



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b113414

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

par

Gaël ANGOT

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19970405
Cote	S/M3 97/19
Loc	Magasin

Mention : Sciences de l'Ingénieur n° 7642  
Intitulé : Génie Mécanique

Étude de l'influence de l'entaille sur les champs  
de déformations dans le domaine plastique  
pour des aciers ductiles et peu ductiles

soutenue le 11 Juillet 1997, devant la Commission d'Examen :

PLUVINAGE, G. - Université de Metz  
MESMAQUE, G. - I.U.T. de Lille  
ROBIN, C. - École des Mines de Douai  
AZARI, Z. - Institut Supérieure Et Techniques de Saint-Quentin  
GILGERT, J. - E.N.I. de Metz  
NAIT-ABDELAZIZ, M. - I.U.T. de Lille

: Président  
: Rapporteur  
: Rapporteur  
: Examineur  
: Examineur  
: Examineur

# **SOMMAIRE**

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur **Guy PLUVINAGE** pour m'avoir accueilli dans son Laboratoire et pour son aide et soutien moral et également scientifique.

J'exprime ma profonde gratitude au Professeur **Joseph PASTOR**, directeur du Laboratoire Matériaux Composites de l'ESIGEC à Chambéry pour son aide et sa collaboration sur les problèmes liés à la modélisation.

Je remercie chaleureusement le Professeur **Gérard MESMAQUE** de l'I.U.T. de Lille et le Professeur **Claude ROBIN** de l'École des Mines de Douai d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Que les membres du jury, Monsieur **Zitoune AZARI**, de l'Institut Supérieure Et Techniques de Saint-Quentin, Monsieur **Moussa NAIT-ABDELAZIZ** de l'IUT de Lille et Monsieur **Joseph GILGERT** de l'École Nationale d'Ingénieurs de Metz, qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail, soient ici remerciés.

Merci aussi aux membres du Laboratoire qui ont su entretenir une communication sans laquelle rien n'est possible.

Mes remerciements vont aussi tout particulièrement à l'ensemble du personnel technique et administratif du Laboratoire de Fiabilité Mécanique et de l'Université de Metz. Leur contribution a été essentielle dans la réalisation de ce travail. Qu'il me soit donné ici de leur exprimer ma reconnaissance pour leur sollicitude et leur efficacité.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>9</b>
<b>1 Distribution des contraintes et des déformation en fond d'entaille</b> .....	<b>11</b>
Introduction .....	11
1.1 Notion de concentration de contrainte.....	11
1.1.1 Définition du facteur de concentration de contrainte .....	13
1.2 Domaine élastique .....	14
1.2.1 Distribution des contraintes élastiques en fond d'entaille.....	14
1.2.1.1 Formule de THIMOSHENKO.....	15
1.2.1.2 Formule utilisant la solution de NEUBER .....	16
1.2.1.3 Expression de CHEN et PAN .....	17
1.2.1.4 Expression de CREAGER-PARIS .....	17
1.2.1.5 Formule de TADA.....	18
1.2.1.6 Formules d'USAMI.....	18
1.2.1.7 Solution de GLINKA et NEWPORT .....	20
1.2.1.7.1 Entailles émoussées.....	20
1.2.1.7.1.1 Cas d'une entaille circulaire .....	21
1.2.1.7.1.2 Cas d'une entaille quelconque .....	21
1.2.1.7.2 Entailles aiguës et profondes .....	22
1.2.1.7.3 Cas de la flexion ou de la flexion plus traction .....	24
1.2.1.7.4 Conclusion sur la méthode proposée par GLINKA et NEWPORT ...	24
1.2.1.8 Formule de KUJAWSKI.....	25
1.2.1.9 Méthode de BHATTACHARYA .....	26
1.2.1.10 Conclusions.....	26
1.2.2 Distribution des déformations en élasticité et en fond d'entaille .....	27
1.3 Domaine élastoplastique.....	27
1.3.1 Distribution des contraintes en élastoplasticité.....	28
1.3.1.1 Formule de HILL.....	28
1.3.1.2 Formule de TETELMAN et McEVILY .....	29
1.3.1.3 Méthode de XU.....	30
1.3.1.4 Méthode de TETELMAN.....	32
1.3.1.5 Méthode de BHATTACHARYA et KUMAR .....	34
1.3.1.5.1 Élastoplasticité.....	34
1.3.1.5.2 Plasticité généralisée .....	35
1.3.2 Relations entre $k_t$ , $k_\sigma$ et $k_\epsilon$ .....	36
1.3.2.1 Équation de NEUBER .....	36
1.3.2.2 Méthode de STOWELL.....	38
1.3.2.3 Méthode de TOPPER .....	39
1.3.2.4 Formule de KOE.....	39
1.3.2.5 Formule de MAKHUTOV .....	39
1.3.2.6 Méthode de MOLSKI.....	40

1.3.2.7	Méthode de GLINKA .....	41
1.3.2.7.1	Conditions de contraintes planes .....	42
1.3.2.7.2	Conditions de déformations planes .....	42
1.3.2.7.3	Conclusion sur la méthode de GLINKA .....	43
1.3.2.8	Méthode de MOROZOV et PLUVINAGE .....	43
1.3.2.9	Comparaison des différentes formules .....	44
1.3.3	Distribution des déformations.....	47
1.3.3.1	Formule de BATES et SANTHANAM .....	47
1.3.3.2	Formule d'USAMI .....	47
1.3.3.3	Formule de XU .....	47
1.4	Conclusion.....	48
<b>2</b>	<b>Critères de rupture en terme de déformations critiques .....</b>	<b>49</b>
2.1	Introduction .....	49
2.2	Ténacité apparente.....	49
2.3	Critères de rupture en terme de déformation globale critique.....	50
2.3.1	Introduction.....	50
2.3.2	Paramètres affectant les déformations locales et globales.....	50
2.3.3	Détermination de la taille de défaut critique à partir de la déformation globale ... critique.....	51
2.3.3.1	Critère de SOETE .....	51
2.3.3.1.1	Détermination de la taille de défaut critique .....	53
2.3.3.2	Critère de RANDALL et MERKLE .....	54
2.4	Critères locaux.....	54
2.4.1	Introduction.....	54
2.4.2	Critère de contrainte locale critique de RITCHIE, KNOTT et RICE.....	55
2.4.3	Critère de déformation locale critique .....	56
2.4.3.1	Critère de PANASYUK.....	57
2.4.3.2	Écartement critique de fissure ou C.O.D. (Crack Opening Displacement) .....	58
2.4.3.2.1	Définition de l'écartement critique de fissure.....	58
2.4.3.2.2	Critère de rupture.....	58
2.4.3.2.3	Relation entre $\delta_c$ et les efforts extérieurs $\sigma_g$ .....	59
2.4.3.2.4	Mesure de l'écartement de fissure .....	59
2.4.4	Autres critère de rupture en terme de déformation locale critique .....	60
2.4.4.1	Modèle de KRAFT .....	60
2.4.4.2	Modèle de BARSON et PELLIGRINO.....	61
2.4.4.3	Modèle de RITCHIE, SERVER et WULLAERT .....	61
2.4.4.4	Modèle d'OSBORNE et EMBURY .....	62
2.4.4.5	Modèle de FIRRAO et ROBERTI.....	63
2.5	Avantages et inconvénients des critères de rupture locaux et globaux .....	64



3.6.4.4	Variation de $X_{m,\epsilon}^c$ et de $X_{eff,\epsilon}^c$ en fonction de $\rho$ .....	92
3.6.4.4.1	Variation de la distance effective minimale critique .....	92
3.6.4.4.2	Variation de la distance effective critique .....	93
3.6.4.4.3	Discussion .....	93
3.6.4.5	Comparaison entre les produits $\epsilon_{max}^c(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ , $\epsilon_{eff}^c(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ et $\epsilon_{max}^c \sqrt{\rho}$ en fonction de $\rho$ .....	95
3.6.4.5.1	Comparaison entre $\epsilon_{eff}^c(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ et $\epsilon_{max}^c \sqrt{\rho}$ .....	96
3.6.4.5.2	Discussion .....	98
3.6.4.5.2.1	Comparaison statistique des critères .....	99
3.7	Conclusions sur les travaux réalisés sur les éprouvettes C.T. ....	101
<b>4</b>	<b>Étude sur les éprouvette K.T.</b> .....	<b>103</b>
4.1	Introduction .....	103
4.2	Protocole d'essais .....	103
4.3	Résultats expérimentaux .....	105
4.3.1	Résultats obtenus lors des essais .....	105
4.3.2	Discussion sur les résultats expérimentaux .....	108
4.3.2.1	Variation de la charge critique $P_c$ et de la contrainte nominale critique $\sigma_N^c$ .....	108
4.3.2.2	Variation de la déformation globale critique $\epsilon_g^c$ .....	109
4.4	Calculs réalisés sur les éprouvettes K.T. (ou D.E.N.T.) .....	111
4.4.1	Matériels et paramètres de calcul .....	111
4.4.1.1	Matériels informatiques utilisés .....	111
4.4.1.2	Paramètres de calcul .....	111
4.4.1.2.1	Loi de comportement .....	111
4.4.1.2.2	Éléments .....	112
4.4.1.2.3	Caractérisation de la non linéarité et définition de la configuration de référence .....	112
4.4.2	Modélisation et conditions aux limites de notre problème .....	113
4.4.3	Maillage .....	115
4.5	Analyse des contraintes .....	116
4.5.1	Analyse des contraintes en fond d'entaille itération par itération .....	116
4.5.1.1	Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$ .....	116
4.5.1.2	Discussion .....	120

	Page
4.5.2 Distribution des contraintes pour la dixième itération .....	121
4.5.2.1 Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$ .....	121
4.5.2.2 Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$ .....	122
4.5.2.3 Acuité infinie .....	123
4.5.2.4 Discussion .....	124
4.6 Analyse des déformations .....	125
4.6.1 Analyse des déformations en fond d'entaille : itération par itération .....	125
4.6.2 Distribution des déformations pour la dixième itération .....	126
4.6.3 Discussion .....	127
4.6.3.1 Détermination de la valeur de $X^{C_{\text{eff},\epsilon}}$ et de celle de $\epsilon^{C_{\text{eff}}}$ pour chaque.....	128
acuité .....	128
4.6.3.2 Variation du paramètre $\alpha''$ en fonction de $a$ .....	128
4.6.3.3 Variations de $\epsilon^{C_{\text{max}}}$ et de $\epsilon^{C_{\text{eff}}}$ en fonction de $a$ .....	130
4.6.3.3.1 Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$ .....	130
4.6.3.3.2 Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$ .....	131
4.6.3.3.3 Acuité infinie .....	132
4.6.3.3.4 Discussion sur les valeurs de $\epsilon^{C_{\text{max}}}$ et de $\epsilon^{C_{\text{eff}}}$ .....	133
4.6.3.4 Variation de $X^{C_{\text{eff},\epsilon}}$ et de $X^{C_{m,\epsilon}}$ en fonction de $a$ .....	135
4.6.3.4.1 Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$ .....	135
4.6.3.4.1.1 Variation de la distance effective minimale critique .....	135
4.6.3.4.1.2 Variation de la distance effective critique.....	136
4.6.3.4.2 Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$ .....	137
4.6.3.4.2.1 Variation de la distance effective minimale critique .....	137
4.6.3.4.2.2 Variation de la distance effective critique.....	137
4.6.3.4.3 Acuité infinie .....	138
4.6.3.4.3.1 Variation de la distance effective minimale critique .....	138
4.6.3.4.3.2 Variation de la distance effective critique.....	139
4.6.3.4.4 Discussion sur les valeurs de $X^{C_{m,\epsilon}}$ et de $X^{C_{\text{eff},\epsilon}}$ .....	139
4.6.3.5 Comparaison entre $\epsilon^{C_{\text{eff}}(X^{C_{\text{eff},\epsilon})\alpha''}$ et $\epsilon^{C_{\text{max}}}\sqrt{\rho}$ en fonction de $a$ .....	142
4.6.3.5.1 Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$ .....	142
4.6.3.5.2 Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$ .....	143
4.6.3.5.3 Acuité infinie .....	144
4.6.3.6 Discussion sur la validité des critères .....	145
4.6.3.6.1 Valeurs statistiques sur les deux critères : $\rho$ constant .....	145
4.6.3.6.2 Valeurs statistiques sur les deux critères : $a$ constant .....	146
4.6.3.6.2.1 Cas des entailles .....	146
4.6.3.6.2.2 Cas des entailles et des fissures.....	147
4.6.3.6.2.3 Conclusion lorsque $a$ reste constant .....	147
4.6.3.6.3 Conclusion sur l'étude statistique .....	148
4.7 Taille de la zone plastique .....	149
4.7.1 $\rho = 1 \text{ mm}$ .....	150
4.7.2 $\rho = 0,5 \text{ mm}$ .....	151
4.7.3 $\rho = 0 \text{ mm}$ .....	151

4.8	Conclusions sur les travaux réalisés sur les éprouvettes K.T. ....	152
5	Conclusion générale .....	154
<b>ANNEXES</b> .....		
Annexe 1	Plan des éprouvettes C.T, plan des éprouvettes K.T. et plan du montage réalisé ..... pour les éprouvette K.T. ....	156
Annexe 2	Distributions des contraintes en fond d'entaille pour des éprouvettes C.T. ....	158
Annexe 3	Distributions des déformations en fond d'entaille pour des éprouvettes C.T. ....	162
Annexe 4	Modélisation d'une éprouvette K.T. en bloquant suivant l'axe des $x$ un noeud de ..... la partie supérieure de l'éprouvette .....	164
Annexe 5	Distributions des contraintes en fond d'entaille pour des éprouvettes K.T. ....	172
Annexe 6	Valeurs numériques de $\epsilon^c_{max}$ , de $\epsilon^c_{eff}$ , de $\alpha''$ , de $X^c_{eff,\epsilon}$ et de $X^c_{m,\epsilon}$ . ....	176
Annexe 7	Équations des droites permettant la détermination analytique de $X^c_{m,\epsilon}$ ..... et de $X^c_{eff,\epsilon}$ .....	178
Annexe 8	Variations graphiques de $\epsilon^c_{max}$ , $X^c_{m,\epsilon}$ et de $\epsilon^c_{eff}$ , $X^c_{eff,\epsilon}$ ..... en fonction de $a$ .....	180
Annexe 9	Valeurs numériques de la ténacité définies à partir de $X^c_{eff,\epsilon}$ et de $X^c_{m,\epsilon}$ .....	182
Annexe 10	Valeurs statistiques .....	183
Annexe 11	Liste des figures .....	185
Annexe 12	Liste des tableaux .....	189
<b>RÉFÉRENCES</b> .....		190

# **INTRODUCTION**

## Introduction

Lorsque l'on souhaite effectuer le dimensionnement d'une structure, on le fait généralement en terme de contrainte admissible. En fonction des exigences des sollicitations, la contrainte ultime est divisée par un facteur de sécurité afin d'obtenir la contrainte à ne pas dépasser dans le matériau.

Dans certains cas beaucoup plus rares, on dimensionne en terme de déplacement (comme le rapport flèche/portée pour le cas des assemblages en bois) ou de déformation (concept de déformation admissible).

Par convention, la déformation admissible vaut 1% et permet la prise en compte des déplacements compatibles avec le fonctionnement éventuel de la structure comme les jeux. Le fait de prendre la déformation comme paramètre gouvernant la rupture (cela nécessite l'étude du champ local des déformations en fond d'entaille), permet de mieux caractériser le comportement de la structure dans le cas d'un comportement élastoplastique et de tenir compte de la capacité d'écroutissage du matériau.

Lorsque l'on effectue des calculs de structure, on souhaite pouvoir prévenir les déformations importantes que l'on risque de rencontrer en fonction du chargement appliqué. Ces calculs sont le plus souvent fondés sur la théorie de l'élasticité et de la résistance des matériaux.

Mais, bien qu'un calcul élastique donne de très bons résultats pour des structures faiblement sollicitées qui subissent de très faibles (voir aucune) déformations permanentes, la présence d'entailles ou d'angles vifs engendrera des concentrations de contraintes qui pourront provoquer une rupture prématurée (rupture survenant lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la limite élastique) par la création d'une zone de plasticité au voisinage des discontinuités géométriques.

La présence de ces défauts peut se traiter de plusieurs façons :

- si les défauts sont relativement petits et assimilables à des fissures, la contrainte locale joue un rôle essentiel dans le processus de rupture.

- si ces fissures possèdent une certaine taille. La plasticité est limitée et confinée ; on utilise la mécanique linéaire de la rupture (MLR) qui dit  $\sigma_g \sqrt{a} = \text{constante}$ .

- lorsque la plasticité est plus étendue, la mécanique linéaire de la rupture (MLR) ne s'applique plus. On a alors la possibilité d'utiliser la mécanique élastoplastique de la rupture (MEPR) pour laquelle les critères en terme de déformation sont rares.

Nous pouvons citer :

- l'écartement de fissure ou C.O.D. (Crack Opening Displacement) [1],
- $a_c$  (taille du défaut critique) de SOETE [2],
- le critère de NEWMANN [3]

Dans ce travail, nous considérons les défauts non comme des fissures mais comme des entailles. Nous nous proposons donc de définir un nouveau critère de rupture en terme de déformation locale critique en relation avec le champ local de déformation en fond d'entaille.

Pour cela, nous posons le problème de la manière suivante : en fonction de la géométrie de l'entaille, définie par  $\rho$  le rayon d'entaille,  $a$  sa profondeur et  $\psi$  l'angle de l'entaille, on examine la distribution élastoplastique des déformations en fond d'entaille. À partir de cette distribution, nous définissons le concept du facteur d'intensité de déformation d'entaille (défini par  $K_{\rho, \epsilon}$ ), dont la valeur critique sera utilisée comme critère de rupture.

Notre mémoire sera composé d'une première partie bibliographique et d'une seconde qui réunira l'étude expérimentale, la proposition du critère de rupture et sa discussion.

L'étude bibliographique porte, successivement, sur les distributions des contraintes et déformations en fond d'entaille en élasticité et en élastoplasticité (chapitre 1), puis sur les critères de rupture en terme de contraintes et de déformations, en insistant sur les critères locaux en déformations critiques (chapitre 2).

La partie expérimentale comporte deux parties. Dans le troisième chapitre, nous présentons la méthode expérimentale utilisée lors des essais réalisés sur des éprouvettes C.T. (dans un acier peu ductile), les résultats obtenus et la mise en place de notre critère.

Le quatrième chapitre comporte le protocole d'essai réalisé pour les manipulations effectuées sur des éprouvettes K.T. (tirées d'un acier très ductile), les résultats obtenus et une discussion sur les variations de notre critère et de celui de RANDALL et MERKLE.

Le cinquième et dernier chapitre résume, par une conclusion générale, les résultats obtenus par la présente étude.

# **PREMIÈRE PARTIE**

## **ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

# 1 Distribution des contraintes et des déformations en fond d'entaille

## Introduction

La définition d'un critère de rupture en terme de déformation globale critique nécessite la connaissance du champ local de déformation en fond d'entaille.

En élasticité, la connaissance des distributions des contraintes en fond d'entaille permet de connaître avec précision celui des déformations. En effet, la contrainte étant liée à la déformation par la loi de HOOKE, il suffit de diviser les contraintes obtenues par le module d'YOUNG pour connaître les distributions des déformations élastiques.

En élastoplasticité, une hypothèse sur la loi de comportement est nécessaire.

Dans ce chapitre, nous donnerons des notions de concentration de contrainte en définissant le facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$  et élastoplastique  $k_p$ .

Puis, nous nous intéresserons aux distributions des contraintes et des déformations dans le domaine élastique avant de passer au domaine élastoplastique.

### 1.1) Notion de concentration de contrainte

Les discontinuités, les entailles et particulièrement les fissures conduisent à l'apparition de concentration de contraintes ; c'est à dire à la création de zones dans lesquelles les contraintes sont nettement supérieures à la contrainte nominale ou à la contrainte globale résultantes des efforts appliqués. Ces concentrations de contrainte, associées aux discontinuités géométriques, réduisent les résistances statiques et cycliques des structures ; il est donc important de connaître les différents niveaux de contraintes associés aux différents types de discontinuités géométriques.

On peut aisément expliquer la présence de ces zones de concentration de contraintes à l'aide d'un exemple simple.

Si l'on considère une pièce non entaillée soumise à un effort de traction. Les lignes de chargement, imaginaires, symbolisent comment une unité de chargement est transférée d'un point à un autre de la structure (figure 2.1a). Pour un chargement uniforme, ces lignes de chargement sont parallèles et également espacées les unes des autres. Si, maintenant, cette pièce comporte une entaille, les lignes de chargement doivent alors contourner l'obstacle. En fond d'entaille (figure 2.1b) les lignes sont plus rapprochées dans une surface moindre, ce qui conduit à une augmentation de la contrainte dans cette zone.

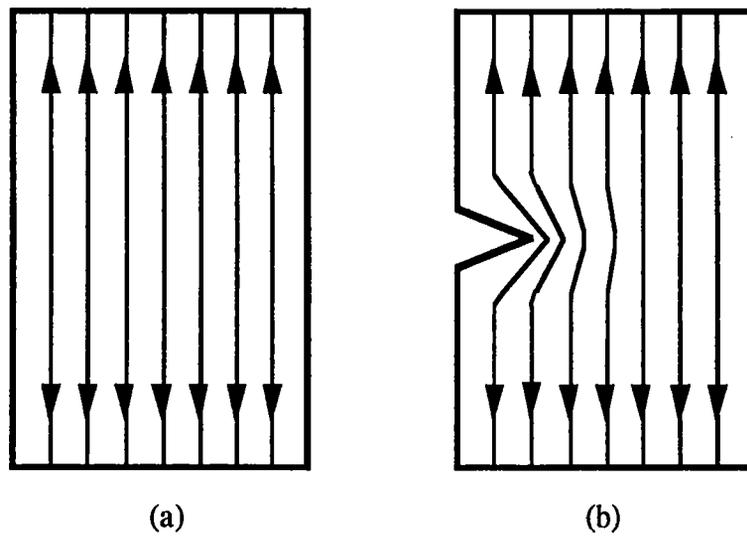


Figure 1.1 : Symbolisation des lignes de chargement

Nous voyons bien que chaque discontinuité entraîne une perturbation dans le chemin de chargement, déviant, ainsi, les lignes de charge et entraînant une concentration de contraintes. Pour une même profondeur d'entaille, si celle-ci est émoussée, sa dimension dans la direction de chargement est plus importante et entraîne alors une déviation plus rapide des lignes de charge ; la redistribution des contraintes peut donc se faire sur une distance plus importante. Dès lors, la zone de concentration de contrainte est plus étendue que dans le cas d'une entaille aiguë, et les contraintes sont moindres.

D'une façon générale, pour deux entailles de même profondeur, les entailles émoussées produisent des contraintes locales plus faibles que les entailles aiguës.

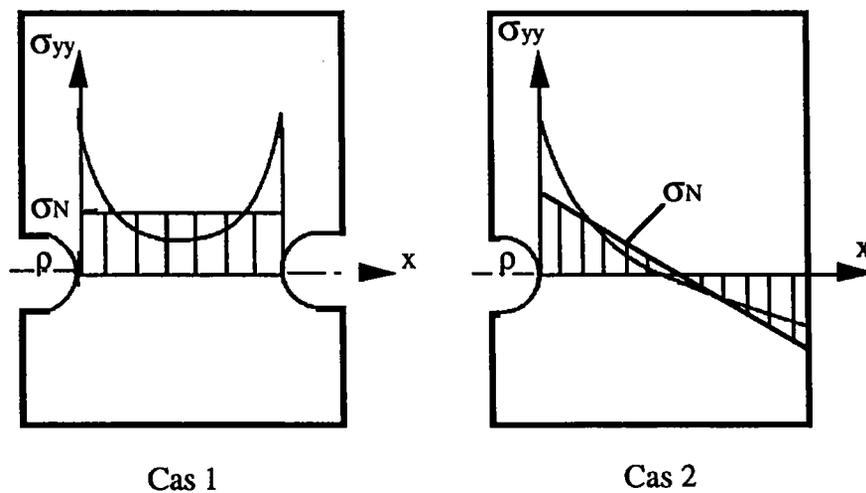


Figure 1.2 : Concentration de contraintes pour des pièces entaillées : en traction (cas 1) et en flexion (cas 2)

Le degré de concentration de contrainte est quantifié par le facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$ , déterminé à partir de la théorie linéaire élastique. Il est donc défini comme le rapport de la contrainte maximale élastique sur la contrainte nominale :  $\sigma_{\max}/\sigma_N$ . Il est important de noter [4] que le facteur de concentration de contrainte permet seulement de connaître la valeur de la *contrainte maximale élastique* en fond d'entaille sans donner de renseignement sur les autres composantes de la contrainte, ni sur la distribution de ces contraintes dans la région proche du fond d'entaille.

Dans une approche locale des problèmes de rupture, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte élastique correspondant à la géométrie de la pièce entaillée étudiée ; dans une approche de type mécanique de rupture, d'autres paramètres, dont le facteur d'intensité de contrainte, sont nécessaires.

En observant la distribution des contraintes en fond d'entaille, on remarque que les champs des contraintes élastiques, pour une grande variété d'entaille, sont similaires et dépendent principalement de la géométrie de l'entaille, notamment du rayon d'entaille  $\rho$  et du facteur de concentration de contrainte  $k_t$ . Ainsi, en connaissant les valeurs de  $k_t$  et  $\rho$ , il est possible de proposer des relations empiriques pour décrire ces distributions.

### 1.1.1) Définition du facteur de concentration de contrainte élastique

Dans le domaine élastique, les contraintes et déformations locales peuvent être obtenues à partir du facteur de concentration de contrainte  $k_t$  défini par :

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_N} \quad (1.1)$$

$\sigma_{\max}$  et  $\epsilon_{\max}$  sont les contraintes et déformations locales,

$\sigma_N$  et  $\epsilon_N$  sont les contraintes et déformations nominales.

En statique, PETERSON [5] définit le facteur de concentration de contrainte de deux façons (figure 1.3) :

- La première est la même que celle proposée dans la formule 1.1.
- La seconde est le rapport entre la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$  et la contrainte globale  $\sigma_g$  (contrainte prise loin de la zone perturbée). Cette méthode peut s'appliquer dans le cas d'une pièce possédant une entaille peu profonde soumise à de la traction.

$$k_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_g} \quad (1.2)$$

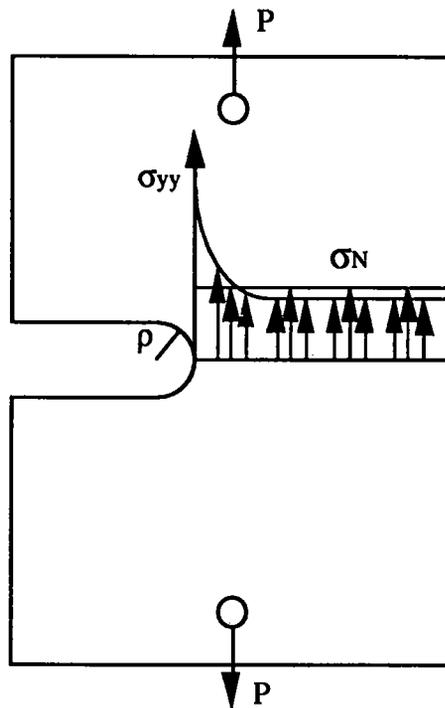


Figure 1.3 : Concentration de contraintes dues à l'effet d'entaille

## 1.2) Domaine élastique

### 1.2.1) Distribution des contraintes élastiques en fond d'entaille

Plusieurs auteurs ont proposé différentes formules pour décrire le plus fidèlement possible la répartition des contraintes élastiques en fond d'entaille. Ces formules, présentées ci dessous, font intervenir les paramètres suivants :

- $\sigma_{yy}$  est la contrainte en fond d'entaille,
- $k_t$  est le facteur de concentration de contrainte,
- $\sigma_N$  est la contrainte nominale,
- $x$  est la distance à partir du fond de l'entaille,
- $\rho$  est la valeur du rayon d'entaille,
- $K_I$  = facteur d'intensité de contrainte en mode I.

Pour illustrer les différentes méthodes proposées et les comparer avec des résultats obtenus par calcul, nous avons effectué plusieurs calculs par éléments finis sur des géométries d'entaille donnant diverses valeurs de  $k_t$ . Le matériau utilisé est un acier ; la contrainte nominale appliquée sur le ligament et les caractéristiques du matériau ont les valeurs suivantes :

$$\nu = 0,3$$

$G = 84000 \text{ MPa}$ ,  
 $E = 218000 \text{ MPa}$ ,  
 $\sigma_N = 421 \text{ MPa}$ ,  
 $\sigma_g = 433 \text{ MPa}$ ,  
 $W = 29 \text{ mm}$  = largeur totale de l'éprouvette,  
 $b = 24 \text{ mm}$  = longueur du ligament en fond d'entaille,  
 $e = 5 \text{ mm}$  = épaisseur,  
 $\rho = 1 \text{ mm}$  (sauf précision contraire),  
 $k_t = 5,72$  (sauf précision contraire).

Pour l'étude de l'entaille circulaire, nous utilisons le même matériau mais les données sont les suivantes :

$\sigma_N = 386 \text{ MPa}$ ,  
 $\sigma_g = 346 \text{ MPa}$ ,  
 $\rho = 3 \text{ mm}$ ,  
 $k_t = 3$ .  
 $W = 29 \text{ mm}$  = largeur totale de l'éprouvette,  
 $b = 26 \text{ mm}$  = longueur du ligament en fond d'entaille,  
 $e = 5 \text{ mm}$  = épaisseur.

Nous examinerons donc les expressions proposées par THIMOSHENKO (1951), NEUBER (1961), CHEN et PAN (1978), CREAGER et PARIS (1967), TADA (1973), USAMI (1985), GLINKA et NEWPORT (1987), KUJAWSKI (1991) et BHATTACHARYA (1995).

### 1.2.1.1) Formule de THIMOSHENKO

THIMOSHENKO [6] a proposé une formule permettant de connaître la distribution de la contrainte longitudinale  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille (entaille circulaire,  $k_t = 3$ ) dans une plaque infinie soumise à de la traction :

$$\sigma_{yy} = \sigma_N \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{x}{2} \right)^{-4} \right] \quad (1.3)$$

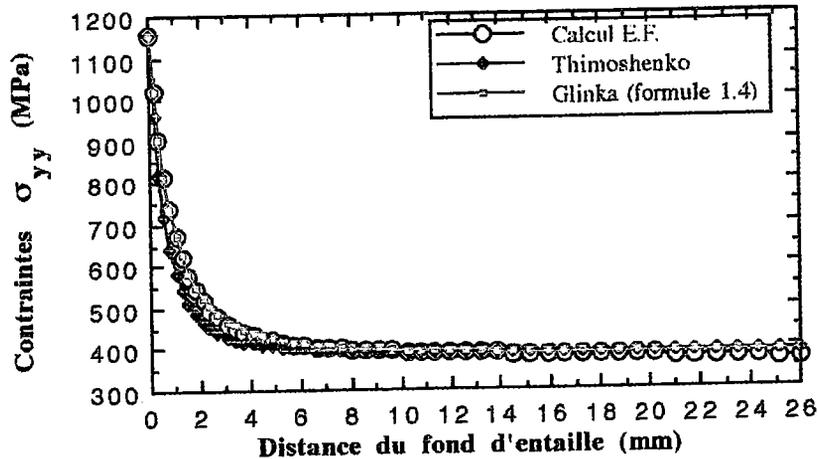


Figure 1.4: Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon THIMOSHENKO.

Sur la figure 1.4, nous voyons que la formule proposée par l'auteur suit assez fidèlement les résultats obtenus par le calcul. Cependant, dans deux zones, les résultats divergent légèrement : pour  $x < 2\rho$ , la solution de THIMOSHENKO sous estime un peu la contrainte  $\sigma_{yy}$  (de l'ordre de 8%, l'écart maximal étant de 14% pour  $x = \rho$ ) ; à partir de  $x > 5\rho$ , elle la surestime très légèrement (de l'ordre de 2%, l'écart maximal étant de 4% pour  $x = b$ ).

Nous avons également représenté la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  obtenues à partir de la formule de GLINKA-NEWPORT (formule 1.4). Cette dernière est plus précise (elle est détaillée dans le paragraphe 1.2.1.7).

$$\sigma_{yy} = \sigma_N \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-4} \right] \quad (1.4)$$

### 1.2.1.2) Formule utilisant la solution de NEUBER

La distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille est, selon NEUBER [7] donnée par :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \quad (1.5)$$

### 1.2.1.3) Expression de CHEN et PAN

Ces deux auteurs ont utilisé la solution de NEUBER en la modifiant :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 8x}} \quad (1.6)$$

On peut noter que, pour une entaille très aiguë ( $k_t = 41$ ), cette formulation sous-estime  $\sigma_{yy}$  de 5 à 15% ; l'erreur maximale intervenant près du fond d'entaille.

Sur le graphique 1.2, nous avons tracé les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  obtenues à l'aide des formules de NEUBER, de CHEN et PAN [8] et par éléments finis. L'expression tirée de la solution de NEUBER donne des résultats excellents pour  $x \leq 0,3$  mm et  $x \geq 5$  mm. Entre ces deux valeurs, elle surestime  $\sigma_{yy}$ .

Au contraire, la formule donnée par CHEN et PAN suit exactement les valeurs obtenues par le calcul tant que  $x \leq 5$  mm. Au delà de cette valeur, elle a tendance à sous-estimer légèrement  $\sigma_{yy}$ .

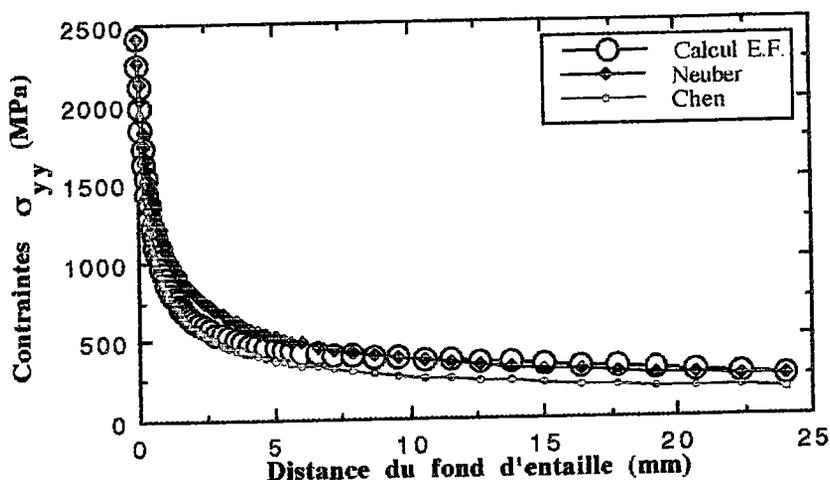


Figure 1.5 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon CHEN-PAN et NEUBER.

### 1.2.1.4) Expressions de CREAGER-PARIS

Elle est basée sur un système de coordonnées polaires dont l'origine de l'axe des "x" se situe à une distance  $\rho/2$  en avant du fond d'entaille.

CREAGER et PARIS [9] supposent en fait que la distribution des contraintes en fond d'entaille est la même que celle d'une fissure de même dimension mais dont l'origine est décalée de  $\rho/2$ .

$$\sigma_{xx} = \frac{-K_I \rho}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I \rho}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right]$$

$\sigma_{zz} = 0$  en contraintes planes  
 $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  en déformations planes

### 1.2.1.5) Formule de TADA

La formule de CREAGER-PARIS a été modifiée par TADA [10] en ajoutant à la valeur de la contrainte  $\sigma_{yy}$  la contrainte nominale si l'entaille est sollicitée par une contrainte nominale uni axiale.

$$\sigma_{yy} = \sigma_N + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{\rho}{2r} \right) \cos \left( \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left[ 1 + \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{3\theta}{2} \right) \right]$$

Cette formule sous-estime  $\sigma_{yy}$  pour des entailles émoussées, mais donne des résultats corrects pour des entailles aiguës.

### 1.2.1.6) Formules d'USAMI

USAMI [11] a généralisé l'équation de THIMOSHENKO et propose les formules suivantes pour avoir les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille :

$$\sigma_{xx} = \frac{k_t \sigma_N}{2} \left[ \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-2} - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-4} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{k_t \sigma_N}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-4} \right]$$

Sur la figure 1.6, nous n'avons représenté la distribution de  $\sigma_{yy}$  que dans la zone proche du fond d'entaille pour étudier le domaine de validité de la formule proposée. Nous voyons que la formule (1.9) surestime les contraintes  $\sigma_{yy}$  dès que  $x > \rho$ .

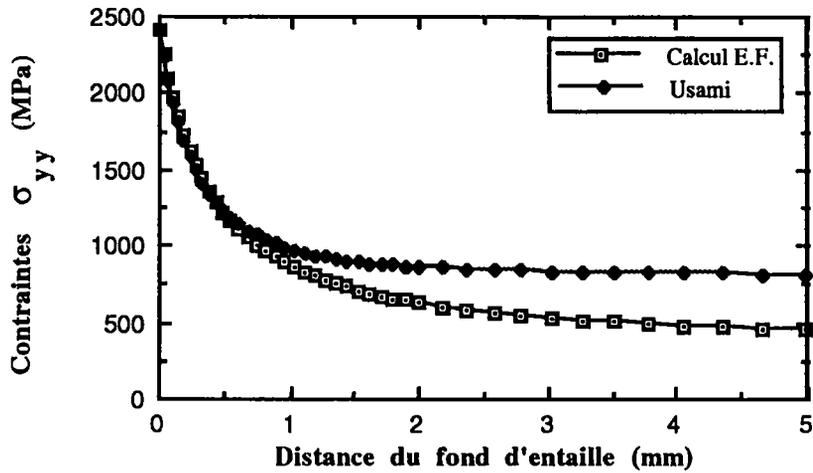


Figure 1.6 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon USAMI.

De part sa nature, la formule proposée par USAMI surestime rapidement les contraintes. En effet, lorsque  $x$  augmente,  $1 + x/\rho$  augmente également (d'autant plus vite que  $\rho$  tend vers zéro). Dès lors,  $(1 + x/\rho)^{-2}$  et  $(1 + x/\rho)^{-4}$  tendent respectivement vers 1.

On a donc :

$$\sigma_{yy} = \frac{k_t \sigma_N}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-4} \right] \approx \frac{k_t \sigma_N}{3} = \frac{\sigma_{\max}}{3} \quad (1.10)$$

Dés que l'on s'éloigne du fond d'entaille, la formule d'USAMI donne des valeurs de  $\sigma_{yy}$  qui tendent vers  $\sigma_{\max}/3$  ce qui n'est vrai que dans un cas particulier. À l'origine, la formule de THIMOSHENKO s'applique pour des trous circulaires avec  $k_t = 3$ . Le rapport  $\sigma_{\max}/3$  est égal, dans ce cas là, à la valeur de la contrainte nominale.

D'une façon plus générale, nous pouvons dire que :

- ◊ Si  $k_t < 3$ , cette formule sous-estimera la contraintes élastiques  $\sigma_{yy}$  dès que  $x > \rho$ .
- ◊ Si  $k_t > 3$ , cette formule surestimera la contraintes élastiques  $\sigma_{yy}$  dès que  $x > \rho$ .

GLINKA et NEWPORT [4], estiment également que les équations proposées par l'auteur ne donnent de bons résultats que dans le cas d'entailles circulaires, semi-circulaires ou elliptiques émoussées dans des plaques larges ( $b/\rho$  tend vers l'infini). Ils pensent donc que l'équation donnant  $\sigma_{xx}$  se limite uniquement aux entailles émoussées et pour  $k_t \leq 4,5$  et  $b \geq 3\rho$ . De même,  $\sigma_{yy}$  est surestimée pour  $x > \rho$ . Elle se limite donc au cas où  $\sigma_g \approx \sigma_N$  ; c'est à dire pour  $b \approx W$ .

### 1.2.1.7) Solutions de GLINKA et NEWPORT

Ces auteurs proposent une formulation variable selon la valeur de  $k_t$ . Pour les entailles aiguës, ils proposent d'utiliser l'expression de CREAGER-PARIS et pour les entailles émoussées, de prendre la moyenne entre la solution de CREAGER-PARIS et celle d'USAMI.

Pour  $k_t \leq 4,5$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_N k_t \left[ 0,278 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0,5} - 0,262 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} + 0,093 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{2,5} - 0,0116 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{3,5} \right] \\ \sigma_{yy} &= \sigma_N k_t \left[ 1 - 2,33 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 2,59 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} - 0,907 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 + 0,037 \left( \frac{x}{\rho} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Pour  $k_t > 4,5$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_N k_t \left[ 0,278 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0,5} - 0,168 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} + 0,041 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{2,5} - 0,0032 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{3,5} \right] \\ \sigma_{yy} &= \sigma_N k_t \left[ 1 - 0,235 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0,5} - 1,33 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 1,28 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} - 0,337 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Cette solution a surtout été vérifiée pour la valeur de  $k_t$  de 3 ; mais elle donne également de bons résultats pour différentes configurations d'entaille.

Pour prendre en compte de façon plus importante la géométrie de l'entaille, ces deux auteurs proposent de nouvelles formulations pour chaque type d'entaille [4]. Celles-ci sont résumées ci-dessous.

#### 1.2.1.7.1) Entailles émoussées

Ils considèrent que les entailles sont émoussées lorsque la valeur de  $k_t$  est inférieure ou égale à 4,5. Sur la figure 1.7, nous représentons les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques données par les deux expressions ci-dessous.

### 1.2.1.7.1.1) Cas d'une entaille circulaire

Pour une entaille circulaire dans une plaque infinie, les composantes des contraintes peuvent être calculées à partir des équations suivantes :

$$\sigma_{xx} = \sigma_N \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-2} - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-4} \right] \quad (1.4)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_N \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-4} \right]$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \text{en contraintes planes}$$

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad \text{en déformations planes}$$

La formule permettant de connaître la valeur de  $\sigma_{yy}$  est la même que celle de THIMOSHENKO, la différence réside dans le fait que GLINKA et NEWPORT divisent  $x$  par  $\rho$  et non par 2. À la vue de la figure 1.4, nous voyons que l'expression de ces auteurs est plus précise que celle de THIMOSHENKO. Ceci confirme l'influence du rayon d'entaille sur la distribution des contraintes en fond d'entaille.

### 1.2.1.7.1.2) Cas d'une entaille quelconque

Les équations qui définissent les contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  sont données par :

$$\sigma_{xx} = \frac{k_t \sigma_N}{2} \left[ \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-2} - \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-4} \right] \quad (1.13)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{k_t \sigma_N}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + 1 \right)^{-4} \right]$$

La figure 1.7 donne les distribution des contraintes élastiques  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille pour les trois formules proposées par GLINKA et NEWPORT dans le cas des entailles émoussées. À la vue de cette figure, nous constatons que l'équation qui suit avec le plus de précision les résultats du calcul est celle de la formule 1.4. L'équation (1.13) sous estime  $\sigma_{yy}$  dès que  $x > \rho$  ; l'écart étant maximale (de 28,5%) pour  $x = b$ .

Si l'on fait un zoom sur la zone proche du fond d'entaille ( $x \leq \rho$ ), on constate que les équations 1.10 et 1.13 surestiment très légèrement  $\sigma_{yy}$  (de l'ordre de 1,8%).

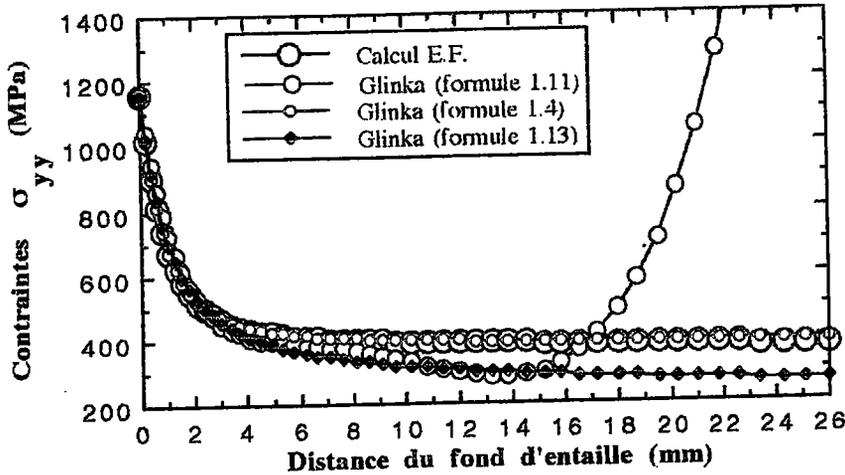


Figure 1.7 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon GLINKA et NEWPORT

### 1.2.1.7.2) Entailles aiguës et profondes

GLINKA et NEWPORT [4] ont modifié les relations de CREAGER-PARIS en remplaçant  $K_I$  par  $k_t$ .

Les équations ainsi obtenues (formules 1.14) donnent de bons résultats sur une distance  $x \leq 3\rho$  avec un ligament  $b \geq 3\rho$ .

$$\sigma_{xx} = \frac{k_t \sigma_N}{2\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (1.14)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{k_t \sigma_N}{2\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\rho} + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]$$

Pour les entailles émoussées et pour  $x > \rho$ , l'équation (1.14) donnant  $\sigma_{xx}$  surestime cette valeur tandis que celle qui donne  $\sigma_{yy}$  la sous-estime. Ces équations sont donc recommandées pour  $k_t > 4,5$  et  $b \geq 3\rho$ .

Les figures 1.5 et 1.6 nous montrent les différences que l'on obtient entre les deux formulations proposées pour les entailles aiguës et les résultats donnés par le calcul par éléments finis.

De la même façon que nous avons vu dans le paragraphe 1.2.1.6 que la formule d'USAMI tend vers  $\sigma_{max}/3$  lorsque  $x$  augmente, la formule (1.12) tend vers  $-\infty$  lorsque

l'on s'éloigne du fond de l'entaille. La figure 1.8 nous montre la validité de l'équation (1.14) lorsque  $x \geq 3\rho$ .

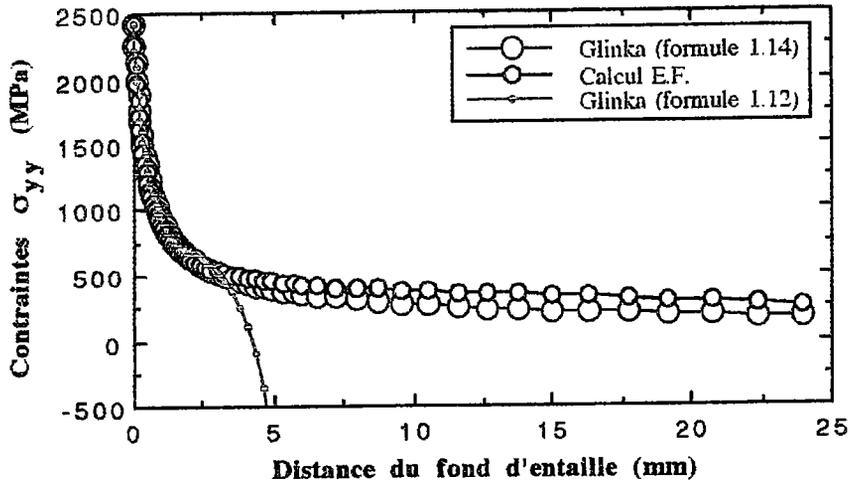


Figure 1.8 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon la formule de GLINKA et NEWPORT.

Sur la figure 1.9, nous avons fait un zoom sur la distribution en fond d'entaille, ce qui nous a permis de voir que, pour  $x \leq \rho$ , l'expression (1.12) était légèrement plus proche des calculs que l'équation (1.14) ; mais les différences sont faibles.

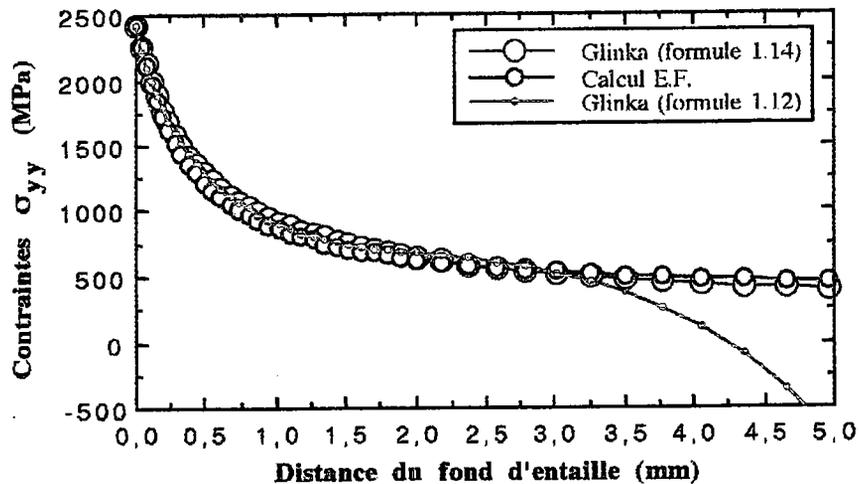


Figure 1.9 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon GLINKA et NEWPORT sur une zone très proche du fond d'entaille.

Nous pouvons donc dire que l'équation (1.14), qui est celle de CREAGER-PARIS modifiée, donne des résultats très satisfaisants sur toute la longueur du ligament en fond d'entaille.

### 1.2.1.7.3) Cas de la flexion ou de la flexion plus traction

Dans ce cas, il faut tenir compte du gradient de concentration de la contrainte nominale. Il convient alors de connaître  $k_t$ ,  $\rho$  et  $\kappa$  (distance du fond de l'entaille à l'axe neutre en flexion (ou flexion et traction) en relation avec la distribution des contraintes nominales) pour avoir la distribution des contraintes.

Les formules présentées ici sont valables pour des entailles émoussées avec  $K_t \leq 4,5$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_N k_t \left[ 0,278 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0,5} - 0,168 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} + 0,041 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{2,5} - 0,0032 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{3,5} \right] \left( 1 + \frac{x}{\kappa} \right) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_N k_t \left[ 1 - 0,235 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{0,5} - 1,33 \left( \frac{x}{\rho} \right) + 1,28 \left( \frac{x}{\rho} \right)^{1,5} - 0,337 \left( \frac{x}{\rho} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{x}{\kappa} \right)\end{aligned}\quad (1.15)$$

Lorsque la contribution de la flexion est faible,  $\kappa$  tend vers l'infini. On retrouve les équations présentées en tête de ce paragraphe.

### 1.2.1.7.4) Conclusion sur la méthode proposée par GLINKA et NEWPORT

GLINKA et NEWPORT ont montré qu'ils obtenaient de meilleurs approximations pour les valeurs de  $\sigma_{yy}$  que pour celles de  $\sigma_{xx}$  à cause de la nature même des expressions. En effet, les équations permettant de calculer  $\sigma_{yy}$  sont réalisées à partir de solutions obtenues pour des entailles aiguës ou émoussées ; celles permettant d'obtenir  $\sigma_{xx}$  résultent de modifications apportées à la solution analytique décrivant la distribution des contraintes à l'extrémité d'un trou circulaire dans une plaque infinie[4].

Ils ont également montré que la distribution de  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille est moins dépendante de la taille du ligament  $b$  que la distribution de  $\sigma_{xx}$ . Celle-ci dépend essentiellement de  $b$  et est moins affectée par la variation de  $k_t$ .

Les différences observées entre leurs approximations et les résultats du calcul aux éléments finis, dans le cas de la contrainte  $\sigma_{yy}$ , sont très faibles. Ces équations permettent de connaître avec précision la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques en fond d'entaille. Mais, dès que l'on s'éloigne du fond d'entaille, elles donnent des valeurs totalement erronées.

### 1.2.1.8) Formule de KUJAWSKI

KUJAWSKI [12] a basé son travail sur la formule de CREAGER-PARIS qu'il a réécrite de la même façon que GLINKA-NEWPORT pour ne plus utiliser  $K_I$  mais  $k_t$ . La formule permet de calculer la contrainte  $\sigma_{yy}$  par :

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[ \left(1 + \frac{2x}{\rho}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{2x}{\rho}\right)^{-3/2} \right] \quad (1.16)$$

Cette formule donne de bons résultats pour les entailles relativement aiguës et lorsque  $x \ll 3\rho$ , mais sous-estime  $\sigma_{yy}$  dès  $x > \rho$  pour  $k_t < 4,5$ . KUJAWSKI a proposé d'améliorer la formule de CREAGER-PARIS en appliquant un facteur correctif  $f$  :

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[ \left(1 + \frac{2x}{\rho}\right)^{-1/2} + \left(1 + \frac{2x}{\rho}\right)^{-3/2} \right] * f \quad (1.17)$$

$$f = 1 \text{ si } \frac{x}{\rho} < 0,2 \quad \text{et} \quad f = 1 + \frac{\text{Tg}\left(\frac{\pi}{2k_t}\right)}{2,8} \left(\frac{x}{\rho} - 0,2\right) \text{ si } \frac{x}{\rho} \geq 0,2$$

Selon KUJAWSKI la formule 1.17 surestime les contraintes lorsqu'on les compare avec des résultats obtenus analytiquement. L'erreur la plus importante est de l'ordre de 20% (dans le cas des éprouvettes ayant une entaille en V symétrique avec  $k_t = 2,33$  pour une distance  $x = 3\rho$ ). Par contre, pour les entailles aiguës, cette erreur est plus faible et ne dépasse pas 15% dans le cas le plus défavorable.

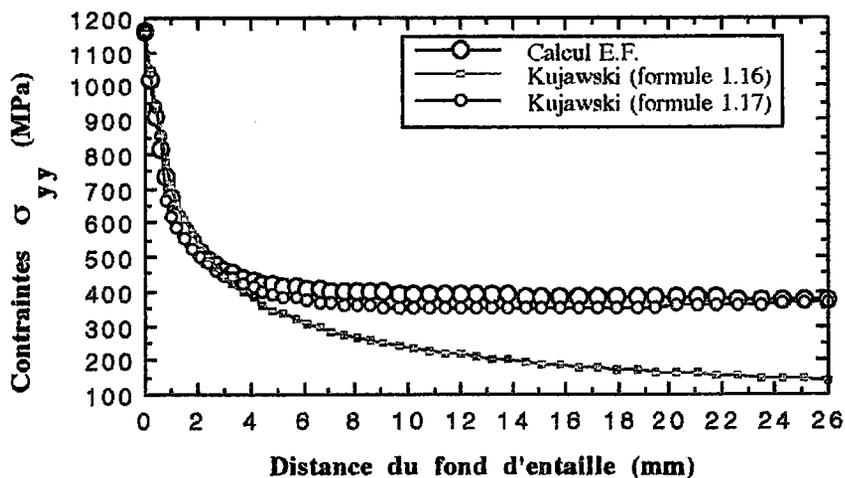


Figure 1.10 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon KUJAWSKI.

La figure 1.10 présente les distributions de contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques obtenues dans le cas d'un calcul effectué sur une plaque entaillée ( $k_t = 3$ ) ainsi que celles obtenues à partir des deux équations données par KUJAWSKI. On constate qu'effectivement, dès que  $x > \rho$ , l'équation basée sur la solution de CREAGER-PARIS sous-estime nettement  $\sigma_{yy}$ . La correction apportée par l'auteur donne une équation qui sous-estime encore les contraintes  $\sigma_{yy}$  mais dont l'allure des distributions est proche de celle obtenue par calcul (l'écart maximale entre les deux est de 10,5% et survient pour  $x = 3\rho$ ).

### 1.2.1.9) Méthode de BHATTACHARYA

BHATTACHARYA et KUMAR [13] ont mis au point une méthode pour approximer la distribution des contraintes en fond d'entaille dans le cas d'éprouvettes entaillées soumises à de la flexion trois points. Pour des éprouvettes lisses, les contraintes sont linéaires et varient de  $(Me)/(2I)$  à  $-(Me)/(2I)$ .

$M$  est le moment de flexion,  $I$  est le moment quadratique et  $e$  est l'épaisseur.

Pour prendre en compte l'effet d'entaille, ils divisent la distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  en introduisant une distribution de contrainte non linéaire qu'ils appellent  $\sigma_I$ . Cette contrainte  $\sigma_I$ , prise de la solution de NEUBER, n'agit qu'au voisinage du fond d'entaille et est une contrainte de traction pure :

$$\sigma_I = \sigma_N k_t \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \quad \text{et} \quad 0 \leq x \leq \frac{\rho}{4}(k_t^2 - 1) \quad (1.18)$$

A cela, on ajoute les deux composantes de la contrainte,  $\sigma_{II}$  en traction et  $\sigma_{III}$  en compression :

$$\begin{aligned} \sigma_{II} &= \frac{M}{I} \left( \frac{e}{2} - x \right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{e}{2} \\ \sigma_{III} &= \frac{M}{I} \left( \frac{b}{2} - x \right) \quad \text{pour} \quad \frac{b}{2} \leq x \leq b \end{aligned} \quad (1.19)$$

### 1.2.1.10) Conclusions

Il apparaît que les distributions des contraintes au voisinage du fond d'entaille sont vraiment similaires les unes aux autres pour une grande variété de géométries et de système de chargement. Ces similitudes permettent de proposer différentes expressions approximatives basées sur les mêmes variables et qui permettent de calculer la distribution des contraintes en fond d'entaille.

Par comparaison avec les résultats de nos calculs, nous préconisons d'utiliser, en fonction du facteur de concentration de contrainte  $k_t$  les formules suivantes :

◊ si  $k_t \geq 15$  : expression de CHEN et PAN.

◊ si  $15 > k_t \geq 2,5$  : expression de GLINKA-NEWPORT ainsi que celle obtenue en modifiant la formule de CREAGER-PARIS.

◊ L'expression de KUJAWSKI est très générale, mais les résultats seront meilleurs pour les entailles aiguës. Cette expression sous estime légèrement la valeur de la contrainte élastique  $\sigma_{yy}$ .

### 1.2.2) Distribution des déformations en élasticité et en fond d'entaille

En élasticité, les distributions des déformation élastiques  $\epsilon_{yy}$  sont reliées aux contraintes par la loi  $\epsilon = \sigma/E$ . On obtiendra donc les déformations en divisant les contraintes obtenues à l'aide d'une des expressions présentées ci dessus par le module d'Young E.

### 1.3) Domaine élastoplastique

En élasticité, on a vu que l'on pouvait lier les contraintes et déformations locales aux contraintes et déformations nominales à l'aide du facteur de concentration de contrainte (ou de déformations) élastique. En fond d'entaille, la plasticité apparaît rapidement, même pour des contraintes nominales inférieures à la limite d'élasticité. Le problème est donc de relier la contrainte nominale élastique aux contraintes et déformations locales élastoplastiques.

Les différents travaux effectués en élastoplasticité ont permis de définir le facteur de concentration de contrainte élastoplastique  $k_\sigma$  et le facteur de concentration de déformation élastoplastique  $k_\epsilon$ .

Les contraintes en fond d'entaille peuvent donc être exprimées de deux façons :

-  $\sigma_{yy} = f(\sigma_{\max}, x, \rho)$ ,

-  $\sigma_{yy} = g(k_\sigma, x, \rho)$ .

Nous verrons donc, dans un premier temps, les méthodes qui proposent les distributions de contraintes élastoplastiques ; puis nous nous pencherons sur celles qui traitent des relations entre  $k_t$ ,  $k_\sigma$  et  $k_\epsilon$ .

### 1.3.1) Distribution des contraintes en élastoplasticité

#### 1.3.1.1) Formule de HILL

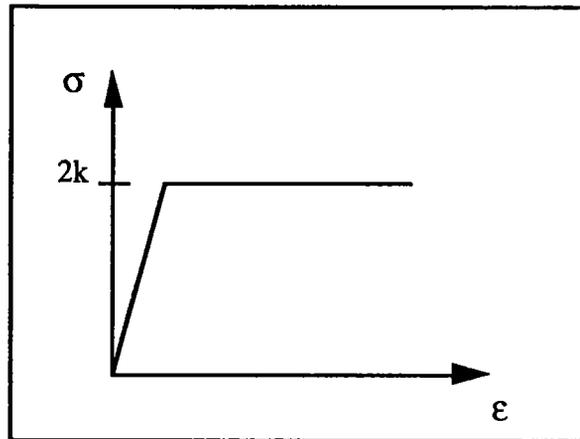


Figure 1.11 : Loi de comportement élastique parfaitement plastique.

HILL [14] donne la valeur de la contrainte principale  $\sigma_1$  en fond d'entaille en fonction de la distance, pour un barreau entaillé soumis à de la flexion pure (en déformations planes) constitué d'un matériau élastique parfaitement plastique :

$$\sigma_1 = 2k \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \quad (1.20)$$

où  $k = \sigma_1 - \sigma_3 =$  limite d'élasticité en cisaillement.

La formule proposée n'est valable qu'en fond d'entaille et dans le domaine plastique. Au delà de la zone plastique, les contraintes décroissent selon une distribution élastique.

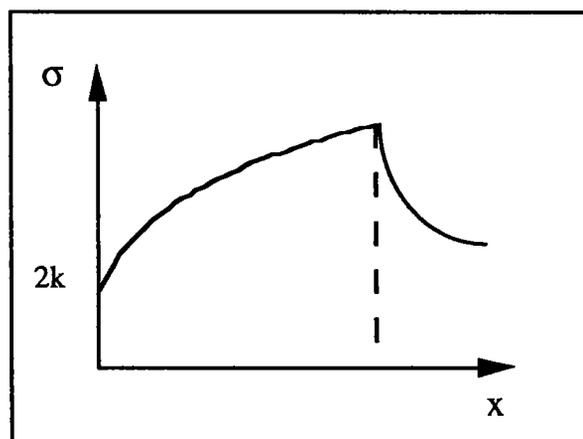


Figure 1.12 : Distribution des contraintes élastoplastiques en fond d'entaille

### 2.3.1.2) Formule de TETELMAN et McEVILY

Ces deux auteurs [15] ont modifié la formule de HILL pour pouvoir l'appliquer à des matériaux écrouissables au sens de VON MISES. Il s'agit toujours d'un barreau entaillé soumis à de la flexion pure en déformations planes.

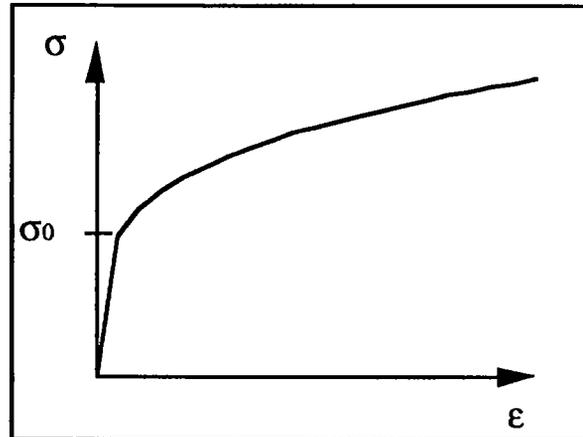


Figure 1.13 : Loi de comportement.

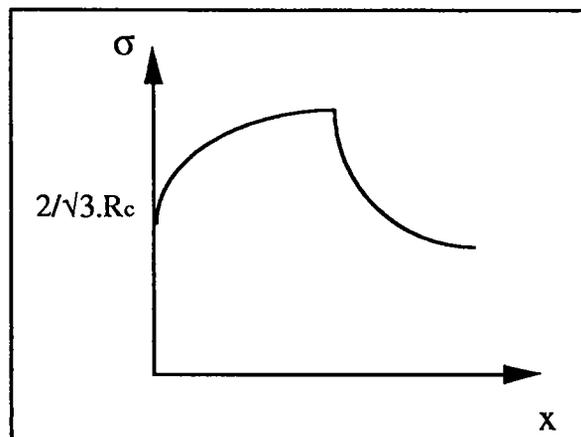


Figure 1.14 : Distribution des contraintes dans la zone plastique en fond d'entaille.

