THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité: **Mathématiques**
par

Jean SCHILTZ

SUR QUELQUES PROBLEMES CONCERNANT LE CALCUL DE MALLIAVIN ET SON APPLICATION A LA THEORIE DU FILTRAGE NON LINEAIRE

soutenue le 15 octobre 1997 devant la commission composée de:

Patrick CATTIAUX	Professeur à l'Univesité Paris X Rapporteur
Patrick FLORCHINGER	Professeur à l'Université de Metz Directeur de thèse
Rémi LEANDRE	Directeur de Recherche au CNRS Rapporteur
Paul MALLIAVIN	Membre de l'Institut de France Examinateur
Jean PICARD	Professeur à l'Université Blaise Pascal - Clermont II Examinateur
Monique PONTIER	Professeur à l'Université d'Orléans Examinateur

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité: **Mathématiques**

par

Jean SCHILTZ

SUR QUELQUES PROBLEMES CONCERNANT LE CALCUL DE MALLIAVIN ET SON APPLICATION A LA THEORIE DU FILTRAGE NON LINEAIRE

soutenue le 15 octobre 1997 devant la commission composée de:

Patrick CATTIAUX	Professeur à l'Univesité Paris X Rapporteur
Patrick FLORCHINGER	Professeur à l'Université de Metz Directeur de thèse
Rémi LEANDRE	Directeur de Recherche au CNRS Rapporteur
Paul MALLIAVIN	Membre de l'Institut de France Examinateur
Jean PICARD	Professeur à l'Université Blaise Pascal - Clermont II Examinateur
Monique PONTIER	Professeur à l'Université d'Orléans Examinateur

Je remercie Patrick Florchinger, qui a dirigé cette thèse, de m'avoir proposé de travailler dans des domaines aussi intéressants. Ses encouragements, sa disponibilité, ses conseils et son aide très précieux m'ont beaucoup touché. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Toute ma reconnaissance à Patrick Cattiaux, Rémi Léandre et Daniel Ocone pour avoir accepté d'être rapporteur, ainsi que pour leurs remarques intéressantes et bien fondées qui ont contribué à améliorer ce travail.

Je suis très reconnaissant à Paul Malliavin et Jean Picard. Leurs travaux ont influencé mes recherches et je suis heureux d'avoir l'honneur de les compter parmi les membres du jury. Je remercie Monique Pontier d'avoir bien voulu examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Pour terminer, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenu et encouragé.

A Renata

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes de Calcul de Malliavin et à l'application de cette théorie au filtrage non linéaire. Elle est divisée en cinq chapitres et une annexe.

Le chapitre I est consacré à des généralités sur le Calcul de Malliavin et la théorie du filtrage non linéaire. On y expose les idées essentielles de ces deux théories et on rappelle, sans démonstrations, les résultats classiques nécessaires à la lecture des chapitres suivants. Plus précisément, dans la partie concernant le Calcul de Malliavin, on donne la décomposition en chaos de Wiener de l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, où $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne l'espace de Wiener standard. On introduit l'intégrale multiple de Wiener-Itô , le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck et on définit les trois opérateurs centraux du Calcul de Malliavin, c'est-à-dire l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck L, la dérivée de Malliavin D et l'intégrale de Skohorod δ. Ces opérateurs nous permettent d'introduire les espaces de Sobolev généralisés. Les outils introduits ci-dessus sont utilisés pour donner des conditions d'existence et de régularité de la densité pour la loi de probabilité d'un processus stochastique, solution d'une équation différentielle stochastique. Finalement, on rappelle quelques résultats de calcul des variations stochastique pour des diffusions dirigées par un nombre infini de processus de Wiener.

Dans la partie concernant la théorie du filtrage non linéaire, on explicite tout d'abord la forme générale des systèmes de filtrage considérés. Puis, on rappelle un résultat de continuité du filtre par rapport à la trajectoire de l'observation pour la norme de Banach sur $C_0([0, T], \mathbb{R}^d)$. Pour conclure, on réécrit les équations de Zakai et de Kushner-Stratonovitch associées au problème considéré, ainsi qu'une forme robuste de l'équation de Zakai.

Le but du chapitre II est d'étudier l'existence d'une densité régulière pour les solutions d'une équation différentielle stochastique inhomogène sous une condition moins restrictive que la condition de Hörmander générale. En effet, on permet que la condition de Hörmander fasse défaut sur une sous-variété de codimension 1. Dans cette sous-variété on suppose une condition de non dégénérescence exponentielle moins forte que la condition de Hörmander.

Dans une première section, on montre qu'une diffusion engendrée par un opérateur différentiel du second ordre, qui vérifie ces hypothèses, admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette section fait l'objet d'un article publié dans "Stochastics and Stochastic Reports" (cf. [74]). Dans une deuxième section, on considère un système de filtrage non linéaire admettant comme signal la diffusion introduite dans la première section. On montre, sous les hypothèses de la section précédente, que le filtre non normalisé associé à ce système de filtrage admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Les résultats de la première section ne peuvent pas être appliqués directement, car le transport des coefficients, nécessaire à la preuve, implique seulement la condition de dégénérescence exponentielle à l'origine. Dans un premier temps, on montre un résultat plus fort que celui de la première section, puis on applique celui-ci pour montrer la régularité de la densité.

Dans le chapitre III, on étudie des diffusions, solutions d'équations différentielles stochastiques à coefficients dépendant du temps, engendrées par une infinité de processus de Wiener. Dans une première section, on développe un Calcul de Malliavin pour de telles diffusions.On montre qu'une équation différentielle stochastique à coefficients dépendant du temps, engendrée par une infinité de processus de Wiener, admet une solution unique sous certaines conditions du type "Lipschitz". Puis, on montre que la diffusion ainsi définie appartient à l'espace des fonctionnelles de Wiener régulières $\mathbb{D}^\infty$. Finalement, on montre, sous une condition de Hörmander locale, que cette diffusion admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette section fait l'objet d'un article à paraître dans "Stochastic Analysis and Applications" (cf. [75]).

Dans une deuxième section, on montre qu'un système de filtrage non linéaire admettant comme signal la diffusion définie dans la première section, possède une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ceci fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec P. Florchinger, qui est paru dans les "Proceedings of the 2nd Portuguese Conference on Automatic Control" (cf. [36]). Pour conclure, on calcule le support de la loi de probabilité de la densité du filtre, à l'aide d'un ensemble de solutions d'un système contrôlé associé.

Dans le chapitre IV, on considère un système de filtrage non linéaire dont le signal et l'observation sont à valeurs dans le même espace et où l'observation dépend d'un bruit blanc d'ordre ε. On définit un filtre presque optimal de dimension finie et on montre que l'erreur commise en remplaçant le filtre par le filtre presque optimal est d'ordre ε. Puisque les coefficients d'observation sont linéaires, on peut définir une probabilité de référence adaptée au problème. Cela nous permet de résoudre le problème via la formule de Bayes associée au changement de probabilités effectué.

Le but du chapitre V est l'étude de diffusions sur les variétés riemaniennes. On montre l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique sur les variétés, puis on calcule la dérivée de Malliavin de cette diffusion. Finalement, on montre, sous une condition de Hörmander globale, que cette diffusion admet une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à l'élément de volume riemannien. Dans une deuxième partie, on applique ces résultats à un problème de filtrage non linéaire sur des variétés riemanniennes. On montre que le filtre associé à un couple signal/observation à valeurs dans des variétés riemaniennes admet une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à l'élément de volume riemannien, sous une condition de Hörmander globale.

Dans l'annexe, on étudie un problème de filtrage non linéaire en dimension infinie. On considère un système de filtrage associé à un couple signal/observation à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^n$. On établit les équations de Zakai et de Kushner-Stratonovitch associées à ce système et on donne une forme robuste de l'équation de Zakai, dans le cas où les bruits sont indépendants. L'annexe fait l'objet d'un article écrit en collaboration avec C. Boulanger, paru dans les "Proceedings of the European Control Conference 97" (cf. [10]).

Remarque:
Dans tout ce travail, on utilise la convention de sommation des indices répétés, sauf dans le cas où on effectue des sommes avec une infinité de termes.

Chapitre I

GENERALITES SUR LE CALCUL DE MALLIAVIN ET LA THEORIE DU FILTRAGE NON LINEAIRE

1.1. LE CALCUL DE MALLIAVIN

1.1.1. INTRODUCTION

Le calcul des variations stochastique, développé par P. Malliavin dans [53] et [54], procure une méthode puissante pour montrer l'existence de densités pour la loi de probabilités de fonctionnelles du processus de Wiener et en particulier pour la loi de probabilité de solutions d'équations différentielles stochastiques. P. Malliavin a introduit des idées nouvelles en analyse stochastique, notamment les dérivées fonctionnelles, qui, avec les relations qui les unissent, sont connues sous le nom de "Calcul de Malliavin" ou calcul des variations stochastique.

Les idées de P. Malliavin ont été développées entre autres par D.W. Stroock [76 – 78], I. Shigekawa [73], S. Watanabe [84], S. Kusuoka et D.W. Stroock [47 – 48], N. Ikeda et S. Watanabe [40], J.M. Bismut [6], J. Norris [60], D. Nualart [62] et P. Florchinger [29] . Notons que les approches de Stroock et de Shigekawa sont des formulations équivalentes de l'approche de Malliavin, tandis que l'approche de Bismut est différente et en général pas équivalente.

Le calcul de Malliavin repose sur la théorie des opérateurs différentiels définis sur des espaces de Sobolev de fonctionnelles de Wiener. Un résultat crucial de cette théorie est la formule d'intégration par parties, qui relie l'opérateur de dérivation sur l'espace de Wiener à l'intégrale de Skohorod. Cette propriété sert à établir des critères généraux, en termes de "Matrice de covariance de Malliavin", pour qu'un vecteur aléatoire donné possède une densité (régulière) par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'application la plus importante (qui a aussi été la motivation première) du Calcul de Malliavin est de donner une démonstration probabiliste du théorème de Hörmander. D'autres applications de cette théorie ont permis d'étudier des propriétés du noyau de la chaleur ou d'établir une preuve probabiliste du théorème de l'indice. De plus, le fait que l'adjoint de l'opérateur de dérivation stochastique coïncide avec une extension non causale de l'intégrale d'Itô, est le point de départ du développement d'un calcul stochastique pour des processus non adaptés.

1.1.2. LA DECOMPOSITION EN CHAOS DE WIENER

Le cadre dans lequel on se place maintenant n'est pas le plus général possible, mais il est suffisant pour les applications considérées dans ce travail. (Pour un cadre plus général, voir par exemple le livre de D. Nualart sur le Calcul de Malliavin [62] ou celui de P. Malliavin sur l'analyse stochastique [55].)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace de Wiener standard de dimension d, i.e. Ω est l'espace de Banach $C([0,T], \mathbb{R}^d)$, tel que $w(0) = 0$, pour tout w dans Ω, muni de la norme $\|w\|_\Omega = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$, P est la mesure de Wiener standard, $\mathcal{F}$ le complété de la σ-algèbre de Borel sur Ω par rapport à la mesure P et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration définie par la famille $\mathcal{F}_t$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, engendrée par $\{w(s) \,:\, 0 \leq s \leq t,\ w \in \Omega\}$ et contenant les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Toute fonction mesurable $F : (\Omega, \mathcal{F}) \to \big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ est appelée fonctionnelle de Wiener. Une telle fonctionnelle est en fait une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de loi

$$P_F = P \circ F^{-1},$$

c'est-à-dire $P_F(A) = P\big(F^{-1}(A)\big)$ pour toute partie A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Pour tout $q \geq 1$, notons $L^q = L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de Banach de toutes les fonctionnelles de Wiener $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrables à la puissance q, muni de la norme $\|f\|_q := (E|f|^q)^{\frac{1}{q}}$.

On pose $H = L^2([0,T], \mathbb{R}^d)$. H est un espace de Hilbert séparable dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot , \cdot \rangle_H$. Pour $h \in H$, désignons son intégrale de Wiener par

$$W_h = \sum_{i=1}^{d} \int_0^T h^i(t)\, dw_t^i, \tag{1.1}$$

où w_t désigne le processus de Wiener standard de dimension d.
Alors, $\{W_h,\, h \in H\}$ est un processus gaussien centré, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, de fonction de covariance $E(W_h W_g) = \langle h, g \rangle_H$.

Remarque:
Le plus souvent, on choisit comme espace de Hilbert l'espace de Cameron-Martin i.e. le sous-espace de Ω de toutes les fonctions h, telles que chaque composante $h^\alpha(t)$ de $h(t)$ est absolument continue et admet une dérivée $\dot{h}^\alpha(t)$ de carré intégrable. Alors H est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$\langle h, g \rangle_H = \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^T \dot{h}^\alpha(t) \dot{g}^\alpha(t)\, dt, \quad h, g \in H.$$

Rappelons que les polynômes d'Hermite sont définis par

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}), \quad n \geq 1$$

Introduisons pour chaque entier $n \geq 0$ les sous-espaces suivants de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

$\mathcal{P}_n^0 = \{P(W_{h_1}, ..., W_{h_p});\ p \geq 1\,, h_i \in H$ et P est un polynôme réel, de degré $\leq n\}$.

χ_n^0 est le sous-espace linéaire engendré par les variables aléatoires $H_n(W_h)$, où $h \in H$, $|h| = 1$.

$\mathcal{P}_n = \overline{\mathcal{P}_n^0}$.

$\chi_n = \overline{\chi_n^0}$.

Alors, les espaces $\mathcal{P}_0$ et χ_0 coïncident avec l'ensemble des constantes et, par utilisation des polynômes d'Hermite, on montre que χ_n et $\mathcal{P}_m$ sont orthogonaux pour $n \neq m$.

De plus, on a la décomposition suivante:

Théorème 1.1.2.1.

L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s'écrit comme somme orthogonale infinie des sous-espaces* χ_n*:*

$$(1.2) \qquad L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \chi_n.$$

Cette décomposition est appelé décomposition en chaos de Wiener et χ_n *est le chaos de Wiener d'ordre* n*. De plus,* $\chi_0 \oplus \chi_1 \oplus ... \oplus \chi_n = \mathcal{P}_n$.

Soit $\{e_i,\ i \geq 1\}$ une base orthonormale de H et

$$\Lambda = \{a = (a_1, a_2, ...) : a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } a_i = 0, \text{ excepté pour un nombre fini d'indices } i\}.$$

Pour $a \in \Lambda$, soit $a! = \prod_{i=1}^{+\infty} a_i!$ et $|a| = \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|$. Alors, en définissant, pour tout $a \in \Lambda$, le polynôme d'Hermite généralisé $H_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^+}$, par $H_a(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(x_i)$, on obtient une décomposition du chaos d'ordre n:

Proposition 1.1.2.2.

Les variables aléatoires $\left\{\sqrt{a!}\, H_a(W_e) := \prod_{i=1}^{+\infty} H_{a_i}(W_{e_i}),\ a \in \Lambda,\ |a| = n\right\}$ *forment un système orthonormal complet de* χ_n*, pour tout* $n \geq 1$.

1.1.3. L'INTEGRALE MULTIPLE DE WIENER-ITO

Soit $m \geq 1$. Alors, pour des fonctions élémentaires $f \in L^2\big([0,T]^m,\ (\mathbb{R}^d)^m\big)$, s'écrivant

$$(1.3) \qquad f(t_1, ..., t_m) = \sum_{1 \leq i_1, ..., i_m \leq m} a_{i_1 ... i_m}\, \mathbb{1}_{A_{i_1} \times ... \times A_{i_m}},$$

où $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_m}$ sont des parties disjointes de $\mathcal{B}$ et $a_{i_1, ..., i_m} = 0$, si deux des $i_1, ..., i_m$ sont égaux, on définit I_m de la façon suivante:

$$(1.4) \qquad I_m(f) = \sum_{i_1, ..., i_m} a_{i_1 ... i_m}\, W(A_{i_1}) ... W(A_{i_m}).$$

Alors,

(i) I_m est linéaire.

(ii) $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, si $\tilde{f}(t_1, ..., t_m) = \frac{1}{m!} \sum_\sigma f(t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(m)})$, si σ parcourt toutes les permutations de $\{1, ..., m\}$

(iii) $E\left[I_m(f)\, I_p(g)\right] = m\, \langle \tilde{f}\, ,\, \tilde{g} \rangle_{L^2([0,T]^m)}\, \delta_{m,p}$.

Or, l'ensemble des fonctions élémentaires de la forme (1.3) étant un sous-espace dense dans $L^2\big([0,T]^m,\, (\mathbb{R}^d)^m\big)$, on peut prolonger I_m en un opérateur linéaire continu de $L^2\big([0,T]^m,\, (\mathbb{R}^d)^m\big)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui satisfait les propriétés (i), (ii) et (iii).

Ce prolongement est noté $I_m(f) = \displaystyle\int_{[0,T]^m} f(t_1, ..., t_m)\, dw_{t_1} ... dw_{t_m}$.

Théorème 1.1.3.1.

Soient $H_n(x)$ le n-ième polynôme de Hermite et h un élément de H de norme 1. Alors,

(1.5) $$n!\, H_n(W_h) = \int_{[0,T]^n} h(t_1) ... h(t_n)\, dW_{t_1} ... dW_{t_n}$$

Par conséquent, l'intégrale multiple I_m induit une bijection de $L^2([0,T]^m)$ sur χ_m et toute fonction de carré intégrable $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ peut s'écrire sous la forme

(1.6) $$F = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(f_m(\cdot, t)),$$

où $f_m(s_1, ..., s_m, t) \in L^2\big([0,T]^{m+1}, \mathbb{R}^{d(m+1)}\big)$ sont des variables symétriques par rapport à $s_1, ..., s_m$ et mesurables par rapport à toutes les variables.

1.1.4. LE SEMI-GROUPE D'ORNSTEIN-UHLENBECK

Notons J_n la projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur le chaos de Wiener d'ordre n, χ_n. Alors, toute variable aléatoire $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ peut, d'après le théorème 1.1.2.1., s'écrire comme $F = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} J_n(F)$, et pour tout réel λ, avec $|\lambda| < 1$, on peut définir la variable aléatoire $F_\lambda = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda^n J_n F$.

Alors, le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck est le semi-groupe d'opérateurs contractants $\{T_t,\ t \geq 0\}$ sur $L^2(\Omega)$, définis par

$$(1.7) \qquad T_t F = F_{e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} J_n F.$$

Le semi-groupe $T_t F$ peut être défini autrement. Soit $\{W'_h,\ h \in H\}$ une copie indépendante du processus gaussien $\{W_h,\ h \in H\}$, défini sur l'espace probabilisé produit $(\Omega \times \Omega',\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P')$. Soit $W : \Omega \to \mathbb{R}^H$ la carte canonique associée au processus $\{W_h,\ h \in H\}$. Pour toute fonction $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on peut alors écrire $F = \psi_F \circ X$, où ψ_F est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^H$. Alors, pour tout $t > 0$, on pose

$$(1.8) \qquad T_t F = E'\big[\psi_F(e^{-t} W + \sqrt{1 - e^{-2t}} W')\big],$$

où E' désigne l'espérance par rapport à la probabilité P'.

Les deux définitions de T_t, données ci-dessus, sont équivalentes. De plus, T_t vérifie les propriétés suivantes:

(i) T_t est positif, i.e. $F \geq 0 \Longrightarrow T_t F \geq 0$.

(ii) T_t est autoadjoint: $E(G \cdot T_t F) = E(T_t G \cdot F) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} E(J_n F \cdot J_n G)$.

(iii) T_t est un opérateur contractant sur les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pour tout $p \geq 1$

Ceci implique que pour tout $1 < p < q < +\infty$, les normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalentes sur le chaos de Wiener d'ordre n, χ_n.

1.1.5. L'OPERATEUR D'ORNSTEIN-UHLENBECK L

Soit $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On définit l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck L par

$$LF = \sum_{n=1}^{+\infty} -n\, J_n F,$$

lorsque cette expression a un sens, i.e. pour les F tels que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\, E(|J_n F|^2) < +\infty$.

Alors, l'opérateur L est un opérateur linéaire autoadjoint, qui coïncide avec le générateur infinitésimal du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $\{T_t,\ t > 0\}$, i.e.

$$(1.9) \qquad LF(w) = \frac{d}{dt} T_t F(w)_{|_{t=0}}.$$

De plus, $E(LF) = 0$ et L est un opérateur fermé.
Remarquons que LF peut être également interprêté comme une dérivée de Fréchet:

Proposition 1.1.5.1.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, posons $F^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}[F_{1-\varepsilon} - F]$. Alors, LF existe si et seulement si F^ε converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ quand ε tend vers 0 et, dans ce cas, $LF = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F^\varepsilon$

On appelle fonction régulière sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ toute variable aléatoire $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme

$$F = f\big(W(h_1), ..., W(h_p)\big), \tag{1.10}$$

où f est une fonction de $\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, (i.e. l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont bornées et possèdent des dérivées de tous ordres bornées) et $h_1, ..., h_p$ appartiennent à H.
L'ensemble des fonctionnelles régulières sur l'espace de Wiener est noté $\mathcal{S}$.

On peut montrer que l'opérateur L se comporte comme un opérateur différentiel du second ordre s'il agit sur des variables aléatoires régulières.

1.1.6. LA DERIVEE DE MALLIAVIN D

Fixons un élément $h_0 \in H$. Le processus gaussien $W = \{W_h,\, h \in H\}$ peut être translaté en un processus $W^{h_0} = \{W_h + < h\, ,\, h_0 >\, ,\, h \in H\}$ et pour toute variable $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la variable aléatoire translatée $F^{h_0} = \psi_F \circ W^{h_0}$ est bien définie.

Soit

$$D_{h_0}F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[F^{\varepsilon h_0} - F], \tag{1.11}$$

si cette limite existe dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Si $F \in \mathcal{S}$, $D_{h_0}F$ existe et $D_{h_0}F = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} f(W_{h_p}, ..., W_{h_n})\langle h_i\, ,\, h_0\rangle_H$.

Posons pour tout $a = (a_1, a_2, ...) \in \Lambda$, $a^-(i) = (a_1, ..., a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, ...)$. Alors,

$$D_{h_0}\big(H_a(W_e)\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} H_{a^-(i)}(W_e)\langle e_i\, ,\, h_0\rangle_H,$$

où $\{e_i,\ i \geq 0\}$ désigne une base orthonormale de H.

D'autre part, soit

$$(1.12) \qquad \mathbb{D}^{2,1} = \{F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \,/\, \sum_{n=1}^{+\infty} n\, E(|J_n F|^2) < +\infty\}.$$

Définissons alors la dérivée de Malliavin D comme l'opérateur qui agit sur toute fonction $F = \sum_{a\in\Lambda} \sqrt{a!}\, H_a(W_e)$ dans $\mathbb{D}^{2,1}$, par

$$(1.13) \qquad DF = \sum_{a\in\Lambda} \sqrt{a!} \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} H_{a-(i)}(W_e) e_i \Big).$$

Alors, les deux définitions de l'opérateur D sont liées de la façon suivante:

Proposition 1.1.6.1.

Soit $F = \sum_{a\in\Lambda} \sqrt{a!}\, H_a(W_e)$ une variable aléatoire de carré intégrable, telle que $D_h F$ existe pour tout $h \in H$. Si la fonction $h \to D_h F$ appartient à $L^2_H(\Omega, \mathcal{F}, P)$ alors, $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ et $D_h F = \langle DF\,,\, h\rangle$, pour tout $h \in H$.

La dérivée de Malliavin D vérifie les propriétés suivantes:

(i) $\mathbb{D}^{2,1}$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $E(FG) + E(\langle DF\,,\, DG\rangle)$

(ii) $D_h J_{n+1} F = J_n D_h F$, pour tous $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ et $h \in H$

(iii) La norme $\|F\|_{2,1} = \|F\|_2 + \{E(|DF|^2_H)\}^{\frac{1}{2}}$ de $\mathbb{D}^{2,1}$ est équivalente à la norme L^2 du chaos de Wiener d'ordre n, χ_n. De plus, χ_n et χ_m sont orthogonaux si $n \neq m$.

Le gradient stochastique d'une fonctionnelle régulière sur l'espace de Wiener est la variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2([0,T]; \mathbb{R}^d)$, définie pour tout $t \in [0,T]$ par

$$(1.14) \qquad D_t F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} f(W_{h_1}, ..., W_{h_p})\, h_i(t).$$

On a alors la formule de différentiation suivante:

Proposition 1.1.6.2.

Soit $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ une fonction à dérivées premières bornées. Considérons un vecteur aléatoire $F = (F^1, ..., F^m)$, où $F^i \in \mathbb{D}^{2,1}$. Alors, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{2,1}$ et

$$D\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F)\, DF^i. \tag{1.15}$$

Ceci implique que si $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$ et si les F^i sont des variables aléatoires régulières alors,

$$L\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) LF^i - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(F)\, \langle DF_i\,,\, DF_j \rangle_H \tag{1.16}$$

Finalement, on a la

Proposition 1.1.6.3.

Soit $F \in \mathbb{D}^{2,1}$, donné par $F = \sum_{m=1}^{+\infty} I_m(f_m)$. Alors, la dérivée DF est donnée comme élément de $L^2([0,T] \times \Omega)$, défini par

$$(DF)_t = \sum_{m=1}^{+\infty} m\, I_{m-1}\big(f_m(t_1, ..., t_{m-1}; t)\big). \tag{1.17}$$

Donc, $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ si et seulement si $\sum_{m=1}^{+\infty} m \cdot m!\, \| f_m \|^2_{L^2([0,T]^m)} < +\infty$.

Définition 1.1.6.4.

On appelle matrice de Malliavin du vecteur aléatoire $F = (F^1, ..., F^m)$, la matrice de terme général

$$Q_{i,j} = \langle DF^i\,,\, DF^j \rangle. \tag{1.18}$$

1.1.7. L'INTEGRALE DE SKOHOROD δ

La dérivée de Malliavin D est un opérateur continu de $\mathbb{D}^{2,1}$ dans $L^2_H(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pour la norme $\|\cdot\|_{2,1}$. Toutefois, D n'est pas continu pour la norme L^2. On peut donc considérer l'opérateur dual δ de D pour la norme L^2. Le domaine de δ est l'ensemble des variables aléatoires $u \in L^2_H(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telles que la fonction linéaire $\mathbb{D}^{2,1} \ni F \longmapsto E(\langle DF\,,\, u\rangle_H)$ est L^2-continue. Alors, δu est l'élément de $L^2(\Omega)$, défini par $E(\langle DF\,,\, u\rangle_H) = E(F.\delta u)$.

Dans le cas des variables aléatoires régulières, on a le résultat suivant:

Proposition 1.1.7.1.

Soit $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des éléments $u \in L^2_H(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de la forme $u = \sum_{i=1}^{m} h_i F_i(w)$, où $h_i \in H$ et $F_i \in \mathcal{S}$. Alors $\mathcal{S}_H \subset Dom\ \delta$ et

$$\delta u = \sum_{i=1}^{m} W_{h_i} F_i - \sum_{i=1}^{m} \langle DF_i\,,\, h_i\rangle_H. \tag{1.19}$$

Si $F \in \mathbb{D}^{2,1}$, alors $DF \in Dom\,\delta$ si et seulement si $F \in Dom\,L$ et dans ce cas, $\delta DF = -LF$.

Soit maintenant $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$ un processus mesurable de représentation intégrale $u_t = \sum_{m=0}^{+\infty} I_m(f_m(\cdot, t))$. Notons

$$\tilde{f}_m(t_1, ..., t_m; t) = \frac{1}{m+1}\left[f_m(t_1, ..., t_m; t) + \sum_{i=1}^{m} f_m(t_1, ..., t_{i-1}, t, t_{i+1}, ..., t_m; t_i)\right]$$

la symétrisation de f_m comme fonction à $m+1$ variables. On a le résultat suivant:

Proposition 1.1.7.2.

$u \in Dom\ \delta$ si et seulement si la série $\sum_{m=0}^{+\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m)$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et dans ce cas, δu coïncide avec la somme de cette série.

La somme $\sum_{m=0}^{+\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_m)$ est aussi appelée intégrale de Skohorod du processus u et elle est notée $\int_{[0,T]} u\,\delta W$.

Remarques:

1) Si $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$ est adapté, alors $u \in Dom\,\delta$ et l'intégrale de Skohorod $\int_0^{+\infty} u\,\delta W$ est égale à l'intégrale d'Itô $\int_0^{+\infty} u\,dW$.

2) Soit $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$. Alors, il existe une fonctionnelle $F \in \mathbb{D}^{2,1}$, telle que $DF = u$ si et seulement si les noyaux $f_m(t_1, ..., t_m; t)$ apparaissant dans la décomposition intégrale de u sont des fonctions symétriques par rapport à toutes les variables.

3) Tout processus $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$ admet une unique décomposition orthogonale $u = DF + u^0$, où $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ et $E\langle u^0\,,\, DG\rangle_H) = 0$, pour tout $G \in \mathbb{D}^{2,1}$. De plus, $u^0 \in Dom\,\delta$ et $\delta u^0 = 0$.

1.1.8. LES ESPACES DE SOBOLEV GENERALISES

Par itération, on définit le gradient stochastique d'ordre N d'une fonctionnelle F de S comme la variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2([0,T]^N; \mathbb{R}^d)$, définie pour tous $s_1, ..., s_N \in [0,T]$ par

$$D^N_{s_1,...s_N} F = D_{s_1} ... D_{s_N} F. \tag{1.20}$$

$D^N F$ peut être interprétée comme variable aléatoire à valeurs dans l'espace de Hilbert $H^{\otimes N}$ de toutes les formes continues N-multilinéaires sur $H \otimes \cdots \otimes$H, muni de la norme de Hilbert-Schmidt.

Soit $\mathcal{P} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}^0_n$ l'espace des variables aléatoires polynômiales, sur lequel on considère, pour tout réel $p > 1$ et tout entier $N \geq 1$, la semi-norme

$$\|F\|_{p,N} = \|F\|_p + \|\,\|D^N F\|_{HS}\|_p, \tag{1.21}$$

où $\|D^N F\|_{HS}$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de $D^N F$, c'est-à-dire

$$\|D^N F\|^2_{HS} = \sum_{j_1,...,j_N=1}^{d} \int_{[0,T]^N} \left(D^N_{(j_1,s_1),...,(j_N,s_N)} F\right)^2 ds_1 ... ds_N.$$

On a alors le résultat suivant:

Proposition 1.1.8.1.

1) *Si* $t < t'$ *et* $s < s'$, *alors* $\|F\|_{p,s} \leq \|F\|_{p',s'}$

2) *Soit* $(F_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{P}$. *Si* $\|F_n\|_{p,s} \to 0$ *et* $\|F_n - F_m\|_{p',s'} \to 0$, *alors* $\|F_n\|_{p',s'} \to 0$.

Si $\mathbb{D}^{p,N}$ désigne l'espace de Banach, obtenu par complétion de $\mathcal{S}$, pour la norme $\|\cdot\|_{p,N}$, on a

Proposition 1.1.8.2.

On a pour tout $p > 1$,

$$\mathbb{D}^{p,0} = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \tag{1}$$

$$\mathbb{D}^{p',s'} \subset \mathbb{D}^{p,s}, \text{ si } p < p' \text{ et } s < s'. \tag{2}$$

$$(\mathbb{D}^{p,s})^* = \mathbb{D}^{q,-s}, \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3}$$

De plus, l'opérateur D *s'étend en un opérateur linéaire continu de* $\mathbb{D}^{p,s+1}$ *dans* $\mathbb{D}^{p,s}$ *pour tous* $1 < p < +\infty$ *et* $-\infty < s < +\infty$.

On peut alors définir l'espace $\mathbb{D}^\infty$ des fonctionnelles de Wiener régulières au sens du calcul des variations stochastique par

$$\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{p>1} \bigcap_{M>1} \mathbb{D}^{p,M}. \tag{1.22}$$

$\mathbb{D}^\infty$ est un espace normé complet dans lequel $\mathcal{S}$ est dense. De plus, $\mathbb{D}^\infty$ vérifie les propriétés:

(*i*) $\mathbb{D}^\infty$ est une algèbre.

(*ii*) L est un opérateur bien défini et continu de $\mathbb{D}^\infty$ sur $\mathbb{D}^\infty$.

(*iii*) Si $\varphi \in C_p^\infty(\mathbb{R}^m)$, $F = (F^1, ..., F^m)$, avec $F^i \in \mathbb{D}^\infty$, alors $\varphi(F) \in \mathbb{D}^\infty$ et on a

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{d} (\delta_i\varphi)(F)\, DF^i,$$

$$L(\varphi(F)) = \sum_{i,j=1}^{d} (\delta_i\delta_j\varphi)(F) < DF^i\, , DFj >_H + \sum_{i=1}^{d} (\delta_i\varphi)(F) LF^i$$

et $$\delta(FG) = \langle DF\,,\,G\rangle_H + F\delta G.$$

1.1.9. CONDITIONS POUR L'EXISTENCE ET LA REGULARITE D'UNE DENSITE

Une des motivations essentielles du développement du calcul de Malliavin est de donner une méthode pour étudier l'existence d'une densité régulière, pour la loi d'une fonctionnelle de Wiener.

En effet, on a les résultats suivants.

Théorème 1.1.9.1.

Soient $\{W_h\,,\,h \in H\}$ un processus gaussien et $F = (F^1, ..., F^m) : \Omega \to I\!R^m$ un vecteur aléatoire vérifiant les conditions suivantes:

(i) $F^i \in I\!D^{2,1}$ *pour tout* $i = 1, ..., m$ *et il existe des éléments* $u^i \in \Lambda^2_H(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tels que* $u^i \in Dom\,\delta$ *et* $q^{i,j} = \langle DF^i\,,\,u^j\rangle_H \in I\!D^{2,1}$ *pour* $i, j = 1...m$.

(ii) *La matrice q est inversible presque sûrement.*

Alors la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Ceci donne une méthode générale pour montrer l'existence d'une densité. En pratique, on doit choisir les éléments aléatoires u^i et on prend d'habitude $u^i = DF^i$, ce qui donne le

Corollaire 1.1.9.2.

Soit $F = (F^1, ..., F^m) : \Omega \to I\!R^m$ un vecteur aléatoire vérifiant les conditions suivantes:

(i) $F^i \in Dom\,L$ *et* $\langle DF^i\,,\,DF^j\rangle = Q^{i,j} \in I\!D^{2,1}$, *pour tout* $i, j = 1, ..., m$. *où Q désigne la matrice de covariance de Malliavin de F*

(ii) $\det Q > 0$ *presque sûrement.*

Alors, la loi de F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Le résultat principal pour la régularité de la densité découle alors du lemme suivant

Lemme 1.1.9.3.(cf.[53])

Soit ν une mesure de Radon finie sur $I\!R^n$. Supposons que pour tout multi-indice α, il existe une constante finie C_α, telle que, pour toute fonction ψ dans $C_b^\infty(I\!R^n, I\!R)$,

$$\left|\int_{I\!R^m} \nabla^\alpha \psi(x)\, \nu(dx)\right| \leq C_\alpha \|\psi\|_\infty.$$

Alors, la mesure ν admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Théorème 1.1.9.4.

Soit $F = (F^1, ..., F^m) : \Omega \to I\!R^m$ un vecteur aléatoire vérifiant les conditions suivantes:

(i) $F^i \in I\!D^\infty$, *pour* $i = 1, ..., m$

(ii) *La matrice de Malliavin* $Q^{i,j}$ *est telle que* $(\det Q)^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p$.

Alors, F admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

1.1.10. APPLICATION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Dans ce paragraphe, on applique les critères du paragraphe précédent aux équations différentielles stochastiques.

Soient $b \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ une fonction à dérivées de tous ordres bornés, $\sigma_1, ..., \sigma_d \in C_b^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et x_0 une variable aléatoire de moments de tous ordres bornés, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Si $\{x_t; t \in [0,T]\}$ désigne l'unique solution de l'équation différentielle stochastique au sens de Stratonovitch

$$x_t = x_0 + \int_0^t b(s, x_s)\, ds + \int_0^t \sigma_i(s, x_s) \circ dw_s^i, \tag{1.23}$$

on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.10.1.

Pour tout t dans $[0,T]$ et tous p, N entiers, $x_t \in (I\!D^{p,N})^m$ et pour $0 \leq r \leq t$,

$$D_r^j x_t = \sigma_j(r, x_r) + \int_r^t \nabla b(s, x_s)\, D_r^j x_s\, ds + \int_0^t \nabla \sigma_i(s, x_s)\, D_r^j x_s \circ dw_s^i.$$

Pour obtenir la matrice de covariance de Malliavin, associée au processus x_t, on utilise la dérivée du flot stochastique associée à (1.23) notée ϕ_t. En effet, on montre que les processus ϕ_t et ϕ_t^{-1} vérifient les équations intégrales stochastiques

$$\phi_t = I + \int_0^t \nabla b(s, x_s)\, \phi_s ds + \int_0^t \nabla \sigma_i(s, x_s)\, \phi_s \circ dw_s^i \tag{1.24}$$

et

$$\phi_t^{-1} = I - \int_0^t \phi_s^{-1}\, \nabla b(s, x_s) ds - \int_0^t \phi_s^{-1}\, \nabla \sigma_i(s, x_s) \circ dw_s^i. \tag{1.25}$$

Par application de l'opérateur gradient stochastique au processus x_t, on a

Proposition 1.1.10.2.

Pour tout t dans $[0, T]$ et tout i, $1 \leq i \leq m$,

$$D_s^i x_t = \phi_t \phi_s^{-1} \sigma_i(s, x_s). \tag{1.26}$$

Par conséquent, la matrice de covariance de Malliavin, associée au processus x_t, notée Q_t, est donnée par

$$Q_t = \phi_t \int_0^t \phi_s^{-1} \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(s, x_s) \sigma_k(s, x_s)^\tau (\phi_s^{-1})^\tau \, ds \ \phi_t^\tau. \tag{1.27}$$

Notons C_t la matrice défini par

$$C_t = \int_0^t \phi_s^{-1} \sum_{k=1}^{d} \sigma_k(s, x_s) \sigma_k(s, x_s)^\tau (\phi_s^{-1})^\tau \, ds.$$

On a alors le résultat suivant:

Théorème 1.1.10.3.(cf. [62] page 116)

Supposons que les composantes de la matrice de Malliavin C_t ont des moments de tout ordre et que pour tout $p \geq 2$, il existe des constantes t_0 et $\varepsilon_0(p)$, telles que pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$ et tout t, $0 < t \leq t_0$, on a

$$\sup_{|u|=1} P\{u^\tau C_t u \leq \varepsilon\} = O(\varepsilon^p).$$

Alors, la loi du processus stochastique x_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur R^m.

1.1.11. CALCUL DE MALLIAVIN EN DIMENSION INFINIE

Les résultats des paragraphes précédents restent valables pour des processus engendrés par un processus de Wiener de dimension infinie. On précise ici quelques résultats nécessaires dans le troisième chapitre de ce travail.

Soit $([0,T] \times \mathbb{Z}_+, \mathcal{T}, \lambda \otimes \nu)$ un espace de mesure σ-finie, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$ et ν la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}_+$. Notons H l'espace de Hilbert $L^2([0,T] \times \mathbb{Z}_+,\ \mathcal{T},\ \lambda \otimes \nu)$, i.e. l'ensemble des fonctions $h : [0,T] \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_+}$, telles que $\int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty} |h_k(s)|^2\, ds < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle h, h' \rangle_H = \int_0^T \sum_{k=1}^{+\infty} (h_k(s)\, h'_k(s))\, ds$.

Pour tout $h \in H$, on note $w(h)$ le vecteur aléatoire, défini par $w(h) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^T h_k(s)\, dw_s^k$.

Ainsi on obtient un processus Gaussien réel centré $\{w(h),\ h \in H\}$ de fonction de covariance $E\big[w(h_i)\, w(h_j)\big] = \langle h_i, h_j \rangle_H$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$, défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Considérons l'espace de Hilbert séparable $\mathbb{R}^d$. On dit qu'un vecteur aléatoire $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est régulier s'il peut s'écrire sous la forme

$$F(w) = \sum_{i=1}^{M} f_i\big(w(h_1), ..., w(h_n)\big),$$

où $f_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^d)$ et $h_1, ..., h_n \in H$.

La dérivée N-ième de $F\,(N \geq 1)$ est le vecteur aléatoire à valeurs dans $H^{\otimes N} \times \mathbb{R}^d$ défini par

$$D^{(N)}_{r_1 \dots r_N} F(w) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{i_1, ..., i_N = 1}^{n} \frac{\partial^N f_i}{\partial x_{i_1}, ..., \partial x_{i_N}} \big(w(h_1), ..., w(h_n)\big)\, h_{i_1}(r_1) ... h_{i_N}(r_N).$$

Pour tout réel $p > 1$ et tout entier naturel $N \geq 1$, on considère la semi-norme définie sur l'espace des fonctionnelles régulières $\mathcal{S}$ par

$$\|F\|_{p,N} = \|F\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|D^{(N)}F\|_{L^p(\Omega;H^{\otimes N}\times\mathbb{R}^d)},$$

et on note $\mathbb{D}^{p,N}$ l'espace de Banach obtenu par complétion de l'espace $\mathcal{S}$ pour cette semi-norme.

Alors, on a $\mathbb{D}^{p',N'}(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^d)$ si $p \leq p'$ et $N \leq N'$.

L'espace des fonctionnelles de Wiener régulières au sens du calcul de Mallliavin noté $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, est défini par

$$\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{p>1}\bigcap_{N>1} \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^d).$$

Considérons la décomposition en chaos de Wiener $L^2(\Omega,\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n$.

Alors, pour tout $F \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$ on a le développement $F = \sum_{n=0}^{+\infty} J_nF$, où J_n désigne l'opérateur de projection sur $\mathcal{H}_n$. L'espace $\mathbb{D}^{2,N}(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec l'ensemble des variables aléatoires $F \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)$, telles que

$$E(\|D^{(N)}F\|^2_{H^{\otimes N}\times\mathbb{R}^d}) = \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1)...(n-N+1)\, E\|J_nF\|^2_{\mathbb{R}^d} < +\infty.$$

Proposition 1.1.11.1.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^N(N \geq 1)$ à dérivées partielles de tous ordres bornées. Supposons que $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ appartient à $\mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^d)$, pour un $p > 1$. Alors, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R})$ et on a:

$$D^{(N)}\varphi(F) = \sum{}' \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{d} \nabla^m_{i_1\dots i_m}\varphi(F) D^{|I_1|}F^{i_1}...D^{|I_m|}F^{i_m}, \tag{1.28}$$

où le symbole $\sum'$ désigne la somme sur toutes les partitions $I_1 \cup ... \cup I_n$ de $\{1,...,N\}$, avec $|I_j| = card\ I_j$.

