



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6113413

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

UFR M.I.M.

SPECIALITE MATHEMATIQUES

par

Joseph ANDELE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19970325
Cote	S/M3 97/15
Loc	Magasin

NOYAUX D'OPERATEURS SUR LES GROUPES DE LIE EXPONENTIELS

Soutenue le 30 juin 1997 devant la commission d'Examen

D. Arnal
B. Bekka
C. Benson
H. Leptin
J. Ludwig
J-P. Pier
A. Roux

Examineur
Examineur
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de Recherche
Examineur
Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Ludwig qui m'a dirigé dans mes recherches avec beaucoup de générosité, de patience et de compétence.

Messieurs les Professeurs Chal Benson et Horst Leptin ont spontanément accepté de mettre leur compétence au service du jury et d'être rapporteurs de ma thèse. Leur accord m'honore et je les en remercie vivement.

Un grand merci revient aussi à Messieurs les Professeurs Didier Arnal, Bachir Bekka, Jean-Paul Pier et André Roux, membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à tous ceux qui, de près comme de loin, m'ont apporté leur soutien pour la réalisation de cette thèse dans d'excellentes conditions.

*Il y'a un temps pour tout,
un temps pour toute chose
sous les cieux (La Bible).*

A mon épouse Erna

A mon fils Daniel-Yves

A ma mère

A mes frères et soeurs

INTRODUCTION

Le but du présent travail consiste à donner une caractérisation de certains noyaux d'opérateurs sur les groupes de Lie exponentiels. Cette question a d'abord été étudiée dans le cas des groupes de Lie nilpotents avant d'être étendue aux groupes de Lie exponentiels.

Revenons d'abord aux groupes de Lie nilpotents. Soit en effet G , un groupe de Lie connexe et simplement connexe, nilpotent, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; alors l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ est un difféomorphisme. Par conséquent, nous pouvons définir un isomorphisme canonique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$, espace des fonctions de $C^\infty(G)$ à décroissance rapide vers l' ∞ ainsi que toutes leurs dérivées partielles, dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, de la façon suivante : pour $f \in \mathcal{S}(G)$, la fonction $f \circ \exp \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Rappelons que $\mathcal{S}(G)$ est une sous-algèbre de $L^1(G)$ et que $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de l'algèbre commutative $L^1(\mathfrak{g})$.

Soit ensuite $\pi \in \hat{G}$, une représentation unitaire irréductible de G , c'est à dire que π définit un homomorphisme continu de G dans l'espace $Op(\mathcal{H}_\pi)$ des opérateurs unitaires et inversibles de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$. D'après la théorie de Kirillov ([Kir.]), nous savons qu'il existe $l \in \mathfrak{g}^*$ et une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en l qui définissent π . Cela signifie que si l'on désigne par $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1) Si $\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} / \langle l, [X, \mathfrak{g}] \rangle = 0\}$, alors $\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}(l) + \dim \mathfrak{g})$.

2) $\langle l, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$, c'est à dire que la restriction $l|_{\mathfrak{h}}$ est un homomorphisme, ce qui nous permet de définir un caractère χ_l sur $\exp \mathfrak{h} = H \subset G$, c'est à dire un homomorphisme continu de H sur $\mathbb{R}$.

3) $\pi = \text{ind}_H^G \chi_l$, c'est à dire que π est la représentation induite dans G par le caractère χ_l de H .

Donnons ici une description de la représentation $\pi = \text{ind}_H^G \chi_l$. Nous choisissons une

mesure positive G -invariante $d\dot{x}$ sur G/H . L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ de la représentation π est l'espace de toutes les fonctions mesurables ξ sur G , qui vérifient les conditions suivantes :

$$4) \xi(x \cdot h) = \overline{\chi_l(h)} \xi(x), \forall x \in G, h \in H.$$

$$5) \|\xi\|_2^2 = \int_{G/H} |\xi(x)|^2 d\dot{x} < \infty, \text{ c'est à dire que } \xi \in L^2(G/H).$$

Signalons que G agit sur $\mathcal{H}_\pi$ par translation à gauche, c'est à dire que :

$$(\pi(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1} \cdot y), \forall x, y \in G, \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

De plus, pour $f \in \mathcal{S}(G)$, il est bien connu que l'opérateur $\pi(f)$ défini sur $\mathcal{H}_\pi$ par

$$(\pi(f)\xi)(x) = \int_G f(y)(\pi(y)\xi)(x) dy,$$

où dy désigne une mesure de Haar à gauche sur G , est un opérateur compact, possédant un noyau ([B.C. et al]). Son noyau est la fonction f_π de $C^\infty(G \times G)$ définie par

$$6) f_\pi(x, y) = \int_H f(x \cdot h \cdot y^{-1}) \chi_l(h) dh.$$

Il est aussi à noter que pour tout $h, h' \in H$ et $x, x' \in G$, la fonction f_π vérifie la relation de covariance

$$7) f_\pi(x \cdot h, x' \cdot h') = \overline{\chi_l(h)} \chi_l(h') f_\pi(x, x'),$$

et que l'intégrale

$$\int_{G/H} f_\pi(x, y) \xi(y) d\dot{y}$$

est convergente ; par conséquent, l'opérateur $\pi(f)$ est bien défini.

En 1977, Howe a donné une caractérisation de l'image $\pi(\mathcal{S}(G))$ de $\mathcal{S}(G)$ par π . Il a montré que l'application qui à toute fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ associe la fonction $f_\pi \in \mathcal{S}(l, \mathfrak{h})$, est ouverte, continue et surjective, avec $\mathcal{S}(l, \mathfrak{h})$ qui désigne l'espace de Fréchet des fonctions réelles qui vérifient la relation de covariance (7), et qui sont de Schwartz sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$, k étant la dimension d'une base de Malcev $\mathfrak{B}$, supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ ([How.]).

Mais, dans le cas plus vaste où G est un groupe de Lie connexe, simplement connexe résoluble exponentiel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, c'est à dire que G est un groupe de Lie tel que l'application exponentielle soit un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans G , la caractérisation de Howe ci-dessus n'est plus vraie de façon générale. En effet, bien que toute représentation $\pi \in \hat{G}$ soit paramétrée comme dans le cas nilpotent par un élément $l \in \mathfrak{g}^*$ et une polarisation

réelle $\mathfrak{h}$ en l ([B.C. et al]), l'opérateur $\pi(f)$ n'est pas nécessairement compact, même si $f \in C_c^\infty(G)$, c'est à dire que f est une fonction C^∞ à support compact sur G . Ceci apparaît particulièrement dans les représentations de dimension infinie du groupe $ax + b$, où le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ n'est pas à décroissance rapide à l'infini, ce qui entraîne que $f_\pi \notin \mathcal{S}(l, \mathfrak{h})$. D'où la nécessité d'introduire de nouveaux espaces de fonctions.

Ainsi, en choisissant une polarisation fixe $\mathfrak{h}$ en l et une base $\mathfrak{B}$ coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et vérifiant certaines conditions, Ludwig a montré en 1983 que la caractérisation de Howe reste valable pour les groupes de Lie exponentiels à condition de remplacer les espaces de fonctions $\mathcal{S}(l, \mathfrak{h}, \mathfrak{B})$ par des espaces analogues $ES(l, \mathfrak{h}, \mathfrak{B})$ ($\mathcal{S}$ pour Schwartz, E pour décroissance exponentielle) de fonctions à décroissance exponentielle dans certaines directions de G/H ainsi que leurs transformées de Fourier partielles dans ces directions, et de Schwartz dans les autres directions ([Lud.]).

En 1993, Leptin et Ludwig ont étendu le résultat de Ludwig ci-dessus aux cas où $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$ est une polarisation de Vergne quelconque en $l \in \mathfrak{g}^*$, passant par un idéal nilpotent fixe $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Ils ont aussi montré que l'espace $ES(l, \mathfrak{h}, \mathfrak{B})$ est indépendant de la base coexponentielle $\mathfrak{B}$ ([Lep. Lud.]).

Dans l'étude qui suit, nous nous proposons d'étendre la caractérisation ci-dessus aux polarisations de $\mathfrak{g}$ qui sont "fortement adaptées" à un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Il s'agit de polarisations $\mathfrak{h}$ en $l \in \mathfrak{g}^*$, qui vérifient les propriétés suivantes :

- 8) $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{n}}$;
- 9) $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ -invariant.

Soulignons que cette famille de polarisations contient de façon stricte les polarisations de Vergne $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$ passant par un idéal nilpotent fixe $\mathfrak{i}$ de $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Les trois premiers chapitres de notre étude préparent le terrain pour la preuve du théorème principal qui est énoncé et prouvé au chapitre 4 (théorème 4.1).

Au chapitre 1, nous faisons certains rappels sur la théorie des groupes de Lie exponentiels.

Au chapitre 2 nous introduisons les idéaux non centraux minimaux d'un groupe de Lie exponentiel G , ensuite nous étudions les polarisations adaptées ou fortement adaptées

à un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Nous vérifions d'une part que toute polarisation de Vergne passant par $\mathfrak{n}$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et d'autre part qu'il existe des polarisations fortement adaptées à $\mathfrak{n}$ qui ne sont pas de Vergne. De plus nous remarquons que toute polarisation fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ vérifie la condition de Pukansky sur G . Enfin, nous étudions les différents cas qui peuvent se présenter dans la preuve par récurrence du théorème principal.

Au chapitre 3, nous nous basons sur les travaux de Howe ([How.]) pour faire un rappel de l'étude de notre problème dans le cas nilpotent. Ensuite nous introduisons les espaces $\mathcal{H}ol(V)$, espaces de fonctions qui admettent un prolongement holomorphe sur $V_{\mathbb{C}}$ et qui sont à décroissance exponentielle, localement uniforme sur V , avec V qui désigne un espace vectoriel réel de dimension finie et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Ces espaces interviennent de façon privilégiée dans la preuve de 4.1, et tout particulièrement dans le cas où G est un groupe de Heisenberg. Nous définissons enfin les différents espaces ES .

Le chapitre 5 est consacré à quelques exemples explicites d'applications du théorème 4.1 sur des groupes de Lie exponentiels.

Nous terminons notre étude en mentionnant une question ouverte.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES GROUPES EXPONENTIELS

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions sur la théorie des représentations des groupes de Lie résolubles exponentiels, d'une importance capitale pour le reste de ce travail. Ces groupes ont été introduits par Dixmier ([Dix.1]). Pour ce qui concerne la théorie générale des groupes de Lie, nous renvoyons le lecteur à ([Bour.]) et à ([Var.]), cf bibliographie.

Dans toute notre étude, G désignera un groupe de Lie réel connexe, simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. D'autre part, nous désignerons par $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$.

1.1-GROUPES DE LIE RESOLUBLES EXPONENTIELS.

1.1.1- Définition :

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous disons que G est résoluble exponentiel, si l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme. Dans ce cas, nous disons aussi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est résoluble exponentielle.

1.1.2- Remarque : Les sous-algèbres et les algèbres quotient d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle sont résolubles exponentielles.

1.1.3- Proposition : *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle résoluble exponentielle. Alors*

il existe une suite décroissante $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_k)_{k=0}^n$ d'idéaux

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

telle que la représentation déduite de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1}$ soit irréductible ; par conséquent $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 1$ ou 2 . Une telle suite $\mathcal{S}$ est appelée suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$.

1.1.4- Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle résoluble exponentielle. Alors il existe une suite décroissante $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_k)_{k=0}^n$ de sous-algèbres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}.$$

telle que

- (i) $\dim \mathfrak{g}_k/\mathfrak{g}_{k+1} = 1$;
- (ii) Si $\mathfrak{g}_k$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_{k-1}$ et $\mathfrak{g}_{k+1}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ et la représentation déduite de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{k-1}/\mathfrak{g}_{k+1}$ est irréductible.

Une telle suite $\mathcal{S}$ est appelée une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$.

Preuve : Cf ([B.C. et al], chapitre 4).

Nous allons maintenant définir les systèmes de coordonnées puis les bases de *Malcev* et de *Jordan-Hölder* d'une algèbre de Lie résoluble exponentielle.

1.1.5- Définitions :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle de dimension n et $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors, l'application

$$\mathbb{R}^n \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \rightarrow \exp \left(\sum_{i=1}^n \xi_i B_i \right) \in G$$

définit un système de coordonnées locales dans un voisinage de l'élément neutre e de G : c'est le système de coordonnées canonique de type 1.

Le système de coordonnées canonique de type 2 est le système de coordonnées locales que nous allons le plus souvent utiliser dans notre travail. Il est défini par l'application

$$\mathbb{R}^n \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \rightarrow \exp(\xi_1 B_1) \cdot \exp(\xi_2 B_2) \cdots \exp(\xi_n B_n).$$

Ce système est particulièrement utile lorsque la base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{g}$ est une base de *Malcev* ou de *Jordan-Hölder*. Dans ces derniers cas, le système de coordonnées de type 2 devient un système de coordonnées globales.

1.1.6- Définitions :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Soit $(\mathfrak{g}_k)_{k=1}^n$ une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ tels que

$$\mathfrak{g}_k = \sum_{i=k}^n \oplus \mathbb{R}B_i.$$

- a) $\mathfrak{B}$ est dite une *base de Malcev* de $\mathfrak{g}$ si pour tout $k, 1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_k$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{k+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_k$, avec $\mathfrak{g}_{n+1} = \{0\}$.
- b) $\mathfrak{B}$ est dite une *base de Jordan-Hölder* de $\mathfrak{g}$ si pour tout $k, 1 \leq k \leq n$, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}_k$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Donc, toute base de Jordan-Hölder $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{g}$ est aussi une base de Malcev de $\mathfrak{g}$.

1.1.7- Remarque : Etant donné $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle, alors $\mathfrak{g}$ possède une base de Jordan-Hölder si et seulement si toutes les racines de $\mathfrak{g}$ sont réelles.

On en déduit que toute algèbre de Lie résoluble exponentielle ne possède pas nécessairement de base de Jordan-Hölder. Par contre, elle possède toujours une base de Malcev.

1.1.8- Proposition : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ une base de Malcev fixe de $\mathfrak{g}$. Alors l'application

$$E_{\mathfrak{B}} : \mathbb{R}^n \ni \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \rightarrow E_{\mathfrak{B}}(\xi) = \exp(\xi_1 B_1) \cdot \exp(\xi_2 B_2) \cdot \dots \cdot \exp(\xi_n B_n)$$

est bijective et bianalytique de $\mathbb{R}^n$ dans le groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble exponentiel G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.1.9- Remarque : De la proposition précédente, il résulte que si $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ est une base de Malcev fixe de $\mathfrak{g}$, alors nous identifions $\xi \in \mathbb{R}^n$

avec son image $E_{\mathfrak{B}}(\xi) \in G$ et de ce fait, G comme variété est identifié à $\mathbb{R}^n$; en plus, le sous-espace vectoriel de dimension 1 défini par $\{x \in \mathbb{R}^n, x_i = 0 \text{ pour } i \neq j\}$ est le sous-groupe de G à un paramètre $\exp(\mathbb{R}B_j)$. Ainsi, la base de Malcev $\mathfrak{B}$ étant fixée dans $\mathfrak{g}$, nous pouvons écrire que

$$\exp\left(\sum_{j=1}^n \xi_j B_j\right) = (y_1(\xi), y_2(\xi), \dots, y_n(\xi))$$

où les fonctions y_j sont réelles et analytiques sur $\mathbb{R}^n$.

1.1.10- Définition :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle résoluble exponentielle de dimension n et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tels que $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ soit un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -module simple, ce qui entraîne que $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{b} = 1$. Alors la représentation déduite de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ appelée racine de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. la restriction sur $\mathfrak{g}$ d'une racine de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est appelée racine de $\mathfrak{g}$. elle définit un homomorphisme réelle ou complexe sur $\mathfrak{g}$.

1.1.11-Proposition : *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Alors $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.*

Preuve : Cf ([Dix.1]).

1.1.12-Proposition : *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle. Alors il existe un plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. On a que $\mathfrak{n} = \bigcap_{\phi=\text{racine}} \ker \phi$. En plus, pour toute dérivation d de $\mathfrak{g}$, on a que $d(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$.*

Preuve : Cf ([Dix.1]).

Le théorème suivant est un outil considérable dans la théorie des groupes de Lie résolubles exponentiels.

1.1.13-Théorème : *Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, résoluble, de dimension n et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *G est un groupe de Lie résoluble exponentiel.*

- (ii) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad } X$ n'a pas de valeur propre non nulle imaginaire pure.
- (iii) $\exp$ est injective.
- (iv) $\exp$ est surjective.
- (v) $\exp$ est bijective.
- (vi) $\exp$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans G .
- (vii) Les racines de $\mathfrak{g}$ ont la forme $\lambda(X)(1 + i\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et λ est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$.

Preuve : Cf ([Dix.1]).

1.1.14-Théorème : Soient G , un groupe de Lie connexe, simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est injective, alors G est résoluble et par conséquent G est exponentiel d'après 1.1.13.

Preuve : Cf ([B.C et al]).

1.1.15-Remarque : Il est bien connu que si G est compact, $\exp$ est surjective.

1.1.16-La formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

Soit G un groupe de Lie connexe ; notons $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle, $\log$ son inverse locale dans un voisinage de l'élément neutre $e \in G$, et définissons

$$C(X, Y) = \log(\exp X \cdot \exp Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Cette fonction est bien définie, converge normalement dans un voisinage de $(0, 0)$ et ne dépend pas du choix des groupes de Lie localement isomorphes associés à $\mathfrak{g}$.

La formule de Campbell-Baker-Hausdorff qui en résulte nous permet de reconstituer G avec sa loi multiplicative connaissant uniquement la structure de $\mathfrak{g}$. Cette formule est donnée par :

$$\begin{aligned} C(X, Y) = & X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] - \\ & - \frac{1}{48}[Y, [X, [X, Y]]] + \frac{1}{48}[X, [Y, [Y, X]]] + \dots \text{ (Cf [Hochs.])}. \end{aligned}$$

Si G est un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'application $\exp$ est un difféomorphisme analytique et la formule de Campbell-Baker-Hausdorff est définie pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Nous pouvons alors définir sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe de Lie exponentiel $(\mathfrak{g}, C)$ qui admet $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie. Dans ces conditions, l'application $\exp$ n'est autre que l'identité.

1.1.17-Théorème : *Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors il existe un sous-groupe fermé connexe et simplement connexe H de codimension 1 de G et d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, tel que G soit isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{R}_\sigma \times H$ où σ désigne un groupe à un paramètre d'automorphismes de H . Pour tout $X \notin \mathfrak{h}$, l'application $\mathbb{R} \times H \rightarrow G; (t, h) \rightarrow \exp(tX) \cdot h$ est un difféomorphisme.*

Preuve : Soit $\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Soit $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h}$ et soit $d = \text{ad}(X)|_{\mathfrak{h}}$. Alors d est une dérivation de $\mathfrak{h}$ et $\sigma'(t) = \exp td$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathfrak{h}$ et donc aussi du groupe de Lie connexe et simplement connexe H' associé à $\mathfrak{h}$.

Soit G' le produit semi-direct $G' = \mathbb{R}_{\sigma'} \times H'$. Son algèbre de Lie est le produit semi-direct $\mathfrak{g}' = \mathbb{R}_d \times \mathfrak{h}$. Cette algèbre est bien sûre isomorphe à $\mathfrak{g}$; par conséquent, G et G' étant simplement connexes, sont isomorphes. L'application $d\varphi : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}; (t, Y) \rightarrow tX + Y$ est un tel isomorphisme et ainsi $\varphi((t, \exp Y)) = \exp(tX) \times \exp Y$ $t \in \mathbb{R}, Y \in \mathfrak{h}$ définit un isomorphisme de G' sur G . Soit $H = \varphi(H') \subset G$. Alors H est un sous-groupe fermé connexe et simplement connexe de G , car φ est un isomorphisme. Il est évident maintenant que G est isomorphe à $\mathbb{R}_\sigma \times H$.

1.1.18-Proposition : *Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H un sous-groupe fermé connexe et simplement connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors, H est un groupe de Lie exponentiel si et seulement si $H = \exp \mathfrak{h}$.*

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.1.19- Proposition : *Il existe des sous-algèbres nilpotentes $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{g}$ telles que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.1.20-Théorème : Soient G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Il existe un sous-espace vectoriel $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n}$, tel que G soit isomorphe à $\mathfrak{v} \times \mathfrak{n}$ et tel que la multiplication dans le groupe G s'exprime dans les coordonnées $\mathfrak{v} \times \mathfrak{n}$ par

$$(v, n) \cdot (v', n') = (v + v', q(v, v') \cdot (\exp(\text{ad}(-v'))n) \cdot n')$$

où $q : \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{n}, (v, v') \rightarrow q(v, v')$ est polynomiale en v, v' et où $\cdot$ pour $\mathfrak{n}$ désigne le produit de Campbell-Baker-Hausdorff dans le groupe $\mathfrak{n}$.

Preuve : Soit $\mathfrak{g}_0$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$ et soit $\mathfrak{v}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_0$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n}$; notons que d'après la proposition 1.1.19, la sous-algèbre $\mathfrak{g}_0$ existe. Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n}$ munie du crochet

$$[(v, n), (v', n')] = (0, [v, v'] + [v, n'] + [n, v'] + [n, n']).$$

Les deux algèbres $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont évidemment isomorphes. Soit $G' = \mathfrak{v} \times \mathfrak{n}$ muni de la loi de groupe

$$(v, n) \times (v', n') = (v + v', q(v, v') \cdot \text{Ad}(\exp -v')n \cdot n')$$

où nous avons écrit dans le groupe $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$, $\exp v \times \exp v' = \exp(v + v') \cdot q(v, v')$ avec $q(v, v') \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.

L'application q est automatiquement polynomiale comme $\mathfrak{g}_0$ est nilpotente. Le groupe G' est simplement connexe et admet $\mathfrak{g}'$ comme algèbre de Lie. Ainsi G' et G sont isomorphes. Un tel isomorphisme est d'ailleurs donné par l'application $(v, n) \rightarrow \exp v \cdot \exp n$.

Nous allons maintenant introduire la notion de base coexponentielle d'une algèbre de Lie exponentielle.

1.1.21- Définition : Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie exponentielle et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On appelle *base coexponentielle* à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ toute base $\mathfrak{B}_{\mathfrak{h}} = (B_1, \dots, B_k)$ d'un sous-espace vectoriel supplémentaire $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que les sous-espaces $\mathfrak{h}_j = \sum_{i=1}^j \oplus \mathbb{R}B_i \oplus \mathfrak{h}$, $j = 1, \dots, k$, engendrés par $\mathfrak{h}$ et les B_i , ($i \leq j$) vérifient les propriétés suivantes :

- (i) $\mathfrak{h}_{j+1} \supset \mathfrak{h}_j$, $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}$, $0 \leq j \leq k - 1$.

- (ii) Si $\mathfrak{h}_j$ n'est pas une sous algèbre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}_{j-1}$ et $\mathfrak{h}_{j+1}$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, k-1$.
- (iii) L'application

$$E_{\mathfrak{h}} : \mathbb{R}^k \times \mathfrak{h} \rightarrow G$$

$$(t_1, \dots, t_k, U) \rightarrow \exp t_1 B_1 \cdot \exp t_2 B_2 \cdot \dots \cdot \exp t_k B_k \cdot \exp U$$

est un difféomorphisme.

Dans ce cas, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ est appelé sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

1.1.22- Proposition : Si G est un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, il existe une base $\mathcal{B}_{\mathfrak{h}}$, coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.2- L'ESPACE DUAL D'UN GROUPE DE LIE EXPONENTIEL.

Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans ce paragraphe, nous allons rappeler la description de l'espace dual $\hat{G}$, c'est à dire l'espace des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G . En fait, P. Bernat a montré qu'il existe une application bijective qui envoie l'espace des orbites coadjointes $\mathfrak{g}^*/G$ de G sur $\hat{G}$ ([B.C et al]). Pour chaque $l \in \mathfrak{g}^*$, il existe en effet une polarisation $\mathfrak{h}$ en l et une représentation unitaire irréductible $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ de G dont la classe d'équivalence ne dépend que de la G -orbite de l et tout $\pi \in \hat{G}$ est de la forme $\pi = \pi_{l,\mathfrak{h}}$.

1.2.1- Définition : La représentation adjointe ad respectivement Ad de $\mathfrak{g}$ respectivement G est définie par : pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, $ad X(Y) = [X, Y]$ et pour $g = \exp X$,

$$Ad(g)(Y) = e^{ad X} Y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ad X)^n(Y).$$

Il en résulte que $\exp Ad(g)(Y) = g \cdot \exp Y \cdot g^{-1}$.

1.2.2- Définition : La représentation coadjointe Ad^* de G sur l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est définie par

$$\langle Ad^*(g)l, X \rangle = \langle l, Ad(g^{-1})X \rangle, X \in \mathfrak{g}, l \in \mathfrak{g}^*.$$

Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, nous désignons par $G \cdot l$ l'orbite de l sous l'action coadjointe de G ; ainsi, $G \cdot l = \{Ad^*(g)l; g \in G\}$.

1.2.3- Définitions : Si $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on pose

- (i) $\mathfrak{h}^\perp(\mathfrak{g}^*) = \{l \in \mathfrak{g}^* : l|_{\mathfrak{h}} = 0\}$, où $l|_{\mathfrak{h}}$ est la restriction de l à $\mathfrak{h}$;
- (ii) $\mathfrak{h}^l = \mathfrak{h}(l) = \{X \in \mathfrak{g} : B_l(X, \mathfrak{h}) = 0\}$, où B_l est la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par $B_l(X, Y) = \langle l, [X, Y] \rangle, X, Y \in \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}(l)$ (resp. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}(l)$), on dit que $\mathfrak{h}$ est un sous-espace isotrope (resp. maximal isotrope) pour B_l .

1.2.4- Définition : Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est appelée polarisation en un point $l \in \mathfrak{g}^*$, si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) $\langle l, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0$.
- (ii) $\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}(l) + \dim \mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} / \langle l, [X, \mathfrak{g}] \rangle = 0\}$.

Cela signifie que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre qui est en même temps un sous-espace maximal isotrope pour la forme bilinéaire $B_l(X, Y) = l([X, Y]), X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ainsi $l|_{\mathfrak{h}}$ est un homomorphisme, ce qui nous permet de définir un caractère χ_l sur $\exp \mathfrak{h} = H$, c'est à dire un homomorphisme continu de H sur $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, de la façon suivante

$$\chi_l(\exp X) = e^{-i\langle l, X \rangle}, X \in \mathfrak{h}.$$

1.2.5-Définition : Une polarisation $\mathfrak{h}$ en l vérifie la condition de Pukansky, si

$$Ad^*(\exp(\mathfrak{h}))l = l + \mathfrak{h}^\perp.$$

Autrement dit si $f \in \mathfrak{g}^*$ avec $f|_{\mathfrak{h}} = l|_{\mathfrak{h}}$, alors il existe $x \in H = \exp \mathfrak{h}$ tel que $f = Ad^*x(l)$. Nous allons désigner par $Puk(l, \mathfrak{g})$ l'ensemble de toutes les polarisations en $l \in \mathfrak{g}^*$ qui vérifient la condition de Pukansky.

1.2.6-Remarque : Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, alors toute polarisation en l possède la propriété de Pukansky ; en effet $Ad^*(\exp(\mathfrak{h}))l$ est alors ouvert et fermé dans $l + \mathfrak{h}^\perp$. Par contre pour le groupe $G = ax + b$, si nous prenons comme base de son algèbre de Lie les vecteurs A, B avec $[A, B] = B$, alors pour toute forme linéaire l telle que $l(B) \neq 0$, le sous-espace $\mathfrak{h}_\beta = \mathbb{R}(A + \beta B)$, $\beta \in \mathbb{R}$, est une polarisation en l qui ne vérifie pas la condition de Pukansky.

1.2.7- Théorème : (Critère de Pukansky)

Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, isotrope pour la forme B_l , c'est à dire que $B_l([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = l([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (0)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $Ad^*(\exp(\mathfrak{h}))l = l + \mathfrak{h}^\perp$.
- (ii) $\mathfrak{h}$ est un sous-espace isotrope maximal pour la forme B_l , ($\mathfrak{h}$ est une polarisation en l) et $l + \mathfrak{h}^\perp \subset G \cdot l$.
- (iii) Pour tout point f de $\mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h}$ est un sous-espace isotrope maximal pour la forme B_{l+f} ($\mathfrak{h}$ est une polarisation en $l + f$).

Preuve : Cf ([B.C et al]).

1.2.8-Remarque : De la définition 1.2.5, il résulte que si les conditions équivalentes du théorème précédent sont remplies, alors $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky.

On connaît bien un procédé standard dû à M. Vergne pour construire une polarisation vérifiant la condition de Pukansky. Pour cela Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_k)_{k=0}^n$ une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$, $l_k = l|_{\mathfrak{g}_k}$ la restriction de l à $\mathfrak{g}_k$ et soit $\mathfrak{g}_k(l_k)$ le noyau de la forme B_{l_k} sur $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_k$. Posons $\mathfrak{h}(l, \mathcal{S}) = \sum_{k=0}^n \mathfrak{g}_k(l_k)$.

1.2.9- Proposition : $\mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$ est une polarisation en l qui vérifie la condition de Pukansky.

Preuve : Cf ([B.C et al]).

1.2.10- Une “mesure” G -invariante sur l'espace quotient G/H .

Nous supposons toujours que G est un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient μ_G une mesure de Haar à gauche sur G et Δ_G la fonction module de G . Nous désignons par $C_c(G)$, l'espace des fonctions numériques continues sur G , à support compact. Pour toute fonction $f \in C_c(G)$ et pour tout $x \in G$, nous savons que

$$(1) \quad \int_G f(x \cdot y^{-1}) d\mu_G(x) = \Delta_G(y) \int_G f(x) d\mu_G(x),$$

$$(2) \quad \int_G f(y) d\mu_G(y) = \int_G f(y^{-1}) \Delta_G(y)^{-1} d\mu_G(y).$$

D'autre part, il est bien connu que $\Delta_G(x) = |\det \text{Ad}(x)|^{-1} = e^{-\text{trace } \text{ad}_{\mathfrak{g}} \log x}$ pour tout $x \in G$.

Soient H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et μ_H une mesure de Haar à gauche sur H . On note $\Delta_{H,G}$, le caractère de H à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, défini par

$$\Delta_{H,G}(h) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}, \quad h \in H.$$

Pour $X \in \mathfrak{h}$, on a

$$\Delta_{H,G}(\exp X) = e^{\text{Tr } \text{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} X}.$$

Nous désignerons par $\Delta_{G,H}$ l'inverse de $\Delta_{H,G}$; autrement dit

$$\Delta_{G,H}(h) = \Delta_{H,G}(h)^{-1} = \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}, \quad h \in H.$$

Soit $K(G, H)$, l'espace des fonctions définies de la façon suivante :

$$K(G, H) = \{f : G \longrightarrow \mathbb{C}; \text{ f continue à support compact modulo } H,$$

$$(3) \quad (\text{Supp } f \subset K \cdot H \text{ où } K \text{ est compact dans } G),$$

$$f(x \cdot h) = \Delta_{H,G}(h) f(x) \quad \forall x \in G, \forall h \in H\}.$$

G agit sur $K(G, H)$ par translation à gauche. Pour $f \in C_c(G)$, écrivons

$$(4) \quad P_H f(x) = \int_H \Delta_{G,H}(h) f(x \cdot h) d\mu_H(h), x \in G.$$

Alors, d'après ([B.C et al]), on sait que l'application $P_H(f)$ est continue et surjective de $C_c(G)$ dans $K(G, H)$.

D'autre part, si $f \in C_c(G)$ et $P_H(f) = 0$, alors $\int_G f(x)dx = 0$. Ainsi, on obtient sur $K(G, H)$ une forme linéaire positive G -invariante unique, à un facteur constant près, notée $\mu_{G,H}$ et définie de la manière suivante : pour $F \in K(G, H)$,

$$\mu_{G,H}(F) = \oint_{G/H} F(x) d\mu_{G,H}(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x)$$

où $f \in C_c(G)$ et vérifie $P_H(f) = F$. Il en résulte que

$$(5) \quad \oint_{G/H} \left(\int_H f(x \cdot h) \Delta_{G,H}(h) d\mu_H(h) \right) d\mu_{G,H}(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x).$$

Si $\Delta_H = \Delta_G$ sur H , alors $\mu_{G,H}$ est une mesure G -invariante sur l'espace homogène G/H .

Dans la suite de notre travail, nous allons utiliser la notation suivante :

$$dh = d\mu_H(h), \quad d\dot{x} = d\mu_{G,H}(x), \quad dg = d\mu_G(g).$$

Nous pouvons maintenant définir la représentation induite.

1.2.11- La représentation induite.

Soit H un sous-groupe fermé du groupe localement compact G et soit $(\rho, \mathcal{F})$ une représentation unitaire de H . On note $K_\rho(G, H)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\xi : G \longrightarrow \mathcal{F}$ continues à support compact modulo H telles que

$$(6) \quad \xi(x \cdot h) = \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(h) \rho(h)^{-1} \xi(x), \forall x \in G, h \in H.$$

Cet espace est invariant par translation à gauche.

Si $\xi \in K_\rho(G, H)$, la fonction $G \ni x \rightarrow \|\xi(x)\|_{\mathcal{F}}^2$ appartient à $K(G, H)$; par conséquent, sur $K_\rho(G, H)$ nous obtenons une norme $\|\cdot\|_2$ G -invariante définie par

$$\|\xi\|_2^2 = \oint_{G/H} \|\xi(x)\|_{\mathcal{F}}^2 d\dot{x}.$$

Soit $\mathcal{H}_\rho$ le complété de $K_\rho(G, H)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. La représentation induite $\pi = \pi(\rho, \mathcal{F}) = \text{ind}_H^G \rho$ se réalise sur $\mathcal{H}_\rho$ de la manière suivante

$$(7) \quad (\pi(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1} \cdot y) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}, x, y \in G.$$

1.2.12-Remarque : Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à l , c'est à dire que $\mathfrak{h}$ est isotrope pour la forme B_l , alors l'application $\chi_l(h) = e^{-i\langle l, \log h \rangle}, h \in H$, définit un caractère unitaire abélien $(\chi_l, \mathbb{T})$ du sous-groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$. Donc, d'après le paragraphe précédent, nous pouvons définir la représentation induite $\pi_{l,\mathfrak{h}} = \text{ind}_H^G \chi_l$ du groupe G par

$$(8) \quad (\pi_{l,\mathfrak{h}}(x)\xi)(y) = \xi(x^{-1} \cdot y) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi, x, y \in G,$$

où l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est le complété pour la norme $\| \cdot \|_2$ de l'espace $K_{\chi_l}(G, H)$ des fonctions $\xi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ continues à support compact modulo H telles que

$$\xi(x \cdot h) = \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi_l(h)} \xi(x), \forall x \in G, h \in H.$$

Notons que $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ est une représentation unitaire de G .

1.2.13-Proposition : Si $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ est irréductible, alors $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l .

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.2.14- Théorème : Toute représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie exponentiel G est monomiale, c'est à dire que $\pi = \text{ind}_H^G \chi$, où χ est un caractère abélien d'un sous-groupe fermé H de G .

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.2.15-Théorème : Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\pi = \pi_{l,\mathfrak{h}} = \text{ind}_{\exp \mathfrak{h}}^G \chi_l$. Alors π est irréductible si et seulement si $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky, c'est à dire que $\mathfrak{h} \in \text{Puk}(l, \mathfrak{g})$. Dans ce cas, π est indépendant du choix de la polarisation $\mathfrak{h} \in \text{Puk}(l, \mathfrak{g})$.

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

En tenant compte de 1.2.12, 1.2.13 et 1.2.15, on obtient le résultat suivant :

1.2.16- Théorème : Soient G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à un point $l \in \mathfrak{g}^*$. Soit $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ la représentation sur G induite par un caractère unitaire abélien $(\chi_l, \mathbb{T})$ du sous-groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$.

Alors $\pi_{l, \mathfrak{h}}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{h}$ est une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ qui vérifie la condition de Pukansky. Dans ce cas, $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ est indépendant du choix de $\mathfrak{h} \in \text{Puk}(l, \mathfrak{g})$.

1.2.17- Proposition : Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient l, l' deux éléments de $\mathfrak{g}^*$ avec $\pi_l, \pi_{l'}$ les représentations irréductibles qui leur sont associées. Alors π_l et $\pi_{l'}$ sont équivalentes si et seulement si l et l' sont sur une même G -orbite.

Preuve : Cf ([Lep. Lud.]).

1.2.18-Remarque : Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. La proposition 1.2.9 garantit l'existence d'une polarisation $\mathfrak{h}$ en l vérifiant la condition de Pukansky. Du théorème 1.2.16 il résulte que la représentation $\pi_{l, \mathfrak{h}} = \text{ind}_{\exp \mathfrak{h}}^G \chi_l$ est irréductible et indépendante du choix de la polarisation $\mathfrak{h} \in \text{Puk}(l, \mathfrak{g})$; ceci nous permet de définir une application $l \rightarrow \pi_l = \text{ind}_{\exp \mathfrak{h}}^G \chi_l$ de $\mathfrak{g}^*$ dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G . D'autre part, du théorème 1.2.14, il résulte que l'application précédente est surjective. En plus, la proposition 1.2.17 montre que la classe d'équivalence de π_l dépend uniquement de l'orbite

$$G \cdot l = \{Ad^*(x)l; x \in G\} \subset \mathfrak{g}^*$$

de la forme linéaire $l \in \mathfrak{g}^*$. Par conséquent

$$K : G \cdot l \rightarrow \pi_l \in \hat{G}$$

définit une application K de l'espace

$$\Omega(\mathfrak{g}^*) = \{G \cdot l; l \in \mathfrak{g}^*\}$$

des orbites coadjointes de G dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G .

1.2.19-Définition : L'application K de $\Omega(\mathfrak{g}^*)$ dans $\hat{G}$ est appelée *application de Kirillov*.

D'autre part, on a le théorème suivant

1.2.20-Théorème : L'application de Kirillov est une bijection de $\Omega(\mathfrak{g}^*)$ dans $\hat{G}$.

Preuve : Cf ([Puk.1]).

1.2.21- Calcul du noyau de l'opérateur $\pi_{l,\mathfrak{h}}(f)$:

Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient l un élément de $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une polarisation en l et $\pi = \pi_{l,\mathfrak{h}}$. Soit π_1 la représentation de $L^1(G)$ définie à partir de π par

$$\pi_1(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg, f \in L^1(G),$$

où dg est la mesure de Haar sur G .

Alors π_1 est une représentation unitaire de l'algèbre involutive $L^1(G)$; c'est à dire que pour $f \in L^1(G)$, $\pi_1(f^*) = (\pi_1(f))^*$ où f^* est la fonction définie sur G par

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \forall x \in G.$$

Ainsi pour $g \in G, \xi \in \mathcal{H}_\pi$ et $f \in L^1(G)$, on a :

$$\begin{aligned} \pi_1(f)\xi(g) &= \int_G f(u)(\pi(u)\xi)(g)du = \int_G f(u)\xi(u^{-1} \cdot g)du \\ &= \int_G \Delta_G^{-1}(u)f(u^{-1})\xi(u \cdot g)du = \int_G \Delta_G^{-1}(u \cdot g^{-1})\Delta_G(g^{-1})f(g \cdot u^{-1})\xi(u)du \\ &= \int_G \Delta_G^{-1}(u)f(g \cdot u^{-1})\xi(u)du \\ &= \oint_{G/H} \int_H f(g \cdot (u \cdot h)^{-1})\xi(u \cdot h)\Delta_G^{-1}(u \cdot h)\frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}dhdu \\ &\quad \text{(d'après (5))} \\ &= \oint_{G/H} \int_H f(g \cdot h^{-1} \cdot u^{-1})\left(\frac{\Delta_H}{\Delta_G}\right)^{1/2}(h)\overline{\chi_l(h)}\xi(u)\Delta_G^{-1}(u \cdot h) \\ &\quad \frac{\Delta_G(h)}{\Delta_H(h)}dhdu \quad \text{(d'après (6))} \\ &= \oint_{G/H} \int_H f(g \cdot h^{-1} \cdot u^{-1})\Delta_G^{-1}(u)\Delta_G^{-\frac{1}{2}}(h)\Delta_H^{-\frac{1}{2}}(h)\overline{\chi_l(h)}dh\xi(u)du \\ &\quad \text{(après simplification)} \\ &= \oint_{G/H} \Delta_G^{-1}(u) \int_H f(g \cdot h \cdot u^{-1})\chi_l(h)\Delta_G^{\frac{1}{2}}(h)\Delta_H^{-\frac{1}{2}}(h)dh\xi(u)du \\ &= \oint_{G/H} \Delta_G^{-1}(u) \int_H f(g \cdot h \cdot u^{-1})\chi_l(h)\Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(h)dh\xi(u)du. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\pi_1(f)\xi(g) = \oint_{G/H} f_\pi(g, u)\xi(u)du$$

où H est le sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$, du est la forme linéaire G -invariante unique à un facteur constant près, définie sur $K(G, H)$ et

$$(9) \quad f_\pi(g, u) = \Delta_G^{-1}(u) \int_H f(g \cdot h \cdot u^{-1}) \chi_l(h) \Delta_{H,G}^{-\frac{1}{2}}(h) dh.$$

Ainsi, on obtient que π_1 est un opérateur à noyau, et son noyau est la fonction f_π . Si on prend $f \in C_c^\infty(G)$, on constate que $f_\pi \in C^\infty(G \times G)$.

D'autre part pour $g, g' \in G$ et $h, h' \in H$, on a :

$$\begin{aligned} f_\pi(g \cdot h, g' \cdot h') &= \Delta_G^{-1}(g' \cdot h') \int_H f(g \cdot h \cdot u \cdot h'^{-1} g'^{-1}) \chi_l(u) \Delta_G^{\frac{1}{2}}(u) \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(u) du \\ &= \Delta_G^{-1}(g') \Delta_G^{-1}(h') \int_H f(g \cdot u \cdot h'^{-1} \cdot g'^{-1}) \chi_l(h^{-1} \cdot u) \Delta_G^{\frac{1}{2}}(h^{-1} \cdot u) \\ &\quad \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(h^{-1} \cdot u) du \quad (\text{invariance de la mesure de Haar}) \\ &= \Delta_G^{-1}(g' \cdot h') \int_H f(g \cdot u \cdot h'^{-1} \cdot g'^{-1}) \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(u) \chi_l(u) \Delta_G^{\frac{1}{2}}(u) \\ &\quad \Delta_H^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi}_l(h) \Delta_G^{-\frac{1}{2}}(h) du \\ &= \left(\frac{\Delta_H}{\Delta_G}\right)^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi}_l(h) \Delta_G^{-1}(g') \Delta_G^{-1}(h') \\ &\quad \times \int_H f(g \cdot u \cdot h'^{-1} \cdot g'^{-1}) \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(u \cdot h'^{-1}) \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(h') \Delta_G^{\frac{1}{2}}(u \cdot h'^{-1}) \Delta_G^{\frac{1}{2}}(h') \\ &\quad \chi_l(u \cdot h'^{-1}) \chi_l(h') du \\ &= \left(\frac{\Delta_H}{\Delta_G}\right)^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi}_l(h) \Delta_G^{-1}(h') \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(h') \Delta_G^{\frac{1}{2}}(h') \chi_l(h') \Delta_G^{-1}(g') \\ &\quad \times \Delta_H(h') \int_H f(g \cdot u \cdot g'^{-1}) \Delta_H^{-\frac{1}{2}}(u) \Delta_G^{\frac{1}{2}}(u) \chi_l(u) du \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= \left(\frac{\Delta_H}{\Delta_G}\right)^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi}_l(h) \left(\frac{\Delta_H}{\Delta_G}\right)^{\frac{1}{2}}(h') \chi_l(h') f_\pi(g, g'). \end{aligned}$$

On en déduit que f_π vérifie la relation de covariance

$$(10) \quad f_\pi(g \cdot h, g' \cdot h') = \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(h) \overline{\chi}_l(h) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(h') \chi_l(h') f_\pi(g, g'),$$

$$\forall g, g' \in G, h, h' \in H.$$

Dans la suite de notre étude, nous écrirons $\pi(f)$ au lieu de $\pi_1(f)$.

CHAPITRE 2

POLARISATIONS ADAPTEES ET DIFFERENTES ETAPES D'UNE DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

Dans ce chapitre, nous préparons la formulation de la preuve du théorème principal de notre travail, énoncé au chapitre 4. Pour cela, étant donné G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, nous allons étudier les idéaux non centraux minimaux de $\mathfrak{g}$ et donner les formules explicites de l'action de $\mathfrak{g}$ sur ces idéaux. Ensuite, nous introduirons des polarisations nouvelles dites adaptées ou fortement adaptées à un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, qui seront d'une importance capitale dans la suite de notre étude. Enfin, comme les démonstrations concernant certaines propriétés des opérateurs à noyaux $\pi(f)$, $f \in L^1(G)$, $\pi \in \hat{G}$ se font par récurrence, nous analyserons dans ce chapitre les différentes étapes nécessaires à une telle récurrence.

2.1- IDEAL NON CENTRAL MINIMAL.

2.1.1- Définition :

Soit G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ est dit non central minimal, s'il est de dimension minimale parmi les idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$.

Il est bien connu qu'un tel idéal est toujours abélien cf ([B.C et al]).

Le lemme suivant sera un outil important dans la preuve du théorème principal.

2.1.2-Lemme :

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, exponentiel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de centre $\mathfrak{z}$. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent et non central de $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et tel que $\mathfrak{n}$ ne contienne aucun idéal non trivial de $\mathfrak{g}$ où l s'annule. Alors $\mathfrak{n}$ contient un idéal non central minimal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, qui se présente sous l'une des formes suivantes :

- (i) $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y$, $Y \in \mathfrak{n}$, $Y \neq 0$, $\langle l, Y \rangle = 1$.

De plus, il existe un homomorphisme non trivial $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$[X, Y] = \lambda(X)Y, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

- (ii) $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$, avec $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n}$, $Y_1, Y_2 \neq 0$ et $|\langle l, Y_1 \rangle| + |\langle l, Y_2 \rangle| \neq 0$.

De plus, il existe un homomorphisme complexe non trivial $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$[X, Y_1 + iY_2] = \lambda(X)(Y_1 + iY_2), \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

avec $\lambda = \lambda_1(1 + i\theta)$ où λ_1 est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0$.

- (iii) $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$, avec $Y \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $Z \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $\langle l, Y \rangle = 0$ et $\langle l, Z \rangle = 1$.

