilde{\beta}}{2\pi k} + \frac{\tilde{\beta}}{4i\pi} \left(\frac{\tilde{\beta}}{\pi} - \frac{3i}{2} \right) \frac{1}{k^2} + \dots$$

Enfin, comme $\lambda_k = i\omega_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$, il en découle que $\Re \lambda_k \rightarrow -\beta \frac{EI}{\rho}$ pour $k \rightarrow \infty$. Ceci termine la preuve du Théorème IV.12. \square

IV.6.3 Résultats numériques

Nous allons donner dans ce paragraphe quelques résultats numériques concernant le spectre de l'opérateur A .

Tout d'abord, on sait que $\lambda_k = i\omega_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ est une valeur propre de l'opérateur A si et seulement si le complexe ω_k vérifie l'équation $\phi(\omega) = 0$ (voir (6.2)).

Soit $\omega_k = x_k + iy_k$ où x_k et y_k sont deux réels non simultanément nuls. Dès lors, la condition $\phi(\omega) = 0$ devient

$$R(x_k, y_k) + iI(x_k, y_k) = 0,$$

avec R and I deux fonctions réelles qui dépendent des variables x_k et y_k . De ce fait, le complexe λ_k défini ci-dessus est une valeur propre si et seulement si $R(x_k, y_k) = I(x_k, y_k) = 0$ pour tout $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$). En utilisant le logiciel MAPLE V, on peut trouver les points d'intersections (x_k, y_k) des graphes des fonctions $R(x_k, y_k) = 0$ et $I(x_k, y_k) = 0$. Ensuite, on obtient les valeurs propres λ_k en utilisant la relation

$$\lambda_k = i\omega_k^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \left(-2x_k y_k + i(x_k^2 - y_k^2) \right).$$

Les résultats numériques qu'on obtient sont regroupés selon trois cas.

Cas 1: $\alpha > 0, \beta > 0$.

On constate que dans ce cas la partie réelle du spectre s'approche de l'axe vertical $-\beta \frac{EI}{\rho}$ (voir fig. IV.3, fig.IV.5,...fig.IV.10). Ceci confirme le résultat théorique établi dans le Théorème IV.12.

Dans la première série de calcul (fig. IV.3,...fig.IV.7), on fixe les valeurs $\alpha = J = 1$, $EI = 9$ et $\rho = 4$ puis on fait varier β . On constate que plus on augmente la valeur de β , pour β supérieur à 1, plus le spectre se déplace vers la gauche. Cependant, plus la valeur de β diminue, pour β inférieur à 1, plus le spectre se déplace vers la droite.

Dans la deuxième série de calcul (fig. IV.3, fig.IV.8, fig.IV.9, fig.IV.10), on fixe les valeurs $\beta = J = 1$, $EI = 9$ et $\rho = 4$ puis on fait varier α . On remarque que le spectre est "stable" quand α varie. L'influence de β est donc numériquement dominante ce qui est normal puisqu'on a démontré dans le Théorème IV.9 que pour $\beta = 0$ le système n'est pas uniformément stable.

Cas 2: $\alpha = 0$, $\beta > 0$ et $3\mu EI J^2 > \rho$.

On obtient une famille de spectre dont la partie réelle est négative. De plus, $-\beta \frac{EI}{\rho}$ est aussi une asymptote verticale de la partie réelle du spectre (voir fig. IV.11, fig.IV.12, fig.IV.13). Ce résultat numérique illustre donc le Théorème IV.8.

Cas 3: $\alpha = 0$, $\beta > 0$ et $3\mu EI J^2 < \rho$.

Dans la fig. IV.14 et fig. IV.15, on constate qu'il existe une valeur propre sur l'axe imaginaire. Ceci nous amène à croire que le système n'est pas stable. En effet, pour

$$J = \frac{\text{sh}\pi}{(1 + \text{ch}\pi)\pi^3}, \quad EI = \rho = \beta = 1, \quad \alpha = 0,$$

on trouve après un calcul soigné qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ solution de l'équation spectrale $\phi(\omega) = 0$ (voir (6.2)). Par conséquent, $\lambda = i\omega^2$ est une valeur propre du système. On conclut alors que le système n'est pas stable et que la condition sur les paramètres physiques est incontournable.

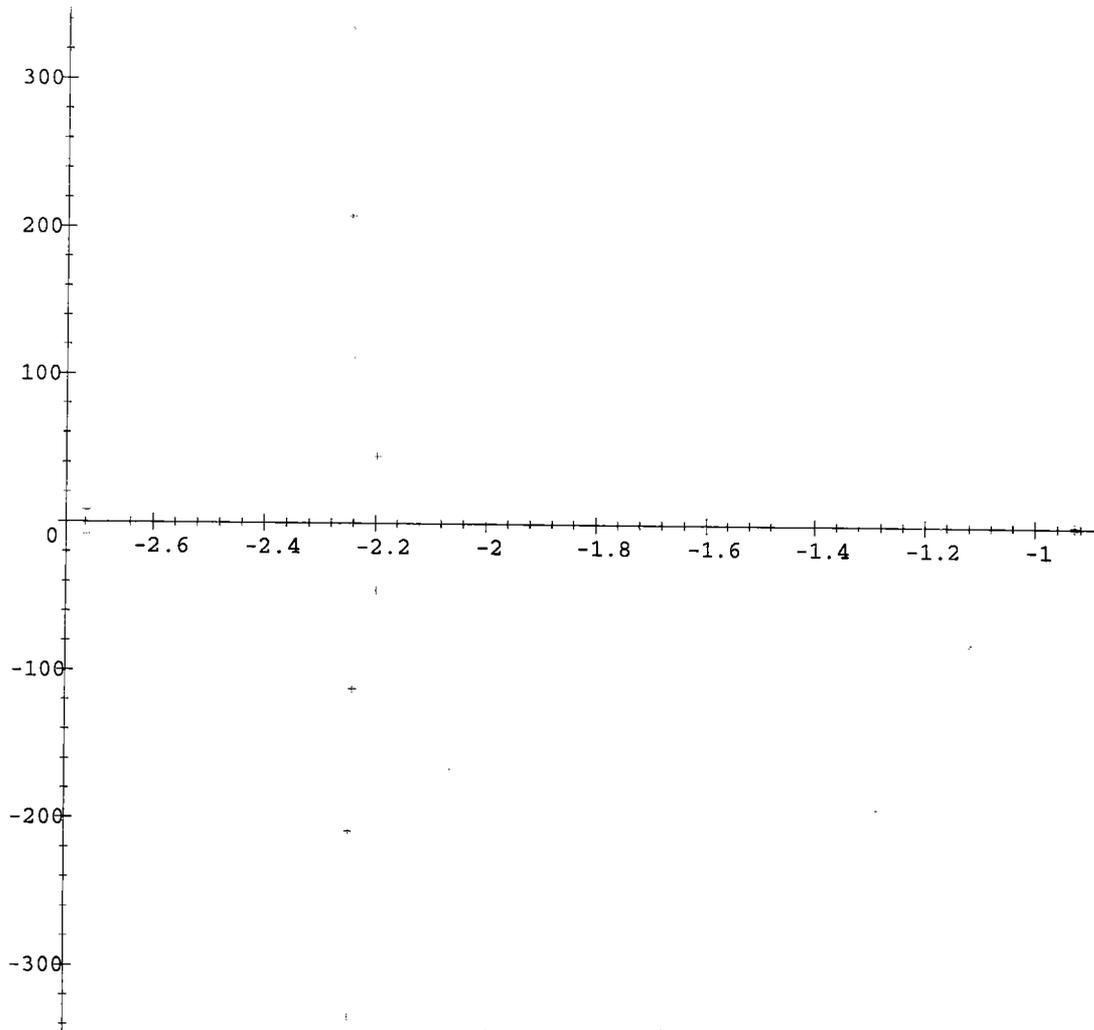


Figure IV.3. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $EI = 9$, $\rho = 4$

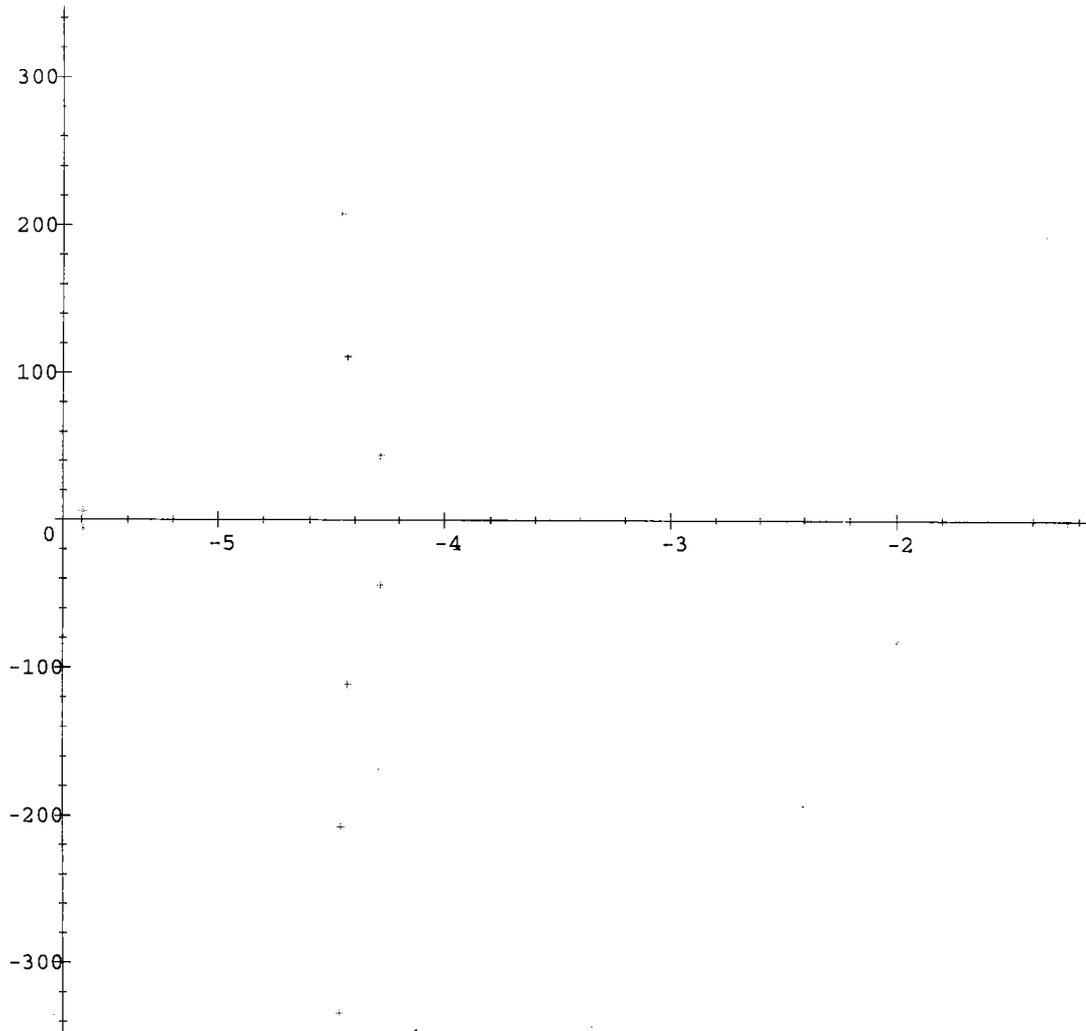


Figure IV.4. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $EI = 9$, $\rho = 4$

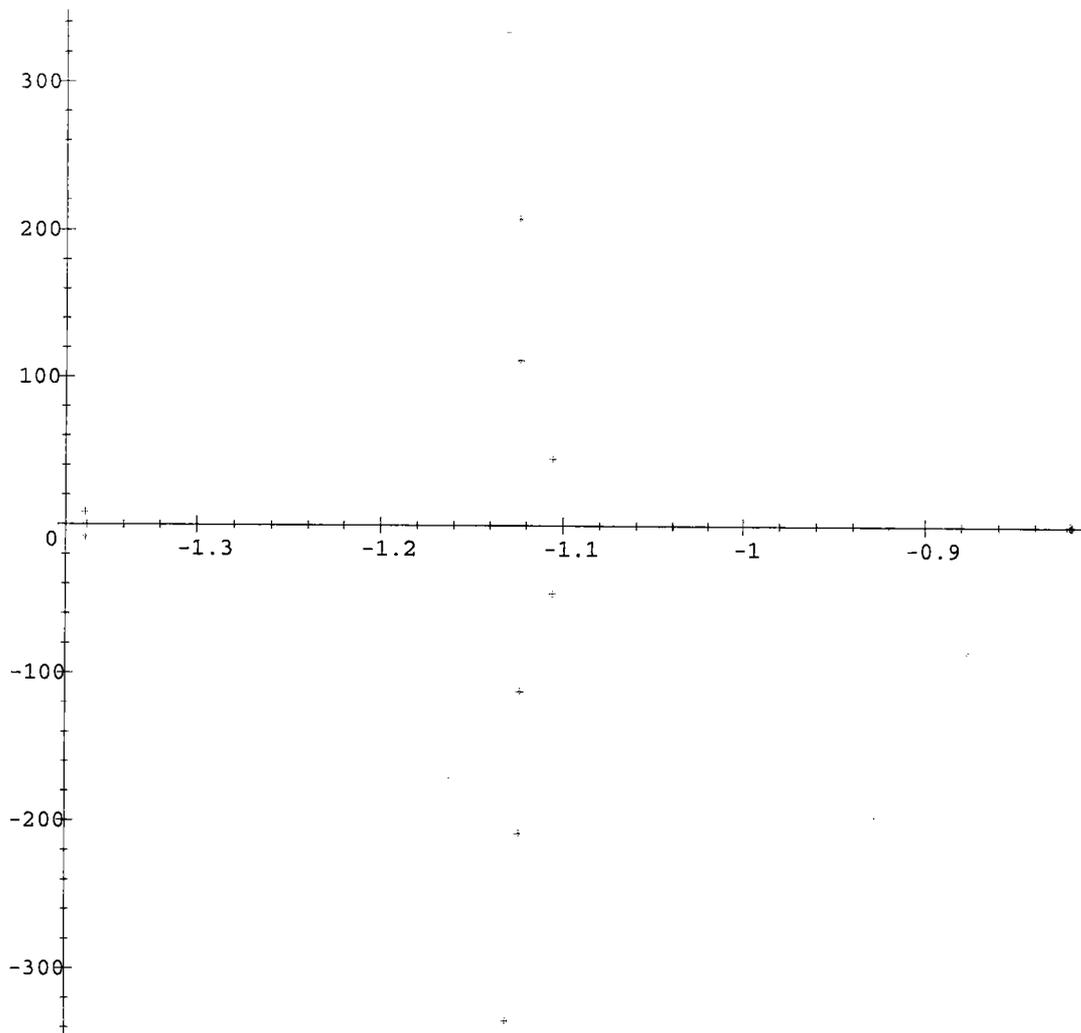


Figure IV.5. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $EI = 9$, $\rho = 4$

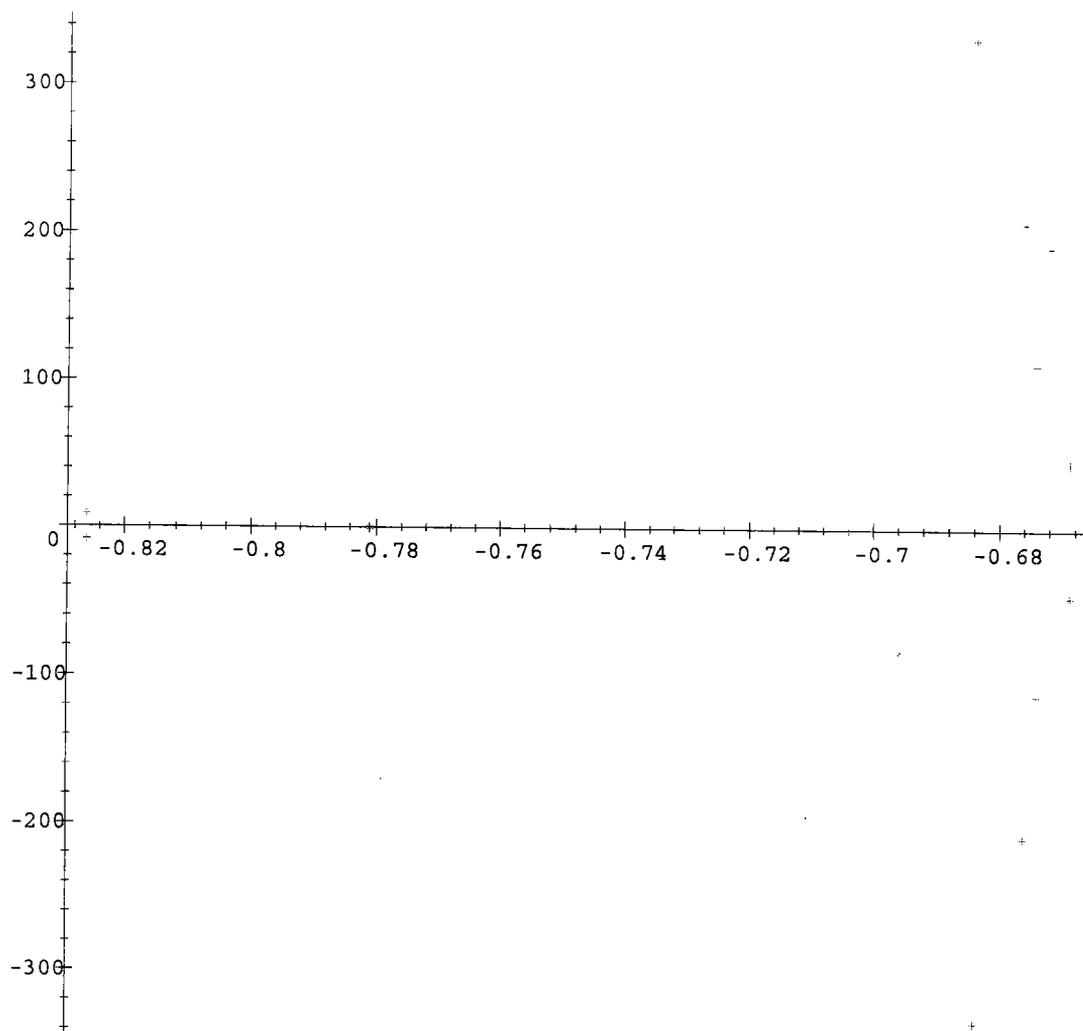


Figure IV.6. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.3$, $EI = 9$, $\rho = 4$

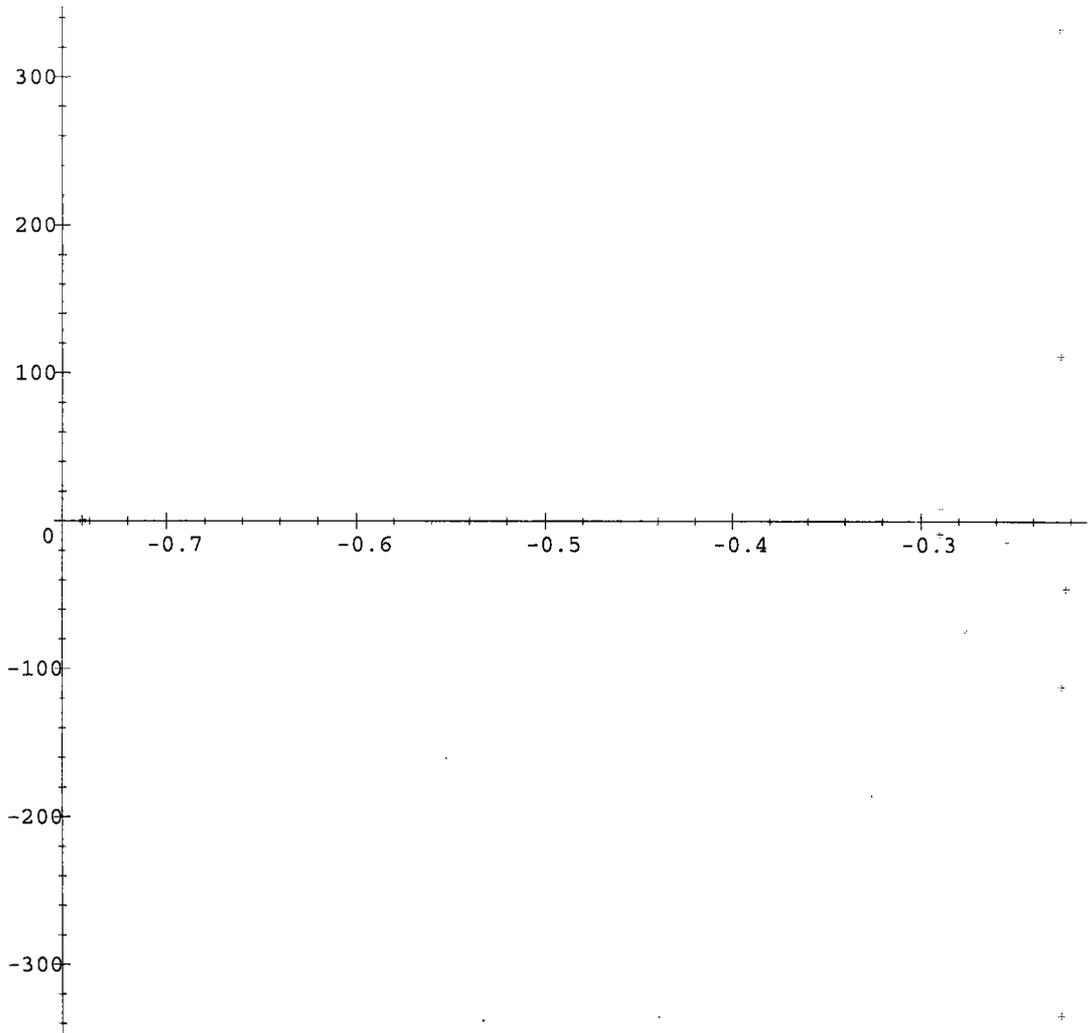


Figure IV.7. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0.1$, $EI = 9$, $\rho = 4$