La contrainte principale  $\sigma_1$  vaut dans ce cas :

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} R_c \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \quad (1.21)$$

$R_c$  est la contrainte d'écoulement qui obéit à la loi de comportement de type RAMBERG-OSGOOD.

On a donc :

$$R_c = \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon_p}{\alpha \varepsilon_0} \right)^n \quad (1.22)$$

$\sigma_0$  = contrainte de référence élastique uni axiale,  
 $\varepsilon_0$  = déformation de référence élastique uni axiale,  
 $\varepsilon_p$  = déformation plastique effective,  
 $\alpha$  = constante de la loi de comportement.

### 1.3.1.3) Méthode de XU

XU [16] a proposé une formule permettant d'avoir la distribution de la contrainte principale  $\sigma_1$  dans la zone plastique. Cette formule a été élaborée à partir d'essais réalisés en flexion pure sur des barreaux entaillés en V et en condition de déformations planes.

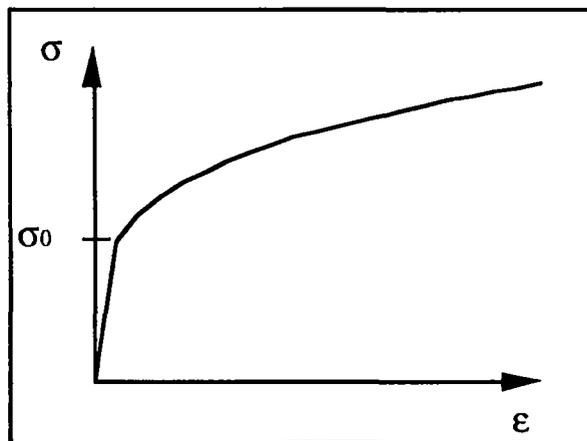


Figure 1.15 : Loi de comportement.

Description de la méthode :

La loi de comportement est de la forme :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.23)$$

où  $\varepsilon_0$  est la déformation de référence élastique,  $\alpha$  est une constante et  $n$  est le coefficient d'érouissage.

En déformations planes, on a :

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 1,5\gamma_{xy}^2} \quad (1.24)$$

$\varepsilon_{\text{eff}}$  est la déformation effective,  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  sont les déformations dans les axes x et y ; et  $\gamma_{xy}$  est la déformation de cisaillement dans les axes x et y.

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1.25)$$

$\sigma_{\text{eff}}$  est la contrainte effective,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont les contraintes principales telles que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . La déformation plastique effective :  $\varepsilon_{\text{peff}}$ , est calculée à partir de :

$$\frac{\varepsilon_{\text{peff}}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_{\text{eff}}}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_0} = \alpha \left( \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_0} \right)^n \quad (1.26)$$

D'où la formule suivante, valable dans toute la zone plastique :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = Q_r \exp\left(-\phi \cdot c \cdot n \cdot \frac{x}{\rho}\right) \left[ 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \right] \quad (1.27)$$

$c$  est une constante de déformation.  $Q_r$  est défini de la façon suivante :

$$Q_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\varepsilon_{\text{pr}}}{\alpha \varepsilon_0} \right)^n \quad \text{et } \phi = 0,85 \text{ (valeur expérimentale)} \quad (1.28)$$

$\varepsilon_{\text{pr}}$  est la déformation effective plastique en fond d'entaille. L'auteur donne sous forme de tableau les valeurs de  $c$  et  $\varepsilon_{\text{pr}}$  pour différentes valeurs du coefficient d'écroutissage.

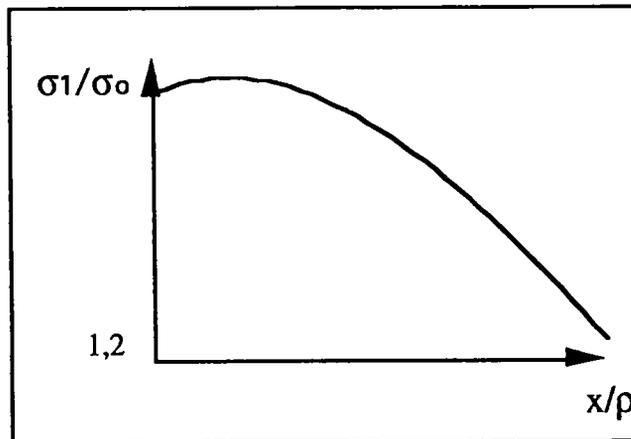


Figure 1.16 : Distribution des contraintes dans la zone plastique en fond d'entaille selon XU.

### 1.3.1.4) Méthode de TETELMAN

TETELMAN a proposé une méthode [17] et [18] pour connaître l'allure des contraintes en fond d'entaille pour des éprouvettes entaillées soumises à de la flexion et dans le cas d'un matériau élastique parfaitement plastique (en déformations planes).

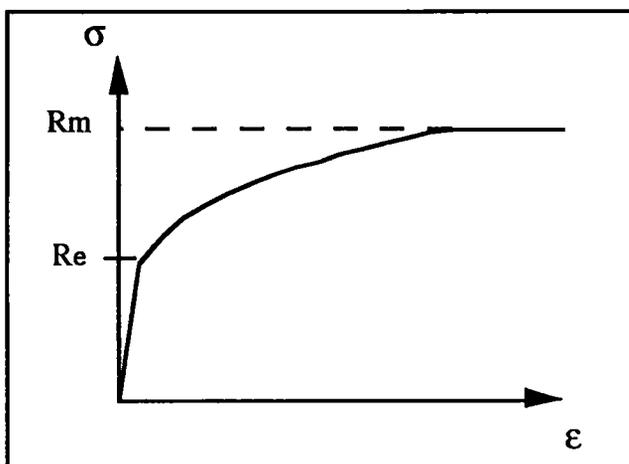


Figure 1.17 : Loi de comportement.

L'auteur décompose la distribution des contraintes le long du ligament en fonction du domaine étudié.

La contrainte longitudinale dans la zone plastique vaut :

$$\sigma_{yy} = R_e \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \quad (1.29)$$

$R_e$  est la limite d'élasticité (critère de TRESCA) ; et  $0 \leq x < R_\beta$ .

$R_y$  = taille de la zone plastique, mesurée le long de l'axe des  $x$ ,

$R_\beta$  = position du point de la contrainte maximale.

L'augmentation de la contrainte  $\sigma_{yy}$  avec celle de  $x$  résulte des contraintes transverses  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{zz}$  au delà de l'entaille.

La valeur maximale de la contrainte longitudinale  $\sigma_{yy}$  (notée  $\sigma_{yy}^{\max}$ ) intervient à l'interface élastoplastique ( $x = R_\beta$ ) et  $R_\beta \leq x < R_y$  :

$$\sigma_{yy}^{\max} = R_e \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{R_\beta}{\rho} \right) \right] \quad (1.30)$$

Le paramètre  $[1 + \ln(1 + R_\beta/\rho)]$  est appelé facteur de concentration de contrainte plastique et TETELMAN le note  $k_{\sigma(p)}$ .

On a donc :

$$k_{\sigma(p)} = \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{R\beta}{\rho} \right) \right] \quad (1.31)$$

$\sigma_{yy}^{\max}$  est une constante. Sa valeur maximale, notée  $\sigma_{yy}^c$  ne dépend que de l'angle d'entaille  $\psi$ .

$$\sigma_{yy}^c = \text{Re} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2} \right] \quad (1.32)$$

Pour  $x > R_y$ , le matériau est élastique et  $\sigma_{yy}$  décroît.

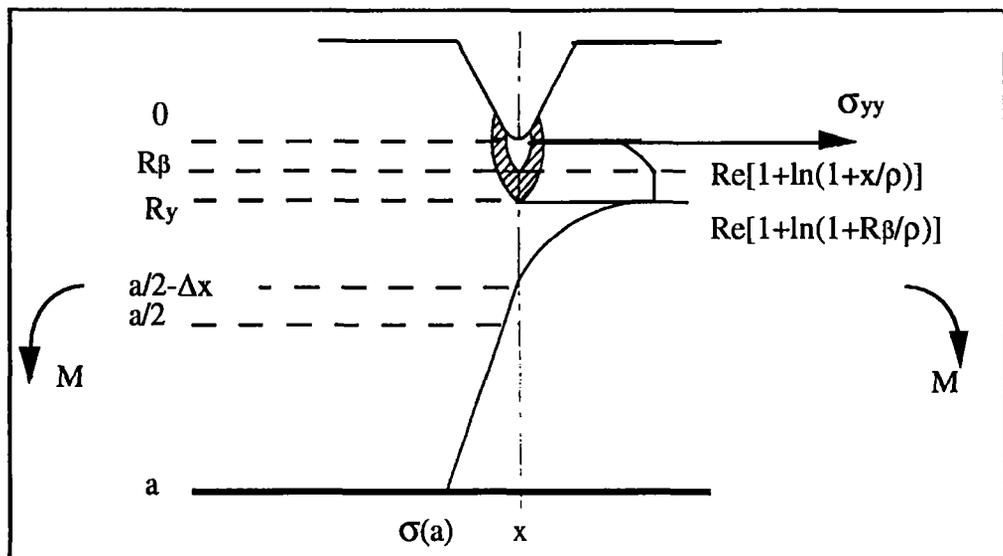


Figure 1.18 : Distribution des contraintes élastoplastiques pour une barre entaillée soumise à de la flexion pure selon TETELMAN.

En donnant une formule pour chaque zone de la distribution, la méthode de TETELMAN permet donc de décrire la distribution des contraintes sur tout le ligament en fond d'entaille.

Pour chaque géométrie d'entaille,  $R_y$  et  $\sigma_{yy}$  sont une fonction unique du moment de flexion. WILSHAW [16] donne la relation liant  $R_y/\rho$  à  $M/\sigma_{yy}$ .

### 1.3.1.5) Méthode de BHATTACHARYA et KUMAR

Dans le cas de la flexion pure [13], les auteurs considèrent deux cas de figure : soit la plasticité reste confinée en fond d'entaille, soit elle est généralisée. La méthode est analogue à celle proposée en élasticité : la distribution des contraintes est décomposée en plusieurs zones en fonction de la profondeur par rapport au fond d'entaille. Cette distribution des contraintes est pratiquement identique à celle de TETELMAN.

#### 1.3.1.5.1) Élastoplasticité

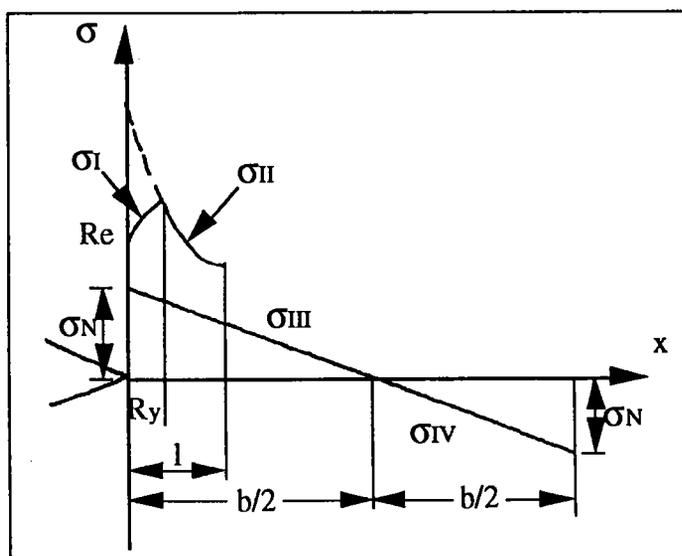


Figure 1.19 : Distribution des contraintes élastoplastiques pour une barre entaillée.

Les auteurs divisent le ligament en fond d'entaille en quatre parties. A chaque zone, ils associent une formule décrivant la distribution de la contrainte. Sur ces quatre contraintes ainsi obtenues, trois sont en traction (de  $\sigma_I$  à  $\sigma_{III}$ ), et une est en compression :  $\sigma_{IV}$ . Seule  $\sigma_I$  est une contrainte plastique.

$$\sigma_{I(x)} = \sigma_N \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \text{ pour } 0 \leq x \leq R_y \quad (1.33)$$

$R_y$  est la taille de la zone plastique, déterminée par l'intersection de  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$ .

$$\sigma_{II(x)} = \sigma_N k_t \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \text{ pour } R_y \leq x \leq l. \quad (1.34)$$

$$\text{et } l = \frac{\rho}{4} (k_t^2 - 1)$$

$\sigma_{II}$  est une contrainte élastique non linéaire.

$$\begin{aligned} \sigma_{III(x)} &= \frac{M}{I} \left( \frac{b}{2} - x \right) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{b}{2} \text{ (contrainte de traction)} \\ \sigma_{IV(x)} &= \frac{M}{I} \left( \frac{b}{2} - x \right) \text{ pour } \frac{b}{2} \leq x \leq b \text{ (contrainte de compression)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

### 1.3.1.5.2) Plasticité généralisée

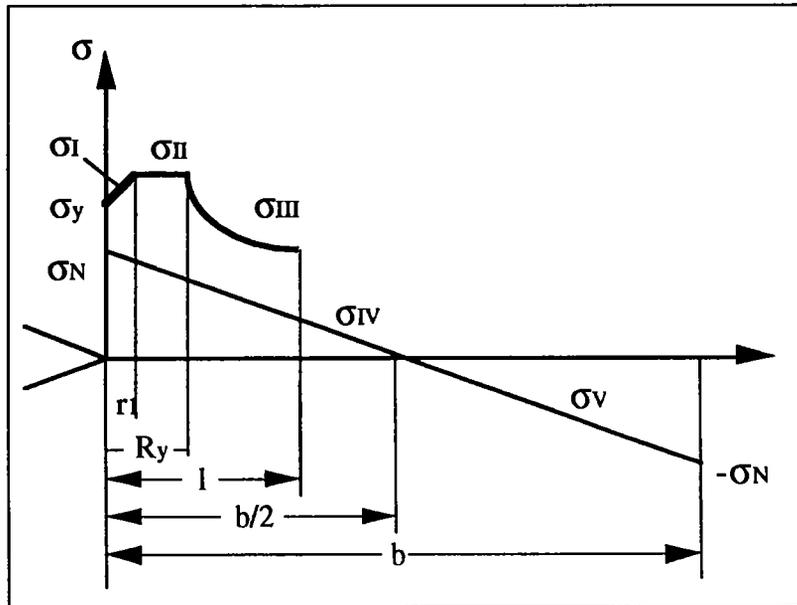


Figure 1.20 : Distribution des contraintes plastiques pour une barre entaillée.

Dans le cas de la plasticité généralisée, cinq zones de contrainte interviennent : quatre en traction et une en compression. On a :

$$\sigma_{I(x)} = \text{Re} \left[ 1 + \ln \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \text{ pour } 0 \leq x \leq x_1 \quad (1.36)$$

$x_1$  est le point d'intersection de  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  tel que :  $x_1 = \rho \left[ e^{\left( \frac{\pi - \psi}{2} \right)} - 1 \right]$

$$\sigma_{II(x)} = \text{Re} \left[ 1 + \frac{\pi - \psi}{2} \right] \text{ pour } x_1 \leq x \leq R_y \quad (1.37)$$

$$\sigma_{III(x)} = \sigma_N k_t \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \text{ pour } R_y \leq x \leq l \text{ et } l = \frac{\rho}{4} (k_t^2 - 1) \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{IV(x)} &= \frac{M}{I} \left( \frac{b}{2} - x \right) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{b}{2} \text{ (contrainte de traction)} \\ \sigma_{V(x)} &= \frac{M}{I} \left( \frac{b}{2} - x \right) \text{ pour } \frac{b}{2} \leq x \leq b \text{ (contrainte de compression)}\end{aligned}\tag{1.39}$$

### 1.3.2) Relations entre $k_t$ , $k_\sigma$ et $k_\epsilon$ .

Nous avons vu précédemment que le facteur de concentration de contrainte théorique  $k_t$  permettait, en connaissant la contrainte nominale, de déterminer la valeur de la contrainte maximale élastique en fond d'entaille. Une fois cette valeur connue et à l'aide des expressions proposées par les différents auteurs, il est alors possible de connaître la distribution des contraintes élastiques dans la section réduite.

En élastoplasticité ou en plasticité généralisée, on ne peut plus connaître l'allure et les valeurs des contraintes  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille à partir du facteur de concentration de contrainte théorique  $k_t$  et des paramètres géométriques qui définissent l'entaille.

Le facteur de concentration de contrainte élastoplastique  $k_\sigma$  et le facteur de concentration de déformation élastoplastique  $k_\epsilon$  permettent de connaître les valeurs maximales de la contrainte et de la déformation élastoplastique en fond d'entaille.

La relation la plus ancienne et la plus connue reliant  $k_t$ ,  $k_\sigma$  et  $k_\epsilon$  est celle proposée par NEUBER. Cependant, il apparaît clairement que cette relation n'est valable que dans le domaine élastique.

Nous présentons donc les différentes relations qui existent entre ces facteurs de concentration, relations proposées par NEUBER (1961), STOWELL (1968), TOPPER (1969), KOE (1978), MAKHUTOV (1981), MOLSKI (1981), GLINKA (1985) et MOROZOV (1996).

#### 1.3.2.1) Équation de NEUBER

Cette équation stipule que le facteur de concentration de contrainte théorique  $k_t$  peut être relié aux facteur de concentration de contrainte et de déformation  $k_\sigma$  et  $k_\epsilon$  par la relation suivante [7] :

$$k_t^2 = k_\sigma k_\epsilon \text{ avec } k_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} \text{ et } k_\epsilon = \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_N}\tag{1.40}$$

Si  $\sigma_N \leq R_e$ , alors on peut écrire :  $(k_t \sigma_N)^2 = E \cdot \sigma_{\max} \cdot \epsilon_{\max}$

Cette relation, définie pour le domaine élastoplastique, n'est en fait valable qu'en élasticité. En effet, en élasticité, la déformation maximale et la déformation nominale valent :

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} \text{ et } \varepsilon_N = \frac{\sigma_N}{E} \quad (1.41)$$

$$\text{d'où } k_\varepsilon = \frac{\sigma_{\max}}{E} \frac{E}{\sigma_N} = k_\sigma \quad (1.42)$$

Nous retrouvons bien le fait qu'en élasticité nous ayons la relation suivante :

$$k_t^2 = k_\sigma^2 = k_\varepsilon^2 = k_\sigma k_\varepsilon \quad (1.43)$$

Cependant, le propre de la règle proposée par NEUBER est d'être aussi valable dans le domaine élastoplastique. Dès que  $\sigma_{\max} > R_e$ , la plastification locale apparaît en fond d'entaille. On a donc :

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{\max} \text{ (contrainte plastique)}}{\sigma_N \text{ (contrainte élastique)}} \text{ et } k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max} \text{ (déformation plastique)}}{\varepsilon_N \text{ (déformation élastique)}}$$

Si le matériau suit une loi de LUDWIK de type :  $\sigma = K\varepsilon^n$ , nous pouvons écrire la déformation maximale de la façon suivante :

$$\varepsilon_{\max} = \left( \frac{\sigma_{\max}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \varepsilon_{\max}^n = \frac{\sigma_{\max}}{K} \text{ et } \sigma_{\max} = k_\sigma \sigma_N, \varepsilon_{\max} = k_\varepsilon \varepsilon_N \quad (1.44)$$

$$\text{d'où } (\varepsilon_{\max})^n = \frac{k_\sigma \sigma_N}{K} \text{ et donc } (\varepsilon_{\max})^{n+1} = \frac{\sigma_N^2}{KE} k_\sigma k_\varepsilon$$

En utilisant la règle de NEUBER, nous pouvons réécrire cette équation de la façon suivante :

$$k_\sigma k_\varepsilon = \frac{KE \varepsilon_{\max}^{1+n}}{\sigma_N^2} = k_t^2 \quad (1.45)$$

Par définition,  $k_t$  est le facteur de concentration de contrainte théorique calculé comme le rapport entre la contrainte maximale élastique (notée  $\sigma_{\text{él-max}}$ ) et la contrainte nominale appliquée sur la section réduite.

$$\text{On a donc : } \frac{KE\epsilon_{\text{max}}^{1+n}}{\sigma_N} = \frac{\sigma_{\text{él-max}}^2}{\sigma_N}$$

Ce qui revient à écrire :

$$KE\epsilon_{\text{max}}^{1+n} = \sigma_{\text{él-max}}^2 \Leftrightarrow KE\epsilon_{\text{max}}^n \epsilon_{\text{max}} = \sigma_{\text{él-max}}^2$$

Nous avons vu que, dans le domaine plastique, on avait  $\sigma = K\epsilon^n$ . Le terme de gauche de l'équation peut donc se mettre sous la forme :  $E\epsilon_{\text{max}}\sigma_{\text{max}}$ .

Comparons maintenant les deux expressions :

On a :

$$E\epsilon_{\text{max}} = \sigma_{\text{él-max}} \text{ et } \sigma_{\text{él-max}} > \sigma_{\text{max}}$$

D'où :

$$KE\epsilon_{\text{max}}^{1+n} < \sigma_{\text{él-max}}^2$$

$$\text{et donc } k_\sigma k_\epsilon < k_t^2 \quad (1.46)$$

Nous venons de démontrer que la règle de NEUBER surestime le produit  $k_\epsilon k_\sigma$ .

### 1.3.2.2) Méthode de STOWELL

STOWELL [19] a proposé une méthode, adaptée par HARDATH et OHMAN [20], qui permet de calculer les facteurs de concentration de contrainte et de déformation en élastoplasticité pour un chargement monotone. Les relations de base sont les suivantes :

$$k_\sigma = 1 + (k_t - 1) \frac{E_s}{E} \text{ et } k_\sigma = \frac{\sigma_{\text{max}}}{\sigma_N} \quad (1.47)$$

$$k_\epsilon = k_\sigma \frac{E_s}{E} \text{ et } k_\epsilon = \frac{\epsilon_{\text{max}}}{\epsilon_N}$$

$\sigma_{\max}$  et  $\epsilon_{\max}$  sont les contraintes et déformations locales ;  $\sigma_N$  et  $\epsilon_N$  sont les contraintes et déformations nominales.  $E$  est le module d'Young et  $E_s$  est le module sécant qui vaut  $\sigma_{\max}/\epsilon_{\max}$ .

### 1.3.2.3) Méthode de TOPPER

TOPPER [21] a modifié la formule de NEUBER pour l'adapter à la fatigue. Il relie alors les amplitudes des contraintes et de déformations  $\Delta\sigma_N$ ,  $\Delta\sigma$  et  $\Delta\epsilon$  par :

$$(k_t \cdot \Delta\sigma_N)^2 = E \cdot \Delta\sigma \cdot \Delta\epsilon \text{ et avec toujours : } \sigma_N \leq R_e. \quad (1.48)$$

Certains auteurs [22] ont démontré que la règle de NEUBER (et ses dérivées) surestime la déformation locale plastique ; ce qui conduit à des erreurs importantes pour la prévision de la durée en fatigue.

### 1.3.2.4) formule de KOE

L'auteur [23] propose une formule liant le facteur de concentration de contrainte inélastique  $k_\sigma$ , le facteur de concentration de déformation inélastique  $k_\epsilon$  et le facteur de concentration de contrainte élastique  $k_t$ .

$$\frac{k_t - 1}{k_\sigma - 1} - 1 = 2,4 \left( \frac{k_\epsilon - 1}{k_t - 1} - 1 \right) \quad (1.49)$$

Cette formule peut également se mettre sous la forme :

$$\xi = \frac{2,4 k_t}{k_t - 1} \left( \frac{(k_\epsilon - k_t)(k_\sigma - 1)}{k_\epsilon k_\sigma} \right) + \frac{k_t}{k_\epsilon} \quad (1.50)$$

### 1.3.2.5) Formule de MAKHUTOV

Comme la règle de NEUBER surestime le facteur de concentration de déformation, MAKHUTOV [24] propose de multiplier le terme  $k_t^2$  par une fonction qui minimisera sa valeur. On a donc :

$$k_\sigma k_\epsilon = f(k_t, \sigma_N, n) k_t^2 \quad (1.51)$$

$n$  est le coefficient d'écrouissage.

$f$  a pour valeur :

$$f = \left( \frac{k_t \sigma_N}{Re} \right)^{-n^*} \quad \text{et} \quad n^* = \frac{1-n}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_N}{Re} - \frac{1}{k_t} \right) \right] \quad (1.52)$$

### 1.3.2.6) Méthode de MOLSKI

MOLSKI [22] a mis au point une méthode basée sur une approche énergétique pour calculer la valeur de la contrainte et de la déformation plastique en fond d'entaille. En s'appuyant sur des travaux réalisés par WALKER [25] sur des entailles profondes aiguës, il utilise le fait qu'en cas d'écoulement plastique localisé, entourée par une région élastique, la distribution de la densité énergétique dans la zone plastique sera pratiquement la même que pour un matériau élastique linéaire.

Le rapport énergétique ci dessous sera donc valable dans le cas de la plastification locale ou en élasticité pure :

$$k_t = \sqrt{\frac{W_\sigma^*}{W_0^*}} \quad (1.53)$$

$W_0^*$  est l'énergie de déformation par unité de volume due à la contrainte nominale.

$W_\sigma^*$  est l'énergie de déformation par unité de volume due aux contraintes et déformations locales en fond d'entaille.

De façon générale, l'énergie de déformation vaut :

$$W_\sigma^* = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.54)$$

Dans le domaine plastique, on a :

$$W_\sigma^* = \int_0^{\epsilon} \left( \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right) d\epsilon = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma}{n'+1} \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (1.55)$$

et, quelque soit le domaine,  $W_0^* = \frac{\sigma_N^2}{2E}$

On a donc :

$$\frac{(k_t \sigma_N)^2}{2E} = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} + \frac{\sigma_{\max}}{n'+1} \left( \frac{\sigma_{\max}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (1.56)$$

Cette méthode à deux limites :

- il faut que la contrainte nominale soit inférieure à la limite élastique,
- la zone plastique doit être confinée en fond d'entaille et donc petite par rapport à la zone élastique.

La figure 1.21 montre la différence qui existe entre la méthode proposée et celle de NEUBER.

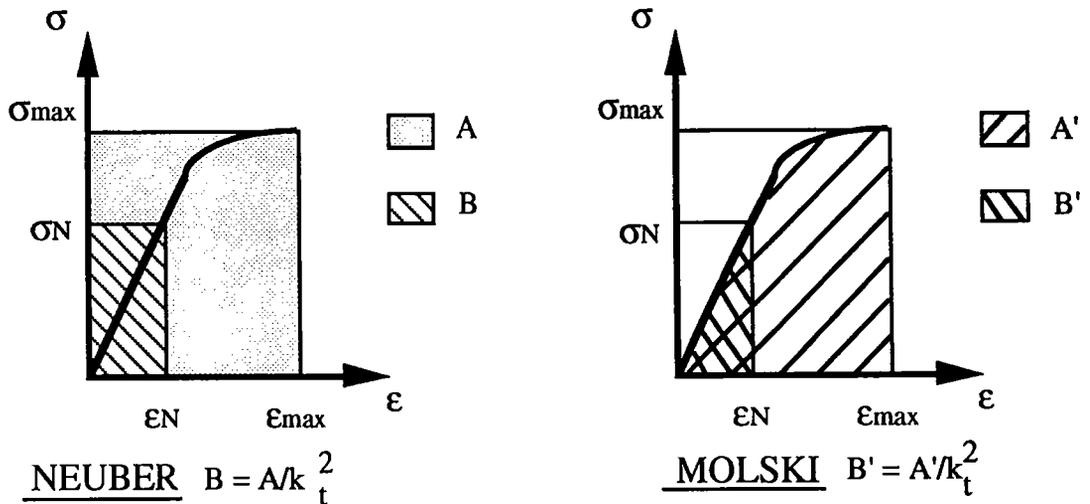


Figure 1.21: Différence entre la méthode de NEUBER et la méthode de MOLSKI

### 1.3.2.7) Méthode de GLINKA

GLINKA a repris les travaux qu'il avait réalisés avec MOLSKI pour approfondir cette méthode basée sur la densité énergétique afin de calculer les contraintes et les déformations inélastiques à proximité du fond d'entaille [26]. Il propose les relations suivantes en séparant les conditions de contraintes planes et de déformations planes.

### 1.3.2.7.1) Conditions de contraintes planes

$$\diamond \sigma_N < Re$$

En présence d'une faible plastification confinée en fond d'entaille, on retrouve la formule mise au point par MOLSKI :

$$\frac{(k_t \sigma_N)^2}{2E} = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} + \frac{\sigma_{\max}}{n'+1} \left( \frac{\sigma_{\max}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (1.57).$$

$$\diamond \sigma_N > Re$$

En se basant sur l'équation ci dessus, nous obtenons :

$$k_t^2 \left[ \frac{\sigma_N^2}{2E} + \frac{\sigma_N}{n'+1} \left( \frac{\sigma_N}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \right] = \frac{\sigma_{\max}^2}{2E} + \frac{\sigma_{\max}}{n'+1} \left( \frac{\sigma_{\max}}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (1.58)$$

L'auteur a montré par l'expérience que la validité de cette équation, pour la plasticité localisée ou plus avancée, trouve ses limites lorsque la plastification totale commence.

### 1.3.2.7.2) Conditions de déformations planes

L'état de contrainte est bi-axiale en fond d'entaille. Cependant,  $\sigma_{yy}$  intervient dans la densité d'énergie de déformation  $W^*_{\sigma}$  car les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  disparaissent. On peut donc obtenir la relation entre  $\sigma'_{yy}$  et  $\varepsilon'_{yy}$  (qui sont les composantes de la contrainte et de la déformation élastoplastique en déformations planes) en utilisant la relation suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{3(\sigma_e)^{1-n/n}}{2 K^{1/n}} D_{ij} \quad (1.59)$$

où  $\sigma_e^2 = 3/2 D_{ij} D_{ij}$  et  $D_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$  (Tenseur déviateur des contraintes).

En posant  $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \varepsilon_{zz} = 0$  en fond d'entaille et en respectant l'équation ci-dessus, la relation de RAMBERG-OSGOOD  $\sigma$ - $\varepsilon$  uni axiale peut être transposée dans une relation de déformations planes analogue en utilisant les transformations suivantes :

$$\sigma'_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{\sqrt{1-\mu+\mu}} \quad \text{et} \quad \varepsilon'_{yy} = \frac{\varepsilon_{yy} (1-\mu)^2}{\sqrt{1-\mu+\mu}} \quad (1.60)$$

$$\text{où } \mu = \frac{\nu + E \frac{\epsilon_p}{2\sigma}}{1 + E \frac{\epsilon_p}{\sigma}} \text{ et } \epsilon_p \text{ est la contribution de la déformation plastique.}$$

On a donc :

$$\epsilon'_{yy} = \frac{\sigma'_{yy}}{E''} + \left( \frac{\sigma'_{yy}}{K''} \right)^{1/n''} \text{ et } k_t^2 \left[ \frac{\sigma_N^2}{2E''} + \frac{\sigma_N}{n'' + 1} \left( \frac{\sigma_N}{K''} \right)^{1/n''} \right] = \frac{\sigma'_{yy}}{2E''} + \frac{\sigma'_{yy}}{n'' + 1} \left( \frac{\sigma'_{yy}}{K''} \right)^{1/n''} \quad (1.61)$$

Les paramètres  $E''$ ,  $K''$  et  $n''$  sont déterminés à partir de  $\sigma'_{yy}$  et  $\epsilon'_{yy}$ .

### 1.3.2.7.3) Conclusion sur la méthode de GLINKA

Les relations données par l'auteur permettent de calculer les contraintes et les déformations élasto-plastiques en fond d'entaille à partir de la contrainte nominale et du facteur de concentration de contrainte  $k_t$ .

### 1.3.2.8) Méthode de MOROZOV et PLUVINAGE.

Dans le cadre d'un travail commun, le Professeur MOROZOV [27] propose une méthode basée sur une intégrale indépendante du contour afin de calculer le produit  $k_\epsilon k_\sigma$ . Il montre que ce produit est sensible à la variation des conditions d'essai. Il varie avec la charge appliquée dès que  $\sigma_N > Re$ .

MOROZOV et *al.* donnent trois domaines différents pour lier  $k_t^2$  à  $k_\epsilon k_\sigma$ .

- Si  $\sigma_N$  et  $\sigma_{max} < Re$  :

$$k_t^2 = k_\epsilon k_\sigma \quad (1.62)$$

- Si  $\sigma_N < Re$  et  $\sigma_{max} > Re$  :

$$k_\epsilon k_\sigma = \frac{KE^{1+n}}{2\sigma_N} \epsilon_{max} \quad (1.63)$$

Cette formulation nécessite de connaître la valeur de la déformation maximale et ne donne pas un " accès " direct à la valeur du facteur de concentration de contrainte théorique  $k_t$ .

MOROZOV réécrit donc sa formule en faisant l'approximation suivante :

$$\frac{1+n}{2} k_t^2 = k_\sigma k_\epsilon \quad (1.64)$$

- Si  $\sigma_N$  et  $\sigma_{max} > Re$  :

$$\frac{k_t^2}{k_\sigma k_\epsilon} = \frac{12WB}{P} \frac{(W-a)}{(W+2a)^2} \frac{\omega + |x_0|}{(1+n)\epsilon_N} K \left( \frac{K}{\sigma_N} \right)^{\frac{n}{1+n}} \quad (1.65)$$

Cette formule n'est valable que pour les éprouvettes C.T. ou K.T.  $x_0$  et  $\omega$  sont des valeurs obtenues par résolutions d'un système de deux équations mises au point par les auteurs. Ainsi, à partir de  $k_t$ ,  $n$  et des conditions d'essai :  $P$  et  $\epsilon_N$ , on peut déterminer le produit  $k_\sigma k_\epsilon$ .

### 1.3.2.9) Comparaison des différentes formules

Dans le cadre des calculs réalisés par éléments finis sur des éprouvettes C.T, nous possédons les résultats correspondants aux paliers de chargement successifs suivants : 10%P, 20%P, ... jusqu'à 100% de la charge appliquée. En nous basant sur les résultats obtenus pour  $\sigma_{max}$ ,  $\epsilon_{max}$ ,  $\sigma_N$  et  $\epsilon_N$ , nous traçons les variations du rapport  $\zeta = k_t^2 / (k_\epsilon k_\sigma)$  en fonction de la contrainte nominale  $\sigma_N$  par les sept méthodes proposées. Le tableau 1.1, non exhaustif, donne un récapitulatif des solutions proposées par les différents auteurs pour calculer la valeur de  $\zeta$ .

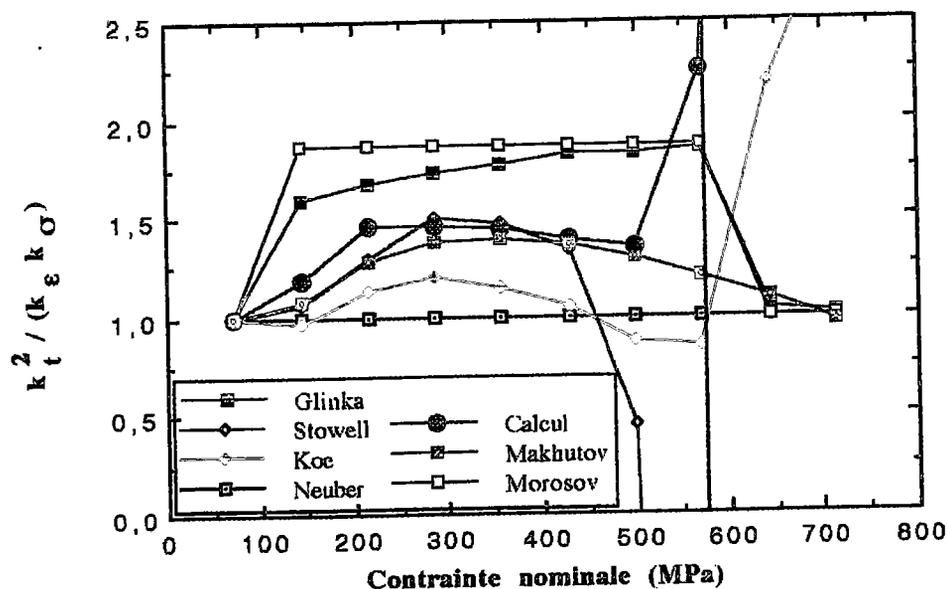


Figure 1.22 : Solutions graphiques des variations de  $\zeta$  en fonction de  $\sigma_N$ .

Auteurs	Méthodes pour estimer le facteur de concentration de contraintes
NEUBER	$\zeta = 1$
KOE	$\xi = \frac{2,4 k_t}{k_t - 1} \left( \frac{(k_\epsilon - k_\sigma)(k_\sigma - 1)}{k_\epsilon k_\sigma} \right) + \frac{k_t}{k_\epsilon}$
MAKHUTOV	$\zeta = \left( \frac{k_t \sigma_N}{Re} \right)^{n_*} \quad \text{et } n_* = 0,5(1 + n) \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_N}{Re} - \frac{1}{k_t} \right) \right]$
STOWELL HARDRATH OHMAN	$\zeta = \frac{E}{E_S} - \frac{1}{k_\sigma k_\epsilon} \left[ \left( \frac{E}{E_S} \right)^2 + 2(k_t - 1) \frac{E}{E_S} - 2k_t + 1 \right]$ <p>et <math>\frac{E_S}{E} k_\sigma = k_\epsilon</math> avec <math>E_S =</math> module sécant : <math>E_S = \frac{\sigma_{\max}}{\epsilon_{\max}}</math></p>
GLINKA	<p>Si <math>Re &gt; \sigma_N</math> :</p> $\zeta = \frac{2}{\sigma} \left[ \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^1 \left[ \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma}{1+n} \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$ <p>Si <math>Re &lt; \sigma_N</math> :</p> $\zeta = \left[ \frac{\sigma_N^2}{E} + \sigma_N \left( \frac{\sigma_N}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^1 \left[ \frac{\sigma^2}{E} + \sigma \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-1} \left[ \frac{\sigma_N^2}{2E} + \frac{\sigma_N}{1+n} \left( \frac{\sigma_N}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{-1} \left[ \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma}{1+n} \left( \frac{\sigma}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \right]$
MOROZOV PLUVINAGE	<p>Si <math>Re &gt; (\sigma_N \text{ et } \sigma_{\max})</math> :</p> $\zeta = 1$ <p>Si <math>Re &gt; \sigma_N</math> et <math>\sigma_{\max} &gt; Re</math> :</p> $\zeta = \frac{2}{1+n}$ <p>Si <math>(\sigma_N \text{ et } \sigma_{\max}) &gt; Re</math> :</p> $\zeta = \frac{12WB}{P} \frac{(W-a)}{(W+2a)^2} \frac{\omega +  x_0 }{(1+n)\epsilon_N} K \left( \frac{K}{\sigma_N} \right)^{\frac{n}{1+n}}$

Tableau 1.1 : Récapitulatif des différentes formules proposées pour calculer  $\zeta$ .

La figure 1.22 montre les limites des différentes formules. Nous n'avons pas représenté la solution de MOLSKI car elle est identique à celle de GLINKA lorsque  $\sigma_N < Re$ .

Tant que la contrainte nominale est inférieure à 70% - 80% de la limite élastique, on voit que le produit  $k_\sigma k_\sigma$ , obtenu à l'aide des valeurs relevées par le calcul, est pratiquement constant.

Les auteurs qui donnent une approximation la plus proche des résultats d'essai sont STOWELL et MAKHUTOV ; leur formules étant valable jusqu'à  $0,72Re$  pour STOWELL, et  $0,9Re$  pour MAKHUTOV.

La formule de GLINKA tend vers celle proposée par MOROZOV et *al.* jusqu'à ce que la contrainte nominale atteigne la valeur de la limite élastique. Ensuite, la formule de GLINKA donne des résultats qui tendent vers 1 alors que les essais montrent qu'au contraire  $\zeta$  a tendance à augmenter.

Il est également intéressant de noter que mis à part STOWELL , KOE et MOROSOV, les expressions donnent toutes des résultats qui tendent vers 1 (ce qui revient à dire que le matériau se comporte de la même façon en élasticité et en forte plasticité et que l'on retrouve la règle de NEUBER) dès que la contraintes nominale a atteint la valeur de la limite d'élasticité.

La formule proposée par KOE est la seule qui augmente lorsque la contrainte nominale dépasse la valeur de la limite élastique. Cependant, on peut noter qu'elle donne des résultats très proches de la solution de NEUBER tant que la contraintes nominale n'a pas atteint la valeur de la limite d'élasticité, et que c'est l'expression qui est la moins proche des résultats donnés par le calcul.

Il convient cependant de noter les remarques suivantes :

- La majorité des auteurs précisent que leur formule cesse d'être valable lorsque la plasticité devient trop importante (ce qui est le cas lorsque  $\sigma_N = Re$ ). STOWELL et *al.* stipulent clairement que leur méthode n'est applicable que lorsque la zone plastique reste confinée en fond d'entaille.

- Pour  $Re < \sigma_N$  et  $\sigma_{max} > Re$ , la formule de MOROZOV et *al.* fait intervenir le coefficient d'écroutissage  $n$ . Les auteurs précisent que les résultats sont optimum pour une valeur de  $n$  supérieure à 0,15 (la meilleur étant 0,21). Dans le cadre de nos essais, le matériau utilisé à un coefficient d'écroutissage de 0,06556. Ceci peut expliquer les différences obtenues entre les résultats d'essai et la formule proposée.

### 1.3.3) Distribution des déformations

De façon similaires, les distributions des déformations en fond d'entaille ont été proposées par BATES et SANTHANAM (1978), USAMI (1985) et XU (1989).

#### 1.3.3.1) Formule de BATES et SANTHANAM

Ces auteurs [28] ont proposé, après examen des solutions de GRIFFITH et OWEN par éléments finis, de lier l'acuité de l'entaille à la déformation plastique effective, dans le cas de matériaux à écrouissage linéaire :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pr} \cdot \exp(-1,71 x/\rho) \quad (1.67)$$

où  $\varepsilon_{pr}$  est la déformation plastique effective en fond d'entaille.

#### 1.3.3.2) Formule d'USAMI

Il considère que la distribution des déformations élastoplastiques en fond d'entaille a une forme analogue à la distribution des contraintes élastiques. L'expression permettant de décrire la distribution des déformations en fond d'entaille a l'allure suivante :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\varepsilon_{\max}}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-2} + \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^{-4} \right] \quad (1.66)$$

où  $\varepsilon_{\max}$  est obtenue par la méthode énergétique.

#### 1.3.3.3) Formule de XU

En se basant sur les travaux de BATES et SANTHANAM, XU a étendu leur formule aux matériaux écrouissables en remplaçant le coefficient de 1,71 par une constante  $c$  (appelée constante de ruine par déformation) qui dépend du coefficient d'écrouissage  $n$  et du rapport chargement/chargement limite.

La formule proposée est la suivante :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pr} \cdot \exp(-c x/\rho) \quad (1.68)$$

A partir des essais qu'il a réalisé [16], il apparaît que :

- pour  $n =$  constante,  $\varepsilon_{pr}$  croît quand le chargement augmente,
- pour un chargement constant,  $\varepsilon_{pr}$  diminue lorsque  $n$  augmente,
- pour  $n =$  constante,  $c$  décroît quand le chargement augmente.

#### 1.4) Conclusion

Ce chapitre présente les différentes approches permettant de déterminer l'allure des distributions des contraintes et des déformations dans le domaine élastique et élastoplastique.

En élasticité, elles sont basées sur l'utilisation du facteur de concentration de contrainte élastique que PETERSON interprète comme étant le rapport de la contrainte maximale en fond d'entaille sur la contrainte nominale (dans la section réduite) ou sur la contrainte globale.

Il apparaît que les distributions des contraintes au voisinage du fond d'entaille sont similaires les unes par rapport aux autres, et cela pour une très grande variété de géométrie d'entaille et de système de chargement. Diverses expressions approximatives basées sur ces variables sont donc proposées.

En élastoplasticité, la plupart des auteurs ont travaillé sur les distributions des contraintes en fond d'entaille pour des pièces soumises à de la flexion. Ils proposent des expressions qui diffèrent en fonction de la distance à laquelle on se trouve du fond d'entaille.

En règle générale, la distribution des contraintes en fond d'entaille présente trois parties distinctes : une première où les contraintes croissent jusqu'à atteindre une valeur maximale, une seconde où les contraintes restent pratiquement constante (ces deux parties représentent la zone plastique du matériau) et une troisième où les contraintes sont élastiques.

Si la contrainte appliquée n'est pas trop importante et ne provoque qu'une faible plastification en fond d'entaille, la seconde partie n'existe pas.

La relation de NEUBER permet de relier le facteur de concentration de contrainte théorique aux facteurs de concentration de déformation et de contrainte  $k_\epsilon$  et  $k_\sigma$ , mais elle surestime nettement la valeur de  $k_t$ . Plusieurs auteurs ont donc mis au point des formulations pour affiner l'obtention de la valeur du facteur de concentration de contrainte.

Les différentes expressions donnent toutes des résultats qui tendent vers 1 dès lors que la plasticité devient trop importante. Cependant, il convient de noter que la majorité des auteurs précisent que leurs expressions ne sont valables que lorsque la plasticité reste confinée en fond d'entaille.

## 2 Critères de rupture en termes de déformations critiques

### 2.1) Introduction

La rupture est la séparation d'un matériau en plusieurs parties sous l'action d'une contrainte. Cette séparation se produit à plus ou moins grande vitesse par propagation des fissures existant dans le matériau. La rupture est donc fortement influencée par la présence de microfissures, d'inclusions de particules fragiles (défauts internes) et par la présence d'entaille.

La propagation de ces défauts dans un matériau peut être prédite par deux types d'approche : une approche locale ou une approche globale. Les critères de rupture qui en découlent peuvent aussi être classés en quatre familles : critères de contraintes, de déformations, énergétiques ou de transition entre deux états limites. Ces critères sont largement décrits dans le livre de G. PLUVINAGE [29] dont nous nous sommes inspirés.

Pour établir la valeur de la ténacité ou de la résistance à la rupture d'un matériau élastoplastique, de nombreux critères ont été établis. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux critères de déformations, et plus particulièrement aux critères locaux.

### 2.2) Ténacité apparente

La ténacité du matériau peut être calculée en terme de ténacité apparente  $K^*$  pour les critères considérés comme une extension de la mécanique linéaire de la rupture. La ténacité est reliée au facteur d'intensité de contrainte équivalent élastique  $K_{Ie}^c$  par la relation [4] :

$$K^* = K_{Ie}^c \sqrt{\phi} \quad (2.1)$$

$\phi$  = facteur de correction de plasticité qui dépend de la modification apportée soit à la charge critique, soit à la rigidité.

Le facteur d'intensité de contraintes équivalent élastique critique s'exprime par :

$$K_{Ie}^c = \sigma_g^c \sqrt{\pi a} F_q \left( \frac{a}{W} \right) \quad (2.2)$$

$F_{\sigma}(a/W)$  = facteur de correction géométrique.

## 2.3) Critères de rupture en terme de déformation globale critique

### 2.3.1) Introduction

Dans une structure soumise à un chargement et présentant un défaut, trois types de déformation peuvent être définies :

- $\epsilon_g$  : déformation globale située loin de la perturbation apportée par le défaut,
- $\epsilon_N$  : déformation nominale sur le ligament qui est mesurée sur une distance située de part et d'autres du plan du défaut,
- $\epsilon_l$  : déformation locale mesurée à la pointe du défaut (dans le cas d'une fissure, on peut éventuellement la relier à  $\delta$  (écartement de fissure)).

RANDALL, MERKLE [30] et SOETE [2] ont fait l'hypothèse suivante : la déformation locale est gouvernée par la déformation globale au travers des conditions de continuité et de compatibilité.

Pour ce problème, l'application de la mécanique linéaire des ruptures conduit à la relation suivante :

$$\epsilon_l \sqrt{2\pi r} = A \epsilon_g \sqrt{a} \quad (2.3)$$

A est une constante qui inclue le coefficient de Poisson et les termes géométriques. Cette formule est valable pour une distance  $r$  comprise entre 0 et une petite fraction de  $a$ .

### 2.3.2) Paramètres affectant les déformations locales et globales

La courbe  $\sigma = f(\epsilon)$  (figure 2.1), relative à une plaque à entaille centrale, comporte un certain nombre de points particuliers qui indiquent les étapes successives de l'extension de la plasticité.

Pour SOETE, la déformation nominale peut être considérée comme la somme de la déformation globale plus une composante de la déformation locale. Cette déformation locale peut être définie comme un écartement de fissure  $\delta'$  mesurée sur une grande base de mesure D (8 mm dans son cas) :

$$\epsilon_N = \epsilon_g + \frac{\delta'}{D} \quad (2.4)$$

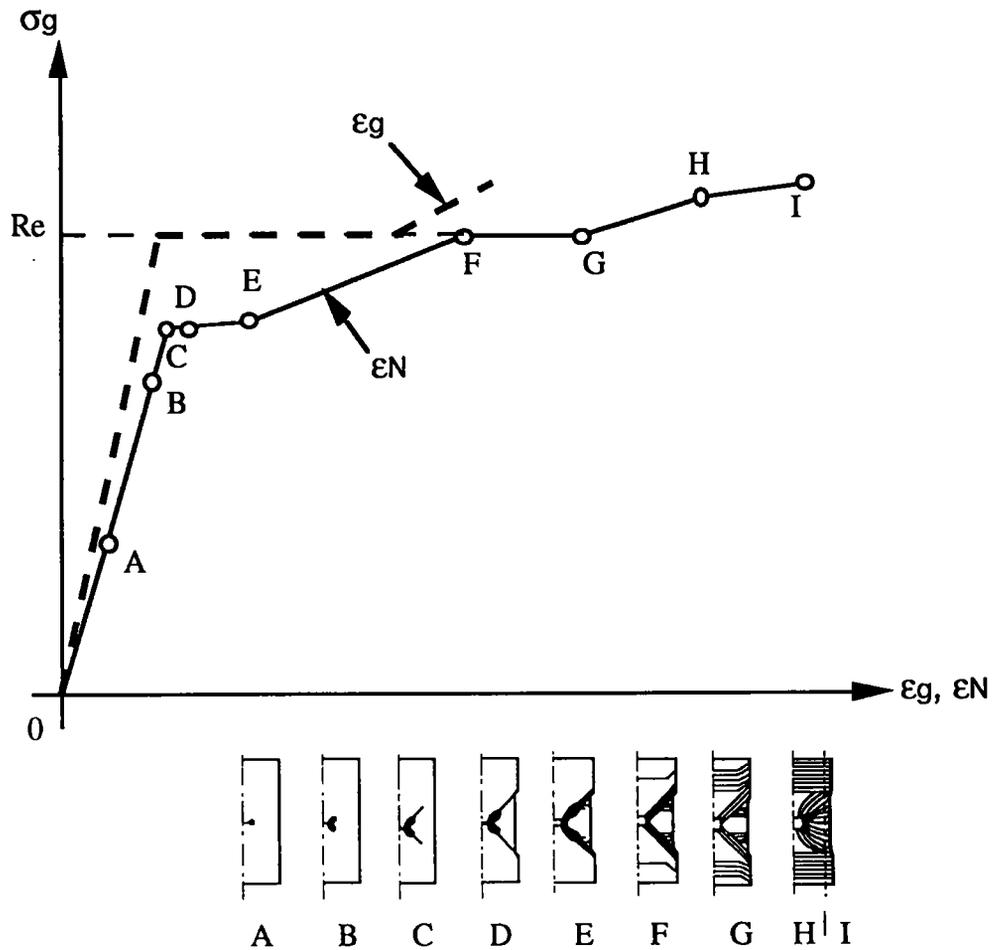


Figure 2.1 : Évolution schématique de la contrainte et de la déformation globale en fonction de la déformation nominale.

En A, la zone plastique en tête de défaut apparaît.

En C, les premières bandes de Lüders apparaissent.

En E, les premières bandes de déformation apparaissent.

En F, les bandes de Lüders se développent dans la section globale de l'éprouvette.

### 2.3.3) Détermination de la taille de défaut critique à partir de la déformation globale critique

#### 2.3.3.1) Critère de SOETE

Le principe de sa méthode repose sur deux points :

- La déformation globale critique admissible est définie conventionnellement comme étant égale à 1% :  $\epsilon_g^c \leq 1$ .

- Pour une certaine taille de défaut, appelée taille de défaut critique, la déformation plastique passe de l'état localisé à l'état généralisé. Cette transition est facilement déterminée grâce à une brusque variation dans la courbe déformation locale critique / défaut critique. Pour un défaut important (à rupture) on a :  $\sigma_N > Re > \sigma_g$  ; alors que pour un défaut plus petit,  $\sigma_N > \sigma_g > Re$ .

La taille de défaut critique correspond à la transition du mode de développement de la plasticité [2]. Lorsque l'on connaît la taille du défaut, le dimensionnement de la structure repose sur une analyse limite par une procédure appropriée. Les conditions d'application de la méthode sont :

- un matériau ductile écrouissable avec plateau à la limite d'élasticité,
- une température de service où le matériau est toujours ductile,
- une épaisseur relativement faible.

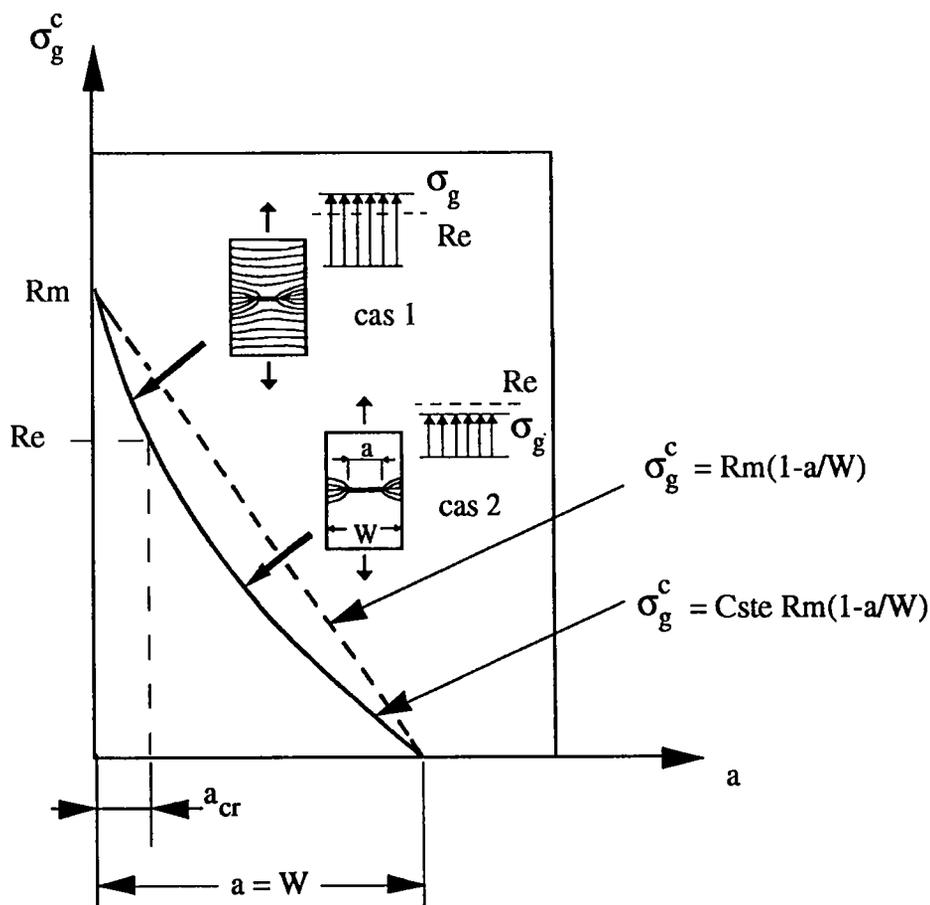


Figure 2.2 : Rupture d'une plaque contenant un défaut par écoulement plastique :  
Cas 1 : généralisé, Cas 2 : localisé.

### 2.3.3.1.1) Détermination de la taille de défaut critique

Pour une charge  $P$ , les conditions d'équilibre conduisent à  $P = \sigma_N(W - a) B$  ou  $P = \sigma_g W B$ , où  $W$  est la largeur de l'échantillon, et  $B$  son épaisseur .

On néglige les effets de concentration de contrainte et on suppose que la contrainte nominale critique  $\sigma_N^c$  est égale à la contrainte ultime  $R_m$ .

On obtient alors la relation suivante :

$$\sigma_g^c = \sigma_N^c \left(1 - \frac{a}{W}\right) = R_m \left(1 - \frac{a}{W}\right) \quad (2.5)$$

On constate que la contrainte globale critique varie de façon linéaire avec la contrainte ultime. L'intersection de la courbe avec une droite horizontale d'ordonnée  $R_e$  permet d'obtenir la taille de défaut critique :  $a_{cr}$  (Figure 2.3). Cette méthode revient à considérer que lorsque  $a$  tend vers  $a_{cr}$ ,  $\sigma_g^c$  tend vers  $R_e$ .

Si le mode d'écoulement est la plasticité localisée, on a :  $\sigma_N^c = \beta R_m$

$\beta$  est une constante. On obtient la nouvelle relation :

$$\sigma_g^c = \beta R_m \left(1 - \frac{a}{W}\right) \quad (2.6)$$

Cette procédure conduit à modifier l'allure de la courbe  $\sigma_g^c = f(a)$  et à donner une taille de défaut critique plus petite.

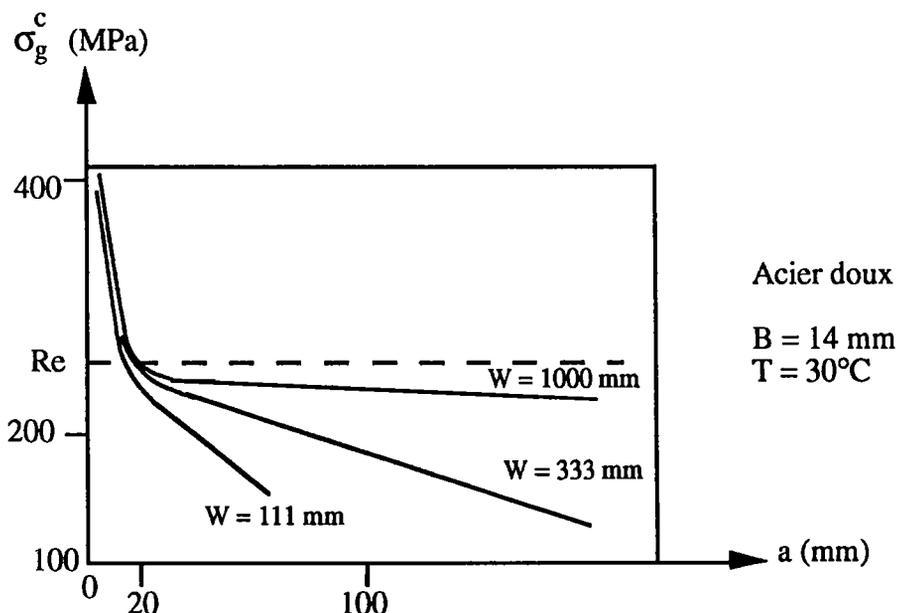


Figure 2.3 : Influence de la largeur du défaut sur la déformation globale critique.

### 2.3.3.2) Critère de RANDALL et MERKLE

Cette relation [30] est basée sur le module tangent et sur la relation de NEUBER qui définit le facteur de ductilité à l'entaille ou ténacité. Dans le cas de comportement élastoplastique, c'est une approche simpliste qui conduit à un surdimensionnement de la structure. On a donc :

$$k_t^2 = k_\sigma k_\varepsilon \Leftrightarrow k_t = \sqrt{k_\sigma k_\varepsilon} \text{ et } k_\sigma = \frac{\sigma_1}{\sigma_g} ; k_\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_g} \quad (2.7)$$

Or, on peut également exprimer  $k_t$  sous la forme :

$$k_t = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right) ; \text{ où } F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right) = \text{facteur de correction.} \quad (2.8)$$

On peut lier les contraintes aux déformations par les relations :  $\varepsilon_g = \frac{\sigma_g}{E_g}$  ;  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$

où  $E_g$  est le module de déformation déterminé loin de l'entaille.

À la rupture,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^c$  et  $\varepsilon_g = \varepsilon_g^c$  ; d'où la relation suivante :

$$\varepsilon_1^c \sqrt{\rho} = 2F_\sigma\left(\frac{a}{W}\right) \sqrt{a} \sqrt{\frac{E}{E_g}} \varepsilon_g^c \quad (2.9)$$

Le terme  $\varepsilon_1^c \sqrt{\rho}$  est considéré comme un paramètre de résistance à la rupture, intrinsèque au matériau, et est appelé *facteur de ductilité à l'entaille*.

Lors de l'étude expérimentale, nous utiliserons ce critère comme base de comparaison avec nos résultats.

## 2.4) Critères locaux

### 2.4.1) Introduction

Les critères locaux permettent de surmonter les limitations des critères globaux. Leur apparition remontent déjà à 1948, date à laquelle ils furent proposés par OROWAN [31]. Étudiés par plusieurs auteurs depuis (pour ne citer que les principaux : Mac-CLINTOK en 1968, RITCHIE, KNOTT et RICE en 1973 (critère de R.K.R.)), ils connaissent actuellement un certain développement. En effet, l'utilisation de critères de rupture globaux

à un paramètre ne permet pas de traduire l'influence complexe de la géométrie et du système de chargement.

Ces critères permettent surtout de s'assurer l'intégrité d'une structure sans en connaître les facteurs de sécurité. Pour obtenir des informations sur ces facteurs de sécurité, on fait maintenant appel à l'approche probabiliste de la mécanique de la rupture.

Les critères de rupture associent l'étendue de la distribution des contraintes et des déformations aux mécanismes locaux tels que :

- l'endommagement à la pointe de la fissure ou de l'entaille,
- la croissance des cavités dans le cas de la rupture ductile.

Les critères locaux en déformation présentent l'inconvénient de ne pouvoir connaître précisément la fraction critique des cavités et la déformation locale critique associée.

Les plus récents travaux sur les critères locaux font appel au concept de l'endommagement et au concept de la mécanique probabiliste de la rupture.

#### 2.4.2) Critère de contrainte locale critique de RITCHIE, KNOTT et RICE

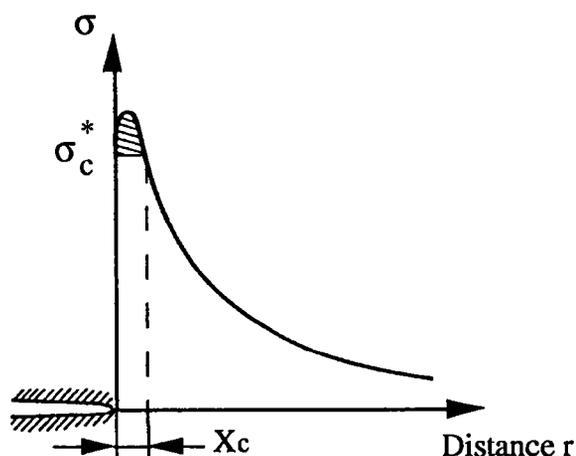


Figure 2.4 : Schéma du modèle de RITCHIE, RICE et KNOTT

Ce critère très répandu [32] stipule que lorsque la contrainte devient supérieure à une certaine valeur critique en fond d'entaille, on obtient la rupture par clivage.

Si on calcule alors la distribution des contraintes en tête de fissure, on constate que la valeur de la contrainte maximale est supérieure à la valeur de la contrainte de clivage, même pour une contrainte globale peu élevée.

RICE a postulé la nécessité que la contrainte critique ( $\sigma_c$ ) dépasse, sur une certaine distance caractéristique ( $X_c$ ), la contrainte critique de clivage pour que les conditions de la rupture soient satisfaites.

Pour une loi de comportement de type RAMBERG-OSGOOD, la contrainte normale au plan de la fissure à une distance  $x$  est donnée par la formule de HUTCHINSON, RICE et ROSENGREEN :

$$\frac{\sigma_{yy}}{Re} = f(\theta, N) \left[ \frac{J}{\epsilon_y l_N x} \right]^{N+1} \quad (2.10)$$

$\epsilon_y$  est la déformation pour une contrainte égale à la limite d'élasticité,

$l_N$  est une constante liée au coefficient d'écrouissage,

$f(\theta, N)$  est la valeur de la distribution angulaire de  $\sigma_{yy}$  dans la direction de la fissure.