De plus, il existe une forme linéaire réelle non triviale $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ et un homomorphisme réel $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$[U, Y] = \lambda(U)Y + \varphi(U)Z, \quad \forall U \in \mathfrak{g}.$$

D'autre part, si λ est non trivial, il existe $T \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ et $X \in \mathfrak{n}$ tels que

$$\lambda(X) = \varphi(T) = 0, \quad \lambda(T) = \varphi(X) = 1,$$

$$[X, Y] = Z, \quad [T, X] = -X \text{ mod. } \ker \lambda \cap \ker \varphi.$$

- (iv) $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z$, avec $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $Z \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $\langle l, Y_1 \rangle = \langle l, Y_2 \rangle = 0$ et $\langle l, Z \rangle = 1$. De plus, il existe une forme linéaire complexe non triviale $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ et un homomorphisme complexe $\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que

$$[U, Y_1 + iY_2] = \lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(U)Z, \quad \forall U \in \mathfrak{g}.$$

avec $\lambda = \lambda_1(1+i\theta)$ où λ_1 est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ et $\theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$. D'autre part, si λ est non trivial, il existe $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ et $T \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}$ tels que

$$\lambda(X_1) = \lambda(X_2) = \varphi(T) = 0, \quad \lambda(T) = \varphi(X_1) = \varphi(X_2) = 1,$$

$$[X_j, Y_k] = \delta_{jk}Z, \quad 1 \leq j, k \leq 2$$

et

$$[T, X_1] = -X_1 \text{ mod. } \ker \lambda \cap \ker \varphi, \quad [T, X_2] = -X_2 \text{ mod. } \ker \lambda \cap \ker \varphi.$$

Preuve :

Posons $\mathfrak{a}_0 = \ker l \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{n}$. Alors $\mathfrak{a}_0$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ et $\langle l, \mathfrak{a}_0 \rangle = 0$; par conséquent, d'après les hypothèses du lemme, $\mathfrak{a}_0 = (0)$. Ainsi, $\dim \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n} \leq 1$, car sinon $\dim \ker(l|_{\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}}) \geq 1$, ce qui contredit les hypothèses du lemme.

1) Supposons que $\dim \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n} = 0$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal minimal abélien non trivial de $\mathfrak{g}$, contenu dans $\mathfrak{n}$; on a $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z} = (0)$. Comme $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle, les racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{a}$ sont de la forme $\lambda_1(1+i\theta)$, où λ_1 est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'autre part, l'application adjointe $\text{ad } X, X \in \mathfrak{g}$, munit l'idéal $\mathfrak{a}$ d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module exponentiel irréductible; alors, d'après le lemme 1.1 du chapitre 6 de ([B.C et al]), $\dim \mathfrak{a} = 1$ ou 2 . De plus, comme $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z} = (0)$, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \neq (0)$. Ce qui prouve (i) et (ii).

2) Supposons que $\dim \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n} = 1$:

Si les idéaux décrits dans le cas 1) n'existent pas, alors tout idéal minimal abélien non trivial de $\mathfrak{g}$, contenu dans $\mathfrak{n}$, rencontre le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, cherchons des idéaux non centraux minimaux abéliens de $\mathfrak{g}$.

Prenons $Z \in \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}$, avec $Z \neq 0$, et $\langle l, Z \rangle = 1$; posons $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathbb{R}Z$ et $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}/\mathbb{R}Z$.

Soit $\tilde{\mathfrak{a}}$ un idéal minimal (non trivial) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ contenu dans $\tilde{\mathfrak{n}}$. Alors, comme au cas 1), on a $\dim \tilde{\mathfrak{a}} = 1$ ou 2 .

Si $\tilde{\mathfrak{a}}$ est central, alors $\tilde{\mathfrak{a}} \subseteq \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap \tilde{\mathfrak{n}}$; or, sachant que $\tilde{\mathfrak{a}}$ est non trivial et que $\dim \mathfrak{z}(\tilde{\mathfrak{g}}) \cap \tilde{\mathfrak{n}} \leq 1$, on en déduit que $\tilde{\mathfrak{a}}$ est nécessairement de dimension 1. Ainsi, il existe $Y \in$

$\mathfrak{n} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ avec $\langle l, Y \rangle = 0$ (sinon, on remplace Y par $Y' = Y - \langle l, Y \rangle Z$), tel que $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathbb{R}Y \bmod \mathbb{R}Z$ et $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ est un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$. On a $[U, Y] = \varphi(U)Z$, $\forall U \in \mathfrak{g}$, où φ est une forme linéaire réelle non triviale sur $\mathfrak{g}$, car $Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Si $\tilde{\mathfrak{a}}$ est de dimension 1 et non central, alors il existe $Y \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ avec $\langle l, Y \rangle = 0$, tel que $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathbb{R}Y \bmod \mathbb{R}Z$ et $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ est un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$. D'autre part, il existe $\lambda, \varphi \in \mathfrak{g}^*$ tels que

$$[U, Y] = \lambda(U)Y + \varphi(U)Z, \quad \forall U \in \mathfrak{g}.$$

Notons que λ est un homomorphisme de $\mathfrak{g}$, et λ est non trivial, sinon $\tilde{\mathfrak{a}}$ est central. De même, φ est non trivial, car sinon $\mathfrak{a}$ est de dimension 1. D'autre part, comme λ et φ sont des formes linéaires réelles non nulles sur $\mathfrak{g}$, alors $\ker \lambda$ et $\ker \varphi$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, de codimension 1 chacun. Signalons aussi que $\ker \lambda$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Ainsi, si $\varphi = \alpha\lambda$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $[U, Y + \alpha Z] = \lambda(U)(Y + \alpha Z)$, ce qui nous ramène au cas (i). D'autre part, si $\ker \varphi = \ker \lambda$, alors $\varphi = \alpha\lambda$, avec $\alpha = \frac{\varphi(T)}{\lambda(T)}$, où $T \notin \ker \lambda$; ce qui nous ramène aussi au cas (i). De plus, on ne peut avoir au sens stricte $\ker \varphi \subset \ker \lambda$ ou $\ker \lambda \subset \ker \varphi$, sinon on aurait $\ker \varphi = \ker \lambda$, ce qui est absurde.

Donc, $\ker \varphi \neq \ker \lambda$ et nous supposons que λ et φ sont linéairement indépendants; d'où, il existe $T \in \ker \varphi, T \notin \ker \lambda$ et $X \in \ker \lambda, X \notin \ker \varphi$, avec (T, X) indépendants modulo $\mathfrak{g}_{00} = \ker \lambda \cap \ker \varphi$. Ainsi, on a $\varphi(T) = \lambda(X) = 0, \lambda(T) = \varphi(X) = 1$, et $[X, Y] = Z$. D'autre part, en utilisant l'identité de Jacobi, on vérifie que $[[T, X] + X, Y] = 0$; d'où $[T, X] + X \in \ker \lambda \cap \ker \varphi$. Ce qui nous donne (iii).

De même si $\tilde{\mathfrak{a}}$ est de dimension 2 et non central, alors il existe $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ avec $\langle l, Y_1 \rangle = \langle l, Y_2 \rangle = 0$, tel que $\tilde{\mathfrak{a}} = (\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2) \bmod \mathbb{R}Z$ et $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z$ est un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$. D'autre part, il existe λ et φ des formes linéaires complexes sur $\mathfrak{g}$, telles que

$$[U, Y_1 + iY_2] = \lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(U)Z, \quad \forall U \in \mathfrak{g}.$$

Remarquons que $\mathbb{C}(Y_1 + iY_2)$ est un espace propre mod. $\mathbb{C}Z$ de la racine λ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ suivant $\tilde{\mathfrak{a}}$. Donc, $\lambda = \lambda_1(1 + i\theta)$, où λ_1 est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{g}$, et $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, λ

est un homomorphisme non trivial de $\mathfrak{g}$ car $\tilde{\alpha}$ est de dimension 2 et non central; de même, φ est non trivial, sinon on est ramené au cas (ii), et $\theta \neq 0$. sinon on est ramené au cas (iii). D'autre part, étant donné les expressions respectives de λ et φ , on en déduit que $\ker \lambda$, respectivement $\ker \varphi$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ de codimension 1, respectivement de codimension 2.

Ainsi, si $\varphi = \alpha\lambda$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $[U, Y_1 + iY_2 + \alpha Z] = \lambda(U)(Y_1 + iY_2 + \alpha Z)$, ce qui nous ramène au cas (ii). D'autre part, $\ker \varphi \neq \ker \lambda$, car leurs codimensions respectives dans $\mathfrak{g}$ sont différentes. Ainsi, nous supposons ici que λ et φ sont linéairement indépendants et que λ est non trivial. Par conséquent, il existe $T \in \mathfrak{g}$ avec $\lambda(T) \neq 0$; notons que $T \notin \mathfrak{n}$, car $\mathfrak{n} \subset \ker \lambda$. Dans toute la suite, nous supposons que $\lambda(T) = 1$.

Soit un vecteur quelconque $U \in \mathfrak{g}$; alors, on a :

$$\begin{aligned} & [[T, U], (Y_1 + iY_2)] \\ &= [T, [U, Y_1 + iY_2]] - [U, [T, Y_1 + iY_2]] \\ & \quad \text{ceci d'après l'identité de Jacobi,} \\ &= [T, \lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(U)Z] - [U, \lambda(T)(Y_1 + iY_2) + \varphi(T)Z] \\ &= \lambda(T)\lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(T)\lambda(U)Z - \lambda(T)\lambda(U)(Y_1 + iY_2) \\ & \quad + \varphi(U)\lambda(T)Z \\ &= (\lambda(U)\varphi(T) - \lambda(T)\varphi(U))Z. \end{aligned}$$

Il existe un vecteur $U_0 \in \mathfrak{g}$ avec $[[T, U_0], (Y_1 + iY_2)] \neq 0$, c'est à dire que

$$\varphi(U_0) = \lambda(U_0)\varphi(T) - \lambda(T)\varphi(U_0) \neq 0,$$

car, sinon $\varphi(U) = \frac{\varphi(T)}{\lambda(T)}\lambda(U), \forall U \in \mathfrak{g}$, ce qui est absurde, car λ et φ sont linéairement indépendants.

Ainsi, on vient de montrer qu'il existe $U' = [T, U_0], U' \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{n}$. tel que $\lambda(U') = 0$ et $\varphi(U') \neq 0$, c'est à dire que $U' \notin \ker \varphi$ et $U' \in \ker \lambda$. Donc, en supposant que $\varphi(U') = 1$, on obtient

$$[U', Y_1 + iY_2] = Z,$$

ce qui entraine que $[U', Y_1] = Z, [U', Y_2] = 0$.

D'autre part, en utilisant les calculs précédents, on vérifie que $[[T, U'] + U', Y_1 + iY_2] = 0$; d'où $[T, U'] + U' \in \ker \lambda \cap \ker \varphi$.

Posons $U'' = [-T, U']$. Alors, d'après le raisonnement précédent, on obtient que $\lambda(U'') = 0$, $\varphi(U'') = 1$ et $[T, U''] + U'' \in \ker \lambda \cap \ker \varphi$. De plus, (U', U'') sont indépendants modulo $\mathfrak{g}_{00} = \ker \varphi \cap \ker \lambda$.

D'autre part, on a aussi $[U'', Y_1 + iY_2] = Z$, ce qui entraine que $[U'', Y_1] = Z$ et $[U'', Y_2] = 0$; d'où en posant $X_1 = U', X_2 = U''$, on obtient le résultat cherché. Ce qui achève la preuve du lemme.

2.2- POLARISATIONS ADAPTEES.

2.2.1-Définitions :

Soient G un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient aussi $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $l \in \mathfrak{g}^*$.

Alors, une polarisation $\mathfrak{h}$ en l est dite :

- *adaptée* à $\mathfrak{n}$ si $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{n}}$;
- *fortement adaptée* à $\mathfrak{n}$ si $\mathfrak{h}$ est adaptée à $\mathfrak{n}$ et si $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ - invariant, où $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) = \{X \in \mathfrak{g} / \langle l, [X, \mathfrak{n}] \rangle = 0\}$ désigne l'algèbre de Lie du stabilisateur $G(l|_{\mathfrak{n}})$ de $l|_{\mathfrak{n}}$ dans G .

2.2.2-Exemples :

2.2.2.1- La polarisation de Vergne passant par $\mathfrak{n}$:

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie exponentielle, $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Soit aussi $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_k)_{k=0}^m$ une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. qui passe par $\mathfrak{n}$; cela signifie que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r = \mathfrak{n} \supset \mathfrak{g}_{r+1} \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_m = \{0\},$$

avec $\dim \mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k+1} = 1$ pour $0 \leq k < m$, et $\mathcal{S}$ est telle que si $\mathfrak{g}_k$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_{k-1}$ et $\mathfrak{g}_{k+1}$ le sont et $\mathfrak{g}_{k-1} / \mathfrak{g}_{k+1}$ est un $\mathfrak{g}$ -module irréductible.

En 1.2.9, nous avons vu que $\mathfrak{h}(l, \mathcal{S}) = \sum_{k=0}^m \mathfrak{g}_k(l_k)$ est une polarisation de Vergne au point $l \in \mathfrak{g}^*$, qui vérifie la condition de Pukansky. En plus, d'après le théorème 5.1, la

remarque 5.2 f) et le corollaire 5.5 de ([Mol.]), $\mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et stable sous l'action du stabilisateur $G(l)$ de l dans G .

2.2.2.2-

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie résoluble exponentielle de dimension 4, de base $\langle X_1, X_2, X_3, T \rangle$, définie par les crochets suivants lorsqu'ils sont non nuls, les autres étant nuls ou obtenus par antisymétrisation :

$$[T, X_1] = X_1, \quad [T, X_2] = -X_2.$$

Soit d'autre part $l \in \mathfrak{g}^*$ définie par

$$l(T) = 1, \quad l(X_1) = 0, \quad l(X_2) = 1, \quad l(X_3) = 0.$$

Alors $\mathfrak{g}(l) = \langle X_1, X_3 \rangle$ et par conséquent $\mathfrak{h} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ est une polarisation réelle au point l .

Posons $\mathfrak{n} = \langle X_1, X_2 \rangle$; alors $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, qui est égal à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. D'autre part, si nous posons

$$\mathfrak{g}_0 = (0), \quad \mathfrak{g}_1 = \langle X_1 \rangle, \quad \mathfrak{g}_2 = \langle X_1, X_2 \rangle,$$

$$\mathfrak{g}_3 = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle, \quad \mathfrak{g}_4 = \langle X_1, X_2, X_3, T \rangle = \mathfrak{g},$$

alors, on constate que la suite $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4)$ est une suite de Jordan-Holder de $\mathfrak{g}$ qui passe par $\mathfrak{n}$; en plus, on a

$$\mathfrak{h} = \sum_{j=1}^4 \mathfrak{g}_j(l_j) = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle.$$

Donc $\mathfrak{h}$ est une polarisation de Vergne en l , qui passe par $\mathfrak{n}$. D'après 2.2.1, $\mathfrak{h}$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky.

2.2.3-Remarque : On peut définir une algèbre de Lie exponentielle $\mathfrak{g}$, un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et une polarisation $\mathfrak{h}$ en un point $l \in \mathfrak{g}^*$, tels que $\mathfrak{h}$ soit fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ ne soit pas une polarisation de Vergne.

En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie résoluble exponentielle de dimension 8, de base $\langle A, B, H, S, T, U, V, Z \rangle$, définie par les crochets suivants lorsqu'ils sont non nuls, les autres étant nuls ou obtenus par antisymétrisation :

$$\begin{aligned} [A, B] &= H, [A, H] = U, [A, V] = Z, \\ [B, H] &= V, [B, U] = Z, [S, A] = 2A, \\ [S, B] &= -2B, [S, U] = 2U, [S, V] = -2V, \\ [T, A] &= A, [T, B] = -B, [T, S] = Z, \\ [T, U] &= U, [T, V] = -V. \end{aligned}$$

On constate que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie résoluble exponentielle non nilpotente. D'autre part, soit $l \in \mathfrak{g}^*$ définie par

$$\begin{aligned} \langle l, Z \rangle &= 1, \quad \langle l, A \rangle = \langle l, B \rangle = \langle l, H \rangle = 0, \\ \langle l, S \rangle &= \langle l, T \rangle = \langle l, U \rangle = \langle l, V \rangle = 0. \end{aligned}$$

Alors le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \langle Z \rangle$, et l'algèbre de Lie du stabilisateur de l dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}(l) = \langle H, Z \rangle$; ainsi, on vérifie que $\mathfrak{h} = \langle A, H, T, U, Z \rangle$ est une polarisation réelle en l .

D'autre part, soit $\mathfrak{n} = \langle A, B, H, U, V, Z \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Alors $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ de pas 3, et l'algèbre de Lie du stabilisateur dans $G = \exp \mathfrak{g}$ de la restriction de l à $\mathfrak{n}$ est définie par

$$\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) = \langle H, S, T, Z \rangle.$$

De même, l'algèbre de Lie du stabilisateur dans $N = \exp \mathfrak{n}$ de la restriction de l à $\mathfrak{n}$ est définie par

$$\mathfrak{n}(l|_{\mathfrak{n}}) = \langle H, Z \rangle.$$

Ceci nous permet de vérifier que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \langle A, H, U, Z \rangle$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{n}}$ et que $\mathfrak{h}$ est invariante par $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$. Donc $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$.

Néanmoins, $\mathfrak{h}$ n'est pas une polarisation de Vergne. Pour le prouver, il suffit de montrer qu'il est impossible de trouver une bonne suite $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_j)_{0 \leq j \leq 8}$ de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ telle que

$$\mathfrak{h} = \sum_{j=0}^8 \mathfrak{g}_j(l_j).$$

Supposons qu'une telle suite $\mathcal{S}$ existe. Puisque $\mathfrak{g}$ est complètement résoluble, toutes les racines de $\mathfrak{g}$ sont réelles et tous les termes $\mathfrak{g}_j$ de la suite $\mathcal{S}$ seraient des idéaux.

Soit $\mathfrak{g}_1$, le plus petit idéal non nul de la suite $\mathcal{S}$.

Si $X_1 = A + \alpha_1 B + \alpha_2 H + \alpha_3 S + \alpha_4 T + \alpha_5 U + \alpha_6 V + \alpha_7 Z \in \mathfrak{g}_1$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq 7)$, alors $X_2 = [B, X_1] = -H + \alpha_2 V + 2\alpha_3 B + \alpha_4 B + \alpha_5 Z \in \mathfrak{g}_1$. Ainsi, (X_1, X_2) est un système libre de $\mathfrak{g}_1$ avec $\dim \mathfrak{g}_1 = 1$, ce qui est absurde.

Donc $X_1 = A + \alpha_1 B + \alpha_2 H + \alpha_3 S + \alpha_4 T + \alpha_5 U + \alpha_6 V + \alpha_7 Z \notin \mathfrak{g}_1$. De plus, en utilisant la même argumentation, on constate que les composantes de tout vecteur $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, suivant les directions de $\mathfrak{g}$ autre que Z sont nulles ; d'où $X_1 = \alpha Z$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\mathfrak{g}_1 = \langle Z \rangle.$$

Soit $\mathfrak{g}_2 \in \mathcal{S}$, tel que $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$ et $\dim \mathfrak{g}_2 = 2$.

Si $X_1 = A + \alpha_1 B + \alpha_2 H + \alpha_3 S + \alpha_4 T + \alpha_5 U + \alpha_6 V \in \mathfrak{g}_2$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, alors $[B, X_1] = -H + \alpha_2 V + 2\alpha_3 B + \alpha_4 B + \alpha_5 Z \in \mathfrak{g}_2$. Posons $X_2 = -H + \alpha_2 V + 2\alpha_3 B + \alpha_4 B$. On constate que, (X_1, X_2, Z) est un système libre de $\mathfrak{g}_2$ avec $\dim \mathfrak{g}_2 = 2$, ce qui est absurde.

Donc $X_1 = A + \alpha_1 B + \alpha_2 H + \alpha_3 S + \alpha_4 T + \alpha_5 U + \alpha_6 V \notin \mathfrak{g}_2$. De même, on vérifie que les directions B et H n'appartiennent pas à $\mathfrak{g}_2$.

Si $X_1 = S + \alpha_4 T + \alpha_5 U + \alpha_6 V \in \mathfrak{g}_2$, alors en prenant $\alpha_4 = -2, \alpha_5 = \alpha_6 = 0$, on vérifie que $(S - 2T, Z)$ est une base de $\mathfrak{g}_2$. Si par contre $\alpha_4 \neq -2$, on constate que $([A, X_1], [B, X_1], Z)$ est un système libre de $\mathfrak{g}_2$, ce qui est absurde. De même, $X_1 = T + \alpha_5 U + \alpha_6 V \notin \mathfrak{g}_2$, sinon, on obtient une absurdité. Par contre, on vérifie que (U, Z) ou (V, Z) sont des bases possibles de $\mathfrak{g}_2$.

Finalement, on constate qu'il y'a trois choix possibles pour $\mathfrak{g}_2$:

$$\mathfrak{g}_2 = \langle U, Z \rangle \text{ ou } \mathfrak{g}_2 = \langle V, Z \rangle \text{ ou } \mathfrak{g}_2 = \langle S - 2T, Z \rangle.$$

Soit $\mathfrak{g}_3 \in \mathcal{S}$ telle que $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_3$ et $\dim \mathfrak{g}_3 = 3$.

Alors, en utilisant l'argumentation précédente, on constate qu'il y'a trois choix possibles pour $\mathfrak{g}_3$:

$$\mathfrak{g}_3 = \langle S - 2T, U, Z \rangle, \mathfrak{g}_3 = \langle S - 2T, V, Z \rangle \text{ ou } \mathfrak{g}_3 = \langle U, V, Z \rangle.$$

On remarque que $\mathfrak{g}_3$ ainsi définie est abélienne. Donc, on devrait avoir $\mathfrak{g}_3 \subset \mathfrak{h}$, ce qui n'est pas le cas, car $S - 2T$ et V n'appartiennent pas à $\mathfrak{h}$.

Ceci achève notre preuve.

2.2.4- Proposition :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie exponentielle et $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ fortement adaptée à $\mathfrak{n}$, où $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Alors $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky et

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}),$$

où $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})}$.

Preuve :

(i) Posons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ et montrons que $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) + \mathfrak{h}_1$.

Comme par construction $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) + \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$, il nous suffit de montrer l'inclusion inverse.

Soit $X \in \mathfrak{h}$; alors on a :

$$\begin{aligned} \langle ad^*(X)(l_{|\mathfrak{n}}), \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \rangle &= \langle l_{|\mathfrak{n}}, ad(-X)\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \rangle \\ &= \langle l, [\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}, X] \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } \mathfrak{h} \text{ est une polarisation en } l. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathfrak{h}$, on a $ad^*(X)(l_{|\mathfrak{n}}) \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})^\perp(\mathfrak{n}^*)$, ce qui implique que

$$ad^*(\mathfrak{h})(l_{|\mathfrak{n}}) \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})^\perp(\mathfrak{n}^*).$$

D'autre part $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est maximal isotrope car $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation en $(l_{|\mathfrak{n}})$. Donc

$$(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})^\perp(\mathfrak{n}^*) = ad^*(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})(l_{|\mathfrak{n}}).$$

Par conséquent, comme $ad^*(\mathfrak{h})(l_n) \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})^\perp(\mathfrak{n}^*)$, on en déduit que $ad^*(\mathfrak{h})(l_n) \subset ad^*(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})(l_n)$. Cela signifie que pour tout $X \in \mathfrak{h}$, il existe $Y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ tel que $ad^*(X)(l_n) = ad^*(Y)(l_n)$, ce qui entraîne que $ad^*(X - Y)(l_n) = 0$. On en déduit que

$$X - Y \in \mathfrak{g}(l_n).$$

Ainsi, nous venons de montrer que pour tout $X \in \mathfrak{h}$, il existe $Y \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$ et $Z \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_n))$, $Z = X - Y$, tels que $X = Y + Z$. D'où $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_n))$; et l'égalité

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_n)) \text{ s'en suit.}$$

(ii) $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en $l_1 = l_{\mathfrak{g}(l_n)}$.

$-\mathfrak{h}_1$ est subordonnée à $l_{\mathfrak{g}(l_n)}$ car $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l et $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

$-\mathfrak{h}_1$ est maximal isotrope par rapport à la forme bilinéaire B_{l_1} définie par :

$$B_{l_1}(u, v) = \langle l_1, [u, v] \rangle, \forall u, v \in \mathfrak{g}(l_n).$$

En effet, soit $v \in \mathfrak{g}(l_n)$ tel que

$$\langle l_1, [\mathfrak{h}_1, v] \rangle = 0.$$

Alors :

$$ad^*(v)(l_n)(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) = 0 \text{ et } ad^*(v)(l_1)(\mathfrak{h}_1) = (0):$$

ce qui implique que $(ad^*(v)(l))(\mathfrak{h}) = 0$. Par conséquent $v \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est maximal isotrope.

Finalement $v \in \mathfrak{g}(l_n) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$ ce qui entraîne que $\mathfrak{h}_1$ est maximal isotrope. Donc $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en $l_{\mathfrak{g}(l_n)}$.

(iii) $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky.

Montrons d'abord que

$$(*) \quad l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_n))^\perp(\mathfrak{g}^*) = (H \cap G(l_n)) \cdot l,$$

où $H = \exp \mathfrak{h}$ et $G(l_n)$ est le stabilisateur dans G de la restriction de l à $\mathfrak{n}$. Comme $(H \cap G(l_n)) \cdot l \subset l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_n))^\perp$, il nous suffit de montrer l'inclusion inverse.

Soit $p = l + q \in l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}))^\perp$, où $q \in l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}))^\perp$. Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}})$, alors

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(l) = m(\Omega) \subset (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}))^\perp;$$

donc

$$(\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}))^\perp \subset m(\Omega)^\perp.$$

D'autre part, étant donné que $l + m(\Omega)^\perp \subset G \cdot l$ cf ([B.C et al] chapitre 2), on en déduit que

$$p = l + q \in G \cdot l,$$

c'est à dire qu'il existe $r = \exp R \in G$ tel que $p = l + q = r \cdot l = \text{Ad}^*(\exp R)l$. On remarque que $r \in G(l_{|_{\mathfrak{n}}})$ car

$$r \cdot (l_{|_{\mathfrak{n}}}) = (r \cdot l)_{|_{\mathfrak{n}}} = (l + q)_{|_{\mathfrak{n}}} = l_{|_{\mathfrak{n}}}.$$

On constate aussi que $r = \exp R \in H$. En effet, d'une part

$$r \cdot l(\mathfrak{h}) = (l + q)(\mathfrak{h}) = l(\mathfrak{h})$$

car $q \in \mathfrak{h}^\perp(\mathfrak{g}^*)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} r \cdot l(\mathfrak{h}) &= \langle l, \text{Ad}(r^{-1})\mathfrak{h} \rangle = \langle l, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{ad}^k(-R)\mathfrak{h}}{k!} \rangle \\ &= \langle l, \mathfrak{h} \rangle + \langle \text{ad}^*(R)l, \mathfrak{h} \rangle + \langle l, \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\text{ad}^k(-R)\mathfrak{h}}{k!} \rangle \\ &= \langle l, \mathfrak{h} \rangle + \langle \text{ad}^*(R)l, \mathfrak{h} \rangle \quad \text{car } R \in \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}) \text{ et } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \text{ est contenu dans } \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Donc, on a nécessairement $\langle \text{ad}^*(R)l, \mathfrak{h} \rangle = 0$, ce qui implique que $R \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est maximal isotrope. D'où $r \in H$.

Ainsi,

$$p = l + q = r \cdot l \in (H \cap G(l_{|_{\mathfrak{n}}})) \cdot l;$$

d'où

$$l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_{\mathfrak{n}}}))^\perp \subset (H \cap G(l_{|_{\mathfrak{n}}})) \cdot l,$$

et l'égalité $l + (\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}))^\perp = (H \cap G(l_{|\mathfrak{n}})) \cdot l$ s'en suit.

Montrons que :

$$(**) \quad H \cdot l = l + \mathfrak{h}^\perp.$$

Nous savons que $H \cdot l \subset l + \mathfrak{h}^\perp$; donc, il nous suffit de montrer l'inclusion inverse.

Soit $\varphi = l + q \in l + \mathfrak{h}^\perp$ avec $q \in \mathfrak{h}^\perp$. Projetons φ sur $\mathfrak{n}^*$; alors on a :

$$\varphi|_{\mathfrak{n}} = l_{|\mathfrak{n}} + q_{|\mathfrak{n}} \quad \text{avec } q \in (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})^\perp.$$

Mais comme $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie nilpotente et que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation en $l_{|\mathfrak{n}}$, alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ vérifie la condition de Pukansky, ceci d'après la remarque 1.2.6.

Donc il existe $x_{\mathfrak{n}} \in H \cap N$ tel que $x_{\mathfrak{n}} \cdot (l_{|\mathfrak{n}}) = l_{|\mathfrak{n}} + q_{|\mathfrak{n}}$. On constate que

$$\begin{aligned} (\varphi - x_{\mathfrak{n}} \cdot l)(n') &= \varphi(n') - (x_{\mathfrak{n}} \cdot l)(n') \\ &= \varphi(n') - (x_{\mathfrak{n}} \cdot (l_{|\mathfrak{n}}))(n') \\ &= \varphi(n') - \varphi(n') \\ &= 0 \quad \text{pour tout } n' \in \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\varphi - x_{\mathfrak{n}} \cdot l \in \mathfrak{n}^\perp(\mathfrak{g}^*)$. D'autre part, pour $h' \in \mathfrak{h}$, on a :

$$\begin{aligned} (\varphi - x_{\mathfrak{n}} \cdot l)(h') &= \varphi(h') - (x_{\mathfrak{n}} \cdot l)(h') \\ &= l(h') + q(h') - l(h') - q'(h') \\ &\quad \text{car } x_{\mathfrak{n}} \cdot l = l + q' \in l + \mathfrak{h}^\perp, \text{ avec } q' \in \mathfrak{h}^\perp \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $\varphi - x_{\mathfrak{n}} \cdot l \in \mathfrak{h}^\perp(\mathfrak{g}^*)$. Finalement, on en déduit que :

$$\varphi - x_{\mathfrak{n}} \cdot l \in (\mathfrak{n} + \mathfrak{h})^\perp.$$

Par conséquent, il existe $\psi \in (\mathfrak{n} + \mathfrak{h})^\perp$ tel que $\varphi = x_{\mathfrak{n}} \cdot l + \psi$.

Or, comme $(\mathfrak{n} + \mathfrak{h})^\perp \subset (\mathfrak{n} + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})))^\perp$ et que d'après (*) $(\mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}))^\perp = \text{ad}^*(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}))l$, on en déduit que

$$\psi \in \text{ad}^*(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}))l.$$

Donc il existe $u \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|n})$ tel que $\psi = ad^*(u)l$.

On remarque que $x_n \cdot (ad^*(u)l) = ad^*(u)l$. En effet, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\begin{aligned} x_n \cdot (ad^*(u)l)(Y) &= \langle ad^*(u)l, Ad(x_n^{-1})Y \rangle \\ &= \langle ad^*(u)l, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ad^k(-X_n)Y}{k!} \rangle \quad \text{où } \exp X_n = x_n \\ &= \langle ad^*(u)l, Y \rangle + \langle ad^*(u)l, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ad^k(-X_n)Y}{k!} \rangle ; \end{aligned}$$

et comme $ad^*(u)l \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ad^k(-X_n)Y}{k!} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, alors

$$\langle ad^*(u)l, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ad^k(-X_n)Y}{k!} \rangle = 0$$

et on obtient l'égalité cherchée.

Ainsi, moyennant les résultats précédents, nous venons de montrer que pour tout $\varphi \in l + \mathfrak{h}^\perp$, il existe $x_n = \exp X_n \in H \cap N$ et $u \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|n})$ tels que :

$$\begin{aligned} \varphi &= x_n(l + ad^*(u)l) = x_n \cdot Ad^*(\exp u)l \\ &= Ad^*(\exp X_n)Ad^*(\exp u)l \\ &= (x_n \cdot \exp u) \cdot l \in H \cdot l. \end{aligned}$$

Donc $l + \mathfrak{h}^\perp \subset H \cdot l$; ce qui achève notre preuve.

2.3- DIFFERENTES ETAPES D'UNE RECURRENCE.

La preuve du théorème principal du chapitre 4 se fera par récurrence. Dans ce paragraphe, nous analysons les différentes étapes nécessaires à une telle récurrence.

Nous supposons toujours que G est un groupe de Lie connexe simplement connexe, exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $l \in \mathfrak{g}^*$. De plus, nous considérons $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{h}$ une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et $\pi = ind_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ une représentation unitaire irréductible de G . Alors, on a au moins l'un des cas suivants :

2.3.1- 1er cas :

$\dim G = 1$, c'est à dire que $G = \mathbb{R}$. On constate que G est abélien et que $\mathfrak{n} = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} = \mathbb{R}$. D'autre part, ce cas n'est qu'un cas particulier du cas plus général où G est un groupe abélien de dimension m .

2.3.2- 2eme cas :

Il existe un idéal non trivial $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ tel que $\langle l, \mathfrak{a} \rangle = 0$. Dans ce cas, $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\mathfrak{h}$ par maximalité, puisque $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ est encore une sous-algèbre subordonnée à l . Dans le raisonnement par récurrence, on passe à l'espace quotient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ et on définit $\tilde{l}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ de la manière suivante

$$\langle \tilde{l}, X + \mathfrak{a} \rangle = \langle l, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Nous posons aussi $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}/\mathfrak{a}$, $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$. On remarque que $\tilde{\mathfrak{h}}$ est une polarisation en $\tilde{l}$ fortement adaptée à $\tilde{\mathfrak{n}}$. Dans $\tilde{G}$, on pose $\tilde{\pi} = \text{ind}_{\tilde{H}}^{\tilde{G}} \chi_{\tilde{l}, \tilde{\mathfrak{h}}}$; alors $\pi = \tilde{\pi} \circ P$. Et comme $\dim \tilde{\mathfrak{g}} < \dim \mathfrak{g}$, on fait la récurrence sur la dimension de G , en passant de G à $\tilde{G}$.

2.3.3- 3eme cas :

Il n'existe aucun idéal non trivial $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ où l s'annule; alors le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension inférieure ou égale à 1.

Dans un premier temps, nous supposons que $\mathfrak{n}$ ne contient aucun idéal non central de $\mathfrak{g}$; comme $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et que $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \leq 1$, on en déduit que $\mathfrak{n}$ est central et $\dim \mathfrak{n} \leq 1$.

Si $\dim \mathfrak{n} = 0$, alors $\mathfrak{n} = (0)$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (0)$. Ainsi $\mathfrak{g}$ est abélienne, ce qui nous ramène au 1^{er} cas.

Si $\dim \mathfrak{n} = 1$, alors $\mathfrak{n} = \mathbb{R}Z$ avec Z central et $\langle l, Z \rangle = 1$. Or, étant donné que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n} = \mathbb{R}Z$, alors si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (0)$, cela nous ramène encore au 1^{er} cas. Si par contre $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Z = \mathfrak{n}$, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg de base $(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z)$, avec

$$[X_j, Y_j] = Z,$$

$$[X_j, X_k] = [Y_j, Y_k] = 0, \quad 1 \leq j \neq k \leq m.$$

Par conséquent, on vérifie que $\mathfrak{h} = \sum_{j=1}^m \mathbb{R}Y_j + \mathbb{R}Z$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. Notons aussi que dans ce cas toutes les polarisations en l sont fortement adaptées à $\mathfrak{n}$.

Nous supposons à présent que $\mathfrak{n}$ contient des idéaux non centraux de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{n}$ est non central et il existe un idéal non central minimal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ qui se présente suivants les différentes formes données dans le lemme 2.1.2. Nous sommes donc amenés à considérer ces différents cas :

2.3.4- 4eme cas :

Ce cas correspond au cas (i) du lemme 2.1.2 où $\mathfrak{g}_0 = \ker \lambda$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y$ et contenant $\mathfrak{n}$, car λ est une racine de $\mathfrak{g}$. De plus, on constate que

$$\mathfrak{g}_0 = \{U \in \mathfrak{g} / \text{ad}^* U.(l|_{\mathfrak{a}}) = 0\} = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{a}})$$

est l'algèbre de Lie du stabilisateur dans G de $l|_{\mathfrak{a}}$. Ainsi, il existe $X \in \mathfrak{g}, X \notin \mathfrak{g}_0$ tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_0$. Nous choisissons X tel que $\lambda(X) = 1$ et Y tel que $l(Y) = 1$; nous supposons aussi que $l(X) = 0$, car sinon nous remplaçons X par $X - l(X)Y$. De plus, comme $\mathfrak{a}$ est de dimension 1, nous l'identifions à $\mathbb{R}$.

Nous posons $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$. Alors $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$ et les éléments de G peuvent être écrits sous la forme de couple $(t, g_0), t \in \mathbb{R}, g_0 \in G_0$ et $(t, g_0) = \exp tX \cdot g_0 \in G$.

D'autre part, on vérifie que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. En effet, étant donné que $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$, alors d'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$; puisque $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ et $\mathfrak{n}$ sont contenus dans $\mathfrak{g}_0$, on en déduit que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ et vu la maximale isotropie de $\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Ainsi $Y \in \mathfrak{g}_0(l_0) \subset \mathfrak{h}$, avec $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$.

D'autre part, $\mathfrak{h}$ est une polarisation en $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$ fortement adaptée à $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$. En effet, comme $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$, alors pour montrer que $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l_0 , fortement adaptée à $\mathfrak{n}$, il nous suffit de montrer que $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l_0 . On remarque que $\mathfrak{h}$ est subordonnée à l_0 et que $\dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}_0 + 1 + \dim \mathfrak{g}(l))$. Donc pour achever notre preuve, il nous suffit de montrer que $\dim \mathfrak{g}_0(l_0) = \dim \mathfrak{g}(l) + 1$, ce qui est réalisé si $\mathfrak{g}_0(l_0) = \mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y$.

Soit $X \notin \mathfrak{g}_0$; on a $\langle l, [X, Y] \rangle = \lambda(X) \neq 0$; d'où $X \notin \mathfrak{g}(l)$ et $Y \notin \mathfrak{g}(l)$. Donc $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0$, ce qui entraîne que $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0(l_0)$; et comme $Y \in \mathfrak{g}_0(l_0)$, alors $\mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y \subset \mathfrak{g}_0(l_0)$.

Réciproquement, soient $V \in \mathfrak{g}_0(l_0)$ et $X \notin \mathfrak{g}_0$ avec $\lambda(X) = 1$. On sait que $\langle l, [V, \mathfrak{g}_0] \rangle = 0$; donc, pour montrer que $V \in \mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y$, il suffit de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $V - \alpha Y \in \mathfrak{g}(l)$. Pour cela, nous prenons $\alpha = -\langle l, [V, X] \rangle$. On sait que $\langle l, [V - \alpha Y, \mathfrak{g}_0] \rangle = 0$. D'autre part, $\langle l, [V - \alpha Y, X] \rangle = \langle l, [V, X] \rangle - \alpha \langle l, [Y, X] \rangle = -\alpha + \alpha = 0$. On en déduit que $V - \alpha Y \in \mathfrak{g}(l)$; d'où $\mathfrak{g}_0(l_0) \subset \mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y$.

Par conséquent, on a bien $\mathfrak{g}_0(l_0) = \mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y$ et $\mathfrak{h}$ qui est une polarisation en $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$ fortement adaptée à $\mathfrak{n}$.

On pose $\pi_0 = \text{ind}_H^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}}$. Alors π_0 est une représentation unitaire irréductible de G_0 et on a $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}} \cong \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$. Et comme $\dim G_0 < \dim G$, on fait la récurrence sur la dimension de G , en passant de G à G_0 .

2.3.5- 5eme cas :

Ce cas correspond au cas (ii) du lemme 2.1.2. Il s'agit de l'analogue complexe du 4^{ème} cas. Ainsi, comme dans ce dernier cas, $\mathfrak{g}_0 = \ker \lambda$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ et contenant $\mathfrak{n}$, avec $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. De plus,

$$\mathfrak{g}_0 = \{U \in \mathfrak{g} / \text{ad}^* U(l|_{\mathfrak{g}_0}) = 0\} = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{g}_0})$$

est l'algèbre de Lie du stabilisateur dans G de $l|_{\mathfrak{g}_0}$; et pour les mêmes raisons qu'au cas 4, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ et $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_0(l_0) \subset \mathfrak{h}$. De même on vérifie que $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l_0 fortement adaptée à $\mathfrak{n}$; pour cela, il suffit de montrer que $\dim \mathfrak{g}_0(l_0) = \dim \mathfrak{g}(l) + 1$, ce qui est réalisé si $\mathfrak{g}_0(l_0) = \mathfrak{g}(l) \oplus \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$.

Soit $X \notin \mathfrak{g}_0$; on a $\langle l, [X, Y_1 + iY_2] \rangle = \lambda(X)(\langle l, Y_1 \rangle + i\langle l, Y_2 \rangle) \neq 0$; d'où

$X \notin \mathfrak{g}(l)$ et Y_1 ou bien $Y_2 \notin \mathfrak{g}(l)$, car si $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}(l)$, on peut toujours remplacer Y_2 par $Y'_2 \in \mathfrak{g}(l)$. Donc $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0$, ce qui entraîne que $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}_0(l_0)$. Ainsi

$$\mathfrak{g}(l) + \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 \subset \mathfrak{g}_0(l_0).$$

Réciproquement, soient $V \in \mathfrak{g}_0(l_0)$ et $X \notin \mathfrak{g}_0$ avec $\lambda(X) = 1$; il existe des réels α_1, α_2 , tels que

$$\begin{aligned} & \langle l, [v, X] \rangle + \alpha_1 \langle l, [Y_1, X] \rangle + \alpha_2 \langle l, [Y_2, X] \rangle \\ &= \langle l, [v, X] \rangle - \alpha_1 \langle l, Y_1 \rangle - \alpha_2 \langle l, Y_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\langle l, [v + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, X] \rangle = 0$; et comme $v + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in \mathfrak{g}_0(l_0)$, alors $v + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in \mathfrak{g}(l)$. D'où $\mathfrak{g}_0(l_0) \subset \mathfrak{g}(l) + \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ et on obtient le résultat cherché. Comme au 4^{ème} cas, $\dim G_0 < \dim G$; donc la récurrence se fait dans les mêmes conditions.

2.3.6- 6ème cas :

Ce cas correspond au cas (iii) du lemme 2.1.2, avec $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z, Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$; de plus, pour tout $U \in \mathfrak{g}$, on a $[U, Y] = \lambda(U)Y + \varphi(U)Z$, avec φ qui est une forme linéaire non triviale sur $\mathfrak{g}$ et λ un homomorphisme réel de $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, nous supposons que λ est non trivial. Par conséquent, $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$ est idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ différent de $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ qui est une sous-algèbre de codimension 1 de $\mathfrak{g}$; et puisque λ et φ sont indépendants, $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension 2 de $\mathfrak{g}$.

Dans la suite, nous distinguons plusieurs sous-cas en fonction des relations d'inclusion ou de non-inclusion qui existe entre $\mathfrak{g}(l), \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}_0$.

2.3.7- Cas 6a : $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$.

Dans ce cas, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$. Nous posons

$$l^0 = l|_{\mathfrak{g}^0}, \quad \mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0, \quad H^0 = \exp \mathfrak{h}^0, \quad G^0 = \exp \mathfrak{g}^0.$$

Alors, on constate que $\mathfrak{h}^0$ est une polarisation en l^0 fortement adaptée à $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^0$; donc, d'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}^0$ vérifie la condition de Pukansky en l^0 . On en déduit que $\pi^0 = \text{ind}_{H^0}^{G^0} \chi_{l^0}$ est une représentation unitaire irréductible de G^0 . De plus, comme $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$, alors d'après ([Lep. Lud.]), $\pi = \text{ind}_H^G \chi_l$ est une extension de π^0 . Ainsi, la récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g}$ en passant de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^0$.

2.3.8- Cas 6b : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{00}$.

Dans ce cas, $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$ est un sous-groupe distingué fermé de G de codimension 2. contenant $H = \exp \mathfrak{h}$. Nous choisissons $T \in \mathfrak{g}_0$ tel que $T \notin \mathfrak{g}^0$: nous savons qu'un tel T existe car $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{g}^0$ et $T \notin \mathfrak{g}_{00}$. Ensuite, nous considérons le sous-groupe fermé $G_0 = \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00} = G(l/\mathfrak{a})$ de G ; G_0 est un sous-groupe de codimension 1 de G contenant H . Puisqu'il existe $X \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{n}, X \notin \mathfrak{g}_0$ tel que $[X, Y] = Z$ (cf lemme 2.1.2), alors $G = \exp \mathbb{R}X \cdot \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00}$.

Nous posons

$$l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}, \pi_{00} = \text{ind}_H^{G_{00}} \chi_{l_{00}}, \pi_0 = \text{ind}_{G_{00}}^{G_0} \pi_{00}.$$

Alors, $\pi = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$ et la récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g}$ en passant de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0$.

2.3.9- Cas 6c : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$.

Nous montrons que ce cas se ramène au cas précédent. En effet, Dans le cas présent $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_{00}$. De plus, étant donné que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1$ avec $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$ et que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$, on en déduit que $\mathfrak{h}_1 \not\subset \mathfrak{g}^0$, c'est à dire que $\lambda(\mathfrak{h}_1) \neq (0)$. Ainsi, on a le résultat suivant :

2.3.10- Lemme : *Il existe $T \in \mathfrak{h}$ tel que $T \notin \mathfrak{g}(l)$ avec $\lambda(T) \neq 0$, et il existe $S \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$ tel que $\langle l, [T, S] \rangle = 1$.*

Preuve :

Comme $\lambda(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})) \neq (0)$, il existe $T = T_0 + T_1 \in \mathfrak{h}$, avec $T_0 \in \mathfrak{h}_0$, $T_1 \in \mathfrak{h}_1$ et tel que $\lambda(T) \neq 0$; notons que $T \notin \mathfrak{g}(l)$ car $\lambda(\mathfrak{g}(l)) = 0$. Par conséquent, il existe $S \in \mathfrak{g}$ tel que $\langle l, [T, S] \rangle \neq 0$; de plus $S \notin \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est maximal isotrope.

Si $\langle l, [T, \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})] \rangle = \langle l, [T_1, \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})] \rangle \neq (0)$, alors le lemme est démontré. Signalons qu'on peut aussi prendre $T = T_1 \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$.

Si par contre $\langle l, [T, \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})] \rangle = \langle l, [T_1, \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})] \rangle = (0)$, alors pour tout $W \in \mathfrak{n}$, on a :

$$\langle l, [\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}), T] \rangle = \langle l, [\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}), W] \rangle = (0);$$

ce qui entraîne que

$$\langle l, [\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}), T - W] \rangle = (0);$$

d'où $\langle (T - W) \cdot l, \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}) \rangle = (0)$. On en déduit que $(T - W) \cdot l \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})^\perp \subset \mathfrak{h}^\perp = \mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$.

Ainsi $T - W \in \mathfrak{h}$; ce qui implique que $W \in \mathfrak{h}$. Par conséquent, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$; de plus, comme $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l , $\langle l, [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \rangle = (0)$; ce qui implique que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est strictement contenu dans $\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$.

En effet, si cela n'est pas vrai, alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$; ainsi pour tout $S' \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$ et pour tout $T' \in \mathfrak{h}$, on a $\langle l, [S', T'] \rangle = 0$. Or, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}) = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}^0(l_{\mathfrak{n}})$,

avec $\mathfrak{g}^0(l_{|_n}) = \mathfrak{g}(l_{|_n}) \cap \mathfrak{g}^0$. De plus, on sait que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ est une polarisation en $l^0 = l_{|_{\mathfrak{g}^0}}$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ car $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$. En tenant compte de ces données, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0) &= \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g}^0 + \dim \mathfrak{g}^0(l_{|_{\mathfrak{g}^0}})). \\ &\geq \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - 1 + \dim \mathfrak{g}(l)). \\ &\geq \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(l)) - \frac{1}{2}. \\ &\geq \dim \mathfrak{h} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$ est un hyperplan de $\mathfrak{g}$ car λ est une racine de $\mathfrak{g}$; par conséquent, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ est un hyperplan de $\mathfrak{h}$ et on a

$$\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0) = \dim \mathfrak{h} - 1.$$

Finalement, on a : $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0) = \dim \mathfrak{h} - 1$ et $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0) \geq \dim \mathfrak{h} - \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde.