Notons $\delta^{(N)}$ le dual de l'opérateur $D^{(N)}$ défini sur $L^2(\Omega \times ([0,T] \times \mathbb{Z}_+)^N;\mathbb{R}^d)$.

Le domaine de $\delta^{(N)}$, noté $Dom\,\delta^{(N)}(\mathbb{R}^d)$, est l'ensemble des processus stochastiques $u \in L^2(\Omega \times ([0,T] \times \mathbb{Z}_+)^N; \mathbb{R}^d)$, tels qu'il existe une constante C, telle que

$$\left|E(< u, D^{(N)}F >_{H^{\otimes N} \otimes \mathbb{R}^d})\right| \leq C\|F\|_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^d)}$$

pour tout $F \in \mathcal{S}$.

Proposition 1.1.11.2.

Si $F \in \mathbb{D}^{2,N}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in Dom\,\delta^{(N)}(\mathbb{R}^d)$, on a la formule d'intégration par parties

$$E(\langle u, D^{(N)}F\rangle_{H^{\otimes N} \times \mathbb{R}^d}) = E(\langle \delta^{(N)}(u), F\rangle_{\mathbb{R}^d}). \tag{1.29}$$

On remarque que $\delta^{(N)}$ coïncide avec l'intégrale de Ramer-Skorohod multiple (cf.[62]).

Le résultat suivant permet de calculer sa dérivée N-ième.

Proposition 1.1.11.3.

Désignons $\lambda \otimes \nu$ par μ. Soit $u \in \mathbb{D}^{2,N}(H \otimes \mathbb{R}^d)$, tel que $D^{(M)}_{r_1 \ldots r_n} u$ est dans $Dom\,\delta(\mathbb{R}^d)$, pour tout M, $M \leq N$ et tout $(r_1, \ldots, r_M)$, μ^M - presque sûrement. Supposons de plus que

$$\int_{([0,T]\times\mathbb{Z}_+)^M} E(|\delta(D^{(M)}_{r_1 \ldots r_M} u)|^2)\mu(dr_1)\ldots\mu(dr_M) < +\infty,$$

pour tout $M \leq N$.

Alors, $\delta(u) \in \mathbb{D}^{2,N}(\mathbb{R}^d)$ et

$$D^{(N)}_{r_1 \ldots r_N}(\delta(u)) = \delta(D^{(N)}_{r_1 \ldots r_N} u) + \sum_{k=1}^{N} D^{(N-1)}_{r_1 \ldots r_{k-1} r_{k+1} \ldots r_N} u_{r_k}. \tag{1.30}$$

1.2. LE FILTRAGE NON LINEAIRE

1.2.1. INTRODUCTION

Le filtrage est une partie de la théorie des processus stochastiques, fortement motivée par les applications. Le problème du filtrage est le suivant: estimer "au mieux" les trajectoires d'un signal aléatoire x_t, connaissant une observation y_t (partielle et entachée d'erreurs) sur celui-ci. Il est bien connu que le meilleur estimateur d'une fonctionnelle de x_t, qui minimise le risque quadratique, est l'espérance conditionnelle de cette fonctionnelle par rapport à la tribu engendrée par les trajectoires de l'observation jusqu'au temps t. Calculer cette espérance conditionnelle, pour toute fonctionnelle, revient à déterminer la loi conditionnelle de x_t, sachant $\{y_s, 0 \leq s \leq t\}$.

Ce problème a été résolu, dans le cas de systèmes linéaires, par R. Kalman et R. Bucy (cf. [43] et [44]), pour étudier les trajectoires des satellites de la NASA. Le résultat qu'ils ont obtenu, connu sous le nom de "filtre de Kalman" (cf. [19] et [66]), a été utilisé dans de nombreux problèmes d'astronomie, de radio-guidage ainsi que de suivi de trajectoires. Notons que le "filtre de Kalman" est généralement le modèle utilisé par les ingénieurs après linéarisation des systèmes étudiés.

Le problème de filtrage pour des systèmes non linéaires est plus délicat à résoudre et on ne possède pas encore à ce jour d'algorithmes permettant de répondre à un certain nombre de problèmes pratiques.

J.M.C. Clark [16] a introduit la continuité du filtre par rapport à la trajectoire de l'observation pour la norme de Banach sur $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}^p)$.Cette propriété n'est vérifiée que dans un certain nombre de situations particulières (cf. [17], [24], [67], [80] et [81]). La continuité du filtre associé à un système non corrélé a été étudiée tout d'abord, dans le cas d'une observation à coefficients bornés, par M.H.A. Davis [17]. Le cas d'une observation à coefficients non bornés a été traité par H.J. Sussmann [80], pour le "cubic sensor problem". Ce résultat a été généralisé par W.H. Fleming et S.K. Mitter [27], pour une observation à coefficients polynomiaux, puis par H.J. Sussmann [81], à toutes les observations de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant une condition limite au voisinage de l'infini. La continuité du filtre associé à un système corrélé à observation unidimensionnel et à coefficients bornés a été étudiée par M.H.A. Davis [17]. P. Florchinger [28] a traité le cas de systèmes corrélés à observation unidimensionnel à coefficients non bornés.

La non linéarité de l'équation de Kushner-Stratonovitch (cf. [37], [66] ou [23], par exemple), satisfaite par le filtre, empêche tout progrès dans l'étude des propriétés de cette solution.

M. Zakai [85] a montré dans le cas de bruits non corrélés que le filtre non normalisé, s'il existe, est solution d'une équation différentielle stochastique de type parabolique. M.H.A. Davis [17], M.H.A. Davis et S.I. Marcus [18] et E. Pardoux [64] ont étendu la méthode de Zakai au cas de problèmes de filtrage non linéaire avec des bruits corrélés. Le cas d'un système de filtrage non linéaire, avec bruits indépendants et coefficients d'observation non bornés, a été traité par E. Pardoux [65], puis par J. Baras, G. Blankenship et W. Hopkins [1]. P. Florchinger [31] a établi l'équation de Zakai associée à un système de filtrage non linéaire corrélé à coefficients d'observation non bornés unidimensionnels.

La forme robuste de l'équation de Zakai a été introduite par J. Clark [16], pour définir un filtre "robuste" associé à un système avec bruits non corrélés et coefficients d'observation bornés. L'idée est de réduire, par une transformation multiplicative, l'équation de Zakai en une équation aux dérivées partielles déterministe, dont les coefficients dépendent de la trajectoire du processus d'observation. M.H.A. Davis [17] et J.M. Bismut et D. Michel [8] ont établi la forme robuste de l'équation de Zakai, dans le cas d'un système de filtrage non linéaire non corrélé à coefficients d'observation bornés. E. Pardoux [64-65] a démontré le même résultat par une méthode différente.

W. Hopkins [39] a établi, par une méthode analogue, la forme robuste de l'équation de Zakai, pour un sytème avec des bruits non corrélés à coefficients d'observations non bornés.

La régularité de la densité du filtre a été étudiée par de nombreux auteurs, dans le cas où le bruit qui engendre le signal est de dimension finie. D. Michel [56] et J.M. Bismut et D. Michel [8] ont résolu ce problème sous une condition de Hörmander locale, dans le cas d'un système avec des bruits corrélés et des coefficients d'observation bornés. Le cas de bruits non corrélés et des coefficients d'observations non bornés a été étudiée par G.S. Ferreyra [26]. P. Florchinger [29] a traité le cas de bruits corrélés et de coefficients d'observation non bornés.

Dans [31], on montre, à l'aide du calcul de Malliavin, sous une condition de Hörmander locale, que le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire à bruits non corrélés, coefficients d'observation bornés et un signal engendré par un processus de Wiener de dimension infinie, admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue.

La description de la loi d'un processus stochastique, solution d'une équation différentielle stochastique comme fermeture d'un ensemble de trajectoires, obtenu en remplacant les processus de Wiener figurant dans l'équation différentielle stochastique, par un contrôle de H^1, a été initialisée par D.Stroock et S.Varadhan [79].

En supposant que le filtre non normalisé admet une densité par rapport à la mesure de

Lebesgue et que les bruits sont non corrélés, M. Chaleyat-Maurel et D. Michel [12] ont déterminé le support de la densité dans l'espace $C([0,T],L^2(\mathbb{R}^n))$.
Dans [15], les mêmes auteurs ont décrit le support du filtre non normalisé, associé à un problème de filtrage non linéaire à bruits corrélés et coefficients d'observation bornés. en utilisant des résultats de continuité, ainsi qu'un théorème d'approximation. Dans ce travail, l'existence d'une densité n'est plus nécessaire.

1.2.2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet et w, v deux processus de Wiener standards indépendants, définis sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration complète engendrée par (w,v).

Considérons le système signal/observation $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$(1.31) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \displaystyle\int_0^t X_0(x_s)\,ds + \int_0^t X_i(x_s)\circ dw_s^i + \int_0^t \overline{X}_j(x_s)\circ dy_s^j \\ y_s = \displaystyle\int_0^t h(x_s)\,ds + v_t, \end{cases}$$

où

1. x_0 est une variable aléatoire de loi m_0, indépendante du processus de Wiener (w,v).
2. X_i, $0 \le i \le d$, et $\overline{X}_j$, $1 \le j \le n$, sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, de classe C^∞, à dérivées de tous ordres bornées.
3. h est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui est, ainsi que ses dérivées de tous ordres, à croissance au plus exponentielle.
4. $X_0 + h\overline{X}$ est à croissance sous-linéaire (pour éviter des solutions qui explosent).

Pour une formulation plus générale du système de filtrage, on renvoie le lecteur au cours de E. Pardoux à Saint-Flour [66].

On définit alors le filtre associé au système (1.31) par

Définition 1.2.2.1.

Pour tout t dans $[0,T]$, notons π_t le filtre associé au système (1.31), défini pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ par

$$(1.32) \qquad \pi_t\psi = E[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t],$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s /\, 0 \leq s \leq t)$.

Dans le cas où la fonction h est bornée ou le système non corrélé (i.e. $\overline{X} \equiv 0$), définissons le filtre non normalisé associé au système (1.31).

Pour cela, introduisons, pour tout t dans $[0,T]$, l'exponentielle de Girsanov associée au système (1.31) par

$$(1.33) \qquad Z_t = \exp\Big(\int_0^t h(x_s)\, dy_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s)\, ds\Big).$$

On définit alors une probabilité de référence $\overline{P}$ par la dérivée de Radon-Nikodym

$$(1.34) \qquad \frac{d\overline{P}}{dP}_{|\mathcal{Y}_t} = Z_t^{-1}.$$

Alors, par application du théorème de Girsanov, le processus stochastique y est, sous la probabilité $\overline{P}$, un processus de Wiener indépendant de w.

Le filtre non normalisé associé au système (1.31), est défini par

Définition 1.2.2.2.

Pour tout t dans $[0,T]$, *notons* ρ_t *le filtre non normalisé associé au système* (1.31), *défini pour toute fonction* ψ *dans* $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *par*

$$(1.35) \qquad \rho_t(\psi) = \overline{E}[\psi(x_t)\, Z_t / \mathcal{Y}_t],$$

où $\overline{E}$ *désigne l'espérance sous la probabilité* $\overline{P}$.

De plus, la formule de Kallianpur-Striebel permet de travailler de manière équivalente avec le filtre π_t ou le filtre non normalisé ρ_t.

Théorème 1.2.2.3.

Pour tout t dans $[0,T]$ *et toute fonction* ψ *dans* $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, *on a*

$$(1.36) \qquad \pi_t\psi = \frac{\rho_t\psi}{\rho_t 1}.$$

1.2.3. CONTINUITE DU FILTRE

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la continuité du filtre par rapport aux trajectoires de l'observation, pour la norme de Banach sur l'espace $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$. Pour d'autres notions de continuité du filtre, on renvoie le lecteur à [13] (continuité au sens de Sussmann) ou [14] (continuité au sens du calcul des variations stochastique) par exemple.

On a le résultat fondamental suivant:

Théorème 1.2.3.1.

Il existe une fonctionnelle Γ *de* $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathbb{R}$*, continue pour la norme de Banach sur* $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}^n)$*, telle que*

$$\Gamma(y) = \pi_t\psi \tag{1.37}$$

presque sûrement.

L'intérêt d'une telle notion est d'obtenir une formule valable trajectoire par trajectoire, permettant d'estimer le signal, même si on ne possède qu'une seule observation, ce qui est le cas en astronomie, par exemple.

1.2.4. EQUATIONS DU FILTRAGE

Sous les hypothèses du deuxième paragraphe de cette section, le filtre vérifie l'équation de Kushner-Stratonovitch.

Théorème 1.2.4.1.

Pour toute fonction ψ *dans* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$*, le filtre associé au système* (1.31) *est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\pi_t\psi = \pi_0\psi + \int_0^t \pi_s(\mathcal{L}\psi)\,ds + \int_0^t \Big(\pi_s(\mathcal{L}_i\psi) - \pi_s(h_i)\,\pi_s(\psi)\Big)\,\big(dy_s^i - \pi_s(h_i)\,ds\big). \tag{1.38}$$

où $\mathcal{L}_0$ *est l'opérateur différentiel du second ordre, défini par*

$$\mathcal{L}_0 = X_0 + \sum_{i=1}^n h^i\overline{X}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d X_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \overline{X}_i^2 \tag{1.39}$$

et $\mathcal{L}_i$, $1 \leq i \leq n$ est l'opérateur du premier ordre, défini par

$$\mathcal{L}_i = h^i + \overline{X}_i. \tag{1.40}$$

L'équation de Kushner-Stratonovitch étant non linéaire, il est assez difficile d'obtenir de bons schémas numériques pour résoudre celle-ci. Dans la pratique, les ingénieurs utilisent l'équation de Zakai [85] pour laquelle des schémas numériques ont été établis (cf. [51] et [35]).

Théorème 1.2.4.2.

Pour toute fonction ψ dans $C_0(I\!R^m, I\!R)$, le filtre non normalisé associé au système (1.31), *est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastiques*

$$\rho_t\psi = \rho_0\psi + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_0\psi)\, ds + \int_0^t \rho_s(\mathcal{L}_i\psi)\, dy_s^i. \tag{1.41}$$

De plus, si pour tout t dans $[0, T]$, on pose

$$q_t(x) = p_t(x) \exp(-\langle h(x), y_t\rangle), \tag{1.43}$$

alors, $q_t(x)$ vérifie l'équation de "Zakai robuste", i.e. $q_t(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles ordinaire

$$q_t(x) = q_0(x) + \int_0^t \Big(\mathcal{L}_{y_s} q_s(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{L}_i)^2 q_s(x)\Big)\, ds, \tag{1.44}$$

où $\mathcal{L}_{y_t}$ est l'opérateur différentiel du second ordre, paramétrisé par y_t, défini pour toute fonction q par

$$\mathcal{L}_{y_t} q = \exp(-\langle h(x), y_t\rangle)\, \mathcal{L}_0\big(\exp(\langle h(x), y_t\rangle) q\big). \tag{1.45}$$

1.2.5. REGULARITE ET SUPPORT DU FILTRE

Par application du calcul de Malliavin, on montre le théorème suivant.

Théorème 1.2.5.1.

Supposons que l'espace engendré par les champs de vecteurs

$$X_1, ..., X_d; [X_{i_1}, X_{i_2}]_{i_1,i_2=0}^d; ...; [X_{i_1}, [X_{i_2}, [..., [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}]]...]]_{i_1,...,i_p=0}^d \cdots$$

est de dimension m. Alors, le filtre non normalisé ρ_t admet une densité p_t de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

De plus, cette densité est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ et l'application $t \to p_t$ de $]0,T]$ dans $\mathcal{S}$ est continue.

Comme p_t appartient à $\mathcal{S}$, on peut considérer l'espace de Fréchet $E_\varepsilon = \mathcal{C}([\varepsilon,T],\mathcal{S})$. pour tout ε dans $]0,T[$ et décrire le support de la loi de p_t sur E_ε, à l'aide d'une équation aux dérivées partielles parabolique contrôlée.

On remplace y par un contrôle $u \in H^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ dans les équations (1.31) et (1.33) et on introduit, pour tout u dans $H^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ le filtre non normalisé approché, défini pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ par

$$\rho_t^u \psi = \overline{E}^w [\psi(x_t^u)\, Z_t^u], \tag{1.46}$$

où (x_t^u, Z_t^u) est la solution du système

$$\begin{cases} x_t^u = \displaystyle\int_0^t X_0(x_s^u)\,ds + \int_0^t X_i(x_s^u) \circ dw_s^i + \int_0^t \overline{X}_j(x_s^u)\,\dot{u}_s^j\,ds \\ Z_t^u = \exp\Big(\displaystyle\int_0^t h_i(x_s^u)\,u_s^i\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s^u)\,ds\Big) \end{cases} \tag{1.47}$$

Si $p_t^u(x)$ désigne la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ du filtre non normalisé approché, on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.5.2.

Pour tout t dans $[0,T]$, tout x dans $I\!R^m$ et tout contrôle u dans $H^1([0,T],I\!R^n)$, $p_t^u(x)$ est l'unique solution de l'équation aux dérivées partielles parabolique

$$\frac{dp_t^u(x)}{dt} = \mathcal{L}_0^* p_t^u(x) + \big(h_i(x)\,\dot{u}_t^i\big)\,p_t^u(x). \tag{1.48}$$

Si $\tilde{p}$ et $\tilde{p}^u$ désignent les restrictions de p et p^u sur $[\varepsilon, T]$, $\mathcal{R}_\varepsilon$ le sous-ensemble de E_ε défini par $\mathcal{R}_\varepsilon = \{p^u_\cdot(\cdot),\, u \in H^1([0,T], \mathbb{R}^n\}$ et $\mathcal{P}_\varepsilon$ la loi de la variable aléatoire $y \to \tilde{p}^y_\cdot(\cdot)$, alors on a:

Théorème 1.2.5.3.

$$Support(P_\varepsilon) = \overline{R}_\varepsilon,$$

où l'adhérence est prise dans E_ε.

Chapitre II

DIFFUSIONS ENGENDREES PAR DES OPERATEURS DU SECOND ORDRE INFINIMENT DEGENERES

2.1. LE THEOREME DE HORMANDER POUR DES OPERATEURS DU SECOND ORDRE INFINIMENT DEGENERES AVEC DES COEFFICIENTS DEPENDANT DU TEMPS

2.1.1. INTRODUCTION

Le but de cette section est de démontrer l'existence d'une densité de classe C^∞ pour une diffusion, solution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients dépendent du temps, sous des hypothèses moins restrictives que la condition de Hörmander. En effet, on permet que la condition générale de Hörmander fasse défaut d'une certaine façon "exponentielle", dans un sens qu'on précisera dans l'énoncé du théorème 2.1.2.1. sur un ensemble de surfaces dans une sous-variété de codimension 1.

La démonstration du théorème est de nature probabiliste. Elle est basée sur l'application du calcul de Malliavin à la solution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients sont Hölder-continus par rapport à la variable de temps et de classe C^∞ par rapport à la variable d'espace. Cette méthode nécessite des estimations précises pour des processus de diffusion dans un espace euclidien.

Rappelons que S.Tanigushi [83] et P.Florchinger [29] ont démontré, sous une condition de Hörmander forte globale, respectivement une condition de Hörmander locale, l'existence d'une densité de classe C^∞ pour une diffusion 1, sloution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients dépendent du temps.
D'autre part D.R.Bell et S.E.A.Mohammed [4] ont traité, sous des hypothèses moins restrictives, le cas de coefficients homogènes.

Cette section fait la synthèse des deux derniers travaux cités en traitant le cas des coefficients dépendant du temps sous des hypothèses moins restrictives que celles de [29]. Elle est subdivisée en trois paragraphes, organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe on précise les notations et on donne les énoncés des théorèmes qu'on prouve dans le troisième paragraphe. On commence par rappeler les lemmes clés de [4] qui seront utilisés dans la suite. Puis, dans le lemme 2.1.3.4., on établit une version locale des hypothèses des théorèmes, qui permet de démontrer ensuite le résultat principal.

2.1.2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener standard de dimension d, i.e. Ω est l'espace de Banach $C([0,T], \mathbb{R}^d)$, tel que $w(0) = 0$, pour tout w dans Ω, muni de la norme $\|w\|_\Omega = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$, P est la mesure de Wiener standard et $\mathcal{F}$ le complété de la σ-algèbre de Borel sur Ω par rapport à la mesure P. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une famille croissante, continue à droite de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$ contenant les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Pour tout $q \geq 1$, notons $L^q = L^q(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de Banach de toutes les fonctionnelles de Wiener $f : \Omega \to \mathbb{R}$, intégrables à la puissance q, muni de la norme $\|f\|_q := (E|f|^q)^{\frac{1}{q}}$. Dans la suite, on désignera la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$ par $|\cdot|$ et la norme correspondante sur l'espace des matrices $m \times m$ par $\|\cdot\|$.

Considérons $d+1$ champs de vecteurs dépendant du temps $X_0, ..., X_d$ sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^m$, s'écrivant

$$X_i(t,x) = X_i^j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 0 \leq i \leq d.$$

On suppose que les champs de vecteurs X_i , $0 \leq i \leq d$, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, sont Hölder-continus en t uniformément sur $[0,T] \times \mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact

$\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^m$, qu'ils sont de classe C^∞ en x à t fixé dans $[0,T]$, et qu'eux-mêmes, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, sont uniformément bornés.

Si x_t est une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$, on notera par $\circ dx_t$ (respectivement dx_t) sa différentielle au sens de Stratonovitch (respectivement d'Itô).

Soit le processus stochastique x_t à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(s,x_s)\,ds + \int_0^t X_i(s,x_s) \circ dw_s^i, \tag{2.1}$$

où x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ possédant des moments de tous ordres bornés et où $w_t = (w_t^1, ..., w_t^d)$ désigne un $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener de dimension d.

Soit $c : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et L l'opérateur differentiel du second ordre défini par $L := \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d} X_i^2 + X_0 + c$.

Dans la suite, on considère les champs de vecteurs X_i, $0 \leq i \leq d$, comme vecteurs colonnes. Pour tout entier positif n, on notera $E^{(n)}$ la matrice à m lignes qui admet pour colonnes les champs de vecteurs

$$X_1, ..., X_d; [X_{i_1}, X_{i_2}]_{i_1,i_2=0}^d; ...; [X_{i_1}, [X_{i_2}, [..., [X_{i_{n-1}}, X_{i_n}]]...]]_{i_1,i_2,...,i_n=0}^d,$$

ordonnés d'une façon fixée une fois pour toutes. Ici, le symbole $[\cdot,\cdot]$ désigne le crochet de Lie des champs de vecteurs.

Pour tous x dans D, t dans $[0,T]$ et $n \geq 1$, on note $\lambda^{(n)}(t,x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $E^{(n)}(t,x)E^{(n)\tau}(t,x)$, où τ désigne la transposée d'une matrice.

Remarquons que $\lambda^{(n)}(t,x) > 0$, pour un certain $n \geq 1$, est équivalente à la condition de Hörmander pour l'opérateur parabolique $L + \frac{\partial}{\partial t}$ au point (t,x) de $[0,T] \times D$. De manière analogue à [4], on appelle point de Hörmander parabolique pour l'opérateur $L + \frac{\partial}{\partial t}$ tout point x dans D pour lequel il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\lambda^{(n)}(t,x) > 0$, pour tout t dans $[0,T]$. L'ensemble de tous les points paraboliques de D sera noté H. Notons que H est ouvert dans D. L'ensemble fermé complémentaire H^c sera appelé l'ensemble des points paraboliques non-Hörmander.

On peut maintenant énoncer les théorèmes principaux:

Théorème 2.1.2.1.

Supposons que l'ensemble des points paraboliques non-Hörmander H^c est contenu dans une sous-variété N de D de classe C^2 et de codimension 1 et qu'en chaque point de H^c au moins un des champs de vecteurs $X_1(t,\cdot),\dots,X_d(t,\cdot)$ est transversal par rapport à N, pour tout t dans $[0,T]$. Supposons de plus que, pour tout point x dans H^c, il existe un entier $n \geq 1$, un voisinage ouvert U de x et un exposant $p \in]-1,0[$, tel que $\lambda^{(n)}(t,y) \geq \exp\{-[\rho(y,N)]^p\}$, pour tous t dans $[0,T]$ et y dans U.

Alors, la loi du processus x_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Remarque:
Si les champs de vecteurs vérifient la condition de Hörmander locale et ne sont pas uniformément bornés, alors S.Tanigushi [83] donne un contre exemple pour lequel la matrice de Malliavin associée au système est dégénérée.

En effet, si on considère les champs de vecteurs X_0 et X_1 définies sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$ par $X_0(t,x) = (x_1)^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ et $X_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2t\,x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$, on montre facilement que l'hypothèse de Hörmander est satisfaite en tout point, c'est-à-dire que X_1 et $[X_1,[X_0,X_1]]$ engendrent $\mathbb{R}^2$.
D'autre part, S.Tanigushi [83] montre que la matrice de Malliavin

$$\begin{pmatrix} t-s & 2(t-s)^2(x_1+w_t-w_s) \\ 2(t-s)^2(x_1+w_t-w_s) & 4(t-s)^3(x_1+w_t-w_s)^2 \end{pmatrix}$$

associée au système est dégénérée.

Théorème 2.1.2.2.

Notons X_{d+1} l'action de l'opérateur $L-c$ sur les fonctions régulières sur D. Supposons que, pour tout x dans D, il existe un entier $n \geq 1$, tel que exactement une des deux conditions suivantes soit vérifiée:

(a) $\lambda^{(n)}(t,x) > 0$, pour tout $t \in [0,T]$.

(b) Il existe un entier $k \geq 1$, un voisinage $U \subseteq D$ de x, une fonction $\psi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et un exposant $p \in]-\frac{2}{(18)^k}, 0[$, tel que

(i) $\psi(x) = 0$ *et il existe* $1 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq d+1$, *tel que*

(2.2) $$X_{i_1} X_{i_2} ... X_{i_k}(t,\cdot)\psi(x) \neq 0, \quad \textit{pour aucun } t \in [0,T].$$

(ii) $\lambda^{(n)}(t,y) \geq \exp(-|\psi(y)|^p)$, *pour tous* $t \in [0,T]$ *et* $y \in U$.

Alors, la loi du processus x_t *admet une densité de classe* C^∞ *par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $I\!R^m$.

2.1.3. PREUVES DES RESULTATS

Dans ce paragraphe, $T > 0$ est un temps fixé. On introduit tout d'abord une notion qui va être très utile pour la suite:

Définition 2.1.3.1.

Une variable aléatoire non négative X *est dite exponentiellement positive, s'il existe des constantes positives* c_1 *et* c_2, *qu'on appelle les caractéristiques de* X, *tel que*

$$P(X < \varepsilon) < \exp(-c_1\,\varepsilon^{-1}),$$

pour tout $\varepsilon \in]0, c_2[$.

On va également utiliser fréquemment le lemme suivant (cf.[40] lemme 10.5 p 398):

Lemme 2.1.3.2.

Soit $y : [0,T] \times \Omega \longrightarrow I\!R^m$ *un processus d'Itô de la forme*

(2.3) $$dy_t = a_i(t)\, dw_t^i + b(t)dt, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où $a_1, ...a_d, b : [0,T] \times \Omega \longrightarrow I\!R^m$ *sont des processus mesurables,* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-adaptés, bornés presque sûrement par une constante déterministe* c_3. *Soit* $r > 0$ *et* σ *la variable aléatoire définie par*

(2.4) $$\sigma := \inf\{s > 0 : |y(s) - y(0)| = r\} \wedge T.$$

Alors, σ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *temps d'arrêt exponentiellement positif dont les caractéristiques dépendent seulement de* r, c_3, d *et* m.

En prenant constante la variable de temps dans les coefficients de l'équation (2.1) à partir d'un temps fixé, on peut définir, pour tout $\xi \in [0,T]$, le processus stochastique suivant (cf. [29]):

$$(2.5) \qquad x_{\xi,t} = \begin{cases} x_t, & \text{si } t \le \xi \\ x_\xi + \int_\xi^t X_0(\xi, x_{\xi,s})\, ds + \int_\xi^t X_i(\xi, x_{\xi,s}) \circ dw_s^i, & \text{si } t \ge \xi. \end{cases}$$

A ce processus on associe comme d'habitude:

Definition 2.1.3.3.

Pour tout ξ dans $[0,T[$, notons $\phi_{\xi,t}$ la dérivée du flot stochastique associé au processus $x_{\xi,t}$.

Dans la suite, on considère le temps d'arrêt σ_1, défini par

$$(2.6) \qquad \sigma_1 := \inf\{\, s > 0 : |x_s - x_0| \ge \frac{1}{2} \text{ ou } \|\phi_{t,s}^{-1} - I\| \ge \frac{1}{2},\ \forall t \le s\} \wedge T$$

Alors, on déduit du lemme 2.1.3.2. que σ_1 est un temps d'arrêt exponentiellement positif avec des caractéristiques indépendantes de x_0.

De plus, d'après les hypothèses sur les champs de vecteurs, on a, pour tout t, t' dans $[0,T]$:

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} &\sup_{i\in\{0,\dots,d\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |X_i(t,x) - X_i(t',x)| \le c_4|t-t'|^\alpha \\ &\text{et} \\ &\sup_{i\in\{0,\dots,d\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |\nabla X_i(t,x) - \nabla X_i(t',x)| \le c_4|t-t'|^\alpha, \end{aligned}$$

où $\mathcal{K}$ désigne le compact $\{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| \le \frac{1}{2}\}$ et α l'exposant des coefficients de Hölder.

Donc, en posant $\delta = (\frac{\varepsilon^2}{c_4})^{\frac{1}{\alpha}}$, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$ tel que $|t - t'| \le \delta$, on a:

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} &\sup_{i\in\{0,\dots,d\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |X_i(t,x) - X_i(t',x)| \le \varepsilon^2 \\ &\text{et} \\ &\sup_{i\in\{0,\dots,d\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |\nabla X_i(t,x) - \nabla X_i(t',x)| \le \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant les deux lemmes clés de [4]:

Lemme 2.1.3.4.

Soit $y : [0,T] \to I\!R^m$ *le processus d'Itô défini par* (2.3). *Supposons que* $\sigma \leq T$ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$*-temps d'arrêt exponentiellement positif, tel que au moins un des coefficients de diffusion* a_i *satisfait la condition:* $|a_i(s)| \geq \delta$, *presque sûrement pour tout* $0 < s < \sigma$, *pour un certain* $\delta > 0$ *déterminé. Alors, il existe, pour tout* $n \geq 2$, *des constantes positives* c_5, c_6 *et* T_0, *telles que, pour tout* t *dans* $]0, T_0[$ *et tout* ε *dans* $]0, c_5\, t^{n+1}[$, *on a*

$$P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma} |y_s|^n \, ds < \varepsilon\Big) < \exp\left\{-c_6\, \varepsilon^{-\frac{1}{n+1}}\right\}. \tag{2.9}$$

De plus, les constantes c_5 *et* c_6 *dépendent seulement de* d, c_3, δ *et des caractéristiques de* σ, *tandis que la constante* T_0 *dépend uniquement des caractéristiques de* σ.

Lemme 2.1.3.5.

Soient σ *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *temps d'arrêt exponentiellement positif,* $p \in]-1,1[$ *et* y *un processus d'Itô de la forme* (2.3). *Supposons que* y *et* σ *satisfont une estimation de la forme* (2.9), *pour un* $n > -\frac{p}{p+1}$. *Alors, il existe des constantes positives* T_1, c_7, c_8 *et* $q > 1$, *telles que, pour tout* t *dans* $]0, T_1[$ *et tout* $\varepsilon < \exp\left\{-c_7\, t^{-\frac{1}{q}}\right\}$, *on a*

$$P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma} \exp(-|y_s|^p)\, ds < \varepsilon\Big) < \exp\left\{-c_8 |log\, \varepsilon|^q\right\}. \tag{2.10}$$

De plus, les constantes T_1, c_7, c_8 *et* q *sont complètement déterminées par la constante* c_3 *du lemme* 2.1.3.1., *les constantes* c_5, c_6 *et* n *de* (3.7) *et les caractéristiques de* σ.

Ensuite, grâce au lemme suivant, on établit une version locale des hypothèses du théorème 2.1.2.1.

Lemme 2.1.3.6.
Supposons les hypothèses du théorème 2.1.2.1. *vérifiées. Alors, pour tout* x *dans* D, *il existe un entier* $n \geq 1$, *tel que exactement une des* 2 *conditions suivantes soit vérifiée:*

(a) $\lambda^{(n)}(t,x) > 0$, *pour tout* $t \in [0,T]$

(b)Il existe un voisinage ouvert $U \subseteq D$ *de* x, *une fonction* $\psi : U \to I\!R$ *de classe* C^2 *et un exposant* $p \in]-1, 0[$, *tel que:*

(i) $\psi(x) = 0$ *et* $\nabla\psi(x) \cdot X_i(t,x) \neq 0$*, pour au moins un* $i = 1, ..., d$ *et* $\forall t \in [0,T]$.

(ii) $\lambda^{(n)}(t,y) \geq \exp(-|\psi(y)|^p)$*, pour tous* $t \in [0,T]$ *et* $y \in U$.

Preuve:
Il suffit de montrer que, sous les hypothèses du théorème 2.1.2.1., la condition (b) est vérifiée, pour tout $x \in H^c$. Comme N est une hypersurface de $\mathbb{R}^m$ de classe C^2, il existe une carte (V,θ) de classe C^2, centrée en x, tel que $\theta := (\theta_1, \theta_2) : V \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ est un C^2-difféomorphisme ayant comme image l'ensemble ouvert $\theta(V)$, avec $\theta(x) = (0,0)$ et $\theta(N \cap V) = (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) \cap \theta(V)$. De plus, les fonctions coordonnées locales $\theta_1 : V \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$ et $\theta_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^2, avec $\nabla\theta_2(z) \neq 0$, pour tout z dans V et $N \cap V = \theta_2^{-1}\{0\} \cap V$. Par la condition de transversalité, il existe un $i = 1, ..., d$, tel que $X_i(t,x) \notin T_xN$, pour aucun $t \in [0,T]$.

Or, $T_xN = [D\theta_2(x)]^{-1}\{0\}$, où $D\theta_2(x)$ désigne la dérivée de Fréchet de θ_2 en x. Donc, $\nabla\theta_2(x).X_i(t,x) \neq 0$, pour aucun t dans $[0,T]$.

Soit U_1 le voisinage ouvert de x de l'énoncé du théorème 2.1.2.2. Choisissons une boule ouverte $V_1 := B(x, \delta_1) \subseteq U_1 \cup V$, centrée en x et de rayon $\delta_1 > 0$. Soit $V_2 \subset V_1$ la boule $B(x, \frac{\delta_1}{2})$. Alors, pour tout y dans V_2, $\rho(y,N) = \min\big(\rho(y, N \cap V_1); \rho(y, N \cap V_1^c)\big)$.

Or, $\rho(y, N \cap V_1) \leq \frac{\delta}{2} + |y - x| \leq \rho(y, N \cap V_1^c)$, donc $\rho(y,N) = \rho(y, N \cap V_1)$.

Soient maintenant y dans V_2 et z dans $N \cap V_1$. Alors, comme θ est Lipschitz-continue, il existe une constante positive k, telle que

$$|y - z| > k\,|\theta(y) - \theta(z)| \geq k\,|\theta_2(y)|.$$

Donc, $\rho(y,N) \geq k\,|\theta_2(y)|$ pour tout y dans V_2. Prenons $U := V_2$ et $\psi := k\,\theta_{2|U}$. Alors, d'après les hypothèses du théorème 2.1.2.1., il existe un entier $n \geq 1$ et un exposant p dans $]-1, 0[$, tel que $\lambda^{(n)}(t,y) \geq \exp\{-[\rho(y,N)]^p\} \geq \exp\{-|\psi(y)|^p\}$ pour tous $t \in [0,T]$ et $y \in U$.

$\square$

Preuve du théorème 2.1.2.1.:
On suit le schéma de preuve de [4] et on l'étend à des champs de vecteurs avec des coefficients qui dépendent du temps, en utilisant la méthode développée dans [29].

On écrit $[0,T]$ comme réunion d'intervalles de longueur au plus δ. Soient N l'entier, tel que $\frac{T}{\delta} \leq N \leq \frac{T}{\delta} + 1$ et $(t_i)_{0\leq i<N}$ une suite de réels appartenant à $[0,T]$, telle que $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{N-1} < t_N = T$, avec $|t_{i+1} - t_i| \leq \delta$ pour tout i, $0 \leq i \leq N-1$.

Sans manque de généralité, on prend $D = \mathbb{R}^m$ et on suppose que n est un entier. pour lequel une des conditions du lemme 2.1.3.6. est vérifiée pour un point x^* dans le support de x_0.

Soit t dans $]0,T[$. Alors, pour tout u dans S^{m-1}, on a

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2\, ds < \varepsilon\Big)$$
$$\leq P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \varepsilon\Big).$$

Or,

$$\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2 = \langle\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 + \langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2 - \langle\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}).\, u\rangle^2$$

$$\Rightarrow P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \varepsilon\Big)$$
$$= P\Bigg[\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)$$
$$+\Big(\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2 - <\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}),u>^2\Big)\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \frac{3\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\Bigg]$$

$$\Rightarrow P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \varepsilon\Big)$$
$$\leq P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \frac{3\varepsilon}{2}\Big)$$
$$+P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}|\langle\phi_s^{-1}\, X_j(s,x_s),u\rangle^2 - \langle\phi_{t_i,s}^{-1}\, X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2|\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds > \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

On va scinder ce qui suit en deux étapes.

Dans la première étape, on montrera qu'il existe des constantes positives c_{14} et c_{15}, ainsi que des exposants r_3 et r_4, tous indépendants de $u \in S^m$, tels que, pour tous t dans $]0,T[$,

x dans le support de x_0 et ε dans $]0, c_{14}[$, on a

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds<\frac{3\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq \exp(-c_{15}\,\varepsilon^{-r_3})+P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde N}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}K_l(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds<\varepsilon^{r_4}\Big),$$

où les champs de vecteurs $K_1,\ldots,K_{\tilde N}$ désignent les colonnes de la matrice $E^{(n)}$.

Puis, dans la deuxième étape, on montrera qu'on peut trouver des constantes positives c_{21} et r_5, telle que:

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}|\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle^2-\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2|1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds>\frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq \exp(-c_{21}\,\varepsilon^{-r_5}).$$

Finalement, on combinera ces deux résultats partiels pour en déduire la preuve du théorème.

• *Première étape:*

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds<\frac{3\varepsilon}{2}\Big)=P(A)$$

$$=P(A\cap E)+P(A\cap E^c)$$

où $A:=\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds<\frac{3\varepsilon}{2}\Big)$

et $E:=\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\Big[\sum_{l=1}^{n}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}[X_j,X_l](t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2$

$$+\langle\phi_{t_i,s}^{-1}\Big\{[X_j,X_0]+\tfrac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{d}[X_j,[X_l,X_k]]\Big\}(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2\Big]1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds<\varepsilon^{\alpha}\Big).$$

avec $\alpha=\frac{1}{18}$.

Puisque les champs de vecteurs intervenant dans l'équation (2.5) ne dépendent pas du temps, pour s dans $[t_i,t_{i+1}]$, on peut appliquer le lemme 6.5 de [3] (cf. aussi theorem

A.24 de [48]), et il existe donc des constantes positives c_{10} et c_{11}, indépendantes de u dans S^{m-1}, telles que

$$P(A \cap E^c) \leq c_{10} \exp(-c_{11}\, \varepsilon^{-\alpha}). \tag{2.11}$$

D'autre part, $E \subseteq F \cap G$, avec

$$F := \left(\sum_{l,j=1}^{d} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} [X_j, X_l](t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \varepsilon^{\alpha} \right)$$

et

$$G := \left(\sum_{j=1}^{d} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} \left\{ [X_j, X_0] + \frac{1}{2} \sum_{l,k=1}^{d} [X_j, [X_l, X_k]] \right\} (t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \varepsilon^{\alpha} \right).$$

Par conséquent,

$$P\left(\sum_{j=1}^{d} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} X_j(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \frac{3\varepsilon}{2} \right) \tag{2.12}$$
$$\leq c_{10} \exp(-c_{11}\, \varepsilon^{-\alpha}) + P(A \cap F \cap G),$$

et en appliquant la méthode précédente à $P(A \cap F \cap G)$, on obtient

$$P(A \cap F \cap G) \leq c_{12} \exp(-c_{13}\, \varepsilon^{-\alpha^2}) + P(A \cap F \cap G \cap H), \tag{2.13}$$

où $H := \left(\sum_{l,j,k=1}^{d} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} [X_j, [X_l, X_k]](t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \varepsilon^{\alpha^2} \right)$.

Il est facile de voir que

$$G \cap H \subseteq \left(\sum_{j=1}^{d} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} [X_j, X_0](t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \varepsilon^{r_1} \right),$$

pour un certain $r_1 \in]0,1[$ et un ε suffisamment petit. Donc,

$$A \cap F \cap G \cap H \subseteq \left(\int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \langle \sum_{j=1}^{d} (\phi_{t_i,s}^{-1} X_j(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{l,j=0}^{d} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} [X_j, X_l](t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \right\} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \varepsilon^{r_2} \right),$$

pour un certain $r_2 \in]0,1[$ et un ε suffisamment petit.

En combinant ceci avec (2.12) et (2.13), on obtient

$$(2.14) \quad P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds < \frac{3\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq c_{10}\exp(-c_{11}\,\varepsilon^{-\alpha}) + c_{12}\exp(-c_{13}\,\varepsilon^{-\alpha^2}) + P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\Big\{\langle\sum_{j=1}^{d}(\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2$$

$$+\sum_{l,j=1}^{d}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}[X_j,X_l](t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2\Big\}\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds < \varepsilon^{r_2}\Big).$$

En itérant cette procédure, on obtient finalement que pour tout $n \geq 1$, il existe des constantes positives c_{14} et c_{15}, ainsi que des exposants r_3 et r_4, tous indépendants de u dans S^{m-1}, tels que, pour tous t dans $]0,T[$, x dans le support de x_0 et ε dans $]0,c_{15}[$. on a

$$(2.15) \quad P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds < \frac{3\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq \exp(-c_{15}\,\varepsilon^{-r_3}) + P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde N}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}K_l(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds < \varepsilon^{r_4}\Big),$$

où les champs de vecteurs $K_1,...,K_{\tilde N}$ désignent les colonnes de la matrice $X^{(n)}$.

