



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

présentée à l'Université de Metz  
pour l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE METZ EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



par

Hassan LAOUSY

| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>TECHNOPOLE - METZ - |               |
|---|---------------|
| No Inv.   | 1997M65       |
| Cote  | S/M3<br>97/56 |
| Loc.  | Mayasia       |
| Cat   | OCLC          |

Titre de la thèse :

### SUR QUELQUES PROBLÈMES DE STABILISATION DE SYSTÈMES À PARAMÈTRES DISTRIBUÉS

Soutenue le 19 Décembre 1997 devant le jury composé de :

- F. CONRAD, Professeur à l'Université Henri Poincaré Nancy I. Rapporteur.
- H. HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon I. Rapporteur.
- B. RAO, Professeur à l'Université Louis Pasteur (Strasbourg). Examineur.
- J. Saint-Jean PAULIN, Professeur à l'Université de Metz. Examineur.
- G. SALLET, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.
- C.Z. XU, Chargé de recherche à l'INRIA. Examineur.

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE  
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399.

*A mes parents, à mes frères  
et soeurs et leurs enfants.*

*A Carmella, pour sa douceur et sa tendresse.*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de thèse le professeur G. SALLET de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche et pour sa gentillesse.

Je voudrais remercier C.Z. Xu pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour les nombreuses discussions que j'ai eu avec lui.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude aux professeurs F. CONRAD et H. HAMMOURI qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de mon travail.

B. RAO et J.Saint-Jean PAULIN m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse, je tiens à leur exprimer toutes mes sincères remerciements.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de l'INRIA. A ce titre je tiens à remercier tous ses membres. En particulier Outbib, Jghima, Chentouf et Agoune.

Enfin, je tiens à remercier toutes celles et tous ceux qui, par leur dévouement, leur présence et leur amitié, m'ont aidé à traverser les moments difficiles et à réaliser ce travail.

## Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à la stabilisation par retour d'état, pour certains systèmes à paramètres répartis. La première partie concerne la stabilisation d'un système rigide-flexible en rotation. Ce système est composé d'un disque au centre duquel est encastrée une poutre flexible, l'autre extrémité étant libre. Nous avons proposé des lois de commande locales (force et/ou moment appliqués à l'extrémité libre de la structure flexible) et couple appliqué sur le disque. Nous avons montré que ces lois de commande stabilisent exponentiellement le système autour d'une configuration à vitesse constante, suffisamment petite, où les vibrations du système sont supprimées. Les résultats obtenus ont été illustrés par des simulations numériques.

La deuxième partie traite du problème de stabilisation, par feedback frontière, d'un système constitué d'une poutre encastrée en l'une de ses extrémités, à l'autre extrémité est fixée une antenne rigide de masse  $m$ . Dans le modèle considéré on néglige le moment d'inertie de la masse  $m$ . Les vibrations de ce système sont régies par une équation aux dérivées partielles et deux équations différentielles ordinaires. L'objectif est de stabiliser ce système par le seul feedback de moment appliqué sur la masse  $m$ . Nous avons proposé une loi de commande locale qui rend l'énergie dissipative, puis nous avons établi la stabilité uniforme du système.

Dans la dernière partie, on a étudié le problème de placement du spectre, par feedback linéaire borné, pour deux systèmes à paramètres répartis. Le premier système décrit les vibrations d'une corde, pour celui-ci nous avons montré que, par feedback linéaire borné appliqué sur la frontière, seule la stabilité forte peut être assurée. Pour le second système, qui décrit les vibrations d'une poutre encastrée, nous avons établi que le spectre du système peut être déplacé uniformément vers la gauche, ce qui garantit la stabilisation exponentielle avec un taux de décroissance arbitraire.

**Mots-clefs:** Systèmes à paramètres distribués, structures flexibles, stabilisation, feedback, placement de spectre.

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1</b> | <b>Généralités</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Introduction . . . . .   | 7         |
| 1.2      | Opérateurs non-bornés sur un Banach . . . . .                    | 7         |
| 1.2.1    | Spectre et résolvante . . . . .                                  | 8         |
| 1.2.2    | Adjoint d'un opérateur . . . . .                                 | 9         |
| 1.3      | Quelques rappels sur la théorie des semi-groupes . . . . .       | 9         |
| 1.3.1    | Opérateurs m-dissipatif sur $X$ . . . . .                        | 9         |
| 1.3.2    | Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur un Banach          | 10        |
| 1.3.3    | Groupe d'opérateurs bornés . . . . .                             | 12        |
| 1.4      | Problèmes d'évolution . . . . .                                  | 14        |
| 1.4.1    | Cas linéaire . . . . .   | 14        |
| 1.4.2    | Cas des problèmes semi-linéaires . . . . .                       | 14        |
| 1.5      | Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .                      | 16        |
| 1.5.1    | Fonctions de Liapunov et principe d'invariance . . . . .         | 18        |
| 1.6      | Stabilité des systèmes linéaires . . . . .                       | 18        |
| 1.6.1    | Stabilité forte . . . . .  | 19        |
| 1.6.2    | Stabilité exponentielle (ou uniforme) . . . . .                  | 20        |
| 1.7      | Stabilisation . . . . .  | 24        |
| 1.7.1    | Cas où l'opérateur de contrôle $B$ est borné . . . . .           | 24        |
| 1.7.2    | Cas où l'opérateur de contrôle $B$ est non borné . . . . .       | 25        |
| 1.7.3    | Placement de spectre par feedback linéaire borné . . . . .       | 27        |
| <b>2</b> | <b>Stabilisation d'un objet à structure flexible en rotation</b> | <b>29</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .   | 29        |
| 2.2      | Équations du système et écriture opérationnelle: . . . . .       | 31        |
| 2.3      | Existence globale des solutions: . . . . .                       | 34        |
| 2.4      | Stabilité uniforme d'un sous-système: . . . . .                  | 38        |
| 2.5      | Stabilité du système initial . . . . .                           | 46        |
| 2.6      | Simulations numériques . . . . .                                 | 49        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.7      | Remarques et conclusion . . . . .  | 59         |
| 2.8      | Annexes . . . . .  | 60         |
| <b>3</b> | <b>Stabilisation uniforme d'un système hybride: modèle SCOLE</b>                                   | <b>67</b>  |
| 3.1      | Introduction . . . . .   | 67         |
| 3.2      | Le problème est bien posé . . . . .  | 70         |
| 3.3      | Stabilité forte . . . . .  | 74         |
| 3.4      | Stabilité uniforme . . . . .   | 76         |
| 3.5      | Conclusion . . . . .   | 87         |
| <b>4</b> | <b>Placement de spectre par feedback linéaire borné pour deux systèmes à paramètres distribués</b> | <b>89</b>  |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 89         |
| 4.2      | Cas de l'équation des ondes en dimension un . . . . .  | 92         |
| 4.3      | Cas d'une barre flexible encastrée: . . . . .  | 97         |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>101</b> |

# 0

## Introduction

Cette thèse regroupe certains résultats de stabilisation, par retour d'état, pour des systèmes à paramètres distribués.

Ce travail est organisé comme suit:

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur la théorie des semi-groupes, celle-ci étant un outil de base pour la représentation, par des équations d'état, des systèmes à paramètres distribués. On y trouve aussi quelques théorèmes d'existence et de régularité pour les systèmes linéaires et semi-linéaires. Ensuite, on donne un rappel sur les notions et résultats fondamentaux de stabilité, d'abord dans le cas général des systèmes dynamiques, puis, dans le cas des systèmes linéaires. Enfin, on termine par un rappel de quelques résultats de stabilisation et de placement de spectre.

Le second chapitre concerne la stabilisation, par feedback frontière (linéaire), d'un système formé par un disque au centre duquel est encastrée une structure flexible. Ce système a été introduit par Baillieul et Levi [1] pour modéliser certains systèmes de l'aérospatiale (satellite avec antenne). Sa dynamique est modélisée par une équation aux dérivées partielles non-linéairement couplée avec une équation différentielle ordinaire. On se propose d'étudier la stabilité de ce système vers une position d'équilibre où la structure flexible est perpendiculaire au disque et celui-ci tourne à une vitesse angulaire constante  $\omega^*$  donnée.

Pour ce système, il y a plusieurs contrôles à considérer, à savoir, le contrôle du couple appliqué au disque, le contrôle de la force et le contrôle du moment appliqués à l'extrémité libre de la structure flexible. Dans [53], Xu et Baillieul ont considéré le problème de stabilisation de ce système, par le seul contrôle du couple, en présence du frottement (visqueux ou structurel). Dans ce cas, ils ont montré l'existence d'une vitesse critique de stabilisation du système par feedback. Pour toute vitesse angulaire inférieure à la vitesse critique, ils ont

proposé un feedback linéaire qui stabilise exponentiellement le système. Une question se posait alors tout naturellement: Est-il possible, en ajoutant des contrôles frontières au contrôle du couple, de stabiliser le système par feedback, vers une position d'équilibre à vitesse angulaire constante quelconque? La réponse est positive [55], cependant le feedback proposé n'est pas local, et donc difficile à réaliser en pratique.

Le but de ce chapitre est de proposer des lois de feedback locales et statiques qui stabilisent le système. Il est à noter que, dans le modèle dynamique considéré, nous supposons qu'il n'y a pas de frottements. Notre contribution principale est de montrer que, pour toute vitesse angulaire inférieure à une certaine constante, le système est exponentiellement stabilisable. Dans ce cas, nous donnons explicitement des lois de feedback stabilisantes.

A la différence de [53], on n'a pas pu montrer la non stabilité du système au-delà d'une valeur critique. Cependant, on observe que le sous-système possède une valeur propre à partie réelle strictement positive lorsque la vitesse angulaire dépasse une certaine valeur. Ceci nous amène à croire qu'il existe une vitesse critique de stabilisation dans notre cas aussi. Ce travail a fait l'objet d'une publication à IEEE Trans. Automat. Control [24].

Le troisième chapitre traite de la stabilisation frontière, par loi de commande locale, d'un système hybride. Celui-ci est une variante du modèle SCOLE, introduit par Littman et Markus dans [26] pour modéliser certaines structures de l'aérospatiale. Il s'agit d'une poutre flexible encastrée d'un côté et attachée, de l'autre côté, à une antenne de masse  $m$ . Les vibrations du système global sont gouvernées par une équation aux dérivées partielles (modèle d'Euler-Bernoulli) couplée avec deux équations différentielles ordinaires (équations de Newton-Euler). Ce système a fait l'objet de plusieurs recherches [26], [9], [47], [35], [36]. En particulier, dans [9], F. Conrad et O. Morgul ont considéré une variante du modèle SCOLE où ils ont négligé le moment d'inertie de l'antenne  $m$ . Ils ont obtenu un résultat de stabilisation uniforme, par loi de commande locale, en utilisant comme seul contrôle le feedback de force appliquée sur la masse  $m$ . De plus, dans un cas particulier, ils ont montré que le spectre détermine la décroissance de l'énergie.

La motivation principale de notre travail, est de répondre à la question suivante: Est-il possible d'obtenir un résultat analogue en appliquant le seul feedback du moment sur la masse  $m$ ?

Notre travail donne une réponse partielle à cette question. En effet, en con-

sidérant le même modèle que celui de [9], on propose une loi de feedback de moment qui stabilise uniformément le système. Pour montrer ce résultat, on a estimé la résolvante sur l'axe imaginaire, puis on a appliqué le théorème de Huang [18]. La question de savoir si le spectre détermine le taux de décroissance fait l'objet de travaux en cours [23].

Dans le quatrième chapitre, on étudie le problème de placement de spectre, par feedback linéaire borné, pour deux types de systèmes: L'équation des ondes en dimension un, puis l'équation d'Euler-Bernoulli, qui décrit les vibrations latérales d'une poutre flexible encastree. On montre que ces deux systèmes rentrent dans la classe de systèmes étudiée par Xu-Sallet dans [56]. Pour le premier système, on montre que, par feedback linéaire borné sur la frontière, on ne peut assurer que la stabilité forte. Pour le second système, on montre qu'il est possible, par feedback linéaire borné, de déplacer le spectre du système uniformément vers la gauche. Ceci garantit la stabilisation uniforme avec un taux de décroissance arbitraire. Ce travail a fait l'objet d'un article publié dans [54].



# 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des rappels de définitions et de résultats classiques sur la stabilité des systèmes en dimension infinie. On y trouve les résultats principaux sur les semi-groupes d'opérateurs linéaires et leurs générateurs, ainsi que quelques résultats d'existence et de régularité pour les problèmes d'évolution (linéaires, et semi-linéaires). Nous rappelons également les définitions relatives à la stabilité, (trajectoire, ensemble omega-limite..), ainsi que le principe d'invariance de LaSalle, et ce dans le cadre général des systèmes dynamiques. Nous présentons, ensuite, les résultats fondamentaux sur les différents types de stabilité pour les semi-groupes linéaires.

Nous terminons ce chapitre par un rappel de quelques résultats essentiels sur la stabilisation des systèmes par retour d'état. On distinguera deux classes de systèmes selon que l'opérateur de contrôle est borné ou non. Pour la première, nous rappelons brièvement quelques résultats de stabilisation ainsi que le lien entre la stabilisabilité et la contrôlabilité. Pour la seconde, nous rappelons quelques résultats sur le placement de spectre.

On commence d'abord par rappeler quelques définitions concernant les opérateurs non-bornés sur un espace de Banach.

### 1.2 Opérateurs non-bornés sur un Banach

Dans tout ce qui suit, sauf indication contraire,  $X$  représente un espace de Banach réel.

**Définition 1.1 :** Un opérateur linéaire dans  $X$  est un couple  $(D, A)$ , où  $D$  est un sous espace vectoriel de  $X$ , et  $A : D \rightarrow X$ , est une application linéaire. On dit que  $A$  est borné si  $\|Au\|$  reste borné pour tout  $u$  dans  $\{x \in D; \|x\| \leq 1\}$ . Dans le cas contraire, on dit que  $A$  est non-borné.

On appelle le graphe de  $A$ , le sous espace vectoriel de  $X \times X$  défini par:

$$G(A) = \{(x, y) \in X \times X, x \in D(A); y = Ax\}.$$

L'opérateur  $A$  est dit fermé si son graphe est un fermé de  $X \times X$ .

### 1.2.1 Spectre et résolvante

**Définition 1.2 :** Soit un opérateur  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ .

Soit  $A_\lambda = \lambda I - A$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Si  $\lambda$  est tel que l'image de  $A_\lambda$ , noté  $R(A_\lambda)$ , est dense dans  $X$  et que  $A_\lambda$  possède un inverse continu, on dit alors que  $\lambda$  est un élément de l'ensemble résolvant de  $A$ , désigné par  $\rho(A)$ , et on note  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ .

- Si  $\lambda \notin \rho(A)$ , on dit que  $\lambda$  est dans le spectre de  $A$ , noté  $\sigma(A)$ , et qui se décompose en trois sous ensembles:
- $P_\sigma(A)$ : il contient tous les  $\lambda$  tels que  $A_\lambda$  n'ait pas d'inverse, c'est le spectre ponctuel et ses éléments sont les valeurs propres de  $A$ .
- $C_\sigma(A)$ : il contient tous les  $\lambda$  pour lesquels  $A_\lambda$  possède un inverse de domaine dense mais qui n'est pas continu, c'est le spectre continu.
- $R_\sigma(A)$ : il contient tous les  $\lambda$  tels que  $A_\lambda$  aie un inverse dont le domaine n'est pas dense dans  $X$ , c'est le spectre résiduel.

Un cas très important est lorsque la résolvante  $R(\lambda, A)$  est compacte, pour un certain  $\lambda \in \rho(A)$ , nous avons alors le théorème suivant:

**Théorème 1.1 ([20])** Soit  $A$  un opérateur fermé dans  $X$  tel que  $R(\lambda, A)$  est compacte, pour un certain  $\lambda \in \rho(A)$ . Alors le spectre de  $A$  est discret et formé uniquement de valeurs propres de multiplicité finie. De plus,  $R(\xi, A)$  est compacte pour tout  $\xi \in \rho(A)$ .

## 1.2.2 Adjoint d'un opérateur

Dans ce sous-paragraphe, on suppose que  $X$  est un espace de Hilbert.

Si  $A$  est un opérateur linéaire dans  $X$ , de domaine dense, on définit  $A^*$ , l'opérateur adjoint de  $A$  par:

$$D(A^*) = \{v \in X; \exists C < \infty / | \langle Au, v \rangle | \leq C \|u\|; \forall u \in D(A)\},$$

et

$$\langle A^*v, u \rangle_X = \langle v, Au \rangle_X, \quad \forall v \in D(A^*), \forall u \in D(A).$$

Il est à noter que  $A^*$  est toujours fermé. De plus,  $D(A^*)$ , muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{D(A^*)} = \langle f, g \rangle_X + \langle A^*f, A^*g \rangle_X,$$

est un espace de Hilbert.

## 1.3 Quelques rappels sur la théorie des semi-groupes

Le but de cette section est de rappeler certaines définitions et résultats sur les semi-groupes d'opérateurs bornés sur un espace de Banach ainsi que leurs générateurs.

### 1.3.1 Opérateurs $m$ -dissipatif sur $X$

**Définition 1.3 :** Soit  $X$  un Banach, et  $A$  un opérateur linéaire dans  $X$ .  $A$  est dit dissipatif s'il vérifie

$$\|u - \lambda Au\|_X \geq \|u\|_X, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall \lambda > 0.$$

$A$  est dit  $m$ -dissipatif si  $A$  est dissipatif et pour tout  $\lambda > 0$ , l'opérateur  $(I - \lambda A)$  est surjectif.

**Proposition 1.1** ([15]): *Soit  $A$  un opérateur (linéaire) dissipatif dans  $X$ , les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- i)  $A$  est  $m$ -dissipatif dans  $X$*
- ii)  $\exists \lambda_0 > 0$  tel que l'opérateur  $(I - \lambda_0 A)$  est surjectif.*

Dans le cas où  $X$  est un espace de Hilbert réel, on a la proposition suivante:

**Proposition 1.2** ([15]): *Soit  $X$  un espace de Hilbert réel.  $A$  est dissipatif si et seulement si  $\langle Au, u \rangle \leq 0$ , pour tout  $u \in D(A)$ . De plus, si  $A$  est  $m$ -dissipatif dans  $X$ , alors  $D(A)$  est dense dans  $X$ .*

### 1.3.2 Semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur un Banach

**Définition 1.4** : *Soit  $X$  un espace de Banach*

*Un semi-groupe d'opérateurs bornés sur  $X$  est une famille  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  d'opérateurs vérifiant:*

- i)  $T(t)$  est un opérateur borné de  $X$  dans  $X$  pour tout  $t \geq 0$ ,*
- ii)  $T(t + s) = T(t)T(s) \quad \forall s, t \geq 0$  et  $T(0) = I_X$ .*

*-Le semi-groupe est dit fortement continu à l'origine (ou de classe  $C^0$ ) si:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x \quad \forall x \in X. \quad (*)$$

*-Il est dit contractant si:*

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$$

où  $L(X)$  désigne l'ensemble des opérateurs bornés de  $X$ .

**Remarque 1** *la condition (\*) entraîne que, pour tout  $x \in X$ , l'application  $T(\cdot)x : [0, \infty) \rightarrow X$  est continue.*

**Définition 1.5 :** On appelle *générateur infinitésimal* de  $T(t)$ , l'opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$  défini par:

$$D(A) = \{x \in X / \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}, \text{ existe} \},$$

et pour  $x \in D(A)$ :

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

On a le théorème suivant:

**Théorème 1.2 ([32]).** Soit  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un semi-groupe d'opérateurs bornés sur un espace de Banach  $X$ , et soit  $A$  son générateur infinitésimal. Pour tout  $x_0 \in D(A)$ , on a

- i)  $T(t)x_0 \in D(A)$ , pour tout  $t \geq 0$
- ii)  $\frac{d}{dt}(T(t)x_0) = AT(t)x_0 = T(t)Ax_0, \forall t > 0$
- iii)  $T(t)x_0 - x_0 = \int_0^t AT(s)x_0 ds$
- iv)  $A$  est fermé,  $D(A)$  est partout dense dans  $X$ .

D'après le théorème précédent, si  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  sur  $X$  alors  $A$  est fermé de domaine dense. Réciproquement, si  $A$  est fermé de domaine dense, il existe des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il engendre un semi-groupe sur  $X$ , elles sont données par les deux théorèmes fondamentaux suivants.

**Théorème 1.3 (Hille-Yosida)[32] :** Soit  $A$  un opérateur fermé de domaine dense. Une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  engendre un semi-groupe  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  est qu'il existe deux constantes réelles  $M$  et  $\omega$  telles que:

$$\forall \lambda > \omega; \quad \lambda \in \rho(A),$$

et

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{L(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dans ce cas, on a

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{t\omega}; \quad \forall t \geq 0.$$

**Théorème 1.4** (Lumner-Phillips)[32] : Soit  $A$  un opérateur de domaine dense et  $m$ -dissipatif, alors  $A$  engendre un semi-groupe  $C_0$  de contractions.

Comme corollaire de ce théorème, nous avons le résultat suivant:

**Corollaire 1.1** Soit  $A$  un opérateur fermé de domaine dense. Si  $A$  et  $A^*$  sont dissipatifs, alors  $A$  engendre un semi-groupe  $C_0$  de contractions.

**Théorème 1.5** [32] Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $A$  un générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $T(t)$  fortement continu, alors  $T^*(t)$  est aussi un semi-groupe  $C_0$  de générateur  $A^*$ .

Enfin, le théorème suivant affirme qu'un générateur de semi-groupe perturbé par un opérateur linéaire borné, est aussi générateur d'un semi-groupe.

**Théorème 1.6** ([32]. p76) Soit  $X$  un espace de Banach et  $A$  un générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $T(t)$  de classe  $C_0$  sur  $X$ , tel que  $\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}$ . Si  $B$  est un opérateur linéaire borné dans  $X$  alors  $A + B$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(t)$  de classe  $C_0$  sur  $X$ , tel que  $\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t}$ .

### 1.3.3 Groupe d'opérateurs bornés

**Définition 1.6** : Soit  $X$  un espace de Banach.

Un groupe  $C_0$  d'opérateurs bornés sur  $X$  est une famille  $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs vérifiant:

i)  $T(t)$  est un opérateur borné de  $X$  dans  $X$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$

ii)  $T(t+s) = T(t)T(s) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$ , et  $T(0) = I_X$ .

iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x \quad , \forall x \in X$ .

**Théorème 1.7** (Stone [32]): Soit  $H$  un espace de Hilbert,  $A$  est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur  $H$  si et seulement si  $A$  est anti-adjoint.

On rappelle q'un opérateur borné  $U$  défini sur un espace de Hilbert  $H$  est unitaire si et seulement si  $U^* = U^{-1}$ .

## 1.4 Problèmes d'évolution

Dans cette section, nous rappelons quelques résultats standards concernant l'existence et la régularité des solutions pour deux classes de problèmes d'évolution.

### 1.4.1 Cas linéaire

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le théorème suivant assure l'existence globale des solutions de ce problème dans le cas où l'opérateur  $A$  est  $m$ -dissipatif.

**Théorème 1.8** (*Hille-Yosida-Phillips [15]*) : *Soit  $X$  un Banach et  $A$  un opérateur  $m$ -dissipatif dans  $X$ , de domaine dense, alors il existe un unique semi-groupe de contractions  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  tel que:*

*Pour tout  $x \in D(A)$ ,  $u(t) = T(t)x$  est l'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), X), \\ \dot{u}(t) = Au(t), \forall t \geq 0, \\ u(0) = x. \end{cases} \quad (1.2)$$

### 1.4.2 Cas des problèmes semi-linéaires

Soit maintenant le problème semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(u(t), t), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où l'opérateur  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $e^{tA}$  de classe  $C_0$  sur l'espace de banach  $X$  et  $f : X \times [t_0, t_1] \rightarrow X$  une fonction donnée.

