



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

-----**THÈSE**-----

présentée à

-----**L'UNIVERSITÉ DE METZ**-----

par

**Abdeljalil Tri**

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE  
-METZ

N° inv.

19961025

Cote

S/M3 96/51

Loc

Magasin

**SPÉCIALITÉ :** Sciences de l'ingénieur  
**OPTION :** Mécanique

-----  
**Méthodes Asymptotiques Numériques pour les fluides  
visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de  
Hopf**  
-----

Soutenue le 24 Octobre 1996 devant le jury composé de

Président	Professeur D. Jeandel	L'INSA de Lyon
Rapporteurs	Professeur G. Dhatt	Université de Rouen
	Professeur Y. Demay	Université de Nice
Examineur	Professeur O. Sero-Guillaume	Université de Nancy
Co-directeur	Professeur B. Cochelin	Université de Marseille
Directeur	Professeur M. Potier-Ferry	Université de Metz

## **Remerciements**

*Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux sous la direction du professeur Michel Potier-Ferry.*

*Tout d'abord je remercie vivement Michel Potier-Ferry qui a su dirigé ce travail avec enthousiasme et intelligence.*

*Je tiens aussi à remercier B. Cochelin de sa patience et son goût pour la recherche qui m'a beaucoup aidé à comprendre le sens scientifique du mot "recherche".*

*Je remercie G. Dhatt et Y. Demay d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail.*

*Mes remerciements vont également à D. Jeandel et O. Sero-Guillaume qui m'ont fait l'honneur de participer au membre de jury de cette thèse.*

*Je remercie sincèrement A. Naddari qui m'a beaucoup aidé, par ses grandes connaissances en informatique, dans la réalisation des calculs numériques.*

*Je ne saurais oublié de remercier mes amies L. Mouftakir avec qui j'ai eu des discussions qui m'ont beaucoup apporté et K. El Hassania qui ont été pour moi d'un grand soutien durant ces années que j'ai passé loin de ma famille.*

*Je salue tous mes amis et tous mes collègues thésards du groupe de calculs de structures avec qui j'ai passé de bons moments.*

*Chapitre 0 : Introduction.*

***Première partie : Calcul des branches de solutions***

*Chapitre 1 : M.A.N pour le calcul des branches de solutions en structures.*

**1.1 Introduction**

**1.2 Concepts généraux de la méthode asymptotique numérique**

**1.2.1 Formulation variationnelle**

**1.2.2 Développement asymptotique**

**1.2.3 Formulation en déplacement**

**1.2.4 Discrétisation**

**1.3 Calcul d'une branche fondamentale**

**1.3.1 Au voisinage d'un point  $(U_0, \lambda_0) = (0, 0)$**

**1.3.2 Méthode asymptotique de continuation : Au voisinage d'un point  $(U_0, \lambda_0) \neq (0, 0)$**

**1.3.2.1 Exemple d'application**

**1.3.2.2 Influence du choix du paramètre 'a'**

**1.4 Calcul des branches bifurquées**

**1.5 Conclusion**

*Chapitre 2 : M.A.N pour le calcul des branches de solutions en fluides.*

**2.1 Introduction**

**2.2 Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode asymptotique numérique**

**2.2.1 Formulation variationnelle des équations de Navier-stokes**

**2.2.2 Méthode de perturbation**

**2.2.3 Discrétisation par éléments finis**

**2.3 Application numérique.**

**Exemple 1 : Problème d'écoulement autour d'un cylindre**

**Exemple 2 : Problème d'écoulement à l'intérieur de deux cylindres**

**2.4 Amélioration par les approximants de Padé**

**2.4.1 Procédure de réorganisation de la fonction vectorielle  $U(a)$**

**2.4.2 Procédure d'automatisation des Padé**

**2.5 Méthode de Continuation asymptotique-numérique**

**2.6 Conclusion de la première partie**

## *Deuxième partie : Calcul des points singuliers*

*Chapitre 3 : Étude bibliographique sur la détermination des points singuliers.*

### **3.1 Rappels théoriques**

**3.1.1 Point limite et point de bifurcation**

**3.1.2 Caractérisation des points limites et des points de bifurcation**

**3.1.4 Stabilité**

**3.2 Rappels sur les méthodes numériques pour la détermination des points singuliers et de la stabilité**

**3.2.1 Calculs des valeurs propres**

**3.2.2 Notion d'indicateur**

**3.2.3 Recherche directe des points singuliers**

*Chapitre 4 : M.A.N pour la détection des points de bifurcation stationnaires pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles.*

### **4.1 Méthode proposée**

**4.2 Adaptation de la méthode proposée pour la détection des singularités du problème stationnaire des équations de Navier-Stokes**

**4.2.1 Méthode directe pour calculer l'indicateur de points singuliers**

**4.2.2 Détermination de l'indicateur par une méthode asymptotique numérique**

**4.2.3 Application numérique**

**Problème de l'écoulement entre deux cylindres**

**Problème de l'écoulement autour du cylindre**

**4.3 Amélioration des séries par des approximants de Padé**

**Approximants de Padé sur la série entière de l'indicateur**

**Approximants de Padé par projection**

**4.4 conclusion**

## *Troisième partie : Détection de la bifurcation de Hopf*

*Chapitre 5 : Rappel bibliographique sur la bifurcation de Hopf.*

**5.1 Rappel théorique sur la bifurcation de Hopf**

**5.2 Caractérisation du point de bifurcation de Hopf**

**5.3 Rappels sur les méthodes numériques utilisées pour déterminer les points de bifurcation de Hopf**

**5.3.1 Méthode de valeurs propres**

**5.3.2 Localisation de la perte de stabilité**

**5.3.3 Méthode directe**

**5.4 Conclusion**

*Chapitre 6 : M.A.N pour la détection de la bifurcation de Hopf.*

**6.1 Algorithme pour la détection des points de bifurcation de Hopf**

**6.1.1 Méthode directe pour calculer l'indicateur**

**6.1.2 Propriétés de l'indicateur de bifurcation**

**6.2 Méthode asymptotique numérique pour calculer l'indicateur de bifurcation**

**6.2.1 Points de bifurcation de Hopf**

**6.2.2 Choix des approximants de Padé**

**6.3 Détection des points de bifurcation de Hopf pour les structures élastiques soumises à des forces non conservatives**

**6.3.1 Cadre d'étude**

**6.3.3 Adaptation de l'algorithme proposé pour les structures**

**6.4 Conclusion**

*Chapitre 7 : Conclusion.*

## 0. Introduction

Les méthodes de perturbation (Nayfeh [N-1], Noor et Peters [N-2], Van Dyke [V-1-2] et Hinch [H-1]) sont depuis longtemps un moyen efficace de résoudre certaines classes de problèmes non linéaires dans divers domaines scientifiques. Ces méthodes sont souvent appliquées dans un cadre purement analytique, en se limitant au calcul de quelques termes seulement. Depuis plusieurs années, nous nous attachons à montrer que le couplage d'une technique de perturbation et d'une méthode d'éléments finis (Méthodes Asymptotiques Numériques) peut conduire à des méthodes numériques extrêmement fiables et robustes pour certaines catégories de problèmes non linéaires.

Le principe de ces méthodes asymptotiques numériques consiste à représenter les inconnues du problème sous forme de séries entières par rapport à un paramètre de contrôle. Le problème non linéaire est ainsi transformé en une succession de problèmes linéaires bien posés que l'on résout par une méthode d'éléments finis classiques.

Les méthodes asymptotiques numériques ont été proposées initialement par Damil et Potier-Ferry [D-1] en 1990 pour le calcul des bifurcations perturbées avec des applications pour les structures élastiques minces. Elles ont ensuite été étendues au calcul des branches de solutions post-critiques des plaques et des coques élastiques (Azrar [A-1-2-3]), et d'une façon générale, au calcul des branches de solutions d'un problème non linéaire dépendant d'un paramètre (Cochelin[C-1-2-3-4]). Les derniers développements réalisés sur ces méthodes ont concerné la détermination des points de bifurcations sur les branches de solutions linéaires ou non linéaires en structures (Bouty [B-5]).

Jusqu'à présent ces méthodes asymptotiques n'ont concerné que la mécanique des solides. Dans ce travail, nous essayons d'élargir le domaine d'utilisation de cette méthode en l'appliquant à la mécanique des fluides et plus précisément aux équations de Navier-Stokes. Ces équations admettent une non linéarité quadratique et se prêtent bien à la résolution par les méthodes asymptotiques-numériques.

En général, les problèmes non linéaires représentant l'écoulement de fluides visqueux en régime stationnaire sont résolus en utilisant des méthodes de prédiction-correction (Hirsh [H-2], Segal [S-1]) dont la plus standard est le schéma de Newton-Raphson. De tels algorithmes permettent de déterminer des branches de solutions non linéaires, mais les temps de calcul sont souvent assez grands par rapport à une résolution linéaire. Dans cette thèse, on va montrer que la méthode asymptotique-numérique peut aussi être un moyen très concurrents des méthodes itératives en mécanique de fluides.

Dans la première partie de ce travail, nous adaptons les méthodes asymptotiques numériques au suivi des branches de solutions des problèmes d'écoulements visqueux

incompressibles. Les branches de solutions fondamentales du problème non linéaire sont déterminées en développant la vitesse de l'écoulement, la pression et le nombre de Reynolds en séries entières par rapport à un paramètre bien choisi. Le problème non linéaire de Navier-Stokes sera ainsi décomposé en une succession de problèmes linéaires de Stokes ou de quasi-Stokes ayant tous le même opérateur tangent. La résolution de tous ces problèmes linéaires se fera alors par une méthode des éléments finis et en n'inversant qu'une seule fois cet opérateur tangent. Ainsi, nous obtenons des représentations analytiques des branches de solutions. Ces représentations ont souvent des rayons de convergence fini, ce qui limite leur domaine de validité au voisinage du point de départ. L'utilisation d'une représentation fractionnelle utilisant les approximants de Padé (Baker, Graves-Morris 1981[B-1]) peut améliorer considérablement ce domaine de convergence. La méthode classique des approximants de Padé ainsi que leur automatisation seront présentés dans cette partie. Nous montrons aussi comment suivre une branche de solution non linéaire complexe par une méthode de continuation asymptotique numérique, en changeant successivement le point de départ.

Dans la deuxième partie de ce travail nous présentons une méthode asymptotique numérique pour la détection des bifurcations stationnaires sur une branche de solutions. On introduit un indicateur de bifurcation et une perturbation en force dans le problème de Navier-Stokes perturbé. Cet indicateur, qui est défini le long de la branche fondamentale, sera développé en série entière en fonction d'un paramètre de contrôle bien défini. En pratique, on arrive à localiser précisément une bifurcation dès que le point de départ des séries n'est pas très éloigné de la singularité, et cela sans recours à des techniques de subdivision ou d'interpolations comme avec les méthodes itératives. Cette méthode sera appliquée à l'écoulement des fluides visqueux autour d'un obstacle et à l'écoulement à l'intérieur de deux cylindres.

Dans la troisième partie, nous présentons une nouvelle méthode asymptotique pour la détection des points de bifurcation de Hopf. En effet, nous définissons un indicateur de bifurcation de Hopf dépendant de deux paramètres et nous proposons de le calculer par des techniques asymptotiques numériques. Nous établissons aussi quelques propriétés qui nous permettent de montrer que les points de bifurcation de Hopf coïncident avec les zéros de cet indicateur. Pour l'application de cette méthode, on pense aux structures élastiques soumises à des chargements non conservatifs.

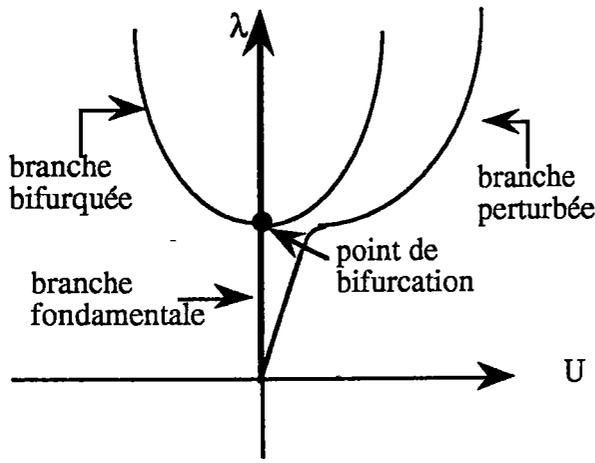
## **Orientation**

Notre objectif dans cette partie est de donner un résumé des différents travaux réalisés sur les méthodes asymptotiques numériques ainsi que notre contribution dans ces travaux. Dans le premier chapitre, nous abordons des exemples de structures pour montrer l'efficacité de ces méthodes.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, nous montrons notre participation à élargir le domaine d'application de cette méthode. Nous allons et pour la première fois l'appliquer aux équations de Navier-Stokes tout en exploitant les notions de bases acquises par les travaux précédents. Nous montrons aussi les avantages, les difficultés rencontrées ainsi que les nouveaux résultats obtenus.

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire un rappel sur la méthode asymptotique numérique. Cette dernière a été mise au point en calcul de structure pour trois types de problèmes : le calcul des branches fondamentales, le calcul des points de bifurcation et enfin le calcul des branches bifurquées. Ce rappel est surtout consacré au calcul des branches fondamentales et bifurquées. Le problème de détection de points de bifurcation sera détaillé dans les prochains chapitres.



Pour les systèmes conservatifs en structure, on utilise la formulation d'Hellinger-Reissner, qui est quadratique par rapport aux inconnues  $u$  (déplacement) et  $S$  (contrainte). En effet, dans le cas des structures élastiques minces à non linéarités géométriques, cette formulation nous permet d'écrire les équations d'équilibre comme suit :

$$f(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F = 0 \quad (1.1)$$

où  $L$  est un opérateur linéaire en  $U$ ,  $Q$  est une forme quadratique et  $F$  un vecteur donné.

Le paramètre de charge  $\lambda$  et le vecteur  $U = \begin{pmatrix} u \\ S \end{pmatrix}$  représentent les inconnues du problème.

Pour l'étude du post-flambage des plaques et des coques, il est commode de retenir pour inconnue, l'écart de la branche bifurquée à la fondamentale. L'équation (1.1) se réécrit alors sous la forme suivante [C-1] :

$$f(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - (\lambda - \lambda_c) L'(U) = 0 \quad (1.2)$$

où  $L'$  est aussi un opérateur linéaire.

Pour le calcul en post-flambage avec défaut on a :

$$f(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - (\lambda - \lambda_c) L'(U) + \lambda a_0 d = 0 \quad (1.3)$$

où  $a_0$  est l'amplitude des défauts et  $d$  est un vecteur contenant la forme des défauts.

Nous présentons ici un résumé de la méthode asymptotique numérique, en se basant sur la formule (1.1). Dans ce résumé, on s'est largement inspiré des différents travaux soutenus sous la direction de M. Potier-Ferry et en particulier des travaux de Cochelin [C-4].

## 1.2 Concepts généraux de la méthode asymptotique numérique

Le principe de la méthode asymptotique-numérique est d'associer une méthode de perturbation et une méthode d'éléments finis. En structure, la démarche utilisée pour résoudre un problème non linéaire au moyen de cette méthode se base sur quatre points importants :

- 1) L'utilisation d'une formulation mixte d'Hellinger-Reissner qui est quadratique par rapport aux inconnues  $u$  (déplacement) et  $S$  (contrainte).
- 2) L'utilisation d'une méthode de perturbation qui permet de transformer le problème non linéaire mixte en une succession de problèmes linéaires mixtes.
- 3) Transformation de chaque problème linéaire mixte en un problème linéaire de type déplacement et une relation de comportement.
- 4) Discrétisation de ces problèmes linéaires par des méthodes d'éléments finis de type déplacement.

