



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b 112038

S/M

THESE
présentée à
L'UNIVERSITE DE METZ
pour l'obtention du titre de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ
spécialité: Mathématiques
mention: Mathématiques Appliquées
par
Renata Beatrice BUNOIU

titre: SUR QUELQUES PROBLEMES MATHÉMATIQUES
EN MÉCANIQUE DES FLUIDES

soutenue le 20.06.1997 à l'Université de Metz devant la commission d'examen:

Ștefan BALINT	Professeur à l'Université de Timișoara Rapporteur
Guy BAYADA	Professeur à l'INSA Lyon Rapporteur
Doina CIORANESCU	Directeur de Recherche CNRS Examineur
Colette PICARD	Professeur à l'Université de Picardie Rapporteur
Serge RICHARD	Ingénieur chargé d'études au CEA Examineur
Jeannine SAINT JEAN PAULIN	Professeur à l'Université de Metz Directeur de thèse

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19970245
Cote	S/M3 97/M
Loc	Magasin

AVANT-PROPOS

Qu'il me soit permis ici d'exprimer ma profonde gratitude à Madame Jeannine Saint Jean Paulin pour avoir accepté de guider mes premiers pas dans la recherche.

Mes chaleureux remerciements vont à Madame Colette Picard et à Monsieur Ștefan Balint qui ont bien voulu être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie Monsieur Guy Bayada pour avoir accepté d'être rapporteur, ainsi que pour ses remarques intéressantes.

J'exprime ma gratitude à Madame Doina Ciorănescu, coordonatrice du Programme Tempus JEP 2797 "Développement des Mathématiques Appliquées en Roumanie" (financé par la Communauté Européenne), programme qui a fait possible ma présence en DEA à l'Université de Metz. Je lui remercie aussi pour avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je remercie Monsieur Serge Richard pour avoir accepté d'être membre de ce jury, ainsi que pour avoir proposé l'étude présentée dans le troisième chapitre de cette thèse, étude qui a fait l'objet d'un contrat de recherche avec le CEA.

Toute ma reconnaissance à mes professeurs de Roumanie, les premiers qui m'ont donné le goût des mathématiques: George Căiniceanu, Dumitru Hărăguș, Tomița Vasile; je remercie également Monsieur Viorel Radu pour avoir organisé localement les cours du programme Tempus.

Je remercie les personnes du Département de mathématiques qui par leur aide ont fait possible mon séjour en France. Je remercie Andreea, Jean-Marc et Khalid, les discussions avec eux m'ont été fort utiles.

Il m'est particulièrement agréable de remercier la personne qui, de loin, m'a encouragée ce dernier temps.

Un très grand merci à toute ma famille, qui m'a beaucoup soutenue et encouragée. Je ne pourrai jamais remercier assez Jang, qui a toujours été à côté de moi, pour le meilleur et pour le pire.

A Marieta et Ion,
mes grands-parents

A la mémoire de C. F.

Table des matières

Introduction	1
CHAPITRE I: Fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur	4
Introduction	5
§1. Présentation des problèmes	8
§2. Existence d'une solution dans le cas ε fixé	12
§3. Estimations a priori et convergences dans le cas de lubrification	21
§4. Problème limite pour la lubrification	32
§5. Estimations a priori et convergences pour le problème sans injection	41
§6. Problème limite pour le cas sans injection	50
§7. Conclusions	56
Bibliographie du Chapitre I	59
CHAPITRE II: Convergence triple-échelle pour le problème de Stokes .	61
Introduction	62
§1. Présentation du problème	64
§2. Estimations a priori et prolongement de la pression	67
§3. Résultats de convergence	75
§4. Passage à la limite et problème homogénéisé	80
Bibliographie du Chapitre II	84
Chapitre III: Calcul de la charge dans un système hydraulique - étude théorique et numérique-	85
Introduction	86
§1. Présentation du problème	88
§2. Transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites	93
§3. Calcul des coefficients homogénéisés et résolution du problème dans deux cas limites	105
§4. Problème limite dans le cas δ fixé, $\eta \rightarrow 1$	110

§5. Application des conditions de symétrie aux problèmes auxiliaires (cas δ fixé, η fixé)	122
§6. Calculs numériques dans le cas δ fixé, η fixé	124
§7. Calcul de la charge dans le système hydraulique	133
ANNEXE A	139
ANNEXE B	142
Bibliographie du Chapitre III	146

Introduction

Le présent travail porte sur l'étude mathématique, théorique et numérique, de quelques problèmes issus de la mécanique des fluides. La thèse est divisée en trois chapitres.

Le chapitre I, intitulé "Fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur", étudie l'écoulement d'un fluide incompressible dans un domaine tridimensionnel pour lequel la troisième dimension est beaucoup plus petite que les deux autres. Elle est de l'ordre d'un petit paramètre qu'on note ε .

L'étude des fluides pour lesquels la viscosité est une fonction non linéaire de la vitesse du fluide est importante. Effectivement, dans la nature il y a plusieurs fluides de ce type, comme par exemple l'encre, certaines peintures, le bitume, les polymères, quelques hydrocarbures. On travaille ici avec une loi générale pour la viscosité. Les conditions imposées sont satisfaites en particulier par les fluides de Cross, Williamson, Carreau. Le problème de film mince qu'on étudie ici est rencontré en particulier dans le cas pratique de lubrification.

L'écoulement est régi par des équations du type Navier-Stokes stationnaire, les inconnues étant la vitesse et la pression du fluide. Deux cas sont traités, suivant la présence ou l'absence des forces volumiques et les conditions au bord. Dans le premier cas on considère des conditions de Dirichlet non homogènes au bord du domaine, les forces extérieures étant supposées nulles (§2-§4). Dans le deuxième cas on considère des conditions de Dirichlet homogènes au bord du domaine mais dans ce cas les forces extérieures sont non nulles (§5-§6). Les deux modèles mathématiques sont présentés au §1.

Dans le premier cas on démontre d'abord (§2) un résultat d'existence d'une solution pour le cas ε fixé. Au §3 on fait une dilatation du domaine dans la troisième direction avec la valeur ε . On considère les nouvelles variables, pour lesquelles on donne des estimations a priori et ensuite des résultats de convergence. Au §4 on passe à la limite dans le problème initial et on obtient un problème scalaire dans la troisième variable.

Dans le deuxième cas on connaît l'existence d'une solution pour le cas ε fixé. Au §5 on utilise les méthodes de §3 pour trouver des estimations a priori et des résultats de convergence pour les variables définies dans le domaine obtenu après dilatation. Au §6 on passe à la limite selon ε et on étudie un cas particulier, dans lequel le problème limite peut être découplé. Au §7 on présente quelques conclusions sur les deux types

de problèmes limites obtenus.

Le **chapitre II**, ainsi que le **chapitre III** de la thèse portent essentiellement sur des problèmes d'homogénéisation et des techniques de petits paramètres. La méthode d'homogénéisation est une méthode mathématique utilisée pour l'étude des problèmes posés dans un milieu non-homogène qui présente une structure périodique. Si les dimensions d'une période sont petites par rapport aux dimensions globales du domaine, on définit un petit paramètre (noté en général par ε) qui représente le rapport entre les deux dimensions. Le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ correspond en pratique au passage du problème de départ à un problème posé dans un milieu homogène. Ce problème s'appelle problème homogénéisé. Plusieurs méthodes sont connues pour obtenir le problème homogénéisé: la méthode du développement asymptotique, la méthode de l'énergie, la méthode de convergence multi-échelle. Comme application pratique de la méthode de l'homogénéisation on peut mentionner: exploitation des gisements pétroliers, industrie chimique, problèmes d'hydraulique.

Au **chapitre II**, intitulé "Convergence triple-échelle pour le problème de Stokes", on étudie le problème de Stokes classique dans un domaine qui a une structure avec double périodicité. Le domaine présente des petites inclusions solides rigides, de l'ordre d'un paramètre ε et des très petites inclusions, de l'ordre de ε^2 . Dans la partie du domaine sans inclusions on a un fluide incompressible pour lequel l'écoulement est régi par l'équation stationnaire de Stokes. On suppose que les forces volumiques sont non nulles. Sur le bord du domaine occupé par le fluide on prend des conditions de Dirichlet homogènes. Le modèle mathématique du problème est donné au §1. Les inconnues sont la vitesse et la pression du fluide. Au §2 on donne des estimations a priori pour la vitesse et la pression. On est ramené à construire un prolongement de la pression dans la partie solide du domaine, afin d'avoir un résultat de convergence forte pour la pression. Cette convergence est essentielle pour le passage ultérieur à la limite. La méthode utilisée ici pour obtenir le problème homogénéisé est la convergence triple-échelle. Au §3 on donne des résultats de convergence triple-échelle pour la vitesse, ainsi que des conditions au bord pour la limite de la vitesse. Au §4 on passe à la limite selon $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le problème de départ et on trouve le problème homogénéisé. Il s'agit d'un problème à trois pressions.

Le **chapitre III**, intitulé "Calcul de la charge dans un système hydraulique" est une étude théorique et numérique d'un problème pratique: le calcul de la charge dans un système hydraulique. Les équations traités ici sont également rencontrés dans d'autres

domaines, comme les problèmes du type thermique par exemple. L'étude faite ici peut donc être appliquée à une classe plus large de problèmes physiques.

Le système hydraulique est un dispositif qui contient une structure drainante. Cette dernière contient des galeries horizontales drainantes, réparties périodiquement, ce qui nous permet d'utiliser des méthodes d'homogénéisation. On suppose que la hauteur de la structure drainante est faible comparée aux deux autres dimensions. On s'intéresse d'abord au calcul numérique des fonctions définies par les problèmes auxiliaires, des coefficients homogénéisés et ensuite de la charge hydraulique. L'étude présentée est faite suivant différentes perméabilités hydrauliques pour les deux matériaux qui composent le système hydraulique: matériau hôte et matériau de remplissage des galeries, ainsi que selon le rapport volumique des matériaux. Trois petits paramètres sont présents dans ce travail: $\varepsilon, \delta, \eta$, liés respectivement à la périodicité de la structure, aux dimensions relatives et au rapport des perméabilités hydrauliques.

Au §1 on présente le problème posé dans la structure drainante uniquement et on donne le problème homogénéisé qui correspond au passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Ce problème est le résultat d'un travail antérieur au notre. Au §2 on transforme les conditions de périodicité des problèmes auxiliaires en conditions aux limites classiques. Pour cela on utilise la géométrie du domaine et les propriétés particulières des perméabilités. Aux §3-§5 on calcule les fonctions auxiliaires et les coefficients homogénéisés, suivant différents ordres de grandeur des paramètres δ et η . Dans le sixième paragraphe on calcule la charge dans le système hydraulique pour plusieurs cas différents.

CHAPITRE I

FLUIDE A VISCOSITE NON LINEAIRE DANS UN DOMAINE DE FAIBLE EPAISSEUR

CHAPITRE I

Fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur

Introduction

On étudie dans ce chapitre l'écoulement d'un fluide à viscosité non linéaire dans un domaine de faible épaisseur, de l'ordre d'un petit paramètre strictement positif ε . Deux cas sont traités: celui du mouvement engendré par des conditions aux limites non homogènes (problème de lubrification) et celui du mouvement engendré par une force extérieure. On s'intéresse au comportement limite lorsque l'épaisseur du domaine tend vers zéro.

Plusieurs problèmes analogues ont déjà été étudiés.

- Le cas de fluides à viscosité constante a été traité par G. Bayada, M. Chambat. Dans G. Bayada, M. Chambat [2] on a la démonstration mathématique, pour le problème de lubrification, du passage des équations de Stokes problème de lubrification au problème de Reynolds. Le cas Navier-Stokes pour le problème de lubrification est traité dans A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1]. Le terme non linéaire disparaît lors du passage à la limite et on retrouve le problème de Reynolds. Dans les deux cas, la pression est déterminée de manière unique comme solution d'un problème bidimensionnel. Le problème de Navier-Stokes dans un domaine de faible épaisseur est également traité dans S. A. Nazarov [8], par la méthode du développement asymptotique et pour différents cas de conditions aux limites. L'étude de deux fluides non-miscibles qui satisfont l'équation de Navier-Stokes est faite dans J. Saint Jean Paulin et K. Taous [11], où on obtient à la limite obtient l'équation de Reynolds.

- Pour l'écoulement des fluides à viscosité non linéaire plusieurs travaux sont connus. Le cas avec la viscosité donnée par la loi de la puissance (cas $r > 2$) a été traité par A. Mikelič, R. Tapiéro [7] pour le cas d'une vitesse nulle au bord du domaine et par A. Bourgeat, A. Mikelič, R. Tapiéro [3] dans le cas avec conditions de Dirichlet non homogènes sur la frontière latérale du domaine. K. Taous [12] étudie une classe de fluides à viscosité non linéaire (différente de celle présentée ici). le modèle de viscosité est celui étudié par W.G. Litvinov [14]. Une équation du type Navier-Stokes est traitée, avec des conditions en pression sur la face latérale du domaine. Dans les trois cas on obtient à la limite une équation de Reynolds généralisée.

Dans les problèmes déjà traités sur l'écoulement des fluides à viscosité non linéaire

les techniques utilisées sont en général du même type. Par une dilatation du domaine dans la troisième direction, on se ramène à un domaine indépendant du petit paramètre ε . On trouve des estimations a priori et des résultats de convergence pour les nouvelles variables qui sont la vitesse et la pression du fluide. Ensuite on passe à la limite dans le problème initial. Pour cela on utilise des résultats de monotonie et des techniques du type lemme de Minty. On obtient alors une équation qui lie la vitesse limite à la pression limite, ainsi qu'un système bidimensionnel en pression. A partir de ce système on peut déterminer la pression de manière unique. Ensuite on obtient la vitesse. On va suivre les étapes ci-dessus pour la résolution des problèmes présentés ici.

Dans les problèmes que nous étudions ici, la viscosité non linéaire du fluide dépend de la vitesse du fluide, ainsi que d'un paramètre β^ε dépendant de ε . La viscosité est bornée à l'infini et elle n'englobe pas la loi de la puissance. Les hypothèses faites sur la viscosité sont celles de D. Ciorănescu [4] et sont satisfaites par les fluides du type Cross, Carreau, Williamson.

Deux modèles mathématiques sont traités dans la suite. Dans les deux cas on considère une équation du type Navier-Stokes incompressible en régime stationnaire dans un domaine de dimension trois. Dans le premier cas on considère des conditions de Dirichlet non homogènes au bord du domaine, les forces extérieures étant supposées nulles. Cela correspond en pratique à une injection de fluide. Dans le deuxième cas on considère des conditions de Dirichlet homogènes au bord du domaine mais dans ce cas les forces extérieures sont non nulles. Les deux modèles mathématiques sont présentés au §1.

Dans le premier cas on démontre d'abord (§2) un résultat d'existence d'une solution pour le cas ε fixé. Pour cela on utilise des techniques développées dans J.-L. Lions [6]. On applique la méthode d'approximation de Galerkin, une variante du théorème de Brouwer et des techniques du lemme de Minty. Au §3 on fait des hypothèses supplémentaires sur la géométrie du domaine et sur les valeurs de la vitesse sur le bord du domaine, comme dans A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1]. On s'intéresse au cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Grâce à un changement de variables, on se ramène à un domaine fixe, dans lequel on travaille dans la suite. On donne des estimations a priori et des résultats de convergence. Le §4 est consacré au passage à la limite. On donne le problème qui lie les limites de la vitesse et de la pression. Ce problème dépend de la rapidité de convergence de β^ε par rapport au paramètre ε .

Dans le deuxième cas on connaît grâce à D. Ciorănescu [4] l'existence d'au moins une solution pour le cas ε fixé. On s'intéresse pour ce problème au passage à la limite uniquement, plus précisément on étudie ce qui se passe dans le cas $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme dans le cas précédent, on se ramène à un domaine fixe. Pour les nouvelles inconnues on donne des estimations a priori et des résultats de convergence.

Au §6 on passe à la limite et on donne le problème vérifié par les limites de la vitesse et de la pression. Dans ce cas, le problème limite dépend de la rapidité de convergence de β^ε par rapport à ε^{-1} . Ensuite on traite un cas particulier, dans lequel on retrouve un problème limite qui peut être découplé comme dans A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1].

Des conclusions sur les problèmes limites sont présentées au §7. Dans certains cas particuliers de viscosité limite on retrouve les résultats de A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1], qu'on rappelle. Dans les autres cas, on donne des conditions suffisantes d'unicité pour la vitesse et la pression limites.

§1. Présentation de problèmes

Nous nous intéressons à l'écoulement d'un fluide incompressible à viscosité non linéaire dans un domaine tridimensionnel de faible épaisseur.

L'ensemble Ω_ε désignera dans la suite la partie occupée par le fluide. L'épaisseur de cet ensemble est faible comparée aux autres dimensions. Elle est de l'ordre d'un paramètre strictement positif ε . Plus précisément, Ω_ε est modélisé de la façon suivante:

Soit ω un ouvert borné connexe du plan. Soit $h : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application de classe \mathcal{C}^1 vérifiant qu'il existe une constante réelle strictement positive α telle que:

$$0 < \alpha \leq h(x_1, x_2) \leq 1, \text{ dans } \omega.$$

Sous les hypothèses antérieures, l'ensemble ouvert Ω_ε est défini par:

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } 0 < x_3 < \varepsilon h(x_1, x_2)\}.$$

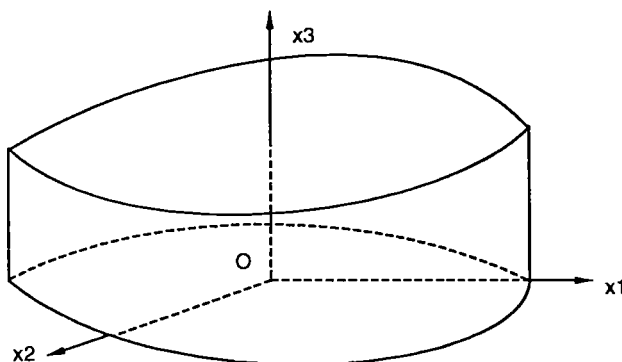


Figure 1.1: Ensemble ouvert Ω_ε

La viscosité non linéaire μ du fluide est définie en fonction de la vitesse u du fluide de façon suivante:

$$(H0) \quad \mu(\beta^\varepsilon s(u)) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$s(u) = \sqrt{2D_{II}(u)}, \quad D_{II}(u) = \frac{1}{2}D(u)D(u)^t, \quad D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t),$$

où β^ε est une constante strictement positive dépendant de ε .

Comme dans D. Ciorănescu [4] on suppose que μ satisfait les propriétés suivantes:

(H1) μ est continûment différentiable de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+

(H2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \mu_\infty > 0$

(H3) $\exists E \subset \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\begin{cases} \mu'(t) \geq 0, & \forall t \in E \\ t |\mu'(t)| \leq \mu(t), & \forall t \in \mathbb{R}_+ \setminus E. \end{cases}$$

(H4) $0 < m_0 = \inf_{t \in \mathbb{R}_+} \mu(t)$.

De plus, on introduit la notation:

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mu(t).$$

La viscosité est donc bornée à l'infini et a des propriétés qui nous permettront de déduire des résultats de monotonie, nécessaires pour démontrer l'existence, ainsi que pour faire le passage à la limite dans les problèmes étudiés.

Grâce aux hypothèses faites sur μ , la constante M est finie. Les hypothèses sur μ sont satisfaites par plusieurs fluides non newtoniens, comme dans les exemples ci-dessus, où μ_0, μ_∞ sont des constantes réelles.

- le fluide de Cross:

$$\mu(t) = \mu_\infty - \frac{\mu_\infty - \mu_0}{1 + t^{2/3}}, \quad \mu_\infty \geq \mu_0 > 0$$

- le fluide de Carreau:

$$\mu(t) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)(1 + \lambda t^2)^{(r-2)/2}, \quad \mu_0 > \mu_\infty > 0, \quad 1 < r \leq 2, \quad \lambda > 0$$

- le fluide de Williamson:

$$\mu(t) = \mu_\infty + \frac{\lambda(\mu_0 - \mu_\infty)}{\lambda + t}, \quad \mu_0 \geq \mu_\infty > 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Pour la loi de Cross l'ensemble E qui satisfait (H3) est $E = \mathbb{R}_+$ et pour les lois de Carreau et Williamson on a $E = \emptyset$.

On considère un premier problème, pour lequel le mouvement du fluide à viscosité non linéaire est décrit par:

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\beta^\varepsilon s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Ici $\delta\Omega_\varepsilon$ désigne la frontière du domaine Ω_ε . La fonction u^ε représente la vitesse du fluide et p^ε sa pression, qui sont les inconnues. On a supposé que les forces extérieures sont nulles. On remarque que la vitesse du fluide, sa pression et sa viscosité dépendent de l'épaisseur du domaine occupé par le fluide, donc du paramètre ε . Ce type de problème est rencontré en pratique dans des problèmes de lubrification.

De plus, on cherche une pression de moyenne nulle dans Ω_ε :

$$(1.2) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon dx = 0.$$

Le deuxième problème qu'on étudie est le suivant:

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(2\mu(\beta^\varepsilon s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f^\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On suppose que la fonction f^ε , qui représente les forces extérieures, ne dépend pas de la troisième variable. Elle ne dépend donc pas de ε et on la note dans la suite par f . De plus, on suppose $f \in \mathbb{L}^2(\omega)$. Les conditions du type Dirichlet homogènes au bord correspondent au cas pratique sans injection de fluide. La vitesse du fluide, sa pression et sa viscosité dépendent de l'épaisseur du domaine occupé par le fluide, donc du paramètre ε . On cherchera une pression telle que:

$$(1.4) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon dx = 0.$$

Pour $p \geq 1$ on considère l'espace $\mathbb{L}^p(\Omega_\varepsilon) = (L^p(\Omega_\varepsilon))^3$. Soient les espaces fonctionnels suivants:

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon), \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\varepsilon \right\}$$

$$L_0^2(\Omega_\varepsilon) = \left\{ q \in L^2(\Omega_\varepsilon), \int_{\Omega_\varepsilon} q dx = 0 \right\}$$

$$\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon) \right\}$$

munis respectivement des normes usuelles suivantes:

$$|\psi|_{1,\varepsilon} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx \right)^{1/2}$$

$$|q|_{0,\varepsilon} = \left(\int_{\Omega_\varepsilon} q^2 dx \right)^{1/2}$$

$$|\psi|_{\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = |\psi|_{0,\varepsilon}^2 + |\psi|_{1,\varepsilon}^2$$

où l'on adopte la convention de sommation sur les indices répétés et non soulignés. De plus, on considère l'espace V_ε défini par:

$$V_\varepsilon = \left\{ \psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon), \operatorname{div} \psi = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \right\}$$

et muni de la norme $|\cdot|_{1,\varepsilon}$.

§2. Existence d'une solution pour le cas ε fixé

Dans une première étape on se propose de résoudre le problème (1.1)-(1.2) pour le cas ε fixé. Comme ε est fixé, on omet de l'écrire tout au long de ce paragraphe. Les résultats de §2-§3 sont présentés pour $\beta^\varepsilon = 1$, mais ils restent vrais dans le cas général. On multiplie la première équation de (1.1) par $v \in V$ et on intègre par parties. Compte-tenu de la condition d'incompressibilité de u on obtient la formulation variationnelle en vitesse:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu(s(u))D(u)D(v)dx + \int_{\Omega} u\nabla uvdx = 0, & \forall v \in V \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On ajoute la condition de compatibilité:

$$(2.2) \quad \int_{\partial\Omega} gv d\sigma = 0,$$

où ν représente la normale extérieure à la frontière du domaine.

Comme dans R. Temam [13], on a équivalence des problèmes (1.1)-(1.2) et (2.1)-(2.2). Grâce à V. Girault, P. A. Raviart [5], Chapitre I, on peut montrer le résultat suivant:
Lemme 2.1 *Soit $g \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et vérifiant (2.2). Alors il existe $G \in \mathcal{L}^4(\Omega)$ qui satisfait:*

$$(2.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div} G = 0 & \text{dans } \Omega \\ G = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on introduit la notation:

$$|D(\psi)|_0^2 = \sum_{i,j=1}^3 |D_{ij}(\psi)|_0^2.$$

On démontre le résultat suivant:

Lemme 2.2 *Pour chaque $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on a:*

$$(2.4) \quad |\nabla\psi|_0 \leq \sqrt{2}|D(\psi)|_0.$$

De plus, si $\operatorname{div} \psi = 0$, l'inégalité (2.4) devient une égalité.

Si $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\psi = 0$ dans un sous-ensemble de mesure non nulle de $\partial\Omega$, alors les inégalités suivantes sont vraies:

$$(2.5) \quad |\psi|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq c_S |\psi|_{\mathbb{H}^1(\Omega)},$$

$$(2.6) \quad |\psi|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c_P |\nabla \psi|_0.$$

Les constantes c_S et c_P dépendent de ε , qui est fixé ici.

Démonstration: Grâce à V. Girault, P. A. Raviart [5] on a:

$$2|D(\psi)|_0^2 = |\nabla \psi|_0^2 + |\operatorname{div} \psi|_0^2, \forall \psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega),$$

ce qui implique (2.4). La relation (2.5) est une conséquence des injections de Sobolev en dimension trois. La relation (2.6) est obtenue à l'aide de l'inégalité de Poincaré:

$$|\psi|_0 \leq c |\nabla \psi|_0,$$

de façon suivante:

$$|\psi|_{\mathbb{H}^1(\Omega)}^2 = |\psi|_0^2 + |\nabla \psi|_0^2 \leq c^2 |\nabla \psi|_0^2 + |\nabla \psi|_0^2 = (1 + c^2) |\nabla \psi|_0^2.$$

□

Comme dans R. Temam [13], on a le résultat suivant:

Lemme 2.3 (théorème de Brouwer) *Soit X un espace de Hilbert de dimension finie et $\|\cdot\|_X$ sa norme associée. Soit $P : X \rightarrow X$ une application continue telle que :*

$$\exists r > 0 \text{ tel que } (P\xi, \xi) > 0 \text{ pour } \|\xi\|_X = r, \xi \in X.$$

Alors il existe $\xi_0 \in X$ tel que $P\xi_0 = 0$ et $\|\xi_0\|_X \leq r$.

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 2.4 *Supposons que les hypothèses (H0)-(H4) sont satisfaites. Si l'application $g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ vérifie la relation (2.2) et si $G \in \mathbb{L}^4(\Omega)$ est telle que:*

$$(2.7) \quad |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} < \frac{m_0}{c_S c_P},$$

alors le problème (2.1) a au moins une solution $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. De plus, il existe une constante c telle que:

$$(2.8) \quad |\nabla u|_0 \leq c.$$

La constante c ci-dessus dépend de c_S, c_P, G .

Démonstration: Pour prouver l'existence d'une solution faible pour le problème (2.1), on utilise des techniques développées dans J.-L. Lions [6]. Des modifications interviennent parce que nous ne sommes pas dans un espace vectoriel, à cause des conditions non homogènes au bord. On démontre le théorème en plusieurs étapes:

Etape 1 Problème approché et estimations

On applique la méthode d'approximation de Galerkin. Soit $\{w_1, w_2, \dots, w_n \dots\}$ une base de l'espace

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \mid \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

et soit V_m l'espace vectoriel engendré par les vecteurs w_1, w_2, \dots, w_m .

Alors, u_m est une solution approchée du problème (2.1) si:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu(s(u_m))D(u_m)D(w_i)dx + \int_{\Omega} (u_m \nabla)u_m w_i dx = 0 & \forall i = 1, \dots, m, \\ u_m = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On se propose dans la suite de montrer qu'il existe au moins une solution pour le système des équations non linéaires (2.9). Dans le but de travailler dans un espace vectoriel, on cherche une solution de la forme $u_m = G + v_m$, où:

$$v_m = \sum_{i=1}^m \xi_{i,m} w_i,$$

avec $\xi_{i,m} \in \mathbb{R}$. On a:

$$\operatorname{div} v_m = \operatorname{div} u_m - \operatorname{div} G = 0$$

$$v_m = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et

$$\int_{\Omega} 2\mu(s(G + v_m))D(G + v_m)D(w_i)dx + \int_{\Omega} (G + v_m)\nabla(G + v_m)w_i dx = 0, i = 1, \dots, m.$$

On va estimer la quantité:

$$(2.10) \quad Q = 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m) dx + \int_{\Omega} (G + v_m) \nabla(G + v_m) v_m dx.$$

Soit l'application b définie par $b(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \nabla) v w dx$. Cette application est trilinéaire et continue dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$, ce qui implique:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (G + v_m) \nabla(G + v_m) v_m dx &= b(G + v_m, G + v_m, v_m) = \\ &= b(G, G, v_m) + b(v_m, G, v_m) + b(G, v_m, v_m) + b(v_m, v_m, v_m). \end{aligned}$$

L'appartenance de v_m à l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega)$ implique:

$$b(v_m, v_m, v_m) = 0.$$

Compte-tenu que $v_m \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ et $\operatorname{div} G = 0$, on en déduit:

$$b(G, v_m, v_m) = 0,$$

$$b(v_m, G, v_m) = -b(v_m, v_m, G),$$

$$b(G, G, v_m) = -b(G, v_m, G).$$

La relation (2.10) s'écrit alors:

$$(2.11) \quad Q = 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m) dx - b(G, v_m, G) - b(v_m, v_m, G).$$

Grâce au lemme 2.2 et aux hypothèses sur μ , on a:

$$2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m) dx = 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(v_m) D(v_m) dx +$$

$$\begin{aligned}
+ 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G) D(v_m) dx &\geq 2m_0 |D(v_m)|_0^2 - 2M |D(v_m)|_0 |D(G)|_0 \geq \\
&\geq m_0 |\nabla v_m|_0^2 - 2M |\nabla v_m|_0 |\nabla G|_0,
\end{aligned}$$

ou encore:

$$(2.12) \quad 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m) dx \geq m_0 |\nabla v_m|_0^2 - 2M |\nabla v_m|_0 |\nabla G|_0.$$

L'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 impliquent:

$$\begin{aligned}
|b(v_m, v_m, G)| &\leq |v_m|_{L^4(\Omega)} |\nabla v_m|_0 |G|_{L^4(\Omega)} \leq \\
&\leq c_S |v_m|_{H^1(\Omega)} |\nabla v_m|_0 |G|_{L^4(\Omega)} \leq c_{SCP} |\nabla v_m|_0^2 |G|_{L^4(\Omega)}
\end{aligned}$$

et

$$(2.13) \quad |b(G, v_m, G)| \leq |G|_{L^4(\Omega)} |\nabla v_m|_0 |G|_{L^4(\Omega)} = |\nabla v_m|_0 |G|_{L^4(\Omega)}^2.$$

On obtient alors les relations:

$$\begin{aligned}
Q &= 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m) dx - b(G, v_m, G) - b(v_m, v_m, G) \geq \\
&\geq m_0 |\nabla v_m|_0^2 - 2M |\nabla G|_0 |\nabla v_m|_0 - c_{SCP} |\nabla v_m|_0^2 |G|_{L^4(\Omega)} - |\nabla v_m|_0 |G|_{L^4(\Omega)}^2 = \\
&= |\nabla v_m|_0 [(m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}) |\nabla v_m|_0 - (2M |\nabla G|_0 + |G|_{L^4(\Omega)}^2)].
\end{aligned}$$

Etape 2 Existence d'une solution pour le problème approché

Avec les estimations trouvées ci-dessus, on pourra montrer que le système non linéaire (2.9) a au moins une solution. Pour cela, soit $\xi = (\xi_{i,m})_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^m$ et $v_m = \sum_{i=1}^m \xi_{i,m} w_i$. On pose:

$$\|\xi\| = |\nabla v_m|_0.$$

Si $\|\xi\| = 0$, alors on obtient $|\sum_{i=1}^m \xi_{i,m} \nabla w_i|_0 = 0$ ou encore $\xi_{i,m} = 0, \forall i = 1, \dots, m$, ce qui implique que $\|\xi\|$ est une norme dans \mathbb{R}^m . Soit l'application non linéaire $\xi \rightarrow P(\xi)$, définie pour chaque $i = 1, \dots, m$ par:

$$P_i(\xi) = 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(w_i) dx + \int_{\Omega} (G + v_m) \nabla(G + v_m) w_i dx.$$

On montre facilement que P est continue et on s'intéresse dans la suite à l'équation:

$$P(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

On applique le lemme 2.3 pour l'application P et pour le scalaire r qui vérifie:

$$(m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}) r - (2M |\nabla G|_0 + |G|_{L^4(\Omega)}^2) > 0.$$

Alors, pour $\|\xi\| = r$ et puisque d'après (2.7) on a $m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)} > 0$, on déduit de l'étape 1 que $(P(\xi), \xi) > 0$.

On obtient alors qu'il existe $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $P(\xi) = 0$. De plus, on a:

$$\|\xi\| \leq \frac{2M |\nabla G|_0 + |G|_{L^4(\Omega)}^2}{m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}}.$$

Cela implique que le problème (2.9) a au moins une solution et que $v_m = u_m - G$ vérifie:

$$(2.14) \quad |\nabla v_m|_0 \leq \frac{2M |\nabla G|_0 + |G|_{L^4(\Omega)}^2}{m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}}.$$

L'estimation sur le gradient de v_m implique à des sous-suites près:

$$u_m - G \rightharpoonup u - G \text{ dans } V \text{ faible}$$

$u_m - G \rightarrow u - G$ dans $L^2(\Omega)$ fort, car $V \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte

$|u_m - G|_{L^4(\Omega)} \leq c$, car $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ avec injection continue.

