



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

## THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Salim BELOUETTAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19971245
Cote	S/M3 97/59
Loc	Magasin

Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

**SPECIALITE :** SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
**OPTION :** MÉCANIQUE

**VARIABLES INTERNES ET  
SAUT DE VITESSE EN RHÉOLOGIE**

Soutenue 29 Août 1997 devant le jury composé de :

**C. Cunat** : ENSEM LEMTA VANDOUÈVRE  
**Y. Rémond** : Ecole des Hauts Polymères de Strasbourg  
**J.D.Weber** : Université de METZ  
**J.C.Roth** : Université de METZ  
**G.Ferron** : Université de METZ  
**M.Berveiler** : Université de METZ

Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Co-Directeur de thèse  
Examinateur  
Examinateur

Laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux  
U.R.A C.N.R.S. 1215  
Université de Metz, île du Saulcy, 57045 Cedex 01

---

## REMERCIEMENT

Le travail de recherche présenté dans ce document a été réalisé au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) de l'I.S.G.M.P de l'Université de Metz, sous la direction de Monsieur le Professeur J.D.WEBER, à qui je suis reconnaissant d'avoir assuré avec beaucoup de rigueur, de dynamisme, de gentillesse et d'amitié, le suivi scientifique de ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur BERVEILER, Professeur à l'Université de Metz, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'examiner ma thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur C. CUNAT, Professeur à l'ENSEM - LEMTA - de Vanouevre Nancy d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail et de participer au jury.

M. Y. RÉMOND, professeur à l'école des Hauts polymères de Strasbourg d'avoir accepté d'être le rapporteur et de participer au jury.

j'exprime également ma profonde gratitude à Monsieur J. C. ROTH professeur de l'université de Metz qui a co-dirigé cette thèse, pour son aide constante, des conseils et l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

je tient à remercier Monsieur G.FERRON, Professeur de l'université de Metz pour l'intérêt qui a porté à ce travail en participant au jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous ceux qui m'ont soutenu toutes ces années, pour leur aide précieuse.

Mes remerciements à l'ensemble de mes amis du LPMM et à tout le personnel de la librairie Hisler-Even à Metz dont la cordialité et l'amitié resteront inoubliables

# SOMMAIRE

**Avant propos**  
**Notations Utilisées**  
**Formulaire de Rhéologie**

**Introduction**

**Rappel MMC**

**Cinématique des Milieux Continus**  
**Description d'un milieu continu**  
**Déformation et tenseur de déformation**  
**Notion de champ de déplacement**  
**Tenseur de vitesse de déformation**

**Les lois de conservation**

**Conservation de masse**  
**Tenseur de moments**  
**Tenseur de contraintes de Cauchy**  
**Tenseur de Piola kirchoff**

**Rappel de la T.P.I**

**Etat local**  
**Variables Observables**  
**Variables internes**  
**Définition de la variable thermodynamique**

**Modèles et expériences pour les milieux solides**

**Tests standards et équations rhéologiques**

## **2. Bibliographe**

**Introduction**

**Points de vue de Mandel**

**Déformation plastique non visqueuse**  
**Cas du monocristal**

**Point de vue de Rice**

**Point de vue Valanis**

**Point de vue halphen et Son**

**Elasticité**  
**Viscoplasticité**

**Point de vue de J.D Weber**

**Point de vue de Bassout Lillich**

**Point de Chaboche**

**Point de vue de Perzyna**

**Conclusion**

### **3. Formalisme à Variables internes**

**Introduction**

**Principe d'indifférence matérielle**

**Objectivité**

**Conclusion**

**Sur le second principe de la thermodynamique**

**Convexité**

**Définition des Comportements rhéologiques**

**Elasticité**

**Viscosité**

**Cas d'une seule variable interne**

**Conditions sur les fonctions matérielles**

**Cas du saut de vitesse**

**Unicité de la déformation quasi statique**

**Position du problème**

**Unicité**

**Différentes formes de l'équation (SM)**

**Equation de vitesse de déformation**

**Equation en module Tangents**

**Equation en vitesse de déformation plastique**

**Courbes de traction à partir de l'équation (SM)**

**Courbes dynamiques**

**Courbes Quasi statique**

**Courbes intermédiaires (statiques)**

**Courbes à vitesse de déformation constantes**

**Fluage**

**Relaxation**

**Effets inélastiques**

**Conditions imposées par le second principe de Clausius-Duhem**

**Cas de la viscoplasticité**

**Conclusion**

### **4. Modèles Rhéologiques**

**Introduction**

**Modèle de Maxwell**

**Modèle de Kelvin Voigt**

**Modèle Zéner**

**Modèle Complexes**

**Chaîne de Maxwell  $n = 2$ .**

**Modèles non linéaires**

**Viscoélasticité non linéaire**

**Continu tridimensionnel**

**Cas du corps de Maxwell  
Évolution de la variable interne**

**5. Expérimentation**

**Différents type de comportements rhéologiques  
Essais mécaniques  
Caractéristiques des matériaux  
Géométrie des éprouvettes  
Dispositif de traction**

**Généralités  
Approche mécanique  
Approche moléculaire  
Approche à variable internes**

**Elastomères**

**Thermoplastiques**

**Polyéthylène  
Polypropylène**

**Métaux**

**Cuivre  
Zinc**

**Alliage à mémoire de forme (CuAlBe)**

**Conclusion**

**Bibliographie**

**Annexes**

**Annexe 1.  
Annexe 2.  
Annexe 3.**

## Notations utilisées

$V$	Domaine de $\mathcal{R}_3$ , représentant la configuration de référence d'un corps.
$S$	Surface, frontière de $V$ , sur laquelle on distingue $S_u$ et $S_\theta$
$a$	Point de $\mathcal{R}_3$ , de coordonnées $a_i$ dans un repère orthonormé.
$x$	Point de $\mathcal{R}_3$ , de coordonnées $x_i$
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\phi$	Energie libre, fonction scalaire rapportée à l'unité de volume en configuration initiale
$F$	Tenseur gradient de la transformation: $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j}$
$\theta$	Tenseur de contraintes de Boussinesq défini dans $V$ : $\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{ij}}$
$u$	Vecteur arbitraire défini dans $V$ .
$t$	Variable scalaire représentant le temps
$\xi$	Point de $\mathcal{R}_n$ dont les coordonnées sont les variables internes scalaires.
$F$	Mesure algébrique de la force
$\sigma$	Contrainte rapportée à la configuration de référence
$X$	Forces thermodynamiques associées aux variables internes
$\Omega$	Potentiel de dissipation, fonction scalaire de $\xi$ et de $X$
$\Omega^*$	Potentiel de dissipation dual: transformée de Legendre du potentiel de dissipation
$L$	Enthalpie
$E$	Module d'élasticité
$\varepsilon$	Déformation rapportée à la configuration d'origine
$\varepsilon^p$	Déformation plastique
$l$	Longueur d'une éprouvette
$l_0$	Longueur initiale d'une éprouvette
$\lambda, \mu$	Coefficient de Lamé
$f(t)$	Fonction de fluage
$r(t)$	Fonction de relaxation
$C.E$	Critère d'énergie
$\Delta$	Tenseur de déformation de Green Lagrange: $\Delta = \frac{1}{2}(F^t F - I)$
$\pi$	Tenseur de contraintes de Piola Kirchoff
$\alpha, \beta$	Fonctions scalaires
$r$	Tenseur orthogonal à déterminant positif

## Formulaire de Rhéologie

### Déformation

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$	dilatation linéaire
$\dot{\varepsilon}$	vitesse de dilatation
$\gamma = \frac{d_c}{h}$	déformation de cisaillement: $h$ est la hauteur de l'échantillon, $d_c$ déplacement de cisaillement
$\dot{\gamma}$	vitesse de cisaillement
$\varepsilon_{ij} (i = j)$	dilatation dans la direction $Ax_{i(i=1,2,3)}$
$\varepsilon_{ij} (i \neq j)$	la demi distorsion changée de signe pour les directions $Ox_iOx_j$ (variat. de l'angle initial. droit)
$\varepsilon_{per}$	déformation permanente obtenue après annulation de la contrainte et au bout d'un temps infini

### Contrainte

$\sigma = \frac{F}{S}$	contrainte de traction simple
$\tau = \frac{F_c}{S}$	contrainte de cisaillement. $F_c$ force de cisaillement
$\vec{T}(\vec{n})$	vecteur contrainte pour l'élément de surface de normale unitaire $\vec{n}$ .
$\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$	état de contrainte isotrope; p la pression

### Elasticité isotrope linéarisé

$\sigma = E\varepsilon$	relation de Hooke, $E$ module élastique
$\varepsilon' = -\nu\varepsilon$	dilatation transversale, $\nu$ coefficient de Poisson
$\tau = G\gamma$	$G$ module de cisaillement

### Comportement visqueux

$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$	la vitesse de dilatation (déformation) conserve la même valeur au cours de l'essai.
$\tau = g(\gamma, \dot{\gamma})$	la vitesse de cisaillement conserve la même valeur au cours d'un même essai
$\tau = g(\dot{\gamma})$	comportement purement visqueux en cisaillement
$\sigma = f(\dot{\varepsilon})$	comportement purement visqueux en cisaillement
Fluide:	sans un état de contrainte isotrope, il se déforme indéfiniment.
viscoélastique:	corps présentant de la viscosité sans être purement visqueux
viscoplastique:	corps présentant de la viscosité avec déformations permanentes
comportement rhéologique:	relation entre contrainte, déformation et leurs dérivées par rapport au temps

viscoélasticité linéaire:  $\varepsilon(t) = \int_0^t f(t-u)d\sigma(u)$ , f: fonction de fluage;  $\sigma(0) = 0$

$\sigma(t) = \int_0^t r(t-u)d\varepsilon(u)$  r fonction de relaxation  $\varepsilon(0) = 0$

### Equation de Norton Hoff

$\sigma = \alpha\varepsilon_n\dot{\varepsilon}_m$	
$\tau = \alpha\gamma_n\dot{\gamma}_m$	décrit un comportement rhéologique présentant de la viscosité.



## 1 - Introduction.

La thermodynamique des processus irréversibles, basée sur les variables internes, peut être utilisée comme base pour établir les équations de comportement rhéologiques des solides viscoélastiques, viscoplastiques et plastiques.

Le concept des variables internes a été introduit en thermodynamique par Onsager [44] et appliqué à la mécanique des milieux continus par Eckart [13], Biot [6], Zeigler [65], Coleman et Gurtin [10], Valanis [57], Kestin et Rice [23], Weber [61] et d'autres.

Biot [6] avait essayé d'établir des lois phénoménologiques linéaires avec un principe variationnel, Zeigler [65] avait étendu cet essai à des matériaux non linéaires.

Coleman et Gurtin [10] avaient montré que la thermodynamique, fondée sur le concept des variables internes, aboutit à des résultats similaires à ceux obtenus par la thermodynamique basée sur le principe de la mémoire évanescence si les équations constitutives pour les variables internes satisfont certaines conditions.

Valanis [57] avait montré qu'en linéarisant les équations d'évolution par rapport aux variables internes, une loi viscoélastique de type intégrale peut être déduite.

Kestin et Rice [23] avaient confronté les deux formalismes, respectivement, à variables internes, et le formalisme fonctionnel; il apparut la question : " est ce que le formalisme à variables internes peut contenir la description physique des matériaux réels ". Sans répondre à la question, Kestin et Rice ont procédé au développement du formalisme à variables internes pour obtenir l'équation constitutive viscoélastique et plastique.

Weber [61] avait également utilisé les relations d'Onsager pour décrire le comportement viscoélastique non linéaire du polyéthylène en établissant une relation linéaire reliant la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation.

Pour décrire un milieu présentant des effets mémoires, deux approches peuvent être utilisées :

1- L'approche fonctionnelle, qui considère les variables dépendantes à l'instant ( $t$ ) (énergie libre, entropie, contrainte, etc.) comme étant fonctionnelles de l'histoire des variables observables (déformation, température, etc.) jusqu'à l'instant ( $t$ ).

2- Une seconde approche qui conduit à notre avis à une théorie plus maniable, et que nous allons adopter dans la suite de notre propos, utilise les variables internes: variables introduites pour

caractériser la structure interne du matériau. Les variables dépendantes (énergie libre, potentiel de dissipation, entropie, contraintes, etc.) deviennent fonction à l'instant ( $t$ ) des variables observables et d'un certain nombre de variables internes. Dans cette approche, la loi de comportement doit être nécessairement complétée par une loi d'évolution de chaque variable interne ( dérivée de la variable interne par rapport au temps).

Plusieurs travaux ont été consacrés pour développer l'une et l'autre des approches et les relations qui existent entre elles. Ces travaux montrent que le choix de l'une ou de l'autre est surtout question de goût et de commodité.

Les partisans de l'approche fonctionnelle, pour sa généralité, affirment que c'est la description naturelle d'un système en évolution, et considèrent la deuxième comme un cas particulier de la première. Les partisans de la deuxième approche considèrent la première comme résultat de notre incapacité à comprendre tout à fait les phénomènes physiques.

En viscoélasticité, le concept de mémoire évanescence justifie l'utilisation par plusieurs auteurs de l'approche fonctionnelle [11], [36]. La viscoélasticité recouvre des phénomènes physiques très variés, et d'autre part les variables internes n'ont pas une signification physique précise, ce qui justifie l'approche fonctionnelle: généralisation des intégrales héréditaires en théorie linéaire.

L'approche fonctionnelle est pratiquement inutilisable pour des milieux ne présentant pas de mémoire évanescence, à quelques exceptions près toutes les théories utilisent les variables internes.

D'une manière générale l'approche à variables internes est basée sur la thermodynamique des processus irréversibles (T.P.I.) et en particulier sur l'inégalité de Clausius-Duhem qui est une expression locale du second principe de la thermodynamique.

L'approche utilisant les variables internes est un cas particulier de l'approche fonctionnelle, dans le sens où l'intégrale de la loi d'évolution donne la variable interne comme fonctionnelle de l'histoire des variables observables. Cette approche a l'avantage d'une part d'être plus maniable, ne faisant intervenir qu'un certain nombre limité de variables, et d'autre part elle utilise des résultats de la thermodynamique des processus irréversibles, ce qui est très important pour assurer un comportement raisonnable.

L'utilisation de l'approche à variables internes en viscoélasticité est intéressante et fructueuse pour ce qu'elle peut apporter en notion de modèles rhéologiques linéaires ou non linéaires.

L'utilisation des modèles rhéologiques permet une compréhension claire et profonde des mécanismes mécaniques, ceci est d'une importance capitale en modélisation. Le but que nous nous proposons en viscoélasticité est de montrer que l'utilisation des variables internes permet de décrire

des comportements rhéologiques par des équations simples et valables et ayant un appui physique significatif.

Dans notre travail, nous nous appuyons sur des modèles rhéologiques simples présentant de l'élasticité instantanée.

Nous nous limiterons à une seule variable interne, ce qui paraît restrictif par rapport à la généralité. Ceci est justifié par le fait que les variables internes appropriées et leurs équations d'évolution ne sont pas faciles à identifier; et que nous sommes attachés à comprendre à travers l'utilisation d'une seule variable interne scalaire le comportement rhéologique de corps réels. Nous visons, par ceci, un maximum de résultats avec un minimum de moyens, donc le modèle le plus simple possible.

Nous sommes convaincus que l'utilisation d'une seule variable interne peut être effectivement utilisée comme première approximation pour modéliser le comportement rhéologique de plusieurs types de matériaux.

Le présent travail est consacré à la construction, à l'aide d'une seule variable interne scalaire, d'une équation constitutive du comportement rhéologique des matériaux tout en s'appuyant sur les résultats de la thermodynamique des processus irréversibles .

En effet, en se donnant une énergie libre  $\phi(\epsilon, \xi)$ , un ensemble de variables internes notées collectivement  $\xi$  et en se posant les relations  $\dot{\xi}_u = f_u(\epsilon, \xi)$  qui définissent l'évolution des variables internes pour une déformation  $\epsilon(t)$  donnée; la relation de Coleman permet de retrouver la contrainte

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \tag{I.1}$$

Tenant compte de l'équation (I.1) et du fait que l'énergie libre dépend des variables internes et de la déformation, on obtient après différentiation

$$d\sigma = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} d\epsilon + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} d\xi \tag{I.2}$$

La dérivation par rapport au temps de l'équation (I.1) permet d'écrire :

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon^2} \dot{\epsilon} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon \partial \xi} \dot{\xi} \tag{I.3}$$

Dans le cas d'une seule variable interne, l'équation (I.3) est réduite à une relation linéaire reliant la vitesse de contrainte à la vitesse de déformation, qui en éliminant la variable interne devient

$$\dot{\sigma} = \alpha(\epsilon, \sigma) \dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma) \tag{I.4}$$

$$\text{avec } \alpha(\varepsilon, \sigma) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} \text{ et } \beta(\varepsilon, \sigma) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \xi} \dot{\xi}$$

L'équation (I.4) peut s'écrire sous la forme d'une relation linéaire entre le module tangent et l'inverse de la vitesse de déformation :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \alpha(\varepsilon, \sigma) + \frac{\beta(\varepsilon, \sigma)}{\dot{\varepsilon}} \quad (\text{I.5})$$

$\alpha(\varepsilon, \sigma)$  et  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  dépendent de l'histoire de déformation mais ne changent pas dans une discontinuité de la vitesse de déformation.

Pour prouver la validité de notre démarche, des essais mécaniques ont été réalisés sur plusieurs matériaux (polyéthylène, polypropylène, cuivre, zinc, alliage à mémoire de forme, etc.). La validité de nos équations est jugée par le pouvoir prédictif de celles-ci.

#### **Le présent travail comporte cinq parties :**

La première partie est un rappel de notions et concepts de base et principes généraux de mécanique des milieux continus, nous avons présenté quelques éléments de cinématique, de bilans d'énergie, de lois de conservation et de thermodynamique des processus irréversibles

La deuxième partie, se veut bibliographique, présentée sous forme de différents points de vues des chercheurs ayant apporté par leurs travaux énormément à la mécanique, à travers l'utilisation de la thermodynamique des processus irréversibles

Dans la troisième partie, nous avons présenté le formalisme à variables internes développé dans le groupe à partir d'une théorie de variables internes pour des déformations finies.

Dans la quatrième partie, nous montrerons la validité du formalisme proposé par l'utilisation d'assemblage de ressorts et d'amortisseurs simples et complexes.

La cinquième partie de ce travail est expérimentale. Pour formuler le modèle mathématique semi-empirique à travers des équations semi linéaires, des essais de traction simple avec et sans saut de vitesse sur plusieurs types de matériaux permettent une validation du formalisme proposé et une mise en évidence de l'importance du cas simple d'une seule variable interne de type scalaire. Le diagnostic du comportement des matériaux sous l'étude passe, à priori, par l'analyse de l'aspect technique de l'expérimentation à travers le type de machine et les conditions d'essais. Avant d'aborder les différentes constantes du modèle propre à chaque matériau, nous anticiperons en donnant à chaque fois un aperçu sur le comportement du matériau à travers le commentaire d'un essai de chargement.

# Chapitre 1.

## Rappel de MMC

Page 13

### 1.1. Cinématique des milieux continus

Page 13

1.1.1. Description d'un milieu continu.

1.1.2. Déformation et tenseur de déformation.

1.1.3. Notion de champ de déplacement.

1.1.4. Tenseur de vitesse de déformation.

### 1.2. Les lois de conservation.

Page 19

1.2.1. Conservation de masse

1.2.1.1. Conservation des moments.

1.2.1.2. Tenseur de contrainte de Cauchy

1.2.1.2. Tenseur de Piola Kirchoff.

### 1.3. Rappel de la T.P.I (Thermodynamique de Processus Irréversibles)

1.3.1. Etat local

Page 21

1.3.2. Variables observables

1.3.3 Variables internes

1.3.4. Définition des variables thermodynamiques

### 1.4. Modèles et expériences pour les milieux solides

Page 25

1.4.1. Tests standards et équations rhéologiques

# 1.- Notions de Mécanique des Milieux Continus

L'objet de ce chapitre est de résumer quelques concepts de base et principes généraux de la mécanique des milieux continus. Dans ce but, sont présentés des éléments de cinématique, les lois de bilan d'énergie, les tenseurs de contraintes, et les lois constitutives. Toutes les fonctions présentées ici sont supposées suffisamment régulières. Les notations classiques sont utilisées  $\nabla$ ,  $div$ ,  $Div$ , successivement pour le gradient, l'opérateur de divergence vectorielle et l'opérateur de divergence tensorielle. Pour chaque tenseur  $T$ , nous notons par  $T^T$  son transposé, par  $tr(T)$  sa trace. La règle de sommation à travers les indices répétés est utilisée tout au long de notre propos.

## 1.1. Cinématique des milieux continus

Nous commençons cette partie en présentant quelques idées de base sur la théorie de la déformation. Ensuite nous introduisons le tenseur de grande déformation et le tenseur de petite déformation, et nous présentons leurs interprétations physiques.

### 1.1.1. Description d'un milieu continu

Littéralement, le mot milieu continu laisse entendre, un corps qui remplit complètement l'espace qu'il occupe, sans laisser des espaces vides ou des pores. Cette propriété est décrite mathématiquement par l'utilisation de fonctions continues. Un milieu continu peut se définir comme étant un ensemble de particules.

Supposons dans ce qui suit, une origine  $O$  et une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  choisie dans un espace euclidien tridimensionnel, identifiable à l'espace  $\mathfrak{R}^3$ . Le vecteur  $Ox$  est représenté par  $x$ .

Considérons un corps occupant à l'instant  $t=0$  le domaine  $V$  partie de  $\mathfrak{R}^3$  et de frontière  $S$ , dans sa présente configuration.  $V$  occupe au temps  $t>0$  le domaine  $V_t$  de  $\mathfrak{R}^3$ .  $V$  est appelé configuration de référence ou configuration non déformée,  $V_t$  est appelée configuration actuelle ou configuration déformée du corps.

Soit  $X=(X_1, X_2, X_3)$  la position d'une particule dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à l'instant  $t=0$  et soit  $x=(x_1, x_2, x_3)$  la position de la même particule à l'instant  $t>0$ ; les composantes du vecteur  $X=(X_1, X_2, X_3)$  sont appelées les coordonnées Lagrangiennes de la particule ou du point  $P$ ; les composantes du vecteur  $x=(x_1, x_2, x_3)$  sont appelées coordonnées Euleriennes ou coordonnées spatiales du point  $P$ . Toute description utilisant les composantes du vecteur  $X$ , comme variable indépendante est appelée Description Lagrangienne; de la même manière, toute description, utilisant les composantes du vecteur  $x$  comme variables indépendantes, est appelée description Eulérienne ou spatiale.

Le mouvement du corps est déterminé par la position  $x$  du point matériel, définie comme fonction de la position de référence  $X$  et du temps  $t$ , notée  $\chi$  continue et injective pour  $t > 0$

$$\chi: V \rightarrow \mathcal{X}(V, t) = V_t \quad (1.1)$$

$$x = \chi(X, t) \quad (1.2)$$

La dérivée d'une fonction  $f$  quelconque, scalaire ou vectorielle, définie dans un repère lagrangien par rapport à  $X$  constant, est appelée dérivée lagrangienne ou matérielle de  $f$  notée  $\frac{df}{dt}$  ou  $\dot{f}$

$$\dot{f}(X, t) = \frac{df}{dt}(X, t) \quad \forall X \in V, t > 0 \quad (1.3)$$

Si la fonction  $f$  est définie dans une configuration actuelle, donc dépendant de  $x$  et  $t$ , sa dérivée spatiale notée  $\frac{df}{dt}$  est généralement différente de la dérivée matérielle; plus précisément, nous avons :

$$\dot{f}(x, t) = \frac{df}{dt}(x, t) = \frac{df}{dt}[\chi(X, t), t] = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) \frac{\partial \chi}{\partial t}(x, t). \quad (1.4)$$

En utilisant la notation  $\nabla_x$  pour le gradient Eulérien de  $f$ , (1.4) s'écrit

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + (v \nabla_x) f. \quad (1.5)$$

avec  $v$ , la vitesse de la particule, donnée par :

$$v = \dot{x} = \frac{d}{dt} \chi(X, t). \quad (1.6)$$

L'accélération de la particule est donnée par :

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2} \chi(X, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla_x) v. \quad (1.7)$$

### 1.1.2. Déformation et tenseurs de déformation

La déformation de la configuration de référence  $V$  est une fonction  $\chi$  définie par l'équation (1.1) pour tout temps positif.

### 1.1.2.1. Notion de gradient de la déformation

Pour chaque point de  $V$ , la matrice  $F$  définit la déformation en configuration lagrangienne.  $F$  est appelé le tenseur gradient de la déformation et est donné par :

$$F = (F_{ij}), F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (1.8)$$

Le déterminant de  $F$  mesure le changement local de volume; si on note par  $dX$  l'élément de volume au point  $X$  de la configuration de référence et par  $dx$  l'élément de volume au point  $x$  de la configuration actuelle nous avons

$$dx = |\det F| dX \quad (1.9)$$

Pour avoir un comportement raisonnable, il faut éviter la compression à un volume nul, ceci n'est possible que si  $\det F > 0$ , l'équation (1.9) devient

$$dx = (\det F) dX \quad (1.10)$$

Un milieu incompressible est caractérisé par  $\det F = 1$ .

### 1.1.3. Notion de champ de déplacement

Il est souvent convenable d'introduire la notion de déplacement, caractérisé par le vecteur champ déplacement  $u: V \rightarrow \mathfrak{R}^3$ , défini par :

$$x = X + u(X, t) \quad \forall X \in V \quad (1.11)$$

Soit  $H$ , le gradient du vecteur déplacement, défini par

$$H = \nabla_X u \left( H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (1.12)$$

Le gradient de déplacement  $H$  et le gradient de transformation  $F$  sont reliés par la relation suivante

$$F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij} \quad (1.13)$$

avec :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$



### 1.1.4. Tenseurs de déformation.

Introduisons maintenant le tenseur symétrique,  $C$ , appelé tenseur de déformation de Cauchy-Green droit, défini par :

$$C = F^T F \quad (C_{ij} = F_{ki} F_{kj}) \quad (1.14)$$

Pour voir la signification physique d'un tel tenseur; faisons les transformations mathématiques suivantes :

$$|dx|^2 = dx \cdot dx = (FdX) \cdot (FdX) = (F_{ki} dX_i) \cdot (F_{kj} dX_j) = F_{ki} F_{kj} dX_i dX_j \quad (1.15)$$

donc

$$|dx|^2 = C_{ij} dX_i dX_j = dX C dX \quad (1.16)$$

La connaissance du tenseur  $C$  permet de calculer le module du vecteur infinitésimal  $dx$  dans la configuration déformée, et une bonne mesure de la déformation dans sa forme et dans sa taille.

La comparaison d'un élément déformé avec sa forme initiale, passe par la mesure de la déformation relative, définie par le tenseur  $E$ , appelé tenseur de grande déformation ou tenseur de Green-Saint Venant

$$E = \frac{1}{2}(C - I_3) \quad (1.17)$$

Le tenseur  $E$  caractérise la différence des carrés des modules de longueurs infinitésimales initial et final de l'élément de matière, comme dans l'équation (1.9).

$$|dx|^2 - |dX|^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j \quad (1.18)$$

Le tenseur  $E$  est non linéaire en  $u$ . Dans le but de linéariser ces relations, nous devons supposer que  $|H| \ll 1$ , et nous négligeons les développements d'ordre 2 et plus. Dans ce cas précis, le tenseur  $\varepsilon$  appelé tenseur de petites déformations donnée par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_x u + \nabla_x^T u) \quad (1.19)$$

En utilisant la même approximation, c'est à dire  $|H| \ll 1$ , nous avons  $\varepsilon \approx E$ . Le tenseur de petites déformations,  $\varepsilon$ , a le même sens physique que  $E$ .

Dans une théorie linéarisée, le gradient dans une configuration actuelle d'une fonction  $f$  est de l'ordre de  $\eta = |H|$ ; de même le gradient de la fonction  $f$  dans une configuration de référence est du même ordre et inversement; d'où le constat suivant :

$$\nabla_x f \approx \nabla_X f \quad (1.20)$$

Comme conséquence à (1.20), nous pouvons dire qu'en petites déformations, il n'y a pas de distinction entre les deux types de variables (Lagrangienne et Eulérienne)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla_x u + \nabla_x^T u) \quad (1.21)$$

ou encore

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (1.22)$$

L'hypothèse de petites déformations suppose que la configuration d'un corps ne varie pas durant la période de temps considérée; en d'autres termes, on peut confondre les variables d'Euler et de Lagrange, ce qui revient à négliger les termes du second ordre dans les développements. Donc pour toute fonction  $f(x, t)$ , la dérivée matérielle et la dérivée partielle par rapport au temps sont identifiables.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.23)$$

En pratique, l'hypothèse des petites déformations peut être appliquée tant que le carré du module de la déformation reste inférieur à l'ordre de grandeur de la précision de calcul envisagé. Lorsque l'hypothèse de petites déformations n'est pas applicable, on introduit de nouvelles notions géométriques de la déformation.

La règle de partition utilisée en petites déformations  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ , se généralise en grandes déformations en introduisant une configuration intermédiaire relâchée (fig. 1.1). Avec  $E$  la transformation élastique entre l'état actuel et l'état relâché, et  $P$  la transformation inélastique entre la configuration intermédiaire et initiale, nous avons les relations :

$$\begin{aligned} F &= E \cdot P \\ \Delta^e &= \frac{1}{2}(E^T E - I) \\ \Delta^p &= \frac{1}{2}(P^T P - I) \end{aligned}$$

La notion de configuration intermédiaire ou relâchée (une décomposition multiplicatrice du tenseur gradient de déformation) a été introduite en mécanique des milieux par Lee [36] suite à une idée qui revient à des travaux anciens d'Eckart [12]. Cette transformation généralise aux grandes déformations la décomposition d'une déformation en deux parties, et permet d'introduire une variable interne tensorielle ayant une signification physique [19].

La notion de configuration relâchée (obtenue par relâchement de contraintes) permet de construire un modèle de Maxwell en grande déformation ([31], [2]). Nous montrerons dans le chapitre suivant comment l'introduction de configurations intermédiaires permet la description de matériaux en

grandes déformations.

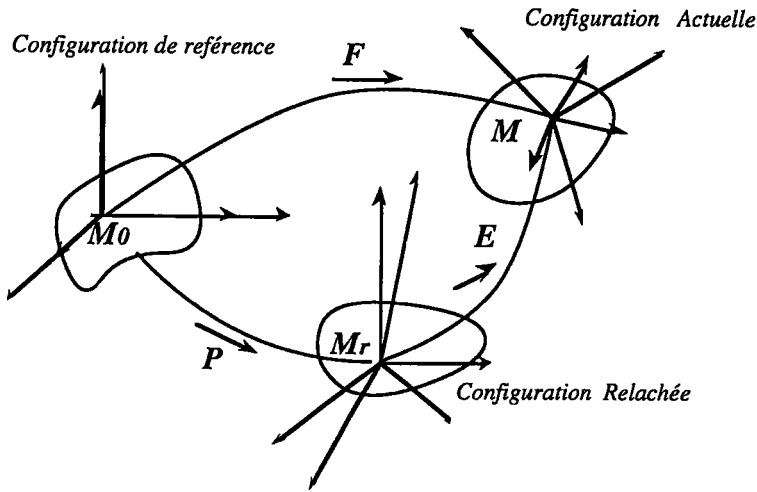


Figure.1.1. Décomposition des déformations.

### 1.1.5. Le tenseur de vitesse de déformation

Soit  $L$  le gradient de la vitesse dans une configuration actuelle, donné par :

$$L = \nabla_x v \quad \left( L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.24)$$

La relation entre  $L$  et le gradient de la déformation suit la chaîne de règle suivante :

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (1.25)$$

donc

$$L = \dot{F} F^{-1} \quad (L_{ij} = \dot{F}_{ik} F_{kj}^{-1}) \quad (1.26)$$

La partie symétrique de  $L$  est appelée tenseur de vitesse de déformation , et elle est notée par  $D$ :

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T) = \frac{1}{2}(\nabla_x v + \nabla_x^T v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.27)$$

soit

En utilisant les relations précédentes, nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{dt} (|\overline{dx}|)^2 = 2D_{ij} dx_i dx_j \quad (1.28)$$

Donc, le tenseur de vitesse de déformation,  $D$ , détermine la vitesse de variation des distances entre deux points matériels adjoint dans une configuration eulérienne.

De la même façon, nous définissons le tenseur de vitesse de rotation,  $W$ , par :

$$W = \frac{1}{2}(L - L^T) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (1.29)$$

Le tenseur,  $W$ , caractérise la vitesse instantanée de rotation d'un point dans sa configuration actuelle.

## 1.2. les Lois de conservation

Le problème consiste alors à déterminer le champ de vitesses  $v$  et le champ de contraintes  $\sigma(x, t)$  en chaque point  $x$  du volume  $V$  et pour tout temps  $t$  positif.

Pour décrire l'évolution des milieux continus, et déterminer leur champ de contraintes  $\sigma(x, t)$  et leur champ de vitesses  $v$ , en tout point  $x$ ; deux classes d'équations sont utilisées: les lois de conservations et les lois constitutives.

Les lois de conservation expriment les principes fondamentaux de la mécanique appliqués aux milieux continus. Il y a trois types de ces équations en mécanique des milieux continus, exprimant la conservation de masse, la conservation de moments et la conservation d'énergie. Les lois constitutives caractérisent les propriétés physiques du matériau donnée.

### 1.2.1. Conservation de masse

Soit  $\rho$  une densité de masse et  $v(x, t)$ , la vitesse du point  $x$  au temps  $t$ . Écrit sous forme différentielle en configuration actuelle, le principe de conservation de masse prend la forme :

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho v) = 0 \quad (1.30)$$

En introduisant la dérivée matérielle définie par :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + v \nabla h = \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (1.31)$$

On obtient l'équation de conservation de masse sous sa forme la plus habituelle

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} v = 0 \quad (1.31 a)$$

L'équation (1.31 a) représente la loi de conservation de masse dans une description dans une configuration actuelle ou eulérienne.

## 1.2.2. La loi de conservation des moments

Considérons un milieu continu occupant à l'instant  $t > 0$  la configuration déformée  $V_t$ . L'action des forces extérieures sur le corps est décrite par le champ forces de volume défini par un champ de vecteur  $b$  appelé densité de force de volume par unité de masse. Les forces de surface sont représentées par le champ de vecteur  $\tau$  dépendant du point  $x$  et de la direction de la normale  $n$  à la surface extérieure. Le vecteur  $\tau(x, n, t)$  est appelé vecteur de contrainte de Cauchy appliqué à un élément de surface orientée de normale  $n$  ou densité de force par unité de surface en configuration déformée.

La troisième loi de Newton permet d'écrire

$$\tau(x, n, t) = -\tau(x, -n, t) \quad \forall x \in V_t \quad (1.32)$$

La projection du vecteur  $\tau$  sur  $n$  est appelée contrainte normale, et la projection de  $\tau$  sur le plan tangentiel est appelée contrainte tangentielle ou de cisaillement.

Deux principes généraux de la mécanique, valables pour tous les milieux continus, permettent d'écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho n \cdot dx = \int_{V_t} \rho b \cdot dx + \int_{\partial V_t} \tau ds \quad (1.33)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} x \wedge \rho n \cdot dx = \int_{V_t} x \wedge \rho b \cdot dx + \int_{\partial V_t} x \wedge \tau ds \quad (1.34)$$

Les équations (1.33) et (1.34) sont les équations de conservation des moments et représentent une seconde version de la seconde loi de Newton pour les milieux continus.

### 1.2.1.2. Le tenseur de contrainte de Cauchy

Une des conséquences les plus importantes de la loi de conservation des moments, et un des plus importants résultats de la mécanique des milieux continus établi par Cauchy est la notion du tenseur de Cauchy.

Le vecteur de Cauchy  $\tau(x, n, t)$  est linéaire par rapport à la normale  $n$ ; ceci permet de définir un tenseur de second ordre  $T(x, t)$ . Une seconde conséquence est que le tenseur  $T$  est symétrique pour tout  $x$  de  $V_t$ . La troisième conséquence est que le champ de tenseur  $T$  et le champ de vecteur  $b$  sont reliés par une équation différentielle dans  $V$ . Le principe de conservation des moments implique l'existence d'un champ de tenseur continu  $T$ , de classe  $C^1$  tel que:

$$\tau(x, v, t) = T(x, t)v \quad \forall x \in V_t \quad t > 0 \quad (1.35)$$

$$\rho a = \text{Div}_x T + \rho b \quad (1.36)$$

$$T(x, t) = T^T(x, t) \quad (1.37)$$

Le tenseur  $T(x, t)$  est appelée tenseur de contrainte de Cauchy au point  $x \in V_t$

### 12.1.3. Tenseur de Piola-Kirchoff

Les équations du mouvement en configuration déformée sont exprimées en termes de variables d'Euler qui sont elles mêmes inconnues dans un problème. Pour surmonter cette difficulté, il est bon d'écrire ces mêmes équations en termes de variables de Lagrange. Pour cela, commençons par introduire le premier tenseur de Piola-Kirchoff défini pour tout  $X \in V$  par:

$$S(X, t) = \det(F)T(\chi(X, t), t)F^{-T}(X, t) \quad (1.38)$$

avec

$$SF^T = FS^T \quad (1.39)$$

Le premier tenseur de Piola-Kirchoff est non symétrique, il est important de définir un tenseur symétrique dans la configuration de référence; c'est le but du second tenseur de Piola-Kirchoff,  $\Pi$ , défini par :

$$\Pi = F^{-1}S \quad (1.40)$$

$$\Pi = \Pi^T. \quad (1.41)$$

Dans une théorie linéarisée, le tenseur de contrainte de Cauchy et les deux tenseurs de Piola-Kirchoff coïncident. Pour cette raison, on utilise souvent l'approximation suivante:

$$\sigma = \Pi = S = T \quad (1.42)$$

## 1.3. Rappel sur la Thermodynamique des Processus Irréversibles (T.P.I.).

### 1.3.1. État local

L'état thermodynamique local, s'il existe, est déterminé d'une façon unique par la connaissance à l'instant,  $t$ , d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré ce sont les variables d'état appelées aussi variables thermodynamiques.