### 1.2.1 Formulation variationnelle

Pour un solide élastique occupant un domaine  $\Omega_0$  de frontière  $\partial\Omega_0$  et qui reçoit un déplacement imposé  $\lambda u_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega_u$ , la formulation d'Hellinger-Reissner s'écrit:

$$HR(u, S, \lambda) = \int_{\Omega_0} (S:\gamma - \frac{1}{2} S:D^{-1}:S) dv - \lambda P_e(u) \quad (1.4)$$

où  $D$  est le tenseur d'élasticité du matériau,  $\gamma = \gamma^l + \gamma^{nl}$  est le tenseur de déformation de Green-Lagrange et  $P_e$  est la puissance des efforts extérieurs.

$$P_e(u) = \int_{\Omega_0} \rho b u dv + \int_{\partial\Omega_f} t u ds \quad (1.5)$$

où  $t$  et  $\rho b$  représentent respectivement les forces surfaciques sur l'autre partie de la frontière  $\partial\Omega_f$  et les forces volumiques appliquées au domaine.

Une formulation variationnelle des équations d'équilibre et des relations de comportement s'obtient en invoquant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner :

$$\begin{aligned} \delta HR(u, \delta u, S, \delta S, \lambda) &= \int_{\Omega_0} (S:\delta\gamma(u) + \delta S:\gamma(u) - S:D^{-1}:\delta S) dv - \lambda P_e(\delta u) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $\delta HR$  désigne la dérivé de Frechet de la formulation  $HR$  en  $u$  et  $S$  dans les directions  $\delta u$  et  $\delta S$ . On introduit le vecteur mixte  $U$  dont les composantes sont les déplacements et les contraintes :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ S \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

La formule (1.1) est retrouvée en écrivant :

$$\delta HR = \langle f(U, \lambda), \delta U \rangle = 0 \quad (1.8)$$

où

$$\langle L(U), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} (S:\gamma^l(\delta u) + \delta S:(\gamma^l(u) - D^{-1}:S)) dv \quad (1.9)$$

$$\langle Q(U, U), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} (S:2\gamma^{nl}(u, \delta u) + \delta S:\gamma^{nl}(u, u)) dv \quad (1.10)$$

$$\langle F, \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} \rho b \delta u dv + \int_{\partial\Omega_f} t \delta u ds \quad (1.11)$$

### 1.2.2 Développement asymptotique

Le principe général des méthodes de perturbation consiste à chercher la solution sous forme d'un développement asymptotique par rapport à un paramètre introduit directement ou indirectement dans les équations. En introduisant ces développements asymptotiques dans le problème non linéaire à résoudre, on obtient une succession de problèmes linéaires que l'on résout facilement.

Ici, on cherche une branche de solution sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'un point départ  $(U_0, \lambda_0)$  supposé connu et qui vérifie l'équation (1.1) :

$$\begin{cases} U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots + a^pU_p + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots + a^p\lambda_p + \dots \end{cases} \quad (1.13)$$

ou 'a' est un paramètre de contrôle qui sera défini par la suite.

Après introduction de ces développements dans les équations (1.1) et en identifiant tous les termes de même puissance de 'a', on obtient une succession de problèmes linéaires mixtes dont les inconnues sont  $\lambda_r$  et  $U_r = \begin{pmatrix} u_r \\ s_r \end{pmatrix}$  avec  $1 \leq r \leq p$  et p représente l'ordre de troncature des séries :

ordre 1 :

$$L_t(U_1) = \lambda_1 F \quad (1.14)$$

·  
·  
·  
·

ordre p

$$L_t(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \quad (1.15)$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur tangent  $L_t$  défini par :

$$L_t(.) = L(.) + 2 Q(U_0, .). \quad (1.16)$$

Pour assurer l'unicité de la solution, il faut introduire une équation supplémentaire dans chacun des problèmes linéaires. Ces équations proviennent de la définition du paramètre 'a'.

En effet le paramètre de contrôle 'a' peut être défini comme étant :

1) l'incrément de charge  $\lambda - \lambda_0$

$$a = \lambda - \lambda_0 \quad (1.17)$$

2) où la projection du déplacement  $u - u_0$  sur le vecteur  $u_1$

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle \quad (1.18)$$

3) où bien la projection du déplacement  $u - u_0$  et  $\lambda - \lambda_0$  sur le vecteur  $u_1, \lambda_1$

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 \quad (1.19)$$

$\langle , \rangle$  désigne un produit scalaire.

La troisième définition du paramètre 'a' (1.19) est pratique pour calculer les branches de solution contenant des points limites en force et en déplacement.

En introduisant (1.11a) dans la définition (1.19), on obtient alors une succession d'équations permettant d'assurer l'unicité des problèmes linéaires (1.15). Le problème complet à l'ordre p s'écrit:

$$L_t(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \quad (1.20)$$

$$\langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0$$

Quand le point de départ est régulier, l'opérateur  $L_t$  est inversible et ce problème admet une solution unique.

### 1.2.3 Formulation en déplacement

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la formulation variationnelle mixte se prête bien aux développements asymptotiques. Son utilisation nous a conduit à une succession de problèmes linéaires mixtes dont les inconnues sont le déplacement et la contrainte. Ces problèmes seront résolues par la suite par une méthode d'éléments finis.

En revanche, ces méthodes reposent dans la plupart des cas sur des formulations en déplacement et une discrétisation du champ du déplacement seulement.

En effet, l'adaptation de ces problèmes linéaires mixtes aux méthodes d'éléments finis passera par une transformation de ces problèmes en une formulation en déplacement en éliminant la contrainte et en introduisant une relation de comportement pour chaque problème. Cette démarche sera détaillée dans le dernier chapitre.

#### 1.2.4 Discrétisation

La discrétisation par éléments finis fournit le déplacement nodal  $[u_p]$  et le paramètre de chargement  $\lambda_p$ , en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} [K_t][U_p] = \lambda_p[F] + [F_p^{nl}] \\ [u_p][u_1] + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

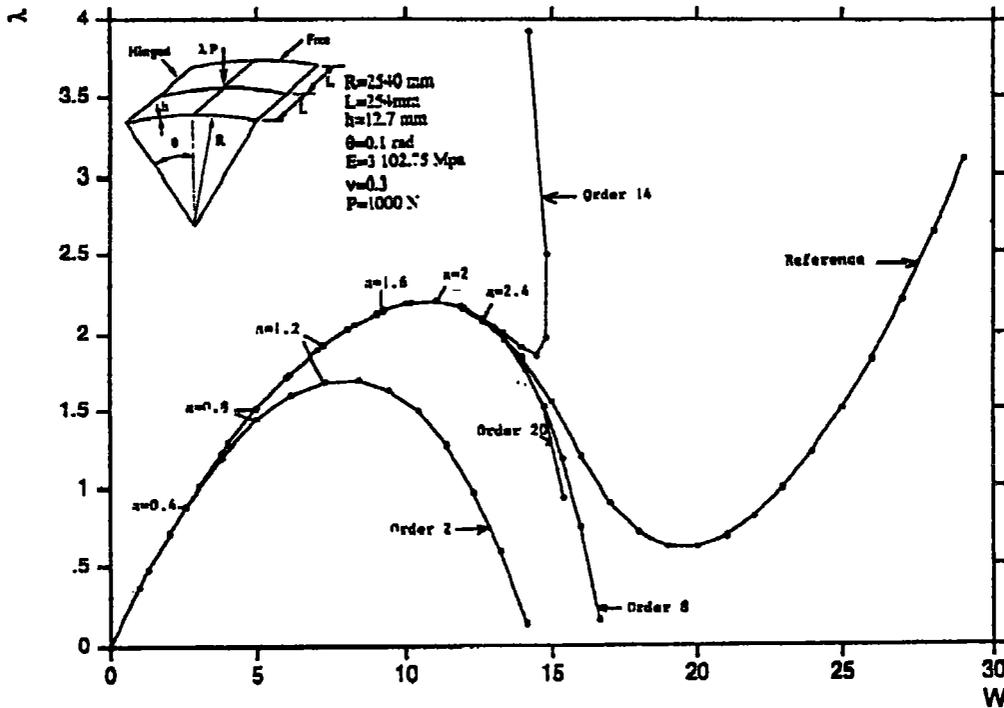
où  $[K_t]$  est la matrice de rigidité tangente au point  $(U_0, \lambda_0)$ ,  $[F]$  est un vecteur de charges extérieures et  $[F_p^{nl}]$  est un vecteur de force qui dépend des solutions précédentes. Les contraintes à chaque ordre seront déduites à partir de la relation de comportement.

Tous ces problèmes admettent la même matrice de rigidité qui est assemblée et triangulée une fois pour toute. La tâche principale à l'ordre  $p$  reste alors l'assemblage du vecteur  $[F_p^{nl}]$ . En pratique cet assemblage ne demande qu'une boucle de 0 à  $p$  qui fait intervenir tous les termes calculés précédemment.

### 1.3 Calcul d'une branche fondamentale

#### 1.3.1 Au voisinage d'un point $(U_0, \lambda_0) = (0, 0)$

La méthode asymptotique numérique a été appliquée avec un grand succès à plusieurs structures à non-linéarités géométriques. Pour mettre en évidence l'efficacité du développement polynomial au voisinage d'un point de départ, on présente ici l'exemple d'une coque légèrement galbé en flexion, figure (1.1).



**figure 1.1** : Comparaison des solutions asymptotiques aux ordres 2, 8, 14, 20 avec la solution exacte du modèle éléments finis

Sur cette figure, on présente les courbes des solutions asymptotiques, charge-déplacement (flèche), à différentes troncatures des séries (1.13). La courbe de référence est obtenue par une méthode de Newton-Raphson. On constate que pour des petites valeurs de 'a' la solution asymptotique et la solution exacte coïncident parfaitement. En s'éloignant du point de départ (0, 0) nous remarquons que la solution asymptotique diverge de la solution exacte d'une manière brutale. Cette méthode décrit précisément un domaine large de la branche non-linéaire sans aucune correction, mais ne permet pas d'avoir toute la branche puisque les solutions polynomiales sont souvent limitées par un rayon de convergence fini. La représentation analytique de la branche de solution polynomiale permet de définir facilement un autre point de départ à l'intérieur du domaine

de convergence des séries. En rappliquant la même procédure décrite précédemment à partir de ce nouveau point de départ, on peut déterminer facilement l'autre partie de la branche. C'est le principe de la méthode asymptotique de continuation.

### 1.3.2 Méthode asymptotique de continuation : Au voisinage d'un point $(U_0, \lambda_0) \neq (0, 0)$

Le test numérique a montré que les branches de solutions calculées à différents ordres sont très proches au voisinage du point de départ mais s'écartent brusquement lorsqu'on atteint le rayon de convergence. Ce dernier est souvent fini, par conséquent on ne détermine qu'une partie de la branche de solution. Pour déterminer entièrement la branche, on propose alors d'appliquer la méthode de façon pas à pas. La fin de chaque pas, notée  $a_m$ , est fixée à l'intérieur du domaine de convergence. On repart de ce nouveau point  $(U(a_m), \lambda(a_m))$  avec un nouveau développement asymptotique et un nouveau domaine de validité. De cette façon, la branche de solution est construite par tronçons successifs. Dans l'esprit d'avoir une méthode efficace et facile à utiliser, on procède à un calcul automatique du paramètre  $a_m$  représentant la fin du pas. On présente ici le critère souvent utilisé pour le calcul du point  $a_m$  :

#### *Critère se basant sur le déplacement*

D'une façon générale, on peut détecter le rayon de convergence en comparant les résultats numériques donnés par deux développements consécutif d'ordre  $p$  et  $p-1$ . La différence entre ces deux ordres est très petite. En exploitant cette remarque, on peut écrire:

$$\frac{\|u_p - u_{p-1}\|}{\|u - u_0\|} = \frac{\|a^p u_p\|}{\|u - u_0\|} \approx \frac{\|a^p u_p\|}{\|a u_1\|} < \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre petit et  $\| \cdot \|$  représente la norme du vecteur. La fin du pas  $a_m$  est alors définie comme suit :

$$a_m = \left( \varepsilon \frac{\|u_1\|}{\|u_p\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (1.22)$$

Cette approximation ne demande que le calcul des normes du premier et du dernier terme de la série.

### 1.3.2.1 Exemple d'application

La technique de continuation a été appliquée à plusieurs problèmes de structures. Pour illustrer l'efficacité de cette méthode on présente l'exemple de la coque cylindrique légèrement galbé en flexion, figure(1.2).

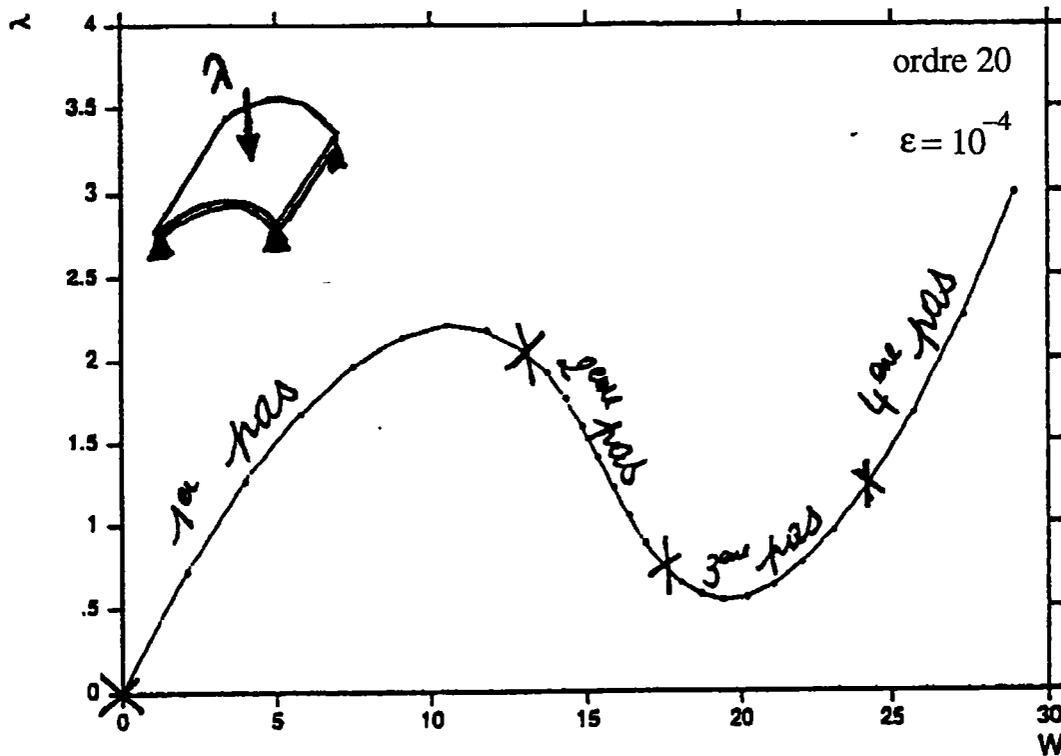


figure 1.2 : Méthode asymptotique de continuation pour la coque cylindrique en flexion.

La branche de solution complète représentée sur la figure (1.2) a été obtenue en 4 pas c'est à dire en 4 décomposition de la matrice de rigidité tangente. La branche de solution est ainsi décrite par une succession de représentations analytiques et non pas point par point. En plus cette méthode est entièrement automatique et facile à utiliser. Une discussion plus approfondie de cette méthode sera détaillée dans la partie de notre étude concernant les fluides.

1.3.2.2 Influence du choix du paramètre 'a'

Reprenons l'exemple de la coque cylindrique soumise à une force concentrée en flexion avec une épaisseur réduite de moitié. On présente les solutions pour divers choix du paramètre 'a'. Les développements asymptotiques sont effectués au voisinage d'un point pris au milieu de la courbe, figure (1.3).