$J$  est l'intégrale de RICE.

Cette distribution des contraintes ne peut excéder la valeur de la contrainte critique de clivage  $\sigma_c^*$  sur une distance  $X_c$  appelée distance caractéristique.

### 2.4.3) Critères de déformation locale critique

Ces critères sont particulièrement utilisés pour le cas des ruptures ductiles dont le trajet est orthogonal à la direction de la déformation maximale. Ce type de rupture est caractérisée par la présence de cupules issues des inclusions présentes dans le matériau selon un mécanisme en trois étapes qui sont la nucléation, la croissance des cavités et la coalescence par striction ou instabilité de cisaillement.

La nucléation des vides se fait selon l'un des trois mécanismes suivants :

- décohésion à l'interface matrice - inclusion,
- rupture de la particule,
- rupture de la matrice au voisinage de la particule.

Les critères de décohésion sont les suivants :

- critères énergétiques (pour des particules inférieures au micron),
- critères de déformation locale critique,
- critères de contrainte locale critique (pour les grandes particules sur lesquelles la nucléation se fait de préférence).

### 2.4.3.1) Critère de PANASYUK

PANASYUK et al [33] ont établi un critère de déformation qui permet de déterminer la valeur critique du chargement en fonction de la géométrie de l'entaille. Ils considèrent le cas d'un solide élastoplastique possédant une entaille elliptique et centrale (avec  $\rho \ll a$ ) chargée par un effort symétrique dans la direction perpendiculaire à l'entaille.

Ils considèrent que la rupture s'amorce lorsque la charge  $P$  atteint une valeur critique  $P_c$ . La taille de la zone plastique en fond d'entaille  $R_p$  est supposée de l'ordre du rayon d'entaille  $\rho$ .

On a donc :

$$\varepsilon = \varepsilon_c = n_1 \left( \frac{\delta_c}{\rho} \right) \text{ avec } \rho \text{ proche de } R_p \quad (2.11)$$

$n_1$  est un facteur de proportionnalité, et  $\delta_c$  est l'écartement critique d'entaille.

Comme  $\rho \ll a$ ,  $\delta_c$  sera identique à celui d'une fissure et pourra être déterminé à l'aide du facteur d'intensité de contraintes selon :

$$\delta_c = n_2 \frac{K_{IC}^2 (1 - \nu^2)}{Re E} \quad (2.12)$$

$n_2$  est un coefficient qui dépend de la valeur de l'écroûissage. On désigne par  $\varepsilon_y$  la valeur du rapport  $Re/E$ .

De ces deux équations, les auteurs tirent :

$$\varepsilon_c = n_1 * n_2 \left( 1 - \nu^2 \right) \frac{K_{IC}^2}{\rho Re^2} \varepsilon_y \quad (2.13)$$

Tant que le matériau ne subit que des déformations élastiques, la déformation  $\varepsilon_{yy}$  en fond d'entaille est donnée par :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{2K_I}{\sqrt{\pi\rho E}} \quad (2.14)$$

En se plaçant au moment où la plasticité s'amorce,  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y$ . On peut alors déterminer les coefficients  $n_1$  et  $n_2$ , et on obtient finalement :

$$\varepsilon_c = \frac{4K_{IC}^2}{\pi\rho Re^2} \varepsilon_y \quad (\text{avec } \rho \neq 0) \quad (2.15)$$

### 2.4.3.2) Écartement critique de fissure ou C.O.D. (Crack Opening Displacement)

#### 2.4.3.2.1) Définition de l'écartement critique de fissure

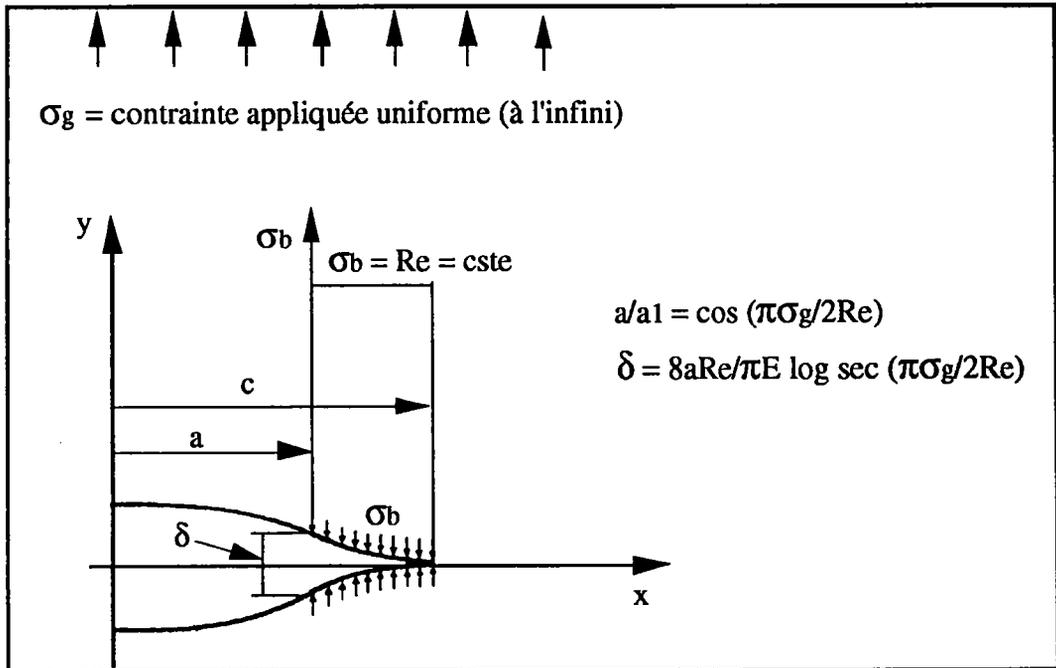


Figure 2.5 : Représentation de la plasticité localisée

WELLS [34], COTTREL [35] et BARENBLATT [36] ont émis l'hypothèse que l'écartement critique des lèvres de la fissure est une valeur de la ténacité. Cet écartement peut être calculé à partir du modèle de DUGDALE :

$$\delta = \frac{8Re}{\pi E} a \log \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma_g}{2Re} \right) \right] \quad (2.16)$$

#### 2.4.3.2.2) Critère de rupture

Le critère de rupture est donc défini par :

$$\delta = \delta_c$$

avec  $\delta_c = \text{écartement de fissure critique}$ .

COTTREL [35] a suggéré que l'écartement de fissure pouvait être lié à la déformation locale à rupture en utilisant le concept de micro-éprouvette, avec :

$$\epsilon_1^c = \log \left( \frac{l_0 + \delta_c}{l_0} \right) \quad (2.17)$$

$l_0 = \text{longueur de la micro-éprouvette}$ .

### 2.4.3.2.3) Relation entre $\delta_c$ et les efforts extérieurs $\sigma_g$

La résistance à l'ouverture de la fissure est simulée par une distribution de contrainte de compression d'intensité constante égale à la limite d'élasticité s'étendant sur une distance  $c - a = R_p$ .  $R_p$  est la taille de la zone plastique,  $c$  est la longueur de la fissure équivalente et  $a$  est la longueur de fissure réelle (figure 2.5).

L'écartement de fissure  $\delta$ , à la pointe de la fissure est donné par le déplacement au point  $x = a$ . On trouve que :

$$\frac{a}{c} = \cos\left(\frac{\pi\sigma_g}{2Re}\right) \quad \text{et} \quad \delta = 8Re \frac{a}{\pi E} \log \sec\left(\frac{\pi\sigma_g}{2Re}\right) \quad (2.18)$$

Le développement limité de  $\delta$  conduit à :

$$\delta = \frac{8Re}{\pi E} \left( \frac{1}{2} \left(\frac{\pi\sigma_g}{2Re}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi\sigma_g}{2Re}\right)^4 + \frac{1}{45} \left(\frac{\pi\sigma_g}{2Re}\right)^6 + \dots \right) \quad (2.19)$$

BURDEKIN et STONE [1] ont montré que l'on pouvait relier l'écartement de fissure au taux d'énergie disponible  $G$ . Si on ne prend que les deux premiers termes de (2.19), on obtient :

$$\delta = \frac{\pi\sigma_g^2 a}{E Re} \left( 1 + \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{\sigma_g}{Re}\right)^2 \right) \quad \text{et} \quad \frac{G}{Re} = \frac{\pi\sigma_g^2 a}{E Re} \left( 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_g}{Re}\right)^2 \right) \quad (2.20)$$

Pour  $\sigma/Re \ll 1$  (cas correspondant aux conditions requises pour avoir une zone plastique petite par rapport à la longueur de fissure), l'expression de  $\delta$  en fonction de  $G$  peut se réduire à  $G = \sigma_y \delta$ . Cette analyse ne donnera pas un résultat très rigoureux en plasticité, mais donnera un résultat correct en élastoplasticité.

### 2.4.3.2.4) Mesures de l'écartement de fissure

DAWES [37] a présenté une méthode pour déterminer expérimentalement l'écartement de fissure sur des éprouvettes soumises à de la flexion en séparant la partie élastique de la partie plastique.

$$\delta = \delta_{el} + \delta_{pl} = \frac{K^2 (1 - \nu^2)}{2ReE} + \frac{r_p (W - a)}{r_p (W - a) + a + z} \nu_p \quad (2.21)$$

$r_p = 0,4$  = facteur de rotation plastique.

$\nu$  = coefficient de Poisson.

$E$  = Module d'Young.

$R_e$  = limite élastique

$W$  = largeur.

$a$  = profondeur de fissure.

$z$  = distance entre la position de la jauge et la surface de l'éprouvette (pour les spécimens en flexion).

$\delta_{el}, \delta_{pl}$  sont respectivement les composantes élastique et plastique de l'écartement de fissure (ces deux paramètres sont évalués à partir du facteur d'intensité de contraintes et de la partie plastique du déplacement du capteur d'ouverture ( $K$  et  $v_p$ )).

Cette méthode a été modifiée par KOLEDNIK [38] qui estime que la formule proposée par DAWES est peu adaptée. Il montre qu'une partie plastique intervient dans la valeur de la composante élastique  $\delta_{el}$ . Après avoir mis en évidence les différences obtenues par la formule de DAWES et l'expérience, il propose une méthode permettant d'obtenir la valeur critique de l'écartement de fissure à l'amorçage  $\delta_c$ .

Cette méthode pour déterminer  $\delta$  ou  $\delta_c$  est utilisable pour les éprouvettes C.T. ou de flexion 3-4 points. Elle ne peut pas être utilisée quand la fissure croît car on ne connaît pas l'instant précis où la fissure s'amorcera. Ainsi, la méthode sous-estimera légèrement  $\delta$  si la fissure se propage.

Souvent, les valeurs de l'écartement de fissure  $\delta$  sont utilisées pour établir la courbe  $\delta$ - $\Delta a$  d'où on ne pourra déduire que la valeur critique de  $\delta$  :  $\delta_c$ .

#### 2.4.4) Autres critères de rupture en terme de déformation locale critique

Différents critères de rupture en terme de déformation locale critique ont été proposés. Ils prennent en compte les paramètres suivants :  $E$ ,  $\epsilon^c_l$  (déformation locale critique identifiée à la déformation à la rupture en déformation plane  $\epsilon_F(DP)$ ),  $X_c$  (distance critique) parfois reliée à  $l_i$  (distance interinclusionnaire) et  $f_v$  la fraction volumique.

##### 2.4.4.1) Modèle de KRAFT

C'est le plus ancien [39]. Il date de 1964 et fait l'hypothèse que la répartition des déformations à la pointe de la fissure est donnée par la solution de la mécanique linéaire de la rupture.

On a donc :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} \quad (2.22)$$

Dans le cas critique, on a  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_1^c$ ,  $r = X_c$  et  $K_I = K_{IC}$ , par conséquent :

$$\varepsilon_1^c = \frac{K_{IC}}{E\sqrt{2\pi X_c}} \quad (2.23)$$

#### 2.4.4.2) Modèle de BARSOM et PELLIGRINO

Ils font l'hypothèse que la déformation locale critique n'est pas affectée par le gradient de déformation et la pression hydrostatique [40]. La déformation à la pointe de la fissure est donc liée à l'écartement de fissure par une relation de type :

$$\varepsilon_{yy} = A \delta^B \quad (2.24)$$

où A est un facteur de proportionnalité, et B une constante inférieur ou égale à 1.

D'après la mécanique linéaire de la rupture, on a :

$$\delta = \frac{K_I^2}{E Re} \text{ d'où : } K_I = C \sqrt{Re \varepsilon_{yy}^{1/B}} \text{ et } C = \sqrt{\frac{E}{A^{1/B}}} \quad (2.25)$$

Dans le cas critique, on a la formule suivante :

$$K_{IC} = C \sqrt{Re \varepsilon_{F(DP)}^{1/B}} \quad (2.26)$$

$\varepsilon_{F(DP)}$  est la déformation critique en déformations planes. En traction, on considère qu'elle vaut un tiers de la déformation critique.

Les essais ont montré que la déformation plastique locale critique décroît lorsque la pression hydrostatique augmente.

#### 2.4.4.3) Modèle de RITCHIE, SERVER et WULLAERT

Par expériences réalisées sur plusieurs aciers dont la limite élastique est comprise entre 550 et 1720 MPa, les auteurs [41] ont montré que la ténacité varie avec la racine carré de la déformation critique. En utilisant la solution de RICE et JOHNSON (qui tient

compte de l'éroussement de la fissure), ils ont calculé la répartition de la déformation à la pointe de la fissure.

On a donc :

$$\delta = D \frac{K_I^2}{E Re} \quad (2.27)$$

Dans le cas critique, et avec  $D = 1/2$  (valeur généralement admise), on obtient finalement :

$$K_{IC} = \sqrt{2\delta_c E Re} \quad (2.28)$$

#### 2.4.4.4) Modèle d'OSBORNE et EMBURY

Ils utilisent la singularité en  $1/x$  pour décrire la distribution des déformations en pointe de fissure. De plus, au moment de la rupture, la déformation est constante et vaut  $\epsilon_1^c$  sur une distance inférieure à la distance caractéristique  $X_c$ .

Enfin, la déformation  $\epsilon_{yy}$  est égale à la déformation au niveau de la limite d'élasticité (soit  $\epsilon_y$ ) sur une distance  $d$  égale à  $R_y$  ; où  $R_y$  est le diamètre de la taille de la zone plastique selon IRWIN. Cette distribution est représentée sur la figure 2.6.

$$\text{On a donc : } R_p = \frac{2 \epsilon_1^c}{3 \epsilon_y} X_c \quad (2.29)$$

A partir des travaux de CLAUSING [42], OSBORNE et EMBURY [43] admettent que la déformation locale critique est égale à la déformation à rupture en déformations planes, qui vaut  $2/3$  de la déformation critique mesurée sur des éprouvettes axisymétriques :

$$\epsilon_1^c = \epsilon F(DP) = 2/3 \epsilon F(ax) \quad (2.30)$$

Les auteurs ont également calculé le taux d'énergie disponible  $G_{IC}$  en utilisant une description simplifiée de l'état de contrainte en approximant la contrainte équivalent critique dans la zone plastique à la résistance ultime du matériau :  $\sigma_{eq,c} = R_m$ .

D'où :

$$G_{IC} = R_m \int X_c \epsilon(x) dx$$

$$\Leftrightarrow G_{IC} = \frac{2}{3} R_m \epsilon_1^c X_c \ln \left( \frac{2 \epsilon_1^c}{3 \epsilon_y} \right)$$

et donc la ténacité  $K_{IC}$  vaut :

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{2}{3} Rm \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) \varepsilon_1^c X_c \ln \left( \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_1^c}{\varepsilon_y} \right)} \quad (2.31)$$

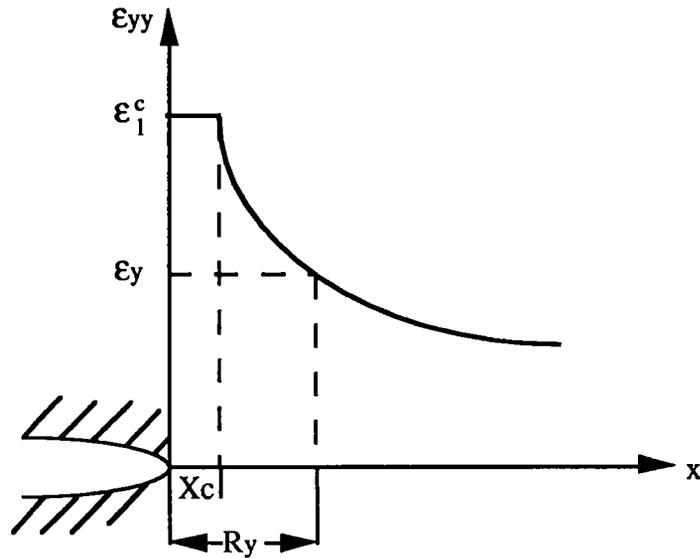


Figure 2.6 : Description de la distribution des déformations utilisée par OSBORNE et EMBURY.

#### 2.4.4.5) Modèle de FIRRAO et ROBERTI

Ces auteurs [44] relient la répartition des déformations à la pointe de la fissure à l'intégrale  $J$  à l'aide de l'analyse de RICE et JOHNSON dans le cas d'un matériau écouissable obéissant à une loi de comportement de type :

$$\sigma = Re \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right)^n \quad (2.32)$$

$n$  est le coefficient d'écrouissage.

La déformation dans le plan perpendiculaire au plan de fissure vaut :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y \left[ \frac{(n + 0,5)(n + 1,5) \Gamma_{(n+0,5)} J}{\Gamma_{(0,5)} \Gamma_{(n+1)} Re \varepsilon_y \rho} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.33)$$

La fonction gamma s'écrit :  $\Gamma_t = \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$

Dans les conditions critiques, on a  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_c^1$  et  $\rho = \rho_c$ . Soit  $F(\Gamma(n))$  la fonction :

$$F[\Gamma(n)] = \left[ \frac{(n+0,5)(n+1,5)\Gamma_{(n+0,5)}}{\Gamma_{(0,5)}\Gamma_{(n+1)}} \right] \quad (2.34)$$

On obtient donc dans les conditions critiques la relation suivante :

$$J_{IC} = Re^{(1-n)} \left( \frac{(\varepsilon_c^1)^{n+1} E^n}{F[\Gamma(n)]} \right) \rho_c \quad (2.35)$$

## 2.5) Avantages et inconvénients des critères de rupture locaux et globaux

L'approche locale à partir de  $f(\sigma)$  et  $f(\varepsilon)$  doit permettre d'obtenir un critère indépendant de la géométrie et du mode de chargement. Cependant, elle reste plus difficile à utiliser car la mesure de la déformation locale est peu évidente.

L'intérêt des critères énergétiques est qu'ils donnent une meilleure interprétation physique des phénomènes. De plus, les calculs sont généralement réalisés loin des singularités (comme c'est le cas des intégrales de contours). Cependant, de même qu'il n'est pas aisé de mesurer la déformation locale, il est encore plus difficile de relever l'énergie qui est une quantité non mesurable expérimentalement.

L'avantage des critères globaux réside dans la simplicité de la mesure. En effet, la déformation globale, mesurée loin de la perturbation apportée par l'entaille ou la fissure, est un paramètre plus accessible que la déformation locale, mais ne renseigne pas exactement sur l'état d'endommagement du matériau au voisinage du fond de fissure.

## **DEUXIÈME PARTIE**

### **ÉTUDE EXPÉRIMENTALE**

## **Introduction à l'étude expérimentale**

L'application d'une contrainte, même inférieure à la limite élastique, sur une éprouvette entaillée peut plastifier localement le matériau. Cela est dû à l'amplification locale de la contrainte qui dépend du rayon et de l'angle de l'entaille, respectivement  $\rho$  et  $\psi$ , ainsi que du mode de chargement. Bien que l'on soit globalement dans le domaine élastique, les calculs basés sur la théorie de l'élasticité ne sont plus exacts et ne traduisent plus ce qui se passe en fond de fissure ou d'entaille.

Ceci est encore plus vrai lorsque l'on souhaite étudier ce qui se passe localement dans le matériau en se plaçant juste à l'instant de la rupture. Dans ce cas là, nous disons que les paramètres externes (comme la charge appliquée) ou les paramètres internes (comme la déformation globale ou locale, la contrainte globale ou locale ...) atteignent des **valeurs critiques**.

Nous cherchons donc à étudier la rupture dans des éprouvettes où le ligament est plastifié en optant pour une approche en terme de déformation critique. Pour cela, il nous faut étudier l'allure des distributions des contraintes et des déformations élastoplastiques, dans le cas d'éprouvettes entaillées fortement plastifiées pour deux types d'acier : un acier peu ductile (E550), et un autre beaucoup plus ductile (E24).

### **1) Déroulement de l'étude expérimentale**

Tout d'abord, nous étudierons, dans le chapitre 3, les résultats d'essais sur des éprouvettes C.T. en acier E550. Ces essais permettront de voir l'influence de l'acuité d'entaille sur la contrainte maximale critique  $\sigma_{\max}^c$  et sur la déformation maximale critique  $\epsilon_{\max}^c$ . La distribution des contraintes en fond d'entaille  $\sigma_{yy} = f(\rho)$  ainsi que celle des déformations en fond d'entaille  $\epsilon_{yy} = g(\rho)$  seront obtenues par des calculs aux éléments finis.

Dans le chapitre 4, nous réaliserons une seconde série d'essais sur des éprouvettes K.T. en acier E24. À l'aide du code de calcul, nous étudierons l'influence de la géométrie d'entaille, et notamment la longueur  $a$  et le rayon d'entaille  $\rho$  sur les valeurs critiques de la contrainte maximale et de la déformation maximale. Les distributions des contraintes et des déformations en fond d'entaille nous permettront de lier la distance effective critique  $X_m^\epsilon$ , la distance effective  $X_{\text{eff}}^\epsilon$  et la ténacité au rayon d'entaille :  $X_{m,\epsilon}^c = f(\rho)$  et  $X_{\text{eff},\epsilon}^c = g(\rho)$ .

### 3 Étude sur les éprouvettes C.T.

#### 3.1 Introduction

Dans un premier temps, nous allons étudier l'allure des distributions des contraintes et des déformations élastoplastiques dans le cas d'éprouvettes entaillées dont la section réduite est fortement plastifiée.

Pour cela, nous avons réalisé une série d'essais de rupture sur un acier peu ductile : l'acier E550. Les éprouvettes, de type C.T, sont sollicitées en traction. Elles ont toutes la même géométrie mais la valeur du rayon en fond d'entaille  $\rho$  varie.

Les essais expérimentaux ont permis d'obtenir les courbes charge-déplacement. On réalise ensuite des calculs par éléments finis en plasticité en appliquant la valeur de la charge critique afin d'étudier l'influence de l'acuité sur les paramètres suivants :

- La distribution des contraintes en fond d'entaille :  $\sigma = f(\rho)$ ,
- La distribution des déformations en fond d'entaille :  $\varepsilon = g(\rho)$ ,
- La contrainte maximale critique :  $\sigma^c_{\max}$ ,
- La déformation maximale critique :  $\varepsilon^c_{\max}$ .

Les distributions des déformations nous permettent de déterminer les valeurs de la distance effective minimale critique  $X^c_{m,\varepsilon}$ , de la distance effective critique  $X^c_{\text{eff},\varepsilon}$  et celle de l'angle  $\alpha''$  (qui caractérise la singularité de déformation pour une entaille). On forme alors les produits  $\varepsilon^c_{\max}(X^c_{m,\varepsilon})^{\alpha''}$  et  $\varepsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''}$ , qui représentent la ténacité du matériau, que l'on compare au produit  $\varepsilon^c_{\max}\sqrt{\rho}$  (facteur de ductilité à l'entaille pour RANDALL et MERKLE [30]).

L'acuité est définie comme l'inverse du rayon d'entaille :  $1/\rho$ .

#### 3.2) Protocole d'essais

Nous avons réalisé des éprouvettes possédant quatre géométries d'entaille différentes :  $\rho = 1$  mm,  $\rho = 0,75$  mm,  $\rho = 0,5$  mm et  $\rho = 0,1$  mm. Pour des raisons économiques, nous avons utilisé des éprouvettes déjà présentes au laboratoire, c'est pourquoi la profondeur d'entaille est différente pour le rayon d'entaille  $\rho = 0,5$  mm.

$a = 44$  mm pour  $\rho = 1$  mm,  $\rho = 0,75$  mm et  $\rho = 0,1$  mm,

$a = 40$  mm pour  $\rho = 0,5$  mm.

Le matériau utilisé est un acier E 550. La loi de comportement de ce matériau est déterminée à partir d'un essai de traction réalisé sur une éprouvette normalisée. Cette loi est nécessaire pour effectuer les calculs par éléments finis.

Les caractéristiques que nous obtenons pour la limite élastique et la contrainte ultime sont les suivantes :

$$Re = 572 \text{ MPa}$$

$$Rm = 684 \text{ MPa}$$

La loi de comportement nous permet également de déduire cinq couples contrainte-déformation que nous utiliserons lors du calcul (Cf. paragraphe 3.4).

Toutes les éprouvettes ont les dimensions suivantes (dans l'annexe 1, nous donnons un dessin de définition de ces éprouvettes) :

$$B = 15 \text{ mm (où B est l'épaisseur),}$$

$$W = 80 \text{ mm,}$$

$$L = 96 \text{ mm,}$$

$$b = W - a = 36 \text{ mm (ou 40 pour } \rho = 0,5 \text{ mm),}$$

$$\psi = 40^\circ \text{ (angle de l'entaille).}$$

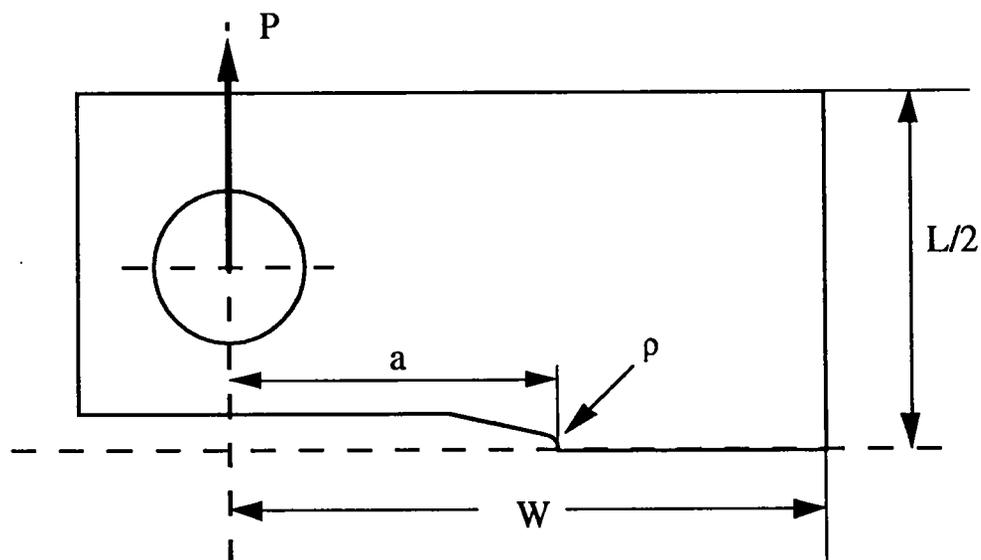


Figure 3.1 : Plan en coupe des éprouvettes C.T.

Les essais ont été réalisés sur une machine servo-hydraulique INSTRON de traction compression ayant une capacité de  $\pm 100$  KN. Pour chaque éprouvette, nous avons enregistré la courbe charge-déplacement au niveau du point d'application de l'effort à l'aide d'un capteur de déplacement et du matériel d'acquisition des résultats de la machine servo-hydraulique INSTRON.

### 3.3) Résultats

#### 3.3.1) Résultats expérimentaux

Pour chaque acuité, nous avons réalisé deux essais afin de limiter l'influence de la dispersion. Lors de l'exploitation des résultats, nous prendrons la moyenne des valeurs obtenues au cours de ces essais

Nous constatons que la force critique augmente avec le rayon d'entaille (du fait de la différence de la profondeur d'entaille, le cas  $\rho = 0,5$  mm doit être mis à part). Les résultats obtenus lors des essais sont répertoriés dans le tableau 4.1.

a (mm)	Rayon d'entaille (mm)	Charge critique (N)		
		1 <sup>ière</sup> série	2 <sup>ième</sup> série	Moyenne
44	1	34000	33900	33950
44	0,75	33700	33100	33500
40	0,5	40650	41150	40900
44	0,1	32550	32200	32375

Tableau 3.1 : Résultats obtenus lors des essais.

La figure 3.2 illustre la variation linéaire de la charge critique avec le rayon d'entaille lorsque les trois entailles ont la même profondeur. Nous avons vu précédemment que l'entaille était moins profonde pour l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ . Il en résulte que la charge à rupture est plus importante. C'est pour cela que nous ne faisons pas apparaître ce point sur cette figure.

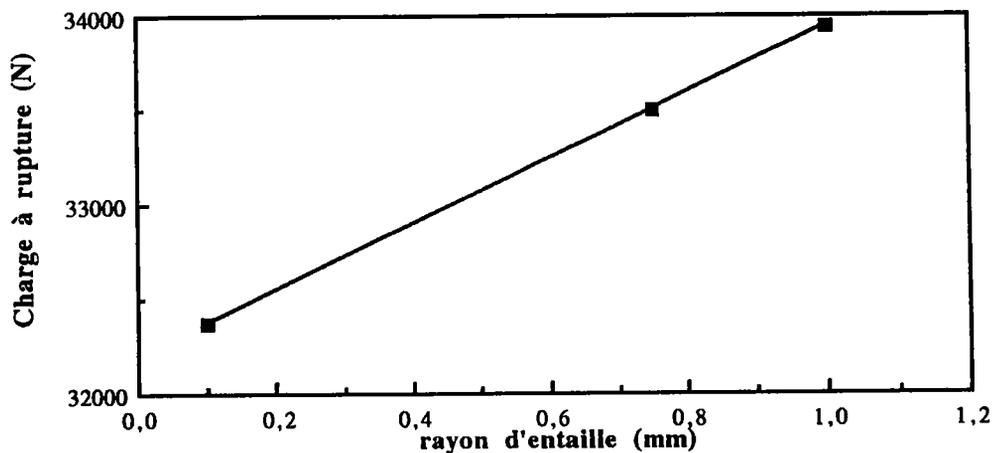


Figure 3.2 : Variation de la charge critique en fonction de  $\rho$ .

La variation de la charge conduit à une variation de la contrainte nominale dans la section réduite. Celle-ci se calcule avec la formule suivante :

$$\sigma_N^c = \frac{P_c}{B(W-a)} \left[ 1 + \frac{3(W+a)}{W-a} \right] \quad (3.1)$$

Pour les quatre acuités, la valeur de la contrainte nominale critique est de l'ordre de la résistance ultime de l'acier utilisé. Cependant, on constate que pour  $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $\rho = 0,75 \text{ mm}$ ,  $\sigma_N^c$  est légèrement supérieure à la valeur de la contrainte ultime  $R_m$  (684 MPa).

Rayon d'entaille (mm)	Contrainte nominale critique (MPa)
1	712,53
0,75	703,08
0,5	681,66
0,1	679,47

Tableau 3.2 : Variation de  $\sigma_N^c$  en fonction de  $\rho$ .

La figure 3.3 illustre le tableau 4.2. Compte tenu de la variation de la charge critique, elle aussi linéaire, la contrainte nominale critique augmente de façon linéaire avec le rayon d'entaille. Sur la figure 3.3, nous représentons également la valeur obtenue pour  $\rho = 0,5 \text{ mm}$ .

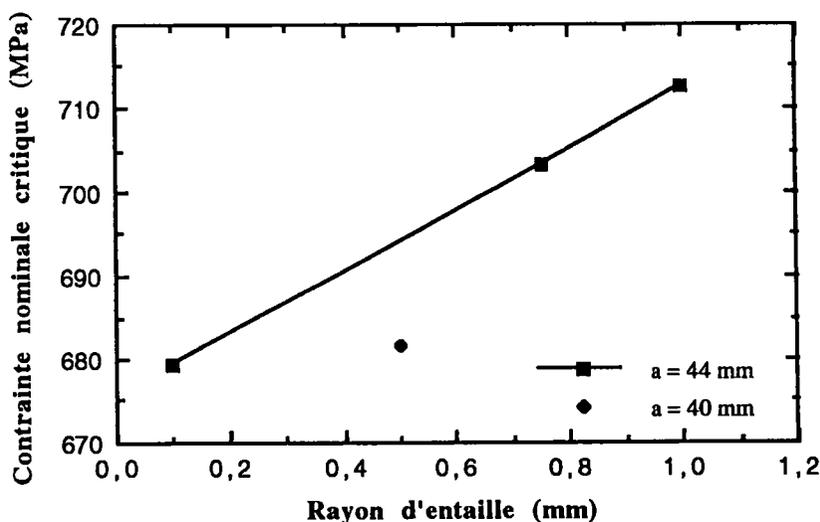


Figure 3.3 : Variation de  $\sigma_N^c$  en fonction de  $\rho$ .

Lors de la réalisation d'essais, les résultats sont toujours entachés d'une certaine dispersion due soit au matériau, soit aux conditions d'essai, etc....

Le fait de dépasser la valeur de la contrainte ultime gênera lors du traitement des résultats par des méthodes analytiques car nous ne pourrions définir la valeur de la déformation nominale critique à l'aide d'une loi de LUDWIK ( $\sigma = K\epsilon^n$ ). En effet, celle-ci ne s'applique que jusqu'à la valeur de  $R_m$ .

### **3.4) Calculs aux éléments finis effectués sur les éprouvettes C.T.**

#### **3.4.1) Matériels et paramètres de calcul**

##### **3.4.1.1) Matériels informatiques utilisés**

Les calculs sont effectués sur station SUN à l'aide de deux logiciels : DISPLAY 3 et NISA 2.

DISPLAY 3 permet de dessiner la géométrie de l'éprouvette considérée et de fixer tous les paramètres (comme le maillage, les conditions limites . . .) qui ne sont pas liés au matériau.

NISA est le logiciel de calcul de structure proprement dit. En élastoplasticité, le logiciel applique, à chaque itération, un palier de chargement. Il passe à l'itération suivante lorsque la précédente converge.

On a la possibilité de fixer le nombre d'itérations sachant que l'on a la règle suivante :

$$\text{charge appliquée à chaque itération} = \text{charge totale}/(\text{nb itérations})$$

Pour des raisons de commodité, nous fixons le nombre d'itérations à 10. La charge appliquée est ainsi divisée par 10, ce qui nous permet de faire correspondre, à chaque incrément de charge, 10% de la charge totale.

##### **3.4.1.2) Paramètres de calcul**

###### **3.4.1.2.1) Loi de comportement**

Les calculs sont réalisés selon les conditions suivantes :

- Calcul en élastoplasticité,
- Modèle de VON MISES,

- Loi de comportement du matériau décrite par cinq points (Voir tableau 3.3)
- Charge appliquée : charge critique obtenue lors des essais.
- Conditions de contraintes planes

Pour un calcul en élastoplasticité, le logiciel a besoin de trois à cinq couples contrainte-déformation déduits de la loi de comportement du matériau.

De l'essai de traction réalisé sur notre acier, nous choisissons les points suivants :

Déformations	Contraintes (MPa)
0,0064	583,4
0,01	596,91
0,0166	612,5
0,08	684,1
0,1	690

Tableau 3.3 : couples  $\sigma - \epsilon$  pris pour décrire le matériau dans le domaine plastique.

Dans le domaine plastique, la loi de comportement de l'acier E550 peut se diviser en deux parties (figure 3.4) : une première zone où les contraintes augmentent de façon puissance en fonction des déformations, et une seconde où elles varient linéairement.

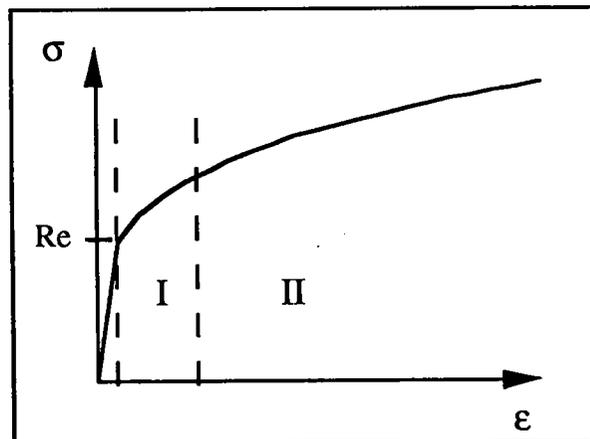


Figure 3.4 : Différentes zones du domaine plastique

Pour décrire la loi de comportement du matériau le plus fidèlement possible, il faut tenir compte de ces deux zones, tout en respectant quelques règles simples liées au fonctionnement du logiciel.

Tout d'abord, il convient de prendre deux ou trois points dans le domaine élastoplastique (première partie de la loi de comportement) afin de décrire le plus possible " la loi puissance " .

Puis, il faut donner le couple ( $\sigma_r - \epsilon_r$ ) correspondant aux valeurs à maximales obtenues lors de l'essai de traction normalisé.

Enfin, il convient de donner un cinquième couple ( $\sigma - \epsilon$ ) pris au delà de la contrainte ultime. Pour ce dernier couple, il faut augmenter la déformation de façon importante pour une faible variation de la contrainte.

Lors de la réalisation des calculs, nous avons été confronté à deux problèmes majeurs :

- le logiciel utilisé ne reconnaît pas la rupture,
- la valeur de la contrainte de rupture  $R_m$  n'est jamais demandée.

NISA fait une extrapolation de la loi de comportement lorsque les contraintes dépassent la valeur donnée au niveau du dernier couple contrainte - déformation entré. C'est pourquoi il est **primordial** et **obligatoire** de donner un couple ( $\sigma - \epsilon$ ) voisin du niveau critique si on veut avoir des résultats réalistes. Autrement, en cas de singularité ou de concentration de contraintes, les valeurs obtenues en contraintes et en déformations seront surestimées et donc fausses.

Le temps consacré à résoudre ce problème de calcul nous a permis de constater qu'en cas de concentration de contraintes (par exemples, pour une pièce entaillée), si l'on applique un effort entraînant une contrainte nominale de 0,8 fois la limite élastique dans la section réduite, les contraintes maximales obtenues seront supérieures aux contraintes réelles si le couple ( $\sigma_r - \epsilon_r$ ) n'est pas introduit dans le logiciel. Nous avons fait des calculs pour  $\sigma_N = R_e$  en ne prenant que des points entre 0,6% et 1,66% de déformation, et nous avons obtenus des contraintes en fond d'entaille de l'ordre de **10 000 MPa**, ce qui souligne bien le rôle de l'entrée des deux derniers couples ( $\sigma - \epsilon$ ).

#### 3.4.1.2.2) Éléments

Nous avons effectués nos calculs en contraintes planes. Nous utilisons donc des éléments quadrilatères simples en 2D. Sur NISA, les éléments sont définis par deux variables :

- NKTP : qui est le type de l'élément,
- NORDRE : qui donne la forme de l'élément ainsi que le nombre de noeuds.

Dans notre cas, nous avons pris :

- NKTP = 1 (pour définir le mode de calcul en contraintes planes),
- NORDRE = 1 (quadrilatère à 4 noeuds).

L'élément a deux degrés de liberté par noeuds ( $u_x$  et  $u_y$ ) et l'état de contrainte se caractérise par 3 composantes :  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ , et  $\tau_{xy}$ . Il permet l'obtention, entre autre, des efforts internes, des déplacements et des contraintes aux noeuds (ou aux points de GAUSS ou au centre de l'élément (au choix de l'utilisateur)).

De plus, pour une analyse non linéaire, il permet la prise en compte des grands déplacements. Du fichier de résultat, nous récupérons les différentes valeurs des contraintes, des déplacements et des déformations aux noeuds.

### 3.4.1.2.3) Caractérisation de la non linéarité et définition de la configuration de référence

La non linéarité du calcul peut être due :

- au *matériau* (la relation contrainte-déformation dépend alors de la valeur des contraintes, des déformations ou des déplacements),
- à la *géométrie* (où les déformations sont obtenues à partir d'un opérateur différentielle non-linéaire, ce qui permet de prendre en compte les grands déplacements, les grandes déformations et les grandes rotations),
- à une combinaison des deux types.

L'acier E550 étant un peu ductile, nous avons choisi de définir la non linéarité comme une combinaison de la non linéarité due au matériau et à la géométrie.

Lors de la réalisation des calculs, il convient de définir la configuration de référence à partir de laquelle le logiciel se base pour calculer les différents paramètres recherchés (comme les déplacements, les contraintes internes ...). Pour décrire le référentiel, on utilise des variables indépendantes qui sont la position  $x$  d'une particule P dans une configuration (C) au temps  $t$ . Il est important de bien noter que le choix de la configuration de référence est arbitraire et qu'il n'affectera pas mathématiquement les résultats obtenus.

Une description particulière du référentiel a été introduite par EULER en fixant la position  $x_0$  du point P au temps particulier  $t = 0$ . Cette description particulière est appelée *formulation lagrangienne* dans la littérature. Cependant, tout autre choix de configuration de référence à un temps spécifique  $t \neq 0$  sera également de nature lagrangienne, dans le sens où la variable indépendante  $x$  est considérée à un instant  $t$  fixe.

Le programme donne deux formulations de références :

formulation lagrangienne *totale*

formulation lagrangienne *réactualisée*

La formulation lagrangienne totale utilise une formulation figée (la pièce non déformée) comme référence pour décrire le mouvement de la pièce. Dans le second cas, la configuration de référence est toujours remise à jour entre deux itérations.

Après deux calculs identiques en ne modifiant que ce paramètre, nous avons choisi d'utiliser la première formulation car les différences obtenues étaient infimes.

### 3.4.2) Conditions aux limites de notre problème

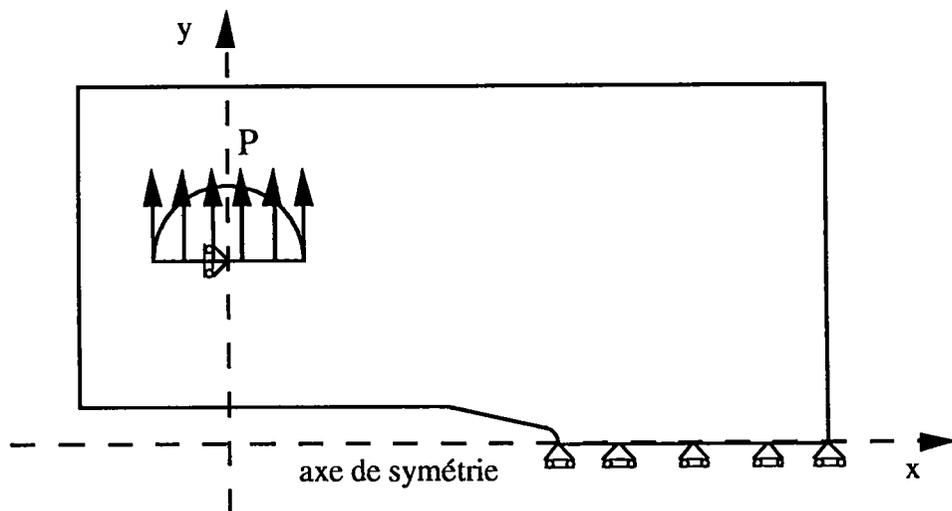


Figure 3.5 : Conditions aux limites des calculs réalisés sur les éprouvettes C.T.

Les éprouvettes C.T. possèdent un axe de symétrie qui se situe au niveau de l'entaille (Cf. figure 3.1).

Nous n'avons maillé qu'une demi - éprouvette afin de réduire le nombre de noeuds et d'éléments utilisés, ce qui se traduit par un gain de temps considérable.

Pour tenir compte de la symétrie, les noeuds situés le long de la section réduite (en fond d'entaille) ont vu leurs déplacements suivant  $y$  bloqués. De la même façon, l'axe de la machine utilisée ne se déplace que suivant l'axe des  $y$ . Il a donc fallu bloquer les déplacements suivant l'axe des  $x$  au niveau du point d'application de l'effort tout en autorisant la rotation autour de l'axe  $z$ . Les conditions aux limites appliquées sont représentées sur la figure 3.5.

### 3.4.3) Maillage

La réalisation du maillage est une partie extrêmement importante et complexe. En effet les résultats peuvent varier énormément avec un maillage non adapté à la géométrie de la pièce étudiée. Il faut donc veiller à ne pas introduire de discontinuité entre les éléments. Pour cela, il est préférable que le rapport existant entre les surfaces de deux éléments contiguës ne dépasse pas 2 (la valeur de 1,5 est même préconisée).

La force du logiciel DISPLAY réside dans la souplesse proposée à l'utilisateur quant à la modélisation de sa structure.

Pour mailler une pièce, le logiciel demande que celle-ci soit divisée en surface (PATCH) de trois à quatre côtés (pour un travail en deux dimensions). L'utilisateur définit alors le nombre total d'éléments qu'il souhaite avoir sur sa surface en fixant le nombre d'éléments de chaque arête. De plus, pour chaque arête il a la possibilité de définir un coefficient qui représente le rapport de la longueur du dernier élément sur le premier.

Ainsi, on peut facilement faire un maillage *continu* avec des éléments plus petits dans la zone intéressante (comme, par exemple, en fond d'entaille), et d'autres plus importants loin des zones de forte concentration de contrainte ou de déformation.

Cet outil permet de mailler fin dans une zone particulièrement intéressante sans pour autant être obligé de mailler finement toute la structure. Ceci se traduit donc par un gain d'éléments et de noeuds, et donc, par la même occasion, par un gain de temps considérable lors de la réalisation du calcul.

Sur la figure 3.6, nous avons représenté schématiquement l'allure de notre maillage en fond d'entaille. Les traits forts représentent les surfaces (PATCH) tandis que les traits fins simulent le contour des éléments.

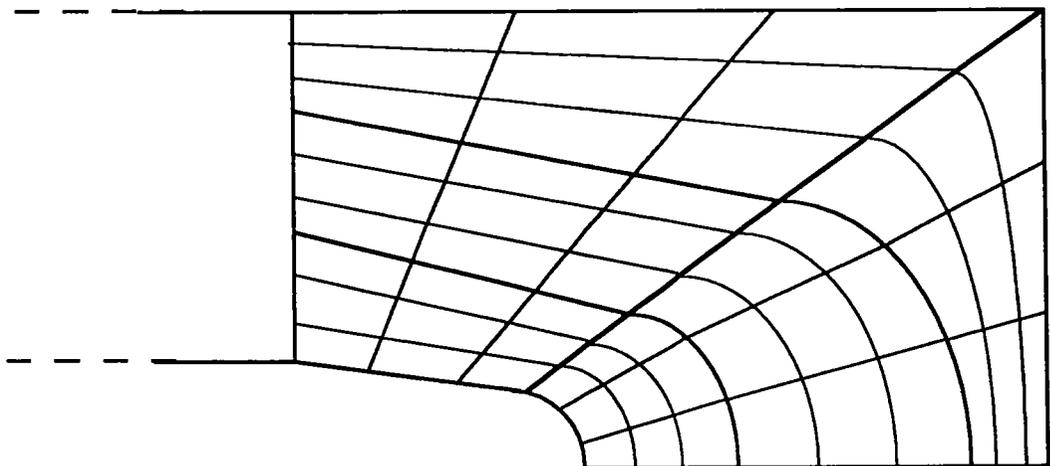


Figure 3.6 : Schématisation du maillage en fond d'entaille pour les éprouvettes C.T.

### 3.5) Analyse des contraintes

#### 3.5.1) Analyse des contraintes en fond d'entaille : itération par itération

Pour les quatre acuités, nous avons tracé la distribution des contraintes (normalisées par la contrainte nominale) en fonction de la distance par rapport au fond de l'entaille (normalisée par la profondeur de l'entaille).

Pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ , la distribution des contraintes, normalisées par la contrainte nominale, est représentée sur les figures 3.7 et 3.8. Les distributions des contraintes relatives aux autres rayons d'entaille figurent dans la première partie de l'annexe 2.

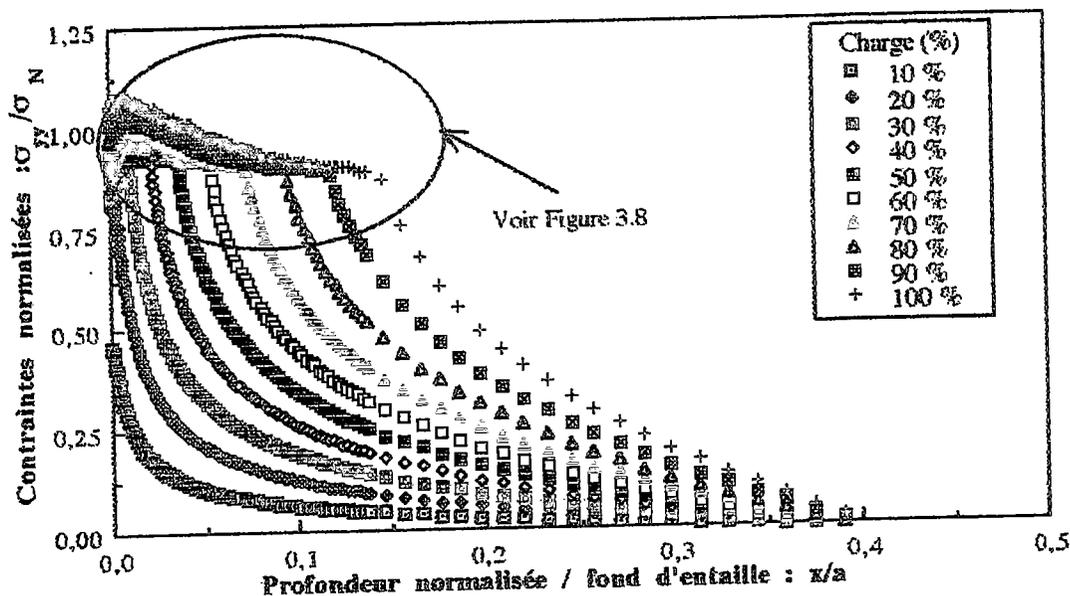


Figure 3.7 : Distribution des contraintes normalisées en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

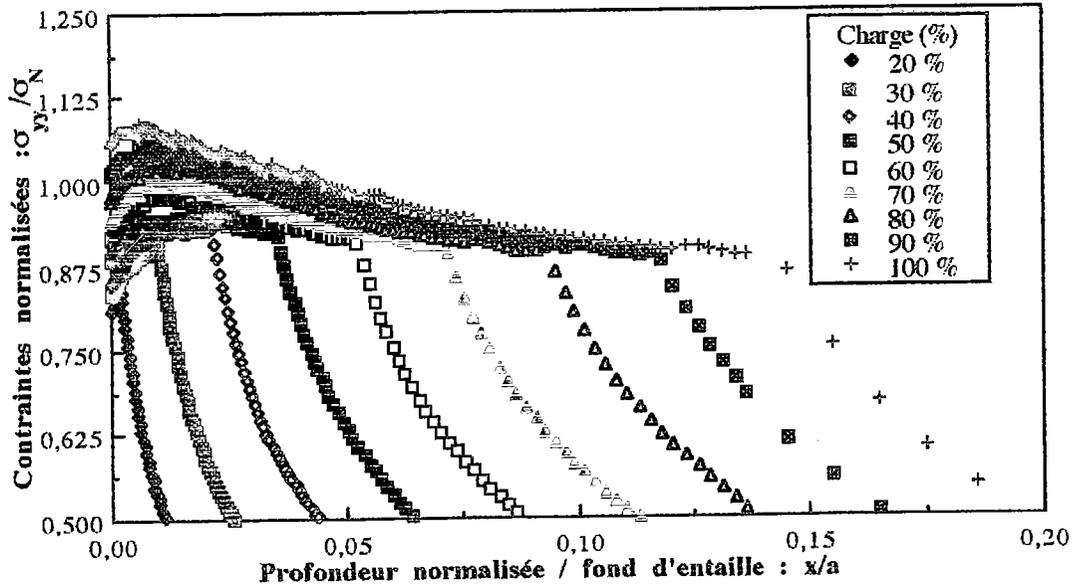


Figure 3.8 : Zoom sur la distribution des contraintes normalisées en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

Pour les faibles acuités ( $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $\rho = 0,75 \text{ mm}$ ), les courbes sont analogues :

- Pour le premier palier de chargement (10% de la charge totale appliquée), on reste dans le domaine élastique. Les courbes donnent une variation en  $1/\sqrt{x}$  près du fond de l'entaille, puis une partie quasiment linéaire par la suite. La contrainte maximale se trouve en fond d'entaille.

- Pour les paliers suivants, la plasticité apparaît. La contrainte maximale n'est plus en fond d'entaille, mais se trouve à une distance variable et proche du fond d'entaille. Les distributions des contraintes prennent alors plusieurs formes qui dépendent de la charge appliquée et donc de l'étendue de la zone plastique :

- \* Si la charge appliquée n'est pas encore trop importante (itération 2 et 3), la courbe se divise en 2 parties :

- Une première partie, dans le domaine plastique, où la contrainte augmente jusqu'à atteindre la contrainte maximale,
- Une seconde partie, élastique, où la distribution de la contrainte est en  $1/\sqrt{x}$ .

- \* Si la charge est relativement élevée, on a alors 3 parties distinctes sur la courbe :

- La contrainte croît jusqu'à la contrainte maximale,
- La contrainte décroît faiblement, mais on reste dans le domaine plastique,
- Dans le domaine élastique, la distribution est en  $1/\sqrt{x}$ .

- Pour ces deux acuités, les contraintes maximales n'ont pas des valeurs très importantes (774 MPa pour  $\rho = 1$  mm et 800 MPa pour  $\rho = 0,75$  mm). La triaxialité des contraintes fait que localement, la contrainte maximale est légèrement supérieure à la contrainte ultime  $R_m$  obtenue lors de l'essai normalisé.

- Pour les acuités plus importantes ( $\rho = 0,5$  mm et  $\rho = 0,1$  mm), les courbes diffèrent un peu.

Pour  $\rho = 0,5$  mm, les courbes sont analogues à celles obtenues pour les deux acuités précédentes ; toutefois, pour l'itération 10 (100% de la charge appliquée), la contrainte maximale est élevée. La courbe ne présente alors plus que deux parties, car la contrainte maximale se trouve en fond d'entaille (pour  $x = 0$ ). Il y'a donc une première décroissance (en  $1/\sqrt{x}$ ) dans le domaine plastique, puis une autre dans le domaine élastique.

Ici, la contrainte maximale vaut 850 MPa, ce qui représente environ 1,24 fois la contrainte ultime.

- Pour  $\rho = 0,1$  mm, cette évolution est plus nette. La plastification apparaît dès la première itération. À partir de la quatrième itération, la distribution des contraintes est divisée en deux parties. Ces parties ont la particularité de présenter toutes les deux une décroissances en  $1/\sqrt{x}$ .

La contrainte maximale est importante : 1120 MPa ; soit 1,64 fois la contrainte ultime. Elle se situe pour  $x = 0$  ; c'est à dire en fond d'entaille.

Nous effectuons nos calculs en contraintes planes. Ainsi, les résultats obtenus sont peut être faussés par la triaxialité des contraintes en fond d'entaille. En effet, celle-ci engendre une surestimation de la contrainte à rupture, et donc de  $\sigma_{yy}$  sur une zone très proche du fond d'entaille.

Dans l'annexe 2, nous donnons deux tableaux qui présentent, pour chaque itération et pour chaque acuité, la valeur de la contrainte maximale obtenues par le calcul (en MPa) ainsi que sa position (en mm) par rapport au fond de l'entaille.

La distance entre le fond de l'entaille et le point où la contrainte est maximale augmente puis décroît avec le niveau de chargement. Cette valeur est maximale entre la troisième itération (pour  $\rho = 0,1$  mm où elle vaut 0,071 mm) et la septième itération ( $\rho = 0,5$  mm où elle vaut 0,408 mm).

Pour  $\rho = 1$  mm et  $\rho = 0,75$  mm, le calcul montre que la contrainte maximale ne se trouve pas en fond d'entaille lorsque l'on se trouve en élastoplasticité (rejoignant par là les travaux rassemblés dans le chapitre 1). Par contre, ceci n'est plus vrai pour les deux autres acuités.

Il semblerait que la position de la contrainte maximale par rapport au fond d'entaille, en fonction du niveau de chargement, dépende de la profondeur de l'entaille. En effet, pour  $a = 44$  mm, la distance entre le fond de l'entaille et le point où la contrainte est maximale survient entre la troisième et la quatrième itération (soit 35% de la charge critique appliquée) alors qu'elle est maximale pour la septième itération lorsque  $\rho = 0,5$  mm.

### 3.5.2) Taille de la zone plastique

Le calcul par éléments finis permet de connaître l'allure et la taille de la zone plastique. Pour chaque acuité, nous nous sommes donc penchés sur ces deux paramètres.

On constate que globalement, la zone plastique en fond d'entaille a l'allure d'une "poire", la partie fine se trouvant en fond d'entaille, et l'axe de la zone plastique correspondant à l'axe de la section réduite.

La zone plastique est plus importante pour  $\rho = 1$  mm que pour  $\rho = 0,75$  mm. On désigne par L la longueur de la zone plastique, et H est la hauteur.

- Pour  $\rho = 1$  mm :

$L_{\max} = 6,62$  mm,

$H_{\max} = 4,01$  mm pour  $L = 3,71$  mm,

Deux couples (L - H) : (2,84 ; 3,82) et (1,25 ; 2,46).

Sur la figure 3.9, nous représentons l'allure de zone plastique (à l'échelle) pour le rayon d'entaille de 1 mm.

- Pour  $\rho = 0,75$  mm :

$L_{\max} = 6,02$  mm,

$H_{\max} = 3,71$  mm pour  $L = 3,50$  mm,

Deux couples (L - H) : (2,84 ; 3,62) et (1,25 ; 2,20).

Itérations : une itération correspond à 10% de la charge totale										
$\rho$ (mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X	0,107	0,527	1,1	1,72	2,47	3,33	4,28	5,42	6,62
0,75	X	0,145	0,509	1,01	1,60	2,29	3,11	4	4,98	6,02
0,5	X	0,238	0,61	1,185	1,855	2,65	3,57	4,62	5,76	7,04
0,1	0,06	0,24	0,59	1,02	1,6	2,26	3,04	3,91	4,87	5,88

Tableau 3.4 : Profondeur maximale de la zone plastique  $L_{\max}$  (en mm) par rapport au fond d'entaille

Dans ce tableau 3.4, le symbole " X " signifie que la contrainte maximale (en fond d'entaille) est inférieur à la limite élastique. Il n'y a donc pas de zone plastique.

Pour l'itération 8, la contrainte nominale appliquée dans le ligament est de l'ordre de la limite élastique du matériau. La longueur maximale de la zone plastique, pour cette itération, atteint en moyenne 66% de la longueur totale de la zone plastique obtenue pour l'itération 10.

Il est donc intéressant de noter que, même si la contrainte nominale appliquée dans le ligament est de l'ordre de la limite élastique, la zone plastifiée en fond d'entaille est loin d'être négligeable.

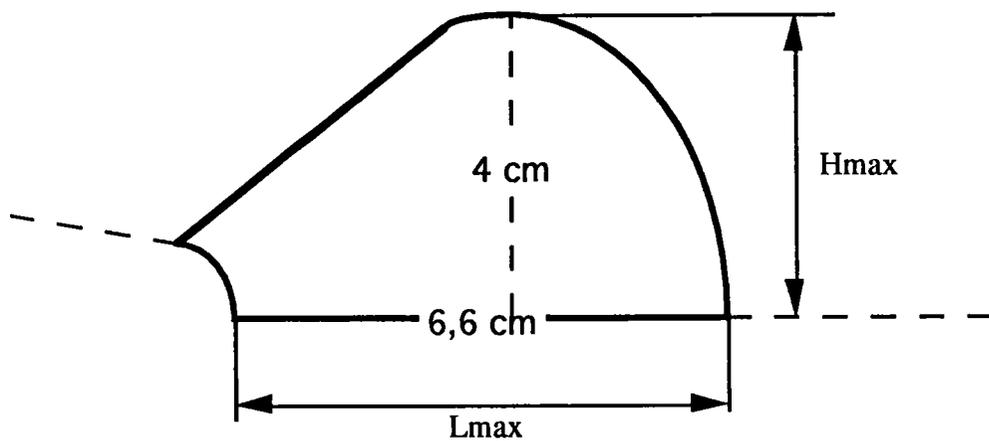


Figure 3.9 : Allure de la zone plastique en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

Pour la dixième itération, et pour une profondeur d'entaille identique, la taille de la zone plastique décroît avec l'acuité. Par contre, pour les itérations comprises entre 1 et 9, on remarque que ceci n'est plus valable.

En effet, plus le rayon d'entaille est faible, plus la contrainte croît rapidement en fond d'entaille. Pour  $\rho = 0,1$  la zone plastique apparaît dès la première itération alors que, pour les trois autres acuités, on est toujours dans le domaine élastique. Il faut donc attendre un certain niveau de contrainte pour que la tendance s'inverse et que la zone plastique soit plus importante pour les rayons d'entaille plus élevés. Dès la troisième itération,  $L_{\max}(\rho = 1) > L_{\max}(\rho = 0,5)$  et à partir de la cinquième itération, la zone plastique est d'autant plus importante que l'acuité est faible.

Cette cinquième itération correspond à une contrainte nominale moyenne de l'ordre de 361 MPa, soit 61% de la limite élastique.

### 3.5.3) Distribution des contraintes pour la dixième itération

Pour la dixième itération, c'est à dire pour 100% de la charge appliquée, nous avons représenté les distributions des contraintes pour les quatre acuités sur la figure 3.10 (échelle logarithmique) avec, en abscisse  $\ln(x/a)$  (où  $a$  est la profondeur d'entaille) et en ordonnée  $\ln(\sigma_{yy}/\sigma_N)$ .

On peut rappeler que la contrainte nominale critique  $\sigma_{cN}$  varie en fonction de l'acuité ; lors des essais, les éprouvettes n'ont pas toutes cassées pour la même valeur de l'effort.

Sur cette figure, on retrouve le fait que la contrainte maximale en fond d'entaille augmente avec l'acuité. Par contre, on observe que les quatre courbes se superposent au delà de la zone de forte concentration de contrainte.

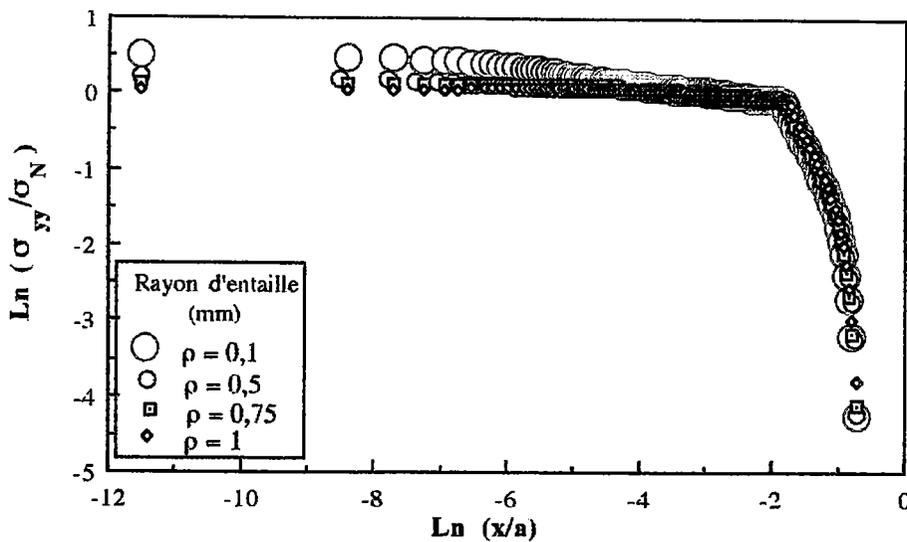


Figure 3.10 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour les quatre acuités. (Échelle logarithmique).