Etape 3 Passage à la limite

On rappelle qu'on a:

$$(2.15) \quad 2 \int_{\Omega} \mu(s(u_m)) D(u_m) D(\psi) dx + \int_{\Omega} (u_m \nabla) u_m \psi dx = 0, \forall \psi \in V_m.$$

On va montrer dans la suite que la limite u de u_m vérifie une équation du même type. Compte-tenu du fait que $v_m = u_m - G$, la relation (2.15) s'écrit pour $\psi = v_m - \varphi$, $\varphi \in V_m$:

$$2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m - \varphi) dx + \int_{\Omega} (G + v_m) \nabla (G + v_m) (v_m - \varphi) dx = 0$$

Grâce à la linéarité de b on a:

$$\int_{\Omega} (G + v_m) \nabla (G + v_m) v_m dx = b(G, G, v_m) + b(G, v_m, v_m) + b(v_m, G, v_m) + b(v_m, v_m, v_m),$$

$$\int_{\Omega} (G + v_m) \nabla (G + v_m) \varphi dx = b(G, G, \varphi) + b(G, v_m, \varphi) + b(v_m, G, \varphi) + b(v_m, v_m, \varphi).$$

La convergence forte de v_m vers v dans $L^2(\Omega)$ implique:

$$b(G, G, v_m) \rightarrow b(G, G, v),$$

$$b(v_m, G, v_m) \rightarrow b(v, G, v),$$

$$b(G, v_m, \varphi) \rightarrow b(G, v, \varphi),$$

$$b(v_m, G, \varphi) \rightarrow b(v, G, \varphi),$$

$$b(v_m, v_m, \varphi) = -b(v_m, \varphi, v_m) \rightarrow -b(v, \varphi, v) = b(v, v, \varphi).$$

D'autre part, $v_m \in V_m$ implique $b(v_m, v_m, v_m) = 0$ et $b(G, v_m, v_m) = 0$.

On en déduit:

$$(2.16) \quad 2 \int_{\Omega} \mu(s(G + v_m)) D(G + v_m) D(v_m - \varphi) dx \rightarrow -(B_G(v), v - \varphi),$$

$$\text{où } (B_G(v), v - \varphi) = \int_{\Omega} (v + G) \nabla (v + G) (v - \varphi) dx.$$

Soit $A_G(\psi)$ l'opérateur défini pour chaque $\psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ par:

$$(A_G(\psi), \varphi) = 2 \int_{\Omega} \mu(s(\psi + G)) D(\psi + G) D(\varphi) dx, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega).$$

Comme dans D. Ciorănescu [4] on peut montrer que A_G vérifie la propriété de monotonie suivante:

$$(A_G(\psi) - A_G(\varphi), \psi - \varphi) \geq 0, \forall \psi, \varphi \in V.$$

En particulier, on a:

$$(2.17) \quad (A_G(v_m) - A_G(\varphi), v_m - \varphi) \geq 0, \forall \varphi \in V.$$

On a montré dans la relation (2.16):

$$(A_G(v_m), v_m - \varphi) \rightarrow -(B_G(v), v - \varphi).$$

D'autre part, si φ est fixé, on a:

$$(A_G(\varphi), v_m - \varphi) \rightarrow (A_G(\varphi), v - \varphi).$$

Le passage à la limite quand $m \rightarrow \infty$ dans la relation (2.17) nous conduit à:

$$(2.18) \quad (-B_G(v) - A_G(\varphi), v - \varphi) \geq 0, \forall \varphi \in V.$$

Soit $\varphi = v - tw$, avec $w \in V$ et $t > 0$. Alors:

$$(-B_G(v) - A_G(v - tw), w) \geq 0, \forall w \in V.$$

Si $t \rightarrow 0$, on obtient:

$$(2.19) \quad (-B_G(v) - A_G(v), w) \geq 0, \forall w \in V.$$

On pose dans (2.18) $\varphi = v + tw$, avec $w \in V$ et $t > 0$. Alors:

$$(-B_G(v) - A_G(v + tw), w) \leq 0, \forall w \in V.$$

Si $t \rightarrow 0$ on obtient:

$$(2.20) \quad (-B_G(v) - A_G(v), w) \leq 0, \forall w \in V.$$

De (2.19) et (2.20) on conclut:

$$A_G(v) + B_G(v) = 0,$$

ce qui finit la démonstration du théorème. □

Soit u^ε solution du problème (2.1). Pour $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que $\operatorname{div} \varphi = 0$ on a grâce au théorème 2.4:

$$\langle -\operatorname{div}(2\mu(\beta^\varepsilon s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon, \varphi \rangle = 0.$$

Grâce à la remarque 1.9 de R. Temam [13] on déduit q'il existe une fonction $p^\varepsilon \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ telle que:

$$-\operatorname{div}(2\mu(\beta^\varepsilon s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)) + u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon + p^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

De plus, grâce à la relation (1.2) on a unicité de la pression dans $L_0^2(\Omega_\varepsilon)$.

§3. Estimations a priori et convergences dans le cas de lubrification

On s'intéresse au cas limite $\varepsilon \rightarrow 0$ pour le problème (1.1). Soient $\Gamma_+^\varepsilon, \Gamma_L^\varepsilon$ les faces supérieure et latérale du domaine Ω_ε et $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \cup \omega$. Pour résoudre le problème on fait une dilatation du domaine avec la valeur ε dans la direction x_3 . La nouvelle variable dans la troisième direction sera $z = \frac{x_3}{\varepsilon}$, ce qui correspond au changement de variables suivant:

$$(3.1) \quad (y_1, y_2, z) = (x_1, x_2, \frac{x_3}{\varepsilon}).$$

Les composantes x_1 et x_2 restent inchangées, mais pour la comodité de la redaction on a posé $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_2$. Le nouveau domaine et sa frontière sont notés par: $\Omega, \partial\Omega, \Gamma_+, \Gamma_L$. On considère comme auparavant les espaces $L_0^2(\Omega), \mathbb{H}_0^1(\Omega), V$ et la norme $|\cdot|_0$ définie par:

$$|\widehat{\psi}|_0 = |\widehat{\psi}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

On rappelle que la norme $|\cdot|_{0,\varepsilon}$ a été définie par:

$$|\psi|_{0,\varepsilon} = |\psi|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Le problème posé dans le nouveau domaine Ω , indépendant de ε , aura les nouvelles inconnues :

$$\widehat{u}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = u^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) \text{ et } \widehat{p}^\varepsilon(y_1, y_2, z) = p^\varepsilon(x_1, x_2, x_3).$$

On introduit la notation:

$$\nabla_y \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1}, \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right), \forall \psi \in \mathbb{H}^1(\Omega).$$

On démontre le résultat préliminaire suivant:

Lemme 3.1 *Pour chaque fonction ψ qui appartient à l'ensemble $\mathbb{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ on a les relations suivantes:*

$$|\psi|_{0,\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} |\widehat{\psi}|_0$$

$$\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right|_{0,\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial x_j} \right|_0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 2$$

$$\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x_3} \right|_{0,\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial z} \right|_0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$|\psi|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{1/4} |\widehat{\psi}|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)}$$

$$|\nabla \widehat{\psi}^\varepsilon|_0 \leq \varepsilon^{-1/2} |\nabla \psi^\varepsilon|_{0,\varepsilon}$$

Démonstration: Grâce à J. Saint Jean Paulin, K. Taous [11] on a les trois premières égalités. Pour la quatrième relation on utilise le changement de variables (3.1) et on obtient:

$$|\psi|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^4 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\psi|^4 dx = \varepsilon \int_{\Omega} |\widehat{\psi}|^4 dy dz.$$

En utilisant les relations précédentes et la relation $\varepsilon < 1$, on a:

$$|\nabla \widehat{\psi}|_0^2 = |\nabla_y \widehat{\psi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial z} \right|_0^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon |\nabla_y \widehat{\psi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\psi}}{\partial z} \right|_0^2 \right) = \varepsilon^{-1} |\nabla \psi|_{0,\varepsilon}^2.$$

□

On suppose dans la suite:

$$(3.2) \quad \omega \text{ est un rectangle du plan}$$

$$(3.3) \quad g^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^\varepsilon, \quad g^\varepsilon = (g_1, g_2, \varepsilon g_3) \quad \text{sur} \quad \omega \cup \Gamma_L^\varepsilon,$$

où les fonctions g_1, g_2, g_3 sont indépendantes de ε et $g_3 = 0$ sur ω . Cela correspond à un problème de lubrification.

L'hypothèse (3.2) sera nécessaire dans l'estimation du terme non linéaire $u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon$.

De plus, on impose comme dans A. Assemien, G. Bayada, M. Chabat [1] la condition:

$$(3.4) \quad \int_{\Gamma_L} g \nu d\sigma = 0.$$

On remarque que si $g \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors il existe une fonction $G \in \mathbb{L}^4(\Omega)$ indépendante de ε telle que:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial G_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0 & \text{dans } \Omega \\ G = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si on pose

$$(3.5) \quad G_i^\varepsilon = G_i, \quad i = 1, 2 \text{ et } G_3^\varepsilon = \varepsilon G_3,$$

alors on a:

$$\begin{cases} \operatorname{div} G^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ G^\varepsilon = g^\varepsilon & \text{sur } \Gamma^\varepsilon. \end{cases}$$

De plus, on a le résultat suivant, avec la mention que c désigne dans la suite une constante indépendante de ε .

Lemme 3.2 *Si G^ε est définie par la relation (3.5), alors on a:*

$$|G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{1/4} |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)},$$

$$|\nabla G^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq c\varepsilon^{-1/2}.$$

Démonstration: Grâce au changement de variables (3.1) et à la relation (3.5), on a:

$$\begin{aligned} |G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)}^4 &= \int_{\Omega_\varepsilon} |G^\varepsilon|^4 dx = \varepsilon \int_{\Omega} |\widehat{G}^\varepsilon|^4 dydz = \varepsilon \int_{\Omega} |(G_1, G_2, \varepsilon G_3)|^4 dydz \leq \varepsilon |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}^4, \\ |\nabla G^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^2 &= \varepsilon |\nabla_y \widehat{G}^\varepsilon|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{G}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \leq \varepsilon^{-1} |\nabla \widehat{G}^\varepsilon|_0^2 = \varepsilon^{-1} \left(|\nabla_y \widehat{G}^\varepsilon|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{G}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \right) = \\ &= \varepsilon^{-1} \left(|\nabla_y G_1, \nabla_y G_2, \varepsilon \nabla_y G_3|_0^2 + \left| \left(\frac{\partial G_1}{\partial z}, \frac{\partial G_2}{\partial z}, \varepsilon \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) \right|_0^2 \right) \leq \varepsilon^{-1} |\nabla G|_0. \end{aligned}$$

□

Grâce à A. Mikelič, R. Tapiéro [7] et au lemme 2.2 on connaît le résultat suivant:

Lemme 3.3 (inégalité de Poincaré) *Si $\psi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$, alors:*

$$|\psi|_{0,\varepsilon} \leq \varepsilon \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right|_{0,\varepsilon}.$$

(inégalité de Korn) Si $\psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$, alors:

$$|\nabla\psi|_{0,\varepsilon} \leq \sqrt{2}|D(\psi)|_{0,\varepsilon}.$$

On rappelle le lemme de A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1]:

Lemme 3.4 Soit Ω un ensemble défini comme au §1 et qui vérifie de plus (3.2). Soit $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que $\psi = g$ sur $\partial\Omega$ et $g = 0$ sur Γ_+ . Alors on a:

$$|\psi|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq c(\Omega, g) \left[\left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|_0^{1/2} \left(\max \left\{ \left| \frac{\partial\psi}{\partial y_1} \right|_0, \left| \frac{\partial\psi}{\partial y_2} \right|_0 \right\} \right)^{1/2} + \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|_0^{1/3} \right].$$

Pour les estimations a priori sur la vitesse et la pression du fluide dans le nouveau domaine Ω on démontre le resultat suivant:

Proposition 3.5 Sous les hypothèses (H0)-(H4), (3.2)-(3.4) et si la relation suivante est satisfaite:

$$(3.6) \quad |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} < \frac{m_0}{c_{SCP}},$$

le couple $(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{p}^\varepsilon)$ vérifie:

$$|\widehat{u}^\varepsilon|_0 \leq c$$

$$\left| \frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial y_i} \right|_0 \leq c\varepsilon^{-1}, \quad i = 1, 2$$

$$\left| \frac{\partial\widehat{u}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0 \leq c.$$

$$|\widehat{p}^\varepsilon|_0 \leq c\varepsilon^{-2},$$

$$\left\| \frac{\partial\widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2},$$

$$\left\| \frac{\partial\widehat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-1}.$$

Les constantes c_S et c_P sont indépendantes du paramètre ε .

Démonstration: Pour obtenir des estimations sur la vitesse on multiplie la première équation de (1.1) par v^ε et en utilisant la relation $u^\varepsilon = G^\varepsilon + v^\varepsilon$, on trouve comme pour la relation (2.11):

$$(3.7) \quad 2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(s(G^\varepsilon + v^\varepsilon)) D(G^\varepsilon + v^\varepsilon) D(v^\varepsilon) dx = b(G^\varepsilon, v^\varepsilon, G^\varepsilon) + b(v^\varepsilon, v^\varepsilon, G^\varepsilon).$$

Dans la suite on trouve des estimations pour la fonction v^ε . En utilisant (3.1), on déduit des estimations sur la fonction \widehat{v}^ε et ensuite sur la fonction \widehat{u}^ε .

Linéarité de Hölder implique pour le premier terme du membre de droite:

$$|b(G^\varepsilon, v^\varepsilon, G^\varepsilon)| \leq |G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)}^2 |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon}.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le lemme 3.2 on obtient pour l'autre terme:

$$|b(v^\varepsilon, v^\varepsilon, G^\varepsilon)| \leq |v^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon} |G^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{1/4} |v^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon} |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}.$$

Mais grâce aux lemmes 3.2, 2.2 et 3.1 on a:

$$\begin{aligned} |v^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega_\varepsilon)} &= \varepsilon^{1/4} |\widehat{v}^\varepsilon|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq \varepsilon^{1/4} c_{SCP} |\nabla \widehat{v}^\varepsilon|_0 \leq \\ &\leq \varepsilon^{1/4} c_{SCP} \varepsilon^{-1/2} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq \varepsilon^{-1/4} c_{SCP} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon}. \end{aligned}$$

On en déduit:

$$|b(v^\varepsilon, v^\varepsilon, G^\varepsilon)| \leq c_{SCP} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^2 |G|_{\mathbb{L}^4(\Omega)}.$$

Les constantes c_S et c_P ci-dessus sont indépendantes du paramètre ε , car elles correspondent à l'inégalité de Poincaré et à la constante d'injection de Sobolev dans le domaine Ω indépendant de ε .

D'autre part, en utilisant les propriétés de la fonction μ , ainsi que le lemme 3.3, on a pour le membre de gauche de (3.7) l'estimation:

$$2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(s(G^\varepsilon + v^\varepsilon)) D(G^\varepsilon + v^\varepsilon) D(v^\varepsilon) dx \geq m_0 |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^2 - 2M |G^\varepsilon|_{0,\varepsilon} |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon}.$$

La relation (3.7) et les estimations de ces termes impliquent alors:

$$\left(m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}\right) |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq |G^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^2 + 2M |\nabla G^\varepsilon|_{0,\varepsilon}$$

et grâce au lemme 3.2 on a:

$$\left(m_0 - c_{SCP} |G|_{L^4(\Omega)}\right) |\nabla v^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq c\varepsilon^{1/2} + 2cM\varepsilon^{-1/2}.$$

Comme $|G|_{L^4(\Omega)} < \frac{m_0}{c_{SCP}}$, en utilisant ci-dessus le changement de variables (3.1) on a:

$$\varepsilon |\nabla_y \widehat{v}^\varepsilon|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{v}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \leq c^2 \varepsilon + 4M^2 \varepsilon^{-1} + 4c^2 M,$$

d'où on déduit:

$$\varepsilon |\nabla_y \widehat{v}^\varepsilon|_0^2 \leq c\varepsilon^{-1}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{v}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \leq c\varepsilon^{-1},$$

ou encore:

$$|\nabla_y \widehat{v}^\varepsilon|_0 \leq c\varepsilon^{-1}$$

et

$$(3.8) \quad \left| \frac{\partial \widehat{v}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0 \leq c.$$

L'inégalité de Poincaré et l'estimation (3.8) impliquent:

$$|\widehat{v}^\varepsilon|_0 \leq c.$$

Les mêmes estimations a priori sont vraies pour la fonction $\widehat{u}^\varepsilon = \widehat{v}^\varepsilon + \widehat{G}^\varepsilon$, grâce au lemme 3.2.

Pour obtenir des estimations a priori pour la pression on multiplie la première équation de (1.1) par une fonction $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Après intégration par parties, on obtient:

$$(3.9) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu(s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(\varphi) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx - \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon),$$

ce qui implique, en utilisant $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi) = -b(u^\varepsilon, \varphi, u^\varepsilon)$:

$$(3.10) \quad \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| = \left| 2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(\varphi) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \varphi dx \right| \leq \\ \leq 2M |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} + |u^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^2 |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon}.$$

Grâce au lemme 3.1 et aux estimations a priori déjà trouvées pour \widehat{u}^ε on a:

$$(3.11) \quad |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} = \left(\varepsilon |\nabla_y \widehat{u}^\varepsilon|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2} \leq \left(\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^2} c + \frac{1}{\varepsilon} c \right)^{1/2} = \varepsilon^{-1/2} c.$$

Grâce au lemme 3.4 on a:

$$(3.12) \quad |u^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} = \varepsilon^{1/4} |\widehat{u}^\varepsilon|_{L^4(\Omega)} \leq c(\Omega, g) \varepsilon^{1/4} (c\varepsilon^{-1/2} + c) \leq c\varepsilon^{-1/4}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Grâce au lemme 3.1, on a:

$$(3.13) \quad |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} = \left(\varepsilon |\nabla_y \widehat{\varphi}|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2} \leq \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(|\nabla_y \widehat{\varphi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0^2 \right) \right]^{1/2} = \varepsilon^{-1/2} |\nabla \widehat{\varphi}|_0.$$

Les relations (3.11)-(3.13) utilisées dans (3.10) impliquent:

$$(3.14) \quad \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| \leq c\varepsilon^{-1} |\nabla \widehat{\varphi}|_0.$$

Pour une fonction test $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$ dans (3.14) et compte-tenu du changement de variables (3.1) on déduit:

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-1}.$$

En choisissant successivement les fonctions test $\varphi = (\varphi_1, 0, 0)$ et $\varphi = (0, \varphi_2, 0)$ dans (3.14) on a:

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2},$$

et l'application de l'inégalité de Poincaré pour \widehat{p}^ε nous conduit à:

$$|\widehat{p}^\varepsilon|_0 \leq c\varepsilon^{-2}.$$

□

La proposition 3.5 et les résultats classiques d'analyse fonctionnelle impliquent la proposition suivante.

Proposition 3.6 *Sous les hypothèses de la proposition 3.5 et quitte à extraire une sous-suite, on a les convergences suivantes:*

$$\widehat{u}^\varepsilon \rightharpoonup u^* \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}, \forall i = 1, 2$$

$$\varepsilon \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial y_j} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}, \forall i = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

$$u_3^* = 0$$

$$u_1^*(y, 0) = g_1, \quad u_2^*(y, 0) = g_2 \text{ dans } \omega$$

$$\varepsilon^2 \widehat{p}^\varepsilon \rightharpoonup p^* \text{ dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_j} \rightharpoonup \frac{\partial p^*}{\partial y_j} \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible}, \forall j = 1, 2$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0.$$

On fait la notation $\operatorname{div}_y \psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}$ et par abus de notation on pose

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, 0).$$

On démontre le résultat suivant:

Proposition 3.7 *Sous les hypothèses de la proposition 3.5, les relations suivantes sont vraies:*

$$(3.15) \quad \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz \rightharpoonup \int_0^{h(y)} u_i^* dz \text{ dans } L^2(\omega) \text{ faible}, \quad i = 1, 2$$

$$(3.16) \quad \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} u^* dz = 0 \text{ dans } \mathbb{L}^2(\omega)$$

$$(3.17) \quad \left[\int_0^{h(y)} u^* dz \right] \cdot \nu = \left[\int_0^{h(y)} g dz \right] \cdot \nu \text{ dans } \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$$

Démonstration: On utilise le fait que $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Ω_ε pour montrer les relations (3.15) - (3.16). En utilisant cela, ainsi que le changement de variables, on en déduit:

$$\int_{\Omega} \widehat{q} \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dydz + \varepsilon \int_{\Omega} \widehat{q} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dydz = 0, \quad \forall \widehat{q} \in L_0^2(\Omega).$$

On prend $\widehat{q} = \theta - \mathcal{M}(\theta)$ comme fonction test ci-dessus, avec $\theta \in \mathbb{H}^1(\omega)$ et

$$\mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \theta dydz,$$

où on a noté par $|\Omega|$ la mesure de l'ensemble Ω . On obtient la relation suivante:

$$(3.18) \quad \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dydz + \varepsilon \int_{\Omega} \theta \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dydz = \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dydz +$$

$$+ \varepsilon \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dydz, \quad \forall \theta \in \mathbb{H}^1(\omega).$$

Mais:

$$\int_{\Omega} \theta \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dydz = \int_{\Omega} \frac{\partial (\widehat{u}_3^\varepsilon \theta)}{\partial z} dydz = \int_{\partial\Omega} \widehat{u}_3^\varepsilon \cos(\widehat{\nu}, z) \theta d\sigma = \int_{\omega} \widehat{u}_3^\varepsilon \cos(\widehat{\nu}, z) \theta d\sigma = 0,$$

car $\cos(\widehat{\nu}, z) = 0$ sur Γ_L et $\widehat{u}_3^\varepsilon = 0$ sur $\Gamma_+ \cup \omega$.

On a en particulier $\int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dy dz = 0$.

Grâce au fait que $\widehat{u}^\varepsilon = 0$ si $z = h(y)$, on a:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial y_i} \theta dy dz = \int_{\omega} \left(\sum_{i=1}^2 \int_0^{h(y)} \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial y_i} dz \right) \theta dy = \int_{\omega} \theta \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz dy.$$

Enfin, on utilise la relation:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{u}_i^\varepsilon}{\partial y_i} dy dz = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^2 \widehat{u}_i^\varepsilon \nu_i d\sigma.$$

En remplaçant ces résultats dans la relation (3.18) on obtient:

$$\int_{\omega} \theta \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz \right) dy = \mathcal{M}(\theta) \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^2 \widehat{u}_i^\varepsilon \nu_i d\sigma, \quad \forall \theta \in \mathcal{H}^1(\omega).$$

Mais $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ implique:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^2 \widehat{u}_i^\varepsilon \nu_i d\sigma = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \widehat{u}_3^\varepsilon \nu_3 d\sigma,$$

et comme $\int_{\partial\Omega} \widehat{u}_3^\varepsilon \nu_3 d\sigma = 0$ on en déduit:

$$\int_{\omega} \theta \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz \right) dy = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{H}^1(\omega),$$

ou encore

$$(3.19) \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^h \widehat{u}_i^\varepsilon dz = 0 \quad \text{dans } (\mathcal{H}^1(\omega))',$$

où $(\mathcal{H}^1(\omega))'$ représente le dual de l'espace $\mathcal{H}^1(\omega)$. Soit:

$$\mathcal{M}_z(\psi) = \frac{1}{h} \int_0^{h(y)} \psi dz.$$

D'après la proposition 3.6 et puisque l'application:

$$h\mathcal{M}_z : \varphi \rightarrow \int_0^{h(y)} \varphi dz$$

est linéaire et continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\omega)$, on a:

$$\int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz \rightarrow \int_0^{h(y)} u_i^* dz \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{u}_i^\varepsilon dz \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} u_i^* dz \text{ dans } \mathcal{D}'(\omega),$$

ce qui implique:

$$(3.20) \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} u_i^* dz = 0 \quad \mathcal{D}'(\omega).$$

On va maintenant vérifier que ces convergences ont lieu non pas uniquement dans $\mathcal{D}'(\omega)$ mais aussi dans l'espace $H(\text{div}, \omega)$, où

$$H(\text{div}, \omega) = \{\psi \mid \psi \in \mathbb{L}^2(\omega) \text{ et } \text{div} \psi \in L^2(\omega)\}.$$

Puisque u^ε et u^* sont dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on déduit que les débits $h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)$ et $h\mathcal{M}_z(u^*)$ sont dans $L^2(\omega)$. Grâce aux égalités (3.13) et (3.14) ces débits sont dans $H(\text{div}, \omega)$. De plus, on a:

$$\|h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)\|_{H(\text{div}, \omega)}^2 = |h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)|_{0, \omega}^2 + |\text{div}_y(h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon))|_{0, \omega}^2 = |h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)|_{0, \omega}^2 \leq c|u^\varepsilon|_{0, \Omega}^2$$

et en utilisant les estimations a priori sur u^ε on obtient:

$$\|h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)\|_{H(\text{div}, \omega)} \leq c.$$

Le débit $h\mathcal{M}_z(u^\varepsilon)$ est donc borné dans $H(\text{div}, \omega)$, et par conséquent la convergence reste valable dans $H(\text{div}, \omega)$ faible, ce qui achève la démonstration.

Pour démontrer la relation (3.17) on utilise la continuité de l'application trace de $H(\text{div}, \omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$.

□

§4. Problème limite pour la lubrification

On rappelle que les résultats de §2-§3 sont vrais pour une application μ qui vérifie:

$$(H0) \quad \mu = \mu(\beta^\varepsilon s(\psi)),$$

où β^ε est une constante dépendante de ε .

Avant d'annoncer le principal résultat de ce paragraphe, le théorème 4.4, on donne quelques résultats préliminaires qu'on utilisera dans la démonstration de ce théorème.

On se propose de passer à la limite selon $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le problème (1.1). Soient $\phi, \psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ deux fonctions qui proviennent de $\hat{\phi}, \hat{\psi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ par le changement de variables (3.1) uniquement. Pour chaque $\hat{\phi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, on note:

$$D_\varepsilon(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} [\nabla_\varepsilon \hat{\phi} + (\nabla_\varepsilon \hat{\phi})^t],$$

$$(\nabla_\varepsilon \hat{\phi})_{i,j} = \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial y_j}, \quad (\nabla_\varepsilon \hat{\phi})_{i,3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z}, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2.$$

Alors on a:

$$(4.1) \quad 2D_\varepsilon(\hat{\phi})D_\varepsilon(\hat{\psi}) = \frac{1}{\varepsilon^2} a_0(\hat{\phi}, \hat{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon} a_1(\hat{\phi}, \hat{\psi}) + a_2(\hat{\phi}, \hat{\psi}),$$

où:

$$a_0(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} + 2 \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z}$$

$$a_1(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} \right)$$

$$a_2(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial \hat{\phi}_j}{\partial y_i} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial y_i} + \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial y_j} \right).$$

Lemme 4.1 Soient $\hat{\phi}$ et $\hat{\psi}$ comme ci-dessus. Si, de plus, $\hat{\phi}_3 = 0$ et $\hat{\psi}_3 = 0$, on a:

$$2\varepsilon^2 D_\varepsilon(\hat{\phi})D_\varepsilon(\hat{\psi}) \rightarrow \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \hat{\phi}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} \text{ dans } L^1(\Omega) \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour démontrer ce résultat on multiplie la relation (4.1) par ε^2 et ensuite on passe à la limite selon ε . Compte-tenu des expressions ci-dessus pour a_0, a_1 et a_2 , on trouve le résultat.

Définition 4.2 Soit μ une fonction qui vérifie les hypothèses (H0)-(H4) et $\widehat{\psi} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ telle que $\psi_3 = 0$ dans Ω . Par définition, la fonction μ^* est donnée par:

$$\mu^*(\widehat{\psi}) = \begin{cases} \mu\left(\beta, \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial z} \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial z}}\right) & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \beta < +\infty \\ \mu_0 & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 0 \\ \mu_\infty & \text{si } \frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

La fonction μ^* représente la viscosité limite; elle dépend de la rapidité de convergence de β^ε par rapport à ε^{-1} .

Dans la suite on définit l'espace W par:

$$W = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ telle que } \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ et } \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} \varphi dz \in \mathcal{L}^2(\omega) \right\}.$$

Pour $\varphi, \psi \in W$ on pose:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_W = \int_{\Omega} \varphi \psi dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dx + \int_{\omega} \left(\operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} \varphi dz \right) \left(\operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} \psi dz \right) dy.$$

On montre facilement que $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ définit un produit scalaire sur W , donc $(W, \|\cdot\|_W)$ est un espace de Hilbert, où $\|\cdot\|_W$ représente la norme associée au produit scalaire défini précédemment. On a le résultat suivant:

Lemme 4.3 L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans W pour la norme $\|\cdot\|_W$.

Démonstration: Pour montrer que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans W il suffit de démontrer que l'orthogonal de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans W est l'élément nul.

Soit l un élément qui appartient à l'espace W' , le dual de l'espace W , tel que

$$l(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

On va montrer que cela implique $l = 0$.

Grâce au théorème de Riesz, il existe $w \in W$ telle que:

$$l(\varphi) = \langle w, \varphi \rangle_W, \quad .$$

ce qui s'écrit encore:

$$\int_{\Omega} w \varphi dy dz + \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dy dz + \int_{\omega} \left(\operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} w dz \right) \left(\operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} \varphi dz \right) dy = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Pour une fonction test $\varphi = (0, 0, \varphi_3)$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient:

$$\int_{\Omega} w_3 \varphi_3 dy dz + \int_{\Omega} \frac{\partial w_3}{\partial z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} dy dz = 0, \quad \forall \varphi_3 \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

On peut montrer que cela implique:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} \right) = -w_3 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w_3}{\partial z} \nu_3 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On déduit $w_3 = 0$. De manière analogue on trouve $w_1 = w_2 = 0$, ce qui démontre le résultat. □

Soit W_0 la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)^3$ pour la norme de W :

$$W_0 = \overline{\mathcal{D}(\Omega)^3}^W.$$

En suivant les idées de V. Girault, P.A Raviart [5] on peut démontrer:

$$(4.2) \quad W_0 = \left\{ \varphi \in W, \text{ telle que } \varphi \cdot n_3 = 0 \text{ sur } \partial\Gamma^+ \cup \omega \text{ et } \left[\int_0^{h(y)} \varphi dz \right] \nu = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}.$$

On définit l'espace V_z par:

$$V_z = \left\{ \varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ telle que } \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \right\}.$$

Le théorème suivant nous donne la relation qui lie les limites u^* et p^* définies dans la proposition 3.6.

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses (H0)-(H4) et si les relations (3.2)-(3.4) sont satisfaites, le couple (u^*, p^*) appartient à $V_z \times H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ et vérifie pour $i = 1, 2$ le système:*

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i^* = g_i, & \text{sur } \omega \\ u_i^* = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \end{cases}$$

Démonstration: On rappelle la relation (3.9), vraie pour ε fixé:

$$2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(\beta^\varepsilon s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(\psi) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \psi dx - \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \psi dx = 0, \forall \psi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Pour $\psi = \varphi - v^\varepsilon$, cela implique:

$$\varepsilon (A_G(v^\varepsilon), \varphi - v^\varepsilon) = -\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon (\varphi - v^\varepsilon) dx + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} (\varphi - v^\varepsilon) dx, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

Grâce au fait que $\operatorname{div} v^\varepsilon = 0$ et aux résultats de convergence de la proposition 3.6, on a pour chaque $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ telle que $\widehat{\varphi}_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} (\varphi - v^\varepsilon) dx &= \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} v^\varepsilon dx = \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx = \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} \widehat{p}^\varepsilon \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{\varphi}_2}{\partial y_2} \right) dy dz + \varepsilon \int_{\Omega} \widehat{p}^\varepsilon \frac{\partial \widehat{\varphi}_3}{\partial z} dy dz \rightarrow \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial y_i} dy dz. \end{aligned}$$

D'autre part, en intégrant par parties et en utilisant l'appartenance de v^ε à l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$, on a:

$$(4.3) \quad \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon (\varphi - v^\varepsilon) dx = \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon u^\varepsilon dx - \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla (\varphi + G^\varepsilon) u^\varepsilon dx.$$

On a par définition:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon u^\varepsilon dx = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} u_j^\varepsilon dx.$$

En intégrant par parties le membre de droite on obtient:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} u_j^\varepsilon dx = \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon u_j^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_i} (u_j^\varepsilon)^2 dx - \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} u_j^\varepsilon dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon (u_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma$$

et $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Ω_ε implique:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon (u_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma.$$

Grâce au changement de variables et aux conditions au bord, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon (u_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma &= \sum_{i,j=1}^3 \int_{\partial \Omega_\varepsilon} G_i^\varepsilon (G_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Gamma_L^\varepsilon} G_i^\varepsilon (G_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \int_{\omega} G_i^\varepsilon (G_j^\varepsilon)^2 \nu_i d\sigma = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon \int_{\Gamma_L} \widehat{G}_i^\varepsilon (\widehat{G}_j^\varepsilon)^2 \widehat{\nu}_i d\sigma, \text{ car } G_3^\varepsilon = 0 \text{ dans } \omega. \end{aligned}$$

On remarque que grâce à la construction particulière de G^ε on a $\widehat{G}^\varepsilon = (G_1, G_2, \varepsilon G_3)$, avec G_i indépendantes de ε . On déduit pour le premier terme du membre de droite dans (4.3):

$$\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Gamma_L} \widehat{G}_i^\varepsilon (\widehat{G}_j^\varepsilon)^2 \widehat{\nu}_i d\sigma \rightarrow 0.$$

Grâce au changement de variables (3.1) et à la proposition 3.6 et comme $\widehat{\varphi}$ ne dépend pas de ε , on a pour le deuxième terme de (4.3):

$$\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla (\varphi + G^\varepsilon) u^\varepsilon dx = \varepsilon \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega_\varepsilon} u_i^\varepsilon \frac{\partial (\varphi_j + G_j^\varepsilon)}{\partial x_i} u_j^\varepsilon dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \widehat{u}_3^\varepsilon \frac{\partial(\widehat{\varphi}_j + \widehat{G}_j^\varepsilon)}{\partial z} \widehat{u}_j^\varepsilon dydz + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \widehat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial(\widehat{\varphi}_3 + \widehat{G}_3^\varepsilon)}{\partial y_i} \widehat{u}_3^\varepsilon dydz + \\
&\quad + \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \widehat{u}_i^\varepsilon \frac{\partial(\widehat{\varphi}_j + \widehat{G}_j^\varepsilon)}{\partial y_i} \widehat{u}_j^\varepsilon dydz.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de convergence pour \widehat{u}^ε et la forme particulière de la fonction \widehat{G} , on obtient:

$$\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla(\varphi + G^\varepsilon) u^\varepsilon dx \rightarrow 0.$$

On en déduit:

$$(4.4) \quad \varepsilon(A_G(v^\varepsilon), \varphi - v^\varepsilon) \rightarrow \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial y_i} dydz.$$

On rappelle la propriété de monotonie suivante (D. Ciorănescu):

$$(A_G(\varphi) - A_G(v^\varepsilon), \varphi - v^\varepsilon) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon),$$

où φ provient d'une fonction $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ par le changement de variables (3.1). On multiplie cette relation par ε :

$$(4.5) \quad \varepsilon(A_G(\varphi), \varphi - v^\varepsilon) - \varepsilon(A_G(v^\varepsilon), \varphi - v^\varepsilon) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

et ensuite on passe à la limite selon $\varepsilon \rightarrow 0$ dans la relation (4.5), pour une fonction φ telle que $\varphi_3 = 0$.

