



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

## THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Abdelhamid Brouki

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19980345
Cote	SM3 98/16
Loc	Magasin

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE :**

MÉCANIQUE

**OPTION :**

GÉNIE CIVIL

**DÉVERSEMENT DES POUTRES À PAROIS  
MINCES ET À SECTIONS OUVERTES  
ASPECT NUMÉRIQUES ET RÉGLEMENTAIRE**

à soutenir le 3 mars 1998 devant le jury composé de :

M.Potier-Ferry : Université de METZ  
J.M.Rotter : Université d'Eidenbourg U.K  
J.P Muzeau : Université B. PASCAL (Clermont2)  
J.C.Roth : Université de METZ  
A.Khelil : IUT Brabois (Nancy 1)  
F.Mohri : IUT Brabois (Nancy 1)

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Examineur  
Codirecteur de thèse

Laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux  
U.R.A C.N.R.S. 1215  
Université de Metz, île du Saulcy, 57045 Cedex 01

## REMERCIEMENT

Le travail de recherche présenté dans ce document a été réalisé au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'Université de Metz.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J.C.ROTH, mon directeur de thèse, qui m'a initié à la recherche et je le remercie vivement pour son soutien constant au long de cette étude et sa contribution à la mise en valeur de cette thèse.

J'exprime également ma profonde gratitude à Monsieur F.Mohri Maître de conférence à l'IUT Nancy-Brabois pour son aide constante, des conseils et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements aux membres du jury:

Monsieur J.P.MUZEAU, Professeur à l'Université B.Pascal (Clermont 2) et Monsieur J.M.ROTTER, Professeur à l'Université d'Eidenbourg (Royaume Uni), d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et de participer au jury.

Monsieur M.POTIER-FERRY, Professeur au LPMM de l'Université de Metz pour l'intérêt qui a porté à ce travail et de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur A.KHELIL, Maître de conférence à l'IUT Nancy-Brabois, pour ce qu'il a apporté à cette étude en participant au jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous ceux qui m'ont soutenu toutes ces années, pour leur aide précieuse.

---

**SOMMAIRE**

<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
<b>OBJECTIF DE L'ÉTUDE</b>	<b>2</b>
<b>1 TORSION DES ÉLÉMENTS À PAROIS MINCES ET À PROFILS OUVERTS</b>	<b>4</b>
<b>1.1 INTRODUCTION</b>	<b>5</b>
<b>1.2 PROFILÉS</b>	<b>5</b>
<b>1.2.1 Profilés laminés à chaud</b>	<b>5</b>
<b>1.2.2 Profilés formés à froid</b>	<b>6</b>
<b>1.2.3 Profilés reconstitués soudés</b>	<b>8</b>
<b>1.3 TORSION DES POUTRES</b>	<b>9</b>
<b>1.3.1 Origine de la torsion</b>	<b>9</b>
<b>1.3.2 Torsion uniforme</b>	<b>10</b>
<b>1.3.3 Torsion non uniforme</b>	<b>12</b>
<b>1.3.31 Équation d'équilibre en torsion</b>	<b>14</b>
<b>1.4 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS OUVERTES</b>	<b>16</b>
<b>1.4.1 Moments d'inertie</b>	<b>16</b>
<b>1.4.2 Surface sectorielle</b>	<b>17</b>
<b>1.4.3 Centre de torsion</b>	<b>19</b>
<b>1.5 BIMOMENT</b>	<b>23</b>
<b>1.5.1 Bimoment causé par des charges longitudinales</b>	<b>23</b>
<b>1.5.2 Bimoment causé par des charges transversales</b>	<b>24</b>
<b>1.5.3 Exemples numériques</b>	<b>25</b>
<b>1.6 DÉPLACEMENTS LINÉAIRES</b>	<b>28</b>
<b>1.7 CONTRAINTES</b>	<b>30</b>
<b>1.8 CONCLUSION</b>	<b>36</b>

---

---

<b>2 ÉTUDE ANALYTIQUE DES POUTRES SPATIALES</b>	37
2.1 INTRODUCTION	38
2.2 HYPOTHESES FONDAMENTALES	38
2.3 DÉPLACEMENTS	39
2.3.1 Déplacements semi-linéaires	39
2.3.2 Déformations	40
2.5 POTENTIEL TOTAL DES POUTRES SPATIALES	44
2.6 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE	47
2.7 CONCLUSION	48
<b>3 ETUDE DU DÉVERSEMENT DES POUTRES : À PARTIR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES VALIDATION REGLEMENTAIRE ET NUMÉRIQUE</b>	49
3.1 INTRODUCTION	50
3.2 DÉFINITION	50
3.3 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE	51
3.4 CAS D'UN CHARGEMENT PLAN APPLIQUÉ À UNE SECTION MONOSYMMÉTRIQUE	55
3.4.1 Flexion pure	56
3.4.2 Moment linéairement variable	56
3.4.3 Cas des charges transversales uniformément réparties	57
3.5 FORMULE GÉNÉRALE DE DÉVERSEMENT	58
3.5.1 Importance du point d'application des charges transversales	60
3.5.2 Influence de la forme de la section transversale	61
3.6 COMPARAISON NUMÉRIQUE ET RÉGLEMENTAIRE	63
3.6.1 Présentation du code de calcul	63
3.6.2 Cas des sections bisymétriques	65
3.6.21 Poutres soumises à un gradient de moments	66
3.6.22 Poutres soumises à des charges transversales	69

---

---

3.6.3 Poutres à sections monosymétriques	72
3.6.31 Validation numérique	72
3.6.32 Élément coque	73
3.6.33 Comparaison numérique et réglementaire	76
3.7 CHARGES CRITIQUES DES POUTRES BI- ENCASTRÉES	84
3.8 COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE D'ANDERSON	87
3.9 CONCLUSION	90
<b>4 ETUDE DU DÉVERSEMENT DES POUTRES : APPLICATION DE LA MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE. VALIDATION RÉGLEMENTAIRE ET NUMÉRIQUE.</b>	91
4.1 INTRODUCTION	92
4.2 MÉTHODE DE CALCUL	93
4.3 PROPRIÉTÉS DE LA SECTION TRANSVERSALE	95
4.4 DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE BI-ARTICULÉE	98
4.4.1 Poutre soumise à des gradients de moments	98
4.4.1.2 Résultats numériques	100
4.4.1.3 Comparaison des résultats	103
4.4.2 Poutre soumise à deux charge concentrées appliquées à une distance $\alpha L$ des appuis	108
4.4.2.1 Discussion des résultats	111
4.5 DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE CONSOLE	117
4.5.1 Introduction	117
4.5.2 Console soumise à un moment appliqué à son extrémité libre	117
4.5.3 Console soumise à une charge concentrée appliquée à son extrémité libre	122
4.5.4 Résultats numériques	123
4.5.5 Console soumise à une charge uniformément répartie	125
4.5.6 Résultats numériques	126
4.5.7 Comparaison aux travaux de Hirt et Wang	128
4.5.8 Comparaison expérimentale	133

---

<b>4.6 CONCLUSION</b>	135
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	136
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	138
<b>ANNEXES</b>	143
<b>ANNEXE 1 : Méthode de Galerkin</b>	143
<b>ANNEXE 2 : Charges critiques des sections monosymétriques (suppléments du paragraphe 3.6.33)</b>	145
<b>ANNEXE 3 : Méthode de Trahair</b>	152
<b>ANNEXE 4 : Calculs des intégrales utilisées</b>	154

---

---

**NOTATIONS**
**CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES**

$x, y, z$	Coordonnées courantes d'un point M
$s$	Coordonnée curviligne
$\omega$	Coordonnée sectorielle
$A$	Aire de la section droite
$I_y, I_z$	Moments d'inertie d'une section
$I_{sup}, I_{inf}$	Moments d'inertie de la semelle supérieure et inférieure
$J$	Moment d'inertie de torsion uniforme
$S_y, S_z, S_\omega$	Moments statiques d'une section
$I_\omega$	Moment d'inertie de gauchissement
$\beta_y, \beta_z, \beta_\omega$	coefficients d'asymétrie (Wagner)
$r$	rayon de giration
$t$	épaisseur
$e$	excentricité
$b$	largeur de la semelle
$h$	hauteur de la section
$L$	longueur
$y_0, z_0$	coordonnées du centre de torsion
$y^*, z^*$	Points d'application de la charge transversale
$y_1, z_1$	Coordonnées du point initial
$y_d, z_d$	Coordonnées du pôle secondaire

**CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES**

$E$	Module d'élasticité longitudinale
$G$	Module d'élasticité transversale

---

**DÉPLACEMENTS ET DÉFORMATIONS**

$u_M, v_M, w_M$	Déplacements d'un point M
$u, v, w$	Déplacements du centre de torsion
$\theta_x$	Angle de torsion
$\theta'_x$	Gauchissement
$\varepsilon$	Déformation longitudinale
$\gamma$	Distorsion de la section transversale

**COEFFICIENTS ET GRANDEURS SANS DIMENSIONS**

$\alpha$	Coefficient de distance
$\rho$	Degré de la monosymétrie de la section
$K$	Élancement de la poutre
$g$	Moment de déversement adimensionnel
$\beta_1$	rapport entre les moments d'appuis

**SOLLICITATIONS ET CONTRAINTES**

$B$	Bimoment
$M_y, M_z$	Moments de flexion
$M_x$	Moment de torsion
$M_{cr}$	Moment critique
$M_{SV}$	Moment de torsion de Saint Venant
$M_\omega$	Moment de torsion de gauchissement
$N$	Effort normal
$P$	Charge transversale concentrée
$P_{cr}$	Charge critique transversale concentrée
$q$	Charge transversale uniformément répartie

$q_{cr}$	Charge critique uniformément répartie
$\sigma$	Contrainte normale
$\tau$	Contrainte de cisaillement
$\sigma_{\omega}$	Contrainte due au gauchissement

---

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'historique de l'étude des éléments à parois minces est surtout marqué par les travaux de Vlassov [62]. Dans son livre intitulé, "Pièces Longues en voiles Minces", dont la première édition date de 1940, on trouve, outre les principes de calcul des poutres à parois minces, une méthode relativement simple permettant de prendre en compte l'effet du gauchissement des sections. Vlassov a démontré que le principe de Bernoulli basé sur la loi des sections planes, ne peut plus être invoqué dans les profilés à parois minces. Ensuite, il a développé la méthode des aires sectorielles qui permet de prendre en compte l'effet du gauchissement dans la section. Pour l'étude de l'instabilité élastique des colonnes par flexion - torsion, l'ouvrage cité ci-dessus comporte des développements très complets. Dans son ensemble, la théorie de Vlassov s'est montrée plus générale et plus féconde que la théorie classique.

Par la suite, Timoshenko [34] a utilisé la théorie des aires sectorielles de Vlassov, pour faire une présentation plus simple et aisément compréhensible. On note qu'il a établi par voie expérimentale la valeur de la rigidité à la torsion pure de la poutre en "T". Il a étudié aussi en détail le phénomène de la torsion, lorsque les sections transversales de la poutre subissent en même temps les contraintes normales et les contraintes tangentielles.

Dans les années 30, Wagner a étudié la stabilité des profilés ouverts à parois minces. Ces études théoriques ont conduit aux formules de détermination des charges critiques par torsion. Dans l'établissement de ses formules, donnant les contraintes normales complémentaires, Wagner utilisait déjà une loi analogue à la loi des surfaces sectorielles. D'autres auteurs dont Bleich (1952), Gere (1966) et Goodier ont contribué au développement de la théorie des profilés minces.

Plusieurs auteurs ont proposé des solutions analytiques donnant les charges critiques des éléments minces. Trahair [61] et son équipe ont présenté des solutions pour des poutres sollicitées par un gradient de moment et pour des poutres consoles. Yoo [66] a étudié la contribution du bimoment à la stabilité des profilés ouverts. Massonnet [47] a établi des formules pour le dimensionnement des poutres. Kitipornchai [41] et Wang [63] présentent une méthode énergétique de l'étude des poutres avec section en "T", dans le domaine critique. Dans ce cas la charge critique du déversement est calculée par application de la méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur la minimisation de l'énergie.

En France, Djalaly [26], [27], [28], [29] a donné des solutions analytiques aux équations différentielles traduisant l'équilibre obtenues par Vlasov, en prenant des déplacements et des déformations non linéaires. Les solutions proposées concernent les poutres sollicitées par des moments et des charges transversales. Ces relations sont reprises dans l'Eurocode3 partie 1-1 pour les vérifications du déversement des poutres [32].

Quelques ouvrages généraux sont apparus dans les deux dernières décennies, et qui traitent du comportement et de la stabilité des éléments minces: Chajes [23], Gallagher [33] et Trahair [61]. En France, on cite Courbon [25], Batoz et Dhatt [14].

Le développement de méthodes numériques pour le calcul des structures a amené d'importantes modifications des pratiques anciennes. L'utilisation de la méthode des éléments finis n'est pas pourtant évidente dans le cas d'éléments à parois minces. En 1970, Barssoum et Gallagher [12] ont présenté l'étude d'un élément poutre spatiale à sept degrés de libertés, qui permet le calcul des éléments en flexion torsion avec prise en compte du gauchissement. Trois ans plus tard, Bazant [17] a utilisé aussi un élément fini, pour l'étude des poutres courbées et ayant une section variable. La méthode des éléments finis, dans une formulation non-linéaire constitue, à l'heure actuelle, le moyen le plus puissant pour l'étude des structures à parois minces. Dans nos travaux, nous exploitons un logiciel de calcul de structures avec formulation non-linéaire (géométrique et matérielle), le code de calcul ABAQUS [1] et [2]. Ce code de calcul, considère un élément de type barre spatiale à sept degrés de liberté à chaque noeud, où les déformations de gauchissement sont prises en compte.

## **1.2 OBJECTIF DE L'ÉTUDE**

L'un des problèmes majeurs, est visiblement, la détermination des charges que peuvent supporter les profilés ouverts à parois minces et, parfois, les limites à prescrire aux charges à partir d'une forme géométrique fixée. Compte tenu de cela, l'utilisation massive de profilés légers en construction métallique est liée, nécessairement, à différentes recherches théoriques, expérimentales et numériques dont la plus déterminante est certainement, celle de la stabilité de ces profilés. Donc, nous avons abordé les phénomènes d'instabilités dans un cadre général pour aboutir progressivement aux problèmes spéciaux de déversement et flambement.

Le but du présent travail est d'établir une méthode de dimensionnement des poutres formées de profils ouverts à parois minces. L'analyse des diverses méthodes et voies de recherches, nous a conduit à nous assigner comme but principal la mise au point d'une part,

d'une méthode analytique pour le chargement symétrique et d'autre part, d'une méthode semi-empirique, voire de type abaque pour la prévision des charges critiques des poutres soumises à un chargement asymétrique. Afin de vérifier les propositions théoriques, nous avons réalisé une vaste campagne de calculs comparatifs entre les solutions numériques, réglementaires et résultats trouvés dans la bibliographie.

**Le présent travail comporte quatre parties :**

La première partie à caractère bibliographique, est un rappel de notions et concepts de base de la torsion, ainsi que la théorie des surfaces sectorielles fondement de la théorie de Vlassov concernant la torsion des poutres spatiales. Nous montrons avec quelques exemples l'efficacité de la théorie des aires sectorielles.

Dans la deuxième partie, nous présentons le travail de Djalaly [26] et [29] qui consistait à trouver les équations différentielles d'équilibre des poutres spatiales à parois minces et profils ouverts. Dans l'établissement de ces équations Djalaly a utilisé des déplacements semi-linéaires, contrairement à Vlassov [62] qui a considéré le cas linéaire.

Dans la troisième partie, nous donnons la solution du problème de déversement d'une poutre simple soumise à un chargement transversal et à un gradient de moments. Les résultats obtenus seront comparés à ceux donnés par la réglementation en vigueur (Eurocode3 [32]) et ABAQUS.

Dans la quatrième partie, nous établirons la charge critique du déversement pour une poutre simple et une poutre console. La solution est obtenue par une approche énergétique où nous considérons une fonction de forme ayant plusieurs termes pour approximer les déplacements. On établit par la suite une comparaison des charges critiques calculées par notre méthode, par ABAQUS et par les résultats trouvés dans la littérature [4], [38], [61].

**CHAPITRE I**

**TORSION DES ÉLÉMENTS  
À PAROIS MINCES ET À  
PROFILS OUVERTS**

## 1.1 INTRODUCTION

La construction métallique légère s'est taillée une place de toute première importance au cours des dernières décennies parce que ses caractéristiques (fabrications en séries, possibilités de standardisation, légèreté) correspondent aux impératifs du bâtiment industriel. Cette large réputation est due à l'utilisation au maximum des avantages des éléments de construction présentant des parois minces. Ces éléments de construction dont les parois doivent le plus souvent être affectés du qualificatif "mince" se divisent en trois catégories.

- \* profilés laminés à chaud
- \* profilés formés à froid
- \* profilés reconstitués soudés

### 1.2.1 LES PROFILÉS LAMINÉS À CHAUD

La procédure de laminage se déroule de la façon suivante : entraîner et écraser le métal chaud (lingot ou ébauche de coulée continue) entre deux cylindres tournant en sens inverse. Les cylindres sont lisses pour les produits plats, à cannelures pour les profilés (figure 1.2). En répétant plusieurs fois l'opération, on obtient un produit de plus en plus mince et de plus en plus long, à la forme souhaitée (figure 1.1). Les laminés à chaud comprennent une large variété de produit de différentes formes, on cite par exemple les IPE, IPN, ...etc. Les dimensions standards de ces profilés sont données sous forme de catalogues par les constructeurs.

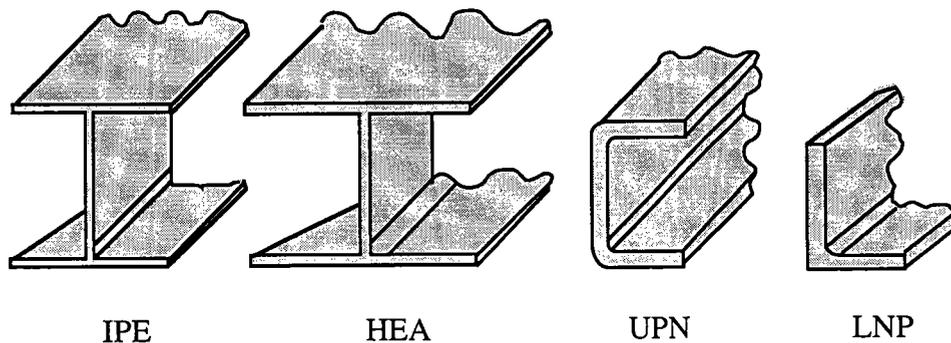


Figure 1.1 - Sections laminées à chaud

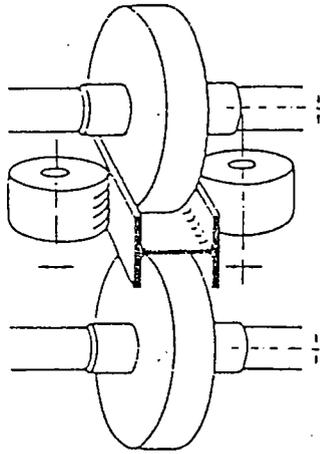


Figure 1.2 : Procédure de laminage à chaud

### 1.2.2 PROFILÉS FORMÉS À FROID

Actuellement, les profilés formés à froid sont assez régulièrement utilisés par les constructeurs, bien qu'ils restent du domaine du "non traditionnel". Il est certain que leur calcul est plus compliqué que celui des profilés laminés à chaud, notamment parce que leurs sections ne présentent jamais deux axes de symétrie, et même rarement un. La figure 1.2 montre plusieurs types de profilés couramment fabriqués par formage à froid.

La mise au point de profils économiquement plus rentables favorise l'utilisation des profilés à froid dans la construction. On doit pourtant différencier deux types de produits fabriqués par pliage et par profilage à froid : les produits de type "sections" utilisés en général comme éléments principaux ou secondaires des charpentes (poutres et colonnes par exemple) et

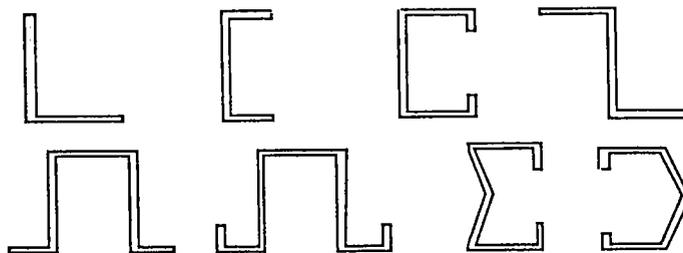


Figure 1.3 : Profilés formés à froid

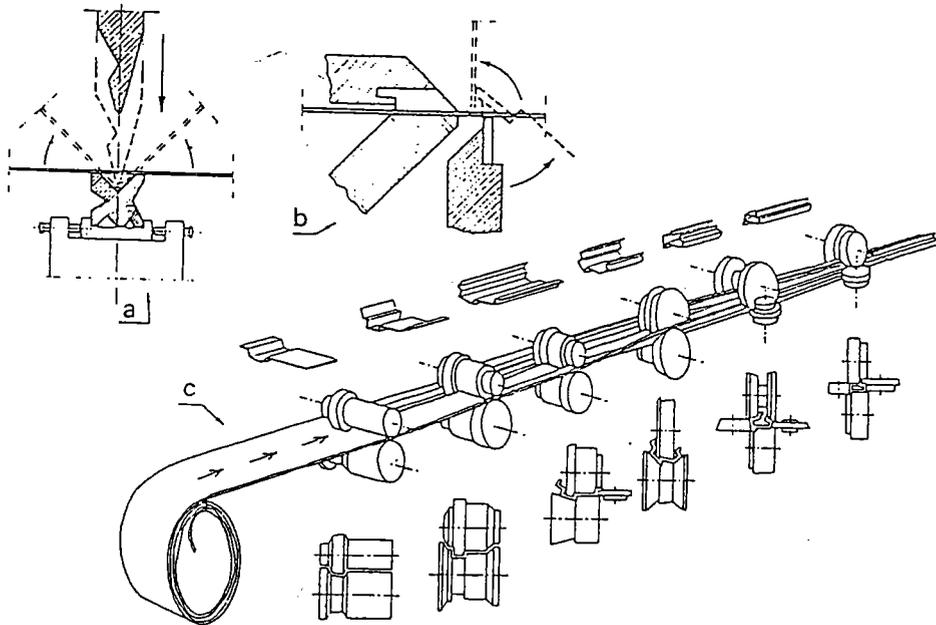


Figure 1.4 : Procédure de formation à froid

a) : Pliage par presse, b) : Pliage par plieuse

c) : Pliage par profilage

les produits de type "tôles" servant pour la couverture et le bardage des constructions industrielles. Comme application bien connue des profilés à froid, on peut encore citer, entre autres, pour les sections, les pannes U ou Z, les rayonnages pour le stockage industriel, les éléments de treillis et les pylônes de transmission d'énergie électrique. Ces profilés peuvent être utilisés en toitures ou en planchers, et également dans la réalisation de l'ossature principale de bâtiment, notamment dans le cas de petite portées ( $< 20\text{m}$ ). Il est intéressant de revenir sur l'intérêt qu'offre les profilés formés à froid vis à vis des autres sections. Du fait qu'ils peuvent être empilés (figure 1.5), ces profilés conduisent à une réduction du volume nécessaire à leur transport. Du point de vue résistance, les problèmes majeurs rencontrés dans l'utilisation de ces profilés leur faible résistance à la torsion. Du fait des faibles épaisseurs mises en oeuvre, il est difficile de résister à la torsion. Des pièces additionnelles, telle que les raidisseurs sont les plus souvent utilisés pour renforcer la poutre.

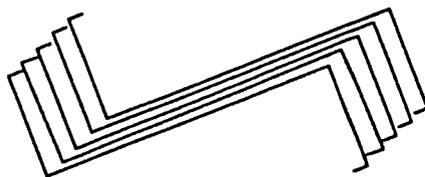


Figure 1.5

### 1.2.3 PROFILÉS RECONSTITUÉS SOUDÉS

La fabrication des P.R.S (Profilés Reconstitués Soudés) se fait d'une manière plus simple avec l'assemblage de plaques à parois minces soit par soudage, ou bien au moyen de rivets. Par exemple, une poutre en I reconstituée à partir de plaques prédécoupées aux dimensions voulues, se révèle très économique, si on utilise de grandes hauteurs et de faibles épaisseurs d'âme, et que l'on évite les raidisseurs transversaux, dont la pose génère des coûts qui font perdre tout l'avantage dû au gain de poids inhérent à ce type de fabrication.

Les P.R.S sont des éléments tout à fait particuliers de la construction métallique, parce qu'ils permettent l'inertie variable que l'on peut employer pour l'âme, ce qui permet d'adapter la hauteur de l'âme de la poutre à la sollicitation. Souvent les poutres principales d'un pont, sont des P.R.S à inertie variable. Une autre caractéristique importante des P.R.S est l'utilisation des plaques minces pour la fabrication. Un rapport hauteur / épaisseur pour l'âme égal à 200 n'est pas rare. Ces profilés minces, de sections diverses (Z, U, ..), sont plus légers, et donc plus économiques, que les laminés usuels (IPE par exemple). Mais ce gain de poids, est obtenu au détriment de l'inertie, principalement de l'inertie transversale. La faible rigidité de torsion est ainsi à l'origine de nombreux incidents. Ces inconvénients font des profils qui résistent très mal aux phénomènes d'instabilités. La figure 1.6 montre que pour une même inertie transversale, on obtient un profilé plus léger et plus élancé.

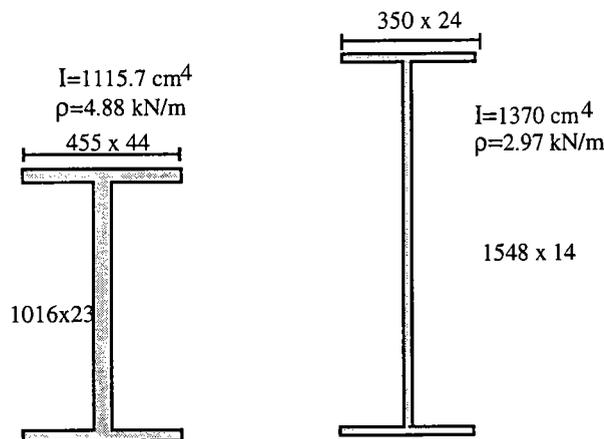


Figure 1.6 : Profilés laminés à chaud et profilés reconstitués soudés

## 1.3 TORSION DES POUTRES

### 1.3.1 ORIGINE DU PHÉNOMÈNE

Soit une poutre ayant une section en "I" bisymétrique selon la figure (1.7) où le centre de symétrie constitue, à la fois le centre de gravité et le centre de torsion. Lorsque l'axe longitudinal de la poutre est disposé perpendiculairement à la ligne d'action des charges transversales, d'une part, et que le plan de chargement coïncide avec un plan de symétrie de la section transversale (figure 1.7-a) d'autre part, la poutre n'est pas soumise ni à effort axial, ni à torsion. Les seuls efforts intérieurs sont donc un moment de flexion et un effort tranchant : chaque section est sollicitée en flexion simple monoaxiale dans son plan de symétrie, qui correspond au plan de chargement. Lorsque le plan de chargement passe par le centre de symétrie d'une telle section, sans toutefois coïncider avec l'un des plans principaux, la poutre est en état de flexion simple déviée (figure 1.7-b). La non coïncidence du plan de chargement avec un plan de symétrie de la section entraîne un excentrement des charges transversales par rapport au centre de torsion de la section. La poutre est alors soumise à une flexion simple monoaxiale ou biaxiale accompagnée de torsion (figure 1.7-c et d).

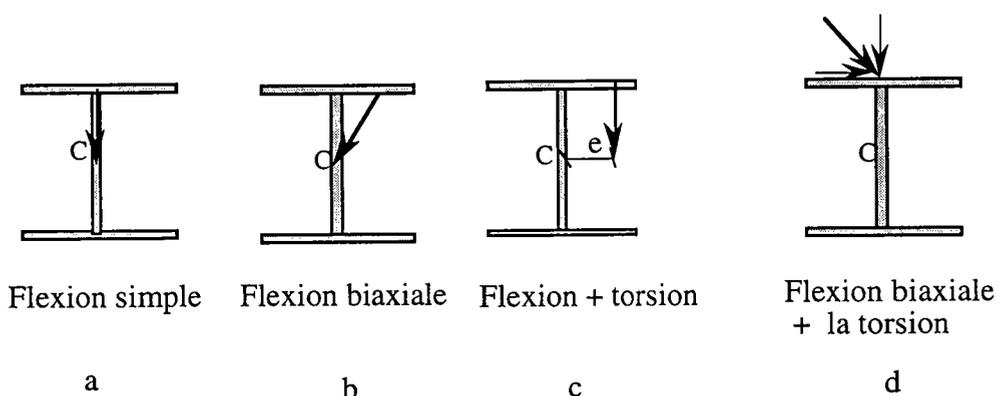


Figure 1.7

Un effort axial additionnel naît notamment lorsque l'axe de la poutre n'est pas perpendiculaire à la direction des forces transversales. La poutre est alors, soumise à une flexion combinée à un effort axial (flexion composée) et, éventuellement, à une torsion.

### 1.3.2 TORSION UNIFORME ( SAINT-VENANT )

Couramment, on distingue les poutres à sections massives de celles à parois minces et, pour ces dernières, on différencie les sections fermées des sections ouvertes. La section est massive si ses diverses dimensions sont du même ordre de grandeur.

La théorie de la torsion pour les sections massives est développée par Saint-Venant en 1855, c'est la généralisation du problème de torsion de poutres cylindriques (voir figure 1.8). Il considère que la déformation de la barre en torsion est caractérisée par l'angle de rotation d'une section située à l'abscisse  $x$  relativement à une section d'origine. Ce type de torsion ne produit pas de contraintes normales, mais uniquement des contraintes de cisaillement, c'est à dire que les contraintes de cisaillement s'écoulent tangentiellement aux lignes de niveaux de la membrure.

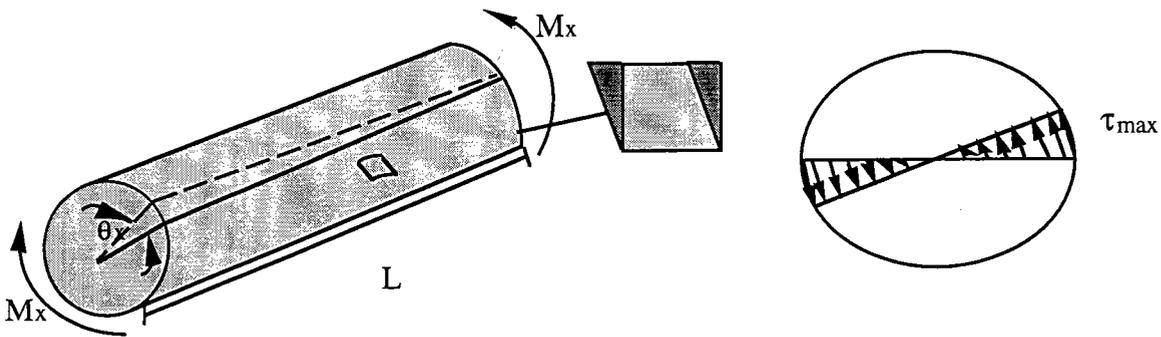


Figure 1.8 : Torsion de Saint Venant

L'équation reliant le moment de torsion  $M_x$  et l'angle de rotation  $\theta_x$  est donnée par :

$$\theta'_x = \frac{M_x}{GJ} \quad (1.1)$$

Avec :

$G$  : Le module de cisaillement.

$J$  : Moment d'inertie de torsion uniforme.

$GJ$  est appelé la rigidité de torsion uniforme.

La solution de l'équation 1.1 donne un angle de torsion linéaire le long de la poutre.

La répartition des contraintes tangentielles de torsion dans les poutres à section pleine peut se faire à l'aide de l'analogie de membrane. Ces contraintes varient proportionnellement de zéro au centre de la section, jusqu'à la valeur maximale à la fibre extrême dans le cas d'une section circulaire (figure 1.8). Selon Zbirohowski-Koscia [68], pour une section rectangulaire (figure 1.9), la variation des contraintes se fait suivant les lignes de niveaux de contraintes de cisaillement.

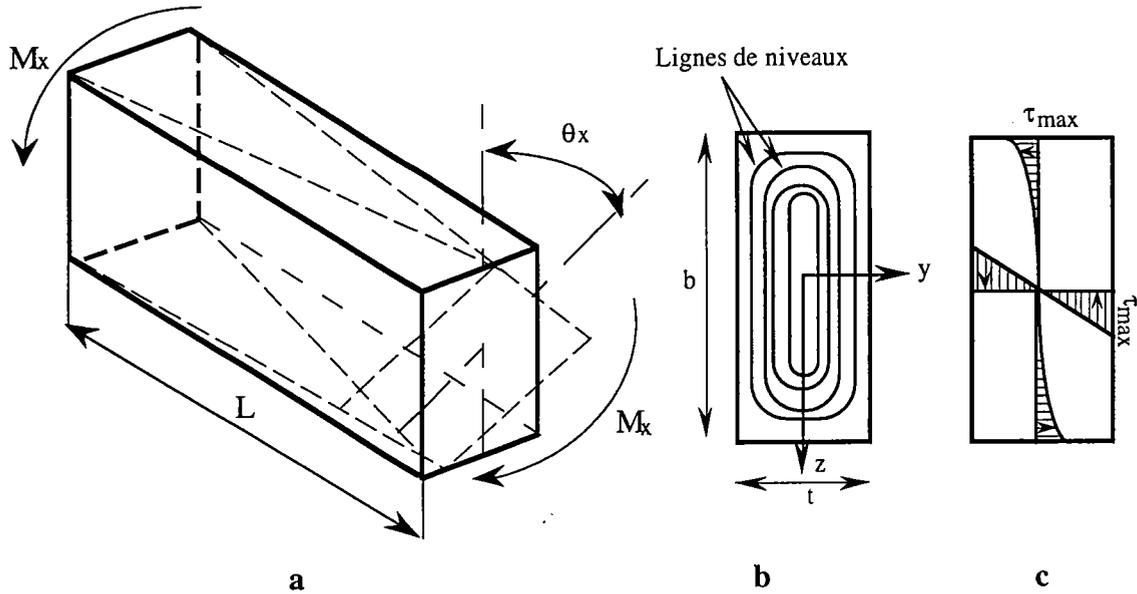


Figure 1.9 :

La contrainte de cisaillement maximale a été donnée par [68], elle a pour expression :

$$\tau_{\max} = M_x \frac{t}{\alpha b t^3} = M_x \frac{3}{\alpha b t^2} \quad (1.2)$$

Où :

$b$  est l'hauteur de la section.

$t$  largeur de la section

$\alpha$  est un coefficient qui dépend du rapport  $b/t$  des dimensions de la section. La valeur de  $\alpha$  varie de  $\alpha = 0.624$  pour  $b/t = 1$  à  $\alpha = 1$  pour  $b/t > 10$ . La formule 1.2 peut s'étendre à des poutres ayant des sections transversales quelconques et en particulier, les profilés minces et à parois ouvertes (figure 1.10).

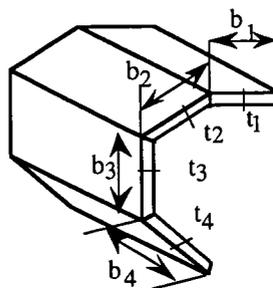


Figure 1.10

La généralisation de l'équation 1.2 s'écrit sous la forme :

$$\tau_{\max} = \frac{M_x t}{J} \quad (1.3)$$

où

$$J = \alpha \sum_{k=1}^n \frac{b_k t_k^3}{3} \quad (1.4)$$

avec :

$n$  : Nombre du segment qui composent la section.

$b_k$  : longueur du segment "k".

$t_k$  : épaisseur du segment "k".

Dans le cas des profilé ouverts à parois minces  $\alpha = 1$ .

### 1.3.3 TORSION NON UNIFORME (VLASSOV)

Dans le cas de la théorie des poutres (théorie classique), les contraintes normales et tangentiels sont calculées à partir des éléments de réductions ( $N$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ ), ces efforts sont calculés au niveau de la fibre moyenne, pour un chargement spatial. Les contraintes normales sont dues à l'effort normal  $N$  et aux moments fléchissant  $M_y$  et  $M_z$ , agissant autour des axes principaux de la section. Les contraintes tangentiels sont dues aux efforts de cisaillement  $T_y$ ,  $T_z$  et au moment de torsion  $M_x$ .

Dans le cas des profilés ouverts à parois minces type (I, U, C, Z), les différents points de la section peuvent avoir, en plus des déplacements régis par la torsion uniforme, des déplacements longitudinaux complémentaires, dûs au gauchissement de section. A cause de ce gauchissement une charge longitudinale, à la différence d'une charge transversale, ne plus être remplacée par un système de forces longitudinales statiquement équivalent. Nous illustrons ce problème, en considérant une poutre console à profil en I, chargée à l'extrémité libre par une force longitudinale  $F$ , appliquée à l'extrémité de la semelle inférieure. Les excentricités de la charge sont  $e_y = b/2$  et  $e_z = h/2$  par rapport au centre de gravité de la section (figure 1.11-a).

D'après la théorie classique, ce chargement ramené à la fibre moyenne, est statiquement équivalent à un effort normal  $N = F$  et deux moments de flexion  $M_y = Fe_z$  et  $M_z = Fe_y$  (figure 1.11-b). La charge longitudinale donnant la traction seule est représentée à la fig 1.11- c . Les charges longitudinales donnant la flexion sont représentées aux figures 1.11-d et 1.11-e. Chacune de ces charges est composée de forces, appliquées aux points extrêmes de la section, et égales en valeur absolue  $F/4$ .

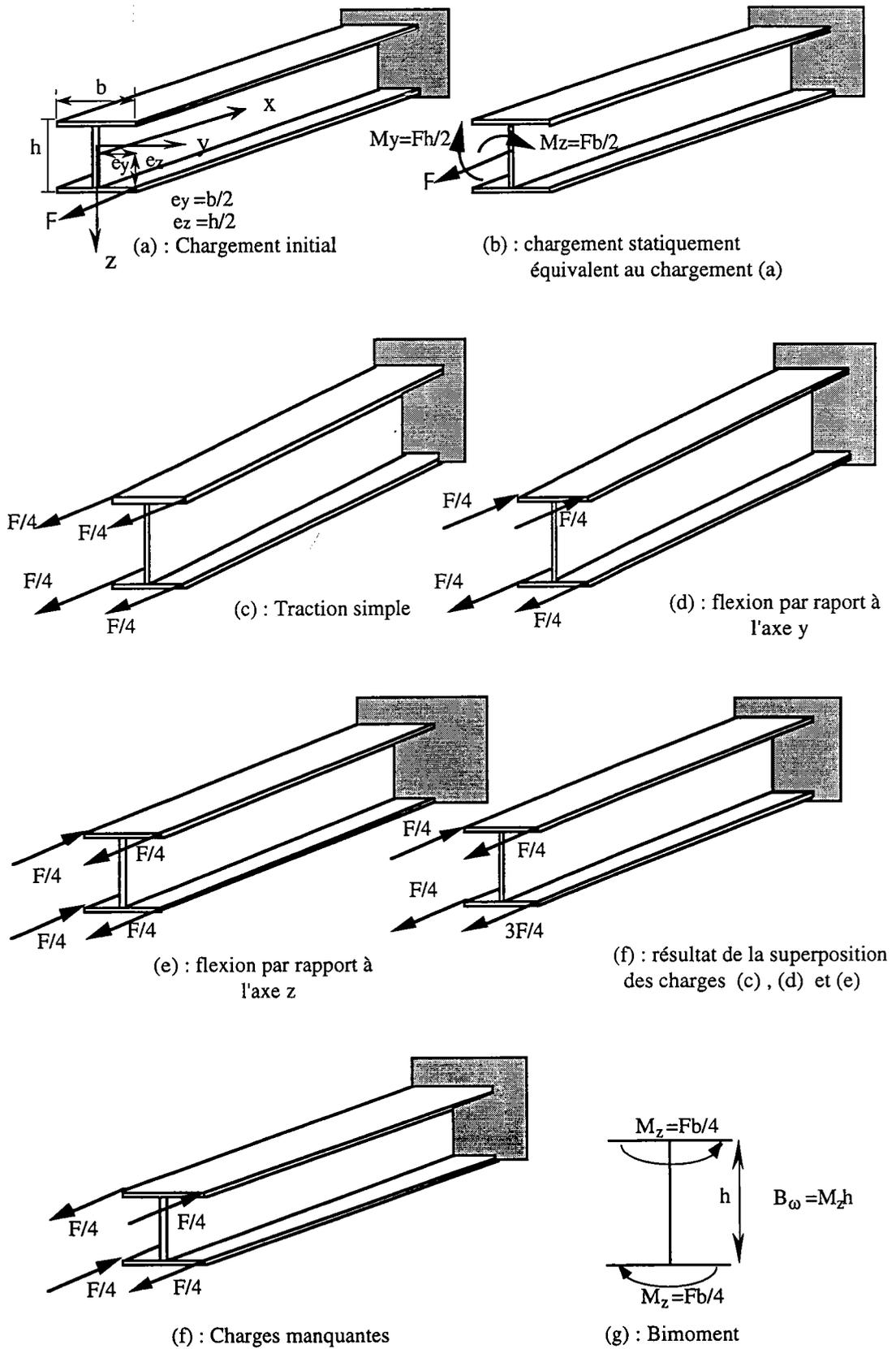


Figure 1.11

Lorsqu' on superpose les trois cas de chargement (1.11-c, d et e), on trouve un état de chargement (1.11-f) différent de la sollicitation initiale (figure 1.11-a). Pour retrouver le chargement initialement imposé, on doit ajouter celui de la figure 1.11-f. Une telle charge équivaut à deux moments fléchissants égaux et de signes contraires, agissant dans les deux plans des ailes de la poutre et provoquant leur flexion dans des sens opposés (figure 1.11-g), Vlassov [61] l'a appelé Bimoment. Par suite de cette double flexion, les sections transversales de la poutre subiront un gauchissement.

On voit que dans le cas des sections ouvertes, la réduction des charges par la théorie classique n'est pas suffisante. En présence du gauchissement, on doit calculer un effort supplémentaire appelé bimoment [62]. De ce fait le nombre d'éléments de réduction devient sept (N, T<sub>y</sub>, T<sub>z</sub>, M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub>, M<sub>x</sub>, B).

### 1.3.31 ÉQUATION D'ÉQUILIBRE EN TORSION

Dans le cas des sections ouvertes à parois minces (section en I) sollicitée en torsion, on remarque que, en plus de l'angle de torsion, il y a un déplacement transversal  $v$  qui provoque la flexion et le cisaillement des semelles (figure 1.12). Le moment de torsion est équilibré par les contraintes tangentielles de Saint Venant et par le moment dû aux efforts de cisaillement  $T_y$  dans les semelles. Cela se traduit par :

$$M_x = M_{SV} + M_{\omega} = GJ \frac{d\theta_x}{dx} + T_y h \quad (1.5)$$

Où :

$M_{SV}$  : le moment de torsion de Saint venant, il est donné par l'équation 1.1

$M_{\omega}$  : le moment de la torsion gauchissement.

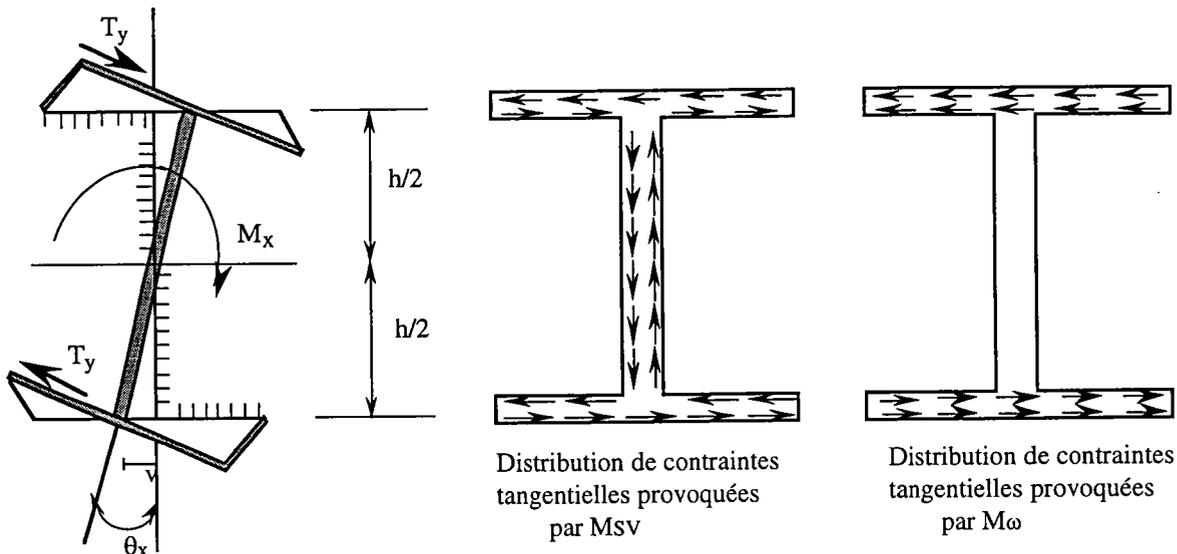


Figure 1.12: Gauchissement de la section transversale

Dans l'hypothèse des petits déplacements, on peut exprimer  $v$  en fonction de  $\theta_x$  par la relation :

$$v = \theta_x h / 2 \quad (1.6)$$

Le déplacement latéral de la semelle  $v$  est relié au moment fléchissant  $M_z$  par :

$$M_z = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (1.7)$$

Où  $I_z$  est le moment d'inertie quadratique.

L'effort de cisaillement  $T_y$  est défini comme étant la dérivée première de  $M_z$ , donc :

$$T_y = \frac{dM_z}{dx} \quad (1.8)$$

En tenant compte de (1.6) et (1.7), (1.8) devient :

$$T_y = -EI_z \frac{h}{2} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.9)$$

Le moment de la torsion de gauchissement développé au niveau d'une semelle s'écrit :

$$M_\omega = T_y h \quad (1.10)$$

Donc  $M_\omega$  s'écrit :

$$M_\omega = T_y h = -EI_z \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.11)$$

On définit  $I_\omega$  comme étant le moment d'inertie sectorielle:

$$I_\omega = \frac{I_z h^2}{2} \quad (1.12)$$

En remplaçant (1.12) par sa valeur, l'équation (1.11) devient

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.13)$$

En fin, l'équation différentielle reliant le moment de torsion  $M_x$  et l'angle de torsion est donnée par :

$$M_x = M_{SV} + M_\omega = GJ \frac{d\theta_x}{dx} - EI_\omega \frac{d^3 \theta_x}{dx^3} \quad (1.14)$$

Où :

$I_\omega$  : Moment d'inertie de gauchissement

$EI_\omega$  : est la rigidité de la torsion non uniforme.

Ainsi  $M_{SV}$  provoque l'apparition d'une première distribution de contraintes tangentielles, en accord avec la théorie de Saint Venant et  $M_\omega$ , d'une seconde à cause du gauchissement de la section. La solution de l'équation 1.14 donne un angle de torsion non linéaire le long de la poutre.

## 1.4 CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES DES SECTIONS OUVERTES

Dans le calcul des profilés ouverts à parois minces sous l'action combinée de la flexion et la torsion on a besoin, en plus de la connaissance des caractéristiques géométriques de la section transversale exigées par la théorie classique, encore de celles qui font intervenir la torsion non uniforme. Dans la théorie classique, les caractéristiques géométriques des sections nécessaires sont : le centre de gravité, l'aire de la section et les moments d'inertie statiques et quadratiques. Les caractéristiques géométriques qui interviennent dans le calcul de la torsion non uniforme sont : le centre de torsion, la coordonnée sectorielle, le moment d'inertie de torsion uniforme et de gauchissement.

### 1.4.1 MOMENTS D'INERTIE

Les moments statiques et quadratiques classiques (liés à la théorie des poutres), sont donnés par les relations suivantes :

$$A = \int_A dA \quad S_y = \int_A z dA \quad , \quad S_z = \int_A y dA \quad (1.15)$$

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad , \quad I_z = \int_A y^2 dA \quad , \quad I_{yz} = \int_A yz dA \quad (1.16)$$

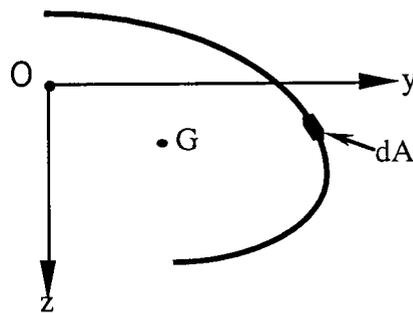


Figure 1.13

Dans l'analyse des poutres à parois minces et profils ouverts, les coordonnées d'un point qui se trouve sur le contour de la section transversale, est repéré par rapport aux axes principaux centraux. La position de l'origine et de la direction de ces axes principaux est définie par les trois conditions données par les équations suivantes :

$$S_y = \int_A z dA = 0 \quad (1.17-a)$$

$$S_z = \int_A y dA = 0 \quad (1.17-b)$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0 \quad (1.17-c)$$

Les deux équations (1.17-a et 1.17-b) sont utilisées pour localiser l'origine des coordonnées principales. Ce point particulier est appelé : "le centre de gravité de la section transversale". L'équation (1.17-c) donne la direction des axes principaux.

### 1.4.2 SURFACE SECTORIELLE

La coordonnée sectorielle est une variable qui intervient dans le calcul de la torsion non uniforme. Elle se réfère par rapport à la ligne moyenne du contour de la section transversale du profilé ouvert (figure 1.14). La coordonnée sectorielle du point  $M$ , mesurée à partir du pôle  $D$  et du point initial  $M_1$ , est représentée par deux fois l'aire formée par les deux segments  $DM$ ,  $DM_1$  et l'arc  $MM_1$ .

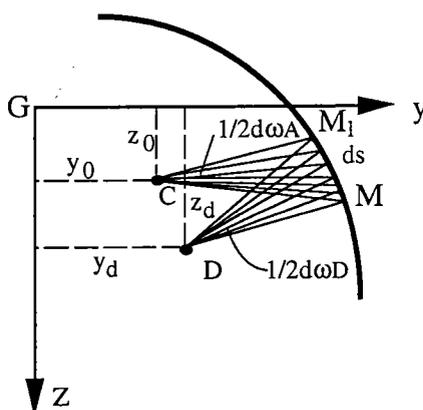


Figure 1.14

Où :

$D$  est le pôle auxiliaire de la coordonnée sectorielle qui représente le centre de rotation des points du contour transversal.

$M_1$  est appelé point initial à partir duquel On mesure la surface sectorielle.

$M$  est le point d'intersection du segment  $DM$  et de la tangente au contour transversale de la section en ce point ( $M$ ).

$C$  est le centre de torsion (définie ci après).

Soient  $\omega_C$ ,  $\omega_D$  les surfaces sectorielles qui correspondent respectivement aux pôles  $C$  et  $D$ .

L'aire du triangle  $CMM_1$ , selon la figure 1.15, est donnée par :

$$CMM_1 = CAM - CBM_1 - BAMM_1 \quad (1.18)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\text{CMM}_1) &= \frac{1}{2}[(y - y_0) + dy] [(z - z_0) + dz] \\ &\quad - \left(z - z_0 + \frac{1}{2} dz\right) dy - \frac{1}{2}(y - y_0)(z - z_0) \end{aligned} \quad (1.19-a)$$

L'aire du triangle  $\text{DMM}_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\text{DMM}_1) &= \frac{1}{2}[(y - y_d) + dy] [(z - z_d) + dz] \\ &\quad - \left(z - z_d + \frac{1}{2} dz\right) dy - \frac{1}{2}(y - y_d)(z - z_d) \end{aligned} \quad (1.19-b)$$

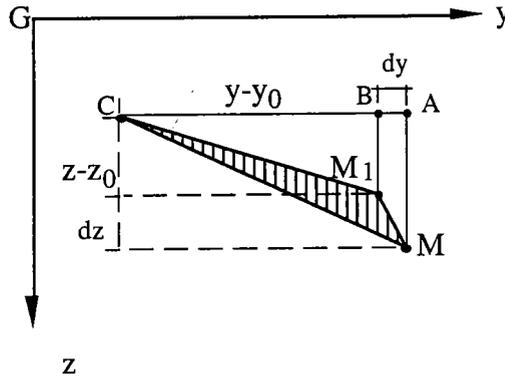


Figure 1.15

Comme la surface sectorielle est le double de l'aire balayée par le point  $M$ , en se déplaçant sur le contour transversal de la section par rapport à un pôle quelconque, on a :

$$d\omega_C = 2 \times \text{aire}(\text{CMM}_1) = (y - y_0)dz - (z - z_0)dy \quad (1.20-a)$$

$$d\omega_D = 2 \times \text{aire}(\text{DMM}_1) = (y - y_d)dz - (z - z_d)dy \quad (1.20-b)$$

La différence des deux surfaces sectorielles (1.20-a) et (1.20-b) donne :

$$d(\omega_C - \omega_D) = (z_0 - z_d)dy - (y_0 - y_d)dz \quad (1.21)$$

L'intégration de l'équation (1.21) donne:

$$\omega_C = \omega_D + (z_0 - z_d)y - (y_0 - y_d)z + C_0 \quad (1.22)$$

Où  $C_0$  est une constante arbitraire, dépendant du point initial à partir duquel on mesure les surfaces sectorielles.