• *Deuxième étape:*

Pour tout i, $0 \leq i \leq N-1$ et tout j, $1 \leq j \leq d$, on a:

$$|\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle^2 - \langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2|$$

$$\leq |\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle + \langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle| \times |\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle - \langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle|.$$

Donc, d'après l'inégalité de Schwarz et (2.8), on en déduit, pour tout $s \in [t_i,t_{i+1}[$, tel que $s \leq \sigma_1$:

$$\sum_{j=1}^{d} |\langle \phi_s^{-1} X_j(s, x_s), u\rangle^2 - \langle \phi_{t_i,s}^{-1} X_j(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2|$$

$$\leq c_{16}(1 + \|\phi_s^{-1}\|)(\varepsilon^2 + |x_s - x_{t_i,s}| + \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\|),$$

où c_{16} est une constante qui dépend seulement de d, m et de la quantité $K_X = \sup_{j\in\{0,\dots,d\}} \sup_{(t,x)\in[0,T]\times I\!R^m} (|X_j(t,x)| + |\nabla X_j(t,x)|)$.

Par conséquent,

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1} |\langle \phi_s^{-1} X_j(s, x_s), u\rangle^2 - \langle \phi_{t_i,s}^{-1} X_j(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2| 1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds > \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1} c_{16}(1 + \|\phi_s^{-1}\|)(\varepsilon^2 + |x_s - x_{t_i,s}| + \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\|)1\!\!1_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds > \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma_1}^{t_{i+1}\wedge\sigma_1} c_{16}(1 + \|\phi_s^{-1}\|)(\varepsilon^2 + |x_s - x_{t_i,s}| + \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\|)ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big). \tag{2.16}$$

Or, pour tout $i \in \{0, \dots, N-1\}$, on a, d'après la section 1.4. de [29]:

$$P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma_1}^{t_{i+1}\wedge\sigma_1} c_{16}(1 + \|\phi_s^{-1}\|)(\varepsilon^2 + |x_s - x_{t_i,s}| + \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\|)ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big) \tag{2.17}$$

$$\leq P\big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma_1, t_{i+1}\wedge\sigma_1[} |x_s - x_{t_i,s}| > K_m\varepsilon\big) + P\big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma_1, t_{i+1}\wedge\sigma_1[} \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\| > K_m\varepsilon\big),$$

où $K_m = \frac{1}{(15+6\sqrt{m})(T+1)c_{16}}$.

D'autre part, en prenant $\nu = K_m\varepsilon$ dans le lemme 1.3.2.4 de [29], il existe deux constantes positives c_{17} et c_{18}, qui dépendent seulement de T, m, d, p et K_X, telles que:

$$P\big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma_1, t_{i+1}\wedge\sigma_1[} |x_s - x_{t_i,s}| > K_m\varepsilon\big) \leq c_{17}\,\delta\,\varepsilon^p$$

et

$$P\big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma_1, t_{i+1}\wedge\sigma_1[} \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\| > K_m\varepsilon\big) \leq c_{18}\,\delta\,\varepsilon^p.$$

Donc, d'après (2.17) on a pour tout $p > 0$,

$$P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma_1}^{t_{i+1}\wedge\sigma_1} c_{16}(1 + \|\phi_s^{-1}\|)(\varepsilon^2 + |x_s - x_{t_i,s}| + \|\phi_s^{-1} - \phi_{t_i,s}^{-1}\|)ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big) \leq c_{19}\,\delta\,\varepsilon^p,$$

où c_{19} est une constante strictement positive dépendant seulement de T, m, d, p et K_X.

De plus, d'après la définition de N, il y a moins de $\frac{T}{\delta}+1$ termes figurant dans la somme (2.16), donc on obtient pour tout $p>0$:

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}|\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle^2-\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2|\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds>\frac{\varepsilon}{2}\Big)\le c_{20}\,\varepsilon^p,$$

où c_{20} est une constante strictement positive dépendant seulement de T, d, m, p et K_X.

Quitte à prendre p assez grand, on peut alors trouver des constantes positives c_{21} et r_5 telles que

(2.18)
$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}|\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle^2-\langle\phi_{t_i,s}^{-1}X_j(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2|\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)ds>\frac{\varepsilon}{2}\Big)$$
$$\le\exp(-c_{21}\,\varepsilon^{-r_5}).$$

En combinant les résultats de la première et de la deuxième étape, (i.e. (2.15) et (2.18)) on trouve:

$$P\Big(\sum_{j=1}^{d}\int_0^{t}\langle\phi_s^{-1}X_j(s,x_s),u\rangle^2ds<\varepsilon\Big)\le+\exp(-c_{21}\varepsilon^{-r_6}) \tag{2.19}$$
$$+P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde N}\int_0^{t\wedge\sigma_1}\sum_{i=0}^{N-1}\langle\phi_{t_i,s}^{-1}K_l(t_i,x_{t_i,s}),u\rangle^2\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\,ds<\varepsilon^{r_4}\Big),$$

où $r_6=r_3\wedge r_5$ et $c_{22}=c_{21}\vee c_{15}$.

Notons Q_t la matrice de covariance de Malliavin associée au processus stochastique x_t. Alors, d'après les résultats du chapitre I, $Q_t=\phi_t\,C_t\,\phi_t^{T}$, où C_t désigne la matrice définie par

$$C_t=\int_0^t\sum_{j=1}^{d}(\phi_s^{-1}X_j(s,x_s))\,(\phi_s^{-1}X_j(s,x_s))^{T}ds.$$

En prenant l'infimum sur S^{m-1}, dans la relation (2.19), on obtient par compacité (cf.[3] lemme 6.8):

$$(2.20)\quad P(u^\tau C_t u < \varepsilon) \leq \exp(-c_{23}\varepsilon^{-r_6})$$
$$+c_{24}\varepsilon^{-m} \sup_{|u|=1} \left\{ P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < c_{25}\varepsilon^{r_4} \Big) \right\}$$

pour ε dans $[0, c_{26}]$ et des constantes positives c_{23}, c_{24}, c_{25} et c_{26}.

Or, pour tout l, $1 \leq l \leq \tilde{N}$,

$\langle \phi_{t_i,s}^{-1} K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 = \big(\langle (\phi_{t_i,s}^{-1} - I)K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle + \langle K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle\big)^2$,

donc

$$\sup_{|u|=1} \left\{ P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < c_{25}\,\varepsilon^{r_4} \Big) \right\}$$
$$\leq \sup_{|u|=1} \left\{ P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \frac{c_{27}\varepsilon^{r_4}}{\|\phi_{t_i,s}^{-1} - I\|^2} \Big) \right\}$$
$$+ \sup_{|u|=1} \left\{ P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < \frac{c_{25}\varepsilon^{r_4}}{2} \Big) \right\},$$

et comme, d'après la définition du temps d'arrêt σ_1, $\|\phi_{t_i,s}^{-1} - I\| \leq \frac{1}{2}$, pour tout s, $0 \leq s \leq \sigma_1$, on obtient

$$\sup_{|u|=1} \left\{ P\Big(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \langle \phi_{t_i,s}^{-1} K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < c_{25}\,\varepsilon^{r_4} \Big) \right\}$$
$$\leq P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{(n)}(t_i, x_{t_i,s}) \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s)\, ds < c_{28}\,\varepsilon^{r_4} \Big),$$

car $\langle K_l(t_i, x_{t_i,s}), u\rangle^2 \geq \lambda^{(n)}(t_i, x_{t_i,s})$.

Donc

$$P(u^\tau C_t u < \varepsilon) \leq \exp(-c_{23}\varepsilon^{-r_6})$$
$$(2.21)\qquad +c_{24}\varepsilon^{-m} P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma_1} \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{(n)}(t_i, x_{t_i,s}) \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}(s) ds < c_{28}\,\varepsilon^{r_4} \Big).$$

Or, on se trouve forcément dans une des deux situations du lemme 2.1.3.6.

Supposons d'abord que (a) soit vérifiée en (t, x^*), pour un $n \geq 1$ et tout t dans $[0, T]$.

Alors, par continuité de $\lambda^{(n)}$, il existe $\rho > 0$ et $\delta > 0$, tel que

$$\lambda^{(n)}(t, y) \geq \delta \tag{2.22}$$

pour tout t dans $[0, T]$ et tout y dans $B_\rho(x^*)$, où $B_\rho(x^*)$ désigne la boule ouverte de $\mathbb{R}^m$, centrée en x^* et de rayon ρ. Soit $V := B_{\frac{\rho}{2}}(x^*)$. Supposons que x appartienne à V et notons σ_2 le premier temps de sortie de x_t de V. Alors, d'après (2.21) et (2.22),

$$P(u^\tau C_t u < \varepsilon) \leq \exp\left(-c_{23}\, \varepsilon^{-r_6}\right) + c_{24}\, \varepsilon^{-m}\, P\Big(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge t < \frac{c_{28}\, \varepsilon^{r_4}}{\delta}\Big). \tag{2.23}$$

Or, si $t > \dfrac{c_{28}\, \varepsilon^{r_4}}{\delta}$, on a $P\Big(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge t < \dfrac{c_{28}\, \varepsilon^{r_4}}{\delta}\Big) = P\Big(\sigma_1 \wedge \sigma_2 < \dfrac{c_{28}\, \varepsilon^{r_4}}{\delta}\Big)$ et comme

$\sigma_1 \wedge \sigma_2$ est un temps d'arrêt exponentiellement positif, il existe des constantes positives c_1 et c_2, telles que $P\Big(\sigma_1 \wedge \sigma_2 < \dfrac{c_{28}\, \varepsilon^{r_4}}{\delta}\Big) < \exp\Big(-\dfrac{c_1\, \delta}{c_{28}}\, \varepsilon^{-r_4}\Big)$, pour tout $\varepsilon \in]0. c_2]$. Donc,

$$\begin{aligned} P(u^\tau C_t u < \varepsilon) &\leq \exp\left(-c_{23}\, \varepsilon^{-r_6}\right) + c_{24}\, \varepsilon^{-m} \exp\Big(-\frac{c_1\, \delta}{c_{28}}\, \varepsilon^{-r_4}\Big) \\ &\leq c_{29}\, \varepsilon^{p} + c_{26}\, \exp\left(-c_{30} \varepsilon^{-c_{31}\, r_7}\right) \end{aligned}$$

où $r_7 = r_4 \wedge r_6$, c_{29}, c_{30} et c_{31} sont des constantes positives indépendantes de $x_t \in V$.

Or, si $Q_t(x)$ désigne la matrice de Malliavin associé au processus stochastique x_t, avec $x_0 = x$, alors, pour tout $q \geq 1$ et tout sous-ensemble borné V de $\mathbb{R}^m$, il existe une constante positive c_9 telle que, pour tout t dans $]0, T[$ et tout x dans V, on a

$$\left\| \left(\det Q_t(x)\right)^{-1} \right\|_{2q}^{2q} \leq c_9 \Big\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \inf_{|u|=1} P\big(u^\tau C_t(x) u < j^{-\frac{1}{2mq}}\big) \Big\}.$$

D'où

$$\left\| \left(\det Q_t(x)\right)^{-1} \right\|_{2q}^{2q} \leq c_9 \Big\{ \Big(\frac{\delta t}{c_{28}}\Big)^{-\frac{2mq}{r_4}} + c_{32} \Big\},$$

où $c_{32} = 1 + c_{29} \sum_{j=k}^{+\infty} \exp\big(-c_{30}\, j^{-\frac{1}{2mq}}\big) < +\infty$, car si $j < \Big[\Big(\frac{\delta t}{c_{28}}\Big)^{-\frac{2mq}{r_4}}\Big]$, on a $\frac{c_{28} (j^{-\frac{1}{2mq}})^{r_4}}{\delta} > t$, et dans ce cas, on majore la quantité $P\big(u^\tau C_t(x) u < j^{-\frac{1}{2mq}}\big)$ par 1.

Donc,

$$\lim_{t\to 0+} t \log\Big(\sup_{y\in V}\big\|\left(\det Q_t(y)\right)^{-1}\big\|_q\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{2q} \log\Big[c_9\Big\{\Big(\frac{\delta t}{c_{28}}\Big)^{-\frac{2mq}{r_4}} + c_{32}\Big\}\Big] = 0.$$

Si par contre le point (b) du lemme 2.1.3.6. est vérifié, on peut choisir $\rho > 0$ assez petit pour assurer que $B_\rho(x^*) \subset U$ et que

$$|\nabla\psi(x)X_i(t,x)| \geq \frac{1}{2}|\nabla\psi(x^*)X_i(t,x^*)| > 0$$

pour au moins un i, $1 \leq i \leq m$, pour tout x dans $B_\rho(x^*)$ et tout t dans $[0,T]$.
Soit $V := B_{\frac{\rho}{2}}(x^*)$. Supposons que x appartienne à V et notons σ_3 le premier temps de sortie de x_t de $B_{\frac{\rho}{2}}(x)$.
D'après le point (b) (ii) du lemme 2.1.3.6., on a, $\lambda^{(n)}(t,y) \geq \exp(-|\psi(y)|^p)$, pour tout $t \in [0,T]$, donc en introduisant dans (2.21) on obtient:

$$P(u^\tau C_t u < \varepsilon) \leq \exp(-c_{23}\varepsilon^{-r_6}) + c_{24}\varepsilon^{-m} P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma_1\wedge\sigma_3} \exp(-|y_s|^p)ds < c_{28}\varepsilon^{r_4}\Big), \tag{2.24}$$

où y_t désigne le processus $\psi(x_t)$ pour $t \leq \sigma_3$.

D'autre part, comme

$$\begin{aligned} dx_t &= X_0(t,x_t)dt + X_i(t,x_t)\circ dw_t^i \\ &= (L-c)(t,x_t) + X_i(t,x_t)dw_t^i, \end{aligned}$$

on a, d'après la formule d'Itô:

$$dy_t = (L-c)\psi(x_t)dt + \nabla\psi(x_t)X_i(x_t)\,dw_t^i. \tag{2.25}$$

De plus, d'après le lemme 2.1.3.2., $\sigma := \sigma_1\wedge\sigma_2$ est un temps d'arrêt exponentiellement positif et d'après le lemme 2.1.3.6., pour au moins un i, $|\nabla\psi(x)X_i(t,x)| > 0$, pour tout t dans $[0,T]$, donc par continuité de $\nabla\psi$ et des X_i, il existe un $\delta > 0$, tel que $|\nabla\psi(x_s)X_i(t,x_s)| > \delta$, pour tous $s \leq \sigma_3$ et t dans $[0,T]$.

Par conséquent le processus y_t et le temps d'arrêt σ vérifient les hypothèses du lemme 2.1.3.4. Donc (2.9) est vérifiée pour tout $n > 1$ avec $\sigma = \sigma_1 \wedge \sigma_3$ et $y_t = \psi(x_t)$ et par application du lemme 2.1.3.5., on déduit qu'il existe des constantes positives c_7, c_8, T_1 et $q' > 1$, toutes indépendantes de x dans V, telles que, pour tout t dans $[0, T_1]$ et tout $\varepsilon < \exp(-c_7 t^{-\frac{1}{q'}})$,

$$(2.26) \qquad P\left(\int_0^{t\wedge\sigma_1\wedge\sigma_3} \exp(-|y_s|^p)\, ds < c_{28}\,\varepsilon^{r_4}\right) < \exp\{-c_8 |\log \varepsilon^{r_4}|^{q'}\}.$$

En substituant cette estimation dans (3.24), on obtient:

$$(2.27) \qquad P(u^\tau C_t u < \varepsilon) \le \exp(-c_{23}\,\varepsilon^{-r_6}) + c_{24}\,\varepsilon^{-m} \exp\{-c_8 |\log \varepsilon^{r_4}|^{q'}\},$$

pour tout t dans $[0, T_1$ et tout $\varepsilon < \exp(-c_7 t^{-\frac{1}{q'}})$. Par conséquent,

$$(2.28) \qquad \left\|\left(\det Q_t(x)\right)^{-1}\right\|_{2q}^{2q} \le c_9 \left\{\exp(2mq\, c_6\, t^{-\frac{1}{q'}}) + c_{33}\right\},$$

où $c_{33} = \left\{1 + \sum_{j=k}^{+\infty}\left(\exp(-c_{23}\, j^{\frac{r_6}{2mq}}) + c_{24} j^{\frac{1}{2q}} \exp\{-c_8 |\log j^{-\frac{1}{2mq}}|^{q'}\}\right)\right\}$,
car si $j < \left[\exp(2mq\, c_6\, t^{-\frac{1}{q'}})\right]$, on majore la quantité $P\left(u^\tau C_t(x) u < j^{-\frac{1}{2mq}}\right)$ par 1. Donc.

$$\lim_{t\to 0+} t \log\left(\sup_{y\in V}\left\|\left(\det Q_t(y)\right)^{-1}\right\|_q\right) = \lim_{t\to 0+} c_{34}\, t^{1-\frac{1}{q'}} = 0.$$

Finalement, on a montré que pour tout $q \ge 1$ et tout x dans D, il existe unn voisinage V de x tel que

$$\lim_{t\to 0+} t \log\left(\sup_{y\in V}\left\|\left(\det Q_t(y)\right)^{-1}\right\|_q\right) = 0.$$

En particulier, pour tous t et ε assez petits et tout $p > 0$, on a

$$P(u^\tau C_t u < \varepsilon) = O(\varepsilon^p).$$

De plus, les conditions sur les champs de vecteurs impliquent que les composantes de la matrice de Malliavin C_t ont des moments de tous ordres.

Le résultat suit alors du théorème 1.1.10.4.

□

Remarque:
Comme on vient de montrer, l'explosion en temps petit de l'inverse de la matrice de Malliavin est sous-exponentiel.
Toutefois, on ne peut pas conclure quant à l'hypoellipticité de l'opérateur $L + \frac{\partial}{\partial t}$ car la méthode utilisée par S.Kusuoka et D.Stroock [48] afin d'obtenir ce résultat ne semble s'appliquer qu'aux opérateurs à coefficients homogènes.
Cependant, en appliquant les résultats de D.R.Bell et S.E.-A.Mohammed [4] pour chaque $t \in [0,T]$ fixé, on montre que si on a $Lu = f$ pour une certaine fonction f de classe C^∞ en x, alors la fonction $u(t,x)$ est de classe C^∞ en x.

Preuve du théorème 2.1.2.2.:
La preuve du théorème 2.1.2.2. nécessite le lemme suivant de [4], qui est une modification du lemme 2.1.3.4.:

Lemme 2.1.3.7.

Supposons la condition (2.2) *vérifiée. Soient y_t le processus d'Itô, défini par* (2.25) *et σ un $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-temps d'arrêt exponentiellement positif. Alors, il existe des constantes positives c_{29}, c_{30} et c_{31}, qui dépendent seulement des caractéristiques de σ, telles que, pour tout t dans $]0, c_{29}[$ et tout ε dans $]0, c_{30}\, t^{(18)^k}[$, on a:*

$$P\Big(\int_0^{t\wedge\sigma} |y_s|^2 ds < \varepsilon\Big) < \exp\Big(-c_{31}\, \varepsilon^{-\frac{1}{(18)^k}}\Big). \tag{2.29}$$

On montre alors que l'inégalité (2.10) est satisfaite par le processus $y := y_t$ défini par (2.25), tant que p reste dans $]-\frac{2}{(18)^k}, 0[$ (cf [4] p.23-26). La fin de la démonstration suit exactement celle du théorème 2.1.2.1.

□

Remarque:
Les estimations obtenues ci-dessus devraient premettre d'obtenir une estimation de Varadhan pour la densité. Des estimations de ce type ont été obtenues dans le cas hypoelliptique par R.Léandre ([49-50]) et dans un cas très dégénéré par P.Florchinger et R.Léandre [34].

2.2. REGULARITE DE LA DENSITE DU FILTRE ASSOCIE A UN OPERATEUR INFINIMENT DEGENERE.

2.2.1. INTRODUCTION

Dans cette section, on applique les résultats prouvés dans la section précédente à un problème de filtrage non linéaire, où les coefficients du signal vérifient la condition de Hörmander dégénérée introduite précédemment. Plus précisément, on montre que le filtre non normalisé associé à un problème de filtrage non linéaire, avec des bruits corrélés et des coefficients d'observation non bornés, admet une densité régulière, même si la condition de Hörmander n'est pas vérifiée dans un certain sens "exponentiel" sur une collection d'hypersurfaces.

Cette section est divisée en cinq paragraphes organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on introduit le problème de filtrage non linéaire étudié dans ce chapitre et on rappelle quelques notations dont on a besoin par la suite. Dans le troisième paragraphe, on redémontre le théorème 2.1.2.1. sous des hypothèses moins restrictives. Dans le quatrième paragraphe, on définit un filtre non normalisé, lié au filtre défini dans le second paragraphe par une formule de Kallianpur-Striebel. Dans le cinquième paragraphe, finalement, on énonce et démontre le théorème principal en utilisant le résultat préliminaire du troisième paragraphe.

2.2.2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener standard de dimension d, i.e. Ω est l'espace de Banach $C([0,T], \mathbb{R}^d)$ tel que $w(0) = 0$, pour tout w dans Ω, muni de la norme $\|w\|_\Omega = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$, P est la mesure de Wiener standard et $\mathcal{F}$ le complété de la σ-algèbre de Banach sur Ω, par rapport à la mesure P.
Notons $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ la filtration consistant en la famille $\mathcal{F}_t$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, engendrée par $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$ et contenant les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Considérons $d+1$ champs de vecteurs $X_0, ..., X_d$ sur $\mathbb{R}^m$ s'écrivant

$$X_i(x) = X_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Pour tout entier naturel n, notons $E^{(n)}$ la matrice qui admet pour colonnes les champs de vecteurs

$$X_1, ..., X_d; [X_{i_1}, X_{i_2}]_{i_1,i_2=0}^d; ...; [X_{i_1}, [X_{i_2}, [..., [X_{i_{n-1}}, X_{i_n}]]...]]_{i_1,i_2,...,i_n=0}^d,$$

ordonnés d'une façon fixée une fois pour toute. On considère chaque champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ comme un vecteur colonne par rapport à une base (canonique) fixée de l'espace de tous les champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^m$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^m$ et $n \geq 1$, définissons $\lambda^{(n)}(x)$ comme étant la plus petite valeur propre de la matrice $E^{(n)}(x)E^{(n)\tau}(x)$.

Rappelons que $\lambda^{(n)}(x) > 0$, pour un certain $n \geq 1$, si, et seulement si, la condition de Hörmander générale est vérifiée pour l'opérateur parabolique $G + \frac{\partial}{\partial t}$ en $x \in \mathbb{R}^m$, où $G = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} X_i^2$. Comme dans la section précédente, on dit que $x \in \mathbb{R}^m$ est un point de Hörmander parabolique pour l'opérateur G, s'il existe un entier $n \geq 1$, tel que $\lambda^{(n)}(x) > 0$. On note H l'ensemble de tous les points de Hörmander paraboliques et on appelle points paraboliques non-Hörmander les points appartenant à l'ensemble fermé H^c.

Supposons de plus que les champs de vecteurs vérifient la condition suivante:

(H) Supposons que l'ensemble des points paraboliques non-Hörmander H^c est contenu dans une sous-variété M de classe C^2 et de codimension 1 et qu'en chaque point de H^c, au moins un des champs de vecteurs $X_1, ..., X_d$ soit transversal par rapport à M. Supposons de plus que pour tout point $x \in H^c$, il existe un entier $n \geq 1$, un voisinage ouvert U de x, et un exposant $p \in]-1, 0[$ tel que $\lambda^{(n)}(y) \geq \exp\{-[\rho(y, M)]^p\}$ pour tout y dans U, où $\rho(y, M)$ désigne la distance euclidienne entre y et M.

Considérons le problème de filtrage non linéaire associé au couple signal-observation $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$(2.36) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \displaystyle\int_0^t X_0(x_s)\,ds + \int_0^t X_i(x_s) \circ dw_s^i + \int_0^t \overline{X}(x_s)\left(h(x_s)\,ds + \circ dv_s\right) \\ y_t = \displaystyle\int_0^t h(x_s)\,ds + v_t, \end{cases}$$

où,

1. x_0 est une variable aléatoire de loi m_0.
2. $\overline{X}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ de classe C_b^∞, s'écrivant

$$\overline{X}(x) = \overline{X}^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

3. h est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, telle que h ainsi que ses dérivées de tous ordres sont à croissance sous-exponentielle.
4. $X_0 + h\overline{X}$ est à croissance sous-linéaire (pour éviter l'explosion de la solution du système (2.36)).

On définit alors le filtre comme d'habitude en théorie du filtrage non linéaire.

Définition 2.2.2.1.

Pour tout t dans $[0,T]$, notons π_t le filtre associé au système (2.36), *défini pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ par*

$$\pi_t\psi = E\big[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t\big], \tag{2.37}$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s \,/\, 0 \leq s \leq t)$.

2.2.3. UN RESULTAT PRELIMINAIRE

Dans ce paragraphe, on démontre l'hypoellipticité d'opérateurs différentiels du second ordre, avec des coefficients dépendant du temps, sous des hypothèses légèrement moins restrictives que celles du théorème 2.1.2.1.

Considérons, sur le même espace de probabilités que ci-dessus, l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t = \tilde{X}_0(t,\tilde{x}_t)\,dt + \tilde{X}_i(t,\tilde{x}_t)\circ dw_t^i \\ \tilde{x}_0 = \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.38}$$

où $\tilde{X}_0, \ldots, \tilde{X}_d$ sont d+1 champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ qui dépendent du temps. On suppose de plus que les champs de vecteurs $\tilde{X}_i$, $0 \leq i \leq m$, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, sont Hölder continus en t uniformément sur $[0,T] \times \mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^\infty$ borné en x, si t est considéré comme élément fixé de [0,T] et que toutes leurs dérivées en x sont uniformément bornées.

De façon analogue au paragraphe précédent, on note, pour tout entier naturel n, $\tilde{E}^{(n)}$ la matrice dont les colonnes sont les champs de vecteurs

$$\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_d; [\tilde{X}_{i_1}, \tilde{X}_{i_2}]_{i_1,i_2=0}^d; \ldots; [\tilde{X}_{i_1}, [\tilde{X}_{i_2}, [\ldots, [\tilde{X}_{i_{n-1}}, \tilde{X}_{i_n}]]\ldots]]_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^d,$$

arrangés dans un ordre fixé une fois pour toutes. Pour tous x dans $\mathbb{R}^m$, t dans $[0, T]$ et $d \geq 1$, notons $\tilde{\lambda}^{(n)}(t,x)$ la plus petite valeur propre de la matrice $\tilde{E}^{(n)}(t,x)\tilde{E}^{(d)\tau}(t,x)$. Ici, on dit que $x \in \mathbb{R}^m$ est un point de Hörmander parabolique pour l'opérateur $L = \tilde{X}_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \tilde{X}_i^2$, s'il existe un entier $n \geq 1$, tel que $\tilde{\lambda}^{(n)}(0,x) > 0$. On note H_e l'ensemble de tous les points paraboliques et H_e^c l'ensemble fermé de tous les points paraboliques non-Hörmander.

Supposons de plus que les champs de vecteurs vérifient la condition suivante:

(H') L'ensemble des points paraboliques non-Hörmander H^c est contenu dans une sous-variété N de classe C^2 et de codimension 1. De plus, en tout point de H^c, au moins un des champs de vecteurs $\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_d$ est transversal par rapport à N et pour tout point $x \in H^c$, il existe un entier $d \geq 1$, un voisinage ouvert U de x, et un exposant $p \in]-1, 0[$, tel que $\lambda^{(n)}(0,y) > \exp\left\{-\left[\rho(y,M)\right]^p\right\}$, pour tout y dans U, où $\rho(y,M)$ désigne la distance euclidienne entre y et N.

Remarque:
Rappelons que dans la première section de ce chapitre, on a supposé que $\lambda^{(n)}(t,y) > \exp\left\{-\left[\rho(y,M)\right]^p\right\}$, pour tout y dans U et tout t dans $[0,T]$. Cette hypothèse est trop forte dans cette application, car le transport des coefficients nécessaire à la preuve de la proposition 2.2.5.8. implique seulement cette propriété à l'origine.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.2.3.1.

Supposons l'hypothèse (H') vérifiée. Alors le processus stochastique $\tilde{x}_t$ admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve:
Les champs de vecteurs $\tilde{X}_i$, $0 \leq i \leq d$, étant Hölder-continus en t, on en déduit la continuité de la fonction $t \mapsto \tilde{\lambda}^{(n)}(t,x)$. Par conséquent, la condition (H') implique qu'il existe une constante strictement positive t_0, telle que pour chaque $x \in H_e^c$, il existe un entier $n \geq 1$, un voisinage ouvert U de x, et un exposant $p \in]-1, 0[$, tel que $\tilde{\lambda}^{(n)}(t,y) \geq \exp\{-[\rho(y,N)]^p\}$. pour tout y dans U et tout t dans $[0, t_0]$.
Le reste de la preuve est quasiment identique à la preuve du théorème 2.1.2.1. La seule différence est l'utilisation d'une version un peu modifiée du lemme 2.1.3.6. En effet. l'hypothèse (H') implique:

Lemme 2.2.3.2.

Pour tout x dans $\mathbb{R}^m$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que exactement une des deux conditions suivantes est vérifiée:

(a) $\tilde{\lambda}^{(n)}(t,x) > 0$, *pour tout* $t \in [0,t_0]$

(b) Il existe un voisinage ouvert U de x, une fonction $\psi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et un exposant $p \in]-1,0[$, tel que:

(i) $\psi(x) = 0$ *et* $\nabla\psi(x) \cdot \tilde{X}_i(t,x) \neq 0$, *pour au moins un* $i = 1, ..., d$ *et* $\forall t \in [0,t_0]$.

(ii) $\tilde{\lambda}^{(d)}(t,y) \geq \exp(-|\psi(y)|^p)$, *pour tous* $t \in [0,t_0]$ *et* $y \in U$.

Alors, pour tout x dans $\mathbb{R}^m$, on peut montrer exactement comme dans le paragraphe 2.1.3., que pour tout $q \geq 1$, il existe un voisinage V de x, tel que

$$\sup_{|u|=1} P(u^\tau C_t u < \varepsilon) = O(\varepsilon^q),$$

où $Q_t(x)$ désigne la matrice de Malliavin associée au processus stochastique $(\tilde{x}_t)_{t\in[0,T]}$ avec $\tilde{x}_0 = x$, ϕ_t est la dérivée du flot stochastique associé et $C_t = \phi_t^{-1} Q_t(x) (\phi_t^\tau)^{-1}$. Cela conclut la preuve du théorème 1.1.10.3. □

2.2.4. LE FILTRE NON NORMALISE

Afin d'obtenir, pour presque chaque w, une version continue pour la norme de Banach sur l'espace $C_0([0,T],\mathbb{R}^m) \times [0,T]$ du processus $(y,t) \to x_t(w,y)$, on définit, comme dans [28], un processus stochastique $\overline{x}_t$ tel que le processus x_t peut s'écrire en fonction de $\overline{x}_t, y_t$ et du flot déterministe associé au champ de vecteurs $\overline{X}$.

Définition 2.2.4.1.

Notons Φ_t le flot déterministe associé au champ de vecteurs $\overline{X}$ (i.e. Φ_t est l'unique solution de l'équation déterministe $\Phi_t = x + \int_0^t \overline{X}(\Phi_s(x))\, ds$*).*

Notation 2.2.4.2.

Si X désigne un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^m$, $X(x) = X^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ *et si F est une fonction dans $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, alors, pour tout x dans $\mathbb{R}^m$,* *posons*

$$XF(x) = X^j(x)\frac{\partial F}{\partial X_j}(x),$$

et

$$(\Phi_t^{*-1}X)F(x) = \big(\nabla\Phi_t(x)\big)^{-1}X\big(\Phi_t(x)\big)\nabla F(x).$$

Définition 2.2.4.3.

Notons $\overline{x}_t$ le processus stochastique, solution de l'équation différentielle stochastique

$$\overline{x}_t = x_0 + \int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1}X_0)(\overline{x}_s)\,ds \int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1}X_i)(\overline{x}_s)\circ dw_s^i. \tag{2.39}$$

On a alors le résultat suivant qui nous permet de définir le processus stochastique x_t pour chaque trajectoire du processus y_t.

Proposition 2.2.4.4. (cf.[17] ou [8])

Pour tout t dans $[0,T]$, $x_t = \Phi_{y_t}(\overline{x}_t)$.

De plus, comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaire, on définit pour tout t dans $[0,T]$ l'exponentiel de Girsanov associée au système (2.36) par:

$$Z_t = \exp\Big(\int_0^t h(x_s)\,dv_s + \frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s)\,ds\Big). \tag{2.40}$$

Ainsi, utilisant la proposition 2.2.4.4. et la définition du système (2.36), on a, pour tout t dans $[0,T]$, $Z_t = \exp V_t$, avec

$$V_t = \int_0^t h\big(\Phi_{y_s}(\overline{x}_s)\big)dy_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2\big(\Phi_{y_s}(\overline{x}_s)\big)\,ds. \tag{2.41}$$

Les hypothèses sur la fonction h n'impliquent pas nécessairement que le processus stochastique Z_t^{-1} est une $\mathcal{F}_t$-martingale. Par conséquent, on ne peut pas appliquer le théorème de Girsanov, afin de définir une probabilité de référence et un filtre non normalisé associé au système (2.36). Néanmoins, on définit un filtre non normalisé formel, par une formule obtenue après une intégration par parties dans l'intégrale stochastique apparaissant dans l'expression du processus stochastique V_t. En effet,

Proposition 2.2.4.5.

Pour tout t dans $[0,T]$, on a

$$V_t = H(y_t,\overline{x}_t) - \int_0^t \Big[\frac{1}{2}(h^2+\overline{X}h)(\Phi_{y_s}(\overline{x}_s)) + (\Phi_{y_s}^{*-1}X_0)\,H(y_s,\overline{x}_s)\Big]\,ds - \int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1}X_i)\,H(y_s,\overline{x}_s)\circ dw_s^i, \tag{2.42}$$

où H est la fonction définie pour tout (t,x) dans $[0,T]\times I\!R^m$ par

$$H(t,x) = \int_0^t h\circ\Phi_s(x)\,ds.$$

Pour montrer un résultat d'intégrabilité pour le processus stochastique Z_t, on suppose que pour tous $r>0$ et $\varepsilon>0$, il existe une constante $K_\varepsilon>0$, telle que

$$|\overline{X}h| + \sup_{|s|\le r}|G(h\circ\Phi_s)| + \sum_{i=1}^d \sup_{|s|\le r}|X_i(h\circ\Phi_s)|^2 \le \varepsilon h^2 + K_\varepsilon. \tag{2.43}$$

Remarque:
Si les bruits sont indépendants (i.e. si $\overline{X}\equiv 0$), on retrouve la condition de Sussmann [80].

On obtient alors

Proposition 2.2.4.6. (cf.[28])

Pour tout $p>0$, le processus stochastique Z_t appartient à l'espace $L^p(W\otimes m_0)$ pour presque tout y (ici, W désigne la mesure de Wiener sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$).

Cela nous permet de définir le filtre non normalisé comme suit.

Définition 2.2.4.7.

Pour tout t dans $[0,T]$, définissons pour toute fonction ψ dans $C_b(I\!R^m,I\!R)$, le filtre non normalisé associé au système (2.36) *par*

$$\rho_t\psi = E^w\big[\psi(x_t)Z_t\big], \tag{2.44}$$

où E^w désigne l'intégration par rapport à la mesure $W \otimes m_0$.

Le filtre non normalisé ρ_t est alors lié au filtre π_t par la formule de Kallianpur-Striebel.

Théorème 2.2.4.8. (cf. [28])

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_b(I\!R^m, I\!R)$, on a

$$\pi_t\psi = \frac{\rho_t\psi}{\rho_t 1}. \tag{2.45}$$

2.2.5. EXISTENCE D'UNE DENSITE REGULIERE POUR LE FILTRE

Le filtre π_t étant lié au filtre non normalisé ρ_t par la formule de Kallianpur-Striebel (2.45), il est équivalent de démontrer l'existence d'une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue pour le filtre π_t ou le filtre non normalisé ρ_t.

Pour cela, il suffit de montrer que toutes les dérivées au sens de Malliavin du processus ρ_t sont des mesures bornées. Le calcul de Malliavin permettant de faire une intégration par parties sur l'espace de Wiener, le résultat se déduit du lemme suivant.

Lemma 2.2.5.1. (cf.[53])

Soit ν une mesure de Radon finie sur $I\!R^m$. Supposons que pour tout multi-indice α, il existe une constante finie C_α telle que pour toute fonction ψ dans $C_b^\infty(I\!R^m)$, on ait:

$$\left| \int_{I\!R^m} \nabla^\alpha \psi(x)\nu(dx) \right| \leq C_\alpha \|\psi\|_\infty. \tag{2.46}$$

Alors, la mesure ν admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 2.2.5.2.

Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Alors, pour tout t dans $]0,T]$, le filtre non normalisé ρ_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Preuve:
D'après la définition 2.2.4.7. et la proposition 2.2.4.4., on a

$$\rho_t\psi = E^w\left[\psi \circ \Phi_{y_t}(\overline{x}_t) Z_t\right]. \tag{2.47}$$

Pour montrer que le filtre non normalisé ρ_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue, il suffit d'avoir une formule d'intégration par parties et de montrer que l'inverse du déterminant de la matrice de covariance de Malliavin, associée au processus stochastique $\overline{x}_t$, appartient à $L^p(W \otimes m_0)$, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

Rappelons tout d'abord quelques résultats préliminaires:

Définition 2.2.5.3.

Notons $\overline{F}_t$ la dérivée du flot stochastique, associé au processus stochastique $\overline{x}_t$ défini par l'équation (2.39), i.e. $\overline{F}_t$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\overline{F}_t = I + \int_0^t D(\Phi_{y_s}^{*-1} X_0)(\overline{x}_s)\overline{F}_s\, ds + \int_0^t D(\Phi_{y_s}^{*-1} X_i)(\overline{x}_s)\overline{F}_s \circ dw_s^i. \tag{2.48}$$

Par application du gradient stochastique au processus stochastique $\overline{x}_t$ (cf. 1.26), on obtient

Proposition 2.2.5.4.

Pour tout t dans $[0,T]$ et tout i, $1 \le i \le d$, on a:

$$D_s^i \overline{x}_t = \overline{F}_t \overline{F}_s^{-1} (\Phi_{y_s}^{*-1} X_i)(\overline{x}_s). \tag{2.49}$$

Ce résultat permet de montrer la proposition suivante

Proposition 2.2.5.5. (cf. [29])

Pour toute fonction ψ dans $C_b^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ et tout t dans $[0,T]$, $\psi \circ \Phi_{y_t}(\overline{x}_t)$ et Z_t sont dans $\mathbb{D}^\infty(W)$ pour tout y dans $C_0([0,T], \mathbb{R})$.

De plus, la matrice de covariance de Malliavin M_t associée au processus stochastique $\overline{x}_t$ est définie par

Proposition 2.2.5.6.

Pour tout t dans $[0,T]$,

$$M_t = \overline{F}_t\Big(\int_0^t \overline{F}_s^{-1} \sum_{k=1}^{d} (\Phi_{y_s}^{*-1} X_k)(\overline{x}_s)(\Phi_{y_s}^{*-1} X_k)(\overline{x}_s)^{\tau}(\overline{F}_s^{-1})^{\tau}\, ds\Big)\overline{F}_t^{\tau}. \tag{2.50}$$

Ces notations permettent d'obtenir de façon analogue à [8] ou [56] la formule d'intégration par parties suivante.

Proposition 2.2.5.7.

Pour tout t dans $[0,T]$ *et tout j, $1 \leq j \leq m$, on a*

$$\begin{aligned}\rho_t(D^j\psi) =& E^w\Big(\psi\circ\Phi_{y_t}(\overline{x}_t)Z_t\Big(-\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \big(D_s^j M_t^{-1}\, D_s^j\overline{x}_t\big)^i\, ds\\ & - M_t\sum_{i=1}^{d}\int_0^t \big(D_s^{ij}(log\, Z_t)\, D_s^j\overline{x}_t\big)^i\, ds + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t \big(D_s^j(\overline{x}_t)\big)^i\, dw_s^i\Big)\Big).\end{aligned} \tag{2.51}$$

D'autre part, on a le résultat suivant

Proposition 2.2.5.8.

Pour tout t dans $]0,T]$, $(\det M_t)^{-1}$ *appartient à* $L^p(W\otimes m_0)$, *pour tout p dans* $I\!N^*$.

Preuve:

Le filtre non normalisé ρ_t étant continu par rapport aux trajectoires du processus d'observation (cf. [28]), on peut fixer une trajectoire du processus y dans la formule (2.47) et effectuer un calcul des variations stochastique seulement sur des fonctionnelles de w. En particulier, pour une trajectoire fixée du processus y, on peut facilement démontrer, à l'aide d'estimations montrées dans le lemme 1.0.3 de [28], que les coefficients de l'équation différentielle stochastique dont le processus stochastique $\overline{x}_t$ est solution, vérifient les conditions du troisième paragraphe (i.e. pour une trajectoire fixée du processus y, les champs de vecteurs $\Phi_{y_t}^{*-1}X_i$, $0 \leq i \leq d$, et toutes leurs dérivées en x sont Hölder-continues en t, uniformément sur $[0,T]\times\mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ de $I\!R^m$, $\mathcal{C}^\infty$ bornés en x, si t est fixé dans $[0,T]$ et toutes leurs dérivées en x sont uniformément bornées.)

D'autre part, si $\mathcal{I}(X_1, ..., X_d)$ désigne l'idéal engendré par l'algèbre de Lie $L(X_1, ..., X_d)$ dans l'algèbre de Lie $L(X_0, ..., X_d)$, il est facile de montrer, par des résultats standards de géométrie différentielle, que pour tout (t, x) dans $[0, T] \times \mathbb{R}^m$, on a

$$\mathcal{I}(\Phi_{y_t}^{*-1} X_1, ..., \Phi_{y_t}^{*-1} X_d)(t, x) = \mathcal{I}(X_1, ..., X_d)\big(\Phi_{y_t}(x)\big) \tag{2.52}$$

D'où, en prenant $t = 0$ dans la relation (2.52), on déduit que

$$\mathcal{I}(\Phi_{y_t}^{*-1} X_1, ..., \Phi_{y_t}^{*-1} X_d)(0, x) = \mathcal{I}(X_1, ..., X_d)(x).$$

Ainsi, l'ensemble des points paraboliques non-Hörmander $\tilde{H}^c$ pour les champs de vecteurs $\Phi_{y_t}^{*-1} X_i$ est inclu dans la sous-variété M, introduite plus haut, de classe C^2 et de codimension 1 et, en chaque point de $\tilde{H}^c$, au moins un des champs de vecteurs $\Phi_{y_t}^{*-1} X_1, ..., \Phi_{y_t}^{*-1} X_d$ est transversal à M.