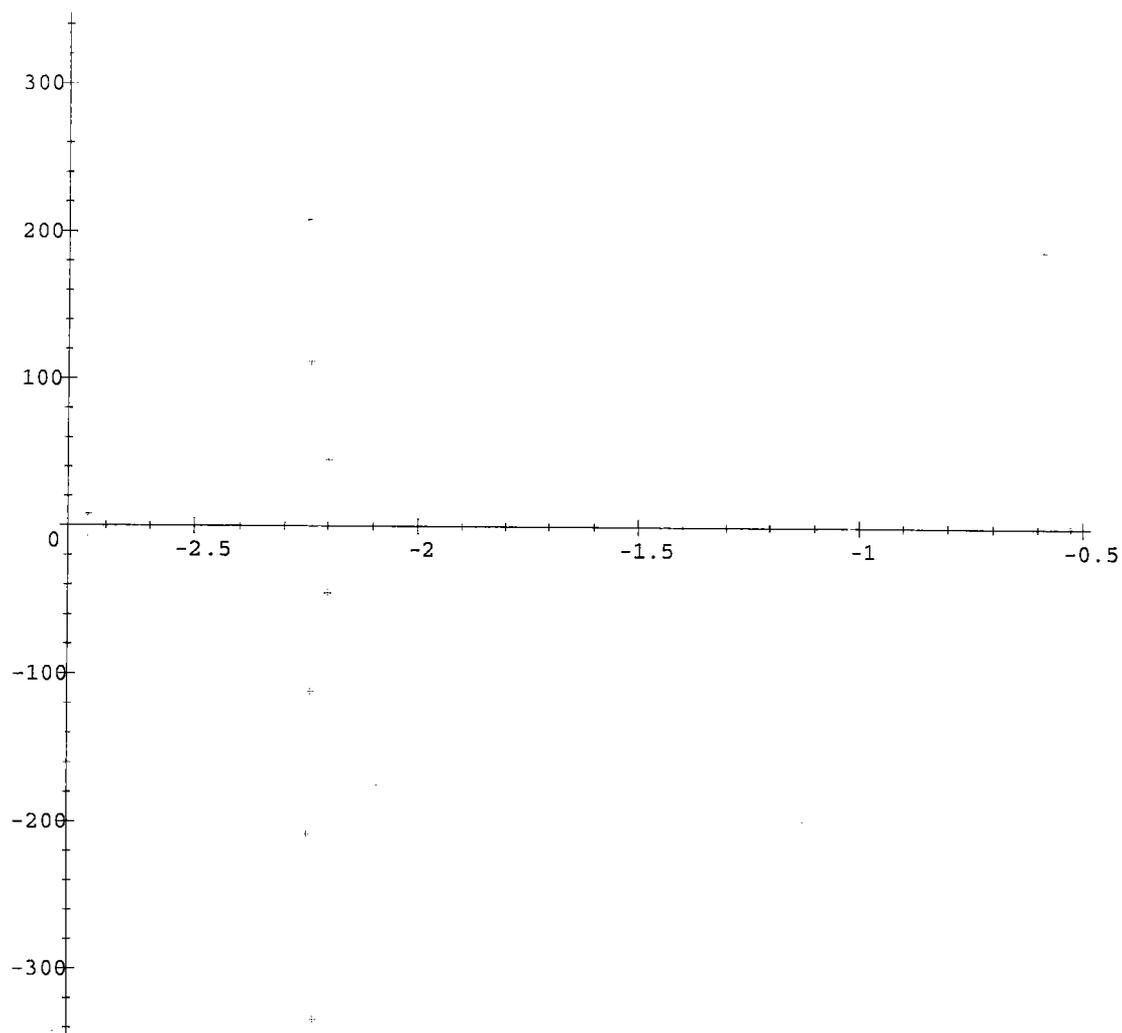


Figure IV.8. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $EI = 9$, $\rho = 4$

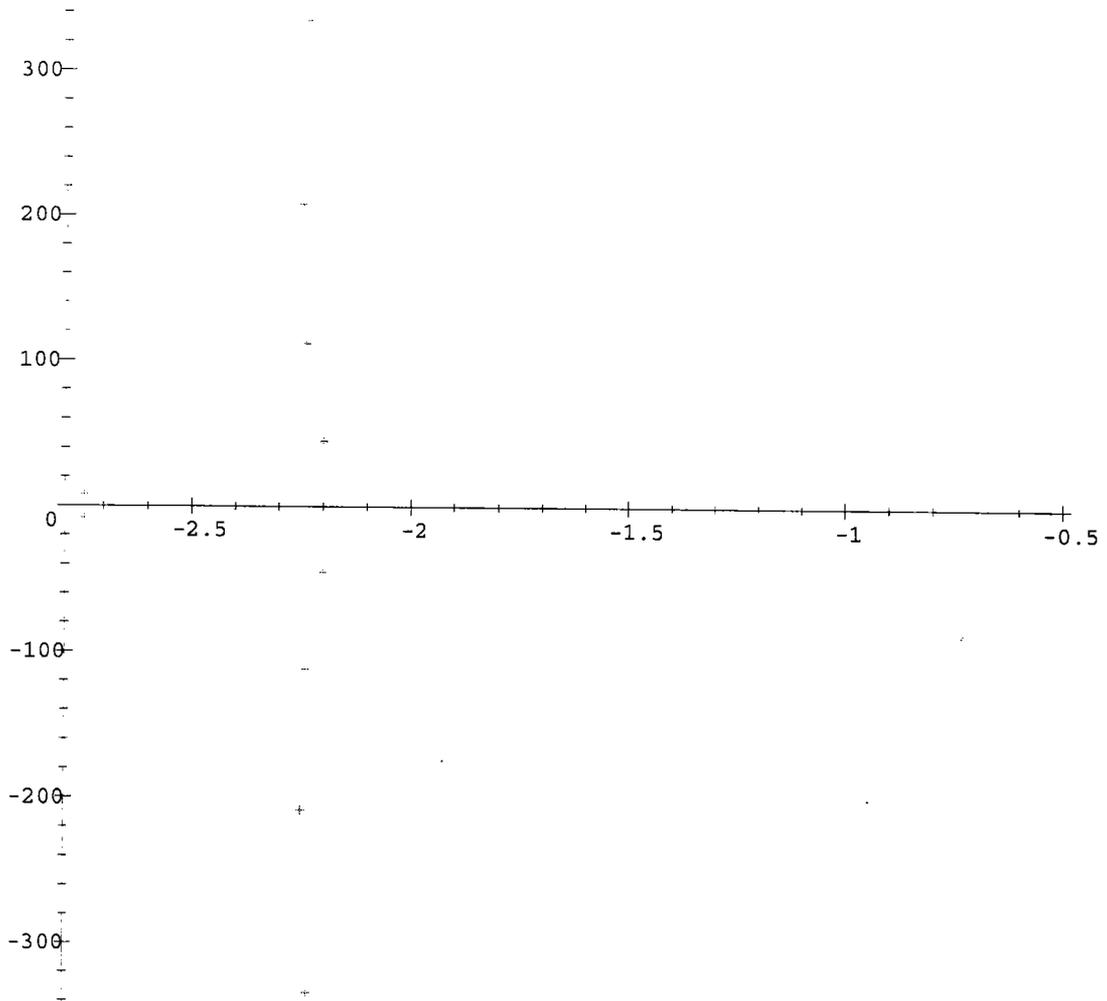


Figure IV.9. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1$, $EI = 9$, $\rho = 4$

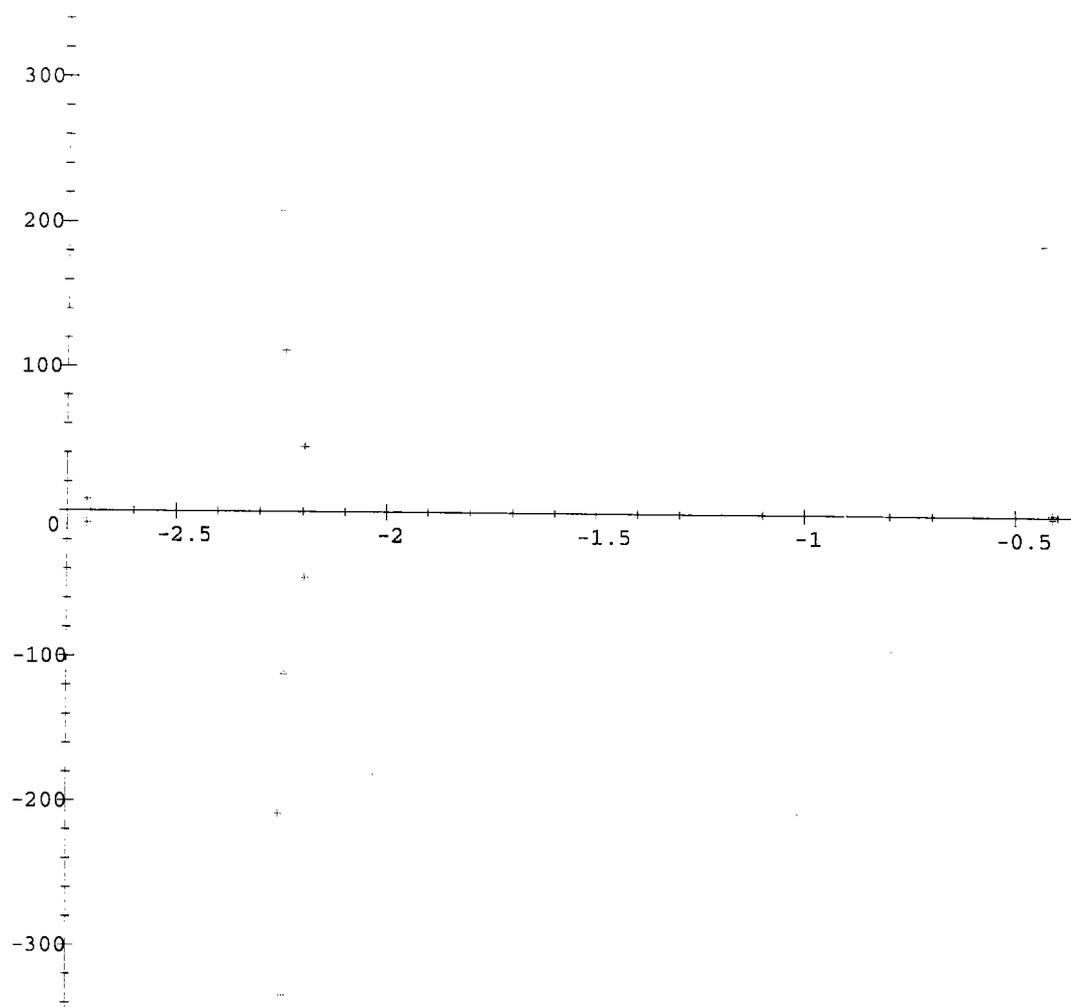


Figure IV.10. Spectre: $J = 1$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 1$, $EI = 9$, $\rho = 4$

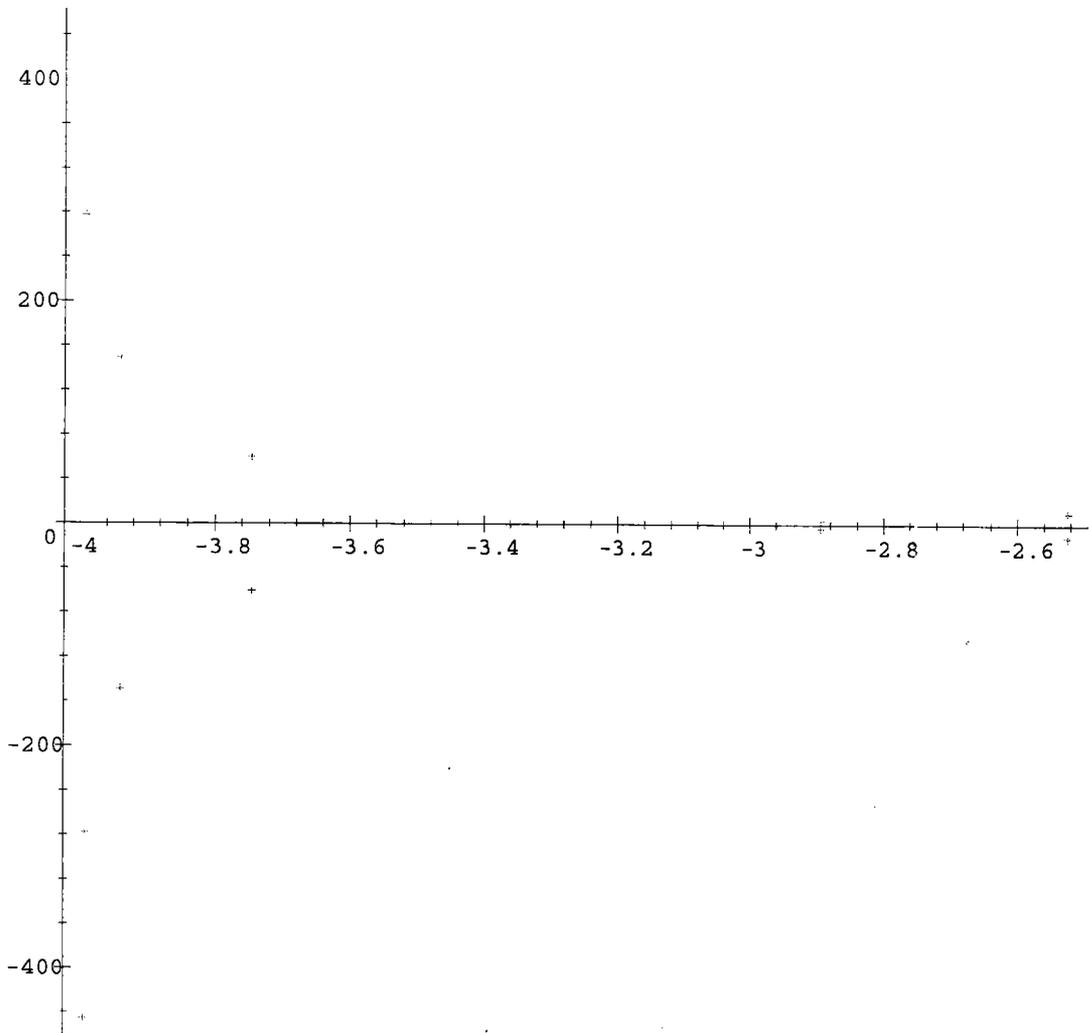


Figure IV.11. Spectre: $J = 0.1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $EI = 8$, $\rho = 2$

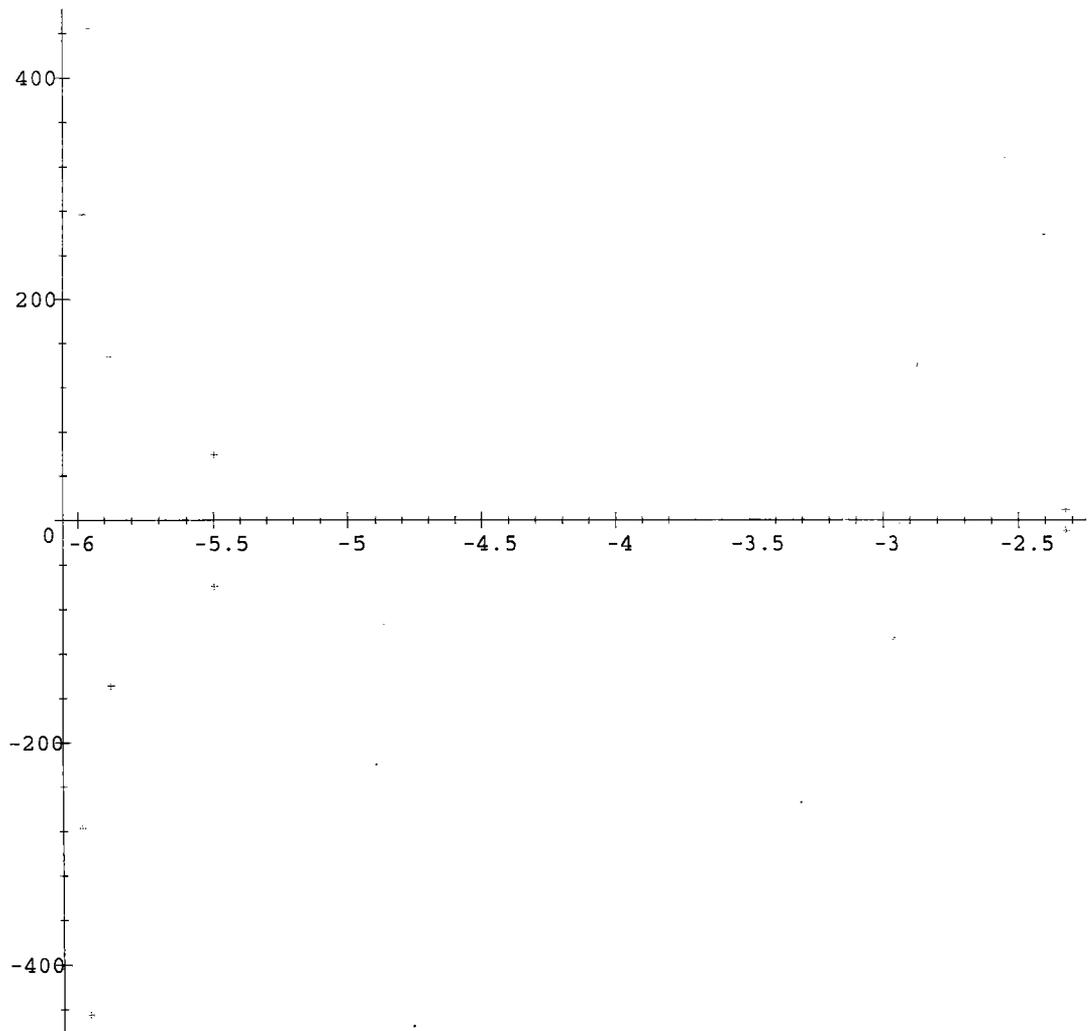


Figure IV.12. Spectre: $J = 0.1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1.5$, $EI = 8$, $\rho = 2$

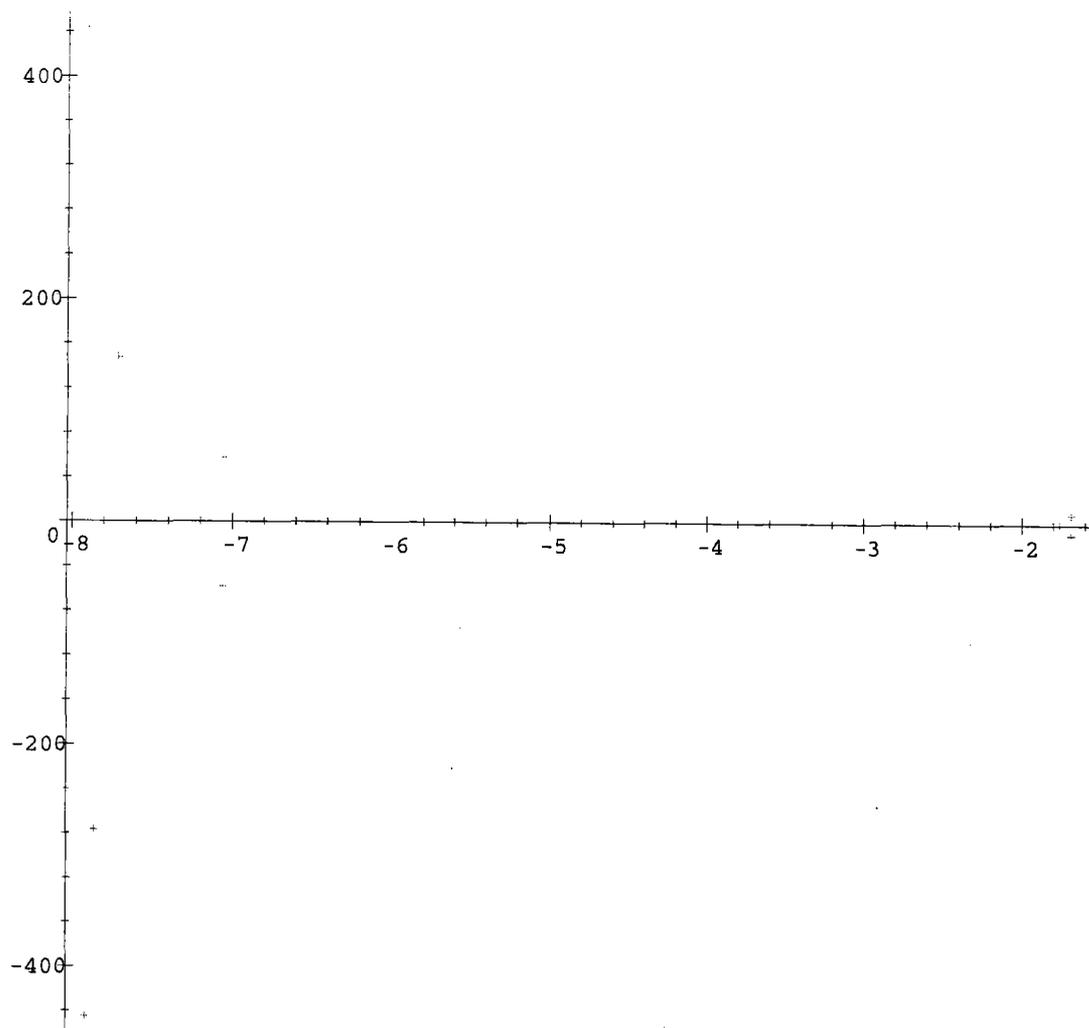


Figure IV.13. Spectre: $J = 0.1$, $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $EI = 8$, $\rho = 2$

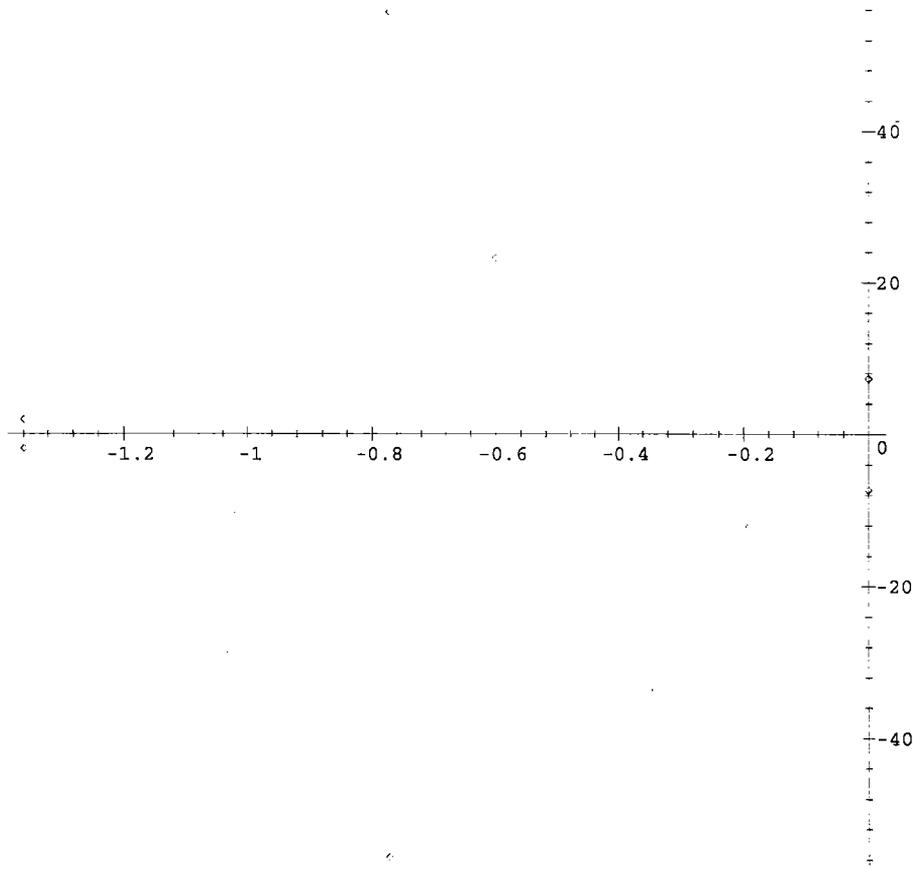


Figure IV.14. Spectre: $J = 0.03988508$, $\alpha = 0$, $\beta = 1.5$, $EI = 1.1$, $\rho = 2$

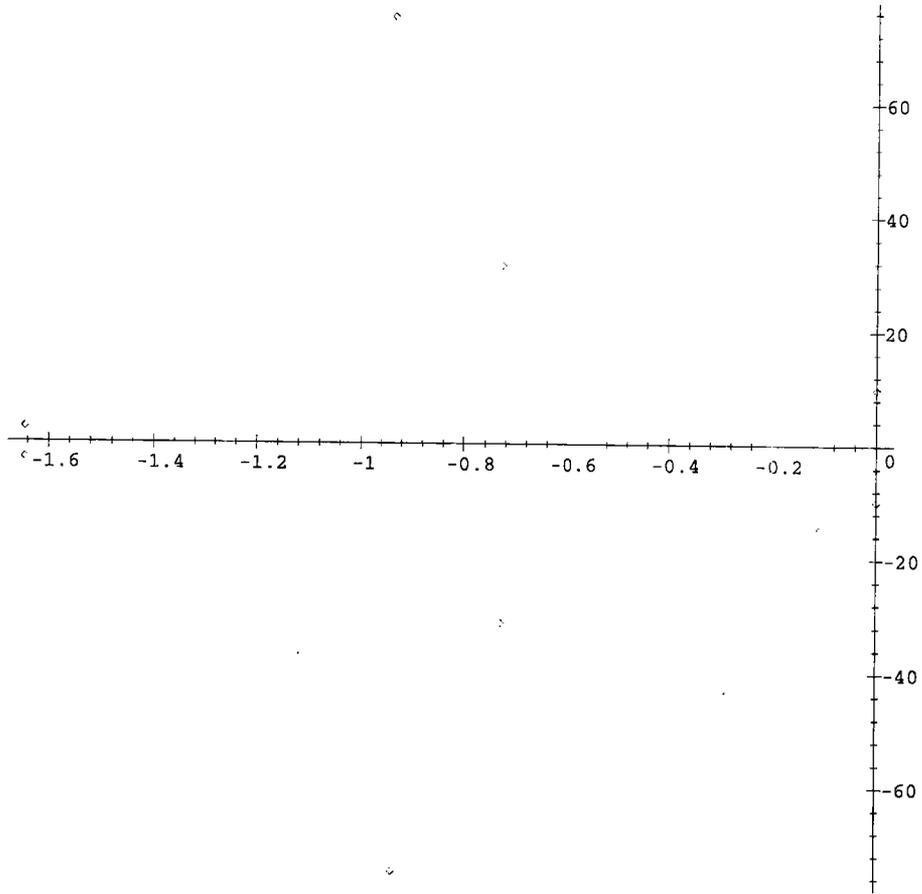


Figure IV.15. Spectre: $J = \frac{\text{sh}\pi}{(1+\text{ch}\pi)\pi^3}$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $EI = 1$, $\rho = 1$

Deuxième partie.

