



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ
PAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1998 1085
Cote	S/M3 98/52
Loc	Magasin

Isabelle AUBERT

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : SCIENCES DE L'INGÉNIEUR
OPTION : MÉCANIQUE ET MATÉRIAUX

**EFFETS DE
L'HETEROGENEISATION PLASTIQUE INTRAGRANULAIRE
SUR LE COMPORTEMENT MACROSCOPIQUE DES ACIERS DOUX
LORS DE CHARGEMENTS COMPLEXES**

Soutenu le 20 janvier 1998 devant le jury composé de :

Marcel BERVEILLER, Directeur de thèse
Jean Paul BOEHLER, Rapporteur
Gérard FERRON, Examineur
Serge HEURTAULT, Examineur
Jan KRATOCHVIL, Examineur
Henryk PETRYK, Examineur
Colette REY, Rapporteur
Jean-Hubert SCHMITT, Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail, réalisé au sein de l'équipe de Marcel Berveiller dans le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de Metz, est le fruit d'une collaboration tripartite entre ce laboratoire, SOLLAC et le CNRS.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance au Professeur Berveiller, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'acceptant dans son équipe.

Je remercie également SOLLAC et le CNRS pour s'être engagé dans cette entreprise et m'avoir permis de mener à bien ces travaux.

Je tiens à remercier Madame Rey, Messieurs Boehler, Ferron, Heurtault, Kratochvil, Petryk, Schmitt, pour avoir accepté de participer au jury de thèse malgré leur éloignement.

Je remercie particulièrement Laurent Langlois avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer et d'échanger des discussions fructueuses durant ma dernière année de thèse.

Je remercie vivement tous les membres du laboratoire pour l'ambiance agréable dans laquelle se sont déroulées ces recherches. Merci à tous les thésards passés et présents pour leur bonne humeur: Joël, Eric, Xav, Den's, Fred, Pat, Raph, Laurent, Amadou, Idriss, Aimé, Coffi, Yazid, avec une mention spéciale pour Anne qui a toujours été là, dans les moments heureux comme difficiles. Merci à mon mari (Seb), ma famille et mes amis (Anne, Cathy, Flo ...) pour le soutien moral que vous m'avez apporté durant toutes mes études.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I: Hétérogénéités plastiques intragranulaires, conséquences sur le comportement macroscopique des aciers doux	5
I.1 - ECHELLES D'OBSERVATION ET MODELISATIONS	5
I.1.1 - L'échelle macroscopique	5
I.1.2 - L'échelle mésoscopique	6
I.1.3 - L'échelle microscopique	7
I.1.4 - L'échelle des défauts	8
I.1.5 - Conclusions	8
I.2 - HETEROGENEITES PLASTIQUES INTRAGRANULAIRES	10
I.2.1 - Glissement multiple hétérogène	10
I.2.2 - Cellules de dislocations	11
I.2.2.a) <u>Formation des cellules de dislocations</u>	11
I.2.2.b) <u>Influence de la température et de la vitesse de déformation</u>	12
I.2.2.c) <u>Influence de la structure granulaire de l'acier</u>	13
I.2.2.d) <u>Mécanismes physiques intervenant dans les cellules formées</u>	14
I.2.3 - Microbandes de cisaillement	16
I.2.3.a) <u>Microbandes de première génération</u>	17
I.2.3.b) <u>Microbandes de seconde génération</u>	17
I.2.3.c) <u>Bandes de cisaillement</u>	18
I.2.4 - Conclusions	18

I.3.- EVOLUTION DE LA STRUCTURE CELLULAIRE EN FONCTION DU CHARGEMENT, CONSEQUENCES MACROSCOPIQUES	19
I.3.1 - Trajet de chargement monotone	19
I.3.1.a) <u>Traction uniaxiale</u>	19
I.3.1.b) <u>Autres chargements</u>	21
I.3.1.c) <u>Conséquences macroscopiques</u>	21
I.3.2 - Trajets complexes	22
I.3.2.a) <u>Définition des trajets complexes</u>	23
I.3.2.b) <u>Evolution de la microstructure de dislocations lors d'un changement de trajet</u>	25
I.3.2.c) <u>Relations entre l'évolution de la microstructure et le comportement macroscopique</u>	27
I.3.3 - Conclusions	29
I.4 - MODELISATIONS	31
I.4.1 - Modèles liés à la densité de dislocations	31
I.4.1.a) <u>Trajets monotones</u>	32
I.4.1.b) <u>Trajets durs</u>	33
I.4.1.c) <u>Essais Bauschinger</u>	33
I.4.1.d) <u>Conclusions</u>	34
I.4.2 - Modèles liés à la morphologie des cellules de dislocations	34
I.4.2.a) <u>Approche micromécanique par champs moyens couplée au modèle autocohérent</u>	35
I.4.2.b) <u>Approche thermodynamique</u>	36
I.5 - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	39
Références Bibliographiques	41

CHAPITRE II: Forme invariante de l'énergie libre de Helmholtz et applications	47
II.1 - CALCUL DE L'ENERGIE LIBRE DANS UN CADRE GENERAL	47
II.1.1 - Position du problème	48
II.1.1.a) <u>Grandeurs locales</u>	48
II.1.1.b) <u>Grandeurs macroscopiques</u>	49
II.1.2 - Energie libre de Helmholtz	50
II.2 - APPLICATION AU CAS DES CELLULES DE DISLOCATIONS	54
II.2.1 - Représentation simplifiée de la structure cellulaire	54
II.2.2 - Energie libre de Helmholtz	57
II.2.3 - Discussion	59
II.3.- MISE SOUS FORME INVARIANTE DE L'ENERGIE LIBRE	61
II.3.1 - Conditions d'invariance	61
II.3.1.a) <u>Principe de l'isotropie de l'espace</u>	61
II.3.1.b) <u>Matériaux isotropes</u>	62
II.3.1.c) <u>Matériaux anisotropes</u>	62
II.3.1.d) <u>Orthotropie</u>	63
II.3.2 - Représentation invariante d'une fonction	64
II.3.2.a) <u>Représentation des fonctions à valeur scalaire</u>	64
II.3.2.b) <u>Représentation des fonctions tensorielles</u>	65
II.3.2.c) <u>Bases d'intégrité</u>	65
II.3.2.d) <u>Bases de générateurs</u>	66
II.3.3 - Application de la formulation invariante à l'énergie de Helmholtz	66
II.3.3.a) <u>Calcul avec les tenseurs de structure</u> $\xi_i = \{M_1, M_2, M_3\}$	67
II.3.3.b) <u>Calcul avec les tenseurs de structure</u> $\xi_i = \{M_1, M_2, I\}$	70

**II.4 - APPLICATIONS A L'ETUDE DE CONFIGURATIONS STABLES DE
DISLOCATIONS**

	74
II.4.1 - Modélisation commune aux trois cas traités	74
II.4.2 - Stabilité d'une boucle de dislocation soumise à une contrainte	75
II.4.3 - Interaction de boucles de dislocation avec un joint de grain	79
II.4.4 - Microstructures de dislocations à faible énergie	82
II.4.5 - Conclusions	84
Références bibliographiques	86

**CHAPITRE III: Modèle biphasé évolutif non local, résultats
numériques**

	91
III.1 - DISSIPATION	92
III.1.1 - Dérivée temporelle de l'énergie libre	92
III.1.2 - Puissance des efforts extérieurs	93
III.1.3 - Expression des tenseurs σ^+ et σ^-	95
III.1.4 - Expression de la dissipation dans le repère lié à l'ellipsoïde	97
III.2 - MODELE EVOLUTIF BIPHASE NON LOCAL	101
III.2.1 - Variables internes ϵ^{ps} , ϵ^{ph} , a, b, c, α , β , γ	101
III.2.1.a) <u>Forces motrices</u>	101
III.2.1.b) <u>Forces critiques</u>	103
III.2.1.c) <u>Lois d'évolution</u>	105
III.2.2 - Modélisation limitée à deux variables morphologiques	106
III.2.2.a) <u>Forces motrices</u>	107
III.2.2.b) <u>Forces critiques</u>	108
III.2.2.c) <u>Lois d'évolution</u>	110

III.3 - SIMULATIONS DE TRAJETS MONOTONES ET COMPLEXES	111
III.3.1 - Résolution informatique	111
III.3.1.a) <u>Méthode numérique</u>	111
III.3.1.b) <u>Initialisations</u>	112
III.3.2 - Trajets monotones en cisaillement; études paramétriques	113
III.3.2.a) <u>Etude paramétrique sur F_f^c</u>	117
III.3.2.b) <u>Etude paramétrique sur H_{ff}</u>	117
III.3.2.c) <u>Effet de l'écroutissage non local</u>	119
III.3.2.d) <u>Influence de la forme des inclusions</u>	120
III.3.2.e) <u>Incidence de l'angle initial</u>	123
III.3.2.f) <u>Conclusions</u>	124
III.3.3 - Chargements complexes en cisaillement	124
III.3.3.a) <u>Chargements complexes à différents taux de prédéformation</u>	128
III.3.3.b) <u>Trajets cisaillement-cisaillement suivant différents angles β de recharge</u>	131
III.3.3.c) <u>Trajets Bauschinger</u>	133
III.3.4 - Conclusions	134
Références bibliographiques	137
CONCLUSIONS	139
ANNEXE A: détermination des contraintes internes par les fonctions de Green. problème de l'inclusion d'Eshelby-Kröner	141
ANNEXE B: Expression des tenseurs M_{ijkl}^a, M_{ijkl}^b et M_{ijkl}^c, M_{ijkl}^α, M_{ijkl}^β et M_{ijkl}^γ	153
ANNEXE C: Organigramme	161

**ANNEXE D: Résultats numériques en traction uniaxiale et
chargements complexes tractoin-traction**

163

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

177

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La connaissance des lois de comportement des matériaux suscite depuis très longtemps de nombreuses études visant à comprendre, décrire et modéliser les phénomènes intervenant lors de la mise en forme. Dans le cas de chargements monotones, la possibilité d'intégrer les variables le long du trajet rend les modélisations phénoménologiques très performantes. D'autres approches basées sur des considérations microscopiques (méthodes de transition d'échelle) fournissent également d'excellents résultats pour représenter l'élasticité et la plasticité des polycristaux.

Cependant, la caractérisation du comportement lors de trajets séquentiels s'avère, encore aujourd'hui, très délicate. Ce mode de déformation, fonction des chargements subis antérieurement par le matériau, constitue pourtant un problème essentiel en raison de ses implications industrielles. En effet, la transformation d'une tôle d'acier en un produit fini (pièce de l'industrie automobile, boîtes de conserve ...) se déroule généralement en plusieurs étapes. Par exemple, la réalisation d'une boîte boisson nécessite de nombreux trajets successifs.

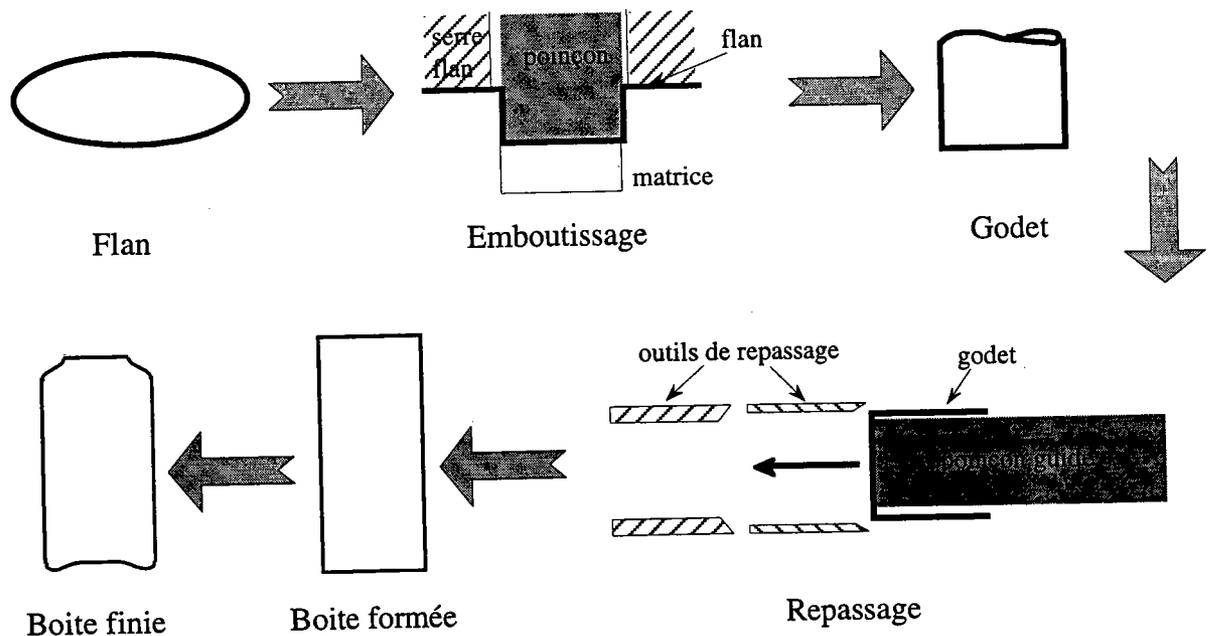


Fig. 1: Etapes de mise en forme de boîtes boisson

Dans un premier temps, le flan est embouti pour former un godet dont les parois subissent ensuite trois opérations de repassage qui permettent de les allonger tout en réduisant leur épaisseur de 0,25 mm à 0,009 mm (cf. figure 1). Les opérations de finition telles que le

formage du fond et le bordage du col sont finalement effectuées en plusieurs passes à partir de la boîte formée déjà très sollicitée par les transformations précédentes [DLMS94]. Les boîtes produites doivent, évidemment, respecter un cahier des charges, et en particulier ne présenter ni plis, ni amincissement localisé ou point de rupture.

Cet exemple pratique illustre bien les contraintes imposées au producteur et au constructeur. La course à l'allégement des structures (réduction des épaisseurs) couplée à la recherche constante d'esthétisme (formes de plus en plus complexes) exigent des trajets de chargement de plus en plus contraignants pour le matériau. Ces sollicitations multiaxiales et séquentielles sont limitées par l'apparition de défauts surfaciques et surtout par le risque de rupture précoce de la pièce au cours de sa mise en forme. La ductilité des tôles d'aciers extra doux est en effet limitée par l'apparition d'une localisation de la déformation plastique qui peut conduire à la ruine du matériau. Il apparaît alors capital de connaître le comportement macroscopique, et en particulier la formation d'instabilités plastiques, d'un acier soumis à des sollicitations complexes, ceci afin de prévoir les problèmes de formage avant d'engager la fabrication d'outils coûteux.

Actuellement, la prévision des phénomènes de localisation s'effectue à l'aide de méthodes expérimentales telles que les courbes limite de formage (CLF) [CHM94]. Ces graphes définis dans le plan (ϵ_1, ϵ_2) des déformations principales sont composés des points de limite à la striction obtenus expérimentalement pour différentes sollicitations.

Toutefois, cette technique nécessite des campagnes d'essai très lourdes notamment dans le cas de trajets complexes pour lesquels les CLF ne peuvent être déduites d'expériences réalisées en chargement monotone. Chaque nouveau chargement séquentiel nécessite l'élaboration de nouvelles courbes limite de formage qui fournissent des renseignements sur le point de striction mais pas sur l'origine physique de ce phénomène. D'autre part, la localisation de la déformation plastique apparaissant de manière erratique dans beaucoup de cas, il s'avère impossible de formuler des critères d'instabilité basés uniquement sur des considérations expérimentales.

L'approche théorique de type Marciniak permet également de déterminer la localisation de la déformation en étudiant l'impact d'un défaut géométrique sur le comportement de l'échantillon [F96]. Le problème de cette méthode réside dans la dépendance directe des résultats avec la nature du défaut introduit. Ce modèle permet uniquement de représenter la striction provoquée par un défaut géométrique de la pièce, mais il n'est pas généralisable.

Notre travail s'inscrit donc de manière naturelle dans le cadre général de l'étude des conditions de mise en forme puisqu'il traite des moyens théoriques permettant de compléter

les méthodes existantes. Nous cherchons en effet à **développer un modèle simple, capable de représenter les phénomènes de perte de ductilité en chargements monotones et séquentiels** reproduits schématiquement sur la figure 2.

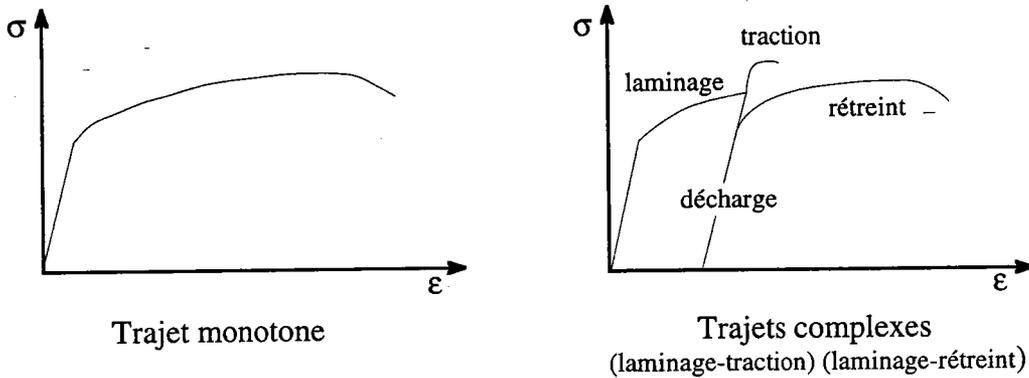


Fig. 2: Courbes macroscopiques caractéristiques de trajets monotones et complexes

Il est clair que la différence de comportement entre une séquence laminage-traction, très contraignante pour le matériau (trajet dur), et un trajet laminage-rétreint, provient de la structure interne du matériau, modifiée au cours de la déformation plastique [S86]. En effet, les principaux mécanismes responsables d'un écrouissage négatif sont l'adoucissement textural, dû à la rotation du réseau cristallin au cours de la déformation, et l'adoucissement microstructural, provenant de la formation et de l'évolution des configurations de dislocations pendant les différents trajets. Cependant, lorsque l'on réalise un recuit de restauration annihilant les structures de dislocations sans modifier la texture cristallographique, le métal retrouve, du moins partiellement, sa capacité de déformation, ce qui laisse présager le rôle prépondérant des structures de dislocations.

D'autre part, de nombreux modèles tels que la méthode autocohérente traitent l'influence de la texture en supposant les grains homogènes. Les résultats obtenus par cette approche se révèlent excellents sans toutefois pouvoir représenter la perte de ductilité et les changements de trajet.

En conséquence, nous nous intéressons plus particulièrement à la modélisation du comportement des aciers en trajets monotones et complexes à partir des considérations sur le processus d'hétérogénéisation intragranulaire. Ce mécanisme détaillé dans le chapitre I se traduit par une organisation progressive des dislocations sous forme de cellules de dislocations. Ces structures de dislocations présentent des actions à grandes distances et sont fortement reliées à la sollicitation mécanique appliquée (forme et orientation). L'objet de ce travail est donc de **décrire l'évolution de la microstructure intragranulaire et son influence sur le comportement macroscopique de l'acier.**

Ce rapport s'articule en trois parties. Le chapitre I propose une réflexion sur les différentes échelles de description des phénomènes physiques. Ces remarques conduisent à s'intéresser plus particulièrement aux hétérogénéités plastiques intragranulaires et à leurs effets sur le comportement des matériaux soumis à des sollicitations monotones ou séquentielles. L'ensemble de ces observations expérimentales permet finalement de dégager les bases de notre modélisation théorique. Les hétérogénéités intragranulaires de type cellules de dislocations sont alors représentées par le modèle biphasé évolutif non local prenant en compte les différences d'activités plastiques entre les parois et les cellules, l'évolution de celles-ci aux cours des différents chargements ainsi que l'écroutissement non local intervenant dans ces microstructures.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation thermodynamique à variables internes de ce problème, et particulièrement à l'expression de l'énergie libre de Helmholtz, sa mise sous forme invariante et les applications micromécaniques en découlant.

Le troisième chapitre complète théoriquement cette approche par le calcul de la dissipation et des lois complémentaires d'évolution des variables internes. Le modèle est ensuite exploité numériquement dans le cas de trajets monotones et complexes.

CHAPITRE I

Hétérogénéités plastiques intragranulaires,
conséquences sur le comportement
macroscopique des aciers doux

CHAPITRE I

Hétérogénéités plastiques intragranulaires, conséquences sur le comportement macroscopique des aciers doux

I.1 - ECHELLES D'OBSERVATION ET MODELISATIONS

La connaissance du comportement des matériaux et des conditions d'apparition d'instabilités plastiques est essentielle pour maîtriser les procédés de mise en forme et passé forcément par la compréhension des mécanismes physiques mis en jeu. Au cours de sollicitations mécaniques, un matériau développe une structure interne complexe, hétérogène à différentes échelles qui constitue sa mémoire vis à vis des chargements antérieurs. Les observations, et donc les modélisations, peuvent être effectuées à des échelles diverses, l'idéal étant de trouver un compromis entre description des phénomènes physiques, c'est à dire complexité du formalisme utilisé, et résultats obtenus. Ceci se traduit par la recherche permanente de modèles optimisés: simples mais performants.

I.1.1 - L'échelle macroscopique

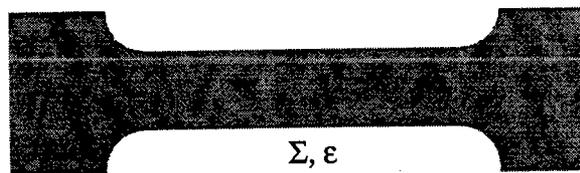


Fig. I.1: Variables macroscopiques.

Elle permet d'élaborer les modèles phénoménologiques pour lesquels le matériau est considéré comme un milieu homogène. Les paramètres moyens représentatifs de sa structure (déformation, vitesse de déformation, température), constituent les variables internes du problème. Les propriétés de ce matériau seront donc les mêmes quelle que soit l'histoire des chargements qu'il a subis, ce qui contredit les observations expérimentales relatives aux changements de trajet.

Les écarts entre les prévisions de ces modèles et les résultats expérimentaux sont généralement attribués à la formation d'hétérogénéités inter et intragranulaires observables à des échelles plus fines.

I.1.2 - L'échelle mésoscopique

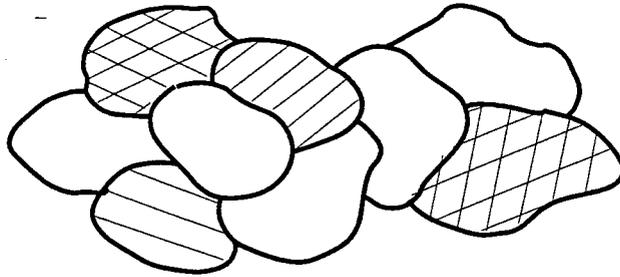


Fig. I.2: Glissement multiple homogène dans les grains d'acier.

De l'ordre de la dizaine de micron, elle tient compte de la structure cristalline du grain. Les variables internes associées deviennent les glissements plastiques multiples homogènes se produisant sur les plans denses du réseau cristallographique. Au cours de la déformation plastique, les joints de grains sont fixes par rapport à la matière.

Cette échelle permet de mettre en évidence les hétérogénéités intergranulaires associées aux fluctuations de champ de déformation plastique de grain à grain [L97]. Leur origine est liée à la désorientation des réseaux cristallins entre grains voisins c'est à dire à la texture cristallographique de l'acier. Les contraintes internes d'ordre 2 (au sens de la classification introduite par l'analyse des contraintes par rayons X) résultant de ces hétérogénéités plastiques sont de l'ordre du tiers de la limite d'écoulement macroscopique [L95].

De nombreux modèles (polycristallins ou micro-macro) ont été développés afin de modéliser les hétérogénéités intergranulaires, en particulier les modèles autocohérents initiés par Kröner [K61] et développée entre autres par [BZ81] et [L93]. Ces modèles s'avèrent très performants pour décrire dans le cas de trajets monotones, le comportement macroscopique, les surfaces de plasticité et les évolutions de la texture cristallographique. Mais le fait de négliger les hétérogénéités plastiques intragranulaires ne permet pas de modéliser la localisation de la déformation plastique et conduit à une mauvaise estimation des caractéristiques mécaniques dans le cas de sollicitations complexes. Il est donc nécessaire de prendre en compte les hétérogénéités présentes à l'échelle microscopique afin de mieux représenter ces phénomènes.

I.1.3 - L'échelle microscopique

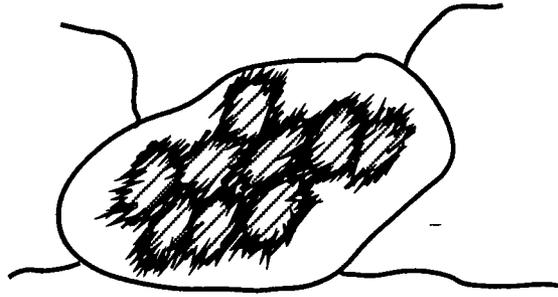


Fig. I.3: Cellules de dislocations à l'intérieur d'un grain d'acier.

L'observation des matériaux métalliques à cette échelle (1 μm) révèle qu'à partir de quelques pour-cent de déformation, les grains ne sont plus homogènes, mais présentent généralement une sous-structure de dislocations caractéristique du chargement appliqué.

Durant la déformation plastique, les dislocations s'organisent progressivement pour former des cellules de dislocations et engendrent ainsi une hétérogénéisation intragranulaire. Ces arrangements sous forme de régions de faible densité de dislocations entourées de parois à forte densité de dislocations évoluent au cours du chargement. Cette évolution est encore plus marquée dans le cas de changements de trajet car la microstructure induite par la prédéformation disparaît (dans certains cas) au profit de la configuration de dislocations relative au deuxième chargement. En conséquence, les variables internes associées aux cellules de dislocations sont les variables morphologiques et topologiques définissant la forme et l'orientation de ces structures à frontière mobile.

Les contraintes internes d'ordre 3 dans les parois, environ égales à trois fois la limite d'écoulement macroscopique [M83], [MM84], atteignent des niveaux beaucoup plus élevés que les contraintes d'origine intergranulaire. En outre, la structure cellulaire ne se limite pas à une action microscopique, elle crée une organisation au niveau du polycristal. Muller et Lemoine [LMB94] montrent que l'orientation collégiale des cellules de dislocations définit une texture de microstructure qui vient se superposer à la texture cristallographique. Les cellules de dislocations peuvent également initier la formation de microbandes de cisaillement lors de changements de trajet dont une des conséquences est la ruine du matériau par localisation de la déformation plastique.

Il est clair que la microstructure intragranulaire induite au cours du trajet entraîne des effets macroscopiques par son action à grande distance. Elle permet en outre, de tenir compte de l'histoire des chargements subis par le matériau en gardant en mémoire la configuration de dislocations engendrée par le trajet précédent. En conséquence, l'échelle microscopique correspond à l'échelle de description des phénomènes physiques utilisés dans notre étude.

I.1.4 - L'échelle des défauts

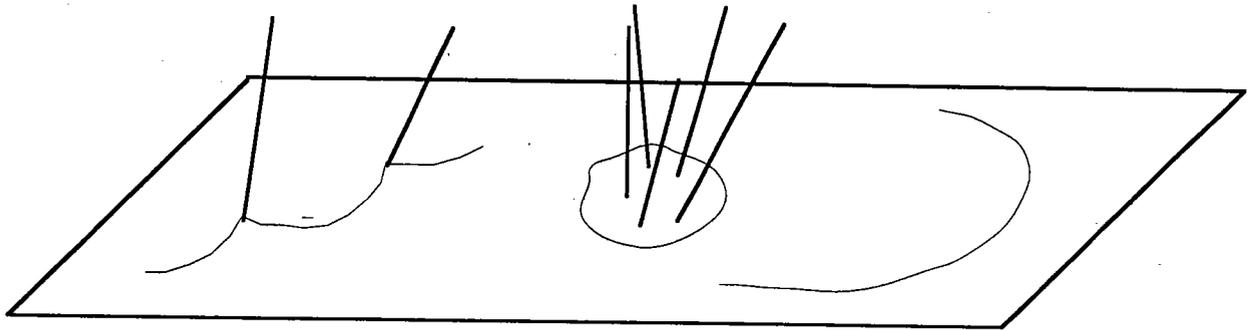


Fig. I.4: Forêt de dislocations (traits gras) gênant le passage de boucles de dislocations (traits fins).

Les défauts cristallins sont classés topologiquement en défauts ponctuels comme les lacunes et les précipités, en défauts linéaires appelés dislocations et en défauts bidimensionnels de fautes d'empilement, rares dans les aciers au carbone courants. Lorsque le matériau est soumis à une sollicitation mécanique, les dislocations se déplacent sur les plans denses du réseau cristallin qui se mettent alors à glisser les uns sur les autres, entraînant ainsi la déformation plastique microscopique de l'échantillon. Elles peuvent s'empiler, par exemple autour de précipités pour former des enchevêtrements de dislocations, ou s'annihiler entre elles.

Ces mécanismes complexes sont les prémisses de la formation des cellules de dislocations observées à l'échelle microscopique. Ils mettent en jeu les interactions à longue et courte distance entre les dislocations. Mais considérées individuellement, ces interactions s'avèrent très faibles par rapport aux interactions cellules-parois: cette échelle de description est donc trop fine au regard des actions à grande distance.

En élasticité linéaire, la mécanique des milieux continus permet de déterminer l'énergie relative à une dislocation, son champ de contrainte et de déformation [W65]. Kratochvil [KS92] et Kubin [K79] ont récemment proposé des modélisations de la formation des structures de dislocations à partir des relations décrivant la création, le mouvement et l'annihilation des dislocations au sein du matériau. Mais, à ces problèmes extrêmement compliqués et nécessitant de gros moyens numériques, viennent s'ajouter la difficulté de la transition d'échelle entre l'échelle de l'angström et l'échelle macroscopique.

I.1.5 - Conclusions

Ce rapide tour d'horizon démontre l'importance des hétérogénéités intragranulaires, à la fois du point de vue microscopique (contraintes internes d'ordre 3 nettement supérieures aux

contraintes internes d'ordre 2), et du point de vue macroscopique puisqu'elles sont à l'origine de certaines instabilités plastiques. Les hétérogénéités intragranulaires constituent donc un mécanisme prépondérant par rapport aux hétérogénéités intergranulaires (texture cristallographique) lorsque l'on cherche à décrire l'apparition de la perte de ductilité du matériau.

Les observations à l'échelle du défaut permettent, quant à elles, de décrire les nombreux mécanismes d'organisation des dislocations mais la complexité de ces phénomènes rend actuellement impossible une modélisation théorique du comportement macroscopique à partir de l'échelle du défaut.

L'échelle microscopique devient donc l'échelle de travail idéale pour comprendre la perte de ductilité du matériau car elle décrit les mécanismes physiques essentiels tout en permettant l'élaboration de modèles relativement simples. Nous nous concentrons donc ici sur les phénomènes survenant à cette échelle en négligeant les effets intergranulaires moins directement liés aux problèmes d'instabilités plastiques.

Dans la suite, nous dressons exclusivement un bilan des hétérogénéités plastiques intragranulaires comme les cellules de dislocations qui peuvent entraîner la formation de microbandes de cisaillement. Après détermination des phénomènes prépondérants, nous développons plus précisément l'évolution de ces structures en fonction du type de sollicitation appliquée, et leurs conséquences sur le comportement macroscopique. En nous basant sur ces observations et les modélisations déjà existantes, nous dégageons les grandes lignes de notre modèle visant à représenter la rhéologie des matériaux et les phénomènes de localisation de la déformation.

I.2 - HETEROGENEITES PLASTIQUES INTRAGRANULAIRES

Avant d'élaborer un modèle basé sur la structure intragranulaire de l'acier, il est indispensable de bien connaître les différentes hétérogénéités présentes à cette échelle. En effet, une modélisation théorique ne prend en compte qu'une partie des phénomènes physiques mis en jeu, il est donc nécessaire de déterminer quels sont les mécanismes prépondérants. D'autre part, il faudra garder en mémoire les phénomènes négligés afin de pouvoir fixer les limites de notre étude. Dans ce chapitre, nous détaillons à l'échelle microscopique les événements influençant les différentes hétérogénéités intragranulaires tels que le glissement plastique hétérogène, les cellules de dislocations ainsi que les microbandes de cisaillement.

I.2.1 - Glissement multiple hétérogène

Les hétérogénéités de glissement plastique se traduisent par la formation dans les grains de domaines déformés suivant des systèmes différents, le mode de glissement plastique restant cependant uniforme à l'intérieur de chaque zone [R88] (cf. figure I.6).

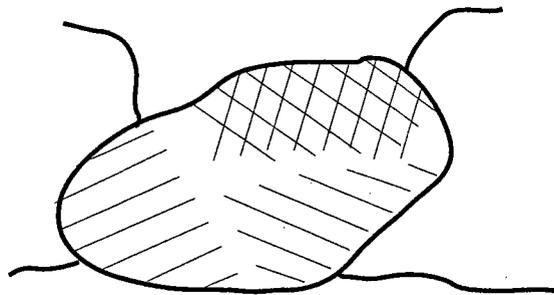


Fig. I.6: Zones de glissement plastique hétérogène à l'intérieur d'un grain.

Ce phénomène est lié à la désorientation relative du réseau cristallin au passage des joints de grains. Les différents systèmes de glissement requis pour accommoder le tenseur de déformation imposé s'activent simultanément mais dans différentes parties du grain. Le grain se divise en plusieurs volumes, chacun d'entre eux privilégiant la déformation sur un nombre restreint de systèmes de glissement (généralement en glissement simple). Contrairement aux joints de grains fixes par rapport à la matière, les frontières entre ces régions sont des frontières libres évoluant au cours de la déformation plastique. Dans le cas de matériaux présentant un fort écrouissage latent, ce mode de déformation apparaît énergétiquement préférable à une déformation par glissement multiple homogène rendu difficile par le durcissement croisé des systèmes non actifs par les systèmes actifs.

On estime les contraintes internes relatives au glissement plastique hétérogène du même ordre de grandeur que les contraintes d'ordre 2. Les conséquences sur le comportement global sont donc négligeables par rapport aux autres hétérogénéités intragranulaires telles que les cellules de dislocations.

I.2.2 - Cellules de dislocations

Un matériau à l'état recuit présente un faible taux de défauts (principalement des dislocations) répartis de façon uniforme dans le cristal. Après environ 5% de déformation à température ambiante, la distribution aléatoire de dislocations s'organise en cellules composées de zones à faible densité de dislocations limitées par des zones à forte densité de dislocations. Cette structuration progressive du matériau durant le chargement est qualifiée d'hétérogénéisation intragranulaire.

Dans ce chapitre nous décrivons, à l'échelle du défaut, la genèse des cellules de dislocations ainsi que l'influence de quelques paramètres comme la température, la structure granulaire du métal ainsi que les mécanismes physiques intervenant dans les cellules formées. Les effets du mode de chargement sur la morphologie des cellules ainsi que les conséquences macroscopiques induites par ces microstructures seront développés dans le chapitre I.3.

I.2.2.a) Formation des cellules de dislocations

De très nombreuses observations ont été effectuées afin de comprendre la formation des cellules de dislocations et ce sujet reste encore aujourd'hui l'objet de controverses [KW89], [KM88]. Ainsi, nous exposerons les idées majeures de ce processus sans entrer dans les détails pouvant entraîner des polémiques.

Les arrangements de dislocations résultent des interactions mutuelles entre dislocations individuelles. Le degré d'organisation de ces structures est d'autant plus marqué que ces interactions sont prépondérantes [R93]. Les interactions à longue distance conduisant à des dipôles de dislocations coins sont faibles et n'ont d'effets que lorsque les autres sources de contraintes sont négligeables (friction, interaction courte distance). Le mécanisme de formation des cellules de dislocations provient essentiellement des interactions à courtes distances responsables du stockage des dislocations sur des obstacles.

Au début de la déformation plastique, les sources de dislocations (Franck et Read, joints de grains) produisent un grand nombre de dislocations mobiles sur le système de glissement principal [MM84]. Une partie de ces dislocations primaires sont bloquées, par des défauts

ponctuels ou d'autres dislocations, et forment de petits amas de dislocations, ce qui contribue à l'écroûissage du matériau [PPL75]. Lorsque la déformation augmente, ces amas grossissent et forment des enchevêtrements linéaires de dislocations qui créent des concentrations de contraintes sur les systèmes secondaires [JS84]. L'activation de systèmes de glissement sécants donne lieu à de très fortes interactions de contact entre les enchevêtrements de dislocations primaires et les dislocations secondaires. Il en résulte une destabilisation de la première structure et le développement de structures croisées dans le plan de glissement primaire [S86]. L'organisation des dislocations découle directement des enchevêtrements provoqués par les forces de contact. La structure cellulaire ainsi formée se construit parallèlement aux plans de glissement principaux. Ces configurations de dislocations, plus stables que les enchevêtrements primaires, conduisent à une minimisation de l'énergie stockée au sein du métal déformé [BS94].

Au cours de la déformation plastique, la structure cellulaire se précise, la densité de dislocations s'accroît dans les parois constituées de dislocations appartenant aux différents systèmes actifs. La morphologie et l'orientation des cellules de dislocations sont étroitement liées au type de sollicitation appliquée et plus particulièrement aux systèmes de glissement actifs pendant la déformation. Ces points importants seront développés ultérieurement.

I.2.2.b) Influence de la température et de la vitesse de déformation

De nombreuses observations [LKD92], [L91], [KW63] montrent que les métaux cubiques centrés (CC) comme l'acier doux possèdent une température de transition déterminant la formation d'une structure cellulaire. Le processus d'hétérogénéisation intragranulaire décrit plus haut ne se produit que lorsque la température de déformation dépasse une température critique T_c définie par Luft [L91] entre $0,1 T_f$ et $0,2 T_f$ (T_f étant la température de fusion du métal en K).

A basse température, la structure de coeur particulière des dislocations vis les rend très peu mobiles par rapport aux dislocations coins. Ces différences de vitesse conduisent non pas à la formation de cellules mais à des structures très particulières de boucles de dislocations allongées avec deux longs segments vis parallèles. En effet, la friction du réseau devient prépondérante à basse température et les mécanismes moteurs de structuration s'avèrent insuffisants pour générer les parois de dislocations [R93].

Rauch affirme qu'il est néanmoins possible de faire apparaître une structure intragranulaire en augmentant le taux de déformation afin que le mécanisme d'interaction à courte distance soit favorisé par la densité de dislocations produite. Ainsi la mise en place d'une structure cellulaire nécessite d'autant plus de déformation que la température est faible [KW63]. L'influence de la température sur les configurations de dislocations résulte donc

principalement de la friction du réseau ce qui a pour effet de retarder l'organisation des dislocations.

Lorsque la température augmente, les dislocations vis deviennent plus mobiles (la friction du réseau diminue) jusqu'à atteindre la même vitesse que les dislocations coins pour des températures supérieures à T_c . Dans ce cas, la bonne mobilité des dislocations leur permet d'interagir et de se réarranger pour former des cellules de dislocations. Les métaux cubiques centrés ont alors un comportement proche des cubiques faces centrées, c'est à dire une bonne ductilité autorisant de grandes déformations.

Les mêmes causes produisant les mêmes effets, la vitesse de déformation occasionne les mêmes conséquences que la température sur la structure cellulaire. En effet, une forte vitesse de déformation implique une friction importante du réseau ainsi que des phénomènes d'inertie, ce qui retarde la formation des cellules de dislocations pour les matériaux déformés à grandes vitesses.

I.2.2.c) Influence de la structure granulaire de l'acier

Les configurations de dislocations dépendent de la taille de grain. Pour des matériaux à gros grains ($\gg 50 \mu\text{m}$) comme l'aluminium, on observe la création de sous-domaines constitués de cellules de dislocations et séparés les uns des autres par des murs denses de dislocations [H92] (cf. figure I.7). Ces murs accommodent les désorientations de quelques degrés causées par des activités plastiques différentes. Ils peuvent être le siège de microbandes de cisaillement qui seront traitées par la suite (chapitre I.2.3). La subdivision des gros grains est à corrélérer avec le glissement multiple hétérogène, chaque famille de cellules prenant naissance sur une zone de glissement homogène.

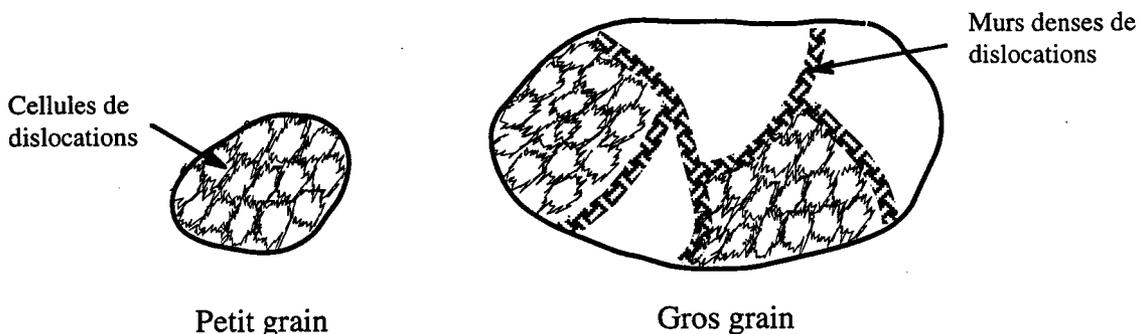


Fig. I.7: Influence de la taille de grain sur l'hétérogénéisation intragranulaire.

Lorsque la taille du grain diminue, les contraintes supplémentaires engendrées par la subdivision en sous-domaine deviennent inadmissibles. En conséquence, les matériaux à petits grains ($\ll 50 \mu\text{m}$), se déforment de manière plus homogène et présentent une simple structure cellulaire.

Concernant l'acier, la taille de grain est environ de $15 \mu\text{m}$, la taille des cellules de dislocations de $1 \mu\text{m}$ et celle des parois de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}$. L'acier est donc un métal à petits grains qui ne présente pas de subdivision en sous-domaine.

Afin d'accommoder les désorientations intergranulaires, le voisinage des joints de grains se déforme suivant un nombre de systèmes actifs plus important dans cette zone de transition que dans le centre du grain. Cette déformation locale perturbe la sous-structure de dislocations aux abords du joint. La densité de dislocations y est plus importante, et les cellules deviennent plus petites et plus enchevêtrées avec apparition de parois supplémentaires.

I.2.2.d) Mécanismes physiques intervenant dans les cellules formées

A l'aide d'une camera rapide, Tabata et al. [TFHM82] ont suivi le déplacement de dislocations à l'intérieur des cellules présentes dans un monocristal d'aluminium. La figure I.8 schématise leurs observations.

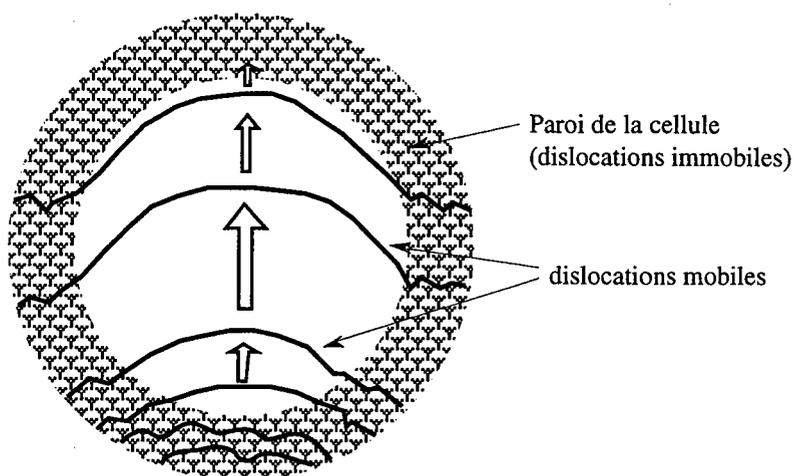


Fig. I.8: Déplacements des dislocations dans les cellules. La vitesse est symbolisée par l'importance des flèches.

Les dislocations mobiles naissent à partir de sources présentes dans les parois. Leur progression dans les murs est gênée par les dislocations immobiles agissant comme points

d'ancrage. Lorsque la contrainte augmente, ces points d'attache se rompent et les dislocations avancent jusqu'à parvenir à l'intérieur de la cellule où le faible nombre d'obstacles conduit à une augmentation de leur vitesse. Les extrémités des dislocations mobiles étant toujours ralenties par la forêt de dislocations, les lignes s'incurvent (cf. Figure I.8). La vitesse des dislocations augmente donc très rapidement au début de leur progression puis décroît lentement avant d'atteindre l'extrémité opposée de la cellule où elles sont stoppées par la forêt de dislocations.

On constate donc une très nette différence d'activité plastique dans la structure cellulaire. Le glissement plastique est facilité à l'intérieur de la cellule, alors que la forêt de dislocations rend difficile la déformation dans les parois. La structure cellulaire présente également un fort gradient de contraintes internes, avec un niveau faible à l'intérieur de la cellule, et des contraintes internes très importantes dans les parois (trois fois la limite d'écoulement macroscopique) [M83], [MM84]. Les cellules de dislocations peuvent donc être assimilées à une **structure biphasée** constituée d'une phase molle (l'intérieur des cellules), et d'une phase dure (les parois) [M83], [M94].

D'autre part, le mouvement des dislocations mobiles sur les plans de glissement, c'est à dire la déformation plastique à l'intérieur de la cellule, augmente la densité de dislocations dans les parois. Ce phénomène de durcissement d'une région provoqué par la déformation plastique dans une autre région s'appelle l'**écrouissage non local** [M94].

Les observations montrent effectivement que les dislocations se stockent dans les parois et ne peuvent pas traverser plusieurs cellules. Ainsi, en présence d'une structure cellulaire, le libre parcours moyen d'une dislocation mobile correspond exactement à la longueur de la cellule de dislocations [TFHM82]. Ceci confirme les premières observations de Tabata et al. [TYF78] au cours desquelles aucune ligne de glissement ne se propage d'une cellule à l'autre (cf. Figure I.9).

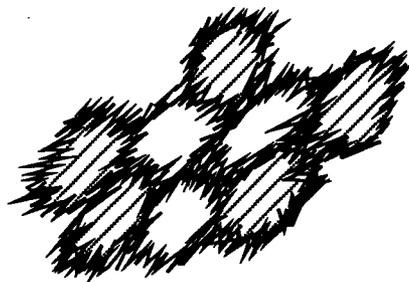


Fig. I.9: Lignes de glissement dans les cellules de dislocations.

Toutefois, les dislocations ne s'accumulent pas indéfiniment dans les parois compte tenu de leur possibilité d'annihilation [EM79]. Deux dislocations faiblement espacées ayant des vecteurs de Burgers de signes opposés se rejoignent spontanément sous l'effet de leur

contrainte d'interaction et disparaissent en fusionnant (restauration statique). Ce mécanisme s'amplifie au cours de la déformation plastique car le mouvement des dislocations augmente considérablement les probabilités de rencontre de paires de dislocations de signes contraires (restauration dynamique).

Une conséquence du phénomène de réarrangement des dislocations dans les parois est la diminution de l'épaisseur de ces murs au cours de la déformation plastique. Cette évolution se vérifie quel que soit le trajet de déformation, aussi bien pour l'acier [FS83] (de 0,3 μm pour 10% de déformation à 0,1 μm pour 60% de déformation) que pour l'aluminium [MM84] (de 0,6 μm pour 5% de déformation à 0,15 μm pour 15% de déformation). La décroissance de l'épaisseur des parois des cellules permet de stabiliser la structure de dislocations en minimisant le champ de contrainte à grande distance.

La taille des cellules est plus complexe à définir car elle dépend de leur forme. Pour des cellules à parois parallèles, leur dimension correspond à la distance entre deux murs, et dans le cas de cellules fermées, la racine carrée de la surface peut définir leur longueur caractéristique. Dans tous les cas, et ceci quelle que soit la sollicitation mécanique appliquée, la taille caractéristique de la cellule diminue avec la déformation plastique [NK86]. Cette évolution correspond en fait à la création de nouvelles parois [S86].

La relation non linéaire existant entre la taille des cellules et l'épaisseur des parois permet d'évaluer la variation de fraction volumique de zone dure dans l'échantillon. Celle-ci évolue de 0,25 à faible taux de déformation à 0,1 à fort taux de déformation.

Nous venons de détailler à une échelle très fine les mécanismes intervenant dans le développement d'une organisation cellulaire de dislocations. Les conséquences macroscopiques causées par ce type de microstructure ont été volontairement passées sous silence à ce stade de l'exposé, mais elles seront développées au chapitre I.3. La suite de cette partie traite d'un autre type d'hétérogénéités intragranulaires apparaissant lorsqu'on sollicite fortement un échantillon: ce sont les microbandes de cisaillement. Beaucoup plus dangereuses que les cellules de dislocations car elles annoncent les prémices d'une rupture, elles y sont néanmoins étroitement liées.

I.2.3 - Microbandes de cisaillement

Les microbandes de cisaillement apparaissent lors de grandes déformations plastiques ou de changements de trajet contraignants pour le matériau. Ces structures planaires de dislocations d'épaisseur égale à 0,2 μm se développent généralement dans toute la longueur du grain mais peuvent également apparaître de façon intermittente. Elles sont le siège d'une localisation de la déformation entraînant un mode de déformation fortement hétérogène dans le grain.

Le terme de microbande regroupe à travers la littérature des structures de morphologies semblables, mais très différentes quant à leur origine, et leur influence sur le comportement du matériau. On distingue deux types de microbandes: les microbandes de première et de seconde génération qui peuvent conduire à des bandes de cisaillement macroscopiques.

I.2.3.a) Microbandes de première génération

Les microbandes de première génération sont essentiellement présentes dans les matériaux à gros grains puisqu'elles sont initiées dans les régions denses de dislocations délimitant les blocs de cellules (cf. I.2.2.c) [H92], [KW89], [H62], [T92]. Ces microbandes sont composées de cellules de dislocations plus petites que les cellules des régions voisines mais elles peuvent aussi prendre la forme d'un mur à double paroi séparées par une région de très faible densité de dislocations. Les microbandes de premières générations jouent le rôle de frontière entre zones d'un même grain et ne sont pas forcément parallèles aux plans de glissement cristallographiques.

I.2.3.b) Microbandes de seconde génération

Les microbandes de seconde génération doivent leur appellation au fait qu'elles se superposent à une structure de dislocations déjà existante, généralement des cellules de dislocations initiées par un premier trajet. En effet, lors d'un second chargement, des microbandes de cisaillement apparaissent si le système de glissement qui leur est associé était latent pendant la prédéformation [T92]. Elles se présentent donc comme la perturbation d'une autre structure de dislocations.

Les microbandes de seconde génération de forme parallélépipédique sont parallèles aux plans de glissement et réparties de façon périodique [H92]. Elles sont espacées de quelques microns et isolées les unes des autres par une autre structure de dislocations (cellules) [T92]. Les microbandes délimitent donc deux régions différentes: la microbande, et la structure extérieure cisailée, dans laquelle on peut observer des marches.

Une deuxième famille de microbandes peut apparaître dans un grain entraînant le cisaillement des microbandes anciennement actives. Ce cisaillement montre bien le phénomène de localisation de la déformation dans la microbande. Cette activité intense peut entraîner de graves répercussions sur l'échantillon car, si dans un premier temps les microbandes de seconde génération s'arrêtent aux joints de grains, elles y créent des concentrations de contraintes qui peuvent conduire au cisaillement du joint [MH79] et à la formation de bandes de cisaillement.

I.2.3.c) bandes de cisaillement

Ce ne sont pas des hétérogénéités intragranulaires mais elles en sont les conséquences. Les bandes de cisaillement sont des manifestations macroscopiques de la localisation de la déformation. Elles s'étendent à travers tout l'échantillon et représentent donc un mode instable de déformation qui peut conduire à la ruine du matériau [T92]. Leur structure interne est constituée par des cellules de dislocations allongées.

Le mode de germination des bandes de cisaillement est encore mal connu. Inagaki propose une formation à partir des joints de grains [I90] alors que Dève et al. montrent que dans l'alliage de Fe-Ti-Mn les bandes se constituent indépendamment des microbandes à partir d'un assemblage de parois de cellules de dislocations [DHMA88]. Les microbandes de seconde génération se propagent généralement de manière continue à travers les joints de grains voisins pour former des bandes de micro-cisaillement qui se développent ensuite en bandes macroscopiques à travers tout l'échantillon [H92], [T92], [KoM86], [KoM88], [MH79], [KEHME86], [BB89].

I.2.4 - Conclusions

Le premier constat émanant de ce chapitre est la grande complexité du phénomène de structuration intragranulaire. Il est tout de même possible de dégager des mécanismes prépondérants. Parmi les hétérogénéités plastiques décrites, le glissement hétérogène se singularise par des contraintes internes très faibles par rapport à celles produites par les structures de dislocations. Il sera donc négligé dans la suite.

Concernant les cellules de dislocations, elles se développent tout au long de la déformation plastique et affectent le comportement du matériau pendant toute la phase d'écrouissage positif. De plus, la microstructure de dislocations constitue le catalyseur des phénomènes d'instabilités plastiques puisque les microbandes de cisaillement sont initiées à partir d'une première structure cellulaire de dislocations. Les arrangements de dislocations jouent donc un rôle essentiel dans le comportement du matériau et l'amorce de la localisation de la déformation.

En conséquence, le chapitre suivant se concentre uniquement sur l'évolution de ces sous-structures cellulaires en fonction des conditions de chargement macroscopique, et sur leurs effets sur la réponse du matériau.

I.3 - EVOLUTION DE LA STRUCTURE CELLULAIRE EN FONCTION DU CHARGEMENT, CONSEQUENCES MACROSCOPIQUES

Jusqu'à présent la structure cellulaire a été décrite comme un arrangement de dislocations suivant des zones de forte et de faible densité de dislocations sans définir précisément quelles étaient la forme et l'orientation de ces cellules. Les configurations de dislocations présentent en fait une grande variété de morphologies (cellules allongées, équiaxes, orientations diverses). De nombreuses études ont permis de corréler la topologie des cellules de dislocations avec l'orientation cristallographique du grain et le type de chargement appliqué, aussi bien dans le cas de trajet monotone que de trajet complexe [KW63], [FS83], [S86], [RS89].

I.3.1 - Trajet de chargement monotone

Fernandes et Schmitt [FS83] ont étudié, pour un acier doux polycristallin, les cellules de dislocations présentes dans les grains ayant un axe voisin de $\langle 111 \rangle$ normal au plan de la tôle, c'est à dire appartenant à la fibre privilégiée développée dans cet acier. L'orientation de ces grains est entièrement définie par un paramètre angulaire orientant la base du cristal par rapport au repère de chargement. L'étude de plusieurs chargements a permis de déterminer le rôle essentiel joué par les systèmes de glissement actifs dans les configurations de dislocations [S86].

Dans ce chapitre, nous développons particulièrement le cas de la traction uniaxiale dont les mécanismes simples permettent de mettre en évidence les phénomènes. Les observations relatives à d'autres chargements s'expliquent ensuite de la même façon.

I.3.1.a) Traction uniaxiale

Les observations effectuées dans le plan de la tôle montrent qu'un essai de traction uniaxiale engendre, dans les grains appartenant à la texture de fibre, des cellules très allongées, formées de longs murs parallèles. Les parois de dislocations sont fines et bien définies, quelques enchevêtrements de dislocations peuvent exister entre les parois. Les cellules observées présentent un angle pouvant aller de 33° à 66° entre la normale aux parois et la direction de contrainte principale maximale, c'est à dire la direction de traction (cf. Figure I.9) [FS83], [RS89].