On suppose que le point  $M_1(y_1, z_1)$  est l'origine des arcs  $s$  et en supposant que les surfaces sectorielles  $\omega_C$ ,  $\omega_D$  sont également comptées à partir de ce point, c'est à dire que pour  $s = 0$  on a  $\omega_C = \omega_D = 0$ . D'après ces conditions :

$$C_0 = -(z_0 - z_d)y_1 + (y_0 - y_d)z_1 \quad (1.23)$$

Après avoir remplacé  $C_0$  par sa valeur, l'équation (1.22) devient :

$$\omega = \omega_C = \omega_D + (z_0 - z_d)(y - y_1) - (y_0 - y_d)(z - z_1) \quad (1.24)$$

A partir de la relation 1.24, on constate que l'unité de  $\omega$  est le  $m^2$ .

Les caractéristiques géométriques liées à la coordonnée sectorielle sont définies par rapport au centre de torsion, elles sont données par :

$$\left. \begin{aligned} S_\omega &= \int_A \omega \, dA \quad , \quad I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \\ S_{\omega y} &= \int_A z\omega \, dA \quad , \quad S_{\omega z} = \int_A y\omega \, dA \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

### 1.4.3 CENTRE DE TORSION

Le centre de torsion est un point bien particulier de la section transversale massive ou bien mince, ouverte ou fermée. Lorsque les charges appliquées à la poutre ne passent pas par ce centre, la flexion de la poutre s'accompagne nécessairement d'une torsion.

Le centre de torsion a pour propriété de rendre la surface sectorielle orthogonale aux coordonnées  $(y, z)$  mesurées dans les axes principaux centraux d'inertie, ce qui se traduit par :

$$\int_A y\omega \, dA = 0 \quad \int_A z\omega \, dA = 0 \quad (1.26)$$

Après avoir remplacé (1.24) par sa valeur, on trouve :

$$\int_A y\omega_D \, dA + \int_A y^2(z_0 - z_d) \, dA - \int_A (y_0 - y_d)zy \, dA = 0 \quad (1.27-a)$$

$$\int_A z\omega_D \, dA + \int_A (z_0 - z_d)zy \, dA - \int_A (y_0 - y_d)z^2 \, dA = 0 \quad (1.27-b)$$

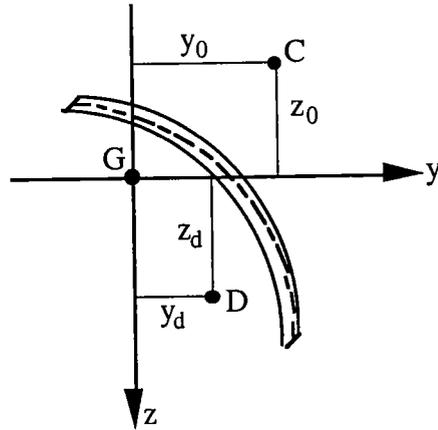


Figure 1.16

La solution du système 1.27-a et 1.27-bd'équations, nous donne :

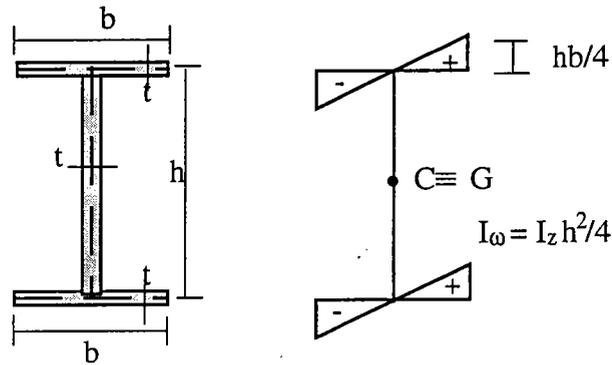
$$\left. \begin{aligned} y_0 &= y_d + \frac{I_z \int \omega_D z dA - I_{yz} \int \omega_D y dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \\ z_0 &= z_d - \frac{I_y \int \omega_D y dA - I_{yz} \int \omega_D z dA}{I_z I_y - I_{yz}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Dans le cas particulier où les axes  $y$  et  $z$  de la section sont des axes principaux, l'équation (1.28) devient :

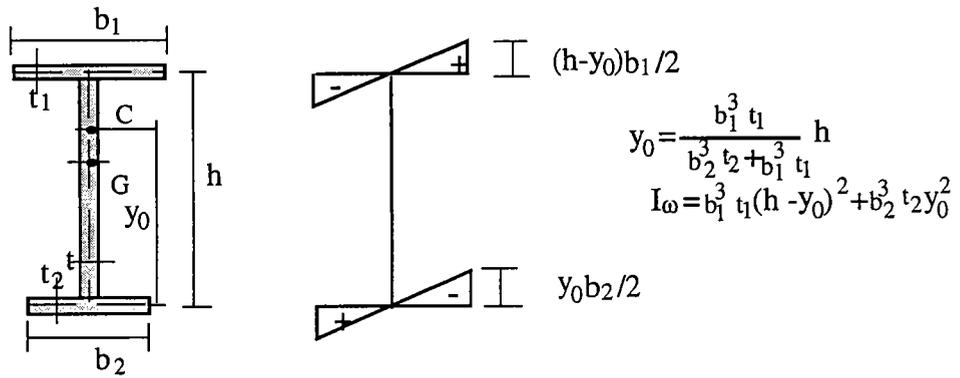
$$\left. \begin{aligned} y_0 &= y_d + \frac{\int \omega_D z dA}{I_y} \\ z_0 &= z_d - \frac{\int \omega_D y dA}{I_z} \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Il est aisé de se rendre compte que pour les profilés ouverts simples ou composés, ayant un axe de symétrie dans la section transversale, le centre de torsion se trouve sur cet axe. Si la section a deux axes de symétrie le centre de torsion se trouve à l'intersection de ces axes et coïncide dans ce cas avec le centre de gravité.

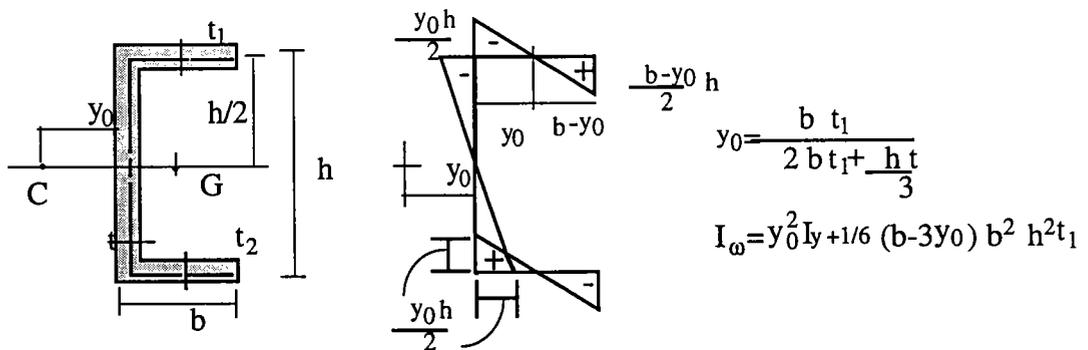
Pour les profilés qui suivent, on donne la répartition de la coordonnée sectorielle principale, la position du centre de torsion et l'expression du moment d'inertie de gauchissement en fonction des caractéristiques géométriques de la section.



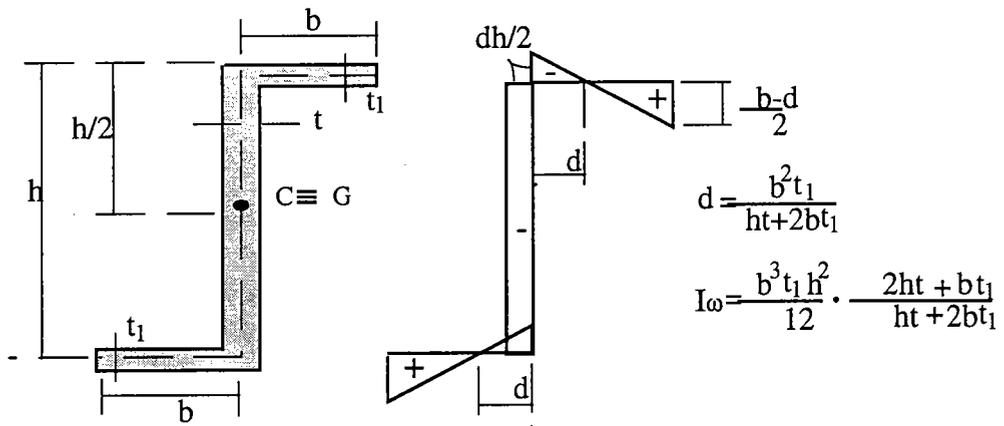
(a) : Profilés en I symétrique



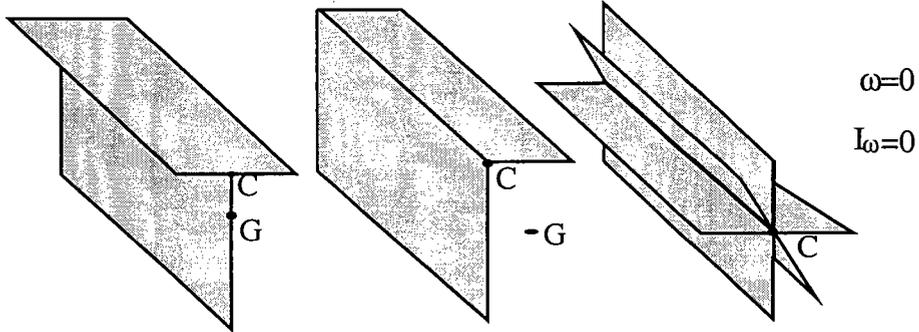
(c) : Profilés en I monosymétrique



(b) : Profilés en U



(d) : Profilés en Z



(e) : Profilés constitués d'un faisceau de plaques minces

Figure 1.17 - Caractéristiques géométriques des sections pour la torsion

## 1.5 BIMOMENT

Vlassov [62] a introduit une nouvelle quantité statique appelée "bimoment" définie comme étant un couple de moments de flexion égaux, mais opposés, agissant dans deux plans parallèles (figure 1.18). Il se produit lors de l'application des charges transversales ou longitudinales suite, au gauchissement. Le bimoment peut être positif ou négatif comme les autres éléments de réductions.

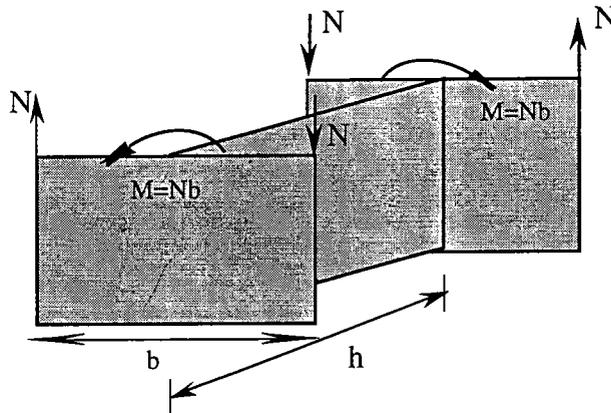


Figure 1.18

### 1.5.1 BIMOMENT CAUSÉ PAR LES CHARGES LONGITUDINALES

Le bimoment dû à une force longitudinale  $N$  sollicitant un point d'une section de la poutre est donnée par [62] :

$$B = N \omega_k \quad (1-30)$$

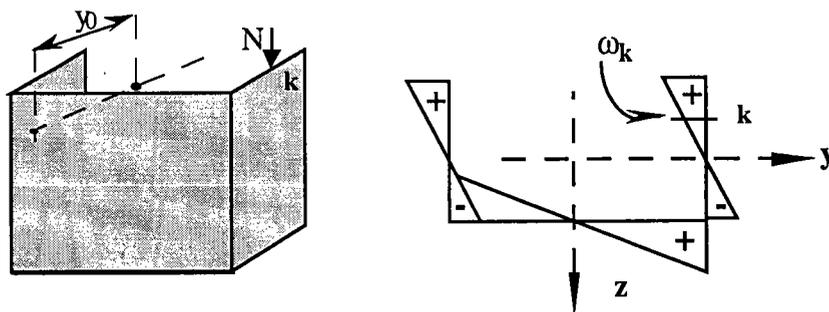


Figure 1.19

Où  $\omega_k$  est la coordonnée sectorielle de la section au point  $k$ . À partir de cette relation, on remarque que le bimoment dû à une force longitudinale dépend de la coordonnée sectorielle  $\omega_k$  du point d'application de la charge. Soit une poutre ayant une section transversale en C, sollicitée par un effort normal  $N$  (figure 1.20-b). La variation de la coordonnée sectorielle  $\omega$

est donnée par la figure 1.20-a. Les forces appliquées (soit de traction ou de compression) ne produisent pas de bimoment, quand elles sont appliquées aux points sectoriels nul ( $S_1$  et  $S_3$ ), conformément à la relation 1.30. Mais, quand la coordonnée sectorielle principale  $\omega \neq 0$  ( $S_2$ ), le bimoment est non nul, il vaut :

$$B = N\omega_{S_2} \quad (1.31)$$

Le bimoment maximal est celui correspondant au point où  $\omega$  est maximale. Dans le cas de la section C, la coordonnée sectorielle maximale est située aux extrémités des semelles.

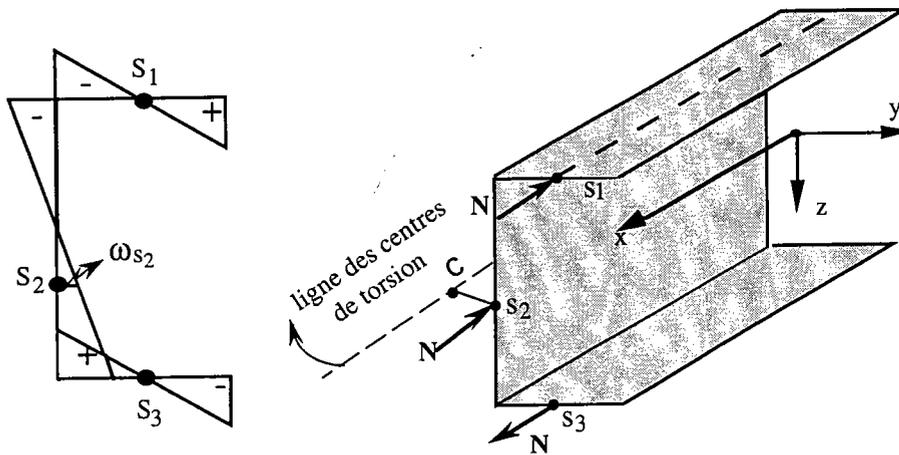


Figure 1.20

### 1.5.2 BIMOMENT CAUSÉ PAR LES CHARGES TRANSVERSALES

Généralement, les sections gauchissent en présence de la torsion due aux charges transversales excentrées par rapport au centre de torsion. Ainsi le gauchissement est accompagné nécessairement par un bimoment.

À partir des déplacements le bimoment sollicitant une section a l'expression suivante :

$$B_\omega = EI_\omega \theta_x'' \quad (1.32)$$

$\theta_x''$  est la dérivée seconde de l'angle de torsion.

Cette relation (1.32) est équivalente à celle liant les moments de flexion à la courbure ( $M_y = EI_y w''$ ).

Le bimoment peut être calculé à partir des déformations normales par la relation suivante :

$$B_\omega = \int_A E \omega \epsilon_x \quad (1.33)$$

Cette équation est aussi équivalente à celle donnée par la théorie classique ( $M_y = \int_A E z \epsilon_x$ ).

### 1.5.3 EXEMPLES NUMÉRIQUES

Pour illustrer l'influence de l'excentricité et le type de chargement sur le bimoment, on prend des poutres dont les sections transversales sont constituées d'un IPE200 et une section en Z (figure 1.21).

Une charge longitudinale ( $N = 35000 \text{ N}$ ) est appliquée au centre de gravité, dans le cas de la panne Z. La poutre en IPE200, est sollicitée soit par une charge concentrée ( $P = 3500 \text{ N}$ ), soit par une charge répartie ( $q = 3500 \text{ N/m}$ ). Pour avoir de la torsion, on suppose que les charges sont excentrées par rapport à l'âme. La valeur de l'excentricité  $e$  est de 25 mm et 50 mm. Pour les conditions aux limites, nous considérons une poutre bi-articulée en flexion et torsion, une poutre bi-encastée et une poutre console. La portée des poutres sur deux appuis est de 6 m, celles de la poutre console est de 2 m.

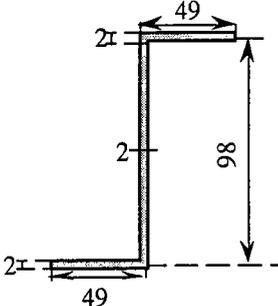
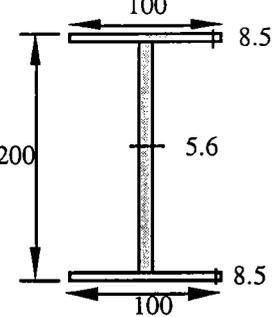
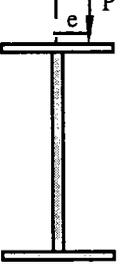
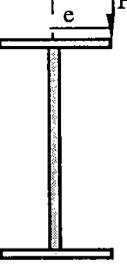
	$A = 3.92 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 6.27461 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $I_z = 1.56865 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 5.22666 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$ $I_\omega = 2.35396 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$
	$A = 9.9026 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6284 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 1.5805 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 8.9304 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 3.5137 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$
 <p>Charge appliquée avec une excentricité <math>e = 25 \text{ mm}</math></p>	 <p>Charge appliquée avec une excentricité <math>e = 50 \text{ mm}</math></p>

Figure 1.21: Caractéristiques géométriques des sections utilisées dans le calcul

Comme la coordonnée sectorielle n'est pas nulle au centre de gravité de la section transversale de la panne Z (voir figure 1.26), l'effort normal N provoque le gauchissement de la section. La valeur du bimoment est calculée d'après l'équation 1.30 et son intensité est :

$$B = N\omega_G = 3500 \times 24.510^{-04} = 8.575 \text{ Nm}^2.$$

La figure 1.22, donne la variation du bimoment le long de la poutre, tiré à partir de la solution de Vlassov. On constate que le bimoment augmente en allant de la mi-travée de la poutre vers les extrémités. Pour des poutres très longues, le bimoment a un caractère local aux extrémités et se conforme alors au principe de Saint Venant.

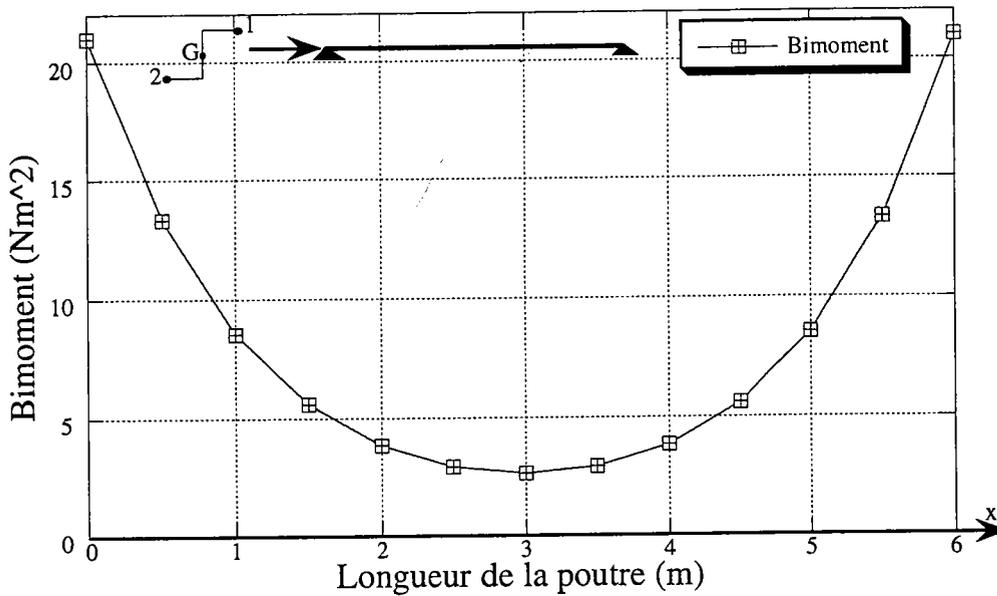
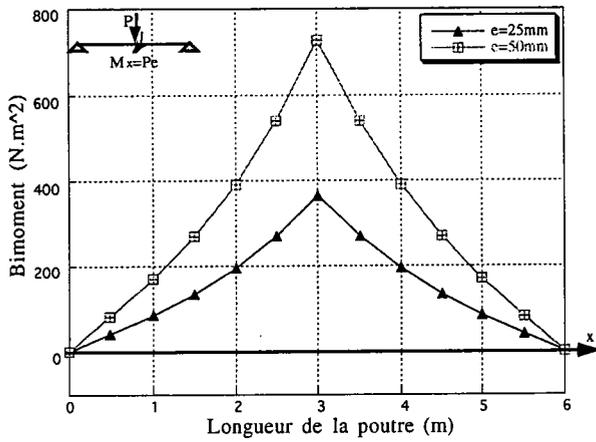
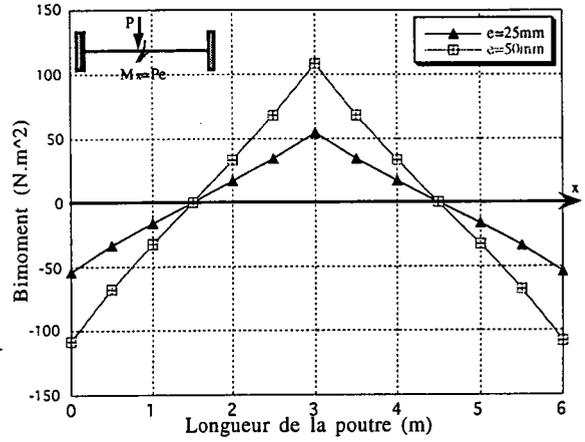


Figure 1.22 : Variation du bimoment le long d'une poutre sollicitée par une charge concentrée longitudinale

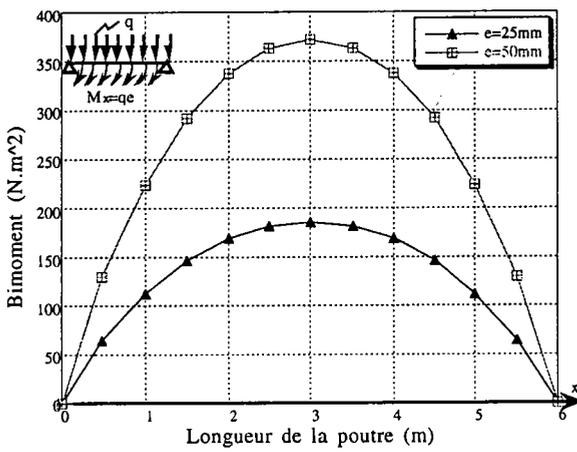
La figure 1.23 donne la variation du bimoment le long de l'axe de la poutre en fonction de l'excentricité, pour différents chargements et conditions d'appuis. Ces courbes sont obtenues par une méthode analytique (Vlassov [62]). Le bimoment est proportionnel à l'excentricité. Ainsi, on remarque que le paramètre excentricité a une grande influence sur le bimoment, et peut atteindre des valeurs importantes. Dans le cas des poutres bi-articulées, le bimoment présente une valeur maximale à mi-travée et nulle aux appuis (figures 1.23-a et 1.23-c). Pour les poutres bi-encastrées, les valeurs maximales sont obtenues à mi-travée et aux appuis (figures 1.23-b et 1.23-d). En fin, dans le cas des poutres consoles, le bimoment varie hyperboliquement. Il diminue en allant de l'encastrement vers l'extrémité libre (figures 1.23-e et 1.23-f)



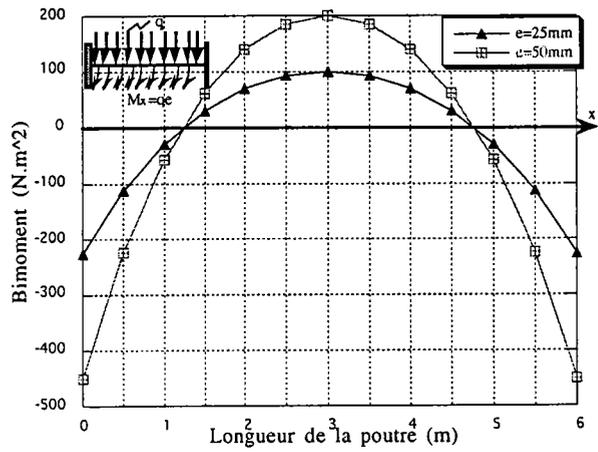
(a)



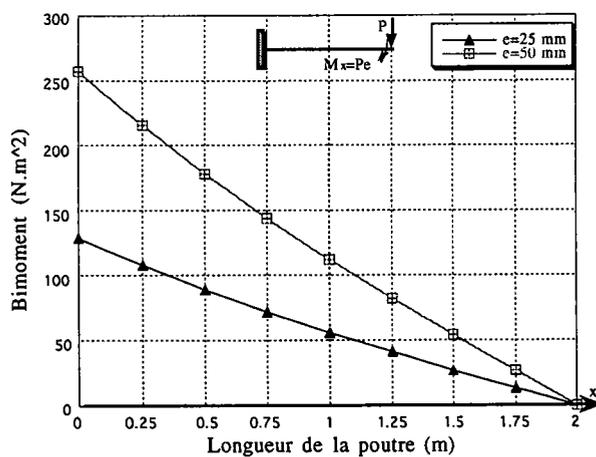
(b)



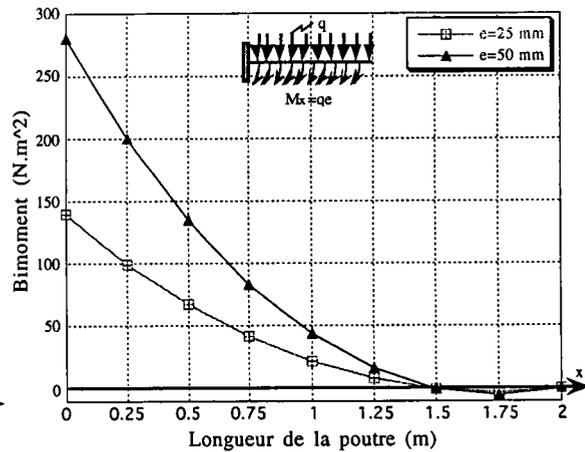
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 1.23 : Variation du bimoment le long de la poutre en fonction de l'excentricité

## 1.6 DÉPLACEMENTS LINÉAIRES

La théorie de Vlassov est basée sur deux hypothèses principales :

- \* La première est l'indéformabilité de la section transversale dans son plan. Cela veut dire, que sous un chargement quelconque, la forme de la section est conservée.
- \* La deuxième consiste à négliger la distorsion des parois en épaisseur.

Soit  $C(y_0, z_0)$  le centre de torsion de la section transversale de la figure 1.24, ayant les déplacements transversaux  $v(x)$  et  $w(x)$ .  $M$  est un point quelconque de la section, il a les déplacements  $v_M$  et  $w_M$  (figure 1.24-a). En supposant que l'angle de torsion  $\theta_x$  est petit, on peut confondre l'arc et la tangente. On obtient alors les expressions des déplacements de  $M$  en fonction de  $v(x)$ ,  $w(x)$  et  $\theta_x$  comme suit :

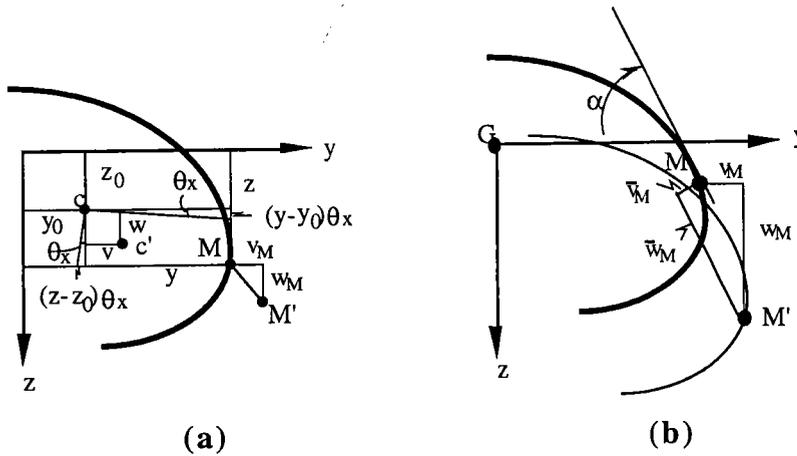


Figure 1.24

$$\begin{cases} v_M = v(x) - (y - y_0)\theta_x \\ w_M = w(x) + (z - z_0)\theta_x \end{cases} \quad (1.34)$$

En désignant par  $\alpha$  l'angle de la tangente à la ligne du profil au point  $M$  avec l'axe  $Gy$  et en projetant  $v_M$  et  $w_M$  sur la direction de la tangente et la normale (figure 1.24-b). On obtient pour les déplacements tangential  $\bar{v}_M$  et normal  $\bar{w}_M$  les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \bar{v}_M = v_M \cos \alpha + w_M \sin \alpha \\ \bar{w}_M = w_M \cos \alpha - v_M \sin \alpha \end{cases} \quad (1.35)$$

Après avoir remplacé les équations (1.34) par leurs valeurs dans (1.35), on obtient :

$$\begin{cases} \bar{v}_M = v(x)\cos\alpha + w(x)\sin\alpha + \theta_x[(y - y_0)\sin\alpha - (z - z_0)\cos\alpha] \\ \bar{w}_M = -v(x)\sin\alpha + w(x)\cos\alpha + \theta_x[(y - y_0)\cos\alpha + (z - z_0)\sin\alpha] \end{cases} \quad (1.36)$$

La distorsion est donnée par :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (1.37)$$

En posant la déformation de distorsion égale à zéro (hypothèse) pour une poutre à parois minces et à profil ouvert, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (1.38)$$

Comme le déplacement  $\bar{v}_M$  est déjà donné par l'équation (1.36), nous en déduisons le déplacement longitudinal  $u_M$ . En résolvant (1.38) par rapport à la fonction cherchée on obtient :

$$u_M = u(x) - \int_0^s \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ds \quad (1.39)$$

$u(x)$  : représente le déplacement longitudinal d'un point  $M_1$ , origine des coordonnées  $s$ .

L'intégrale le long du contour du second membre de l'équation (1.39) donne :

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} ds = v'(x)\cos\alpha ds + w'(x)\sin\alpha ds + \theta'_x h(s) ds \quad (1.40)$$

Avec :

$$h(s) = (y - y_0)\sin\alpha - (z - z_0)\cos\alpha \quad (1.41)$$

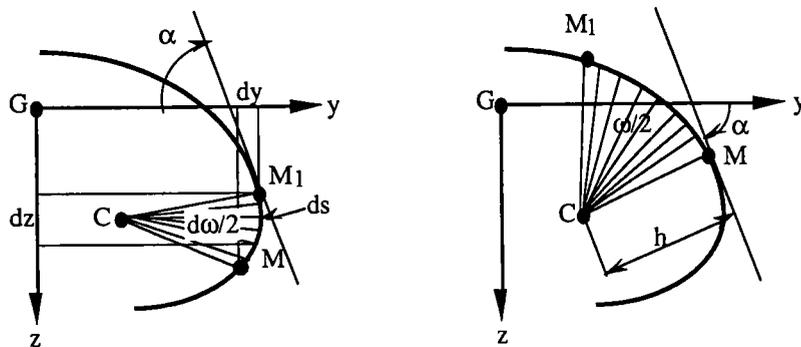


Figure 1.25

La figure (1.25), nous permet d'écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \cos \alpha \cdot ds = dy \\ \sin \alpha \cdot ds = dz \\ h \cdot ds = d\omega \end{cases} \quad (1.42)$$

En tenant compte de (1.42), on obtient :

$$u(y, z, x) = u(x) - v'(x)y - w'(x)z - \theta'_x \omega(s) \quad (1.43)$$

Connaissant les déplacements des points de la surface moyenne de la poutre, nous pouvons trouver la déformation de cette surface en un point quelconque M.

$$\varepsilon(y, z, x) = \frac{\partial u(y, z, x)}{\partial x} \quad (1.44)$$

$$\varepsilon(y, z, x) = u'(x) - v''(x)y - w''(x)z - \theta''_x \omega(s) \quad (1.45)$$

Le champ de déformation (1.45) est adopté par plusieurs auteurs dont Chan[22], Kitipornchai [41], Wang [63], Trahair [61], Gallagher [12] et Bazant[17]. Ils considèrent un comportement linéaire.

## 1.7 CONTRAINTES

En utilisant la loi de Hooke entre les contraintes et les déformations, on peut déterminer la contrainte totale  $\sigma$  due à la torsion-fléchie. On prend l'équation (1.45) donnant les déformations linéaires (Vlassov), on obtient :

$$\sigma = E \varepsilon(y, z, x) \quad (1.46)$$

$$\sigma = E(u'(x) + yv''(x) + zw''(x) + \omega(y, z)\theta''_x) \quad (1.47)$$

$$\text{avec : } u' = \frac{N}{EA}, \quad v'' = \frac{M_z}{EI_z}, \quad w'' = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \theta''_x = \frac{B}{EI_\omega} \quad (1.48)$$

L'équation 1.47 est donnée sous forme algébrique. En utilisant la relation entre les éléments de réduction et les courbures, on arrive à :

$$\sigma = \underbrace{\frac{N}{A}}_{\substack{\text{traction} \\ \text{ou} \\ \text{compression}}} + \underbrace{\frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z}_{\substack{\text{flexion dans} \\ \text{les deux plans}}} + \underbrace{\frac{B}{I_\omega}\omega(s)}_{\substack{\text{gauchissement}}} \quad (1.49)$$

Avec :

$$\sigma_N = \frac{N}{A} \quad (1.50.a)$$

$$\sigma_f = \sigma_y + \sigma_z = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (1.50.b)$$

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega(s) \quad (1.50.c)$$

L'équation (1.49), montre que les contraintes normales  $\sigma$  s'obtiennent par superposition des contraintes réparties dans la section  $x = cte$  suivant la loi des sections planes, et des contraintes ( $\sigma_\omega$ ) qui varient avec l'arc  $s$  suivant la loi des surfaces sectorielles.

### 1.7.1 EXEMPLES NUMÉRIQUES

Pour comparer les deux théories, on examine l'exemple numérique précédent (figure 1.21). Les contraintes longitudinales  $\sigma$  sont calculées en des points bien précis de la section transversale. Au centre de gravité de la section et aux points extrêmes de la semelle supérieure (point 1) et de la semelle inférieure (point 2), pour la panne Z. Aux points extrêmes de la semelle supérieure ( point 1 et 2), pour l'IPE200. La figure 1.26 montre la répartition des surfaces sectorielles et les points pour les quels les contraintes sont calculées. Ces calculs sont fait en élasticité linéaire. Les conditions d'appuis de la poutre sont comme suit, bi-articulées, bi-encastrées, une extrémité libre et l'autre encastrée (console).

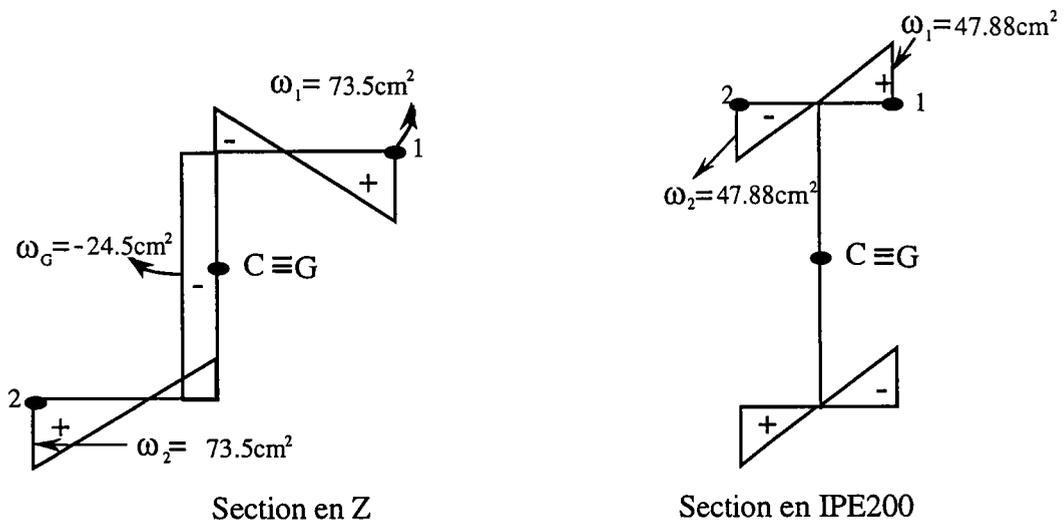


Figure 1.26 : Distribution de la coordonnée sectorielle principale

On reproduit sur la figure 1.27, les contraintes ainsi calculées par la théorie classique et la théorie de Vlassov pour les points 1, 2 et G d'une panne Z. D'après la théorie des sections planes, les contraintes normales ne dépendent que de la position du point sur le contour transversale, et elle ne varie pas sur la longueur de la poutre ( $\sigma = N / A$ ). Cependant, l'application de la théorie de la torsion non uniforme (Vlassov), montre que la contrainte normale varie le long de la poutre selon la relation  $\sigma = N / A + B\omega / I_{\omega}$  où l'influence du gauchissement est prise en compte. Ces contraintes diminuent en allant des extrémités de la poutre vers la partie médiane parce que le gauchissement s'atténue, en s'éloignant du lieu d'application de la charge.

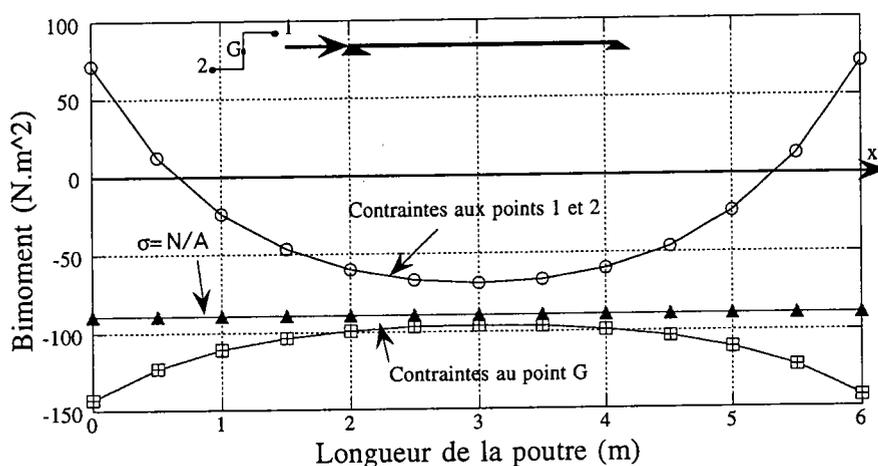
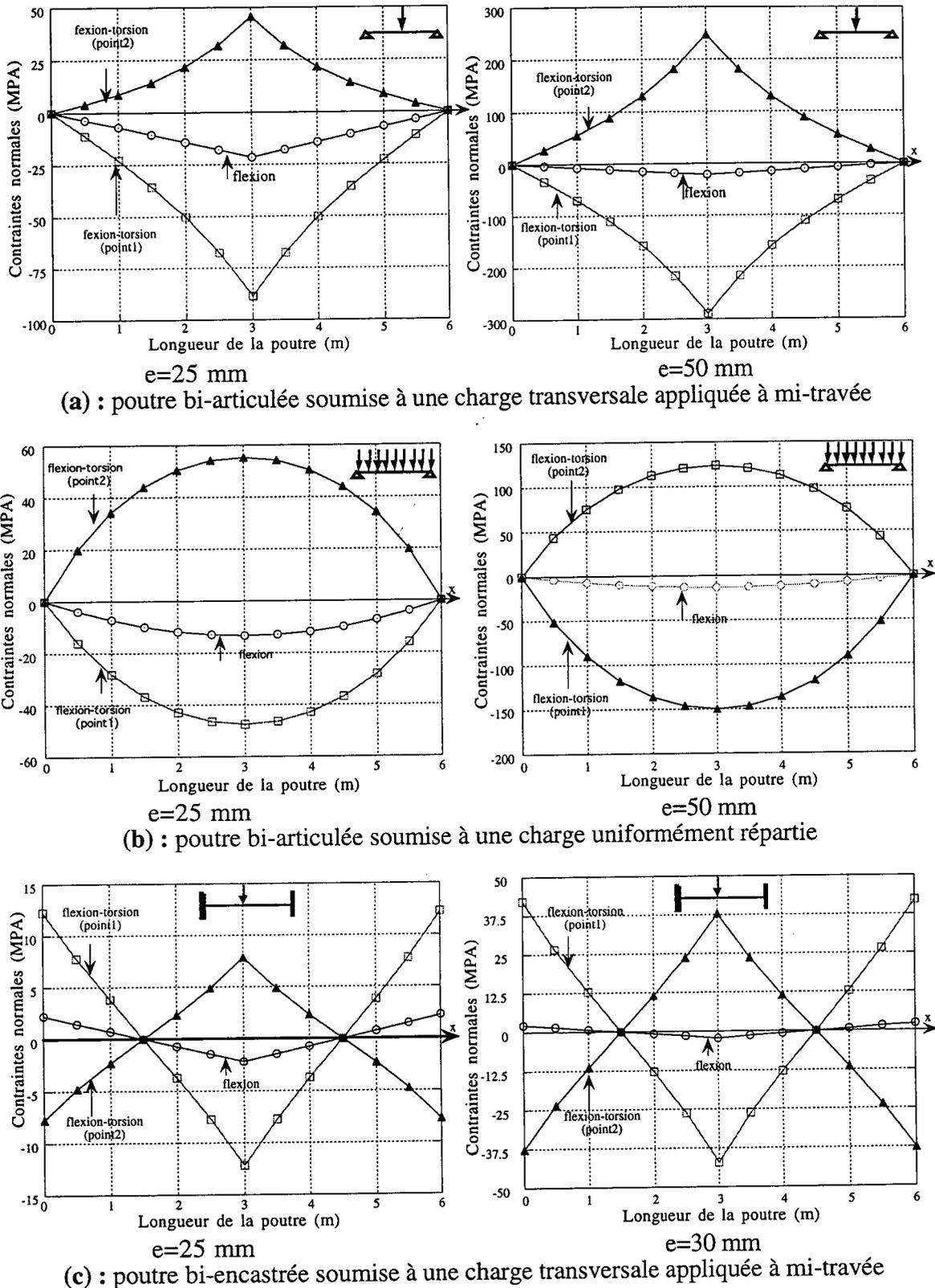


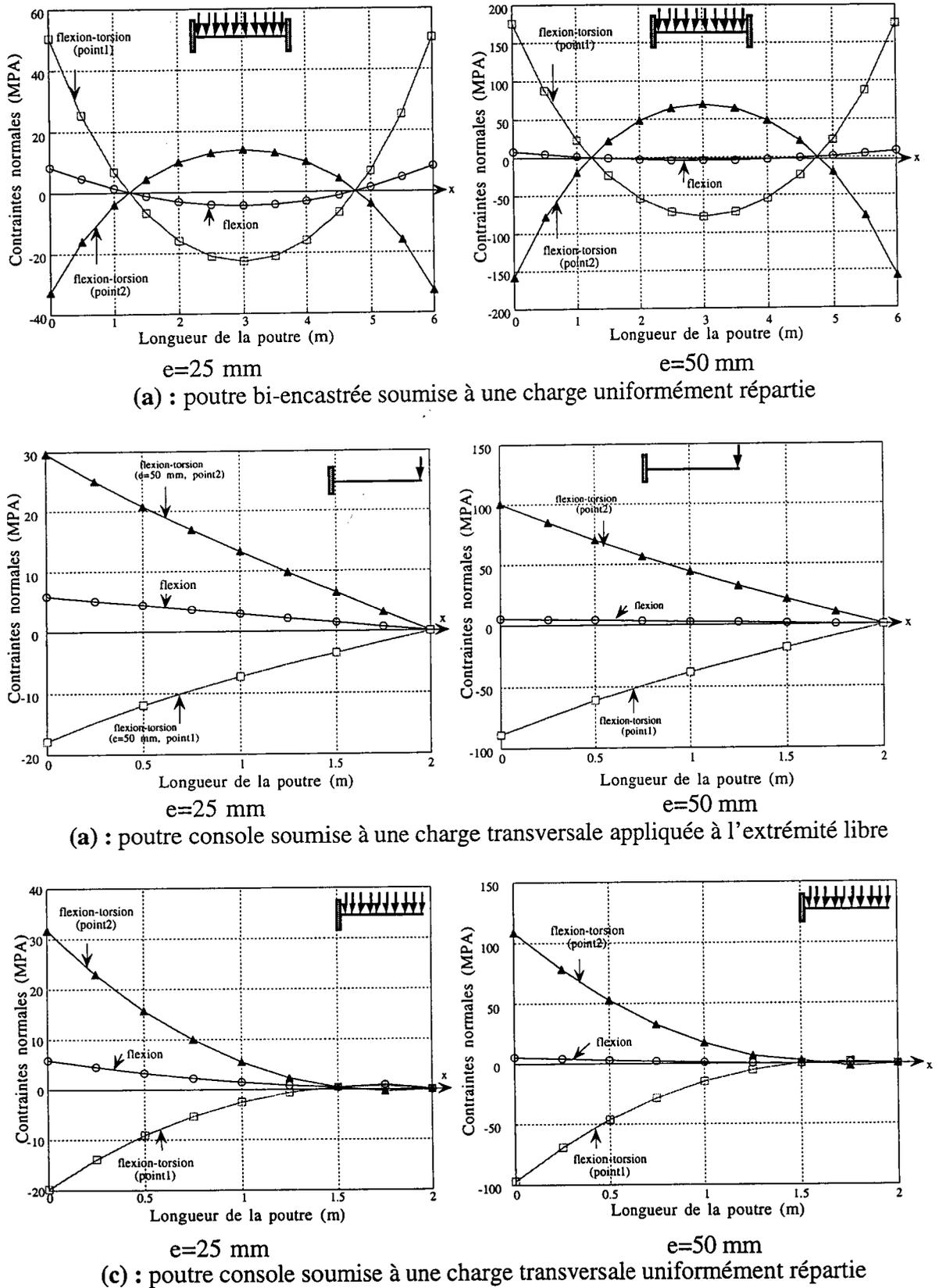
Figure 1.27 : Variation des contraintes normales le long de la poutre

Les figures 1.28 et 1.29, montrent que la conséquence de l'application des charges transversales est la formation dans les sections transversales, en dehors des contraintes habituelles, telles qu'elles résultent de la flexion de la poutre, des contraintes normales complémentaires qui ne suivent pas la loi des sections planes et qui résultent d'un moment de torsion, formé par le déséquilibre transversal de la charge. En effet, ce moment de torsion est obtenu par rapport au centre de flexion d'une section transversale. Les contraintes normales complémentaires ainsi définies dépassent de beaucoup les valeurs des tensions normales, calculées par les méthodes habituelles, basées sur la loi des sections planes et ne tenant pas compte de l'excentricité de la charge verticale imposée, par rapport à l'axe vertical de symétrie de la section transversale de la pièce. Ainsi le travail de Kamal [39], a montré, que l'état de contrainte dans une poutre, sous l'action d'une charge transversale, dépend énormément de la position de cette charge dans le plan d'une section transversale.

On peut conclure que de la comparaison des courbes, flexion et torsion-fléchie (figures 1.28 et 1.29), il résulte que l'erreur commise au calcul de ces profilés par la théorie classique de la flexion, par rapport au calcul qui tient compte de la torsion, atteint de très grandes proportions.



**Figure 1.28** : Variation des contraintes normales de flexion et de torsion fléchie au niveau des points extrêmes de la semelle supérieure (point 1 et 2) le long de la poutre.



**Figure 1.29** : Variation des contraintes normales de flexion et de torsion fléchie au niveau des points extrêmes de la semelle supérieure (point 1 et 2) le long de la poutre.

## 1.8 CONCLUSION

Dans tout comportement spatial d'une poutre, la torsion joue un rôle non négligeable. On a essayé de présenter une synthèse des différentes torsions et de montrer leur domaine de validité. La torsion uniforme de Saint Venant s'applique aux poutres à sections massives où chaque noeud a six degrés de liberté. La théorie des surfaces sectorielles affecte les poutres à parois minces et profil ouverts. Elle tient compte du gauchissement comme déplacements supplémentaire. Cette théorie fait appel à des nouvelles quantités ( statique, mécanique et géométrique) qui s'ajoutent à celles, déjà, utilisées par la méthode des sections planes :

- Le gauchissement qui indique la variation de l'angle de torsion le long de la poutre. Il représente le septième degré de liberté dans le vecteur déplacement.

- Le bimoment qui peut être interprété comme un moment de second ordre, qui représente l'ensemble des contraintes dues au gauchissement à tendance à empêcher la torsion pure. Il constitue le septième élément de réduction dans le vecteur force. Le bimoment peut être engendré aussi bien par des charges transversales que par des charges longitudinales.

- Le calcul des contraintes dûes à la torsion non uniforme fait intervenir des grandeurs géométriques supplémentaires qui découlent de la théorie de Vlassov ( $\omega, I_{\omega}, \dots$ , etc.). Ces contraintes supplémentaires dûes au bimoment peuvent être très importantes et elles ne peuvent être négligées.

Enfin, la théorie de la torsion non uniforme est identique par sa structure à la théorie élémentaire existante de la flexion des poutres. Cette dernière est un cas particulier de la théorie générale de Vlassov, régie par la loi des surfaces sectorielles.

**CHAPITRE II**  
**ÉTUDE ANALYTIQUE**  
**DES POUTRES SPATIALES**

## 2.1 INTRODUCTION

Par définition, on appelle une pièce longue à parois minces, une pièce dont les rapports entre la plus grande dimension de la section transversale “h”, la longueur de la pièce “L” et l'épaisseur de la paroi “t” s'expriment par

$$\frac{t}{h} \leq 0.1 \quad \text{et} \quad \frac{h}{L} \leq 0.1 \quad (2.1)$$

## 2.2 HYPOTHÈSES FONDAMENTALES

- 1°- Le corps est constitué d'un matériau homogène et isotrope.
- 2°- L'intensité du fluage ou la propriété visqueuse est si faible que l'on peut aisément la négliger.
- 3°- Les propriétés mécaniques du matériau tant en compression qu'en traction sont les mêmes
- 4°- la section transversale est indéformable dans son plan.
- 5°- On ne tient pas compte de l'influence locale des forces extérieures.

Le sens géométrique de la 4° hypothèse revient à dire qu'une tranche élémentaire transversale de la pièce comprise entre les sections  $x = cte$  et  $x + dx = cte$ , est considérée dans son plan comme un corps strictement indéformable (la forme de la section est conservée).

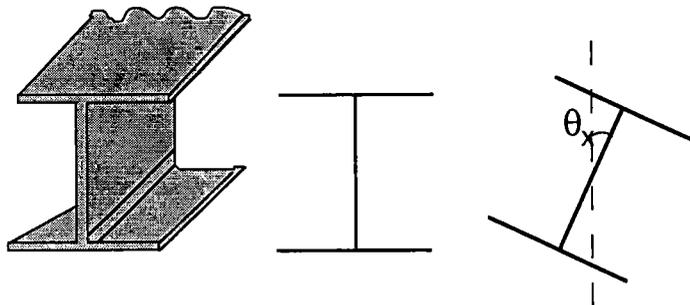


Figure 2.1 : L'indéformabilité de la section transversale

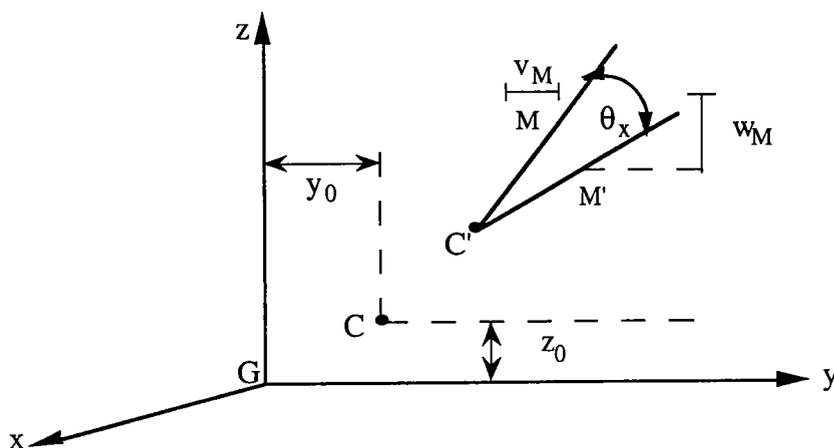


Figure 2.2

6°- On considère que les variations des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur des parois sont négligeables, autrement dit, on néglige la distorsion des parois sur leur épaisseur.

### 2.3.1 DÉPLACEMENT SEMI-LINÉAIRE

Considérons une pièce longue prismatique à parois minces; un rôle important dans cette théorie (théorie des surfaces sectorielles) est joué par la surface moyenne de voile, c'est à dire, la surface passant par les milieux des épaisseurs de plaques constituant la pièce allongée en voiles minces. Cette surface peut être engendrée par des droites parallèles à l'axe longitudinal de la pièce, appelées génératrices de la surface moyenne. En se reportant au système de coordonnées défini (figure 2.2) et vue la déformée de la pièce due à un état de chargement arbitraire, on a dans la section  $x = \text{cte}$  les déplacements  $u_M, v_M, w_M$ , et la rotation  $\theta_x$  de la section.

Supposons le point  $C(y_0, z_0)$  comme le centre de la rotation de la section transversale (centre de torsion) ayant les déplacements  $v(x), w(x), u(x)$  dans le système de coordonnées  $Gyzx$  à la distance  $x$  de l'origine.