**Définition 1.7** Soit  $t_1 > t_0$ . Une fonction  $u : [t_0, t_1] \rightarrow X$  est une solution faible de (1.3) sur  $[t_0, t_1]$  si et seulement si  $f(u(\cdot), \cdot) \in L^1([t_0, t_1]; X)$  et  $u(\cdot)$  satisfait la formule de la variation de la constante

$$u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}f(u(s), s)ds. \quad (1.4)$$

**Définition 1.8** Une fonction  $u(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow X$  est une solution forte (classique) de (1.3) sur  $[t_0, t_1]$  si et seulement si  $u(\cdot)$  est continue sur  $[t_0, t_1]$ , continûment différentiable sur  $]t_0, t_1[$ ,  $u(t) \in D(A)$  pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ , et (1.4) est satisfaite sur  $[t_0, t_1]$ .

Nous allons énoncer le résultat classique suivant qui assure l'existence et l'unicité des solutions faibles de (1.3) dans le cas où  $f$  est lipschitzienne.

**Théorème 1.9** ([32], p184) Soit  $f : X \times [0, T] \rightarrow X$  une fonction continue en  $t$  sur  $[0, T]$ , uniformément lipschitzienne en  $u$  sur  $X$ . Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  sur  $X$ , alors:

Pour chaque  $u_0 \in X$ , le problème (1.3) admet une unique solution faible  $u(\cdot) \in C([t_0, T]; X)$ . De plus, l'application  $u_0 \rightarrow u(\cdot)$  est Lipschitz continue de  $X$  dans  $C([t_0, T]; X)$ .

**Remarque 2** Le fait que la fonction  $f$  soit uniformément lipschitzienne dans le théorème précédent, assure l'existence globale sur  $[t_0, T]$  de la solution faible de (1.3). Dans le cas où  $f$  est supposée seulement localement lipschitzienne en  $u$ , uniformément en  $t$  sur tout intervalle borné, on a la version locale du théorème précédent.

**Théorème 1.10** ([32], p185) Soit  $f : X \times [0, \infty) \rightarrow X$  continue en  $t$  pour  $t \geq 0$ , uniformément lipschitzienne en  $t$ , sur tout intervalle borné, et localement lipschitzienne en  $u$ . Si  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  sur  $X$ , alors:

Pour chaque  $u_0 \in X$ , il existe un  $t_{max} \leq \infty$ , tel que le problème (1.3) (avec  $t_0 = 0$ ) admet une solution faible  $u(\cdot)$  sur  $[0, t_{max}[$ . De plus, si  $t_{max} < +\infty$  alors :  $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \|u(t)\|_X = +\infty$ .

Si  $u_n \in C([t_0, t_{max}); X)$ , sont des solutions faibles de (1.3) telles que  $u_n(0) \rightarrow u_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$   $t_1 > t_0$ , alors  $u_n \rightarrow u$  dans  $C([t_0, t_1]; X)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , où  $u$  est la solution unique de (1.3) satisfaisant  $u(0) = u_0$ .

En pratique, pour montrer que les solutions de (1.3) sont globales, on montre qu'elles sont bornées.

D'autre part, le théorème précédent assure la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales. En particulier, dans le cas où toutes les solutions de (1.3) sont globales, la famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'applications définies sur  $X$  par  $S(t)x = u(t)$ , ( $u(t)$  étant la solution de (1.3) avec  $u(0) = x$ ), définit un système dynamique sur  $X$  (voir la définition au paragraphe suivant). Il est à noter que cette propriété sera utile pour étudier le comportement des solutions de (1.3) lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Notons qu'en général, si la fonction  $f$  satisfait juste les conditions du théorème (1.9) ou celles du théorème (1.10), la solution faible de (1.3) peut ne pas être une solution classique. Le théorème suivant donne une condition suffisante qui permet de conclure sur la régularité de la solution faible de (1.3).

**Théorème 1.11** ([32], p187) *Soit  $A$  un générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  sur  $X$ . Si  $f : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  est continûment différentiable de  $X \times [t_0, t_1]$  dans  $X$ , alors la solution faible de (1.3) avec  $u_0 \in D(A)$ , est aussi une solution classique de (1.3).*

## 1.5 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans ce paragraphe, on va introduire les systèmes dynamiques et les notions relatives à l'étude de leurs comportement asymptotique (trajectoires, ensemble  $\omega$ -limite...) avant d'introduire la notion de fonction de Lyapunov et le principe d'invariance qui est un outil commode pour étudier la stabilité de tels systèmes.

### Définition 1.9 (Systèmes dynamiques)

*Soit  $(Z, d)$  un espace métrique complet.*

*Un système dynamique sur  $Z$  est une famille  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  d'applications sur  $Z$  telle que:*

- i)  $S(t) \in C(Z, Z)$ ,*
- ii)  $S(0) = I_d$ ,*
- iii)  $S(t + s) = S(t) \circ S(s) \quad \forall s, t \geq 0$ ,*
- iv)  $\forall z \in Z, S(t)z \in C([0, +\infty), Z)$ .*

**Définition 1.10** (Trajectoires, ensembles  $\omega$ -limite)

Pour tout  $z \in Z$ ,

i) La courbe continue  $t \rightarrow S(t)z$  est appelée trajectoire issue de  $z$

ii) l'ensemble  $\omega(z) = \{y \in Z / \exists t_n \rightarrow +\infty; S(t_n)z \rightarrow y \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$  est appelé ensemble  $\omega$ -limit de  $z$ .

**Définition 1.11** (Stabilité)

• Un élément  $z \in Z$  est dit point d'équilibre de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si

$$\forall t \geq 0, \quad S(t)z = z.$$

• Si  $0$  est un point d'équilibre de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , alors on dit que  $0$  est stable si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } d(x, 0) < \delta \Rightarrow d(S(t)x, 0) < \epsilon, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

• Si de plus,

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que } d(x, 0) < \delta \Rightarrow d(S(t)x, 0) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty,$$

alors l'origine est dit asymptotiquement stable.

On a la proposition suivante

**Proposition 1.3** [15] Pour tout  $z \in Z$  et pour tout  $t \geq 0$ , on a

•  $\omega(S(t)z) = \omega(z)$ .

•  $S(t)(\omega(z)) \subset \omega(z)$ . ( $\omega(z)$  est dit alors positivement invariant par  $S(t)$ ).

Si de plus,  $\cup_{t \geq 0} S(t)z$  est relativement compacte dans  $Z$ , alors

•  $S(t)(\omega(z)) = \omega(z) \neq \emptyset$ .  $\omega(z)$  est dit alors invariant par  $S(t)$ .

•  $\omega(z)$  est un compact connexe de  $Z$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(S(t)z, \omega(z)) = 0$ .

### 1.5.1 Fonctions de Liapunov et principe d'invariance

#### Définition 1.12 [15] (Fonction de Lyapunov)

Une fonction  $\Phi \in C(Z, \mathbb{R})$  est dite fonction de Lyapunov pour  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  si

$$\Phi(S(t)z) \leq \Phi(z), \quad \forall z \in Z, \quad \forall t \geq 0.$$

#### Théorème 1.12 [15] Principe d'invariance de LaSalle

Soit  $\Phi$  une fonction de Liapunov pour  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , et soit  $z \in Z$  tel que  $\cup_{t \geq 0} S(t)z$  soit relativement compact dans  $Z$ . Alors

i)  $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(S(t)z)$  existe;

ii)  $\Phi(y) = c, \forall y \in \omega(z)$ .

En particulier:  $\forall y \in \omega(z), \quad \forall t \geq 0, \quad \Phi(S(t)y) = \Phi(y)$ .

## 1.6 Stabilité des systèmes linéaires

Dans toute cette section, l'opérateur  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $S(t)$ .

On va commencer par rappeler quelques résultats et définitions concernant la stabilité des semi-groupes linéaires.

#### Définition 1.13 (Différents types de stabilité)

i) Le semi-groupe  $S(t)$  est dit fortement stable si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)x = 0; \quad \forall x \in X.$$

ii) Il est dit exponentiellement (ou uniformément) stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{L(X)} = 0,$$

ou, d'une manière équivalente, s'il existe deux constantes  $M$  et  $\alpha > 0$  telles que

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq M e^{-\alpha t}.$$

iii) Enfin, on dit que le semi-groupe  $S(t)$  est faiblement stable si

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle S(t)x, y \rangle_H = 0, \quad \forall x, y \in X.$$

Pour la dernière définition,  $H$  est supposé un espace de Hilbert et  $\langle, \rangle$  son produit scalaire.

Il est bien connu que dans le cas où l'espace  $X$  est de dimension finie, nous avons les équivalences suivantes

$$i) \iff ii) \iff iii).$$

En revanche, lorsque l'espace  $X$  est de dimension infinie, seules les implications suivantes sont vraies

$$ii) \Rightarrow i) \Rightarrow iii).$$

En effet, il est possible de construire des exemples de systèmes fortement stable sans l'être exponentiellement (voir par exemple [18],[49].)

### 1.6.1 Stabilité forte

Dans le cas particulier où le système dynamique  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de contractions sur un espace de Banach  $X$ , pour établir que les trajectoires sont précompactes dans  $X$ , il suffit de montrer qu'il existe un  $\lambda > 0$  tel que la résolvante  $R(\lambda, A)$  soit compacte (ceci est vrai même pour les semi-groupes de contractions non linéaires, à condition que  $0 \in R(A)$  (voir par exemple le théorème 3 de [12]), et on montre dans ce cas que pour tout  $\phi_0 \in D(A)$ , l'ensemble  $\omega$ -limite correspondant  $\omega(\phi_0)$  est contenu dans  $D(A)$ , ce qui permet de mieux le caractériser, en particulier, lorsqu'il existe une fonction de Lyapunov différentiable. Le principe d'invariance de LaSalle s'énonce alors comme suite:

**Proposition 1.4** *S'il existe une fonction  $V$  telle que  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  le long des trajectoires de  $S(t)$ , et un réel  $\lambda > 0$  tel que la résolvante  $R(\lambda, A)$  soit compacte.*

*Alors, pour tout  $\phi_0 \in X$ ,*

*i) La trajectoire  $\{S(t)(\phi_0)\}_{t \geq 0}$  est précompacte dans  $X$ ;*

*ii) Si  $\phi_0 \in D(A)$ , l'ensemble  $\omega(\phi_0)$  est contenu dans  $M$ ,*

*où  $M$  est le plus grand sous ensemble invariant de  $S = \{\phi \in D(A) / \frac{dV}{dt}(\phi(t)) = 0; \forall t \geq 0\}$*

**Remarque 3** *En pratique, pour montrer que les solutions convergent vers le point d'équilibre 0, on montre que l'ensemble  $M$  est réduit à  $\{0\}$ .*

Outre cette approche, basée sur le principe d'invariance, il existe une autre approche relativement récente, et qui est basée sur l'analyse spectrale de l'opérateur  $A$ .

**Théorème 1.13** [19] *Soit  $X$  un espace de Banach, et  $A$  générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $e^{tA}$  de classe  $C_0$  et uniformément borné sur  $X$  (i.e  $\|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M; \forall t \geq 0$ .)*

*Si  $\Re\lambda < 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}x\|_X = 0; \forall x \in X$ .*

*Réciproquement, si  $e^{tA}$  est fortement stable, alors il est uniformément borné et  $\Re(\lambda) \leq 0$ , pour tout  $\lambda \in \sigma(A)$ . De plus, seuls les éléments du spectre continu de  $A$  peuvent être imaginaires purs.*

## 1.6.2 Stabilité exponentielle (ou uniforme)

Dans cette section, on rappelle les résultats essentiels sur la stabilité uniforme d'un semi-groupe linéaire.

Rappelons tout d'abord que, dans le cas de la dimension finie, on peut caractériser la stabilité exponentielle d'un semi-groupe à l'aide du spectre de son générateur infinitésimal:  $e^{tA}$  est exponentiellement stable si et seulement si  $\sigma_0(A) = \sup\{\Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ . Cette condition, bien que nécessaire, ne suffit pas en général pour avoir la stabilité exponentielle d'un semi-groupe en dimension infinie (voir par exemple [18], [34]), néanmoins elle est nécessaire et suffisante pour une classe de semi-groupes.

**Définition 1.14** *On appelle ordre d'un semi-groupe  $e^{tA}$  le nombre réel  $\omega_0(A)$  défini par*

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\|e^{tA}\|_{L(X)})}{t}.$$

Par la théorie des semi-groupes [32], on montre que  $\omega_0(A) < +\infty$  et  $\sigma_0(A) \leq \omega_0(A)$ , et dans le cas où  $\omega_0(A)$  est fini, on a le résultat suivant liant  $\omega_0(A)$  et la stabilité exponentielle du semi-groupe  $e^{tA}$  ([3]).

**Proposition 1.5** [3] Soit  $e^{tA}$  un semi-groupe  $C_0$ , tel que  $\omega_0(A) < \infty$ . On a alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M_\epsilon / \quad \|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M_\epsilon e^{(\omega_0 + \epsilon)t}.$$

En particulier, si  $\omega_0 < 0$  on obtient la stabilité exponentielle du semi-groupe avec un taux de décroissance qui ne peut être meilleur que  $\omega_0 t$ .

Dans le cas où  $\sigma_0 = \omega_0$ , la condition  $\sigma_0 < 0$  entraîne la stabilité exponentielle du semi-groupe. On retrouve alors la condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle en dimension finie.

**Remarque 4** [3] Dans le cas où  $\omega_0(A) = -\infty$ , on a

$$\forall N > 0; \quad \exists M_N > 0 / \|e^{tA}\|_{L(X)} \leq M_N e^{-Nt},$$

et la stabilité exponentielle est ainsi établie.

**Remarque 5** Pour conclure sur la stabilité exponentielle d'un semi-groupe, il suffit d'avoir  $\|S(t)\|_X < 1$ , pour un certain  $t > 0$ .

Dans ce qui suit, on énonce deux théorèmes fondamentaux pour montrer la stabilité exponentielle d'un semi-groupe.

**Théorème 1.14** [32] Soit  $A$  un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $T(t)$ . Si pour un certain  $p$ ,  $1 \leq p < \infty$  on a

$$\int_0^\infty \|T(t)x\|_X^p dt < \infty, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Alors, il existe deux constantes  $M \geq 1$  et  $\mu > 0$  telles que

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq M e^{-\mu t}.$$

Le théorème précédent est souvent utilisé avec  $p = 2$ . On se ramène alors à la recherche de multiplicateur de manière à avoir une bonne majoration de  $\|T(t)x\|_X^2$ , pour  $t$  assez grand. Cependant, il n'est pas toujours évident de trouver le bon multiplicateur (voir par exemple le système étudié dans [8]), le théorème suivant dû à F.L.Huang ([18]) peut être utile dans certains cas, surtout pour les problèmes de dimension un en espace (équation de poutres, équation de thermoélasticité, équation des ondes en dimension un,..), où le calcul de la résolvante est parfois relativement simple.

**Théorème 1.15** ([18]) *Soit  $e^{tA}$  un semi-groupe  $C_0$  sur un espace de Hilbert  $H$ , tel que*

$$\exists M > 0; \|e^{tA}\|_{L(H)} \leq M \quad (t \geq 0).$$

*Alors  $e^{tA}$  est exponentiellement stable si et seulement si*

$$i) \{i\omega \mid -\infty < \omega < +\infty\} \subset \rho(A),$$

$$ii) \exists M_0 > 0; \|(i\omega - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq M_0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Pour finir cette section, on présente deux théorèmes de perturbation compacte, l'un est dû à R. Triggiani, et l'autre à D.L. Russell. Ces théorèmes sont parfois utiles pour montrer qu'un semi-groupe est uniformément stable ou pas.

Le premier théorème est parfois utile pour montrer la stabilité uniforme, tandis que le deuxième est plutôt utilisé pour prouver la non stabilité uniforme.

**Théorème 1.16** (R. Triggiani [49]):

*Soit  $H$  un espace de Hilbert, et soit  $A$  un générateur infinitésimal d'un  $C_0$  semi-groupe  $S_A(t)$  fortement stable. Soit  $B$  un opérateur compact de  $L(H)$  et  $S_{A+B}(t)$  le semi-groupe engendré par  $A+B$ . Si  $S_{A+B}(t)$  est exponentiellement stable alors  $S_A(t)$  est exponentiellement stable.*

**Théorème 1.17** (D.L. Russell [44]):

*Soit  $X$  un espace de Banach de dimension infinie, et soit  $C$  un générateur d'un groupe fortement continu d'opérateurs bornés sur  $X$ .*

*Alors, il ne peut exister d'opérateurs linéaires compacts  $D_1, D_2$ , de nombres réels strictement positifs  $T_1, T_2$  et de réels  $0 \leq \gamma_1 < 1, 0 \leq \gamma_2 < 1$  tels que les deux groupes  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$  engendrés respectivement par  $C + D_1$ , et  $C + D_2$  satisfont simultanément*

$$\|S_1(t)\|_{L(X)} \leq \gamma_1; \quad t \geq T_1,$$

et

$$\|S_2(t)\|_{L(X)} \leq \gamma_2; \quad t \leq -T_2.$$

Ce théorème est utilisé, dans certains cas, pour prouver la non stabilité uniforme, de la manière suivante: étant donné  $A$  générateur d'un groupe d'opérateurs bornés, et  $B$  un opérateur linéaire compact, pour montrer que le groupe

$S_{A+B}(t)$  engendré par  $A + B$  n'est pas uniformément stable, on exhibe un opérateur linéaire compact  $\tilde{B}$  tel que

$$\|S_{A+B}(t)\|_{L(X)} = \|S_{A+\tilde{B}}(-t)\|_{L(X)},$$

et le théorème permet alors de conclure.

Par exemple, dans le cas où  $A$  est anti-adjoint ( $A^* = -A$ ), on peut prendre  $\tilde{B} = -B^*$ , en effet

$$\|S_{A+B}(t)\| = \|S_{(A+B)^*}(t)\| = \|S_{-(A-B^*)}(t)\| = \|S_{(A-B^*)}(-t)\| = \|S_{(A+\tilde{B})}(-t)\|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

## 1.7 Stabilisation

La stabilisation par retour d'état constitue l'un des principaux objectifs de la théorie du contrôle. Dans cette section on présente quelques rappels des définitions et principaux résultats concernant ce problème.

Pour cela, considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + Bu(t) \\ \phi(0) = \phi_0 \in H, \end{cases} \quad (1.5)$$

où l'opérateur  $A : D(A) \rightarrow H$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  sur un espace de Hilbert  $H$  (espace des états), et  $B : U \rightarrow H$  un opérateur linéaire appelé opérateur de contrôle,  $U$  étant un espace de Hilbert (espace des commandes). On distinguera deux classes de systèmes suivant que l'opérateur  $B$  est borné (ce qui correspond au cas du contrôle distribué) ou non (ce qui correspond au cas du contrôle local).

### 1.7.1 Cas où l'opérateur de contrôle $B$ est borné

**Définition 1.15** *Considérons le système (1.5) avec  $B \in \mathcal{L}(U, H)$ , ce système est dit faiblement (resp. fortement, exponentiellement) stabilisable, s'il existe  $F \in \mathcal{L}(H, U)$  tel que le semi-groupe engendré par  $A + BF$  est faiblement, (resp. fortement, exponentiellement) stable.*

Le problème de la stabilisation du système (1.5) (avec  $B \in \mathcal{L}(U, H)$ ) a fait l'objet de plusieurs études qui ont donné des résultats intéressants. En général, ces résultats se basent sur trois approches différentes.

- La première, utilise le résultat de la décomposition canonique des semi-groupes de contractions dû à Nagy-Foias [31]. Cette méthode a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisation faible du système (1.5) dans le cas où le semi-groupe engendré par  $A$  est contractif, ( voir C. Benchimol dans [4].)
- La seconde approche, est basée sur la décomposition de l'espace des états, moyennant celle du spectre du générateur  $A$ , dans le cas où le sous espace dans lequel le semi-groupe restreint est exponentiellement stable est de codimension finie (voir R. Triggiani dans ([50].)

- La troisième approche, est basée sur le principe d'invariance de LaSalle généralisé en dimension infinie, (voir J. M. Ball dans ([2]) et M. Slemrod dans ([47])

Par ailleurs, le problème de stabilisabilité est lié à un autre problème celui de la contrôlabilité

**Définition 1.16** *Le système (1.5) est dit approximativement contrôlable sur un intervalle  $[t_0, t_1]$  si, pour tout  $\epsilon > 0$ , et  $(x_0, x_1) \in H \times H$ , il existe une commande admissible  $u(t) \in L^2(t_0, t_1)$  telle que:*

$$\|\phi(t_1, t_0, u) - x_1\| \leq \epsilon.$$

( $\phi(t, t_0, u)$  étant la solution de (1.5) correspondante à  $\phi(t_0) = x_0$ .)

-Le système est dit exactement contrôlable sur  $[t_0, t_1]$  si  $\epsilon = 0$ .

**Remarque 6** *Lorsque l'espace des états  $H$  est de dimension finie, on montre que les deux définitions précédentes coïncident.*

En dimension finie, le système (1.5) est stabilisable par retour d'état si et seulement si les modes instables du système sont contrôlables (ou encore (1.5) contrôlable implique (1.5) stabilisable) de plus, le spectre du système en boucle fermée peut être choisi arbitrairement. En dimension infinie, cette implication n'est plus vraie en général (voir l'exemple donné dans [49] de système approximativement contrôlable sans être stabilisable). En revanche, dans le cas de semi-groupes de contractions, il a été démontré dans ([4]) que le fait que les modes instables du système soient contrôlables assure seulement la stabilisation faible de celui-ci.)

## 1.7.2 Cas où l'opérateur de contrôle B est non borné

Dans cette partie, l'espace de Hilbert  $H$  est supposé séparable.

La classe de systèmes décrite par l'équation (1.5) avec l'hypothèse B borné, malgré son importance, présente quelques restrictions. En effet, cette hypothèse sur B suppose que le contrôle est du type distribué. Ce n'est pourtant pas le cas pour la plupart des systèmes décrits par des E.D.P où, souvent, le contrôle est appliqué sur la frontière d'un certain domaine  $\Omega$  (équation des

plaques avec contrôle sur une partie de la frontière...) ou sur des points isolés (équation d'une poutre contrôlée par une force ou par un moment appliqués sur son extrémité libre, ou sur un de ses point intérieurs,..). La dynamique de tels systèmes est alors modélisée par des équations de la forme (1.5) mais avec  $B$  non borné.

**Remarque 7** *on dira que l'opérateur de contrôle  $B$  est non borné s'il existe un espace de Hilbert  $V$  plus large que  $H$  ( $H$  dense dans  $V$ ) tel que  $B$  soit un opérateur borné de  $U$  dans  $V$  mais pas de  $U$  dans  $H$ .*

Dans tout ce qui suit, on considère le cas de contrôle scalaire ( $U = \mathbb{R}$ ).

L'opérateur  $B$  peut alors s'identifier à un élément  $b \in V$  appelé vecteur d'entrée. Dans les applications, on a  $V = D'(A^*)$ , et dans ce cas, l'équation (1.5) prend la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + bu(t) \\ \phi(0) = \phi_0 \in H, \end{cases} \quad (1.6)$$

et peut alors s'interpréter comme une équation dans  $D'(A^*)$ .

En effet, rappelons que  $D(A^*)$  est dense dans  $H$  (pour la norme de celui-ci), et que  $H$  est dense dans  $D'(A^*)$  pour la norme

$$\|x\|_{D'(A^*)} = \sup_{y \in D(A^*)} \frac{|\langle x, y \rangle|_H}{\|y\|_{D(A^*)}},$$

$D'(A^*)$  étant le dual topologique de  $D(A^*)$ .