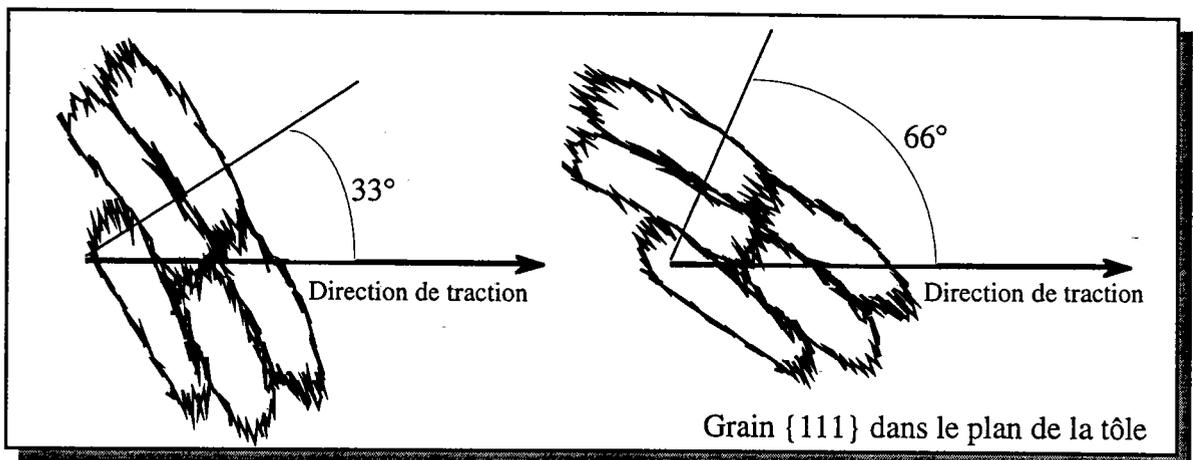


Fig. I.9: Orientation des cellules de dislocations par rapport à la direction de traction

Ces résultats peuvent s'interpréter à partir de la cristallographie. En effet, comme le laissait présager la genèse des cellules de dislocations, il existe une relation entre systèmes de glissement actifs et configurations de dislocations. Ce lien est particulièrement net lorsque la microstructure présente des parois planes comme c'est le cas ici. En traction uniaxiale, la majorité des grains étudiés ne présente qu'un seul système de glissement actif prédominant, soit suivant le plan cristallographique $\{110\}$, soit suivant le plan $\{112\}$. Fernandes et al. [FS83] observent que les parois des cellules de dislocations s'orientent quasiment parallèlement au plan du système de glissement le plus actif dans le grain. La légère désorientation constatée entre la prévision théorique du système actif et la mesure de l'orientation de la paroi peut s'expliquer, entre autres, par l'activation de systèmes de glissement secondaires au sein des cellules de dislocations.

Les parois planes s'orientant suivant le système le plus actif du grain, une seule famille de cellules se développe dans chaque grain. Mais certains grains observés présentent deux familles de cellules qui peuvent, soit s'entrecroiser, soit se produire dans des zones distinctes à l'intérieur du grain. Ce phénomène, loin de contredire les affirmations précédentes, démontre une nouvelle fois le lien entre orientation des parois et systèmes de glissement actifs. En effet, les grains concernés sont les grains dont la direction $\langle 112 \rangle$ ou $\langle 110 \rangle$ est voisine de la direction de traction et pour lesquels les deux systèmes de glissement s'activent simultanément. La présence des deux familles s'explique donc par la possibilité de glissement double, et leurs orientations correspondent, comme prévu, à chacun des plans de glissement actifs.

I.3.1.b) Autres chargements

La microstructure créée lors d'un essai de cisaillement simple est similaire à celle observée pour la traction. En effet, l'unicité du système de glissement actif dans chaque grain donne une microstructure bien définie, à parois planes orientées suivant le plan de glissement actif [RS89].

Dans le cas de la déformation plane, le grain présente deux systèmes de glissement actifs. Les observations corroborent bien le fait que les parois des structures de dislocations se développent suivant les systèmes de glissement actifs, puisque les cellules étudiées sont composées de deux familles de parois qui leur confèrent une forme parallélépipédique. Mais les arrangements observés sont souvent mal définis, et le parallélisme entre les plans de glissement actifs et les parois est beaucoup moins évident que pour la traction [FS83]. Il se dégage tout de même une orientation des cellules de 0° à 15° entre la normale aux parois et la direction principale maximale.

Les trois systèmes activés en expansion équibiaxiale conduisent à une structure cellulaire isotrope. L'orientation de ces cellules équiaxes ne peut être clairement définie à cause de la courbure des parois [S86].

Dans le cas du laminage, la forme et l'orientation des cellules varient considérablement d'un grain à l'autre. La microstructure se développe suivant des cellules équiaxes (grains $\{100\}$ voisins du plan de laminage) ou des cellules à parois planes (grains $\{110\}$ et $\{111\}$ voisins du plan de laminage) selon l'orientation cristallographique du grain [BS94].

I.3.1.c) Conséquences macroscopiques

Au cours de la déformation plastique, l'orientation du plan de glissement le plus actif dans chaque grain n'est pas aléatoire mais s'organise progressivement pour former une texture de fibre [L95]. Ce résultat a été obtenu à l'aide d'une simulation par la méthode autocohérente dans le cas d'un acier de texture cristallographique initialement isotrope. La représentation stéréographique de ces orientations est totalement différente suivant le chargement appliqué (cf. figure I.10). En conséquence, la microstructure présente une organisation à l'échelle macroscopique que Lemoine [LMB94] qualifie de texture de microstructure qui se superpose à la texture cristallographique.

La microstructure de dislocations dépend donc fortement de l'orientation cristallographique du grain et de la sollicitation mécanique appliquée, ainsi, pour un grain d'orientation fixé, la structure de dislocation ne dépend que du chargement.

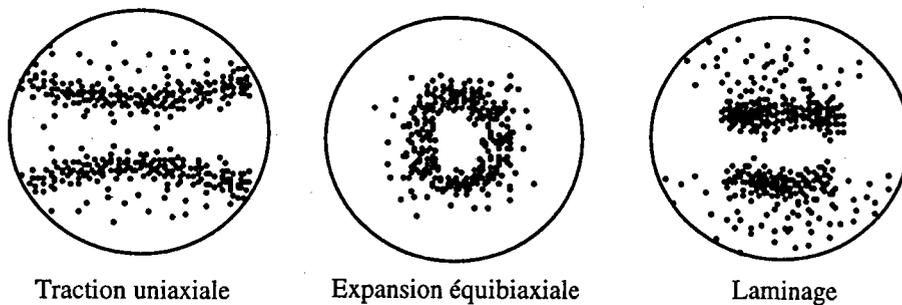


Fig. I.10: Figures de pôle des orientations du système le plus actif, donc des parois des cellules, à 40% de déformation pour différents chargements

Les cellules de dislocations définissent donc une organisation au delà de la structure granulaire de l'acier, ce qui n'est pas sans incidences sur le comportement macroscopique du matériau. En effet, les ensembles de parois constituent des obstacles au glissement des dislocations réduisant ainsi le libre parcours moyen des dislocations dans tout le polycristal. De plus, les différences d'activité plastique mentionnées au chapitre I.2.2.d) modifient le taux d'écroutissage macroscopique par rapport à une configuration homogène de dislocations. En conséquence, l'influence des structures de dislocations sur le comportement global du matériau en trajet monotone est largement admise et donne lieu à de nombreux modèles résumés dans la partie I.4. Citons par exemple la relation linéaire établit empiriquement entre la contrainte d'écoulement et l'inverse de la taille des cellules [TYF78], [TFHM82], [S86].

$$\tau = \tau_0 + \frac{k}{d} \quad (\text{I.1})$$

Avec τ_0 la friction du réseau, k une constante empirique, d la taille de la cellule.

Nous confirmerons au chapitre II cette correspondance entre la contrainte et le libre parcours moyen des dislocations par une approche théorique basée sur la thermodynamique.

La structure cellulaire représente la signature microscopique de la sollicitation appliquée. Le matériau garde donc en mémoire le trajet de chargement qu'il vient de subir. Cette microstructure peut conduire à des phénomènes d'instabilité plastique en trajet monotone par formation de microbandes de cisaillement (cf. I.2.3), mais elle peut s'avérer encore plus dangereuse dans le cas de certains trajets complexes.

I.3.2 - Trajets complexes

L'élaboration de pièces complexes requiert des procédés de mise en forme en plusieurs étapes. La pièce subit donc successivement différents chargements, que l'on appelle "trajet

complexe", "chemin séquentiel" ou "changement de trajet", avant d'acquies sa forme finale. Mais la connaissance du comportement du matériau en trajet monotone ne permet pas de prédire son comportement en chemin de déformation complexe. En effet, la réponse d'un matériau prédéformé dépend étroitement de l'interaction de sa structure en fin de précharge (texture cristallographique, forme des grains, microstructure de dislocations) avec le nouveau chargement appliqué [FS83], [S86], [RS89], [SSR88], [RRSS87], [RSB86].

Dans cette partie nous cherchons à corréliser les évolutions de la microstructure avec le comportement du matériau à la recharge. Les changements de trajet étudiés se composent uniquement de deux chargements successifs. Le matériau recuit, c'est à dire vierge de toute microstructure, est prédéformé puis déchargé. Ce même matériau, qui présente maintenant une configuration de dislocations induite par le premier trajet, subit ensuite une deuxième sollicitation mécanique.

I.3.2.a) Définition des trajets complexes

Lorsque l'on effectue un changement de trajet, le deuxième chemin de déformation peut être identique à la prédéformation (trajet continu), de sens opposé (essai Bauschinger) ou totalement différent de la prédéformation. Afin de caractériser ces différents cas de figures, Schmitt et al. [SAB85] introduisent le paramètre θ défini ci-dessous, permettant de mesurer l'amplitude du changement de trajet.

$$\theta = \frac{d\epsilon_p : d\epsilon}{(d\epsilon_p : d\epsilon_p)^{1/2} (d\epsilon : d\epsilon)^{1/2}} \quad (I.2)$$

avec $d\epsilon_p$ tenseur de déformation imposé relatif à la prédéformation
 $d\epsilon$ tenseur de déformation imposé relatif au deuxième chargement

θ correspond, dans l'espace des déformations, au cosinus de l'angle entre les deux vecteurs déformations définis par $(d\epsilon_{11}, d\epsilon_{22}, d\epsilon_{33}, 2 d\epsilon_{23}, 2 d\epsilon_{13}, 2 d\epsilon_{12})$. θ varie donc de -1 à 1, la valeur particulière 1 correspondant à un trajet continu, et la valeur -1 à un trajet inverse, c'est à dire de type Bauschinger.

Les tenseurs de déformations pilotent directement l'activation des systèmes de glissement. Le paramètre θ traduit donc les différences d'activité des systèmes de glissement entre le premier et le second trajet. Ainsi, lorsque θ décroît de 1 à 0, le nombre de nouveaux systèmes activés par le second trajet augmente. De même, quand θ s'approche de -1, de plus en plus de systèmes de glissement actifs lors de la prédéformation s'activent également à la recharge mais cette fois en sens inverse.

La microstructure étant directement liée aux systèmes activés, θ définit l'amplitude du changement de trajet en tant que mesure des interactions de la structure de dislocations induite par la prédéformation sur le second trajet. Les effets de texture et de forme de grains ne sont pas pris en compte par une telle définition. Mais pour des prédéformations modérées de l'ordre de 10 à 20%, la forme des grains et la texture cristallographique évoluent peu. Les caractéristiques mécaniques liées aux changements de trajet s'expliquent essentiellement par la texture initiale et les modifications des structures cellulaires de dislocations au cours de la recharge. Le choix du paramètre θ qui caractérise les trajets complexes du point de vue de la microstructure est donc tout à fait judicieux.

L'invariant scalaire θ présente également l'intérêt de pouvoir comparer plusieurs changements de trajet même si ceux-ci sont réalisés par des essais mécaniques différents. Quelques valeurs de θ relatives à différents trajets complexes sont répertoriées dans le tableau ci-dessous.

$\theta = 1$	$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\theta = 0,5$	$\theta = 0$	$\theta = -0,5$	$\theta = -1$
trajet continu	DP+TU (axes de déformation principale parallèles)	EEB+TU	DP+TU (axes de déformation principale orthogonaux)	TU+ TU à 90°	essai Bauschinger

DP: déformation plane, TU: traction uniaxiale, EEB: expansion équibiaxiale

Tableau I.1: Valeurs de θ en fonction des changements de trajet

Le paramètre θ permet de classer les caractéristiques rhéologiques du deuxième trajet en trois grandes catégories: les trajets pseudo-continus ($\theta \in [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$) les trajets pseudo-Bauschinger ($\theta \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$) et les trajets durs ou orthogonaux (θ voisin de 0). Ces trois comportements possèdent des caractéristiques différentes que l'on peut visualiser sur la figure (I.11).

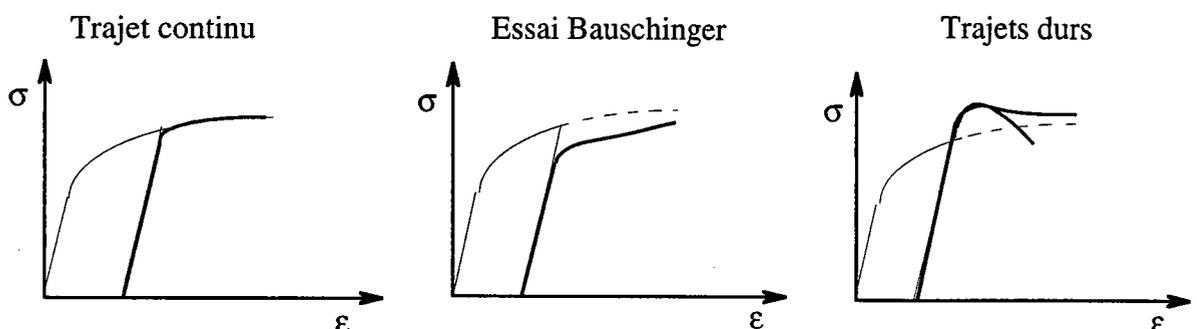


Fig. I.11: Différents comportements d'un matériau prédéformé

Lorsque après prédéformation le matériau est rechargé dans les mêmes conditions (trajet continu), sa réponse tend très vite vers le comportement du matériau non prédéformé. Les systèmes de glissements activés sont les mêmes pour les deux trajets.

Dans le cas de l'essai Bauschinger, les systèmes de glissement activés lors de la précharge sont réactivés en sens contraire. Le matériau présente une limite élastique inférieure à celle du matériau non prédéformé et un écrouissage plus faible (mais jamais négatif) qui tend ensuite vers celui du comportement monotone [HRT92].

Les trajets durs se caractérisent par leur haute limite élastique, supérieure à celle obtenue sans préchargement, et par leur écrouissage négatif qui peut conduire à une localisation de la déformation ou à une reprise du comportement selon le trajet monotone.

I.3.2.b) Evolution de la microstructure de dislocations lors d'un changement de trajet

Le matériau prédéformé puis déchargé présente une microstructure spécifique, induite par son premier chargement. Après quelques pour-cent de déformation suivant le deuxième trajet, ces arrangements de dislocations évoluent vers les configurations caractéristiques du nouveau mode de sollicitation [FS83], [S86], [RS89]. Ces modifications débutent à différents instants suivant les grains, elles sont d'autant plus retardées que la prédéformation est importante, mais elles se produisent de toute façon, quelle que soit la succession des chargements. Cette affirmation est vérifiée même lorsque la déformation nécessaire à l'établissement de la nouvelle microstructure ne peut être atteinte pour des raisons d'instabilité plastique. En effet, cela ne signifie pas que la configuration de dislocations n'évolue pas, mais au contraire que cette transformation a conduit à une localisation précoce de la déformation.

Lorsque la déformation suivant le second trajet atteint à peu près celle de la prédéformation, le matériau semble avoir perdu totalement la mémoire de l'ancienne microstructure. Les arrangements de dislocations ne se distinguent de ceux créés dans un échantillon non prédéformé que par une très faible différence de taille des cellules et d'épaisseur des parois. En effet, un matériau subissant un trajet complexe quelconque requiert généralement une contrainte de recharge supérieure à celle du trajet monotone (cf. figure I.11), ce qui facilite l'arrangement des dislocations dans les parois pour un taux de déformation donné. En conséquence, l'épaisseur des parois et la taille des cellules est plus faible si le matériau a subi une prédéformation antérieure (cf. chapitre I.2.2.d) [FS83], [S86].

Observons les mécanismes d'un trajet complexe quelconque à partir de l'échelle microscopique. Dans les premiers instants de la recharge, de nouveaux systèmes de glissements s'activent. La microstructure du matériau prédéformé devient "étrangère" (alien

dislocation substructure) et constitue un obstacle aux systèmes de glissement actifs lors du nouveau trajet si ceux-ci étaient latents pendant la prédéformation. En effet, le libre parcours moyen des dislocations étant restreint à la taille des cellules caractéristiques du premier trajet, la déformation se produit uniquement à l'intérieur de ces cellules. Par le biais d'interactions dislocations-parois, l'augmentation de la contrainte imposée permet ensuite aux dislocations de franchir les murs des cellules. La microstructure relative à la prédéformation disparaît par restauration dynamique des dislocations qui la composent [T92]. La nouvelle structure cellulaire peut commencer à se développer.

La période de transition structurale décrite plus haut s'avère plus ou moins dangereuse pour le matériau suivant la forme et l'orientation des cellules à transformer. Car si l'évolution de structures à parois planes vers une structure de forme équiaxe se déroule de façon continue, il n'en est pas de même pour la transformation inverse. En effet, les cellules équiaxes, induites par une expansion équilibaxiale, se forment à partir des parois planes des cellules générées par une prédéformation en traction uniaxiale. La première microstructure se dissout naturellement et les deux configurations peuvent parfois cohabiter dans un même grain. Au contraire, le passage de cellules fermées à des cellules très allongées met en jeu de fortes interactions dislocations-parois. La transition structurale se déroule brutalement par déblocage rapide des dislocations ce qui peut initier la formation de microbandes de cisaillement [S86]. Ce phénomène se rencontre également dans le cas de trajets durs générant des cellules de même forme mais d'orientation très différente.

Dans le cas d'un trajet continu ou lorsque les axes principaux de déformation maximale des deux trajets sont presque parallèles, les systèmes de glissement actifs lors de la prédéformation sont sollicités de nouveau à la recharge. Les structures de dislocations créées par le premier trajet ne font pas obstacle au glissement des dislocations et se consolident au cours de la recharge.

Le trajet de type Bauschinger active également les mêmes systèmes de glissement que la précharge mais cette fois dans le sens opposé. Les dislocations accumulées dans les parois par un déplacement positif sont maintenant sollicitées dans le sens opposé. Les dislocations constituant les couches extérieures des enchevêtrements sont très mobiles lorsque la contrainte les pousse vers le centre de la cellule et non vers l'intérieur des parois. Ainsi, la structure de dislocations se dissout en laissant quelques débris qui constituent les obstacles sur lesquels vont se construire les cellules relatives au trajet inverse [RS89].

Le trajet complexe se distingue donc du trajet monotone par cette phase d'annihilation puis de reconstruction de la microstructure. Cette transition peut s'effectuer de façon continue ou brutale selon la succession des trajets ce qui entraîne des conséquences, parfois dangereuses, sur le comportement macroscopique du matériau.

I.3.2.c) Relations entre l'évolution de la microstructure et le comportement macroscopique

De nombreux essais ont été réalisés afin de dégager les caractéristiques communes des trajets complexes. Les chargements séquentiels traction-traction, définis par une prédéformation en traction uniaxiale suivie d'une deuxième traction selon un axe différent faisant un angle ψ avec la première direction, permettent de décrire θ sur le segment $[-0.5, 1]$ [S86], [RS88]. Les trajets traction-cisaillement, consistant en une prédéformation en traction suivie d'un cisaillement dont la direction décrit un angle α avec la direction de traction, permettent d'atteindre les valeurs de θ comprises dans le segment $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ [S86], [RS89], [T92]. Les séquences traction-expansion équibiaxiale et déformation plane-traction correspondent à des valeurs uniques de θ répertoriées dans le tableau I.1 [S86]. En explorant une large plage de trajets complexes, l'ensemble de ces essais permet de corréliser les phénomènes macroscopiques aux configurations de dislocations. Ainsi, l'allure de la courbe caractéristique des premiers instants de la recharge est schématisée par la figure I.12 dans le cas d'un trajet dur.

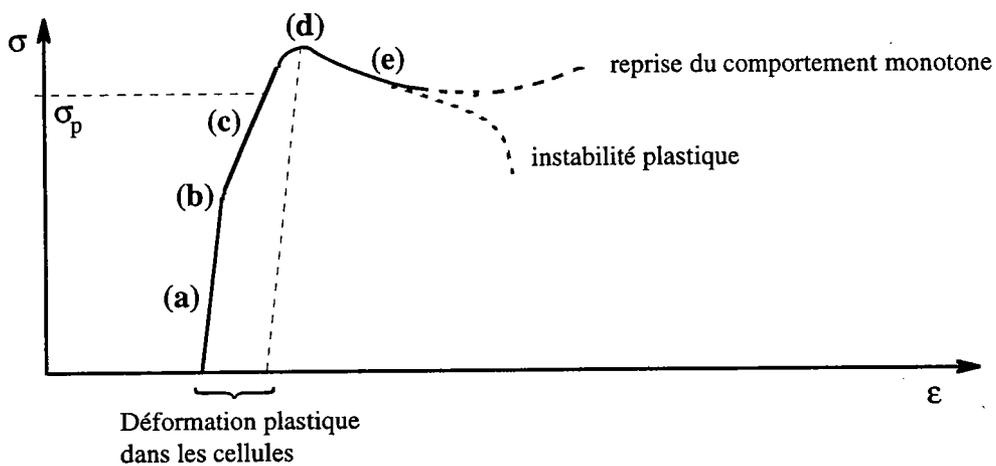


Fig. I.12: Comportement à la recharge d'un matériau prédéformé

Après une faible déformation élastique (a) apparaît un seuil de microplasticité (b) dû aux mouvements des dislocations à l'intérieur des cellules. La courbe présente ensuite un domaine à fort écrouissage (c) qui résulte, du faible parcours moyen des dislocations qui se trouvent limitées à l'intérieur des cellules, ainsi que du peu de dislocations mobiles à ce stade de la déformation. Le franchissement des parois (d) définit le seuil d'écoulement plastique macroscopique qui est généralement plus élevé que la contrainte de précharge σ_p . Le domaine de transition des structures cellulaires (e) conduit à un écrouissage inférieur à celui de la courbe monotone, parfois même négatif. Le comportement du matériau peut, soit

rejoindre la courbe monotone, soit présenter une instabilité plastique précoce conduisant à la ruine de l'échantillon.

Une des spécificités rhéologiques d'un matériau à la recharge est sa limite élastique macroscopique. L'évolution du rapport de la contrainte équivalente à la recharge sur la contrainte de prédéformation $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ en fonction du paramètre caractéristique des changements de trajet θ peut être représenté de manière qualitative sur la figure I.13 [S86]. Ainsi, en donnant une indication sur l'augmentation relative de la contrainte en fonction du changement de trajet, la courbe $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ représente une mesure de l'obstacle constitué par les parois.

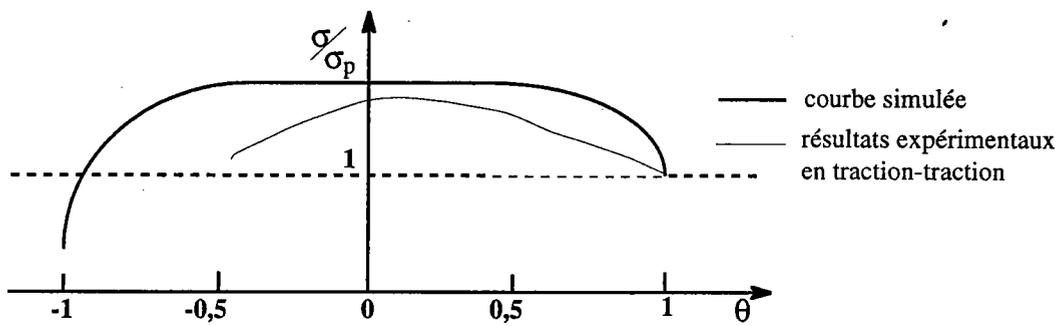


Fig. I.13: $\frac{\sigma}{\sigma_p}$ en fonction de θ

Ces courbes mettent en évidence une contrainte à la recharge généralement supérieure à la contrainte de prédéformation (avec un maximum pour les trajets durs) sauf pour le cas particulier du trajet continu et pour les trajets définis par $\theta \in [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$ présentant un effet Bauschinger d'autant plus marqué que θ se rapproche de -1.

Ces courbes traduisent le fait que la microstructure induite lors de la prédéformation écroute les systèmes de glissement de façon anisotrope. Les cissions critiques des systèmes réactivés dans le même sens (trajets pseudo-continu) sont les mêmes que pour la prédéformation. Les systèmes réactivés en sens inverse (essais pseudo-Bauschinger) sont adoucis du fait du glissement facile des dislocations. Au contraire, les systèmes latents lors de la prédéformation ont été durcis par le développement de murs de dislocations traversant leur plan de glissement. Les cellules de dislocations constituent donc des obstacles au mouvement des dislocations sur les nouveaux systèmes de glissement

Les essais précédents permettent également de caractériser l'écrouissage après recharge et l'apparition d'instabilités plastiques précoces. Lorsque la transition structurale est brutale (passage de cellules fermées à des cellules allongées, trajets durs), le phénomène

d'avalanche de dislocations, dû à la destruction par les dislocations mobiles des obstacles à leur mouvement, conduit à un écrouissage faible qui peut devenir négatif pour des taux de prédéformation élevés. Ces trajets durs sont généralement le siège d'une localisation précoce de la déformation plastique par initiation de microbandes de cisaillement pouvant causer la ruine du matériau (cf. Figure I.11) [S86]. Thuillier propose une condition nécessaire (mais non suffisante) à la formation de microbandes en fonction de la prédéformation: une microbande ne pourra se développer que si le système de glissement qui lui est associé était latent lors de la précharge [T92].

Pour un trajet pseudo-continu ($\theta \cong 1$) la prédéformation n'ayant pas d'incidence sur la microstructure, la contrainte à la recharge et l'écrouissage sont similaires à ceux du trajet monotone. Ceci est vérifié quel que soit le trajet défini par $\theta \cong 1$, c'est à dire aussi bien pour une traction-traction suivant les mêmes directions que pour un chargement traction-cisaillement avec $\alpha = 45^\circ$ [S86], [RS89], [RS88]. Ces trajets séquentiels ne présentent pas de localisation de la déformation précoce.

L'essai pseudo-Bauschinger réalisé en traction-cisaillement pour $\alpha = 135^\circ$ laisse apparaître une limite de microplasticité très visible, du fait de la grande mobilité des dislocations dans les cellules, ainsi qu'une faible limite d'écoulement plastique macroscopique [RS89], [T92]. Ce type de trajet ne présente pas d'instabilité plastique rapide.

Il est bon de faire remarquer que dans le cas d'essais sur le cuivre, les contraintes à la recharge sont inférieures à la contrainte de prédéformation quel que soit θ . Cette différence avec l'acier est encore mal expliquée. Elle peut provenir, soit de l'anisotropie initiale qui situe la courbe de prédéformation au-dessus des courbes de recharge, soit de la nature cristalline du cuivre (plus petit nombre de systèmes de glissement dans les CFC), soit de sa structure granulaire (petits grains) [RS88], [SSR88].

I.3.3 - Conclusions

Les nombreuses observations montrent que la morphologie et l'orientation de la microstructure dépendent du nombre de systèmes actifs dans le grain et donc de la sollicitation mécanique imposée. Un seul système actif conduit à la formation d'une configuration à parois planes, deux systèmes actifs donnent des parallélogrammes alors que trois systèmes actifs engendrent une structure isotrope. Les parois des cellules formées s'orientent à quelques degrés près suivant les plans de glissement actifs.

L'action de la structure cellulaire ainsi formée ne se cantonne pas au niveau microscopique mais entraîne des répercussions sur le comportement macroscopique. En outre, étant le précurseur des microbandes de cisaillement, elle constitue la cause première des phénomènes d'instabilité plastique.

En trajet complexe, le comportement d'un matériau dépend de la texture initiale, de son évolution et de la microstructure générée par le premier chargement. Raphanel et al. [RS88], [RSB86] démontrent que, pour des prédéformations modérées, la limite d'écoulement plastique résulte principalement de l'effet de la microstructure. Ce phénomène est encore plus marqué en trajet dur. Ainsi, la structure cellulaire induite par le premier trajet entraîne généralement plusieurs répercussions macroscopiques qui peuvent apparaître plus ou moins prononcées suivant le pourcentage de prédéformation et le type de changement de trajet (valeur de θ). Dans le cas général, le comportement d'un matériau à la recharge est caractérisé par:

- une contrainte à la recharge supérieure à la contrainte atteinte en prédéformation
- un écrouissage plus faible à même déformation que dans le cas d'un trajet monotone
- l'apparition d'instabilités plastiques.

Mis à part Rauch [R95] qui déduit, à partir d'essais de cisaillement-cisaillement réalisés à différentes températures de précharge, que seule la densité de dislocations et non leur structuration contrôle le comportement mécanique de l'acier doux, toutes les observations confirment l'importance du rôle des structures cellulaires de dislocations sur la rhéologie des changements de trajet. Il paraît donc tout à fait justifié de modéliser le comportement macroscopique et l'apparition d'instabilités plastiques pour des trajets monotones ou complexes à partir d'une description des arrangements de dislocations à l'échelle microscopique. Dans le chapitre suivant une historique des modèles traitant ces problèmes nous confortent dans cette idée et permet d'orienter notre recherche.

I.4 - MODELISATIONS

Le cadre des modélisations théoriques est basé sur les observations microscopiques et macroscopiques détaillées précédemment. Ces modèles visent à décrire le comportement global et les modifications locales du matériau ainsi que le phénomène de localisation de la déformation en tenant compte de la structure cellulaire de dislocations. Ils peuvent ainsi se substituer aux courbes limites de formage très utilisées dans l'industrie, mais qui nécessitent des campagnes d'essais très lourdes surtout dans le cas de changements de trajet.

La difficulté de ce problème réside dans l'extrême complexité des mécanismes de formation et d'évolution des cellules de dislocations qui viennent d'être résumés. Il est clair qu'aucune théorie ne peut prendre en compte tant de phénomènes, car cela nécessiterait un nombre très important (infini) de variables internes. Le problème doit être simplifié afin de permettre un développement théorique capable d'aboutir à des applications, tout en conservant les notions physiques essentielles.

Ainsi, deux philosophies se distinguent par l'utilisation de variables internes différentes pour caractériser les organisations de dislocations. On peut en effet décrire la microstructure cellulaire soit par sa densité de dislocations, soit par les variables topologiques et morphologiques associées aux cellules. Le but de cette partie n'est pas de détailler les équations relatives à ces modèles mais de dresser un aperçu de leurs possibilités.

I.4.1 - Modèles liés à la densité de dislocations

Ces modèles s'inspirent de la démarche phénoménologique développée, dans le cas d'un chargement monotone, par Mecking et al. [MK81] qui définit la contrainte d'écoulement et l'écrouissage en fonction de la densité totale de dislocations. D'autres études récentes traitent certains trajets complexes en introduisant des variables internes supplémentaires [T92], [R93], [HRT92], [Teo92]. Les modélisations sont actuellement plus abouties dans le cas des métaux CFC par rapport aux métaux CC du fait de la plus grande complexité des mécanismes physiques présents dans les cubiques centrés [R92].

D'une manière générale cette démarche nécessite une description phénoménologique à l'échelle microscopique de

- la contrainte d'écoulement en fonction des paramètres d'essais ($\dot{\epsilon}$, T) et de la microstructure définie par les paramètres α_i

$$\sigma = \sigma(\dot{\epsilon}, T, \dots, \alpha_i) \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (I.3)$$

- la loi d'évolution de cette structure avec la déformation.

$$\frac{d\alpha_i}{d\varepsilon} = f(\dot{\varepsilon}, T, \dots, \alpha_j) \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (I.4)$$

A partir de ce formalisme, il est possible d'élaborer différentes lois de comportement et d'évolution des variables internes afin de représenter au mieux la rhéologie du matériau. Les nouveaux coefficients introduits dans ces relations sont ensuite identifiés à partir d'essais expérimentaux.

Développons maintenant quelques exemples de trajets particuliers afin de comprendre les difficultés de ces méthodes.

I.4.1a) Trajets monotones

Dans le cas d'un trajet monotone traité en plasticité cristalline, les variables internes sont les glissements plastiques γ définis pour chaque système de glissement et la densité de dislocations ρ sur chaque plan. La contrainte d'écoulement sur le plan de glissement indicé "i" se décompose généralement en deux contributions associées respectivement à la friction du réseau et aux interactions avec les dislocations sécantes "j". Pour un acier doux [T92]:

$$\tau_i = \tau_o(\dot{\gamma}, T) + \mu b \left(\sum_j \beta_{ij} \rho_j \right)^{1/2} \quad (I.5)$$

avec μ le module de cisaillement, b le vecteur de Burgers

ρ_j les densités de dislocations relatives aux systèmes de glissement actifs "j"

β_{ij} les coefficients caractérisant les interactions entre les différentes dislocations

La densité de dislocations mobiles varie très peu, l'évolution de la densité de dislocations sur chaque système de glissement résulte de la compétition entre accumulation et annihilation des dislocations fixes au cours de l'essai [R93]. Ce qui donne sur chaque plan de glissement:

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = \frac{1}{b\lambda} - g(\dot{\varepsilon}, T) \cdot \rho \quad (I.6)$$

avec λ le libre parcours moyen des dislocations

g une fonction représentant les phénomènes de restauration

Ces lois permettent de décrire l'érouissage des aciers doux soumis à un chargement monotone, mais elles doivent être adaptées afin de représenter le cas de sollicitations complexes.

I.4.1.b) Trajets durs

Dans le cas de trajets durs, il est nécessaire de considérer les interactions du nouveau chargement avec les structures de dislocations introduites lors de la prédéformation. L'étude de trajets durs en cisaillement autorise l'hypothèse de glissement simple pour chacune des séquences de ces chargements. Thuillier propose une modélisation qualitative des trajets complexes en introduisant la densité de dislocation relative à la prédéformation (ρ_p) et la nouvelle densité de dislocations (ρ_n) [T92]. Les nouvelles lois découlent des équations (I.5) et (I.6).

$$\tau_n = \tau_o(\dot{\gamma}, T) + \mu b (\beta_{nn} \rho_n + \beta_{np} \rho_p)^{1/2} \quad (I.7)$$

$$\frac{d\rho_p}{d\gamma_n} = -g_p(\dot{\epsilon}, T) \cdot \rho_p \quad \text{et} \quad \frac{d\rho_n}{d\gamma_n} = \frac{1}{b \lambda} - g_n(\dot{\epsilon}, T) \cdot \rho_n \quad (I.8)$$

La loi d'évolution de la densité de dislocations ρ_p traduit le fait que la microstructure préexistante tend à disparaître au cours du deuxième trajet et que cette restauration dynamique est d'autant plus lente que le taux de prédéformation est élevé.

Un tel modèle ne représente que l'adoucissement lié à la destruction de la microstructure de prédéformation. La phase de microplasticité qui précède cette période transitoire ainsi que le durcissement des microbandes suivant l'adoucissement ne sont pas modélisés. Un modèle plus complexe traite ces phénomènes dans le cas d'un essai Bauschinger.

I.4.1.c) Essais Bauschinger

Afin de définir précisément les phénomènes de microplasticité, de transition structurale et de reprise de l'écroutissage, Hu et al. [HRT92], [Teo92] introduisent de nouvelles variables internes $\alpha = \{P, R, X\}$. La variable P permet de prendre en compte la polarité des parois cellulaires résultant d'empilements de dislocations du même signe. R décrit les réarrangements de dislocations durant la phase de transition et le paramètre X traduit l'influence des enchevêtrements de dislocations de moindre stabilité.

Le comportement du matériau est géré par un critère de plasticité F, la loi d'écoulement qui lui est associée, et les différentes lois d'évolution des variables internes.

$$F(\sigma, \alpha) = |\sigma - X| - (R_o + |P| + R) = 0 \quad (I.9)$$

avec R_o la limite initiale du critère

La description rigoureuse des mécanismes présents lors d'un essai Bauschinger nécessite, en plus des nouvelles variables internes, des lois d'évolution spécifiques à chaque phénomène. C'est à dire des lois basées sur des considérations physiques et adaptées aux cas du trajet monotone, de la microplasticité, de la désintégration des structures préexistantes et de la construction des nouvelles configurations [HRT92], [Teo92]. Ces formulations, plus complexes que celles décrites précédemment, ne sont pas détaillées ici.

Après identification des paramètres à l'aide d'essais simples, cette modélisation du comportement d'un acier calmé aluminium en trajet Bauschinger fournit d'excellents résultats en accord avec l'expérience. Le faible écrouissage en début de trajet inverse et la reprise du comportement asymptotique, correspondant respectivement à la dissolution de la première microstructure et à la formation d'une nouvelle microstructure après désintégration complète des configurations préexistantes, sont parfaitement représentés. L'évolution de la microstructure est suivie à travers les variables internes P , R et X .

I.4.1.d) Conclusions

Ces modèles décrivant la structure cellulaire de dislocations par le biais de variables internes liées à la densité de dislocations permettent d'obtenir rapidement de bons résultats qualitatifs [R92], [T92]. Une description plus exhaustive des phénomènes conduit à une formulation plus complexe nécessitant d'avantage de paramètres à identifier, mais permet en contrepartie de coller parfaitement à l'expérience [HRT92].

Cependant, ces théories modélisent le comportement du matériau uniquement pour les changements de trajet étudiés. L'adaptation de tels modèles à d'autres sollicitations nécessite une nouvelle étude des phénomènes de stockage et d'annihilation afin de définir les lois d'évolution correspondant à ces trajets. Cet inconvénient découle directement du choix des variables internes. Une autre manière de prendre en compte les cellules de dislocations consiste à considérer la géométrie de cette structure plutôt que les dislocations qui la composent.

I.4.2 - Modèles liés à la morphologie des cellules de dislocations

Ces modélisations sont basées sur la différence d'activité plastique existant entre les parois et l'intérieur des cellules (cf. le paragraphe I.2.2.d). Les contraintes internes importantes dans les enchevêtrements de dislocations (environ trois fois la contrainte d'écoulement) contrastent nettement avec les faibles contraintes internes des zones de glissement facile. Les cellules de dislocations peuvent donc être assimilées à une structure biphasée constituée

d'une phase molle (l'intérieur des cellules) et d'une phase dure (les parois) [M83] (cf. figure I.14).

L'approche biphasée permet ainsi de décrire les interactions entre groupes de dislocations, c'est à dire les interactions de type cellule-paroi et non plus du type dislocation-dislocation comme c'était le cas pour les modèles précédents. Les paramètres importants sont maintenant la forme et l'orientation de cellules, indépendamment des systèmes de glissement actifs sur lesquels elles se sont formées. Les différentes modélisations utilisant cette démarche inaugurée par Mughrabi [M83] sont les approches autocohérentes et thermodynamiques.

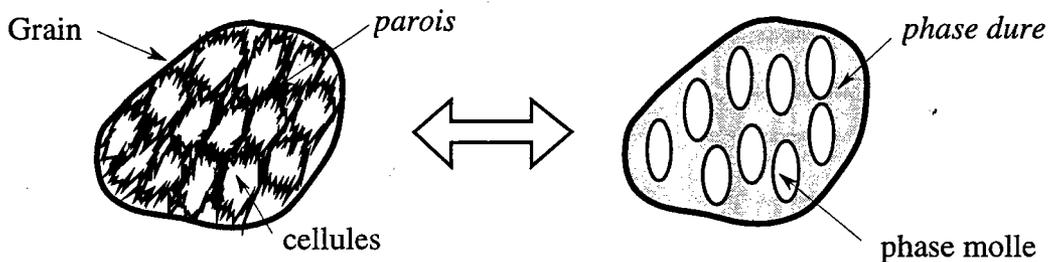


Fig. I.14: Modélisation biphasée de la microstructure intragranulaire

I.4.2.a) Approche micromécanique par champs moyens couplée au modèle autocohérent

Au départ, l'approche autocohérente est une méthode de transition d'échelle méso-macro qui tient compte de la plasticité cristalline mais considère les grains comme des volumes homogènes. Ce modèle donne de bons résultats concernant la texture cristallographique et le comportement macroscopique mais il est incapable de représenter les phénomènes d'instabilité plastique et les changements de trajet.

Une première amélioration consiste à assimiler le grain à une structure biphasée fixe représentant la microstructure intragranulaire [M94], [MLKB94], [MLB94]. Dans ce cas les cellules sont modélisées par des ellipsoïdes figées et seule la matrice d'érouissage non local traduit les mécanismes liés aux dislocations. Le comportement du grain est déterminé par une approche micromécanique par champs moyens dont les variables internes sont les glissements plastiques moyens de la phase molle et de la phase dure. Le modèle autocohérent permet ensuite de réaliser la transition d'échelle méso-macro, c'est à dire du grain vers le polycristal. Ce modèle fournit une bonne représentation des contraintes internes intragranulaires (d'ordre 3) mais l'immobilité des cellules empêche de décrire les changements de trajet.

Comme le laissent pressentir les chapitres antérieurs, la description du comportement des trajets complexes passe forcément par la libre évolution des cellules de dislocations. Les hétérogénéités plastiques intragranulaires doivent donc être décrites par une **structure biphasée à frontières mobiles**. Ce qui nécessite, par rapport au modèle précédent, l'introduction de nouvelles variables internes caractérisant la forme et l'orientation des cellules [L95], [LBM97].

Les critères d'évolution des variables morphologiques et topologiques sont calqués sur le critère de Schmidt. Les forces motrices utilisées sont déterminées à partir d'une démarche thermodynamique et les forces critiques à partir de la matrice d'écroûissage non local. Cette matrice traduit les phénomènes de durcissement des parois provoqué par le glissement plastique dans les cellules, mais les nombreux termes relatifs aux nouvelles variables restent inconnus. Les lois d'évolution de ces variables sont données par la règle de consistance.

La mise en place de ce problème à frontières mobiles s'avère très complexe à cause du nombre important de variables internes (glissements plastiques dans chaque phase, forme et orientation des cellules), et sa traduction informatique se heurte à d'énormes problèmes de capacité et d'instabilité numériques. Des hypothèses restrictives concernant la matrice d'écroûissage en partie inconnue, la fraction volumique et la morphologie sont nécessaires à la programmation. Malgré cela, le comportement macroscopique et les évolutions de l'orientation et des axes des cellules ellipsoïdales sont conformes aux observations dans le cas de trajet monotone (cf. I.3.1). En revanche, les simplifications effectuées ne permettent pas de traduire les trajets complexes.

Le handicap de l'approche micromécanique par champs moyens couplée à la méthode autocohérente réside dans ses nombreuses variables internes qui rendent actuellement impossible la mise en oeuvre numérique du modèle complet. L'idéal serait de déterminer une approche simplifiée fournissant des résultats encourageants.

I.4.2.b) Approche thermodynamique

Cette approche vise à déterminer le comportement du matériau et la localisation de la déformation à partir de considérations énergétiques utilisant un nombre de variables internes réduit. Partant de là, David [D97] propose, dans le cas du cisaillement simple, un modèle simplifié mais cependant très intéressant.

Un matériau biphasé, constitué d'inclusions aplaties suivant la direction de cisaillement modélise la formation de bandes de cisaillement. Les variables internes sont limitées au strict minimum. Il s'agit du glissement plastique moyen de la matrice γ^0 , du glissement plastique moyen des inclusions γ^i et du plus grand demi-axe "a". Le diamètre des inclusions peut

donc augmenter, traduisant ainsi la propagation des microbandes. Le comportement macroscopique se déduit des grandeurs locales par des opérations de moyenne sur les phases. La structure granulaire de l'acier n'est donc pas représentée par ce modèle.

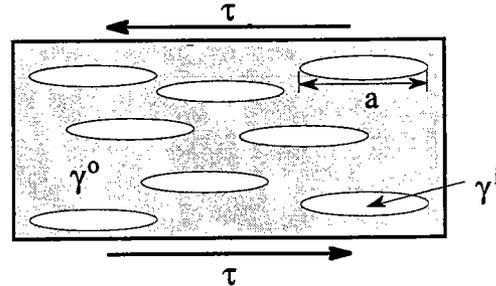


Fig. I.15: Modèle biphasé évolutif simplifié

L'évolution des variables internes est donnée par la règle de consistence appliquée à la généralisation du critère de Schmidt. Les forces critiques nécessaires sont définies à l'aide d'une matrice d'écrouissage isotrope et les forces thermodynamiques correspondent à la dérivée de l'énergie libre par rapport aux variables internes:

$$\begin{aligned}
 F_{\gamma^0} &= -4 \mu (A a^2 - 1) [E - \gamma^0 - A a^2 (\gamma^i - \gamma^0) + \frac{\pi (2 - \nu) c A}{4 (1 - \nu)} a (\gamma^i - \gamma^0)] \\
 F_{\gamma^i} &= 4 \mu A a^2 [E - \gamma^0 - A a^2 (\gamma^i - \gamma^0)] - \frac{\pi \mu (2 - \nu) c A}{(1 - \nu)} a (\gamma^i - \gamma^0) \\
 F_a &= -2 \mu A (\gamma^i - \gamma^0) [-4 a (E - \gamma^0 - A a^2 (\gamma^i - \gamma^0)) + \frac{\pi (2 - \nu) c}{4 (1 - \nu)} (1 - 3 A a^2) (\gamma^i - \gamma^0)]
 \end{aligned}
 \tag{I.10}$$

avec E la variable pilote, A une constante et " c " le plus petit demi-axe fixé

Le comportement macroscopique du trajet monotone en cisaillement est bien représenté et traduit notamment l'apparition du phénomène de localisation de la déformation plastique dans les bandes de cisaillement (cf. figure I.16). Tant que " a " reste constant (la force motrice sur " a " est inférieure à la force critique) le système réagit comme un matériau biphasé normal. Par contre, lorsque cette force critique est atteinte, l'évolution de " a " entraîne une redistribution des vitesses $\dot{\gamma}^i$ et $\dot{\gamma}^0$ et conduit à un adoucissement macroscopique associé au fait que l'ensemble de la microstructure évolue.

L'originalité de ce type de modèle réside dans l'étude de la localisation de la déformation à partir de l'énergie libre et non pas à partir de notions d'adoucissement traduites sous forme de termes négatifs dans la matrice d'écrouissage. Ce modèle simplifié donne de bons résultats et prouve l'intérêt d'une telle démarche.

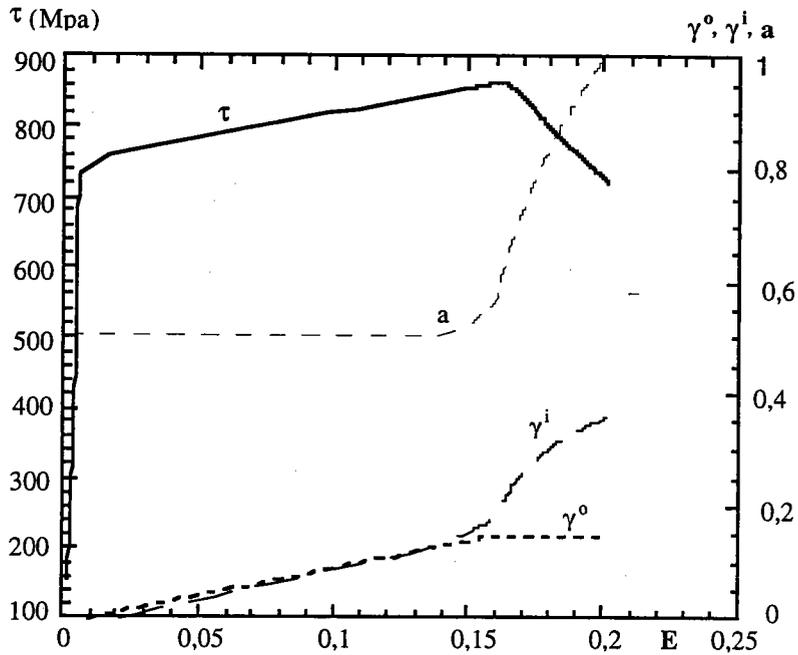


Fig. I.16: Evolution de la contrainte macroscopique et des variables internes

Sans perdre de vue les acquis autocohérents, nous nous engageons vers une généralisation de ce type de modèle. Ainsi, à partir d'une représentation biphasée de la microstructure intragranulaire couplée à une approche thermodynamique, nous cherchons à décrire l'évolution des cellules de dislocations (leur forme et orientation) et leurs conséquences macroscopiques, notamment lors de changements de trajet.

I.5 - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les modèles définis à une échelle "trop macroscopique" ne parviennent pas à représenter correctement l'apparition de la localisation de la déformation ni les trajets complexes car ils négligent des mécanismes microscopiques essentiels influençant ces phénomènes. Il est donc nécessaire de baser notre étude sur les nombreuses observations microscopiques qui démontrent l'importance des hétérogénéités intragranulaires. Un bilan de ces structures permet de dégager le mécanisme prépondérant d'hétérogénéisation intragranulaire par développement de cellules de dislocations.

Après quelques pour-cent de déformation, les dislocations d'un matériau recuit, réparties initialement de manière aléatoire, se regroupent pour former une structure organisée. Ces arrangements composés de zones à faible et forte densité de dislocations définissent les cellules de dislocations. Elles se caractérisent par des contraintes internes très élevées dans les parois (largement prépondérantes devant les contraintes internes d'ordre 2), et par une grande différence d'activité plastique entre les régions.

Certains paramètres tels que la température, la vitesse de déformation et la structure granulaire de l'acier ont une influence sur la microstructure cellulaire. Mais la variable essentielle, définissant la forme et l'orientation des cellules, correspond au chargement mécanique imposé à l'échantillon. En effet, les enchevêtrements de dislocations se développent suivant les plans des systèmes de glissement actifs, ce qui entraîne une organisation des parois au niveau du polycristal appelée texture de microstructure. Les cellules participent au comportement du matériau et constituent également la mémoire du matériau vis à vis des sollicitations antérieures.

Lors de changements de trajet, la première microstructure se dissout progressivement pour disparaître complètement au profit des cellules de dislocations caractéristiques du second chargement. Suivant le changement de trajet, de fortes interactions apparaissent entre la microstructure générée par la prédéformation et le second chemin de déformation. La structure cellulaire est alors à l'origine des phénomènes d'instabilité plastique précoce par formation de microbandes de cisaillement.

Toutes ces observations démontrent la grande complexité de la physique des microstructures de dislocations. Toute modélisation nécessite forcément l'établissement d'hypothèses simplificatrices (la première étant de négliger les effets intergranulaires) afin de réduire le nombre de variables internes. Ainsi, la représentation des cellules de dislocations peut s'effectuer, soit par l'intermédiaire des densités locales de dislocations qui la composent, soit par une description biphasée de cette structure qui résulte directement de la grande différence

d'activité plastique existant entre les parois et l'intérieur des cellules. En traitant les interactions du type cellule-paroi, la modélisation biphasée traduit la résistance des structures cellulaires lors d'un changement de trajet ce qui devrait permettre de modéliser l'apparition d'une localisation de la déformation.

Le cadre de la modélisation développée dans la suite est donc basé sur une **représentation biphasée évolutive à écrouissage non local** de la microstructure. "Evolutive" car les cellules peuvent s'orienter et changer de forme suivant le chargement appliqué. "Ecrouissage non local" car les dislocations mobiles à l'intérieur des cellules se stockent dans les parois et contribuent à durcir cette zone. Le comportement macroscopique du matériau est ensuite obtenu par une opération de moyenne sur les phases, ce qui revient à négliger la structure granulaire de l'acier au profit des microstructures intragranulaires.

La résolution de ce problème s'effectue par le biais d'une formulation thermodynamique à variables internes qui se déroule de la façon suivante:

La première étape de cette démarche, développée dans la deuxième partie, implique le calcul de l'énergie libre de Helmholtz qui dépendra des variables internes choisies pour représenter le modèle. Formulée dans le cas général, elle peut s'adapter à de multiples problèmes tels que les changements de phase, les alliages à mémoire de forme et les aciers TRIP. L'énergie élastique stockée est ensuite appliquée au cas des cellules de dislocations modélisées sous la forme d'un biphasé selon une approche par champs moyens. Les variables internes du modèle se composent des déformations plastiques dans chaque phase et de paramètres définissant la forme et l'orientation des cellules. La complexité des calculs variationnels nous amène à exprimer l'énergie libre sous une forme invariante. Ce formalisme permet d'obtenir des résultats intéressants sur la stabilité des configurations statiques de dislocations et démontre ainsi l'importance de l'énergie de Helmholtz dans les problèmes micromécaniques.

La troisième partie complète, théoriquement et numériquement, le modèle biphasé évolutif non local. Afin de ne pas multiplier le nombre de paramètres, la plasticité est traitée de manière phénoménologique à l'échelle microscopique. La plasticité étant un processus thermodynamiquement irréversible, il est nécessaire de calculer l'énergie dissipée par les mécanismes inélastiques. La dissipation permet alors de déterminer plus facilement les forces motrices associées à chaque variable interne. Les forces critiques se déduisent en supposant un frottement constant sur la frontière mobile et leur variation nécessite l'emploi d'une matrice d'écrouissage non locale. L'évolution des variables internes est donnée par la règle de consistance associée au critère utilisé. Les résultats numériques, obtenus moyennant quelques hypothèses, permettent de suivre les modifications de la microstructure et mettent en évidence les phénomènes d'instabilité plastique pour des trajets monotones et complexes.