### 1.3.2. Variables observables

Ce sont les variables imposées par le formalisme de la mécanique et la thermodynamique des milieux continus. Exemple, en viscoélasticité isotherme, on se limite à la déformation totale, comme unique variable observable (fig.1.1).

La déformation totale et la température sont les seules variables observables qui interviennent dans les phénomènes d'élasticité, de viscoélasticité, de plasticité, de rupture et d'endommagement. Pour des comportements élastiques, l'état dépend uniquement de ces variables observables.

### 2.3. Variables internes

Pour les milieux dissipatifs, l'état actuel est connu quand la valeur actuelle de la déformation de la température et d'autres paramètres additionnels sont bien connus; ces paramètres sont appelés "variables internes" (en fait, la variable interne n'est interne que parce que l'on ne peut pas ou que l'on veut pas observer). L'ensemble de variables internes  $\xi_{i(i:1..n)}$ , représentées ici par une matrice colonne, peuvent être représentées par un tenseur du second ordre (par exemple les déformations internes dans un matériau, etc.) ou scalaire (degré d'avancement d'une réaction chimique ou d'une transformation, paramètre caractérisant la transformation moléculaire, taille de grains, durcissement, etc.), elles peuvent être des vecteurs dans les matériaux orientés.

Il n'existe pas de méthode objective pour choisir telle ou telle variable; notons que les travaux de Kröner [27] et Zarka [64] ont permis dans le cas des monocristaux de préciser la nature des variables internes (la densité de dislocation), et leurs lois d'évolutions.

Le concept des variables internes peut être simplement développé à l'aide de modèles simples unidimensionnels, par exemple sur le modèle standard de la figure (1.3.), à température donnée, les variables définissant l'état sont l'abscisse  $\xi$  du piston et l'abscisse  $q$  de l'extrême droite du modèle.

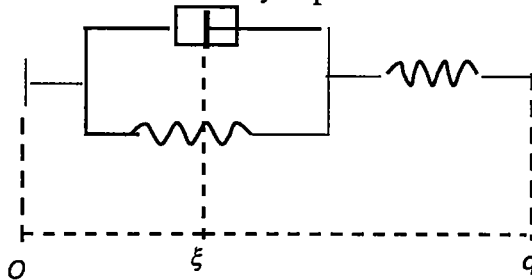


Figure 1.2. Modèle Standard ou de Zener.

Les variables internes sont des variables objectives donc invariantes dans tout changement de référentiel ou de configuration de référence, un changement brusque de la variable observable n'entraîne pas de discontinuité au niveau de la valeur de variable interne correspondante ( voir chap. 3.).

Dans l'analyse des comportements rhéologiques de type plastique ou viscoplastique, inélastiques

d'une façon générale, il y a parfois nécessité d'introduire la variable déformation plastique et viscoplastique comme variable interne. Elles se traduisent en petites déformations par la déformation associée à la configuration relâchée.

### 1.3.4. Définition des Variables Thermodynamiques

On considère un milieu continu en évolution quasi statique et isotherme. L'état actuel d'un élément de matériau est caractérisé par la donnée de l'ensemble des variables observables et des variables internes notées collectivement  $\xi$ .

Nous considérons l'énergie Libre comme étant fonction de l'état thermodynamique. L'énergie libre,  $\phi$ , par unité de volume est fonction de la déformation et de l'ensemble des variables internes. Elle est définie par :

$$\phi = \phi(\varepsilon, \xi) \quad (1.43)$$

Tenons compte de la première loi de la thermodynamique, exprimée ici sous la forme locale de l'équation de balance d'énergie (1.44), et du second principe de la thermodynamique qui, pour un système en évolution, postule que la production de l'entropie interne, notée  $S$ , est positive, nulle si le processus est réversible (Eq. 1.45).

$$\dot{\phi} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (1.44)$$

$$\dot{S} \geq 0 \quad (1.45)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem, forme locale du second principe de la thermodynamique, se traduit, pour des systèmes en évolution isotherme, par l'inégalité suivante :

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha \geq 0 \quad (1.46)$$

L'inégalité (1.46) est valable pour toute transformation irréversible. La vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  est spécifiée arbitrairement dans un état thermodynamique donné. Nous retrouvons ainsi la fameuse relation de Coleman qui définit la contrainte comme étant la dérivée de l'énergie libre par rapport à la déformation (1.47).

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (1.47)$$

Tenons compte de l'équation (1.47), l'inégalité de Clausius-Duhem (1.46) est réduite à l'inégalité suivante:



$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha \leq 0 \quad (1.48)$$

## 1.4. Modèles et Expériences pour les Solides

Les lois de conservation ne permettent pas une description complète d'un milieu continu. Les trois équations du mouvement ou d'équilibre par rapport à une configuration de référence, qui sont valables à échelle macroscopique, aboutissent à un système d'équations indéterminé avec neuf fonctions inconnues, les trois fonctions de déplacement et les six composantes du tenseur de contraintes. Il faut six équations complémentaires ou loi constitutives provenant de la nature même du milieu continu. Par loi constitutive il faut entendre une relation entre le tenseur de contrainte et le tenseur de déformation et leurs dérivées par rapport au temps. Les lois constitutives doivent satisfaire certains principes d'invariance tirés souvent de l'expérience. Pour cette raison nous donnons ici une description générale des essais standards et les informations qu'on peut en tirer pour la formulation de lois constitutives.

### 1.4.1. Tests standards et lois élastiques

Le diagramme de test le plus simple est le test de traction uni axiale. Considérons une éprouvette de longueur  $l_0$  et de section constante  $S$ , on définit la quantité  $\sigma$ , formulation eulerienne, par l'égalité

$$\sigma(t) = \frac{P(t)}{S} \quad (1.50)$$

La quantité  $\sigma$  est définie par l'équation (1.50) et interprétée comme étant la contrainte à l'instant  $t$ . On note par  $l(t)$  la longueur de l'éprouvette à l'instant  $t$ , on définit l'extension relative  $\varepsilon$  de l'éprouvette, dans une formulation lagrangienne, par :

$$\varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0}{l_0} \quad (1.51)$$

Les déformations élastiques sont étudiées par la théorie de l'élasticité. En élasticité linéaire, la contrainte et la déformation sont reliées par une relation simple, exprimée par la loi de Hooke.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.52)$$

ou  $E$  est le module d'élasticité de Young.

Plus généralement, on considère une relation non linéaire entre la contrainte et la déformation, de la forme

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (1.53)$$

La loi constitutive (1.53) permet de décrire des comportements élastiques non linéaires, où  $f$  est une fonction réelle non linéaire.

Dans une théorie classique de plasticité, il est supposé une relation de proportionnalité entre la vitesse de contrainte et la vitesse de déformation. Le coefficient de proportionnalité est fonction de la contrainte, de la déformation et de la vitesse de déformation:

$$\dot{\sigma} = \zeta(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon})\dot{\varepsilon} \quad (1.54)$$

Certains phénomènes mécaniques comme le fluage ou la relaxation, le chargement ou le déchargement et particulièrement le saut de vitesse, ne peuvent être décrits par une équation du type (1.53) ni du type plastique (1.54). Pour les raisons citées ci-dessus et de simplicité, nous proposons une loi constitutive plus sophistiquée; semi linéaire en vitesse de la forme

$$\dot{\sigma} = \alpha\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma). \quad (1.55)$$

Dans une théorie tridimensionnelle,  $\alpha$  est un tenseur symétrique d'ordre quatre et  $\beta$  est une fonction matérielle donnée. Une telle loi constitutive permet la description de plusieurs phénomènes rhéologiques observés expérimentalement.

## *Chapitre 2.*

### *Bibliographie*

*Page 27*

#### *2.1. Introduction*

*Page 27*

#### *2.2. Point de Vue de Mandel*

*2.2.1. Déformation plastique non visqueuse.*

*2.2.2. Cas du monocristal.*

#### *2.3. Point de vue de Rice*

#### *2.4. Point de vue de Valanis*

#### *2.5 Point de vue de Halphen et Son*

*2.5.1. Plasticité*

#### *2.5.2. Viscoplasticité*

#### *2.6. Point de vue de J.D. Weber*

#### *2.7. Point de vue de Bassout Lellich*

#### *2.8. Point de vue de Chaboche*

#### *2.9. Point de vue de Perzyna*

#### *2.10 Conclusion*

## 2. Bibliographie.

### 2.1. Introduction.

Les chercheurs dans le domaine de la mécanique des milieux continus ont assisté et contribué ces dernières années à une évolution significative de la théorie de la thermodynamique des processus irréversibles.

Les travaux d'Onsager [44] ont été suivis d'une grande activité voulant donner les bases thermodynamiques de la mécanique des milieux continus et de la viscoélasticité, entre autres, nous mentionnons ici à titre indicatif les travaux de Biot [6].

Cette activité avait suscité une divergence des opinions pour ce qui est de la validité des hypothèses émises. Ces hypothèses étaient souvent basées sur des intuitions physiques et dans certains cas trop restrictives.

En 1964 Coleman [10] a publié son traité sur la thermodynamique des matériaux à mémoire "Thermodynamics of materials with memory", ce travail de puissance et de profondeur avait donné un autre statut à la théorie d'Onsager.

Ici nous allons reprendre des points de vue de plusieurs chercheurs ayant apporté énormément, par leurs travaux sur la mécanique et particulièrement à la thermodynamique des processus irréversibles.

### 2.2. Point de vue de Mandel.

La déformation inélastique résulte d'une discontinuité des déplacements ou rotations entre micro éléments orientés. Dans cet esprit Mandel [40] a fait intervenir des vecteurs directeurs tenant compte de ces orientations: " Nous allons faire intervenir ces vecteurs directeurs sous la forme de variables cachées internes et directeurs sous la forme de variables cachées externes l'orientation d'un repère directeur".

Pour Mandel, la description de l'état thermodynamique passe par une configuration intermédiaire ou relâchée ( $\kappa$ ), correspondant à une décharge très rapide de l'élément de matière. Le formalisme adopté par Mandel s'applique trivialement à ce que l'on pourrait appeler la théorie générale de la plasticité tridimensionnelle et implique des lois de transformation dans un changement de référentiel.

La déformation totale se décompose en déformation élastique  $\kappa_r \rightarrow \kappa$  et en déformation plastique  $\kappa_o \rightarrow \kappa_r$ , ceci conduit à une décomposition multiplicatrice comme dans Lee [32].

Les variables internes sont le gradient de déformation plastique  $P$ , complété par des variables scalaires ou tensorielles.

L'état thermodynamique d'un élément est défini par rapport à une configuration relâchée par le tenseur de contrainte de Kirchoff,  $\pi$ , l'ensemble des variables internes notées  $\xi_j$ , et par la variable  $b$ , qui définit l'orientation du trièdre directeur et de l'énergie libre, fonction scalaire de l'état

thermodynamique. Mandel [40] avait introduit la notion de repère directeur, repère de la configuration relâchée dans laquelle les fonctions d'état telles que l'énergie libre et le potentiel de dissipation ont une expression donnée invariable en fonction des variables d'état.

Si l'on conserve au repère directeur une orientation fixe dans la configuration relâchée, on obtient une suite de configurations relâchées dites isoclines ( $\kappa$ ) dans lesquelles l'expression de l'énergie libre est :

$$\phi = \widehat{\phi}(\widehat{\pi}, \widehat{\xi}) \quad (2.1)$$

Dans le même ordre d'idées, Mandel [40] avait établi les relations suivantes:

$$\dot{F}F^{-1} = \dot{E}E^{-1} + E\dot{P}P^{-1}E^{-1} \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\rho} \text{tr}(\sigma : \varepsilon) = \frac{1}{\rho_x} \text{tr}(\pi \frac{D}{Dt} \Delta^e + \pi : E^T : E \frac{D}{Dt} P : P^{-1}) \quad (2.3)$$

$$\frac{DP}{Dt} P^{-1} = A(\pi, \xi_j, b) H(G) \quad (2.4)$$

$$\frac{DP}{Dt} = \dot{P} - W_d P \quad (2.5)$$

$$\frac{D\xi}{Dt} = h_k(\pi, \xi_i, b) \quad (2.6)$$

avec

$\Delta^e$ : Tenseur de déformation de Green.

$\dot{P}P^{-1}$ : Vitesse de la transformation plastique par rapport au repère directeur dépendant de  $(\pi, \xi_j)$ .

$\frac{D}{Dt}$  est la dérivée par rapport au temps d'un tenseur dans le mouvement par rapport au trièdre directeur.

$G(\pi, \xi_j, b) < 0$ : Surface élastique  $H$ : Fonction de Heaviside.

$W_d = \dot{b}b^T$ : Vitesse de rotation du vecteur directeur par rapport au axes utilisés  $S$ .

$\dot{P}$  est la dérivée de  $P$  par rapport aux axes utilisés  $S$ .

L'équation (2.6) est l'équation d'évolution des variables internes  $\xi$  dans un repère directeur orienté.

### 2.2.1. Déformation plastique non visqueuse

Cette déformation n'est possible que si la condition traduite par l'équation (2.7) se réalise avec une vitesse de charge positive.

$$f(\pi, \xi_j, b) = 0 \quad (2.7)$$

Pour cela, il faut introduire le facteur multiplicateur  $\lambda$  tel que

$$\lambda = \text{tr} \left[ \frac{\partial f}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi_j} h_j^t \right] > 0 \quad (2.8)$$

Avec des équations d'évolution linéaires en leurs variables, il est possible d'écrire

$$\frac{DP}{Dt} P^{-1} = A(\pi, \xi_j, b) + \lambda B(\pi, \xi_j, b) \quad (2.9)$$

$$\frac{D\xi_j}{Dt} = h_k(\pi, \xi_j, b) + \lambda l_k(\pi, \xi_j, b) \quad (2.10)$$

Le cas particulier [ $A = 0, h_k = 0$ ] correspond aux règles classiques d'écoulement

$$\frac{DP}{Dt} P^{-1} = \lambda B(\pi, \xi_j, b) \quad (2.11)$$

$$\frac{D\xi_j}{Dt} = \lambda l_k(\pi, \xi_j, b) \quad (2.12)$$

Dans un autre exposé sur l'application de la thermodynamique aux systèmes viscoélastiques linéaires à variables internes, en s'appuyant sur les travaux de Meixner et de Biot en les complétant sur certains points de vue (extension aux variations de températures), et en admettant un état thermodynamique d'un système thermo-viscoélastique linéaire défini par un ensemble de variables internes et de variables observables et le principe d'Onsager [44], Mandel [38] avait montré le caractère positif et symétrique des matrices de retard et de relaxation et a pu donner une représentation spectrale ayant certaines propriétés.

La théorie de la thermodynamique exposé par Mandel s'appuie principalement sur la stabilité de l'équilibre initial, sur l'hypothèse des variables internes et sur le principe d'Onsager. L'hypothèse de la stabilité se l'équilibre initial exige que la forme quadratique de l'énergie interne soit non négative :

$$2U_2 = a_{ij} q_i q_j.$$

$U$  est l'énergie interne du système,  $q$  sont les variables observables d'extension et  $U_2$  est obtenue après développement de  $U(q_i)$  en série de Taylor au voisinage d'un état d'équilibre initial.

Soit  $Q_i$  les variable intensives (force, contrainte, etc.), à l'équilibre nous avons :

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

En se limitant aux termes du premier degré en  $q_i$  dans le cas d'une théorie linéaire, nous avons la relation qui cesse d'être vraie en hors équilibre (cas d'une force extérieure au système) :

$$Q_i = \frac{\partial U_2}{\partial q_i} = a_{ij} q_j$$

Quand il s'agit de forces extérieures au système, Mandel développe le terme  $Q_i - a_{ij} q_j$  en fonction des vitesses et en ne retenant que les termes de premier degré, de la manière suivante :

$$Q_i - a_{ij} q_j = b_{ij} \dot{q}_i$$

Le principe d'Onsager consiste à admettre la symétrie de la matrice  $b_{ij}$  :  $b_{ij} = b_{ji}$ . Sous forme opérationnelle ces développements permettent d'écrire :

$$(a_{ij} + pb_{ij})q_j = Q_i$$

et forment ainsi un système d'équations linéaires, s'écrivant sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{vmatrix} & M & & S \\ & & & \\ & T & & N \\ & & & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_k \\ q_{k+1} \\ q_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_k \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Les matrices M et N sont symétriques, les matrices S et T sont transposées l'une de l'autre.

Si à partir d'un instant "0", on impose un échelon unité  $Q_j = H(t)$ , la variable  $q_i$  suivra l'évolution définie par :  $q_i = f_{ij}(t)$ , fonction de retard. Si au contraire on impose un échelon unité de  $q$ , la réaction du système est  $Q_j = r_{ij}(t)$ , fonction de relaxation, i et j variant de 1 à r les différentes fonctions  $f_{ij}(t)$  et  $r_{ij}(t)$  constituent respectivement les matrices de retard et de relaxation.

En application du transformé de Carson :

$$f^*(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On obtient pour des variations quelconques des  $Q$  ou des  $q$  :

$$q_i^* = f_{ij}^*(p) Q_j^* \quad Q_i^* = r_{ij}^*(p) q_j^*$$

La matrice de retard est une sommation d'exponentielles  $\exp(p_h)$  dont les arguments  $p_h$  sont les racines de  $\Delta(p)$  avec  $\Delta(p)$  un polynôme en  $p$  et dont le degré s'obtient en retenant dans chaque terme du déterminant la plus grande puissance de  $p$ ; ce degré est donc le rang du déterminant de  $b_{ij}$ , donc le nombre de variables affectées de viscosité.

Soit  $p_h$  une racine de  $\Delta$ , le système d'équation a au moins une solution et soit  $q_j = \Phi_j$  l'une d'elles. En multipliant par la valeur conjuguée de  $\Phi_i$ , le système d'équations à résoudre prend la forme suivante :

$$a_{ij} \Phi_j \bar{\Phi}_i + p_h b_{ij} \Phi_j \bar{\Phi}_i = 0$$

Les deux sommations sont non négative vu les relations déjà établies  $U_2 \geq 0$ , donc  $p_h$  est non positif, soit  $p_h = -\lambda_h$  constituant les valeurs du spectre de retard. Mandel avait mis en évidence les termes correspondant aux valeurs nulles et aux valeurs infinies du spectre  $\lambda_h$ , ce qui lui avait permis de donner les expressions générales suivantes :

$$f^*_{ij}(p) = \sum_h \frac{J^h_{ij} \lambda_h}{p + \lambda_h} + \frac{J'_{ij}}{p} + J''_{ij}$$

$$f_{ij}(t) = \sum_h J^h_{ij} (1 - e^{-\lambda_h t}) + J'_{ij} + J''_{ij}$$

Ceci est le développement spectral de la matrice de retard avec  $\lambda_h = \frac{a'_{ij}}{b'_{hh}}$  et  $J^h_{ij} = \frac{\Phi_{ih} \Phi_{jh}}{a'_{hh}}$ .

La relaxation résulte du fait que les variables internes  $q_{k+1}, \dots, q_r$  continuent à évoluer. En effet en séparant variables internes et variables observables, le système d'équations peut être écrit sous la forme :

$$N\bar{q} + S\bar{q}' = \bar{Q}$$

$$T\bar{q} + M\bar{q}' = \bar{0}$$

Le nombre des valeurs du spectre de relaxation est égal à celui des variables internes affectées de viscosité et donc égal au nombre des valeurs du spectre de retard diminué du nombre des observables affectées de viscosité. Le développement spectral de la matrice de relaxation est donnée par :

$$r_{ij}(t) = \sum_h G^h_{ij} e^{-\mu_h t} + G'_{ij} H'(t) + G''_{ij}$$

avec :

$$\mu_h = \frac{a'_{hh}}{b'_{hh}}$$

$$G^h_{ij} = \frac{1}{a'_{hh}} \Psi_{ih} \Psi_{hj}$$

La représentation spectrale reste valable, dans le cas d'une infinité de variables internes, en supposant une matrice de retard définie dans l'intervalle  $0, 2t$ , Mandel avait montré qu'en admettant le principe de réciprocité d'Onsager, nous avons :

$$2U_2(t) = \int_0^t \int_0^t r_{ij}(2t - u - v) \dot{q}_i(u) \dot{q}_j(v) du dv$$

Ces relations restent valables dans le cas d'une infinité de variables internes, la matrice de relaxation  $r_{ij}$  admettant une représentation spectrale de la forme :



$$r_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \psi_{ij}(\mu) e^{-\mu t} d\mu$$

avec :

$$\begin{aligned} \psi_{ij} &= \psi_{ji} \\ \psi_{ij} x_i x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

dans ces conditions toutes les exigences de la thermodynamique sont satisfaites.

### 2.2.2. Cas du monocristal.

Le monocristal est le cas idéal pour l'application du point de vue de Mandel. Dans le cas d'un monocristal, le trièdre directeur est un trièdre lié au réseau cristallin et les variables d'état  $\xi_j$  sont les densités de dislocation [64], [27].

La déformation plastique est engendrée par le mouvement des défauts du réseau cristallin (dislocation, défauts ponctuels), mouvement ne changeant pas l'état thermodynamique. Cette approche permet à la fois de préciser la nature des variables internes et la forme explicite de ces fonctions [64].

### 2.3. Point de vue de Rice.

Dans l'esprit de ce formalisme, Rice s'était intéressé exclusivement aux fondements théoriques des lois constitutives inélastiques des solides comme suite et extension de travaux similaires de Hill et Mandel.

Rice [48] avait introduit à partir du formalisme général un autre concept de la déformation plastique en introduisant l'enthalpie libre (equ. 2.1) qui n'est autre que le transformé de Legendre de l'énergie libre, considérée comme l'énergie libre complémentaire du système.

En adoptant le point de vue de la thermodynamique des processus irréversibles, et pour illustrer la structure de la théorie, il a considéré le comportement inélastique macroscopique comme conséquence du réarrangement internes.

$$L(\Delta, \xi) = \pi : \Delta - \phi \quad (2.13)$$

de

Rice avait obtenu les résultats suivants :

$$\Delta = \frac{\partial L}{\partial \pi}(\Delta, \xi) \quad (2.14)$$

$$\pi = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta}(\Delta, \xi) \quad (2.15)$$

Les forces thermodynamiques associées à chaque variable interne sont données par :

$$X_i = \frac{\partial L}{\partial \xi_i}(\Delta, \xi) = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\Delta, \xi) \quad (2.16)$$

Rice avait appelé la déformation plastique, la contribution de la variation de la variable interne dans la différentielle de  $\Delta$ , ce qui se traduit par l'équation (2.18)

$$\delta\Delta = \delta\Delta^e + \delta\Delta^p \quad (2.17)$$

$$(\delta\Delta)^p = \frac{\partial \Delta(\pi, \xi)}{\partial \xi_i} \delta\xi_i \quad (2.18)$$

De la même manière, la partie élastique ou (thermoélastique) est définie comme le résultat d'un changement dans les contraintes (température), si les variables internes restent fixes.

$$\delta\Delta^e = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} : \delta\pi \quad (2.19)$$

En utilisant les dérivées par rapport au temps, les équations (2.17) et (2.18), deviennent :

$$\dot{\Delta} = \dot{\Delta}^e + \dot{\Delta}^p \quad (2.20)$$

$$(\dot{\Delta})^p = \frac{\partial \Delta(\pi, \xi)}{\partial \xi_i} \delta\dot{\xi}_i \quad (2.21)$$

Selon Rice, la vitesse de réarrangement interne, c'est à dire l'évolution de la variable interne est déterminée par la connaissance, à une température donnée, de la valeur de la variable interne et de la valeur de la force thermodynamique qui lui est associée

$$\dot{\xi}_\alpha = f_\alpha(\xi, X) \quad (2.22)$$

Rice avait introduit un potentiel d'écoulement  $\Omega = \Omega(\pi, \xi)$  pour la déformation inélastique.  $\Omega$  est fonction de la contrainte, des variables internes et de la température dans le cas ou celle-ci n'est pas constante. Ce " Potentiel d'écoulement" est définie par la vitesse de déformation inélastique, tel que :

$$(\dot{\Delta})^p = \frac{\partial \Omega(\pi, \xi)}{\partial \pi}$$

Géométriquement c'est un vecteur normal à la surface du potentiel d'écoulement, constant dans l'espace des contraintes.

En rajoutant la partie inélastique en termes d'énergie complémentaire, la loi constitutive prend la forme :

$$\dot{\Delta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \pi^2} : \dot{\pi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \pi}$$

La forme duale de l'équation d'évolution (2.18) est donnée par

$$\dot{\pi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Delta^2} : \dot{\Delta} - \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} \quad (2.25)$$

avec  $\phi$  l'énergie libre du système et  $\Omega$  le potentiel de dissipation qui est une fonction scalaire du couple  $(\Delta, \xi)$ ,

Les résultats précédents sont applicables à la l'inélasticité des métaux, en prenant le glissement cristallin comme mécanisme de déformation plastique. Une telle description bien qu'évidente ne peut pas être perçue en détail.

#### 2.4. Point de vue de Valanis.

Valanis [57], dans un travail intitulé: "*The viscoplastic potential and its thermodynamic foundations*" avait établi l'existence d'un potentiel thermodynamique et résumé ses résultats en termes d'un théorème général

Théorème: "*The constitutive equations of viscoelastic materials with an initial elastic response and in the presence of large deformations and time varying, spatially inhomogeneous field, are :*

$$\tau_{ij} = 2 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \quad (2.24)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha \geq 0 \quad (2.25)$$

Where  $\frac{\rho \tau_{ij}}{\rho_0}$  is the Piola Kirchoff tensor (soit  $\pi$ ),  $C$  is the right Cauchy-Green tensor and  $\Psi$  the free energy per unit undeformed volume, finally  $\xi_\alpha$  are the thermodynamic coordinates and  $\rho$  and  $\rho_0$  are the current and reference density respectively".

Le tenseur de contrainte qui dérive d'un potentiel viscoélastique est l'aspect le plus intéressant de ce théorème. En vue de ce fait, la déformation des milieux viscoélastique est un processus dissipative dont le potentiel thermodynamique n'est autre que l'énergie libre du système. L'énergie libre est fonction des variables d'état observables et de l'ensemble des variables internes.

La théorie thermodynamique est rendu possible à travers l'introduction des variables internes dont la signification physique n'est pas immédiatement évidente. L'énergie libre s'exprime dans le cas d'un processus isotherme comme forme quadratique de la déformation et des variables internes :

$$\Psi = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + a_{ij\alpha} \varepsilon_{ij} \xi_\alpha + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$$

Dans le cas de matériaux viscoélastiques avec réponse élastique instantané, les développements de Valanis rendent compte de l'implication suivante : l'entropie ne dépend pas explicitement des vitesses de déformation mais seulement implicitement à travers les variables internes. Les équations constitutives de matériaux viscoélastiques linéaires avec réponse élastique instantané prennent, dans le cas isotherme, la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi_{\alpha}} + b_{\alpha\beta} \dot{\xi}_{\beta} = 0$$

En conclusion, il est bon de dire, que les travaux de Valanis ont permis de montrer, dans le cas de matériaux viscoélastique doué d'élasticité instantanée, que le tenseur de contrainte et l'entropie dérivent d'un potentiel qui est l'énergie libre du système.

## 2.5. Point de vue de Halphen et Son

En admettant l'hypothèse de dissipativité normale, Nguyen Son et Halphen [20] avaient établi pour une classe de matériaux élasto-viscoplastique et élastoplastique à déformation plastique instantanée les lois d'évolution de la transformation plastique caractérisant l'écroutissage.

D'une manière générale un matériau standard est caractérisé par l'existence d'une énergie libre et d'un potentiel de dissipation et d'une famille finie de variables internes scalaires ou tensorielles définissant son état. L'objet de leur étude est l'application de l'hypothèse de dissipativité normale aux matériaux standards.

Dans une transformation isotherme, l'état thermodynamique est défini par les  $(6+n)$  variables d'état  $(\varepsilon, \varepsilon^p, \dots)$ . La variable  $\varepsilon$  constitue la variable d'état observable et  $\xi$  est un vecteur de dimension  $n$  représentant les paramètres d'irréversibilité. La déformation plastique,  $\varepsilon^p$ , est incluse dans l'ensemble des variables internes,  $\xi$ .

L'énergie libre par unité de volume  $\phi = \phi(\varepsilon, \xi)$  est fonction de l'ensemble des variables d'état, avec:

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \quad \text{et} \quad X = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (2.26)$$

Ici, l'énergie libre est une énergie réversible, sous toutes formes (déformation macroscopique, modification microstructurale, etc.). Le potentiel de dissipation noté ici  $\Psi$  est donné par :

$$\Psi = X\dot{\xi} \geq 0 \quad (2.27)$$

et les variables internes ( $\xi$ ) suivent la loi de normalité

$$\dot{\xi} \in N_C(X) \Leftrightarrow \dot{\xi}(X - X^*) \geq 0, \quad \forall X^* \in C \quad (2.28)$$

avec  $C$ , le domaine d'élasticité convexe et contenant l'origine dans l'espace des variables généralisées.

Suivant B. Halphen et Ngyuen Quoc Son (1975), un matériau déformable, satisfaisant dans une théorie à variables internes à la condition de normalité (2.28) est un matériau standard généralisé. Cette notion offre un cadre à la fois mathématique et thermodynamique qui couvre plusieurs types de comportement mécanique. Ici, nous présenterons quelques exemples:

### 2.5.1. Plasticité

La plasticité est caractérisée par l'existence d'un domaine convexe nommé :  $C$  l'origine de l'espace des forces  $(R, X)$  et caractérisé par la fonction indicatrice suivante :

$$\Psi_C = \Psi_C(R, X) = \begin{cases} 0 & \text{si } (R, X) \in C \\ +\infty & \text{si } (R, X) \notin C \end{cases} \quad (2.29)$$

$\frac{DP}{Dt} P^{-1}$  est le gradient de la transformation plastique. Le tenseur non nécessairement symétrique

$$R = E^T \cdot E \cdot \pi$$

est la force associée à cette vitesse. De même que  $X$  est la force associée à la vitesse  $\frac{D\xi}{Dt}$

- Si  $(R, X)$  sont à l'intérieur de  $C$ , la déformation plastique et les variables internes sont nulles.
- Si  $(R, X)$  est sur  $C$ , le vecteur  $\left( \frac{DP}{Dt} P^{-1}, \frac{D\xi}{Dt} \right)$  est un vecteur normal à la frontière  $C$ .

Donc, la dissipation se traduit par l'inégalité suivante :

soit

$$\text{tr}((R - R^{T*}) \frac{DP}{Dt}) + (X_j - X_j^*) \frac{D\xi_j}{Dt} \geq 0 \quad (2.30)$$

Cet énoncé de Halphen et Son généralise le principe du travail maximal de Hill. La plasticité parfaite correspond au cas où les variables internes n'évoluent pas :

$$\frac{D\xi_j}{Dt} = 0 \quad (2.31)$$

Dans le cas du potentiel plastique multiple, c'est à dire le cas où  $C$  est l'intersection de  $n$  domaines

différentiables, on retrouve les relations :

$$\frac{DP}{Dt} P^{-1} = \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial R} \quad (2.32)$$

$$\frac{D\xi_j}{Dt} = \lambda_k \frac{\partial F^k}{\partial X_j} \quad (2.33)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \lambda_k &\geq 0 \quad \text{si } F^k = 0 \\ \lambda_k &= 0 \quad \text{si } F^k < 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

### Exemple 1. *Elastoplasticité Parfaite.*

Elle correspond au cas où les variables internes  $\xi = \{\varepsilon^p\}$ ; en conséquence nous avons les équations suivantes

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \{\varepsilon^p\} \\ \phi &= \frac{1}{2}(\varepsilon - \xi) : E : (\varepsilon - \xi) \\ X &= -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \sigma \\ f(X) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

### Exemple 2. *Elastoplasticité avec écrouissage cinématique de type (Zeigler-Prager (1949))*

Elle correspond au cas suivant :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \{\varepsilon^p\} \\ \phi &= \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : E : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} \varepsilon^p : h : \varepsilon^p \\ X &= -\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon^p} = \sigma - h : \varepsilon^p \\ C &= \{XX^d - K_0\} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

avec  $X_{ij}^d = X_{ij} - \frac{1}{3} X_{kk} \delta_{ij}$ ,  $|X^d|^2 = X_{ij}^d X_{ij}^d$  et  $h$  est le module du tenseur de durcissement cinématique.

Ceci est une version tridimensionnelle d'un modèle rhéologique constitué d'un assemblage d'un ressort en série avec un ressort et un patin en parallèles.

### 2.5.2. Cas de la viscoplasticité.

Dans le cas de la viscoplasticité le potentiel  $\phi$  est remplacé par une fonction  $\Omega$  de classe  $C^1$ . On retrouve les relations suivantes :

$$\frac{DP}{Dt} P^{-1} = \frac{\partial \Omega}{\partial R} \quad (2.37)$$

$$\frac{D\xi_j}{Dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial X_j} \quad (2.38)$$

Ces relations ont déjà été établies par Mandel [39] pour un monocristal métallique suivant la théorie viscoplastique de Rice [48].

## 2.6. Point de vue J. D. Weber.

Weber [61] avait défini une classe de corps viscoélastique non linéaire à variables internes présentant une élasticité instantanée et pour lesquels il établit l'unicité des déformations finies.

### Définition

Soit  $G$ : l'espace des tenseurs  $\gamma$  d'ordre 2 à déterminant positif;  $\xi$ : point de l'espace numérique à  $N$  dimensions  $\mathfrak{R}^N$ , définissant les  $N$  scalaires réels  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ;  $\varphi$ : application de  $\mathfrak{R}^N \times G$  dans  $\mathfrak{R}$  et  $g_{uv}(u, v = 1, 2, \dots, N)$  matrice symétrique définie positive, fonction de  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  mais non de  $\gamma$ .

Le système d'équations différentielles (2.39) permet de déterminer les  $N$  fonctions  $P_u(t)$  si l'on se donne les  $9$  fonctions  $\gamma_{ij}$  et les valeurs initiales de  $P_u$ .

$$\dot{P}_u = \frac{dP_u}{dt} = -g_{uv} \frac{\partial\varphi}{\partial P_v} \quad (2.39)$$

Les composantes du tenseur de Boussinesq, fonctionnelles des variables  $\gamma_{ij}$  dans l'intervalle  $[0, t]$  sont données à tout instant par la formule :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{ij}} \quad (2.40)$$

Les variables internes de définition (2.39) obéissent au principe d'objectivité et au second principe de la thermodynamique avec la propriété suivante : l'absence de variation instantanée de la variable interne par changement brusque de la vitesse de charge.

Weber [31] avait montré qu'au voisinage d'un état d'équilibre interne, le comportement des corps conforme à la définition (2.39) est identique à celui des corps linéaires à paramètres internes de Mandel.

Dans un cas unidimensionnel il a obtenu les résultats suivants concernant les dérivées successives des fonctions fluages et relaxations.

$$\dot{\epsilon}(t) \leq 0 \quad \ddot{\epsilon}(t) \geq 0 \quad \dddot{\epsilon}(t) \geq 0 \quad \text{Etc..} \quad (2.41)$$

$$\dot{\sigma}(t) \geq 0 \quad \ddot{\sigma}(t) \leq 0 \quad \dddot{\sigma}(t) \geq 0 \quad \text{Etc..} \quad (2.42)$$

Au voisinage d'un état d'équilibre interne, les corps de la définition (2.39) possèdent à la fois une

élasticité instantanée et une élasticité différée.

## 2.7. Point de vue de Bassout Lellich.

Bassout [3] avait présenté une étude des corps de Maxwell en grandes déformations et à des températures variables dans un cadre thermodynamique rationnel.

Nous omettons ici les effets thermiques pour une raison de simplicité, théoriquement il est facile de les prendre en compte sans que ceci change quelque chose à notre propos.

La description des corps de Maxwell en déformations finies se fait au moyen de l'énergie libre  $\phi$  et du potentiel de dissipation  $\Omega$

$$\phi = \frac{1}{2} \lambda (\theta)^2 + \mu (\varepsilon_1^e{}^2 + \varepsilon_2^e{}^2 + \varepsilon_3^e{}^2) \quad (2.43)$$

$$\Omega = f(J_2) \quad (2.44)$$

avec  $\theta$  dilatation volumique de la transformation  $\theta = \log \det F$ ,  $J_2$  est le second invariant du déviateur de contraintes,  $\lambda, \mu$  sont les coefficients de Lamé de l'élasticité instantanée supposée isotrope,  $\xi$  est un tenseur symétrique des variables internes et  $\varepsilon^e$  le tenseur de déformation élastique.