Par conséquent, si on note $\tilde{\lambda}^{(n)}(t, x)$ la plus petite valeur propre de la matrice correspondant aux champs de vecteurs $\Phi_{y_t}^{*-1} X_i$, l'hypothèse (H) implique que $\tilde{\lambda}^{(n)}(0, y) = \lambda^{(n)}(y) \geq \exp\{-[\rho(y, M)]^p\}$, pour tout y dans U. Le résultat découle alors du théorème 2.2.3.1.

□

Le lemme 2.2.5.1., et les propositions 2.2.5.7. et 2.2.5.8. impliquent que le filtre non normalisé ρ_t admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

De plus, en itérant la formule d'intégration par parties, comme dans [8], on montre que cette densité est de classe C^∞.

Ceci termine la démonstration du théorème 2.2.5.2.

□

Chapitre III

DIFFUSIONS ENGENDREES PAR UN PROCESSUS DE WIENER DE DIMENSION INFINIE

3.1. CALCUL DE MALLIAVIN APPLIQUE A UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES A COEFFICIENTS DEPENDANT DU TEMPS

3.1.1. INTRODUCTION

Soit $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P\big)$ un espace probabilisé complet. Dans ce chapitre, on étudie l'existence d'une densité régulière pour la loi du processus stochastique m-dimensionnel $\{x_t,\ t \in [0,T]\}$, solution de l'équation différentielle stochastique au sens d'Itô

$$x_t = x_0 + \int_0^t \tilde{X}_0(s, x_s)\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t X_k(s, x_s)\, dw_s^k, \tag{3.1}$$

où x_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\{w_t^k,\ t \in [0,T],\ k \geq 1\}$ est une suite de $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener standards, indépendants, et $\tilde{X}_0, X_1, \ldots$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, qui dépendent du temps et qui vérifient certaines conditions de régularité qu'on précisera plus loin.

Ces champs de vecteurs s'écrivent

$$X_i(t,x) = X_i^j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \geq 1$$

et

$$\tilde{X}_0(t,x) = \tilde{X}_0^j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Le processus $\{x_t,\, t \in [0,T]\}$ est alors une diffusion associée à l'opérateur différentiel du second ordre

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{X}_0^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(X_k^i(t,x)\,X_k^j(t,x)\Big)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Notre but est de montrer que la densité de la diffusion associée à cet opérateur est de classe $\mathcal{C}^\infty$, sous une condition de Hörmander locale. Ceci est une amélioration des résultats de M.D. Nguyen, D. Nualart et M. Sanz [59], qui ont étudié des équations différentielles stochastiques, engendrées par un processus de Wiener de dimension infinie, avec des coefficients qui ne dépendent pas du temps.

Dans cette section, on combine des idées de P. Florchinger [29] pour l'étude des diffusions avec coefficients dépendant du temps à des méthodes de M.D. Nguyen, D. Nualart et M. Sanz [59] pour le processus de Wiener de dimension infinie.

Cette section est divisée en quatre paragraphes, organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (3.1) par la méthode d'itération de Picard. De plus, on montre que cette solution admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans la troisième section, on prouve que la solution de cette équation appartient à "l'espace de Sobolev généralisé" $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$ et dans la quatrième section, on montre le résultat principal, c'est-à-dire le théorème de Hörmander pour la solution d'une équation différentielle stochastique, dirigée par un processus de Wiener de dimension infinie et des coefficients dépendant du temps.

Remarque:

Toutes les constantes considérées dans cette section seront notées C, même si leur valeur varie d'une formule à l'autre.
Toutefois, si plusieurs constantes distinctes apparaissent dans une seule formule, on désignera celles-ci par $C_1, C_2, \ldots$

3.1.2. EXISTENCE DE LA SOLUTION ET DE SA DENSITE

Considérons la norme $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty}|x_j^i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ sur l'espace des matrices $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Supposons que x_0 soit une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, à support compact, possédant des moments de tous ordres de carré intégrable et que les champs de vecteurs X_i, $i \geq 1$, et $\tilde{X}_0$, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, sont Hölder-continus en t, uniformément sur $[0,T] \times \mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^m$, qu'ils sont de classe C^∞ en x, pour t fixé dans $[0,T]$ et qu'eux-mêmes, ainsi que leurs dérivées de tous ordres par rapport à x, sont uniformément bornés.

En particulier, la fonction $X : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\quad X = \{X_k, k \geq 1, \tilde{X}_0\}$ vérifie la condition de Lipschitz

$$(L) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \|X(t,x) - X(t,y)\| \leq K|x-y|,$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Cette condition assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1) dans l'espace $L^2(\Omega \times [0,T] \times \mathbb{Z}_+; \mathbb{R}^d)$.

Théorème 3.1.2.1.

Si la condition (L) est satisfaite, il existe un unique processus stochastique $\{x_t, t \in [0,T]\}$ *qui vérifie l'équation* (3.1). *De plus* $\{x_t, t \in [0,T]\}$ *admet une trajectoire presque sûrement continue et* $E\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}|x_t|^p\Big\} < +\infty$, *pour tout* $p \geq 2$.

Preuve:

On construit récursivement une approximation de la solution de (3.1) par la méthode d'itération de Picard.

Définissons pour cela la suite de processus stochastiques $\{x_t^{(n)},\ t \in [0,T]\}$ par

$$(3.2) \qquad \begin{cases} x_t^{(0)} &= x_0 \\ x_t^{(n+1)} &= x_0 + \displaystyle\int_0^t \tilde{X}_0(s, x_s^{(n)})\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t X_k(s, x_s^{(n)})\, dw_s^k, \quad \text{pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Pour assurer que le système (3.2) est bien défini, on montre d'abord par récurrence sur n, que pour tout $p \geq 2$, $E\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t^{(n)}|^p\} < +\infty$.

En effet,

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|x_t^{(n+1)}|^p\Big\} = E\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|x_0 + \int_0^t \tilde{X}_0(s,x_s^{(n)})\,ds + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t X_k(s,x_s^{(n)})\,dw_s^k|^p\Big\}$$

$$\le C\,E\Big\{\sup_{t\in[0,T]}\Big(|x_0|^p + |\int_0^t \tilde{X}_0(s,x_s^{(n)})\,ds|^p + |\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t X_k(s,x_s^{(n)})\,dw_s^k|^p\Big)\Big\},$$

d'après l'inégalité de Young.

De plus, par application des inégalités de Hölder et de Burkholder, l'expression précédente est majorée par

$$C\left\{E(|x_0|^p) + E\Big(\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t |\tilde{X}_0(s,x_s^{(n)})|^p\,ds\Big) + E\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^T |X_k(s,x_s^{(n)})|^2\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\right\}$$

$$\le C\left\{E(|x_0|^p) + E\int_0^T |\tilde{X}_0(s,x_s^{(n)})|^p\,ds + E\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^T |X_k(s,x_s^{(n)})|^p\,ds\Big)\right\}$$

$$\le C\left\{E(|x_0|^p) + E\int_0^T \|X(s,x_s^{(n)})\|^p\,ds\right\}$$

$$\le C\left\{E(|x_0|^p) + E\int_0^T \sup_{s\in[0,T]}\|X(s,x_s^{(n)})\|^p\,ds\right\}. \qquad (*)$$

Par utilisation de (L), on déduit

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|X(t,x)\| &= \sup_{t\in[0,T]}\|X(t,x)-X(t,0)+X(t,0)\| \\ &\le \sup_{t\in[0,T]}\Big(\|X(t,x)-X(t,0)\| + \|X(t,0)\|\Big) \\ &\le K|x| + \sup_{t\in[0,T]}\|X(t,0)\| \\ &\le K|x| + K',\end{aligned}$$

comme les champs de vecteurs sont bornés.

Donc,

$$(*) \le C\left\{E(|x_0|^p) + E\int_0^T \Big(K|x_s^{(n)}| + K'\Big)^p\,ds\right\}$$

$$\le C\left\{E(|x_0|^p) + \int_0^T \Big(1 + E|x_s^{(n)}|^p\Big)\,ds\right\}$$

$$\leq C_1 + C_2 E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{(n)}|^p\Big\} \leq \ldots \leq C E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{(0)}|^p\Big\} = C\,E(|x_0|^p) < +\infty.$$

Des arguments similaires impliquent

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}|^p\Big\} \leq C\Big\{E\Big(\sup_{t\in[0,T]} \Big|\int_0^t [\tilde{X}_0(s,x_s^{(n)}) - \tilde{X}_0(s,x_s^{(n-1)})]\,ds\Big|^p\Big)$$

$$+E\Big(\sup_{t\in[0,T]} \Big|\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^t [X_k(s,x_s^{(n)}) - X_k(s,x_s^{(n-1)})]\,dw_s^k\Big|^p\Big)\Big\}$$

$$\leq C\Big\{\int_0^T E|\tilde{X}_0(s,x_s^{(n)}) - \tilde{X}_0(s,x_s^{(n-1)})|^p\,ds + \int_0^T E\Big[\sum_{k=1}^{+\infty}|X_k(s,x_s^{(n)}) - X_k(s,x_s^{(n-1)})|^2\Big]^{\frac{p}{2}}\,ds\Big\}$$

$$\leq C\,E\int_0^T \|X(s,x_s^{(n)}) - X(s,x_s^{(n-1)})\|^p\,ds$$

$$\leq C\int_0^T E\Big\{\sup_{0\leq s\leq t} |x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|^p\Big\}\,ds. \tag{3.3}$$

Par conséquent, la suite $(x_\cdot^{(n)})_{n\geq 0}$ étant une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\Omega\ \times\ [0,T];\mathbb{R}^m)$, elle admet une limite notée $x = \{x_t, t\in[0,T]\}$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{(n)} - x_t|^p\Big\} = 0$$

ce qui implique que x est un processus presque sûrement continu, satisfaisant (3.1) de façon évidente.

Montrons maintenant l'unicité de la solution de l'équation (3.1).

Soit $y = \{y_t, t\in[0,T]\}$ une autre solution de (3.1). Un calcul analogue au précédent montre que

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t - y_t|^2\Big\} \leq C\int_0^T E\Big[\sup_{0\leq s\leq t} |x_s - y_s|^2\Big]\,dt,$$

ce qui assure l'unicité de la solution d'après le lemme de Gronwall.

Finalement, par les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment, on a pour tout $p \geq 2$

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^p\Big\} \leq C\Big\{|x_0|^p + \int_0^T \Big(1 + E\Big\{\sup_{0\leq s\leq t} |x_s|^p\Big\}\Big)\, dt\Big\}.$$

D'où $E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^p\Big\} < +\infty$.

□

Remarques:

1) On aurait pu déduire ce résultat directement de l'article de A. Millet, D. Nualart et M. Sanz [57]. En fait, ils montrent l'existence et l'unicité même dans le cas où le processus évolue dans un espace de dimension infini. En supposant alors que seulement un nombre fini des composantes des champs de vecteurs sont non nulles on retrouve le cas traité ici.

2)La condition de Lipschitz (L) implique que

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla_l X_k^i(t,x)|^2 \leq K, \tag{3.4}$$

pour tous $l = 1, ..., m$, $t \in [0,T]$ et presque tout $x \in \mathbb{R}^m$.

En effet, les gradients $\nabla_l X_k^i(t,x)$ sont définis pour presque tout x et d'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla_l X_k^i(t,x)|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}[X_k^i(t;x_1,...,x_l+\varepsilon,...,x_d) - X_k^i(t;x_1,...,x_d)]^2 \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{+\infty} |X_k^i(t;x_1,...,x_l+\varepsilon,...,x_d) - X_k^i(t;x_1,...,x_d)|^2 \\ &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2}\, K|(0,...,\varepsilon,0,...,0)|^2 = K.\end{aligned}$$

□

Cette remarque permet d'étudier la différentiabilité du processus stochastique $\{x_t,\ t \in [0,T]\}$ dans la proposition suivante:

Proposition 3.1.2.2.

Si l'hypothèse (L) est vérifiée et si les champs de vecteurs sont C^1 en espace, alors le processus x appartient à $\mathbb{D}^{2,1}(L^2([0,T];\mathbb{R}^m))$ et pour tout $t \in [0,T]$, $x_t \in \mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^m)$. De plus, on a

$$(3.5) \qquad \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla_l X_k^j(t,x_t)|^2 \leq K,$$

pour tout $l = 1, ..., m$, et la dérivée de x_t est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} D_r^i x_t^j = X_i^j(r,x_r) + \displaystyle\int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0^j(s,x_s) D_r^i x_s^l \, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_r^t \nabla_l X_k^j(s,x_s) D_r^i x_s^l \, dw_s^k, & si\ r \leq t \\ D_r^i x_t^j = 0, & si\ r > t. \end{cases}$$

où $i \geq 1$ et $j = 1, ..., m$.

Preuve:

On suit les idées de la démonstration du théorème 2.3. de [57]. On considère la suite approximante $(x_t^{(n)})_{n\geq 0}$, définie par (3.2) et on montre par récurrence sur n que x^n appartient à $\mathbb{D}^{2,1}(L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$ et que

$$(3.6) \qquad \sup_n \sup_r E[\sup_{t\in[0,T]} \|D_r x_t^n\|^2_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m}] < +\infty,$$

ce qui implique $x \in \mathbb{D}^{2,1}(L^2[0,T];\mathbb{R}^m)$.

En effet, soit $x = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k(x)$ la décomposition de x sur le chaos de Wiener de $L^2(\Omega \times [0,T];\mathbb{R}^m)$. Notons $y = \{y_r^{\alpha,i}(t)\}$ la limite faible dans $L^2(\Omega\times[0,T]^2, \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m)$ d'une sous-suite de $\{D_r^\alpha x_t^{(n)i}; n \geq 0\}$.

Comme $x^{(n)}$ converge vers x dans $L^2(\Omega\times[0,T];\mathbb{R}^m)$, la projection de y sur le k-ième chaos de Wiener est identique à celle des séries $\sum_k D_r^\alpha(J_k x_t^i)$ définissant formellement $D_r^\alpha x_t^i$.

Donc $E[\int_0^T \int_0^T \|D_r x_t\|^2_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} dr dt]$ est borné par $\sup_{n,r} E[\sup_{t\in[0,T]} \|D_r x_t^{(n)}\|^2_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m}]$ et par conséquent $x_t \in \mathbb{D}^{2,1}(L^2([0,T];\mathbb{R}^m)$.

D'après la proposition 1.1.10.1., on a, pour $r \leq t$,

$$D_r^\alpha x_t^{(n+1)i} = X_\alpha^i(r, x_r^{(n)}) + \int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0^i(s, x_s) D_r^\alpha x_s^{(n)l}\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_r^t \nabla_l X_k^i(s, x_s^{(n)}) D_r^\alpha x_s^{(n)l}\, dw_s^k.$$

De plus, les inégalités de Burkholder et Hölder impliquent

$$E(\sup_t \|D_r x_t^{(n+1)}\|^2_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}) \leq C_1 + C_2 \int_0^T E(\sup_{u \leq s} \|D_r x_u^{(n)}\|^2_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m})\, ds,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes indépendantes de n.
Donc, la relation (3.6) est vérifiée et les mêmes arguments, appliqués à x au lieu de $x^{(n)}$, permettent de terminer la preuve.

□

Proposition 3.1.2.3.

Le processus $\{D_r^i x_t^j,\ 0 \leq r \leq t\}$ admet une version presque sûrement continue pour tous $i \geq 1$, $j = 1, ...m$ et $t \in [0, T]$ fixés.

Preuve:
Considérons le processus $\{y_l^j(t,r),\ t \geq r,\ (r,t) \in [0,T]^2; j,l = 1,...,m\}$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$y_l^j(t,r) = \delta_i^j + \int_r^t \nabla_h \tilde{X}_0^j(s, x_s) y_l^h(s,r)\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_r^t \nabla_h X_k^j(s, x_s) y_l^h(s,r)\, dw_s^k \tag{3.7}$$

où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.

Par (3.5), un tel processus existe et vérifie $E\Big\{\sup_{0 \leq s \leq T} |y(s,r)|^p\Big\} < +\infty$, pour tout $p \geq 2$.
De plus, on a pour $r \leq r' \leq t$:

$$\begin{aligned}
&E\Big[\sum_{j=1}^m |y_l^j(t,r) - y_l^j(t,r')|^4\Big] \\
&\leq E\Big[\sum_{j=1}^m \Big|\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\int_r^t \nabla_h X_k^j(s,x_s) y_l^h(s,r)\, dw_s^k - \int_{r'}^t \nabla_h X_k^j(s,x_s) y_l^h(s,r')\, dw_s^k\Big) \\
&\qquad + \int_r^t \nabla_h \tilde{X}_0^j(s,x_s) y_l^h(s,r)\, ds - \int_{r'}^t \nabla_h \tilde{X}_0^j(s,x_s) y_l^h(s,r')\, ds\Big|^4\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_1 E\Big\{\sum_{j=1}^{m}|\sum_{k=1}^{+\infty}\int_r^{r'}\nabla_h X_k^j(s,x_s)y_l^h(s,r)\,dw_s^k|^4\Big\}+C_2 E\Big\{\sum_{j=1}^{d}|\int_r^{r'}\nabla_h\tilde{X}_0^j(s,x_s)y_l^h(s,r)\,ds|^4\Big\}\\
&\qquad+C_3 E\Big\{\sum_{j=1}^{m}|\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{r'}^{t}\nabla_h X_k^j(s,x_s)\big(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')\big)\,dw_s^k|^4\Big\}\\
&\qquad+C_4 E\Big\{\sum_{j=1}^{m}|\int_{r'}^{t}\nabla_h\tilde{X}_0^j(s,x_s)\big(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')\big)\,ds|^4\Big\}\\
&:= I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}
$$

Or, d'après les inégalités de Hölder et Burkholder,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq CE\Big\{\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\int_r^{r'}|\nabla_h X_k^j(s,x_s)y_l^h(s,r)\,ds|^2\Big)^2\Big\}\\
&\leq CE\Big\{\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_r^{r'}\sum_{k=1}^{+\infty}|\nabla_h X_k^j(s,x_s)y_l^h(s,r)\,ds|^2\Big)^2\Big\}\\
&\leq CE\Big\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{m}\int_r^{r'}\sup_h\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\nabla_h X_k^j(s,x_s)|^2\Big)^2|y_l^h(s,r)\,|^4\,ds\Big\}\\
&\leq CK^2E\Big\{\sup_{0\leq s\leq T}|y_l(s,r)|^4\Big\}|r-r'|^2, \qquad \text{d'après (3.4)}\\
&\leq C|r-r'|^2.
\end{aligned}
$$

Par des arguments similaires, on obtient $I_2 \leq C|r-r'|^2$.

D'autre part, les inégalités de Hölder et Burkholder impliquent

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leq E\Big\{\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_0^t\sum_{k=1}^{+\infty}|\nabla_h X_k^j(s,x_s)|^2\,|(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')|^2\,ds\Big)^2\Big\}\\
&\leq CE\Big\{\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\sup_h\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\nabla_h X_k^j(s,x_s)|^2\Big)^2\Big(\sum_{h=1}^{m}|(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')|^2\Big)^2\,ds\Big\}\\
&\leq CK^2\int_0^t E\Big[\sum_{h=1}^{m}|(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')|^4\Big]\,ds.
\end{aligned}
$$

De même, $I_4 \leq C\displaystyle\int_0^t E\Big[\sum_{h=1}^{m}|(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')|^4\Big]\,ds.$

Par conséquent,

$$E\Big[\sum_{j=1}^{m}|y_l^j(t,r)-y_l^j(t,r')|^4\Big] \leq C_1|r-r'|^2 + C_2\int_0^t E\Big[\sum_{h=1}^{m}|(y_l^h(s,r)-y_l^h(s,r')|^4\Big]\,ds$$
$$\leq C|r-r'|^2,$$

d'après le lemme de Gronwall.

Le critère de Kolmogorov nous permet de conclure.

De plus, comme $D_r^i x_t^j = X_i^l(r,x_r)y_l^j(t,r)$, le résultat découle de la continuité des champs de vecteurs X_i.

□

Proposition 3.1.2.4.

Supposons que l'hypothèse (L) est vérifiée et que l'espace engendré par les champs de vecteurs $X_1(0,x), X_2(0,x), \ldots$ est de dimension m, pour chaque $x \in \mathbb{R}^m$. Alors, la loi de x_t admet une densité, pour tout $t > 0$.

Preuve:
D'après les résultats du calcul des variations stochastique (cf. Corollaire 1.1.9.2), il suffit de montrer que le déterminant de la matrice de Malliavin $Q(t)$ associé au processus x_t

$$Q(t) = (\langle Dx_t^j, Dx_t^l\rangle_H;\ j,l = 1,\ldots,m)$$

est strictement positif.

Soit $A = \{\omega;\ \det Q(t)(w) = 0\}$. Supposons que $P(A) > 0$ et montrons qu'on arrive alors à une contradiction.
En effet, si $\omega \in A$, il existe $v \in \mathbb{R}^m$ avec $|v| = 1$ tel que $v^t\Gamma(t)v = 0$, ce qui implique

$$\int_0^t \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{j=1}^{m} D_r^k x_t^j v_j\Big)^2\,dr = 0.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{m} D_r^k x_t^j v_j = 0,$$

pour tous $k \geq 1$ et $r \in [0, t]$. En particulier

$$\sum_{j=1}^{m} X_k^j(0, x_t) v_j = 0,$$

pour tout $k \geq 1$, ce qui est impossible car l'espace engendré par les champs de vecteurs est supposé être de dimension m.

$\square$

3.1.3. REGULARITE DE LA SOLUTION

Dans cette section, on va montrer que pour tout $t \in [0, T]$, le vecteur aléatoire x_t appartient à l'espace $\mathbb{D}^{\infty}(\mathbb{R}^m)$. Pour cela, l'hypothèse (L) ne suffit plus. Il faut exploiter complètement nos hypothèses de départ sur les champs de vecteurs. En fait, on va utiliser l'hypothèse suivante:

Pour tout multi-indice $(n_1, ..., n_j)$, avec $n_1 + ... + n_j = n$, $n \geq 1$, et pour tout $t \in [0, T]$,

$$(B) \qquad K' = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{m} \Big[\sum_{k=1}^{+\infty} |\nabla^n_{i_1 \ldots i_j} X_k^i(t, x)|^2 + |\nabla^n_{i_1 \ldots i_j} \tilde{X}_0^i(t, x)|^2 \Big] < +\infty,$$

où $\nabla^n_{i_1 \ldots i_j}$ désigne l'opérateur $\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}^{n_1} \ldots \partial x_{i_j}^{n_j}}$.

Pour prouver la différentiabilité de x_t on aura besoin du lemme suivant de [59]:

Lemme 3.1.3.1.

Soit $\{x_n,\ n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, telle que pour tous $p \geq 2$ et $N \geq 1$,

(i) $x_n \in \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^m)$, pour tout $n \geq 0$.
(ii) Il existe $x \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\|_{L^p} = 0$.
(iii) La suite $\{D^{(N)} x_n,\ n \geq 0\}$ est bornée dans $L^p(\Omega; H^{\otimes N} \otimes \mathbb{R}^m)$.

Alors, $x \in \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^m)$.

Enonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.3.2.

Supposons que les champs de vecteurs X_k, $k \geq 1$, et $\tilde{X}_0$ vérifient l'hypothèse (B). Alors, pour tout $t \in [0,T]$, $x_t \in I\!D^\infty(I\!R^m)$.

Preuve:
Considérons, pour tout $M \geq 1$, la suite de processus $\{x_M(t),\, t \in [0,T]\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, définie par

$$x_M(t) = x_0 + \int_0^t \tilde{X}_0\big(s, x_M(s)\big)\, ds + \sum_{k=1}^{M} \int_0^t X_k\big(s, x_M(s)\big)\, dw_s^k. \tag{3.8}$$

D'après les résultats du calcul des variations stochastique (cf. proposition 1.1.10.1.), pour tous p, N, $x_M(t) \in \mathbb{D}^{p,N}(\mathbb{R}^m)$, pour tout $M \geq 1$, et $x_M \in \mathbb{D}^{p,N}\big(L^2([0,T];\mathbb{R}^m)\big)$.

Afin d'utiliser le lemme précédent, on veut montrer que $x_M(t) \to x_t$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Or,

$$\begin{aligned}
E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t - x_M(t)|^p\Big\} \leq & C_p\Big\{E\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t \Big(\tilde{X}_0(s,x_s) - \tilde{X}_0\big(s,x_M(s)\big)\Big)\, ds\Big|^p\Big] \\
&+ E\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{k=1}^{M}\int_0^t \Big(X_k(s,x_s) - X_k\big(s,x_m(s)\big)\Big)\, dw_s^k\Big|^p\Big] \\
&+ E\Big|\sum_{k=M+1}^{+\infty}\int_0^t X_k(s,x_s)\, dw_s^k\Big|^p\Big\}.
\end{aligned}$$

Par les inégalités de Burkholder et Hölder, le membre droit de cette inégalité est majoré par

$$\begin{aligned}
&C_p\Big\{E\int_0^T \big|\tilde{X}_0(s,x_s) - \tilde{X}_0\big(s,x_M(s)\big)\big|^p\, ds + E\Big(\int_0^T \sum_{k=1}^{M}\big|X_k(s,x_s) - X_k\big(s,x_M(s)\big)\big|^2\, ds\Big)^{\frac{p}{2}} \\
&\qquad\qquad + E\Big(\int_0^T \sum_{k=M+1}^{+\infty} |X_k(s,x_s)|^2\, ds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\} \\
&\leq C_{p,K}\Big\{E\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t} |x_s - x_M(s)|^p\, dt + E\int_0^T \Big(\sum_{k=M+1}^{+\infty} |X_k(s,x_s)|^2\, ds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\},
\end{aligned}$$

d'après (L).

Or, $\Big(\sum_{k=M+1}^{+\infty} |X_k(s,x_s)|^2\, ds\Big)^{\frac{p}{2}} \leq C(1 + |x_s|^p)$, et $x \in L^p([0,T] \times \Omega)$. Par conséquent.
$\lim_{M\to+\infty} E\int_0^T \Big(\sum_{k=M+1}^{+\infty} |X_k(s,x_s)|^2\, ds\Big)^{\frac{p}{2}}\, ds = 0$, et le lemme de Gronwall nous assure la

convergence cherchée.

Remarquons, qu'on a prouvé en même temps la convergence de x_M vers x dans $L^p(\Omega; L^2([0,T]; \mathbb{R}^m))$.

Pour chaque sous-ensemble $K \subset \{1,...,m\}, K = \{\varepsilon_1, ...\varepsilon_\nu\}$, désignons par $j(K)$ et $r(K)$ les quantités définies par $j(K) = j_{\varepsilon_1}...j_{\varepsilon_\nu}$ et $r(K) = r_{\varepsilon_1...\varepsilon_\nu}$.

De plus, pour tout $k \geq 1$ et tout entier positif M, on définit

$$\alpha_k^{(M)j_1...j_N}(s, r_1, ..., r_N) = \sum \nabla^p_{k_1...k_p} X_k(s, x_M(s)) D^{|I_1|j(I_1)}_{r(I_1)} x_M^{k_1}(s)...D^{|I_p|j(I_p)}_{r(I_p)} x_M^{k_p}(s),$$

$$\alpha_0^{(M)j_1...j_N}(s, r_1, ..., r_N) = \sum \nabla^p_{k_1...k_p} \tilde{X}_0(s, x_M(s)) D^{|I_1|j(I_1)}_{r(I_1)} x_M^{k_1}(s)...D^{|I_p|j(I_p)}_{r(I_p)} x_M^{k_p}(s),$$

où la somme du membre droit de l'égalité porte sur l'ensemble de toutes les partitions $I_1 \cup ... \cup I_p = \{1, ..., N\}$. Les indices $k_1, ..., k_p$ varient dans $\{1, ..., m\}$ et sont sommés.

Finalement, on pose $\alpha_k^{(M)}(s) = X_k(s, x_M(s))$.

Le processus $u_M = \{X_k(s, x_M(s)),\ s \in [0,T], k > 1\}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.1.11.1. C'est pourquoi, utilisant l'identité (1.30) et la proposition 1.1.11.1. on obtient

$$\begin{aligned}(3.9) \qquad D^{(N)j_1...j_N}_{r_1...r_M} x_{M(t)} &= \sum_{\varepsilon=1}^{N} \alpha_{j_\varepsilon}^{(M)j_1...j_{\varepsilon-1}j_{\varepsilon+1}...j_N}(r_\varepsilon, r_1, ..., r_{\varepsilon-1}, r_{\varepsilon+1}, ..., r_N) \\ &+ \sum_{k=1}^{M} \int_{(r_1 \vee ... \vee r_N)\wedge t} \alpha_k^{(M)j_1...j_N}(s, r_1, ..., r_N)\, dw_s^k \\ &+ \int_{(r_1 \vee ... \vee r_N)\wedge t} \alpha_0^{(M)j_1...j_N}(s, r_1, ..., r_N)\, ds.\end{aligned}$$

On montre ensuite que

$$(3.10) \qquad \sup_M \sup_{r_1...r_N} E\Big\{ \sup_{r_1\vee...\vee r_N \leq t \leq 1} \Big(\sum_{j_1...j_N=1}^{M} |D^{(N)j_1...j_N}_{r_1...r_N} x_M(t)|^2 \Big)^{\frac{p}{2}} \Big\} < +\infty,$$

pour tous $N \in \mathbb{Z}_+$ et $p \geq 2$, ce qui implique que la suite $\{D^{(N)} x_M(t),\ M \geq 0\}$ est bornée dans $L^p(\Omega, H^{\otimes N} \otimes \mathbb{R}^m)$, pour tous $N \in \mathbb{Z}_+$ et $p \geq 2$. Par conséquent, d'après le lemme 3.1.3.1., $x_t \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

On procède par récurrence sur N. Pour $N = 1$, on a

$$D_r^j x_M(t) = X_j\big(r, x_M(r)\big) + \int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0\big(s, x_M(s)\big) D_r^j x_M^l(s)\, ds$$
$$+ \sum_{k=1}^M \int_r^t \nabla_l X_k\big(s, x_M(s)\big) D_r^j x_M^l(s)\, dw_s^k.$$

Les inégalités de Burkholder et Hölder impliquent que

$$E\Big\{\sup_{r\le t\le T}\Big(\sum_{j=1}^M |D_r^j x_M(t)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\} \le C_{K',p,d}\Big(1 + \int_r^1 E\Big\{\sup_{r\le u\le s}\Big(\sum_{j=1}^M |D_r^j x_M(u)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\}\, ds\Big),$$

et (3.10) se déduit aisément.

Supposons maintenant que l'hypothèse (3.10) est vérifiée pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $N-1$.

Alors, d'après (3.9), on a

$$E\Big\{\sup_{r_1\vee\ldots\vee r_N\le t\le 1}\Big(\sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^M |D_{r_1\ldots r_N}^{(N)j_1\ldots j_N} x_M(t)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\}$$
$$\le C_{K',p,d}\Big\{1 + \int_0^T E\Big\{\sup_{r_1\vee\ldots\vee r_N\le u\le s}\Big(\sum_{j_1,\ldots,j_N=1}^M |D_{r_1\ldots r_N}^{(N)j_1\ldots j_N} x_M(u)|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\} ds\Big\},$$

et le lemme de Gronwall implique (3.10). Ceci termine la preuve du théorème.

□

3.1.4. REGULARITE DE LA DENSITE

Le but de cette section est de démontrer que, sous la condition de Hörmander, la loi de x_t admet une densité de classe C^∞, pour tout $t > 0$.
Comme $x_t \in \mathbb{D}^\infty$, il suffira de montrer que l'inverse du déterminant de la matrice de Malliavin $Q(t)$ appartient à L^p, pour tout $p > 1$.
Pour cela, on utilise la suite approximante $\big(x_M(t)\big)_{M\ge 1}$ de x_t, définie par (3.8), solution d'une équation différentielle stochastique engendrée par un nombre fini de processus de Wiener.
On montre d'abord qu'il suffit de vérifier que l'inverse du déterminant de la matrice de Malliavin de $x_M(t)$ appartient à tous les L^p.

Lemme 3.1.4.1.

Soit $\{x_M,\ M \geq 1\}$ *une suite de processus aléatoires de dimension* m*, tels que les* x_M *appartiennent tous à* $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^m)$ *et* $x_M \to x$ *dans* $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^m)$*, quand* $M \to +\infty$*. Notons* $Q_M = (Q_M^{i,j})_{1\leq i,j\leq m}$ *(respectivement* $Q = (Q^{i,j})_{1\leq i,j\leq m}$*) la matrice de Malliavin de* x_M *(respectivement de* x*).*
S'il existe un $M_0 \geq 1$*, tel que* $\sup_{M\geq M_0} E(\det Q_M)^{-p} < +\infty$*, pour tout* $p \geq 2$*, alors*

$$E(\det Q)^{-p} < +\infty,$$

pour tout $p \geq 2$*.*

Preuve:
Par hypothèse $Dx_M \to Dx$ dans $L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^m)$. Quitte à choisir une sous-suite, si nécessaire, ceci implique que $\|Dx_M - Dx\|_{H\otimes\mathbb{R}^m} \to 0$, presque sûrement, quand $M \to +\infty$ et par conséquent $Q_M = \langle Dx_M, Dx_M\rangle_{H\otimes\mathbb{R}^m} \to Q = \langle Dx, Dx\rangle_{H\otimes\mathbb{R}^m}$, presque sûrement. quand $M \to +\infty$.
Le lemme de Fatou implique alors que

$$\begin{aligned} E(\det Q)^{-p} &= E\Big(\liminf_{M\to+\infty} (\det Q_M)^{-p}\Big) \\ &\leq \liminf_{M\to+\infty} E(\det Q_M)^{-p} \leq \sup_{M\geq M_0} E(\det Q_M)^{-p} < +\infty. \end{aligned}$$

□

Pour éviter le calcul de déterminants en dimension infinie, on ramène le problème en dimension fini, en utilisant le lemme suivant:

Lemme 3.1.4.2.

Soit $\{C_M,\ M \geq 1\}$ *une suite de matrices aléatoires symétriques semi-définies positives d'ordre* m*. Supposons qu'il existe un* $M_0 \geq 1$*, tel que*

(i) $\sup_{M\geq M_0} E(\|C_M\|^p) < +\infty$*, pour tout* $p \geq 2$*.*

(ii) Pour tout $p \geq 2$*, il existe un* $\varepsilon_0(p)$ *tel que, si* $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$*,*

$$\sup_{M\geq M_0} \sup_{|v|=1} P(v^\tau C_M v < \varepsilon) \leq C\varepsilon^p,$$

pour une certaine constante positive C.

Alors, $\sup_{M \geq M_0} E(\det C_M)^{-p} < +\infty$, *pour tout* $p \geq 2$.

Preuve:

Il suffit d'adapter les arguments donnés en [78] (voir aussi [40]) à des champs de vecteurs dépendant du temps.

Si $\lambda_M = \inf_{|v|=1} v^\tau C_M v$, on a $\det C_M \geq \lambda_M^d$. Il suffit donc de vérifier que, pour tout $p \geq 2$, il existe un $\varepsilon_0(p)$ tel que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$, on a $\sup_{M \geq M_0} P(\lambda_M < \varepsilon) \leq C\varepsilon^p$, pour une certaine constante positive C.

Supposons que $\|C_M\| = \left(\sum_{i,j=1}^m (C_M^{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^{-1}$.

Si $|u| = |v| = 1$, alors

$$|v^\tau C_M v - u^\tau C_M u| \leq 2\varepsilon^{-1}|u - v|.$$

Considérons un nombre fini de points $v_1, ..., v_{n_0}$ dans la sphère unité $S^{m-1} = \{u \in \mathbb{R}^m / \, |u| = 1\}$, tels que $\bigcup_{i=1}^{n_0} B_{\frac{\varepsilon^2}{2}}(v_i) \supset S$. Alors, il existe une constante C, telle que $n_0 \leq C(\varepsilon^2)^{-(m-1)}$.

Supposons que $v_k^\tau C_M v_k \geq 2\varepsilon$, pour tout $k = 1, ..., n_0$. Alors, pour tout $v \in S^{m-1}$, tel que $|v - v_k| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$, on a

$$v^\tau C_M v \geq v_k^\tau C_M v_k - |v^\tau C_M v - v_k^\tau C_M v_k| \geq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
P(\lambda_M < \varepsilon) &= P\Big(\inf_{|v|=1} v^\tau C_M v < \varepsilon\Big) \\
&\leq P\Big(\inf_{|v|=1} v^\tau C_M v < \varepsilon, \; \|C_M\| \leq \varepsilon^{-1}\Big) \\
&\leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{n_0} \{v_k^\tau C_M v_k < 2\varepsilon\}\Big) + P(\|C_M\| > \varepsilon^{-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} P(v_k^\tau C_M v < 2\varepsilon) + \varepsilon^p E(\|C_M\|^p),
\end{aligned}$$

ce qui implique le résultat désiré.

□

Remarque:

Ces deux lemmes contiennent une version simplifiée de résultats prouvés par S.Watanabe [84].

Dans la suite, on note X_0 le champ de vecteurs $\tilde{X}_0 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \nabla X_k X_k$. Cette définition a un sens, car la condition (B) implique que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \nabla X_k X_k$ est absolument convergente.

Rappelons la condition de Hörmander locale:

(H) Pour tout point x dans le support de la variable aléatoire x_0, l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs

$$X_k,\ k \geq 1; \quad [X_{k_1}, X_{k_2}],\ k_1, k_2 \geq 0; ...; [...[X_{k_{j-1}}, X_{k_j}]...],\ k_1, ..., k_j \geq 0, ...$$

au point $(0, x)$ est de dimension m.

On peut maintenant énoncer le théorème principal de cette section:

Théorème 3.1.4.3.

Si les champs de vecteurs vérifient les hypothèses (B) et (H), alors, pour tout $t > 0$, la loi du processus stochastique x_t possède une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Preuve:

Fixons un $t > 0$ et considérons la suite $\{x_M(t)\,, M \geq 1\}$ définie par (3.8).

Soit $\{y_M(t),\ t \in [0,T]\}$ la dérivée du flot stochastique associé à (3.8). Alors, $y_M(t)$ est la solution du système différentiel stochastique

$$\left(y_M(t)\right)_l^i = \delta_l^i + \int_0^t \nabla_h \tilde{X}_0^i(s, x_M(s))\left(y_M(s)\right)_l^h ds$$
$$+ \sum_{k=1}^{M} \int_0^t \nabla_h X_k^i(s, x_M(s))\left(y_M(s)\right)_l^h dw_s^k, \quad i, l = 1, ..., m.$$

De plus, le processus inverse $\{y_M^{-1}(t)\,, t \in [0,T]\}$ est solution du système différentiel stochastique

$$\left(y_M^{-1}(t)\right)_l^i = \delta_l^i + \int_0^t \left(y_M^{-1}(s)\right)_j^i \sum_{k=1}^{M} \nabla_h X_k^j(s, x_M(s)) \nabla_l X_k^h(s, x_M(s))\, ds$$

$$- \int_0^t \left(y_M^{-1}(s)\right)_j^i \nabla_l \tilde{X}_0^j\left(s, x_M(s)\right) ds - \sum_{k=1}^M \int_0^t \left(y_M^{-1}(s)\right)_i^j \nabla_l X_k^j\left(s, x_M(s)\right) dw_s^k.$$

D'après les résultats du paragraphe 1.1.10., on peut écrire la matrice de covariance de Malliavin correspondant à $x_M(t)$ sous la forme

$$Q_M(t) = y_M(t) C_M(t) y_M^T(t), \tag{3.11}$$

où C_M est la matrice symétrique définie positive dont les composantes sont données par

$$C_M^{i,l}(t) = \sum_{k=1}^M \int_0^t \left\{ \left(y_M^{-1}(r)\right)_j^i X_k^j\left(r, x_M(r)\right) \left(y_M^{-1}(r)\right)_{j'}^l X_k^{j'}\left(r, x_M(r)\right) \right\} dr$$

(cf. (1.27)).

Afin de pouvoir utiliser le lemme 3.1.4.2., on montre les résultats suivants:

(i) $x_M(t) \to x(t)$ dans $\mathbb{D}^{2,1}(\mathbb{R}^m)$, quand $M \to +\infty$.

(ii) $\sup_M E\left(\sup_{t \in [0,T]} \|y_M^{-1}\|^p\right) < +\infty$, pour tout $p \geq 2$.

(iii) Pour tout $p \geq 2$, il existe $\varepsilon_0(p)$ tel que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$,

$$\sup_{M \geq M_0} \sup_{|v|=1} P\left(v^T C_M(t) v < \varepsilon\right) \leq C\varepsilon^p.$$

D'après la condition (B), on a

$$E\|C_M(t)\|^p \leq C_{p,K'} E \int_0^t \|y_M^{-1}(r)\|^{2p} \, dr.$$

Donc, la propriété (ii) implique

$$\sup_M E\|C_M(t)\|^p < +\infty,$$

pour tout $p \geq 2$, et, d'après la propriété (iii) et le lemme 3.1.4.1.,

$$\sup_{M \geq M_0} E\left(\det C_M(t)\right)^{-p} < +\infty,$$

pour tout $p \geq 2$.

Par conséquent, en utilisant la propriété (ii) et l'identité (3.11), on obtient

$$\sup_{M\geq M_0} E\Big(\det Q_M(t)\Big)^{-p} < +\infty,$$

pour tout $p \geq 2$ et d'après le lemme 3.1.4.2. et la propriété (i), on conclut que

$$E\Big(\det Q(t)\Big) < +\infty,$$

pour tout $p \geq 2$.

Donc, comme d'après le théorème 3.1.3.2., $x_t \in \mathbb{D}^\infty(\mathbb{R}^m)$, ceci suffit pour assurer la conclusion du théorème.

Preuve de (i):
Au cours de la démonstration du théorème 3.1.3.2, on a montré que $x_M(t)$ tend vers x_t dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$, quand M tend vers $+\infty$ et que x est dans $\mathbb{D}^\infty(L^2([0,T];\mathbb{R}^m))$.

De plus, pour tout M fixé,

$$\begin{aligned} D_r^i x_M^j(t) = X_i^j\big(r, x_M(r)\big) + \int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0^j\big(s, x_M(s)\big) D_r^i x_M^l(s)\, ds \\ + \sum_{k=1}^{M} \int_r^t \nabla_l X_k^j\big(s, x_M(s)\big) D_r^i x_M^l(s)\, dw_s^k, \end{aligned}$$

si $t \geq r$, $i = 1, ..., M$, $j = 1, ..., d$,

et

$$D_r^i x_M^j(t) = 0,$$

si $r > t$ ou $i > M$.