Références Bibliographiques

- [BB89] BERVEILLER M. et BOUAOUINE H., "Formation des micro et macrobandes de cisaillement dans les métaux CFC", 1989, 32^e colloque de métallurgie, Ed. Revue de Métallurgie
- [BS94] BERVEILLER M. et SCHMITT J.H., "Déformation des cristaux et polycristaux", 1994, Le Livre de l'Acier, ed scientifiques Béranger G. Henry G. Sanz G., pp.167-204
- [BZ81] BERVEILLER M. et ZAOUI A., "Methodes selfconsistentes en mécanique des solides hétérogènes" dans "comportement rhéologique des structures et matériaux", 1981, Editions ENPC, C. HUET et A. ZAOUI Edit., pp.175-199
- [D97] DAVID F., "Modélisation méso-macro de la localisation de la déformation", 1997, Thèse de l'Université de Metz
- [DHMA88] DEVE H., HARREN S., McCULLOUGH C., ASARO R.J., "Micro and macroscopic aspects of shear band formation in internally nitrated single crystals of Fe-Ti-Mn alloys", 1988, Acta Met. Vol. 36, N°2, pp.341-365
- [EM79] ESSMANN U. et MUGHRABI .H, "Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities", 1979, Philosophical Magazine A, Vol. 40, N° 6, pp.731-756
- [FS83] FERNANDES J.V. et SCHMITT J.-H., "Dislocation microstructures in steel during deep drawing", 1983, Philosophical magazine A, Vol. 48, N° 6, pp.841-870
- [H62] HU H., "Microbands in a rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization", 1962, Acta Met., Vol. 10, pp.1112-1116
- [H92] HANSEN N., "Deformation microstructures", 1992, Scripta. Metall. et Materialia, Vol. 27, pp.1447-1452

- [HRT92] HU Z., RAUCH EF et TEODOSIU C, "Work hardening behavior of mild steel under stress reversal at large strains", 1992, Int. J. of Plasticity, Vol. 8, pp.839-856
- [I90] INAGAKI H., "Development of microstructures and texture during cold rolling of polycrystalline iron containing an excess amount of dissolved carbon", 1990, Zeitschrift für Metallkunde, Vol. 81, pp.474-483
- [JS84] JACKSON P.J., SIEDERSLEBEN M., "The stability of dislocation cell boundaries in FCC crystals", 1984, Scripta Met., Vol. 18, pp.749-754
- [K61] KRÖNER E., "Zur plastischen Verformung des Vielkristalls", 1961, Acta Metall., Vol9, pp.155-161
- [K79] KUBIN L., "Dislocations et déformation plastique", 1979, Ecole d'été d'Yrivals
- [KEHME86] KORBEL A., EMBURY J.D., HARTHERLY M., MARTIN P.L. et ERBSLOH H.W., "Microstructure aspects of strain localization in Al-Mg alloys", 1986, Acta Metall., Vol. 34, N°10, pp.1999-2009
- [KM88] KUBIN L.P. et MARTIN G., "Non-linear Phenomena in Materials Science", 1988, Trans. Tech. Publications Ltd, Switzerland
- [KoM86] KORBEL A. et MARTIN P.L., "Microscopic versus macroscopic aspect of shear band deformation", 1986, Acta Met., Vol. 34, pp.1905-1909
- [KoM88] KORBEL A. et MARTIN P.L., "Microstructural events of macroscopic strain localisation in prestrained tensile specimens", 1988, Acta Met., Vol. 36, pp.2575-2586
- [KS92] KRATOCHVIL J. et SAXLOVA M., "A model of formation of dipolar dislocation structures", 1992, Solid State Phenomena, Vol. 23 & 24, pp.369-384
- [KW63] KEH K.S. et WEISSMANN S., " Electron microscopy and strength of crystal", 1963, G.Thomas et Washburn eds, Interscience, New York, pp.231-300

- [KW89] KULHMANN-WILSDORF D., "Theory of Plastic Deformation properties of low energy dislocations structures", 1989, Mat. Sci. and Engineering, Vol 113, pp.1-41
- [L93] LIPINSKI P., "Modélisation du comportement de métaux en transformations élastoplastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelles", 1993, Thèse d'habilitation de l'Université de Metz
- [L95] LEMOINE X. "analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", 1995, Thèse de l'Université de Metz
- [L97] LINEAU C., "Analyse expérimentale de la déformation plastique d'un polycristal d'acier comparaison avec les simulations de modèles polycristallins", 1997, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- [LKD92] LAN Y., KLAAR H.J. et DAHL W., "Evolution of dislocation structures and deformation behavior of iron at different temperatures: Part I. Strain hardening curves and cellular structures", 1992, Metall. Trans., Vol. 23A, pp.537-544
- [LBM97] LEMOINE X., BERVEILLER M. et MORREALE J., "Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", Sept 1997, Revue de Métallurgie-CIT / Science et génie des matériaux, pp.
- [LMB94] LEMOINE X., MULLER D. et BERVEILLER M., "Texture of microstructures in BCC metals for various loading paths", 1994, Mat. Science Forum, Vol. 157-162, pp.1821-1826
- [M83] MUGHRABI H., "Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals", 1983, Acta Metall., Vol.31, N° 9, pp.1367-1379
- [M94] MULLER D., "Influence de l'écroûissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins", 1994, Thèse de l'Université de Metz

- [MH79] MALIN A.S. et HATHERLY M., "Microstructure of cold-rolled copper", 1979, Metal Science, pp.463-472
- [MLB94] MULLER D., LEMOINE X. et BERVEILLER M., "Nonlocal behavior of elastoplastic metals: theory and results", 1994, Trans. of the ASME, Vol. 116, pp.378-383
- [MLBK94] MULLER D., LEMOINE X., KRATOCHVIL J. et BERVEILLER M., "Non-local behavior of metals", 1994, Solid State Phenomena, Vol. 35-36, pp.393-398
- [MM84] MORRIS M.A. et MARTIN J.L., "Evolution of internal stresses and substructure during creep at intermediate temperatures", 1984, Acta Metall., Vol.32, N° 4, pp.549-561
- [MK81] MECKING H., KOCKS U.F., "Kinetics of flow and strain hardening", 1981, Acta Metallurgica, Vol. 29, pp.1865-1875
- [NK86] NABIL BASSIM M. et KLASSEN R.J., "Variation in dislocation cell size with local strain in a low alloy steel", 1986, Mat. Sciences an Eng., Vol.81, pp.163-167
- [PPL75] POLLNOW D. et PENELL R. et LACOMBE P., "Relations entre les propriétés plastiques et la microstructure de monocristaux de fer déformés par traction à la température ambiante", 1975, Mém. Scien. Revue Metallurgie, pp.491-500
- [R88] REY C., "Effects of grains boundaries on the mechanical behavior of grains in polycrystals", 1988, Revue Phys. Appl., Vol. 23, pp.491-500
- [R93] RAUCH E.F., "Etude de l'érouissage des matériaux, aspects microstructuraux et lois de comportement", 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [R95] RAUCH E.F., "Effet des sous-structures de dislocations sur le comportement mécanique de l'acier doux", 1995, 6^{ème} Colloque Franco-Polonais "Hétérogénéités de déformation plastique", Saint Etienne

- [RRSS87] RAPHANEL J.L., RAUCH E., SHEN E.L. et SCHMITT J.H., "Shear of prestrained steel specimens", 1987, Scripta Mat., Vol. 21, pp.1087-1090
- [RS88] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., "Microstructure et macroplasticité des matériaux polycristallins sous chargement complexe", 1988, Rapport DRET 85-137
- [RS89] RAUCH E.F. et SCHMITT J.H., "Dislocation substructures in mild steel deformed in simple shear", 1989, Mater. Sci. Eng., Vol.A113, pp.441-448
- [RSB86] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., BAUDELET B., "Effect of a prestrain on the subsequent yielding of low carbon steel sheets: experiments and simulations", 1986, Int. Journal of Plasticity, Vol. 2. N°4, pp.371-378
- [S86] SCHMITT J.H., "contribution à l'étude de la micro-macroplasticité des aciers", 1986, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [SAB85] SCHMITT J.H., AERNOUDT E. et BAUDELET B., "Yield loci for polycrystalline metals without texture", 1985, Mat. Sci. Eng., Vol. A147, pp.143-154
- [SSR88] SHEN E.L., SCHMITT J.H., RAPHANEL J.L., "Résultats expérimentaux d'essais séquentiels sur le cuivre", 1988, Rapport interne, LGPMM Grenoble
- [T92] THUILLIER S., "Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux", 1992, Thèse de l'INPG
- [Teo92] TEODOSIU C., "Materials science input to engineering models", 1992, Riso 92
- [TFHM82] TABATA T., FUJITA H., HIRAOKA M.A. et MIYAKE S., "The relationship between flow stress and dislocation behaviour in [111] aluminium single crystal", 1982, Philosophical Magazine A, Vol. 46, N° 5, pp.801-816
- [TYF78] TABATA T., YAMANAKA S. et FUJITA H., "In situ deformation of the [111] aluminium single crystals observed by high voltage microscopy", Acta Metall., Vol. 26, pp.405-411

[W65] WEERTMAN J., "Théorie élémentaire des dislocations", 1965, Ed Masson & Cie

CHAPITRE II

Forme invariante
de l'énergie libre de Helmholtz
et applications

CHAPITRE II

Forme invariante de l'énergie libre de Helmholtz et applications

L'énergie libre de Helmholtz correspond à l'énergie élastique stockée dans le cas d'une transformation à température constante. Elle provient des déformations élastiques liées, soit au chargement extérieur, soit aux contraintes internes. Cette énergie joue un rôle essentiel dans la résolution des problèmes micromécaniques car elle permet de déterminer la dissipation du système (cf. chapitre III) et les forces motrices associées aux variables internes. La connaissance de l'énergie libre est donc nécessaire pour suivre l'évolution des grandeurs microscopiques et donc macroscopiques de nombreux problèmes (changements de phases, AMF, aciers TRIP).

Les équations relatives au calcul de l'énergie libre de Helmholtz sont tout d'abord détaillées dans le cadre général d'un domaine contenant des interfaces de discontinuités, pour être ensuite adaptées au problème de la microstructure cellulaire modélisée par un matériau biphasé. Le bilan des difficultés inhérentes à cette formule, notamment pour le calcul variationnel, nous conduit à exprimer l'énergie libre sous une forme invariante. Cette démarche permet d'établir une expression simplifiée de l'énergie de Helmholtz que l'on peut ensuite appliquer à l'étude de la stabilité des configurations statiques de dislocations.

II.1 - CALCUL DE L'ENERGIE LIBRE DANS UN CADRE GENERAL

Le domaine de validité de notre étude se limite aux cas des transformations quasi-statiques (forces d'inertie négligées) vérifiant les hypothèses de petites perturbations (déformations et rotations infinitésimales). Ces restrictions sont valables pour les grandeurs microscopiques et macroscopiques.

Après un récapitulatif des équations de base, locales et globales, relatives à notre problème, on s'intéressera au déroulement des calculs proprement dit. Signalons auparavant, que la mise en annexe de la détermination des contraintes internes (Annexe A) a été effectuée dans un but de clarté, afin de ne pas perturber le déroulement du raisonnement. Elle ne présage en rien de l'importance de ce calcul, que l'on peut d'ailleurs qualifier d'essentiel.

II.1.1 - Position du problème

Considérons un milieu de volume V , supposé infini, libre de contrainte, mais soumis sur sa frontière ∂V à un déplacement imposé u^d défini par:

$$u_i^d = E_{ij} x_j \quad (\text{II.1})$$

avec E_{ij} la déformation macroscopique
 x_j un point du contour

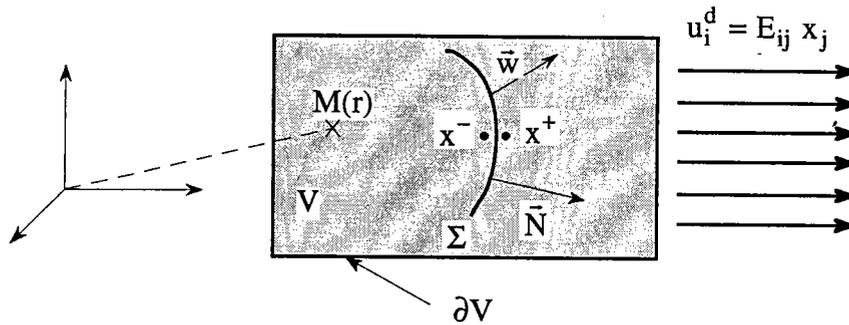


Fig. II.1: Position du problème

Ce milieu contient des surfaces de discontinuités mobiles Σ supposées parfaites, de normale N et de vitesse \vec{w} . Le saut $[x]$ d'une grandeur x à travers la frontière Σ est donné par:

$$[x] = x^+ - x^- \quad (\text{II.2})$$

II.1.1.a) Grandeurs locales

A forces volumiques nulles, le champ de contrainte doit vérifier les conditions d'équilibre quasi-statique

$$\text{des moments: } \sigma_{ij}(r) = \sigma_{ji}(r) \quad (\text{II.3})$$

$$\text{et des forces: } \sigma_{ij,j}(r) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Les équations de compatibilité traduisent la continuité du champ de déplacement $u(r)$, elles imposent:

$$\epsilon_{ikl} u_{j,lk} = 0 \quad (\text{II.5})$$

avec $\epsilon_{ikl} = \{1, -1, 0\}$ suivant que les indices décrivent une permutation circulaire de 1 2 3, une permutation non circulaire, ou que deux indices sont égaux.

La partition du gradient de déplacement en une partie symétrique et antisymétrique définit alors les tenseurs de déformation ε et de rotation ω . Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, les expressions linéarisées sont les suivantes:

$$u_{i,j}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \omega_{ij}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.6})$$

$$\text{avec } \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})) \quad \text{et} \quad \omega_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{j,i}(\mathbf{r})) \quad (\text{II.7})$$

Le principe de superposition permet de décomposer la déformation totale en une déformation élastique et une déformation inélastique qui se réduit dans notre cas aux déformations plastiques.

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) \quad (\text{II.8})$$

Le comportement élastique du matériau, que nous supposons linéaire et homogène, est donné par la loi de Hooke:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \quad \text{et inversement} \quad \varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (\text{II.9})$$

Les interfaces mobiles Σ étant supposées parfaites, les équations d'équilibre (II.4) et de compatibilité (II.5) entraînent les sauts suivants (cf. II.2):

$$[\sigma_{ij} N_j] = \sigma_{ij}^+(\mathbf{r}) N_j - \sigma_{ij}^-(\mathbf{r}) N_j = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$[u_i] = u_i^+(\mathbf{r}) - u_i^-(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II.11})$$

En résumé, les équations locales sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \sigma_{ji}(\mathbf{r}) \\ \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \\ u_{i,j}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) + \omega_{ij}(\mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})) \quad \text{et} \quad \omega_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{j,i}(\mathbf{r})) \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \\ u_i^d = E_{ij} x_j \quad \text{sur } \partial V \\ [\sigma_{ij} N_j] = 0 \quad \text{et} \quad [u_i] = 0 \quad \text{à travers } \Sigma \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

II.1.1.b) Grandeurs macroscopiques

Pour tout champ de contraintes statiquement admissibles ($\text{div } \sigma = 0$ et $\sigma \cdot n = \Sigma \cdot n$ sur la frontière ∂V) et tout champ de déformations cinématiquement admissibles (ε compatible, dérivant d'un champ de déplacement u vérifiant $u = E \cdot x$ sur la frontière ∂V), on montre que les grandeurs locales $\varepsilon(r)$ et $\sigma(r)$ sont reliées aux grandeurs globales E et Σ par une simple opération de moyenne volumique:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_v \sigma_{ij}(r) dV \quad (\text{II.13})$$

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_v \varepsilon_{ij}(r) dV \quad (\text{II.14})$$

La déformation macroscopique E peut également se décomposer en une partie élastique et une partie plastique. En effet, les constantes élastiques étant supposées uniformes, nous obtenons en combinant les équations (II.8), (II.9) et (II.13):

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_v (\varepsilon_{ij}^e(r) + \varepsilon_{ij}^p(r)) dV = C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} + \frac{1}{V} \int_v \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.15})$$

Ainsi, la déformation totale s'écrit: $E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^p$ (II.16)

avec les déformations macroscopiques élastique E^e et plastique E^p correspondant aux moyennes volumiques des grandeurs microscopiques respectives, c'est à dire:

$$E_{ij}^e = \frac{1}{V} \int_v \varepsilon_{ij}^e(r) dV \quad \text{et} \quad E_{ij}^p = \frac{1}{V} \int_v \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.17})$$

Les équations (II.13) et (II.17) conduisent alors à la loi de Hooke macroscopique:

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}^e \quad \text{et inversement} \quad E_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} \quad (\text{II.18})$$

II.1.2 - Energie libre de Helmholtz

L'énergie libre de Helmholtz se définit, dans le cas isotherme, à partir de la densité volumique d'énergie élastique $\phi(r)$ par:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \int_v \phi(r) dV \quad (\text{II.19})$$

avec $\phi(r) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^e(r)$ (II.20)

En substituant dans (II.19) les équations (II.20), (II.8) puis (II.7), on obtient compte tenu des symétries du tenseur des contraintes (II.3):

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) u_{i,j}(r) dV - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.21})$$

Intégrons par parties la première intégrale sans oublier les conditions d'équilibre quasi-statique (II.4). L'énergie libre devient:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} \int_v \left(\sigma_{ij}(r) u_i(r) \right)_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.22})$$

Le théorème de la divergence appliqué à une intégrale volumique dont le domaine contient des surfaces de discontinuité Σ de normale N est défini par [G73]:

$$\int_v T_{,i} dV = \oint_{\partial v} T n_i dS - \int_{\Sigma} [T N_i] dS \quad (\text{II.23})$$

avec T un tenseur quelconque et ∂v la surface fermée de normale n_i frontière du volume V ,

D'après (II.10) et (II.11), le saut $[\sigma_{ij} u_i N_j]$ est égal à:

$$[\sigma_{ij} u_i N_j] = \sigma_{ij}^+ u_i^+ N_j - \sigma_{ij}^- u_i^- N_j = \sigma_{ij}^+ u_i^+ N_j - \sigma_{ij}^+ u_i^+ N_j = 0 \quad (\text{II.24})$$

Ce qui permet de transformer la première intégrale en intégrale surfacique telle que:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} \oint_{\partial v} \sigma_{ij}(r) u_i(r) n_j dS - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.25})$$

En tout point r de coordonnées x_k appartenant à la frontière ∂v délimitant le milieu V , le vecteur déplacement u_i est imposé par la formule (II.1). Ce qui donne:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} \oint_{\partial v} \sigma_{ij}(r) E_{ik} x_k n_j dS - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.26})$$

Le théorème de la divergence (II.23) appliqué à l'intégrale de surface, associé à la condition d'interface parfaite (II.10), à l'équation d'équilibre (II.4) et à la propriété d'uniformité de la déformation moyenne, permettent d'obtenir l'intégrale volumique suivante:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) E_{ik} \delta_{kj} dV - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.27})$$

car $x_{k,j} = \delta_{kj}$, δ_{kj} étant le symbole de Krönecker

Puisque $E_{ik} \delta_{kj} = E_{ij}$, l'équation (II.27) devient par le biais de la relation de moyenne en contrainte (II.13):

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} V E_{ij} \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.28})$$

Prenons en compte maintenant, le fait que le tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(r)$ peut être décomposé en deux contributions:

$$\sigma_{ij}(r) = \Sigma_{ij} + \tau_{ij}(r) \quad (\text{II.29})$$

avec Σ_{ij} le tenseur des contraintes macroscopiques défini par (II.13) et

$\tau_{ij}(r)$ le tenseur des contraintes internes

Le tenseur des contraintes internes $\tau_{ij}(r)$ résulte uniquement du champ de déformation inélastique et plus particulièrement des incompatibilités du champ plastique $\varepsilon^p(r)$. Les propriétés de $\tau_{ij}(r)$ concernent évidemment:

$$\text{la condition d'équilibre quasi-statique: } \tau_{ij,j}(r) = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\text{et la propriété de moyenne volumique nulle: } \bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{V} \int_v \tau_{ij}(r) dV = 0 \quad (\text{II.31})$$

Le calcul de ce tenseur $\tau_{ij}(r)$ à partir des fonctions de Green est développé dans l'annexe A.

L'énergie de Helmholtz s'écrit donc en fonction de Σ , uniforme sur V , et de $\tau(r)$, fonction de la position:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} V E_{ij} \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \int_V \varepsilon_{ij}^p(r) dV - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.32})$$

En considérant la moyenne des déformations plastiques sur V et la loi de Hooke macroscopique données respectivement par (II.17) et (II.18), Φ devient:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} V \left(E_{ij} C_{ijkl} E_{kl}^e - E_{ij}^p C_{ijkl} E_{kl}^e \right) - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.33})$$

En substituant la déformation élastique macroscopique grâce à (II.16), on obtient l'énergie libre de Helmholtz pour un domaine quelconque, contenant des surfaces de discontinuité, et soumis sur sa frontière à des conditions limites en déplacement:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \right) - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.34})$$

L'énergie élastique stockée apparaît bien comme la somme de deux termes, le premier provenant du chargement extérieur et le deuxième dû aux contraintes internes. Le calcul du tenseur $\tau_{ij}(r)$ est détaillé à l'Annexe A dans le cas général puis pour le problème de l'inclusion d'Eshelby-Kröner.

II.2 - APPLICATION AU CAS DES CELLULES DE DISLOCATIONS

Le but de cette partie est d'explicitier l'expression de l'énergie libre (II.34) dans le cas particulier des cellules de dislocations. La modélisation biphasée de la microstructure, développée ci-dessous, restreint à six paramètres le nombre de variables internes associées aux configurations de dislocations. De plus, l'application du problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner (cf. Annexe A) permet, tout en tenant compte des interactions cellule-paroi, de simplifier considérablement les calculs liés à la détermination des contraintes internes et donc de l'énergie libre.

II.2.1 - Représentation simplifiée de la structure cellulaire

La modélisation de la microstructure cellulaire s'appuie sur les constatations rapportées au chapitre I.2.2.d. Le glissement plastique facilité à l'intérieur des cellules V^s , de même que les fortes contraintes internes dans les parois V^h , traduisent la différence très nette d'activité plastique entre les zones à forte et faible densité de dislocations (cf. figure II.2 page suivante). Cette caractéristique permet de représenter les arrangements de dislocations sous la forme d'un composite biphasé constitué d'une phase molle à forte déformation plastique (les cellules), et d'une phase dure à faible déformation plastique (les parois). L'interface ∂V^s délimitant chaque phase est supposée parfaite, c'est à dire que la continuité des vecteurs contrainte et déplacement est vérifiée. Le champ de déformation plastique local associé à ce modèle est alors représenté par un champ uniforme par morceau défini par les moyennes volumiques sur chaque phase:

$$\varepsilon_{ij}^p(r) = \begin{cases} \varepsilon_{ij}^{ps} & \text{si } r \in V^s \\ \varepsilon_{ij}^{ph} & \text{si } r \in V^h \end{cases} \quad (\text{II.35})$$

avec ε^{ps} et ε^{ph} les grandeurs locales moyennes, uniformes dans chaque phase.

La description de la microstructure par un **modèle biphasé** partage le grain en deux domaines V^s (indice s comme soft = molle) et V^h (indice h comme hard = dure). En conséquence, pour toute variable macroscopique X décrite comme la moyenne volumique de $x(r)$ sur le domaine V , l'intégrale de volume sur V peut être séparée en deux intégrales sur chacune des phases en respectant la procédure suivante:

$$X = \frac{1}{V} \int_V x(r) dV = \frac{1}{V} \frac{V^s}{V^s} \int_{V^s} x(r) dV + \frac{1}{V} \frac{V^h}{V^h} \int_{V^h} x(r) dV \quad (\text{II.36})$$

En définissant la fraction volumique de phase molle f par: $f = \frac{V^s}{V}$ (II.37)

la fraction volumique de phase dure f' par: $f' = (1-f) = \frac{V^h}{V}$ (II.38)

et les moyennes volumiques sur chaque phase par:

$$x^s = \frac{1}{V^s} \int_{V^s} x(r) dV \quad \text{et} \quad x^h = \frac{1}{V^h} \int_{V^h} x(r) dV \quad (II.39)$$

l'intégrale de volume devient: $X = f x^s + (1-f) x^h$ (II.40)

Les moyennes volumiques explicitées dans les formules (II.13), (II.14), (II.17) et (II.31) s'expriment alors en fonction des grandeurs moyennes par phase:

$$\Sigma_{ij} = f \sigma_{ij}^s + (1-f) \sigma_{ij}^h \quad (II.41)$$

$$E_{ij} = f \epsilon_{ij}^s + (1-f) \epsilon_{ij}^h \quad (II.42)$$

$$E_{ij}^c = f \epsilon_{ij}^{cs} + (1-f) \epsilon_{ij}^{ch} \quad \text{et} \quad E_{ij}^p = f \epsilon_{ij}^{ps} + (1-f) \epsilon_{ij}^{ph} \quad (II.43)$$

$$0 = f \tau_{ij}^s + (1-f) \tau_{ij}^h \quad (II.44)$$

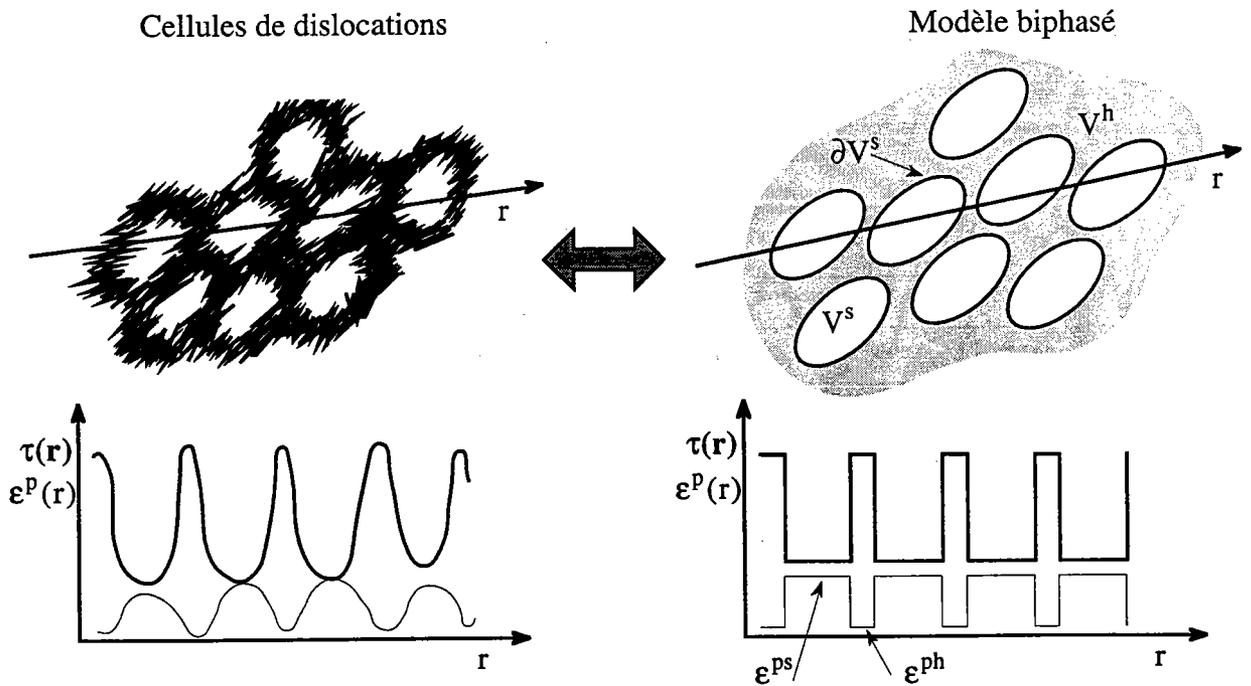


Fig. II.2: Différence d'activité plastique le long d'un axe r traversant la structure cellulaire dans le cas réel et dans le cas biphasé.

La topologie du composite n'est pas choisie au hasard. Afin de représenter au mieux, les configurations cellulaires de dislocations, le biphasé se compose d'une matrice de volume V^h représentant les parois, dans laquelle sont noyées des **inclusions ellipsoïdales** de volume total V^s modélisant les cellules (cf. figure II.2). Cette morphologie particulière permet d'une part, de traiter de multiples formes de cellules (sphériques, "oblates", allongées, aplaties) et d'autre part, de limiter le nombre de variables internes.

En effet, la forme et l'orientation des cellules sont entièrement définies par six paramètres: les trois demi-axes de l'ellipsoïde (a, b, c avec $a > b > c$) et les trois angles d'Euler (α, β, γ) orientant le repère propre de l'ellipsoïde par rapport au repère macroscopique. Les évolutions de ces six variables traduisent à elles seules les transformations morphologiques des cellules de dislocations au cours de chargements monotones ou de changements de trajets. La représentation de la microstructure par des inclusions ellipsoïdales est donc une hypothèse forte qui assimile les formes quelconques des configurations de dislocations réelles à des volumes simples, mais qui, en contrepartie, facilite considérablement le problème.

De plus, afin de calculer les contraintes internes dans la phase molle tout en prenant en compte les phénomènes d'**interactions cellule-paroi** vues au chapitre I, la représentation biphasée s'effectue à l'aide du problème de l'inclusion plastique d'Eshelby-Kröner (cf. Annexe A). La structure cellulaire est donc remplacée par une somme de N microstructures simplifiées schématisée à la figure II.3. Chaque problème élémentaire est constitué d'une cellule de dislocations ellipsoïdale v^s de déformation plastique ϵ^{ps} , immergée dans une matrice de volume V supposé infini devant v^s soumise à la déformation plastique moyenne E^p donnée par (II.43) qui permet ainsi de représenter les autres organisations cellule-paroi. L'ensemble de ces N inclusions définit le volume de phase molle $V^s = N v^s$ dans le biphasé. La position de la cellule dans la matrice n'apparaît pas dans une telle description, seule l'orientation de l'inclusion est prise en compte.

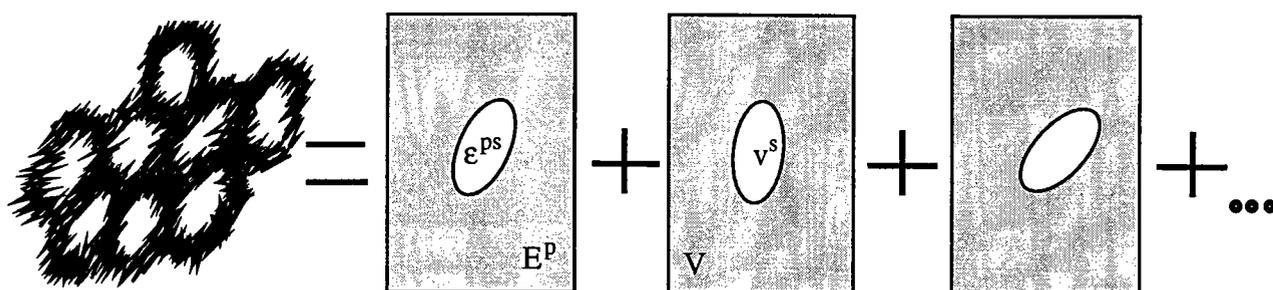


Fig. II.3: Modélisation de la microstructure cellulaire

Pour chaque motif, les hypothèses utilisées (inclusions ellipsoïdales, déformation plastique uniforme par morceau, matrice infinie) vérifient les conditions nécessaires à l'application du formalisme associé au problème de l'inclusion plastique détaillé dans l'Annexe A. Cette

démarche permet alors de calculer dans l'inclusion les tenseurs locaux des déformations, des contraintes de Cauchy et des contraintes internes. Les résultats mettent en évidence la propriété d'uniformité de ces tenseurs dans l'inclusion.

Les observations décrites dans la partie I montrent que les cellules de dislocations présentent généralement une orientation et une morphologie commune dans chaque grain. Il paraît donc justifié de ne considérer qu'une seule famille d'inclusion (même forme et même orientation). Toutes les cellules possèdent ainsi les mêmes variables internes morphologiques et angulaires. Cette modélisation entraîne l'égalité des grandeurs locales dans chaque inclusion qui peuvent donc être confondues avec leur moyenne volumique sur la phase molle V^s .

Le retour aux grandeurs macroscopiques s'effectue par les opérations de moyennes volumiques (II.41), (II.42) et (II.44). Cela signifie que cette représentation biphasée de la microstructure gomme la structure granulaire de l'acier pour ne prendre en compte que les effets liés aux cellules de dislocations. Cette hypothèse atteint évidemment ses limites lorsque la sollicitation mécanique imposée admet plusieurs formes et orientations de cellules possible. La solution serait alors de réaliser la transition d'échelle entre le grain et le matériau suivant une procédure d'homogénéisation autocohérente.

En résumé, les huit variables internes de notre problème sont:

- la déformation plastique dans la phase molle ϵ^{ps}
- la déformation plastique dans la phase dure ϵ^{ph}
- les trois demi-axes (a, b, c) de l'ellipsoïde
- les angles d'Euler (α, β, γ) entre le repère propre de l'inclusion et le repère global

Nous souhaitons insister ici sur l'une des caractéristiques essentielles de notre travail. Le problème lié aux cellules de dislocations se révèle être totalement différent des études classiques traitant les milieux hétérogènes. En effet, contrairement aux joints de grains fixes du polycristal, dans notre cas, les frontières entre phase molle et phase dure évoluent au cours de la déformation plastique. La morphologie et l'orientation de l'inclusion appartenant à l'ensemble des variables internes, notre problème correspond à un problème à frontières libres. Cette situation entraîne des complications à la fois théoriques et numériques.

II.2.2 - Energie libre de Helmholtz

Nous allons maintenant spécifier l'énergie libre rappelée ci-dessous, dans le cadre de la modélisation micromécanique par champs moyens représentant la microstructure de dislocations:

$$\Phi(E, \varepsilon^p) = \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \right) - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^p(r) dV \quad (\text{II.45})$$

D'après la démarche (II.36), l'intégrale de volume se sépare en deux intégrales sur chaque phase. Les déformations plastiques locales étant modélisées par un tenseur uniforme par morceau selon (II.35), on obtient:

$$\begin{aligned} \Phi(E, \varepsilon^{ps}, \varepsilon^{ph}) &= \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \right) - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{ps} \int_{V^s} \tau_{ij}(r) dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{ph} \int_{V^h} \tau_{ij}(r) dV \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Faisons apparaître, grâce à (II.39), les moyennes volumiques par phase des contraintes internes τ^s et τ^h .

$$\Phi(E, \varepsilon^{ps}, \varepsilon^{ph}) = \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \right) - \frac{1}{2} V^s \varepsilon_{ij}^{ps} \tau_{ij}^s - \frac{1}{2} V^h \varepsilon_{ij}^{ph} \tau_{ij}^h \quad (\text{II.47})$$

Le tenseur τ^s est déterminé à partir du problème de l'inclusion d'Eshelby-Kröner. Les contraintes internes dans l'inclusion sont données par l'équation (A.31) de l'Annexe A pour tout point appartenant à l'ellipsoïde. Toutes les inclusions étant identiques, la moyenne volumique des contraintes internes sur la phase molle est donc égale à:

$$\tau_{ij}^s = - C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\varepsilon_{kl}^{ps} - E_{kl}^p) \quad (\text{II.48})$$

avec I_{mnkl} le tenseur identité d'ordre 4 et S_{mnkl} le tenseur d'Eshelby

Rappelons les différentes caractéristiques du tenseur d'Eshelby: il est défini sur l'ellipsoïde à partir des fonctions de Green par la relation (A.28). En conséquence, il est indépendant du point de l'inclusion considéré, mais il est fonction des demi-axes (a, b, c) de l'ellipsoïde et de son orientation (α, β, γ) par rapport au repère macroscopique. Le rôle du tenseur d'Eshelby est essentiel puisqu'il représente les interactions cellule-paroi.

D'après la propriété (II.44) de moyenne nulle des contraintes internes sur le volume total, la moyenne des contraintes internes sur la phase dure est donc:

$$\tau_{ij}^h = \frac{f}{(1-f)} C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\varepsilon_{kl}^{ps} - E_{kl}^p) \quad (\text{II.49})$$

En reportant (II.48) et (II.49) dans l'énergie de Helmholtz (II.47), Φ devient implicitement fonction des variables internes de forme et d'orientation par l'intermédiaire du tenseur d'Eshelby. Introduisons également les fractions volumiques de chaque phase grâce aux définitions (II.37), (II.38), il vient alors:

$$\Phi\left(E, \varepsilon^{ps}, \varepsilon^{ph}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}\right) = \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - E_{ij}^p) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^p) \right) + \frac{1}{2} V f \left(\varepsilon_{ij}^{ps} - \varepsilon_{ij}^{ph} \right) C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \left(\varepsilon_{kl}^{ps} - E_{kl}^p \right) \quad (II.50)$$

Après avoir remplacé le tenseur des déformations plastiques macroscopiques d'après (II.43), on obtient finalement l'énergie élastique stockée dans la structure cellulaire de dislocations:

$$\Phi\left(E, \varepsilon^{ps}, \varepsilon^{ph}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}\right) = \frac{1}{2} V \left((E_{ij} - f \varepsilon_{ij}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) \right) + \frac{1}{2} V f (1-f) \left(\varepsilon_{ij}^{ps} - \varepsilon_{ij}^{ph} \right) C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \left(\varepsilon_{kl}^{ps} - \varepsilon_{kl}^{ph} \right) \quad (II.51)$$

L'énergie complémentaire Ψ est également très utilisée lorsque le problème est piloté en contrainte. Elle se définit comme le dual de l'énergie de Helmholtz par :

$$\Psi = V \Sigma E - \Phi \quad (II.52)$$

L'énergie complémentaire relative à notre biphasé est donnée par:

$$\Psi\left(\Sigma, \varepsilon^{ps}, \varepsilon^{ph}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}\right) = \frac{1}{2} V \left(\Sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} \right) + V \Sigma_{ij} \left(f \varepsilon_{ij}^{ps} + (1-f) \varepsilon_{ij}^{ph} \right) - \frac{1}{2} V f (1-f) \left(\varepsilon_{ij}^{ps} - \varepsilon_{ij}^{ph} \right) C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \left(\varepsilon_{kl}^{ps} - \varepsilon_{kl}^{ph} \right) \quad (II.53)$$

II.2.3 - Discussion

L'énergie libre de Helmholtz Φ ainsi que l'énergie complémentaire Ψ dépendent de différentes variables:

- *la variable pilote:*
la déformation macroscopique E ou la contrainte macroscopique Σ
- *les variables internes plastiques:*
les déformations plastiques dans chaque phase: ϵ^{ps} et ϵ^{ph}
- *les variables internes morphologiques contenues dans le tenseur d'Eshelby:*
les demi-axes (a, b, c) de l'ellipsoïde
les angles d'Euler (α, β, γ) orientant l'inclusion

La principale difficulté des équations (II.51) et (II.53) réside dans le calcul du tenseur d'Eshelby donné par (A.28) et plus particulièrement dans sa dépendance vis à vis des variables internes. En effet, il dépend intrinsèquement des paramètres de forme (a, b, c) décrivant l'inclusion, mais son expression explicite n'est connue que pour quelques géométries particulières telles que la sphère ou les ellipsoïdes plats [M82]. De plus, le fait que ce tenseur soit défini dans le repère principal de l'ellipsoïde l'amène à être également fonction des variables orientant l'inclusion par rapport au repère macroscopique dans lequel sont exprimés les tenseurs de déformation. En conséquence, de grandes difficultés apparaissent lors des calculs variationnels impliquant les variables morphologiques. Nous pouvons citer sur ce point le travail de Sabar et al. [SBB91] sur le problème de l'inclusion à frontière mobile.

La résolution de notre problème à frontière libre requiert donc des opérations ardues de dérivation de l'énergie libre par rapport aux paramètres de forme $\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial a}$. Ceci nécessite, en effet, la connaissance de la dérivée partielle du tenseur d'Eshelby $\frac{\partial S}{\partial a}$ très difficile à obtenir.

D'après ces constatations, il apparaît nécessaire de transformer l'expression de l'énergie de Helmholtz afin de la rendre applicable aux problèmes à frontières mobiles. Nous proposons pour cela une formulation invariante de Φ dans laquelle les paramètres morphologiques de l'inclusion ellipsoïdale apparaissent uniquement par le biais d'intégrales elliptiques irréductibles [M82]. Après un résumé de la technique de mise sous forme invariante, le chapitre suivant est consacré à l'application de cette méthode au terme compliqué φ , découlant des contraintes internes, et défini par:

$$\varphi \left(\epsilon^{ps}, \epsilon^{ph}, \left\{ \begin{array}{l} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{array} \right\} \right) = \frac{1}{2} V f (1 - f) \left(\epsilon_{ij}^{ps} - \epsilon_{ij}^{ph} \right) C_{ijmn} \left(I_{mnkl} - S_{mnkl} \right) \left(\epsilon_{kl}^{ps} - \epsilon_{kl}^{ph} \right) \quad (II.54)$$

L'expression ainsi obtenue permet alors de traiter de nombreux problèmes développés dans la partie (II.4).

II.3 - MISE SOUS FORME INVARIANTE DE L'ENERGIE LIBRE

La formulation invariante est particulièrement intéressante pour modéliser des lois anisotropes ou non linéaires. Elle permet en effet de simplifier ces expressions complexes en les écrivant sous la forme d'une somme de termes simples prenant en compte les conditions d'invariance et les symétries du matériau. Cette démarche conduit alors à une unité des différentes représentations car, pour deux équations distinctes mais fonction des mêmes variables, les termes élémentaires des sommes seront semblables.

Cette théorie peut aussi bien s'appliquer à des fonctions à valeur scalaire ou tensorielle, dépendant de tenseurs symétriques, antisymétriques et de vecteurs. Elle a été développée en particulier par Boehler [B75], [B87a], Spencer [S71], [S87] et Betten [B82], [B87] dans le cas de tenseurs d'ordre 2 et d'ordre 4. De nombreux problèmes mécaniques relatifs aux lois de comportement anisotropes utilisent déjà cette formulation [B87a], [B87b], [B75], [B78], que nous allons maintenant appliquer au calcul de l'énergie de Helmholtz après un rappel des principes essentiels.

II.3.1 - Conditions d'invariance

Afin de définir les notions de base de la théorie des invariants, il est nécessaire d'introduire deux fonctions $f(\varepsilon, \xi)$ (à valeur scalaire) et $F(\varepsilon, \xi)$ (à valeur tensorielle) dépendant de plusieurs tenseurs d'ordre 2 caractérisant le chargement (noté ε) et la structure du matériau (noté ξ). Cette distinction entre chargement et structure découle des deux sources d'anisotropie rencontrées en mécanique des matériaux. En effet, l'anisotropie d'un corps se manifeste lorsque l'on modifie différemment l'orientation de la sollicitation mécanique (traction, écoulement plastique), et l'orientation de sa structure interne (cristal, tôle laminée orthotrope). C'est par rapport à l'anisotropie de structure que sera définie la notion d'invariance.

II.3.1.a) Principe de l'isotropie de l'espace

Les lois constitutives sont assujetties aux conditions d'invariance du principe de l'isotropie de l'espace. Ce principe s'applique à toute fonction, qu'elles soient isotropes ou anisotropes, à valeur scalaire ou tensorielle.

Soit Q une transformation appartenant au groupe orthogonal \mathbf{O} . Le groupe orthogonal \mathbf{O} comprend toutes les rotations et les réflexions, c'est à dire toutes transformations dont la matrice associée M vérifie les conditions suivantes:

$$M M^t = I \text{ et } \det M = \pm 1 \quad (\text{II.55})$$

Le principe de l'isotropie de l'espace traduit le fait que les transformations par Q des tenseurs d'ordre 2 de chargement ε et de structure ξ aboutissent au même résultat que la transformation de la fonction. C'est-à-dire:

$$\forall Q \in \mathbf{O} \Rightarrow \begin{cases} F(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = Q F(\varepsilon, \xi) Q^t \\ f(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = f(\varepsilon, \xi) \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

Ces relations définissent les conditions d'invariance d'une fonction lorsque le principe de l'isotropie de l'espace lui est appliqué. Le principe de l'isotropie de l'espace correspond en fait à un mouvement de corps solide. Toutes les fonctions sont donc isotropes par rapport à leurs deux arguments ε et ξ .

II.3.1.b) Matériaux isotropes

Lorsque l'on applique à un matériau isotrope une transformation orthogonale arbitraire Q , le tenseur de structure reste inchangé. Ainsi:

$$\forall Q \in \mathbf{O} \Rightarrow Q \xi Q^t = \xi \quad (\text{II.57})$$

Le principe de l'isotropie de l'espace se résume donc à:

$$\forall Q \in \mathbf{O} \Rightarrow \begin{cases} F(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = F(Q \varepsilon Q^t, \xi) = Q F(\varepsilon, \xi) Q^t \\ f(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = f(Q \varepsilon Q^t, \xi) = f(\varepsilon, \xi) \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

Dans ce cas les fonctions sont isotropes par rapport à l'ensemble (ε, ξ) et également par rapport au chargement ε seul.

II.3.1.c) Matériaux anisotropes

Un matériau est anisotrope si, lorsqu'on lui applique une transformation orthogonale arbitraire Q , la fonction obtenue est différente de la fonction première. Si seules les transformations I et $-I$ laissent la fonction invariante, la structure du matériau est l'anisotropie générale. Mais si le matériau présente des symétries, celles-ci constituent un sous-groupe S

du groupe orthogonal \mathbf{O} . \mathbf{S} est alors appelé le groupe de symétries du matériau c'est-à-dire le groupe d'invariance.

Appliquons le principe de l'isotropie de l'espace pour une transformation appartenant cette fois au groupe d'invariance \mathbf{S} :

$$\forall Q \in \mathbf{S} \Rightarrow \begin{cases} F(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = F(Q \varepsilon Q^t, \xi) = Q F(\varepsilon, \xi) Q^t \\ f(Q \varepsilon Q^t, Q \xi Q^t) = f(Q \varepsilon Q^t, \xi) = f(\varepsilon, \xi) \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

Dans ce cas, la fonction est toujours isotrope par rapport au couple (ε, ξ) , mais anisotrope par rapport au chargement ε .

Une forme particulière d'anisotropie, l'orthotropie, nous intéresse tout spécialement puisqu'elle correspond au cas des cellules de dislocation ellipsoïdales.

II.3.1.d) Orthotropie

Un matériau orthotrope présente trois directions orthogonales privilégiées qui correspondent, dans le cas de notre modèle, aux trois axes de l'ellipsoïde: (v_1, v_2, v_3)

Le groupe d'invariance \mathbf{S} est donné par l'ensemble suivant:

$$\mathbf{S} = \{\pm I, R_1, R_2, R_3\} \quad (\text{II.60})$$

avec R_1, R_2, R_3 les réflexions par rapport aux plans de base du repère orthogonal (v_1, v_2, v_3) .

On introduit les tenseurs de structure de l'inclusion $M_i = \xi_i$ exprimées par les relations suivantes dans le repère de l'ellipsoïde:

$$\begin{aligned} M_1 &= v_1 \otimes v_1 & M_2 &= v_2 \otimes v_2 & M_3 &= v_3 \otimes v_3 \\ M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

Les tenseurs M_i sont bien invariants par rapport au groupe de symétries du matériau \mathbf{S} . Il possède de plus la propriété suivante:

$$M_1 + M_2 + M_3 = I \quad (\text{II.62})$$

avec I le tenseur identité du second ordre

Ainsi, en appliquant les conditions d'invariance à la fonction $F(\varepsilon, \xi)$ pour une transformation appartenant au groupe d'invariance S on obtient:

$$\forall Q \in S \Rightarrow F(Q \varepsilon Q^t, M_1, M_2, M_3) = Q F(\varepsilon, M_1, M_2, M_3) Q^t \quad (\text{II.63})$$

F est donc isotrope par rapport à l'ensemble $(\varepsilon, M_1, M_2, M_3)$ mais orthotrope par rapport au chargement ε .

II.3.2 - Représentation invariante d'une fonction

Les notions d'invariance et de symétrie étant maintenant éclaircies, nous pouvons détailler la technique de mise sous forme invariante de fonctions scalaires ou tensorielles. Considérons pour cela, une fonction scalaire f et une fonction tensorielle F d'ordre 2 dépendant toute les deux de n tenseurs symétriques du second ordre A_1, A_2, \dots, A_n , de m tenseurs antisymétriques d'ordre 2 W_1, W_2, \dots, W_m , de p vecteurs V_1, V_2, \dots, V_p et des q tenseurs de structures du second ordre $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$.

II.3.2.a) Représentation des fonctions à valeur scalaire $f(A_n, W_m, V_p, \xi_q)$.

La représentation d'une fonction à valeur scalaire est appelée invariant par rapport au groupe de symétrie du matériau S . Elle peut s'effectuer à partir d'une combinaison de polynômes, ou d'une combinaison de fonctions générales, construits sur une base d'invariants scalaires appelée base d'intégrité (I_1, I_2, \dots, I_r) [B87a]. Le terme φ que nous cherchons à modifier étant quadratique en $\Delta\varepsilon^P$, nous développons ici la méthode polynomiale.

Les éléments de cette base sont des scalaires simples (produit scalaire, trace de matrice) qui dépendent des arguments A_n, W_m, V_p de la fonction et de l'anisotropie du matériau décrite par les tenseurs de structure ξ_q . Ils possèdent les caractéristiques classiques des éléments d'une base, c'est-à-dire qu'ils permettent de générer suivant (II.64) toutes fonctions à valeur scalaire et qu'aucun élément de cette base ne peut être exprimé comme un polynôme des éléments restants.

$$f(A_n, W_m, V_p, \xi_q) = \sum_i \alpha_i P_i [I_k(A_n, W_m, V_p, \xi_q)] \quad (\text{II.64})$$

avec α_i des constantes

P_i des polynômes construits sur la base d'intégrité

II.3.2.b) Représentation des fonctions tensorielles $F(A_n, W_m, V_p, \xi_q)$

La représentation polynomiale des fonctions tensorielles est appelée forme invariante par rapport au groupe de symétries du matériau S . C'est une combinaison linéaire sur une base de générateurs tensoriels (G_1, G_2, \dots, G_s) , et les coefficients de cette combinaison sont des polynômes élaborés à partir de la base d'intégrité correspondant aux mêmes arguments.

Les éléments de la base de générateurs sont des tenseurs simples $(A_n, A_n; \xi_q)$ qui dépendent également des arguments A_n, W_m, V_p de la fonction et de l'anisotropie du matériau ξ_q . Ils possèdent les caractéristiques classiques des éléments d'une base [B87a].

$$F(A_n, W_m, V_p, \xi_q) = \sum_i \beta_i(I_k) G_i(A_n, W_m, V_p, \xi_q) \quad (\text{II.65})$$

avec β_i des polynômes construits sur la base d'intégrité

II.3.2.c) Bases d'intégrité

Les invariants constituant une base d'intégrité dépendent des variables considérées et des symétries du matériau. Ces bases ont été déterminées une fois pour toutes et sont regroupées dans différentes tables en fonction du nombre de variables et de leur type (tenseurs symétriques d'ordre 2, vecteurs ...) ainsi que des symétries du matériau [S87], [B87a].

Il est important de distinguer les deux sortes d'invariants scalaires que l'on peut construire dans le cas des matériaux anisotropes. Afin d'illustrer cela plaçons-nous dans le cas particulier de l'orthotropie et d'une variable tensorielle symétrique du second ordre (noté ε) qui correspond à notre problème.

Les tenseurs caractérisant ce problème se résument à la variable ε et aux trois tenseurs liés à la structure orthotrope: (M_1, M_2, M_3) définis par (II.61). Les termes de la base d'intégrité sont des invariants simples sous forme de traces de matrices associées à ces tenseurs. Ces invariants se classent en deux familles, ils peuvent soit ne dépendre que du tenseur de chargement, soit être fonction du tenseur ε et de un ou plusieurs tenseurs de structure. Ceci entraîne des propriétés d'invariance différentes. Dans le premier cas on a:

$$\forall Q \in \mathbf{O} \Rightarrow \begin{cases} \text{Tr}(Q \varepsilon Q^t) = \text{Tr } \varepsilon \\ \text{Tr}(Q \varepsilon Q^t)^2 = \text{Tr } \varepsilon^2 \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

avec Tr l'opérateur trace de matrice

$\text{Tr } \varepsilon$ et $\text{Tr } \varepsilon^2$ sont invariants par le groupe orthogonal \mathbf{O} . Ils sont donc appelés invariants isotropes de ε . Concernant les invariants fonction du chargement et des tenseurs de structure, on remarque que:

$$\forall Q \in \mathbf{O} \Rightarrow \text{Tr}(Q M_1 Q^t Q \varepsilon Q^t) = \text{Tr}(Q M_1 \varepsilon Q^t) = \text{Tr}(M_1 \varepsilon) \quad (\text{II.67})$$

C'est à dire que $\text{Tr}(M_1 \varepsilon)$ est un invariant isotrope pour l'ensemble (ε, M_1) . Mais si l'on transforme le chargement ε sans modifier la structure du matériau:

$$\exists Q \in \mathbf{O} \Rightarrow \text{Tr}(M_1 Q \varepsilon Q^t) \neq \text{Tr}(M_1 \varepsilon) \quad (\text{II.68})$$

$\text{Tr}(M_1 \varepsilon)$ n'est pas invariant sauf si et seulement si la transformation Q appartient au groupe des symétries du matériau \mathbf{S} , dans ce cas seulement:

$$\forall Q \in \mathbf{S} \Rightarrow \text{Tr}(M_1 Q \varepsilon Q^t) = \text{Tr}(M_1 \varepsilon) \quad (\text{II.69})$$

$\text{Tr}(M_1 \varepsilon)$ est donc invariant par rapport au groupe d'invariance \mathbf{S} . Il est donc appelé invariant orthotrope.

Cet exemple dans le cas orthotrope a donc permis de mettre en évidence les groupes de transformations par rapport auxquels les invariants restent inchangés.

II.3.2.d) Bases de générateurs

Comme les termes des bases d'intégrité, les générateurs dépendent des variables considérées et des symétries du matériau. Les bases de générateurs sont regroupées dans différentes tables en fonction du nombre et du type de variables et des symétries du matériau [S87], [B87a]. Les générateurs sont tous invariants par rapport au groupe de symétries du matériau: \mathbf{S} . Seul le tenseur identité est également un invariant par rapport au groupe orthogonal total \mathbf{O} .

II.3.3 - Application de la formulation invariante à l'énergie de Helmholtz

La représentation invariante de l'énergie libre a pour objet de contourner les difficultés de calcul inhérentes au tenseur d'Eshelby (cf. II.2.3). Elle permet en effet de séparer les variables internes de formes et d'orientation et ainsi de piloter indépendamment ces deux paramètres afin de déterminer par exemple le minimum de l'énergie Φ pour certaines configurations. C'est pourquoi, dans cette partie, nous développons, à l'aide de la théorie

expliquée ci-dessus, le terme complexe de l'énergie libre correspondant à l'énergie élastique liée aux contraintes internes [AB97]. Il s'agit de:

$$\varphi\left(\Delta\varepsilon^p, \begin{Bmatrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{Bmatrix}\right) = \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta\varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \Delta\varepsilon_{kl}^p \quad (\text{II.70})$$

avec $\Delta\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{ps} - \varepsilon_{ij}^{ph}$

La variable pilote correspond au tenseur d'ordre 2 $\Delta\varepsilon_{ij}^p$. La fonction à valeur scalaire φ présente une structure orthotrope du fait, de la géométrie ellipsoïdale du problème, et du tenseur d'Eshelby qui vérifie les propriétés d'invariance par rapport au groupe S défini par (II.60). Les tenseurs de structure sont $\xi_i = \{M_1, M_2, M_3\}$, donnés par les expressions (II.61). Compte tenu de la propriété (II.62), les tenseurs de structure peuvent également être choisis de la façon suivante: $\xi_j = \{M_1, M_2, I\}$. Ces deux cas présentant des intérêts particuliers, nous les traitons tous les deux.

II.3.3.a) Calcul avec les tenseurs de structure $\xi_i = \{M_1, M_2, M_3\}$

La base d'intégrité orthotrope pour un tenseur symétrique du second ordre est donnée par Boehler [B87a]:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p), \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p), \text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^p), \\ & \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^{p2}), \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^{p2}), \text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^{p2}), \text{Tr}(\Delta\varepsilon^{p3}) \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

avec Tr l'opérateur trace de matrice

φ est une fonction à valeur scalaire, sa mise sous forme invariante consiste donc à l'exprimer comme une combinaison polynomiale sur la base d'invariants orthotropes (II.71) suivant la définition (II.64). Puisque φ ne dépend que du carré de $\Delta\varepsilon^p$, sa représentation invariante se limite à une expression quadratique en $\Delta\varepsilon^p$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta\varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \Delta\varepsilon_{kl}^p \\ &= a_1 \left(\text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p)\right)^2 + a_2 \left(\text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p)\right)^2 + a_3 \left(\text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^p)\right)^2 \\ &\quad + a_4 \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p) + a_5 \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^p) \\ &\quad + a_6 \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^p) \\ &\quad + a_7 \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^{p2}) + a_8 \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^{p2}) + a_9 \text{Tr}(M_3 \Delta\varepsilon^{p2}) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Ce problème dépend donc de neuf constantes a_i , indépendantes du tenseur $\Delta\epsilon^P$ et des tenseurs de structure. Afin d'identifier ces coefficients, nous effectuons le calcul direct de la fonction ϕ . Après un calcul lourd effectué grâce au logiciel Mathematica, nous obtenons une expression de ϕ fonction des composantes du tenseur d'Eshelby et des constantes de Lamé λ et μ puisque le tenseur des constantes élastiques est supposé isotrope.

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta\epsilon_{ij}^P C_{ijmn} (I_{mnlk} - S_{mnlk}) \Delta\epsilon_{kl}^P \\
 &= \frac{1}{2} V f (1-f) \left\{ \left[\begin{aligned} &\lambda(1 - S_{1111} - S_{2211} - S_{3311}) + \\ &2\mu(-S_{1111} + 2S_{1212} + 2S_{1313} - 2S_{2323}) \end{aligned} \right] \left(\text{Tr}(M_1 \Delta\epsilon^P) \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left[\begin{aligned} &\lambda(1 - S_{2222} - S_{1122} - S_{3322}) + \\ &2\mu(-S_{2222} + 2S_{1212} - 2S_{1313} + 2S_{2323}) \end{aligned} \right] \left(\text{Tr}(M_2 \Delta\epsilon^P) \right)^2 + \\
 &\quad \left[\begin{aligned} &\lambda(1 - S_{3333} - S_{1133} - S_{2233}) + \\ &2\mu(-S_{3333} - 2S_{1212} + 2S_{1313} - 2S_{2323}) \end{aligned} \right] \left(\text{Tr}(M_3 \Delta\epsilon^P) \right)^2 + \\
 &\quad \left[\begin{aligned} &\lambda(2 - S_{1111} - S_{2222} - S_{1122} - S_{2211} - S_{3311} - S_{3322}) + \\ &2\mu(-S_{1122} - S_{2211}) \end{aligned} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta\epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta\epsilon^P) + \\
 &\quad \left[\begin{aligned} &\lambda(2 - S_{1111} - S_{3333} - S_{1133} - S_{3311} - S_{2211} - S_{2233}) + \\ &2\mu(-S_{1133} - S_{3311}) \end{aligned} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta\epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta\epsilon^P) + \\
 &\quad \left[\begin{aligned} &\lambda(2 - S_{2222} - S_{3333} - S_{2233} - S_{3322} - S_{1133} - S_{1122}) + \\ &2\mu(-S_{2233} - S_{3322}) \end{aligned} \right] \text{Tr}(M_2 \Delta\epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta\epsilon^P) + \\
 &\quad \left[2\mu(1 - 2S_{1212} - 2S_{1313} + 2S_{2323}) \right] \text{Tr}(M_1 \Delta\epsilon^{P^2}) + \\
 &\quad \left[2\mu(1 - 2S_{1212} + 2S_{1313} - 2S_{2323}) \right] \text{Tr}(M_2 \Delta\epsilon^{P^2}) + \\
 &\quad \left. \left[2\mu(1 + 2S_{1212} - 2S_{1313} - 2S_{2323}) \right] \text{Tr}(M_3 \Delta\epsilon^{P^2}) \right\}
 \end{aligned}$$

(II.73)

Les composantes du tenseur d'Eshelby peuvent être exprimées en fonction d'intégrales elliptiques [M82]. Afin d'organiser l'expression obtenue, nous définissons à partir de ces intégrales l'ensemble de scalaires ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= I_1 & A_{12} &= (a^2 + b^2) I_{12} & A_{11} &= a^2 I_{11} \\
 A_2 &= I_2 & A_{13} &= (a^2 + c^2) I_{13} & A_{22} &= b^2 I_{22} \\
 A_3 &= I_3 & A_{23} &= (b^2 + c^2) I_{23} & A_{33} &= c^2 I_{33}
 \end{aligned}$$

(II.74)

avec $I_1, I_2, I_3, I_{11}, I_{22}, I_{33}, I_{12}, I_{13}, I_{23}$, les intégrales elliptiques uniquement fonctions des demi-axes de l'ellipsoïde (a, b, c) et définies par:

$$I_{11} = 2\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)^2 \Delta(s)} \quad I_1 = 2\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s) \Delta(s)} \quad (\text{II.75})$$

$$I_{12} = 2\pi abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + s)(b^2 + s) \Delta(s)}$$

avec $\Delta(s) = (a^2 + s)^{1/2} (b^2 + s)^{1/2} (c^2 + s)^{1/2}$

Les autres intégrales elliptiques s'obtiennent par des permutations circulaires simultanées de (1, 2, 3) et de (a, b, c).