Dans le cas de déformations infiniment petites, le comportement des corps de Maxwell est donné par les équations suivantes :

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) \quad (2.45)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = g(J_2) s_{ij} \quad (2.46)$$

avec  $g$  : fonction scalaire positive et croissante du second invariant  $J_2$  : déviateur de contraintes de composantes  $s_{ij}$ .

## 2.8. Point de vue de Chaboche.

L'hypothèse de l'existence d'un potentiel de dissipation pour les comportement dissipatifs donc non élastiques. Avec des variables d'état qui sont la température,  $T$ , le tenseur d'écoulement cinématique,  $\zeta$ , la variable d'écoulement isotrope,  $r$ , le second invariant du tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff,  $s$ , les variables internes de nature tensorielle,  $\kappa$ , et des variables internes de nature scalaire,  $\xi$ , Chaboche [68] propose un modèle viscoplastique :

$$\Omega = \Omega(s^{\dot{ij}}, \zeta^{\dot{ij}}, \xi, T, r, \kappa^{\dot{ij}}) \quad (2.47)$$

Les lois d'écoulement s'expriment alors à partir de la propriété de normalité des matériaux standards généralisés

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial s^{\dot{ij}}} \quad (2.48 \text{ a})$$



avec  $\gamma$  le tenseur de déformation de Green-Lagrange et  $s$  le second invariant du tenseur de contrainte de Piola- Kirchoff.

L'écoulement plastique induit l'apparition de réseaux de dislocations distribués d'une façon non homogène, et provoque des contraintes internes réparties dans tout le volume du matériau, exprimées mécaniquement par le tenseur d'écrouissage cinématique et donnée par

$$\dot{\zeta}_{ij} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \kappa^{ij}} \quad (2.48 \text{ b})$$

L'écrouissage isotrope représente la densité des dislocations conduisant au phénomène de durcissement, et modélisé par une variable de type scalaire vue son caractère homogène (isotropie). La contrainte interne correspondante, mesure la variation de la taille du domaine élastique :

$$\dot{r} = -\frac{\partial \Omega}{\partial R} \quad (2.49)$$

## 2.9. Point de vue de Perzyna

En se référant à la loi de la normalité, Perzyna [46], avait établi une loi de comportement viscoplastique qui s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}_{ij}^I = \eta \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial s^{ij}} \quad (2.50)$$

ou

$$F = J(s^{ij}) - R \quad (2.51)$$

soit

$$\dot{\gamma}_{ij}^I = \frac{3}{2} \eta \langle \Phi(F) \rangle \frac{s^{ij}}{J(s^{ij})} \quad (2.52)$$

$\eta$  : désigne le coefficient de viscosité

$R$  : le paramètre de d'écrouissage, pour des matériaux sans écrouissage

$R = k$  : étant la limite élastique initiale

$\Phi(F)$  : fonction arbitraire non-linéaire du potentiel viscoplastique  $F$  qui peut être choisie sous la forme :

$$\Phi = \left\langle \frac{J(s^{ij})}{R} - 1 \right\rangle^n \quad (2.53)$$

ou

$$\Phi = \left\langle \exp \left( \frac{J(s^{ij})}{R} - 1 \right) - 1 \right\rangle^n \quad (2.54)$$

## 2.9. Conclusion.

Dans tous les points de vue, pour étudier les comportements rhéologiques et spécialement les comportements viscoplastiques, il faut connaître les mécanismes liés à ces phénomènes et particulièrement celui de la dissipation.

Toutes les considérations ont pour but d'établir des équations constitutives et des modèles constitutifs basés sur le jugement de l'expérience.

L'objet des modèles constitutifs est de décrire et de prévoir le comportement des matériaux. Plusieurs types d'approches sont utilisés dans la littérature, empiriques, semi-empiriques, phénoménologiques ou numériques. L'approche empirique reflète simplement les observations expérimentales de la variation de la contrainte en fonction de la déformation, de la température et de la vitesse de déformation.

Nous concluons en donnant quelques formes d'équations constitutives. Commençons par Ludwik qui propose une forme de type additif

$$\sigma = f_{\mu}(\varepsilon) + g_o(\dot{\varepsilon})$$

$f_{\mu}$  est la fonction d'écroutissage et  $g_o$  est une fonction de relaxation. Une forme différentielle a été proposée par Sokolovskii [52] et modifiée par Malvern [41]

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma)$$

Une forme plus générale, basée sur l'approche de Sokolovskii et Malvern, était introduite par Cristescu [12] et Lubliner [34] sous la forme

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad T = cste$$

re

## Chapitre 3.

### Formalisme à variables internes

Page 42

- 3.1. Introduction
- 3.2 Principe d'indifférence matérielle
  - 3.2.1 Objectivité
  - 3.2.2 Conclusion
- 3.3 Sur le second principe de la thermodynamique
- 3.4 Convexité
  - 3.5 Définition des comportements rhéologiques
    - 3.5.1 Elasticité
    - 3.5.2 Viscosité
- 3.6 Cas d'une seule variable interne
  - 3.6.1 Conditions sur les fonctions matérielles
- 3.6. Cas du saut de vitesse
- 3.8 Unicité de la déformation quasistatique
  - 3.8.1 Position du problème
  - 3.8.2 Unicité
- 3.9 Différentes formes de l'équation (SM)
  - 3.9.1 Equation en vitesse de déformation
  - 3.9.2 Equation en modules tangents
  - 3.9.3 Equation en vitesse de déformation plastique
- 3.10 Courbes de traction à partir de l'équation (SM)
  - 3.10.1 Courbes dynamiques
  - 3.10.2 Courbes quasistatiques
  - 3.10.3 Courbes intermédiaires (statiques)
  - 3.10.4 Courbes à vitesse de déformation constante
  - 3.10.5 Fluage
  - 3.10.6 Relaxation
  - 3.10.7 Effets inélastiques
- 3.11 Conditions imposées par le second principe de TPI
- 3.12 Cas de la viscoplasticité.
- 3.13 Conclusion

### 3. Formalisme à variables internes.

#### 3.1 Introduction.

Sous sa forme la plus élémentaire, la théorie des variables internes (pour des déformations isothermes finies) postule que l'énergie libre  $\phi$  d'un élément matériel est une fonction de la déformation  $\varepsilon$  et d'un certain nombre de variables scalaires notées collectivement  $\xi$ .

$\phi$  est relatif à un élément matériel de volume unité dans la configuration initiale ou à un élément matériel de longueur unité dans un essai de traction uni axial.

$$\phi = \phi(\varepsilon, \xi) \quad (3.1)$$

Le principe de conservation d'énergie et le second principe de la thermodynamique se réduit dans un l'état local à l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_u} \dot{\xi}_u \geq 0 \quad (3.2)$$

Quelles que soient les variables observables, la connaissance de leurs valeurs et de leur évolution dans le temps et des valeurs des variables internes  $\xi$  à l'instant  $t$  donné, permet de définir l'évolution de chaque variable interne de la façon suivante

$$\dot{\xi}_u = h_u(\varepsilon, \xi) \dot{\varepsilon} + f_u(\varepsilon, \xi) \quad (3.3)$$

Nous supposons dans toute la suite que le choix des variables internes répond à la condition  $h_u(\varepsilon, \xi)$  identiquement nulle (Lubliner [34] a fait une étude approfondie du cas où cette possibilité n'existe pas). Dans ce cas l'évolution des variables internes, pour une déformation donnée  $\varepsilon$ , prend la forme suivante :

$$\dot{\xi}_u = f_u(\varepsilon, \xi) \quad (3.4)$$

La fonction  $f_u$  est nulle pour toute transformation réversible avec une propriété caractéristique qui découle de la forme de l'équation d'évolution - un changement brusque de la vitesse de déformation n'entraîne pas de discontinuité dans la valeur de la variable interne.

L'inégalité (3.2) doit être valable pour toute transformation irréversible arbitrairement choisie. La vitesse de déformation n'intervient pas dans la définition de l'état et peut donc être spécifiée arbitrairement dans un état thermodynamique donné, et donc les facteurs de ses variables doivent être nulles. Il en résulte que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) est l'équation de Coleman [10] obtenue en 1964 dans la cadre d'une approche fonctionnelle. L'équation (3.5) est restreinte aux milieux présentant de l'élasticité instantanée, c'est à dire ayant un comportement de solides élastiques dans les déformations très rapides. En supposant que l'on ne s'éloigne pas trop de l'équilibre thermodynamique [61], la relation (3.5) constitue une généralisation de s relations d'Onsager pour les comportements non linéaires.

L'énergie libre permet d'établir les relations entre les variables observables et leurs variables associées. Pour les variables internes, elle ne permet que la définition de leurs variables associées, qui sont les forces thermodynamiques exprimées par les relations :

$$X_u = - \frac{\partial \phi}{\partial \xi_u} \quad (3.6)$$

Les termes restant dans l'inégalité (3.2) nous prenons en compte les relations (3.5) et (3.6) correspondant à la forme réduite de l'inégalité de Clausius-Duhem, c'est à dire :

$$X \dot{\xi}_u \geq 0 \quad (3.7)$$

Pour décrire l'évolution des variables internes, nous avons besoin d'un formalisme complémentaire c'est le but du potentiel de dissipation. Suivant une hypothèse faite par Rice [48], reprise par Mandel [38] et que nous adoptons ici; nous admettons l'existence dans l'espace des variables dissipatives d'un potentiel de dissipation,  $\Omega$ , fonction scalaire, continue, convexe, positive et nulle à l'origine.

$$\Omega = \Omega(\xi, X) \quad (3.8)$$

La dérivée de la variable interne par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{\xi}_u = \frac{\partial \Omega}{\partial X_u} \quad (3.9)$$

L'inégalité de Clausius-Duhem (3.2) prend la forme

$$X_u \dot{\xi}_u = X_u \frac{\partial \Omega}{\partial X_u} \geq 0 \quad (3.10)$$

Une autre expression de ce formalisme peut être établie sous la forme d'un formalisme dual, en définissant l'état thermodynamique par la contrainte et l'ensemble des variables internes. Nous introduisons comme dans Rice [48] l'enthalpie libre changée de signe comme énergie

complémentaire du système définie par

$$L = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \phi \quad (3.11)$$

On obtient cette fois ci, toujours par le même mode de raisonnement avec un tenseur de contrainte et un tenseur de déformation défini en configuration de référence (tenseur de déformation de Lagrange et tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff) :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.12)$$

puis, la condition de dissipativité prend la forme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} \dot{\xi}_\alpha \geq 0 \quad (3.13)$$

La relation (3.12) avait été établie par Mandel [39] dans la cadre d'une représentation fonctionnelle. En supposant l'existence d'un formalisme dual représenté par l'enthalpie libre changée de signe et d'un potentiel dual  $\Omega^*$ , transformé de Legendre de  $\Omega$ , fonction scalaire des variables internes et de leurs vitesses, le potentiel de dissipation dual permet d'établir une relation entre  $X$  et  $\dot{\xi}$  de la manière suivante :

$$X_i = \frac{\partial \Omega^*(\xi, \dot{\xi}_i)}{\partial \dot{\xi}_i} \quad (3.14)$$

La dissipation prend, en tenant compte de ces considérations la forme suivante :

$$\frac{\partial \Omega^*(\xi, \dot{\xi}_i)}{\partial \dot{\xi}_i} \dot{\xi}_i \geq 0 \quad (3.15)$$

## 3.2. Principe d'Indifférence Matérielle.

Le principe d'indifférence matérielle exprime qu'un processus thermodynamique en évolution reste admissible après changement de configuration, où les nouvelles valeurs sont fonctions des anciennes

### 3.2.1 Principe d'objectivité

Soient  $X_i (i = 1, 2, 3)$  les variables de Lagrange définissant la position des points matériels dans une configuration de référence,  $x_i (i = 1, 2, 3)$  les variables d'Euler déterminant la position du point matériel à l'instant  $(t)$ , et  $r$  un tenseur orthogonal à déterminant positif. Les valeurs scalaires ne

changent pas dans un changement de configuration, par contre les valeurs vectorielles ou tensorielles changent dans un changement de configuration  
 Les variables internes de type scalaires  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N)$  ne changent pas dans un changement de configuration ou de référence [10]

$$\xi \rightarrow \xi' = \xi.$$

Si les  $\xi^i$  sont considérées comme des tenseurs de second ordre, alors :

$$\xi^i \rightarrow \xi'^i = r \xi^i r^T, \quad i = 1, \dots, N.$$

On peut dire que la variation de configuration ou de référence des variables internes dépend de la nature de ces mêmes variables.

### R. 1.

- La valeur de l'énergie libre calculée dans une configuration lagrangienne, fonction de la position  $X$  et du tenseur gradient de la déformation  $F$ , ne change pas lorsque  $F$  est multiplié par  $r$  (tenseur orthogonal à déterminant positif)

En effet :

$$\phi = \phi(X, F) = \phi(X, rF) \quad (3.16)$$

### R. 2.

- En remplaçant  $r$  par  $rF$ , sans changer les valeurs des variables internes, le tenseur de Boussinesq  $\theta(t)$ , tenseur de contraintes défini en configuration de référence, est remplacé par  $r(t)\theta(t)$ .

En effet, le tenseur de Boussinesq,  $\theta$ , est un tenseur de contraintes défini en configuration de référence par :

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi(X_i, F_{ij})}{\partial F_{ij}} \quad (3.17)$$

Tenant compte de la définition du tenseur  $\theta$ , nous pouvons écrire:

$$\theta_{ij}(t) = \frac{\partial \phi(X, F)}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial F_{kl}} \frac{\partial F_{kl}}{\partial F_{ij}} \quad (3.18)$$

Par ailleurs, avec  $\delta$  la matrice unité, représentée par le symbole de Kronecker, nous avons :

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial F_{ij}} = r_{mk} \delta_{mi} \delta_{lj} = r_{ik} \delta_{lj} \quad (3.19)$$

Finalement, nous avons :

$$\theta'_{ij}(t) = \frac{\partial \phi(X, F)}{\partial F_{ij}} r_{ik} \delta_{lj} = r_{ik} \theta_{kj}(t) \quad (3.20)$$

### R. 3.

Le formalisme est invariant par changement de variables internes où les nouvelles variables sont fonctions des anciennes.

Pour montrer cela, posons les relations :  $\phi(\varepsilon, \xi) = \phi(\varepsilon, \chi)$ . Les variables internes,  $\xi$ , et  $\chi$ , sont reliées par la relation  $X d\xi = Y d\chi$ . Nous pouvons écrire :

$$Y_\alpha = X_\beta \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \chi_\alpha} \quad (3.21)$$

ou bien, ce qui revient au même :

$$X_\beta = Y_\alpha \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \xi_\beta} \quad (3.22)$$

## Conclusion

Comme conclusion aux résultats précédents, nous pouvons affirmer qu'il y a une infinité de représentations rhéologiques du même comportement à partir des variables internes.

Dans le cas où les  $\xi$  sont des valeurs scalaires, le principe d'objectivité est satisfait si et seulement si les fonctions  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $T$  et  $f$  vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \phi(F, \xi) &= \phi(rF, \xi) \\ rT(F, \xi)r' &= T(rF, \xi) \\ \theta(rF, \xi) &= r\theta(F, \xi) \\ f(F, \xi) &= f(rF, \xi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.3. Sur le Second principe de la thermodynamique.

Dans une transformation isotherme, la dissipation est traduite mathématiquement par le second principe de la thermodynamique (le taux de production de l'entropie est positif, nul si le processus est réversible). Dans un cycle fermé, la condition de dissipation est positive et est traduite par la formule suivante :

$$\int \sigma d\varepsilon \geq 0 \quad (3.24)$$

En différentiant l'énergie libre, fonction du tenseur de déformation et de l'ensemble des variables internes, on obtient:



$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} d\xi \quad (3.25)$$

En effet, entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , nous avons pour un cycle fermé, en supposant la validité de la relation de Coleman:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\phi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} d\xi = \phi(t_1) - \phi(t_2) = 0 \quad (3.26)$$

Utilisant les relations (3.24 et (3.26), nous écrivons :

$$w = \int_{t_1}^{t_2} \sigma d\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) \frac{\partial\xi}{\partial t} dt = \int_{t_1}^{t_2} X \dot{\xi} dt \quad (3.27)$$

Tenant compte de la condition de dissipativité, traduite dans le cas d'une transformation isotherme par l'inégalité (3.10), nous obtenons donc le résultat :

$$w \geq 0 \quad (3.28)$$

Pour donner une idée des restrictions qu'impose l'inégalité de Clausius-Duhem sur l'énergie libre rappelons ici les résultats connus en élasticité linéaire isotrope [51] :

$$\mu \geq 0, 3\lambda + 2\mu \geq 0 \quad (3.29)$$

$$\mu \geq 0, \lambda + 2\mu \geq 0 \quad (3.30)$$

$\mu$  et  $\lambda$  sont les coefficients de Lamé. Ces conditions sont des conditions nécessaires pour avoir un comportement physiquement admissible.

### 3.4. Convexité.

La convexité joue un rôle très important en thermodynamique et dans plusieurs problèmes de mécanique (voir annexe II). Ici, elle est traduite par l'ensemble des deux conditions (3.31) et (3.32) :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X_i \partial X_j} \geq 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial X} = 0 \quad \text{pour } X = 0 \quad (3.32)$$

La condition (3.31) se traduit dans le cas d'une seule variable interne par le fait que la matrice  $\Omega$  doit être définie positive.

A l'équilibre les conditions de dissipativité et de convexité sont toujours vérifiées. Hors équilibre la condition de dissipativité est vérifiée sans que la condition de convexité le soit nécessairement.

Dans le cas d'un processus décrit par un potentiel de dissipation dual, les relations de convexité se traduisent par l'ensemble des deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_j} \geq 0 \text{ matrice définie positive}$$

$$\frac{\partial \Omega^*}{\partial \dot{\xi}_i} = 0 \text{ pour } \dot{\xi}_i = 0$$

### 3.5. Définition des Comportements Rhéologiques.

La différence fondamentale entre les divers types de comportement réside dans la forme du potentiel de dissipation et dans l'analyticité des fonctions dérivant de ce potentiel.

#### 3.5.1 Élasticité

L'élasticité linéaire est obtenue en prenant un potentiel de dissipation  $\Omega$  nul et une énergie libre quadratique. Le modèle rhéologique correspondant est un ressort linéaire (fig.3.1). En général un comportement élastique est caractérisé par la non évolution de la variable interne et donc un potentiel de dissipation nul.

$$\phi(\varepsilon) = \frac{1}{2} A \varepsilon : \varepsilon + \phi_0(T) \quad (3.33)$$

$$\Omega = 0 \quad (3.34)$$

$$\Omega^* = 0 \quad (3.35)$$

$$f_\alpha(\varepsilon, \xi) = 0 \quad \forall \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (3.36)$$

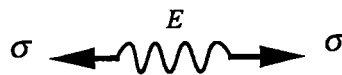


Figure 3.1. Ressort linéaire (E module de Young)

Dans l'équation (3.33),  $\phi$  est l'énergie élastique,  $A$  le tenseur d'élasticité d'ordre quatre,  $\varepsilon$  le tenseur de déformation et  $f$  représente l'évolution de la variable interne.

#### 3.5.2. Viscosité

Un milieu visqueux est un milieu dissipatif. Il est caractérisé par l'absence de déformation élastique; et donc a une énergie libre indépendante de la déformation.

L'énergie libre et le potentiel de dissipation sont donnés par :

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon, T) &= \phi_0(T) \\ \Omega &= \Omega(X) \\ \Omega^* &= \Omega^*(\dot{\xi}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Un comportement visqueux est modélisé par un amortisseur. Dans le cas d'une viscosité linéaire, le potentiel de dissipation prend une forme quadratique suivante:  $\Omega = KX^2$ , avec  $K$  coefficient de viscosité.

Si  $\Omega = \Omega(X)$  est une fonction régulière en  $X$ , le comportement du matériau est viscoélastique, c'est le cas d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs linéaires.

Lorsque  $\phi$  est quadratique par rapport à  $\varepsilon$  et  $\xi$  avec  $\Omega$  indépendant de  $X$  on obtient le cas de la viscoélasticité linéaire [38]. Nous postulons la validité de ce formalisme pour la description des corps rhéologiques que nous adoptons dans toute la suite.

Si  $\Omega = \Omega(X)$  est une fonction singulière, le comportement du matériau est viscoplastique ou plastique, c'est le cas de modèles contenant un patin.

### 3.6. Cas d'une Seule Variable Interne.

La relation de Coleman permet de déterminer le tenseur de contrainte comme étant la dérivée de l'énergie libre par rapport à la déformation de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{\partial \phi(\varepsilon, \xi)}{\partial \varepsilon}$$

Après dérivation par rapport au temps, on peut écrire :

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \xi} \dot{\xi} \quad (3.38)$$

En utilisant l'équation d'évolution de la variable interne (3.9), on obtient

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial^2 \phi(\varepsilon, \xi)}{\partial \varepsilon^2} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \phi(\varepsilon, \xi)}{\partial \varepsilon \partial \xi} \frac{\partial \Omega(\xi, X)}{\partial X} \quad (3.39)$$

En éliminant  $\xi$  de l'équation (3.39), on obtient une équation de type quasi-linéaire entre la vitesse de contrainte et la vitesse de déformation

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma) \dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.40)$$

avec  $\alpha(\varepsilon, \sigma) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon^2}$  et  $\beta(\varepsilon, \sigma) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon \partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial X}$ .  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de l'histoire de déformation mais ne changent pas dans une discontinuité de celle-ci. Dans le domaine  $D$  des états  $(\varepsilon, \sigma)$  possibles, les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont appelées fonctions matérielles.

Le domaine  $D$  et les deux fonctions matérielles  $\alpha$  et  $\beta$  caractérisent le comportement rhéologique d'un matériau donné. Le comportement d'un matériau est dit décrit par une équation constitutive quasi linéaire en vitesse, si pour tout état  $(\varepsilon, \sigma) \in D$  et pour toute vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  à cet état, la dérivée de la contrainte est donnée par l'équation (3.40).

L'équation quasi-linéaire (3.40), connue dans la littérature sous le nom de l'équation de Sokolovskii-Malvern, notée ici (S-M), est obtenue ici dans le cadre d'une théorie basée sur les concepts de la thermodynamique des processus irréversibles dans le cas d'une seule variable interne. C'est aussi une généralisation de l'équation proposée par Maxwell (1867) avec  $\alpha(\varepsilon, \sigma) = E$  et  $\beta(\varepsilon, \sigma) = -\frac{\sigma}{k}$ , ce qui explique pourquoi certains auteurs utilisent le terme matériau de Maxwell, pour tout matériau décrit par l'équation (S-M). Il est clair, un siècle après, que l'équation de type (S-M) peut décrire plusieurs comportements rhéologiques.

L'équation (S-M) est étroitement liée à l'équation de type semi-linéaire proposé par Sokolovskii [52], d'où l'origine de l'appellation. Pour un matériau décrit par le modèle de Sokolovskii, les fonctions matérielles  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par :

$$\alpha(\varepsilon, \sigma) = E \quad (3.41)$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_y \\ -\text{sgn}(\sigma)F(|\sigma - \sigma_y|) & \text{si } |\sigma| > \sigma_y \end{cases} \quad (3.42)$$

$\sigma_y$  est la limite élastique du matériau et  $F$  une fonction positive, nulle à l'origine et dont la dérivée première est positive. L'exemple le plus simple est le cas d'une fonction linéaire,  $F(r) = kEr$  avec  $k$  le coefficient de viscosité du matériau.

Pour un état  $(\varepsilon, \sigma)$  tel que  $|\sigma| \leq \sigma_y$ , l'équation constitutive quasi-linéaire (S-M) coïncide parfaitement avec le modèle de Sokolovskii.

Malvern [41] avait généralisé en (1951) les idées de ces prédécesseurs, en proposant une équation constitutive semi-linéaire avec une fonction  $\beta$  dépendant à la fois de  $\varepsilon$  et de  $\sigma$ .

La forme introduite par Malvern a les mêmes propriétés que l'équation proposée par Sokolovskii, et prend la forme suivante:

$$\alpha(\varepsilon, \sigma) = E$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < f(\varepsilon) \\ -kF(\sigma - f(\varepsilon)) & \text{si } \sigma > f(\varepsilon) \end{cases} \quad (3.43)$$

avec  $k$  coefficient de viscosité ici constant et  $f(\varepsilon)$  une courbe continue de chargement quasi statique ou d'équilibre correspondant à l'état initial  $(\varepsilon = 0, \sigma = 0)$ .

Sur l'intervalle d'élasticité  $\left[0, \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}\right]$ , La courbe  $\sigma = f(\varepsilon)$  peut être identifiée à la droite de Hooke  $\sigma = E\varepsilon$ . La courbe  $f$  est obtenue à partir d'un essai mécanique à une vitesse de déformation très faible.

Plusieurs formes de fonctions  $\beta$  sont utilisées dans la littérature. Nous présentons ici quelques formes déjà utilisées par Malvern [41], Cristescui [12], Kunudjanov [30] et Weber [63].

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -k(\sigma - f(\varepsilon)) \quad [\text{F1}]$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -k\left(e^{\lambda(\sigma - f(\varepsilon))} - 1\right) \quad [\text{F2}]$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -k\left(\frac{\sigma - f(\varepsilon)}{a}\right)^n \quad [\text{F3}]$$

Les deux formes [F1] et [F2] ont été utilisées par Malvern en (1951), la forme [F3] est introduite en (1967) par Kunudjanov, Weber (1970) avait utilisé le modèle [F3] avec un paramètre  $a = 1$  pour l'analyse du comportement du polyéthylène, Cristescu (1972) avait utilisé un modèle de type [F1] avec un coefficient de viscosité dépendant de la déformation. D'autres formes de fonctions matérielles sont utilisées dans la littérature, nous mentionnons ici à titre indicatif les travaux de Jonhson et Gilman dans la théorie des dislocations en (1959) et les travaux de Kurayama et Kawata [29] en (1973)

Il est bon de signaler que la forme générale de l'équation quasi-linéaire en vitesse (S-M) a été proposée pour la première fois par Cristescui [12], et a été utilisée par différents chercheurs [18], [12], [25], [63], [4], et bien d'autres. Le fait de considérer une fonction matérielle  $\alpha$  non constante est une nécessité justifiée par l'expérience; pour plusieurs matériaux, le module de Young varie en fonction de la vitesse de déformation de l'essai. Toutefois, supposer que  $\alpha$  est une constante égale au module d'élasticité n'est pas une aberration. Nous retenons ici une forme quasi-linéaire en vitesse comme équation constitutive susceptible de décrire le comportement rhéologique des matériaux et que nous appliquerons à l'identification du comportement rhéologique de quelques types de matériaux.

La forme générale d'une équation constitutive quasi-linéaire en vitesse est donnée par l'équation (3.44) où le couple  $(\varepsilon, \sigma)$  appartient à l'espace des états possibles et  $\dot{\varepsilon}$  et  $\dot{\sigma}$  sont respectivement la vitesse de déformation et la vitesse de contrainte à l'état  $(\varepsilon, \sigma)$

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.44)$$

### 3.6.1. Conditions sur les fonctions $\alpha$ et $\beta$

Nous présentons ici les conditions et les restrictions sur les fonctions matérielles  $\alpha$  et  $\beta$  pour un modèle qui soit mécaniquement et physiquement raisonnable. Les résultats que nous présentons ici sont en bonne partie dus aux travaux de Silicui [50], Cristescui [12] et Malvern [41].

Considérons un mouvement unidimensionnel d'un milieu continu, où le processus mécanique des particules est défini en configuration Lagrangienne et le domaine des états possibles de contraintes et de déformations. Un corps est dit ayant un comportement quasi linéaire en vitesse s'il existe

deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que

$$D \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \alpha > 0 \text{ tel que} \quad (3.45)$$

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.46)$$

pour tout processus mécanique.

- Un matériau est dit possédant une configuration d'équilibre naturelle si  $(\varepsilon(t), \sigma(t)) = (0, 0)$  à l'instant  $t = 0$ . Une condition nécessaire pour qu'un matériau ait une configuration d'équilibre naturelle est que  $\beta(0, 0) = 0$ .

- Une courbe  $(\varepsilon, f(\varepsilon))$  est appelée courbe d'équilibre ou courbe de relaxation si le long de cette courbe, nous avons :

$$\beta(\varepsilon, f(\varepsilon)) = 0$$

- La fonction matérielle  $\beta$  est positive en déchargement c'est à dire pour des vitesses de déformations négatives, et négatives pour des valeurs de vitesses de déformations positives (fig. 3.2).

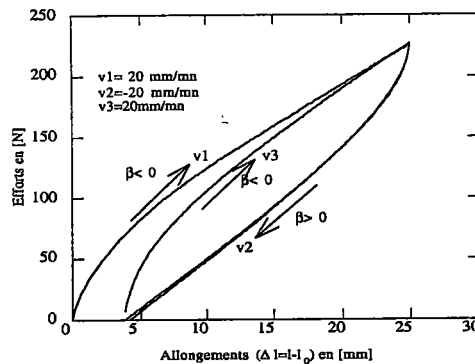


Figure 3.2. Variations de la fonction matérielle  $\beta$  (cas du polyéthylène)

### 5.7. Cas de discontinuité de la déformation ou saut de vitesse.

$\alpha$  et  $\beta$  dépendent de l'histoire de déformation mais ne changent pas dans une discontinuité de celle-ci. Pour pouvoir calculer le module tangent, avant et après le saut de vitesse, nous pouvons utiliser la forme (S-M). La condition d'élasticité est assurée par le changement brusque de vitesse de déformation.

Il y a absence de déformations instantanées par changement brusque de vitesse de charge. Ce principe est énoncé par Mandel [36]: " Il n'existe pas de milieux tels que si à l'instant  $(t)$ , on change brusquement la vitesse de charge, une variation instantanée de la déformation résulte". En effet, la

variation brusque de la vitesse de déformation provoque une variation brusque de la vitesse de contrainte et aucune variation brusque au niveau de la valeur de contrainte.

En se donnant les fonctions matérielles  $\alpha$  et  $\beta$  définies sur le domaine des états possible (fig. 3.4) et en considérant la déformation et la contrainte comme des variables du temps, avec  $\varepsilon(t)$  et  $\sigma(t)$  continues et dérivables, nous avons l'équation différentielle à valeur initiale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0, \sigma(0) = \sigma_0 \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in D \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dans le cas d'une discontinuité de la vitesse de déformation, le problème peut être formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_d &= \alpha(\varepsilon^+, \sigma^+)\dot{\varepsilon}_d + \beta(\varepsilon^+, \sigma^+) \\ (\varepsilon^+(0) &= \varepsilon_0, \sigma^+(0) = \sigma_0) \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in D \\ \dot{\sigma}_s &= \alpha(\varepsilon^-, \sigma^-)\dot{\varepsilon}_s + \beta(\varepsilon^-, \sigma^-) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$\dot{\sigma}_d$  est calculé après le saut de vitesse,  $\dot{\sigma}_s$  est calculé avant le saut de vitesse,  $\dot{\varepsilon}_d$  et  $\dot{\varepsilon}_s$  sont respectivement la vitesse de déformation après et avant le saut.  $(\varepsilon^-, \sigma^-)$  et  $(\varepsilon^+, \sigma^+)$  sont les valeurs de déformation et contrainte avant et après le saut.  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$  est le point où s'effectue le saut. Ce type d'équations différentielles admet une solution unique. Le problème d'existence et d'unicité est traité en détail dans [50]. Pour résoudre cette équation, nous faisons appel à la méthode de Lagrange de la variation des paramètres.

Soit en premier lieu, le premier terme de l'équation seul, nous avons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} \\ \varepsilon(0) &= \varepsilon_0, \sigma(0) = \sigma_0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Si  $\dot{\varepsilon} \neq 0$ , la solution globale s'écrit  $\sigma = f(\varepsilon, \varepsilon_0, \sigma_0)$  avec  $(\varepsilon_0, \sigma_0) \in D$  les valeurs initiales du problème équivalent suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} &= \alpha(\varepsilon, \sigma) \\ \sigma(\varepsilon_0) &= \sigma_0 \quad (\varepsilon_0, \sigma_0) \in D \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dans une discontinuité de la vitesse de déformation; le système d'équation différentielle, ci-dessus, permet de déterminer, en chaque point  $(\varepsilon, \sigma) \in D$ , les valeurs des fonctions matérielles correspondantes :

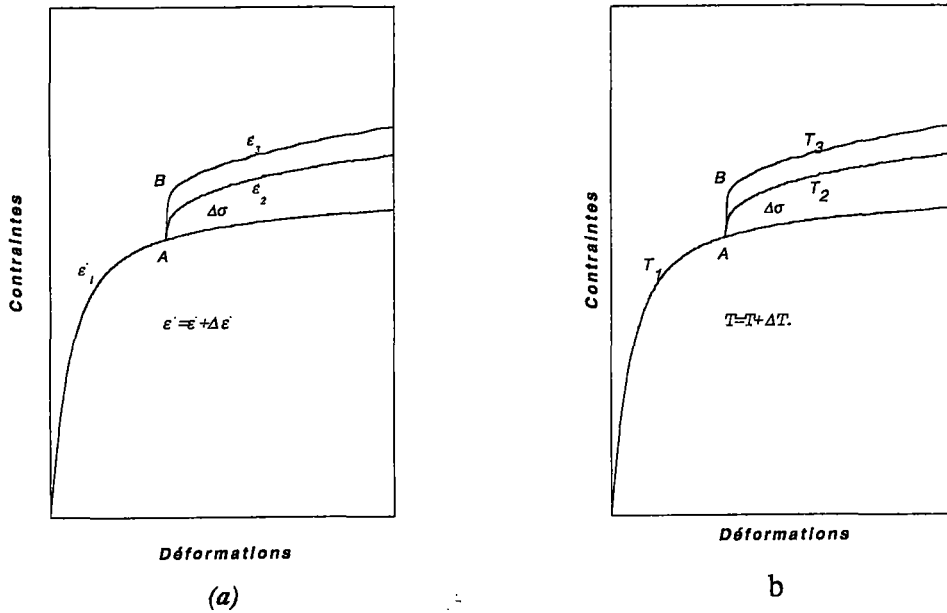
$$\dot{\sigma}(t+0) = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon}(t+0) + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.51)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \alpha(\epsilon, \sigma)\dot{\epsilon}(t) + \beta(\epsilon, \sigma)$$

Nous avons après résolutions de ce système, les valeurs suivantes :

$$\alpha(\epsilon, \sigma) = \frac{\dot{\sigma}(t+0) - \dot{\sigma}(t)}{\dot{\epsilon}(t+0) - \dot{\epsilon}(t)} \quad (3.52)$$

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \dot{\sigma}(t) - \alpha(\epsilon, \sigma)\dot{\epsilon}(t) \quad (3.53)$$



- a) Saut de contrainte accompagnant un changement brusque de vitesse de déformation .  
 b) Saut de contrainte accompagnant un changement brusque de température.

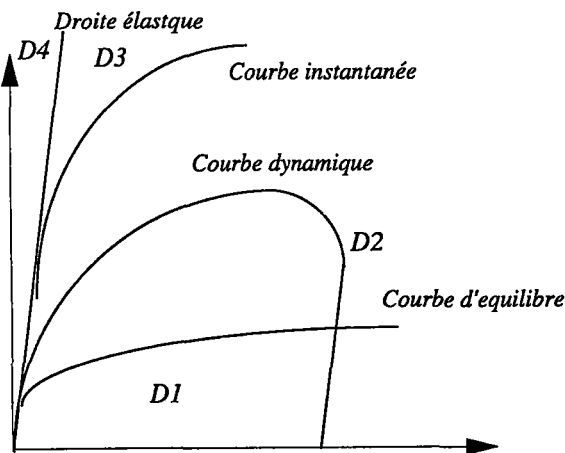


Figure 3.3. Domaines de chargement possibles

Tous les points du domaine  $D2 \cup D3$  sont des états de contrainte et de déformations accessibles à partir d'un état d'une configuration d'équilibre initiale, les points du domaine  $D1 \cup D4$  n'ont



aucune signification physique dans tout processus de chargement : aucun point de ce domaine ne peut être atteint.

### 3.8. Unicité de la déformation quasi statique.

Nous généralisons ici la démonstration donnée par [61]

#### 3.8.1. Position du problème.

Soit  $V$  un domaine borné de  $\mathfrak{R}^3$  ayant une frontière régulière  $\partial V = S$  avec  $S_u$  une partie du domaine de  $S$ . Supposons la stabilité de  $V$ , l'équation d'équilibre vérifie le critère d'énergie en coordonnées Lagrangienne:

$$\int_V \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial a_j} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial a_l} dV > 0 \quad (3.53)$$

pour tout vecteur  $u$  non nul, vérifiant la double condition suivante

- $u$  : continue dans  $V$
  - $u$  : égal à zéro sur la surface  $S_u$
- [C1]

avec

$$\theta_{ij,j} = 0 \quad \forall t \quad (3.54)$$

L'équation (3.52) représente l'équation d'équilibre dans le cas de forces de volumes nulles,  $\theta$  est le tenseur de Boussinesq.

$$\theta_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{ij}} \quad (3.55)$$

après dérivation par rapport au temps on obtient :

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_l} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \xi_{kl}} \frac{\partial \Omega}{\partial X_{kl}}(\xi, X) \quad (3.56)$$

ou encore

$$\dot{\theta}_{ij} = \varphi_{ijkl} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial a_l} + \Psi_{ij} \quad (3.57)$$

avec  $\varphi_{ijkl} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}$  et  $\Psi_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{ij} \partial \xi_{kl}} \frac{\partial \Omega}{\partial X_{kl}}(\xi, X)$

L'équation (3.57) constitue une généralisation de l'équation quasi linéaire (S-M) au cas de sollicitations multiaxiales.