L'opérateur  $A$  se prolonge alors d'une manière unique à un opérateur  $\hat{A} \in \mathcal{L}(H, D'(A^*))$  de la façon suivante.

$$\langle \hat{A}\varphi, \psi \rangle_{D'(A^*) \times D(A^*)} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H, \quad \forall \psi \in D(A^*).$$

L'équation (1.6), qui est une équation dans  $D'(A^*)$ , peut, dans certains cas, avoir des solutions dans  $H$ , notamment lorsque l'entrée  $b$  est admissible dans le sens suivant:

**Définition 1.17** ([17],[16]) **(Entrée admissible)**

Soit le système (1.6) avec  $u \in L^2_{loc}[0, +\infty)$ .

L'entrée  $b$  est dite admissible pour ce système si  $b \in D'(A^*)$  et si pour tout

$T > 0$ , il existe une constante  $K_T > 0$  (uniformément bornée pour  $T$  assez petit), telle que:

$$\int_0^T |\langle b, S^*(t)y \rangle|_{D'(A^*) \times D(A^*)}^2 dt \leq K_T^2 \|y\|_H^2, \quad \forall y \in D(A^*).$$

Dans ce cas, nous avons le théorème suivant qui assure l'existence des solutions du système (1.6).

**Théorème 1.18** ([17],[16]) *Soit  $b$  une entrée admissible pour le système (1.6), soit  $u \in L^2[0, T]$  et  $x_0 \in H$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , le système (1.6) admet une solution unique  $x(t)$  dans  $C([0, T], H)$  donnée par,*

$$x(t) = S(t)x_0 + \mathcal{B}(t)u,$$

où  $\mathcal{B}(t) \in \mathcal{L}(L^2[0, T]; H)$  est l'opérateur linéaire continu défini de la manière suivante:

$$\text{Pour tout } y \in D(A^*), \quad (\mathcal{B}(t)u, y) = \int_0^t \langle b, S^*(t - \xi)y \rangle_{D'(A^*) \times D(A^*)} u(\xi) d\xi.$$

Dans le cas général du système (1.6), il n'existe pas de résultats de stabilisation. Cependant, lorsqu'on se restreint à un retour d'état,  $u(t)$ , linéaire borné (i.e  $u(t) = \langle x(t), h \rangle$ ;  $h \in H$ ), une autre approche de stabilisation a été développée, c'est la stabilisation par placement de spectre.

### 1.7.3 Placement de spectre par feedback linéaire borné

Le problème de placement de spectre, par feedback linéaire borné, pour le système (1.6) peut être formulé de la façon suivante:

Etant donnée une famille de complexes  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ ; existe-t-il un élément  $h \in H$  tel que le système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\langle x(t), h \rangle,$$

ait exactement pour spectre ponctuel la famille  $\{\mu_n\}$ ?

Dans l'affirmative, on dit que le système a son spectre assigné.

L'idée est donc de chercher le retour d'état  $u(t) = \langle \cdot, h \rangle$  de façon à ce que le spectre du système en boucle fermée soit purement ponctuel et à partie réelle strictement négative. Or, ceci ne suffit pas, dans le cas général de la dimension infinie, pour avoir la stabilité du système en boucle fermée. Néanmoins, la stabilité exponentielle peut être assurée dans ce cas, à condition que les fonctions propres du système contrôlé, forment une base de Riesz de  $H$ .

Nous rappelons ci-dessous la définition d'une base de Riesz.

**Définition 1.18 (Base de Riesz)** *Soit  $H$  un espace de Hilbert.*

*Une famille  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  d'éléments de  $H$  est une base de Riesz de  $H$  si tout élément  $x$  de  $H$  peut s'écrire d'une manière unique sous la forme  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \varphi_k$ , avec*

$$M_1 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|_H \leq M_2 \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 \right)^{1/2},$$

*$M_1$  et  $M_2$  étant deux constantes strictement positives.*

Dans le cas de la dimension finie, le problème de placement de spectre a été étudié par W. M. Wonham ([52]) qui a établi que la contrôlabilité exacte du système est une condition nécessaire et suffisante, pour pouvoir placer arbitrairement le spectre du système par feedback.

Cette condition nécessaire et suffisante est-elle encore valable dans le cas des systèmes en dimension infinie?

Il est difficile de donner une réponse à cette question, dans le cas général. Cependant, pour une classe de systèmes, à spectre discret et à entrée bornée, S.H. Sun dans ([48]) a donné une condition nécessaire et suffisante

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\nu_n - \lambda_n}{b_n} \right|^2 < +\infty,$$

où  $\lambda_{n \in \mathbb{N}}$  représente le spectre de l'opérateur  $A$ ,  $\nu_{n \in \mathbb{N}}$  la famille où on veut placer le spectre et  $b_n = (b, \phi_n) \neq 0$ .

Ensuite, plusieurs généralisations de ce résultat ont été faites à d'autres classes de systèmes. Nous reviendrons sur ce point, dans le chapitre IV.

## 2

# Stabilisation d'un objet à structure flexible en rotation

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité, par feedback frontière local, d'un système "objet rigide-structure flexible" en rotation (fig 2.1). Ce modèle a été introduit par J. Baillieul et M. Levi [1] pour modéliser certains systèmes de l'aérospatiale. Il est composé d'un disque au centre duquel est attachée une structure flexible perpendiculairement au plan de celui-ci. Le disque tourne librement autour de son axe et le mouvement de la structure flexible est alors confiné dans un plan perpendiculaire à celui du disque. Le système total est alors régi par une équation aux dérivées partielles non-linéairement couplée avec une équation différentielle ordinaire.

L'objectif de ce travail est de chercher des lois de contrôle qui stabilisent le système dans une configuration à une vitesse angulaire constante et à position neutre pour la barre flexible. Afin de stabiliser ce système, on considère un feedback de moment exercé sur le disque. Simultanément, sur l'extrémité libre de la structure flexible, on applique soit un feedback de force, soit un feedback de moment, soit les deux à la fois. On montre que dans tous les cas, le système est stabilisable par loi de commande locale. Plus précisément, pour toute vitesse angulaire donnée  $\omega^*$ , inférieure à une certaine constante (déterminée uniquement par les paramètres physiques du système), on propose une loi de commande locale qui stabilise exponentiellement le système (mais pas uniformément) de manière à ce que les vibrations de celui-ci soient supprimées (structure flexible perpendiculaire au disque), et que le système total tourne autour de son axe à la vitesse angulaire constante  $\omega^*$ . Ce résultat sera prouvé en utilisant le principe d'invariance de Lasalle, ainsi que certains résultats connus de Chen ([7], [8]) et de F. Conrad-M. Pierre [10].

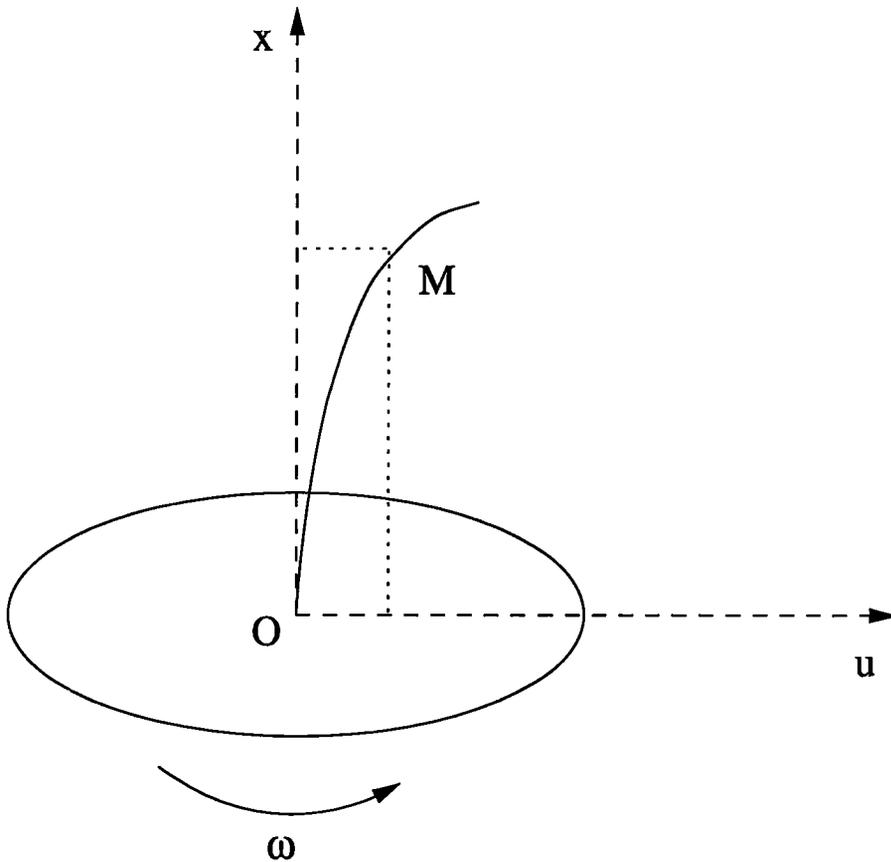


Figure 2.1. système rigide-flexible

Il a été montré dans [1], qu'en présence de frottements structurels, le système non contrôlé possède toujours un nombre fini de vitesses d'équilibres. Après, Bloch et Titi [5] ont prouvé, pour un cas plus difficile de frottements visqueux, l'existence d'une variété inertielle pour le système non contrôlé.

Xu et Baillieul dans [53], ont montré qu'en présence de frottements (visqueux ou structurels), avec le seul contrôle du couple exercé sur le disque, il existe une vitesse angulaire critique  $\omega_{crit}$  de stabilisation pour le système. Précisément, dans ce cas il n'y a pas de loi de feedback stabilisante lorsque  $\omega^* > \omega_{crit}$ . Pour  $\omega^* < \omega_{crit}$ , ils ont proposé une loi de feedback pour le contrôle du couple qui stabilise exponentiellement le système.

Pour franchir cette vitesse critique  $\omega_{crit}$ , Xu et Sallet [55] ont montré que la stabilisation par feedback du système, pour toute vitesse angulaire  $\omega^*$ , est possible, en ajoutant le contrôle de force sur la frontière libre de la structure flexible. Cependant, le feedback qu'ils ont proposé n'est pas local, et donc difficile à réaliser en pratique.

La stabilisation de certains systèmes similaires a fait l'objet de différentes recherches ces dernières années, voir par exemple [28], [29], [30]. En particulier, dans [29], pour une configuration géométrique différente de la notre, l'auteur a donné deux lois de commande (le contrôle du couple appliqué sur le disque et le contrôle de force sur l'extrémité libre de la structure flexible) qui stabilisent exponentiellement le système pour  $\omega^*$  assez petit. Le même auteur dans [30] a considéré un modèle linéaire simplifié (où seule l'équation de la structure flexible est prise en compte) et a montré que ce système linéaire peut être stabilisé asymptotiquement soit par un feedback de moment frontière, soit par un feedback de force ponctuelle, soit par les deux à la fois. Cependant, la présence de feedback de force a été nécessaire pour obtenir la stabilité exponentielle dans les deux travaux [29] et [30].

Notre principale contribution est de montrer que le système (objet rigide - structure flexible) est exponentiellement stabilisable par feedback frontière (force ou moment appliqués sur l'extrémité libre de la structure flexible), ceci bien sûr avec le feedback du couple exercée sur le disque. Il est à noter que les lois de feedback que nous proposons sont locales. Ceci est important, vu l'intérêt pratique que présente la stabilité exponentielle de tels systèmes.

A la différence de [53], on n'a pas montré l'existence de vitesse critique de stabilisation dans notre cas. Cependant, les simulations numériques qu'on a faites nous amènent à croire à l'existence d'une telle vitesse.

## 2.2 Équations du système et écriture opérationnelle:

Le système est modélisé par les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} + (EI)u_{xxxx} = \rho\omega^2(t)u \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ u_{xx}(1, t) = \Gamma_1(t) \\ u_{xxx}(1, t) = \Gamma_2(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{\Gamma_3(t) - 2\omega(t)\langle u, u_t \rangle_{L^2}}{I_d + \|u\|_{L^2}^2}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $I_d$ ,  $EI$  et  $\rho$  désignent respectivement le moment d'inertie du disque, la rigidité en flexion et la densité linéique de la structure flexible.

$\omega(t)$  étant La vitesse angulaire du disque à l'instant  $t$ .

$u(x, t)$  représente le déplacement latéral, à l'instant  $t$ , d'un point de la poutre d'abscisse  $x$ .

$\Gamma_1(t)$  et  $\Gamma_2(t)$  représentent respectivement la commande du moment et la commande de la force appliqués à l'extrémité libre de la structure flexible.

$\Gamma_3(t)$  représente la commande du couple exercé sur le disque.

Pour simplifier, la longueur  $L$  de la tige est choisie  $L = 1$ .

Pour l'espace de phase du système, on considère l'espace de Hilbert réel  $E$  :

$$E = H_0^2 \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R} = H \times \mathbb{R},$$

où  $L^2(0, 1)$  est l'espace des fonctions de carré sommable muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \rho \int_0^1 fg dx.$$

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels muni du produit scalaire usuel et  $H_0^n$  est défini par:

$$H_0^n = \{f \in L^2(0, 1); f, f', \dots, f^{(n)} \in L^2(0, 1); f(0) = f_x(0) = 0\}.$$

$H_0^2$  sera muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H_0^2} = (EI) \int_0^1 f_{xx} g_{xx} dx.$$

L'état du système à l'instant  $t$  sera décrit par deux fonctions  $u(\cdot, t)$  et  $u_t(\cdot, t)$  définies par:

$$u(\cdot, t) : x \rightarrow u(x, t),$$

$$u_t(\cdot, t) : x \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(x, t).$$

On note  $\Phi(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t))'$ .

**Définition 2.1** *Etant donné  $\omega^* \in \mathbb{R}$ , on dit que la loi de commande,  $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$  stabilise globalement le système (2.1) autour d'une position d'équilibre  $(0, 0, \omega^*) \in E$ , si pour toute condition initiale  $(\Phi_0, \omega_0)'$  appartenant à un certain sous ensemble dense de  $E$ , le système (2.1) bouclé par cette loi de commande admet une solution unique  $(\Phi(\cdot), \omega(\cdot))' \in C([0, +\infty), E)$  telle que:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(\Phi(t), \omega(t) - \omega^*)'\|_E = 0$ .*

Afin de stabiliser le système (2.1), on propose les lois de commande suivantes:

$$\boxed{\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= -\alpha u_{tx}(1, t); & \alpha &\geq 0 \\ \Gamma_2(t) &= \beta u_t(1, t); & \beta &\geq 0 \\ \Gamma_3(t) &= -\gamma(\omega - \omega^*); & \gamma &> 0 \end{aligned}} \quad (2.2)$$

Avec  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .

**Remarque 8** *Cette hypothèse assure la présence d'au moins l'une des deux commandes sur l'extrémité libre de la structure flexible.*

Posons  $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \Phi_2(t))$ , le système bouclé peut alors s'écrire:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2(t)\Phi_1(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\omega}(t) = \frac{-\gamma(\omega(t) - \omega^*) - 2\omega(t)\langle \Phi_1(t), \Phi_2(t) \rangle_{L^2}}{I_d + \|\Phi_1(t)\|_{L^2}^2}, \end{cases} \quad (2.3)$$

où l'opérateur  $A$  est défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(EI)}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \end{pmatrix},$$

De domaine

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H_0^4 \times H_0^2 : \begin{aligned} f_{xx}(1) + \alpha g_x(1) &= 0 \\ f_{xxx}(1) - \beta g(1) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Notons, tout d'abord, que l'opérateur  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  de contractions exponentiellement stable ([7], [8]).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant:

**Théorème 2.1** *Supposons que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Alors pour toute vitesse angulaire  $|\omega^*| < \sqrt{12EI/\rho}$ , le système bouclé (2.3) est globalement stable. Plus précisément, pour chaque condition initiale  $(\Phi_0, \omega_0)' \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$ , la solution  $(\Phi(t), \omega(t) - \omega^*)$  de (2.3) tend exponentiellement vers zéro dans  $E$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Remarque 9** *Physiquement, le théorème (1.1) signifie que le feedback (2.2) supprime les vibrations de la structure flexible tout en maintenant le système global en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega^*$ .*

## 2.3 Existence globale des solutions:

Tout d'abord, les deux équations de (2.3) peuvent être écrites sous forme d'une équation semi-linéaire dans l'espace de Hilbert  $E$  de la façon suivante

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \tilde{A}\Phi(t) + \mathcal{G}(\Phi(t), \omega(t)), \quad (2.4)$$

où l'opérateur linéaire  $\tilde{A}$  et l'application non linéaire  $\mathcal{G}$  sont donnés respectivement par

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathcal{G}(\Phi, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 \Phi_1 \\ \frac{-\gamma(\omega - \omega^*) - 2\omega \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_{L^2}}{I_d + \|\Phi_1\|_2^2} \end{pmatrix}.$$

D'après [53],  $\mathcal{G}(\Phi, \omega)$  est continûment différentiable de  $E$  dans  $E$ , d'autre part,  $\tilde{A}$  est générateur d'un semi-groupe sur  $E$ , en utilisant le théorème (I.10) du

chapitre I, on peut donc conclure à l'existence des solutions faibles de (2.8), on a :

Pour toute condition initiale  $(\Phi_0, \omega_0)' \in E$ , il existe  $T > 0$  (dépendant de  $(\phi_0, \omega_0)'$ ), il existe une solution faible unique  $(\Phi(t), \omega(t))' \in C([0, T]; E)$  de (2.8) et qui est donnée par la formule de la variation de la constante [32]:

$$\begin{pmatrix} \Phi(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = e^{t\tilde{A}} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\xi)} \mathcal{G}(\Phi(\xi), \omega(\xi)) d\xi.$$

Pour montrer que les solutions de (2.8) existent globalement sur  $[0, +\infty)$ , on considère la fonction de Lyapunov  $V : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$V(\Phi, \omega) = \frac{1}{2} \left( I_d(\omega - \omega^*)^2 + (\omega - \omega^*)^2 \int_0^1 \rho u^2 dx + \int_0^1 [\rho u_t^2 + EI u_{xx}^2] dx - \omega^{*2} \int_0^1 \rho u^2 dx \right). \quad (2.5)$$

Tout d'abord, nous allons montrer que la fonction  $V$  est coercive.

Soit  $z \in H_0^2$ , on a l'inégalité suivante

$$\|z\|_2^2 \leq \frac{1}{12} \|z_{xx}\|_2^2. \quad (2.6)$$

En effet,  $z$  est donné par:

$$z(x) = \int_0^x (x - \xi) z_{\xi\xi}(\xi) d\xi.$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :

$$\begin{aligned} |z(x)|^2 &\leq \int_0^x (x - \xi)^2 d\xi \int_0^x |z_{\xi\xi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{x^3}{3} \int_0^1 z_{\xi\xi}^2(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Après intégration, on a l'inégalité (2.6).

On en déduit la minoration suivante pour la fonction  $V$ :

$$V(\Phi, \omega) \geq \frac{1}{2} I_d(\omega - \omega^*)^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \rho u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \rho(\omega - \omega^*)^2 u^2 + \left( EI - \frac{\rho\omega^{*2}}{12} \right) u_{xx}^2 \right] dx. \quad (2.7)$$

Si la condition du Théorème (1.1) est satisfaite, i.e,  $|\omega^*| < \sqrt{12(EI)/\rho}$ , alors le membre de droite de l'inégalité (2.7) est strictement positif pour tout  $(\Phi_0, \omega_0)' \neq 0$ , ce qui prouve que  $V$  est coercive.

Nous avons le résultat suivant:

**Lemme 2.1** *Pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in H \times \mathbb{R}$ , la solution  $(\Phi(t), \omega(t))$  existe globalement et est bornée.*

**Preuve**

Il est facile de vérifier que pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$ ,

$$\frac{dV}{dt}(\Phi(t), \omega(t)) = -\gamma(\omega(t) - \omega^*)^2 - (EI) [\alpha u_{tx}^2(1, t) + \beta u_t^2(1, t)] \leq 0, \forall t \geq 0 \quad (2.8)$$

Donc pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$ , la solution  $(\phi(t), \omega(t))$  (qui est une solution classique) existe globalement et est bornée.

En fait, grâce au même théorème (I.10), le résultat reste vrai pour toute condition initiale dans  $H \times \mathbb{R}$ .

**Définition 2.2** *Pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$  on définit:*

- l'orbite positive  $\mathcal{O}^+(\Phi_0, \omega_0)$  issue de  $(\Phi_0, \omega_0)$  par:

$$\mathcal{O}^+(\Phi_0, \omega_0) = \{(\Phi(t), \omega(t))_{t \geq 0}\},$$

- L'ensemble  $\omega$ -limite  $\Gamma^+(\Phi_0, \omega_0)$  ( éventuellement vide) par :

$$\Gamma^+(\Phi_0, \omega_0) = \{\psi \in E ; \exists t_n / (\Phi(t_n), \omega(t_n)) \xrightarrow{t_n \rightarrow +\infty} \psi\}.$$

On va maintenant énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite.

**Lemme 2.2** Soit  $g(t)$  une fonction  $C^1$  définie sur  $[0, +\infty)$  telle que  $g \in L^2[0, +\infty)$ . Si la fonction  $g(t)$  ainsi que sa dérivée  $g'(t)$  sont bornées sur  $[0, +\infty)$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0.$$

Ce lemme entraîne le lemme suivant:

**Lemme 2.3** Pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$ , l'orbite positive  $\mathcal{O}^+(\Phi_0, \omega_0)$  est précompacte dans  $E$ ; de plus la solution (classique) de (2.3) satisfait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = \omega^*.$$

**Preuve**

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution du sous système de (2.3) peut être écrite sous la forme

$$\Phi(t) = e^{tA}\Phi_0 + \int_0^t \omega^2(\xi)e^{(t-\xi)A}B(\Phi(\xi))d\xi,$$

où  $e^{tA}$  est le semi-groupe (exponentiellement stable) engendré par  $A$ .

Posons maintenant  $h(t) = \omega^2(t)B\Phi(t)$ , étant donné que la trajectoire  $\{(\Phi(t), \omega(t))\}_{t \geq 0}$  est bornée dans  $E$  et vu que l'injection canonique  $i : H_0^2 \rightarrow L^2$  est compacte, l'image de  $h$  est donc contenue dans un compact de  $E$ .

le lemme suivant dû à Weeb permet alors de conclure que la trajectoire est précompacte dans  $E$ .

**Lemme 2.4** (G.F. Weeb)(c.f. [15] .p30 ) Soit  $X$  un Banach réel et  $T(t)$  un semi-groupe  $C_0$ - sur  $X$  exponentiellement stable, i.e.,  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}$ , pour certains  $M, \alpha > 0$ , et pour tout  $t \geq 0$ . Étant donnée  $h \in L^\infty(\mathbb{R}^+, X)$  et un compact  $K$  de  $X$  tels que  $h(t) \in K$  p.p sur  $\mathbb{R}^+$ , alors pour chaque  $\varphi \in X$ , la fonction  $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  définie par:

$$\Lambda(t) = T(t)\varphi + \int_0^t T(s)h(t-s)ds$$

admet son image  $\Lambda(\mathbb{R}^+)$  précompacte dans  $X$ .

Pour tout  $(\Phi_0, \omega_0) \in \mathcal{D}(A) \times \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Gamma^+(\Phi_0, \omega_0)$  est donc non vide.