φ se résume alors à:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \Delta \varepsilon_{kl}^p \\ &= \frac{f(1-f) \mu V}{8\pi(\nu-1)(2\nu-1)} \left\{ \left[(2\nu-1) \left(8\pi(\nu-1) + 2(1-2\nu) A_1 + A_{12} + A_{13} - A_{23} \right) \right] \text{Tr}(M_1 \Delta \varepsilon^p) + \right. \\ &\quad \left[(2\nu-1) (8\pi(\nu-1) + 2(1-2\nu) A_2 + A_{12} + A_{23} - A_{13}) \right] \text{Tr}(M_2 \Delta \varepsilon^p) + \\ &\quad \left[(2\nu-1) (8\pi(\nu-1) + 2(1-2\nu) A_3 + A_{13} + A_{23} - A_{12}) \right] \text{Tr}(M_3 \Delta \varepsilon^p) + \\ &\quad \left[4\pi\nu(3-4\nu) + (1-3\nu+8\nu^2) A_1 - 3A_{11} \right] \left(\text{Tr}(M_1 \Delta \varepsilon^p) \right)^2 + \\ &\quad \left[4\pi\nu(3-4\nu) + (1-3\nu+8\nu^2) A_2 - 3A_{22} \right] \left(\text{Tr}(M_2 \Delta \varepsilon^p) \right)^2 + / \\ &\quad \left[4\pi\nu(3-4\nu) + (1-3\nu+8\nu^2) A_3 - 3A_{33} \right] \left(\text{Tr}(M_3 \Delta \varepsilon^p) \right)^2 + \# \\ &\quad \left[4\pi + (-1+3\nu-8\nu^2) A_3 + (\nu-1) A_{12} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta \varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta \varepsilon^p) + \\ &\quad \left[4\pi + (-1+3\nu-8\nu^2) A_2 + (\nu-1) A_{13} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta \varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta \varepsilon^p) + \\ &\quad \left[4\pi + (-1+3\nu-8\nu^2) A_1 + (\nu-1) A_{23} + \right. \\ &\quad \left. 3\nu(A_{11} - A_{22} - A_{33}) \right] \text{Tr}(M_2 \Delta \varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_3 \Delta \varepsilon^p) \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

La représentation invariante de la fonction ϕ permet donc de séparer très clairement les termes dépendant uniquement des paramètres de forme au travers des scalaires A_i et A_{kl} et les termes fonction des variables d'orientation par le biais des traces des invariants orthotropes. Cette formulation à partir des tenseur de structures $\xi_i = \{M_1, M_2, M_3\}$ permet d'obtenir une expression symétrique par rapport aux trois axes de l'ellipsoïde.

II.3.3.b) Calcul avec les tenseurs de structure $\xi_1 = \{M_1, M_2, I\}$

Dans ce cas, la base d'intégrité se détermine à partir de la théorie de Spencer [S87]. Il démontre que les invariants élémentaires définis pour quatre tenseurs symétriques A, B, C, D sont les traces des produits de matrices ci-dessous:

$$\begin{aligned}
 & A, A^2, A^3, \quad B, B^2, B^3, \quad C, C^2, C^3, \quad D, D^2, D^3 \\
 & AB, AB^{2*}, A^2B^2, \quad AC, AC^{2*}, A^2C^2, \quad AD, AD^{2*}, A^2D^2, \\
 & BC, BC^{2*}, B^2C^2, \quad BD, BD^{2*}, B^2D^2, \quad CD, CD^{2*}, C^2D^2, \\
 & ABC, A^2BC^*, A^2B^2C^*, \quad ABD, A^2BD^*, A^2B^2D^*, \\
 & ACD, A^2CD^*, A^2C^2D^*, \quad BCD, B^2CD^*, B^2C^2D^*, \\
 & ABCD, ABDC, A^2BCD^*, A^2BDC^*, A^2B^2CD, A^2C^2BD, \\
 & A^2D^2BC, B^2C^2AD, B^2D^2AC, C^2D^2AB, A^2BACD^*
 \end{aligned} \tag{II.77}$$

* signifie que les termes obtenus par permutation circulaire des matrices font également partie de la base d'intégrité.

En éliminant les termes redondants dus au cas particulier où les matrices sont égales à $\Delta\varepsilon^p, M_1, M_2, I$, la base d'intégrité relative à notre problème se résume à:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr}(M_1\Delta\varepsilon^p), \text{Tr}(M_2\Delta\varepsilon^p), \text{Tr}(\Delta\varepsilon^p), \\
 & \text{Tr}(M_1\Delta\varepsilon^{p^2}), \text{Tr}(M_2\Delta\varepsilon^{p^2}), \text{Tr}(\Delta\varepsilon^{p^2}), \text{Tr}(\Delta\varepsilon^{p^3})
 \end{aligned} \tag{II.78}$$

Comme précédemment, la combinaison polynomiale quadratique en $\Delta\varepsilon^p$ dépend de neuf constantes différentes que l'on détermine suivant le même processus. Le résultat obtenu est le suivant:

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \frac{1}{2} f (1-f) V \left\{ 2\mu(-S_{1111} - S_{3333} + S_{1133} + S_{3311} + 4S_{1313}) \left(\text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \right)^2 + \right. \\
 & 2\mu(-S_{2222} - S_{3333} + S_{2233} + S_{3322} + 4S_{2323}) \left(\text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) \right)^2 - \\
 & \left[2\mu(2S_{3333} + S_{1122} + S_{2211} - S_{1133} - S_{3311}) \right. \\
 & \left. \left[-S_{2233} - S_{3322} + 4S_{1212} - 4S_{2323} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) + \right. \\
 & 8\mu(-S_{1212} + S_{2323}) \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^{P^2}) + 8\mu(-S_{1212} + S_{1313}) \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^{P^2}) + \\
 & 2\mu(1 + 2S_{1212} - 2S_{1313} - 2S_{2323}) \text{Tr}(\Delta \epsilon^{P^2}) + \\
 & \left. \left[\frac{\lambda(1 - S_{1133} - S_{2233} - S_{3333}) +}{2\mu(2S_{1313} - 2S_{1212} + 2S_{2323} - S_{3333})} \right] \left(\text{Tr}(\Delta \epsilon^P) \right)^2 + \right. \\
 & \left. \left[\frac{\lambda(S_{1133} - S_{2211} - S_{3311} + S_{2233} - S_{1111} + S_{3333}) +}{2\mu(4S_{1212} - 4S_{1313} - 4S_{2323} - S_{1133} - S_{3311} + 2S_{3333})} \right] \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(\Delta \epsilon^P) + \right. \quad (\text{II.79}) \\
 & \left. \left[\frac{\lambda(S_{2233} - S_{1122} - S_{3322} + S_{1133} - S_{2222} + S_{3333}) +}{2\mu(4S_{1212} - 4S_{1313} - 4S_{2323} - S_{2233} - S_{3322} + 2S_{3333})} \right] \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(\Delta \epsilon^P) \right\}
 \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur d'Eshelby sont exprimées en fonction des intégrales elliptiques par le biais des scalaires définis dans les formules (II.72), ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \frac{f(1-f) \mu V}{8\pi (-1+\nu)(-1+2\nu)} \left\{ 3[A_{11} + A_{33} - A_{13}] \left(\text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \right)^2 + \right. \\
 & 3(-1+2\nu)[A_{22} + A_{33} - A_{23}] \left(\text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) \right)^2 + \\
 & 3(-1+2\nu)[A_{12} - A_{13} - A_{23} + 2A_{33}] \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) + \\
 & 2(-1+2\nu)[(1-2\nu)(A_1 - A_3) + A_{12} - A_{23}] \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^{P^2}) + \\
 & 2(-1+2\nu)[(1-2\nu)(A_2 - A_3) + A_{12} - A_{13}] \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^{P^2}) + \\
 & (-1+2\nu)[8\pi(\nu-1) - A_{12} + A_{13} + A_{23} + 2(1-2\nu)A_3] \text{Tr}(\Delta \epsilon^{P^2}) + \\
 & \left[\frac{(1+8\nu^2)(A_1 - A_3) + 2(1-2\nu)A_{12} + (-3+7\nu)A_{13} +}{2(-1+3\nu)A_{23} + 3(2-\nu)A_{33} - 3\nu(2A_1 + A_2 + A_{11} - A_{22})} \right] \text{Tr}(\Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_1 \Delta \epsilon^P) \\
 & \left[\frac{(1+8\nu^2)(A_2 - A_3) + 2(1-2\nu)A_{12} + 2(-1+3\nu)A_{13} +}{(-3+7\nu)A_{23} + 3(2-\nu)A_{33} - 3\nu(A_1 + 2A_2 - A_{11} + A_{22})} \right] \text{Tr}(\Delta \epsilon^P) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta \epsilon^P) + \\
 & \left. \left[\frac{4\pi\nu(3-4\nu) + (1-3\nu+8\nu^2)A_3 - 3A_{33} + (-1+2\nu)A_{12} +}{(1-3\nu)(A_{13} + A_{23})} \right] \left(\text{Tr}(\Delta \epsilon^P) \right)^2 \right\} \quad (\text{II.80})
 \end{aligned}$$

L'intérêt particulier de ces tenseurs de structure $\xi_1 = \{M_1, M_2, I\}$ apparaît lorsque l'on s'intéresse à des déformations inélastiques à trace nulle. Cette propriété correspond effectivement au cas de la plasticité traitée ici, mais également aux problèmes de transformation de phase tels que les alliages à mémoire de forme. Le terme de l'énergie de Helmholtz lié aux contraintes internes φ devient alors dans le cas où $\Delta\varepsilon_{II}^p = 0$:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta\varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \Delta\varepsilon_{kl}^p \\
 &= \frac{V f (1-f) \mu}{8\pi (-1+\nu)} \left\{ 3[A_{11} + A_{33} - A_{13}] \left(\text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p) \right)^2 + \right. \\
 &\quad 3[A_{22} + A_{33} - A_{23}] \left(\text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p) \right)^2 + \\
 &\quad 3[A_{12} - A_{13} - A_{23} + 2A_{33}] \text{Tr}(M_1 \Delta\varepsilon^p) \cdot \text{Tr}(M_2 \Delta\varepsilon^p) + \\
 &\quad 2[(1-2\nu)(A_1 - A_3) + A_{12} - A_{23}] \text{Tr}\left(M_1 \Delta\varepsilon^{p^2}\right) + \\
 &\quad 2[(1-2\nu)(A_2 - A_3) + A_{12} - A_{13}] \text{Tr}\left(M_2 \Delta\varepsilon^{p^2}\right) + \\
 &\quad \left. [8\pi(\nu-1) - A_{12} + A_{13} + A_{23} + 2(1-2\nu)A_3] \text{Tr}\left(\Delta\varepsilon^{p^2}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{II.81}$$

La formule (II.81) apparaît donc très compacte dans le cas où $\Delta\varepsilon_{II}^p$ est nulle. Les deux expressions (II.76) et (II.81) sont totalement équivalentes. Elles sont très intéressantes car elles ne dépendent que d'un faible nombre de termes. La représentation invariante de φ permet de découpler la forme de l'ellipsoïde contenue dans les composantes du tenseur d'Eshelby et les rotations de l'inclusion présentes dans les éléments des bases d'intégrité.

Ces expressions sont invariantes par rapport au groupe de symétrie orthotrope. Mais si l'on transforme uniquement $\Delta\varepsilon^p$ (sans la structure) par une transformation n'appartenant pas au groupe d'invariance, il faudra alors effectuer le changement de repère qui sera nettement plus facile à effectuer sous la forme invariante que sous la forme initiale.

Pour tout tenseur des déformations à trace nulle exprimé dans le repère d'orthotropie l'expression (II.81) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{1}{2} V f (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) \Delta \varepsilon_{kl}^p \\
 &= \frac{f(1-f) \mu V}{8\pi (-1+\nu)} \left\{ \Delta \varepsilon_{11}^p{}^2 [-3 A_{22} - 3 A_{13} - 2 A_{23} + 2 (1-2\nu) (A_1 - 2\pi)] + \right. \\
 &\quad \Delta \varepsilon_{22}^p{}^2 [-3 A_{11} - 3 A_{23} - 2 A_{13} + 2 (1-2\nu) (A_2 - 2\pi)] + \\
 &\quad \Delta \varepsilon_{33}^p{}^2 [-A_{12} + A_{13} + A_{23} + 2 (1-2\nu) A_3 + 8\pi (\nu-1)] + \\
 &\quad 2 \Delta \varepsilon_{12}^p{}^2 [(A_1 + A_2) (1-2\nu) + A_{12} + 8\pi (\nu-1)] + \\
 &\quad 2 \Delta \varepsilon_{13}^p{}^2 [(A_1 + A_3) (1-2\nu) + A_{13} + 8\pi (\nu-1)] + \\
 &\quad 2 \Delta \varepsilon_{23}^p{}^2 [(A_2 + A_3) (1-2\nu) + A_{23} + 8\pi (\nu-1)] + \\
 &\quad \left. 3 \Delta \varepsilon_{11}^p \Delta \varepsilon_{22}^p [A_{12} - A_{13} - A_{23} + 2A_{33}] \right\} \tag{II.82}
 \end{aligned}$$

Une telle formulation permet de préparer le terrain en vue du modèle biphasé évolutif en appliquant cette expression à différents problèmes de micromécanique relatifs aux organisations de dislocations.

II.4 - APPLICATIONS A L'ETUDE DE CONFIGURATIONS STABLES DE DISLOCATIONS

Une des questions essentielles se rapportant aux problèmes des microstructures évolutives réside dans la connaissance de leur état stable, sous réserve que celui-ci existe. Les expressions obtenues au chapitre II.3.3 permettent la résolution de situations complexes telles que la stabilité d'une boucle de dislocation soumise à une contrainte, l'interaction de boucles de dislocation avec un joint de grain et les microstructures cellulaires de faible énergie [AB97], [ALB97]. A partir de ces problèmes, nous pouvons comprendre les mécanismes de propagation des boucles de dislocation et, à une échelle supérieure, déterminer les configurations cellulaires stables. Les résultats exposés dans ce chapitre présentent donc un intérêt majeur **en amont du modèle biphasé évolutif**.

II.4.1 - Modélisation commune aux trois cas traités

La topologie simplifiée, retenue pour représenter ces trois cas, correspond à une inclusion ellipsoïdale aplatie (pièce de monnaie) V^1 soumise à une déformation plastique ϵ^{pl} plongée dans une matrice infinie V^M de déformation plastique nulle (cf. figure II.4). Les déformations plastiques locale et globale sont donc données par:

$$\epsilon_{ij}^p(r) = \begin{cases} \epsilon_{ij}^{pl} & \text{si } r \in V^1 \\ 0 & \text{si } r \in V^M \end{cases} \quad \text{et} \quad E_{ij}^p = f \epsilon_{ij}^{pl} \quad (\text{II.83})$$

avec f la fraction volumique d'inclusion

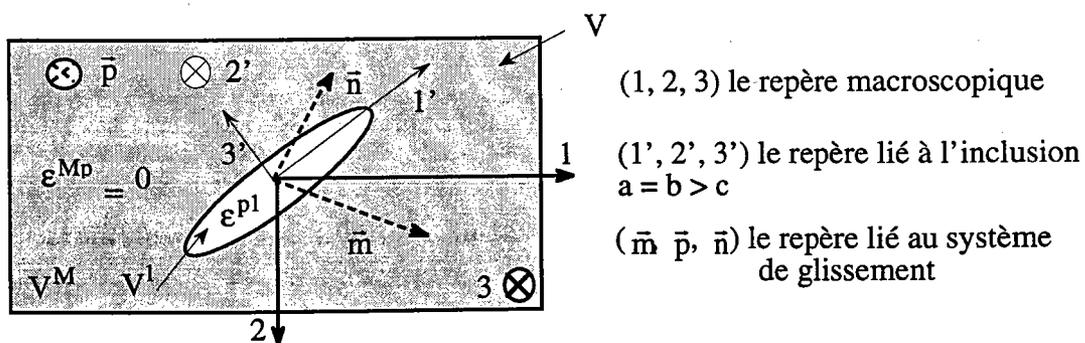


Fig. II.4: Problème élémentaire et description des différents repères

Cette modélisation est assimilée au problème de l'inclusion d'Eshelby (cf. [Annexe A](#) dans le cas où la déformation plastique de la matrice est nulle), le tenseur des contraintes internes dans l'inclusion devient alors:

$$\tau_{ij}^1 = - C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \varepsilon_{mn}^{p1} (1 - f) \quad (\text{II.84})$$

avec $f \approx 0$ puisque la matrice est supposée infinie.

D'où

$$\tau_{ij}^1 = - C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \varepsilon_{mn}^{p1} \quad (\text{II.85})$$

La déformation plastique ε^{p1} résulte du glissement plastique γ se produisant à l'intérieur de l'inclusion sur le système de glissement unique (\bar{m}, \bar{n}) de direction \bar{m} et de normale \bar{n} . ε^{p1} s'exprime dans le repère de glissement selon:

$$\varepsilon_{ij}^{p1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{m}, \bar{p}, \bar{n})} \quad (\text{II.86})$$

Si de plus, le repère du système de glissement $(\bar{m}, \bar{p}, \bar{n})$ est confondu avec le repère orthotrope $(1', 2', 3')$, les formulations invariantes de l'énergie libre de Helmholtz et l'énergie complémentaire deviennent en tenant compte de (II.83), (II.84) et (II.86):

$$\Phi (E, \varepsilon^{p1}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}) = \frac{1}{2} V (E_{ij} - f \varepsilon_{ij}^{p1}) C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{p1}) + \frac{f \mu V \gamma^2}{16\pi (-1 + \nu)} [(A_1 + A_3) (1 - 2\nu) + A_{13} + 8\pi (\nu - 1)] \quad (\text{II.87})$$

$$\Psi (\Sigma, \varepsilon^{p1}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}) = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} C^{-1}_{ijkl} \Sigma_{kl} + f V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{p1} - \frac{f \mu V \gamma^2}{16\pi (-1 + \nu)} [(A_1 + A_3) (1 - 2\nu) + A_{13} + 8\pi (\nu - 1)] \quad (\text{II.88})$$

II.4.2 - Stabilité d'une boucle de dislocation soumise à une contrainte

Nous cherchons ici à déterminer comment se comporte une boucle de dislocation déjà existante lorsqu'on lui applique une contrainte macroscopique Σ [AB97], [ALB97]. Le problème de la genèse de ces défauts linéaires n'est pas pris en compte dans notre étude.

La boucle de dislocation peut être considérée comme un ellipsoïde aplati de demi-axes (a, a, c) , siège d'une déformation plastique constante caractérisée par le vecteur de Burgers $\vec{B} = b \bar{m}$ où \bar{m} définit la direction de glissement et b le module du vecteur de Burgers. La

normale au plan de glissement est notée \bar{n} . Le repère de glissement, confondu avec le repère de l'inclusion décrit un angle de 45° par rapport à la direction de traction imposée, en accord avec les observations expérimentales (cf. figure II.5). La cission résolue τ sur le système de glissement est donnée par:

$$\tau = \Sigma_{ij} m_i n_j \quad (\text{II.89})$$

Le glissement plastique γ est considéré constant et égal au rapport $\frac{b}{c}$ où c correspond au plus petit demi-axe de l'ellipsoïde relié à la distance inter atomique du réseau cristallin.

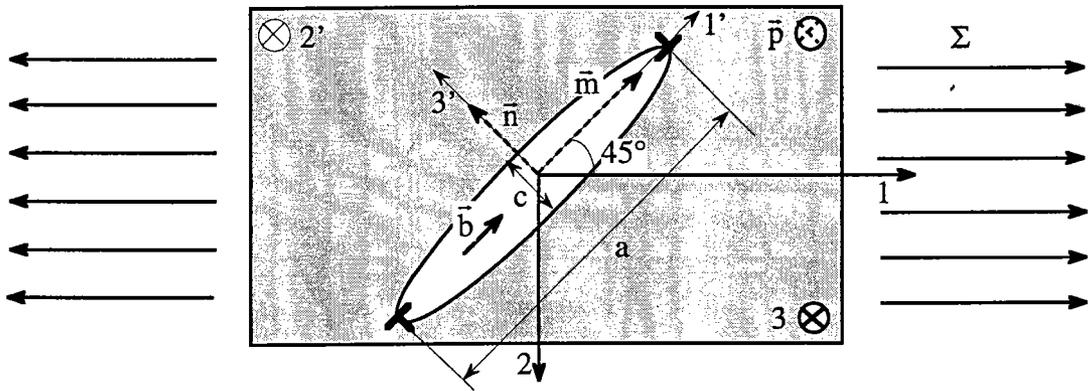


Fig. II.5: Boucle de dislocation soumise à une contrainte

L'étude du développement d'une boucle de dislocation nous amène à considérer le demi-axe a et la fraction volumique d'inclusion f définie par: $f = \frac{4}{3} \pi \frac{a^2 c}{V}$ (II.90)

comme les seules variables internes du problème puisque le glissement plastique γ est supposé constant.

La variable pilote étant la déformation macroscopique Σ , nous étudions l'énergie complémentaire (II.88) et plus particulièrement la partie due aux déformations inélastiques et au mouvement de l'interface définie par:

$$\psi(\tau, a) = \Psi(\tau, a) - \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} \quad (\text{II.91})$$

En explicitant les intégrales elliptiques pour un ellipsoïde aplati ($\frac{c}{a} \ll 1$) [M82], nous obtenons:

$$\psi(\tau, a) = \frac{4\pi}{3} b \tau \left(\frac{a}{c}\right)^2 c^2 - \frac{\mu \pi b^2 c}{12(-1+\nu)} \left[-\frac{3\pi}{\left(\frac{a}{c}\right)} + 4 + 2\pi \left(\frac{a}{c}\right)(-2+\nu) \right] \quad (\text{II.92})$$

Cette expression ne dépend que de la contrainte appliquée et du rayon a de la boucle de dislocation puisque les autres termes (b , c) sont des paramètres du matériau.

La figure II.6 représente ψ en fonction du rapport $\frac{a}{c}$ et ceci pour différentes cissions résolues τ .

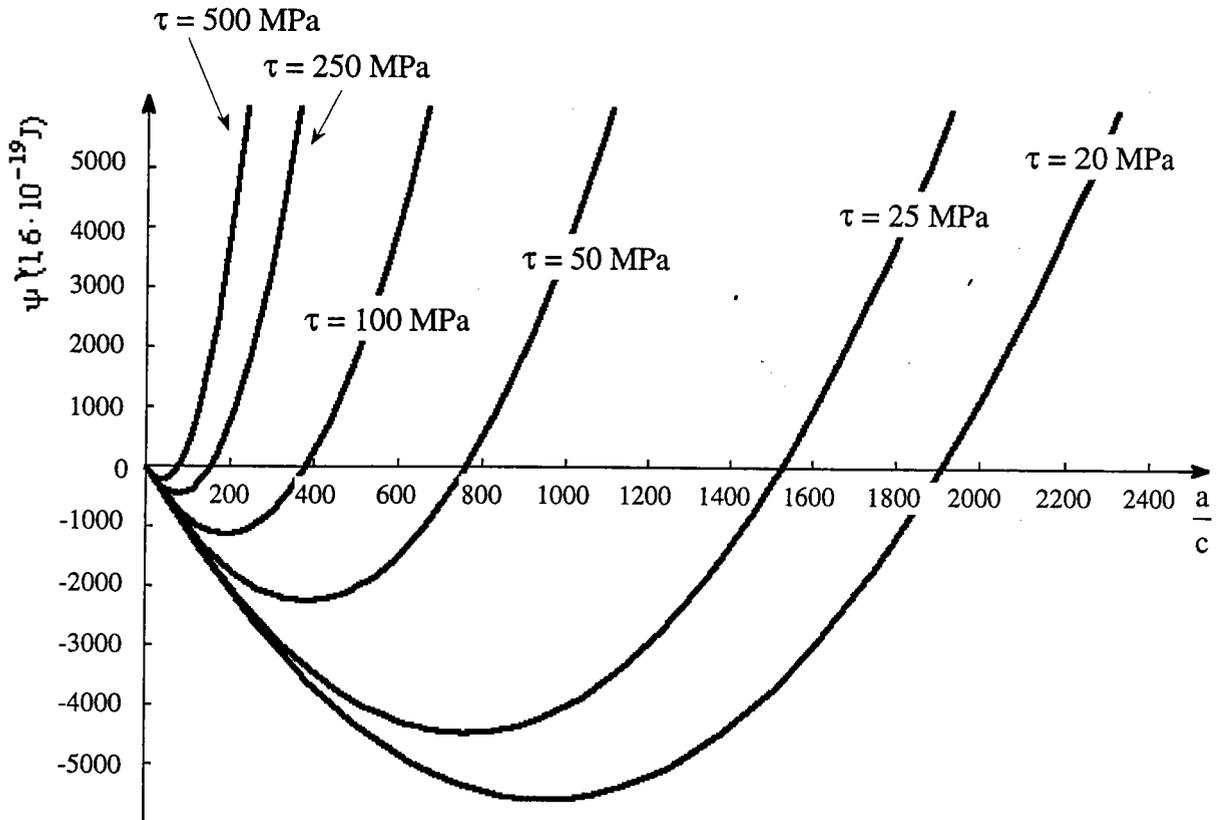


Fig. II.6: Energie complémentaire en fonction du rapport d'axe $\frac{a}{c}$

La configuration stable d'une boucle de dislocation correspond au minimum de l'énergie libre lorsque E est la variable pilote, donc au maximum de l'énergie complémentaire lorsque Σ est la variable pilote. Par conséquent, si la friction de la dislocation avec le réseau (force de Peierl Nabarro) est négligée, la figure II.6 montre que les boucles de dislocation deviennent instables si le rapport $\frac{a}{c}$ est supérieur à la valeur qui minimise la courbe ψ . En effet, lorsque le rayon de la boucle est inférieur à cette longueur critique, sa configuration stable correspond à sa forme minimale, elle n'a pas tendance à s'expanser. Par contre, au-delà de ce rapport d'axe, la boucle soumise à une contrainte cherche à maximiser son énergie complémentaire en augmentant son rayon. Cette croissance sera limitée non pas par l'obtention d'un maximum d'énergie mais par un obstacle tel que les dislocations d'une forêt.

On remarque également que le rayon critique varie en fonction de la contrainte macroscopique appliquée. Ainsi, pour chaque rapport d'axe, on peut faire correspondre une cission critique τ_c à partir de laquelle la boucle de dislocation commence à s'étendre. La courbe II.7 représente le rapport d'axe $\frac{c}{a}$ en fonction de la cission critique τ_c .

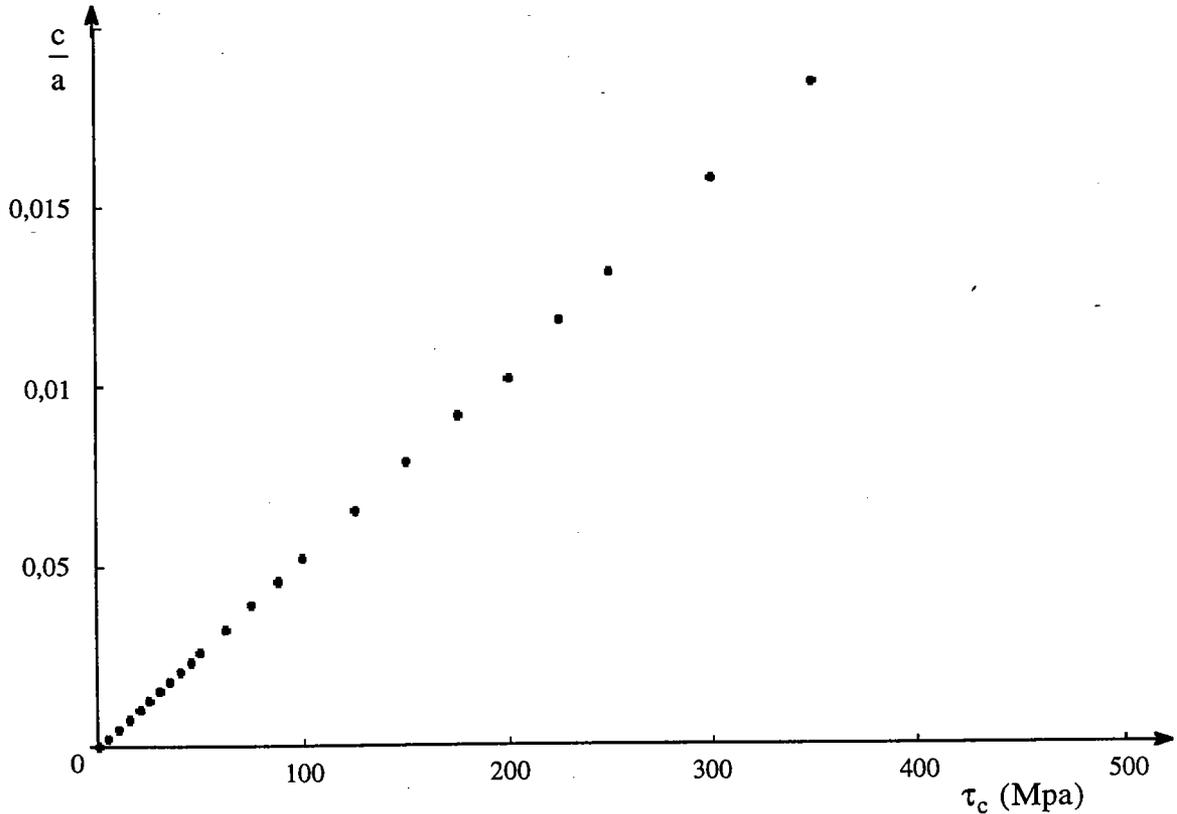


Fig. II.7: Valeur critique de $\frac{c}{a}$ en fonction de la cission critique τ_c

L'expression de τ_c explicitée ci-dessous s'obtient en annulant la dérivée par rapport à $\frac{a}{c}$ de l'équation (II.92).

$$\tau_c = \frac{(-2 + \nu) \pi \mu b}{16(-1 + \nu)} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(-2 + \nu) \left(\frac{a}{c}\right)^2} \right) = \alpha \mu b \frac{1}{a} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{(-2 + \nu) \left(\frac{a}{c}\right)^2} \right) \quad (\text{II.93})$$

L'équation (II.93) implique de façon tacite l'hypothèse d'inclusion aplatie $\frac{a}{c} \gg 1$. Le terme $\frac{3}{2} \frac{1}{(-2 + \nu) \left(\frac{a}{c}\right)^2}$ peut donc être négligé devant 1, ce qui entraîne:

$$\tau_c = \alpha \mu \frac{b}{a} \quad (\text{II.94})$$

avec, en prenant $\nu = 0,3$, $\alpha = \frac{(-2 + \nu) \pi}{16(-1 + \nu)} = 0,48$ (II.95)

De cette manière, en définissant la longueur critique a comme la distance entre les dislocations de la forêt, nous obtenons une nouvelle interprétation de la cission critique comme étant fonction de la densité de dislocations de la forêt.

Nous retrouvons ainsi la relation classique (II.94) entre la cission critique et une longueur critique "a" reliée avec le mécanisme de Taylor ou l'expansion des sources de Franck Read. Le résultat (II.95) est proche des valeurs couramment utilisées: $\alpha = 0,4$ [LC70].

II.4.3 - Interaction de boucles de dislocations avec un joint de grain

L'influence des joints de grains sur la limite d'écoulement d'un polycristal est classiquement introduite par l'intermédiaire de contraintes dues à un empilement de dislocations rectilignes et parallèles sans tenir compte de la courbure de la dislocation le long de la frontière du grain. Ce résultat est habituellement exprimé par la relation de Hall Petch [LC70]:

$$\tau_c = \tau^0 + \frac{k'}{\sqrt{d}} \quad (\text{II.96})$$

avec d le diamètre moyen du grain

τ^0 le champ de contrainte intragranulaire (forces de Peierls Nabarro, et / ou écrouissage de la forêt)

Cependant, une telle relation n'est valable que pour les faibles tailles de grain. En effet, de nombreuses observations démontrent que la formule ci-dessous est mieux adaptée que (II.96) aux résultats expérimentaux obtenus avec des matériaux à gros grains [ZJB95], [H72], [DG82].

$$\tau_c = \tau^0 + \frac{k'}{d} \quad (\text{II.97})$$

La représentation invariante de l'énergie complémentaire (II.88) va donc nous permettre, ici, de parvenir à une description unifiée de l'effet de taille de grain.

La plastification du grain est décrite par un glissement uniforme d'amplitude γ dans un volume ellipsoïdal V^1 de demi-axes (d, d, c) représentant un système de glissement de

normale \vec{n} et de direction \vec{m} . Le repère de l'inclusion est confondu avec le repère du système de glissement désorienté de 45° par rapport au repère de chargement. La sollicitation mécanique imposée correspond à une traction notée Σ (cf. figure II.8). On s'intéresse au terme d'érouissage cinématique qui dérive de l'énergie complémentaire (II.88)

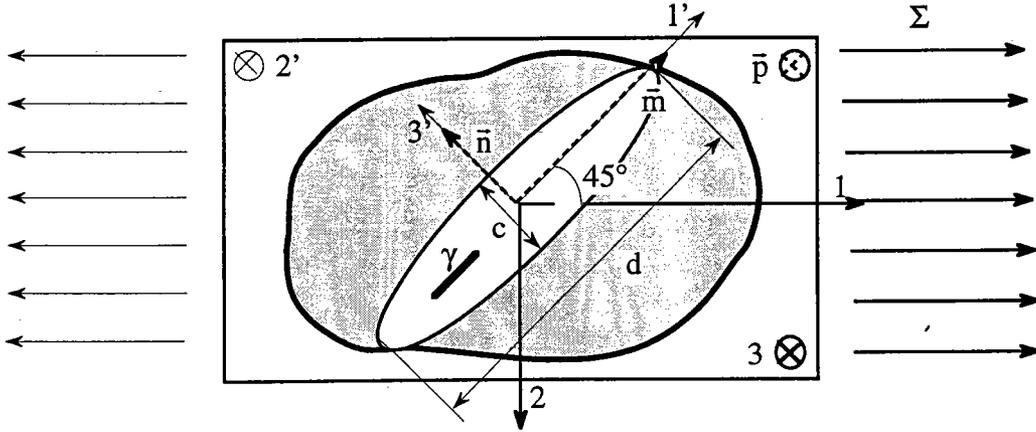


Fig. II.8: Interaction d'une bande de glissement avec un joint de grain

La partie de l'énergie complémentaire due aux phénomènes inélastiques de mouvement d'interface et de plasticité se définit cette fois par:

$$\psi(\tau, \gamma) = f V \gamma \tau - \frac{f \mu V \gamma^2}{16 \pi (-1 + \nu)} [(A_1 + A_3) (1 - 2\nu) + A_{13} + 8 \pi (-1 + \nu)] \quad (\text{II.98})$$

avec A_1 , A_3 et A_{13} définis selon (II.74) et

$$\tau = \Sigma_{ij} m_i n_j \text{ la cisssion résolue sur le plan de glissement}$$

La force motrice par unité de volume : $t = \frac{1}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}$ (II.99)

est donnée ci-dessous:

$$t = f \left[\tau - \frac{\mu \gamma}{8 \pi (-1 + \nu)} \{ (A_1 + A_3) (1 - 2\nu) + A_{13} + 8 \pi (-1 + \nu) \} \right] \quad (\text{II.100})$$

Cette expression laisse apparaître le terme d'érouissage cinématique τ^* associé aux contraintes internes dues aux boucles de dislocation situées à l'intersection de V^1 et du joint de grain. τ^* s'écrit:

$$\tau^* = \frac{\mu \gamma}{8 \pi (-1 + \nu)} \{ (A_1 + A_3) (1 - 2\nu) + A_{13} + 8 \pi (-1 + \nu) \} \quad (\text{II.101})$$

τ^* est linéaire en γ et fortement dépendant des paramètres géométriques d et c par le biais des scalaires A_1 , A_3 et A_{13} .

La figure II.9 représente, point par point, les valeurs prises par l'écouissage cinématique τ^* en fonction des rapports $\left(\frac{d}{c}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{d}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$ pour un glissement plastique γ de 0,2%. Les constantes élastiques correspondent à celles couramment utilisées dans les aciers, c'est à dire: $\mu = 80\,000$ Mpa et $\nu = 0,3$ [AB97], [BCA97a], [BCA97b].

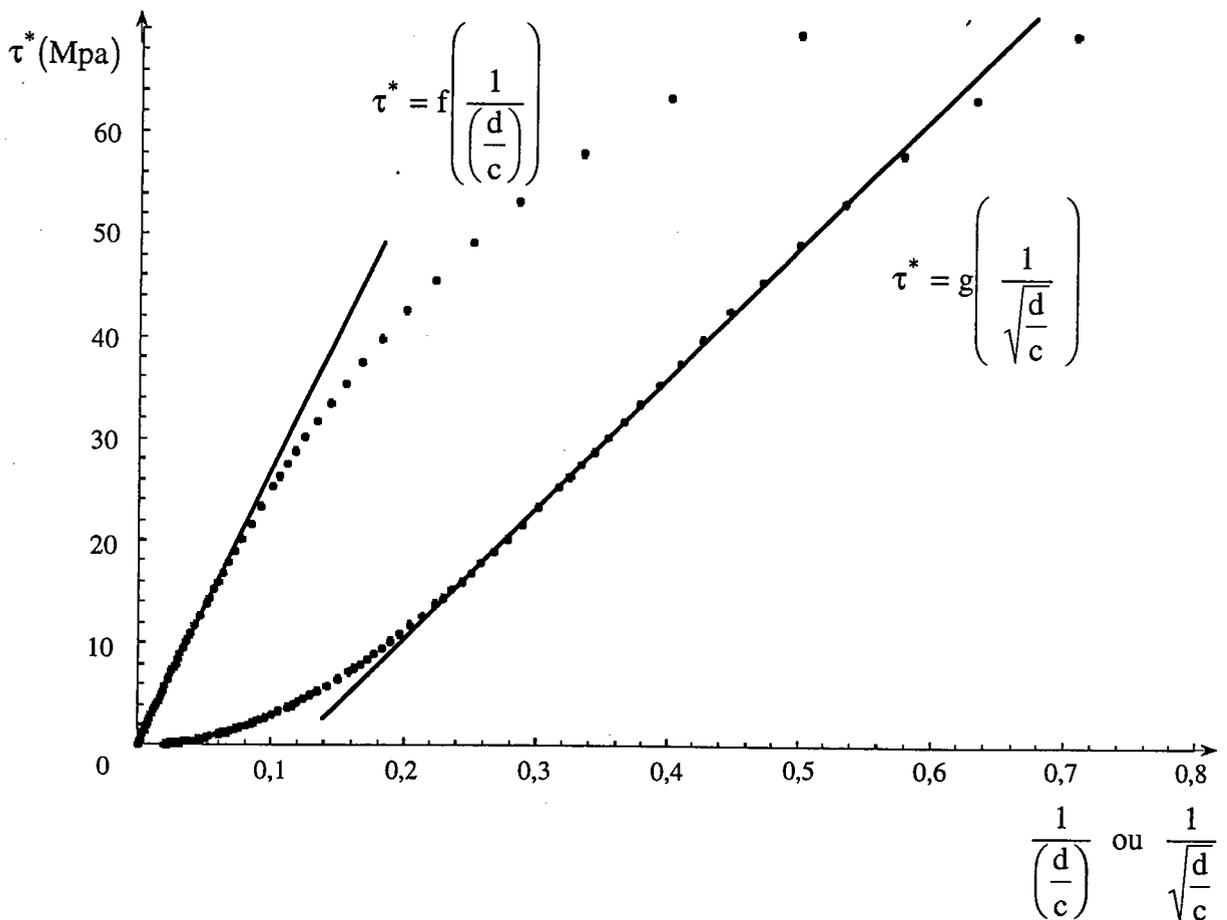


Fig. II.9: Ecouissage cinématique τ^* en fonction de $\left(\frac{d}{c}\right)^{-1}$ et $\left(\frac{d}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Pour les faibles tailles de grains ($\frac{d}{c} < 50$), on observe une relation quasi-linéaire entre τ^* et $\left(\frac{d}{c}\right)^{-\frac{1}{2}}$ alors que pour les gros grains, ($\frac{d}{c} > 100$), la relation est approximativement linéaire en $\left(\frac{d}{c}\right)^{-1}$.

Ainsi, bien que simplifié et incomplet (non prise en compte des empilements et d'une éventuelle accommodation plastique) le modèle présenté montre la nécessité de tenir compte des structures tridimensionnelles de dislocations lorsque l'on veut interpréter ou modéliser certains effets d'échelle.

II.4.4 - Microstructures de dislocations à faible énergie

Nous cherchons, dans ce chapitre, à analyser la stabilité des orientations prise par une cellule de dislocation soumise à une traction Σ et cela pour différents rapports d'axes. Le problème se limite à un seul système de glissement actif (\bar{m}, \bar{n}) incliné de 45° par rapport à la direction de traction. La cellule est assimilée à une inclusion ellipsoïdale dont le repère principal peut pivoter suivant un angle θ avec le repère du système de glissement (cf. figure II.10).

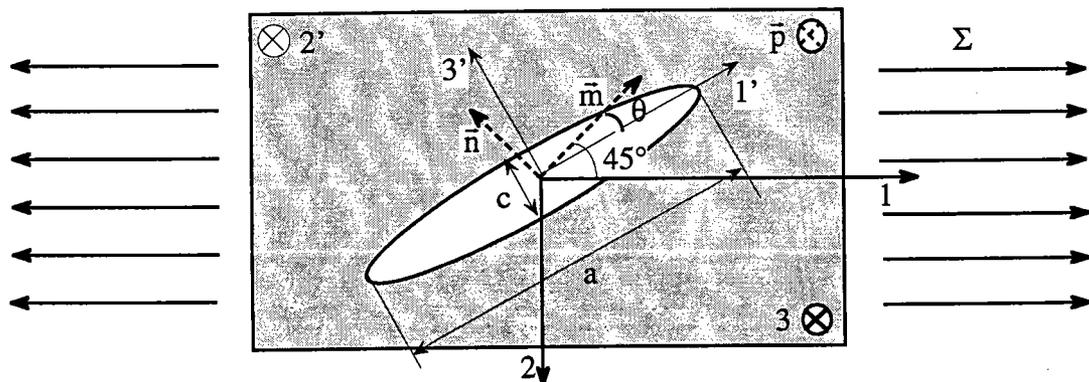


Fig. II.10: Position du problème

L'énergie élastique interne relative à notre situation est adaptée de (II.81) telle que:

$$\varphi = \frac{f \mu V \gamma^2}{32\pi (1-\nu)} \left[\begin{array}{l} \sin^2 \theta \left(\begin{array}{l} 2(1-2\nu)(A_1 + A_3) - 3A_{22} - A_{12} \\ -2A_{13} - A_{23} + 4\pi(4\nu - 3) \end{array} \right) \\ + 2 \cos^2 \theta \left((A_1 + A_3)(1-2\nu) + A_{13} + 8\pi(\nu - 1) \right) \end{array} \right] \quad (\text{II.102})$$

avec $\mu = 80000 \text{ Mpa}$ et $\nu = 0,3$

La figure II.11 représente φ en fonction de l'angle θ pour différentes formes d'ellipsoïde en supposant une fraction volumique de cellule égale à 0,8 en accord avec les observations de Schmitt [S86], et une amplitude de glissement $\gamma = 10\%$.

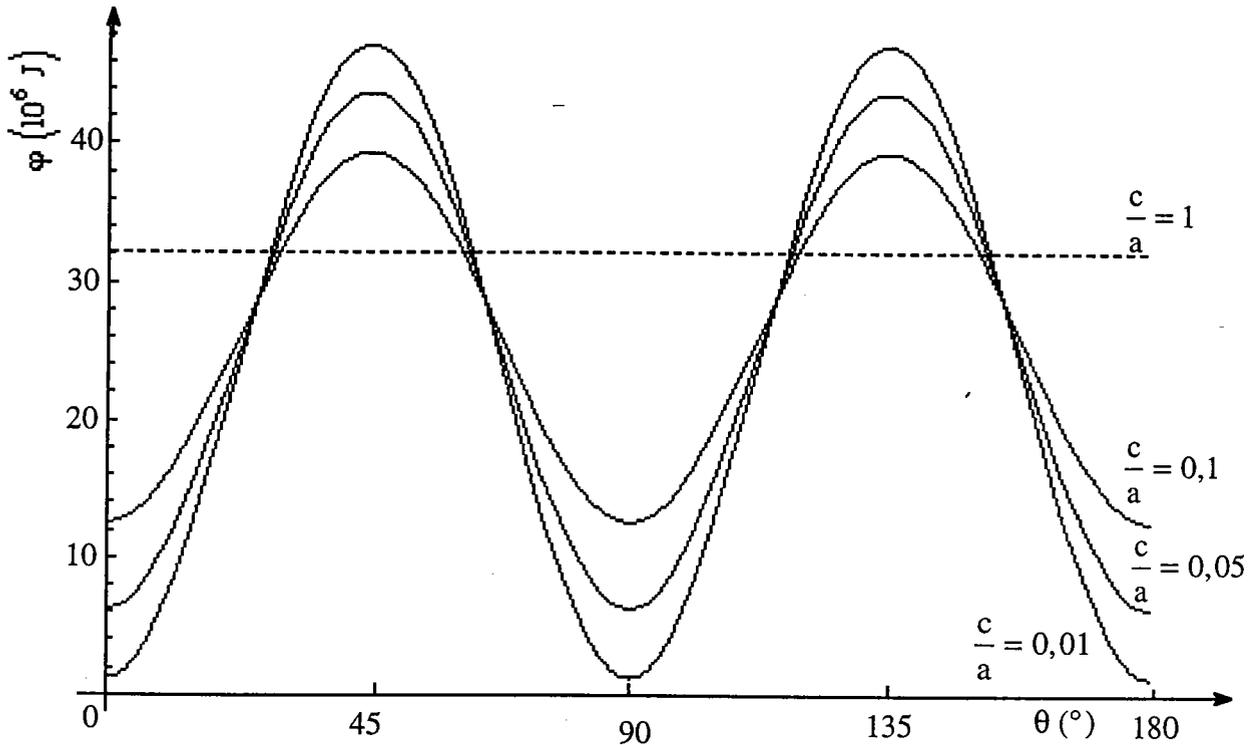


Fig. II.11: Energie élastique interne en fonction de l'angle θ reliant le repère de la cellule au repère du système de glissement

Toute configuration de dislocations tend naturellement à s'organiser de façon à minimiser son énergie élastique interne. D'après la figure II.11, Nous constatons que, lorsque la microstructure est isotrope (cellules de dislocations sphériques), l'énergie est évidemment indépendante de l'orientation θ de l'inclusion mais présente un niveau relativement important. Cette forme de cellule ne peut correspondre à une configuration stable.

Par contre, si les cellules de dislocations de forme ellipsoïdale ont la possibilité de s'orienter par rapport au système de glissement, des arrangements particuliers se démarquent. Ainsi, les positions minimisant d'énergie élastique interne pour une géométrie donnée correspondent aux cas où les repères liés au glissement et à la cellule sont confondus, ou orthogonaux (cf. figure II.12). Les dislocations glissent plus facilement sur les plans liés au repère d'orthotropie que sur des plans inclinés de 45° .

D'autre part, plus l'inclusion est aplatie, plus les minima de l'énergie élastique sont marqués. Les dislocations ont donc tendance à former des murs dipolaires communément observés expérimentalement dans les métaux.

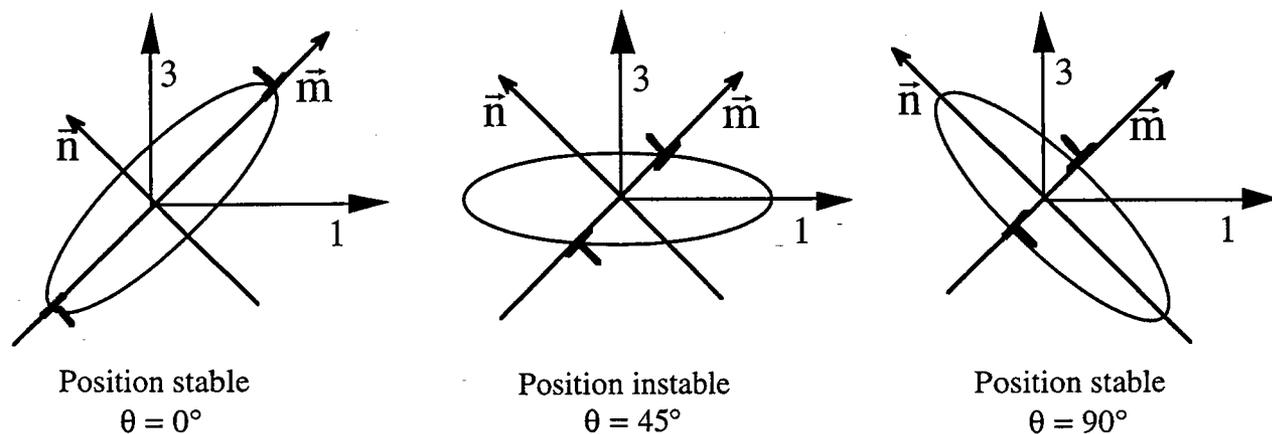


Fig. II.12: Configurations stables de dislocations

II.4.5 - Conclusions

En fournissant des informations sur les configurations stables de dislocations ces problèmes constituent un premier pas dans la modélisation du biphasé évolutif. Ces exemples permettent, de plus, de présenter rapidement les possibilités offertes par la mise sous forme invariante de l'énergie libre.

N'oublions pas toutefois que la démarche présentée ici a été simplifiée. En effet, nous avons traité ces problèmes uniquement à partir de l'énergie libre, ce qui sous-entend l'hypothèse de processus thermodynamiquement réversibles. Ceci ne correspond pas au cas de la plasticité (processus thermodynamiquement irréversible), mais contient cependant des résultats essentiels, montrant l'importance de l'énergie de Helmholtz en plasticité.

Dans la partie suivante, nous modélisons entièrement le problème biphasé évolutif non local en déterminant l'énergie dissipée par les phénomènes inélastiques ainsi que les forces motrices et critiques nécessaires à la connaissance des lois d'évolution. Nous présenterons finalement les résultats obtenus par simulations numériques pour des trajets monotones et complexes

Ajoutons, à propos de la méthode invariante, que d'autres études sont en cours. Elles ont pour objet d'analyser l'évolution morphologique d'une boucle de dislocation prisonnière entre des lamelles de cémentite dans le cas d'aciers ferritiques. Ceci permettra de déterminer les cissions résolues liées aux paramètres de forme de la boucle, en fonction de l'espace inter lamellaire. La matrice d'écrouissage de la ferrite sera déduite d'un modèle semblable à ceux développés ici, c'est à dire d'une représentation qui assimile les ensembles de boucles de dislocation à une inclusion ellipsoïdale [K97].

La représentation invariante apparaîtra également très utile lors de l'élaboration d'un modèle biphasé évolutif prenant en compte la plasticité cristalline. De plus, la formulation invariante d'une fonction inconnue permet d'anticiper sa forme en fonction des termes simples contenues dans les bases. Cela pourra conduire à une expression de la cission critique d'un polycristal en fonction du tenseur densité de dislocations introduit par Kröner.

Références Bibliographiques

- [AB96] AUBERT I. et BERVEILLER M., "Représentation invariante de l'énergie libre dans le cas de microstructures de dislocations et applications", 1996, Les cahiers de Rhéologie, pp.189-194
- [AB97] AUBERT I. et BERVEILLER M., "Constrained and unstable expansion of dislocation loops using an invariant formulation of the free energy", 1997, Mechanics of Materials, Vol. 26, pp.127-137
- [ALB97] AUBERT I., LANGLOIS L. et BERVEILLER M., "Etude micromécanique des discontinuités plastiques mobiles. Application à la stabilité de systèmes de dislocations", 1997, Acte du 13^e Congrès Français de Mécanique, Vol. 2, pp.3-6
- [B71] BOEHLER J. P., "Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes", 1975, Thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
- [B78] BOEHLER J. P., "Lois de comportement anisotrope des milieux continus", 1978, Journal de Mécanique, Vol. 17, N°2, pp.153-190
- [B82] BETTEN J., "Integrity basis for a second-order and fourth order tensor", 1982, Int. J. Math. & Math. Sci., Vol. 5, pp.87-96
- [B87a] BOEHLER J. P., "Representation for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp.13-97
- [B87b] BOEHLER J. P., "On a rational formulation of isotropic and anisotropic hardening", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp. 99-139
- [BCA97a] BERVEILLER M., CHERKAOUI M., AUBERT I., "Micromechanics of moving inelastic discontinuities and applications", 1997, à paraître dans Kluwer academics publishers

- [BCA97b] BERVEILLER M., CHERKAOUI M., AUBERT I., "Microstructures évolutives et comportement macroscopique", Journal de Physique, 1997, sous presse
- [Bet87] BETTEN J., "Invariants of fourth-order tensors", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp. 203-226
- [DG82] DOLLAR M. et GORCZYCA S., "The effect of grain size on polycrystal hardening", 1982, Scripta Metallurgica, Vol. 16, pp.901-906
- [G73] GERMAIN P., "Cours de mécanique des milieux continus", 1973, Tome 1 Théorie générale, eds Masson et cie, Paris
- [H72] HIRTH J.P., "The influence of grain boundaries on mechanical properties", 1972, Metal. Trans., Vol. 3, pp.3047-3067
- [K97] KRUMMEICH R., communication interne
- [L95] LEMOINE X. "analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", 1995, Thèse de l'Université de Metz
- [LC70] LI J.C.M. et CHOU Y.T., "The role of dislocations in the flow stress grain size relationship", 1970, Metal. TRans., Vol. 1, pp.1145-1158
- [M82] MURA T., "Micromechanics of defects in solids", 1982, Martinus Nijhoff Publishers
- [S71] SPENCER A. J. M., "Theory of invariants", Continuum Physics, Vol. 1, ed. A.C. Eringer, Academic Press, pp. 239-353
- [S87] SPENCER A. J. M., "Isotropic polynomial invariants and tensor functions", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp.141-201

- [SBB91] SABAR H., BUISSON M. et BERVEILLER M., "The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary", 1991, Int. J. Plasticity, Vol.7, pp.759-772
- [W88] WOLFRAM S., "Mathematica a system for doing mathematics by computer", 1988, Addison-Wesley Publishing Compagny
- [ZJB95] ZONGHOA J., JIANSHE L. et BAUDELET B., "A dislocation density approximation for a flow stress-grain size relation of polycrystals", 1995, Acta Mteallurgica inc., Vol. 43, N°9, pp.3349-3360

CHAPITRE III

Modèle biphasé évolutif non local

résultats numériques

CHAPITRE III

Modèle biphasé évolutif non local, résultats numériques

Les études expérimentales rapportées dans la première partie ont permis de souligner l'importance des hétérogénéités plastiques intragranulaires sur le comportement macroscopique des aciers. Ces considérations nous ont conduit à développer un modèle biphasé évolutif non local dont la topologie a été précisée dans la deuxième partie afin de calculer l'énergie libre de notre problème. Dans ce troisième chapitre, on se propose, dans un premier temps, de compléter cette approche thermodynamique à variables internes. En effet, la plasticité étant un processus irréversible, il s'avère nécessaire de déterminer l'énergie dissipée par les phénomènes inélastiques. Dans notre cas, les mécanismes dissipatifs comprennent non seulement les déformations plastiques dans chaque phase, mais aussi le mouvement des interfaces cellule-paroi. Ce dernier point constitue une différence essentielle par rapport aux milieux hétérogènes classiques pour lesquels la géométrie est figée (cf. partie II.2.1).