### 3.8.2. Unicité.

Pour montrer l'unicité de la solution du problème, supposons qu'il existe dans  $V$  deux vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  répondant aux conditions [C1] avec  $x^*$  leur différence.  $x^*$  vérifie les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \varphi_{ijk} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} \right) = 0 \quad \text{pour } a \in V \quad (3.58)$$

$$\dot{x}^* = 0 \quad \text{pour } a \in S_u \quad (3.59)$$

$$\varphi_{ijk} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} n_j = 0 \quad \text{pour } a \in (S - S_u) \quad (3.60)$$

L'intégration par partie du critère d'énergie (3.53) permet d'écrire

$$\int_V \varphi_{ijk} \frac{\partial x_i^*}{\partial a_j} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \varphi_{ijk} x_i^* \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} \right) dV - \int_V \dot{x}_i^* \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \varphi_{ijk} \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} \right) dV \quad (3.61)$$

La transformation permettant le passage d'une sommation sur le volume à une sommation sur les frontières donne :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \varphi_{ijk} x_i^* \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} \right) dV = \int_S \left( \varphi_{ijk} x_i^* \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} n_j \right) dS \quad (3.62)$$

Avec (3.59) et (3.60) nous déduisons l'implication suivante

$$\int_V \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \varphi_{ijk} x_i^* \frac{\partial x_k^*}{\partial a_i} \right) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i^* = 0 \quad (3.63)$$

Nous pouvons énoncer ceci : si le critère fondamental de stabilité est vérifié et  $S_u$  non vide; la solution d'un problème en vitesse, si elle existe est unique. Dans le cas où  $S_u$  est vide, la solution est unique à une constante additive près.

La signification mécanique serait : la stabilité entraîne l'unicité des vitesses dans le corps lorsqu'on impose les vitesses de déformations suivant  $S_u$  et les vitesses de contraintes suivant  $S_\theta$ .

Le même résultat peut être démontré pour  $\ddot{x}$ , en partant de l'équation  $\ddot{\theta}_{i,j} = 0$ . Le raisonnement est valable à l'ordre  $n$ .

### 3.9. Différentes Formes de l'Équation (S-M).

D'autres formes équivalentes à l'équation (S-M) sont obtenues à partir de transformations mathématiques simples. Nous donnons ici des formulations relativement générales; l'idée de base

est de montrer le caractère flexible et pratique de l'équation (S-M)

### 3.9.1. Équation en vitesse de déformation.

Dans l'étude de l'équation (S-M), nous supposons que la fonction matérielle  $\alpha$  est inversible, donc le rôle  $\varepsilon$  et de  $\sigma$  peuvent interférer. Suite à cela, nous pouvons donc écrire

$$\dot{\varepsilon} = f(\varepsilon, \sigma)\dot{\sigma} + g(\varepsilon, \sigma) \quad (3.64)$$

Dans l'équation (3.64) il est implicitement supposé, pour tout état donné  $(\varepsilon, \sigma) \in D$  et pour toute vitesse de contrainte  $\dot{\sigma}$ ; la donnée de deux fonctions matérielles  $f$  et  $g$  en cet état.

L'équation (3.64) est une forme équivalente de l'équation quasi-linéaire en vitesse où  $f$  et  $g$  sont reliées à  $\alpha$  et  $\beta$  par :

$$\alpha(\varepsilon, \sigma) = \frac{1}{f(\varepsilon, \sigma)} \quad (3.65)$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -\frac{g(\varepsilon, \sigma)}{f(\varepsilon, \sigma)} \quad (3.66)$$

### 3.9.2. Équation en module tangent

Après des transformations mathématiques simples, l'équation (S-M) s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.67)$$

avec  $\dot{\varepsilon} \neq 0$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \alpha(\varepsilon, \sigma) + \frac{\beta(\varepsilon, \sigma)}{\dot{\varepsilon}} \quad (3.68)$$

L'équation (3.68) permet de modéliser des courbes sous sollicitations uni axiales à partir de la valeur de module tangent : dérivée de la contrainte à la déformation au point  $(\varepsilon, \sigma)$

### 3.9.3. Forme en vitesse de déformation plastique

La vitesse de déformation est décomposable en une vitesse de déformation élastique et une vitesse de déformation inélastique de la manière suivante :  $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + \dot{\varepsilon}^p$ ,  $\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$  et  $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^e$

(3.64) s'écrirais sous la forme suivante :

$$\frac{\sigma}{E} + \dot{\epsilon}^P = f(\epsilon, \sigma)\dot{\sigma} + g(\epsilon, \sigma) \quad (3.69)$$

d'où

$$\dot{\epsilon}^P = \left( f(\epsilon, \sigma) - \frac{1}{E} \right) \dot{\sigma} + g(\epsilon, \sigma) \quad (3.70)$$

avec  $f_1(\epsilon, \sigma) = f(\epsilon, \sigma) - \frac{1}{E}$ , nous avons :

$$\dot{\epsilon}^P = (f_1(\epsilon, \sigma))\dot{\sigma} + g(\epsilon, \sigma) \quad (3.71)$$

Si en plus  $f_1(\epsilon, \sigma) = 0$ , (3.70) prend la forme réduite simplifiée :

$$\dot{\epsilon}^P = g(\epsilon, \sigma) \quad (3.72)$$

et l'équation (3.64) prend la forme équivalente à l'équation proposée par Malvern

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + g(\epsilon, \sigma) \quad (3.72)$$

### 3.10. Courbes de traction à partir de l'équation de (S-M).

L'équation (3.67) permet de modéliser les courbes de traction simple à partir de la valeur du module tangent: dérivée de la contrainte à l'instant (t) par rapport à la déformation donnée.

#### 3.10.1. Courbes dynamiques

Les essais de traction dynamique, obtenus pour des vitesses de déformation suffisamment élevées, sont modélisés par l'équation

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \alpha(\epsilon, \sigma) \quad (3.73)$$

Pour une représentation simple à partir du module d'élasticité, on se donne un module tangent dynamique  $E_{td}$  et une contrainte dynamique notée  $\sigma_d$ . Le module tangent d'une courbe dynamique est défini pour une déformation donnée par:

$$E_{td}(\epsilon, \sigma_d) = \alpha(\epsilon, \sigma_d) \quad (3.74)$$

l'équation (3.65) permet d'écrire

$$\lim_{f(\varepsilon, \sigma) \rightarrow \infty} \alpha(\varepsilon, \sigma) = 0 \quad (3.75)$$

d'où

$$E \geq \alpha(\varepsilon, \sigma) \quad (3.76)$$

Les corps présentant à la fois une élasticité instantanée et une élasticité différée ont un module élastique instantané supérieur au module élastique différé.

### 3.10.2. Courbe Quasi statique

La courbe quasi statique est définie pour les vitesses très faibles :  $\dot{\varepsilon} \approx 0$ . La courbe quasi statique appelée aussi courbe d'équilibre peut être définie par l'équation :  $\beta(\varepsilon, \sigma) = 0$ .

Pour cela, on se donne le module tangent quasi statique qu'on appelle  $E_s$  et  $\sigma_s$  contrainte correspondante. Le module tangent de la courbe quasi statique est donné par l'équation suivante

$$E_{ts}(\varepsilon, \sigma_s) = \frac{d\sigma_s}{d\varepsilon} \quad (3.78)$$

### 3.10.3. Courbes Statiques (Intermédiaires)

Ce sont les essais de traction effectués à des vitesses de traction moyennes (ces courbes ne font partie ni des essais quasi statiques ni des essais dynamiques).

Avec  $E_t$ , le Module tangent d'une courbe de traction à vitesse moyenne, nous avons :

$$E_t(\varepsilon, \sigma) = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad (3.79)$$

L'équation (3.69) permet d'écrire :

$$g(\varepsilon, \sigma) = \dot{\varepsilon} \left( 1 - f(\varepsilon, \sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right) \quad (3.80)$$

En tenant compte des équations (3.74) et (3.78), l'équation (3.80) prend la forme

$$g(\varepsilon, \sigma) = \dot{\varepsilon} \left( 1 - \frac{E_t}{E_{td}(\varepsilon, \sigma_d)} \right) \quad (3.81)$$

Donc :

$$E_t = E_{td}(\varepsilon, \sigma_d) \left[ 1 - \frac{g(\varepsilon, \sigma)}{\dot{\varepsilon}} \right] \quad (3.82)$$

D'où le résultat:

$$\lim_{\dot{\varepsilon} \rightarrow \infty} (E_t) = E_{td}(\varepsilon, \sigma_d) \quad (3.83)$$

### 3.10.4. Courbes à vitesse de déformation constante

Dans le cas des essais à vitesse de déformation constante  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_c = cste$ , l'équation (S-M) prend une forme qui fait apparaître la donnée d'une vitesse de déformation invariable

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon}_c + \beta(\varepsilon, \sigma) \quad (3.84)$$

ou encore :

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma) \left( \dot{\varepsilon}_c + \frac{\beta(\varepsilon, \sigma)}{\alpha(\varepsilon, \sigma)} \right) \quad (3.85)$$

(3.85) permet d'écrire :

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)(\dot{\varepsilon}_c - g(\varepsilon, \sigma)) \quad (3.86)$$

avec  $\alpha(\varepsilon, \sigma) \geq 0$  dans le cas d'une vitesse de charge positive  $\dot{\sigma} \geq 0$ , nous avons :

$$\dot{\varepsilon}_c \geq g(\varepsilon, \sigma) \quad (3.87)$$

### 3.10.5. Fluage

Si on porte le matériau à un niveau de contrainte qu'on maintient constante, ceci donne lieu à des déformations retardées. Dans le cas d'un modèle rhéologique (amortisseur & ressorts), les déformations sont celles de l'amortisseur qui ne peut subir des déformations instantanées. Ce qui se traduit par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = 0 \\ \sigma^* = cste \\ \dot{\varepsilon} = g(\varepsilon, \sigma) \end{cases} \quad (3.88)$$

L'intégration du système d'équation (3.88) donne :

$$t = \int \frac{d\varepsilon}{g(\varepsilon, \sigma)} + A_t \quad (3.89)$$

La fonction  $g(\varepsilon, \sigma)$  contient des informations sur le fluage.

### 3.10.6. Relaxation

On impose au matériau une déformation rapide qu'on maintient constante. La contrainte décroît très lentement et progressivement c'est la relaxation. La relaxation est exprimée mathématiquement par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 0 \\ \varepsilon = \varepsilon^* = \text{cste} \\ \dot{\sigma} = \beta(\varepsilon^*, \sigma) \end{cases} \quad (3.90)$$

Donc

$$t = \int \frac{d\varepsilon}{\beta(\varepsilon^*, \sigma)} + A_2 \quad (3.91)$$

La fonction  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  contient des informations sur la relaxation des matériaux qu'elle décrit.

### 3.10.7 Effets Inélastiques

L'équation de Coleman valable pour des milieux présentant de l'élasticité instantanée permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial \phi(\varepsilon, \xi)}{\partial \varepsilon} = \sigma(\varepsilon, \xi) \\ \dot{\sigma}_{ij}(\varepsilon, \xi) &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha \end{aligned}$$

Le tenseur de déformation élastique instantanée  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}$  est indépendant de la variable interne, ce qui équivaut à écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right) = 0 \quad (3.92)$$

Ceci permet de décomposer la contrainte et la déformation en une partie élastique et une partie inélastique :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^e(\varepsilon) + \sigma^in(\xi) \\ \varepsilon &= \varepsilon^e(\varepsilon) + \varepsilon^in(\xi) \end{aligned}$$

Ce qui rend compte d'une possibilité de décomposition de l'énergie libre en une énergie libre élastique  $\phi^e$  et en une énergie libre inélastique  $\phi^in$

### 3.11. Conditions à imposer sur les fonctions matérielles.

A toute équation rhéologique de type différentiel (S-M) doit correspondre une représentation thermodynamique rationnelle à variable interne  $\xi$ ; cette représentation est définie par l'énergie libre et le potentiel de dissipation.  $\xi$  peut être choisi égal à la déformation immédiatement après annulation de la contrainte  $\sigma$ . L'énergie libre et le potentiel de dissipation sont déduits de la fonction matérielle  $\beta$ . On donne la condition sur  $\beta$  qui assure la dissipativité.

On se propose ici d'appliquer le cadre thermodynamique des variables internes aux matériaux obéissant à l'équation (S-M).

Soit un état  $(\varepsilon, \sigma)$ ; on annule brusquement  $\sigma$ , la déformation dans cet état relâché R est notre variable interne de type scalaire  $\xi$  (la variable interne peut être une fonction de  $\xi$ ).

L'énergie libre dans cet état est la somme d'une énergie élastique et d'une énergie inélastique, telle que :

$$\phi(\varepsilon, \xi) = \phi_1 + \phi_2 \quad (3.93)$$

avec

$$\phi_1 = \frac{E(\varepsilon - \xi)^2}{2} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \phi_2(\xi) \quad (3.94)$$

Pour des déformations infiniment lentes ( $\dot{\varepsilon} \equiv 0, \dot{\sigma} \equiv 0$ ) (phénomène de relaxation et de fluage), on définit la contrainte comme fonction implicite de la déformation.

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = 0$$

On a donc

$$\phi(\varepsilon) = \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad \xi = \varepsilon - \frac{\sigma(\varepsilon)}{E} \quad (3.95)$$

On peut donc construire  $\phi_2(\xi)$  à partir de  $\beta(\varepsilon, \sigma)$

Dans le cas d'une seule variable interne, la méthode des variables internes (T.P.I.) permet de poser les relations :

$$\begin{aligned} \sigma &= E(\varepsilon - \xi) \\ \dot{\sigma} &= E(\dot{\varepsilon} - \dot{\xi}) \\ \dot{\sigma} &= E\dot{\varepsilon} - E\dot{f}(X, \xi) \\ X &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \\ X &= E(\varepsilon - \xi) - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (3.96)$$

En remplaçant les valeurs de  $X, \xi$  par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$f(\varepsilon, \sigma) = -E\beta\left(\varepsilon(X, \xi), \sigma(X, \xi)\right) \quad (3.97)$$

puisque

$$\xi = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

et

$$X = \sigma - \frac{d\phi_2}{d\xi}(\varepsilon, \xi)$$

Nous pouvons donc écrire:



$$\begin{aligned}\sigma &= X - \frac{d\phi_2}{d\xi}(\varepsilon, \xi) \\ \varepsilon &= \frac{1}{E} \left( X + \frac{d\phi_2}{d\xi} \right) + \xi\end{aligned}\tag{3.98}$$

Nous pouvons, à raison de ces développements, écrire:

$$f(\xi, X) = \frac{-1}{E} \beta(\varepsilon(\xi, X), \sigma(\xi, X))\tag{3.99}$$

La condition de dissipativité s'écrit sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}\forall \xi, X \quad Xf(\xi, X) &\geq 0 \\ \forall \xi, X \quad X\beta(\varepsilon(\xi, X), \sigma(\xi, X)) &\leq 0\end{aligned}\tag{3.100}$$

Dans le cas d'un modèle standard ou de Zener linéaire, nous avons :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{E(\varepsilon - \xi)^2}{2} + E' \frac{\xi^2}{2}\tag{3.101}$$

et

$$\Omega = \frac{1}{2\eta} X^2\tag{3.102}$$

avec

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\eta} (EE' - (E + E')\sigma)\tag{3.103}$$

La condition de dissipativité prend la forme :

$$\frac{X}{\eta} \left[ EE' \left( \frac{1}{E} X + \frac{E'}{E} \xi + \xi \right) - (E + E')(X + E'\xi) \right] = -\frac{E}{\eta} X^2 \leq 0\tag{3.104}$$

La méthode qui vient d'être exposée permet d'éliminer, dans le cas d'une seule variable interne, certaines formes inadéquates qui correspondent à des comportements non dissipatifs. Les difficultés seraient bien plus grandes avec plus d'une seule variable interne.

de

### 3.12. Viscoplasticité à une seule variable interne.

A la suite de différents auteurs (Cristescu, Malvern, Lemaitre, Sidoroff, Bui, Berveiller, Klepaczko, ...) on fait ressortir l'intérêt théorique et pratique des équations rhéologiques de la forme

$$\dot{\sigma} = \alpha(\varepsilon, \sigma)\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma)$$

Elles correspondent au cas d'une seule variable interne  $\xi$ , lorsque le comportement isotherme

équivalent est décrit par l'énergie libre  $\phi(\epsilon, \xi)$  et l'équation d'évolution de la variable interne  $\dot{\xi} = g(\epsilon, \xi)$ .

On a alors  $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$  et la condition de dissipativité prend la forme simple  $g(\epsilon, \xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \leq 0$

On a appliqué ces équations (S-M) sous la forme simple

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - k \operatorname{sgn}(\sigma - f(\epsilon)) |\sigma - f(\epsilon)|^n \quad (3.105)$$

$\sigma = f(\epsilon)$  est alors la courbe quasi-statique, en principe obtenue pour des essais infiniment lents.

Plus généralement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E\dot{\epsilon} - k \operatorname{sgn}(u) h(u) \\ u &= \sigma - f(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.106)$$

La fonction  $h(u)$  est alors une fonction paire de  $u$  qui s'annule dans l'intervalle  $[-u_1, u_1]$  et qui croît rapidement en dehors de cet intervalle.

On peut ainsi décrire des comportements viscoplastiques, où le matériau présente des déformations permanentes et de l'écroutissage.

Tous ces comportements sont conformes à la loi du saut de vitesse

$$\dot{\sigma} = A\dot{\epsilon} + B$$

ou

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}(t+0) = A + \frac{B}{\dot{\epsilon}(t+0)}$$

$A$  et  $B$  dépendent de l'histoire de déformation  $\epsilon(t)$  avant le saut; mais ne dépendent pas de  $\dot{\epsilon}(t+0)$  immédiatement après le saut.

Cette loi du saut de vitesse peut aussi être démontrée pour des comportements à plusieurs variables internes doués d'élasticité instantanée.

On peut prendre pour variable interne la déformation viscoplastique  $\epsilon_{vp}$ , c'est à dire la déformation dans l'état "neutre instantané" où  $\sigma$  est brusquement ramenée à la valeur 0.

On peut aussi prendre pour variable interne la déformation viscoplastique  $\epsilon_{vp}$ , par exemple la déformation  $\xi$  dans l'état partiellement relâché où le matériau est amené sur la courbe quasi-statique par variation brusque de  $\sigma$  ( ou de  $\epsilon$  ).

Avec cette variable interne  $\xi$ , on a :

$$\phi(\epsilon, \xi) = \int_0^\xi f(\xi') d\xi' + f(\xi)(\epsilon - \xi) + \frac{1}{2} E(\epsilon - \xi)^2 \quad (3.107)$$

La transformation à la cinétique chimique en phase gazeuse s'écrirait

$$\dot{p} = -\frac{p\dot{v}}{v} - k \operatorname{sgn}(p - p_0) |p - p_0(v)|^n \quad (3.108)$$

$p$  est ici la pression,  $v$  le volume.

$p = p_0(v)$  est le comportement dans une transformation isotherme infiniment lente.

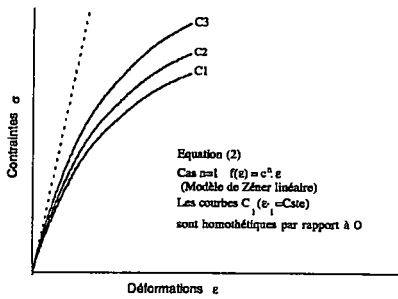


Figure 1.

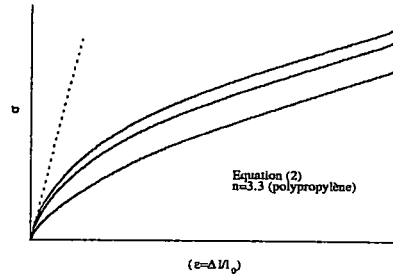


Figure 2

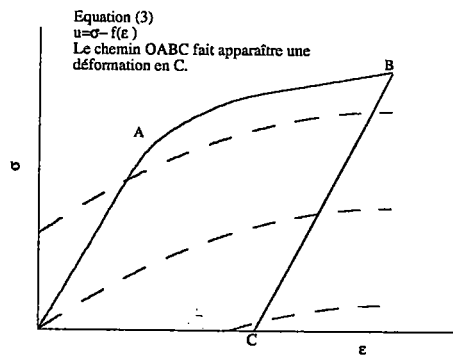


Figure 3.

Soit un cycle fermé du plan  $\varepsilon - \sigma$  décrit entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . On a :

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} dt \quad (\text{travail fourni au matériau au cours du cycle})$$

Or

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0 \quad (\text{le cycle est fermé})$$

soit

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} dt + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \dot{\xi} dt \right) = 0$$

soit

$$W + \int_{t_1}^{t_2} f(\varepsilon, \xi) \dot{\xi} dt = 0$$

On a donc bien  $W \geq 0$  (dissipativité, ou conformité avec le second principe de la thermodynamique), si :

$$f(\varepsilon, p) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \leq 0$$

Expression de  $\dot{\varepsilon}_{vp}$  si on admet l'équation rhéologique proposée.

On a :  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp}$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{vp}$$

d'où

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_{vp}$$

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E\dot{\varepsilon}_{vp}$$

et puisqu'on admet la validité de l'équation (S-M), nous avons :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = k \operatorname{sgn}(\sigma - f(\varepsilon)) |\sigma - f(\varepsilon)|^n$$

**Démonstration du fait que  $\xi$  est une fonction monotone de  $\varepsilon_{vp}$ .**

Si on se reporte à la figure (4), à partir de l'état A, une variation brusque de  $\sigma$  (ou  $\varepsilon$ ) amène le point représentatif de l'état en B (état partiellement relâché où le matériau est amené sur la courbe quasi-statique); puis en C (état totalement relâché, qu'on peut aussi appeler "neutre instantané"). L'abscisse de B est  $\xi$ ; l'abscisse de C est  $\varepsilon_{vp}$ . La correspondance entre B et C est déterminée par le fait que BC a pour pente le module de Young E. La correspondance entre  $\xi$  et  $\varepsilon_{vp}$  est bien monotone.

Pour démontrer la formule ci dessus, il suffit d'imaginer que le matériau est amené dans l'état A (figure 4) par le chemin OB (décrit de façon très lente) puis par le chemin BA (décrit d'une façon très rapide). Le calcul du travail  $\phi$  fourni, conduit à la formulation proposée.

Pour vérifier la dissipativité dans le cas de l'équation différentiel (S-M). Nous avons, d'après ce qui vient d'être exposé,  $\dot{\varepsilon}_{vp}$  est du signe de  $(\sigma - f(\varepsilon))$ . Donc  $\dot{\xi}$  est du signe de  $(\sigma - f(\varepsilon))$  c'est à dire du signe de  $\varepsilon - \xi$  si  $\frac{df}{d\varepsilon} \leq E$ , comme on le voit sur la figure 3.

Mais d'après (105)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \left( \frac{df}{d\varepsilon} - E \right) (\varepsilon - \xi)$$

Il en résulte la condition de dissipativité suivante :  $\dot{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \leq 0$

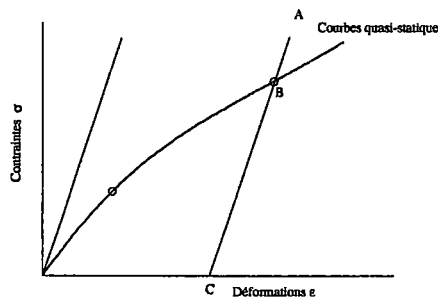


Figure. 4.

### 3.13. Conclusion.

Nous concluons ce chapitre en disant que l'approche thermodynamique à variable interne doit énormément à l'école française à travers les travaux de Mandel, Weber, Sidoroff, et d'autres. La méthode des variables internes permet une description rationnelle des comportements rhéologiques. Le cas d'une seule variable conduit à des formes simples d'équations constitutives qui contiennent des informations intéressantes pour ce qu'elles apportent comme informations sur la nature du comportement rhéologique.

## *Chapitre 4.*

### *Validité du Formalisme*

*Page 70*

#### *4.1 Introduction*

#### *4.2 Modèle de Maxwell*

#### *4.3 Modèle de Kelvin Voigt*

#### *4.4 Modèle de Zener*

#### *4.5 Modèles Complexes*

##### *4.5.1 Chaîne de Maxwell $n=2$*

##### *4.5.2 Modèles non linéaires*

#### *4.6 Viscoélasticité non linéaire*

#### *4.7 Continu tridimensionnel*

##### *4.7.1 Cas du corps de Maxwell*

##### *4.7.8 Evolution de la variable interne*

## 4. Validité du Formalisme

### 4.1. Introduction

Le concept des variables internes peut être développé à l'aide de modèles unidimensionnels où la réponse du modèle peut être décrite à l'aide d'équations différentielles ou intégrales.

La rhéologie fait un usage constant d'assemblage de ressorts et d'amortisseurs qui rendent compte, au moins qualitativement des comportements mécaniques. On connaît le modèle de Kelvin, de Maxwell, de Zener et bien d'autres, certains de ces modèles présentent de l'élasticité instantanée, d'autres non. Nous considérerons par la suite seulement les modèles présentant de l'élasticité instantanée.

La rhéologie comprend l'ensemble des problèmes liés à la déformation et à la fluidité des matériaux. Son essor est stimulé par l'application toujours grandissante, de nouveaux matériaux dont les propriétés mécaniques diffèrent considérablement des propriétés connues et étudiées. La rhéologie est une phénoménologie qui s'efforce de réunir en un système la théorie des corps viscoélastiques et viscoplastiques et la mécanique des liquides visqueux. Elle s'apprête dans son développement à se concentrer sur la construction des équations d'état et sur l'étude de lois physiques ayant trait au comportement des corps réels, tout en tentant d'expliquer en se basant sur la structure des corps, les causes intrinsèques des phénomènes qui se produisent dans le temps.

Les modèles rhéologiques sont des éléments analogiques et n'ont rien de commun avec la structure du corps. Les éléments constitutifs et leurs paramètres étant définis, la réponse du modèle est indépendante du type de sollicitations imposées. C'est aussi une première modélisation du comportement à partir d'un assemblage d'éléments simples, représentant chacun un type de comportement bien défini.

La théorie de la viscoélasticité se prête à de nombreuses applications, et peut être obtenue à partir d'assemblages linéaires ou non de ressorts et d'amortisseurs. Nous associons les variables internes aux éléments dissipatifs dans le modèle; il est bon de dire que dans ces modèles rhéologiques, il y a autant de variables internes que d'amortisseurs.

Les modèles rhéologiques ont aussi leur place en cinétique chimique, les variables internes étant alors le degré d'avancement des réactions chimiques.

La rhéologie comporte alors, trois sortes d'études :

- Une étude expérimentale: détermination expérimentale des relations de comportement.
- Une étude structurales : Analyse des relations à partir de la structure des matériaux.
- Une étude théorique : Définition du cadre mathématique et des diverses formes de ces relations d'un point de vue macroscopique.

Chaque élément du modèle rhéologique correspond à un type de comportement simple où la température peut évidemment intervenir. Dans toute la suite, pour raison de simplicité nous la supposons constante.

L'assemblage de ressorts, d'amortisseurs et de patins, d'une façon ou d'une autre, constitue la règle générale pour établir des modèles plus complexes.

## 4.2. Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell comporte le montage en série d'un ressort et d'un amortisseur. Ce modèle décrit, de la façon la plus simple possible, les effets de la viscosité combinés en série avec des effets d'élasticité instantanée.

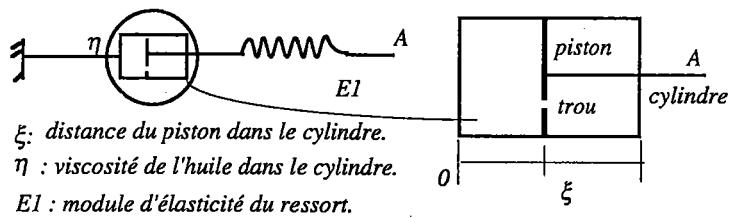


Figure 4.1 Modèle de Maxwell.

Le modèle de Maxwell est un modèle viscoélastique, avec comme variable d'état observable la déformation totale du modèle et comme variable interne le déplacement relatif du piston à l'intérieur de l'amortisseur.

L'énergie libre est l'énergie emmagasinée dans le ressort :

$$\phi = \frac{1}{2} E \varepsilon_r^2 = \frac{1}{2} E (\varepsilon - \xi)^2$$

et

Le potentiel de dissipation dépend implicitement des variables internes à travers leurs forces thermodynamiques correspondantes :

$$\Omega = \Omega(X) = \frac{1}{2\eta} X^2 \quad (4.1)$$

L'équation de Coleman permet d'écrire :



$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = E(\varepsilon - \xi) \quad (4.2)$$

En différentiant (4.2) par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\xi}) \quad (4.3)$$

avec (3.9) et (4.3) on a :

$$\dot{\sigma} = E \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) \quad (4.4)$$

En tenant compte de (4.1), on obtient la forme différentielle suivante

$$\dot{\sigma} = E \left( \dot{\varepsilon} - \frac{1}{\eta} \sigma \right) \quad (4.5)$$

L'équation (4.5) gouvernant la réponse des corps de Maxwell est une équation du type (S-M) avec

$$\alpha(\varepsilon, \sigma) = E \text{ et } \beta(\varepsilon, \sigma) = -\frac{E}{\eta} \sigma$$

### 4.3. Modèle de Kelvin-Voigt.

Considérons un corps viscoélastique dans un état de tension uni axiale. L'équation d'état se présente sous la forme d'une fonction du temps c'est à dire faisant intervenir la vitesse de tension. Il est convenu que le corps en question a en partie les propriétés d'un corps élastique et celles d'un liquide visqueux. On conçoit que le modèle du corps consiste en un groupement d'un ressort représentant les propriétés élastiques et d'un amortisseur traduisant les propriétés d'un liquide.

Le modèle de Kelvin-Voigt est un ressort associé en parallèle à un amortisseur (fig.4.2.). Dans ce modèle les effets de viscosité et d'élasticité différée sont combinés.

Sous une impulsion de contrainte, la réponse du modèle de Kelvin-Voigt se développe lentement. Contrairement à cela, la réponse d'un corps de Maxwell est immédiate.

Sous impulsion d'extension, la contrainte dans le ressort dans un modèle de Kelvin-Voigt est infinie, alors qu'elle est finie dans un modèle de Maxwell.

L'énergie libre est l'énergie emmagasinée dans le ressort. Les déformations dans le ressort et dans l'amortisseur (unique variable interne) sont identiques, tandis que la contrainte se décompose en deux parties correspondant respectivement à la contrainte dans l'amortisseur et à la contrainte dans le ressort.

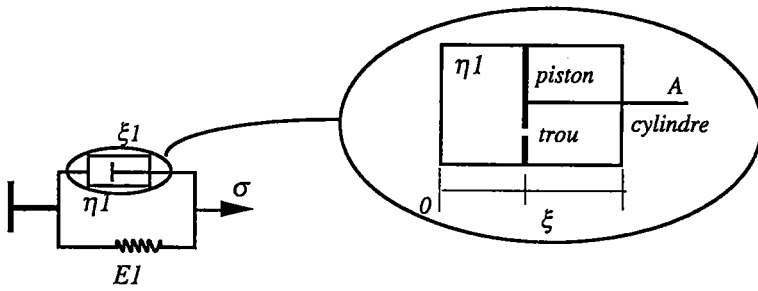


Figure 4.2 Modèle de Kelvin-Voigt

La contrainte dans le modèle est la contrainte dans l'amortisseur rajoutée à la contrainte dans le ressort. L'énergie libre est donnée par :

$$\phi(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 + \frac{1}{2} E \xi^2 \quad (4.6)$$

Le potentiel de dissipation est donné par :

$$\Omega = \frac{1}{2\eta} X^2 \quad (4.7)$$

La force thermodynamique est la contrainte que subit l'amortisseur :

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.8)$$

La variable interne  $\xi$  est déplacement du piston à l'intérieur du cylindre à partir d'un état d'équilibre initial :

$$\sigma = E\varepsilon + X \quad (4.9)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} = \frac{X}{\eta} \quad (4.10)$$

$$X = \eta \dot{\xi} \quad (4.11)$$

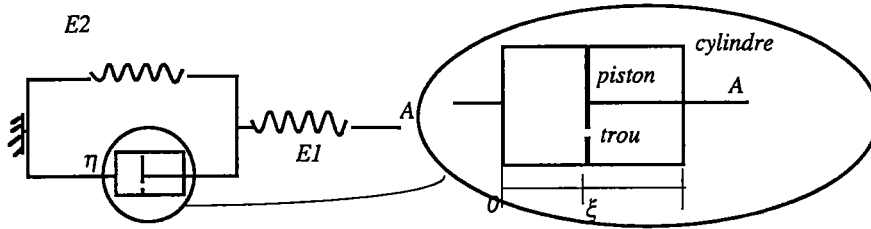
$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\xi} \quad (4.12)$$

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \eta \ddot{\xi} \quad (4.13)$$

Il est clair (fig. 3.2) que dans ce modèle, il y a deux choix possibles de variable interne. Pour le modèle de Voigt, l'équation rhéologique n'est pas de type (S-M). Tout modèle rhéologique ne présentant pas d'élasticité instantanée est à écarter de la présente étude.

#### 4.4. Modèle de Zener.

Le modèle de Zener est un assemblage d'un modèle de Kelvin en série avec un ressort



$\xi$ : distance du piston dans le cylindre.  
 $\eta$ : viscosité de l'huile dans le cylindre.  
 $E1, E2$ : module d'élasticité des ressorts 1 et 2.

Fig. 4.3. Schéma d'un modèle de Zener

Comme tous les corps visqueux, les corps de Zener présentent des effets fluants, des effets relaxants ainsi que des effets d'élasticité différée.

L'équation différentielle gouvernant le modèle peut être établie facilement à partir de l'énergie libre et du potentiel de dissipation. L'énergie libre totale de l'assemblage est l'énergie du ressort  $E_1$  ajoutée à l'énergie du ressort  $E_2$  :

$$\phi = \frac{1}{2} E_1 (\varepsilon - \xi)^2 + \frac{1}{2} E_2 (\xi^2) \quad (4.14)$$

D'autre part, la variable interne est la distance du piston au fond du cylindre, ce choix a des raisons thermodynamiques valables. La vitesse d'avancement du piston  $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}$  dépend de la force  $A$  exercée sur la tige  $A$ . L'équation d'évolution de la variable interne est donnée par

$$\dot{\xi} = \frac{1}{\eta} A \quad (4.15)$$

**Montrons que:**  $A = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  ?

Pour cela, imaginons le cylindre de l'amortisseur vidé de son huile. L'amortisseur est maintenu par un opérateur fictif, fixe par rapport au cylindre et ayant les fonctions du liquide. Il est clair que l'opérateur exerce une force  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$  pour avancer l'amortisseur. Par conséquent l'huile exerce sur le piston un effort  $A = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$

L'énergie libre dans le modèle de Zener est donnée par :

$$\phi = \frac{1}{2} E_1 (\varepsilon - \xi)^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \quad (4.16)$$

Le potentiel de dissipation est donné par :

$$\Omega = \frac{1}{2\eta} X^2 \quad (4.17)$$

La contrainte, résultat de la formule de Coleman, est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = E_1 (\varepsilon - \xi) \quad (4.18)$$

Ce qui permet d'écrire les équations suivantes :

$$\dot{\sigma} = E_1 \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) \quad (4.19)$$

$$\dot{\sigma} = E_1 \left( \dot{\varepsilon} - \frac{X}{\eta} \right) \quad (4.20)$$

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \xi = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \quad X = -E_1 (\varepsilon - \xi) + E_2 \xi \quad (4.20)$$

Tout calcul fait, en éliminant  $\xi$  et  $\dot{\xi}$ , on obtient :

$$\dot{\sigma} = E_1 \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon - \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma \quad (4.21)$$

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (4.22)$$

Le modèle Standard ou de Zéner est bien représenté par une équation du type (S-M) avec

$$\alpha(\varepsilon, \sigma) = E_1$$

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon - \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma$$

Une équation du type (4.22) a besoin de conditions supplémentaires pour représenter un modèle Standard ou de Zener

de

$$p_1 \geq 0 \quad q_0 \geq 0 \quad q_1 \geq q_0 p_1 \quad (4.23)$$

En effet, la courbe quasi statique pour un modèle de Zener est donnée par  $\sigma = q_0 \varepsilon$ , ce qui impose la condition  $q_0 > 0$ .

Nous avons pour ce modèle :

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = \frac{q_0}{p_1} \varepsilon - \frac{1}{p_1} \sigma \quad (4.24)$$

En tenant compte des conditions évoquées et du fait que la fonction  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  doit être positive en charge, il est clair que  $p_1 \geq 0$ .

Une autre condition est imposée par les valeurs des modules tangents. Le module tangent d'une courbe quasi statique est inférieur en tout instant au module tangent des autres courbes de traction :

$$\frac{q_1}{p_1} \geq q_0 \quad (4.25)$$

## 4.5. Modèles complexes

Pour la simulation de la réponse de matériaux, il y a parfois nécessité d'introduire des modèles plus élaborés. Développons le modèle de Kelvin en chaîne, en ajoutant suffisamment de modèles du même genre (fig. 4.4).