De la relation (2.8), on déduit que la fonction  $V(\Phi(t), \omega(t))$  est décroissante donc converge vers une certaine constante  $l \geq 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ ; d'autre part, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (\omega(t) - \omega^*)^2 dt$  est convergente et comme la solution  $(\Phi(t), \omega(t))$  est bornée dans  $E$  et  $\omega(t)$  satisfait (2.3), le lemme (1.2) permet de conclure que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = \omega^*.$$

## 2.4 Stabilité uniforme d'un sous-système:

Dans cette section, on considère le système linéaire suivant qui est un sous-système du système (2.3);

$$\begin{cases} \rho u_{tt} + (EI)u_{xxxx} = \rho \omega^{*2} u \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ u_{xx}(1, t) = -\alpha u_{tx}(1, t) \\ u_{xxx}(1, t) = \beta u_t(1, t) \\ \Phi_0 = (u(\cdot, 0), u_t(\cdot, 0))' \in \mathcal{D}(A). \end{cases} \quad (2.9)$$

On va montrer que ce système est exponentiellement stable dans  $H$ .

Notons que le système ci-dessus avec  $\omega^* = 0$  représente les vibrations d'une tige suivant le modèle d'Euler-Bernoulli, la stabilité d'un tel système a été établie par F. Conrad et M. Pierre dans ([10]), la même idée de démonstration peut être développée pour montrer le résultat suivant:

**Théorème 2.2** *Sous les conditions du théorème (1.1), Le système (2.9) est exponentiellement stable.*

La preuve de ce théorème sera faite en plusieurs étapes, tout d'abord, on va établir que les solutions de (2.9) définissent un semi-groupe de contractions sur  $H$  (muni d'une norme adéquate), ce qui nous permettra de caractériser l'ensemble  $\omega$ -limite puis d'établir la stabilité forte, enfin la stabilité

exponentielle sera une conséquence du théorème de perturbation compacte de R. Trigiani cité dans le chapitre I [49].

### 1-propriété de semi-groupe de contraction

Tout d'abord, le système (2.9) peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante:

$$\dot{\Phi}(t) = A_1 \Phi(t), \quad \Phi(0) = \Phi_0.$$

où  $A_1$  est défini par:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \omega^{*2} & 0 \end{pmatrix},$$

Avec :

$$D(A_1) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H_0^4 \times H_0^2 : \begin{array}{l} f_{xx}(1) + \alpha g_x(1) = 0 \\ f_{xxx}(1) - \beta g(1) = 0 \end{array} \right\}.$$

On a le lemme suivant:

**Lemme 2.5** *L'opérateur  $A_1$  est générateur d'un semi-groupe  $C_0$  de contractions sur  $H$ .*

### Preuve

Définissons sur  $H$  une nouvelle norme notée  $\|\cdot\|_*$  par

$$\|\phi(t)\|_*^2 = V(\Phi(t), \omega^*) = \|\Phi(t)\|_H^2 - \omega^{*2} \|\Phi_1(t)\|_{L^2}^2.$$

En raison de l'inégalité (2.7), il est clair que sous l'hypothèse  $|\omega^*| < \sqrt{12EI/\rho}$ , ceci définit bien une norme équivalente à celle de  $H$ .

Notons que  $\|\phi\|_*^2$  est obtenu en posant  $\omega(t) = \omega^*$  dans l'expression (2.5) (à une constante près).

l'opérateur  $A_1 = A + \omega^{*2}B$  où  $B$  est l'opérateur linéaire borné de  $H$  dans  $H$  déjà défini,  $A_1$  est donc obtenu par une perturbation linéaire bornée de  $A$  qui, lui même, est générateur infinitésimal d'un semigroupe  $C_0$  sur  $H$  noté  $e^{tA_1}$  ([7]; [8]), le théorème (I.6) permet de dire qu'il en est de même pour l'opérateur  $A_1$ .

La contraction vient du fait que  $\frac{d}{dt}(\|\Phi(t)\|_*^2) \leq 0$  le long des solutions classiques de (2.9).  $\square$

**2-stabilité forte**

On va montrer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA_1} \phi_0\|_* = 0$ ;  $\forall \phi_0 \in H$ .

Comme  $D(A_1)$  est dense dans  $H$ , il suffit de prendre  $\phi_0 \in D(A_1)$ .

D'après le principe d'invariance de Lasalle (théorème I.12), pour tout  $\Phi_0 \in D(A_1)$ , on a

$$-\Gamma^+(\Phi_0) \neq \emptyset;$$

$$-\Gamma^+(\Phi_0) \subset D(A_1);$$

$$-\|\phi(t)\|_* \text{ est constante dans } \Gamma^+(\Phi_0).$$

Montrons que  $\Gamma^+(\phi_0) = \{0\}$ .

Soit alors  $\tilde{\phi}_0 \in \Gamma^+(\phi_0) \subset D(A_1)$ , et soit  $\tilde{\phi}(t) = (\tilde{u}(\cdot, t), \tilde{u}_t(\cdot, t)) := e^{tA_1} \tilde{\phi}_0$ , la solution de (2.9) issue de  $\tilde{\phi}_0$ .

D'après (2.8), on a

$$\frac{d}{dt} (\|\tilde{\Phi}(t)\|_*^2) = -2EI [\alpha \tilde{u}_{tx}^2(1, t) + \beta \tilde{u}_t^2(1, t)] = 0.$$

Ainsi,

Si  $\alpha = 0$ , alors  $\tilde{u}_t(1, t) \equiv 0$ ,

si  $\beta = 0$ , alors  $\tilde{u}_{tx}(1, t) \equiv 0$ .

**Remarque 10** Dans le cas où  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ , le résultat se déduit des deux cas précédents.

On va traiter le cas  $\beta = 0$ , (le cas  $\alpha = 0$  se traite de la même manière).

**cas  $\beta = 0$ :**

La fonction  $\tilde{u}(x, t)$  vérifie alors le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \tilde{u}_{tt} + (EI) \tilde{u}_{xxxx} = \rho \omega^{*2} \tilde{u} \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}_x(0, t) = 0 \\ \tilde{u}_{xx}(1, t) = \tilde{u}_{xxx}(1, t) = 0 \\ \tilde{u}_{tx}(1, t) = 0 \\ \tilde{\Phi}_0 = (\tilde{u}(\cdot, 0), \tilde{u}_t(\cdot, 0))' \in \Gamma^+(\Phi_0). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

On a la proposition suivante

**Proposition 2.1** *La seule solution du système (2.10) est la solution nulle.*

preuve

Sur l'espace  $L^2(0, 1)$ , on introduit l'opérateur  $B_0$  de domaine  $D(B_0)$  définis par :

$$B_0 = \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \omega^{*2} I,$$

$$D(B_0) = \left\{ f \in H_0^4 : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \right\}.$$

On a le lemme suivant

**Lemme 2.6** *L'opérateur  $B_0$  est maximal monotone, auto-adjoint et à résolvante compacte.*

**Preuve:**(voir annexe)

Il existe donc une suite  $(\varphi_n, \mu_n)$  de fonctions-valeurs propres de  $B_0$  telles que:

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \mu_{n+1} \dots \leq \infty,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n \in D(B_0), \\ \frac{EI}{\rho} \varphi_{nxxxx} - \omega^{*2} \varphi_n = \mu_n \varphi_n. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Pour des raisons de simplification, on choisit  $\varphi_n$  telle que:

$$\|\varphi_n\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}.$$

Les propriétés de  $\mu_n$  et  $\varphi_n$  sont énoncées dans le lemme ci-après:

**Lemme 2.7** *Pour tout  $n \geq 1$  on a :*

- i) *La valeur propre  $\mu_n$  est simple*
- ii) *La fonction propre  $\varphi_n$  est telle que  $\varphi_{nx}(1) \neq 0$ .*

**preuve:** (voir [10].)

Considérons maintenant l'opérateur  $A_0$  défini par:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \omega^{*2} & 0 \end{pmatrix},$$

de domaine

$$D(A_0) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H_0^4 \times H_0^2 : f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \right\}.$$

On a le lemme suivant:

**Lemme 2.8** *L'opérateur  $A_0$  a les propriétés suivantes:*

- i) *La résolvante de  $A_0$  est compacte.*
- ii)  *$A_0$  est générateur d'un groupe d'isométries  $e^{tA_0}$  sur  $H$ .*
- iii)  *$A_0$  est anti-adjoint.*

**Preuve:**(voir annexe.)

Il découle du lemme précédent que le spectre de  $A_0$  est discret et imaginaire pur, et que ses fonctions propres  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forment une base de Riez de l'espace  $H$ . On montre, de plus, que c'est une base orthonormée.

En effet, le spectre de  $B_0$  étant simple, il en est de même pour celui de  $A_0$ , Ainsi la famille  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale dans  $H$ .

D'autre part,

$$\lambda \in \sigma(A_0) \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in D(A_0) : A_0 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g \\ -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \omega^{*2} f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \omega^{*2} f = \lambda^2 f, \\ f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0, \\ g = \lambda f. \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} B_0 f = -\lambda^2 f \\ f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow -\lambda_n^2 = \mu_n$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm n} = \pm i \sqrt{\mu_n}.$$

Soit  $\psi_n$  la fonction propre de  $A_0$  associée à  $\lambda_n$ , on a alors:

$$\psi_{\pm n} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\varphi_n}{\lambda_n} \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$

Comme,  $\|\varphi_n\|_2^2 = \frac{1}{2}$ , on vérifie facilement, en utilisant (2.11), que

$$\|\psi_n\|_*^2 = 1.$$

La famille  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  est donc une base orthonormée de l'espace H.

On va maintenant utiliser ce résultat et le fait que  $\tilde{u}_{tx}(1, t) \equiv 0$  pour montrer que  $\tilde{\phi}(t) \equiv 0$ .

D'après ce qui précède, tout élément  $\tilde{\phi}_0 \in D(A_0)$  s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\tilde{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \psi_n; \quad c_0 = 0,$$

ainsi,

$$\tilde{\phi}(t) = e^{tA_0} \tilde{\phi}_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{t\lambda_n} \psi_n,$$

avec  $c_{-n} = \bar{c}_n$ ; car  $\tilde{\phi}(t)$  est réelle.

Si on pose  $c_n = a_n + ib_n$ , alors  $c_{-n} = a_n - ib_n$   
et comme

$$c_n e^{t\lambda_n} = (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t - b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) + i(b_n \cos \sqrt{\mu_n} t + a_n \sin \sqrt{\mu_n} t)$$

on a donc

$$\tilde{u}(\cdot, t) = 2 \sum_{n>0} (b_n \cos \sqrt{\mu_n} t + a_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \frac{\varphi_n}{\sqrt{\mu_n}}, \quad (i)$$

et

$$\tilde{u}_t(\cdot, t) = 2 \sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t - b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \varphi_n, \quad (ii)$$

où les séries (i) et (ii) convergent respectivement dans  $H_0^2$  (muni de la nouvelle norme) et dans  $L^2$ .

On va maintenant montrer que la série (ii) converge dans  $H_0^2$  uniformément en  $t$ .

En effet

$$\tilde{u}_1 = 2 \sum_{n \geq 1} a_n \varphi_n \in H_0^2 \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} \in D(A_0).$$

D'autre part,  $\varphi_n$  étant orthogonale dans  $H_0^2$ , et  $\|\varphi_n\|_*^2 = \mu_n \|\varphi_n\|_2^2 = \frac{\mu_n}{2}$ ,  
d'où

$$\sum_{n \geq 1} a_n^2 \mu_n < \infty.$$

Donc la série  $\sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t) \varphi_n$  converge dans  $H_0^2$  (uniformément en  $t$ ).

Montrons qu'il en est de même pour  $\sum_{n>0} (b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \varphi_n$ .

Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{n>0} b_n^2 \mu_n < \infty,$$

or

$$\tilde{\phi}_0 \in D(A_0) \Rightarrow \tilde{u}_0 \in D(B_0) \Rightarrow B_0 \tilde{u}_0 \in L^2$$

il vient,

$$\sum_{n>0} \langle B_0 \tilde{u}_0, \varphi_n \rangle_2^2 < \infty.$$

Comme

$$\langle B_0 \tilde{u}_0, \varphi_n \rangle_2 = \langle \tilde{u}_0, B_0 \varphi_n \rangle_2 = \mu_n \langle \tilde{u}_0, \varphi_n \rangle_2,$$

et

$$\langle \tilde{u}_0, \varphi_n \rangle_2 = \frac{b_n}{\sqrt{\mu_n}},$$

donc

$$\langle B_0 \tilde{u}_0, \varphi_n \rangle_2 = b_n \sqrt{\mu_n},$$

Ceci entraîne

$$\sum_{n>0} b_n^2 \mu_n < \infty.$$

Et la série (ii) converge uniformément en  $t$  dans  $H_0^2(0, 1)$ .

Par continuité de la trace  $u \rightarrow u_x(1)$  dans  $H_0^2$ , on a:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tx}(1, t) &= 2 \sum_{n>0} (a_n \cos \sqrt{\mu_n} t - b_n \sin \sqrt{\mu_n} t) \varphi_{nx}(1, t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i\lambda_n} \varphi_{nx}(1). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\mu_{n+1}} - \sqrt{\mu_n}) = +\infty,$$

d'après les inégalités d'Ingham ([57]; p162 th5), on a

$$\int_0^T \tilde{u}_{tx}^2(1, t) dt \geq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n \varphi_{nx}(1)|^2,$$

pour une certaine constante  $C$  strictement positive.

Or

$$\tilde{u}_{tx}(1, t) = 0; \quad \forall t \geq 0,$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n \varphi_{nx}(1)|^2 = 0.$$

Comme  $\varphi_{nx}(1) \neq 0$ ;  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , (d'après le lemme 2.2), on a donc

$$c_n = 0; \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Finalement  $\tilde{\phi}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ .

□

### 3-stabilité uniforme

Maintenant qu'on a établi la stabilité forte du système (2.9), la stabilité exponentielle est une conséquence du théorème de R. Triggiani (théorème I.16.)

En effet, l'opérateur  $A_1 = A + \omega^{*2}B$  est générateur d'un  $C_0$  semi-groupe  $S_{A_1}(t)$  fortement stable, de plus l'opérateur  $B$  est compact et le semi-groupe engendré par  $A$  est exponentiellement stable. D'où le résultat.

## 2.5 Stabilité du système initial

On va maintenant conclure à la stabilité du système de départ en utilisant le lemme de Gronwall qu'on va rappeler ci-dessous:

**Lemme 2.9 (Gronwall)** Soit  $T > 0, \lambda \in L^1(0, T), \lambda \geq 0$  p.p et  $C \geq 0$ . Soit  $\varphi \in L^\infty(0, T), \varphi \geq 0$  p.p., tel que:  $\varphi(t) \leq C + \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$ , pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

Alors on a

$$\varphi(t) \leq C e^{\int_0^t \lambda(s)ds},$$

pour presque tout  $t \in (0, T)$ .

Soit maintenant  $T > 0$ , la solution de la première équation de (2.3) est donnée par

$$\Phi(t) = e^{(t-T)(A+\omega^{*2}B)}\Phi(T) + \int_T^t e^{(t-\tau)(A+\omega^{*2}B)}(\omega^2(\tau) - \omega^{*2})B\Phi(\tau)d\tau,$$

pour tout  $t \geq T$ .

Or, le terme  $(\omega^2(\tau) - \omega^{*2})$  peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant  $T$  assez grand,

d'autre part

$$\|e^{t(A+\omega^{*2}B)}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M e^{-\alpha t},$$

donc

$$\|\phi(t)\| \leq M e^{-\alpha(t-T)} \|\phi(T)\| + \epsilon M \int_T^t e^{-\alpha(t-\xi)} \|\phi(\xi)\| d\xi$$

ce qui entraîne

$$\|e^{\alpha t} \phi(t)\| \leq M e^{\alpha T} \|\phi(T)\| + \epsilon M \int_T^t e^{\alpha \xi} \|\phi(\xi)\| d\xi$$

Comme la solution  $\phi(t)$  est bornée pour  $t \geq 0$ , le lemme ci-dessus appliqué à la fonction  $\varphi(t) = \|e^{\alpha t} \phi(t)\|$  nous donne :

$$\|e^{\alpha t} \phi(t)\| \leq M e^{\alpha T} \|\phi(T)\| e^{\epsilon M(t-T)}$$

D'où:

$$\|\phi(t)\| \leq M \|\phi(T)\| e^{\alpha(T-t)} e^{\epsilon M(t-T)}$$

$$\|\phi(t)\| \leq M \|\phi(T)\| e^{-(\alpha - \epsilon M)(t-T)} \quad \forall t \geq T.$$

En choisissant  $\epsilon$  tel que  $(\alpha - \epsilon M) > 0$ , on a le résultat.  $\square$

En revenant à la deuxième équation de (2.3), on peut montrer d'une façon analogue que le terme  $(\omega(\tau) - \omega^*)$  tend aussi exponentiellement vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En effet,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(t) &= \frac{-\gamma(\omega(t) - \omega^*) - 2\omega(t)\langle \Phi_1(t), \Phi_2(t) \rangle_{L^2}}{I_d + \|\Phi_1(t)\|_{L^2}^2} \\ &= -\frac{\gamma}{I_d}(\omega(t) - \omega^*) + \frac{\gamma(\omega(t) - \omega^*)\|\phi_1(t)\|_2^2 - 2I_d\omega(t)\langle \Phi_1(t), \Phi_2(t) \rangle_{L^2}}{I_d(I_d + \|\Phi_1(t)\|_{L^2}^2)} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \omega(t) - \omega^* &= e^{-\frac{\gamma}{I_d}(t-T)}(\omega(T) - \omega^*) \\ &+ \int_T^t e^{-\frac{\gamma}{I_d}(t-\xi)} \left( \frac{\gamma(\omega(\xi) - \omega^*)\|\phi_1(\xi)\|_2^2 - 2I_d\omega(\xi)\langle \Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi) \rangle_{L^2}}{I_d(I_d + \|\Phi_1(\xi)\|_{L^2}^2)} \right) d\xi \end{aligned}$$

On a donc l'estimation suivante:

$$|\omega(t) - \omega^*| \leq e^{-\frac{\gamma}{I_d}(t-T)} |\omega(T) - \omega^*| + \int_T^t e^{-\frac{\gamma}{I_d}(t-\xi)} \left( \frac{\gamma}{I_d} (|\omega(\xi) - \omega^*|) + \frac{2|\omega(\xi)|}{I_d} \|\Phi_1(\xi)\| \|\Phi_2(\xi)\| \right) d\xi$$

Or

$$\|\Phi_1(\xi)\| \|\Phi_2(\xi)\| \leq \|\Phi(\xi)\|_H^2 \leq (M \|\phi(T)\|)^2 e^{-2(\alpha - \epsilon M)(\xi - T)}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par  $e^{\frac{\gamma}{I_d}t}$ , on établit facilement qu'il existe deux constantes strictement positives  $M^*$  et  $\alpha^*$  telles que

$$|\omega(t) - \omega^*| \leq M^* e^{-\alpha^*(t-T)}.$$

□

## 2.6 Simulations numériques

Cette section est consacrée à l'étude numérique du système. Dans un premier temps, on va étudier le sous-système (2.9), celui-ci sera donc discrétisé moyennant la méthode des éléments finis

On commence tout d'abord par décrire la méthode:

On subdivise l'intervalle  $[0, 1]$  en  $N$  intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  de longueur  $h$ , ( $x_i = ih; Nh = 1$ ). Sur chaque noeud  $x_i$ , les inconnues sont  $u_i$  et  $\partial u_i$  qui représentent respectivement les valeurs approchées de  $u$  et de sa dérivée au point  $x_i$ .

Rappelons que les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite sur l'intervalle  $[0, 1]$  sont données par:

$$\begin{cases} N_1(\xi) = (\xi - 1)^2(2\xi + 1), & N_2(\xi) = \xi(\xi - 1)^2, \\ N_3(\xi) = \xi^2(3 - 2\xi), & N_4(\xi) = \xi^2(\xi - 1), \end{cases} \quad (2.14)$$

pour  $\xi \in [0, 1]$ .

Sur l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , les fonctions d'interpolation cubiques d'Hermite sont notées

$$N_1^i(x), N_2^i(x), N_3^i(x), N_4^i(x),$$

et sont obtenues respectivement à partir de  $N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)$  par la transformation affine qui transforme  $[0, 1]$  en  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Ainsi, la fonction  $u(\cdot, t)$  est approchée de la manière suivante:

Pour  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,

$$u(x, t) = N_1^i(x)u_i(t) + N_2^i(x)\partial u_i(t) + N_3^i(x)u_{i+1}(t) + N_4^i(x)\partial u_{i+1}(t).$$

Pour  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,

$$u(x, t) = N_1^{i-1}(x)u_{i-1}(t) + N_2^{i-1}(x)\partial u_{i-1}(t) + N_3^{i-1}(x)u_i(t) + N_4^{i-1}(x)\partial u_i(t).$$

A partir de ces fonctions, on construit les fonctions  $\tilde{N}_1^i(x), \tilde{N}_2^i(x), i = 1, \dots, N$ , définies sur  $[0, 1]$ , et vérifiant les deux premières conditions au bord de (2.9), à savoir

$$\tilde{N}_1^j(0) = \tilde{N}_2^j(0) = \tilde{N}_{1x}^j(0) = \tilde{N}_{2x}^j(0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Ces fonctions  $\tilde{N}_1^i(x), \tilde{N}_2^i(x), i = 1, \dots, N$  sont définies de la façon suivante:

Pour  $i = 1, \dots, N - 1$ ,

$$\tilde{N}_1^i(x) = \begin{cases} N_3^{i-1}(x) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ N_1^i(x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{N}_2^i(x) = \begin{cases} N_4^{i-1}(x) & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ N_2^i(x) & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour  $i = N$ ,

$$\tilde{N}_1^N(x) = \begin{cases} N_3^{N-1}(x), & \text{pour } x \in [x_{N-1}, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\tilde{N}_2^N(x) = \begin{cases} N_4^{N-1}(x), & \text{pour } x \in [x_{N-1}, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,  $u(., t)$  peut être approchée sur  $[0, 1]$ , de la façon suivante:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{N}_1^j(x) u_j(t) + \sum_{j=1}^N \tilde{N}_2^j(x) \partial u_j(t).$$

Notons que pour tout  $i = 1, \dots, N$ , pour tout  $j \neq i - 1; i; i + 1$ ,

$\tilde{N}_1^i(x)$  est orthogonale à  $\tilde{N}_1^j(x)$  et à  $\tilde{N}_2^j(x)$ , et que les fonctions  $\tilde{N}_1^i(x)$  et  $\tilde{N}_2^i(x)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), sont linéairement indépendantes et forment ainsi une base de l'espace d'interpolation  $V_h$  de dimension  $2N$ .

Reprenons la première équation de (2.9), en multipliant cette équation par  $v \in V_h$  et en intégrant entre 0 et 1, on obtient

$$\int_0^1 u_{tt} v dx + \frac{EI}{\rho} \int_0^1 u_{xx} v_{xx} dx - \omega^2 \int_0^1 u v dx + \frac{EI}{\rho} (\alpha u_{tx}(1, t) v_x(1) + \beta u_t(1, t) v(1)) = 0.$$

En prenant successivement pour  $v$ , chacun des  $2N$  éléments de la base des fonctions d'interpolation, on aboutit à un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues de la forme suivante

$$M \frac{d^2}{dt^2} U_{2N} + C \frac{d}{dt} U_{2N} + K U_{2N} = 0, \quad (2.15)$$

où le vecteur  $U_{2N}(t)$  est donné par

$$U_{2N}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \\ \partial u_1(t) \\ \vdots \\ \partial u_N(t) \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $M, K$  sont symétriques, tridiagonales par bloc, et la matrice  $C$  est une matrice diagonale.