Etude du système (1.3): moment d'inertie négligé

IV.7 Le deuxième problème est bien posé

Sans perte de généralité, on suppose dans la suite que $\rho = EI = 1$.

Dans ce paragraphe, on donne les équations du système puis la loi de commande qui rend l'énergie dissipative, et on montre que le système bouclé est bien posé au sens des semi-groupes de contractions.

On rappelle tout d'abord qu'il s'agit de stabiliser le système (1.3) moyennant un seul contrôle de moment. Le système est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ u_{xx}(1, t) = \Theta(t), \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

où $\Theta(t)$ est le contrôle moment.

L'énergie mécanique totale du système est donnée par la formule suivante:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 (u_{xx}^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx + mu_t^2(1, t) \right\}.$$

En calculant formellement la dérivée de $E(t)$ le long des solutions classiques de (7.6), on obtient:

$$\dot{E}(t) = u_{tx}(1, t)\Theta(t).$$

On choisit alors:

$$\Theta(t) = -\alpha u_{tx}(1, t), \quad \alpha > 0.$$

On a donc:

$$\dot{E}(t) = -\alpha u_{tx}^2(1, t). \quad (7.7)$$

Le système (7.6) en boucle fermée s'écrit alors:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ u_{xx}(1, t) = -\alpha u_{tx}(1, t), \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

On note, pour tout $n = 2, 3, \dots$,

$$H_0^n = \{f \in H^n(0, 1); f(0) = f_x(0) = 0\}.$$

L'espace H_0^2 sera muni du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g \rangle_{H_0^2} = \int_0^1 f_{xx}g_{xx}dx.$$

L'espace d'état est

$$\mathcal{H} = H_0^2 \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R},$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u, v, \eta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})dx + m\eta\tilde{\eta}.$$

Posons $\Phi(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t), u_t(1, t))'$; le système en boucle fermée (7.8) s'écrit sous la forme opérationnelle suivante:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \\ \Phi(0) = \Phi_0, \end{cases} \quad (7.9)$$

où A est l'opérateur non borné défini par:

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v, \eta) \in H_0^4 \times H_0^2 \times \mathbb{R}; u_{xx}(1) + \alpha v_x(1) = 0, \eta = v(1)\},$$

et

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ \frac{u_{xxx}(1)}{m} \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (u, v, \eta)' \in \mathcal{D}(A).$$

On a le lemme suivant:

Lemme IV.5 . i) L'opérateur A est m -dissipatif.

ii) Pour toute condition initiale $\Phi_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(A)$, il existe une unique solution forte $\Phi(t) = (u, v, \eta)(t) \in \mathcal{D}(A)$ du système (7.9).

La solution $\Phi(t)$ est donnée par

$$\Phi(t) = S(t)\phi_0,$$

où $S(t)$ est le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur A . De plus,

$$\Phi(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)),$$

et la fonction

$$t \longmapsto \|A\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}$$

est décroissante.

iii) Pour toute condition initiale $\Phi_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, il existe une unique solution faible $\Phi(t) = (u, v, \eta)(t) \in \mathcal{H}$ solution du système (7.9) telle que $\Phi(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Preuve du Lemme IV.5.

i) Par un simple calcul on a

$$\langle A\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = -\alpha v_x^2(1) \leq 0, \quad \forall \Phi = (u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A).$$

D'où la dissipativité de A .

Il reste à prouver que l'opérateur A est maximal. Soit alors $(f, g, \beta) \in \mathcal{H}$. Il s'agit de trouver $(u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(I - A)(u, v, \eta) = (f, g, \beta)$.

Cette équation s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} u - v = f, \\ v + u_{xxxx} = g, \\ \eta - \frac{1}{m}U_{xxx}(1) = \beta. \end{cases} \quad (7.10)$$

avec

$$\begin{cases} u \in H_0^4; v \in H_0^2, \\ u_{xx}(1) + \alpha v_x(1) = 0, \\ \eta = v(1). \end{cases} \quad (7.11)$$

En éliminant v dans la première équation de (7.10), on obtient:

$$\begin{cases} u + u_{xxxx} = f + g, \\ u_{xx}(1) + \alpha u_x(1) = \alpha f_x(1), \\ u(1) - \frac{1}{m}u_{xxx}(1) = f(1) + \beta, \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases} \quad (7.12)$$

Soit $\Psi \in H_0^2$, multiplions la première équation de (7.12) par Ψ . On obtient alors après intégrations par parties:

$$\begin{aligned} & m(f(1) + \beta)\Psi(1) + \alpha f_x(1)\Psi_x(1) + \int_0^1 (f + g)\Psi dx \\ & = mu(1)\Psi(1) + \alpha u_x(1)\Psi_x(1) + \int_0^1 (u_{xx}\Psi_{xx} + u\Psi) dx, \quad \forall \Psi \in H_0^2. \end{aligned} \tag{7.13}$$

En utilisant le Théorème de Lax-Milgram, on démontre l'existence d'un élément unique, $u \in H_0^2$, solution de (7.13). Ensuite, par un raisonnement standard, on démontre que $u \in H_0^4$ et que les conditions aux bords sont vérifiées. D'où la maximalité de A .

La preuve des assertions ii) et iii) résulte de la théorie des semi-groupes ([55], [11]).
□

IV.8 Stabilité forte

Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant:

Théorème IV.13 . *Pour tout $m > \frac{1}{3}$, le semi-groupe $S(t)$ est fortement stable dans \mathcal{H} .*

Preuve du Théorème IV.13.

Pour démontrer ce résultat, on utilise le principe d'invariance de LaSalle.

Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans \mathcal{H} et que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, il suffit de démontrer le résultat pour toute donnée initiale dans $\mathcal{D}(A)$.

Soit $\Phi_0 \in \mathcal{D}(A)$. D'après le Lemme IV.5, la trajectoire des solutions $\{\Phi(t)_{t \geq 0}\}$ est bornée pour la norme du graphe. De plus, il est facile de voir que l'injection $i : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ est compacte et par conséquent la trajectoire est précompacte dans \mathcal{H} .

D'après le principe d'invariance de Lasalle (Proposition II.3), on peut affirmer que l'ensemble ω -limite $\omega(\Phi_0)$ est un compact non vide invariant par le semi-groupe $S(t)$ et que de plus

$$S(t)\Phi_0 \longrightarrow \omega(\Phi_0) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Pour démontrer la stabilité asymptotique, il nous suffit de vérifier que $\omega(\Phi_0)$ est réduit à $\{0\}$.

Pour cela, prenons $\check{\Phi}_0 = (\check{u}_0, \check{v}_0, \check{\eta}_0) \in \omega(u_0, v_0, \eta_0)$. D'après le Lemme IV.5, l'élément $\check{\phi}(t) = (\check{u}, \check{v}, \check{\eta})(t) = S(t)(\check{u}_0, \check{v}_0, \check{\eta}_0)$ est solution au sens fort du système.

De plus,

$$\check{\phi}(t) \in \omega(\check{\phi}_0) \subset \mathcal{D}(A).$$

et

$$\frac{d}{dt} \|(\check{\phi})(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

Ce qui implique que \check{u} vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \check{u}_{tt} + \check{u}_{xxxx} = 0, \\ \check{u}(0, t) = \check{u}_x(0, t) = 0, \\ m\check{u}_{tt}(1, t) - \check{u}_{xxx}(1, t) = 0, \\ \check{u}_{xx}(1, t) = \check{u}_{xt}(1, t) = 0, \\ \check{u}(x, 0) = \check{u}_0, \check{u}_t(x, 0) = \check{v}_0, \check{u}_t(1, 0) = \check{\eta}_0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Dans [61], Rao a établi par la technique du multiplicateur que la seule solution de ce système est la solution nulle pourvu que la condition $m > 1/3$ soit vérifiée. Le système (7.8) est donc fortement stable. \square

IV.9 Stabilité uniforme

Dans ce paragraphe, on établit le théorème suivant

Théorème IV.14 . *Pour $m > 1/3$, le système (7.8) est uniformément stable.*

Preuve du Théorème IV.14. Pour prouver ce théorème, on utilise le résultat de Huang (Théorème II.13). Notons qu'on a d'abord essayé la méthode des multiplicateurs mais celle-ci n'a donné aucun résultat. Les techniques de calcul sont inspirés du travail de G. Chen et al. [12].

La condition $\{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$ est déjà assurée par la stabilité forte. Il reste à prouver l'existence d'un réel $M > 0$ tel que



$$\|(i\omega I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Soit $\omega = \mu^2$ (le cas $\omega = -\mu^2$ se traite de la même manière), $(f, g, \eta) \in \mathcal{H}$ et $(u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A)$ tel que

$$(i\mu^2 I - A)(u, v, \eta) = (f, g, \gamma).$$

Ceci donne le système suivant

$$\begin{cases} v = i\mu^2 u - f, \\ u_{xxxx} - \mu^4 u = i\mu^2 f + g, \\ m\mu^4 u(1) + u_{xxx}(1) = -m(\gamma + i\mu^2 f(1)), \\ u_{xx}(1) + \alpha i\mu^2 u_x(1) = \alpha f_x(1), \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Considérons alors les deux systèmes suivants:

$$\begin{cases} \hat{u}_{xxxx} - \mu^4 \hat{u} = i\eta^2 f + g, \\ \hat{u}(0) = \hat{u}_x(0) = \hat{u}_{xx}(0) = \hat{u}_{xxx}(0) = 0, \end{cases} \quad (9.2)$$

et

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xxxx} - \mu^4 \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_x(0) = 0, \\ m\mu^4 \tilde{u}(1) + \tilde{u}_{xxx}(1) = l_1, \\ \tilde{u}_{xx}(1) + \alpha i\mu^2 \tilde{u}_x(1) = l_2, \end{cases} \quad (9.3)$$

où

$$\begin{cases} l_1 = -m\mu^4 \hat{u}(1) - \hat{u}_{xxx}(1) - m(\gamma + i\mu^2 f(1)), \\ l_2 = -\hat{u}_{xx}(1) - \alpha i\mu^2 \hat{u}_x(1) + \alpha f_x(1). \end{cases}$$

Il est évident que si \hat{u} et \tilde{u} sont solutions de (9.2) et (9.3) respectivement alors $u = \hat{u} + \tilde{u}$ est solution de (9.1).

En outre, on vérifie aisément que la solution de (9.2) est

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \eta^{-3} [\text{sh}(\mu(x - \tau)) - \sin(\mu(x - \tau))] (i\eta^2 f(\tau) + g(\tau)) d\tau. \quad (9.4)$$

Par ailleurs, les deux premières équations de (9.3) entraînent

$$\tilde{u}(x) = A(\operatorname{ch}\mu x - \cos \mu x) + B(\operatorname{sh}\mu x - \sin \mu x),$$

où A et B sont deux constantes réelles.

Les deux dernières équations de (9.3) s'écrivent alors:

$$\begin{cases} A[m\mu^4(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu) + \mu^3(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu)] \\ + B[m\mu^4(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu) + \mu^3(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu)] = l_1, \\ A[\mu^2(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu)] \\ + B[\mu^2(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu)] = l_2. \end{cases} \quad (9.5)$$

Estimation de l_1 et l_2

Une double intégration par parties dans (9.4) donne

$$\hat{u}_{xx} = \frac{\mu^{-1}e^{\mu x}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\mu^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]). \quad (9.6)$$

De plus

$$\begin{aligned} l_1 &= -m\mu^4\hat{u}(1) - \hat{u}_{xxx}(1) - m(\gamma + i\mu^2f(1)) \\ &= -\frac{m\mu}{2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)) (i\mu^2f(\xi) + g(\xi)) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) (i\mu^2f(\xi) + g(\xi)) d\xi - m(\gamma + i\mu^2f(1)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{-[\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)] - m\mu[\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)]\} \\ &\quad \times (i\mu^2f(\xi) + g(\xi)) d\xi - m(\gamma + i\mu^2f(1)). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi$$

et

$$\int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) f_{xx} d\xi - \frac{2f(1)}{\mu}.$$

Ceci permet d'écrire vu (9.7)

$$\begin{aligned} l_1 &= -m(\gamma + i\mu^2 f(1)) - \frac{i}{2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi + im\mu^2 f(1) \\ &\quad - \frac{im\mu}{2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) f_{xx} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [-\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi) - m\mu (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi))] i f_{xx}(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \{ -(\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) - m\mu (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) \} g(\xi) d\xi \\ &\quad + -m\gamma. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Or

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi) - \frac{m\mu}{2} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)] \right) \\ &= -\frac{1}{4} (1 + m\mu) e^{(1-\xi)\mu} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \left(\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi) - \frac{m\mu}{2} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)] \right) \\ &= -\frac{1}{4} (1 + m\mu) e^{(1-\xi)\mu} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Donc (9.8) devient

$$l_1 = -m\gamma - \frac{1}{4} (1 + m\mu) e^\mu \int_0^1 e^{-\mu\xi} (i f_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|). \tag{9.9}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
l_2 &= -\hat{u}_{xx}(1) - i\alpha\mu^2\hat{u}_x(1) + \alpha f_x(1) \\
&= -\frac{1}{2\mu} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin\mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi \\
&\quad - \frac{i\alpha\mu^2}{2} \mu^{-2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos\mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi + \alpha f_x(1) \\
&= \alpha f_x(1) + \int_0^1 \left\{ -\frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos\mu(1-\xi)] - \frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin\mu(1-\xi)] \right\} \\
&\quad \times (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Après intégration par parties, on a

$$\int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos\mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos\mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi - \frac{1}{\mu^2} f_x(1)$$

et

$$\int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin\mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin\mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi.$$

On en déduit que (9.10) peut s'écrire:

$$\begin{aligned}
l_2 &= \int_0^1 \left\{ \frac{\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos\mu(1-\xi)] - \frac{i}{2\mu} [(\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin\mu(1-\xi))] \right\} f_{xx}(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin\mu(1-\xi)] - \frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos\mu(1-\xi)] \right\} g(\xi) d\xi \\
&= \int_0^1 \left\{ -\frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos\mu(1-\xi)] - \frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin\mu(1-\xi)] \right\} i f_{xx}(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin\mu(1-\xi)] - \frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos\mu(1-\xi)] \right\} g(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Finalement

$$l_2 = -\frac{e^\mu}{4} \left(i\alpha + \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 e^{-\mu\xi} (i f_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|). \tag{9.11}$$

Estimation de $\|\tilde{\mathbf{u}}_{xx}\|_2$

On sait que

$$\tilde{u}(x) = A(\operatorname{ch}\mu x - \cos \mu x) + B(\operatorname{sh}\mu x - \sin \mu x).$$

Donc

$$\tilde{u}_{xx}(x) = \mu^2 \{A(\operatorname{ch}\mu x + \cos \mu x) + B(\operatorname{sh}\mu x + \sin \mu x)\}.$$

Regroupons les termes en $e^{\mu x}$; on a alors

$$\tilde{u}_{xx}(x) = \mu^2 \{(A+B)e^{\mu x} + (A-B)e^{-\mu x} + A \cos \mu x + B \sin \mu x\}. \quad (9.12)$$

Or A et B vérifient le système (9.5). En d'autres termes:

$$E \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

où E est la matrice dont les éléments e_{ij} sont donnés par

$$e_{11} = m\mu^4(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu) + \mu^3(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu),$$

$$e_{12} = m\mu^4(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu) + \mu^3(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu),$$

$$e_{21} = \mu^2(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu),$$

$$e_{22} = \mu^2(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu).$$

Notons $\Delta = \det E$, alors

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\mu^5 \{i\alpha m\mu^2(1 - \cos \mu \operatorname{ch}\mu) - i\alpha\mu(\cos \mu \operatorname{sh}\mu + \sin \mu \operatorname{ch}\mu) \\ &\quad + m\mu(\sin \mu \operatorname{ch}\mu - \cos \mu \operatorname{sh}\mu) - (1 + \cos \mu \operatorname{ch}\mu)\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Il est facile de vérifier que $\Delta \neq 0$ pour μ assez grand.

Par ailleurs A et B sont donnés par

$$A = \frac{l_1 e_{22} - l_2 e_{12}}{\Delta}$$

et

$$B = \frac{l_2 e_{11} - l_1 e_{21}}{\Delta}.$$

D'où

$$A + B = (l_1(e_{22} - e_{21}) + l_2(e_{11} - e_{12}))/\Delta,$$

$$A - B = (l_1(e_{22} + e_{21}) - l_2(e_{12} + e_{11}))/\Delta.$$

En utilisant (9.9), (9.11) et en remplaçant ϵ_{ij} , $i, j = 1, 2$ par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{\Delta} \left\{ [-m\gamma - \frac{1}{4}(1 + m\mu)e^\mu \int_0^1 e^{-\mu\xi}(if_{xx}(\xi) + g(\xi))d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)] \right. \\ &\quad \times [i\alpha\mu^3(e^{-\mu} - (\cos \mu + \sin \mu)) - \mu^2(e^{-\mu} + (\cos \mu - \sin \mu))] \\ &\quad + [-\frac{e^\mu}{4}(i\alpha + \frac{1}{\mu}) \int_0^1 e^{-\mu\xi}(if_{xx}(\xi) + g(\xi))d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)] \\ &\quad \left. \times [m\mu^4(e^{-\mu} - \cos \mu + \sin \mu) - \mu^3(e^{-\mu} + (\cos \mu + \sin \mu))] \right\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne en regroupant les termes en e^μ

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{\varphi(\mu)}{\Delta} \left\{ \frac{e^\mu}{2} \mu^2 \int_0^1 e^{-\mu\xi} [if_{xx}(\xi) + g(\xi)] d\xi + \mathcal{O}(\mu^4(\|f_{xx}\| + \|g\|)) \right. \\ &\quad \left. + m\gamma \mathcal{O}(\mu^3) - \frac{\mu^2}{2} (1 - im\alpha\mu^2) \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \right\}, \quad (9.14) \end{aligned}$$

où

$$\varphi(\mu) = i\alpha\mu(\cos \mu + \sin \mu) + m\mu(\cos \mu - \sin \mu) + \cos \mu(1 + i\alpha m\mu^2).$$

Nous allons maintenant estimer Δ^{-1} . Pour cela on regroupe dans (9.13) les termes en e^μ ; on obtient alors

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\mu^5 \{ -e^\mu \varphi(\mu) - (1 - i\alpha m\mu^2) + e^{-\mu} [i\alpha\mu(\cos \mu - \sin \mu) \\ &\quad + m\mu(\cos \mu + \sin \mu) - \cos \mu(1 + i\alpha m\mu^2)] \} \\ &= -2\mu^5 e^\mu \varphi(\mu) + \mathcal{O}(\mu^7). \quad (9.15) \end{aligned}$$

On a donc besoin dans la suite d'estimer $|\varphi(\mu)|$, pour μ assez grand.

En effet, on vérifie facilement que

$$|\varphi(\mu)| = \mathcal{O}(\mu^2) \quad \text{et} \quad |\varphi(\mu)| \geq C\mu,$$

où C est une constante positive.