D'après Djalaly [26] et [29] et Roik [55] les déplacements d'un point arbitraire  $M$ , aux coordonnées courantes  $y$  et  $z$  sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_M = v(x) - (z - z_0)\theta_x(x) - \frac{1}{2}(y - y_0)\theta_x^2(x) \\ w_M = w(x) + (y - y_0)\theta_x(x) - \frac{1}{2}(z - z_0)\theta_x^2(x) \\ u_M = u(x) - (z - z_0)v'(x) - (y - y_0)w'(x) + \\ \quad [(z - z_0)v'(x) - (y - y_0)w'(x)]\theta_x(x) + w_\omega \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $y$  et  $z$  sont les coordonnées caractéristiques du point  $M$ . La formule (2.2) représente la loi générale des déplacements longitudinaux le long de la section  $x = cte$  d'un voile mince ouvert, de forme cylindrique ou prismatique, en absence de déformation de flexion de son contour transversal et de déformation de distorsion de la surface moyenne.

$u(x)$  représente le déplacement axial ( translation ) du voile selon sa génératrice.

$v(x)$  ,  $w(x)$  : représentent les déplacements dans les plans  $oxy$  et  $oxz$

$w_\omega$  : déterminent les déplacements complémentaires, celles qui ne suivent pas la loi des sections planes et qui résulte de la torsion de la pièce. Cet écart avec la théorie des poutres et appelé le gauchissement sectoriel de la section.

### 2.3.2 DÉFORMATIONS

Connaissant les déplacements des points de la surface moyenne de la poutre, nous pouvons maintenant trouver la déformation de cette surface en un point quelconque  $M$ . En se rapportant au système de coordonnées locales, ayant les axes tangent et normal à la paroi de la pièce, les déplacements  $u(x,s)$ ,  $v(x,s)$ ,  $w(x,s)$  d'un point de la section transversale, dans ce système d'axes sont donnés par :

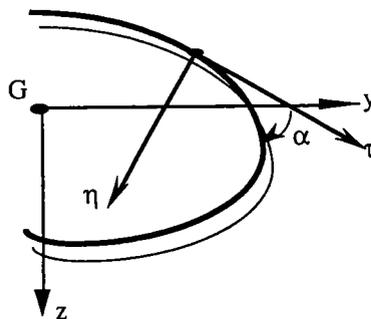


Figure 2.3

$$\begin{cases} \bar{v}_M = v_M \cos(\alpha + \theta_x) + w_M \sin(\alpha + \theta_x) \\ \bar{w}_M = w_M \cos(\alpha + \theta_x) - v_M \sin(\alpha + \theta_x) \\ \bar{u}_M = u_M \end{cases} \quad (2.3)$$

En portant les valeurs de  $v_M$ ,  $w_M$ ,  $u_M$  et considérant que  $\theta_x$  est petit on obtient :

$$\begin{cases} \bar{v}_M = v(x) \cos(\alpha) + w(x) \sin(\alpha) + \theta_x [-v(x) \sin(\alpha) + w(x) \cos(\alpha)] \\ \quad - \frac{1}{2} t(s) \theta_x^2 + \theta_x h(s) \\ \bar{w}_M = -v(x) \sin(\alpha) + w(x) \cos(\alpha) - \theta_x [v(x) \cos(\alpha) + w(x) \sin(\alpha)] \\ \quad - \frac{1}{2} h(s) \theta_x^2 + \theta_x t(s) \\ \bar{u}_M = u(x) + w_\omega - (y - y_0) v'(x) - (z - z_0) w'(x) + \\ \quad [(z - z_0) v'(x) - (y - y_0) w'(x)] \theta_x \end{cases} \quad (2.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} t(s) &= (z - z_0) \sin(\alpha) + (y - y_0) \cos(\alpha) \\ h(s) &= (y - y_0) \sin(\alpha) - (z - z_0) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (2.5)$$

s: l'abscisse curviligne

Les déplacements ainsi obtenus peuvent être présentés sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{v}_M = \bar{v}_M^{(L)} + \bar{v}_M^{(NL)} \\ \bar{w}_M = \bar{w}_M^{(L)} + \bar{w}_M^{(NL)} \\ \bar{u}_M = \bar{u}_M^{(L)} + \bar{u}_M^{(NL)} \end{cases} \quad (2.6)$$

où les symboles (L) et (NL) caractérisent respectivement les termes linéaires et non-linéaires tel que :

$$\begin{cases} \bar{v}_M^{-(L)} = v(x)\cos(\alpha) + w(x)\sin(\alpha) + \theta_x h(s) \\ \bar{w}_M^{-(L)} = -v(x)\sin(\alpha) + w(x)\cos(\alpha) + \theta_x t(s) \\ \bar{u}_M^{-(L)} = u(x) + w_\omega - (y - y_0)v'(x) - (z - z_0)w'(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \bar{v}_M^{-(NL)} = \theta_x[-v(x)\sin(\alpha) + w(x)\cos(\alpha)] - \frac{1}{2}t(s)\theta_x^2 \\ \bar{w}_M^{-(NL)} = -\theta_x[v(x)\cos(\alpha) + w(x)\sin(\alpha)] - \frac{1}{2}h(s)\theta_x^2 \\ \bar{u}_M^{-(NL)} = [(z - z_0)v'(x) - (y - y_0)w'(x)]\theta_x \end{cases} \quad (2.8)$$

La déformation longitudinale et la distorsion ont l'expressions suivantes [28]:

$$\varepsilon(y, z, x) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

$$\gamma(y, z, x) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} \quad (2.10)$$

En remplaçant  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  et  $\bar{u}$  dans les deux équations précédentes on trouve :

$$\begin{aligned} \varepsilon(y, z, x) = & u' + w'_\omega - (y - y_0)(v'' + \theta_x w'') - (z - z_0)(w'' + \theta_x v'') + \\ & \frac{1}{2} \left[ v'^2 + w'^2 + [(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] \theta_x'^2 \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\gamma(x, s) = \frac{\partial w_\omega}{\partial s} + \theta_x' h(s) - 2t(s)\theta_x \theta_x' + \left[ \theta_x' + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right] \left[ \bar{w}^{-(L)} \right] \quad (2.12)$$

Dans l'équation (2.11) nous avons négligé les termes  $\theta_x' v'(x)$  et  $\theta_x' w'(x)$ .

Lorsque la torsion est faible ( $\theta_x$  est petit), on peut négliger les termes non-lineaires des déformations et admettre que la distorsion est nulle, on a alors :

$$\gamma(x,s) = \frac{\partial w_\omega}{\partial s} + \theta'_x h(s) \approx 0 \quad (2.13)$$

$$\varepsilon(x,s) = w'_\omega \quad (2.14)$$

Ceci nous donne :

$$w_\omega = -\theta'_x \omega(s) \quad (2.15)$$

$$\omega(s) = \int_0^s h(s) ds + a \quad (2.16)$$

En tenant compte de (2.15), l'équation (2.11) devient:

$$\begin{aligned} \varepsilon(y,z,x) = & u'_1(x) - (y-y_0)(v'' + \theta_x w'') - (z-z_0)(w'' + \theta_x v'') - \theta''_x \omega(s) \\ & + \frac{1}{2} \left[ v'^2(x) + w'^2(x) + [(y-y_0)^2 - (z-z_0)^2] \theta_x'^2 \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ou bien autrement :

$$\begin{aligned} \varepsilon(y,z,x) = & u'_1(x) - y(v''(x) + w''(x)\theta_x) - z(w''(x) - v''(x)\theta_x) - \omega(s)\theta''_x + \\ & \frac{1}{2} \left[ v'^2(x) + w'^2(x) + [(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] \theta_x'^2 \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec :

$$u'_1(x) = u'_1 + y_0(v''(x) + \theta_x w''(x)) + z_0(w''(x) - \theta_x v''(x)) \quad (2.19)$$

La formule (2.18) montre que les déformations  $\varepsilon(y,z,x)$  le long de la ligne de profil  $x = cte$  s'obtiennent par addition d'une part des déformations dépendant des coordonnées  $y$  et  $z$  d'un point de la ligne de profil et calculés selon la théorie des poutres (surface plane), et d'autre part des déformations de gauchissement, calculées selon la théorie de torsion non uniforme.

2.5 POTENTIEL TOTAL DES POUTRES SPATIALES

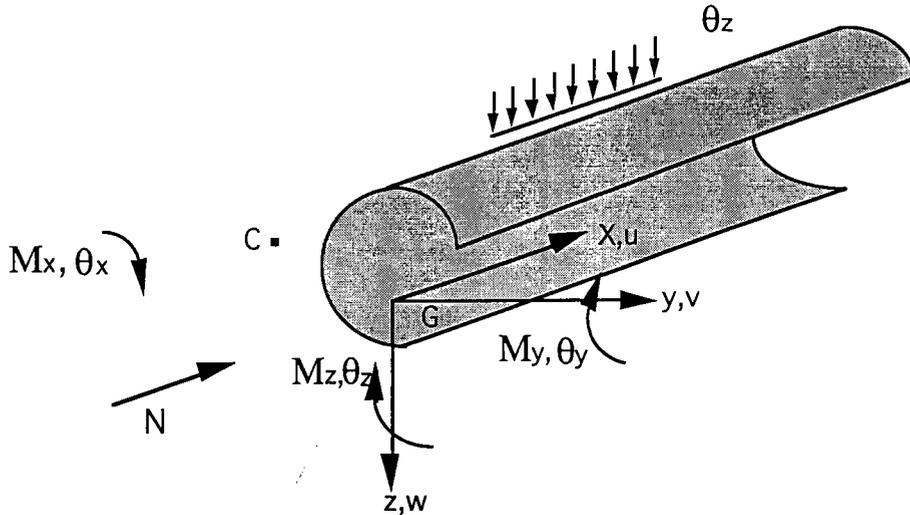


Figure 2.4

Dans son développement, Djalaly [29] a considéré les déformations semi-linéaires en fonction des déplacements, parce que la plupart des éléments d'une structure (poutre, colonnes) sont constitués de parois ayant la minceur  $t/h$  entre 0.4 et 0.10, donc dans le domaine élastique nous pouvons facilement négliger certains termes non-linéaires qui sont plus petits par rapport aux autres dans les relations des déformations.

Soit  $U$  l'énergie de déformation définie par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ GJ\theta_x'^2 + \int_A [E\epsilon_x^2] dA \right\} dx \quad (2.20)$$

Où :  $\frac{1}{2} \int_0^L GJ\theta_x'^2 dx$  représente l'énergie de torsion de Saint-Venant.

Dans cette expression, on a pas tenu compte de l'énergie de déformation de cisaillement.

En remplaçant les déformations (2.18) par leurs valeurs et en tenant compte des propriétés géométriques des axes centraux principaux, on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ E \left( Au_1'^2 + I_y (w'' + \theta_x v'')^2 + I_z (v'' + \theta_x w'')^2 + I_\omega \theta_x''^2 \right) + GJ \theta_x'^2 + 2EAu_1' (v'^2 + w'^2 + r^2 \theta_x'^2) - \theta_x'^2 (2\beta_z I_y (w'' + \theta_x v'') - 2\beta_y I_z (v'' + \theta_x w'') + \beta_\omega \theta_x'') \right] dx \quad (2.21)$$

Où nous avons posé :

$$\left. \begin{aligned} \beta_y &= \frac{\int y(y^2 + z^2) dA}{2I_z} - y_0 \\ \beta_z &= \frac{\int z(y^2 + z^2) da}{2I_y} - z_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{I_z + I_y}{A} + y_0^2 + z_0^2 \\ \beta_\omega &= \frac{\int \omega (y^2 + z^2) dA}{I_\omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$\beta_y$  ,  $\beta_z$  et  $\beta_\omega$  sont les coefficients d'asymétrie appelés : coefficients de Wagner.  
 $r^2$  est le rayon de giration.

Dans l'équation (2.21), nous avons négligé les termes infiniment petits d'ordres supérieurs à trois.

Nous savons que les éléments de réductions  $M_y$  ,  $M_z$  ,  $B$  et  $N$  sont reliés au déformation  $\varepsilon_x$  par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} M_y &= - \int_A E z \varepsilon(y,z,x) dA & , & & M_z &= - \int_A E y \varepsilon(y,z,x) dA \\ B &= - \int_A E \omega \varepsilon(y,z,x) dA & , & & N &= \int_A E \varepsilon(y,z,x) dA \end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Après avoir remplacé  $\varepsilon(y, z, x)$  par son expression (2.19), les éléments de réduction prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} M_y = EI_y(w'' - \theta_x v'' - \beta_z \theta_x'^2) & , & M_z = -EI_z(v'' - \theta_x w'' - \beta_y \theta_x'^2) \\ B = -EI_\omega \theta_x'' & , & N = EA \left[ u_1' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + r^2 \theta_x'^2) \right] \end{cases} \quad (2.25)$$

En tenant compte de (2.25) l'expression de l'énergie devient :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ E \left( Au_1'^2 + I_y w''^2 + I_z v''^2 + I_\omega \theta_x''^2 \right) + GJ \theta_x'^2 + 2u_1' (N - AEu_1') - \theta_x'^2 (2\beta_z M_y - 2\beta_y M_z + B\beta_\omega) - 2\theta_x (w'' M_z + v'' M_y) \right] dx \quad (2.26)$$

Le travail des forces extérieures est donnée par Djalaly [26]. Il a pour expression :

$$V = - \int_0^L \left[ q_y \left( v + z^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_{xy}^2 \right) + q_z \left( w + y^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_{xz}^2 \right) + M_x \theta_x + \int_A \sigma_x \delta dA \right] dx \quad (2.27)$$

avec :

$$\delta = -\sqrt{1 + v'^2(x,s) + w'^2(x,s)} + 1 \quad (2.28)$$

où  $\delta$  désigne le déplacement longitudinal d'une fibre de la poutre à la distance  $x = cte$  par unité de longueur (voir figure 2.5).

En développant l'expression de  $\delta$ , et compte tenu des équations (2.2), l'expression du travail des forces extérieures donné par (2.28) devient

$$V = - \int_0^L \left[ q_y \left( v + z^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_{xy}^2 \right) + q_z \left( w + y^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_{xz}^2 \right) + M_x \theta_x - \frac{N}{2} (v'^2 + w'^2 + r^2 \theta_x'^2 + 2v' \theta_x' z_0 + 2w' \theta_x' y_0) \right] dx \quad (2.29)$$

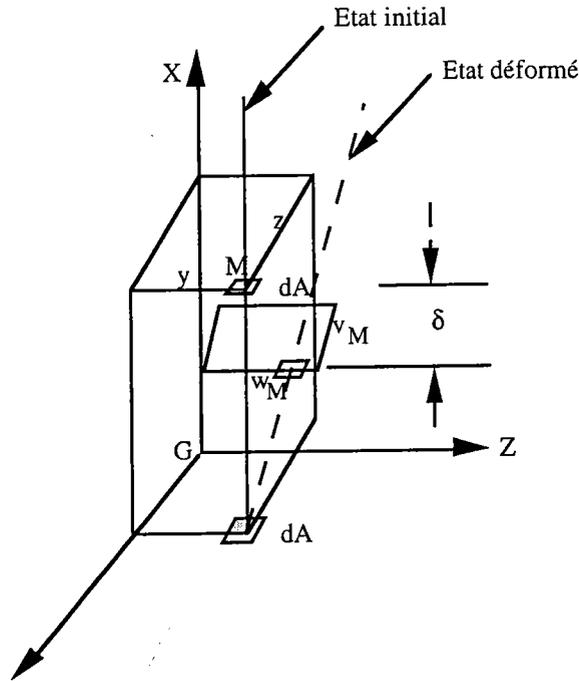


Figure 2.5

L'énergie totale est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Pi = U + V = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ E \left( -A u_1'^2 + I_y w''^2 + I_z v''^2 + I_\omega \theta_x'^2 \right) + GJ \theta_x'^2 + 2N u_1' \right. \\
 & + \theta_x'^2 \left( 2\beta_y M_z - 2\beta_z M_y - B\beta_\omega + N r^2 \right) - 2\theta_x \left( w'' M_z + v'' M_y \right) \\
 & - 2q_y \left( v + z^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_x^2 y^* \right) - 2q_z \left( w + y^* \theta_x + \frac{1}{2} \theta_x^2 z^* \right) - 2M_x \theta_x \\
 & \left. + N \left( v'^2 + w'^2 + r^2 \theta_x'^2 + 2v' \theta_x' z_0 + 2w' \theta_x' y_0 \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

## 2.6 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ÉQUILIBRE

En appliquant la méthode variationnelle d'Euler, on détermine les équation d'équilibre de la barre, comme suit :

Soit  $F$  l'énergie totale par unité de longueur de la barre en question et  $\Pi$  l'énergie totale de la barre entière, on peut écrire :

$$\Pi = \int_0^L F \left( u, v, w, \theta_x, u', v', w', \theta_x', u'', v'', w'', \theta_x'' \right) dx \tag{2.31}$$

Où  $u$  ,  $v$  ,  $w$  et  $\theta_x$  dépendent uniquement de  $x$ . Les équations d'Euler [61] pour cette fonction s'écrivent :

$$\begin{cases} F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_u' + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_u'' = 0 \\ F_v - \frac{\partial}{\partial x} F_v' + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_v'' = 0 \\ F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_w' + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_w'' = 0 \\ F_{\theta_x} - \frac{\partial}{\partial x} F_{\theta_x}' + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{\theta_x}'' = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

où ,  $F_u = \frac{\partial F}{\partial u}$  ,  $F_u' = \frac{\partial F}{\partial u'}$  ,  $F_u'' = \frac{\partial F}{\partial u''}$  , ....et ainsi de suite...

Le système d'équations différentielles d'équilibre d'une barre prismatique à parois minces s'écrit :

$$\begin{cases} -EAu_1'' = \frac{\partial N}{\partial x} \\ EI_z v^{IV} - \left[ N(v' + z_0 \theta_x') \right]' - (\theta_x M_y)'' = q_y \\ EI_y w^{IV} - \left[ N(w' + y_0 \theta_x') \right]' - (\theta_x M_z)'' = q_z \\ EI_\omega \theta^{IV} - GJ\theta_x'' + \left[ \theta_x' (-Nr^2 + 2\beta_z M_y - 2\beta_y M_z + \beta_\omega B) \right]' - \\ \left( v'' M_y + w'' M_z \right) + \left[ N(v' z_0 - w' y_0) \right]' - \theta_x (y^* q_y + z^* q_z) = z^* q_y - y^* q_z + M_x \end{cases} \quad (2.33)$$

Les équations différentielles 2.33 permettent d'étudier les problèmes de stabilité (flambement et déversement). Les inconnues dans ces équations sont les déplacements  $v$  ,  $w$  et  $\theta_x$ . Les coefficients de ces équations dépendent non seulement des caractéristique géométriques, mais aussi des valeurs des charges extérieures ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  ...etc.).

## 2.7 CONCLUSION

L'utilisation des déplacements semi-linéaires (rotation modérée), nous à permis d'obtenir le système d'équations différentielles (2.33). Ce système a une portée assez générale et englobe un nombre appréciable de problèmes pratiques importants. Si on tient compte des déplacements infinitésimaux, nous arrivons à la théorie générale de stabilité élastique de Vlassov .Ce dernier dans ses développements, il considère des déformations linéaires.

**CHAPITRE III**

- ÉTUDE DU DÉVERSEMENT DES POUTRES :**  
**\* À PARTIR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**  
**\* VALIDATION RÉGLEMENTAIRE ET NUMÉRIQUE**

### 3.1 INTRODUCTION

La construction moderne est caractérisée dans tous les domaines (génie civil, construction des machines, construction navale, etc....), par l'emploi de structures toujours plus grandes et par la réduction progressive des sections résistantes. Cette réduction est exigée par la légèreté, le souci d'économie et le montage qui sont capitales dans toutes les réalisations. Pour certains impératifs, ces domaines font appel à des structures minces et élancées pour lesquelles le risque de flambage est particulièrement à redouter.

Les structures métalliques sont pour la plupart constituées de barres fléchies, comprimées ou simultanément comprimées et fléchies. Si l'on utilise en général le terme de poutre pour les barres fléchies, on emploie celui de colonne ou poteau pour les barres comprimées, et celui de poutre-colonne pour les barres à la fois comprimées et fléchies.

Les phénomènes d'instabilité peuvent se manifester dans des parties isolées des constructions ( par exemple, flambement des barres comprimées dans les poutres en treillis). Mais ils peuvent aussi affecter l'ensemble d'une construction (flambement d'ensemble des portiques, des ponts en arc, etc. ). L'instabilité affecte tous les éléments structuraux comprimés : colonnes ou poutres des bâtiments, piles des ponts, barres des treillis, pylônes, etc.

### 3.2 DÉFINITION

Le déversement est le flambage latéral de la membrure comprimée de la poutre dans le plan horizontal. Il survient, lorsque une poutre soumise à un chargement vertical se déforme perpendiculairement à son axe de forte inertie. La partie comprimée du profilé va se dérober latéralement pour échapper à la compression. Cette déformation est due à un déplacement latéral et une torsion de la section.

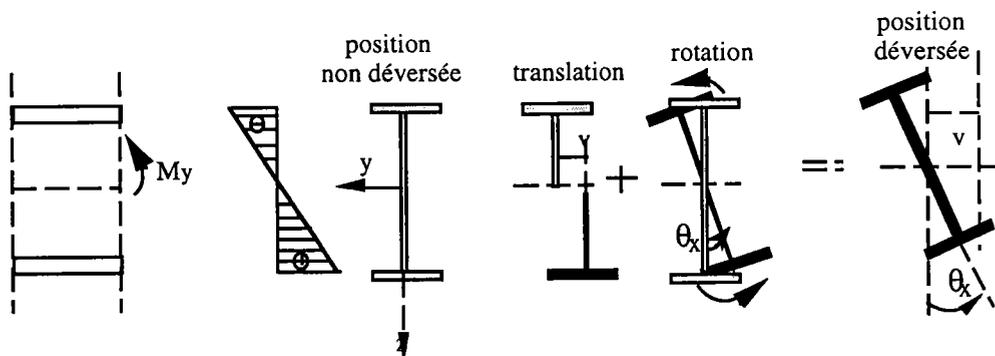


Figure 3.1

Le comportement de la section transversale lors du déversement

### 3.3 ÉQUATIONS DÉFFIRENTIELLES D'ÉQUILIBRE

Considérons une poutre à section monosymétrique soumise à un système de charges transversales. Le modèle mathématique de cette poutre s'obtient on posant  $N = 0$  dans le système d'équations différentielles (2.33). Ainsi, dans le cas général de la stabilité élastique de la poutre, on a trois équations différentielles dont les variables sont les déplacements  $v$ ,  $w$  et l'angle de torsion  $\theta_x$ . Le système d'équations devient:

$$EI_z v^{IV} - (M_y \theta_x)'' = q_y \quad (3.1.a)$$

$$EI_y w^{IV} - (M_z \theta_x)'' = q_z \quad (3.1.b)$$

$$EI_\omega \theta^{IV} - \left[ (\overline{GJ}) \theta_x' \right]' - (v'' M_y + w'' M_z) + \theta_x (y^* q_y + z^* q_z) = z^* q_y - y^* q_z \quad (3.1.c)$$

avec :  $\overline{GJ} = GJ + 2\beta_y M_z - 2\beta_z M_y - \beta_\omega B \quad (3.2)$

En intégrant deux fois les relations 3.1.a et 3.1.b, on obtient :

$$v'' - \theta_x \frac{M_y}{EI_z} = \frac{q_y}{2EI_z} x^2 + a_1 x + a_2 \quad (3.3.a)$$

$$w'' - \theta_x \frac{M_z}{EI_y} = \frac{q_z}{2EI_y} x^2 + a_3 x + a_4 \quad (3.3.b)$$

Les constantes d'intégration  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$  dépendent des conditions aux limites d'une poutre simplement appuyée.

Pour la flexion :

$$a_2 = v''(0) = 0, \quad a_1 = \frac{v''(L) - v''(0)}{L} - \frac{q_y L}{2EI_z} = -\frac{q_y L}{2EI_z} \quad (3.4.a)$$

$$a_4 = w''(0) = 0, \quad a_3 = \frac{w''(L) - w''(0)}{L} - \frac{q_z L}{2EI_y} = -\frac{q_z L}{2EI_y} \quad (3.4.b)$$

Pour une poutre simplement appuyée en torsion, on a les conditions aux limites suivantes:

$$\theta_x(0) = 0 \quad , \quad \theta_x(L) = 0 \quad (3.4.c)$$

En portant les équations (3.3-a , 3.3-b) dans la troisième équation du système précédant (3.1.c), on aura :

$$\begin{aligned} EI_\omega \theta_x^{IV} - (\overline{GJ} \theta_x')' - \theta_x \left[ \frac{M_y^2}{EI_z} + \frac{M_z^2}{EI_y} + y^* q_y + z^* q_z \right] + \left( \frac{q_y M_y}{2EI_z} + \frac{q_z M_z}{2EI_y} \right) x^2 \\ + (M_y a_1 + M_z a_3) x + M_y a_2 + M_z a_4 = z^* q_y - y^* q_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

En tenant compte des équations (3.4), l'équation précédante (3.5) devient :

$$\begin{aligned} EI_\omega \theta_x^{IV} - (\overline{GJ} \theta_x')' - \theta_x \left[ \frac{M_{0y}^2}{EI_z} + \frac{M_{0z}^2}{EI_y} + 2 \left( \frac{M_{0y} R_z}{EI_z} - \frac{M_{0z} R_y}{EI_y} \right) L \xi \right. \\ \left. + \left( \frac{R_z^2 + M_{0y} q_z}{EI_z} + \frac{R_y^2 - M_{0z} q_y}{EI_y} \right) L^2 \xi^2 + \left( \frac{R_z q_z}{EI_z} + \frac{R_y q_y}{EI_y} \right) L^3 \xi^3 \right. \\ \left. + \left( \frac{q_z^2}{4EI_z} + \frac{q_y^2}{4EI_y} \right) L^4 \xi^4 - (y^* q_y + z^* q_z) \right] - \frac{q_z L}{2EI_y} M_{0z} \\ \left. + \left( \frac{q_z L}{2EI_y} R_y - \frac{q_y L}{2EI_z} M_{0y} \right) L \xi + \frac{1}{2} \left( \frac{M_{0y} q_y}{EI_z} + \frac{M_{0z} q_z}{EI_y} - \frac{q_y L}{2EI_z} R_z \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{q_z L}{2EI_y} q_y \right) L^2 \xi^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_z q_y}{EI_z} - \frac{R_y q_z}{EI_y} + - \frac{q_y L}{2EI_z} q_z \right) L^3 \xi^3 \right. \\ \left. + \left( \frac{q_y q_z}{4EI_z} - \frac{q_y q_z}{4EI_y} \right) L^4 \xi^4 \right] - (y^* q_z - z^* q_y) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Où nous avons remplacé :

$$\begin{cases} M_y = R_z x + q_z \frac{x^2}{2} + M_{0y} \\ M_z = -R_y x - q_y \frac{x^2}{2} + M_{0z} \\ \xi = \frac{x}{L} \end{cases}$$

où  $R_y$  ,  $R_z$  ,  $M_{0y}$  , et  $M_{0z}$  sont respectivement les réactions d'appui dont les vecteurs sont orientés vers le sens positif des axes  $Gy$  et  $Gz$ .

La fonction (3.6) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\theta_x^{IV} - f(\xi)\theta_x'' - f(\xi)'\theta_x' - g(\xi)\theta_x = h(\xi) \quad (3.7)$$

avec :

$$f(\xi) = \frac{GJ}{EI_\omega} + \frac{2}{EI_\omega}(M_{0y}\beta_y - M_{0z}\beta_z - (\beta_y R_y + \beta_z R_z)L\xi - \frac{1}{2}(\beta_y q_y + \beta_z q_z)L^2\xi^2) \quad (3.8)$$

$$g(\xi) = \left(\frac{M_{0y}^2}{EI_z} + \frac{M_{0z}^2}{EI_y} + 2\left(\frac{M_{0y}R_z}{EI_z} - \frac{M_{0z}R_y}{EI_y}\right)L\xi + \left(\frac{M_{0y}q_z + R_z^2}{EI_z} + \frac{R_y^2 - M_{0z}q_y}{EI_y}\right)L^2\xi^2 + \left(\frac{R_zq_z}{EI_z} + \frac{R_yq_y}{EI_y}\right)L^3\xi^3 + \left(\frac{q_z^2}{4EI_z} + \frac{q_y^2}{4EI_y}\right)L^4\xi^4 - (y^*q_y + z^*q_z) \right) \quad (3.9)$$

$$h(\xi) = \left(-\frac{q_zL}{2EI_y}M_{0z} + \left(-\frac{q_yL}{2EI_z}M_{0y} + \frac{q_zL}{2EI_y}R_y\right)L\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{M_{0y}q_y}{EI_z} + \frac{M_{0z}q_z}{EI_y} - 2\frac{q_yL}{2EI_z}R_z + \frac{q_zL}{2EI_y}q_y\right)L^2\xi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_zq_y}{EI_y} - \frac{R_yq_z}{EI_z} + -\frac{q_yL}{2EI_z}q_z\right)L^3\xi^3 + \left(\frac{q_yq_z}{4EI_z} - \frac{q_yq_z}{4EI_y}\right)L^4\xi^4 - (y^*q_z - z^*q_y) \right) \quad (3.10)$$

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (3.7), on utilise la méthode de Galerkin (cette méthode est donnée à l'annexe 1). On choisit :

$$\theta_x(\xi) = a\varphi(\xi) \quad (3.11)$$

La fonction  $\varphi(\xi)$  doit remplir les conditions aux limites pour  $\theta_x$ .. "a" est un paramètre arbitraire qui doit être déterminé par la méthode de Galerkin.

Après avoir appliqué la méthode de Galerkin à la solution de l'équation précédente, on trouve:

$$a \left[ \varphi(\xi)^{IV} - f(\xi)\varphi(\xi) \left[ \varphi''(\xi) \right] - f(\xi)' \varphi(\xi) \left[ \varphi(\xi)' - g(\xi)\varphi(\xi) \right] \right] = h(\xi)\varphi(\xi) \quad (3.12)$$

L'expression de "a" est donnée par :

$$a = \frac{B}{\Delta} \quad (3.13)$$

On remplace (3.13) dans (3.11), l'expression de la rotation prend la forme suivante :

$$\theta_x(\xi) = \frac{B}{\Delta} \varphi(\xi) \quad (3.14)$$

avec :

$$\Delta = \int_0^1 (\varphi(\xi)^{IV} \varphi(\xi) - f(\xi)\varphi(\xi)\varphi(\xi)'' - f(\xi)' \varphi(\xi)' \varphi(\xi) - g(\xi)\varphi(\xi)^2) d\xi \quad (3.15)$$

$$B = H(\xi)\varphi(\xi) \quad (3.16)$$

Lorsqu'on remplace  $f(\xi)$  ,  $g(\xi)$  ,  $h(\xi)$  par leurs valeurs l'équation (3.15) s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_0^1 \varphi(\xi)^{IV} \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{EI_{\omega 0}} \int_0^1 [GJ + 2M_{0z}\beta_y - 2M_{0y}\beta_z - 2(\beta_y R_y \\ & + \beta_z R_z)L\xi - (\beta_y q_y + \beta_z q_z)\xi^2 L^2] \varphi(\xi)'' \varphi(\xi) d\xi + \frac{2}{EI_{\omega 0}} \int_0^1 \{[(\beta_y R_y \\ & + \beta_z R_z)L + (\beta_y q_y + \beta_z q_z)L^2 \xi] \varphi(\xi)' \varphi(\xi)\} d\xi - \frac{1}{EI_{\omega 0}} \int_0^1 \left[ \frac{M_{0y}^2}{EI_z} + \frac{M_{0z}^2}{EI_y} \right. \\ & + 2\left(\frac{M_{0y}R_z}{EI_z} - \frac{M_{0z}R_y}{EI_y}\right)L\xi + \left(\frac{M_{0y}q_z + R_z^2}{EI_z} + \frac{-M_{0z}q_y + R_y^2}{EI_y}\right)L^2 \xi^2 \\ & \left. + \left(\frac{R_z q_z}{EI_z} + \frac{R_y q_y}{EI_y}\right)L^3 \xi^3 + \left(\frac{q_z^2}{4EI_z} + \frac{q_y^2}{4EI_y}\right)L^4 \xi^4 - (z^* q_y + y^* q_z) \right] \varphi(\xi)^2 d\xi \end{aligned} \quad (3.17)$$

En supposant que le gauchissement est libre, alors:  $\varphi(\xi) = \sin \pi \xi$  , donc l'équation (3.17) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \Delta = & \frac{\pi^2}{2} \left\{ \pi^2 + \frac{L^2}{EI_\omega} [GJ + 2M_{0z}\beta_y - 2M_{0y}\beta_z - (\beta_y R_y + \beta_z R_z)L \right. \\
 & - \gamma_1 L^2 (\beta_y q_y + \beta_z q_z)] - \frac{L^4}{\pi^2 EI_\omega} \left[ \frac{M_{0y}^2}{EI_z} + \frac{M_{0z}^2}{EI_y} + \left( \frac{M_{0y}R_z}{EI_z} - \frac{M_{0z}R_y}{EI_y} \right) L \right. \\
 & + \gamma_1 L^2 \left( \frac{M_{0y}q_z + R_z^2}{EI_z} + \frac{-M_{0z}q_y + R_y^2}{EI_y} \right) + \gamma_2 L^3 \left( \frac{R_z q_z}{EI_z} + \frac{R_y q_y}{EI_y} \right) \\
 & \left. \left. + \gamma_3 L^4 \left( \frac{q_z^2}{EI_z} + \frac{q_y^2}{EI_y} \right) - (y^* q_y + z^* q_z) \right\} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{2\pi^2 - 3}{6\pi^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^2 - 3}{4\pi^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{3}{2\pi^4} \right)$$

### 3.4 CAS D'UN CHARGEMENT PLAN APPLIQUÉ À UNE SECTION MONOSYMMÉTRIQUE

Dans le cas où la poutre est sollicitée par un système de charges dans le plan principal GZ , les composantes de charge  $q_y$  ,  $M_{0z}$ , et  $R_y$  sont nul , l'expression (3.18) devient

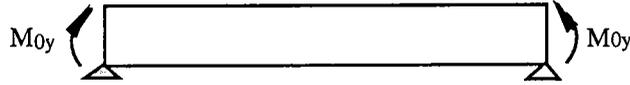
$$\begin{aligned}
 \Delta = & \frac{\pi^2}{2} \left\{ \pi^2 + \frac{L^2}{EI_\omega} [GJ - 2M_{0y}\beta_z - \beta_z R_z L - \gamma_1 L^2 \beta_z q_z] \right. \\
 & - \frac{L^4}{\pi^2 EI_\omega} \left[ \frac{M_{0y}^2}{EI_z} + \frac{M_{0y}R_z}{EI_z} L + \gamma_1 L^2 \left( \frac{M_{0y}q_z + R_z^2}{EI_z} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \gamma_2 L^3 \frac{R_z q_z}{EI_z} + \gamma_3 L^4 \left( \frac{q_z^2}{EI_z} - z^* q_z \right) \right] \right\} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

La poutre soumise au système de charges considérées reste stable jusqu'au moment où la valeur de "  $\Delta$  " devient infinitésimal, dans ce cas l'angle de torsion et les déplacements  $u$  et  $v$  tendent vers l'infini et la poutre perd sa stabilité. On obtient donc la limite supérieure en rendant nulle la valeur de "  $\Delta$  ".

On note que le système d'équations différentielles établie par Djalaly [29] correspond à un chargement spatial quelconque, et pour une poutre à section quelconque. Cependant la solution analytique peut être trouvée dans le cas de chargement simple où le plan de chargement coïncide avec le plan de symétrie de la section (cas d'une section en I monosymétrique).

### 3.4.1 - FLEXION PURE

Considérons une poutre à section transversale monosymétrique, soumise à un moment constant " $M_{0y}$ ", appliqué aux extrémités,  $q_y = q_z = M_z = 0$ . Dans ce cas la relation 3.19 donne :



$$\frac{\pi^4}{2} + \frac{\pi^2 L^2}{2EI_\omega} [GJ - 2M_{0y}\beta_z] - \frac{M_{0y}^2 L^4}{2EI_z EI_\omega} = 0 \quad (3.20-a)$$

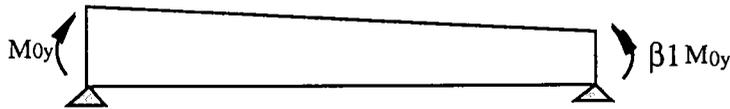
La solution de l'équation 3.19-a donne l'expression du moment critique du déversement :

$$(M_{0y})_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ \beta_z \pm \sqrt{(\beta_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left[ \frac{GJ L^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right]} \right] \quad (3.20-b)$$

Cette solution a été obtenue par Vlassov [62], Trahair [61] et également par Djalay [28]. Comme on le constate, l'équation 3.20.a à deux solutions une positive et l'autre négative.

### 3.4.2 MOMENT LINÉAIREMENT VARIABLE

Envisageons dans ce cas une poutre à section monosymétrique soumise à deux moments inégaux en ses extrémités.



$$\begin{aligned} q_y = q_z = M_z = 0 & & M_y = R_z x + M_{0y} \\ R_z = (\beta_1 - 1) \frac{M_{0y}}{L} & & -1 < \beta_1 < 1 \end{aligned}$$

En les remplaçant dans  $\Delta$ , on obtient la forme suivante du moment de déversement:

$$(M_{0y})_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}} \beta_z \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_2}} \beta_z \right)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left[ \frac{GJ L^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right]} \right] \quad (3.21)$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + \beta_1}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \beta_1 + \frac{2\pi^2 - 3}{6\pi^2} (1 - \beta_1)^2$$

Dans le cas où la section de la poutre présente une double symétrie,  $\beta_z = 0$  , l'équation (3.21) prend la forme :

$$(M_{0y})_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ \pm \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} \left[ \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right]} \right] \quad (3.22)$$

Ainsi, les deux solutions négative et positive sont égales.

### 3.5.3 -POUTRE SOUMISE À DES CHARGES TRANSVERSALES UNIFORMÉMENT RÉPARTIES

Dans ce cas nous avons une poutre à section monosymétrique sollicitée dans le plan principale (figure3.2). Toutes les composantes de charges sont nulles sauf  $q_z$ . En portant la valeur de  $q_z$  dans la fonction d'instabilité  $\Delta$  , la charge critique due à l'application de cette charge est donnée par la formule suivante :

$$(M_{0y})_{cr} = 1.13 \frac{EI_z \pi^2}{L^2} \left[ \pm \sqrt{(0.46z^* + 0.984\beta_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left[ \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right]} + (0.46z^* + 0.984\beta_z) \right] \quad (3.23)$$

Djalaly [28] et Reis [54] ont proposé des solutions similaire à l'équation 3.23.

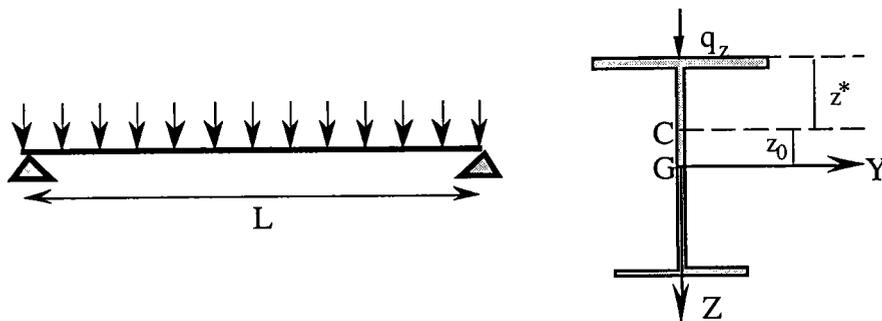


Figure 3.2

### 3.5 FORMULE GÉNÉRALE DU DÉVERSEMENT

D'après les constatations précédentes, on peut établir la relation suivante comme étant la formule générale du déversement d'une poutre. Cette solution est adoptée par l'Eurocode 3 pour la vérification au déversement des poutres [32].

$$(M_{\max})_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{L^2} \left[ \mp \sqrt{(C_2 z^* + C_3 \beta_z)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left[ \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right]} - (C_2 z^* + C_3 \beta_z) \right] \quad (3.24)$$

Le tableau 3.1 donne les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  pour le cas d'une poutre simplement appuyée et soumise à différents types de chargement. Dans cette expression :

$C_1$  : traduit l'influence de la distribution des moments de flexion le long de la poutre.

$C_2$  : coefficient du point d'application des charges transversales par rapport au centre de torsion.

$C_3$  : coefficient relatif à la symétrie de la poutre.

Les cas de chargement 1 à 9 correspondent à une poutre sollicitée par un gradient de moments appliqués au niveau des appuis. Le cas le plus défavorable est celui de la poutre simple soumise à un moment de flexion constant. Dans le cas d'un moment linéairement variable, la compression maximale n'est atteinte sur toute la longueur de la poutre que dans une seule section, ce qui se traduit par un facteur  $C_1$  plus élevé afin de tenir compte de cet effet favorable. Si les deux moments fléchissants sont égaux et de même sens, ils produisent une double courbure de la poutre et une déformée antisymétrique. L'effort dans une même semelle passe progressivement de la compression à la traction et s'inverse pour l'autre semelle. La poutre doit, de toute évidence, avoir une meilleure résistance au déversement. Le rapport  $\beta_1$  des moments aux extrémités permet la discussion du diagramme de moment linéaire. Une valeur positive de  $\beta_1$  caractérise une simple courbure tandis qu'une valeur négative de  $\beta_1$  correspond à une double courbure. Pour une poutre sollicitée par un gradient de moment, le coefficient du point d'application de la charge  $C_2$  est sans influence sur le moment critique de déversement.

Les cas de chargement 10, 11 et 12, correspondent à une poutre sollicitée par des charges transversales. Tous les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  interviennent dans le calcul de la charge critique de déversement. Nous avons recalculé les nouveaux coefficients, seulement la valeur de  $C_3$  est différente des valeurs données par l'Eurocode3 [32]. Cette différence a été constatée aussi par Reis [54] en utilisant les équations différentielles obtenues par Vlassov. Il a trouvé  $C_3 = 0.82$ , dans le cas d'une poutre soumise à une charge uniforme.

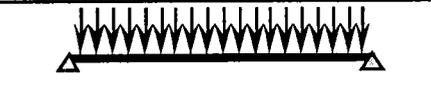
N°	Chargement	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	
1		1.00	—	1.00	
2		1.141	—	0.998	
3		1.323	—	0.992	
4		1.563	—	0.977	
5		1.879	—	0.939	
6		2.281	—	0.855	
7		2.704	—	0.676	
8		2.927	—	0.366	
9		1.0	—	0	Nouvelle valeur de C <sub>3</sub>
10		1.36	0.55	1.73	0.42
11		1.05	0.43	1.12	0.574
12		1.13	0.46	0.525	0.984

Tableau 3.1

On note que, l'équation générale du déversement (3.24) donne deux solutions différentes, une positive et l'autre négative. Ce qui donne deux modes de déversement différents. Le premier mode (solution positive) correspond à un chargement qui comprime les fibres supérieures de la section transversale. Le deuxième mode (solution négative)

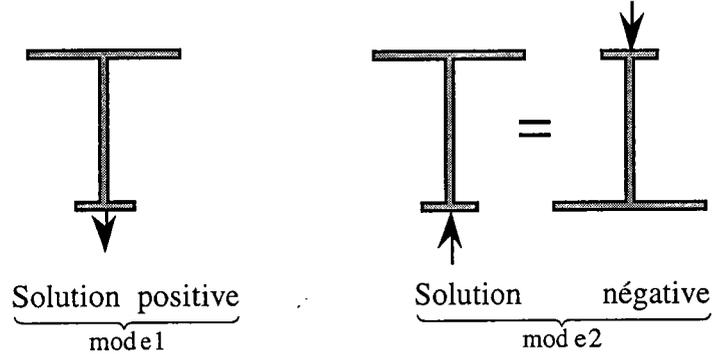


Figure 3.3

correspond à un chargement qui comprime les fibres inférieures de la section, ce mode de déversement est identique à la solution positive lorsque la poutre est inversée, parce que  $\beta_z$  change de signe (figure 3.3)

### 3.5.1 IMPORTANCE DU POINT D'APPLICATION DES CHARGES TRANSVERSALES

La position du point d'application des charges extérieures, par rapport au centre de torsion de la section transversale de la poutre, joue un rôle important dans la stabilité au déversement. La figure 3.4 montre que les charges transversales appliquées à la semelle inférieure créent un moment secondaire stabilisant. Ce moment va augmenter la résistance de la poutre. Par contre une charge agissant à la semelle supérieure a un effet déstabilisateur (les voies de roulement du pont roulant). On peut donc, tirer profit de l'augmentation de la résistance au déversement lorsque les charges transversales sont appliquées au niveau de la semelle tendue ( le cas se rencontre notamment lorsque le galet de roulement d'un monorail se déplace sur la semelle inférieure)

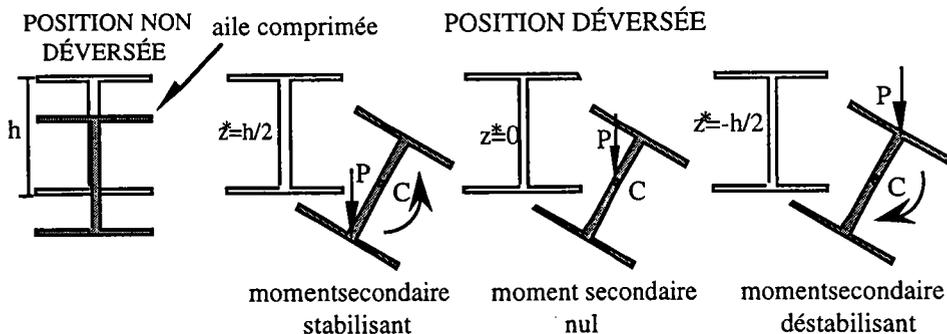


Figure 3.4

Dans la figure 3.5, on donne la variation de la charge critique de déversement  $P_{CR}$  en fonction de la longueur de la poutre  $L$  et du point d'application  $z^*$  pour un IPE100 chargée au milieu. Une meilleure résistance au déversement est obtenue pour  $z^* = h/2$  (semelle inférieure). Par contre une charge appliquée à  $z^* = -h/2$  (semelle supérieure) affaiblie la résistance de la poutre au déversement.

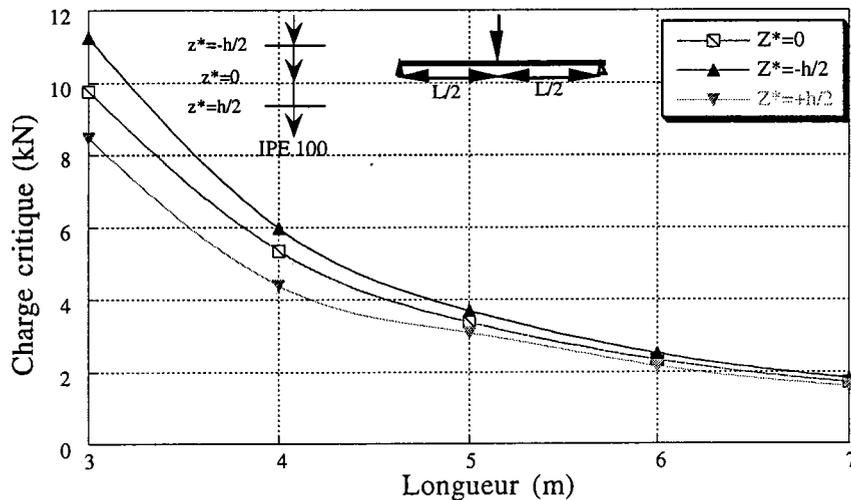


Figure 3.5 : Variation de la charge critique en fonction du point d'application de la charge transversale

### 3.5.2 INFLUENCE DE LA FORME DE LA SECTION TRANSVERSALE

L'expression générale du moment critique de déversement (3.23) est fonction de la longueur de la poutre et des caractéristiques géométriques de sa section transversale. Pour réduire les effets défavorables du déversement, l'augmentation des moments d'inertie transversale  $I_z$  et / ou le moment d'inertie de gauchissement  $I_{\omega}$  est nécessaire. Ainsi, certaines P.R.S sont avantageuses par rapport aux sections laminées à chaud en I ou en H de hauteur similaire parce que, soit le matériau additionnel est situé loin de l'axe de faible inertie de la section, soit la poutre a une section fermée, ce qui a pour effet d'augmenter la raideur torsionnelle. Ceci explique que la résistance des poutres à section en caisson est très rarement gouvernée par le déversement. On remarque aussi, que la position de la section monosymétrique transversale, affectera la résistance au déversement de la poutre (figure 3.6)

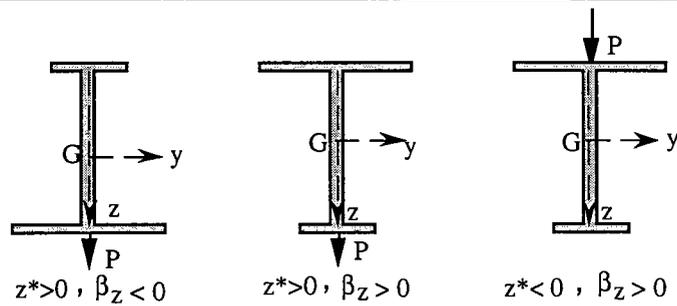


Figure 3.6

La figure 3.7, donne les valeurs du moment de déversement pour deux sections, respectivement à ailes étroites (IPE) ou à larges ailes (HEA). Elles ont sensiblement la même résistance plastique en flexion autour de l'axe fort (voir tableau 3.2). Il apparaît clairement que le déversement est d'autant plus préoccupant quand la section possède une faible raideur flexionnelle dans le plan de petite inertie et que, quelle que soit la section, la longueur joue un rôle primordial (figure 3.7).

	IPE400	HEA300
$w_{pl}(m^3)$	$1.3070 \cdot 10^{-03}$	$1.3830 \cdot 10^{-03}$
$I_z (m^4)$	$1.3180 \cdot 10^{-05}$	$6.3110 \cdot 10^{-05}$
$I_y (m^4)$	$2.3128 \cdot 10^{-04}$	$1.8264 \cdot 10^{-04}$
$J (m^4)$	$5.1000 \cdot 10^{-07}$	$8.5000 \cdot 10^{-07}$
$I_{\omega}(m^6)$	$4.9005 \cdot 10^{-07}$	$1.19977 \cdot 10^{-06}$

Tableau 3.2 : Propriétés de deux sections ayant sensiblement le même module de résistance plastique

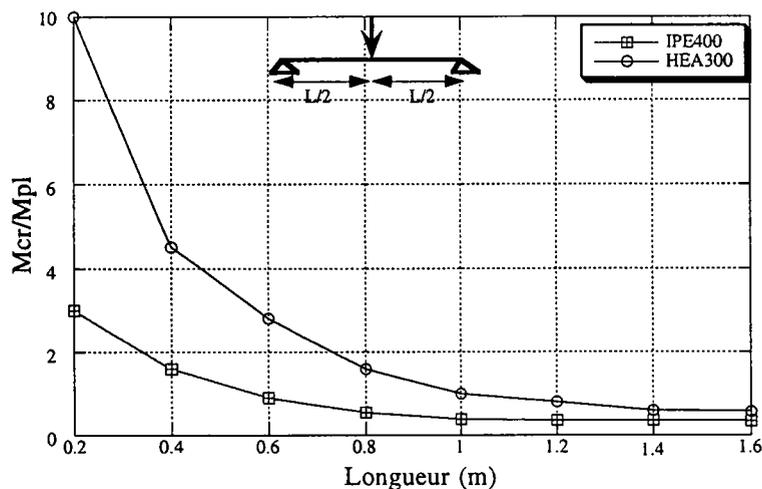


Figure 3.7 : Influence de la forme de la section sur la charge critique de déversement ( $z^*=0$ ).

### 3.6 COMPARAISON NUMÉRIQUE ET RÉGLEMENTAIRE

#### 3.6.1 PRÉSENTATION DU CODE DE CALCUL

Une grande partie des calculs numériques que nous avons faits ont été réalisés avec le code de calcul des éléments finis ABAQUS [2]. Ce code est appliqué à l'analyse des éléments à parois minces et à sections ouvertes où la torsion non uniforme est prise en compte. Une poutre est topologiquement définie par les deux noeuds décrivant sa fibre neutre, 1 et 2. Les éléments utilisés ont sept degrés de liberté par noeud. Le septième degré de liberté est le gauchissement pour les déplacements, le bimoment pour les forces (figure 3.8) .

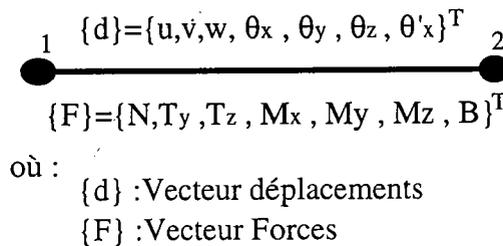


Figure 3.8 : Les degrés de libertés de l'élément utilisé

Pour la définition des caractéristiques géométriques des sections ouvertes, on a plusieurs possibilités. Dans le cas des formes classiques (I, L), on donne les largeurs et les épaisseurs des semelles et de l'âme (figure 3.9-a). Pour des sections quelconques, on définit les différents segments composant la section, par la donnée des coordonnées des extrémités de chaque segment et son épaisseur (figure 3.9-b).