### Calcul de la matrice de masse $M$ , de la matrice de rigidité $K$ , et de la matrice $C$

La matrice  $M$  est donnée par:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

où

$$M_{11} = h \begin{pmatrix} \frac{26}{35} & \frac{9}{70} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{9}{70} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{26}{35} & \frac{9}{70} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{9}{70} & \frac{13}{35} \end{pmatrix},$$

$$M_{12} = M_{21} = h^2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{-13}{420} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{13}{420} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{-13}{420} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{13}{420} & \frac{-11}{210} \end{pmatrix},$$

et

$$M_{22} = h^3 \begin{pmatrix} \frac{2}{105} & \frac{-1}{140} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{140} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{-1}{140} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{140} & \frac{1}{105} \end{pmatrix}.$$

la matrice  $K$  est donnée par

$$K = \frac{EI}{\rho} \tilde{K} - \omega^{*2} M,$$

où la matrice  $\tilde{K}$  est telle que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} \end{pmatrix},$$

avec

$$\tilde{K}_{11} = \frac{1}{h^3} \begin{pmatrix} 24 & -12 & 0 & \cdots & 0 \\ -12 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 24 & -12 \\ 0 & \cdots & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{K}_{12} = \tilde{K}_{21} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ -6 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 6 \\ 0 & \cdots & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{K}_{22} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 8 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la matrice  $C$  sont telles que

$$C(N, N) = \frac{EI}{\rho} \beta, \quad C(2N, 2N) = \frac{EI}{\rho} \alpha, \quad C(i, j) = 0 \quad \forall (i, j) \notin \{(N, N); (2N, 2N)\}.$$

On a donc à résoudre l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^{2N}$  dont l'inconnue est le vecteur  $U_{2N}(t)$ .

En posant,  $V = \dot{U}_{2N}$  et  $\phi = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ , l'équation (2.15) s'écrit:

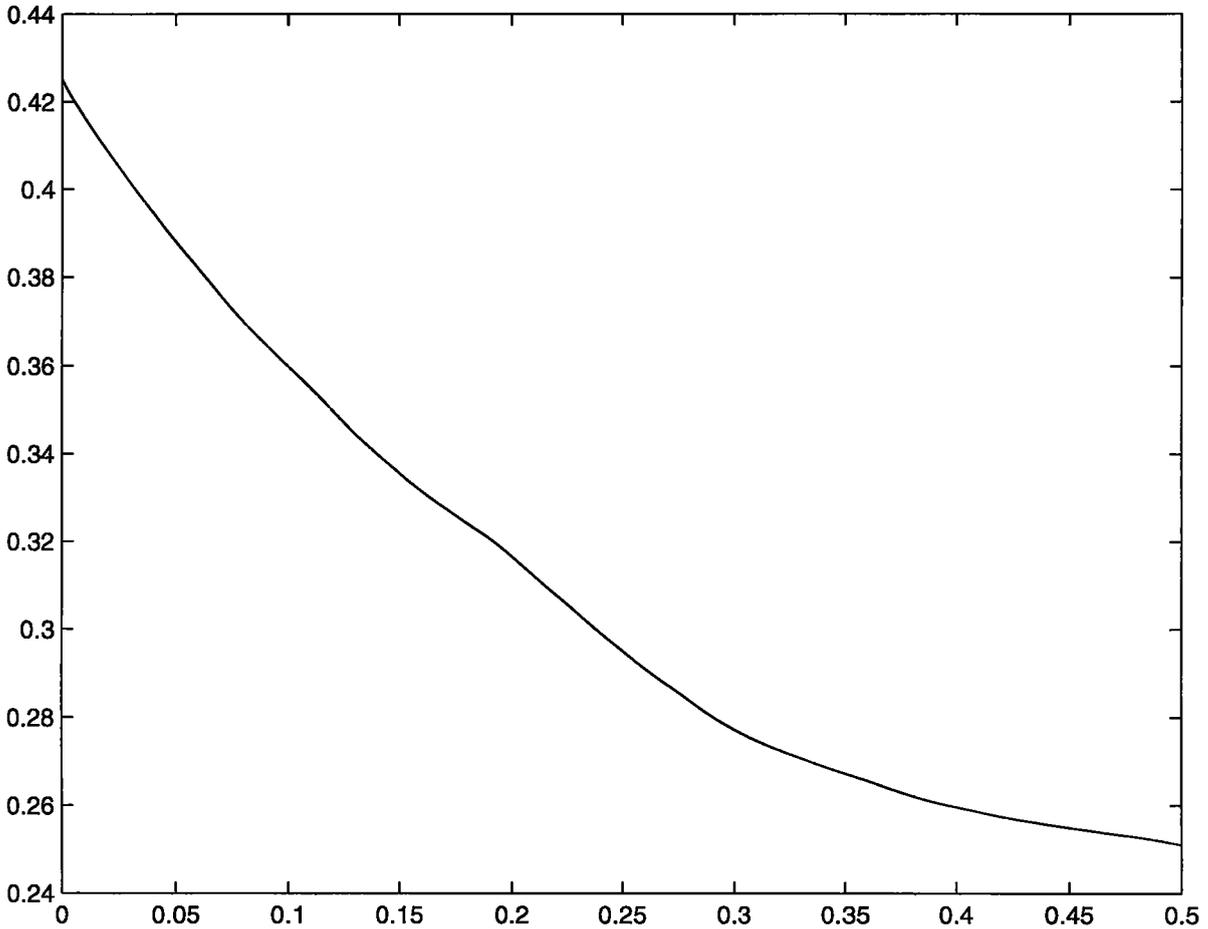
$$\dot{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_{\mathbb{R}^{2N}} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \phi(t) = L\phi(t). \quad (2.16)$$

Comme méthode numérique d'intégration, nous avons utilisé celle de Runge-Kutta « ODE45 » du logiciel MATLAB.

On intègre alors le système (2.16), puis on trace la fonction  $E(t) = \frac{1}{2} \|\phi(t)\|_*^2$  qui représente l'énergie du système (2.15) et qui est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} (\rho V^t M U + (EI) V^t K U - \rho \omega^{*2} V^t M U).$$

Les résultats sont présentés sur les figures



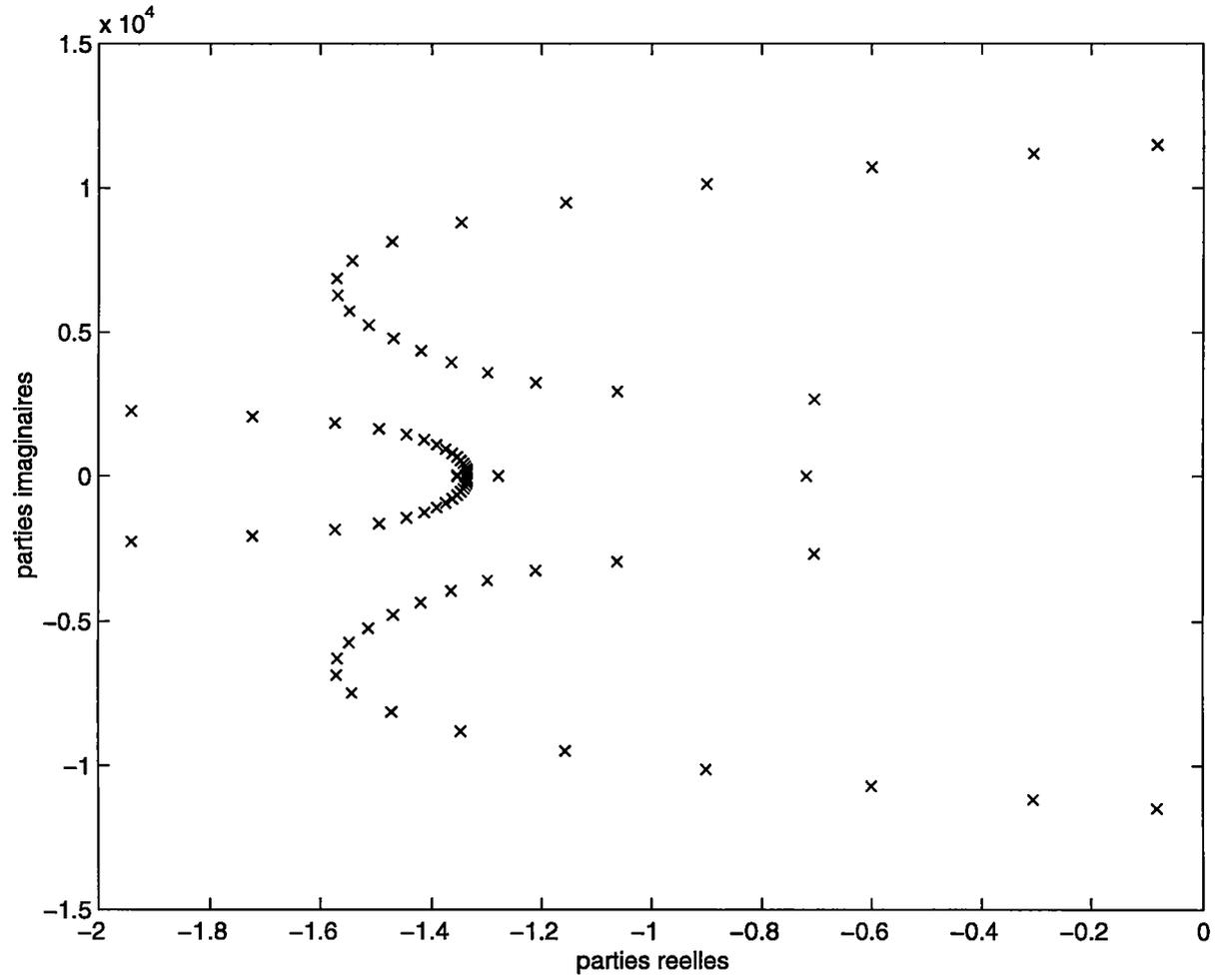
**Figure 2.2.** L'énergie du système,  $N = 4$ ,  $EI = 1$ ,  $\rho = 3$ ,  $\omega^* = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$

Comme condition initiale, on a pris  $u(x, 0) = x^2/2$ ,  $u_t(x, 0) = 0$ .

### Spectre approché du sous-système

L'étape suivante consiste à étudier le spectre du système discrétisé (2.16), le but étant de voir si la condition  $\omega^* < \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$  est optimale pour la stabilité.

On effectue alors une série de calculs où, à chaque fois, on fixe les conditions initiales, les paramètres  $EI$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , puis pour différentes valeurs de  $\omega^*$  ( $\omega^* < \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$ ,  $\omega^* = \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$ ,  $\omega^* > \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$ ), on trace le spectre de la matrice  $L$  dans le plan, les résultats sont regroupés sur les figures.



**Figure 2.3.** spectre de A,  $N = 20$ ,  $EI = 1$ ,  $\rho = 3$ ,  $\omega^* = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$

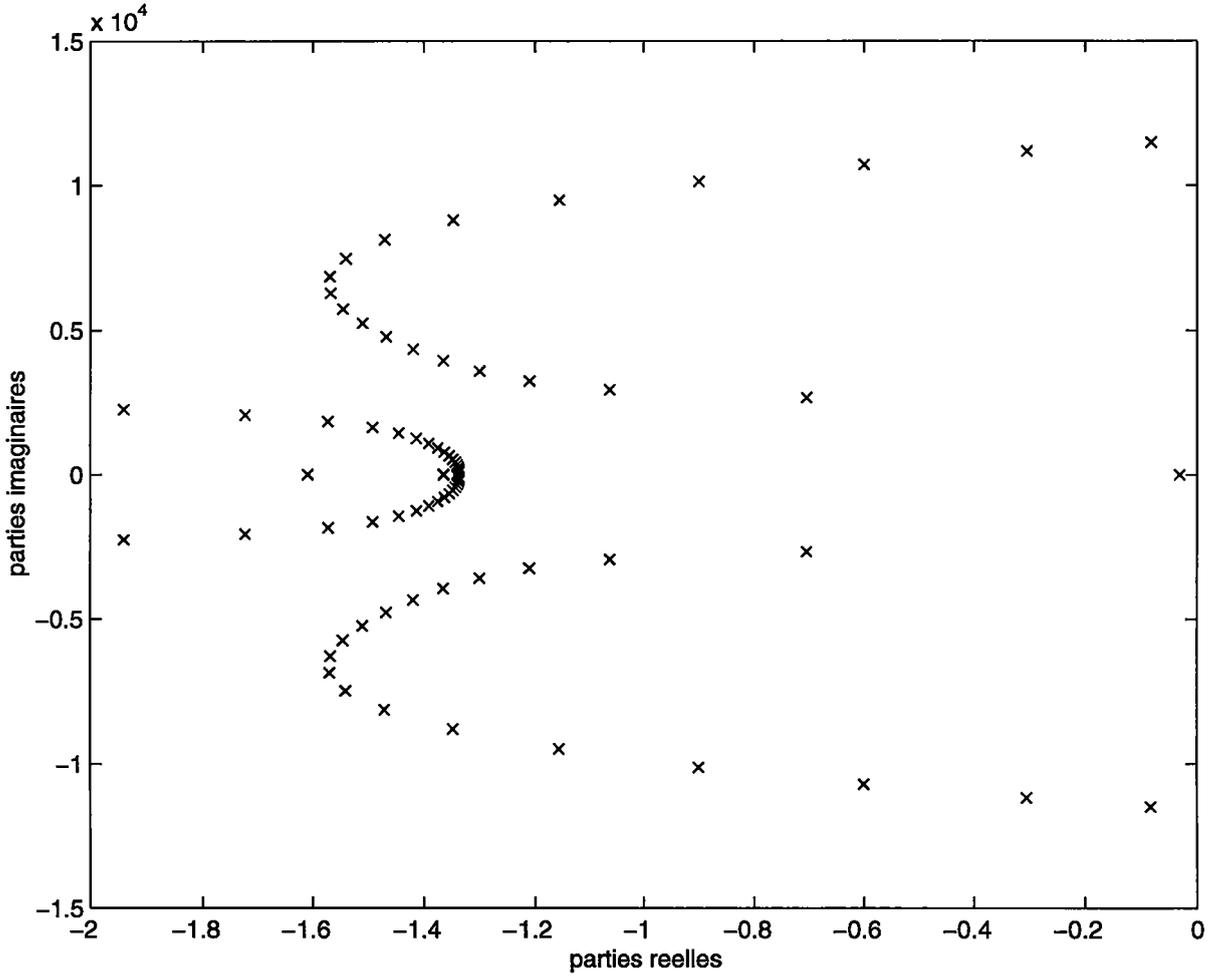


Figure 2.4. spectre de A,  $N = 20$ ,  $EI = 1$ ,  $\rho = 3$ ,  $\omega^* = 2$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$

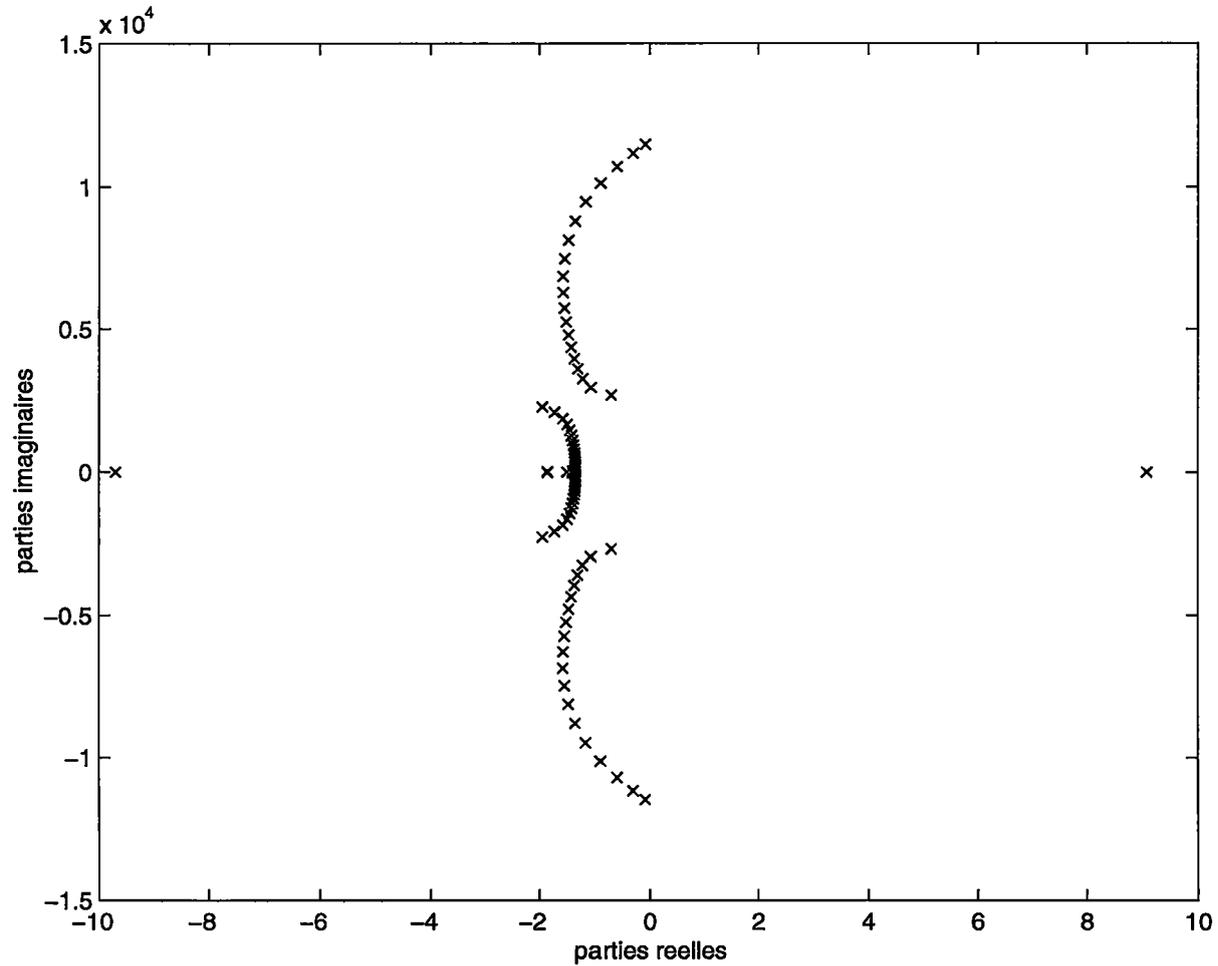


Figure 2.5. spectre de A pour  $N = 20$ ,  $EI = 1$ ,  $\rho = 3$ ,  $\omega^* = 10$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$

### Commentaire des résultats

Au vu de ces simulations, on constate que

1-Les lois de commande stabilisent le sous-système (2.9) pour  $\omega^* < \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$ , (l'énergie décroît très vite vers zéro).

2-Le spectre approché du sous-système (2.9) est situé dans la partie gauche du plan complexe ; dès que  $\omega^* > \sqrt{\frac{12EI}{\rho}}$ , on commence à avoir des valeurs du spectre sur le demi-plan à droite du plan complexe. Le sous-système n'est donc plus stable.

## 2.7 Remarques et conclusion

**Remarque 11** *Commençons par remarquer que la décroissance, bien qu'exponentielle, n'est pas uniforme et dépend des conditions initiales.*

Dans ce chapitre, nous avons proposé une loi de commande stabilisante locale, pour le système formé par une structure flexible attachée à un disque en rotation. On a montré que, pour toute vitesse angulaire donnée  $\omega^* < \sqrt{12EI/\rho}$ , le système est exponentiellement stable vers une position d'équilibre dès lors que l'un des deux feedback proposés (force ou moment) est appliqué sur l'extrémité libre de la structure flexible, en même temps que le feedback du couple exercé sur le disque. Notre résultat améliore ceux existants dans [28] et [29], vu l'intérêt pratique que présente la stabilité exponentielle de tels systèmes par des feedback simples.

Il a été noté dans [30], que l'on pourrait accroître la valeur de  $\omega^*$  en utilisant des feedback frontières.

Malgré que l'on n'a pas montré que le système bouclé (2.3) n'est pas asymptotiquement stable, pour  $\omega^*$  supérieur à une certaine valeur, les simulations numériques qu'on a faites sur le sous-système (2.9) nous poussent à croire qu'il existe une valeur critique  $\omega_{crit}$  au-delà de laquelle le système bouclé (2.3) ne serait donc pas stable.

Notre travail donne un aperçu pour caractériser  $\omega_{crit}$  ( $\omega_{crit} \geq \sqrt{12EI/\rho}$ ), et présente une méthode pour montrer la stabilité du système (2.3) pour  $|\omega^*| < \omega_{crit}$ .

Enfin, une autre approche est présentée en Annexe pour montrer la stabilité du sous-système (2.9); elle consiste à montrer que ce système restreint à l'ensemble  $\Gamma^+(\Phi_0)$  est exactement observable pour un temps  $T$  assez grand. Ceci est établi par la technique des multiplicateurs mais sous l'hypothèse plus restreinte:  $\beta \neq 0$  et  $\omega^* < \sqrt{\frac{9EI}{\rho}}$ .

## 2.8 Annexes

### preuve du lemme 1.6

1- $B_0$  est maximal-monotone

i) Monotonie de  $B_0$ :

On a

$$\begin{aligned} \langle B_0\varphi, \varphi \rangle_{L^2} &= \left\langle \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \omega^{*2} \varphi, \varphi \right\rangle_{L^2} \quad \forall \varphi \in D(B_0) \\ &= \frac{EI}{\rho} \|\varphi_{xx}\|_2^2 - \omega^{*2} \|\varphi\|_2^2 \\ &\geq \left( \frac{EI}{\rho} - \frac{\omega^{*2}}{12} \right) \|\varphi_{xx}\|_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

d'après (2.6)

Donc  $B_0$  est monotone.

ii) Maximalité:

Il s'agit de montrer que  $R(I + B_0) = L^2$ .

Soit  $g \in L^2$ , cherchons  $f \in D(B_0)$  tel que  $(I + B_0)f = g$   
 $f$  vérifie donc

$$\begin{cases} \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \omega^{*2} f + f = g \\ f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Multiplions l'équation ci-dessus par  $\varphi \in H_0^2$  et intégrons entre 0 et 1, après intégration par parties on a

$$\int_0^1 f\varphi dx + \frac{EI}{\rho} \int_0^1 f_{xx}\varphi_{xx} dx - \omega^{*2} \int_0^1 f\varphi dx = \int_0^1 g\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^2, \quad (2.18)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$a(f, \varphi) = L(\varphi); \quad \forall \varphi \in H_0^2,$$

où la forme bilinéaire  $a(., .)$  et la forme linéaire  $L(.)$  sont définis respectivement par:

$$a(u, v) = \int_0^1 uv dx + \frac{EI}{\rho} \int_0^1 u_{xx} v_{xx} dx - \omega^{*2} \int_0^1 uv dx,$$

et

$$L(v) = \int_0^1 gv dx.$$

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire  $a(., .)$  est continue et coercive sur  $H_0^2$ , et que la forme linéaire  $L$  est continue sur  $H_0^2$ , d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique  $f$  dans  $H_0^2$  solution de (2.18).

En prenant  $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$ , on a

$$f \in H_0^4(0, 1); \quad \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \omega^{*2} f + f = g \quad p.p \text{ sur } [0, 1].$$

Compte tenu de (2.18), on a

$$f_{xx}(1)\varphi_x(1) - f_{xxx}(1)\varphi(1) = 0; \quad \forall \varphi \in H_0^2.$$

Comme  $\varphi_x(1)$  et  $\varphi(1)$  sont arbitraires, on déduit

$$f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0,$$

ceci entraîne que  $f \in D(B_0)$ , et donc  $B_0$  est maximal.

### 2- $B_0$ est auto-adjoint

L'opérateur  $B_0$  est symétrique, c'est à dire

$$\langle B_0\varphi, \psi \rangle = \langle \psi, B_0\varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in D(B_0)$$

Donc  $B_0$  est autoadjoint. ([6]; p 113.)