De la figure 3.10, nous avons séparé les résultats de chaque acuité pour obtenir les équations de droite qui approximent le mieux les contraintes dans la zone plastique à une certaine distance du fond d'entaille (Cf. annexe 2, deuxième partie).

Nous obtenons une valeur de l'angle  $\alpha$  ( qui est l'inverse de la pente de la droite) qui varie de 0,052 pour  $\rho = 0,5$  mm à 0,0936 pour  $\rho = 0,1$  mm. Le coefficient de corrélation  $R^2$  varie de 0,969 pour  $\rho = 0,5$  mm à 0,988 pour  $\rho = 0,1$  mm.

Sans considérer l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ , les trois droites obtenues (de forme  $y = -\alpha x + b$ ) sont quasiment identiques et les paramètres qui les décrivent sont les suivants :

$$0,977 \leq R^2 \leq 0,988$$

$$0,0936 \leq -\alpha \leq 0,0842$$

$$-0,296 \leq b \leq -0,27096$$

Les quatre équations de droite sont données dans le tableau 3.5 ci dessous.

	$\rho = 1 \text{ mm}$	$\rho = 0,75 \text{ mm}$	$\rho = 0,5 \text{ mm}$	$\rho = 0,1 \text{ mm}$
Équations	$y = -0,29626 - 0,091952x$	$y = -0,27096 - 0,0842x$	$y = -0,1593 - 0,052118x$	$y = -0,27653 - 0,093643x$
$R^2$	0,977	0,977	0,969	0,988

Tableau 3.5 : équations des droites caractérisant la pente dans la distribution des contraintes

### 3.6) Analyse des déformations

#### 3.6.1) Analyse des déformations en fond d'entaille : itération par itération

Sur la figure 3.11, nous avons représenté les distributions des déformations pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$  et pour la première (10%), la cinquième (50%) et la dixième et dernière itération (100%).

Les déformations sont calculées à l'aide des déplacements obtenues par le calcul. Le maillage a été effectué pour avoir des éléments de même hauteur sur toute la section réduite. La déformation est alors obtenue par application de la définition :  $\varepsilon = \Delta l / l$

Les distributions des déformations ont globalement toutes la même allure quelque soit le palier de chargement (ou l'itération) considéré, et donc la charge appliquée. En échelle linéaire, elles sont de type  $1/\sqrt{x}$ . La plastification aurait pu modifier l'allure de ces courbes (comme c'est le cas en contraintes, avec la présence du palier plastique).

Dans le cas des distributions des contraintes, la contrainte maximale ne se trouve pas nécessairement en fond d'entaille. Or, bien que les déformations soient liées aux contraintes par une loi de type LUDWIK dans le domaine plastique, la déformation maximale se trouve bien en fond d'entaille.

Ces résultats sont importants car ils montrent qu'en plasticité étendue (c'est à dire lorsque la contrainte nominale sur la section réduite est de l'ordre de la contrainte ultime) les déformations ne peuvent plus être liées aux contraintes par une loi de type LUDWIK du fait de la triaxialité des contraintes en fond d'entaille.

La fonction qui lie les contraintes aux déformations est une fonction croissante et continue. Or, nous voyons bien ici que pour une même contrainte, nous pouvons avoir deux valeurs différentes de la déformation.

Dans la première partie de l'annexe 3, nous avons porté, pour chaque acuité, différentes itérations relatives aux distributions des déformations en fond d'entaille.

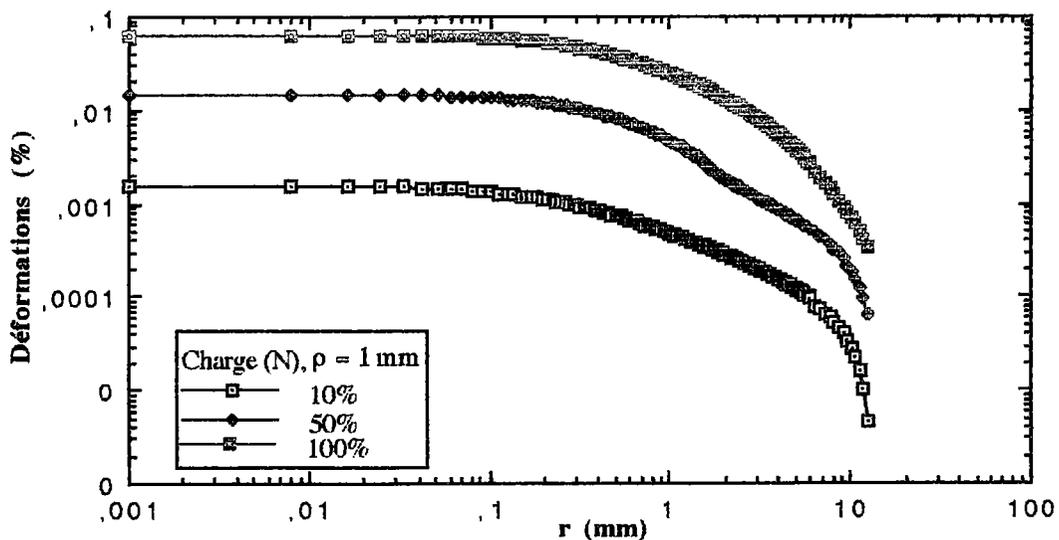


Figure 3.11 : Distribution des déformations en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  et pour trois niveaux de chargement.

### 3.6.2) Distribution des déformations pour la dixième itération

Pour la dixième itération (soit pour 100% de la charge appliquée), nous représentons sur la figure 3.12 (en échelle logarithmique) les distributions des déformations obtenues pour les quatre acuités avec, en abscisse  $r/b$  et en ordonnée la déformation.

On remarque, pour les éprouvettes ayant une profondeur d'entaille identique, que les courbes de la distribution des déformations convergent. Pour  $\rho = 0,5$  mm, l'allure de la distribution des déformations est la même que pour les autres rayons d'entaille, mais la courbe est décalée dans la direction de l'axe des  $x$ .

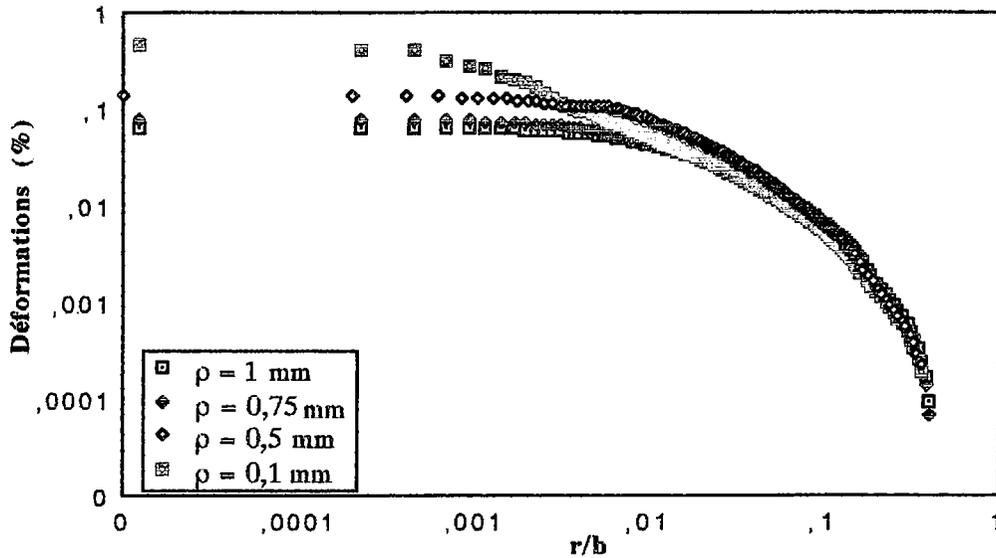


Figure 3.12 : Distribution des déformations en fond d'entaille pour les 4 acuités.

On constate là encore, comme pour la contrainte, que la déformation maximale augmente lorsque le rayon d'entaille  $\rho$  diminue. Près du fond d'entaille, les distributions des déformations sont nettement différentes. À partir d'une distance normalisée  $r/b = 0,01$ , elles sont confondues.  $\rho$  joue donc un rôle uniquement dans la zone proche du fond d'entaille.

Pour chaque acuité, nous avons isolé la distribution des déformations dans la partie où les courbes se confondent afin d'avoir l'équation de la droite qui approxime le mieux les déformations dans la zone plastique (toujours en échelle logarithmique (Cf. annexe 3, deuxième partie)). Il convient de noter que les équations de droites, dans leur forme générale, sont de la forme :

$$\ln(\epsilon_{yy}) = A - \alpha \ln(x/a) \quad (3.2)$$

Les droites obtenues sont pratiquement similaires. La plus grande différence apparaît pour  $\rho = 0,5$  mm, c'est à dire avec  $a \neq 44$  mm. Pour les quatre acuités, on obtient une valeur de l'angle  $\alpha$  (qui est l'inverse de la pente de la droite) qui varie de 0,99812 pour  $\rho = 0,5$  mm à 0,87347 pour  $\rho = 0,75$  mm. Le coefficient de corrélation :  $R^2$  varie de 0,979 pour  $\rho = 0,75$  mm à 0,989 pour  $\rho = 0,1$  mm.

Si l'on excepte la courbe relative au rayon d'entaille de 0,5 mm, les trois droites (de forme  $y = -\alpha x + b$ ) ont une pente identique qui vaut -0,873.

Les paramètres décrivant ces courbes sont les suivants :

$$0,979 \leq R^2 \leq 0,989$$

$$0,99812 \leq \alpha \leq 0,87347$$

$$-7,3288 \leq b \leq -7,061$$

	$\rho = 1 \text{ mm}$	$\rho = 0,75 \text{ mm}$	$\rho = 0,5 \text{ mm}$	$\rho = 0,1 \text{ mm}$
Équations	$y = -7,061 - 0,87392x$	$y = -7,1517 - 0,87347x$	$y = -7,0696 - 0,99812x$	$y = -7,3288 - 0,87384x$
$R^2$	0,981	0,979	0,986	0,989
$\alpha''$	0,87392	0,87347	0,99812	0,87384

Tableau 3.6 : Équations des droites tirées des courbes  $\ln \epsilon = f(\ln r)$  dans le domaine plastique.

Nous pouvons remarquer que le coefficient  $\alpha''$  est indépendant (à  $10^{-4}$  près) de  $\rho$  mais varie en fonction de  $a$ .

### 3.6.3) Comparaison entre les déformations obtenues par calcul et par la loi de LUDWIK

Nous venons de voir que les déformations et les contraintes n'évoluent pas de la même façon dans le domaine plastique. En effet, les contraintes ne sont plus maximales en fond d'entaille quand les déformations le restent.

Cette différence de comportement a été indiquée par USAMI [11] sans apporter d'explications. Nous établissons ici une comparaison entre les déformations obtenues par le calcul ( $\Delta/l$ ) et les déformations obtenues à partir des contraintes en appliquant la loi de LUDWIK de notre matériau :

$$\sigma = K\epsilon^n \quad (3.3)$$

A l'aide de deux couples de points de la loi de comportement (pris dans le domaine plastique), on détermine les paramètres K et n :

$$\text{On a } \sigma = K\epsilon^n$$

$$\text{d'où : } 684,1 = K 0,08^n$$

$$572,4 = K 0,00273^n$$

Après calcul, on a donc :

- Dans le domaine plastique :

$$\sigma = 781,5947\epsilon^{0,05275} \quad (3.4)$$

- Dans le domaine élastique :

$$\sigma = 210000\epsilon \quad (3.5)$$

En calculant les déformations à partir des contraintes obtenues, nous voyons que la courbe présente les mêmes caractéristiques que celle des contraintes : la déformation n'est

plus maximale en fond d'entaille. De plus, elle est nettement supérieure à celle obtenue à l'aide des déplacements. Pour les faibles rayons d'entaille, la contrainte maximale en fond d'entaille atteint des valeurs très importantes à cause de la triaxialité des contraintes (pour  $\rho = 0,1$ ,  $\sigma_{\max} = 1120$  MPa) ce qui conduit à des déformations aberrantes. Ici, pour  $\sigma = 1120$  MPa, (3.4) conduit à une déformation de  $\varepsilon = 915,86$  (soit 91586 %).

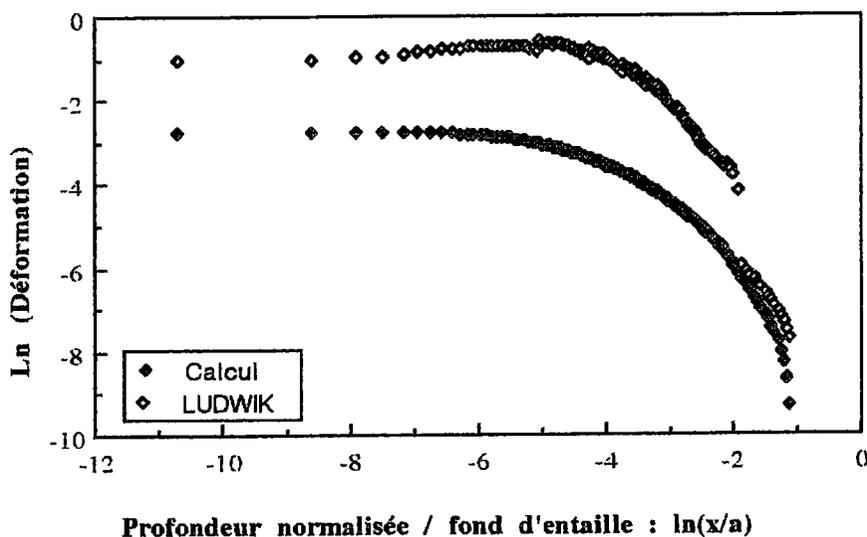


Figure 3.13 : Comparaison entre les distributions des déformations  $\varepsilon_{yy}$  obtenues par calcul et par une loi de LUDWIK.  $\rho = 1$  mm.

Il semble évident que l'on ne puisse appliquer la loi de LUDWIK en traction uniaxiale pour connaître l'allure des déformations en fond d'entaille lorsque l'on travaille en élastoplasticité avec des contraintes élevées dans le matériau :  $\sigma_{\max}^c > Re$  et  $\sigma_N > Re$ . La prise en compte de la triaxialité est alors nécessaire.

### 3.6.4) Discussion

Les distributions des déformations vont nous servir à définir deux paramètres obtenus l'un à partir de la déformation maximale critique  $\varepsilon_{\max}^c$  et de la distance effective minimale critique  $X_{m,\varepsilon}^c$ , l'autre à partir de la déformation effective critique  $\varepsilon_{\text{eff}}^c$  et de la distance effective critique  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  (voir le paragraphe 3.6.4.1 pour plus de précisions).

Nous considérons ces deux produits,  $\varepsilon_{\max}^c(2\pi X_{m,\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(2\pi X_{\text{eff},\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  (en  $m^{\alpha''}$ ) comme représentant la ténacité du matériau.

Cette définition de la ténacité est déduite à partir d'un critère de rupture en déformation locale critique en admettant que :

- la rupture est sensible aux gradients de contraintes et de déformations,
- la rupture survient lorsque la déformation locale critique excède une valeur critique sur une distance effective critique  $X^*_c$ . Ce critère local de rupture est similaire à celui de RITCHIE, RICE et KNOTT, mais est exprimé en terme de déformation..

Nous avons préféré utiliser la distance effective minimale critique  $X^c_{m,\epsilon}$  et la distance effective critique  $X^c_{eff,\epsilon}$  plutôt que la distance caractéristique  $X_c$  qui est fortement liée à la microstructure du matériau. La raison de ce choix est que la déformation est pratiquement constante dans la partie I (pour une entaille) sur la distance  $X^c_{m,\epsilon}$ , distance largement supérieure à  $X_c$  pour les entailles émoussées.

$X_c$  est une constante microstructurale alors que  $X^c_{m,\epsilon}$  et  $X^c_{eff,\epsilon}$  dépendent du rayon d'entaille et du mode de chargement. On peut noter que dans le critère proposé par RANDALL et MERKLE, il est admis que la distance effective, sur laquelle le processus de rupture s'amorce, est égale au rayon d'entaille  $\rho$  qui est lui même bien supérieur à  $X_c$ .

Dans notre cas, nous avons :

$$X_c < X^c_{m,\epsilon} \leq \rho \text{ et } X^c_{eff,\epsilon}$$

$X^c_{eff,\epsilon}$  est inférieure à  $\rho$  pour les rayons de 1 mm et de 0,75 mm mais est supérieure pour les deux autres acuités.

La définition de la ténacité basée sur la distance effective critique  $X^c_{eff,\epsilon}$  et sur la déformation effective critique  $\epsilon^c_{eff}$  tient compte du fait que le processus de rupture nécessite un certain volume physique.

#### 3.6.4.1) Déterminations des valeurs de $X^c_{m,\epsilon}$ , $X^c_{eff,\epsilon}$ et de $\alpha''$

Afin de décrire le gradient de déformation, nous représentons les distributions des déformations dans une échelle logarithmique.

La description qui suit est similaire à celle proposée pour les contraintes par WILLIAMS [45].

Sur la figure 3.14, nous représentons la distribution des déformations en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm.

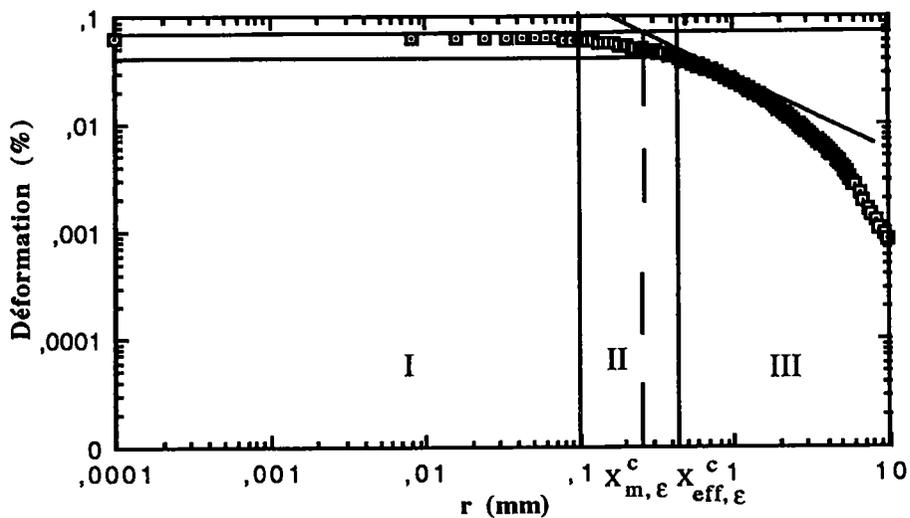


Figure 3.14 : Distribution des déformations en fond d'entaille ( $\rho = 1 \text{ mm}$ )

Les distributions des déformations peuvent se diviser en trois parties :

- Partie I : le logarithme des déformations est pratiquement constant et égale à  $\ln(\epsilon_{\text{max}}^c)$ ,
- Partie II : transition entre la partie I et la partie III,
- Partie III : la distribution des déformations est une fonction puissance de la distance :  $\epsilon \approx f(r^{-\alpha''})$ .

Sur la figure 3.15, nous faisons une représentation schématique de la distribution des déformations en échelle logarithmique en approximant les parties I et III par deux droites afin de mieux définir les deux paramètres  $X_{m,\epsilon}^c$  et  $\alpha''$ .

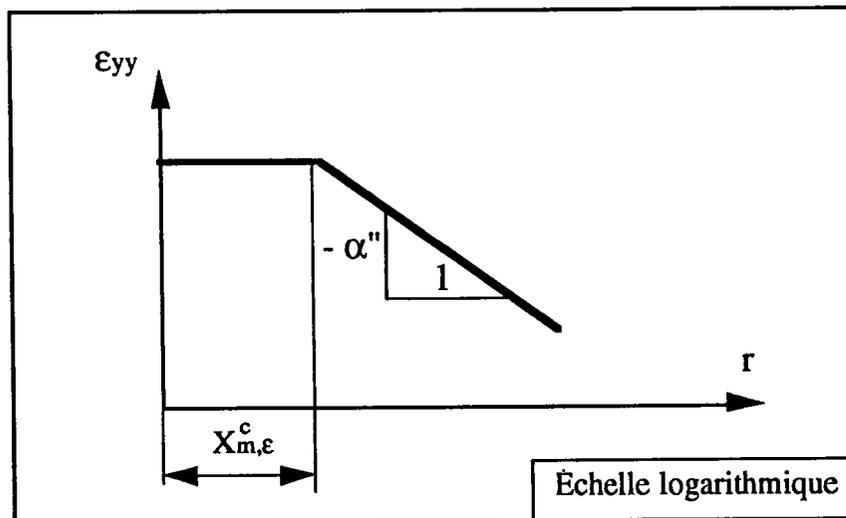


Figure 3.15 : Détermination de  $X_{m,\epsilon}^c$  et de  $\alpha''$  à partir de la distribution des déformations.

- Dans la première partie de la courbe (figure 3.15), le logarithme des déformations est pratiquement constant.

- La seconde partie de cette courbe représente la " pseudo-singularité " d'entaille en déformations. Cette singularité est définie par le coefficient  $\alpha''$  qui est l'inverse de la pente de la droite. Celle-ci définit les distributions des déformations loin de la zone fortement perturbée par le fond d'entaille. Le coefficient  $\alpha''$  est une fonction de  $\psi$ , l'angle d'entaille.

L'intersection de ces deux droites donne la valeur de la distance effective minimale critique  $X_{m,\epsilon}^c$ .

La distance effective critique  $X_{eff,\epsilon}^c$  est obtenue par le point de tangence de la droite définie par l'angle  $\alpha''$  et les distributions des déformations. Ce point est en fait la transition entre la zone II et la zone III de la figure 3.14. La déformation correspondante est appelée déformation effective critique et est notée  $\epsilon_{eff}^c$ .

Nous reportons dans le tableau 3.7, en fonction du rayon d'entaille, les valeurs obtenues pour la distance effective critique, la distance effective, ainsi que les valeurs de  $(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ .

$\rho$ (mm)	$X_{eff,\epsilon}^c$ (mm)	$(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ (mm $\alpha''$ )	$X_{m,\epsilon}^c$ (mm)	$(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ (mm $\alpha''$ )
1	0,742	0,77027	0,32	0,36944
0,75	0,599	0,63927	0,223	0,26963
0,5	0,766	0,7333	0,237	0,2376
0,1	0,225	0,27143	0,025	0,03982

Tableau 3.7 : Valeurs liées à la distance effective critique et à la distance effective minimale critique.

La distance effective minimale critique  $X_{m,\epsilon}^c$  augmente avec le rayon d'entaille. Ceci est la conséquence du fait que la déformation maximale en fond d'entaille diminue avec le rayon d'entaille et que les courbes convergent lorsque l'on s'éloigne du fond d'entaille.

La distance effective critique  $X_{eff,\epsilon}^c$  augmente également avec le rayon d'entaille.

Une diminution de la profondeur de l'entaille entraîne une augmentation de ces deux distances. Pour les aciers peu ductiles, la distance effective critique est plus sensible à la variation de  $a$  que la distance effective minimale critique  $X_{m,\epsilon}^c$ .

### 3.6.4.2) Variation du paramètre $\alpha''$ en fonction du rayon d'entaille

Comme nous l'avons vu ci dessus,  $\alpha''$  varie avec la profondeur d'entaille. Pour  $a = 44$  mm,  $\alpha''$  est de l'ordre de 0,873 alors qu'il est de l'ordre de 0,99 pour  $a = 40$  mm.

$\alpha''$  est associée à la " pseudo-singularité " d'entaille en déformations et est indirectement une fonction de  $\psi$ , l'angle d'entaille et de  $a$  la profondeur d'entaille.

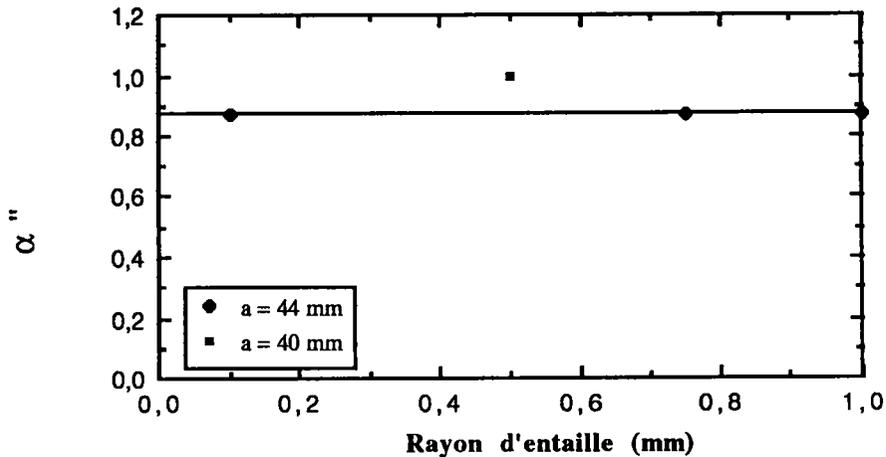


Figure 3.16 : Variation de  $\alpha''$  en fonction du rayon d'entaille  $\rho$ .

On retrouve bien ici le fait que, pour une même valeur de  $a$ ,  $\alpha''$  soit indépendant de l'acuité. Par contre, la profondeur de l'entaille influe sur ce paramètre ;  $\alpha''$  augmente lorsqu'elle diminue.

### 3.6.4.3) Variations de $\varepsilon_{\max}^c$ et de $\varepsilon_{\text{eff}}^c$ en fonction du rayon d'entaille

#### 3.6.4.3.1) Variation de la déformation maximale critique en fonction de $\rho$

Sur la figure 3.17, nous représentons la variation de la déformation maximale critique (obtenue par calcul par éléments finis) en fonction du rayon d'entaille  $\rho$ .

La déformation maximale critique est une fonction polynomiale d'ordre 3 de  $\rho$ . Cette courbe met donc en évidence le fait que la déformation maximale critique est indépendante de la valeur de  $a/W$  lorsque les variations de celle-ci sont voisines les unes des autres. Pour  $\rho = 0,5$  mm, nous avons  $a/W = 0,5$  ; alors que pour les trois autres acuités, ce rapport vaut 0,55.

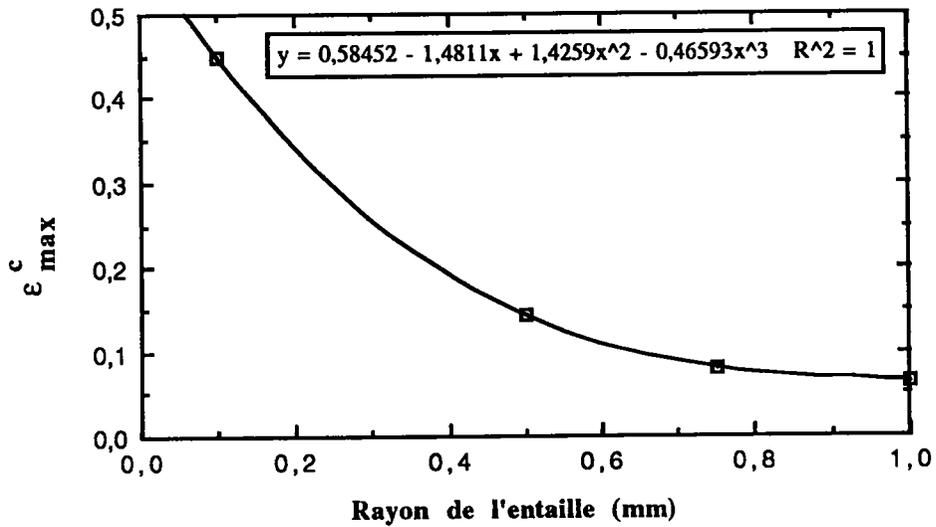


Figure 3.17 : Variation de la déformation maximale critique en fonction de  $\rho$ .

### 3.6.4.3.2) Variation de la déformation effective critique en fonction de $\rho$

Sur la figure 3.18, nous représentons la variation de la déformation effective critique en fonction du rayon d'entaille  $\rho$ .

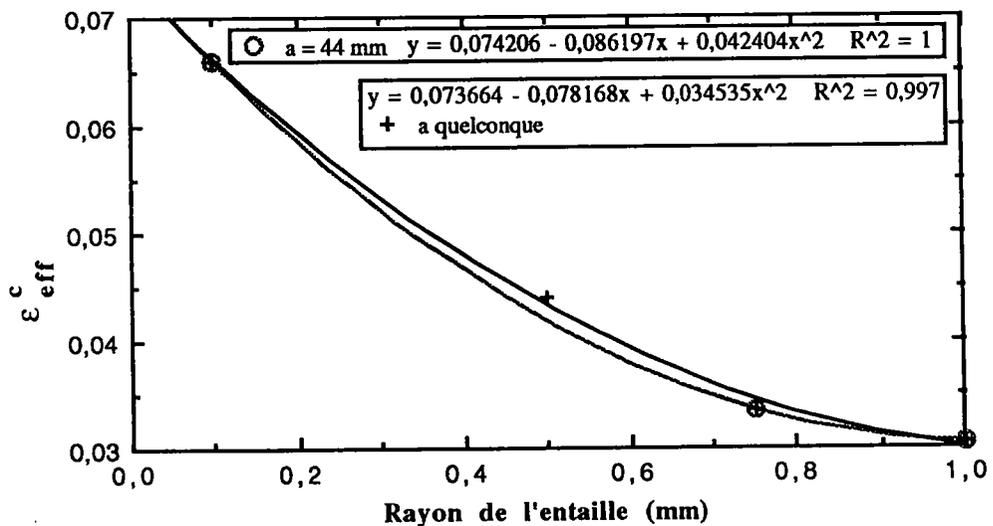


Figure 3.18 : Variation de la déformation effective critique en fonction de  $\rho$ .

La déformation effective critique est une fonction polynomiale d'ordre 2 de  $\rho$ . Le facteur de corrélation est égale à 0,997.

Nous avons également représenté la variation de  $\epsilon^c_{eff}$  en fonction de  $\rho$  sans le point correspondant à  $\rho = 0,5$  mm. Nous extrapolons la fonction  $f(\rho) = \epsilon^c_{eff}$  une nouvelle fois par un polynôme de degré 2. Le facteur de corrélation  $R^2$  vaut 1.

Nous pouvons donc dire que, comme  $\epsilon^c_{max}$ , la déformation effective critique est indépendante de la valeur de  $a/W$  lorsque les variations de celle-ci sont voisines les unes des autres.

### 3.6.4.4) Variation de $X^c_{m,\epsilon}$ et de $X^c_{eff,\epsilon}$ en fonction de $\rho$

#### 3.6.4.4.1) Variation de la distance effective minimale critique

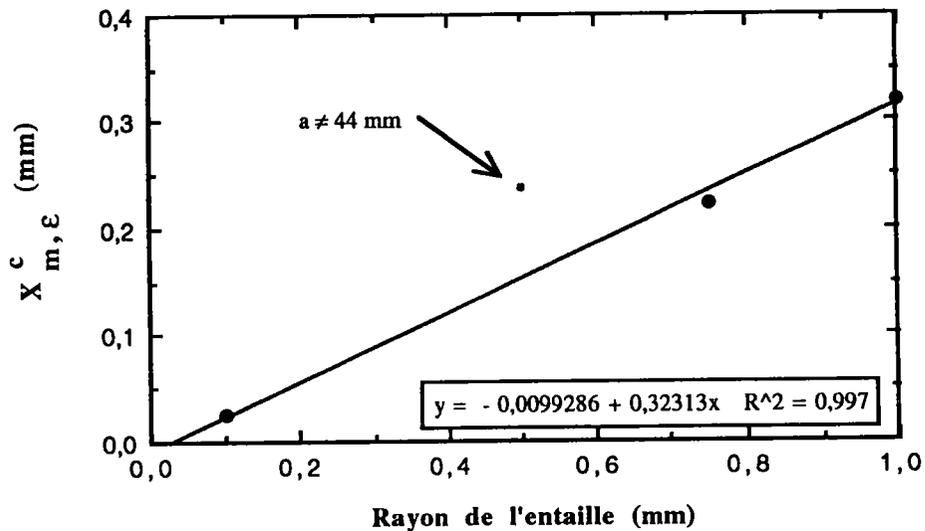


Figure 3.19 Variation de la distance effective minimale critique en fonction de  $\rho$ .

La distance effective minimale critique augmente avec le rayon d'entaille lorsque la profondeur de l'entaille est constante. Pour une valeur de  $a$  constante, la distance effective minimale critique varie linéairement en fonction de  $\rho$ .

Nous voyons également que la valeur de  $X^c_{m,\epsilon}$  obtenue pour  $\rho = 0,5$  mm est supérieure à ce que nous aurions trouvé si la profondeur de l'entaille avait été de 44 mm.  $X^c_{m,\epsilon}$  est donc sensible à la géométrie de l'entaille et augmente lorsque  $a$  diminue.

Si on trace la droite qui extrapole les valeurs obtenues pour  $a = 44$  mm, nous obtenons un facteur de corrélation de 0,997, et l'équation de la droite vaut :

$$X^c_{m,\epsilon} = 0,32313\rho - 0,01 \quad (3.6)$$

La valeur de la constante - 0,01 est très faible. Nous pouvons approximer l'équation de droite (3.6) par une autre qui passerait par l'origine du repère :

$$X_{m,\varepsilon}^c = 0,314\rho \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) est plus cohérente car cela n'a aucun sens physique d'avoir une valeur négative de la distance effective minimale critique dans le cas des fissures.

#### 3.6.4.4.2) Variation de la distance effective critique

La distance effective critique augmente également avec le rayon d'entaille lorsque la profondeur de l'entaille reste constante. Pour une valeur de  $a$  constante, la relation  $f(\rho) = X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  est une fonction linéaire.

De façon similaire à  $X_{m,\varepsilon}^c$ , nous voyons que la distance effective critique est sensible à la géométrie de l'entaille et qu'elle augmente lorsque  $a$  diminue.

Si on trace la droite qui extrapole les valeurs obtenues pour  $a = 44$  mm, nous obtenons un facteur de corrélation de 0,998 et l'équation de la droite vaut :

$$X_{\text{eff},\varepsilon}^c = 0,6\rho + 0,16145 \quad (3.8)$$

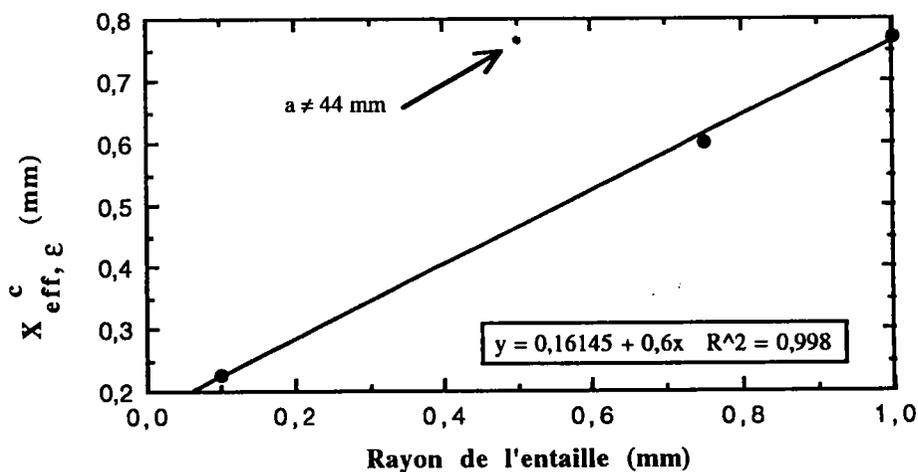


Figure 3.20 : Variation de la distance effective critique en fonction de  $\rho$ .

#### 3.6.4.4.3) Discussion

\* Lorsque  $\rho = 0$  mm, c'est à dire pour une fissure, nous voyons que la distance effective minimale critique  $X_{m,\varepsilon}^c$  tend également vers zéro. Cela signifie que la variation de la déformation  $\varepsilon_{yy}$ , le long du ligament en fond d'entaille, en fonction de  $a$  et en échelle logarithmique se résume à une seule partie : la zone III de la figure 3.14.

On a donc :

$$\ln(\varepsilon_{yy}) = -\alpha'' \ln(r) = \ln(r^{-\alpha''})$$

$$\varepsilon_{yy} = r^{-\alpha''} \quad (3.9)$$

Or, la distance effective critique  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  n'est pas nulle ; ce qui se traduit par le fait que :

- ◊ Il existe une zone de transition entre II et III
- ◊  $\ln(\varepsilon_{yy}) = A - \alpha'' \ln(r)$

Donc, pour les fissures, il semblerait que le coefficient A soit très faible mais que les trois zones décrites sur la figure 3.14 soient toujours présentes.

Dans le chapitre 4, nous étudierons des fissures, ce qui nous permettra d'approfondir ces résultats.

\* Lorsque  $\rho$  tend vers l'infini, nous voyons que les deux paramètres  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  tendent également vers l'infini. Or, ceci n'a aucun sens physique.

En fait, nous sommes dans le cas d'un rayon d'entaille infini lorsque la pièce n'est pas entaillée. Ceci se traduit par le fait que, sur le ligament, la contrainte nominale appliquée est constante et égale à la contrainte globale et que la déformation déduite est également constante et égale à la déformation globale.

Ainsi, la fonction  $f(r) = \varepsilon_{yy}$  est une droite parallèle à l'axe des  $x$ . Les deux droites schématisées sur la figure 3.15 sont donc confondues ; ce qui explique les valeurs (physiquement impossibles) obtenues pour  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$ .

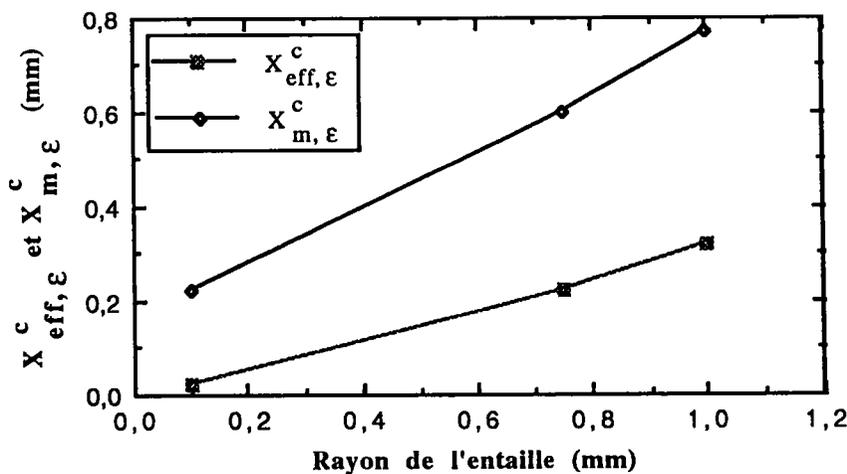


Figure 3.21 : Variation de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  en fonction de  $\rho$ .  $a = 44$  mm.

Sur la figure 3.21, nous traçons les variations de  $X_{m,\epsilon}^c$  et  $X_{eff,\epsilon}^c$  en fonction de l'acuité pour une même valeur de la profondeur d'entaille de 44 mm. La pente de la droite obtenue pour  $X_{eff,\epsilon}^c$  est supérieure à celle obtenue pour  $X_{m,\epsilon}^c$ . Le volume d'élaboration de la rupture est d'autant plus important que  $\rho$  augmente. Ceci traduit le fait que plus l'entaille est émoussée, moins elle est néfaste pour la pièce.

### 3.6.4.5) Comparaison entre les produits $\epsilon_{max}^c(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ , $\epsilon_{eff}^c(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$ et $\epsilon_{max}^c \sqrt{\rho}$ en fonction du rayon d'entaille

Nous venons de voir de quelle façon nous déterminions les valeurs de  $\epsilon_{max}^c$ , de  $X_{m,\epsilon}^c$ , de  $\epsilon_{eff}^c$  et de  $X_{eff,\epsilon}^c$ . En fait, ces deux couples ( $\epsilon$  ;  $X^c$ ) sont sur une même droite d'équation :

$$\ln(\epsilon_{yy}) = A - \alpha'' \ln(r) \quad (3.10)$$

Nous allons maintenant montrer que les deux produits  $\epsilon_{max}^c(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $\epsilon_{eff}^c(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  sont identiques. On a les deux équations suivantes :

$$\ln(\epsilon_{max}^c) = A - \alpha'' \ln(X_{m,\epsilon}^c) \quad (3.11)$$

$$\ln(\epsilon_{eff}^c) = A - \alpha'' \ln(X_{eff,\epsilon}^c) \quad (3.11)$$

D'où :

$$\ln(\epsilon_{max}^c) - A + \alpha'' \ln(X_{m,\epsilon}^c) = \ln(\epsilon_{eff}^c) - A + \alpha'' \ln(X_{eff,\epsilon}^c)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\epsilon_{max}^c) + \alpha'' \ln(X_{m,\epsilon}^c) = \ln(\epsilon_{eff}^c) + \alpha'' \ln(X_{eff,\epsilon}^c)$$

$$\Leftrightarrow \ln(\epsilon_{max}^c) - \ln(\epsilon_{eff}^c) = \alpha'' \ln(X_{eff,\epsilon}^c) - \alpha'' \ln(X_{m,\epsilon}^c)$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{\epsilon_{max}^c}{\epsilon_{eff}^c} \right) = \alpha'' \ln \left( \frac{X_{eff,\epsilon}^c}{X_{m,\epsilon}^c} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{\epsilon_{max}^c}{\epsilon_{eff}^c} \right) = \ln \left( \frac{(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}}{(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\epsilon_{max}^c}{\epsilon_{eff}^c} = \frac{(X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}}{(X_{m,\epsilon}^c)^{\alpha''}}$$

D'où finalement, on a bien :

$$\varepsilon_{\max}^c(X_{m,\varepsilon}^c)\alpha'' = \varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha'' \quad (3.12)$$

Pour la suite de notre étude, nous prendrons le produit  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$ .

### 3.6.4.5.1 Comparaison entre $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$ et $\varepsilon_{\max}^c\sqrt{\rho}$

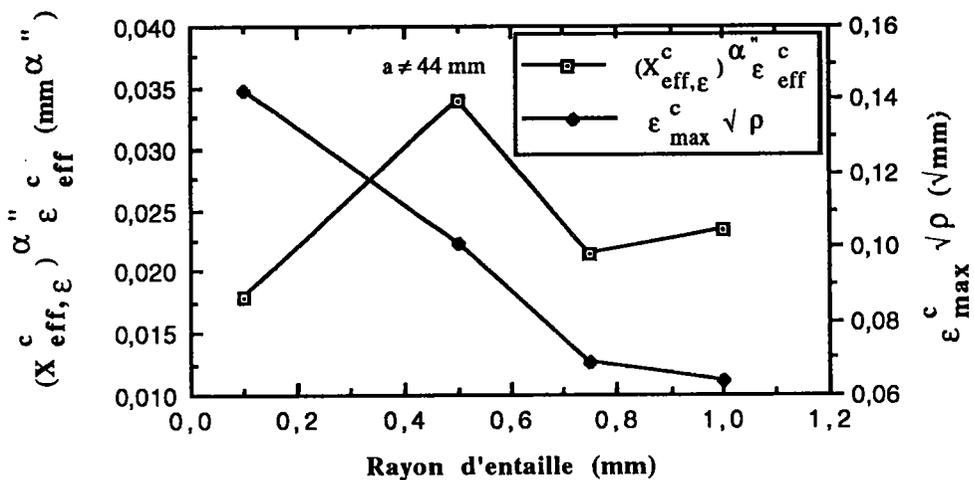


Figure 3.22 : Variation entre  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$  et  $\varepsilon_{\max}^c\sqrt{\rho}$  en fonction de  $\rho$ .

Sur la figure 3.22, nous représentons l'influence du rayon d'entaille sur le produit  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$ , produit que nous comparons avec le facteur de ductilité à l'entaille de RANDALL et MERKLE  $\varepsilon_{\max}^c\sqrt{\rho}$ .

Le point correspondant au rayon d'entaille de 0,5 mm se trouve décalé par rapport aux autres. Comme nous l'avons vu précédemment,  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  est sensible à la variation de la profondeur de l'entaille.

Le critère de RANDALL et MERKLE est seulement basé sur la valeurs de la déformation maximale critique. Or, nous avons vu sur la figure 3.17 que  $\varepsilon_{\max}^c$  est une fonction polynomiale de degré 3 du rayon de l'entaille. C'est pourquoi ce critère est peu sujet aux variations de  $a$ .

Sur la figure 3.23, nous avons tracé de nouveau les deux mêmes courbes en considérant que nous avons des entailles de profondeurs identiques et en faisant la démarche suivante :

À partir de la figure 3.2 (où nous avons vu que la charge critique était une fonction linéaire de  $\rho$ ) et pour les trois rayons d'entaille :  $\rho = 1$  mm,  $\rho = 0,75$  mm et  $\rho = 0,1$  mm, nous obtenons les paramètres de cette relation linéaire.

On a :

$$f(\rho) = P_C = 1760\rho + 32184 \quad (3.13)$$

Pour  $\rho = 0,5$  mm, nous trouvons une charge à rupture théorique de 33064 N. Nous effectuons un calcul par éléments finis en appliquant cet effort. La nouvelle distribution des déformations nous permet de tirer de nouvelles valeurs de  $\alpha''$ ,  $X_{eff,\epsilon}^c$  et de  $\epsilon_{max}^c$ .

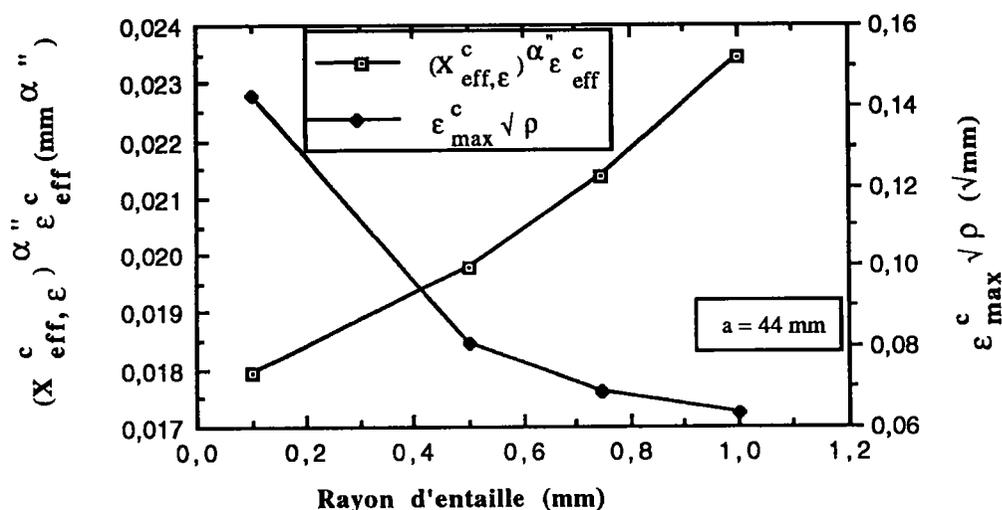


Figure 3.23 : Variation entre  $\epsilon_{eff}^c (X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $\epsilon_{max}^c / \sqrt{\rho}$  en fonction de  $\rho$ .

Il est possible de considérer la variation de  $\epsilon_{eff}^c (X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  en fonction du rayon d'entaille comme une fonction polynomiale d'ordre 2 et d'équation :

$$\epsilon_{eff}^c (X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''} = 0,017619 + 2,7338 \cdot 10^{-3} \rho + 3,0569 \cdot 10^{-3} \rho^2 \quad (3.14)$$

Le facteur de corrélation vaut 1.

Pour une même valeur de la profondeur d'entaille, il est possible d'extrapoler la fonction  $f(\rho) = \epsilon_{eff}^c (X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''}$  de deux façons.

◊ Si l'on considère que les points sont sur une même droite, on obtient un facteur de corrélation de 0,988. Dans ce cas là, on a l'équation suivante :

$$\epsilon_{eff}^c (X_{eff,\epsilon}^c)^{\alpha''} = 0,017229 + 0,0059506\rho \quad (3.15)$$

◊ L'autre solution consiste à considérer que la fonction  $f$  est une fonction polynomiale d'ordre 2. On obtient alors un facteur de corrélation de 1 et l'on a l'équation suivante :

$$\epsilon^{c_{\text{eff}}}(X^{c_{\text{eff},\epsilon}})^{\alpha''} = 0,017637 + 2,472 \cdot 10^{-3} \rho + 3,3135 \cdot 10^{-3} \rho^2 \quad (3.16)$$

Dans le chapitre 4, nous verrons, pour onze profondeurs d'entaille différentes, quelle est la variation de  $\epsilon^{c_{\text{eff}}}(X^{c_{\text{eff},\epsilon}})^{\alpha''}$  en fonction de  $\rho$ , ce qui nous permettra de mieux cerner l'évolution de cette ténacité en fonction de ce paramètre.

### 3.6.4.5.2) Discussion

Le produit  $\epsilon^{c_{\text{eff}}}(X^{c_{\text{eff},\epsilon}})^{\alpha''}$  augmente avec le rayon d'entaille alors que le facteur de ductilité à l'entaille de RANDALL et MERKLE décroît (mais il n'y a aucune raison pour que les produits  $(X^{c_{m,\epsilon}})^{\alpha''}$  et  $(X^{c_{\text{eff},\epsilon}})^{\alpha''}$  soient constants et égaux à  $\sqrt{\rho}$ ). D'autre part, la ténacité mesurée par d'autres méthode ( $K^*_{IC}$ ,  $K^c_{\rho}$ , ...) croît avec le rayon d'entaille.

La ténacité est un paramètre intrinsèque du matériau qui doit donc être, théoriquement, indépendant de la géométrie des pièces étudiées. En rupture fragile, ceci est vérifié. Par contre, en rupture ductile (ou peu ductile), nous savons que ce paramètre est sensible à la géométrie et au mode de chargement.

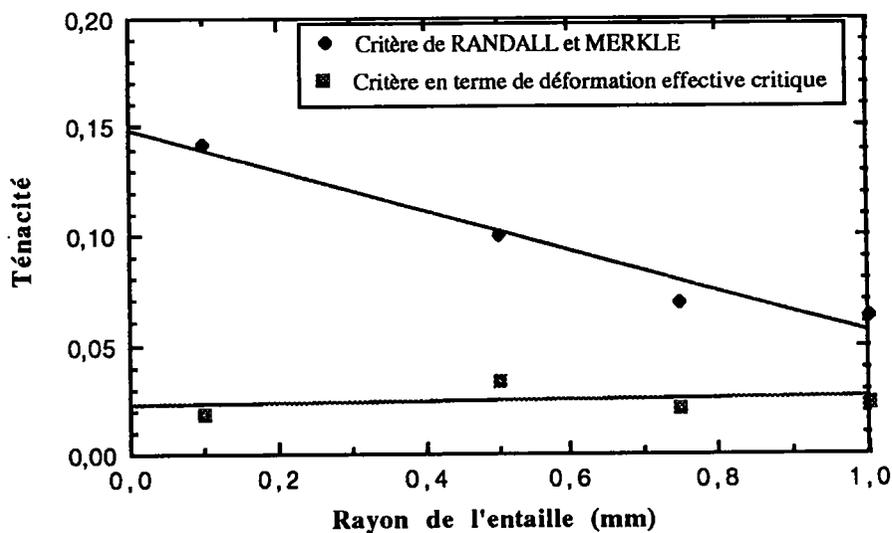


Figure 3.24 : Comparaison entre le critère de RANDALL et MERKLE et le critère proposé.

Nous voyons que le critère proposé par RANDALL et MERKLE est loin d'être constant. Cependant, s'il varie avec le rayon d'entaille, il est peu sensible à la variation de la profondeur de l'entaille lorsque le rapport  $a/W$  évolue peu (il vaut 0,5 pour l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$  contre 0,55 pour  $a = 44 \text{ mm}$ ).

Le critère proposé a une évolution différente. Le produit  $\epsilon^{C_{\text{eff}}}(X^{C_{\text{eff}},\epsilon})^{\alpha}$  varie en fonction du rayon d'entaille, mais cette variation est beaucoup plus faible que celle relevée par la méthode de RANDALL et MERKLE. Ceci est très net sur la figure 3.24.

Nos unités sont différentes de celles proposées par le critère de RANDALL et MERKLE. Le facteur de ductilité à l'entaille ne peut avoir comme seule unité des  $\sqrt{m}$  mais des  $m^{\alpha}$  où  $\alpha$  varie avec la profondeur de l'entaille.

#### 3.6.4.5.2.1) Comparaison statistique des critères

Afin de comparer ces deux critères avec plus de précision, nous effectuons une étude statistique de nos résultats. Pour cela, nous nous intéressons à trois types de valeurs :

*La moyenne arithmétique* : Elle permet, en quelque sorte, de caractériser le groupe de données étudiées. C'est une mesure de localisation. Nous la noterons  $\mu$ .

*L'écart-type* : Il permet de fournir une idée quant au regroupement plus ou moins serré des données en tant qu'ensemble de valeurs. C'est une mesure de variabilité ou de dispersion ; et on le note  $d_s$ .

$$d_s = \sqrt{\frac{(X - \mu)^2}{N}} \quad (3.17)$$

où  $X$  est la valeur et  $N$  le nombre d'échantillons.

*Le coefficient de variation* : Comme l'écart-type, c'est une mesure de la dispersion des données étudiées, mais une mesure relative. Il est défini comme le rapport de l'écart-type sur la moyenne arithmétique et permet de comparer deux groupes de données par rapport à leur niveau moyen respectif. Nous le notons CV, et il vaut :

$$CV = d_s/\mu \quad (3.18)$$

Nous présentons dans le tableau 3.8 les valeurs de l'écart-type, de la moyenne arithmétique et du coefficient de variation pour le critère que nous proposons ( $\epsilon^{C_{\text{eff}}}(X^{C_{\text{eff}},\epsilon})^{\alpha}$ ) ainsi que pour le critère de RANDALL et MERKLE. La moyenne et

l'écart-type sont en  $\sqrt{m}$  par le critère proposé par RANDALL et MERKLE, et en  $m^{\alpha''}$  pour notre critère. Le coefficient de variation est sans unité.

	Toutes profondeurs d'entaille		Valeurs obtenues pour a = 44 mm.	
	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$	$\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$	$\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$
$\mu$	0,02412	0,093726	0,020898	0,091452
$d_s$	0,006833	0,03635	0,002781	0,044169
CV	0,283292	0,387828	0,133068	0,482978

Tableau 3.8 : Différentes valeurs obtenues pour les trois critères.

◊ Pour toutes profondeurs d'entaille : L'écart-type correspondant aux valeurs du facteurs de ductilité à l'entaille (obtenu à partir de  $X^c_{\text{eff},\epsilon}$ ) est six à dix fois moins importants que celui trouvé par la critère de RANDALL et MERKLE. Ceci montre que, même si notre critère est sensible à la variation de la profondeur d'entaille, il y'a moins de dispersion dans nos résultats que dans ceux obtenus par la méthode  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$ .

De la même façon, le coefficient de variation est le plus élevé pour les résultats tirés de la méthode de RANDALL et MERKLE, mais, pour cette valeur les écarts se réduisent.

Ces deux paramètres permettent de penser que notre critère est mieux adapté que celui de RANDALL et MERKLE car ils engendrent moins de dispersion.

Ces résultats sont d'autant plus importants que nous avons vu dans le paragraphe précédent (3.6.4.5.1) que le critère proposé par RANDALL et MERKLE dépendait moins de la variation de  $a$ . Or, malgré cela, notre critère est moins lié aux paramètres géométriques de l'entaille.

En principe, la ténacité est un paramètre intrinsèque du matériau. Si nous considérons que les deux critères ci-dessus sont constants et égaux à leur valeur moyenne respective, nous faisons une erreur relative de 29,6% dans le cas du paramètre de RANDALL et MERKLE, et de 20% pour le paramètre  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$ .

◊ Si nous nous plaçons maintenant dans le cas où la profondeur de l'entaille reste constante (c'est à dire que nous ne tenons pas compte des valeurs relevées pour l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ ), nous voyons que cette fois-ci, le critère basé sur la déformation effective critique donne de biens meilleurs résultats. En effet, alors que l'écart-type et le coefficient de variation augmentent légèrement pour le critère de RANDALL et MERKLE, ces deux valeurs sont divisées par 2,5 lorsque l'on prend  $K_{\rho,\epsilon} = \epsilon^c_{\text{eff}}(2\pi X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$ .

Ceci montre que les faibles variations de  $a/W$  influent plus faiblement, ou sont sans effet, sur le critère de RANDALL et MERKLE.

Si nous considérons que les deux critères étudiés sont constants et égaux à leur valeur moyenne respective, nous ne faisons plus qu'une erreur relative de 9,5% pour le paramètre  $\varepsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''}$  et de 37,1% pour  $\varepsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$ .

Pour les aciers peu ductiles, il semble donc plus juste d'utiliser le facteur d'intensité de déformation d'entaille obtenu à partir de la déformation maximale critique. En effet, le critère proposé est statistiquement mieux approprié.

### 3.7) Conclusions sur les travaux réalisés sur les éprouvettes C.T.

Les calculs réalisés sur les éprouvettes C.T. nous permettent d'affirmer qu'il existe une "pseudo-singularité de contrainte et de déformation" en fond d'entaille même dans un régime de plasticité étendue. Les contraintes et les déformations maximales sont sensibles à la variation du rayon d'entaille mais les gradients de contraintes et de déformations, caractérisés par les pentes  $\alpha$  et  $\alpha''$ , sont indépendants de  $\rho$ .

Ce travail permet de proposer, pour un acier peu ductile, un critère local de rupture en déformation, basé sur la distribution réelle de ces déformations en fond d'entaille. La distribution des déformations dans la partie de "pseudo-singularité" en fond d'entaille peut être caractérisée par le facteur d'intensité de déformation d'entaille  $K_{\rho,\varepsilon}$ . Ce paramètre est relié à la déformation effective critique et à la distance effective critique par la relation suivante :

$$K_{\rho,\varepsilon} = \varepsilon^c_{\text{eff}}(2\pi X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''} \quad (3.19)$$

En prenant en compte le rôle important du gradient de déformation dans le processus de rupture, il est possible de définir le *facteur de ductilité à l'entaille* en admettant que les termes  $(X^c_{m,\varepsilon})^{\alpha''}$  et  $(X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''}$  jouent un rôle important dans le processus volumique de rupture.

Les calculs nous ont également permis de visualiser l'allure et la taille de la zone plastique. Quelque soit l'acuité considérée, la zone plastique à rupture a toujours la même allure. Par contre, pour une même valeur de la profondeur d'entaille, sa profondeur décroît légèrement lorsque l'acuité augmente. Cette variation n'est pas très importante (de l'ordre de 10% entre  $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $\rho = 0,1 \text{ mm}$ ).

Si la profondeur d'entaille reste constante, la distance effective minimale critique  $X^c_{m,\epsilon}$  et la distance effective critique  $X^c_{eff,\epsilon}$  sont des fonctions linéaires du rayon d'entaille.

Dans le chapitre 4, nous ferons des essais de traction sur des éprouvettes K.T, obtenues d'un acier beaucoup plus ductile, en faisant varier la profondeur d'entaille et également l'acuité. Cela nous permettra d'affiner nos résultats quant à la variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $X^c_{eff,\epsilon}$  en fonction de ces deux paramètres et de voir si les variations de l'expression de  $K_{\rho,\epsilon}$  sont influencées par le type d'acier utilisé : peu ductile ou ductile.

De plus, nous étudierons avec plus de précision les variations éventuelles de  $K_{\rho,\epsilon}$  en fonction de  $\rho$  et  $a$ .

## 4) Étude sur les éprouvettes K.T.

### 4.1) Introduction

Réalisée sur un acier ductile, cette deuxième série d'essais a porté sur des éprouvettes K.T. que nous avons sollicitées en traction. Ces éprouvettes ont toutes la même géométrie (hauteur, largeur et épaisseur), mais nous avons fait varier deux paramètres : le rayon en fond d'entaille  $\rho$  (qui est l'inverse de l'acuité) et la profondeur de l'entaille  $a$ .

De la même façon que pour les éprouvettes C.T, nous recherchons la valeur de la charge à rupture afin de la réinjecter dans le logiciel de calcul par éléments finis et étudier l'influence éventuelle de ces paramètres ( $\rho$  et  $a$ ) sur la contrainte et la déformation maximale, et sur la distribution des contraintes et des déformations en fond d'entaille.

L'expérience nous donnera également la valeur de la déformation globale critique ( $\epsilon^c_g$ ) et celle de la déformation locale critique mesurée au niveau de la section réduite et au milieu du ligament ( $\epsilon^c_{l,m}$ ). Nous pourrons ainsi relier  $\epsilon^c_g$  à l'acuité.

Par calcul, nous regarderons le lien entre la distance effective critique en fond d'entaille  $X^c_{eff,\epsilon}$  et l'acuité :  $X^c_{eff,\epsilon} = f(\rho)$ , et entre la distance effective minimale critique  $X^c_{m,\epsilon}$  et l'acuité :  $X^c_{m,\epsilon} = g(\rho)$ . Puis nous essayerons de lier la ténacité  $K_{\rho,\epsilon}$ , que nous définissons comme le produit  $\epsilon^c_{eff}(2\pi X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha''}$ , au rayon d'entaille  $\rho$ .

### 4.2) Protocole d'essais

Nous avons fait réaliser des éprouvettes présentant trois géométries d'entaille différentes :  $\rho = 1$  mm,  $\rho = 0,5$  mm et  $\rho = 0$  mm (soit respectivement acuité  $1$  mm<sup>-1</sup>, acuité  $2$  mm<sup>-1</sup> et acuité infinie qui est celle d'une fissure). Pour chaque rayon d'entaille, nous avons fait varier la profondeur  $a$  dans l'intervalle 5 mm à 15 mm.

Nous disposons donc de onze échantillons pour chaque acuité (soit trente trois éprouvettes). Vu le coup relativement élevé de l'usinage, nous n'avons pu réaliser plusieurs éprouvettes pour chaque cas spécifique (même valeur de  $a$  et de  $\rho$ ), ce qui nous aurait permis de minimiser la dispersion éventuelle des résultats lors des essais.

Le matériau utilisé est un acier E 24. Nous avons réalisé un essai de traction afin d'obtenir la loi de comportement de ce matériau. Celle-ci est alors injectée dans le logiciel de calculs par éléments finis.

Les caractéristiques que nous obtenons sont les suivantes :

Limite d'élasticité :  $Re = 323,8 \text{ MPa}$

Résistance ultime :  $Rm = 443,7 \text{ MPa}$

Les essais ont été effectués sur la même machine servo-hydraulique INSTRON de traction-compression que nous avons utilisée pour les éprouvettes C.T.

Chaque éprouvette a été équipée d'une à deux jauges de déformation. Une de ses jauges a servi à mesurer la valeur de la déformation globale critique loin de l'entaille, et l'autre a permis de connaître un couple charge-déformation au milieu du ligament situé en fond d'entaille. Cette valeur locale est utilisée comme valeur de référence lors du calcul par éléments finis.

Il est important de noter que cette jauge se situe dans une zone fortement perturbée où les déformations dépasseront, lors de l'essai, sa valeur admissible. De ce fait, nous pourrons enregistrer la déformation tant que sa valeur ne dépassera pas ce seuil qui est d'environ 3%.

La jauge collée dans la partie supérieure de l'entaille se trouve au milieu de l'échantillon. Sa partie supérieure est à 5 mm du bord de l'éprouvette (Cf. figure 4.1).