Pour cela, on estime le terme:

$$\varepsilon(A_G(\varphi), \varphi - v^\varepsilon) = 2\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(\beta^\varepsilon s(\varphi + G^\varepsilon)) D(\varphi + G^\varepsilon) D(\varphi - v^\varepsilon) dx.$$

Grâce aux hypothèses faites sur μ et au lemme 4.1 on a:

$$2\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(\beta^\varepsilon s(\varphi + G^\varepsilon)) D(\varphi + G^\varepsilon) D(\varphi - v^\varepsilon) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_{\Omega} \mu(\beta^\varepsilon \sqrt{D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon)D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon)}) \varepsilon D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon) \varepsilon D_\varepsilon(\widehat{\varphi} - \widehat{v}^\varepsilon) dydz = \\
&= 2 \int_{\Omega} \mu\left(\frac{\beta^\varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon)D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon)}\right) \varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi} + \widehat{G}^\varepsilon) D_\varepsilon(\widehat{\varphi} - \widehat{v}^\varepsilon) dydz \rightarrow \\
&\rightarrow \int_{\Omega} \mu^*(\widehat{\varphi} + \widehat{G}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i + \widehat{G}_i) \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - v_i^*) dydz,
\end{aligned}$$

où $\widehat{G} = (\widehat{G}_1, \widehat{G}_2, 0)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\widehat{v}^\varepsilon) = v^* = (v_1^*, v_2^*, 0)$ et μ^* est comme dans la définition 4.2.

On en déduit:

$$(4.6) \quad \varepsilon(A_G(\varphi), \varphi - v^\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} \mu^*(\widehat{\varphi} + \widehat{G}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i + \widehat{G}_i) \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - v_i^*) dydz.$$

On passe à la limite selon ε dans la relation (4.5) et en utilisant les convergences (4.4) et (4.6) on obtient:

$$(4.7) \quad \int_{\Omega} \mu^*(\widehat{\varphi} + \widehat{G}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i + \widehat{G}_i) \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - v_i^*) dydz + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial y_i} > \geq 0.$$

En utilisant la relation (3.16) qui est également vraie pour la fonction v^* , on en déduit:

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial v_i^*}{\partial y_i} dydz = 0.$$

En utilisant (4.8) dans (4.7), on obtient pour chaque $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ la relation suivante:

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} \mu^*(\widehat{\varphi} + \widehat{G}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i + \widehat{G}_i) \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - v_i^*) dydz + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial (\widehat{\varphi}_i - v_i^*)}{\partial y_i} dydz \geq 0.$$

On sait que v^* est dans l'espace W_0 et grâce à la relation (4.2) on déduit qu'il existe une suite $v_n^* \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge fortement vers v^* dans la norme $\|\cdot\|_W$.

Posons dans la relation (4.9) $\widehat{\varphi} = v_n^* + tw$, $t > 0$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. On obtient:

$$\int_{\Omega} \mu^*(v_n^* + tw + \widehat{G}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} [(v_n^*)_i + tw_i + \widehat{G}_i] \frac{\partial}{\partial z} [(v_n^*)_i + tw_i - v_i^*] dydz +$$

$$+ \int_{\omega} p^* \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} [(v_n^*)_i + tw_i - v_i^*] dz dy \geq 0, \forall n,$$

car p^* est indépendante de z grâce à la proposition 3.6. On passe à la limite selon n ; ensuite on divise par t , on passe à la limite selon $t \rightarrow 0$ et on déduit:

$$\int_{\Omega} \mu^*(u^*) \frac{\partial}{\partial z} (u_i^*) \frac{\partial w_i}{\partial z} dy dz + \int_{\Omega} p^* \frac{\partial w_i}{\partial y_i} dy dz \geq 0, \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), w_3 = 0,$$

On pose ensuite $\widehat{\varphi} = v_n^* - tw$, $t > 0$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans la relation (4.9), on fait les passages à la limite comme précédemment et on déduit l'inégalité inverse.

On obtient pour chaque $i=1,2$:

$$(4.10) \quad \int_{\Omega} \mu^*(u^*) \frac{\partial}{\partial z} (u_i^*) \frac{\partial w_i}{\partial z} dy dz + \int_{\Omega} p^* \frac{\partial w_i}{\partial y_i} dy dz = 0, \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), w_3 = 0.$$

On va montrer dans la suite que p^* appartient à l'espace $H^1(\omega)$.

On choisit dans (4.10) une fonction test

$$w(y, z) = \xi(y)\theta(z),$$

avec $\xi \in \mathcal{D}(\omega)$ et $\theta \in \mathcal{D}(0, \alpha)$ une fonction fixé strictement positive et telle que $\int_0^{\alpha} \theta dz = 1$. La relation (4.10) devient alors:

$$(4.11) \quad \int_{\omega} p^* \operatorname{div}_y \xi(y) dy = - \int_{\Omega} \mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \xi(y) \frac{\partial \theta(z)}{\partial z} dy dz.$$

Grâce au fait que μ^* est bornée et $\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \in L^2(\Omega)$ on déduit

$$\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \in L^2(\Omega).$$

La relation (4.11) implique alors l'existence d'une constante c telle que:

$$\left| \int_{\omega} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \xi_i dy dz \right| \leq c |\xi|_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Comme dans P. Rabier, J.-M. Thomas [9], cela implique

$$\frac{\partial p^*}{\partial y_i} \in L^2(\omega).$$

Grâce à la proposition 3.6 on a $p^* \in L_0^2(\omega)$ et on déduit:

$$p^* \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega).$$

Une intégration par parties dans la relation (4.10) implique:

$$\int_{\Omega} \mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial w_i}{\partial z} dydz + \int_{\Omega} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} w_i dydz = 0, \forall w \in \mathcal{D}(\Omega), w_3 = 0.$$

Pour chaque $i=1,2$, u^* et p^* vérifient alors l'équation:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = 0 \text{ dans } \Omega,$$

qui représente la première relation du système de l'énoncé du théorème.

Grâce à la proposition 3.6 on a les deux conditions au bord pour le système.

□

§5. Estimations a priori et passage à la limite pour le problème sans injection

On s'intéresse ici au problème (1.3)-(1.4) de §1. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on connaît grâce à D. Ciorănescu [4] l'existence d'au moins une solution $u^\varepsilon \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ pour ce problème. En utilisant une variante du théorème de "de Rham" on montre que pour chaque u^ε il existe au moins un p^ε qui vérifie le système (1.3). Compte-tenu de la relation (1.4), on a un unique p^ε pour chaque u^ε trouvé.

A partir de la première relation de (1.3), qu'on multiplie par des fonctions particulières on va obtenir dans la suite des estimations a priori pour les nouvelles variables \widehat{u}^ε et \widehat{p}^ε , qui proviennent du changement de variables (3.1). On rappelle que grâce à R. Temam [13] on a le lemme suivant:

Lemme 5.1 *Soit Ω un ensemble ouvert dans \mathbb{R}^3 et $\psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Alors on a:*

$$|\psi|_{\mathbb{L}^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} |\psi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^{1/4} \|\psi\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^{3/4}.$$

La proposition suivante nous donne des estimations a priori pour les nouvelles variables.

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses (H0)-(H4), les fonctions \widehat{u}^ε et \widehat{p}^ε vérifient:*

$$(5.1) \quad |\widehat{u}^\varepsilon|_0 \leq c\varepsilon^2$$

$$(5.2) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0 \leq c\varepsilon^2 \\ \left| \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial y_i} \right|_0 \leq c\varepsilon \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

$$(5.3) \quad |\widehat{p}^\varepsilon|_0 \leq c$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon \\ \left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

Démonstration: On multiplie par u^ε la première relation de (1.3) et grâce au fait que $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0$ on obtient:

$$2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) dx = (f, u^\varepsilon).$$

L'hypothèse (H4) et l'inégalité

$$|\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq |D(u^\varepsilon)|_{0,\varepsilon}$$

impliquent:

$$c|\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^2 \leq 2m_0 \int_{\Omega_\varepsilon} D(u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) dx \leq 2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(s(u^\varepsilon)) D(u^\varepsilon) D(u^\varepsilon) dx.$$

En appliquant le résultat du lemme 3.3, on obtient:

$$|\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq c\varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0.$$

Le lemme 3.1 implique:

$$\varepsilon |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \leq c\varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0 \leq c\varepsilon \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2},$$

ou encore:

$$(5.5) \quad \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \right) \leq c\varepsilon \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2}.$$

En élevant au carré et en simplifiant la relation (5.5), on a:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \right) \leq c^2 \varepsilon^2,$$

ce qui nous conduit à la relation:

$$\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{u^\varepsilon}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \right|_0^2 \leq c\varepsilon^4.$$

On déduit alors la relation (5.2). L'inégalité de Poincaré appliquée pour la fonction \widehat{u}^ε et la relation (5.2) nous conduisent à:

$$|\widehat{u}^\varepsilon|_0 \leq c \left| \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0 \leq c\varepsilon^2,$$

ce qui implique la relation (5.1).

Pour obtenir des estimations sur la pression, on multiplie la première équation de (1.3) par une fonction test $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ et on obtient:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu(s(u^\varepsilon))D(u^\varepsilon)D(\varphi)dx + b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi) - \int_{\Omega_\varepsilon} f\varphi dx,$$

ce qui implique:

$$(5.6) \quad \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| \leq c \int_{\Omega_\varepsilon} |D(u^\varepsilon)D(\varphi)| dx + |b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)| + c\varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le premier terme du membre de droite dans (5.6) on a:

$$(5.7) \quad \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| \leq c |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} + |b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)| + c\varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0.$$

Grâce au lemme 3.1 on a:

$$(5.8) \quad |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} = \left(\varepsilon |\nabla_y \widehat{u}^\varepsilon|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\partial \widehat{u}^\varepsilon}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2}.$$

Les estimations a priori trouvées pour les dérivées partielles de u^ε et utilisées dans (5.8) nous conduisent à:

$$|\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq (\varepsilon c\varepsilon^2 + 1/\varepsilon c\varepsilon^4)^{1/2} = c\varepsilon^{3/2}.$$

On déduit:

$$(5.9) \quad |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon} \leq c\varepsilon^{3/2}.$$

On va donner maintenant des estimations pour le terme $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)$. Compte-tenu des propriétés de l'application b et grâce à l'inégalité de Hölder on trouve:

$$(5.10) \quad |b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)| = |b(u^\varepsilon, \varphi, u^\varepsilon)| \leq |u^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} |u^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)} = |u^\varepsilon|_{L^4(\Omega_\varepsilon)}^2 |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon}.$$

En utilisant dans (5.10) le lemme 5.1, l'inégalité de Poincaré pour la fonction u^ε , le changement de variables et ensuite la relation (5.1), on obtient:

$$\begin{aligned} |b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)| &\leq c |u^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^{1/2} |\nabla u^\varepsilon|_{0,\varepsilon}^{3/2} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} \leq c \varepsilon^{1/4} |\widehat{u^\varepsilon}|_0^{1/2} \varepsilon^{3/2} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} \leq \\ &\leq c \varepsilon^{1/4} \varepsilon \varepsilon^{3/2} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} \leq c \varepsilon^{11/4} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon}, \end{aligned}$$

ou encore:

$$(5.11) \quad |b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, \varphi)| \leq c \varepsilon^{3/2} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon}.$$

En utilisant dans (5.7) l'inégalité (5.11) et la relation (5.9), on obtient:

$$\left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| \leq c \varepsilon^{3/2} |\nabla \varphi|_{0,\varepsilon} + c \varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0.$$

En utilisant le lemme 3.1 pour φ , on déduit:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| &\leq c \varepsilon \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{\varphi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2} + c \varepsilon \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0 \leq \\ &\leq c \varepsilon \left(\varepsilon^2 |\nabla_y \widehat{\varphi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2} \leq c \varepsilon \left(|\nabla_y \widehat{\varphi}|_0^2 + \left| \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial z} \right|_0^2 \right)^{1/2} = c \varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}|_0, \end{aligned}$$

ce qui implique:

$$(5.12) \quad \left| \int_{\Omega_\varepsilon} p^\varepsilon \operatorname{div} \varphi dx \right| \leq c \varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}|_0.$$

Choisissons dans la relation (5.12) une fonction test $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que $\varphi_3 = 0$. Cela implique $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, $\widehat{\varphi}_3 = 0$ et en utilisant le changement de variables (3.1), on obtient:

$$\left| \int_{\Omega} \widehat{p}^\varepsilon \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{\varphi}_2}{\partial y_2} \right) dy_1 dy_2 \varepsilon dz \right| \leq c\varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}|_0, \quad \forall \widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega) \text{ telle que } \widehat{\varphi}_3 = 0.$$

On en déduit:

$$\left| \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_i}, \widehat{\varphi}_i \right\rangle_{H^{-1}(\Omega)} \right| \leq c \|\widehat{\varphi}\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall (\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2) \in \left[\mathcal{H}_0^1(\Omega) \right]^2$$

d'où:

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial y_i} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c, \quad i = 1, 2.$$

Choisissons dans (5.12) une fonction test $\varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ telle que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Cela implique $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$, $\widehat{\varphi}_1 = \widehat{\varphi}_2 = 0$ et le changement de variables (3.1) donne:

$$\left| \int_{\Omega} \widehat{p}^\varepsilon \frac{\partial \widehat{\varphi}_3}{\partial z} dy dz \right| \leq c\varepsilon |\nabla \widehat{\varphi}_3|_0, \quad \forall \widehat{\varphi}_3 \in \mathcal{H}_0^1(\Omega),$$

d'où l'on déduit:

$$\left\| \frac{\partial \widehat{p}^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c\varepsilon.$$

On a ainsi démontré (5.4). Puisque, grâce à (1.4), \widehat{p}^ε est de moyenne nulle sur Ω , d'après R. Temam [13] on a:

$$|\widehat{p}^\varepsilon|_0 \leq c \|\nabla \widehat{p}^\varepsilon\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Compte-tenu des estimations (5.4) et du fait que $\varepsilon < 1$, on obtient:

$$|\widehat{p}^\varepsilon|_0 \leq c,$$

ce qui achève la démonstration. □

Si on compare les résultats de la proposition 5.2 avec ceux obtenus dans la proposition 3.5 on peut constater un décalage de ε^2 sur les estimations. Cette différence est due à la présence du terme non linéaire $b(u^\varepsilon, u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ dans le premier cas. Le terme analogue est nul dans le deuxième cas, grâce aux conditions de Dirichlet homogènes au bord.

On rappelle que l'espace fonctionnel $V_z(\Omega)$ a été défini par:

$$V_z(\Omega) = \{\varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}.$$

Proposition 5.3 *Sous les hypothèses (H0)-(H4) et si la relation (1.4) est satisfaite, ils existent $u^* \in V_z(\Omega)$ et $p^* \in L_0^2(\Omega)$ telles que, quitte à extraire une sous-suite, on ait:*

$$(5.13) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{u^\varepsilon} \rightharpoonup u^* \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$(5.14) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial z} \rightharpoonup \frac{\partial u^*}{\partial z} & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \widehat{u^\varepsilon}}{\partial y_i} \rightharpoonup 0 & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible, } i = 1, 2 \end{cases}$$

$$(5.15) \quad u^* \cos(n, z) = 0 \text{ dans } \mathbb{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$(5.16) \quad u_3^* = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$(5.17) \quad \begin{cases} \widehat{p^\varepsilon} \rightharpoonup p^* & \text{dans } L_0^2(\Omega) \text{ faible} \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \end{cases}$$

Démonstration: La proposition 5.2 et les résultats classiques d'analyse fonctionnelle impliquent les convergences (5.13), (5.14) et (5.17).

Pour montrer la relation (5.15), on définit pour chaque surface régulière \mathcal{S} de $\overline{\Omega}$ une application trace de manière suivante:

$$T : V_z(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{S})$$

$$\varphi \rightarrow \varphi \cos(\widehat{n}, z),$$

où \widehat{n} représente la normale extérieure à la surface \mathcal{S} .

L'application T est linéaire et continue. Alors la convergence (5.13) implique la convergence des traces. Pour $\mathcal{S} = \partial\Omega$, on a:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{u}^\varepsilon \cos(\widehat{n}, z) \rightarrow u^* \cos(\widehat{n}, z) \quad \text{dans } \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Puisque \widehat{u}^ε est de trace nulle sur $\partial\Omega$ on en déduit:

$$u^* \cos(\widehat{n}, z) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Pour montrer la relation (5.16) on utilise l'égalité ci-dessous, due au fait que $\operatorname{div} u^\varepsilon = 0$ dans Ω_ε et au changement de variables (3.1):

$$(5.18) \quad \int_{\Omega} \widehat{q} \frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial z} dy dz + \varepsilon \int_{\Omega} \widehat{q} \left(\frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dy dz = 0, \quad \forall \widehat{q} \in L_0^2(\Omega).$$

Soit θ une fonction quelconque dans $L^2(\Omega)$. La fonction \widehat{q} définie par:

$$\widehat{q} := \theta - \mathcal{M}(\theta), \quad \text{où } \mathcal{M}(\theta) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \theta dy dz$$

appartient à l'espace $L_0^2(\Omega)$. On la prend donc comme fonction test dans (5.18) et on obtient la relation suivante:

$$(5.19) \quad \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dy dz + \varepsilon \int_{\Omega} \theta \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dy dz = \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega} \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dy dz +$$

$$+ \mathcal{M}(\theta) \varepsilon \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dy dz, \quad \forall \theta \in L^2(\Omega).$$

La relation (5.9) implique les convergences:

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \theta \frac{\partial \widehat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} dydz \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial u^*}{\partial z} \theta dydz,$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \theta \left(\frac{\partial \widehat{u}_1^\varepsilon}{\partial y_1} + \frac{\partial \widehat{u}_2^\varepsilon}{\partial y_2} \right) dydz \rightarrow 0.$$

La division par ε^2 et le passage à la limite dans la relation (5.19) impliquent:

$$(5.20) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \theta dydz = \mathcal{M}(\theta) \int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} dydz, \quad \forall \theta \in L^2(\Omega)$$

Mais on a:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} dydz = \int_{\partial\Omega} u_3^* \cos(\widehat{n}, z) d\sigma = 0,$$

car $u^* \cos(\widehat{n}, z) = 0$ sur $\partial\Omega$. Compte-tenu de cela, on obtient dans (5.20):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_3^*}{\partial z} \theta dydz = 0 \quad \forall \theta \in L^2(\Omega),$$

ou encore:

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ce qui implique que u_3^* soit constante par rapport à z .

Puisque grâce à (5.15) la fonction u_3^* est nulle sur la face inférieure du domaine Ω , on en déduit $u_3^* = 0$ dans Ω . □

Proposition 5.4 *Sous les hypothèses de la proposition 5.3, on a:*

$$(5.21) \quad \int_0^{h(y)} \frac{1}{\varepsilon^2} \widehat{u}^\varepsilon dz \rightharpoonup \int_0^{h(y)} u^* dz \text{ dans } \mathbb{L}^2(\omega) \text{ faible}$$

$$(5.22) \quad \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} u^* dz = 0 \text{ dans } \omega$$

$$(5.23) \quad \left[\int_0^{h(y)} (u_1^*, u_2^*) dz \right] \nu = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\omega)$$

$$(5.24) \quad u_i^*(y, 0) = u_i^*(y, h(y)) = 0 \text{ dans } \omega$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.7 de §3.

§6. Problème limite pour le cas sans injection

Comme au §4, on introduit une définition et ensuite on donne le problème limite. En utilisant les résultats de §5, on passe à la limite selon $\varepsilon \rightarrow 0$ dans le problème (1.3). Soit la viscosité limite μ^* définie comme ci-dessous:

Définition 6.1 Pour $\widehat{\psi} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ telle que $\widehat{\psi}_3 = 0$ on définit la fonction μ_* par:

$$\mu_*(\widehat{\psi}) = \begin{cases} \mu\left(b\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial z} \frac{\partial \widehat{\psi}_i}{\partial z}}\right) & \text{si } \varepsilon\beta^\varepsilon \rightarrow b < +\infty \\ \mu(0) & \text{si } \varepsilon\beta^\varepsilon \rightarrow 0 \\ \mu_\infty & \text{si } \varepsilon\beta^\varepsilon \rightarrow +\infty \end{cases}$$

La viscosité limite μ_* dépend de la rapidité de convergence de β^ε par rapport à ε .

Le principal résultat est le théorème suivant:

Théorème 6.2 Sous les hypothèses (H0)-(H4), le couple (u^*, p^*) défini par la proposition 5.3 appartient à $V_z(\Omega) \times H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ et satisfait pour chaque $i = 1, 2$:

$$(6.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = f_i & \text{dans } \Omega \\ u_i^*(y, 0) = u_i^*(y, h(y)) = 0 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

Démonstration: On définit pour $\psi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$ l'opérateur A par:

$$(A(\psi), \varphi) = 2 \int_{\Omega_\varepsilon} \mu(\beta^\varepsilon s(\psi)) D(\psi) D(\varphi) dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

On rappelle que grâce à la monotonie de A , démontrée dans D. Ciorănescu [4], on a:

$$(A(\varphi) - A(u^\varepsilon), \varphi - u^\varepsilon) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon).$$

On multiplie la relation ci-dessus par $\frac{1}{\varepsilon^3}$ et on prend des fonctions test de la forme $\varepsilon^2 \varphi = (\varepsilon^2 \varphi_1, \varepsilon^2 \varphi_2, 0)$. On obtient:

$$\frac{1}{\varepsilon^3} (A(\varepsilon^2 \varphi), \varepsilon^2 \varphi - u^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon^3} (A(u^\varepsilon), \varepsilon^2 \varphi - u^\varepsilon) \geq 0.$$

La première relation de (1.3) multipliée par $\varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon$ donne:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^3} A(u^\varepsilon, \varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \nabla u^\varepsilon (\varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) dx + \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p^\varepsilon (\varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) dx = \\ & = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) dx, \forall \varphi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon). \end{aligned}$$

En suivant les idées de la démonstration du théorème 4.4, on obtient:

$$\frac{1}{\varepsilon^3} A(u^\varepsilon, \varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) \rightarrow \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial y_i} dy dz + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i(\widehat{\varphi}_i - u_i^*) dy dz.$$

On a aussi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^3} (A(\varepsilon^2\varphi), \varepsilon^2\varphi) = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\sqrt{(\beta^\varepsilon)^2 D_\varepsilon(\varepsilon^2\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\varepsilon^2\widehat{\varphi})}) D_\varepsilon(\varepsilon^2\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\varepsilon^2\widehat{\varphi}) dy dz = \\ & = 2 \int_{\Omega} \mu(\sqrt{(\beta^\varepsilon \varepsilon)^2 (\varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\widehat{\varphi}))}) \varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) dy dz. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.1 et à la définition 6.1 on déduit:

$$\frac{1}{\varepsilon^3} (A(\varepsilon^2\varphi), \varepsilon^2\varphi) \rightarrow \int_{\Omega} \mu_*(\widehat{\varphi}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial z} \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial z} dy dz.$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^3} (A(\varepsilon^2\varphi), u^\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} \mu(\sqrt{(\beta^\varepsilon \varepsilon)^2 \varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\widehat{\varphi})}) D_\varepsilon(\varepsilon^2\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) dy dz = \\ & 2 \int_{\Omega} \mu(\sqrt{(\beta^\varepsilon \varepsilon)^2 \varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) D_\varepsilon(\widehat{\varphi})}) \varepsilon^2 D_\varepsilon(\widehat{\varphi}) D_\varepsilon\left(\frac{\widehat{u}^\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) dy dz. \end{aligned}$$

On déduit:

$$\frac{1}{\varepsilon^3} (A(\varepsilon^2\varphi), \varepsilon^2\varphi - u^\varepsilon) \rightarrow \int_{\Omega} \mu_*(\widehat{\varphi}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \widehat{\varphi}_i}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - u_i^*) dy dz.$$

Finalement on obtient:

$$\int_{\Omega} \mu_*(\widehat{\varphi}) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i) \frac{\partial}{\partial z} (\widehat{\varphi}_i - u_i^*) dy dz + \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial p^*}{\partial y_i}, \widehat{\varphi}_i - u_i^* \right\rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 f_i(\widehat{\varphi}_i - u_i^*) dy dz \geq 0.$$

Pour la suite on applique une méthode analogue à celle déjà utilisée pour la démonstration du théorème 4.4 et on obtient le résultat annoncé. \square

Dans la suite on s'intéresse au problème limite dans le cas particulier $\beta^\varepsilon = 1$. Dans ce cas, on a $\varepsilon\beta^\varepsilon \rightarrow 0$ et donc le problème limite devient linéaire et est donné par:

$$(6.2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_0 \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = f_i & \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2 \\ u_i^*(y, 0) = u_i^*(y, h(y)) = 0, & \text{dans } \omega, \quad i = 1, 2 \\ \left[\int_0^{h(y)} u^* dz \right] \nu = 0 & \text{sur } \partial\omega \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On rappelle que la moyenne $\mathcal{M}_z(\varphi)$, par rapport à la variable z , d'une fonction φ est définie par:

$$\mathcal{M}_z(\varphi)(y) = \frac{1}{h(y)} \int_0^{h(y)} \varphi(y, z) dz.$$

Comme dans G. Bayada, M. Chambat [2], par un choix des fonctions test \hat{v} dans le système (6.2), on va établir des relations entre la moyenne $\mathcal{M}_z(u^*)$ de u^* , les forces extérieures f et le gradient de la limite p^* . On commence par démontrer le résultat suivant:

Lemme 6.3 *Sous les hypothèses du théorème 6.2, pour toute fonction \hat{v} telle que:*

$$\hat{v} \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \hat{v}_3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \text{ est constante par rapport à } z \text{ dans } \Omega$$

on a:

$$(6.3) \quad \int_{\omega} \mu_0 \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{h(y)} u_i^* dz dy = - \int_{\omega} p^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \hat{v}_i dz dy - \int_{\omega} f_i \int_0^{h(y)} \hat{v}_i dy dz.$$

Démonstration: On multiplie la première relation de (6.2) par une fonction \widehat{v} définie comme dans l'énoncé du lemme, on intègre par parties et on obtient:

$$(6.4) \quad \mu_0 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial z} dydz - \int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial y_i} dydz = \int_{\Omega} f_i \widehat{v}_i dydz.$$

La régularité de la fonction \widehat{v} et le fait que le $\cos(\widehat{n}, z)$ est nul sur la face latérale du domaine Ω nous permettent d'intégrer par parties le premier terme du membre de gauche de l'égalité (6.4). On obtient:

$$\mu_0 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial z} dydz = -\mu_0 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \widehat{v}_i}{\partial z^2} \widehat{v}_i^* dydz = -\mu_0 \int_{\omega} \frac{\partial^2 \widehat{v}_i}{\partial z^2} \int_0^{h(y)} u_i^* dz dy.$$

On sait que $p^*(y, z) = p^*(y)$ dans Ω , i.e. p^* est indépendante de la variable z . D'autre part, on a:

$$\int_0^{h(y)} \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial y_i} dz = \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{v}_i dz,$$

car $\widehat{v}_i(y, h(y)) = 0$ par hypothèse.

Alors, le théorème de Fubini implique:

$$\int_{\Omega} p^* \frac{\partial \widehat{v}_i}{\partial y_i} dydz = \int_{\omega} p^* \frac{\partial}{\partial y_i} \int_0^{h(y)} \widehat{v}_i dz dy,$$

$$\int_{\Omega} f_i \widehat{v}_i dydz = \int_{\omega} f_i \int_0^{h(y)} \widehat{v}_i dz dy.$$

En reportant les relations ci-dessus dans (6.4) on obtient (6.3). □

On va maintenant construire explicitement la fonction test \widehat{v} qui permettra d'obtenir une relation du type annoncé.

Proposition 6.4 *Si les hypothèses du lemme 6.3 sont satisfaites, alors la moyenne $\mathcal{M}_z(u^*)$ est liée à la limite p^* et aux forces f_i par:*

$$(6.5) \quad \mathcal{M}_z(u_i^*) = \frac{h^2(y)}{12\mu_0} \left(f_i - \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \right).$$

Démonstration: Dans la relation (6.3) on prend une fonction test $\widehat{v} \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$ qui vérifie $\widehat{v}_1 = \phi, \widehat{v}_2 = \widehat{v}_3 = 0$ où ϕ est définie par :

$$\phi = z(z - h(y))\theta, \text{ telle que } \theta \in \mathcal{H}_0^1(\omega).$$

On obtient:

$$(6.6) \quad \int_{\omega} 2\mu_0 \int_0^{h(y)} u_1^* \theta dz dy = - \int_{\omega} p^* \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{h(y)} \varphi dz dy - \int_{\omega} f_1 \int_0^{h(y)} \phi dz dy.$$

Le calcul de l'intégrale de ϕ entre $z = 0$ et $z = h(y)$ donne:

$$\int_0^{h(y)} \phi dz = \left(\int_0^{h(y)} z^2 dz - \int_0^{h(y)} zh(y) dz \right) \theta = -\frac{h^3(y)}{6} \theta.$$

En reportant cette égalité dans la relation (6.6), on a:

$$\int_{\omega} 2\mu_0 \int_0^{h(y)} u_1^* dz \theta dy = \int_{\omega} p^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h^3(y)}{6} \theta \right) dy + \int_{\omega} f_1 \int_0^{h(y)} \left(\frac{h^3(y)}{6} \theta \right) dy.$$

Puisque cette égalité est vraie pour toute fonction $\theta \in \mathcal{H}_0^1(\omega)$, on en déduit la relation (6.5) pour l'indice $i = 1$. En reprenant les calculs précédents avec une fonction test \widehat{v} telle que $\widehat{v}_2 = \phi, \widehat{v}_1 = \widehat{v}_3 = 0$, la fonction ϕ étant celle définie auparavant, on obtient la relation pour l'indice $i = 2$. On achève ainsi la démonstration du théorème. \square

Théorème 6.5 *La limite p^* est déterminée d'une manière unique dans $H^1(\omega)$ par:*

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{h^3(y)}{12\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \right) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{h^3(y)}{12\mu_0} f_i \right) & \text{dans } \omega \\ \sum_{i=1}^2 \frac{h^3(y)}{12\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \nu_i = \sum_{i=1}^2 \frac{h^3(y)}{12\mu_0} f_i \nu_i & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\int_{\omega} h(y)p^* dy = 0.$$

Démonstration: En remplaçant (6.5) dans (5.21), on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left[\frac{h^3(y)}{12\mu_0} \left(f_i - \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \right) \right] = 0$$

ou encore:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{h^3(y)}{12\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{h^3(y)}{12\mu_0} f_i \right)$$

La relation (6.5) implique:

$$\frac{h^3(y)}{12\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = \frac{h^3(y)}{12\mu_0} f_i - h(y)\mathcal{M}_z(u^*).$$

Les hypothèses impliquent $\frac{h^3(y)}{12\mu_0} \frac{\partial p^*}{\partial y_i} \in L^2(\omega)$. Les hypothèses sur $h(y)$ nous assurent la coercivité de $\frac{h^3(y)}{12\mu_0}$ et on déduit alors que $\frac{\partial p^*}{\partial y_i}$ appartient à $L^2(\omega)$. D'où l'appartenance de p^* à l'ensemble $H^1(\omega)$.