Il découle alors de (9.15)

$$\Delta^{-1} = -\frac{1}{2} \mu^{-5} e^{-\mu} \varphi(\mu)^{-1} + \mathcal{O}(\mu^{-5} e^{-2\mu}) = \mathcal{O}(\mu^{-6} e^{-\mu}).$$

Calcul de $A + B$

On a

$$\frac{\varphi(\mu)}{\Delta} \left\{ \frac{e^\mu}{2} \mu^2 \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \right\} = -\frac{\mu^{-3}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi (1 + \mathcal{O}(\mu e^{-\mu})).$$

Par ailleurs

$$\int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\|)),$$

Dès lors (9.14) donne:

$$\begin{aligned} \mu^2(A + B) &= -\frac{\mu^{-1}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) \\ &\quad + m\gamma \mathcal{O}(\mu^{-1}e^{-\mu}) \\ &= -\frac{\mu^{-1}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \end{aligned} \tag{9.16}$$

Calcul de $A - B$

On a

$$A - B = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{e^\mu}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \psi(\mu) + m\gamma \mathcal{O}(\mu^3) + \mathcal{O}(\mu^4(\|f_{xx}\| + \|g\|)) \right\},$$

où

$$\psi(\mu) = 2\mu^2[e^{-\mu}(m\mu - i\alpha\mu) + (i\alpha\mu^2 - 1) \sin \mu].$$

Il en découle

$$\begin{aligned} \mu^2(A - B) &= \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) + m\gamma \mathcal{O}(\mu^{-1}e^{-\mu}) \\ &= \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|). \end{aligned} \tag{9.17}$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\mu^2 A = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \quad (9.18)$$

De même

$$\mu^2 B = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \quad (9.19)$$

Reportons les relations (9.16), (9.17), (9.18) et (9.19) dans (9.12); il suit que:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{xx}(x) &= -\frac{\mu^{-1}e^{\mu x}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + e^{\mu x} \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &+ e^{-\mu x} \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|) + \cos \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &+ \sin \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \end{aligned} \quad (9.20)$$

En combinant (9.6) et (9.20), on a

$$\begin{aligned} u_{xx}(x) &= \hat{u}_{xx}(x) + \tilde{u}_{xx}(x) = e^{\mu x} \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &+ e^{-\mu x} \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|) + \cos \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &+ \sin \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) + \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \end{aligned}$$

Compte tenu de

$$\begin{cases} \|e^{\mu x}\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}e^{\mu}), & \|e^{-\mu x}\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}), \\ \|\cos \mu x\|_2 = \mathcal{O}(1), & \|\sin \mu x\|_2 = \mathcal{O}(1), \end{cases}$$

on obtient

$$\|u_{xx}\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)), \text{ pour } \mu \text{ assez grand.}$$

Estimation de $\|v\|_2 + m|\eta|$

Rappelons que

$$\begin{cases} v = i\mu^2 u - f, \\ \eta = v(1) = i\mu^2 u(1) - f(1). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \|v\|_2 \leq \mu^2 \|u\|_2 + \|f\|_2, \\ |\eta| \leq \mu^2 |u(1)| + |f(1)|. \end{cases}$$

Comme

$$\|u_{xx}\|_2 = \mathcal{O}\left(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)\right),$$

il suffit de démontrer que

$$\|v\|_2 + m|\eta| \leq K(\|u_{xx}\|_2 + \|f_{xx}\|_2 + \|g\|_2 + m|\gamma|),$$

pour un certain $K > 0$.

Tout d'abord, on sait que

$$u_{xxxx} - \mu^4 u = i\mu^2 f + g.$$

Multiplions cette équation par \bar{u} et intégrons de 0 à 1, on obtient

$$\begin{aligned} \mu^4 \int_0^1 |u|^2 dx + m\mu^4 |u(1)|^2 &= i\alpha\mu^2 |u_x(1)|^2 + \int_0^1 |u_{xx}(1)|^2 dx - m\gamma\bar{u}(1) \\ &\quad - im\mu^2 \bar{u}(1)f(1) - \alpha f_x(1)\bar{u}_x(1) - \int_0^1 (i\mu^2 f + g)\bar{u}(1) dx. \\ &= \|u_{xx}\|_2^2 - \Re\{m\gamma\bar{u}(1) + im\mu^2 \bar{u}(1)f(1) + \alpha f_x(1)\bar{u}_x(1) \\ &\quad + \int_0^1 (i\mu^2 f + g)\bar{u}(1) dx\}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g\bar{u} dx \right| &\leq \frac{1}{2}(\|g\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2), \\ \left| \int_0^1 i\mu^2 f\bar{u} dx \right| &\leq \frac{\mu^4}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f_{xx}\|_2^2, \\ |m\gamma\bar{u}(1)| &\leq \frac{m}{2}|\gamma|^2 + \frac{1}{2}\|u_{xx}\|_2^2, \\ |im\mu^2 \bar{u}(1)f(1)| &\leq \frac{\mu^4}{2}m|u(1)|^2 + \frac{m}{2}\|f_{xx}\|_2^2, \\ |\alpha f_x(1)\bar{u}_x(1)| &\leq \frac{\alpha}{2}(\|u_{xx}\|_2^2 + \|f_{xx}\|_2^2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu^4 \int_0^1 |u|^2 dx + m\mu^4 |u(1)|^2 &\leq \frac{1}{2}\mu^4 \int_0^1 |u|^2 dx + \frac{m}{2}\mu^4 |u(1)|^2 + \frac{1}{2}(3 + \alpha + m)\|u_{xx}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|g\|_2^2 + \frac{m}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}(1 + m + \alpha)\|f_{xx}\|_2^2. \end{aligned}$$

Ceci entraînera

$$|\mu|^4 \left(\|u\|_2^2 + m|u(1)|^2 \right) \leq K_0 \left(\|u_{xx}\|_2^2 + \|f_{xx}\|_2^2 + \|g\|_2^2 + m|\gamma|^2 \right).$$

Le théorème est ainsi démontré. \square

IV.10 Analyse spectrale

On va présenter dans ce paragraphe une analyse spectrale de l'opérateur contrôlé A et de l'opérateur non contrôlé A_0 , i.e, $\alpha = 0$ dans A .

Premièrement, on va étudier le comportement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur A . La technique utilisée est due à Langer [43] et Rideau [64] et qui a été rappelée au paragraphe IV.6.1. Ensuite, on montrera que les valeurs propres de grand module sont simples.

On rappelle que l'opérateur A est défini par

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v, \eta) \in H_0^4 \times H_0^2 \times \mathbb{R}; u_{xx}(1) + \alpha v_x(1) = 0, \eta = v(1)\},$$

et

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ \frac{u_{xxx}(1)}{m} \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (u, v, \eta)' \in \mathcal{D}(A).$$

De plus le spectre de A est discret.

Le premier résultat principal de cette de cette section est le théorème suivant:

Théorème IV.15 . Soit λ_k une valeur propre de l'opérateur A . Alors,

$$\lambda_k = -\frac{2}{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) - i \left(\frac{2}{m} + \pi^2 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right).$$

On en déduit alors que pour k assez grand,

$$|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \longrightarrow 2\pi^2(k+1).$$

Preuve du Théorème IV.15. Il est facile de voir que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un élément non nul $y \in H^4(0,1)$ telle que

$$\begin{cases} v = \lambda u, \\ u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0, \\ \lambda^2 u(1)\eta - \frac{1}{m} u_{xxx}(1) = 0, \\ u_{xx}(1) + \alpha \lambda u_x(1) = 0, \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases}$$

Pour $\lambda = i\omega^2$, $\omega \in \mathbb{C}$, ceci donne le système suivant

$$\begin{cases} u_{xxxx} - \omega^4 u = 0, \\ u(0) = u_x(0) = 0, \\ u_{xxx}(1) + m\omega^4 u(1) = 0, \\ u_{xx}(1) + \alpha i\omega^2 u_x(1) = 0, \\ v = i\omega^2 u. \end{cases} \quad (10.1)$$

Les deux premières équations de (10.1) impliquent

$$u(x) = C(\operatorname{ch}\omega x - \cos \omega x) + D(\operatorname{sh}\omega x - \sin \omega x),$$

où C et D sont deux constantes réelles.

Les deux dernières conditions s'écrivent alors :

$$\begin{cases} C[\operatorname{ch}\omega + \cos \omega + i\alpha\omega(\operatorname{sh}\omega + \sin \omega)] + D[\operatorname{sh}\omega + \sin \omega + i\alpha\omega(\operatorname{ch}\omega - \cos \omega)] = 0, \\ C[\operatorname{sh}\omega - \sin \omega + m\omega(\operatorname{ch}\omega - \cos \omega)] + D[\operatorname{ch}\omega + \cos \omega + m\omega(\operatorname{sh}\omega - \sin \omega)] = 0. \end{cases} \quad (10.2)$$

Ce système admet une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire,

$$1 + \cos \omega \operatorname{ch} \omega + i \alpha m \omega^2 (\cos \omega \operatorname{ch} \omega - 1) + m \omega (\cos \omega \operatorname{sh} \omega - \sin \omega \operatorname{ch} \omega) \\ + i \alpha \omega (\cos \omega \operatorname{sh} \omega + \sin \omega \operatorname{ch} \omega) = 0.$$

ou encore

$$P(\omega) = 4(i \alpha m \omega^2 - 1) + e^{(1+i)\omega} [-i \alpha m \omega^2 - (i+1)(m+\alpha)\omega - 1] \\ + e^{(1-i)\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (i-1)(m-\alpha)\omega - 1] + e^{(i-1)\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (1-i)(m-\alpha)\omega - 1] \\ + e^{-(1+i)\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (i+1)(m+\alpha)\omega - 1] = 0. \quad (10.3)$$

D'autre part, il est facile de vérifier que pour tout ω

$$P(-\omega) = -P(\omega) \text{ et } P(\bar{\omega}) = \overline{P(i\omega)}.$$

On en déduit donc que l'ensemble des solutions de (10.3) admet les deux bissectrices du plan complexe comme axe de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Il nous suffit donc de chercher les racines de (10.3) dans un secteur d'angle $\frac{\pi}{2}$ du plan complexe. Soit alors le secteur S_1 défini par $\arg(\omega) = \theta$ où $\epsilon < \theta < \frac{\pi}{2} + \epsilon$, avec ϵ assez petit. Ce qui nous permet d'écrire

$$P(\omega) = e^{(1-i)\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (i-1)(m-\alpha)\omega - 1] \\ + e^{-(1+i)\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (i+1)(m+\alpha)\omega - 1] + e^{(1-i)\omega} \psi(\omega), \quad (10.4)$$

avec

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \psi(\omega) = 0.$$

Posons

$$A_1(\omega) = -i \alpha m \omega^2 + (i-1)(m-\alpha)\omega - 1,$$

$$A_2(\omega) = -i \alpha m \omega^2 + (i+1)(m+\alpha)\omega - 1.$$

On peut alors affirmer d'après le Théorème IV.11 que dans le secteur S_1 les racines de (10.4) sont asymptotiques à celles de

$$\hat{P}(\omega) = e^\omega [-i \alpha m \omega^2 + (i-1)(m-\alpha)\omega - 1] + e^{-\omega} [-i \alpha m \omega^2 + (i+1)(m+\alpha)\omega - 1] = 0,$$

ou encore à celles de

$$e^\omega + e^{-\omega} = 0.$$

Or les racines de cette équation sont:

$$\omega_k = i\pi \left(k + \frac{1}{2} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Donc on peut chercher les racines de $P(\omega)$ sous la forme suivante:

$$\omega_k = i\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) + \frac{x}{k} + \frac{y}{k^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^3} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (10.5)$$

Calculons le développement asymptotique de $\hat{P}(\omega)$ pour ω donné par (10.5). En effet, un simple calcul permet d'obtenir

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= i\alpha m \pi^2 k^2 + (i\alpha m \pi^2 - (i+1)(m-\alpha)\pi) k \\ &+ \left(2\pi\alpha m x + i\alpha m \frac{\pi^2}{4} - (i+1)(m-\alpha)\frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ &+ \left((i-1)(m-\alpha)x + \alpha m \pi(x+2y) \right) \frac{1}{k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(\omega) &= i\alpha m \pi^2 k^2 + (i\alpha m \pi^2 + (i-1)(m+\alpha)\pi) k \\ &+ \left(2\pi\alpha m x + i\alpha m \frac{\pi^2}{4} + (i-1)(m+\alpha)\frac{\pi}{2} - 1 \right) \\ &+ \left((i+1)(m+\alpha)x + \alpha m \pi(x+2y) \right) \frac{1}{k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^2} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^\omega &= i(-1)^k \left(1 + \frac{x}{k} + \left(\frac{x^2}{2} + y^2 \right) \frac{1}{k^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^3} \right) \right), \\ e^{-\omega} &= i(-1)^k \left(1 - \frac{x}{k} + \left(\frac{x^2}{2} - y^2 \right) \frac{1}{k^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^3} \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \hat{P}(\omega) &= i(-1)^k \{ 2i\alpha m \pi^2 x + 2(i\alpha - m)\pi x + \pi(\alpha - im) + 2i\alpha m \pi^2 y \\ &+ 2k\pi (i\alpha m \pi x + \alpha - im) + \frac{M}{k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^2} \right) \}, \end{aligned}$$

avec M une constante.

Choisissons x tel que le coefficient de k soit nul, i.e,

$$x = \frac{i\alpha + m}{\alpha m \pi}.$$

D'autre part, on choisit y de telle manière que le terme constant soit nul, i.e

$$y = -\frac{1}{2(\alpha m \pi)^2} (2i(\alpha^2 + m^2) + \alpha m \pi(m + i\alpha)).$$

Ceci, avec (10.5), implique que

$$\omega_k = \frac{1}{\alpha \pi k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) + i\left(\pi\left(k + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Ainsi, l'expression de λ_k est donnée par

$$\lambda_k = i\omega_k^2 = -\frac{2}{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) - i\left(\frac{2}{m} + \pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Ceci termine la preuve du Théorème IV.15. □

Remarque IV.5 . Soit A_0 l'opérateur linéaire défini à partir de l'opérateur A avec l'hypothèse supplémentaire $\alpha = 0$. En utilisant les techniques de calculs du théorème précédent, on peut montrer que les valeurs propres λ_k^0 de l'opérateur A_0 vérifient pour k assez grand:

$$\lambda_k^0 = -i\left[\frac{1}{m} + \pi^2\left(k + \frac{1}{4}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right].$$

Le deuxième résultat de notre étude spectrale concerne la simplicité des valeurs propres λ_k :

Théorème IV.16 . Les valeurs propres λ_k de grand module sont algébriquement simples.

Preuve du Théorème IV.16. On sait d'après (10.4) que

$$\tilde{P}(\omega) = e^{(i-1)\omega} P(\omega) = P_1(\omega) + \psi(\omega) \tag{10.6}$$

où

$$P_1(\omega) = [-i\alpha m \omega^2 + (i-1)(m-\alpha)\omega - 1] + e^{-2\omega}[-i\alpha m \omega^2 + (i+1)(m+\alpha)\omega - 1].$$

et

$$\begin{aligned} \psi(\omega) &= e^{2i\omega}[-i\alpha m\omega^2 - (i+1)(m+\alpha)\omega - 1] \\ &+ e^{2(i-1)\omega}[-i\alpha m\omega^2 + (1-i)(m-\alpha)\omega - 1] + 4e^{(i-1)\omega}(i\alpha m\omega^2 - 1). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\tilde{P}'(\omega) \neq 0$. Tout d'abord, on va vérifier que

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \psi'(\omega) = 0.$$

En effet, un calcul direct nous permet d'avoir que

$$\begin{aligned} \psi'(\omega) &= 2i\psi(\omega) + e^{2i\omega}(-2i\alpha m\omega - (i+1)(m+\alpha)) \\ &- 2e^{2(i-1)\omega}(-i\alpha m\omega^2 + (1-i)(m-\alpha)\omega - 1) + e^{2(i-1)\omega}(-2i\alpha m\omega + (1-i)(m-\alpha)) \\ &+ 8i\alpha m e^{(i-1)\omega} - 4(i+1)(i\alpha m\omega^2 - 1)e^{(i-1)\omega}. \end{aligned}$$

Compte tenu que dans le secteur S_1 considéré auparavant, le terme dominant est $e^{(1-i)\omega}$, on a

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \psi(\omega) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} 8i\alpha m e^{(i-1)\omega} = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} 4(i+1)(i\alpha m\omega^2 - 1)e^{(i-1)\omega} = 0.$$

Il est de même pour les termes $e^{2(i-1)\omega}([-i\alpha m\omega^2 + (1-i)(m-\alpha)\omega - 1])$ et $e^{2(i-1)\omega}(-2i\alpha m\omega + (1-i)(m-\alpha))$.

On a de plus,

$$|e^{2i\omega}| < e^{-2|\omega|\sin \epsilon}.$$

Par conséquent

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} e^{2i\omega}(-2i\alpha m\omega - (i+1)(m+\alpha)) = 0.$$

On peut donc conclure que $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \psi'(\omega) = 0$.

D'autre part, vu la définition de $\tilde{P}(\omega)$ (voir (10.6)), on obtient

$$\tilde{P}(\omega + \tilde{\omega}) - \tilde{P}(\omega) = P_1(\omega + \tilde{\omega}) - P_1(\omega) + \psi(\omega + \tilde{\omega}) - \psi(\omega),$$

pour tout complexe $\tilde{\omega}$ de module assez petit.

Or

$$\begin{aligned} P_1(\omega + \tilde{\omega}) &= -i\alpha m(\omega^2 + 2\omega\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2) + (i-1)(m-\alpha)(\omega + \tilde{\omega}) - 1 \\ &+ e^{-2\omega}e^{-2\tilde{\omega}}\{-i\alpha m(\omega^2 + 2\omega\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2) + (1+i)(m+\alpha)(\omega + \tilde{\omega}) - 1\}. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Les techniques de calculs que nous allons utiliser sont inspirés du travail de [50]. En effet, en écrivant $e^{-2\tilde{\omega}}$ comme suit

$$e^{-2\tilde{\omega}} = 1 - 2\tilde{\omega} + 4\tilde{\omega}^2 R(\tilde{\omega}),$$

où

$$R(\tilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2\tilde{\omega})^i}{(i+2)!},$$

l'équation (10.7) devient

$$\begin{aligned} P_1(\omega + \tilde{\omega}) - P_1(\omega) &= -i\alpha m(2\omega\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2) + (i-1)(m-\alpha)\tilde{\omega} \\ &+ e^{-2\omega} \{-i\alpha m(2\omega\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2) + (1+i)(m+\alpha)\tilde{\omega} \\ &+ (-2\tilde{\omega} + 4\tilde{\omega}^2 R(\tilde{\omega})) [-i\alpha m(\omega^2 + 2\omega\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2) + (1+i)(m+\alpha)(\omega + \tilde{\omega}) - 1]\}. \end{aligned}$$

Ce qui donne après un calcul direct

$$\begin{aligned} &P_1(\omega + \tilde{\omega}) - P_1(\omega) + 4i\tilde{\omega}^4 \alpha m R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega} \\ &+ \tilde{\omega}^3 e^{-2\omega} [8i\alpha m \omega R(\tilde{\omega}) - 2i\alpha m - 4(1+i)(m+\alpha)R(\tilde{\omega})] \\ &+ \tilde{\omega}^2 [i\alpha m(1 - 4\omega e^{-2\omega} + e^{-2\omega}) - 2(1+i)(m+\alpha)e^{-2\omega} + 4i\alpha m \omega^2 R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega} \\ &+ 4R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega} (1 - (1+i)(m+\alpha)\omega)] \\ &= \tilde{\omega} [-2i\alpha m \omega + (i-1)(m-\alpha) \\ &+ e^{-2\omega} \{-2i\alpha m \omega + (1+i)(m+\alpha) + 2i\alpha m \omega^2 - 2\omega(1+i)(m+\alpha) + 2\}] \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\tilde{\omega}|} (|P_1(\omega + \tilde{\omega}) - P_1(\omega)| + 4\alpha m |\tilde{\omega}^3 R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega}| \\ &+ |\tilde{\omega}^2| |e^{-2\omega}| |8i\alpha m \omega R(\tilde{\omega}) - 2i\alpha m - 4(1+i)(m+\alpha)R(\tilde{\omega})| \\ &+ |\tilde{\omega}| |i\alpha m(1 - 4\omega e^{-2\omega} + e^{-2\omega}) - 2(1+i)(m+\alpha)e^{-2\omega} + 4i\alpha m \omega^2 R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega} \\ &+ 4R(\tilde{\omega}) e^{-2\omega} (1 - (1+i)(m+\alpha)\omega)| \\ &\geq |-2i\alpha m \omega + (i-1)(m-\alpha) \\ &+ e^{-2\omega} \{-2i\alpha m \omega + (1+i)(m+\alpha) + 2i\alpha m \omega^2 - 2\omega(1+i)(m+\alpha) + 2\}|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &|-2i\alpha m \omega + (i-1)(m-\alpha) \\ &+ e^{-2\omega} \{-2i\alpha m \omega + (1+i)(m+\alpha) + 2i\alpha m \omega^2 - 2\omega(1+i)(m+\alpha) + 2\}| \\ &\geq |e^{-2\omega} |Q_2(\omega)| - |Q_1(\omega)||, \end{aligned}$$

où C est une constante positive telle que $|\Re \omega| < C$ et Q_1, Q_2 sont deux polynômes de degré 2 et 1 respectivement. De plus, on peut toujours s'arranger pour que $|e^{-2C} |Q_2(\omega)| - |Q_1(\omega)|| > 0$. Ainsi, en faisant tendre $\tilde{\omega}$ vers 0, on obtient

$$|P'_1(\omega)| > 0.$$

Donc les zéros de grand module de P_1 sont simples. Montrons qu'il est de même pour les zéros de grand module de \tilde{P} . En effet, (10.6) implique que

$$\tilde{P}'(\omega) = P'_1(\omega) + \psi'(\omega).$$

Ce qui implique que

$$|\tilde{P}'(\omega)| \geq ||P'_1(\omega)| - |\tilde{P}'(\omega) - P'_1(\omega)||. \quad (10.8)$$

Mais on sait que $\psi'(\omega) = 0$ pour $|\omega|$ assez grand. Ce qui est équivalent à dire que pour tout $\delta > 0$, il existe $R_\delta > 0$ telle que $|\psi'(\omega)| < \delta$. De plus, on vient de démontrer que pour $|\omega| > R$, il existe $\delta_1 > 0$ telle que $|P'_1(\omega)| > \delta_1$. En prenant $|\omega| > \sup(R, R_\delta)$ et $\delta = \delta_1/2$, on peut affirmer d'après (10.8) que $|\tilde{P}'(\omega)| > 0$. Le Théorème IV.16 est donc démontré. \square

V

On The Stabilization of a Vibrating Equation

A paraître dans **Nonlinear Analysis TMA**

ON THE STABILIZATION OF A VIBRATING EQUATION

B. CHENTOUF C. Z. XU and G. SALLET

INRIA-Lorraine (CONGE project) & URA CNRS 399 (MMAS). ISGMP,
Bât. A, Université de Metz, Ile de Saulcy 57045 Metz cedex 01 (France).
e-mail : chentouf@ saulcy.loria.fr

Abstract. This paper deals with boundary stabilization of a vibrating equation. We propose a stabilizing nonlinear boundary feedback law which only depends on boundary velocities. Uniform decay rate and rational decay rate of the energy are also estimated in terms of growth conditions on the feedback functions.

Key words. Boundary velocity feedback, Nonlinear contractions semigroup, Asymptotic stability, LaSalle's invariance principle, Decay rate estimate, Multiplier.