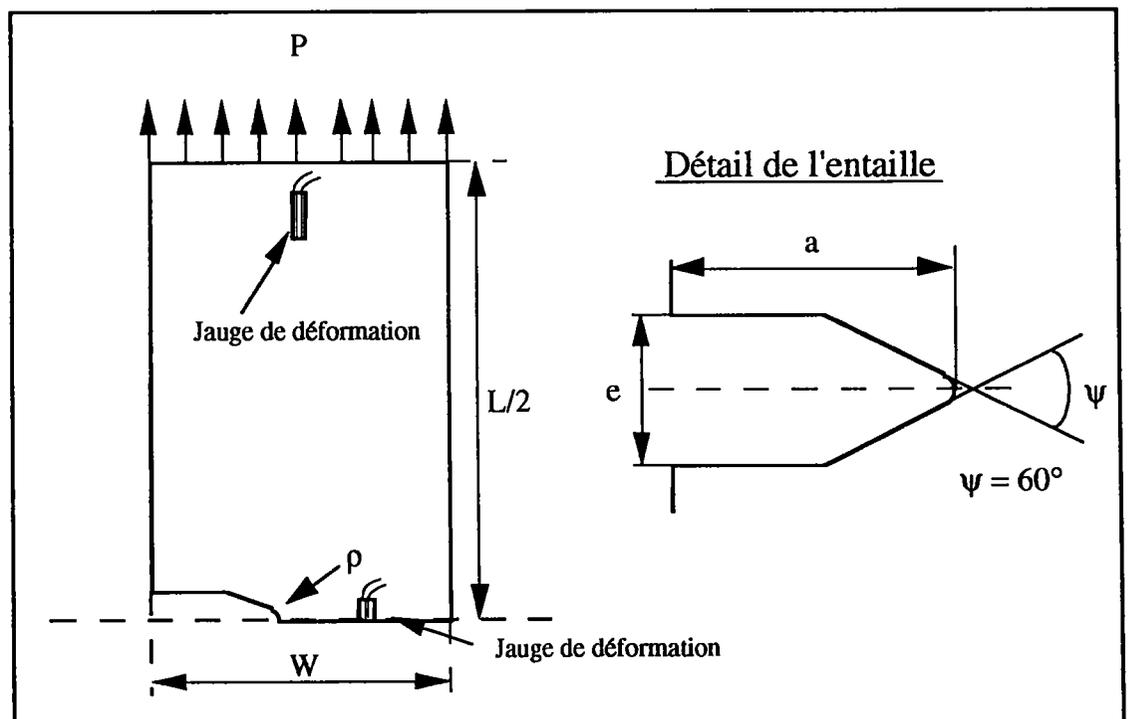


Figure 4.1 : Plan en coupe des éprouvettes K.T.

Les éprouvettes ont toutes les dimensions suivantes :

Épaisseur :  $B = 5 \text{ mm}$ ,

Largeur :  $W = 29 \text{ mm}$ ,

Hauteur L :  $L/2 = 45$  mm,

Ligament :  $b = W - a$  (et  $a$  varie de 5 à 15 mm),

Largeur de l'entaille :  $e = 3$  mm.

Pour chaque éprouvette, nous avons enregistré la courbe charge-déplacement. L'effort est obtenu directement à l'aide du matériel d'acquisition de la machine servo-hydraulique. Les déformations sont donnés par les jauges, reliées à un pont d'extensiométrie. Pour chacune des jauges, 1000 micro-déformations correspondent à un certain voltage (de l'ordre de 120 millivolts) que nous obtenons lors de l'équilibrage. Au cours de l'essai, on récupère sur table traçante la variation de la déformation (en V/cm) en fonction de la charge (en V/cm). Suivant les échelles utilisées, nous avons alors la déformation en fonction de la charge (en Newton) sur un même graphique.

### 4.3) Résultats expérimentaux

#### 4.3.1) Résultats obtenus lors des essais

	a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P_c$ (N)	$\rho = 0$	46900	43750	42600	41250	41000	37700	37000	34900	33300	30800	29200
	$\rho = 0,5$	49500	47500	44100	40250	41700	39750	36900	35800	33600	31900	29600
	$\rho = 1$	51000	48000	45000	41700	41500	39000	38200	36600	34900	32400	30600
$\sigma_g^c$ (MPa)	$\rho = 0$	323,44	301,72	293,79	284,48	282,76	260	255,17	240,69	229,66	212,41	201,38
	$\rho = 0,5$	341,38	327,59	304,14	277,59	287,59	274,14	254,48	246,9	231,72	220	204,14
	$\rho = 1$	351,72	331,03	310,34	287,59	286,21	268,97	263,41	252,41	240,69	223,45	211,03
$\sigma_N^c$ (MPa)	$\rho = 0$	390,83	380,43	387,27	392,86	410	396,84	411,11	410,59	416,25	410,67	417,14
	$\rho = 0,5$	412,5	413,04	400,91	383,33	417	418,42	410	421,18	420	425,33	422,86
	$\rho = 1$	425	417,39	409,07	397,14	415	410,53	424,44	430,59	436,25	432	437,14
$\varepsilon_g^c$ (th) (%)	$\rho = 0$	0,147	0,138	0,134	0,13	0,129	0,119	0,116	0,11	0,105	0,097	0,092
	$\rho = 0,5$	1,977	1,49	0,139	0,127	0,131	0,125	0,116	0,113	0,106	0,1	0,093
	$\rho = 1$	2,425	1,601	0,142	0,131	0,13	0,123	0,12	0,115	0,11	0,102	0,096
$\varepsilon_g^c$ (exp) (%)	$\rho = 0$	0,342	0,2	0,14	0,15	0,14	0,13	0,08	0,14	0,11	0,12	0,09
	$\rho = 0,5$	1,88	0,33	0,14	0,18	0,146	0,16	0,124	0,112	0,106	0,103	0,093
	$\rho = 1$	3	1,6	0,14	0,13	0,13	0,136	0,119	0,115	0,15	0,099	0,107

Tableau 4.1 : Résultats expérimentaux

Pour chaque éprouvette, nous avons relevé la valeur de la charge appliquée à rupture (appelée charge critique  $P_C$ ) ainsi que celle de la déformation globale critique  $\epsilon^C_g$ . Pour certaines éprouvettes, nous possédons également une indication sur la déformation située au milieu du ligament en fond d'entaille.

Le rayon d'entaille  $\rho$  est exprimé en mm ;  $\epsilon^C_{g(th)}$  est la déformation globale critique théorique, calculée à partir de la contrainte globale critique ( $\sigma^C_g$ ) obtenue par les essais ;  $\epsilon^C_{g(exp)}$  représente la déformation globale critique expérimentale relevée grâce aux jauges de déformation et  $\sigma^C_N$  est la contrainte nominale critique calculée à partir de la charge critique  $P_C$ .

$\epsilon^C_{g(th)}$  est obtenue de la façon suivante :

- Dans le domaine élastique, c'est à dire pour une contrainte globale inférieure à 323,8 MPa, on divise la contrainte par le module d'YOUNG qui est de 219300 MPa dans le cas de l'acier E24.

- Pour le domaine plastique, on utilise la loi de comportement de l'acier obtenue lors de l'essai de traction réalisé au préalable. Cette formule, qui est de type loi de LUDWIK, est la suivante :

$$\sigma = 605,39\epsilon^{0,146} \quad (4.1)$$

$\epsilon^C_{g(exp)}$  est calculée à l'aide des courbes obtenues sur papier millimétré où nous avons enregistré les déformations des jauges.

Dans certains cas, nous avons eu des incidents au cour des essais, liés soit à des coupures de courants, soit à des coupures d'eau, ou enfin à des décollements de jauges. Quelques valeurs expérimentales sont manquantes. Dans ce cas nous avons utilisé les valeurs théoriques de la déformation.

À l'examen de la figure 4.2, nous voyons que la charge critique décroît linéairement avec la profondeur d'entaille.

Nous avons, pour chaque acuité, calculé les équations de droite qui approximent le mieux la variation de  $P_C$  en fonction de  $a$ . La pente de la droite varie de -48746 N/mm pour  $\rho = 0$  mm à -54889 N/mm pour  $\rho = 1$  mm.

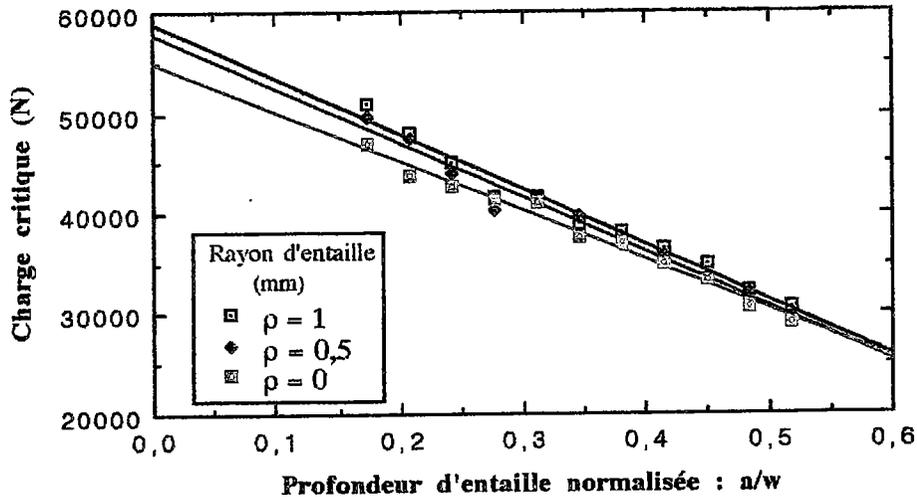


Figure 4.2 : Variation de  $P_C$  en fonction de  $a/W$  et de  $\rho$ .

Malgré une légère dispersion obtenue pour les rayons d'entaille  $\rho = 1$  mm et  $\rho = 0,5$  mm lorsque  $a/W = 0,276$  (ce qui correspond à  $a = 8$  mm), le coefficient de corrélation  $R^2$  est acceptable. Il varie de 0,974 pour  $\rho = 0,5$  mm à 0,987 pour  $\rho = 0$  mm.

Les trois équations des droites sont données dans le tableau 4.2.

	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm
Équations des droites	$y = 58827 - 54889x$	$y = 57973 - 54599x$	$y = 54845 - 48746x$
$R^2$	0,978	0,974	0,987

Tableau 4.2 : équations des droites caractérisant la variation de la charge critique en fonction de  $a/W$  et de  $\rho$ .

La charge critique est donc une fonction linéaire de  $a$ . Elle dépend également de l'acuité, même si son influence n'est pas très élevée. Pour une même valeur de  $a$ ,  $P_C$  augmente avec  $\rho$ .

On peut noter que les paramètres qui décrivent les droites relatives aux deux rayons d'entaille non nuls sont très voisins les uns des autres (environ 0,5% de différence entre les deux pentes, et 1,5 % entre les deux constantes) ; alors que pour  $\rho = 0$  mm, la variation est plus importante (de l'ordre de 11% pour la pente de la droite). Ceci traduit bien la différence de comportement qui existe entre une entaille et une fissure ( $\rho = 0$  mm) ; cette dernière est beaucoup plus néfaste pour la résistance à la rupture du matériau.

### 4.3.2) Discussion sur les résultats expérimentaux

#### 4.3.2.1) Variation de la charge critique $P_c$ et de la contrainte nominale critique $\sigma_N^c$

Dans cette deuxième série d'essais, nous retrouvons bien le fait que la charge critique obtenue à rupture décroît linéairement en fonction du rayon d'entaille. Du fait de la variation de cette charge, la contrainte nominale critique est aussi fonction de la géométrie des éprouvettes : pour une même profondeur d'entaille, elle diminue avec l'acuité. Ceci traduit le fait que plus l'acuité augmente, plus l'entaille est néfaste à la pièce considérée.

La contrainte nominale critique est calculée de la façon suivante :

$$\sigma_N^c = \frac{P_c}{S_0} \quad (4.2)$$

$P_c$  est la charge critique relevée lors des essais.

$S_0$  est l'aire de la section réduite et vaut  $B * (W - a)$ .

$B$  et  $W$  représentent respectivement l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette et ont les valeurs de 5 mm et 29 mm (Cf. figure 4.1). La profondeur d'entaille  $a$  varie de 5 à 15 mm.  $S_0$  est ainsi comprise entre 70 mm<sup>2</sup> et 120 mm<sup>2</sup>.

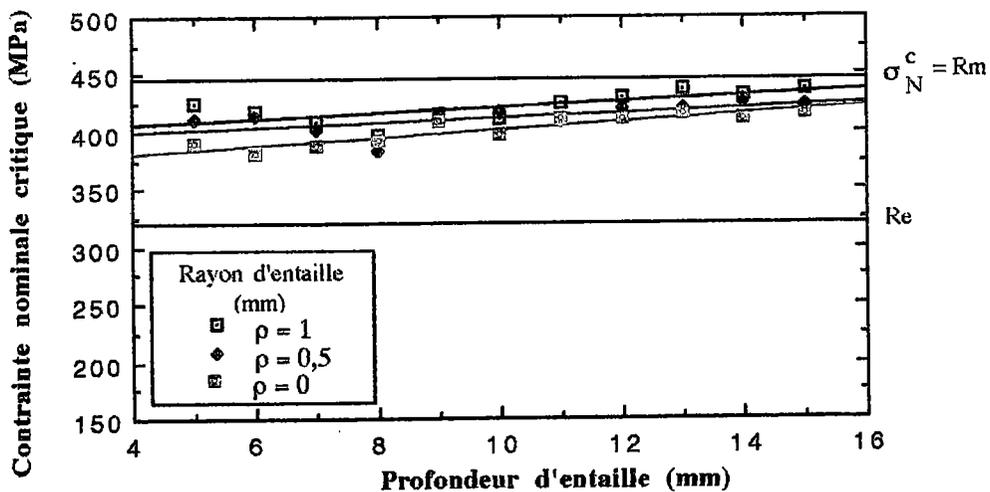


Figure 4.3 : Variation de  $\sigma_N^c$  en fonction de  $a$  et  $\rho$ .

La contrainte nominale critique décroît lorsque l'acuité augmente. Nos résultats sont entachés d'une certaine dispersion. Lors du calcul par éléments finis, nous utiliserons la valeur moyenne de  $\sigma_N^c$  obtenue pour chaque acuité. Ces trois valeurs sont les suivantes :

- Pour  $\rho = 1$  mm,  $\sigma_N^c = 421$  MPa,
- Pour  $\rho = 0,5$  mm,  $\sigma_N^c = 413$  MPa,
- Pour  $\rho = 0$  mm,  $\sigma_N^c = 402$  MPa,

Les valeurs moyennes de contrainte nominale critique augmentent avec  $\rho$  tout en restant relativement proches de la valeur de la résistance ultime  $R_m$ .

L'éprouvette entaillée se comporte approximativement, en terme de contrainte nominale critique, comme une éprouvette lisse de section égale à la section réduite.

- Pour  $\rho = 1$ , la différence entre la contrainte de rupture pour une éprouvette lisse et la moyenne obtenue pendant les essais est de **5,04%**.
- Pour  $\rho = 0,5$ , cette différence passe à **6,87%**.
- Pour  $\rho = 0$ , la différence est de **9,19%**.

#### 4.2.2.2) Variation de la déformation globale critique $\epsilon^c_g$

Pour les acuités de  $1 \text{ mm}^{-1}$  et de  $2 \text{ mm}^{-1}$ , les résultats expérimentaux et théoriques de la déformation globale critique sont approximativement identiques.

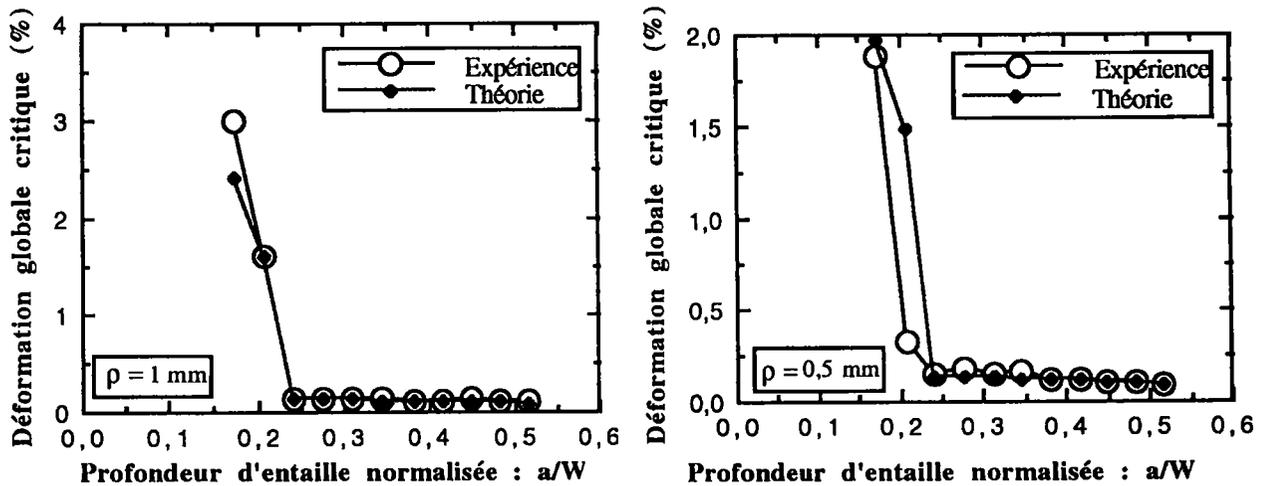


Figure 4.3 : Variation de  $\epsilon^c_g$  théorique et expérimentale en fonction de  $a/W$  et  $\rho$  pour  $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $\rho = 0,5 \text{ mm}$ .

Sur la figure correspondant à l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ , et pour  $a/W = 0,21$  (ce qui correspond à une profondeur d'entaille de 6 mm), on peut noter une différence importante entre la valeur expérimentale et la valeur théorique de la déformation globale critique.

Cela vient du fait que la contrainte globale critique est voisine de la limite élastique. Elle vaut 327,9 MPa alors que la limite élastique est de 323,8 MPa. Ainsi, il se peut que, expérimentalement, le matériau ne se soit pas encore plastifié alors que nous calculons la déformation théorique à l'aide d'une loi élastoplastique.

Pour l'acuité infinie, les différences entre les résultats expérimentaux et les valeurs théoriques sont plus importantes (sur la figure 4.5, nous avons également reporté la valeur de  $\epsilon_y$  (proche de 0,15), définie comme le rapport entre la limite élastique et le module d'YOUNG).

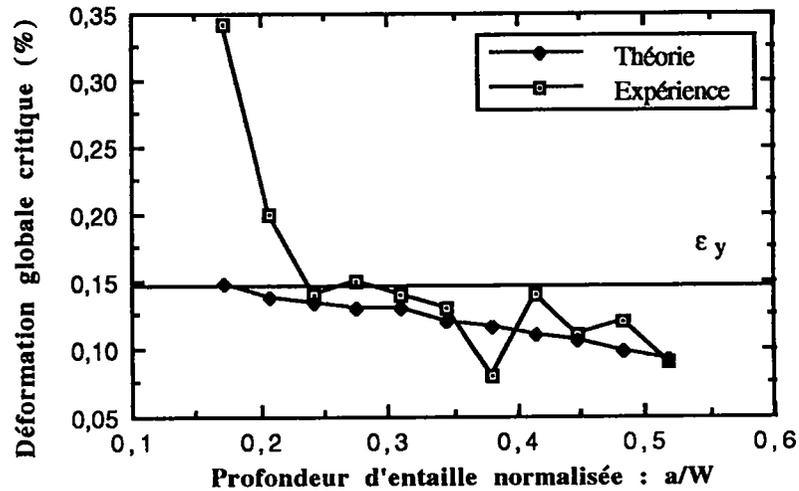


Figure 4.5 : Variation de  $\epsilon_g^c$  théorique et expérimentale en fonction de  $a/W$ .  $\rho = 0$ .

Une explication peut être proposée pour expliquer ces différences. Nous avons vu que, lorsque l'on effectue une interpolation linéaire de la variation de la charge critique en fonction de  $a/W$ , on obtient :

$$P_c = f(a/W) = 54845 - 48746a/W \quad (4.3)$$

Utilisons l'équation obtenue à l'aide de nos valeurs expérimentales et injectons la valeur de  $a/W$  correspondant à  $a = 5$  mm, soit :  $a/W = 0,17$ . On obtient une charge critique  $P_c$  de 46440,5 Newton. Cette charge correspond à une contrainte globale critique de  $\sigma_g^c = 320,28$  MPa. Nous sommes donc très légèrement en dessous de la limite élastique, ce qui donnerait une valeur de  $\epsilon_g^c$  expérimentale de l'ordre de 0,146%, valeur similaire à la valeur  $\epsilon_g^c$  théorique.

Les essais sont obligatoirement entachés de dispersions. Pour  $\rho = 0$  mm et pour les faibles valeurs de  $a$ , les valeurs de la contrainte globale critique obtenues sont très proches de la limite élastique. Une très légère variation de la charge critique obtenue lors des essais (moins de 1% pour le calcul ci-dessus) entraîne une forte variation de la déformation globale critique selon que l'on est dans le domaine plastique ou non.

#### 4.4) Calculs réalisés sur les éprouvettes K.T.(ou D.E.N.T.)

##### 4.4.1) Matériels et paramètres de calcul

###### 4.4.1.1) Matériels informatiques utilisés

Les calculs sont effectués sur station SUN à l'aide des deux logiciels utilisés déjà dans le cas des éprouvettes C.T. : DISPLAY 3 et NISA 2.

De la même façon que pour les calculs effectués précédemment, nous avons choisi un nombre d'itérations  $n$  multiple de 10 ce qui permet de limiter les paliers de chargement.

###### 4.4.1.2) Paramètres de calcul

###### 4.4.1.2.1) Loi de comportement

Les calculs sont réalisés selon les conditions suivantes :

- calcul en élastoplasticité,
- modèle de VON MISES,
- la loi de comportement du matériau est décrite par cinq points (Voir ci dessous),
- calculs réalisés en contraintes planes,
- pour chaque acuité, la charge appliquée est calculée pour avoir, dans la section réduite, la valeur moyenne de la contraintes nominale critique obtenue lors des essais.

Pour un calcul en élastoplasticité, le logiciel a besoin de trois à cinq couples contrainte-déformation obtenus de la loi de comportement du matériau. De l'essai de traction réalisé sur notre acier, nous avons choisi les points suivants :

Déformation	Contrainte (MPa)
0,01567	330
0,01922	340
0,02844	360
0,11	443,7
0,15	445

Tableau 4.3 : Couples  $\sigma$ - $\epsilon$  pris pour décrire le matériau dans le domaine plastique

Comme pour la première série de calculs, nous avons eu des problèmes de convergence lors du calcul par éléments finis du fait que le logiciel utilisé ne reconnaît pas l'instant de la rupture.

Ces calculs étant effectués pour des conditions critiques, ils prennent énormément de temps. Le matériau est beaucoup plus ductile que le précédent, ce qui pose plus de problèmes de calcul lorsque l'on applique la charge critique ; les déformations ont tendance à atteindre des valeurs trop importantes.

Dans le paragraphe 4.3.2, nous avons vu que, globalement, le matériau entaillé se comportait presque comme un matériau lisse ayant une section égale à la section réduite. On peut donc se demander si le logiciel ne surestime pas le rôle de l'entaille en donnant des contraintes en fond d'entaille trop élevées.

#### 4.4.1.2.2) Éléments

Nous utilisons les mêmes éléments que pour les calculs réalisés sur les éprouvettes C.T, à savoir un éléments quadrilatères simples en 2D.

#### 4.4.1.2.3) Caractérisation de la non linéarité et définition de la configuration de référence

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la non linéarité du calcul pouvait être définie comme due soit au *matériau*, soit à la *géométrie* ou encore à une combinaison des deux types.

La loi de comportement obtenue de l'essai de traction normalisé a montré que, pour l'E24, l'acier était très ductile et admettait donc des déformations importantes. Nous avons donc choisi de définir la non linéarité comme une combinaison de la non linéarité due au matériau et à la géométrie.

Comme nous sommes dans un cas où le matériau subit de fortes déformations, nous avons choisi d'utiliser la formulation lagrangienne *réactualisée*.

Après plusieurs calculs, nous nous sommes rendus compte que la formulation lagrangienne *réactualisée* permettait d'aller au bout des dix itérations tout en donnant des résultats cohérents alors que la formulation lagrangienne totale nous donnait beaucoup plus de dispersions ( et parfois le calcul n'arrivait pas à converger vers une solution). Pour

palier à ce problème, il aurait fallu augmenter le nombre d'itérations et donc augmenter d'autant le temps de calcul.

#### 4.4.2) Modélisation et conditions aux limites de notre problème

Nous avons vu précédemment que les essais étaient effectués sur une machine de traction-compression INSTRON. Du fait de la géométrie de nos éprouvettes, nous avons du concevoir un montage qui s'adapte sur la machine et qui permet la préhension de celles-ci. La partie supérieure du montage est fixée à la machine par un axe, ce qui autorise uniquement le mouvement de rotation autour de celui-ci, ainsi que la translation de l'ensemble suivant l'axe  $y$  lors d'un chargement ou d'un déchargement.

Les éprouvettes sont constituées d'une partie supérieure en T qui coulisse dans une rainure usinée dans les mords (Cf. annexe 1 pour les plans du montage et des éprouvettes). Au repos, rien n'empêche le mouvement de la pièce suivant l'axe  $x$ .

Lorsque l'on charge, les mords exercent un effort sur la tête de l'éprouvette, ce qui empêche alors tout mouvement de translation de la pièce dans la direction perpendiculaire à l'axe de déplacement de la traverse. De plus, le montage impose également que les noeuds situés sur la droite correspondant à la partie supérieure de l'éprouvette restent sur une même droite après déformation.

Lors du calcul, il faut donc bloquer un noeud en  $x$  pour traduire cet état de fait. Les conditions aux limites sont très importantes pour l'exactitude des résultats.

Dans notre cas, les résultats obtenus sont différents selon que l'on bloque un noeud situé sur la partie supérieure de l'éprouvette ou sur le ligament en fond d'entaille.

Dans un premier temps, nous avons décidé d'effectuer nos calculs en bloquant le déplacement suivant l'axe des  $x$  du noeud se trouvant au milieu de la partie supérieure de l'éprouvette. Pour les acuités de  $1 \text{ mm}^{-1}$  et de  $2 \text{ mm}^{-1}$ , et pour toutes les valeurs de  $a$  (profondeur de l'entaille), nous obtenons une zone en compression sur la section réduite dont la longueur vaut environ  $a/3$ .

Cependant, en imposant cette condition limite, nous faisons deux erreurs :

- rien ne nous permet de dire que le noeud bloqué en  $x$  ne se déplace pas, lors de l'essai, dans la direction de  $x$ ,

- nous n'indiquons pas que les noeuds situés sur la partie supérieure de l'éprouvette ne peuvent se déformer indépendamment les uns des autres, et donc qu'ils doivent demeurer sur une même droite après calcul.

Cette ambiguïté a été levée lors d'un déplacement à CHAMBÉRY, dans le laboratoire de l'ESIGEC dirigé par le Professeur Joseph PASTOR. Celui-ci nous a conseillé de bloquer en  $x$  un point dont nous puissions être sûr que son déplacement lors de l'essai correspondrait aux conditions entrées. Le point de fixation entre notre montage et la traverse a un seul déplacement possible qui se situe suivant l'axe des  $y$ . C'est donc en ce point qu'il faut enlever le degré de liberté correspondant à l'axe des  $x$ .

Ainsi, lors de la modélisation, nous symbolisons notre montage en incorporant une partie à la géométrie de l'éprouvette. Pour éviter tout problème de plastification dans cette zone, le matériau est défini comme étant "ultra-rigide", c'est à dire avec un module d'YOUNG mille fois supérieur à celui de l'acier E24 que nous utilisons.

Cette méthode a l'avantage d'imposer que la droite correspondant à la partie supérieure de l'éprouvette reste droite après déformation de la structure.

Les résultats obtenus avec cette modélisation ne présentent plus systématiquement une zone de compression dans la section réduite ; de plus, les itérations convergent beaucoup plus rapidement. Cependant, pour les valeurs numériques obtenues en fond d'entaille, les différences entre ces deux méthodes ne sont pas très importantes : les contraintes  $\sigma_{yy}$  et les déformations  $\varepsilon_{yy}$  varient entre 5% et 10%.

Les éprouvettes K.T. possèdent un axe de symétrie qui se situe au niveau de l'entaille (Cf. figure 4.1). Nous n'avons maillé qu'une demi - éprouvette afin de réduire le nombre de noeuds et d'éléments utilisés, ce qui se traduit par un gain de temps de calcul considérable.

Pour tenir compte de la symétrie, les noeuds situés le long de la section réduite (en fond d'entaille) ont vu leurs déplacements bloqués suivant l'axe des  $y$ . Pour prendre en compte ce que nous venons d'énoncer ci-dessus, nous bloquons le noeud correspondant à l'axe de la machine suivant l'axe des  $x$ . en autorisant la rotation autour de l'axe  $z$ . Les conditions aux limites appliquées sont représentées sur la figure 4.6.

Dans l'annexe 4, nous donnons les résultats obtenus en contraintes et en déformations sans modéliser le montage ; puis, nous effectuons une comparaison entre les deux types de modélisation pour faire apparaître les variations qui peuvent exister pour un même problème traité de deux façons différentes.

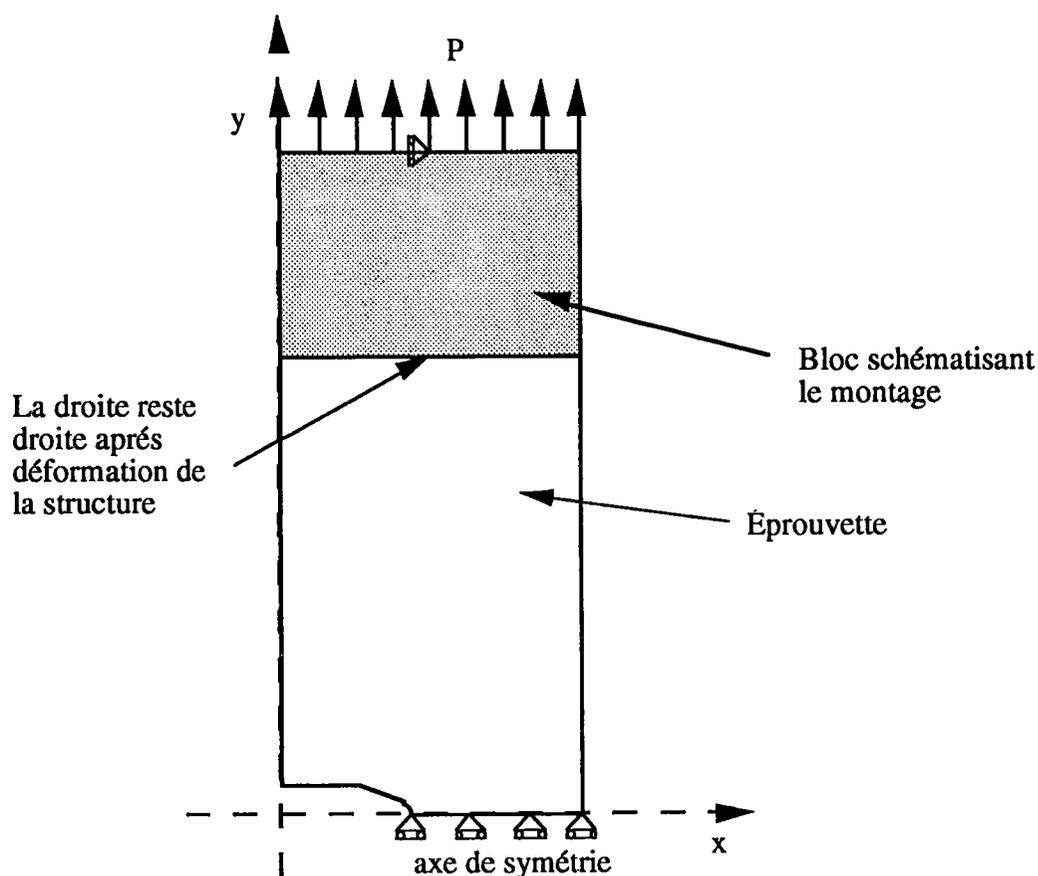


Figure 4.6 : Conditions aux limites des calculs réalisés sur les éprouvettes K.T.

#### 4.4.3) Maillage

Comme nous l'avons énoncé dans le paragraphe 3.4.3 du chapitre précédent, la réalisation du maillage est une partie extrêmement importante et complexe qui peut entraîner de grandes différences dans les résultats.

Sur la figure 4.7, nous avons représenté schématiquement l'allure du maillage des éprouvettes K.T.

Les traits forts délimitent les surfaces ((PATCH) que nous avons numérotées) tandis que les traits fins simulent le contour des éléments. La surface supérieure n°10 correspond au montage. Une représentation fidèle de la géométrie des mors ne changerait rien aux résultats. C'est pourquoi, dans un souci de simplicité et de rapidité d'exécution, nous l'avons schématisé par un bloc rectangulaire.

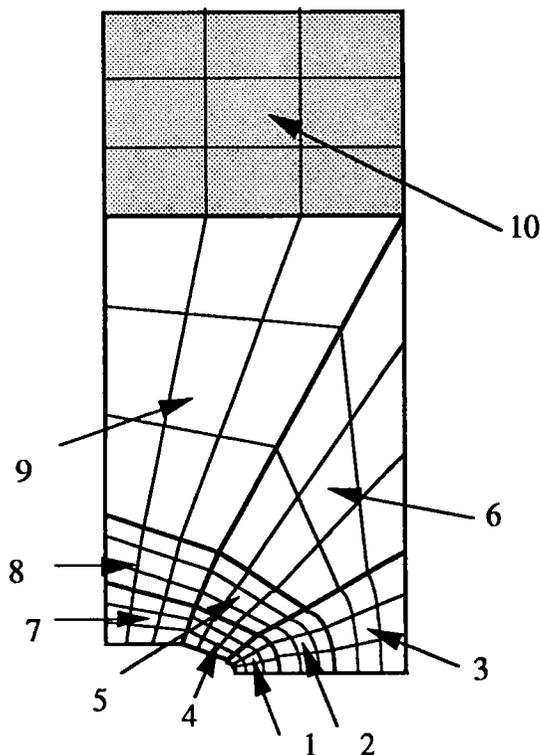


Figure 4.7 : Schématisation du maillage en fond d'entaille pour les éprouvettes K.T.

#### 4.5) Analyse des contraintes

##### 4.5.1) Analyse des contraintes en fond d'entaille itération par itération

Pour les trois acuités, nous ne représentons que les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  pour les profondeurs extrêmes de l'entaille, à savoir  $a = 5$  mm et  $a = 15$  mm. Les distributions obtenues avec les autres profondeurs d'entaille se situent toutes entre les deux.

##### 4.5.1.1) Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$

Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 représentent les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  obtenues en fond d'entaille pour les valeurs de  $a$  citées précédemment et pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ . L'allure de ces distributions est identique à celle que nous avons obtenue pour les éprouvettes C.T. Toutefois, les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  évoluent de façon différentes avec le chargement.

Pour les premières itérations, où la charge appliquée n'est pas très importante, la contrainte croît d'une valeur pratiquement constante, très légèrement supérieure à la limite d'élasticité (entre 330 MPa pour  $P \leq 0,2 P_C$  et 360 MPa pour  $P \leq 0,65 P_C$  (Cf. figure 4.9)) jusqu'à une valeur maximale qui ne se trouve pas en fond d'entaille.

Une fois cette contrainte atteinte (contrainte appelée contrainte au palier plastique et notée  $\sigma_{pp}$ ), les courbes présentent un palier plastique qui croît le long du ligament avec le chargement. Ce palier, où les contraintes sont pratiquement constantes, permet de suivre l'évolution de la zone plastique avec l'augmentation de la charge appliquée.

Lorsque tout le ligament est plastifié, la contrainte maximale critique se trouve alors en fond d'entaille, et croît légèrement avec le chargement.

La valeur de  $\sigma_{pp}$  varie peu (2% avec la profondeur d'entaille). Elle vaut 380 MPa pour  $a$  compris entre 5 mm et 12 mm ; ensuite, elle augmente régulièrement de 2 MPa à chaque fois que la profondeur d'entaille augmente d'1 mm. Pour  $a = 15$  mm, elle vaut alors 386 MPa.

La longueur du palier plastique obtenu à la dixième itération, normalisée par le ligament ( $W - a$ ), est plus importante ici que dans le cas des éprouvettes C.T. Cela est dû au matériau beaucoup plus ductile que le précédent.

Pour les faibles valeur de  $a$  (figure 4.8), la section réduite de l'éprouvette n'est pas sollicitée en compression. Nous pouvons constater que le ligament est pratiquement plastifié. La compression apparaît entre  $a = 5$  mm et  $a = 6$  mm (elle ne vaut que 1,1 mm, soit 4,76 % de  $(W - a)$ ). La transition entre la traction et la compression est assez brutale.

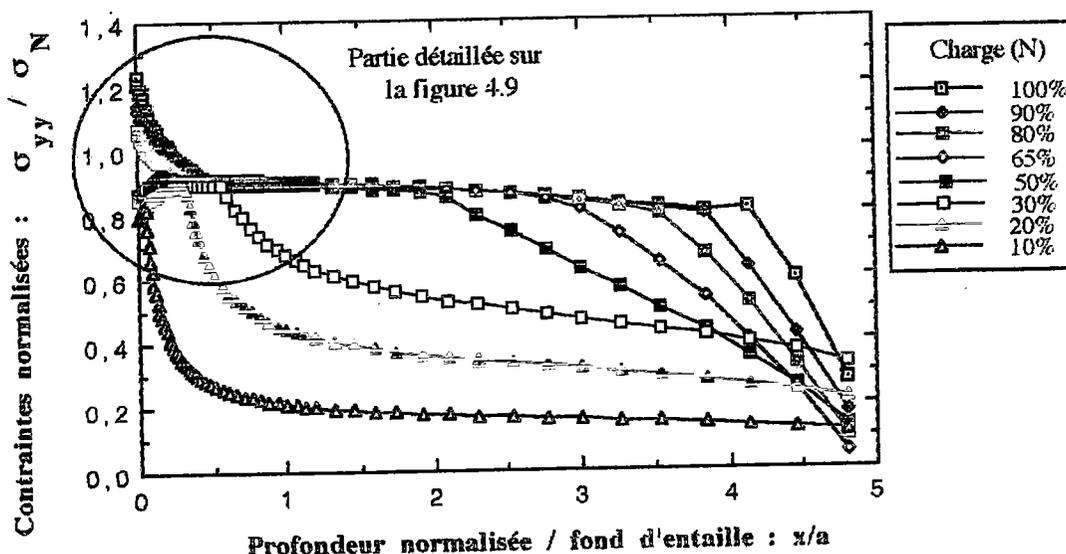


Figure 4.8 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 5$  mm.

Nous avons agrandi la zone proche du fond d'entaille afin de voir la progression du palier plastique (Cf. figure 4.9).

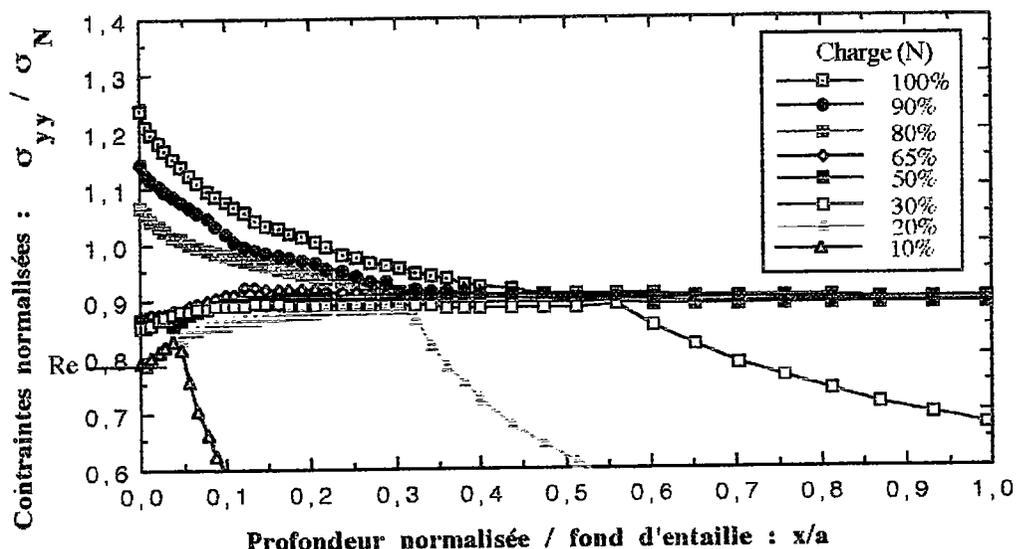


Figure 4.9 : Zoom sur la distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $a = 5 \text{ mm}$ .

Pour 10% et 20% de la charge appliquée, les deux courbes se confondent dans leur première partie. Nos résultats rejoignent les travaux réalisés par TETELMAN [17, 18], BHATTACHARYA et KUMAR [13] sur des éprouvettes sollicitées en flexion.

De même, bien que nous ayons une légère augmentation de la contrainte en fond d'entaille, les distributions des contraintes obtenues pour un chargement compris entre 30% et 65% de la charge totale appliquée présentent les mêmes caractéristiques.

À partir de 80% de la charge critique, soit pour une contrainte nominale dans la section réduite de l'ordre de la limite d'élasticité, l'allure de ces distributions change. Cela se traduit par une légère augmentation de la valeur de la contrainte  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille.

Pour  $a = 15 \text{ mm}$  et pour 100% de la charge appliquée, la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille est de l'ordre de 1,36 fois la contrainte ultime, alors qu'elle vaut 1,07 fois la contrainte ultime pour  $a = 5 \text{ mm}$ . Nous voyons ici qu'une partie de la section réduite est sollicitée en compression.

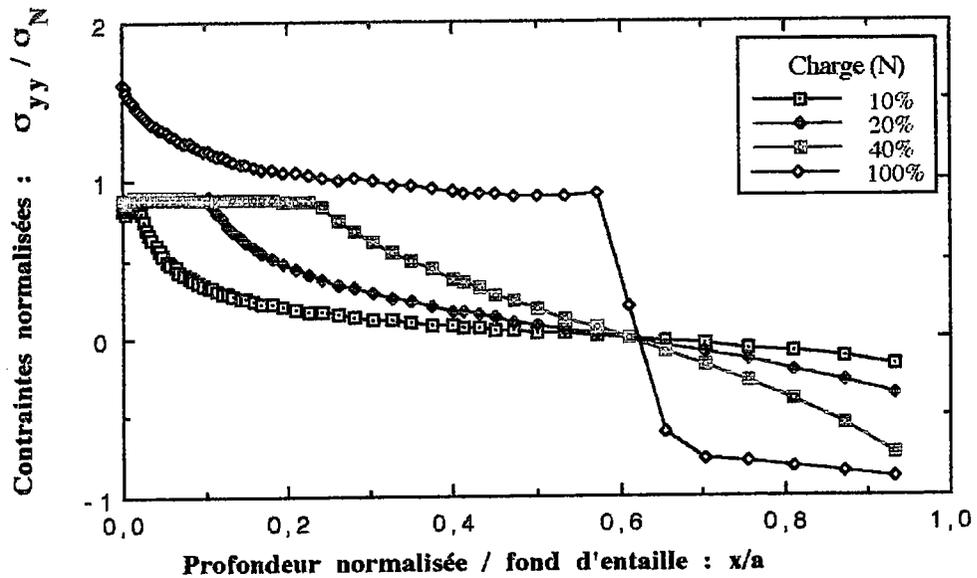


Figure 4.10 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 15$  mm.

Pour les deux autres rayons d'entaille  $\rho = 0,5$  mm et  $\rho = 0$  mm, les courbes représentant les distributions des contraintes élastoplastiques en fond d'entaille sont données dans l'annexe 5.

Les distributions présentent toujours un palier plastique dont la taille (qui représente la longueur de la zone plastique en fond d'entaille) croît avec le chargement.

De même, pour les faibles profondeurs d'entaille, la section réduite de l'éprouvette n'est pas sollicitée en compression, ce qui se traduit par le fait que le ligament est entièrement plastifié. La compression apparaît pour  $a$  compris entre 6 mm et 7 mm.

Pour  $a = 15$  mm et pour 100% de la charge appliquée, la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille est de l'ordre de 3,33 fois la contrainte ultime pour  $\rho = 0$  mm et 1,38 fois la contrainte ultime pour  $\rho = 0,5$  mm (elle valait 1,36 fois cette valeur dans le cas précédent).

Pour  $a = 5$  mm, elle vaut 1,44 fois la contrainte ultime  $\rho = 0$  mm et 1,18 fois la contrainte ultime pour  $\rho = 0,5$  mm (contre 1,07 fois pour  $\rho = 1$  mm).

#### 4.5.1.2) Discussion

Cette partie nous permet de mettre en évidence le processus de plastification de la section réduite, processus semblable quelques soient la valeurs du rayon d'entaille. La distribution des contraintes peut donc prendre quatre formes :

a)  $\sigma_{\max}^c \leq Re$ . On reste dans le domaine élastique. Les distributions  $\sigma_{yy}$  évoluent en fonction de  $1/\sqrt{x}$ . La contrainte maximale se trouve en fond d'entaille.

b)  $\sigma_{\max}^c \geq Re$  et  $\sigma_N \leq Re$ . La plastification apparaît. Les contraintes ne sont plus maximales en fond d'entaille mais à une distance variable de celui-ci. La contrainte augmente jusqu'à cette valeur maximale. Deux cas se présentent :

b.1) Si la contrainte nominale n'est pas très élevée, la contrainte maximale  $\sigma_{yy}$  obtenue sur le ligament n'atteint pas la valeur de la contrainte au palier  $\sigma_{pp}$  (de l'ordre de 380 MPa, soit 117% de  $Re$  ou 85% de  $Rm$ ). La distribution des contraintes décroît alors sous la forme  $1/\sqrt{x}$ .

b.2) Si la contrainte nominale est assez élevée pour que la contrainte maximale atteigne  $\sigma_{pp}$ , les contraintes restent constantes le long de ce palier plastique puis se mettent à décroître lorsque l'on quitte la zone plastifiée.

c) Lorsque  $\sigma_N \geq Re$ , la contrainte  $\sigma_{yy}$  est maximale en fond d'entaille. La courbe présente trois parties : les contraintes décroissent de  $\sigma_{\max}^c$  jusqu'à  $\sigma_{pp}$ , puis, elles restent constantes tant que l'on se trouve sur le palier plastique, ensuite elles chutent selon une dépendance en  $1/\sqrt{x}$ .

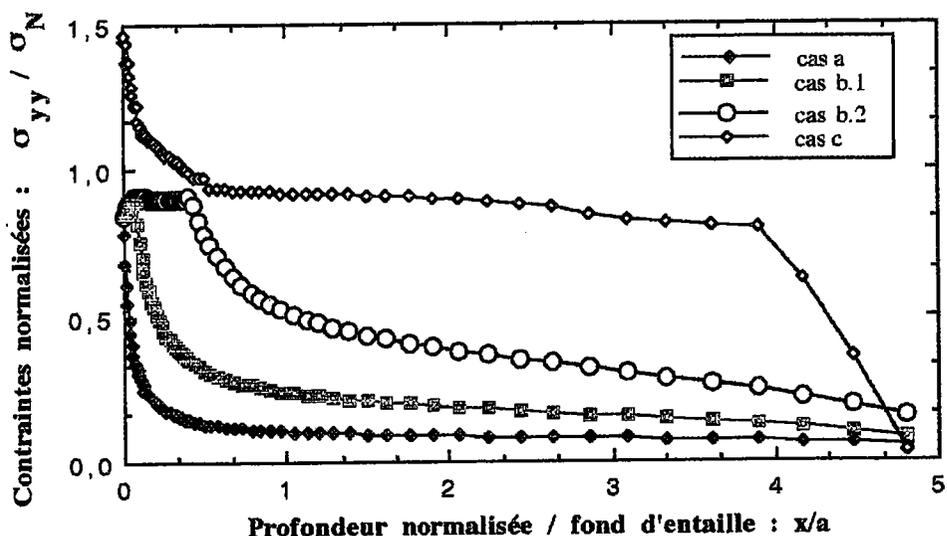


Figure 4.11 : Étapes successives du processus de plastification de la section réduite.

$a = 5 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0,5 \text{ mm}$ .

Les distributions évoluent en fonction du rapport  $a/W$  (présence de compression ou non) mais conservent une allure similaire.

Lorsqu'il n'y a pas de compression dans la section réduite, le palier plastique diminue avec le rayon d'entaille. Il représente 83% du ligament pour  $\rho = 1$  mm, 78% pour  $\rho = 0,5$  mm et 75% pour  $\rho = 0$  mm. Cette tendance s'inverse lorsque la compression apparaît. Le palier plastique augmente lorsque le rayon d'entaille diminue. Il représente 57% du ligament pour  $\rho = 1$  mm, 65% pour  $\rho = 0,5$  mm et 66% pour  $\rho = 0$  mm.

Pour les trois acuités, l'allure générale des distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  en fond d'entaille est la même. Des différences apparaissent surtout au niveau de la valeur de la contrainte maximale critique  $\sigma_{max}^c$  qui augmente avec l'acuité. Son influence est plus marquée lorsque le rapport  $a/W$  est élevé.

Pour  $a = 15$  mm, la contrainte maximale critique représente 1,36 fois la contrainte ultime pour  $\rho = 1$  mm, 1,38 fois  $R_m$  pour  $\rho = 0,5$  mm et 3,33 fois  $R_m$  pour  $\rho = 0$  mm vraisemblablement en raison de la triaxialité des contraintes. À l'inverse, pour  $a = 5$  mm, la contrainte maximale critique vaut 1,07 fois  $R_m$  pour  $\rho = 1$  mm, 1,18 fois la contrainte ultime pour  $\rho = 0,5$  mm et 1,44 fois  $R_m$  pour  $\rho = 0$  mm.

#### 4.5.2) Distribution des contraintes pour la dixième itération

Pour chacune des entailles et pour chaque acuité, nous avons relevé la valeur de la contrainte maximale obtenue par le calcul en fond d'entaille.  $\sigma_{max}^c$  est obtenue en faisant une extrapolation de la distribution des contraintes à l'aide d'une fonction polynomiale du troisième degré.

Dans la seconde partie de l'annexe 5, nous présentons sous forme de tableaux les valeurs obtenues sur la contrainte maximale critique  $\sigma_{max}^c$  en fonction de la profondeur d'entaille  $a$  et du rayon d'entaille  $\rho$ .

##### 4.5.2.1) Acuité de $1\text{mm}^{-1}$

Nous voyons sur la figure 4.12 que la variation de la contrainte maximale critique en fonction de la profondeur de l'entaille présente quatre parties distinctes.

Zone I :  $a \leq 9$  mm,  $\sigma_{max}^c$  augmente de façon linéaire de 470 MPa à 540 MPa environ. La pente de cette droite est de 18 MPa/mm.

Zone II :  $a$  compris entre 9 mm et 12 mm,  $\sigma_{max}^c$  reste constant et vaut environ 540 MPa.

Zone III :  $a$  compris entre 12 mm et 14 mm,  $\sigma^c_{max}$  augmente de nouveau de façon linéaire de 540 MPa à 600 MPa environ. La pente de cette droite est plus importante que pour la première partie et vaut 25 MPa/mm.

Zone IV :  $a \geq 14$  mm,  $\sigma^c_{max}$  n'augmente plus et vaut environ 600MPa.

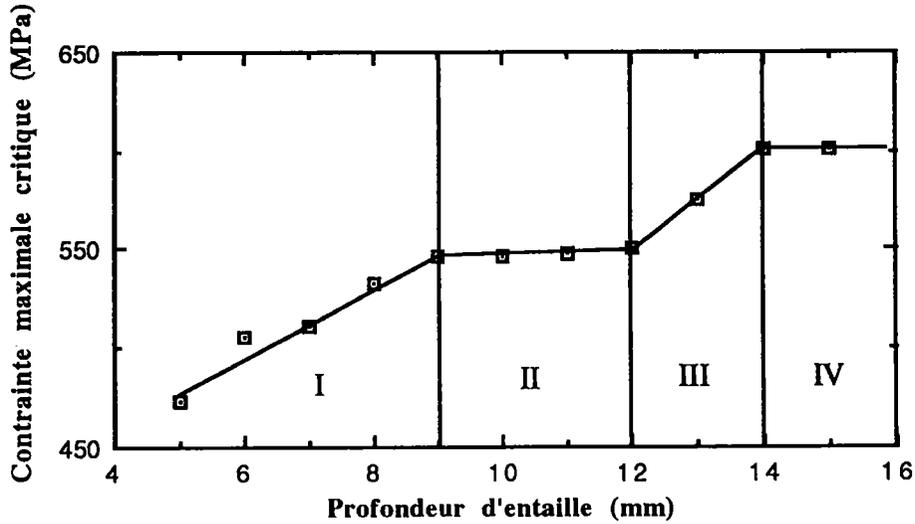


Figure 4.12 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 1$  mm

#### 4.5.2.2) Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$

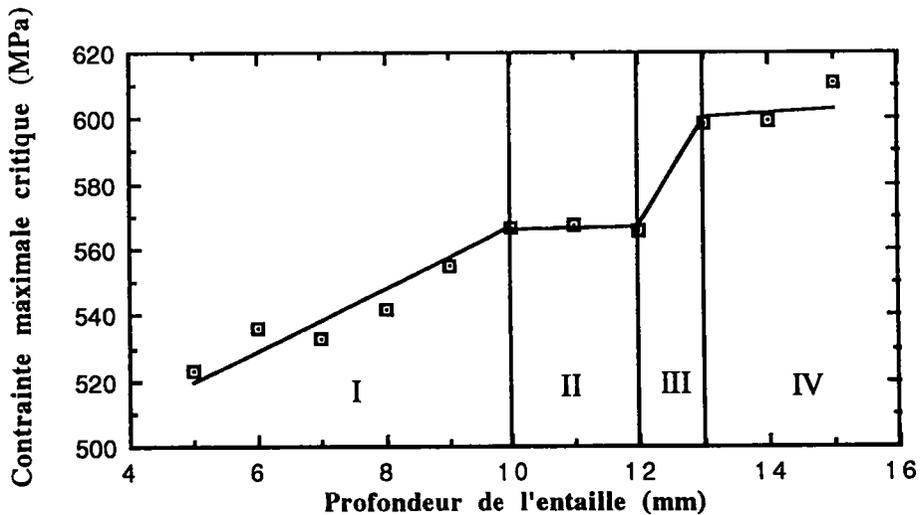


Figure 4.13 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 0,5$  mm

La figure ci-dessus montre que la variation de la contrainte maximale critique en fonction de la profondeur de l'entaille présente de nouveau quatre parties distinctes.

Zone I :  $a \leq 10$  mm,  $\sigma^c_{max}$  augmente de façon pratiquement linéaire de 520 MPa à 560 MPa environ. La pente de cette droite est faible et vaut 8 MPa/mm.

Zone II :  $a$  compris entre 10 mm et 12 mm,  $\sigma_{\max}^c$  reste constant et vaut environ 565MPa.

Zone III :  $a$  compris entre 12 mm et 13 mm,  $\sigma_{\max}^c$  augmente de nouveau de façon linéaire de 565 MPa à 600 MPa environ. La pente de cette droite est plus importante que pour la première partie et vaut 35 MPa/mm.

Zone IV :  $a \geq 13$  mm,  $\sigma_{\max}^c$  n'augmente plus et reste voisine de 600MPa.

#### 4.5.2.3) Acuité infinie

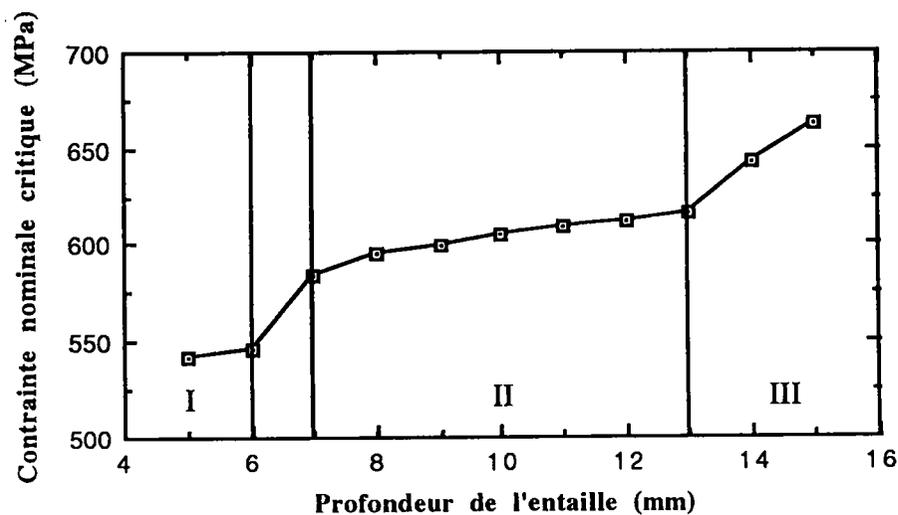


Figure 4.14 : Variation de  $\sigma_{\max}^c$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 0$  mm

Sur la figure 4.14, où nous représentons la variation de la contrainte maximale critique en fonction de la profondeur de l'entaille, nous voyons que nous avons cette fois-ci trois parties distinctes et une zone de transition entre la première partie et la seconde.

Zone I :  $a \leq 6$  mm,  $\sigma_{\max}^c$  est pratiquement constante et vaut environ 543 MPa.

Zone II :  $a$  compris entre 7 mm et 13 mm,  $\sigma_{\max}^c$  augmente très faiblement de façon linéaire et passe de 584 MPa à 617 MPa. La pente de cette droite vaut 5 MPa/mm. Nous pouvons assimiler cette partie à la zone II des deux précédentes acuités, c'est à dire une zone où les contraintes sont pratiquement constantes.

Zone III :  $a \geq 13$  mm,  $\sigma_{\max}^c$  augmente plus rapidement, passant de 617 MPa à 663 MPa. La pente de cette droite est de 23 MPa/mm.

#### 4.5.2.4) Discussion

Nous représentons sur la figure 4.15 la variation de la contrainte maximale critique en fonction de la profondeur de l'entaille pour les trois acuités.

Nous voyons qu'elle évolue de la même façon pour les différentes acuités. Les valeurs obtenues augmentent lorsque le rayon d'entaille diminue, confirmant ainsi le fait que l'augmentation de l'acuité engendre une augmentation de la contrainte maximale.

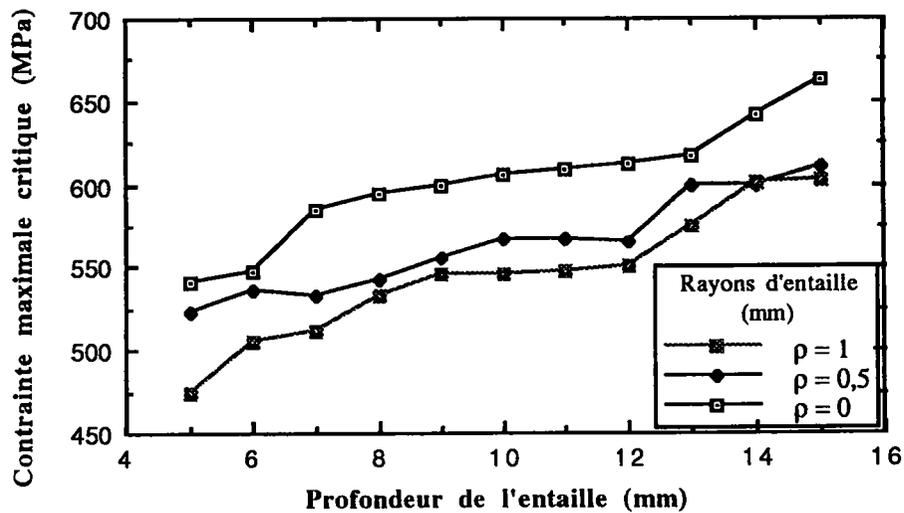


Figure 4.15 : Variation de  $\sigma^C_{max}$  en fonction de  $a$  ; toutes acuités.

En règle générale, la courbe  $f(a) = \sigma^C_{max}$  présente quatre zones distinctes, dont les trois premières se retrouvent sur les trois courbes.

- Pour  $a/W \leq 0,3$ ,  $\sigma^C_{max}$  augmente,
- Si  $a/W$  est compris entre 0,3 et 0,4,  $\sigma^C_{max}$  reste pratiquement constante,
- Si  $a/W$  est compris entre 0,4 et 0,46,  $\sigma^C_{max}$  augmente de nouveau,
- Pour  $a/W \geq 0,46$ ,  $\sigma^C_{max}$  reste pratiquement constante.

Pour  $\rho = 0$  mm, la dernière zone (où les contraintes sont pratiquement constantes) n'apparaît pas. On peut supposer qu'elle n'est pas encore atteinte, mais que, pour des profondeurs d'entaille supérieures à 15 mm, elle pourrait apparaître.

- Pour  $a/W \leq 0,24$ ,  $\sigma^C_{max}$  augmente,
- Si  $a/W$  est compris entre 0,24 et 0,46,  $\sigma^C_{max}$  reste pratiquement constante,
- Pour  $a/W \geq 0,46$ ,  $\sigma^C_{max}$  augmente.

#### 4.6) Analyse des déformations

Toutes les déformations étudiées sont calculées à partir des déplacements obtenus lors du calcul par éléments finis. Le maillage a été effectué de façon à ce que les éléments de la section réduite n'aient pas une hauteur trop importante. Les déformations sont calculées à partir des déplacements relevés  $\Delta l$  et de la largeur de la maille  $l$ .

##### 4.6.1) Analyse des déformations en fond d'entaille : itération par itération

Sur la figure 4.16, nous avons tracé en échelle logarithmique les distributions des déformations successives pour une charge représentant 10%, 30% et 100% de la charge critique obtenue lors des essais et pour des valeurs de  $\rho$  et de  $a$  qui valent respectivement 1 mm et 15 mm.

Ces distributions ont globalement la même allure quelque soit la charge appliquée. L'angle  $\alpha$ , qui caractérise la " pseudo-singularité " de la déformation, reste constant.

La distance effective critique  $X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}}$  diminue avec la charge tandis que la distance effective minimale critique  $X_{\text{m},\varepsilon}^{\text{C}}$  augmente très légèrement avec la charge (pour un effort équivalent à 10% de  $P_{\text{C}}$ ,  $X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}} = 0,8$  mm et  $X_{\text{m},\varepsilon}^{\text{C}} = 0,16$  mm ; lorsque la charge appliquée est égale à  $P_{\text{C}}$ ,  $X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}} = 0,55$  mm et  $X_{\text{m},\varepsilon}^{\text{C}} = 0,17$  mm).

Nous ne représentons les différents paliers de chargements que pour une seule éprouvette car, quelque soient les valeurs de la profondeur d'entaille et du rayon d'entaille, les courbes présentent les mêmes caractéristiques.

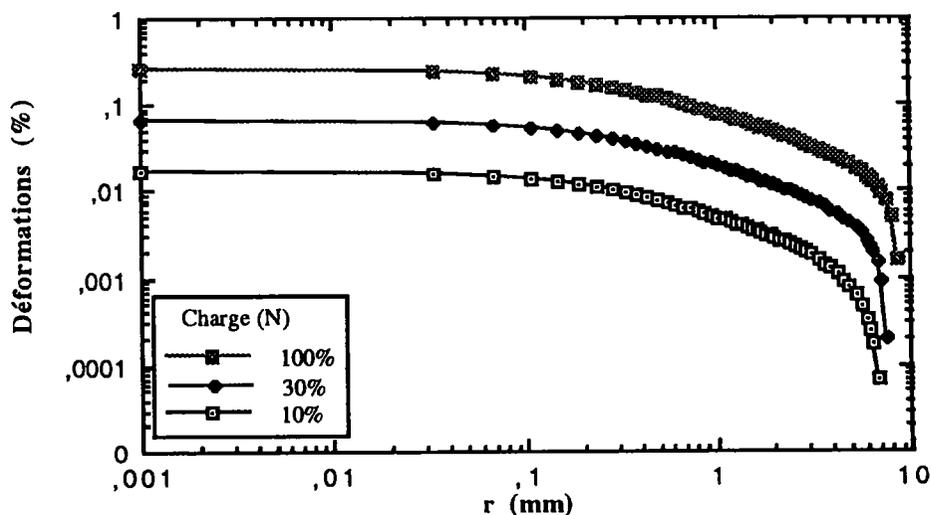


Figure 4.16 : Distributions des déformations en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 15$  mm

Comme dans le cas des éprouvettes C.T, bien que la contrainte et la déformation soient liées par un loi de type LUDWIK  $\sigma = K\epsilon^n$ , la contrainte maximale ne se trouve pas nécessairement en fond d'entaille alors que la déformation maximale l'est toujours. Nous retrouvons ici les résultats présentés par USAMI [11].