La deuxième relation de (6.7) est obtenue à partir de (5.22), qu'on rappelle:

$$\left[\int_0^{h(y)} u^*(y, z) dz \right] \nu = 0 \text{ sur } \partial\omega.$$

En utilisant ci-dessus la relation (6.5) on obtient le résultat. Grâce à la relation (5.17) on a:

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0.$$

L'appartenance de p^* à l'espace $L_0^2(\Omega)$ et son indépendance par rapport à la variable z impliquent:

$$(6.8) \quad 0 = \int_{\Omega} p^* dy dz = \int_{\omega} \int_0^{h(y)} p^* dz dy = \int_{\omega} h(y)p^* dy.$$

On trouve ainsi le problème aux limites classique (6.7). Grâce à la coercivité de $\frac{h^3(y)}{12\mu_0}$ on a existence et unicité de la solution p^* . \square

§7. Conclusions

On rappelle ici les problèmes limites trouvés.

Dans le premier cas (problème de lubrification) le problème limite de (1.1)-(1.2) donné par le théorème 4.4 est le suivant:

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i^*(y, 0) = g_i, \quad i = 1, 2 & \text{dans } \omega \\ u_i^*(y, h(y)) = 0, \quad i = 1, 2 & \text{dans } \omega \\ \left[\int_0^{h(y)} u^* dz \right] \cdot \nu = \left[\int_0^{h(y)} (g_1, g_2) dz \right] \cdot \nu & \text{sur } \partial\omega \\ \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} u^* dz = 0 & \text{dans } \omega \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Dans le deuxième cas (mouvement engendré par une force extérieure), le problème limite de (1.3)-(1.4) donné par le théorème 6.2 est:

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu^*(u^*) \frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y_i} = f_i & \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2 \\ u_i^*(y, 0) = u_i^*(y, h(y)) = 0, & \text{dans } \omega, \quad i = 1, 2 \\ \left[\int_0^{h(y)} u^* dz \right] \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\omega \\ \operatorname{div}_y \int_0^{h(y)} u^* dz = 0 & \text{dans } \omega \\ \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Dans la suite on va faire quelques considérations sur l'unicité et la régularité des solutions pour (7.1) et (7.2).

(i) Dans le cas où la viscosité non linéaire $\mu^*(u^*)$ (respectivement $\mu_*(u^*)$) du problème limite est constante, la première équation de (7.1) (respectivement (7.2)) est linéaire et on retrouve les résultats d'A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat, qu'on rappelle. Le problème (7.1) peut être découpé comme dans A. Assemien, G. Bayada, M. Chambat [1]. La pression p^* est alors déterminée de manière unique dans $H^1(\omega)$ comme solution d'un problème du type Neumann (l'équation qui intervient est celle de Reynolds). Ensuite on peut déterminer de manière unique la vitesse dans $V_z(\Omega)$, en utilisant une relation qui lie les limites u^* et p^* de la vitesse et de la pression. Dans la proposition 3.6. on a alors convergence des suites toutes entières vers leurs limites.

De plus, si on note par s_1 et s_2 les deux premières composantes de la fonction g sur ω et si dans les quatre coins du domaine rectangulaire ω on impose la condition

$$2 \int_0^{h(y)} (g_1 - g_2) dz = s_1 - s_2,$$

on a:

$$\widehat{u^\varepsilon} \rightarrow u^* \text{ dans } V_z(\Omega) \text{ fort,}$$

$$\varepsilon^2 \widehat{p^\varepsilon} \rightarrow p^* \text{ dans } L_0^2(\omega) \text{ fort.}$$

Le problème (7.2) peut être découpé en suivant les idées de G. Bayada, M. Chambat [2]. La pression p^* est alors déterminée par le théorème 6.5 et la vitesse est donnée par la proposition 6.4.

(ii) Dans le cas où la viscosité $\mu^*(u^*)$ (respectivement $\mu_*(u^*)$) n'est pas constante, on ne connaît pas de résultat général d'unicité pour la fonction u^* ; mais pour chaque fonction u^* solution du problème (7.1) ou (7.2), il existe une unique pression correspondante. On peut démontrer le résultat suivant:

Proposition 7.1 *Sous les hypothèses (H0)-(H4) et (3.2)-(3.4) et pour chaque u^* solution du problème (7.1) (respectivement (7.2)), il existe un unique $p^* \in H^1(\omega) \cap L_0^2(\omega)$ solution du problème.*

Démonstration: On va démontrer l'unicité de la pression p^* pour le problème (7.1). La démonstration de l'unicité pour la pression dans le problème (7.2) est analogue.

On suppose qu'il existe deux solutions p^* et q^* qui vérifient la première équation de (7.1). On déduit:

$$\int_{\Omega} (p^* - q^*) \operatorname{div} \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

On a $p^* - q^* \in L_0^2(\Omega)$ et on déduit qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ telle que $p^* - q^* = \operatorname{div} \varphi$.

On obtient alors:

$$\int_{\Omega} (p^* - q^*)(p^* - q^*) dydz = 0,$$

ce qui implique $p^* = q^*$ dans Ω . Compte-tenu du fait que p^* et q^* ne dépendent pas de z et appartiennent à $H^1(\omega) \cap L_0^2(\Omega)$ (voir le théorème 4.4) et que $h(y)$ est strictement positif, on obtient le résultat demandé.

□

Bibliographie du Chapitre I

- [1] A. ASSEMIEN, G. BAYADA, M. CHAMBAT, Inertial effects in the asymptotic behavior of a thin film flow, Preprint n° 121, Equipe d'Analyse Numérique, Lyon-Saint-Etienne.
- [2] G. BAYADA, M. CHAMBAT, The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: a mathematical proof, *Appl. Math. and Opt.*, 14 (1986), p. 73-93.
- [3] A. BOURGEAT, A. MIKELIC, R. TAPIERO, Dérivation des équations moyennées décrivant un écoulement non newtonien dans un domaine de faible épaisseur, *C.R.Acad.Sci.Paris*, 316, Série I, p. 965-970, 1993.
- [4] D. CIORANESCU, Quelques exemples de fluides newtoniens généralisés, *Math. topics in fluid dynamics*, ed. J.F. Rodrigues-A. Sequiera, Pitman Research Notes in Math. n° 274, Longman Scientific and Technical, 1993, p. 132-168
- [5] V. GIRAULT, P.A. RAVIART, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 749, 1979.
- [6] J.-L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [7] A. MIKELIC, R. TAPIERO, Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab, *M2 A.N.*, vol 29, n, 1995, p. 3-22
- [8] S.A. NAZAROV, Asymptotic solution of the Navier-Stokes problem on the flow of a thin layer of fluid, *Siberian Math. J.*, 31, 1990, p.296-307.
- [9] P. RABIER, J.-M. THOMAS, *Exercices d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, 1993
- [10] J. SAINT JEAN PAULIN, Méthodes mathématiques en mécanique des fluides, cours DEA 1993-1994, Université de Metz
- [11] J. SAINT JEAN PAULIN, K. TAOUS, About derivation of Reynolds law from Navier-Stokes equations for two non-miscible fluids, *Mathematical Modelling in Lubrication*, Publications da Universidade de Vigo, G. Bayada, M. Chambat, J. Durany éd., p. 99-104
- [12] K. TAOUS, Equations de Reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, Série I, p. 1213-1218, 1995
- [13] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [14] W.G. LITVINOV, Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Non-linear Viscous Fluids, *Recent developments in theoretical fluid mechanics*; Longman

Scientific and Technical, G. P. Galdi and J. Nečas (editors)-1992, Pitman Research
Notes in Mathematics Series (291)

CHAPITRE II

CONVERGENCE TRIPLE-ECHELLE POUR LE PROBLEME DE STOKES

CHAPITRE II

Convergence triple-échelle pour le problème de Stokes

Introduction

On étudie dans ce chapitre l'homogénéisation du problème de Stokes dans un domaine qui présente une structure avec double périodicité. Dans un problème de ce type, plusieurs méthodes sont envisageables pour trouver le problème homogénéisé: développement asymptotique, méthode de l'énergie de Tartar, convergence multi-échelle. La convergence multi-échelle est introduite dans G. Allaire, M. Briane [1]. Elle est une généralisation de la convergence double-échelle introduite par G. Nguetseng [10] pour les domaines avec périodicité simple. Ici on va appliquer la méthode de convergence multi-échelle pour démontrer les convergences de la vitesse et pour obtenir le problème vérifié par les limites de la vitesse et de la pression. Plus précisément, vu la double périodicité du domaine, on va utiliser la convergence triple-échelle. Le problème limite obtenu est un système à trois pressions. Le même type de résultat est obtenu dans J.-L. Lions [9], avec la méthode du développement asymptotique pour la vitesse et la pression.

Le problème de Stokes dans un domaine doublement périodique a été étudié par T. Levy [8] et P. Donato, J. Saint Jean Paulin [5], mais le domaine utilisé dans ces travaux est différent de celui présenté ici.

Au §1 on donne le modèle mathématique du problème. On définit le domaine dans lequel on travaille et qui est constitué de deux parties, appelées partie fluide et partie solide. Les inclusions solides sont réparties périodiquement, avec périodicités de l'ordre de ε et de l'ordre de ε^2 respectivement. Dans la partie fluide on considère l'équation de Stokes, avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord. La partie solide est supposée rigide.

Au §2 on donne des estimations a priori pour la vitesse et pour la pression. Les estimations trouvées pour la vitesse montrent que l'écoulement est lent, ce qui s'explique par la présence de la partie solide dans le domaine et par les conditions imposées sur le bord de la partie fluide. La difficulté rencontrée dans ce paragraphe est la construction d'un opérateur de prolongement pour la pression dans la partie solide du domaine. L'existence d'un tel prolongement, pour lequel on a un résultat de convergence forte, va nous permettre le passage à la limite dans le terme qui contient la pression. On

connaît déjà plusieurs méthodes pour le prolongement de la pression, comme par exemple la méthode de L. Tartar [12] pour un problème de périodicité simple, les formules présentées dans C. Conca [3] et I.-A. Ene, J. Saint Jean Paulin [6]. Les deux dernières méthodes sont appliquées pour le cas dans lequel on a des conditions du type Neumann à l'interface fluide-solide, ce qui n'est pas le cas ici. La méthode de Tartar s'applique pour le cas des conditions de Dirichlet homogènes. Le prolongement présenté ici est une adaptation de cette méthode à la géométrie du domaine.

Au §3 on rappelle un résultat de G. Allaire, M. Briane [1] sur la convergence triple-échelle et on donne des résultats de convergence pour la vitesse, ainsi que les conditions au bord pour le problème limite.

Au §4 on rappelle un résultat du type "de Rham" pour le cas périodique (I.-A. Ene [7]). Ensuite on passe à la limite selon ε dans le problème posé au §1 et on trouve un problème homogénéisé à trois pressions.

§1. Présentation du problème

Soit Ω un ensemble ouvert et borné dans \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. On note par $\partial\Omega$ sa frontière. On considère deux ensembles $Y =]0, 1[^N$ et $Z =]0, 1[^N$ et deux sous-ensembles fermés d'intérieurs non vides $Y_s \subset Y$, $Z_s \subset Z$ strictement inclus dans Y , respectivement Z . On suppose que les sous-ensembles sont du même ordre de grandeur que les ensembles Y et Z . On définit:

$$Y^* = Y \setminus Y_s, \quad Z^* = Z \setminus Z_s.$$

Soit ε un petit paramètre strictement positif. On suppose que la cellule Y peut être couverte par un nombre entier de cellules εZ . De plus, on suppose que Y_s est couvert par un nombre entier de cellules εZ , ce qui implique des restrictions sur la géométrie de Y_s . Cela est possible, par exemple, pour des valeurs de ε de la forme $\frac{1}{2^n}$. Ainsi les parties solides Y_s et εZ_s ne se touchent jamais dans Y , comme on peut le voir dans l'exemple de la Figure 2.3.

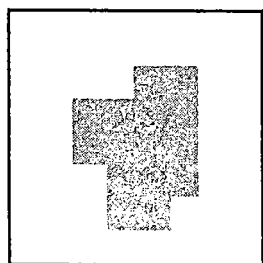


Figure 2.1: Cellule Y

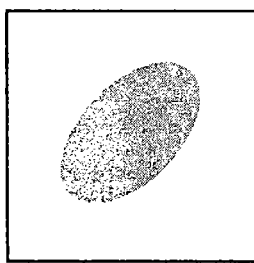


Figure 2.2: Cellule Z

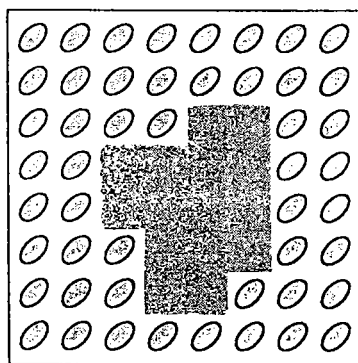


Figure 2.3: Cellule Y avec inclusion Y_s et inclusions εZ_s

On multiplie la nouvelle cellule obtenue par ε et on la répète dans Ω . On peut aussi supposer que l'ensemble Ω est couvert par un nombre entier de cellules εY . On définit l'ensemble Ω_ε en enlevant de Ω les parties solides εY_s et $\varepsilon^2 Z_s$. Les parties solides εY_s et $\varepsilon^2 Z_s$ ne se touchent jamais dans Ω_ε . La réunion des ensembles εY_s (respectivement $\varepsilon^2 Z_s$) dans Ω n'est pas connexe, mais l'ensemble Ω_ε est connexe.

Soient χ_{Y^*} et χ_{Z^*} les fonctions caractéristiques des ensembles Y^* et Z^* , définies par:

$$\chi_{Y^*}(y) = \begin{cases} 1 & \text{dans } Y^* \\ 0 & \text{dans } Y \setminus Y^* \end{cases} \quad \chi_{Z^*}(z) = \begin{cases} 1 & \text{dans } Z^* \\ 0 & \text{dans } Z \setminus Z^* \end{cases}$$

On prolonge les fonctions caractéristiques par périodicité, avec période 1 dans chaque variable. On peut remarquer que l'ensemble Ω_ε vérifie:

$$(1.1) \quad \Omega_\varepsilon = \left\{ x \mid x \in \Omega, \chi_{Y^*}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi_{Z^*}\left(\frac{x}{\varepsilon^2}\right) = 1 \right\}.$$

L'ensemble Ω_ε présente une structure avec double périodicité, avec des petits obstacles solides de l'ordre ε et avec des obstacles très petits de l'ordre ε^2 . Le domaine ainsi défini correspond à un milieu poreux rigide.

On définit aussi la frontière du domaine Ω_ε , qui est notée par $\partial\Omega_\varepsilon$ et qui est composée de trois parties:

- la frontière des obstacles εY_s ,
- la frontière des obstacles $\varepsilon^2 Z_s$,
- la frontière de Ω .

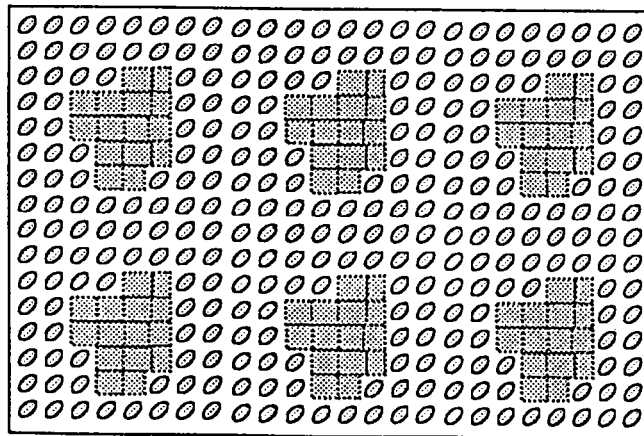


Figure 2.4: Exemple pour le domaine Ω_ε

Dans le domaine Ω_ε ainsi défini, on considère le problème de Stokes suivant:

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

La première relation est l'équation de Stokes classique. Le terme ε^2 représente l'ordre de la viscosité du fluide. Cette hypothèse n'est pas essentielle pour un problème linéaire, car on peut toujours faire un changement d'échelle. La deuxième relation est la condition d'incompressibilité du fluide. Sur le bord du domaine Ω_ε on a des conditions de Dirichlet homogènes. Les forces extérieures sont notées par f . La fonction $f = (f_i)_{i=1,2,3}$ est supposée appartenir à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et dans (1.2) le membre de droite représente la restriction de f à l'ensemble Ω_ε . L'existence et l'unicité d'une solution $u^\varepsilon \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$, $p^\varepsilon \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}$ pour (1.2) est connue (voir R. Temam [13]).

On rappelle que pour un ensemble Ω quelconque les espaces $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ sont définis par:

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3,$$

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

§2. Estimations a priori et prolongement de la pression

Pour trouver des estimations a priori pour la vitesse, on donne un lemme du type Poincaré pour le domaine présenté ci-dessus. Grâce à P. Donato, J. Saint Jean Paulin [4] on connaît le résultat suivant:

Lemme 2.1 *Soit $\phi \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$. Alors on a:*

$$(2.1) \quad |\phi|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2 |\nabla \phi|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Dans la suite, c désigne une constante indépendante de ε .

Pour la fonction u^ε on démontre les estimations a priori suivantes:

Proposition 2.2 *Si u^ε est solution du problème (1.2), alors on a:*

$$(2.2) \quad |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c,$$

$$(2.3) \quad |u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2.$$

Démonstration: On multiplie la première équation de (1.2) par u^ε et on obtient:

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f u^\varepsilon dx,$$

d'où on déduit:

$$\varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c |u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

Le lemme 2.1 implique:

$$\varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c\varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

ou encore:

$$|\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c.$$

En utilisant l'estimation pour ∇u^ε et le lemme 2.1 on démontre la relation 2.3.

□

Dans la suite on va construire un opérateur de restriction S_{ε^2} de l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ dans l'espace $\mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$. A l'aide de cet opérateur on va définir un prolongement pour la pression p^ε à Ω tout entier. L'ensemble Y_f^ε désigne dans la suite :

$$Y_f^\varepsilon = Y \setminus (Y_s \cup (\cup_{\varepsilon} Z_s)).$$

Pour montrer le résultat annoncé, on construit d'abord un opérateur de restriction

$$S_\varepsilon : \mathbb{H}^1(Y) \rightarrow \mathbb{H}^1(Y_f^\varepsilon)$$

et ensuite on définit S_{ε^2} en appliquant S_ε à chaque période εY .

On définit l'espace $\mathbb{H}_s^1(Y^*)$ par:

$$\mathbb{H}_s^1(Y^*) = \{\phi \in \mathbb{H}^1(Y^*) \mid \phi = 0 \text{ sur } \partial Y_s\}.$$

La construction de S_{ε^2} va être faite en trois étapes, qui correspondent aux trois lemmes suivants.

Lemme 2.3 *Il existe un opérateur de restriction*

$$R : \mathbb{H}^1(Y) \rightarrow \mathbb{H}_s^1(Y^*) \quad ,$$

tel que pour $v \in \mathbb{H}^1(Y)$ on ait:

$$(2.4) \quad Rv = v \text{ si } v = 0 \text{ dans } Y_s,$$

$$(2.5) \quad \text{div } Rv = 0 \text{ si } \text{div } v = 0,$$

$$(2.6) \quad |Rv|_{\mathbb{H}^1(Y)} \leq c|v|_{\mathbb{H}^1(Y)}.$$

Démonstration: On considère autour de Y_s une surface régulière γ strictement incluse dans Y . On note par \widetilde{Y}_s la couronne comprise entre γ et ∂Y_s .

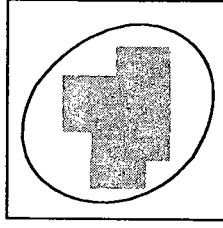


Figure 2.5: Cellule Y

Grâce au lemme 3 de L. Tartar [12], on a le résultat suivant:

Si $v \in \mathbb{H}^1(Y)$, alors ils existent $w \in \mathbb{H}^1(\widetilde{Y}_s)$, $q \in L^2(\widetilde{Y}_s)/\mathbb{R}$ tels que:

$$-\Delta w = -\Delta v + \nabla q \text{ dans } \widetilde{Y}_s,$$

$$\operatorname{div} w = \operatorname{div} v + \frac{1}{|\widetilde{Y}_s|} \int_{Y_s} \operatorname{div} v \, dy \text{ dans } \widetilde{Y}_s,$$

$$w|_{\gamma} = v|_{\gamma}, \quad w|_{\partial Y_s} = 0.$$

De plus, il existe une constante c indépendante de v telle que:

$$|w|_{\mathbb{H}^1(\widetilde{Y}_s)} \leq c|v|_{\mathbb{H}^1(Y)}.$$

On remarque qu'on a:

$$Y = Y^* \cup Y_s = (Y^* \setminus \widetilde{Y}_s) \cup \widetilde{Y}_s \cup Y_s.$$

On définit l'opérateur R par:

$$Rv(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \in Y^* \setminus \widetilde{Y}_s \\ w(y) & \text{si } y \in \widetilde{Y}_s \\ 0 & \text{si } y \in Y_s \end{cases}$$

Compte-tenu de cette définition et des propriétés vérifiées par w , on déduit les relations (2.4)-(2.6). \square

On définit l'espace $\mathbb{H}_s^1(Y_f^\varepsilon)$ par

$$\mathbb{H}_s^1(Y_f^\varepsilon) = \{\phi \in \mathbb{H}^1(Y_f^\varepsilon) \mid \phi = 0 \text{ sur } \partial Y_s \text{ et sur } \partial \varepsilon Z_s\}.$$

On a le résultat suivant:

Lemme 2.4 *Il existe un opérateur de restriction*

$$W_\varepsilon : \mathbb{H}_s^1(Y^*) \rightarrow \mathbb{H}_s^1(Y_f^\varepsilon)$$

tel que pour $Rv \in \mathbb{H}_s^1(Y^*)$ on ait:

$$(2.7) \quad W_\varepsilon(Rv) = Rv \text{ si } Rv = 0 \text{ dans } \cup \varepsilon Z_s,$$

$$(2.8) \quad \operatorname{div} W_\varepsilon(Rv) = 0 \text{ si } \operatorname{div} Rv = 0,$$

$$(2.9) \quad \varepsilon^2 |\nabla W_\varepsilon(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 + |W_\varepsilon(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 \leq c |v|_{\mathbb{H}^1(Y)}^2.$$

Démonstration: Soit l'espace $\mathbb{H}_s^1(Z^*)$ défini par:

$$\mathbb{H}_s^1(Z^*) = \{\phi \in \mathbb{H}^1(Z^*) \mid \phi = 0 \text{ sur } \partial Z_s\}.$$

Dans la cellule fixe Z , on considère autour de Z_s une surface régulière $\tilde{\gamma}$ strictement incluse dans Z . On note par \tilde{Z}_s la couronne comprise entre $\tilde{\gamma}$ et ∂Z_s . La courbe $\tilde{\gamma}$ et l'ensemble \tilde{Z}_s ne dépendent pas du paramètre ε , car on est dans la cellule $Z =]0, 1[{}^N$.

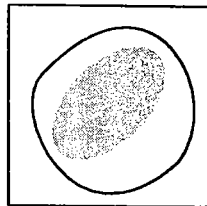


Figure 2.6: Cellule Z

Si $\bar{u} \in \mathcal{H}^1(Z)$, grâce au lemme 3 de L. Tartar [12] ils existent $\bar{w} \in \mathcal{H}^1(\widetilde{Z}_s)$, $\bar{q} \in L^2(\widetilde{Z}_s)/\mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{w} &= -\Delta \bar{u} + \nabla \bar{q} \text{ dans } \widetilde{Z}_s, \\ \operatorname{div} \bar{w} &= \operatorname{div} \bar{u} + \frac{1}{|\widetilde{Z}_s|} \int_{Y_s} \operatorname{div} \bar{u} \, dy \text{ dans } \widetilde{Y}_s, \\ \bar{w}|_{\widetilde{\gamma}} &= \bar{u}|_{\widetilde{\gamma}}, \quad \bar{w}|_{\partial Z_s} = 0. \end{aligned}$$

De plus, il existe une constante c indépendante de \bar{u} telle que:

$$|\bar{w}|_{\mathcal{H}^1(\widetilde{Z}_s)} \leq c |\bar{u}|_{\mathcal{H}^1(Z)}.$$

On remarque qu'on a $Z = Z^* \cup Z_s = (Z^* \setminus \widetilde{Z}_s) \cup \widetilde{Z}_s \cup Z_s$.

On peut alors construire pour chaque fonction $\bar{u} \in \mathcal{H}^1(Z)$ une application

$$\overline{W} : \mathcal{H}^1(Z) \rightarrow \mathcal{H}_s^1(Z^*)$$

définie par:

$$(2.10) \quad \overline{W}(\bar{u})(z) = \begin{cases} \bar{u}(z) & \text{si } z \in Z^* \setminus \widetilde{Z}_s \\ \bar{w}(z) & \text{si } z \in \widetilde{Z}_s \\ 0 & \text{si } z \in Z_s \end{cases}$$

et qui vérifie:

$$\overline{W}(\bar{u}) = \bar{u} \text{ si } \bar{u} = 0 \text{ dans } Z_s,$$

$$\operatorname{div} \overline{W}(\bar{u}) = 0 \text{ si } \operatorname{div} \bar{u} = 0,$$

$$(2.11) \quad |\overline{W}(\bar{u})|_{\mathcal{H}^1(Z)} \leq c |\bar{u}|_{\mathcal{H}^1(Z)}.$$

On applique maintenant \overline{W} à chaque période εZ de $Y \setminus Y_s$ et on obtient une fonction W_ε ,

$$W_\varepsilon : \mathcal{H}_s^1(Y^*) \rightarrow \mathcal{H}_s^1(Y_f^\varepsilon)$$

qui vérifie les relations (2.7) et (2.8). On peut appliquer W_ε à $Rv \in \mathbb{H}_s^1(Y^*)$ et grâce à la relation (2.11) on obtient (comme dans le lemme 4 de L. Tartar [12]):

$$\varepsilon^2 |\nabla W_\varepsilon(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 + |W_\varepsilon(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 \leq \varepsilon^2 |\nabla Rv|_{\mathbb{L}^2(Y^*)}^2 + |Rv|_{\mathbb{L}^2(Y^*)}^2.$$

Compte-tenu du fait que $|Rv|_{\mathbb{H}^1(Y)} \leq c|v|_{\mathbb{H}^1(Y)}$ (relation 2.6), on déduit:

$$\varepsilon^2 |\nabla W(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 + |W(Rv)|_{\mathbb{L}^2(Y_f^\varepsilon)}^2 \leq c|v|_{\mathbb{H}^1(Y)}^2,$$

ce qui représente la relation (2.9).

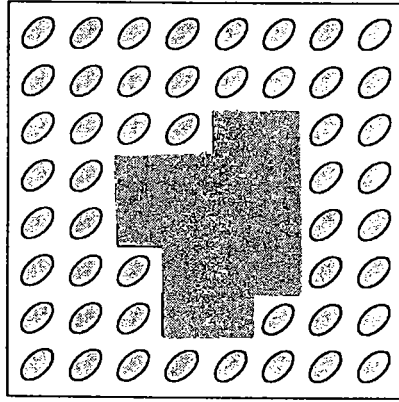


Figure 2.7: Cellule Y avec obstacle solide Y_s et obstacles εZ_s

□

Lemme 2.5 *Il existe un opérateur de restriction*

$$S_{\varepsilon^2} : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

tel que:

$$(2.12) \quad S_{\varepsilon^2}(v) = v \text{ dans } \Omega_\varepsilon, \forall v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$$

$$(2.13) \quad \operatorname{div} S_{\varepsilon^2} v = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \text{ si } \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$(2.14) \quad |\nabla S_{\varepsilon^2} v|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \left(\frac{1}{\varepsilon^2} |v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \right)$$

$$(2.15) \quad |S_{\varepsilon^2} v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c(|v|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon |\nabla v|_{L^2(\Omega)}).$$

Démonstration: Soit l'application $S_\varepsilon : \mathbb{H}^1(Y) \rightarrow \mathbb{H}^1(Y_f^\varepsilon)$ définie par:

$$S_\varepsilon v(y) = \begin{cases} W_\varepsilon(Rv)(y) & \text{si } y \in Y^* \\ 0 & \text{si } y \in Y_s \end{cases}$$

Compte-tenu de la construction de W_ε , on a aussi:

$$S_\varepsilon v(y) = \begin{cases} W_\varepsilon(Rv)(y) & \text{si } y \in Y_f^\varepsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et S_ε vérifie (2.12) et (2.13).

D'autre part, grâce à la relation (2.9), S_ε vérifie:

$$(2.16) \quad \varepsilon^2 |\nabla S_\varepsilon v|_{L^2(Y_f^\varepsilon)}^2 + |S_\varepsilon v|_{L^2(Y_f^\varepsilon)}^2 \leq c|v|_{\mathbb{H}^1(Y)}^2.$$

On définit S_{ε^2} en appliquant S_ε à chaque période εY . La relation (2.16) implique:

$$\varepsilon^4 |\nabla S_{\varepsilon^2} v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + |S_{\varepsilon^2} v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c(|v|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2),$$

d'où on déduit les relations (2.14) et (2.15). □

La proposition suivante nous montre comment on prolonge la pression p^ε à l'intérieur de la partie solide du domaine et nous donne un résultat de convergence forte pour ce prolongement.

Proposition 2.6 *Soit p^ε comme dans (1.2). Alors pour chaque ε il existe un opérateur P^ε tel que:*

$$P^\varepsilon = p^\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

A une sous-suite près on a la convergence:

$$(2.17) \quad P^\varepsilon \rightarrow p_0 \text{ dans } L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ fort.}$$

Démonstration: Grâce au fait que $\nabla p^\varepsilon \in \mathcal{H}^{-1}(\Omega_\varepsilon)$, on peut définir pour chaque $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega)$ l'application F^ε comme ci-dessous:

$$(2.18) \quad \langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega = \langle \nabla p^\varepsilon, S_{\varepsilon^2} v \rangle_{\Omega_\varepsilon},$$

où S_{ε^2} est l'opérateur défini par le lemme 2.5. En multipliant l'équation

$$-\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon$$

par $S_{\varepsilon^2} v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$, et compte-tenu de (2.18) on obtient:

$$\langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega = -\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \nabla S_{\varepsilon^2} v dx + \int_{\Omega_\varepsilon} f S_{\varepsilon^2} v dx,$$

ou encore:

$$|\langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega| \leq \varepsilon^2 |\nabla u^\varepsilon|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |\nabla S_{\varepsilon^2} v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + |f|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} |S_{\varepsilon^2} v|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}.$$

En appliquant les relations (2.14) et (2.15) du lemme 2.5 ci-dessus, ainsi que l'estomation sur le gradient de u^ε (relation 2.2), on déduit:

$$(2.19) \quad |\langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega| \leq c|v|_{L^2(\Omega)} + c\varepsilon|\nabla v|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour ε fixé, F^ε appartient à $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ et est borné dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$. De plus, si $v \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$, on a grâce à la relation (2.12) du lemme 2.5:

$$F^\varepsilon = \nabla p^\varepsilon \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

Si v est telle que $\operatorname{div} v = 0$ dans Ω , on déduit grâce à (2.13) du lemme 2.5 que $\operatorname{div} S_{\varepsilon^2} v = 0$ dans Ω_ε , ce qui implique $\langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega = 0$.

Grâce au théorème de "de Rham" (voir R. Temam [13]), on déduit alors que F^ε est le gradient d'une fonction de $L^2(\Omega)$. Cela veut dire que F^ε est le prolongement de ∇p^ε dans Ω et que ce prolongement est un gradient. Autrement dit, on a $F^\varepsilon = \nabla P^\varepsilon$, où $P^\varepsilon \in L^2(\Omega)$. On a donc:

$$(2.20) \quad \langle \nabla P^\varepsilon, v \rangle_\Omega = \langle F^\varepsilon, v \rangle_\Omega.$$

La relation (2.19) implique alors que la norme de ∇P^ε dans $\mathcal{H}^{-1}(\Omega)$ est bornée et donc on peut extraire une sous-suite telle que:

$$\nabla P^\varepsilon \rightharpoonup \nabla p_0 \text{ dans } \mathcal{H}^{-1}(\Omega) \text{ faible.}$$

Comme dans L. Tartar [12] on obtient ensuite la relation (2.17). □

§3. Résultats de convergence

On commence par rappeler et démontrer quelques résultats généraux, qu'on applique ensuite à notre cas.

On note par $C_p^\infty(Y \times Z)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ , qui sont Y -périodiques et Z -périodiques. Grâce à G. Allaire, M. Briane [1] on connaît le lemme suivant:

Lemme 3.1 *Soit v^ε une suite de fonctions bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite, notée toujours v^ε et une fonction $v \in \mathbb{L}^2(\Omega \times Y \times Z)$ telles que:*

$$(3.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^\varepsilon(x) \varphi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) dx = \int_{\Omega} \int_Y \int_Z v(x, y, z) \varphi(x, y, z) dx dy dz,$$

pour chaque fonction $\varphi(x, y, z,) \in \mathbb{L}^2(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$. On dit que v^ε converge 3-échelle vers v . De plus,

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v_0 = \int_Y \int_Z v dy dz \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Comme dans G. Allaire, M. Briane [1], on peut démontrer le résultat suivant:

Proposition 3.2 *Soit v^ε une suite bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ qui converge 3-échelle vers v et telle que*

$$(3.2) \quad \operatorname{div} v^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Alors la limite v vérifie les relations:

$$(3.3) \quad \operatorname{div}_x \int_Y \int_Z v dz dy = 0$$

$$(3.4) \quad \operatorname{div}_y \int_Z v dz = 0$$

$$(3.5) \quad \operatorname{div}_z v = 0.$$

Démonstration: Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On multiplie (3.2) par φ et on obtient:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \operatorname{div} v^{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx = 0,$$

ou encore

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\varepsilon} \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \int_Y \int_Z v(x, y, z) \nabla \varphi(x) dx dy dz = 0,$$

car $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ et v^{ε} converge 3-échelle vers v .