V.1 Introduction and main results

We consider the following modelization of a flexible torque arm [13], controlled by the two feedback laws U_1 and U_2 to be determined:

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) - (ay_x)_x(x, t) + \alpha y_t(x, t) + \beta y(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (ay_x)(0, t) = \epsilon_1 U_1(t), & t > 0, \\ (ay_x)(1, t) = \epsilon_2 U_2(t), & t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

where

$$\begin{cases} \alpha \geq 0, \beta > 0, \epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0, \epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0, \\ a \in W^{1,\infty}(0, 1), a(x) \geq a_0 > 0 \text{ for all } x \in [0, 1]. \end{cases} \quad (1.2)$$

In (1.1), U_1 and U_2 will be determined such that the closed loop system is asymptotically stable, i.e., $(y(\cdot, t), y_t(\cdot, t)) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ in some functional space. In this paper, we prove that for all $\beta > 0$ and for all $\alpha \geq 0$, the system (1.1) is asymptotically

stabilized by the nonlinear feedback law depending only on the boundary velocities :

$$\begin{cases} U_1(t) = f(y_t(0, t)), \\ U_2(t) = g(y_t(1, t)), \end{cases} \quad (F)$$

where f and g are suitable nonlinear functions. The proof is based on LaSalle's principle. Moreover, we show that the closed loop system is exponentially stable under some conditions on f , g and $a(x)$. Actually, we have a great degree of freedom to determine the feedback functions f and g (see fig. V.1 below). Decay rate estimates of the energy are given for the different feedback laws proposed. The multiplier method is successfully used. Furthermore, the exponential or strong stability that we obtain here is **global**.

In the case where $\beta = 0$, the boundary stabilization of (1.1) has been studied by many authors. Rao [15] has proved that the feedback law

$$\begin{cases} U_1(t) = \gamma y(0, t) + F(y_t(0, t)), \\ U_2(t) = -My_{tt}(1, t), \quad M, \gamma > 0, \end{cases}$$

stabilizes asymptotically the system under a suitable choice of F . A stabilization result has been also obtained by Conrad and Rao [14] with the following feedback :

$$\begin{cases} U_1(t) = \alpha y(0, t) + F(y_t(0, t)), \\ U_2(t) = -\alpha y(1, t) - F(y_t(1, t)), \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

In [19], for $a(x) = a_1x + a_0$ the authors have established asymptotic stabilization with

$$\begin{cases} U_1(t) = 0, \\ U_2(t) = -k_1 y(1, t) - h(y_t(1, t)), \quad k_1 > 0, \end{cases}$$

where h is an appropriate function. A stabilization result has been obtained in [13] and [18] by the feedback

$$\begin{cases} U_1(t) = k_p y(0, t) + k_v y_t(0, t) + \int_0^1 G(x) y(x, t) dx + \frac{k_v}{k_p} \int_0^1 G(x) y_t(x, t) dx, \\ U_2(t) = 0, \end{cases}$$

with $k_p, k_v > 0$ and $G(x)$ is a function in $L^2(0, 1)$. Recently, it was proved in [21] that the uniform stabilization can be assured if

$$\begin{cases} U_1(t) = m y_{tt}(0, t) + \alpha \beta y_t(0, t) - \gamma y_{xt}(0, t), \\ U_2(t) = -M y_{tt}(1, t). \end{cases}$$

or if

$$\begin{cases} U_1(t) = m y_{tt}(0, t) + (\beta + \alpha \gamma) y_t(0, t) - \gamma y_{xt}(0, t), \\ U_2(t) = -M y_{tt}(1, t). \end{cases}$$

The stabilization problem of a quasilinear string equation has been extensively studied (see [8], [16] and the references therein). For instance, in Slemrod's work [8], at the difference of our model the nonlinear string is supposed fixed at one end and controlled at the other end. Slemrod has proposed a stabilizing feedback law which contains the boundary velocity and proved exponential stability of the controlled system. However, he has obtained the exponential stabilization only for **small and smooth** initial conditions. In all the references cited above, the stabilizing feedback laws for U_1 or U_2 contain not only boundary velocities but also a boundary position term.

Moreover, the stabilization problem for the system (1.1) with $\beta \neq 0$ has been considered in Haraux [12] and Komornik [17]. Since our objective is to stabilize the system by means of feedback depending only on boundary velocity, we have to justify why we choose $\beta > 0$. If $\beta = 0$ and the feedback law only depends on velocities, we may encounter the situation where the closed-loop system is not well-posed in terms of the semigroups in the Hilbert space $H_0^1 \times L^2(0, 1)$, where

$$H_0^m = \left\{ f \in H^m(0, 1); \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}, \text{ for } m = 1, 2, \dots$$

As a matter of fact, let $U_1(t) = ky_t(0, t), U_2(t) = -ky_t(1, t)$ ($k > 0$) and consider the controlled system in the linear case :

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) - y_{xx}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ y_x(0, t) = ky_t(0, t), & t > 0, \\ y_x(1, t) = -ky_t(1, t), & t > 0. \end{cases}$$

From this system, define the operator \tilde{A} by:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{(y, z) \in H_0^2 \times H_0^1; y_x(0) = kz(0), y_x(1) = -kz(1)\},$$

and

$$\tilde{A}(y, z) = (z, y_{xx}), \quad \forall (y, z) \in \mathcal{D}(\tilde{A}).$$

It is easy to show that the operator \tilde{A} is dissipative in the Hilbert space $H_0^1 \times L^2(0, 1)$ equipped with the the inner product $\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle = \int_0^1 (f_{1x}f_{2x} + g_1g_2) dx$. We claim that \tilde{A} is not a generator of a C_0 -semigroup on $H_0^1 \times L^2(0, 1)$. Suppose the contrary to be true. Necessarily, the semigroup is a contraction one. This implies that $R(I - \tilde{A}) = H_0^1 \times L^2(0, 1)$ (see p. 14, [7]). However there is no (y, z) in $\mathcal{D}(\tilde{A})$ such that $(I - \tilde{A})(y, z) = (f, g)$ with

$$\begin{cases} f(x) = 6x^2 - 6x + 1, \\ g(x) = 1 - f(x). \end{cases}$$

So is proved the claim. On the other hand, if $\alpha = 0$ and $\beta > 0$, the system (1.1) is conservative without control. Because of these reasons, we suppose that $\beta > 0$ throughout the paper.

With the feedback law in (F), we obtain the closed-loop system :

$$\begin{cases} y_{tt}(x, t) - (ay_x)_x(x, t) + \alpha y_t(x, t) + \beta y(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ (ay_x)(0, t) = \epsilon_1 f(y_t(0, t)), & t > 0, \\ (ay_x)(1, t) = \epsilon_2 g(y_t(1, t)), & t > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Introduce the energy associated to (1.3) as follows

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\beta y^2(x, t) + y_t^2(x, t) + a(x)y_x^2(x, t)) dx.$$

An easy formal computation shows that

$$\dot{E}(t) = \epsilon_2 y_t(1, t)g(y_t(1, t)) - \epsilon_1 y_t(0, t)f(y_t(0, t)) - \alpha \int_0^1 y_t^2(x, t) dx. \quad (1.4)$$

To make the energy decreasing, we assume in (1.4) that f and g satisfy the condition : $f(\eta)\eta \geq 0$ and $g(\eta)\eta \leq 0$ for all $\eta \in \mathbb{R}$. Let the Hilbert space $\mathcal{H} = H^1(0, 1) \times L^2(0, 1)$ equipped with the inner product

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (af_{1x}f_{2x} + \beta f_1f_2 + g_1g_2) dx.$$

Define a nonlinear operator A by

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (y, z); y \in H^2(0, 1), z \in H^1(0, 1), \begin{array}{l} (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(z(0)) \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(z(1)) \end{array} \right\}, \quad (1.5)$$

and for all $(y, z) \in \mathcal{D}(A)$

$$A(y, z)(x) = (-z, -(ay_x)_x + \beta y + \alpha z). \quad (1.6)$$

With the initial data $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, the closed-loop system (1.3) can be formulated in the form of evolution equation over \mathcal{H}

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) + A\Phi(t) = 0, \\ \Phi(0) = \phi, \end{cases} \quad (\Sigma)$$

where $\Phi(t) = (y(\cdot, t), y_t(\cdot, t))$.

Throughout this paper, f and g are assumed to satisfy the hypothesis (H)

$$\begin{cases} f \in C^0(\mathbb{R}) \text{ is increasing such that } f(0) = 0, \quad f(\eta)\eta > 0 \quad \forall \eta \neq 0, \\ g \in C^0(\mathbb{R}) \text{ is decreasing such that } g(0) = 0, \quad g(\eta)\eta < 0 \quad \forall \eta \neq 0. \end{cases} \quad (H)$$

Our main results are stated as follows.

Theorem V.1 . For any initial data $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}$, the energy $E(t)$ of (Σ) tends asymptotically to zero in \mathcal{H} as $t \rightarrow +\infty$.

Theorem V.2 . We assume that $\alpha = 0$ (without damping) and that $a(x)$ is a monotone function. Let (y, z) be the solution of (Σ) stemmed from $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}$.

i) If there exist positive constants η_1, η_2, η_3 and η_4 such that for all $x \in \mathbb{R}$ (see fig. V.1),

$$\eta_1 |x| \leq |f(x)| \leq \eta_2 |x|, \quad \eta_3 |x| \leq |g(x)| \leq \eta_4 |x|, \quad (H1)$$

there exists a constant $\omega > 0$ such that

$$E(t) \leq \exp\left(1 - \frac{t}{\omega}\right) E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

ii) If there exist positive constants η_1, η_2, η_3 and η_4 and $p > 1$ such that for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta_1 \min\{|x|, |x|^p\} \leq |f(x)| \leq \eta_2 |x|, \quad \eta_3 \min\{|x|, |x|^p\} \leq |g(x)| \leq \eta_4 |x|, \quad (H2)$$

then, given any $M > 1$ there exists a constant $\omega > 0$ depending on $E(0)$ such that

$$E(t) \leq M^{\frac{2}{p+1}} E(0) (1 + \omega t)^{-\frac{2}{p-1}}, \quad \forall t \geq 0.$$

iii) If there exist positive constants η_1, η_2, η_3 and η_4 and $0 < p < 1$ such that for all $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta_1 |x| \leq |f(x)| \leq \eta_2 \max\{|x|, |x|^p\}, \quad \eta_3 |x| \leq |g(x)| \leq \eta_4 \max\{|x|, |x|^p\}, \quad (H3)$$

then, given any $M > 1$ there exists a constant $\omega > 0$ depending on $E(0)$ such that

$$E(t) \leq M^{\frac{2p}{p+1}} E(0) (1 + \omega t)^{-\frac{2p}{1-p}}, \quad \forall t \geq 0.$$

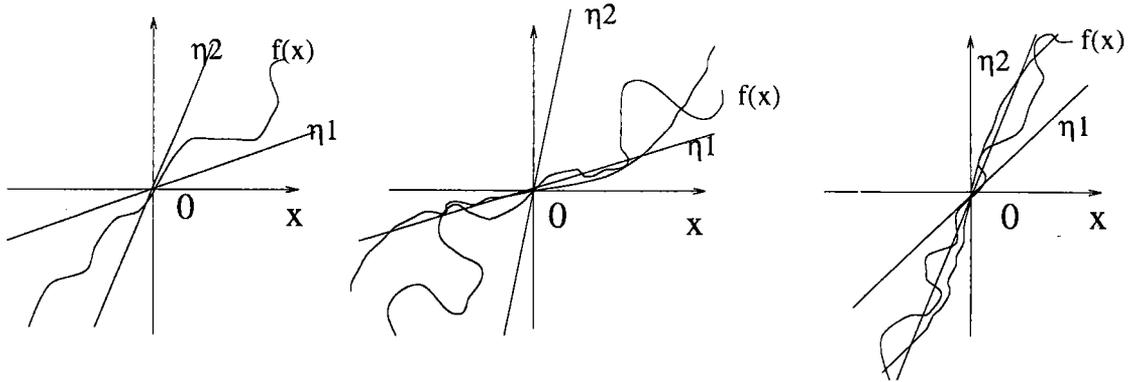


Figure V.1. Illustration of nonlinear function f

Theorem V.3 . Assume that $\alpha > 0$ (with damping) and let (y, z) be the solution of (Σ) stemmed from $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}$. Then, all the assertions i), ii) and iii) of Theorem V.2 are also true without assuming $a(x)$ to be monotone.

The paper is organized as follows. The next section is devoted to the proof of our main results. It is divided into three subsections. In the first one, we prove that our closed loop system is well-posed in terms of semigroups theory. The second subsection contains the proof of Theorem V.1. The third subsection gives a proof of Theorem V.2 and Theorem V.3. A short conclusion ends our paper.

V.2 Proof of the main results

V.2.1 Well-posedness of the system (Σ)

Lemma V.1 . The operator A defined by (1.5) and (1.6) is maximal monotone on \mathcal{H} with the domain $\mathcal{D}(A)$ dense in \mathcal{H} . So, $-A$ is the generator of a continuous semigroup of contractions $S(t)$ on \mathcal{H} .

Proof of Lemma V.1. Let $(y, z), (\hat{y}, \hat{z}) \in \mathcal{D}(A)$. A straightforward computation shows that:

$$\begin{aligned} & \langle A(y, z) - A(\hat{y}, \hat{z}), (y, z) - (\hat{y}, \hat{z}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= -\epsilon_2 (z(1) - \hat{z}(1)) (g(z(1)) - g(\hat{z}(1))) + \epsilon_1 (z(0) - \hat{z}(0)) (f(z(0)) - f(\hat{z}(0))) \\ &+ \alpha \int_0^1 (z - \hat{z})^2 dx. \end{aligned}$$

By virtue of (1.2) and (H), we see that these three terms are non negative. This proves the monotonicity of the operator A .

It remains to show the maximality of A , i.e, for any given $(U, V) \in \mathcal{H}$, there exists $(y, z) \in \mathcal{D}(A)$ such that $(I + A)(y, z) = (U, V)$. Equivalently, we seek y and z satisfying

$$\begin{cases} y - z = U, \\ z - (ay_x)_x + \alpha z + \beta y = V, \\ (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(z(0)), \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(z(1)), \\ y \in H^2(0, 1), z \in H^1(0, 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

Eliminating the unknown z in (2.1), one obtains

$$\begin{cases} (\alpha + \beta + 1)y - (ay_x)_x = (\alpha + 1)U + V, \\ (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(y(0) - U(0)), \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(y(1) - U(1)), \\ y \in H^2(0, 1). \end{cases} \quad (2.2)$$

Now let us define the function $J(\cdot)$ on $H^1(0, 1)$ by

$$\begin{aligned} J(\psi) = & \frac{1}{2} \int_0^1 [a\psi_x^2 + (\alpha + \beta + 1)\psi^2] dx - \int_0^1 [(\alpha + 1)U + V] \psi dx \\ & + F(\psi(0) - U(0)) - G(\psi(1) - U(1)), \end{aligned}$$

where

$$F(x) = \epsilon_1 \int_0^x f(\xi) d\xi \quad \text{and} \quad G(x) = \epsilon_2 \int_0^x g(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

From (1.2) and (H), we deduce that F and $-G$ are convex, non negatives and they are in $C^1(\mathbb{R})$. Then, it easy to check that $J(\cdot)$ is convex and coercive. Moreover, one can verify that $J(\cdot)$ is continuous in $H^1(0, 1)$. Hence by a minimization theorem (Proposition 38.15, pp.155, [9]), there exists a function $y \in H^1(0, 1)$ such that

$$J(y) = \inf_{\psi \in H^1(0, 1)} J(\psi).$$

This implies that the function $\Theta : \lambda \longrightarrow \Theta(\lambda) = J(y + \lambda\psi)$ admits a minimum at $\lambda = 0$ and thus

$$\frac{d}{d\lambda} (J(y + \lambda\psi))|_{\lambda=0} = 0, \quad \forall \psi \in H^1(0, 1).$$

This means that for any $\psi \in H^1(0, 1)$, we have

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta + 1) \int_0^1 y\psi \, dx + \int_0^1 ay_x\psi_x \, dx - \int_0^1 [(\alpha + 1)U + V] \psi \, dx \\ & + \epsilon_1\psi(0) f(y(0) - U(0)) - \epsilon_2\psi(1) g(y(1) - U(1)) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

In particular, for any $\psi \in C_0^\infty(0, 1)$

$$- \int_0^1 ay_x\psi_x \, dx = \int_0^1 [(\alpha + \beta + 1)y - (\alpha + 1)U - V] \psi \, dx. \quad (2.5)$$

This implies that

$$\begin{cases} y \in H^2(0, 1), \\ (\alpha + \beta + 1)y - (ay_x)_x = (\alpha + 1)U + V. \end{cases} \quad (2.6)$$

Integrating by parts in (2.4) and using (2.6), we show that

$$\begin{cases} (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(y(0) - U(0)), \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(y(1) - U(1)). \end{cases} \quad (2.7)$$

Combining (2.6) and (2.7), we deduce that y is a solution of system (2.2). Now we define an element (y, z) by

$$\begin{cases} y, \text{ solution of (2.2)}, \\ z = y - U, \end{cases}$$

which satisfies clearly system (2.1) and thus the maximality of the operator A is proved.

The density of $\mathcal{D}(A)$ in \mathcal{H} is a direct consequence of monotonicity, maximality of A and the assumptions $f(0) = g(0) = 0$. \square

The following proposition is a direct consequence of Lemma V.1 and the method of Brezis [3].

Proposition V.1 . i) For any initial data $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$, the equation (Σ) admits a unique solution $(y, z) \in \mathcal{D}(A)$ such that

$$\frac{d}{dt}(y, z) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

The solution (y, z) is given by $(y, z) = S(t)(\phi_1, \phi_2)$, for all $t \geq 0$. Moreover, the function $t \mapsto \|A(y, z)\|_{\mathcal{H}}$ is decreasing.

ii) For any initial data $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{H}$, the equation (Σ) admits a unique weak solution $(y, z) = S(t)(\phi_1, \phi_2)$ such that $(y, z) \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$.

V.2.2 Proof of Theorem V.1

Notice that by a standard argument of density of $\mathcal{D}(A)$ in \mathcal{H} and the contraction of the semigroup $S(t)$, it suffices to prove Theorem V.1 for any initial data $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$. Let $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$. By virtue of i) of Proposition V.1, we know that the trajectory of solution $\{(y, z)\}_{t \geq 0}$ is a bounded set for the graph norm. Furthermore, one can show that the injection $i : (\mathcal{D}(A), \| \cdot \|_{\mathcal{D}(A)}) \rightarrow \mathcal{H}$ is compact. This implies that the trajectory is precompact in \mathcal{H} . Applying LaSalle's invariance principle ([5], [4]), we deduce that the ω -limit set

$$\omega(\phi_1, \phi_2) = \left\{ (\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{H}; (\psi_1, \psi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)(\phi_1, \phi_2) \text{ with } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \right\}$$

is non empty, compact, invariant under the semigroup $S(t)$ and

$$S(t)(\phi_1, \phi_2) \longrightarrow \omega(\phi_1, \phi_2) \quad \text{as } t \rightarrow +\infty.$$

Moreover, we deduce from the maximality of A that $\omega(\phi_1, \phi_2) \subset \mathcal{D}(A)$ (see [3]). In order to prove the asymptotic stability, it is sufficient to show that the ω -limit set $\omega(\phi_1, \phi_2)$ reduces to $\{0\}$. For this, let $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \in \omega(\phi_1, \phi_2)$ and

$$(\tilde{y}, \tilde{z}) = S(t)(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \subset \omega(\phi_1, \phi_2) \subset \mathcal{D}(A).$$

On the other hand, $\|(\tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)\|_{\mathcal{H}}$ is a constant [12]. Thus

$$\frac{d}{dt} \|(\tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

This, together with i) of Proposition V.1, implies that

$$\langle A(\tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{y}, \tilde{z}) \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.8)$$

Now, from the proof of Lemma V.1, we obtain

$$\begin{aligned} \langle A(\tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{y}, \tilde{z}) \rangle_{\mathcal{H}} &= \epsilon_1 \tilde{z}(0) \cdot f(\tilde{z}(0)) \\ &\quad - \epsilon_2 \tilde{z}(1) \cdot g(\tilde{z}(1)) + \alpha \|\tilde{y}\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Without loss of generality, we assume that $\epsilon_2 \neq 0$. The other cases can be studied in the same way. We deduce from (2.8), (2.9) and (H) that \tilde{y} verifies the following system

$$\begin{cases} \tilde{y}_{tt}(x, t) - (a\tilde{y}_x)_x(x, t) + \beta\tilde{y}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ \tilde{y}_x(0, t) = \tilde{y}_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ \tilde{y}_t(1, t) = 0, & t > 0, \\ \alpha \|\tilde{y}\|_{L^2(0,1)}^2 = 0, \\ (\tilde{y}(0), \tilde{y}_t(0)) = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \in \omega(\phi_1, \phi_2). \end{cases} \quad (2.10)$$

If $\alpha \neq 0$, then it is obvious that $\tilde{y} = \tilde{y}_t = 0$. Otherwise, let us consider as in [20] the following linear operator

$$\mathcal{D}(A_0) = \{(y, z); y \in H^2(0, 1), z \in H^1(0, 1), y_x(0) = 0, y_x(1) = 0\},$$

and for all $(y, z) \in \mathcal{D}(A_0)$,

$$A_0(y, z)(x) = (-z, -(ay_x)_x + \beta y).$$

A complex number μ is an eigenvalue of A_0 if and only if there exists a non-trivial $(y, z) \in \mathcal{D}(A_0)$ such that $(\mu - A_0)(y, z) = 0$, i.e,

$$\begin{cases} \mu y = z, \\ (ay_x)_x - \beta y = \mu^2 y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Thanks to a classical result of Mikhaïlov [6], the spectral system

$$\begin{cases} (ay_x)_x - \beta y = \lambda y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0, \end{cases}$$

admits an infinity of real eigenvalues $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$, such that $(\lambda_n) \rightarrow -\infty$ as $n \rightarrow +\infty$ and the associated eigenfunctions v_1, v_2, \dots form an orthonormal basis of $L^2(0, 1)$. Thus, the eigenvalues μ_k and the associated eigenfunctions V_k^* of the operator A_0 are given by

$$\begin{cases} \mu_k = \pm i\sqrt{-\lambda_k}, k = 1, 2, \dots \\ V_k^* = (v_k, \pm i\sqrt{-\lambda_k} v_k), k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

We note that for all $k = 1, 2, \dots$

$$\|V_k^*\|_{\mathcal{H}}^2 = -2\lambda_k.$$

$$\text{Set } \begin{cases} \mu_k = i\sqrt{-\lambda_k}, & k = 1, 2, \dots \\ \mu_{-k} = -i\sqrt{-\lambda_k}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{and } \begin{cases} V_k = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda_k}} \left(v_k, -i\sqrt{-\lambda_k} v_k \right), & k = 1, 2, \dots \\ V_{-k} = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda_k}} \left(v_k, i\sqrt{-\lambda_k} v_k \right), & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

which form an orthonormal basis of \mathcal{H} . Then, the solution of (2.10) is given by

$$(\tilde{y}, \tilde{y}_t)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{-\mu_k t} V_k, \quad (2.12)$$

where $C_k = \langle (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2), V_k \rangle_{\mathcal{H}}$ (for the complexified scalar product), for any $k \in \mathbb{Z}$. One finds that

$$\begin{cases} C_k = a_k + ib_k, & k = 1, 2, \dots \\ C_{-k} = a_k - ib_k, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.13)$$

with

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda_k}} \int_0^1 (a\tilde{\phi}_{1x} v_{kx} + \beta\tilde{\phi}_1 v_k) dx \quad \text{and} \quad b_k = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \tilde{\phi}_2 v_k dx. \quad (2.14)$$