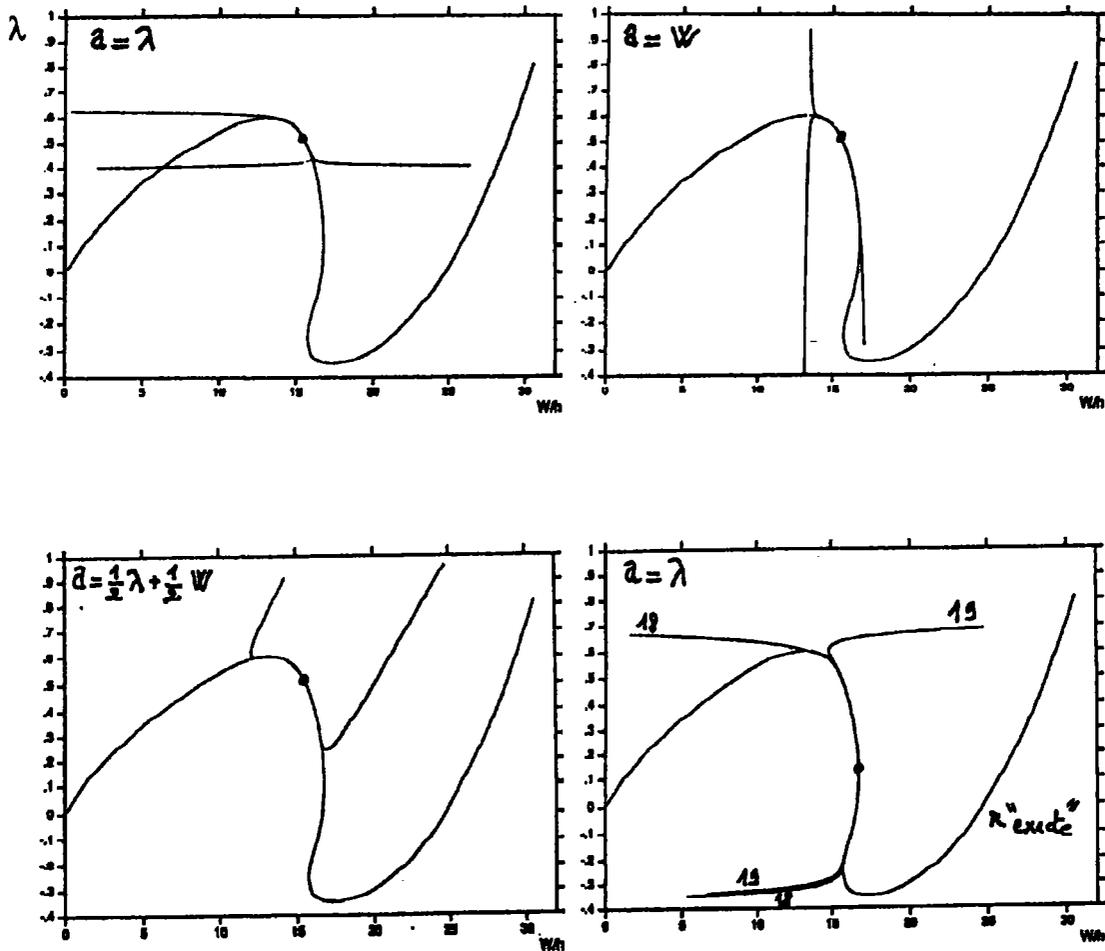


figure 1.3 : Comportement des solutions asymptotiques pour divers choix du paramètre 'a'.

On constate bien que le comportement asymptotique dépend fortement du choix du paramètre 'a'. En général, on utilise souvent la définition (1.19) pour éviter les points limites. Cette définition peut s'écrire d'une manière globale sous la forme suivante :

$$a = \frac{1}{s^2} ( \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 ) \quad (1.23)$$

où s représente la longueur du pas tangent  $u_1, \lambda_1$ .

### 1.4 Calcul des branches bifurquées

Dans les sections précédentes, on a montré que par une méthode asymptotique numérique on peut calculer facilement une branche **fondamentale** non linéaire. Maintenant, on essaye d'étendre cette méthode pour le calcul des branches **bifurquées**. On s'est surtout intéressé aux bifurcations simples où le mode est unique. Cette fois, les développements asymptotiques sont faits à partir du point de bifurcation  $(U_c, \lambda_c)$ , où l'opérateur  $L_t$  est non inversible. Après discrétisation par éléments finis on obtient à l'ordre  $p$  le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} [K_t^c][U_p] = [F_p] \\ [U_p][U_1] = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

La deuxième équation (1.24b) correspond à la condition d'orthogonalité qui provient de la définition du paramètre 'a'. Ce paramètre est identifié cette fois à la projection de  $U$  sur le mode  $U_1$ . La matrice  $[K_t^c]$  est la matrice de rigidité au point de bifurcation. En ce point cette matrice est singulière, par conséquent ce problème n'est pas solvable d'une manière directe. Pour cela on introduit une méthode de relaxation qui se base sur les multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode permet de prendre en compte la condition d'orthogonalité (1.24b) et d'obtenir un problème se formulant de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} K_t^c & U_1 \\ U_1^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

où  $k$  est un multiplicateur de Lagrange. Ainsi on se ramène à la résolution d'un problème inversible.

Parmi les exemples déjà traités par cette procédure, on montre les résultats obtenus pour une plaque chargée dans son plan présentée sur la figure (1.4).

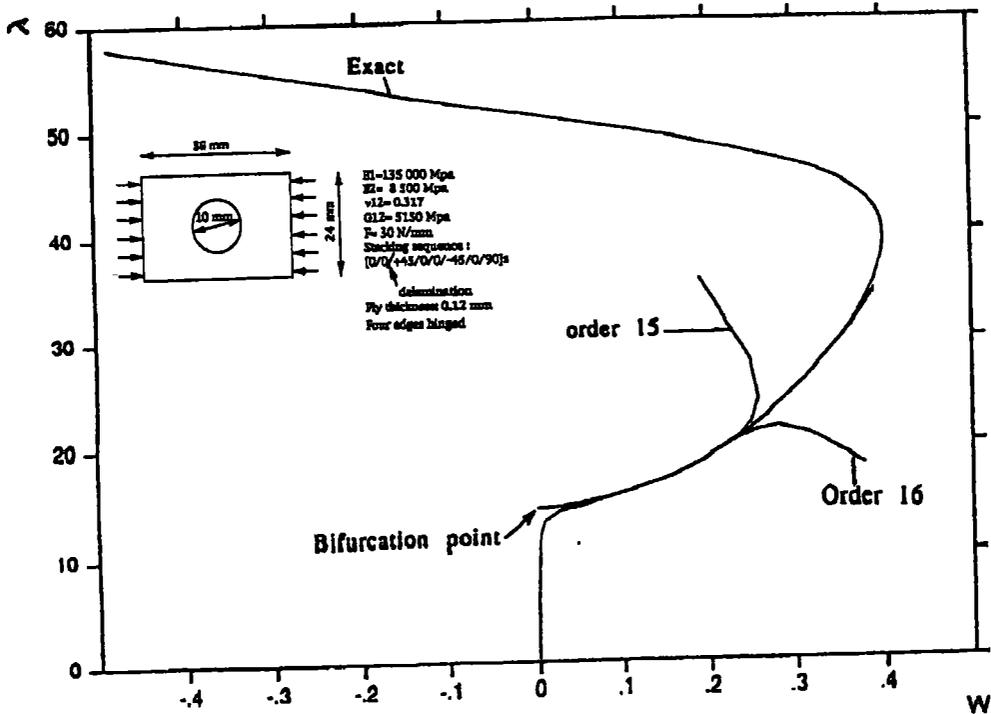


figure 1.4 : Calcul de la branche bifurquée par une méthode asymptotique-numérique d'une plaque composite en compression. La courbe correspond à des troncatures des séries aux ordres 15 et 16.

Sur cet exemple, on présente le comportement post-critique d'une plaque en compression. La branche bifurquée est déterminée jusqu'à un rapport de  $\frac{\lambda}{\lambda_c}$  qui est de l'ordre de 1.4. L'utilisation de la méthode de continuation asymptotique-numérique sera un moyen efficace pour déterminer toute la branche bifurquée.

## **1.5 Conclusion**

Dans ce rappel, nous nous sommes intéressés à montrer que l'association d'une technique de perturbation et d'une méthode d'éléments finis conduit à des algorithmes de calcul à la fois rapide et facile à utiliser. Ils ont été testés en statique sur de nombreux problèmes de poutre, de plaques et de coques et aussi en dynamique, pour le calcul des vibrations non linéaires [A-3], et en particulier pour le calcul des branches de solutions périodiques [B-3].

Notre objectif dans cette thèse est d'étendre ces techniques à des problèmes de mécanique des fluides. On pense notamment à la résolution des équations de Navier-Stokes et aux calculs des points de bifurcation pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles.

## 2.1 Introduction

La mécanique des fluides numériques est en passe de devenir un outil de mise au point aussi important que les essais expérimentaux. Les premières simulations de fluide ont débuté au début des années soixante avec les écoulements potentiels, d'abord incompressibles ou compressibles hypersoniques, puis compressibles transsoniques. Ces calculs ont été faits en différences finies ou par des méthodes de singularités (Brebbia [B-4]). Les années soixante dix ont vu la mise au point des premières méthodes d'éléments finis pour les équations de potentiels et les équations de Navier-Stokes (Glowinski [G-1], Temam [T-1], Thomasset [T-2]). Ces dernières années voient le développement des accélérateurs d'algorithmes pour des problèmes de plus en plus complexes.

A notre connaissance la première tentative de résolution des écoulements de Navier-Stokes s'appuyant sur l'association d'une méthode de perturbation et d'une méthode d'élément finis a été réalisée en 1974 par Kawahara et collaborateurs [K-1]. Ces derniers ont traité les écoulements stationnaires, instationnaires et thermoconductifs.

Dans leur travail, il est difficile de savoir si la méthode de perturbation est considérée comme une méthode de résolution efficace à part entière, où si elle doit être associée systématiquement avec la méthode de Newton-Raphson. Il semble que la méthode de perturbation sert numériquement à construire un prédicteur d'ordre élevé, et que l'avantage de disposer d'une solution analytique n'est pas réellement exploité. Par ailleurs, il y a un manque d'analyse sur l'utilisation des développements en séries entières :

- Aucune discussion sur le domaine de validité des séries.
- Aucun moyen d'amélioration des séries
- La comparaison par rapport aux méthodes itératives est insuffisante.

Toutes ces questions nous poussent à reprendre l'association des "méthodes de perturbation" et d'une "méthode d'élément finis", ce qu'on appelle Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N. en abrégé), afin d'en analyser de plus près les avantages et les inconvénients pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Ces équations admettent une non linéarité quadratique et se prêtent bien à la résolution par les méthodes asymptotiques-numériques. Dans ce travail, les méthodes asymptotiques numériques sont adaptées au suivi des branches de **solutions stationnaires** des problèmes d'**écoulements visqueux incompressibles**. Ces branches de solutions sont déterminées en développant la vitesse de l'écoulement, la pression et le nombre de Reynolds en série entière en fonction d'un paramètre bien choisi.

Les représentations en séries entières au voisinage d'un point sont en général limitées par un rayon de convergence fini, mais, nous montrons que l'utilisation d'une représentation fractionnelle utilisant les approximants de Padé (Baker, Graves-Morris 1981, [B-1]) peut améliorer considérablement le domaine de convergence. Nous montrons aussi comment suivre une branche de solution non linéaire complexe par une méthode de continuation asymptotique numérique en changeant successivement le point de départ .

## 2.2 Résolution des équations de Navier-Stokes par une méthode asymptotique numérique

La particularité des équations de Navier-Stokes réside dans la forte non-linéarité donnée par le terme convectif, mais par rapport au calcul de structure où la non-linéarité est cubique en déplacement, la non-linéarité des équations de Navier-Stokes est quadratique en vitesse.

Pour résoudre ces équations nous allons :

- 1) Donner une formulation variationnelle de ces équations .
- 2) Développer la vitesse de l'écoulement, la pression et le nombre de Reynolds en fonction d'un paramètre de contrôle. Ceci nous permettra de transformer le problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires.
- 3) Résoudre chaque problème linéaire par une méthode d'éléments finis.

### 2.2.1 Formulation variationnelle des équations de Navier-stokes

L'écoulement d'un fluide visqueux incompressible est complètement déterminé par les équations qui dérivent de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Si  $U_i(x_i, t)$  et  $p(x_i, t)$ , représentent respectivement la vitesse et la pression de l'écoulement au point  $x_i$  à l'instant  $t$ , la conservation de la quantité de mouvement conduit à l'équation :

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) - \tau_{ij,j} = \rho f_i \quad i=1,2 \quad (2.1)$$

où  $\rho = \rho(x_i, t)$ ,  $f_i$  désignent respectivement la masse volumique et les forces volumiques appliquées. La relation de comportement du fluide est prise sous la forme :

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \mu d_{ij} \quad (2.2)$$

où  $\tau_{ij}$  est la contrainte de compressibilité,  $p$  est la pression,  $\mu$  est la viscosité du fluide et  $d_{ij}$  représente le taux de déformation qui s'écrit :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (2.3)$$

En introduisant (2.1) dans (2.2), on obtient la première équation locale des équations de Navier -Stokes :

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) + p_{,i} - \mu U_{i,jj} = \rho f_i \quad (2.4)$$

La deuxième équation est l'équation de continuité qui dérive de la conservation de la masse et qui s'écrit pour le cas d'un fluide incompressible sous la forme suivante :

$$U_{i,i} = 0 \quad (2.5)$$

avec la convention habituelle de sommation de l'indice répété

En introduisant le nombre de Reynolds :

$$Re = \rho U l / \mu \quad (2.6)$$

où  $l$  et  $U$  représentent respectivement une longueur et une vitesse caractéristique, les équations adimensionnelles de l'écoulement stationnaire  $\frac{\partial U_i}{\partial t} = 0$  d'un fluide visqueux se réécrivent sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{Re} U_{i,jj} + U_j U_{i,j} + p_{,i} = f_i \quad (2.7)$$

où l'on garde les mêmes notations pour la vitesse, la pression et les forces adimensionnelles.

En multipliant les équations précédentes (2.7) et (2.5) par les fonctions tests  $v_i$  et  $q$  et en intégrant sur le domaine d'étude  $\Omega$ , on obtient la forme faible des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{Re} U_{i,j} \cdot v_{i,j} + U_j U_{i,j} \cdot v_i - p v_{i,i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_i \cdot v_i d\Omega \\ \int_{\Omega} q U_{i,i} d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Cette formulation du problème de Navier-Stokes est la base des méthodes d'approximation par éléments finis utilisant les variables vitesse et pression.

Pour simplifier, on suppose que les conditions aux limites sur le bord de  $\Omega$  ( $\partial\Omega$ ) sont uniquement de type "vitesse imposée" et que les forces volumiques  $f_i$  sont nulles ( $f_i = 0$ ).

Le problème d'écoulement stationnaire se formule ainsi :

Trouver  $U$  et  $p$  vérifiant:

$$\begin{cases} L(U) + Q(U, U) + D^t(p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(U) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \lambda U_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $U_d$  est un champ de vitesses imposé sur  $\partial\Omega$  et  $\lambda$  est un paramètre scalaire.

$L(\cdot)$  et  $D(\cdot)$  sont des opérateurs linéaires et  $Q(\cdot, \cdot)$  est un opérateur bilinéaire non symétrique.