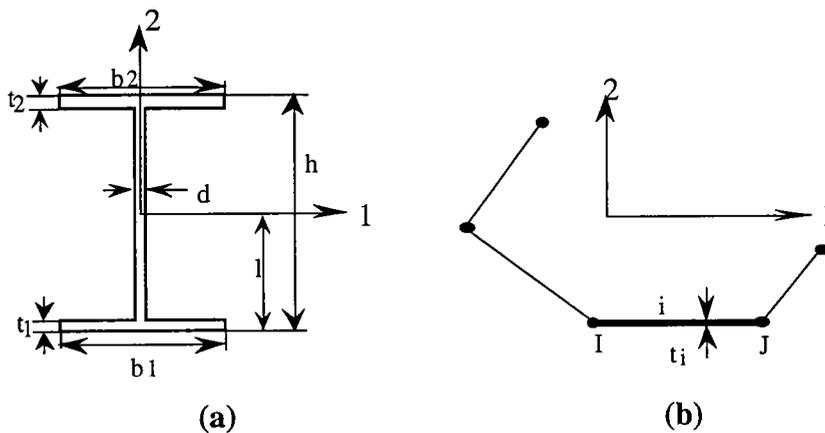


Figure 3.9

Les caractéristiques géométriques de flexion et torsion sont données dans des fichiers de résultats, y compris la position des centres de gravité et de torsion.

Ce code de calcul traite les problèmes de comportement linéaire, non linéaire (géométriques, matériels) et les instabilités.

La figure 3.10, montre que la solution approchée converge vers la solution analytique (Timoshenko[34]) et la précision est améliorée quand le nombre d'éléments augmente.

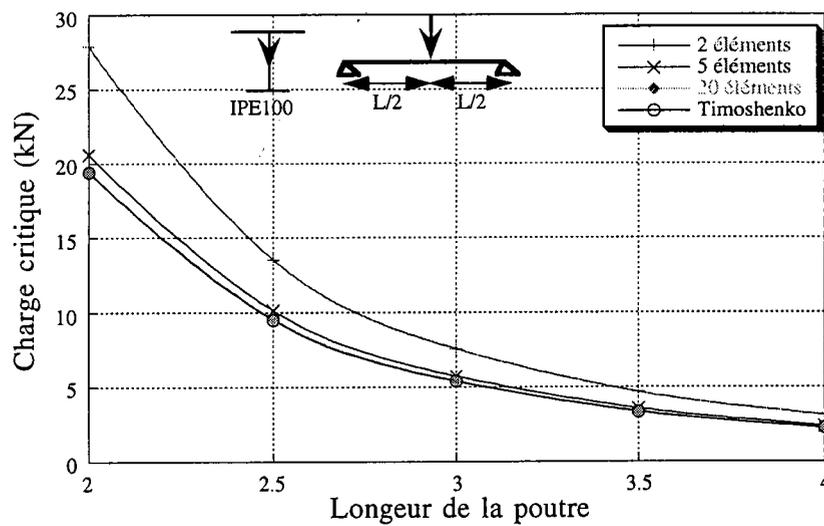


Figure 3.10: Effet du nombre d'éléments utilisé dans la discrétisation

### 3.6.2 CAS DES SECTIONS BISYMÉTRIQUES

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus par notre approche, pour différentes sections symétriques. Des comparaisons sont établies avec les solutions analytiques proposées par l'Eurocode3 [32] et les calculs numériques. Les calculs sont faits avec les sections IPE100 et IPE200 pour des poutres ayant une portée allant de 3 à 6 m. Ces poutres sont sollicitées par un chargement de type donné au tableau 3.1 . Les caractéristiques géométriques de ces sections sont données dans la figure3.11 .

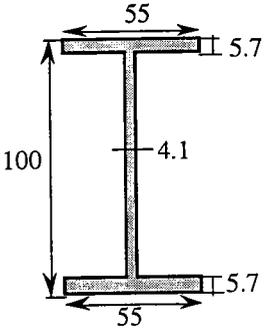
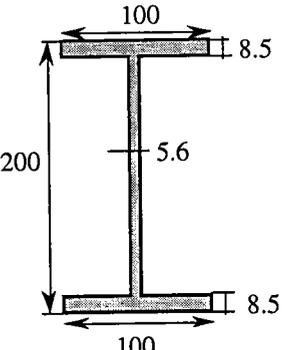
Section transversale (Acier)	Caractéristiques géométriques $\left\{ \begin{array}{l} E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right\}$
 <p><b>IPE100</b></p>	$A = 9.9026 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6284 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 1.5805 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 8.9304 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 3.5137 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0$
 <p><b>IPE200</b></p>	$A = 28.50 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.94 \cdot 10^{-05} \text{ m}^4$ $I_z = 1.42 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $J = 6.85 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $I_\omega = 1.301 \cdot 10^{-08} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0$

Figure 3.11 : caractéristiques géométriques des sections utilisées dans les calculs.

### 3.6.21 POUTRES SOUMISES À UN GRADIENT DE MOMENTS

Comme la section transversale présente une double symétrie ( $\beta_z = 0$ ) et le coefficient  $C_2$  est sans influence dans le cas des poutres chargées par un gradient de moments, l'expression du moment critique du déversement 3.23 devient :

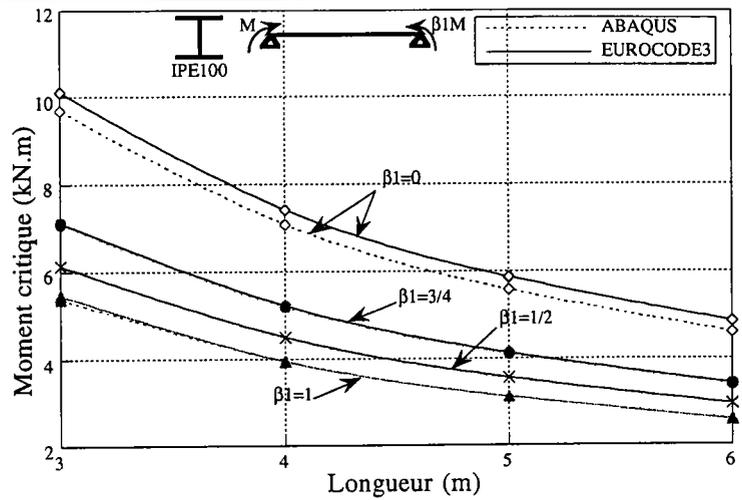
$$M_{cr} = \mp C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \sqrt{\frac{I_\omega}{I_z} \left( \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right)} \quad (3.24)$$

Cette équation (3.24) donne deux solutions égales et de signe contraire,  $|M_{cr1}| = |M_{cr2}|$  .

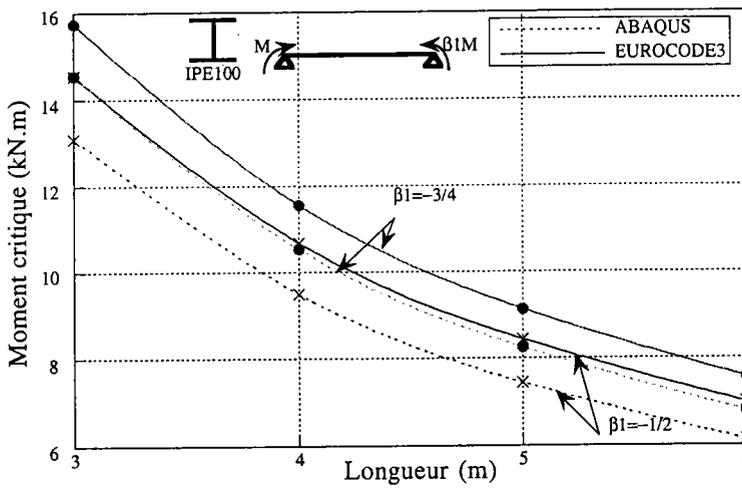
Les figures 3.12 et 3.13 donnent la variation du moment critique de déversement en fonction de la longueur pour un IPE100 et un IPE200, sollicitées par le cas de chargement 1 à 9 du tableau 3.1 . À partir de ces courbes on remarque que :

Lorsque  $0 < \beta_1 < 1$ , les moments critiques donnés par l'Eurocode 3 sont bien concordants avec les résultats numériques calculés par ABAQUS (figures 3.12-a et 3.13-a) à l'exception de  $\beta_1 = 0$ , où les calculs faits par l'Eurocode 3 surestiment le moment critique de déversement.

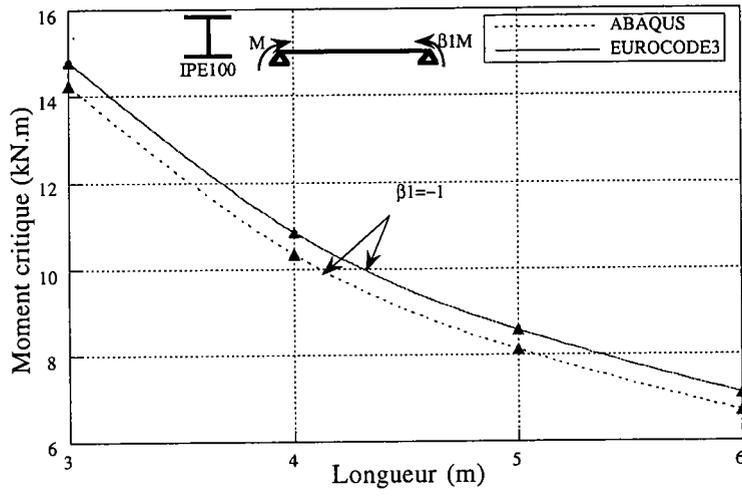
Lorsque  $-1 < \beta_1 < 0$ , les résultats obtenus sont présentés sur Les figures 3.12-b et 3.13-b. On remarque que l'écart entre les deux méthodes de calcul est plus grand, cette différence est due à la fonction de test d'approximation de déplacements (nous avons utilisé un seul terme) qui ne décrit pas la forme réelle des déplacements ( ce point de vue sera traité dans le chapitre IV).



(a)

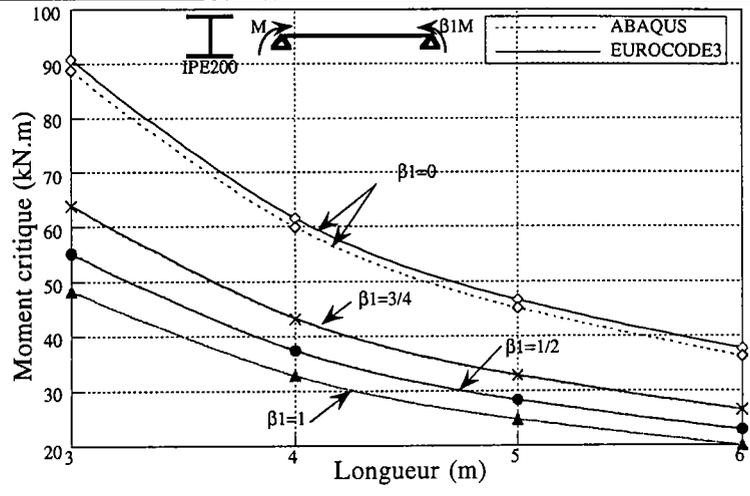


(b)

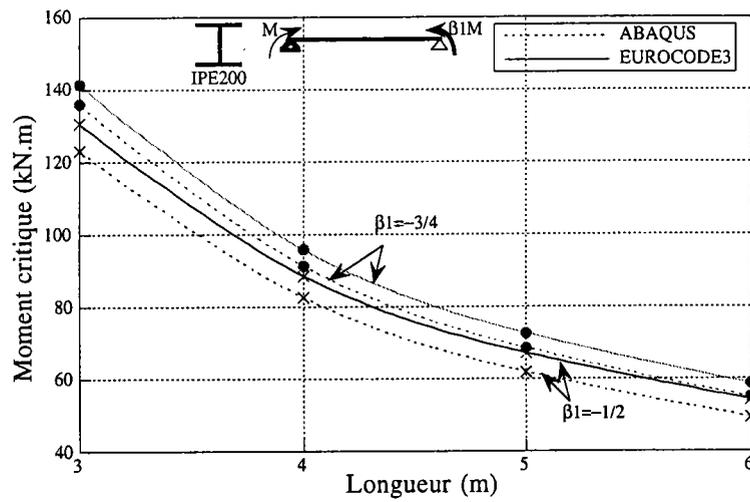


(c)

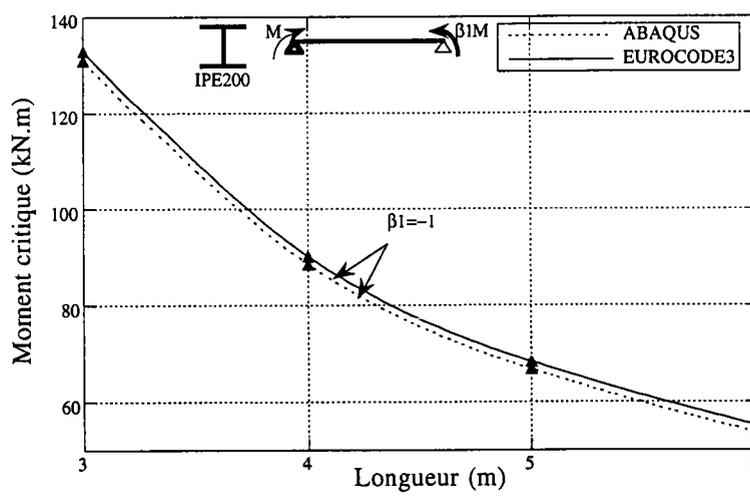
Figure 3.12 : Comparaison numérique et réglementaire des moments critiques de déversement d'une poutre en IPE100 sous gradient de moment



(a)



(b)



(c)

**Figure 3.13 :** Comparaison numérique et réglementaire des moments critiques de déversement d'une poutre en IPE200 sous gradient de moment

### 3.6.22 POUTRES SOUMISES À DES CHARGES TRANSVERSALES.

Dans ce cas, la formule générale 3.23 est simplifiée. Seul les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  ( $C_3$  n'intervient pas car  $\beta_z = 0$ ). L'expression du moment critique de déversement s'écrit:

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ -C_2 Z^* \mp \sqrt{(C_2 Z^*)^2 + \frac{I_\omega}{I_z} \left( \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right)} \right] \quad (3.25)$$

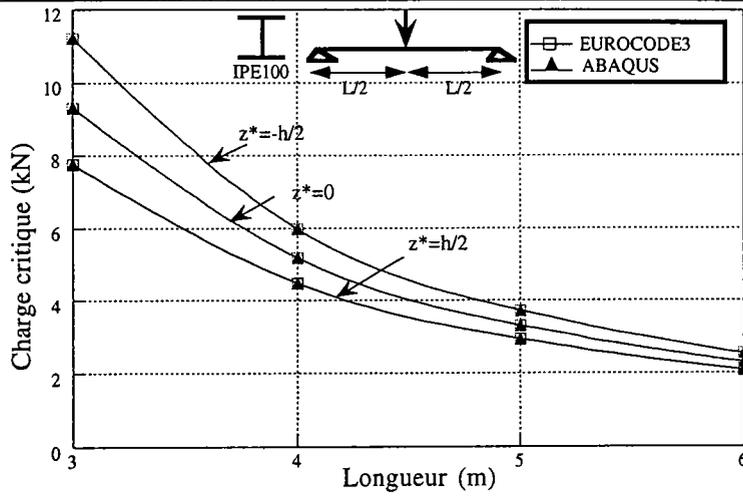
Lorsque la charge est appliquée au centre de torsion ( $z^* = 0$ ), les deux solutions sont égales mais de signe contraire ( $|M_{cr1}| = |M_{cr2}|$ ). Quand la charge est appliquée à un point quelconque de la section sauf au centre de torsion ( $Z^* \neq 0$ ), les deux solutions sont différentes ( $|M_{cr1}| \neq |M_{cr2}|$ ).

Le tableau 3.3 donne les charges critiques du déversement d'un IPE100 sollicitée par une charge concentrée au milieu. La charge est appliquée à la semelle supérieure et inférieure respectivement. Ces résultats montrent que les valeurs de la charge appliquée à une semelle suffisent pour trouver celles de l'autre semelle au signe pres

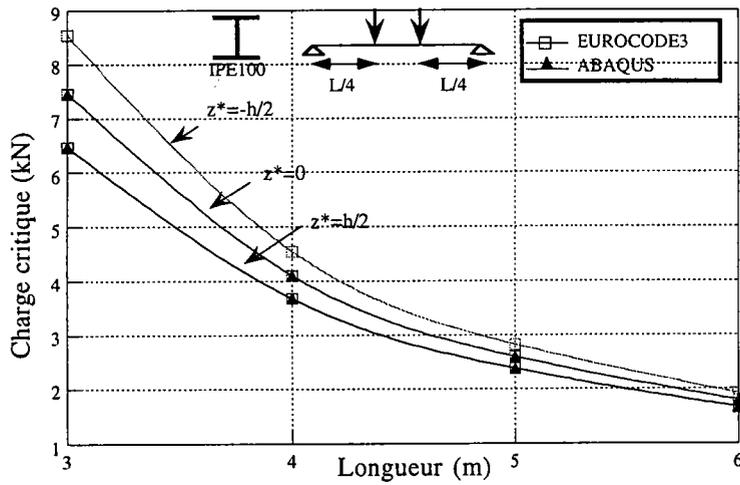
	Charge appliquée à la semelle supérieure		Charge appliquée à la semelle inférieure	
	$P_{cr}$ positive (kN)	$P_{cr}$ négative (kN)	$P_{cr}$ positive (kN)	$P_{cr}$ négative (kN)
3	+7.9949	-11.787	+11.787	-7.9949
4	+4.5861	-6.2015	+6.2015	-4.5861
5	+2.9830	-3.8159	+3.8159	-2.9830
6	+2.0982	-2.582	+2.582	-2.0982

**Tableau 3.3**

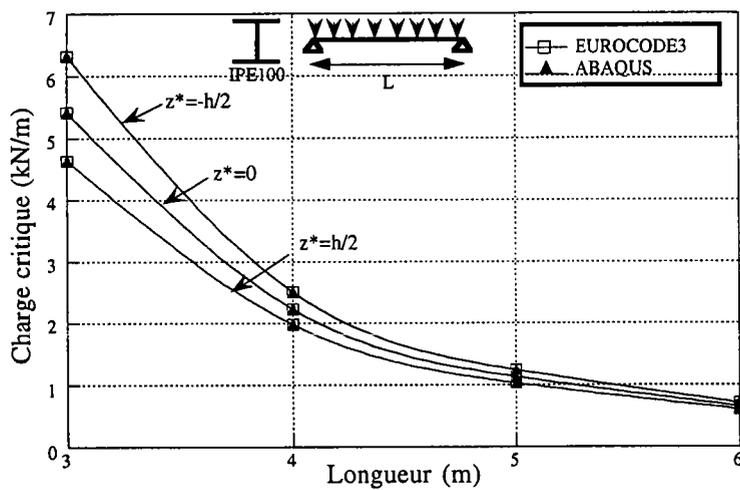
Les figure 3.14 et 3.15 donnent la variation des charges critiques en fonction de la longueur pour un IPE100 et un IPE200, sollicité par les cas de chargements 11, 12, et 13 du tableau 3.1 (charge concentrée au milieu, deux charges concentrées appliquées à une distance  $L/4$  des appuis et une charge uniformément répartie). On remarque que les résultats obtenus par l'Eurocode3 et ABAQUS sont en totale concordance. Donc, la solution donnée par la réglementation en vigueur approxime bien la charge critique de déversement des poutres ayant une section transversale bisymétrique.



(a) : Poutre soumise à une charge concentrée appliquée au milieu

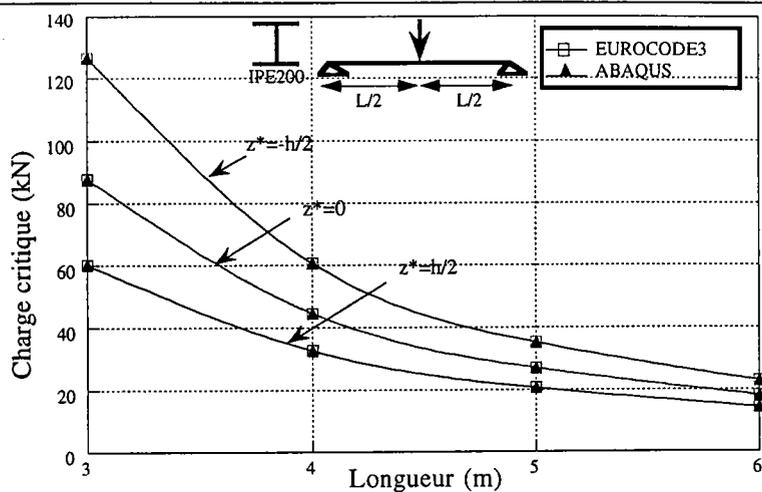


(b) : Poutre soumise à deux charges concentrées appliquées à une distance  $L/4$  des appuis

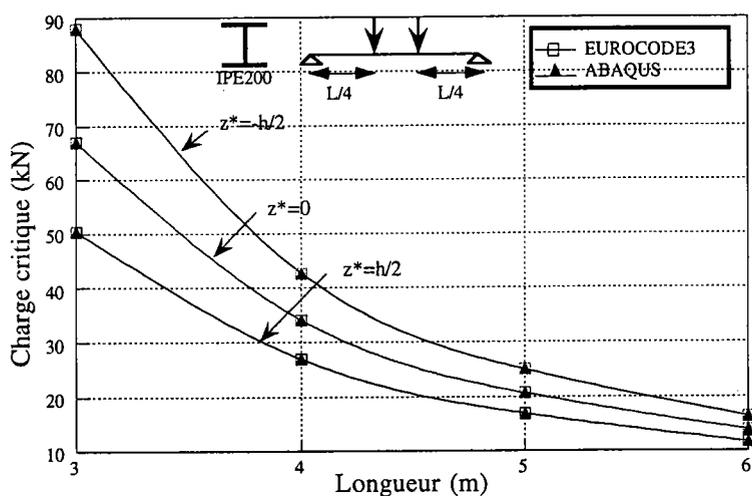


(c) : Poutre soumise à une charge uniformément répartie

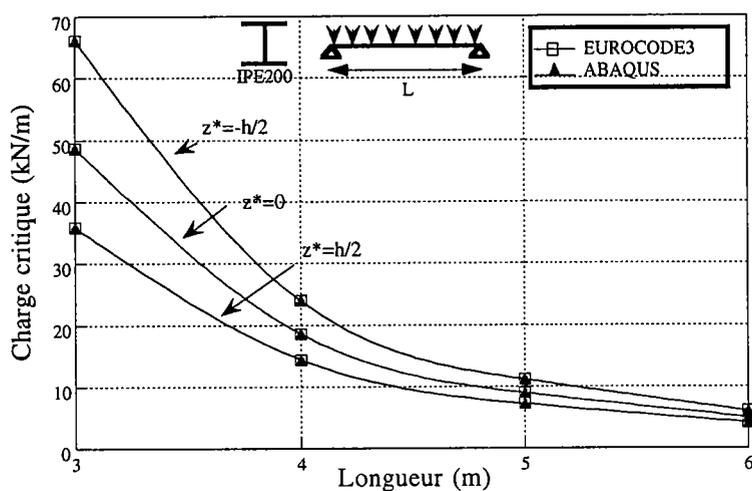
Figure 3.14 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE100 soumise à des charges transversales



(a) : Poutre soumise à une charge concentrée appliquée au milieu



(b) : Poutre soumise à deux charges concentrées appliquées à une distance  $L/4$  des appuis



(c) : Poutre soumise à une charge uniformément répartie

Figure 3.15 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre en IPE200 soumise à des charges transversales

### 3.6.3 SECTION MONOSYMMÉTRIQUE

#### 3.6.31 VALIDATION NUMÉRIQUE

Dans le cas où la poutre est sollicitée par une charge transversale appliquée au centre de torsion de la section transversale, l'expression 3.23, donnant le moment critique de déversement s'écrit :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ -C_3 \beta_z + \sqrt{(C_3 \beta_z)^2 + \frac{I\omega}{I_z} \left( \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right)} \right] \quad (3.27)$$

Les deux solutions positive et négative obtenues à partir de cette équation (3.26) ne doivent pas être égales, cela nous donne :  $|M_{cr1}| \neq |M_{cr2}|$ .

Pour illustrer ce problème, on prend une poutre sollicitée par une charge transversale appliquée à mi-travée. Le point d'application de cette charge est le centre de torsion. La section transversale est constituée d'un IPE100 rendu monosymétrique en diminuant la semelle inférieure de 25mm (cette section correspond à la section "a" donnée par la figure 3.20). Le tableau 3.2 regroupe les résultats obtenus par voies numérique et réglementaire. On constate que les solutions positives et négatives données par ABAQUS sont sensiblement égales, ce qui est incohérent avec la solution théorique. Pour retrouver ces valeurs, il suffit de poser  $\beta_z = 0$  dans la relation 3.26.

L (m)	ABAQUS (B31OS)		EUROCODE 3		Équation 3.26 ( $\beta_z = 0$ )	
	P <sub>cr</sub> positive (kN)	P <sub>cr</sub> négative (kN)	P <sub>cr</sub> positive (kN)	P <sub>cr</sub> négative (kN)	P <sub>cr</sub> positive (kN)	P <sub>cr</sub> négative (kN)
3	+6.494	-6.5009	+5.5825	-7.7000	+6.532	-6.532
4	+3.6203	-3.6231	+3.2386	-4.1320	+3.644	-3.644
5	+2.3071	-2.3085	+2.1148	-2.5723	+2.323	-2.323
6	+1.5983	-1.5991	+1.4893	-1.7541	+1.610	-1.610

**Tableau 3.2 :** Charges critiques de déversement d'une poutre bi-articulée ayant une section monosymétrique ( $z^*=0$ ).

Ainsi le travail de Mohri [49] présenté dans le cadre "les utilisateurs d'ABAQUS" a montré que l'utilisation des éléments poutres, est limitée uniquement pour les sections symétriques. De cette façon les éléments poutres d'ABAQUS ne tiennent pas compte du coefficient d'asymétrie. D'où l'impossibilité d'utiliser pour le calcul des charges critiques des

sections monosymétriques ou asymétriques. Ainsi le recours à d'autres éléments pour le calcul numérique s'avère nécessaire.

### 3.6.32 ÉLÉMENT COQUE

Devant cette incapacité de traiter les sections monosymétriques, on a recouru aux éléments de type coque. Cette fois ci, la poutre est discrétisée avec des éléments possédant six degrés de liberté dans chaque noeud (figure 3.17).

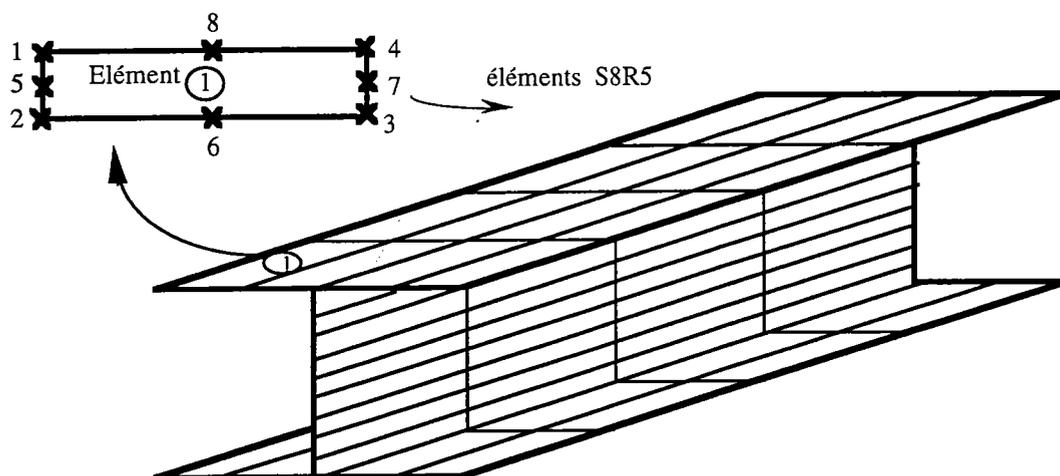


Figure 3.17 : Maillage avec les éléments S8R5

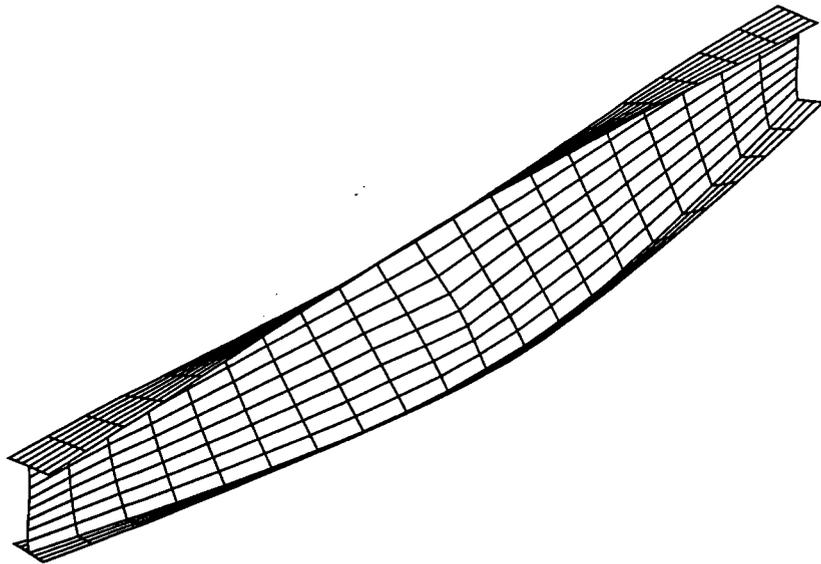
Le tableau 3.3 montre les résultats du calcul d'une poutre simple soumise à une charge transversale au milieu. La section transversale est un IPE100 (bisymétrique). On peut conclure que les éléments coques donnent une bonne approximation de la charge critique, en les comparant avec les éléments poutres. Ce type d'élément est adopté pour traiter les sections monosymétriques.

L (m)	Éléments poutres (B31OS)		Éléments coques (S8R5)	
	$P_{Cr}$ positive(kN)	$P_{Cr}$ négative(kN)	$P_{Cr}$ positive (kN)	$P_{Cr}$ négative (kN)
3	+9.7296	-9.7296	+9.6113	-9.6163
4	+5.3424	-5.3424	+5.4859	-5.4877
5	+3.3787	-3.3787	+3.6133	-3.6142
6	+2.3305	-2.3305	+2.5896	-2.5902

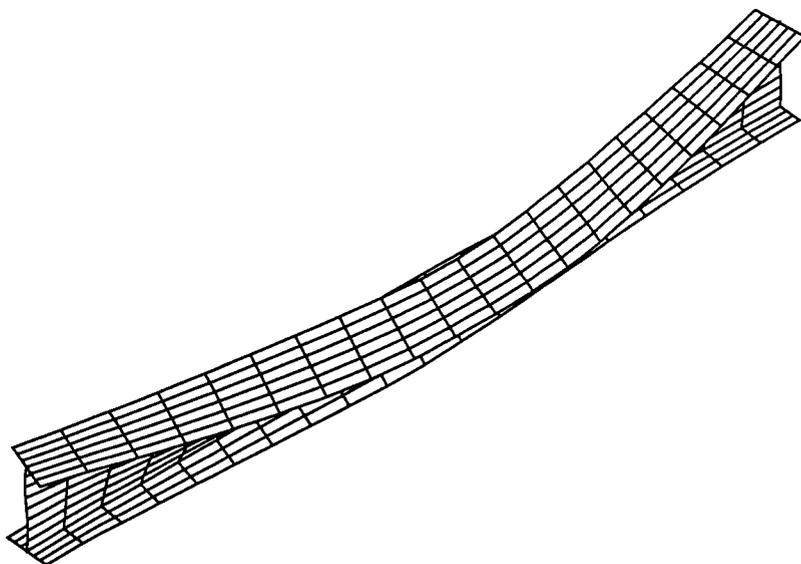
Tableau 3.3 : Charges critiques de déversement d'une poutre simple ayant une section symétrique.

Après l'étude de la convergence de maillage, nous avons remarqué que le maillage effectué au moyen d'éléments de coque à huit noeuds (S8R5) donne des résultats

satisfaisants. Il faut souligner que, dans notre problème, nous nous sommes préoccupés uniquement du phénomène d'instabilités globales. La figure 3.18 donne les premiers modes de déversement qui correspondent à la solution positive et négative. Lors du calcul, si la poutre est affectée par une instabilité locale (le voilement), la charge critique est rejetée (figure 3.19-b).

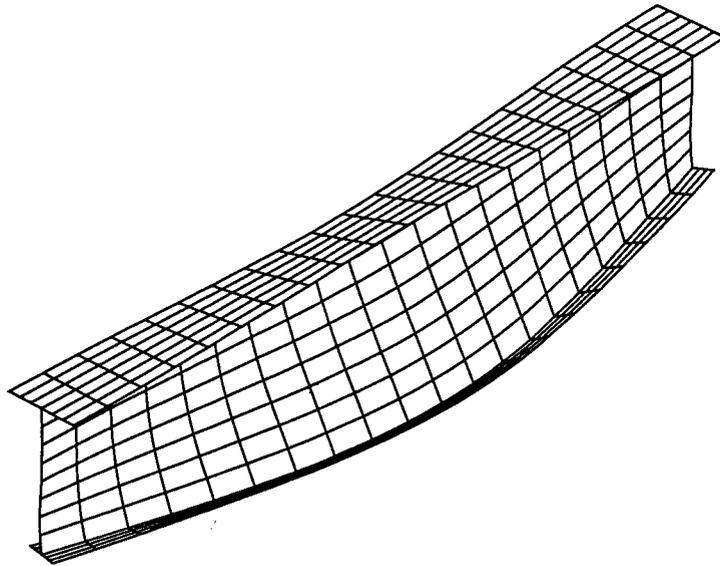


(a) : Premier mode de déversement

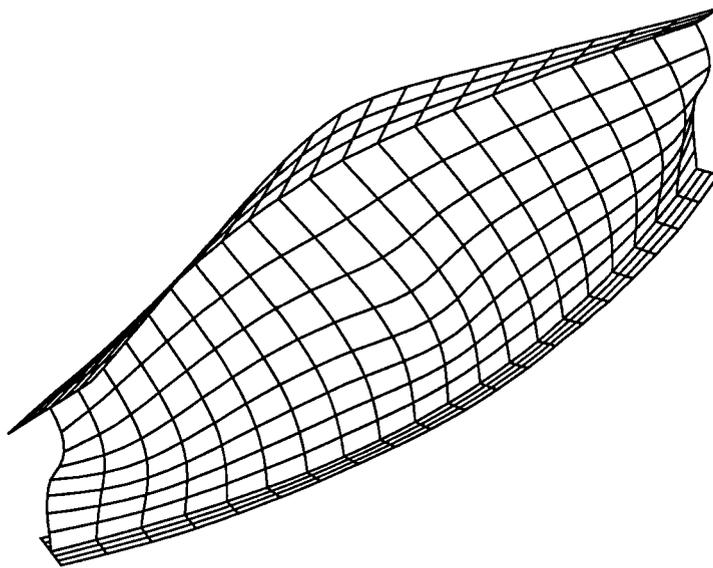


(b) : Deuxième mode de déversement

**Figure 3.18** : Poutre simple à section transversale symétrique



(a) : Instabilité globale



(b) : Instabilité locale

**Figure 3.19** : Poutre simple à section transversale monosymétrique

### 3.6.33 COMPARAISON NUMÉRIQUE ET RÉGLEMENTAIRE

Pour la comparaison numérique et réglementaire, les calculs sont faits avec des poutres ayant les sections monosymétriques dont les caractéristiques géométriques sont données dans la figure 3.20 . La section "a" correspond à un IPE100 rendue monosymétrique en réduisant sa semelle inférieure. La section "b" correspond à un IPE200 où la semelle inférieure a été réduite. Les charges critiques de déversement sont données pour différentes valeurs de la longueur  $L$  de la poutre.

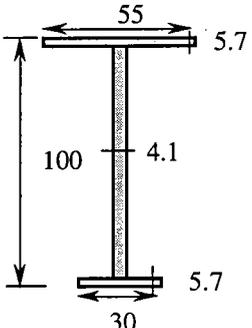
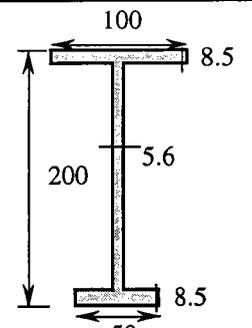
Section transversale (acier)	Caractéristique géométriques $\left\{ \begin{array}{l} E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right\}$
 <p style="text-align: center;"><b>Section "a"</b></p>	$A = 8.7113 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.2628 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 9.1853 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $J = 7.3867 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 9.8122 \cdot 10^{-11} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0159 \text{ m}$
 <p style="text-align: center;"><b>Section "b"</b></p>	$A = 0.2347 \cdot 10^{-02} \text{ m}^2$ $I_y = 1.3810 \cdot 10^{-05} \text{ m}^4$ $I_z = 7.9687 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 4.1832 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $I_\omega = 2.8862 \cdot 10^{-09} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.066 \text{ m}$

Figure 3.20 : Sections transversales utilisées dans la comparaison des résultats

Dans ce cas, le moment critique de déversement est donnée par l'équation 3.24. Comme le montre le tableau 3.1, la seule différence entre les valeurs des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  données par l'Eurocode et nos valeurs calculées à partir de l'expression 3.18, reside uniquement dans le coefficient  $C_3$  pour les charges transversales. Pour montrer l'effet de ce coefficient ( $C_3$ ), sur la résistance globale de la poutre au déversement (cas des sections monosymétriques), on applique le chargement au centre du cisaillement c'est à dire  $z^* = 0$ . Le coefficient  $C_2$  est sans effet. Dans ce cas l'équation 3.24 s'écrit alors :

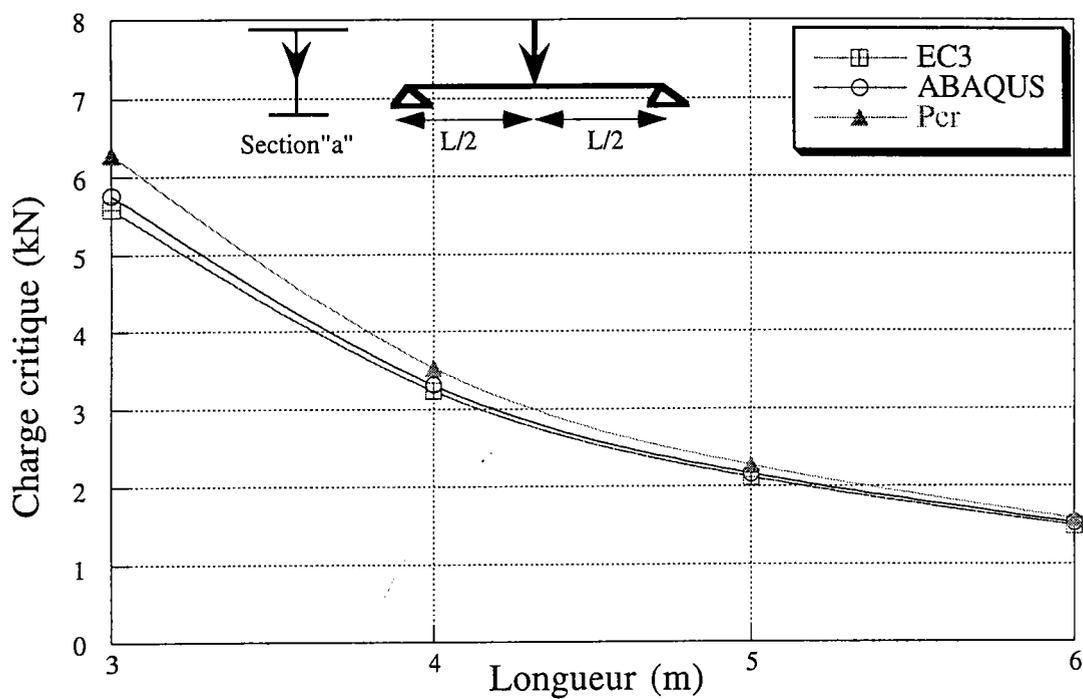
$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left[ -C_3 \beta_z + \sqrt{(C_3 \beta_z)^2 + \frac{I\omega}{I_z} \left( \frac{GJL^2}{\pi^2 EI_\omega} + 1 \right)} \right] \quad (3.28)$$

Dans les figures 3.21 à 3.26, nous avons calculé la charge critique de déversement à partir de l'équation 3.28. En suite nous avons comparé nos résultats et ceux de l'Eurocode3 avec les résultats numériques donnés par ABAQUS. L'étude comparative obtenue à l'aide des trois méthodes, nous conduit aux remarques suivantes :

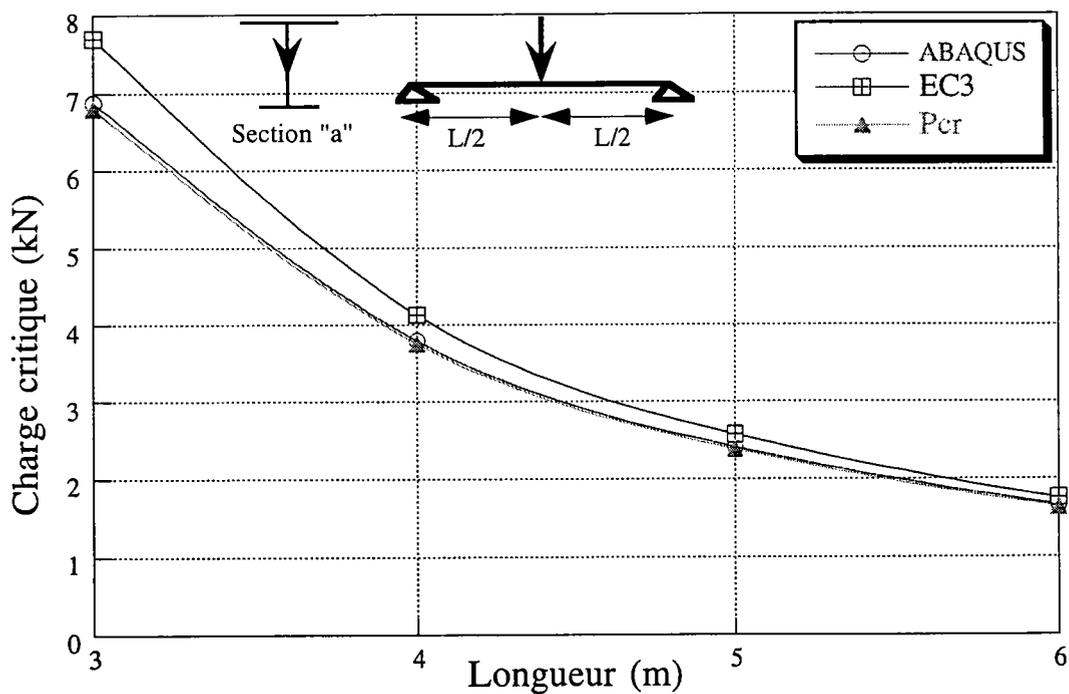
Les charges critiques de déversement ( positive où négative ) données par l'Eurocode3 pour le cas d'une charge appliquée à mi-travée, sont respectivement très faibles ou très fortes par rapport à celles données par ABAQUS. Contrairement à nos résultats, qui sont en bon accord avec ceux d'ABAQUS (figures 3.21 et 3.22).

Les figures 3.23 et 3.24, donnent une comparaison de nos résultats avec les résultats obtenus par la réglementation en vigueur et ABAQUS. Les résultats présentés sur ces figures correspondent aux solutions positives et négatives d'une poutre chargée par deux forces égales appliquées à une distance  $L/4$  des appuis. Elles montrent que les résultats donnés par l'Eurocode 3 et ABAQUS sont très proches dans le cas des solutions positives. Par contre pour les charges négatives, nos solutions sont en bonne concordances avec ABAQUS.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie, la charge critique donnée pour le premier mode (solution positive) et calculée suivant notre méthode coïncide bien avec celle d'ABAQUS, ce qui n'est pas le cas, pour la charge donnée par Eurocode3 (figures 3.25 et 3.26). Contrairement à notre méthode, l'Eurocode 3 donne une bonne approximation de la charge critique dans le cas de la solution négative.

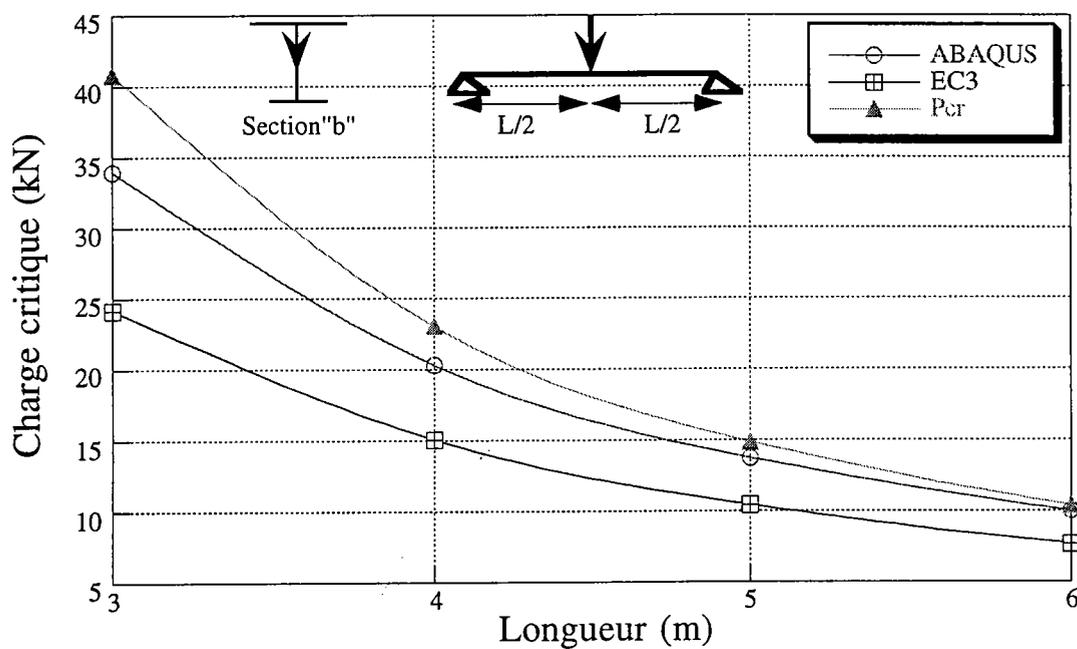


(a) : Solution positive

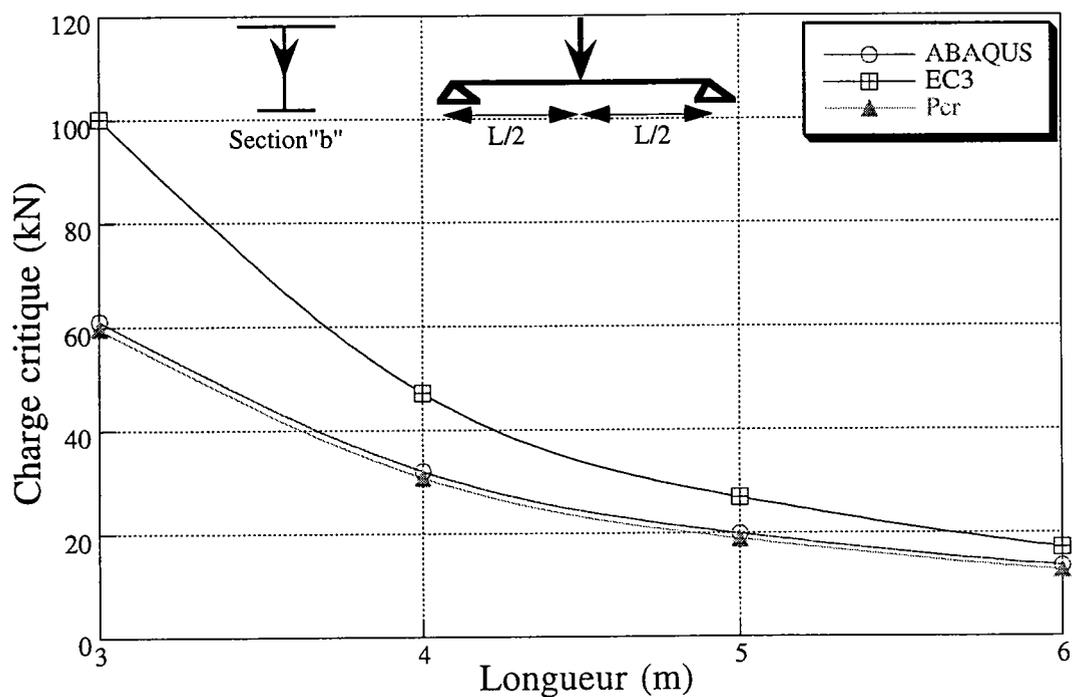


(b): Solution négative

Figure 3.21 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre chargée au milieu.

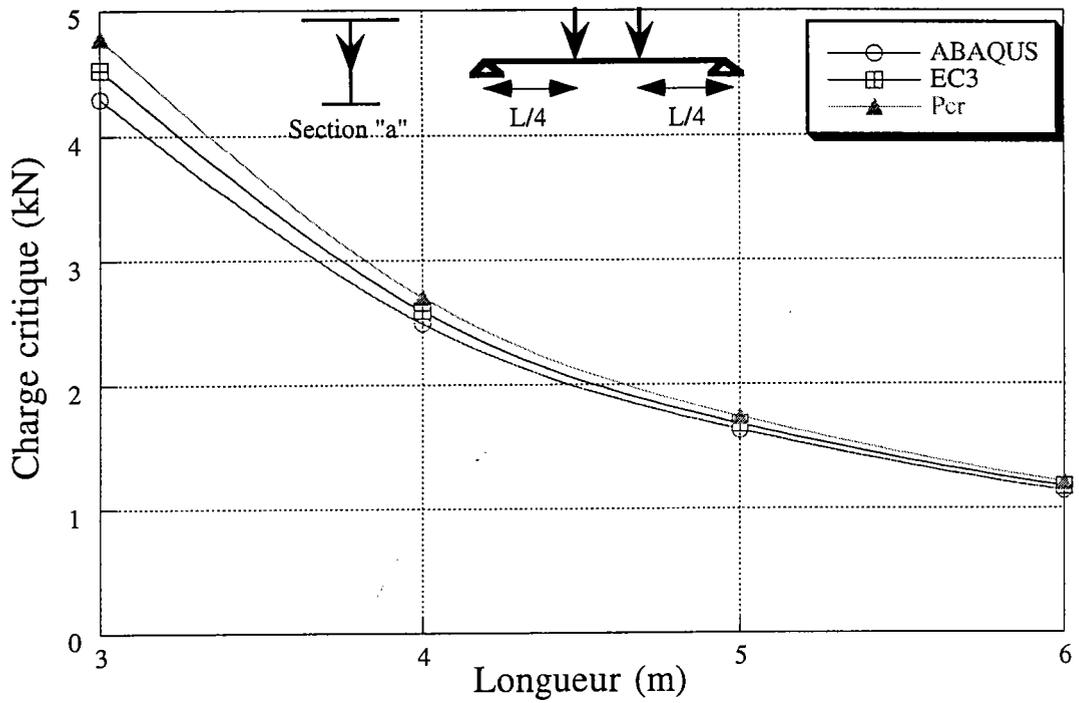


(a) : Solution positive

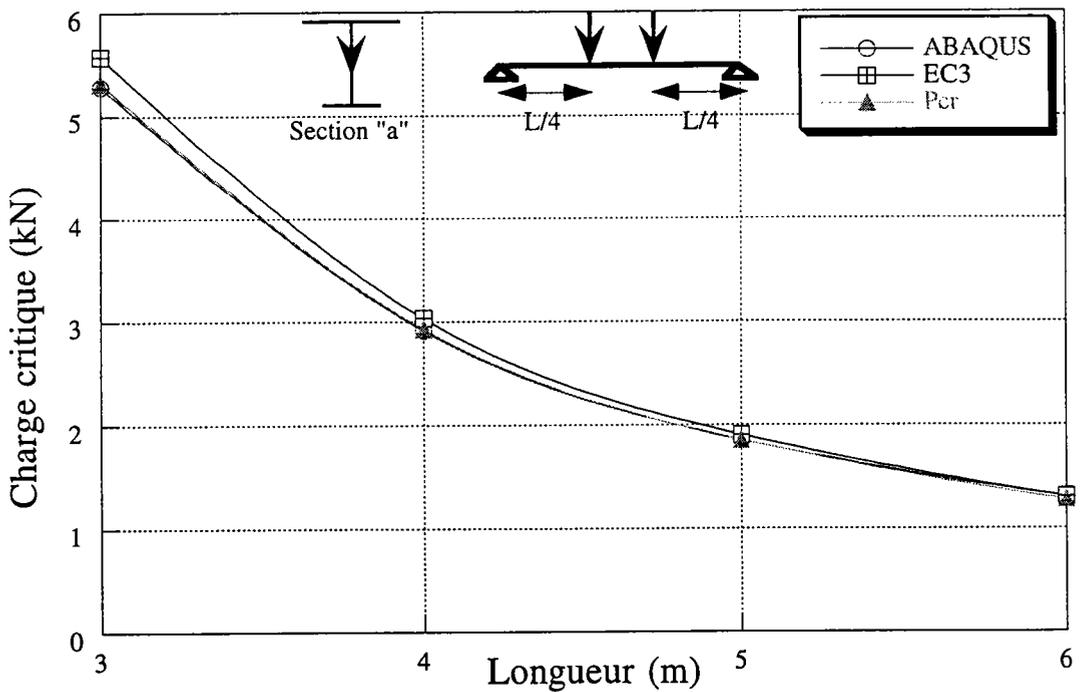


(b): Solution négative

Figure 3.22 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre chargée au milieu.