Par conséquent, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(l_{|_n})$ et $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}(l_{|_n})$, avec $\langle l, [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}(l_{|_n})] \rangle \neq (0)$. De ce fait, il existe $S' \in \mathfrak{g}(l_{|_n})$, $S' \notin \mathfrak{h}$ et $T' \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_n})$, tels que $\langle l, [T', S'] \rangle = 1$.

Si $\lambda(T') \neq 0$, alors, T' et S' conviennent et le lemme est démontré.

Si par contre $\lambda(T') = 0$, alors on remplace T' par $T'' = T + T'$. Et comme on peut prendre $T \in \mathfrak{g}(l_{|_n})$, alors $T'' \in \mathfrak{g}(l_{|_n})$. Ensuite, on vérifie que $\lambda(T'') = \lambda(T) \neq 0$. Ainsi T'' et S' conviennent. Ce qui achève la preuve du lemme.

A présent, nous considérons S et T donnés par le lemme précédent, avec $S \in \mathfrak{g}(l_{|_n})$, $T \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|_n})$ et nous posons

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 + \mathbb{R}S \text{ et } H' = \exp \mathfrak{h}'.$$

Nous pouvons supposer que $\lambda(S) = 0$, sinon nous changeons S en $S' = \lambda(S)T_1 - \lambda(T_1)S$, avec T_1 qui représente la composante de T dans la direction $\mathfrak{g}(l_{|_n})$, et on obtient $\lambda(S') = 0$.

D'autre part $S \notin \mathfrak{n}$. En effet, si $S \in \mathfrak{n}$, alors $S \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ avec $S \notin \mathfrak{h}$. Ainsi $\langle l, [S, \mathfrak{n}] \rangle = (0)$, ce qui entraîne que $\langle l, [S, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}] \rangle = (0)$; et comme $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ est une polarisation en $l_{|\mathfrak{n}}$, on en déduit que $S \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$; d'où $S \in \mathfrak{h}$, ce qui est absurde. On constate aussi que $\langle l, [S, Y] \rangle = \varphi(S) = 0$ car $Y \in \mathfrak{n}$ et $S \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$.

Remarquons que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ est un hyperplan de $\mathfrak{h}$; ainsi, d'après le lemme précédent, il n'existe que la direction $\mathbb{R}T$ qui sort de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ et telle que $\langle l, [\mathbb{R}T, S] \rangle \neq (0)$. Par conséquent, $\langle l, [\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0, S] \rangle = (0)$; on en déduit que $\mathfrak{h}'$ est subordonnée à l et comme $\dim \mathfrak{h}' = \dim \mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{h}'$ est une polarisation en l . De plus, $\mathfrak{h}'$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ car $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. D'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}'$ vérifie la condition de Pukansky; et d'après la proposition 1.2.17, les représentations unitaires irréductibles $\pi_{l, \mathfrak{h}} = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ et $\pi_{l, \mathfrak{h}'} = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}'}$ sont équivalentes.

Ainsi, on constate que le cas 6c se ramène au cas 6b en remplaçant la polarisation $\mathfrak{h}$ par la polarisation $\mathfrak{h}'$ construite ci-dessus et contenue dans $\mathfrak{g}_{00}$. La récurrence se fait sous les mêmes conclusions qu'au cas 6b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$. Ensuite, on passe du cas 6b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$ au cas 6c avec $\pi_{l, \mathfrak{h}}$ par une transformée de Fourier.

2.3.11- Cas 6d : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$.

Puisque $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ et que $\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{g}_0$, il existe $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}, X \notin \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ avec $\varphi(X) = 1$ et tel que $[X, Y] = Z$. D'où, $Y \notin \mathfrak{h}$ car $\langle l, [X, Y] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$; on en déduit que $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$. Par conséquent nous introduisons une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ notée $\mathfrak{h}'$ telle que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{a}$, ce qui équivaut à $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}Y$. Nous savons que $\mathfrak{h}'$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et contenue dans $\mathfrak{g}_0$ ([B.C et al]). On remarque que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$; de plus, d'après 1.2.17, π et π' sont équivalentes.

Ainsi, comme nous l'avons fait pour le cas 6c, nous ramenons le cas 6d au cas 6b en remplaçant la polarisation $\mathfrak{h}$ par la polarisation $\mathfrak{h}'$ construite ci-dessus et contenue dans $\mathfrak{g}_{00}$. La récurrence se fait sous les mêmes conclusions qu'au cas 6b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$. Ensuite, on passe du cas 6b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$ au cas 6d avec $\pi_{l, \mathfrak{h}}$ par une transformée de Fourier.

Remarquons que les sous-cas (6a) et (6c) sont indépendants de la relation d'inclusion ou de non-inclusion qui existe entre $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_0$.

2.3.12- 7eme cas :

Ce cas correspond au 6^{ème} cas, mais avec λ qui est un homomorphisme trivial de $\mathfrak{g}$. Donc on a $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z, Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et pour tout $U \in \mathfrak{g}, [U, Y] = \varphi(U)Z$ avec φ qui est une forme linéaire non triviale sur $\mathfrak{g}$. Par conséquent, $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi = \mathfrak{g}_{00}$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. De plus $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$ où $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ et $X \notin \mathfrak{g}_0$.

D'autre part, nous constatons que les sous-cas 6a et 6c n'ont pas de sens ici car λ est trivial. Ainsi, sachant que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, nous sommes amenés à considérer uniquement les sous-cas suivants :

2.3.13- Cas 7a : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$.

Dans ce cas, $G_0 = G(l_{\mathfrak{a}}) = \exp \mathfrak{g}_0$ est un sous-groupe distingué fermé de G qui contient H et qui est de codimension 1. Ainsi, on peut écrire G sous la forme $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$, où $X \notin \mathfrak{g}_0$, c'est à dire que $\varphi(X) \neq 0$. Remarquons qu'un tel X existe et on peut le choisir en fonction des cas suivants :

(1) : si $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{g}_0$, c'est à dire que $\varphi(\mathfrak{n}) \neq (0,)$ alors on prend $X \in \mathfrak{n}$ avec $\varphi(X) = 1$.

(2) : si $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$, alors on prend n'importe quel $X \in \mathfrak{g}$ avec $\varphi(X) = 1$.

D'autre part, comme dans le cas 6, $\pi_0 = \text{ind}_H^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}}$ (respectivement $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}} = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$) sont des représentations unitaires irréductibles de G_0 (respectivement G) avec $l_0 = l_{\mathfrak{g}_0}$. La récurrence se fait comme dans les cas précédents sur $\dim G$, en passant de G à G_0 .

2.3.14- Cas 7b : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$.

Dans ce cas, $G_0 = G(l_{\mathfrak{a}}) = \exp \mathfrak{g}_0$ est aussi un sous-groupe distingué fermé de G de codimension 1, mais qui ne contient pas H . D'autre part, comme dans le cas 7a, on peut écrire G sous la forme $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$ où $X \notin \mathfrak{g}_0$. Mais, puisque $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{a}}) + \mathfrak{n}$ et que $\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{a}}) \subset \mathfrak{g}_0$, alors l'étude du présent cas ne sera faite que dans la situation (1) précédente où $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{g}_0$. On pourra ainsi choisir la direction X qui sort de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, ce qui nous permettra de la contrôler. La récurrence se fait comme dans le cas 6d, mais avec des formules simples car λ est nul.

2.3.15-8eme Cas :

Ce cas est l'analogie complexe du 6^{ème} cas et il correspond au cas (iv) du lemme 2.1.2 dans lequel $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z, Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$; de plus, pour tout $U \in \mathfrak{g}$, on a $[U, Y_1 + iY_2] = \lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(U)Z$ avec φ qui est une forme linéaire non triviale sur $\mathfrak{g}$ et $\lambda = \lambda_1(1 + i\theta)$, un homomorphisme complexe de $\mathfrak{g}$ avec $\lambda_1 \in \mathfrak{g}^*, 0 \neq \theta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, nous supposons que λ est non trivial. Par conséquent $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ différent de $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ qui est une sous-algèbre de codimension 2 de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme 2.1.2, il existe $T \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{n}, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ tels que $T \in \mathfrak{g}_0, T \notin \mathfrak{g}^0, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{n}, X_1, X_2 \notin \mathfrak{g}_0$. Il en résulte que $\mathfrak{g}_0 \not\subset \mathfrak{g}^0$ et de ce fait $\mathfrak{g}_{00}$ est un idéal de codimension 3 de $\mathfrak{g}$. De plus, si $\mathfrak{X} = \text{vec}(X_1, X_2)$ désigne le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}$ engendré par X_1 et X_2 , alors

$$G = \exp \mathfrak{X} \cdot \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00},$$

avec $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}, G_0 = \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00}$ et $G^0 = \exp \mathfrak{X} \cdot G_{00}$.

De façon similaire au 6^{ème} cas, nous distinguons dans la suite plusieurs sous-cas, en fonction des relations d'inclusion ou de non-inclusion qui existe entre $\mathfrak{g}(l), \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{00}$.

2.3.16- Cas 8a : $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$.

Ce cas est identique au cas 6a; le raisonnement est le même que celui de 6a.

2.3.17- Cas 8b : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{00}$.

Ce cas est l'analogie complexe de 6b. Donc $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$ est un sous-groupe distingué fermé de G de codimension 3, contenant $H = \exp \mathfrak{h}$. Nous choisissons $T \in \mathfrak{g}_0$ tel que $T \notin \mathfrak{g}^0$; nous savons qu'un tel T existe car $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{g}^0$ et $T \notin \mathfrak{g}_{00}$. Ensuite, nous considérons le sous-groupe fermé $G_0 = \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00} = G(l|_{\mathfrak{a}})$ de G . On constate que G_0 est un sous-groupe fermé de G de codimension 2 et contenant H . Puisqu'il existe $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{n}, X_1, X_2 \notin \mathfrak{g}_0$ tel que $[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = (1 + i)Z$ (cf lemme 2.1.2), alors $G = \exp \mathfrak{X} \cdot \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00}$ avec $\mathfrak{X} = \text{vec}(X_1, X_2)$ qui désigne le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}$ engendré par X_1 et X_2 .

Nous posons $l_{00} = l|_{\mathfrak{g}_{00}}, \pi_{00} = \text{ind}_H^{G_{00}} l_{00}$ et $\pi_0 = \text{ind}_{G_{00}}^{G_0} \pi_{00}$. Alors $\pi = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$. Comme au cas 6, la récurrence se fait sur $\dim \mathfrak{g}$ en passant de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_0$.

2.3.18- Cas 8c : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$.

Ce cas est identique au cas 6c; donc la récurrence est la même qu'en 6c.

2.3.19- Cas 8d : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$.

Puisque $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ et que $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{g}_0$, il existe $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, $X \notin \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$. Etant donné que $\mathfrak{g}_0$ est de codimension 2 dans $\mathfrak{g}$, il s'avère nécessaire d'étudier la dimension de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ afin d'obtenir celle de $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{a}$. Nous savons que $1 \leq \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) \leq 3$; mais comme $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}$; d'où $1 \leq \dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) \leq 2$.

1) $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 2$:

Dans ce cas, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$, car sinon $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ serait de codimension 2 dans $\mathfrak{h}$, puisque $\mathfrak{g}_0$ est de codimension 2 dans G . Ainsi, il existerait $X'_1, X'_2 \in \mathfrak{h}$, $X'_1, X'_2 \notin \mathfrak{g}_0$ avec (X'_1, X'_2) qui est une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ telle que $[X'_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$. On en déduirait que $\langle l, [X'_1, Y_1] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$ et $\langle l, [X'_2, Y_2] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$. Ainsi $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{h}$; d'où $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 1$, ce qui est absurde car on a supposé que $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 2$.

Par conséquent, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{a}$ a la même dimension que $\mathfrak{h}$. De plus, $\mathfrak{h}'$ étant subordonnée à l , on en déduit que $\mathfrak{h}'$ est une polarisation en l ; d'autre part, $\mathfrak{h}'$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et contenue dans $\mathfrak{g}_0$ ([B.C et al]). Signalons aussi qu'on a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$ avec $X = aX_1 + bX_2$ où a, b sont des réels non tous les deux nuls.

On constate que le présent cas est identique au cas 6d; donc la récurrence est la même qu'en 6d.

2) $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 1$:

Dans ce cas $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{Z\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{h}$. D'autre part $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ est de codimension 2 dans $\mathfrak{h}$.

En effet, si cette dernière assertion est fausse, alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{h}$ et il existe un unique $X = aX_1 + bX_2 \in \mathfrak{h}$, $X \notin \mathfrak{g}_0$ tel que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$ avec a, b qui sont des réels non tous les deux nuls. Notons que les vecteurs X_1, X_2 existent d'après le lemme 2.1.2 et sont tels que $X_1, X_2 \notin \mathfrak{g}_0$, avec (X_1, X_2) qui est une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ telle que $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$. On en déduit que $[X, Y_1] = aZ$ et $[X, Y_2] = bZ$.

Sans nuire à la généralité, supposons que $a \neq 0$ et prenons $a = 1$. Comme $\langle l, [X, Y_1] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$, alors $Y_1 \notin \mathfrak{h}$.

- Si $b = 0$, alors $[X, Y_1] = Z$ et $[X, Y_2] = 0$. D'autre part $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0, Y_1 + iY_2] = (0)$ car

$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$; d'où $[\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0, Y_2] = (0)$. Ainsi, $[\mathfrak{h}, Y_2] = (0)$ ce qui entraîne que $\langle l, [\mathfrak{h}, Y_2] \rangle = 0$; d'où $Y_2 \in \mathfrak{h}$ car $\mathfrak{h}$ est totalement isotrope maximal. Il en résulte que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = \{Y_2, Z\}$. Ce qui est absurde car $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = 1$.

- Ainsi, $b \neq 0$ et en supposant que $b = 1$, on obtient $[X, Y_2] = Z$. Dans ce cas, nous changeons les vecteurs de base Y_1, Y_2 de $\mathfrak{a}$ par des vecteurs $Y'_1 = a_1 Y_1 + a_2 Y_2, Y'_2 = b_1 Y_1 + b_2 Y_2$ tels que (Y'_1, Y'_2) soit un système libre de $\mathfrak{a}$ avec $[X, Y'_1] = Z, [X, Y'_2] = 0$. Cela est possible en prenant par exemple $Y'_1 = Y_2, Y'_2 = Y_2 - Y_1$. Ainsi, (Y'_1, Y'_2, Z) est une nouvelle base de $\mathfrak{a}$ telle que $[X, Y'_1] = Z, [X, Y'_2] = 0$: ceci aboutit à une absurdité d'après le cas précédent.

Donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$ est effectivement de codimension 2 dans $\mathfrak{h}$. Ainsi, comme dans le cas (1), $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{J}$ est une polarisation en l fortement adaptée à n et contenue dans $\mathfrak{g}_0$ ([B.C et al]). On remarque aussi que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2$ et que π et π' sont équivalentes (1.2.17).

Ainsi, comme nous l'avons fait au cas 6c, nous ramenons le cas 8d2 au cas 8b en remplaçant la polarisation $\mathfrak{h}$ par la polarisation $\mathfrak{h}'$ construite ci-dessus et contenue dans $\mathfrak{g}_{00}$. La récurrence se fait comme en 8b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$. Ensuite, on passe du cas 8b avec $\pi_{l, \mathfrak{h}'}$ au cas 8d2 avec $\pi_{l, \mathfrak{h}}$ par une transformée de Fourier.

CHAPITRE 3

ESPACES DE FONCTIONS $\mathcal{S}$ ET $E\mathcal{S}$

D'après 1.2.20, l'opérateur $\pi(f)$, $\pi \in \hat{G}$, est un opérateur à noyau dont le noyau f_π est défini sur $G \times G$ et vérifie une certaine propriété de covariance. Par conséquent, dans ce chapitre, nous nous intéressons aux espaces de fonctions f sur G et F sur $G \times G$ qui vérifient la relation de covariance ci-dessus, et entre lesquels nous pouvons établir une correspondance linéaire surjective. Dans un premier temps, nous faisons un rappel de l'étude de ce problème dans le cas nilpotent où il est bien connu que les espaces de fonctions ci-dessus sont des sous-espaces des espaces de Schwartz $\mathcal{S}$. Ensuite, nous étudions le cas exponentiel où là par contre il y'a décroissance exponentielle des fonctions noyaux dans certaines directions. Cela nous amènera à introduire des espaces de fonctions appropriées, notés $ES(,)$, où la lettre $\mathcal{S}$ suggère qu'il s'agit d'espaces analogues de l'espace de Schwartz, et la lettre E indique qu'il faut exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.

3.1- LE CAS NILPOTENT.

Dans ce paragraphe, nous faisons un rappel de l'étude de notre problème dans le cas nilpotent ; nous nous baserons sur les travaux de Howe dans lesquels il résoud le problème ci-dessus dans le cas nilpotent ([How.]). Ainsi, dans ce qui suit, nous supposons que G est un groupe de Lie connexe, simplement connexe nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

3.1.1-Définition : (*L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*)

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice. Nous notons

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ et } D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans une base arbitraire de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite de Schwartz si elle est de classe C^∞ et pour tous multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty.$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$. La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est déterminée par cette familles de semi-normes.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(V)$ est défini par analogie avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

3.1.2- Remarque :

Soit $\mathcal{PD}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients polynomiaux. Il est alors clair que f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\|Lf\|_\infty < \infty, \forall L \in \mathcal{PD}(\mathbb{R}^n).$$

D'autre part, une application $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$ est dite polynomiale si l'application

$$\log \circ \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathfrak{g}$$

est polynomial.

3.1.3- Définition : (L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$)

Nous définissons $\mathcal{S}(G)$ comme étant l'ensemble des fonctions f définies sur G telles que si ψ est un difféomorphisme polynomial alors $f \circ \psi$ appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cette définition est indépendante du choix de ψ .

Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in C^\infty(G)$, les champs de vecteurs X_L et X_R invariants respectivement à gauche et à droite sont définis pour $g \in G$ par

$$X_L \cdot f(g) = \frac{d}{dt} f(g \cdot \exp tX) /_{t=0}$$

$$X_R \cdot f(g) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX) \cdot g) /_{t=0}.$$

Soient $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de G sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{PD}(G)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur G à coefficients polynomiaux.

Si $X \in \mathfrak{g}$, alors X_L et X_R sont dans $\mathcal{PD}(G)$. Il en résulte que pour toute base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathfrak{g}$ et pour toute fonction polynomiale p_α sur G , les monômes

$$p_\alpha X_L^\alpha = p_\alpha(g)(X_1)_L^{\alpha_1} \cdots (X_n)_L^{\alpha_n}$$

$$p_\alpha X_R^\alpha = p_\alpha(g)(X_1)_R^{\alpha_1} \cdots (X_n)_R^{\alpha_n}$$

sont dans $\mathcal{PD}(G)$.

3.1.4- Proposition : ([Cor. Green.]

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow G$$

une application polynomiale . Alors les familles de semi-normes suivantes sont équivalentes et déterminent la même topologie de $\mathcal{S}(G)$:

$$(a) \parallel x^\alpha D^\beta (f \circ \psi) \parallel_\infty ;$$

$$(b) \parallel p_\alpha X_L^n \alpha f \parallel_\infty, p_\alpha \in \mathbb{C}(G) ;$$

$$(c) \parallel p_\alpha X_R^n \alpha f \parallel_\infty, p_\alpha \in \mathbb{C}(G).$$

3.1.5- Définition :

Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $l \in \mathfrak{h}^*$ tel que $l([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = (0)$. Soient d'autre part $H = \exp \mathfrak{h}$ et $(B_1, \dots, B_d)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, c'est à dire une base de Malcev de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Par définition, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G/H, l)$ est l'espace de toutes les fonctions $\xi : G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\xi(g \cdot h) = \overline{\chi_l(h)} \xi(g), \forall g \in G, h \in H$, et telles que la fonction $\tilde{\xi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tilde{\xi}(t_1, \dots, t_d) = \xi(\exp t_1 B_1 \cdots \exp t_d B_d)$$

appartienne à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Si $\mathfrak{h}$ est une polarisation en l , alors l'espace $\mathcal{S}(G/H, l)$ est bien sûr un sous-espace G -invariant dense de l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de $\pi_{l, \mathfrak{h}}$. On voit facilement que pour chaque élément

$X \in \mathfrak{h}, \xi \in \mathcal{S}(G/H, l), d\pi(X)\xi = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))\xi|_{t=0}$ est aussi dans $\mathcal{S}(G/H, l)$ et que $d\pi(X)$ est en fait un opérateur différentiel de degré ≤ 1 à coefficients polynomiaux. Donc $d\pi(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ où $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, est contenu dans l'algèbre $\mathcal{PD}(G/H)$ des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur G/H . En fait, $\mathcal{S}(G/H, l)$ ne dépend pas du sous-espace complémentaire $\mathfrak{v}$.

Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$. Soit $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ et soit $f \in \mathcal{S}(G)$. Pour $\xi \in \mathcal{S}(G/H, l), g \in G$, et en tenant compte du calcul fait en 1.2.20, nous avons

$$\pi(f)\xi(g) = \int_{G/H} f_\pi(g, u)\xi(u)du,$$

où

$$f_\pi(g, u) = \int_H f(g \cdot h \cdot u^{-1})\chi_l(h)dh. \quad g, u \in G.$$

Nous voyons que $\pi(f)$ est un opérateur à noyau et ce noyau f_π est une fonction C^∞ bornée. En effet, soit $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ une base de Jordan Hölder de $\mathfrak{g}$ telle qu'elle contienne une base de Malcev $\mathfrak{C} = \{B_{i_1}, \dots, B_{i_d}\}$ de $\mathfrak{h}$. Soit $I = \{i_1, \dots, i_d\}$. Alors

$$\int_H |f(g \cdot h \cdot u^{-1})| dh = \int_{\mathbb{R}^d} |f\left(\prod_{i=1}^n \exp(P_i(g, u, X)B_i)\right)| dX,$$

où $P_i(g, u, X)$ est un polynôme en g, u, X , qui ne dépend que des x_j pour $i_j < i$, si $i \notin I$, et qui est de la forme $P_{i_j}(g, u, X) = x_j + P'_{i_j}(g, u, x_1, \dots, x_{j-1})$ si $i \in I$. Donc

$$\begin{aligned} |f_\pi(g, u)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f\left(\prod_{i=1}^n \exp(P_i(g, u, X)B_i)\right)| dX \\ &\leq \max_{u_i \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(\exp(u_1 B_1) \cdots \exp(x_1 B_{i_1}) \cdots)| dX, \end{aligned}$$

pour tout $g, u \in G$. Il est aussi à noter que pour tout $h, h' \in H, g, g' \in G$, f_π vérifie la relation de covariance suivante :

$$f_\pi(g \cdot h, g' \cdot h') = \overline{\chi_l(h)}\chi_l(h')f_\pi(g, g').$$

3.1.6-Définition :

Soient $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ et $(B_1, \dots, B_d)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, c'est à dire une base de Malcev de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. L'espace $S((G/H)^2, l)$ est l'espace des fonctions $F \in C^\infty(G \times G)$, à valeurs complexes, telles que

$$F(g \cdot h, g' \cdot h') = \overline{\chi_l(h)} \chi_l(h') F(g, g'), g, g' \in G, h, h' \in H$$

et telles que la fonction $\tilde{F} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$,

$$((t_1, \dots, t_d), (t'_1, \dots, t'_d)) \rightarrow F(\exp t_1 B_1 \cdots \exp t_d B_d, \exp t'_1 B_1 \cdots \exp t'_d B_d)$$

soit de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$. On vérifie que $S((G/H)^2, l)$ est une algèbre de Fréchet pour le produit de convolution des noyaux.

3.1.7-Théorème : ([How.])

Soient G un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors pour tout $f \in S(G)$, $f_\pi \in S((G/H)^2, l)$ et l'application $S(G) \rightarrow S((G/H)^2, l); f \rightarrow f_\pi$ est un homomorphisme surjectif.

Preuve :

Nous la faisons par récurrence sur la dimension de G .

Soit $f \in S(G)$. Alors $u * f * v \in S(G)$ pour tout $u, v \in \mathcal{U}(G)$ et donc $d \circ \pi(f) \circ d' = \pi(f')$ pour un certain $f' \in S(G)$ pour $d, d' \in \mathcal{PD}(G/H)$. Donc toute dérivée partielle multipliée par tout polynôme de f_π est une fonction bornée ; de plus, comme nous l'avons déjà souligné, f_π vérifie la relation de covariance de $S((G/H)^2, l)$. Tout ceci implique que $f_\pi \in S((G/H)^2, l)$.

Montrons que l'application $f \rightarrow f_\pi$ est surjective. Nous pouvons supposer, en passant si nécessaire au quotient que $d\pi$ est fidèle. En particulier, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 et $l(\mathfrak{z}) \neq (0)$. Soit $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}$, tel que $[\mathfrak{g}, Y] \subset \mathfrak{z}$. Il existe un homomorphisme φ de $\mathfrak{g}$ tel que

$$[U, Y] = \varphi(U)Z, U \in \mathfrak{g},$$

où nous avons pris un élément $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, tel que $l(Z) = 1$. Nous supposons que $l(Y) = 0$, sinon nous remplaçons Y par $Y - l(Y)Z$. Soit $\mathfrak{g}_0 = \{U \in \mathfrak{g}, [U, Y] = 0\} = \ker \varphi$. Soit $X \in \mathfrak{g}$

tel que $\varphi(X) = 1$. Alors $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_0$, où $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$. Nous supposons aussi que $l(X) = 0$, sinon nous remplaçons X par $X - l(X)Y$.

Supposons d'abord que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Ainsi $\pi = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$, où $\pi_0 = \pi|_{\mathfrak{h}}$, $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$; de plus $S(G/H, l) = S(\mathbb{R}) \otimes S(G_0/H, l_0)$. Notons aussi que les éléments de G peuvent être écrits sous la forme de couple (t, g_0) , $t \in \mathbb{R}$, $g_0 \in G_0$ tel que $(t, g_0) = \exp tX \cdot g_0 \in G$.

D'autre part, soient $\mathcal{H}_{\pi_0}$ l'espace de π_0 et $\xi \in \mathcal{H}_{\pi}$; alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathfrak{g}_0$, nous pouvons écrire que $\xi(t, v) = \xi(t)(v)$; ce qui nous permet de considérer $\xi(t)$ comme un élément de $\mathcal{H}_{\pi_0}$. Par conséquent, par l'application $t \in \mathbb{R} \rightarrow \xi(t) \in \mathcal{H}_{\pi_0}$, nous identifions l'espace $\mathcal{H}_{\pi}$ de π avec $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$; de plus, nous identifions l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}$. Notons aussi que $\Delta_G = 1$. Moyennant toutes ces hypothèses, on voit que

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_G f(g)(\pi(g)\xi)(s)dg = \int_G f(g)\xi(g^{-1} \cdot s)dg \\ &= \int_G f(g^{-1})\xi(g \cdot s)dg = \int_G f(s \cdot g^{-1})\xi(g)dg \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} f((s-t) \cdot g_0^t)(\pi_0(g_0))\xi(t)dg_0dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} f((s-t)^t)(g_0)(\pi_0(g_0))\xi(t)dg_0dt. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \pi_0\left(f((s-t)^t)\right)\xi(t)dt. \end{aligned}$$

où $f((s-t)^t)$ est une fonction de Schwartz sur G_0 définie par $f((s-t)^t)(g_0) = f((s-t) \cdot g_0^t)$, avec $g_0^t = \exp tX \cdot g_0 \cdot \exp -tX$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, le noyau f_{π} de $\pi(f)$ est donné par

$$f_{\pi}(s, t) = \pi_0\left(f((s-t)^t)\right).$$

Soient $(C_1, \dots, C_q)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a} = \langle Y, Z \rangle$ dans $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{w} = \sum_{i=1}^q \mathbb{R}C_i$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a}$ et $G_0 = W \cdot A$, avec $A = \exp \mathfrak{a}$ et $W = \exp \mathbb{R}C_1 \cdots \exp \mathbb{R}C_q$. La mesure de Haar sur G_0 est le produit $dw dr du$, où dw est la mesure de Haar sur $G_0/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur $W = \exp \mathfrak{w}$, et $da = dr du$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^2$. Moyennant ces données, on a

$$\pi_0\left(f((s-t)^t)\right) = \int_{G_0} f((s-t)^t)(g_0)\pi_0(g_0)dg_0$$

$$\begin{aligned}
&= \int_W \int_A f((s-t) \cdot (w \cdot a)^t) \pi_0(w) \pi_0(a) da dw \\
&= \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + uZ)^t) \pi_0(w) \chi_l(\exp(rY + uZ)) dr du dw \\
&= \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + (u + tr)Z)) \pi_0(w) \\
&\quad \chi_l(\exp(rY + uZ)) dr du dw \\
&= \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + uZ)) \pi_0(w) e^{-i(u-tr)} dr du dw.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
&(\pi(f)\xi)(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + uZ)) e^{-i(u-tr)} dr du \pi_0(w) \xi(t) dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right) \xi(t) dt,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ est un opérateur défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} : \mathcal{S}(G_0) &\longrightarrow \mathcal{S}((G_0/A, l_0) \times \mathbb{R}) \\
\tilde{f} &\longrightarrow \mathcal{T}(\tilde{f})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}(\tilde{f})(g_0, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}((g_0 \cdot \exp(rY + uZ))^t) \chi_l(\exp(rY + uZ)) dr du \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(g_0^t \cdot \exp(rY + uZ)) e^{-i(u-tr)} dr du,
\end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in \mathcal{S}(G_0)$, $t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}((G_0/A, l_0) \times \mathbb{R})$ qui désigne l'espace des fonctions de Schwartz sur $G_0/A \times \mathbb{R}$ telles que

$$\tilde{f}(g_0 \cdot \exp a, t) = \overline{\chi_l(\exp a)} \tilde{f}(g_0, t), \forall a \in \mathfrak{a}.$$

Soit R'_0 un rétracte de $\mathcal{T}$, c'est à dire une application continue de $\mathcal{S}(G_0/A \times \mathbb{R}, l_0)$ dans $\mathcal{S}(G_0)$, telle que $\mathcal{T} \circ R'_0 = Id$. On peut prendre par exemple une fonction de Schwartz α en une variable telle que $\hat{\alpha}(1) = 1$ et poser

$$R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + uZ)) = \alpha(u) \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(w^{-t}, t) e^{-itr} dt.$$

Ensuite, en utilisant le théorème d'inversion de Fourier, on vérifie que R'_0 est le rétracte de $\mathcal{T}$.

Ainsi, on a

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right) \xi(t) dt.$$

Soit $F \in \mathcal{S}((G/H)^2, l)$; nous voulons déterminer $f \in \mathcal{S}(G)$ telle que $f_\pi = F$. Ceci équivaut à : $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$F(\exp sX \cdot g_0, \exp tX \cdot g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right)(g_0, g'_0),$$

ce qui nous donne

$$F(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right)(g_0, g'_0),$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F(\exp(s+t)X \cdot g_0, \exp tX \cdot g'_0).$$

Alors $G(s, t) \in \mathcal{S}((G_0/H)^2, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence π_0 possède un rétracte R_0 qui envoie $\mathcal{S}((G_0/H)^2, l_0)$ dans $\mathcal{S}(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in \mathcal{S}(G_0)$ et est continu en s et t . Posons

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= \hat{f}_0(s, t)(g_0) \\ &= \int_A f_0(s, t)(g_0 \cdot a) \chi_I(a) da \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s, t))(s, t)(g_0 \cdot \exp(rY + uZ)) e^{-iu} dr du. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $\mathcal{S}(G_0/A, l|_{\mathfrak{a}})$ le sous-espace de $\mathcal{S}(G_0)$ formé des fonctions $f \in \mathcal{S}(G_0)$ telles que

$$f(w \cdot \exp a) = \overline{\chi_l(\exp a)} f(w), \forall a \in \mathfrak{a}, w \in W,$$

alors nous remarquons que $f_1(s, t) \in \mathcal{S}(G_0/A)$ et est continue en s et t .

Si nous fixons s , la fonction $f_2(s)(g_0, t) = f_1(s, t)(g_0) \in \mathcal{S}((G_0/A, l_0) \times \mathbb{R})$.

Ceci étant, si nous désignons par R l'application linéaire continue qui à $F \in \mathcal{S}((G/H)^2, l)$ associe la fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ telle que $f_\pi = F$. alors R est défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R(F)(\exp sX \cdot g_0) &= f(\exp sX \cdot g_0) = f(\exp sX \cdot w \cdot \exp(rY + uZ)) \\ &= R'_0(f_2(s))(w \cdot \exp(rY + uZ)) \\ &= \alpha(u) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} R_0\left(F(\exp(s+t)X \cdot -, \exp tX \cdot -)\right)(w^{-t} \cdot \exp(r'Y + u'Z)) \\ &\quad e^{-iu'} e^{-itr} dr' du' dt. \end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}\left(f(s-t)\right)(w, t) dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}\left(R'_0(f_2(s-t))\right)(w, t) dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) f_2(s-t)(w, t) dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) f_1(s-t, t)(w) dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \int_{\mathbb{R}^2} f_0(s-t, t)(w \cdot \exp a) \chi_l(a) da dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \pi_0(g_0) R_0(G(s-t, t))(g_0) dg_0 \xi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \pi_0 \left(R_0(G(s-t, t)) \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} G(s-t, t) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(s, t) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le rétracte cherché.

A présent, supposons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$. On sait que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_0$, avec $X \notin \mathfrak{g}_0$, $\varphi(X) = 1$. Alors, nécessairement X est la seule direction de $\mathfrak{h}$ qui sort de $\mathfrak{g}_0$. On peut écrire $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$.

D'autre part, étant donné que $X \in \mathfrak{h}$, $[X, Y] = Z$ et $\langle l, [X, Y] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$, on en déduit que $Y \notin \mathfrak{h}$. Donc $\mathfrak{a} = \langle Y, Z \rangle \not\subset \mathfrak{h}$.

Nous introduisons une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ notée $\mathfrak{h}'$, telle que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{a}$. On constate que $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}Y$ est une polarisation en l contenue dans $\mathfrak{g}_0$; et d'après ([B.C. et al]), $\pi' = \text{ind}_{H'}^G \chi_{l, \mathfrak{h}'}$ est une représentation unitaire irréductible de G , équivalente à $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$, avec $H' = \exp \mathfrak{h}'$.

D'après ce que nous venons de démontrer, l'application $S(G) \rightarrow S((G/H')^2, l); f \rightarrow f_{\pi'}$ est un homomorphisme surjectif. Donc, il existe une application linéaire continue $R' : S((G/H')^2, l) \rightarrow S(G); F \rightarrow f$ telle que $f_{\pi'} = F$.

Par conséquent, pour achever notre preuve, il nous suffit de construire un opérateur d'entrelacement noté $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$, entre les espaces de noyaux $S((G/H)^2, l)$ et $S((G/H')^2, l)$, tel que pour toute fonction $F \in S((G/H)^2, l)$, on ait

$$\text{noyau} \left(\pi(R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)) \right) = F.$$

Soit l'opérateur $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : \mathcal{H}_{\pi} \rightarrow \mathcal{H}_{\pi'}$ défini par : $\forall g \in G, \xi \in \mathcal{H}_{\pi}$,

$$\begin{aligned}
T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \xi(g) &= \int_{H'/H \cap H'} \xi(g \cdot a) \chi_l(a) da \\
&= \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp sY) ds.
\end{aligned}$$

On sait que l'opérateur $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ entrelace formellement π et π' .

Ainsi, on définit l'opérateur $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : \mathcal{S}((G/H)^2, l) \rightarrow \mathcal{S}((G/H')^2, l)$, par : $\forall g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1, g_2) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} F(g_1 \cdot \exp s_1 Y, g_2 \cdot \exp s_2 Y) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Montrons que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in \mathcal{S}((G/H')^2, l)$.

1- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est bien défini. En effet, comme Y est une direction qui sort de $\mathfrak{h}$ et que F est une fonction de Schwartz dans toutes les directions qui sortent de $\mathfrak{h}$, on en déduit que l'intégrale double ci-dessus converge.

2- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie la relation de covariance de $\mathcal{S}((G/H')^2, l)$ par rapport à H' .

En effet, sur $\exp(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0) = \exp(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)$, cette relation de covariance est vérifiée ; pour cela, en prenant $h_1, h_2 \in \exp(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0)$, et en considérant l'écriture de

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2),$$

il suffit de constater que

$$\begin{aligned} g_i \cdot h_i \cdot \exp s_i Y &= g_i \cdot \exp s_i Y \cdot \exp -s_i Y \cdot h_i \cdot \exp s_i Y \\ &= g_i \cdot \exp s_i Y \cdot h_i \\ \text{car } \exp -s_i Y \cdot h_i \cdot \exp s_i Y &= h_i. \text{ puisque } h_i \in G_0. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique à $h_i, i = 1, 2$, la relation de covariance par rapport à H , car $h_1, h_2 \in H$.

De même, sur $\exp \mathbb{R}Y$, cette relation de covariance est aussi vérifiée ; en effet, on a $\exp t_i Y \cdot \exp s_i Y = \exp(t_i + s_i)Y$, pour $i = 1, 2$; ensuite, on fait le changement de variable $s_i \rightarrow -t_i + s_i$.

3- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est une fonction de Schwartz sur tout $V' = \exp \mathfrak{v}'$ où $\mathfrak{v}'$ est un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$. En effet, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{v}' \oplus \mathfrak{h}'$, avec $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}'_0 \oplus \mathbb{R}X$; d'où $G = V'_0 \cdot H' \cdot \exp \mathbb{R}X$.

Posons $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'_0 \oplus \mathbb{R}Y$; alors $\mathfrak{v}$ est un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Donc F est une fonction de Schwartz sur $V'_0 = \exp \mathfrak{v}'_0$. Notons aussi que dans l'expression de $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$, la fonction F ne subit aucune transformation dans la direction $\mathfrak{v}'_0$. Donc $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$

est une fonction de Schwartz sur V'_0 . A présent, il nous suffit d'étudier le comportement de $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}F)$ dans la direction X .

Soient $v_1, v_2 \in V'_0, h_1, h_2 \in H', r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}F)(g_1, g_2) \\
&= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}F)(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp r_1 X, v_2 \cdot h_2 \cdot \exp r_2 X) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp r_1 X \cdot \exp s_1 Y, v_2 \cdot h_2 \cdot \exp r_2 X \cdot \exp s_2 Y) ds_1 ds_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(v_1 \cdot h_1 ; \cdot \exp s_1 Y^{\exp r_1 X} \cdot \exp r_1 X, \\
&\quad v_2 \cdot h_2 \cdot \exp s_2 Y^{\exp r_2 X} \cdot \exp r_2 X) ds_1 ds_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp(s_1 Y + r_1 s_1 Z), v_2 \cdot h_2 \cdot \exp(s_2 Y + r_2 s_2 Z)) \\
&\quad \overline{\chi_l(\exp r_1 X)} \chi_l(\exp r_1 X) ds_1 ds_2. \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, v_2 \cdot h_2 \cdot \exp s_2 Y) \\
&\quad \overline{\chi_l(\exp r_1 s_1 Z)} \chi_l(\exp r_2 s_2 Z) ds_1 ds_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, v_2 \cdot h_2 \cdot \exp s_2 Y) \\
&\quad e^{ir_1 s_1} e^{-ir_2 s_2} ds_1 ds_2,
\end{aligned}$$

avec $\exp s_i Y^{\exp r_i X} = \exp r_i X \cdot \exp s_i Y \cdot \exp -r_i X, i = 1, 2$. L'intégrale double ci-dessus est une transformée de Fourier partielle de F dans la direction Y , et dans les variables r_1, r_2 . Or, comme F est une fonction de Schwartz dans la direction Y , alors toute transformée de Fourier partielle de F dans cette direction est aussi une fonction de Schwartz. Par conséquent,

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}F)(v_1 \cdot h_1 \cdot \exp r_1 X, v_2 \cdot h_2 \cdot \exp r_2 X)$$

est une fonction de Schwartz dans les variables r_1 et r_2 , c'est à dire, dans la direction X .

Ainsi, $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}',\mathfrak{h}}F) \in \mathcal{S}((G/H')^2, l)$. Donc, comme dans le premier cas, nous pouvons définir la fonction $f \in \mathcal{S}(G)$ image de la fonction $F \in \mathcal{S}((G/H)^2, l)$ par le rétracte R de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& R(F)(\exp sX \cdot g_0) \\
&= f(\exp sX \cdot g_0) = f(\exp sX \cdot w \cdot \exp(rY + uZ)) \\
&= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp sX \cdot w \cdot \exp(rY + uZ)) \\
&= \mathcal{S}((\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)''''(s))(w \cdot \exp(rY + uZ)) \\
&= \alpha(u) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} R'_0((\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(s + t \cdot -, t \cdot -)) \\
&\quad (w^{-t} \cdot \exp(r'Y + u'Z)) e^{-iu'} e^{-itr} dr' du' dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le rétracte cherché.

3.1.8- Remarque

Dans le cas général où G est un groupe de Lie exponentiel quelconque d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le théorème précédent n'est plus vraie. En effet, si $\pi \in \hat{G}$ et si même $f \in C_c^\infty(G)$, c'est à dire que f est C^∞ à support compact sur G , le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ n'est plus forcément une fonction de Schwartz sur G/H . Ceci apparaît particulièrement dans les représentations de dimension infinie du groupe $ax + b$, où le noyau f_π de $\pi(f)$ n'est pas à décroissance rapide sur G/H , c'est à dire que $f_\pi \notin \mathcal{S}((G/H)^2, l)$. D'où la nécessité d'introduire de nouveaux espaces de fonctions adaptés à notre problème.

3.2- LE CAS EXPONENTIEL.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que G est un groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble exponentiel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

3.2.1- Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y \in \mathbb{R}^n$, nous dirons qu'une fonction $F_y : x \rightarrow F_y(x)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ est à décroissance exponentielle sur $\mathbb{R}^n$, localement uniforme en y , si pour tout $R > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante $C_{R,\alpha} > 0$ telle que

$$|F_y(x)| \leq C_{R,\alpha} e^{-\alpha \|x\|}, \forall \|y\| \leq R.$$

3.2.2- Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, V un espace vectoriel réel normé de dimension n , et $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V . Nous désignons par $\mathcal{Hol}(V)$ l'espace de toutes les fonctions $F : V \rightarrow \mathbb{C}$, qui admettent un prolongement holomorphe F sur $V_{\mathbb{C}}$ telle que la fonction $F_{iy} : x \rightarrow F_{iy}(x) = F(x + iy)$ de V dans $\mathbb{C}$ soit à décroissance exponentielle sur V , localement uniforme en y , ce qui signifie que $\forall R > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante $C_{R,\alpha} > 0$ telle que

$$|F(x + iy)| \leq C_{R,\alpha} e^{-\alpha \|x\|_V}, \forall \|y\|_V \leq R.$$

3.2.3- Remarque

Si nous prenons $y = 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on constate que toute fonction $F(x) \in \mathcal{Hol}(V)$ est à décroissance exponentielle en x sur V .

Donnons ici quelques propriétés importantes de l'espace $\mathcal{Hol}(V)$, propriétés qui seront utiles dans la suite de notre travail.

3.2.4- Proposition

Si $F \in \mathcal{Hol}(V)$, alors pour tout $x, y \in V$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- a) F_{iy} appartient à $\mathcal{Hol}(V)$.
- b) La transformée de Fourier globale $\hat{F}_{iy}$ de F_{iy} appartient à $\mathcal{Hol}(V)$.
- c) Toute transformée de Fourier partielle de F_{iy} appartient à $\mathcal{Hol}(V)$.
- d) Pour toute forme linéaire β sur V , la fonction $e^{\beta(x)} F_{iy}(x)$ appartient à $\mathcal{Hol}(V)$.
- e) Pour toute forme quadratique $q(x)$ sur V , la fonction $e^{iq(x)} F_{iy}$ appartient à $\mathcal{Hol}(V)$.
- f) $\mathcal{Hol}(V)$ est stable par translation.

Preuve :

- a) La preuve de a) est évidente.

b) Soit $F \in \mathcal{Hol}(V)$; pour $v, w, y \in V$, posons

$$\begin{aligned}\hat{F}_{iy}(v) &= \int_V F_{iy}(x) e^{-i\langle x, v \rangle} dx \\ &= \int_V F(x + iy) e^{-i\langle x, v \rangle} dx.\end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus est convergente à cause de la décroissance exponentielle de F dans la direction x ; donc la fonction $\hat{F}_{iy}$ est bien définie et on peut la prolonger sur $V_{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{F}_{iy}(v + iw) &= \int_V F_{iy}(x) e^{-i\langle x, v + iw \rangle} dx \\ &= \int_V (F(x + iy) e^{\langle x, w \rangle}) e^{-i\langle x, v \rangle} dx.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{F}_{iy}}{\partial v} &= \int_V -ix F(x + iy) e^{\langle x, w \rangle} e^{-i\langle x, v \rangle} dx, \\ \frac{\partial \hat{F}_{iy}}{\partial w} &= \int_V x F(x + iy) e^{\langle x, w \rangle} e^{-i\langle x, v \rangle} dx;\end{aligned}$$

d'où $(\frac{\partial}{\partial v} + i\frac{\partial}{\partial w})\hat{F}_{iy} = 0$ et d'après les conditions de Cauchy, on en déduit que $\hat{F}_{iy}$ est holomorphe. De plus, en utilisant la théorie de Cauchy sur les intégrales curvilignes de fonctions holomorphes, on vérifie que pour tout $b, u, v \in V$,

$$(F_{i(y+b)})(u + iv) = e^{-\langle b, u + iv \rangle} \hat{F}_{iy}(u + iv).$$

Comme la transformée de Fourier $(F_{i(y+b)})(u + iv)$ est bornée, car majorée par la norme de $(F_{i(y+b)})$ dans $L^1(V)$, on en déduit que $e^{-\langle b, u + iv \rangle} \hat{F}_{iy}(u + iv)$ est bornée en u , localement uniforme en $y + b$ et en v , c'est à dire que pour tout $R > 0$ tel que $\|y + b\|_V$ et $\|v\|_V \leq R$, il existe une constante positive C_R telle que

$$|e^{-\langle b, u + iv \rangle} \hat{F}_{iy}(u + iv)| \leq C_R.$$

Ainsi $|\hat{F}_{iy}(u + iv)| \leq C_R e^{<b, u>}$. Donc, pour tout $\alpha > 0$ et $b = (b_1, \dots, b_m) \in V$ tels que

$$b_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } u_j < 0, \\ -\alpha & \text{si } u_j \geq 0, \end{cases}$$

on obtient

$$|\hat{F}_{iy}(u + iv)| \leq C_R e^{-\alpha \|u\|_V}, \forall \|v\|_V \leq R.$$

Par conséquent $\hat{F}_{iy}(u + iv)$ est à décroissance exponentielle en u , localement uniforme en v et y . Ainsi, $\hat{F}_{iy} \in \mathcal{Hol}(V)$.

c) Soit $F \in \mathcal{Hol}(V)$, $y \in V$ et V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de V , tels que $V_1 \oplus V_2 = V$. Alors nous définissons la transformée de Fourier partielle de F_{iy} dans la direction V_2 de la manière suivante

$$\begin{aligned} (F_{iy})^2(v_1 \oplus v_2) &= \int_{V_2} F_{iy}(v_1 + t) e^{-i<v_2, t>} dt \\ &= \int_{V_2} F(v_1 + t + iy) e^{-i<v_2, t>} dt \end{aligned}$$

avec $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Alors pour les mêmes raisons qu'en (b), l'intégrale ci-dessus est convergente ; et donc $(F_{iy})^2$ est bien définie. Nous prolongeons $(F_{iy})^2$ sur $V_{\mathbb{C}}$ de la manière suivante

$$(F_{iy})^2(v_1 + iv'_1 \oplus v_2 + iv'_2) = \int_{V_2} F(v_1 + iv'_1 + t + iy) e^{-i<v_2 + iv'_2, t>} dt,$$

avec $v_1, v'_1 \in V_1, v_2, v'_2 \in V_2$. Alors pour les mêmes raisons qu'en (b), l'intégrale ci-dessus est convergente ; et donc $(F_{iy})^2$ est bien définie sur $V_{\mathbb{C}}$. D'autre part, on a :

$$\frac{\partial (F_{iy})^2}{\partial v_1} = \frac{\partial (F_{iy})^2}{\partial v'_1} = 0 ;$$

$$\frac{\partial (F_{iy})^2}{\partial v_2} = \int_{V_2} -it F_{iy}(v_1 + iv'_1 + t) e^{<v'_2, t>} e^{-i<v_2, t>} dt ;$$

$$\frac{\partial (F_{iy})^2}{\partial v'_2} = \int_{V_2} t F_{iy}(v_1 + iv'_1 + t) e^{<v'_2, t>} e^{-i<v_2, t>} dt ;$$

d'où $\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_2}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial v_1'} + \frac{\partial}{\partial v_2'}\right)\right)(F_{iy})^2 = 0$ et d'après les conditions de Cauchy, on en déduit que $(F_{iy})^2$ est holomorphe.