### 3- $B_0$ est à résolvante compacte

En effet, l'injection  $i : H^4 \rightarrow L^2$  étant compacte, il en est donc de même pour  $i : D(B_0) \rightarrow L^2$ , et comme  $(I - B_0)^{-1} : H \rightarrow D(B_0)$  est bornée donc elle est compacte.  $\square$

### Preuve du lemme (1.8)

i) L'injection  $i : H^4 \times H^2 \rightarrow H^2 \times L^2$  étant compacte, il en est donc de même pour  $i : D(A_0) \rightarrow H$ , d'autre part, l'application  $(I - A_0)^{-1} : H \rightarrow D(A_0)$  est bornée donc elle est compacte.

ii)  $A_0$  est générateur d'un groupe d'isométries sur  $H$

Tout d'abord, on peut vérifier que

$$\langle A_0\phi, \psi \rangle_* = -\langle \phi, A_0\psi \rangle_*; \quad \forall \phi, \psi \in D(A_0), \quad (2.19)$$

en particulier

$$\langle A_0\varphi, \varphi \rangle_* = 0; \quad \forall \varphi \in D(A_0)$$

donc  $A_0$  est dissipatif.

$A_0$  est maximal, en effet:

Soit  $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H$ ; on cherche  $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in D(A_0)$  tel que

$$(I - A_0) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 - f_2 \\ \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} - \omega^{*2} f_1 + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 f_1}{\partial x^4} - \omega^{*2} f_1 + f_1 = g_1 + g_2 \\ f_1(0) = f_{1x}(0) = f_{1xx}(1) = f_{1xxx}(1) = 0 \\ f_2 = f_1 - g_1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Ceci revient à chercher  $f_1$  dans  $D(B_0)$  tel que

$$(I + B_0)f_1 = g_1 + g_2,$$

ce qui découle directement du fait que  $B_0$  est maximal.

L'opérateur  $A_0$  est m-dissipatif, il est donc générateur infinitésimal d'un semi-groupe  $C_0$  de contractions sur  $H$ .

De la relation (2.19) on déduit que l'opérateur  $A_0$  est anti-adjoint.

Il en résulte que  $A_0$  est générateur d'un groupe d'isométries sur  $H$ . (Th I.7)  $\square$

### Autre démonstration

Dans cette partie, on propose une autre méthode pour montrer la stabilité forte du sous-système (2.9), moyénant un multiplicateur adéquat et utilisant l'invariance de l'ensemble  $\omega$ -limite  $\Gamma^+(\phi_0, \omega_0)$ , on montre la stabilité forte de (2.9) pour  $\beta \neq 0$  et  $\omega^* < \sqrt{\frac{9EI}{\rho}}$ .

On considère le système observé suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{tt} + (EI)u_{xxxx} = \rho\omega^{*2}u, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \\ u_{xx}(1, t) = -\alpha u_{tx}(1, t), \\ u_{xxx}(1, t) = \beta u_t(1, t) \\ (u(\cdot, 0), u_t(\cdot, 0))' = \Phi_0 \in \mathcal{D}(A) \\ y(t) = C(u, u_t) = (u_{xt}(1, t), u_t(1, t))' \in L^2[0, T] \times L^2[0, T] \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où  $y(t)$  est la fonction d'observation, de norme

$$\|y\|_T^2 = EI \int_0^T [\alpha u_{tx}^2(1, t) + \beta u_t^2(1, t)] dt.$$

Si la condition initiale  $\phi_0 \in D(A)$ , il résulte de (2.8), pour tout  $T > 0$ ,

$$EI \int_0^T [\alpha u_{tx}^2(1, t) + \beta u_t^2(1, t)] dt = V(\phi_0, \omega^*) - V(\phi(T), \omega^*) \leq V(\phi_0, \omega^*). \quad (2.22)$$

Rappelons que  $V(\phi(t), \omega^*) = \frac{1}{2}\|\phi(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\omega^{*2}\|\phi_1(t)\|_{L^2}^2$  définit bien une norme sur  $H$  équivalente à celle déjà définie, il résulte donc de (2.22) que l'application linéaire

$$C : D(A) \subset H \rightarrow L^2[0, T] \times L^2[0, T]$$

est continue et donc admet une unique extension sur tout l'espace  $H$ .

Pour tout  $\tilde{\phi} \in \Gamma^+(\phi_0, \omega_0)$ , la fonction  $\tilde{y}(t)$  est donc bien définie sur  $L^2[0, T] \times L^2[0, T]$ .

Notons aussi que, vu l'invariance de l'ensemble  $\omega$ -limite, cette fonction est identiquement nulle sur cette ensemble.

Sous les conditions citées plus haut, on montre que le sous-système (2.21) restreint à l'ensemble  $\Gamma^+(\phi_0, \omega_0)$  est exactement observable sur  $[0, T]$ , pour  $T$  assez grand, c'est à dire :

**Lemme 2.10** *Supposons que  $\beta \neq 0$  et  $\omega^* < \sqrt{\frac{9EI}{\rho}}$ . Alors, pour tout  $\tilde{\phi}_0 \in \Gamma^+(\phi_0, \omega_0)$ , il existe deux constantes  $T_0 > 0$  et  $K_0 > 0$  telles que*

$$\|\tilde{y}\|_{T_0}^2 \geq K_0 V(\tilde{\phi}_0, \omega^*). \quad (*)$$

**Preuve:**

Soit  $\phi_0 \in D(A)$ , et soit  $\tilde{\phi}_0 \in \Gamma^+(\phi_0)$   $\tilde{\phi}(t) = (\tilde{u}(\cdot, t), \tilde{u}_t(1, t))$  la solution correspondante de (2.9).

Multiplions les deux membres de la première équation dans (2.21) par  $x\tilde{u}_x(x, t)$  et intégrons par rapport à  $x$  et  $t$ , après intégrations par parties on a:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \int_0^T \tilde{u}_t^2(1, t) dt + \frac{EI}{2} \alpha^2 \int_0^T \tilde{u}_{xt}^2(1, t) dt = \rho \int_0^1 [x\tilde{u}_x\tilde{u}_t]_0^T dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \int_0^1 \rho \tilde{u}_t^2(x, t) dx + 3EI \int_0^1 \tilde{u}_{xx}^2(x, t) dx \right] dt \\ & + EI \int_0^T [\beta \tilde{u}_t(1, t) \tilde{u}_x(1, t) + \alpha \tilde{u}_x(1, t) \tilde{u}_{xt}(1, t)] dt \\ & - \frac{\rho \omega^{*2}}{2} \left[ \int_0^T \tilde{u}^2(1, t) dt - \int_0^T \int_0^1 \tilde{u}^2(x, t) dx dt \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

On établit les inégalités suivantes:

$$I.1) \quad \|u_x(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2}^2/2$$

$$I.2) \quad \int_0^T u_x^2(1, t) dt \leq \frac{2}{\rho} \int_0^T \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 dt$$

$$I.3) \quad \left| \rho \int_0^1 [x u_x u_t]_0^T dx \right| \leq K_1 V(\Phi_0, \omega^*)$$

$$I.4) \quad u^2(1, t) = \left| \int_0^1 (1-x) u_{xx}(x, t) dx \right|^2 \leq \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 / (3\rho)$$

$$I.5) \quad EI \left| \int_0^T [\beta u_t(1, t) u_x(1, t) + \alpha u_x(1, t) u_{xt}(1, t)] dt \right| \\ \leq \frac{EI(\alpha + \beta)}{2\rho K_2} \int_0^T \|u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 dt + \frac{(EI)K_2}{2} \|y\|_T^2,$$

où,  $K_1$  et  $K_2$  sont deux constantes strictement positives.

**Remarque 12** dans l'inégalité I.3) on a utilisé le fait que  $V(\phi(0), \omega^*) \geq V(\phi(T), \omega^*)$ , et dans l'inégalité I.5) on a utilisé le fait que  $2|ab| \leq \frac{a^2}{\delta^2} + \delta^2 b^2$ .

En utilisant ces estimations et l'inégalité de Cauchy dans (2.23), on obtient

$$\left[ \frac{\rho}{2\beta} + \frac{(EI)\alpha}{2} \right] \|\tilde{y}\|_T^2 \geq \frac{\rho}{2} \int_0^T \tilde{u}_t^2(1, t) dt + \frac{EI}{2} \alpha^2 \int_0^T \tilde{u}_{tx}^2(1, t) dt \\ \geq + \frac{1}{2} \int_0^T \{ \|\tilde{u}_t(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + (3 - \frac{\rho\omega^{*2}}{3EI} - \frac{\alpha + \beta}{K_2}) \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{H_0^2} \} dt \\ - K_1 V(\tilde{\phi}_0, \omega^*) - \frac{EIK_2}{2} \|\tilde{y}\|_T^2$$

Compte tenu du fait que  $\omega^{*2} < \frac{9EI}{\rho}$ , on peut choisir  $K_2$  assez grand tel que,  $(3 - \frac{\rho\omega^{*2}}{3EI} - \frac{\alpha + \beta}{K_2}) > 0$ , et comme  $V(\tilde{\phi}(t), \omega^*) = V(\tilde{\phi}_0, \omega^*)$  pour tout  $t \geq 0$ , il existe alors une constante  $K_3 > 0$  telle que

$$\left[ \frac{\rho}{2\beta} + \frac{(EI)\alpha}{2} + \frac{EIK_2}{2} \right] \|\tilde{y}\|_T^2 \geq (K_3 T - K_1) V(\tilde{\phi}_0, \omega^*).$$

En choisissant  $T$  assez large, on a (\*).

□

Comme la fonction d'observation  $\tilde{y}(t)$  est identiquement nulle pour  $\tilde{\phi}_0 \in \gamma^+(\phi_0, \omega_0)$ , on en déduit que  $V(\tilde{\phi}_0, \omega^*) = 0$  et donc  $\tilde{\phi}_0 \equiv 0$ .

L'ensemble  $\omega$ -limite  $\Gamma^+(\phi_0, \omega_0)$  est donc réduit à zéro.

# 3

## Stabilisation uniforme d'un système hybride: modèle SCOLE

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilisation uniforme, par feedback frontière d'un système hybride, qui est une variante du modèle SCOLE, introduit par Littman et Markus [26] pour modéliser certaines structures de l'aérospatiale. Il est composé d'une poutre flexible fixée, en l'une de ses extrémités libre, à une antenne rigide de masse  $m$ , l'autre extrémité étant encastree.

Les vibrations élastiques de la structure flexible sont régies par une équation aux dérivées partielles (modèle d'Euler-Bernoulli), tandis que les oscillations de l'antenne rigide sont régies par deux équations différentielles ordinaires (équations de Newton-Euler). Le système global est donc un système hybride dont la dynamique est décrite par les équations suivantes:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = f_1(t) \\ Ju_{xtt}(1, t) + u_{xx}(1, t) = f_2(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

$u(x, t)$  représente le déplacement latéral, à l'instant  $t$ , d'un point de la poutre d'abscisse  $x$ .

Les constantes  $m$  et  $J$  désignent respectivement la masse et le moment d'inertie de l'antenne.

$f_1(t)$  et  $f_2(t)$  représentent respectivement la force et le moment par lesquels on contrôle le système (3.1).

L'objectif de ce travail est d'obtenir, dans le cas particulier  $J = 0$ , la stabilisation uniforme de (3.1) à l'aide du seul feedback de moment ( $f_1(t) = 0$ ).

**Remarque 13** Dans le système (3.1), on a supposé que la densité linéique, la rigidité en flexion, ainsi que la longueur de la poutre sont égales à un.

Concernant le système (3.1), les résultats suivants ont déjà été établis dans la littérature.

Dans leur article [26], Littman et Markus ont montré les résultats suivants:

**Théorème 3.1** (Littman-Markus, [26]) Pour

$$\begin{cases} f_1(t) = -au_t(1, t) + bu_{tx}(1, t) \\ f_2(t) = cu_t(1, t) - du_{tx}(1, t), \end{cases} \quad (3.2)$$

$a, b, c, d$  étant des constantes réelles telles que:  $a, d > 0$ ;  $4ad > (b + c)^2$ , le système (3.1) en boucle fermée est fortement stable.

**Proposition 3.1** (Littman-Markus, [26]) Pour

$$\begin{cases} f_1(t) = -u_t(1, t) \\ f_2(t) = -u_{tx}(1, t), \end{cases} \quad (3.3)$$

le système (3.1) n'est pas uniformément stable.

D'autre part, B. Rao dans [35] a montré les résultats suivants:

**Théorème 3.2** (Rao, [35]) pour

$$\begin{cases} f_1(t) = -\delta_{11}u(1, t) - \delta_{12}u_x(1, t) - \nu_{11}u_t(1, t) - \nu_{12}u_{xt}(1, t) \\ f_2(t) = -\delta_{21}u(1, t) - \delta_{22}u_x(1, t) - \nu_{21}u_t(1, t) - \nu_{22}u_{xt}(1, t), \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\delta_{ij}, \nu_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  sont des constantes réelles quelconques. Le système (3.1) en boucle fermée n'est pas uniformément stable.

Ce résultat a été montré en utilisant l'argument de perturbation compacte de D. Russell cité dans le chapitre I ([44]). Le même auteur a établi, en utilisant la technique des multiplicateurs, le théorème suivant:

**Théorème 3.3** (*Rao, [35]*) (*Stabilisation uniforme par feedback d'ordre supérieur*)  
*Pour*

$$\begin{cases} f_1(t) = -u_{xxx}(1, t) \\ f_2(t) = -u_{xx}(1, t), \end{cases} \quad (3.5)$$

le système (3.1) est uniformément stable.

Enfin, M. Slemrod dans [47] a montré la stabilité forte avec  $f_1(t) = 0$  et  $f_2(t)$  à priori borné. Ce dernier résultat a été amélioré par B. Rao dans ([36]).

**Cas particulier:  $J = 0$**

Dans ce cas particulier, B. Rao [37] a traité le problème dans un cadre plus général (plaques). Il a ainsi établi la stabilité uniforme, par la méthode des multiplicateurs, en utilisant deux feedbacks frontière.

Récemment, F. Conrad et O. Morgül dans [9] se sont intéressés au problème de stabilisation du système (3.1), dans le cas  $J = 0$ , par le seul feedback de force appliquée sur l'antenne  $m$  ( $f_2(t) = 0$ ). En utilisant la technique des multiplicateurs, ils ont obtenu le résultat positif de stabilisation uniforme suivant:

**Théorème 3.4** (*Conrad-Morgül, [9]*)

*pour*

$$\begin{cases} f_1(t) = -\alpha u_t(1, t) + \beta u_{xxx}(1, t) \\ f_2(t) = 0, \alpha > 0, \beta > 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Le système (3.1) en boucle fermée est uniformément stable.

De plus, ils ont obtenu le taux optimal de décroissance de l'énergie, moyennant une analyse spectrale, dans le cas particulier  $\alpha = \beta/m$ .

Dans ce travail, on se propose d'étudier, dans le cas particulier ( $J = 0$ ), le problème de stabilisation du système (3.1), par le seul feedback du moment ( $f_1(t) = 0$ ). Nous obtenons la stabilisation uniforme, par une loi de commande simple, en utilisant le théorème de Huang. Nous n'avons pas été capables

d'obtenir ce résultat par la méthode des multiplicateurs.

Ce chapitre est organisé comme suit:

Au (§2), on donne les équations du système puis on détermine une loi de commande pour laquelle le problème est bien posé au sens des semi-groupes de contractions. Ensuite, au (§3), en utilisant le principe d'invariance de LaSalle et un résultat d'unicité établi par Rao [38], on établit la stabilité forte du système. Au (§4) on montre la stabilité uniforme. Enfin, au (§5), on termine par quelques remarques et conclusion.

## 3.2 Le problème est bien posé

Dans ce paragraphe, on donne les équations du système puis la loi de commande qui rend l'énergie dissipative, et on montre, par une technique standard, que le système bouclé est bien posé au sens des semi-groupes de contractions.

Le système est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0 \\ u_{xx}(1, t) = f(t), \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $f(t)$  est le contrôle du moment appliqué sur la masse  $m$ .

**Remarque 14** *Remarquons que dans le système (3.7), on a un seul contrôle (moment).*

L'énergie mécanique totale du système est donnée par:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 (u_{xx}^2(x, t) + u_t^2(x, t)) dx + mu_t^2(1, t) \right).$$

En calculant formellement la dérivée de  $E(t)$  le long des solutions classiques de (3.7), puis en intégrant par parties, on obtient:

$$E_t(t) = u_{tx}(1, t)f(t).$$

On choisit alors:

$$f(t) = -\alpha u_{tx}(1, t), \quad \alpha > 0.$$

On a donc:

$$E_t(t) = -\alpha u_{tx}^2(1, t). \quad (3.8)$$

Le système (3.7) en boucle fermée s'écrit alors:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0, \\ u_{xx}(1, t) = -\alpha u_{tx}(1, t). \end{cases} \quad (3.9)$$

On note, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$H_0^n(0, 1) = \{f \in H^n(0, 1) / f(0) = f_x(0) = 0\}.$$

$H_0^2(0, 1)$  sera muni du produit scalaire suivant:

$$\langle f, g \rangle_{H_0^2} = \int_0^1 f_{xx}g_{xx}dx.$$

L'espace de phase est

$$H = H_0^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R},$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u, v, \eta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta}) \rangle_H = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v})dx + m\eta\tilde{\eta}.$$

En posant  $\Phi(t) = (u(\cdot, t), u_t(\cdot, t), u_t(1, t))'$ , le système en boucle fermée (3.9) s'écrit sous la forme opérationnelle suivante

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad (3.10)$$

où  $A$  est l'opérateur non borné défini par:

$$\mathcal{D}(A) = \{(u, v, \eta) \in H_0^4 \times H_0^2 \times \mathbb{R} / u_{xx}(1) + \alpha v_x(1) = 0, \eta = v(1)\},$$

et

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ \frac{u_{xxx}(1)}{m} \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } (u, v, \eta)' \in \mathcal{D}(A).$$

**Lemme 3.1** *L'opérateur  $A$  est  $m$ -dissipatif.*

**Preuve:**

**L'opérateur  $A$  est dissipatif:**

En effet, par un simple calcul on a

$$\langle A\Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = -\alpha v_x^2(1) \leq 0, \quad \forall \Phi = (u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A).$$

**L'opérateur  $A$  est maximal:**

Soit  $(f, g, \beta) \in \mathcal{H}$ . Il s'agit de trouver  $(u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A)$  tel que

$$(I - A)(u, v, \eta) = (f, g, \beta).$$

Cette équation s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} u - v = f, \\ v + u_{xxxx} = g, \\ \eta - \frac{1}{m}u_{xxx}(1) = \beta. \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{cases} u \in H_0^4(0, 1); v \in H_0^2(0, 1), \\ u_{xx}(1) + \alpha v_x(1) = 0, \\ \eta = v(1). \end{cases} \quad (3.2)$$

En éliminant  $v$  dans la première équation de (3.1), on obtient:

$$\begin{cases} u + u_{xxxx} = f + g, \\ u_{xx}(1) + \alpha u_x(1) = \alpha f_x(1), \\ u(1) - \frac{1}{m} u_{xxx}(1) = f(1) + \beta, \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Soit  $\Psi \in H_0^2(0, 1)$ , multiplions la première équation de (3.3) par  $\Psi$ . On obtient alors après intégrations par parties:

$$m(f(1) + \beta) \Psi(1) + \alpha f_x(1) \Psi_x(1) + \int_0^1 (f + g) \Psi dx =$$

$$mu(1) \Psi(1) + \alpha u_x(1) \Psi_x(1) + \int_0^1 (u_{xx} \Psi_{xx} + u \Psi) dx, \quad \forall \Psi \in H_0^2(0, 1). \quad (3.4)$$

En utilisant le Théorème de Lax-Milgram, on démontre l'existence d'un élément  $u$  unique,  $u \in H_0^2(0, 1)$ , solution de (3.4). Ensuite, par un raisonnement standard, on démontre que  $u \in H_0^4(0, 1)$  et que les conditions aux bords sont vérifiées. D'où la maximalité de  $A$ .

Le lemme suivant est une conséquence directe des résultats de

**Lemme 3.2 :** *i) Pour toute condition initiale  $\Phi_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(A)$ , il existe une unique solution forte  $\Phi(t) = (u, v, \eta)(t) \in \mathcal{D}(A)$  de*

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \\ \Phi(0) = \phi_0. \end{cases} \quad (*)$$

La solution  $\Phi(t)$  est donnée par

$$\Phi(t) = S(t)\phi_0,$$

où  $S(t)$  est le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur  $A$ . De plus,

$$\Phi(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(A)),$$

et la fonction

$$t \longmapsto \|A\Phi(t)\|_{\mathcal{H}}$$

est décroissante.

ii) Pour toute condition initiale  $\Phi_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ , il existe une unique solution faible  $\Phi(t) = (u, v, \eta)(t) \in \mathcal{H}$  solution de (\*). De plus,

$$\Phi(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

### 3.3 Stabilité forte

Dans ce paragraphe, on établit le résultat suivant:

**Théorème 3.5** *Pour tout  $m > \frac{1}{3}$ , le semi-groupe  $S(t)$  est fortement stable dans  $\mathcal{H}$ .*

**Preuve:**

Pour démontrer ce résultat, on utilise le principe d'invariance de LaSalle rappelé au chapitre I (théorème (I.12)).

Comme  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{H}$  et que  $S(t)$  est un semi-groupe de contractions, il suffit de démontrer le résultat pour toute donnée initiale dans  $\mathcal{D}(A)$ .

Soit  $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(A)$ . D'après le Lemme (3.2), la trajectoire des solutions  $((u, v, \eta)(t))_{t \geq 0}$  est bornée pour la norme du graphe. De plus, il est facile de voir que l'injection  $i : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  est compacte et par conséquent la trajectoire est précompacte dans  $\mathcal{H}$ .

D'après le principe d'invariance de Lasalle (Th I.12), on peut affirmer que l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(u_0, v_0, \eta_0)$  est un compact non vide invariant par le semi-groupe  $S(t)$  et que de plus

$$S(t)(u_0, v_0, \eta_0) \longrightarrow \omega(u_0, v_0, \eta_0) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Pour démontrer la stabilité asymptotique, il nous suffit de vérifier que  $\omega(u_0, v_0, \eta_0)$  est réduit à  $\{0\}$ .

Pour cela, prenons  $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}_0) \in \omega(u_0, v_0, \eta_0)$ . D'après le Lemme 3.2, l'élément  $\tilde{\phi}(t) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})(t) = S(t)(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}_0)$  est solution au sens fort du système.

De plus,

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})(t) \in \omega(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}_0) \subset \mathcal{D}(A).$$

et

$$\frac{d}{dt} \|(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0.$$

Ce qui implique que  $\tilde{u}$  vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + \tilde{u}_{xxxx} = 0, \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}_x(0, t) = 0, \\ m\tilde{u}_{tt}(1, t) - \tilde{u}_{xxx}(1, t) = 0, \\ \tilde{u}_{xx}(1, t) = \tilde{u}_{xt}(1, t) = 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0, \tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{v}_0, \tilde{u}_t(1, 0) = \tilde{\eta}_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans [38], Rao a établi que la seule solution de ce système est la solution nulle. Pour la commodité du lecteur, on reprend ici sa démonstration.

Dans la suite, on suppose que  $\tilde{\Phi}_0 = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}_0) \in \mathcal{D}(A^2)$ .