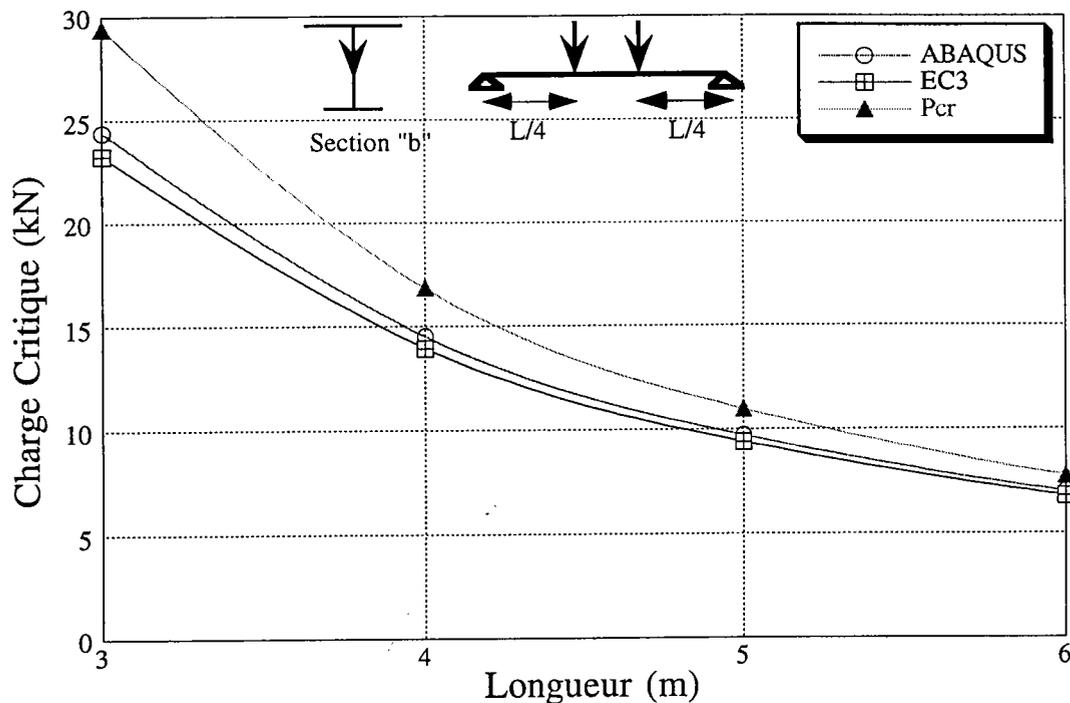


(b): Solution Positive

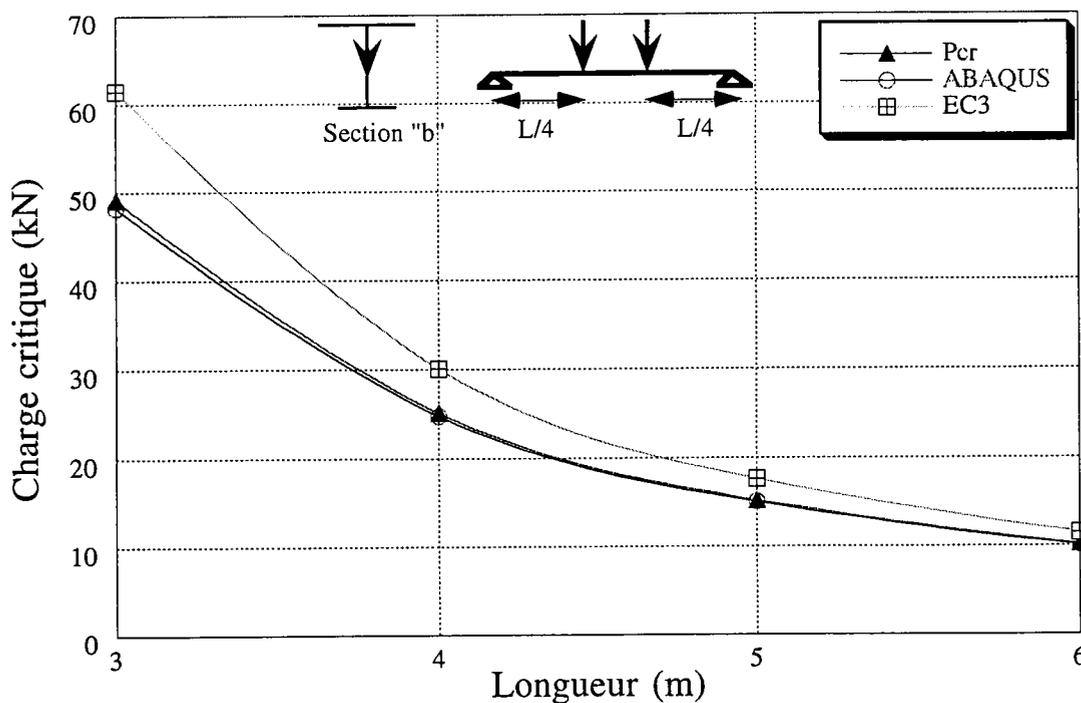


(b): Solution négative

Figure 3.23 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre sollicitée par une charge appliquée à  $L/4$  des appuis.

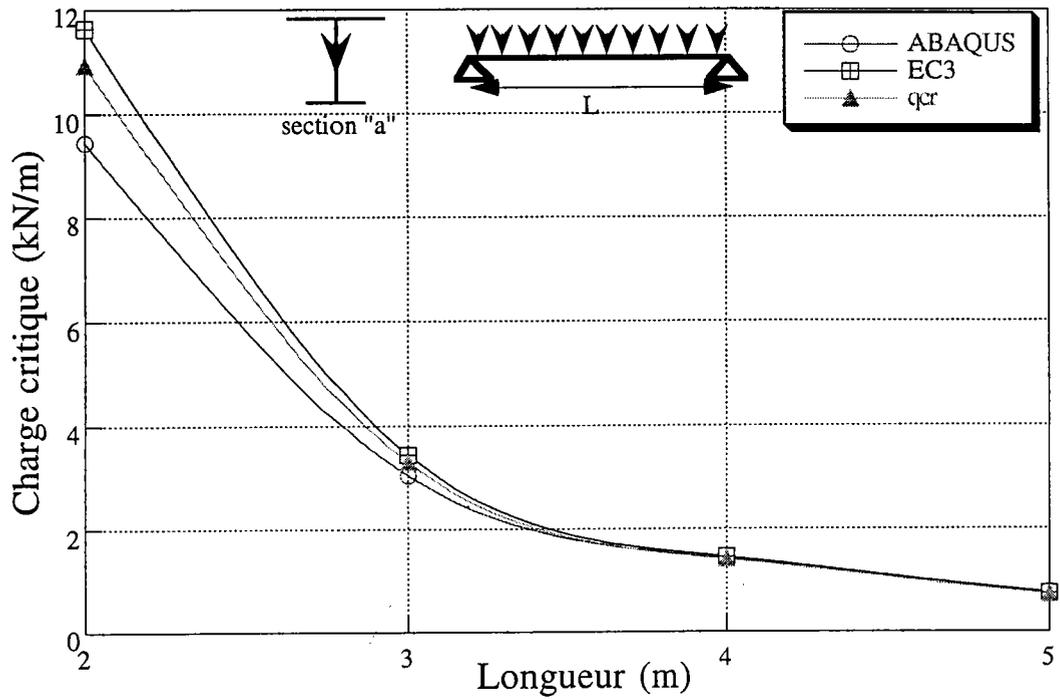


(a): Solution Positive

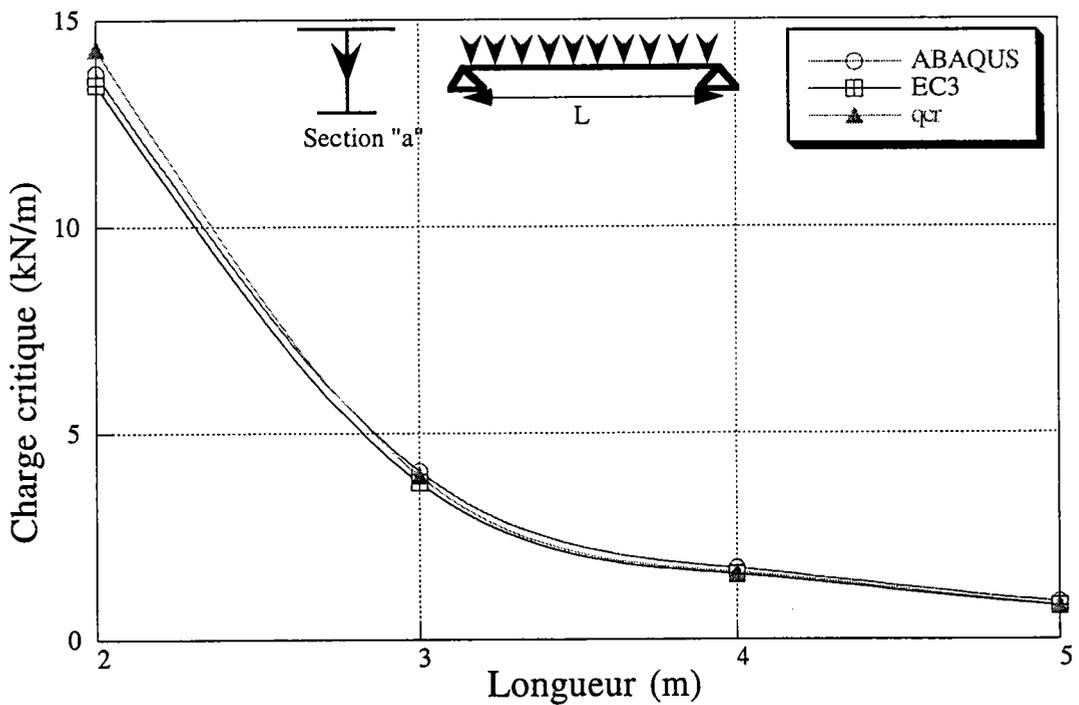


(b): Solution négative

Figure 3.24 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre sollicitée par une charge appliquée à  $L/4$  des appuis.

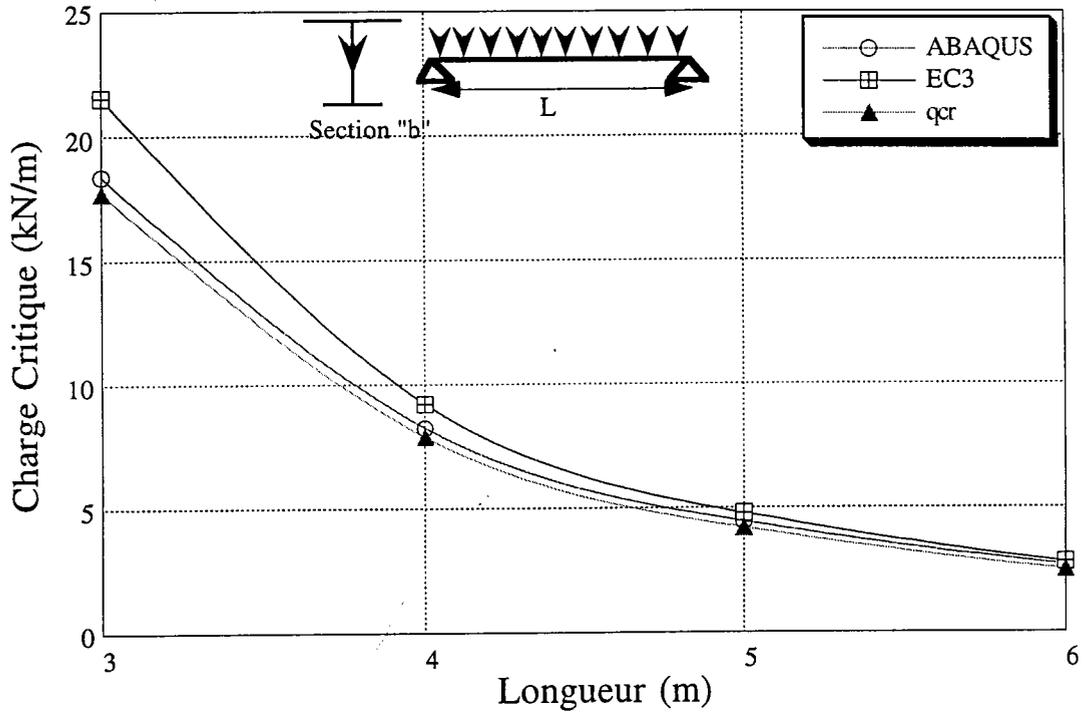


(a) : Solution positive

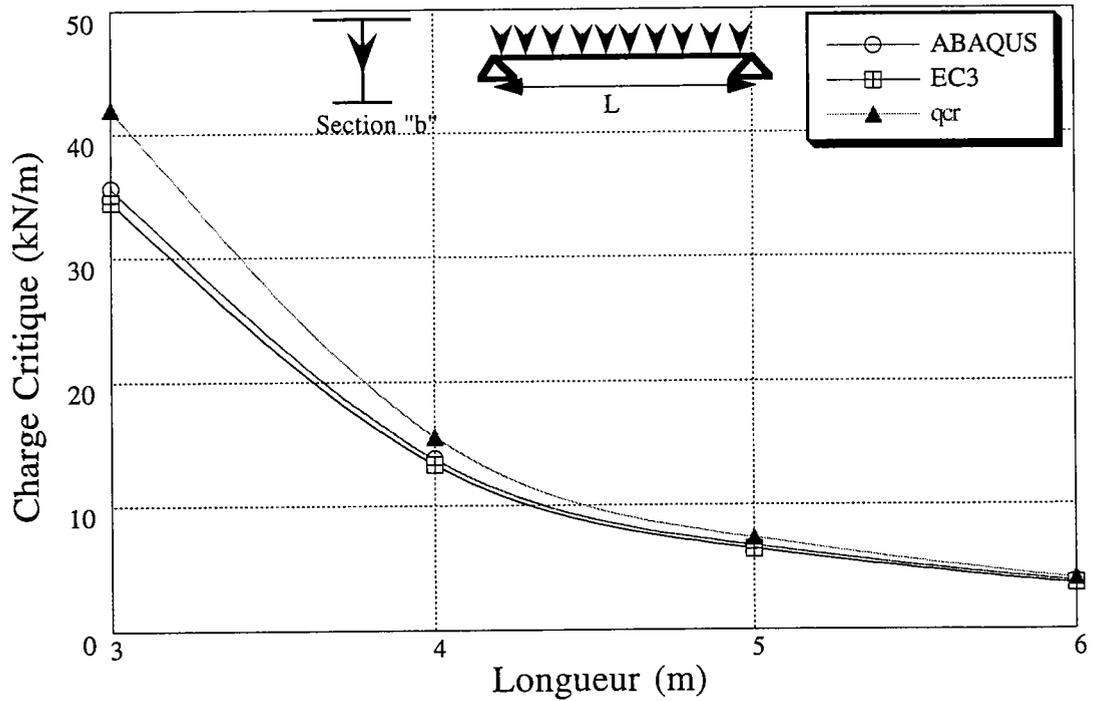


(b) : Solution négative

Figure 3.25 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre sollicitée par une charge uniforme.



(b): Solution positive



(b): Solution négative

Figure 3.26 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques du déversement d'une poutre sollicitée par une charge uniforme.

### 3.8 CHARGES CRITIQUES DES POUTRES BI-ENCASTRÉES

L'Eurocode 3 [32] fournit les valeurs des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  non seulement pour un plus grand nombre de modes de chargements mais aussi pour différentes conditions d'appuis. La formule donnant le moment critique de déversement est la généralisation de l'équation 3.24, elle s'écrit :

$$(M_{\max})_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{(kL)^2} \left\{ \mp \sqrt{\left(\frac{k}{k_\omega}\right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{EI_z \pi^2} + (C_2 z^* + C_3 \beta_z)^2} - (C_2 z^* + C_3 \beta_z) \right\} \quad (3.29)$$

Où :

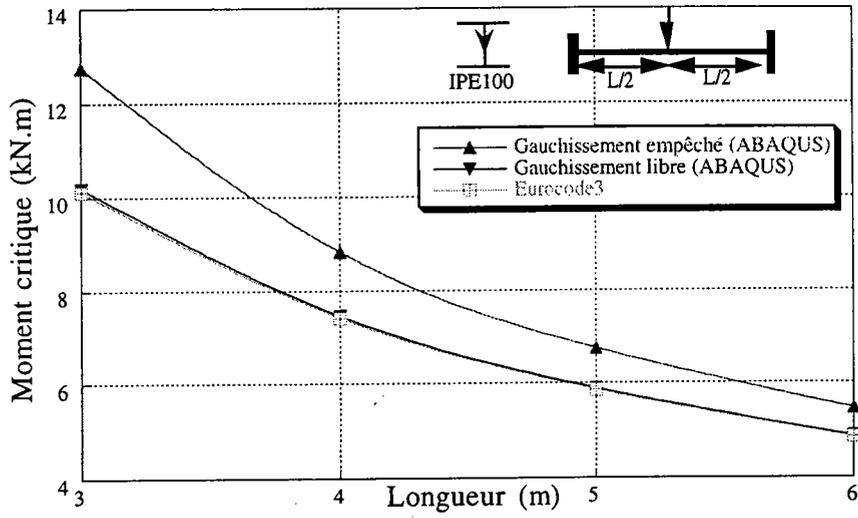
$k$  et  $k_\omega$  sont les facteurs de la longueur effective. Ils varient de 0.5 pour un encastrement parfait à 1.0 pour des appuis simple, avec 0.7 pour une extrémité encastree et l'autre simplement appuyée.  $k$  concerne la rotation de l'extrémité en plan et  $k_\omega$  concerne le gauchissement d'extrémité.

De la même façon, Djalaly [28] nous propose une équation similaire à celle donnée par l'Eurocode 3. Il exprime le moment critique de déversement de la façon suivante :

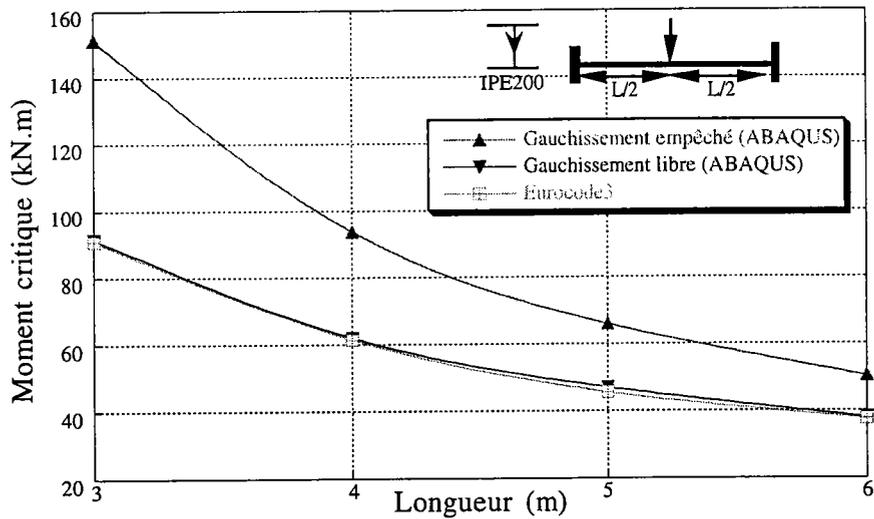
$$(M_{\max})_{cr} = C_1 \frac{EI_z \pi^2}{k_\omega k L^2} \left\{ \mp \sqrt{\left(\frac{k}{k_\omega}\right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GJ}{EI_z \pi^2} + (C_2 z^* + C_3 \beta_z)^2} - (C_2 z^* + C_3 \beta_z) \right\} \quad (3.30)$$

Pour déterminer les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  des équations 3.29 et 3.30, l'EC 3 et Djalaly ont supposé que les sections d'extrémités sont libre de gauchir, c'est à dire  $k_\omega = 1$ , même pour une poutre bi-encastree. Afin d'éclaircir cette approche, on considère l'exemple suivant : Soit une poutre bi-encastree sollicitée soit par une charge transversale concentrée soit par une charge uniformément répartie. Ces charges sont appliquée au centre de torsion de la section. Les sections transversale de la poutre sont l'IPE100 et l'IPE200 respectivement. La poutre à une portée allant de 3m à 6m.

Des constatations intéressantes se dégagent immédiatement de la comparaison des résultats représentés sur les figures 3.29 et 3.30 : dans le cas de la charge concentrée et pour le gauchissement libre  $k_\omega = 1$ , les résultats donnés par l'Eurocode 3 sont en bon accord avec ABAQUS. Cependant, lorsque la charge transversale est uniforme, les moments critiques de déversement obtenus par l'Eurocode 3 sont plus faibles que ceux donnés par ABAQUS.



(a) : IPE100



(a) : IPE100

Figure 3.27 : Variation du moment critique de déversement en fonction du type de fixation dans le cas d'une poutre sollicitée par une charge transversale concentrée au milieu

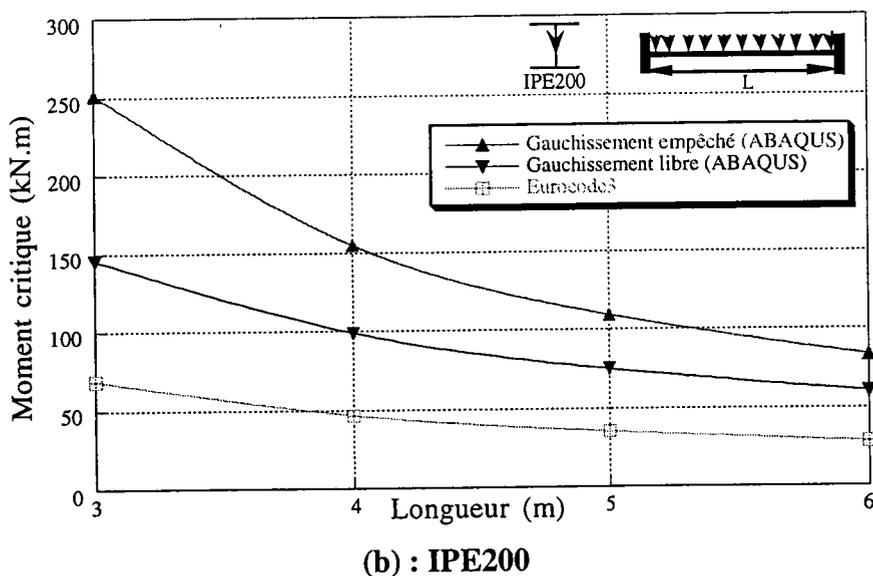
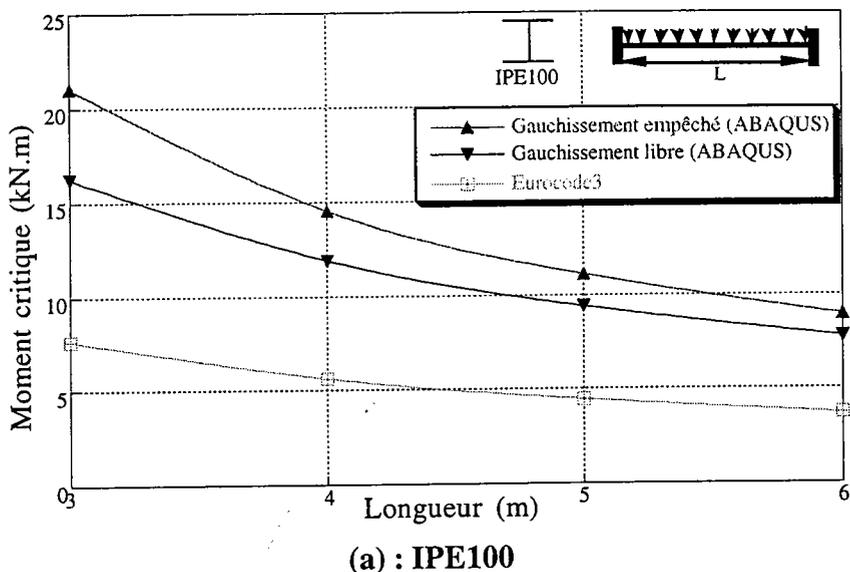


Figure 3.28 : Variation du moment critique de déversement en fonction du type de fixation dans le cas d'une poutre sollicitée par une charge transversale uniforme

### 3.8 COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DE TRAHAIR

Au début des années 70 Anderson et Trahair [4], ont présenté une méthode de calcul de type abaques (voir annexe 2), pour estimer les charges critiques de déversement d'une poutre à section en I monosymétrique, soumise à différents types de chargement. Nous avons utilisé ces abaques pour confronter nos résultats et ceux de l'Eurocode 3. La poutre utilisée est une poutre en aluminium d'une longueur  $L=1.65$  m. Les caractéristiques géométriques de la section transversale sont données par la figure 3.29 .

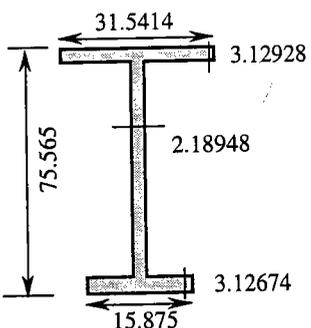
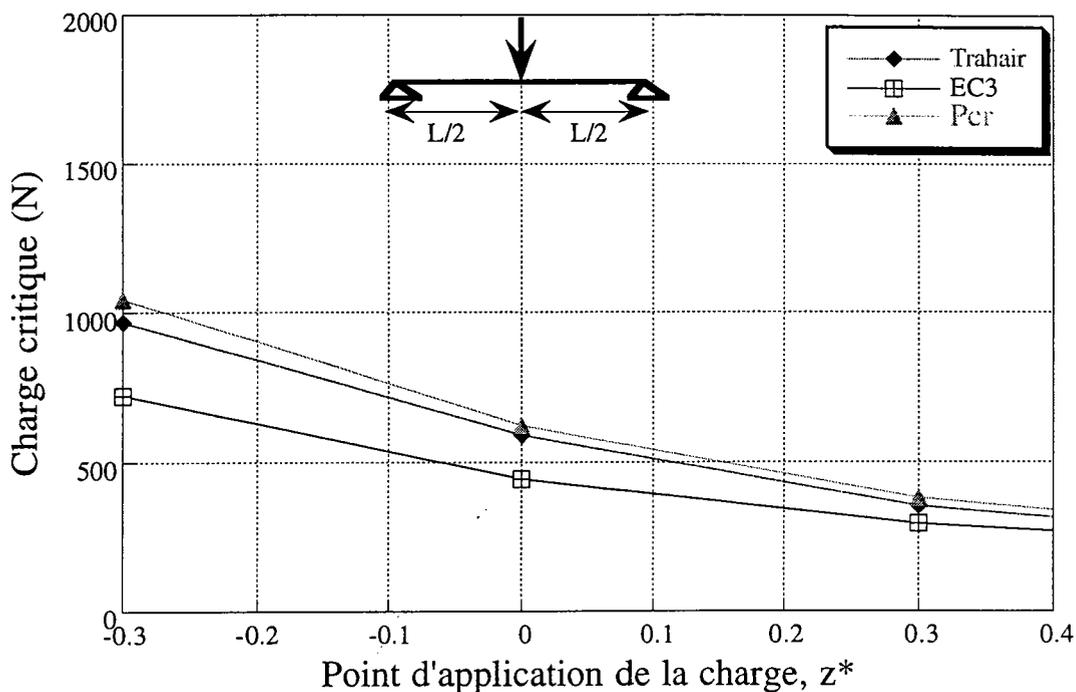
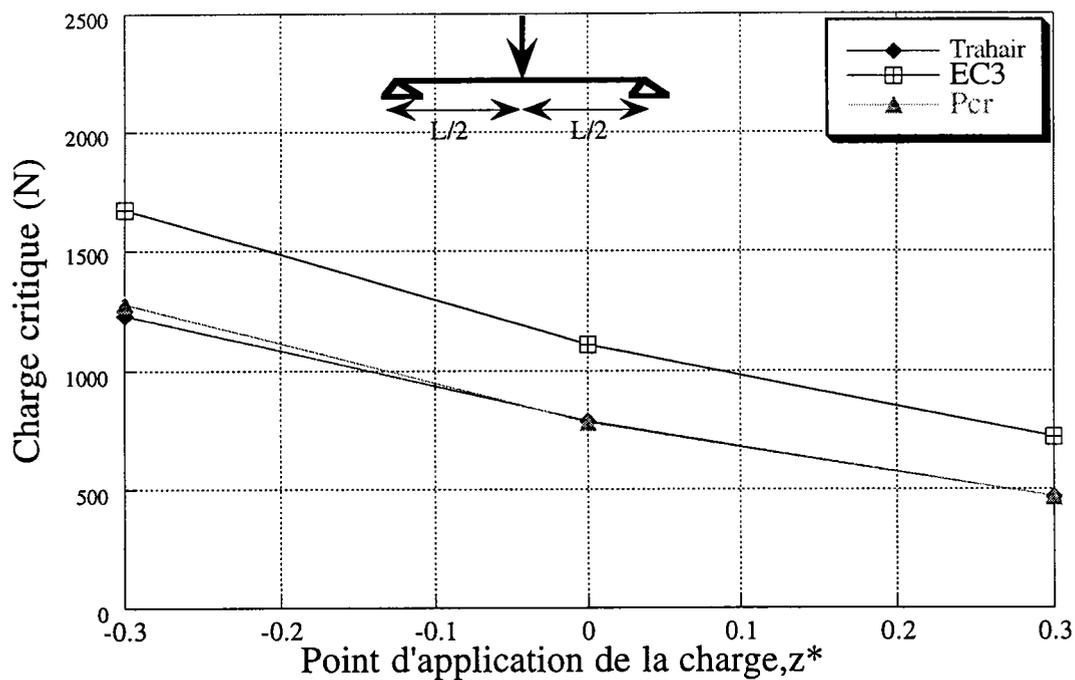
Section transversale	Caractéristiques géométriques
	$E = 6.481300 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
	$G = 2.668365 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
	$I_z = 9.209763 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$
	$J = 7.355271 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$
	$I_\omega = 4.850692 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$
	$\beta_z = 0.02694 \text{ m}$

Figure 3.29 : Caractéristiques géométriques de la section utilisée dans la comparaison

Les figures 3.30 et 3.31 , montrent une comparaison de nos résultats avec ceux de l'Eurocode 3 et de Trahair [4]. Nous avons représenté la charge critique de déversement en fonction du lieu d'application du chargement  $z^*$ . Nos résultats obtenus dans le cas d'une charge transversale appliquée à mi-travée, sont similaires aux résultats obtenus par la méthode de Trahair, dans les deux cas de solutions (positive et négative) . Pour la charge uniforme, les solutions positives indiquent une bonne cohérence entre nos résultats et ceux établis à partir des abaques de Trahair. Par contre les solutions négatives présentent un seuil supérieur. Ces figure 3.30 et 3.31, confirment les constatations observées, et montrent que nos résultats sont meilleurs que ceux de l'Eurocode 3 (charge appliquée à mi-travée), et qu'ils peuvent être complémentaires ( charge uniforme).

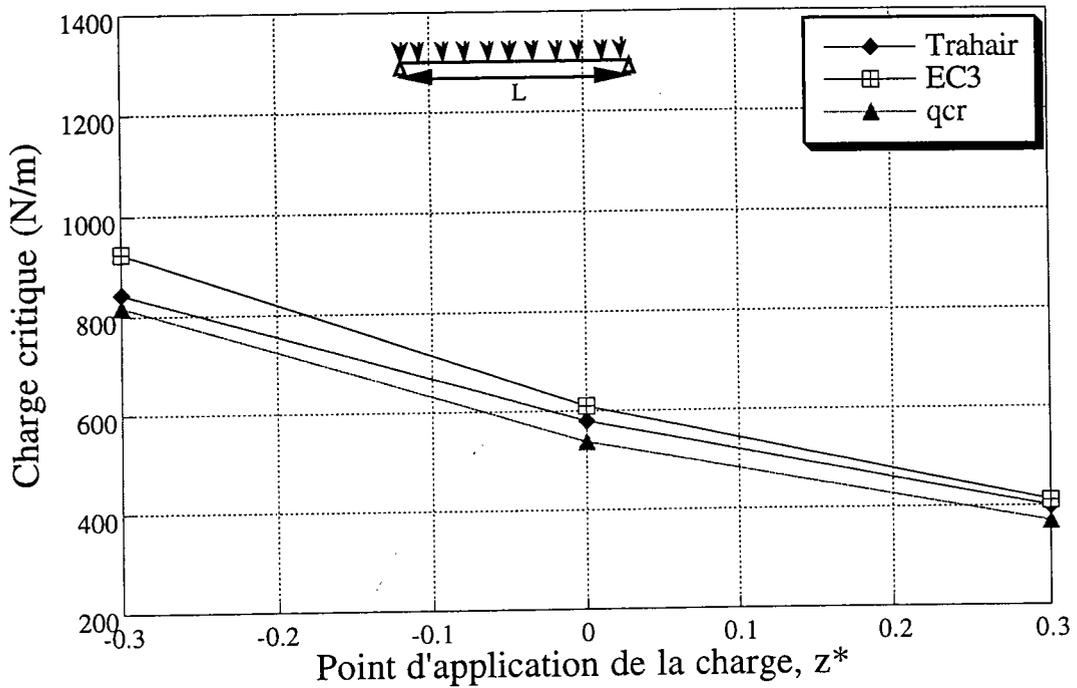


(a) : Solution positive

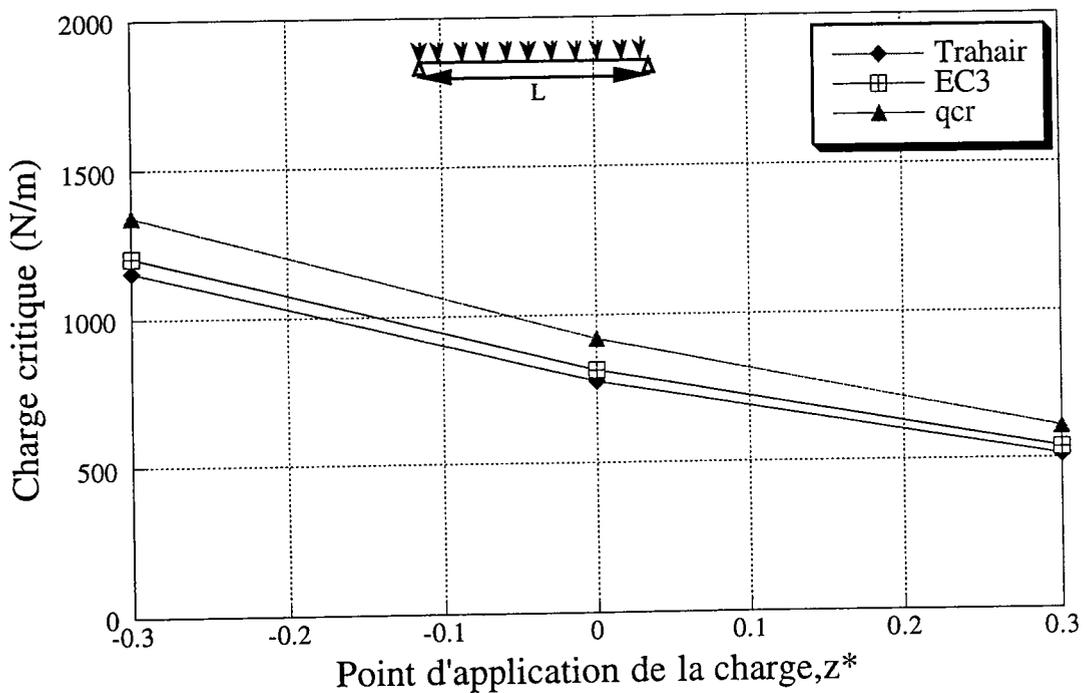


(b) : Solution négative

Figure 3.30 : Variation de la charge critique  $P_{cr}$  en fonction du point d'application de la charge transversale  $z^*$



(a) : Solution positive



(b) : Solution négative

Figure 3.31 : Variation de la charge critique  $q_{cr}$  en fonction du point d'application de la charge transversale  $z^*$

### **3.9 CONCLUSION**

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode de calcul des charges critiques du déversement des poutres bi-articulée, soumises à un gradient de moments et à des charges transversales. La section transversale de ces poutres est monosymétrique. Le moment critique élastique de déversement est calculé à partir de l'équation 3.23 . Les coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont donnés par le tableau 3.1 . Sur la base des résultats présentés dans ce chapitre on peut conclure que :

L'utilisation de l'Eurocode 3 pour calculer le moment critique de déversement, des poutres ayant une section transversale bisymétrique et soumise à un chargement transversal, donne des résultats très satisfaisants. Cependant, les résultats obtenus pour une poutre sollicitée par un gradient de moments, reste valable uniquement dans le cas particulier où  $0 < \beta_1 \leq 1$ . Pour  $\beta_1 < 0$ , les solutions de l'Eurocode 3 présentent des différences par rapport aux solutions données par ABAQUS. Cependant cette différence reste acceptable.

Concernant les poutres bi-articulées à sections transversale monosymétriques, sollicitée par des charges transversales, nous avons proposé des nouvelles valeurs pour le coefficient de la monosymétrie  $C_3$ . Notre estimation de la charge critique de déversement, dans ce cas, est en générale en bon accord avec les résultats numériques. Cependant des travaux sont nécessaires pour trouver la bonne valeur du coefficient

**CHAPITRE IV**

**ÉTUDE DU DÉVERSEMENT DES POUTRES :**

- \* APPLICATION DE LA MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE**
- \* VALIDATION RÉGLEMENTAIRE ET NUMÉRIQUE**

#### 4.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, les relations analytiques donnant les charges critiques ont été évaluées en approximant les déplacements  $v$  et  $\theta_x$  par un seul terme sinusoidal. Cette approche donne des résultats satisfaisants dans le cas d'un chargement symétrique (figure 4.1).

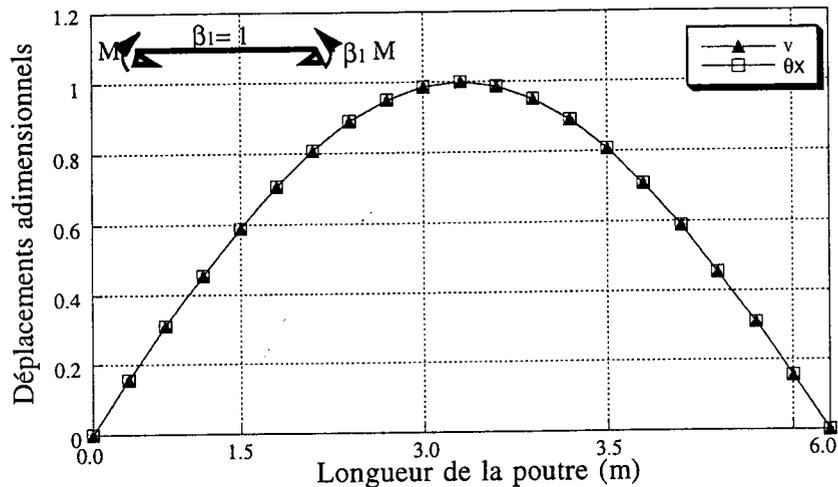


Figure 4.1 : Premier mode de déversement d'une poutre soumise à un chargement symétrique

La figure 4.2 donne les premiers modes de déplacements adimensionnel  $v$  et  $\theta_x$  d'une poutre sollicitée par un chargement asymétrique (gradient de moment). À partir de cette courbe, on constate que les modes de déplacements ne peuvent être approximés par un seul terme sinusoidal, parce qu'il ne décrit pas la forme réelle du déplacement.

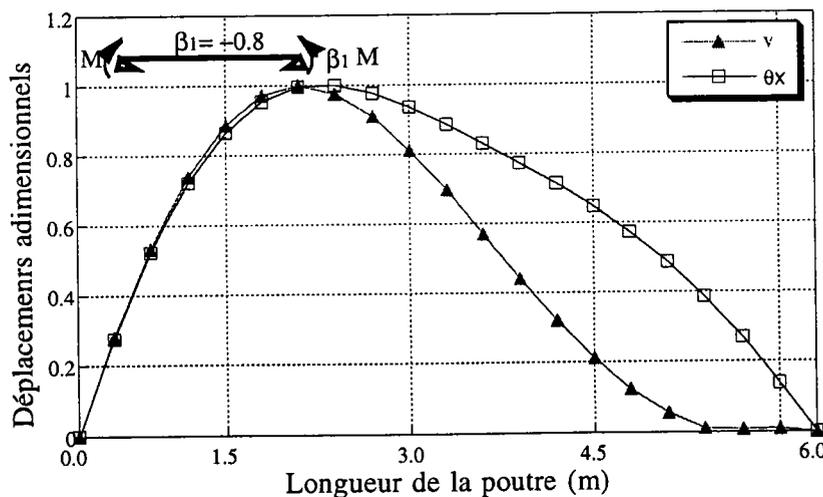


Figure 4.2 : Premier mode de déversement d'une poutre soumise à un chargement asymétrique

C'est pour cette raison que les valeurs données par l'Eurocode3 [32] dans le chapitre précédent, dans le cas des poutres soumises à un gradient de moment linéaire ( $\beta_1 \leq 0$ ), présentent un seuil supérieur par rapport à ABAQUS.

Pour que la méthode fournisse des valeurs raisonnables et exactes, pour le moment critique du déversement, il est nécessaire d'adopter une fonction de forme ayant plusieurs termes. De cette façon, on a une bonne approximation des déplacements.

## 4.2 MÉTHODE DE CALCUL

On suppose que les déplacements de la poutre lors du déversement sont de la forme :

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i \quad (4.1.a)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n b_i \psi_i \quad (4.1.b)$$

Où les fonctions  $\psi_i$  sont des fonctions sinusoïdales qui doivent vérifier les conditions aux limites au niveau des appuis. Elles seront données suivant les conditions d'appuis des poutres étudiées ci - après.  $n$  est le nombre de termes à considérer pour l'approximation des déplacements.

L'énergie de déformation emmagasinée, quand la poutre à section monosymétrique déverse est donnée par

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EI_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + EI_\omega \left( \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right)^2 + GJ \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4.2)$$

Les termes de cette équation représentent l'énergie de déformation de flexion et de torsion.

D'après Kitipornchai [41], Chan [22] et Wang [63], le travail des forces extérieures lorsque la poutre déverse est :

$$V = \int_0^L M_y v'' dx + \frac{1}{2} \int_0^L M_y \beta_z \theta_x'' dx + \frac{1}{2} \int_0^L qz^* \theta_x^2 dz + \frac{1}{2} \sum_i P_i z_i^* \theta_x^2 \quad (4.3)$$

Où  $q$  est une charge uniformément répartie,  $P_i$  charge transversale concentrée,  $M_y$  moment fléchissant,  $\theta_x$  angle de torsion,  $z_i^*$  et  $z_i^*$  sont lieu d'application des charges transversales ( $q$  et  $P_i$ ) par rapport au centre de torsion.

L'énergie potentielle totale (déformation et travail extérieur) de la poutre soumise à un chargement arbitraire s'écrit (après avoir remplacé 4.1.a et 4.1.b par leurs valeurs), sous la façon suivante :

$$\Pi = U + V = f(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (4.4)$$

où  $f$  est une forme quadratique de  $a_i$  et  $b_i$ .

La méthode consiste à minimiser l'énergie potentielle totale par rapport aux fonctions de forme. L'énergie prend donc, une forme de dérivées partielles par rapport aux coefficients  $a_i$  et  $b_i$ . La forme algébrique des équations peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \text{de } i = 1, \dots, n \quad (4.5.a)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0 \quad \text{de } i = 1, \dots, n \quad (4.5.b)$$

(4.5.a) et (4.5.b) nous donnent des équations algébriques homogènes et linéaires. On peut écrire ce système d'équations sous la forme matricielle suivante :

$$[A]_{2n \times 2n} \{\phi\}_{2n \times 1} = \{0\}_{2n \times 1} \quad (4.6)$$

où

$$\{\phi\} = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}^T \quad (4.7)$$

Afin que le système fournisse des solutions non triviales, il faut que :

$$\det[A]_{2n \times 2n} = 0 \quad (4.8)$$

À partir de (4.8), on obtient un polynôme d'ordre  $2n$ , il est résolu avec le code de calcul Maple 5 [45], et la plus petite racine donne la charge critique du déversement.

### \* POINT D'APPLICATION DE LA CHARGE TRANSVERSALE

Pour relier la distance, entre le point d'application de la charge transversale et le centre de torsion, en fonction du degré de la monosymétrie, Wang [63] donne l'expression suivante pour  $z^*$  :

Dans le cas où le chargement est appliqué à la semelle supérieure :

$$\eta = \frac{2z^*}{h} = -2(1 - \rho) \quad (4.13-a)$$

Dans le cas où le chargement est appliqué au centre de torsion :

$$\eta = \frac{2z^*}{h} = 0 \quad (4.13-b)$$

Dans le cas où le chargement est appliqué à la semelle inférieure :

$$\eta = \frac{2z^*}{h} = 2(1 - \rho) \quad (4.13-c)$$

#### 4.4 DÉVERSEMENT D'UNE POUTRE BI-ARTICULÉE

##### 4.4.1 POUTRE SOUMISE À DES MOMENTS INÉGAUX

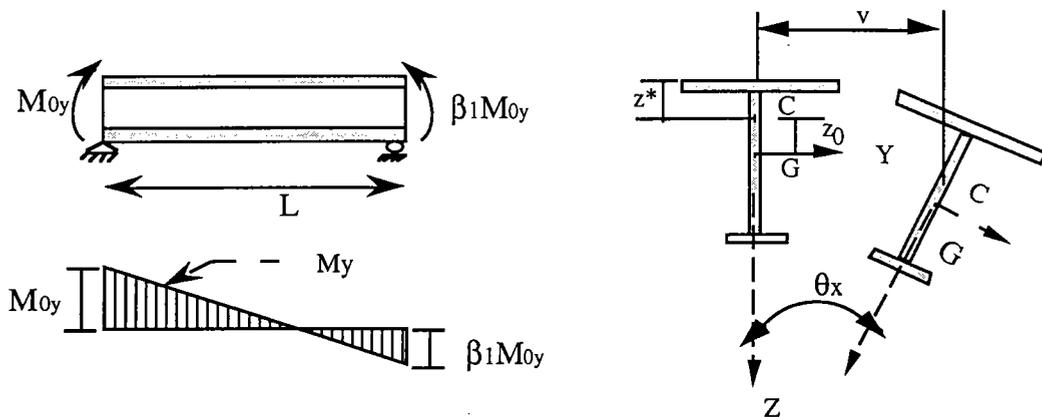


Figure 4.4 : Poutre simple à section monosymétrique soumise à un gradient de moment

Lorsque  $M_y$  n'est pas constant, c'est le cas du chargement asymétrique. La solution du problème de déversement ne peut pas être résolue en adaptant un seul terme de la fonction de forme. Nous avons constaté au chapitre précédent que la solution de l'Eurocode 3 est déferente de celle d'ABAQUS. L'expression du moment fléchissant  $M_y$  est donné par :

$$M_y = M_{0y} \left[ 1 - (1 - \beta_1) \frac{x}{L} \right] \quad (4.14)$$

avec :

$M_{0y}$  est le moment appliqué au niveau d'un appui.

On choisit pour  $v$  et  $\theta_x$  la forme suivante:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (4.15)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n b_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (4.16)$$

ou  $a_i$  et  $b_i$  sont les coefficients des fonctions de formes supposées, qui varient pour obtenir des différents modes de déversement. Ces fonctions remplissent les conditions aux limites d'une poutre bi-articulée.  $n$  est le nombre de termes à considérer dans l'approximation des déplacements.

On remplace les équations (4.15) et (4.16) dans (4.2) et (4.3), et après intégration (voir annexe 3), on trouve :

$$U = \frac{\pi^4 EI_z}{4L^3} \left[ \sum_{i=1}^n (i^4 a_i^2) \right] + \frac{GJ\pi^2}{4L} \left[ \sum_{i=1}^n i^2 b_i^2 \left( 1 + \frac{\pi^2 i^2 EI_\omega}{GJL^2} \right) \right] \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} V = & -\frac{M_{0y}\pi^2(1+\beta_1)}{4L} \left[ \sum_{i=1}^n (i^2 a_i b_i) \right] + \frac{M_{0y}\pi^2(1+\beta_1)\beta_z}{8L} \left[ \sum_{i=1}^n (i^2 b_i^2) \right] \\ & + \frac{2M_{0y}(1-\beta_1)}{L} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} i^2 a_i \left( \sum_{s=i+1}^n b_s \varpi \right) \right] + \sum_{i=2}^n i^2 a_i \left( \sum_{s=1}^{i-1} b_s \varpi \right) \\ & + \frac{M_{0y}\beta_z(1-\beta_1)}{2L} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} i b_i \left( \sum_{s=i+1}^n s b_s \chi \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

avec :

$$\varpi = \left[ 1 - (-1)^{s+i} \right] \left[ \frac{is}{(i^2 - s^2)^2} \right], \quad \chi = \left[ 1 - (-1)^{s+i} \right] \left[ \frac{i^2 + s^2}{(i^2 - s^2)^2} \right]$$

Après intégration (voir annexe 3) et minimisation de l'énergie potentielle totale par rapport à  $a_i$  et  $b_i$  respectivement, les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \frac{\pi^2 i^4}{2} \bar{a}_i - \frac{g(1+\beta_1)i^2 b_i}{4} + \frac{2g(1-\beta_1)i^2}{\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq i)}}^n b_s \varpi \right] = 0 \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = & \left[ 1 + i^2 4\rho(1-\rho)K^2 + 0.9g(1+\beta_1)(2\rho-1) \left[ 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \right] \frac{K}{\pi} \right] \frac{i^2 b_i}{2} \\ & - \frac{g(1+\beta_1)i^2 \bar{a}_i}{4} + \frac{2g(1-\beta_1)}{\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq i)}}^n s^2 \bar{a}_s \varpi \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$+ 0.9 \frac{g(1-\beta_1)}{\pi^3} (1-\beta_1)(2\rho-1) \left[ 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \right] K \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq i)}}^n i s b_s \chi \right] = 0$$

avec :

$$\bar{a}_i = \frac{a_i}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GJ}}, \quad g = \frac{M_{0y}L}{\sqrt{EI_z GJ}}$$

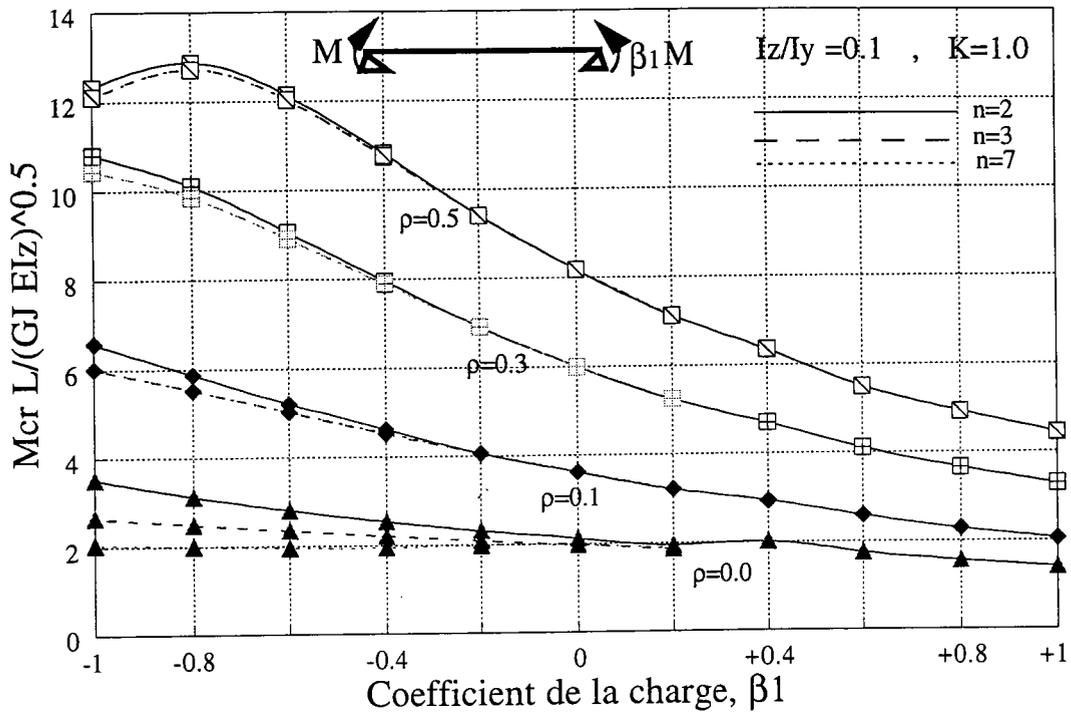
#### 4.4.12 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Généralement l'approche énergétique donne des résultats supérieurs à la solution exacte. Par contre, en considérant un nombre de termes suffisant dans les fonctions de déplacements  $v$  et  $\theta_x$ , une bonne approximation de la charge critique du déversement est obtenue. D'où la nécessité d'étudier la convergence de la solution en fonction de nombre de termes  $n$ .