D'autre part, d'après la théorie de Cauchy sur les intégrales curvilignes de fonctions holomorphes, on a

$$\hat{F}_{ia}(v) = e^{-\langle a, v \rangle} \hat{F}(v), \forall a, v \in V_{\mathbb{C}},$$

où $V_{\mathbb{C}}$ désigne le complexifié de V . Par conséquent, on vérifie que $\forall w = w_1 \oplus w_2 \in V_1 \oplus V_2, \forall a \in V_1, b \in V_2$,

$$\begin{aligned} & e^{-\langle a, v_1 \rangle} e^{-\langle b, v_2 + iw_2 \rangle} (F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2(v_1 \oplus v_2) \\ &= e^{-\langle a, v_1 \rangle} e^{-\langle b, v_2 + iw_2 \rangle} (F_{iy})^2(v_1 + iw_1 \oplus v_2 + iw_2) \\ &= (e^{-\langle a, v_1 \rangle} F_{i(y+b)})^2(v_1 + iw_1 \oplus v_2 + iw_2). \end{aligned}$$

Or, comme la fonction $(e^{-\langle a, v_1 \rangle} F_{i(y+b)})^2(v_1 + iw_1 \oplus v_2 + iw_2)$ est bornée, on en déduit que $e^{-\langle a, v_1 \rangle} e^{-\langle b, v_2 + iw_2 \rangle} (F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2(v_1 \oplus v_2)$ est bornée en v_2 , localement uniforme en $y + b$ et en $w_1 + w_2$, c'est à dire que pour tout $R > 0$ tel que $\|y + b\|_V$ et $\|w_1 + w_2\|_V \leq R$, il existe une constante positive C_R telle que

$$|e^{-\langle a, v_1 \rangle} e^{-\langle b, v_2 + iw_2 \rangle} (F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2(v_1 \oplus v_2)| \leq C_R.$$

Ainsi $|(F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2(v_1 \oplus v_2)| \leq C_R e^{\langle a, v_1 \rangle} e^{\langle b, v_2 \rangle}$. Donc, pour tout $\alpha > 0$, $a = (a_1, \dots, a_r), v_1 = (v_1^1, \dots, v_1^r) \in V_1, b = (b_1, \dots, b_s)$ et $v_2 = (v_2^1, \dots, v_2^s) \in V_2$ tels que

$$a_k = \begin{cases} \alpha & \text{si } v_1^k < 0, \\ -\alpha & \text{si } v_1^k \geq 0, \end{cases}$$

et

$$b_j = \begin{cases} \alpha & \text{si } v_2^j < 0, \\ -\alpha & \text{si } v_2^j \geq 0, \end{cases}$$

on obtient

$$|(F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2(v_1 \oplus v_2)| \leq C_R e^{-\alpha(\|v_1\|_V + \|v_2\|_V)}, \quad \forall \|w\|_V = \|w_1\|_{V_1} + \|w_2\|_{V_2} \leq R.$$

Par conséquent $(F_{iy})_{i(w_1 \oplus w_2)}^2$ est à décroissance exponentielle en v_2 localement uniforme en y et $w_1 + w_2$. Ainsi, $(F_{iy})^2(v_1 \oplus v_2) \in \mathcal{Hol}(V)$.

d) La preuve de d) résulte du fait que la fonction $e^{\beta(x+iy)}F(x+iy)$ est holomorphe car elle vérifie les conditions de Cauchy, et que la fonction $e^{\beta(x+iy)}F(x+iy)$ est à décroissance exponentielle en x , localement uniforme en y .

e) Soient $F \in \mathcal{Hol}(V)$ et $q(x)$ une forme quadratique sur V ; considérons la fonction $G(x) = e^{iq(x)}F(x)$, avec $x \in V$. La fonction $G(x)$ est à décroissance exponentielle en x , car F l'est. De plus, on peut étendre $G(x)$ sur $V_{\mathbb{C}}$ de la manière suivante

$$G : x + iy \rightarrow G(x + iy) = e^{iq(x+iy)}F(x + iy), \forall x, y \in V.$$

Cette extension est une fonction holomorphe car elle vérifie les conditions de Cauchy.

Posons $q(x) = \sum_{k=1}^n a_{k,l} x_k x_l$, où $x_k, 1 \leq k \leq n$ sont les coordonnées de x dans une base de V et les coefficients réels $a_{k,l}$ dépendent de q . Ainsi, pour tout $R > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+$ et pour tout y fixé dans V , avec $\|y\|_V \leq R$, on a

$$\begin{aligned} G(x + iy) &= e^{iq(x+iy)}F(x + iy) \\ &= e^{iq(x)}e^{iq(iy)}e^{-\left(\sum_{k,l=1}^n a_{k,l} x_k y_l\right)}e^{-\left(\sum_{k,l=1}^n a_{k,l} x_l y_k\right)}F(x + iy). \end{aligned}$$

Posons $\beta(x) = -\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{k,l} y_l x_k$ et $\beta'(x) = -\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,l} y_k x_l$; alors β et β' sont deux formes linéaires continues sur V . Ainsi, on a

$$\sup_{\|y\|_V \leq R} \sup_{x \in V} e^{\alpha\|x\|_V} |G(x + iy)| \leq |e^{iq(x+iy)}| e^{\alpha\|x\|_V} e^{\beta(x)} e^{\beta'(x)} F(x + iy) |.$$

Or, la fonction $e^{iq(x+iy)}$ croît exponentiellement mais est bornée en y car $\|y\|_V \leq R$. De même, la fonction $e^{\alpha\|x\|_V} e^{\beta(x)} e^{\beta'(x)} F(x + iy)$ est bornée, ceci d'après la propriété d) et le fait que $F \in \mathcal{Hol}(V)$. Donc, il existe une constante $C_{R,\alpha,q}$ telle que

$$|e^{iq(x+iy)}| e^{\alpha\|x\|_V} e^{\beta(x)} e^{\beta'(x)} F(x + iy) | \leq C_{R,\alpha,q}.$$

On en déduit que

$$\sup_{\|y\|_V \leq R} \sup_{x \in V} e^{\alpha\|x\|_V} |G(x + iy)| \leq C_{R,\alpha,q}.$$

Par conséquent $G(x) \in \mathcal{H}ol(V)$.

f) La preuve de f) est évidente.

3.2.5-

A présent, soient $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathfrak{g}^*$ fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. D'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky et

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1$$

où $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})}$ et $\mathfrak{h}_0 = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$ est une polarisation en $l|_{\mathfrak{n}}$.

D'autre part, soient

- $\mathfrak{w}_1$, un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{v}$, un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$.
- $\mathfrak{v}_1$, un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{v}$ dans $\mathfrak{v}$:
- $\mathfrak{w}_0$, un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}_0$ dans $\mathfrak{n}$.

On remarque que $\mathfrak{v}_1$ est aussi un sous-espace contenu dans $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$, et coexponentiel à $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$; d'autre part, on constate que $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}_0$, ce qui implique que $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{h}$.

Ainsi, des conditions précédentes, on obtient les égalités suivantes :

- $\mathfrak{w}_1 \oplus (\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}) = \mathfrak{g}$;
- $\mathfrak{v} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$;
- $\mathfrak{v}_1 \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{v}) = \mathfrak{v}$;
- $\mathfrak{v}_1 \oplus (\mathfrak{h}_1 + (\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n})) = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$;
- $\mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{n}$.

Soulignons aussi que $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}_0$, ce qui implique que $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{h}$.

3.2.5.1- Remarque

Dans toute l'étude qui suit, les sous-espaces vectoriels du même type que $\mathfrak{v}_1$ seront considérés dans un sous-espace $\mathfrak{v}$ fixe, coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$.

3.2.5.2- Proposition

$(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l$ est un idéal de $\mathfrak{g}(l_n)$. D'autre part, l'un ou l'autre des cas suivants se présente :

- (i) $[\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$, par conséquent $\mathfrak{g}(l_n) / ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$ est abélienne et $\mathfrak{g}(l_n) \subset \mathfrak{h}$.
- (ii) $\mathfrak{g}(l_n)$ est une algèbre de Lie nilpotente de pas 2 modulo $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l$ et $\mathfrak{g}(l_n) / ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$ est une algèbre de Heisenberg.

Preuve :

Montrons d'abord que $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l$ est un idéal de $\mathfrak{g}(l_n)$. On sait que $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l \subset \mathfrak{g}(l_n)$, car $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}(l_n)$ et $\mathfrak{n}(l_n) = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(l_n)$. D'autre part, $[(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l, \mathfrak{g}(l_n)] \subset \ker l$, ceci d'après la définition de $\mathfrak{g}(l)$. De plus, $[(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l, \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{g}(l)$, car $[\mathfrak{n}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{g}(l) \cap \ker l \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}(l) \cap \ker l \subset \mathfrak{g}(l_n)$ et $[\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{g}(l)$.

Par conséquent, $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l \subset \mathfrak{g}(l_n)$ et $[(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l, \mathfrak{g}(l_n)] \subset (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l$; ce qui prouve la première partie de la proposition.

Si $[\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$, alors on constate sans ambiguïté que (i) est vérifié.

A présent, supposons que l'inclusion ci-dessus soit fausse. Alors (i) n'est pas vérifié et $(0) \neq [\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{n}$. On vérifie aussi que $[\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{g}(l)$. Ainsi $[\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)] \subset \mathfrak{g}(l) \cap \mathfrak{n}$, d'où

$$[\mathfrak{g}(l_n), [\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)]] \subset \mathfrak{g}(l) \cap \ker l \subset (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l.$$

Par conséquent, $\mathfrak{g}(l_n)$ est une algèbre de Lie nilpotente de pas 2 modulo $(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l$. De plus, comme

$$[\mathfrak{g}(l_n), [\mathfrak{g}(l_n), \mathfrak{g}(l_n)]] \subset (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l \cap \mathfrak{n},$$

alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}(l_n) / ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$ est isomorphe à une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{h}_n$ de dimension $2n + 1$; on en déduit que le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{q})$ de $\mathfrak{g}(l_n) / ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_n)) \cap \ker l)$ est de dimension 1.

Soit $u \in \mathfrak{g}(l_{|n})$ tel que $u \in \mathfrak{z}(\mathfrak{q})$, c'est à dire que $[u, \mathfrak{g}(l_{|n})] \subset ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l)$; alors

$$\langle l, [u, \mathfrak{g}(l_{|n})] \rangle = 0, \text{ par conséquent } u \in \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}.$$

Ainsi, $u \in (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}) \cap \mathfrak{g}(l_{|n})$, ce qui implique que $u \in \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})$. On obtient finalement que

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{q}) = (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) / ((\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l),$$

avec $\mathfrak{n}(l_{|n}) \subset \mathfrak{h}$. Ainsi, (ii) est vérifié, ce qui achève notre preuve.

Comme $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(l_{|n}) + \mathfrak{h}$, alors en tenant compte de la proposition précédente, nous pouvons choisir $\mathfrak{v}_1$ comme un sous-espace isotrope pour la forme B_{l_1} , avec $l_1 = l|_{\mathfrak{g}(l_{|n})}$.

Des égalités précédentes, on en déduit que $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; de plus, on a

$$\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{g}.$$

3.2.6-

Soit $\mathfrak{B} = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, telle que

- $(A_1, \dots, A_q)$ est une base de $\mathfrak{w}_1$, coexponentielle à $\mathfrak{g}(l_{|n}) + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$,
- $(B_1, \dots, B_s)$ est une base de $\mathfrak{w}_0$ coexponentielle à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{n}$,
- $(C_1, \dots, C_t)$ est une base de $\mathfrak{v}_1$ coexponentielle à $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|n}))$ dans $\mathfrak{g}(l_{|n})$, avec $\mathfrak{v}_1 \subset \mathfrak{v}$, où $\mathfrak{v}$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l_{|n}) + \mathfrak{n}$.

Alors on peut écrire G sous la forme

$$G = W_1 \cdot W_0 \cdot H \cdot V_1 = W_1 \cdot W_0 \cdot V_1 \cdot H,$$

où $W_1 = \exp \mathfrak{w}_1$, $W_0 = E_{\mathfrak{w}_0}(\mathbb{R}^s)$, $H = \exp \mathfrak{h}$, $V_1 = \exp \mathfrak{v}_1$ et

$$\exp w = \exp(w_1 A_1 + \dots + w_q A_q), \forall w = (w_1, \dots, w_q) \in \mathbb{R}^q,$$

$$E_{\mathfrak{w}_0}(n) = E_{\mathfrak{w}_0}(n_1, \dots, n_s) = \exp(n_1 B_1) \cdot \dots \cdot \exp(n_s B_s), \forall (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{R}^s,$$

$$\exp v = \exp(v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t), \forall v = (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{R}^t.$$

L'application $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ dans G/H , définie par

$$(w_1, \dots, w_q, n_1, \dots, n_s, v_1, \dots, v_t) \rightarrow \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \cdot H$$

est un homéomorphisme, car $\mathfrak{B}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. D'autre part, il est bien connu qu'il existe une mesure $\mu_{G,H}$ relativement invariante sur G/H (cf 1.2.10). Nous voulons donner ici une expression explicite de $\mu_{G,H}$ en fonction des coordonnées w, n, v . Rappelons que le caractère $\Delta_{G,H}$ de H défini par

$$\Delta_{G,H}(\exp h) = \frac{\Delta_G(\exp h)}{\Delta_H(\exp h)} = e^{-\text{Tr } \text{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} h}, h \in \mathfrak{h},$$

admet une extension notée Δ sur le normalisateur $N_{\mathfrak{h}}$ de $\mathfrak{h}$, avec

$$N_{\mathfrak{h}} = \{x \in G / \text{Ad } x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\} = \exp \mathfrak{n}_{\mathfrak{h}},$$

où $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}} = \{X \in \mathfrak{g} / \text{ad } X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$; en particulier Δ est bien définie sur $G(l_{\mathfrak{n}})$, car $G(l_{\mathfrak{n}}) \subset N_{\mathfrak{h}}$. De plus, on sait aussi que

$$\int_{N/N \cap H} \varphi(\exp v' \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot (\exp v')^{-1}) d\dot{n} = \Delta(\exp v') \int_{N/N \cap H} \varphi(E_{\mathfrak{w}_0}(n)) d\dot{n},$$

pour tout $\varphi \in K(G, H)$, $v' \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$.

Moyennant ces données, on vérifie que l'application

$$\varphi \rightarrow \mu_{G,H}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v) \Delta(\exp v) dw dn dv$$

avec $\varphi \in K(G, H)$, définit une mesure relativement G -invariante sur G/H . En effet, on utilise la formule de Campbell-Baker-Haussdorf puis on intègre dans les directions n, w et v dans cet ordre; alors en utilisant l'invariance de l'intégrale en n sur $N/N \cap H$, on obtient que pour $w' \in \mathfrak{w}_1$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi(\exp w' \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v) \Delta(\exp v) dw dn dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi(\exp(w + w') \cdot q'(w, w') \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v) \Delta(\exp v) dw dn dv \\ & \quad \text{avec } q'(w, w') \in N \\ &= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v) \Delta(\exp v) dw dn dv; \end{aligned}$$

ceci nous donne l'invariance dans la direction w . De même, pour $n' \in \mathfrak{w}_0$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(E_{\mathfrak{w}_0}(n') \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot \exp w^{-1} \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n') \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \\
&\quad \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n')^{w^{-1}} \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&\quad \text{avec } E_{\mathfrak{w}_0}(n')^{w^{-1}} = \exp w^{-1} \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n') \cdot \exp w \in N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv ;
\end{aligned}$$

d'où l'invariance dans la direction n . Enfin, pour $v' \in \mathfrak{v}_1$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp v' \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w^{v'} \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n)^{v'} \cdot \exp v' \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&\quad \text{où } X^{v'} = \exp v' \cdot X \cdot \exp -v', \forall X \in G \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot q(v', w) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n)^{v'} \cdot \exp v' \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&\quad \text{où } q(v', w) \in N.
\end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant d'abord dans la direction n puis dans w , et en utilisant le fait que l'intégrale en n est invariante sur $N/N \cap H$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp v' \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n)^{v'} \cdot \exp v' \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv.
\end{aligned}$$

Ensuite, on fait le changement de variable $\exp v'' = (\exp v') \cdot \exp v$, ce qui entraîne que $dv'' = dv$, car $v, v', v'' \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})/(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{\mathfrak{n}})) \cap \ker l$ qui est une algèbre abélienne ou de Heisenberg. Finalement, en utilisant l'égalité

$$\int_{N/N \cap H} \varphi(\exp v' \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp -v') d\dot{n} = \Delta(\exp v') \int_{N/N \cap H} \varphi(E_{\mathfrak{w}_0}(n)) d\dot{n},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp v' \cdot \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v \right) \Delta(\exp v) dw dn dv \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v'' \right) \Delta(\exp v') \Delta(\exp v')^{-1} \Delta(\exp v'') dw dn dv'' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{q+s+t}} \varphi \left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v'' \right) \Delta(\exp v'') dw dn dv'' ;
 \end{aligned}$$

d'où l'invariance dans la direction v .

Nous allons donc identifier l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ de la représentation unitaire irréductible $\pi_{l,\mathfrak{h}} = \text{ind}_H^G \chi_{l,\mathfrak{h}}$ avec $L^2(G/H) = L^2(W_1 \times W_0 \times V_1) = L^2(\mathbb{R}^{q+s+t})$. Par conséquent, les noyaux des opérateurs $\pi(f)$, seront des fonctions définies sur $(W_1 \times W_0 \times V_1, W_1 \times W_0 \times V_1)$.

A présent, nous pouvons définir les espaces de fonctions qui correspondent au cas exponentiel. Comme nous l'avons souligné en introduction, nous allons les désigner par les initiales $\mathcal{ES}()$, où la lettre $\mathcal{S}$ suggère qu'il s'agira d'espaces analogues de l'espace des fonctions de Schwartz, et la lettre $\mathcal{E}$ indique qu'il faudra exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.

3.2.7-Définition : (L'espace de noyaux)

Nous supposons toujours que G est un groupe de Lie exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{n}, \mathfrak{h}$ et $l \in \mathfrak{g}^*$ sont définis comme au paragraphe 3.2.5.

Soit $\mathfrak{B} = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie comme en 3.2.6. Alors, par $\mathcal{ES}(G \times G, H, l, \mathfrak{B})$, nous désignons l'espace des fonctions $F : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$, qui appartiennent à $C^\infty(G \times G)$ et qui vérifient les conditions suivantes :

(1)

$$\begin{aligned}
 F(\exp x \cdot \exp h, \exp y \cdot \exp h') &= \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp h) \overline{\chi_l}(\exp h) \\
 &\quad \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp h') \chi_l(\exp h') F(\exp x, \exp y),
 \end{aligned}$$

pour tout $h, h' \in \mathfrak{h}, x, y \in \mathfrak{g}$ avec $\chi_l(\exp h) = e^{-i\langle l, h \rangle}$;

- (2) Si $\tilde{F}$ désigne la restriction de F à $(W_1 \times W_0 \times V_1, W_1 \times W_0 \times V_1)$, c'est à dire que $\tilde{F}$ est la fonction qui à $(w, n, v, w', n', v') \in \mathbb{R}^{q+s+t} \times \mathbb{R}^{q+s+t}$ associe

$$F\left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v, \exp w' \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n') \cdot \exp v'\right),$$

alors $\tilde{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^{q+s+t} \times \mathbb{R}^{q+s+t})$, et $\tilde{F}$ est à décroissance exponentielle en w, w', v, v' , polynomiale en n, n' .

- (3) Pour $w, w' \in \mathbb{R}^q, n, n' \in \mathbb{R}^s$ fixés, la fonction qui à $(v, v') \in \mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^t$ associe

$$\tilde{F}\left(\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp v, \exp w' \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n') \cdot \exp v'\right),$$

appartient à $\mathcal{H}ol(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1) = \mathcal{H}ol(\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^t)$.

Les conditions (2) et (3) sont équivalentes à chacune des conditions suivantes :

(4)

$$\sup_{|\mu|, |\mu'| \leq R} \sup_{w, w' \in \mathbb{R}^q} \sup_{n, n' \in \mathbb{R}^s} \sup_{v, v' \in \mathbb{R}^t} |e^{-\beta|w|} e^{-\beta'|w'|} e^{-\alpha|v|} e^{-\alpha'|v'|} (1 + |n|^2)^k (1 + |n'|^2)^k D \cdot F(w, n, v + i\mu, w', n', v' + i\mu')| < +\infty,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}, R > 0, \alpha, \alpha', \beta, \beta' \geq 0$ et tout opérateur différentiel D sur $\mathbb{R}^{q+s+t}$ à coefficients polynomiaux,

(5)

$$\int |e^{-\beta|w|} e^{-\beta'|w'|} e^{-\alpha|v|} e^{-\alpha'|v'|} (1 + |n|^2)^k (1 + |n'|^2)^k D \cdot F(w, n, v + i\mu, w', n', v' + i\mu')| \underbrace{dw dn dv d\mu}_{\text{mesure}} \underbrace{dw' dn' dv' d\mu'}_{\text{mesure}} < +\infty,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}, R > 0, \alpha, \alpha', \beta, \beta' \geq 0, \mu, \mu' \in \mathbb{R}^t$. avec $|\mu|, |\mu'| \leq R$ et pour tout opérateur différentiel D sur $\mathbb{R}^{q+s+t}$ à coefficients polynomiaux.

Ces expressions forment une famille de semi-normes pour la topologie de $ES(G \times G, H, l, \mathfrak{B})$.

Une conséquence de cette définition est que $ES(G \times G, H, l, \mathfrak{B})$ contient toutes les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} & f\left(\exp w \cdot \exp n \cdot \exp v, \exp w' \cdot \exp n' \cdot \exp v'\right) \\ &= e^{-(\|v\|^2 + \|v'\|^2)} g(\exp w \cdot \exp n, \exp w' \cdot \exp n'), \end{aligned}$$

où g est une fonction de Schwartz dans les directions n, n' , à support compact dans les directions w, w' .

3.2.8-Proposition

L'espace $ES(G \times G, H, l, \mathfrak{B})$ est indépendant de la base coexponentielle $\mathfrak{B}$ choisie.

Preuve

Soient $\mathfrak{B}_1 = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ et $\mathfrak{B}_2 = (A'_1, \dots, A'_q, B'_1, \dots, B'_s, C'_1, \dots, C'_t)$ deux bases distinctes, coexponentielles à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et définies comme au paragraphe 3.2.6. D'après la proposition 1.1.19, la remarque 3.2.5.1 et vu la construction des bases $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$, nous savons qu'il existe des sous-algèbres nilpotentes $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ de $\mathfrak{g}$, et un sous-espace vectoriel $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{g}$, coexponentiel à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{n}$, tels que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_1 + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{f}_2 + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],$$

avec $A_j \in \mathfrak{f}_1, A'_j \in \mathfrak{f}_2$ et $C_k \in \mathfrak{v}_1, C'_k \in \mathfrak{v}'_1$, pour tout $1 \leq j \leq q, 1 \leq k \leq t$, où $\mathfrak{v}_1 \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{v}) = \mathfrak{v}'_1 \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{v}) = \mathfrak{v}$.

Soit X un élément de G ; alors on peut l'écrire de deux façons différentes, en fonction de $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ de la manière suivante : $X = \exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp h \cdot \exp v = \exp w' \cdot E_{\mathfrak{w}'_0}(n') \cdot \exp h' \cdot \exp v'$, où $h, h' \in \mathfrak{h}$ et

$$\exp w = \exp(w_1 A_1 + \dots + w_q A_q), \forall w = (w_1, \dots, w_q) \in \mathbb{R}^q,$$

$$E_{\mathfrak{w}_0}(n) = \exp(n_1 B_1) \cdots \exp(n_s B_s), \forall n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{R}^s,$$

$$\exp v = \exp(v_1 C_1 + \dots + v_t C_t), \forall v = (v_1, \dots, v_t) \in \mathbb{R}^t,$$

$$\exp w' = \exp(w'_1 A'_1 + \dots + w'_q A'_q), \forall w' = (w'_1, \dots, w'_q) \in \mathbb{R}^q,$$

$$E_{\mathfrak{w}'_0}(n') = \exp(n'_1 B'_1) \cdots \exp(n'_s B'_s), \forall n' = (n'_1, \dots, n'_s) \in \mathbb{R}^s,$$

$$\exp v' = \exp(v'_1 C'_1 + \dots + v'_t C'_t), \forall v' = (v'_1, \dots, v'_t) \in \mathbb{R}^t.$$

Comme $\exp w \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp h \cdot \exp v = \exp w' \cdot E_{\mathfrak{w}'_0}(n') \cdot \exp h' \cdot \exp v'$, on en déduit que

$$\exp w \cdot \exp v \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n)^{-w} \cdot \exp h^{-v} = \exp w' \cdot \exp v' \cdot E_{\mathfrak{w}'_0}(n')^{-v'} \cdot \exp h'^{-v'},$$

avec pour $x \in \mathfrak{n}$, $E_{\mathfrak{w}_0}(x)^{-v} = \exp(-v) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(x) \cdot \exp v \in N = \exp \mathfrak{n}$, car N est un sous-groupe distingué de G , et pour $x \in \mathfrak{h}$, $\exp x^{-v} = \exp(-v) \cdot \exp x \cdot \exp v \in H = \exp \mathfrak{h}$, car $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ -invariant. Notons que ces propriétés restent vraies pour $E_{\mathfrak{w}'_0}(n')^{-v'}$ et $\exp h'^{-v'}$.

Posons $D = N \cdot H$. Alors, des résultats précédents et en utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, on obtient

$$\begin{aligned} & \exp(w_1 A_1 + \cdots + w_q A_q + v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \\ &= \exp(w'_1 A'_1 + \cdots + w'_q A'_q + v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t) \pmod{D} \end{aligned}$$

Soit (α_{ij}) la matrice réelle régulière d'ordre $q+t$ telle que pour tout $1 \leq i \leq q$, on ait

$$A_i^\vee = \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} A'_j + \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{ij} C'_{j-q} \equiv A_i \pmod{\mathfrak{d}},$$

et pour tout $q+1 \leq i \leq q+t$, on ait

$$C_{i-q}^\vee = \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{ij} C'_{j-q} \equiv C_{i-q} \pmod{\mathfrak{d}},$$

avec $\mathfrak{d} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}$.

Ainsi, en utilisant les résultats ci-dessus, on vérifie que

$$\begin{aligned} & \exp(w_1 A_1 + \cdots + w_q A_q + v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \\ &= \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j1} \right) A'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{jq} \right) A'_q + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} + \sum_{l=1}^t v_l \alpha_{l+q,q+1} \right) C'_1 \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} + \sum_{l=1}^t v_l \alpha_{l+q,q+t} \right) C'_t \right) \pmod{D}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \exp(w'_1 A'_1 + \cdots + w'_q A'_q + v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t) \\ &= \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j1} \right) A'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{jq} \right) A'_q + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} + \sum_{l=1}^t v_l \alpha_{l+q,q+1} \right) C'_1 \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} + \sum_{l=1}^t v_l \alpha_{l+q,q+t} \right) C'_t \right) \pmod{D}. \end{aligned}$$

Alors, étant donné que G/D est commutative et que $(A'_1, \dots, A'_q, C'_1, \dots, C'_t)$ est une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$, il en résulte que pour tout $1 \leq i \leq q, 1 \leq k \leq t$, on a

$$\begin{aligned} w'_i &= \sum_{j=1}^q w_j \alpha_{ji}, \\ v'_k &= \sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+k} + \sum_{l=1}^t v_l \alpha_{l+q,q+k}. \end{aligned}$$

Ainsi, toute décroissance exponentielle d'une fonction $F \in ES(G \times G, H, l, \mathfrak{B}_1)$ dans les directions $w_j, 1 \leq j \leq q$ entraîne une décroissance exponentielle de F dans les directions $w'_i, 1 \leq i \leq q$. De même, étant donné que l'espace $\mathcal{H}ol(\mathfrak{v}_1)$ avec $\mathfrak{v}_1 = \sum_{j=1}^q \mathbb{R}C_j$ est stable par translation, on en déduit que les propriétés de décroissance exponentielle et d'holomorphicité de F dans les directions $v_l, 1 \leq l \leq t$ sont conservées dans les directions $v'_k, 1 \leq k \leq t$.

Pour achever notre preuve, Il nous reste à étudier le comportement de F dans la direction n' . Comme nous l'avons mentionné plus haut, on a

$$\begin{aligned} &\exp(w_1 A_1 + \dots + w_q A_q) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp h \cdot \exp(v_1 C_1 + \dots + v_t C_t) \\ &= \exp(w'_1 A'_1 + \dots + w'_q A'_q) \cdot E_{\mathfrak{w}'_0}(n') \cdot \exp h' \cdot \exp(v'_1 C'_1 + \dots + v'_t C'_t), \end{aligned}$$

avec

$$A_i^\vee = \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} A'_j + \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{ij} C'_{j-q} \equiv A_i \pmod{\mathfrak{d}},$$

ceci pour tout $1 \leq i \leq q$, et pour tout $q+1 \leq i \leq q+t$,

$$C_{i-q}^\vee = \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{ij} C'_{j-q} \equiv C_{i-q} \pmod{\mathfrak{d} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}}.$$

En utilisant les résultats précédents, on vérifie que

$$\begin{aligned} &\exp(w'_1 A'_1 + \dots + w'_q A'_q)^{-1} \cdot \exp(w_1 A_1 + \dots + w_q A_q) \\ &= \exp \left(- \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j1} \right) A'_1 - \dots - \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{jq} \right) A'_q \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j1} \right) A'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{jq} \right) A'_q + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} \right) C'_1 \right. \\ & \left. + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} \right) C'_t \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, sachant que f_2 est nilpotent, et vu la formule de Campbell-Baker-Haussdorff, on constate qu'il existe un polynôme $Q(w)$ dans N tel que

$$\begin{aligned} & \exp(w'_1 A'_1 + \cdots + w'_q A'_q)^{-1} \cdot \exp(w_1 A_1 + \cdots + w_q A_q) \\ & = \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} \right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} \right) C'_t \right) \cdot \exp Q(w). \end{aligned}$$

D'autre part, modulo D , on a

$$\begin{aligned} & \exp(v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \cdot \exp(v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t)^{-1} \\ & = \exp \left(v_1 \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{q+1,j} C'_{j-q} + \cdots + v_t \sum_{j=q+1}^{q+t} \alpha_{q+t,j} C'_{j-q} \right) \\ & \quad \cdot \exp(-v'_1 C'_1 - \cdots - v'_t C'_t) \\ & = \exp \left(\left(\sum_{l=1}^t v_l \alpha_{q+l,q+1} \right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{l=1}^t v_l \alpha_{q+l,q+t} \right) C'_t \right) \\ & \quad \cdot \exp(-v'_1 C'_1 - \cdots - v'_t C'_t). \end{aligned}$$

D'où, en tenant compte de la proposition 3.2.5.2 et de l'expression des coordonnées v'_k , $1 \leq k \leq t$ en fonction de w_j , $1 \leq j \leq q$ et v_l , $1 \leq l \leq t$, on vérifie qu'il existe une forme bilinéaire r sur $\mathfrak{g}(l_n)$ telle que

$$\begin{aligned} & \exp(v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \cdot \exp(v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t)^{-1} \\ & = \exp \left(- \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} \right) C'_1 - \cdots - \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} \right) C'_t + r(v'^V, v') Z + x(v'^V, v') \right), \end{aligned}$$

où

$$v'^V = \left(\sum_{l=1}^t v_l \alpha_{q+l,q+1} \right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{l=1}^t v_l \alpha_{q+l,q+t} \right) C'_t,$$

$x(v'^V, v') \in (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{\mathfrak{n}})) \cap \ker l$ et Z est l'élément central de $\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})/(\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{\mathfrak{n}})) \cap \ker l$, avec $Z \in \mathfrak{h}$.

Ainsi, comme $\mathfrak{h}$ est $\mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$ -invariant, on en déduit qu'il existe $h''' \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\begin{aligned} & \exp(v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \cdot \exp(v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t)^{-1} \\ &= \exp\left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1}\right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t}\right) C'_t\right)^{-1} \cdot \exp h'''. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité

$$\begin{aligned} & \exp(w_1 A_1 + \cdots + w_q A_q) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \cdot \exp h \cdot \exp(v_1 C_1 + \cdots + v_t C_t) \\ &= \exp(w'_1 A'_1 + \cdots + w'_q A'_q) \cdot E_{\mathfrak{w}'_0}(n') \cdot \exp h' \cdot \exp(v'_1 C'_1 + \cdots + v'_t C'_t) \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} & E_{\mathfrak{w}'_0}(n') \\ &= \exp\left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1}\right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t}\right) C'_t\right) \cdot \exp Q(w) \cdot E_{\mathfrak{w}_0}(n) \\ &\cdot \exp\left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1}\right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t}\right) C'_t\right)^{-1} \cdot \exp h'', \end{aligned}$$

pour $h'' \in \mathfrak{h}$.

Soit (β_{ij}) la matrice réelle régulière d'ordre s telle que pour tout $1 \leq i \leq s$, on ait

$$B_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij} B'_j.$$

Alors, on vérifie qu'il existe un polynôme $F(n)$ dans N telle que

$$\begin{aligned} E_{\mathfrak{w}_0}(n) &= \exp n_1 B_1 \cdots \exp n_s B_s \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^s n_j \beta_{j1}\right) B'_1 \cdots \exp\left(\sum_{j=1}^s n_j \beta_{js}\right) B'_s \cdot \exp F(n). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 E_{w'_0}(n') &= \exp n'_1 B'_1 \cdots \exp n'_s B'_s \\
 &= \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} \right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} \right) C'_t \right) \cdot \exp Q(w) \\
 &\quad \cdot \exp \left(\sum_{j=1}^s n_j \beta_{j1} \right) B'_1 \cdots \exp \left(\sum_{j=1}^s n_j \beta_{js} \right) B'_s \cdot \exp F(n) \\
 &\quad \cdot \exp \left(\left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+1} \right) C'_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^q w_j \alpha_{j,q+t} \right) C'_t \right)^{-1} \cdot \exp h''.
 \end{aligned}$$

Comme $n'_j b'_j$ appartient à $\mathfrak{n}$, et que le second membre de l'égalité précédente modulo H appartient à N , alors nous complétons la base $\{B'_j\}_1^s$ par des vecteurs $B'_l \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, $l = s+1, \dots, m$ ceci pour obtenir une base $\{B'_j\}_1^m$ de $\mathfrak{n}$. Alors on constate qu'il existe des polynômes $p_j(Q(w), w, n, F(n))$ tels que

$$\begin{aligned}
 &\exp(p_1(Q(w), w, n, F(n))B'_1) \cdots \exp(p_s(Q(w), w, n, F(n))B'_s) \cdot \exp h'' \\
 &= \exp(n'_1 B'_1) \cdots \exp(n'_s B'_s).
 \end{aligned}$$

Ceci implique que $n_j = p_j(Q(w), w, n, F(n))$, $j = 1, \dots, s$; ce qui achève notre preuve.

3.2.9-

Soient $\mathfrak{B}$ une base coexponentielle à $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{v}$ le sous-espace vectoriel qu'elle engendre. D'après la proposition 1.1.19 nous pouvons prendre $\mathfrak{v}$ contenu dans une sous-algèbre nilpotente, supplémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$. Ainsi l'application $E_{\mathfrak{n}}$ définie par $\mathfrak{B}$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^{r_0} \times \mathbb{R}^{s_0}$ dans G , avec $s_0 = \dim \mathfrak{n}$ et $r_0 = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Nous désignons par $ES(G, \mathfrak{n})$ l'espace des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ appartenant à $C^\infty(G)$ et qui vérifient ainsi que toutes leurs dérivées partielles la condition

$$\sup_{v \in \mathfrak{v}, s \in \mathfrak{n}} |F(\exp v) (1 + |s|^2)^k u * f(\exp v \cdot \exp s)| < \infty,$$

ceci pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, pour tout $u \in \mathcal{U}(G)$ qui désigne l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, et pour toute fonction $F \in C^\infty(G)$, exponentiellement bornée dans la direction $\mathfrak{v}$, c'est à

dire qu'il existe une constante $c(F)$ telle que $|F(\exp v)| \leq e^{c(F)\|v\|_{\mathfrak{v}}}, \forall v \in \mathfrak{v}$. On constate que cette définition ne dépend pas de la base $\mathfrak{B}$ choisie.

En fait, $ES(G, \mathfrak{n})$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide sur G telles que lorsqu'on les multiplie par une fonction exponentiellement bornée dans une direction qui sort de N , on obtient une fonction bornée.

Il est clair que $ES(G, \mathfrak{n})$ est un espace vectoriel topologique ; et même $ES(G, \mathfrak{n})$ muni du produit de convolution est une algèbre de Fréchet pour les normes

$$\sup_{v \in \mathfrak{v}, s \in \mathfrak{n}} |F(\exp v) \left(1 + |s|^2\right)^k u * f(\exp v \cdot \exp s)|.$$

On constate aussi que $ES(G, \mathfrak{n})$ est invariant par translation sur G et $ES(G, \mathfrak{n})$ contient toutes les fonctions C^∞ à support compact sur G ; d'où $ES(G, \mathfrak{n})$ est un sous-espace dense de $L^1(G)$. Les fonctions de $ES(G, \mathfrak{n})$ sont à décroissance polynomiale dans la direction N , et exponentielle dans la direction $V = \exp \mathfrak{v}$; cela signifie qu'elles décroissent plus rapidement que l'inverse de tout polynôme dans les directions de $\mathfrak{n}$, et plus rapidement que tout terme de la forme $e^{-c|v|}$ dans les directions de $\mathfrak{v}$. Lorsque G est un groupe de Lie nilpotent, l'espace $ES(G, \mathfrak{n})$ n'est rien d'autre qu'un sous-espace de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(G)$. Dans la suite de notre étude, l'espace $ES(G, \mathfrak{n})$ sera noté $ES(G)$ et l'espace $\mathfrak{n}$ dans $ES(G, \mathfrak{n})$ ne sera mentionné que s'il y'a risque de confusion.

A présent, nous allons énoncer puis prouver le résultat principal de notre étude.

CHAPITRE 4

LES FONCTIONS DE $ES(G \times G, H, l)$

COMME NOYAUX

Dans ce chapitre, nous montrons que $ES(G \times G, H, l)$ est contenu dans l'image de $ES(G)$ au travers de l'application $f \rightarrow f_\pi$. Autrement dit, les fonctions de l'espace $ES(G \times G, H, l)$ peuvent être considérées comme noyaux d'opérateurs $\pi(f)$ avec $f \in ES(G)$ et $\pi \in \hat{G}$. Le théorème que nous allons étudier est un résultat très technique. La démonstration se base sur les différents cas de récurrence analysés au chapitre 2 et utilise de façon primordiale le théorème d'inversion de Fourier.

4.1- Théorème

Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe résoluble exponentiel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n . Soit $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. Soient $H = \exp \mathfrak{h}$ et $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}} = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ la représentation unitaire irréductible induite par le caractère unitaire $\chi_{l, \mathfrak{h}}$ de H .

Alors, il existe une application linéaire continue

$$R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$$

$$F \longrightarrow R(F) = f,$$

telle que le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ soit égal à F .

L'application R est appelée rétracte.

4.2- Remarque

En ce qui concerne la continuité du rétracte R , il suffira de remarquer que la construction de f respecte la topologie des espaces ES .

4.3- Démonstration du théorème 4.1 :

La récurrence se fait sur la dimension de G . Le début de la récurrence est obtenu pour $\dim \mathfrak{g} = 1$, c'est à dire pour $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$. Il s'agit d'une situation particulière du 1er cas, cas où $\mathfrak{g}$ est abélienne et que nous allons étudier dans la suite.

4.3.1- Etude du 1er cas :

Puisque $\mathfrak{g}$ est abélienne, on peut supposer que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$. On a $ES(G) = \mathcal{S}(G) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. De plus, on constate que tout idéal $\mathfrak{n}'$ de $\mathfrak{g}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (0)$, et toute polarisation $\mathfrak{h}$ en $l \in \mathfrak{g}^*$ est égale à $\mathfrak{g}$ et est fortement adaptée à tout idéal $\mathfrak{n}'$. Soient $\mathfrak{h}$ une polarisation en l et $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, choisis de façon arbitraire. La représentation π coïncide avec le caractère χ_l , c'est à dire que $\pi(f)$ est identifiée à la transformée de Fourier en l .

Soit une fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$. Choisissons $v \in C_c^\infty(G) = C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ telle que $\hat{v}(l) = 1$, la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ étant définie par $\hat{f}(l) = \int f(x) e^{-i\langle l, x \rangle} dx$ pour $x, l \in \mathbb{R}^m$. Nous cherchons $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ telle que :

$$F(x, y) = f_\pi(x, y) = \int_H f(xhy^{-1}) \chi_l(h) dh.$$

Posons :

$$f(x) = F(e, e)v(x) \quad \forall x \in G,$$

avec e qui désigne l'élément neutre de G pour la loi multiplicative. Alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, et on vérifie sans difficulté que $f_\pi(x, y) = \hat{v}(l)F(x, y) = F(x, y), \forall x, y \in G$.

A présent, nous supposons que $n > 1$ et que le théorème est vérifié par tous les groupes de dimension inférieure ou égale à $n - 1$.

4.3.2- Etude du 2eme cas :

Puisque $G/H = \tilde{G} \cdot A/\tilde{H} \cdot A \equiv \tilde{G}/\tilde{H}$ avec $A = \exp \mathfrak{a}$, les espaces de noyaux $ES(G \times G, H, l)$ et $ES(\tilde{G} \times \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{l})$ sont égaux, avec $\tilde{H} = \exp \tilde{\mathfrak{h}}$ et $A = \exp \mathfrak{a}$. Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un rétracte $\tilde{R}$ pour $\tilde{\pi}$ et une fonction

$g \in ES(\tilde{G})$ telles que $\tilde{R}(F) = g$. Soit une fonction $\varphi \in C_c^\infty(A)$ telle que $\int_A \varphi(x)dx = 1$. Définissons f sur G de la manière suivante :

$$f(x) = f(\tilde{x} \cdot a) = g(\tilde{x})\varphi(a), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{G}, a \in A.$$

Alors $f \in ES(G)$ et le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ est égal à F .

4.3.3- Etude du 3eme cas :

La construction du rétracte se réduit au cas où $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Z$, c'est à dire que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg et $G = \exp \mathfrak{g}$ est le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_q = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ muni de la multiplication

$$(x, y, s) \cdot (x', y', s') = (x + x', y + y', s + s' + \frac{1}{2}(yx' - xy'))$$

avec $xy = \sum_{i=1}^q x_i y_i$ désignant le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^q$. Notons que d'après la construction faite en 3.2.5, où $\mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}}) + \mathfrak{h}$, avec $\mathfrak{v}_1$ un sous-espace isotrope pour la forme $B_{l_1}, l_1 = l_{|\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})}$, nous pouvons choisir $\mathfrak{h} = \{0\} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ et $\mathfrak{v}_1 = \mathbb{R}^q \times \{0\} \times \{0\}$.

Ainsi le caractère $\chi_{l, \mathfrak{h}}$ de $H = \exp \mathfrak{h}$ est défini par $\chi_{l, \mathfrak{h}}(0, y, s) = e^{-is}$; de plus $\pi = \pi(l) = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ agit sur $\mathcal{H}_\pi = L^2(\mathbb{R}^q)$ par

$$(\pi(x, y, s)\xi)(r) = e^{-is} e^{-i(r - \frac{r}{2})y} \xi(r - x).$$

Soient $f \in L^1(\mathbb{H}_q)$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$. Si $f_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, s) e^{-is} ds$ et $\hat{f}_0$ est la transformée de Fourier de f_0 par rapport à la seconde variable $y \in \mathbb{R}^q$, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(r) &= \int_{\mathbb{H}_q} f(x, y, s) (\pi(x, y, s)\xi)(r) dx dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}} f(x, y, s) e^{-is} e^{-i(r - \frac{r}{2})y} \xi(r - x) dx dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}} f(r - x, y, s) e^{-is} ds \right) e^{-i \frac{(r+x)}{2} y} dy \xi(x) dx \\ &\quad (\text{par le changement de variable } x \rightarrow r - x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} \hat{f}_0(r - x, \frac{r+x}{2}) \xi(x) dx. \end{aligned}$$

Donc le noyau de l'opérateur $\pi(f)$ est

$$f_\pi(r, x) = \hat{f}_0(r - x, \frac{r+x}{2})$$

avec $\hat{f}_0(x, y) = f_{l, \mathfrak{h}}(\frac{x+2y}{2}, \frac{2y-x}{2})$.

Soit $F \in ES(\mathbb{H}_q \times \mathbb{H}_q, H, l)$; considérons la fonction F_1 définie sur $\mathbb{H}_q \times \mathbb{H}_q$ par $F_1(\eta, \zeta) = F(\frac{\eta+2\zeta}{2}, \frac{2\zeta-\eta}{2})$, avec $\eta = (x, y, s), \zeta = (u, v, t) \in \mathbb{H}_q$. Par conséquent $F_1 \in ES(\mathbb{H}_q \times \mathbb{H}_q, H, l)$ et nous pouvons définir le rétracte R de $\pi(l)$ par

$$R(F)(u, v, t) = \varrho(t) \int_{\mathbb{R}^q} F_1(u, y) e^{iyv} dy$$

avec $u = (u, 0, 0), y = (y, 0, 0) \in \mathbb{R}^q$ et $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\hat{\varrho}(1) = 1$.