On en déduit

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_x \left(\int_Y \int_Z v dz dy \right) \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ce qui implique (3.3).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^{\infty}(Y))$. On multiplie la relation (3.2) par $\varepsilon \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon})$, on passe à la limite et on obtient:

$$\int_{\Omega} \int_Y \int_Z v(x, y, z) \nabla_y \varphi(x, y) dz dy dx = 0.$$

On déduit:

$$\int_{\Omega} \int_Y \operatorname{div}_y \left(\int_Z v(x, y, z) dz \right) \varphi(x, y) dd y dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{D}(Y)),$$

ce qui implique (3.4).

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^{\infty}(Y \times Z))$. On multiplie (3.2) par $\varepsilon^2 \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})$. On passe à la limite et on obtient:

$$\int_{\Omega} \int_Y \int_Z v(x, y, z) \nabla_z \varphi(x, y, z) dz dy dx = 0.$$

On déduit

$$\int_{\Omega} \int_Y \int_Z \operatorname{div}_z v(x, y, z) \varphi(x, y, z) dz dy dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathcal{D}(Y \times Z)),$$

ce qui implique (3.5). □

Remarque 3.3 En choisissant des fonctions test convenables dans les relations (3.4) -(3.5), on obtient les conditions de périodicité suivantes:

$$\left[\int_Z v(x, y, z,) dz \right] \nu_Y \text{ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de } Y,$$

$v \nu_Z$ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de Z . Ici ν_Y (ν_Z) désigne la normale extérieure à l'ensemble Y (respectivement Z).

Soit dans la suite $\widetilde{u}^\varepsilon$ le prolongement de u^ε par 0 à Ω tout entier. Les estimations (2.2)-(2.3) impliquent:

$$(3.6) \quad |\widetilde{\nabla u^\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} \leq c,$$

$$(3.7) \quad |\varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \leq c.$$

Pour le prolongement de la vitesse on démontre les résultats de convergence suivants:

Proposition 3.4 Soit $\widetilde{u}^\varepsilon$ définie comme ci-dessus. Alors il existe $u \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ telle que, quitte à extraire une sous-suite, on ait:

$$(3.8) \quad \varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon \rightarrow u \quad 3\text{-échelle}$$

$$(3.9) \quad u(x, y, z) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_s \times Z_s$$

$$(3.10) \quad \varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon \rightarrow u_0 = \int_{Y^*} \int_{Z^*} u dz dy \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

$$(3.11) \quad \widetilde{\nabla u^\varepsilon} \rightarrow \nabla_z u \quad 3\text{-échelle}$$

Démonstration: La relation (3.8) est une conséquence directe de l'application du lemme 3.1 pour $v = \varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon$. Cela est possible grâce à l'estimation (3.7).

Pour montrer (3.9) on remarque que la relation (3.1) écrite pour $v^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_{\Omega} \int_Y \int_Z u(x, y, z) \varphi(x, y, z) dz dy dx.$$

On prend dans l'égalité ci-dessus une fonction test telle que $\varphi = 0$ dans $\Omega \times Y^* \times Z^*$. Compte-tenu du fait que $\widetilde{u}^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, on déduit:

$$0 = \int_{\Omega} \int_{Y_s} \int_{Z_s} u(x, y, z) \varphi(x, y, z) dz dy dx,$$

ce qui implique (3.9).

La relation (3.10) est une conséquence du lemme 3.1 et de (3.9).

Pour démontrer la relation (3.11) on remarque que la relation (3.6) et le lemme 3.1 impliquent l'existence d'une fonction $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega \times Y \times Z)$ telle que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla \widetilde{u}^\varepsilon \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_{\Omega} \int_Y \int_Z \xi(x, y, z,) \varphi(x, y, z) dz dy dx.$$

Une intégration par parties nous donne:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \widetilde{u}^\varepsilon \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx &= \int_{\Omega} \nabla \widetilde{u}^\varepsilon \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = - \int_{\Omega} \widetilde{u}^\varepsilon \operatorname{div} \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \widetilde{u}^\varepsilon (\operatorname{div}_x \varphi + \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}_y \varphi + \frac{1}{\varepsilon^2} \operatorname{div}_z \varphi) dx = - \int_{\Omega} \varepsilon^{-2} (\varepsilon^2 \widetilde{u}^\varepsilon \operatorname{div}_x \varphi + \varepsilon \operatorname{div}_y \varphi + \operatorname{div}_z \varphi) dx. \end{aligned}$$

Le passage à la limite selon ε ci-dessus implique:

$$\int_{\Omega} \int_Y \int_Z \xi(x, y, z) \varphi(x, y, z) dz dy dx = - \int_{\Omega} \int_Y \int_Z u(x, y, z) \operatorname{div}_z \varphi(x, y, z) dz dy dx.$$

On intègre par parties le membre de droite de la relation précédente et on déduit:

$$\int_{\Omega} \int_Y \int_Z [\xi(x, y, z) - \nabla_z u(x, y, z)] \varphi(x, y, z) dz dy dx = 0,$$

ou encore $\xi(x, y, z) = \nabla_z u(x, y, z)$, ce qui finit la démonstration de la proposition. \square

Proposition 3.5 *Soit u la fonction définie par la proposition 3.4. Alors on a:*

$$(3.12) \quad \operatorname{div}_x \int_{Y^*} \int_{Z^*} u dz dy = 0$$

$$(3.13) \quad \operatorname{div}_y \int_{Z^*} u dz = 0$$

$$(3.14) \quad \operatorname{div}_z u = 0.$$

$$(3.15) \quad \left[\int_{Y^*} \int_{Z^*} u dy dz \right] \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

$$(3.16) \quad u \cdot \nu_Z \text{ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de } Z$$

$$(3.17) \quad \left[\int_{Z^*} u dz \right] \cdot \nu_Y \text{ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de } Y$$

$$(3.18) \quad u \cdot \nu_Z = 0 \text{ sur } \partial Z_s$$

$$(3.18) \quad \left[\int_{Z^*} u dz \right] \cdot \nu_Y = 0 \text{ sur } \partial Y_s.$$

Démonstration: Les relations (3.12)-(3.14) sont une conséquence de l'application de la proposition 3.2 pour la suite $\varepsilon^{-2} \widetilde{u^\varepsilon}$ qui converge 3-échelle vers u et de la relation (3.9).

Pour obtenir la relation (3.15) on utilise la linéarité et la continuité de l'application trace normale de l'espace

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}, \Omega) = \{\psi \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid \operatorname{div} \psi \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}$$

dans $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, ainsi que les relations (3.9)-(3.10).

Les relations (3.16)-(3.17) sont une conséquence de la remarque 3.3 et de la relation (3.9).

En multipliant (3.14) par une fonction test $\psi \in \mathcal{H}_p^1(Z)$ et en utilisant (3.16) on obtient (3.18). De même, on obtient la relation (3.19) en multipliant (3.13) par $\psi \in \mathcal{H}_p^1(Y)$ et en utilisant ensuite (3.17). \square

§4. Passage à la limite et problème homogénéisé

On rappelle que grâce à I.-A. Ene [7] on connaît le resultat suivant, du type “de Rham”:

Lemme 4.1 *Soit $w \in \mathbb{L}^2(\Omega \times Y \times Z)$ une fonction qui satisfait:*

$$(4.1) \quad \int_{\Omega} \int_Y \int_Z w(x, y, z) \phi(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$ telle que:

$$(4.2) \quad \operatorname{div}_y \phi(x, y, z) = 0, \quad \operatorname{div}_z \phi(x, y, z) = 0.$$

Alors il existe deux fonctions $q_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{H}_p^1(Y)/\mathbb{R})$ et $q_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega \times Y, \mathbb{H}_p^1(Z)/\mathbb{R})$ telles que:

$$(4.3) \quad w(x, y, z) = \nabla_y q_1(x, y) + \nabla_z q_2(x, y, z).$$

On rappelle qu'on a noté par u la limite 3-échelle de $\varepsilon^{-2} \widetilde{u}^\varepsilon$ et que p_0 , donnée par la relation (2.17), représente la limite forte du prolongement de la pression dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. En utilisant le lemme 4.1, ainsi que les convergences 3-échelle démontrées dans §3, on démontre le principal résultat de ce paragraphe:

Théorème 4.2 *Soient u et p_0 comme ci-dessus. Alors ils existent deux fonctions $p_1 \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{H}_p^1(Y^*)/\mathbb{R})$ et $p_2 \in \mathbb{L}^2(\Omega \times Y, \mathbb{H}_p^1(Z^*)/\mathbb{R})$ telles que:*

$$(4.4) \quad -\Delta_z u + \nabla_x p_0 + \nabla_y p_1 + \nabla_z p_2 = f \text{ dans } \Omega \times Y^* \times Z^*.$$

Démonstration: On rappelle la première équation de (1.2):

$$-\varepsilon^2 \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon,$$

qu'on multiplie par une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$ telle que $\operatorname{div}_y \varphi(x, y, z) = 0$ et $\operatorname{div}_z \varphi(x, y, z) = 0$. Une intégration par parties dans le premier terme du membre de droite nous conduit à:

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla p^\varepsilon(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx.$$

Compte tenu de la définition du prolongement $\widetilde{u}^\varepsilon$, des relations (2.18) et (2.20) et en supposant de plus $\varphi(x, y, z) = 0$ dans $\Omega \times Y_s \times Z_s$ (c'est-à-dire $\varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega_\varepsilon)$) on déduit la relation (4.5):

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} \widetilde{\nabla u}^\varepsilon(x) \nabla \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx - \int_{\Omega} P^\varepsilon(x) \operatorname{div}_x \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx.$$

Le passage à la limite 3-échelle dans (4.5) implique:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^*} \int_{Z^*} \nabla_z u(x, y, z) \nabla_z \varphi(x, y, z) dx dy dz - \int_{\Omega} \int_{Y^*} \int_{Z^*} p_0(x) \operatorname{div}_x \varphi(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^*} \int_{Z^*} f(x) \varphi(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} \int_{Z^*} [-\Delta_z u(x, y, z) + \nabla_x p_0(x) - f(x)] \varphi(x, y, z) dx dy dz = 0.$$

Compte-tenu de la forme particulière de φ , le lemme 4.1 implique la relation (4.4). □

Conclusions

La proposition 4.2 et les résultats obtenus dans §3 nous conduisent au problème homogénéisé (4.6) vérifié par les limites de la vitesse et de la pression. La première équation de ce système est une équation à trois pressions.

$$(4.6) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_z u + \nabla_x p_0 + \nabla_y p_1 + \nabla_z p_2 = f & \text{dans } \Omega \times Y^* \times Z^* \\ \operatorname{div}_x \int_{Y^*} \int_{Z^*} u dz dy = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}_y \int_{Z^*} u dz = 0 & \text{dans } \Omega \times Y^* \\ \operatorname{div}_z u = 0 & \text{dans } \Omega \times Y^* \times Z^* \\ \left[\int_{Y^*} \int_{Z^*} u dy dz \right] \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u \cdot \nu_Z \text{ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de } Z & \\ \left[\int_{Z^*} u dz \right] \cdot \nu_Y \text{ prend des valeurs opposées sur les faces opposées de } Y & \\ u \cdot \nu_Z = 0 & \text{sur } \partial Z_s \\ \left[\int_{Z^*} u dz \right] \cdot \nu_Y = 0 & \text{sur } \partial Y_s \end{array} \right.$$

Remarque 4.3 Le système (4.6) est obtenu dans J.-L. Lions [9], par la méthode du développement asymptotique formel de la vitesse et de la pression. Les trois pressions p_0, p_1, p_2 correspondent aux trois premiers termes du développement asymptotique de la pression p^ε . On rappelle ici que grâce à J.-L. Lions [9] on sait que u peut être exprimé de deux façons différentes:

(i) La fonction u vérifie une loi du type Darcy qui fait intervenir la pression p_0 uniquement. Plus précisément, on a:

$$u(x, y, z) = \phi(y, z)(f(x) - \nabla_x p_0(x)),$$

où la fonction ϕ est solution d'un problème local dans $Y^* \times Z^*$.

Avec la notation $\mathcal{M}(\phi) = \frac{1}{|Y^*||Z^*|} \int_{Y^*} \int_{Z^*} \phi(y, z) dy dz$, la fonction p_0 est solution du problème de Neumann suivant:

$$(\mathcal{M}(\phi)(f - \nabla_x p_0), \nabla q) = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega).$$

(ii) On peut aussi écrire la fonction u sous une autre forme, qui fait toujours apparaître la pression p_0 , mais où intervient aussi la pression p_1 . On a :

$$u(x, y, z) = \phi_1(z)(f - \nabla_x p_0(x) - \nabla_y p_1(x, y)),$$

où ϕ_1 est solution d'un problème local dans l'ensemble Z^* et la pression $p_1(x, y)$ est solution du problème de Neumann suivant :

$$(\mathcal{M}(\phi_1)(f - \nabla_x p_0(x) - \nabla_y p_1(x, y)), \nabla_y q_1)_{Y^*} = 0, \forall q_1 \in H^1(Y^*), q_1 Y - \text{périodique.}$$

Remarque 4.4: Les résultats présentés dans ce chapitre peuvent être généralisés. Soit r_ε un paramètre dépendant de ε et tel que :

$$\frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On remplace dans le domaine Ω les très petites inclusions de l'ordre de ε^2 par des inclusions de l'ordre de r_ε , réparties avec la périodicité r_ε . On considère une viscosité de l'ordre de r_ε et on s'intéresse à l'homogénéisation du problème :

$$(4.7) \quad \begin{cases} -r_\varepsilon \Delta u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Le cas déjà traité correspond à une valeur de r_ε égale à ε^2 .

Pour le prolongement de la vitesse, solution de (4.7), on obtient les convergences :

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^{-1} \widetilde{u}^\varepsilon &\rightarrow u \quad \text{3-échelle} \\ r_\varepsilon^{-1} \widetilde{u}^\varepsilon &\rightharpoonup u_0 = \int_{Y^*} \int_{Z^*} u dz dy \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{\nabla} u^\varepsilon &\rightarrow \nabla_z u \quad \text{3-échelle.} \end{aligned}$$

Pour la convergence forte du prolongement de la pression on a la proposition 2.6 qui reste toujours vraie.

On peut montrer que les limites de la vitesse et de la pression vérifient le système (4.6).

Bibliographie du Chapitre II

- [1] G. ALLAIRE, M. BRIANE, Multi-scale convergence and reiterated homogenization, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, R 94019, 1994
- [2] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1993
- [3] C. CONCA, On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics, *J. Math. Pures et Appliquées*, 64, p. 31-75, 1985
- [4] P. DONATO, J. SAINT JEAN PAULIN, Stokes flow in a porous medium with double periodicity, *Progress in Partial Differential Equations: the Metz surveys*, Eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafir, Pitman, p. 116-129, 1994
- [5] P. DONATO, J. SAINT JEAN PAULIN, Homogenization of the Poisson Equation in a Porous Medium with Double Periodicity, *Japan J. of Ind. and Appl. Mathematics*, Vol. 10, No. 2, p. 333-349, June 1993
- [6] I.-A. ENE, J. SAINT JEAN PAULIN, Homogenization and two-scale convergence for a Stokes or Navier-Stokes flow in an elastic thin porous medium, *M3AS*, Vol. 6, No. 7 (1996), p. 941-955
- [7] I.-A. ENE, Etude de quelques problèmes d'écoulement dans les milieux poreux, Thèse de l'université de Metz, juin 1995
- [8] T. LEVY, Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 9, no. 4, p. 309-327, 1990
- [9] J.-L. LIONS, *Some methods in the mathematical analysis of systems and their control*, Gordon and Breach, Science Press, Beijing, 1981
- [10] G. NGUETSENG, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *Siam. J. Math. Anal.*, Vol 20, no. 3, p. 608-623, 1989
- [11] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer-Verlag, 1980
- [12] L. TARTAR, Convergence of the homogenization process, Appendix du [12]
- [13] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1978

CHAPITRE III

CALCUL DE LA CHARGE DANS UN SYSTEME HYDRAULIQUE -ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE-

CHAPITRE III

Calcul de la charge dans un système hydraulique - étude théorique et numérique -

Introduction

L'étude présentée dans ce chapitre a fait l'objet d'un contrat de recherche avec le CEA. La modélisation du problème et une partie des résultats théoriques ont été obtenus dans un travail antérieur au nôtre.

Le but de ce travail est de calculer numériquement, par une méthode des éléments finis, la charge dans un système hydraulique. Un système hydraulique est un dispositif constitué de galeries horizontales drainantes entourées par un matériau hôte peu perméable. On appelle dans la suite structure drainante les galeries horizontales entourées par une partie du matériau hôte. Les galeries sont réparties périodiquement, ce qui nous permet d'envisager un modèle mathématique avec une géométrie qui présente une structure périodique dans une direction. Les galeries sont remplies avec un matériau pour lequel la perméabilité hydraulique est plus grande que celle du matériau hôte.

Vu la petite dimension de la structure drainante dans la direction verticale par rapport à celle du système hydraulique et la structure assez complexe du système hydraulique, un calcul numérique direct de la charge dans l'ensemble du système est très compliqué à réaliser. Le grand nombre de galeries horizontales et leur faible dimension par rapport à l'ensemble du système rendent difficile la réalisation d'un maillage sans éléments aplatis.

La périodicité de la structure drainante nous a conduits à envisager des méthodes d'homogénéisation. La structure drainante est remplacée après homogénéisation par un seul matériau. Les méthodes d'homogénéisation sont utilisées quand la période est petite par rapport aux dimensions globales du matériau considéré. Dans notre cas, la distance entre deux galeries peut être considérée comme très petite comparée aux dimensions globales de la structure, le rapport entre les deux étant égal à 0,04. Nous notons par ε ce petit paramètre adimensionnel.

On note par K^G et K^S les perméabilités hydrauliques équivalentes du matériau hôte et du matériau de remplissage de la galerie, le paramètre qui caractérise le drainage étant $\frac{K^S}{K^G}$. On pose $\eta = \frac{K^G}{K^S}$.

Enfin, on considère aussi le paramètre δ , qui est lié au rapport entre la largeur de

la galerie et la largeur de la cellule de base.

On considère le problème homogénéisé, c'est-à-dire celui qu'on obtient après le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. A l'aide du problème homogénéisé on va calculer les coefficients homogénéisés, c'est-à-dire les valeurs des perméabilités hydrauliques qu'on va considérer ensuite dans la structure drainante.

Au §1 on présente le problème hydraulique et ses particularités géométriques dans la structure drainante seulement et on rappelle une partie des résultats théoriques qui ont été démontrés dans S. El Otmani [4]. Ce problème sera résolu en choisissant des conditions "mathématiquement agréables" au bord extérieur de la structure drainante. Cela est possible, car les coefficients homogénéisés ne dépendent pas des conditions au bord.

La première étape de l'homogénéisation est le calcul sur une période de base de plusieurs fonctions auxiliaires (les fonctions χ) qui interviennent dans le calcul des coefficients homogénéisés. La deuxième étape est le calcul de la charge hydraulique dans le problème homogénéisé. En utilisant les valeurs trouvées pour les coefficients homogénéisés on peut aussi envisager le calcul de la charge dans le système hydraulique.

Les problèmes auxiliaires ne sont pas classiques car les fonctions inconnues χ vérifient des conditions de périodicité au bord de la période. Au §2 on montre la transformation de ces conditions au bord en conditions plus classiques.

Dans le paragraphe 3 on calcule les valeurs des coefficients homogénéisés et ensuite la charge hydraulique dans deux cas limites. On fixe d'abord δ à la valeur 0,3 et on fait η tendre vers 0. Dans le deuxième cas, pour η fixé, on fait δ tendre vers 0.

Au §4 on étudie théoriquement le cas limite δ fixé à la valeur 0,3 et η tend vers 1. On calcule ensuite les coefficients homogénéisés et la charge hydraulique qui correspondent à ce cas.

Dans le cinquième paragraphe on travaille dans un cas plus général. On fixe δ à la valeur 0,3 et on fait η prendre différentes valeurs comprises entre 0,9 et 0,002. On calcule les coefficients homogénéisés et on étudie leur sensibilité au paramètre η .

Dans le sixième paragraphe on présente le problème dans le système hydraulique. On calcule numériquement la charge dans ce système. Ce calcul a été fait compte-tenu des conditions données au bord du massif et pour différents cas décrits au §5.

Donc on a étudié ici trois cas limites et le cas général. Le passage à la limite dans les coefficients homogénéisés calculés dans le cas général nous permet de retrouver les résultats des cas limites.

§1. Présentation du problème

Dans ce paragraphe on rappelle le problème considéré dans [4]. Le problème (1.1) représente la modélisation dans la structure drainante. On va utiliser ce problème pour le calcul de coefficients homogénéisés. Les conditions au bord considérées ici ne sont pas celles qui correspondent au cas physique. On a pu faire ce choix mathématiquement simple parce que les coefficients ne dépendent pas des conditions au bord extérieur. On rappelle ici également les théorèmes 1.1 et 1.2 qui ont été démontrés par S. El Otmani dans [4].

§1.1 Présentation du problème dans la structure drainante

La structure drainante dans laquelle on définit le problème est constituée des galeries, dans lesquelles il y a un matériau de remplissage. Les galeries parallélépipédiques sont réparties périodiquement. On étudie le problème:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(K_S^{\varepsilon\delta\eta} \nabla H_\eta^{\varepsilon\delta}) = 0 & \text{dans } \Omega_S^{\varepsilon\delta} \\ -\operatorname{div}(K_G^{\varepsilon\delta\eta} \nabla H_\eta^{\varepsilon\delta}) = 0 & \text{dans } \Omega_G^{\varepsilon\delta} \\ [[H_\eta^{\varepsilon\delta}]] = 0 & \text{sur } I^{\varepsilon\delta} \\ [[K^{\varepsilon\delta\eta} \frac{\partial H_\eta^{\varepsilon\delta}}{\partial n}]] = 0 & \text{sur } I^{\varepsilon\delta} \\ K_G^{\varepsilon\delta\eta} \frac{\partial H_\eta^{\varepsilon\delta}}{\partial n} = g_\pm^\varepsilon & \text{sur } \Gamma^{\varepsilon\delta\pm} \\ H_\eta^{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^{\varepsilon\delta}. \end{array} \right.$$

Ici ε désigne la périodicité de la structure,

$\eta = \frac{K^G}{K^S}$ le rapport des perméabilités,

$\delta = 4 \times \frac{\text{largeur de la galerie}}{\text{distance entre les centres de deux galeries consécutives}},$

$H_\eta^{\varepsilon\delta}$ représente la charge hydraulique dans la structure drainante,

$K^{\varepsilon\delta\eta} = (K_{ij}^{\varepsilon\delta\eta})$ la matrice de perméabilité hydraulique,

$\Omega_S^{\varepsilon\delta}$ l'ensemble des galeries,

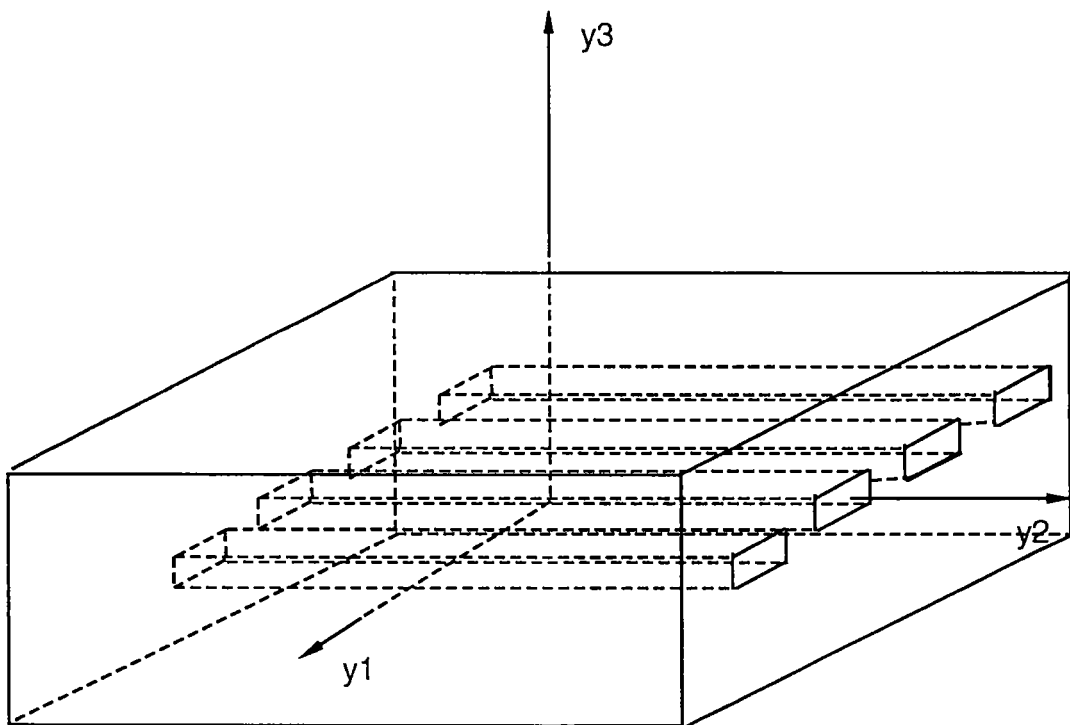


Figure 3.1

Modèle physique de la structure drainante

$\Omega_G^{\varepsilon\delta}$ matériau hôte ,

$I^{\varepsilon\delta}$ l'interface entre $\Omega_S^{\varepsilon\delta}$ et $\Omega_G^{\varepsilon\delta}$,

$$\Omega^{\varepsilon\delta} = \Omega_S^{\varepsilon\delta} \cup \Omega_G^{\varepsilon\delta} \cup I^{\varepsilon\delta}.$$

$\Gamma^{\varepsilon\delta+}$ ($\Gamma^{\varepsilon\delta-}$) sont les faces supérieure (inférieure) de $\Omega^{\varepsilon\delta}$,

$\Gamma_0^{\varepsilon\delta}$ la réunion des quatres faces latérales,

$[[H_\eta^{\varepsilon\delta}]]$ la différence entre les valeurs de $H_\eta^{\varepsilon\delta}$ à l'interface entre les matériaux.

L'ensemble $\Omega^{\varepsilon\delta}$ dépend de la périodicité ε de la structure et du petit paramètre δ . La cellule de base représente la structure qui se répète dans l'ensemble du domaine et qui est constituée d'une galerie entourée du matériau hôte.

Dans la suite, les indices grecs (sauf ε , η , δ , ζ et θ) varient entre 1 et 2 , et les indices latins varient entre 1 et 3. On fait la convention de sommation sur les indices répétés. Soit $\omega = (-L_1, L_1) \times (-L_2, L_2)$. Les valeurs $2L_1$ et $2L_2$ représentent les dimensions de la structure drainante dans le plan horizontal. On transforme le domaine $\Omega^{\varepsilon\delta} = \omega \times \left(-\frac{\varepsilon\delta}{2}, \frac{\varepsilon\delta}{2}\right)$ en le domaine indépendant de $\varepsilon\delta$,

$$\Omega = \omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

par le changement de variables suivant:

$$(z_1, z_2, z_3) = \left(x_1, x_2, \frac{x_3}{\varepsilon\delta}\right).$$

Le nouveau domaine Ω est une dilatation du domaine $\Omega^{\varepsilon\delta}$ par la valeur $\frac{1}{\varepsilon\delta}$ dans la direction de x_3 . L'ensemble ω représente une section horizontale dans le domaine Ω .

Le changement des variables implique le changement de fonctions correspondant:

$$\begin{cases} H_\eta^{\varepsilon\delta}(x_1, x_2, x_3) = H_\eta^{\varepsilon\delta}(z_1, z_2, z_3) \\ g_\pm^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = g_\pm^\varepsilon(z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Les ensembles Ω , Γ_0 et Γ^\pm sont définis comme $\Omega^{\varepsilon\delta}$, $\Gamma_0^{\varepsilon\delta}$ et $\Gamma^{\varepsilon\delta\pm}$. De plus, si $K^{\varepsilon\delta\eta}(x_1, x_2, x_3) = K^{\delta\eta}\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2, x_3\right)$, on fait les hypothèses:

$$(i) \exists c_1 > 0 \text{ tel que } K_{ij}^{\delta\eta} \xi_i \xi_j \geq c_1 \xi_i \xi_i, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R},$$

(ii) $K_{ij}^{\delta\eta} \in L^\infty(Y)$ et $K_{ij}^{\delta\eta}$ sont Y -périodiques,

où

$$Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

représente la cellule de base de la Figure 3.2. L'ensemble Y est composé de deux parties, notés Y_S et Y_G , qui correspondent au matériau de remplissage, respectivement au matériau hôte qui l'entoure. L'interface entre les deux a été notée I^δ .

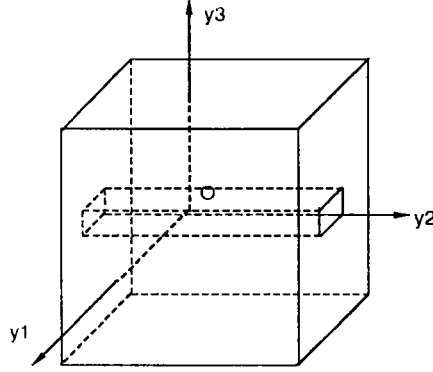


Figure 3.2: Cellule de base Y

On note par $\Gamma^+(Y)$ ($\Gamma^-(Y)$) la face supérieure (respectivement inférieure) de Y . Enfin, on introduit les espaces fonctionnels suivants:

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\},$$

$$L^2(\Omega) = \{\varphi \mid |\varphi|_{L^2(\Omega)} < \infty\},$$

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx,$$

$$V(Y) = \{\varphi \in H^1(Y), \varphi_{y_1, y_2} \text{ périodique et de moyenne nulle}\}.$$

Grâce à S. El Otmani [4] on connaît le théorème suivant, qui nous donne le problème homogénéisé, ainsi que l'expression des coefficients homogénéisés et les problèmes auxiliaires:

Théorème 1.1 *On suppose que $(\varepsilon\delta)^{-1}g_{\pm}^{\varepsilon} \rightarrow g_{\pm}^*$ dans $L^2(\omega)$. Alors quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a:*

$$H_{\eta}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup H_{\eta}^{\delta} \quad \text{dans } V(\Omega) \text{ faible.}$$

La fonction H_{η}^{δ} est indépendante de z_3 et satisfait le système bidimensionnel homogénéisé suivant:

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \left(q_{\alpha\beta}^{\delta\eta} \frac{\partial H_{\eta}^{\delta}}{\partial z_{\beta}} \right) = g_{+}^{*} + g_{-}^{*} & \text{dans } \omega \\ H_{\eta}^{\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases}$$

où les coefficients homogénéisés sont donnés par:

$$(1.3) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta\eta} = \int_Y \left(K_{\gamma\beta}^{\delta\eta} \frac{\partial W_{\eta}^{\delta(\alpha)}}{\partial y_{\gamma}} + \delta^{-1} K_{3\beta}^{\delta\eta} \frac{\partial W_{\eta}^{\delta(\alpha)}}{\partial y_3} \right) dy.$$

Les fonctions auxiliaires $W_{\eta}^{\delta(\alpha)} \in H^1(Y)$ sont solutions du système suivant:

$$(1.4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^{\delta\eta} \frac{\partial W_{\eta}^{\delta(\alpha)}}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji}^{\delta\eta} \frac{\partial W_{\eta}^{\delta(\alpha)}}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^{\pm}(Y) \\ W_{\eta}^{\delta(\alpha)} - y_{\alpha} \text{ est } y_1, y_2\text{-périodique de moyenne nulle,} \end{cases}$$

où les coefficients $\bar{K}_{ij}^{\delta\eta}$ sont donnés en fonction des $K_{ij}^{\delta\eta}$ par:

$$(1.5) \quad \bar{K}_{\gamma\beta}^{\delta\eta} = K_{\gamma\beta}^{\delta\eta}, \quad \bar{K}_{\gamma 3}^{\delta\eta} = \delta^{-1} K_{\gamma 3}^{\delta\eta} \quad \bar{K}_{3\gamma}^{\delta\eta} = \delta^{-1} \bar{K}_{3\gamma}^{\delta\eta} \quad \bar{K}_{33}^{\delta\eta} = \delta^{-2} K_{33}^{\delta\eta}.$$

§2. Transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites

Dans le cas δ fixé, on a grâce à S. El Otmani [4] le résultat suivant, qui correspond au cas pratique K^S beaucoup plus grand que le K^G :

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses du théorème 1.1 on a:*

$$H_\eta^\delta \rightharpoonup H_*^\delta \text{ dans } H_0^1(\omega) \text{ faible si } \eta \rightarrow 0.$$

La fonction H_*^δ est l'unique solution du système:

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(q_{\alpha\beta}^* \frac{\partial H_*^\delta}{\partial z_\beta} \right) = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H_*^\delta n_2 = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Les coefficients $q_{\alpha\beta}^*$ sont donnés par:

$$(2.2) \quad q_{\alpha\beta}^* = \int_{Y_S^\delta} \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_0^{\delta(\alpha)}}{\partial y_i} \right) dy,$$

où les fonctions auxiliaires $\chi_0^{\delta(\alpha)} \in V(Y)$ sont solutions du système suivant:

$$(2.3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^{\delta(\alpha)} - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y_S \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^{\delta(\alpha)} - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y_G \\ \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^{\delta(\alpha)} - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^{\delta(\alpha)} - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } I^\delta \text{ du côté de } Y_S \\ [[\chi_0^{\delta(\alpha)}]] = 0 & \text{sur } I^\delta \\ \chi_0^{\delta(\alpha)} \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Les fonctions auxiliaires $\chi_\eta^{\delta(\alpha)}$ sont liées aux fonctions $W_\eta^{\delta(\alpha)}$ de (1.4) par la relation suivante:

$$W_\eta^{\delta(\alpha)} = y_\alpha - \chi_\eta^{\delta(\alpha)}.$$

On se propose de résoudre le problème (2.1). Pour cela il faut calculer d'abord les coefficients $q_{\alpha\beta}^*$ donnés par la relation (2.2). Comme dans l'expression de ces coefficients interviennent les fonctions auxiliaires $\chi_0^{\delta(\alpha)}$, on se ramène à résoudre le système (2.3). On prend (2.3) comme modèle mathématique pour le problème auxiliaire dans le cas pratique δ fixé, $\eta < 10^{-3}$.