D'autre part, d'après la proposition 3.1.2.2. on a

$$D_r^i x^j(t) = X_i^j(r, x_r) + \int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0^j(s, x_s) D_r^i x_s^l\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_r^t \nabla_l X_k^j(s, x_s) D_r^i x_s^l\, dw_s^k.$$

On montre maintenant que

$$\lim_{M\to+\infty} \|Dx_M(t) - Dx_t\|_{L^2(\Omega; H\otimes\mathbb{R}^m)} = 0, \tag{3.12}$$

où $H = L^2([0,T] \times \mathbb{Z}_+; \mathbb{R})$.
En effet,

$$E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} |D_r^i x_M^j(t) - D_r^i x_t^j|^2 \, dr \leq C \sum_{\sigma=1}^{6} A_M^\sigma,$$

avec

$$A_M^1 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{m} \left| X_i^j(r, x_M(r)) - X_i^j(r, x_r) \right|^2 dr,$$

$$A_M^2 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{M} \int_r^t \left(\nabla_l X_k^j(s, x_M(s)) D_r^i x_M^l(s) - \nabla_l X_k^j(s, x_s) D_r^i x_s^l \right) dw_s^k \right|^2 dr.$$

$$A_M^3 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=M+1}^{+\infty} \int_r^t \nabla_l X_k^j(s, x_s) D_r^i x_s^l \, dw_s^k \right|^2 dr,$$

$$A_M^4 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{m} \left| \int_r^t \left(\nabla_l \tilde{X}_0^j(s, x_M(s)) D_r^i x_M^l(s) - \nabla_l \tilde{X}_0^j(s, x_s) D_r^i x_s^l \right) ds \right|^2 dr,$$

$$A_M^5 = E \int_0^T \sum_{i=M+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left| \int_r^t \nabla_l \tilde{X}_0^j(s, x_s) D_r^i x_s^l \, ds \right|^2 dr,$$

et

$$A_M^6 = E \int_0^T \sum_{i=M+1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} |X_i^j(r, x_r)|^2 \, dr.$$

La condition (L) implique que

$$A_M^1 \leq K \, E \int_0^T |x_M(r) - x_r|^2 \, dr \leq K \, E\Big(\sup_{0 \leq r \leq T} |x_M(r) - x_r|^2 \Big)$$

et cette dernière expression tend vers 0, quand $M \to +\infty$, d'après la preuve du théorème 3.1.3.2.

D'autre part, $A_M^2 \leq C(B_M^1 + B_M^2)$, avec

$$B_M^1 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{M} \int_r^t \Big(\nabla_l X_k^j(s, x_M(s)) - \nabla_l X_k^j(s, x_s) \Big) D_r^i x_M^l(s) \, dw_s^k \right|^2 dr.$$

et

$$B_M^2 = E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{M} \int_r^t \nabla_l X_k^j(s, x_s) \big(D_r^i x_M^l(s) - D_r^i x_s^l \big) \, dw_s^k \right|^2 dr.$$

Or, l'inégalité de Burkholder implique

$$B_M^1 \le C\, E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{M} \int_r^t |\nabla_l X_k^j(s, x_M(s)) - \nabla_l X_k^j(s, x_s)|^2 |D_r^i x_M^l(s)|^2 \, ds \Big)\, dr.$$

De plus, en utilisant la condition (B), le membre droit de cette inégalité peut être majoré par

$$C_{K'}\, E \int_0^T \int_r^t |x_M(s) - x_s|^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m} |D_r^i x_M^l(s)|^2 \, ds\, dr,$$

et, d'après l'inégalité de Schwarz, par

$$C_{K'} \Big(E\Big\{ \sup_{0 \le s \le 1} |x_M(s) - x_s|^4 \Big\}\Big)^{\frac{1}{2}} \sup_M \sup_r E\Big\{ \sup_{r \le s \le 1} \Big(\sum_{i=1}^{M} \sum_{l=1}^{m} |D_r^i x_M^l(s)|^2 \Big)^2 \Big\}.$$

Comme, d'après (3.10), le second terme de cette expression est borné,on a

$$\lim_{M \to +\infty} B_M^1 = 0.$$

Des arguments similaires montrent que

$$\begin{aligned} B_M^2 &\le C\, E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{M} \int_r^t |\nabla_l X_k^j(s, x_s)|^2 |D_r^i x_M^l(s) - D_r^i x_s^l|^2 \, ds \Big)\, dr \\ &\le C_{K'} E \int_0^t \Big(\int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m} |D_r^i x_M^l(s) - D_r^i x^l(s)|^2 \, dr \Big)\, ds \\ &= C_{K'} \int_0^t \|Dx_M(s) - Dx_s\|^2_{L^2(\Omega; H \otimes \mathbb{R}^m)}\, ds. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Burkholder on déduit

$$\begin{aligned} A_M^3 &\le C\, E \int_0^T \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=M+1}^{+\infty} \Big(\int_r^t |\nabla_l X_k^j(s, x_s)|^2 |D_r^i x_s^l|^2 \, ds \Big)\, dr \\ &\le \sup_x \sup_{1 \le l \le m} \sum_{j=1}^{m} \sup_t \sum_{k=M+1}^{+\infty} |\nabla_l X_k^j(t, x)|^2 \sup_r E\Big\{ \sup_{r \le s \le T} \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{m} |D_r^i x_s^l|^2 \Big) \Big\} \qquad (3.13) \end{aligned}$$

où, le second terme de (3.13) est borné d'après (3.10), tandis que le premier terme tend vers 0, quand $M \to +\infty$, d'après la condition (B).

Des majorations analogues à celles obtenues pour A_M^2 (respectivement A_M^3) se montrent facilement pour A_M^4 (respectivement A_M^5) .
Enfin, sous l'hypothèse (B), on a de façon évidente $\lim_{M\to+\infty} A_M^6 = 0$.

Ainsi, on a prouvé que

$$\|Dx_M(t) - Dx_t\|^2_{L^2(\Omega;H\otimes\mathbb{R}^m)} \leq C_{K'}\Big\{C_M + \int_0^t \|Dx_M(s) - Dx_s\|^2_{L^2(\Omega;H\otimes\mathbb{R}^m)}\,ds\Big\},$$

avec $\lim_{M\to+\infty} C_M = 0$.
Par conséquent, on obtient (3.12), par utilisation du lemme de Gronwall.

Preuve de (ii):

Les inégalités de Burkholder et Hölder, ainsi que la condition (B) impliquent

$$\begin{aligned}
E\Big\{\sup_{0\leq t\leq T}\|y_M^{-1}\|^p\Big\} \leq C_{p,d}\Big\{1 + &\sum_{i,l,j=1}^{m} E\Big(\int_0^T |(y_M^{-1}(s))^i_j|^2 |\nabla_l \tilde{X}_0^j(s,x_M(s))|^2\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\\
&+ \sum_{i,l,j=1}^{m} E\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^T |(y_M^{-1}(s))^i_j|^2 |\nabla_l X_k^j(s,x_M(s))|^2\,ds\Big)^{\frac{p}{2}}\\
+\sum_{i,l=1}^{m} E\Big(\int_0^T \sum_{j=1}^{m} |(y_M^{-1}(s))^i_j|^2 &\sum_{j,h=1}^{m}\sum_{k=1}^{M} |\nabla_h X_k^j(s,x_M(s))|^2 \cdot \sum_{h=1}^{m}\sum_{k=1}^{M}|\nabla_l X_k^h(s,x_M(s))|^2 ds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big\}\\
&\leq C_{p,d,K'}\Big\{1 + \int_0^T E\Big(\sup_{0\leq s\leq T}\|y_M^{-1}(s)\|\Big)\,ds\Big\}.
\end{aligned}$$

On obtient alors (ii) par application du lemme de Gronwall.

Preuve de (iii):
Considérons les ensembles de champs de vecteurs Γ_n, $n \geq 0$, définis par récurrence par:

$$\Gamma_0 = \{X_k,\ 1 \leq k \leq k_0\}$$

$$\Gamma_n = \Big\{[X_k, V],\ 1 \leq k \leq k_0,\ V \in \Gamma_{n-1};\ [X_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{+\infty}[X_j,[X_j,V]],\ V \in \Gamma_{n-1}\Big\}, \quad n \geq 1.$$

Alors (cf [59]), sous l'hypothèse (H), il existe deux nombres entiers $k_0 \geq 1$ et $l_0 \geq 0$, tels que, pour tout x dans le support de x_0, l'espace engendré par $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{l_0} \Gamma_n$ au point $(0, x)$

est $\mathbb{R}^m$ et par conséquent (cf [62] ou [78]), il existe trois constantes positives c, R et K, telles que

$$\sum_{l=0}^{l_0} \sum_{V \in \Gamma_l} \langle u, V(s,y) \rangle^2 > c, \tag{3.14}$$

pour tous $u \in S^{m-1}$, $s \in [0,K]$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$ avec $|y - x_0| < R$.

Pour obtenir une inégalité analogue pour les champs de vecteurs intervenant dans la définition de la suite approximante $\{x_M(t)\}$, définie par (3.10), on introduit les champs de vecteurs $X_0^M = \tilde{X}_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \nabla X_k X_k$ et les ensembles

$$\Gamma_0^M = \{X_k,\ k = 1, ..., M\},$$

$$\Gamma_n^M = \Big\{[X_k, V^M],\ k = 1, ..., M,\ V^M \in \Gamma_{n-1}^M;$$
$$[X_0^M, V^M] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} [X_j, [X_j, V^M]],\ V^M \in \Gamma_{n-1}\Big\}, \quad n \geq 1.$$

De plus, d'après [59], on a, pour M suffisamment grand,

$$\sum_{l=0}^{l_0} \sum_{V \in \Gamma_l^M} \langle u, V(s,y) \rangle^2 > c, \tag{3.15}$$

pour tous $u \in S^{m-1}$, $s \in [0,K]$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$ avec $|y - x_0| < R$, où c, R et K sont données par (3.14).

On fixe maintenant M "assez grand" pour que (3.15) reste valable. Soient r et t^0 deux constantes positives, telles que $r < R$ et $t^0 < K$ et soit $\varepsilon \in [0, t^0]$. Considérons le temps d'arrêt $\sigma = \sigma(M)$, défini par:

$$\sigma = \inf_s \Big\{ |x_M(s) - x_0| \geq r \text{ ou } |y_M^{-1}(s) - I| \geq \frac{1}{2} \Big\} \wedge t^0 \tag{3.16}$$

Des hypothèses sur les champs de vecteurs, on déduit facilement (cf. [60]) que $\sigma^{-1} \in L^p(P)$, pour tout $p < +\infty$.

Il reste à montrer que, pour tout $p \geq 2$, il existe un $\varepsilon_0(p)$, tel que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0(p)$, $\sup_{|u|\in S} P\big(u^\tau C_M(t)u < \varepsilon\big) \leq C\varepsilon^P$, pour une certaine constante positive C, c'est-à-dire

$$(3.17) \quad \sup_{u\in S} P\Big(\int_0^\sigma \sum_{k=1}^M \langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s, x_M(s)\big), u\rangle^2 \, ds < \varepsilon\Big) = O(\varepsilon^p)\,, \text{ pour tout } p < +\infty,$$

où S désigne S^{m-1}.

En gelant la variable de temps dans les coefficients de l'équation (3.1), à partir d'un temps fixé, on définit, pour tout $\xi \in [0,T]$ le processus stochastique $x_M(\xi, t)$ (cf. [29]) solution de l'équation différentielle au sens de Stratonovitch

(3.18)

$$x_M(\xi,t) = \begin{cases} x_M(t), & \text{si } t \leq \xi \\ x_M(\xi) + \displaystyle\int_\xi^t X_0\big(\xi, x_M(\xi,s)\big)\, ds + \sum_{i=1}^M \int_\xi^t X_i\big(\xi, x_M(\xi,s)\big) \circ dw_s^i, & \text{si } \xi \leq t. \end{cases}$$

A ce processus, on associe comme d'habitude la dérivée de son flot stochastique, noté $y_M(\xi,t)$ pour tout $\xi \in [0,T[$.

De plus, les hypothèses sur les champs de vecteurs impliquent que pour tous $t, t' \in [0,T]$, tels que $|t - t'| \leq \delta := \left(\frac{\varepsilon^2}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$:

$$(3.19) \quad \sup_{i\in\{0,\ldots,M\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |X_i(t,x) - X_i(t',x)| \leq \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \sup_{i\in\{0,\ldots,M\}} \sup_{x\in\mathcal{K}} |\nabla X_i(t,x) - \nabla X_i(t',x)| \leq \varepsilon^2,$$

où $\mathcal{K} = \{x \in \mathrm{I\!R}^m / |x - x_0| \leq r\}$, α est l'exposant de Hölder des coefficients et K est la constante intervenant dans la condition de Lipschitz (L).

Pour montrer (3.17), on écrit $[0, t^0]$ comme réunion d'intervalles disjoints de longueurs inférieures à δ. Soient N un entier, tel que $\frac{t^0}{\delta} \leq N < \frac{t^0}{\delta} + 1$ et $(t_i)_{0\leq i\leq N}$ une suite d'éléments de $[0,t^0]$, telle que $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = t^0$ avec $|t_{i+1} - t_i| \leq \delta$, pour tout i, $0 \leq i \leq N-1$.

On montre alors que

$$\sup_{u\in S} P\Big(\sum_{k=1}^M \int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s, x_M(s)\big), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\, ds < \varepsilon\Big) = O(\varepsilon^p),$$

pour tout $p < +\infty$.

Par utilisation d'arguments standards en théorie de la mesure, on a

$$\sup_{u\in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1}\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\varepsilon\Big)$$

$$\begin{aligned}(3.20)\qquad &\leq \sup_{u\in S^{m-1}} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1}\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\frac{3\varepsilon}{2}\Big)\\ &\quad+\sup_{u\in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1}\big|\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle^2\\ &\qquad -\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle^2\big|\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds>\tfrac{\varepsilon}{2}\Big).\end{aligned}$$

On traite séparément les deux termes du membre droit de cette inégalité.

Dans une première partie, on montre que (3.19) implique

$$\begin{aligned}(3.21)\qquad &\sup_{u\in S^{m-1}} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1}\big|\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle^2\\ &\qquad -\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle^2\big|\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds>\tfrac{\varepsilon}{2}\Big)=O(\varepsilon^p),\end{aligned}$$

pour tout $p < +\infty$.

Dans une deuxième partie, finalement, on montre que la condition (3.15) implique

$$(3.22)\quad \sup_{u\in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1}\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\frac{3\varepsilon}{2}\Big)=O(\varepsilon^p),$$

pour tout $p < +\infty$.

- *Première partie:*

Pour tous $i, 0 \leq i \leq N-1$ et $k, 1 \leq k \leq M$, on a

$$\begin{aligned}&\big|\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle^2-\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle^2\big|\\ &\qquad\leq \big|\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle+\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle\big|\\ &\qquad\times\big|\big\langle y_M^{-1}(s)X_k\big(s,x_M(s)\big),u\big\rangle-\big\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\big\rangle\big|.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $s \in [t_i, t_{i+1}[$ tel que $s \leq \sigma$, on déduit de l'inégalité de Schwarz et de la relation (3.19):

$$\sum_{k=1}^{M} \left| \langle y_M^{-1}(s) X_k(s, x_M(s)), u \rangle^2 - \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k(t_i, x_M(t_i, s)), u \rangle^2 \right|$$

$$\leq C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right), \tag{3.23}$$

où C_1 est une constante positive, qui dépend seulement de K_X, M et m, avec $K_X = \sup_{k \in \{0,\ldots,M\}} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times I\!R^m} \left(|X_k(t,x)| + |\nabla X_k(t,x)|\right)$.

On obtient alors:

$$\sup_{u \in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M} \int_0^{\sigma} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \langle y_M^{-1}(s) X_k(s, x_M(s)), u \rangle^2 - \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k(t_i, x_M(t_i, s)), u \rangle^2 \right| 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1}[}(s) ds > \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

$$\leq P\Big(\int_0^{\sigma} \sum_{i=0}^{N-1} C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right) 1\!\!1_{[t_i, t_{i+1}[}(s) ds > \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N-1} P\Big(\int_{t_i \wedge \sigma}^{t_{i+1} \wedge \sigma} C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right) ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big). \tag{3.24}$$

De plus, pour tout i, $0 \leq i \leq N-1$, on a:

$$P\Big(\int_{t_i \wedge \sigma}^{t_{i+1} \wedge \sigma} C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right) ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big)$$

$$\leq P\Big(\int_{t_i \wedge \sigma}^{t_{i+1} \wedge \sigma} C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right) ds > \frac{\varepsilon}{2N};$$

$$\sup_{s \in [t_i \wedge \sigma; t_{i+1} \wedge \sigma[} |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)| \leq K_m \varepsilon\Big) + P\Big(\sup_{s \in [t_i \wedge \sigma; t_{i+1} \wedge \sigma[} |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)| > K_m \varepsilon\Big), \tag{3.25}$$

où $K_m = \frac{1}{(15 + 6\sqrt{m})(t^0 + 1) C_1}$.

De l'inégalité

$$|y_M^{-1}(t_i, s)| \leq |y_M^{-1}(t_i, s) - y_M^{-1}(s)| + |y_M^{-1}(s) - I| + |I|,$$

on déduit

$$P\Big(\int_{t_i \wedge \sigma}^{t_{i+1} \wedge \sigma} C_1 \left(1 + |y_M^{-1}(t_i, s)|\right) \left(\varepsilon^2 + |x_M(s) - x_M(t_i, s)| + |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)|\right) ds > \frac{\varepsilon}{2N};$$

$$\sup_{s \in [t_i \wedge \sigma; t_{i+1} \wedge \sigma[} |y_M^{-1}(s) - y_M^{-1}(t_i, s)| \leq K_m \varepsilon\Big)$$

$$\leq P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} (15+6\sqrt{d})C_1\big(\varepsilon^2+|x_M(s)-x_M(t_i,s)|+|y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\,ds > \frac{\varepsilon}{2N};$$

$$\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| \leq K_m\varepsilon\Big). \tag{3.26}$$

Donc, en séparant le membre droit de (3.26) en trois parties, on obtient:

$$P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} C_1\big(1+|y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\big(\varepsilon^2+|x_M(s)-x_M(t_i,s)|+|y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\,ds > \frac{\varepsilon}{2N};$$

$$\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| \leq K_m\varepsilon\Big)$$

$$\leq P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} \varepsilon^2 > \frac{\varepsilon}{21NC_1}\Big) + P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} |x_M(s)-x_M(t_i,s)| > \frac{\varepsilon}{21NC_1}\Big)$$

$$+P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| > \frac{\varepsilon}{21NC_1};\ \sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| \leq K_m\varepsilon\Big).$$

De plus, $\frac{\delta}{t^0+1} \leq \frac{1}{N}$, par définition de N, et, comme $|t_{i+1}-t_i| \leq \delta$, on a

$$P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} C_1\big(1+|y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\big(\varepsilon^2+|x_M(s)-x_M(t_i,s)|+|y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\,ds > \frac{\varepsilon}{2N};$$

$$\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| \leq K_m\varepsilon\Big)$$

$$\leq P(\varepsilon^2 > K_m\varepsilon) + P\Big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |x_M(s)-x_M(t_i,s)| > K_m\varepsilon\Big)$$

$$+P\Big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| > K_m\varepsilon;\ \sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| \leq K_m\varepsilon\Big).$$

(3.27)

Or, le dernier terme du membre droit de (3.27) est nul et pour ε suffisamment petit. $P(\varepsilon^2 > K_m\varepsilon) = 0$, donc on obtient de (3.25)

$$P\Big(\int_{t_i\wedge\sigma}^{t_{i+1}\wedge\sigma} C_1\big(1+|y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\big(\varepsilon^2+|x_M(s)-x_M(t_i,s)|+|y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)|\big)\,ds > \frac{\varepsilon}{2N}\Big)$$

$$\leq P\Big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |x_M^{-1}(s)-x_M^{-1}(t_i,s)| > K_m\varepsilon\Big) + P\Big(\sup_{s\in[t_i\wedge\sigma;t_{i+1}\wedge\sigma[} |y_M^{-1}(s)-y_M^{-1}(t_i,s)| > K_m\varepsilon\Big).$$

On conclut par utilisation du lemme 1.3.2.4 de [29].

- *Deuxième partie:*

Pour montrer que la condition (3.15) implique (3.22), on utilise les résultats du premier chapitre.

Tout d'abord on modifie légèrement la condition (3.15), de façon à faire apparaître des champs de vecteurs pour lesquels la variable de temps reste constante. Par définition du temps d'arrêt σ, on a $|x_M(t_i) - x_0| \leq r$ et $t_i \leq t^0$, pour tout $i \in \{0, ..., N-1\}$, tel que $t_i \leq \sigma$. Donc, pour tout $i \in \{0, ..., N-1\}$, tel que $t_i \leq \sigma$, la condition (3.15) implique

$$\sum_{j=0}^{l_0} \sum_{V \in \Gamma_j^M} \langle V(t_i, y_i), u \rangle^2 \geq c, \tag{3.28}$$

pour tous $u \in S$ et $y_i \in \mathbb{R}^m$, tels que $|y_i - x_M(t_i)| \leq R - r$.

De plus, on a

(3.29)

$$\sup_{u \in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M} \int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k\big(t_i, x_M(t_i, s)\big), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s)\, ds < \varepsilon\Big)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \sup_{u \in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M} \int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k\big(t_i, x_M(t_i, s)\big), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s) ds < \varepsilon; \sigma \in [t_j, t_{j+1}[\Big).$$

Fixons un $j \in \{1, ..., N-1\}$. Alors, d'après des arguments standard de la théorie de l'intégration, on a

$$\sup_{u \in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M} \int_0^\sigma \sum_{i=0}^{N-1} \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k\big(t_i, x_M(t_i, s)\big), u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(s)\, ds < \varepsilon; \sigma \in [t_j, t_{j+1}[\Big)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \sup_{u \in S} \Big(\int_{t_i}^{t_i+1} \sum_{k=1}^{M} \langle y_M^{-1}(t_i, s) X_k\big(t_i, x_M(t_i, s)\big), u\rangle^2 ds < \frac{\varepsilon}{j}; \{t_i < \varepsilon\}\Big). \tag{3.30}$$

De plus, si pour tout $i, 0 \leq i \leq j-1$, σ_i désigne le temps d'arrêt défini par:

$$\sigma_i = \inf\{s, |x_M(t_i, s) - x_M(t_i)| \geq R - r \text{ ou } |y_M^{-1}(t_i, s) - y_M^{-1}(t_i)| \geq \frac{1}{4}\} \wedge t_{i+1}.$$

On a

$$\sup_{u\in S}\Big(\int_{t_i}^{t_i+1}\sum_{k=1}^{M}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2\,ds<\frac{\varepsilon}{j};\{t_i<\varepsilon\}\Big)$$

$$\leq \sup_{u\in S}\Big(\int_{t_i}^{\sigma_i}\sum_{k=1}^{M}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_r\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2\,ds<\frac{\varepsilon}{k};\{t_i<\varepsilon\}\Big). \tag{3.31}$$

Or, comme pour tout i, $0\leq i\leq N-1$, la longueur de l'intervalle $[t_i,t_{i+1}]$ est d'ordre $\varepsilon^{2\alpha}$, d'après la démonstration du théorème 4.2 de [60] (cf. aussi [62], [63] et [85]), il existe une constante positive C_2, dépendant seulement de l_0,R,r et t^0, ainsi que des majorants uniformes des dérivées des champs de vecteurs $X_i, 1\leq i\leq M$, telle que pour tout $i, 1\leq i\leq M$ on a:

$$\sup_{u\in S}\Big(\int_{t_i}^{\sigma_i}\sum_{k=1}^{M}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2\,ds<\frac{\varepsilon}{j};\{t_i<\varepsilon\}\Big)\leq C_2\Big(\frac{\varepsilon}{j}\Big)^p,$$

pour tout $p>2$.

D'après (3.30) et (3.31), on obtient alors pour tout $j\in\{1,...,N-1\}$

$$\sup_{u\in S}P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\sigma}\sum_{i=0}^{N-1}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\varepsilon;\sigma\in[t_j,t_{j+1}[\Big)\leq C_3\frac{\varepsilon^p}{j^{p-1}}.$$

pour tout $p>2$, où C_2 est une constante positive, qui dépend seulement de l_0,R,r et t^0. ainsi que des majorants uniformes des dérivées des champs de vecteurs $X_i, 1\leq i\leq M$.

D'autre part, si $j=0$, l'inégalité précédente devient

$$\sup_{u\in S}P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\sigma}\sum_{i=0}^{N-1}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\varepsilon;\sigma\in[t_j,t_{j+1}[\Big)$$

$$\leq \sup_{u\in S}P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\sigma}\langle y_M^{-1}(0,s)X_k\big(0,x_M(0,s)\big),u\rangle^2\,ds<\varepsilon;\{\sigma<t_1\}\Big).$$

et d'après les arguments usuels exposés dans la démonstration du théorème 4.2 de [60] (cf. aussi [62], [63] et [85]), il existe une constante positive C_4 dépendant seulement de l_0, R, r et t^0, ainsi que des majorants uniformes des dérivées des champs de vecteurs $X_i, 1\leq i\leq M$. tel que pour tout i, $1\leq i\leq M$, on a:

$$\sup_{u\in S}P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\sigma}\langle y_M^{-1}(0,s)X_k\big(0,x_M(0,s)\big),u\rangle^2\,ds<\varepsilon;\{\sigma<t_1\}\Big)\leq C_4\varepsilon^p,$$

pour tout $p>2$.

Par conséquent, il existe une constante positive C_5 telle que pour tout $j = 0, ..., N-1$

$$\sup_{u\in S} P\Big(\sum_{k=1}^{M}\int_0^{\sigma}\sum_{i=0}^{N-1}\langle y_M^{-1}(t_i,s)X_k\big(t_i,x_M(t_i,s)\big),u\rangle^2 \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(s)\,ds<\varepsilon;\sigma\in[t_j,t_{j+1}[\Big)$$
$$\leq C_5\frac{\varepsilon^p}{j^{p-1}},$$

pour tout $p > 2$.

Finalement, en introduisant cette dernière inégalité dans (3.29), on obtient l'assertion (3.22), ce qui termine la démonstration du théorème.

□

3.2. FILTRAGE NON LINEAIRE AVEC BRUITS DE DIMENSION INFINIE ET COEFFICIENTS D'OBSERVATION NON BORNES

3.2.1. INTRODUCTION

Le but de cette section est de montrer que le filtre non normalisé, associé à un problème de filtrage non linéaire, dont le signal est engendré par un processus de Wiener de dimension infinie et l'observation scalaire à coefficients non bornés, admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat permet de calculer le support de sa loi de probabilité, à l'aide de l'ensemble des solutions d'un système contrôlé associé.

La régularité de la densité du filtre a déjà été étudiée par de nombreux auteurs dans le cas où le bruit qui engendre le signal est de dimension fini (cf. paragraphe 1.2.1.). Dans [31], il est montré, à l'aide du calcul de Malliavin, que, sous une condition de Hörmander locale, le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire avec des bruits non corrélés, des coefficients d'observation bornés et un signal engendré par un processus de Wiener de dimension infinie admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue.

La description de la loi de processus stochastiques, solutions d'équations différentielles stochastiques, comme l'adhérence d'un ensemble de trajectoires d'un système contrôlé, déduit du système stochastique de départ, en remplaçant les processus de Wiener dans l'équation différentielle stochastique par un contrôle appartenant à H^1, a été initialisée par le célèbre article de D.W.Stroock et S.Varadhan [79].

Supposant que la loi de probabilité du filtre non normalisé, associé à un problème de

filtrage non linéaire à bruits indépendants, admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, M. Chaleyat-Maurel et D. Michel [12] ont suivi la route intialisée dans [79] pour déterminer le support de cette densité dans l'espace $\mathcal{C}([0,1], L^2(\mathbb{R}^n))$.
De plus, les mêmes auteurs ont décrit dans [12] et [15] le support de la loi d'un filtre non normalisé, associé à un problème de filtrage non linéaire à bruits corrélés et coefficients d'observation bornés, par une méthode basée sur un résultat de continuité et un théorème d'approximation et cela sans tenir compte de ce que la loi du filtre admette une densité ou non.

Cette section est divisée en cinq paragraphes organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on introduit le problème de filtrage non linéaire étudié dans cette section. Dans le troisième paragraphe, on définit un filtre non normalisé, lié au filtre défini dans le paragraphe précédent par une formule de Kallianpur-Striebel. Dans le quatrième paragraphe, on montre que le filtre admet une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la mesure de Lebesgue, qui appartient également à l'espace de Schwartz. Dans le cinquième paragraphe, on établit un théorème du support pour le filtre.

3.2.2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet, $\{w_t^k,\ t \in [0,T], k \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de processus de Wiener standards indépendants et v un processus de Wiener standard, indépendant des processus w^k, $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $\|\cdot\|$ la norme sur l'espace des matrices sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donnée par

$$\|M\| = \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{+\infty}(m_{ij})^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit une famille de champs de vecteurs $\{X_k,\ k \geq 0\}$ sur $\mathbb{R}^m$ qu'on écrit

$$X_k(x) = X_k^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall k \in \mathbb{N},$$

telle que la carte $X : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $X = \{X_k,\ k \geq 0\}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ aux dérivées de tous ordres bornées.

Considérons le problème de filtrage non linéaire, associé au système signal/observation $(x_t, y_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$(3.32) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)\,ds + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t X_i(x_s) \circ dw_s^i + \int_0^t \overline{X}(x_s)\left(h(x_s)\,ds + \circ dv_s\right) \\ y_t = \int_0^t h(x_s)\,ds + v_t, \end{cases}$$

où,

1. x_0 est une variable aléatoire de loi m_0
2. $\overline{X}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ de classe C_b^∞ s'écrivant

$$\overline{X}(x) = \overline{X}^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

3. h est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, qui est, ainsi que ses dérivées de tous ordres, à croissance au plus exponentielle .
4. $X_0 + h\overline{X}$ est à croissance sous-linéaire (pour éviter des solutions du système (3.32) qui explosent).

On définit le filtre associé au système (3.32) comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaire:

Définition 3.2.2.1.

Pour tout t dans $[0,T]$, notons π_t le filtre associé au système (3.32)*, défini pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ par*

$$(3.33) \qquad \pi_t\psi = E[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t],$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s \,/\, 0 \leq s \leq t)$.

3.2.3. LE FILTRE NON NORMALISE

Les hypothèses sur la fonction h ne permettent pas de définir une mesure de probabilité de référence, comme habituellement dans les problèmes de filtrage non linéaire. En effet l'exponentielle de Girsanov, associée au système (3.32), n'est pas nécessairement une martingale, et par conéquent on ne peut pas appliquer le théorème de Girsanov. Pour contourner cette difficulté, on définit un filtre non normalisé formel et on montre une formule de Kallianpur-Striebel.

Introduisons d'abord quelques définitions et notations nous permettant de contourner le problème de la dépendance des bruits.

Définition 3.2.3.1.

Notons Φ_t le flot déterministe associé au champ de vecteurs $\overline{X}$ (i.e. Φ_t est l'unique solution de l'équation déterministe $\Phi_t = x + \int_0^t \overline{X}(\Phi_s(x))\, ds$).

Notation 3.2.3.2.

Si X désigne un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, tel que, pour tout x dans $\mathbb{R}^m$, $X(x) = X^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ et si F est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, alors, pour tout x dans $\mathbb{R}^m$, on pose

$$XF(x) = X^j(x)\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$$

et

$$(\Phi_t^{*-1}X)F(x) = \big(\nabla\Phi_t(x)\big)^{-1} X\big(\Phi_t(x)\big)\nabla F(x).$$

Le processus d'observation y_t étant unidimensionnel, on peut remplacer le paramètre de temps dans l'expression du flot déterministe Φ_t par y_t et introduire, comme dans [8], un processus stochastique $\bar{x}_t \in \mathbb{R}^m$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$\bar{x}_t = x_0 + \int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1}X_0)(\bar{x}_s)\, ds + \sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1}X_i)(\bar{x}_s) \circ dw_t^i. \tag{3.34}$$

On a alors le résultat suivant:

Proposition 3.2.3.3.

Pour tout t dans $[0,T]$, $x_t = \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)$.

Preuve:

Par application de la formule d'Itô-Stratonovitch au processus stochastique $\bar{x}_t$, on obtient:

$$\begin{aligned}\Phi_{y_t}(\bar{x}_t) &= \Phi_{y_0}(\bar{x}_0) + \int_0^t \frac{\partial\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)}{\partial s} \circ dy_s + \int_0^t \big(\nabla\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big) \circ d\bar{x}_s \\ &= x_0 + \int_0^t \overline{X}\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big) \circ dy_s + \int_0^t X_0\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big)\, ds + \sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^t X_i\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big) \circ dw_s^i.\end{aligned}$$

Donc, par unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (3.22) on a $\Phi_{y_t}(\bar{x}_t) = x_t$, pour tout t dans $[0,T]$.

□

De plus, on définit, pour tout t dans $[0,T]$ l'exponentielle de Girsanov associée au système (3.32) par:

$$(3.35) \qquad Z_t = \exp\Big(\int_0^t h(x_s)dv_s + \frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s)ds\Big).$$

La proposition 3.2.3.3. et la définition du processus y_t, permettent d'écrire, pour tout t dans $[0,T]$, $Z_t = \exp V_t$, où

$$(3.36) \qquad V_t = \int_0^t h\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big)dy_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big)\, ds.$$

Pour définir "de façon formelle" un filtre non normalisé, associé au système (3.32), on utilise l'expression du processus stochastique Z_t obtenue après une intégration par parties dans l'intégrale stochastique apparaissant dans l'expression de V_t.

Afin de prouver un résultat d'intégrabilité pour le processus stochastique Z_t on suppose que, pour tout $r > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $K_\varepsilon > 0$, tel que

$$(3.37) \qquad |\overline{X}h| + \sup_{|s|\leq r}|G(h\circ\Phi_s)| + \sum_{i=1}^{+\infty}\sup_{|s|\leq r}|X_i(h\circ\Phi_s)|^2 \leq \varepsilon h^2 + K_\varepsilon,$$

où G est l'opérateur différentiel du second ordre défini par

$$(3.38) \qquad G = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} X_i^2.$$

On a alors,

Théorème 3.2.3.4.

Pour tout $p > 0$, le processus stochastique Z_t est dans l'espace $L^p(W \otimes m_0)$, presque sûrement en y, où W désigne l'espace de Wiener défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Preuve:

On suit les idées de [28]. Si H désigne la fonction définie, pour tous t dans $[0,T]$ et x dans $\mathbb{R}^m$, par,

$$H(t,x) = \int_0^t h \circ \Phi_s(x)\, ds, \tag{3.39}$$

on déduit aisément de la formule d'Itô-Stratonovitch que

$$\begin{aligned} V_t = H(y_t, \bar{x}_t) - \int_0^t \Big[\frac{1}{2}(h^2 + \overline{X}h)\big(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s)\big) + (\Phi_{y_s}^{*-1} X_0)\, H(y_s, \bar{x}_s)\Big]\, ds \\ - \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t (\Phi_{y_s}^{*-1} X_i)\, H(y_s, \bar{x}_s) \circ dw_s^i. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Définissons maintenant un processus sur l'espace $\mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$, muni de la mesure $W \otimes m_0$, pour lequel nous allons montrer un résultat d'intégrabilité.

Notons, pour tout u dans $\mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}^m)$:

1) $\bar{x}_t^u$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\bar{x}_t^u = (\phi_{u_t}^{*-1} X_0)(\bar{x}_t^u)\, dt + \sum_{i=1}^{+\infty} (\phi_{u_t}^{*-1} X_i)(\bar{x}_t^u) \circ dw_t^i \\ \bar{x}_0^u = x_0 \end{cases} \tag{3.41}$$

2) x_t^u le processus stochastique défini, pour tout t dans $[0,T]$, par

$$x_t^u = \Phi_{u_t}(\bar{x}_t^u) \tag{3.42}$$

De plus, pour tout t dans $[0,T]$ et tout u dans $\mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}^m)$, on note $Z_t(u)$ le processus défini par $Z_t(u) = \exp V_t(u)$, où

$$\begin{aligned} V_t(u) = H\big(u_t, \bar{x}_t(u)\big) - \int_0^t \Big[\frac{1}{2}(h^2 + \overline{X}h)\big(\Phi_{u_s}(\bar{x}_s^u)\big) + (\Phi_{u_s}^{*-1} X_0)\, H(u_s, \bar{x}_s^u)\Big]\, ds \\ - \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t (\Phi_{u_s}^{*-1} X_i)\, H(u_s, \bar{x}_s^u) \circ dw_s^i. \end{aligned}$$

Alors, de manière analogue à la preuve du théorème 1.1.8 de [28], on montre que, pour tout u dans $\mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}^m)$ et tout p dans $\mathbb{N}^*$, $Z_t(u)$ appartient à $L^p(W \otimes m_0)$. Le résultat s'obtient en prenant $u = y$.

□

On définir alors un filtre non normalisé formel de la façon suivante:

Définition 3.2.3.5.

Pour tout t dans $[0,T]$, et pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, on note $\rho_t\psi$ le filtre non normalisé associé au système (3.52) *défini par*

$$\rho_t\psi = E^w\left[\psi(x_t)Z_t\right], \tag{3.43}$$

où E^w désigne l'intégration par rapport à $W\otimes m_0$, i.e.

$$\rho_t\psi = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{C_0([0,T],\mathbb{R})}\psi(x_t)Z_t\,dW(w)\,dm_0(x_0).$$

De plus, le filtre non normalisé ρ_t est lié au filtre π_t par la formule de Kallianpur-Striebel (cf. [42]) suivante

Théorème 3.2.3.6. (cf. [28])

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$, on a

$$\pi_t(\psi) = \frac{\rho_t(\psi)}{\rho_t(1)}. \tag{3.44}$$

3.2.4. EXISTENCE ET REGULARITE DE LA DENSITE DU FILTRE

Le filtre π_t étant lié au filtre non normalisé ρ_t par la formule de Kallianpur-Striebel, il est équivalent de montrer l'existence d'une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour le filtre π_t ou le filtre non normalisé ρ_t.

Pour cela, il suffit de prouver que toutes les dérivées au sens des distributions du processus ρ_t sont des mesures bornées. Le calcul de Malliavin permettant de faire une intégration par parties sur l'espace de Wiener, le résultat découle du lemme suivant.

Lemme 3.2.4.1.(cf.[53])

Soit ν une mesure de Radon fini sur $I\!R^m$. Supposons que pour tout multi-indice α, il existe une constante finie C_α telle que pour toute fonction ψ dans $C_b^\infty(I\!R^m, I\!R)$

$$\left|\int_{I\!R^m} \nabla^\alpha\psi(x)\,\nu(dx)\right| \leq C_\alpha \|\psi\|_\infty,$$

alors, la mesure ν admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Ce lemme nous permet d'énoncer le théorème principal de ce paragraphe:

Théorème 3.2.4.2.

Supposons que, pour tout point x dans le support de x_0, l'espace engendré par les champs de vecteurs

$$X_k,\ k \geq 1;\ [X_{k_1}, X_{k_2}],\ k_1, k_2 \geq 0; ...; [...[X_{k_{j-1}}, X_{k_j}]...]\ k_1, ..., k_j \geq 0; ...$$

évalués en x est de dimension m. Alors, pour tout t dans $[0,T]$, le filtre non normalisé ρ_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$.

Preuve:
D'après la proposition 3.2.3.3, on a, pour tout t dans $[0,T]$,

$$\rho_t\psi = E^w\big[\psi \circ \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)\, Z_t\big]. \tag{3.45}$$

De plus, on peut montrer, comme dans [28], que ρ_t est continu par rapport aux trajectoires du processus d'observation y_t. On peut donc fixer la trajectoire du processus y dans (3.45), appliquer le calcul de Malliavin seulement à des fonctionnelles de w et utiliser les résultats de [75].

En appliquant le gradient stochastique au processus stochastique $\bar{x}$, on montre que, pour tout t dans $[0,T]$, $\bar{x}_t \in I\!D^\infty(W)$ et pour tout $i \geq 1$,

$$D_s^i\bar{x}_t = \overline{F}_t\overline{F}_s^{-1}(\Phi_{y_s}^{*-1}X_i)(\bar{x}_s), \tag{3.46}$$

où $\overline{F}_t$ est la dérivée du flot stochastique associé au processus $\bar{x}_t$, i.e. la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\overline{F}_t = I + \int_0^t \nabla(\Phi_{y_s}^{*-1}X_0)(\bar{x}_s)\overline{F}_s\,ds + \sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^t \nabla(\Phi_{y_s}^{*-1}X_i)(\bar{x}_s)\overline{F}_s \circ dw_s^i. \tag{3.47}$$

On obtient alors le résultat suivant:

Proposition 3.2.4.3.

Pour toute fonction ψ *dans* $C_b^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ *et tout* t *dans* $[0,T]$, $\psi \circ \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)$ *et* Z_t *sont dans* $\mathbb{D}^\infty(W)$, *pour tout* y *dans* $C_0([0,T], \mathbb{R})$.

Preuve:
Comme ψ est une fonction de $C_b^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ et $\Phi_{y_t}(\bar{x}_t) = x_t$, les résultats usuels du calcul de Malliavin impliquent que, pour tout t dans $[0,T]$, $\psi \circ \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)$ est dans $\mathbb{D}^\infty(W)$.
D'autre part, Z_t est dans $L^p(W \otimes m_0)$, d'après le théorème 3.2.3.4., donc il suffit de montrer que log Z_t est dans $\mathbb{D}^\infty(W)$.
Or, d'après (3.36), $\log Z_t = \int_0^t h(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))\, dy_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))\, ds$. Par conséquent, il suffit de montrer que $\int_0^t h(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))\, dy_s$ et $\int_0^t h^2(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))\, ds$ sont des processus de $\mathbb{D}^\infty(W)$.

Ce résultat est immédiat, car les hypothèses sur h impliquent, d'après le lemme 2.9. de [28], que $h(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))$ et $h^2(\Phi_{y_s}(\bar{x}_s))$ sont des processus de $\mathbb{D}^\infty(W)$.

□

De plus, si Q_t désigne la matrice de covariance de Malliavin associée au processus stochastique $\bar{x}_t$, on a la formule d'intégration par parties suivante:

Proposition 3.2.4.4.

Pour tout t *dans* $[0,T]$, *toute fonction* H *dans* $\mathbb{D}^\infty(W \otimes m_0)$ *et tout* $i, 1 \leq i \leq n$, *on a*

$$E^w\big(\nabla^i\psi \circ \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)\, Z_t\, Q_t\, H\big) = E^w\Big[\psi \circ \Phi_{y_t}(\bar{x}_t)\, Z_t\Big(-\int_0^t D_s^i H\, D_s^i \bar{x}_t\, ds$$

$$- H^{-1}\int_0^t D_s^i(\log Z_t)\, D_s^i \bar{x}_t\, ds + \int_0^t D_s^i(\bar{x}_t)\, dw_s^i\Big)\Big]. \tag{3.48}$$

Les hypothèses sur les champs de vecteurs permettent d'obtenir le résultat suivant:

Proposition 3.2.4.5.