4.3.3.1- Remarque : ici, intervient la propriété (3) de la définition de $ES(G \times G, H, l)$ en 3.2.7, à savoir que la restriction sur G/H de toute fonction $F_1 \in ES(G \times G, H, l)$ appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$. Par conséquent, d'après les propriétés de $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$, toute transformée de Fourier partielle ou globale d'une fonction $F_1 \in ES(G \times G, H, l)$ dans toute direction $\mathfrak{v}_1 \subset \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ qui sort de $\mathfrak{n}$ et de $\mathfrak{h}$ reste à décroissance exponentielle à l'extérieur de $\mathfrak{n}$, polynomiale dans $\mathfrak{n}$. On en déduit que l'intégrale ci-dessus converge et que $R(F)$ ainsi donné appartient à $ES(\mathbb{H}_q)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(R(F))\xi)(r) &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}} R(F)(r - x, y, s) e^{-is} ds \right) e^{-i\frac{(r+x)}{2}y} dy \xi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}} \varrho(s) \int_{\mathbb{R}^q} F_1(r - x, u) e^{iu y} e^{-i\frac{(r+x)}{2}y} e^{-is} ds dy du \xi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^q} F_1(r - x, u) e^{iu y} e^{-i\frac{(r+x)}{2}y} du dy \xi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} F_1(r - x, \frac{r+x}{2}) \xi(x) dx. \\ &\quad \text{(Théorème d'inversion de Fourier)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^q} F(r, x) \xi(x) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent F est le noyau de l'opérateur $\pi(R(F))$.

4.3.4- Etude du 4eme cas :

Nous avons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y$ avec $Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $l(Y) = 1$ et $A = \exp \mathbb{R}Y$. Nous identifions A à $\mathbb{R}$ et nous notons les éléments de G par $g = (t, g_0) = \exp tX \cdot g_0 \equiv t \cdot g_0$ avec $t \in \mathbb{R}$, $g_0 \in G_0$, $l(X) = 0$ et $[X, Y] = Y$. Ainsi, on vérifie que $Ad(\exp tX)Y = e^t Y$ et $Ad^*G(l|_{\mathbb{R}Y}) = Ad^*(\exp tX)(l|_{\mathbb{R}Y}) = e^{-t}(l|_{\mathbb{R}Y})$. Nous posons $\mathfrak{a}^* = \mathbb{R}(l|_{\mathbb{R}Y})$ et nous l'identifions à $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{H}_{\pi_0}$ l'espace de Hilbert associé à la représentation $\pi_0 = ind_H^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}}$. Soient aussi $f \in ES(G)$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, l'espace de Hilbert associé à π . Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathfrak{g}$, nous écrivons que $\xi(s, v) = \xi(s)(v)$, ce qui nous permet de considérer $\xi(s)$ comme un élément de $\mathcal{H}_{\pi_0}$.

Par conséquent l'application $s \in \mathbb{R} \longrightarrow \xi(s) \in \mathcal{H}_{\pi_0}$ permet d'identifier l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π avec $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$ et l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}$. Dans la suite, nous notons $g^t = \exp tX \cdot g \cdot \exp -tX$ et $\Delta_G(t) = \Delta_G(t, e)$, pour tout $g \in G, t \in \mathbb{R}$. Moyennant toutes ces hypothèses, on a :

$$\begin{aligned}
 (\pi(f)\xi)(s) &= \int_G f(g)(\pi(g)\xi)(s)dg = \int_G f(g)\xi(g^{-1} \cdot s)dg \\
 &= \int_G \Delta_G^{-1}(g)f(g^{-1})\xi(g \cdot s)dg = \int_G \Delta_G^{-1}(g \cdot s^{-1})\Delta_G(s^{-1})f(s \cdot g^{-1})\xi(g)dg \\
 &= \int_G \Delta_G^{-1}(g)f(s \cdot g^{-1})\xi(g)dg \\
 &= \int_{G/G_0} \int_{G_0} \Delta_G^{-1}(t, g_0)f(s \cdot (t \cdot g_0)^{-1})\xi(t)(g_0)dt dg_0 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_{G_0} \Delta_{G_0}^{-1}(g_0)f(s \cdot g_0^{-1} \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0^{-1}))\xi(t)dg_0 dt \\
 &\quad (\text{car } \Delta_G|_{G_0} = \Delta_{G_0}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_{G_0} f(s \cdot g_0 \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0))\xi(t)dg_0 dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_{G_0} f((s-t) \cdot g_0^t)(\pi_0(g_0))\xi(t)dg_0 dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_{G_0} f((s-t)^s)(g_0)(\pi_0(g_0))\xi(t)dg_0 dt
 \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \pi_0 \left(f((s-t)^t) \right) \xi(t) dt,$$

où $f((s-t)^t)$ est une fonction qui appartient à $ES(G_0)$ et définie par $f((s-t)^t)(g_0) = f((s-t) \cdot g_0^t)$.

Ainsi le noyau f_π de $\pi(f)$ est donné par

$$f_\pi(s, t) = \Delta_G^{-1}(t) \pi_0 \left(f((s-t)^t) \right).$$

Soient $(C_1, \dots, C_q)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{w} = \sum_1^{q \oplus} \mathbb{R} C_i$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a}$ et $G_0 = W \cdot A$, avec $W = \exp \mathbb{R} C_1 \cdots \exp \mathbb{R} C_q$ et $A = \exp \mathbb{R} Y$. La mesure de Haar sur G_0 est le produit $dwd r$, où dw est la mesure de Haar sur $G_0/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur W et dr la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}$. Moyennant ces données, on vérifie que :

$$\begin{aligned} \pi_0 \left(f((s-t)^t) \right) &= \int_{G_0} f((s-t)^t)(g_0) \pi_0(g_0) dg_0 \\ &= \int_W \int_{\mathbb{R}} f((s-t)^t)(w \cdot \exp rY) \pi_0(w) \pi_0(\exp rY) dr dw \\ &= \int_W \int_{\mathbb{R}} f((s-t) \cdot (w^t \cdot (\exp rY)^t)) \pi_0(w) \chi_l(\exp rY) dr dw \\ &= \int_W \int_{\mathbb{R}} f((s-t) \cdot (w^t \cdot \exp(\epsilon^t rY))) \pi_0(w) \chi_l(\exp rY) dr dw \\ &= \int_W e^{-t} \int_{\mathbb{R}} f((s-t) \cdot (w^t \cdot \exp rY)) \pi_0(w) \chi_l((\exp rY)^{-t}) dr dw \\ &= \int_W e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}} f((s-t))(w^t \cdot \exp rY) \chi_{Ad^*(\exp tX)} l_{\mathbb{R}Y}(\exp rY) dr \right) \\ &\quad \pi_0(w) dw \\ &= \int_W e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}} f((s-t))(w^t \cdot \exp rY) \epsilon^{-i\epsilon^{-t}r} dr \right) \pi_0(w) dw. \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} \epsilon^{-t} \Delta_G^{-1}(t) f((s-t))(w^t \cdot \exp rY) \right. \right. \\ &\quad \times \chi_{Ad^*(t)l_{\mathbb{R}Y}}(\exp rY) dr \left. \right) \pi_0(w) dw \Big) \xi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t} \Delta_G^{-1}(t) f((s-t))(w^t \cdot \exp rY) e^{-ie^{-t}r} dr \right) \right. \\
&\quad \left. \times \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ est un opérateur défini de la manière suivante :

$$\mathcal{T} : ES(G_0) \longrightarrow C^\infty((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l|_{\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R})$$

$$\tilde{f} \longrightarrow \mathcal{T}(\tilde{f})$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \tilde{f}((w \cdot \exp rY)^t) \chi_l(\exp rY) dr \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-t} \Delta_G^{-1}(t) \tilde{f}(w^t \cdot \exp rY) e^{-ie^{-t}r} dr
\end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in ES(G_0)$, $w \in W$, $t \in \mathbb{R}$ et $C^\infty((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l|_{\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R})$ qui désigne l'espace des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$, telles que $\tilde{k} \in ES(G_0/\exp \mathbb{R}Y)$ et

$$\tilde{k}(w \cdot \exp rY, t) = \overline{\chi_l(\exp rY)} \tilde{k}(w, t), \quad \forall w \in W, \quad \forall r, t \in \mathbb{R}.$$

Remarquons qu'on a

$$\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) = e^{-t} \Delta_G^{-1}(t) \hat{\tilde{f}}(w^t, Ad^*(\exp tX)l|_{\mathbb{R}Y}),$$

où $\hat{\tilde{f}}$ désigne la transformée de Fourier de $\tilde{f}$ dans la direction $\mathbb{R}Y$.

On constate aussi que $\mathcal{T}$ vérifie la relation de covariance

$$\mathcal{T}(\tilde{f})(w \cdot \exp rY, t) = e^{i\langle l, rY \rangle} \mathcal{T}(\tilde{f})(w, t)$$

et que $\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$. Par conséquent $\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l|_{\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R})$.

De plus, nous associons à $\mathcal{T}$ un opérateur inverse noté R'_0 , défini sur le sous-espace $ES((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R})$ de $C^\infty((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R})$ formé des fonctions à décroissance exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$ et tel que $\mathcal{T} \circ R'_0 = Id$.

Nous pouvons définir R'_0 de la manière suivante :

$$R'_0 : ES((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R}) \longrightarrow ES(G_0)$$

$$\tilde{k} \longrightarrow R'_0(\tilde{k})$$

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp rY) \\ = - \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|s|} \Delta_G(-\ln|s|) \tilde{k}(w^{\ln|s|}, -\ln|s|) e^{isr} ds. \end{aligned}$$

4.3.4.1- Remarque : Ici intervient le fait que la fonction $\tilde{k}$ est à décroissance exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent l'intégrale ci-dessus est convergente.

Ainsi, $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$ et en posant $g_0 = w \cdot \exp \alpha Y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, puis en utilisant le théorème d'inversion de Fourier, on vérifie que $\mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k})(g_0, t) = \tilde{k}(g_0, t)$. Ceci prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de $\mathcal{T}$.

Ainsi, on a

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right) \xi(t) dt.$$

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; nous voulons déterminer $f \in ES(G)$ telle que le noyau f_π de l'opérateur $\pi(f)$ soit égal F . Ceci équivaut à : $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right)(g_0, g'_0),$$

ce qui d'après notre notation nous donne

$$F(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) dw \right)(g_0, g'_0),$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F((s+t) \cdot g_0, t \cdot g'_0).$$

Alors on a

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s))(w, t) dw \right)(g_0, g'_0)$$

et $G(s, t) \in ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence R_0 est le rétracte de π_0 qui envoie $ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ dans $ES(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in ES(G_0)$ et est continu en s et t . Posons

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= \hat{f}_0(s, t)(g_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} R_0(G(s, t))(g_0 \cdot \exp rY) e^{-ir} dr. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $ES(G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y})$ le sous-espace de $ES(G_0)$ formé des fonctions $f \in ES(G_0)$ telles que

$$f(w \cdot \exp rY) = \overline{\chi_l(\exp rY)} f(w),$$

alors, nous remarquons que $f_1(s, t) \in ES(G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y})$ et est continue en s et t .

Fixons $s \in \mathbb{R}$; alors la fonction

$$f_2(s)(g_0, t) = f_1(s, t)(g_0) \in ES((G_0/\exp \mathbb{R}Y, l_{|\mathbb{R}Y}) \times \mathbb{R}).$$

Donc nous pouvons lui appliquer l'opérateur inverse R'_0 de $\mathcal{T}$ pour obtenir une fonction $R'_0(f_2(s)) \in ES(G_0)$.

Ceci étant, nous pouvons définir la fonction $f \in ES(G)$ image de la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ par le rétracte R de la façon suivante :

$$R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$$

$$F \longmapsto R(F) = f$$

$$\begin{aligned} R(F)(s \cdot g_0) &= f(\exp sX \cdot w \cdot \exp rY) = R'_0(f_2(s))(w \cdot \exp rY) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|u|} \Delta_G(-\ln|u|) f_2(s)(w^{\ln|u|}, -\ln|u|) e^{iur} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|u|} \Delta_G(-\ln|u|) f_1(s, -\ln|u|) (w^{\ln|u|}) e^{iur} du \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|u|} \Delta_G(-\ln|u|) \left(R_0(G(s, -\ln|u|)) \right) (w^{\ln|u|} \cdot \exp vY) \\
&\quad \times e^{-iv} e^{iur} dv du.
\end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
&(\pi(f)\xi)(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-t} \Delta_G^{-1}(t) \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp rY) e^{-ie^{-t}r} dr \right) \right. \\
&\quad \left. \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}} e^{-t} \Delta_G^{-1}(t) \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} \right. \right. \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\ln|u|} \Delta_G(-\ln|u|) \left(R_0(G(s-t, -\ln|u|)) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. (w^{t+\ln|u|} \cdot \exp vY) e^{-iv} e^{iur} dv du \right) e^{-ie^{-t}r} dr \right) \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} \right. \right. \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t+\ln|u|)} \Delta_G(-(t+\ln|u|)) \left(R_0(G(s-t, -\ln|u|)) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. (w^{t+\ln|u|} \cdot \exp vY) e^{iur} e^{-ie^{-t}r} dudr \right) e^{-iv} dv \right) \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ensuite, par le changement de variable $r \rightarrow -r$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\pi(f)\xi)(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \left(\int_{\mathbb{R}} \right. \right. \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t+\ln|u|)} \Delta_G(-(t+\ln|u|)) \left(R_0(G(s-t, -\ln|u|)) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(w^{t+\ln|u|} \cdot \exp vY \right) e^{-iur} e^{ie^{-t}r} du dr \Big) e^{-iv} dv \Big) \pi_0(w) dw \Big) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \right. \\
& \quad \left. \left(\int_{\mathbb{R}} \left(R_0(G(s-t, t)) \right) (w \cdot \exp vY) e^{-iv} dv \right) \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt \\
& \quad \text{(Théorème d'inversion de Fourier)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \pi_0(g_0) R_0(G(s-t, t)) (g_0) dg_0 \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \pi_0 \left(R_0(G(s-t, t)) \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} G(s-t, t) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(s, t) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

4.3.5- Etude du 5eme cas :

Dans ce cas, nous avons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ avec $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $|\langle l, Y_1 \rangle| + |\langle l, Y_2 \rangle| = 1$. Nous posons $A = \exp \mathfrak{a}$ et nous identifions $\mathfrak{a}$ respectivement A avec $\mathbb{C} : r_1 Y_1 \oplus r_2 Y_2 \rightarrow r_1 + ir_2 \in \mathbb{C}$. Ainsi, $[U, Z] = \lambda(U)Z$, pour tout $U \in \mathfrak{g}, Z \in \mathbb{C}$, avec λ qui désigne un homomorphisme complexe non trivial de $\mathfrak{g}$. Nous savons aussi que $\mathfrak{g}_0 = \ker \lambda = \mathfrak{g}(l/\mathfrak{a})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 ; ainsi, nous pouvons choisir $X \in \mathfrak{g}, X \notin \mathfrak{g}_0, l(X) = 0$ et $\lambda(X) = q = 1+i\theta$ avec $\theta \neq 0 \in \mathbb{R}$, tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_0$. De ce fait, $Ad(\exp tX)(Z) = e^{qt}Z = e^t e^{i\theta t} Z, \forall t \in \mathbb{R}$. De plus, en identifiant $\mathfrak{a}^*$ avec $\mathbb{C}$ de telle sorte que $\zeta \in \mathbb{C}$ corresponde à la forme linéaire $Z \rightarrow Re(Z\zeta)$, on obtient

$$Ad^*(\exp tX)(\zeta) = e^{-qt}\zeta = e^{-t} e^{-i\theta t} \zeta.$$

Dans la suite, nous supposons que $l|_{\mathfrak{a}} = 1$; alors pour $\zeta = l|_{\mathfrak{a}} = 1$, l'orbite $w_1 = \{e^{(1+i\theta)t} ; t \in \mathbb{R}\}$ est une spirale qui rencontre le tore $\mathbb{T} = \{Z \in \mathbb{C} ; |Z| = 1\}$ en 1. De

façon générale, pour $0 \neq \zeta \in \mathfrak{a}^*, \zeta = r_1 Y_1^* + r_2 Y_2^*$, il existe $\nu = e^{-q \ln |\zeta|} \zeta \in \mathbb{T}$, telle que l'orbite de ζ soit $w_\nu = \nu w_1 = \{\nu Z; Z \in w_1\}$. Ainsi, w_ν est aussi une spirale et pour tout $p \in w_\nu$, il existe $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $p = e^{-qt} \zeta = e^{qs} \nu$, avec $s = \ln |\zeta| - t$.

D'autre part pour tout $0 \neq \zeta \in \mathfrak{a}^*, \zeta = r_1 Y_1^* + r_2 Y_2^*$, il existe un réel $t = -\frac{\ln |\zeta|^2}{2}$ tel que $\zeta = \text{Ad}^*(\exp tX) l|_{\mathfrak{a}} = e^{-qt} l|_{\mathfrak{a}}$. Nous obtenons ainsi une paramétrisation de $\mathfrak{a}^* \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par l'orbite de $l|_{\mathfrak{a}}$.

Puisque $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, alors, comme au cas précédent, les éléments de G s'écrivent sous la forme de couple $(t, g_0), t \in \mathbb{R}, g_0 \in G_0$ tels que

$$(t, g_0) = \exp tX \cdot g_0 \equiv t \cdot g_0 \in G \text{ et } \Delta_G(t) = \Delta_G(t, \epsilon).$$

De plus, pour les mêmes raisons qu'au cas précédent, nous identifions $\mathcal{H}_\pi$ avec $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$ et l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $f \in ES(G), \xi \in \mathcal{H}_\pi, s \in \mathbb{R}$ et moyennant les hypothèses ci dessus, nous obtenons comme au 4eme cas

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \pi_0 \left(f((s-t)^t) \right) \xi(t) dt.$$

avec $f((s-t)^t) \in ES(G_0)$ et définie comme au 4eme cas.

Soient $(C_1, \dots, C_q)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{w} = \sum_1^q \mathbb{R} C_i$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{w} \oplus (\mathbb{R} Y_1 + \mathbb{R} Y_2)$ et $G_0 = W \cdot A$, avec $A \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{P}^2$. Nous désignons les éléments de A par $\exp a$ avec $a \in \mathfrak{a}$, ou $\exp z$ avec $z \in \mathbb{C}$. La mesure de Haar sur G_0 est le produit $dw da$ ou $dwdz$ avec dw qui est la mesure de Haar sur $G_0/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur $W = \exp \mathfrak{w}$ et da , la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^2$; notons que $da = dz = dr_1 dr_2$, avec $a = r_1 Y_1 + r_2 Y_2$ et $z = r_1 + ir_2 \in \mathbb{C}$. Moyennant ces données, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi_0 \left(f((s-t)^t) \right) &= \int_{G_0} f((s-t)^t)(g_0) \pi_0(g_0) dg_0 \\ &= \int_W \pi_0(w) \int_A f \left((s-t) \cdot (w^t \cdot (\exp a)^t) \right) \chi_l(\exp a) da dw \\ &= \int_W \pi_0(w) \int_A f \left((s-t) \cdot (w^t \cdot \exp \text{Ad}(\exp tX)a) \right) \\ &\quad \times \chi_l(\exp a) da dw \end{aligned}$$

$$= \int_W \pi_0(w) \int_{\mathbb{C}} f((s-t) \cdot (w^t \cdot \exp(e^t e^{i\theta t} z))) \\ \times \chi_l(\exp z) dz dw$$

Ensuite, par le changement de variable $z \rightarrow e^{-t} e^{-i\theta t} z$, on obtient

$$\begin{aligned} \pi_0(f((s-t)^t)) &= \int_W \pi_0(w) \int_{\mathbb{C}} e^{-2t} f((s-t) \cdot (w^t \cdot \exp z))) \\ &\quad \times \chi_l(\exp(e^{-t} e^{-i\theta t} z)) dz dw \\ &\quad \text{où } e^{-2t} \text{ est le jacobien du changement de variable ci-dessus} \\ &= \int_W \pi_0(w) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2t} f((s-t)) (w^t \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \right. \\ &\quad \left. \times \chi_{Ad^*(\exp tX)l_{l_a}}(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) dr_1 dr_2 \right) dw \\ &= \int_W e^{-2t} \pi_0(w) \hat{f}((s-t)) (w^t, Ad^*(\exp tX)l_{l_a}) dw, \end{aligned}$$

où $\hat{f}((s-t))$ est la transformée de Fourier de $f((s-t))$ dans la direction $A \cong \mathbb{R}^2$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(w) \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2t} \Delta_G^{-1}(t) f((s-t)) (w^t \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \right. \\ &\quad \left. \times \chi_{Ad^*(\exp tX)l_{l_a}}(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) dr_1 dr_2 \right) dw \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \mathcal{T}(f(s-t))(w, t) \pi_0(w) dw \right) \xi(t) dt, \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ est un opérateur défini de la manière suivante :

$$\mathcal{T} : ES(G_0) \longrightarrow C^\infty((G_0/A, l_{l_a}) \times \mathbb{R})$$

$$\tilde{f} \longrightarrow \mathcal{T}(\tilde{f})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) &= \Delta_G^{-1}(t) e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \chi_{Ad^*(\exp tX)l_{l_a}}(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \\ &\quad dr_1 dr_2 \\ &= \Delta_G^{-1}(t) \int_{\mathfrak{a}} \tilde{f}((w \cdot \exp u)^t) \chi_{l_{l_a}}(\exp u) du, \end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in ES(G_0)$ et $C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ qui désigne l'espace des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$ telles que $\tilde{k} \in ES(G_0/A)$ et

$$\tilde{k}(w \cdot \exp a_0, t) = \overline{\chi_{l_{|_a}}(\exp a_0)} \tilde{k}(g_0, t), \quad \forall w \in W, t \in \mathbb{R}.$$

Comme au 4eme cas, on constate que T vérifie la relation de covariance de $C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ et que $T(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$. Par conséquent, $T(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$.

D'autre part nous associons à T un opérateur inverse noté R'_0 défini sur le sous-espace $ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ de $C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ formé des fonctions à décroissance exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$ et tel que $T \circ R'_0 = Id$. Nous pouvons donc définir R'_0 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R'_0 : ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R}) &\longrightarrow ES(G_0) \\ \tilde{k} &\longrightarrow R'_0(\tilde{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp a) &= \int_{\mathfrak{a}^*} \Delta_G\left(-\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{-\ln |\zeta|^2} \\ &\quad \tilde{k}\left(w^{\frac{\ln |\zeta|^2}{2}}, -\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{i\langle \zeta, a \rangle} d\zeta. \end{aligned}$$

4.3.5.1- Remarque. Ici, intervient le fait que la fonction $\tilde{k}$ est à décroissance exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent l'intégrale ci-dessus est convergente.

Ainsi, $R'_0(\tilde{k})$ est bien défini et $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} T \circ R'_0(\tilde{k})(g_0, t) &= T \circ R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp a_0, t) \\ &= \overline{\chi_{l_{|_a}}(\exp a_0)} T \circ R'_0(\tilde{k})(w, t) \\ &= \overline{\chi_{l_{|_a}}(\exp a_0)} \int_{\mathfrak{a}} \Delta_G^{-1}(t) e^{-2t} R'_0(\tilde{k})(w^t \cdot \exp a) \\ &\quad \times \chi_{Ad^*(\exp tX)l_{|_a}}(\exp a) da \\ &= \overline{\chi_{l_{|_a}}(\exp a_0)} \int_{\mathfrak{a}} \int_{\mathfrak{a}^*} \Delta_G^{-1}(t) e^{-2t} \Delta_G\left(-\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{-\ln |\zeta|^2} \\ &\quad \times \tilde{k}\left(w^{t+\frac{\ln |\zeta|^2}{2}}, -\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{i\langle \zeta, a \rangle} e^{-i\langle Ad^*(\exp tX)l_{|_a}, a \rangle} d\zeta da. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'inversion de Fourier, nous remplaçons ζ par $Ad^*(\exp tX)l|_a$ et donc $|\zeta|$ par e^{-t} et nous obtenons

$$\begin{aligned} T \circ R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp a_0, t) &= \overline{\chi_{l|_a}(\exp a_0)} \Delta_G^{-1}(t) e^{-2t} \Delta_G(t) e^{2t} \tilde{k}(w^{t^{-t}}, t) \\ &= \overline{\chi_{l|_a}(\exp a_0)} \tilde{k}(w, t) \\ &= \tilde{k}(w \cdot \exp a_0, t). \end{aligned}$$

Ceci prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de T .

Ainsi, on a

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s-t))(w, t) dw \right) \xi(t) dt.$$

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; nous voulons déterminer $f \in ES(G)$ telle que le noyau f_π de $\pi(f)$ soit égal à F . Ceci équivaut à : $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s-t))(w, t) dw \right) (g_0, g'_0);$$

et d'après notre notation, on obtient

$$F(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s-t))(w, t) dw \right) (g_0, g'_0).$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F((s+t) \cdot g_0, t \cdot g'_0).$$

Alors on a

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s))(w, t) dw \right) (g_0, g'_0)$$

et $G(s, t) \in ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence R_0 est le rétracte de π_0 qui envoie $ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ dans $ES(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in ES(G_0)$ et est continu en s et t . Posons

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= \hat{f}_0(s, t)(g_0) \\ &= \int_a R_0(G(s, t))(g_0 \cdot \exp a) e^{-i\langle l, a \rangle} da. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $ES(G_0/A, l|_a)$ le sous-espace de $ES(G_0)$ formé des fonctions $f \in ES(G_0)$ telles que

$$f(w \cdot \exp a) = \overline{\chi_l(\exp a)} f(w),$$

alors nous remarquons que $f_1(s, t) \in ES(G_0/A, l|_a)$ et est continue en s et t .

Fixons $s \in \mathbb{R}$; alors la fonction

$$f_2(s)(g_0, s) = f_1(s, t)(g_0) \in ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}).$$

Donc nous pouvons lui appliquer l'opérateur inverse R'_0 de T pour obtenir une fonction $R'_0(f_2(s)) \in ES(G_0)$.

Ceci étant, nous pouvons définir la fonction $f \in ES(G)$ image de la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ par le rétracte R de la façon suivante :

$$R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$$

$$F \mapsto R(F) = f$$

$$\begin{aligned} R(F)(s \cdot g_0) &= f(\exp sX \cdot w \cdot \exp a) = R'_0(f_2(s))(w \cdot \exp a) \\ &= \int_{a^*} \Delta_G\left(-\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{-\ln |\zeta|^2} f_2(s)\left(w^{\frac{\ln |\zeta|^2}{2}}, -\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{i\langle \zeta, a \rangle} d\zeta \\ &= \int_{a^*} \Delta_G\left(-\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{-\ln |\zeta|^2} f_1(s, -\frac{\ln |\zeta|^2}{2})\left(w^{\frac{\ln |\zeta|^2}{2}}\right) e^{i\langle \zeta, a \rangle} d\zeta \\ &= \int_{a^*} \int_a \Delta_G\left(-\frac{\ln |\zeta|^2}{2}\right) e^{-\ln |\zeta|^2} \\ &\quad \times \left(R'_0\left(G(s, -\frac{\ln |\zeta|^2}{2})\right)\right)\left(w^{\frac{\ln |\zeta|^2}{2}} \cdot \exp a'\right) e^{-i\langle l, a' \rangle} e^{i\langle \zeta, a \rangle} da' d\zeta. \end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) T(f(s-t))(w, t) dw \right) \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) T\left(R'_0(f_2(s-t))\right)(w, t) dw \right) \xi(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) f_2(s-t)(w, t) dw \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) f_1(s-t, t)(w) dw \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_W \pi_0(w) \int_{\mathfrak{a}} R_0(G(s-t, t))(w \cdot \exp a) e^{-i \langle l, a \rangle} da dw \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \pi_0(g_0) R_0(G(s-t, t))(g_0) dg_0 \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \pi_0 \left(R_0(G(s-t, t)) \right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} G(s-t, t) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(s, t) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

Dans les cas 6a à 6d qui suivent, Nous avons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ avec $Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), l(Y) = 0$ et $l(Z) = 1$. De plus, $[U, Y] = \lambda(U)Y + \varphi(U)Z$ avec λ qui est un homomorphisme réel non trivial sur $\mathfrak{g}$ et φ une forme linéaire non triviale sur $\mathfrak{g}$. Nous savons aussi que $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ est une sous-algèbre de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension 2 de $\mathfrak{g}$. Posons $G^0 = \exp \mathfrak{g}^0, G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ et $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$.

4.3.6- Cas 6a :

Dans ce cas où $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$, il existe $T \in \mathfrak{g}(l)$ tel que $\lambda(T) \neq 0$; nous pouvons supposer que $l(T) = 0$, car sinon nous remplaçons T par $T' = T - \langle l, T \rangle Z$.

Ainsi, on a $G = \exp \mathbb{R}T \cdot G^0$. D'autre part, au paragraphe 2.3.7 du chapitre 2, nous avons remarqué que $\pi = \text{ind}_H^G \chi_l$ est une extension de $\pi^0 = \text{ind}_{H^0}^{G^0} \chi_{l^0}$, avec $l^0 = l|_{\mathfrak{g}^0}, \mathfrak{h}^0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$ et $H^0 = \exp \mathfrak{h}^0$.

Soient $F \in ES(G \times G, H, l)$ et $s \in \mathbb{R}$. Définissons sur $G^0 \times G^0$ l'application F_s^0 de la façon suivante :

$$F_s^0(g^0, g^{0'}) = F(s g^0, g^{0'}).$$

où ${}^s g^0 = \exp sT \cdot g^0 \cdot \exp -sT$. Alors $F_s^0 \in ES(G^0 \times G^0, H^0, l^0)$; de plus, l'application $\mathbb{R} \longrightarrow ES(G^0 \times G^0, H^0, l^0) : s \longrightarrow F_s^0$ est continue pour la topologie de Fréchet.

Puisque par hypothèse de récurrence π^0 possède un Rétracte R^0 de $ES(G^0 \times G^0, H^0, l^0)$ dans $ES(G^0)$, il existe $f_s^0 \in ES(G^0)$ telle que $R^0(F_s^0) = f_s^0$.

Soient $\mathcal{H}^0$ l'espace de la représentation π^0 et $\xi^0 \in \mathcal{H}^0$; on a :

$$\begin{aligned} (\pi(\exp sT)\xi^0)(g^0) &= \xi^0(\exp -sT \cdot g^0) \\ &= \xi^0(\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT \cdot \exp -sT). \end{aligned}$$

Puisque $\exp -sT \in H$ et $\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT \in G$, alors en utilisant la relation de covariance de $\mathcal{H}_\pi$, on obtient

$$\begin{aligned} (\pi(\exp sT)\xi^0)(g^0) &= \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT)\chi_l(\exp sT)\xi^0(\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT) \\ &= \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT)\xi^0(\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT). \end{aligned}$$

Ainsi $(\pi(\exp sT)\xi^0)(g^0) = \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT)\xi^0(\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT)$.

Considérons une fonction $\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) ds = 1,$$

et définissons le rétracte R de la façon suivante :

$$R(F)(\exp sT \cdot g^0) = f(\exp sT \cdot g^0) = \alpha(s)(R^0 F_s^0)(g^0).$$

Alors R est le rétracte cherché. En effet pour $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, on a :

$$\begin{aligned} &(\pi(f)\xi)(g^0) \\ &= \int_G f(x)(\pi(x)\xi)(g^0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G^0} f(\exp sT \cdot h)(\pi(\exp sT \cdot h)\xi)(g^0) ds dh \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G^0} f(\exp sT \cdot h) \left(\pi(\exp sT)(\pi^0(h)\xi) \right) (g^0) ds dh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G^0} \alpha(s) (R^0 F_s^0)(h) \pi(\exp sT) (\pi^0(h)\xi)(g^0) ds dh \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G^0} \alpha(s) f_s^0(h) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) \\
&\quad \times (\pi^0(h)\xi)(\exp -sT \cdot g^0 \cdot \exp sT) ds dh \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) \left(\int_{G^0} f_s^0(h) (\pi^0(h)\xi)(-^s g^0) dh \right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) \left(\pi^0(f_s^0)\xi \right) (-^s g^0) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) \left(\int_{G^0/H^0} F_s^0(-^s g^0, g') \xi(g') dg' \right) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G^0/H^0} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) F \left((-^s g^0)^s, g' \right) \xi(g') dg' ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha(s) \Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}(\exp -sT) ds \int_{G^0/H^0} F(g^0, g') \xi(g') dg' \\
&= \int_{G^0/H^0} F(g^0, g') \xi(g') dg'.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat cherché.

4.3.7- Cas 6b :

Dans ce cas, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{00}$ avec $\mathfrak{g}_{00}$ qui est un idéal de codimension 2 de $\mathfrak{g}$. Ainsi, $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$ est un sous-groupe distingué fermé de G contenant $H = \exp \mathfrak{h}$. D'autre part, d'après 2.3.8, il existe $T \in \mathfrak{g}_0, T \notin \mathfrak{g}^0, X \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{n}, X \notin \mathfrak{g}_0$ avec $[X, Y] = Z$, tels que $G_0 = \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00} = G(l|_a)$ soit un sous-groupe fermé de codimension 1 de G ; de plus, $G = \exp \mathbb{R}X \cdot \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00}$.

Nous posons $l_{00} = l|_{\mathfrak{g}_{00}}, l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}, \pi_{00} = \text{ind}_H^{G_{00}} \chi_{l_{00}}, \pi_0 = \text{ind}_{G_{00}}^{G_0} \pi_{00}$ et $\pi = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$.

Soient $f \in ES(G), \xi \in \mathcal{H}_\pi, s \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{H}_{\pi_0}$ l'espace de la représentation π_0 . Alors, pour les mêmes raisons qu'aux 4ème et 5ème cas, nous écrivons tout élément de G sous la forme de couple $(t, g_0) = \exp tX \cdot g_0$, que nous noterons aussi $t \cdot g_0$, avec $g_0 \in G_0, t \in \mathbb{R}$; de plus nous identifions l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π avec $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$ et l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}$. Nous notons aussi $\Delta_G(t) = \Delta_G(t, \epsilon)$ et $g^t = \exp tX \cdot g \cdot \exp -tX$ pour $t \in \mathbb{R}, g \in G$ et e

qui désigne l'élément neutre de G . Moyennant toutes ces conditions, on a :

$$\begin{aligned}
 (\pi(f)\xi)(s) &= \int_G f(g)(\pi(g)\xi)(s)dg = \int_G f(g)\xi(g^{-1} \cdot s)dg \\
 &= \int_G \Delta_G^{-1}(g)f(g^{-1})\xi(g \cdot s)dg = \int_G \Delta_G^{-1}(g \cdot s^{-1})\Delta_G(s^{-1})f(s \cdot g^{-1})\xi(g)dg \\
 &= \int_G \Delta_G^{-1}(g)f(s \cdot g^{-1})\xi(g)dg \\
 &= \int_{G/G_0} \int_{G_0} \Delta_G^{-1}(t \cdot g_0)f(s \cdot (t \cdot g_0)^{-1})\xi(t \cdot g_0)dg_0dt \\
 &= \int_{G/G_0} \int_{G_0} \Delta_G^{-1}(t \cdot g_0)f(s \cdot (t \cdot g_0)^{-1})\xi(t)(g_0)dg_0dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \Delta_G^{-1}(g_0)\Delta_{G_0,G}^{1/2}(g_0)f(s \cdot g_0^{-1} \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0^{-1})\xi(t))dg_0dt \\
 &\quad (\text{car } \Delta_G^{-1}(t) = 1 \text{ puisque } X \in \mathfrak{n}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \Delta_G^{-1}(g_0^{-1})\Delta_{G_0}^{-1}(g_0)\Delta_{G_0,G}^{1/2}(g_0^{-1}) \\
 &\quad \times f(s \cdot g_0 \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0)\xi(t))dg_0dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0} \Delta_{G_0,G}^{-3/2}(g_0)f(s \cdot g_0 \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0)\xi(t))dg_0dt.
 \end{aligned}$$

Soient $(C_1, \dots, C_q)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_{00}$ et $\mathfrak{w} = \sum_1^{q \oplus} \mathbb{R}C_i$. On a $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{w} \oplus (\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$ et $G_{00} = W \cdot A = W \cdot \exp(\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$, avec $A \cong \mathbb{R}^2$. Nous désignons les éléments de $A = \exp \mathfrak{a}$ par $\exp a$ avec $a \in \mathfrak{a}$. La mesure de Haar sur G_{00} est le produit $dw da$, où dw est la mesure de Haar sur $G_{00}/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur $W = \exp \mathfrak{w}$, et $da = dr dr'$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}$ ou la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Moyennant ces conditions, on a

$$\begin{aligned}
 (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_0/G_{00}} \int_W \int_A \Delta_{G_0,G}^{-3/2}(\exp vT \cdot w \cdot \exp a) \\
 &\quad f(s \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp a \cdot t^{-1})(\pi_0(\exp vT \cdot w \cdot \exp a)\xi(t))dv dw da dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{G_0,G}^{-3/2}(\exp vT)f(s \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp a \cdot t^{-1}) \\
 &\quad \pi_0(\exp vT \cdot w)\xi(t)(\exp -a)dv dw da dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) f(s \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z) \cdot t^{-1}) \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t \cdot \exp -(rY + r'Z)) dv dw dr dr' dt \\
&\quad (\text{avec } \Delta_{G_0, G}(w) = \Delta_{G_0, G}(\exp a) = 1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) \Delta_{G_0, G}^{1/2}(\exp -(rY + r'Z)) \\
&\quad f(s \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT \cdot \exp vT \cdot t \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z) \cdot t^{-1}) \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} \xi(t) dv dw dr dr' dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) \\
&\quad f\left(s \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT \cdot \exp vT \cdot (w \cdot \exp(rY + r'Z))^t\right) \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} \xi(t) dr dr' dv dw dt \\
&\quad (\text{car } \Delta_{G_0, G}^{1/2}(\exp -(rY + r'Z)) = 1).
\end{aligned}$$

Or, $\Delta_{G_0, G}(\exp vT) = e^{tr \text{ ad}_{\mathfrak{s}/\mathfrak{s}_0} vT} = e^{-v}$ et $\Delta_{G_0, G}^{1/2}(\exp -(rY + r'Z)) = 1$, car $\exp -(rY + r'Z) \in \exp \mathfrak{a} \subset \exp \mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{n}$ qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'autre part, puisque G_{00} est un sous-groupe distingué fermé de G et que $[T, X] = -X \text{ mod. } \mathfrak{g}_{00}$, alors $\exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT = \exp(-te^{-v})X \cdot Q(v, t) = (-te^{-v}) \cdot Q(v, t) \in G_{00} \cap \exp \mathfrak{n}$, avec $Q(v, t) = \exp(te^{-v})X \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT = (te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT \in G_{00} \cap \exp \mathfrak{n}$. Notons aussi que

$$\overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} = e^{-ir'}.$$

En tenant compte des données précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
(\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{3v}{2}} f\left((s - te^{-v}) \cdot Q(v, t) \cdot \exp vT \cdot \right. \\
&\quad \left. (w \cdot \exp(rY + r'Z))^t\right) e^{-ir'} dr dr' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{3v}{2}} f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot \right. \\
&\quad \left. w^t \cdot \exp(rY + (r' + rt)Z)\right) e^{-ir'} dr dr' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{3v}{2}} f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) e^{-i(r' - rt)} dr dr' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
& = \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) (\exp vT \cdot w, t) \\
& \quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'opérateur défini par

$$\mathcal{T} : ES(G_0) \rightarrow C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{a \cong \mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot (\exp(rY + r'Z))^t) \\
&\quad \times \chi_l(\exp(rY + r'Z)) dr dr',
\end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in ES(G_0)$, $t, v \in \mathbb{R}$, $w \in W$ et $C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$ qui désigne l'espace des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$, telles que $\tilde{k} \in ES(G_0/A)$ et

$$\tilde{k}(\exp vT \cdot w \cdot \exp(r_1Y + r_2Z), t) = e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l|_a}(\exp(r_1Y + r_2Z))} \tilde{k}(w, t).$$

Signalons qu'on peut aussi écrire l'opérateur $\mathcal{T}$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) \\
&\quad \chi_l(\exp(rY + r'Z)^{-t}) dr dr' \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) \\
&\quad \chi_l(\exp(rY + (r' - rt)Z)) dr dr' \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) \\
&\quad e^{-i(r' - rt)} dr dr'.
\end{aligned}$$

On constate que $\mathcal{T}$ vérifie la relation de covariance de $C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$ et que $\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$. Par conséquent, $\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) \in C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$.

D'autre part, comme dans les cas précédents, nous associons à $\mathcal{T}$ un opérateur inverse noté R'_0 défini sur le sous-espace $ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$ de $C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R})$ formé des

fonctions à décroissance polynomiale en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$ et tel que $\mathcal{T} \circ R'_0 = Id$. Nous pouvons donc définir R'_0 de la manière suivante :

$$R'_0 : ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}) \longrightarrow ES(G_0)$$

$$\tilde{k} \longrightarrow R'_0(\tilde{k})$$

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot (w \cdot \exp rY)^{-t}, t) dt, \end{aligned}$$

avec $w \in W, r, r' \in \mathbb{R}$ et β qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$.

4.3.7.1- Remarque. Ici, intervient le fait que la fonction $\tilde{k}$ est à décroissance polynomiale en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent l'intégrale ci-dessus est convergente.

Notons aussi qu'on a

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot (w \cdot \exp rY)^{-t}, t) dt \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t} \cdot \exp rY^{-t}, t) dt \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t} \cdot \exp(rY - rtZ), t) dt \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t}, t) \overline{\chi_{l|_a} \exp(rY - rtZ)} dt \\ = e^{\frac{-3v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t}, t) e^{-ir't} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, $R'_0(\tilde{k})$ est bien défini et $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z), t) \\ = \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k}))(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k}))(w, t) \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(\tilde{k}) \left((w \cdot \exp(uY + u'Z))^t \right) \\
&\quad \chi_{l_a}(\exp(uY + u'Z)) du du' \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(\tilde{k}) \left(w^t \cdot \exp(uY + u'Z) \right) \\
&\quad \chi_{l_a}(\exp(uY + u'Z)^{-t}) du du' \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\beta(u') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(w^{t-s}, s) e^{-ius} ds \right) \\
&\quad \overline{\chi_{l_a} \exp(uY + (u' - tu)Z)} du du' \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \beta(u') \tilde{k}(w^{t-s}, s) e^{-ius} ds \right) e^{-i(u' - tu)} du' du \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}} \beta(u') e^{-iu'} du' \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(w^{t-s}, s) e^{-ius} e^{itu} ds du \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(w^{t-s}, s) e^{-ius} e^{itu} ds du.
\end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème d'inversion de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z), t) &= e^{\frac{3v}{2}} \overline{\chi_{l_a} \exp(rY + r'Z)} \tilde{k}(w, t) \\
&= \tilde{k}(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z), t),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de $\mathcal{T}$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
(\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \\
&\quad \mathcal{T} \left(f \left((s - t\epsilon^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) (\exp vT \cdot w, t) \\
&\quad \times \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt.
\end{aligned}$$

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; nous voulons déterminer $f \in ES(G)$ telle que le noyau f_π de $\pi(f)$ soit égal à F . Ceci équivaut à : $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(\exp vT \cdot w) \mathcal{T} \left(f \left((s - t\epsilon^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} & (\exp vT \cdot w, t) dv dw \Big) (g_0, g'_0) \\ &= F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(\exp vT \cdot w) \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. (\exp vT \cdot w, t) dv dw \right) (g_0, g'_0) \\ &= F(s, t)(g_0, g'_0). \end{aligned}$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0).$$

Alors,

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(\exp vT \cdot w) \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. (\exp vT \cdot w, t) dv dw \right) (g_0, g'_0) \\ &= G(s, t)(g_0, g'_0), \end{aligned}$$

et $G(s, t) \in ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence R_0 est le rétracte de π_0 qui envoie $ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ dans $ES(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in ES(G_0)$ et est continu en s et t .

Posons

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= f_1(s, t)(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= \hat{f}_0(s, t)(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s, t))(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z) \\ & \quad \cdot \exp(uY + u'Z)) e^{-iu'} du du'. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $ES(G_0/A, l|_a)$ le sous-espace de $ES(G_0)$ formé des fonctions $f \in ES(G_0)$ telles que

$$f(\exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \overline{\chi_l(rY + r'Z)} e^{\frac{3v}{2}} f(\exp vT \cdot w), \forall r, r' \in \mathbb{R},$$

alors, nous remarquons que $f_1(s, t) \in ES(G_0/A, l|_a)$ et est continue en s et t .

Fixons $s \in \mathbb{R}$; alors la fonction

$$f_2(s)(g_0, t) = f_1(s, t)(g_0) \in ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{P}).$$

Donc nous pouvons lui appliquer l'opérateur inverse R'_0 de T pour obtenir une fonction $R'_0(f_2(s)) \in ES(G_0)$.

Ceci étant, nous pouvons définir la fonction $f \in ES(G)$ image de la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ par le rétracte R de la façon suivante :

$$R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$$

$$F \mapsto R(F) = f$$

$$\begin{aligned} R(F)(s \cdot g_0) &= f(\exp sX \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= R'_0\left(f_2(s + (-)\epsilon^{-v})(*, (-))\right) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot (Q(v, (-))^{\exp -vT})^{-1} \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)\right) \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \left(f_2(s + (-)\epsilon^{-v})(*, (-))\right) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, (-))^{\exp -vT})^{-1} \cdot w)^{\exp -uX}, u\right) \epsilon^{-iur} du \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') f_2(s + u\epsilon^{-v}) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1} \cdot w)^{\exp -uX}, u\right) \epsilon^{-iur} du \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') f_1(s + u\epsilon^{-v}, u) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot w^{\exp -uX}\right) \epsilon^{-iur} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s + ue^{-v}, u)) \\
&\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ) \right) \\
&\quad e^{-ib} da db e^{-iur} du.
\end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
(\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{3v}{2}} f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot w^t \cdot \exp(rY + r'Z)\right) e^{-i(r' - rt)} dr dr' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{3v}{2}} e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') f_1(s - te^{-v} + ue^{-v}, u) \\
&\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot (Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot w^t)^{\exp -uX} \right) \\
&\quad e^{-iur} du e^{-ir'} dr' e^{irt} dr \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_1(s - te^{-v} + ue^{-v}, u) \\
&\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot (Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot w^t)^{\exp -uX} \right) \\
&\quad e^{-iur} du e^{irt} dr \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&\quad \text{(Théorème d'inversion de Fourier)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W f_1(s, t) (\exp vT \cdot w) \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s, t)) (\exp vT \cdot w \cdot \exp(uY + u'Z)) \\
&\quad e^{-iu'} du du' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \pi_0\left(R_0(G(s, t))\right) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} G(s, t) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(s, t) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

4.3.8- Cas 6c :

Dans ce cas, nous savons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$. D'après 2.3.9 et le lemme 2.3.10, nous avons montré que le cas 6c se ramène au cas 6b lorsqu'on remplace la polarisation $\mathfrak{h}$ par une polarisation $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 + \mathbb{R}S \subset \mathfrak{g}_{00}$, avec $S \in \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}}) \cap \mathfrak{g}^0$, $S \notin \mathfrak{n}$ tel que $\langle l, [T, S] \rangle = 1$, où $T \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(l_{\mathfrak{n}})$, $T \notin \mathfrak{g}(l)$ et $\lambda(T) \neq 0$. Nous avons aussi souligné que les représentations $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ et $\pi' = \pi_{l, \mathfrak{h}'}$ sont équivalentes.

Nous posons $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Puisque π' possède un rétracte R' ceci d'après le cas 6b, alors pour obtenir le rétracte R de π , il nous suffit de construire un opérateur d'entrelacement entre les espaces $ES(G \times G, H, l)$ et $ES(G \times G, H', l)$.