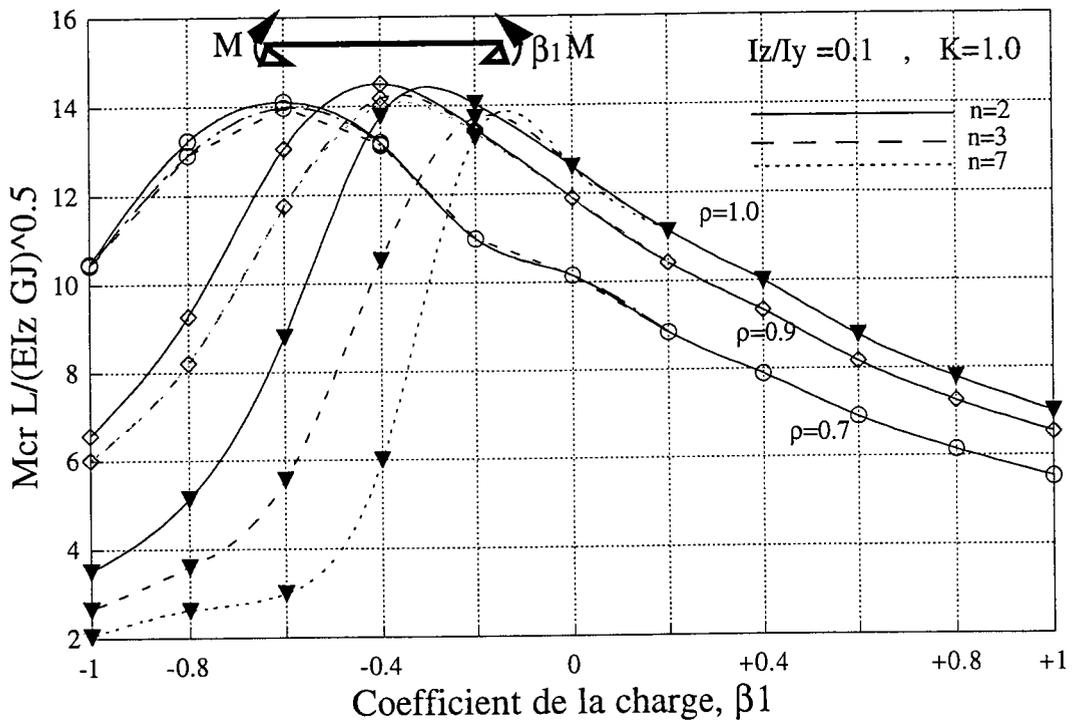
La figure 4.5, présente l'étude de l'effet du nombre de termes choisis  $n$  et le coefficient de chargement  $\beta_1$ , sur le moment critique de déversement, pour une poutre ayant un élancement  $K = 1$ .

La figure 4.5 montre que la solution énergétique converge rapidement lorsque le coefficient du chargement  $\beta_1 > 0$ . Dans ce cas la solution énergétique pour  $n=2$  est suffisamment exacte quelque soit le degré de la monosymétrie de la poutre  $\rho$ . De ce fait, la forme réelle des déplacements est une fonction sinusoidale. Donc un seul terme ou deux peuvent approximer les déplacements. Ainsi dans le cas où  $\beta_1 = 1$ , les valeurs obtenues pour le moment critique du déversement seront identiques à celles obtenues à partir de l'équation générale (3.23) donnée par l'Eurocode 3. Quand  $\beta_1 < 0$ , la convergence de la solution dépend du degré de la monosymétrie de la section transversale de la poutre  $\rho$ . Elle est obtenue avec plusieurs termes (jusqu'à  $n = 7$ ). Pour une poutre à section doublement symétrique (c'est à dire  $\rho = 0.5$ ),  $n = 2$ , donne une bonne approximation du moment critique. Par contre dans le cas où le degré de la monosymétrie de la poutre,  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$  (sections en T), le nombre de terme  $n$  a un rôle important sur la solution, ainsi pour  $n = 2$ ,  $n = 3$  et  $n = 7$  les solutions sont très différentes, pour  $-0.3 < \beta_1 \leq -1$ . En général  $n=3$ , fournit des résultats suffisamment exactes pour des valeurs de  $\rho$  situé dans l'intervalle  $[0.8, 0.2]$ .

La figure 4.6 donne les résultats du moment adimensionnel élastique du déversement,  $g = M_{0y}L/\sqrt{EI_zGJ}$ , obtenu en faisant varier  $\rho$  et  $K$ , et prenant  $I_z/I_y = 0.1$ . Les calculs sont faits pour  $\beta_1 = 1, 0.5, 0, -0.5, -0.75, -1$  respectivement. Ces courbes seront utilisées pour estimer le moment élastique du déversement d'une poutre à section transversale monosymétrique et soumise à un gradient de moment. Lorsque le diagramme des moments de la poutre à une seule courbure ( $\beta_1 > 0$ ), les valeurs du moment adimensionnel "g" augmente d'une façon monotone, comme  $\rho$  augmente de  $\rho = 0$  (section en T inversée) jusqu'à  $\rho = 1$  (section en T). Cependant, lorsque le moment appliqué provoque une double courbure ( $\beta_1 < 0$ ), la courbe donnant "g", pour des grandes valeurs de  $\rho$  diminue rapidement pour certaine valeur de  $K$  (voir les courbes où  $\beta_1 = -0.5, -0.75$ ). Lorsque  $\beta_1 = -1$ , la poutre est soumise à une flexion antisymétrique, et les courbes de déversement pour  $\rho$  et  $1-\rho$  sont les mêmes (exemple pour  $\rho = 0.3$  et  $\rho = 0.7$ ).



(a)



(b)

Figure 4.5 : Variation du moment critique adimensionnel  $g$  en fonction du coefficient de la charge  $\beta_1$  et le degré du monosymétrie  $\rho$

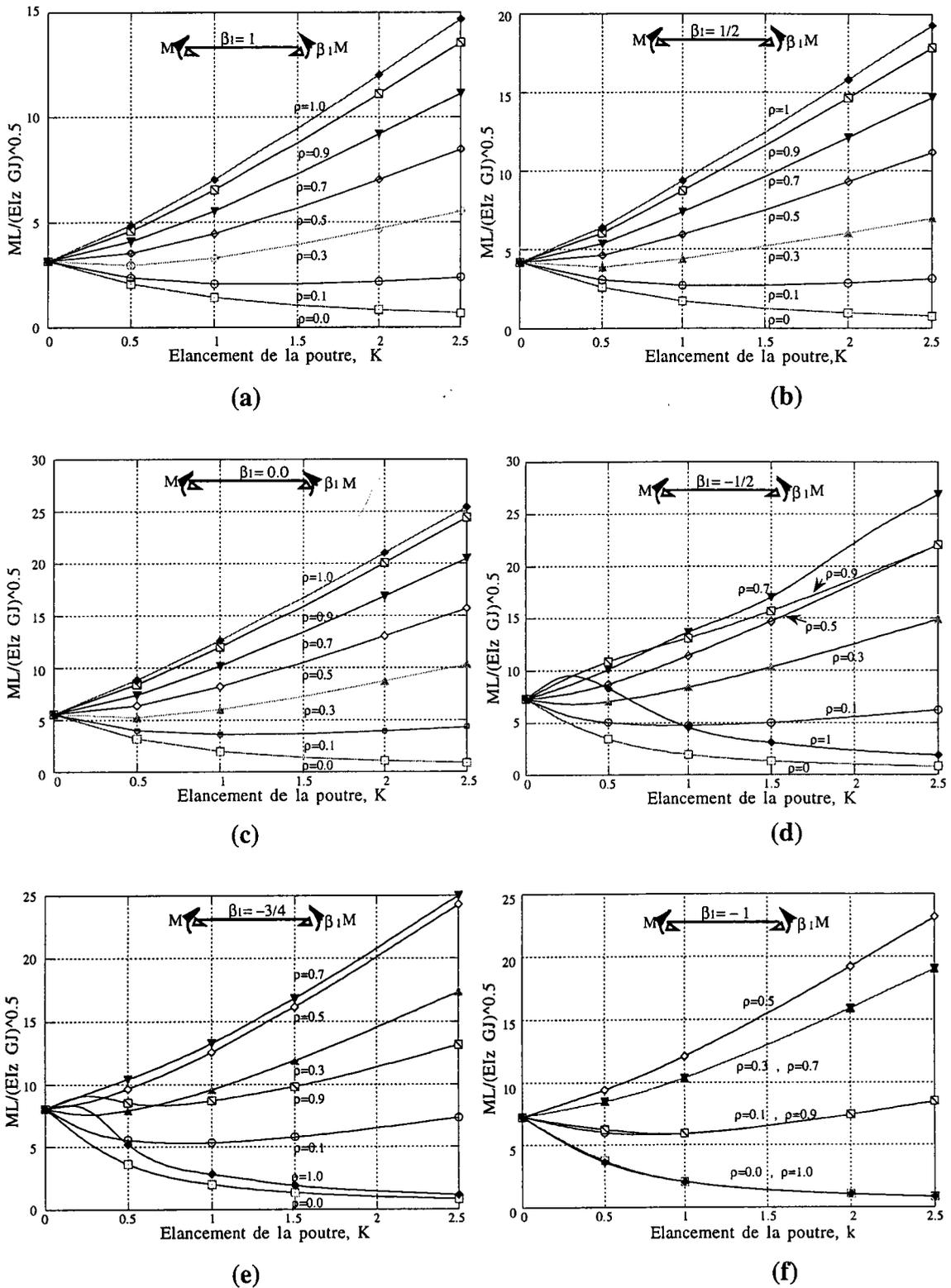


Figure 4.6 : Variation du moment critique adimensionnel  $g$  en fonction du coefficient de la charge  $\beta_1$  et le degré du monosymétrie  $\rho$

#### 4.6 COMPARAISON DES RÉSULTATS

Dans cette partie, on présente le moment critique de déversement calculé par l'Eurocode3, ABAQUS et l'approche énergétique. Les calculs sont effectués sur des poutres ayant des sections transversales symétrique et monosymétrique dont les caractéristiques géométriques sont données par la figure 4.7 .

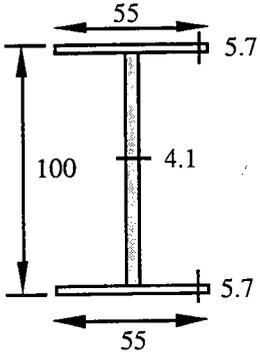
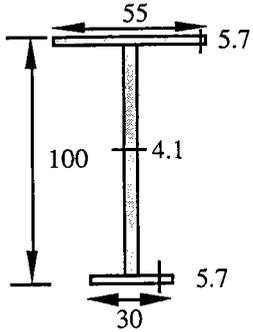
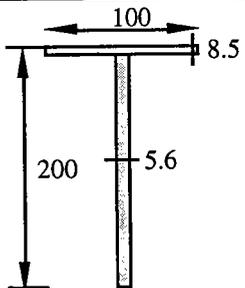
Section Transversale (Acier)	Caractéristiques Géométriques $\left\{ \begin{array}{l} E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right\}$
 <p><b>Section "a": IPE 100</b></p>	$A = 9.9026 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.6284 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 1.5805 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 8.9304 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 3.5137 \cdot 10^{-10} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0$
 <p><b>Section "b": monosymétrique</b></p>	$A = 8.7113 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 1.2628 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 9.1853 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $J = 7.3867 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $I_\omega = 9.8122 \cdot 10^{-11} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0159 \text{ m}$
 <p><b>Section "c": monosymétrique</b></p>	$A = 0.1922 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 8.013453 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_z = 7.0833 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $J = 3.1880 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $I_\omega = 0$ $\beta_z = 0.176 \text{ m (EC3)}$

Figure 4.7 : Sections utilisées dans la comparaison des résultats.

La figure 4.8 , la variation du moment critique calculé par notre approche ( $M_{cr}$ ), le moment réglementaire (EC3) et le moment numérique (ABAQUS). Ces résultats sont obtenus pour une poutre bi-articulée ayant une section symétrique IPE100. On constate que l'écart devient plus important lorsque  $\beta_1 = -1/2$  et  $-3/4$  conformément à la courbe 4.5 . Le moment critique de déversement obtenu en appliquant les directives de l'Eurocode 3, conduit à une erreur qui peut atteindre plus de 10 pour cent. On note que nos résultats sont en bon accord avec ABAQUS.

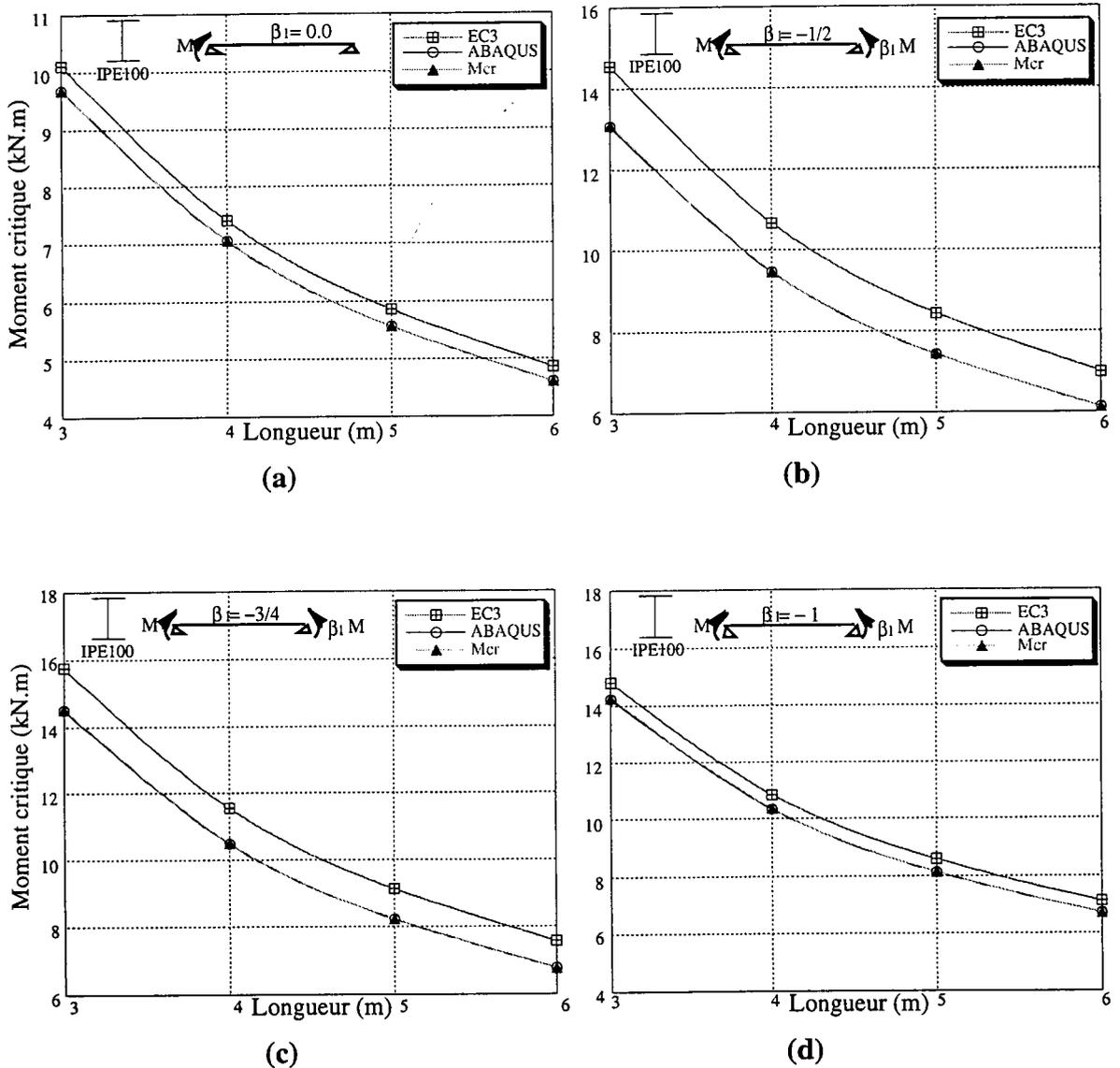
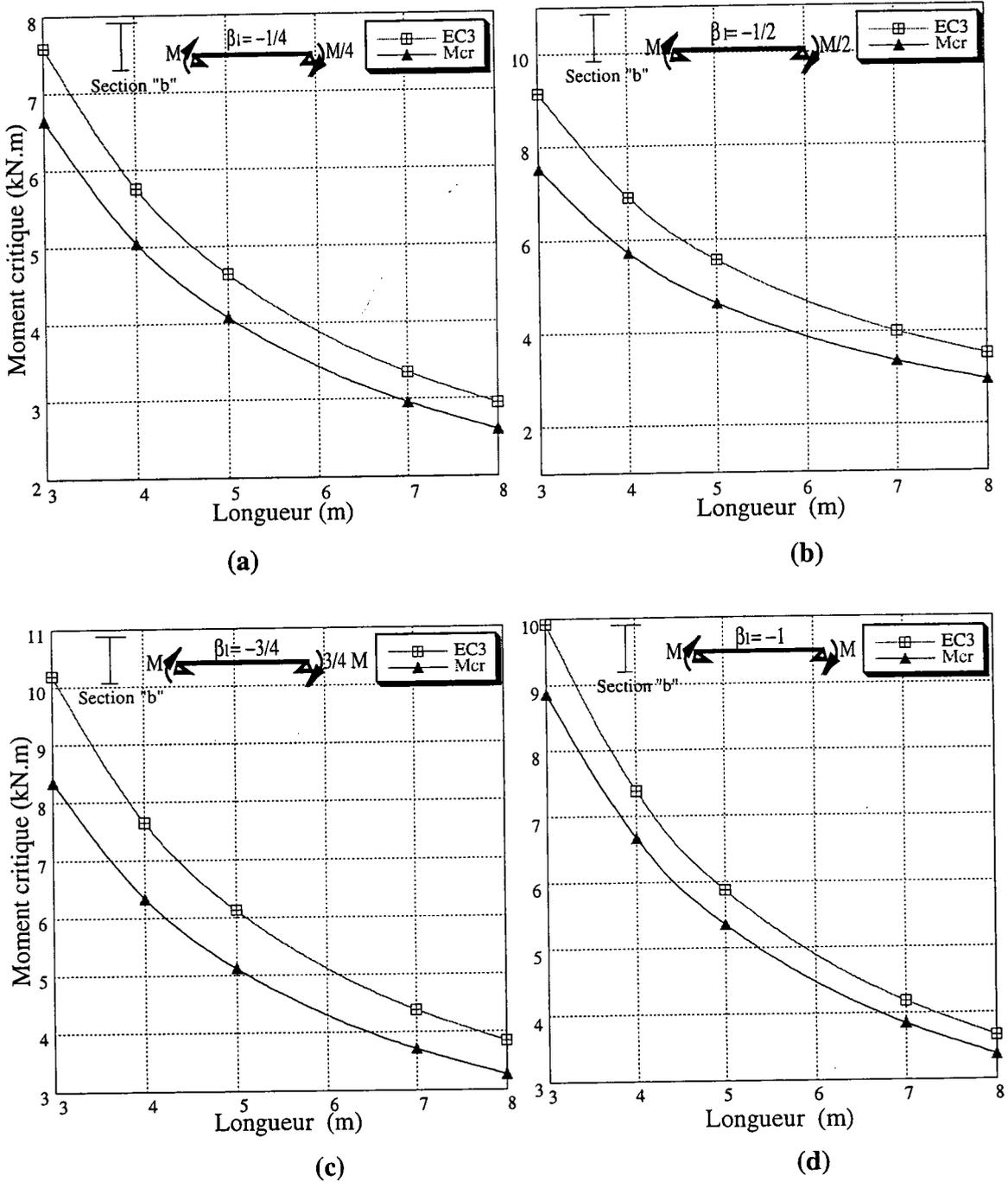


Figure 4.8 : Variation du moment critique de déversement  $M_{cr}$  en fonction de la longueur  $L$  , dans le cas de la section symétrique

La figure 4.9, représente la variation du moment critique calculé par notre approche ( $M_{cr}$ ) et le moment réglementaire (EC3) pour différentes valeurs négatives de  $\beta_1$ . La poutre utilisée a une section monosymétrique (section "b"). Les constatations précédentes (section bisymétriques) restent valable, et l'écart entre l'Eurocode 3 et notre approche, atteint des valeurs plus importantes.



**Figure 4.9 :** Variation du moment critique de déversement  $M_{cr}$  en fonction de la longueur  $L$ , dans le cas de la section monosymétrique

La figure 4.10, donne la comparaison des moments critiques de déversement dans le cas d'une poutre soumise à un gradient de moment, et ayant une section transversale en T (section "c"). Le moment critique calculé selon l'Eurocode3 est très supérieur à celui calculée par la méthode énergétique.

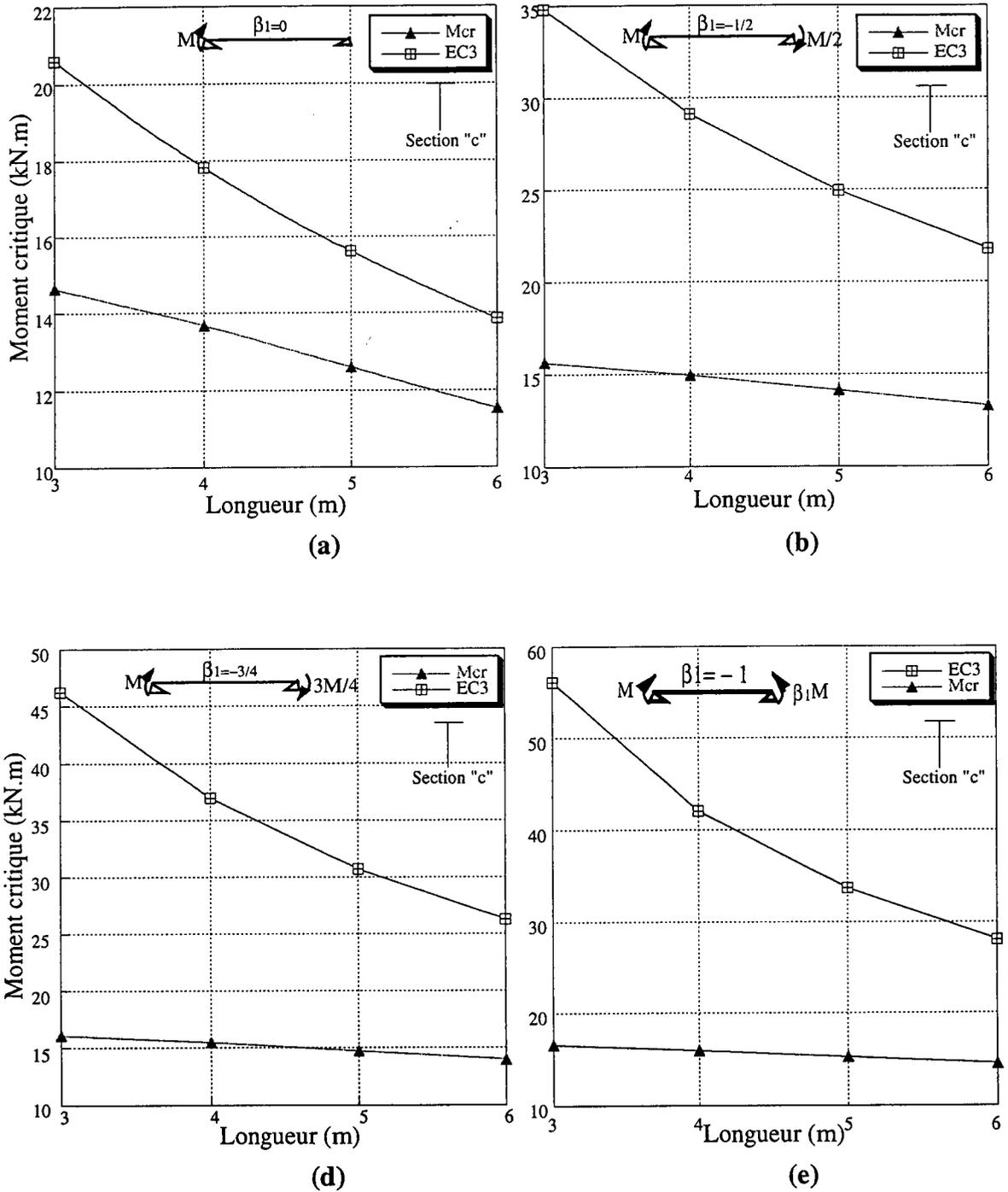


Figure 4.10 : Variation du moment critique de déversement  $M_{cr}$  en fonction de la longueur  $L$ , dans le cas de la section monosymétrique

Enfin, la comparaison entre nos résultats et ceux donnés par l'Eurocode 3 montre que le moment critique de déversement donné par ce dernier est surestimé. Cette différence, vient de la fonction de forme adoptée par l'Eurocode 3. Les coefficients C1 et C3 sont obtenus à partir des fonctions de tests ayant un seul terme, et comme nous avons démontré précédemment, surtout pour le cas des charges asymétriques; l'utilisation d'un seul terme conduit à des erreurs considérables.

#### 4.4.2 POUTRE SOUMISE À DEUX CHARGES CONCENTRÉES APPLIQUÉES À UNE DISTANCE “ $\alpha L$ ” DES APPUIS

On considère une poutre à section transversale monosymétrique soumise à deux charges concentrées appliquées à une distance “ $\alpha L$ ” des appuis. Dans la figure 4.11, la valeur de  $\alpha = \frac{1}{2}$  correspond à une poutre soumise à une charge concentrée appliquée à mi-travée,  $\alpha = \frac{1}{4}$  à celle de deux charges appliquées à une distance  $a = \frac{L}{4}$  des appuis. Cette approche nous permet de calculer le moment de déversement suivant un schéma de chargement quelconque ( $0 \leq \alpha \leq 0.5$ ), contrairement à l’Eurocode3 qui se limite à  $\alpha = 1/4$  et  $\alpha = 1/2$

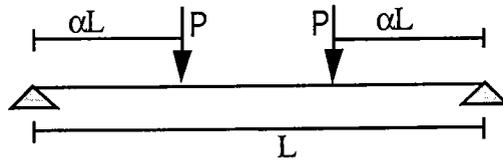


Figure 4.11

Après avoir remplacé  $v$ ,  $\theta_x$  (équations 4.15 et 4.16) par leurs valeurs, le travail des forces extérieures 4.3 sera :

$$\begin{aligned}
 V = & -\frac{P}{2} \sum_{i=1}^n g_1(s, i, \alpha) a_i b_i - P \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_2(s, i, \alpha) b_s - P \alpha \pi \sum_{i=1}^n i a_i b_i g_3(s, i, \alpha) \\
 & - P \alpha \pi \sum_{i=1}^n i^2 a_i \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_4(s, i, \alpha) b_s + \frac{P \beta_z}{a} \sum_{i=1}^n b_i^2 g_5(s, i, \alpha) + P \beta_z \sum_{i=1}^n b_i \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n s i g_6(s, i, \alpha) b_s \quad (4.21) \\
 & + P \beta_z \alpha \pi \sum_{i=1}^n i b_i^2 g_7(s, i, \alpha) + P \beta_z \alpha \pi \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} b_i \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n s g_8(s, i, \alpha) b_s
 \end{aligned}$$

avec :

$$g_1(s, i, \alpha) = -2i\pi\alpha \cos(i\pi\alpha) \sin(i\pi\alpha) + i^2\pi^2\alpha^2 + \sin^2(i\pi\alpha)$$

$$g_2(s, i, \alpha) = \frac{is}{(i^2 - s^2)^2} \left[ \frac{(i+s)^2}{is} \cos \pi \alpha (i-s) - \frac{(i-s)^2}{is} \cos \pi \alpha (i+s) \right. \\ \left. - \frac{(i+s)(i-s)^2}{is} \pi \alpha \sin(\pi \alpha (i+s)) + \frac{(i-s)(i+s)^2}{is} \pi \alpha \sin(\pi \alpha (i-s)) - \frac{1}{4} \right]$$

$$g_3(s, i, \alpha) = i\pi \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) + \cos(i\pi \alpha) \sin(i\pi \alpha)$$

$$g_4(s, i, \alpha) = (s^2 - i^2)^{-1} \left\{ (i+s) \left[ \sin \frac{\pi(s-i)}{2} - \sin(\pi \alpha (s-i)) \right] + \right. \\ \left. (i-s) \left[ \sin \frac{\pi(s+i)}{2} - \sin(\pi \alpha (s-i)) \right] \right\}$$

$$g_5(s, i, \alpha) = \frac{(i^2 + s^2)}{(i^2 - s^2)^2} \left[ \frac{(i+s)^2}{2(i^2 + s^2)} \cos(\pi \alpha (i-s)) + \frac{(i-s)^2}{2(i^2 + s^2)} \cos(\pi \alpha (i+s)) \right. \\ \left. + \frac{\pi \alpha (i-s)(i+s)^2}{2(i^2 + s^2)} \sin(\pi \alpha (i-s)) + \frac{\pi \alpha (i+s)(i-s)^2}{2(i^2 + s^2)} \sin(\pi \alpha (i+s)) - 1 \right]$$

$$g_6(s, i, \alpha) = 2i\pi \alpha \cos(i\pi \alpha) \sin(i\pi \alpha) + i^2 \pi^2 \alpha^2 - \sin^2(i\pi \alpha)$$

$$g_7(s, i, \alpha) = i\pi \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) - \cos(i\pi \alpha) \sin(i\pi \alpha)$$

$$g_8(s, i, \alpha) = (s^2 - i^2)^{-1} \left\{ (i+s) \left[ \sin \frac{\pi(i-s)}{2} - \sin(\pi \alpha (i-s)) \right] + \right. \\ \left. (i-s) \left[ \sin \frac{\pi(i+s)}{2} - \sin(\pi \alpha (i+s)) \right] \right\}$$

Après la minimisation du potentiel total par rapport à  $a_i$  et  $b_i$  respectivement, on trouve :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \frac{\pi^2}{2} i^4 - \frac{g}{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} g_1(s, i, \alpha) + \alpha i g_3(s, i, \alpha) \right] b_i - \frac{g r^2}{\pi^2} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_2(s, i, \alpha) b_s$$

$$\frac{g}{\pi} \alpha i^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_4(s, i, \alpha) b_s = 0$$
(4.22)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = \left[ \frac{i^2}{2} + 2K^2 \rho(1-\rho) + 1.8 \frac{g}{\pi^3} (2\rho-1)(1-b^2) K \left[ \frac{1}{2} g_5(s, i, \alpha) + \alpha \pi i g_7(s, i, \alpha) \right] + \right.$$

$$\left. \frac{g \eta K}{\pi^3} \left[ \sin^2(i\pi\alpha) + \sin^2(i\pi(1-\alpha)) \right] b_i - \frac{g}{\pi^2} \left[ \frac{1}{2} g_1(s, i, \alpha) - \alpha \pi i g_3(s, i, \alpha) \right] a_i \right.$$

$$\left. + 1.8 \frac{g}{\pi^3} (2\rho-1)(1-b^2) K \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n i s g_6(s, i, \alpha) b_s + \alpha \pi \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \frac{i s}{2} g_6(s, i, \alpha) b_s \right] + \right.$$

$$\left. \frac{g}{2\pi^2} \left[ \frac{\eta K}{\pi} \left( \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n (\sin(i\pi\alpha) \sin(s\pi\alpha) + \sin(i\pi(1-\alpha)) \sin(s\pi(1-\alpha))) b_s \right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{g}{\pi^2} \left[ i^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_2(s, i, \alpha) a_s + \alpha \pi i^2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n g_8(s, i, \alpha) a_s \right] \right.$$
(4.23)

avec :

$$g = \frac{2PL^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$$

#### 4.4.21 DISCUSSION ET COMMENTAIRE DES RÉSULTATS

Dans la figure 4.13, nous avons représenté la variation de la charge critique en fonction de l'élancement de la poutre  $K$ , du coefficient  $\alpha$  et du point d'application de la charge  $z^*$ . On constate que la charge critique est inversement proportionnelle avec  $\alpha$  et le déversement est à redouter lorsque  $\alpha = 1/2$ . On a trouvé que la solution converge rapidement,  $n = 4$  est largement suffisant pour donner une bonne approximation de la charge critique.

Dans les figures 4.14, 4.15 et 4.16, on donne la variation de la charge critique en fonction de l'élancement de la poutre  $K$ , le degré de la monosymétrie  $\rho$  et le point d'application de la charge  $z^*$  pour trois types de chargement  $\alpha = 1/4, 1/3, 1/2$  respectivement. On remarque que la résistance de la poutre au déversement augmente lorsque  $\rho$  augmente. Pour  $\alpha = 1/4, 1/2$ , la solution analytique a été donnée par l'équation générale (3.22). Devant l'absence de réglementation, dans le cas où  $\alpha = 1/3$ , la courbe 4.15 peut être utilisée comme abaque pour estimer la charge critique de déversement.

En fin, on présente dans les figures 4.17-a, 4.17-b et 4.17-c la variation de la charge critique de déversement pour la section utilisée par Yoo [66] (figure 4.12), en fonction du point d'application de la charge. On remarque le bon accord entre la solution numérique (ABAQUS) et l'approche énergétique (équations 4.22 et 4.23), quant à l'Eurocode 3, il sous estime la charge critique.

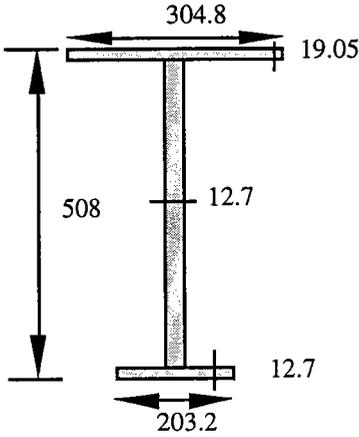
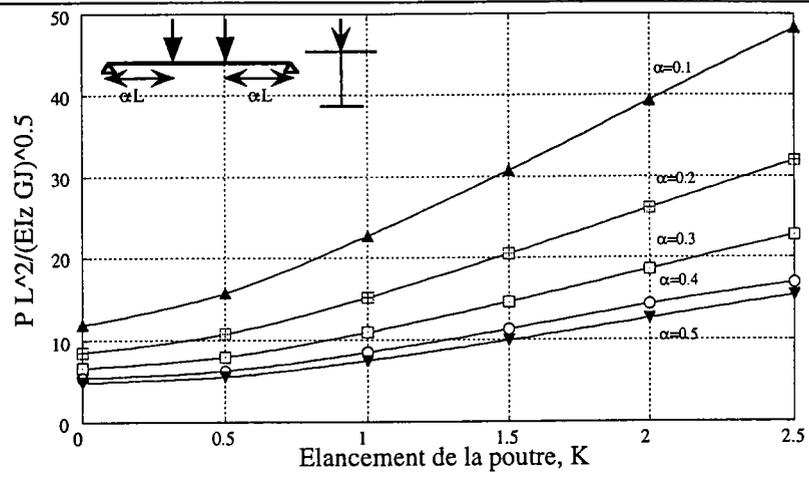
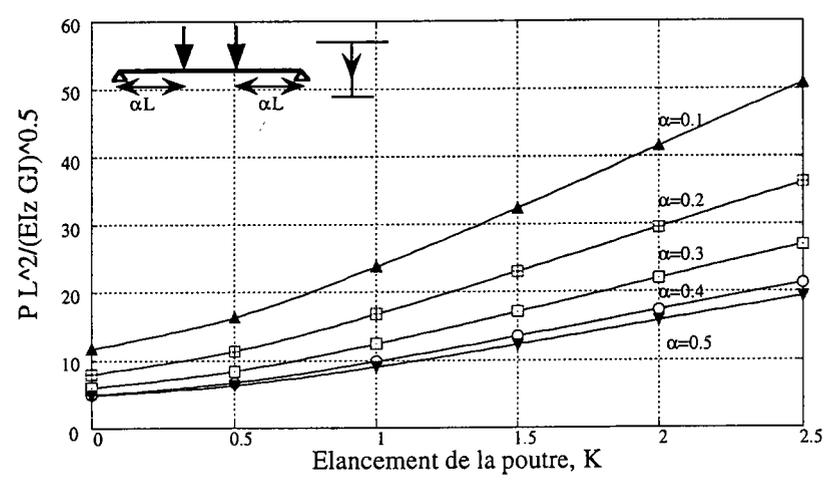
Section transversale	Caractéristiques géométriques
	$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}$ $G = 8.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}$ $A = 1.4637 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 6.3475 \cdot 10^{-04} \text{ m}^4$ $I_z = 5.3918 \cdot 10^{-05} \text{ m}^4$ $J = 1.1880 \cdot 10^{-06} \text{ m}^4$ $I_\omega = 1.9135 \cdot 10^{-06} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.153 \text{ m}$

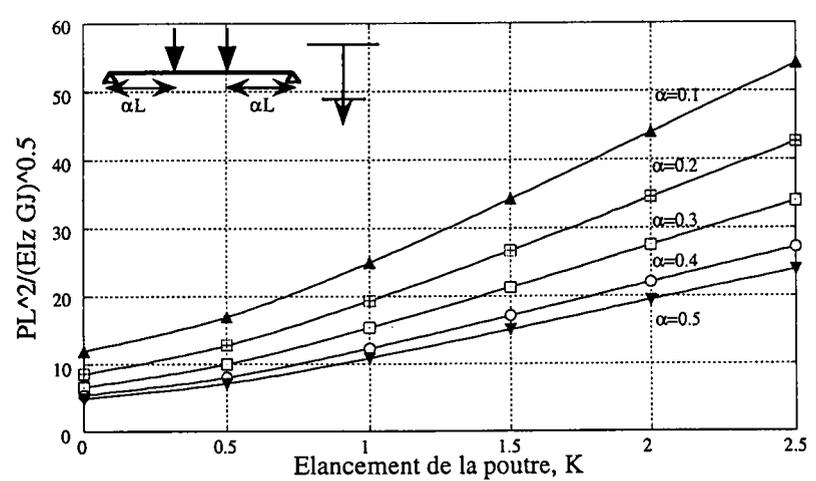
Figure 4.12 : Section utilisée dans le calcul



(a): Charge appliquée à la semelle supérieure

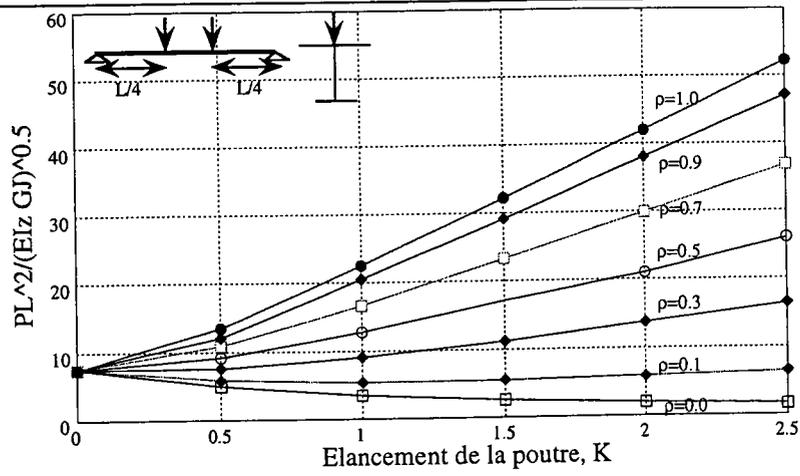


(b) : Charge appliquée au centre de torsion

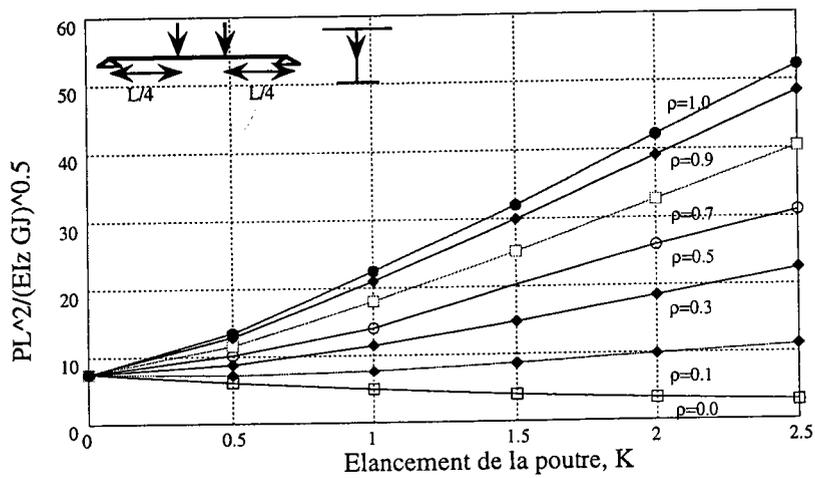


(c) : Charge appliquée à la semelle inférieure

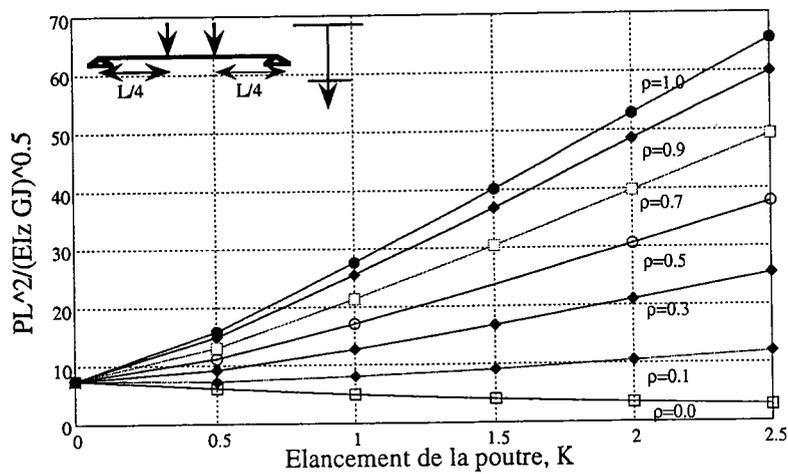
Figure 4.13 : Variation de la charge critique en fonction de l'élancement de la poutre  $K$  et le rapport de distance  $\alpha$ .



(a): Charge appliquée à la semelle supérieure

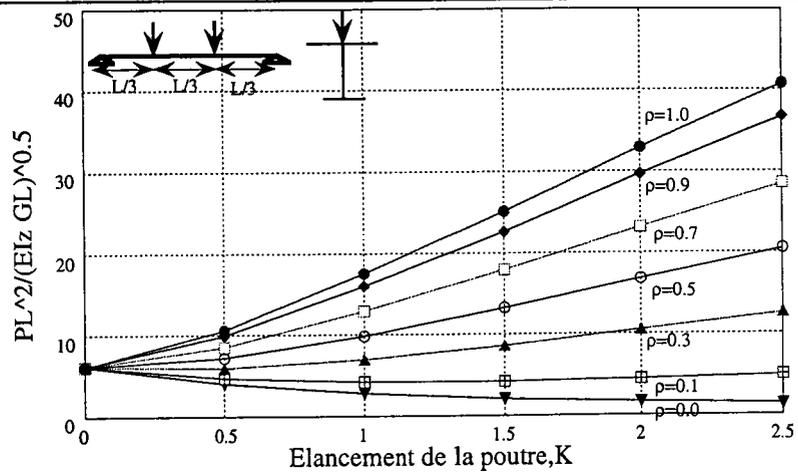


(b) : Charge appliquée au centre de torsion

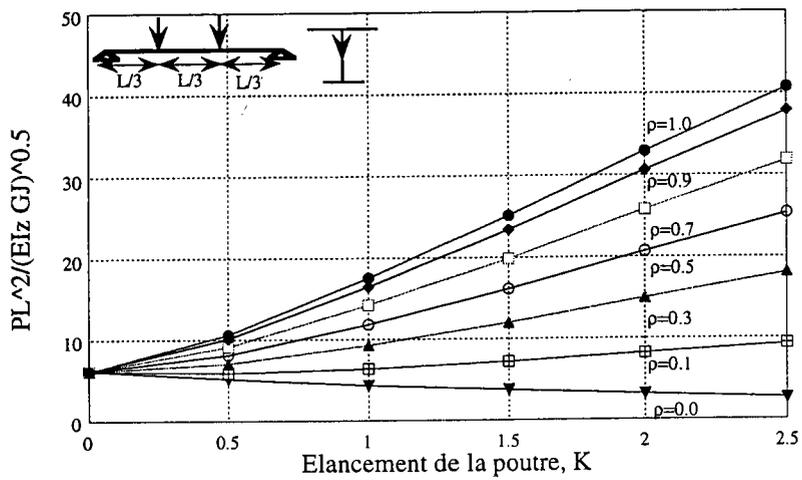


(c) : Charge appliquée à la semelle inférieure

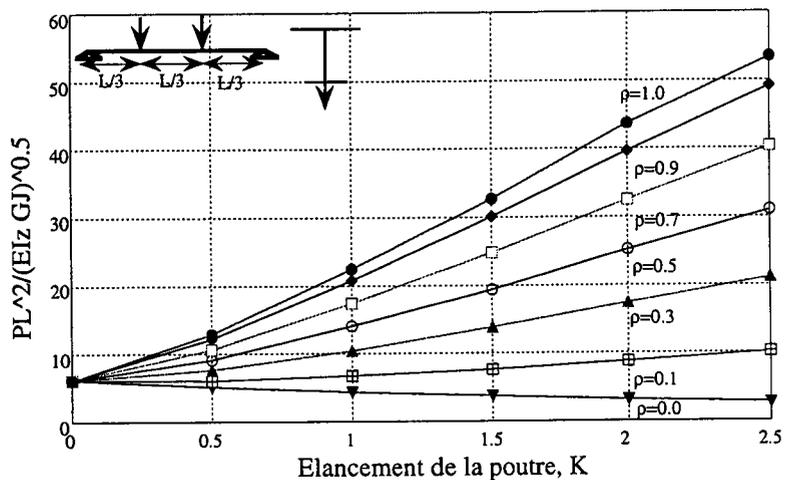
Figure 4.14 : Variation de la charge en fonction de l'élancement de la poutre  $K$  et le degré de la monosymétrie  $\rho$



(a) : Charge appliquée à la semelle supérieure

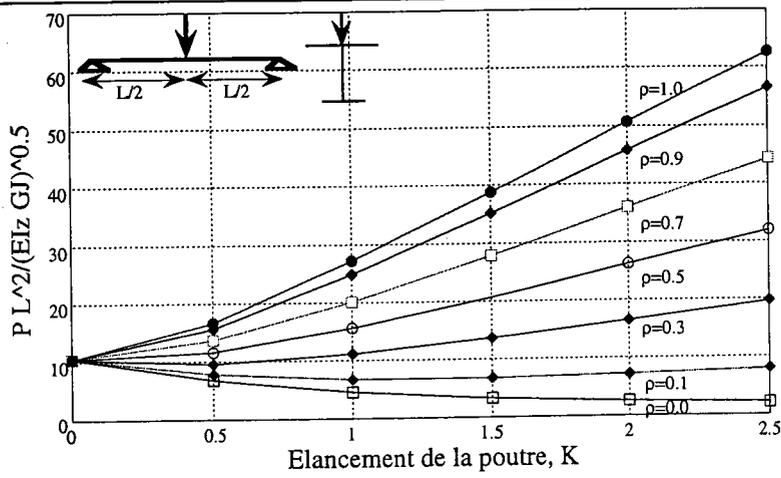


(b) : Charge appliquée au centre de torsion

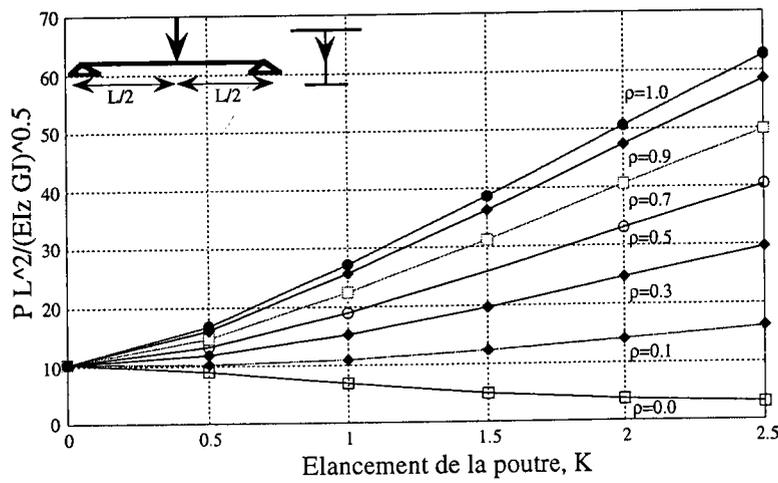


(c) : Charge appliquée à la semelle inférieure

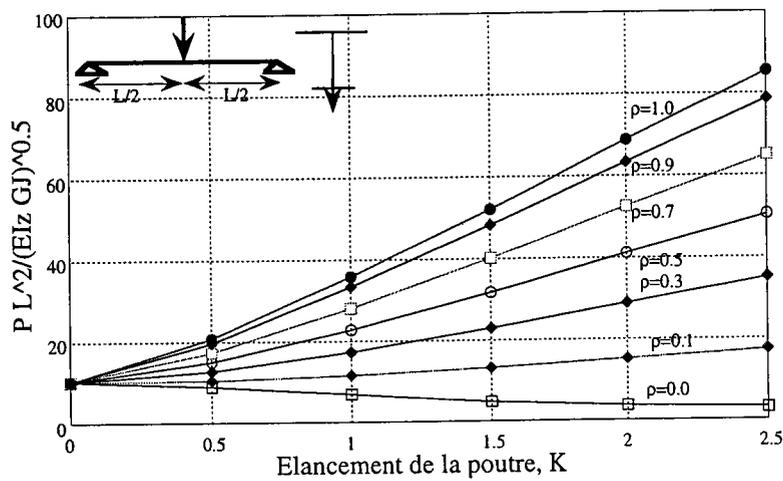
Figure 4.15 : Variation de la charge en fonction de l'élancement de la poutre K et le degré de la monosymétrie p



(a) : Charge appliquée à la semelle supérieure

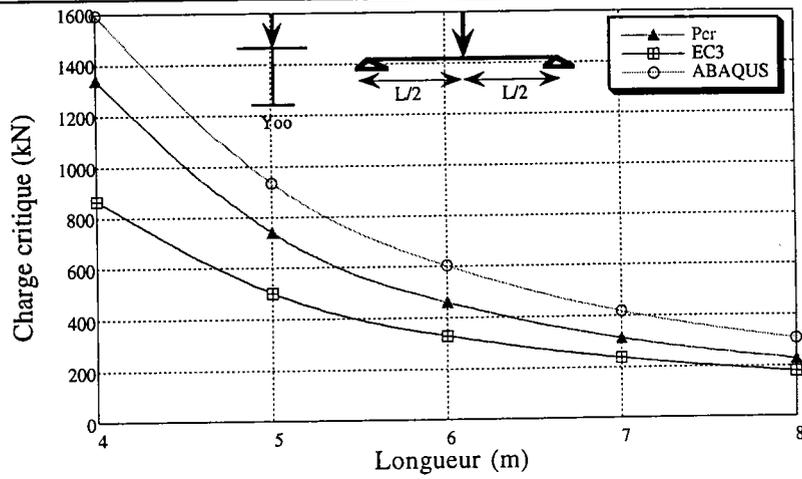


(b) : Charge appliquée au centre de torsion

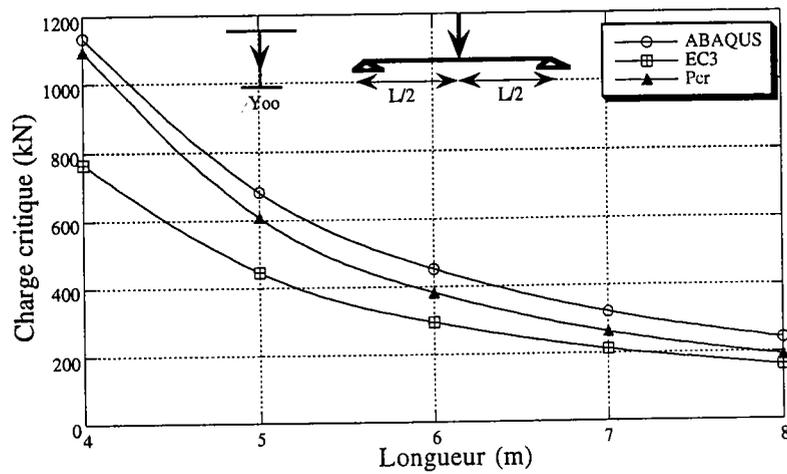


(c) : Charge appliquée à la semelle inférieure

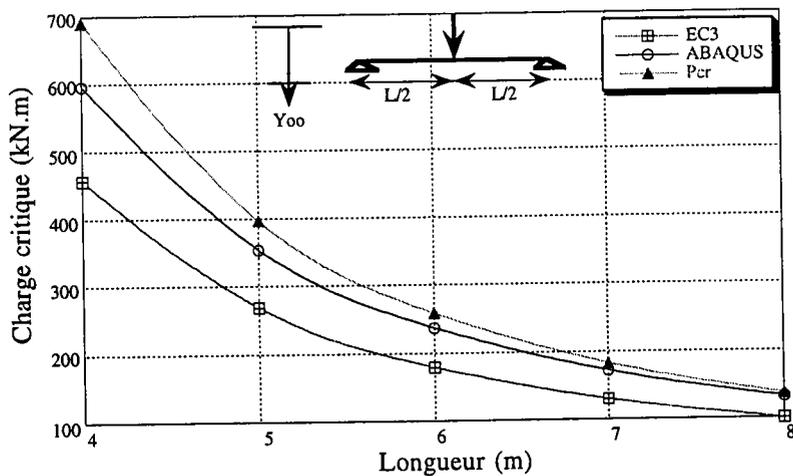
Figure 4.16 : Variation de la charge critique en fonction de l'élancement de la poutre  $K$  et le degré de la monosymétrie  $\rho$



(a) : Charge appliquée à la semelle supérieure



(b) : Charge appliquée au centre de torsion



(c) : Charge appliquée à la semelle inférieure

Figure 4.17 : Comparaison réglementaire et numérique des charges critiques d'une poutre sollicitée par une charge transversale au milieu.

## 4.5 DÉVERSEMENT DES POUTRES CONSOLES

### 4.5.1 INTRODUCTION

Une attention particulière peut être donnée aux poutres consoles car, elles sont d'un grand intérêt pratique (très répandues dans le domaine du bâtiment). Elles sont souvent utilisées comme élément de flexion dans le plan du chargement. Actuellement, lorsqu'on veut étudier une quelconque instabilité (flambement et déversement) de cet élément on se heurte à des grandes difficultés et à un vide total en matière réglementaire. Ainsi, l'Annexe F de l'Eurocode 3 [32] ne traite pas les poutres consoles. Cela explique notre démarche d'établir des abaques pour les utilisateurs.