Pour tout t *dans* $]0,T]$, $(det\, Q_t)^{-1}$ *appartient à* $L^p(W \otimes m_0)$ *pour tout* p *dans* $\mathbb{N}^*$.

Preuve:
Le filtre non normalisé ρ_t étant continu par rapport aux trajectoires du processus d'observation (cf. [28]), on peut fixer une trajectoire du processus y dans la formule (3.45) et effectuer un calcul des variations stochastique seulement sur des fonctionnelles de w.

En particulier, pour une trajectoire fixée du processus y, on peut facilement démontrer, à l'aide d'estimations montrées dans le lemme 1.0.3 de [28], que les coefficients de l'équation différentielle stochastique (3.34), vérifient les mêmes conditions que les champs de vecteurs de la première section de ce chapitre (i.e. pour une trajectoire fixée du processus y, les champs de vecteurs $\Phi_{y_t}^{*-1} X_i$, $0 \leq i \leq d$, et toutes leurs dérivées en x sont Hölder-continues en t uniformément sur $[0, T] \times \mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}^\infty$ bornés en x, si t est fixé dans $[0, T]$ et toutes leurs dérivées en x sont uniformément bornées.)

D'autre part, si $\mathcal{I}(X_1, ..., X_d)$ désigne l'idéal engendré par l'algèbre de Lie $L(X_1, ..., X_d)$ dans l'algèbre de Lie $L(X_0, ..., X_d)$, il est facile de montrer, par des résultats standards de géométrie différentielle, que pour tout (t, x) dans $[0, T] \times \mathbb{R}^m$, on a

$$\mathcal{I}(\Phi_{y_t}^{*-1} X_1, ..., \Phi_{y_t}^{*-1} X_m)(t, x) = \mathcal{I}(X_1, ..., X_d)\big(\Phi_{y_t}(x)\big) \tag{3.49}$$

D'où, en prenant $t = 0$ dans la relation (3.49), on déduit que

$$\mathcal{I}(\Phi_{y_t}^{*-1} X_1, ..., \Phi_{y_t}^{*-1} X_d)(0, x) = \mathcal{I}(X_1, ..., X_d)(x). \tag{3.50}$$

De plus, les hypothèses du théorème 3.2.4.2. impliquent que $\mathcal{I}(X_1, ..., X_d)(x) = \mathbb{R}^m$, et le résultat se déduit du théorème 3.1.4.3.

□

Du lemme 3.2.4.1., de la proposition 3.2.4.4. et de la proposition 3.2.4.5., on déduit que le filtre non normalisé ρ_t admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

De plus, en itérant la formule d'intégration par parties, comme dans [8], on montre que cette densité est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.4.2.

□

De plus, cette densité est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$.

Théorème 3.2.4.6.

Supposons les conditions du théorème 3.2.4.2. vérifiées. Alors, pour tout t dans $]0, T]$, le filtre non normalisé ρ_t admet une densité p_t, qui est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ et l'application $t \to p_t$ de $]0, T]$ dans $\mathcal{S}$ est continue.

Preuve:

Rappelons que

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ t.q. } \forall N\text{-uplet } \alpha, \forall p \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1+|x|^2)^p |\nabla^\alpha f(x)| < +\infty\}.$$

On suit l'idée de la preuve du théorème 1 de [15].

Considérons pour tout N-uplet α, la mesure signée μ^α, définie sur $\mathbb{R}^m$ par

$$d\mu^\alpha(x) = x^\alpha\, p_t(x)\, dx, \quad \text{où } x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}. \tag{3.51}$$

Alors, on peut montrer, comme dans le lemme 1.1 de [15], que μ^α est une mesure bornée.

De plus, prouver que p_t est dans $\mathcal{S}$, est équivalent à prouver que sa transformée de Fourier est dans $\mathcal{S}$, i.e. que, pour tout p dans $\mathbb{N}$ et pour tout α dans $\mathbb{N}^m$,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^m |\nabla^\alpha \widehat{p}_t(\xi)| < +\infty \iff \sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} (1+|\xi|^2)^p |\widehat{\mu}^\alpha(\xi)| < +\infty. \tag{3.52}$$

Comme, pour tout β dans N^m, $|\xi|^\beta |\widehat{\mu}^\alpha|(\xi) = \left|\int_0^t \nabla^\beta\, e^{ix\xi}\, d\mu^\beta(x)\right|$, (3.52) découle du résultat suivant

Proposition 3.2.4.7.

Pour presque tout y et tout β dans $\mathbb{N}^m$, il existe $K(\alpha,\beta)$ dans $\mathbb{R}_+^*$, tel que pour toute fonction ϕ dans $C_b^\infty(\mathbb{R}^m)$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^M} \nabla^\beta \phi(x)\, d\mu^\alpha(x)\right| \leq K(\alpha,\beta)\, \|\phi\|_\infty. \tag{3.53}$$

Preuve:

Notons Q_t la matrice de covariance de Malliavin associée au processus stochastique $\overline{x}_t$.

La proposition 3.2.3.3. implique que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \nabla^\beta \phi(x)\, d\mu^\alpha(x) = E^w\Big[\nabla^\beta\big(\phi \circ \Phi_{y_t}(\overline{x}_t)\big)\, x_t^\alpha\, Z_t\Big]. \tag{3.54}$$

Par conséquent, si on prend $H = Q_t^{-1}\, x_t^\alpha$ dans la formule d'intégration par parties de la proposition 3.2.4.4., on obtient que pour $|\beta| = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \nabla^\beta \phi(x)\, d\mu^\alpha(x) = E^w\left[\phi(x_t)\, Z_t\, B_t^{\alpha,\beta}\right], \tag{3.55}$$

où

$$B_t^{\alpha,\beta} = -\int_0^t D_s^\beta Q_s^{-1}\, D_s^\beta \overline{x}_t\, ds - Q_t \int_0^t D_s^\beta(\log\, Z_t)\, D_s^\beta \overline{x}_t\, dt + \int_0^t D_s^\beta(\overline{x}_t)\, dw_s^\beta. \tag{3.56}$$

De plus, d'après la proposition 3.2.4.3., $B_t^{\alpha,\beta}$ est dans $\mathbb{D}^\infty(W)$, pour presque tout y.

Par récurrence sur $|\beta|$, on montre l'existence d'un processus stochastique appartenant à $\mathbb{D}^\infty(W)$, toujours noté $B_t^{\alpha,\beta}$ tel que pour tout β dans $\mathbb{N}^m$

$$E^w\left[D^\beta \phi(x_t)\, x_t^\beta\, Z_t\right] = E^w\left[\phi(x_t)\, Z_t\, B_t^{\alpha,\beta}\right], \tag{3.57}$$

Ceci démontre la proposition 3.2.4.7. avec $K(\alpha,\beta) = E^w\left[|B_t^{\alpha,\beta}|Z_t\right]$.

□

Les bornes obtenues dans les expressions précédantes étant uniformes pour t dans $[\varepsilon, T]$. on déduit du théorème d'Ascoli la continuité de l'application $t \to p_t$ de $]0,T]$ dans $\mathcal{S}$.

□

3.2.5. UN THEOREME DU SUPPORT

Sous les hypothèses du paragraphe précédent, définissons l'application $\tilde{p}_t$ par

Définition 3.2.5.1.

Soit $\tilde{p}_t : \mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ l'application définie par

$$\begin{aligned}\tilde{p}_t(c,x) = q_t(x)\, E^w\Big[\exp\Big(H(c_t,\overline{x}_t) - \int_0^t \big(\tfrac{1}{2}(h^2 + \overline{X}h)(\Phi_{c_s}(\overline{x}_s)) + (\Phi_{c_s}^{*-1}X_0)H(c_s,\overline{x}_s)\big)\, ds \\ - \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t (\Phi_{c_s}^{*-1}X_i)H(c_s,\overline{x}_s) \circ dw_s^i|_{\overline{x}_t = \Phi_{c_t}^{-1}(x)}\Big)\Big],\end{aligned} \tag{3.58}$$

où q_t désigne la densité de la loi du processus x_t.

Alors, on a les résultats suivants

Proposition 3.2.5.2.(cf.[12])

Si $u \in H^1([0,T], \mathbb{R})$, alors $\tilde{p}.(u,\cdot)$ est l'unique solution dans S de l'équation aux dérivées partielles

$$(3.65) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\tilde{p}_t(u,x)}{dt} = L^*\tilde{p}_t(u,x) + S^*\tilde{p}_t(u,x)\,\dot{u}_t \\ \tilde{p}_t(u,\cdot) \to m_0 \quad \text{si } t \to 0, \end{cases}$$

où $L = X_0 + h\overline{X} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} X_i^2 + \frac{1}{2}\overline{X}^2$ *et* $S = h + \overline{X}$.

Preuve:
On sait (voir annexe) que si ψ est dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, alors $\rho_t\psi$ vérifie l'équation de Zakai

$$\rho_t\psi = \psi(x_0) + \int_0^t \rho_s(L\psi)\,ds + \int_0^t \rho_s(S\psi)\,dy_s.$$

On décrit alors la loi du processus $\rho_t\psi$ à l'aide de solutions d'une équation aux dérivées partielles déterministe, engendrée par un contrôle appartenant à H^1. En fait, on remplace dy_t par $\dot{u}dt$ dans les équations (3.32) et (3.35). Plus précisément, pour toutes fonctions u dans $H^1([0,T], \mathbb{R})$ et ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, on pose

$$\rho_t^u = E^w[\psi(x_t^u)\, Z_t^u],$$

où (x_t^u, Z_t^u) est solution du système différentiel stochastique

$$\begin{cases} x_t^u = x_0 + \displaystyle\int_0^t X_0(x_s^u)\,ds + \sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^t X_i(x_s^u)\circ dw_s^i + \int_0^t \overline{X}(x_s^u)\dot{u}_s\,ds \\ Z_t^u = \exp\Big(\displaystyle\int_0^t h(x_s^u)\,\dot{u}_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(x_s^u)\,ds\Big). \end{cases}$$

Alors, pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $\rho_t^u\psi$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho_t^u\psi}{dt} = \rho_t^u(L\psi) + \rho_t^u(S\psi)\,\dot{u}_t \\ \rho_0^u\psi = \psi(x_0). \end{cases}$$

D'où le résultat.

$\square$

Proposition 3.2.5.3.(cf.[28])

L'application $c \to \tilde{p}_t(c,x)$ est continue de $C_0([0,T],I\!R)$ dans $I\!R$ pour tout (t,x) dans $[0,T] \times I\!R^m$. De plus, pour presque tout y, pour tout x dans $I\!R^m$,

$$p_t(y,x) = \tilde{p}_t(y,x). \tag{3.60}$$

Théorème 3.2.5.4.

L'application $c \to \tilde{p}.(c,\cdot)$ est continue de $C_0([0,T],I\!R)$ dans $C([\varepsilon,T],\mathcal{S})$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve:
Notons p^ε (respectivement $\tilde{p}^\varepsilon$) la restriction de p (respectivement de $\tilde{p}^\varepsilon$) à $[\varepsilon,T]$ et montrons que, pour presque tout y, pour tout α dans $I\!N^p$ et tout p dans $I\!N$,

$$\sup_{t\in[\varepsilon,T]} \sup_{\xi\in I\!R^m} (1+|\xi|^2)^p \big|\nabla^\alpha\big(\widehat{\tilde{p}^\varepsilon_t}(c,\xi) - \widehat{\tilde{p}^\varepsilon_t}(c',\xi)\big)\big| \to 0 \text{ quand } \|c-c'\|_\infty \to 0.$$

Par des arguments similaires à ceux de la preuve du théorème 3.2.5.4., il est facile de voir qu'il est suffisant de montrer que pour presque tout y, pour tout (α,β) dans $I\!N^m \times I\!N^m$,

$$\sup_{t\in[\varepsilon,T]} \sup_{\phi\in C_b^\infty(I\!R^m)} \frac{1}{\|\phi\|_\infty} \Big| \int_{I\!R^n} \nabla^\beta\phi(x)\, d(\tilde{\mu}_t^{\alpha,c} - \tilde{\mu}_t^{\alpha,c'})(x) \Big| \to 0 \text{ quand } \|c-c'\|_\infty \to 0,$$

où $d\tilde{\mu}_t^{\alpha,c} = x_t^\alpha \tilde{p}_t(c,x)\,dx$.

Or,

$$\int_{I\!R^m} \nabla^\beta\phi(x)\, d(\tilde{\mu}_t^{\alpha,c} - \tilde{\mu}_t^{\alpha,c'})(x) = E^w\big[\nabla^\beta\phi(x_t)\, x_t^\alpha\, (Z_t^c - Z_t^{c'})\big], \tag{3.61}$$

avec $Z_t^c = \exp\Big(H(c_t,\overline{x}_t) - \displaystyle\int_0^t \big(\frac{1}{2}(h^2 + \overline{X}h)(\Phi_{c_s}(\overline{x}_s)) + (\Phi_{c_s}^{*-1}X_0)H(c_s,\overline{X}_s)\big)ds$

$$- \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^t (\Phi_{c_s}^{*-1}X_i)H(c_s,\overline{X}_s) \circ dw_s^i\Big).$$

Par conséquent, les propositions 3.2.4.3. et 3.2.4.4. assurent l'existence de processus $B_t^{\alpha,\beta}(c)$ dans $I\!D^\infty$, tels que

$$E^w\big[D^\beta\phi(x_t)\, x_t^\alpha\, (Z_t^c - Z_t^{c'})\big] = E^w\Big[\phi(x_t)\big(B_t^{\alpha,\beta}(c)\, Z_t^c - B_t^{\alpha,\beta}(c')\, Z_t^{c'}\big)\Big]. \tag{3.62}$$

D'où

$$\sup_{t\in[\varepsilon,T]}\sup_{\phi\in\mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^m)}\frac{1}{\|\phi\|_\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^m}\nabla^\beta\phi(x)\,d(\tilde{\mu}_t^{\alpha,c}-\tilde{\mu}_t^{\alpha,c'})(x)\right|\leq E^w\left[\left|B_t^{\alpha,\beta}(c)\,Z_t^c-B_t^{\alpha,\beta}(c')\,Z_t^{c'}\right|\right].$$

Supposons que c et c' sont dans un sous-ensemble borné $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})$. Comme $B_t^{\alpha,\beta}(c)\in\mathbb{D}^\infty$, pour tout t dans $[0,T]$ et tout c dans $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})$, on a

(3.63) $$\sup_{\substack{c\in\mathcal{B}\\ t\in[0,T]}}E^w\left[|B_t^{\alpha,\beta}(c)|^2\right]<+\infty.$$

De plus, d'après ([28]),

(3.64) $$\sup_{\substack{c\in\mathcal{B}\\ t\in[0,T]}}E^w\left[|Z_t^c|^2\right]<+\infty$$

et

(3.65) $$\sup_{t\in[0,T]}E\left[|Z_t^c-Z_t^{c'}|\right]\leq C\|c-c'\|_\infty^2.$$

La conclusion du théorème découle facilement des relations (3.62)-(3.65).

□

Cela nous permet d'énoncer le résultat principal de cette section. Notons R_ε le sous-ensemble de E_ε défini par $R_\varepsilon=\{\tilde{p}^\varepsilon_\cdot(u,\cdot),\,u\in H^1([0,T],\mathbb{R})\}$ et P_ε la loi de probabilité de la variable aléatoire $y\to p^\varepsilon_\cdot(y,\cdot)$ à valeurs dans E_ε. Alors, de manière analogue à [12], on déduit de la proposition 3.2.5.3. et du théorème 3.2.5.4.,

Théorème 3.2.5.5.

$$\textit{Support }(P_\varepsilon)=\overline{R_\varepsilon},$$

où l'adhérence est prise dans E_ε.

Chapitre IV

FILTRAGE DE DIFFUSIONS FAIBLEMENT BRUITEES

4.1. INTRODUCTION

La nécessité d'estimer un processus d'état partiellement observé intervient dans de nombreux problèmes appliqués et a été beaucoup étudiée durant de nombreuses années. Des structures mathématiques adéquates ont été établies et on dispose aujourd'hui de nombreux résultats théoriques sur ce sujet.

Dans ce travail, on suppose que le processus dont on veut calculer une estimation (signal) est un processus de diffusion markovien observé à l'aide d'une fonction perturbée par un bruit blanc. En fait, on veut calculer la meilleure estimation possible du signal au temps t, connaissant l'observation jusqu'au temps t. Or, excepté dans quelques cas particuliers, les équations différentielles permettant de résoudre ce problème, comme l'équation de Zakai (cf.[85]), sont de dimension infinie. Cela rend intéressante toute procédure fournissant des filtres presque optimaux de dimension finie.

Ici, on suppose que le bruit blanc perturbateur est d'ordre ε et que pour $\varepsilon = 0$, le signal est exactement observé. Ce problème a été traité en détail dans le cas de bruits non corrélés. A.H. Jazwinski [41] a établi la décomposition en semi-martingales du filtre dans un cas spécifique afin de construire des filtres du second ordre. B.Z. Bobrovsky et M.

Zakai [9] ont calculé des estimations des moments conditionnels du signal, tandis que R. Katzur, B.Z. Bobrovsky and Z. Schuss [45] ont utilisé des techniques de perturbations de l'équation de Zakai pour calculer formellement un développement asymptotique de la densité conditionnelle et en déduire des filtres approchés de dimension finie. J. Picard [68] a obtenu des filtres sous-optimaux par d'autre méthodes. Il a notamment utilisé des concepts de base de la théorie de filtrage non linéaire, tels la formule de Kallianpur-Striebel (cf.[42]) et la décomposition en semi-martingales du filtre optimal associés à des résultats de retournement du temps de processus de diffusions. A. Bensoussan [5] a démontré une partie des résultats exposé dans [68] par des méthodes plus élémentaires et J. Picard [69] a ensuite généralisé certains de ces résultats à des signaux multidimensionnels. Finalement, J. Picard [70] a traité le cas multidimensionnel en travaillant sous des hypothèses un peu plus faibles que dans [69]. Les résultats obtenus dans cet article reposent sur de simples considérations probabilistes et l'utilisation du calcul des variations stochastique. Le problème du lissage a été abordé lui aussi.

Le but de ce chapitre est d'étudier un problème analogue pour un système de filtrage non linéaire avec bruits corrélés. Il est divisé en trois paragraphes organisés comme suit.

Dans le deuxième paragraphe on introduit le système qu'on étudie par la suite. On suppose tous les processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. On définit une classe de filtres sous-optimaux et on montre, en suivant les idées de J. Picard [70] que les éléments de cette classe sont égaux au filtre optimal à $\sqrt{\varepsilon}$ près. Dans le troisième paragraphe on précise le filtre utilisé dans notre application et on montre que celui-ci approche le filtre optimal à ε près. Le démonstration repose essentiellement sur un changement de probabilité adapté au problème et des résultats du calcul de Malliavin.

4.2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME ET RESULTAT PRELIMINAIRE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet et $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une famille croissante, continue à droite de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$. Soient w et v deux $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener indépendants de dimensions respectives d et m.

Si x_t est une semi martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, odx_t (respectivement dx_t) désigne sa différentielle de Stratonovitch (respectivement Itô).

Considérons le problème de filtrage non linéaire associé au système état/observation

$(x_t, y_t) \in (\mathbb{R}^m)^2$ solution du système différentiel stochastique:

$$(4.1) \qquad \begin{cases} x_t = x_0 + \int_0^t b(x_s)\,ds + \int_0^t \sigma(x_s)\,dw_s + \int_0^t g(x_s)\,dv_s \\ y_t = \int_0^t h(x_s)\,ds + \varepsilon\, v_t, \end{cases}$$

vérifiant les hypothèses suivantes:

(H_1) x_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ dont les moments de tous ordres sont bornés.

(H_2) b est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ à dérivées premières et secondes bornées.

(H_3) σ et g sont des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d)$, respectivement $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m)$, à dérivées premières et secondes bornées.

(H_4) h est une fonction affine, i.e. il existe δ dans $\mathbb{R}^*$ et α dans $\mathbb{R}^m$ tel que $h(x) = \delta x + \alpha$.

(H_5) La fonction $a = \sigma\sigma^\tau$ est uniformément elliptique.

(H_6) Les fonctions $h'b$ et $\left(h'\sigma\sigma^\tau(h')^\tau\right)^{-\frac{1}{2}} h'b$ sont lipschitziennes.

Remarque:
La condition (H_6) implique que la fonction $h'\sigma$ est inversible.

On peut alors définir le filtre associé au système (4.1) comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaire.

Définition 4.2.1:

Pour tout t dans $[0,T]$, notons π_t le filtre associé au système (4.1) *défini pour toute fonction ψ dans $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ par*

$$(4.2) \qquad \pi_t\psi = E\left[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t\right],$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s \,/\, 0 \leq s \leq t)$.

On considère de plus la classe de filtres sous-optimaux suivante:

$$(4.3) \qquad m_t = m_0 + \int_0^t b(m_s)\,ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t h'^{-1}(m_s)\,K_s\left(dy_s - h(m_s)\,ds\right),$$

où $m_0 \in \mathbb{R}^m$ est arbitraire et $\{K_t,\, t \geq 0\}$ est un processus $\mathcal{Y}_t$-progressivement mesurable, borné tel que pour tout (t, w) dans $[0, T] \times \Omega$, $K_t(w)$ est une fonction bornée uniformément elliptique.

Remarques:

(i) La définition des filtres sous-optimaux implique que le signal et l'observation doivent être de même dimension.

(ii) Dans la suite, si f est une fonction vectorielle de la variable $x \in \mathbb{R}^m$, f' désigne sa matrice Jacobienne, si f est scalaire, f' est un vecteur ligne.

Pour ces filtres, on a alors une première estimation d'erreur:

Proposition 4.2.2.

Pour tous $t_0 > 0$ et $p \geq 1$, on a:

$$\sup_{t \geq t_0} \|x_t - m_t\|_p = O(\sqrt{\varepsilon}) \tag{4.4}$$

Preuve:
La formule d'Itô implique

$$h(x_t) = h(x_0) + \int_0^t Lh(x_s)\, ds + \int_0^t (h'\sigma)(x_s)\, dw_s + \int_0^t (h'g)(x_s)\, dv_s,$$

où L est l'opérateur différentiel du second ordre défini pour toute fonction f dans $C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ par

$$\begin{aligned}(Lf)^l(x) = b^i(x)\frac{\partial f^l}{\partial x_i}(x) &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\big(\sigma(x)\big)^i_k\big(\sigma(x)\big)^j_k\frac{\partial^2 f^l}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\big(g(x)\big)^i_k\big(g(x)\big)^j_k\frac{\partial^2 f^l}{\partial x_i \partial x_j}(x)\end{aligned} \tag{4.5}$$

De même,

$$h(m_t) = h(m_0) + \int_0^t \tilde{L}_s h(m_s)\, ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_s\big(h(x_s) - h(m_s)\big)\, ds + \int_0^t K_s\, dv_s,$$

où $\tilde{L}_t$ est défini pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ par

$$(4.6) \qquad (\tilde{L}_t f)_l(x) = b^i(x)\frac{\partial f^l}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(h'^{-1}(x)K_t)^i_k(h'^{-1}(x)K_t)^j_k\frac{\partial^2 f^l}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} h(x_t) - h(m_t) =& h(x_0) - h(m_0) + \int_0^t \big(Lh(x_s) - \tilde{L}_s h(m_s)\big)\, ds + \int_0^t (h'\sigma)(x_s)\, dw_s \\ &+ \int_0^t h'g(x_s)\, dv_s - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_s dv_s - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_s\big(h(x_s) - h(m_s)\big)\, ds. \end{aligned}$$

Comme K_t est uniformément elliptique, on peut montrer (4.4) de manière analogue à [69].

Par application de la formule d'Itô, on calcule $|h(x_t) - h(m_t)|^k$ pour des entiers k pairs, puis, après avoir pris l'espérance dans les deux membres de l'égalité obtenue, on utilise quelques estimations usuelles pour des inéquations ordinaires. □

Corollaire 4.2.3.

Pour tous $t_0 > 0$ et $p \geq 1$, on a:

$$(4.7) \qquad \sup_{t \geq t_0} \|m_t - \pi_t I\|_p = O(\sqrt{\varepsilon})$$

et

$$(4.8) \qquad \sup_{t \geq t_0} \|x_t - \pi_t I\|_p = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

4.3. LE RESULTAT PRINCIPAL

On choisit maintenant un filtre de la classe définie précédemment pour lequel l'erreur commise est d'ordre ε.

Soit γ la fonction définie par $\gamma = \big(h'\sigma\sigma^\tau(h')^\tau\big)^{\frac{1}{2}}$ et pour tout t dans $[0, T]$, posons

$$(4.9) \qquad K_t = \gamma(m_t)$$

Remarquons que, d'après les hypothèses (H_3), (H_4) et (H_5), γ est bien une fonction bornée uniformément hypoelliptique.

On peut alors énoncer le résultat principal de ce chapitre

Théorème 4.2.4.

Pour tous $t_0 > 0$ et $p \geq 1$, on a:

$$\sup_{t \geq t_0} \|\pi_t 1 - m_t\|_p = O(\varepsilon). \tag{4.10}$$

On définit tout d'abord quelques processus stochastiques qui vont être utiles par la suite.

Soit le processus

$$\overline{w}_t = \int_0^t \gamma^{-1}(m_s)\,(h'\sigma)(x_s)\,dw_s. \tag{4.11}$$

Alors $\overline{w}_t$ est un $(\mathcal{F}_t, P)$-processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et

$$dx_t = b(x_t)dt + (h'^{-1}\gamma)(x_t)\,d\overline{w}_t + g(x_t)\,dv_t. \tag{4.12}$$

Pour tout t appartenant à $[0, T]$, soient

$$Z_t = \exp\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h^\tau(x_s)\,dy_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t |h(x_s)|^2\,ds\Big) \tag{4.13}$$

et

$$\Lambda_t = \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^\tau\,d\overline{w}_s + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t \big|h(x_s) - h(m_s)\big|^2\,ds\Big). \tag{4.14}$$

Comme la fonction h est affine, les processus Z_t^{-1} et Λ_t^{-1} sont des martingales exponentielles. On peut alors appliquer le théorème de Girsanov et définir des probabilités de référence à l'aide desquelles on va montrer les estimations voulues via la formule de Kallianpur-Striebel.

Définissons donc les probabilités $\mathring{P}$ et $\tilde{P}$ par les dérivées de Radon-Nicodym

$$\left.\frac{d\mathring{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1}, \tag{4.15}$$

et

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{d\mathring{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \Lambda_t^{-1}. \tag{4.16}$$

Alors, d'après le théorème de Girsanov, sous $\tilde{P}$, $\tilde{w}_t = \overline{w}_t - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)\, ds$ et $y_{\frac{t}{\varepsilon}}$ sont des processus de Wiener standards indépendants.

De plus, le processus stochastique x_t s'écrit comme solution de l'équation différentielle stochastique

$$dx_t = \frac{1}{\varepsilon}\,(h'^{-1}\gamma)(x_t)\big(h(x_t) - h(m_t)\big)\, dt + b(x_t)\, dt + (h'^{-1}\gamma)(x_t)\, d\tilde{w}_t + g(x_t)\, dv_t. \tag{4.17}$$

D'autre part, on a

$$Z_t\Lambda_t = \exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau} d\overline{w}_s + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h^{\tau}(x_s)\big(dy_s - h(m_s)\, ds\big) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t |h(m_s)|^2 ds\Big).$$

Soit pour tous x, m appartenant à $\mathbb{R}^m$ la fonction F définie par:

$$F(x,m) = \big(h(x) - h(m)\big)^{\tau}\gamma^{-1}(m)\big(h(x) - h(m)\big). \tag{4.18}$$

Il résulte alors de la formule d'Itô que

$$\begin{aligned} F(x_t, m_t) =& F(x_0, m_0) + 2\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\gamma^{-1}(m_s)h'(x_s)\, dx_s \\ &+ \int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial m_i}(m_s)\big(h(x_s) - h(m_s)\big)\, dm_s^i \\ &- 2\int_0^t \big(h(x_s) - h(m_s)\big)^{\tau}\gamma^{-1}h'(m_s)\, dm_s + \int_0^t (A_xF + A_mF)(x_s, m_s)\, ds, \end{aligned}$$

où A_x et A_m sont les opérateurs différentiels du second ordre, définis pour toute fonction f dans $C^2\big((\mathbb{R}^m)^2\big)$ par

(4.19)

$$A_xf(x,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\big(\sigma(x)\big)_k^i\big(\sigma(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x,m) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\big(g(x)\big)_k^i\big(g(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x,m)$$

et

$$A_mf(x,m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\big(\sigma(x)\big)_k^i\big(\sigma(x)\big)_k^j\frac{\partial^2 f}{\partial m_i\partial m_j}(x,m). \tag{4.20}$$

D'où,

$$\begin{aligned}F(x_t,m_t) =&F(x_0,m_0)+2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \gamma^{-1}(m_s)h'(x_s)\,dx_s\\&-\frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau [dy_s - h(m_s)\,ds]\\&-2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau (\gamma^{-1}h'b)(m_s)\,ds\\&+\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial m_i}(m_s)\big(h(x_s)-h(m_s)\big)\,dm_s^i\\&+\int_0^t (A_xF+A_mF)(x_s,m_s)\,ds.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}F(x_t,m_t) = &F(x_0,m_0)-2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \big(\gamma^{-1}(x_s)-\gamma^{-1}(m_s)\big)h'(x_s)\,dx_s\\&+2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau\,d\overline{w}_s - \frac{2}{\varepsilon}\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \big[dy_s-h(m_s)\,ds\big]\\&+2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \big((\gamma^{-1}h'b)(x_s)-(\gamma^{-1}h'b)(m_s)\big)\,ds\\&+2\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau (\gamma^{-1}h'g)(x_s)\,dv_s + \int_0^t (A_xF+A_mF)(x_s,m_s)\,ds\\&+\int_0^t \big(h(x_s)-h(m_s)\big)^\tau \frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial m_i}(m_s)\big(h(x_s)-h(m_s)\big)\,dm_s^i.\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}Z_t\Lambda_t = &\exp\Big(-\frac{1}{2\varepsilon}\big(F(x_t,m_t)-F(x_0,m_0)\big)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_1(x_s,m_s)\,ds\\&+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_2^\tau(x_s,m_s)\,dm_s+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_3^\tau(x_s,m_s)\,dx_s+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_4^\tau(x_s,m_s)\,dv_s\\&+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t h^\tau(m_s)\,dy_s - \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^t |h(m_s)|^2\,ds\Big),\end{aligned}\tag{4.21}$$

avec

$$\begin{aligned}\chi_1(x,m) =&\big(h(x)-h(m)\big)^\tau\big((\gamma^{-1}h'b)(x)-(\gamma^{-1}h'b)(m)\big)\\&+\frac{1}{2}(A_xF+A_mF)(x,m),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2^i(x,m) =& \frac{1}{2}\big(h(x)-h(m)\big)^{\tau}\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial m_i}(m)\,\big(h(x)-h(m)\big), \quad i=1,...,m\\
\chi_3(x,m) =& -(h')^{\tau}(x)\,\big(\gamma^{-1}(x)-\gamma^{-1}(m)\big)^{\tau}\big(h(x)-h(m)\big),\\
\chi_4(x,m) =& (\gamma^{-1}h'g)^{\tau}(x)\,\big(h(x)-h(m)\big).
\end{aligned}$$

Dans la suite, si f est une fonction de (x,m), on notera f' pour $\frac{\partial f}{\partial x}$.

D'après les règles du calcul de Malliavin (cf.[62]) , si $\overline{D}$ (respectivement $\tilde{D}$) désigne l'opérateur de dérivation dans la direction de $\overline{w}$ (respectivement $\tilde{w}$), on a pour tout $0 \leq s \leq t$,

$$\tilde{D}_s x_t = \zeta_{st}(h'^{-1}\gamma)(x_s), \tag{4.22}$$

où $\{\zeta_{st},\, t \geq s\}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}
\zeta_{st} = 1 &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma)'(x_r)\big(h(x_r)-h(m_r)\big)\,dr + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \zeta_{sr}\,h'^{-1}\gamma h'(x_r)\,dr\\
&+ \int_s^t \zeta_{sr}\,b'(x_r)\,dr + \int_s^t \zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma)'(x_r)\,d\tilde{w}_r + \int_s^t \zeta_{sr}\,g'(x_r)\,dv_r.
\end{aligned}\tag{4.23}$$

Il résulte alors de (4.21) que

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_s\,\log(Z_t\Lambda_t) =& -\frac{1}{2\varepsilon}F'(x_t,m_t)\tilde{D}_s x_t + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \chi_1'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r\,dr\\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t dm_r^{\tau}\chi_2'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t dx_r^{\tau}\chi_3'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r\\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \chi_3(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r\,dr + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t dv_r^{\tau}\chi_4'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r\\
&+ \int_s^t \chi_4(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r\,dr.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F'(x_t,m_t) =& -\varepsilon\tilde{D}_s\,\log(Z_t\Lambda_t)(\tilde{D}_s x_t)^{-1} + \int_s^t \chi_1'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\\
&+ \int_s^t dm_r^{\tau}\chi_2'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1} + \int_s^t dx_r^{\tau}\chi_3'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\\
&+ \int_s^t \chi_3(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr + \int_s^t dv_r^{\tau}\chi_4'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\\
&+ \int_s^t \chi_4(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr.
\end{aligned}$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et t, on obtient

$$
\begin{aligned}
(4.24)\qquad \frac{1}{2}F'(x_t,m_t) = &-\frac{\varepsilon}{t}\int_0^t \tilde{D}_s \log(Z_t\Lambda_t)(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_1'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t dm_r^{\tau}\,\chi_2'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t dx_r^{\tau}\,\chi_3'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_3(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t dv_r^{\tau}\,\chi_4'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds \\
&+\frac{1}{t}\int_0^t\int_s^t \chi_4(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds.
\end{aligned}
$$

D'autre part, d'après la définition de la fonction F,

$$\frac{1}{2}F'(x_t,m_t) = \big(h(x_t)-h(m_t)\big)^{\tau}\,\gamma^{-1}(m_t)h'(x_t),$$

donc

$$
\begin{aligned}
E\Big[\frac{1}{2}F'(x_t,m_t)/\mathcal{Y}_t\Big] =& E\big[\big(h(x_t)-h(m_t)\big)^{\tau}/\mathcal{Y}_t\big]\,(\gamma^{-1}h')(m_t) \\
&+E\big[\big(h(x_t)-h(m_t)\big)^{\tau}\,\gamma^{-1}(m_t)\,\big(h'(x_t)-h'(m_t)\big)/\mathcal{Y}_t\big].
\end{aligned}
$$

La proposition 4.2.2. et les hypothèses (H_4) et (H_5) impliquent donc

$$(4.25)\qquad E\Big[\frac{1}{2}F'(x_t,m_t)/\mathcal{Y}_t\Big] = E\big[\big((h(x_t)-h(m_t)\big)^{\tau}/\mathcal{Y}_t\big]\,(\gamma^{-1}h')(m_t)+O(\varepsilon).$$

Il résulte alors des hypothèses (H_4) et (H_5) que le théorème sera établi si on montre que pour tous $t_0>0$, $p\geq 1$,

$$(4.26)\qquad \sup_{t\geq t_0}\Big\|E\big[\frac{1}{2}F'(x_t,m_t)/\mathcal{Y}_t\big]\Big\|_p = O(\varepsilon).$$

Or, d'après l'égalité (4.24), ceci équivaut à montrer

(i) $\displaystyle \sup_{t\geq t_0}\frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t \tilde{D}_s \log(Z_t\Lambda_t)(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p \leq c_p,$

$$(ii) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t \chi_1'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p = O(\varepsilon),$$

$$(iii) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t dm_r^T\,\chi_2'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p = O(\varepsilon),$$

$$(iv) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t dx_r^T\,\chi_3'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p = O(\varepsilon),$$

$$(v) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t \chi_3(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p = O(\varepsilon),$$

$$(vi) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t dv_r^T\,\chi_4'(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p = O(\varepsilon),$$

$$(vii) \quad \sup_{t\geq t_0} \frac{1}{t}\Big\|E\Big[\int_0^t\int_s^t \chi_4(x_r,m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds/\mathcal{Y}_t\Big]\Big\|_p \leq= O(\varepsilon).$$

Pour prouver (i) à (vii) il est nécessaire de démontrer les deux lemmes suivants.

Lemme 4.2.5.

Pour tous $\varepsilon_0 > 0$ et $p \geq 1$, il existe des constantes strictement positives $a(p)$ et $\tilde{a}(p)$ telles que

$$\|\zeta_{ts}\|_p \leq a(p)\,\exp\Big[-\frac{\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(t-s)\Big], \quad 0 \leq s \leq t. \tag{4.27}$$

Preuve:

D'après la relation (4.23) et la définition de $\tilde{w}_t$, le processus $\{\zeta_{st},\, t \geq s\}$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned}\zeta_{st} = 1 &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma h')(x_r)\,dr + \int_s^t \zeta_{sr}\,b'(x_r)\,dr \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_s^t \zeta_{sr}\,\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\,d\overline{w}_r^i + \int_s^t \zeta_{sr}\,g'(x_r)\,dv_r.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Donc,

$$E\sup_{t\in[0,T]}|\zeta_{st}|^p \leq E\Big\{1 + \sup_{t\in[0,T]}\Big(\Big|\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma h')(x_r)\,dr\Big|^p + \Big|\int_s^t \zeta_{sr}\,b'(x_r)\,dr\Big|^p$$

$$+ |\sum_{i=1}^{m} \int_s^t \zeta_{sr} \frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\, d\overline{w}_r^i|^p + |\int_s^t \zeta_{sr}\, g'(x_r)\, dv_r|^p\Big)\Big\}$$

$$\leq c\Big\{E\Big[\frac{1}{\varepsilon}\int_s^T |\zeta_{sr}\,(h'^{-1}\gamma h')(x_r)|^p dr\Big] + E\Big[\int_s^T |\zeta_{sr}\, b'(x_r)|^p dr\Big]$$

$$+ E\Big(\sum_{i=1}^{m}\int_s^T |\zeta_{sr} \frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)|^2 dr\Big)^{\frac{p}{2}} + E\Big(\int_s^T |\zeta_{sr}\, g'(x_r)|^2 dr\Big)^{\frac{p}{2}}\Big)\Big\},$$

d'après l'inégalité de Burkhölder. Comme γ est hypoelliptique, les hypothèses $(H_2) - (H_4)$ impliquent alors qu'il existe des constantes strictement positives c et c' indépendantes de ε telles que

$$\|\zeta_{st}\|_p \leq \frac{c}{\varepsilon}\int_s^T \|\zeta_{sr}\|_p dr + c'\int_s^T \|\zeta_{sr}\|_p dr.$$

Le lemme découle alors du théorème de Gronwall et du fait que $\zeta_{ts} = \zeta_{st}^{-1}$.

□

Lemme 4.2.6.

Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $c(p)$ telle que

$$\|\overline{D}_s\zeta_{t0}\|_p \leq c(p), \tag{4.29}$$

$$\|\tilde{D}_s\zeta_{t0}\|_p \leq c(p). \tag{4.30}$$

Preuve:

D'après la relation (4.28), on a pour tout t dans $[0,T]$,

$$\zeta_{0t} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \zeta_{0r}\,(h'^{-1}\gamma h')(x_r)\, dr + \int_0^t \zeta_{0r}\, b'(x_r)\, dr$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \zeta_{0r} \frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\, d\overline{w}_r^i + \int_0^t \zeta_{0r}\, g'(x_r)\, dv_r.$$

La formule d'Itô implique alors que

$$\zeta_{t0} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (h'^{-1}\gamma h')(x_r)\,\zeta_{r0} dr - \int_0^t b'(x_r)\,\zeta_{r0}\, dr$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\,\zeta_{r0}\, d\overline{w}_r^i - \int_0^t g'(x_r)\,\zeta_{r0}\, dv_r$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big)^{\tau}(x_r)\Big)\zeta_{r0}\, dr + \int_0^t \big(g'(g')^{\tau}(x_r)\big)\,\zeta_{r0}\, dr.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\overline{D}_s\zeta_{ts} = 1 &- \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (h'^{-1}\gamma h')'(x_r)\,\zeta_{r0}\,dr - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (h'^{-1}\gamma h')(x_r)\,\overline{D}_s\zeta_{r0}\,dr \\
&- \int_0^t b''(x_r)\,\zeta_{r0}\,dr - \int_0^t b'(x_r)\,\overline{D}_s\zeta_{r0}\,dr \\
&- \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma)(x_r)\,\zeta_{r0}\int_0^t g''(x_r)\,\zeta_{r0}\,dv_r \int_0^t g'(x_r)\,\overline{D}_s\zeta_{r0}\,dv_r \\
&+ \sum_{i=1}^m \int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big)^\tau(x_r)\Big)'\zeta_{r0}\,dr + \int_0^t \big(g'(g')^\tau(x_r)\big)'\,\zeta_{r0}\,dr \\
&+ \sum_{i=1}^m \int_0^t \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big(\frac{\partial}{\partial x_i}(h'^{-1}\gamma h)\big)^\tau(x_r)\Big)\overline{D}_s\zeta_{r0}\,dr + \int_0^t \big(g'(g')^\tau(x_r)\big)\,\overline{D}_s\zeta_{r0}\,dr
\end{aligned}$$

En utilisant alors le lemme 4.2.5., les hypothèses $(H_2)-(H_4)$, (H_7) ainsi que l'inégalité de Burkhölder, on peut alors montrer comme dans la preuve du lemme précédent qu'il existe des constantes strictement positives c et c' telles que

$$\|\overline{D}_s\zeta_{t0}\|_p \leq c' + c\int_0^t \|\overline{D}_s\zeta_{r0}\|_p\,dr$$

D'où la relation (4.29). La relation (4.30) s'obtient par des calculs analogues.

□

Passons maintenant à la preuve de (i) à (vii).

Des calculs analogues à ceux de la page 153 de [66] respectivement de la section 3.4. de [70] donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}E\Big[\int_0^t \tilde{D}_s \log(Z_t\Lambda_t)(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,ds/\mathcal{Y}_t\Big] =& \frac{1}{t}E\Big[\int_0^t \gamma^{-1}h'(x_s)\zeta_{0s}\big(D_s\zeta_{t0} - \tilde{D}_s\zeta_{t0}\big)\,ds/\mathcal{Y}_t\Big] \\
&- \frac{1}{\varepsilon t}E\Big[\int_0^t \big[h(x_s) - h(m_s)\big]\zeta_{ts}\gamma^{-1}h'(x_s)\,ds/\mathcal{Y}_t\Big].
\end{aligned}$$

et (i) découle alors des lemmes 4.2.5. et 4.2.6.