Multiplions la première équation de (3.1) par  $x^2$ . En intégrant par rapport à  $x$  entre 0 et 1 et par rapport à  $t$  entre 0 et  $T$ , on peut facilement démontrer que  $\tilde{u}_x(1, t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Ensuite, en multipliant l'équation par  $m x \tilde{u}_x$  et en faisant des intégrations par parties, on obtient

$$\int_0^1 \int_0^T (3m\tilde{u}_{xx}^2 + m\tilde{u}_t^2) dx dt = m \int_0^T \tilde{u}_t^2(1, t) dt - 2m \int_0^1 x (\tilde{u}_x \tilde{u}_t)_{t=0}^{t=T} dx. \quad (3.2)$$

Enfin, multiplions la première équation de (3.1) par  $\tilde{u}$ . On aboutit à

$$\int_0^1 \int_0^T (\tilde{u}_{xx}^2 - \tilde{u}_t^2) dx dt = m \int_0^T \tilde{u}_t^2(1, t) dt - m (u(1, t)u_t(1, t))_{t=0}^{t=T} - \int_0^1 (\tilde{u}\tilde{u}_t)_{t=0}^{t=T} dx. \quad (3.3)$$

La soustraction membre à membre de (3.2) et (3.3) implique que

$$\int_0^1 \int_0^T \left( (3m-1)\tilde{u}_{xx}^2 + (m+1)\tilde{u}_t^2 \right) dx dt \leq C \|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.4)$$

Comme on a supposé que  $\tilde{\Phi}_0 = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{\eta}_0) \in \mathcal{D}(A^2)$ , on peut remplacer  $\tilde{u}$  par  $\tilde{u}_t$  dans (3.4). On obtient alors l'inégalité suivante

$$\int_0^1 \int_0^T \left( (3m-1)\tilde{u}_{txx}^2 + (m+1)\tilde{u}_{tt}^2 \right) dx dt \leq C \|\tilde{A}\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Ce qui entraîne que :

$$(3m-1) \int_0^1 \int_0^T \left( \tilde{u}_{xx}^2 + \tilde{u}_{txx}^2 \right) dx dt + (m+1) \int_0^1 \int_0^T \left( \tilde{u}_t^2 + \tilde{u}_{tt}^2 \right) dx dt \leq C \|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{D}(A)}^2.$$

Ainsi pour tout  $m > \frac{1}{3}$ ,

$$\int_0^T \|\tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt \leq C^* \|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{D}(A)}^2.$$

Comme  $\|\tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{H}}$  est une constante alors

$$\|\tilde{\phi}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{C^*}{T} \|\tilde{\Phi}_0\|_{\mathcal{D}(A)}^2.$$

D'ou

$$\tilde{\phi}(t) \equiv 0.$$

Le système est donc fortement stable.

### 3.4 Stabilité uniforme

Dans ce paragraphe, on établit le théorème suivant

**Théorème 3.6** *Pour  $m > 1/3$ , le système (3.9) est uniformément stable.*

**Preuve:**

Pour prouver ce théorème, on utilise le théorème de F.L.Huang ([18]) cité dans le chapitre I. Pour cela, on va estimer la résolvante sur l'axe imaginaire. Notons qu'on a d'abord essayé la méthode des multiplicateurs mais celle-ci n'a

donné aucun résultat.

La condition  $\{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$  est déjà assurée par la stabilité forte. Il reste à prouver l'existence d'un réel  $M > 0$  tel que

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(H)} \leq M, \quad \forall \lambda \in \{i\omega; \omega \in \mathbb{R}\}.$$

Soit donc  $(f, g, \eta) \in H, \lambda = i\mu^2 \quad \mu \in \mathbb{R}$ , et soit  $(u, v, \eta) \in \mathcal{D}(A)$  tel que

$$(\lambda I - A)(u, v, \eta) = (f, g, \gamma)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda u - v = f \\ \lambda v + u_{xxxx} = g \\ \lambda \eta - \frac{1}{m} u_{xxx}(1) = \gamma, \\ \eta = v(1), u_{xx}(1) = -\alpha v_x(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = \lambda u - f \\ \lambda^2 u + u_{xxxx} = \lambda f + g \\ \lambda^2 u(1) \eta - \frac{1}{m} u_{xxx}(1) = \gamma + \lambda f(1), \\ u_{xx}(1) + \alpha \lambda u_x(1) = \alpha f_x(1) \end{cases}$$

Pour  $\lambda = i\mu^2$ , ceci donne le système suivant

$$\begin{cases} v = i\mu^2 u - f \\ u_{xxxx} - \mu^4 u = i\mu^2 f + g \\ m\mu^4 u(1) + u_{xxx}(1) = -m(\gamma + i\mu^2 f(1)), \\ u_{xx}(1) + \alpha i\mu^2 u_x(1) = \alpha f_x(1), \\ u(0) = u_x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

On sait qu'une solution particulière de

$$\begin{cases} u_{xxxx} - \mu^4 u = i\mu^2 f + g, \\ u(0) = u_x(0) = 0 \end{cases}$$

est donnée par

$$u_p(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \mu^{-3} [\operatorname{sh}\mu(x - \xi) - \sin\mu(x - \xi)] [i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)] d\xi.$$

La solution du système (3.5) s'écrit alors

$$u(x) = u_p(x) + \tilde{u}(x),$$

où  $\tilde{u}(x)$  est solution de

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xxxx} - \mu^4 \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_x(0) = 0 \\ m\mu^4 \tilde{u}(1) + \tilde{u}_{xxx}(1) = -m\mu^4 u_p(1) - u_{p_{xxx}}(1) - m(\gamma + i\mu^2 f(1)), \\ \tilde{u}_{xx}(1) + \alpha i\mu^2 \tilde{u}_x(1) = u_{p_{xx}}(1) - \alpha i\mu^2 u_{p_x}(1) + \alpha f_x(1), \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \tilde{u}_{xxxx} - \mu^4 \tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}_x(0) = 0 \\ m\mu^4 \tilde{u}(1) + \tilde{u}_{xxx}(1) = l_1, \\ \tilde{u}_{xx}(1) + \alpha i\mu^2 \tilde{u}_x(1) = l_2, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} l_1 = -m\mu^4 u_p(1) - u_{p_{xxx}}(1) - m(\gamma + i\mu^2 f(1)), \\ l_2 = -u_{p_{xx}}(1) - \alpha i\mu^2 \tilde{u}_x(1) + \alpha f_x(1) \end{cases}$$

Les deux premières équations de (3.6) entraînent

$$\tilde{u}(x) = A(\operatorname{ch}\mu x - \cos \mu x) + B(\operatorname{sh}\mu x - \sin \mu x),$$

où A et B sont deux constantes réelles.

Les deux dernières équations de (3.6) s'écrivent alors:

$$\begin{cases} A[m\mu^4(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu) + \mu^3(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu)] + B[m\mu^4(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu) + \mu^3(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu)] = l_1, \\ A[\mu^2(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu)] + B[\mu^2(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu)] = l_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

### Estimation de $l_1$ et $l_2$

On sait que

$$u_{p_{xxx}} = \frac{\mu^{-1}e^{\mu x}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\mu^{-1}[\|f_{xx}\| + \|g\|]). \quad (3.8)$$

De plus

$$\begin{aligned} l_1 &= -m\mu^4 u_p(1) - u_{p_{xxx}}(1) - m(\gamma + i\mu^2 f(1)) \\ &= -\frac{m\mu}{2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi - m(\gamma + i\mu^2 f(1)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ -[\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)] - m\mu[\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)] \} (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi$$

et

$$\int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = -\frac{2f(1)}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) f_{xx} d\xi$$

d'où

$$l_1 = -m(\gamma + i\mu^2 f(1)) - \frac{i}{2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi + im\mu^2 f(1)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{im\mu}{2} \int_0^1 (\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) f_{xx} d\xi \\
& = -m\gamma + \frac{1}{2} \int_0^1 [-\text{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi) - m\mu(\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi))] i f_{xx}(\xi) d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \{-\text{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi) - m\mu(\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi))\} g(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Or

$$-\frac{1}{2} \left( \text{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi) - \frac{m\mu}{2} [\text{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)] \right) = -\frac{1}{4}(1+m\mu)e^{(1-\xi)\mu} + \mathcal{O}(1)$$

De même

$$-\frac{1}{2} \left( \text{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi) - \frac{m\mu}{2} [\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)] \right) = -\frac{1}{4}(1+m\mu)e^{(1-\xi)\mu} + \mathcal{O}(1)$$

Donc

$$l_1 = -m\gamma - \frac{1}{4}(1+m\mu)e^\mu \int_0^1 e^{-\mu\xi} (i f_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
l_2 & = -u_{p_{xx}}(1) - i\alpha\mu^2 u_{px}(1) + \alpha f_x(1) \\
& = -\frac{1}{2\mu} \int_0^1 (\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi \\
& - \frac{i\alpha\mu^2}{2} \mu^{-2} \int_0^1 (\text{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi + \alpha f_x(1) \\
& = \int_0^1 \left\{ -\frac{i\alpha}{2} [\text{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)] - \frac{1}{2\mu} [\text{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)] \right\} (i\mu^2 f(\xi) + g(\xi)) d\xi \\
& + \alpha f_x(1)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Après intégration par parties, on a

$$\int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = -\frac{2}{\mu^2} f_x(1) + \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)) f_{xx}(\xi) d\xi$$

et

$$\int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu^2} \int_0^1 (\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)) f_{xx} d\xi.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_0^1 \left\{ \frac{\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)] - \frac{i}{2\mu} [(\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi))] \right\} f_{xx}(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)] - \frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)] \right\} g(\xi) d\xi \\ &= \int_0^1 \left\{ -\frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) + \cos \mu(1-\xi)] - \frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) - \sin \mu(1-\xi)] \right\} i f_{xx}(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{2\mu} [\operatorname{sh}\mu(1-\xi) + \sin \mu(1-\xi)] - \frac{i\alpha}{2} [\operatorname{ch}\mu(1-\xi) - \cos \mu(1-\xi)] \right\} g(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Finalement

$$l_2 = -\frac{e^\mu}{4} \left( i\alpha + \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 e^{-\mu\xi} (i f_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|)$$

Les deux équations de 3.7 s'écrivent:

$$E \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix},$$

où E est la matrice dont les éléments  $e_{ij}$  sont donnés par

$$e_{11} = m\mu^4(\operatorname{ch}\mu - \cos \mu) + \mu^3(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu)$$

$$e_{12} = m\mu^4(\operatorname{sh}\mu - \sin \mu) + \mu^3(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu)$$

$$e_{21} = \mu^2(\operatorname{ch}\mu + \cos \mu) + i\alpha\mu^3(\operatorname{sh}\mu + \sin \mu)$$

$$e_{22} = \mu^2(\text{sh}\mu + \sin \mu) + i\alpha\mu^3(\text{ch}\mu - \cos \mu)$$

Notons  $\Delta = \det E$ , alors

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\mu^5 \{i\alpha m\mu^2(1 - \cos \mu \text{ch}\mu) - i\alpha\mu(\cos \mu \text{sh}\mu + \sin \mu \text{ch}\mu) \\ &\quad + m\mu(\sin \mu \text{ch}\mu - \cos \mu \text{sh}\mu) - (1 + \cos \mu \text{ch}\mu)\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

**Estimation de  $\|\tilde{u}_{xx}\|_2$**

On a

$$\tilde{u}(x) = A(\text{ch}\mu x - \cos \mu x) + B(\text{sh}\mu x - \sin \mu x)$$

Donc

$$\tilde{u}_{xx}(x) = \mu^2 \{A(\text{ch}\mu x + \cos \mu x) + B(\text{sh}\mu x + \sin \mu x)\}$$

Regroupons les termes en  $e^{\mu x}$ , on a donc

$$\tilde{u}_{xx}(x) = \mu^2 \{(A + B)e^{\mu x} + (A - B)e^{-\mu x} + A \cos \mu x + B \sin \mu x\}. \quad (3.13)$$

Or  $A$  et  $B$  sont donnés par

$$A = \frac{l_1 e_{22} - l_2 e_{12}}{\Delta},$$

et

$$B = \frac{l_2 e_{11} - l_1 e_{21}}{\Delta}$$

d'où

$$A + B = (l_1(e_{22} - e_{21}) + l_2(e_{11} - e_{12}))/\Delta.$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned}
A + B &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[ -m\gamma - \frac{1}{4}(1 + m\mu)e^\mu \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) \right] \right. \\
&\times [i\alpha\mu^3(e^{-\mu} - (\cos \mu + \sin \mu)) - \mu^2(e^{-\mu} + (\cos \mu - \sin \mu))] \\
&+ \left[ -\frac{e^\mu}{4} \left( i\alpha + \frac{1}{\mu} \right) \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\|) \right] \\
&\times \left. [m\mu^4(e^{-\mu} - \cos \mu + \sin \mu) - \mu^3(e^{-\mu} + (\cos \mu + \sin \mu))] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En regroupant les termes en  $e^\mu$ , on obtient

$$\begin{aligned}
A + B &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{e^\mu}{2} \mu^2 \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \varphi(\mu) + m\gamma \mathcal{O}(\mu^3) + \mathcal{O}(\mu^4(\|f_{xx}\| + \|g\|)) \right. \\
&- \left. \frac{\mu^2}{2} (1 - im\alpha\mu^2) \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \right\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$\varphi(\mu) = i\alpha\mu(\cos \mu + \sin \mu) + m\mu(\cos \mu - \sin \mu) + \cos \mu(1 + i\alpha m\mu^2).$$

### Estimation de $\Delta^{-1}$

En regroupant dans l'expression précédente de  $\Delta$  les termes en  $e^\mu$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2\mu^5 \{ -e^\mu \varphi(\mu) - (1 - i\alpha m\mu^2) + e^{-\mu} [i\alpha\mu(\cos \mu - \sin \mu) \\
&+ m\mu(\cos \mu + \sin \mu) - \cos \mu(1 + i\alpha m\mu^2)] \} \\
&= -2\mu^5 e^\mu \varphi(\mu) + \mathcal{O}(\mu^7)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On a donc besoin dans la suite d'estimer  $|\varphi(\mu)|$ , pour  $\mu$  assez grand.

En effet, on vérifie facilement que

$$|\varphi(\mu)| = \mathcal{O}(\mu^2) \quad \text{et} \quad |\varphi(\mu)| \geq C\mu.$$

Il découle de (3.16)

$$\Delta^{-1} = -\frac{1}{2}\mu^{-5}e^{-\mu}\varphi(\mu)^{-1}(1+\mathcal{O}(\mu e^{-\mu})) = -\frac{1}{2}\mu^{-5}e^{-\mu}\varphi(\mu)^{-1} + \mathcal{O}(\mu^{-5}e^{-2\mu}) = \mathcal{O}(\mu^{-6}e^{-\mu}).$$

Calcul de  $A + B$

On a

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{e^{\mu}}{2} \mu^2 \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \right\} = -\frac{\mu^{-3}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi (1 + \mathcal{O}(\mu e^{-\mu})).$$

Par ailleurs

$$\int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\|)),$$

Donc

$$\begin{aligned} \mu^2(A + B) &= -\frac{\mu^{-1}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) + m\gamma\mathcal{O}(\mu^{-1}e^{-\mu}) \\ &= -\frac{\mu^{-1}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calcul de  $A - B$

On a

$$A - B = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{e^{\mu}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi \psi(\mu) + m\gamma\mathcal{O}(\mu^3) + \mathcal{O}(\mu^4(\|f_{xx}\| + \|g\|)) \right\} \quad (3.18)$$

où

$$\psi(\mu) = 2\mu^2[e^{-\mu}(m\mu - i\alpha\mu) + (i\alpha\mu^2 - 1)\sin\mu].$$

Il en découle

$$\begin{aligned}\mu^2(A - B) &= \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) + \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\|)) + m\gamma\mathcal{O}(\mu^{-1}e^{-\mu}) \\ &= \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|).\end{aligned}\quad (3.19)$$

D'autre part, on peut vérifier que

$$\mu^2 A = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)).\quad (3.20)$$

De même

$$\mu^2 B = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|))\quad (3.21)$$

En reportant les relations (3.17), (3.19), (3.20) et (3.21) dans (3.13), on obtient:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{xx}(x) &= -\frac{\mu^{-1}e^{\mu x}}{4} \int_0^1 e^{-\mu\xi} (if_{xx}(\xi) + g(\xi)) d\xi + e^{\mu x} \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &\quad + e^{-\mu x} \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|) + \cos \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &\quad + \sin \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|))\end{aligned}\quad (3.22)$$

En combinant (3.8) et (3.22), on a

$$\begin{aligned}u_{xx}(x) &= u_{pxx}(x) + \tilde{u}_{xx}(x) = e^{\mu x} \mathcal{O}(e^{-\mu}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &\quad + e^{-\mu x} \mathcal{O}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|) + \cos \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) \\ &\quad + \sin \mu x \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)) + \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)).\end{aligned}$$

Compte tenu de

$$\begin{cases} \|e^{\mu x}\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}e^{\mu}), & \|e^{-\mu x}\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}), \\ \|\cos \mu x\|_2 = \mathcal{O}(1), & \|\sin \mu x\|_2 = \mathcal{O}(1), \end{cases}$$

on obtient

$$\|u_{xx}(\cdot)\|_2 = \mathcal{O}(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)), \text{ pour } \mu \text{ assez grand.}$$

**Estimation de  $\|v\|_2 + m|\eta|$  :**

on a

$$\begin{cases} v = i\mu^2 u - f, \\ \eta = v(1) = i\mu^2 u(1) - f(1). \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \|v\|_2 \leq \mu^2 \|u\|_2 + \|f\|_2, \\ |\eta| \leq \mu^2 |u(1)| + |f(1)|. \end{cases}$$

Comme

$$\|u_{xx}\|_2 = \mathcal{O}\left(\mu^{-\frac{1}{2}}(\|f_{xx}\| + \|g\| + m|\gamma|)\right)$$

il suffit de démontrer que

$$\|v\|_2 + m|\eta| \leq K(\|u_{xx}\|_2 + \|f_{xx}\|_2 + \|g\|_2 + m|\gamma|),$$

pour un certain  $K > 0$ .

On sait que  $u_{xxxx} - \mu^4 u = i\mu^2 f + g$

Multiplions cette équation par  $\bar{u}$  et intégrons de 0 à 1, on obtient

$$\begin{aligned} \mu^4 \int_0^1 |u|^2 dx + m\mu^4 |u(1)|^2 &= i\alpha\mu^2 |u_x(1)|^2 + \int_0^1 |u_{xx}|^2 dx - m\gamma\bar{u}(1) \\ &\quad - im\mu^2 \bar{u}(1)f(1) - \alpha f_x(1)\bar{u}_x(1) - \int_0^1 (i\mu^2 f + g)\bar{u} dx. \\ &= \|u_{xx}\|_2^2 - \Re\{m\gamma\bar{u}(1) + im\mu^2 \bar{u}(1)f(1) + \alpha f_x(1)\bar{u}_x(1) \\ &\quad + \int_0^1 (i\mu^2 f + g)\bar{u} dx\}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

D'autre part, on a les estimations suivantes:

$$I.1) \quad \left| \int_0^1 g\bar{u} dx \right| \leq (\|g\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2),$$

$$I.2) \quad \left| \int_0^1 i\mu^2 f\bar{u} dx \right| \leq \frac{\mu^4}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|f\|_2^2,$$

$$I.3) \quad |m\gamma\bar{u}(1)| \leq \frac{m}{2} |\gamma|^2 + \frac{m}{2} \|u_{xx}\|_2^2,$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu^4 \int_0^1 |u|^2 dx + m\mu^4 |u(1)|^2 &\leq (3 + \alpha + m) \|u_{xx}\|_2^2 + \|g\|_2^2 + m\gamma^2 \\ &+ (1 + \alpha + m) \|f_{xx}\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ceci entraîne

$$|\mu|^4 \left( \|u\|_2^2 + m|u(1)|^2 \right) \leq K_0 \left( \|u_{xx}\|_2^2 + \|f_{xx}\|_2^2 + \|g\|_2^2 + m|\gamma|^2 \right),$$

Le théorème est ainsi démontré.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié la stabilité d'un système "poutre flexible avec masse". La poutre est encastree en l'une de ses extremités, à l'autre extremité libre est attachée une masse  $m$ . Ce modèle est une variante du modèle SCOLE étudié dans [26], [9], [47], [35], [36], [38]. Afin de stabiliser ce système, on considère comme seule loi de commande le moment appliqué sur la masse  $m$ . On montre alors la stabilité uniforme, en utilisant le théorème de Huang. Cette démarche est la même que celle suivie par G. Chen [8] pour établir la stabilité uniforme, par feedback de moment, dans le cas d'une poutre sans masse ( $m=0$ ). Dans les deux cas, la méthode des multiplicateurs ne permet pas de conclure. Notre résultat peut être considéré comme une généralisation de celui de [8] pour le cas d'un système "poutre flexible avec masse". D'autre part, pour le même modèle considéré ici, F. Conrad et O. Morgül dans [9] ont établi la stabilité uniforme, par feedback de force appliquée sur la masse  $m$ . De plus, ils ont obtenu une estimation du taux de décroissance de l'énergie. Ceci fera l'objet de nos travaux ultérieurs.



# 4

## Placement de spectre par feedback linéaire borné pour deux systèmes à paramètres distribués

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le problème de placement de spectre, par feedback linéaire borné, pour deux systèmes à paramètres répartis. Le premier décrit les vibrations d'une corde, et le second décrit les vibrations d'une barre flexible encastrée à l'une de ses extrémités. On montre que ces deux systèmes rentrent bien dans la classe de systèmes étudiée par Xu-Sallet dans [56]. Pour le premier, on montre que, par feedback linéaire borné appliqué sur la frontière, on ne peut assurer que la stabilité forte. En revanche, pour le second, on montre qu'on peut déplacer uniformément le spectre vers la gauche, ce qui garantit la stabilité exponentielle avec un taux de décroissance arbitraire.

Tout d'abord, on comence par rappeler quelques résultats de placement de spectre dans le cas général.

Soit le système d'évolution linéaire suivant, sur un espace de Hilbert séparable dont la norme et le produit scalaire sont notés respectivement par  $\|\cdot\|$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t), \quad (\Sigma_0)$$

où  $A$  est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe  $C_0$  sur  $H$  et l'entrée  $b$  est non bornée ( $b \in D'(A^*)$ ).

On note

- le spectre de  $A$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ , (le spectre de  $A$ )

- $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$  la famille des fonctions propres de  $A$ .
- $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$  la famille des fonctions propres de  $A^*$ .
- $b_n = (\psi_n, b)$ , où  $(\cdot, \cdot)$  est le produit scalaire de dualité sur  $D(A^*) \times D'(A^*)$ , défini au chapitre I.
- $d_n$ , la distance de  $\lambda_n$  au reste du spectre de  $A$  ( $d_n = \inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m|$ ),  $n = 1, 2, \dots$
- $D_n$ , le disque centré en  $\lambda_n$  et de rayon  $d_n/3$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- $A_h = A + b\langle \cdot, h \rangle_H$  ( $h \in H$ )

Dans [56], les auteurs ont considéré la classe de systèmes vérifiant les hypothèses suivantes:

( $H_1$ ): Les résolvantes de  $A$  sont compactes et le spectre de  $A$ ,  $\sigma(A) = \{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ , est simple.

( $H_2$ ):  $b \in D'(A^*)$ ,  $D'(A^*)$  étant le dual topologique de  $D(A^*)$ .

( $H_3$ ): La famille  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$  des fonctions propres de  $A$  forme une base de Riesz de  $H$ . De plus,  $\exists$  une constante  $M > 0$  telle que:

Pour tout  $\lambda \notin \cup D_j$  et pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{b_n}{\lambda - \lambda_n} \right|^2 \leq M < +\infty, \quad (1)$$

et

$$\sum_{n=1, n \neq m}^{+\infty} \left| \frac{b_n}{\lambda_m - \lambda_n} \right|^2 \leq M < +\infty. \quad (2)$$

**Remarque 15** la famille biorthogonale correspondante formée de fonctions propres de  $A^*$  et notée  $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}$ , est aussi une base de Riesz de  $H$ .

Pour cette classe de systèmes, ils ont obtenu le résultat suivant;

**Théorème 4.1** [56] *Sous les hypothèses  $H_1 - H_3$  on a*

1. pour tout  $h \in H$ , l'opérateur  $A_h$  est régulier-spectral et le spectre  $\sigma(A_h) = \{\nu_k, k \in \mathbb{N}\}$  satisfait la condition (3);

2. étant donné un ensemble  $\Lambda = \{\nu_k, k \in \mathbb{N}\}$  tel que  $\nu_k \neq \nu_j$  pour  $k \neq j$ , alors il existe un  $h \in H$  tel que l'opérateur  $A_h$  correspondant vérifie  $\sigma(A_h) = \Lambda$  si et seulement si l'ensemble  $\Lambda$  satisfait la condition (3).