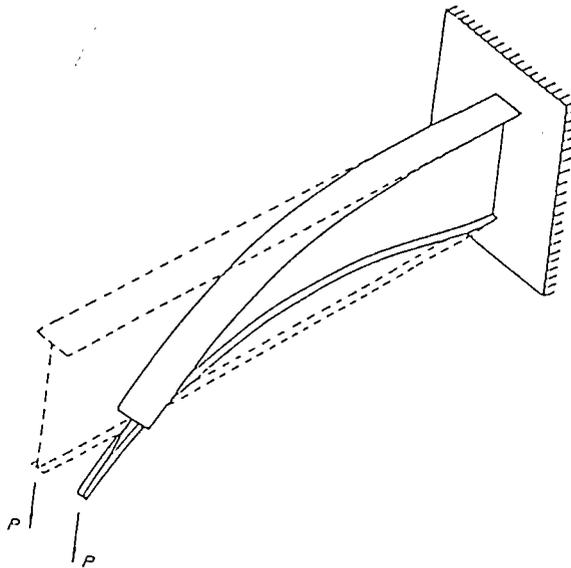


Figure 4.18 : Poutre console

### 4.5.2 CONSOLE SOUMISE A UN MOMENT APPLIQUÉ À SON EXTRÉMITÉ LIBRE

Une poutre console soumise à un moment à son extrémité libre est un cas rare en pratique. Ce type de chargement peut avoir lieu, si la poutre console est soumise à une charge axiale excentrée, statiquement, elle est équivalente à une charge concentrée et un moment. Donc, la console chargée avec un moment appliqué à son extrémité libre représente le cas limite où le chargement axial tend vers "0" et son excentricité à l'infini.

Pour l'approche énergétique, les fonctions de formes qui vérifient les conditions aux limites dans le cas d'une console, sont des séries trigonométriques de la forme:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left[ 1 - \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \right] \quad (4.24-a)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^n b_i \left[ 1 - \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \right] \quad (4.24-b)$$

$n$  est le nombre de termes utilisés dans les fonctions 4.24 dont sa valeur est déterminée en étudiant la convergence de la solution. On remplace les équations (4.24) dans l'équation (4.2) et après intégration, l'énergie de déformation d'une poutre console est donnée par :

$$U = \frac{\pi^2 E I y}{64 L^3} \left[ \sum_{i=1}^n (2i-1)^4 a_i^2 \right] + \frac{G J \pi^2}{16 L} \left[ \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \left\{ 1 + \frac{(2i-1)^2 \pi^2 E I \omega}{4 G J L^2} \right\} b_i^2 \right] \quad (4.25)$$

Le travail extérieur dû au moment appliqué est:

$$V = - \int_0^L M_y \theta_x v'' dx - \frac{1}{2} \int_0^L M_y \beta_z \theta_x^2 dx \quad (4.26-a)$$

Après avoir remplacé  $v$  et  $\theta_x$ ,  $V$  devient :

$$V = \frac{M_y \pi^2}{4L} \left[ \sum_{r=1}^n (2i-1)^2 \left\{ \frac{2(-1)^i}{\pi(2r-1)} + \frac{1}{2} \right\} b_i a_i \right] + \frac{M \pi}{2L} \left[ \sum_{i=1}^n (-1)^i (2i-1) b_i \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n b_s \right\} \right] \quad (4.26-$$

$$- \frac{M \beta_z \pi^2}{16L} \left[ \sum_{r=1}^n (2i-1)^2 b_i^2 \right]$$

b)

La minimisation de l'énergie totale  $\Pi$ , nous permet d'écrire les équations homogènes et linéaires suivantes :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = \frac{\pi^2 (2i-1)^4}{32} a_i + \frac{g(2i-1)^2}{4} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2(-1)^i}{(2i-1)\pi} \right] b_i$$

$$+ \frac{g(-1)^i (2i-1)}{2\pi} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n b_s \right] = 0 \quad (4.27-a)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = \left[ \frac{(2i-1)^2}{8} \right] \left[ 1 + (2i-1)^2 K^2 \rho(1-\rho) - 1.8g \left( 2\rho - 1 \left[ 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right) \right] \right) \right] \frac{K}{\pi} b_i$$

$$+ \frac{g(2i-1)^2}{4} \left[ \frac{1}{2} + \frac{2(-1)^i}{\pi(2i-1)} \right] a_i + \frac{g}{2\pi} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n (-1)^s (2s-1) a_s \right] = 0 \quad (4.27-b)$$

avec :

$$g = \frac{ML}{\sqrt{EI_z GJ}} \quad , \quad a_i = \frac{a_i}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GJ}}$$

Comme pour le cas d'une poutre bi-articulée sollicitée par un chargement asymétrique, il s'agit de trouver le nombre de terme "n" à considérer pour approximer les déplacements  $v$  et  $\theta_x$  donnés par les équations 4.24 . La figure 4.19 donne la convergence de la solution d'une poutre console sollicitée par un moment concentré, appliqué à l'extrémité libre, en fonction du nombre de termes "n" approximant les déplacements  $v$  et  $\theta_x$ . La console présente une monosymétrie qui varie de  $\rho = 0$  (section en T inversée) jusqu'à  $\rho = 1$  (section en T) et ayant un élancement  $K = 2.5$  . On remarque que la convergence est obtenue pour  $n = 7$ . Par la suite tous les calculs sont fait avec un nombre de termes égal à sept. Dans la figure 4.20, on donne la variation du moment critique de déversement en fonction de l'élancement  $K$  pour différents coefficients de monosymétrie  $\rho$ .

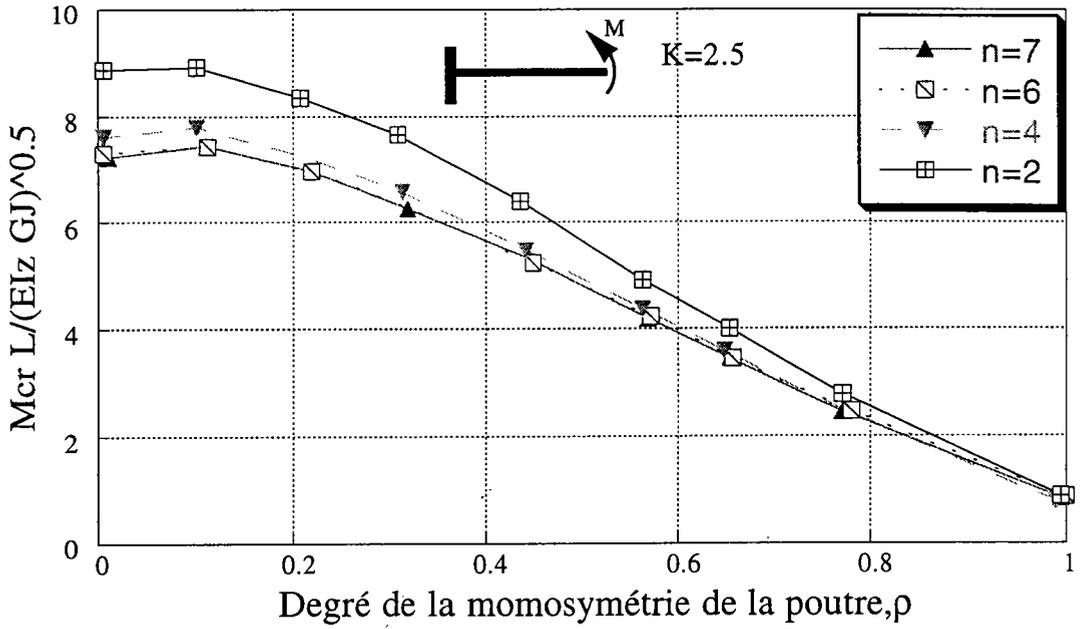


Figure 4.19 : Convergence de la solution en fonction du nombre de terme "n"

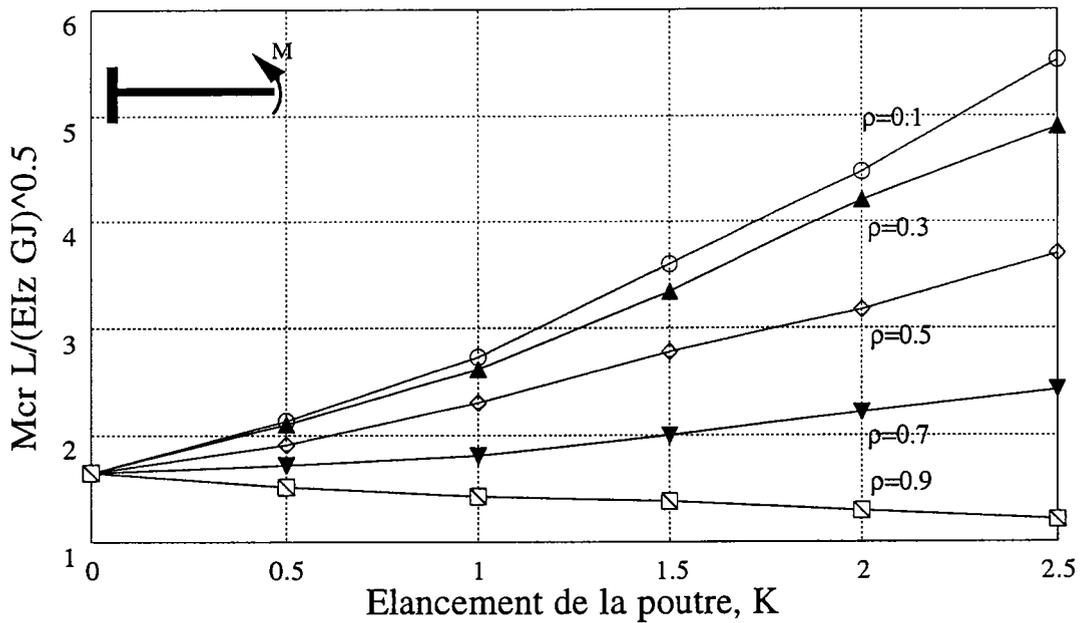
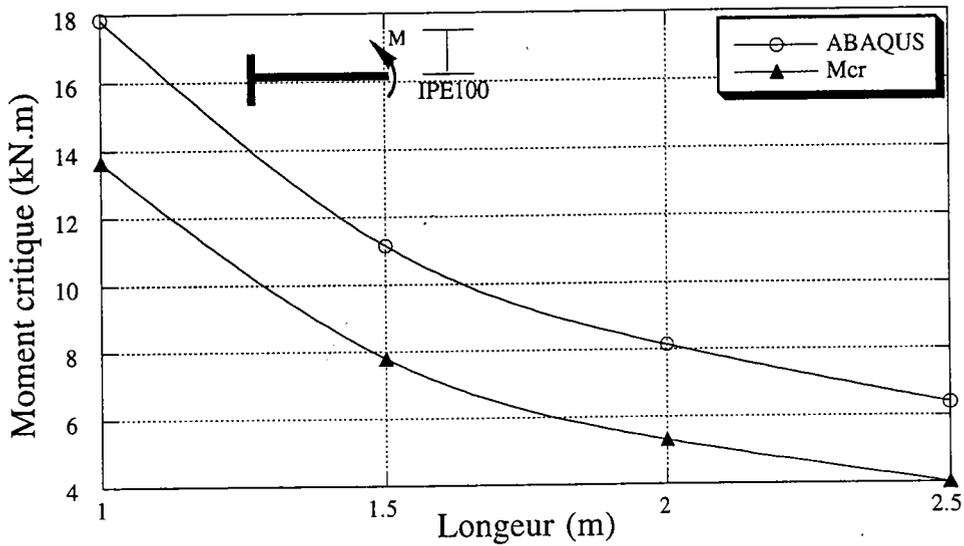
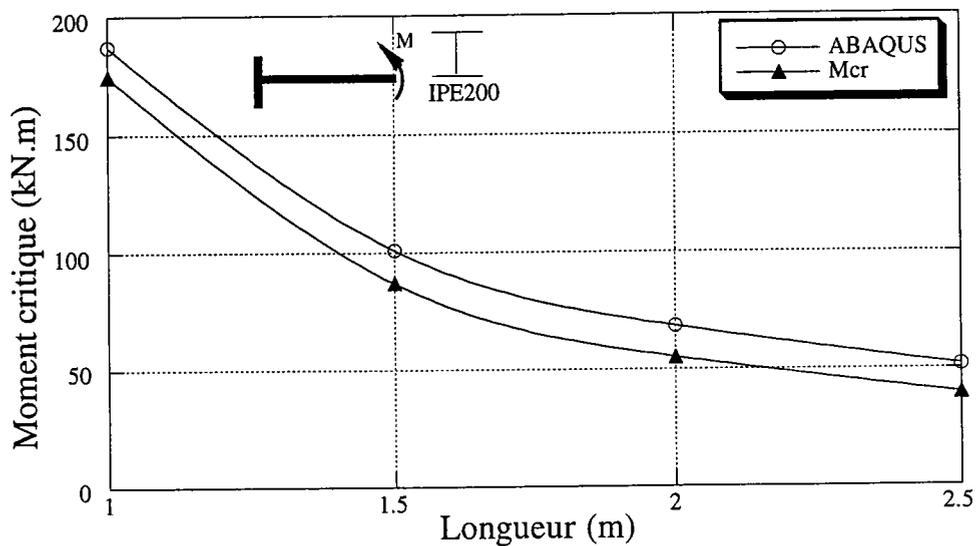


Figure 4.20 : Variation du moment critique de déversement en fonction du degré de la monosymétrie  $\rho$  et de l'élancement de la console  $K$

La figure 4.21, présente une comparaison des moments critiques de déversement de poutres consoles soumises à un moment constant à leur extrémité libre. La section transversale de ces consoles est un IPE 100 et un IPE200 respectivement. Ainsi, les courbes montrent que nos résultats sont en dessous de ceux d'ABAQUS.



(a) : IPE100



(b) : IPE200

**Figure 4.21 :** Comparaison des moments critiques d'une poutre console sollicitée par un moment constant à son extrémité libre

### 4.5.3 CONSOLE SOUMISE À UNE CHARGE CONCENTRÉE APPLIQUÉE À L'EXTRÉMITÉ LIBRE

Les mêmes fonctions de déplacements (4.24) seront utilisées, l'énergie de déformation est définie par l'équation 4.25 . Pour une poutre console soumise à une charge concentré P à son extrémité libre, le moment fléchissant est donné par :

$$M_y = -P(L - x) \quad (4.28)$$

En tenant compte de 4.28, l'équation 4.3 devient :

$$V = \int_0^L \left[ -P(L-x)\theta_x v'' \right] dz + \frac{Pz^* \theta_{xL}^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ -P(L-x)\beta_z \theta_x'^2 \right] dx \quad (4.29)$$

On remplace  $v$  et  $\theta_x$  par leurs valeurs et après intégration (voir annexe 3), on trouve :

$$\begin{aligned} V = & \frac{P\pi^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{(2i-1)^2 \pi^2} \right) (2i-1)^2 b_i a_i \right] + \\ & \frac{P}{4} \left[ \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 a_i \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n b_s \left( \Omega - \frac{4}{(2i-1)^2} \right) \right\} b_s \right] \\ & + \frac{Pz^*}{2} \left[ \sum_{i=1}^n b_i^2 \right] + Pz^* \left[ \sum_{i=1}^{n-1} b_i \left( \sum_{s=i+1}^n b_s \right) \right] + \frac{P\beta_z \pi^2}{8} * \\ & \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{(2i-1)^2 \pi^2} - \frac{1}{4} \right) (2i-1)^2 b_i^2 \right] + \frac{P\beta_z}{4} * \\ & \left[ \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \sum_{s=i+1}^{n-1} (2i-1)(2s-1) \delta b_s \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec  $\Omega = \frac{1 - (-1)^{i+s-1}}{2(i+s-1)^2} + \frac{1 - (-1)^{i-s}}{2(i-s)^2}$  ,  $\alpha = \frac{1 - (-1)^{i+s-1}}{2(i+s-1)^2} - \frac{1 - (-1)^{i-s}}{2(i-s)^2}$

Les équations aux 4.25 et 4.29 deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = & \frac{\pi^2 (2i-1)^4}{32} a_i + \frac{g(2i-1)^2}{4} \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{(2i-1)^2 \pi^2} \right) b_i + \\ & + \frac{g(2i-1)^2}{4\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \left( \Omega - \frac{4}{(2i-1)^2} \right) b_s \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.31-a)$$

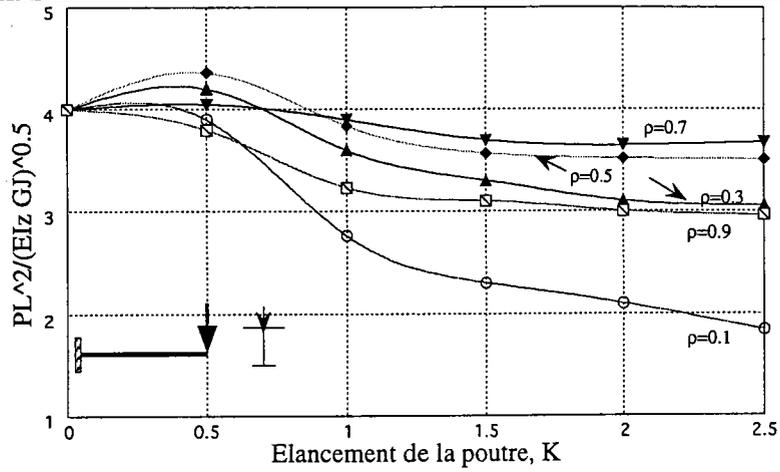
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} &= \left[ \frac{(2i-1)^2}{8} + \frac{(2i-1)^4}{8} K^2 (1-\rho) + \frac{g\eta K}{\pi^3} + \right. \\
 &0.45g(2i-1)^2(2\rho-1) \left[ 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \frac{K}{\pi} \left( \frac{1}{\pi^2(2i-1)^2} - \frac{1}{4} \right) \right] b_i + \\
 &\left. \frac{g(2i-1)^2}{4} \left[ \frac{1}{4} - \frac{3}{\pi^2(2i-1)^2} \right] a_i + \frac{g}{4\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n (2s-1)^2 \left( \Omega - \frac{4}{(2i-1)^2} \right) a_s \right] \right. \\
 &\left. + \frac{g}{\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \left( \frac{\eta K}{\pi} + 0.45\alpha(2i-1)(2s-1)(2\rho-1) \left[ 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \frac{K}{\pi} \right] \right) b_s \right] \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.31-b}$$

avec :

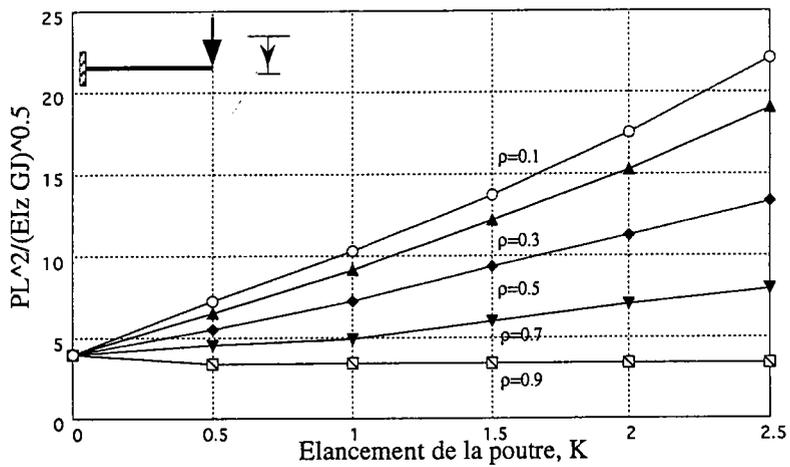
$$g = \frac{PL^2}{\sqrt{EI_z GJ}}$$

#### 4.5.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

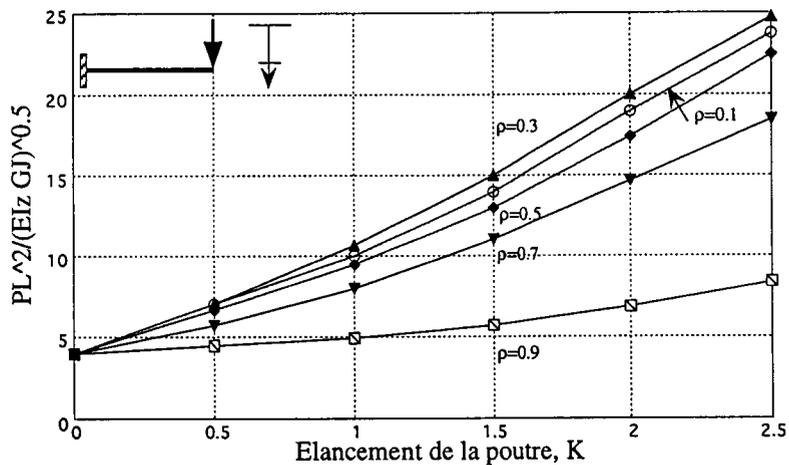
Le moment critique du déversement dépend de plusieurs paramètres de la section transversale d'une poutre console. Les paramètres principaux sont le degré de la monosymétrie " $\rho$ " et le point d'application de la charge transversale " $z^*$ ". Dans le but de comprendre la variation du moment critique adimensionnel du déversement, on considère la figure 4.22 . Le chargement est appliqué au plusieurs points de la section transversale. Dans le cas où le chargement est appliqué au centre de cisaillement ( $z^* = 0$ ), on remarque que la résistance de la console au déversement augmente lorsque  $\rho$  diminue, parce que la rigidité torsionnelle augmente quand la semelle la plus large est en compression. D'une façon générale, l'effet du point d'application de la charge transversale ( $z^*$ ) se voit clairement de la figure 4.22. La résistance de la poutre au déversement augmente au fur et à mesure que le point d'application de la charge transversale s'approche de la semelle inférieure. On a trouvé que la solution converge complètement pour  $n = 9$  .



(a) : Charge concentrée appliquée à la semelle supérieure



(b): Charge concentrée appliquée au centre de torsion



(c): Charge concentrée appliquée à la semelle inférieure

Figure 4.22 : Variation de la charge critique en fonction du degré de la monosymétrie  $\rho$  et l'élancement de la poutre  $K$ .

### 4.5.5 CONSOLE SOUMISE À UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE

Lorsque la poutre console est soumise à une charge répartie, l'expression du moment fléchissant s'écrit :

$$M_y = -q(L-x)^2 / 2 \quad (4.32)$$

Le travail des forces extérieur (4.3), devient :

$$V = \int_0^L \left[ -\frac{q(L-x)^2}{2} \theta_x v'' \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L \left[ -\frac{q(L-x)^2}{2} \beta_z \theta_x'^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L qz^* \theta_x^2 dx \quad (4.33)$$

L'énergie potentielle due au chargement appliqué est donnée par :

$$\begin{aligned} V = 0 = & \frac{qL\pi^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \left\{ \frac{1}{12} - \frac{7}{2\pi^2(2i-1)^2} - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3\pi^3} \right\} a_i b_i \right] + \\ & \frac{qL}{4} \left[ \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 a_i \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n b_s \left( \Omega - \frac{4}{(2i-1)^2} - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3\pi} - (-1)^{i+s} \Theta \right) \right\} \right] + \\ & \frac{qz^*L}{2} \left[ \sum_{i=1}^n b_i^2 \left\{ \frac{3}{2} + \frac{4(-1)^i}{(2i-1)\pi} \right\} \right] + \frac{\beta_z q \pi^2 L}{16} \left[ \sum_{i=1}^n b_i^2 (2i-1)^2 \left\{ \frac{1}{(2i-1)^2 \pi^2} - \frac{1}{6} \right\} \right] \\ & + qz^*L \left[ \sum_{i=1}^{n-1} b_i \left\{ \sum_{s=i+1}^n b_s \left( 1 + \frac{2(-1)^i}{(2i-1)\pi} + \frac{2(-1)^s}{(2s-1)\pi} \right) \right\} \right] + \\ & + \frac{\beta_z q L}{4} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} b_i \left\{ \sum_{s=i+1}^n (2i-1)(2s-1) \Theta b_s \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

La minimisation des équations (4.25) et (4.32) nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = & \frac{\pi^2(2i-1)^4}{32} a_i + \frac{g}{4} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{7}{2\pi^2(2i-1)^2} - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3\pi^3} \right\} (2i-1)^2 b_i \\ & + \frac{g}{4\pi^2} (2i-1)^2 \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n b_s \left\{ \frac{-4}{(2i-1)^2} + \Omega - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3\pi} - (-1)^{i+s} \Theta \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.33-a)$$

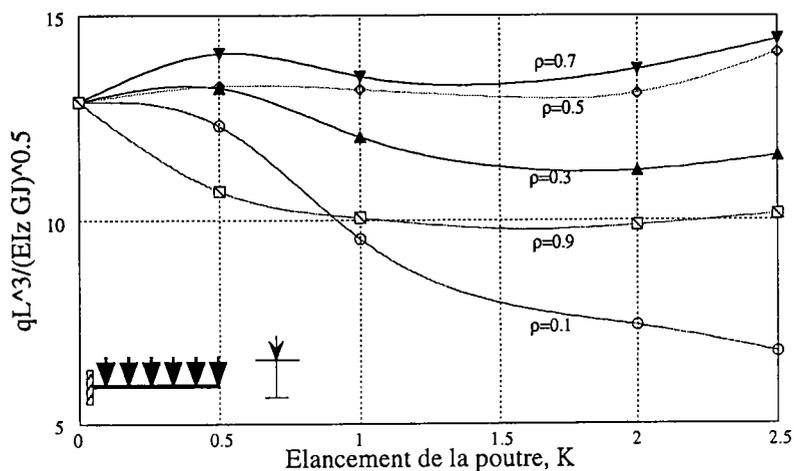
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = & \left[ \frac{(2i-1)^2}{8} + \frac{(2i-1)^4}{8} (1-\rho) K^2 + \frac{g\eta K}{\pi^3} \left( \frac{3}{2} + \frac{4(-1)^i}{(2i-1)\pi} \right) \right. \\
 & + 0.225 g(2i-1)^2 (2\rho-1) \left( 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \right) \frac{K}{\pi} \left( \frac{1}{(2i-1)^2 \pi^2} - \frac{1}{6} \right) \left. \right] b_i \\
 & + \frac{g}{4} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{7}{2\pi^2 (2i-1)^2} - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3 \pi^3} \right\} (2i-1)^2 a_i \\
 & + \frac{g}{4\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n (2s-1)^2 \left( \Omega - \frac{4}{(2i-1)^2} - \frac{8(-1)^i}{(2i-1)^3 \pi} - (-1)^{i+s} \right) a_s^- \right] \\
 & + \frac{g}{\pi^2} \left[ \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^n \left\{ \frac{\eta K}{\pi} \left( 1 + \frac{2(-1)^i}{(2i-1)\pi} + \frac{2(-1)^s}{(2s-1)\pi} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. + 0.45(2\rho-1) \left( 1 - \left( \frac{I_z}{I_y} \right)^2 \right) \frac{K}{\pi} \frac{(2i-1)(2s-1)}{4} \Theta b_s \right\} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.33-b}$$

avec :

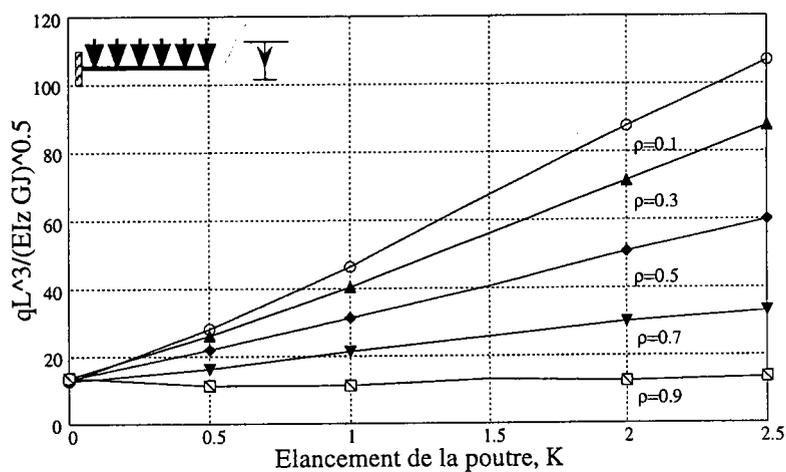
$$g = \frac{qL^3}{\sqrt{EI_y GJ}} \quad , \quad \Theta = \frac{1}{2(r+s-1)^2} - \frac{1}{2(r-s)^2}$$

#### 4.5.6 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

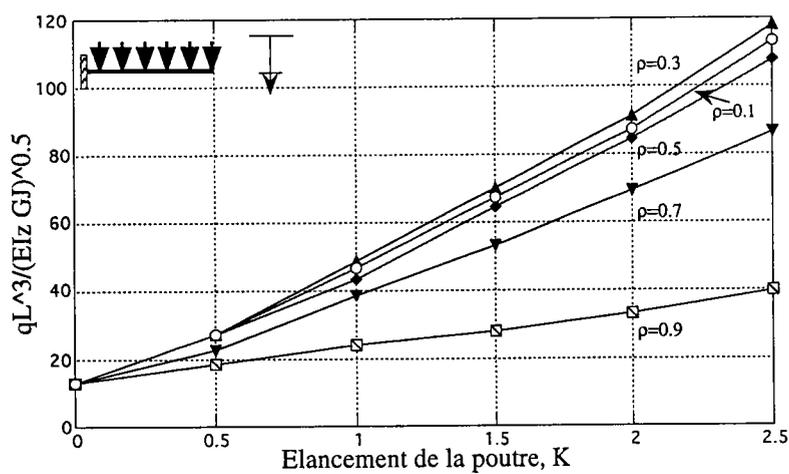
L'étude de l'effet du nombre de termes "n" utilisé dans les fonctions de forme (équations 4.24) et la variation de "g" (le moment critique adimensionnel) pour le cas d'une console soumise à une charge transversale uniformément répartie, nous a permis de constater que  $n = 9$  donne une bonne approximation de la charge critique. La figure 4.23, donne la variation de la charge critique en fonction de l'élançement de la poutre K, pour différentes valeurs du coefficient de monosymétrie  $\rho$  et pour différents points d'application de la charge transversale ( $z^*$ ). En fin, on remarque que les mêmes constatations concernant la charge transversale appliquée à l'extrémité libre de la console (paragraphe 4.8.5), sont valables pour la charge uniforme.



(a): Charge uniforme appliquée à la semelle supérieure



(b): Charge uniforme appliquée au centre torsion



(c): Charge concentrée appliquée à la semelle inférieure

Figure 4.23 : Variation de la charge critique en fonction du degré de la monosymétrie  $\rho$  et l'élancement de la poutre  $K$ .

### 4.5.7 COMPARAISON AVEC HIRT ET WANG

La recherche bibliographique, nous a permis de prendre en compte d'autres travaux qui proposent une solution au problème de déversement des poutres consoles. A titre d'exemple, on peut citer les travaux de Hirt [38] et Wang, Trahair [61] et Kitipornchai [63]. Hirt propose une solution identique à l'équation 3.22, avec les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  (tableau 4.1). Cette solution est valable uniquement pour une section bisymétrique car il ne donne pas de valeurs pour  $C_3$ .

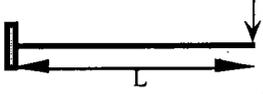
Chargement	$C_1$	$C_2$
	1.28	0.43
	2.05	0.83

Tableau 4.1 : Valeur de  $C_1$  et  $C_2$  proposé par Hirt

Trahair a établies des solutions pour les consoles ayant des sections transversales bissymétriques et chargées au centre de torsion. Il propose la formule suivante :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{4GJL^2}} \quad (4.34)$$

Wang et Kitipornchai donnent une approximation de la charge critique du déversement, tirée à partir de l'application de la méthode des intégrales finis. Les charges critiques ont l'expression suivante :

#### Console soumise à une charge concentrée appliquée à son extrémité libre

$$P_{cr} = \gamma \left[ \left\{ 1 + 4\rho(1-\rho)Kf_1 + K^2 \left( f_2(\eta+\rho) + f_3 \frac{\beta_z}{h} \right)^2 \right\}^r + K^2 \left( f_2(\eta+\rho) + f_3 \frac{\beta_z}{h} \right) \right] \quad (4.35)$$

où :

$$\gamma = \frac{4.21 \sqrt{EI_z GJ}}{L^2}$$

$\beta_z$ ,  $K$ ,  $\eta$  et  $h$  sont des caractéristiques géométriques de la section (voir paragraphe 4.3).

$f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $r$  et  $\eta$ : coefficient dépendant du point d'application de la charge et du degré de la monosymétrie  $\rho$ .

\*Charge appliquée à la semelle supérieure :

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 0.305 \quad , \quad f_2 = -5.291 \quad , \quad f_3 = 4.683 \quad \text{pour } 0.9 \leq \rho \leq 1 \quad .$$

$$r = 0.4 \quad , \quad f_1 = 0.080 \quad , \quad f_2 = 0.335 \quad , \quad f_3 = -0.424 \quad \text{pour } 0.1 < \rho < 0.9$$

$$r = 0.45 \quad , \quad f_1 = 0.285 \quad , \quad f_2 = 0.424 \quad , \quad f_3 = -0.294 \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq 0.1 \quad .$$

\*Charge appliquée au centre de torsion :

$$r = 0.4 \quad , \quad f_1 = 1.261 \quad , \quad f_2 = 0.618 \quad , \quad f_3 = -1.412 \quad \text{pour } 0 < \rho < 1 \quad .$$

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 1.261 \quad , \quad f_2 = -0.246 \quad , \quad f_3 = -0.980 \quad \text{pour } \rho = 0 \text{ et } 1 \quad .$$

\*Charge appliquée à la semelle supérieure :

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 4.199 \quad , \quad f_2 = 0.060 \quad , \quad f_3 = -1.060 \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1$$

### Console soumise à une charge uniformément répartie

$$q_{cr} = \gamma \left[ \left\{ 1 + 4\rho(1-\rho)Kf_1 + K^2 \left( f_2(\eta + \rho) + f_3 \frac{\beta_z}{h} \right)^2 \right\}^r + K^2 \left( f_2(\eta + \rho) + f_3 \frac{\beta_z}{h} \right) \right] \quad (4.36)$$

où :

$$\gamma = \frac{12.9\sqrt{EI_z GJ}}{L^3}$$

\*Charge appliquée à la semelle supérieure :

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 0.507 \quad , \quad f_2 = -9.955 \quad , \quad f_3 = 9.266 \quad \text{pour } 0.9 \leq \rho \leq 1 \quad .$$

$$r = 0.25 \quad , \quad f_1 = 0.071 \quad , \quad f_2 = 0.032 \quad , \quad f_3 = 0.072 \quad \text{pour } 0.1 < \rho < 0.9 \quad .$$

$$r = 0.45 \quad , \quad f_1 = 0.023 \quad , \quad f_2 = -2.028 \quad , \quad f_3 = 5.224 \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq 0.1 \quad .$$

\*Charge appliquée au centre de torsion:

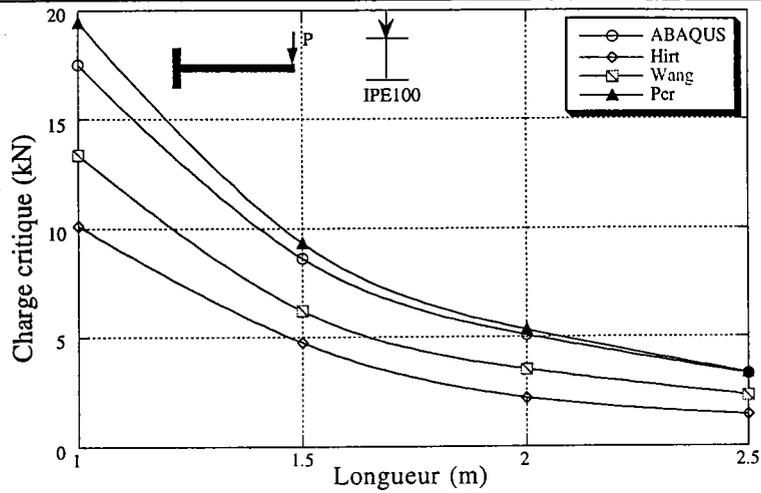
$$r = 0.4 \quad , \quad f_1 = 0.928 \quad , \quad f_2 = 1.492 \quad , \quad f_3 = -2.239 \quad \text{pour } 0 < \rho < 1 \quad .$$

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 0.928 \quad , \quad f_2 = -0.330 \quad , \quad f_3 = -1.537 \quad \text{pour } \rho = 0 \text{ et } 1 \quad .$$

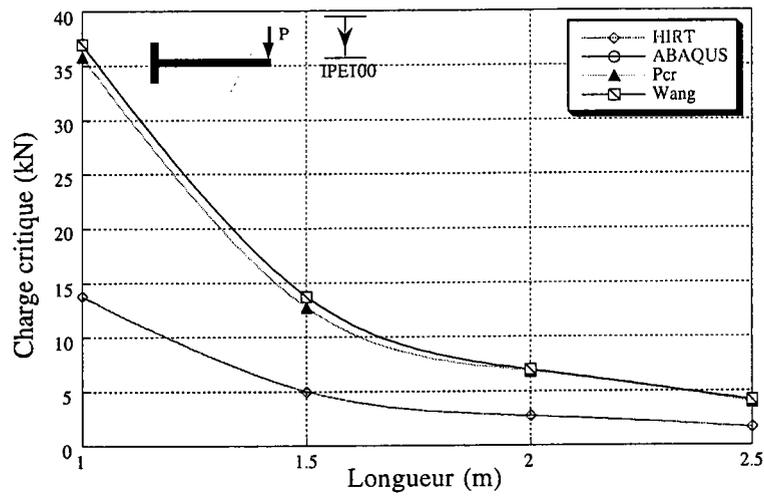
\*Charge appliquée à la semelle inférieure :

$$r = 0.5 \quad , \quad f_1 = 9.689 \quad , \quad f_2 = 0.167 \quad , \quad f_3 = -1.553 \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq 1 \quad .$$

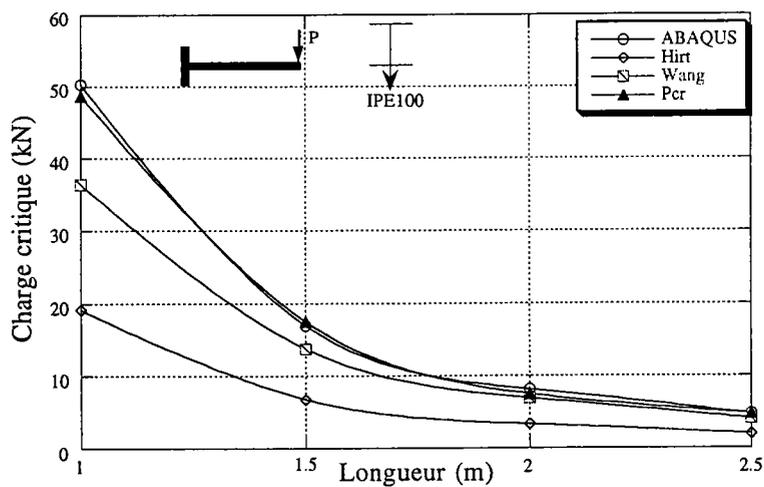
Nous avons reproduit sur les figures 4.24 et 4.25, les courbes donnant la variation de la charge critique en fonction de la longueur, calculée suivant les différentes méthodes (ABAQUS, Hirt [38], Wang [63] et notre approche). La section utilisée dans les calculs est un IPE100 . La console est chargée en différents points de la section transversale (semelle supérieure , centre de torsion et semelle inférieure). Ces courbes montrent en général, le bon accord entre notre approche, ABAQUS et Wang. Une très bonne approximation de la charge critique est obtenue lorsque la console est sollicitée au centre de torsion. Par contre, ces même courbes indiquent une déférence très importante entre nos résultats et ceux proposés par Hirt. Il ressort de cette comparaison, que l'application des coefficients donnés par Hirt conduit à des erreurs considérables .



(a) : Charge concentrée appliquée à la semelle supérieure

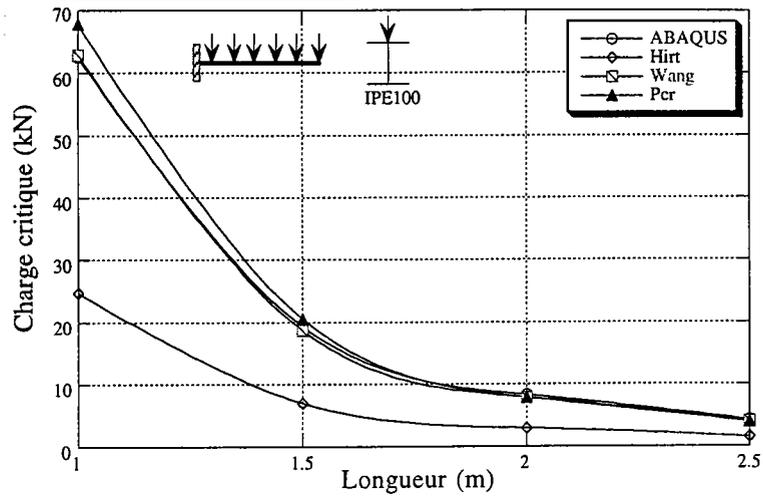


(b) : Charge concentrée appliquée au centre de torsion

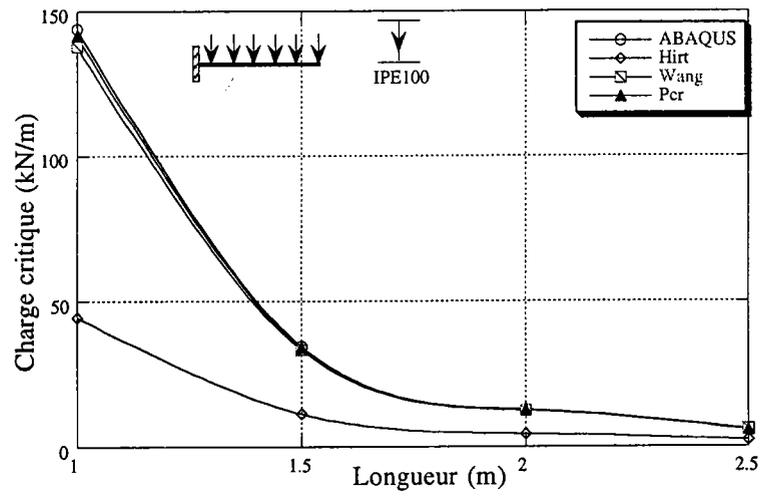


(a) : Charge concentrée appliquée à la semelle inférieure

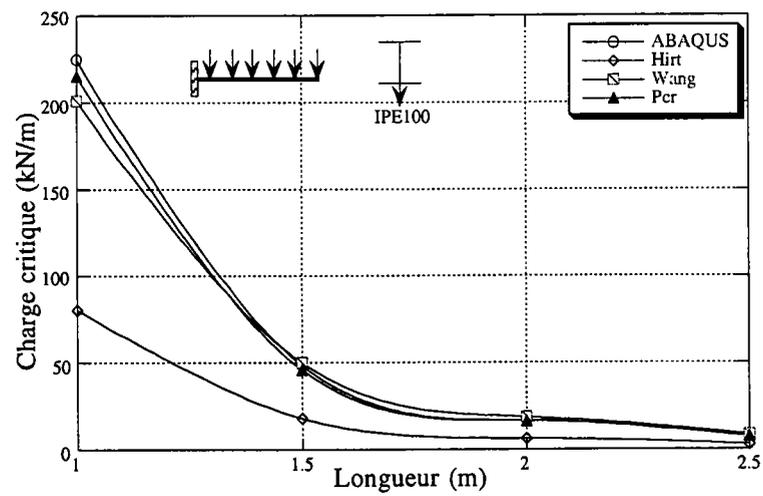
Figure 4.24: Variation de la charge critique en fonction de la longueur



(a) : Charge concentrée appliquée à la semelle supérieure



(b) : Charge concentrée appliquée au centre de torsion



(a) : Charge concentrée appliquée à la semelle inférieure

Figure 4.25: Variation de la charge critique en fonction de la longueur

### 4.5.8 COMPARAISON EXPÉRIMENTALE

Afin de vérifier expérimentalement notre approche, nous allons la comparer avec les résultats expérimentaux obtenus par Trahair [4]. Il a effectué des essais sur des poutres consoles ayant une section en I en aluminium, bisymétrique et monosymétrique. Ces consoles ont été sollicitées par des charges transversales concentrées, appliquée en différents points de la section (tableau. 4.2). Elles ont des longueurs de 1.27 m et de 1.65 m. La figure 4.26 donne les caractéristiques géométriques des sections utilisées dans les calculs.

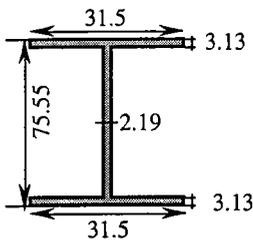
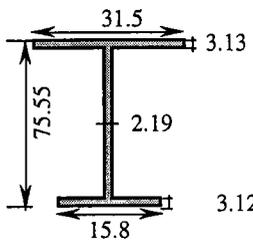
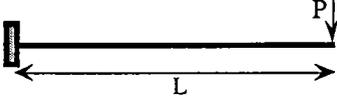
Section transversale (Aluminium)	Caractéristiques géométriques $\left\{ \begin{array}{l} E = 6.4813 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \\ G = 2.6683 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2 \end{array} \right\}$
 <p>(a)</p>	$A = 3.49023 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 3.19135 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $I_z = 1.63346 \cdot 10^{-08} \text{ m}^4$ $J = 8.95757 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$ $I_\omega = 2.14266 \cdot 10^{-11} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.0$ $\rho = 0.5$
 <p>(b)</p>	$A = 3.00226 \cdot 10^{-04} \text{ m}^2$ $I_y = 2.44373 \cdot 10^{-07} \text{ m}^4$ $I_z = 9.20976 \cdot 10^{-09} \text{ m}^4$ $J = 7.35527 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$ $I_\omega = 4.85069 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6$ $\beta_z = 0.026$ $\rho = 0.8868$

Figure 4.26: Sections utilisées dans la comparaison



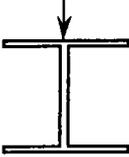
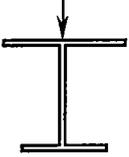
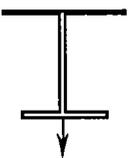
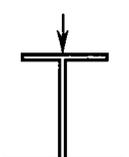
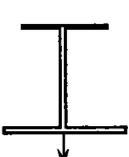
Section	Point d'application de la Charge	L (m)	K	Expérimentale (N)	ABAQUS (N)	Pcr (N)
(a)		1.65	0.45	323.00	332.00	316.5
		1.27	0.59	596.00	586.67	575.32
		1.65	0.45	265.00	247.32	255.93
		1.27	0.59	405.00	391.56	415.20
(b)		1.65	0.378	146	155.65	144.13
		1.27	0.492	227	238.88	239.64
		1.65	0.378	168.00	199.38	174.72
		1.27	0.492	288.00	317.10	306
		1.65	0.378	168	168.7	165.77
		1.27	0.492	253	252.4	263.04
		1.65	0.378	255.00	277.35	254.64
		1.27	0.492	468.00	497.09	485.15

Tableau 4.2

Dans cette partie, nous avons déterminé avec une approximation satisfaisante la charge critique de déversement d'une poutre console. Les abaques permettant le calcul de cette charge critique pour des sections en I monosymétrique sont rassemblées dans les figures

4.21, 4.22 et 4.23 , pour différent type de chargement. Ainsi, le tableau 4.2, montre que la comparaison entre les résultats des essais , ABAQUS et l'approche proposée (méthode énergétique) confirme non seulement la validité de l'approche mais aussi la bonne concordance des abaques proposées avec l'expérience. Devant le vide réglementaire actuel, ces abaques peuvent être utilisé pour estimer le moment critique de déversement des poutres consoles.

## 4.9 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les charges critiques de déversement ont été calculées par application de la méthode énergétique. Cette méthode se base sur la minimisation du potentiel total. Les poutres considérés ont des sections monosymétrique chargées par un chargement quelconque produisant la flexion par rapport à l'axe fort. Dans ce cas, plusieurs termes sont nécessaires pour approximer les modes de déplacements réels. Des solutions numériques sont trouvées pour les poutres sollicitées par des gradients de moments et les poutres consoles. Dans le cas des poutres bi-articulées soumises à un gradient de moment, les solutions proposées par l'Eurocode3 sont approximatives pour une section bissymétrique, mais acceptables. Pour les sections monosymétriques, les solutions de l'Eurocode3 sont très différentes aux solutions numériques. Ces différences s'amplifient avec le degré de monosymétrie. Elles sont très importantes pour les sections en T.

Pour les poutres consoles, aucune solution réglementaire n'est proposée. La méthode énergétique permet de trouver la solution aux cas de chargements classiques sollicitants les consoles. Les abaques proposées ( figure 4.21, 4.22 et 4.23), peuvent être utilisée pour les calculs.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à donner une solution au problème de déversement des poutres à parois minces et à profils ouverts. Dans le premier chapitre, nous avons exposé la théorie de la torsion uniforme et non uniforme. La première est applicable aux sections massives, la deuxième aux profilés ouverts à parois minces. On a vu que la torsion non uniforme est caractérisée par l'apparition dans les sections transversales de contraintes normales, en plus de contraintes tangentielles. Cette théorie fait appel à de nouvelles quantités (gauchissement, bimoment, ..., etc.) qui s'ajoutent à celles déjà utilisées par la théorie des poutres. Ainsi, la théorie des sections planes découle comme un cas particulier de la théorie des surfaces sectorielles. En fin, la théorie des surfaces sectorielles, s'est montrée plus générale et plus féconde que la théorie classique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait une étude qui nous a permis d'établir les équations différentielles d'équilibre d'une poutre soumise à un chargement quelconque. Nous avons remarqué, que la théorie des surfaces sectorielles, dans son aspect mathématique, fait appel à une méthode variationnelle qui abouti à des équations différentielles ordinaires, contenant plusieurs caractéristiques géométriques et élastiques concernant la déformation de la pièce. Ces équations différentielles, dans le cas particulier où les déplacements sont linéaires, sont identiques à celles données par Vlassov.

Dans le troisième chapitre, nous avons résolu le système d'équations différentielles avec la méthode de Galerkin, dans le cas des poutres simple, en adoptant un seul terme dans l'équation de test qui approxime les déplacements. Cette démarche, nous a permis d'obtenir le tableau 3.1, qui donne les valeurs des coefficients  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Ces valeurs sont identiques à celles données par l'Eurocode 3, sauf  $C_3$  pour les poutres ayant une section transversale monosymétrique et soumise à une charge transversale. Cette résolution a été faite aussi par le code d'éléments finis ABAQUS. Sur les résultats que nous avons présentés et précisément sur les sections symétriques, les charges critiques données par l'Eurocode 3 sont tout à fait concluante. Quant aux sections monosymétriques, on peut annoncer une corrélation acceptable entre ABAQUS et nos résultats.

Dans le dernier chapitre, nous avons calculé la charge critique de déversement par une méthode énergétique, où nous considérons une fonction de forme à plusieurs termes. Cette charge critique est fonction du degré de la monosymétrie  $\rho$ , l'élancement de la poutre  $K$  et bien sûr le type du chargement appliqué à la poutre. Dans le cas des poutres simples sollicitées par

un gradient de moment, nous avons remarqué que pour  $\beta_1 < 0$ , l'utilisation d'un ou deux termes dans la fonction d'approximation donne satisfaction. Ainsi les résultats de l'Eurocode se révèlent cohérents. Quand le gradient de moment est petit ( $\beta_1 \leq 0$ ), nos solutions sont en bon accord avec les résultats numériques lorsque plusieurs termes dans la fonction de forme sont adoptés. Cette fois ci, les résultats de l'Eurocode 3 sont surestimés.

Pour les problèmes de déversement des consoles, l'Eurocode 3 ne donne pas de solution. En appliquant notre méthode, nous avons constaté que d'une façon générale, la résistance au déversement de la poutre console en I monosymétrique s'améliore avec l'augmentation de la rigidité de la semelle comprimée ( $\rho$  diminue). Pour valider notre approche nous avons comparé le calcul de la charge critique de déversement obtenu par cette méthode avec les résultats d'ABAQUS, le calcul fait à l'aide d'expressions analytiques et les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature. Nos résultats étaient cohérents. Nous avons donc pu construire des abaques du type représenté dans les figures 4.20, 4.21 et 4.22. Ces abaques peuvent servir pour le dimensionnement des consoles.