Par ailleurs,

$$\int_0^t\int_s^t \chi_1'(x_r, m_r)\tilde{D}_s x_r(\tilde{D}_s x_t)^{-1}\,dr\,ds \leq c(p)\int_0^t\int_s^t \zeta_{sr}\zeta_{ts}\,dr\,ds,$$

comme $\|\chi_1'\|_p$ est borné, et

$$\int_0^t \int_s^t \chi_1'(x_r, m_r) \tilde{D}_s x_r (\tilde{D}_s x_t)^{-1} dr ds \leq c(p) \int_0^t \int_s^t \exp\left[\frac{\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(r-s)\right] \exp\left[-\frac{\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(t-s)\right] dr\, ds,$$

d'après le lemme 4.2.5.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_s^t \chi_1'(x_r, m_r) \tilde{D}_s x_r (\tilde{D}_s x_t)^{-1} dr ds &\leq \varepsilon\, c(p) \int_0^t \exp\left[\frac{\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(t-s)\right] \exp\left[\frac{-\tilde{a}(p)}{\varepsilon}(t-s)\right] ds \\ &= \varepsilon\, t\, c(p). \end{aligned}$$

On a donc prouvé la relation (ii).

Des calculs similaires impliquent les expressions (iii)-(vii). (Remarquons que dans l'expression (iii) figure une intégrale par rapport à m_t. Or comme dm_t est d'ordre $O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, et $\|\chi_2'\|_p$ d'ordre $O(\sqrt{\varepsilon})$, on ne rencontre pas de problème pour conclure.)

Ceci complète la démonstration du théorème 4.2.4.

$\square$

Chapitre V

DIFFUSIONS SUR LES VARIETES RIEMANIENNES

5.1. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est d'établir la régularité de la loi de probabilité de l'image, par une application de classe C^∞ d'une diffusion avec coefficients dépendant du temps, évoluant sur une variété. On suppose que les coefficients de la diffusion exprimés en coordonnées locales sont Hölder-continus dans la variable temps et de classe C^∞ dans la variable d'espace. On montre, sous une condition de Hörmander globale, que la solution d'une telle équation admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien. Ceci est une extension des résultats de S.Tanigushi [82], où les coefficients de l'équation différentielle stochastique ne dépendent pas du temps et où l'auteur suppose l'existence d'une carte globale.

Ces résultats sont ensuite appliqués pour démontrer que le filtre associé à un système de filtrage non linéaire, composé d'un signal et d'une observation à coefficients dépendant du temps, évoluant sur une variété riemanienne, admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien.

Des problèmes de filtrage non linéaire avec un processus d'observation évoluant sur une variété riemanienne ont été étudiés par T. Duncan [22] et M. Pontier et J. Szpirglas [71].

D'autre part, S. Ng et P. Caines [58] ont donné une formulation générale du problème de filtrage non linéaire, dans le cas où le signal et l'observation sont à valeurs dans une variété riemanienne. Ils ont montré une formule de Bayes pour l'espérance conditionnelle de fonctions de classe C^∞ dépendant du signal. De plus, ils ont démontré que la densité du filtre, si elle existe, vérifie une équation de Zakai (cf. [85]).
Dans [32], P.Florchinger a montré par des techniques de calcul de Malliavin que le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire sur des variétés avec des coefficients qui ne dépendent pas du temps, admet une densité de classe C^∞.

Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on précise les hypothèses de travail et on montre que, sous ces hypothèses, certaines équations différentielles stochastiques sur des variétés avec coefficients dépendant du temps admettent une solution unique. Dans le troisième paragraphe, on montre que notre processus de diffusion à valeurs dans une variété est infiniment différentiable au sens de Malliavin et on en calcule sa dérivée. De plus, on montre sous une condition de Hörmander globale, que sa loi de probabilité admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien. Dans le quatrième paragraphe, on applique les résultats précédents pour montrer l'existence d'une densité de classe C^∞ pour le filtre associé à un problème de filtrage non linéaire avec des coefficients dépendant du temps sur des variétés riemaniennes.

5.2. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE SUR DES VARIETES

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de Wiener complet de dimension d i.e. Ω est l'espace de Banach $C([0,T], \mathbb{R}^d)$, tel que $w(0) = 0$, pour tout w dans Ω, muni de la norme $\|w\| = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$, P est la mesure de Wiener standard et $\mathcal{F}$ est le complété de la σ -algèbre de Borel de W pour la mesure P. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ une famille croissante, continue à droite de sous σ-algèbres de $\mathcal{F}$ contenant les sous-ensembles de $\mathcal{F}$ de mesure nulle.

Etendons les notions de calcul de Malliavin (cf. chapitre I) à des fonctionnelles à valeurs sur des variétés. Soient M et N des variétés riemaniennes σ-compactes, connexes, de classe C^∞, de dimension respectives m et n et de métriques riemaniennes associées g_M et g_N. Posons

$$\mathbb{D}^\infty(M) = \{G : \Omega \to M;\ F(G) \in \mathbb{D}^\infty, \quad \forall F \in C_0^\infty(M)\}, \tag{5.1}$$

où $C_0^\infty(M)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}$ à support compact.

Alors, $\mathbb{D}^{\infty}(M)$ est l'espace de tous les fonctionnelles "infiniment différentiables" à valeurs dans M.

Considérons des champs de vecteurs $A_0, ..., A_d$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur M, qui dépendent du temps et une application Π de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ de M dans N, tels que les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(C.1) M est muni d'un atlas $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ de cartes relativement compactes, tel que pour tout i dans I, pour tout α dans $\{0, ..., d\}$, si $A_\alpha(t,x) = \sigma_\alpha^j(t,x)\frac{\partial}{\partial \phi_i^j}$ désigne l'expression du champs de vecteurs A_α dans les coordonnéees locales $(\phi_i^1, ..., \phi_i^m)$, on peut prolonger les fonctions $\sigma_\alpha^j(t,x)$ en des fonctions sur $[0,T] \times \mathbb{R}^m$, telles que, pour tout $\alpha \in \{0, ..., d\}$, les fonctions $\sigma_\alpha^j(t,x)$, ainsi que leurs dérivées par rapport à x sont Hölder-continus en t uniformément sur $[0,T] \times \mathcal{K}$, pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}^m$, de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ en x, pour t fixé dans $[0,T]$ et qu'eux-mêmes ainsi que leurs dérivées de tous ordres par rapport à x sont uniformément bornés.

(C.2) Π est une fonction propre, i.e. pour toute partie compacte K de N, l'image réciproque $\Pi^{-1}(K)$ est une partie compacte de M.

On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.2.1.

Soit x_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans M. Alors, sous la condition (C.1), l'équation différentielle stochastique

$$x_t = x_0 + \int_0^t A_0(s, x_s)\, ds + \int_0^t A_\alpha(s, x_s) \circ dw_s^\alpha, \tag{5.2}$$

où $w_t = (w_t^1, ..., w_t^d)$ désigne le $\mathcal{F}_t$-processus de Wiener standard sur W, admet une solution unique $\big(X(t, x_0, w)\big)_{t \in [0, \theta(w) \wedge T]}$ à valeurs dans M, où $\theta(w)$ désigne le temps d'explosion de la solution.

Remarque:
A partir de maintenant, pour une carte (U, ϕ), on va identifier $x \in U$ avec ses coordonnées locales $\phi(x) \in \phi(U)$.

Preuve:
Considérons pour chaque carte (U, ϕ) de l'atlas vérifiant la condition (C.1), l'expression

des champs de vecteurs A_α dans les coordonnées locales $(\phi^1, ..., \phi^m)$,

$$A_\alpha(t,x) = \sigma_\alpha^i(t,x)\frac{\partial}{\partial \phi^i}, \quad \alpha = 0, ..., d. \tag{5.3}$$

Prolongeons les fonctions $\sigma_\alpha^i(t,x)$ en des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses de la condition (C.1) et considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dx_t^i = \sigma_0^i(t,x_t)\,dt + \sigma_\alpha^i(t,x_t) \circ dw_t^\alpha \\ x_0^i = x^i \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad i = 1, ..., m \tag{5.4}$$

Puisque les cartes sont relativement compactes, on sait alors (cf.[40]) que (5.4) possède une unique solution $\big(X(t,x,w)\big)_{t\in[0,T]}$, qui n'explose pas. Fixons $x = (x^1, ..., x^m)$ dans U et posons $\nu_U(w) = \inf\{t; X(t,x,w) \notin U\}$. Définissons $\big(X_U(t,x,w)\big)_{t\in[0,T]}$ par

$$X_U(t,x,w) = X(t \wedge \nu_U(w), x, w). \tag{5.5}$$

On peut ainsi construire une solution locale X_U pour chaque x dans M et chaque voisinage U de x.

De plus, si (U,ϕ) et $(\tilde{U},\tilde{\phi})$ sont deux cartes à intersection non vide et si $x \in U \cap \tilde{U}$, alors, $X_U(t,x,w) = X_{\tilde{U}}(t,x,w)$ pour tout $t \le \nu_U(w) \wedge \nu_{\tilde{U}}(w)$. En effet, si $A_\alpha(t,x) = \tilde{\sigma}_\alpha^i(t,\tilde{x})\frac{\partial}{\partial\tilde{\phi}^i}$ dans les coordonnées locales $(\tilde{\phi}^1, ..., \tilde{\phi}^m)$ dans $\tilde{U}$, on a $\tilde{\sigma}_\alpha^i(t,x) = \sigma_\alpha^k(t,x)\frac{\partial\tilde{\phi}^i}{\partial\phi^k}$ et $X_{\tilde{U}}$ est la solution de l'équation

$$d\tilde{x}_t^i = \tilde{\sigma}_0^i(t,\tilde{x}_t)\,dt + \tilde{\sigma}_\alpha^i(t,\tilde{x}_t) \circ dw_t^\alpha. \tag{5.6}$$

D'autre part, d'après la proposition 1.1.6.2., si on exprime le processus X_U dans les coordonnées locales $\tilde{\phi}$ dans $\tilde{U}$, c'est-à-dire si on écrit $\tilde{X}_t^i = \tilde{\phi}\big(X_U(t,x,w)\big)$, alors,

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t^i &= \frac{\partial\tilde{\phi}^i}{\partial\phi^k}(x_t) \circ dx_t^k \\ &= \frac{\partial\tilde{\phi}^i}{\partial\phi^k}(x_t)\sigma_0^k(t,x_t)\,dt + \frac{\partial\tilde{\phi}^i}{\partial\phi^k}(x_t)\sigma_\alpha^k(t,x_t) \circ dw_t^\alpha \\ &= \tilde{\sigma}_\alpha^i(t,\tilde{X}_t) \circ dw_t^\alpha + \tilde{\sigma}_0^i(t,\tilde{X}_t)\,dt. \end{aligned}$$

Donc $\tilde{X}_t = \tilde{\phi}\big(X_U(t,x,w)\big)$ vérifie l'équation (5.6), tout comme $\tilde{x}_t = X_{\tilde{U}}(t,x,w)$ et par unicité de la solution d'équations différentielles stochastiques dans $\mathbb{R}^m$, on conclut que $X_U(t,x,w) = X_{\tilde{U}}(t,x,w)$, pour tout $t \le \nu_U(w) \wedge \nu_{\tilde{U}}(w)$.

On va maintenant construire une solution globale à partir des différentes solutions locales.

Considérons pour chaque w dans Ω la totalité des cartes $(U_1, \phi_1), ..., (U_l, \phi_l)$ telles que $x_0(w)$ soit dans U_i pour tout i, $i = 1, ..., l$. Alors, le processus $\hat{X}(t, x_0, w) = X_{U_j}(t, x_0, w)$ est bien défini pour $t \in [0, \hat{\nu}_{x_0} \wedge T]$, où $\hat{\nu}_{x_0}(w) = \max_{1 \le i \le l}\{\nu_{U_i}(w)\}$ et $j \in \{1, ..., l\}$ est tel que $\hat{\nu}_{x_0}(w) = \nu_{U_j}(w)$.

Posons $\nu_1(w) = \hat{\nu}_{x_0(w)} \wedge T$ et $x_t = \hat{x}_t$, pour $t \in [0, \nu_1]$.

Récursivement, si $\nu_n(w)$ et $x_t = X(t, x_0, w)$ sont définis, pour t dans $[0, \nu_n(w)]$, alors on pose sur l'ensemble $\{w; \nu_n(w) < T\}$, $x_n = x_{\nu_n}$, $w_n = \theta_{\nu_n} w$, où $(\theta_t w)(s) = w_{t+s} - w_t$ et $\nu_{n+1} = \hat{\nu}_{x_n}(w_n) \wedge T$.

Puis, on définit $x_t = \hat{X}(t - \nu_n, x_n, w_n)$ pour t dans $[\nu_n, \nu_{n+1}]$.

Ainsi, on a construit une solution globale de l'équation (5.2). L'unicité de la solution se déduit facilement de la condition (C.1) laquelle implique que les solutions locales $X_U(t, x, w)$ sont uniques, pour tout x dans M et tout voisinage U de x.

$\square$

Pour éviter des problèmes d'explosion, on va travailler a partir de maintenant sous des hypothèses assurant que l'équation (5.2) admet une solution unique définie sur $[0, T]$ entier. On suppose dans la suite qu'une des deux conditions ci-dessous est vérifiée:

(C.3) M est une variété compacte.

Trouver des hypothèses raisonnables, assurant la non-explosion de la solution sur une variété σ-compacte, est beaucoup plus délicat. Ainsi, même si M est une variété riemanienne complète et si le générateur infinitésimal $A_0 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha^2$ est le Laplacien, on a besoin de conditions sur la décroissance à l'infini de la courbure, laquelle ne doit pas tendre trop vite vers moins l'infini, lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur la variété.
Une possibilité est de supposer l'hypothèse suivante:

(C.4) Les images des cartes contiennent une boule de rayon fixe et les dérivées des coefficients des champs de vecteurs dans ces coordonnées locales restent bornées.

Comme cela, on obtient ce que K.D. Elworthy [25] appelle un recouvrement uniforme (voir aussi les arguments de X.-M. Li exposés dans [52]).
Un point de vue légèrement différent peut être trouvé dans la note de D. Bakry [2].

De plus, la famille de morphismes $x \mapsto X(t,x,w)$ est un flot de difféormophismes de M dans lui-même (cf.[40]) et on l'écrit comme $\big(X(t,w)\big)_{t\in[0,T]}$. Fixons maintenant la variable x_0 à valeurs dans M et posons

$$x_t(w) = X(t,x_0,w) \tag{5.7}$$

et

$$y_t(w) = \Pi\big(x_t(w)\big). \tag{5.8}$$

5.3. CALCUL DES VARIATIONS STOCHASIQUES SUR LES VARIETES

Sous les hypothèses ci-dessus, y_t est une fonctionnelle de Wiener "infiniment différentiable" à valeurs dans N, pour tout t dans $[0,T]$. En effet, on a le résultat suivant.

Théorème 5.3.1.

Pour tout t dans $[0,T]$, $y_t(w)$ appartient à $I\!D^\infty(N)$. De plus, pour toute fonction f dans $C_0^\infty(N)$ et tout h dans H, on a pour tout t dans $[0,T]$

$$\big\langle D\big(f(y_t)\big)(w),h\big\rangle_H = (\Pi_*)_{x_t(w)}\int_0^t \dot h^\alpha(s)\Big\{\big(X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}\big)_* A_\alpha\Big\}_{t,x_t(w)} f\,ds. \tag{5.9}$$

Preuve:
Soit $f \in C_0^\infty(N)$. Alors, la condition (C.2) implique que $f\circ\Pi \in C_0^\infty(M)$. Ceci nous permet de définir, pour chaque carte (U_i,ϕ_i) de l'atlas vérifiant (C.1), une fonction $\tilde f_i$ dans $C_0^\infty(I\!R^m)$ par $\tilde f_i = f\circ\Pi\circ\phi_i^{-1}$ (car les cartes sont relativement compactes). Par conséquent, $f\circ\Pi = \tilde f_i\circ\phi_i$ dans le domaine de la carte (U_i,ϕ_i).

Supposons tout d'abord que, pour t dans l'intervalle $[\nu_n,\nu_{n+1}]$, le processus x_t se trouve dans le domaine de la carte (U_k,ϕ_k), où les ν_j sont les temps d'arrêt définis ci-dessus. Alors, pour tout t dans $[\nu_n,\nu_{n+1}]$,

$$\begin{aligned}
\big\langle D\big(f(y_t)\big)(w),h\big\rangle_H &= \langle D(\tilde f_k\circ\phi_k)(x_t)(w),h\rangle_H \\
&= \Big\langle D\big(\tilde f_k\big(\hat X(t-\nu_n,x_n,w_n)\big)\big)(w),h\Big\rangle_H \\
&= \int_0^T \dot h^\alpha(s)\overline{\dot{D\big(\tilde f_k\big(\hat X(t-\nu_n,x_n,w_n)\big)\big)}}^{\,\alpha}(w)(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 1.1.6.2. et l'équation V-10.3 dans [40],

$$D\Big(\tilde{f}_k\big(\hat{X}(t-\nu_n,x_n,w_n)\big)\Big)(w)=\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x^j}\big(\hat{X}(t-\nu_n,x_n,w_n)\big)\big(\tilde{Z}_t\tilde{Z}_s^{-1}\big)\,ds,$$

où $\tilde{Z}^i_j(t)=\dfrac{\partial}{\partial x^j}X^i_{U_k}(t,x,w)$. Donc,

$$\big\langle D(f(y_t))(w),h\big\rangle_H=\int_0^t \dot{h}^\alpha(s)\Big\{\big(X_{U_k}(t,w)\circ X_{U_k}(s,w)^{-1}\big)_*\tilde{A}^k_\alpha\Big\}_{t,X_{U_k}(t-\nu_n,x_n,w_n)}\tilde{f}_k\,ds,$$

où $\tilde{A}^k_\alpha$ désigne l'écriture en coordonnées locales du champs de vecteurs A_α dans la carte (U_k,ϕ_k). Par conséquent,

$$\begin{aligned}\langle D(f(y_t))(w),h\rangle_H&=\int_0^t \dot{h}^\alpha(s)\Big\{\big(X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}\big)_*A_\alpha\Big\}_{t,x_t(w)}f\,ds\\&=(\Pi_*)_{x_t(w)}\int_0^t \dot{h}^\alpha(s)\Big\{\big(X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}\big)_*A_\alpha\Big\}_{t,x_t(w)}f\,ds.\end{aligned}$$

Comme les $[\nu_n(w),\nu_{n+1}(w)]$ forment une partition de $[0,T]$, on a le résultat pour tout t dans $[0,T]$.

□

Introduisons maintenant la matrice de covariance de Malliavin, associée au processus y_t. On définit un champ de tenseur B^0 de classe C^∞ sur $[0,T]\times M$ du type (2,0) par

$$B^0_{t,x}(u_1,u_2)=\sum_{\alpha=1}^{d}u_1\big((A_\alpha)_{t,x}\big)u_2\big((A_\alpha)_{t,x}\big),\quad t\in[0,T],\ x\in M,\ u_1,u_2\in T^*_xM. \tag{5.10}$$

La matrice de covariance de Malliavin, associée au processus stochastique y_t, est alors la forme bilinéaire définie positive $\langle\langle Dy_t,Dy_t\rangle\rangle(w)$ sur $T^*_{y_t(w)}$, définie, pour tous $u_1,u_2\in T^*_{y_t(w)}N$ et tout t dans $[0,T]$, par

$$\langle\langle Dy_t,Dy_t\rangle\rangle(w)(u_1,u_2)=\int_0^t(\Pi_*)_{x_t(w)}\big\{\big(X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}\big)_*B^0\big\}(u_1,u_2)\,ds. \tag{5.11}$$

Comme $T^*_{y_t(w)}N$ est muni du produit interne induit par la métrique riemanienne g_N, on peut définir le déterminant $\det\big(\langle\langle Dy_t,Dy_t\rangle\rangle(w)\big)$ de manière habituelle. On pose

$$g^t(w)=\begin{cases}1/\det\big(\langle\langle Dy_t,Dy_t\rangle\rangle(w)\big) & \text{si } \det\big(\langle\langle Dy_t,Dy_t\rangle\rangle(w)\big)>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \tag{5.12}$$

Considérons la condition suivante:

$$(A) \qquad f(y_t)g^t \in \bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(P) \quad \forall f \in C_0^\infty(N).$$

Sous cette hypothèse, on peut démontrer de manière analogue à [82] la formule d'intégration par parties suivante.

Proposition 5.3.2.

Pour tout opérateur différentiel ∂ sur N et toute fonction ϕ dans $C_0^\infty(M)$, il existe $p > 1$, $r \in I\!N$ et une application linéaire continue $\xi : I\!D^{p,r} \to L^1(P)$, tels que, pour tous f dans $C_0^\infty(M)$ et G dans $I\!D^{p,r}$,

$$(5.13) \qquad E\big(\partial f(y_t)\,\phi(y_t)\,G\big) = E\big(f(y_t)\,\xi(G)\big).$$

Proposition 5.3.3.

Pour tout G dans $I\!D^\infty$, la fonction $g_G(x) = \langle \hat{\delta}_G, G\rangle$ est de classe C^∞ et pour tout f dans $C_0^\infty(M)$

$$(5.14) \qquad E\big(f(y_t)\,G\big) = \int_M f(x)\,g_G(x)\,\nu(dx),$$

où δ_x est la fonction de Dirac prise en x dans M et ν l'élément de volume riemanien sur M. En particulier, la fonction p, définie par $p(x) = \langle \hat{\delta}_x, 1\rangle$ est la densité de classe C^∞ de la loi du processus stochastique $(y_t)_{t\in[0,T]}$ par rapport à ν.

Par conséquent, si la condition (A) est vérifiée, alors la loi du processus stochastique y_t admet une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à l'élément de volume riemanien. On va montrer que ce résultat reste valable sous une condition de Hörmander globale.

Notons, pour tout t dans $[0,T]$ et tout x dans M, $\mathfrak{L}_{t,x}$ le sous-espace de T_xM engendré par les champs de vecteurs $(A_i)_{t,x}$, $i = 1, ..., d$ et $([A_{i_q}, [..., [A_{i_1}, A_{i_0}]...])_{t,x}$, $0 \le i_j \le d$, $j = 0, ..., q$, $q \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'hypothèse suivante.

$$(H) \qquad (\Pi_*)_x \mathfrak{L}_{t,x} = T_yN,$$

pour tout t dans $[0,T]$ et tout x dans M, où $y = \Pi(x)$.

Sous cette hypothèse, on a le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 5.3.4.

Supposons la condition de Hörmander (H) vérifiée. Alors, pour tout t dans $]0,T]$, la loi de probabilité du processus y_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien.

Preuve:
On doit démontrer que la condition (A) est vérifiée, pour tout t dans $]0,T]$. La condition (C.2) implique que $f \circ \Pi \in C_0^\infty(M)$, pour toute fonction $f \in C_0^\infty(N)$. Donc, comme $f(y_t) = (f \circ \Pi)(x_t)$, il suffit de prouver que pour tout t in $]0,T]$,

$$g^t \in \bigcap_{p \in [1,+\infty[} L^p(P). \tag{5.15}$$

Soit $(V_0, \tilde{\phi})$ une carte relativement compacte sur N, telle que $y_0 \in V_0$ et soit (U_0, ϕ) une carte de l'atlas qui vérifie la condition (C.1) telle que $x_0 \in U_0$. Alors, il existe un sous-ensemble compact $\tilde{U}_0$ de U_0 tel que $\Pi(\tilde{U}_0) \subset V_0$ et $\phi^q = \tilde{\phi}^q \circ \Pi,\ 1 \leq q \leq n$ dans $\tilde{U}_0$.

Considérons la représentation des champs de vecteurs A_α à travers les coordonnées locales $(\phi^1, ..., \phi^m)$,

$$A_\alpha(t,x) = \sigma_\alpha^i(t,x)\frac{\partial}{\partial \phi^i}, \quad \alpha = 0, ..., d. \tag{5.16}$$

Prolongeons les fonctions $\sigma_\alpha^i(t,x)$ en des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant l'hypothèse (C.1) et considérons le processus $\tilde{x}_t(w)$, solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\tilde{x}_t^i = \sigma_0^i(t,\tilde{x}_t)\,dt + \sigma_\alpha^i(t,\tilde{x}_t) \circ dw_t^\alpha \\ \tilde{x}_0^i = \phi^i(x_0) \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad i = 1, ..., m. \tag{5.17}$$

Soit ν le temps d'arrêt défini par

$$\nu(w) = \inf\{t;\ \tilde{X}(t,x_0,w) \notin \tilde{U}_0\}. \tag{5.18}$$

Afin de montrer la relation (5.15), on construit un processus aléatoire $\xi_t(w)$, tel que pour tout t dans $]0,\nu]$

$$(i) \qquad 0 \leq \xi_t \leq \det(\langle\langle Dy_t, Dy_t\rangle\rangle) \quad p.s.$$

et

$$(ii) \qquad \xi_t^{-1} \in \bigcap_{p\in[1,+\infty[} L^p(P).$$

Soit $\tilde{y}_t(w)$ la solution de l'équation différentielle stochastique

$$(5.19) \qquad \tilde{y}_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \partial_k\,\sigma_\alpha^i(s,\tilde{x}_s)\,\tilde{y}_j^k(s)\circ dw_s^\alpha + \int_0^t \partial_k\,\sigma_0^i(s,\tilde{x}_s)\,\tilde{y}_j^k(s)\,ds,$$

où δ_j^i désigne le symbole de Kronecker. Alors, pour tout $0 \leq s < t \leq \nu$, on a

$$D_s^j\tilde{x}_t^i = \tilde{y}_l^i(t)\big(\tilde{y}(s)_k^s\big)^{-1}\sigma_j^k(s,\tilde{x}_s) \text{ i.e. } D_s^i\tilde{x}_t = \tilde{y}_t\tilde{y}_s^{-1}\sigma_i(s,\tilde{x}_s).$$

Pour tous $t \in [0,T]$ et $\zeta \in \mathbb{R}^m$, on définit la forme quadratique $a_t(w)$ sur $\mathbb{R}^m$ par

$$(5.20) \qquad a_t(w)[\zeta] = \tilde{y}_t \sum_{r=1}^{d} \int_0^\nu \langle\zeta, \left(\tilde{y}_s^{-1}\,\sigma_\alpha(s\tilde{x}_s)\right)\left(\tilde{y}_s^{-1}\,\sigma_\alpha(s,\tilde{x}_s)\right)^T\zeta\rangle\, ds\, \tilde{y}_t^T.$$

Ceci nous permet de définir, pour tout t dans $[0,T]$, la variable aléatoire ξ_t par

$$(5.21) \qquad \xi_t(w) = \varepsilon_0\big\{\inf_{\eta\in S^{n-1}} a_t(w)[\tilde{\eta}]\big\}^n,$$

où $\tilde{\eta} = (\eta, 0, ..., 0) \in S^{m-n}$, $\eta \in S^{n-1}$ et $\varepsilon_0 = \inf\Big\{\det(g_N)_{\Pi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial\phi^q}, \frac{\partial}{\partial\phi^r}\right); x \in U_0\Big\}$.

La preuve du théorème est complète, si on montre que, pour tout t dans $]0,\nu]$, les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

En fait, ceci implique que la relation (5.15) est vérifiée, pour tout t dans $]0,\nu]$. Or, la fonction $t \mapsto \det(\langle\langle Dy_t, Dy_t\rangle\rangle)(w)$ étant croissante en t, on obtient $g^{t'} \leq g^\nu$, pour tout t dans $[\nu,T]$, et par conséquent, g^t est dans $L^p(P)$, pour tous $p > 1$ et t dans $[0,T]$.

□

Lemme 5.3.6.

ξ_t vérifie (i), pour tout t dans $]0,\nu]$.

Preuve:

Pour tous $1 \leq q, r \leq n$, et $t \in]0,\nu]$,

$$\begin{aligned}
\langle\langle Dy_t, Dy_t\rangle\rangle(w)(d\tilde{\phi}^q, d\tilde{\phi}^r) &= \int_0^t \Big\{[X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}]_* B^0\Big\}_{t,x_t(w)} (d\phi^q, d\phi^r)\, ds \\
&= B^0_{t,x_t(w)}\big(d\phi^q \circ X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}, d\phi^r \circ X(t,w)\circ X(s,w)^{-1}\big) \\
&= \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \tilde{y}^q_l(t)\big(\tilde{y}^l_k(s)\big)^{-1}\sigma^k_\alpha(s,\tilde{x}_s)\tilde{y}^r_i(t)\big(\tilde{y}^i_j(s)\big)^{-1}\sigma^j_\alpha(s,\tilde{x}_s)\, ds \\
&= \tilde{y}_t \sum_{\alpha=1}^d \int_0^t \langle \tilde{y}_s^{-1}\sigma_\alpha(s,\tilde{x}_s), \big(\tilde{y}_s^{-1}\sigma_\alpha(s,\tilde{x}_s)\big)^\tau\rangle\, ds\, \tilde{y}_t^\tau.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\det(\langle\langle Dy_t, Dy_t\rangle\rangle)(w) \geq \big\{\inf_{\eta\in S^{n-1}} a_t(w)[\tilde{\eta}]\big\}^n.$$

De plus, $a_t(w)$ est une forme quadratique définie positive, ainsi $\xi_t \geq 0$, pour tout t dans $]0,T]$.

□

Lemme 5.3.7.

ξ_t vérifie (ii), pour tout t dans $]0,T]$.

Preuve:

Considérons la représentation des champs de vecteurs A_α en coordonnées locales, introduite en (5.16) et notons $\tilde{A}_\alpha$, $\alpha = 0, ..., d$, les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ définis, pour tout x dans $\mathbb{R}^m$ et tout t dans $[0,T]$, par

$$\tilde{A}_\alpha(t,x) = \sigma^i_\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5.22}$$

Notons $\mathcal{L}(\tilde{A}_0, ..., \tilde{A}_d)$ (respectivement $\mathcal{L}(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_d)$) l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $\tilde{A}_0, ..., \tilde{A}_d$ (respectivement $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_d$) et $\mathcal{I}(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_d)$ l'idéal engendré par l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_d)$ dans l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(\tilde{A}_0, ..., \tilde{A}_d)$.
La condition de Hörmander (H) implique

$$\mathcal{I}(\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_d)(0,x_0) = \mathbb{R}^m. \tag{5.23}$$

D'autre part, on sait d'après la relation (1.27) que la matrice de covariance de Malliavin M_t, associée au processus stochastique $\tilde{x}_t$, est donnée par

$$M_t = \tilde{y}_t \int_0^t \tilde{y}_s^{-1} \sum_{\alpha=1}^{d} \sigma_k(s,\tilde{x}_s)\sigma_k(s,\tilde{x}_s)^{\tau}(\tilde{y}_s^{-1})^{\tau}\, ds\, \tilde{y}_t^{\tau}. \tag{5.24}$$

Puisque ε_0 est une constante, il suffit, pour conclure, de montrer que $(\det M_t)^{-1}$ est dans $L^p(P)$, pour tout p dans $[1,+\infty[$ et tout t dans $]0,\nu]$.

Or, la condition (C.1) et la relation (5.23) impliquent que les hypothèses du théorème 1.1.3. de [29] sont vérifiées, ce qui nous permet de conclure.

□

5.4. APPLICATION A UN PROBLEME DE FILTRAGE NON LINEAIRE

Dans cette section, on utilise les résultats de la section précédente pour montrer que le filtre associé à un certain problème de filtrage non linéaire sur les variétés admet une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère en fait une généralisation d'un modèle de filtrage non linéaire sur des variétés riemaniennes introduit par S.K. Ng et P.E. Caines en [58].

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités complet et w, v deux processus de Wiener indépendants de dimensions respectives d et n. Soit M une variété riemanienne connexe, orientée, de dimension m, muni de la métrique riemanienne g_M. Soit $Gl(M)$ le fibré des repères linéaires sur M et p_M la projection de $Gl(M)$ sur M. Désignons par (x^i, e^i_j), $i,j = 1,...,m$, les coordonnées locales dans un voisinage du point (x,e) dans $Gl(M)$ et par $\{\Gamma^q_{i\,l}\}$ les symboles de Christoffel de la connection riemanienne sur M, compatible avec la métrique g_M.

Soient des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ dépendant du temps A_j, $j = 1,...,d$ sur $GL(M)$, dont la représentation en coordonnées locales est donnée par

$$A_j(t,x,e) = a^i_j(t,x,e)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^q_{i\,l}\, e^l_p \frac{\partial}{\partial e^p_q}\Big). \tag{5.25}$$

De plus, on note A_0 un champ de vecteurs A_0 sur M de classe $\mathcal{C}^\infty$ dépendant du temps, s'écrivant

$$A_0(t,x) = a^i_0(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.26}$$

en coordonées locales. Notons $\tilde{A}_0$ son relèvement horizontal par rapport à la connection $\{\Gamma^q_{i\,l}\}$. Alors, $\tilde{A}_0$ est donné en coordonnées locales par

$$\tilde{A}_0(t,x,e) = \alpha^i_0(t,x)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^q_{i\,l}\, e^l_p\, \frac{\partial}{\partial e^p_q}\Big). \tag{5.27}$$

Considérons alors le signal $(x_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans M, défini pour tout t dans $[0,T]$ par

$$x_t = p_M(r_t), \tag{5.28}$$

où $r_t = (x_t, e_t)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$r_t = r_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, r_s)\, ds + \int_0^t A_\alpha(s, r_s) \circ dw^\alpha_s, \tag{5.29}$$

avec $r_0 = (x_0, e_0)$ dans $Gl(M)$.

En coordonnées locales (5.29) s'écrit

$$\begin{cases} dx^i_t = a^i_0(t,x_t)\, dt + a^i_\alpha(t,x_t,e_t) \circ dw^\alpha_t \\ de^i_{\alpha t} = -\Gamma^i_{m\,k}(x_t)\, e^k_{\alpha t} \circ dx^m_t, \end{cases} \qquad i = 1,...,m \tag{5.30}$$

Remarquons que contrairement au modèle de Ng-Caines [58], le processus r_t peut sortir de l'espace $O(M)$, même si son point de départ r_0 est dans $O(M)$. Le théorème 5.2.1. nous assure cependant que ce processus est bien défini sur $[0,T]$ si les champs de vecteurs A_j vérifient la condition (C.1) du deuxième paragraphe.

Pour le processus d'observation y_t, on utilise le modèle donné en [32]. Soit N une variété σ-compacte, connexe de dimension n, muni de la métrique riemanienne associée g_N. Soit $O(N)$ le fibré des repères orthonormaux sur N et p_N la projection de $O(N)$ sur N. Désignons par (y^i, f^i_j), $j = 1,...,n$ l'écriture en coordonnées locales autour du point (y, f) de $O(N)$. Soit $\{\gamma^q_{i\,l}\}$ les symboles de Christoffel de la connection affine sur N, compatible avec la métrique g_N. Notons $\{H_1,...,H_n\}$ la famille des champs de vecteurs horizontaux canoniques sur $O(N)$ par rapport à la connection riemanienne $\{\gamma^q_{i\,l}\}$ Remarquons qu'au voisinage de (y, f) dans $O(N)$, H_j, $j = 1,...,n$ s' écrit comme

$$H_j = f^i_j\Big(\frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma^q_{i\,l}\, f^l_p\, \frac{\partial}{\partial f^q_p}\Big). \tag{5.31}$$

Introduisons un champ de vecteurs $h(t, x_t, y)$ dépendant du temps, borné, de classe C^∞ sur N, dont la représentation en coordonnées locales est donnée par

$$h(t, x_t, y) = h^i(t, x_t, y)\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{5.32}$$

Soit $\tilde{h}$ son relevé horizontal par rapport à la connection $\{\gamma^q_{i\,l}\}$. Alors, $\tilde{h}$ est donnée en coordonnées locales par

$$\tilde{h}(t, x_t, y) = h^i\Big(\frac{\partial}{\partial y^i} - \gamma^q_{i\,l}\, f^l_p\, \frac{\partial}{\partial f^q_p}\Big). \tag{5.33}$$

On définit alors, pour tout t dans $[0, T]$, le processus d'observation $(y_t)_{t\in[0,T]}$ par

$$y_t = p_N(s_t), \tag{5.34}$$

où $s_t = (y_t, f_t)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$s_t = s_0 + \int_0^t \tilde{h}(s, x_s, s_s)\, ds + \int_0^t H_j(s_s) \circ dw^j_s, \tag{5.35}$$

avec $s_0 = (y_0, f_0)$ dans $O(N)$.

En coordonnées locales, (5.35) devient

$$\begin{cases} dy^i_t = \tilde{h}^i(t, x_t, y_t)\, dt + H^i_j(t, y_t, f_t) \circ dv^j_t \\ df^i_{\alpha t} = -\gamma^i_{m\,k}(y_t)\, e^k_{\alpha t} \circ dy^m_t \end{cases} \qquad i = 1, ..., m. \tag{5.36}$$

Comme $\{\gamma^q_{i\,l}\}$ est compatible avec g_N, s_t est nécessairement un processus évoluant dans $O(N)$ (cf.[40]).

De plus, p_N étant une fonction propre,

$$\sigma(s_\tau \,/\, 0 \leq \tau \leq t) = \sigma(y_t \,/\, 0 \leq \tau \leq t) \tag{5.37}$$

ce qui implique qu'il est équivalent d'observer le processus stochastique $(x_t)_{t\in[0,T]}$ à travers $\sigma(s_\tau,\, 0 \leq \tau \leq t)$ ou à travers $\sigma(y_t,\, 0 \leq \tau \leq t)$.

On définit alors le filtre par

Definition 5.4.1.

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_0^\infty(M)$, notons $\pi_t\psi$ le filtre associé au système signal-observation (x_t, y_t) solution de (5.28), (5.34), *défini par*

$$\pi_t\psi = E\big[\psi(x_t)/\mathcal{Y}_t\big], \tag{5.38}$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_\tau,\ 0 \le \tau \le t)$.

En utilisant un changement de probabilité, on peut maintenant définir un filtre non normalisé qui est relié au filtre π_t par une formule de Bayes abstraite.

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ une copie indépendante de l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Considérons sur l'espace de probabilités $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, le processus $(\tilde{x}_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans M, de même loi de probabilité que le processus $(x_t)_{t\in[0,T]}$. Ceci équivaut à dire que sur l'espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, on a

$$\tilde{x}_t = p_M(\tilde{r}_t), \tag{5.39}$$

où $\tilde{r}_t$ désigne la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\tilde{r}_t = \tilde{r}_0 + \int_0^t \tilde{A}_0(s, \tilde{r}_s)\, ds + \int_0^t A_\alpha(s, \tilde{r}_s) \circ dw_s^\alpha, \tag{5.40}$$

avec $\tilde{r}_0 = r_0$.

On introduit alors l'exponentielle de Girsanov, associée aux processus stochastiques $(\tilde{x}_t)_{t\in[0,T]}$ et $(y_t)_{t\in[0,T]}$, comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaire par

$$\begin{aligned}\Lambda_t(\tilde{x}_t, y_t) = \exp\Bigg(&\int_0^t \langle h(s, \tilde{x}_s, y_s), dy_s\rangle_{y_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j,k=1}^n \gamma_{k\,j}^k(y_s)\, h^j(s, \tilde{x}_s, y_s)\, ds \\ &-\frac{1}{2}\int_0^t tr\Big(\frac{\partial H}{\partial y}(s, \tilde{x}_s, y_s)\Big)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t \langle h(s, \tilde{x}_s, y_s), h(s, \tilde{x}_s, y_s)\rangle_{y_s}\, ds\Bigg) \quad P\otimes\tilde{P} \text{ p.s.}\end{aligned} \tag{5.41}$$

où $H = (h^1, ..., h^n)$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle_y$ désigne le produit scalaire dans T_yN induit par la métrique riemannienne g_N.

On peut alors définir le filtre non normalisé, associé à notre problème de filtrage, par

Définition 5.4.2.

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_0^\infty(M)$, notons $\rho_t(\psi)$ le filtre non normalisé, associé au système signal-observation (x_t, y_t), solution de (5.28), (5.34), défini par

$$\rho_t(\psi) = E_{\tilde{P}}\big[\psi(\tilde{x}_t)\,\Lambda(\tilde{x}_t, y_t)\big], \tag{5.42}$$

où $E_{\tilde{P}}$ désigne l'espérance par rapport à la probabilité $\tilde{P}$.

On a alors la formule de Bayes abstraite

Théorème 5.4.3. [58]

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $C_0^\infty(M)$, on a

$$\pi_t = \frac{\rho_t \psi}{\rho_t 1}. \tag{5.43}$$

Ce résultat nous permet de montrer, à l'aide du calcul de Malliavin sur les variétés, que le filtre π_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien. Pour cela, notons, pour tout t dans $[0,T]$ et tout r dans $Gl(M)$, $\mathfrak{L}_{t,r}$, l'idéal engendré par les champs de vecteurs $A_1, ..., A_d$ dans l'algèbre de Lie $Lie(\tilde{A}_0, A_1, ..., A_d)$, évalué au point (t, r).

Alors, sous la condition

$$(p_{M*})_r \mathfrak{L}_{t,r} = T_x M, \tag{H'}$$

pour tout r dans $Gl(M)$ et tout t dans $[0,T]$, où $x = p_M(r), ona$:

Théorème 5.4.4.

Supposons que la condition (H') est vérifiée et que la variété M etles champs de vecteurs $\tilde{A}_0, A_1, ..., A_d$ vérifient la condition (C.1) ainsi que une des conditions (C.3) ou (C.4) de la deuxième section. Alors, pour tout t dans $]0,T]$, la loi du filtre π_t admet une densité de classe C^∞ par rapport à l'élément de volume riemanien sur M.

Preuve:

Le filtre π_t étant relié au filtre non normalisé ρ_t par la formule de Bayes (5.39) il est équivalent de montrer l'existence d'une densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour le filtre π_t ou le filtre non normalisé ρ_t.

Comme les champs de vecteurs $\tilde{A}_0, A_1, ..., A_d$ vérifient la condition (C.1) et la fonction p_M vérifie la condition (C.2), $\tilde{x}_t \in \mathbb{D}^\infty$. De même, la fonction h étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée, la fonction p_N propre on a $y_t \in \mathbb{D}^\infty$. Par conséquent, les résultats de calcul de Malliavin sur les variétés établis au paragraphe précédent, ainsi que les arguments usuels de calcul de Malliavin dans les espaces euclidiens impliquent

Proposition 5.4.5.