After an easy computation, we get from (2.12) and (2.14)

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) - b_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda_n}} v_n, \\ \tilde{y}_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) \sqrt{2} v_n. \end{cases} \quad (2.15)$$

Following the method used by F. Conrad and M. Pierre [11], we will prove that $a_n = b_n = 0$ for any $n = 1, 2, \dots$ and thus $(\tilde{y}(t), \tilde{y}_t(t)) = (0, 0)$. Indeed, we know from the theory of linear differential equations that $v_n(1) \neq 0$ for $n = 1, 2, \dots$. Moreover, since $(\tilde{y}(0), \tilde{y}_t(0)) \in \mathcal{D}(A_0)$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{-\lambda_n} v_n \in L^2(0,1), \\ \tilde{y}_t(0) = \tilde{\phi}_2 = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n \in H^1(0,1), \end{array} \right. \quad (2.16)$$

and since $(v_n)_{n \geq 1}$ (resp. $\left(\frac{v_n}{\sqrt{-\lambda_n}}\right)_{n \geq 1}$) is an orthonormal basis for $L^2(0,1)$ (resp. $H^1(0,1)$), one can verify that the series defining $\tilde{y}_t(t)$ in (2.15) converges in $H^1(0,1)$ uniformly in t . By continuity of the trace operator $u \mapsto u(1)$ in $H^1(0,1)$, the equation $\tilde{y}_t(1, t) = 0$ reads as

$$\begin{aligned} \tilde{y}_t(1, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) v_n(1) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{\mu_k t} v_k(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where

$$v_{-n} = -v_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

On the other hand, the distribution of eigenvalues $\sqrt{-\lambda_n}$ is given in [2] (Theorem 9, p. 303) by

$$\sqrt{-\lambda_n} = n\pi + \frac{\mathcal{O}(1)}{n},$$

which implies that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{-\lambda_{n+1}} - \sqrt{-\lambda_n} \right) = \pi > 0.$$

Now, let

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} C_n e^{\mu_n t} v_n(1), \quad t > 0.$$

We know from (2.17) that

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(t) = 0 \text{ uniformly in } t \in [-T, T].$$

Then, using Ingham's inequality [1], we deduce that there exists a constant $\gamma > 0$ such that

$$\sum_{n=-N}^{n=N} |C_n v_n(1)|^2 \leq \gamma \int_{-T}^T |S_N(t)|^2 dt.$$

This implies, when $N \rightarrow +\infty$, that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_k V_k(1)|^2 \leq 0.$$

This means that $C_k = 0$ for any $k \in \mathbb{Z}$ and thus $(\tilde{y}, \tilde{y}_t) = 0$. Therefore, the proof of Theorem V.1 is complete. \square

V.2.3 Proof of Theorem V.2 and Theorem V.3

Proof of Theorem V.2 . i) First, we assume that $a(x)$ is monotone non-increasing. Let us multiply equation (1.1) by $2x(C_0 + \delta)y_x + C_0y$ (where $C_0, \delta > 0$ are given later in (2.24) and (2.27)) and integrate with respect to x and t . A straightforward computation shows that

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(C_0 + (\delta + C_0) \left(1 - x \frac{a_x}{a} \right) \right) a y_x^2 - \delta \beta y^2 \right] dx dt \\ & + (C_0 + \delta) \int_{T_1}^{T_2} \left[-y_t^2(1, t) - \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2(y_t(1, t)) + \beta y^2(1, t) \right] dt \\ & = - \int_0^1 \left[2(C_0 + \delta) x y_t y_x + C_0 y_t y \right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx \\ & + C_0 \int_{T_1}^{T_2} [\epsilon_2 g(y_t(1, t)) y(1, t) - \epsilon_1 f(y_t(0, t)) y(0, t)] dt. \end{aligned} \tag{2.18}$$

We need the following important inequality in $H^1(0, 1)$ whose proof is postponed to the Appendix. For any $\theta > 1$ and $u \in H^1(0, 1)$, we have

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \left(\frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \right) u^2(1) + \left(\frac{\theta^4}{\theta^2 - 1} \right) \int_0^1 u_x^2(x) dx. \tag{2.19}$$

It follows that

$$-\delta \beta \int_0^1 y^2(x, t) dx \geq - \left(\frac{\delta \beta \theta^2}{\theta^2 - 1} \right) y^2(1, t) - \frac{\delta \beta \theta^4}{a_0(\theta^2 - 1)} \int_0^1 a y_x^2(x, t) dx. \tag{2.20}$$

By means of Cauchy-Schwartz's inequality and the monotonic decrease of $E(t)$, we obtain

$$-\int_0^1 \left[2(C_0 + \delta)xy_t y_x + C_0 y_t y \right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx \leq M_1 E(T_1), \quad (2.21)$$

where

$$M_1 = \max \left(2 \frac{C_0 + \delta}{\sqrt{a_0}}, \frac{C_0}{\sqrt{\beta}} \right).$$

Moreover, since $a(x)$ is a positive monotone non-increasing function, we have

$$C_0 + (\delta + C_0)(1 - x \frac{a_x}{a}) \geq \delta + 2C_0 \quad \forall x \in (0, 1). \quad (2.22)$$

Substituting (2.20), (2.21) and (2.22) into (2.18), we get :

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left((\delta + 2C_0) - \frac{\delta \beta \theta^4}{a_0(\theta^2 - 1)} \right) a y_x^2 \right] dx dt \\ & + \left(C_0 + \delta - \frac{\delta \theta^2}{\theta^2 - 1} \right) \int_{T_1}^{T_2} \beta y^2(1, t) dt \\ & \leq M_1 E(T_1) + (C_0 + \delta) \int_{T_1}^{T_2} \left[y_t^2(1, t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2(y_t(1, t)) \right] dt \\ & + C_0 \int_{T_1}^{T_2} [\epsilon_2 g(y_t(1, t)) y(1, t) - \epsilon_1 f(y_t(0, t)) y(0, t)] dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

We choose C_0 as

$$C_0 = \max \left\{ \frac{\delta \beta \theta^4}{2a_0(\theta^2 - 1)}, 3 + \frac{\delta}{\theta^2 - 1} \right\}, \quad (2.24)$$

so that

$$(\delta + 2C_0) - \frac{\delta \beta \theta^4}{a_0(\theta^2 - 1)} \geq \delta \quad \text{and} \quad C_0 + \delta - \frac{\delta \theta^2}{\theta^2 - 1} \geq 3.$$

Then, we can rewrite (2.23) as

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 (\delta y_t^2 + \delta a y_x^2) dx dt + 3\beta \int_{T_1}^{T_2} y^2(1, t) dt \\ & \leq M_1 E(T_1) + (C_0 + \delta) \int_{T_1}^{T_2} \left[y_t^2(1, t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2(y_t(1, t)) \right] dt \\ & + C_0 \int_{T_1}^{T_2} [\epsilon_2 g(y_t(1, t)) y(1, t) - \epsilon_1 f(y_t(0, t)) y(0, t)] dt. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Assume that $\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0$. (Otherwise, it is sufficient to consider one term). Applying Cauchy-Schwarz's inequality, we have for any $C_3, C_4 > 0$

$$\begin{cases} C_0\epsilon_2g(y_t(1,t))y(1,t) \leq \frac{1}{2} \left[C_0^2\epsilon_2^2C_3^2g^2(y_t(1,t)) + \frac{1}{C_3^2}y^2(1,t) \right], \\ -C_0\epsilon_1f(y_t(0,t))y(0,t) \leq \frac{1}{2} \left[C_0^2\epsilon_1^2C_4^2f^2(y_t(0,t)) + \frac{1}{C_4^2}y^2(0,t) \right]. \end{cases} \quad (2.26)$$

On the other hand, a direct computation gives

$$y^2(0,t) \leq y^2(1,t) + \int_0^1 \left[y^2(x,t) + \frac{1}{a_0}ay_x^2(x,t) \right] dx,$$

which implies together with (2.19) that

$$y^2(0,t) \leq \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \right) y^2(1,t) + \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2 - 1} \right) \int_0^1 ay_x^2(x,t)dx.$$

Using this inequality and (2.26), we find that

$$\begin{aligned} & C_0 \int_{T_1}^{T_2} [\epsilon_2g(y_t(1,t))y(1,t) - \epsilon_1f(y_t(0,t))y(0,t)] dt \\ & \leq \frac{1}{2a_0C_4^2} \left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2 - 1} \right) \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 ay_x^2 dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \right) \right) \int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t) dt \\ & + \frac{C_0^2}{2} \int_{T_1}^{T_2} [\epsilon_2^2C_3^2g^2(y_t(1,t)) + \epsilon_1^2C_4^2f^2(y_t(0,t))] dt. \end{aligned}$$

Inserting the above inequality into (2.25), and choosing δ , C_3 and C_4 such that

$$\begin{cases} \delta = \frac{4\beta}{a_0} \left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2 - 1} \right) \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \right)^{-1}, & C_4^2 \geq \frac{1}{a_0\delta} \left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2 - 1} \right), \\ C_3^2 \geq 1/\beta, \end{cases} \quad (2.27)$$

we get

$$\begin{aligned}
& \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left(\delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \right) dx dt + \frac{\beta}{2} \int_{T_1}^{T_2} y^2(1, t) dt \\
& \leq M_1 E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} \left[(C_0 + \delta) y_t^2(1, t) + \left(\frac{(C_0 + \delta) \epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2 \epsilon_2^2 C_3^2}{2} \right) g^2(y_t(1, t)) \right] dt \\
& + \frac{C_0^2 \epsilon_1^2 C_4^2}{2} \int_{T_1}^{T_2} f^2(y_t(0, t)) dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Since f and g satisfy the hypothesis (H1) in i) of Theorem V.2, we deduce from (2.28) that

$$\begin{aligned}
& \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left(\delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \right) dx dt + \frac{\beta}{2} \int_{T_1}^{T_2} y^2(1, t) dt \\
& \leq M_1 E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} [M_2 y_t(0, t) f(y_t(0, t)) - M_3 y_t(1, t) g(y_t(1, t))] dt,
\end{aligned}$$

with

$$M_2 = \frac{C_0^2 \epsilon_1^2 C_4^2 \eta_2^2}{2\eta_1}, \quad M_3 = \frac{(C_0 + \delta)}{\eta_3} + \frac{\eta_4^2}{\eta_3} \left(\frac{(C_0 + \delta) \epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2 \epsilon_2^2 C_3^2}{2} \right).$$

Using once again (2.19), it is easy to see that

$$\beta y^2(1, t) + \delta \int_0^1 a y_x^2 dx \geq M_4 \int_0^1 (\beta y^2 + a y_x^2) dx,$$

where δ is given by (2.27) and $M_4 = \left(\frac{\theta^2}{\theta^2 - 1} \right)^{-1} \min(\beta, \beta / \|a\|_\infty)$.

Then, combining the two last inequalities with (1.4) gives

$$\int_{T_1}^{T_2} E(t) dt \leq \frac{M}{C} E(T_1),$$

with

$$C = \min(2\delta, M_4) \text{ and } M = M_1 + \max\left(\frac{M_2}{\epsilon_1}, \frac{M_3}{\epsilon_2}\right).$$

Finally, thanks to a classic result (Theorem 8.1, p. 103, [17]) , we obtain

$$E(t) \leq \exp\left(1 - \frac{Ct}{M}\right) E(0), \quad \forall t \geq 0.$$

We have thus proved the first part of Theorem V.1 with $\omega = \frac{M}{C}$.

Now, if the mass density $a(x)$ is non-decreasing then using the multiplier $2(x-1)(C_0 + \delta)y_x + C_0y$ we can prove exponential stability in the same way.

ii) For the sake of clarity, we assume that $g = -f$ without loss of generality. Moreover, we assume as in i) that $a(x)$ is monotone non-increasing and $\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0$. We define a functional

$$\rho(t) = 2 \int_0^1 (\tilde{C}_0 + \tilde{\delta}) xy_t y_x dx + 2\tilde{C}_0 \int_0^1 y_t y dx, \quad (2.29)$$

where \tilde{C}_0 and $\tilde{\delta}$ are positive constants. As in the proof of i), we can show that there exist positive constants K_0, K_1, K_2, K_3 and K_4 such that for any $t \geq 0$,

$$|\rho(t)| \leq K_0 E(t), \quad (2.30)$$

$$\dot{\rho}(t) \leq -K_1 E(t) + K_2 y_t^2(1, t) + K_3 f^2(y_t(1, t)) + K_4 f^2(y_t(0, t)). \quad (2.31)$$

Given $\epsilon > 0$, we introduce (see [10], [14] and [15]) the perturbed energy by

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon \rho(t) (E(t))^{\frac{p-1}{2}}. \quad (2.32)$$

This together with the monotonic decrease of $E(t)$ implies that for any $M > 1$,

$$M^{-\frac{1}{2}} (E_\epsilon(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq (E(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq M^{\frac{1}{2}} (E_\epsilon(t))^{\frac{p+1}{2}}, \quad (2.33)$$

with $\epsilon \leq K_0^{-1} (E(0))^{\frac{1-p}{2}} (1 - M^{-\frac{1}{p+1}})$.

On the other hand, from (2.31) and the hypothesis (H2) of Theorem V.2 (ii), we get

$$\dot{\rho}(t) \leq -K_1 E(t) + K_5 y_t^2(1, t) + K_4 \eta_2^2 (y_t(0, t))^2, \quad (2.34)$$

where

$$K_5 = K_2 + K_3 \eta_2^2.$$

In addition, from (2.32) we have

$$\dot{E}_\epsilon(t) = \dot{E}(t) + \epsilon \dot{\rho}(t) (E(t))^{\frac{p-1}{2}} + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) \rho(t) \dot{E}(t) (E(t))^{\frac{p-3}{2}}. \quad (2.35)$$

Plugging (1.4), (2.30) and (2.34) into (2.35), one obtains

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) \leq & \left(1 - \epsilon \frac{p-1}{2} K_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}}\right) \left(-\epsilon_1 y_t(0, t) f(y_t(0, t)) - \epsilon_2 y_t(1, t) f(y_t(1, t))\right) \\ & + \epsilon (E(t))^{\frac{p-1}{2}} \left(-K_1 E(t) + K_5 y_t^2(1, t) + K_4 \eta_2^2 y_t^2(0, t)\right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

If $y_t^2(1, t) > 1$, it follows from hypothesis (H) and (H2) that

$$\epsilon K_5 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} y_t^2(1, t) \leq \frac{\epsilon K_5}{\eta_1} (E(0))^{\frac{p-1}{2}} y_t(1, t) f(y_t(1, t)). \quad (2.37)$$

But, while $y_t^2(1, t) \leq 1$, using Young's inequality we have for any constant $B > 0$

$$\epsilon K_5 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} y_t^2(1, t) \leq \frac{2\epsilon}{p+1} (K_5 B)^{\frac{p+1}{2}} |y_t(1, t)|^{\frac{p+1}{2}} + \epsilon \left(\frac{p-1}{p+1}\right) B^{-\frac{p+1}{p-1}} (E(t))^{\frac{p+1}{2}}.$$

This implies thanks to (H2) that :

$$\epsilon K_5 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} y_t^2(1, t) \leq \frac{2\epsilon}{p+1} \frac{(K_5 B)^{\frac{p+1}{2}}}{\eta_1} y_t(1, t) f(y_t(1, t)) + \epsilon \frac{p-1}{p+1} B^{-\frac{p+1}{p-1}} (E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \quad (2.38)$$

Combining (2.37) and (2.38), one has

$$\epsilon K_5 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} y_t^2(1, t) \leq \epsilon \left(\frac{p-1}{p+1}\right) B^{-\frac{p+1}{p-1}} (E(t))^{\frac{p+1}{2}} + K_6^\epsilon y_t(1, t) f(y_t(1, t)), \quad (2.39)$$

where

$$K_6^\epsilon = \frac{\epsilon K_5}{\eta_1} (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \frac{2\epsilon}{p+1} \frac{(K_5 B)^{\frac{p+1}{2}}}{\eta_1}.$$

Similarly, one can prove that

$$\epsilon K_4 \eta_2^2 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} y_t^2(0, t) \leq \epsilon \left(\frac{p-1}{p+1}\right) B^{-\frac{p+1}{p-1}} (E(t))^{\frac{p+1}{2}} + K_7^\epsilon y_t(0, t) f(y_t(0, t)), \quad (2.40)$$

with

$$K_7^\epsilon = \frac{\epsilon K_4 \eta_2^2}{\eta_1} (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \frac{2\epsilon}{p+1} \frac{(K_4 \eta_2^2 B)^{\frac{p+1}{2}}}{\eta_1}.$$

Inserting (2.39) and (2.40) into (2.36), we obtain

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) &\leq \epsilon \left(2 \left[\frac{p-1}{p+1} \right] B^{-\frac{p+1}{p-1}} - K_1 \right) (E(t))^{\frac{p+1}{2}} \\ &+ \left(-\epsilon_1 + \epsilon \epsilon_1 \frac{p-1}{2} K_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + K_7^\epsilon \right) y_t(0, t) f(y_t(0, t)) \\ &+ \left(-\epsilon_2 + \epsilon \epsilon_2 \frac{p-1}{2} K_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + K_6^\epsilon \right) y_t(1, t) f(y_t(1, t)). \end{aligned}$$

This implies that

$$\dot{E}_\epsilon(t) \leq -\mu \epsilon (E(t))^{\frac{p+1}{2}}, \quad (2.41)$$

provided that B is chosen such that for some $\mu > 0$,

$$2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) B^{-\frac{p+1}{p-1}} - K_1 \leq -\mu < 0,$$

and ϵ is chosen as follows

$$\begin{cases} -\epsilon_1 + \epsilon \epsilon_1 \frac{p-1}{2} K_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + K_7^\epsilon \leq 0, \\ -\epsilon_2 + \epsilon \epsilon_2 \frac{p-1}{2} K_1 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + K_6^\epsilon \leq 0. \end{cases}$$

Finally, we deduce from (2.33) and (2.41) that

$$\dot{E}_\epsilon(t) \leq -\mu \epsilon M^{-\frac{1}{2}} (E_\epsilon(t))^{\frac{p+1}{2}}. \quad (2.42)$$

Moreover, we claim that

$$\text{if } E(0) > 0, \text{ then } E_\epsilon(t) > 0 \text{ for any finite time } t > 0. \quad (P)$$

(For the proof, see the Appendix.) Solving the above differential inequality (where we can divide by $E_\epsilon(t)$ thanks to (P)) and using (2.33), we get

$$E(t) \leq M^{\frac{2}{p+1}} (E(0)) (1 + \omega t)^{-\frac{2}{p-1}}, \quad \forall t \geq 0,$$

with

$$\omega = \frac{p-1}{2} M^{-\frac{1}{p+1}} \mu \epsilon (E(0))^{\frac{p-1}{2}}.$$

This proves the second part ii) of Theorem V.2.

iii) We just give a sketch of the proof, for it is analogous to that one of ii). First, we introduce for $\epsilon > 0$ the perturbed energy by

$$E_\epsilon(t) = E(t) + \epsilon \rho(t) (E(t))^{\frac{1-p}{2}}.$$

Choosing ϵ sufficiently small, we can obtain

$$M^{-\frac{1}{2}} (E_\epsilon(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq (E(t))^{\frac{p+1}{2}} \leq (E_\epsilon(t))^{\frac{p+1}{2}}.$$

Now a straightforward computation similar to ii) shows that

$$E(t) \leq M^{\frac{2p}{p+1}} (E(0)) (1 + \omega t)^{-\frac{2p}{1-p}}, \quad \forall t \geq 0,$$

with

$$\omega = \frac{1-p}{2p} M^{-\frac{p}{p+1}} \mu \epsilon (E(0))^{\frac{1-p}{2p}}.$$

The proof of Theorem V.2 is thus complete. □

Proof of Theorem V.3 . We will show briefly the first assertion i). The others can be proved in the same way as in the proof of Theorem V.2.

We consider the function

$$\varphi(x) = \int_0^x \exp \left(\int_\sigma^x \left| \frac{a_x}{a} \right| d\xi \right) d\sigma, \quad \forall x \in [0, 1].$$

It is easy to see that

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, & \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1], \\ \varphi_x \geq 1, & a \left(\frac{\varphi}{a} \right)_x \geq 1. \end{cases}$$

Doing similar computation as in (2.18)-(2.28) with the multiplier $\varphi y_x + C_0^* y$, we show that there exists a constant $K^* > 0$ such that

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} E(t) dt \leq K^* E(T_1) \\ & + \int_{T_1}^{T_2} \int_0^1 \left[\frac{\beta}{2} (\varphi_x - C_0^*) + 2 \right] y^2 + \left(-C_0^* + \frac{2}{a_0} + \frac{\alpha \varphi(1)}{2a_0} \right) a y_x^2 dx dt. \end{aligned}$$

One can verify that

$$K^* = \sup \left(\frac{1}{2\eta_3} \left[\frac{\varphi(1)}{\epsilon_2} \left(1 + \frac{\eta_4^2}{a(1)} \right) + C_0^* \epsilon_2 \eta_4^2 \right], \frac{C_0^* \epsilon_2 \eta_2^2}{2\eta_1}, \frac{C_0^*}{\alpha} + \frac{\varphi(1)}{2} \right) \\ + 2 \sup \left(C_0^* + \frac{\varphi(1)}{\sqrt{a_0}}, \frac{C_0^*}{\beta} (1 + \alpha) \right).$$

Then, by choosing C_0^* as follows

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} (\varphi_x - C_0^*) + 2 \leq 0, \\ -C_0^* + \frac{2}{a_0} + \frac{\alpha \varphi(1)}{2a_0} \leq 0, \end{cases}$$

we deduce that

$$\int_{T_1}^{T_2} E(t) dt \leq K^* E(T_1).$$

The exponential stability is now obvious. \square

Remark V.1 . In applications, we may meet mass densities $a(x)$ which are monotone by parts in $(0, 1)$. For example, the mass density given by

$$a(x) = \sqrt{p^2 + (x - 1/2)^2}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

is monotone in each interval $(0, 1/2)$ and $(1/2, 1)$. It is interesting to treat this case. Actually, we can extend our results to this case. Assume that there exists $x_0 \in (0, 1)$ such that $a(x)$ is monotone non-increasing (resp. non-decreasing) on $(0, x_0)$ and monotone non-decreasing (resp. non-increasing) on $(x_0, 1)$. We define on $[0, 1]$ a function ψ (resp. $\tilde{\psi}$) by

$$\psi(x) = 2(x_0 - x)(C + \delta) \quad (\text{resp. } \tilde{\psi} = 2(x - x_0)(C + \delta)),$$

where C and δ are two positive constants. It is obvious that ψ (resp. $\tilde{\psi}$) is positive (resp. negative) on $(0, x_0)$ and negative (resp. positive) on $(x_0, 1)$. With suitable constants C and δ , we show that the multiplier $\psi y_x + C_1 y$ (resp. $\tilde{\psi} y_x + C_1 y$) allows us to obtain Theorem V.2 with an analogous proof.