Ces opérateurs sont définis par les formes suivantes :

$$\begin{cases} \langle L(\cdot), v \rangle = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\cdot)_{i,j} v_{i,j} d\Omega \\ \langle D^t(\cdot), v \rangle = - \int_{\Omega} (\cdot) v_{i,i} d\Omega \\ \langle Q((\cdot), (\circ)), v \rangle = \int_{\Omega} (\circ)_j (\cdot)_{i,j} v_i d\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

Dans toute la suite, on s'intéresse à l'évolution du champ de vitesse  $U$  et du champ de pression  $p$  en fonction du paramètre  $\lambda$ . On s'intéresse plus particulièrement au calcul de la branche qui a pour point de départ ( $\lambda = 0, U = 0$  et  $p = 0$ ).

**Remarque :** Nous avons gardé les mêmes notations pour les opérateurs du problème non-linéaire pour faire l'analogie avec le calcul de structure.

Pour plus de détails sur l'aspect mathématique de ces équations, nous renvoyons le lecteur à Temmam [T-1] et Raviart [R-2]. Dans leurs ouvrages, on trouve des démonstrations sur l'existence et l'unicité des solutions de ces équations.

### 2.2.2 Méthode de perturbation

Le principe consiste à développer la branche de solution sous forme de séries entières par rapport à un paramètre 'a'.

On suppose que  $(\lambda_0, U_0, p_0)$  est une solution du problème (2.9), c'est à dire que:

$$\begin{cases} L(U_0) + Q(U_0, U_0) + D^t(p_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(U_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U_0 = \lambda_0 U_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

On cherche la branche de solution passant par ce point sous forme de séries entières :

$$\begin{cases} U = U_0 + a U_1 + a^2 U_2 + a^3 U_3 + a^4 U_4 + \dots \\ p = p_0 + a p_1 + a^2 p_2 + a^3 p_3 + a^4 p_4 + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + a^3 \lambda_3 + a^4 \lambda_4 + \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

En introduisant ces développements dans le problème (2.9) et en identifiant les termes en puissances de 'a', le problème non linéaire de Navier-Stokes se réduit à une succession de problèmes linéaires qui s'écrivent :

Ordre 1 :

$$\begin{cases} L_t(U_1) + D^t(p_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(U_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U_1 = \lambda_1 U_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

Ce problème correspond exactement à un problème de Stokes si  $U_0$  est nul. Il sert aussi de prédicteur dans les algorithmes itératifs.

Ordre  $p$  où  $p \geq 2$ :

$$\begin{cases} L_t(U_p) + D^t(p_p) = - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) & \text{dans } \Omega \\ D(U_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U_p = \lambda_p U_d & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur tangent défini par :

$$L_t(.) = L(.) + Q(U_0, .) + Q(., U_0) \quad (2.15)$$

où  $L_t$  est un opérateur non symétrique.

Dans chacun de ces problèmes, il reste encore une indétermination qui sera levée avec la définition du paramètre 'a'. Ici, ce paramètre est identifié à la projection de  $U-U_0$  et  $\lambda-\lambda_0$  respectivement sur le vecteur tangent  $U_1$  et  $\lambda_1$  et donné par la formule (1.19).

En injectant les développements asymptotiques (2.12) dans cette définition (1.19) et en identifiant suivant les puissances de 'a', on obtient une succession d'équations scalaires à chaque ordre :

$$\begin{cases} \text{ordre 1 :} & \langle U_1, U_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \\ \text{ordre } p : & \langle U_p, U_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Les équations (2.13), (2.14) et (2.16) nous ramènent aux problèmes complets et bien posés suivants :

Ordre 1 :

Trouver  $(\lambda_1, U_1, p_1)$  tels que:

$$\begin{cases} L_t(U_1) + D^t(p_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(U_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U_1 = \lambda_1 U_d & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle U_1, U_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Ordre  $p$  où  $p \geq 2$  :

Trouver  $(\lambda_p, U_p, p_p)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t(U_p) + D^t(p_p) = - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) & \text{dans } \Omega \\ D(U_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U_p = \lambda_p U_d & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle U_p, U_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

On suppose que l'opérateur tangent  $L_t$  est régulier en  $(\lambda_0, U_0, p_0)$  ce qui assure l'existence d'une branche de solution unique. En pratique, il est commode d'avoir une série de problèmes linéaires avec des données homogènes sur la frontière. Pour cela on fait le changement de variable suivant :

$$U_i = w_i + \lambda_i \hat{U} \quad i=1, \dots, p \quad (2.19)$$

où  $\hat{U}$  représente un prolongement de  $U_d$  dans  $\Omega$  telque :

$$\hat{U} = U_d \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \text{et} \quad D(\hat{U}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.20)$$

Introduisons le changement de variable (2.19) dans les équations (2.17) et (2.18) en tenant compte de (2.20), les problèmes linéaires se réécrivent sous la forme suivante :

Ordre 1 :

Trouver  $(\lambda_1, w_1, p_1)$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t(w_1) + D^t(p_1) = - \lambda_1 L_t(\hat{U}) & \text{dans } \Omega \\ D(w_1) = 0 & \text{dans } \Omega \\ w_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle w_1 + \lambda_1 \hat{U}, w_1 + \lambda_1 \hat{U} \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Ordre  $p$  :

Trouver  $(\lambda_p, W_p, p_p)$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_t(W_p) + D^t(p_p) = -\lambda_p L_t(\hat{U}) - \sum_{r=1}^{p-1} Q \left( W_r + \lambda_r \hat{U}, W_{p-r} + \lambda_{p-r} \hat{U} \right) & \text{dans } \Omega \\ D(W_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ W_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle W_p + \lambda_p \hat{U}, W_1 + \lambda_1 \hat{U} \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 & \end{array} \right. \quad (2.22)$$

### 2.2.3 Discrétisation par éléments finis

Dans ce paragraphe, nous allons faire une résolution par éléments finis des problèmes (2.21) et (2.22). L'une des principales difficultés rencontrées dans cette résolution numérique est de trouver des fonctions d'interpolations convenables satisfaisant la condition d'incompressibilité. En effet, il n'est pas aisé en pratique de construire des éléments qui satisfassent à la fois la condition d'incompressibilité et la condition de continuité de la vitesse aux interfaces des éléments.

Dans la littérature, on trouve des méthodes qui utilisent des fonctions d'interpolation satisfaisant la continuité de la vitesse tandis que la condition d'incompressibilité n'est qu'approximativement satisfaite. Une seconde classe de méthode assure la condition d'incompressibilité mais seule la composante normale de la vitesse est continue aux interfaces des éléments.

Dans ce travail on va utiliser des éléments avec des fonctions d'interpolations à divergence nulles qui vont satisfaire automatiquement la condition d'incompressibilité.

#### **Résolution des problèmes:**

Pour résoudre nos problèmes linéaires (2.21) et (2.22), nous avons choisi d'utiliser des éléments avec des fonctions d'interpolation à divergence nulle pour les vitesses. Ceci permet d'éliminer la pression et de n'interpoler que la vitesse, la condition d'incompressibilité étant satisfaite automatiquement. Le calcul de la pression se fait après avoir calculer la vitesse en utilisant la partie à rotations nulles des fonctions testes.

La méthode de Galerkin, appliqué au problème à l'ordre  $p$  (2.22), conduit à la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}] [\mathbf{w}_p] + [\mathbf{D}]^t [\mathbf{p}_p] = \lambda_p [\mathbf{F}] + [\mathbf{F}_p^{\text{nl}}] \\ [\mathbf{D}] [\mathbf{w}_p] = 0 \\ [\mathbf{U}_1] [\mathbf{U}_p] + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

La construction des éléments à divergence nulle fait intervenir de nouvelles inconnues  $[\mathbf{U}'_p]$  qui satisfont à la transformation suivante :

$$[\mathbf{w}_p] = [\mathbf{R}_d] [\mathbf{U}'_p] \quad (2.24)$$

où  $[\mathbf{R}_d]$  est une matrice de passage connue.

On introduit cette transformation dans la condition d'incompressibilité qui devient :

$$[\mathbf{D}] [\mathbf{w}_p] = [\mathbf{D}] [\mathbf{R}_d] [\mathbf{U}'_p] = 0 \quad (2.25)$$

Puisque (2.25) doit être valable pour tous les vecteurs  $[\mathbf{U}'_p]$ , il est nécessaire que la matrice  $[\mathbf{D}][\mathbf{R}_d]$  soit égale à la matrice nulle :

$$[\mathbf{D}] [\mathbf{R}_d] = [\mathbf{0}] \quad (2.26)$$

En multipliant l'équation (48) par la matrice  $[\mathbf{R}_d]^t$  et en tenant compte de (2.26), les équations discrétisées de (2.22) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} [\mathbf{K}_t] [\mathbf{U}'_p] = \lambda_p [\bar{\mathbf{F}}] + [\bar{\mathbf{F}}_p^{\text{nl}}] \\ [\mathbf{U}_1] [\mathbf{U}_p] + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

$[\mathbf{K}_t]$  est la matrice de rigidité tangente au point de départ,  $[\bar{\mathbf{F}}_p^{\text{nl}}]$  est le vecteur de forces qui ne dépend que des solutions  $[\mathbf{U}'_r]$  aux ordres précédents  $r \leq p$  et  $[\bar{\mathbf{F}}]$  est le vecteur des vitesses imposées.

La résolution du problème s'organise de la manière suivante :

$$\begin{cases} [U'_p]^{nl} = [K_t]^{-1} [F_p]^{nl} \\ \lambda_p = - \lambda_1 [U_1]^t [R_d]^t [R_d] [U_p]^{nl} \\ [U'_p] = \frac{\lambda_p}{\lambda_1} [U_1] + [U_p]^{nl} \end{cases} \quad (2.28)$$

D'après les formules (2.28), on remarque que la résolution de tous les problèmes se fait en décomposant une seule fois la matrice tangente  $[K_t]$ , et en construisant plusieurs vecteurs  $[F_p]^{nl}$ . En conséquence, le temps de calcul des séries (2.12) reste du même ordre de grandeur que la résolution du problème de Stokes.

Il est à noter aussi qu'une fois les vecteurs  $[U_p]$  et les coefficients  $\lambda_p$  sont déterminés, il est très facile de calculer la pression à l'ordre  $p$  en utilisant la partie à divergence non nulle de l'approximation. Un tel calcul ne sera pas traité dans ce travail

### Logiciel

La technique asymptotique numérique a été implantée dans le logiciel MODULEF. Nous sommes limités à des éléments triangulaires non conformes de Crouzeix-Raviart [S-1]. Ces éléments possèdent trois noeuds et deux degrés de liberté par noeud pour la vitesse et un noeud à un degré de liberté pour la pression. Les noeuds de la vitesse occupent les milieux des côtés alors que celui de la pression occupe le centre de l'élément.

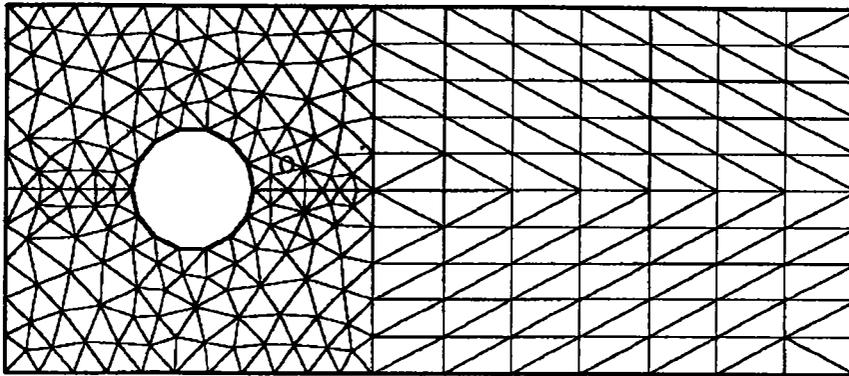
### 2.3 Application numérique.

#### *Exemple 1 : Problème d'écoulement autour d'un cylindre*

Dans les sections précédentes, nous avons présenté une procédure qui nous permet de calculer les termes des séries (2.12) à tous les ordres. En pratique, nous allons tronquer ces séries à un ordre  $p$ , ce qui nous donne une approximation polynomiale de la branche de solution, et nous allons montrer jusqu'à quel point ces développements polynomiaux sont valables. Nous considérons pour cela un exemple classique d'écoulement autour d'un obstacle. Le problème physique est celui de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire de rayon  $R = 0.5$  plongé dans un fluide de viscosité cinématique  $\nu = 0.1$ , animé d'une vitesse uniforme  $\lambda U_d$  sur les frontières suivant la direction de l'écoulement. Le nombre de Reynolds est donné par la formule suivante :

$$Re = \lambda \frac{2 R U_d}{\nu} \quad (2.29)$$

Le maillage et la géométrie du problème sont présentés sur la figure (2.1).



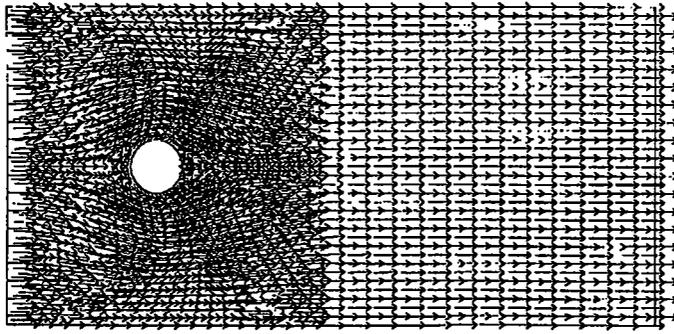
**figure 2.1** : Maillage utilisé pour l'écoulement autour d'un cylindre. Les caractéristiques du système sont : longueur  $L = 14$ , largeur  $l = 6$ , rayon du cylindre  $R = 0.5$ , viscosité du fluide  $\nu = 0.1$  et vitesse sur toute la frontière du domaine  $U_d = 1$ .

### *Discussion sur les termes de la série*

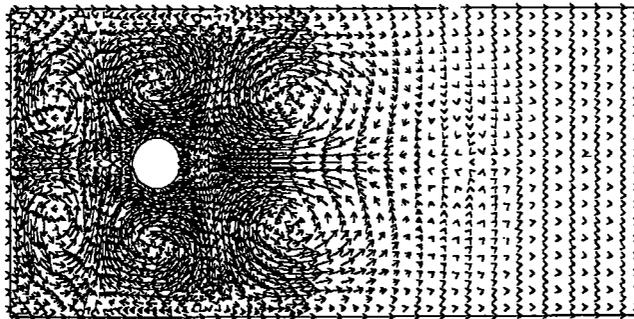
La M.A.N nous permet de déterminer un très grand nombre de termes des séries (2.12), qui sont visualisés sur la figure (2.2a) pour les ordres impairs et sur la figure (2.2b) pour les ordres pairs. La figure (2.2) nous permet d'observer que les vecteurs d'ordres pairs et ceux d'ordres impairs présentent une certaine colinéarité entre eux respectivement. Une telle observation est confirmée par un calcul de corrélation entre les termes formant la série (2.12). On définit une corrélation par la formule suivante :

$$\text{cor} (i, j) = \frac{\langle U_i, U_j \rangle}{\langle U_i, U_i \rangle^{1/2} \langle U_j, U_j \rangle^{1/2}} \quad (2.30)$$

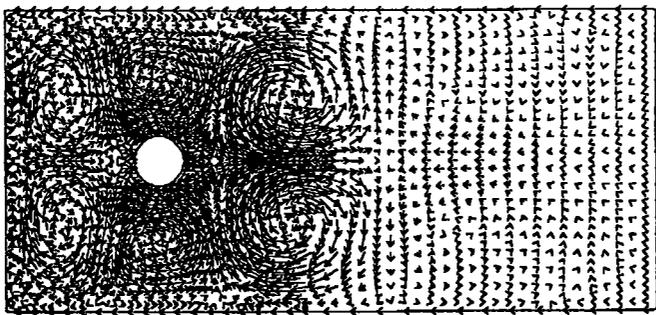
La valeur de la corrélation entre le vecteur d'ordre 2 et celui d'ordre 4 qui est égale à 0.9 témoigne de cette colinéarité.