Dans le but de limiter le nombre de variables internes, la plasticité microscopique est traitée ici de manière phénoménologique (Von Mises). La connaissance de la dissipation permet alors d'explicitier à la fois les forces motrices et critiques liées à notre problème. Les lois d'évolution des variables internes correspondent à une généralisation du critère de Schmidt, basée sur les forces motrices et critiques. Quant à l'évolution des forces critiques, elle s'effectue par le biais d'une matrice d'érouissage non locale caractérisant les effets cellule-paroi vus au chapitre I.

L'adaptation numérique de ce modèle à six variables internes morphologiques se révélant trop complexe, nous l'avons exploité dans un cas limité à deux variables internes morphologiques. Le choix des variables a alors été guidé par les observations expérimentales et par l'étude des configurations statiques de dislocations effectuée par le biais de la méthode invariante (cf. chapitre II.4). Nous pouvons donc simuler des trajets monotones (cisaillement, traction) ou complexes (cisaillement-cisaillement, traction-traction, ...) et déterminer ainsi l'évolution de la microstructure et l'apparition de la localisation de la déformation.

III.1 - DISSIPATION

L'expression de la dissipation relative au problème biphasé évolutif est tout d'abord énoncée dans un repère quelconque pour être ensuite précisée en fonction des variables internes morphologiques dans le repère lié à l'ellipsoïde.

La définition de la dissipation intrinsèque découle du premier et du second principe de la thermodynamique. Elle est donnée dans le cas quasi-statique et isotherme par:

$$D = P_{\text{ext}} - \dot{\Phi} \geq 0 \quad (\text{III.1})$$

avec P_{ext} la puissance des efforts extérieurs

$\dot{\Phi}$ la dérivée temporelle de l'énergie de Helmholtz

III.1.1 - Dérivée temporelle de l'énergie libre

Partons de la définition (II.19) et effectuons la dérivée particulière de cette intégrale de volume contenant les surfaces de discontinuités mobiles ∂V^s qui représentent les frontières des N ellipsoïdes élémentaires (cf. figure III.1). Si on néglige la vitesse propre de la matière par rapport à celle des discontinuités, on obtient conformément à l'hypothèse des petites perturbations [G73]:

$$\dot{\Phi}(E, \varepsilon^p) = \frac{d}{dt} \left(\int_V \phi(r) dV \right) = \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t}(r) dV - \int_{\partial V^s} [\phi] w_\alpha N_\alpha dS \quad (\text{III.2})$$

avec w_α les vitesses de propagation des interfaces mobiles ∂V^s de normale N_α
 $[\phi]$ les sauts de densité volumique d'énergie élastique à travers les surfaces

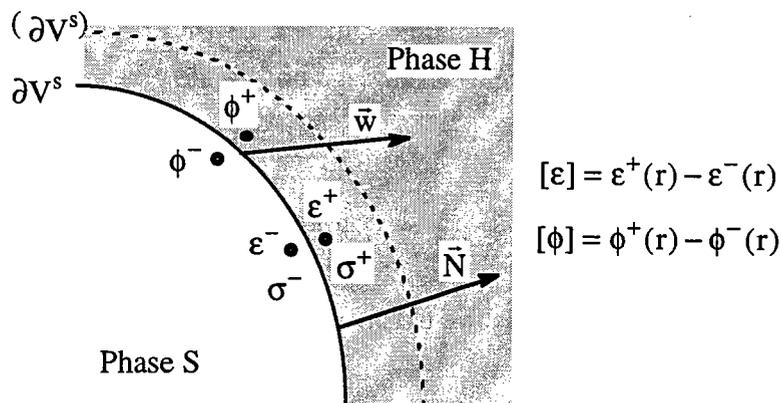


Fig. III.1: Interface mobile entre la phase molle et la phase dure

Calculons la première intégrale en introduisant la loi de Hooke (II.9) dans la définition (II.20) de la densité d'énergie élastique. Les composantes du tenseur d'élasticité étant supposées constantes, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}) \, dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) \right) \, dV \\ &= \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl}^e(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \dot{\varepsilon}_{ij}^e(\mathbf{r}) \right) \, dV \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Les symétries du tenseur C_{ijkl} et la partition des déformations (II.8) donnent finalement:

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}) \, dV = \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) - \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{r}) \right) \, dV \quad (\text{III.4})$$

Afin de déterminer l'intégrale surfacique, nous calculons le saut de densité d'énergie $[\phi]$ à travers une surface de discontinuité. L'hypothèse d'élasticité uniforme permet d'écrire:

$$[\phi] = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^+(\mathbf{r}) \left(\varepsilon_{ij}^+(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^{p+}(\mathbf{r}) \right) - \sigma_{ij}^-(\mathbf{r}) \left(\varepsilon_{ij}^-(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^{p-}(\mathbf{r}) \right) \right) \quad (\text{III.5})$$

ce qui peut également se mettre sous la forme grâce à la symétrie de C_{ijkl} :

$$[\phi] = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^+(\mathbf{r}) + \sigma_{ij}^-(\mathbf{r}) \right) \left[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \right] \quad (\text{III.6})$$

La dérivée particulière de l'énergie libre de Helmholtz devient alors:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{E}, \varepsilon^p) = \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \left(\dot{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{r}) - \dot{\varepsilon}_{ij}^p(\mathbf{r}) \right) \, dV - \int_{\partial V^s} \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij}^+(\mathbf{r}) + \sigma_{ij}^-(\mathbf{r}) \right) \left[\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \right] w_\alpha N_\alpha \, dS \quad (\text{III.7})$$

III.1.2 - Puissance des efforts extérieurs

Lorsque les forces volumiques sont négligées, la puissance des efforts extérieurs se réduit à la puissance des efforts surfaciques $T_i = \sigma_{ij} n_j$ (III.8) appliqués sur la surface ∂V de normale n_j délimitant le domaine V siège d'un champ de vitesse matérielle v_i . Ainsi,

$$P_{\text{ext}} = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j v_i dS \quad (\text{III.8})$$

En utilisant le théorème de la divergence (II.23) pour un volume V contenant des surfaces de discontinuités ∂V^s , il vient:

$$P_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV + \int_{\partial V^s} [\sigma_{ij} N_j v_i] dS \quad (\text{III.9})$$

Les interfaces de discontinuité supposées parfaites impliquent les conditions de passage (II.10) et (II.11). Ceci entraîne, les relations d'Hadamard qui permettent de lier les vitesses matérielles v_i à la vitesse de progression de l'interface w_α et à sa normale N_α selon [H03], [L95]:

$$[v_i] = -[u_{i,j} N_j] w_\alpha N_\alpha \quad (\text{III.10})$$

La puissance des efforts extérieurs devient alors en tenant compte de l'équation d'équilibre (II.4):

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij}(r) v_{i,j}(r) dV - \int_{\partial V^s} \sigma_{ij}(r) N_j [u_{i,k} N_k] w_\alpha N_\alpha dS \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Or } v_{i,j}(r) = \dot{\epsilon}_{ij}(r) + \dot{\omega}_{ij}(r) \quad (\text{III.12})$$

avec $\omega_{ij}(r) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(r) - u_{j,i}(r))$ le tenseur antisymétrique définissant le champ de rotation

L'équation (III.12) associée aux propriétés de symétrie du tenseur des contraintes (II.3) donne:

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}(r) dV - \int_{\partial V^s} \sigma_{ij}(r) N_j [u_{i,k} N_k] w_\alpha N_\alpha dS \quad (\text{III.13})$$

De plus, la discontinuité admissible du gradient de déplacement à travers une interface doit être [H61], [W67]:

$$[u_{i,j}] = u_{i,j}^+ - u_{i,j}^- = \lambda_i N_j \quad (\text{III.14})$$

avec λ_i un vecteur arbitraire

Le terme de l'intégrale surfacique devient donc:

$$\sigma_{ij}(r) N_j [u_{i,k} N_k] = \sigma_{ij}(r) N_j \lambda_i \underbrace{N_k N_k}_1 \quad (\text{III.15})$$

avec sur la surface: $\sigma_{ij}(r) N_j = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^+(r) N_j + \sigma_{ij}^-(r) N_j)$ (III.16)

La puissance des efforts extérieurs s'exprime finalement grâce à (III.15), (III.16) et (III.14) sous la forme:

$$P_{\text{ext}} = \int_v \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}(r) dV - \int_{\partial V^s} \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^+(r) + \sigma_{ij}^-(r)) [u_{i,j}] w_\alpha N_\alpha dS \quad (\text{III.17})$$

Nous pouvons maintenant déduire la dissipation relative à notre problème à partir de (III.7) et (III.17), du gradient de déplacement et des symétries de σ_{ij} :

$$D = \int_v \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) dV - \int_{\partial V^s} \frac{1}{2}(\sigma_{ij}^+(r) + \sigma_{ij}^-(r)) [\epsilon_{ij}^p] w_\alpha N_\alpha dS \quad (\text{III.18})$$

Les sources de dissipation correspondant aux processus inélastiques sont clairement mises en évidence par les deux intégrales de la formule (III.18). Ainsi, l'intégrale volumique traduit les pertes par déformation plastique et l'intégrale sur les surfaces de discontinuité ∂V^s représente les déperditions d'énergie engendrées par le mouvement de ces interfaces mobiles.

III.1.3 - Expression des tenseurs σ^+ et σ^-

Déterminons les tenseurs des contraintes de chaque coté des interfaces ∂V^s , c'est à dire σ^+ et σ^- . D'après l'Annexe A, le tenseur des contraintes est uniforme dans les inclusions représentant la phase molle. Le tenseur σ^- est donc égal au tenseur des contraintes dans chaque ellipsoïde. Toutes les cellules de dislocations étant supposées semblables, σ^- correspond donc au tenseur des contraintes dans la phase molle σ^s (cf. chapitre II.2.1). Par conséquent, σ^- est donné par (A.30) qui devient en explicitant la déformation plastique totale (II.43):

$$\sigma_{ij}^-(r) = \sigma_{ij}^s = \Sigma_{ij} - (1-f) C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\epsilon_{kl}^{ps} - \epsilon_{kl}^{ph}) \quad (\text{III.19})$$

En ce qui concerne le tenseur σ^+ , caractérisant les contraintes dans la phase dure pour une zone proche de la surface de discontinuité, rien ne laisse présumer de son égalité avec le tenseur des contraintes moyennes dans la phase dure σ^h . σ^+ est en fait obtenu grâce aux opérateurs interfaciaux. Ce concept, introduit par Hill [Hil72] à partir d'une décomposition invariante, permet de relier le saut de contrainte avec le saut de déformation plastique à l'interface selon la relation suivante [H83]:

$$[\sigma_{ij}] = -Q_{ijkl} [\varepsilon_{kl}^p] \quad (\text{III.20})$$

avec Q_{ijkl} l'opérateur interfacial défini par:

$$Q_{ijkl} = (I_{ijpq} - C_{ijmn} P_{mnpq}) C_{pqkl} \quad (\text{III.21})$$

P_{mnpq} étant l'opérateur interfacial reliant le saut de déformation totale et le saut de déformation plastique suivant:

$$[\varepsilon_{ij}] = P_{ijkl} C_{klmn} [\varepsilon_{mn}^p] \quad (\text{III.22})$$

Il est donné dans le cas isotrope par la formule ci-dessous [H83]:

$$P_{mnpq} = \frac{1}{4\mu} \begin{pmatrix} \delta_{mp} N_n N_q + \delta_{np} N_m N_q + \delta_{mq} N_n N_p + \delta_{nq} N_m N_p \\ -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} N_m N_q N_n N_p \end{pmatrix} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant l'expression du tenseur des constantes élastiques pour un milieu isotrope,

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) \quad (\text{III.24})$$

nous obtenons après calcul, l'opérateur interfacial Q pour un milieu isotrope:

$$Q_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right) + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} (N_i N_j \delta_{kl} + N_k N_l \delta_{ij}) \\ - \mu (\delta_{ik} N_j N_l + \delta_{jk} N_i N_l + \delta_{il} N_j N_k + \delta_{jl} N_i N_k) + 4\mu \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} N_i N_j N_k N_l \quad (\text{III.25})$$

Ceci nous donne le tenseur des contraintes σ^+ en fonction de $\Delta\varepsilon^p$ et de σ^- donnée par (III.19):

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- + Q_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.26})$$

$$\text{avec } \Delta\varepsilon_{kl}^p = \varepsilon_{kl}^{ps} - \varepsilon_{kl}^{ph} = -(\varepsilon_{kl}^{p+} - \varepsilon_{kl}^{p-}) = -[\varepsilon_{kl}^p] \quad (\text{III.27})$$

puisque le tenseur des déformations plastiques est supposé uniforme par morceau d'après (II.35).

La dissipation du système peut alors s'écrire de la manière suivante:

$$D = \int_V \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) dV + \left(\sigma_{ij}^s \Delta \epsilon_{ij}^p + \mu \Delta \epsilon_{ij}^p \Delta \epsilon_{ij}^p \right) \int_{\partial V^s} w_\alpha N_\alpha dS - 2\mu \int_{\partial V^s} (\Delta \epsilon_{ij}^p N_j \Delta \epsilon_{ik}^p N_k) w_\alpha N_\alpha dS + \frac{\mu}{1-\nu} \int_{\partial V^s} (\Delta \epsilon_{ij}^p N_i N_j)^2 w_\alpha N_\alpha dS \quad (III.28)$$

Cette formulation laisse apparaître la croissance volumique des ellipsoïdes définie par la première intégrale surfacique: $\dot{V}^s = \int_{\partial V^s} w_\alpha N_\alpha dS$ (III.29)

On se propose maintenant d'exprimer la dissipation en fonction des paramètres morphologiques a, b, c représentant la géométrie des cellules de dislocations. Cette démarche permettra la détermination quasi-directe des forces motrices associées à ces variables internes. Pour cela, calculons D dans le repère lié à l'inclusion, ce qui sous-entend que tous les tenseurs (même les déformations plastiques) sont exprimés dans ce même repère.

III.1.4 - Expression de la dissipation dans le repère lié à l'ellipsoïde

L'intégrale volumique se déduit de la procédure (II.46) qui consiste à faire apparaître les contraintes moyennes, dans la phase molle σ^s donnée par (III.19), et dans la phase dure σ^h qui sont obtenues à partir de la relation de moyenne (II.41):

$$\sigma_{ij}^h = \Sigma_{ij} + f C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\epsilon_{kl}^{ps} - \epsilon_{kl}^{ph}) \quad (III.30)$$

L'intégrale volumique devient alors d'après la loi de Hooke (II.18), la décomposition des déformations (II.16) et la relation de moyenne (II.43):

$$\int_V \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) dV = V \left(f \dot{\epsilon}_{ij}^{ps} + (1-f) \dot{\epsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \epsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \epsilon_{kl}^{ph} \right) - f(1-f) V (\dot{\epsilon}_{ij}^{ps} - \dot{\epsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \epsilon_{mn}^p \quad (II.31)$$

Calculons maintenant les intégrales sur les surfaces de discontinuité, pour cela, il nous faut exprimer l'élément de surface dS , sa normale \vec{N} et la vitesse de propagation de l'interface mobile dans le repère lié à l'inclusion.

$$\text{Partant de la définition de l'ellipsoïde: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{III.32})$$

on obtient son rayon en coordonnées sphériques:

$$r = \left(\frac{\sin^2 \Psi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \Psi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \Psi}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{III.33})$$

avec θ et Ψ les angles définis à la figure III.2

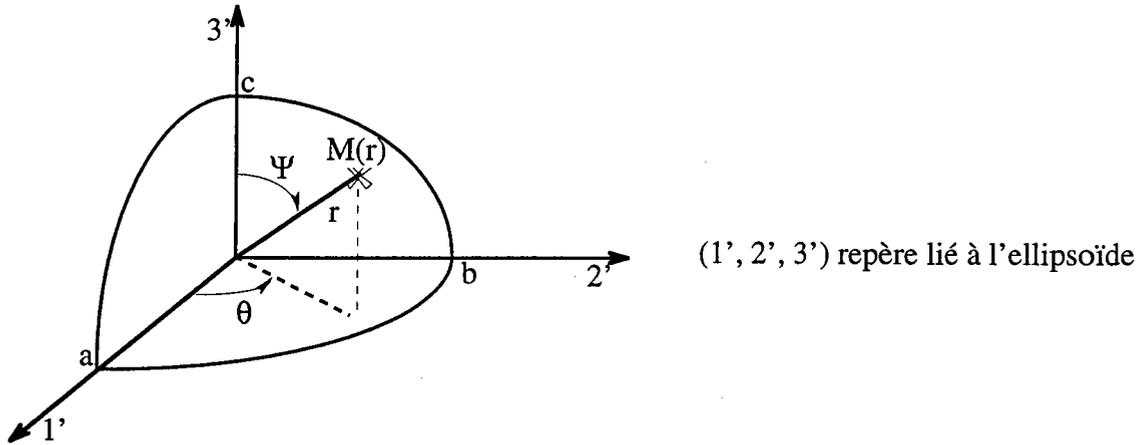


Fig. III.2: Coordonnées sphériques

La normale \vec{N} s'écrit dans le repère de l'inclusion suivant:

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \Psi}{a^4} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \Psi}{b^4} + \frac{\cos^2 \Psi}{c^4}}} \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta \sin \Psi}{a^2} \\ \frac{\sin \theta \sin \Psi}{b^2} \\ \frac{\cos \Psi}{c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.34})$$

L'élément de surface dS de l'inclusion se détermine à partir de la projection de l'élément de surface de la sphère dS_s sur l'ellipsoïde. On obtient alors:

$$dS = \frac{dS_s}{\vec{N} \cdot \vec{e}_r} = r^4 \sin \Psi \, d\Psi \, d\theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \Psi}{a^4} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \Psi}{b^4} + \frac{\cos^2 \Psi}{c^4}} \quad (\text{III.35})$$

La vitesse de propagation w_i de l'interface correspond à la vitesse linéaire \dot{x}_i de ∂V^s obtenu par dérivation de la définition (III.32), et à la rotation globale de l'ellipsoïde. On trouve:

$$\bar{w} = r \begin{cases} \frac{\sin \Psi \cos \theta}{a} \dot{a} + \cos \Psi \dot{\beta} - \sin \Psi \sin \theta \dot{\gamma} \\ \frac{\sin \Psi \sin \theta}{b} \dot{b} + \sin \Psi \cos \theta \dot{\gamma} - \cos \Psi \dot{\alpha} \\ \frac{\cos \Psi}{c} \dot{c} + \sin \Psi \sin \theta \dot{\alpha} - \sin \Psi \cos \theta \dot{\beta} \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

avec (α, β, γ) les rotations autour de chacun des axes de l'ellipsoïde.

Après un calcul assez fastidieux, nous pouvons déduire les intégrales surfaciques en fonction des variables internes du problème. La dissipation devient alors, en fonction des déformations plastiques exprimées dans le repère de l'inclusion et des variables morphologiques:

$$\begin{aligned} & D \left(E_{ij}, \varepsilon_{ij}^{ps}, \varepsilon_{ij}^{ph}, \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \alpha, \beta, \gamma \end{matrix} \right\}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{ps}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph}, \left\{ \begin{matrix} \dot{a}, \dot{b}, \dot{c} \\ \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma} \end{matrix} \right\} \right) = \\ & V \left(f \dot{\varepsilon}_{ij}^{ps} + (1-f) \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph} \right) C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph} \right) \\ & - V f (1-f) (\dot{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph}) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p \\ & + \frac{4}{3} \pi N \left(\dot{a} b c + a \dot{b} c + a b \dot{c} \right) \left(\begin{aligned} & \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} \left(E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph} \right) \\ & - (1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p + \mu \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p \end{aligned} \right) \\ & + N \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^a \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{a} + N \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^b \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{b} + N \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^c \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{c} \\ & + \frac{N}{c^2 - b^2} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\alpha \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{\alpha} + \frac{N}{a^2 - c^2} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\beta \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{\beta} + \frac{N}{b^2 - a^2} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\gamma \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{\gamma} \end{aligned}$$

(III.37)

avec M_{ijkl}^a , M_{ijkl}^b et M_{ijkl}^c ainsi que M_{ijkl}^α , M_{ijkl}^β et M_{ijkl}^γ les tenseurs d'ordre 4 découlant de ce calcul qui sont explicités dans l'Annexe B.

d'après (II.37), $f = \frac{\frac{4}{3} \pi N a b c}{V}$, N étant le nombre d'inclusions élémentaires

Nous remarquons que le fait d'introduire les opérateurs interfaciaux pour un milieu élastiquement isotrope, et d'exprimer l'énergie dissipée dans le repère de l'ellipsoïde, a permis de nous affranchir des difficultés liées aux dérivations du tenseur d'Eshelby. Cette expression sera très utile lorsque l'on cherchera à calculer les forces motrices afin de déterminer les lois d'évolution.

III.2 - MODELE BIPHASE EVOLUTIF NON LOCAL

Connaissant l'énergie libre et la dissipation, il nous reste à introduire les lois d'évolution des variables internes qui permettront de déterminer le comportement global du biphasé. Ces lois sont définies à partir des forces motrices et des forces critiques explicitées dans ce chapitre. L'évolution des forces critiques dépend de la matrice d'écrouissage non locale représentant le durcissement de la phase dure lorsque se produit des déformations plastiques dans la phase molle. De plus, afin de limiter le nombre de variables internes, on se restreint à l'étude de la plasticité phénoménologique de type Von Mises.

Dans un premier temps, nous développons le modèle biphasé évolutif non local en totalité, c'est à dire à partir de l'ensemble des variables internes ε^{ps} , ε^{ph} , a , b , c , α , β , γ . La restriction de ce modèle à un cas simplifié comportant deux variables plastiques et deux variables morphologiques permet ensuite sa simulation numérique.

III.2.1 - Variables internes ε^{ps} , ε^{ph} , a , b , c , α , β , γ

III.2.1.a) Forces motrices

La définition première des forces motrices, également appelées forces thermodynamiques, correspond à l'opposé des dérivées partielles par rapport aux variables internes, de l'énergie libre de Helmholtz par unité de volume:

$$F_{x_i}(E, x_k) = -\frac{\partial(\frac{\Phi}{V})}{\partial x_i} \quad (\text{III.38})$$

avec F_{x_i} la force motrice associée à la variable interne x_i qui dépend de la variable pilote (E ou Σ) et des variables internes.

Une autre façon d'obtenir ces forces provient de la dissipation par unité de volume qui peut s'écrire sous la forme [N93]:

$$\frac{D}{V} = \sum_i F_{x_i}(E, x_k) \dot{x}_i \quad (\text{III.39})$$

Les forces thermodynamiques ne dépendant pas de la méthode utilisée pour les calculer, il paraît judicieux de considérer la dissipation. En effet, l'expression (III.37) permet par un moyen très direct de déterminer les forces motrices pour chaque variable interne en se libérant des contraintes imposées par la complexité du tenseur d'Eshelby.

De cette manière, les forces motrices pour chaque variable interne morphologique sont:

$$F_a = \frac{f}{a} \left(\begin{array}{l} \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) + \mu \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p \\ -(1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p \end{array} \right) + \frac{N}{V} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^a \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.40})$$

$$F_b = \frac{f}{b} \left(\begin{array}{l} \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) + \mu \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p \\ -(1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p \end{array} \right) + \frac{N}{V} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^b \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.41})$$

$$F_c = \frac{f}{c} \left(\begin{array}{l} \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) + \mu \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{ij}^p \\ -(1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p \end{array} \right) + \frac{N}{V} \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^c \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.42})$$

$$F_\alpha = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\alpha \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.43})$$

$$F_\beta = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right) \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\beta \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.44})$$

$$F_\gamma = \frac{N}{V} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \Delta \varepsilon_{ij}^p M_{ijkl}^\gamma \Delta \varepsilon_{kl}^p \quad (\text{III.45})$$

avec M_{ijkl}^a , M_{ijkl}^b et M_{ijkl}^c ainsi que M_{ijkl}^α , M_{ijkl}^β et M_{ijkl}^γ les tenseurs d'ordre 4 définis dans l'Annexe B.

En ce qui concerne les variables plastiques, la définition des forces thermodynamiques correspond aux contraintes internes dans chaque phase, ce qui se traduit par:

$$F_{\varepsilon_{ij}^{ps}} = -\frac{1}{f} \frac{\partial(\frac{\Phi}{V})}{\partial \varepsilon_{ij}^{ps}} = \sigma_{ij}^s = \left(\begin{array}{l} C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) \\ -(1-f) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \Delta \varepsilon_{mn}^p \end{array} \right) \quad (\text{III.46})$$

$$F_{\varepsilon_{ij}^{ph}} = -\frac{1}{1-f} \frac{\partial(\frac{\Phi}{V})}{\partial \varepsilon_{ij}^{ph}} = \sigma_{ij}^h = \left(\begin{array}{l} C_{ijkl} (E_{kl} - f \varepsilon_{kl}^{ps} - (1-f) \varepsilon_{kl}^{ph}) \\ +f C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) (\varepsilon_{mn}^{ps} - \varepsilon_{mn}^{ph}) \end{array} \right) \quad (\text{III.47})$$

Les forces motrices tensorielles (III.46) et (III.47) sont scalarisées par une formulation de type Von Mises qui sera utilisée par la suite pour définir les lois d'évolution des variables plastiques:

$$F_{\varepsilon^{ps}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{sD} \sigma_{ij}^{sD}} \quad \text{et} \quad F_{\varepsilon^{ph}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{hD} \sigma_{ij}^{hD}} \quad (\text{III.48})$$

avec σ^D le déviateur du tenseur σ

III.2.1.b) Forces critiques

Les forces critiques concernant les variables morphologiques sont obtenues en supposant un frottement constant de l'interface mobile s'opposant à sa propagation. Cela se traduit par l'intégrale surfacique suivante:

$$F_{x_i}^c \dot{x}_i = \frac{1}{V} \int_{\partial v^s} \tau_c^o |w_\alpha N_\alpha| dS \quad (\text{III.49})$$

avec x_i les variables internes morphologiques $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$

Cette hypothèse, extrêmement simplifiée, demandera à être étendue par la suite. On peut intuitivement penser, en effet, que la propagation de l'interface dépend également du saut de déformation plastique. Cette supposition doit être étayée par des bases physiques avant son introduction dans le modèle.

(III.49) donne alors par sa décomposition dans le repère de l'ellipsoïde:

$$F_a^c = \frac{f}{c} \tau_c^o \quad (\text{III.50})$$

$$F_b^c = \frac{f}{b} \tau_c^o \quad (\text{III.51})$$

$$F_c^c = \frac{f}{c} \tau_c^o \quad (\text{III.52})$$

$$F_\alpha^c = 8 N \tau_c^o \left| \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right| Q_\alpha \quad (\text{III.53})$$

$$F_\beta^c = 8 N \tau_c^o \left| \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right| Q_\beta \quad (\text{III.54})$$

$$F_\gamma^c = 8 N \tau_c^o \left| \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right| Q_\gamma \quad (\text{III.55})$$

avec $Q_\alpha, Q_\beta,$ et Q_γ des intégrales volumiques détaillées en fin d'Annexe B.

Les forces critiques relatives aux déformations plastiques dans la phase molle (intérieur des cellules) et dans la phase dure (parois) correspondent initialement aux limites élastiques de

ces deux phases. Les forces critiques varient ensuite au cours de la déformation plastique suivant un processus d'érouissage non local. Ce phénomène traduit, en accord avec les observations expérimentales citées dans la partie I, les effets mutuels des cellules sur les parois qui s'écrivent selon les relations suivantes [MKB93]:

$$dF_{\varepsilon^{ps}}^c = K_{ss} d\bar{\varepsilon}^{ps} + K_{hs} d\bar{\varepsilon}^{ph} \quad (III.56)$$

$$dF_{\varepsilon^{ph}}^c = K_{sh} d\bar{\varepsilon}^{ps} + K_{hh} d\bar{\varepsilon}^{ph} \quad (III.57)$$

avec $\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p}$

Les différents coefficients sont explicités dans le chapitre III.2.2 en s'appuyant sur les mécanismes physiques observés.

III.2.1.c) Lois d'évolution

L'évolution des variables internes \dot{x}_i est gérée par une généralisation du critère de Schmidt qui se traduit en équations par:

$$\dot{x}_i = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F_{x_i}(E, x_j) < F_{x_i}^c(x_j) \\ \forall \dot{F}_{x_i}(E, x_j) \end{cases} \quad (III.58)$$

$$\dot{x}_i = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F_{x_i}(E, x_j) = F_{x_i}^c(x_j) \\ \dot{F}_{x_i}(E, x_j) < 0 \end{cases} \quad (III.59)$$

$$\dot{x}_i \neq 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} F_{x_i}(E, x_j) = F_{x_i}^c(x_j) \\ \dot{F}_{x_i}(E, x_j) > 0 \end{cases} \quad (III.60)$$

Dans le cas (III.60) où la variable interne évolue, la règle de cohérence décrite par:

$$\dot{F}_{x_i}(E, x_j) = \dot{F}_{x_i}^c(x_j) \quad (III.61)$$

permet d'obtenir sa variation en fonction de la variable pilote E_{kl} .

Les taux d'accroissement des forces motrices et critiques sont donnés par les relations suivantes:

$$\dot{F}_{x_i}(E, x_j) = \frac{\partial F_{x_i}}{\partial E_{kl}}(E, x_j) \dot{E}_{kl} + \frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_j}(E, x_j) \dot{x}_j \quad (\text{III.62})$$

$$\dot{F}_{x_i}^c(x_j) = \frac{\partial F_{x_i}^c}{\partial x_j}(x_j) \dot{x}_j \quad (\text{III.63})$$

(III.63) peut également s'exprimer en fonction de la matrice d'érouissage H définie par:

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial F_{x_i}^c}{\partial x_j}(x) \quad (\text{III.64})$$

En reportant (III.62) et (III.63) dans (III.61) on obtient le taux d'accroissement des variables internes:

$$\dot{x}_j = \frac{\partial F_{x_i}}{\partial E_{kl}}(E, x_j) \dot{E}_{kl} \left(\frac{\partial F_{x_i}^c}{\partial x_j}(x_j) - \frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_j}(E, x_j) \right)^{-1} \quad (\text{III.65})$$

Le modèle biphasé évolutif non local est maintenant bien posé du point de vue théorique. Pourtant, les difficultés liées à la simulation numérique d'un problème comportant autant de variables internes morphologiques nous ont contraint à adopter une démarche plus progressive. Tout en prévoyant la programmation future de ce modèle complet, nous avons préféré résoudre graduellement les difficultés numériques par la mise en oeuvre d'une modélisation allégée.

Les observations expérimentales ainsi que l'étude des configurations statiques de dislocations réalisée au chapitre II.4 nous ont permis de définir les paramètres morphologiques variables, et de fixer correctement les autres. En considérant l'énergie interne, il est clair que le terme non convexe $f(1-f)$ joue un rôle essentiel dans les phénomènes de localisation de la déformation. En effet, il peut entraîner une perte d'ellipticité du système et conduire ainsi à une instabilité plastique qui se traduit sur la courbe macroscopique par un module tangent nul. La deuxième variable choisie correspond au paramètre angulaire étudié au II.4.4 dans le cas de cellules de dislocations aplaties car il permet de minimiser l'énergie libre de Helmholtz. Cela conditionne donc la forme de nos inclusions de phase molle à être des ellipsoïdes aplaties.

Nous maîtrisons donc actuellement un modèle et un outil informatique prenant en compte les déformations plastiques dans chaque phase et deux variables morphologiques qui sont la fraction volumique et un paramètre angulaire.

III.2.2 - Modélisation limitée à deux variables morphologiques

Les variables internes ont été choisies à partir de réflexions physiques et théoriques afin de représenter au mieux chaque aspect du modèle total dans le but de pouvoir déterminer l'apparition d'instabilités plastiques (les phénomènes post-bifurcation n'étant pas modélisés) et l'évolution de la microstructure. Par conséquent, la fraction volumique f permet de prendre en compte de façon très globale les influences géométriques de l'inclusion. Cette variable est d'autant plus intéressante que nous la soupçonnons d'être à l'origine des phénomènes d'instabilité plastique. L'orientation de la microstructure est définie, quant à elle, par un seul paramètre angulaire, ce qui s'avère suffisant pour certains trajets particuliers comme le cisaillement. L'ensemble ϵ^{ps} , ϵ^{ph} , f , α permet alors non seulement d'obtenir de bons résultats macroscopiques et microscopiques (cf. chapitre III.3) mais aussi, de comprendre, dans la limite des simplifications adoptées, les incidences des différentes variables présentes dans le modèle complet.

Pour ce modèle simplifié, le rapport de forme de l'ellipsoïde est fixé et l'évolution de la fraction volumique traduit une expansion homothétique des cellules de dislocations (avec conservation du tenseur d'Eshelby). La géométrie choisie correspond à un ellipsoïde aplati de demi-axes (a, a, c) , ce qui autorise lors de certaines sollicitations à ne considérer qu'un seul angle pour orienter l'inclusion par rapport au repère de chargement (cf. figure III.3).

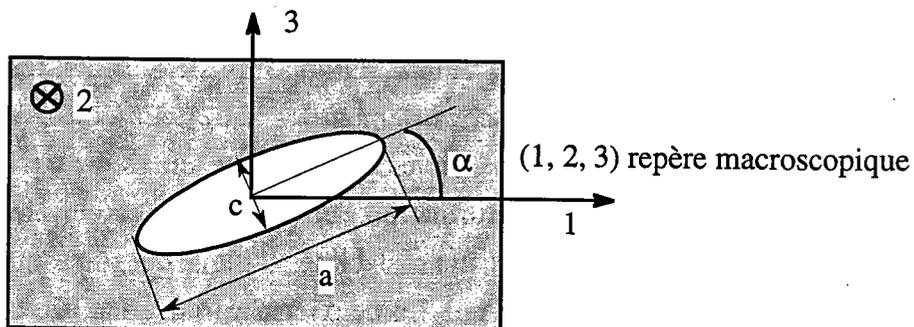


Fig. III.3 Paramètre angulaire variable

Ce modèle permet de suivre les évolutions de la microstructure de dislocations existante, lorsque celle-ci peut être assimilée à un biphasé. Cette étude ne prétend donc pas décrire les phénomènes d'organisation progressive des dislocations pendant les premiers pour-cent de

déformation. Il faudrait pour cela prendre en compte les mécanismes complexes se produisant à l'échelle du défaut, hypothèse de travail que nous avons écartée dès le premier chapitre.

III.2.2.a) Forces motrices

Les forces motrices dérivent, selon (III.38), de l'énergie libre par unité de volume qui est rappelée ci-dessous lorsque les déformations plastiques sont exprimées dans le repère de chargement:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{V}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}^{ps}, \boldsymbol{\varepsilon}^{ph}, f, \alpha) = & \frac{1}{2} \left((\mathbf{E}_{ij} - f \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ps} - (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ph}) \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{E}_{kl} - f \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ph}) \right) \\ & + \frac{1}{2} f (1-f) P_{ir} P_{js} (\boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^{ps} - \boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^{ph}) \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{I}_{klmn} - \mathbf{S}_{klmn}) P_{ma} P_{nb} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^{ps} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^{ph}) \end{aligned} \quad (III.66)$$

avec \mathbf{P} la matrice de passage du repère macroscopique au repère de l'inclusion
(\mathbf{P} ne peut être confondu avec l'opérateur interfacial \mathbf{P} d'ordre 4)

La forme de l'ellipsoïde étant fixée, le tenseur d'Eshelby devient une constante et ne complique plus la détermination des forces motrices qui s'expriment alors d'après (III.66):

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ps}} = & \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{E}_{kl} - f \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ph}) \\ & - (1-f) P_{ri} P_{sj} \mathbf{C}_{rskl} (\mathbf{I}_{klmn} - \mathbf{S}_{klmn}) P_{ma} P_{nb} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^p \end{aligned} \quad (III.67)$$

avec $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ps} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ph}$

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ph}} = & \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{E}_{kl} - f \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ph}) \\ & + f P_{ri} P_{sj} \mathbf{C}_{rskl} (\mathbf{I}_{klmn} - \mathbf{S}_{klmn}) P_{ma} P_{nb} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^p \end{aligned} \quad (III.68)$$

Les forces motrices scalaires $F_{\boldsymbol{\varepsilon}^{ps}}$ et $F_{\boldsymbol{\varepsilon}^{ph}}$ utilisées dans les lois d'évolution sont données par:

$$F_{\boldsymbol{\varepsilon}^{ps}} = \sqrt{\frac{3}{2} F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ps}}^D F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ps}}^D} \quad \text{et} \quad F_{\boldsymbol{\varepsilon}^{ph}} = \sqrt{\frac{3}{2} F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ph}}^D F_{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{ph}}^D} \quad (III.69)$$

avec T_{ij}^D le déviateur du tenseur \mathbf{T}

$$\begin{aligned} F_f = & \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{E}_{kl} - f \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ps} - (1-f) \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^{ph}) \\ & - \frac{1}{2} (1-2f) P_{ir} P_{js} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{rs}^p \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{I}_{klmn} - \mathbf{S}_{klmn}) P_{ma} P_{nb} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ab}^p \end{aligned} \quad (III.70)$$

$$F_{\alpha} = -f (1-f) \begin{bmatrix} P_{ir,\alpha} P_{js} \Delta \epsilon_{rs}^p + \\ P_{ir} P_{js,\alpha} \Delta \epsilon_{rs}^p \end{bmatrix} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) P_{ma} P_{nb} \Delta \epsilon_{ab}^p \quad (\text{III.71})$$

avec $P_{,\alpha}$ la dérivée de la matrice de passage par rapport à α

III.2.2.b) Forces critiques

Les forces critiques sur f et α ne peuvent plus être déduites de la formule (III.49) car le modèle n'est plus complet. On prend donc, dans un premier temps, F_f^c et F_{α}^c constantes et sans écrouissage. Une étude paramétrique sur l'écrouissage de F_f^c par la variable f , qui traduit la résistance du matériau à la propagation des surfaces de discontinuité, est également réalisée en raison de sa réalité physique. On pourrait aussi s'intéresser aux effets du saut de déformation plastique sur la force critique liée à f .

Les variations des forces critiques relatives aux déformations plastiques sont définies par (III.56) et (III.57). Les mécanismes physiques complexes de stockage et d'annihilation des dislocations au cours de la déformation plastique permettent de déterminer la forme de ces coefficients phénoménologiques [M88]. En se basant sur ces considérations, Muller et Kratochvil proposent la forme suivante dans le cas d'une plasticité phénoménologique [MKB93]:

$$dF_{\epsilon^{ps}}^c = n L_1 (\bar{\epsilon}^{ps})^{n-1} d\bar{\epsilon}^{ps} + K_{12} d\bar{\epsilon}^{ph} \quad (\text{III.72})$$

$$dF_{\epsilon^{ph}}^c = \frac{L_2}{F_{\epsilon^{ph}}^c - F_{\epsilon^{ph}}^{c^o}} d\bar{\epsilon}^{ps} + L_3 (F_{\epsilon^{ph}}^c - F_{\epsilon^{ph}}^{c^o}) d\bar{\epsilon}^{ph} \quad (\text{III.73})$$

avec $F_{\epsilon^{ph}}^{c^o}$ la limite élastique initiale de la phase dure

$$n = 0,3 \text{ et } d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p$$

A l'intérieur de la cellule, presque aucun obstacle n'entrave la progression des dislocations, l'écrouissage de la cellule sur elle-même est donc faible ($L_1 = 50$ Mpa). D'autre part l'effet de la phase dure sur la phase molle semblant négligeable K_{12} avoisine les 10 Mpa.

Le terme prédominant de ces expressions correspond au coefficient d'écrouissage non local L_2 qui quantifie les effets des cellules sur le durcissement des parois. Il peut être grossièrement estimé par la schématisation suivante qui représente une structure cellulaire simpliste, siège d'un système de glissement unique (cf. figure III.4):

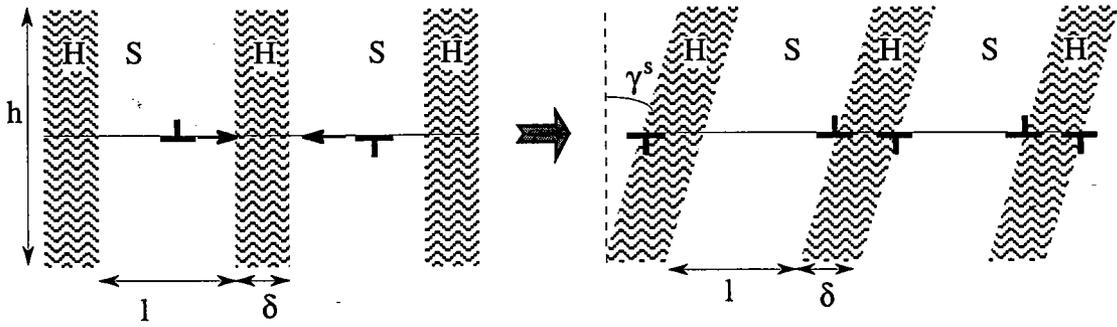


Fig. III.4: Schématisation du phénomène de stockage des dislocations dans la phase dure

Lorsque N dislocations traversent l'intérieur des cellules, cela produit un glissement plastique: $\gamma^s = \frac{N b}{h}$, (III.74)

et un stockage de $2N$ dislocations dans les parois. Les parois sont donc le siège d'une densité de dislocations: $\rho^h = \frac{2N}{\delta h} = \frac{2\gamma^s}{b\delta}$ (III.75)

La loi de Taylor donne pour un système de glissement unique la cission critique dans la phase dure en fonction de sa densité de dislocations:

$$\tau_h^c = \tau_c^0 + \alpha \mu b \sqrt{\rho^h} \quad (III.76)$$

avec τ_c^0 la cission critique initiale, α un coefficient et b le module du vecteur de Burgers

La dérivée de la cission critique définit le terme d'écrouissage non local:

$$d\tau_h^c = \alpha^2 \mu^2 \frac{b}{\delta} \frac{1}{\tau_h^c - \tau_c^0} d\gamma^s \quad (III.77)$$

Dans le cas du glissement simple, nous pouvons relier γ^s et $\bar{\epsilon}^{ps}$ par:

$$\gamma^s = \sqrt{3} \bar{\epsilon}^{ps} \quad (III.78)$$

car $\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} (m_i n_j + n_i m_j) \gamma$, avec n la normale au plan de glissement et m la direction de glissement

Ainsi, on peut estimer l'ordre de grandeur du coefficient L_2 à partir de:

$$L_2 = \sqrt{3} \alpha^2 \mu^2 \frac{b}{\delta} = 5.10^6 \quad (III.79)$$

avec $\alpha = 0,4$ [LC70], $\mu = 80000$ Mpa, $b = 5 \text{ \AA}$ et l'épaisseur des parois $\delta = 0,2 \text{ \mu m}$

Cette valeur fera l'objet d'une étude paramétrique dans le chapitre III.2.2.

Le terme L_3 représentant l'adoucissement dû à la restauration dynamique des dislocations dans la phase dure est faible de l'ordre de 5 [MKB93].

III.2.2.c) Lois d'évolution

L'évolution des variables internes est régie par les relations (III.58) à (III.65) et se résume à:

$$dx_j = \frac{\partial F_{x_i}}{\partial E_{kl}}(E, x_j) dE_{kl} \left(\frac{\partial F_{x_i}^c}{\partial x_j}(x_j) - \frac{\partial F_{x_i}}{\partial x_j}(E, x_j) \right)^{-1} \quad (\text{III.80})$$

La partie suivante est consacrée à l'adaptation numérique de ce formalisme qui conduit à de bons résultats qualitatifs.

III.3 - SIMULATIONS DE TRAJETS MONOTONES ET COMPLEXES

Après un résumé rapide de la méthode numérique utilisée, cette partie est consacrée aux résultats obtenus d'après le modèle limité à deux variables morphologiques développé précédemment, dans le cas de trajets monotones et complexes. Les simulations en chargements simples constituent également le cadre d'une étude paramétrique visant à dégager les influences des principaux coefficients. Ceux-ci devront, à terme, être évalués à partir d'essais expérimentaux.

Malgré les simplifications, nous avons pu déterminer l'origine des instabilités plastiques et suivre les évolutions de la microstructure de dislocations suivant les différents chargements. La plupart des résultats essentiels observés en changements de trajet sont mis en évidence par cette modélisation.

III.3.1 - Résolution informatique

III.3.1.a) Méthode numérique

L'organigramme détaillant la procédure numérique est illustré dans l'Annexe C. Nous utilisons une méthode incrémentale permettant d'obtenir les données du pas n en fonction des résultats obtenus au pas $(n-1)$. Nous pilotons le problème en incréments de déformation dE_{ij} . Les lois d'évolution (III.58) à (III.65) fournissent le système d'équations à résoudre pour chaque variable interne x_i active:

$$\begin{cases} F_{x_i} - F_{x_i}^c = 0 \\ d(F_{x_i} - F_{x_i}^c) = 0 \end{cases} \quad (III.81)$$

avec F_{x_i} données par (III.69), (III.70) et (III.71)

Numériquement, après avoir incrémenté la déformation totale d'un pas dE_{ij} , nous réalisons une prédiction élastique du problème. Si une, ou plusieurs, forces motrices ont atteint, ou dépassé, la valeur de leur force critique, les variables correspondantes sont qualifiées d'actives et peuvent évoluer. La prévision est alors corrigée par une méthode tangente en déterminant les incréments des variables internes actives dx_i (III.80) permettant de vérifier le système (III.81).

La force motrice suivant l'angle demande un traitement particulier du fait de sa périodicité. Le résultat donné par la méthode tangente peut, en effet, correspondre à une solution instable du problème, c'est à dire à un angle vérifiant (III.81) mais dont l'énergie interne est

supérieure à celle de la position précédente (cf. figure III.5). Il faut donc imposer numériquement au paramètre α de se déplacer dans le sens de F_α afin de minimiser l'énergie de Helmholtz (cf. Annexe C).

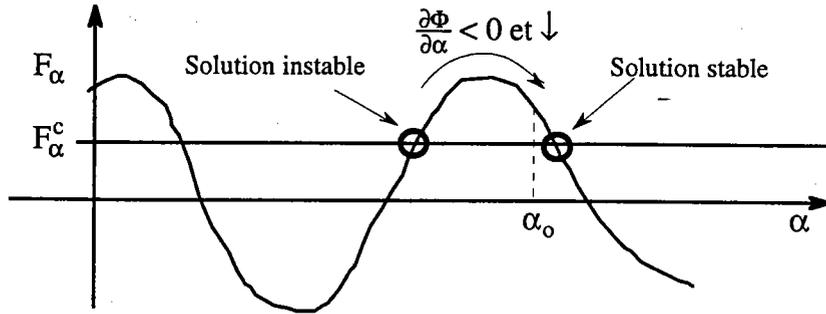


Fig. III.5: Forces critique et motrice relatives à la variable α ,

Les variables internes sont ensuite déterminées par incrémentation de l'état précédent $\bar{x}_i^n = \bar{x}_i^{n-1} + dx_i$, et la loi de comportement macroscopique $\Sigma_{ij} = L_{ijkl} E_{kl}$ est obtenue à partir des variables réactualisées.

III.3.1.b) initialisations

Tous les essais présentés dans cette partie nécessitent un jeu de paramètres initiaux. Si la valeur des coefficients n'est pas précisée avant les courbes, cela signifie qu'ils correspondent aux données ci-dessous. Ainsi, les forces critiques initiales sont égales à:

$$F_{\varepsilon^{ps}}^c = 200 \text{ Mpa} \quad F_{\varepsilon^{ph}}^c = 210 \text{ Mpa} \quad F_f^c = 10 \text{ Mpa} \quad F_\alpha^c = 10^{-3} \text{ Mpa} \quad (\text{III.82})$$

La matrice d'érouissage est choisie la plus simple possible afin de ne pas multiplier les paramètres inconnus. Dans un premier temps, nous ne tenons compte que de l'érouissage non local donné par (III.72) et (III.73) et les érouissages concernant les paramètres morphologiques sont annulés:

$$H_{ij} = \begin{matrix} & \varepsilon^{ps} & \varepsilon^{ph} & f & \alpha \\ \varepsilon^{ps} & \left(n L_1 (\bar{\varepsilon}^{ps})^{n-1} \right. & K_{12} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{ph} & \left. \frac{L_2}{F_{\varepsilon^{ph}}^c - F_{\varepsilon^{ph}}^o} \right. & L_3 (F_{\varepsilon^{ph}}^c - F_{\varepsilon^{ph}}^o) & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad (\text{III.83})$$

avec $n = 0,3$ $L_1 = 50 \text{ Mpa}$ $K_{12} = 10 \text{ Mpa}$ $L_2 = 6 \cdot 10^6 \text{ Mpa}$ $L_3 = 5 \text{ Mpa}$

Les demi-axes des cellules sont définis par les rapports de forme (5, 5, 1).

La fraction volumique initiale égale à 0,8 correspond à la valeur observée pendant une large plage de déformation [S86].

L'angle d'orientation initial des cellules est arbitraire.

III.3.2 - Cisaillements monotones; études paramétriques

La topologie choisie, correspondant à des cellules de dislocations aplaties, toutes orientées par un seul paramètre angulaire, s'applique parfaitement au cas du cisaillement que nous présentons dans cette partie. D'autres trajets ont également été simulés bien que la géométrie du modèle ne leur soit pas totalement adaptée. Ainsi, les résultats obtenus en traction monotone sont répertoriés dans l'Annexe D, et malgré la répartition isotrope transverse des configurations de dislocations réelles, nous sommes parvenus à de bonnes simulations.

Nous détaillons ici les résultats microscopiques et macroscopiques dans le cas du chargement décrit par la figure III.6.

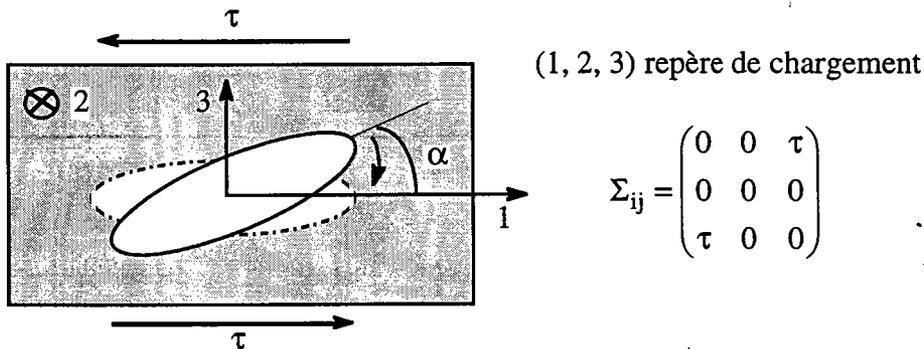


Fig. III.6: Simulation de cisaillement monotone.

Nous nous intéressons particulièrement aux évolutions de la microstructure décrite par les variables morphologiques f (fraction volumique de cellules) et α (angle entre le grand axe de l'inclusion et le repère de chargement), ainsi qu'à la réponse macroscopique du matériau biphasé. Nous rappelons à ce propos que notre modèle ne prend pas en compte la structure granulaire de l'acier pour se focaliser uniquement sur les effets produits par les hétérogénéités intragranulaires.

La figure III.7 représente la contrainte tangentielle macroscopique τ , les contraintes tangentielles internes τ^s et τ^h et la fraction volumique de phase molle f , en fonction du cisaillement total γ (cf. la figure D.2 dans le cas de la traction).

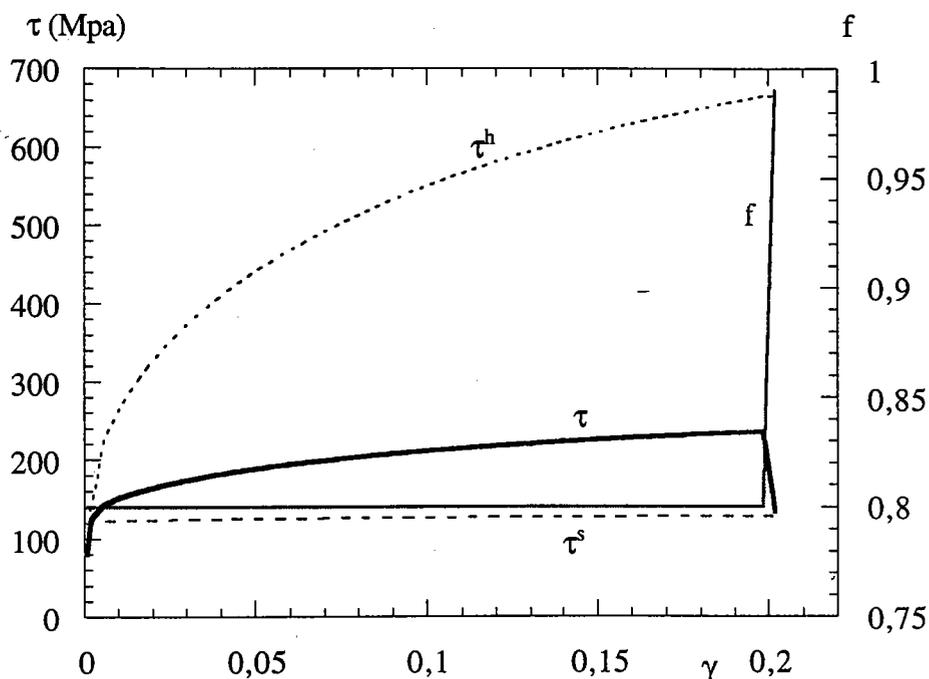


Fig. III.7: Contraintes et fraction volumique correspondant à l'essai de cisaillement

Nous constatons tout d'abord la bonne estimation de la contrainte macroscopique et des contraintes internes. La contrainte dans la phase dure correspond effectivement à trois fois la limite d'écoulement macroscopique, en accord avec les observations de Mughrabi [M88].

La fraction volumique de phase molle reste égale à sa valeur initiale de 0,8 pendant la quasi-totalité de la déformation. Au cours de la sollicitation mécanique, la force motrice associée à f croît jusqu'à atteindre le seuil à partir duquel la variable morphologique commence à augmenter. L'évolution de f traduit la croissance homothétique des cellules de dislocations. Elle se produit brutalement du fait de l'écrouissage choisi a priori nul afin de ne pas multiplier les paramètres.

L'augmentation de f (mis à part la rapidité du processus) est constatée expérimentalement par Fernandes et al [FS83]. En effet, Schmitt montre qu'après les quelques pour-cent de déformation nécessaires à la création d'une microstructure, la fraction volumique de cellules reste pratiquement constante, en augmentant de manière non linéaire au cours de la déformation plastique [S86] [FS83].

Finalement, intéressons-nous à la caractéristique essentielle de ce modèle qui réside dans la mise en évidence de **l'apparition d'une instabilité plastique**. Ce phénomène coïncide avec l'augmentation brutale de fraction volumique de phase molle. Il peut être retardé par l'introduction d'un écrouissage H_{ff} non nul dont nous vérifierons l'influence lors d'une étude paramétrique (cf. graphe III.11). La perte de ductilité est en fait provoquée par un

accroissement de la proportion de cellules, ce qui prouve l'importance des variables microstructurales dans la recherche des mécanismes d'adoucissement. Le rôle de la fraction volumique y est clairement établi.

Nous devons garder en mémoire ici, que seuls les résultats précédant la localisation de la déformation sont à prendre en compte, la partie post-bifurcation n'étant pas décrite par les équations du problème. Ce modèle permet uniquement de déterminer l'apparition des phénomènes d'instabilité plastique. Il décrit donc la partie utile à la mise en forme du matériau en prévoyant les limites des sollicitations à appliquer. A ce propos, il est intéressant de remarquer, à paramètres égaux, qu'un chargement en cisaillement est moins contraignant qu'une traction uniaxiale (cf. courbe D.2), puisque la perte de ductilité apparaît respectivement pour 20% et 17% de déformation. Cette constatation est effectivement vérifiée expérimentalement.