Soit $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$, un opérateur d'entrelacement de $\mathcal{H}_{\pi}$ et $\mathcal{H}_{\pi'}$, défini par :

$$T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \xi(g) = \int_{H'/H \cap H'} \xi(g \cdot h) \chi_l(h) \Delta_{H', G}^{-1/2}(h) dh,$$

pour tout $\xi \in \mathcal{H}_{\pi}$. Il est bien connu que $T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \circ T_{\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'} = Id_{\mathcal{H}_{\pi}}$, ([Arn. et al]).

D'autre part, nous savons que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 + \mathbb{R}T$ et $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 + \mathbb{R}S$ (cf 2.3.9 et 2.3.10); par conséquent $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}' \cong \mathbb{R}S$ et $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{h} \cong \mathbb{R}T$. Ainsi, $H'/H' \cap H \cong \exp \mathbb{R}S$, et $H/H' \cap H \cong \exp \mathbb{R}T$. Donc

$$T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \xi(g) = \int_{\mathbb{R}} \xi(g \cdot \exp sS) \chi_l(\exp sS) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp sS) ds.$$

Puisque $ES(G \times G, H, l) \subset \mathcal{H}_{\pi} \otimes \overline{\mathcal{H}_{\pi}}$ et $ES(G \times G, H', l) \subset \mathcal{H}_{\pi'} \otimes \overline{\mathcal{H}_{\pi'}}$, nous définissons un opérateur $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : ES(G \times G, H, l) \rightarrow ES(G \times G, H', l)$; $F \rightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F$, avec

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1, g'_1) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(g_1 \cdot \exp s_1 S, g'_1 \cdot \exp s'_1 S) \chi_l(\exp s_1 S) \overline{\chi_l(\exp s'_1 S)} \\ &\quad \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_1 S) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s'_1 S) ds_1 ds'_1. \end{aligned}$$

Remarquons que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1, g'_1) = T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} \otimes \overline{T_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}} F(g_1, g'_1)$.

Montrons que $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F \in ES(G \times G, H', l)$.

1- $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F$ est bien défini; En effet, soit $\mathfrak{B} = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie comme en 3.2.6. Ainsi, $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ est un

sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{w}_1 = \sum_{i=1}^q \oplus \mathbb{R}A_i$, $\mathfrak{w}_0 = \sum_{j=1}^s \oplus \mathbb{R}B_j$ et $\mathfrak{v}_1 = \sum_{k=1}^t \oplus \mathbb{R}C_k$. Notons que $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_0$ et $\mathfrak{v}_1$ sont définis comme en 3.2.6. Puisque $S \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ et $S \notin \mathfrak{h}, S \notin \mathfrak{n}$, alors $S \in \mathfrak{v}_1$. D'autre part, comme $\Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp sS) = (e^{Tr \text{ ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'sS}})^{-1/2} \forall s \in \mathbb{R}$, et que pour g_1, g'_1 fixés, toute expression de la forme $e^{\beta(-)}e^{\beta(*)}F(-, *)$ sur $\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1$ appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$, donc est à décroissance exponentielle dans la direction $\mathfrak{v}_1$ ainsi que toutes ses transformées de Fourier partielles ou globale en $V_1 = \exp \mathfrak{v}_1$, on en déduit que l'intégrale double ci-dessus converge.

2- $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}F \in C^\infty(G \times G)$ et vérifie la relation de covariance de $ES(G \times G, H', l)$ par rapport à $\mathfrak{h}'$.

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; alors F est à décroissance exponentielle dans les directions $W_1 = \exp \mathfrak{w}_1, V_1 = \exp \mathfrak{v}_1$, et polynomiale dans la direction $W_0 = \exp \mathfrak{w}_0$, ainsi que toutes ses transformées de Fourier partielles dans la direction V_1 .

D'autre part, comme $S \in \mathfrak{v}_1$, nous écrivons $\mathfrak{v}_1$ sous la forme $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v}_1^0 \oplus \mathbb{R}S$, où $\mathfrak{v}_1^0$ est un sous-espace coexponentiel de $\mathbb{R}S$ dans $\mathfrak{v}_1$. De plus, en tenant compte de la construction de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ et en remarquant que $T \notin \mathfrak{n}, T \notin \mathfrak{h}'$ et $T \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$, on en déduit qu'en remplaçant S par T dans $\mathfrak{v}_1$, nous obtenons un sous-espace $\mathfrak{v}'_1$ tel que $\mathfrak{w}'_1 \oplus \mathfrak{w}'_0 \oplus \mathfrak{v}'_1$ soit coexponentiel à $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$, avec

$$\mathfrak{w}'_1 = \mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}'_0 = \mathfrak{w}_0, \mathfrak{v}'_1 = \mathfrak{v}_1^0 \oplus \mathbb{R}T.$$

Ainsi, tout élément $g \in G$ peut s'écrire sous la forme $g = w_1 \cdot w_0 \cdot b \cdot \exp tT \cdot h_1 \cdot \exp \alpha S$, avec $w_1 \in W_1, w_0 \in W_0, b \in V_1^0 = \exp \mathfrak{v}_1^0, h_1 \cdot \exp \alpha S \in H', h_1 \in H' \cap G^0 = H \cap G^0$ et $t \in \mathbb{R}$.

Comme $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}F)$ vérifie les propriétés de décroissance des fonctions de $ES(G \times G, H', l)$ dans les directions W_1, V_1^0, W_0 (ceci à cause du fait que F vérifient ces propriétés), alors, pour achever notre preuve, Il nous suffira de montrer que pour $w_1, w'_1 \in W_1, w_0, w'_0 \in W_0, b, b' \in V_1^0$ tous fixés, la fonction

$$(t_1, t'_1) \rightarrow (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}F)(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T)$$

appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Dans toute la suite, nous pouvons supposer que $l(S) = l(T) = 0$. Ainsi, on a :

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}F)(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T \cdot \exp s_1 S, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T \cdot \exp s'_1 S) \\
&\quad \times \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s_1 S) \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s'_1 S) ds_1 ds'_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp s_1 S \cdot \exp -s_1 S \cdot \exp t_1 T \cdot \exp s_1 S, \\
&\quad w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp s'_1 S \cdot \exp -s'_1 S \cdot \exp t'_1 T \cdot \exp s'_1 S) \\
&\quad \times \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s_1 S) \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s'_1 S) ds_1 ds'_1.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 3.2.5.2, nous savons que $[\mathfrak{g}(l_{|n}), [\mathfrak{g}(l_{|n}), \mathfrak{g}(l_{|n})]] \subset (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l$ et que $\mathfrak{g}(l_{|n}) / (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l$ est une algèbre de Heisenberg. De plus, comme les directions S et T obtenues dans le lemme 2.3.10 appartiennent à $\mathfrak{g}(l_{|n})$, on en déduit que $[\mathfrak{g}(l_{|n}), [T, S]] \subset (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l$, ce qui signifie que $[T, S] = Z$ modulo $\mathfrak{g}(l_{|n}) / (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\exp -sS \cdot \exp tT \cdot \exp sS &= \exp(e^{\langle ad(-sS), tT \rangle}) \\
&= \exp(tT - st[S, T] + \frac{s^2 t}{2!} [S, [S, T]] + \dots) \\
&= \exp(tT + stZ + q(s, t)) \\
&\quad \text{où } q(s, t) \in (\mathfrak{g}(l) + \mathfrak{n}(l_{|n})) \cap \ker l \cap \mathfrak{n}.
\end{aligned}$$

Donc $\exp -sS \cdot \exp tT \cdot \exp sS = \exp(tT + stZ + q(s, t)) \in H = \exp \mathfrak{h}$; de plus, puisque $l(T) = l(S) = 0$ et $l(Z) = 1$, alors

$$\chi_l(\exp -sS \cdot \exp tT \cdot \exp sS) = e^{-ist}.$$

Par conséquent, en appliquant à la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ la relation de covariance de $ES(G \times G, H, l)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T) \\
&= \Delta_{H,G}^{1/2}(\exp t_1 T) \Delta_{H,G}^{1/2}(\exp t'_1 T) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp s_1 S, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp s'_1 S) \\
&\quad \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s_1 S) \Delta_{H',G}^{-1/2}(\exp s'_1 S) e^{is_1 t_1} e^{-is'_1 t'_1} ds_1 ds'_1.
\end{aligned}$$

Or, puisque $S \in \mathfrak{v}_1$, $F(w_1 \cdot w_0 \cdot - \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_0 \cdot * \cdot h'_1) \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$ et que $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$ est stable par la transformée de Fourier partielle et par la multiplication par $e^{\beta(-)}$ avec β linéaire sur $\mathfrak{v}_1$, la double intégrale ci-dessus qui est en fait une transformée de Fourier partielle de la fonction

$$(t_1, t'_1) \rightarrow F(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp t_1 T) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp t'_1 T)$$

dans la direction S , appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. D'où vu les propriétés de stabilité de $\mathcal{Hol}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, on en déduit que la fonction

$$(t_1, t'_1) \rightarrow (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_0 \cdot b_1 \cdot \exp t_1 T, w'_1 \cdot w'_0 \cdot b'_1 \cdot \exp t'_1 T)$$

appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Ainsi pour toute fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$, on a

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l).$$

A présent, nous pouvons construire le rétracte R de $ES(G \times G, H, l)$ de la manière suivante :

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; alors $F' = \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F \in ES(G \times G, H', l)$. Or, d'après le cas 6b, il existe un rétracte $R' : ES(G \times G, H', l) \rightarrow ES(G)$ pour l'opérateur $\pi' = \pi_{l, \mathfrak{h}'}$. Donc, il existe $f \in ES(G)$ telle que

$$R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) = f,$$

ce qui équivaut à noyau $(\pi'(f)) = F'$. Et comme π' et π sont équivalentes, on en déduit que noyau $(\pi(f)) = F$.

Ainsi, nous définissons le rétracte R de π de $ES(G \times G, H, l)$ dans $ES(G)$ par :

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g) = R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp sX \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= f(\exp sX \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(s + uc^{-v}, u)) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ) \right) \\ &\quad e^{-ib} da db e^{-iur} du, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G(s + ue^{-v}, u)(g_0, g'_0) &= \left(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F \right) \left(\exp(s + ue^{-v})X \cdot g_0, \exp uX \cdot g'_0 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(\exp(s + ue^{-v})X \cdot g_0 \cdot \exp s_1 S, \exp uX \cdot g'_0 \cdot \exp s_2 S) \\ &\quad \chi_l(\exp s_1 S) \overline{\chi_l(\exp s_2 S)} \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_1 S) \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_2 S) ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

et R'_0 qui désigne le rétracte de $\pi'_0 = \pi_{l_0, \mathfrak{h}'}$.

Ceci qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

4.3.9- Cas 6d :

Dans ce cas, nous savons que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. Au paragraphe 2.3.11, nous avons montré que le cas 6d se ramène au cas 6b lorsqu'on remplace la polarisation $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$ par une polarisation $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}Y \subset \mathfrak{g}_{00}$, avec $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}, X \notin \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi, \varphi(X) = 1$ et $Y \notin \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{a}, [X, Y] = Z$. D'où $\langle l, [X, Y] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$. Nous avons aussi souligné que les représentations $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ et $\pi' = \pi_{l, \mathfrak{h}'}$ sont équivalentes.

Nous posons $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Puisque π' possède un rétracte R' ceci d'après le cas 6b, alors pour obtenir le rétracte R de π , il nous suffit de construire un opérateur d'entrelacement entre les espaces $ES(G \times G, H, l)$ et $ES(G \times G, H', l)$.

Soit $\mathfrak{B} = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie comme en 3.2.6. Ainsi, $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{w}_1 = \sum_{i=1}^q \oplus \mathbb{R}A_i, \mathfrak{w}_0 = \sum_{j=1}^s \oplus \mathbb{R}B_j$ et $\mathfrak{v}_1 = \sum_{k=1}^t \oplus \mathbb{R}C_k$. Notons que $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_0$ et $\mathfrak{v}_1$ sont définis comme en 3.2.5. Puisque $Y \in \mathfrak{n}$ et $Y \notin \mathfrak{h}$, alors $Y \in \mathfrak{w}_0$; donc, on peut écrire $\mathfrak{w}_0$ sous la forme $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}Y$, où $\mathfrak{w}_{00}$ est un sous-espace coexponentiel de $\mathbb{R}Y$ dans $\mathfrak{w}_0$. De plus, d'après la construction de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}'$, nous constatons que si nous remplaçons Y par X dans $\mathfrak{w}_0$, nous obtenons un sous-espace $\mathfrak{w}'_0$ tel que $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}'_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ soit coexponentiel à $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$, avec

$$\mathfrak{w}'_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}X.$$

Ainsi tout élément de G peut s'écrire sous la forme $g_1 = w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot h_1 \cdot v_1$, avec $w_1 \in W_1, w_{00} \in W_{00}, v_1 \in V_1, h_1 \in H$ et $r \in \mathbb{R}$.

Soit l'opérateur $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : ES(G \times G, H, l) \rightarrow ES(G \times G, H', l) ; F \rightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F$, défini par

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1, g'_1) \\ &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1 \cdot \exp s'_1 Y) ds_1 ds'_1. \end{aligned}$$

Montrons que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$.

1- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est bien défini. En effet, comme $Y \in \mathfrak{w}_0$ et que F est une fonction de Schwartz dans la direction $\mathfrak{w}_0$, on en déduit que l'intégrale ci-dessus qui est une transformée de Fourier de F dans la direction Y , converge.

2- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie la relation de covariance de $ES(G \times G, H', l)$ par rapport à $\mathfrak{h}'$.

Sur $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, cette relation de covariance est vérifiée ; pour cela, on prend $h_0, h'_0 \in \exp(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0)$ et on considère l'écriture de

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot h_0, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1 \cdot h'_0).$$

Ensuite on compose h_0 (respectivement h'_0) par $\exp -s_1 Y \cdot h_0 \cdot \exp s_1 Y = h_0$, (respectivement $\exp -s'_1 Y \cdot h'_0 \cdot \exp s'_1 Y = h'_0$) car $h_0, h'_0 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^0$. Enfin, on applique la relation de covariance par rapport à H , car $h_0, h'_0 \in H$.

Dans la direction Y , cette relation de covariance est aussi vérifiée ; en effet, on a $\exp tY \cdot \exp sY = \exp(t+s)Y$. Ensuite, on fait le changement de variable $s \rightarrow -t + s$.

3- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie les propriétés de décroissance des fonctions de $ES(G \times G, H', l)$ dans les directions W_1 et W_{00} (ceci à cause du fait que F vérifie ces propriétés et que les directions ci-dessus ne sont pas touchées par l'intégration) ; par conséquent, pour achever notre preuve, nous allons montrer que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est une fonction de Schwartz dans la direction X et que pour $w_1, w'_1, w_{00}, w'_{00}, r, r'$ fixés, la fonction

$$(v_1, v'_1) \rightarrow (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1)$$

appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$.

Pour cela, calculons

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot \exp s_1 Y, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot \exp s'_1 Y) ds_1 ds'_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot \exp s_1 Y \cdot v_1^{-1} \cdot v_1, \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot \exp s'_1 Y \cdot v_1'^{-1} \cdot v'_1) ds_1 ds'_1
 \end{aligned}$$

Or, pour tout réel s , on vérifie que $v_1 \cdot \exp sY \cdot v_1^{-1} = \exp(e^{ad \log v_1} sY) = \exp(e^{\lambda(\log v_1)} sY)$, car $v_1 \in \mathfrak{g}(l_n) \subset \ker \varphi$, ce qui entraîne que $[\log v_1, Y] = \lambda(\log v_1)Y$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)} s_1 Y) \cdot v_1, \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Y) \cdot v'_1) ds_1 ds'_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)} s_1 Y) \cdot \exp -rX \cdot \exp rX \cdot v_1, \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Y) \cdot \exp -r'X \cdot \exp r'X \cdot v'_1) ds_1 ds'_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)} s_1 Y) \cdot \exp(rs_1 e^{\lambda(\log v_1)} Z) \cdot \exp rX \cdot v_1, \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Y) \cdot \exp(r's'_1 e^{\lambda(\log v_1)} Z) \cdot \exp r'X \cdot v'_1) ds_1 ds'_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)} s_1 Y) \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot \exp(rs_1 e^{\lambda(\log v_1)} Z), \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Y) \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot \exp(r's'_1 e^{\lambda(\log v_1)} Z)) ds_1 ds'_1 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)} s_1 Y) \cdot \exp rX \cdot v_1, \\
 & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Y) \cdot \exp r'X \cdot v'_1) e^{ire^{\lambda(\log v_1)} s_1} e^{-ir'e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1} ds_1 ds'_1 \\
 & \quad (\text{car } \exp(re^{\lambda(\log v_1)} s_1 Z), \exp(r'e^{\lambda(\log v'_1)} s'_1 Z) \in H).
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\exp rX \cdot v_1 = v_1 \cdot v_1^{-1} \cdot \exp rX \cdot v_1 = v_1 \cdot \exp(Ad(v_1^{-1})rX)$$

$$\begin{aligned}
&= v_1 \cdot \exp(e^{ad \log v_1^{-1}} rX) \\
&= v_1 \cdot \exp \left(rX + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(rX) \right).
\end{aligned}$$

4.3.9.1- Remarque : Ici, intervient le fait que $\mathfrak{h}$ soit une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ ce qui implique que $\mathfrak{h}$ soit $\mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ -invariante.

On en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(rX) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, car $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$; d'où $rX + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(rX) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$.

On constate aussi que $\Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}} \left(\exp \left(rX + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(rX) \right) \right) = 1$ car $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'autre part $\langle l, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(rX) \rangle = 0$ car $\log v_1^{-1} \in \mathfrak{g}(l_{|\mathfrak{n}})$ et $X \in \mathfrak{n}$.

Donc en supposant que $l(X) = 0$ (ce qui est faisable, quite à remplacer X par X'), et en utilisant la relation de covariance de F par rapport à $\mathfrak{h}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F \left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s_1 e^{\lambda(\log v_1)} Y) \cdot \exp rX \cdot v_1, \right. \\
&\quad \left. w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(s'_1 e^{\lambda(\log v'_1)} Y) \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \right) e^{irs_1 e^{\lambda(\log v_1)}} e^{-ir's'_1 e^{\lambda(\log v'_1)}} ds_1 ds'_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F \left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s_1 e^{\lambda(\log v_1)} Y) \cdot v_1, \right. \\
&\quad \left. w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(s'_1 e^{\lambda(\log v'_1)} Y) \cdot v'_1 \right) e^{irs_1 e^{\lambda(\log v_1)}} e^{-ir's'_1 e^{\lambda(\log v'_1)}} ds_1 ds'_1 \\
&= e^{-\lambda(\log v_1)} e^{-\lambda(\log v'_1)} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} F \left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp s_1 Y \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp s'_1 Y \cdot v'_1 \right) e^{irs_1} e^{-ir's'_1} ds_1 ds'_1 \\
&\quad \text{(ceci par un changement de variable).}
\end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, on constate que la fonction F est multipliée par les termes $e^{-\lambda(\log v_1)} e^{-\lambda(\log v'_1)}$. Or $F \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$; donc

$$e^{-\lambda(\log v_1)} e^{-\lambda(\log v'_1)} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp s_1 Y \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp s'_1 Y \cdot v'_1) \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1),$$

ceci à cause des propriétés de l'espace $\mathcal{Hol}$. Puisque l'intégrale ci-dessus laisse invariante les variables v_1 et v'_1 , on en déduit que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$.

D'autre part, l'intégrale double ci-dessus est une transformée de Fourier partielle de F dans la direction Y , avec $Y \in \mathfrak{w}_0$. Et comme F est une fonction de Schwartz dans la direction Y , alors toute transformée de Fourier partielle de F dans cette direction est aussi une fonction de Schwartz dans la même direction. Par conséquent,

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1)$$

est une fonction de Schwartz en r et r' , c'est à dire, dans la direction X .

Ainsi, pour toute fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$, on a $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$. A présent, comme dans le cas précédent, nous pouvons construire le rétracte

$R : ES(G \times G, H, l) \rightarrow ES(G)$ de la façon suivante :

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; alors $F' = \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F \in ES(G \times G, H', l)$. Or, d'après le cas 6b, il existe un rétracte $R' : ES(G \times G, H', l) \rightarrow ES(G)$ pour π' . Donc, il existe $f \in ES(G)$ telle que

$$R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) = f,$$

ce qui équivaut à noyau $(\pi'(f)) = F'$. Et comme π' et π sont équivalentes, on en déduit que noyau $(\pi(f)) = F$.

Par conséquent, nous définissons le rétracte R de π de $ES(G \times G, H, l)$ dans $ES(G)$ par :

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g) = R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp sX \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(s + ue^{-v}, u)) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uX} \cdot w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ) \right) \\ &\quad e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} \, du, \end{aligned}$$

avec R'_0 qui désigne le rétracte de $\pi_{l_0, \mathfrak{h}'}$ et

$$\begin{aligned} G(s + ue^{-v}, u)(g_0, g'_0) &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp(s + ue^{-v})X \cdot g_0, \exp uX \cdot g'_0) \\ &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, \\ &\quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1 \cdot \exp s'_1 Y) ds_1 ds'_1. \end{aligned}$$

Notons que $\mathfrak{w}'_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}X$ et $\exp(s + ue^{-v})X \cdot g_0 = w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s + ue^{-v})X \cdot v_1 \cdot h_1$, $\exp uX \cdot g'_0 = w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp uX \cdot v'_1 \cdot h'_1$, avec $h_1, h'_1 \in H' = \exp \mathfrak{h}'$, $w_1, w'_1 \in W_1$, $v_1, v'_1 \in V_1$ et $w_{00}, w'_{00} \in W_{00} = \exp \mathfrak{w}_{00}$.

Ceci achève la construction du rétracte dans ce cas.

Dans les cas 7a à 7b qui suivent, nous traitons l'équivalent du 6eme cas, mais avec λ qui est nul. Nous avons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z$ avec $Y \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $l(Y) = 0$, $l(Z) = 1$ et $[U, Y] = \varphi(U)Z$, avec φ qui est une forme linéaire non triviale sur $\mathfrak{g}$. Nous savons aussi que $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda = \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Par conséquent $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ est un sous-groupe distingué de G .

4.3.10- Cas 7a :

Dans ce cas, $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{g}_0$ qui est une sous-algèbre de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Ainsi $H = \exp \mathfrak{h} \subset G_0$ et il existe $X \in \mathfrak{g}$, $X \notin \mathfrak{g}_0$ tel que $G = \exp \mathbb{R}X \cdot G_0$. D'autre part, comme dans le cas 6b, $\pi_0 = \text{ind}_H^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}}$ (respectivement $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}} = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$), sont des représentations unitaires irréductibles de G_0 (respectivement G), avec $l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}$.

Soient $f \in ES(G)$, $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, $s \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{H}_{\pi_0}$ l'espace de la représentation π_0 . Alors, pour les mêmes raisons qu'au cas 6b, nous écrivons tout élément de G sous la forme de couple $(t, g_0) = \exp tX \cdot g_0 \equiv t \cdot g_0$ et nous notons $\Delta_G(t) = \Delta_G(t, e)$, $g^t = \exp tX \cdot g \cdot \exp -tX$ avec $t \in \mathbb{R}$ et e qui désigne l'élément neutre de G ; de plus nous identifions l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π avec $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_0})$ et l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}$. Moyennant toutes ces conditions, et de façon similaire à 6b, on obtient

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_{G_0} f(s \cdot g_0 \cdot t^{-1})(\pi_0(g_0)\xi(t)) dg_0 dt.$$

Soient $(C_1, \dots, C_q)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{w} = \sum_{i=1}^q \oplus \mathbb{R}C_i$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{w} + (\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$ et $G_0 = W \cdot A = W \cdot \exp(\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$, avec $A \cong \mathbb{R}^2$. Nous désignons les éléments de $A = \exp \mathfrak{a}$ par $\exp a = \exp(rY + r'Z)$, avec $a = rY + r'Z \in \mathfrak{a} \cong \mathbb{R}^2$. La mesure de Haar sur G_0 est le produit $dw da$, où dw est la mesure de Haar sur $G_0/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur $W = \exp \mathfrak{w}$, et $da = dr dr'$ est la mesure de

Haar sur $\mathfrak{a}$ ou la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Moyennant ces conditions, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_A f(s \cdot w \cdot \exp a \cdot t^{-1}) \\
 &\quad (\pi_0(w \cdot \exp a)\xi(t)) dw da dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot t \cdot w \cdot \exp a \cdot t^{-1}) \\
 &\quad \pi_0(w)\xi(t)(\exp -a) dw da dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot (\exp(rY + r'Z))^t) \\
 &\quad \pi_0(w)\xi(t)(\exp -(rY + r'Z)) dw dr dr' dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_{G_0, G}^{1/2}(\exp -(rY + r'Z)) \\
 &\quad f((s-t) \cdot w^t \cdot (\exp(rY + r'Z))^t) \pi_0(w) \\
 &\quad \overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} \xi(t) dw dr dr' dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \\
 &\quad f((s-t) \cdot w^t \cdot (\exp(rY + r'Z))^t) \pi_0(w)\xi(t) \\
 &\quad \overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} dr dr' dw dt \\
 &\quad (\text{car } \Delta_{G_0, G}^{1/2}(\exp -(rY + r'Z)) = 1).
 \end{aligned}$$

On constate que $\overline{\chi_l(\exp -(rY + r'Z))} = e^{-ir'}$ et que $(\exp(rY + r'Z))^t = \exp(rY + (r' + rt)Z)$. Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
 (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \\
 &\quad f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + (r' + rt)Z)) e^{-ir'} dr dr' \pi_0(w)\xi(t) dw dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \\
 &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} f((s-t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) e^{-i(r' - rt)} dr dr' \right) \\
 &\quad \pi_0(w)\xi(t) dw dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_W \mathcal{T}(f((s-t)))(w, t) \pi_0(w)\xi(t) dw dt,
 \end{aligned}$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'opérateur défini par

$$\mathcal{T} : ES(G_0) \rightarrow C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) &= \Delta_G^{-1}(t) \int_{a \cong \mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot (\exp(rY + r'Z))^t) \\ &\quad \times \chi_l(\exp(rY + r'Z)) dr dr', \end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in ES(G_0)$, $w \in W$, $t \in \mathbb{R}$ et $C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ qui désigne l'espace des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$ telles que $\tilde{k} \in ES(G_0/A)$ et

$$\tilde{k}(w \cdot \exp(r_1 Y + r_2 Z), t) = \Delta_G^{-1}(t) \overline{\chi_{l_{|_a}}(\exp(r_1 Y + r_2 Z))} \tilde{k}(w, t).$$

Comme au cas 6b, on peut aussi écrire l'opérateur $\mathcal{T}$ sous la forme

$$\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) = \Delta_G^{-1}(t) \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(w^t \cdot \exp(rY + r'Z)) e^{-i(r' - rt)} dr dr'.$$

On constate que $\mathcal{T}$ vérifie la relation de covariance de $C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ et que $\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R})$; par conséquent $\mathcal{T}(\tilde{f})(w, t) \in C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$.

D'autre part, comme dans les cas précédents, nous associons à $\mathcal{T}$ un opérateur inverse noté R'_0 . Pour cela, nous devons construire R'_0 en fonction des sous-cas (1) et (2) évoqués en 2.3.13, c'est à dire que, selon qu'on peut prendre X dans $\mathfrak{n}$ ou non.

(1) : $X \in \mathfrak{n}$

Dans ce cas, $\Delta_G^{-1}(t) = \Delta_G^{-1}(\exp tX) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$. Nous considérons ensuite le sous-espace $ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ formé des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ à décroissance polynomiale en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$, et nous définissons l'opérateur R'_0 de la manière suivante :

$$R'_0 : ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R}) \longrightarrow ES(G_0)$$

$$\tilde{k} \longrightarrow R'_0(\tilde{k})$$

$$R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}\left((w \cdot \exp rY)^{-t}, t\right) dt,$$

avec $w \in W$, $r, r' \in \mathbb{R}$ et β qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$.

4.3.10.1- Remarque. Ici intervient le fait que la fonction $\tilde{k}$ est à décroissance polynomiale en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$; par conséquent, l'intégrale ci-dessus est convergente.

Notons qu'on peut aussi écrire l'opérateur R'_0 sous la forme

$$R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \tilde{k}(w^{-t}, t) e^{-irt} dt.$$

Ainsi, $R'_0(\tilde{k})$ est bien défini et $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$. De plus, en utilisant le théorème d'inversion de Fourier et les données ci-dessus, on vérifie que

$$T \circ R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z), t) = \tilde{k}(w \cdot \exp(rY + r'Z), t),$$

ce qui prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de T .

(2) : $X \notin \mathfrak{n}$

Dans ce cas, l'égalité $\Delta_G^{-1}(t) = 1 \forall t \in \mathbb{R}$ tombe en défaut. Nous considérons le sous-espace $ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ formé des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ à décroissance exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ sur $\mathbb{R}$, et nous définissons l'opérateur $R'_0 : ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R}) \longrightarrow ES(G_0)$ qui à toute fonction $\tilde{k} \in ES((G_0/A, l_{|_a}) \times \mathbb{R})$ associe $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$ telle que

$$R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \Delta_G(t) \tilde{k}\left((w \cdot \exp rY)^{-t}, t\right) dt,$$

avec $w \in W$, $r, r' \in \mathbb{R}$, et β qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$.

4.3.10.2- Remarque. L'intégrale ci-dessus est convergente, car la fonction $\tilde{k}(-, t)$ est à décroissance exponentielle lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Ainsi, $R'_0(\tilde{k})$ est bien défini et $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$. D'autre part, nous pouvons écrire l'opérateur R'_0 sous la forme

$$R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \Delta_G(t) \tilde{k}(w^{-t}, t) e^{-irt} dt.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z), t) \\
&= \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k}))(w \cdot \exp(rY + r'Z), t) = \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k}))(w, t) \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \Delta_G^{-1}(t) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(\tilde{k}) \left((w \cdot \exp(uY + u'Z))^t \right) \chi_l(\exp(uY + u'Z)) du \, du' \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \Delta_G^{-1}(t) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(\tilde{k}) \left((w^t \cdot \exp(uY + u'Z)) \right) e^{-i(u' - tu)} du \, du' \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \Delta_G^{-1}(t) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} \beta(u') \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_G(s) \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-ius} ds) \right) e^{-iu'} e^{itu} du \, du' \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}} \beta(u') e^{-iu'} du' \right) \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_G(s - t) \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-ius} e^{itu} ds \, du \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} \Delta_G(s - t) \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-ius} e^{itu} ds \, du.
\end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème d'inversion de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k})(w \cdot \exp(rY + r'Z), t) \\
&= \overline{\chi_{l_0} \exp(rY + r'Z)} \tilde{k}(w, t) \\
&= \tilde{k}(w \cdot \exp(rY + r'Z), t),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de $\mathcal{T}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& (\pi(f)\xi)(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_W \mathcal{T}(f((s - t))) (w, t) \pi_0(w) \xi(t) dw dt.
\end{aligned}$$

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; nous voulons déterminer $f \in ES(G)$ telle que $f_\pi = F$. Ceci équivaut à : $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$\begin{aligned} F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0) \\ = \left(\int_W \pi_0(w) T(f((s-t)))(w, t) dw \right) (g_0, g'_0), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F(s, t)(g_0, g'_0) \\ = \left(\int_W \pi_0(w) T(f((s-t)))(w, t) dw \right) (g_0, g'_0). \end{aligned}$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F(s, t)(g_0, g'_0).$$

Alors $G(s, t) \in ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence R_0 est le rétracte de π_0 qui envoie $ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ dans $ES(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in ES(G_0)$ et est continu en s et t . Posons

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= f_1(s, t)(w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= \hat{f}_0(s, t)(w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s, t))(w \cdot \exp(rY + r'Z) \cdot \\ &\quad \exp(uY + u'Z)) e^{-iu'} du du'. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $ES(G_0/A, l|_a)$ le sous-espace de $ES(G_0)$ formé des fonctions $f \in ES(G_0)$ telles que

$$f(w \cdot \exp(rY + r'Z)) = \overline{\chi_l(rY + r'Z)} f(w), \forall r, r' \in \mathbb{R},$$

alors nous remarquons que $f_1(s, t) \in ES(G_0/A, l|_a)$ et est continue en s et t .

Fixons $s \in \mathbb{R}$; alors la fonction

$$f_2(s)(g_0, t) = f_1(s, t)(g_0) \in ES((G_0/A, l|_a \times \mathbb{R}).$$

Donc nous pouvons lui appliquer le rétracte R'_0 de $\mathcal{T}$ pour obtenir une fonction $R'_0(f_2(s)) \in ES(G_0)$.

Ceci étant, nous pouvons définir la fonction $f \in ES(G)$ image de la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ par le rétracte $R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R(F)(s \cdot g_0) &= f(\exp sX \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= R'_0\left(f_2(s + (-))(*, (-))\right)\left(w \cdot \exp(rY + r'Z)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) f_2(s + u) \left(w^{\exp -uX}, u\right) e^{-iur} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) f_1(s + u, u) \left(w^{\exp -uX}\right) e^{-iur} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s + u, u)) \left(w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ)\right) \\ &\quad \chi_l(\exp(aY + bZ)) da db e^{-iur} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s + u, u)) \left(w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ)\right) \\ &\quad e^{-ib} da db e^{-iur} du. \end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \\ &\quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} f\left((s - t) \cdot w^t \cdot \exp(rY + r'Z)\right) e^{-i(r' - rt)} dr dr' \right) \\ &\quad \pi_0(w)\xi(t) dw dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Delta_G^{-1}(t) \int_W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) f_1(s-t+u, u) (w^{t-u}) e^{-iur} du \right. \\
& \left. e^{-i(r'-rt)} dr dr' \right) \pi_0(w) \xi(t) dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_W \left(\int_{\mathbb{R}^2} \Delta_G(u-t) f_1(s-t+u, u) (w^{t-u}) e^{-iur} e^{irt} dr du \right) \\
& \pi_0(w) \xi(t) dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_W f_1(s, t)(w) \pi_0(w) \xi(t) dw dt \\
& \quad (\text{Théorème d'inversion de Fourier}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} R_0(G(s, t))(w \cdot \exp(uY + u'Z)) \\
& \quad e^{-iu'} \pi_0(w) \xi(t) dw du du' dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \pi_0(R_0(G(s, t))) \xi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} G(s, t) \xi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(s, t) \xi(t) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

4.3.11- Cas 7b :

Dans ce cas, nous savons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ et $\mathfrak{n} \not\subset \mathfrak{g}_0$, avec $\mathfrak{g}_0$ qui est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$. Au paragraphe 2.3.14, nous avons montré que le cas 7b se ramène au cas 7a lorsqu'on remplace la polarisation $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}X$ par une polarisation $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}Y \subset \mathfrak{g}_0$, fortement adaptée à $\mathfrak{n}$. Notons que $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, $X \notin \mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ et $\varphi(X) = 1$; d'autre part $Y \notin \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{a}$ et $[X, Y] = Z$. D'où $\langle l, [X, Y] \rangle = \langle l, Z \rangle = 1$. Nous avons aussi souligné que d'après 1.2.17. les représentations $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ et $\pi' = \pi_{l, \mathfrak{h}'}$ sont équivalentes.

Posons $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Puisque π' possède un rétracte R' de $ES(G \times G, H', l)$ dans $ES(G)$, ceci d'après 7a, alors pour obtenir le rétracta R de π , il nous suffira de construire un

opérateur d'entrelacement entre les espaces de noyaux $ES(G \times G, H, l)$ et $ES(G \times G, H', l)$.

4.3.11.1- Remarque : La construction du rétracte dans ce cas est identique à celle qui a été faite en 6d. Ainsi, nous allons nous référer à 6d, et ne mentionner ici que les transformations qui apparaissent et qui sont dûes au fait que λ soit trivial, transformations qui d'autre part simplifient notre étude.

Ainsi, nous considérons l'opérateur $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$ défini par

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : ES(G \times G, H, l) \rightarrow ES(G \times G, H', l)$$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h_2 \cdot \exp s'_1 Y) ds_1 ds'_1, \end{aligned}$$

avec $h_1, h_2 \in H' = \exp \mathfrak{h}'$.

Montrons que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$.

Pour les mêmes raisons qu'en 6d, on constate que $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F$ possède les propriétés suivantes :

- 1- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est bien défini ;
- 2- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie la relation de covariance de $ES(G \times G, H', l)$ par rapport à $\mathfrak{h}'$.

3- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie les propriétés de décroissance des fonctions de $ES(G \times G, H', l)$ dans les directions W_1 et W_{00} (ceci à cause du fait que F vérifie ces propriétés et que les directions ci dessus ne sont pas touchées par l'intégration) ; par conséquent, pour achever notre preuve, nous allons montrer que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est une fonction de Schwartz dans la direction X et que pour $w_1, w'_1, w_{00}, w'_{00}, r, r'$ fixés, la fonction qui à (v_1, v'_1) associe

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1)$$

appartient à $\mathcal{H}ol(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$.

En reprenant les calculs qui ont été fait en 6d et en tenant compte du fait que $\lambda = 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp s_1 Y \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp s'_1 Y \cdot v'_1) e^{irs_1} e^{ir's'_1} ds_1 ds'_1. \end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, on constate que la fonction F n'est pas modifiée dans la direction $V_1 = \exp \mathfrak{v}_1$; or $F \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$, par conséquent $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$. De plus, pour les mêmes raisons qu'en 6d,

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1)$$

est une fonction de Schwartz en r et r' , c'est à dire dans la direction X .

Ainsi, pour toute fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$, on a $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$; donc nous pouvons construire le rétracte R de π . Pour cela, soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; alors $F' = (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$. Or d'après le cas 7a, il existe un rétracte $R' : ES(G \times G, H', l) \rightarrow ES(G)$ pour π' . Donc il existe une fonction $f \in ES(G)$ telle que

$$R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) = f,$$

ce qui équivaut à noyau $(\pi'(f)) = F'$. Et comme π et π' sont équivalentes, on en déduit que noyau $(\pi(f)) = F$.

Ainsi, nous définissons le rétracte R de π de $ES(G \times G, H, l)$ dans $ES(G)$ par :

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g) = R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp sX \cdot w \cdot \exp(rY + r'Z)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \Delta_G(u) \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(s+u, u)) \left(w^{\exp -uX} \cdot \exp(aY + bZ) \right) \\ &\quad e^{-ib} da db e^{-iur} du, \end{aligned}$$

avec R'_0 qui désigne le rétracte de $\pi_{l_0, \mathfrak{h}'}$, β qui est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$ et

$$\begin{aligned} G(s+u, u)(g_0, g'_0) &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp(s+u)X \cdot g_0, \exp uX \cdot g'_0) \\ &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp rX \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot \exp s_1 Y, \\ &\quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp r'X \cdot v'_1 \cdot h'_1 \cdot \exp s'_1 Y) ds_1 ds'_1. \end{aligned}$$

Notons que $\mathfrak{w}'_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}X$ et $\exp(s+u)X \cdot g_0 = w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s+u)X \cdot v_1 \cdot h_1$, $\exp uX \cdot g'_0 = w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp uX \cdot v'_1 \cdot h'_1$, avec $h_1, h'_1 \in H' = \exp \mathfrak{h}'$, $w_1, w'_1 \in W_1$, $v_1, v'_1 \in V_1$ et $w_{00}, w'_{00} \in W_{00} = \exp \mathfrak{w}_{00}$.

Ceci achève la construction du rétracte dans ce cas.

Dans les cas 8a à 8d qui suivent, Nous avons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z$ avec $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}), l(Y_1) = l(Y_2) = 0$ et $l(Z) = 1$. De plus,

$$[U, Y_1 + iY_2] = \lambda(U)(Y_1 + iY_2) + \varphi(U)Z,$$

avec φ qui est une forme linéaire complexe non triviale sur $\mathfrak{g}$, et λ qui est un homomorphisme complexe non trivial sur $\mathfrak{g}$, défini par $\lambda = \lambda_1(1 + i\theta), \lambda_1 \in \mathfrak{g}^*, 0 \neq \theta$. Nous savons aussi que $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0 = \ker \varphi$ est une sous-algèbre de codimension 2 de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension 3 de $\mathfrak{g}$. Posons $A = \exp \mathfrak{a}, G^0 = \exp \mathfrak{g}^0, G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$ et $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$.

4.3.12- Cas 8a :

La construction du rétracte dans ce cas où $\mathfrak{g}(l) \not\subset \mathfrak{g}^0$, est la même qu'en 6a.

4.3.13- Cas 8b :

Dans ce cas qui est l'analogie complexe de 6b, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{00}$ qui est un idéal de codimension 3 de $\mathfrak{g}$. Ainsi, $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$ est un sous-groupe distingué fermé de G contenant $H = \exp \mathfrak{h}$. D'autre part, d'après 2.3.17, nous savons qu'il existe $T \in \mathfrak{g}_0, T \notin \mathfrak{g}^0, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{n}, X_1, X_2 \notin \mathfrak{g}_0$ avec $[X_j, Y_k] = \delta_{jk}Z, [X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = (1 + i)Z$, tels que $G_0 = \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00} = G(l|_{\mathfrak{a}})$ soit un sous-groupe fermé de codimension 2 de G ; de plus, $G = \exp \mathfrak{X} \cdot \exp \mathbb{R}T \cdot G_{00}$, avec $\mathfrak{X} = \text{vec}(X_1, X_2)$ qui désigne le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{g}$ engendré par X_1 et X_2 .

Nous posons $l_{00} = l|_{\mathfrak{g}_{00}}, l_0 = l|_{\mathfrak{g}_0}, \pi_{00} = \text{ind}_H^{G_{00}} \chi_{l_{00}}, \pi_0 = \text{ind}_{G_{00}}^{G_0} \pi_{00}$ et $\pi = \text{ind}_{G_0}^G \pi_0$.

Soient $f \in ES(G), \xi \in \mathcal{H}_\pi, s \equiv (s_1, s_2) \in \mathfrak{X}$ et $\mathcal{H}_{\pi_0}$ l'espace de la représentation π_0 . Alors, pour les mêmes raisons qu'au 6eme cas, nous écrivons tout élément de G sous la forme de couple $(t, g_0) = \exp(t_1 X_1 + t_2 X_2) \cdot g_0 \equiv t \cdot g_0$, avec $t \in \mathfrak{X}$ et $g_0 \in G_0$. Signalons que nous identifions le sous espace vectoriel $\mathfrak{X}$ avec $\mathbb{R}^2$; donc, tout vecteur $u \in \mathfrak{X}$ est identifié par ses coordonnées réelles (u_1, u_2) dans la base X_1, X_2 de $\mathfrak{X}$. Nous identifions

aussi l'espace $\mathcal{H}_\pi$ de π avec $L^2(\mathfrak{X}, \mathcal{H}_{\pi_0}) \cong L^2(\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_{\pi_0})$ et l'espace quotient G/G_0 avec $\mathbb{R}^2$. D'où $\xi(t \cdot g_0) = \xi(t)(g_0)$, pour tout $t \in \mathfrak{X}, g_0 \in G_0$. De plus, nous notons $\Delta_G(t) = \Delta_G(t, e)$ où e désigne l'élément neutre de G et $g^t = \exp(t_1 X_1 + t_2 X_2) \cdot g \cdot \exp(-t_1 X_1 - t_2 X_2)$, avec $t \equiv (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Moyennant toutes ces conditions, et de façon similaire à 6b, on a :

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{G_0} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(g_0) f(s \cdot g_0 \cdot t^{-1}) (\pi_0(g_0) \xi(t)) dg_0 dt.$$

Désignons par $\mathcal{Y} = \text{vec}(Y_1, Y_2)$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathfrak{a}$ engendré par Y_1 et Y_2 . Ainsi, on a $\mathfrak{a} = \mathcal{Y} + \mathbb{R}Z$. Signalons aussi que tout vecteur $U \in \mathcal{Y}$ sera identifié à ses coordonnées (r_1, r_2) dans la base (Y_1, Y_2) .

D'autre part, soient $(C_1, \dots, C_m)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}_{00}$ et $\mathfrak{w} = \sum_1^{m\oplus} \mathbb{R}C_i$. On a $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{w} \oplus (\mathcal{Y} + \mathbb{R}Z)$ et $G_{00} = W \cdot A$, avec $A = \exp \mathfrak{a} = \exp(\mathcal{Y} + \mathbb{R}Z) \cong \mathbb{R}^3$. La mesure de Haar sur G_{00} est le produit $dw da$, où dw est la mesure de Haar sur $G_{00}/A \cong W$ ou la mesure de Lebesgue sur $W = \exp \mathfrak{w}$, et $da = dr_1 dr_2 dr'$ est la mesure de Haar sur $\mathfrak{a}$ ou la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$, avec $dr_1 dr_2$ qui désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{Y} \cong \mathbb{R}^2$ et dr' qui désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}Z \cong \mathbb{R}$. Moyennant ces conditions, nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\pi(f)\xi)(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{G_0/G_{00}} \int_W \int_A \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT \cdot w \cdot \exp a) \\ & \quad f(s \cdot \exp vT \cdot w \exp a \cdot t^{-1}) (\pi_0(\exp vT \cdot w \cdot \exp a) \xi(t)) dv dw da dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) f\left(s \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r'Z) \cdot t^{-1}\right) \\ & \quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi\left(t \cdot \exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r'Z)\right) dv dw dr_1 dr_2 dr' dt \\ & \quad (\text{car } \Delta_{G_0, G}(w) = \Delta_{G_0, G}(\exp a) = 1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) \Delta_{G_0, G}^{1/2}\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r'Z)\right) \\ & \quad f\left(s \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT \cdot \exp vT \cdot t \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r'Z) \cdot t^{-1}\right) \\ & \quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \chi_l\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r'Z)\right) \xi(t) dv dw dr_1 dr_2 dr' dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_{G_0, G}^{-3/2}(\exp vT) \\
&\quad f\left(s \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT \cdot \exp vT \cdot \left(w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right)^t\right) \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \overline{\chi_l\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right)} \xi(t) dr_1 dr_2 dr' dv dw dt \\
&\quad \left(\text{car } \Delta_{G_0, G}^{1/2}\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right) = 1\right).
\end{aligned}$$

Or, $\Delta_{G_0, G}(\exp vT) = e^{tr \text{ ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0} vT} = e^{-2v}$ et $\Delta_{G_0, G}^{1/2}\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right) = 1$, car $\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \in \exp \mathfrak{a} \subset \exp \mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{n}$ qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'autre part $\exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT = -te^{-v} \cdot Q(v, t) = \exp -(t_1 X_1 + t_2 X_2) e^{-v} \cdot Q(v, t) \in G_{00} \cap \exp \mathfrak{n}$, avec $Q(v, t) \in G_{00} \cap \exp \mathfrak{n}$ et $Q(v, t) = te^{-v} \cdot \exp vT \cdot t^{-1} \cdot \exp -vT$. Notons aussi que

$$\overline{\chi_l\left(\exp -((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right)} = e^{-ir'}.$$

En tenant compte des remarques ci-dessus, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\pi(f)\xi)(s) &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} e^{3v} f\left((s - te^{-v}) \cdot Q(v, t) \cdot \exp vT \cdot \left(w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right)^t\right) e^{-ir'} dr_1 dr_2 dr' \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} e^{3v} f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot w^t \cdot \exp\left((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + (r' + \langle t, (r_1, r_2) \rangle) Z\right)\right) e^{-ir'} dr_1 dr_2 dr' \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} e^{3v} f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \cdot w^t \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)\right) e^{-i(r' - \langle t, (r_1, r_2) \rangle)} dr_1 dr_2 dr' \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W T\left(f\left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT}\right)\right) (\exp vT \cdot w, t) \\
&\quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt.
\end{aligned}$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{T}$ désigne l'opérateur défini par

$$\mathcal{T} : ES(G_0) \rightarrow C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) &= e^{3v} \int_{a \cong \mathbb{R}^3} \tilde{f} \left(w^t \cdot \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)^t \right) \\ &\quad \times \chi_l \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) dr dr' \end{aligned}$$

avec $\tilde{f} \in ES(G_0)$, $v \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^2$, $w \in W$ et $C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$ qui désigne l'espace des fonctions $\tilde{k} \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R}^2)$ telles que $\tilde{k} \in ES(G_0/A)$ et

$$\begin{aligned} &\tilde{k} \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z), t \right) \\ &= e^{3v} \overline{\chi_{l|_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \tilde{k}(w, t), \end{aligned}$$

ceci pour tout $r_1, r_2, r' \in \mathbb{R}$.