Vecteur  $U_1$

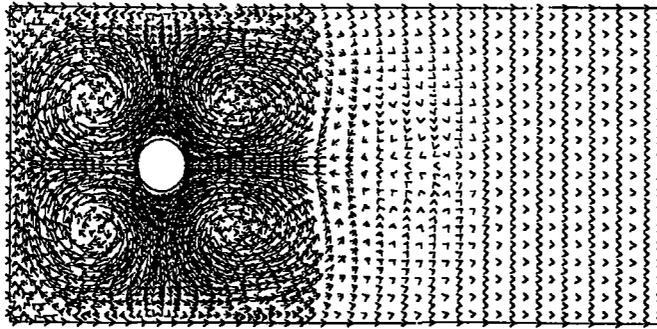


Vecteur  $U_3$

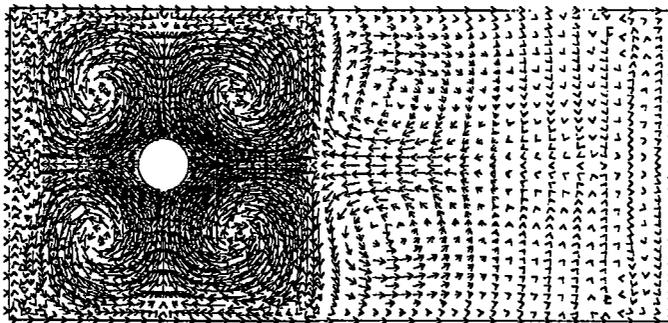


Vecteur  $U_5$

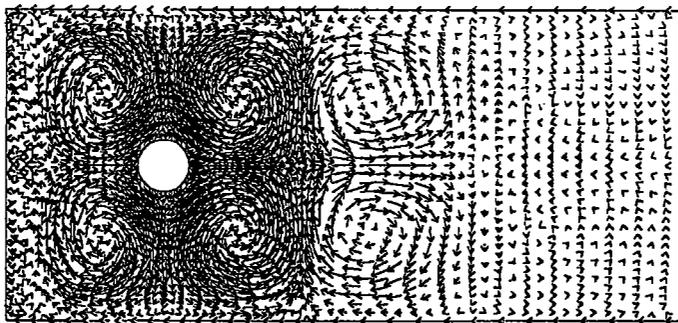
**figure 2.2a** : Visualisation des termes impairs du vecteur vitesse donnés par la série (2.12).



Vecteur  $U_2$



Vecteur  $U_4$



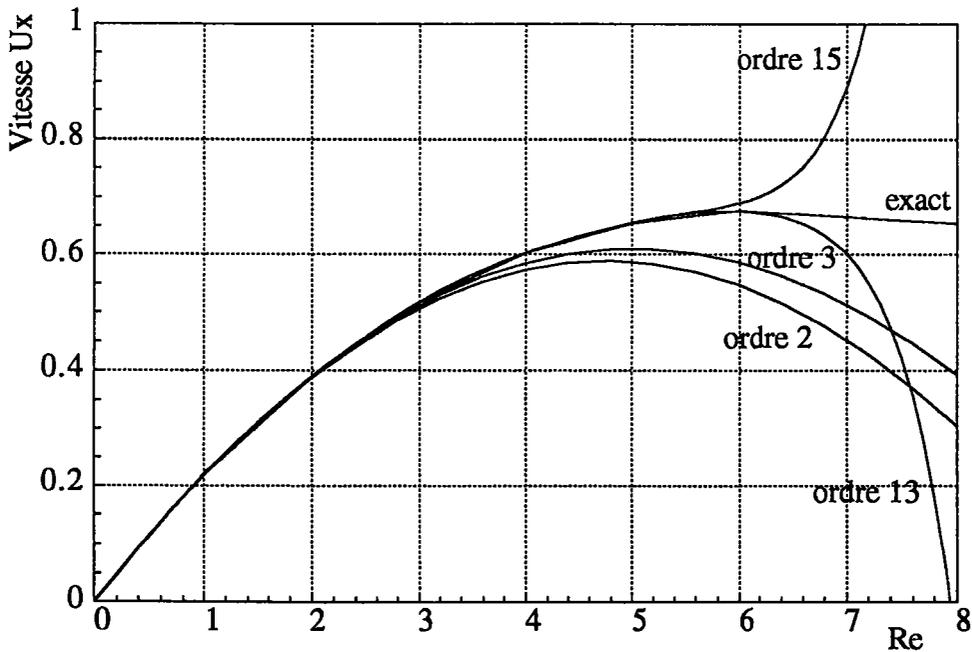
Vecteur  $U_6$

figure 2.2b : Visualisation des termes pairs du vecteur vitesse donnés par la série (2.12).

**Domaine de validité des séries**

Analysons maintenant la qualité des approximations polynomiales obtenues en tronquant les séries (2.12) à un certain ordre. La figure (2.3) présente l'évolution du vecteur vitesse en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries (2.12) en un point situé juste derrière l'obstacle. Nous les avons comparé avec des solutions dites 'exactes' obtenues par des méthodes itératives de type Newton-Raphson ou de points fixes. Ces courbes représentant le vecteur vitesse en fonction du nombre du Reynolds, sont très caractéristiques des approximations polynomiales. Pour des petites valeurs du paramètre 'a', on constate que les solutions asymptotiques numériques coïncident presque parfaitement avec des solution exactes. Au delà d'une valeur critique 'a', la représentation polynomiale diverge. Cette valeur critique de 'a' représente clairement le rayon de convergence des séries entières (2.12).

Un simple aperçu mathématique nous permet de montrer que ceci est dû à la représentation polynomiale car pour n grand les fonctions  $a^n$  tendent vers 0 lorsque 'a' est assez petit ( $a < 1$ ) mais croissent rapidement lorsque 'a' est grand ( $a > 1$ ).

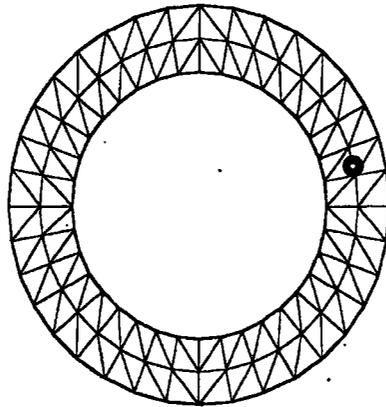


**figure 2.3 :** Représentation de la vitesse d'écoulement au point (o) en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries (2.12). Le rayon de convergence est de l'ordre de  $Re \approx 6$ . La solution exacte est donnée par la méthode de point fixe.

D'après la figure (2.3), nous observons que les troncatures à l'ordre 3,...,15 améliorent notablement la solution à l'ordre 2. Dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, l'ordre de troncature 13 nous permet de suivre la branche de solution exacte jusqu'à  $Re \approx 6$ . Ensuite la qualité de la solution asymptotique se dégrade.

**Exemple 2 : Problème d'écoulement à l'intérieur de deux cylindres.**

Pour confirmer nos résultats et chercher les autres performances de la méthode pour les fluides, nous avons traité l'écoulement plan de deux cylindres coaxiaux présenté sur la figure (2.4). Le cylindre intérieur est de rayon  $R1 = 1$  et de vitesse angulaire  $\Omega1 = 1$ . Le cylindre extérieur de rayon  $R2 = 1.5$  est immobile. La viscosité cinématique du fluide est égale à 0.1.

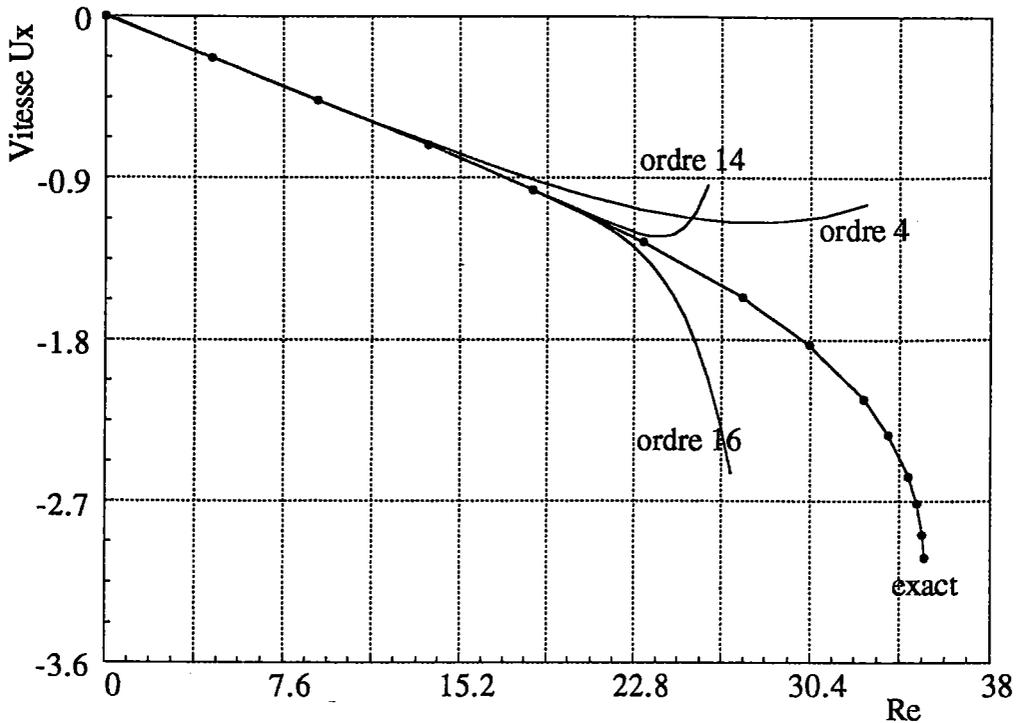


**figure 2.4 :** Maillage utilisé pour l'écoulement d'un fluide à l'intérieur de deux cylindres coaxiaux (Dimension 2).

Le nombre de Reynolds de cet écoulement est calculé comme suit:

$$Re = \lambda \frac{R1 \Omega1 (R2 - R1)}{\nu} \quad (2.31)$$

Pour cet exemple nous essayons de donner une idée sur le gain en temps de la méthode par rapport aux méthodes itératives.



**figure 2.5** : Représentation de la vitesse d'écoulement au point (o) en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries (2.12). Le rayon de convergence est de l'ordre de  $Re \approx 19$ . La solution exacte est donnée par la méthode de point fixe.

Comme c'est présenté sur la figure (2.5), le rayon de convergence de ce problème est de l'ordre d'un Reynolds égale à 19. Ce rayon de convergence est obtenue en un seul pas de calcul c'est à dire une seule décomposition de la matrice de rigidité.

A titre comparatif, nous avons tracé cette même courbe en calculant 5 points par une méthode itérative de point fixe. Le calcul d'un seul point a demandé en moyenne 4 itérations c'est à dire 4 décompositions de la matrice de rigidité et pour l'ensemble de points une vingtaine de décompositions de la matrice de rigidité. En d'autres termes le calcul de 5 points par une méthode itérative a demandé presque dix fois plus de temps que la présentation d'une branche de solution analytique donné par la méthode asymptotique numérique et avec la même qualité de précision.

## 2.4 Amélioration par les approximants de Padé

Cette méthode consiste à transformer une série entière en une fraction rationnelle dont le développement de Taylor coïncide avec la série jusqu'à un certain ordre. Cette nouvelle représentation permet en général d'améliorer considérablement le rayon de convergence des séries. Ces approximants ont été développés en 1892 dans la thèse de Padé puis une représentation détaillée et moderne de ces méthodes a été réalisée par Baker et Graves-Morris en 1981 [B-1] et par Cochelin en 1994 [C-1].

### Principe et exemple

Dans ce paragraphe nous donnons une brève présentation de cette méthode. Pour cela on considère une fonction scalaire  $f(x)$  développable en série entière donnée par:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_N \cdot x^N + \dots \quad (2.32)$$

Où les coefficients  $a_i$  sont connus.

Un approximant de Padé, qu'on note  $P[L/M]$ , de la fonction scalaire  $f(x)$  est une fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré  $L$ , le dénominateur un polynôme de degré  $M$  avec  $b_0 = 1$ , et tels que les développements de Taylor coïncident jusqu'à l'ordre  $N = M+L$  inclus.

$$P[L/M] = \frac{c_0 + c_1 \cdot x + \dots + c_L \cdot x^L}{b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_M \cdot x^M} \quad (2.33)$$

Les coefficients  $b_i$  sont déterminés à partir des coefficients  $a_i$  de la série en résolvant un système linéaire de taille  $M$  qui s'écrit ainsi:

$$\begin{bmatrix} a_{L+M+1} & a_{L+M+2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_L \\ a_{L-M+1} & a_{L-M+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{L+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_L & a_{L+1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{L+1} \\ a_{L+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{L+M} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Une fois les termes  $b_i$  sont calculés, la détermination des  $c_i$  se fait alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 \\
 c_1 &= a_1 + b_1 a_0 \\
 &: \\
 &: \\
 c_L &= a_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} a_i c_{L-i}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Cette démarche est présentée dans les ouvrages de Baker et Graves-Morris en 1981. Pour montrer l'utilité de cette méthode, nous allons l'illustrer sur un exemple simple. On considère une fonction scalaire défini par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+5x}} \tag{2.36}$$

Le développement de Taylor de la fonction  $f(x)$  au voisinage de 0 possède un rayon de convergence imposé par la singularité au point  $x = -0.2$  ce qui limite la zone de validité de ce développement. La fonction scalaire développée en série de Taylor au voisinage de 0 s'écrit à l'ordre 3 sous la forme suivante :

$$f(x) = 1 - \frac{5}{2} x + \frac{75}{8} x^2 + \frac{625}{128} x^3 + \dots \tag{2.37}$$

où les coefficients  $a_i$  sont connues maintenant. A l'aide de ces coefficients, on détermine les approximants de Padé. Ces derniers permettent de déterminer une très bonne approximation de la fonction  $f(x)$  bien au delà du rayon de convergence de la série.

Le calcul des approximants de Padé se fait d'une manière simple. On donne ici  $P[1/1]$  et  $P[2/2]$  :

$$P[1/1] = \frac{1+1.25x}{1+3.75x} \quad P[2/2] = \frac{1+3.75x + 1.5625x^2}{1+6.25x + 7.8125x^2} \tag{2.38}$$

Sur la figure (2.6), on trace la fonction  $f(x)$ , son développement de Taylor à différents ordres et sa représentation par différents approximants de Padé.