§2.1 Transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites

Le problème qu'on considère dans ce paragraphe est le problème (2.3).

On utilise les propriétés de périodicité des fonctions χ^α et les symétries géométriques de la cellule de base Y et, conformément à F. Léné [8], dont on suit les idées, on se propose d'obtenir des conditions aux limites du type Dirichlet ou Neumann. Le but est de remplacer le problème avec des conditions de périodicité aux limites (dans la cellule de base Y), par un problème avec des conditions du type Dirichlet ou Neumann (posé dans un quart du domaine initial).

On rappelle que la cellule de base Y est un cube rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ centré au centre de la cellule:

$$Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Pour en déduire les propriétés qui nous intéressent, on commence par donner une définition préliminaire qui est une adaptation de F. Léné [8].

Définition 2.1.1 Un plan P est dit plan de symétrie matérielle pour la cellule de base Y si et seulement si :

- 1) le plan P est plan de symétrie géométrique de Y,
- 2) les coefficients de perméabilité $K_{ij}(y)$ satisfont la relation:

$$(2.4) \quad K_{ij}(y') = c_{ip}c_{jq}K_{pq}(y),$$

où la matrice C de composantes $\{c_{ij}\}$ représente la symétrie par rapport au plan P et

$$(2.5) \quad y'_i = c_{ip}y_p.$$

On travaille dans la suite sous l'hypothèse d'isotropie pour les deux matériaux: le matériau hôte et le matériau de remplissage. Plus précisément, on a:

$$K_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } K_{ij} \text{ contante si } i = j.$$

Le système (2.3) devient dans ce cas:

$$(2.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } Y_S \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } Y_G \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } I^\delta \text{ du côté de } Y_S \\ [[\chi^\alpha]] = 0 & \text{sur } I^\delta \\ \chi^\alpha \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle.} \end{array} \right.$$

On remarque que dans le cas isotrope, les plans $y_1 = 0$ et $y_2 = 0$ sont plans de symétrie matérielle pour la cellule de base Y .

Effectivement, la matrice de symétrie par rapport au plan $y_1 = 0$ est:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c_{ij})_{i,j}.$$

Compte-tenu de la forme particulière de la matrice C , on montre facilement que la relation (2.4) est vérifiée. De manière analogue on obtient que le plan d'équation $y_2 = 0$ est plan de symétrie matérielle pour la cellule de base Y .

On a le résultat suivant, qui est démontré en Annexe A:

Théorème 2.1.2 *Si le plan d'équation $y_1 = 0$ est plan de symétrie matérielle pour la cellule de base Y , alors on peut trouver des fonctions χ^1 et χ^2 solutions du système (2.6) telles que χ^1 soit impaire en y_1 et χ^2 soit paire en y_1 .*

De manière analogue on peut démontrer:

Théorème 2.1.3 *Si le plan d'équation $y_2 = 0$ est plan de symétrie matérielle pour la cellule de base Y , alors on peut trouver des fonctions χ^1 et χ^2 solutions du système (2.6) telles que χ^1 soit paire en y_2 et χ^2 soit impaire en y_2 .*

En utilisant la régularité des solutions du système (2.6), les théorèmes 2.1.2-2.1.3 et les résultats de F. Léné [8], on déduit des conditions de périodicité les conditions aux limites résumés dans le tableau 2.1 ci-dessous:

Tableau 2.1

	Parités en y_1	Parités en y_2	Conditions sur $y_1 \in \{0, \pm \frac{1}{2}\}$	Conditions sur $y_2 \in \{0, \pm \frac{1}{2}\}$
χ^1	impaire	paire	$\chi^1(y) = 0$	$\frac{\partial \chi^1}{\partial y_2}(y) = 0$
χ^2	paire	impaire	$\frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y) = 0$	$\chi^2(y) = 0$

Compte-tenu de ces résultats on conclut qu'on peut chercher la solution du problème initial sur un quart de la cellule de base Y , c'est-à-dire dans le nouveau domaine X de la figure 3.3:

$$X = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

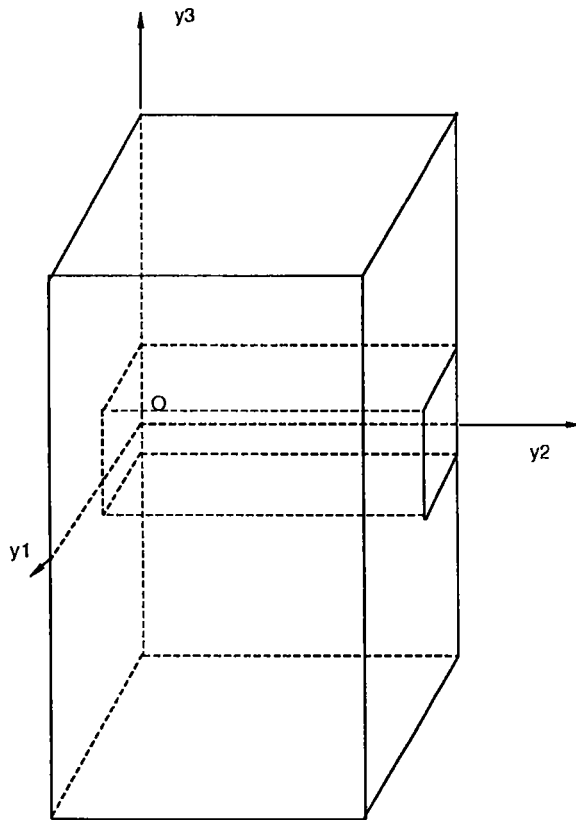


Figure 3.3
Cellule de base X (quart de la cellule Y)

§2.2 Simplifications dues à l'isotropie du matériau

En utilisant les résultats résumés dans le tableau 2.1 et l'isotropie des deux matériaux, le problème (2.6) pour $\alpha = 1, 2$ devient:

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X_S \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X_G \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } I \text{ du côté de } X_S \\ [[\chi^1]] = 0 & \text{sur } I \\ \chi^1 = 0 & \text{si } y_1 = 0 \text{ et } y_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2}(y) = 0 & \text{si } y_2 = 0 \text{ et } y_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X_S \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X_G \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \\ \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } I \text{ du côté de } X_S \\ [[\chi^2]] = 0 & \text{sur } I \\ \chi^2 = 0 & \text{si } y_2 = 0 \text{ et } y_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1}(y) = 0 & \text{si } y_1 = 0 \text{ et } y_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

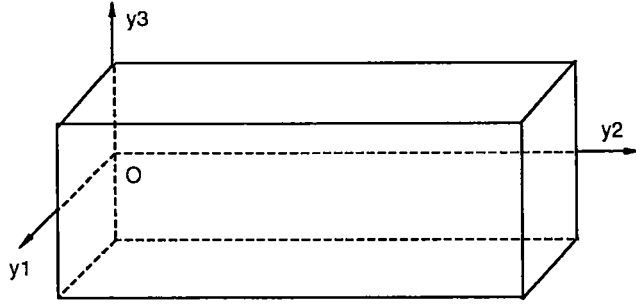


Figure 3.4

Domaine X_S , sous-ensemble de la cellule de base X , qui correspond à la galerie

où

X_S (X_G) représentent les parties occupées par le matériau de remplissage (respectivement matériau hôte) dans l'ensemble X ,

I représente l'interface entre les deux matériaux

$\Gamma^\pm(X)$ sont comme dans le cas de la cellule Y :

$\Gamma^+(X)$ = la face supérieure de la cellule X

$\Gamma^-(X)$ = la face inférieure de la cellule X

On simplifie les systèmes (2.7) et (2.8). Grâce à la relation (1.5) du premier chapitre on déduit:

$$K_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j, K_{11} = K_{22} = K \text{ et } K_{33} = \delta^{-2}K.$$

On introduit les notations suivantes:

Y_0 = l'intersection du plan d'équation $y_1 = 0$ avec la cellule X

$Y_{\frac{1}{2}}$ = l'intersection du plan d'équation $y_1 = \frac{1}{2}$ avec la cellule X

L_0 = l'intersection du plan d'équation $y_2 = 0$ avec la cellule X

$L_{\frac{1}{2}}$ = l'intersection du plan d'équation $y_2 = \frac{1}{2}$ avec la cellule X

I^+ = la face supérieure de l'interface entre les deux matériaux dans la cellule X

I^- = la face inférieure de l'interface entre les deux matériaux dans la cellule X

I^l = la face latérale de l'interface entre les deux matériaux dans la cellule X

$I = I^+ \cup I^- \cup I^l$ = l'interface entre les deux matériaux dans la cellule X .

Nous allons montrer que les systèmes (2.7) et (2.8) pour χ^1 et χ^2 s'écrivent encore:

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_S \\ -\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_G \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \cup I^\pm \cup L_0 \cup L_{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 1 & \text{sur } I^l \text{ du côté de } X_S \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \cup Y_{\frac{1}{2}} \\ [[\chi^1]] = 0 & \text{sur } I \end{array} \right.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_S \\ -\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_G \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \cup Y_0 \cup Y_{\frac{1}{2}} \\ & \text{et sur } I \text{ du côté de } X_S \\ \chi^2 = 0 & \text{sur } L_0 \cup L_{\frac{1}{2}} \\ [[\chi^2]] = 0 & \text{sur } I \end{array} \right.$$

Etablissons le système (2.9).

En utilisant $K_{11} = K_{22} = K$ et $K_{33} = \delta^{-2}K$, la première équation de (2.7) devient:

$$-\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_3^2} = 0,$$

ce qui implique les deux premières équations de (2.9).

La troisième (respectivement la quatrième) équation de (2.6) s'écrit aussi:

$$\sum_{i=1}^3 K_{ii} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_i} n_i = K_{11} n_1.$$

La normale sur la face $\Gamma^+(X)$ étant $n_{\Gamma^+} = (0, 0, 1)$, on a $\frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0$ sur $\Gamma^+(X)$.

La normale sur la face $\Gamma^-(X)$ étant $n_{\Gamma^-} = (0, 0, -1)$, on a $\frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0$ sur $\Gamma^-(X)$.

Compte-tenu du fait que les normales sur les faces I^+ et I^- sont:

$$n_{I^+} = (0, 0, 1), \quad n_{I^-} = (0, 0, -1),$$

on déduit:

$$\frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 \text{ sur } I^+ \cup I^-.$$

En appliquant le même principe, on obtient:

$$\frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 \text{ sur } I^l \text{ du côté de } X_S,$$

$$\frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 \text{ sur } L_0, \quad \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 \text{ sur } L_{\frac{1}{2}}.$$

La fonction χ^1 vérifie donc le système (2.9).

On obtient de même façon le système (2.10) à partir de (2.8).

Compte-tenu de la forme du système (2.9), on remarque qu'on peut le découpler en deux problèmes:

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_\alpha \partial y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_S \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } I^+ \cup I^- \cup (L_0 \cap X_S) \cup (L_{\frac{1}{2}} \cap X_S) \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 1 & \text{sur } I^l \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \cap X_S. \end{array} \right.$$

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_\alpha y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_G \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm \cup (L_0 \cap X_G) \cup (L_{\frac{1}{2}} \cap X_G) \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } (Y_0 \cap X_G) \cup Y_{\frac{1}{2}} \\ \chi_G^1 = \chi_S^1 & \text{sur } I. \end{array} \right.$$

Pour le calcul des coefficients homogénéisés d'après la formule (2.2) on a besoin de la solution du problème (2.11) posé dans X_S . On démontre le résultat suivant:

Théorème 2.2.1. Le problème (2.11) a une solution unique.

Démonstration: Pour démontrer ce résultat on va appliquer le théorème de Lax-Milgram. Soit l'espace V_{X_S} défini par:

$$V_{X_S} = \{v \in H^1(X_S) \text{ tel que } v = 0 \text{ sur } Y_0 \cap X_S\}.$$

Cet espace est un espace de Hilbert sur \mathbb{R} pour la norme

$$\|v\|_{V_{X_S}} = \int_{X_S} \frac{\partial v}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} + \delta^{-2} \int_{X_S} \frac{\partial v}{\partial y_3} \frac{\partial v}{\partial y_3}.$$

En multipliant la première équation du système (2.11) par $v \in V_D$ et en appliquant la formule de Green, on obtient:

$$(2.13) \quad \int_{X_S} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_\alpha} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} dy + \delta^{-2} \int_{X_S} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_3} \frac{\partial v}{\partial y_3} dy = \int_{\partial X_S} \left(\frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} n_2 + \delta^{-2} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_3} n_3 \right) \chi^2 d\sigma.$$

Compte-tenu des conditions sur le bord de X_S , la relation (2.13) devient:

$$\int_{X_S} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_\alpha} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} dy + \delta^{-2} \int_{X_S} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_3} \frac{\partial v}{\partial y_3} dy = \int_{I^1} v d\sigma.$$

Avec les notations:

$$a(u, v) = \int_{X_S} \frac{\partial u}{\partial y_\alpha} \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} dy + \delta^{-2} \int_{X_S} \frac{\partial u}{\partial y_3} \frac{\partial v}{\partial y_3} dy,$$

$$l(v) = \int_{I^1} v d\sigma.$$

le problème (2.11) revient à trouver la fonction $\chi^1 \in V_{X_D}$ telle que:

$$(2.14) \quad a(\chi^1, v) = l(v).$$

On remarque que $a(\cdot, \cdot)$ est une application bilinéaire continue et que l est une forme linéaire continue. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique:

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{V_{X_S}} \|v\|_{V_{X_S}}.$$

D'autre part, $a(u, u) \geq \|u\|_{V_{X_S}}^2$.

On obtient grâce au théorème de Lax-Migran l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (2.14), ce qui implique l'existence et l'unicité de la solution pour le système (2.11).

□

Soit D le domaine de la Figure 3.5, défini comme l'intersection entre le domaine X_S et le plan d'équation $y_3 = 0$. Soient: $D_0 = Y_0 \cap D$, $D^l = I^l \cap D$, $D_1 = L_0 \cap D$, $D_2 = L_{\frac{1}{2}} \cap D$.

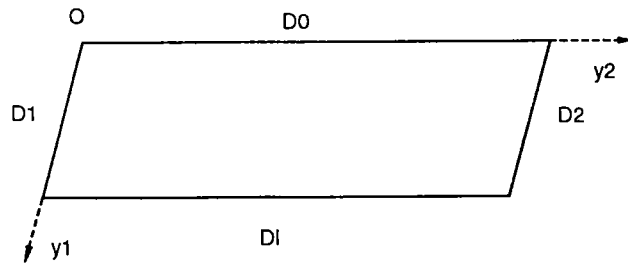


Figure 3.5

Domaine D , section de X_S par le plan d'équation $y_3 = 0$

On a le résultat suivant:

Théorème 2.2.2 *La fonction χ^1 , solution du problème (2.11) dans X_S ne dépend pas de y_3 et vérifie le système suivant:*

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \chi^1}{\partial y_2^2} = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur } (L_0 \cup L_{\frac{1}{2}}) \cap D \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial n} = 1 & \text{sur } I^l \cap D \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \cap D. \end{array} \right.$$

De plus, la solution du problème (2.11) $\chi^1 = y_1$.

On peut dans la suite découpler le système (2.10). Le problème qui nous intéresse, celui posé dans l'ensemble X_S , est donné par:

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_\alpha y_\alpha} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } X_S \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} = 0 & \text{sur } I \cup (Y_0 \cap X_S) \cup (Y_{\frac{1}{2}} \cap X_G) \\ \chi^2 = 0 & \text{sur } (L_0 \cap X_S) \cup (L_{\frac{1}{2}} \cap X_S). \end{array} \right.$$

On a le résultat suivant:

Théorème 2.2.3 *La fonction χ^2 solution du problème (2.15) dans X_S ne dépend pas de y_3 . Elle vérifie le système suivant:*

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_1^2} - \delta^{-2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial y_2^2} = 0 & \text{dans } D \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial n} = 0 & \text{sur } D_0 \cup D^l \\ \chi^2 = 0 & \text{sur } D_1 \cup D_2. \end{array} \right.$$

De plus, la solution du problème (2.15) est $\chi^2 = 0$.

§3. Calcul de coefficients homogénéisés et résolution du problème dans deux cas limites

Dans ce paragraphe on calcule les coefficients homogénéisés dans deux cas limites. Le premier cas est celui qui correspond à une valeur de δ fixé à 0.3 et $\eta \rightarrow 0$, c'est-à-dire comme dans le théorème 2.1. Le deuxième cas correspond à $\delta \rightarrow 0$, η étant fixé. Enfin, on donne les isovaleurs pour la charge hydraulique dans la section horizontale du système drainant. Les conditions au bord sont celles prises dans S. El Otmani [4].

§3.1 Solution du problème dans la structure drainante (cas δ fixé, $\eta \rightarrow 0$.

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et si les matériaux sont isotropes, les coefficients $q_{\alpha\beta}^*$ sont donnés par:*

$$q_{11} = 0, \quad q_{12} = q_{21} = 0, \quad q_{22} = K^S |Y_S|,$$

où $|Y_S|$ représente le volume occupé par le matériau de remplissage dans la cellule de base Y .

Démonstration: Grâce à (2.2), la formule générale pour le calcul des coefficients est:

$$q_{\alpha\beta} = \int_{Y_S} (K_{\alpha\beta} - K_{i\beta} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i}) dy.$$

En donnant des valeurs particulières à α et β et compte-tenu du fait que $\chi^1 = y_1$ et $\chi^2 = 0$, on obtient:

$$q_{11} = \int_{Y_S} (K_{11} - K_{11} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} - K_{21} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} - K_{31} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_3}) dy = \int_{Y_S} (K - K) dy = 0,$$

$$q_{12} = \int_{Y_S} (K_{12} - K_{12} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_1} - K_{22} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} - K_{32} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_3}) dy = -K_{22} \int_{Y_S} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} dy = 0,$$

$$q_{21} = \int_{Y_S} (K_{21} - K_{11} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} - K_{21} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2} - K_{31} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_3}) dy = -K \int_{Y_S} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} dy = 0,$$

$$q_{22} = \int_{Y_S} (K_{22} - K_{12} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} - K_{22} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2} - K_{32} \frac{\partial \chi^2}{\partial y_3}) dy = \int_{Y_S} (K - K \frac{\partial \chi^2}{\partial y_2}) dy = K |Y_S|.$$

□

Le problème (2.1) devient alors:

$$(3.1) \quad \begin{cases} -q_{22} \frac{\partial^2 H}{\partial z_2^2} = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H n_2 = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Le problème (3.1) représente une équation différentielle ordinaire de deuxième ordre en z_2 , où z_1 est un paramètre. On a deux conditions en z_2 au bord du domaine, ce qui montre que le problème est bien posé. On a une solution analytique du problème dès que les fonctions g_+^* et g_-^* sont données.

§3.2 Solution du problème dans la structure drainante (cas η fixé, $\delta \rightarrow 0$.)

On rappelle le résultat de S. El Otmani [4] qui correspond au passage à la limite $\delta \rightarrow 0$ dans le problème homogénéisé.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses du théorème 1.1, on a:*

$$H_\eta^\delta \rightharpoonup H_\eta^* \text{ dans } H_0^1(\omega) \text{ faible, si } \delta \rightarrow 0.$$

La fonction H_η^* est l'unique solution du système bidimensionnel:

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(q_{\alpha\beta}^{*\eta} \frac{\partial H_\eta^*}{\partial z_\beta} \right) = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H_\eta^* = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Posons

$$(3.3) \quad Q_{\alpha\beta}^{G\eta} = K_{\alpha\beta}^{G\eta} - K_{\alpha 3}^{G\eta} \frac{K_{3\beta}^{G\eta}}{K_{33}^{G\eta}}.$$

Alors les coefficients $q_{\alpha\beta}^{*\eta}$ sont donnés par:

$$(3.4) \quad q_{\alpha\beta}^{*\eta} = \int_{\mathcal{Y}} \left(Q_{\alpha\beta}^{G\eta} - Q_{\gamma\beta}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(\alpha)}}{\partial y_\gamma} \right) dy,$$

où les fonctions $\chi_\eta^{*(\delta)}$ sont solutions du système bidimensionnel suivant:

$$(3.5) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \left(Q_{\beta\gamma}^{G\eta} \frac{\partial (\chi_\eta^{*(\alpha)} - y_\alpha)}{\partial y_\beta} \right) = 0 & \text{dans } \mathcal{Y} \\ \chi_\eta^{*(\alpha)} \text{ est } y_1, y_2\text{-périodique de moyenne nulle,} \end{cases}$$

$$\text{avec } \mathcal{Y} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sous les hypothèses du théorème antérieur et pour deux matériaux isotropes, on se propose de résoudre le problème (3.5). Compte-tenu de (3.3) on a $Q_{\alpha\beta}^{G\eta} = K_{\alpha\beta}^{G\eta}$, donc:

$$Q_{11}^{G\eta} = K_{11}^{G\eta} = \eta K, \quad Q_{22}^{G\eta} = K_{22}^{G\eta} = \eta K.$$

Le problème à résoudre devient:

$$\begin{cases} -\eta K \frac{\partial^2 \chi_\eta^{*(\alpha)}}{\partial y_\beta \partial y_\beta} = 0 \text{ sur } \mathcal{Y} \\ \chi_\eta^{*\alpha} \text{ est } y_1, y_2\text{-périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

Compte-tenu des résultats de §2, on obtient que $\chi_\eta^{*(1)} = 0$ et $\chi_\eta^{*(2)} = 0$ sont solutions du problème précédent.

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1 et si les deux matériaux sont isotropes, les coefficients homogénéisés sont donnés pour chaque α, β par:*

$$q_{\alpha\beta}^{*\eta} = K^G \delta_{\alpha\beta}.$$

Démonstration: En utilisant les formules (3.4), on a:

$$q_{11}^{*\eta} = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{11}^{G\eta} - Q_{\gamma 1}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_\gamma}) dy = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{11}^{G\eta} - Q_{11}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_1} - Q_{21}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_2}) dy =$$

$$= \int_{\mathcal{Y}} Q_{11}^{G\eta} dy = K^G |\mathcal{Y}| = \eta K.$$

$$q_{12}^{*\eta} = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{12}^{G\eta} - Q_{\gamma 2}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_\gamma}) dy = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{12}^{G\eta} - Q_{12}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_1} - Q_{22}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(1)}}{\partial y_2}) dy = 0.$$

$$q_{21}^{*\eta} = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{21}^{G\eta} - Q_{\gamma 1}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(2)}}{\partial y_\gamma}) dy = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{21}^{G\eta} - Q_{11}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(2)}}{\partial y_1} - Q_{21}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(2)}}{\partial y_2}) dy = 0.$$

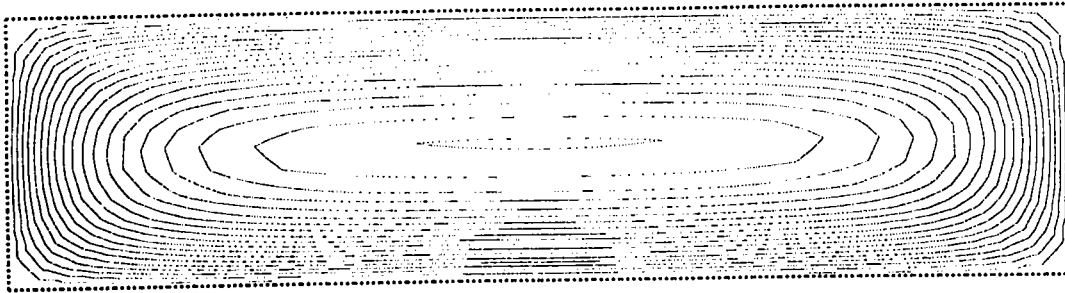
$$q_{22}^{*\eta} = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{22}^{G\eta} - Q_{\gamma 2}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(2)}}{\partial y_\gamma}) dy = \int_{\mathcal{Y}} (Q_{22}^{G\eta} - Q_{22}^{G\eta} \frac{\partial \chi_\eta^{*(2)}}{\partial y_2}) dy = \int_{\mathcal{Y}} Q_{22}^{G\eta} dy = K^G.$$

□

Compte-tenu des résultats du théorème 3.2.2, le problème (3.2) à résoudre devient:

$$(3.6) \quad \begin{cases} -K^G \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(\frac{\partial H_\eta^*}{\partial z_\alpha} \right) = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H_\eta^* = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

On a résolu numériquement ce problème et on a obtenu les valeurs de la charge hydraulique dans le plan médian de la structure drainante.



MODULEF : bunoiu
 PROBLEME
 15/05/97
 mails
 coors
 chols

523 POINTS
 523 NOEUDS
 944 ELEMENTS
 944 TRIANGLES

INCONNUE : 1 MNEMO :VN

20	---	1.767
19	---	1.683
18	---	1.589
17	---	1.496
16	---	1.402
15	---	1.309
14	---	1.215
13	---	1.122
12	---	1.028
11	---	.9348
10	---	.8413
9	---	.7478
8	---	.6543
7	---	.5609
6	---	.4674
5	---	.3739
4	---	.2804
3	---	.1870
2	---	9.3477E-02
1	---	0.0000E+00

20 ISOVALEURS

Isovaleurs pour le problème (3.6)

§4. Problème limite dans le cas δ fixé, $\eta \rightarrow 1$

Dans ce paragraphe on travaille dans le cadre du théorème 1.1, c'est-à-dire après avoir fait l'homogénéisation et on se propose d'étudier la transformation des expressions (1.2) - (1.4) lorsque δ reste fixé et η tend vers 1, où η représente le rapport entre la perméabilité hydraulique K^G du matériau hôte et celle K^S du matériau de remplissage. Cela correspond au cas physique K^G très proche de K^S . On pose $\eta = 1 - \zeta$, on étudie le comportement quand ζ tend vers 0 et on établit un théorème de convergence pour la charge hydraulique et les coefficients homogénéisés, le théorème 4.1.1. En utilisant les résultats de ce théorème on calcule ensuite les coefficients homogénéisés et la valeur de la charge hydraulique dans la structure drainante.

§4.1 Théorème de convergence pour le cas $\eta \rightarrow 1$

Les résultats de ce paragraphe se trouvent dans le théorème suivant:

Théorème 4.1.1 *Sous les hypothèses du théorème (1.1) on a:*

$$H_\eta^\delta \rightharpoonup H^* \text{ faiblement dans } H_0^1(\omega) \text{ si } \eta \rightarrow 1.$$

La fonction H^* est l'unique solution du système bidimensionnel suivant:

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(q_{\alpha\beta}^* \frac{\partial H^*}{\partial z_\beta} \right) = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H^* = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

Les coefficients $q_{\alpha\beta}^*$ sont donnés par:

$$(4.2) \quad q_{\alpha\beta}^* = \int_Y \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_i} \right) dy$$

où les fonctions $\chi_0^\alpha \in V(Y)$ sont solutions du système tridimensionnel suivant:

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y_S \\ -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y_G \\ \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i |_{Y_S} = \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i |_{Y_G} & \text{sur } I \\ [[\chi_0^\alpha]] = 0 & \text{sur } I \\ \chi_0^\alpha \text{ est } y_1, y_2 - \text{périodique de moyenne nulle.} \end{array} \right.$$

Les coefficients \bar{K}_{ij}^S sont liés au coefficients K_{ij} par la relation (1.5).

Démonstration: On démontre ce théorème en plusieurs étapes, qu'on va indiquer.

Etape 1 Estimations a priori sur χ^α

Dans cette étape on va obtenir des estimations a priori sur la fonction χ^α . Pour cela, on travaille sous les hypothèses du théorème 1.1 et on considère le système (1.4) du premier chapitre, dans lequel on renonce à écrire les paramètres δ et η :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial W^\alpha}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial W^\alpha}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ W^\alpha - y_\alpha \text{ est } y_1, y_2\text{-périodique de moyenne nulle.} \end{array} \right.$$

En faisant le changement $y_\alpha - W^\alpha = \chi^\alpha$, le système s'écrit:

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial(y_\alpha - \chi^\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial(y_\alpha - \chi^\alpha)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \chi^\alpha \text{ est } y_1, y_2\text{-périodique de moyenne nulle.} \end{array} \right.$$

En multipliant la première équation de ce système par χ^α et en appliquant la formule de Green on obtient:

$$\int_Y \bar{K}_{ji} \frac{\partial(y_\alpha - \chi^\alpha)}{\partial y_j} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy - \int_{\partial Y} \bar{K}_{ji} \frac{\partial(y_\alpha - \chi^\alpha)}{\partial y_j} \chi^\alpha n_i dy = 0.$$

La périodicité de χ^α et les conditions sur $\Gamma^\pm(Y)$ impliquent:

$$\int_Y \bar{K}_{ji} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy = \int_Y \bar{K}_{\alpha i} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy.$$

On connaît la relation $\bar{K}_{ij}^G = \eta \bar{K}_{ij}^S$. Dans la suite on pose $\eta = 1 - \zeta$ et on remarque que ζ est un petit paramètre si η est proche de 1. Avec cette notation on a:

$$\bar{K}_{ij}^G = (1 - \zeta) \bar{K}_{ij}^S,$$

ce qui, remplacé dans l'égalité ci-dessus nous conduit à:

$$\int_{Y_S} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy + (1 - \zeta) \int_{Y_G} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy = \int_{Y_S} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy + (1 - \zeta) \int_{Y_G} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} dy.$$

Compte-tenu de l'inégalité $1 - \zeta \leq 1$ on a:

$$(1 - \zeta) \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \right|_{L^2(Y)}^2 \leq c \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \right|_{L^2(Y)}.$$

Dans la suite, la lettre c désigne différentes constantes indépendantes de ζ . Puisque $1 - \zeta \geq 0$, on a:

$$\sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \right|_{L^2(Y)} \leq \frac{c}{1 - \zeta}$$

ce qui implique les estimations a priori suivantes:

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \right|_{L^2(Y_S)}^2 & \leq \frac{c}{1 - \zeta} \\ \left| \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \right|_{L^2(Y_G)}^2 & \leq \frac{c}{(1 - \zeta)^2}. \end{cases}$$

Etape 2 Développement formel de χ^α

Dans la suite on va donner le développement asymptotique de la fonction χ^α . Pour cela, on utilise les méthodes théoriques de perturbations exposées dans J.-L. Lions [9].

On rappelle l'espace $V(Y)$ défini par:

$$V(Y) = \{v \in H^1(Y), v \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique et de moyenne nulle } \},$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme H^1 .

En multipliant la première équation de (4.4) par $\varphi \in V(Y)$, on obtient:

$$(4.5) \quad a_S(\chi^\alpha, \varphi) + (1 - \zeta)a_G(\chi^\alpha, \varphi) = L_S(\varphi) + (1 - \zeta)L_G(\varphi),$$

où

$$a_S(\chi^\alpha, \varphi) = \int_{Y_S} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy, \quad a_G(\chi^\alpha, \varphi) = \int_{Y_G} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy,$$

$$L_S(\varphi) = \int_{Y_S} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy, \quad L_G(\varphi) = \int_{Y_G} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy.$$

On va procéder dans la suite à un développement asymptotique formel de χ^α que l'on justifiera dans l'étape 4.