Les déformations plastiques équivalentes dans chaque phase sont illustrées sur la figure III.8 (cf. la figure D.3 pour la traction). La phase dure présente une déformation plastique environ 25% plus faible que la phase molle à 10% de déformation totale. Par conséquent, sans être excessivement marquée, la différence de déformation plastique équivalente dans chaque phase corrobore bien l'hypothèse d'uniformité par morceau du tenseur des déformations locales (II.35).

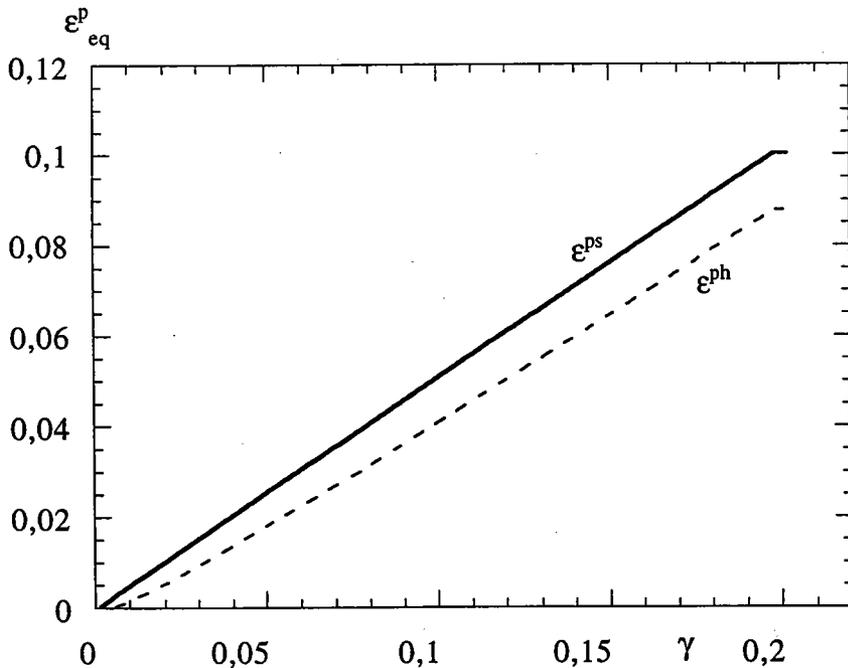


Fig. III.8: Déformations plastiques équivalentes dans chaque phase

Nous représentons sur la figure (III.9) l'évolution de l'orientation des cellules de dislocations. La position initiale, dont l'influence sera étudiée au III.3.2.d, a été arbitrairement fixée à 38° .

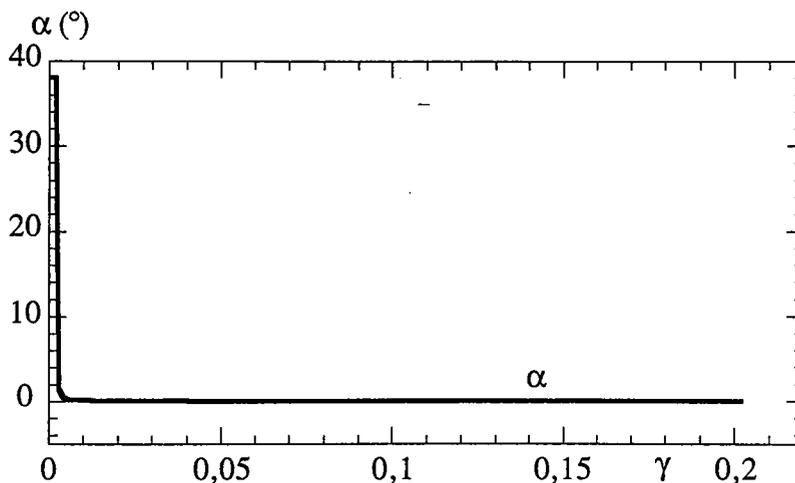


Fig. III.9: Orientation des cellules de dislocations

Nous constatons une évolution très rapide de la microstructure vers l'angle 0° qui correspond en fait à la direction de glissement. Cette orientation concorde avec les positions stables trouvées au chapitre II.4.4 pour les configurations statiques de dislocations. Une telle organisation des parois, parallèlement aux plans de glissement, est effectivement observée par de nombreux expérimentateurs [S86], [FS83] (cf. chapitre I).

Concernant ce dernier résultat, on peut supposer que lors de la modélisation totale, l'orientation de la microstructure par rotation globale des inclusions sera complétée par un accroissement du demi-axe correspondant à cette direction.

Ce modèle permet donc de retrouver des résultats essentiels tels que l'apparition d'instabilités plastiques ainsi que les modifications de la microstructure au cours du chargement, que ce soit dans le cas du cisaillement ou de la traction uniaxiale (cf. Annexe D). Les paramètres utilisés font maintenant l'objet d'une étude paramétrique afin de comprendre leur influence sur le comportement global et l'évolution des variables internes. Ces coefficients devront par la suite être déterminés à partir d'une courbe expérimentale de référence.

III.3.2.a) Etude paramétrique sur F_f^{c0}

Tous les autres paramètres étant donnés au paragraphe III.3.1.b, nous réalisons les simulations en cisaillement pour différentes valeurs de la force critique sur f ($F_f^{c0} = 5$ Mpa, 7 Mpa, 10 Mpa et 12 Mpa). La fraction volumique évoluant de la même manière qu'à la figure III.7, seules les contraintes tangentielles macroscopiques sont répertoriées ci-dessous.

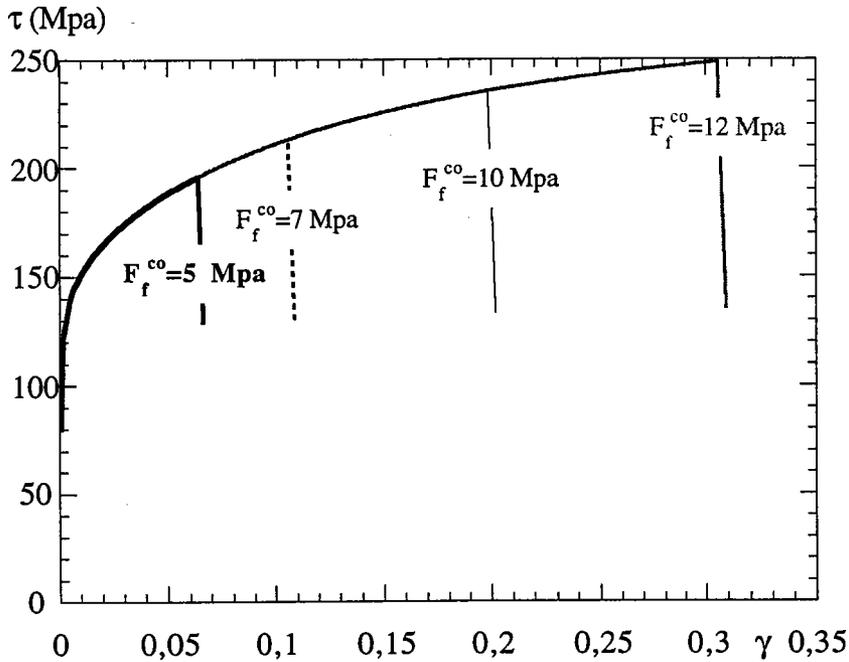


Fig. III.10: Contraintes macroscopiques de l'étude paramétrique sur F_f^{c0}

Comme nous le supposions, les modifications de la force critique initiale associée à f entraînent uniquement des effets sur le moment d'activation de la fraction volumique. C'est pourquoi nous n'avons tracé que les courbes macroscopiques, très significatives de ce phénomène. Ainsi, plus le seuil F_f^{c0} est faible, plus l'apparition de l'instabilité plastique est précoce. Les études suivantes montreront que l'action de ce paramètre est à combiner avec d'autres, et notamment avec les termes de la matrice d'écroûissage H_{ff} et $H_{\epsilon^{ps} \epsilon^{ph}}$, pour obtenir le moment réel de localisation.

III.3.2.b) Etude paramétrique sur H_{ff}

Pour tous les autres essais (précédents et à venir), le terme d'écroûissage H_{ff} a été annulé afin de restreindre le nombre de paramètres à "caler". Pourtant, il se justifie comme étant la résistance du matériau à la croissance de la fraction volumique. Ce coefficient, loin d'être

fantaisiste, possède donc une réalité physique qu'il faudra par la suite corrélérer avec les résultats expérimentaux. Il est donc intéressant de comprendre son influence à travers une étude paramétrique.

La composante H_{ff} de la matrice d'écroûissage agit uniquement sur la force critique associée à la fraction volumique et entraîne, de ce fait, des conséquences sur la contrainte macroscopique. Nous représentons ci-dessous un zoom en contrainte de ces deux grandeurs autour de la région de localisation.

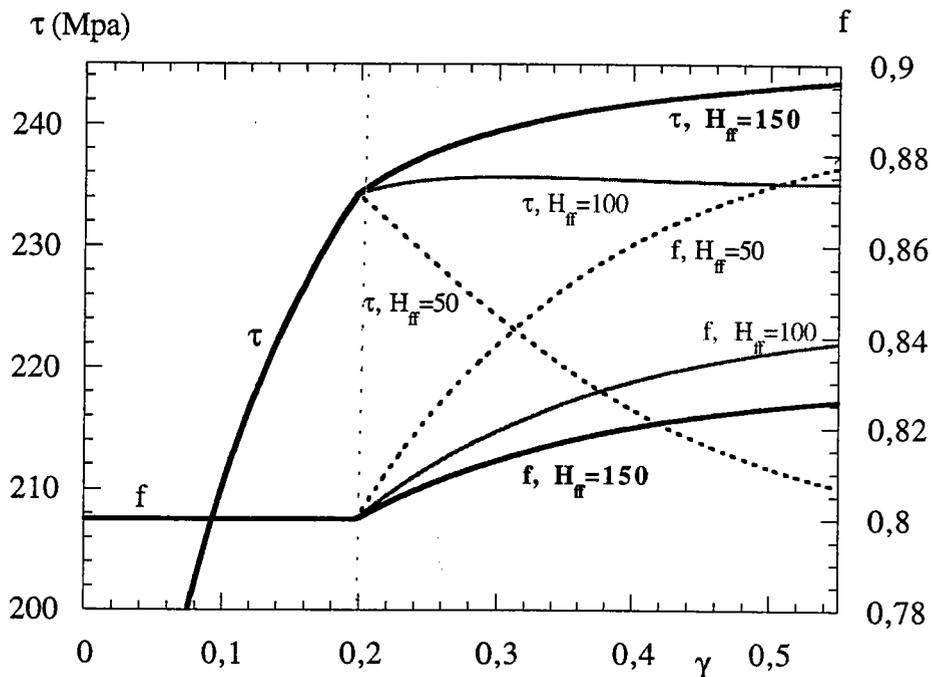


Fig. III.11: Etude paramétrique sur H_{ff}

Nous constatons effectivement que le coefficient H_{ff} ralentit l'augmentation de fraction volumique de phase molle par rapport aux cas précédents où l'annulation de ce terme conduisait à une réponse brutale de f (cf. figure III.7). Par conséquent, pour des coefficients H_{ff} suffisamment élevés (100), l'apparition de l'instabilité plastique est retardée par rapport à l'activation de la variable morphologique f repérée par le trait pointillé. La localisation peut même disparaître si la résistance à la progression est trop importante (150). L'écroûissage H_{ff} permet donc de contrôler le déclenchement de l'instabilité par rapport à l'activation de la variable morphologique f .

La prise en compte de l'influence du saut de déformation plastique sur la croissance de f permettrait d'adoucir les répercussions de cette dernière, et ainsi de représenter parfaitement les courbes expérimentales.

III.3.2.c) Effet de l'écroissage non local $H_{\epsilon^{ps} \epsilon^{ph}}$

L'écroissage non local donné par:
$$H_{\epsilon^{ps} \epsilon^{ph}} = \frac{L_2}{F_{\epsilon^{ph}}^c - F_{\epsilon^{ph}}^{c^0}} \quad (III.84)$$

correspond au durcissement induit dans la phase dure par le mouvement des dislocations, donc par le glissement plastique, se produisant dans la phase molle. Ce coefficient agit directement sur la déformation plastique dans la phase dure, entraînant par ce biais de nombreuses modifications. La figure suivante représente les contraintes tangentielles macroscopique et internes pour différentes valeurs de L_2 repérées en million.

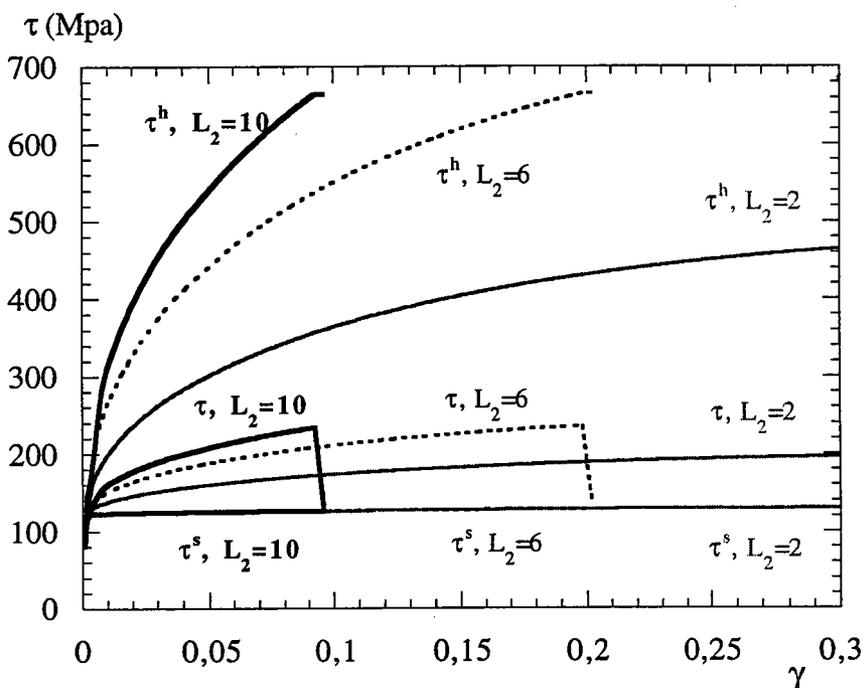


Fig. III.12: Etude paramétrique sur L_2 , contraintes tangentielles

Nous remarquons immédiatement le durcissement important de la phase dure lorsque L_2 augmente de 2 à 10 millions, ce qui entraîne automatiquement un écroissage macroscopique, d'autant plus marqué que $H_{\epsilon^{ps} \epsilon^{ph}}$ est élevé. Le niveau de contraintes internes dans les cellules n'est pas affecté par ce coefficient.

La seconde observation concerne le moment de perte de ductilité qui se produit d'autant plus tôt que L_2 est élevé. En effet, plus l'écroissage non local est important, plus la contrainte macroscopique l'est également et, en contrepartie, plus la déformation plastique dans la phase dure est faible (cf. figure III.13). La déformation plastique à l'intérieur des cellules restant inchangée, le saut de déformation plastique augmente avec L_2 . L'action combinée de

ces résultats, entraîne une hausse plus rapide de la force motrice sur f dans le cas d'un fort écrouissage non local, conduisant alors à une instabilité précoce.

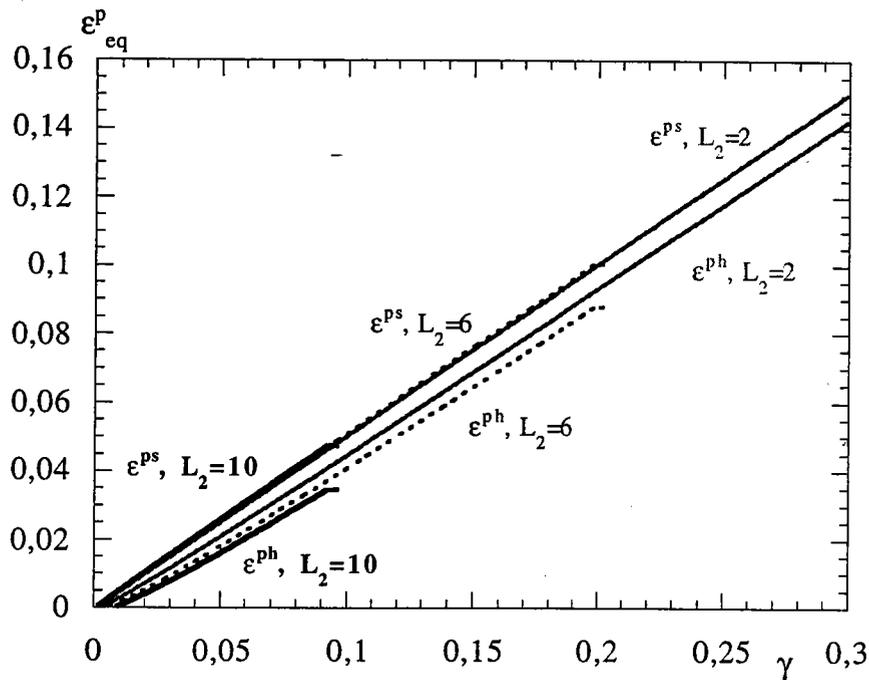


Fig. III.13: Etude paramétrique sur L_2 , déformations plastiques dans chaque phase

Le paramètre L_2 gère donc, en partie, le niveau de contrainte macroscopique, l'écart entre les déformations plastiques ainsi que le moment de perte de ductilité. Il n'entraîne aucune action notable sur l'orientation des cellules.

III.3.2.d) Influence de la forme des inclusions

Après cette étude paramétrique, nous cherchons à déterminer quels sont les effets de la géométrie des cellules de dislocations sur le comportement macroscopique, afin d'anticiper les résultats du modèle total. Nous étudions donc les réponses obtenues en prenant des inclusions ellipsoïdales de plus en plus aplaties.

Les figures III.14 et III.15 représentent respectivement les contraintes tangentielles macroscopiques et les déformations plastiques dans chaque phase pour différents rapports de forme (sphère, 2 2 1, 5 5 1, 10 10 1). Dans cette série, la force critique sur f est égale à $F_f^c = 7$ Mpa. Les premiers pas de déformation élastique sont occultés afin de ne pas tasser inutilement les courbes.

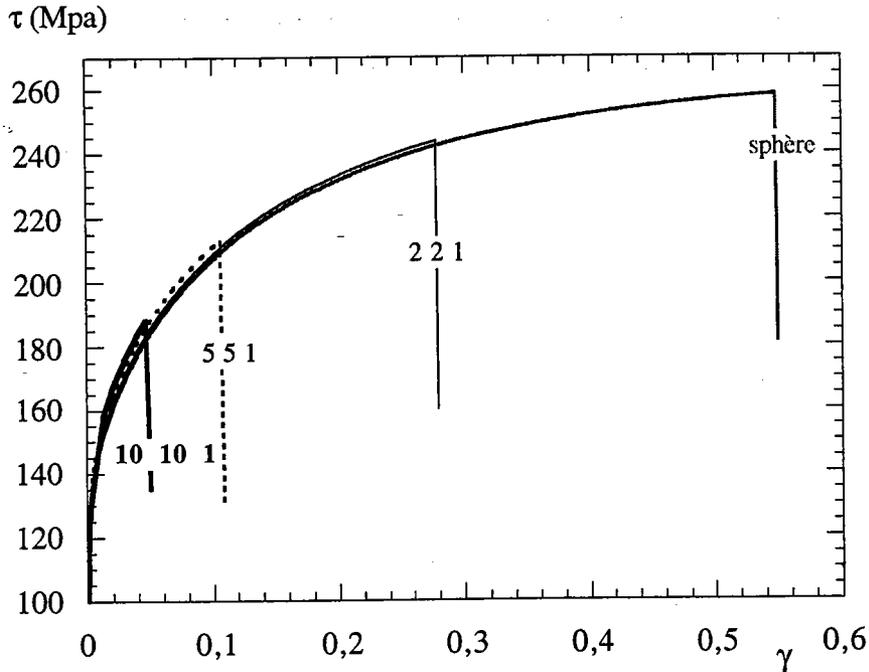


Fig. III.14: Influence de la forme de l'inclusion sur la contrainte macroscopique

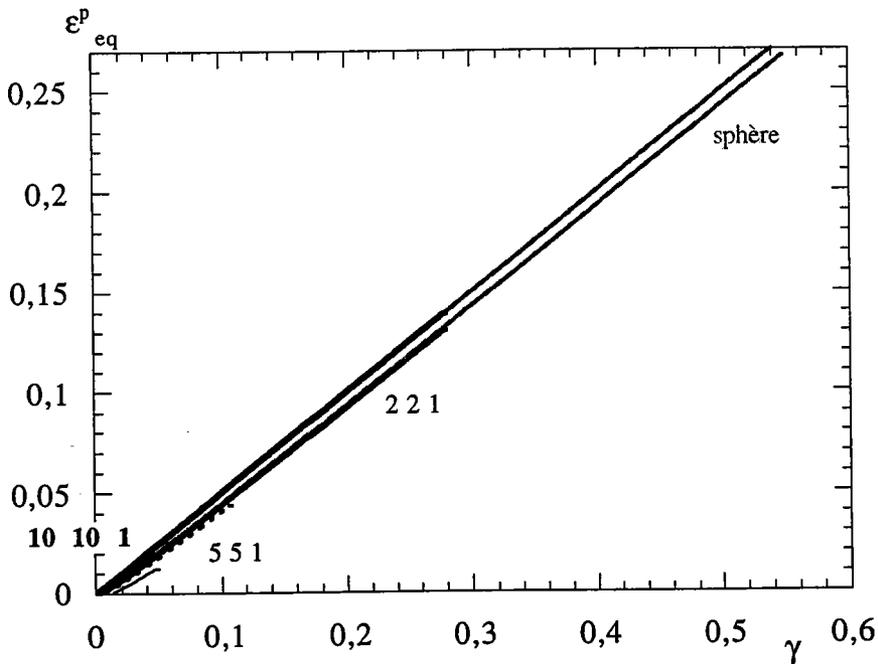


Fig. III.15: Influence de la forme de l'inclusion sur les déformations plastiques

Plus l'ellipsoïde est aplati, plus sa contrainte macroscopique et son saut de déformation plastique sont élevés du fait d'un tenseur d'Eshelby plus important pour une forme davantage marquée. Ceci augmente, par rapport au cas de la sphère, la force motrice associée

à la fraction volumique de phase molle. Celle-ci atteint alors plus rapidement son seuil, provoquant ainsi une instabilité plastique précoce.

Ce phénomène de progression prématurée de la phase molle dans le cas d'ellipsoïdes très plats s'explique par une analogie avec la théorie des fissures. Dans le cas d'une tête de fissure très fine le coefficient de concentration de contraintes K^I , fonction du rapport de forme, est très élevé et conduit à une propagation de la fissure par effet de pointe.

La forme des cellules de dislocations a donc un impact essentiel sur le point initial de perte de ductilité. Par contre, les conséquences sur l'orientation de la microstructure sont négligeables lorsque l'inclusion n'est plus une sphère (cf. figure III.16). En effet dans ce cas particulier, la géométrie sphérique étant isotrope, les inclusions ne tournent pas et restent à leur position initiale. Mais quelles que soient les cellules de dislocations non sphériques, celles-ci s'orientent suivant le même angle correspondant au plan de glissement. Les inclusions moins aplaties présentent seulement une orientation légèrement moins rapide.

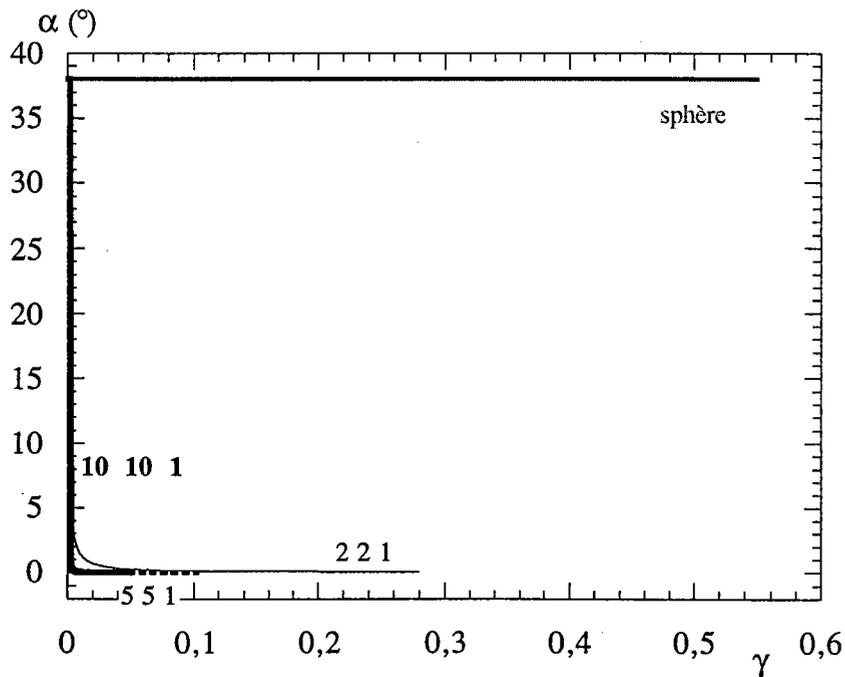


Fig. III.16: Influence de la forme des inclusions sur l'orientation de la microstructure

Nous allons maintenant nous intéresser à la stabilité numérique de notre modèle en vérifiant les effets des orientations initiales sur les réponses microscopiques et macroscopiques

III.3.2.e) Incidence de l'angle initial

Les courbes macroscopiques sont représentées sur la figure III.17 en fonction des angles α_0 introduits au départ. Les premiers pas élastiques ont été supprimés.

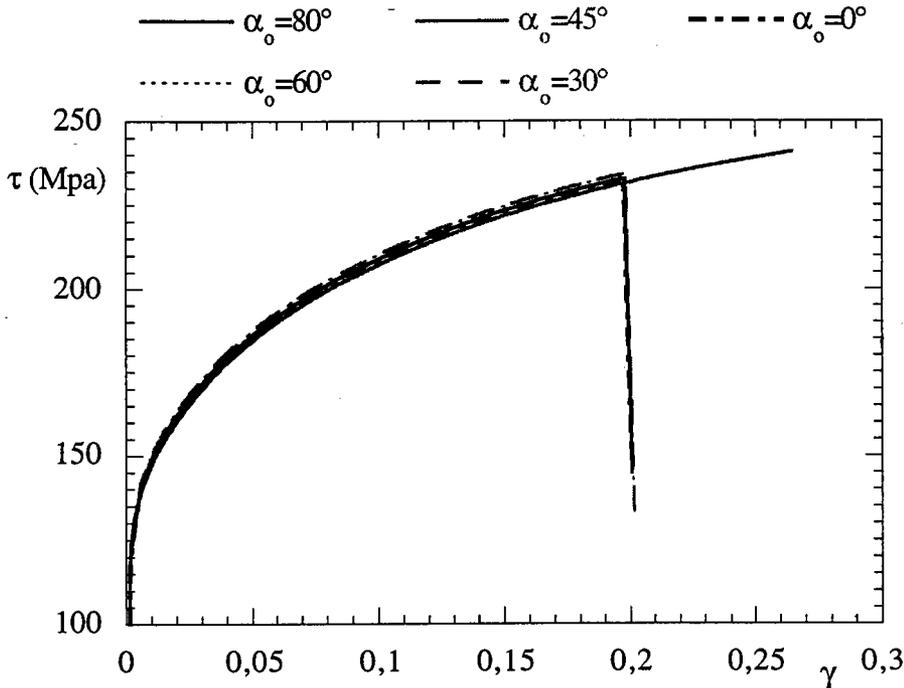


Fig. III.17: Incidence de l'angle initial sur la contrainte macroscopique

On constate une très faible différence de comportement concernant les niveaux de contrainte ainsi que l'apparition de l'instabilité plastique, sauf dans le cas de $\alpha_0 = 45^\circ$. Ces phénomènes s'expliquent grâce aux réponses microscopiques représentées sur le graphique III.18 pour les premiers pour-cent de déformation. Nous remarquons alors, que, quel que soit le paramètre angulaire initial différent de 45° , il atteint très vite sa valeur asymptotique correspondant aux directions de glissement. La différence des contraintes macroscopiques provient donc seulement du temps de réponse de la microstructure.

L'orientation suivant les directions de glissement (0° ou 90°) correspond aux positions stables établies dans la partie II.4.4, par contre d'après cette étude, 45° est une position instable de la cellule. Notre modèle ne permet donc pas de faire évoluer la microstructure initialement fixée sur sa position instable car celle-ci correspond à une direction de symétrie du problème. Cela entraîne un comportement macroscopique perturbé, sans possibilité de bifurcation, mais qui pourrait être supprimé par la prise en compte de la plasticité cristalline. Précisons que cette situation ne peut se produire en cours de programme, car comme nous

pouvons le vérifier sur la figure III.18, les orientations évoluent vers la position stable la plus proche sans passer par 45°. L'initialisation ne pose donc aucun problème de convergence (à part pour 45°), le modèle est donc numériquement stable.

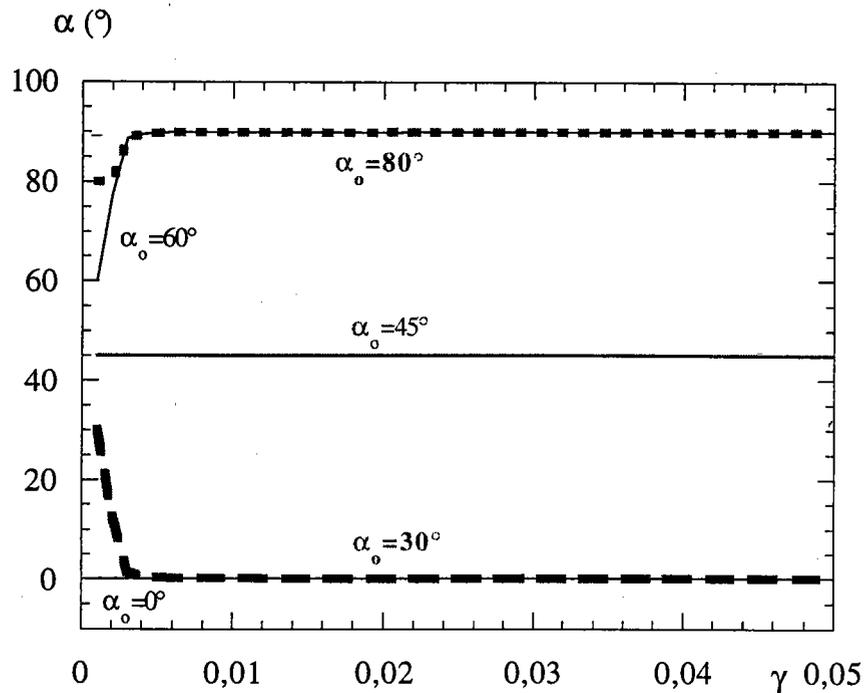


Fig. III.18: Incidence de l'angle initial sur l'orientation de la cellule

III.3.2.f) Conclusions

Ce modèle, bien que restreint à deux variables morphologiques, parvient à représenter qualitativement les phénomènes d'instabilité plastique et d'évolution de la microstructure. Cela justifie la prise en compte des hétérogénéités plastiques intragranulaires décrites au chapitre I lors de la modélisation du comportement macroscopique des matériaux.

Ce modèle permet en outre de retrouver des résultats caractéristiques des changements de trajet.

III.3.3 - Chargements complexes en cisaillement

Nous représentons dans cette partie des trajets multiples cisaillement-cisaillement (et traction-traction dans l'Annexe D), dont les séquences se déroulent toujours suivant le processus illustré à la figure III.19.

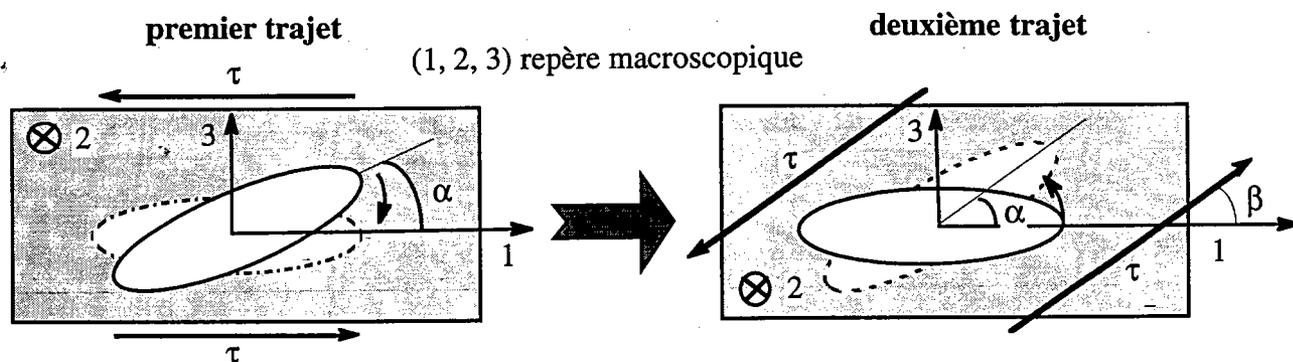


Fig. III.19: Procédure de trajets complexes

Ainsi, après un premier cisaillement suivant les directions 1-3 ($\sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau$), on réalise ensuite un deuxième cisaillement dans le même plan, selon des axes décrivant un angle β avec le repère macroscopique. Cela équivaut expérimentalement à découper une éprouvette de direction β dans le matériau prédéformé puis à la solliciter dans les mêmes conditions.

Nous pouvons alors simuler de nombreux trajets complexes caractérisés par le paramètre $\theta \in [-1, 1]$ (cf. chapitre I.3.2). Dans un premier temps, nous effectuons une même séquence pour différents taux de prédéformation, puis des trajets différents avec le même taux de précharge. On s'intéresse également au cas particulier de l'essai Bauschinger défini pour $\theta = -1$ (cf. chapitre III.3.3.c). Finalement, bien que la topologie choisie ne soit pas totalement adaptée à ces trajets, nous réalisons les séquences laminage-rétreint puis laminage-traction pour lesquelles nous retrouvons qualitativement les résultats couramment observés.

Pour tous les trajets complexes illustrés dans cette partie, les paramètres utilisés sont définis dans la partie III.3.1, sauf pour la force critique sur $f F_f^c$ que nous prenons ici égal à 12 Mpa. Par conséquent, les résultats obtenus dans les pages suivantes découlent de phénomènes physiques décrits de manière intrinsèque par notre modèle, et non pas d'ajustement de multiples paramètres.

Dans tous les cas, les contraintes et les cisaillements représentés correspondent aux contraintes tangentielles et aux cisaillements de chaque trajet placés bout à bout.

Le graphe III.20 reproduit la courbe macroscopique caractéristique d'un trajet séquentiel dur, le paramètre θ valant 0. Nous avons réalisé un cisaillement de 20% de déformation suivant le repère macroscopique, suivi d'un cisaillement à $\beta = 45^\circ$ que nous comparons avec un trajet continu cisaillement-cisaillement à 0° (cf. figure III.19).

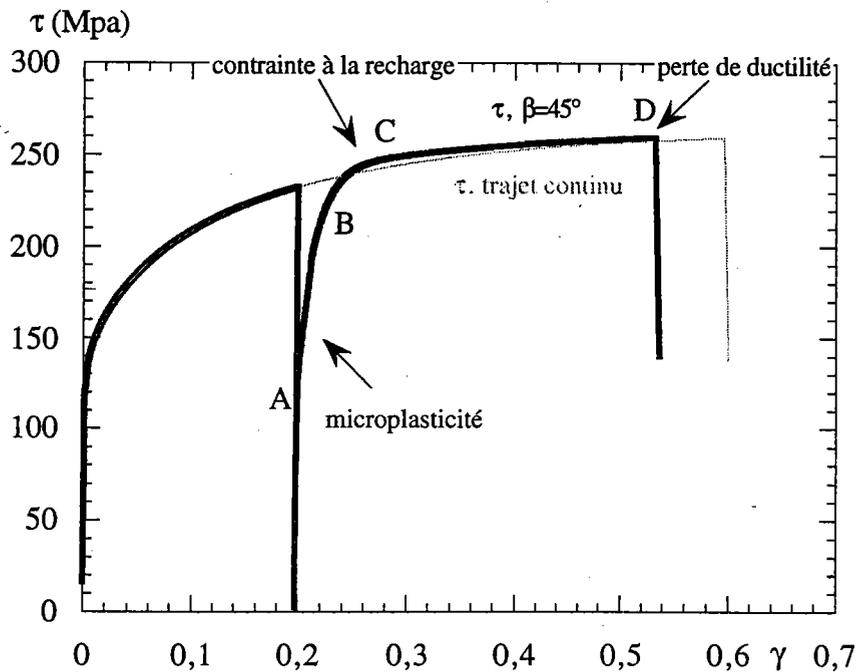


Fig. III.20: Trajet complexe, comparaison avec trajet continu

Le trajet complexe dur se distingue du chargement continu par trois particularités qui sont: une microplasticité prononcée avant le seuil macroscopique (AB), une contrainte à la recharge supérieure à celle du trajet continu (BC) et une perte de ductilité (D) plus précoce. Ces remarques sont effectivement observées expérimentalement (cf. chapitre II.3.2) [S86], [RS89], [R93].

La microplasticité traduit le fait que la phase molle, donc l'intérieur des cellules de dislocations, plastifie avant la phase dure, c'est à dire les parois. En effet, après décharge, les contraintes internes résiduelles dans chaque phase s'équilibrent et vérifient la relation de moyenne nulle (II.31). Ainsi, la phase molle est légèrement sollicitée en cisaillement inverse alors que la phase dure est encore en état de cisaillement positif. Par rapport au premier trajet, le deuxième cisaillement possède une part de cission négative qui sollicite la phase molle dans le sens de ses contraintes résiduelles. De plus, la phase dure ayant fortement été durcie par l'écroutissage non local lors de la première sollicitation, sa limite élastique est maintenant beaucoup plus élevée que celle des cellules. Tout ceci entraîne une plastification anticipée des inclusions par rapport aux parois.

Le niveau de contrainte macroscopique à la recharge, correspondant à l'activation de la plasticité dans les parois, découle de la microplasticité et de l'écroutissage non local. La déformation plastique dans l'inclusion a écroui, par le mécanisme non local, la phase dure avant même que celle-ci ne soit activée. La contrainte macroscopique résultant d'une

opération de moyenne sur les phases, le durcissement de τ^h conduit donc à une augmentation de τ .

L'instabilité plastique précoce est une conséquence directe du niveau de contraintes résiduelles élevées. En effet, ce phénomène entraînant une cission macroscopique plus importante pour le trajet dur que pour le chargement continu, la force motrice liée à la fraction volumique atteint son seuil plus tôt, d'où une perte de ductilité prématurée.

La fraction volumique n'a pas été représentée car elle évolue de manière identique aux cas de trajets monotones (cf. figure III.7). En effet, puisqu'on ne considère aucun écrouissage sur f, celle-ci reste constante jusqu'au moment de son activation brutale qui entraîne la perte de stabilité macroscopique.

La quatrième caractéristique d'un trajet complexe réside dans l'évolution de sa microstructure avec le nouveau chargement. En effet, Schmitt [S86] observe en changement de trajet, lorsque la déformation du second chargement avoisine celle de la prédéformation, que la microstructure relative à la précharge disparaît pratiquement totalement au profit des configurations de dislocations typiques de la deuxième sollicitation. La figure III.21 montre que le modèle permet de retrouver ces résultats.

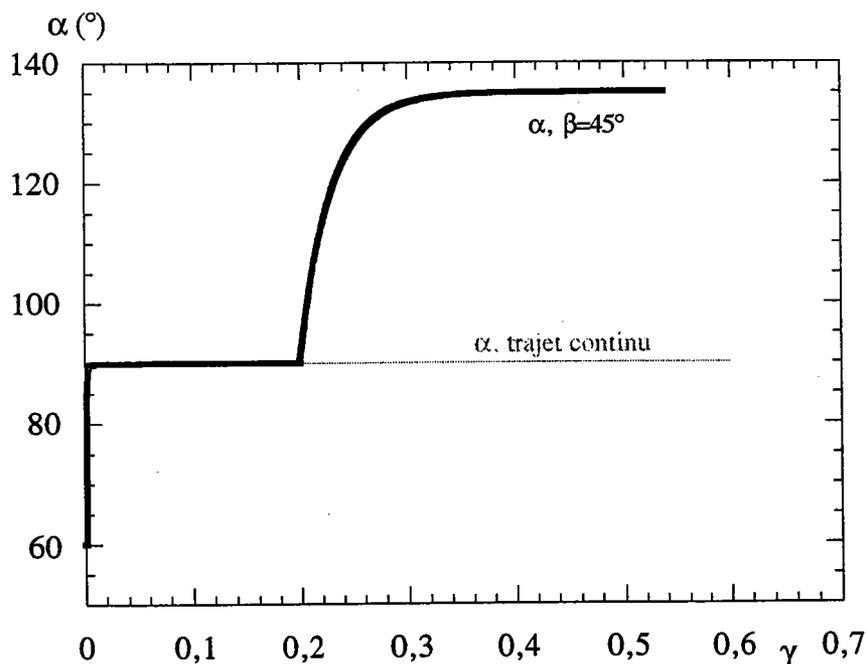


Fig. III.21: Evolution de la microstructure en chargement complexe

On constate tout d'abord une orientation très rapide des cellules de 60° (angle initial) vers 90° , la position stable du premier cisaillement. Lors du second trajet, la microstructure tourne

de nouveau afin de s'orienter au bout d'environ 15% de déformation, selon la position stable relative au deuxième cisaillement. Ceci correspond effectivement aux observations [FS83].

La disproportion des vitesses de rotation des inclusions entre les deux trajets provient d'une différence de saut de déformation plastique entre les deux états (cf. équation (III.71)). En effet, dans les premiers pour-cent de déformation, le faible saut de déformation plastique ne constitue pas un obstacle à la mobilité des cellules, alors que pour le second trajet, le matériau a été écroui et empêche la rotation de l'inclusion par un fort $\Delta\varepsilon^P$ présent dès le départ.

D'un point de vue numérique, si $\Delta\varepsilon^P$ est très petit, la force motrice sur l'angle représentée sur le schéma III.5 est de faible amplitude. Ainsi, lorsque F_α dépasse sa force critique, la correction de ΔF ramenant la force motrice à la force critique, entraîne un grand mouvement angulaire, donc un positionnement rapide. Par contre si le saut de déformation plastique est plus important, la force motrice sur α est plus marquée et la correction s'effectue par petits pas angulaires, d'où une vitesse de mise en place de la microstructure plus lente.

Le modèle utilisé permet donc, sans chercher à optimiser les paramètres, de décrire qualitativement les phénomènes caractéristiques se produisant lors de changements de trajet. Il contient donc intrinsèquement des phénomènes liés aux changements de trajet tels que la mémoire microstructurale du premier chargement.

Nous allons maintenant nous intéresser à différentes séquences afin de déterminer les acquis du modèle et les lacunes des restrictions effectuées

III.3.3.a) Chargements complexes en cisaillement à différents taux de prédéformation

Nous avons représenté sur la figure III.22, les contraintes tangentielles macroscopiques données par le même trajet complexe dur (à $\beta = 45^\circ$) réalisé avec différents taux de prédéformation (cf. Annexe D dans le cas de la traction). Le point d'arrêt des courbes représenté par une croix correspond au point d'instabilité (la partie post-bifurcation n'est pas dessinée), c'est à dire à l'activation de la fraction volumique qui évolue comme au III.3.2.

Pour chaque trajet complexe, on retrouve bien toutes les caractéristiques énoncées précédemment, c'est à dire une microplasticité, une contrainte à la recharge supérieure au trajet continu et une localisation prématurée.

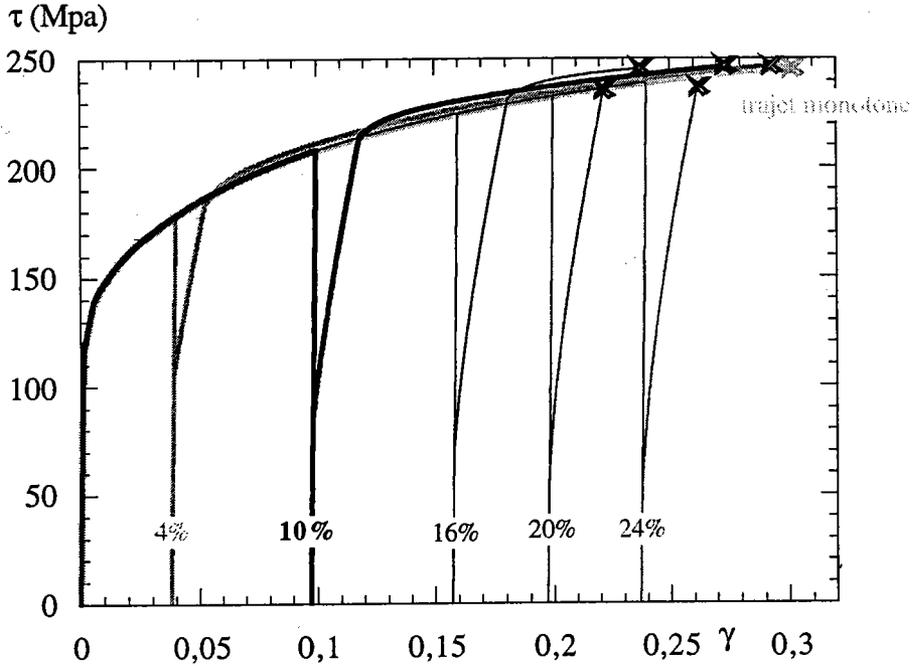


Fig. III.22: Contraintes macroscopiques pour différents taux de prédéformation

Nous remarquons également que plus la prédéformation est importante, plus la microplasticité débute pour des contraintes faibles, plus la contrainte à la recharge est importante et plus la perte de ductilité est précoce. D'ailleurs, pour 20% et 24% de précharge, la bifurcation survient avant la plastification de la phase dure. Ainsi, plus le matériau est prédéformé, moins il est possible d'atteindre des déformations cumulées importantes sans perte des propriétés de mise en forme. Ces constatations sont vérifiées par les essais expérimentaux de Raphanel et al [RS88] reproduis sur la figure III.23 dans le cas de la traction (cf. Annexe D pour les simulations).

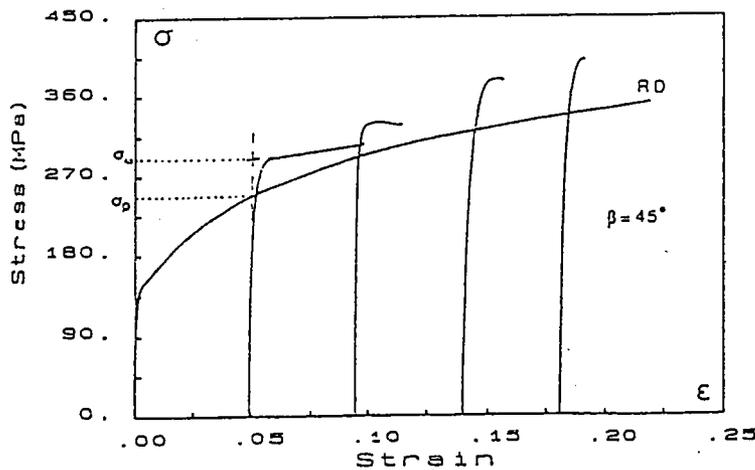


Fig. III.23: Essais de traction-traction à 45° pour différents taux de prédéformation

Les résultats de ces simulations s'expliquent de la même manière que précédemment. Si on reporte sur la figure III.24 la contrainte à laquelle débute la microplasticité en fonction du taux de prédéformation on obtient une courbe décroissante pratiquement linéaire:

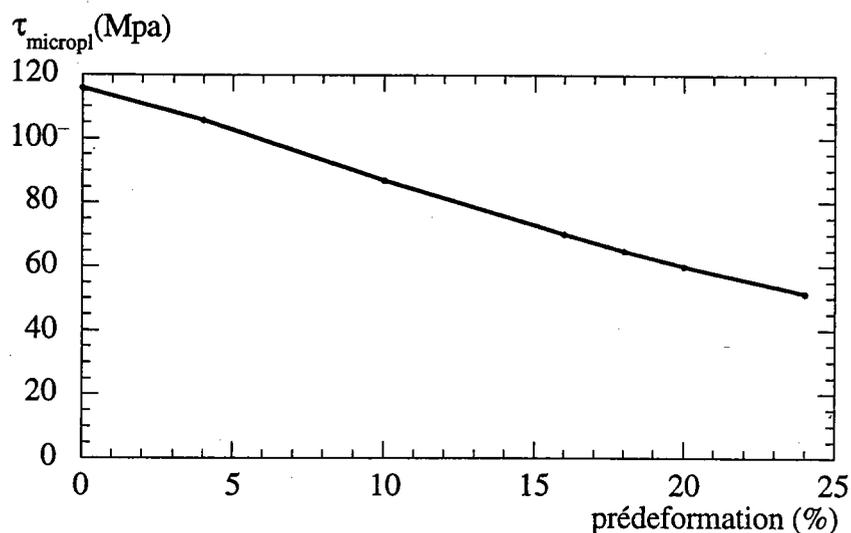


Fig. III.24: Contrainte de microplasticité en fonction du pourcentage de prédéformation

La décroissance de la contrainte de microplasticité provient des contraintes résiduelles en cisaillement inverse dans la phase molle qui sont d'autant plus importantes que la précharge est longue. De ce fait, la phase dure est plus écroûie ce qui entraîne une contrainte à la recharge supérieure qui conduit finalement à une instabilité précoce.

La figure suivante montre les évolutions microstructurales durant les trajets complexes.

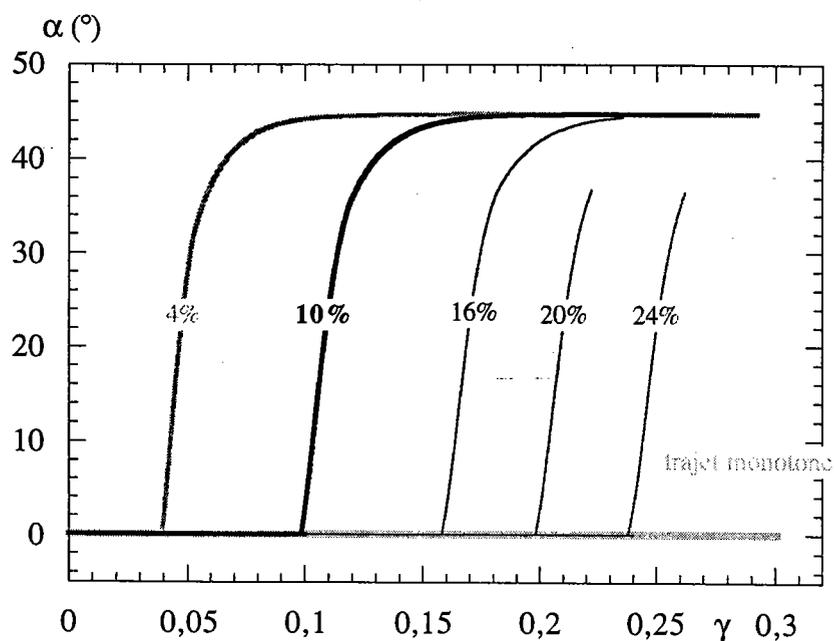


Fig. III.25: Evolution de la microstructure en fonction de la précharge

Quel que soit le taux de prédéformation, les cellules perdent la mémoire du premier trajet pour s'orienter suivant la position stable relative au nouveau chargement. Mais contrairement aux observations, les vitesses de rotation de la microstructure après recharge ne dépendent pas du pourcentage de prédéformation. En fait, à partir des premiers pour-cent de déformation plastique, le saut $\Delta\varepsilon^P$ n'évolue pratiquement plus, ce qui entraîne des forces motrices sur les angles équivalentes et donc aucune incidence du taux de prédéformation sur la vitesse d'orientation.

Il faudrait ici, considérer également l'impact du saut $\Delta\varepsilon^P$ sur la force motrice associée à α . On conçoit aisément en effet, que la microstructure a d'autant plus de difficulté à évoluer, ce qui suggère une force critique d'autant plus importante, que le matériau est écroui.

III.3.3.b) Trajets cisaillement-cisaillement suivant différents angles β de recharge

La figure III.26 représente les contraintes tangentielles macroscopiques obtenues pour différents angles β indiqués sur les courbes (cf. figure III.19).

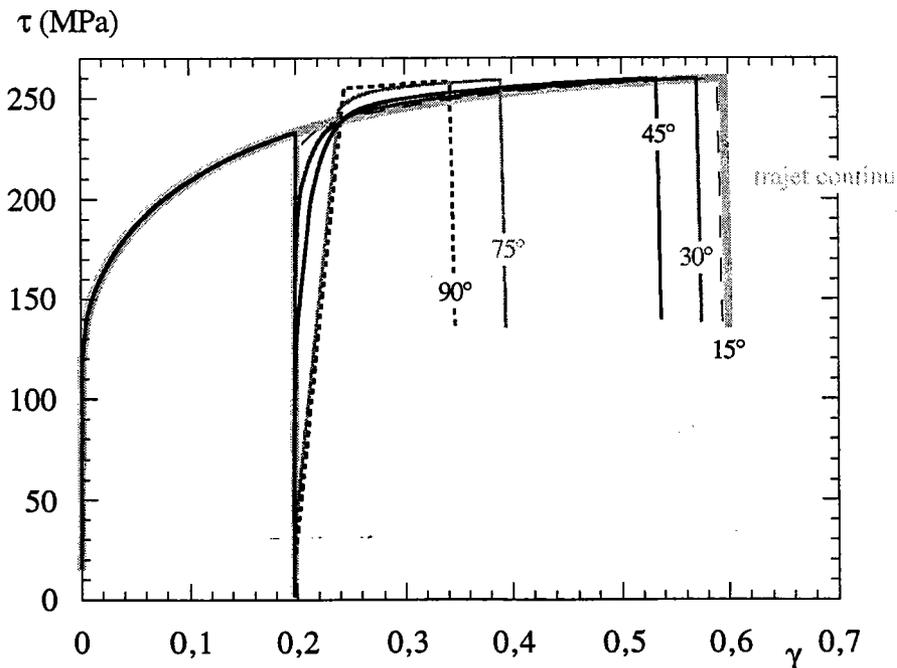


Fig. III.26: Contraintes tangentielles macroscopiques pour différents trajets complexes

On constate que le seuil de microplasticité décroît de façon non linéaire avec l'angle de recharge (cf. figure III.27)

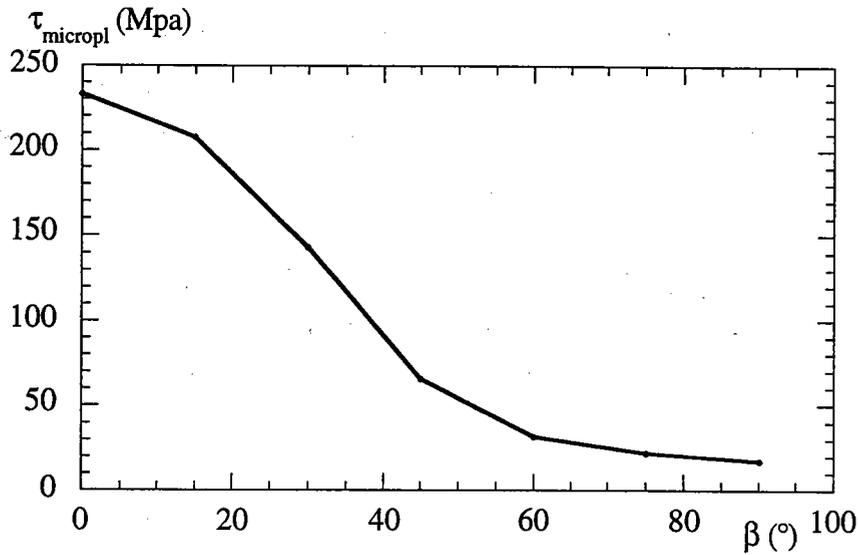


Fig. III.27: Seuil de microplasticité en fonction de l'angle de changement de trajet

En effet, plus l'angle β s'approche de 90° , plus la composante en cisssion négative du nouveau chargement par rapport au premier cisaillement est importante. La phase molle présentant à la décharge un état de contraintes résiduelles de cisaillement inverse, atteint donc d'autant plus rapidement sa limite élastique que le trajet est voisin de l'essai de cisaillement inverse. Ceci conduit à une décroissance non linéaire de la contrainte de microplasticité en fonction de l'angle de recharge. Cette diminution du seuil est effectivement vérifiée expérimentalement

Par contre, à partir de $\beta = 75^\circ$ correspondant à un paramètre θ de -0.87 , le comportement macroscopique doit se rapprocher d'un essai Bauschinger ($\beta = 90^\circ$ et $\theta = -1$). Cela signifie non seulement, que la microplasticité doit être très prononcée, mais aussi que la contrainte à la recharge doit être inférieure à la contrainte du trajet continu comme le montre la figure expérimentale tirée de [RS89].