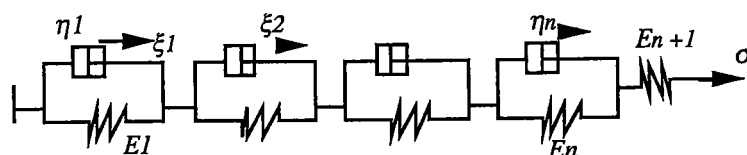


Figure 4.4 Modèle de Kelvin en chaîne.

Nous pouvons aussi, à partir du modèle de Maxwell comme modèle de base, développer une chaîne en rajoutant autant de modèle de même genre que de variables internes ( fig. 4.5).

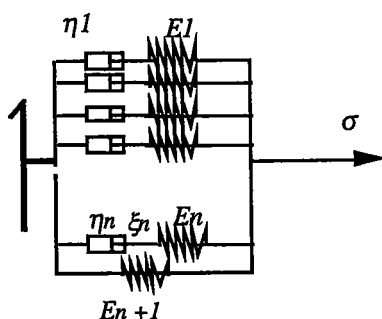


Figure 4.5 modèle de Maxwell en chaîne.

### 4.5.2. Chaîne de maxwell pour n=2

Les fonctions gouvernant ce modèle, c'est à dire la forme de l'énergie libre et le potentiel de dissipation, sont

$$\phi = \frac{1}{2} E_1 (\varepsilon - \xi_1)^2 + \frac{1}{2} E_2 (\varepsilon - \xi_2)^2 + \frac{1}{2} E_3 \varepsilon^2$$

$$\Omega = \frac{1}{2\eta_1} X_1^2 + \frac{1}{2\eta_2} X_2^2$$

La contrainte est donnée par :

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} = E_1 (\varepsilon - \xi_1) + E_2 (\varepsilon - \xi_2) + E_3 \varepsilon$$

Les équations d'évolutions des variables internes sont

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial X_1} = \frac{1}{\eta_1} X_1 = \frac{E_1}{\eta_1} (\varepsilon - \xi_1) \\ \dot{\xi}_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial X_2} = \frac{1}{\eta_2} X_2 = \frac{E_2}{\eta_2} (\varepsilon - \xi_2) \end{cases}$$

L'élimination de la variable interne, donne en première étape

$$\ddot{\sigma} = (E_1 + E_2 + E_3) \ddot{\varepsilon} - \left( \frac{E_1^2}{\eta_1} + \frac{E_2^2}{\eta_2} \right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1^3}{\eta_1^2} (\varepsilon - \xi) + \frac{E_2^3}{\eta_2^2} (\varepsilon - \xi) + \frac{E_2^3}{\eta_2^2} (\varepsilon - \xi_2)$$

après élimination des variables internes, il vient :

$$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} \ddot{\sigma} + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \dot{\sigma} + \sigma = \frac{\eta_1 \eta_2}{E_1 E_2} (E_1 + E_2 + E_3) \ddot{\varepsilon} + \left( \frac{\eta_1 (E_1 + E_2)}{E_1} + \frac{\eta_2 (E_1 + E_2)}{E_2} \right) \dot{\varepsilon} + E_3 \varepsilon$$

On obtient pour un modèle à deux variables internes présentant de l'élasticité instantanée, l'équation suivante :

$$\ddot{\sigma} = (E_1 + E_2 + E_3) \ddot{\varepsilon} + B(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})$$

Le passage à un modèle plus complexe devient plus clair. Imaginons pour cela une chaîne de Maxwell avec  $n$  variables internes.

L'énergie libre et le potentiel de dissipation sont donnés par :

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{1}{2} E^r (\varepsilon - \xi^r)^2 \right); \quad \xi^{n+1} = 0$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\eta^r} X_r^2 \quad r: 1..n$$

Comme généralisation évidente, en différentiant ces équations à l'ordre  $n$  par rapport au temps, on obtient l'équation différentielle suivante

$$\sigma + p^1 \sigma^1 + p^2 \sigma^2 + \dots + p^r \sigma^r + \dots + p^n \sigma^n = \varepsilon + q^1 \varepsilon^1 + q^2 \varepsilon^2 + \dots + q^r \varepsilon^r + \dots + q^n \varepsilon^n$$

#### 4.5.2. Modèles non linéaires.

Dans le cas de modèles non linéaire l'énergie libre peut être mise sous la forme :

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} (\phi^i(\varepsilon - \xi^i)); \quad \xi^{n+1} = 0$$

et le potentiel de dissipation s'écrit

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega^i(X_r)$$

$\Omega^r$  et  $\phi^r$  : 1..n sont définis positifs

La contrainte est déduite à partir de la relation de Coleman  $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}$  :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \phi^i(\varepsilon - \xi^i)}{\partial (\varepsilon - \xi^i)} \quad \text{avec} \quad \xi^{r+1} = 0$$

$$X^r = - \frac{\partial \phi^r}{\partial \xi^r} \quad r : 1..n$$

Le résultat est une généralisation linéaire sous forme d'équations différentielles d'ordre  $n$  en  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .

#### 4.6. Viscoélasticité Linéaire

La relation existant entre les contraintes et les déformations trouve sa forme la plus simple, si l'on considère un milieu viscoélastique, c'est à dire si on lie naturellement deux milieux qui s'interpénètrent mutuellement, l'un admettant comme modèle celui d'un corps élastique et l'autre celui d'un fluide visqueux. D'une part les effets d'élasticité obéissent à la loi de Hooke et d'autres part ceux de la viscosité suivent la loi de fluide Newtonien.

La théorie qui correspond à ce genre de milieux est dite la théorie des milieux viscoélastiques, celle-ci est une généralisation des deux domaines qui sont développés séparément, à savoir la théorie de l'élasticité et la mécanique des liquides visqueux.

Ici nous nous limitons à la viscoélasticité linéaire, c'est à dire à la théorie traitant les corps qui satisfont au principe de superposition de Boltzmann. Le principe qui a été établi par Boltzmann

s'est trouvé à la base des équations mathématiques de la théorie des corps à comportement viscoélastique linéaire.

Ledit principe s'énonce comme suit, si un cycle de contrainte provoque une déformation donnée et un autre cycle de contrainte provoque une autre déformation, alors la somme des deux cycles de contraintes entraîne une déformation qui n'est autre que la somme des deux déformations.

Pratiquement, deux courbes à deux vitesses de déformations différentes seraient homothétiques dans une homothétie qui serait le rapport des vitesses des déformations et de centre l'origine 0.

Dans une théorie viscoélasticité linéaire l'énergie libre,  $\phi$ , est une fonction quadratique en la déformation  $\varepsilon$  et en les variables internes  $\xi$ , avec un potentiel de dissipation régulier en la force thermodynamique

$$\Omega = \Omega(X)$$

$$\phi = \frac{1}{2} (a_{11}\varepsilon^2 + a_{22}\xi^2 + 2a_{12}\varepsilon\xi)$$

avec  $(a_{11}, a_{22}, a_{12})$  des paramètres réels. L'état de contraintes est défini par la relation de Coleman.

Dans une théorie linéaire, on pose la relation

$$X = b\xi$$

avec  $b$  une constante réelle, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \sigma = a_{11}\varepsilon + a_{12}\xi \\ -b\xi = a_{22}\xi + a_{12}\varepsilon \end{cases}$$

En choisissant la variable interne entre ces deux équations, on obtient :

$$\dot{\sigma} = a_{11}\dot{\varepsilon} + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{b} \varepsilon - a_{22}\sigma$$

de

#### 4.7. Le Continu Tridimensionnel.

Le passage d'un modèle unidimensionnel d'un élément de matériau viscoélastique linéaire à un milieu tridimensionnel se fait, question de simplicité et de commodité de calcul pour les milieux isotropes sous conditions isothermes.



#### 4.7.1. Cas des corps de Maxwell.

On peut décrire, dans ce formalisme, un corps de Maxwell (viscoélastique ou viscoplastique, solide ou fluide) en déformations finies [2]. Ce corps a par hypothèse une élasticité instantanée isotrope. Pour simplifier, nous considérerons le cas où la déformation est une affinité symétrique d'axes fixes.

On pose:

$$\phi = \frac{1}{2}(a_{11}\varepsilon^2 + a_{22}\xi^2 + 2a_{12}\varepsilon\xi)$$

$$\Omega = f(J_2)$$

avec  $\lambda, \mu$ : Coefficients de Lamé,  $\theta$  Coefficient de dilatation volumique et  $\varepsilon_{ij}^e$ : tenseur de déformation élastique

La déformation est ici représentée par les trois nombres  $F_1, F_2, F_3$ : arêtes du parallélépipède rectangle transformé du cube de côté  $l$  et dont trois arêtes sont portées par  $ox_1, ox_2$  et  $ox_3$ .

Bassout [2] avait traité ces questions pour des déformations finies et pour des températures variables. Il a pu donner une description rationnelle d'un fluide viscoélastique et d'un solide viscoplastique utilisant une seule variable interne tensorielle: déformation dans l'état relâché.

$$\theta = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\beta = \frac{\mu}{3\lambda}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$$

$$\varepsilon_e = (\varepsilon - \xi)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$$

Expression des forces thermodynamiques  $X_{ij}$ :

$$X_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} = -\frac{\mu}{3}(\theta + \beta) + \xi_1^{-1}\varepsilon_1^e\xi_1^{-1}$$

$$X_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} = -\frac{\mu}{3}(\theta + \beta) + \xi_2^{-1}\varepsilon_2^e\xi_2^{-1}$$

$$X_3 = -\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} = -\frac{\mu}{3}(\theta + \beta) + \xi_3^{-1}\varepsilon_3^e\xi_3^{-1}$$

Expression de  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{kk} - \xi_{kk})\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \xi_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - \xi_{ij})$$

#### 4.7.2. Evolution de la variable interne.

L'évolution de la variable interne est donnée par dérivation par rapport au variables internes correspondantes :

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial X_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial X_1} = f' (4\xi_1^2 X_1)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial X_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial X_2} = f' (4\xi_2^2 X_2)$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{\partial \Omega}{\partial X_3} = \frac{\partial \Omega}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial X_3} = f' (4\xi_3^2 X_3)$$

## Chapitre 5.

### Expérimentation.

Page 83

#### 5.1 Différents type de comportements rhéologiques

##### 5.2 Essais mécaniques

##### 5.2.1 Essai de traction

#### 5.3 Caractéristiques des matériaux

#### 5.4 Géométrie des éprouvettes

#### 5.5 Dispositif de traction

#### 5.6 Etapes de la manipulation

#### 5.7 Polymères

##### 5.7.1 Généralités

##### 5.7.2 Approche mécanique

##### 5.7.3 Approche moléculaire

##### 5.7.4 Approche à variables internes

#### 5.8 Comportement des élastomères

##### 5.8.1 Cas de la gomme

#### 5.9 Comportement des thermoplastiques

##### 5.9.1 Polyéthylène

##### 5.9.1.1 Effet du Saut de vitesse

##### 5.9.1.2 Comportement au cyclage

##### 5.9.1.3 Détermination de l'équation rhéologique (SM) correspondante

##### 5.9.2 Polypropylène

#### 5.10 Comportement des métaux

##### 5.10.1 Cuivre

##### 5.10.2 Zinc

##### 5.10.3 Alliages à mémoire de forme (CuAlBe)

## 5. Partie Expérimentale.

### 5.1. Introduction.

L'expérimentation joue un rôle important et significatif dans le développement de la théorie et la détermination des modèles rhéologiques recherchés. Pour formuler le modèle mathématique semi-empirique (SM), pouvant décrire les propriétés mécaniques des matériaux, plusieurs types d'expériences sont réalisés (traction uni axiale à différentes vitesses de déformations et des essais avec saut de vitesses de déformations).

Les essais de traction sont conventionnellement classés en trois catégories suivant leurs vitesses de déformation. Comme dans Cambell en 1973, Cristescui en 1986, Lemaitre et Chaboche en 1980, les essais statiques correspondent à des vitesses de déformation variant entre  $10^{-5} \text{ sec}^{-1}$  et  $10^{-3} \text{ sec}^{-1}$ ; les essais intermédiaires correspondent à des vitesses de déformation variant entre  $10^{-2} \text{ sec}^{-1}$  et  $10^1 \text{ sec}^{-1}$ ; par contre les essais dynamiques correspondent à des vitesses supérieures à  $10^1 \text{ sec}^{-1}$  à ce dernier stade les effets d'inertie et de propagation d'ondes interviennent dans l'analyse.

Le diagnostic du comportement des matériaux passe, à priori, par l'analyse de l'aspect technique de l'expérimentation à travers le type de machine et les conditions d'essais (température, préparation de l'essai, préparation de l'éprouvette, etc.). Nous mentionnons ici le fait que tous nos essais sont effectués à des vitesses de déformation inférieures à  $10^{-1} \text{ sec}^{-1}$  à la fois au chargement et au déchargement.

Dans le but d'établir le modèle rhéologique recherché, nous pensons qu'il est intéressant de faire suivre l'essai de chargement d'un essai de déchargement.

Avant d'aborder le calcul des différentes constantes (fonctions matérielles) du modèle (S M) propre à chaque matériau concerné, nous anticipons en donnant un aperçu plus au moins général sur le comportement des matériaux (spécialement celui des métaux) à travers le commentaire d'un essai de chargement - déchargement.

Pour la plupart des métaux, si au cours d'un essai de chargement on atteint le point M correspondant à un certain état de contrainte déformation qu'on fait suivre d'un déchargement, le déchargement suit le chemin MN. Si l'effet d'hystérisis peut être négligé, approximer MN par un segment parallèle à la droite élastique, n'est pas une aberration.

$$\sigma = \sigma_M + E(\varepsilon - \varepsilon_M) \quad \text{pour} \quad \varepsilon \in [\varepsilon_N, \varepsilon_M]$$

La déformation plastique est représentée géométriquement par le segment ON tandis que NQ représente la déformation réversible et donc élastique (fig.5.1.1).

Après déchargement, il est évident que l'on peut écrire  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ , et le matériau est dit élasto/plastique.

Dans certains cas, la partie élastique est négligeable comparée à la déformation plastique, le comportement du matériau est dit rigide-plastique.

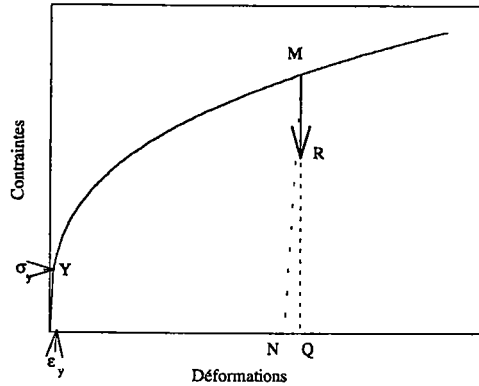


Fig.5.1.1. Diagramme type d'une courbe de contrainte- déformation

Conventionnellement, la limite d'élasticité est définie comme étant le maximum de contrainte correspondant à 0,2% de la déformation totale. Pour des petites déformations inférieures à la limite élastique, la courbe de déformation contrainte est linéaire, et donc peut être approchée par une partie de droite répondant à la condition  $\dot{\sigma} = \text{Cste}$ ,  $\sigma_y$  peut être défini comme étant l'ordonnée du point d'intersection des deux parties droites expérimentales.

Dans un essai de traction à vitesse de déformation constante, à partir d'un état d'équilibre stable ( $\varepsilon = 0, \sigma = 0$ ) jusqu'à un état de déformation-contrainte représenté par le point M où la déformation est maintenue constante, la contrainte varie suivant le chemin MR; c'est ce qu'on appelle la relaxation. Un des modèles des plus simple permettant de décrire ce phénomène est le modèle Standard ou de Zener.

Le phénomène de fluage peut être constaté en effectuant la même opération, mais cette fois, en maintenant la contrainte fixe et en laissant varier la déformation.

Le but recherché dans ces essais est la détermination des différentes constantes qui apparaissent dans l'équation (S-M)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E + \frac{k(\sigma - f(\varepsilon))^n}{\dot{\varepsilon}} \quad (5.1.1)$$

avec E, le module de Young, déterminé comme étant le module tangent à l'origine des états ( $\varepsilon = 0, \sigma = 0$ ).  $f(\varepsilon)$  est la courbe de comportement ou d'équilibre déterminée expérimentalement dans un essai de traction à une vitesse de traction très faible (théoriquement nulle).

Dans l'esprit d'une terminologie simple,  $k$  est le coefficient de viscosité du matériau, qui peut être défini parfois comme la mesure de la variation de la contrainte par rapport à la vitesse de déformation ou simplement par  $k = \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}}$ , sa valeur peut dépendre de la vitesse de déformation et de la déformation, Cambell [9]; généralement la valeur de  $k$  est décroissante en  $\dot{\epsilon}$  et constante à partir d'un certain ordre de déformation. Par contre, la valeur  $n$  représente l'insensibilité à la vitesse de déformation : plus la valeur de  $n$  est élevée et moins le matériau est sensible à la vitesse de déformation. Ici dans un esprit de simplicité, les valeurs de  $k$  et de  $n$  sont prises comme constantes.

L'allure générale des courbes de traction est analogue à celle représentée ci-dessous. L'importance des différentes parties varie considérablement avec la composition, la structure du matériau et les conditions de sollicitations ( vitesse de déformation, température).

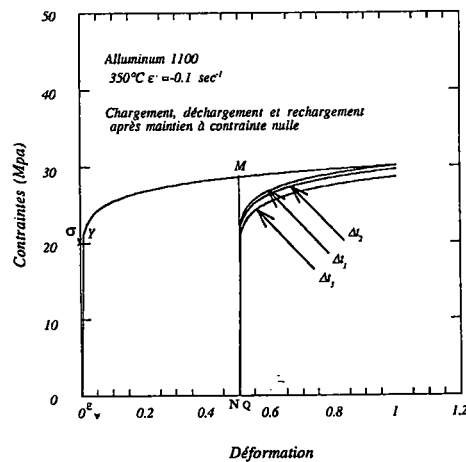


fig. 5.1.2 Courbe représentative d'un essai de traction (chargement - déchargement puis rechargement après un temps de maintien à contrainte nulle ) sur l' Al 1100. selon [ 50]

Pour certains métaux, il y a existence de décrochement dû à la génération des dislocations libres et leurs multiplications. Après décrochement de la contrainte, on obtient un palier où la déformation reste pratiquement constante. Ce palier est appelé déformation de Lüders: c'est une déformation localisée se développant généralement près de la tête de l'éprouvette et se propageant après à travers toute l'éprouvette.

Au-delà de la partie élastique et de la déformation de Lüders si celle-ci existe, l'éprouvette se déforme d'une manière homogène. L'augmentation de la contrainte avec l'allongement traduit le durcissement du matériau par écrouissage.

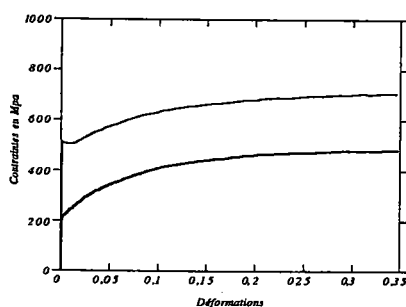


Fig. 5.1.3. Essai de traction simple sur l'acier XC18 selon [24], un essai statique et un essai à vitesse dynamique.

La déformation en tant que variable d'état, permet une description unique de l'état microstructural suivant le chemin de chargement par lequel elle atteint cet état. Mécaniquement parlant, cela veut dire qu'un changement brusque de la vitesse de déformation (saut de vitesse) ou de la température induit un changement irréversible de la contrainte, comme illustré ci-dessous (fig.5.1.4).

Toutefois, Cambell et Briggs avaient établi la non généralité de ce raisonnement à partir d'essais sur du molybdène (fig.5.1.5). Un saut de vitesse de 50 fois la vitesse de base de  $1.7 \cdot 10^{-4}$  à 8 % de déformation est suivi d'un écoulement significativement plus faible à celui d'un test à la vitesse de déformation plus élevé. A grande vitesse de déformation la contrainte immédiatement après le saut provoque un effet inverse.

Dans un travail sur le comportement des matériaux en saut de vitesse, Klepascko [25] avait identifié deux incréments de contraintes associés au saut de vitesse  $\Delta\sigma_s$  et  $\Delta\sigma_h$  (fig. 5.1.4.). Le premier terme  $\Delta\sigma_s$  est la mesure de la sensibilité instantanée à la vitesse de déformation du matériau (B  $\rightarrow$  C), à ce niveau aucun changement structural spécifique n'intervient. Le second terme  $\Delta\sigma_h$  apparaît comme le résultat de la différence de microstructure entre C et D

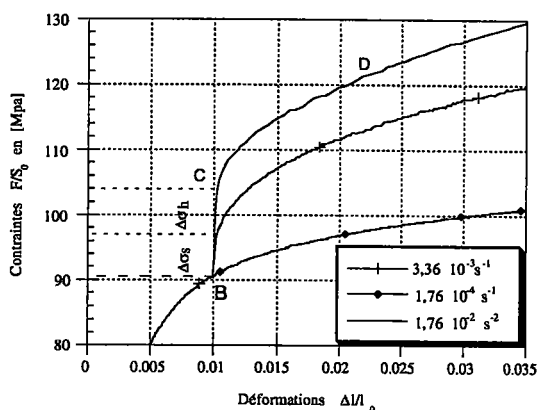


Fig. 5.1.4 Schéma d'un saut de vitesse de déformation après le saut la courbe a tendance à rejoindre la courbe monotone à la même vitesse.

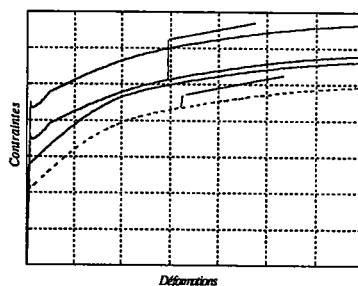


Fig. 5.1.5. Essai de Traction sur du Molybdène selon (Cambell et Briggs)

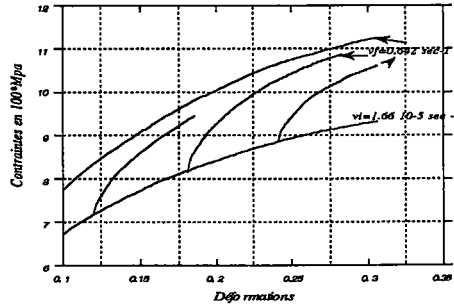


fig. 5.1.5. essais de saut de vitesse sur de l'aluminium (Klaepaczko 68)

## 5.2. Essais Mécaniques.

La mise en oeuvre d'essais mécaniques permet de caractériser le comportement rhéologique du matériau, d'identifier un certain nombre de modèles ou de lois et de vérifier les limites des approches proposées.

L'objectif premier consiste à déterminer les contraintes nécessaires pour provoquer une déformation  $\epsilon$  d'un échantillon à des conditions bien fixes de température  $T$  et de vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  pour une structure de matériau bien définie. Le but revient souvent à rechercher une fonction :

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon}, T) \quad (5.1.2)$$

### 5.2.1. Essai de Traction

L'essai utilisé est l'essai de traction uni-axiale. Nous pensons que c'est l'essai le mieux défini. Dans cet essai on impose à une éprouvette, de longueur de base  $L_0$  et de section initiale  $S_0$ , de s'allonger à une vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$  donnée et à une température  $T$  fixée (température ambiante), tout en lui appliquant une force uni-axiale de traction. On enregistre les forces appliquées  $F$  en fonction de l'allongement  $\Delta L$  de l'éprouvette.

La géométrie initiale de l'éprouvette nous permet de tracer ce qu'on appelle les courbes conventionnelles  $\sigma_c = \sigma_c(\epsilon_c)$  avec  $\sigma_c$ , la contrainte conventionnelle (tenseur de contrainte mixte) et  $\epsilon_c$ , la déformation conventionnelle donnée par :

$$\epsilon_c = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (5.1.3)$$

avec  $\Delta L = L - L_0$  où  $L_0$  est la longueur initiale de l'éprouvette.

Les courbes conventionnelles de traction ne tiennent pas compte, dans l'évaluation de la contrainte, de la diminution de la section de l'éprouvette au cours de l'essai de traction. Il est souvent nécessaire de déterminer à chaque instant la contrainte vraie  $\sigma$  correspondant à l'allongement  $\Delta L$ .



L'hypothèse de conservation de volume, durant la déformation donnée permet d'écrire :  $SL = S_0L_0$ .  
 La contrainte vraie est définie comme étant le rapport de la tension appliquée sur la section de l'échantillon à l'instant  $t$  :  $\sigma = \frac{F}{S}$

L'expression de la contrainte vraie et l'hypothèse de la conservation de volume qui justifie les transformations suivantes :  $\sigma = \frac{F.L}{S_0L_0} = \frac{F}{S_0} \frac{\Delta L + L_0}{L_0}$

La contrainte vraie prend finalement l'expression suivante :  $\sigma = \sigma_c(1 + \epsilon_c)$

La déformation vraie prend l'expression suivante :

$$\epsilon = \int_{L_0}^{L_0 + \Delta L} \frac{\Delta L}{L} = \text{Ln} \left( \frac{L_0 + \Delta L}{L_0} \right) = \text{Ln}(1 + \epsilon_c)$$

La vitesse de déformation conventionnelle et la vitesse de déformation vraie sont définie successivement par les relations :  $\dot{\epsilon}_c = \frac{V}{L_0}$  et  $\dot{\epsilon} = \frac{V}{L}$

avec  $V$  la vitesse de la traverse.

Par dérivation, on obtient une relation entre les deux vitesses de déformation suivante :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\epsilon}_c}{1 + \epsilon_c}$$

ou encore l'approximation suivante :  $\text{Ln}(\dot{\epsilon}) \approx \text{Ln}(\dot{\epsilon}_c)$

### 5.3. Caractéristiques des Matériaux.

L'expérimentation est réalisée sur des métaux (Cuivre, Fer, Zinc), sur un Alliage à mémoire de forme (CuAlBe), sur des polymères (polyéthylène, polypropylène) et un élastomère (la gomme).

### 5.4. Géométrie des éprouvettes

Les éprouvettes utilisées sont plates constituées d'une partie utile reliée au deux têtes de fixations par des raccords pour éviter les concentrations de contraintes.

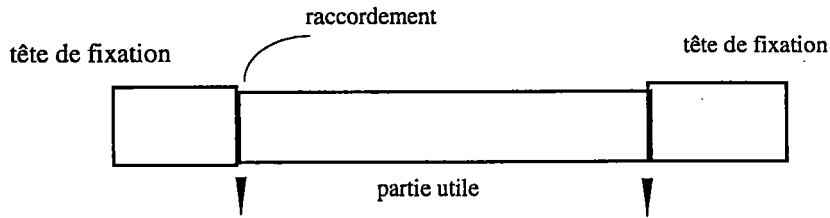


fig. 5. 4. 1. schéma d'une éprouvette de traction

Les éprouvettes métalliques ont reçu un traitement thermique : un chauffage à une température élevée suivi d'un refroidissement à l'air libre.

### 5.5. Dispositif Expérimental

Les essais de traction ont été réalisés au L.P.M.M (Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux) sur une machine de Traction-Compression cinématique de type Zwick d'une capacité de 200 KN pilotée par un micro-ordinateur HP300 possédant une vitesse d'acquisition de 50 pts par seconde. Cette machine est de type cinématique avec une vitesse maximale de déplacement de traverse de 500 mm/mn. L'éprouvette, une fois fixée dans les mors de la machine de traction, est équipée en son milieu d'un extensomètre pour la mesure de la déformation. Les sollicitations peuvent être réalisées par déplacement contrôlé de la traverse, soit par force imposée soit par déplacement imposé.

*A chaque instant nous pouvons connaître les informations suivantes :*

- 1- Position de la traverse*
- 2- Force appliquée à l'éprouvette.*
- 3- La déformation subie.*
- 4- La vitesse imposée.*

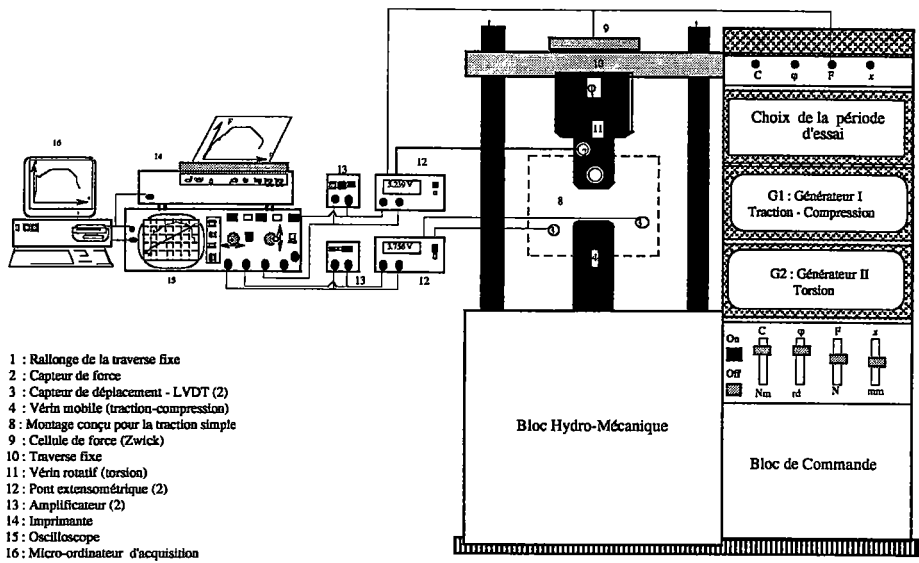


Schéma du dispositif de traction uniaxiale

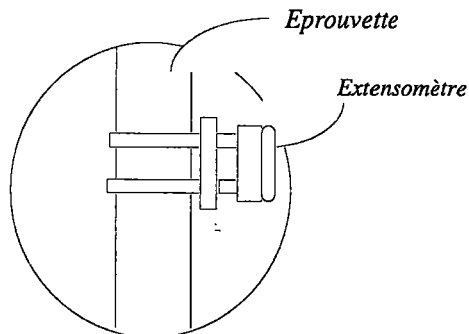


Fig. 5.2.1. Schéma du dispositif de traction avec détail de l'extensomètre.

## 5.6. Etapes de la manipulation

Après la réalisation du montage adéquat à l'essai voulu, puis le choix des extensomètres (type et taille: longueur). La manipulation se déroule comme suit :

- 1.- *Initialisation (mise à zéro) de la traverse.*
- 2.- *Initialisation de la force de sollicitation.*
- 3.- *Réponse aux questions du logiciel.*
  - a- *Type d'essai.*
  - b- *Nom de l'essai.*
  - c- *Données géométriques de l'éprouvette.*
  - d- *Conditions d'arrêt de l'essai.*
  - e- *Choix des échelles de représentation graphique des courbes.*
  - f- *Sauvegarde des essais.*

Au cours des essais, on néglige la variation de section de l'éprouvette. Les déformations et les contraintes sont calculées en configuration lagrangienne.

## 5.7. Les Polymères

### 5.7.1. Généralités

Les polymères sont des matériaux constitués par de longues chaînes de molécules formées essentiellement par des liaisons carbone-carbone. Le polyéthylène est un des polymères les plus simples par sa structure qui consiste en une longue chaîne de  $-\text{CH}_2-$  pour former le polymère  $[-\text{CH}_2-\text{CH}_2]_n$ . Une autre classe de polymères est celle des vinyloxy, formés par la combinaison d'un corps chimique X avec une molécule d'éthylène  $-\text{CH}_2-\text{CH}-\text{X}$ , et dont le plus connu est le polypropylène  $[-\text{CH}_2-\text{CH}-\text{CH}_3]_n$ .

Les polymères peuvent être classés en trois catégories : les thermoplastiques, les thermodurcissables et les élastomères. Un thermoplastique se ramollit lorsqu'on le chauffe et généralement fond; contrairement un thermodurcissable change de structure lors d'une élévation de température. Les élastomères se distinguent des autres types de polymères par leur comportement caoutchoutique et en particulier leur pouvoir d'être déformés en grande proportion.

Les polymères ont une large gamme de comportements mécaniques, ils sont fragiles, plastiques et visqueux au fur et à mesure que la température augmente. Les polymères sont difficiles à classer, leur comportement dépend énormément des conditions d'essai (température, et vitesse d'essai, déformation).

La discussion des propriétés mécaniques d'un polymère solide passe par une description macroscopique adéquate purement descriptive et par une interprétation structurale, si celle-ci est possible. Avec leur large gamme de comportements : élastomère élastique, d'un liquide visqueux dépendant de la température et du temps, ou solide fragile et cassant; les polymères sont souvent décrits comme des matériaux à comportement viscoélastique, pour positionner leur comportement entre les solides élastiques et les liquides visqueux.

Ici, on s'intéresse seulement à trouver une équation constitutive qui relie contraintes et déformations. Une des formes les plus simples est la loi de Hooke, qui est une relation linéaire entre contraintes et déformations, mais qui ne traduit en aucun cas le comportement d'un polymère pour les raisons suivantes. Premièrement, le comportement d'un polymère est très affecté par l'histoire et la vitesse d'application de la charge. Deuxièmement, un comportement élastique est réversible, ce qui n'est pas toujours dans le cas des polymères. Troisièmement, la loi de Hooke est valable pour des petites déformations où il est observé une linéarité entre les déformations et les contraintes. Ceci n'est pas valable dans le cas des polymères, mais peut toutefois constituer une bonne approximation dans de très petites déformations, quand il s'agit de grandes déformations une autre théorie doit être développée.

Dans plusieurs applications pratiques sur des matériaux plastiques, le comportement viscoélastique ne satisfait pas le test de linéarité requis par le principe de superposition de Boltzmann; ceci peut se produire pour différentes raisons.

Premièrement, il y a une restriction d'utilisation (seulement pour des petites déformations où le

terme quadratique dans le gradient du déplacement peut être négligé) vu la définition de la déformation et du fait que le principe de superposition ne sont pas applicables aux grandes déformations.

Deuxièmement, même si l'expérience est restreinte à des petites déformations, il est encore possible que le comportement viscoélastique linéaire ne soit pas obtenu. Dans cette catégorie, il est parfaitement possible et fréquent d'observer une linéarité pour un intervalle de déformation limité, et que le comportement soit non linéaire pour des déformations plus importantes.

Les représentations de la viscoélasticité non linéaire qui donnent une description adéquate du comportement sont souvent celles qui s'appuient sur une explication physique de l'origine du comportement. Ceci reste un sujet où les divergences d'interprétations entre théoriciens et expérimentateurs sont bien marquées. Les expérimentateurs s'appuient sur un nombre fini de mesures qu'ils traduisent empiriquement en une série d'équations reliant contraintes, déformations et temps. Bien que ces équations peuvent être valables en réduisant l'expérience entre des formes pratiques à l'utilisation, elles ne révèlent rien de l'essentiel de la nature du comportement non linéaire.

Les théoriciens tentent de trouver une forme de relation constitutive d'une nature plus générale et examinent comment la forme de cette équation peut être déterminée seulement à partir de quelques essais mécaniques sur le matériau en question. Les expérimentateurs peuvent conclure à la non applicabilité de ces équations pour des problèmes particuliers, surtout si elles ne donnent aucune explication de la nature physique des phénomènes.

Comme la viscoélasticité non linéaire ne peut être traitée d'une manière simple et unique satisfaisant toutes ces demandes, différentes approches se sont développées pour répondre indépendamment à cette question.

1. L'approche mécanique permet de prédire, le plus exactement possible, le comportement du matériau, pour la situation proposée, à partir d'un minimum d'expériences initiales possibles.
2. L'approche moléculaire explique la non linéarité dans la relation contraintes-déformations est une conséquence de la viscoélasticité des chaînes moléculaires.
3. L'approche des milieux continus se veut générale, à travers une description plus formelle, par extrapolation du comportement viscoélastique linéaire au comportement non linéaire. Ceci peut être obtenu par une modification possible du principe de superposition de Boltzmann.

Il faut admettre qu'aucune de ces approches n'est en soit entièrement satisfaisante bien qu'elles se veuillent toutes générales.

### **5.7.2. Approches mécaniques**

Findley et ses collaborateurs [15] ont essayé d'appliquer aux polymères des relations analytiques similaires à celles des métaux. Ils ont trouvé que la fonction déformation de fluage et le temps peuvent être reliés par une relation de la forme :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + mt^n$$

où  $\varepsilon_0$  et  $m$  sont fonctions de la contrainte pour un matériau donnée et  $n$  est une constante du matériau.

La forme proposée par Findley [15] constitue une bonne approximation pour les essais de fluage mais seulement pour un seul niveau de contrainte. Une relation similaire a été proposée par Van Holde [58] pour des essais de fluage sur la nutrocellulose. Il propose ceci :

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + m' t^{1/3} \sin \alpha \sigma \quad (5.7.1)$$

où  $\alpha$  est une constante. Cette relation est réduite pour un faible niveau de contrainte à la relation de fluage pour les métaux d'Andrade [1].

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_0 + \beta' t^{1/3} \quad (5.7.2)$$

L'équation (5.7.2) donne de très bons résultats dans le cas d'un polymère à comportement viscoélastique linéaire.

La forme empirique proposée par Findley [15] est très pratique dans la mesure où elle permet de déterminer l'équation de fluage pour un niveau de contrainte donné. Les formes empiriques, citées ici, ont deux limitations principales, premièrement, elles ne permettent pas une représentation générale sous un programme de chargement variable ou complexe, deuxièmement, dans les différentes formes proposées, le fluage et la relaxation ne sont pas reliés par des formes simples.