Compte-tenu des estimations a priori précédentes, on cherche χ^α sous la forme :

$$\chi^\alpha = \chi_0^\alpha + \zeta \chi_1^\alpha + \zeta^2 \chi_2^\alpha + \dots + \zeta^k \chi_k^\alpha + \dots$$

On remplace χ^α par son développement asymptotique dans (4.5) et on a:

$$a_S(\chi_0^\alpha, \varphi) + \zeta a_S(\chi_1^\alpha, \varphi) + \zeta^2 a_S(\chi_2^\alpha, \varphi) + \dots + \zeta^k a_S(\chi_k^\alpha, \varphi) + \dots$$

$$+ a_G(\chi_0^\alpha, \varphi) + \zeta a_G(\chi_1^\alpha, \varphi) + \dots + \zeta^k a_G(\chi_k^\alpha, \varphi) + \dots - \zeta a_G(\chi_0^\alpha, \varphi) - \zeta^2 a_G(\chi_1^\alpha, \varphi) -$$

$$- \dots - \zeta^{k+1} a_G(\chi_k^\alpha, \varphi) - \dots = L_S(\varphi) + L_G(\varphi) - \zeta L_G(\varphi).$$

L'identification formelle des coefficients des puissances de ζ nous conduits à:

$$\begin{cases} a_S(\chi_0^\alpha, \varphi) + a_G(\chi_0^\alpha, \varphi) = L_S(\varphi) + L_G(\varphi), & \forall \varphi \in V(Y) \\ \chi_0^\alpha \in V(Y). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_S(\chi_1^\alpha, \varphi) + a_G(\chi_1^\alpha, \varphi) - a_G(\chi_0^\alpha, \varphi) = -L_G(\varphi), & \forall \varphi \in V(Y) \\ \chi_1^\alpha \in V(Y). \end{cases}$$

$\forall i \geq 2 :$

$$\begin{cases} a_S(\chi_i^\alpha, \varphi) + a_G(\chi_i^\alpha, \varphi) = a_G(\chi_{i-1}^\alpha, \varphi), & \forall \varphi \in V(Y) \\ \chi_i^\alpha \in V(Y). \end{cases}$$

Grâce au théorème de Lax-Milgram, les systèmes ci-dessus définissent $\chi_0^\alpha, \chi_1^\alpha, \dots, \chi_k^\alpha, \dots$ de manière unique.

Étape 3 Formulation forte du problème qui caractérise χ_0^α

Pour chaque $\varphi \in V(Y)$ on a la formulation variationnelle du problème qui caractérise χ_0^α :

$$\begin{cases} \int_{Y_S} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{Y_G} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = \int_{Y_S} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{Y_G} \bar{K}_{\alpha i}^S \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy, \\ \chi_0^\alpha \in V(Y). \end{cases}$$

En prenant successivement $\varphi \in \mathcal{D}(Y_S)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(Y_G)$ comme fonctions test et en appliquant la formule de Green, on obtient:

$$(4.6) \quad -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 \text{ dans } Y_S$$

$$(4.7) \quad -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) = 0 \text{ dans } Y_G.$$

En prenant dans la formulation variationnelle une fonction test $\varphi \in V(Y)$ telle que $\varphi = 0$ dans Y_S et $\varphi = 0$ sur I , on a:

$$(4.8) \quad \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i = 0 \text{ sur } \Gamma^\pm(Y).$$

La formulation variationnelle du problème s'écrit encore:

$$-\int_{Y_S} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) \varphi dy + \int_{\partial Y_S} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial (\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i \varphi dS -$$

$$-\int_{Y_G} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} \right) \varphi dy + \int_{\partial Y_G} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i \varphi dS = 0, \forall \varphi \in V(Y).$$

Grâce aux relations (4.6)-(4.7), on déduit:

$$\int_{\partial Y_S} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i \varphi dS = \int_{\partial Y_G} \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i \varphi dS,$$

donc en utilisant (4.8):

$$\bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i |_{Y_S} = \bar{K}_{ji}^S \frac{\partial(\chi_0^\alpha - y_\alpha)}{\partial y_j} n_i |_{Y_G} \text{ sur I.}$$

Enfin, on obtient le système (4.3).

Etape 4 Justification du développement asymptotique. Estimation d'erreur

Les calculs qu'on a fait précédemment sont des calculs formels. Dans la suite on va les justifier, en établissant des estimations d'erreur. Plus précisément, on va montrer:

$$\| \chi^\alpha - (\chi_0^\alpha + \zeta \chi_1^\alpha + \zeta^2 \chi_2^\alpha + \dots + \zeta^k \chi_k^\alpha) \|_{H^1(Y)} \leq c \zeta^{k+1}, \text{ pour } \zeta \leq \frac{1}{2}.$$

La démonstration utilise les méthodes de [9]. On pose:

$$\rho_\zeta^\alpha = \chi_0^\alpha + \zeta \chi_1^\alpha + \zeta^2 \chi_2^\alpha + \dots + \zeta^{k+1} \chi_{k+1}^\alpha.$$

Grâce à la relation (4.5) et à la linéarité de $a_{S(G)}$, $L_{S(G)}$, on déduit:

$$\begin{aligned} a_S(\rho_\zeta^\alpha, \varphi) + (1 - \zeta)a_G(\rho_\zeta^\alpha, \varphi) &= a_S(\chi_0^\alpha, \varphi) + \zeta a_S(\chi_1^\alpha, \varphi) + \dots + \\ &+ \zeta^k a_S(\chi_k^\alpha, \varphi) + \zeta^{k+1} a_S(\chi_{k+1}^\alpha, \varphi) + (1 - \zeta)a_G(\chi_0^\alpha, \varphi) + \dots + (1 - \zeta)\zeta^k a_G(\chi_k^\alpha, \varphi) + \\ &+ (1 - \zeta)\zeta^{k+1} a_G(\chi_{k+1}^\alpha, \varphi) = L_S(\varphi) + L_G(\varphi) - \zeta L_G(\varphi) - \zeta^{k+2} a_G(\chi_{k+1}^\alpha, \varphi). \end{aligned}$$

Compte-tenu de la relation (4.5) et en faisant la différence avec l'égalité ci-dessus on obtient, pour chaque $\varphi \in V(Y)$:

$$a_S(\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha, \varphi) + (1 - \zeta)a_G(\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha, \varphi) = \zeta^{k+2} a_G(\chi_{k+1}^\alpha, \varphi).$$

Pour $\varphi = \chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha$ dans la relation précédente on a:

$$(1 - \zeta) \| \chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha \|_{V(Y)}^2 \leq [a_S + (1 - \zeta)a_G](\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha, \chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha) \leq$$

$$\leq c\zeta^{k+2} \|\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha\|_{V(Y)},$$

où c est une constante indépendante de ζ . Cela implique:

$$\|\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha\|_{V(Y)} \leq c \frac{\zeta^{k+2}}{1-\zeta}.$$

On déduit:

$$\begin{aligned} \|\chi^\alpha - (\chi_0^\alpha + \zeta\chi_1^\alpha + \zeta^2\chi_2^\alpha + \dots + \zeta^k\chi_k^\alpha)\|_{H^1(Y)} &\leq \|\chi^\alpha - \rho_\zeta^\alpha\|_{H^1(Y)} + \zeta^{k+1} \|\chi_{k+1}^\alpha\|_{H^1(Y)} \leq \\ &\leq c \frac{\zeta}{1-\zeta} \zeta^{k+1} + c\zeta^{k+1} \leq c\zeta^{k+1}, \text{ pour } \zeta \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

d'où la justification du développement asymptotique.

Etape 5 Convergence et développement asymptotique de coefficients homogénéisés.

On remarque que le passage à la limite selon $\zeta \rightarrow 0$ dans l'estimation d'erreur de l'étape précédente nous conduit à:

$$\chi^\alpha \rightarrow \chi_0^\alpha \text{ dans } H^1(Y) \text{ fort.}$$

En utilisant cela, ainsi que les estimations a priori sur les dérivées partielles de χ^α , on en déduit:

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_j} \rightharpoonup \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_j} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible.}$$

En reprenant l'expression (1.3), compte-tenu de (1.5) et avec la notation $y_\alpha - W^\alpha = \chi^\alpha$, on obtient:

$$q_{\alpha\beta} = \int_{Y_S} \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} \right) dy + (1-\zeta) \int_{Y_G} \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial y_i} \right) dy.$$

Le passage à la limite selon ζ dans l'expression ci-dessus donne:

$$q_{\alpha\beta} \rightarrow q_{\alpha\beta}^* = \int_Y \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_i} \right) dy.$$

Pour obtenir le développement asymptotique de coefficients on utilise le développement asymptotique qu'on a pour χ^α dans l'expression de $q_{\alpha\beta}$ et on trouve:

$$q_{\alpha\beta} = \int_Y \left(\bar{K}_{\alpha\beta}^S - \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_i} \right) dy + \zeta \left[\int_{Y_G} \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_0^\alpha}{\partial y_i} dy - \int_Y \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_1^\alpha}{\partial y_i} dy - \int_{Y_G} \bar{K}_{\alpha\beta}^S dy \right] + \dots +$$

$$+ \zeta^k \left[\int_{Y_G} \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_{k-1}^\alpha}{\partial y_i} dy - \int_Y \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial y_i} dy \right] + \zeta^{k+1} \int_{Y_G} \bar{K}_{i\beta}^S \frac{\partial \chi_k^\alpha}{\partial y_i} dy + \dots$$

Etape 6 Estimation a priori et résultat de convergence sur H_η^δ

En multipliant le système (1.2) par H_η^δ , on trouve :

$$(4.9) \quad \int_\omega q_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\eta^\delta}{\partial z_\beta} \frac{\partial H_\eta^\delta}{\partial z_\alpha} dz = \int_\omega (g_+^* + g_-^*) H_\eta^\delta dz.$$

On va montrer dans la suite que $\| H_\eta^\delta \|_{H_0^1(\omega)}$ est borné indépendamment de ζ . Cela sera une conséquence du fait que les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont uniformément coercifs par rapport à ζ , c'est-à-dire qu'il existe une constante c indépendante de ζ telle que:

$$(4.10) \quad q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \geq c |x|^2.$$

Pour établir (4.10) nous utiliserons des arguments classiques de la théorie de l'homogénéisation (voir Bensoussan, Lions, Papanicolaou [1]) pour montrer que les coefficients $q_{\alpha\beta}^*$ sont coercifs. Cela veut dire qu'il existe une constante réelle c telle que:

$$q_{\alpha\beta}^* w_\alpha w_\beta \geq c w_\alpha w_\alpha, \quad \forall w \in \mathbb{R}^2.$$

On montre ensuite la coercivité uniforme de $q_{\alpha\beta}$. Posons $M_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} - q_{\alpha\beta}^*$. La fonction $M_{\alpha\beta}$ dépend du paramètre ζ . Le fait qu'on a $q_{\alpha\beta} \rightarrow q_{\alpha\beta}^*$ implique $M_{\alpha\beta} \rightarrow 0$. On peut écrire

$$q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} q_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta}^* + M_{\alpha\beta},$$

donc

$$q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = \frac{1}{2} q_{\alpha\beta}^* x_\alpha x_\beta + \frac{1}{2} q_{\alpha\beta}^* x_\alpha x_\beta + M_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \geq \frac{1}{2} c |x|^2 + \left(\frac{1}{2} c |x|^2 + M_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \right),$$

l'inégalité étant justifiée par la coercivité de $q_{\alpha\beta}^*$.

Puisque $M_{\alpha\beta}$ tend vers zéro, on peut choisir ζ suffisamment petit pour que le terme $\frac{1}{2}c |x|^2 + M_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ reste positif.

En conséquence on a

$$q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta \geq \frac{c}{2} |x|^2,$$

où c est une constante indépendante de ζ .

Ceci nous assure la coercivité uniforme de $q_{\alpha\beta}$ et d'après la relation (4.9) cela implique:

$$\frac{c^0}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left| \frac{\partial H_\eta^\delta}{\partial z_\alpha} \right|_{L^2(\omega)}^2 \leq c |H_\eta^\delta|_{L^2(\omega)},$$

L'inégalité de Poincaré appliquée ci-dessus donne:

$$\|H_\eta^\delta\|_{H_0^1(\omega)} \leq c.$$

Cela implique, à une sous-suite près:

$$H_\eta^\delta \rightharpoonup H^* \text{ dans } H_0^1(\omega) \text{ faible quand } \zeta \rightarrow 0.$$

On multiplie le système (1.2) par $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, pour obtenir:

$$\int_{\omega} q_{\alpha\beta} \frac{\partial H_\eta^\delta}{\partial z_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} dz = \int_{\omega} (g_+^* + g_-^*) dz.$$

En faisant tendre ζ vers 0 dans l'égalité ci-dessus, on trouve:

$$\int_{\omega} q_{\alpha\beta}^* \frac{\partial H^*}{\partial z_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} dz = \int_{\omega} (g_+^* + g_-^*) \varphi dz,$$

d'où le système limite vérifié par H^* :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(q_{\alpha\beta}^* \frac{\partial H^*}{\partial z_\beta} \right) = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H^* = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

□

§4.2 Calcul de coefficients homogénéisés et résolution du problème 4.1

Dans la suite on va donner la solution numérique du problème (4.1). On commence par résoudre le problème (4.3). Dans le cas isotropes, les résultats de §2 sur la transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites impliquent pour W_0^1 et W_0^2 le problèmes suivants:

$$(4.10) \quad \begin{cases} \int_{X_S} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_0^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{X_G} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_0^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = 0, & \forall \varphi \in V(X) \\ W_0^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \\ W_0^1 = \frac{1}{2} & \text{sur } Y_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

$$(4.11) \quad \begin{cases} \int_{X_S} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_0^2}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \int_{X_G} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_0^2}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = 0, & \forall \varphi \in V(X) \\ W_0^2 = 0 & \text{sur } L_0 \\ W_0^2 = \frac{1}{2} & \text{sur } L_{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Les solutions des problèmes ci-dessus sont: $W_0^1 = y_1$, $W_0^2 = y_2$.

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1. et si les matériaux sont isotropes, les coefficients homogénéisés sont donnés par:*

$$q_{11}^* = q_{22}^* = K^S, \quad q_{12}^* = q_{21}^* = 0.$$

Démonstration: En utilisant les valeurs trouvées pour W_0^1 et W_0^2 et les relations entre W_0^α et χ_0^α dans l'expression (4.2), on a:

$$q_{11}^* = \int_Y \bar{K}_{i1}^S \frac{\partial W_0^1}{\partial y_i} dy = K^S \int_Y \frac{\partial W_0^1}{\partial y_1} dy = K^S |Y| = K^S, \text{ car } |Y| = 1,$$

$$q_{12}^* = \int_Y \bar{K}_{i2}^S \frac{\partial W_0^1}{\partial y_i} dy = 0, \quad q_{21}^* = \int_Y \bar{K}_{i1}^S \frac{\partial W_0^2}{\partial y_i} dy = 0.$$

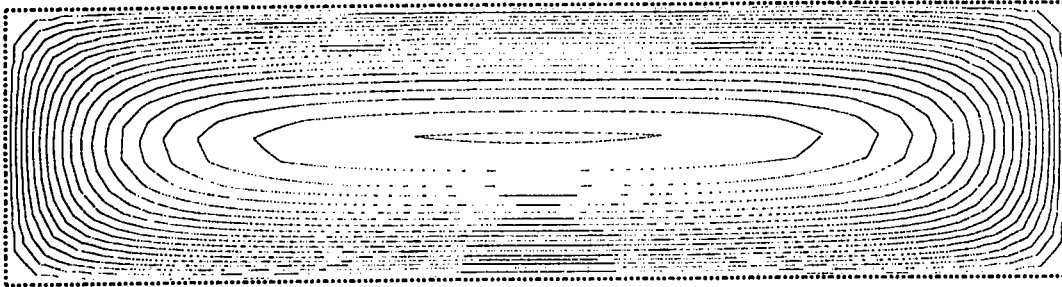
$$q_{22}^* = \int_Y \bar{K}_{i2}^S \frac{\partial W_0^2}{\partial y_i} dy = K^S \int_Y \frac{\partial W_0^2}{\partial y_2} dy = K^S |Y| = K^S.$$

□

Compte-tenu des résultats du théorème 4.2.1, le problème (4.1) s'écrit:

$$(4.12) \quad \begin{cases} -K^S \frac{\partial^2 H^*}{\partial z_\alpha \partial z_\alpha} = g_+^* + g_-^* & \text{dans } \omega \\ H^* = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases}$$

On donne la solution numérique de ce problème; on obtient la valeur de la charge hydraulique dans le plan médian de la structure drainante.



MODULEF : bunoiu
 PROBLEME
 15/05/97
 mails
 coors
 chols

523 POINTS
 523 NOEUDS
 944 ELEMENTS
 944 TRIANGLES

INCONNUE : 1 MMEMO :VN

20	1.767
19	1.683
18	1.589
17	1.496
16	1.402
15	1.309
14	1.215
13	1.122
12	1.028
11	.9348
10	.8413
9	.7478
8	.6543
7	.5609
6	.4674
5	.3739
4	.2804
3	.1870
2	9.3477E-02
1	0.0000E+00

20 ISOVALEURS

Isovaleurs pour le problème (4.12)

§5. Application des conditions de symétrie aux problèmes auxiliaires (cas δ fixé, η fixé)

On donne ici les solutions du système (1.4) de §1, qui correspond au problème homogénéisé et au cas δ fixé, η fixé. On commence avec la résolution du problème en W^2 .

Si on renonce à écrire les paramètres δ et η , le système (1.4) pour la fonction auxiliaire W^2 s'écrit:

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial W^2}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial W^2}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ W^2 - y_2 \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

Avec la notation $y_2 - W^2 = \chi^2$, le problème à résoudre devient:

$$(5.2) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \chi^2 \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

On peut montrer de même manière qu'au §2 que les résultats du tableau 2.1 sur la transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites restent toujours vrais.

Dans le cas $\bar{K}_{ji} = 0$ si $i \neq j$ on obtient donc:

$$(5.3) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii} \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X \\ \sum_{i=1}^3 \bar{K}_{ii} \frac{\partial(\chi^2 - y_2)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \\ \chi^2 = 0 & \text{sur } L_0 \cup L_{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial y_1} = 0 & \text{sur } Y_0 \cup Y_{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

où X est le domaine de la figure 3.3 du §1. On peut vérifier facilement que $\chi^2 = 0$ est solution du problème (5.3). On déduit le résultat suivant:

Proposition 5.1.1 dans le cas isotrope, la solution du problème (5.1) est $W^2 = y_2$.

On considère dans la suite le problème en W^1 :

$$(5.5) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial W^1}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial W^1}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ W^1 - y_1 \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

Avec la notation $y_1 - W^1 = \chi^1$, le problème à résoudre devient:

$$(5.6) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ji} \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_j} \right) = 0 & \text{dans } Y \\ \bar{K}_{ji} \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_j} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(Y) \\ \chi^1 \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

En utilisant les résultats de §2.1 sur la transformation des conditions de périodicité en conditions aux limites et le fait qu'on a $\bar{K}_{ji} = 0$ si $j \neq i$, on obtient le problème à résoudre:

$$(5.7) \quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\bar{K}_{ii} \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} \right) = 0 & \text{dans } X \\ \sum_{i=1}^3 \bar{K}_{ii} \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} n_i = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm(X) \\ \chi^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \cup Y_{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial \chi^1}{\partial y_2} = 0 & \text{sur } L_0 \cup L_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

§6. Calculs numériques dans le cas δ fixé, η fixé

Dans ce chapitre on donne la solution numérique du problème (5.7) et ensuite on calcule d'après la formule (1.3) les coefficients homogénéisés.

§6.1 Résolution numérique pour le problème auxiliaire

On se propose de résoudre numériquement le problème (5.7). Pour cela, on suit les étapes de résolution présentées en Annexe B et on commence par donner la formulation variationnelle du problème. On multiplie la première équation du système par $\varphi \in V^0(X)$, où:

$$V^0(X) = \{v \in H^1(X) \quad \text{tel que} \quad v = 0 \text{ sur } Y_0 \cup Y_{\frac{1}{2}}\}.$$

En faisant une intégration par parties et en utilisant les conditions sur le bord de X vérifiées par χ^1 et φ , on obtient:

$$\sum_{i=1}^2 \int_X \bar{K}_{ii} \frac{\partial(\chi^1 - y_1)}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = 0 \quad \forall \varphi \in V^0(X).$$

Si on revient à la notation $y_1 - W^1 = \chi^1$, on obtient:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \int_X \bar{K}_{ii} \frac{\partial W^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = 0 & \forall \varphi \in V^0(X) \\ W^1 = 0 & \text{sur } Y_0 \\ W^1 = \frac{1}{2} & \text{sur } Y_{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

où la première équation s'écrit encore:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{X_S} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy + \sum_{i=1}^2 \int_{X_G} \eta \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy = 0.$$

Soit P_T l'espace de polynômes de degré 1 par rapport à l'ensemble des variables et l'espace $X_h(X)$ défini par:

$$X_h(X) = \{\varphi_h, \varphi_h \in C^k(X); v_h|_T \in P_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

On considère les espaces fonctionnels suivants:

$$V_h(X) = \{\varphi_h, \varphi_h \in X_h(X), \text{ tel que } \varphi_h = 0 \text{ sur } Y_0 \text{ et } \varphi_h = \frac{1}{2} \text{ sur } Y_{\frac{1}{2}}\},$$

$V_h^0(X)$ est l'espace $V_h(X)$ avec conditions aux limites homogènes.

Une formulation variationnelle pour la solution approchée W_h^1 de ce problème est donc la suivante:

Trouver, dans l'espace $V_h(X)$ la fonction W_h^1 solution de:

$$(6.1) \quad a(W_h^1, \varphi_h) = l(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_h^0(X)$$

$$a(W_h^1, \varphi_h) = \int_{X_S} \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_h^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i} dy + \int_{X_G} \eta \bar{K}_{ii}^S \frac{\partial W_h^1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_i} dy$$

$$l(\varphi_h) = 0.$$

Compte-tenu des égalités $\bar{K}_{11}^S = \bar{K}_{22}^S = K$, $\bar{K}_{33}^S = \delta^{-2}K$ (voir relation 1.5), on a résolu numériquement le problème tridimensionnel (6.1). Pour le maillage du domaine X on peut choisir des prismes, des pentaèdres ou des hexaèdres et pour l'interpolation des éléments simples, du type Lagrange ou Hermite. On va faire le choix compte-tenu du fait qu'on a besoin de calculer les dérivées partielles des fonctions χ , parce que ces dérivées interviennent plus loin dans le calcul des coefficients homogénéisés. Le Module ne dispose pas d'un élément fini 3d qui puisse calculer directement ces dérivées. On doit donc choisir un élément du type Lagrange, qui calcule les valeurs de la fonction uniquement. Dans le but d'approximer facilement les valeurs des dérivées partielles à partir des valeurs de la fonction, on adopte une triangulation en parallélépipèdes rectangles qui ont les faces parallèles aux axes des coordonnées. On travaille donc avec des éléments finis du type Q1-Lagrange, où les noeuds sont les sommets du parallélépipède. Après la construction des matrices élémentaires et la prise en compte des conditions aux limites, on résout le système linéaire. On a choisi la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement, méthode qui converge assez rapidement dans ce cas mais pour laquelle la vitesse de convergence diminue sensiblement lorsque le nombre d'inconnues augmente.

Le calcul numérique a été fait sur un maillage qui a 7644 noeuds. On a fixé δ et on a fait le calcul pour différentes valeurs de η comprises entre 0.9 et 0.002. On a

constaté numériquement que la solution de ce problème est constante dans certains plans verticaux. Cela nous a permis de nous ramener à un problème bidimensionnel, dans une section verticale du domaine X par le plan Oy_1y_3 . La solution de ce problème bidimensionnel nous permettra de calculer au §5.3 le coefficient homogénéisé q_{11} . Soit Z le domaine bidimensionnel défini par

$$Z = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

domaine qui se trouve dans le plan Oy_1y_3 et qui est représenté dans la figure 6 ci-dessous. L'ensemble Z_S représente la partie occupée par le matériau de remplissage et Z_G la partie occupée par le matériau hôte.

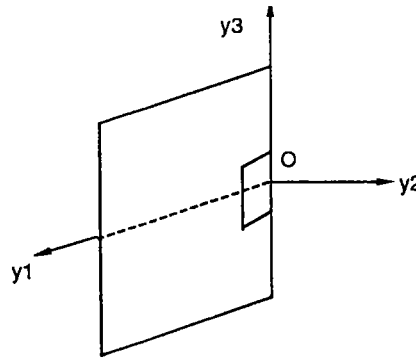


Figure 3.6

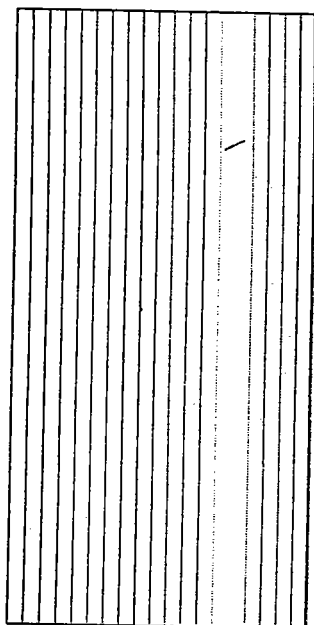
Domaine bidimensionnel Z , dans lequel on calcule la fonction auxiliaire W^1

En utilisant la formulation variationnelle pour la solution approchée W_h^1 , les conditions aux limites du problème en W^1 , les relations 1.5 de §1 et la relation $K^G = \eta K^S$ on obtient à partir de (6.1) le problème à résoudre:

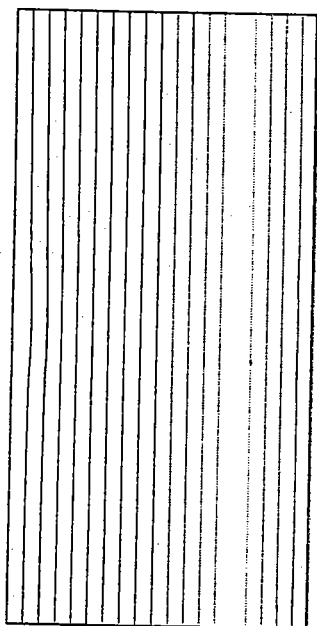
$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{Z_S} K^S \frac{\partial \bar{W}_h^1}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial y_1} dy_1 dy_3 + \int_{Z_S} \delta^{-2} K^S \frac{\partial \bar{W}_h^1}{\partial y_3} \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial y_3} dy_1 dy_3 + \\ + \int_{Z_G} \eta K^S \frac{\partial \bar{W}_h^1}{\partial y_1} \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial y_1} dy_1 dy_3 + \int_{Z_G} \eta \delta^{-2} K^S \frac{\partial \bar{W}_h^1}{\partial y_3} \frac{\partial \bar{\varphi}_h}{\partial y_3} dy_1 dy_3 = 0 \\ \bar{W}_h^1 = 0 \text{ si } y_1 = 0 \\ \bar{W}_h^1 = \frac{1}{2} \text{ si } y_1 = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

On a résolu ce problème dans un domaine (bidimensionnel) maillé en triangles. Le nombre de noeuds est égal à 325. L'élément fini choisi pour l'interpolation est le triangle du type Hermite, où les noeuds coïncident avec les sommets du triangle. On a choisi cet élément fini parce qu'il nous permet de calculer les valeurs des dérivées partielles dans les noeuds. Ce calcul a été fait pour une valeur de δ fixé. Le paramètre η a pris successivement les valeurs: 0.9; 0.8; 0.5; 0.1; 0.01; 0.005; 0.002; 0.001. La méthode utilisée pour la résolution du système linéaire a été celle du gradient conjugué avec préconditionnement. On obtient comme résultats la valeur de la fonction et de ses dérivées dans chaque noeud du maillage. Les valeurs de la dérivée par rapport à y_1 vont être récupérées et utilisées au §5.3 pour le calcul du coefficient homogénéisé q_{11} .

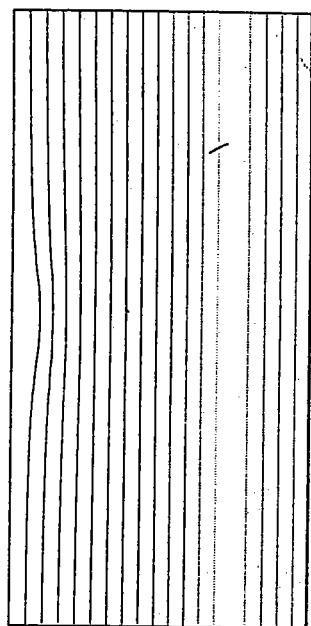
Isovaleurs de \bar{W}_h^1 , solution approchée du problème (6.2), dans le cas $\delta = 0,3$. Le paramètre η prend plusieurs valeurs comprises entre 0,9 et 0,001, qu'on indique chaque fois.



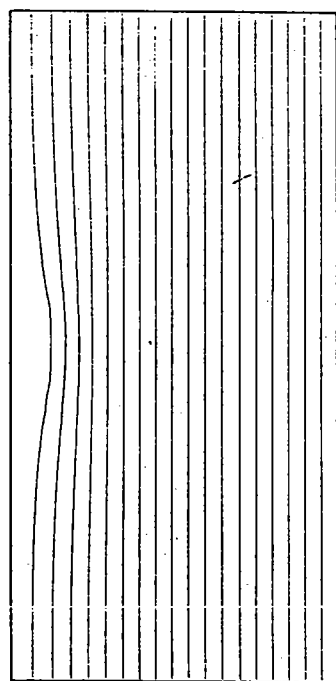
$\eta = 0,9$



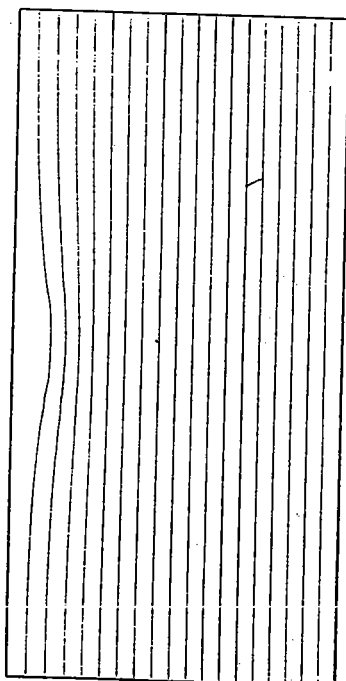
$\eta = 0,5$



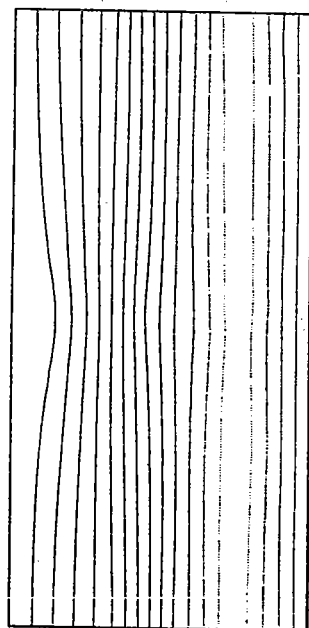
$\eta = 0,1$



$\eta = 0,01$



$\eta = 0,002$



$\eta = 0,001$

§6.2 Calcul des coefficients homogénéisés

Dans la suite on va calculer les coefficients homogénéisés, selon la formule (1.3) du Théorème 1.1:

$$q_{\alpha\beta}^{\delta\eta} = \int_Y \left(K_{\gamma\beta}^{\delta\eta} \frac{\partial W_\eta^{\delta(\alpha)}}{\partial y_\gamma} + \delta^{-1} K_{3\beta}^{\delta\eta} \frac{\partial W_\eta^{\delta(\alpha)}}{\partial y_3} \right) dy.$$

Pour simplifier l'écriture on renonce à écrire les paramètres η et δ dans la suite.

Nous pouvons obtenir facilement les valeurs de q_{12}, q_{21} et q_{22} . En effet, compte-tenu du fait que $W_2 = y_2$ et des informations obtenues au §5.2 sur W^1 , on obtient :

$$q_{12} = \int_Y K_{\gamma 2} \frac{\partial W^1}{\partial y_\gamma} dy = \int_Y K_{22} \frac{\partial W^1}{\partial y_2} dy = 0, \text{ car } \frac{\partial W^1}{\partial y_2} \text{ est impaire en } y_2,$$

$$q_{21} = \int_Y K_{\gamma 1} \frac{\partial W^2}{\partial y_\gamma} dy = \int_Y K_{11} \frac{\partial W^2}{\partial y_1} dy = 0, \text{ car } \frac{\partial W^2}{\partial y_1} \text{ est impaire en } y_1,$$

$$q_{22} = \int_Y K_{\gamma 2} \frac{\partial W^2}{\partial y_\gamma} dy = \int_{Y_S} K_{22}^S \frac{\partial W^2}{\partial y_2} dy + \int_{Y_G} K_{22}^G \frac{\partial W^2}{\partial y_2} dy = K^S \frac{\delta^2}{16} + K^G \left(1 - \frac{\delta^2}{16} \right).$$

Compte-tenu de la relation $\eta K^S = K^G$, on obtient:

$$(5.10) \quad q_{22} = K^S \frac{\delta^2}{16} + \eta K^S \left(1 - \frac{\delta^2}{16} \right).$$

On fixe K^S et on étudie le comportement de q_{22} :

- si $\eta \rightarrow 0$, alors $q_{22} = K^S \frac{\delta^2}{16} = K^S |Y_S|$ et on retrouve le résultat du théorème 3.1.1;
- si $\eta \rightarrow 1$, alors $q_{22} \rightarrow K^S$ et on retrouve le résultat du théorème 4.2.1;
- si $\delta \rightarrow 0$, alors $q_{22} = K^G$ et on retrouve le résultat du théorème 3.2.2.