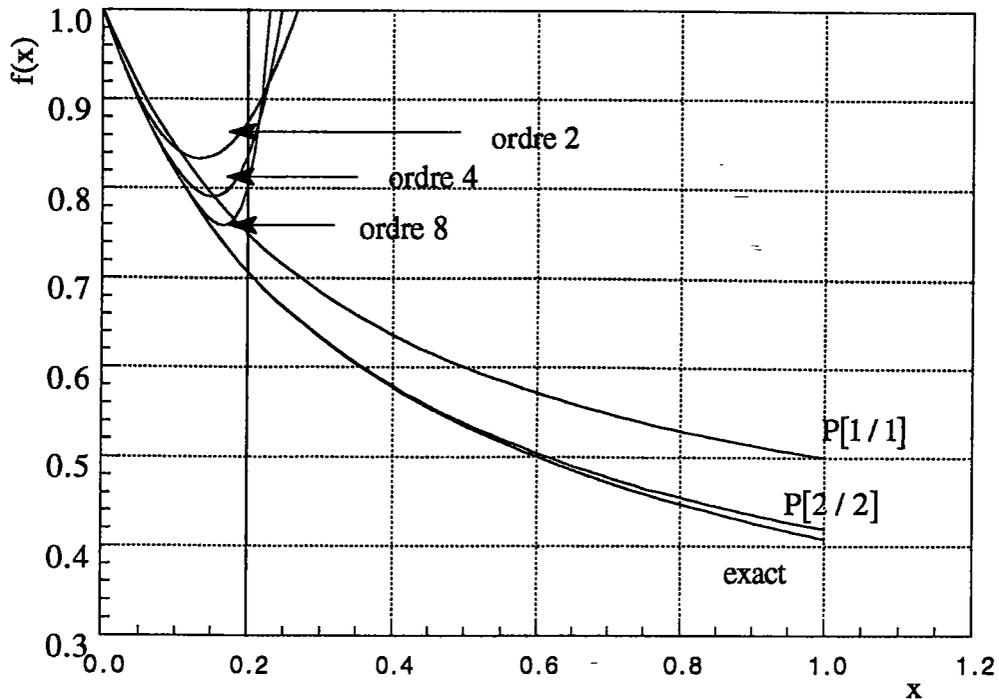


figure 2.7 : Exemple pour illustrer l'importance des approximants de Padé.

Dans cette figure on voit que la représentation par les approximants de Padé est bien meilleure par rapport aux représentations polynomiales et le domaine de coïncidence avec la fonction scalaire est nettement plus large que celui donnée par les séries qui sont sévèrement pénalisées par la présence de la singularité.

Dans ce paragraphe nous essayons de réorganiser puis adapter cette procédure dans le cas des écoulements fluides. On présentera quelques applications pour améliorer le rayon de convergence des séries trouvées dans le paragraphe précédent.

### 2.4.1 Procédure de réorganisation de la fonction vectorielle $U(a)$

Dans notre cas, nous avons utilisé des approximants de Padé pour améliorer les séries vectorielles (2.12). Les termes de ces séries ont été déjà déterminés dans les paragraphes précédents. Notre procédure se fait alors en deux étapes. La première consiste à construire une base orthogonale à partir des  $U_i$ . La deuxième partie consiste à remplacer les fonctions scalaires qui vont apparaître dans les équations par des approximants de Padé.

#### Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Le calcul des termes de corrélation a montré que les vecteurs sont presque colinéaires entre eux, en d'autres termes les vecteurs  $U_i$  ne sont pas orthogonaux entre eux. Pour cette raison nous proposons d'orthogonaliser ces vecteurs par la méthode de Gram-Schmidt. On construit alors une base orthogonale  $U_k^\perp$  de la fonction vectorielle  $U(a)$  à partir de la base  $U_i$ .

On pose alors:

$$U_p = \sum_{k=1}^p \alpha_k^p U_k^\perp \quad (2.39)$$

où les  $\alpha_j^i$  sont calculés numériquement par la formule suivante :

$$\alpha_k^p = \frac{\langle U_p, U_k^\perp \rangle}{\langle U_k^\perp, U_k^\perp \rangle} \quad \text{pour } 1 < k < p \quad (2.40)$$

$$\alpha_p^p = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p^1 = 0$$

Par conséquent l'écriture de la série dans cette base orthogonale devient :

$$U = \sum_{k=1}^p a^k f_k(a) U_k^\perp \quad (2.41)$$

où

$$f_k(a) = \sum_{i=k}^p a^{i-k} \alpha_i^k \quad (2.42)$$

Dans la deuxième étape, on remplace les séries scalaires  $f_k(a)$  par des approximants de Padé et on obtient une approximation de la fonction vectorielle  $U(a)$  qui s'écrit alors sous la forme suivante :

$$U(a) = \sum_{k=1}^p a^k P_k[L_k / M_k](a) U_k^{\perp} \quad (2.43)$$

La branche de solutions est alors représentée par l'approximation rationnelle (2.43). Le calcul des vecteurs  $U_k^{\perp}$  et  $P_k[L_k / M_k]$  se fait d'une manière automatique, seuls les ordres  $L_k$  et  $M_k$  de chaque approximant doivent être précisément choisis.

On note aussi que la procédure décrite pour  $U(a)$  peut être utilisée aussi pour la pression  $p(a)$ . La fonction scalaire  $\lambda(a)$  peut se reorganiser d'une manière simple sous forme de fraction rationnelle où elle peut être recalculer par une technique de projection tout en exploitant le calcul de la fonction vectorielle  $U(a)$  par des approximants de Padé.

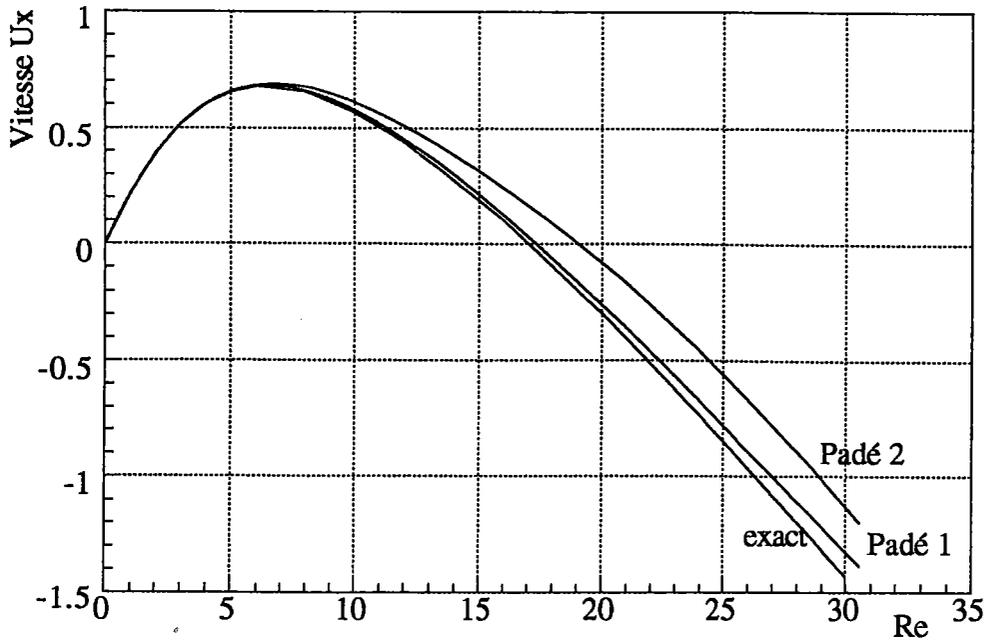
### **Application**

L'application de la méthode asymptotique-numérique aux écoulements de fluides visqueux incompressibles décrite au paragraphe précédent, montre que ces développements asymptotiques ont un rayon de convergence fini. Cela pourrait être pénalisant pour l'application de cette méthode. Ceci nous a poussé à réorganiser les séries pour que la détermination des approximants de Padé soit à jour.

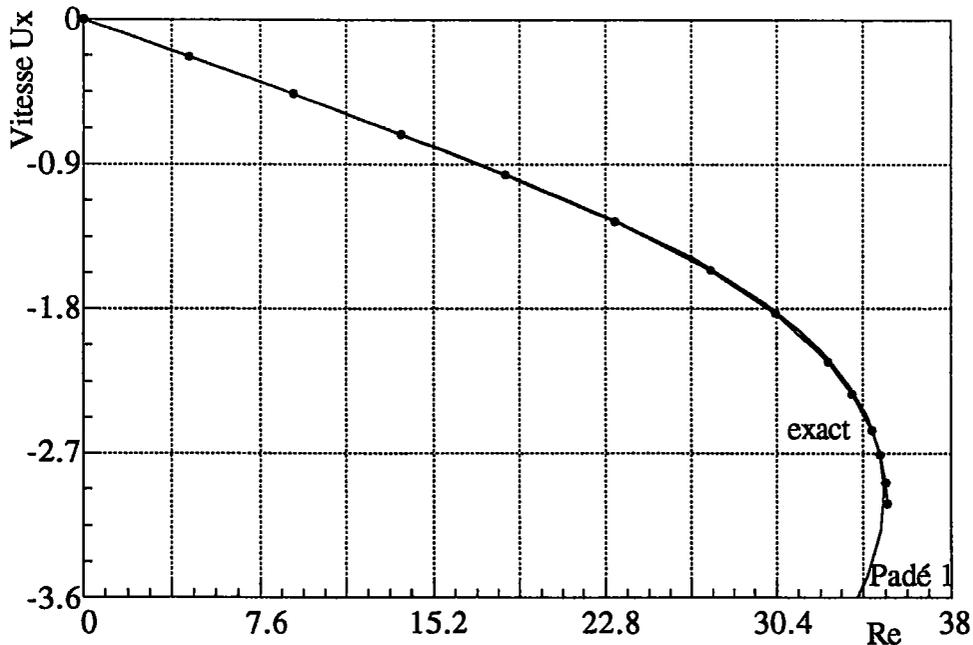
Pour montrer les performances de ces approximants de Padé dans le cas des fluides visqueux incompressibles, nous avons appliqué la démarche décrite auparavant pour deux exemples.

Pour l'écoulement autour du cylindre nous utilisons cette méthode en ne réécrivant que la vitesse sous forme d'approximant de Padé. Pour l'écoulement entre les deux cylindres, on a développé la vitesse de l'écoulement et le paramètre  $\lambda(a)$  en fraction rationnelle.

Après avoir calculer les coefficients  $\alpha_j^i$ , nous avons calculé les vecteurs orthogonaux jusqu'à l'ordre  $p$ . La seule difficulté rencontrée est alors le bon choix des approximants de Padé convenable pour chaque problème. Après plusieurs essais, nous avons trouvé des résultats très intéressants pour les deux exemples. Ces résultats sont présentés respectivement sur les figures (2.8) et (2.9).



**figure 2.8** : Représentation des branches de solutions de l'exemple 1 à l'aide des approximants de Padé, (2.43). Padé 1 correspond au choix des approximants suivants :  $P_2[9/10]$ ,  $P_3[8/10]$ ,  $P_4[5/8]$ . Padé 2 correspond au choix des approximants suivants :  $P_2[9/10]$ ,  $P_3[8/10]$ ,  $P_4[7/10]$ ,  $P_5[6/10]$ .



**figure 2.9** : Représentation des solutions de l'exemple 2 à l'aide des approximants de Padé. Padé 1 correspond au choix des approximants suivants :  $P_2[9/10]$ ,  $P_3[8/10]$ ,  $P_4[5/8]$  pour la vitesse et  $P[8/7]$  pour la fonction scalaire  $\lambda$ .

Sur la figure (2.8), nous montrons que la nouvelle représentation a bien amélioré le rayon de convergence des séries. Cette représentation est bonne jusqu'à un Reynolds trois fois supérieur que celui donné par les séries. Cette amélioration a doublé le rayon de convergence des séries pour le deuxième exemple, figure (2.8).

On constate que les approximations rationnelles sont bien meilleures que les approximations polynomiales. Il est à noter toutefois qu'une amélioration aussi importante n'est pas garantie dans tous les cas.

### **Conclusion**

Nous avons décrit dans ce paragraphe une méthode permettant d'utiliser la technique des approximants de Padé. Cette technique est facilement adaptée au méthode asymptotique-numérique. Cette dernière nous a permis de calculer les termes  $U_p$  des séries (2.12). Ces termes ont été bien exploités pour déterminer une base orthogonale de vecteurs  $U_p^\perp$ .

L'application de cette procédure pour les fluides visqueux incompressibles a donné des résultats très satisfaisants. Mais sa performance n'est pas toujours garantie et elle diffère d'un problème à un autre.

La difficulté de cette méthode réside souvent dans le bon choix des approximants à utiliser. Pour cela une méthode d'approximant de Padé automatique à dénominateur commun pourrait être un très bon outil pour éviter ces difficultés. Cette méthode sera le thème du prochain paragraphe

### 2.4.2 Padé à dénominateur commun

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'utilisation des approximants de Padé a amélioré considérablement la solution polynomiale. L'handicap de cette technique est le bon choix des approximants qui n'est souvent pas évident. En fait, ce choix n'est facile que si la solution exacte est une fraction rationnelle dont on connaît son ordre.

D'après la formule (2.43), nous remarquons que chaque composante de  $U(a)$  peut avoir plusieurs pôles différents. Pour éviter ce problème nous avons l'idée de chercher des approximants de Padé  $P_k[L_k/M_k]$  ayant tous les mêmes pôles. D'où la mise au point d'une nouvelle technique basée sur le choix d'un dénominateur commun pour tous ces approximants. Cette technique est appelée méthode d'approximants de Padé à dénominateur commun.

Ici, on se contente de montrer que les formules principales, la procédure sera entièrement détaillée dans l'annexe (A).

En partant de la formule (2.39), nous avons montré que les coefficients  $\alpha_j^i$  sont calculés grâce aux formules suivantes :

$$\alpha_j^i = \frac{1}{\alpha_j^i} \left( \langle U_i, U_j \rangle - \sum_{k=2}^{j-1} \alpha_i^k \alpha_j^k \right) \quad \text{avec } i \neq j. \quad (2.44)$$

$$\alpha_i^i = \sqrt{\langle U_i, U_i \rangle - \sum_{k=2}^{i-1} (\alpha_i^k)^2}$$

On remarque que le calcul des coefficients  $\alpha_j^i$  ne demande que le calcul des termes de la série polynomiale et non pas des termes de la base orthogonale comme on avait fait au paragraphe précédent.

Une fois ces coefficients sont calculés, on a remplacé les fonctions  $f_k(a)$ , formule (2.42), par des fractions rationnelles avec un même dénominateur pour tous les ordres  $k \geq 2$  jusqu'à l'ordre  $p-1$ . Les termes  $d_i$  du dénominateur, qui est un polynôme d'ordre  $p-2$  où  $p$  est l'ordre de troncature de la série, sont calculés facilement en fonction des  $\alpha_j^i$  et des termes  $d_i$  calculés précédemment :

$$d_0 = 1 \quad \text{et} \quad d_k = - \frac{1}{\alpha_{p-k}^{p-k}} \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{p-i}^{p-k} d_i \quad k=1 \dots p-2 \quad (2.45)$$

Tenant compte de (2.43), (2.44) et de (2.45), nous montrons que la fonction vectorielle  $U(a)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$U(a) = U_0 + a U_1 + \sum_{k=2}^{p-1} a^k U_k \left( \frac{\sum_{j=0}^{p-k-1} a^j d_j}{\sum_{i=0}^{p-2} a^i d_i} \right) \quad (2.46)$$

En se basant sur les mêmes démarches que précédemment la fonction scalaire  $\lambda(a)$  s'écrit aussi sous la forme suivante :

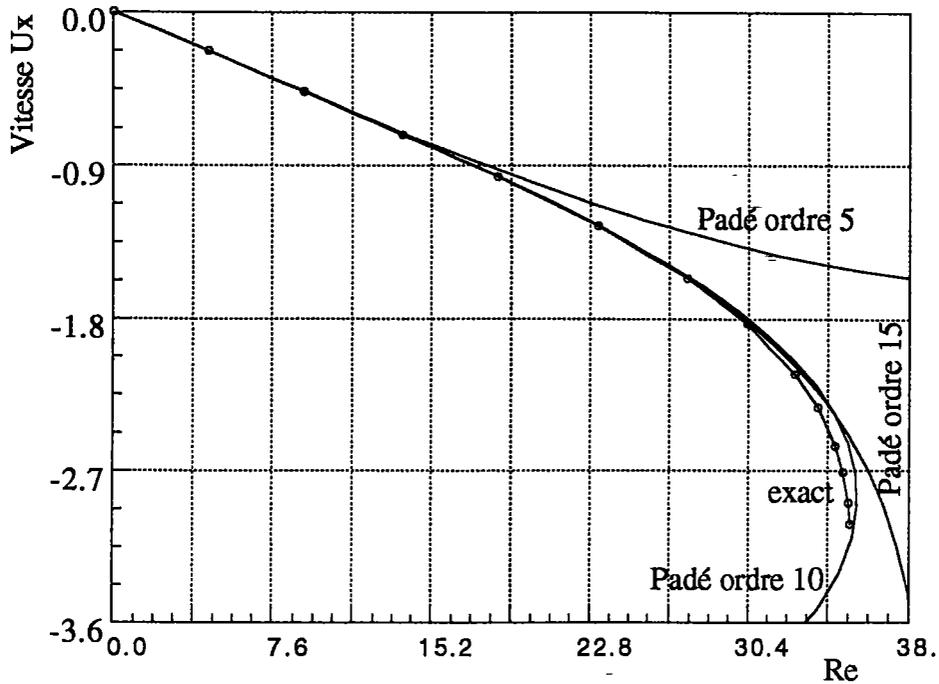
$$\lambda(a) = \lambda_0 + a \lambda_1 + \sum_{k=2}^{p-1} a^k \lambda_k \left( \frac{\sum_{j=0}^{p-k-1} a^j d_j}{\sum_{i=0}^{p-2} a^i d_i} \right) \quad (2.47)$$

d'après les formules (2.46) et (2.47), nous observons que les fonctions  $U(a)$  et  $\lambda(a)$  ne dépendent que des fonctions  $U_i$  et  $\lambda_i$  de la série polynomiale.