### 5.7.3 Approche moléculaire

Cette approche est due à Eyring [67]. Elle est fondée principalement sur le processus de vitesse d'activation thermique dans une chaîne moléculaire. Il est supposé que la déformation du polymère induit un mouvement dans la chaîne moléculaire ou dans une partie de la chaîne. Dans une suite d'idées, il suppose que l'écoulement sur les frontières est directement relié à la vitesse de déformation par la relation définie simplement pour un milieu viscoélastique non Newtonien.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A \sinh \alpha \sigma \quad (5.7.3)$$

Il faut dire que ce modèle permet une bonne approximation avec un choix des paramètres qui

définissent les caractéristiques mécaniques d'un modèle standard linéaire. Depuis Eyring, les modèles représentatifs de comportements visqueux sont mieux appréciés.

#### 5.7.4. Approche à variables internes

Dans un but de simplicité, nous considérons ici, seulement, le cas d'une seule variable interne. Dans le chapitre 3., nous avons établi l'existence d'une forme d'équation linéaire entre vitesse de contrainte et vitesse de déformation :

$$\dot{\sigma} = \alpha(\epsilon, \sigma)\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma).$$

Les deux fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  sont appelées fonctions matérielles. Un matériau est dit décrit dans le cas d'une seule variable interne par une équation de type quasi linéaire si pour tout état  $\beta(\epsilon, \sigma) \in D$  et pour toute vitesse de déformation, la vitesse de contrainte est donnée par l'équation (S-M). Cette approche décrit un modèle standard ou de Zener non linéaire. Dans le cas particulier où  $\alpha$  est constant, alors l'équation quasi linéaire prend une forme semi-linéaire en vitesse.

Dans le cas unidimensionnel, on retrouve l'équation de Malvern :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

avec  $E$ , le module de Young et  $\beta(\epsilon, \sigma): D \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ , la fonction matérielle qui décrit les phénomènes lents. Tous les points  $(\epsilon, \sigma)$  avec  $\beta(\epsilon, \sigma) = 0$  sont appelés courbe de comportement quasi statique ou courbe d'équilibre.

La fonction  $\beta(\epsilon, \sigma) \in D$  est obtenue indirectement, par interpolation à partir de résultats expérimentaux. Nous supposons qu'elle prend une forme en puissance

$$\begin{aligned} \beta(\epsilon, \sigma) &= k(\sigma - f(\epsilon))^n && \text{pour} && \sigma \leq f(\epsilon) && (5.7.4) \\ \beta(\epsilon, \sigma) &= -k \cdot \text{sgn}(\sigma - f(\epsilon)) |(\sigma - f(\epsilon))|^n && \text{pour} && \sigma > f(\epsilon) \end{aligned}$$

où  $k$  est une constante de viscosité et  $n$  est un paramètre décrivant la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation. La courbe continue  $f(\epsilon)$  est la courbe de chargement quasi statique pour l'état  $(0, 0)$ .

#### 5.8. Comportement des élastomères.

Plusieurs formes semi empiriques sont utilisées dans la littérature pour décrire le comportement des élastomères. Les formes proposées, extension de la théorie de la viscoélasticité non linéaire,



ont donné de très bons résultats. Smith [66] avait, à partir d'un modèle de Maxwell, établi des relations simples et intéressantes pour décrire le comportement d'un élastomère à savoir la gomme vulcanisée, pour des vitesses de déformation variant entre  $8.89 \cdot 10^{-3} \text{ mn}^{-1}$  et  $8.89 \text{ mn}^{-1}$  à  $-34.4^\circ \text{C}$ .

Smith avait supposé que pour de grandes déformations, la valeur de la vitesse de déformation,  $F(t)$ , ne dépend que du temps.  $F(t)$  peut être écrite sous la forme suivante

$$F(t) = \frac{g(\epsilon)\sigma(\epsilon, t)}{\epsilon} \quad (5.8.1)$$

c'est à dire

$$\log(F(t)) = \log\left(\frac{g(\epsilon)}{\epsilon}\right) + \log(\sigma(\epsilon, t)) \quad (5.8.2)$$

La fonction  $g(\epsilon)$  est une fonction quelconque de la déformation qui tend vers l'unité pour des déformations faibles. Cette approche empirique est satisfaisante, comme le montrent les figures (5.8.1) et (5.8.2).

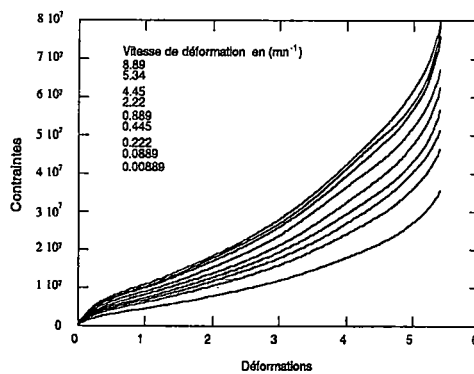


Fig. 5.8.1. Courbes de contraintes- déformation de la gomme vulcanisée à  $-34^\circ \text{C}$  et pour des vitesses de déformations variant entre  $8.89 \cdot 10^{-3}$  et  $8.89 \text{ mn}^{-1}$  d'après Smith [66]

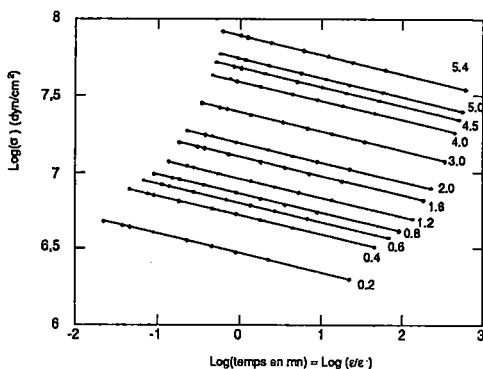


Fig 5.8.2. Variation du  $\log(\text{contraintes})$  en fonction du temps pour différentes valeurs de la déformation

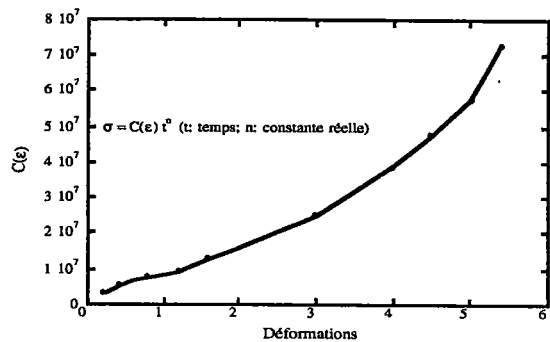


Fig. 5.8.4 valeurs de la fonction  $C(\epsilon)$  en fonction de la de la déformation pour différentes courbes obtenues après analyse des courbes de la figure 5.8.1.

Les droites parallèles de la figure (5.8.2) montrent que les résultats expérimentaux peuvent être représentés par une équation du type (5.8.2). La valeur de l'ordonnée à l'origine représente la valeur de la fonction  $\log\left(\frac{g(\epsilon)}{\epsilon}\right)$  pour les différentes valeurs de la déformation. La figure (5.8.2) montre que la fonction matérielle  $g(\epsilon)$  est belle et bien indépendante de la vitesse de déformation, Smith avait montré qu'elle est aussi indépendante de la température.

### 5.8.1. Détermination de l'équation rhéologique de type (S-M)

Ici, nous allons essayer d'interpréter le comportement de ce même l'élastomère à partir de l'équation de Sokolovskii-Malvern. Pour cela, il faut déterminer la valeur des fonctions matérielles  $\alpha(\epsilon, \sigma)$  et  $\beta(\epsilon, \sigma)$  à partir d'essais expérimentaux de la figure (5.8.1).

La valeur de  $\alpha(\epsilon, \sigma)$  est déterminée suite à un passage au calcul des contraintes vraies en fonction des déformations. Sur les courbes de la figure (5.8.4), représentant la variation de la contrainte vraie - déformation vraie, la contrainte est proportionnelle à la déformation jusqu'à un certain niveau de déformation d'environ 100%. Jusqu'à 100% de déformation, le comportement de la gomme vulcanisée est représentable par une équation de la forme :

$$\sigma = \frac{E}{(1 + \epsilon)} \epsilon \quad \text{pour } \epsilon \leq 1. \tag{5.8.3}$$

La valeur du module de Young est le module à l'origine, déterminé sur les courbes de la figure (5.8.1) :

$$E = 1.14 \cdot 10^{+7} \text{ [dyn / cm}^2\text{]}$$

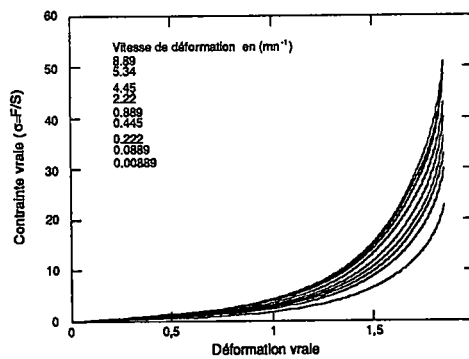


Fig. 5.8.4. Courbes de contraintes vraies- déformation vraies de la gomme vulcanisée à -34°C et pour des vitesses de déformations variant entre  $8.89 \cdot 10^{-3}$  et  $8.89 \text{ mn}^{-1}$

Dans l'analyse des courbes de traction par un modèle du type (Sokolovskii-Malvern), nous donnons à la fonction matérielle  $\alpha(\epsilon, \sigma)$  la forme suivante, déterminée à partir de l'analyse de droites parallèles des figures (5.8.2) et de la courbe (5.8.3), ce qui permet d'écrire :

$$\alpha(\epsilon, \sigma) = \frac{C'(\epsilon)}{C(\epsilon)} \sigma \quad (5.8.4)$$

La valeur de la fonction matérielle,  $\beta(\epsilon, \sigma)$ , à l'état  $(\epsilon, \sigma)$  est déterminée à partir de l'équation de type (S-M). Nous avons :

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \dot{\sigma} - \alpha(\epsilon, \sigma)\dot{\epsilon}$$

Pour des déformations inférieures à 100 %,  $\beta(\epsilon, \sigma)$  est nulle, puisque le comportement en cette frange de déformation est élastique non linéaire. Pour des valeurs de déformation au-dessus de 100 % de déformation,  $\beta(\epsilon, \sigma)$  prend la forme suivante

$$\beta(\epsilon, \sigma) = -kC(\epsilon)^m \sigma^n \quad (5.8.5)$$

Donc la forme générale de l'équation (S-M) pour l'élastomère est

$$\dot{\sigma} = \frac{C'(\epsilon)\sigma}{C(\epsilon)} \dot{\epsilon} - kC(\epsilon)^m \sigma^n \quad \text{pour } \epsilon \geq 1.0 \quad (5.8.6)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{E}{(1+\epsilon)^2} \dot{\epsilon} \quad \text{pour } \epsilon \leq 1.0$$

Avec:

$$E = 1,14 \cdot 10^7 [\text{dyn} / \text{cm}^2]$$

$$C(\epsilon) = (0.0877 + 1.12\epsilon^2 - 0.318\epsilon^2 + 0.0681\epsilon^2) \quad k = 0.126$$

$$m = -7.9$$

$$n = 8.9$$

$$C'(\epsilon) = \frac{dC(\epsilon)}{d\epsilon}$$

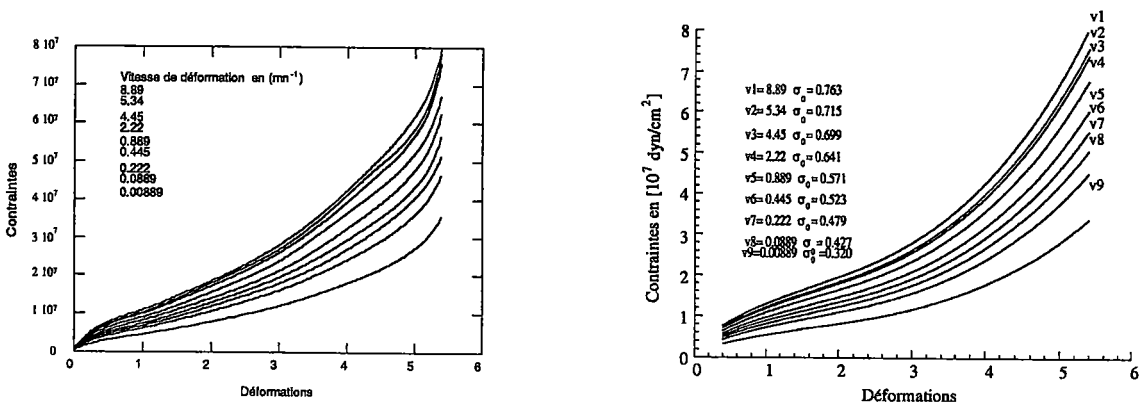


Fig. 5.8.5. Comparaison entre résultats expérimentaux et résultats numériques obtenus à partir du modèle proposé ci-dessus pour la gomme à -34 °C, sur les courbes expérimentales les contraintes sont en dyn/cm<sup>2</sup>, les vitesses de déformation sont en mn-1..

Le modèle (S-M) appliqué aux élastomères, ici la gomme à -34°C permet d'apprécier la validité de ce modèle pour décrire d'une façon correcte les effets d'élasticité non linéaire combinés avec des effets de viscosité non linéaire.

Dans le modèle que nous avons proposé, la courbe d'équilibre ou de comportement quasi statique est la courbe  $\dot{\sigma} = 0$ .

La courbe dynamique est obtenue par intégration de l'équation différentielle:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{C'(\varepsilon)\sigma}{C(\varepsilon)},$$

dont la solution n'est autre que la courbe  $\sigma = C(\varepsilon)$ .

Les effets lents (fluage et relaxation) sont décrits par la fonction matérielle  $\beta(\varepsilon, \sigma)$ .

## 5.9. Le polyéthylène.

Des essais de traction, à différentes vitesses de déformation monotones et avec saut de vitesse, ont été effectués sur du polyéthylène basse densité, le plastilène MA 0701, fourni par la société Plastic France, sous forme d'éprouvettes moulées. Ces éprouvettes (fig. 5.9.1) comprennent une partie utile constituée d'un parallélépipède relié à deux têtes de fixations par des raccords pour minimiser les concentrations de contraintes.

Les essais de traction paraissent bien adaptés à notre investigation, puisqu'ils permettent de déterminer les principales propriétés mécaniques.

Dans un but de réduire la dispersion des résultats de contrainte-déformation, correspondant à une vitesse de déformation donnée, une seule et même éprouvette est utilisée pour tous les essais.

Après chaque test de traction, et après avoir été déformée, l'éprouvette est laissée déchargée une 12 de minute, temps nécessaire à l'éprouvette pour reprendre sa longueur initiale.

La réponse de l'éprouvette aux 4 premiers essais est différente des essais ultérieurs. Le comportement viscoplastique lors des premiers allongements de 30 mm au cours desquels se produit une déformation permanente de 6% portant la longueur utile de 100 mm à 106 mm.

Le matériau a un comportement viscoplastique lors des premiers essais, au cours desquels apparaît une déformation permanente. Au cours des essais ultérieurs, il n'apparaît plus aucune déformation permanente supplémentaire (la durée totale des essais ne se prolonge pas longtemps, le contraire aurait crée de la déformation permanente supplémentaire [63]).

L'équation rhéologique à laquelle nous aboutissons ne sera donc valable que dans un domaine restreint de déformation et de vitesse de déformation prédéfinie.

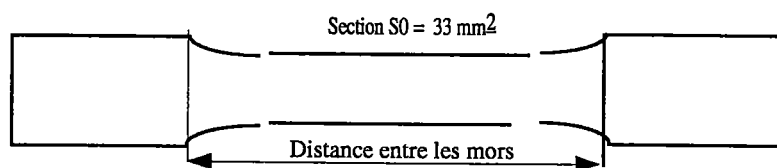


Fig. 5.9.1.- Schéma de l'éprouvette de traction du polyéthylène

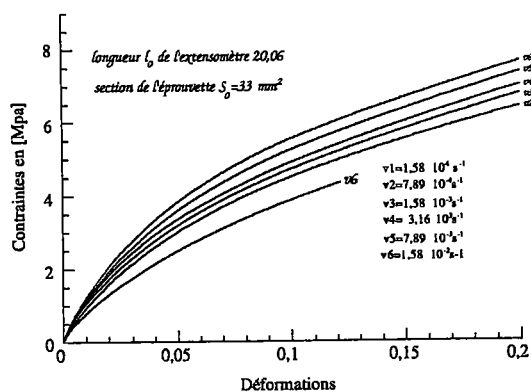


Fig 5.9.2. Courbes de traction sur du polyéthylène basse densité (MA 0701) pour différentes vitesses de déformations et à température ambiante.

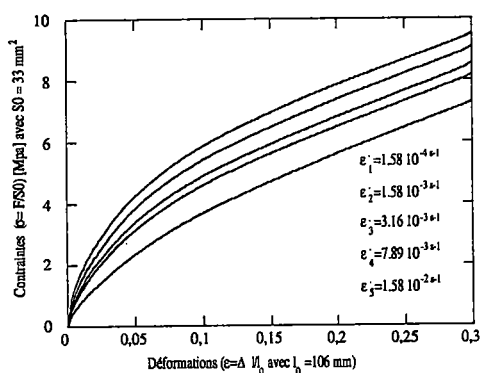


Fig. 5.9.3 Courbes de traction simple sur du polyéthylène à différentes vitesses de déformation contrôlées.

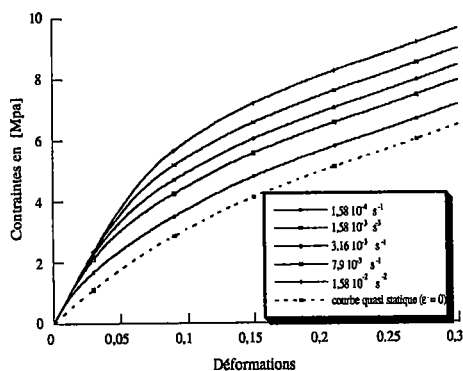


Fig.5.9.4. Courbes de traction obtenues à partir du modèle proposé pour le polyéthylène

La non linéarité du comportement apparaît clairement sur la famille de courbes de traction de la figure (5.9.2) : en effet, pour un matériau à comportement linéaire, deux courbes de traction à deux vitesses de déformations seraient homothétiques dans une homothétie de centre l'origine des états et de rapport le rapport des vitesses des déformations. Les courbes de traction du polyéthylène ne présentent pas de discontinuité, ce qui peut se traduire par un écoulement irréversible lorsque la contrainte dépasse un certain seuil.

Dans une sollicitation cyclique (fig. 5.9.5), les sommets des boucles des cycles de réponse sont très difficiles à définir, la réponse est stabilisée au bout du premier cycle ; il y a accommodation immédiate dans tout cycle de déformation où les vitesses de charge et de décharge restent inchangées.

Nous ferons la remarque suivante concernant les matériaux obéissant à l'équation rhéologique de type semi-linéaire en vitesse de déformation : ces matériaux présentent une accommodation immédiate après le premier cycle, si les conditions de sollicitations restent inchangées, le cycle est

décrit indéfiniment. Cet essai est en soit une vérification de la validité du type d'équation rhéologique que nous proposons pour la description du matériau en question.

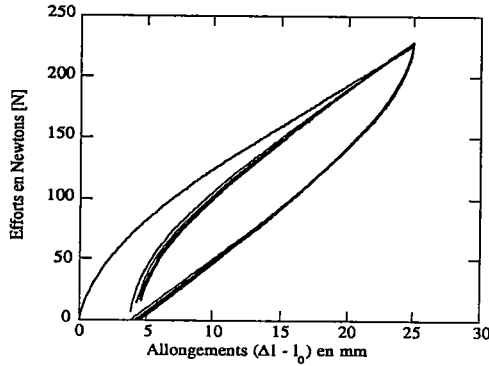


Fig. 5.9.5. Essai de traction cyclique. Les cycles sont à une vitesse de 20 mm/mn.

### Remarque

*Tous les essais ont été effectués à température ambiante. L'extensomètre est calibré à la longueur initiale  $l_0=20,06$  mm (environ 5 % de longueur utile de l'éprouvette). Il est toujours placé au milieu de l'éprouvette, de façon à éviter les effets de bords dans la zone de mesure.*

### 5.9.1. Effet du saut de vitesse.

Le polyéthylène est sensible à la vitesse de déformation ainsi qu'aux changements brusques de celle-ci. D'un changement brusque de la vitesse de déformation résulte un changement irréversible de la courbe de traction qui rejoint la courbe monotone correspondant à la nouvelle vitesse de déformation supérieure.

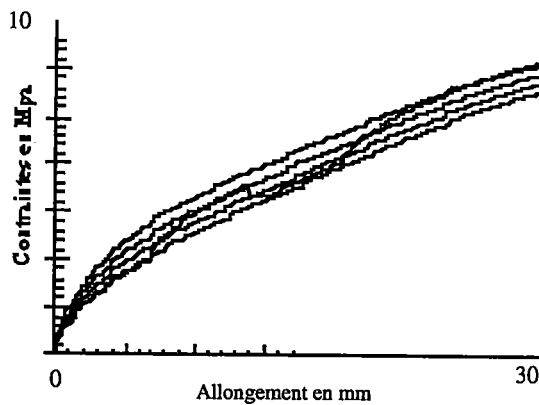


Fig. 5.4.6 Sensibilité du polyéthylène au changement brusque de la vitesse de déformation courbes expérimentales

Les sauts de vitesse ont été provoqués en différents points et à différentes vitesses de déformation. Il sont présentés (figures 5.9.7, 5.9.9, 5.9.11.), des éventails de sauts de vitesse, le premier à la vitesse

de 20mm/mn après un allongement de 25 mm c'est à dire à une déformation de 0.235, un deuxième éventail de saut de vitesse après une déformation de 0.02 à une vitesse de 1 mm/mn , un troisième éventail de saut de vitesse dans le cas d'une décharge à des vitesses de 10 mm/mn, 20 mm/mn et 50 mm/mn.

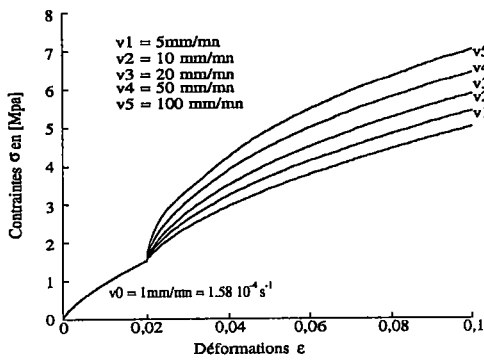


Fig. 5.9.7 Saut de vitesse en charge d'après l'expérience modèle

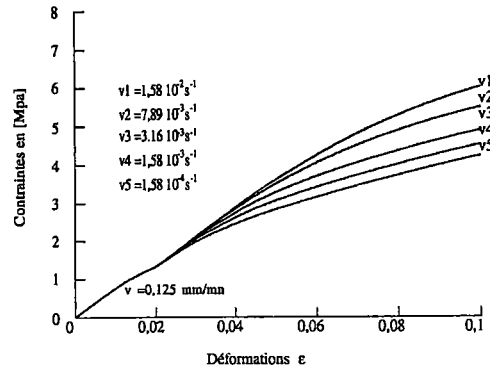


Fig. 5.9.8 Saut de vitesse en charge d'après le modèle

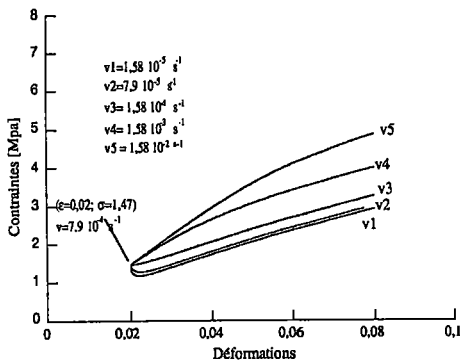


Fig. 5.9.10. Détail d'un saut de vitesse obtenu numériquement

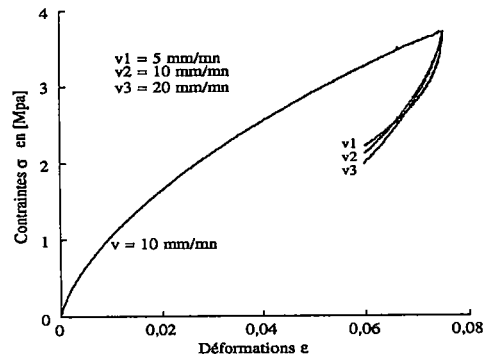


Fig. 5.9.11. Saut de vitesse en décharge expérience.

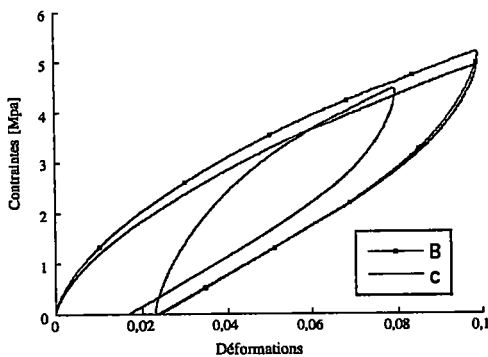


Fig. 5.9.10. Comportement au changement brusque de vitesse de déformation en charge et en décharge (expérimental).

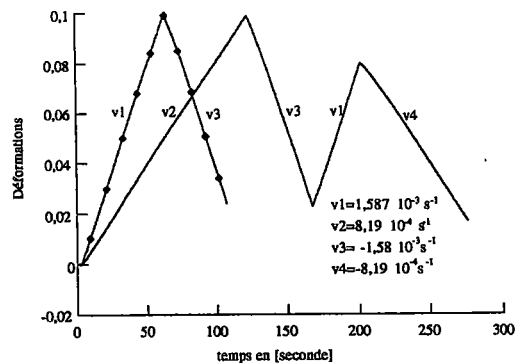


Fig. 5.9.10 Variations de vitesse au cours de l'essai



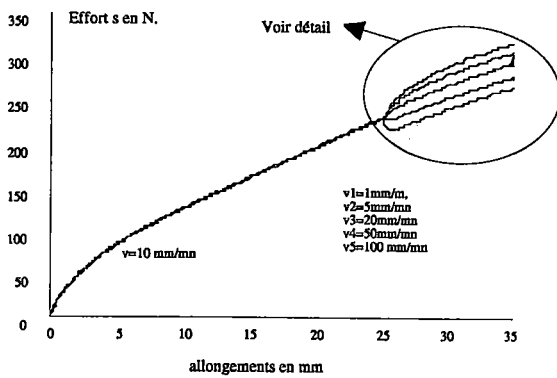


Fig. 5.9.12. Eventail de saut de vitesse en charge (expérience)

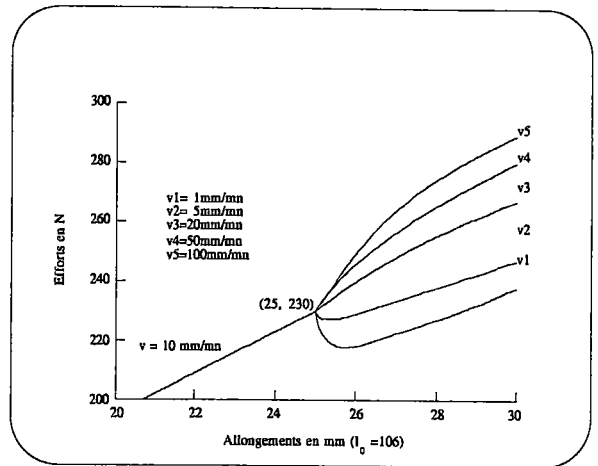


Fig. 5.9.12. a. Détail de l'éventail de saut

### 5.9.1.3. Détermination de l'équation rhéologique.

Déterminer l'équation rhéologique quasi linéaire ou de Sokolovskii-Malvern (S-M), susceptible de décrire le comportement d'un matériau, revient à déterminer les valeurs des fonctions matérielles  $\alpha(\epsilon, \sigma)$  et  $\beta(\epsilon, \sigma)$ , à partir des courbes de traction à vitesses monotones et des éventails de saut de vitesse.

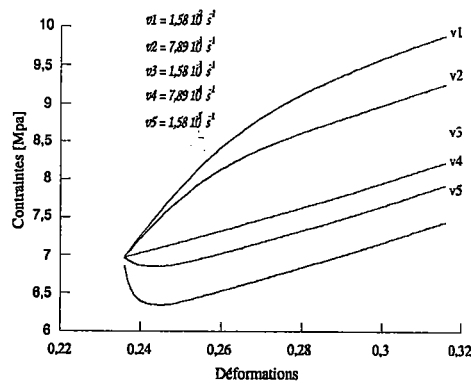


Fig. 5.9.13. Éventail de saut de vitesse obtenu à partir du modèle

Sur un éventail de sauts de vitesses effectués au point  $(\epsilon_0, \sigma_0)$  dans l'espace des états admissibles, les valeurs de  $\alpha(\epsilon, \sigma)$  et  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en ce point, sont déterminées sur les différentes branches sur lesquelles on mesure les valeurs de  $\dot{\epsilon}$  et de  $\dot{\sigma}$  avant et après le saut.

$$\text{avant le saut : } \frac{d\sigma}{d\epsilon}(t) = \alpha + \frac{\beta}{\dot{\epsilon}(t)}$$

$$\text{après le saut : } \frac{d\sigma}{d\epsilon}(t+0) = \alpha + \frac{\beta}{\dot{\epsilon}(t+0)}$$

La résolution du système d'équations ci-dessus, permet de déterminer les valeurs des fonctions matérielles au point  $(\epsilon_0, \sigma_0)$ .

Nous considérons maintenant la forme semi-linéaire déjà proposée par Weber [63] pour la

description du comportement rhéologique du polyéthylène

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

où  $\beta(\epsilon, \sigma)$  décrit les propriétés lentes du matériau "fluage et relaxation".  $E$  est le module de Young déterminé comme étant le module à l'origine à partir d'une courbe de traction simple. Ici  $E$  est constant, elle est sensiblement égale à celle calculée en utilisant les éventails de sauts de vitesses. On peut écrire :

$$E = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} (\epsilon = 0, \sigma = 0)$$

Les valeurs de la fonction matérielle  $\beta(\epsilon, \sigma)$  sont ensuite déterminées sur le domaine des courbes de traction (fig. 5.4.2). En effet, connaissant la valeur de  $\dot{\sigma}$  et de  $\dot{\epsilon}$  en un point  $M(\epsilon, \sigma)$ , on peut écrire :

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} - E \right) \dot{\epsilon}$$

L'équation  $\beta(\epsilon, \sigma) = 0$  détermine la courbe d'équilibre ou de comportement quasi statique. Nous supposons donc, l'existence d'une courbe d'équilibre ( $\epsilon, \sigma = f(\epsilon)$ ) avec les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \beta(\epsilon, \sigma) &> 0 \text{ si } \sigma > f(\epsilon) \\ \beta(\epsilon, \sigma) &= 0 \text{ si } \sigma \leq f(\epsilon) \end{aligned}$$

Sur la figure (5.9.14), nous avons bien  $\beta(\epsilon, \sigma) > 0$  en charge et  $\beta(\epsilon, \sigma) < 0$  en décharge et nulle sur la courbe d'équilibre.

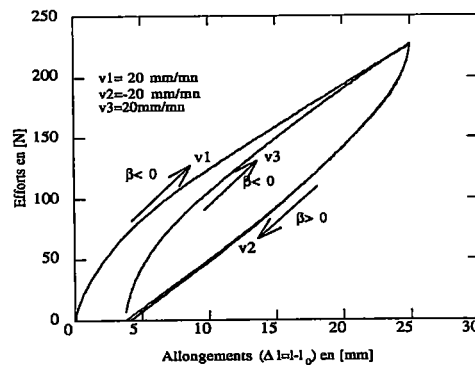


Fig. 5.9.14. Variation de la fonction matérielle  $\beta(\epsilon, \sigma)$

Comme suite à ces constatations, on peut plus généralement, écrire :

$$\begin{aligned} \beta(\epsilon, \sigma) &= k \cdot \text{sgn}(u) \cdot F(u) \\ u &= \sigma - f(\epsilon) \end{aligned}$$

La fonction  $F(u)$  est alors une fonction paire de  $u$  qui s'annule sur un intervalle  $[-u_1, u_2]$  et croît rapidement en dehors de cet intervalle.

Pour le polyéthylène, nous proposons une forme en puissance pour la fonction F.

$$F(u) = |u|^n$$

donc

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -k \cdot \text{sgn}(u) \cdot |u|^n$$

k et n sont deux constantes à déterminer indirectement à partir d'observations expérimentales. Pour garder une terminologie simple, nous disons qu'ils représentent successivement un coefficient de viscosité et un coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. (plus la valeur de n est élevée, et moins le matériau est sensible à la vitesse de déformation). La valeur de k, dans certains cas, peut dépendre de la déformation.

Il est représenté sur la (fig. 5.9.15), les variations de la fonction matérielle  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  en fonction des déformations pour différentes valeurs de vitesse de déformation ainsi que les valeurs des contraintes correspondantes.

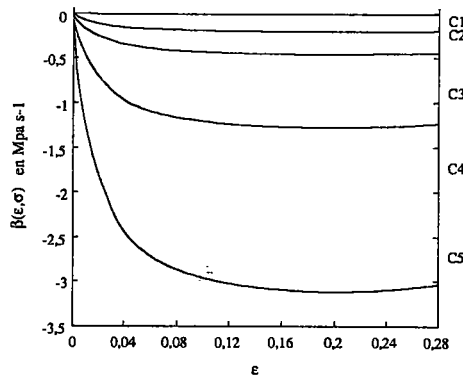


Fig. 5.9.15 Variation de la fonction matérielle  $\beta(\varepsilon, \sigma)$

Tout calcul fait, nous avons:

- courbes d'équilibre :  $f(\varepsilon) = 40,4\varepsilon - 110\varepsilon^2 + 158\varepsilon^3$
- coefficient k :  $k = 3 \cdot 10^{-2}$
- coefficient n :  $n = 3$

L'équation rhéologique semi linéaire (S M) pour le du polyéthylène est

$$\dot{\sigma} = 80\dot{\varepsilon} - 3 \cdot 10^{-2} (\sigma - 40,4\varepsilon + 110\varepsilon^2 - 158\varepsilon^3)^3$$

La détermination des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  à partir de l'expérience est assez difficile. Elle est souvent sujette de tâtonnements. La fonction  $\beta$  est déterminée par une procédure indirecte utilisant les données expérimentales et faisant intervenir une courbe d'équilibre est sujet de tatônements délicats.

## 5.10. Le polypropylène.

Le polypropylène est un autre polymère dans la catégorie des thermoplastiques ayant été choisi pour notre investigation. Aucune étude structurale n'a été effectuée sur le matériau (cristallinité, masse moléculaire, distribution moléculaire, etc.).

Le polypropylène nous a été fourni par l'École des Hauts Polymères de Strasbourg sous forme d'éprouvettes plates, constituées d'une partie utile et de deux têtes de fixations.

Contrairement au polyéthylène, le polypropylène est un matériau à comportement viscoplastique, où il se produit une déformation permanente d'environ 1,5% au cours de chaque essai.

Dans un essai de traction simple, le polypropylène subit d'abord une déformation uniforme, puis l'étirement continue jusqu'à ce que la rupture se produise après un allongement atteignant des valeurs élevées.

Une campagne d'essais de traction, avec différentes vitesses de traction monotones et avec sauts de vitesse à température ambiante, a été effectuée sur le polypropylène sur une machine de traction de type Zwick. Il est toujours placé, un extensomètre calibré à longueur initiale (20,06 mm) au milieu de l'éprouvette. Nos essais sont suffisamment lents pour pouvoir négliger les forces d'inertie au niveau de nos calculs.

Au cours d'un essai de traction uni axiale, on impose à l'éprouvette de longueur initiale ( $l_0=12,37$ , de Section,  $S_0=12,2 \text{ mm}^2$ ), de s'allonger à une vitesse de traverse prédéfinie. Les courbes de traction obtenues ne tiennent pas compte dans l'évaluation de la contrainte de la diminution de la section de l'éprouvette au cours de l'essai.

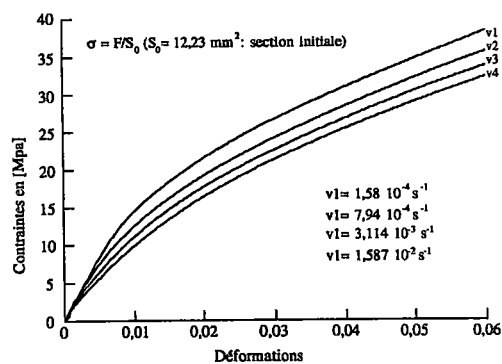


Fig. 5.10.1 Courbes de traction sur du polypropylène à différentes vitesses de déformations quasi statiques  $v1=1.58 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $v2 = 7.94 \cdot 10^{-4}$ ,  $v3=3.114 \cdot 10^{-3}$ ,  $v4=1.58 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

Un changement brusque de la vitesse de déformation induit un changement irréversible au niveau de la contrainte. Ceci est une hypothèse, dans toutes formes d'équations constitutives d'état.

La loi du saut de vitesse est vérifiée sur le polypropylène (fig. 5.10.4). Après une déformation de 4% à la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon} = 1,58 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ , où on effectue des sauts de vitesse à des vitesses 2, 10 et 100 moins faibles.

On constate que les nouvelles courbes de traction après le saut ont tendance à rejoindre les courbes de traction monotone à ces mêmes vitesses (fig. 5.10.2).