Tableau 6.1

η	q_{22}
1	$3,5 \times 10^{-4}$
0,9	$3,5021875 \times 10^{-4}$
0,8	$3,5049218 \times 10^{-4}$
0,7	$3,5084375 \times 10^{-4}$
0,6	$3,513125 \times 10^{-4}$
0,5	$3,5196875 \times 10^{-4}$
0,4	$3,5295312 \times 10^{-4}$
0,3	$3,5459375 \times 10^{-4}$
0,2	$3,57875 \times 10^{-4}$
0,1	$3,6771875 \times 10^{-4}$
0,01	$5,4490625 \times 10^{-4}$
0,005	$7,4168125 \times 10^{-4}$
0,002	$13,324062 \times 10^{-4}$
0,001	$23,167812 \times 10^{-4}$

Pour le coefficient homogénéisé q_{11} , on n'a pas d'expression analytique explicite. Il est donné par:

$$q_{11} = \int_Y K_{11} \frac{\partial W^1}{\partial y_1} dy$$

et on le calcule de manière approximative par des méthodes d'intégration numérique. Compte-tenu des transformations antérieures et des informations qu'on a sur les coefficients de perméabilité hydraulique, on déduit:

$$q_{11} = 4 \int_X K_{11} \frac{\partial W^1}{\partial y_1} dy = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_Z K_{11} \frac{\partial W^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3 \right) dy_2 = 2 \int_Z K_{11} \frac{\partial W^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3,$$

où $Z = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

On reprend maintenant les valeurs de la dérivée par rapport à y_1 , qu'on a calculées au §6.1 grâce au choix de l'élément fini du type Hermite. On fait une intégration numérique sur chaque élément de la triangulation de l'ensemble Z . La formule d'approximation qu'on utilise est une formule d'ordre 1, donnée par:

$$(6.3) \quad \int_T \frac{\partial \bar{W}^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3 \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial y_1}(A_i) |T|$$

où A_i sont les sommets du triangle T .

A l'aide d'un programme Fortran on calcule les deux valeurs approchées des intégrales

$$\int_{Z_S} \frac{\partial \bar{W}^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3 \text{ et } \int_{Z_G} \frac{\partial \bar{W}^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3,$$

où Z_S représente la partie occupée par le matériau de remplissage et Z_G la partie occupée par le matériau hôte. Compte-tenu des valeurs du coefficient de perméabilité hydraulique K_{11} dans le matériau de remplissage et dans le matériau hôte, on calcule le coefficient homogénéisé q_{11} selon la formule:

$$(6.4) \quad q_{11} = 2 \frac{K^G}{\eta} \int_{Z_S} \frac{\partial \bar{W}^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3 + 2K^G \int_{Z_G} \frac{\partial \bar{W}^1}{\partial y_1} dy_1 dy_3$$

où $K^G = 3.5 \times 10^{-4}$.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs du paramètre η se trouvent dans le tableau 6.2.

Tableau 6.2.

η	q_{11}
1	$3,5 \times 10^{-4}$
0,9	$3,5045005 \times 10^{-4}$
0,8	$3,5073842 \times 10^{-4}$
0,5	$3,5208282 \times 10^{-4}$
0,1	$3,5856636 \times 10^{-4}$
0,01	$4,286422 \times 10^{-4}$
0,005	$4,8226643 \times 10^{-4}$

On peut constater que les valeurs des coefficients homogénéisés q_{11} et q_{22} sont très proches de la valeur $3,5 \times 10^{-4}$ si η varie entre 1 et 0,1. Cela s'explique par la faible proportion du matériau de remplissage dans la structure drainante. Effectivement, le rapport volumique entre le matériau de remplissage et le matériau hôte dans la structure drainante est de 0,056.

§7. Calcul de la charge dans le système hydraulique

Dans ce paragraphe on calcule la charge dans le système hydraulique. On commence par donner la solution du problème en l'absence de la structure drainante, dans le massif tout entier qui est un matériau isotrope. On traite ensuite le problème en présence de la structure drainante. Les cas présentés correspondent à différentes valeurs de η . Le cas dans lequel la structure drainante peut être assimilée à un matériau isotrope est également traité.

i) En l'absence de la structure drainante, le problème à résoudre est:

$$(7.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(K^G \nabla H) = 0 & \text{dans } \Lambda \\ H = 0,01x_2 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

où Λ représente le système hydraulique, Σ_1 représente les trois faces sur lesquelles on a une charge imposée et Σ_2 représente les trois faces sur lesquelles on a des conditions de flux nul. Avec la notation $F = 0,01x_2 - H$ et compte-tenu du fait que la matrice de la perméabilité hydraulique s'écrit:

$$\begin{pmatrix} K^G & 0 & 0 \\ 0 & K^G & 0 \\ 0 & 0 & K^G \end{pmatrix}$$

le problème (7.1) devient:

$$(7.2) \quad \begin{cases} -K^G \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_i} = 0 & \text{dans } \Lambda \\ F = 0 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial F}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que la solution du problème (7.2) est égale à zéro, ce qui implique que la fonction $H = 0,01x_2$ est la solution du problème (7.1).

On remarque que dans ce cas la solution ne dépend pas de la valeur des éléments de la matrice de perméabilité hydraulique, ce qui s'explique par l'absence des forces volumiques et surfaciques et par le fait que le flux est nul. L'isotropie du matériau joue aussi un rôle essentiel.

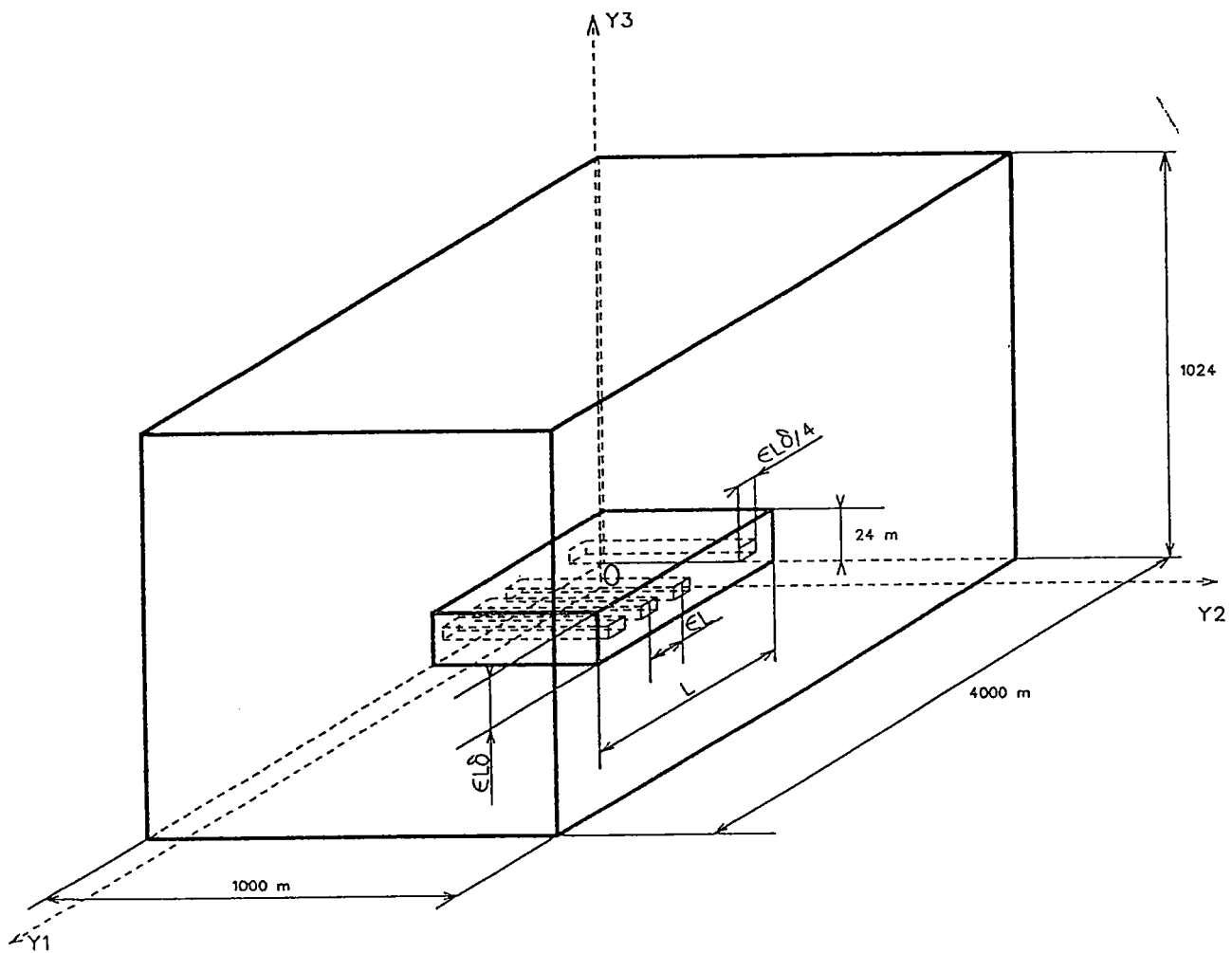


Figure 3.7

Modèle physique du système hydraulique: structure drainante entourée par le matériau hôte

(ii) Dans le cas de la structure drainante entourée par le massif, le problème à résoudre est le suivant:

$$(7.3) \quad \begin{cases} -\text{div}(K^\Lambda \nabla H) = 0 & \text{dans } \Lambda \\ H = 0,01x_2 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

On a $K^\Lambda = K^G$ dans le matériau hôte et $K^\Lambda = K^S$ dans le matériau de remplissage. La structure drainante, notée par Ω , est de faible épaisseur et dans [2], après l'étape d'homogénéisation, elle est approximée par un domaine bidimensionnel, noté ω . C'est sous cette hypothèse qu'on a travaillé dans les paragraphes précédents. Mais pour le calcul de la charge hydraulique on a besoin des fonctions g_+^* et g_-^* . Ces fonctions sont données par les expressions:

$$K^G \frac{\partial H}{\partial n} = g_+^* \quad \text{sur } \Gamma^+(\Omega), \quad K^G \frac{\partial H}{\partial n} = g_-^* \quad \text{sur } \Gamma^-(\Omega),$$

où H est la valeur de la charge hydraulique, valeur qui ne peut pas être précisée. On pourrait envisager d'approximer les fonctions g_+^* et g_-^* en utilisant la valeur de la charge hydraulique calculée en l'absence de la structure drainante, avec les conditions aux limites données. Mais les valeurs trouvées sont $g_+^* = 0$ et $g_-^* = 0$. Cela ne nous permet pas de calculer la charge dans le domaine ω . Il faut donc procéder autrement.

On garde les résultats obtenus sur les coefficients homogénéisés, car ils ne dépendent pas des conditions aux limites et on se propose de résoudre le problème tridimensionnel dans le système hydraulique. Comme dans ce cas la structure drainante est un ensemble tridimensionnel, on doit travailler avec trois coefficients de perméabilité. On résout le problème en considérant la structure drainante comme une partie homogène, dans laquelle deux des coefficients de perméabilité hydraulique sont les coefficients homogénéisés calculés précédemment. Vu que la cellule de base Y a la même structure dans les directions Oy_1 et Oy_3 , on va prendre dans la troisième direction la valeur du

coefficient de perméabilité égale à celle de q_{11} . Le problème à résoudre est :

$$(7.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -div(K^G \nabla H) = 0 & \text{dans } \Lambda \setminus \Omega \\ -div(Q \nabla H) = 0 & \text{dans } \Omega \\ H = 0,01 x_2 & \text{sur } \Sigma_1 \\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Sigma_2 \\ K^G \frac{\partial H}{\partial x_3} n = \theta \frac{\partial H}{\partial x_3} n & \text{sur } \Gamma^\pm \\ [[H]] = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ [[K^G \frac{\partial H}{\partial n}]] = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{array} \right.$$

où Ω représente la partie occupée par la structure drainante dans le système hydraulique et la matrice Q est de la forme:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}.$$

On a calculé précédemment les valeurs de q_{11} et q_{22} et on a pris θ égal à la valeur du coefficient homogénéisé q_{11} . Pour θ choisi ainsi, on calcule la valeur de la charge hydraulique H , solution du problème (6.4).

Le calcul a été fait dans un domaine tridimensionnel qui représente le quart du domaine du problème de départ. Ce choix a été possible grâce aux symétries géométriques du domaine de départ et grâce aux conditions aux limites du type flux nul dans la direction Oy_1 . L'épaisseur de la structure drainante est de 24 mètres.

Les valeurs calculées pour la charge hydraulique correspondent aux cas $\eta = 0, 1; \eta = 0,01; \eta = 0,005$, le paramètre δ étant fixé à 0,3. On peut remarquer que dans ces cas les perturbations de la solution par rapport à la solution trouvée en absence de la structure drainante sont très faibles. Cela s'explique par le fait que dans ces cas les valeurs des coefficients homogénéisés dans la structure drainante sont assez proches de la valeur de la perméabilité hydraulique dans le matériau hôte. Cet rapprochement s'explique par l'influence petite du matériau de remplissage, due à sa faible proportion volumique dans la structure drainante: 0,0056.

Une question naturelle est: sous quelles conditions les isovaleurs évitent-elles la structure drainante? Nous verrons quelques cas modèles simples:

- cas de la structure drainante isotrope, épaisseur réelle

Dans la suite on s'occupe des cas qui correspondent à une plus grande différence entre les coefficients homogénéisés dans la structure drainante et le bloc de hôte. On commence avec le cas dans lequel la structure drainante est assimilée à un matériau isotrope. On introduit la variable

$$\lambda = \frac{\text{perméabilité hydraulique du matériau hôte}}{\text{perméabilité de la structure drainante}}.$$

On calcule la valeur de la charge hydraulique pour λ égal successivement à 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} . Dans le dernier cas, on peut remarquer que l'isovaleur qui correspond à la valeur 0,25 évite complètement la structure drainante, comme on peut le voir sur les dessins plus loin.

- cas de la structure drainante isotrope, épaisseur plus grande que dans le cas réel

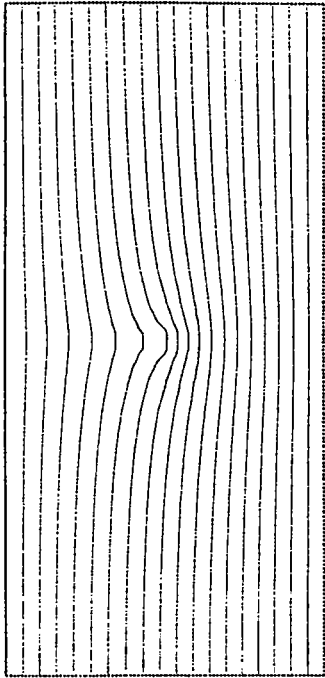
La valeur de λ pour laquelle la structure drainante est évitée peut être améliorée, dans le sens qu'on peut obtenir le même effet pour une plus petite différence entre les deux perméabilités. On modifie, par exemple, les dimensions de la structure drainante dans la direction Oy_3 . On calcule la charge hydraulique pour les mêmes valeurs de λ , mais pour une épaisseur de 74 mètres. Dans ce cas, l'isovaleur égale à 0,25 a déjà évité complètement la structure drainante pour une valeur de λ égale à 10^{-2} .

Les résultats obtenus montrent que la perturbation hydraulique dépend beaucoup de la hauteur de la structure drainante. Si cette dimension devienne petite, il est ainsi pour les perturbations, comme on a pu constater sur les exemples traités numériquement.

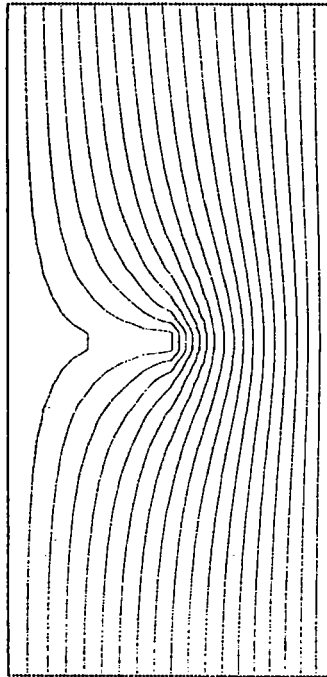
Les résultats montrent aussi que la perturbation devient effectivement négligeable, comme dans le calcul à partir des coefficients homogénéisés, lorsque la distance au module devient notable. Cela nous permet de préciser d'une manière approximative la distance au module à partir de laquelle l'hypothèse de départ -faible épaisseur du système drainant- est physiquement admissible.

Isovaleurs de la charge hydraulique (coupe verticale)

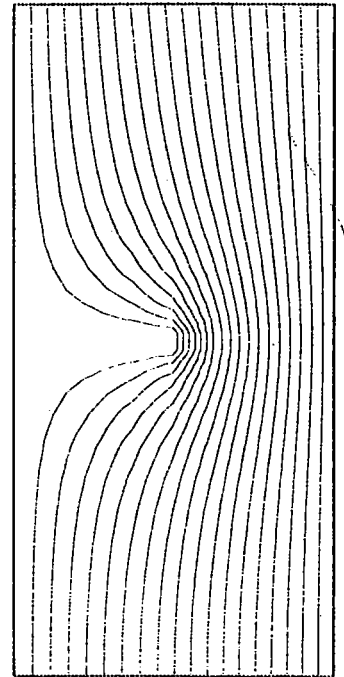
$$\lambda = \frac{\text{perméabilité du matériau hôte}}{\text{perméabilité de la structure drainante}}; h = \text{épaisseur de la structure drainante}$$



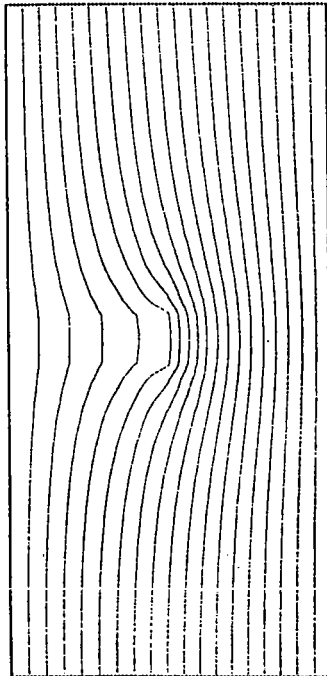
$h=24$
 $\lambda = 10^{-1}$



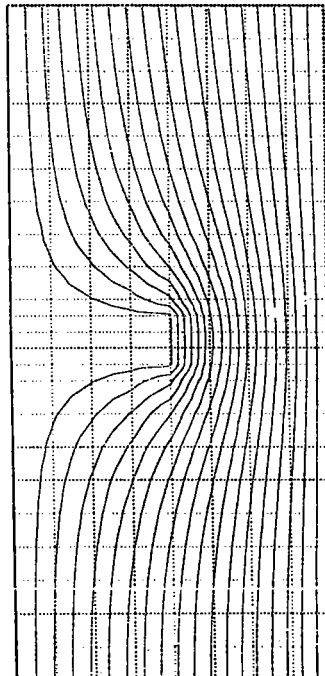
$h=24$
 $\lambda = 10^{-2}$



$h=24$
 $\lambda = 10^{-3}$



$h=74$
 $\lambda = 10^{-1}$



$h=74$
 $\lambda = 10^{-2}$

ANNEXE A

Démonstration du théorème 2.1.2

Théorème 2.1.2 *Si le plan d'équation $y_1 = 0$ est plan de symétrie matérielle pour la cellule de base Y , alors on peut trouver des fonctions χ^1 et χ^2 solutions du système (2.1) telles que χ^1 soit impaire en y_1 et χ^2 soit paire en y_1 .*

Démonstration: La matrice C de symétrie par rapport au plan $y_1 = 0$, symétrique et orthogonale, s'écrit sous la forme:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (c_{ij})_{i,j}.$$

Dans la suite on va montrer que si χ^1, χ^2 sont solutions du système (2.1), alors les fonctions définies par

$$(a.1) \quad \chi^\alpha(y') = c_{\alpha\beta} \chi^\beta(y),$$

où y' et y sont liés par la relation (2.3), sont toujours solutions du système (2.1).

Soient les fonctions $\bar{\chi}^\alpha$ définies par

$$(a.2) \quad \bar{\chi}^\alpha(y') = c_{\alpha\beta} \chi^\beta(y).$$

Soit $\alpha = 1$. On va montrer dans la suite que la fonction

$$\bar{\chi}^1(y') = c_{11} \chi^1(y) = -\chi^1(y),$$

est solution du système (2.1). Pour cela, on calcule séparément $\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(K_{ji}(y') \frac{\partial \bar{\chi}^1(y')}{\partial y'_j} \right)$

et $\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(K_{1i}(y') \right)$ et on va démontrer qu'ils sont égaux.

Or, on a les relations suivantes:

$$-\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(K_{ji}(y') \frac{\partial \bar{\chi}^1(y')}{\partial y'_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(K_{ji}(y') \frac{-\partial \chi^1(y)}{\partial y'_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_p} \left(K_{ji}(y') c_{ip} c_{jq} \frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y_q} \right)$$

$$(a.3) \quad = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K_{ji}(y') c_{ii} c_{jj} \frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y_j} \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left(K_{ji}(y) \frac{\partial \chi^1}{\partial Y_j} \right)$$

la dernière égalité étant vraie grâce à la relation (2.4).

D'autre part, en tenant compte de la forme particulière de la matrice C , on a:

$$(a4) \quad -\frac{\partial K_{1i}(y')}{\partial y'_i} = -\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(c_{11} c_{ip} K_{1p}(y) \right) = -\frac{\partial}{\partial y'_i} [(-1) c_{ii} K_{1i}(y)] = \frac{\partial K_{1i}(y)}{\partial y_p}.$$

Compte-tenu de la première relation du système (2.1), qui pour $\alpha = 1$ s'écrit aussi:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i} \left(K_{ji} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_j} \right) = -\frac{\partial}{\partial y_i} (K_{1i})$$

et en comparant avec les relations (a.3)-(a.4), on déduit:

$$-\frac{\partial}{\partial y'_i} \left(K_{ji}(y') \frac{\partial (\bar{\chi}^1(y') - y'_i)}{\partial y'_j} \right) = 0.$$

Donc les deux premières relations du système (2.1) sont vérifiées par la fonction $\bar{\chi}^1(y')$. Dans la suite on va montrer que la fonction $\bar{\chi}^1(y')$ vérifie aussi la troisième et la quatrième relation du système (2.1). On a:

$$K_{ji}(y') \frac{\partial \bar{\chi}^1(y')}{\partial y'_j} n'_i = -K_{ji}(y') \frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y'_j} n'_i = -K_{ji}(y') \frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y_q} c_{jq} n'_i =$$

$$(a.5) \quad = -K_{ji}(y') \frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y_j} c_{jj} n'_i = -\frac{\partial \chi^1(y)}{\partial y_j} K_{ji}(y) n_i,$$

car on utilise la formule de transformation de la normale : $n'_i = c_{ip} n_p$.

D'autre part, on a:

$$(a.6) \quad K_{ji}(y') \frac{\partial y'_1}{\partial y'_j} n'_i = K_{1i}(y') n'_i = c_{11} c_{ip} K_{1p}(y) n'_i = -c_{ii} K_{1i}(y) n'_i = -K_{1i}(y) n_i.$$

La troisième relation du système (2.1), peut être écrite pour $\alpha = 1$ comme:

$$K_{ji} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_j} n_i = K_{1i} n_i.$$

En utilisant dans l'égalité précédente les relations (a.5)-(a.6) on déduit:

$$K_{ji}(y') \frac{\partial(\bar{\chi}^1(y') - y'_1)}{\partial y'_j} n'_i = 0,$$

ce qui démontre la troisième et quatrième relation de (2.1).

La définition de $\bar{\chi}^1$ nous montre facilement que la cinquième équation du système est vérifiée. De plus, si χ^1 est y_1, y_2 -périodique, il en est de même pour $\bar{\chi}^1$. Il reste à montrer que si χ^1 est de moyenne nulle, $\bar{\chi}^1$ l'est aussi. On a:

$$\int_Y \bar{\chi}^1(y') dy' = \int_Y c_{11} \chi^1(y) dy' = \int_Y c_{11} \chi^1(y) \det C dy = \int_Y \chi^1(y) dy,$$

car $c_{11} = -1$ et $\det C = -1$, ce qui montre le résultat.

Comme le système (2.1) admet une solution unique à un vecteur constant additif près, on a:

$$\bar{\chi}^1 = \chi^1 + k,$$

où k est une constante. On va montrer que la constante est égale à 0. En intégrant l'égalité précédente, on a la relation suivante:

$$\int_Y \bar{\chi}^1(y') dy' = \int_Y \chi^1(y') dy' + k \int_Y dy'.$$

Pour des raisons de symétrie de la cellule Y on obtient:

$$0 = k \int_Y dy',$$

ce qui implique $k = 0$.

Compte-tenu de la relation (a.2), écrite pour $\alpha = \beta = 1$, on obtient:

$$\chi^1(y_1, y_2, y_3) = \chi^1(y_1, y_2, y_3),$$

ce qui montre l'imparité de la fonction χ^1 en y_1 .

Par un raisonnement analogue, on obtient les résultats annoncés pour la fonction χ^2 .

□

Annexe B

Présentation générale de la résolution numérique d'un problème par la méthode des éléments finis

Dans la suite on va présenter la méthode des éléments finis, méthode avec laquelle on va approcher numériquement le problème à résoudre. Cette méthode consiste à calculer des valeurs approchées du champ cherché en certains points du domaine de définition; ces points de calcul sont les noeuds. Ensuite, il est formellement possible de déduire de ces valeurs la solution approchée en tout point du domaine, en faisant une interpolation. La condition essentielle pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis est de mettre le problème sous la forme variationnelle.

Ensuite, les étapes de la résolution numérique sont:

- création du maillage et choix d'interpolation
- création des tableaux élémentaires: matrices de raideur et second membres
- construction du système linéaire: assemblage des tableaux élémentaires, prise en compte des conditions aux limites
- résolution du système linéaire.

Pour donner la solution numérique on va utiliser le code MODULEF, un ensemble de sous-programmes Fortran qui réalisent une étape spécifique du travail (voir guides Modulef [6]).

Formulation variationnelle

Les problèmes qu'on traite numériquement ici sont du type du problème suivant:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f^\Omega & \text{dans } \Omega \\ k_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i = f^\Gamma & \text{sur } \Gamma_1 \\ u = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_2, \end{cases}$$

où

Ω est un ensemble bidimensionnel ou tridimensionnel,

Γ est la frontière de Ω ,

Γ_1, Γ_2 sont deux parties disjointes de Γ telles que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$,

u est la fonction cherchée du point courant,

$(k_{ij})_{i,j}$ est la matrice de perméabilité hydraulique,

f^Ω est la puissance volumique appliquée à Ω ,

f^Γ est le flux appliqué sur Γ_1 ,

\bar{u} est la valeur imposée sur Γ_2 .

Pour certains problèmes que nous devons traiter, Ω est le massif et u la charge hydraulique, pour d'autres Ω est la période et u l'une des fonctions auxiliaires.

Plusieurs formulations variationnelles à un ou plusieurs champs sont possibles selon l'inconnue la plus importante à trouver: la fonction u ou le flux.

On travaille dans la suite avec une formulation où l'on cherche prioritairement la fonction u .

Soit \mathcal{T}_h une triangulation de l'ensemble Ω , c'est-à-dire un ensemble de sous-domaines de $\bar{\Omega}$. Suivant la dimension de Ω , les éléments T de \mathcal{T}_h peuvent être des triangles, quadrilatères, tétraèdres. De plus, elles doivent satisfaire aux conditions suivantes:

$$1) \bar{\Omega} = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

$$2) \forall T, \forall T' \in \mathcal{T}_h, T \cap T' = \emptyset \text{ ou } T \cap T' = \text{un sommet, un côté ou une face de } \mathcal{T}_h.$$

On considère l'espace P_T , un ensemble de polynômes de support T et l'espace X_h défini par:

$$X_h = \{v_h, v_h \in C^k(\Omega); v_h|_T \in P_T, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit l'espace V_h défini par:

$$V_h = \{v_h, v_h \in X_h, \text{ tel que } v_h = \bar{u} \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Soit V_h^0 l'espace V_h avec une condition aux limites homogène, c'est-à-dire $v_h = 0$ sur Γ_1 .

Alors le problème est de trouver la fonction $u_h \in V_h$ solution de:

$$a(u_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0,$$

où

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} k_{ji}(x) \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \frac{\partial v_h}{\partial x_i} dx, \quad l(v_h) = \int_{\Omega} f^\Omega v_h dx + \int_{\Gamma_0} f^\Gamma v_h d\sigma.$$

Ce type de problème peut être résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Les étapes de la résolution sont présentées dans la suite.

Réalisation numérique

La résolution par éléments finis des problèmes est réalisée à l'aide de différents modules de la bibliothèque Modulef (voir guides Modulef [6]):

- apnoxx (apn3xx) pour la création des maillages bidimensionnels (respectivement tridimensionnels)
- comaxx pour les interpolations
- thecxx pour la construction des matrices élémentaires
- cobdxx pour la prise en compte des conditions aux limites
- cholxx pour la résolution du système linéaire par la méthode de Cholesky
- gradxx pour la résolution du système linéaire par la méthode du gradient
- trnoxx pour l'impression des maillages
- trmcxx pour tracer les isovaleurs
- imagxx pour l'impression des coordonnées des noeuds et pour l'impression des solutions.

Le travail avec l'ordinateur est fait en régime conversationnel, c'est-à-dire on appelle des préprocesseurs spécifiques pour chaque étape de la résolution du problème et on introduit les données demandées.

La construction du maillage est une phase de prétraitement très importante dans la mesure où la création d'un maillage pour un domaine de géométrie complexe n'est pas une opération simple, peut demander beaucoup de temps et doit donner comme résultat des maillages adaptés aux problèmes à résoudre. On sait que la qualité de la résolution obtenue dépend de celle du maillage servant de support au calcul.

Dans notre cas la géométrie n'est pas complexe, mais les difficultés viennent de la présence de deux matériaux, un dans une proportion beaucoup plus faible que l'autre et du fait que les éléments de la triangulation ne doivent pas être aplatis.

La construction d'un maillage se fait en deux étapes fondamentales (voir P.L. George [5]):

- 1) l'analyse du domaine à mailler pour en repérer les éventuelles propriétés géométriques, afin de:
 - minimiser le coût de construction en utilisant les transformations géométriques simples (symétries, rotations et translations) permettant de générer le maillage global à partir

des maillages de sous-domaines

- simplifier la réalisation en découpant artificiellement le domaine en sous-ensembles plus faciles à mailler à l'aide de méthodes appropriées à chaque cas.

La procédure à suivre consiste à décomposer le problème du maillage complet en une succession de problèmes plus faciles à résoudre, en diminuant progressivement la dimension de l'espace qui contient les objets. Le domaine tridimensionnel complexe est divisé en sous-domaines tridimensionnels simples, que l'on peut définir, puis mailler à partir de leur faces. On se ramène ainsi à des domaines bidimensionnels, eux-mêmes décrits puis maillés à partir de lignes définissant leur contour; enfin, ces contours sont déterminés à leur tour par leurs extrémités. Cette étape est une étape d'analyse descendante du maillage à créer.

2) la construction du maillage à partir des objets simples définis au cours de l'analyse descendante précédente. La construction est obtenue par une réalisation ascendante, c'est-à-dire en suivant les étapes ci-dessus en sens inverse.

Après avoir construit le maillage on fait le choix de l'élément fini utilisé pour l'interpolation. Celui-ci peut être de type Lagrange, Hermite,... Ce choix est très important, parce que, en fonction de l'élément choisi, on peut calculer dans chaque point pas seulement la valeur de la fonction, mais aussi les valeurs de sa dérivée. C'est par exemple le cas pour l'élément du type Hermite en dimension 2.

Ensuite on construit les matrices élémentaires. Pour cela on introduit les valeurs de la matrice de perméabilité, les forces volumiques et surfaciques. C'est à ce niveau qu'on prend aussi en compte les conditions aux limites du type Neumann (flux imposé).

L'étape suivante est la prise en compte des conditions aux limites du type Dirichlet, ce qui veut dire qu'on va introduire la valeur de la fonction sur les faces ou côtés où elle est connue.

La dernière étape est la construction du système linéaire et sa résolution. Pour résoudre le système on peut choisir une des méthodes suivantes: méthode de Choleski, méthode du gradient conjugué, avec ou sans préconditionnement.

Après cette dernière étape on obtient les valeurs de la fonction en chaque noeud du maillage, et en fonction du choix fait à l'étape d'interpolation, les valeurs de sa dérivée dans les mêmes noeuds.

Bibliographie du Chapitre III

- [1] A. BENSOUSSAN, J.-L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978
- [2] L. CHAUDON, S. EL OTMANI, S. RICHARD, J. SAINT JEAN PAULIN, Homogenization for hydraulic drainage of a system with periodic cavities 3D-distributed, Colloque Eurhomogenization sur Homogenization and Applications to Material Sciences (juin 1995)
- [3] D. CIORANESCU, J. SAINT JEAN PAULIN, Une méthode d'étude du comportement global de matériaux composites: l'homogénéisation, Courrier du CNRS "Images des Mathématiques", supplément au no 69 (1988)
- [4] S. EL OTMANI, Homogénéisation des caractéristiques hydrauliques d'un module de stockage - thèse de l'Université de Metz, 1994 -
- [5] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillages - Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, Paris, 1990
- [6] Guides MODULEF (volumes 1 - 7), INRIA, 1991 - 1993
- [7] P. JOLY, *Mise on oeuvre de la méthode des éléments finis*, SMAI, no 2, 1990
- [8] F. LENE, Contribution à l'étude des matériaux composites et de leurs endommagement, Thèse de doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques, juillet 1984
- [9] J.-L. LIONS, *Perturbations Singulières dans les problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes in Mathematics no 323, Springer - Verlag, 1973