#### 4.6.2) Distribution des déformations pour la dixième itération

Pour chaque valeur de  $a$  et pour chaque acuité, nous avons tracé en " échelle logarithmique " les distributions des déformations pour la dixième itération afin d'obtenir la pente de la droite qui définit la singularité d'entaille de déformations, à savoir la valeur du paramètre  $\alpha$ ".

Nous reportons le logarithme de la déformation en fonction du logarithme de la profondeur par rapport au fond de l'entaille. Cela nous permet de tracer la droite qui approxime le mieux les valeurs de la déformation dans la partie III (Cf. chapitre 3, paragraphe 3.6.4.1).

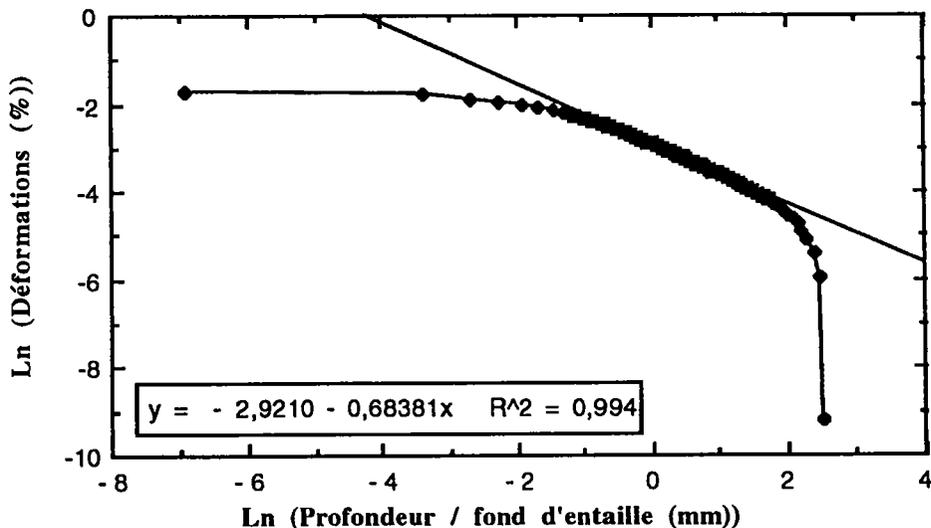


Figure 4.17 : Distribution des déformations.  $a = 13$  mm et  $\rho = 1$  mm

Nous avons donc l'équation suivante :

$$\text{Ln}(\epsilon_{yy}) = A - \alpha \ln(r) \quad (4.4)$$

où  $A$  est une constante qui vaut  $-2,9210$  sur le graphique 5.17.

Si l'on se place à l'instant critique, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\epsilon_{\text{max}}^c) &= A - \alpha \ln(X_{m,\epsilon}^c) \\ \text{Ln}(\epsilon_{\text{eff}}^c) &= A - \alpha \ln(X_{\text{eff},\epsilon}^c) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nous présentons la distribution des déformations uniquement pour l'éprouvette ayant une profondeur d'entaille de 13 mm et un rayon d'entaille de 1 mm car les courbes ont toutes la même allure.

La variations de la valeur de la déformation maximale critique  $\epsilon^c_{max}$  et celle du paramètre  $\alpha$  en fonction de la profondeur d'entaille  $a$  sont détaillées respectivement dans les paragraphes 4.6.3.3 et 4.6.3.2, et nous donnons leurs valeurs sous forme de tableaux dans l'annexe 6.

### 4.6.3) Discussion

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.6.4.1 du chapitre 3, les distributions des déformations peuvent être schématisées par trois zones comprenant deux parties importantes (la première où le logarithme des déformations est pratiquement constant et égale à  $\ln(\epsilon^c_{max})$  ; et la troisième où la distribution des déformations est une fonction puissance de la distance :  $\epsilon \approx f(r^{-\alpha})$ ) et une partie de transition. En échelle logarithmique, ces deux zones peuvent être schématisées par des droites. L'intersection de ces deux droites détermine la valeur de la distance effective minimale critique :  $X^c_{m,\epsilon}$ .

La distance effective critique  $X^c_{eff,\epsilon}$  est définie comme le point de séparation entre la zone III et la zone de transition.

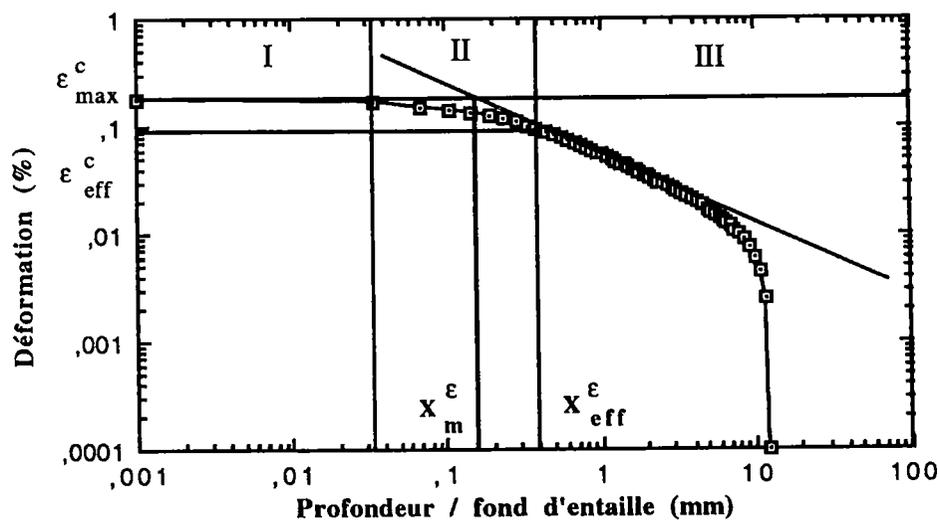


Figure 4.18 : Détermination de la valeur de  $X^c_{eff,\epsilon}$  à partir d'une distribution de déformation en échelle logarithmique.

#### 4.6.3.1) Détermination des valeurs de $X^{C_{eff,\epsilon}}$ et de celles de $\epsilon^{C_{eff}}$ pour chaque acuité

Nous traçons, pour chaque valeur de  $a$ , les distributions des déformations en échelle logarithmique. La distance effective critique  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  (prise sur l'axe des  $x$ ) correspond au point d'intersection entre la distribution des déformations et la droite qui caractérise la "pseudo-singularité" de la déformation.

La figure 4.18 illustre la procédure de détermination graphique de  $X^{E_{eff}}$  pour un cas général.

Les variations de la valeur de la déformation effective critique  $\epsilon^{C_{eff}}$  en fonction de la profondeur d'entaille  $a$  sont détaillées dans les paragraphes 4.6.3.3 et résumées dans l'annexe 6.

Dans cette annexe, nous donnons également les valeurs de  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  et de  $X^{C_{m,\epsilon}}$  obtenues analytiquement à partir des équations des distributions des déformations (données, elles, dans l'annexe 7), ainsi celles de  $(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$  et de  $(X^{C_{m,\epsilon}})^{\alpha''}$ .

La distance effective critique  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  et  $(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$  décroissent avec la longueur du ligament. Pour la distance effective minimale critique  $X^{C_{m,\epsilon}}$ , elle décroît avec la longueur du ligament tandis que la variation de la valeur  $(X^{C_{m,\epsilon}})^{\alpha''}$  change avec l'acuité.

Dans la suite de notre étude, nous ferons apparaître sur des graphiques les variations de  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  et de  $X^{C_{m,\epsilon}}$  en fonction de  $a/W$  ainsi que celles de  $\epsilon^{C_{eff}}(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$  en fonction de  $a$ . Nous rappelons que  $\epsilon^{C_{eff}}(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''} = \epsilon^{C_{max}}(X^{C_{m,\epsilon}})^{\alpha''}$ .

#### 4.6.3.2) Variation du paramètre $\alpha''$ en fonction de $a$

Sur la figure 4.19, nous représentons la variation du paramètre  $\alpha''$  avec la profondeur de l'entaille pour trois rayons d'entaille différents.

Cette figure confirme ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, à savoir que le paramètre  $\alpha''$  est fonction de la profondeur d'entaille. Nous retrouvons bien le fait que  $\alpha''$  augmente lorsque  $a$  diminue.

Par contre, nous voyons ici que, contrairement à ce que nous avons dit pour les éprouvettes C.T., le rôle de la profondeur d'entaille est loin d'être négligeable. Pour de fortes variations du rapport  $a/W$  (de 0,17 à 0,52),  $\alpha''$  est compris entre 0,845 et 0,672, ce qui fait une variation de 26%.

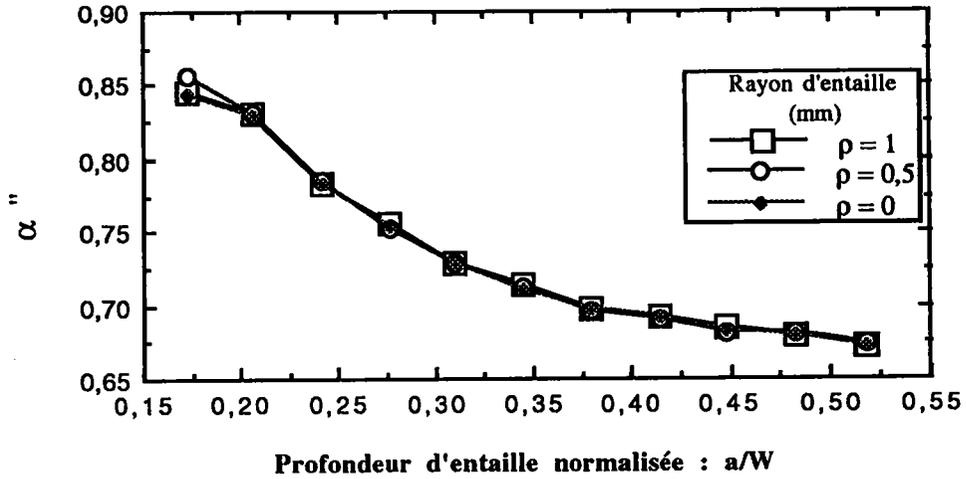


Figure 4.19 : Variation de  $\alpha''$  avec la profondeur d'entaille. Toutes acuités confondues.

Nous voyons également que l'angle  $\alpha''$  est indépendant de  $\rho$ . Quelque soit la valeur du rayon d'entaille, les trois courbes se superposent. Les différences obtenues sont infimes :

- ◊ l'écart-type vaut 0,0067 (pour  $a = 5$  mm), puis il passe à 0,0019 (pour  $a = 10$  mm) pour finalement atteindre la valeur de 0,0003 (pour  $a = 15$  mm),
- ◊ le coefficient de variation vaut de 0,0079, puis il passe à 0,0027 pour finalement atteindre la valeur de 0,0005 (pour les mêmes profondeurs d'entaille que ci-dessus).

La figure 4.19 comporte deux parties distinctes. Il est possible de schématiser la variation de  $\alpha''$  en fonction de  $a/W$  par deux droites.

Pour  $a \leq 9$  mm,  $\alpha''$  décroît de façon rapide et chute de 14% par rapport à la valeur maximale. La pente de cette droite est de -0,029.

Une zone de transition apparaît pour  $a = 10$  mm, ce qui représente une valeur de  $a/W$  légèrement supérieure à 0,3.

À partir de cette profondeur d'entaille,  $\alpha''$  décroît toujours, mais la variation entre les deux valeurs limites n'est plus que de 0,02 ce qui représente une chute de 1,62% par rapport à la valeur obtenue pour  $a = 10$  mm. Nous pouvons donc considérer que  $\alpha''$  reste constant. La pente de cette droite est de -0,006.

Cette profondeur d'entaille,  $a = 10$  mm, correspond à 34% de la largeur totale de l'éprouvette. Il serait intéressant de voir si, d'une façon générale,  $\alpha''$  cesse de diminuer lorsque la profondeur d'entaille devient égale au tiers de la largeur totale de l'éprouvette.

### 4.6.3.3) Variation de $\epsilon^c_{max}$ et de $\epsilon^c_{eff}$ en fonction de $a$

#### 4.6.3.3.1) Acuité de $1\text{ mm}^{-1}$

Nous représentons sur la même figure 4.20 la variation de la déformation maximale critique et celle de la déformation effective critique en fonction de la profondeur d'entaille normalisée par  $W$ .

Les deux courbes présentent deux parties distinctes avec la même zone de transition pour  $a = 12\text{ mm}$ .

- Zone I :  $a \leq 12\text{ mm}$ ,  $\epsilon^c_{max}$  et  $\epsilon^c_{eff}$  augmentent de façon quasi linéaire entre 9% et 14% pour la première et entre 2,41% et 5,54% pour la seconde ; la pente de cette droite n'est que de 0,7% pour  $\epsilon^c_{max}$  contre 0,45% pour  $\epsilon^c_{eff}$ .

- Zone II :  $a \geq 12\text{ mm}$ ,  $\epsilon^c_{max}$  et  $\epsilon^c_{eff}$  se mettent à croître brusquement.  $\epsilon^c_{max}$  passe de 14% à 25% (la pente de la droite est alors 3,77%) tandis que  $\epsilon^c_{eff}$  passe de 5,54% à 11,32% (la pente de cette droite vaut 2%).

Pour la déformation maximale critique, la transition entre les deux zones se fait pour une valeur de la déformation proche de la valeur de coefficient  $n$  (ou coefficient d'érouissage) de la loi de LUDWIK :  $\epsilon^c_{max} = 0,146$ .

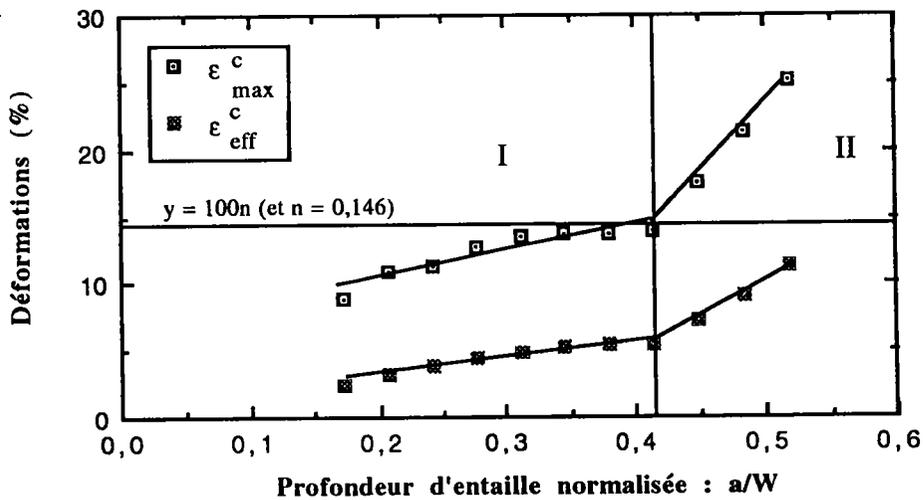


Figure 4.20 : Variation de  $\epsilon^c_{max}$  et de  $\epsilon^c_{eff}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

Dans chaque zone, la pente relative à la variation de  $\epsilon^c_{max}$  est supérieure à celle obtenue pour la déformation effective critique.

Il semblerait qu'il y'ait une zone de transition dans le mécanisme de rupture autour de la profondeur de  $12\text{ mm}$ , ce qui correspond à  $a/W \approx 0,4$ . De façon similaire à la variation de  $\alpha''$ , la déformation maximale critique et la déformation effective critique augmentent de

façon importante à partir du moment où la profondeur de l'entaille correspond à environ 35% - 40% de la largeur totale de l'éprouvette.

Lors de l'étude menée à partir des éprouvettes C.T, nous avons vu que la déformation maximale critique était une fonction polynomiale de degré trois de  $\rho$ , et qu'elle était indépendante de  $a$ . Nous voyons ici que nous ne pouvons pas généraliser cette conclusion à l'ensemble des géométries d'entaille, mais cela reste valable pour  $a \leq 0,4 W$ . Nous pouvons faire la même constatation pour la déformation effective critique.  $\epsilon^c_{eff}$  et  $\epsilon^c_{max}$  sont donc fonction de  $\rho$  et de  $a$ .

#### 4.6.3.3.2) Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$

La figure 4.21 représente la variation de la déformation maximale critique et celle de la déformation effective critique en fonction de la profondeur d'entaille.

Pour  $\epsilon^c_{max}$ , l'allure générale de la courbe est la même que celle obtenue pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ , à savoir qu'elle comporte de nouveau deux parties distinctes : une zone où la déformation maximale critique augmente faiblement, et une autre où cette augmentation est beaucoup plus importante.

- Zone I :  $a \leq 11 \text{ mm}$ ,  $\epsilon^c_{max}$  augmente de façon quasi linéaire entre 16% et 19% ; la pente de cette droite n'est que de 0,6%.

- Zone II :  $a \geq 11 \text{ mm}$ ,  $\epsilon^c_{max}$  se met à croître brusquement et passe de 19% à 28%. La pente de la droite est un peu plus faible que pour  $\rho = 1 \text{ mm}$ , et vaut 2,63%.

La zone de transition se situe, ici, pour  $a = 11 \text{ mm}$ , soit 38% de  $W$ , et la droite d'équation :  $\epsilon^c_{max} = n$  (ou  $n = 0,146$ ) ne coupe plus la courbe  $\epsilon^c_{max} = f(a)$ .

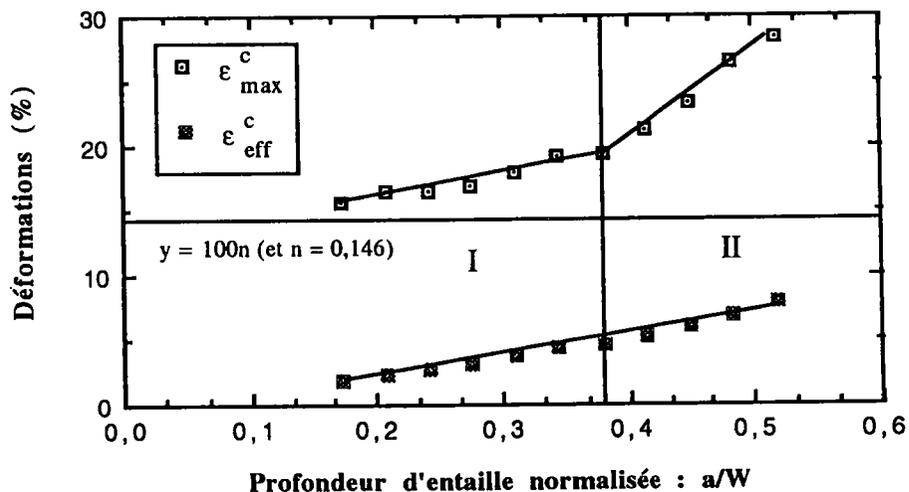


figure 4.21 : Variation de  $\epsilon^c_{max}$  et de  $\epsilon^c_{eff}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

La variation de la déformation effective critique en fonction de la profondeur d'entaille ne comporte plus de zone de transition.  $\epsilon^c_{\max}$  varie linéairement en fonction de  $a$  et la pente de cette droite est de 0,6%.

#### 4.6.3.3) Acuité infinie

Sur la figure 4.22, nous représentons la variation de la déformation maximale critique et celle de la déformation effective critique en fonction de la profondeur d'entaille. Les deux courbes ne présentent plus qu'une seule partie. La déformation maximale critique et la déformation effective critique sont des fonctions croissantes et linéaires de la profondeur d'entaille.

L'équation de la droite qui approxime  $f(a/W) = \epsilon^c_{\max}$  est :

$$\epsilon^c_{\max} = 0,15335 + 0,4872 a/W \quad (4.4)$$

Le facteur de corrélation,  $R^2$  vaut 0,991.

De la même façon que pour l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ , la droite d'équation :  $\epsilon^c_{\max} = n \cdot a$  (où  $n = 0,146$ ) ne coupe plus la courbe  $\epsilon^c_{\max} = f(a)$ .

L'équation de la droite qui approxime  $f(a/W) = \epsilon^c_{\text{eff}}$  est :

$$\epsilon^c_{\text{eff}} = -0,00172 + 0,0548 a/W \quad (4.5)$$

Le facteur de corrélation,  $R^2$  vaut 0,993.

La droite d'équation :  $\epsilon^c_{\text{eff}} = n/2$  (où  $n = 0,146$ ) ne coupe plus la courbe  $\epsilon^c_{\text{eff}} = f(a)$ .

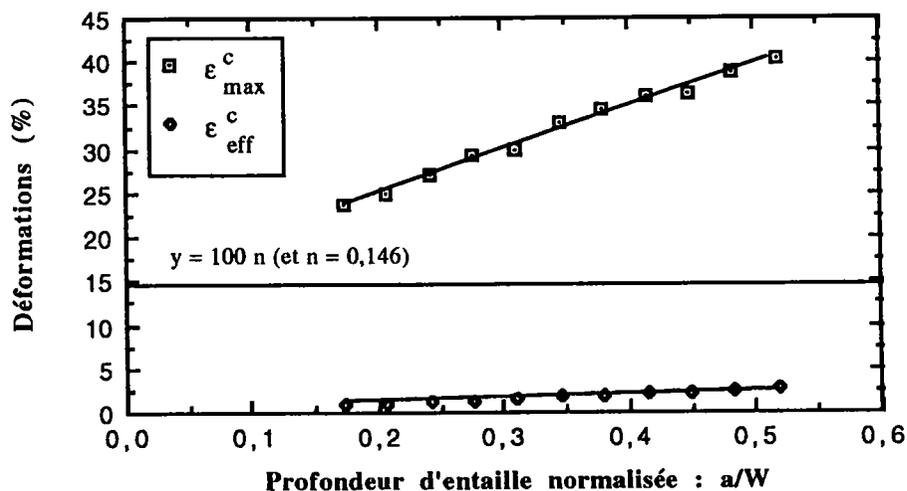


Figure 4.22 : Variation de  $\epsilon^c_{\max}$  et de  $\epsilon^c_{\text{eff}}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

#### 4.6.3.3.4) Discussion sur les valeurs de $\epsilon^c_{\max}$ et $\epsilon^c_{\text{eff}}$

◊ Sur la figure 4.23, nous avons représenté la variation de la **déformation maximale critique** en fonction de la profondeur d'entaille pour les trois rayons d'entaille.

Quelque soit la valeur de  $\rho$  différente de zéro, l'allure générale de la variation de  $\epsilon^c_{\max}$  en fonction de  $a/W$  est la même. Les courbes présentent deux parties que l'on peut schématiser par deux droites.  $\epsilon^c_{\max}$  augmente régulièrement mais faiblement jusqu'à une valeur de  $a/W$  voisine de 0,4 (zone I des graphiques 4.20 et 4.21), puis se met à croître de façon plus rapide pour les profondeurs d'entaille plus importantes. Dans cette seconde partie, la pente de la droite diminue avec  $\rho$ .

Pour l'acuité infinie, les deux droites n'en forment plus qu'une seule. La déformation maximale critique varie linéairement en fonction de  $a$  (ou  $a/W$ ).

Il existe donc une zone de transition qui se situerait entre 30% et 40% de la largeur totale de l'éprouvette. Cette zone de transition dans le mécanisme de rupture est liée à l'acuité de l'entaille et diminue avec le rayon d'entaille.

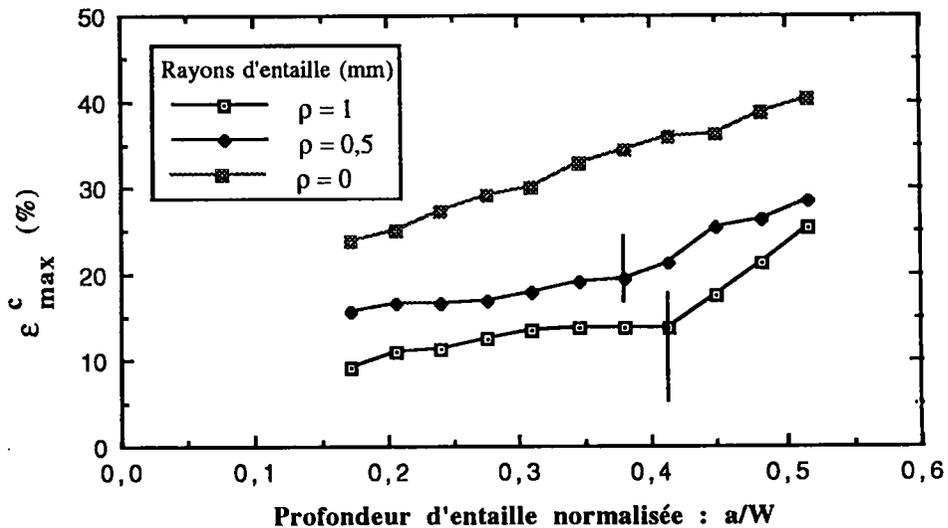


Figure 4.23 : Variation de  $\epsilon^c_{\max}$  en fonction de  $a/W$  pour les trois rayons d'entaille.

◊ Sur la figure 4.24, nous représentons la variation de la **déformation effective critique** en fonction de la profondeur d'entaille pour les trois rayons d'entaille.

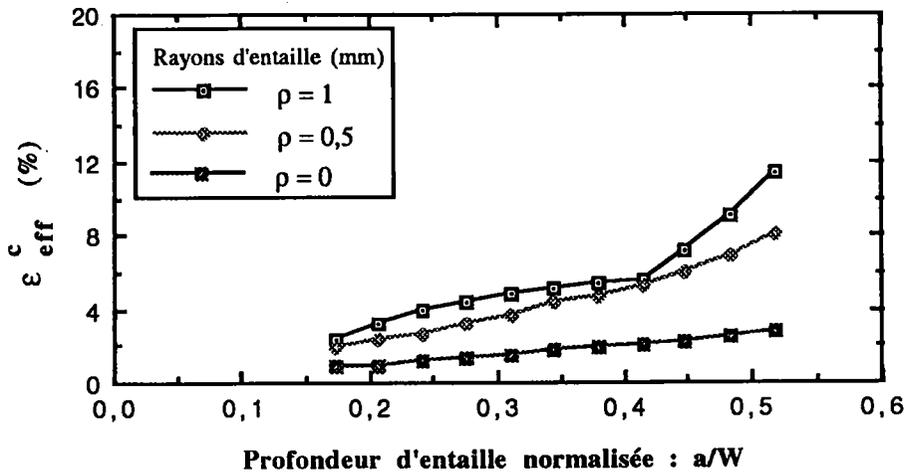


Figure 4.24 : Variation de  $\epsilon_{eff}^c$  en fonction de  $a/W$  pour les trois rayons d'entaille.

Pour  $\rho = 1$  mm, la courbe représentant la variation de  $\epsilon_{eff}^c$  en fonction de  $a/W$  se compose de deux parties que l'on peut schématiser par deux droites.  $\epsilon_{eff}^c$  augmente régulièrement mais faiblement jusqu'à une valeur de  $a/W$  voisine de 0,4 (zone I du graphique 4.20), puis se met à croître de façon plus rapide pour les profondeurs d'entaille plus importantes.

Pour les autres acuités, la courbe représentative de la fonction  $f(a/W) = \epsilon_{eff}^c$  ne présente plus qu'une seule partie.  $\epsilon_{eff}^c$  varie de façon linéaire avec  $a$ . La pente de la droite diminue lorsque l'acuité augmente.

◊ Lorsque l'on regarde la variation de la déformation maximale critique, il semblerait qu'il existe une zone de transition qui se situerait entre 30% et 40% de la largeur totale de l'éprouvette. La longueur correspondant à cette zone de transition du mécanisme de rupture diminue avec le rayon d'entaille pour ne représenter plus que 33% de la largeur totale de l'éprouvette dans le cas d'une fissure.

Cette transition apparaît uniquement pour  $\rho = 1$  mm lorsque l'on trace la variation de la déformation effective critique en fonction de  $a$ . L'étude de  $\epsilon_{eff}^c$  ne permet pas de mettre à jour cette zone de transition dans le mécanisme de rupture.

4.6.3.4) Variation de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $X_{m,\varepsilon}^c$  en fonction de  $a$

4.6.3.4.1) Acuité de  $1\text{ mm}^{-1}$

4.6.3.4.1.1) Variation de la distance effective minimale critique

La figure 4.25 comporte deux parties distinctes schématisables par des droites.

Zone I :  $a \leq 9\text{ mm}$ .  $X_{m,\varepsilon}^c$  décroît fortement lorsque  $a$  augmente. La pente est de  $-0,02\text{ mm}$ .

Zone II :  $a \geq 9\text{ mm}$ .  $X_{m,\varepsilon}^c$  décroît toujours, mais la pente de la droite est beaucoup plus faible. Elle varie fortement lorsque  $a$  augmente. La pente est de  $-0,005\text{ mm}$ .

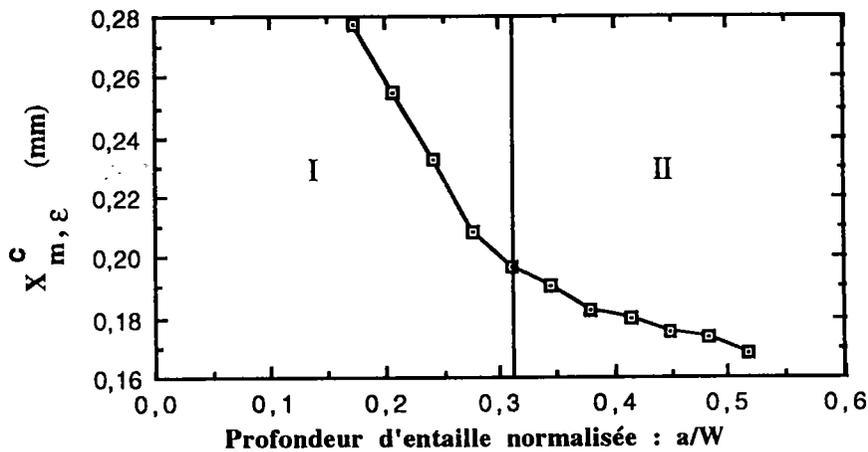


Figure 4.25 : Variation de  $X_{m,\varepsilon}^c$  avec la profondeur d'entaille normalisée  $a/W$ .

Sur la figure 4.26, nous représentons l'évolution de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $\varepsilon_{\max}^c$  en fonction de la profondeur d'entaille. Les zones de transition respectives ne sont pas communes.

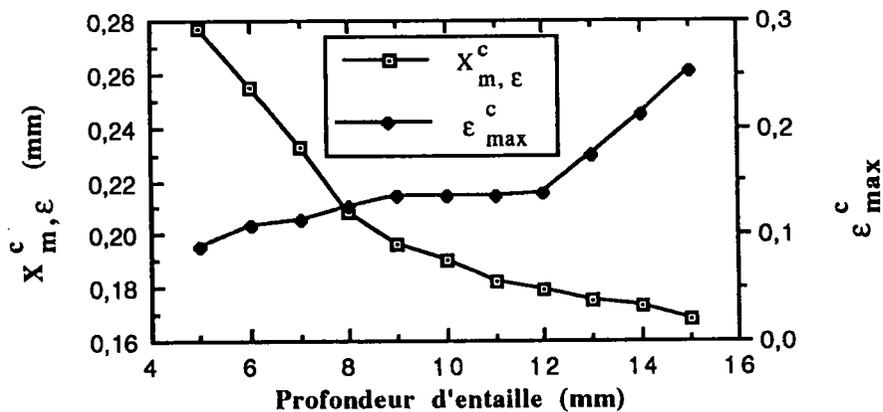


Figure 4.26 : Variation de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $\varepsilon_{\max}^c$  avec  $a$ .

#### 4.6.3.4.1.2) Variation de la distance effective critique

La figure 4.27 comporte deux parties distinctes que l'on peut schématiser par des droites.

Zone I :  $a \leq 7$  mm.  $X_{eff,\epsilon}^c$  décroît fortement lorsque  $a$  augmente. La pente est de -0,2 mm.

Zone II :  $a \geq 8$  mm.  $X_{eff,\epsilon}^c$  décroît toujours, mais la pente de la droite est 5 fois moins importante. Elle vaut -0,044 mm.

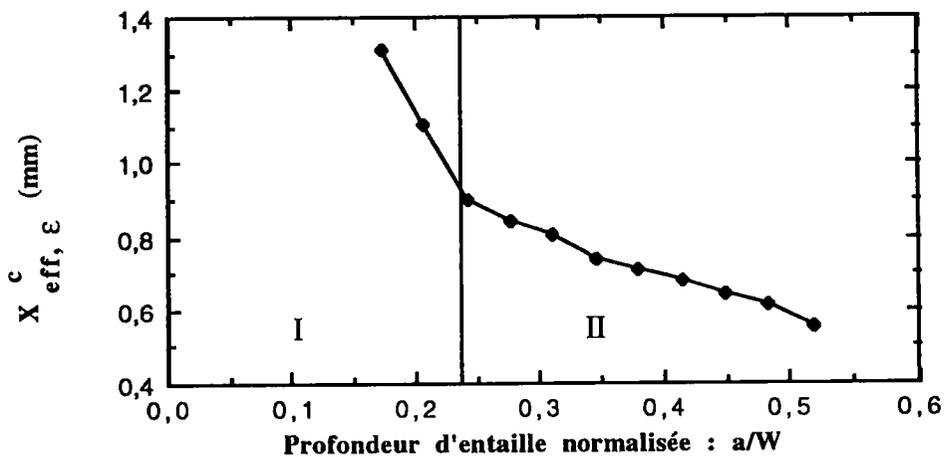


Figure 4.27 : Variation de  $X_{eff,\epsilon}^c$  avec la profondeur d'entaille normalisée :  $a/W$ .

Sur la figure 4.28, nous avons représenté l'évolution de  $X_{eff,\epsilon}^c$  et de  $\epsilon_{eff}^c$  en fonction de la profondeur d'entaille. Les transitions obtenues entre la zone I et la zone II des deux courbes ne correspondent pas aux mêmes valeurs de  $a$ .

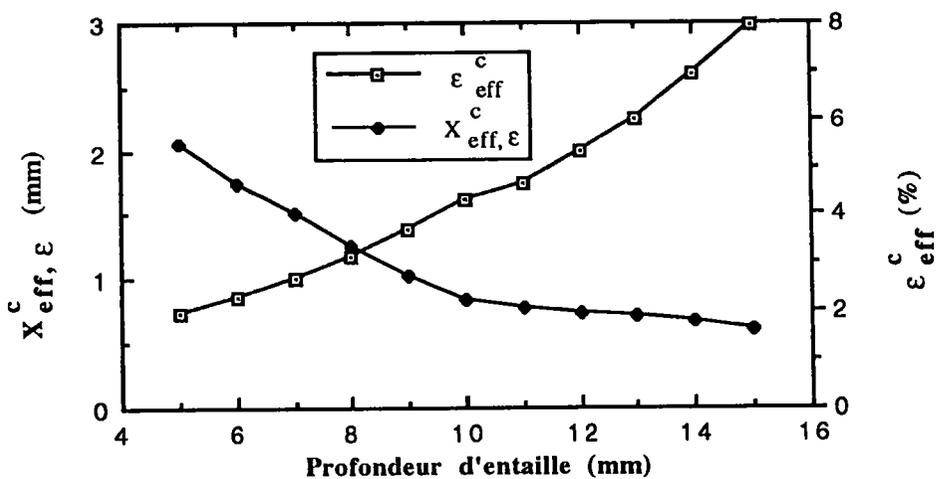


Figure 4.28 : Variation de  $X_{eff,\epsilon}^c$  et de  $\epsilon_{eff}^c$  avec  $a$ .

#### 4.6.3.4.2) Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$

##### 4.6.3.4.2.1) Variation de la distance effective minimale critique

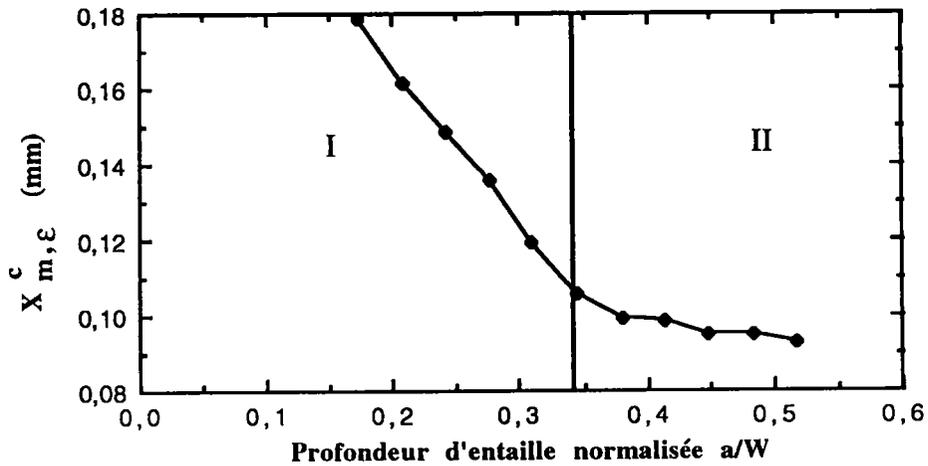


Figure 4.29 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

La variation de la distance effective minimale critique en fonction de  $a/W$  a la même allure que celle que nous avons obtenue pour  $\rho = 1 \text{ mm}$ , à savoir que la courbe comporte deux parties distinctes qui peuvent être schématisées par des droites.

Zone I :  $a \leq 10 \text{ mm}$ .  $X^c_{m,\epsilon}$  décroît rapidement. La pente vaut  $-0,015 \text{ mm}$ .

Zone II :  $a \geq 10 \text{ mm}$ .  $X^c_{m,\epsilon}$  décroît toujours, mais de façon très faible. La pente de cette nouvelle droite vaut  $-0,002 \text{ mm}$ .

##### 4.6.3.4.2.2) Variation de la distance effective critique

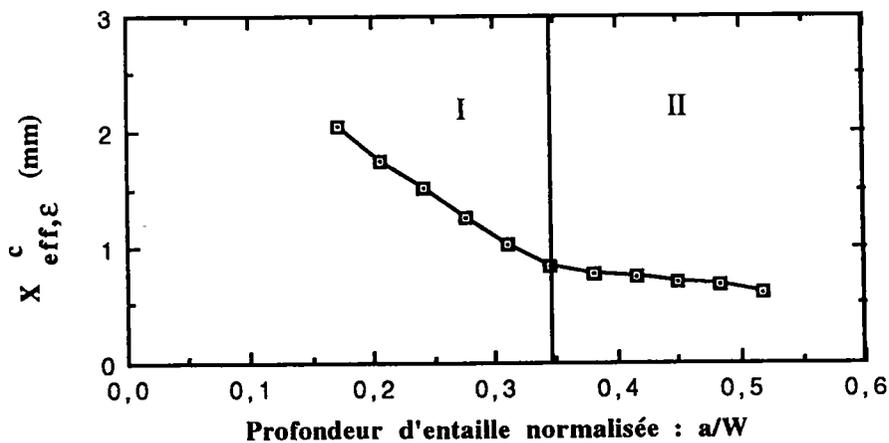


Figure 4.30 : Variation de  $X^c_{eff,\epsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

La figure 4.30 a la même allure que celui obtenu pour  $\rho = 1$  mm. La courbe comporte de deux parties distinctes schématisées par des droites.

Zone I :  $a \leq 10$  mm.  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  décroît rapidement. La pente vaut -0,24 mm.

Zone II :  $a \geq 10$  mm.  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  décroît moins rapidement. La pente ne vaut plus que -0,047 mm. La distance effective critique reste pratiquement constante.

Dans la première partie de l'annexe 8, nous donnons deux graphiques qui traduisent, en fonction de la profondeur d'entaille, l'évolution de  $X^{C_{m,\epsilon}}$  et de  $\epsilon^{C_{max}}$  et celle de  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  et de  $\epsilon^{C_{eff}}$  pour  $\rho = 0,5$  mm. Les zones de transition respectives ne sont pas communes.

#### 4.6.3.4.3) Acuité infinie

##### 4.6.3.4.3.1) Variation de la distance effective minimale critique

Comme pour les acuités précédentes, la courbe comporte deux parties distinctes qui peuvent être schématisées par des droites.

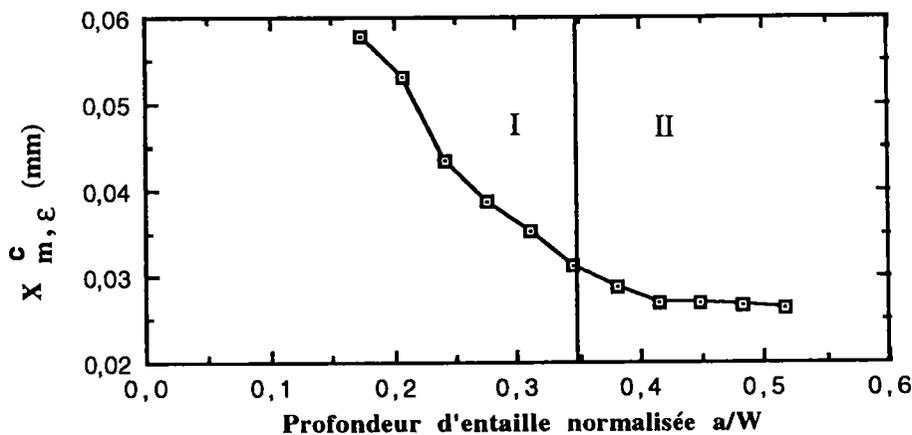


Figure 4.31 : Variation de  $X^{C_{m,\epsilon}}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

Zone I :  $a \leq 10$  mm.  $X^{C_{m,\epsilon}}$  décroît rapidement. La pente a pour valeur -0,005 mm.

Zone II :  $a \geq 11$  mm.  $X^{C_{m,\epsilon}}$  décroît toujours, mais de façon moins rapide. La pente de la droite ne vaut plus que -0,0006 mm. Nous pouvons considérer que la distance effective minimale critique est alors constante.

#### 4.6.3.4.3.2) Variation de la distance effective critique

La courbe ne comporte plus qu'une seule partie que l'on peut schématiser par une droite. Si nous effectuons une interpolation linéaire des points, nous obtenons un facteur de corrélation de 0,969. La pente de la droite est de -0,16 mm.

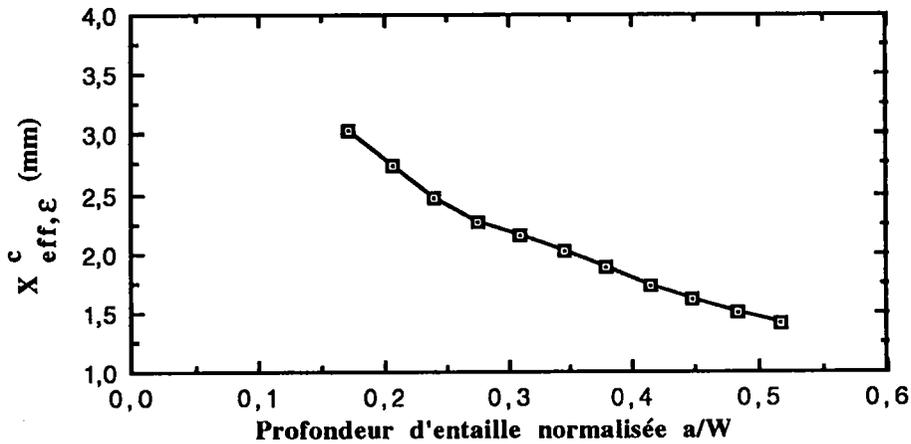


Figure 4.32 : Variation de  $X^c_{eff,ε}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

Dans la seconde partie de l'annexe 8, nous donnons deux graphiques qui traduisent, en fonction de la profondeur d'entaille, l'évolution de  $X^c_{m,ε}$  et de  $ε^c_{max}$  et celle de  $X^c_{eff,ε}$  et de  $ε^c_{eff}$  pour  $ρ = 0$  mm.

Les zones de transitions présentes dans la variation de  $X^c_{m,ε}$  en fonction de  $a$  ne correspondent à aucun point particulier sur la courbe  $ε^c_{max} = f(a)$ , étant donné que celle-ci peut être considérée comme une droite.

#### 4.6.3.4.4) Discussion sur les valeurs de $X^c_{m,ε}$ et $X^c_{eff,ε}$

Les courbes représentant la variation de  $X^c_{eff,ε}$  ou de  $X^c_{m,ε}$  en fonction de  $a$  sont identiques quant à leur allure. Elles présentent deux parties linéaires, la partie présentant la pente la plus importante se situe dans la première zone.

La transition entre ces deux parties ne se fait pas toujours pour la même profondeur d'entaille. En règle générale, la transition sur  $X^c_{eff,ε}$  se fait pour des valeurs de  $a$  inférieures ou égales à celles obtenues pour  $X^c_{m,ε}$ .

Les pentes des droites qui approximent les distributions de  $X^c_{eff,ε}$  en fonction de  $a$  sont de 10 à 30 fois plus importantes (toutes zones confondues) que celles obtenues pour  $X^c_{m,ε}$  ; la pente des droites augmente avec l'acuité.

◊ Sur la figure 4.33, nous avons représenté la variation de la **distance effective critique** en fonction de la profondeur d'entaille pour les trois rayons d'entaille. Nous voyons que la distance effective critique varie de moins en moins au fur et à mesure que l'acuité tend vers  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

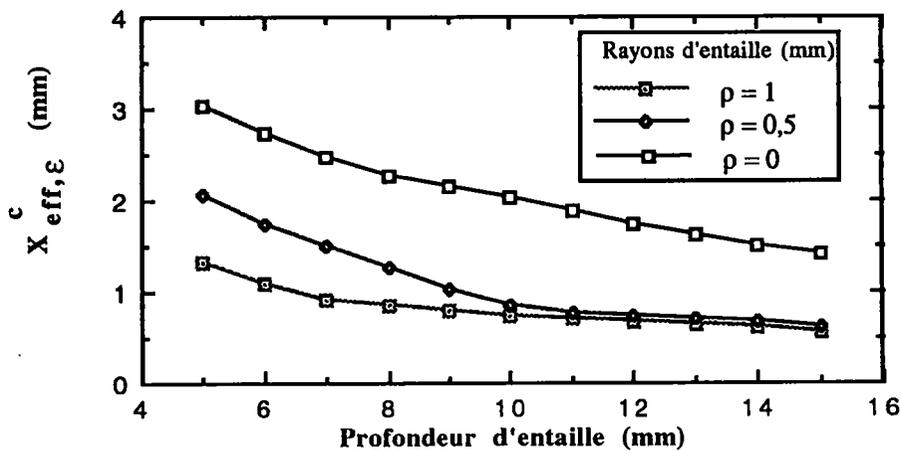


Figure 4.33 : Variation de  $X^c_{eff,ε}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ . Toutes acuités.

Pour une valeur constante de la profondeur d'entaille,  $X^c_{eff,ε}$  varie de deux façons en fonction de  $\rho$ . Pour les faibles valeurs de  $a$  ( $a \leq 9 \text{ mm}$ ),  $X^c_{eff,ε}$  est une fonction linéaire du rayon d'entaille. Le facteur de corrélation est de l'ordre de 0,99. À partir de  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $X^c_{eff,ε}$  est une fonction polynomiale du second degré du rayon d'entaille. Le facteur de corrélation est alors égale à 1.

Pour les faibles valeurs de  $a$ , la relation linéaire permet, de façon intéressante, de déterminer toutes valeurs de  $X^c_{eff,ε}$  en connaissant deux valeurs obtenues à partir de deux acuités différentes.

◊ Sur la figure 4.34, nous avons représenté la variation de la **distance effective minimale critique** en fonction de la profondeur d'entaille pour les trois rayons d'entaille. Pour toutes les valeurs de  $\rho$ , la courbe  $X^c_{m,ε} = f(a)$  comporte deux parties distinctes que l'on peut schématiser par des droites. Tant que  $a/W \leq 0,35$  la distance effective minimale critique décroît rapidement avec  $a$  ; puis, à partir de cette valeur,  $X^c_{m,ε}$  diminue toujours, mais beaucoup plus faiblement. La pente de cette nouvelle droite diminue avec l'acuité ; elle est de 4 à 10 fois moins importante que la première (respectivement pour  $\rho = 1 \text{ mm}$  et  $\rho = 0 \text{ mm}$ ).

La figure 4.34 permet de voir que l'on passe d'une courbe à l'autre par une homothétie. D'un point de vue numérique, la distance effective critique varie de moins en moins au fur et à mesure que le rayon d'entaille tend vers zéro.

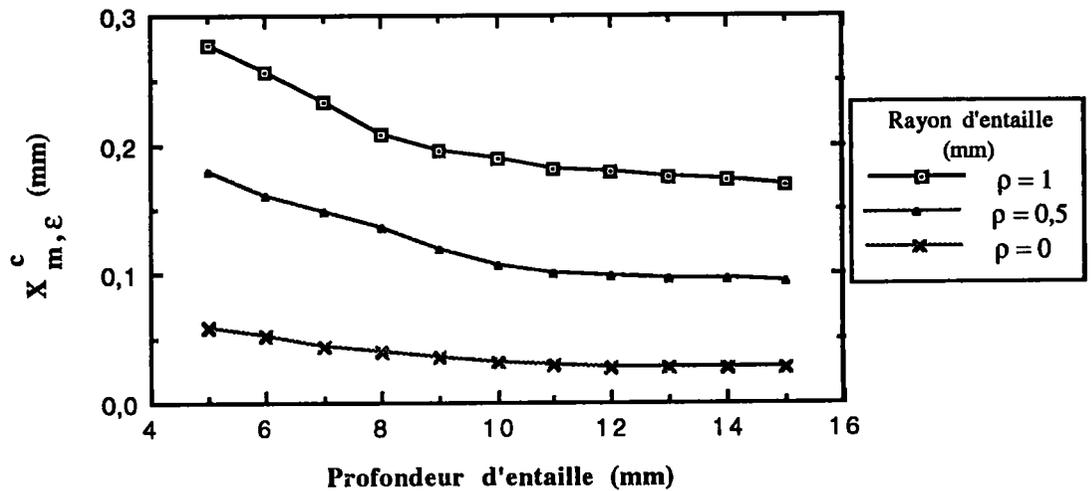


Figure 4.34 : Variation de  $X_{m,\epsilon}^c$  avec la profondeur d'entaille  $a$ . Toutes acuités.

Pour une valeur constante de la profondeur d'entaille,  $X_{m,\epsilon}^c$  est une fonction linéaire du rayon d'entaille. Pour les onze profondeurs d'entaille, nous traçons la variation de la distance effective critique en fonction de  $\rho$  ; puis, par extrapolation linéaire, nous obtenons l'équation de la droite qui approxime le mieux les points obtenus.

Sur la figure 4.35, nous représentons la variation de  $X_{m,\epsilon}^c$  en fonction de  $\rho$  pour deux cas : le plus favorable ( $a = 15$  mm) et le plus défavorable (pour  $a = 7$  mm).

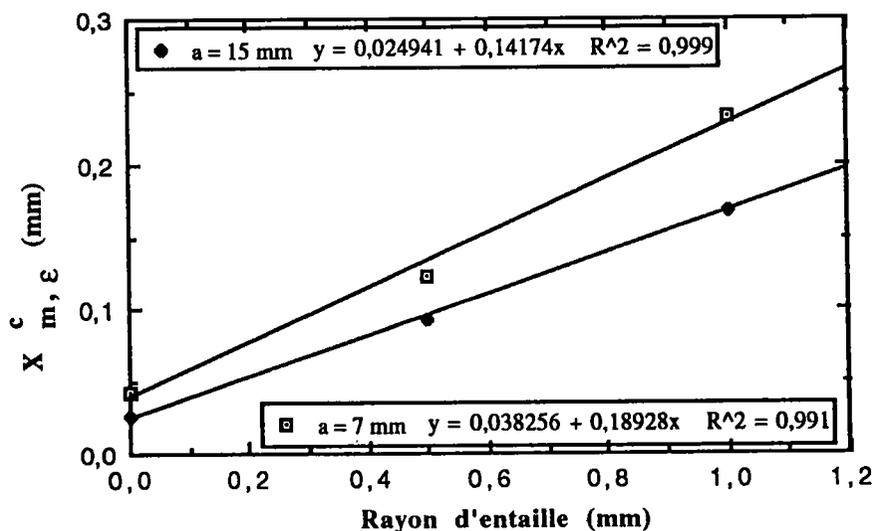


Figure 4.35 : Variation de  $X_{m,\epsilon}^c$  en fonction de  $\rho$  pour trois valeurs de  $a$ .

Le facteur de corrélation varie de 0,991 (obtenu pour  $a = 7$  mm) à 0,999 (pour les valeurs suivantes de  $a$  : 10 mm, 12 mm, 13 mm, 14 mm et 15 mm). Cets valeurs élevées confirment ainsi la variation linéaire de  $X_{m,\varepsilon}^c$  en fonction de  $\rho$ .

Cette relation permet aussi de déterminer toutes valeurs de  $X_{m,\varepsilon}^c$  à l'aide de deux valeurs obtenues à partir de deux acuités différentes.

#### 4.6.3.5) Comparaison entre $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$ et $\varepsilon_{\text{max}}^c\sqrt{\rho}$ en fonction de $a$

Nous avons vu dans le chapitre 3 que le produit  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$  était identique au produit  $\varepsilon_{m,\varepsilon}^c(X_{m,\varepsilon}^c)\alpha''$ . Nous ne nous intéresserons donc qu'aux valeurs de  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$ .

Le produit  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$  représente en quelque sorte la ténacité du matériau. Comme nous l'avons vu dans l'introduction du paragraphe 3.6.4, la ténacité est déduite d'un critère de rupture en déformation locale critique.

Nous rappelons que la ténacité devrait être, par définition, un paramètre intrinsèque du matériau et donc indépendant de la géométrie.

Les valeurs de  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$  et  $\varepsilon_{\text{max}}^c\sqrt{\rho}$  sont répertoriées dans l'annexe 9.

##### 4.6.3.5.1) Acuité de $1 \text{ mm}^{-1}$

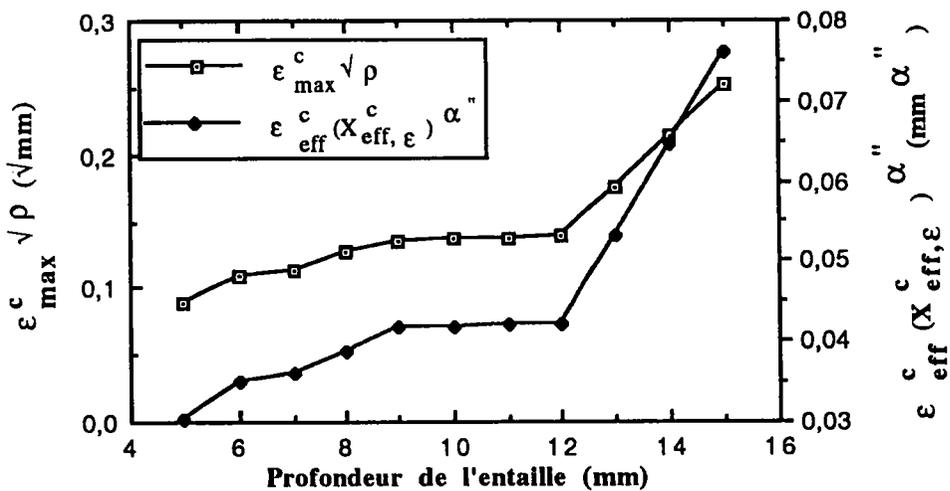


Figure 4.36 : Variation de  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)\alpha''$  et de  $\varepsilon_{\text{max}}^c\sqrt{\rho}$  en fonction de  $a$ .

Les courbes obtenues ont même allure malgré des échelles différentes. Dans les deux cas, elles présentent deux parties distinctes.

Zone I :  $a \leq 12$  mm (ou  $a/W \leq 0,4$ ). Les variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  et de  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$  sont pratiquement constantes en fonction de  $a$ . Elles varient linéairement et augmentent très faiblement avec la profondeur d'entaille.

Zone II :  $a > 12$  mm (ou  $a/W > 0,4$ ). Les variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  et de  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$  augmentent plus rapidement avec  $a$ .

Les valeurs que nous obtenons avec notre critère sont trois fois moins importantes que celles que l'on obtient avec le critère de RANDALL et MERKLE.

#### 4.6.3.5.2) Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$

Les courbes ont encore la même allure malgré des échelles différentes. Dans les deux cas, elles présentent de nouveau deux parties distinctes.

Zone I :  $a \leq 11$  mm (ou  $a/W \leq 0,38$ ). Les variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  et de  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$  augmentent faiblement en fonction de  $a$ .

Zone II :  $a > 12$  mm (ou  $a/W \geq 0,4$ ). Les variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  et de  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$  augmentent plus rapidement avec  $a$ .

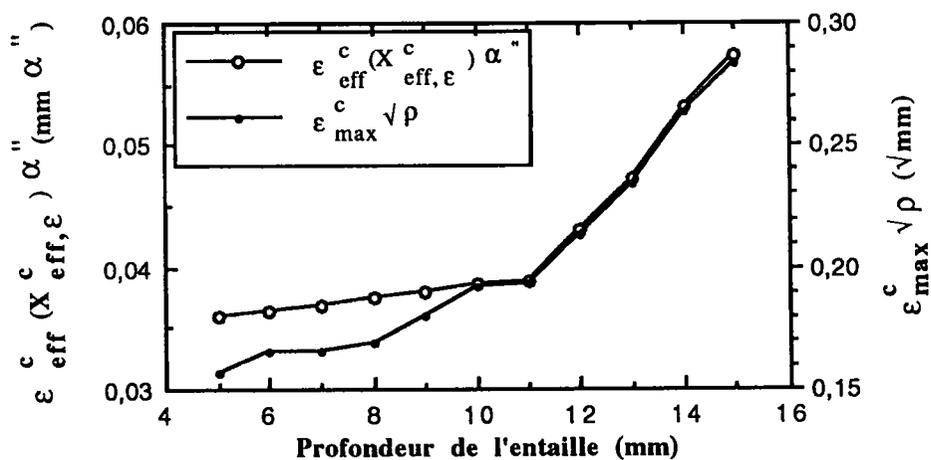


Figure 4.37 : Variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  et de  $\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$  en fonction de  $a$ .

Dans la première zone, si on extrapole  $f(a) = \epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  (ou  $f(a) = \epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$ ) par une droite, le facteur de corrélation est plus proche de 1 dans notre cas (où il vaut 0,993) que dans celui de RANDALL et MERKLE (où il vaut 0,932). Dans la seconde zone, les différences sont moins flagrantes. Le facteur de corrélation entre la droite et les points obtenus par calcul vaut 0,996 dans notre cas alors qu'il vaut 0,995 par l'application du critère de RANDALL et MERKLE.

Les pentes des quatre droites obtenues sont les suivantes :

\* Pour le critère de RANDALL et MERKLE, elle vaut  $0,0044 \text{ mm}^{-0,5}$  dans la zone I et  $0,016 \text{ mm}^{-0,5}$  dans la zone II.

\* Notre critère donne une pente de  $0,0005 \text{ mm}^{\alpha''-1}$  dans la zone I et de  $0,0047 \text{ mm}^{\alpha''-1}$  dans la zone II.

Les pentes sont différentes, mais il ne faut pas oublier que les unités le sont également. Toutefois, nos valeurs étant inférieures à celles obtenues par le critère de RANDALL et MERKLE, les variations sont plus faibles et permettent de considérer que le produit  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  est pratiquement constant.

Les valeurs obtenues par notre critère sont environ 3,5 fois moins importantes que celles que l'on obtient par l'application du critère de RANDALL et MERKLE.

#### 4.6.3.5.3) Acuité infinie

Pour  $\rho = 0 \text{ mm}$ , on ne peut tracer  $f(a) = \epsilon^c_{\text{max}} \sqrt{\rho}$  car on obtiendrait une valeur nulle. Par contre, notre critère peut être représenté.

L'échelle obtenue sur  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  est à peu de chose près la même que celle que nous avons dans le cas de l'acuité de  $2 \text{ mm}^{-1}$ . La courbe ne présente plus qu'une seule partie que l'on peut assimiler à une droite. Le facteur de corrélation est de 0,987 ; et la pente vaut  $0,0013 \text{ mm}^{\alpha''-1}$ .

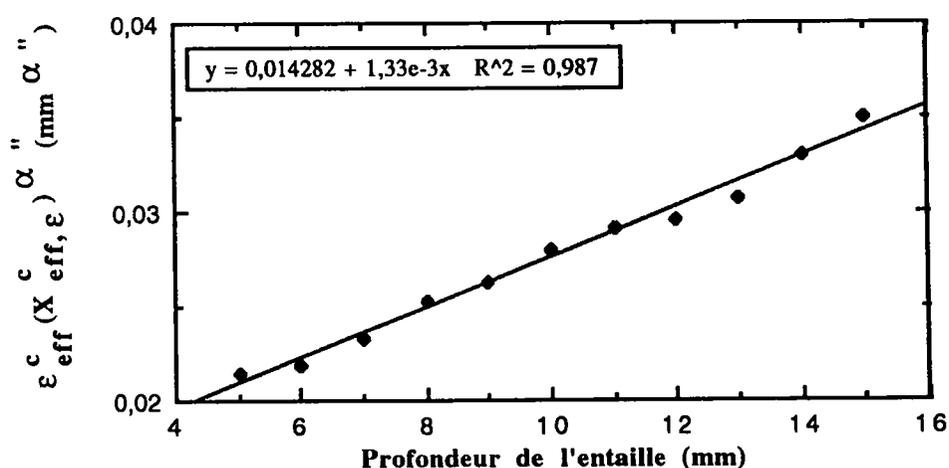


Figure 4.38 : Variation de  $\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$  en fonction de  $a$ .

#### 4.6.3.6) Discussion sur la validité des critères

La ténacité devrait être par définition un paramètre intrinsèque du matériau qui ne devrait donc pas être lié à la géométrie. Une entaille est définie par  $a$ , sa profondeur,  $\psi$ , son angle (que nous avons gardé constant) et  $\rho$ , son rayon. Les paramètres tels que  $\alpha''$  qui caractérise la singularité d'entaille de déformation,  $X_{\text{eff},\epsilon}^c$  la distance effective critique et  $X_{\text{m},\epsilon}^c$  la distance effective minimale critique sont des paramètres qui eux caractérisent la distribution des déformations. Ils dépendent donc des propriétés mécaniques du matériau, du chargement appliqué, mais également des données géométriques par l'effet d'entaille.

Le critère proposé, basé sur la distance effective critique (ou sur la distance effective minimale critique), utilise ces deux derniers paramètres. Les valeurs que nous obtenons ont un ordre de grandeur inférieur à celles données par le critère de RANDALL et MERKLE.

Le facteur d'intensité de déformation d'entaille, que nous avons défini à partir de la distance effective critique ou de la distance effective minimale critique (4.6) s'écrit :

$$K_{\rho,\epsilon} = \epsilon_{\text{eff}}^c (2\pi X_{\text{eff},\epsilon}^c)^{\alpha''} = \epsilon_{\text{m}}^c (2\pi X_{\text{m},\epsilon}^c)^{\alpha''} \quad (4.6)$$

devrait être un paramètre intrinsèque du matériau. Il faut donc que ses variations soient les plus faibles possibles.