Sur la figure (5.10.4) apparaît ce que nous appelons l'« éventail du saut de vitesse », qui permet de calculer au point où s'effectue le saut, les valeurs des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$ .

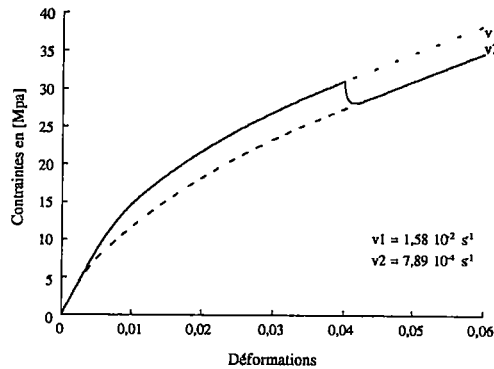


Fig. 5.10.2. Effet du changement brusque de vitesse (saut sur du polypropylène). Vérification de la loi du saut de vitesse.

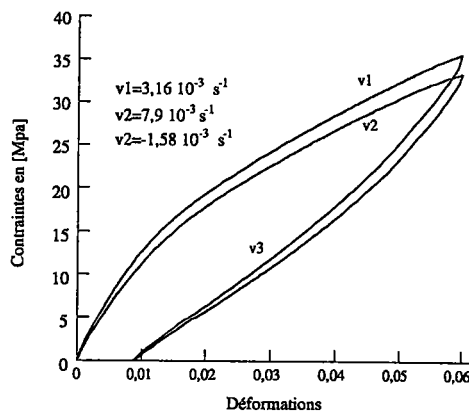


Fig. 5.10.3. Courbes de charges et décharges sur le polypropylène.

Sur la figure (5.10.3) des courbes de traction, chargement suivi d'un déchargement, on effectue

deux essais, le premier, après un chargement à une vitesse de 20 mm/mn suivi d'un déchargement à une vitesse de 10 mm/mn, le deuxième, après un chargement à une vitesse de 50 mm/mn suivi d'un déchargement à la vitesse de 10 mm/mn.

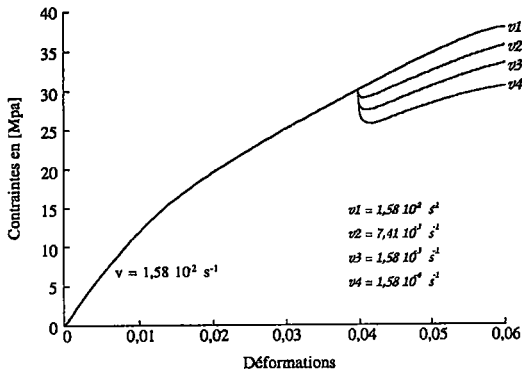


Fig. 5.10.4. Éventail de saut de vitesse, passage d'une vitesse 100 mm/mn à des vitesses 2 fois, 10 fois, 100 fois et plus faibles à 4% de déformations (obtenu expérimentalement).

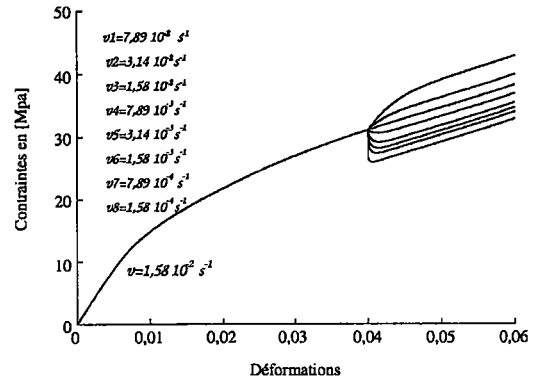


Fig. 5.10.5. Éventail de saut de vitesse, passage d'une vitesse de 100 mm/mn à des vitesses 2 fois, 10 fois, 100 à des vitesses 2 fois et 5 fois plus grandes plus faibles à 4% de déformations (résultat numérique).

Sur les figures (5.10.4 et 5.10.5) apparaissent successivement un éventail de saut de vitesse obtenu expérimentalement et un éventail de saut obtenu numériquement à partir du modèle proposé ici pour la description du comportement rhéologique du polyéthylène.

L'analyse de la forme des courbes, nous laisse proposer, pour décrire rhéologiquement le comportement du polypropylène, une équation semi linéaire du même type que celle que nous avons déjà proposée pour le polyéthylène, c'est à dire :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - k \cdot \text{sgn}(\sigma - f(\epsilon)) \left| (\sigma - f(\epsilon)) \right|^n$$

Pour cela, il faut déterminer les valeurs des différentes constantes :

- le module de Young (E)
- la courbe d'équilibre ou courbe de chargement quasi statique  $\sigma = f(\epsilon)$ .
- les valeurs des constantes k et n.

Les valeurs de la fonction matérielle  $\beta(\epsilon, \sigma)$  peuvent être déterminées en un point quelconque de l'espace des états possibles sur la figure (5.10.1). En effet, en un point M situé sur l'une des courbes, on connaît la valeur de  $\dot{\sigma}$  et de  $\dot{\epsilon}$  d'où la valeur de

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} - E \right) \dot{\epsilon}.$$

Les valeurs de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  sont représentées sur la figure (5.10.6) en fonction de la déformation pour différentes courbes à différentes vitesses de déformation.

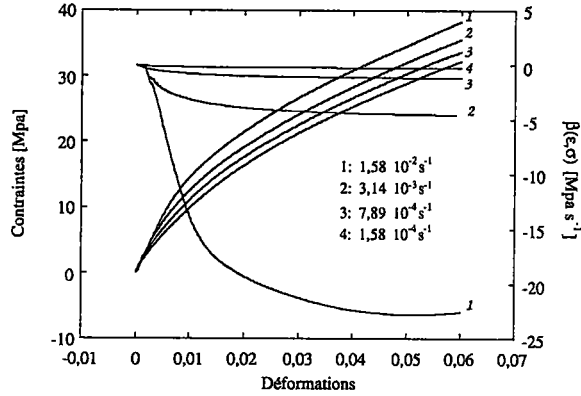


Fig. 5.10.6. Variation de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la déformation

L'analyse des valeurs des courbes  $\beta(\epsilon, \sigma)$ , pour quatre valeurs de vitesse de déformation, permet de trouver la valeur des constantes  $k$  et  $n$ , une fois définie la courbe d'équilibre.

Nous avons, finalement :

$$E = 1800 \text{ Mpa}$$

$$f(\epsilon) = 956\epsilon - 12527\epsilon^2 + 87116\epsilon^3$$

$$k = 3,2 \cdot 10^{-2}$$

$$n = 3,3$$

Ceci détermine la forme finale de l'équation (S-M) qui gère le comportement rhéologique du polypropylène :

$$\dot{\sigma} = 1800\dot{\epsilon} - 3,2 \cdot 10^{-2} \left( \sigma - (956\epsilon - 12527\epsilon^2 + 87116\epsilon^3) \right)^{3,3}$$

Nous représentons sur les figures (5.10.6) et (5.10.7) successivement les courbes de traction obtenues expérimentalement, et les courbes de traction obtenues après intégration de l'équation différentielle qui n'est autre que l'équation (S-M). L'intégration se fait selon une procédure simple d'intégration d'Eucler que nous expliciterons en annexe I. La méthode proposée permet d'établir une forme d'équations semi-linéaires décrivant le comportement des polymères thermoplastiques à comportement viscoplastique.

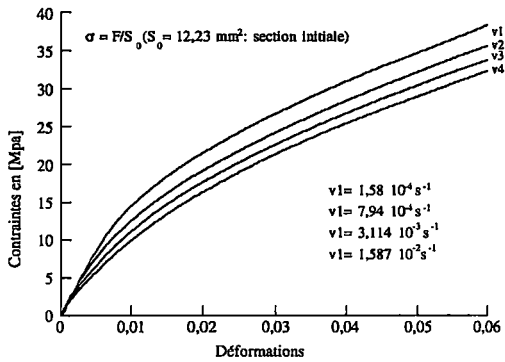


Fig. 5.5.6 Courbes de traction sur du polypropylène à différentes vitesses de déformations quasi statiques (expérimentales )

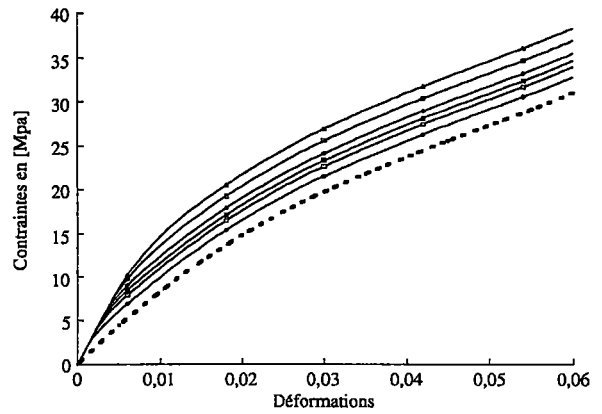


Fig. 5.5.7. Courbes de tractions obtenues numériquement à partir de l'équation (S-M)

L'utilisation d'une seule variable interne de type scalaire est valable pour la description du comportement rhéologique du polypropylène. Cette conclusion est le résultat de la comparaison entre résultats expérimentaux et résultats numériques exposés ci-dessus, qui permet d'apprécier le modèle d'équation rhéologique de type (S-M) pour ce qu'il contient en informations sur la nature du comportement mécanique du polypropylène (courbe quasi statique, module d'élasticité, courbe de limite de relaxation, fluage, courbe dynamique).



## **5.11. Les métaux.**

Le besoin de prédiction est une conséquence de notre désir de réponse, non satisfait à partir de résultats expérimentaux. Dans la plupart des cas, cette insatisfaction n'est pas par manque de données sur le matériau en question, mais surtout à cause du côté inconnu de l'histoire de déformation du matériau.

Le sujet majeur des lois de comportement modernes est d'essayer d'extrapoler à partir d'essais expérimentaux simples, des lois ayant un caractère général. Le principe de base d'une telle extrapolation est dans la plupart des cas, les équations gouvernant des processus physiques.

L'effet de la structure interne (densité de dislocations, contraintes internes, etc.) sur le comportement rhéologique du matériau est une réalité irrévocable. Ceci conduit à l'utilisation de ces variables de structure interne, associées avec d'autres variables observables (déformations, contraintes, etc.) pour la construction d'équations rhéologiques qui soient valables physiquement et capables de prédire le comportement du matériau en question. Face à cette situation, nous sommes forcés de porter des jugements sur la nature et le type de la variable interne à apparaître dans nos équations et quelles expressions elles peuvent prendre.

Spécialement, pour l'étude du comportement des métaux et leurs alliages, les jugements des chercheurs divergent par rapport à l'importance de tel ou tel facteur. Une conséquence naturelle est la diversité des approches proposées partageant toutes plus ou moins les mêmes concepts mais divergent au niveau de certains détails. Toutefois, la méthode utilisant les variables internes reste attractive dans l'analyse des relations "contraintes-déformations" vu sa capacité de caractériser l'histoire des variables mécaniques par les valeurs actuelles de celles-ci.

La théorie des variables internes que nous proposons, étant basé sur une seule variable interne de type scalaire, conduit à une équation différentielle quasi linéaire entre la dérivée par rapport au temps de la contrainte et la vitesse de déformation. Cette approche est à notre avis valable physiquement et applicable à l'analyse du comportement des métaux et leurs alliages présentant certaines caractéristiques mécaniques (accommodation immédiate dans tout cycle de déformation lorsque la vitesse de déformation est toujours la même en charge qu'en décharge). Cette équation rhéologique est dans sa forme, déjà utilisé par Malvern [41] et Cristescu [12], pour l'analyse de certains métaux.

### **5.11.1 Cas des matériaux élastique- plastique.**

Les matériaux elasto-plastique présentent une accommodation immédiate dans tout cycle de

déformation où les vitesses d'allongement et de raccourcissement sont les mêmes. Ces matériaux sont évidemment décrits par une équation de type Malvern :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

Il est clair que pour les matériaux à comportement élasto-plastique, la fonction matérielle  $\beta$  est indépendante de la déformation et prend la forme suivante :

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \beta(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ F(\sigma - \sigma_0) & \text{si } \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

avec  $\sigma_0$ , la limite élastique du matériau. Dans le cas de matériaux ayant un comportement parfaitement plastique  $\sigma_0$  est une constante indépendante de la vitesse de déformation .

La fonction  $F$  peut prendre la forme suivante

$$F = k \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^n$$

avec  $k$  et  $n$  sont deux constantes à déterminer indirectement à partir des essais de traction simple.

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} & \text{si } \sigma \leq \sigma_0 \\ \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + k \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^n & \text{si } \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

Si la déformation élastique est négligeable devant la déformation plastique, on obtient la relation

$$\dot{\epsilon} = \gamma \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^n$$

avec  $\gamma$  est une constante. La relation ci dessus est équivalente à la loi en vitesse de Cowper-Symonds-Bodner [54]. Dans le cas  $n=1$ , on retrouve la relation la relation proposée par Sokolovskii [52]

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + k \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)$$

Un autre choix de fonction  $F$  est le suivant

$$\begin{cases} F(\sigma) = k[\exp(u) - 1] \\ u = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) \end{cases}$$

Nous retrouvons, la forme est introduite par Malvern [41]

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + k \left[ \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) - 1 \right]$$

L'équation (S-M) est aussi applicable à l'analyse de matériaux à comportement viscoplastique qui répondent aux conditions déjà énoncées à savoir une accommodation immédiate. Nous portons nos applications sur le cuivre, le zinc et un alliage à mémoire de forme

### 5.11.2. Le cuivre.

Le cuivre a fait l'objet de nombreux travaux tant au niveau des propriétés mécaniques que structurales. Afin de quantifier la sensibilité du cuivre à la vitesse de déformation et de trouver un modèle pouvant caractériser son comportement des essais de traction simple avec et sans saut de vitesse (changement brusque de la vitesse de déformations) à température ambiante, ont été réalisés pour montrer l'influence de l'histoire de la vitesse de déformation.

Les éprouvettes de traction, sous forme de fil de section circulaire, sont fournies par le LPMM. Toutes les éprouvettes ont subi un traitement thermique, un maintien à une température élevée d'environ 650°C pendant une durée de 5 mn puis refroidissement à l'air libre.

Trois séries d'essais ont été effectuées sur le cuivre pour caractériser son comportement. Dans un premier temps, des essais de traction à différentes vitesses de déformation monotones (fig. 5.11.1). Dans un second temps, une série d'essais avec sauts de vitesse de déformation permet de caractériser la sensibilité du matériau à l'histoire de la vitesse de déformation et vérifier la loi du saut de vitesse ainsi que l'effet d'une décharge.

Tout les essais sont effectués sur une machine de traction de type Zwick. Un extensomètre calibré à la longueur initiale de 9,84 est placé à chaque fois au milieu de l'éprouvette.

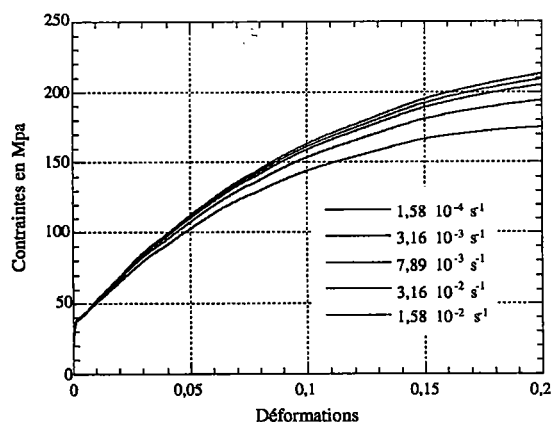


Fig. 5.11.1 Courbes de traction sur du cuivre.  
Influence de la vitesse de déformation

Des essais avec saut de vitesse, du même type que ceux que nous avons entrepris sur le cuivre ont été réalisés dans un autre cadre par Klepazcko [25]. Pour le cuivre (fig.5.11.3), le niveau de contrainte initialement atteint, suit une nouvelle courbure qui tend à rattraper la courbe de traction à vitesse monotone, décrit par Klepazcko, comme un effet de "mémoire évanescence" et correspond à un changement de la structure interne du matériau. Selon Klepazcko [25], La différence de contrainte entre la courbe à vitesse monotone et la courbe au saut de vitesse est indépendante de la

prédéformation au point où se fait le saut. Pour un saut d'une vitesse de  $\dot{\epsilon}_1$  à  $\dot{\epsilon}_2$  à la prédéformation  $\epsilon_1$ , il propose une relation générale entre contrainte et déformation de la forme :

$$\sigma = f_1(\epsilon) + f_2(\epsilon, \dot{\epsilon}_1) + f_2(\epsilon - \epsilon_1, \dot{\epsilon}_2) - f_2(\epsilon - \epsilon_1, \dot{\epsilon}_1)$$

où  $f_1(\epsilon)$  est la courbe d'équilibre ou courbe de chargement quasi statique,  $f_2(\epsilon, \dot{\epsilon})$  est la surcontrainte "over stress", c'est à dire la contrainte additionnelle que donne une vitesse de déformation constante  $\dot{\epsilon}$  par rapport à la courbe d'équilibre obtenue pour une vitesse de déformation théoriquement nulle.

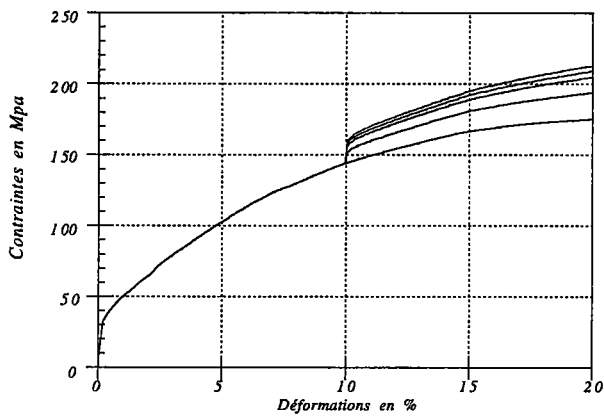


fig. 5.11.2. Essai de traction avec saut de vitesse. Saut d'une vitesse de  $1.58 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  à des vitesses 10, 20, 50, 100 fois plus grandes.

Sur la figure (5.11.1) est représentée la variation de la contrainte en fonction de la déformation au cours d'essais de traction simple à différentes vitesses de déformation monotones. Sur la figure (5.11.2) est représentée un éventail de saut de vitesse après 10% de déformation sur une courbe de traction à 1 mm/mn.

L'analyse de la forme des courbes de traction simple à différentes vitesses de déformations (fig. 5.11.1) et des courbes de traction avec saut de vitesse (fig. 5.11.2) (faible sensibilité du matériau à la vitesse de déformation), nous laisse proposer un modèle du type Malvern suivant :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

avec E, module de Young du matériau et  $\beta(\epsilon, \sigma)$  est la fonction qui décrit les phénomènes lents (fluage, relaxation, etc.), nous lui donnons la forme suivante :

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_y \\ k(\sigma - f(\epsilon))^n & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_y \end{cases}$$

k et n sont deux constantes réelles,  $(\sigma - f(\epsilon))$  est la surcontrainte "over stress",  $f(\epsilon)$  est la courbe d'équilibre ou courbe de chargement quasi-statique, et  $\dot{\epsilon}_y$  est une limite à déterminer. Les valeurs de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  sont déterminées par la relation

$$\beta(\epsilon, \sigma) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \dot{\epsilon} - E\dot{\epsilon}$$

Les valeurs de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  pour différentes vitesses de déformations sont représentées sous forme de courbe ( fig.5.11.5, fig.5.11.6.).

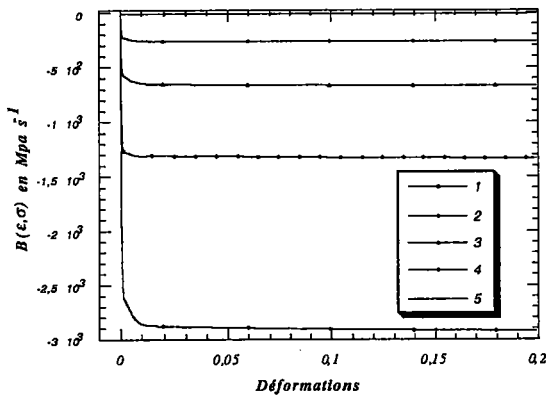


fig5.11.4. Variation de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de  $\epsilon$  et pour différentes valeurs de  $\dot{\epsilon}$   $1,58 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ , 20 fois, 50 fois, 100 fois et 200 fois plus grandes

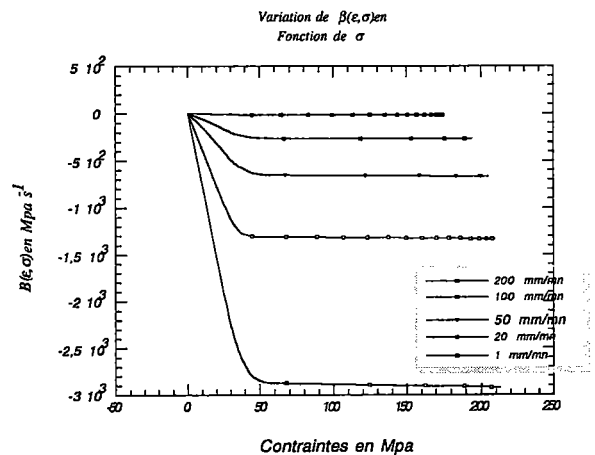


fig. 5.11.5. Variation de  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de  $\sigma$  et pour différentes valeurs de  $\dot{\epsilon}$

Pour la détermination de la valeurs de n, on se donne deux courbes à deux vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$ , nous pouvons écrire pour une déformation  $\epsilon$

$$\frac{\beta(\epsilon, \sigma_1)}{\beta(\epsilon, \sigma_2)} = \frac{k(\sigma_1 - f(\epsilon))^n}{k(\sigma_2 - f(\epsilon))^n} \quad (5.7.2)$$

Donc, la valeur de n est donnée par :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{\beta(\epsilon, \sigma_1)}{\beta(\epsilon, \sigma_2)}\right)}{\ln\left(\frac{(\sigma_1 - f(\epsilon))}{(\sigma_2 - f(\epsilon))}\right)} \quad (5.7.3)$$

Le modèle est déterminé une fois que toutes les constantes qui interviennent dans l'équation rhéologique (S-M) sont connues :

$$E = 7,40 \cdot 10^4 \text{ Mpa}$$

$$n = 5.6$$

$$f(\epsilon) = 11 + 1780\epsilon - 6870\epsilon^2 + 9870\epsilon^3$$

$$k = -5.4 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = 0,00023$$

Il est représenté sur la (fig. 5.11.7) les courbes de traction obtenues à partir d'une intégration numérique de l'équation différentielle (S-M).

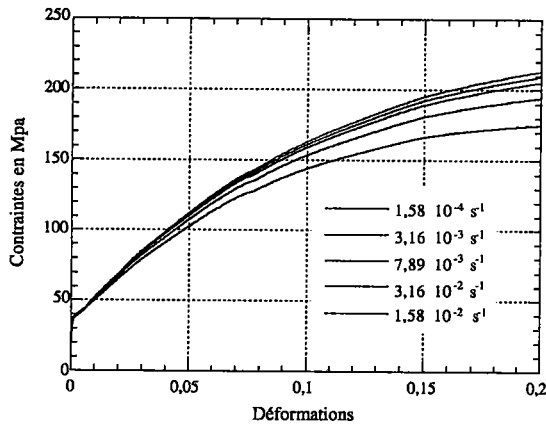


Fig. 5.11.6. Courbes de traction sur du cuivre. Influence de la vitesse de déformation.

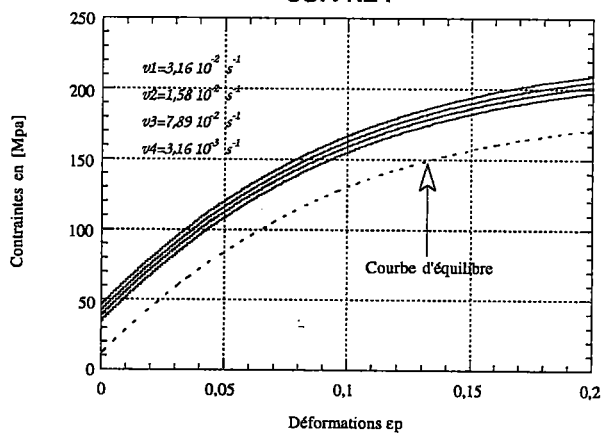


Fig. 5.11.7. Courbes de traction sur du cuivre obtenues numériquement à partir du modèle

## 5.12 Le Zinc.

Le zinc occupe une place importante dans l'industrie par ses propriétés mécanique et physique. Les éprouvettes de zinc nous ont été livrées par le LPMM (Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux) sous forme d'éprouvettes de traction de forme plate de longueur utile ( $L_0 = 12.57$  cm) et de section initiale  $S_0 = 15.40$  mm<sup>2</sup>.

Après avoir subi un traitement thermique du même type qu'ayant fait subir au cuivre; nous avons entamé une campagne d'essais de traction simple avec vitesse de déformation monotone (vitesse de traverse contrôlée) et à température ambiante (20°C). Sur la figure (5.12.1) sont reportées trois courbes de traction à trois vitesses différentes.

Des essais avec saut de vitesse de déformation ont été réalisés sur le zinc, pour vérifier ce que nous avons appelé "loi du saut de vitesse". En effet, après un allongement à la vitesse initiale de  $1,76$  s<sup>-1</sup> jusqu'à une déformation de 1%, on change brusquement de vitesse de déformation et on la porte celle ci à 20 fois puis à 100 fois sa valeur initiale. Il apparaît donc un éventail de saut de vitesse (fig.5.12.2) ou les courbes après le saut rejoignent les courbes à vitesses monotones correspondantes, ce qui permet de vérifier la loi du saut de vitesse pour le cas du zinc.

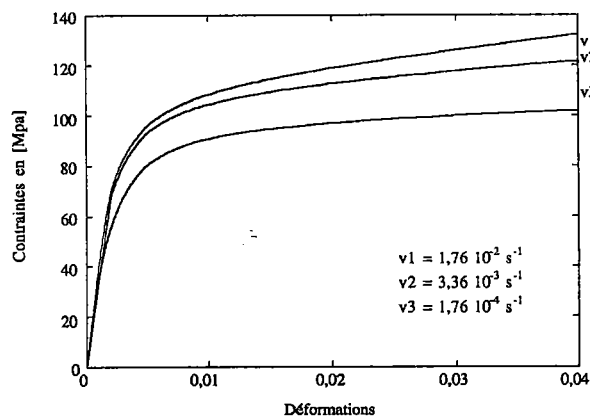


Fig. 5.12.1. Courbes de traction sur du zinc à différentes vitesses de déformations

Sur la figure (5.12.3), nous avons représenté un détail de l'éventail du saut de vitesse, qui nous fait faire une constatation, déjà faite par Klepazcko [24], sur l'existence de deux incréments de contraintes associés au saut de vitesse  $\Delta\sigma_s$  et  $\Delta\sigma_h$ . Le premier terme mesure la sensibilité instantanée à la vitesse de déformation. Le second terme apparaît comme un résultat de la différence de microstructure entre l'état initial et l'état final, puisqu'il est supposé qu'aucun changement microstructural n'intervient dans le premier terme.



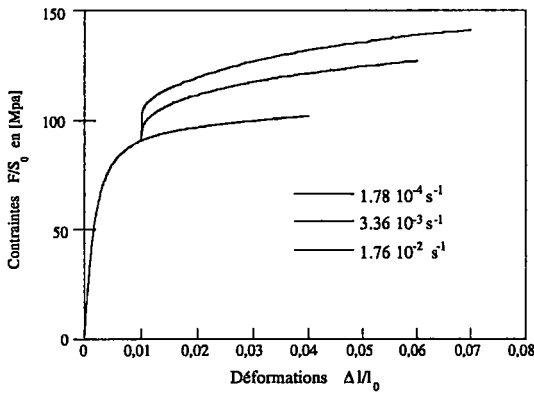


Fig. 5.8.2. Eventail de saut de vitesse sur le Zinc obtenu expérimentalement

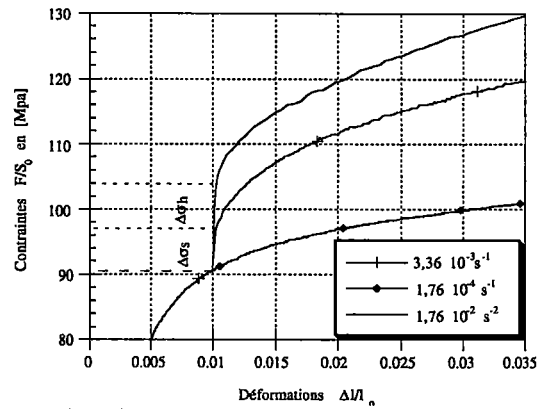


Fig. 5.8.3. Détail du saut de vitesse sur le Zinc.

Une condition nécessaire pour pouvoir décrire un matériau par une équation du type (SM), est que le matériau présente une accommodation immédiate dans tout cycle de déformation où la vitesse de charge et de décharge sont les mêmes, condition imposée par l'utilisation d'une seule variable interne scalaire.

Visiblement le zinc ne répond pas à cette condition qui à notre avis d'importance, comme première constatation, nous pouvons confirmer que l'utilisation d'une seule variable interne de type scalaire est insuffisante pour décrire le comportement du zinc. Toutefois, nous allons essayer d'approcher le comportement par une équation semi-linéaire en vitesse de type Malvern :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + \beta(\varepsilon, \sigma)$$

avec  $E$  module de Young et  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  fonction matérielle déterminée indirectement à partir des essais de traction simple.

Au point  $M(\varepsilon, \sigma)$  dans l'espace des états possibles de la figure (5.12.1), on connaît la valeur du couple  $(\dot{\varepsilon}, \dot{\sigma})$ , ce qui permet de déterminer la valeur de la fonction  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  en tout point de cet espace. Sur la figure (5.12.4) est représentée les valeurs de  $\beta(\varepsilon, \sigma)$  en fonction de la déformation et ceci pour différentes valeurs de la vitesse de déformation.

Nous supposons, dans ce qui suit, que

$$\beta(\varepsilon, \sigma) = -k \cdot (\sigma - f(\varepsilon))^n$$

avec  $k$  et  $n$  deux constantes réelles à déterminer indirectement à partir de l'analyse des courbes de la figure (5.12.4) et  $f(\varepsilon)$  est la courbe d'équilibre définie comme étant la courbe de limite de relaxation.

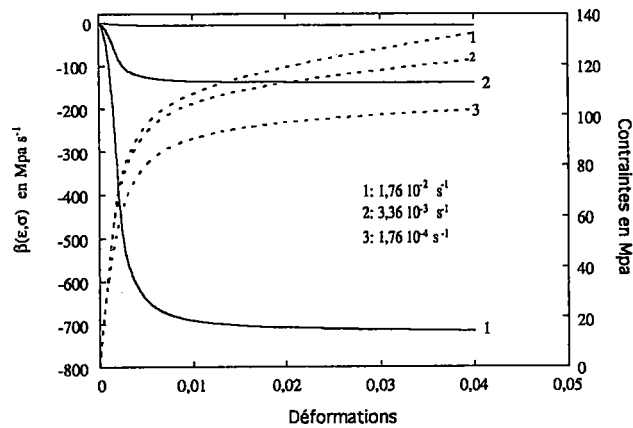


Fig. 5.12.4. Variation de la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la déformation

avec

$$f(\epsilon) = \begin{cases} E\epsilon & \text{si } \epsilon \leq \epsilon_y \\ f_1(\epsilon) & \text{si } \epsilon \geq \epsilon_y \end{cases}$$

avec  $f_1(\epsilon)$  une fonction réelle positive à déterminer, théoriquement, cette courbe est obtenue expérimentalement pour une vitesse de déformation très faible à partir d'un état d'équilibre initial  $O(\epsilon = 0, \sigma = 0)$ .

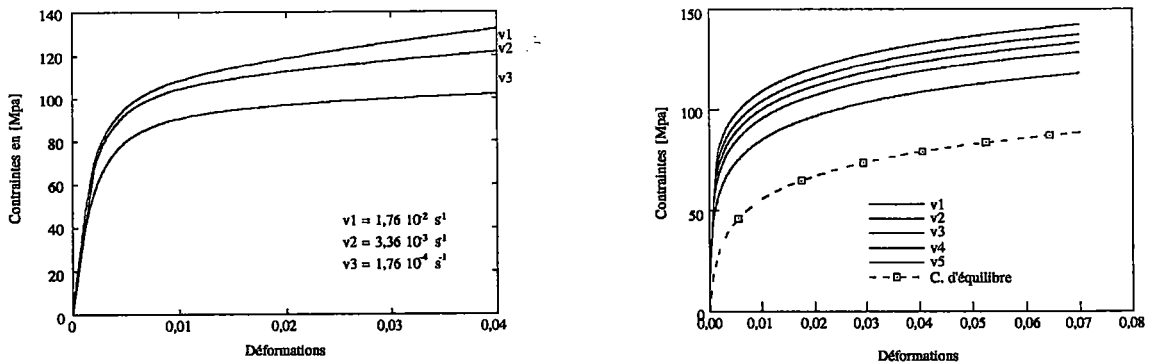


Fig.5.12.5. Comparaison entre résultats numériques, obtenus à partir du modèle proposé et quelques résultats expérimentaux, avec  $v1 = 1,76 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $v2 = 10v1$ ,  $v3 = 20v1$ ,  $v4 = 50v1$ ,  $v5 = 100v1$

L'analyse des formes des courbes de traction sur le zinc (fig.5.8.1) peuvent être, à partir d'un certain seuil de déformation, représentées par une forme logarithmique du type  $\sigma = a \ln(1 + b\epsilon)$  où  $a$  et  $b$  deux constantes réelles. Ceci permet de supposer une forme similaire pour la courbe  $f_1(\epsilon)$ .

La détermination de la courbe d'équilibre reste l'étape la plus difficile, dans la procédure de calcul, que une fois déterminée permet de retrouver les constantes qui interviennent dans la forme de la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma)$ .

Tableau 5.8.1

<u>E: Mo. Young</u>	46600 Mpa
<u>C.d'équilibre</u>	$f_1(\epsilon) = 17,38 \ln(1 + 2329\epsilon)$
<u>Coeff. n</u>	$n = 5.1$
<u>Coeff. k</u>	$-25 \cdot 10^{-6}$
<u>Const <math>\epsilon_y</math></u>	$\epsilon_y = 0.00036$

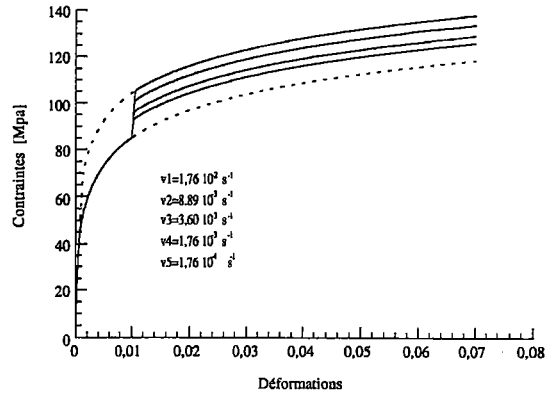
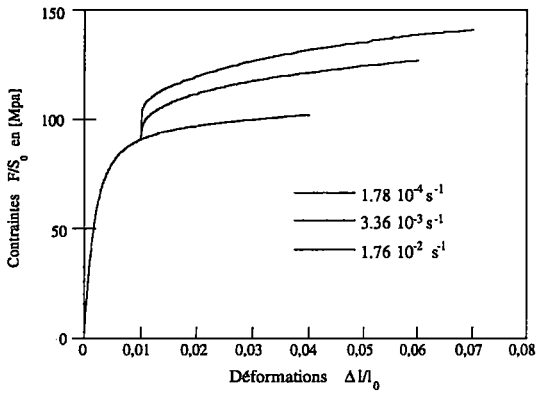


Fig. 5.8.6 Comparaison de deux éventails de saut, les premier obtenu expérimentalement et le deuxième obtenu à partir du modèle (SM) pour le zinc.

Le cas d'une seule variable interne de type scalaire, qui conduit à l'équation rhéologique semi-linéaire de type Malvern, permet à notre avis d'apporter une première approximation du comportement des métaux à comportement parfaitement plastique ou simplement viscoplastique. Avec l'approximation faite sur l'absence d'hysteresis (accommodation immédiate dans tout cycle où la vitesse de chargement est égale à la vitesse de déchargement), il permet d'approcher d'une manière acceptable le comportement des métaux aussi bien charge qu'en décharge.

### 5.13. Alliage à mémoire de forme (CuAlBe).

Un autre support expérimental à cette étude est l'alliage à mémoire de forme type CuAlBe qui fait actuellement l'objet de nombreuses études au sein du LPMM (Berveiller, Patoor, Heberhard, Entemeyer). Les propriétés des alliages CuAlBe présentent des propriétés mécaniques et une stabilité thermique bien supérieure à celle du CuZnAl et une mise en oeuvre plus facile que CuAlZn.

Les alliages à mémoire de forme présentent différents types de comportement : mémoire simple et double sens, effet caoutchoutique et superélastique.

L'effet mémoire simple est observé lors d'un chargement séquentiel. Le matériau est à l'état martensitique se déforme mécaniquement d'une manière irréversible et retrouve sa forme initiale s'il est chauffé dans le domaine austénitique.