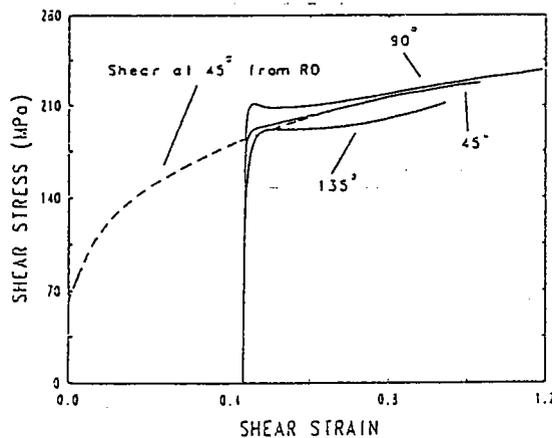


Fig. III.28: Résultats expérimentaux de trajets complexes cisaillement 45° -cisaillement β

Nous atteignons les limites de notre modèle lorsque le matériau est chargé en sens opposé. En effet, le paramètre morphologique f est une variable trop globale qui ne peut pas représenter les phénomènes de dissolution de la microstructure. Les cellules s'orientent effectivement toujours suivant la direction de cisaillement correspondant au second trajet comme l'affirment les observations expérimentales (cf. figure III.29). Mais dans le cas de l'essai Bauschinger cette position est stable pour les deux sollicitations. Il est donc nécessaire d'introduire les variables de géométrie qui permettrait de prendre en compte l'inversion de chargement, et également de travailler en grandes déformations afin de distinguer le repère lié au chargement et le repère de l'échantillon.

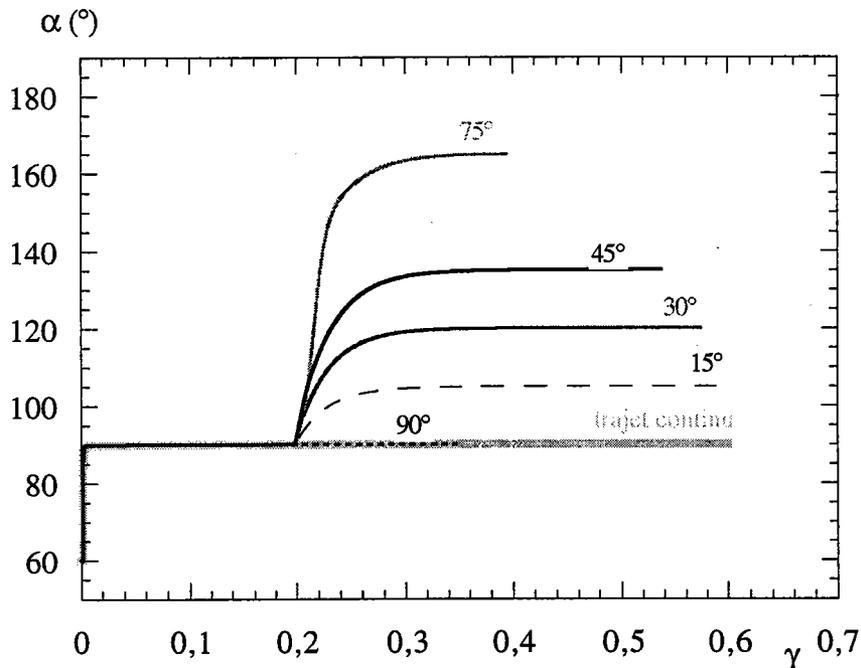


Fig. III.29: Evolution de la microstructure en trajet complexe suivant différents angles β

III.3.3.c) Trajets Bauschinger

Connaissant les lacunes de notre modèle, nous avons réalisé des essais de type Bauschinger pour différents taux de prédéformation (cf. Figure III.30). Nous constatons comme précédemment une bonne représentation de la microplasticité et de l'apparition d'instabilités plastiques, mais une contrainte à la recharge supérieure en valeur absolue à celle obtenue lors du premier cisaillement.

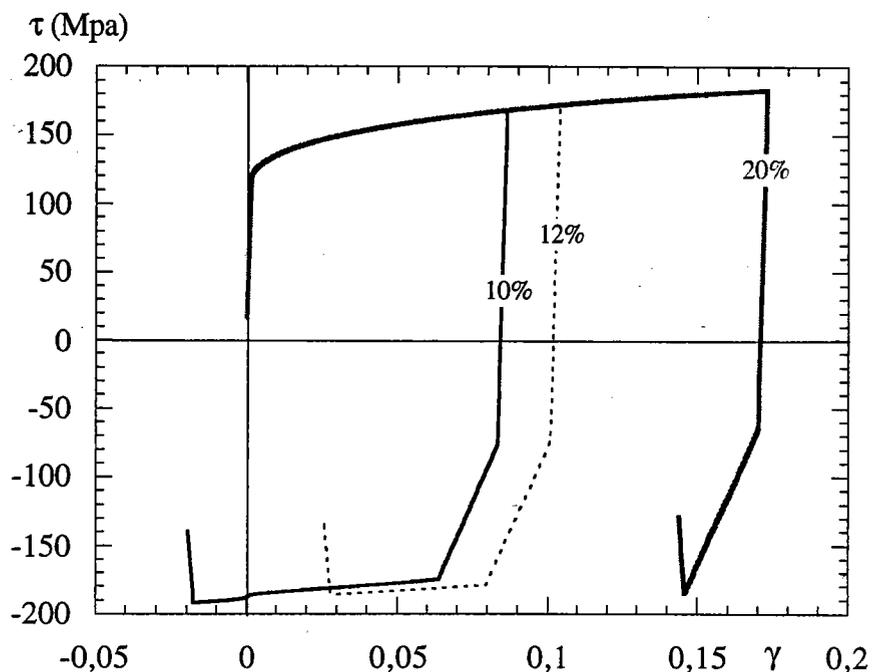


Fig. III.30: Essais Bauschinger à différents taux de prédéformation

III.3.4 - Conclusions

Les résultats présentés ici dans le cas de trajets de cisaillements monotones et complexes, et dans l'Annexe D pour des sollicitations en traction, permettent d'établir un bilan positif quant aux performances de notre modèle. En effet, nous sommes parvenus à déterminer par le biais d'un raisonnement énergétique, les phénomènes d'apparition d'instabilités plastiques et d'évolution de la microstructure, et ceci pour des trajets monotones ou complexes. L'étude des changements de trajet n'a bénéficié d'aucune optimisation de paramètres par rapport aux cas des trajets continus. Les tendances obtenues découlent donc de la physique décrite par le modèle.

Ces exemples nous ont permis d'identifier les faiblesses des restrictions effectuées. Il s'avère donc nécessaire par la suite de prendre en compte la variation de tous les paramètres de forme (a, b, c) et de traiter ce problème en grandes déformations. D'autre part, il est clair que la matrice d'érouissage non locale, simplifiée à l'extrême, demande à être complétée sur des bases physiques. Ces perspectives sont actuellement poursuivies par Laurent Langlois dans le cadre de sa thèse.

Tout en connaissant les limites de la topologie utilisée dans ce modèle, nous avons souhaité l'appliquer à un problème "industriel", c'est à dire aux trajets laminage-traction et laminage-rétreint. Ces chargements séquentiels sont en effet très importants dans l'étude de la mise en

forme de tôles laminées par emboutissage, car les déformations rencontrées sous le poinçon peuvent être assimilées à du rétreint alors que la sollicitation s'exerçant sur les parois est proche de la traction. La succession des trajets est schématisée sur la figure III.31.

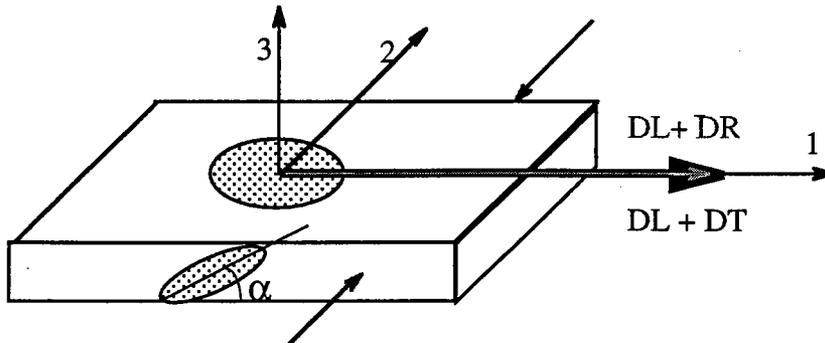


Fig. III.31: Essai laminage-traction, laminage-rétreint

Ainsi, après un laminage selon la direction 1, nous effectuons soit une traction dans la même direction, soit un rétreint positif suivant l'axe 1 (compression suivant 2). L'angle mobile α est défini sur le dessin.

La figure III.32 représente les contraintes macroscopiques obtenues suivant la direction de chargement.

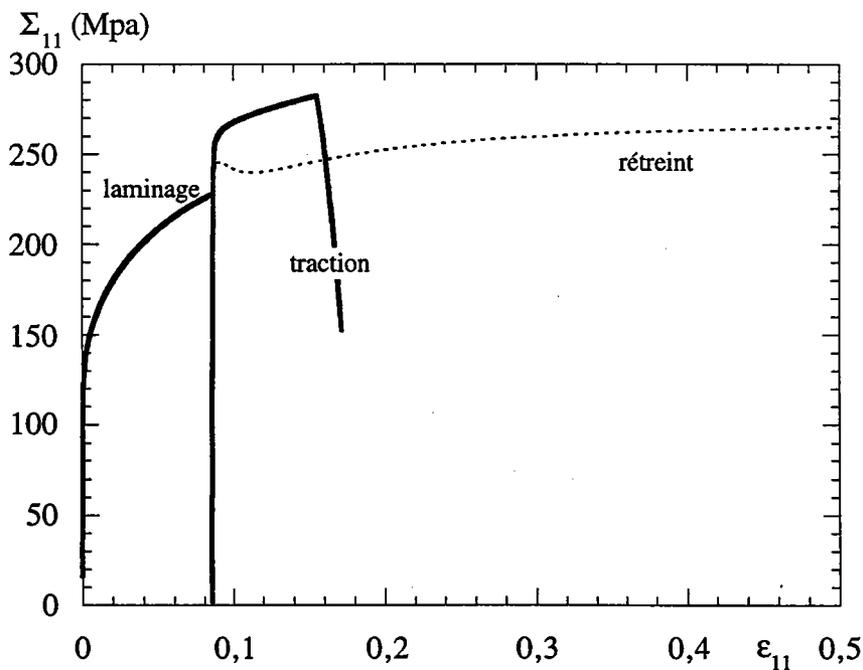


Fig. III.32: Contraintes macroscopiques en laminage-traction et laminage-rétreint

Ces résultats correspondent avec l'expérience. En effet, après un laminage il est possible de réaliser un rétreint de plusieurs dizaines de pour-cent alors qu'une traction casse très rapidement. La bosse obtenue en rétreint correspond à l'orientation de la microstructure représentée ci-dessous, sachant que pour définir entièrement le rétreint il faudrait considérer deux angles mobiles.

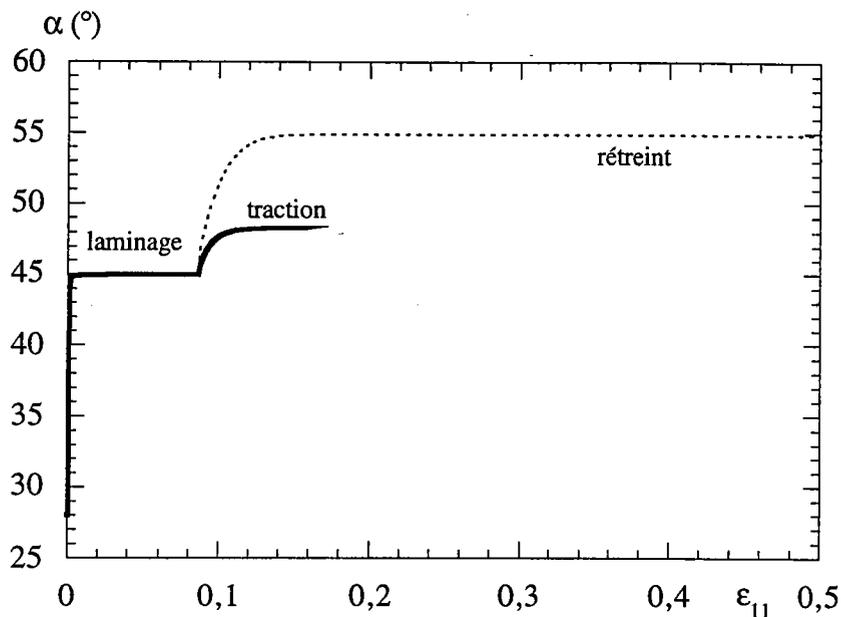


Fig. III.33 Evolution de la microstructure

Références Bibliographiques

- [FS83] FERNANDES J.V. et SCHMITT J.-H., "Dislocation microstructures in steel during deep drawing", 1983, Philosophical magazine A, Vol. 48, N° 6, pp.841-870
- [G73] GERMAIN P., "Cours de mécanique des milieux continus", 1973, Tome 1 Théorie générale, eds Masson et cie, Paris
- [H03] HADAMARD J., "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", 1903, Cours du collège de France, Paris
- [H61] HILL R., "Discontinuity relations in mechanics of solids", 1961, Progress in Solid Mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp.245-276
- [Hil72] HILL R., "An invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites", 1972, Continuum Mechanics and Related Problem of Analysis, Moscow, pp.594-604
- [H83] HILL R., "Interfacial operators in the mechanics of composite media", 1983, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N°4, pp.347-357
- [L95] LEMOINE X. "analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", 1995, Thèse de l'Université de Metz
- [LC70] LI J.C.M. et CHOU Y.T., "The role of dislocations in the flow stress grain size relationship", 1970, Metal. TRans., Vol. 1, pp.1145-1158
- [M88] MUGHRABI H., "Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals", 1988, Revue Phys. Appl, Vol. 23, pp.367-379

- [MKB93] MULLER D., KRATOCHVIL J. et BERVEILLER M., "Effets des écrouissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse globale en traction-compression et sur les contraintes internes", 1993, C.R.A.S., T.316, Série II., pp.435-440
- [N93] NGUYEN Q.S., "Bifurcation and stability", 1993, Bifurcation and stability of dissipative systems, ed NGUYEN Q.S., Springer Verlag, Wien-New York
- [R93] RAUCH E.F., "Etude de l'écrouissage des matériaux, aspects microstructuraux et lois de comportement", 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [RS89] RAUCH E.F. et SCHMITT J.H., "Dislocation substructures in mild steel deformed in simple shear", 1989, Mater. Sci. Eng., Vol.A113, pp.441-448
- [S86] SCHMITT J.H., "contribution à l'étude de la micro-macroplasticité des aciers", 1986, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [W67] WALPOLE L.J., "The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium", 1967, Proc. Poy. Soc., Vol. A300, pp.270-289

CONCLUSION

CONCLUSION

Notre travail visant à décrire le comportement macroscopique de l'acier en trajets complexes et particulièrement l'apparition des instabilités plastiques annonçant la perte de ductilité du matériau, s'est décomposé en trois parties exposées dans ce rapport. Tout d'abord, l'examen des observations expérimentales réalisées sur ce sujet a permis de définir le cadre de notre modèle. Sa formulation théorique basée sur la thermodynamique à variable interne a ensuite abouti à un outil informatique capable de représenter qualitativement les résultats obtenus expérimentalement lors de changements de trajet.

La première partie a donc démontré le rôle prépondérant des hétérogénéités plastiques intragranulaires de type cellules de dislocations sur le comportement des matériaux métalliques. Leur forme et leur orientation étant directement corrélées à la sollicitation appliquée, elles mémorisent, par leur topologie, le chargement actuellement subi par l'échantillon. Cette mémoire peut alors entraîner de graves conséquences dans le cas de changements de trajet. La microstructure associée au premier chargement est en effet dissoute plus ou moins brutalement, pour disparaître au profit des configurations de dislocations relatives au nouveau trajet. Cette période de transition, si elle est brutale, peut conduire à des instabilités plastiques entraînant une perte de la ductilité du matériau. Ces considérations prouvent donc qu'il est nécessaire de prendre en compte ce type d'hétérogénéité intragranulaire si on veut pouvoir modéliser les phénomènes de trajets complexes.

Pour ce faire, nous avons étudié ces arrangements de dislocations à l'échelle microscopique. Les observations expérimentales mettent en évidence le niveau très élevé des fluctuations de glissement plastique et de contraintes internes entre les parois et les cellules (nettement supérieures aux fluctuations intergranulaires), ainsi que le durcissement des parois provoqué par les dislocations traversant les cellules. Ceci nous a conduit à assimiler la microstructure de dislocations à un matériau biphasé évolutif non local constitué d'une phase molle représentant l'intérieur des cellules et d'une phase dure définissant les parois. La différence essentielle de notre modèle par rapport à l'étude des milieux hétérogènes classiques réside dans la mobilité de la frontière entre phases qui peut, contrairement aux joints de grain, se déplacer sous l'effet de ses forces thermodynamiques.

Le comportement macroscopique du matériau est ensuite déterminé par des opérations de moyenne, ce qui revient à négliger la structure granulaire de l'acier au profit des hétérogénéités plastiques.

Afin de traiter ce problème par une démarche thermodynamique à variables internes, la modélisation biphasée est explicitée dans la deuxième partie en tenant compte des observations précédentes. Ainsi, les cellules de dislocations sont représentées non pas par des formes quelconques qui nécessiteraient un nombre infini de variables internes, mais par des inclusions ellipsoïdales toutes identiques. La microstructure est alors totalement décrite par six paramètres morphologiques qui correspondent aux trois demi-axes de l'inclusion et aux trois paramètres angulaires. La plasticité dans chaque phase est traitée de manière phénoménologique à l'échelle microscopique. Le nombre total de variables internes correspond donc à six variables morphologiques scalaires et deux variables plastiques tensorielles.

L'énergie libre de Helmholtz relative aux configurations de dislocations présente, dans ce cas, d'importantes difficultés lors des calculs variationnels mettant en jeu les variables internes morphologiques. La solution a donc été d'exprimer l'énergie élastique sous une forme invariante. Les avantages d'une telle expression sont multiples. Dans un premier temps nous avons pu déterminer les configurations stables d'arrangements statiques de dislocations qui, par la suite, nous ont servi lors des restrictions du modèle biphasé. Dans un deuxième temps, cette formulation facilitera l'introduction future de la plasticité cristalline.

La plasticité étant un processus thermodynamiquement irréversible, nous avons déterminé, dans la troisième partie, l'énergie dissipée par les phénomènes inélastiques composés non seulement de la plasticité dans chaque phase mais aussi du mouvement de l'interface mobile. Les lois complémentaires du modèle ont été exprimées dans le cas de six variables morphologiques, mais les difficultés de mise en oeuvre numérique nous ont contraint à restreindre la modélisation à deux variables internes morphologiques. La fraction volumique de phase molle et une variable angulaire ont alors été choisies en fonction des études sur les configurations de dislocations effectuées à l'aide de la méthode invariante.

Nous disposons donc actuellement d'un outil informatique prenant en compte deux variables internes morphologiques. Les résultats présentés en trajets monotones et complexes, dans le cas du cisaillement et de la traction, se révèlent très encourageants. En effet, nous sommes parvenus à modéliser des mécanismes d'érouissage et des phénomènes de perte de ductilité, tout en suivant les évolutions des cellules de dislocations au cours de la déformation. Les bonnes tendances obtenues en trajets complexes, sans aucune optimisation de paramètre, prouvent que le modèle contient intrinsèquement les phénomènes physiques relatifs aux changements de trajet.

Le bilan encourageant de ces simulations ne doit pas nous faire oublier qu'il reste encore beaucoup de travail avant de décrire en totalité les phénomènes complexes. Il est nécessaire dans un avenir proche de remplacer la fraction volumique par les demi-axes des cellules, et de développer ce modèle en grandes déformations. Ces perspectives font l'objet de la thèse de Laurent Langlois qui s'intéresse également à la physique de la matrice d'écrouissage. En parallèle, une campagne d'essai lancée en collaboration avec SOLLAC permettra d'étudier macroscopiquement et microscopiquement les phénomènes de changements de trajet. Les courbes expérimentales obtenues constitueront les données de référence pour fixer nos paramètres.

ANNEXES



ANNEXE A

Détermination des contraintes internes par les fonctions de Green.

Problème de l'inclusion d'Eshelby-Kröner

A.1 - FORMULATION INTEGRALE

Le calcul des contraintes internes s'effectue à partir de la technique classique des fonctions de Green. La déformation locale $\varepsilon(r)$, et le tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(r)$ sont exprimés sous forme d'intégrales faisant intervenir ces fonctions. Le déroulement des calculs est détaillé après un bref rappel sur le tenseur de Green.

A.1.1- Définition du tenseur de Green

Avant d'exprimer le tenseur de Green sous la forme d'une équation mathématique, il est intéressant de comprendre ce qu'il représente physiquement. Pour cela, considérons un solide de volume V et de frontière S :

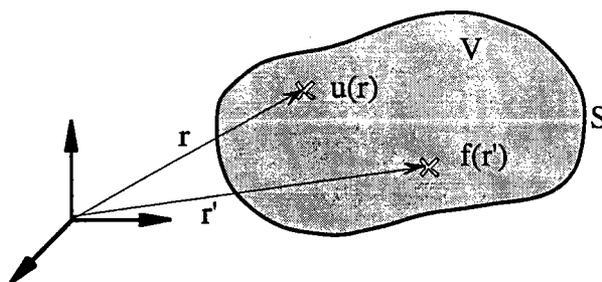


Fig. A.1: Réponse à une force appliquée en un point r' .

Supposons qu'une force volumique $\vec{f}(r')$ est appliquée en r' . Cette force induit un déplacement $\vec{u}(r)$ de la particule située au point r . Le déplacement $\vec{u}(r)$ est donc lié à cette force. On introduit alors l'objet réalisant ce lien: le tenseur de Green G fonction de r et r' .

Dans le cas discret ceci s'écrit:

$$u_i(r) = G_{ij}(r, r') f_j(r') \quad (\text{A.1})$$

Ce résultat peut être généralisé au cas d'un milieu continu en considérant non plus une force ponctuelle, mais une force totale s'exerçant sur un élément de volume dV' entourant r' : $f_j(r') dV'$. Le déplacement s'écrit alors:

$$u_i(r) = \int_V G_{ij}(r, r') f_j(r') dV' \quad (A.2)$$

Ceci traduit l'effet de la distribution de forces volumiques dans tout le volume V sur la particule située en r .

De plus, dans le cas d'un milieu infini correspondant à un milieu macrohomogène et microhétérogène, le milieu est invariant par translation ; la variable intéressante ne sera donc plus r ou r' mais la différence $r-r'$. D'où l'introduction d'un tenseur de Green adapté à ce milieu:

$$u_i(r) = \int_V G_{ij}(r - r') f_j(r') dV' \quad (A.3)$$

Après avoir introduit le tenseur de Green de manière intuitive, voyons maintenant sa définition rigoureuse. Pour un milieu homogène infini caractérisé par les constantes élastiques C_{ijkl} , le tenseur de Green se définit comme étant la solution du problème adjoint suivant:

$$\begin{cases} C_{ijkl} G_{km,lj}(r - r') + \delta_{im} \delta(r - r') = 0 \\ \lim_{r-r' \rightarrow \infty} G(r - r') = 0 \end{cases} \quad (A.4)$$

avec δ_{im} le symbole de Krönecker et $\delta(r - r')$ la distribution de Dirac.

La résolution de ce problème est connue et donne le tenseur de Green G_{km} . Ces calculs complexes ne sont pas l'objet de cette annexe.

On peut remarquer que cette nouvelle définition englobe la précédente. En effet, par identification avec l'équation de Navier obtenue grâce aux lois classiques de l'élastostatique (voir chapitre II.1.1),

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + f_i = 0 \quad (A.5)$$

G_{km} désigne le déplacement au point r , dans la direction k , provoqué par l'application, au point r' du milieu infini de modules C_{ijkl} , d'une force unité $f_i = \delta_{im} \delta(r - r')$ s'exerçant dans la direction m .

Le tenseur de Green étant défini, nous pouvons construire l'équation liée à notre problème.

A.1.2 - Calcul des contraintes internes

Le point de départ de ce calcul est l'ensemble des équations locales (II.12). En injectant (II.9) et (II.8) dans (II.4) il vient:

$$C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}(r) - \varepsilon_{kl}^p(r) \right)_{,j} = 0 \quad (A.6)$$

Compte tenu de la relation (II.7) et des symétries du tenseur des contraintes (II.3), l'équation (A.6) devient:

$$C_{ijkl} u_{k,lj}(r) - C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^p(r) = 0 \quad (A.7)$$

D'autre part, le déplacement $u_m(r)$ s'exprime d'une manière générale:

$$u_m(r) = \int_V u_i(r') \delta_{im} \delta(r - r') dV' \quad (A.8)$$

D'après la définition (A.4) et le fait que $G_{km,l} = -G_{km,l'}$ (A.9) $u_m(r)$ s'écrit:

$$u_m(r) = - \int_V C_{ijkl} G_{km,l'j}(r - r') u_i(r') dV' \quad (A.10)$$

Après deux intégrations par parties successives associées au théorème de la divergence on obtient :

$$u_m(r) = \int_S C_{ijkl} G_{km}(r - r') u_{i,j}(r') n'_l dS' - \int_S C_{ijkl} G_{km,l'}(r - r') u_i(r') n'_j dS' - \int_V C_{ijkl} G_{km}(r - r') u_{i,j'l'}(r') dV' \quad (A.11)$$

La première intégrale de surface représente le déplacement provoqué par les conditions limites en contrainte, la deuxième correspond au déplacement imposé sur la frontière et l'intégrale de volume traduit le déplacement lié aux forces volumiques. Les conditions aux limites sont définies par l'équation (II.1), elles correspondent à une frontière libre de contrainte mais soumise à un déplacement imposé u^d , ce qui entraîne:

$$u_m(r) = u_m^d(r) - \int_V C_{ijkl} G_{km}(r-r') u_{i,j'l'}(r') dV' \quad (A.12)$$

Les symétries du tenseur des constantes élastiques permettent de permuter les indices ij et kl. Ainsi $C_{ijkl} G_{km} u_{i,j'l'}(r')$ est aussi égal à $C_{ijkl} G_{im} u_{k,l'j'}(r')$. En transformant ce terme par le biais de l'équation (A.7), il vient:

$$u_m(r) = u_m^d(r) - \int_V G_{im}(r-r') C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j'}^p(r') dV' \quad (A.13)$$

Intégrons par parties et utilisons le théorème de la divergence:

$$u_m(r) = u_m^d(r) - \int_S G_{im}(r-r') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(r') n'_j dS' + \int_V G_{im,j'}(r-r') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(r') dV' \quad (A.14)$$

Le milieu considéré étant supposé infini, on peut appliquer les conditions limites du tenseur de Green vues à l'équation (A.4). L'intégrale de surface est nulle puisque ($r' \rightarrow \infty$), ainsi:

$$u_m(r) = u_m^d(r) + \int_V G_{im,j'}(r-r') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(r') dV' \quad (A.15)$$

La déformation locale totale s'obtient d'après (II.7) en dérivant l'expression (A.15) par rapport à r puis en la symétrisant. Seul le tenseur de Green dépend de r à l'intérieur de l'intégrale, ce qui donne par l'intermédiaire de (A.9):

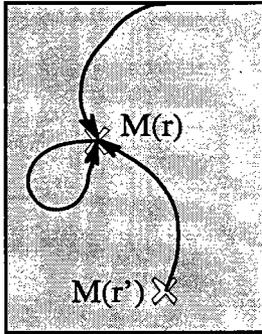
$$\varepsilon_{mn}(r) = \frac{1}{2} \left(u_{m,n}^d(r) + u_{n,m}^d(r) \right) - \int_V \left(G_{im,jn}(r-r') + G_{in,jm}(r-r') \right) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(r') dV' \quad (A.16)$$

Simplifions cette expression en explicitant les conditions limites (II.1) et en introduisant le tenseur de Green modifié $\Gamma_{mnij}(r-r')$:

$$\varepsilon_{mn}(\mathbf{r}) = E_{mn} - \int_v \Gamma_{mnij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV \quad (\text{A.17})$$

avec $\Gamma_{mnij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2} (G_{im,jn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G_{in,jm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ (A.18)

La déformation au point \mathbf{r} résulte donc de la contribution de plusieurs facteurs qui sont:



- les conditions limites
 - les effets des points \mathbf{r}'
 - l'effet du point \mathbf{r} sur lui même
- } décrit par le tenseur de Green modifié Γ .

Par la décomposition des déformations totales, locale (II.7) et globale (II.16), et en multipliant (A.17) par le tenseur des constantes élastiques, on détermine la contrainte de Cauchy dans le matériau:

$$\sigma_{pq}(\mathbf{r}) = \Sigma_{pq} + C_{pqmn} (E_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^p(\mathbf{r})) - C_{pqmn} \int_v \Gamma_{mnij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV \quad (\text{A.19})$$

La partition de la contrainte σ définie au (II.29) comme étant la somme de la contrainte macroscopique et des contraintes internes, permet de préciser les contraintes internes dans le cas général:

$$\tau_{pq}(\mathbf{r}) = C_{pqmn} (E_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^p(\mathbf{r})) - C_{pqmn} \int_v \Gamma_{mnij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV \quad (\text{A.20})$$

Cette expression va maintenant être explicitée dans le cas de l'inclusion d'Eshelby-Kröner.

A.2 - PROBLEME DE L'INCLUSION D'ESHELBY-KRÖNER

Considérons une matrice homogène, de volume V infini, siège d'une déformation plastique macroscopique uniforme E^P . Cette matrice contient une inclusion de volume V^1 , de forme ellipsoïdale soumise également à une déformation plastique ε^{P1} uniforme. L'interface S^1 entre les deux milieux est supposée parfaite, c'est à dire que la continuité des vecteurs contrainte et déplacement est vérifiée.

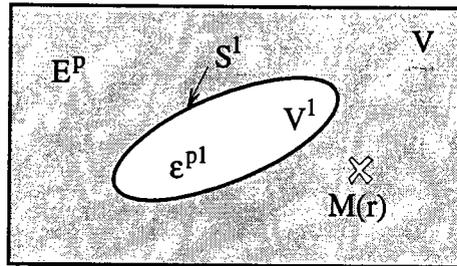


Fig. A.2: Topologie du problème de l'inclusion

Dans ce cas, la déformation plastique dans le matériau est uniforme par morceau, d'où l'expression de $\varepsilon^P(r)$ en un point $M(r)$ quelconque:

$$\varepsilon^P(r) = \begin{cases} \varepsilon^{P1} & \text{si } r \in V^1 \\ E^P & \text{si } r \notin V^1 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

En introduisant la fonction de Heaviside $\theta^1(r)$ définie par: $\theta^1(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V^1 \\ 0 & \text{si } r \notin V^1 \end{cases}$ (A.22)

la déformation plastique s'écrit également:

$$\varepsilon_{ij}^P(r) = E_{ij}^P + (\varepsilon_{ij}^{P1} - E_{ij}^P) \theta^1(r) \quad (\text{A.23})$$

Remplaçons cette expression dans l'équation (A.17), la déformation totale pour un point $M(r)$ quelconque du matériau est donc:

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} - \int_{V^1} \Gamma_{mnij}(r-r') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{P1} dV' - \int_{V-V^1} \Gamma_{mnij}(r-r') C_{ijkl} E_{kl}^P dV' \quad (\text{A.24})$$

La propriété liée au tenseur de Green généralisé sur un volume infini étant la suivante,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{mnij}(r-r') C_{ijkl} E_{kl}^p dV = 0 \quad (A.25)$$

l'intégrale sur V est nulle et la déformation devient:

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} - \int_{V^1} \Gamma_{mnij}(r-r') C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{p1} - E_{kl}^p) dV' \quad (A.26)$$

Les termes constants peuvent être sortis de l'intégrale tel que, pour tout point M(r):

$$\varepsilon_{mn}(r) = E_{mn} - \left(\int_{V^1} \Gamma_{mnij}(r-r') dV' \right) C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^{p1} - E_{kl}^p) \quad (A.27)$$

D'autre part, Eshelby [E57] démontre que la forme ellipsoïdale de l'inclusion implique l'invariance, par rapport à la position r dans l'ellipsoïde, de l'intégrale du tenseur de Green modifié sur V^1 . Il introduit alors le tenseur d'Eshelby S pour $r \in V^1$ qui traduit les interactions inclusion-matrice. Evidemment uniforme sur l'ellipsoïde, il ne dépend que des trois demis-axes précisant la forme de l'inclusion. Il est défini dans le repère de l'inclusion par:

$$S_{mnkl} = - \left(\int_{V^1} \Gamma_{mnij}(r-r') dV' \right) C_{ijkl} \quad (A.28)$$

En conséquence, le tenseur des déformations est uniforme dans l'inclusion et vaut:

$$\boxed{\varepsilon_{mn}^1 = E_{mn} + S_{mnkl} (\varepsilon_{kl}^{p1} - E_{kl}^p)} \quad (A.29)$$

On détermine la contrainte de Cauchy à l'intérieur de l'inclusion ellipsoïdale de la même manière que pour la formule (A.19):

$$\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij} - C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\varepsilon_{kl}^{p1} - E_{kl}^p) \quad (A.30)$$

avec I_{mnkl} le tenseur identité d'ordre 4

Les contraintes internes à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale se réduisent à:

$$\tau_{ij}^I = - C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}) (\varepsilon_{kl}^{pI} - E_{kl}^p) \quad (\text{A.31})$$

Elles sont uniformes sur l'ellipsoïde et ne dépendent que de la forme et de l'orientation de celle-ci au travers du tenseur d'Eshelby.

Références Bibliographiques

- [E57] ESHELBY J.D., "The determination of the elastic field of an ellipsoïdal inclusion and related problem", 1957, Proc. Roy. Soc., Vol. A241, pp.376-396
- [K61] KRÖNER E., "Zur plastischen Verformung des Vielkristalls", 1961, Acta Metall., Vol9, pp.155-161
- [L95] LEMOINE X. "analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", 1995, Thèse de l'Université de Metz
- [W67] WALPOLE L.J., "The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium", 1967, Proc. Poy. Soc., Vol. A300, pp.270-289
- [W78] WALPOLE L.J., "A coated inclusion in an elastic medium", 1978, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 83, pp.495-506

ANNEXE B

Expression des tenseurs M_{ijkl}^a , M_{ijkl}^b et M_{ijkl}^c M_{ijkl}^α , M_{ijkl}^β et M_{ijkl}^γ

Ces tenseurs d'ordre 4 apparaissent lors du calcul dans le repère lié à l'ellipsoïde de la dissipation rappelée ci-dessous:

$$D = \int_v \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) dV + \left(\sigma_{ij}^s \Delta \epsilon_{ij}^p + \mu \Delta \epsilon_{ij}^p \Delta \epsilon_{ij}^p \right) \int_{\partial v^s} w_\alpha N_\alpha dS - 2\mu \int_{\partial v^s} (\Delta \epsilon_{ij}^p N_j)^2 w_\alpha N_\alpha dS + \frac{\mu}{1-\nu} \int_{\partial v^s} (\Delta \epsilon_{ij}^p N_i N_j)^2 w_\alpha N_\alpha dS \quad (B.1)$$

L'intégrale volumique est donnée par (III.31) et la première intégrale surfacique correspond à la croissance volumique des inclusions. Par contre, le développement des deux autres intégrales de surface à partir des relations (III.33), (III.34), (III.35) et (III.36) s'avère très lourd. Cela revient à déterminer par exemple:

$$\int_{\partial v^s} (\Delta \epsilon_{ij}^p N_j)^2 w_\alpha N_\alpha dS = \int_{\partial v^s} \frac{r^5 \sin \Psi}{\sqrt{X}} \left(\begin{array}{ccc} \Delta \epsilon_{11}^p & \Delta \epsilon_{12}^p & \Delta \epsilon_{13}^p \\ \Delta \epsilon_{12}^p & \Delta \epsilon_{22}^p & \Delta \epsilon_{23}^p \\ \Delta \epsilon_{13}^p & \Delta \epsilon_{23}^p & \Delta \epsilon_{33}^p \end{array} \cdot \begin{array}{c} \left(\frac{\cos \theta \sin \Psi}{a^2} \right) \\ \left(\frac{\sin \theta \sin \Psi}{b^2} \right) \\ \left(\frac{\cos \Psi}{c^2} \right) \end{array} \right)^2 \left(\begin{array}{c} \left(\frac{\sin \Psi \cos \theta}{a} \dot{\alpha} + \cos \Psi \dot{\beta} - \sin \Psi \sin \theta \dot{\gamma} \right) \\ \left(\frac{\sin \Psi \sin \theta}{b} \dot{b} + \sin \Psi \cos \theta \dot{\gamma} - \cos \Psi \dot{\alpha} \right) \\ \left(\frac{\cos \Psi}{c} \dot{c} + \sin \Psi \sin \theta \dot{\alpha} - \sin \Psi \cos \theta \dot{\beta} \right) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \left(\frac{\cos \theta \sin \Psi}{a^2} \right) \\ \left(\frac{\sin \theta \sin \Psi}{b^2} \right) \\ \left(\frac{\cos \Psi}{c^2} \right) \end{array} \right) d\Psi d\theta \quad (B.2)$$

avec $X = \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \Psi}{a^4} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \Psi}{b^4} + \frac{\cos^2 \Psi}{c^4}$ et r donné par (III.31)

$\Delta \epsilon^p$ exprimé dans le repère de l'ellipsoïde

La dissipation, résultat de ces calculs, peut se mettre sous la forme (III.37) en introduisant les tenseurs M_{ijkl}^a , M_{ijkl}^b et M_{ijkl}^c ainsi que M_{ijkl}^α , M_{ijkl}^β et M_{ijkl}^γ qui sont exprimés à partir d'intégrales volumiques définies ci-dessous.

$$C_{aa} = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^6 \theta \sin^7 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_{bb} = \int_{\partial v^s} \frac{\sin^6 \theta \sin^7 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_{cc} = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^6 \Psi \sin \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_1 = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \Psi \sin^5 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_2 = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^4 \theta \cos^2 \Psi \sin^5 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_3 = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^2 \theta \cos^4 \Psi \sin^3 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_4 = \int_{\partial v^s} \frac{\sin^4 \theta \cos^2 \Psi \sin^5 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_5 = \int_{\partial v^s} \frac{\sin^2 \theta \cos^4 \Psi \sin^3 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_6 = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^4 \theta \sin^2 \theta \sin^7 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$C_7 = \int_{\partial v^s} \frac{\sin^4 \theta \cos^2 \Psi \sin^7 \Psi r^5}{X^2} d\theta d\Psi$$

$$S_{aa} = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^4 \theta \sin^5 \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi$$

$$S_{bb} = \int_{\partial v^s} \frac{\sin^4 \theta \sin^5 \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi$$

$$S_{cc} = \int_{\partial v^s} \frac{\cos^4 \Psi \sin \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi$$

$$\begin{aligned}
 S_{ab} &= \int_{\partial v^s} \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^5 \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi \\
 S_{ac} &= \int_{\partial v^s} \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \Psi \sin^3 \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi \\
 S_{bc} &= \int_{\partial v^s} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \Psi \sin^3 \Psi r^5}{X} d\theta d\Psi
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Les tenseurs d'ordre 4 sont écrits ici sous forme de matrices de dimension (6, 6) suivant la règle de complément à neuf. Les lignes correspondent aux indices ij et les colonnes aux indices kl.

$$M_{ijkl} = \begin{pmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & M_{1123} & M_{1113} & M_{1112} \\ M_{2211} & M_{2222} & M_{2233} & M_{2223} & M_{2213} & M_{2212} \\ M_{3311} & M_{3322} & M_{3333} & M_{3323} & M_{3313} & M_{3312} \\ M_{2311} & M_{2322} & M_{2333} & M_{2323} & M_{2313} & M_{2312} \\ M_{1311} & M_{1322} & M_{1333} & M_{1323} & M_{1313} & M_{1312} \\ M_{1211} & M_{1222} & M_{1233} & M_{1223} & M_{1213} & M_{1212} \end{pmatrix} \tag{B.4}$$

$$M_{ijkl}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{1-v} \frac{C_1}{a^4 b^2 c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-v} \frac{C_4}{b^6 c^2} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-v} \frac{C_5}{b^2 c^6} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-v} \frac{C_1}{a^4 b^2 c^2} & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-v} \frac{C_4}{b^6 c^2} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-v} \frac{C_5}{b^2 c^6} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-v} \frac{C_1}{a^4 b^2 c^2} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-v} \frac{C_1}{a^4 b^2 c^2} \\ -\mu \frac{S_{bc}}{b^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

$$M_{ijkl}^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^6 c^2} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^4 c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^2 c^6} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^4 c^2} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^6 c^2} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^4 c^2} & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^2 c^6} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^4 c^2} \\ -\mu \frac{S_{ac}}{a^2 c^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (B.6)$$

$$M_{ijkl}^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^6 b^2} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^2 b^6} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^2 c^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^2 c^4} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^2 c^4} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^6 b^2} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^2 b^6} \\ -\mu \frac{S_{ab}}{a^2 b^2} \end{pmatrix} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^2 b^2 c^4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (B.7)$$

$$M_{ijkl}^a =$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_{aa}}{a^{11}} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^7 b^4} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^7 b^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^7 b^4} & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^3 b^8} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^3 b^4 c^4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^7 b^4} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^3 b^4 c^4} & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^3 c^8} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^3 b^4 c^4} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{ab}}{a^3 b^4} + \frac{S_{ac}}{a^3 c^4} \right) & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^7 c^4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{aa}}{a^7} + \frac{S_{ac}}{a^3 c^4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^7 b^4} \right) \\ & & & & & & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{aa}}{a^7} + \frac{S_{ab}}{a^3 b^4} \right) \end{array} \right)$$

(B.8)

$$M_{ijkl}^b =$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_6}{a^8 b^3} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^4 b^7} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^3 c^4} & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu \frac{S_{ab}}{a^4 b^3} & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_{bb}}{b^{11}} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_4}{b^7 c^4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^4 b^7} & -2\mu \frac{S_{bb}}{b^7} & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_5}{b^3 c^8} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^3 c^4} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_4}{b^7 c^4} & -2\mu \frac{S_{bc}}{b^3 c^4} & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_4}{b^7 c^4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{bb}}{b^7} + \frac{S_{bc}}{b^3 c^4} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^3 c^4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{ab}}{a^4 b^3} + \frac{S_{bc}}{b^3 c^4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_7}{a^4 b^7} \right) \\ & & & & & -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{ab}}{a^4 b^3} + \frac{S_{bb}}{b^7} \right) \end{array} \right)$$

(B.9)

$$M_{ijkl}^c = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_2}{a^8 c^3} \\ -2\mu \frac{S_{ac}}{a^4 c^3} \end{array} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^4 c^3} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^4 c^7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^4 c^3} & \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_4}{b^8 c^3} \\ -2\mu \frac{S_{bc}}{b^4 c^3} \end{array} \right) & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_5}{b^4 c^7} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^4 c^7} & \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_5}{b^4 c^7} & \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_{cc}}{c^{11}} \\ -2\mu \frac{S_{cc}}{c^7} \end{array} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_5}{b^4 c^7} \\ -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{bc}}{b^4 c^3} + \frac{S_{cc}}{c^7} \right) \end{array} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_3}{a^4 c^7} \\ -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{ac}}{a^4 c^3} + \frac{S_{cc}}{c^7} \right) \end{array} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{c} \frac{\mu}{1-\nu} \frac{C_1}{a^4 b^4 c^3} \\ -\frac{\mu}{2} \left(\frac{S_{ac}}{a^4 c^3} + \frac{S_{bc}}{b^4 c^3} \right) \end{array} \right) \end{pmatrix} \quad (B.10)$$

De même, le calcul dans le repère de l'ellipsoïde des forces motrices données par (III.49), en fonction (III.33), (III.34), (III.35) et (III.36), utilise les intégrales volumiques définies ci-dessous:

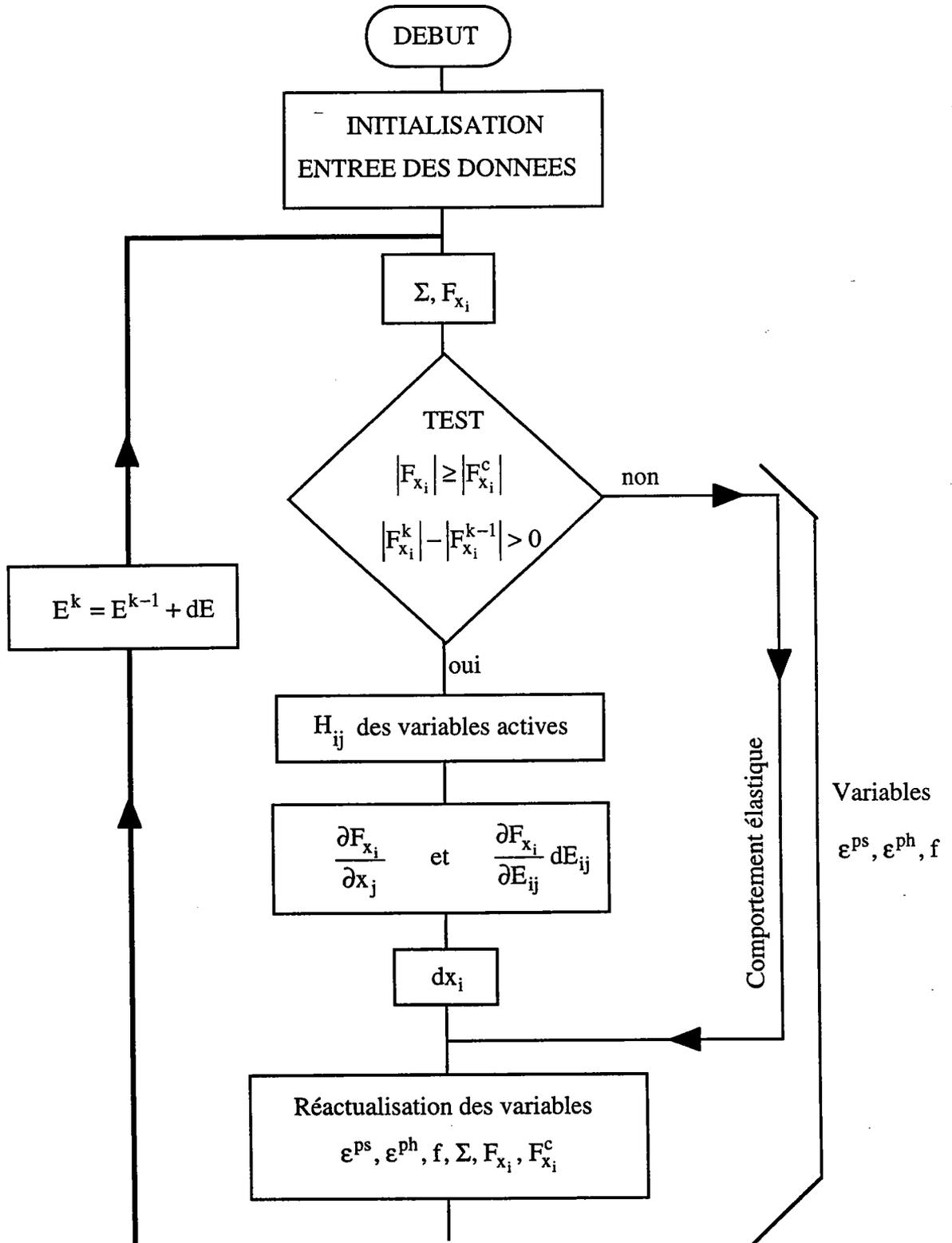
$$Q_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \Psi \sin^2 \Psi r^5 d\theta d\Psi$$

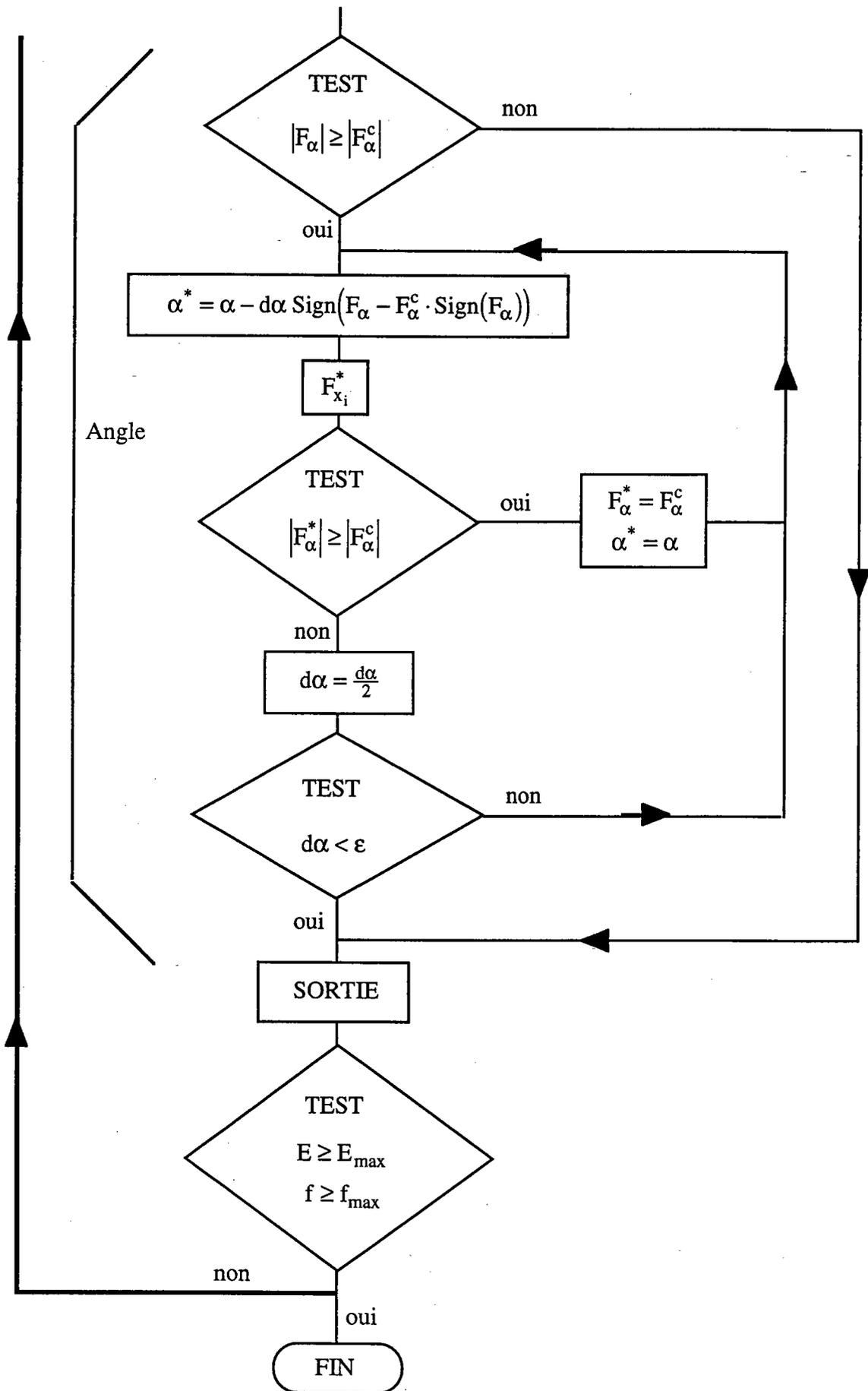
$$Q_\beta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cos \Psi \sin^2 \Psi r^5 d\theta d\Psi \quad (B.11)$$

$$Q_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta \sin^3 \Psi r^5 d\theta d\Psi$$

ANNEXE C

Organigramme





ANNEXE D

Résultats numériques en traction uniaxiale et chargements complexes traction-traction

Dans cette annexe nous récapitulons les simulations effectuées en traction dans le cas de trajets monotones ou complexes. Bien que la topologie des cellules de dislocations observées lors d'essais de traction uniaxiale soit isotrope transverse, ce qui ne correspond pas à l'orientation unique des inclusions considérée dans le modèle, nous obtenons de bons résultats qualitatifs.

D.1 - TRAJETS MONOTONES EN TRACTION; ETUDE PARAMETRIQUE

Le chargement de traction uniaxiale simulé est décrit par le schéma ci-dessous:

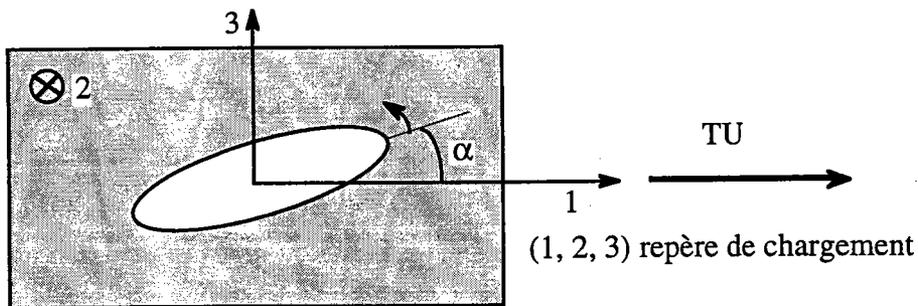


Fig. D.1: Chargement en traction uniaxiale

Toutes les courbes présentées dans la suite sont réalisées avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour les essais de cisaillement du chapitre III.3. Les résultats, et notamment le point de perte de ductilité, peuvent donc toujours être comparés.

Les courbes D.2, D.3 et D.4 illustrent les caractéristiques d'un essai de traction du point de vue du comportement macroscopique et de l'évolution de la microstructure. La figure D.2 représente, en fonction de la déformation longitudinale, les composantes suivant la direction de traction des contraintes internes dans chaque phase et de la contrainte macroscopique, ainsi que l'évolution de la fraction volumique. Les résultats et donc les commentaires sont similaires à ceux obtenus dans le cas du cisaillement.

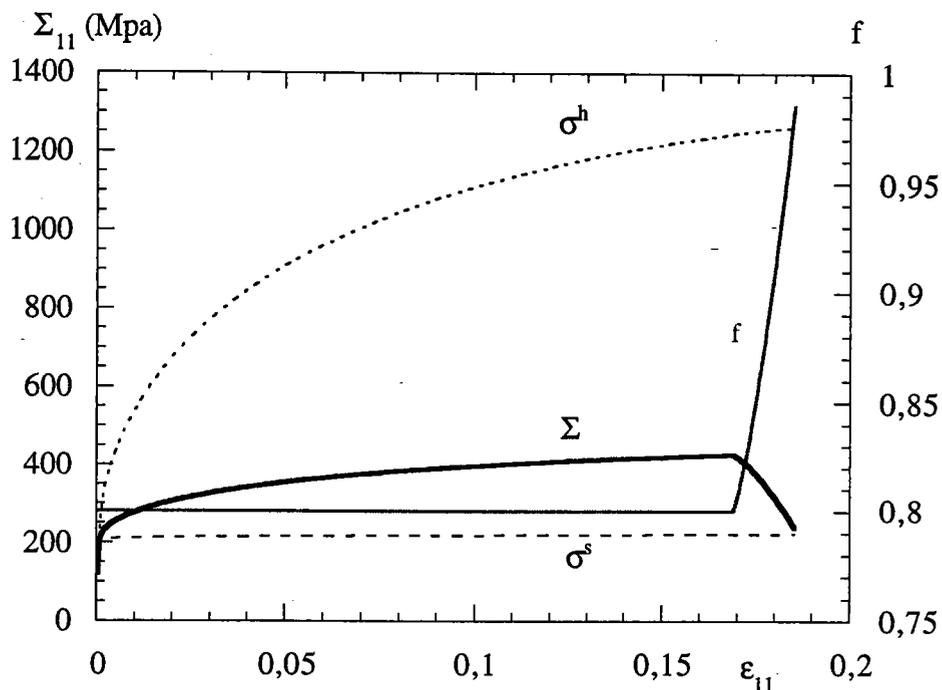


Fig. D.2: Contraintes et fraction volumique en essai de traction

Nous constatons la bonne représentation de la contrainte macroscopique et des contraintes internes dans chaque phase. L'apparition de l'instabilité plastique est corrélée avec l'augmentation de fraction volumique de cellules de dislocations. La partie utile du matériau précédant la perte de ductilité (17%), est moins étendue que dans le cas du cisaillement (20%). Toutes ces remarques sont vérifiées par des observations expérimentales.