V.3 Conclusion

In this paper, we have shown that a nonlinear boundary velocity feedback is sufficient to stabilize asymptotically the considered vibrating equation. Moreover, under growth conditions on the feedback, the uniform and the rational decay rate of the energy is also estimated.

Appendix

Proof of (2.19). For any $u \in H^1(0, 1)$, one can verify that :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2(x) dx &= \int_0^1 \left(\int_1^x (u^2(\xi))_\xi d\xi + u^2(1) \right) dx \\ &= u^2(1) + 2 \int_0^1 \int_1^x u(\xi) u_\xi(\xi) d\xi dx \\ &= u^2(1) + 2 \int_0^1 \int_1^x \theta u(\xi) \frac{u_\xi(\xi)}{\theta} d\xi dx, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Then, applying Cauchy-Schwarz's inequality, we have:

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq u^2(1) + \theta^2 \int_0^1 u_\xi^2(\xi) d\xi + \frac{1}{\theta^2} \int_0^1 u^2(\xi) d\xi,$$

which implies that

$$\left(1 - \frac{1}{\theta^2}\right) \int_0^1 u^2(x) dx \leq u^2(1) + \theta^2 \int_0^1 u_x^2(x) dx.$$

Then, for any $\theta > 1$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \left(\frac{\theta^2}{\theta^2 - 1}\right) u^2(1) + \left(\frac{\theta^4}{\theta^2 - 1}\right) \int_0^1 u_x^2(x) dx.$$

We have thus proved (2.19). □

Proof of the claim (P). Doing similar computation as in (2.42), we show that there exists constants (depending on ϵ) $c_1^\epsilon, c_2^\epsilon > 0$ such that

$$\frac{d}{dt} (E_\epsilon(t) + c_1^\epsilon E(t)) \geq -c_2^\epsilon (E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \tag{3.43}$$

Indeed, (2.35) implies that

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) &\geq \dot{E}(t) - \epsilon |\dot{\rho}(t)| (E(t))^{\frac{p-1}{2}} \\ &\quad + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) |\rho(t)| \dot{E}(t) (E(t))^{\frac{p-3}{2}}. \end{aligned}$$

By the use of (2.30)-(2.34), the above inequality becomes

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) &\geq \dot{E}(t) \left(1 + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) K_0 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} \right) \\ &\quad - \epsilon K_1 (E(t))^{\frac{p+1}{2}} - \epsilon (E(t))^{\frac{p-1}{2}} \left(K_5 y_t^2(1, t) + K_4 \eta_2^2 y_t^2(0, t) \right), \end{aligned}$$

and thus by (2.39)-(2.40) with $B = 1$,

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) &\geq \dot{E}(t) \left(1 + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) K_0 (E(t))^{\frac{p-1}{2}} \right) - \epsilon \left(K_1 + 2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \right) (E(t))^{\frac{p+1}{2}} \\ &\quad - K_7^\epsilon y_t(0, t) f(y_t(0, t)) - K_6^\epsilon y_t(1, t) f(y_t(1, t)). \end{aligned}$$

This together with (1.4) implies that

$$\begin{aligned} \dot{E}_\epsilon(t) &\geq \dot{E}(t) \left(1 + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) K_0 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \frac{K_6^\epsilon}{\epsilon_2} + \frac{K_7^\epsilon}{\epsilon_1} \right) \\ &\quad - \epsilon \left(K_1 + 2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \right) (E(t))^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

The differential inequality (3.43) follows from (3.44) with

$$c_1^\epsilon = 1 + \epsilon \left(\frac{p-1}{2} \right) K_0 (E(0))^{\frac{p-1}{2}} + \frac{K_6^\epsilon}{\epsilon_2} + \frac{K_7^\epsilon}{\epsilon_1}, \quad c_2^\epsilon = \epsilon \left(K_1 + 2 \left(\frac{p-1}{p+1} \right) \right).$$

On the other hand, using (2.33) we get

$$E(t) \leq M^{\frac{1}{p+1}} (E_\epsilon(t) + c_1^\epsilon E(t)),$$

This implies together with (3.43) that

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}_\epsilon(t) \geq -c_4^\epsilon \left(\tilde{E}_\epsilon(t) \right)^{\frac{p+1}{2}}, \quad (3.45)$$

where

$$\begin{cases} \tilde{E}_\epsilon(t) = E_\epsilon(t) + c_1^\epsilon E(t), \\ c_4^\epsilon = c_2^\epsilon M^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Since $E(t)$ and $E_\epsilon(t)$ are non-increasing (see (1.4) and (2.42)), then it is the same for $\tilde{E}_\epsilon(t)$. Moreover, it is easy to show that (3.45) leads us to

$$\frac{d}{dt} \left[\tilde{E}_\epsilon(t) \exp \left(\int_0^t c_4^\epsilon (\tilde{E}_\epsilon(\tau))^{\frac{p-1}{2}} d\tau \right) \right] \geq 0.$$

Since $E(0) > 0$, we deduce from (2.33) and (3.46) that $\tilde{E}_\epsilon(0) > 0$ and

$$\tilde{E}_\epsilon(t) \exp \left(\int_0^t c_4^\epsilon (\tilde{E}_\epsilon(\tau))^{\frac{p-1}{2}} d\tau \right) \geq \tilde{E}_\epsilon(0) > 0.$$

Using the monotonic decrease of $\tilde{E}_\epsilon(t)$, the above inequality gives

$$\tilde{E}_\epsilon(t) \geq \exp \left(-c_4^\epsilon (\tilde{E}_\epsilon(0))^{\frac{p-1}{2}} t \right) \tilde{E}_\epsilon(0) > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Then the claim (P) follows from (2.33) and (3.46).

Bibliographie

- [1] INGHAM A. E., Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Zeitschrift* **41** (1936) p. 367-379.
- [2] BIRKHOFF G. & ROTA G. C., *Ordinary Differential Equations*, Waltham, Massachusetts, Toronto, London (1969).
- [3] BREZIS H., *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London, (1973).
- [4] DAFERMOS C. M. & SLEMROD M., Asymptotic behaviour of non linear contractions semi-groups, *J. Func. Anal* **14** (1973) 97-106.
- [5] JURDJEVIC V. & QUIN J. P., Controllability and stability, *J. Diff. Equations*, **28**, 3 (1978) 381-389.
- [6] MIKHAÏLOV V., *Equations aux Dérivées Partielles*, Mir, Moscou (1980).
- [7] PAZY A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York (1983).
- [8] SLEMROD M., Boundary feedback stabilization for a quasilinear wave equation, *Control theory for distributed parameter systems and applications*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 54, Springer, New York, (1983) 221-237.
- [9] ZEIDLER A., *Non Linear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2, Springer Verlag, New York (1986).
- [10] KOMORNIK V. & ZUAZUA E., A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. pures et appl.*, **69** (1990) 33-54.
- [11] CONRAD F. & PIERRE M., Stabilisation of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback, *Rapport de recherche INRIA* **1235** (1990).

- [12] HARAUX A., *Systèmes Dynamiques Dissipatifs et Applications*, collection RMA (17) (1991).
- [13] ICART S., LEBLOND J. & SAMSON C., Some results on feedback stabilisation of a one-link flexible arm, rapport de recherche INRIA-Sophia Antipolis **1682** (1992).
- [14] CONRAD F. & RAO B., Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic Analysis* **7** (1993) 159-177.
- [15] RAO B., Decay estimate of solution for hybrid system of flexible structures, *Euro. J. Appl. Math* **4** (1993) 303-319.
- [16] LI T.S., *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, Masson and John Wiley (1994).
- [17] KOMORNIK V., *Exact Controllability and Stabilisation. The Multiplier Method*, Masson and John Wiley (1994).
- [18] CHERKAOUI M., Sur la stabilisation d'une poutre déformable en torsion ou en flexion par une classe de contrôle frontière, Thèse, Université de Nancy1 (1994).
- [19] D'ANDREA-NOVEL B., BOUSTANY F. & RAO B., Feedback stabilisation of a hybrid PDE-ODE system : Application to an overhead crane, *MCSS* **7** (1994) 1-22.
- [20] CHENTOUF B., XU C. Z. & SALLET G., Stabilisation d'une équation de vibrations, Rapport de recherche INRIA **3085** (1997).
- [21] MIFDAL A., Etude de la Stabilisation forte et uniforme de système hybride: Application à un modèle de pont roulant. Thèse, Univ. Henri Poincaré, Nancy I, (1997).

VI

Non Linear Feedback Stabilization of a Rotating Body-Beam System

A paraître à 14th World Congress of IFAC

Non Linear Feedback Stabilization of a Rotating Body-Beam System

Boumediène CHENTOUF and Jean-François COUCHOURON

INRIA-Lorraine (CONGE project) & URA CNRS 399 (MMAS). ISGMP,
Bât. A, Université de Metz, Ile de Saulcy 57045 Metz cedex 01 (France).
e-mail : chentouf,couchour@ saulcy.loria.fr

Abstract. This paper deals with **nonlinear** feedback stabilization of a flexible beam clamped at a rigid body and free at the other end. We assume that there is no damping and the feedback law proposed here consists of a nonlinear control torque applied on the rigid body and either a nonlinear boundary control moment or a nonlinear boundary control force or both of them applied at the free end of the beam. This **nonlinear** feedback, which insures the exponential decay of the beam vibrations, extends the **linear** case studied in [16] to a more general class of controls. This new class of controls is in particular of the interest to be robust.

Key words. Rotating body-beam, Nonlinear control, Exponential stability.

VI.1 Introduction and main result

The purpose of this paper is to study the nonlinear feedback stabilization of the system presented in the figure VI.1. This system has been introduced by Baillieul and Levi [2]. It consists of a disk (D) with a beam (B) attached to its center and perpendicular to the disk plane. The disk (D) rotates freely about its axis and the motion of the beam (B) is confined to a plane perpendicular to the disk (see fig. VI.1). In this paper, we take a nonlinear control torque exerted on the disk (D) while a nonlinear boundary control moment and/or a nonlinear boundary control force are applied at the free end of the beam (B).

As in the linear case [16], we will show that in our case, the system is still stabilizable.

The stabilization problem of the body-beam system has been extensively studied in the literature [2], [6], [24], [25], [17], [18], [19] and [1]. In [2], the authors showed that with structural damping and without control, the body-beam system has a finite number of rotating equilibrium states. Later, Bloch and Titi [6] showed that

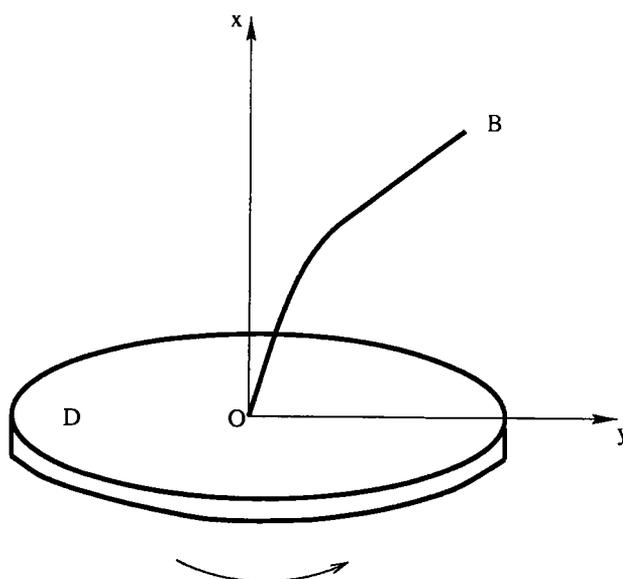


Figure VI.1. The body-beam system.

for the more difficult case of viscous damping, a linear inertial manifold exists for the body-beam system. By taking into account the effect of damping, it was shown in [24] that for any constant angular velocity smaller than the critical one, an exponentially stabilizing feedback torque control law was proved. Recently, exponential stabilization of the body-beam system was established in [16] as soon as one of the two **linear** boundary controls (force or moment) is present at the free end of the beam with the control torque of the disk. The contribution of this paper consists of extending the class of controls proposed in [16]. In fact, our work is motivated by two arguments: First, the interest of such an extension is to highlight the robustness of controls. Actually, a minimum degree of robustness is needed in applications since no sensors neither actuators can provide an infinitely precise linear control as required in [16]. Second, a wide class of controls is provided. For instance, this helps us to avoid eventually some saturation phenomena in the actuators.

The paper is organized as follows: in section 2, we deal with notations and main result. The section 3 is devoted to a sketch of proof of this main result. We postpone in an Appendix the nonlinear basic theoretic tools used for the body-beam system. The body-beam system is modeled by

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho y_{tt} + EI y_{xxxx} = \rho \omega^2(t) y, \\ y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \\ y_{xx}(1, t) = \Gamma_1(t), \\ y_{xxx}(1, t) = \Gamma_2(t), \\ \dot{\omega}(t) = \frac{\Gamma_3(t) - 2\rho\omega(t) \int_0^1 y(t) y_t(t) dx}{I_d + \rho \int_0^1 y(t)^2 dx}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

where the positive constants EI, ρ and I_d are respectively the flexural rigidity, the mass per unit length of the beam, and the disk's moment of inertia; $\omega(t)$ is the angular velocity of the disk at time t and the length of the beam is chosen as $L = 1$. Moreover, $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)$ and $\Gamma_3(t)$ are respectively the moment control, force control and the torque control to be determined so that the solution's energy of the resulting closed-loop system decays to zero in some functional space.

In this paper, we propose a stabilizing **nonlinear** controls. More precisely, given $\omega^* \in \mathbb{R}$ our candidate for feedback control is

$$\Gamma_1(t) = -f(y_{tx}(1, t)), \quad \Gamma_2(t) = g(y_t(1, t)), \quad \Gamma_3(t) = -\gamma(\omega - \omega^*), \quad (1.2)$$

but this time contrary to [16], f, g and γ are nonlinear real functions satisfying the following assumptions F1), F2) and F3)

F1) $f + g \not\equiv 0$ and $f, g \in \{h \in C^0(\mathbb{R}); h \text{ is increasing; } h(0) = 0\}$.

F2) There exist nonnegative constants L_1, L_2 and L_3 such that $L_1 + L_2 > 0$ and

$$L_1 |x| \leq |f(x)| \leq L_3 |x| \text{ and } L_2 |x| \leq |g(x)| \leq L_3 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

F3) The function γ is Lipschitz on each bounded subset of \mathbb{R} and for some $L_4 > 0$,

$$\gamma(x)x \geq 0, \quad |\gamma(x)| \geq L_4 |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

The conditions F1)-F2) ensure in particulier the presence of at least one control at the flexible beam. For the phase space of the system, we take the real Hilbert space

$$X = \mathcal{H} \times \mathbb{R} = H_0^2 \times L^2(0,1) \times \mathbb{R},$$

equipped with the inner product

$$\langle (u, v, \xi), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\xi}) \rangle_X = \langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle_{\mathcal{H}} + \xi \tilde{\xi},$$

where for $n \in \mathbb{N}$,

$$H_0^n = \{u \in H^n(0,1); u(0) = u_x(0) = 0\}$$

and the space \mathcal{H} is endowed with the inner product

$$\langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (EIu_{xx}\tilde{u}_{xx} - \rho\omega^{*2}u\tilde{u} + \rho v\tilde{v}) dx.$$

Note that the norm induced by this scalar product is equivalent to the usual one of the Hilbert space $H^2(0,1) \times L^2(0,1)$ provided that $|\omega^*| < \sqrt{9EI/\rho}$ (see [16] for details).

Set $\Phi = (y, z)$. Then, the closed loop system (1.1)-(1.2) can be written as follows

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) + \tilde{A}\Phi(t) + (0, (\omega^{*2} - \omega^2(t))y(t)) = 0, \\ \dot{\omega}(t) = \frac{-\gamma(\omega(t) - \omega^*) - 2\rho\omega(t) \langle y(t), z(t) \rangle_{L^2(0,1)}}{I_d + \rho\|y(t)\|_{L^2(0,1)}^2}, \end{cases} \quad (1.3)$$

where the **nonlinear** operator \tilde{A} is defined by

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \left\{ (y, z) \in H_0^4 \times H_0^2; \begin{array}{l} y_{xx}(1) = -f(z_x(1)), \\ y_{xxx}(1) = g(z(1)) \end{array} \right\}, \quad (1.4)$$

and

$$\tilde{A}(y, z) = \left(-z, \frac{EI}{\rho} y_{xxxx} - \omega^{*2}y \right). \quad (1.5)$$

We note that the domain $\mathcal{D}(\tilde{A})$ is not a linear space. Now, let us introduce the subsystem

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) + \tilde{A}\Phi(t) = 0, \\ \Phi(0) = \Phi_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

In return, it is easy to verify that the system (1.3) is equivalent to the following one

$$(\dot{\Phi}(t), \dot{\omega}(t)) + (A + B)(\Phi(t), \omega(t)) = 0, \quad (1.7)$$

where

$$\begin{cases} A(\Phi, \omega) = (\tilde{A}\Phi, 0), \text{ with } \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \times \mathbb{R}, \\ B(\Phi, \omega) = \left(0, (\omega^{*2} - \omega^2)y, \frac{-\gamma(\omega - \omega^*) - 2\rho \omega(t) \langle y, z \rangle_{L^2(0,1)}}{I_d + \rho \|y\|_{L^2(0,1)}^2} \right), \end{cases} \quad (1.8)$$

Unfortunately, it is not clear that the system (1.7) is well posed since the classical theory of perturbation can not be applied in our framework. This is due to the **nonlinearity** of the operator A and the **lack of accretivity** of the operator B . On the other hand, for our system, we see that the nonlinearity of the operator A occurs in its domain which is not a linear space. Really, this is a very bad case of nonlinearity since in view of the previous features, the following tools fail: first, the classical Duhamel's formula as well as the nonlinear Duhamel's variation of constant formula obtained in [3]; second, the usual arguments of [8] and [20] about the density of the domain. In return, the known results of M. Pierre ([21], pp. 126) ensure the existence of local solutions of $CP(x^0, A, B, T)$ and all the problem is to show that these solutions are global. We postpone in Appendix some indications on the mathematical tools needed to treat this situation.

The main result of our paper is the exponential stability of the global system (1.7). Of course as in [16], the decay rate, although exponential, is not uniform. The following theorem generalises the results of [16] in the sense that if the controls are linear in (1.2), we find again the result of [16]. Our main result is

Theorem VI.1 *Suppose that $|\omega^*| < \sqrt{9EI/\rho}$. Then under the hypotheses F1)-F3), for each initial data $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ the solution $(\Phi(t), \omega(t) - \omega^*)$ of the closed-loop system (1.7) exponentially tends to zero in X as $t \rightarrow +\infty$.*

VI.2 Proof of the main result

VI.2.1 The subsystem (1.6)

We start with the following proposition

Proposition VI.1 . Assume that $|\omega^*| < \sqrt{9EI/\rho}$ and that the hypothesis F1)-F2) are satisfied.

- 1) The nonlinear operator \tilde{A} defined by (1.4)-(1.5) is m -accretive in \mathcal{H} with dense domain. Thus $-\tilde{A}$ generates a contractive semigroup $e^{-\tilde{A}t}$.
- 2) The semigroup $e^{-\tilde{A}t}$ is asymptotically stable in \mathcal{H} .
- 3) Let Φ be the solution of (1.6) stemmed from $\Phi_0 \in \mathcal{H}$. Then there exist constants $\tilde{M}, \tilde{\mu} > 0$ such that

$$\|\Phi(t)\| \leq \tilde{M}e^{-\tilde{\mu}t}\|\Phi_0\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Sketch of the proof of Proposition VI.1.

- 1) One can easily check that, under the hypothesis F1), \tilde{A} is m -accretive. We point out that the density of $\mathcal{D}(\tilde{A})$ in \mathcal{H} is not obvious since $\mathcal{D}(\tilde{A})$ is not a linear space. So the proof of this density is not standard and needs the condition F2). Then, the rest of the first assertion 1) is a consequence of the method of Brezis [8].
- 2) Since the nonlinear semigroup $e^{-\tilde{A}t}$ is contractive and since $\mathcal{D}(\tilde{A})$ is dense in \mathcal{H} , it suffices to prove the stability for any initial data $\Phi_0 = (y_0, z_0) \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. This can be obtained by using the LaSalle's invariance principle [15]-[12] and an adaptation of computations of [9].
- 3) As in the proof of 2), we may assume that $\Phi_0 = (y_0, z_0) \in \mathcal{D}(\tilde{A})$. In order to use the multiplier method, let us define a functional

$$\xi(t) = 2 \int_0^1 xy_t y_x dx.$$

Next, given $\epsilon > 0$ we introduce as in [10] and [22] the perturbed energy by

$$E^\epsilon(t) = E_1(t) + \epsilon\xi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

where

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \|(y(t), z(t))\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Using F1)-F2), we show after a careful computation that there is a positive constant $K > 0$ such that

$$\dot{E}^\varepsilon(t) \leq -2M^{-\frac{1}{2}} K E^\varepsilon(t).$$

Solving this differential inequality, we get the required exponential decay with

$$\mu = 2M^{-\frac{1}{2}} K.$$

□

We are going to indicate, in the next subsections, a sketch of proof of Theorem VI.1. For this, we need the hypotheses and the results of Appendix.

VI.2.2 Well posedness of the global system (1.7)

First, we have shown in Proposition 1 that the operator \tilde{A} defined by (1.4)-(1.5) is m-accretive in \mathcal{H} with dense domain $\mathcal{D}(\tilde{A})$. We deduce thus, from (1.8), that the operator A is also m-accretive with dense domain $\mathcal{D}(A)$ in X and thus the hypothesis HI) cited in the Appendix is satisfied. Second, thanks to F3), the operator B defined in (1.8) is Lipschitz on bounded subsets of X and therefore B satisfies the hypothesis HII) of the Appendix. Third, the Lyapunov function V given in (2.1) (see the next paragraph) ensures that the hypothesis HIII) of the Appendix holds. We deduce from Theorem VI.2 given in the Appendix, that for any $(\Phi_0, \omega_0) \in X$, there is a unique solution $(\Phi(t), \omega(t)) \in \mathcal{C}([0, +\infty]; X)$ of the system (1.7).