Signalons qu'on peut aussi écrire l'opérateur $\mathcal{T}$ sous la forme

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) \\ &= e^{3v} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f} \left(w^t \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) \\ &\quad \chi_l \left(\left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)^{-t} \right) dr_1 dr_2 dr' \\ &= e^{3v} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f} \left(w^t \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) \\ &\quad \chi_l \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + (r' - \langle t, (r_1, r_2) \rangle) Z) \right) dr_1 dr_2 dr' \\ &= e^{3v} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f} \left(w^t \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) e^{-i(r' - \langle t, (r_1, r_2) \rangle)} dr_1 dr_2 dr'. \end{aligned}$$

On constate que $\mathcal{T}$ vérifie la relation de covariance de $C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$ et que $\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) \in C^\infty(G_0 \times \mathbb{R}^2)$; par conséquent $\mathcal{T}(\tilde{f})(\exp vT \cdot w, t) \in C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$.

D'autre part, comme dans le cas 6b. nous associons à $\mathcal{T}$ un opérateur inverse noté R'_0 défini sur le sous-espace $ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$ formé des fonctions $\tilde{k}(g_0, t) \in$

$C^\infty((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2)$ à décroissance polynomiale lorsque $\|t\|_{\mathbb{R}^2} \rightarrow +\infty$ et tel que $T \circ R'_0 = Id$. Nous définissons l'opérateur R'_0 de la manière suivante :

$$R'_0 : ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2) \longrightarrow ES(G_0)$$

$$\tilde{k} \longrightarrow R'_0(\tilde{k})$$

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ = e^{-3v} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k} \left(\exp vT (w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2) \text{big})^{-t}, t \right) dt, \end{aligned}$$

avec $w \in W, r_1, r_2, r' \in \mathbb{R}$ et β qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$.

4.3.13.1- Remarque : Ici intervient le fait que la fonction $\tilde{k}$ est à décroissance polynomiale lorsque $\|t\|_{\mathbb{R}^2} \rightarrow +\infty$; par conséquent l'intégrale ci-dessus est convergente.

Notons aussi qu'on a

$$\begin{aligned} R'_0(\tilde{k})(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ = e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') \tilde{k} \left(\exp vT \cdot (w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2))^{-t}, t \right) dt \\ = e^{-3v} \beta(r') \\ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k} \left(\exp vT \cdot w^{-t} \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) - \langle t, (r_1, r_2) \rangle Z), t \right) dt \\ = e^{-3v} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t}, t) \\ \frac{\chi_{l|_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) - \langle t, (r_1, r_2) \rangle Z) \right) dt}{dt} \\ = e^{-3v} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(\exp vT \cdot w^{-t}, t) e^{-i \langle t, (r_1, r_2) \rangle} dt. \end{aligned}$$

Ainsi, $R'_0(\tilde{k})$ est bien défini et $R'_0(\tilde{k}) \in ES(G_0)$. De plus. on a

$$T \circ R'_0(\tilde{k}) \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z), t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k})) \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z), t \right) \\
&= \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \mathcal{T}(R'_0(\tilde{k}))(\exp vT \cdot w, t) \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \int_{\mathbb{R}^3} R'_0(\tilde{k}) \left((w \cdot \exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z))^t \right) \\
&\quad \chi_l(\exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z)) du_1 du_2 du' \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \int_{\mathbb{R}^3} R'_0(\tilde{k}) \left(w^t \cdot \exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z) \right) \\
&\quad \chi_l \left(\left(\exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z) \right)^{-t} \right) du_1 du_2 du' \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^3} \left(\beta(u') \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-i\langle (u_1, u_2), s \rangle}) ds \right) \\
&\quad \chi_{l_a} \left(\exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + (u' - \langle t, (u_1, u_2) \rangle) Z) \right) du_1 du_2 du' \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \beta(u') \right. \\
&\quad \left. \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-i\langle (u_1, u_2), s \rangle}) ds \right) e^{-i(u' - \langle t, (u_1, u_2) \rangle)} du' du_1 du_2 \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \int_{\mathbb{R}} \beta(u') e^{-iu'} du' \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-i\langle (u_1, u_2), s \rangle}) e^{i\langle (u_1, u_2), t \rangle} ds du_1 du_2 \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^4} \tilde{k}((w^{t-s}, s) e^{-i\langle (u_1, u_2), s \rangle}) e^{i\langle (u_1, u_2), t \rangle} ds du_1 du_2.
\end{aligned}$$

D'où d'après le théorème d'inversion de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T} \circ R'_0(\tilde{k}) \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z), t \right) \\
&= e^{3v} \overline{\chi_{l_a} \left(\exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right)} \tilde{k}(w, t) \\
&= \tilde{k} \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z), t \right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que R'_0 est l'opérateur inverse de $\mathcal{T}$.

Ainsi, on a

$$(\pi(f)\xi)(s) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \\ (\exp vT \cdot w, t) \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t) dv dw dt.$$

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$; nous voulons déterminer $f \in ES(G)$ telle que le noyau f_π de $\pi(f)$ soit égal à F . Ceci équivaut à : $\forall s \equiv (s_1, s_2), t \equiv (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \forall g_0, g'_0 \in G_0$,

$$F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0) = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(\exp vT \cdot w) \right. \\ \left. \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \right. \\ \left. (\exp vT \cdot w, t) dv dw \right) (g_0, g'_0),$$

ce qui nous donne

$$F(s, t)(g_0, g'_0) = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_W \pi_0(\exp vT \cdot w) \right. \\ \left. \mathcal{T} \left(f \left((s - te^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t)^{\exp -vT} \right) \right) \right. \\ \left. (\exp vT \cdot w, t) dv dw \right) (g_0, g'_0).$$

Pour s et t fixés, posons

$$G(s, t)(g_0, g'_0) = F(s \cdot g_0, t \cdot g'_0).$$

Alors $G(s, t) \in ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ et varie de façon continue pour les normes de Fréchet lorsque s et t varient.

Comme par hypothèse de récurrence R_0 est le rétracte de π_0 qui envoie $ES(G_0 \times G_0, H, l_0)$ dans $ES(G_0)$, alors $f_0(s, t) = R_0(G(s, t)) \in ES(G_0)$ et est continu en s et t .

Définissons une fonction f_1 sur G_0 par

$$\begin{aligned} f_1(s, t)(g_0) &= f_1(s, t)(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ &= \hat{f}_0(s, t)(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} R_0(G(s, t)) \left(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z) \right) e^{-iu'} du_1 du_2 du'. \end{aligned}$$

Si nous désignons par $ES(G_0/A, l|_a)$ le sous-espace de $ES(G_0)$ formé des fonctions $f \in ES(G_0)$ telles que $\forall r_1, r_2, r', v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &f(\exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ &= \overline{\chi_l((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)} e^{\frac{3v}{2}} f(\exp vT \cdot w), \end{aligned}$$

alors nous remarquons que $f_1(s, t) \in ES(G_0/A, l|_a)$ et est continue en s et t .

Fixons $s \in \mathbb{R}^2$; alors la fonction

$$f_2(s)(g_0, t) = f_1(s, t)(g_0) \in ES((G_0/A, l|_a) \times \mathbb{R}^2).$$

Donc nous pouvons lui appliquer l'opérateur inverse R'_0 de $\mathcal{T}$ pour obtenir une fonction $R'_0(f_2(s)) \in ES(G_0)$.

Ceci étant, nous pouvons définir la fonction $f \in ES(G)$ image de la fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$ par le rétracte R de la façon suivante :

$$R : ES(G \times G, H, l) \longrightarrow ES(G)$$

$$F \longmapsto R(F) = f$$

$$\begin{aligned} &R(F)(s \cdot g_0) \\ &= f(\exp(s_1 X_1 + s_2 X_2) \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ &= R'_0 \left(f_2((s_1, s_2) + e^{-n}(-, -))(*, (-, -)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\exp vT \cdot (Q(v, (-, -))^{\exp -vT})^{-1} \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) \\
&= e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') \left(f_2((s_1, s_2) + e^{-v}(-, -))(*, (-, -)) \right) \\
& \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, (-, -))^{\exp -vT})^{-1} \cdot w)^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)}, u_1, u_2 \right) \\
& \quad e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} du_1 du_2 \\
&= e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') f_2(s_1 + e^{-v}u_1, s_2 + e^{-v}u_2) \\
& \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1} \cdot w)^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)}, u_1, u_2 \right) \\
& \quad e^{-i u_1 r_1 + u_2 r_2} du_1 du_2 \\
&= e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') f_1(s_1 + e^{-v}u_1, s_2 + e^{-v}u_2, u_1, u_2) \\
& \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \cdot w^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \right) \\
& \quad e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} du_1 du_2 \\
&= e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') \\
& \quad \int_{\mathbb{R}^3} R_0 \left(G(s_1 + e^{-v}u_1, s_2 + e^{-v}u_2, u_1, u_2) \right) \\
& \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \cdot w^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \right. \\
& \quad \left. \cdot \exp((a_1 Y_1 + a_2 Y_2) + bZ) \right) e^{-ib} da_1 da_2 db e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} du_1 du_2.
\end{aligned}$$

On vérifie que $R(F) = f$ est bien la fonction cherchée. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
& (\pi(f)\xi)(s_1, s_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} e^{3v} f \left((s_1 - t_1 e^{-v}, s_2 - t_2 e^{-v}) \cdot \exp vT \cdot Q(v, t_1, t_2)^{\exp -vT} \right. \\
& \quad \left. \cdot w^{(t_1, t_2)} \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z) \right) e^{-i(r' - (t_1 r_1 + t_2 r_2))} dr_1 dr_2 dr' \\
& \quad \pi_0(\exp vT \cdot w)\xi(t_1, t_2) dv dw dt_1 dt_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} e^{3v} e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') f_1(s_1 - t_1 e^{-v} + u_1 e^{-v}, s_2 - t_2 e^{-v} + u_2 e^{-v}, u_1, u_2) \\
& \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \cdot (Q(v, t_1, t_2)^{\exp -vT} \right. \\
& \quad \left. \cdot w^{(t_1, t_2)})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \right) e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} du_1 du_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-ir'} dr' e^{i(t_1 r_1 + t_2 r_2)} dr_1 dr_2 \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t_1, t_2) dv dw dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} f_1(s_1 - t_1 e^{-v} + u_1 e^{-v}, s_2 - t_2 e^{-v} + u_2 e^{-v}, u_1, u_2) \\
 & \quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \cdot (Q(v, t_1, t_2)^{\exp -vT} \right. \\
 & \quad \left. \cdot w(t_1, t_2))^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \right) e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} e^{i(t_1 r_1 + t_2 r_2)} du_1 du_2 dr_1 dr_2 \\
 & \quad \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t_1, t_2) dv dw dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W f_1(s_1, s_2, t_1, t_2) (\exp vT \cdot w) \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t_1, t_2) dv dw dt_1 dt_2 \\
 & \quad (\text{Théorème d'inversion de Fourier}) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_W \int_{\mathbb{R}^3} R_0(G(s_1, s_2, t_1, t_2)) (\exp vT \cdot w \cdot \exp((u_1 Y_1 + u_2 Y_2) + u' Z)) \\
 & \quad e^{-iu'} \pi_0(\exp vT \cdot w) \xi(t_1, t_2) dv dw du_1 du_2 du' dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \pi_0 \left(R_0(G(s_1, s_2, t_1, t_2)) \right) \xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} G(s_1, s_2, t_1, t_2) \xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} F(s_1, s_2, t_1, t_2) \xi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Ce qui achève la construction du rétracte dans ce cas.

4.3.14- Cas 8c :

La construction du rétracte dans ce cas où $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$, est la même qu'en 6c.

4.3.15- Cas 8d :

Dans ce cas, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. Dans le paragraphe 2.3.19, nous avons vu que le cas 8d se subdivise en 2 sous-cas :

1) $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 2$:

Ce sous-cas correspond à 6d ; donc la construction du rétracte est la même qu'en 6d.

2) $\dim \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} = 1$:

Ce sous-cas se ramène au cas 8b lorsqu'on remplace la polarisation $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus$

$\mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2$ par la polarisation $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \oplus \mathcal{Y}$, qui est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et contenue dans $\mathfrak{g}_{00}$. Notons que $X_1, X_2 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}, X_1, X_2 \notin \mathfrak{g}_0, \varphi(X_1) = \varphi(X_2)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}, Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{h}$, avec $[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2] = Z$; donc, on a $\langle l, [X_1, Y_1] \rangle = \langle l, [X_2, Y_2] \rangle = 1$. Nous savons aussi que d'après 1.2.17, les représentations $\pi = \pi_{l, \mathfrak{h}}$ et $\pi' = \pi_{l, \mathfrak{h}'}$ sont équivalentes.

Nous posons $H' = \exp \mathfrak{h}'$. Puisque π' possède un rétracte R' ceci d'après le cas 8b, alors pour obtenir le rétracte R de π , il nous suffit de construire comme au cas 6d, un opérateur d'entrelacement entre les espaces $ES(G \times G, H, l)$ et $ES(G \times G, H', l)$.

Soit $\mathfrak{B} = (A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t)$ une base coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ définie comme en 3.2.6. Ainsi, $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{w}_1 = \sum_{i=1}^q \mathbb{R}A_i, \mathfrak{w}_0 = \sum_{j=1}^s \mathbb{R}B_j$ et $\mathfrak{v}_1 = \sum_{k=1}^t \mathbb{R}C_k$. Notons que $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_0$ et $\mathfrak{v}_1$ sont définis comme en 3.2.5. Puisque $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n}$ et $Y_1, Y_2 \notin \mathfrak{h}$, alors $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{w}_0$; donc, on peut écrire $\mathfrak{w}_0$ sous la forme $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2$, où $\mathfrak{w}_{00}$ est un sous-espace coexponentiel à $\mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2$ dans $\mathfrak{w}_0$. De plus, d'après la construction de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}'$, nous constatons que si nous remplaçons $\mathbb{R}Y_1 \oplus \mathbb{R}Y_2$ par $\mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2$ dans $\mathfrak{w}_0$, nous obtenons un sous-espace $\mathfrak{w}'_0$ tel que $\mathfrak{w}_1 \oplus \mathfrak{w}'_0 \oplus \mathfrak{v}_1$ soit coexponentiel à $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}$, avec

$$\mathfrak{w}'_0 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 = \mathfrak{w}_{00} \oplus \mathfrak{X}.$$

Ainsi tout élément de G peut s'écrire sous la forme $g_1 = w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot h_1 \cdot v_1$, avec $w_1 \in W_1, w_{00} \in W_{00}, v_1 \in V_1, h_1 \in H$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Soit l'opérateur $\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} : ES(G \times G, H, l) \rightarrow ES(G \times G, H', l); F \rightarrow \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F$, défini par

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g_1, g'_1) \\ &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot h_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot h'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2), \\ & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot h'_1 \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2. \end{aligned}$$

Montrons que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$.

1- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est bien défini. En effet, comme $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{w}_0$ et que F est une fonction de Schwartz dans la direction $\mathfrak{w}_0$, on en déduit que l'intégrale ci-dessus converge.

2- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie la relation de covariance de $ES(G \times G, H', l)$ par rapport à $\mathfrak{h}'$.

En effet, sur $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, cette relation de covariance est vérifiée ; pour cela, on prend $h_0, h'_0 \in \exp(\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_0)$ et en considère l'écriture de

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot h_1 \cdot h_0, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot h_2 \cdot h'_0).$$

Ensuite on compose h_0 (respectivement h'_0) par $\exp -(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) \cdot h_0 \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) = h_0$, (respectivement $\exp -(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2) \cdot h'_0 \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2) = h'_0$) car $h_0, h'_0 \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^0$. Enfin, on applique la relation de covariance par rapport à H , car $h_0, h'_0 \in H$.

Dans la direction $\mathcal{Y}$, cette relation de covariance est aussi vérifiée ; en effet, on a

$$\exp(t_1 Y_1 + t_2 Y_2) \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) = \exp((t_1 + s_1) Y_1 + (t_2 + s_2) Y_2).$$

Ensuite on fait le changement de variable $(s_1, s_2) \rightarrow (-t_1 + s_1, -t_2 + s_2)$.

3- $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ vérifie les propriétés de décroissance des fonctions de $ES(G \times G, H', l)$ dans les directions W_1 et W_{00} (ceci à cause du fait que F vérifie ces propriétés et que les directions ci dessus ne sont pas touchées par l'intégration) ; par conséquent, pour achever notre preuve, nous allons montrer que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ est une fonction de Schwartz dans les directions X_1, X_2 et que pour $w_1, w'_1, w_{00}, w'_{00}, r_1, r_2, r'_1, r'_2$ fixés, la fonction qui à (v_1, v'_1) associe

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1)$$

appartient à $\mathcal{H}ol(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$.

Pour cela, calculons

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2), \\ & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \, ds_1 \, ds_2 \, ds'_1 \, ds'_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) \cdot v_1^{-1} \cdot v_1, \\ & \quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2) \cdot v_1'^{-1} \cdot v'_1) \, ds_1 \, ds_2 \, ds'_1 \, ds'_2 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) \cdot v_1^{-1} &= \exp(e^{ad \log v_1}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \\ &= \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)), \end{aligned}$$

car $v_1 \in \mathfrak{g}(l|_n) \subset \ker \varphi$, ce qui entraine que $[\log v_1, Y_1 + iY_2] = \lambda(\log v_1)(Y_1 + iY_2)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v'_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot v_1, \\ &\quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot v'_1) ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot \\ &\quad \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot \exp(-(r_1 X_1 + r_2 X_2)) \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, \\ &\quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot \exp(-(r'_1 X_1 + r'_2 X_2)) \cdot \\ &\quad \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1) ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot \\ &\quad \exp((r_1 s_1 + r_2 s_2)e^{\lambda(\log v_1)}Z) \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \\ &\quad \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot \exp((r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2)e^{\lambda(\log v'_1)}Z) \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1) \\ &\quad ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot \\ &\quad \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \cdot \exp((r_1 s_1 + r_2 s_2)e^{\lambda(\log v_1)}Z) \cdot w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \\ &\quad \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \cdot \exp((r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2)e^{\lambda(\log v'_1)}Z)) \\ &\quad ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} F(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, \\ &\quad w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1) \end{aligned}$$

$$e^{i(r_1 s_1 + r_2 s_2) e^{\lambda(\log v_1)}} e^{-i(r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2) e^{\lambda(\log v'_1)}} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2$$

(car $\exp((r_1 s_1 + r_2 s_2) e^{\lambda(\log v_1)} Z), \exp((r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2) e^{\lambda(\log v'_1)} Z) \in H$).

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \\ &= v_1 \cdot v_1^{-1} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1 \\ &= v_1 \cdot \exp(Ad(v_1^{-1})(r_1 X_1 + r_2 X_2)) \\ &= v_1 \cdot \exp(e^{ad \log v_1^{-1}}(r_1 X_1 + r_2 X_2)) \\ &= v_1 \cdot \exp\left((r_1 X_1 + r_2 X_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(r_1 X_1 + r_2 X_2)\right). \end{aligned}$$

4.3.15-1- Remarque : Ici, intervient le fait que $\mathfrak{h}$ soit une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ ce qui implique que $\mathfrak{h}$ soit $\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ -invariante.

On en déduit que $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(r_1 X_1 + r_2 X_2)\right) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, car $X_1, X_2 \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$; donc $\left(r_1 X_1 + r_2 X_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(r_1 X_1 + r_2 X_2)\right) \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$. On constate aussi que

$$\Delta_{H,G}^{\frac{1}{2}}\left((r_1 X_1 + r_2 X_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(r_1 X_1 + r_2 X_2)\right) = 1,$$

car $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. D'autre part,

$$\langle l, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} ad^k \log v_1^{-1}(r_1 X_1 + r_2 X_2) \rangle = 0,$$

car $\log v_1^{-1} \in \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}})$ et $X_1, X_2 \in \mathfrak{n}$.

Donc en supposant que $l(X_1) = l(X_2) = 0$ (ce qui est faisable, quite à remplacer X_1, X_2 par X'_1, X'_2), et en utilisant la relation de covariance de F par rapport à $\mathfrak{h}$, on obtient

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^4} F\left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, \right. \\
&\quad \left. w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v'_1\right) \\
&\quad e^{i(r_1 s_1 + r_2 s_2)e^{\lambda(\log v_1)}} e^{-i(r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2)e^{\lambda(\log v'_1)}} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} F\left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v_1)}(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot v_1, \right. \\
&\quad \left. w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(e^{\lambda(\log v'_1)}(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2)) \cdot v'_1\right) e^{i(r_1 s_1 + r_2 s_2)e^{\lambda(\log v_1)}} \\
&\quad e^{-i(r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2)e^{\lambda(\log v'_1)}} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\
&= (e^{-\lambda(\log v_1)})^2 (e^{-\lambda(\log v'_1)})^2 \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^4} F\left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2) \cdot v'_1\right) \\
&\quad e^{i(r_1 s_1 + r_2 s_2)} e^{-i(r'_1 s'_1 + r'_2 s'_2)} ds_1 ds_2 ds'_1 ds'_2 \\
&\quad (\text{par un changement de variable}).
\end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, on constate que F est multiplié par des termes $(e^{-\lambda(\log v_1)})^2 (e^{-\lambda(\log v'_1)})^2$; or $F \in \mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$, donc

$$\begin{aligned}
&(e^{-\lambda(\log v_1)})^2 (e^{-\lambda(\log v'_1)})^2 \\
&\quad F\left(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(s'_1 Y_1 + s'_2 Y_2) \cdot v'_1\right)
\end{aligned}$$

appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$, ceci à cause des propriétés de l'espace $\mathcal{Hol}$. Et puisque l'intégrale ci-dessus laisse invariante les variables v_1 et v'_1 , on en déduit que $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)$ appartient à $\mathcal{Hol}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1)$.

D'autre part, l'intégrale ci-dessus est une transformée de Fourier partielle de F dans les directions Y_1, Y_2 avec $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{w}_0$. Et comme F est une fonction de Schwartz dans les directions Y_1, Y_2 , alors toute transformée de Fourier partielle de F dans ces directions est aussi une fonction de Schwartz. Par conséquent, $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(w_1 \cdot w_{00} \cdot \exp(r_1 X_1 + r_2 X_2) \cdot v_1, w'_1 \cdot w'_{00} \cdot \exp(r'_1 X_1 + r'_2 X_2) \cdot v'_1)$ est une fonction de Schwartz en r_1, r_2 et r'_1, r'_2 c'est à dire, dans les directions X_1, X_2 .

Ainsi, pour toute fonction $F \in ES(G \times G, H, l)$, on a $(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \in ES(G \times G, H', l)$. A

présent, comme dans le cas 6d, nous construisons le rétracte R de $ES(G \times G, H, l)$ dans $ES(G)$ de la façon suivante :

Soit $F \in ES(G \times G, H, l)$, alors $F' = \mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F \in ES(G \times G, H', l)$. Or, d'après le cas 8b, il existe un rétracte $R' : ES(G \times G, H', l) \rightarrow ES(G)$ pour π' . Donc, il existe $f \in ES(G)$ telle que

$$R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) = f,$$

ce qui équivaut à noyau $(\pi'(f)) = F'$. Et comme π' et π sont équivalentes, on en déduit que noyau $(\pi(f)) = F$.

Ainsi, nous définissons le rétracte R de π de $ES(G \times G, H, l)$ dans $ES(G)$ par :

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(g) \\ &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp(s_1 X_1 + s_2 X_2) \cdot \exp vT \cdot w \cdot \exp((r_1 Y_1 + r_2 Y_2) + r' Z)) \\ &= e^{-3v} \int_{\mathbb{R}^2} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^3} R'_0 \left(G(s_1 + e^{-v} u_1, s_2 + e^{-v} u_2, u_1, u_2) \right) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot ((Q(v, u_1, u_2)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \cdot w^{\exp -(u_1 X_1 + u_2 X_2)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \exp((a_1 Y_1 + a_2 Y_2) + a_3 Z) \right) e^{-ib} da_1 da_2 da_3 e^{-i(u_1 r_1 + u_2 r_2)} du_1 du_2, \end{aligned}$$

avec

$$G(s_1 + e^{-v} u_1, s_2 + e^{-v} u_2, u_1, u_2) = (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(s_1 + e^{-v} u_1, s_2 + e^{-v} u_2 \cdot -, u_1, u_2 \cdot -)$$

et R'_0 qui désigne le rétracte de $\pi_{l_0, \mathfrak{h}'}$.

Ceci achève la construction du rétracte dans ce dernier cas.

CHAPITRE 5

EXEMPLES

Dans ce chapitre, nous donnons plusieurs exemples de groupes de Lie exponentiels dans lesquels nous construisons de façon explicite le rétracte R étudié au chapitre précédent.

5.1- EXEMPLE 1 :

Nous reprenons ici l'exemple 2.2.2.2 (chapitre 2, paragraphe 2), où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle de dimension 4, de base (X_1, X_2, X_3, T) , définie par les crochets suivants lorsqu'ils sont non nuls, les autres étant nuls ou obtenus par antisymétrisation :

$$[T, X_1] = X_1, \quad [T, X_2] = -X_2.$$

Soit d'autre part $l \in \mathfrak{g}^*$ définie par

$$l(T) = 1, \quad l(X_1) = 0, \quad l(X_2) = 1, \quad l(X_3) = 0.$$

Nous savons que $\mathfrak{g}(l) = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_3$ et que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ est une polarisation de Vergne en l , passant par $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; donc $\mathfrak{h}$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$.

D'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky ; par conséquent, si nous posons $H = \exp \mathfrak{h}$, $G = \exp \mathfrak{g}$, et si $\chi_{l, \mathfrak{h}}$ désigne le caractère unitaire de H défini par

$$\chi_{l, \mathfrak{h}}(\exp U) = e^{-il(U)} \forall U \in \mathfrak{h},$$

alors $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ est une représentation unitaire irréductible de G .

Les conditions ci-dessus correspondent aux hypothèses du théorème principal 4.1 ; donc, il nous est possible de construire le rétracte R de π .

Soit $\mathfrak{a}$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ tel que $l(\mathfrak{a}) = 0$. On a $\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_1$. Posons :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}T,$$

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3 \text{ et } \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_2.$$

On remarque que $\mathfrak{n}_1$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_1$ contenant $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathbb{R}X_2$ et que $G = G_1 \cdot \exp \mathfrak{a}$. De plus, si l_1 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ définie par

$$l_1(U + \mathfrak{a}) = l(U), \forall U \in \mathfrak{g},$$

alors $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en l_1 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_1$; donc $\mathfrak{h}_1$ vérifie la condition de Pukansky sur G_1 .

Ainsi $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}$ est une représentation unitaire irréductible de G_1 , avec $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$, et $\chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}$ qui est un caractère unitaire de H_1 défini par

$$\chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}(\exp U) = e^{-il_1(U)}, \forall U \in \mathfrak{h}_1.$$

D'autre part, π_1 possède un rétracte R_1 , ceci d'après les hypothèses de récurrence.

On constate que les données ci-dessus pour π correspondent au 2eme cas du théorème 4.1 ; par conséquent π possède un rétracte R défini par :

$$\forall F \in ES(G \times G, H, l) = ES(G_1 \times G_1, H_1, l_1),$$

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R(F)(g_1 \cdot \exp sX_1) \\ &= R_1(F)(g_1) \varphi_1(\exp sX_1), \end{aligned}$$

avec $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(s) ds = 1$, $g = g_1 \cdot \exp sX_1 \in G = G_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_1$.

Il s'en suit que, pour obtenir une expression explicite de R , il nous suffit de déterminer le rétracte R_1 de π_1 . Pour cela, nous procédons comme précédemment.

Soit $\mathfrak{a}_1$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_1$ contenu dans $\mathfrak{n}_1$, tel que $l(\mathfrak{a}_1) = 0$. On a $\mathfrak{a}_1 = (0)$. donc le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1$ est de dimension inférieure ou égal à 1. Notons même qu'on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = \mathbb{R}X_3$. Puisque $\mathfrak{n}_1 = \mathbb{R}X_2$ est un idéal non central de $\mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{n}_1$ contient au moins un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}_1$, en l'occurrence $\mathfrak{a}_2 = \mathbb{R}X_2 = \mathfrak{n}_1$. De plus, on a :

$$[U, X_2] = \lambda(U)X_2, \quad \forall U \in \mathfrak{g}_1, \text{ avec } \lambda \in \mathfrak{g}_1^*.$$

Notons que $T \notin \mathfrak{g}_2$ et $\lambda(T) = -1$. Posons

$$\mathfrak{g}_2 = \ker \lambda = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3.$$

Donc, on peut écrire que $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}T' \oplus \mathfrak{g}_2$, d'où $G_1 = \exp \mathbb{R}T' \cdot \exp \mathfrak{g}_2$, avec $T' = -T$.

On constate que $\mathfrak{g}_2$ est égal à $\mathfrak{h}_1$ et que $\mathfrak{g}_2$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_1$ de dimension 2. De plus, si l_2 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_2$ définie par

$$l_2(X_3) = l_1(X_3) = 0, l_2(X_2) = l_1(X_2) = 1,$$

alors $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en l_2 et $\mathfrak{h}_1$ vérifie la condition de Pukansky sur $G_2 = \exp \mathfrak{g}_2$.

Ainsi, $\pi_2 = \text{ind}_{H_1}^{G_2} \chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}$ est une représentation unitaire irréductible de G_2 , avec $\chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}$ qui désigne le caractère unitaire de G_2 défini par

$$\chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}(\exp U) = e^{-il_2(U)}, \quad \forall U \in \mathfrak{g}_2.$$

D'après le 1er cas du théorème 4.1, π_2 admet un rétracte R_2 défini par :

$$\forall F_2 \in ES(G_2 \times G_2, H_1, l_2)$$

$$R_2(F_2)(\exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3) = F_2(e, e) \varphi_2(\exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3),$$

où e désigne l'élément neutre de G_2 , $r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ et $\varphi_2 \in C_c^\infty(H_1)$ avec $\hat{\varphi}_2(l_2) = 1$.

On constate que les conditions ci-dessus pour π_1 correspondent aux hypothèses du 4eme cas de la preuve du théorème 4.1. Par conséquent, en utilisant la formule du rétracte obtenue dans ce dernier cas, nous déterminons le rétracte R_1 de π_1 de la façon suivante :

$$\forall F \in ES(G_1 \times G_1, H_1, l_1), r, s, t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
& R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp rX_2) \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|u|} \Delta_{G_1}(\exp -\ln|u| T') \\
&\quad R_2\left((F_2(t, -\ln|u|))\right) ((\exp sX_3)^{\ln|u|} \cdot \exp vX_2) \\
&\quad e^{-iv} e^{iru} dv du,
\end{aligned}$$

avec $F_2(t, t') \in ES(G_2 \times G_2, H_1, l_2)$ et définie par

$$\begin{aligned}
& F_2(t, t')(\exp sX_3 \cdot \exp rX_2, \exp s'X_3 \cdot \exp r'X_2) \\
&= F(\exp(t + t')T' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp rX_2, \exp t'T' \cdot \exp s'X_3 \cdot \exp r'X_2).
\end{aligned}$$

On remarque que $\Delta_{G_1}(\exp -\ln|u| T') = |u|$; de plus,

$$(\exp sX_3)^{\ln|u|} \cdot \exp vX_2 = \exp sX_3 \cdot \exp vX_2,$$

car $\mathfrak{g}_2$ est abélien. Ainsi, en utilisant la formule du rétracte R_2 obtenue précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
& R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp rX_2) \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u| e^{-\ln|u|} F_2\left(t, -\ln|u|\right)(e, e) \varphi_2(\exp sX_3 \cdot \exp vX_2) \\
&\quad e^{-iv} e^{iru} dv du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F\left(\exp(t - \ln|u|)T', \exp -\ln|u| T'\right) \varphi_2(\exp sX_3 \cdot \exp vX_2) \\
&\quad e^{-iv} e^{-iru} dv du \quad (\text{car } |u| e^{-\ln|u|} = 1).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte du résultat précédent, on obtient l'expression explicite du rétracte R de π de la façon suivante :

$$\forall g \in G, g = g_1 \cdot \exp rX_1, g_1 = \exp tT' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp s'X_2 \in G_1, r, s, s', t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
R(F)(g) &= R(F)(g_1 \cdot \exp s'X_1) \\
&= R(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp rX_2 \cdot \exp s'X_1) \\
&= \varphi_1(\exp s'X_1) R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_3 \cdot \exp rX_2) \\
&= \varphi_1(\exp s'X_1) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F\left(\exp(t - \ln|u|)T', \exp -\ln|u| T'\right) \varphi_2(\exp sX_3 \cdot \exp vX_2) e^{-iv} e^{-iru} dv du.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne le résultat cherché.

5.2- EXEMPLE 2 :

Généralisons l'exemple précédent, en supposant toujours que $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre exponentielle de dimension 4, de base (X_1, X_2, X_3, T) définie par les crochets suivants lorsqu'ils sont non nuls, les autres étant nuls ou obtenus par antisymétrisation :

$$[T, X_1] = X_1, \quad [T, X_2] = -X_2.$$

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ définie par

$$l(T) = 1, \quad l(X_1) = \alpha, \quad l(X_2) = 1, \quad l(X_3) = 0,$$

avec $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

Nous savons que $\mathfrak{g}(l) = \mathbb{R}X_3 + \mathbb{R}(X_1 + \alpha X_2)$ et que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ est une polarisation de Vergne en l , passant par $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$; donc $\mathfrak{h}$ est fortement adaptée à $\mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{n}$ qui est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$.

Pour les mêmes raisons qu'à l'exemple 1, $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky ; par conséquent, si nous posons $H = \exp \mathfrak{h}$, $G = \exp \mathfrak{g}$ et si $\chi_{l, \mathfrak{h}}$ désigne le caractère unitaire de H défini par

$$\chi_{l, \mathfrak{h}}(\exp U) = e^{-il(U)} \forall U \in \mathfrak{h},$$

alors $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ est une représentation unitaire irréductible de G .

Les conditions ci-dessus correspondent aux hypothèses du théorème 4.1 ; donc, il nous est possible de construire le rétracte R de π .

Soit $\mathfrak{a}$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$ tel que $l(\mathfrak{a}) = 0$. On a $\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_3$. Posons :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}T,$$

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2 \text{ et } \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}/\mathfrak{a} = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2.$$

On remarque que $\mathfrak{n}_1$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_1$ contenant $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2$ et que $G = G_1 \cdot \exp \mathfrak{a}$. De plus, si l_1 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ définie par

$$l_1(U + \mathfrak{a}) = l(U), \forall U \in \mathfrak{g},$$

alors $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en l_1 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_1$; donc $\mathfrak{h}_1$ vérifie la condition de Pukansky sur G_1 .

Ainsi $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}$ est une représentation unitaire irréductible de G_1 , avec $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ et $\chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}$ qui est un caractère unitaire de H_1 défini par

$$\chi_{l_1, \mathfrak{h}_1}(\exp U) = e^{-il_1(U)}, \forall U \in \mathfrak{h}_1.$$

D'autre part, π_1 possède un rétracte R_1 , ceci d'après les hypothèses de récurrence du théorème 4.1.

On constate que les données ci-dessus pour π correspondent au 2eme cas du théorème 4.1 ; par conséquent π possède un rétracte R défini par :

$$\forall F \in ES(G \times G, H, l) = ES(G_1 \times G_1, H_1, l_1),$$

$$\begin{aligned} R(F)(g) &= R(F)(g_1 \cdot \exp sX_3) \\ &= R_1(F)(g_1) \varphi_1(\exp sX_3), \end{aligned}$$

avec $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi_1(s) ds = 1$, $g = g_1 \cdot \exp sX_3 \in G = G_1 \cdot \exp \mathbb{R}X_3$.

Il s'en suit que, pour obtenir une expression explicite de R , il nous suffit de déterminer le rétracte R_1 de π_1 . Pour y arriver, nous procédons comme précédemment.

Soit $\mathfrak{a}_1$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_1$ tel que $l(\mathfrak{a}_1) = 0$. On a $\mathfrak{a}_1 = (0)$; donc le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1$ est de dimension inférieure ou égal à 1. Notons même qu'on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = (0)$. Puisque $\mathfrak{n}_1$ est un idéal non central de $\mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{n}_1$ contient au moins un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}_1$, en l'occurrence $\mathfrak{a}_2 = \mathbb{R}X_2$. De plus, on a :

$$[U, X_2] = \lambda(U)X_2, \quad \forall U \in \mathfrak{g}_1, \text{ avec } \lambda \in \mathfrak{g}_1^*.$$

Notons que $\lambda \neq 0$, car $\lambda(T) = -1$. Posons

$$\mathfrak{g}_2 = \ker \lambda = \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_2.$$

Donc on peut écrire que $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}T' \oplus \mathfrak{g}_2$, d'où $G_1 = \exp \mathbb{R}T' \cdot \exp \mathfrak{g}_2$, avec $T' = -T$.

On constate que $\mathfrak{g}_2$ est égal à $\mathfrak{h}_1$ et que $\mathfrak{g}_2$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}_1$ de dimension 2. De plus, si l_2 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_2$ définie par

$$l_2(X_1) = l_1(X_1) = \alpha, l_2(X_2) = l_1(X_2) = 1,$$

alors $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en l_2 et $\mathfrak{h}_1$ vérifie la condition de Pukansky sur $G_2 = \exp \mathfrak{g}_2$, car G_2 est nilpotent.

Ainsi, $\pi_2 = \text{ind}_{H_1}^{G_2} \chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}$ est une représentation unitaire irréductible de G_2 , avec $\chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}$ qui désigne le caractère unitaire de G_2 défini par

$$\chi_{l_2, \mathfrak{h}_1}(\exp U) = e^{-il_2(U)}, \forall U \in \mathfrak{g}_2.$$

D'après le 1er cas du théorème 4.1, π_2 admet un rétracte R_2 défini par : $\forall F_2 \in ES(G_2 \times G_2, H_1, l_2)$,

$$R_2(F_2)(\exp rX_1 \cdot \exp sX_2) = F_2(e, e)\varphi_2(\exp rX_1 \cdot \exp sX_2),$$

où e désigne l'élément neutre de G_2 , $r, s \in \mathbb{R}$ et $\varphi_2 \in C_c^\infty(H_1)$ avec $\hat{\varphi}_2(l_2) = 1$.

On constate que les conditions ci-dessus pour π_1 correspondent aux hypothèses du 4eme cas de la preuve du théorème 4.1. Par conséquent, en utilisant la formule du rétracte obtenue dans ce dernier cas, nous déterminons le rétracte R_1 de π_1 de la façon suivante :

$$\forall F \in ES(G_1 \times G_1, H_1, l_1), r, s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} & R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln|u|} \Delta_{G_1}(\exp -\ln|u| T') \\ & \quad R_2\left((F_2(t, -\ln|u|))\right)((\exp sX_1)^{\ln|u|} \cdot \exp vX_2) e^{-iv} e^{iru} dv du, \end{aligned}$$

avec $F_2(t, t') \in ES(G_2 \times G_2, H_1, l_2)$ et définie par

$$\begin{aligned} & F_2(t, t')(\exp sX_1 \cdot \exp rX_2, \exp s'X_1 \cdot \exp r'X_2) \\ &= F(\exp(t + t')T' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2, \\ & \quad \exp t'T' \cdot \exp s'X_1 \cdot \exp r'X_2). \end{aligned}$$

On remarque que $\Delta_{G_1}(\exp - \ln | u | T') = 1$; de plus,

$$\begin{aligned} & (\exp sX_1)^{\ln | u |} \\ &= \exp \ln | u | T' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp - \ln | u | T' \\ &= \exp(se^{-\ln | u |})X_1. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la formule de R_2 obtenue précédemment, on a

$$\begin{aligned} & R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln | u |} R_2 \left((F_2(t, -\ln | u |)) \right) (\exp(se^{-\ln | u |})X_1 \cdot \exp vX_2) \\ & \quad e^{-iv} e^{iru} dv du \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln | u |} F_2(t, -\ln | u |)(e, e) \\ & \quad \varphi_2(\exp(se^{-\ln | u |})X_1 \cdot \exp vX_2) e^{-iv} e^{iru} dv du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln | u |} F(\exp(t - \ln | u |)T', \exp - \ln | u | T') \\ & \quad \varphi_2(\exp se^{-\ln | u |})X_1 \cdot \exp vX_2) e^{-iv} e^{-iru} dv du. \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte du résultat ci-dessus, on obtient l'expression explicite du rétracte R de π sous la forme suivante :

$$\forall g = g_1 \cdot \exp s'X_3 \in G, g_1 = \exp tT' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2 \in G_1, r, s, t, s' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & R(F)(g) = R(F)(g_1 \cdot \exp s'X_3) \\ &= R(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2 \cdot \exp s'X_3) \\ &= \varphi_1(\exp s'X_3) R_1(F)(\exp tT' \cdot \exp sX_1 \cdot \exp rX_2) \\ &= \varphi_1(\exp s'X_3) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ln | u |} F(\exp(t - \ln | u |)T', \exp - \ln | u | T') \\ & \quad \varphi_2(\exp(re^{-\ln | u |})X_1 \cdot \exp vX_2) e^{-iv} e^{-iru} dv du. \end{aligned}$$

Ceci nous donne le résultat cherché.

5.3- EXEMPLE 3 :

Reprenons l'exemple donné à la suite de la remarque 2.2.3 du chapitre 2, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle de dimension 8, de base (A, B, H, S, T, U, V, Z) définie par les crochets suivants lorsqu'ils sont non nuls, les autres étant nuls ou obtenus par antisymétrisation :

$$\begin{aligned} [A, B] &= H, [A, H] = U, [A, V] = Z, \\ [B, H] &= V, [B, U] = Z, [S, A] = 2A, \\ [S, B] &= -2B, [S, U] = 2U, [S, V] = -2V, \\ [T, A] &= A, [T, B] = -B, [T, S] = Z, \\ [T, U] &= U, [T, V] = -V. \end{aligned}$$

Nous avons constaté que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle non nilpotente. Soit d'autre part $l \in \mathfrak{g}^*$ définie par

$$\begin{aligned} l(Z) &= 1, \quad l(A) = l(B) = l(H) = 0, \\ l(S) &= l(T) = l(U) = l(V) = 0. \end{aligned}$$

Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \langle Z \rangle$ et l'algèbre de Lie du stabilisateur de l dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}(l) = \langle H, Z \rangle$. D'autre part, d'après l'étude faite en 2.2.3, nous avons montré que $\mathfrak{h} = \langle A, H, T, U, Z \rangle$ est une polarisation réelle en l , fortement adaptée à $\mathfrak{n} = \langle A, B, H, U, V, Z \rangle = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et $\mathfrak{h}$ n'est pas une polarisation de Vergne. Rappelons que $\mathfrak{n}$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ de pas 3 et que l'algèbre de Lie du stabilisateur dans G de $l|_{\mathfrak{n}}$ est

$$\mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{n}}) = \langle H, S, T, Z \rangle.$$

D'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukansky ; par conséquent, si nous posons $H = \exp \mathfrak{h}$, $G = \exp \mathfrak{g}$ et si $\chi_{l, \mathfrak{h}}$ désigne le caractère unitaire de H défini par

$$\chi_{l, \mathfrak{h}}(\exp X) = e^{-il(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{h},$$

alors $\pi = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$ est une représentation unitaire irréductible de G .

Les conditions ci-dessus correspondent aux hypothèses du théorème 4.1 ; donc, il nous est possible de construire le rétracte R de π , en suivant l'algorithme décrit dans la preuve de 4.1.

1ere Etape :

Puisqu'il n'existe pas d'idéal non trivial de $\mathfrak{g}$ où l s'annule, alors $\mathfrak{n}$ est non central, (ce qui est le cas ici) et $\mathfrak{n}$ contient au moins un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$, qui se présente sous l'une des formes données au lemme 2.1.2. Nous prenons $\mathfrak{a} = \mathbb{R}U + \mathbb{R}Z$; c'est un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$ de dimension 2, contenu dans $\mathfrak{n}$, et qui se présente suivant la forme (iii) du lemme 2.1.2. Donc, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et il existe deux formes linéaires réelles λ, φ , sur $\mathfrak{g}$ telles que

$$[X, U] = \lambda(X)U + \varphi(X)Z, \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

avec $\lambda \neq (0)$ car $\lambda(S) = 2$ et $\varphi \neq (0)$ car $\varphi(B) = 1$.

Déterminons $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}(l|_{\mathfrak{a}}) = \ker \varphi$; on a

$$\mathfrak{g}_0 = \langle A, H, S, T, U, V, Z \rangle.$$

Notons que $\mathfrak{g}_0$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$ car $[B, S] = 2B \notin \mathfrak{g}_0$.

Déterminons $\mathfrak{g}^0 = \ker \lambda$; on a

$$\mathfrak{g}^0 = \langle A, B, H, S - 2T, U, V, Z \rangle.$$

On remarque que $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$; d'autre part, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^0$ et $\mathfrak{g}(l) \subset \mathfrak{g}^0$.

Les conditions ci-dessus pour π correspondent aux hypothèses du cas 6c de la preuve du théorème 4.1. Donc, nous remplaçons la polarisation $\mathfrak{h}$ par une polarisation $\mathfrak{h}'$ en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et contenue dans $\mathfrak{g}_{00} = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{g}^0 = \langle A, H, S - 2T, U, V, Z \rangle$. Pour cela, en tenant compte du lemme 2.3.10, nous prenons

$$\mathfrak{h}' = \langle A, H, S - 2T, U, Z \rangle = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^0 \oplus \mathbb{R}(S - 2T).$$

On constate que $\mathfrak{h}'$ est une polarisation en l fortement adaptée à $\mathfrak{n}$ et contenue dans $\mathfrak{g}_{00}$; donc, d'après la proposition 2.2.4, $\mathfrak{h}'$ vérifie la condition de Pukansky. Par conséquent,

si nous posons $H' = \exp \mathfrak{h}'$ et si $\chi_{l, \mathfrak{h}'}$ désigne le caractère unitaire de H' défini par

$$\chi_{l, \mathfrak{h}'}(\exp X) = e^{-il(X)} \forall X \in \mathfrak{h}',$$

alors $\pi' = \text{ind}_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}'}$ est une représentation unitaire irréductible de G ; notons que d'après 1.2.17, π et π' sont équivalentes.