L'effet mémoire double se manifeste lors d'un cycle thermique sans contrainte appliquée après que le matériau ait subi un traitement d'éducation qui consiste à modifier son état interne (par augmentation de la densité de dislocation) par traitement thermomécanique. Ceci permet d'obtenir un champ de contrainte interne qui oriente les variantes entraînant une déformation de transformation lors d'un refroidissement sans contraintes appliquées. Le matériau peut ainsi prendre des états stables par variation de température.

L'effet caoutchoutique est observé si la contrainte appliquée est inférieure un certain seuil. Le comportement est dans ce cas réversible. Cet effet lié à la phase martensitique est appelé aussi effet pseudoélastique par réorientation.

L'effet pseudoélastique est observé lorsque la transformation est assistée par une contrainte appliquée. La transformation martensitique est indépendante du temps. La vitesse de déformation à une grande influence sur le comportement du matériau pseudoélastique.

Vu leurs variétés de comportement les alliages à mémoire de forme peuvent être classés en quatre types, ils sont connecteur, actuateur, superélastique et amortisseur. Ceci constitue les principales utilisations industrielles de AMF. Les nickel-titane (NiTi) sont les premiers alliages à mémoire de forme à avoir été utilisés dans l'industrie qui restent coûteux vu leur métallurgie complexe. Les alliages Cuivreux ayant une meilleure résistance à la température mais certains restent très difficiles à élaborer à savoir le (CuAlNi). Les (CuAlBe) sont des alliages développés et restent des plus prometteurs industriellement vu leurs caractéristiques mécaniques et une déformation bien supérieure à celles des alliages cuivreux.

Les principaux succès de l'utilisation des AMF sont constatés dans l'utilisation des alliages

superélastiques (textiles: armature de soutien gorge [17], lunettes: branches et pont [58], biomédical: fils dentaire).

Le but essentiel du présent travail sur l'alliage à mémoire de forme de type cuivre-alluminium est de décrire son comportement mécanique. Cette prédiction repose sur étude à l'origine phénoménologique donc macroscopique à unique variable interne scalaire dans des conditions isothermes. Les effets de la température malgré leur importance sont négligés dans la présente étude. Cette étude conduit principalement à un modèle d'équation de type (SM).

Cette étude constitue en soit un support expérimental supplémentaire à notre modèle. De plus le CuAlBe en tant qu'alliage à mémoire de forme fait actuellement l'objet de nombreuses études au sein même du LPMM. D'après Entemeyer [14], ce matériau des propriétés mécaniques intéressantes et une stabilité thermique bien supérieure au CuZnAl et une mise en oeuvre plus facile que les (CuAlNi).

La recherche du modèle est principalement basée sur des observations expérimentales à savoir des essais de traction à vitesses de déformation quasi statiques et isothermes avec et sans sauts de vitesses (vitesse de traverse contrôlée).

Rappelons ici, que le modèle d'équation proposée, appliquée sur certains polymères et certains métaux avait donné de bons résultats dans les essais de traction uni-axiale. L'application de ce modèle aux alliages à mémoire de forme est moins évidente et dans le succès n'est pas assuré.

Les différents essais sont réalisés avec vitesse de traverse contrôlée et à température ambiante. L'éprouvette une fois fixée entre les mors de la machine de traction est équipée en son milieu d'un extensomètre permettant de mesurer la déformation. L'extensomètre est calibré à la longueur initiale de 9,98 mm. Le CuAlBe utilisé est un alliage polycristalin de composition (en % massique) 11,6% Al et 0,5% Be. Les éprouvettes ont été fournis par le LPMM sous forme de fil de diamètre moyen de 1.46 mm.

Deux types d'essais ont été effectués sur l'alliage CuAlBe pour caractériser son comportement.

Dans un premier temps, des essais isothermes à vitesse de traverse contrôlée monotone ( charge uni-axiale suivi d'une décharge) permettent d'apporter un jugement sur la nature de son comportement à température ambiante.

Dans une seconde étape des essais cyclique ont été effectués sur le matériau polycristalin ont permet de remarquer que l'effet d'hesterisis est important, ce qui rend l'utilisation d'une seule éprouvette impossible: chaque essai est réalisé sur une éprouvette différente. La stabilisation du comportement est obtenue après un nombre faible de cycles

Dans une troisième étape des essais avec différentes vitesses de déformations avec et son saut de

vitesse permettent de déterminer les fonctions matérielles qui interviennent dans l'équation (SM). Le CuAlBe est un AMF sensible à la température. Plus la vitesse de déformation augmente et plus les échanges de température de l'éprouvette avec le milieu extérieur sont réduits, contrairement au cas de vitesse de déformation faible où la chaleur est aisément dissipée ce qui explique la variation des pentes de transformation qui augmentent avec la vitesse de déformation.

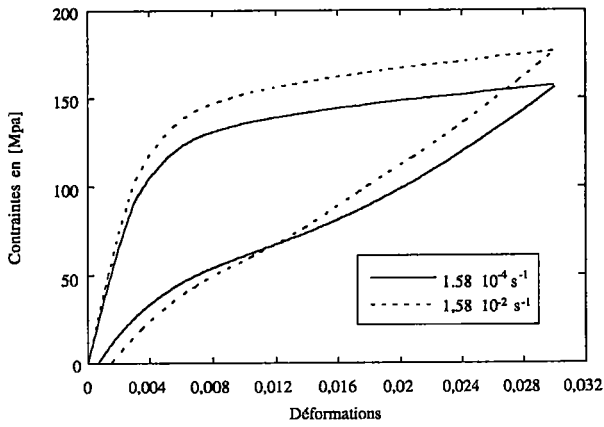


Fig. 5.13.1. comportement pseudoélastique de l'alliage CuAlBe variation de la pente de déformation avec vitesse de déformation

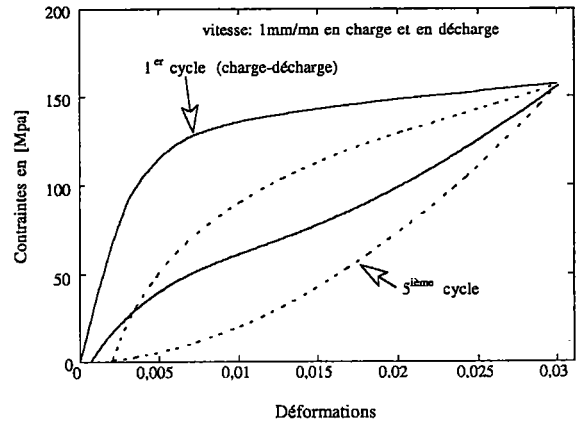


Fig. 5.13.2. Comportement du CuAlBe sous l'effet d'un cyclage .Accommodation après un nombre la limité de cycle.

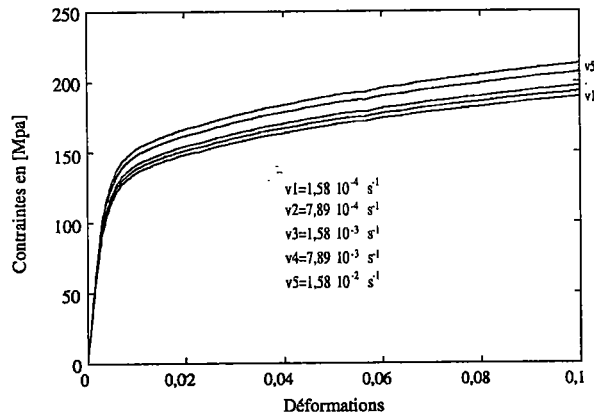


Fig. 5.13.3. Comportement du CuAlBe sous l'effet de la variation de vitesse de déformation

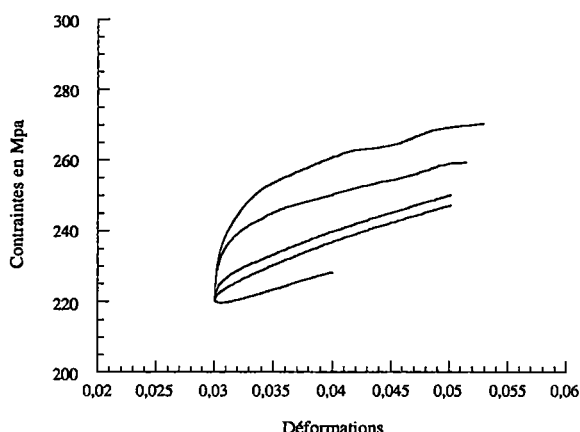


Fig. 5.13.4. Éventail de saut de vitesse obtenue après une déformation de 0.02 à une vitesse de 1mm/mn et sauts à des vitesses 10, 20, 100 et 200 fois plus grande et à une vitesse de 0,125 fois plus faible.

### 5.13.1. Détermination de l'équation rhéologique de comportement de type (SM)

Ici, on néglige l'effet de la température sur le comportement du matériau, en supposant des essais isothermes à température ambiante. La recherche d'un modèle rhéologique repose principalement sur des observations expérimentales (fig. 5.13.3 et fig. 5.13.4.). Cependant de nombreux travaux, notamment au LPMM au sein de l'équipe de Berveiler, ont fait avancer la recherche dans le domaine de AMF et principalement le CuAlBe. Notre approche est à l'origine phénoménologique et donc macroscopique régit par une seule variable interne de type scalaire ce qui conduit fondamentalement à une équation du type (SM).

Sur les courbes de traction de la figure (5.13.3), on observe une transformation qui s'effectue sur une pente, contrairement au cas du monocristalin [14] où la transformation s'effectue à une contrainte quasiment constante. Cette pente est due à la multitude des variantes qui apparaît pendant la transformation et aux interactions inter granulaires. La déformation permanente qui apparaît après le déchargement est due à la déformation plastique qui se produit localement dans l'échantillon.

Ces remarques, concernant le comportement, permettent de proposer un modèle compatible avec les observations expérimentales. On veut dire par là, des fonctions matérielles  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en conséquence.

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

avec E, module de Young, déterminé à partir des essais de traction uni-axiale:  $E = 37. 10^3$  Mpa.

Les valeurs de la fonction matérielle  $\beta(\epsilon, \sigma)$  sont déterminées pour chaque vitesse de déformation:  $\beta(\epsilon, \sigma) = \dot{\sigma} - E\dot{\epsilon}$ . Sur les figures (5.13.5, 5.13.6, 5.13.7) sont présentées la variation de la fonction

$\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la contrainte et de la déformation. Nous proposons la forme suivante pour la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma) = -k(\sigma - f(\epsilon))^n$ , avec  $k$  et  $n$  deux paramètres à déterminer à partir des courbes des figures (5.13.5, 5.13.6, 5.13.7), la fonction  $f(\epsilon)$  est la courbe d'équilibre obtenue pour des vitesses de déformation très faible (théoriquement nulle).

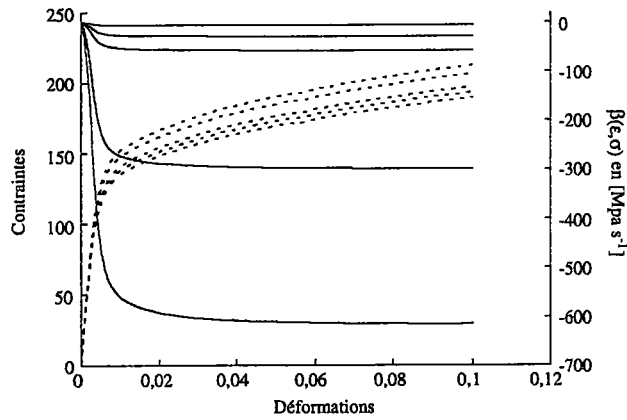


Fig. 5.9.5 Variation de la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la déformation et de la contrainte

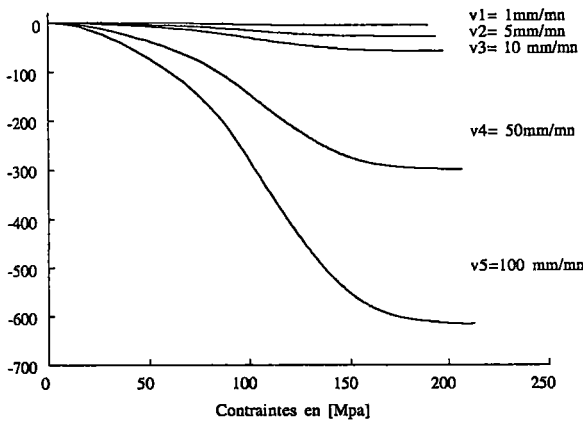


Fig. 5.13.6. Variation de la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la contrainte

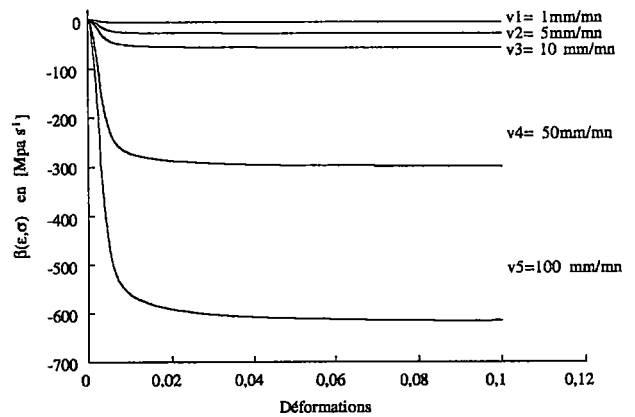


Fig. 5.13.7. Variation de la fonction  $\beta(\epsilon, \sigma)$  en fonction de la déformation

Les valeurs des différents paramètres sont données ci-dessous:

$$k = 3.5 \cdot 10^{-8}$$

$$n = 6.45$$

$$E = 37000 \text{ Mpa}$$

$$f(\epsilon) = \begin{cases} E_1 \epsilon & \text{pour } \epsilon \leq 0,0045 \\ E_1 = 30000 \text{ Mpa} \\ 330\epsilon + 130 & \text{pour } \epsilon \geq 0,0045 \end{cases}$$

L'évaluation du modèle repose essentiellement sur une concordance raisonnable du modèle avec l'expérience, et la capacité prédictive de celui-ci. Sur la figure (5.13.8) est présentée une comparaison entre résultats expérimentaux et résultats numériques.



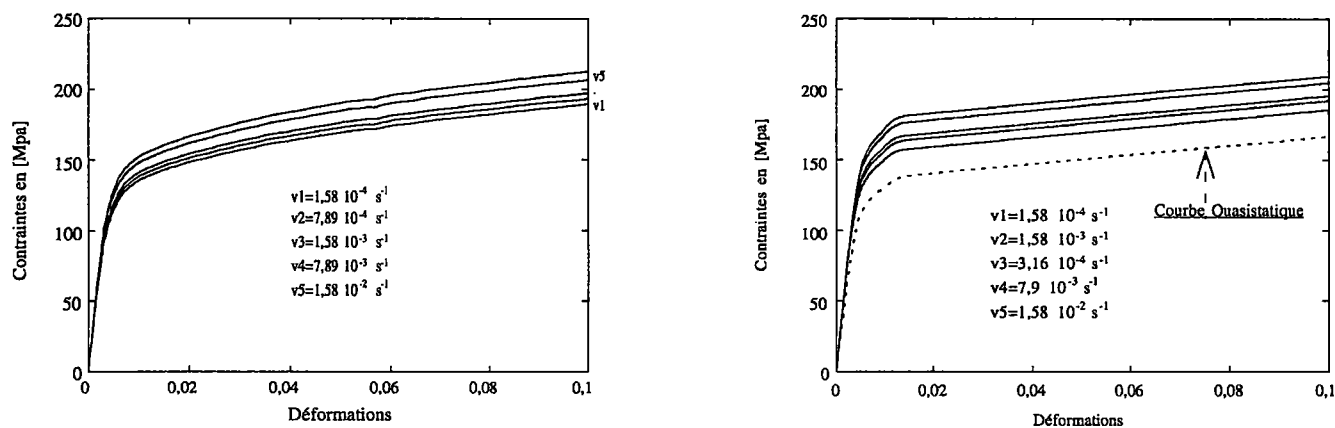


Fig. 5.13.8. Comparaison entre résultats numérique et expérimentaux pour l'alliage CuAlBe.

Le modèle proposé pour l'alliage à mémoire de forme (CuAlBe) suppose implicitement que les effets de des effets des changements de température du matériau au cours de l'essai qui ne sont pas à négliger [14], nous proposons ici une équation rhéologique dans le cas d'un essai théoriquement isotherme. La prise en compte de la température rend le traitement par une équation de type semi linéaire plus complexe. Toutefois, ceci peut être pris comme première approche d'un comportement d'un AMF par une équation semi-linéaire.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

ie

## Conclusion

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à comprendre les phénomènes rhéologiques à travers l'utilisation des variables internes. Nous avons montré comment l'utilisation d'une seule variable interne de type scalaire peut être considérée comme une première approximation pour modéliser les comportements rhéologiques de différents types de comportements de matériaux.

Par ailleurs, la méthode des variables internes conduit à différentes conséquences qui sont à notre avis en bonne conformité avec l'expérience. Elles permettent entre autres, un exposé rationnel de la mécanique des milieux continus basé sur la thermodynamique des processus irréversibles. Indépendamment du choix des variables d'états et les fonctions d'états correspondantes, on accepte généralement l'hypothèse que l'énergie libre spécifique est fonction de certaines variables d'états.

Le choix de la variable interne et la forme des fonctions d'état constituent un domaine assez vaste, variant d'un auteur à l'autre, nous avons notre propre formalisme. La variable interne appropriée et son équation d'évolution ne sont pas faciles à déterminer. Un problème ouvert en rhéologie et précisément en viscoplasticité concerne la façon la plus convenable d'établir les équations d'évolution pour les variables internes. Nous avons choisi d'étudier le cas d'une seule variable interne, qui représente l'évolution interne du matériau sous l'effet des essais de traction uni axiale. L'hypothèse d'une seule variable interne, résultat d'un désir d'un maximum de simplicité, est certainement une grosse simplification, mais conduit à une forme d'équations simples et pratiques à la description de comportements rhéologiques de plusieurs types de matériaux.

On a fait ressortir, le long de ce travail, l'intérêt théorique et pratique des équations rhéologiques de la forme :

$$\dot{\sigma} = \alpha(\epsilon, \sigma)\dot{\epsilon} + \beta(\epsilon, \sigma)$$

qui relie l'histoire de la contrainte  $\sigma$  avec l'histoire de déformation  $\epsilon$  où le point désigne la dérivée par rapport au temps. Elles correspondent évidemment au cas d'une seule variable interne de type scalaire lorsque le comportement isotherme équivalent est décrit par l'énergie libre  $\phi(\epsilon, \xi)$ , l'équation d'évolution de la variable interne  $\dot{\xi} = g(\epsilon, \xi)$  et la condition de dissipativité  $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} g(\epsilon, \xi) \leq 0$ .

$\alpha(\epsilon, \sigma) = E = \text{Cste} > 0$  est le module de Young dynamique caractérisant la réponse instantanée du matériau, la fonction de relaxation  $\beta$  prend la forme suivante :

$$\beta(\epsilon, \sigma) = -k \cdot \text{sgn}(\sigma - f(\epsilon)) |(\sigma - f(\epsilon))|^n$$

forme non linéaire en  $(\sigma - f(\epsilon))$  : "over stress". Ici  $k = Cste > 0$  est un coefficient de viscosité,  $f(\epsilon)$  est la courbe d'équilibre en principe obtenue lors un essai infiniment lent et  $n = Cste > 0$  représente la sensibilité du matériau à la vitesse de déformation. Ce modèle est capable de décrire qualitativement certains effets observés expérimentalement dans plusieurs types de matériaux à savoir le fluage et la relaxation ne pouvant être décrit par des équations d'élasticité ou de plasticité classique.

Notre travail a été en majeure partie fondée sur l'expérimentation qui contrairement à ce que l'on pourrait croire est un domaine à prendre avec précaution. En effet, les conditions d'expérimentation doivent être menées de façon à ne pas interférer sur les phénomènes qu'on veut étudier. Pour pallier à cette difficulté, la multiplication des essais a été nécessaire.

Sur les résultats que nous avons présentés et précisément les formes des fonctions matérielles; on peut annoncer une corrélation acceptable entre théorie et expérience. Toutefois, on garde une grande prudence pour la validité des modèles proposés pour des matériaux sous d'autres conditions d'essais. La courbe d'équilibre ou courbe quasi statique est souvent sujet de tâtonnements délicats.

Concernant la loi du saut de vitesse, des essais de traction avec saut de vitesse sur plusieurs matériaux (polyéthylène, polypropylène, zinc, cuivre, CuAlBe) montrent une propriété fondamentale dans les essais avec saut de vitesse. Tous ces comportements sont conformes à la loi du saut de vitesse

$$\dot{\sigma} = \alpha \dot{\epsilon} + \beta$$

ou

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}(t+0) = \alpha + \frac{\beta}{\dot{\epsilon}(t+0)}$$

$\alpha$  et  $\beta$  dépendent de l'histoire de déformation  $\epsilon(t)$  avant le saut mais ne changent pas dans une discontinuité de celle-ci. Cette loi du saut de vitesse est valable pour des comportement à plusieurs variables internes doués d'élasticité instantanée.

Bien entendu, les formes d'équations proposées pour chaque matériau sont un cas particulier, qui est à notre avis le mieux adapté. Toutefois, on peut imaginer plusieurs variantes pourvu qu'elles répondent aux conditions présentées au chapitre 3.

Il faut essentiellement retenir de ce travail, la démarche consistant à trouver l'équation rhéologique de type semi linéaire ou de Sokolovskii-Malvern (S-M). Cette démarche a été faite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles de la mécanique des milieux continus, ce qui la

rend physiquement acceptable. Cette forme spécifique d'équation rhéologique (S-M) devrait être valable pour la modélisation du comportement rhéologique de plusieurs types de matériaux. C'est ce que nous avons essayé de montrer le long de cette étude.

# Bibliographie

- [1] **Andrade, C.**  
Proc. Roy. Soc. A84, 1, 1910
- [2] **Bassout Lellich, M.,**  
Théorème d'unicité des vitesses en déformation quasi-statique des milieux viscoélastiques standard, communication au G.F.R, le 27 novembre 1985.
- [3] **Bassout-Lellich M.,**  
" Sur les milieux viscoélastiques standards ", Thèse de l'université de Metz (1986).
- [4] **Belouettar S., Weber J.D.,**  
Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse, cahiers du GFR nov. 1994
- [5] **Belouettar S., Weber J.D.,**  
Variables internes en Rhéologie, communication au 2<sup>eme</sup> Congrès de Mécanique, avril 1995.
- [6] **Biot M. A.,**  
Theory of stress relations in anisotropic viscoelasticity, J.Appl.Phy.25,1385 (1954).
- [7] **Brun L.,**  
Thermodynamique et chocs dans les milieux à paramètres internes, Seminaire "plasticité et Viscoplasticité", thème 2, conf (iii), 1972.
- [8] **Bui H.D. et Zarka,**  
Fondements expérimentaux et modèles pour l'étude du comportement du matériaux, seminaire "plasticité et viscoplasticité ", thème 1, conf(i), 1972
- [9] **Cambell J.D. & Briggs T.L.,**  
J. less-common 40, 235, 1975
- [10] **Coleman B.D. et M. E. Gurtin,**  
Thermodynamics with internal state variables. J. Chem. Phys. 47, 597 (1967).
- [11] **Coleman B.D.,**  
Thermodynamics of matherials with memory. Arch. Ratio. Mech. Anal. 17,1,(1964).
- [12] **Cristescui N.,**  
Viscoplasticity, North Holland, Amsterdam.  
ISBN 90-247-2777-4 1972
- [13] **Eckart C.,**  
Thermodynamics of irreverssible processes, IV.  
Theory of elasticity, Phys, Rev. 73, 373,(1948)
- [14] **Entemeyer denis**  
Etude micromécanique du comportement rhermodynamique des A.M.F.  
Thèse de l'université de Metz, 20 décembre 1996,
- [15] **Findeley,**  
J. of Appli. Physics, 26, 821, 1955
- [16] **Fung, Y.,C.,**  
Foundations of solid mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1965
- [17] **Furukawa Electric Co**  
Dépliant comercial Tokyo Japan.

- [18] **Germain P.**,  
Cours de mécanique des milieux continus, Masson et Cie (1973)
- [19] **Gianfranco, Capriz**  
On the thermodynamics of viscoelastic continua,  
Istituto di Elaborazione della informazione de C.N.R., Pisa.
- [20] **Halphen B., et Son,**  
Sur les Matériaux Standards Généralisés, journal de mécanique, vol 14, n°14 (1975).
- [21] **Huet, C.,**  
Sur la notion d'état local en rhéologie, Numéro spécial du G.F.R. Janvier 1990
- [22] **Ionescu et Sofonea,**  
Functional and Numerical Methods in Plasticity, Publication, Oxford.
- [23] **Kestin J. et J.Rice,**  
Paradoxes in the application of thermodynamics to strained rods. p 275 (ed, Stuart) (1970)
- [24] **Klepaczko Janusz,**  
The strain rate behaviour of iron in pure shear,  
Inter. Journal of solids structures, vol 5, pp 533-548, 1969,
- [25] **Klepaczko J.**  
some experimental investigations of the elastic-plastic waves propagation in bars;  
Foundations of plasticity, ed. A. Sawczuk, Noordhoff Int. Publ., Leyden, 451-462. 1973
- [26] **Kluitenberg G. A.,**  
On rheology and thermodynamics of irreversible processes  
Physica, 28, 1173-1183, 1962
- [27] **Kröner, E.**  
Journ. Math. Phys., 42, 27, 1963
- [28] **Kosinski W. & Wojno W**  
Remarks on internal variable and history descriptions of material  
Archives of mechanics, 25, 4, pp 709-713, Warszawa 1973
- [29] **Kuriyama S. & Kawata K.,**  
J. Appl. Physics. 44; 3445-3454; 1973
- [30] **Kukukanov, V, N,**  
One dimensional problems of stress wave propagation in bars,  
Computing center Acad. Sci, USSR, N°6 Moscow (Russia) 1977
- [31] **Lee S. R. & Ding J. L.**  
Viscoplastic constitutive modeling with one scalar state variable,  
International Journal of plasticity, vol 5, pp 617-637, 1989
- [32] **Lee, E. H.,**  
The theory of wave propagation in inelastic materials, IUTAM colloq. p.129 1960  
Deformation and flow in solids
- [33] **Le Tallec, P.,**  
Numerical analysis of viscoelastic problems, Masson, Springer-Verlag, Paris, 1990  
ISBN 2.225-82093-7
- [34] **Lubliner J.,**  
On a fading memory in materials of evolutionary type. Acta Mech. 8,75, (1969)

- [35] **Lush A.M., Weber G. & Anaud L.**  
An implicit time integration procedure for a set on internal variable constitutive equations for an isotropic elasto-viscoplasticity.  
International journal of plasticity, Vol 5, pp 521-549, **1989**
- [36] **Mandel J.**  
Cours de mécanique des milieux continus, Paris, Gauthier-Villars. **1966**
- [37] **Mandel J.,**  
Application de la thermodynamique aux milieux viscoélastiques à élasticité instantanée nulle et restreinte, C.R.Acad.Sci. 264 A, p 133, (**1967**).
- [38] **Mandel J.,**  
Application de la thermodynamique aux systèmes viscoélastiques linéaire à paramètres cachés, Cahiers du G.F.R,pp 181-190 (**1967**).
- [39] **Mandel J.**  
Unicité et principes variationnels en viscoplasticité, séminaire " Plasticité et viscoplasticité", (**1972**), thème 3, conf (iii).
- [40] **Mandel J.,**  
Généralisation de la théorie de plasticité de W. Koiter, Intern. J. Soli. Structure, Vol 1, pp. 273 à 295 (**1965**).
- [ 41] **Malvern, L. E.**  
Experimental studies of strain-rates effects  
Journal of applied mechanics, 18, 203-208, **1961**.
- [42] **Miller, Alan K.**  
Unified constitutive equations for creep and plasticity, Elsevier applied sciences,  
ISBN 1.85166-087-9
- [43] **Noll W.,**  
Mathématical. theory of Mechanical Behaviour of Continuum Media. Arch. Ratio. Mech. Anal. 2, 272, (**1949**)
- [44] **Onsager L.,**  
Reciprocal relations in irreversible processes, Phys. Rev. 37, 405 (**1931**).
- [45] **Patoor E., Eberhard A. et Berveiler M.**  
Potentiel pseudoélastique et plasticité de la transformation martensitique dans les mono et polycristaux métalliques. Acta metall. 38 n° 11, 1987, p2779-2789.
- [46] **Perzyna, P.**  
Viscoplasticity. Theory and application.  
International center for applied mechanics, Udine, Itajy, **1971**
- [47] **Portier Richard**  
Transformations martensitiques " les alliages à mémoire de forme"  
Universite de Paris VI, (E.N.S.C.P) mai **1993**
- [48] **Rice, J.R.,**  
Inélastic constitutive relation for solids, An internal variable theory and its application to metal plasticity, J. Mech. Solids, vol 9, pp: 433 to 455, **1971**.
- [49] **Sidoroff, F.,**  
Variables internes en viscoplasticité  
i - Variables internes scalaires et tensorielles, Journal de Mécanique, Vol 14, N°3 (**1975**)  
ii - Milieux avec configuration intermédiaire, journal de mécanique , Vol 14, N°4 (**1975**)  
iii - Milieux avec Plusieurs configurations intermédiaires, Journal de mécanique, Vol 13 N°4 (**1974**).



- [50] **Siliciu, I.**,  
An analogy between of the constitutive equations of electric lines and those for one dimensional viscoplasticity, N°32, Institut de mécanique de Bucharest, 1979
- [51] **Solomon, L.**  
Elasticité linéaire Edition Masson Paris 1969
- [52] **Sokolovskii V.V.**  
Propagation of elastic-visco plastic waves in bars of plastic deformations (russian)  
Prikl. Mat., Mekh. 12, 261-280 (1948)
- [53] **Stuart B. and al.**,  
An internal variable constitutive model for hot working metals, inter. Journ. of Plasticity, vol 5, pp 95-130,(1989).
- [54] **Symonds & Bodner**,  
Plastic deformations in impact and impulsive loading of beams, "plasticity", Pergamon presse New York, 488-500, 1960
- [55] **Szczepinski, W.**  
Experimental methods in mechanics of solids, Elsevier, 1990  
ISBN 0-444-9883-1
- [56] **Tokin " shape memory alloy"**, Dépliant commercial 1990  
Tokin Corporation Tokyo 107 (Japan)
- [57] **Valanis B.**,  
Unified theory of thermomechanical behaviour of viscoelastic materials p.343 Spriger-Verlag (1968)
- [58] **Van Holde, K.**,  
J. Polymer Sci. 24, 417, 1957
- [60] **Weber J.D.**,  
Hypothèse des variables internes et représentation de certains fluides viscoélastiques.  
Conférence G.F.R , le 20 juin (1974).
- [61] **Weber J.D.**,  
Mécanique des milieux déformables non linéaires Eyrolles, Paris (1972)
- [62] **Weber, J.D.**,  
Sur les propriétés d'une classe de corps viscoélastiques non linéaires à paramètres cachées  
C.R. Acad. Sc.t 267, serie A, pp 565-568, paris 1968
- [63] **Weber, J.D.**  
Comportement du polyéthylène dans les essais de traction avec saut de vitesse  
cahiers du G.F.R. N° Spécial Rhéologie, 15 novembre 1973
- [64] **Zarka, J.**  
Sur la viscoplasticité des métaux, mémoire de l'Art.  
Franc. Fasc. 2eme. 1970
- [65] **Zeigler H.**,  
An attempt to generalize onager's principal, J. Math. Phys. 9, 748 (1958).
- [66] **Smith, T. L.**,  
Trans. Soc. Rheology; 6, 61, 1962

# ANNEXES

de

## Annexe 1.

### Procédure d'intégration de l'équation différentielle de type semi linéaire

La procédure d'intégration numérique du système d'équations différentielles aux dérivées partielles type semi linéaire repose sur un schéma d'intégration simple d'une équation simple du type

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y_0 = y(\varepsilon_0) \end{cases}$$

La résolution numérique de cette équation différentielle repose sur un schéma d'intégration d'Euler. Pour ce fait, considérant le domaine de déformation

$$I = [\varepsilon_0, \varepsilon] = \sum_{i=0}^{n-1} [\varepsilon_i, \varepsilon_{i+\Delta i}]$$

Dans ce domaine, nous pouvons écrire

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} &= E + \frac{\beta(\varepsilon, \sigma)}{\dot{\varepsilon}} \\ \varepsilon^0 &= \varepsilon_0, \sigma^0 = \sigma_0 \end{aligned} \right\}$$

ou plus simplement

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i} &= E + \frac{\beta(\varepsilon_i, \sigma_i)}{\dot{\varepsilon}_{cste}} \\ \varepsilon^0 &= \varepsilon_0, \sigma^0 = \sigma_0 \end{aligned} \right\} \Delta\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i + \Delta\varepsilon$$

On obtient finalement le schéma itératif suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{i+1} &= \sigma_i + \Delta\varepsilon \left( E + \frac{\beta(\varepsilon_i, \sigma_i)}{\dot{\varepsilon}_{cste}} \right) \\ \varepsilon^0 &= \varepsilon_0, \sigma^0 = \sigma_0 \end{aligned} \right\} \Delta\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i + \Delta\varepsilon$$

et

La mesure de l'erreur numérique dans le cas de sollicitations uni-axiales est définie par :

$$e = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\sigma_{ref} - \sigma_{alg}^i|}{\sigma_{ref}}$$

Où  $\sigma_{ref}$  est la contrainte de référence obtenue à partir des essais expérimentaux,  $\sigma_{alg}^i$  est la contrainte solution obtenue à partir de l'algorithme d'intégration. L'erreur se calcule sur l'ensemble des incréments  $i$  du chargement. Ce qui veut dire que l'erreur est cumulée sur l'ensemble de tout le chargement.

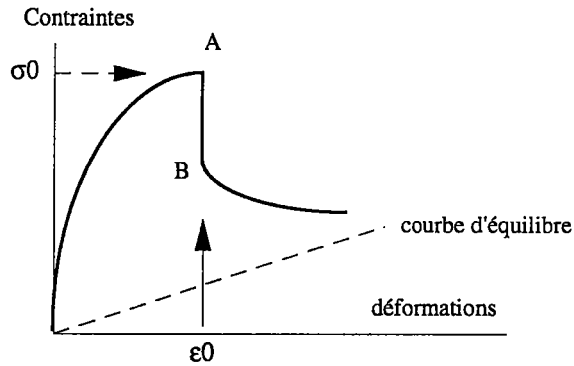
## Annexe 2.

Dans cette annexe, nous allons établir certaines relations entre les valeur de "n" et le temps de relaxation du matériau, dans le cas d'une fonction semi linéaire en vitesse du type :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - k \cdot \text{sgn}(\sigma - f(\varepsilon)) |(\sigma - f(\varepsilon))|^n, \quad (1)$$

Dans un essai de relaxation, on porte le matériau à un état de contrainte déformation  $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ , qu'on laisse relaxer. La relaxation est donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0; \sigma(0) = \sigma_0 \\ \dot{\sigma} = -k(\sigma - f(\varepsilon))^n \end{cases}$$



Représentation schématique du phénomène de la relaxation

En faisant le changement de variables suivant :  $\tau = \sigma - f(\varepsilon^0)$ , on obtient le système d'équations différentielles équivalent suivant :

$$\dot{\tau} = -\tau^n \quad (2)$$

La résolution de (2) ouvre un sujet de discussion suivant les valeurs possibles que peut prendre n.

1<sup>er</sup> cas: n=1

(2) permet d'écrire :

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = -k \int dt$$

d'où

$$t = \frac{1}{k} [C - \ln(\tau)]$$

donc

$$t = \frac{1}{k} \left[ \ln \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right) \right]$$

avec  $t$  le temps,  $\tau = \sigma - f(\varepsilon_0)$  et  $\tau_0 = \sigma_0 - f(\varepsilon_0)$ .

Nous pouvons remarquer par un passage au calcul de limite, ceci

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left[ \ln \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right) \right] = +\infty$$

Donc, pour la valeur de  $n=1$ , la courbe de relaxation atteint la valeur  $f(\varepsilon_0)$  (contrainte correspondante à la déformation  $\varepsilon_0$  sur la courbe quasi statique) dans un temps infini. En d'autres termes, elle n'atteint jamais la courbe d'équilibre, mais y tend asymptotiquement.

2 cas :  $n \neq 1$ .

Dans ce cas précis, l'intégration de (2) se fait de la manière suivante :

$$\int \tau^{-n} dt = -k \int dt$$

et donc

$$t = \frac{1}{k(1-n)} \left[ \tau_0^{1-n} - \tau^{1-n} \right]$$

Le calcul de limite fait apparaître deux cas distincts, le premier cas pour des valeurs de  $n$  tels que  $0 < n < 1$  et deuxième cas pour  $n > 1$ .

Pour  $n > 1$ , nous avons :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{k(1-n)} \left[ \tau_0^{1-n} - \tau^{1-n} \right] = +\infty$$

Pour  $0 < n < 1$ , nous avons :

et

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{k(1-n)} \left[ \tau_0^{1-n} - \tau^{1-n} \right] = \frac{1}{k(1-n)} \left[ \tau_0^{1-n} \right]$$

La relaxation se fait dans un temps fini, donné par :

$$t = \frac{1}{k(1-n)} \left[ (\sigma_0 - f(\varepsilon_0))^{1-n} \right]$$

*nous pouvons conclure, que la relaxation se fait dans un temps fini seulement pour des valeurs de  $n$  comprises entre 0 et 1.*