Remark VI.1 *This solution $(\Phi(t), \omega(t))$ is a strong one if $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A)$.*

VI.2.3 Exponential stability of the global system (1.7)

As in [24] and [16], consider the function $V : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ defined by

$$V(\Phi, \omega) = \frac{1}{2} \left\{ I_d (\omega - \omega^*)^2 - \omega^{*2} \int_0^1 \rho y^2 dx + \int_0^1 (\rho z^2 + EI y_{xx}^2) dx + (\omega - \omega^*)^2 \int_0^1 \rho y^2 dx \right\}. \quad (2.1)$$

We claim that this function is a reasonable choice of Lyapunov function. Indeed, it is easy to check that

$$V(\Phi, \omega) \geq K \|(\Phi, \omega)\|_X,$$

for some positive constant K . On the other hand, using the Remark VI.1 and the assumption (F), a straightforward computation shows that for any initial condition $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}(\Phi, \omega)(t) &= -EI [y_{xt}(1, t)f(y_{xt}(1, t)) + y_t(1, t)g(y_t(1, t))] \\ &\quad - (\omega(t) - \omega^*)\gamma(\omega(t) - \omega^*) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

for a.e. $t \geq 0$. Thus, the function $t \mapsto V(\Phi, \omega)(t)$ is non increasing on $[0, +\infty[$.

Now, one will restrict oneself with the system

$$\dot{\Phi}(t) + (\tilde{A} + \tilde{B})\Phi(t),$$

where $\Phi = (y, z)$ and

$$\tilde{B}\Phi = (0, (\omega^{*2} - \omega^2)y).$$

It is obvious that the operator $(\omega^{*2} - \omega^2)\tilde{B}$ has the property

$$\|(\omega^{*2} - \omega^2)\tilde{B}\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq |\omega^{*2} - \omega^2| \|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}.$$

From (2.1) and (2.2), it results that $\omega^* - \omega \in L^2([0, \infty[; \mathbb{R}) \cap L^\infty([0, \infty[; \mathbb{R})$ and thus the condition (HV) of the Appendix holds with $\mu(t) = |\omega^{*2} - \omega(t)^2|$. (Really, we have the stronger condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = \omega^*$). Therefore, as we have shown, all the assumptions of Theorem VI.3 of the Appendix are satisfied. Thus, there exist positive constants M and κ such that

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}} \leq M e^{-\kappa t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Finally, returning to the second equation of (1.7) and using F3), we prove analogously to [24] and [16] that $\omega^* - \omega$ tends also exponentially to zero. This ends the proof of Theorem 1. \square

APPENDIX

Let X be a real Banach space and $T \in \mathbb{R}_+^*$. This part deals with evolution inclusions of the following type,

$$CP(x^0, A, B, T) = \begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + B(t, x(t)) \ni 0, & t \in [0, T], \\ x(0) = x^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)} \subset X, \end{cases}$$

In general when the unbounded (multivalued) operator A is **nonlinear** and the everywhere defined operator B is **non accretive**, it is not clear that $CP(x^0, A, B, T)$ is well-posed. Indeed, the known results in the literature in such a situation ask additional assumptions as for instance the equicontinuity of the semigroup e^{-tA} generated by the operator $-A$ (see [7], [13], [14], [23]) or more general topological assumptions [11]. But these kinds of assumptions on the semigroup e^{-tA} did not hold for the studied body-beam system. In order to overcome these difficulties, we had to use a result due to M. Pierre [21] and which is based on the fixed point method.

We will introduce in this paragraph the following hypotheses

(HI) A is a multivalued unbounded nonlinear m -accretive operator with domain $\mathcal{D}(A)$.

(HII) B is locally Lipschitz on $[0, T] \times X$ and bounded on the bounded subsets of $[0, T] \times X$.

(HIII) For every $x^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, there is a constant $C(T)$ such that for all $T_0 \in [0, T[$, each solution x of $CP(x^0, A, B, T_0)$ satisfies $\|x(t)\| \leq C(T)$, $\forall t \in [0, T_0]$.

The solutions of $CP(x^0, A, B, T)$ will be understood in the following "weak" sense:

Definition VI.1 *The continuous function x_* is a solution of $CP(x^0, A, B, T)$ if it is the mild solution of the quasi-autonomous problem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) \ni -B(t, x_*(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) = x^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)} \subseteq X. \end{cases}$$

The **Theorem VI.2** below extends the well-known Picard-Lindeloff-Lipschitz Theorem.

Theorem VI.2 *Assume that (HI), (HII) and (HIII) hold. Then, for $x^0 \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, the problem $CP(x^0, A, B, T)$ has a unique solution $S(t)x^0$ and the function $x^0 \mapsto S(t)x^0$ is continuous on $\overline{\mathcal{D}(A)}$, for all $t \in [0, T]$.*

The second result of the Appendix is the exponential decay of $\|x(t)\|$ where x is the solution of $CP(x^0, A, B, +\infty)$. For this, we introduce the two following conditions:

(HIV) The problem $CP(x^0, A, B, +\infty)$ has a unique solution x (that is $CP(x^0, A, B, T)$ has a unique solution for all $T > 0$).

(HV) There is a locally integrable positive real valued function μ on $[0, +\infty[$ satisfying

$$\|B(t, x(t))\| \leq \mu(t)\|x(t)\|, \text{ and } \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_{\xi}^{\xi+\delta} \mu(\tau) d\tau = 0, \forall \delta > 0.$$

Theorem VI.3 *Assume that the nonlinear semigroup e^{-At} generated by the operator $-A$ is exponentially (uniformly) stable. Then, under the hypotheses (HI), (HIV) and (HV), there exist positive constants M and κ such that*

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\kappa t}, \forall t \geq 0.$$

Comments on Theorem VI.2. First, we know that there exists a unique local solution $x(\cdot)$ of $CP(x^0, A, B, T)$ (see pp. 126 of [21]). Then following the same computations, we get thanks to (HIII) and Gronwall lemma the global solution of $CP(x^0, A, B, T)$.

Comments on Theorem VI.3. We show thanks to Bénéilan's integral inequalities (see [4] or [5]) and Gronwall's Lemma that for any $t \geq t_0$, we have

$$\|x(t)\| \leq M_1 e^{-\omega_0 \frac{t}{\delta}} e^{\omega_0(2 + \frac{t_0}{\delta})} \|x(t_0)\|,$$

where the constants M_1 , ω_0 , δ and t_0 are chosen as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|e^{-At}\| \leq M_1 e^{-\omega_1 t}, \\ \omega_0 > \max(1, \omega_1), \\ \delta > \frac{1}{\omega_1}(\ln M_1 + 2\omega_0), \\ \int_{\xi}^{\xi+\delta} \mu(\tau) d\tau \leq \frac{\omega_0}{\delta e^{\omega_0 \delta}}, \quad \forall \xi \geq t_0. \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] J. M. Coron and B. d'Andréa-Novel, Stabilization of a rotating body-beam without damping, to appear in *IEEE Trans. Automat. Contr.*
- [2] J. Baillieul and M. Levi, Rotational elastic dynamics, *Physica*, 27 D, pp. 43-62, 1987.
- [3] S. Banks, *Mathematical theories of nonlinear systems*, Prentice Hall, New York, Toronto, Sydney, Tokyo, 1988.
- [4] P. Bénilan, *Equations d'évolutions dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse Paris XI, Orsay, 1972.
- [5] P. Bénilan, M. G. Crandal and A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, monograph in preparation.
- [6] A. M. Bloch and E. S. Titi, On the dynamics of rotating elastic beams, *Proc. Conf. New Trends Syst. theory*, Genoa, Italy, July 9-11, 1990, Conte, Perdon, and Wyman, Eds. Cambridge, MA: Birkhäuser, 1990.
- [7] Bothe, Multivalued perturbations of m -accretive differential inclusions, to appear in *Israël J. Math.*
- [8] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London, (1973).
- [9] F. Conrad and M. Pierre, Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback, *Rapport de recherche INRIA*, no. 1235, 1990.
- [10] F. Conrad and B. Rao, Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, *Asymptotic Analysis*, vol. 7 pp. 159-177, 1993.

- [11] J. F. Couchouren and Kamenski , A unified topological point view for integro-differential inclusions, *Lecture Notes in Nonlinear Analysis*, vol. 2, 1998.
- [12] C. M. Dafermos, M. Slemrod, " Asymptotic behavior of non linear contractions semi-groups ", *J. Func. Anal* , vol. 14, pp. 97-106 1973.
- [13] L. C. Evans, Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space , *Israël Journal of Mathematics*, vol. 26, no. I, 1977.
- [14] S. Gutman, Evolutions governed by m -accretive plus compact operators, *J. Non-linear Analysis, TMA*, vol. 7, no. 7, pp. 707-715,1983.
- [15] V. Jurdjevic, J. P. Quin, Controllability and stability, *J. Diff. Equations*, vol. 28, no. 3, pp. 381-389, 1978.
- [16] H. Laousy, C.Z. Xu and G. Sallet, Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 2, pp. 241-245, 1996.
- [17] O. Morgül, Orientation and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body: Planar motion, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 5, pp. 953-963, 1991.
- [18] O. Morgül, Constant angular velocity control of a rotating flexible structure, in *Proc. 2nd Conf., ECC'93.*, Groningen, Netherlands, pp. 299-302, 1993.
- [19] O. Morgül, Control of a rotating flexible structure, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 52, pp. 351-356, 1994.
- [20] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, New York 1983.
- [21] M. Pierre, Perturbations localement lipschitziennes et continues d'opérateurs m -accretifs, *Proceeding of the American Mathematical Society*, vol. 58, pp. 124-128, 1976.
- [22] B. Rao, Decay estimate of solution for hybrid system of flexible structures , *Euro. J. Appl. Math*, vol. 4, pp. 303-319, 1993.
- [23] I. I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Monographs and surveys in Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.

- [24] C. Z. Xu and J. Baillieul, Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 12, pp. 1754-1765, 1993.
- [25] C. Z. Xu and G. Sallet, Boundary stabilization of a rotating flexible system, in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 185, R. F. Curtain, A. Bensoussan, and J. L. Lions, Eds. New York: Springer Verlag, pp. 347-365, 1992.

VII

Perspectives

En nous appuyant sur notre application l'échangeur thermique, un premier axe de recherche serait d'examiner le cas où les coefficients de l'échangeur ne sont pas constants. On est alors en présence de système hyperbolique linéaire à coefficients variables en fonction de x et t . Il serait intéressant de dégager un théorème général qui regroupe notre résultat (Théorème III.2) et celui de Xu [74].

Dans le même esprit, on peut se demander dans quelle mesure les techniques de régularisation et des caractéristiques pourraient s'étendre dans l'un des cas suivants:

- i) le système hyperbolique est au moins de dimension deux en espace, i.e, les coefficients varient en fonction de deux variables espaces $(x_1, x_2) \in (0, l) \times (0, l)$ et de la variable temps t .
- ii) le système hyperbolique (à une seule variable espace) est non linéaire.

Pour le premier cas, on pense que l'outil de base serait les surfaces caractéristiques et les courbes bi-caractéristiques. Néanmoins, il n'est pas évident d'adapter les mêmes techniques du chapitre III.

Concernant le deuxième cas, nous avons actuellement des réponses partielles si le terme borné B du système est non linéaire ou bien si les conditions aux bords sont non linéaires mais dissipatives.

Un autre axe de recherche serait d'étendre à l'équation de plaque le résultat de stabilisation uniforme du chapitre IV (partie 1). Ceci donnerait une réponse complète à la question de Rao [62].

De plus, il est tout à fait logique de savoir si la condition $m > 1/3$ est incontournable

pour avoir la stabilité du système (7.8) (voir Théorème IV.13).

Il serait aussi intéressant de savoir si les fonction propres de l'opérateur contrôlé du chapitre IV (partie 2) forment une base de Riesz, ce qui permettra de déterminer le taux de décroissance exponentielle du système considéré.

En outre, nous avons démontré au chapitre V la stabilisation uniforme et rationnelle d'une équation de vibrations (sans frottements) sous la condition de monotonie sur la fonction raideur $a(x)$. La question qui se pose est: est-ce que les résultats restent valables si $a(x)$ n'est pas monotone.

On se demande également si nos résultats de stabilisation uniforme et rationnelle du chapitre V sont conservés dans le cas où le coefficient β est une fonction positive de x .

Bibliographie

- [1] B. d'Andréa-Novel, F. Boustany & B. Rao, Feedback stabilisation of a hybrid PDE-ODE system : Application to an overhead crane, *MCSS*, vol. 7, pp. 1-22, 1994.
- [2] J. M. Coron & B. d'Andréa-Novel, Stabilization of a rotating body-beam without damping. A paraître dans *IEEE Trans. Automat. Contr.*
- [3] J. Baillieul & M. Levi, Rotational elastic dynamics, *Physica*, 27 D, pp. 43-62, 1987.
- [4] A. Balakrishnan, *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [5] S. Banks, *Mathematical theories of nonlinear systems*, Prentice Hall, New York, Toronto, Sydney, Tokyo, 1988.
- [6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, 1976.
- [7] P. Bénilan, M. G. Crandal & A. Pazy, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, en préparation.
- [8] G. Birkhoff & G. C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1969.
- [9] A. M. Bloch & E. S. Titi, On the dynamics of rotating elastic beams, *Proc. Conf. New Trends Syst. theory*, Genoa, Italy, July 9-11, 1990, Conte, Perdon, and Wyman, Eds. Cambridge, MA: Birkhäuser, 1990.
- [10] H. Brezis, *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London, 1973.
- [11] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*. Paris: Masson, 1992.

- [12] G. Chen, S. G. Krantz, D. W. Ma, C. E. Wayne, and H. H. West, The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation, in *Operator Methods for Optimal Control Problems*, S. J. Lee ed., Lecture notes in pure and appl. Math. no. 108, Marcel Dekker, New York, pp. 67- 96, 1987.
- [13] B. Chentouf & J. F. Couchouron, Non linear feedback stabilization of a rotating body-beam system. A paraître à *IFAC World congress 1999*.
- [14] B. Chentouf & J. F. Couchouron, On the stabilization of a rotating body-beam without damping. *Rapport de recherche INRIA*, no 3567, 1998.
- [15] B. Chentouf & J. F. Couchouron, Nonlinear feedback stabilization of a rotating body-beam without damping. Soumis à *ESAIM : COCV (Control, Optimisation and Calculus of Variations)*.
- [16] B. Chentouf et C. Z. Xu, Boundary feedback stabilization of a hybrid system, en préparation.
- [17] B. Chentouf, C. Z. Xu & G. Sallet, On the stabilization of a vibrating equation. A paraître à *Non Linear Analysis TMA*.
- [18] B. Chentouf, C. Z. Xu & G. Sallet, Boundary velocity feedback stabilization of a vibrating equation with a variable coefficient. *Proceedings of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control 98*, pp. 798-802.
- [19] B. Chentouf, C. Z. Xu & G. Sallet , Stabilisation d'une équation de vibrations. *Rapport de recherche INRIA*, no. 3085, 1997.
- [20] M. Cherkaoui, Sur la stabilisation d'une poutre déformable en torsion ou en flexion par une classe de contrôle frontière. Thèse, Université de Nancy1 1994.
- [21] B. M. N. Clarke, Boundary controllability of linear symmetric hyperbolic systems, *J. Inst. Maths Applics*, 20, pp. 283-298, 1977.
- [22] F. Conrad & M. Pierre, Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback, *Rapport de recherche INRIA*, no. 1235, 1990.
- [23] F. Conrad & O. Mörgül, On the stabilization of a flexible beam with a tip mass. A paraître au *SIAM J. Control and Optim.*
- [24] F. Conrad & B. Rao, Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback , *Asymptotic Analysis*, vol. 7 pp. 159-177, 1993.

- [25] R. Courant & D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [26] M. G. Crandall & T. M. Liggett, Generation of semigroups of nonlinear transformations in general Banach spaces, *Amer. J. Math.*, 93, pp. 265-298, 1971.
- [27] C. M. Dafermos, M. Slemrod, " Asymptotic behavior of non linear contractions semi-groups ", *J. Func. Anal* , vol. 14, pp. 97-106, 1973.
- [28] R. Dautray et J. L. Lions, *Analyse numérique et calcul numérique*, vol. 3. Masson, 1987.
- [29] L. C. Evans, Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space , *Israel Journal of Mathematics*, vol. 26, no. 1, 1977.
- [30] J.C. Friedly, *Dynamic behavior of processes*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
- [31] J.P. Gauthier & C.Z. Xu, H^∞ -control of a distributed parameter system with non-minimum phase, *International Journal of Control*, vol.53, no.1, pp. 45-79, 1991.
- [32] P.R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley and sons, New York, 1964.
- [33] S. Gutman, Evolutions governed by m-accretive plus compact operators, *J. Non-linear Analysis, TMA*, vol. 7, no. 7, pp. 707-715,1983.
- [34] A. Haraux, *Systèmes Dynamique Dissipatifs et Applications* . Collection RMA (17) Paris: Masson, 1991.
- [35] F. L. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical system in Hilbert spaces, *Ann. Diff. Eqs*, vol. 1, no. 1, pp. 43-53, 1987.
- [36] A. E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Zeitschrift*, vol. 41, p. 367-379, 1936.
- [37] S. Icart, J. Leblond & C. Samson, Some results on feedback stabilisation of a one-link flexible arm, *rapport de recherche INRIA-Sophia Antipolis*, no. 1682, 1992.
- [38] F. John, *Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1981.

- [39] V. Jurdjevic; J. P. Quin, *Controllability and stability*, *J. Diff. Equations*, vol. 28, no. 3, pp. 381-389, 1978.
- [40] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, New York, 1980.
- [41] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilisation. The Multiplier Method*, Masson and John Wiley, 1994.
- [42] V. Komornik & E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, *J. Math. pures et appl.*, no. 69, pp. 33-54, 1990.
- [43] R. E. Langer, *On the zero of exponential sums and integrals*, *Bulletin of Amer. Math. Society*, pp. 213-239, 1931.
- [44] H. Laousy, B. Chentouf, *On the boundary stabilization of a hybrid system. A paraître à IFAC World congress 1999.*
- [45] H. Laousy, C.Z. Xu & G. Sallet, *Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system*, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 2, pp. 241-245, 1996.
- [46] J. P. LaSalle, *Stability theory for ordinary differential equations*, *J. Diff. Equations*, vol. 4, pp. 307-324, 1968.
- [47] T.S. Li, *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, Masson and John Wiley, 1994.
- [48] P. Ligarius, *Observateurs de systèmes bilinéaires à paramètres répartis: Application à l'échangeur thermique*. Thèse, Univ. de Rouen, 1997.
- [49] W. Littmaan & L. Markus, *Stabilization of a hybride system of f elasticity by feedback boundary damping*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1522, pp. 281-30, 1988.
- [50] A. Mifdal, *Etude de la Stabilisation forte et uniforme de système hybride: Application à un modèle de pont roulant*. Thèse, Univ. Henri Poincaré, Nancy I, 1997.
- [51] V. Mikhaïlov, *Equations aux dérivées partielles*. Mir, Moscou 1980.
- [52] O. Morgül, *Orientation and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body: Planar motion*, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 5, pp. 953-963, 1991.

- [53] O. Morgül, Constant angular velocity control of a rotating flexible structure, *in Proc. 2nd Conf., ECC'93.*, Groningen, Netherlands, pp. 299-302, 1993.
- [54] O. Morgül, Control of a rotating flexible structure, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 39, no. 52, pp. 351-356, 1994.
- [55] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [56] M. Pierre, Perturbations localement lipschitziennes et continues d'opérateurs m -accrétifs, *Proceeding of the American Mathematical Society*, vol. 58, pp. 124-128, 1976.
- [57] S. Pohjolainen & I. Latti, Robust controller for boundary control systems, *Int. J. Control*, vol. 38, no. 6, pp. 1189-1197, 1983.
- [58] J. Rauch & M. Taylor, Exponential decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domain, *Indiana University Mathematics Journal*, vol.24, no. 1, pp. 79-86, 1974.
- [59] B. Rao, Decay estimate of solution for hybrid system of flexible structures , *Euro. J. Appl. Math*, vol. 4, pp. 303-319, 1993.
- [60] B. Rao, Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity, *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 33, no. 2, pp. 440-454, 1995.
- [61] B. Rao, A remark on stabilization of SCOLE model with a priori bounded boundary control, *System Modelling and Optimization, Lecture notes in control and information sciences*, edied by J. Henri and J. P. Yvon.
- [62] B. Rao, Stabilisation d'une équation de plaque par contrôle frontière dynamique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 321, Série I, pp. 1449-1454, 1995.
- [63] B. Rao, Stabilization of elastic plates with dynamical boundary control, *SIAM J. Control and Optim.*, vol. 36, no. 1, pp. 148-163, 1998.
- [64] P. Rideau, Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs actionneurs ponctuels: étude du spectre du système . Thèse, Ecole national supérieure des mines de Paris, France, 1985.
- [65] D. L. Russell, Control theory of hyperbolic equations related to certain questions in harmonic analysis and spectral theory, *J. Math. Anal. Appl.*, 40, pp.336-368, 1972.

- [66] D. L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open questions, *Siam Review*, Vol.20, no.4, pp. 639-739, 1978.
- [67] D. L. Russell, Quadratic performance criteria in boundary control of linear symmetric hyperbolic systems, *SIAM J. Control*, vol. 11, no.3, pp. 475-509, 1973.
- [68] D. L. Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control-theoretic methods, *J. Diff. Equations*, 19, pp. 344-370, 1975.
- [69] M. Slemrod , Boundary feedback stabilization for a quasilinear wave equation, *Control theory for distributed parameter systems and applications, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 54, Springer, New York, 221-237, 1983.
- [70] M. Slemrod, Feedback stabilisation of a linear system in Hilbert space with an a priori bounded control, *Math. Contr. Signals and Systems*, 2, pp. 265-285, 1989.
- [71] A. Shkalikov, Boundary problem for ordinary differential operators with parameter in the boundary conditions, *Journal of Soviet Mathematics*, 33, pp. 1311-1342, 1986.
- [72] R. Triggiani, Lack of uniform stabilization for noncontractive semigroups under compact perturbation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 105 , no. 2, pp. 375-383, 1989.
- [73] I. I. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics (32), John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [74] C. Z. Xu, Exact observability and exponential stability of infinite dimensional bilinear systems, *MCSS*, vol. 9, no. 1, pp. 73-93, 1996.
- [75] C. Z. Xu & J. Baillieul, Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 38, no. 12, pp. 1754-1765, 1993.
- [76] C. Z. Xu, B. Chentouf & G. Sallet, On the stability of a symmetric hyperbolic linear system with non smooth coefficients. *Proceedings of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control 98*, pp. 4543-4544.
- [77] C. Z. Xu & J. P. Gauthier, *Analyse et commande d'un échangeur thermique à contre-courant*, *RAIRO APPII*, 25, pp. 377-396, 1991.

- [78] C. Z. Xu, J.P. Gauthier & I. Kupka, Exponential stability of the heat exchanger equation, *Proceedings of the European Control Conference*, Groningen, The Netherland, pp. 303-307, 1993.
- [79] C.Z. Xu, P. Ligarius & J.P. Gauthier, An observer for infinite-dimensional dissipative bilinear systems, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol.29, no.7, pp. 13-21, 1995.
- [80] C. Z. Xu & G. Sallet, Boundary stabilization of a rotating flexible system, in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 185, R. F. Curtain, A. Bensoussan, and J. L. Lions, Eds. New York: Springer Verlag, pp. 347-365, 1992.
- [81] A. Zeidler , *Non Linear Functional Analysis and its Applications*, vol. 2, Springer Verlag, New York, 1986.