Pour tout t dans $[0,T]$, $\Lambda(\tilde{x}_t, y_t)$ appartient à l'espace $\mathbb{D}^\infty$.

De plus, pour tout t dans $[0,T]$, on déduit de la formule (5.39) que $\tilde{x}_t = p_M(\tilde{r}_t)$, où le processus stochastique $(\tilde{r}_t)_{t\in[0,T]}$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients vérifient les conditions (C.1), (C.2) et la condition de Hörmander (H').

Par conséquent, la proposition 5.4.5 appliquée à l'équation (5.32), la proposition 5.3.3. et le théorème 5.3.4. impliquent que, pour tout t dans $]0,T]$, il existe une fonction p_t de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M, telle que

$$\rho_t\psi = \int_M \psi(x)\, p_t(x)\, \nu(dx). \tag{5.44}$$

Donc $p_t(x)$ est la densité de classe $\mathcal{C}^\infty$ du filtre non normalisé ρ_t.

$\square$

Annexe

FILTRAGE NON LINEAIRE EN DIMENSION INFINIE

A.1. INTRODUCTION

Le but de cette annexe est de démontrer que le filtre non normalisé associé à un problème de filtrage non linéaire avec bruits corrélés, coefficients bornés et un signal évoluant dans un espace de dimension infinie, peut être obtenu comme solution d'une équation de Zakai. Une équation de Kushner-Stratonovitch pour le filtre est déduite de l'équation de Zakai et une forme robuste de l'équation de Zakai est établie dans le cas où les bruits sont indépendants.

Les diffusions sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ engendrées par des processus de Wiener de dimension infinie ont été étudiées par H. Doss et G. Royer [21], T. Shiga et A. Shimizu [72], R. Holley et D. Stroock [38] et A. Millet, D. Nualart et M. Sanz [57]. Elles sont liées à certains modèles d'états continus du type Ising, utilisés en mécanique statistique et aussi à des modèles apparaissant en génétique des populations. Dans [30], P. Florchinger a démontré que le filtre non normalisé, associé à un système de filtrage non linéaire avec bruits non corrélés, coefficients d'observations bornés et signal de dimension infinie est solution d'une équation de Zakai.

Cette annexe est divisée en six paragraphes organisés comme suit. Dans le deuxième paragraphe, on introduit le problème de filtrage non linéaire étudié ici et on montre qu'il admet une unique solution forte à trajectoires presque sûrement continues. Dans le troisième paragraphe, on définit un filtre non normalisé lié au filtre défini dans le paragraphe précédent par une formule de Kallianpur-Striebel. Dans les quatrième et cinquième paragraphes, on établit les équations de Zakai et de Kushner-Stratonovitch associées à notre problème de filtrage. Dans le sixième paragraphe, on calcule la forme robuste de l'équation de Zakai, sous l'hypothèse que les bruits sont indépendants.

A.2. POSITIONNEMENT DU PROBLEME

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet et $\gamma = \{\gamma_i,\, i \in \mathbb{Z}\}$ une suite sommable de réels strictement positifs. Soit

$$L^2(\gamma) = \Big\{x = (x_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \|x\|_\gamma^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \gamma_i |x_i|^2 < +\infty\Big\},$$

$$L^2(\gamma \times \gamma) = \Big\{x = (x_j^i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} : \|x\|_{\gamma\times\gamma}^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \gamma_i\gamma_j |x_j^i|^2 < +\infty\Big\}$$

et

$$L^2(\gamma \times p) = \Big\{x = (x_k^i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times p} : \|x\|_{\gamma\times p}^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{p} \gamma_i |x_k^i|^2 < +\infty\Big\}.$$

D'autre part, considérons le problème de filtrage non linéaire associé à la paire signal-observation $(x_t, y_t) \in L^2(\gamma) \times \mathbb{R}^p$, solution du système différentiel stochastique

$$(A.1) \quad \begin{cases} x_t^i = x_0^i + \displaystyle\int_0^t b_i(s,x_s)\,ds + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^t \sigma_j^i(s,x_s)\,dw_s^j + \sum_{k=1}^{p} \int_0^t g_k^i(s,x_s)\,dv_s^k, \quad i \in \mathbb{Z} \\ y_t = \displaystyle\int_0^t h(s,x_s)\,ds + v_t, \end{cases}$$

où,

1. $W = \{w_t^i,\, t \in [0,T],\, i \in \mathbb{Z}\}$ est une famille de processus de Wiener indépendants, de variances $\gamma_i t$.
2. $V = \{v_t,\, t \in [0,T]\}$ est un processus de Wiener standard de dimension p, indépendant de W.
3. x_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(\gamma)$, indépendante de W et de V.
4. Les applications $b: [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $\sigma: [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ et $g: [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to$

$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}\times p}$ sont telles qu'il existe une constante strictement positive K, telle que

$$(H_1) \quad \forall t \in [0,T], \forall x \in L^2(\gamma),\ \|b(t,x)\|_\gamma^2 + \|\sigma(t,x)\|_{\gamma\times\gamma}^2 + \|g(t,x)\|_{\gamma\times p}^2 \leq K(1+\|x\|_\gamma^2)$$

et

$$(H_2) \quad \forall t \in [0,T], \forall (x,y) \in L^2(\gamma) \times \mathbb{R}^p,$$

$$\|b(t,x)-b(t,y)\|_\gamma^2 + \|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\|_{\gamma\times\gamma}^2 + \|g(t,x)-g(t,y)\|_{\gamma\times p}^2 \leq K\|x-y\|_\gamma^2.$$

5. $h\colon [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^p$ est une fonction lipschitzienne bornée à croissance sous-linéaire.
6. Les fonctions b, σ et g sont uniformément bornées.

Alors, le système différentiel stochastique (A.1) est bien défini pour des processus stochastiques x dans $L^2(\Omega \times [0,T]; L^2(\gamma))$ et y dans $L^2(\Omega \times [0,T]; \mathbb{R}^p)$. De plus, si $u = \{u_t^i,\ t \in [0,T],\ i \in \mathbb{Z}\}$ est un processus adapté, de carré intégrable, à valeurs dans $L^2(\gamma)$, on a (cf. [38]):

$$(A.2) \qquad E\Big[\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_0^t u_s^i\, dw_s^i\Big)^2\Big] = E\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \int_0^t \gamma_i\, |u_s^i|^2\, ds\Big).$$

ce qui nous permet de démontrer le théorème d'existence et d'unicité suivant.

Théorème A.2.1.

Pour toute variable aléatoire x_0 à valeurs dans $L^2(\gamma)$, indépendante du processus de Wiener $\{W_t,\ t \in [0,T]\}$ et de moments de tous ordres bornés, le système différentiel stochastique $(A.1)$ admet une unique solution forte, presque sûrement continue $\{x_t,\ t \in [0,T]\}$, à valeurs dans $L^2(\gamma)$, telle que $E\big(\sup_{0\leq t\leq T} \|x_t\|_\gamma^2\big) < +\infty$.

Preuve:
On utilise la méthode d'itération de Picard pour construire une approximation de la solution de l'équation (A.2). Posons

$$(A.3) \quad \begin{cases} x_t^{(0)} = x_0 \\ x_t^{i\,(n+1)} = x_0^i + \displaystyle\int_0^t b_i(s, x_s^{(n)})\, ds + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^t \sigma_j^i(s, x_s^{(n)})\, dw_s^j + \sum_{k=1}^p \int_0^t g_k^i(s, x_s^{(n)})\, dv_s^k. \end{cases}$$

pour tout $n \geq 0$.

Pour assurer que le système (A.3) est bien défini, on montre par induction sur n, que $E\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(n)}\|_\gamma^2\} < +\infty$.

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(n+1)}\|_\gamma^2\Big\} = E\Big\{\sup_{s\in[0,T]} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \gamma_i \Big(|x_0^i + \int_0^t b_i(s, x_s^{(n)})\, ds + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^t \sigma_j^i(s, x_s^{(n)})\, dw_s^j$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \int_0^t g_k^i(s, x_s^{(n)})\, dv_s^k|^2\Big)\Big\}.$$

La relation (A.2), ainsi que les inégalités de Minkovski et de Burkholder, impliquent la majoration suivante du membre droit de l'égalité

$$C\, E\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\Big\{\gamma_i\, |x_0^i|^2 + \int_0^T \gamma_i\, |b_i(t, x_t^{(n)})|^2\, dt + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^T \gamma_i\, |\sigma_j^i(t, x_t^{(n)})|^2\, dt$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} \int_0^T \gamma_i\, |g_k^i(t, x_t^{(n)})|^2\, dt\Big\}\Big)$$

$$\leq C\Big\{E\|x_0^{(1)}\|_\gamma^2 + K\, E \int_0^T (1 + \|x_t^{(n)}\|_\gamma^2)\, dt\Big\},$$

par la condition (H_1),

$$\leq C_1 + C_2 E\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(n)}\|_\gamma^2\} \leq \ldots \leq C E\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(0)}\|_\gamma^2\} < +\infty.$$

D'autre part, les mêmes arguments et la condition (H_2) impliquent

$$(A.4) \qquad E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}\|_\gamma^2\Big\} \leq C E \int_0^T \|x_t^{(n)} - x_t^{(n-1)}\|_\gamma^2\, dt.$$

Par conséquent, la suite $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $L^2(\Omega \times [0,T]; L^2(\gamma))$. Donc, elle possède une limite $x = \{x_t, t \in [0,T]\}$, telle que

$$\lim_{n\to+\infty} E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t^{(n)} - x_t\|_\gamma^2\Big\} = 0.$$

Cela implique que x_t est un processus presque sûrement continu vérifiant l'égalité (A.1).

Montrons maintenant l'unicité de la solution.

Si $\tilde{x} = \{\tilde{x}_t, t \in [0,T]\}$ désigne une autre solution de l'équation (A.1), les arguments utilisés pour obtenir la relation (A.4) impliquent que

$$E\Big\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t - \tilde{x}_t\|_\gamma^2\Big\} \leq C \int_0^T E\Big[\sup_{0\leq s\leq t} \|x_s - \tilde{x}_s\|_\gamma^2\Big]\, dt.$$

L'unicité de la solution découle alors du lemme de Gronwall.

De plus, comme $x_t^{(n)}$ tend presque sûrement vers x_t, le lemme de Fatou implique $E\{\sup_{t\in[0,T]} \|x_t\|_\gamma^2\} < +\infty$.

□

Pour déterminer le générateur infinitésimal associé au processus stochastique $\{x_t,\ t \in [0,T]\}$, on note, pour tous $t \in [0,T]$, $x \in L^2(\gamma)$, $i,j \in \mathbb{Z}$ et $k = 1,...,p$, les matrices $a(t,x)$ et $\alpha(t,x)$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}\times p}(\mathbb{R})$, respectivement, définies par

$$a_j^i(t,x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \gamma_l\, \sigma_l^i(t,x)\, \sigma_l^j(t,x)$$

(A.5) et

$$\alpha_k^i(t,x) = \sum_{l=1}^{p} \gamma_l\, g_l^i(t,x)\, g_l^k(t,x).$$

Remarquons que, sous la condition (H_2), les matrices $a(t,x)$ et $\alpha(t,x)$ vérifient la propriété suivante:

Pour toute constante strictement positive C, il existe une constante strictement positive K_C, telle que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$(A.6) \qquad \|a(t,x) - a(t,y)\|_{\gamma\times\gamma}^2 + \|\alpha(t,x) - \alpha(t,y)\|_{\gamma\times p}^2 \leq K_C \|x-y\|_\gamma^2,$$

pour tous $x, y \in L^2(\gamma)$, tels que $\|x\|_\gamma^2$ et $\|y\|_\gamma^2$ soient inférieurs à C.

Notation A.2.2.

Notons $\mathfrak{D}^2$ l'ensemble des fonctions $f : [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$, telles qu'il existe un entier $M \in \mathbb{N}^*$, un ensemble $\{i_1, ..., i_M\} \subset \mathbb{Z}$ et une fonction $\bar{f}: [0,T] \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ de classe $C_0^{1,2}$, tels que $f(t,x) = \bar{f}(t, x_{i_1}, ..., x_{i_M})$, pour tous $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Alors, on a:

Proposition A.2.3.(cf.[38])

Le processus $\{x_t,\ t \in [0,T]\}$, solution du sytème différentiel stochastique $(A.1)$ est un processus de diffusion markovien, dont le générateur infinitésimal L est défini, pour toute fonction f dans $\mathfrak{D}^2$, par

$$Lf(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i(t,x)\nabla_i f(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a^i_j(t,x)\nabla_{i,j} f(t,x)$$

$$(A.7) \qquad + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p} \alpha^i_k(t,x)\nabla_{i,k} f(t,x).$$

On définit le filtre associé au système (A.1), comme d'habitude dans les problèmes de filtrage non linéaires, par

Définition A.2.4.

Pour tout $t \in [0,T]$, notons Π_t le filtre associé au système différentiel stochastique $(A.1)$, défini pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$ par

$$(A.8) \qquad \Pi_t(\psi) = E\big[\psi_t(t,x_t)/\mathcal{Y}_t\big],$$

où $\mathcal{Y}_t = \sigma(y_s/0 \le s \le t)$.

Remarque:

On aurait pu définir le filtre pour une classe de fonctions plus large, mais on se restreint ici aux fonctions dans $\mathfrak{D}^2$, car la formule d'Itô et par conséquent les équations de Zakai et de Kushner-Stratonovich sont seulement définies pour de telles fonctions.

A.3. LA PROBABILITE DE REFERENCE

Pour définir le filtre non normalisé, on utilise la méthode de la "probabilité de référence" afin de transformer le processus stochastique $\{y_t,\ t \in [0,T]\}$ en un processus de Wiener standard. Dans ce but, posons

Définition A.3.1.

Pour tout t dans $[0,T]$, notons Z_t l'exponentielle de Girsanov, définie par

$$(A.9) \qquad Z_t = \exp\Big(\sum_{k=1}^{p} \int_0^t h_k(s,x_s)dv_s^k + \frac{1}{2}\int_0^t |h(s,x_s)|^2\, ds\Big).$$

Le processus stochastique $\{Z_t,\ t \in [0,T]\}$ étant une martingale exponentielle, on introduit la probabilité de référence comme suit:

Définition A.3.2.

Notons $\overline{P}$ la probabilité de référence, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ par la dérivée de Radon-Nikodym

$$(A.10) \qquad \frac{d\overline{P}}{dP}_{/\mathcal{F}_t} = Z_t^{-1},$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ désigne la filtration engendrée par le couple (w,v).

Le théorème de Girsanov implique alors que le processus $\{y_t,\ t \in [0,T]\}$ est un processus de Wiener standard sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \overline{P})$, indépendant du processus de Wiener W.

Par conséquent, on peut définir le filtre non normalisé associé au système (A.1) de la manière suivante.

Définition A.3.3.

Pour tout t dans $[0,T]$, notons ρ_t le filtre non normalisé associé au système $(A.1)$, défini pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$ par

$$(A.11) \qquad \rho_t\psi = \overline{E}\big[\psi(t,x_t)\, Z_t \,/\, \mathcal{Y}_t\big],$$

où $\overline{E}$ désigne l'espérance sous la probabilité $\overline{P}$.

De plus, la formule de Kallianpur-Striebel lie le filtre π_t au filtre non normalisé ρ_t.

Proposition A.3.4. (cf.[66] ou [42])

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, on a

$$\Pi_t\psi = \frac{\rho_t\psi}{\rho_t 1}. \tag{A.12}$$

Remarque:

Si le signal, engendré par un processus de Wiener de dimension infinie, est de dimension finie, on a montré au chapitre III que, sous une condition de Hörmander locale, le filtre non normalisé admet une densité de classe C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue. La généralisation de ce résultat à un signal de dimension infinie reste un problème ouvert. En effet, l'outil essentiel de la preuve, à savoir le Calcul de Malliavin, n'a pas encore été développé pour des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

A.4. L'EQUATION DE ZAKAI

Dans cette section, on montre que le filtre non normalisé ρ_t défini par (A.11) est solution d'une équation du type "Zakai".

Pour cela, on utilise le théorème de Fubini stochastique suivant:

Lemme A.4.1. (cf.[38]):

Si U_t est un processus stochastique, tel que $\overline{E}\int_0^t U_s^2\,ds < +\infty$, alors

$$\overline{E}\Big[\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_0^t U_s^i\,dw_s^i\,/\,\mathcal{Y}_t\Big] = 0, \tag{A.13}$$

et

$$\overline{E}\Big[\sum_{k=1}^{p}\int_0^t U_s^k\,dy_s^k\,/\,\mathcal{Y}_t\Big] = \sum_{k=1}^{p}\int_0^t \overline{E}[U_s^k\,/\,\mathcal{Y}_t]\,dy_s^k. \tag{A.14}$$

Théorème A.4.2.

Pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, le filtre non normalisé ρ_t est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique

$$\rho_t(\psi) = \rho_0(\psi) + \int_0^t \rho_s(L\psi)\, ds + \sum_{k=1}^{p} \int_0^t \rho_s(L_k\psi)\, dy_s^k, \tag{A.15}$$

où L_k est l'opérateur différentiel du premier ordre défini, pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, par

$$L_k\psi(t,x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} g_k^i(t,x)\, \nabla_i\psi(t,x) + h_k(t,x)\psi(t,x). \tag{A.16}$$

Remarque:
Dans [46], N.V. Krylov donne des conditions suffisantes pour obtenir l'unicité de la solution d'une telle équation.

Preuve:
La formule d'Itô implique,

$$d\psi(t,x_t) = L\psi(t,x_t)\, dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \sigma_j^i(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, dw_t^j + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{p} g_k^i(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, dv_t^k$$

et

$$\begin{aligned} dZ_t &= \sum_{k=1}^{p} Z_t\, h_k^2(t,x_t)\, dt + \sum_{k=1}^{p} Z_t\, h_k(t,x_t)\, dv_t^k \\ &= \sum_{k=1}^{p} h_k(t,x_t)\, Z_t\, dy_t^k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} d\big(\psi(t,x_t)Z_t\big) =& L\psi(t,x_t)\, Z_t\, dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \sigma_j^i(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, Z_t\, dw_t^j \\ & + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{p} g_k^i(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, Z_t\, dv_t^k + \sum_{k=1}^{p} h_k(t,x_t)\, \psi(t,x_t)\, Z_t\, dy_t^k \\ & + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{p} g_k^i(t,x_t)\, h_k(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, Z_t\, dt \\ =& L\psi(t,x_t)\, Z_t\, dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \sigma_j^i(t,x_t)\, \nabla_i\psi(t,x_t)\, Z_t\, dw_t^j + \sum_{k=1}^{p} L_k\big(\psi(t,x_t)\big)\, Z_t\, dy_t^k. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\psi(t,x_t)\,Z_t = \psi(0,x_0) + \int_0^t L\psi(s,x_s)\,Z_s\,ds + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \int_0^t \sigma_j^i(s,x_s)\,\nabla_i\psi(s,x_s)\,Z_s\,dw_s^j$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\int_0^t L_k\big(\psi(s,x_s)\big)\,Z_s\,dy_s^k.$$

et, par application du lemme A.4.1.,

$$\begin{aligned}\rho_t(\psi) &= \overline{E}\big[\psi(t,x_t)\,Z_t\,/\,\mathcal{Y}_t\big]\\ &= \overline{E}\big[\psi(0,x_0)\,/\,\mathcal{Y}_0\big] + \int_0^t \overline{E}\big[L\psi(s,x_s)\,Z_s\,/\,\mathcal{Y}_s\big]\,ds + \sum_{k=1}^{p}\int_0^p \overline{E}\big[L_k\big(\psi(s,x_s)\big)\,Z_s\,/\,\mathcal{Y}_s\big]\,dy_s^k.\end{aligned}$$

□

A.5. L'EQUATION DE KUSHNER-STRATONOVITCH

Dans cette section, on montre que le filtre Π_t, défini par (A.8), résout une équation du type "Kushner-Stratonovitch". Dans ce but, on montre d'abord:

Proposition A.5.1.

Pour tout t dans $[0,T]$,

$$\rho_t 1 = \exp\Big(\sum_{k=1}^{p}\int_0^t \Pi_s(h_k)\,dy_s^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\int_0^t \Big(\Pi_s(h_k)\Big)^2\,ds\Big). \tag{A.17}$$

Preuve:

En appliquant successivement la formule d'Itô et le lemma A.4.1. au processus Z_t, on obtient

$$\begin{aligned}\rho_t 1 &= \overline{E}\big[Z_t\,/\,\mathcal{Y}_t\big]\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p}\int_0^t \overline{E}\big[Z_s\,h_k(s,x_s)\,/\,\mathcal{Y}_s\big]\,dy_s^k\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p}\int_0^t \Pi_s(h_k)\,\rho_s 1\,dy_s^k.\end{aligned}$$

Par conséquent, le processus stochastique $\rho_t 1$ est défini par (A.17).

□

Ce résultat permet de démontrer le théorème suivant:

Théorème A.5.2.

Pour tout t dans $[0,T]$ et toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, le filtre $\Pi_t(\psi)$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$(A.18)$

$$\Pi_t(\psi) = \Pi_0(\psi) + \int_0^t \Pi_s(L\psi)\,ds + \sum_{k=1}^{p} \int_0^t \big(\Pi_s(L_k\psi) - \Pi_s(h_k)\Pi_s(\psi)\big)\big(dy_s^k - \Pi_s(h_k)\,ds\big).$$

Preuve:
En appliquant la formule d'Itô aux processus $(\rho_t 1)^{-1}$ et $\rho_t\psi\,(\rho_t 1)^{-1}$, on obtient

$$d\big((\rho_t 1)^{-1}\big) = (\rho_t 1)^{-1}\Big(-\sum_{k=1}^{p}\Pi_t(h_k)\,dy_t^k + \sum_{k=1}^{p}\big(\Pi_t(h_k)\big)^2\,dt\Big),$$

et

$$\begin{aligned} d\big(\Pi_t(\psi)\big) =& \frac{1}{\rho_t 1}\Big(\rho_t(L\psi)\,dt + \sum_{k=1}^{p}\rho_t(L_k\psi)\,dy_t^k\Big) + \frac{\rho_t\psi}{\rho_t 1}\Big(-\sum_{k=1}^{p}\Pi_t(h_k)\,dy_t^k + \sum_{k=1}^{p}\big(\Pi_t(h_k)\big)^2\,dt\Big) \\ &+ \frac{1}{\rho_t 1}\Big(-\sum_{k=1}^{p}\Pi_t(h_k)\,\rho_t(L_k\psi)\,dt\Big) \\ =& \Pi_t(L\psi)\,dt + \sum_{k=1}^{p}\Pi_t(L_k\psi)\,dy_t^k + \sum_{k=1}^{p}\Pi_t\psi\Big(-\Pi_t(h_k)\,dy_t^k + \big(\Pi_t(h_k)\big)^2\,dt\Big) \\ &- \sum_{k=1}^{p}\Pi_t(h_k)\,\Pi_t(L_k\psi)\,dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$\square$

A.6. LA FORME ROBUSTE DE L'EQUATION DE ZAKAI

Dans cette section, on calcule la forme robuste de l'équation de Zakai (A.15). Ce résultat nous permet de travailler avec une équation aux dérivées partielles ordinaire paramétrisée par les trajectoires du processus d'observation au lieu d'une équation aux dérivées partielles stochastique. Comme dans le cas d'un processus d'observation multidimensionnel cette méthode est seulement adaptée aux problèmes de filtrage non corrélés. Par conséquent, on suppose dans cette section que $g \equiv 0$. Ainsi, on considère la paire signal-observation $(x_t, y_t) \in \big(L^2(\gamma) \times \mathbb{R}^p\big)$, solution du système différentiel stochastique

$$(A.19) \qquad \begin{cases} x_t^i = x_0^i + \displaystyle\int_0^t b_i(s, x_s)\, ds + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^t \sigma_j^i(s, x_s)\, dw_s^j \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \\ y_t = \displaystyle\int_0^t h(s, x_s)\, ds + v_t. \end{cases}$$

De plus, on pose

Définition A.6.1.

Pour tout t dans $[0, T]$ et toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, posons

$$(A.20) \qquad \nu_t \psi = \overline{E}\big[\psi(t, x_t)\, U_t \,/\, \mathcal{Y}_t\big],$$

où U_t est le processus stochastique défini par

$$(A.21) \qquad U_t = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{p} \int_0^t y_s^k\, dh_k(s, x_s) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \int_0^t \big(h_k(s, x_s)\big)^2 ds\Big).$$

Une intégration par parties dans l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule (A.9) implique

$$Z_t = \exp\Big(\langle h(t, x_t), y_t \rangle - \sum_{k=1}^{p} \int_0^t y_s^k\, dh_k(s, x_s) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \int_0^t \big(h_k(s, x_s)\big)^2 ds\Big),$$

ce qui permet d'écrire, pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$,

$$(A.22) \qquad \nu_t \psi = \rho_t\Big(\psi \, \exp(-\langle h(t, x_t), y_t \rangle)\Big).$$

Cette dernière expression permet de prouver le théorème suivant:

Théorème A.6.2.

Pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, $\nu_t(\psi)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles ordinaire

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\nu_t\psi = \nu_t(L_{y_t}\psi)\\ &\nu_0\psi = E\big[\psi(0,x_0)\big], \end{aligned}\right. \tag{A.23}$$

où L_{y_t} est l'opérateur différentiel paramétrisé par les trajectoires du processus y, défini, pour toute fonction ψ dans $\mathfrak{D}^2$, par

$$L_{y_t}\psi(t,x) = L\psi(t,x) - \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}\big(\sigma_j^i(t,x)\big)^2\nabla_i h_k(t,x)\,\nabla_i\psi(t,x)\,y_t^k \tag{A.24}$$
$$-\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\big(h_k(t,x)\big)^2 - \sum_{k=1}^{p}Lh_k(t,x)y_t^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}\big(\sigma_j^i(t,x)\nabla_i h_k(t,x)y_t^k\big)^2\Big)\psi(t,x).$$

Preuve:

Par application de la formule d'Itô, on a

$$dh_k(t,x_t) = Lh_k(t,x_t)\,dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sigma_j^i(t,x_t)\,\nabla_i h_k(t,x_t)\,dw_t^j.$$

Par conséquent, d'après (A.21),

$$U_t = \exp\Big(-\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}\int_0^t y_s^k\,Lh_k(s,x_s)\,ds - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\int_0^t\big(h_k(s,x_s)\big)^2\,ds$$
$$-\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}\int_0^t y_s^k\,\sigma_j^i(s,x_s)\,\nabla_i h_k(s,x_s)\,dw_s^j\Big).$$

D'autres applications de la formule d'Itô impliquent

$$dU_t = -\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}U_tLh_k(t,x_t)\,y_t^k\,dt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}U_t\,\big(h_k(t,x_t)\big)^2\,dt$$
$$-\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}U_t\sigma_j^i(t,x_t)\nabla_i h_k(t,x_t)\,y_t^k\,dw_t^j + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p}U_t\big(\sigma_j^i(t,x_t)\,\nabla_i h_k(t,x_t)\,y_t^k\big)^2\,dt.$$

et

$$d\psi(t,x_t) = L\psi(t,x_t)\,dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\nabla_i\psi(t,x_t)\sigma_j^i(t,x_t)\,dw_t^j.$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
d\big(\psi(t,x_t)\,U_t\big) &= L\psi(t,x)\,U_t\,dt + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \sigma^i_j(t,x_t)\nabla_i\psi(t,x_t)\,U_t\,dw^j_t \\
&- \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p} \psi(t,x_t)\,U_t\,y^k_t\,Lh_k(t,x_t)\,dt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\psi(t,x_t)\,U_t\,\big(h_k(t,x_t)\big)^2\,dt \\
&- \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p} \psi(t,x_t)\,U_t\,\sigma^i_j(t,x_t)\nabla_i h_k(t,x_t)\,y^k_t\,dw^j_t \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p} \psi(t,x_t)\,U_t\,\big(\sigma^i_j(t,x_t\,\nabla_i h_k(t,x_t))y^k_t\big)^2\,dt \\
&- \sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{p} U_t\,\big(\sigma^i_j(t,x_t)\big)^2\,\nabla_i h_k(t,x_t)\,\nabla_i\,\psi(t,x_t)\,y^k_t\,dt.
\end{aligned}
$$

Le résultat se déduit aisément par application de la définition A.A.1 et du lemme A.4.1.

□

Bibliographie

[1] J. Baras, G. Blankenship et W. Hopkins: *Existence, uniqueness and asymptotic behaviour of a class of Zakai equations with unbounded coefficients.* IEEE Trans. Automat. Control **28** (1983) p.203-214.

[2] D. Bakry: *Un critère de non-explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète.* CRAS **303**-1 (1986) p.23-26.

[3] D.R. Bell: *The Malliavin Calculus.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and applied Mathematics, Vol **34**. Longman 1987.

[4] D.R. Bell et S.-E.A. Mohammed: *An extension of Hörmander's theorem for infinity degenerate second-order operators.* Duke Mathematical Journal **78** (1995) p.453-476.

[5] A. Bensoussan: *On some approximation techniques in nonlinear filtering.* Stochastic Differential Systems, Stochastic Control Theory and Applications. W. Fleming, P.L.Lions (eds.) The IMA volumes in maths and its applications, vol.**10**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[6] J.M. Bismut: *Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander conditions.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **56** (1981) p.469-505.

[7] J.M. Bismut: *Large deviations and the Malliavin calculus.* Progress in Math. **45**. Boston: Birkhäuser 1984.

[8] J. M. Bismut et D. Michel: *Diffusions conditionnelles* Part I: J. Funct. Anal., **44** (1981), p.174-211. Part II: J. Funct. Anal. **45** (1982), p. 274-292.

[9] B. Z.Bobrovsky et M.Zakai: *Asymptotic a priori estimates for the error in the nonlinear filtering problem.* IEEE Trans. Inform. Th. **28** (1982) p. 371-376.

[10] C. Boulanger et J. Schiltz: *Nonlinear filtering with correlated noises in infinite dimension.* Proceedings of the European Control Conference 97, Brussels 1997.

[11] M. Chaleyat-Maurel et D. Michel: *Hypoellipticity theorems and conditional laws.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **65** (1984) p.573-597.

[12] M. Chaleyat-Maurel et D. Michel: *The support of the law of a filter in C^∞ topology.* Stochastic Differential Systems, Stochastic Control Theory and Applications. W. Fleming, P.L.Lions (eds.) The IMA volumes in maths and its applications, vol.**10**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[13] M. CHALEYAT-MAUREL ET D. MICHEL: *Une propriété de continuité en filtrage non linéaire.* Stochastics **19** (1986) p.11-40.

[14] M. CHALEYAT-MAUREL ET D. MICHEL: *Robustesse du filtre et calcul des variations stochastiques.* J. Funct. Anal. **68** (1986) p. 55-71.

[15] M. CHALEYAT-MAUREL ET D. MICHEL: *The support of the density of a filter in the uncorrelated case.* Stochastic Partial Differential Equations and Applications II. G. Da Prato, L. Tubaro (eds.) Lect. Notes Math. Springer-Verlag, **1390** (1989) p.33-41.

[16] J. CLARK: *The design of a robust approximation to the stochastic differential equations of nonlinear filtering.* Communication Systems and Random Process Theory. J.Swirzynski (ed.) Sijthoff and Nordhoof (1978).

[17] M.H.A.DAVIS: *Pathwise nonlinear filtering.* Stochastic Systems, the Mathematics of Filtering and Identification and Applications, M. Hazenwinkel and J. Willems (eds.) Reidel Dordrecht, 1981.

[18] M.H.A. DAVIS ET S.I. MARCUS: *An introduction to nonlinear filtering.* Stochastic Systems the Mathematics of Filtering and Identification and Applications, M. Hazenwinkel and J. Willems (eds.) Reidel, Dordrecht (1981).

[19] M.H.A. DAVIS ET R. VINTER: *Stochastic modelling and control.* Chapman and Hall (1984).

[20] H.DOSS: *Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires.* Ann. Inst. H. Poincaré **13** (1977) p. 99-125.

[21] H. DOSS ET G. ROYER: *Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **46.** (1978) p.107-124.

[22] T.E. DUNCAN: *Some filtering results in Riemannian manifolds.* Information and Control **35** (1977) p.182-195.

[23] R.J. ELLIOTT: *Stochastic calculus and applications.* Applications of Mathematics vol **18** Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New-York, 1982.

[24] R.J. ELLIOT ET M. KOHLMANN: *Robust filtering for correlated multidimensional observations.* Math. Z. **178** (1981) p.559-578.

[25] K.D. ELWORTHY: *Stochastic Differential Equations on Manifolds.* London Mathematical Society, Lect. Note Series **70.** Cambridge University Press 1984.

[26] G.S.FERREYRA: *Smoothness of the unnormalized conditional measures of stochastic nonlinear filtering.* Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas (NV) (1984).

[27] W.H. FLEMING ET S.K. MITTER: *Optimal control and nonlinear filtering for non degenerate diffusion processes.* Stochastics **8** (1982).

[28] P.FLORCHINGER: *Continuité par rapport à la trajectoire de l'observation du filtre associé à des systèmes corrélés à coefficients de l'observation non bornés.* Stochastics and Stochastics Report **28** (1989) p.21-64.

[29] P. FLORCHINGER: *Malliavin Calculus with time depending coefficients and application to nonlinear filtering.* Probab. Theor. Rel. Fields **86** (1990) p.203-233.

[30] P. FLORCHINGER: *Zakai equation of nonlinear filtering in infinite dimension.* Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control (1991) p.2754-2755, Brighton, England.

[31] P. FLORCHINGER: *Existence of a smooth density for the filter in nonlinear filtering with infinite dimensional noise.* Systems and Control Letters **16**-2 (1991) p.131-137.

[32] P. FLORCHINGER: *Existence of a smooth density for the filter in nonlinear filtering on manifolds.* Partial Differential Equations and their Applications. B. Rozovskii, R. Sowers (eds.) Lect. Notes Control and Inform.Scienc. **176** Springer-Verlag, 1992.

[33] P. FLORCHINGER: *Zakai equation of nonlinear filtering with unbounded coefficients. The case of dependent noises.* System & Control Letters **21** (1993) p.413-422.

[34] P. FLORCHINGER ET R. LÉANDRE: *Estimation de la densité d'une diffusion très dégénérée; Etude d'un exemple.* Journal of Mathematics of Kyoto University **33**-1 (1993) p.115-142.

[35] P. FLORCHINGER ET F. LE GLAND: *Time discretization of the Zakai equation for diffusion processes observed in correlated noise.* Stochastics and stochastic Reports **35** (1991) p. 233-256.

[36] P. FLORCHINGER ET J. SCHILTZ: *Smoothness of the density for the filter under infinite dimensional noise and unbounded observation coefficients.* Proceedings of the 2nd Portuguese Conference on Automatic Control, p.115-118, Porto: 1996.

[37] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR ET H. KUNITA: *Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem.* Osaka J. Math. **9** (1972) p.19-40.

[38] R. HOLLEY ET D. STROOCK: *Diffusions on an infinite dimensional torus.* J. Funct. Anal. **42** (1981) p.29-63.

[39] W. HOPKINS: *Nonlinear filtering of nondegenerate diffusions with unbounded coefficients.* PhD. Thesis. University of Maryland at College Park (1982).

[40] N. IKEDA, S. WATANABE: *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* Second Edition. North-Holland-Kadansha, 1989.

[41] A. H. JAZWINSKI: *Stochastic filtering theory.* Applications of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1980.

[42] G. KALLIANPUR: *Stochastic filtering theory.* Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1980.

[43] R. KALMAN: *A new approach to linear filtering and prediction problems.* J. Basic Eng. ASME **82** (1960) p.33-45.

[44] R. KALMAN ET R. BUCY: *New results in nonlinear filtering and prediction theory.* J. Basic Eng ASME **83** (1961) p.95-108.

[45] R. KATZUR, B. Z. BOBROVSKY ET Z. SCHUSS: *Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise channel.* Siam J. Appl. Math. **44** (1984) p.591-604 et p.1176-1191.

[46] N.V. KRYLOV: *On L_p-theory of stochastic partial differential equations in the whole space.* SIAM J. Math. Anal. **27**-2 (1996) p.313-340.

[47] S.KUSUOKA ET D. STROOCK: *Applications of the Malliavin calculus, Part I.*. Tanigushi Symp.(Katata-Kyoto 1982). K. Itô (ed.), p.277-306. Amsterdam Oxford New York: North Holland 1984.

[48] S. KUSUOKA ET D. STROOCK: *Applications of the Malliavin calculus, Part II.*. Journal of Faculty of Science, University of Tokyo, Vol.**32**-1 (1985) p.1-76.

[49] R. LÉANDRE: *Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée.*. Probab. Theory Rel. Fields **74** (1987) p.399-414.

[50] R. LÉANDRE: *Majoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée.* Probab. Theory Rel. Fields **74** (1987) p.289-294.

[51] F. LE GLAND: *Time discretization of nonlinear filtering equations.* Proceedings of the 28th IEEE CDC, p.2601-2606, Tampa: 1989.

[52] X.M. LI: *Properties at infinity of diffusion semigroups and stochastic flows via weak uniform covers.* J. Potential Analysis **3** (1994) p.339-357.

[53] P. MALLIAVIN: *Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators.* Proceedings of the International Conference on Stochastic Differential Equations, Kyoto,Kinokuniya, (1976), p.195-263, Tokyo: Kinokuniya; New York: Wiley (1978).

[54] P. MALLIAVIN: *C^k-hypoellipticity with degeneracy, part II.* Stochastic Analysis, A. Friedman, M. Pinsky (eds.), p.227-340.

[55] P. MALLIAVIN: *Stochastic Analysis.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume **313**. Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1997.

[56] D.MICHEL: *Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage non linéaire et calcul des variations stochastiques.* J. Funct. Anal. **41** (1981) p.3-36.

[57] A. MILLET A.,D. NUALART ET M. SANZ: *Time reversal for infinite-dimensional diffusions.* Prob. Theor. Rel. Fields **82** (1989) p.315-347.

[58] S.K. NG AND P.E. CAINES: *Nonlinear Filtering in Riemannian Manifolds.* IMA Journal of Control & Information **2** (1985) p.25-36.

[59] M.D. NGUYEN, D. NUALART ET M. SANZ: *Application of Malliavin Calculus to a Class of Stochastic Differential Equations.* Prob. Theor. Rel. Fields **84** (1990) p.549-571

[60] J. NORRIS: *Simplified Malliavin Calculus.* Seminaire de Probabilités XX, J. Azéma,M. Yor (eds), Lect. Notes Math., vol **1204** p.101-130, Berlin Heidelberg New York: Springer 1986.

[61] D.NUALART: *Non causal stochastic integral and calculus.* Stochastic Analysis and Related Topics,H. Korezlioglu, A.S. Ustunel (eds.), Lect. Notes Math., vol **1316** p.80-139, Berlin Heidelberg New York: Springer 1988.

[62] D.NUALART: *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Applications of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1995.

[63] D.OCONE: *A guide to the stochastic calculus of variations.* Stochastic Analysis and Related Topics, H. Korezlioglu, A.S. Ustunel (eds.), Lect. Notes Math., vol **1316** p.1-79, Berlin Heidelberg New York: Springer 1988.

[64] E. PARDOUX: *Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes.* Stochastics **3** (1979) p.127-167.

[65] E. PARDOUX: *Equations du filtrage non linéaire de la prédiction et du lissage.* Stochastics **6** (1982) p.193-231.

[66] E. PARDOUX: *Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour, P.L. Hennequin (ed), Lect. Notes Math., vol **1464** p.69-163, Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1989.

[67] J. PICARD: *Robustesse de la solution des problèmes de filtrage avec bruits blanc indépendants.* Stochastics **13** (1984) p.229-245.

[68] J. PICARD: *Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal to noise ratio.* Siam J. Appl. Math. **46** (1986) p.1098-1125.

[69] J. PICARD: *Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées.* Analysis and Optimisation of Systems, A. Bensoussan (ed), Lect. Notes Control and Info. Scie., **83**. Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 1986.

[70] J. PICARD: *Nonlinear filtering and smoothing with high signal-to-noise ratio.* Stochastic Processes in Physics and Engineering, Reidel Dordrecht, 1986.

[71] M. PONTIER ET J. SPZIRGLAS: *Filtering with observation on a Riemannian symmetric space.* SIAM J. Control and Optimization **26**-3 (1988) p.609-627.

[72] T. SHIGA ET A. SHIMIZU: *Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications.* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980) p.395-416.

[73] I. SHIGEKAWA: *Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures.* J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980) p.263-289.

[74] J. SCHILTZ: *Le théorème de Hörmander pour des opérateurs du second ordre infiniment dégénérés avec des coefficients dépendant du temps..* Stochastics and Stochastics Reports **59** (1996) p.259-281.

[75] J. SCHILTZ: *Malliavin calculus with time depending coefficients applied to a class of stochastic differential equations.* Stochastic Analysis and Applications **17**-2 (1999).

[76] D.W. STROOCK: *The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic differential equations.* Math. Systems Theory **14** (1981) p.25-56 et p.141-171.

[77] D.W. STROOCK: *The Malliavin Calculus, A functional analytic approach.* J. Funct. Anal. **44** (1981) p.212-257.

[78] D.W. STROOCK: *Some applications of stochastic calculus to partial differential equations.* Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour, P.L. Hennequin (ed.), Lect. Notes Math., vol **976** p.267-382, Berlin Heidelberg New York: Springer 1983.

[79] D.W. STROOCK ET S. VARADHAN: *On the support of diffusion processes with application to the strong maximum principle.* Proc. 6^{th} Berkeley Symp. Maths. Stat. Prob. III, p.361-368, University of California Press-Berkeley 1972.

[80] H.J. SUSSMANN: *On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations.* Ann. Prob. **6** (1978) p.19-41.

[81] H. J. SUSSMANN: *Les équations différentielles du filtrage non linéaire.* Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse des Systèmes et le Traitement du Signal vol **3** (1983) p.639-648, éd. C.N.R.S.

[82] S. TANIGUSHI: *Malliavin's stochastic calculus of variations for manifold-valued Wiener functionals and its applications.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **65** (1983) p.269-290.

[83] S. TANIGUSHI: *Applications of Malliavin Calculus to time-dependent systems of heat equations.* Osaka Journal Math. **22** (1985) p.307-320.

[84] S. WATANABE: *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin Calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag 1984.

[85] M. ZAKAI: *On the optimal filtering of diffusion processes.* Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Ver. Geb. **11** (1969) p.230-243.

[86] M. ZAKAI: *The Malliavin calculus.* Acta Applicandae Mathematicae **3**-2 (1985) p.175-207.