- 
- [1] **ABAQUS Theory manuel**, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc, Pawtucket.
  - [2] **ABAQUS User's manuel**, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc, Pawtucket.
  - [3] **ALWIS W. A . M.; USAMI T.** - Elastic Lateral Torsional Buckling Of Unbraced and braced Planar Frames. Computers & Structures. Vol.10, pp.517-529, 1979.
  - [4] **ANDERSON M. ; TRAHAIR.NICOLAS .S** - Stability of Monosymmetric Beams and Contilivers. Journal of the Proceedings of the Americain Society of Civil Engineers. January, 1972.
  - [5] **AKOUSSAH. K . E** - Analyse Non Linéaire des Structures a Parois Minces par Éléments finis et son Application aux Bâtiments Industriels. Thèse présentée à l'École des gradués de l'Université de Laval Pour l'obtention du Grade de Philosophiae Doctor, juin 1987.
  - [6] **ARGYRIS .J.H.; DUNNF . P. C and SCHARPF .D .W-** On Large Displacement-Small Strain of Structures With Rotational Degrees of Freedom. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol 15, pp 99-135, 1978.
  - [7] **ASHRAF ALI .A; SRIDHARAN.SRINIVASAN-** A Versatile Model for Interactive Buckling of Columns And Beam-Columns. International Journal of Solids Structures. Vol.24, No-5, pp. 481-496, 1988.
  - [8] **ATTARD MARIO . M; SOMERVAILLE . IAN .J-** Stability of Thin-Walled Open Beams Under Nonconservative Loads. Mech. Struct. & Mach. Vol.15 (3), pp.395-412, 1987.
  - [9] **ATTARD MARIO .M** - Lateral Buckling Analysis of Beams by The FEM, Computer & Structures, Vol. 23, No. 2, pp. 217-231, 1986.
  - [10] **AURA . CONCI** - Large Displacement Analysis of Thin-Walled Beams With Generic Open Section. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 2109-2127, 1992.
  - [11] **BARAKA .S** - Caractéristiques Torsionnelles des Profils à Parois Minces . Construction métallique n° 1, 1996.
  - [12] **BARSOUM . R. S ; GALLAGHER .R.H** - Finite Element Analysis Of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.2, pp. 335-352, 1970.
  - [13] **BATISTA.E.de Miranda** - Étude de la Stabilité des Profils à Parois Minces et Sections Ouvertes de Type U et C. Thèse Présentée à la Faculté des Sciences Appliquées en Vue de l'Obtention du grade Scientifique de Docteur en Science Appliquée de l'Université de Liège. Année Académique 1987-1988.
  - [14] **BATOZ .J.L ; DHATT .G.-** Modélisation des Structures par Éléments finis. Hermès, Paris, 1990.
  - [15] **BATHE.KLAUS-JÜRGEN ; BOLOURCHI.SAÏD** - Large Displacement Analysis Of Three-Dimensional Beam Structures. International Journal for Numerical Methods In Engineering. Vol.14, pp 961-986, 1979.
  - [16] **BRAHAM .M** - la Construction Métallique Légère au Service du Bâtiment Industriel, A.P.K, N° 11.
-

- 
- [17] **BAZANT. ZDENEK.P** and **EL NIMEIRI.M** -Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99,no.EM6, pp.1259-1280, Dcember 1973.
- [18] **BOZENA .B ; BUDKOWSKA** - Sensitivity Analysis of Thin-Walled I-Beams Undergoing Torsion. Thin-Walled Structures, Vol 12, pp 51-61, 1991.
- [19] **BLEICH .F** - Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill, New York, 1952.
- [20] **BRADFORD .M.A ; WEE .A**- Analisys of Buckling Tests on Beams on Seat Supports. Journal of Construction Steel Research, Vol 28, pp 227-242, 1994.
- [21] **CALGARO .J.A ; VIRLOGEUX .M** - Projets et Construction des Ponts. Presses de l'ECPC, 1994.
- [22] **CHAN .S.L ; KITIPORNCHAI .S** -Geometric Nonlinear Analysis of Asymetric Thin-Walled Beam-Columns. Engineering Structures, Vol.9, October 1987.
- [23] **CHAJES .A** -Principales of Structural Stability Theory. Prentice-Hall, Inc , Englewood Cliffs, New Jersey , USA, 1974.
- [24] **COATE .R.C; COUTRE .M.G; KONG .F.K** - Structural Analysis. Chapman & Hall, 1988.
- [25] **COURBON .J** - Résistance des Matériaux, Paris , Dunod 1965.
- [26] **DJALALY .H** - Étude Du Comportement Élastique et Élasto-Plastique de la Barre en Sollicitation Complexe. Thèse Présentée à l'Université de Paris IV, en Vue d'Obtenir le Titre Scientifique de Docteur-Ingénieur, Juin 1972.
- [27] **DJALALY .H** - Comportement Élasto-Plastique d'une Barre Sollicitée en Compression et Flexion Déviée. Construction Métallique N° 4, 1972.
- [28] **DJALALY .H** - Calcul de La résistance Ultime au Déversement . Construction Métallique N° 1, 1974.
- [29] **DJALALY .H** -Influence Des Phénomènes d'Instabilité Sur La Résistance Ultime Des Éléments de Structures Dans le domaine Élasto-Plastique. Thèse Présentée à l'Université de Paris IV, en Vue d'Obtenir le Titre scientifique de Docteur ès Sciences, Avril 1976.
- [30] **EL-HAMMASI .S.A** -Numerical Method for Analysing Open Thin-Walled Structures Under Interaction of bending and Torsion. Computers &Structures Vol 37, pp. 947-956, 1990.
- [31] **ELY DIALLO .B** - Étude Théorique et Expérimentale de la Stabilité Appliquée au Déversement des pannes Zeds. Thèse Présentée à l'Université de Paris VI, en Vue de l'Obtention du Titre Scientifique de Docteur - Ingénieur, Juin 1973.
- [32] **EUROCODE3** - Calcul des Structures en Acier et Document d'Application Nationale, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour le Bâtiment, Paris, Eyrolles 1997.
-

- 
- [33] **GALLAGHER .R.H** -Finite Element Analysis Fundamentals. Prestice-Hall, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [34] **GERE .J.M ; TIMOSHENKO .S.P** - Theory of Elastic Stability. New-York,Mc Graw-Hill, 1961.
- [35] **GOLTERMAN .P ; MOLLMANN .H** -Interactive Buckling in Thin-Walled Beams. I - Theory. International Journal of solids Structures. Vol. 25,No.7 pp. 715-728, 1989.
- [36] **GOLTERMAN .P ; MOLLMANN .H** -Interactive Buckling In Thin-Walled Beams. II - Application. International Journal of solids Structures. Vol. 25,No.7 pp. 729-749, 1989.
- [37] **HJEMSTAD .K.D** - Toward a Mythology of Cyclic Lateral Buckling of Beams.Stability and Ductility of Steel Structures Under Cyclic Loading.CRC Press London. pp 249-259, 1993.
- [38] **HIRT.M .A & BEZ .R.**- Traité de Génie Civil de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Vol , Presses Polytechniques et Universitaire Romandes, 1994.
- [39] **KAMAL .H ; MOHRI .F et ROTH .J.C**- Analyse Théorique et Expérimentale des éléments à Parois Minces et à sections ouvertes. 3<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, Tétouan Maroc, 22..25 avril 1997.
- [40] **KARAMANLIDIS .D ; GESCH-KARAMANLIDIS .H**- Geometrically and Materially Nonlinear Finite Element Analysis Of Thin-Walled Frames : Numerical Studies. Thin-Walled Structures, Vol.4, pp.247-267, 1986
- [41] **KITIPORNCHAI .S ; WANG .C.M; TRAHAIR.NICOLAS .S** -Buckling of Monosymmetric I-Beams Under Moment Gradient. Journal of Structural Engineering, Vol. 112,N°.4, April 1986.
- [42] **KRAJGINOVIC .D.**- A Consistent Discrete Elements Technique for Thin-walled Assemblages. International Journal of solids Structures. Vol. 5, pp. 639-662, 1969.
- [43] **LUNDGREEN . K** - The Sectorial Coordinate Of Elastic Ideally Plastic Beams Of Three Thin-Walled Open Cross Sections. International Journal Of Mechanical Science. 4 january 1977.
- [44] **LUNDGREEN . K** - Vlasov Torsion of Elastic Ideally Plastic Beams Of Thin-Walled Open Cross Section. International Journal Of Mechanical Science. Vol. 18, pp.105-109,1976.
- [45] **MAPLE V** - Language Reference Manual, Waterloo Maple Publishing, Springer Verlag, 1991.
- [46] **MASSEY.CAMPBELL; A.B, E.B** - The Lateral Stability of I Beams in The Plastic Range.Civil Engineering Transactions, september 1964.
- [47] **MASSONNET .C** - Résistance des Matériaux, Paris, Dunod 1965
- [48] **MEI.CHUH** - Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Section Using The Finite Element Method. International Journal Mechanical Science. Vol. 12, pp. 883-891, 1970.
-

- 
- [49] **MOHRI .F** - Torsion des Éléments minces à sections ouvertes sur ABAQUS. La Conférence Utilisateurs ABAQUS, Paris, 7 Octobre 1997.
- [50] **MURA .T & KOYA. TATSUHITO.** - Variational Methods In Mechanics. Oxford University Press, 1992.
- [51] **MURRAY .N.WT .** - Introduction To The Theory Of Thin-Walled Structures. Clarendon Press Oxford, 1986 .
- [52] **NETHERCOT .D.A ; ROCKEY .K.C** - A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams. The Structural Engineer. Vol.49, NO 7, pp. 321-330, july 1971.
- [53] **OJALVO .M.**- The Buckling of Thin-Walled Open-Profile Bars. Journal of Applied Mechanics. Vol.56, pp.663-638. September 1989.
- [54] **REIS.A .J ; BRANCO .F.A** - Thin-Walled Structures. Recent Technical Advances and Trends in Design, Research and Constructic Int.Conf. at The University of Stratchcycle, Glasgow. 3-6 April 1979.
- [55] **ROIK .K ; KINDMAN .K**- Berechnung Stabilitätsghährdeter Stabwerke mit Berücksichtigung von Entlastungsbereichen . Der Stahlbau. 10, 1982.
- [56] **ROBERTS .T.M; ACHOUR .B** - Torsion Of Braced Thin-Walled Open Sections. Journal Of Structural Engineering. Vol. 116, No. 1, 1990.
- [57] **ROBERTS .T.M**- Second Order Strains and Instability of Thin-Walled Bars of Open Cross section. International Journal of Mechanical Science. Vol.23, pp.297-306, 1981.
- [58] **SÄLLSTRÖM .J.H** -Accurate Calculation of Elastic Buckling Loads for Space Frames Built up of Uniform Beams With Open Thin-Walled Cross Section. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.39, pp.2319-2333, 1996.
- [59] **SZYMCZAK .C** - On Torsional Buckling of Thin-Walled I Columns With Variable Cross Section. International Journal for Solids Structures. Vol.19, No.6, pp. 509-518, 1983.
- [60] **TALL .L** - Structural Steel Design. Robert E. Krieger Publishing Company Maladar, Florida, 1983.
- [61] **TRAHAIR .N.S** - Flexural-Torsional Buckling of Structures. Published By E & FN Spon, An imprint Of Chapman & Hall, 2-6 Boundary Row, London SE1 8HN.
- [62] **VLASOV .B.V** - Pièces Longues en voiles Minces. Traduit Du Russe Par G.Smironoff, Édition Eyrolles, 1962.
- [63] **WANG .C.M ; KITIPORNCHAI .S** - On Stability of Monosymmetric Cantilivers. Engineering Structures, Vol.8, July 1986.
- [64] **YANG.YEONG-BIN ; MCGUIRE .W**- Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis. Journal Of Structural Engineering, Vol. 112, No. 4, april 1986.
- [65] **YANG .YEONG-BIN ; MCGUIRE .W** - A Work Control Method For Geometrically Nonlinear Analysis. Proceedings Of The NUMETA '85 Conference/ Swansea/ 7-11, pp. 913-921,january 1985.
-

- [66] **YOO .C.H** -Bimoment Contribution to Stability of Thin-Walled Assemblages. Computers & Structures. Vol. 11, pp.465-471, 1980.
- [67] **YOSHIDA .H ; IMOTO .Y** -Inelastic Lateral Buckling of Restrained Beams. Engineering Mechanics Division Proceedings of The American Society of Civil Engineers. Vol. 99, pp 343-366, April 1973.
- [68] **ZBIROHOWSKI-KOSCIA** - Thin-Walled Beams. First Published By Crosby Lockwood & Son Ltd, 1967.

## ANNEXE I

## MÉTHODE DE GALERKIN

soient deux fonctions  $f\left(\vec{r}\right)$  et  $g\left(\vec{r}\right)$ , définie dans un domaine "V", où  $\vec{r}$  est une variable vectorielle. On a  $\vec{r} = \{x\}$  ou  $\vec{r} = \{x,y\}$ , etc ..., suivant que  $\vec{r}$  est à une, ou deux dimension, etc...

Rappelons que le produit scalaire de f et g, noté  $(f,g)$ , est définie par :

$$(f,g) = \int_V f\left(\vec{r}\right) g\left(\vec{r}\right) dV$$

où  $dv$  est l'élément de volume de V entourant le point  $\vec{r}$ .

Soit à résoudre une équation dans V, assortie de conditions aux limites sur le contour "C" de "V".

$$\begin{cases} \Re f\left(\vec{r}\right) = 0 & \text{dans V} \\ \Im g\left(\vec{r}\right) = 0 & \text{sur le contour C de V} \end{cases} \quad (1)$$

$\Re$  et  $\Im$  sont des opérateurs, linéaires ou non. On approche la fonction cherchée  $f\left(\vec{r}\right)$  par  $g\left(\vec{r}\right)$  telle que :

$$\begin{cases} f\left(\vec{r}\right) \approx g\left(\vec{r}\right) \\ g\left(\vec{r}\right) = g_c\left(\vec{r}\right) + \sum_{j=1}^n a_j \phi_j\left(\vec{r}\right) \end{cases} \quad (2)$$

où  $g_c(\vec{r})$  est choisie de telle sorte que les conditions aux limites soient (si possible) exactement satisfaites, quels que soient les  $a_j$  :  $\mathfrak{R}g(\vec{r}) = 0$ . Les  $\phi_j(\vec{r})$  sont des fonctions d'essai, connues, choisies en particulier en fonction du résultat attendu pour (1), les  $a_j$  sont des coefficients qu'il faut déterminer de façon à satisfaire au mieux l'équation 1.

portons  $g(\vec{r})$  à la place de  $f(\vec{r})$  dans l'équation 1 : on obtient :

$$\mathfrak{R}g(\vec{r}) = \mathfrak{R}(a_1, a_2, \dots, a_n; \vec{r}) \quad (3)$$

$\mathfrak{R}(a_1, a_2, \dots, a_n; \vec{r}) = \mathfrak{R}(a_j; \vec{r})$  est appelé le résidu de l'équation à résoudre. La méthode des résidus pondérés consiste à déterminer les  $a_j$  de telle sorte que :

$$(\mathfrak{R}, \psi_k) = \int_V \mathfrak{R}(a_j; \vec{r}) \psi_k(\vec{r}) dV = 0, \quad k = 1 \text{ à } n \quad (4)$$

La relation 4 est un système de  $n$  équations, linéaires ou non, qui permet de déterminer les  $n$   $a_j$ . Si les fonctions  $\phi_j$  sont correctement choisies, et si les  $a_j$  sont correctement déterminés,  $g(\vec{r})$  doit être voisin de  $f(\vec{r})$ .

La méthode de Galerkin consiste à choisir  $\psi_k(\vec{r})$  dans la même famille des  $\phi_l(\vec{r})$  c-à-d :

$$\psi_k(\vec{r}) = \phi_l(\vec{r}), \quad k = 1 \text{ à } n$$

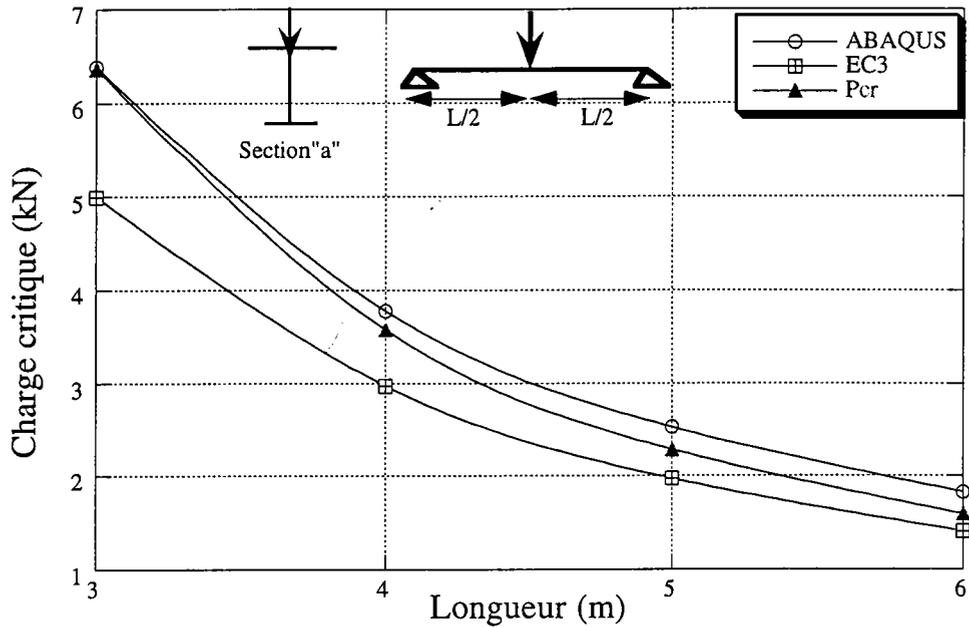
Les conditions requises pour appliquer correctement la méthode de Galerkin sont les suivantes :

\* les fonctions d'essai  $\phi_k(\vec{r})$  doivent être linéairement indépendantes, constituer les  $n$  premières fonctions d'un ensemble complet de fonctions, et satisfaire exactement les conditions aux limites.

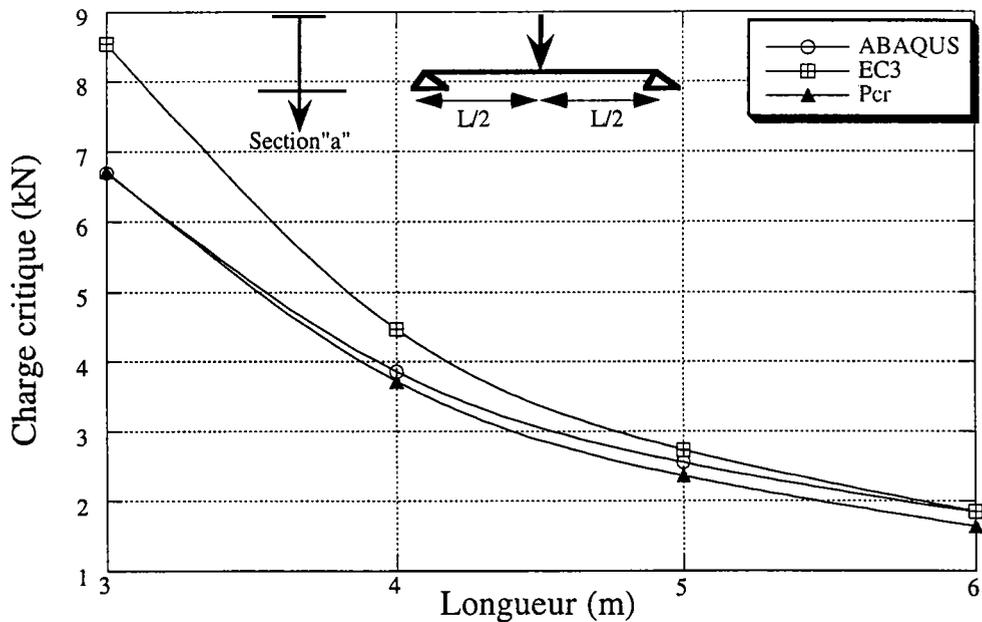
\* Les fonctions  $\psi_k(\vec{r})$  sont choisies dans la même famille que les fonctions d'essai  $\phi_k(\vec{r})$ .

## ANNEXES 2

Dans cet annexe, nous donnons les charges critiques calculées selon l'Eurocode 3, ABAQUS et notre approche. Le chargement est appliqué au niveau des semelles supérieures et inférieures. Les section utilisées sont : la section "a" et "b", données par la figure 3.20.

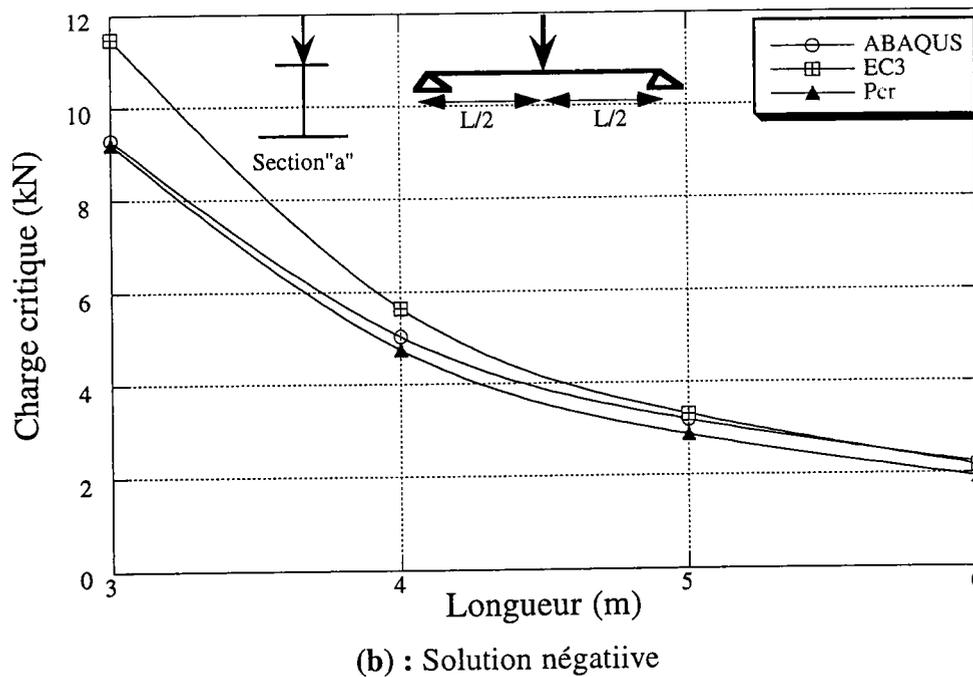
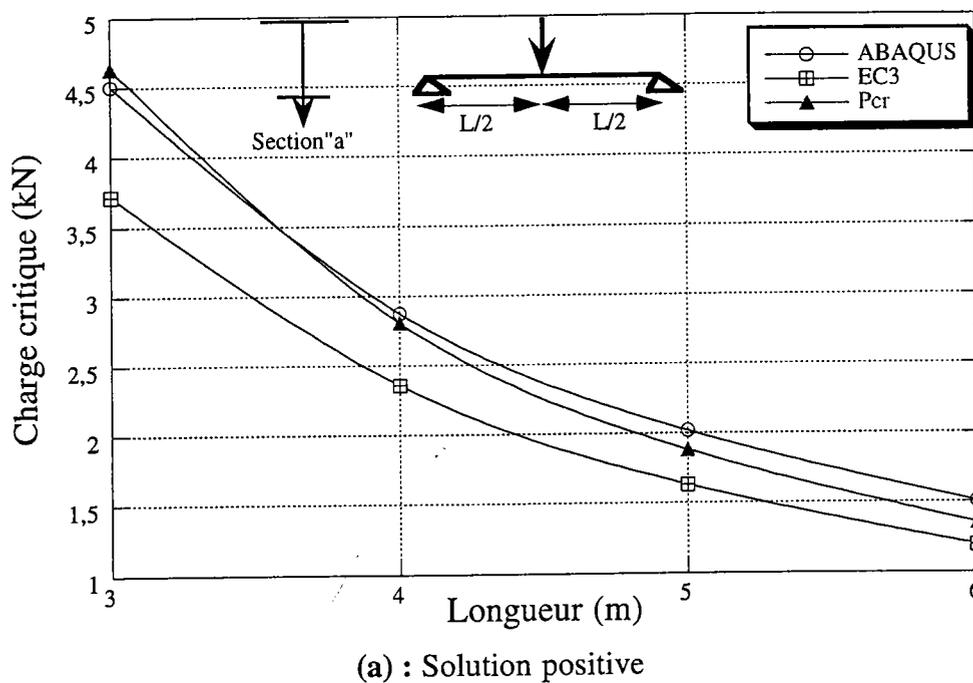


(a) : Solution positive

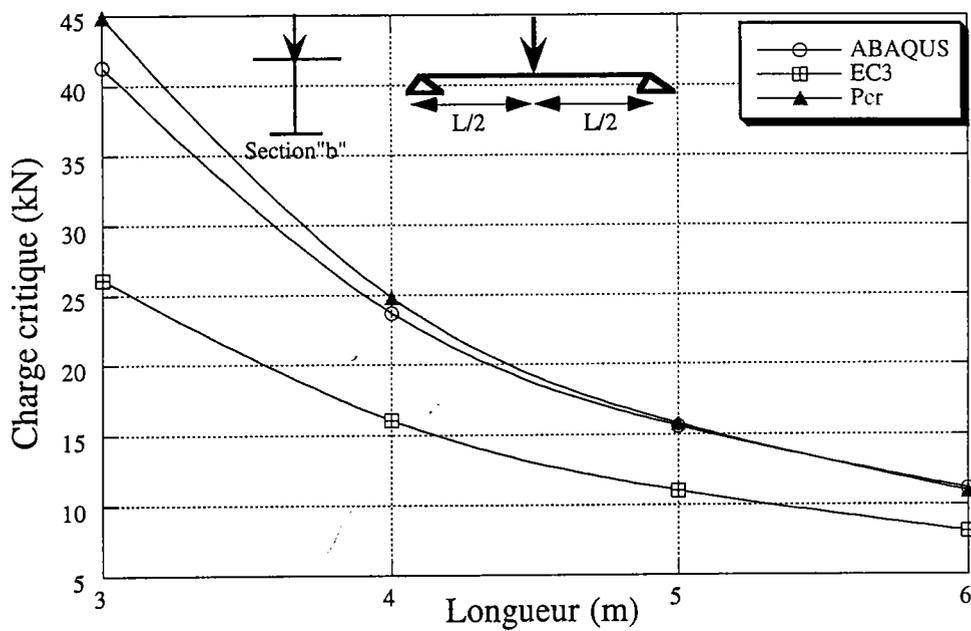


(b) : Solution négative

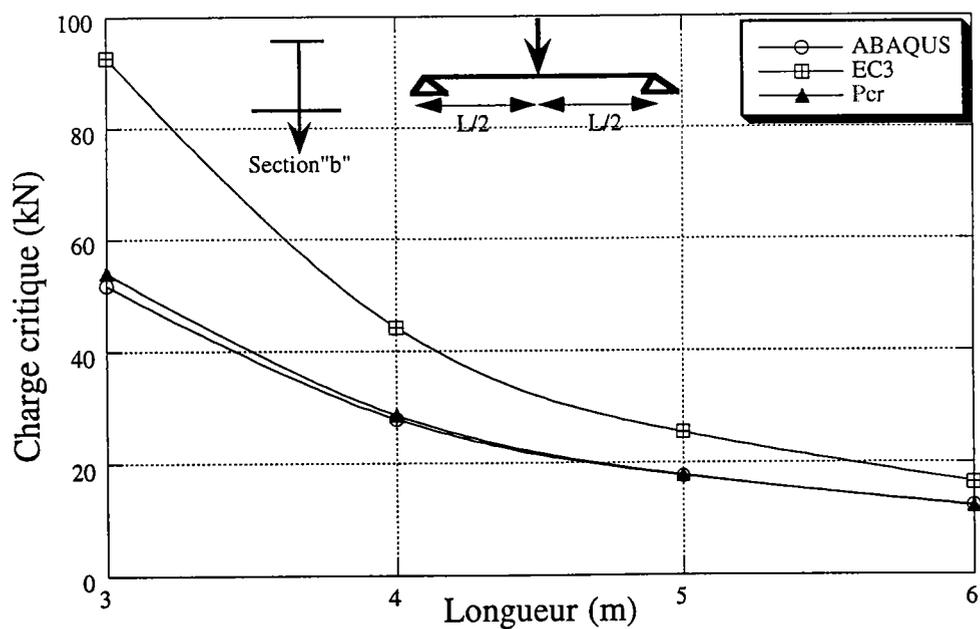
**Figure 1** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre chargée au milieu.



**Figure 2** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre chargée au milieu.

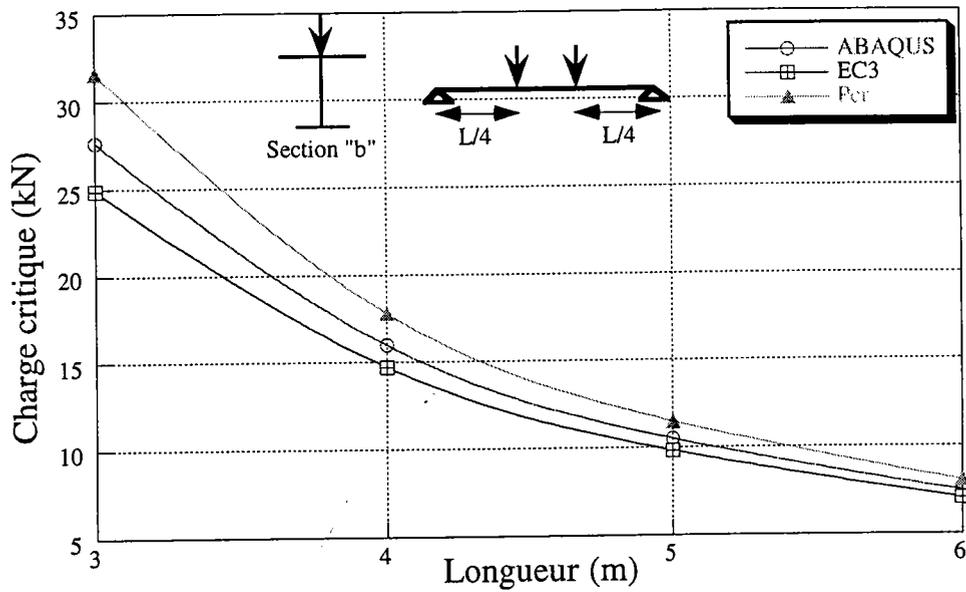


(a) : Solution positive

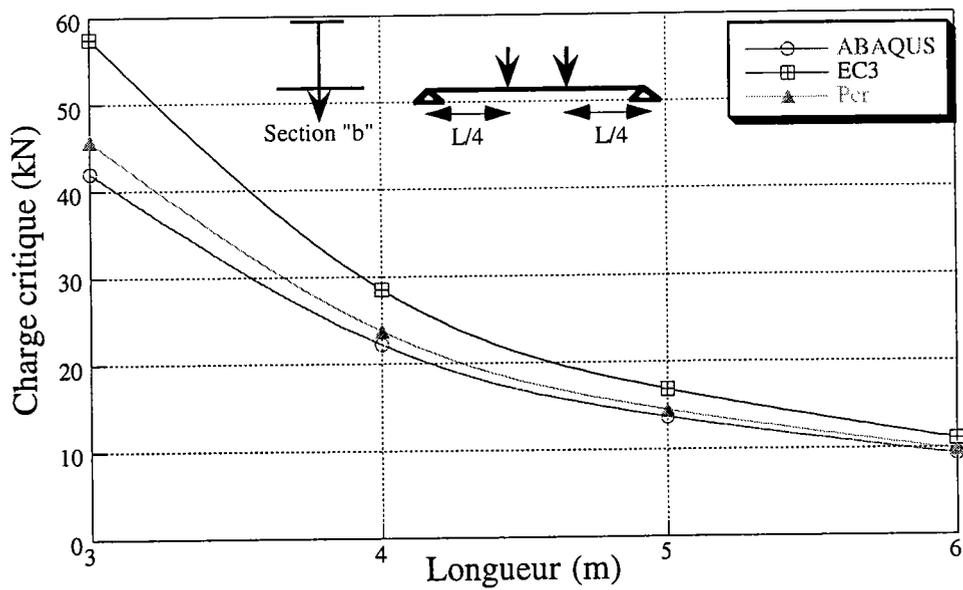


(b) : Solution négative

**Figure 3** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre chargée au milieu.



(a) : Solution positive



(b) : Solution négative

**Figure 4** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre sollicitée par une charge appliquée à  $L/4$  des appuis..

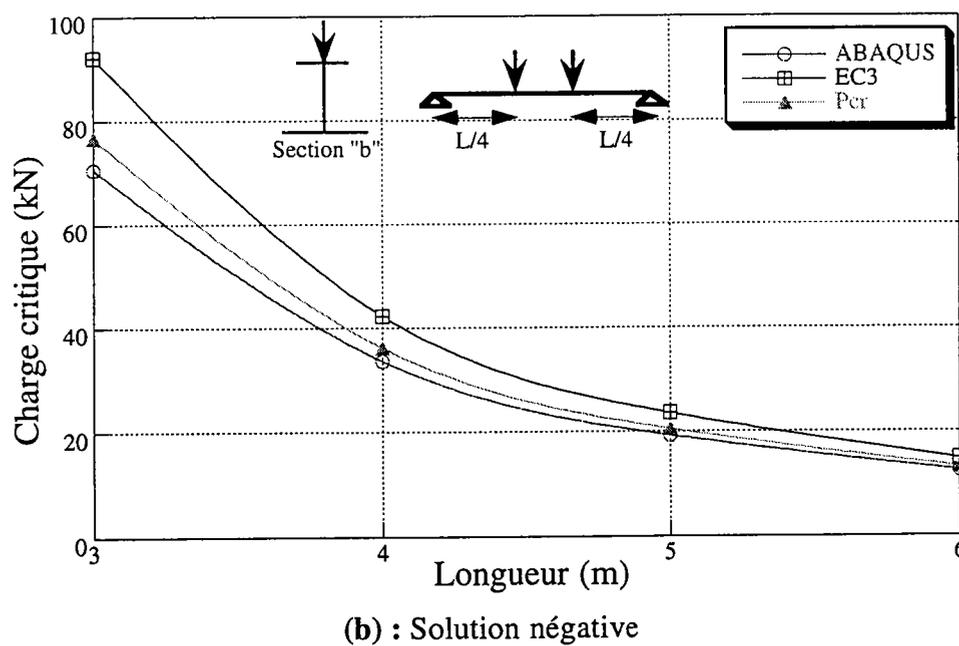
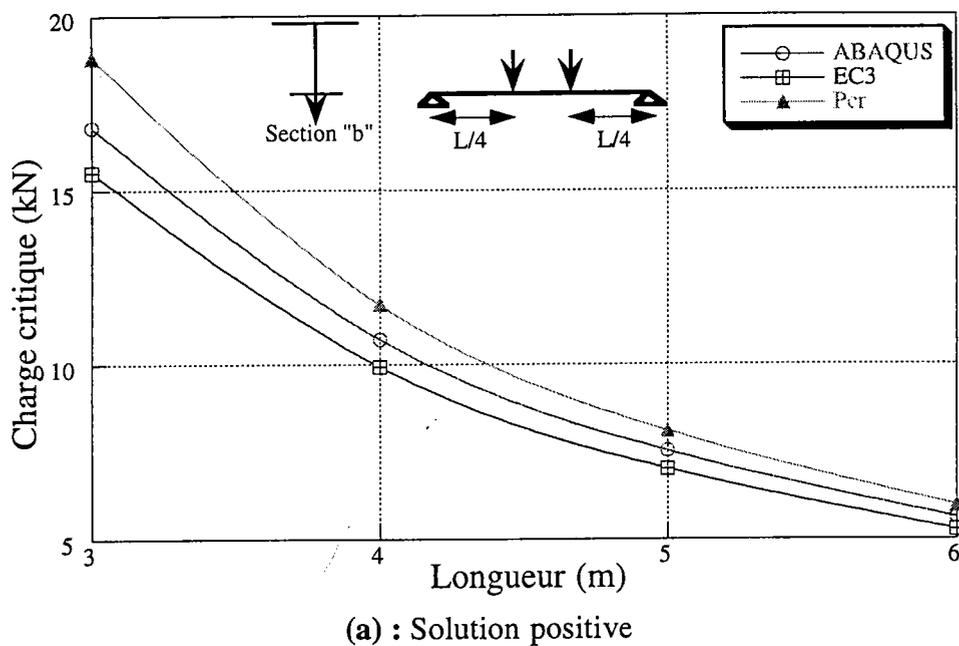
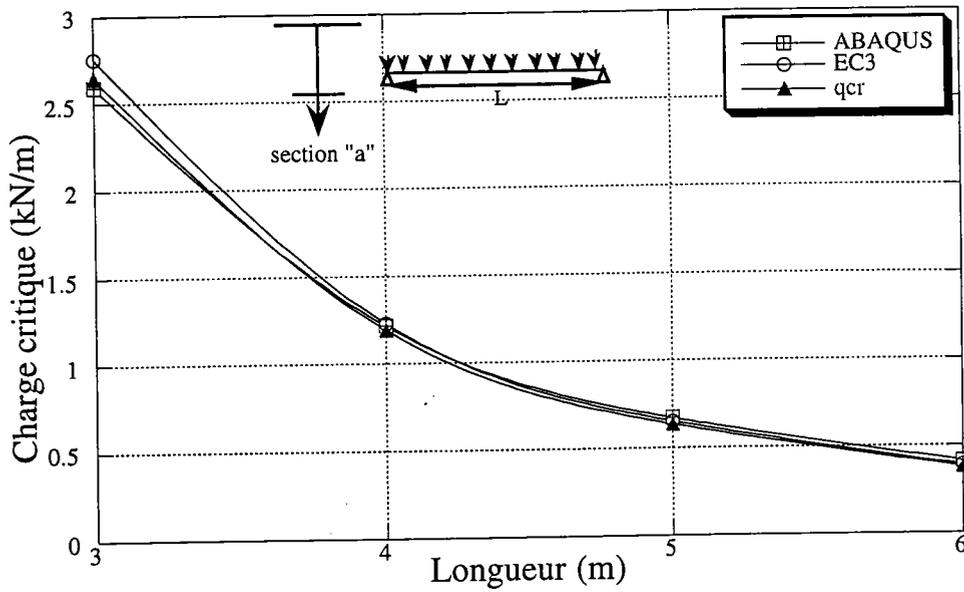
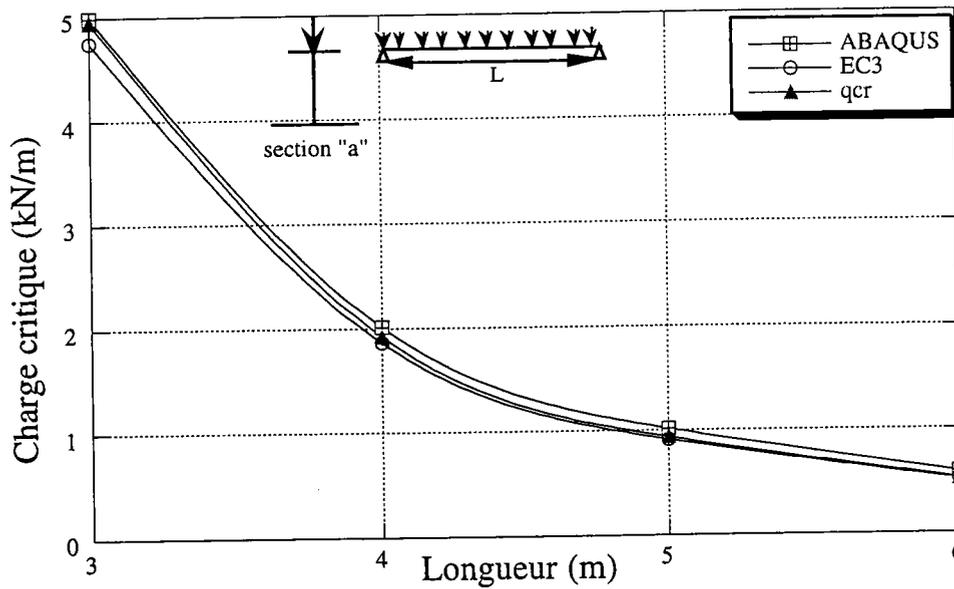


Figure 5 : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre sollicitée par une charge appliquée à L/4 des appuis.

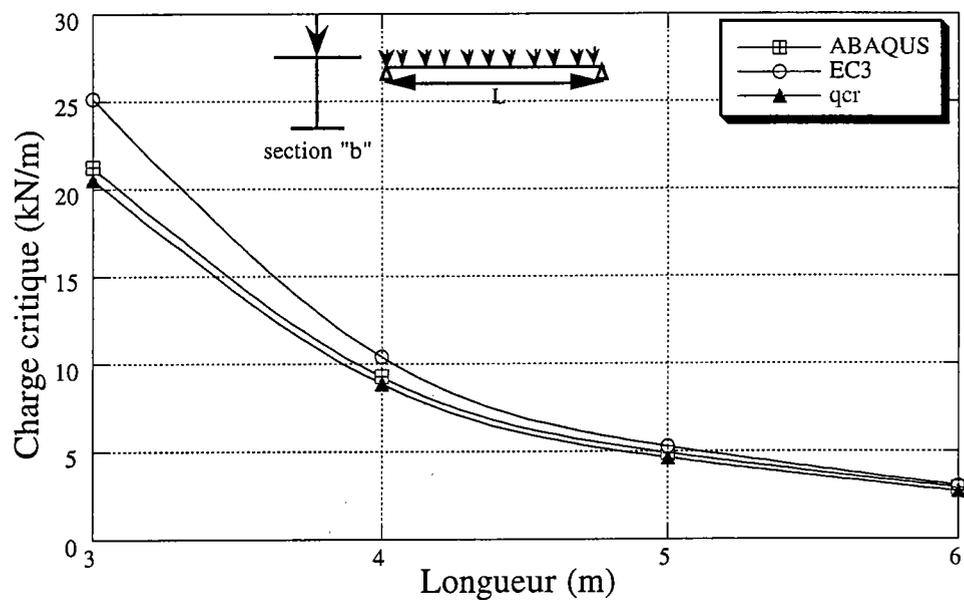


(a) : Solution positive

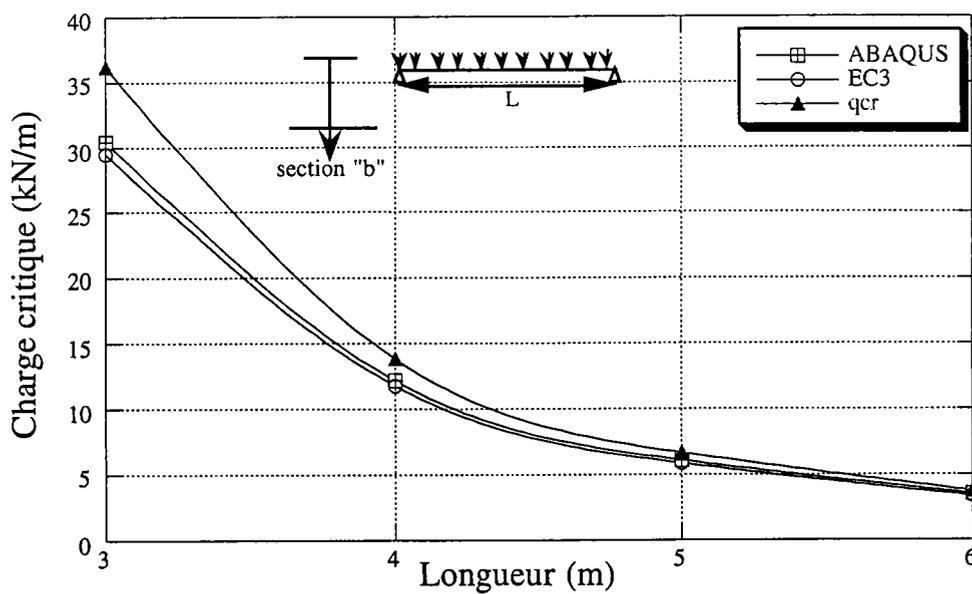


(b) : Solution négative

**Figure 6** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre sollicitée par une charge uniforme.



(a) : Solution positive



(b) : Solution négative

**Figure 7** : Comparaison numérique et réglementaire des charges critiques de déversement d'une poutre sollicitée par une charge uniforme.

## ANNEXES 3

Selon Trahair [4], la charge critique d'une poutre bi-articulée, sollicitée par une charge transversale au milieu, est donnée par :  $P_{cr} = \frac{\gamma_1 \sqrt{EI_z GJ}}{L^2}$

avec :  $\xi = \frac{z^*}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GJ}}$  ,  $\delta = \frac{\beta_z}{L} \sqrt{\frac{EI_z}{GJ}}$  et  $K = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_\omega}{GJL^2}}$

K	$\zeta$	$\delta$						
		0.6	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.6
0	0.6	6.61	7.17	6.32	5.93	5.56	4.89	4.05
	0.3	14.49	11.93	10.27	9.47	8.70	7.27	5.47
	0	24.05	20.67	18.23	16.94	15.58	12.52	8.61
	-0.3	35.39	31.52	28.39	26.43	23.71	18.01	13.73
	-0.6	46.54	41.55	36.52	32.63	26.81	20.73	14.30
0.1	0.6	8.87	7.44	6.60	6.22	5.87	5.22	4.41
	0.3	14.70	12.14	10.53	9.77	9.04	7.70	6.07
	0	24.25	20.77	18.32	17.04	15.72	12.92	8.91
	-0.3	35.80	31.87	28.95	27.32	25.52	20.69	14.09
	-0.6	47.35	42.51	38.29	35.43	31.56	21.17	15.55
0.3	0.6	9.63	8.19	7.37	7.0	6.65	6.03	5.24
	0.3	15.53	12.94	11.38	10.67	9.99	8.78	7.29
	0	25.15	21.47	19.01	17.78	16.57	14.23	11.13
	-0.3	27.10	32.96	30.10	28.62	27.11	23.91	18.28
	-0.6	49.40	44.79	41.45	39.67	37.80	33.60	24.17
1.0	0.6	15.36	13.58	12.54	12.07	11.62	10.80	9.72
	0.3	21.97	19.19	17.53	16.76	16.04	14.70	12.96
	0	31.62	27.78	25.37	24.22	23.10	21.01	18.21
	-0.3	43.45	39.25	36.27	34.80	33.34	30.49	26.45
	-0.6	57.12	52.38	49.18	47.57	45.95	42.70	37.80
3.0	0.6	44.02	41.45	39.83	39.05	38.29	36.82	34.74
	0.3	51.91	48.82	46.86	45.91	44.98	43.19	40.64
	0	61.25	57.64	55.33	54.20	53.09	50.94	47.86
	-0.3	71.97	67.89	65.25	63.95	62.67	60.16	56.54
	-0.6	83.87	79.41	76.49	75.05	73.62	70.79	66.71

**Tableau 1:** Valeurs de  $\gamma_1$  calculées pour une poutre bi-articulée soumise à une charge transversale au milieu

Dans le cas d'une poutre simplement appuyée, soumise à une charge uniformément répartie, La charge critique est donnée par :

$$q_{cr} = \frac{\gamma_1 \sqrt{EI_z GJ}}{L^3}$$

K	$\zeta$	$\delta$						
		0.6	0.3	0.1	0.0	-0.1	-0.3	-0.6
0	0.6	18.75	15.70	13.86	13.08	12.20	10.71	8.81
	0.3	28.30	23.35	20.19	18.68	17.22	14.51	11.07
	0	42.96	35.90	30.90	28.32	25.70	20.41	13.87
	-0.3	62.07	53.37	46.54	42.67	38.29	27.77	17.96
	-0.6	83.90	73.97	65.53	60.24	53.32	32.33	18.61
0.1	0.6	19.03	15.84	13.98	13.12	12.31	10.83	8.95
	0.3	28.70	23.53	20.32	18.81	17.36	14.69	11.36
	0	43.57	36.12	31.04	28.81	25.89	20.79	14.30
	-0.3	62.85	53.59	46.68	42.85	38.61	28.54	21.35
	-0.6	84.78	74.17	65.67	60.49	53.99	34.24	23.21
0.3	0.6	20.35	16.85	14.86	13.97	13.14	11.65	9.83
	0.3	30.39	24.74	21.38	19.84	18.40	15.83	12.73
	0	45.39	37.37	32.16	29.63	27.18	22.64	17.09
	-0.3	64.53	54.67	47.71	44.09	40.36	32.78	22.86
	-0.6	86.20	75.03	66.65	61.98	56.84	44.86	28.43
1.0	0.6	30.88	26.32	23.73	22.56	21.47	19.50	17.03
	0.3	41.76	35.30	31.51	29.77	28.15	25.21	21.53
	0	56.35	47.89	42.67	40.22	37.89	33.60	28.11
	-0.3	74.15	64.02	57.47	54.29	51.20	45.34	37.54
	-0.6	94.26	82.89	75.28	71.49	67.74	60.39	50.09
3.0	0.6	80.07	74.14	70.45	68.68	66.97	63.69	59.14
	0.3	91.79	84.91	80.59	78.52	76.49	72.62	67.22
	0	105.19	97.34	92.37	89.97	87.62	83.10	76.75
	-0.3	120.21	111.43	105.82	103.08	100.41	95.21	87.86
	-0.6	136.72	127.08	120.86	117.81	114.81	108.96	100.59

**Tableau 2:** Valeurs de  $\gamma_1$  calculées pour une poutre bi-articulée soumise à une charge uniforme

## ANNEXES 4

Les résultats d'intégrales utilisées dans le chapitre IV sont donnés par :

$$\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , p \neq q \\ L/2 & , p = q \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{q\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^2}{4} & , p = q \\ \frac{2L^2}{\pi^2} \left[ 1 - (-1)^{p+q} \right] \left[ \frac{pq}{(p^2 - q^2)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^2}{4} & , p = q \\ -\frac{L^2}{\pi^2} \left[ 1 - (-1)^{p+q} \right] \left[ \frac{p^2 + q^2}{(p^2 - q^2)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \int_0^L \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} 0 & , p \neq q \\ L/2 & , p = q \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) dx = -\frac{4L^2}{p^2\pi^2} + \frac{2L^2}{p\pi} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \quad (5)$$

$$\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) dx = \left( \frac{2L^3}{p\pi} - \frac{16L^3}{p^3\pi^3} \right) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{p^2\pi^2} & , p = q \\ -\frac{4L^2}{\pi^2} \left[ \frac{1 - (-1)^{(p+q)/2}}{2(p+q)^2} + \frac{1 - (-1)^{(p-q)/2}}{2(p-q)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{p^2\pi^2} & , p = q \\ \frac{4L^2}{\pi^2} \left[ \frac{1 - (-1)^{(p+q)/2}}{2(p+q)^2} - \frac{1 - (-1)^{(p+q)/2}}{2(p-q)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^3}{6} + \frac{L^3}{p^2\pi^2} & , p = q \\ \frac{4L^3}{\pi^2} \left[ \frac{\cos[(p-q)/2]\pi}{(p-q)^2} - \frac{\cos[(p+q)/2]\pi}{(p+q)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (8)$$

$$\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{p^2\pi^2} & , p = q \\ \frac{4L^3}{\pi^2} \left[ \frac{\cos[(p-q)/2]\pi}{(p-q)^2} + \frac{\cos[(p+q)/2]\pi}{(p+q)^2} \right] & , p \neq q \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \frac{L}{(p+q)\pi} \left[ 1 - \frac{\cos(p+q)\pi}{2} \right] + \frac{L}{(p-q)\pi} \left[ 1 - \frac{\cos(p-q)\pi}{2} \right] \quad (10)$$

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \frac{L^2}{2p\pi} \quad , \quad p = q \quad (11-a)$$

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = -L^2 \cos\pi[(p+q)/2]/(p+q)\pi - L^2 \cos\pi[(p-q)/2]/(p-q)\pi \quad , \quad p \neq q \quad (11-b)$$

$$\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \frac{L^3}{2p\pi} - \frac{2L^3}{p^3\pi^3} \quad , \quad p = q \quad (12-a)$$

$$\int_0^L x^2 \sin\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi x}{2L}\right) dx = \left[ \frac{8L^3}{(p+q)^3\pi^3} - \frac{L^3}{(p+q)\pi} \right] \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\pi + \left[ \frac{8L^3}{(p-q)^3\pi^3} - \frac{L^3}{(p-q)\pi} \right] \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\pi - \frac{8L^3}{(p+q)^3\pi^3} - \frac{8L^3}{(p-q)^3\pi^3} \quad , \quad p \neq q \quad (12-b)$$

## ABSTRACT

Torsional behaviour of steel beams is deeply influenced by the shape of the cross section. Thin-walled open profiles, are very common in steel constructions. The classical theory of beams of Saint Venant under-estimates the strength of such profiles. In order to obtain more realistic results, it is necessary to adopt the so called non-uniform torsion theory of Vlassov. In the first theory, a twisting of such a shaft produce only pure shear stresses. When analysing the torsional behaviour of thin walled beams according to the second theory, we remark that in addition to the shear stresses, the additional normal stresses arising from warping are developed in the cross section.

If the beam is loaded in the plane of its weak axis and is not adequately braced laterally, the beam will bend out of plane and twist when the load has reached a critical value. This phenomenon is known as lateral buckling. The analytical and numerical methods are used to determine the critical load for beams with monosymmetric cross-sections, subjected to transversal loads and moment gradients. The analytical method is obtained from the solution of the differential equations. A general formula to obtain the elastic lateral buckling solution is presented. In the numerical method, we use the Rayleigh-Ritz energy approach. Results are presented in terms of the degree of section monosymmetry, slender of the beam and load height parameter. Our results are compared with ABAQUS code and with Eurocode 3 results. The performance of these results are very satisfactory.

## RÉSUMÉ

Les profils minces et ouverts sont d'un usage courant dans la construction métallique. Le phénomène de torsion des poutres est profondément influencé par la forme de la section transversale. La théorie de la torsion uniforme de Saint Venant s'applique aux sections massives. Dans le cas des profils minces à sections ouvertes, la torsion est non uniforme. La théorie de Vlassov est la plus adaptée pour l'étude. Le gauchissement joue un rôle très important, il ne peut être négligé. Alors l'analyse en torsion de Saint Venant donne une image imparfaite du comportement torsionnel.

Les charges critiques de déversement des poutres à sections transversales monosymétriques sont déterminées par des méthodes analytique et numérique. La méthode analytique est obtenue à partir de la solution du système d'équations différentielles d'équilibre. Une formule générale est proposée. La méthode numérique se base sur la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz. Les charges critiques sont données pour différents chargements, en fonction du coefficient de la monosymétrie, le point d'application des charges transversales et de l'élanement de la poutre. Les comparaisons faites avec les solutions d'ABAQUS et avec les solutions réglementaires (Eurocode 3), montrent que nos résultats donnent satisfaction.