De plus, le feedback est donné par l'expression:

$$h = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j \psi_j \quad \text{avec} \quad \bar{h}_j = \frac{\nu_j - \lambda_j}{\bar{b}_j} \prod_{n=1, n \neq j}^{+\infty} \frac{\lambda_j - \nu_n}{\lambda_j - \lambda_n},$$

où  $\bar{h}_j$  désigne le complexe conjugué de  $h_j$ .

**Définition 4.1** Un opérateur linéaire fermé  $A : D(A) \rightarrow H$  est dit régulier-spectral si ses résolvantes sont compactes et ses vecteurs propres forment une base de Riesz de  $H$ .

Plusieurs systèmes à paramètres distribués peuvent être formulés sous la forme  $(\Sigma_0)$  voir [17]. En particulier, les exemples de [48], l'équation de poutre contrôlée par une force latérale ([39];[55]) ou par un moment et une force [39], les équations de conduction de la chaleur [17] et l'équation des ondes [41].

Sun a prouvé [48] que, sous l'hypothèse  $(H_1)$  avec  $b \in H$  et une hypothèse plus forte que  $(H_3)$ , une condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur  $A + b\langle \cdot, h \rangle_H$  ( $h \in H$ ) soit régulier-spectral et qu'il ait le spectre  $\{\nu_n, n \in \mathbb{N}\}$  assigné est:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{\nu_n - \lambda_n}{b_n} \right|^2 < +\infty. \quad (3)$$

Plusieurs résultats sur le placement de spectre, par feedback linéaire borné, appliqué sur la frontière ont été établis dans [16], [27], [39],[25], et [40]. Notamment, Rebarber qui a montré que, dans certains cas, il est possible de placer un nombre infini d'éléments du spectre par un feedback frontière non borné mais admissible [40]. Dans [25], les auteurs ont donné des conditions suffisantes sur  $\sigma(A)$  et  $b$  pour que l'opérateur  $A + b\langle \cdot, h \rangle_H$  soit régulier-spectral. Dans [27], Liu a généralisé les conditions de Sun pour une classe de systèmes satisfaisant les conditions  $(H_1) - (H_3)$  avec la condition suivante remplaçant celles de (1) et (2):

$$\inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta |\lambda_n|^\alpha,$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{|b_n|}{|\lambda_n|^\alpha} \right)^2 < +\infty, \quad (4)$$

Pour un certain  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\delta > 0$ .

Cependant, la dernière condition est restrictive dans le sens qu'elle n'est vérifiée ni par l'équation des ondes en dimension un, ni par l'équation des poutres avec le feedback du moment.

Pour ces deux exemples, on montre que les conditions (H1) – (H3), sont satisfaites et le théorème 4.1 nous permet de conclure.

## 4.2 Cas de l'équation des ondes en dimension un

On considère l'équation des ondes en dimension un:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(1, t) = \Gamma(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

$\Gamma(t)$  représente le contrôle frontière sur l'extrémité libre.

On définit l'espace de Hilbert

$$W = \{f \in H^1(0, 1); f(0) = 0\}.$$

L'espace d'état est alors  $H = W \times L^2(0, 1)$  muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_0^1 [f_{1x} \bar{g}_{1x} + f_2 \bar{g}_2] dx.$$

Posons

$$\phi_1(t) = u(\cdot, t), \quad \phi_2(t) = u_t(\cdot, t) \quad \text{et} \quad \phi(t) = (\phi_1, \phi_2)'$$

Le système homogène ( $\Gamma(t) = 0$ ) s'écrit alors sous la forme opérationnelle:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in H^2 \times W : f_1(0) = f_{1x}(1) = 0 \right\}.$$

L'opérateur  $A$  est anti-adjoint, ses résolvantes sont compactes et il est générateur d'un semi-groupe  $C_0$  sur  $H$ .

Maintenant, on va identifier l'entrée  $b$  et écrire le système (4.1) sous la forme  $(\Sigma_0)$ ;

Il est clair que si  $\phi$  est une solution de (4.1) alors

$\dot{\phi}(t) = L\phi(t)$  où  $L$  est l'opérateur défini par la même matrice que  $A$  mais de domaine plus large.

En effet, si  $\phi$  est solution de (4.1) alors  $(\Phi - \Gamma\hat{x}) \in D(A)$

Avec  $\hat{x} = (x, 0)'$

$D(L)$  sera donc défini par:

$$D(L) = \{\xi + \Gamma\hat{x}; \xi \in D(A), \Gamma \text{ réel}\}.$$

Il est facile de vérifier sur cet exemple que

$$D(L) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in H^2 \times W : f_1(0) = 0 \right\}.$$

Le système non-homogène s'écrit alors

$$\dot{\Phi}(t) = L\Phi(t),$$

avec

$$\phi(t) = \xi(t) + \Gamma(t)\hat{x}.$$

D'où

$$\dot{\Phi}(t) = \hat{A}\phi(t) + (L - \hat{A})\phi(t).$$

Or

$$\begin{aligned}(L - \hat{A})\phi(t) &= (L - \hat{A})\xi(t) + \Gamma(t)(L - \hat{A})\hat{x} \\ &= \Gamma(t)(L - \hat{A})\hat{x}, \quad (\text{car } (L - \hat{A})\xi(t) = 0)\end{aligned}$$

On a donc pour tout  $\psi \in D(A^*)$

$$\langle \dot{\Phi}(t), \psi \rangle = \langle \hat{A}\phi(t), \psi \rangle + \Gamma(t)\langle (L - \hat{A})\hat{x}, \psi \rangle.$$

Or

$$\begin{aligned}\langle (L - \hat{A})\hat{x}, \psi \rangle &= -\langle \hat{A}\hat{x}, \psi \rangle, \quad (\text{car } L\hat{x} = 0) \\ &= -\langle \hat{x}, A^*\psi \rangle \\ &= \langle \hat{x}, A\psi \rangle \\ &= \int_0^1 \bar{\psi}_{2x} dx \\ &= \bar{\psi}_2(1), \quad (\text{car } \psi_2(0) = 0). \\ &= \langle b, \psi \rangle,\end{aligned}$$

où  $b = (\delta(1 - x), 0)'$ ,  $\delta$  étant la fonction de Dirac.

Le système peut donc s'écrire dans  $D'(A^*)$

$$\dot{\Phi}(t) = \hat{A}\phi(t) + b\Gamma(t),$$

ou formellement dans  $H$

$$\dot{\Phi}(t) = A\phi(t) + b\Gamma(t).$$

Il est clair que  $L_h = A_h^* = -A + h(\cdot, b)$ .

Un calcul direct montre que le spectre de l'opérateur  $-A$  est donné par

$$\sigma(-A) = \{\lambda_{\pm k} = \pm i(k + 1/2)\pi, \quad k = 0, 1, \dots\}$$

et les vecteurs propres correspondants sont donnés par

$$\psi_{\pm k}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda_{\pm k} \end{pmatrix} \frac{i \sin[(k + \frac{1}{2})\pi x]}{2(k + \frac{1}{2})\pi}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Comme l'opérateur  $A$  est anti-adjoint et ses résolvantes sont compactes, les éléments  $\{\psi_{\pm k}\}$  forment une base orthogonale de  $H$ .

D'autre part

$$b_{\pm k} = \pm(-1)^k/2, k = 0, 1, ..$$

Pour tout  $j \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0, n \neq j}^{+\infty} \left| \frac{1}{\lambda_j - \lambda_n} \right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{-n}} \right|^2 &= \sum_{n=0, n \neq j}^{+\infty} \frac{1}{(j-n)^2 \pi^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+n+1)^2 \pi^2} \\ &= \sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{1}{(j-n)^2 \pi^2} + \sum_{n=0}^{j-1} \frac{1}{(j-n)^2 \pi^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(j+n+1)^2 \pi^2} \\ &\leq 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \pi^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'inégalité est aussi vraie pour  $j \leq 0$ , ainsi la condition (2) est satisfaite.

On montre que dans ce cas la condition (2) entraîne la condition (1).

En effet, pour chaque  $\lambda \notin \cup_{j=0}^{+\infty} D_{\pm j}$ , il existe un entier  $m_0$  tel que

$$\Im m(\lambda) \in [\Im m(\lambda_{m_0}), \Im m(\lambda_{m_0+1})],$$

ceci parceque la distance  $d_j = |\Im m(\lambda_j), \Im m(\lambda_{j+1})|$  est supérieur à une certaine constante.

On a donc,

pour  $j \geq m_0 + 2$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_j|^2 &= \Re e^2(\lambda) + [\Im m(\lambda) - (m_0 + 1 + 1/2)\pi + (m_0 + 1 + 1/2)\pi - (j + 1/2)\pi]^2 \\ &\geq \Re e^2(\lambda) + (j - m_0 - 1)^2 \pi^2 \\ &= \Re e^2(\lambda) + |\lambda_j - \lambda_{m_0+1}|^2. \end{aligned}$$

Pour  $j \leq m_0 - 1$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_j|^2 &= \Re e^2(\lambda) + [\Im m(\lambda) - (m_0 + 1/2)\pi + (m_0 + 1/2)\pi - (j + 1/2)\pi]^2 \\ &\geq \Re e^2(\lambda) + (m_0 - j)^2 \pi^2 = \Re e^2(\lambda) + |\lambda_j - \lambda_{m_0}|^2. \end{aligned}$$

De plus on a

$$|\lambda - \lambda_{m_0}|^2, \quad |\lambda - \lambda_{m_0+1}|^2 \geq \pi^2/9, \quad (\text{car } \lambda \notin \cup_{j=0}^{+\infty} D_{\pm j}).$$

Ainsi, pour chaque  $\lambda \notin \cup_{j=0}^{+\infty} D_{\pm j}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \right|^2 + \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_{-j}} \right|^2 &\leq \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_{m_0}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\lambda - \lambda_{m_0+1}} \right|^2 + \sum_{j=m_0+2}^{+\infty} \left| \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{m_0+1}} \right|^2 \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{m_0-1} \left| \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{m_0}} \right|^2, \\ &\leq 1 + \frac{18}{\pi^2}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 4.1, si un spectre  $\{\nu_k\}$  est assignable par feedback continu il doit satisfaire la condition

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\nu_n - i(n + 1/2)\pi|^2 + |\nu_{-n} + i(n + 1/2)\pi|^2 < +\infty.$$

Ceci entraîne que  $\nu_n$  doit satisfaire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n = i(n + 1/2)\pi.$$

Ainsi, par feedback continu seule la stabilité forte est assurée. Cependant, on sait que le feedback non borné  $\Gamma(t) = -\frac{1}{2}u_t(1, t)$  stabilise exponentiellement le système ([22],[41]), de plus l'opérateur du système en boucle fermée est aussi régulier-spectral.

### 4.3 Cas d'une barre flexible encastrée:

Considérons une barre flexible homogène, encastrée en l'une de ses extrémités, on suppose, pour simplifier, que sa densité linéique  $m$  et sa flexibilité  $EI$ , sont telles que  $\frac{EI}{m} = 1$  et que sa longueur  $L$  est égale à un.

Les vibrations de cette barre sont régies par l'équation aux dérivées partielles (modèle d'Euler-Bernoulli)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0 \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ u_{xxx}(1, t) = 0 \\ u_{xx}(1, t) = \Gamma(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

Le contrôle  $\Gamma(t)$  étant le moment ponctuel exercé sur l'extrémité libre de la barre.

Soit l'espace de Hilbert

$$W = \{f \in H^2(0, 1); f(0) = f_x(0) = 0\}.$$

L'espace d'état est alors  $H = W \times L^2(0, 1)$  muni du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_0^1 [f_{1xx}\bar{g}_{1xx} + f_2\bar{g}_2] dx.$$

Posons

$$\phi_1(t) = u(\cdot, t), \quad \phi_2(t) = u_t(\cdot, t) \quad \text{et} \quad \phi(t) = (\phi_1, \phi_2)'$$

Le système non-homogène (4.2) s'écrit alors sous la forme opérationnelle:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) + b\Gamma(t),$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial^4}{\partial x^4} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in H^4 \times W : \begin{matrix} f_1(0) = f_{1x}(0) = 0 \\ f_{1xxx}(1) = f_{1xx}(1) = 0 \end{matrix} \right\},$$

avec

$$b = [0, \delta'(1 - x)]'.$$

on vérifie aisément que l'opérateur  $A$  est anti-adjoint, générateur d'un semi-groupe, et que, le spectre de  $-A$  est donné par

$$\sigma(-A) = \{\lambda_{\pm k} = \pm i[k\pi + \pi/2 + O(e^{-k\pi})]^2, \quad k = 1, \dots\}$$

On montre qu'il existe deux constantes strictement positives  $M_1$  et  $M_2$  telles que

$$b_{\pm n} = \beta_{\pm n} n; \quad \text{avec } M_1 \leq |\beta_{\pm n}| \leq 2, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

(voir [39] [43] et aussi [55]).

Comme l'opérateur  $A$  est anti-adjoint et ses résolvantes sont compactes, ses fonctions propres forment une base de Riesz de  $H$ .

On va maintenant vérifier la condition (2). Pour simplifier, on considère seulement (sans perdre de généralité) le cas  $j \geq 1$ .

On a donc

$$|\lambda_j - \lambda_n|^2 = [(j - n)\pi + O(e^{-j\pi}) + O(e^{-n\pi})]^2 \times [(j + n)\pi + O(e^{-j\pi}) + O(e^{-n\pi})]^2,$$

et

$$|\lambda_j - \lambda_{-n}|^2 = \{[j\pi + \pi/2 + O(e^{-j\pi})]^2 + [n\pi + \pi/2 + O(e^{-n\pi})]^2\}^2.$$

D'où les l'inégalités

$$\begin{aligned} \sum_{n=0, n \neq j}^{+\infty} \left| \frac{b_n}{\lambda_j - \lambda_n} \right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{b_{-n}}{\lambda_j - \lambda_{-n}} \right|^2 &\leq M_3 \left\{ \sum_{n=j+1}^{+\infty} \frac{n^2}{(j-n)^2(j+n)^2} + \sum_{n=1}^{j-1} \frac{n^2}{(j-n)^2(n+j)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right\} \\ &\leq \frac{M_3 \pi^2}{2}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante  $M_3 > 0$ .

**Remarque 16** On peut aussi vérifier sur cet exemple, que la condition (2) entraîne la condition (1).

On a donc d'après le théorème 4.1, pour tout ensemble  $\Lambda = \{\nu_k\}$  satisfaisant à

$$\sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \left| \frac{\nu_n - \lambda_n}{n} \right|^2 < +\infty,$$

on peut trouver un feedback continu tel que le spectre de l'opérateur  $A_h$  soit égale à  $\Lambda$ . par exemple si  $\Lambda = \{\nu_n = -\alpha^2 \pm \lambda_n, \alpha \in \mathbb{R}^*, n = 1, 2, \dots\}$  le semi-groupe du système en boucle fermée satisfait

$$\|e^{tA_h}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M_\alpha e^{-t\alpha^2},$$

pour une certaine constante  $M_\alpha > 0$ , (ne dépendant que de  $\alpha$ ).

Ceci explique pourquoi on peut, par un feedback continu, déplacer uniformément le spectre de  $A$  vers la gauche comme c'est prouvé dans [39], l'expression explicite du feedback est alors donnée par le théorème (4.1).



# Bibliographie

- [1] J. Baillieul and M. Levi, Rotational elastic dynamics, *Physica*, 27D : 43-62, (1987).
- [2] J.M. Ball and M. Slemrod, Feedback stabilization of distributed semilinear control systems. *App. Math. Optim.*, 5:169-179., 1979.
- [3] A.V. Balakrishnan, Applied Functional Analysis , Springer Verlag, NewYork (1976).
- [4] C.D. Benchimol, A note on weak stabilizability of contraction semigroups, *SIAM J. Control and Optimization*, 16 (1978), pp. 373-379.
- [5] A.M. Bloch and E.S. Titi, "On the dynamics of rotating elastic beams," *Proc. Conf. on New Trends in System Theory*, Conte, Perdon, Wyman eds. Birkhäuser, Genoa, Italy, July 9-11, (1990).
- [6] H. Brezis, Analyse fonctionnelle: théorie et applications. Masson (1983).
- [7] G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall and G. Payre, Modeling, stabilization, and control of serially connected beams, *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 25, pp.526-546, (1987).
- [8] G. Chen, S.G. Krantz, D.W. Ma, C.E. Wayne and H.H. West, The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation, *Operator Methods for Optimal Control Problems*, Editor : Sung J. Lee, Marcel Dekker Inc., (1988).
- [9] F. Conrad, O. Morgül, On the stabilization of a flexible beam with a tip mass, A paraître au SIAM.
- [10] F. Conrad and M. Pierre, *Stabilization of Euler-Bernoulli beam by non-linear boundary feedback*, Research report INRIA, no.1235, University of Nancy 1, France, (1990).

- [11] R.F. Curtain, Spectral systems, *Internat.J.Control*, 39 (1984), pp.657-666.
- [12] C.M. Dafermos, M. Slemrod, Asymptotic behaviour of nonlinear contraction semi-groups, *J. Funct. Anal.* 13, (1973), pp. 97-106.
- [13] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators Part III: Spectral Operators, Wiley-Interscience, New York, (1971).
- [14] I.C. Gohberg and M.G. Kreĭn, Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators, American Mathematical Society, Providence, RI, (1969).
- [15] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Masson, Paris, (1991).
- [16] L.F. Ho, Spectral assignability of systems with scalar control and application to a degenerate hyperbolic system, *SIAM J.Control Optim.*,24 (1986), pp 1212-1231.
- [17] L.F. Ho and D.L. Russell, Admissible elements for systems in Hilbert Space and a Carleson measure criterion, *SIAM J.Control Optim.*,21, pp 614-639, (1983).
- [18] F.L. Huang 1985, "Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces", *Ann. Diff. Equations*, vol.1, pp.43-56, (1985).
- [19] F.L. Huang 1993, "Strong asymptotic stability of linear Dynamical Systems in Banach Spaces", *Journal of Differential Equations*, 104, pp 307-324 (1993)
- [20] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, New York, (1976).
- [21] T. Kobayashi, A digital PI-Controller for distributed parameter systems, *SIAM J.Control Optim.*, 26, pp 1399-1414, (1988).
- [22] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation, *SIAM J.Control Optim.*,29 (1991), pp 197-208.
- [23] H. Laousy, B. Chentouf "On the boundary stabilization of a hybrid system", en préparation.
- [24] H. Laousy, C.Z. Xu and G. Sallet "boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system", *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol 41, NO.2, pp. 241-245, (1996)..

- [25] I. Lasiecka and R. Triggiani, Finite rank, relatively bounded perturbations of semigroup generators. Part II : spectrum and Riesz basis assignment with application to feedback systems, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 143 , pp.47-100, (1986),
- [26] W. Littman and L. Markus, Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping , *Ann. Mat. Pura Appl.* , 1522 (1988), pp. 281-330.
- [27] J.Q. Liu, Perturbation of one rank and the pole assignment, *J. Systems Sci. Math. Sci.*, no.2(2), pp.81-94, (1982), (En Chinois avec une introduction en Anglais).
- [28] O. Morgül, "Orientation and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body : Planar motion," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, vol. 36, pp. 953-963, (1991).
- [29] O. Morgül, "Constant angular velocity control of a rotating flexible structure", *Proc. of 2th European Conf., ECC'93*, Groningen, Netherlands, pp.299-302, (1993).
- [30] O. Morgül, "Control and stabilization of a rotating flexible structure", *Automatica* vol.30, No.2, pp.351-356, (1994).
- [31] B. Sz-Nagy and Foias, "Harmonic analysis of operators on Hilbert space", it American Elsevier, New York, 1970
- [32] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, (1987).
- [33] S.A. Pohjolainen, Robust multivariable PI-controller for infinite dimensional systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 27(1982), pp.17-30.
- [34] A.J. Pritchard and J. Zabczyk, Stability and Stabilizability of infinite dimensional systems, *SIAM Review*, Vol.23, No. 1, (1981).
- [35] B. Rao, Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity, *Siam J. Control and Optim.*, 33 (2) (1995), pp. 440-454.
- [36] B. Rao, Recent progress in non-uniform and uniform stabilization of the SCOLE model by boundary feedback, Boundary control and boundary variation, P. Zolésio ed., Lecture notes in control and information sciences (Thèse d'habilitation).
- [37] B. Rao, Stabilisation uniforme d'une équation de plaque par contrôle frontière dynamique, *CRAS*, t. 321, Série I, p. 1449-1454, (1995).

- [38] B. Rao, A Remark on Stabilization of the SCOLE Model with an a priori Bounded Boundary Control (Thèse d'habilitation).
- [39] R.L. Rebarber, Spectral determination for a cantilever beam, *IEEE Trans. Automat. Control*, 34, pp. 502-510, (1989).
- [40] R.L. Rebarber, Spectral assignability for distributed parameter systems with unbounded scalar control, *SIAM J. Control Optim.*, 27, pp.148-169,(1989).
- [41] P. Rideau, Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs-actionneurs ponctuels : étude du spectre du système, Thèse, Ecole Nationale supérieure des Mines de Paris, Sophia-Antipolis, France, (1985).
- [42] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [43] D.L. Russell, Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic implications, in Autumn College on Semigroups and Applications, International Center for Theoretical Physics, Italy, (1984).
- [44] D.L. Russell, Decay Rates for Weakly Damped Systems in Hilbert Space Obtained with Control-Theoretic Methods. *Journal of Differential Equations*, 19(1975), pp 344-370.
- [45] J. Schwartz, Perturbation of spectral operators and applications : I. Bounded perturbation, *Pacific J.Math.*, pp. 415-458, (1954).
- [46] M. Slemrod, A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space, *SIAM J. Control Optim*, Vol. 12. No. 3., pp.500-508, (1974).
- [47] M. Slemrod, Feedback stabilization of a linear control system in Hilbert space with a priori bonded control. *Math. Contr. Signal. System*, 2:265-285.,(1989).
- [48] S.H. Sun, On spectrum distribution of completely controllable linear systems, *SIAM J. Control Optim.*, 19, pp. 730-743, (1981).
- [49] R. Triggiani, Lack of uniform stabilization for noncontractive semigroups under compact perturbation, *Proceedings of American Mathematical Society*, vol.105, No.2, (1989).
- [50] R. Triggiani, On the Stabilizability Problem in Banach Space, *J.Math. Anal. Appl.* 52, 383-403, (1975).

- [51] G. Weiss, Admissibility of input elements for diagonal semigroup on  $l^2$ , *Systems and Control Lett.*,10 (1988), pp.79-89.
- [52] M.W. Wonham. Linear multivariable control: A Geometric Approach. Springer-Verlag (6th edition), 1985.
- [53] C.Z. Xu and J. Baillieul, "Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torquecontrol", *IEEE Trans. Automatic. Control*, vol.38, No.12, pp. 1754-1765, (1993).
- [54] C.Z. Xu, G. Sallet and H. Laouay "*Spectrum and Riesz basis assignment of distributed parameter feedback systems*", *Progress in partial differential equations the Metz surveys 2*. Pitman Research Notes in Mathematics Series 296.
- [55] C.Z. Xu and G. Sallet, Boundary stabilization of rotating flexible systems, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 185, Eds. R.F. Curtain, A. Bensoussan and J.L. Lions, Springer-Verlag, pp.347-365, (1992).
- [56] C.Z. Xu and G. Sallet, "On spectrum and Riesz basis assignment of infinite-dimensional linear systems by bounded linear feedbacks", *SIAM J.Control Optim*, Vol. 34. No. 2., pp.521-541, (1996).
- [57] R.M. Young, An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, (1980).