##### 4.6.3.6.1) Valeurs statistiques sur les deux critères : $\rho$ constant

Pour les trois acuités, et pour chaque définition de la ténacité, nous avons calculé les valeurs de l'écart-type ( $d_s$ ), de la moyenne ( $\mu$ ) et du coefficient de variation (CV) définis dans le paragraphe 3.6.4.5.3.1. du chapitre 3. Ces valeurs sont répertoriées dans le tableau 4.4 ci dessous.

Rayon d'entaille	Ténacité	Écart-type $d_s$	Moyenne $\mu$	Coef. de Variation CV
$\rho = 1 \text{ mm}$	$\epsilon_{\text{eff}}^c (X_{\text{eff},\epsilon}^c)^{\alpha''}$	0,013725	0,045555	<b>0,301283</b>
	R. et M.	0,047818	0,147698	0,323753
$\rho = 0,5 \text{ mm}$	$\epsilon_{\text{eff}}^c (X_{\text{eff},\epsilon}^c)^{\alpha''}$	0,007336	0,042047	<b>0,174467</b>
	R. et M.	0,030063	0,142298	0,211269
$\rho = 0 \text{ mm}$	$\epsilon_{\text{eff}}^c (X_{\text{eff},\epsilon}^c)^{\alpha''}$	0,004445	0,027579	<b>0,161168</b>

Tableau 4.4 : Résultats statistiques sur les deux critères

La ténacité, l'écart-type et la moyenne sont en  $\sqrt{m}$  pour le critère de RANDALL et MERKLE et sont en  $m^\alpha$  pour le critère que nous proposons.

Les valeurs obtenues sur les écarts-types sont environ 3,5 fois moins importantes que celles obtenues par la méthode de RANDALL et MERKLE. Cela est logique car nous avons vu précédemment que nos valeurs étaient nettement inférieures à celles-ci.

Le coefficient de variation, qui est une valeur sans unité, nous permet de dire que le critère proposé dépend moins de la géométrie que le critère de RANDALL et MERKLE. Les différences ne sont pas énormes ; mais, pour les deux acuités, le coefficient de variation pour les valeurs de RANDALL et MERKLE est supérieur aux autres valeurs.

Si nous considérons que les deux critères ci-dessus sont constants et égaux à leur valeur moyenne respective, nous faisons une erreur relative de :

- \* pour  $\rho = 1 \text{ mm}$  : 24,2% dans le cas de RANDALL et MERKLE, et de 22,2% pour  $\varepsilon^{\text{Ceff}}(X^{\text{Ceff},\varepsilon})^\alpha$ .
- \* pour  $\rho = 0,5 \text{ mm}$  : 17,1% dans le cas de RANDALL et MERKLE, et de 14% pour  $\varepsilon^{\text{Ceff}}(X^{\text{Ceff},\varepsilon})^\alpha$ .
- \* pour  $\rho = 0 \text{ mm}$  : 10,7% pour  $\varepsilon^{\text{Ceff}}(X^{\text{Ceff},\varepsilon})^\alpha$ .

Nous voyons que, quelque soit l'acuité considérée, l'erreur commise est toujours la plus importante dans le cas de RANDALL et MERKLE.

#### 4.6.3.6.2) Valeurs statistiques sur les deux critères : $a$ constant

Nous regardons les valeurs de l'écart-type, de la moyenne et du coefficient de variation afin de pouvoir comparer les séries de valeurs entre elles. Seul  $\rho$  varie.

Dans l'annexe 10, nous donnons, sous forme de tableaux, les valeurs de l'écart-type, de la moyenne arithmétique et du coefficient de variation pour le critère proposé ainsi que pour le critère de RANDALL et MERKLE. Ce dernier n'étant pas applicable aux fissures, nous donnons également ces trois valeurs pour notre critère sans tenir compte des résultats obtenus pour l'acuité infinie.

##### 4.6.3.6.2.1) Cas des entailles

Les écarts-types correspondant aux valeurs des facteurs de ductilité à l'entaille sont de sept à dix fois moins importants que ceux trouvés par la méthode de RANDALL et MERKLE, ce qui traduit le fait que notre critère présente moins de dispersion que celui de RANDALL et MERKLE.

Par contre, le coefficient de variation est légèrement plus élevé pour nos résultats que pour ceux tirés de RANDALL et MERKLE. La valeur moyenne des coefficients de variations est de 0,061681 pour le critère de RANDALL et MERKLE alors qu'elle vaut 0,072432 pour notre critère.

Ces deux paramètres nous permettent de penser que nos résultats sont légèrement plus sensibles aux variations de la profondeur de l'entaille de l'éprouvette que ceux obtenus par RANDALL et MERKLE.

#### 4.6.3.6.2.2) Cas de entailles et des fissures

Si l'on étudie les résultats obtenus sans distinguer les entailles des fissures, nous voyons que les valeurs relatives au coefficients de variation et à l'écart-type sont moins bonnes que dans le cas précédent.

◇ Les valeurs obtenues pour l'écart-type sont supérieures à celles que nous avons relevées en ne considérant que les rayons d'entaille différents de zéro. Les unités étant identiques, cela veut donc dire que la dispersion est plus importante dans le cas présent.

◇ La moyenne arithmétique, par contre, est inférieure lorsque l'on prend indifféremment les valeurs obtenues à partir des entailles ou des fissures.

◇ La dispersion des résultats étant plus importante pour une moyenne arithmétique plus faible, les coefficients de variations obtenus sont nécessairement plus élevés.

Ainsi, si l'on considère la variation des deux critères en fonction de  $\rho$ , pour une valeur de la profondeur d'entaille constante, sans dissocier les entailles des fissures, nous voyons que le critère de RANDALL et MERKLE dépend moins du rayon d'entaille que notre critère. La valeur moyenne des coefficients de variations est toujours de 0,062 pour le critère de RANDALL et MERKLE alors qu'elle passe à 0,248 pour notre critère.

#### 4.6.3.6.2.3) Conclusion lorsque $a$ reste constant

Il apparaît que le critère de RANDALL et MERKLE est moins dépendant du rayon de l'entaille que notre critère. La valeur moyenne des coefficients de variation obtenus est quatre fois plus important dans notre cas.

À l'inverse, si nous n'appliquons pas notre critère aux fissures, comme c'est le cas pour le critère de RANDALL et MERKLE, nous obtenons deux valeurs moyennes des

coefficients de variation très voisines l'une de l'autre (avec un léger mieux pour le critère de RANDALL et MERKLE).

Ces résultats montrent que l'on peut difficilement appliquer un même critère pour traiter à la fois des pièces entaillées et des pièces fissurées.

#### 4.6.3.6.3) Conclusion sur l'étude statistique

Pour l'acier ductile E24, nous avons vu que lorsque nous ne faisons varier que la profondeur de l'entaille sans changer la valeur du rayon d'entaille, les valeurs obtenues sur les écarts-types sont environ 3,5 fois moins importantes que celles obtenues par la méthode de RANDALL et MERKLE (cela est logique car nous avons vu précédemment que nos valeurs étaient nettement inférieures à celles-ci).

La différence relevée sur les valeurs du coefficient de variation est moins importante. Cependant, pour les deux acuités, les valeurs obtenues par notre critère sont inférieures à celles données par le critère de RANDALL et MERKLE, traduisant ainsi le fait que notre critère dépend moins de la géométrie de l'entaille que le critère de RANDALL et MERKLE (pour une même valeur de  $\rho$ ).

Il est intéressant de noter que plus l'acuité augmente, plus la différence entre les deux critères augmente également.

Parmi les paramètres qui peuvent faire varier la taille de la zone plastique, nous pouvons citer l'acuité et le comportement du matériau (fragile ou ductile).

De cette étude, nous venons de voir que :

- lorsque seule la profondeur de l'entaille varie, notre critère donne de meilleurs résultats que celui de RANDALL et MERKLE et que la différence entre les deux critères augmente avec l'acuité.
- nous obtenons de meilleurs résultats, lorsque le rayon d'entaille varie, pour un acier peu ductile que pour un acier très ductile.

Ainsi, il semblerait que notre critère soit plus adapté lorsque la plasticité reste confinée en fond d'entaille.

Nos unités de ténacité sont différentes de celles proposées par le critère de RANDALL et MERKLE. Celles-ci sont en  $\sqrt{m}$  alors que celles que nous proposons sont

en  $m\alpha''$ . Il n'est pas aisé de donner un sens physique à ces unités. Toutefois, on peut faire remarquer le fait suivant :

Le phénomène de rupture est régit par le gradient de contraintes ou de déformation en fond d'entaille ou de fissure.

Pour une fissure, ce gradient en une fonction en  $1/\sqrt{r}$ , c'est la raison pour laquelle la ténacité s'exprime en  $MPa\sqrt{m}$  ou  $\sqrt{m}$ . Pour une entaille, ce gradient est plus complexe et s'exprime en  $m\alpha''$ . Ce qui a pour conséquence la nature dimensionnelle de la ténacité.

Enfin, il est intéressant de noter qu'en contrainte,  $\alpha'$  (qui caractérise la singularité d'entaille en terme de contrainte) est inférieure à 0,5 (égale à 0,5 en élasticité). Par contre, en élastoplasticité et en déformation, nous voyons que la valeur obtenue pour  $\alpha''$  est toujours supérieur à 0,5.

#### 4.7) Taille de la zone plastique

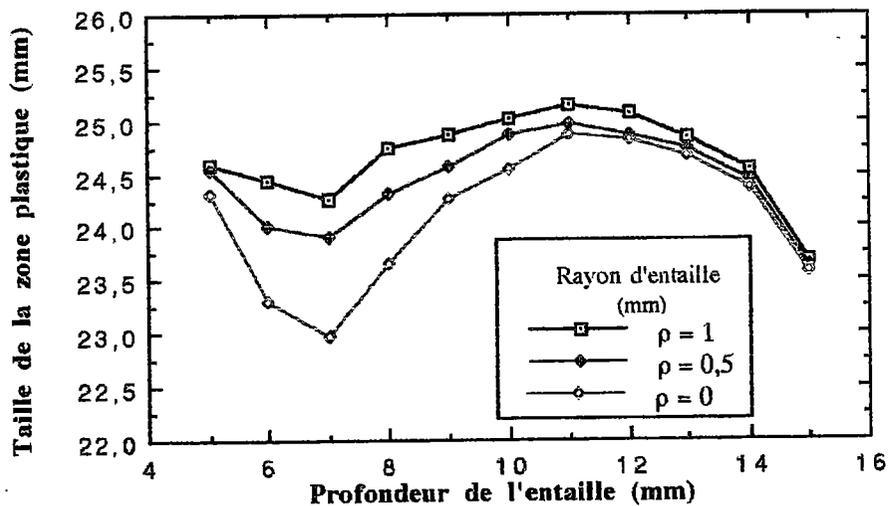


Figure 4.39 : Taille de la zone plastique en fonction de  $a$ .

Préalablement, il convient de définir la taille de la zone plastique. Nous la définissons par rapport à la longueur de l'éprouvette  $W$  qui reste constante, et non par rapport à la taille du ligament.

La longueur totale de la zone plastique commence par diminuer pour les trois plus faibles valeurs de  $a$ . À partir de  $a = 7$  mm, la compression apparaît dans la section réduite. Dès lors, la zone plastique augmente jusqu'à la valeur de  $a = 11$  mm, qui correspond à environ 37% de  $W$ . Une fois cette profondeur atteinte, la zone plastique diminue de nouveau.

En règle générale, la zone plastique diminue jusqu'à l'apparition de la compression dans la section réduite. À partir de ce moment là, elle se met à augmenter rapidement jusqu'à atteindre une valeur maximale pour  $a/W \approx 0,35$ . Dès lors, la zone plastique décroît avec  $a$ .

Nous pouvons constater que la taille de la zone plastique dépend de l'acuité. Plus cette dernière est élevée, plus la zone plastique est faible (voir paragraphe 1.1 du chapitre 1). Par contre, il est intéressant de noter qu'à partir de  $a = 11$  mm, la profondeur totale de la zone plastique converge vers la même valeur pour les trois acuités.

Enfin, les variations relevées sur la taille de la zone plastique sont faibles. L'écart entre la valeur minimale et maximale augmente lorsque le rayon diminue pour atteindre 10% lorsque  $\rho = 0$  mm.

Dans les trois prochains paragraphes, nous nous intéresserons, pour chaque acuité, à l'existence des correspondances entre les variations de la profondeur de la zone plastique et les paramètres utilisés pour définir le facteur d'intensité de déformation d'entaille.

#### 4.7.1) $\rho = 1$ mm

◇  $\sigma_{\max}^c$  : La taille de la zone plastique commence à diminuer pour  $a = 11$  mm, mais faiblement entre 11 mm et 12 mm. C'est à partir de cette profondeur d'entaille de 12 mm que la contrainte maximale critique se met à augmenter rapidement (voir graphique 4.12, transition entre les zones II et III).

◇  $\alpha''$  : Il n'y a pas de corrélation entre ce paramètre et la taille de la zone plastique. Nous avons vu précédemment que  $\alpha''$  était indépendant de l'acuité. Ainsi, quelque soit la valeur de  $\rho$ , il n'y aura pas de corrélation entre l'angle  $\alpha''$  et la taille de la zone plastique.

◇  $\varepsilon_{\max}^c$  et  $\varepsilon_{\text{eff}}^c$  : La transition entre la zone I et la zone II correspond à une profondeur d'entaille de 12 mm, soit la valeur de  $a$  à partir de laquelle la taille de la zone plastique se met à diminuer rapidement.

◇  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  : De la même façon que pour le paramètre  $\alpha''$ , il n'y a pas de corrélation entre la taille de la zone plastique et ces deux valeurs.

◇  $\varepsilon_{\text{eff}}^c X_{\text{eff},\varepsilon}^c \alpha''$  : La transition entre la zone I et la zone II correspond à la profondeur d'entaille à partir de laquelle la taille de la zone plastique se met à diminuer rapidement.

#### 4.7.2) $\rho = 0,5 \text{ mm}$

◇  $\sigma_{\text{max}}^c$  : La transition entre la zone II et la zone III survient pour  $a = 12 \text{ mm}$ , ce qui correspond à la valeur où la taille de la zone plastique commence à diminuer rapidement.

◇  $\varepsilon_{\text{max}}^c$  : La profondeur d'entaille de  $11 \text{ mm}$  correspond au maximum de la taille de la zone plastique, et également à la transition entre la zone I et la zone II du graphique :  $f(a) = \varepsilon_{\text{max}}^c$ .

◇  $\varepsilon_{\text{eff}}^c$  : Il n'y a pas de corrélation entre la déformation effective critique et la taille de la zone plastique car  $f(a) = \varepsilon_{\text{eff}}^c$  est une droite croissante.

◇  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  : Pour cette acuité, les transitions de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  surviennent pour  $a = 10 \text{ mm}$ . La taille de la zone plastique a pratiquement atteint son maximum ( $24,87 \text{ mm}$  contre  $24,98 \text{ mm}$  pour  $a = 11 \text{ mm}$ ). On peut donc considérer que les zones de transitions coïncident.

◇  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  : La profondeur maximale de la zone plastique correspond à la valeur de  $a$  à partir de laquelle ces deux produits se mettent à augmenter plus rapidement.

#### 4.7.3) $\rho = 0 \text{ mm}$

◇  $\sigma_{\text{max}}^c$  : La transition entre les zones I et II correspond au moment où la taille de la zone plastique cesse de décroître pour croître (apparition de la compression). La transition entre la zone II et la zone III survient pour  $a = 13 \text{ mm}$ , ce qui ne correspond à aucun point particulier de la variation de la taille de la zone plastique.

◇  $\varepsilon_{\text{max}}^c$  et  $\varepsilon_{\text{eff}}^c$  : Il n'y a plus de corrélation entre ces deux déformations et la taille de la zone plastique car elles évoluent de façon linéaire.

◇  $X_{m,\varepsilon}^c$  et  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  : Il n'y a plus de corrélation entre ces deux valeurs et la taille de la zone plastique.  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  évolue de façon linéaire en fonction de  $a$  ;  $X_{m,\varepsilon}^c$  a sa zone de transition pour  $a = 10 \text{ mm}$ , il n'existe aucune correspondance sur la figure 4.39.

◇  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  : Il n'y a pas de corrélation entre ce produit qui évolue de façon linéaire avec  $a$  et la taille de la zone plastique.

Il existe une transition dans le comportement à rupture qui survient entre  $a = 10 \text{ mm}$  et  $a = 12 \text{ mm}$  (ce qui représente une valeur de  $a/W \approx 0,35$ ). Cette transition n'est plus visible lorsque le rayon d'entaille est nul.

#### 4.8) Conclusions sur les travaux réalisés sur les éprouvettes K.T.

Les calculs réalisés sur les éprouvettes K.T. nous ont permis de mettre en évidence, pour un acier très ductile, le rôle de la profondeur d'entaille  $a$  et du rayon d'entaille  $\rho$  sur les sept paramètres suivants : la pente de la droite  $\alpha''$ , la distance effective critique  $X^{C_{eff,\epsilon}}$ , la distance effective minimale critique  $X^{C_{m,\epsilon}}$ , la déformation effective critique  $\epsilon^{C_{eff}}$ , la déformation maximale critique  $\epsilon^{C_{max}}$ , et surtout le facteur d'intensité de déformation d'entaille défini comme le produit  $\epsilon^{C_{eff}}(2\pi X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$ .

De la même façon que pour les éprouvettes C.T, cette étude nous permet d'affirmer qu'il existe bien une "pseudo-singularité de contrainte et de déformation" en fond d'entaille, et que celle-ci est présente aussi bien pour les aciers peu ductiles que pour les aciers ductiles. Les valeurs maximales des déformations sont sensibles à la variation de la profondeur de l'entaille, mais les gradients de déformations, caractérisés par le paramètre  $\alpha''$  sont indépendants de  $\rho$ . De plus, à partir d'une certaine valeur de  $a/W$  (pour  $a/W > 0,37$ ) ils ne dépendent même plus de  $a$ .

Le critère locale de rupture en déformation, proposé pour un acier peu ductile et basé sur la distribution réelle des déformations peut être étendu aux aciers ductiles.

Pour les entailles, la variation de  $\epsilon^{C_{eff}}(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$  en fonction de la profondeur d'entaille présente deux parties schématisables par deux droites croissantes. Pour  $a/W \leq (0,35 - 0,4)$ , elle est pratiquement constante ; puis, pour les valeurs de  $a/W$  plus élevées, elle se met à augmenter plus rapidement.

Pour les fissures, la fonction  $f(a) = \epsilon^{C_{eff}}(X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$  est une droite croissante.

Les valeurs statistiques que nous obtenons avec le critère défini à partir de  $X^{C_{eff,\epsilon}}$  sont plus intéressantes que celles données par le critère de RANDALL et MERKLE car elles présentent une dispersion moindre. L'utilisation de ce critère semble donc plus judicieux car moins liée à la géométrie de l'entaille. Le facteur d'intensité de déformation d'entaille, que nous avons défini comme :

$$K_{\rho,\epsilon} = \epsilon^{C_{eff}}(2\pi X^{C_{eff,\epsilon}})^{\alpha''}$$

peut être considéré comme un paramètre représentant la ténacité du matériau. Cependant, bien que les valeurs statistiques obtenues lors de la comparaison entre les deux critères nous aient montré que notre critère dépendait moins de la géométrie que celui de RANDALL et MERKLE, nous ne pouvons considérer que ce soit un paramètre intrinsèque du matériau. Notre critère permet de caractériser la distribution des déformations dans la partie de "pseudo-singularité" en fond d'entaille.

Lors de l'étude effectuée sur l'acier peu ductile, E550, nous avons vu que, dans tous les cas de figures (variations de la profondeur et du rayon de l'entaille) les résultats donnés par notre critère étaient moins liés à la géométrie de l'éprouvette. Les coefficients de variation obtenus avaient des valeurs inférieures à celles relevées par la méthode de RANDALL et MERKLE.

Ceci est encore plus vrai lorsque l'on ne fait plus varier la profondeur de l'entaille mais que l'on se contente de modifier  $\rho$ . Pour cet acier, nous avons vu que le critère basé sur la déformation effective critique donnait de biens meilleurs résultats que le critère de RANDALL et MERKLE.

Or, nous voyons ici que l'on ne peut généraliser cette remarque à l'ensemble des aciers. En effet, pour un acier ductile, comme l'E24, nous venons de voir que les deux critères (appliqués à des entailles) donnaient des résultats analogues quant aux valeurs moyennes des coefficients de variations.

Il semblerait donc que notre critère soit sensible au comportement plastique du matériau. Plus la zone plastique augmente en fond d'entaille (et par voie de fait, plus le matériau est ductile), plus notre critère donnera des résultats qui seront proches des valeurs obtenues à l'aide de RANDALL et MERKLE.

Enfin, cette étude nous a montré qu'il était difficile de lier la déformation locale critique  $\epsilon^c_l$  à la déformation globale critique  $\epsilon^c_g$ . La déformation globale critique est liée à la valeur de la contrainte globale critique  $\sigma^c_g$ , et elle restera élastique tant que la plastification n'aura pas atteint la partie globale de l'éprouvette. À l'opposé, la rupture d'un acier écrouissable nécessite la présence de la plasticité dans la zone d'élaboration de la fissure.

La rupture peut donc survenir alors que la partie globale de l'éprouvette n'est pas plastifiée, ce qui engendrera deux types de relation contrainte-déformation dans le matériau.

## **CONCLUSION**

## Conclusion générale

La rupture ductile d'éprouvette entaillée dans des conditions proches de la ruine plastique a été étudiée par une approche en terme de déformation critique.

Deux voies sont possibles :

- Soit une approche en terme de déformation globale critique,
- Soit une approche en terme de déformation locale critique.

Expérimentalement, on constate que la déformation globale critique décroît rapidement avec la profondeur d'entaille et se stabilise pour  $a/W > 0,2$ . En effet, à partir de cette valeur, l'effet d'entaille conduit au fait que la contrainte globale n'atteint pas le limite d'élasticité. Il n'a pas été constaté que ce comportement puisse être associé à une transition du mode d'instabilité.

La distribution des déformations en fond d'entaille présente une "pseudo-singularité" pouvant être caractérisée par le *facteur d'intensité de déformation d'entaille* et le paramètre  $\alpha$ .

D'une autre façon, cette distribution peut être caractérisée par deux paramètres :

- la distance effective critique  $X^{C_{eff,\epsilon}}$
- la déformation effective critique  $\epsilon^{C_{eff}}$ .

Nous avons postulé que la rupture s'amorce lorsque la déformation locale atteint la valeur de la déformation effective critique  $\epsilon^{C_{eff}}$  sur une distance effective critique  $X^{C_{eff,\epsilon}}$ .

Le paramètre proposé  $\epsilon^{C_{eff}}(X^{C_{eff,\epsilon}})^\alpha$  est considéré comme le *facteur de ductilité à l'entaille* et est une mesure de la ténacité. Il augmente lorsque le rayon d'entaille augmente, ce qui est conforme au fait que la résistance à la rupture croît avec le rayon d'entaille.

Les unités de notre critère sont en  $m^\alpha$ . Ces unités assez particulières sont la conséquence d'un gradient de déformation complexe qui régit le phénomène de rupture. Pour une fissure, ce gradient est une fonction en  $1/\sqrt{r}$ , c'est la raison pour laquelle dans ce cas la ténacité s'exprime en  $MPa\sqrt{m}$  ou  $\sqrt{m}$ . Pour une entaille, ce gradient est plus complexe et s'exprime alors en  $m^\alpha$ . Ce qui a pour conséquence la nature dimensionnelle de la ténacité.

Cette ténacité n'est pas intrinsèque au matériau. Elle dépend du rayon d'entaille et de sa profondeur. Cette influence de la géométrie sur la ténacité en forte élastoplasticité est généralement constatée.

Il semble que la transition du facteur de ductilité à l'entaille pour une profondeur relative  $a/W \approx 0,4$  soit liée à la taille de la zone plastique qui est alors maximale. Cette transition se retrouve également sur la variation de la déformation effective critique.

La transition de la déformation globale peut être associée à l'évolution de la taille de la zone plastique relative.

Le critère mis au point nécessite la réalisation de calculs par éléments finis afin d'obtenir des distributions des déformations, pour une géométrie d'éprouvette bien précise (l'acuité ou la profondeur de l'entaille varie), les valeurs de la déformation effective critique, du paramètre  $\alpha$  et de la distance effective critique. En utilisant les lois d'évolution de ces paramètres (en fonction de  $a$  et de  $\rho$ ) que nous avons mises en évidence dans cette présente étude, il est alors possible d'obtenir les valeurs de la ténacité du matériau.

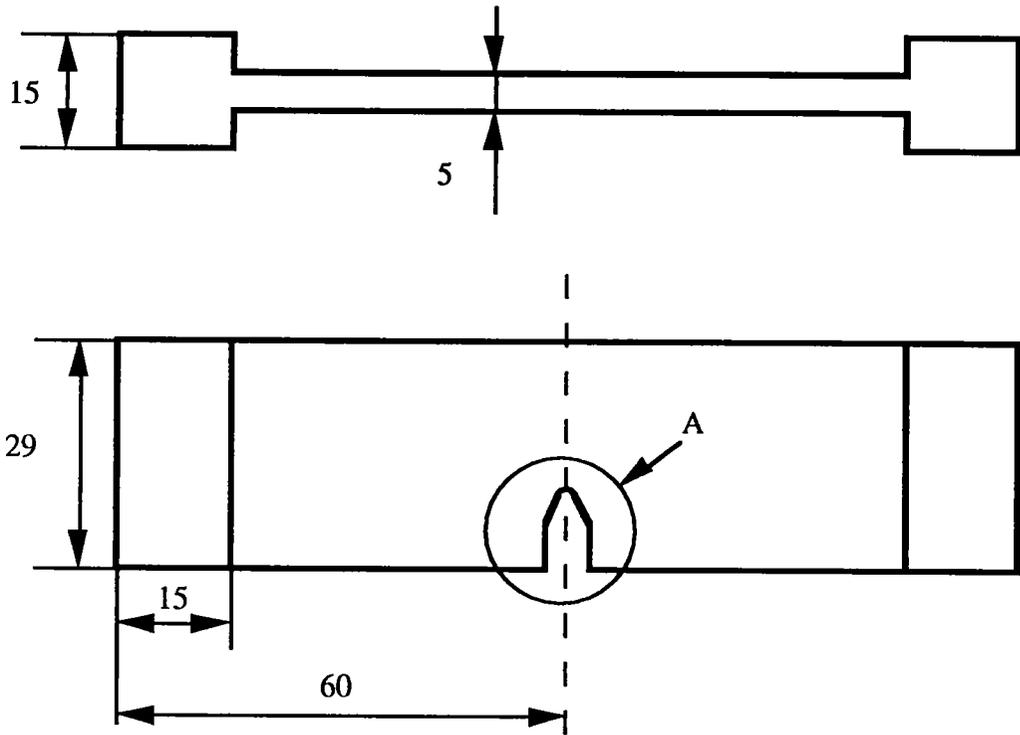
L'application de ce type de critère local conduit à des calculs des distributions des contraintes et des déformations qui peuvent encore apparaître comme longs et coûteux. Avec les progrès de l'informatique, ces inconvénients se réduisent.

Une attention particulière doit être portée sur l'utilisation de lois de comportement adaptées lorsque l'on travaille en simulant la rupture de la pièce.

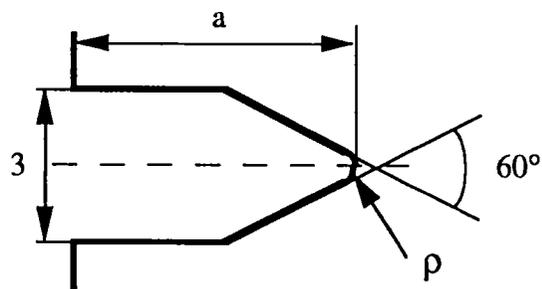
# **ANNEXES**

Plan des éprouvettes C.T, plan des éprouvettes K.T. et plan du montage réalisé

1) Plan des éprouvettes K.T.



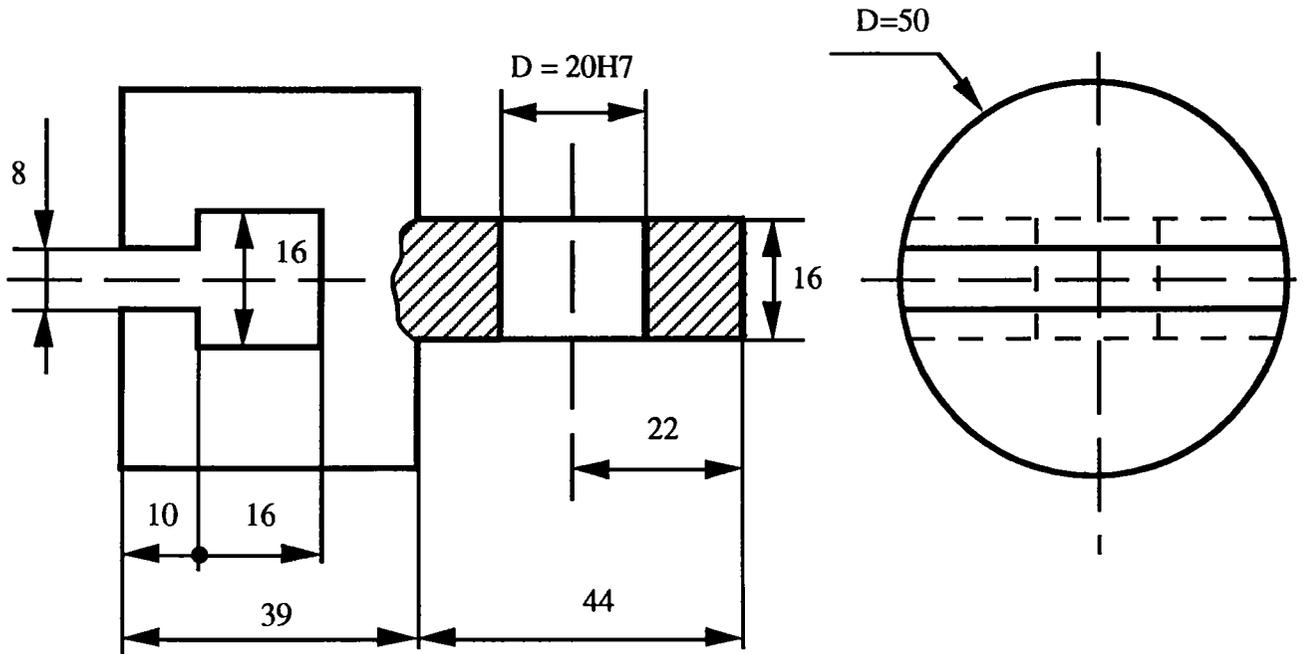
Détail A



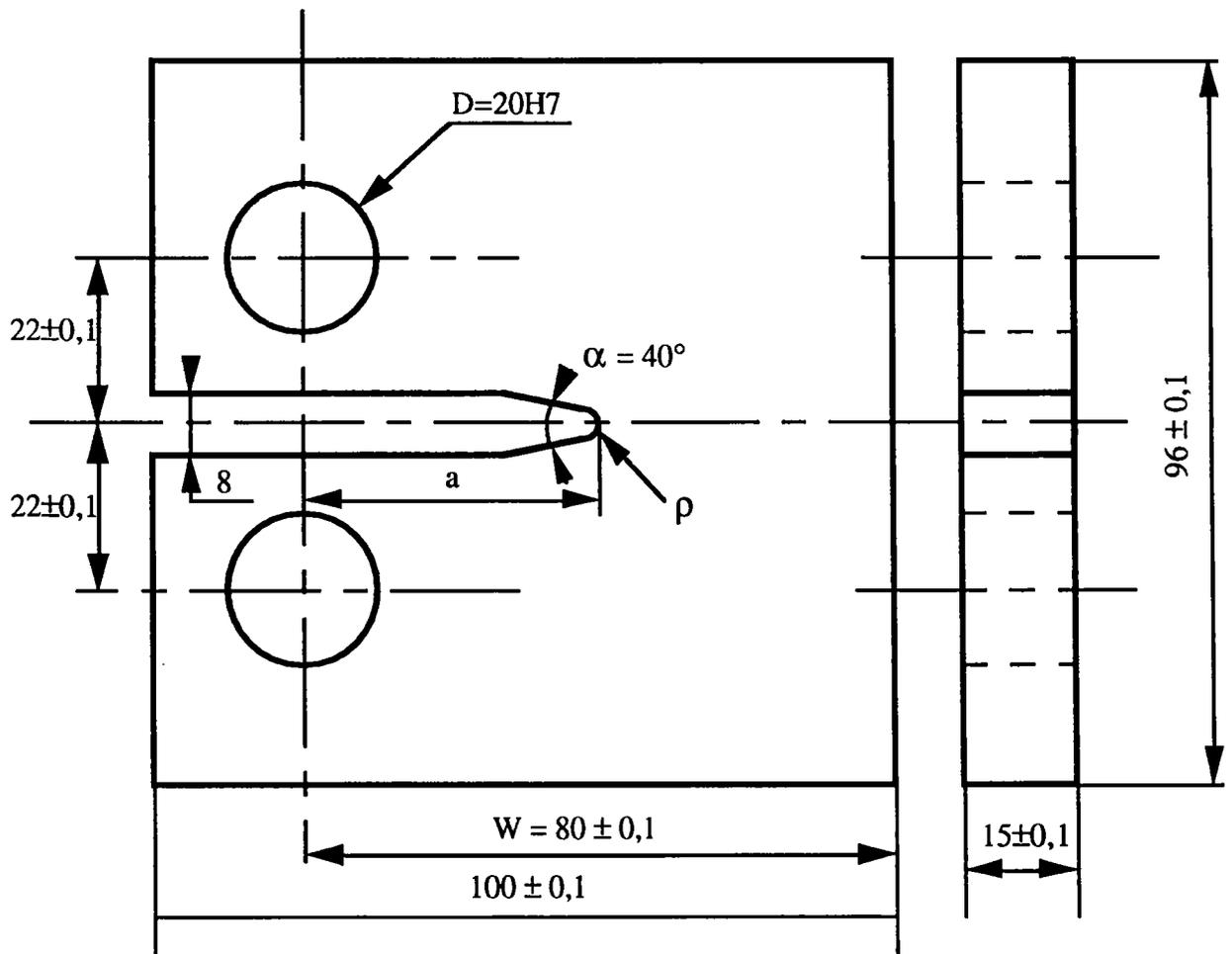
a compris entre 5 mm et 15 mm avec un pas de 1 mm

$\rho$  vaut 1 mm, ou 0,5 mm ou 0 mm

2) Plan du montage pour les éprouvettes K.T.



3) Plan des éprouvettes C.T.



$a = 40 \text{ mm}$  ou  $44 \text{ mm}$

Distribution des contraintes en fond d'entaille pour les éprouvettes C.T.

1) Distribution des contraintes pour les itérations intermédiaires pour les acuités de  $1,33 \text{ mm}^{-1}$ , de  $2 \text{ mm}^{-1}$  et de  $10 \text{ mm}^{-1}$

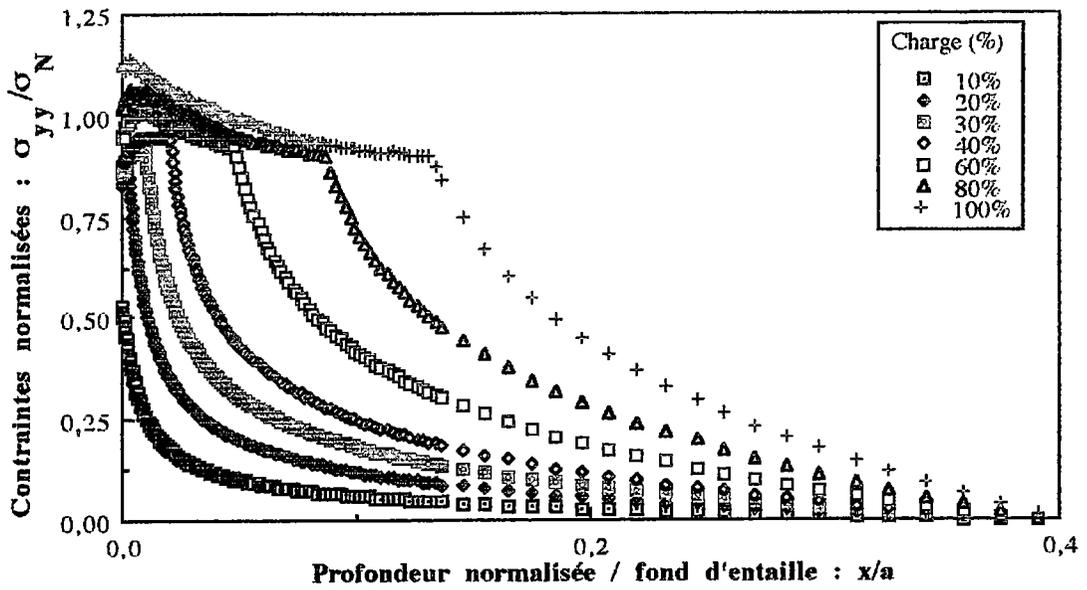


Figure 1 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  normalisées par la contrainte nominale appliquée dans le ligament pour les itérations successives.  $\rho = 0,75 \text{ mm}$

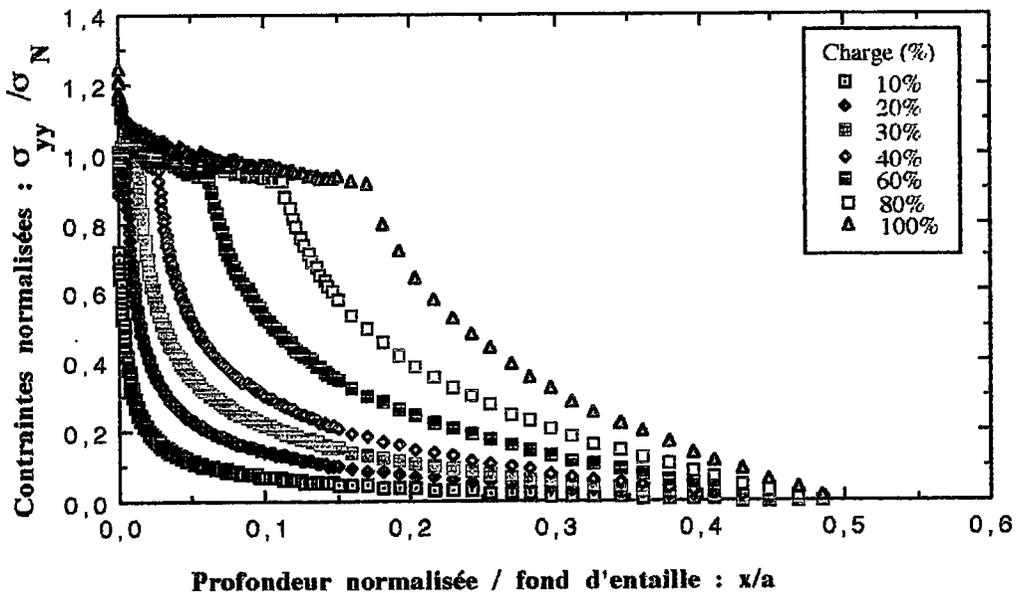


Figure 2 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  normalisées par la contrainte nominale appliquée dans le ligament pour les itérations successives.  $\rho = 0,5 \text{ mm}$

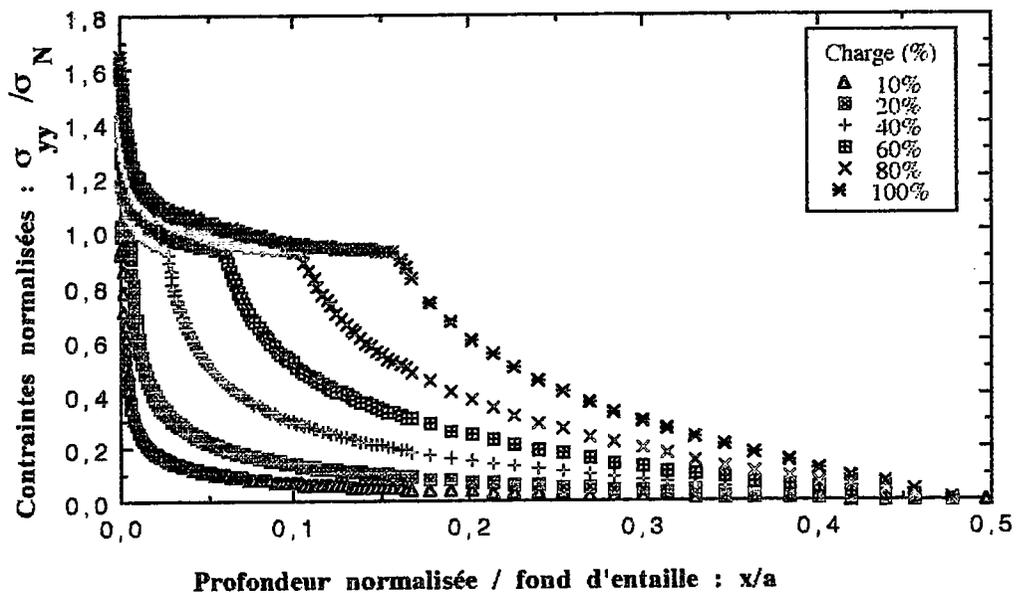
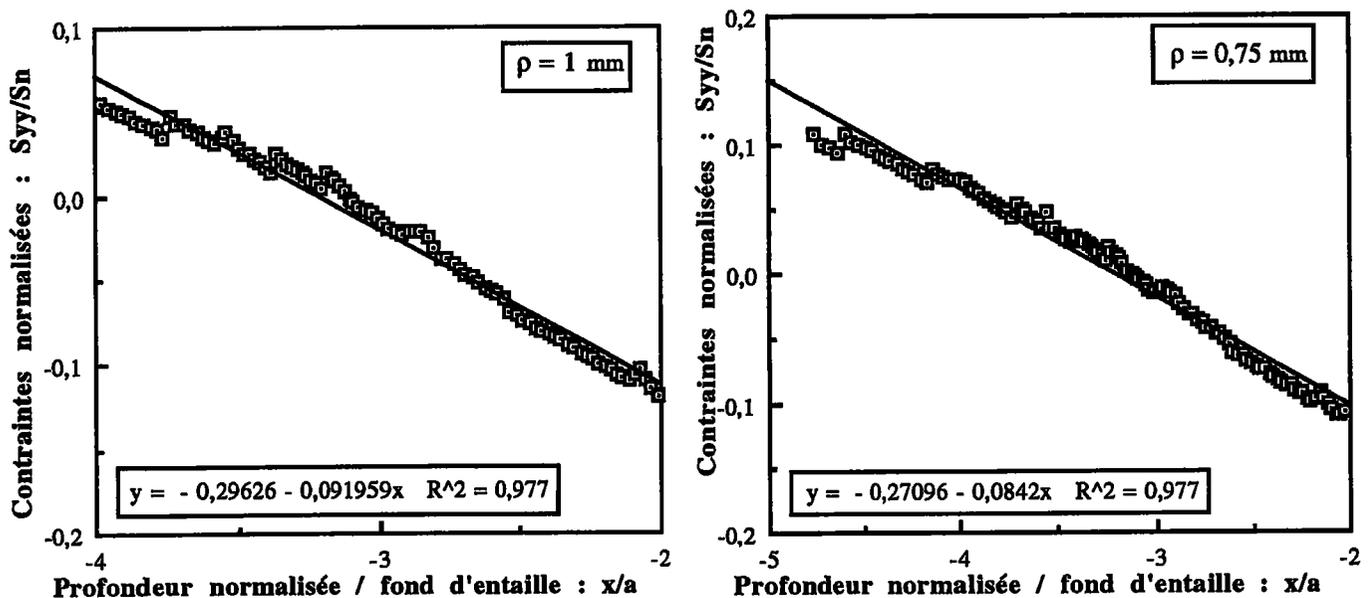
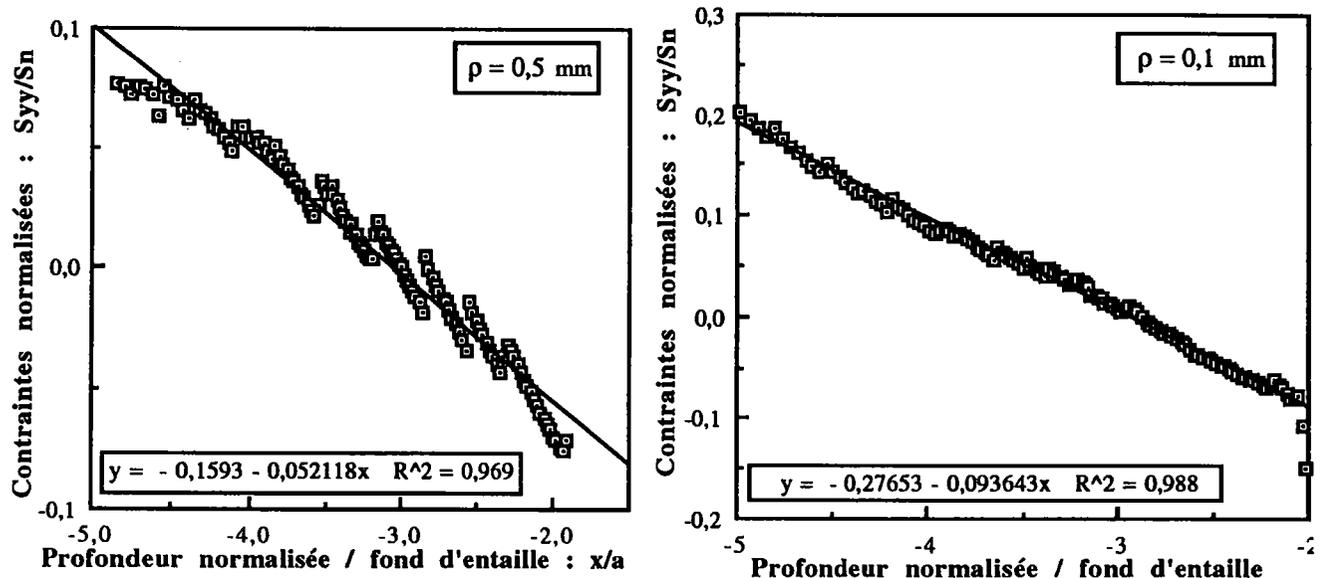


Figure 3 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  normalisées par la contrainte nominale appliquée dans le ligament pour les itérations successives.  $\rho = 0,1 \text{ mm}$

## 2) Détermination de l'angle $\alpha$ (pente de la droite) pour les quatre acuités

Les quatre figures ci dessous représentent la partie linéaire de la distribution des contraintes (toujours en échelle logarithmique). Elles nous ont permis d'obtenir les équations des droites qui approximent le mieux les contraintes dans la zone plastique à une certaine distance du fond d'entaille. De ces droites, nous tirons la valeur de l'angle  $\alpha$  (pente de la droite).





### 3) Valeurs et positions de la contrainte $\sigma_{yy}$ maximale en fond d'entaille

Les tableaux 1 et 2 présentent, pour chaque itération et pour chaque acuité, la valeur de la contrainte maximale obtenues par le calcul (en MPa) ainsi que sa position (en mm) par rapport au fond de l'entaille.

La distance entre le fond de l'entaille et le point où la contrainte est maximale augmente puis décroît avec le niveau de chargement. Cette valeur est maximale entre la troisième itération (pour  $\rho = 0,1$  mm où elle vaut 0,071 mm) et la septième itération ( $\rho = 0,5$  mm où elle vaut 0,408 mm).

Pour  $\rho = 1$  mm et  $\rho = 0,75$  mm le calcul montre bien que la contrainte maximale ne se trouve pas en fond d'entaille lorsque l'on travaille en élastoplasticité (rejoignant par là les travaux rassemblés dans le chapitre 2). Par contre, ceci n'est plus vrai pour les deux autres acuités.

$\rho$ (mm)	Itérations : une itération correspond à 10% de la charge totale									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	332	596	647	664	675	696	717	733	752	774
0,75	373	611	655	667	687	711	734	748	772	800
0,5	489	642	666	699	705	709	716	719	748	850
0,1	650	699	759	814	866	881	904	960	1020	1120

Tableau 1 : Valeur de la contrainte maximale (en MPa) pour chaque itération

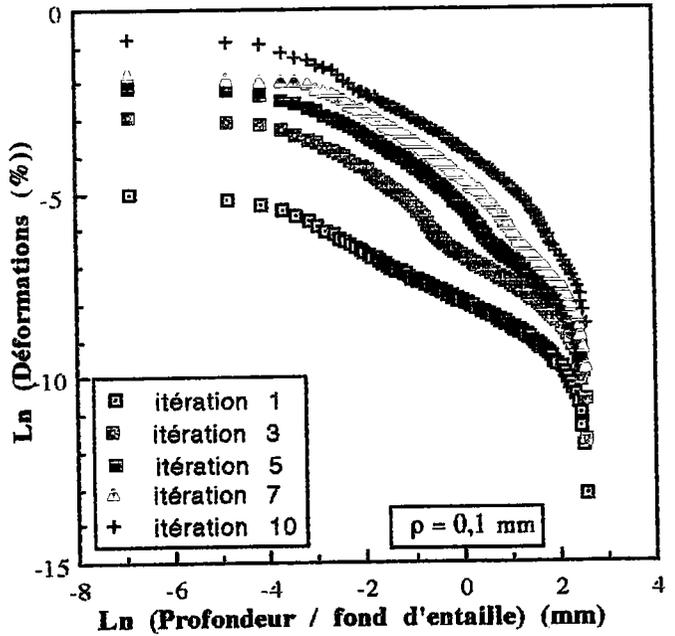
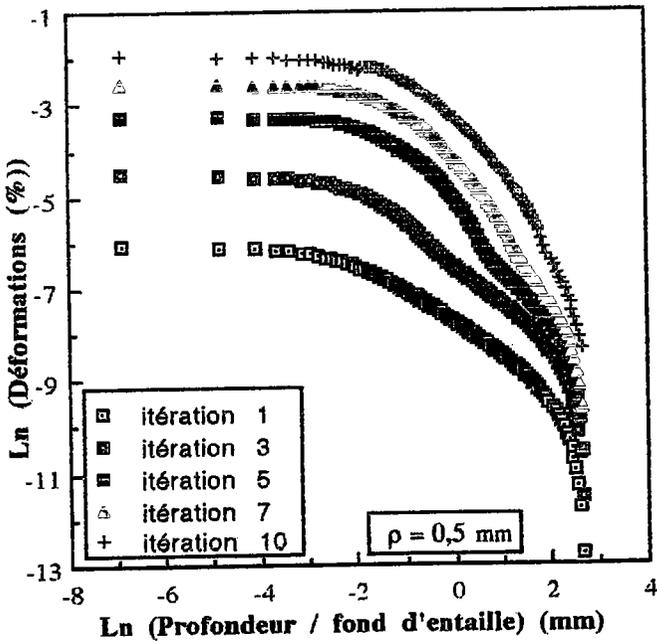
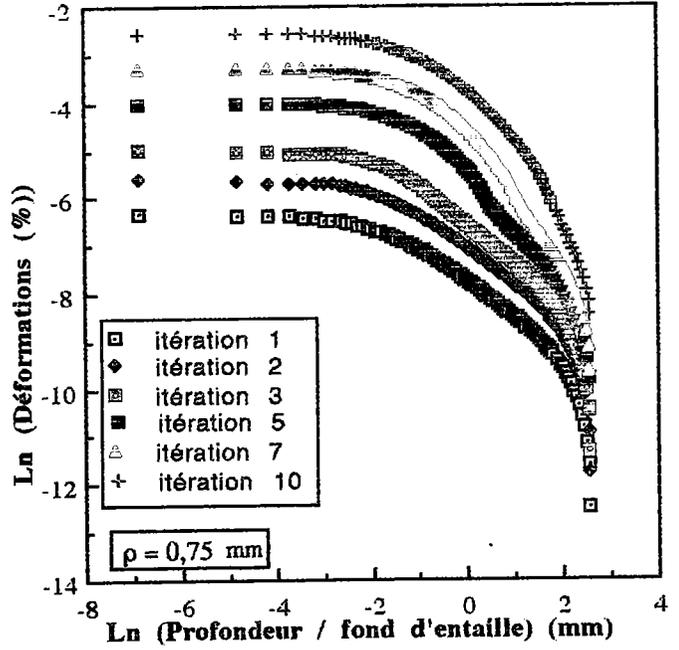
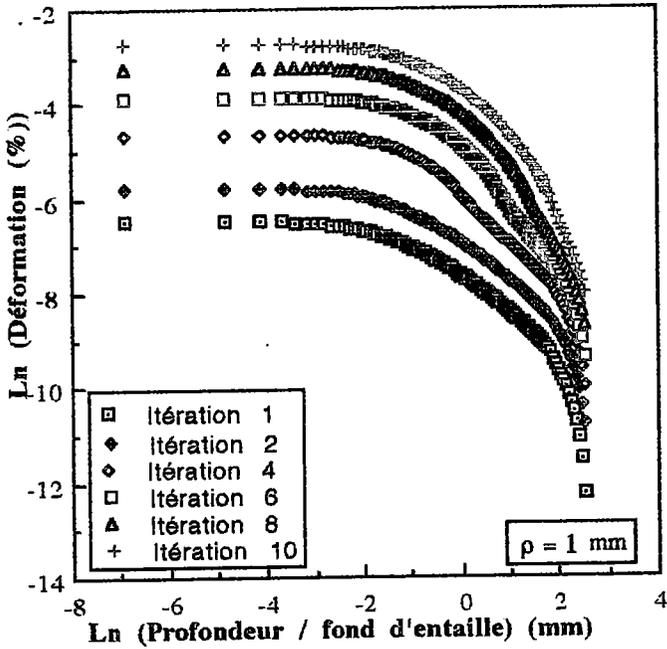
Annexe n°2 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour les éprouvettes C.T.

	Itérations : une itération correspond à 10% de la charge totale									
$\rho$ (mm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,091	0,441	0,954	0,619	0,408	0,361	0,361	0,287	0,287
0,75	0	0,123	0,424	0,474	0,408	0,392	0,376	0,259	0,157	0,117
0,5	0	0,194	0,287	0,316	0,361	0,376	0,408	0,330	0,071	0
0,1	0,052	0,061	0,071	0	0	0	0	0	0	0

Tableau 2 : Distance (en mm) entre le fond d'entaille et la position de la contrainte maximale.

### Distributions des déformations en fond d'entaille pour les éprouvettes C.T.

#### 1) Distributions des déformations en fond d'entaille : itération par itération

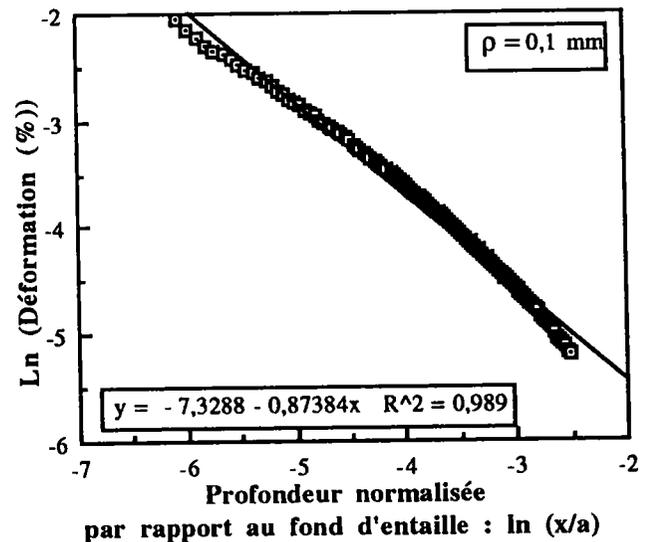
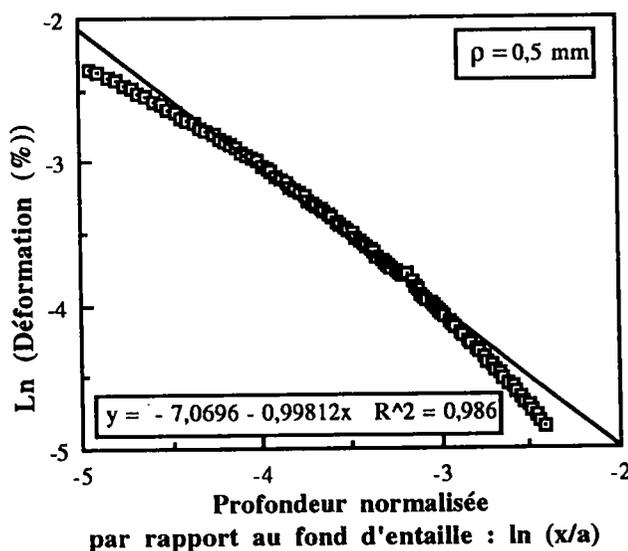
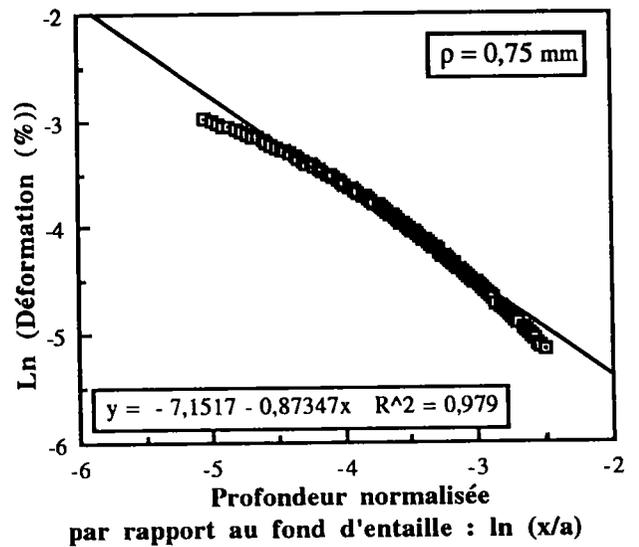
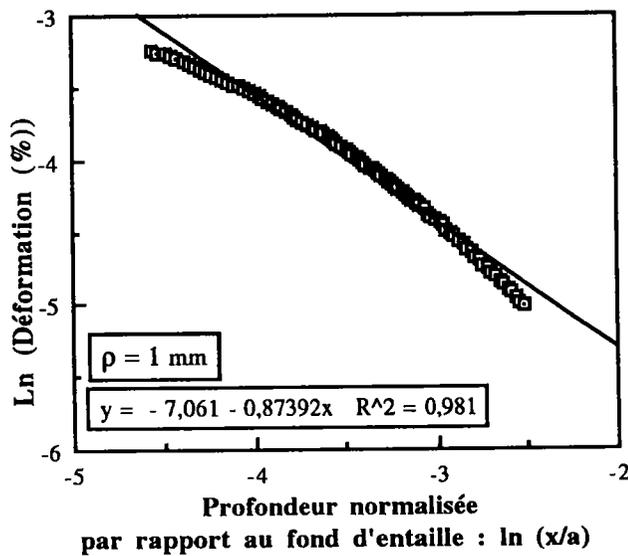


Ces quatre figures représentent les différents paliers de chargement pour chaque acuité. On a tracé, dans une échelle logarithmique, la distribution des déformations en

fonction de la distance par rapport au fond de l'entaille (normalisée par la profondeur de l'entaille).

## 2) Détermination de l'angle $\alpha''$ (pente de la droite) pour les quatres acuités

Les quatres figures ci dessous représentent la partie linéaire de la distribution des déformations (toujours en échelle logarithmique). Elles nous ont permis d'obtenir les équations des droites qui approximent le mieux les déformations dans la zone plastique à une certaine distance du fond d'entaille. De ces droites, nous tirons la valeur de l'angle  $\alpha''$  (pente de la droite).



**Modélisation d'une éprouvette K.T. en bloquant suivant l'axe de x un noeud de la partie supérieure de l'éprouvette**

**1) Introduction**

Dans cette annexe, nous faisons apparaître les résultats que nous obtenons en bloquant le noeud qui se trouve au milieu de la partie supérieure de l'éprouvette (Cf. figure 1) de coordonnées :

$$x = 14,5 \text{ mm et } y = 45 \text{ mm}$$

Puis, nous comparons ces résultats avec ceux obtenus par la méthode finalement adoptée.

Par convention, et pour simplifier la rédaction, la modélisation réalisée dans le chapitre 4 sera le *cas 1*, et celle effectuée en bloquant le noeud qui se trouve au milieu de la partie supérieure de l'éprouvette sera le *cas 2*. Nous ne nous intéressons qu'à l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

**2) Modélisation et conditions aux limites de notre problème**

Du fait de l'axe de symétrie des éprouvettes K.T., nous ne maillons qu'une demi - éprouvette.

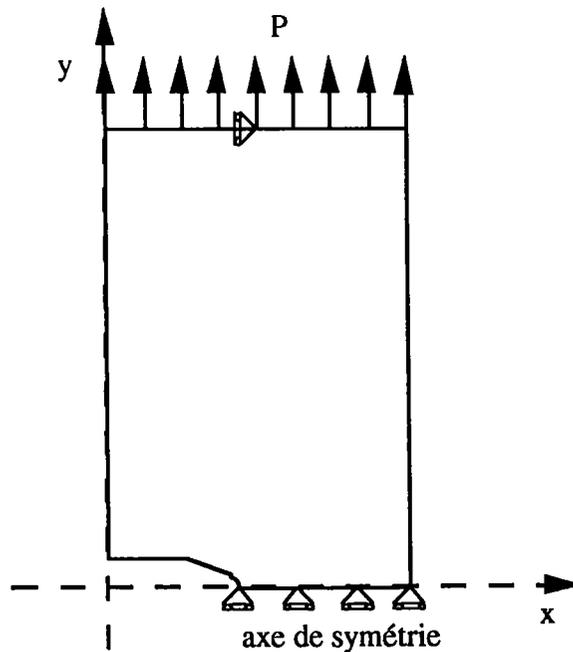


Figure 1 : Conditions aux limites des calculs réalisés sur les éprouvettes K.T. pour le cas 2.

Pour tenir compte de la symétrie, nous bloquons les noeuds situés le long de la section réduite (en fond d'entaille) suivant l'axe des  $y$  ; de même, le noeud correspondant à l'axe de la machine est bloqué suivant l'axe des  $x$ . en autorisant la rotation autour de l'axe  $z$ .

### 3) Analyse des contraintes

#### 3.1) Analyse des contraintes en fond d'entaille : itération par itération

Sur les figures 2 et 3, nous traçons les distributions des contraintes obtenues en fond d'entaille pour les deux valeurs extrêmes de notre entaille :  $a = 15$  mm et  $a = 5$  mm.

Nous voyons que les contraintes se comportent de la même façon quelque soit la modélisation effectuée (Cf. chapitre 4 pour plus d'explications).

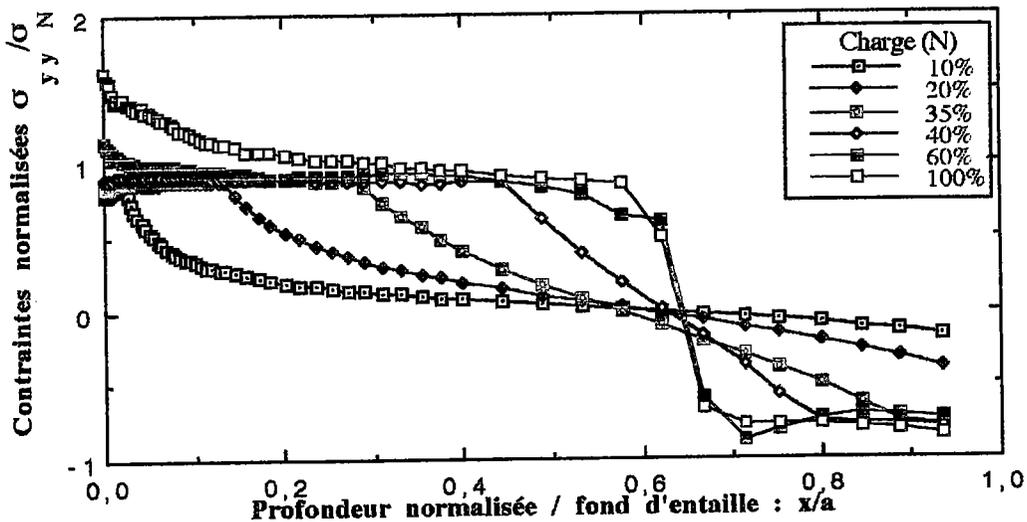


Figure 2 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $a = 15$  mm.