### **Application**

Pour tester les performances de cette technique, nous l'avons appliqué au problème de l'écoulement entre les deux cylindres (exemple 2). Sur la figure (2.10), nous avons présenté la solution exacte et des courbes calculées par cette technique pour différents ordres du dénominateur.

Avec le seul choix de l'ordre du dénominateur, nous remarquons que la solution fractionnelle s'améliore chaque fois qu'on augmente l'ordre du dénominateur. Mais au delà d'un certain ordre la qualité de la solution se dégrade. Pour un ordre de troncature 10, c'est à dire que le dénominateur commun est d'ordre 8, cette technique a permis d'améliorer la solution jusqu'à  $Re \approx 35$ . En conclusion nous avons obtenu le même résultat que l'utilisation classique des approximants de Padé sans la charge de chercher les bons approximants.



**figure 2.10** : Amélioration de la solution par des approximants de Padé à dénominateur commun.

### Conclusion

La méthode des approxiamants de Padé à dénominateur commun est une technique automatique permettant d'améliorer considérablement les solutions polynomiales. Cette méthode a permis de calculer les fonctions  $U(a)$  et  $\lambda(a)$  en n'exploitant que les termes des séries polynomiales (2.12). A noter aussi que cette méthode n'a pas besoin de résoudre le problème (2.34) ce qui diminue considérablement le nombre d'opérations par rapport à la méthode classique (paragraphe 2.4.1). Elle présente aussi l'avantage de diminuer le nombre de pôles vu qu'on a toujours le même dénominateur dans toutes les fractions utilisées.

La représentation de la branche de solutions a un domaine de validité limité, même si ici il est bien plus grand que celui de l'approximation polynomiale. L'utilisation pratique de ces méthodes impose donc une technique de continuation, ce qui implique une définition automatique du domaine de validité et une stratégie pour définir les pas successifs. Une telle stratégie n'a pas encore été mise au point dans le cas des approximants de Padé. Elle sera décrite au paragraphe suivant dans le cas des approximations polynomiales.

## 2.5 Méthode de Continuation asymptotique-numérique

La méthode utilisée ici a été proposée et testée en calcul des structures par Cochelin [C-3] en 1994. Il s'agit d'une méthode pas à pas où au cours d'un pas de calcul on cherche une représentation polynomiale de la branche de solution comme il a été décrit dans les paragraphes précédents. A chaque pas, on détermine un autre point de départ qui doit être suffisamment à l'intérieur du rayon de convergence pour des questions de précision. Ce point représentant la fin du pas, noté  $a_m$ , a été choisi d'une manière adéquate par la formule (1.22) que nous rappelons ici :

$$a_m = \left( \varepsilon \frac{\langle U_1, U_1 \rangle^{1/2}}{\langle U_p, U_p \rangle^{1/2}} \right)^{1/p-1}$$

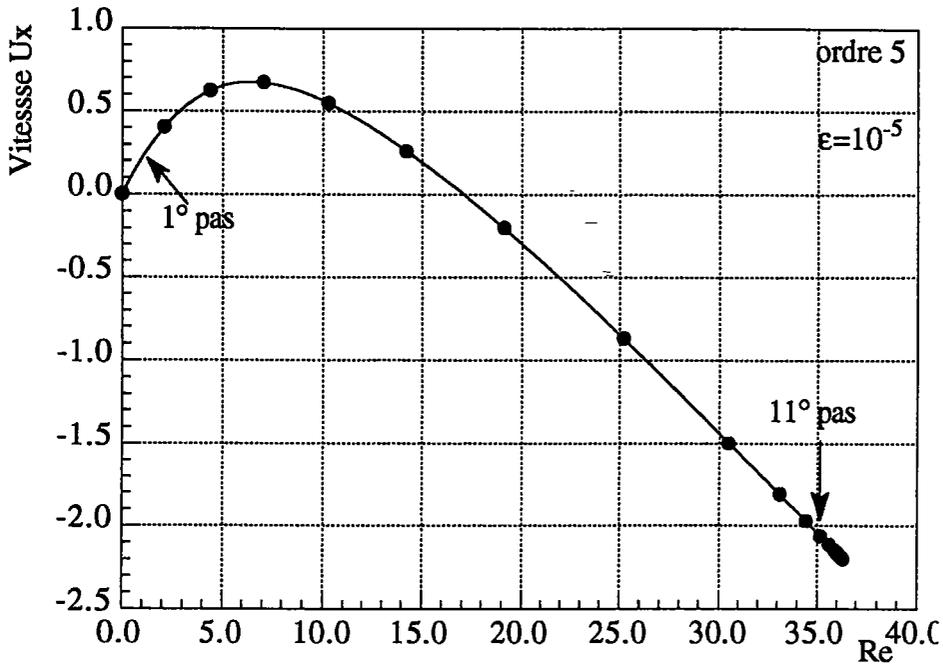
On constate alors que la fin du pas dépend du premier et du dernier terme des séries (37a), de l'ordre de troncature  $p$  et du paramètre de précision  $\varepsilon$ . Pour étudier l'influence de ces paramètres et montrer l'efficacité de la méthode de continuation en mécanique de fluide, nous appliquons cette technique aux deux exemples de fluides décrits dans le paragraphe (2.3).

### *Influence de l'ordre de troncature*

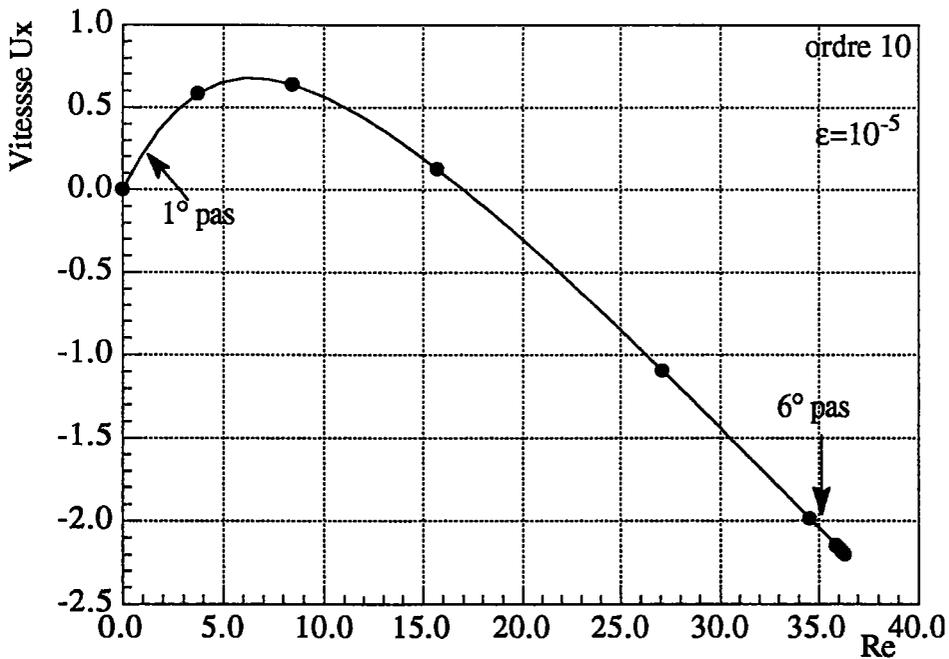
Pour le premier exemple, on présente la branche de solution décrivant la vitesse de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds pour différentes troncatures des séries (2.12) et en fixant le paramètre  $\varepsilon$  à  $10^{-5}$ . La figure (2.11a), montre qu'une troncature à l'ordre 5 nous permet de suivre la branche de solution jusqu'à  $Re = 35$  en 11 pas, c'est à dire, onze décompositions de la matrice de rigidité. Cette même branche est obtenue en 6 pas en augmentant l'ordre de troncature jusqu'à 10, figure (2.11b). On conclut qu'il n'est donc pas inutile de calculer un grand nombre de termes des séries (2.12) pour diminuer le nombre de pas et par suite minimiser le temps de calcul.

La qualité de la solution à l'intérieur du rayon de convergence augmente forcément avec l'ordre de troncature et le coût de calcul n'augmente que modérément avec cet ordre.

D'après ces figures, on remarque aussi qu'en parcourant la branche de solution, la longueur des pas change d'une zone à une autre. En effet, cette longueur est grande si la branche est linéaire et plus petite si la non-linéarité est forte.



(a)



(b)

**figure 2.11** : Courbe représentant la vitesse au point (o) de l'écoulement autour d'un cylindre (exemple 1) en fonction du nombre de Reynolds par la méthode de continuation. (a) A l'ordre 5 et pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , cette méthode suit la branche jusqu'à un  $Re \approx 35$  en 11 pas. (b) A l'ordre 10 et pour  $\epsilon = 10^{-5}$ , cette méthode suit la branche jusqu'à un  $Re \approx 35$  en 6 pas. Vers un  $Re \approx 37$  on a une forte d'accumulation de pas et on assiste à un arrêt numérique de la continuation.

### *Influence du paramètre $\varepsilon$*

Pour étudier l'influence de ce paramètre, nous avons réalisé des calculs de suivi de branches pour différents  $\varepsilon$  et avec le même ordre de troncature. Sur les figures (11a), (11b) et (11c), nous présentons la vitesse de l'écoulement à l'intérieur des deux cylindres du point (o) en fonction du nombre de Reynolds en tronquant les séries à l'ordre 7 et pour des valeurs de  $\varepsilon$  respectivement égales à  $10^{-5}$ ,  $10^{-7}$  et  $10^{-12}$ .

D'après les trois figures, nous remarquons que chaque fois qu'on diminue la valeur de  $\varepsilon$  le nombre de pas augmente. En effet, si le choix de la précision est sévère, la qualité de la solution augmente de façon significative. On observe aussi que ces trois courbes présentent une partie commune arrivant jusqu'à un Reynolds de l'ordre de 35.

On remarque que la longueur,  $a_m$ , dépend fortement du paramètre  $\varepsilon$ . Cette longueur se calcule automatiquement et s'adapte systématiquement avec les problèmes physiques rencontrés.

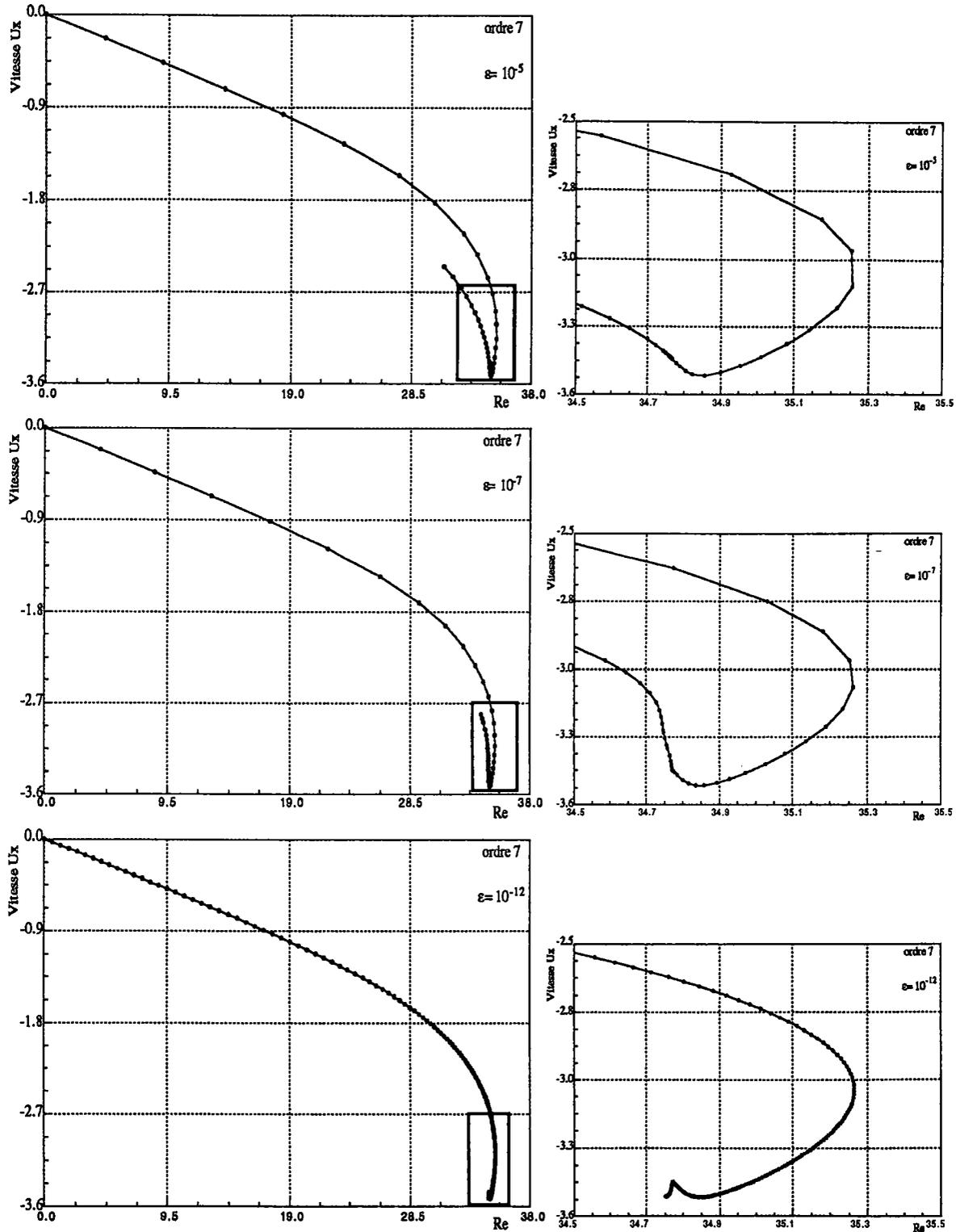
### *Zone d'accumulation de pas*

Dans le premier comme dans le second exemple, on constate que les pas de calcul finissent par se raccourcir, et on note des zones de forte accumulation de pas pour des valeurs respectives du nombre de Reynolds voisines de 37 et 35.