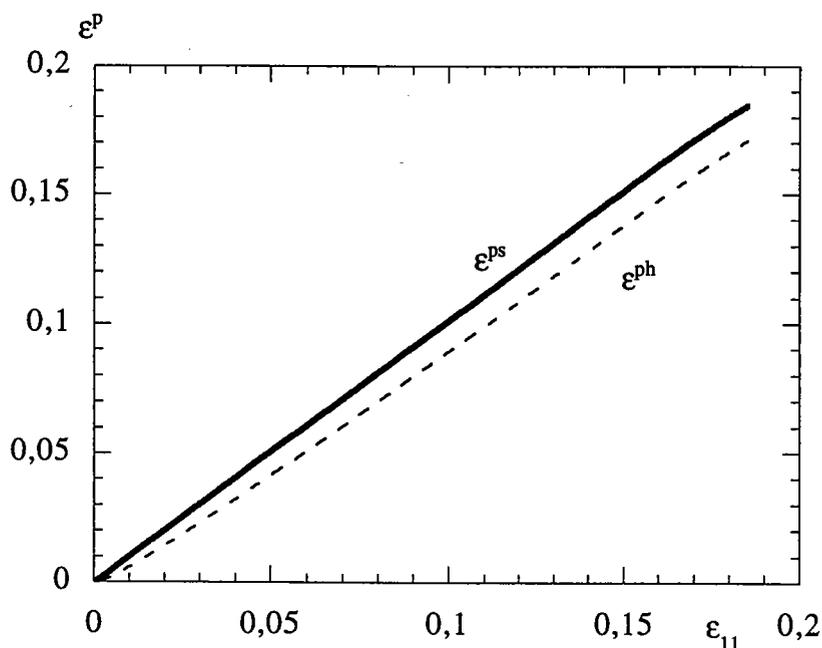


Fig. D.3: Déformations plastiques dans chaque phase

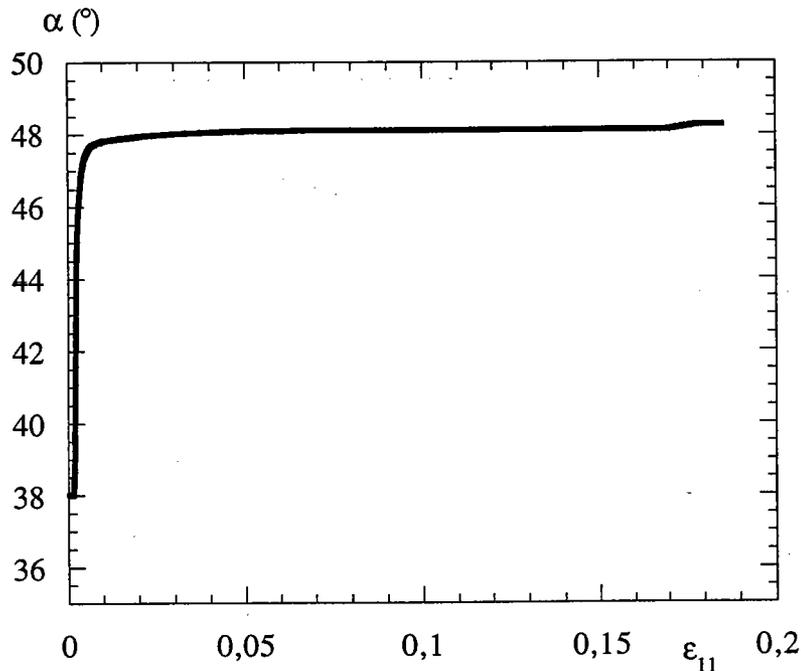


Fig. D.4: Orientation des cellules de dislocations.

Bien que la répartition angulaire des cellules de dislocations en traction soit différente de la microstructure modélisée, nous remarquons ci-dessus, que les inclusions s'orientent suivant un angle de 48° par rapport à la direction de traction. Cette orientation correspond au plan de cisaillement maximum, ce qui est en accord avec les observations dans le plan de la tôle.

Pour représenter correctement la topologie réelle, il faudrait maintenant répartir ces inclusions orientées, autour de l'axe de traction (distribution en cône). La solution serait de considérer le milieu biphasé étudié ici, comme définissant le comportement des grains d'acier. La transition d'échelle entre les grains correctement répartis et la tôle s'effectuerait ensuite par la méthode autocohérente.

Malgré cette simplification, le modèle utilisé permet d'obtenir qualitativement un comportement macroscopique et des évolutions de microstructure en accord avec l'expérience.

Les courbes suivantes représentent l'étude paramétrique sur la force critique associée à f dans le cas de la traction. Le résultat essentiel de cette analyse concerne le décalage du point d'apparition des instabilités plastiques avec l'augmentation de F_f^{co} .

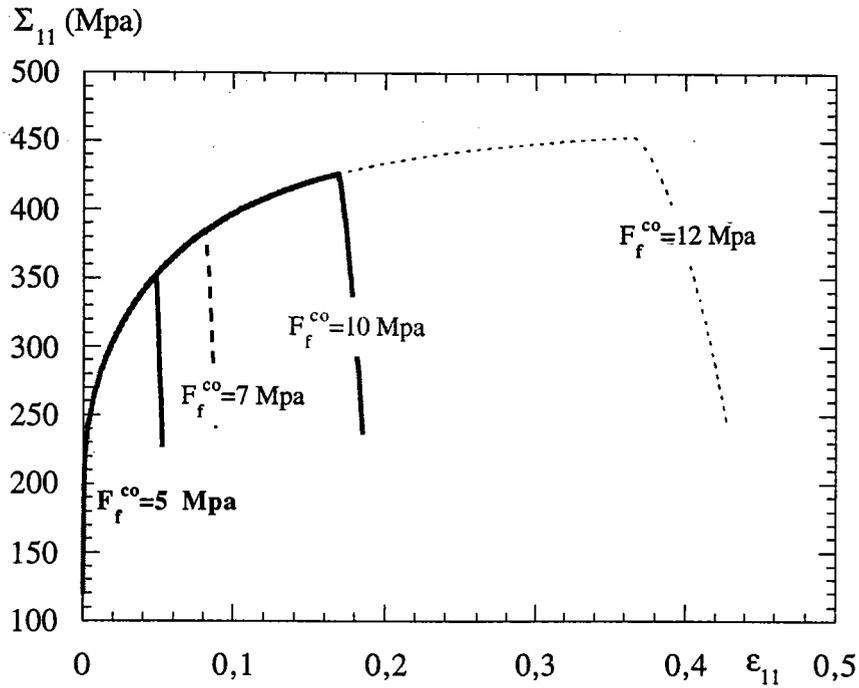


Fig. D.5: Etude paramétrique sur F_f^{co} dans le cas d'une traction uniaxiale

Les figures D.6 et D.7 récapitulent les résultats de l'étude paramétrique sur le coefficient d'écroutissage non local L_2 exprimé en millions.

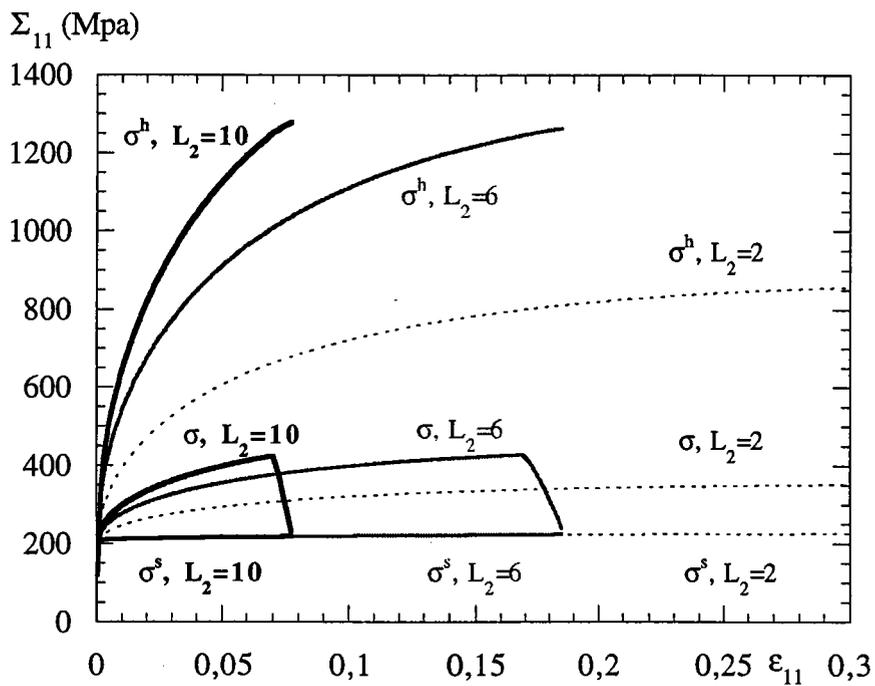


Fig. D.6: Contraintes internes et contrainte macroscopique pour différentes valeurs d'écroutissage non local en millions

Ainsi, plus L_2 est fort, plus les contraintes internes dans la phase dure sont importantes, entraînant alors une augmentation de la contrainte macroscopique, et plus la différence de déformation plastique $\Delta \epsilon^P$ est marquée. Ces actions ont un effet direct sur l'apparition de la localisation de la déformation qui se produit d'autant plus tôt que le matériau est écroui.

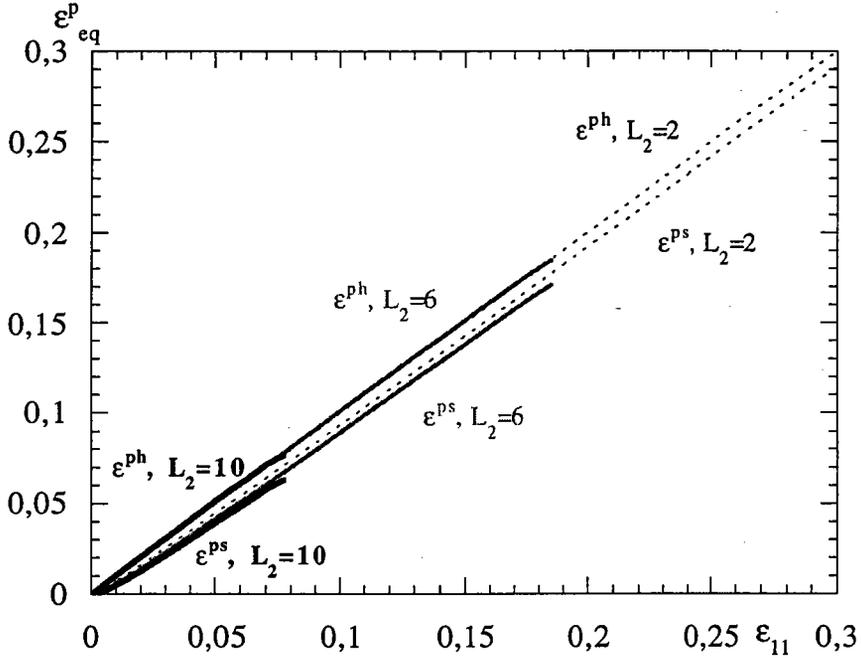


Fig. D.7: Déformations plastiques équivalentes en fonction de L_2

L'influence de la géométrie des inclusions est décrite par les figures D.8 et D.9.

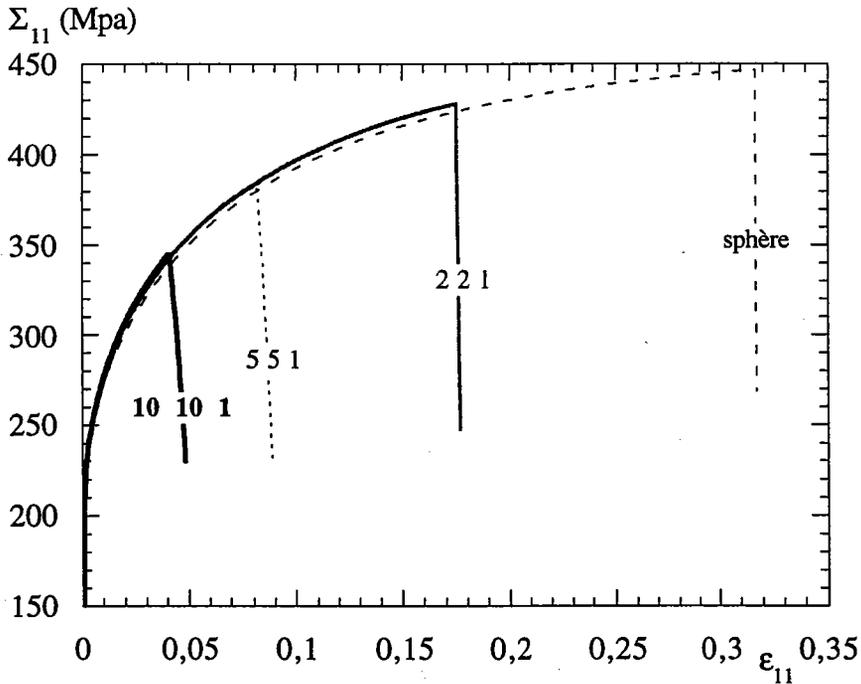


Fig. D.8: Influence de la forme des inclusions sur la contrainte macroscopique

Comme pour le cisaillement, plus les cellules de dislocations sont aplaties, plus l'instabilité plastique est précoce du fait d'un fort tenseur d'Eshelby et d'un saut de déformation plastique important.

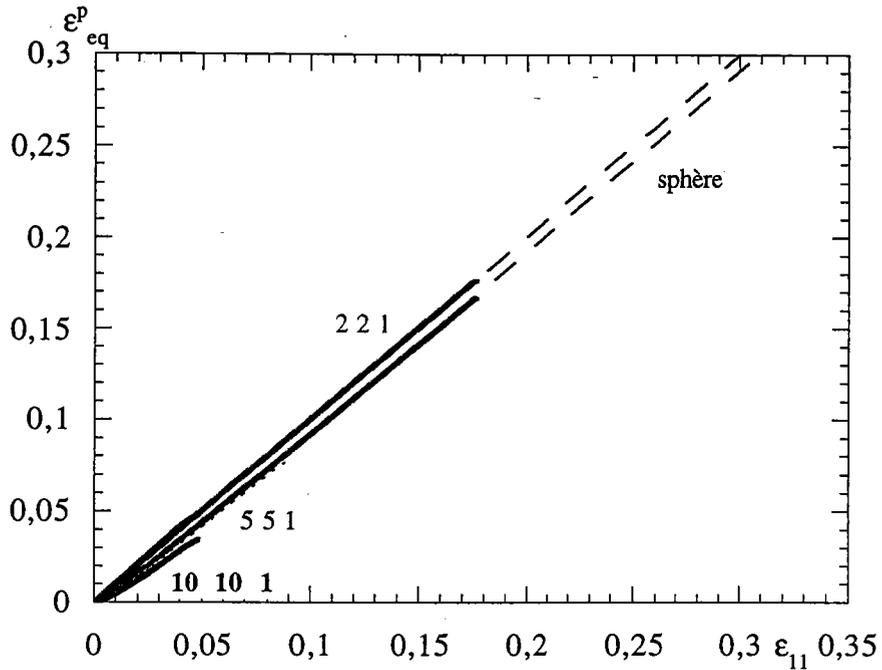


Fig. D.9: Influence de la forme des inclusions sur les déformations plastiques

Contrairement au cisaillement pour lequel la forme des cellules de dislocations n'avait aucune incidence sur l'orientation de la microstructure, dans le cas de la traction, la cellule s'oriente d'autant mieux que l'inclusion est plate (cf. figure D.10).

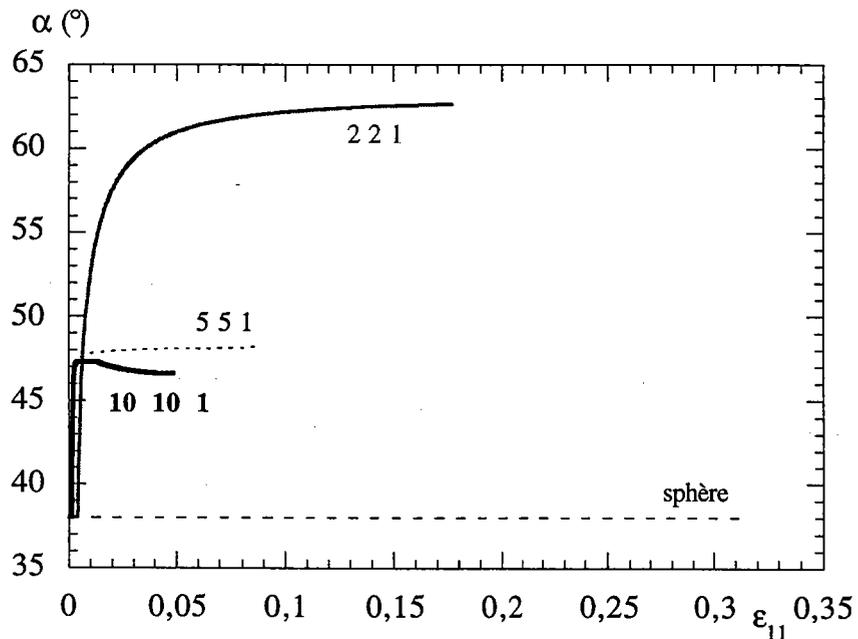


Fig. D.10: Influence de la forme des inclusions sur l'orientation de la microstructure

Comme en cisaillement, lorsque les cellules de dislocations sont sphériques, elles conservent leur orientation initiale puisque ce cas de figure correspond à une microstructure isotrope. Par contre, si les ellipsoïdes sont aplatis elles tournent effectivement pour s'orienter suivant leur position stable, mais toutes les cellules ne tendent pas vers le même angle. On constate que plus la forme est marquée, plus l'angle se rapproche des directions de cisaillement maximal (45°), et plus sa vitesse de convergence est rapide. Cette différence avec le cisaillement provient certainement du fait qu'en traction, la microstructure modélisée ne correspond pas tout à fait à la réalité.

Nous vérifions ci-dessous que l'évolution de la microstructure ne dépend pas de l'angle initial considéré.

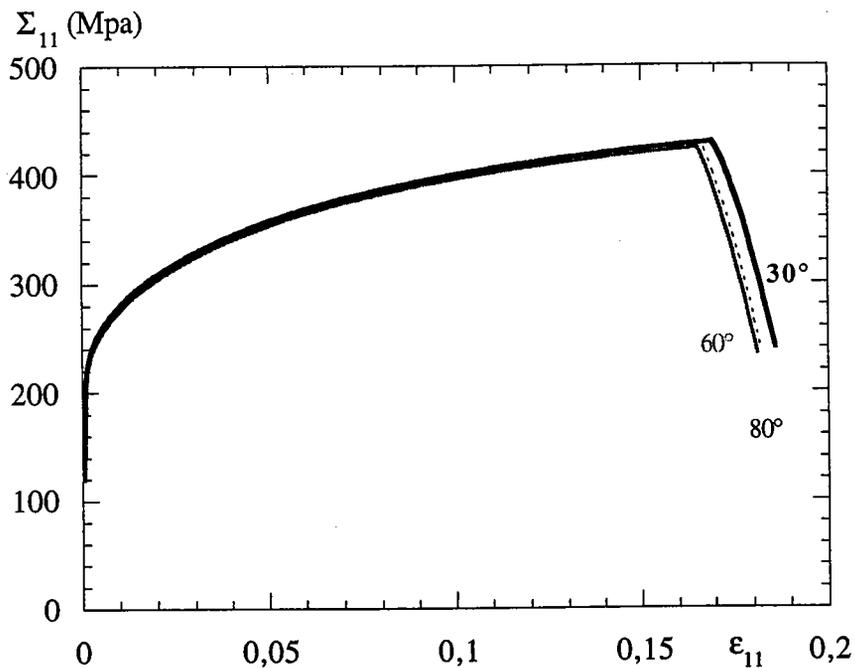


Fig. D.11: Incidence de l'angle initial sur le comportement macroscopique

La très faible différence de niveau de contrainte macroscopique découle uniquement de la période très rapide de mise en place de la microstructure. En effet, quelle que soit l'orientation initialement choisie, les cellules de dislocations tendent effectivement vers le même angle (cf. courbes D.12). Le système est donc numériquement stable.

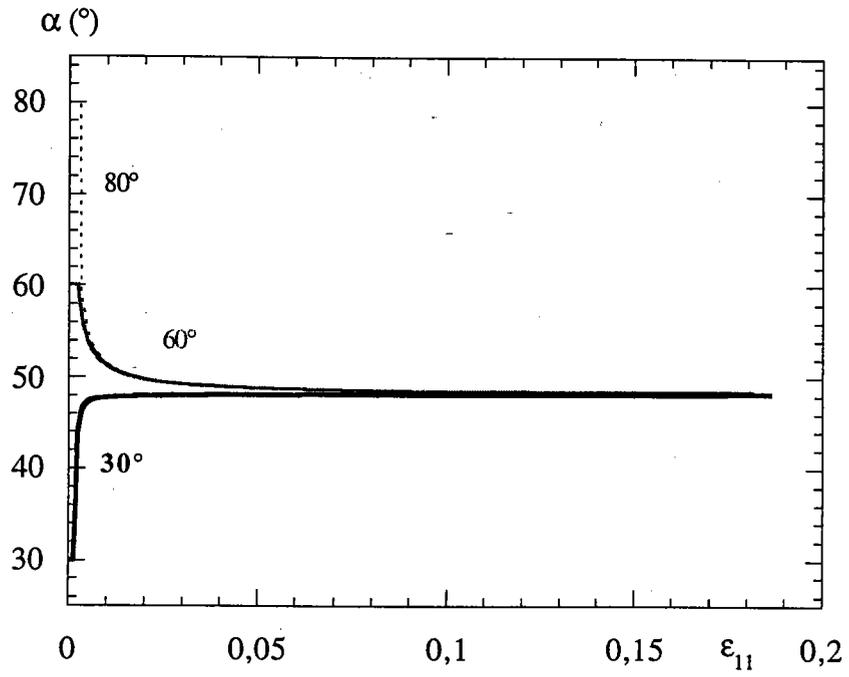


Fig. D.12: Incidence de l'angle initial sur l'évolution de la microstructure

D.2 - TRAJETS COMPLEXES EN TRACTION

Les trajets complexes simulés dans cette annexe se décomposent en une première traction suivant l'axe 1 suivi d'une traction dans le même plan, dont la direction décrit un angle β par rapport au repère macroscopique (cf. schéma D.13)

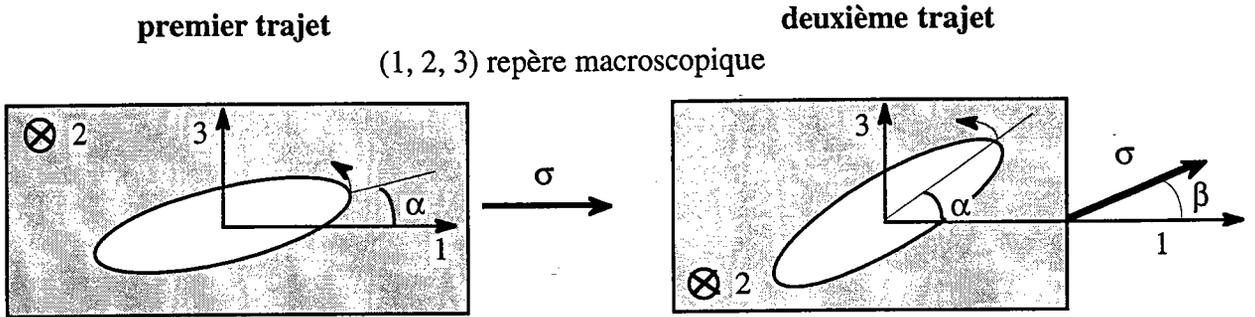


Fig. D.13: Chargement complexe en traction

Pour chaque trajet complexe, les contraintes et les déformations représentées sur les graphes suivants correspondent aux contraintes suivant l'axe de traction et aux déformations longitudinales de chaque trajet que l'on a ensuite placées bout à bout.

La figure D.14 décrit les caractéristiques essentielles d'un trajet séquentiel dur effectué pour $\beta = 45^\circ$ par rapport à un trajet continu. La croix indique le point de localisation de la déformation.

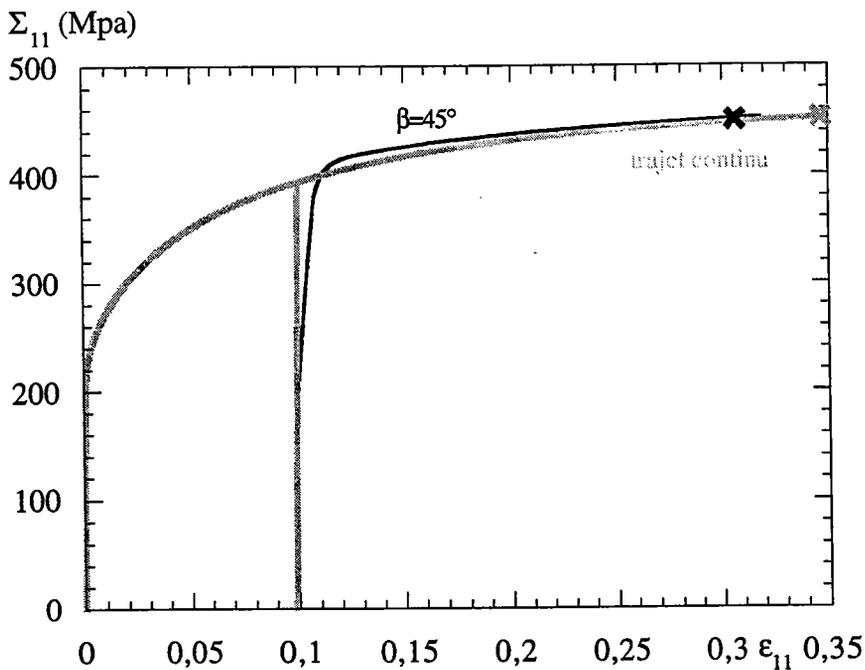


Fig. D.14: Contraintes macroscopiques d'un trajet complexe comparé à un trajet continu

Comme pour le cisaillement complexe, nous remarquons immédiatement une microplasticité prononcée, une contrainte à la recharge supérieure au trajet continu et une perte de ductilité précoce; et ceci sans optimiser les paramètres. La microstructure s'oriente en fonction des trajets suivant les positions stables déterminées dans le chapitre II.4.4, c'est à dire suivant les plans de cisaillement maximum.

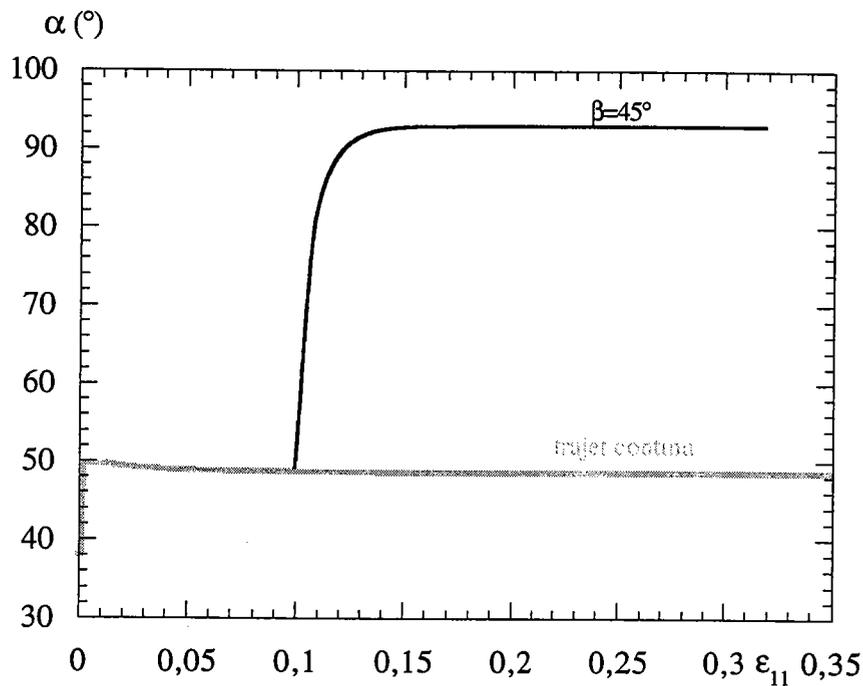


Fig. D.15: Orientation de la microstructure en trajet complexe

Nous présentons également les résultats des simulations effectuées pour différents taux de prédéformation. On retrouve les mêmes caractéristiques que pour les essais de cisaillement. Ainsi, plus la précharge est longue, plus la microplasticité débute tôt, plus la contrainte macroscopique de recharge est importante et plus la perte de ductilité survient prématurément. La figure D.17 qui reproduit les valeurs du seuil de microplasticité en fonction du taux de prédéformation possède la même allure que la courbe trouvée en cisaillement (cf. figure III.24).

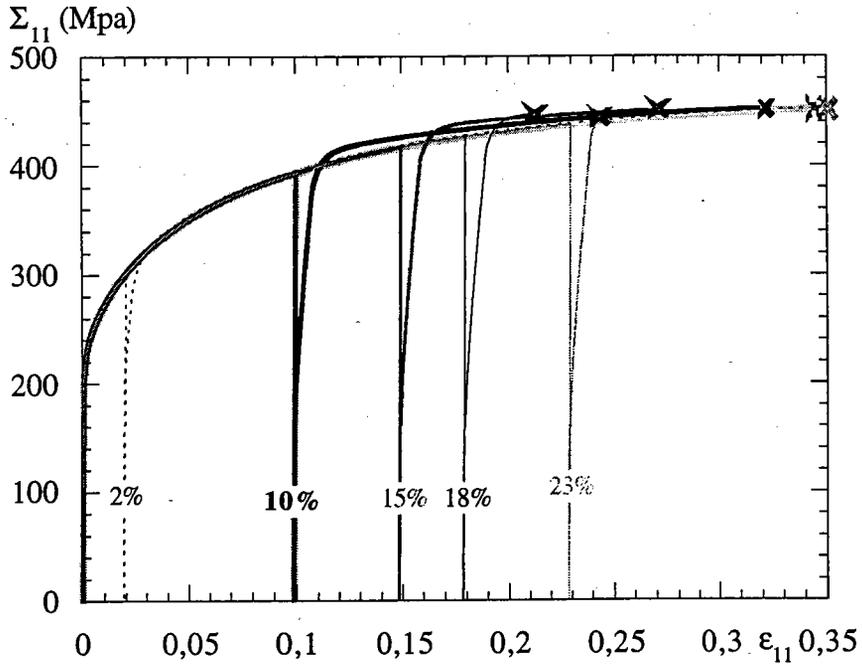


Fig. D.16: Contraintes macroscopiques en trajet complexe défini par $\beta = 45^\circ$ pour différents taux de prédéformation

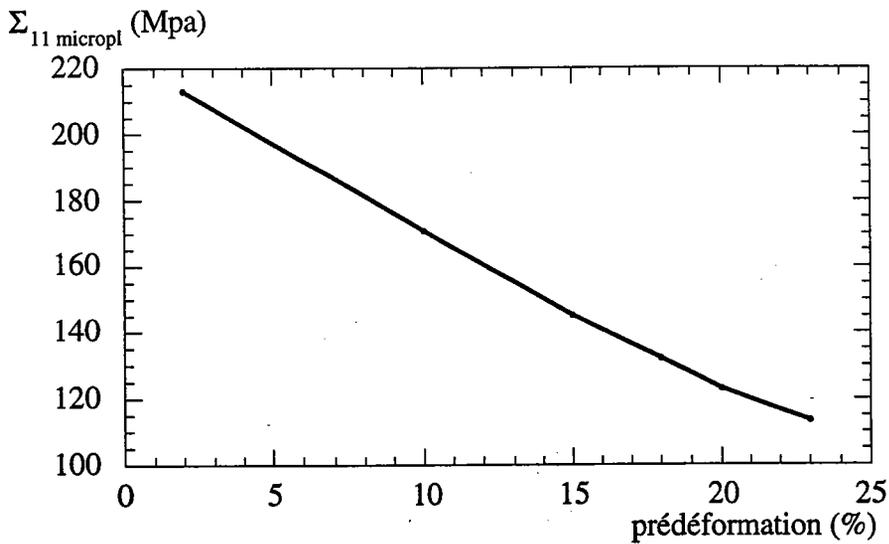


Fig. D.17: Seuil de microplasticité en fonction du pourcentage de prédéformation

Les évolutions de la microstructure, identiques au cas du cisaillement, sont données ci-dessous:

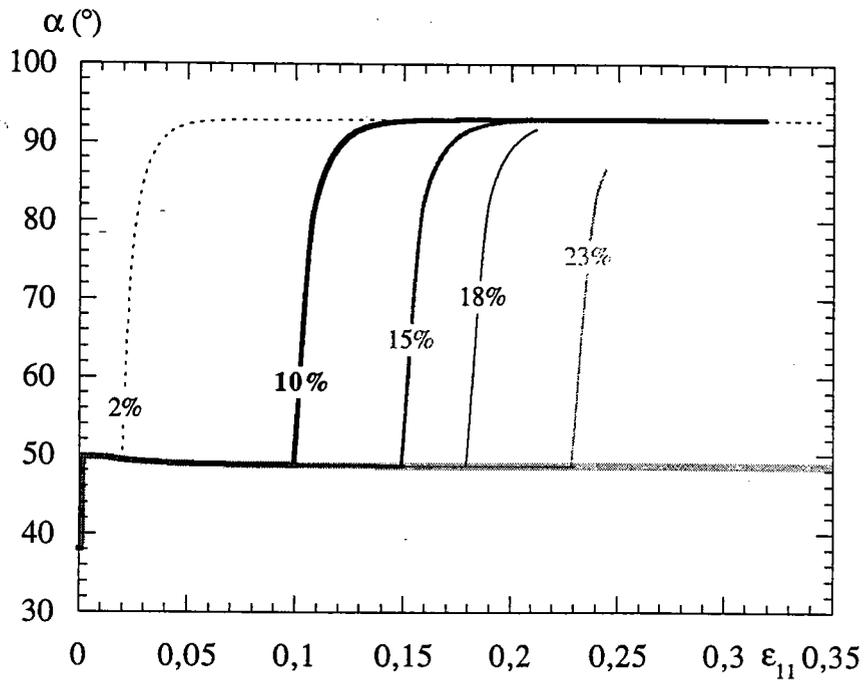


Fig. D.18: Evolution de la microstructure pour différents taux de prédéformation

Nous avons également simulé des trajets complexes à même taux de prédéformation mais pour différents angles β . Les résultats obtenus sont représentés sur les figures D.19, D.20 et D.21.

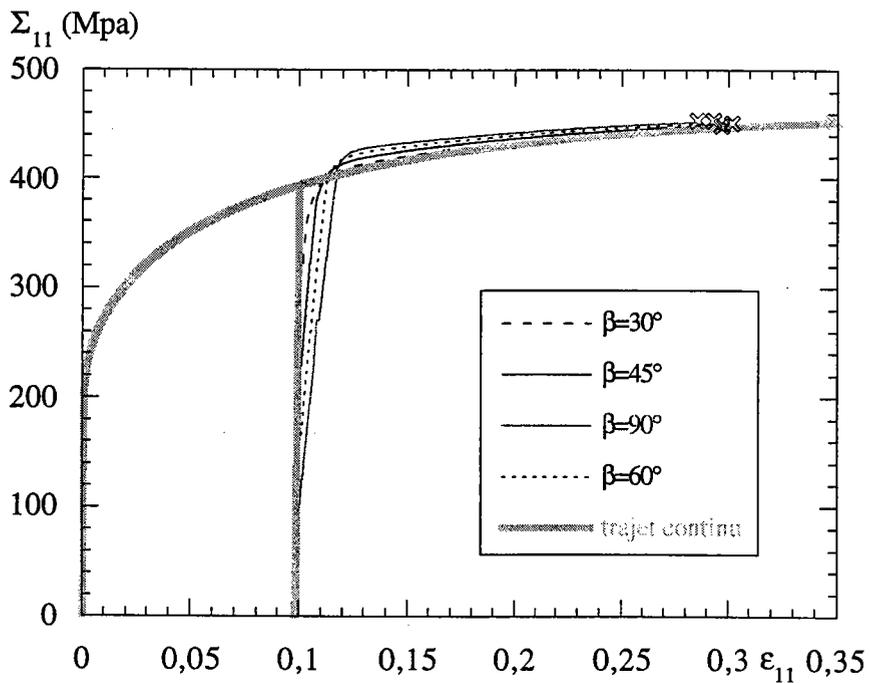


Fig. D.19: Trajets complexes suivant différents angles β

Les phénomènes de microplasticité sont bien représentés et les contraintes seuil décrivent une courbe similaire au cas du cisaillement (cf. Figure D.20).

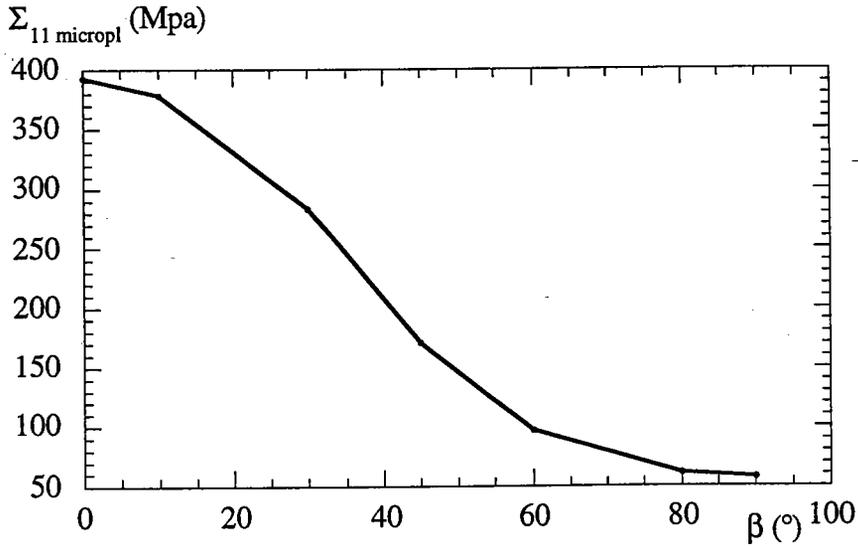


Fig. D.20: Seuil de microplasticité en fonction de l'angle de changement de trajet

Mais expérimentalement Fernandes et al [FS83] montrent que pour $\beta = 90^\circ$, correspondant au paramètre de changement de trajet $\theta = -0,5$, le comportement macroscopique se rapproche de celui de l'essai Baushinger. Nous l'avons déjà remarqué en cisaillement, ce modèle ne parvient pas à représenter les phénomènes de dissolution de la microstructure lorsque le chargement se rapproche de l'essai inverse. On remarque également ce problème sur les orientations puisque pour $\beta = 90^\circ$ les cellules décrivent un brusque retournement.

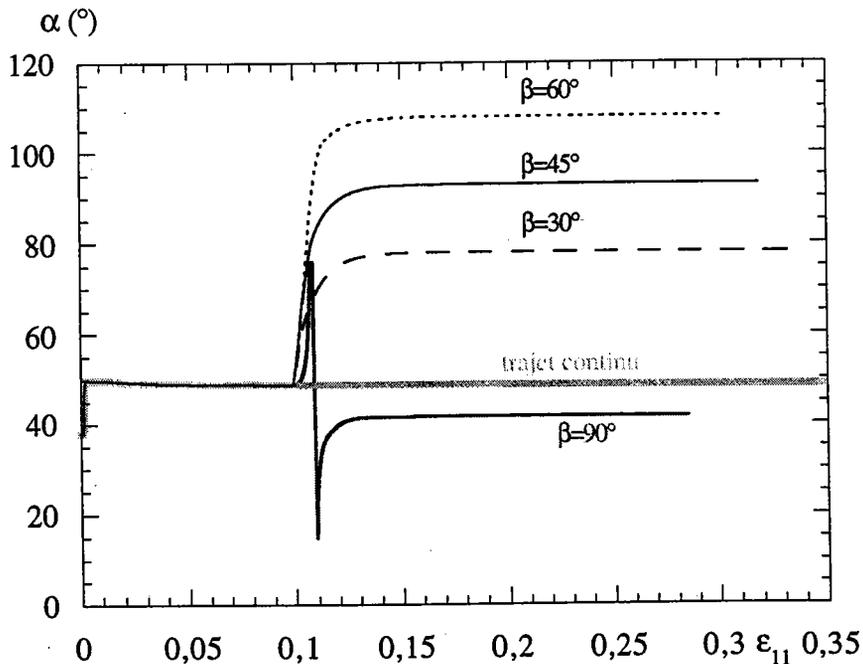


Fig. D.21: Orientation de la microstructure pour différents changements de trajets

D.3 - CONCLUSION

Les essais en traction présentent les mêmes tendances que ceux effectués en cisaillement. Les effets sont moins marqués du fait de la moins bonne adéquation entre la topologie réelle et modélisée. Nous retrouvons toutefois les mêmes résultats encourageants et les mêmes lacunes dues à la restriction à deux variables internes morphologique de notre modèle.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AB96] AUBERT I. et BERVEILLER M., "Représentation invariante de l'énergie libre dans le cas de microstructures de dislocations et applications", 1996, Les cahiers de Rhéologie, pp.189-194
- [AB97] AUBERT I. et BERVEILLER M., "Constrained and unstable expansion of dislocation loops using an invariant formulation of the free energy", 1997, Mechanics of Materials, Vol. 26, pp.127-137
- [ALB97] AUBERT I., LANGLOIS L. et BERVEILLER M., "Etude micromécanique des discontinuités plastiques mobiles. Application à la stabilité de systèmes de dislocations", 1997, Acte du 13^e Congrès Français de Mécanique, Vol. 2, pp.3-6
- [B71] BOEHLER J. P., "Contributions théoriques et expérimentales à l'étude des milieux plastiques anisotropes", 1975, Thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
- [B78] BOEHLER J. P., "Lois de comportement anisotrope des milieux continus", 1978, Journal de Mécanique, Vol. 17, N°2, pp.153-190
- [B82] BETTEN J., "Integrity basis for a second-order and fourth order tensor", 1982, Int. J. Math. & Math. Sci., Vol. 5, pp.87-96
- [B87a] BOEHLER J. P., "Representation for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp.13-97
- [B87b] BOEHLER J. P., "On a rational formulation of isotropic and anisotropic hardening", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp. 99-139
- [BB89] BERVEILLER M. et BOUAOUINE H., "Formation des micro et macrobandes de cisaillement dans les métaux CFC", 1989, 32^e colloque de métallurgie, Ed. Revue de Métallurgie

- [BCA97a] BERVEILLER M., CHERKAOUI M., AUBERT I., "Micromechanics of moving inelastic discontinuities and applications", 1997, à paraître dans Kluwer academics publishers
- [BCA97b] BERVEILLER M., CHERKAOUI M., AUBERT I., "Microstructures évolutives et comportement macroscopique", 1997, Journal de Physique, sous presse
- [Bet87] BETTEN J., "Invariants of fourth-order tensors", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp. 203-226
- [BS94] BERVEILLER M. et SCHMITT J.H., "Déformation des cristaux et polycristaux", 1994, Le Livre de l'Acier, ed scientifiques Béranger G. Henry G. Sanz G., pp.167-204
- [BZ81] BERVEILLER M. et ZAOUI A., "Methodes selfconsistantes en mécanique des solides hétérogènes" dans "comportement rhéologique des structures et matériaux", 1981, Editions ENPC, C. HUET et A. ZAOUI Edit., pp.175-199
- [CHM94] COL A., HEURTAULT S et MUNIER M., "L'emboutissage", 1994, Le Livre de l'Acier, ed scientifiques Béranger G. Henry G. Sanz G., pp.786-813
- [D97] DAVID F., "Modélisation méso-macro de la localisation de la déformation", 1997, Thèse de l'Université de Metz
- [DALB97] F. DAVID, I. AUBERT, X. LEMOINE, M. BERVEILLER , "Modelling of elastoplastic polycrystals and aspects of applications", 1997, Computational Materials Science, Vol 9, pp.188-198
- [DG82] DOLLAR M. et GORCZYCA S., "The effect of grain size on polycrystal hardening", 1982, Scripta Metallurgica, Vol. 16, pp.901-906
- [DHMA88] DEVE H., HARREN S., McCULLOUGH C., ASARO R.J., "Micro and macroscopic aspects of shear band formation in internally nitrated single crystals of Fe-Ti-Mn alloys", 1988, Acta Met. Vol. 36, N°2, pp.341-365

- [DLMS94] DAMIANI P., LEPLOMB A., MANGIN G. et SECONDE J.F., "La mise en forme des aciers pour emballage", 1994, Le Livre de l'Acier, ed scientifiques Béranger G. Henry G. Sanz G., pp.816-830
- [E57] ESHELBY J.D., "The determination of the elastic field of an ellipsoïdal inclusion and related problem", 1957, Proc. Roy. Soc., A241, pp.376-396
- [EM79] ESSMANN U. et MUGHRABI .H, "Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities", 1979, Philosophical Magazine A, Vol. 40, N° 6, pp.731-756
- [F96] FRESSINGEAS , " Bifurcations, instabilités de la déformation plastique", 1996, Cours de DEA
- [FS83] FERNANDES J.V. et SCHMITT J.-H., "Dislocation microstructures in steel during deep drawing", 1983, Philosophical magazine A, Vol. 48, N° 6, pp.841-870
- [G73] GERMAIN P., "Cours de mécanique des milieux continus", 1973, Tome 1 Théorie générale, eds Masson et cie, Paris
- [H03] HADAMARD J., "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique", 1903, Cours du collège de France, Paris
- [H61] HILL R., "Discontinuity relations in mechanics of solids", 1961, Progress in Solid Mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp.245-276
- [H62] HU H., "Microbands in a rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization", 1962, Acta Met., Vol. 10, pp.1112-1116
- [H72] HIRTH J.P., "The influence of grain boundaries on mechanical properties", 1972, Metal. Trans., Vol. 3, pp.3047-3067
- [Hil72] HILL R., "An invariant traitement of interfacial discontinuities in elastic composites", 1972, Continuum Mechanics and Related Problem of Analysis, Moscow, pp.594-604

- [H83] HILL R., "Interfacial operators in the mechanics of composite media", 1983, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, N°4, pp.347-357
- [H92] HANSEN N., "Deformation microstructures", 1992, Scripta Metall. et Materialia, Vol. 27, pp.1447-1452
- [HRT92] HU Z., RAUCH EF et TEODOSIU C, "Work hardening behavior of mild steel under stress reversal at large strains", 1992, Int. J. of Plasticity, Vol. 8, pp.839-856
- [I90] INAGAKI H., "Development of microstructures and texture during cold rolling of polycrystalline iron containing an excess amount of dissolved carbon", 1990, Zeitschrift für Metallkunde, Vol. 81, pp.474-483
- [JS84] JACKSON P.J., SIEDERSLEBEN M., "The stability of dislocation cell boundaries in FCC crystals", 1984, Scripta Met., Vol. 18, pp.749-754
- [K61] KRÖNER E., "Zur plastischen Verformung des Vielkristalls", 1961, Acta Metall., Vol9, pp.155-161
- [K79] KUBIN L., "Dislocations et déformation plastique", 1979, Ecole d'été d'Yrivals
- [K97] KRUMMEICH R., communication interne
- [KEHME86] KORBEL A., EMBURY J.D., HARTHERLY M., MARTIN P.L. et ERBSLOH H.W., "Microstructure aspects of strain localization in Al-Mg alloys", 1986, Acta Metall., Vol. 34, N°10, pp.1999-2009
- [KM88] KUBIN L.P. et MARTIN G., "Non-linear Phenomena in Materials Science", 1988, Trans. Tech. Publications Ltd, Switzerland
- [KoM86] KORBEL A. et MARTIN P.L., "Microscopic versus macroscopic aspect of shear band deformation", 1986, Acta Met., Vol. 34, pp.1905-1909
- [KoM88] KORBEL A. et MARTIN P.L., "Microstructural events of macroscopic strain localisation in prestrained tensile specimens", 1988, Acta Met., Vol. 36, pp.2575-2586

- [KS92] KRATOCHVIL J. et SAXLOVA M., "A model of formation of dipolar dislocation structures", 1992, Solid State Phenomena, Vol. 23 & 24, pp.369-384
- [KW63] KEH K.S. et WEISSMANN S., " Electron microscopy and strength of crystal", 1963, G.Thomas et Washburn eds, Interscience, New York, pp.231-300
- [KW89] KULHMANN-WILSDORF D., "Theory of Plastic Deformation properties of low energy dislocations structures", 1989, Mat. Sci.and Engineering, Vol 113, pp.1-41
- [L93] LIPINSKI P., "Modélisation du comportement de métaux en transformations élastoplastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelles", 1993, Thèse d'habilitation de l'Université de Metz
- [L95] LEMOINE X. "analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", 1995, Thèse de l'Université de Metz
- [L97] LINEAU C., "Analyse expérimentale de la déformation plastique d'un polycristal d'acier comparaison avec les simulations de modèles polycristallins", 1997, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- [LC70] LI J.C.M. et CHOU Y.T., "The role of dislocations in the flow stress grain size relationship", 1970, Metal. TRans., Vol. 1, pp.1145-1158
- [LBM97] LEMOINE X., BERVEILLER M. et MORREALE J., "Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", Sept 1997, Revue de Métallurgie-CIT / Science et génie des matériaux, pp.
- [LKD92] LAN Y., KLAAR H.J. et DAHL W., "Evolution of dislocation structures and deformation behavior of iron at different temperatures: Part I. Strain hardening curves and cellular structures", 1992, Metall. Trans., Vol. 23A, pp.537-544

- [LMB94] LEMOINE X., MULLER D. et BERVEILLER M., "Texture of microstructures in BCC metals for various loading paths", 1994, Mat. Science Forum, Vol. 157-162, pp.1821-1826
- [M82] MURA T., "Micromechanics of defects in solids", 1982, Martinus Nijhoff Publishers
- [M83] MUGHRABI H., "Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals", 1983, Acta Metall., Vol.31, N° 9, pp.1367-1379
- [M88] MUGHRABI H., "Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals", 1988, Revue Phys. Appl, Vol. 23, pp.367-379
- [M94] MULLER D., "Influence de l'écroissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins", 1994, Thèse de l'Université de Metz
- [MH79] MALIN A.S. et HATHERLY M., "Microstructure of cold-rolled copper", 1979, Metal Science, pp.463-472
- [MKB93] MULLER D., KRATOCHVIL J. et BERVEILLER M., "Effets des écroissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse globale en traction-compression et sur les contraintes internes", 1993, C.R.A.S., T.316, Série II., pp.435-440
- [MLB94] MULLER D., LEMOINE X. et BERVEILLER M., "Nonlocal behavior of elastoplastic metals: theory and results", 1994, Trans. of the ASME, Vol. 116, pp.378-383
- [MLBK94] MULLER D., LEMOINE X., KRATOCHVIL J. et BERVEILLER M., "Non-local behavior of metals", 1994, Solid State Phenomena, Vol. 35-36, pp.393-398
- [MM84] MORRIS M.A. et MARTIN J.L., "Evolution of internal stresses and substructure during creep at intermediate temperatures", 1984, Acta Metall., Vol.32, N° 4, pp.549-561

- [MK81] MECKING H., KOCKS U.F., "Kinetics of flow and strain hardening", 1981, Acta Metallurgica, Vol. 29, pp.1865-1875
- [N93] NGUYEN Q.S., "Bifurcation and stability", 1993, Bifurcation and stability of dissipative systems, ed NGUYEN Q.S., Springer Verlag, Wien-New York
- [NK86] NABIL BASSIM M. et KLASSEN R.J., "Variation in dislocation cell size with local strain in a low alloy steel", 1986, Mat. Sciences an Eng., Vol.81, pp.163-167
- [PPL75] POLLNOW D. et PENELL R. et LACOMBE P., "Relations entre les propriétés plastiques et la microstructure de monocristaux de fer déformés par traction à la température ambiante", 1975, Mém. Scien. Revue Metallurgie, pp.491-500
- [R88] REY C., "Effects of grains boundaries on the mechanical behavior of grains in polycrystals", 1988, Revue Phys. Appl., Vol. 23, pp.491-500
- [R93] RAUCH E.F., "Etude de l'écrouissage des matériaux, aspects microstructuraux et lois de comportement", 1993, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [R95] RAUCH E.F., "Effet des sous-structures de dislocations sur le comportement mécanique de l'acier doux", 1995, 6ème Colloque Franco-Polonais "Hétérogénéités de déformation plastique", Saint Etienne
- [RRSS87] RAPHANEL J.L., RAUCH E., SHEN E.L. et SCHMITT J.H., "Shear of prestrained steel specimens", 1987, Scripta Mat., Vol. 21, pp.1087-1090
- [RS88] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., "Microstructure et macroplasticité des matériaux polycristallins sous chargement complexe", 1988, Rapport DRET 85-137
- [RS89] RAUCH E.F. et SCHMITT J.H., "Dislocation substructures in mild steel deformed in simple shear", 1989, Mater. Sci. Eng., Vol.A113, pp.441-448

- [RSB86] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., BAUDELET B., "Effect of a prestrain on the subsequent yielding of low carbon steel sheets: experiments and simulations", 1986, Int. Journal of Plasticity, Vol. 2. N°4, pp.371-378
- [S71] SPENCER A. J. M., "Theory of invariants", Continuum Physics, Vol. 1, ed. A.C. Eringer, Academic Press, pp. 239-353
- [S87] SPENCER A. J. M., "Isotropic polynomial invariants and tensor functions", 1987, in "Applications of tensor functions in solids mechanics", Springer Verlag, Wien New-York, pp.141-201
- [S86] SCHMITT J.H., "contribution à l'étude de la micro-macroplasticité des aciers", 1986, Thèse d'habilitation de l'INPG
- [SAB85] SCHMITT J.H., AERNOUDT E. et BAUDELET B., "Yield loci for polycrystalline metals without texture", 1985, Mat. Sci. Eng., Vol. A147, pp.143-154
- [SBB91] SABAR H., BUISSON M. et BERVEILLER M., "The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary", 1991, Int. J. Plasticity, Vol.7, pp.759-772
- [SSR88] SHEN E.L., SCHMITT J.H., RAPHANEL J.L., "Résultats expérimentaux d'essais séquentiels sur le cuivre", 1988, Rapport interne, LGPMM Grenoble
- [T92] THUILLIER S., "Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux", 1992, Thèse de l'INPG
- [Teo92] TEODOSIU C., "Materials science input to engineering models", 1992, Riso 92
- [TFHM82] TABATA T., FUJITA H., HIRAOKA M.A. et MIYAKE S., "The relationship between flow stress and dislocation behaviour in [111] aluminium single crystal", 1982, Philosophical Magazine A, Vol. 46, N° 5, pp.801-816

- [TYF78] TABATA T., YAMANAKA S. et FUJITA H., "In situ deformation of the [111] aluminium single crystals observed by high voltage microscopy", Acta Metall., Vol. 26, pp.405-411
- [W65] WEERTMAN J., "Théorie élémentaire des dislocations", 1965, Ed Masson & Cie
- [W67] WALPOLE L.J., "The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium", 1967, Proc. Roy. Soc., Vol. A300, pp.270-289
- [W78] WALPOLE L.J., "A coated inclusion in an elastic medium", 1978, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 83, pp.495-506
- [W88] WOLFRAM S., "Mathematica a system for doing mathematics by computer", 1988, Addison-Wesley Publishing Company
- [ZJB95] ZONGHOA J., JIANSHE L. et BAUDELET B., "A dislocation density approximation for a flow stress-grain size relation of polycrystals", 1995, Acta Metallurgica inc., Vol. 43, N°9, pp.3349-3360