Pour  $a = 15$  mm, les différences obtenues entre les deux modélisations sont, du point de vue de l'allure générale des courbes, quasiment nulles. Seule la valeur de la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille est plus importante ici (695 MPa contre 678 MPa). Cependant, elle ne représente que 2,5% d'augmentation par rapport à la valeur obtenue dans le cas 1. La valeur de la contrainte palier plastique  $\sigma_{pp}$  est également plus importante ici ; elle est proche de la contrainte nominale appliquée dans le ligament.

Le passage entre la traction et la compression se fait pour la même valeur de  $r/a$ , c'est à dire pour  $r = 9,375$  mm (où  $r$  est la distance par rapport au fond de l'entaille).

Pour  $a = 5\text{mm}$ , plusieurs différences apparaissent en fonction de la modélisation :

◊ La transition entre la traction et la compression existe toujours alors qu'elle n'apparaît plus pour cette valeur de  $a$  dans les résultats obtenus dans le chapitre 4.

◊ Le palier plastique n'est pas très important (la transition entre la traction et la compression est moins abrupte que pour  $a = 15\text{mm}$ ) alors que le ligament est entièrement plastifié si on tient compte du montage. Par contre,  $\sigma_{pp}$  a la même valeur dans les deux cas.

◊ La valeur de la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille vaut 442 MPa alors qu'elle est égale à 474 MPa dans le cas 1, soit une différence de 7,2%.

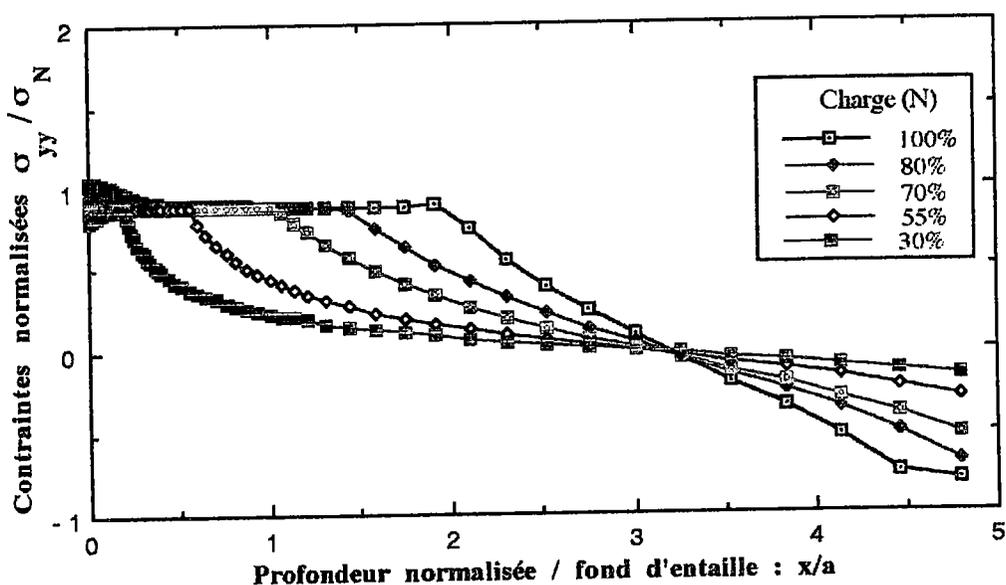


Figure 3 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $a = 5\text{mm}$ .

Nous voyons donc l'importance de la modélisation et des conditions limites imposées aux problèmes quant aux divergences qui peuvent survenir dans les résultats. Même si les valeurs de la contrainte maximale critique sont proches (10% de différence), une mauvaise modélisation pourra engendrer une erreur dans le comportement de l'éprouvette : compression au lieu de traction.

### 3.2) Distribution des contraintes pour la dixième itération

Pour chacune des entailles, nous relevons la valeur de  $\sigma_{\text{max}}^c$  obtenue par le calcul en fond d'entaille. Nous représentons dans la figure 4 la variations de la contrainte maximale critique en fonction de la profondeur d'entaille  $a$  et de la modélisation effectuée.

Nous voyons sur cette figure que la variation de la contrainte maximale critique est fortement liée à la modélisation.

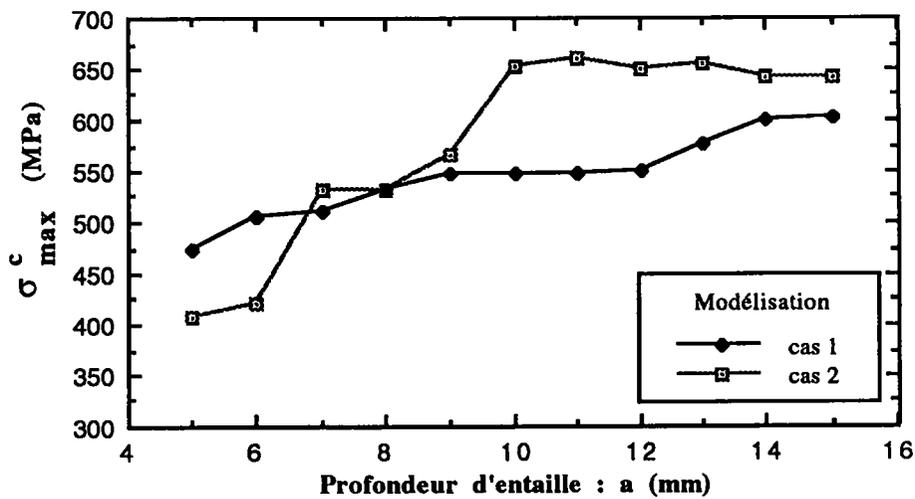


Figure 4 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour les deux modélisations.

### 3.3) Analyse des déformations

Toutes les déformations étudiées sont calculées à partir des déplacements obtenus lors du calcul par éléments finis. Le maillage a été effectué de façon à ce que les éléments de la section réduite n'aient pas une hauteur trop importante. On applique donc  $\Delta/l$  pour avoir les déformations.

#### 3.3.1) Analyse des déformations en fond d'entaille : itération par itération

Si l'on trace, en échelle logarithmique, les distributions successives des déformations, on constate que les courbes ont la même allure que celles obtenues dans le chapitre 4. Seule la valeur de la déformation maximale critique varie. Elle est plus importante pour le cas 1.

#### 3.3.2) Distribution des déformations pour la dixième itération

Pour chaque valeur de  $a$  et pour chaque acuité, nous recherchons la valeur de la pente de la droite qui définit la singularité d'entaille de déformations, à savoir  $\alpha''$ .

Dans les tableaux 1, nous donnons les valeurs de la déformation maximale critique  $\epsilon^c_{max}$  et celle de l'angle  $\alpha''$  en fonction de la profondeur d'entaille  $a$  pour le cas 2.

a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\alpha''$	1,009	0,892	0,771	0,751	0,712	0,702	0,695	0,687	0,686	0,677	0,671
$\epsilon^c_{max}$ (%)	6,407	7,186	12,58	13,1	14,96	26,91	29,64	28,98	30,05	29,75	28,5

Tableau 1 : Variation de  $\epsilon^c_{max}$  et de  $\alpha''$  en fonction de  $a$  pour le cas 2.

### 3.3.3) Discussion

#### 3.3.3.1) Détermination de la valeur de $X^c_{m,\epsilon}$

Pour chaque valeur de  $a$ , nous déterminons les valeurs de la distance effective minimale critique  $X^c_{m,\epsilon}$ . Celles-ci sont répertoriées dans le tableau 2 avec, également, la valeur de  $(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha''}$ . Comme pour le cas 1, ces deux valeurs augmentent avec la longueur du ligament.

a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$X^c_{m,\epsilon}$	0,422	0,334	0,281	0,252	0,232	0,226	0,214	0,206	0,200	0,185	0,175
$(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha''}$	0,419	0,376	0,376	0,355	0,353	0,352	0,342	0,338	0,332	0,319	0,311

Tableau 2 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha''}$  en fonction de la profondeur de  $a$ .

#### 3.3.3.2) Variation du paramètre $\alpha''$ en fonction de $a$

Pour les deux cas étudiés, les courbes peuvent être schématisées par deux droites. Une première, pour les faibles profondeurs d'entaille, avec une pente relativement importante ; et une seconde où  $\alpha''$  est pratiquement constant. Cependant, on peut noter trois différences entre les deux courbes :

- La zone de transition se situe à 30% de la largeur totale de l'éprouvette pour le cas 2 alors qu'elle est à 38% de  $W$  pour le cas 1.
- Les valeurs de  $\alpha''$  obtenues pour les faibles valeurs de  $a$  sont plus importantes dans le cas 2 (de l'ordre de 20%).

- Pour les faibles valeurs de  $a$  et pour le cas 2,  $\alpha''$  décroît de façon rapide et chute de 30% par rapport à la valeur maximale (16% pour le cas 1). Dans la seconde partie du graphique,  $\alpha''$  décroît toujours, mais la variation entre les deux valeurs limites n'est plus que de 0,03 ce qui représente une chute de 0,5% (3,5% pour le cas 1).

À partir de  $a = 7$  mm, on peut considérer que les deux courbes sont confondues. Pour l'angle  $\alpha''$ , la modélisation influe donc uniquement sur les faibles profondeurs d'entailles.

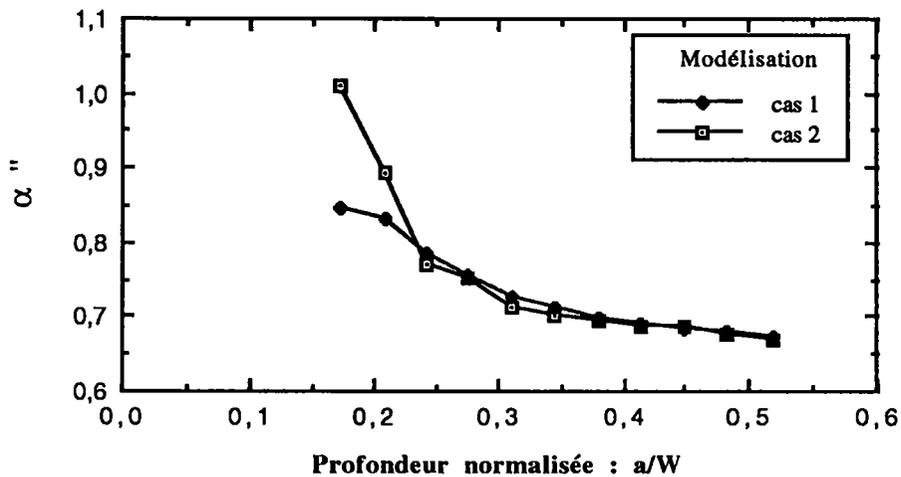


Figure 5 : Variation de  $\alpha''$  avec la profondeur d'entaille pour les cas 1 et 2.

### 3.3.3.3) Variation de la déformation maximale critique en fonction de $a$

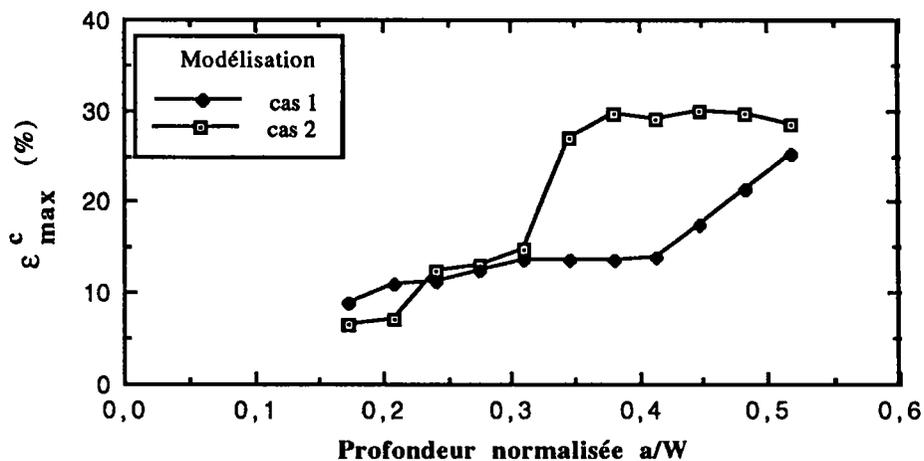


Figure 6 : Variation de  $\epsilon^c_{max}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

La figure 6 représente la variation de  $\epsilon^c_{max}$  en fonction de la profondeur d'entaille pour les deux types de modélisation.

Pour le cas 2, cette figure comporte trois parties : deux distinctes et une zone de transition.

- Si  $a \leq 9$  mm,  $\epsilon^c_{max}$  augmente de façon quasi linéaire entre 6% et 15%.
- Si  $a$  est compris entre 9 mm et 10 mm, nous sommes dans la zone de transition.
- Si  $a \geq 10$  mm,  $\epsilon^c_{max}$  reste pratiquement constante et vaut environ 30%.

Comme nous l'avions vu dans le cas de la variation de  $\alpha''$ , la déformation maximale critique augmente de façon importante à partir du moment où l'entaille correspond à 30% de la largeur totale de l'éprouvette. Pour le cas 1, cette transition apparaît pour 41% de  $W$ .

#### 3.3.3.4) Variation de la distance minimale critique en fonction de $a$

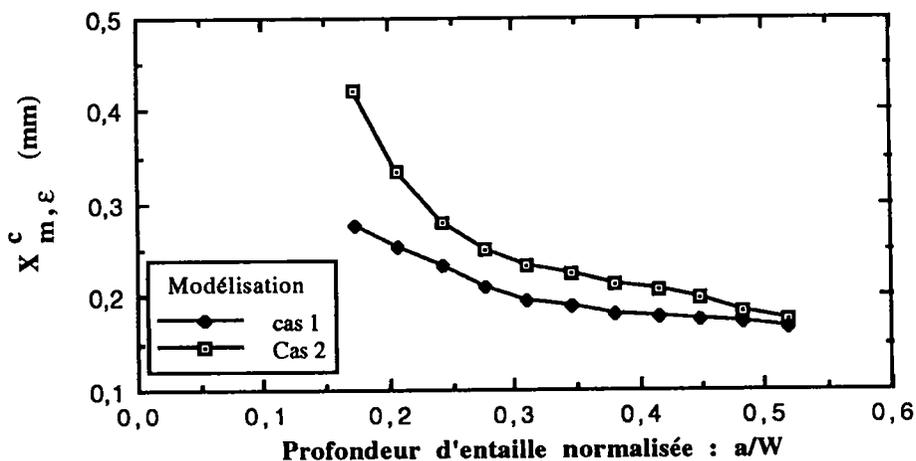


Figure 7 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

Quelque soit le type de modélisation,  $X^c_{m,\epsilon}$  décroît lorsque  $a$  augmente.

#### 4) Conclusions sur les différences obtenues par la modélisation

Nous venons de mettre en évidence le rôle important de la modélisation lors de la résolution d'un problème de calcul de structure par éléments finis. L'outil " *calcul par éléments finis* " est un outil performant mais qui nécessite une bonne connaissance du processus de calcul. En effet, un maillage inadapté, des conditions limites non appropriées etc ... sont autant d'éléments qui pourront fausser les résultats.

*Annexe 4 : Modélisation d'une éprouvette K.T. en bloquant en x un noeud de la partie supérieure de l'éprouvette*

Si les incohérences ou les erreurs de l'utilisateur n'empêchent pas la résolution du problème  $[F] = [K][U]$  (où  $[F]$  est la matrice des efforts,  $[K]$  est la matrice de rigidité et  $[U]$  la matrice des déplacements), le logiciel donnera une solution qui pourra être totalement erronée.

Il convient donc de se " méfier " des résultats obtenus et de toujours garder un sens critique vis à vis de ce que l'on cherche et de ce que l'on obtient.

### Distributions des contraintes en fond d'entaille pour les éprouvettes K.T.

#### 1) Acuité de $2 \text{ mm}^{-1}$

Lès figures 1 et 2 représentent les distributions des contraintes obtenues en fond d'entaille pour les deux valeurs extrêmes de  $a$  : 15 mm et 5 mm.

Quelque soit la valeur de  $a$ , l'allure des distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  est identique à celle que ce que nous avons obtenu pour  $\rho = 1 \text{ mm}$ .

Les distibutions présentent toujours un palier plastique dont la taille croît avec le chargement. Pour cette acuité, la contrainte au palier plastique,  $\sigma_{pp}$ , ne varie que de 1% ente les deux valeurs extrêmes de  $a$ . Elle vaut 380 MPa pour  $a \leq 8 \text{ mm}$ , puis elle augmente de façon linéaire pour atteindre 386 MPa pour  $a = 15 \text{ mm}$ .

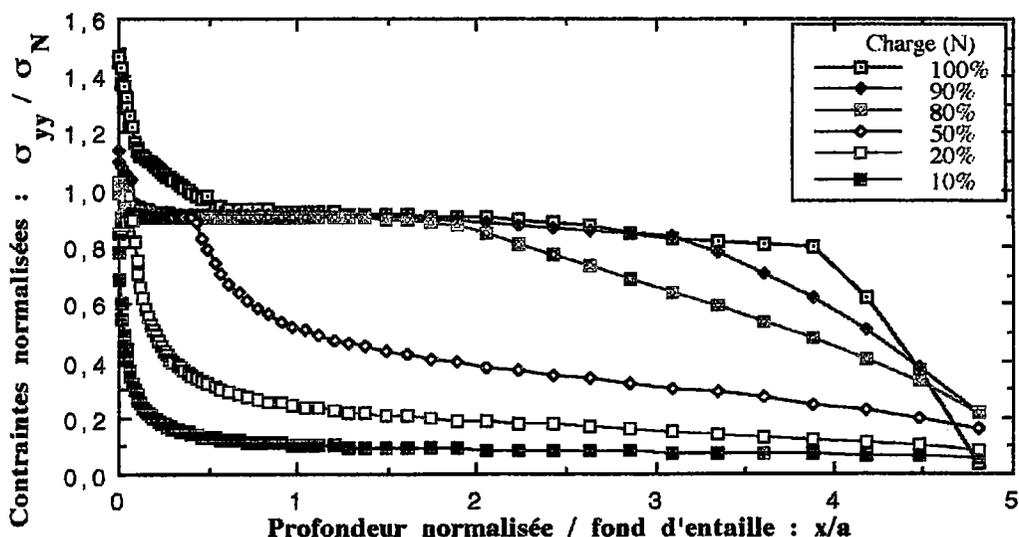


Figure 1 : Distribution des contraintes en fond d'entaille.  $\rho = 0,5 \text{ mm}$  et  $a = 5 \text{ mm}$ .

Pour une faible profondeur d'entaille (figure 1), la section réduite de l'éprouvette n'est pas sollicitée en compression, ce qui se traduit par le fait que le ligament est entièrement plastifié. La compression apparait pour  $a = 6 \text{ mm}$  sur 0,7 mm de longueur, ce qui représente 3% de la taille du ligament.

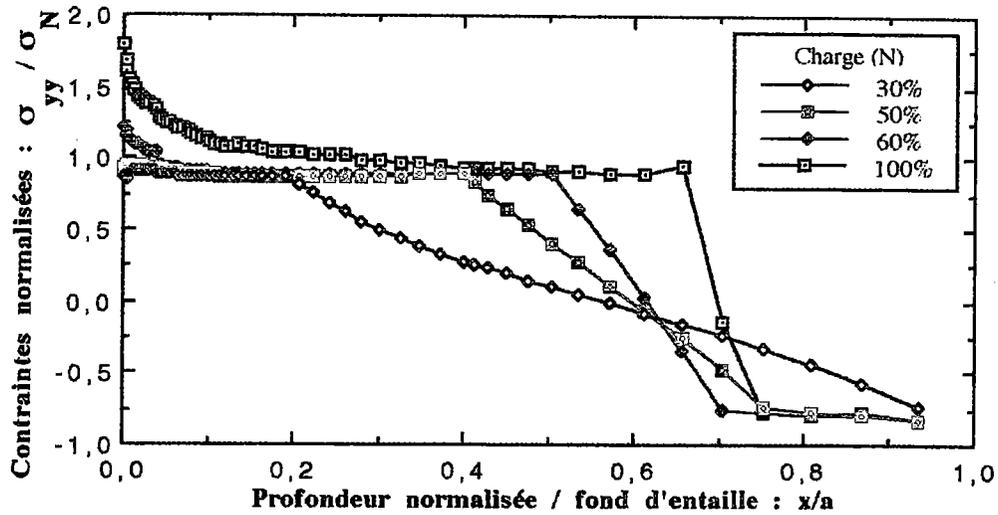


Figure 2 : Distribution des contraintes en fond d'entaille.  $\rho = 0,5$  mm et  $a = 15$  mm.

Pour  $a = 15$  mm et pour 100% de la charge appliquée (figure 2), la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille est de l'ordre de 1,38 fois la contrainte ultime ; elle vaut 1,18 fois la contrainte ultime pour  $a = 5$  mm.

## 2) Acuité infinie

Les figures 3 et 4 représentent les distributions des contraintes obtenues en fond d'entaille pour  $a = 15$  mm et  $a = 5$  mm.

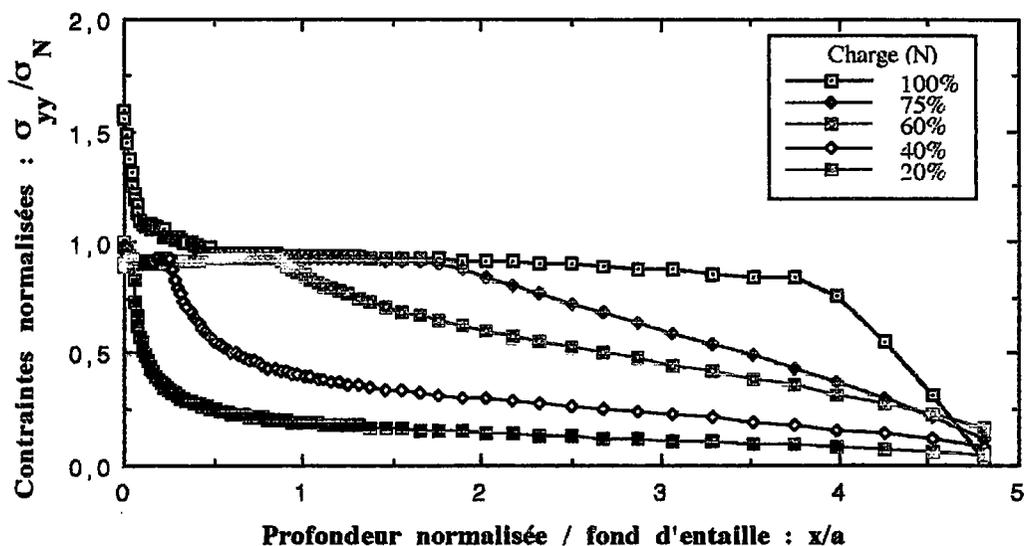


Figure 3 : Distribution des contraintes en fond d'entaille.  $\rho = 0$  mm et  $a = 5$  mm.

Les distributions des contraintes  $\sigma_{yy}$  ont la même allure que celles obtenues pour les deux premières acuités. Les mécanismes liés à la croissance du palier plastique puis à l'augmentation de la contrainte en fond d'entaille sont également présents (l'augmentation survient pour une contrainte nominale sur la section réduite de l'ordre de la limite élastique). La contrainte au palier plastique est de l'ordre de 382 MPa tant que  $a$  est strictement inférieur à 14 mm ; puis elle atteint 385 MPa pour  $a = 14$  mm et à 387 MPa pour  $a = 15$  mm.

Pour les faibles valeurs de  $a$ , il n'y a pas de compression dans la section réduite et le ligament est pratiquement totalement plastifié. La compression apparaît dans la section réduite entre  $a = 6$  mm et  $a = 7$  mm (où elle représente 2,2 mm, soit 10% de  $(W - a)$ ). En fait, pour  $a = 6$  mm, une partie de la section réduite est sollicitée en compression sur une distance négligeable égale à 0,1 mm soit 0,4% de  $(W - a)$ .

Pour  $a = 15$  mm et pour 100% de la charge appliquée, la contrainte maximale obtenue en fond d'entaille est de l'ordre de 3,33 fois la contrainte ultime ; elle vaut 1,44 fois la contrainte ultime pour  $a = 5$  mm. Pour  $a = 15$  mm, la contrainte maximale critique a augmenté de façon très importante (pour atteindre 1475 MPa) vraisemblablement en raison de la triaxialité des contraintes.

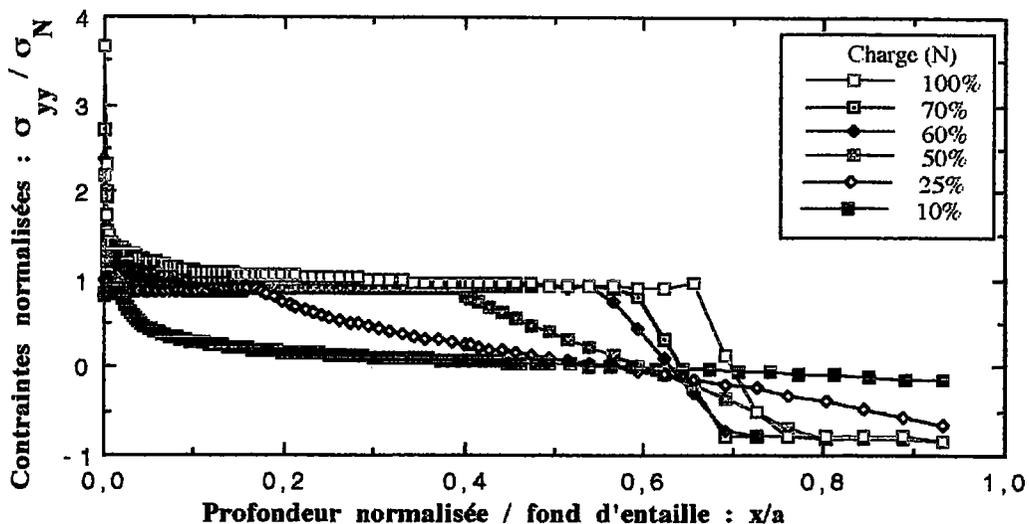


Figure 4 : Distribution des contraintes en fond d'entaille.  $\rho = 0$  mm et  $a = 15$  mm.

**3) Valeurs de la contrainte maximale obtenues en fond d'entaille**

a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma^c_{max}$ (MPa)	474	506	511	533	546	546	548	551	575	601	602

Tableau 1 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de la profondeur de l'entaille.  $\rho = 1$  mm.

a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma^c_{max}$ (MPa)	523	536	533	542	555	567	567	566	599	599	611

Tableau 2 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de la profondeur de l'entaille.  
 $\rho = 0,5$  mm.

a (mm)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\sigma^c_{max}$ (MPa)	541,7	546,8	584,4	595	598,6	605,4	608,8	611,7	616,6	642	662,6

Tableau 3 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de la profondeur de l'entaille.  $\rho = 0$  mm.

Valeurs numériques de  $\varepsilon^c_{max}$ , de  $\varepsilon^c_{eff}$ , de  $\alpha''$ , de  $X^c_{eff,\varepsilon}$  et de  $X^c_{m,\varepsilon}$

a (mm)	$\varepsilon^c_{max}$ (%)			$\alpha''$		
	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm
5	8,9449	15,69	23,6202	0,84476	0,85566	0,84352
6	10,915	16,5362	24,8574	0,83038	0,82999	0,82866
7	11,2469	16,5011	27,1529	0,78339	0,78457	0,78285
8	12,5917	16,8611	29,1862	0,75501	0,75304	0,75323
9	13,5844	17,9331	29,9422	0,72802	0,72911	0,72794
10	13,6289	19,1543	32,831	0,71338	0,71256	0,70973
11	13,7353	19,3125	34,4993	0,69679	0,69610	0,69695
12	13,8514	21,3329	35,9849	0,69144	0,69056	0,69138
13	17,5218	23,3575	36,3564	0,68381	0,68053	0,68272
14	21,2772	26,3625	38,696	0,67979	0,68142	0,67957
15	25,1702	28,3228	40,3561	0,6723	0,67295	0,67247

Tableau 1 : Variation de  $\varepsilon^c_{max}$  et de  $\alpha''$  en fonction de  $a$  pour toutes acuités.

a (mm)	$\varepsilon^c_{eff}$ (%)		
	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm
5	2,4081	1,9441	0,8378
6	3,239	2,2877	0,9461
7	3,8883	2,6857	1,149
8	4,3886	3,1485	1,3647
9	4,8893	3,7192	1,5065
10	5,1612	4,3336	1,6974
11	5,3469	4,6324	1,8828
12	5,5368	5,2872	2,0226
13	7,2035	5,9656	2,2243
14	9,0147	6,9302	2,5008
15	11,3183	7,9705	2,7693

Tableau 2 : Variation de  $\varepsilon^c_{eff}$  pour toutes acuités.

a (mm)	$X^c_{eff,\epsilon}$ (mm)			$(X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha^n}$ (mm $\alpha^n$ )		
	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm
5	1,309873	2,045984	3,035	1,256118	1,845128	2,551
6	1,102477	1,749882	2,73696	1,084383	1,59109	2,303281
7	0,90304	1,500998	2,47	0,923212	1,375253	2,029658
8	0,84324	1,26	2,26745	0,87921	1,215168	1,852685
9	0,80095	1,03	2,1481	0,85079	1,023958	1,74468
10	0,74156	0,848181	2,023902	0,807914	0,889291	1,649346
11	0,71089	0,77425	1,869083	0,788383	0,836855	1,546363
12	0,6759	0,7414	1,733	0,762735	0,813324	1,462516
13	0,64373	0,70775	1,60551	0,739928	0,790385	1,38158
14	0,613	0,6759	1,503	0,716998	0,765735	1,319034
15	0,5517	0,6126	1,4134	0,67042	0,719086	1,261969

Tableau 3 : Variation de  $X^c_{eff,\epsilon}$  et de  $(X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha^n}$  en fonction de  $a$ .

a (mm)	$X^c_{m,\epsilon}$ (mm)			$(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha^n}$ (mm $\alpha^n$ )		
	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm	$\rho = 1$ mm	$\rho = 0,5$ mm	$\rho = 0$ mm
5	0,277078	0,178227	0,057947	0,338168	0,228606	0,090486
6	0,255258	0,161441	0,052994	0,321786	0,22012	0,087668
7	0,232749	0,148394	0,043472	0,319173	0,22383	0,085884
8	0,208762	0,135695	0,038873	0,306429	0,22221	0,08663
9	0,196748	0,119071	0,035359	0,30622	0,211915	0,087779
10	0,190109	0,10537	0,031155	0,305953	0,2012	0,085273
11	0,182276	0,099577	0,028803	0,30541	0,200732	0,084393
12	0,179445	0,098347	0,026948	0,304886	0,201578	0,082204
13	0,175457	0,095243	0,026813	0,304198	0,201868	0,084527
14	0,173306	0,095141	0,026696	0,303776	0,201297	0,085244
15	0,168038	0,093092	0,0263	0,301468	0,202362	0,08659

Tableau 4 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha^n}$  en fonction de  $a$ .

**Équations des droites permettant la détermination analytique  
de  $X^c_{m,\varepsilon}$  et de  $X^c_{eff,\varepsilon}$**

a (cm)	Équations des droites	R <sup>2</sup>
5	$y = -3,4983 - 0,84476x$	0,998
6	$y = -3,3489 - 0,83038x$	0,99
7	$y = -3,3271 - 0,78339x$	0,99
8	$y = -3,2549 - 0,75501x$	0,992
9	$y = -3,1797 - 0,72802x$	0,992
10	$y = -3,1773 - 0,71338x$	0,992
11	$y = -3,1713 - 0,69679x$	0,991
12	$y = -3,1646 - 0,69144x$	0,99
13	$y = -2,9318 - 0,68381x$	0,994
14	$y = -2,739 - 0,67979x$	0,991
15	$y = -2,5786 - 0,6723x$	0,99

Tableau 1 : Acuité de  $1\text{ mm}^{-1}$ .

a (cm)	Équations des droites	R <sup>2</sup>
5	$y = -3,3279 - 0,85566x$	0,989
6	$y = -3,3132 - 0,82999x$	0,989
7	$y = -3,2986 - 0,78457x$	0,993
8	$y = -3,2842 - 0,75304x$	0,993
9	$y = -3,2701 - 0,72911x$	0,997
10	$y = -3,2561 - 0,71256x$	0,994
11	$y = -3,2502 - 0,69610x$	0,995
12	$y = -3,1465 - 0,69056x$	0,995
13	$y = -3,0544 - 0,68053x$	0,996
14	$y = -2,9362 - 0,68142x$	0,994
15	$y = -2,8592 - 0,67295x$	0,996

Tableau 2 : Acuité de  $2\text{ mm}^{-1}$ .

Annexe n°7 : Équations des droites permettant la détermination analytique de  $X^C_{m,\varepsilon}$  et de  $X^C_{eff,\varepsilon}$

a (cm)	Équations des droites	R <sup>2</sup>
5	$y = -3,8456 - 0,84352x$	0,997
6	$y = -3,8263 - 0,82866x$	0,983
7	$y = -3,7584 - 0,78285x$	0,993
8	$y = -3,6776 - 0,75323x$	0,992
9	$y = -3,6388 - 0,72794x$	0,987
10	$y = -3,5757 - 0,70973x$	0,992
11	$y = -3,5365 - 0,69695x$	0,987
12	$y = -3,5206 - 0,69138x$	0,985
13	$y = -3,4825 - 0,68272x$	0,986
14	$y = -3,4117 - 0,67957x$	0,985
15	$y = -3,354 - 0,67247x$	0,985

Tableau 3 : Acuité infinie.

Variations graphiques de  $\epsilon^c_{max}$ ,  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $\epsilon^c_{eff}$ ,  $X^c_{eff,\epsilon}$  en fonction de  $a$

1) Acuité de  $2\text{ mm}^{-1}$

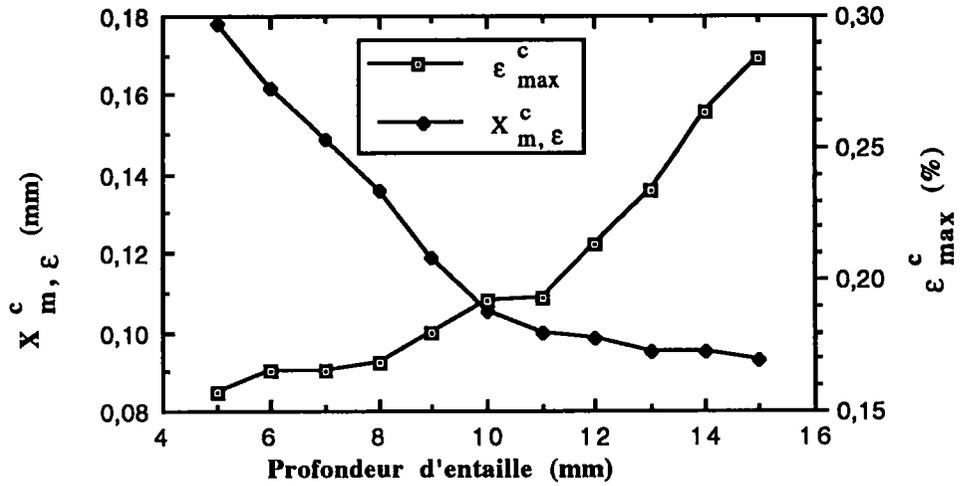


Figure 1 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $\epsilon^c_{max}$  avec  $a$ .

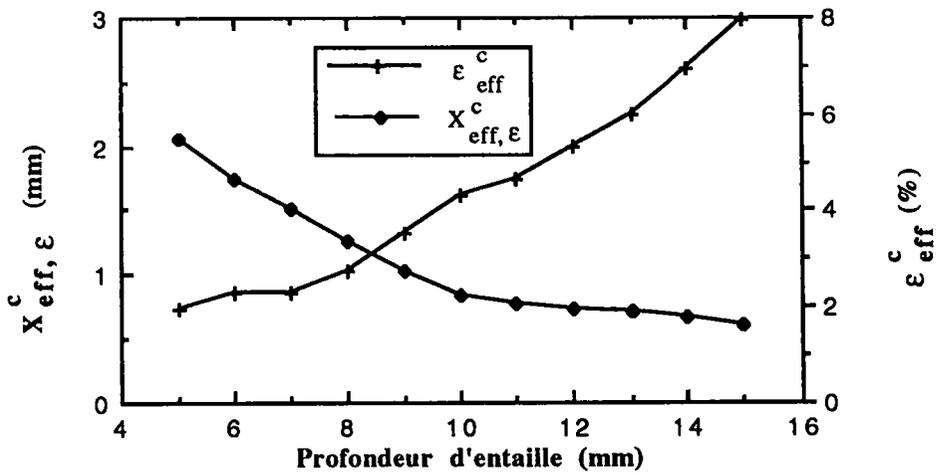


Figure 2 Variation de  $X^c_{eff,\epsilon}$  et de  $\epsilon^c_{eff}$  avec  $a$ .

Pour ces deux figures, les zones de transition respectives ne sont pas communes.

## 2) Acuité infinie

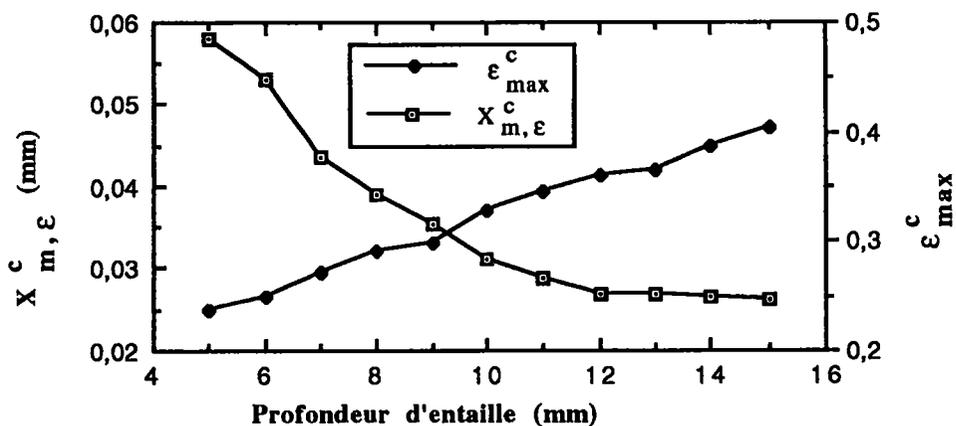


Figure 3 : Variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  et de  $\epsilon^c_{max}$  avec  $a$ .

Les zones de transitions présentes dans la variation de  $X^c_{m,\epsilon}$  en fonction de  $a$  ne correspondent à aucun point particulier sur la courbe  $\epsilon^c_{max} = f(a)$ , étant donné que celle-ci peut être considérée comme une droite.

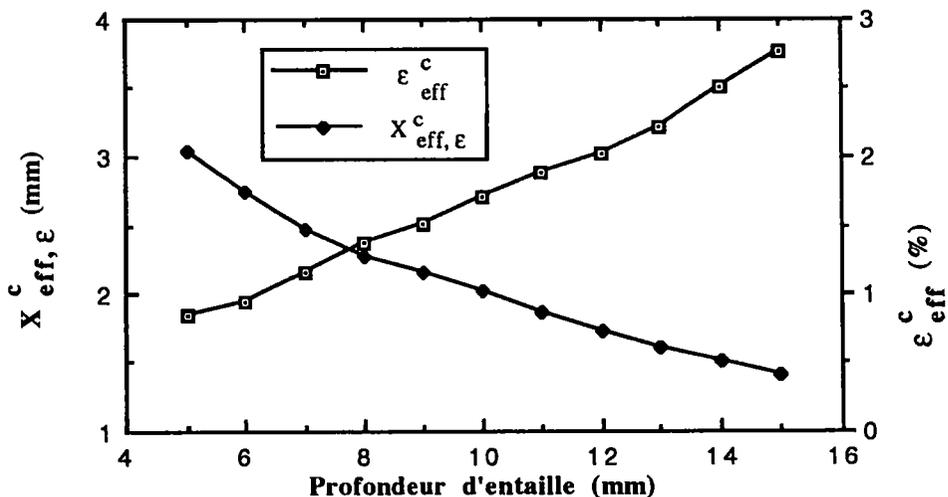


Figure 4 : Variation de  $X^c_{eff,\epsilon}$  et de  $\epsilon^c_{eff}$  avec  $a$ .

**Valeurs numériques de la ténacité définie à partir de  $X^c_{eff,\epsilon}$  ou de  $X^c_{m,\epsilon}$**

Nous rappelons que l'on a :  $\epsilon^c_{eff}(X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha''} = \epsilon^c_{max}(X^c_{m,\epsilon})^{\alpha''}$ .

a (mm)	$\epsilon^c_{max}\sqrt{\rho}$ ( $\sqrt{\text{mm}}$ )			$\epsilon^c_{eff}(X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha''}$ ( $\text{mm}^{\alpha''}$ )		
	$\rho = 1 \text{ mm}$	$\rho = 0,5 \text{ mm}$	$\rho = 0 \text{ mm}$	$\rho = 1 \text{ mm}$	$\rho = 0,5 \text{ mm}$	$\rho = 0 \text{ mm}$
5	0,089449	0,110945	X	0,030249	0,035868	0,021373
6	0,10915	0,116929	X	0,035139	0,036399	0,021792
7	0,112469	0,11668	X	0,035875	0,036934	0,02332
8	0,125917	0,119226	X	0,038579	0,037469	0,025284
9	0,135844	0,126806	X	0,041585	0,038003	0,026283
10	0,136289	0,135441	X	0,041701	0,038538	0,027996
11	0,137353	0,13656	X	0,041933	0,038766	0,029115
12	0,138514	0,150846	X	0,042227	0,043002	0,029581
13	0,175218	0,165162	X	0,053295	0,047151	0,030731
14	0,212772	0,186411	X	0,064643	0,053067	0,032986
15	0,251702	0,200272	X	0,075879	0,057315	0,034948

Tableau 1 : Variation de  $\epsilon^c_{max}\sqrt{\rho}$  et de  $\epsilon^c_{eff}(X^c_{eff,\epsilon})^{\alpha''}$  en fonction de  $a$ .

## Valeurs statistiques

Les tableaux 1 à 3 donnent les valeurs respectivement de l'écart-type, de la moyenne arithmétique et du coefficient de variation pour le critère proposé ainsi que pour le critère de RANDALL et MERKLE.

Le critère de RANDALL et MERKLE n'étant pas applicable aux fissures, nous donnons également ces trois valeurs pour notre critère sans tenir compte des résultats obtenus pour l'acuité infinie.

a (mm)	Entailles		Entailles + fissures
	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$	$\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$
5	0,003973	0,0152	0,007327
6	0,000891	0,005501	0,008094
7	0,000749	0,002978	0,007573
8	0,000785	0,004731	0,007378
9	0,002533	0,006391	0,008004
10	0,002237	0,0006	0,007176
11	0,002239	0,000561	0,006677
12	0,000548	0,00872	0,007535
13	0,004344	0,007111	0,011665
14	0,008185	0,01864	0,016018
15	0,013127	0,036367	0,020494

Tableau 1 : Écarts-types obtenus pour les deux critères (en  $\sqrt{\text{mm}}$  pour le critère de RANDALL et MERKLE ou  $\text{mm}^{\alpha''}$  pour notre critère).

a (mm)	Entailles		Entailles + fissures
	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$	$\epsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$	$\epsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\epsilon})^{\alpha''}$
5	0,033059	0,100197	0,029151
6	0,035769	0,11304	0,03111
7	0,036405	0,114575	0,032043
8	0,038024	0,122572	0,03777
9	0,039794	0,131325	0,03529
10	0,04012	0,135865	0,036078

11	0,04035	0,136957	0,036605
12	0,042615	0,14468	0,03827
13	0,050223	0,17019	0,043726
14	0,058855	0,199592	0,050232
15	0,066597	0,225987	0,056048

Tableau 2 : Moyennes arithmétiques obtenues pour les deux critères (en  $\sqrt{\text{mm}}$  pour le critère de RANDALL et MERKLE ou  $\text{mm}^{\alpha''}$  pour notre critère).

a (mm)	Entailles		Entailles plus fissures
	$\varepsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''}$	$\varepsilon^c_{\text{max}}\sqrt{\rho}$	$\varepsilon^c_{\text{eff}}(X^c_{\text{eff},\varepsilon})^{\alpha''}$
5	0,120188	0,151701	0,251352
6	0,024909	0,048661	0,260179
7	0,02057	0,025989	0,236335
8	0,020642	0,0386	0,21842
9	0,063649	0,048664	0,226791
10	0,055748	0,004413	0,198899
11	0,0555	0,004094	0,182401
12	0,01286	0,060271	0,196887
13	0,086503	0,041781	0,266788
14	0,139079	0,093391	0,318876
15	0,197107	0,160923	0,36566

Tableau 3 : Coefficients de variation obtenue pour les deux critères.

## Chapitre 1

Figure 1.1 : Symbolisation des lignes de chargement

Figure 1.2 : Concentration de contraintes pour des pièces entaillées

Figure 1.3 : Concentration de contraintes dues à l'effet d'entaille

Figure 1.4 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon THIMOSHENKO.

Figure 1.5 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon CHEN-PAN et NEUBER.

Figure 1.6 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon USAMI.

Figure 1.7 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon GLINKA et NEWPORT

Figure 1.8 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon la formule de GLINKA et NEWPORT.

Figure 1.9 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon GLINKA et NEWPORT sur une zone très proche du fond d'entaille.

Figure 1.10 : Distribution des contraintes  $\sigma_{yy}$  élastiques selon KUJAWSKI.

Figure 1.11 : Loi de comportement élastique parfaitement plastique.

Figure 1.12 : Distribution des contraintes élastoplastiques en fond d'entaille

Figure 1.13 : Loi de comportement.

Figure 1.14 : Distribution des contraintes dans la zone plastique en fond d'entaille.

Figure 1.15 : Loi de comportement.

Figure 1.16 : Distribution des contraintes dans la zone plastique en fond d'entaille selon XU.

Figure 1.17 : Loi de comportement.

Figure 1.18 : Distribution des contraintes élastoplastiques pour une barre entaillée soumise à de la flexion pure selon TETELMAN.

Figure 1.19 : Distribution des contraintes élastoplastiques pour une barre entaillée.

Figure 1.20 : Distribution des contraintes plastiques pour une barre entaillée.

Figure 1.21 : Différence entre la méthode de NEUBER et la méthode de MOLSKI

Figure 1.22 : Solutions graphiques des variations de  $\zeta$  en fonction de  $\sigma_N$ .

## Chapitre 2

Figure 2.1 : Évolution schématique de la contrainte et de la déformation globale en fonction de la déformation nominale.

Figure 2.2 : Rupture d'une plaque contenant un défaut par écoulement plastique :  
Cas 1 : généralisé, Cas 2 : localisé.

Figure 2.3 : Influence de la largeur du défaut sur la déformation globale critique.

Figure 2.4 : Schéma du modèle de RITCHIE, RICE et KNOTT

Figure 2.5 : Représentation de la plasticité localisée

Figure 2.6 : Description de la distribution des déformations utilisée par OSBORNE et EMBURY.

### Chapitre 3

Figure 3.1 : Plan en coupe des éprouvettes C.T.

Figure 3.2 : Variation de la charge critique en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.3 : Variation de  $\sigma_N^c$  en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.4 : Différentes zones du domaine plastique

Figure 3.5 : Conditions aux limites des calculs réalisés sur les éprouvettes C.T.

Figure 3.6 : Schématisation du maillage en fond d'entaille pour les éprouvettes C.T.

Figure 3.7 : Distribution des contraintes normalisées en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

Figure 3.8 : Zoom sur la distribution des contraintes normalisées en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

Figure 3.9 : Allure de la zone plastique en fond d'entaille pour l'acuité de  $1 \text{ mm}^{-1}$ .

Figure 3.10 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour les quatre acuités. (Échelle logarithmique).

Figure 3.11 : Distribution des déformations en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  et pour trois niveaux de chargement.

Figure 3.12 : Distribution des déformations en fond d'entaille pour les 4 acuités.

Figure 3.13 : Comparaison entre les distributions des déformations  $\varepsilon_{yy}$  obtenues par calcul et par une loi de LUDWIK.  $\rho = 1 \text{ mm}$ .

Figure 3.14 : Distribution des déformations en fond d'entaille ( $\rho = 1 \text{ mm}$ )

Figure 3.15 : Détermination de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $\alpha''$  à partir de la distribution des déformations.

Figure 3.16 : Variation de  $\alpha''$  en fonction du rayon d'entaille  $\rho$ .

Figure 3.17 : Variation de la déformation maximale critique en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.18 : Variation de la déformation effective critique en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.19 : Variation de la distance effective minimale critique en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.20 : Variation de la distance effective critique en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.21 : Variation de  $X_{m,\varepsilon}^c$  et de  $X_{\text{eff},\varepsilon}^c$  en fonction de  $\rho$ .  $a = 44 \text{ mm}$ .

Figure 3.22 : Variation entre  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $\varepsilon_{\text{max}}^c \sqrt{\rho}$  en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.23 : Variation entre  $\varepsilon_{\text{eff}}^c(X_{\text{eff},\varepsilon}^c)^{\alpha''}$  et  $\varepsilon_{\text{max}}^c \sqrt{\rho}$  en fonction de  $\rho$ .

Figure 3.24 : Comparaison entre le critère de RANDALL et MERKLE et le critère proposé.

## Chapitre 4

Figure 4.1 : Plan en coupe des éprouvettes K.T.

Figure 4.2 : Variation de  $P_C$  en fonction de  $a/W$  et de  $\rho$ .

Figure 4.3 : Variation de  $\sigma^c_N$  en fonction de  $a$  et  $\rho$ .

Figure 4.3 : Variation de  $\varepsilon^c_g$  théorique et expérimentale en fonction de  $a/W$  et  $\rho$  pour  $\rho = 1$  mm et  $\rho = 0,5$  mm.

Figure 4.5 : Variation de  $\varepsilon^c_g$  théorique et expérimentale en fonction de  $a/W$ .  $\rho = 0$ .

Figure 4.6 : Conditions aux limites des calculs réalisés sur les éprouvettes K.T.

Figure 4.7 : Schématisation du maillage en fond d'entaille pour les éprouvettes K.T.

Figure 4.8 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 5$  mm.

Figure 4.9 : Zoom sur la distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 5$  mm.

Figure 4.10 : Distribution des contraintes en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 15$  mm.

Figure 4.11 : Étapes successives du processus de plastification de la section réduite.  $a = 5$  mm,  $\rho = 0,5$  mm.

Figure 4.12 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 1$  mm

Figure 4.13 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 0,5$  mm

Figure 4.14 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  pour  $\rho = 0$  mm

Figure 4.15 : Variation de  $\sigma^c_{max}$  en fonction de  $a$  ; toutes acuités.

Figure 4.16 : Distributions des déformations en fond d'entaille pour  $\rho = 1$  mm et  $a = 15$  mm

Figure 4.17 : Distribution des déformations.  $a = 13$  mm et  $\rho = 1$  mm

Figure 4.18 : Détermination de la valeur de  $X^c_{eff,\varepsilon}$  à partir d'une distribution de déformation en échelle logarithmique.

Figure 4.19 : Variation de  $\alpha''$  avec la profondeur d'entaille. Toutes acuités confondues.

Figure 4.20 : Variation de  $\varepsilon^c_{max}$  et de  $\varepsilon^c_{eff}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

Figure 4.21 : Variation de  $\varepsilon^c_{max}$  et de  $\varepsilon^c_{eff}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

Figure 4.22 : Variation de  $\varepsilon^c_{max}$  et de  $\varepsilon^c_{eff}$  avec la profondeur d'entaille  $a/W$ .

Figure 4.23 : Variation de  $\varepsilon^c_{max}$  en fonction de  $a/W$  pour les trois rayons d'entaille.

Figure 4.24 : Variation de  $\varepsilon^c_{eff}$  en fonction de  $a/W$  pour les trois rayons d'entaille.

Figure 4.25 : Variation de  $X^c_{m,\varepsilon}$  avec la profondeur d'entaille normalisée  $a/W$ .

Figure 4.26 : Variation de  $X^c_{m,\varepsilon}$  et de  $\varepsilon^c_{max}$  avec  $a$ .

Figure 4.27 : Variation de  $X^c_{eff,\varepsilon}$  avec la profondeur d'entaille normalisée :  $a/W$ .

Figure 4.28 : Variation de  $X^c_{eff,\varepsilon}$  et de  $\varepsilon^c_{eff}$  avec  $a$ .

Figure 4.29 : Variation de  $X^c_{m,\varepsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

Figure 4.30 : Variation de  $X^c_{eff,\varepsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

Figure 4.31 : Variation de  $X^c_{m,\varepsilon}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .

- Figure 4.32 : Variation de  $X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ .
- Figure 4.33 : Variation de  $X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ . Toutes acuités.
- Figure 4.34 : Variation de  $X_{\text{m},\varepsilon}^{\text{C}}$  avec la profondeur d'entaille  $a$ . Toutes acuités.
- Figure 4.35 : Variation de  $X_{\text{m},\varepsilon}^{\text{C}}$  en fonction de  $\rho$  pour trois valeurs de  $a$ .
- Figure 4.36 : Variation de  $\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{C}}(X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}})^{\alpha}$  et de  $\varepsilon_{\text{max}}^{\text{C}}\sqrt{\rho}$  en fonction de  $a$ .
- Figure 4.37 : Variation de  $\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{C}}(X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}})^{\alpha}$  et de  $\varepsilon_{\text{max}}^{\text{C}}\sqrt{\rho}$  en fonction de  $a$ .
- Figure 4.38 : Variation de  $\varepsilon_{\text{eff}}^{\text{C}}(X_{\text{eff},\varepsilon}^{\text{C}})^{\alpha}$  en fonction de  $a$ .
- Figure 4.39 : Taille de la zone plastique en fonction de  $a$ .

## Chapitre 1

Tableau 1.1 : Récapitulatif des différentes formules proposées pour calculer  $\zeta$ .

## Chapitre 3

Tableau 3.1 : Résultats obtenus lors des essais.

Tableau 3.2 : Variation de  $\sigma_{N^c}$  en fonction de  $\rho$ .

Tableau 3.3 : couples  $\sigma - \varepsilon$  pris pour décrire le matériau dans le domaine plastique.

Tableau 3.4 : Profondeur maximale de la zone plastique  $L_{max}$  (en mm) par rapport au fond d'entaille

Tableau 3.5 : équations des droites caractérisant la pente dans la distribution des contraintes

Tableau 3.6 : Équations des droites tirées des courbes  $\ln \varepsilon = f(\ln r)$  dans le domaine plastique.

Tableau 3.7 : Valeurs liées à la distance effective critique et à la distance effective minimale critique.

Tableau 3.8 : Différentes valeurs obtenues pour les trois critères.

## Chapitre 4

Tableau 4.1 : Résultats expérimentaux

Tableau 4.2 : équations des droites caractérisant la variation de la charge critique en fonction de  $a/W$  et de  $\rho$ .

Tableau 4.3 : Couples  $\sigma - \varepsilon$  pris pour décrire le matériau dans le domaine plastique

Tableau 4.4 : Résultats statistiques sur les deux critères

# RÉFÉRENCES

## **Références**

- [1] BURDEKIN, F.M. \* STONE, D.E.  
The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials.  
Journal of strain analysis, Vol. 1, N° 2, p 145 - 153, 1972
  
- [2] SOETE, W.  
An experimental approach to fracture initiation in structural steels.  
Fracture 1977, Vol.1, ICF4, Waterloo, Canada, June 19-24, 1977
  
- [3] NEWMANN, J.C.  
Fracture analysis of surface and through cracked sheets and plates.  
Engineering Fracture Mechanics Vol. 5, p 667 - 689, 1973
  
- [4] GLINKA, G. \* NEWPORT, A.  
Universal features of elastic notch tip stress fields.  
Int. J. Fatigue, Vol. 9, N°3, p. 143-150, July 1987
  
- [5] PETERSON, R.E.  
Stress concentration factor.  
John Wiley and Sons, New-York, 1974
  
- [6] THIMOSHENKO, S. \* GOODIER, J.N.  
Theory of Elasticity.  
McGraw-Hill, New York, 1951
  
- [7] NEUBER, H.  
Theory of stress concentration for shear-strained prismatic bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law.  
J. Appl. Mech., 28, p 544, 1961
  
- [8] CHEN, C. \* PAN, H.  
Collection of Papers on Fracture of Metals. (Ed. CHEN, C.)  
Metallurgy Industry Press, Beejing, p197 - 219, 1978

*Références bibliographiques*

- [9] CREAGER, M. \* PARIS, P.  
Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking.  
International Journal of Fracture, Vol. 3, 2, p247 - 252, Juin 1967
- [10] TADA, H. \* PARIS, P. \* IRWIN, G.  
The Stress Analysis of cracks Handbook.  
Del Research Corporation, St Louis, MO, USA, 1973
- [11] USAMI, S.  
Short crack fatigue properties and component life estimation.  
Current Research on Fatigue Cracks (Edited by TANAKA, T). The Soc. Mater Sci.  
Kyoto, 1985
- [12] KUJAWSKI, D.  
Estimations of stress intensity factors for small cracks at notches.  
Fatigue Fract. Mater. Struct. Vol. 14, N° 14, p953 - 965, 1991
- [13] BHATTACHARYA, S. \* KUMAR, A.N.  
Rotational factor using bending moment approach under elasto-plastic situation -I  
Notch 3PB Geometry.  
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 50, N°4, p495 - 505, 1995
- [14] HILL, R.  
The Mathematical Theory of Plasticity.  
Oxford University Press, 248, 1959
- [15] TETELMAN, A.S. \* McEVILY, A.J.  
Fracture of Structural Materials, p309, 1967
- [16] XU, X.X. \* CAI, Q.G. \* SU, Y. \* MA, W.D.  
Notch root strain and stress distribution in power hardening materials.  
International Journal of Fracture, 41, p275-282, 1989
- [17] TETELMAN, A.S. \* WILSHAW, T.R. \* RAU, C.A. Jr  
The critical tensile stress criterion for cleavage.  
The International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 4, 2, Juin 1968

*Références bibliographiques*

- [18] WILSHAW, T.R. \* RAU, C.A. Jr \* TETELMAN, A.S.  
A general model to predict the elastic-plastic stress distribution and fracture strength of notched bars in plane strain bending.  
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 1, p191 - 211, 1968
- [19] STOWELL, E.  
Strain and stress concentration at a circular hole in a infinite plate.  
NACA-TN 2073, 1950
- [20] HARDRATH, H.F. \* OHMAN, L.  
A study of elastic and plastic stress concentration factors due to notches and fillets in flat plates.  
NACA Report 1117, 1953
- [21] TOPPER, T.H. \* WETZEL, R.M. \* MORROW, J.D.  
Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens.  
J. Mater., 4, 200, 1969
- [22] MOLSKI, K. \* GLINKA, G.  
A Method of Elastic-Plastic Stress and Strain Calculation at a Notch Root.  
Materials Science and Engineering, 50, p93 - 100, 1981
- [23] KOE, S. \* NAKUMARA, H. \* TSUNEMARI, T.  
Journal of the Society of Materials Science, Japan, Vol. 27, N°300, p847 - 852, 1978
- [24] MAKHUTOV, N.A.  
The deformation fracture criteria and the strength calculation of the machine parts.  
Mashinostroyenie, Moscow, 1981, p272.
- [25] WALKER, T.J.  
A quantitative strain-and-stress state criterion for failure in the vicinity of sharp cracks.  
Nuclear Technol. 23, 50, p189 - 203, 1974

*Références bibliographiques*

- [26] GLINKA, G.  
Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks.  
Engineering Fracture Mechanics, Vol. 22, N°3, p485 - 508, 1985
- [27] MOROZOV, \* PLUVINAGE, G.  
Study of Strain Concentration Coefficients by Path-Independent integral.  
International Scientific & Technical Journal : Problems of STRENGTH. 1996.
- [28] BATES, R.C. \* SANTHANAM, A.T.  
International Journal of Fracture, Vol. 14, p501, 1978
- [29] PLUVINAGE, G.  
Mécanique élastoplastique de la rupture : critères d'amorçage.  
CEPADUES Editions 1989.
- [30] RANDALL, P.N. \* MERKLE, J.G.  
Effects of Cracks Size on the Gross-Strain Crack Tolerance of A-533-B Steel.  
Journal of Engineering for Industry, p935 - 941, August 1972
- [31] OROWAN, E.  
Cleavage fracture of metals.  
Rep. Prog. Phy 12 p 185, 1948
- [32] RITCHIE, R.O. \* KNOTT, J.F. \* RICE, J.R.  
On the relationship between critical tensile stress fracture toughness in mild steel.  
Journal of Mechanics Physics Solids, 21, p359 - 410, 1973
- [33] PANASYUK, V.V.  
Deformation criteria in fracture mechanics of materials.  
Eight International Conference on Fracture, Ukraine, Kiev, June 8 - 14, 1993  
I.C.F. 8
- [34] WELLS  
Unstable crack propagation in metals : clivage and fast fracture.  
Symposium on crack propagation. College of aeronautics Cranfield paper B4,  
p210 - 230, 1961

*Références bibliographiques*

- [35] COTTEREL, A.H.  
Theoretical aspects of radiation damage and brittle fracture in steel pressure vessels.  
Iron and Steel Inst. Spec. 1961, report n°69, p 281-296
- [36] BARENBLATT, G.I.  
The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture.  
Advances in Applied Mechanics, 7 Academic press N.Y, 1962
- [37] DAWES, M.G.  
Elastic-plastic fracture toughness based on the COD and *J*-contour integral concept.  
ASTM STP 668, p307 - 333, 1979
- [38] KOLEDNIK, O.  
On the calculation of COD from the clip-gauge displacement in CT and bend specimens.  
Engineering Fracture Mechanics Vol. 29, N° 2, p173 - 188, 1988
- [39] KRAFT, J.M.  
Correlation of plane strain crack toughness with strain hardening characteristics of a low, a medium and a high strength steel.  
Applied Materials Research, p88 - 101, April 1964
- [40] BARSOM, J.M. \* PELLEGRINO, J.V.  
Relationship between  $K_{IC}$  and plane-strain tensile ductility and microscopic mode of fracture.  
Engineering Fracture Mechanics Vol. 5, p209 - 221, 1973
- [41] RITCHIE, R.O. \* SERVER, W.L. \* WULLAERT, R.A.  
Critical fracture stress and fracture strain models for the prediction of lower and upper shelf toughness in nuclear pressure vessels steels.  
Metalurgical transactions Vol. 10 A, p1557 - 1570, 1979
- [42] CLAUSING, D.P.  
Effect of plastic strain state on ductility and toughness.  
International Journal of Fracture Mechanics vol. 6 , p71, 1970

*Références bibliographiques*

- [43] OSBORNE, D.E. \* EMBURY, J.D.  
The influence of warm rolling on the fracture toughness of bainitic steels.  
Metallurgical transactions vol. 4 , p2051 - 2061, September 1973
- [44] FIRRAO, D. \* ROBERTI, R.  
Ductile fracture nucleation ahead of sharp cracks.  
Metalurgical Sciences and Technology N°1. p5 - 13, Juin 1983
- [45] WILLIAMS, L.M.  
Stress singularity resulting from various boundary conditions in angular corners of  
plates in extension.  
Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, N°4, p 526 - 528