Puisque $\mathfrak{h}'$ vérifie les conditions de 6b, alors π' possède un rétracte R' qui est sous la forme du rétracte obtenu en 6b. On a

$$\forall F \in ES(G \times G, H', l), t, v, r, r', s, s', u', v' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & R'(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(t + ue^{-v}, u)) \left(\exp vT \cdot ((Q'(v, u)^{\exp -vT})^{-1})^{\exp -uB} \right. \\ & \quad \cdot \left(\exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \right)^{\exp -uB} \cdot \exp(aU + bZ) \Big) \\ & \quad e^{-ib} da db e^{-iur} du, \end{aligned}$$

avec $G(\alpha, \alpha') \in ES(G_0 \times G_0, H', l_0)$, définie par

$$G(\alpha, \alpha')(g_0, g'_0) = F(\exp \alpha B \cdot g_0, \exp \alpha' B \cdot g'_0),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $g_0, g'_0 \in G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$, β qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta(r') e^{-ir'} dr' = 1$ et R'_0 désigne le rétracte de $\pi_{l_0, \mathfrak{h}'} = \text{ind}_H^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}'}$, où l_0 est la restriction de l à $\mathfrak{g}_0$.

Rappelons que

$$Q'(\alpha, \alpha') = \exp(\alpha' \epsilon^{-\alpha}) B \cdot \exp \alpha T \cdot \exp -\alpha' B \cdot \exp -\alpha T \in G_{00} \cap N,$$

avec $G_{00} = \exp \mathfrak{g}_{00}$ et $N = \exp \mathfrak{n}$. Dans ce cas, on obtient $Q'(\alpha, \alpha') = e$ avec e qui désigne l'élément neutre de G_{00} ; d'autre part, en utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, on obtient

$$\left(\exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \right)^{\exp -uB}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp -uB \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp uB \\
&= (\exp sA)^{\exp -uB} \cdot (\exp s'H)^{\exp -uB} \cdot (\exp u'V)^{\exp -uB} \cdot \\
&\quad (\exp v'(S - 2T))^{\exp -uB} \\
&= \exp(sA + suH - \frac{su^2}{2}V) \cdot \exp s'H \cdot \exp(u' - s'u)V \cdot \exp v'(S - 2T) \\
&= \exp(sA + suH) \cdot \exp -\frac{su^2}{2}V \cdot \exp \frac{s^2u^2}{4}Z \cdot \exp s'H \cdot \exp(u' - s'u)V \cdot \\
&\quad \exp v'(S - 2T) \\
&= \exp sA \cdot \exp suH \cdot \exp -\frac{s^2u}{2}U \cdot \exp -\frac{su^2}{2}V \cdot \exp \frac{s^2u^2}{4}Z \cdot \\
&\quad \exp s'H \cdot \exp(u' - s'u)V \cdot \exp v'(S - 2T) \\
&= \exp sA \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(u' - s'u - \frac{su^2}{2})V \cdot \exp \frac{s^2u^2}{4}Z \cdot \\
&\quad \exp -\frac{s^2u}{2}U \cdot \exp(s' + su)H.
\end{aligned}$$

Notons aussi que

$$\exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp -vT = \exp se^v A.$$

Finalement, on a

$$(1) \quad \forall F \in ES(G \times G, H', l), t, v, r, r', s, s', u', v' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
&R'(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(t + ue^{-v}, u)) \\
&\quad \left(\exp se^v A \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(u' - s'u - \frac{su^2}{2})V \cdot \exp(b + \frac{s^2u^2}{4})Z \cdot \right. \\
&\quad \left. \exp(a - \frac{s^2u}{2})U \cdot \exp(s' + su)H \right) e^{-ib} da db e^{-iur} du.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le cas 6c, le rétracte R de π s'obtient à partir du rétracte R' de π' de la façon suivante :

$$(2) \quad \forall F \in ES(G \times G, H, l), t, v, r, r', s, s', u', v' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & R(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \right. \\ & \quad \left. \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rU \cdot \exp r'Z \right) \\ &= R'(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \right. \\ & \quad \left. \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(t + ue^{-v}, u)) \\ & \quad \left(\exp se^v A \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(u' - s'u - \frac{su^2}{2})V \cdot \exp(b + \frac{s^2u^2}{4})Z \cdot \right. \\ & \quad \left. \exp(a - \frac{s^2u}{2})U \cdot \exp(s' + su)H \right) e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} & G(\alpha, \alpha')(g_0, g'_0) \\ &= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)(\exp \alpha B \cdot g_0, \exp \alpha' B \cdot g'_0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(\exp \alpha B \cdot g_0 \cdot \exp s_1(S - 2T), \exp \alpha' B \cdot g'_0 \cdot \exp s_2(S - 2T)) \\ & \quad \chi_l(\exp s_1(S - 2T)) \overline{\chi_l(\exp s_2(S - 2T))} \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_1(S - 2T)) \\ & \quad \Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_2(S - 2T)) ds_1 ds_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(\exp \alpha B \cdot g_0 \cdot \exp s_1(S - 2T), \exp \alpha' B \cdot g'_0 \cdot \exp s_2(S - 2T)) \\ & \quad ds_1 ds_2, \end{aligned}$$

car $\chi_l(\exp s_i(S - 2T)) = 1$, $\Delta_{H', G}^{-1/2}(\exp s_i(S - 2T)) = 1$.

Notons que d'après les hypothèses de récurrence, $\pi'_0 = \text{ind}_{H'}^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}'}$ possède un rétracte R'_0 . Ainsi, d'après la formule du rétracte R que nous avons obtenue, il s'avère que pour

obtenir une expression explicite de R , il nous suffit de déterminer le rétracte R'_0 de π'_0 . Pour cela, nous procédons comme précédemment.

2eme Etape :

Soient

$$\mathfrak{g}_0 = \langle A, H, S, T, U, V, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{h}' = \langle A, H, S - 2T, U, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_0 = \langle A, H, U, V, Z \rangle$$

et $\pi'_0 = \text{ind}_{H'}^{G_0} \chi_{l_0, \mathfrak{h}'}$ qui est une représentation unitaire irréductible de G_0 .

Soit d'autre part $\mathfrak{b}$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_0$ contenu dans $\mathfrak{n}_0$ tel que $l_0(\mathfrak{b}) = 0$. On a $\mathfrak{b} = \langle H, U \rangle$. Posons :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0 / \mathfrak{b} = \langle A, S, T, V, Z \rangle$$

$$\mathfrak{h}'_1 = \mathfrak{h}' / \mathfrak{b} = \langle A, S - 2T, Z \rangle \text{ et}$$

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_0 / \mathfrak{b} = \langle A, V, Z \rangle.$$

On remarque que $\mathfrak{n}_1$ est un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}_1$ contenant $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \langle A, V, Z \rangle$ et que $G_0 = G_1 \cdot \exp \mathfrak{b} = G_1 \cdot \exp \mathbb{R}U \cdot \exp \mathbb{R}H$, avec $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. De plus, si l_1 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_1$ définie par

$$l_1(X + \mathfrak{b}) = l_0(X), \forall X \in \mathfrak{g}_0,$$

alors $\mathfrak{g}_1(l_1) = \langle Z \rangle$ et on vérifie que $\mathfrak{h}'_1$ est une polarisation en l_1 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_1$; donc, $\mathfrak{h}'_1$ vérifie la condition de Pukansky sur G_1 .

Ainsi $\pi'_1 = \text{ind}_{H'_1}^{G_1} \chi_{l_1, \mathfrak{h}'_1}$ est une représentation unitaire irréductible de G_1 , avec $H'_1 = \exp \mathfrak{h}'_1$ et $\chi_{l_1, \mathfrak{h}'_1}$ qui est un caractère unitaire de H'_1 défini par

$$\chi_{l_1, \mathfrak{h}'_1}(\exp X) = e^{-il_1(X)}, \forall X \in \mathfrak{h}'_1.$$

D'autre part, π'_1 possède un rétracte R'_1 , ceci d'après les hypothèses de récurrence de la preuve du théorème 4.1. On constate que les données ci-dessus pour π'_0 correspondent

au 2eme cas du théorème 4.1 ; par conséquent le rétracte R'_0 de π'_0 s'obtient de la façon suivante :

$$(3) \quad \forall F \in ES(G_0 \times G_0, H'_0, l_0) = ES(G_1 \times G_1, H'_1, l_1),$$

$$\begin{aligned} R'_0(F)(x) &= R'_0 F(x_1 \cdot \exp sU \cdot \exp s'H) \\ &= R'_1(F_1)(x_1) \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) \end{aligned}$$

où $\beta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) ds ds' = 1$ et $x \in G_0$, $x = x_1 \cdot \exp sU \cdot \exp s'H$, avec $x_1 \in G_1$, $s, s' \in \mathbb{R}$.

Il s'en suit que, pour obtenir une expression explicite de R'_0 , il nous suffit de déterminer le rétracte R'_1 de π'_1 . Pour y arriver, nous procédons comme précédemment.

3eme Etape :

Soient

$$\mathfrak{g}_1 = \langle A, S, T, V, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{h}'_1 = \langle A, S - 2T, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{n}_1 = \langle A, V, Z \rangle$$

et $\pi'_1 = \text{ind}_{H'_1}^{G_1} \chi_{l_1, \mathfrak{h}'_1} \in \hat{G}_1$. On a $\mathfrak{g}_1(l_1|_{\mathfrak{n}_1}) = \mathbb{R}T \oplus \langle Z, S - 2T \rangle$.

Soit $\mathfrak{b}_1$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_1$ contenu dans $\mathfrak{n}_1$ où l_1 s'annule. On a $\mathfrak{b}_1 = (0)$; donc le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1$ est de dimension inférieure ou égale à 1. Notons même qu'on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = \langle Z \rangle$. Puisque $\mathfrak{n}_1$ est un idéal non central de $\mathfrak{g}_1$, alors $\mathfrak{n}_1$ contient au moins un idéal non central minimal $\mathfrak{a}_1$ de $\mathfrak{g}_1$, en l'occurrence $\mathfrak{a}_1 = \langle V, Z \rangle$, qui se présente suivant la forme (iii) du lemme 2.1.2. Donc $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)$, et il existe deux formes linéaires réelles λ_1, φ_1 , sur $\mathfrak{g}_1$ telles que

$$[X, V] = \lambda_1(X)V + \varphi_1(X)Z, \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1,$$

avec $\lambda_1 \neq (0)$ car $\lambda_1(S) = -2$ et $\varphi \neq (0)$ car $\varphi(A) = 1$.

Déterminons $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1(l_1|_{\mathfrak{a}_1}) = \ker \varphi_1$; on a

$$\mathfrak{g}_2 = \langle S - 2T, T, V, Z \rangle .$$

Notons que $\mathfrak{g}_2$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}_1$ car $[A, T] = -A \notin \mathfrak{g}_2$.

Déterminons $\mathfrak{g}^2 = \ker \lambda_1$; on a

$$\mathfrak{g}^2 = \langle A, S - 2T, V, Z \rangle .$$

On remarque que $\mathfrak{g}^2$ est un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}_1$. Posons $\mathfrak{g}_{22} = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}^2$. On constate que $\mathfrak{g}_{22}$ est un idéal de codimension 2 de $\mathfrak{g}_1$ et que $[-T, A] = -A \in -A + \mathfrak{g}_{22}$. De plus, on a

$$\mathfrak{h}'_1 = \langle A, S - 2T, Z \rangle \subset \mathfrak{g}^2, \quad \mathfrak{h}'_1 \not\subset \mathfrak{g}_2 \text{ et } \mathfrak{g}_1(l_1) = \langle Z \rangle \subset \mathfrak{g}_{22}.$$

Les conditions ci-dessus pour π'_1 , correspondent aux hypothèses du cas 6d du théorème 4.1. Donc, nous remplaçons la polarisation $\mathfrak{h}'_1$ par une polarisation $\mathfrak{h}'_2$ en l_1 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_1$ et contenue dans $\mathfrak{g}_{22} = \langle S - 2T, V, Z \rangle$. Pour cela, nous prenons

$$\mathfrak{h}'_2 = \langle S - 2T, V, Z \rangle = \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{R}V.$$

On constate que $\mathfrak{h}'_2$ est une polarisation en l_1 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_1$ et contenue dans $\mathfrak{g}_{22}$; donc $\mathfrak{h}'_2$ vérifie la condition de Pukansky. Par conséquent, si nous posons $H'_2 = \exp \mathfrak{h}'_2$ et si $\chi_{l_1, \mathfrak{h}'_2}$ désigne le caractère unitaire de H'_2 défini par

$$\chi_{l_1, \mathfrak{h}'_2}(\exp X) = e^{-i l_1(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{h}'_2,$$

alors $\pi'_2 = \text{ind}_{H'_2}^{G_1} \chi_{l_1, \mathfrak{h}'_2}$ est une représentation unitaire irréductible de G_1 ; notons que d'après 1.2.17, π'_1 et π'_2 sont équivalentes.

Puisque $\mathfrak{h}'_2$ vérifie les conditions du cas 6b, alors π'_2 possède un rétracte R'_2 qui est sous la forme du rétracte obtenu en 6b. On a

$$\forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_2, l_1), t, v, v', r, r' \in \mathbb{F}.$$

$$\begin{aligned}
& R'_2(F) \left(\exp tA \cdot \exp v(-T) \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_{22}(G(t + ue^{-v}, u)) \\
&\quad \left(\exp v(-T) \cdot ((Q'(v, u)^{\exp -v(-T)} - 1)^{\exp -uA} \cdot \right. \\
&\quad \left. (\exp v'(S - 2T))^{\exp -uA} \cdot \exp(aV + bZ) \right) \\
&\quad e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du,
\end{aligned}$$

avec $G(\alpha, \alpha') \in ES(G_2 \times G_2, H'_2, l_2)$, définie par

$$G(\alpha, \alpha')(g_0, g'_0) = F(\exp \alpha A \cdot g_0, \exp \alpha' A \cdot g'_0),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $g_0, g'_0 \in G_2 = \exp \mathfrak{g}_2$. $l_2 = l_1|_{\mathfrak{h}_2}$ et β'_2 qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta'_2(\exp r'Z) e^{-ir'} dr' = 1$.

En remplaçant v par $-v \in \mathbb{R}$ dans l'expression de R'_2 , on obtient

$$\begin{aligned}
& R'_2(F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_{22}(G(t + ue^v, u)) \\
&\quad \left(\exp vT \cdot ((Q'(-v, u)^{\exp -vT} - 1)^{\exp -uA} \cdot \right. \\
&\quad \left. (\exp v'(S - 2T))^{\exp -uA} \cdot \exp(aV + bZ) \right) \\
&\quad e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du.
\end{aligned}$$

Notons que R'_{22} désigne le rétracte de $\pi'_{22} = \text{ind}_{H'_2}^{G_2} \chi_{l_2, \mathfrak{h}'_2}$; en effet, un tel rétracte existe car $\mathfrak{h}'_2$ est une polarisation en l_2 sur $\mathfrak{g}_2$ fortement adaptée à $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \langle V, Z \rangle$. D'où, d'après la proposition 2.2.4, les théorèmes 1.2.15 et 4.1, π'_{22} possède un rétracte.

D'autre part, rappelons que

$$Q'(-v, u) = \exp(ue^v)A \cdot \exp vT \cdot \exp -uA \cdot \exp -vT \in G_{2,2} \cap \exp \mathfrak{n}_1,$$

avec $G_{2,2} = \exp \mathfrak{g}_{2,2}$. Dans ce cas, on obtient $Q'(-v, u) = e$ avec e qui désigne l'élément neutre de G_{22} . De plus, on a

$$(\exp v'(S - 2T))^{\exp -uA} = \exp v'(S - 2T).$$

Finalement, on obtient

$$(4) \quad \forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_2, l_1), t, v, v', r, r' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & R'_2(F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_{22}(G(t + ue^v, u)) \\ & \quad \left(\exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(aV + bZ) \right) \\ & \quad e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le cas 6d du théorème 4.1, le rétracte R'_1 de π'_1 s'obtient de la façon suivante :

$$(5) \quad \forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_1, l_1), t, v, v', r, r' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & R'_1(F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= R'_2(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}'_2, \mathfrak{h}'_1} F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_{22}(G(t + ue^v, u)) \\ & \quad \left(\exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(aV + bZ) \right) \\ & \quad e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du, \end{aligned}$$

où $G(t + ue^v, u)(g_0, g'_0) = (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}'_2, \mathfrak{h}'_1} F)(\exp(t + ue^v)A \cdot g_0, \exp uA \cdot g'_0)$ avec $g_0, g'_0 \in G_2$. D'autre part, rappelons que pour $r, r', s, s', t, t', u, u', v, v' \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\mathcal{U}_{\mathfrak{h}'_2, \mathfrak{h}'_1} F)(g_1, g'_1)$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}'_2, \mathfrak{h}'_1} F) \left(\exp vV \cdot \exp aA \cdot \exp tT \cdot \exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ, \right. \\
&\quad \left. \exp v'V \cdot \exp a'A \cdot \exp t'T \cdot \exp s'(S - 2T) \cdot \exp u'Z \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F' \left(\exp vV \cdot \exp aA \cdot \exp tT \cdot \exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ \cdot \exp rV, \right. \\
&\quad \left. \exp v'V \cdot \exp a'A \cdot \exp t'T \cdot \exp s'(S - 2T) \cdot \exp u'Z \cdot \exp r'V \right) dr dr'. \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F' \left(\exp vV \cdot \exp aA \cdot \exp tT \cdot \exp rV, \right. \\
&\quad \left. \exp v'V \cdot \exp a'A \cdot \exp t'T \cdot \exp r'V \right) \\
&\quad \Delta_{H'_1, G_1}^{\frac{1}{2}} \left(\exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ \right) \Delta_{H'_1, G_1}^{\frac{1}{2}} \left(\exp s'(S - 2T) \cdot \exp u'Z \right) e^{iu} e^{-iu'} dr dr' \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} F' \left(\exp vV \cdot \exp aA \cdot \exp tT \cdot \exp rV, \right. \\
&\quad \left. \exp v'V \cdot \exp a'A \cdot \exp t'T \cdot \exp r'V \right) \\
&\quad e^{iu} e^{-iu'} dr dr',
\end{aligned}$$

car $\Delta_{H'_1, G_1}^{\frac{1}{2}}(\exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ) = 1$. Ainsi, pour déterminer R'_2 et par conséquent R'_1 , il nous suffit de déterminer le rétracte R'_{22} de $\pi'_{22} = \text{ind}_{H'_2}^{G_2} \chi_{l_2, \mathfrak{h}'_2}$. Pour cela nous procédons comme précédemment.

4eme Etape :

Rappelons que

$$\mathfrak{g}_2 = \langle S - 2T, T, V, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{h}'_2 = \langle S - 2T, V, Z \rangle,$$

$$\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \langle V, Z \rangle$$

et $\pi'_{22} = \text{ind}_{H'_2}^{G_2} \chi_{l_2, \mathfrak{h}'_2} \in \hat{G}_2$. On a $\mathfrak{g}_2(l_2|_{\mathfrak{n}_2}) = \mathfrak{g}_2$.

Soit $\mathfrak{b}_2$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}_2$ contenu dans $\mathfrak{n}_2$ tel que $\langle l_1, \mathfrak{b}_2 \rangle = 0$. On a $\mathfrak{b}_2 = \langle V \rangle$. Posons :

$$\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_2 / \mathfrak{b}_2 = \langle S - 2T, T, Z \rangle$$

$$\mathfrak{h}'_3 = \mathfrak{h}'_2 / \mathfrak{b}_2 = \langle S - 2T, Z \rangle, \text{ et}$$

$$\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_2/\mathfrak{b}_3 = \langle Z \rangle.$$

Notons que $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{b}_2$ et $G_2 = G_3 \cdot \exp \mathfrak{b}_2$, avec $G_3 = \exp \mathfrak{g}_3$. On remarque aussi que $\mathfrak{n}_3$ est égal au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_3) = \langle Z \rangle$ de $\mathfrak{g}_3$ et que $\mathfrak{g}_3$ est une algèbre de Lie nilpotente de pas 2, dont le centre est de dimension 1. Donc, $\mathfrak{g}_3$ est une algèbre de Heisenberg et $G_3 = \exp \mathfrak{g}_3$ est le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de la multiplication suivante :

$$(x, y, s) \cdot (x', y', s') = (x + x', y + y', s + s' + \frac{1}{2}(yx' - xy'))$$

avec xy qui désigne la multiplication sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, si l_3 désigne la forme linéaire sur $\mathfrak{g}_3$ définie par

$$l_3(X + \mathfrak{b}_2) = l_2(X), \forall X \in \mathfrak{g}_2,$$

alors $\mathfrak{g}_3(l_3) = \langle Z \rangle$ et $\mathfrak{h}'_3$ est une polarisation en l_3 fortement adaptée à $\mathfrak{n}_3$; donc $\mathfrak{h}'_3$ vérifie la condition de Pukansky sur G_3 .

Ainsi $\pi'_3 = \text{ind}_{H'_3}^{G_3} \chi_{l_3, \mathfrak{h}'_3}$ est une représentation unitaire irréductible de G_3 , avec $H'_3 = \exp \mathfrak{h}'_3$ et $\chi_{l_3, \mathfrak{h}'_3}$ qui est un caractère unitaire de H'_3 défini par

$$\chi_{l_3, \mathfrak{h}'_3}(\exp X) = e^{-il_3(X)}, \forall X \in \mathfrak{h}'_3.$$

On constate que les données ci-dessus pour π'_3 correspondent au 3eme cas du théorème 4.1. Par conséquent π'_3 possède un rétracte R'_3 défini par :

$$(6) \quad \forall F_3 \in ES(G_3 \times G_3, H'_3, l_3) = ES(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1, H'_3, l_3) \forall r, s, u \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} R'_3(F_3)(\exp rT \cdot \exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ) \\ = \beta_4(u) \int_{\mathbb{R}} F_3(\exp \frac{(r+2t)}{2}T, \exp \frac{(2t-r)}{2}T) e^{ist} dt, \end{aligned}$$

avec β_4 qui est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$, telle que $\hat{\beta}_4(1) = \int_{\mathbb{R}} \beta_4(b') e^{-ib'} db' = 1$.

5.3.1- Remarque : étant donné que toute fonction $F_3 \in ES(G_3 \times G_3, H'_3, l_3)$ appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R}T \times \mathbb{R}T)$, où T est la seule direction de $\mathfrak{g}_3(l_3|_{\mathfrak{n}_3})$ qui sort de $\mathfrak{n}_3$ et de $\mathfrak{h}'_3$, alors l'intégrale ci-dessus converge et $R'_3(F_3)$ appartient à $ES(G_3)$.

Le rétracte R'_3 étant ainsi connu, nous pouvons déterminer R'_{22} . Remarquons d'abord que pour toute fonction $F_2 \in ES(G_2 \times G_2, H'_2, l_2)$, la fonction F_3 définie sur $G_3 \times G_3$ par $F_3(x, y) = F_2(x, y), \forall x, y \in G_3$, appartient à $ES(G_3 \times G_3, H'_3, l_3)$. Donc F_3 est C^∞ sur G_3 , à décroissance exponentielle dans la direction T .

Ainsi, pour obtenir le rétracte R'_{22} de π'_{22} , il suffit d'utiliser l'expression du rétracte obtenue au 2eme cas de 4.1, car les données ci-dessus pour π'_{22} correspondent à ce cas ; on obtient

$$(7) \quad \forall F_2 \in ES(G_2 \times G_2, H'_2, l_2) = ES(G_3 \times G_3, H'_3, l_3),$$

$$\begin{aligned} R'_{22}(F_2)(x_2) &= R'_{22}(F_2)(x_3 \cdot \exp tV) \\ &= R'_{22}(F_2)(\exp rT \cdot \exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ \cdot \exp tV) \\ &= R'_3 F_3(\exp rT \cdot \exp s(S - 2T) \exp uZ) \beta_3(\exp tV) \\ &= \beta_3(\exp tV) \beta_4(\exp uZ) \int_{\mathbb{R}} F_2\left(\exp \frac{(r + 2t')}{2} T, \exp \frac{(2t' - r)}{2} T\right) e^{ist'} dt', \end{aligned}$$

$\forall x_2 = x_3 \cdot \exp tV \in G_2$ avec $x_3 = \exp rT \cdot \exp s(S - 2T) \cdot \exp uZ \in G_3, r, s, t, u \in \mathbb{R}$ et $\beta_3 \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} \beta_3(\exp tV) dt = 1$.

D'après la remarque précédente, on constate que l'intégrale ci-dessus converge et que $R'_{22}(F_2) \in ES(G_2)$.

Ayant ce résultat, nous le substituons à R'_{22} dans (4) et nous obtenons :

$$\forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_2, l_1), t, v, v', r, r' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} R'_2(F) &\left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rV \cdot \exp r'Z \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_{22}(G(t + ue^v, u)) \\ &\quad \left(\exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(aV + bZ) \right) e^{-ib} da \, db \, e^{-iur} du \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} \beta_3(\exp aV) \beta_4(\exp bZ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} G(t + ue^v, u) \left(\exp \frac{(v + 2t')}{2} T, \exp \frac{(2t' - v)}{2} T \right) e^{iv't'} dt' e^{-ib} da db e^{-iur} du \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}^2} \beta_3(\exp aV) \beta_4(\exp bZ) \\
& \int_{\mathbb{R}} F \left(\exp(t + ue^v) A \cdot \exp \frac{(v + 2t')}{2} T, \exp uA \cdot \exp \frac{(2t' - v)}{2} T \right) e^{iv't'} dt' \\
& e^{-ib} da db e^{-iur} du,
\end{aligned}$$

avec $G(\alpha, \alpha') \in ES(G_2 \times G_2, H'_2, l_2)$, définie par

$$G(\alpha, \alpha')(g_0, g'_0) = F(\exp \alpha A \cdot g_0, \exp \alpha' A \cdot g'_0),$$

pour tout $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $g_0, g'_0 \in G_2$, β'_2 qui désigne une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta'_2(\exp r'Z) e^{-ir'} dr' = 1$, $\beta_3 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \beta_3(\exp tV) dt = 1$ et β_4 qui est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$ telle que $\hat{\beta}_4(1) = \int_{\mathbb{R}} \beta_4(\exp l'Z) e^{-ib'} dl' = 1$.

En tenant compte des propriétés vérifiées par β_3 et β_4 , on obtient le rétracte R'_2 sous la forme suivante :

$$(8) \quad \forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_2, l_1), t, v, v', r, r' \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
& R'_2(F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\
&= e^{\frac{3v}{2}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}} \\
& \int_{\mathbb{R}} F \left(\exp(t + ue^v) A \cdot \exp \frac{(v + 2t')}{2} T, \exp uA \cdot \exp \frac{(2t' - v)}{2} T \right) e^{iv't'} dt' \\
& e^{-iur} du.
\end{aligned}$$

5.3.2- Remarque : Etant donné que toute fonction $F \in ES(G_1 \times G_1, H'_2, l_1)$ est à décroissance polynomiale dans la direction A , et qu'elle appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R}T \times \mathbb{R}T)$, alors l'intégrale double ci-dessus est convergente et $R'_2(F)$ est bien défini et appartient à $ES(G_1)$.

Ayant ce résultat, nous le substituons à R'_2 dans (5) et on obtient R'_1 de la façon suivante :

$$\forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_1, l_1),$$

$$\begin{aligned} R'_1(F) & \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= R'_2(\mathcal{U}_{h'_2, h'_1} F) \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{U}_{h'_2, h'_1} F) \left(\exp(t + ue^v)A \cdot \exp \frac{(v + 2t')}{2}T, \exp uA \cdot \exp \frac{(2t' - v)}{2}T \right) e^{iv't'} dt' \\ & \quad e^{-iur} du. \end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons les différentes transformations effectuées dans le cas 6d du théorème 4.1 ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} R'_1(F) & \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta'_2(r') \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(v + 2t')}{2}} e^{\frac{(2t' - v)}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} F \left(\exp \alpha V \cdot \exp \frac{(v + 2t')}{2}T, \right. \\ & \quad \left. \exp \alpha' V \cdot \exp \frac{(2t' - v)}{2}T \right) e^{i(t + ue^v)\alpha} e^{-iu\alpha'} d\alpha d\alpha' \\ & \quad e^{iv't'} dt' e^{-iur} du. \end{aligned}$$

Nous faisons les changements de variables suivants :

$$t'' \rightarrow \frac{(v + 2t')}{2}, \quad u \rightarrow ue^{-v};$$

alors, l'expression précédente de $R'_1(F)$ devient

$$\begin{aligned} R'_1(F) & \left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rV \cdot \exp r'Z \right) \\ &= e^{\frac{3v}{2}} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{t''} e^{(t'' - v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\exp \alpha V \cdot \exp t'' T, \exp \alpha' V \cdot \exp (t'' - v) T\right) e^{i(t+u)\alpha} \\
& e^{-iue^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' e^{iv'\frac{(2t''-v)}{2}} dt'' e^{-iue^{-v}r} e^{-v} du \\
& = e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'}{2}v} \beta'_2(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \\
& \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\exp \alpha V \cdot \exp t'' T, \exp \alpha' V \cdot \exp (t'' - v) T\right) e^{i(t+u)\alpha} \\
& e^{-iue^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du \\
& = e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'}{2}v} \beta'_2(r') \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^1\left(\exp(t+u)V \cdot \exp t'' T, \exp ue^{-v}V \cdot \exp (t'' - v) T\right) \\
& e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$(9) \quad \forall F \in ES(G_1 \times G_1, H'_1, l_1),$$

$$\begin{aligned}
& R'_1(F)\left(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rV \cdot \exp r'Z\right) \\
& = e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'}{2}v} \beta'_2(r') \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^1\left(\exp(t+u)V \cdot \exp t'' T, \exp ue^{-v}V \cdot \exp (t'' - v) T\right) \\
& e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du.
\end{aligned}$$

5.3.3- Remarque : Etant donné que toute fonction $F \in ES(G_1 \times G_1, H'_1, l_1)$ est à décroissance polynomiale dans la direction V et qu'elle appartient à $\mathcal{Hol}(\mathbb{R}T \times \mathbb{R}T)$, alors $R'_1(F')$ est bien défini.

Ayant ce résultat, nous le substituons à R'_1 dans (3) et nous obtenons R'_0 sous la forme suivante :

$$\forall F \in ES(G_0 \times G_0, H', l_0), x = x_1 \cdot \exp sU \cdot \exp s'H,$$

avec $x_1 = \exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rV \cdot \exp r'Z \in G_1$,

$$\begin{aligned}
& R'_0(F)(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z) \cdot \exp sU \cdot \exp s'H) \\
&= R'_1(F)(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rV + r'Z)) \\
&\quad \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) \\
&= e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'v}{2}} \beta'_2(r') \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} F(\exp \alpha V \cdot \exp t''T, \exp \alpha' V \cdot \exp(t'' - v)T) e^{i(t+u)\alpha} \\
&\quad e^{-iue^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du \\
&= e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'v}{2}} \beta'_2(r') \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^1(\exp(t+u)V \cdot \exp t''T, \exp ue^{-v}V \cdot \exp(t'' - v)T) \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$(10) \quad \forall F \in ES(G_0 \times G_0, H', l_0),$$

$$\begin{aligned}
& R'_0(F)(\exp tA \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp rV \cdot \exp r'Z \cdot \exp sU \cdot \exp s'H) \\
&= e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'v}{2}} \beta'_2(r') \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^1(\exp(t+u)V \cdot \exp t''T, \exp ue^{-v}V \cdot \exp(t'' - v)T) \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ire^{-v}u} du,
\end{aligned}$$

avec $\beta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\int_{\mathbb{R}^2} \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) ds ds' = 1$.

D'après les raisons évoquées à la remarque précédente, R'_0 est bien défini. Ayant ce résultat, nous le substituons à R'_0 dans (1) et nous obtenons R' de la façon suivante :

$$\forall F \in ES(G \times G, H', l),$$

$$R'(F)(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z))$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} R'_0(G(t + ue^{-v}, u)) \\
&\quad \left(\exp se^v A \cdot \exp vT \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(u' - s'u - \frac{su^2}{2}) V \cdot \exp(b + \frac{s^2u^2}{4}) Z \cdot \right. \\
&\quad \left. \exp(a - \frac{s^2u}{2}) U \cdot \exp(s' + su) H \right) e^{-ib} da db e^{-iur} du \\
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta'_2(\exp(b + \frac{s^2u^2}{4}) Z) \beta_1(\exp(a - \frac{s^2u}{2}) U \cdot \exp(s' + su) H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} (G(t + ue^{-v}, u))^{\mathbf{1}} \left(\exp(se^v + u'') V \cdot \exp t'' T, \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v) T \right) \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'u - \frac{su^2}{2})u''} du'' e^{-ib} da db e^{-iur} du \\
&= e^{\frac{-3v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{-v}{2}} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta'_2(\exp(b + \frac{s^2u^2}{4}) Z) \beta_1(\exp(a - \frac{s^2u}{2}) U \cdot \exp(s' + su) H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} G(t + ue^{-v}, u) \left(\exp \alpha V \cdot \exp t'' T, \right. \\
&\quad \left. \exp \alpha' V \cdot \exp(t'' - v) T \right) e^{i(se^v + u'')\alpha} e^{-iu''e^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'u - \frac{su^2}{2})u''} du'' e^{-ib} da db e^{-iur} du \\
&= e^{-2v} e^{-i\frac{v'u}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^2} \beta'_2(\exp(b + \frac{s^2u^2}{4}) Z) \beta_1(\exp(a - \frac{s^2u}{2}) U \cdot \exp(s' + su) H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} F\left(\exp(t + ue^{-v}) B \cdot \exp \alpha V \cdot \exp t'' T, \right. \\
&\quad \left. \exp u B \cdot \exp \alpha' V \cdot \exp(t'' - v) T \right) e^{i(se^v + u'')\alpha} e^{-iu''e^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'u - \frac{su^2}{2})u''} du'' e^{-ib} da db e^{-iur} du.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous faisons les changements de variables suivants :

$$b \rightarrow b, -\frac{s^2 u^2}{4}, \quad a \rightarrow a + \frac{s^2 u}{2}, \quad u \rightarrow u e^v ;$$

on obtient

$$\begin{aligned} & R'(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\ &= e^{-v} e^{-i\frac{v'v}{2}} \int_{\mathbb{R}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}^2} \beta'_2(\exp bZ) \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} F \left(\exp(t+u)B \cdot \exp \alpha V \cdot \exp t''T, \right. \\ & \quad \left. \exp u e^v B \cdot \exp \alpha' V \cdot \exp(t'' - v)T \right) e^{i(se^v + u'')\alpha} e^{-iu''e^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' \\ & \quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'e^v u - \frac{s^2 e^{2v} u^2}{2})u''} du'' e^{-i(b - \frac{s^2 e^{2v} u^2}{4})da} db e^{-iue^v r} du \\ &= e^{-v} e^{-i\frac{v'v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} F \left(\exp(t+u)B \cdot \exp \alpha V \cdot \exp t''T, \right. \\ & \quad \left. \exp u e^v B \cdot \exp \alpha' V \cdot \exp(t'' - v)T \right) e^{i(se^v + u'')\alpha} e^{-iu''e^{-v}\alpha'} d\alpha d\alpha' \\ & \quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'e^v u - \frac{s^2 e^{2v} u^2}{2})u''} du'' e^{i(\frac{s^2 e^{2v} u^2}{4})da} e^{-iue^v r} du \\ &= e^{-v} e^{-i\frac{v'v}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^2 \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''T, \right. \\ & \quad \left. \exp u e^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v)T \right) e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u' - s'e^v u - \frac{s^2 e^{2v} u^2}{2})u''} du'' \\ & \quad e^{i(\frac{s^2 e^{2v} u^2}{4})da} e^{-iue^v r} du. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$(11) \quad \forall F \in ES(G \times G, H', l),$$

$$R'(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-v} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \hat{F}^2 \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''T, \right. \\
&\quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v)T \right) e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u'-s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})u''} du'' \\
&\quad e^{i(\frac{s^2 e^{2v}u^2}{4})} da e^{-ire^v u} du.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (11) et de (2), on obtient le rétracte R de π de la façon suivante :

$$\forall F \in ES(G \times G, H, l),$$

$$\begin{aligned}
&R(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\
&= R'((\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \right. \\
&\quad \left. \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\
&= e^{-v} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} (\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}} F)^2 \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''T, \right. \\
&\quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v)T \right) e^{iv't''} dt'' \\
&\quad e^{-ie^{-v}(u'-s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})u''} du'' e^{i(\frac{s^2 e^{2v}u^2}{4})} da e^{-ire^v u} du \\
&= e^{-v} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H)) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{F}^2 \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''T \cdot \exp s_1(S - 2T), \right. \\
&\quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v)T \cdot \exp s_2(S - 2T) \right) ds_1 ds_2 \\
&\quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u'-s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})u''} du'' \\
&\quad e^{i(\frac{s^2 e^{2v}u^2}{4})} da e^{-ire^v u} du.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
&\exp t''T \cdot \exp s_1(S - 2T) \cdot \exp -t''T \cdot \exp t''T \\
&= \exp s_1(S - 2T) \cdot \exp t''T \cdot \exp s_1 t''Z
\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned} & \exp(t'' - v)T \cdot \exp s_2(S - 2T) \cdot \exp -(t'' - v)T \cdot \exp(t'' - v)T \\ &= \exp s_2(S - 2T) \cdot \exp(t'' - v)T \cdot \exp s_2(t'' - v)Z, \end{aligned}$$

alors, en appliquant à $F \in ES(G \times G, H, l)$ la relation de covariance de $ES(G \times G, H, l)$ par rapport à H , on obtient

$$\begin{aligned} & R(F) \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\ &= e^{-v} e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2t''} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-t''} e^{-(t''-v)} \hat{F}^2 \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp s_1(S - 2T), \right. \\ & \quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp s_2(S - 2T) \right) e^{is_1 t''} e^{-is_2(t''-v)} ds_1 ds_2 \\ & \quad e^{iv't''} dt'' e^{-ie^{-v}(u'-s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})u''} du'' \\ & \quad e^{i(\frac{s^2 e^{2v}u^2}{4})} da e^{-ire^v u} du \\ &= e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(\exp aU \cdot \exp(s' + se^v u)H) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}^{3,2} \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''(S - 2T), \right. \\ & \quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u'' e^{-v} V \cdot \exp(t'' - v)(S - 2T) \right) e^{iv't''} dt'' \\ & \quad e^{-i(u'-s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})e^{-v}u''} du'' e^{i(\frac{s^2 e^{2v}u^2}{4})} da e^{-ire^v u} du. \end{aligned}$$

Etant donné que β_1 est une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) ds ds' = 1,$$

nous pouvons choisir β_1 telle que $\beta_1(\exp sU \cdot \exp s'H) = \beta'_1(\exp sU) \beta''_1(\exp s'H)$, avec $\beta'_1, \beta''_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \beta'_1(\exp sU) ds = \int_{\mathbb{R}} \beta''_1(\exp s'H) ds' = 1.$$

Finalement, on obtient le rétracte R de π de la manière suivante :

$$(12) \quad \forall F \in ES(G \times G, H, l),$$

$$\begin{aligned} R(F) & \left(\exp tB \cdot \exp vT \cdot \exp sA \cdot \exp s'H \cdot \exp u'V \cdot \exp v'(S - 2T) \cdot \exp(rU + r'Z) \right) \\ & = e^{-i\frac{v'u}{2}} \beta(r') \int_{\mathbb{R}} \beta_1''(\exp(s' + se^v u)H) \\ & \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}^{3,2} \left(\exp(t+u)B \cdot \exp(se^v + u'')V \cdot \exp t''(S - 2T), \right. \\ & \quad \left. \exp ue^v B \cdot \exp u''e^{-v}V \cdot \exp(t'' - v)(S - 2T) \right) e^{iv't''} dt'' \\ & \quad e^{-i(u' - s'e^v u - \frac{se^{2v}u^2}{2})e^{-v}u''} du'' e^{i(\frac{s^2e^{2v}u^2}{4})} e^{-ire^v u} du. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat cherché.

5.3.4- Remarque : D'après le lemme donné au paragraphe 4 de ([Lep.]) par Leptin, on constate que si F est une fonction à support compact dans la direction $S - 2T$, alors on peut trouver un réel v' tel que pour $v \in \mathbb{R}$, la fonction qui à $t'' \in \mathbb{R}$ associe

$$\hat{F} \left(- \cdot \exp t''(S - 2T), * \cdot \exp(t'' - v)(S - 2T) \right) e^{iv't''}$$

ne soit pas intégrable. Par conséquent, le rétracte n'est pas bien défini dans ce cas.

5.3.5- Question ouverte : Nous terminons notre étude par un problème ouvert, à savoir la caractérisation des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie exponentiel G .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[Arn. et al] ARNAL D., FUJIWARA, H., LUDWIG J., Opérateurs d'entrelacement pour les groupes de Lie exponentiels, American Journal of Mathematics Volume 118, Number 4 (1996).

[B.C. et al] BERNAT, P., CONZE, N., DUFLO, M., LEVY-NAHAS, M., RAIS, M., RENOUARD, P., VERGNE, M., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris (1972).

[Bour.] BOURBAKI, N.,: Eléments de mathématiques: Groupes et algèbres de Lie. Herman, (1972).

[Cor. Green.] CORWIN, L., GREENLEAF, F.,: Representations of nilpotents Lie groups and their applications. Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, (1990).

[Dix.1] DIXMIER, J., L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France 85, 113-121 (1957).

[Dix.2] DIXMIER, J., Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires, Publ. Math. IHES 6, 305-317 (1960).

[Dix.3] DIXMIER, J., Les C^* -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris (1969).

- [Hochs.] HOCHSCHILD, G., The structure of Lie Groups, Holden-Day Inc., San Francisco, London, Amsterdam (1965).
- [How.] HOWE, R., On a connection between Nilpotent Groups and Oscillatory Integrals associated to Singularities, Pacific J. of Math. 73, 2, 329-363 (1977).
- [Kir.] KIRILLOV, A.A., Unitary representations of nilpotent Lie groups. Uspeki Mat. Nauk. 17 (1962), 53-104.
- [Lep.] LEPTIN, H., Irreduzible Darstellungen von Exponentialgruppen und Operatoren mit glatten Kernen (à paraître).
- [Lep. Lud.] LEPTIN, H., LUDWIG, J., Unitary representation Theory of Exponential Lie groups, De Gruyter Expositions in Mathematics 18, De Gruyter, Berlin, New York (1994).
- [Lud.] LUDWIG, J., Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels, J. reine angew. Math. 339, 1-26 (1983).
- [Mol.] MOLITOR, C.B., Les polarisations de Vergne dans une algèbre de Lie exponentielle. Publications du Centre Universitaire du Luxembourg. Luxembourg 1992.
- [Puk.1] PUKANSKY, L., On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc. 126, 487-507 (1967).
- [Puk.2] PUKANSKY, L., On the Unitary Representations of Exponential groups, J. Funct. Anal. 2, 73-113 (1968).
- [Sch.] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).
- [Var.] V.S. VARADARAJAN: Lie groups, Lie algebras and there représentations. Prentice - Hall Series in modern analysis, (1974).

INDEX DES NOTATIONS

$\mathfrak{a}$	2.1.2.
A	4.3.2.
$\mathfrak{B}_{\mathfrak{h}}$	1.1.21.
$C^\infty((G_0/A, l _{\mathfrak{a}}) \times \mathbb{R})$	4.3.4, 4.3.5, 4.3.7, 4.3.10.
$C^\infty((G_0/A, l _{\mathfrak{a}}) \times \mathbb{R}^2)$	4.3.13.
$E_{\mathfrak{B}}$	1.1.8.
$E_{\mathfrak{h}}$	1.1.21.
$ES(G, \mathfrak{n})$	3.2.9.
$ES(G \times G, H, l, \mathfrak{B})$	3.2.7, 3.2.8.
$ES((G_0/A, l _{\mathfrak{a}}) \times \mathbb{R}^2)$	4.3.13.
$ES((G_0/A, l _{\mathfrak{a}}) \times \mathbb{R})$	4.3.4, 4.3.5, 4.3.7, 4.3.10.
$ES(G_0/A, l _{\mathfrak{a}})$	4.3.4, 4.3.5, 4.3.7, 4.3.10, 4.3.13.
f_π	1.2.21.
$\mathfrak{g}$	1.1.1.
G	1.1.1.

$\hat{G}$	1.2.
$G \cdot l$	1.2.17.
$G_0, \mathfrak{g}_0$	2.3.4, 2.3.13, 2.3.15.
$G^0, \mathfrak{g}^0$	2.3.6, 2.3.15.
$\mathfrak{g}_{00}$	2.3.6, 2.3.15.
$\mathfrak{h}$	1.1.17, 1.1.21, 1.2.4.
$\mathfrak{h}^\perp$	1.2.3.
$\mathfrak{h}^l$	1.2.3.
$\mathfrak{h}(l, \mathcal{S})$	1.2.9.
$\mathcal{H}_\pi$	1.2.12.
$\mathcal{H}ol(V)$	3.2.2, 3.2.3, 3.2.4.
$Ind_H^G \chi_{l, \mathfrak{h}}$	1.2.12.
$\mathfrak{n}$	1.1.10, 1.1.11, 1.1.18, 4.1.
$\mathcal{PD}(G)$	3.1.3.
$\mathcal{S}$	1.1.3, 1.1.4.
$\mathcal{S}(G)$	3.1.3.
$\mathcal{S}((G/A, l) \times \mathbb{R})$	3.1.7.
$\mathcal{S}(G/H, l)$	3.1.5.
$\mathcal{S}((G/H)^2, l)$	3.1.6.
$\mathcal{U}_{\mathfrak{h}', \mathfrak{h}}$	3.1.7, 4.3.8, 4.3.9, 4.3.11, 4.3.15.

Δ	3.2.6.
$\Delta_G, \Delta_H, \Delta_{H,G}$	1.2.10.
$\pi(f)$	1.2.21.
$\pi_{l,\mathfrak{h}}$	1.2.12.
χ_l	1.2.12.

INDEX TERMINOLOGIQUE

base coexponentielle	1.1.21.
critère de Pukansky	1.2.7.
groupe exponentiel	1.1.1.
idéal non central minimal	2.1.1.
noyau	1.2.21.
polarisation	1.2.4.
polarisation adaptée	2.2.1.
polarisation fortement adaptée	2.2.1, 2.2.3, 2.2.4, 4.3.9.1, 4.3.15.1.
représentation induite	1.2.12.
rétracte	4.1, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9, 4.3.10, 4.3.13.

TABLE DE MATIÈRES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : GENERALITES SUR LES GROUPEES EXPONENTIELS	5
1.1-Groupes de Lie résolubles exponentiels	5
1.2-L'espace dual d'un groupe de Lie exponentiel	12
CHAPITRE 2 : POLARISATIONS ADAPTEES ET DIFFERENTES ETAPES D'UNE DEMONSTRATION PAR RECURRENCE	22
2.1-Ideál non central minimal	22
2.2-Polarisations adaptées	27
2.3-Différentes étapes d'une démonstration par récurrence	35
CHAPITRE 3 : ESPACES DE FONCTIONS S ET ES	47
3.1-Le cas nilpotent	47
3.2-Le cas exponentiel	59
CHAPITRE 4 : FONCTIONS DE $ES(G \times G, H, I)$ COMME NOYAUX	79
4.1-Théorème principal	79
4.2-Remarque	80
4.3-Démonstration par récurrence	80
CHAPITRE 5 : EXEMPLES	141
5.1-Exemple 1	141
5.2-Exemple 2	145
5.3-Exemple 3	149

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	171
INDEX DES NOTATIONS	173
INDEX TERMINOLOGIQUE	176
TABLE DE MATIÈRES	177