Dans le second exemple, nous avons observé qu'au voisinage de cette zone, nous avons une forte accumulation de pas et juste après les branches de solutions prennent des directions séparées. Pour comprendre ce phénomène, nous avons fait des zooms au niveau de cette zone d'accumulation et on en dégage les conclusions suivantes :

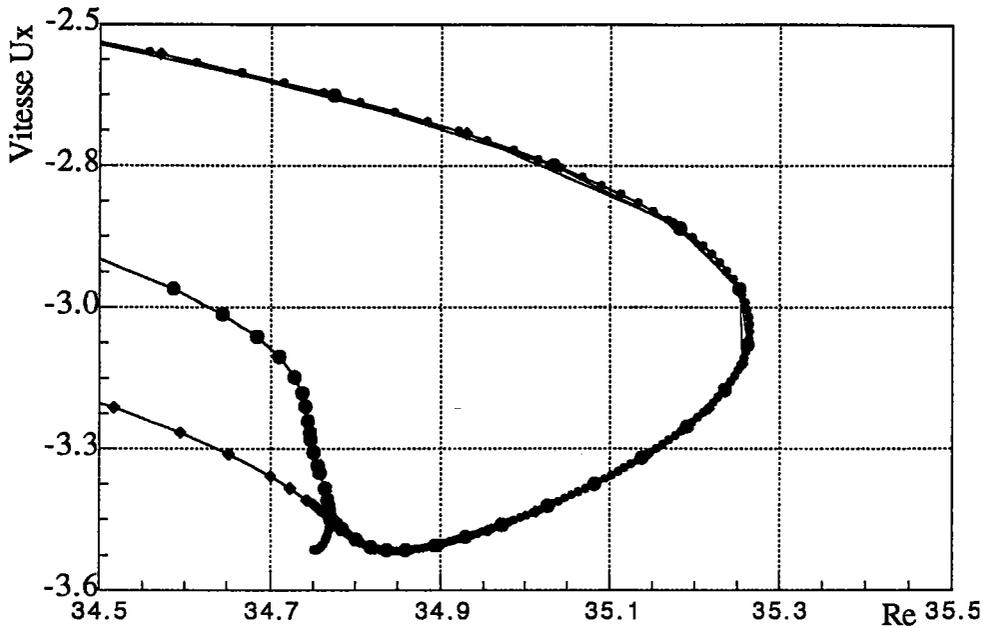
Les deux courbes calculées avec des valeurs respectives de  $\varepsilon = 10^{-5}$  et de  $\varepsilon = 10^{-7}$  montent vers le haut. Ces deux branches se séparent après le passage par la zone de forte accumulation de pas. Le passage par cette zone, où on pressent l'existence d'un point de bifurcation, fait que la branche de solution change de trajectoire et suit la branche bifurquée ( $\varepsilon = 10^{-7}$ ) au lieu de suivre la branche fondamentale ( $\varepsilon = 10^{-5}$ ).

Pour  $\varepsilon = 10^{-12}$ , on remarque que la branche de solution suit une branche descendante après le passage par la zone d'accumulation de pas. Ceci s'explique par le fait que la branche de solution suit l'autre partie de la branche bifurquée. On conclut alors que suivant les valeurs de  $\varepsilon$ , la méthode asymptotique de continuation suit la branche fondamentale comme elle peut suivre une partie de la branche bifurquée.



**figure 2.12** : Représentation de la vitesse en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement décrit sur l'exemple 2 avec l'utilisation de la méthode de continuation. Les 3 courbes de gauche représentent les branches de solutions pour des  $\epsilon$  respectivement égales à  $10^{-5}$ ,  $10^{-7}$  et  $10^{-12}$ . Les trois courbes de droite sont les zooms respectifs de ces courbes au voisinage de la zone d'accumulation de pas.

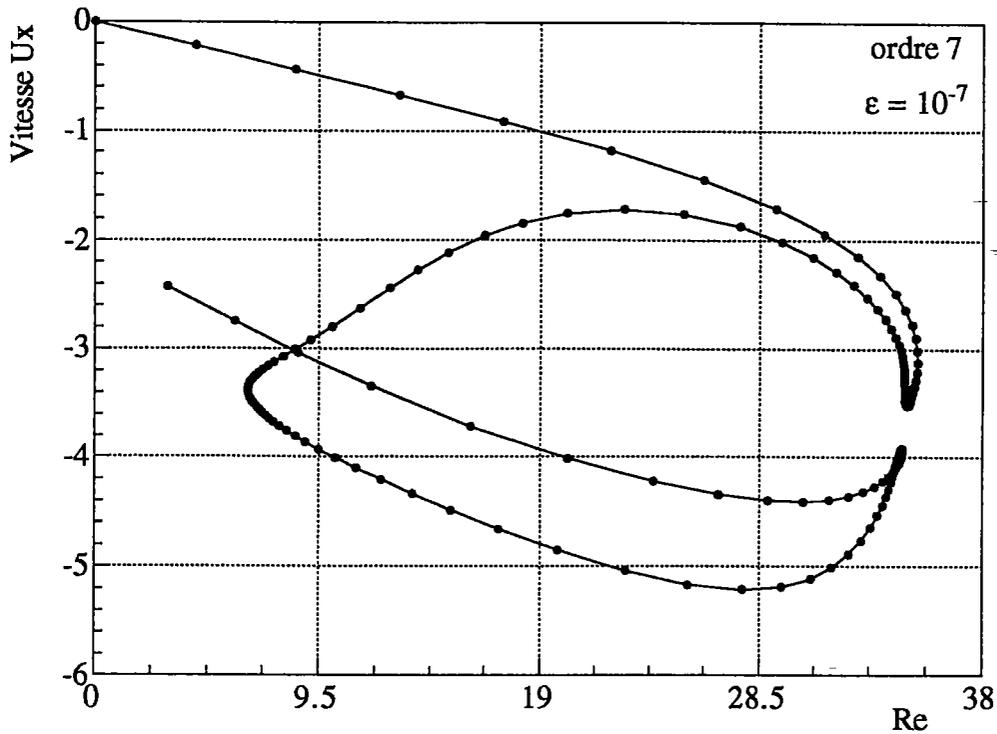
En superposant les courbes des trois zooms au voisinage de la zone d'accumulation de pas, figure (2.13), on voit nettement que le point de séparation des branches correspond à un point de bifurcation. On constate alors que la méthode de continuation présente aussi un outil très efficace pour déterminer les points de bifurcation simples d'une manière géométrique.



**figure 2.13** : Superposition des branches de solutions pour différentes valeurs de  $\epsilon$  au voisinage de la zone d'accumulation de pas.

Pour cet exemple, nous avons montré que cette zone d'accumulation de pas correspond à l'approche d'un point de bifurcation et au branchement sur la solution bifurquée. Des résultats similaires ont été déjà observés dans des cas de mécanique des structures.

Pour avoir d'autres informations sur toute la branche de solution, nous avons continué la méthode asymptotique au delà de cette première zone d'accumulation de pas. La branche de solution entière calculé pour un ordre 7 et  $\epsilon = 10^{-7}$  est représenté sur la figure (2.14).



**figure 2.14 :** Méthode de continuation au delà de la première zone d'accumulation de pas.

Sur cette figure, on constate l'existence de plusieurs zones d'accumulations de pas. On observe aussi la présence des branches de solution qui sont presque fermées et qui se rejoignent au voisinage de deux zones d'accumulations de pas. La formation des branches sous une forme d'anneau laisse penser qu'on a un retour sur la branche fondamentale. Des phénomènes semblables sont également observés dans certains cas de calcul de structure et ils correspondent à un retour sur la solution fondamentale.

Dans le premier exemple, notre calcul fait apparaître une zone de forte accumulation de pas au voisinage d'un Reynolds de l'ordre de 37 et un arrêt numérique de la méthode de continuation. Il est intéressant de voir si ce phénomène d'arrêt numérique est lié à la méthode numérique ou à une singularité intrinsèque aux problèmes physiques considérés. Des phénomènes d'accumulations semblables mais sans arrêt ont été trouvés dans l'exemple des deux cylindres et ils correspondent à des bifurcations stationnaires. Ceci semble indiquer que le problème d'arrêt numérique est également dû à l'existence des points de bifurcations multiples ou de plusieurs points de bifurcations rapprochés et que notre technique de continuation ne permet d'avancer à travers le grand nombre de

branches de solutions dues à ces bifurcations. Il est à noter aussi que la méthode de point fixe diverge au voisinage de cette zone.

Grâce à ce phénomène d'accumulation de pas, propre à notre algorithme, la méthode de continuation permet de localiser les difficultés sur une branche de solution. La détection des bifurcations est localisée au voisinage de ces zones annonciatrices des difficultés.

### **Conclusion**

Les tests numériques ont montré que la méthode asymptotique-numérique de continuation est une technique très efficace pour déterminer les branches stationnaires en mécanique de fluides. Cet algorithme qui se base sur une méthode de pas à pas s'est montré robuste et facile pour l'utilisateur. Le premier avantage de cette méthode réside dans le fait d'avoir une succession de branche analytique continue. La branche est déterminée entièrement et non pas en quelques points seulement. Cette présentation facilitera par la suite la recherche des points limites ou des points de bifurcation.

La longueur du pas,  $a_m$ , se calcule automatiquement et s'adapte systématiquement avec les problèmes physiques rencontrés. Cette longueur est grande si la branche est linéaire, petite si la non linéarité est forte.

Des phénomènes d'accumulation de pas propre à la technique de continuation sont souvent annonciateur d'une difficulté. Ces phénomènes peuvent s'accompagner ou non d'un arrêt numérique de la méthode de continuation.

Les zones d'accumulations sans arrêt numériques correspondent à l'approche d'un point de bifurcation et au branchement sur les branches bifurquées.

Le problème d'arrêt numérique de la méthode de continuation reste alors un problème ouvert pour le moment. On peut se demander si cet arrêt numérique correspond aussi à des bifurcations, mais qui seraient difficiles d'appréhender numériquement.

## 2.6 Conclusion de la première partie

Dans ce Chapitre, nous nous sommes intéressés à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires par les méthodes asymptotiques-numériques. Les points importants qui se dégagent sont les suivants.

Les équations de Navier-Stokes admettent une non linéarité quadratique, et il est donc facile de calculer un grand nombre de termes d'une série de perturbation régulière. Ce faisant on obtient une représentation analytique locale de la branche pour un coût de calcul faible, car il suffit d'une seule factorisation de la matrice globale.

L'amélioration des séries par des approximants de Padé est prometteuse car bien souvent, on améliore considérablement le domaine de convergence pour un coût de calcul insignifiant. Il se pose cependant le problème de choix des approximants et de la présence de pôles indésirables sur certains approximants.

Pour remédier au problème du choix des bons approximants, nous avons automatisé cette méthode en réorganisant les fonctions polynomiales en fractions rationnelles ayant un dénominateur commun. Cette méthode a donné des résultats satisfaisants avec un nombre d'opérations plus petit que la méthode classique des approximants de Padé.

En enchaînant plusieurs pas de calcul, on arrive à décrire complètement une branche non-linéaire avec quelques factorisations de matrices seulement. Le paramètre de chemin défini par l'équation (1.22), permet de franchir tous les points limites, et seules les bifurcations peuvent poser des problèmes, comme cela a été montré sur les tests numériques.

Lorsque l'on se trouve proche d'une bifurcation, les séries ont un rayon de convergence qui est imposé par la distance entre le point de départ et la bifurcation. Comme on définit les nouveaux points de départ à l'intérieur du domaine de validité, on constate une accumulation de pas à l'approche des bifurcations. Ce phénomène d'accumulation, propre à notre algorithme, est toujours annonciateur d'une difficulté sur la courbe : bifurcation ou quasi bifurcation.

En conclusion, nous confirmons sur ces exemples de mécanique des fluides, que les méthodes asymptotiques-numériques sont performantes pour effectuer le suivi de branches de solutions non-linéaires.

**Références:**

- [A-1]Azrar L., 1993, "Étude du comportement post-critique des coques cylindriques par une Méthode Asymptotique Numérique", Thèse de l'Université de Metz, Février 1993.
- [A-2]Azrar L., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1992, "An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches", *New Advances in Computational Structural Mechanics*, P. Ladevèze and O.C. Zienkiewicz Eds, *Studies in Applied Mechanics Vol. 32*, pp117-131, Elsevier, AMSTERDAM.
- [A-3]Azrar L., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1993, "An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behavior of elastic plates and shells", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp1251-1277.
- [B-1]Baker G.A., Graves Morris P., 1981, "Padé Approximants, Part I : Basic Theory", *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 13, Addison-Wesley Publishing Company, New York.
- [B-2]Batchelor G.K., 1967, "An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press, Cambridge.
- [B-3]Ben Saadi E.H., 1995, "Calcul des branches de solutions périodiques et des points de bifurcation de Hopf par une Méthode Asymptotique Numérique", Thèse de l'Université de Metz, Mars 1995.
- [B-4]Berbbia C., 1978, "The boundary element method of engineers", Pentech.
- [B-5]Boutyour E.H., 1994, "Calculs non-linéaires par des Méthodes Asymptotiques Numériques: Applications aux structures élastiques", Thèse de l'Université de Metz, Septembre 1994.
- [C-1]Cochelin B, Damil N., Potier-Ferry M., 1994 a, "Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants for non-linear elastic structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp 1187-1213.
- [C-2]Cochelin B, Damil N., Potier-Ferry M., 1994 b, "The Asymptotic Numerical Method, an efficient perturbation technique for nonlinear structural mechanics", *Revue Européenne des Elements Finis*, Vol. 3, N° 2, pp 281-297.
- [C-3]Cochelin B., 1994-a, "A path following technique via an Asymptotic Numerical Method", *Computers and Structures*, Vol. 53, N° 5, pp 1181-1192.
- [C-4]Cochelin B., 1994-b, "Méthodes Asymptotiques Numériques pour le calcul non linéaire géométrique des structures élastiques", *Habilitation à diriger des recherches*, Université de Metz, Mars 1994.
- [D-1]Damil N., 1990, "De la théorie de bifurcation au calcul des structures", Thèse d'état, Université Hassan II, Casablanca, Juin 1990.

- [D-2]Damil N., Potier-Ferry M., 1990, "A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures", *International Journal of Engineering Sciences*, Vol 28, N° 3, pp704-719.
- [D-3]Damil N., Potier-Ferry M., Braikat B.,1994, "Une technique de perturbation pour le calcul des structures avec fortes non linéarités", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t 318, série II, pp 713- 719.
- [G-1]Glowinski R., 1984, "Numerical method for non linear variational problems", Springer Seires in comp. physics.
- [H-1]Hinsh F.J., 1991, "Perturbation methods", *Cambridge Texts in Applied Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [H-2]Hirsh C., 1988, "Numerical computation of internal and external flows", Vol. 1: 'fundamentals of numerical discretisation', Eds John Wiley and Sons, New York.
- [I-1]Iooss G., Joseph D.D., 1991, "Elementary stability and bifurcation theory", Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [K-1]Kawahara M., Yoshimura N., Nakagawa K., Ohasaka H., 1974, "Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid", *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 10, pp 436- 456.
- [K-2]King P., Norton W.R.et Iceman K.R., 1974, "A finite element model for two dimensional flow", *Finite element method in flow problem*, (Edition J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallager and C. Taylor°, UAH presss, Huntsville, pp 134-137.
- [N-1]Nayfeh A., 1973, "Perturbation methods", Eds John Wiley and Sons, New York.
- [N-2]Noor A.K., Peters J.M., 1981, "Tracing post-limit paths with reduced basic technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 28, pp 217-240.
- [O-1]Oden J.T. et somogyi D, 1969, "Finite element application in fluid dynamics", *Journal Eng. Mech. Div, Proc. ASCE*, 95, EM4, 821-826.
- [P-1]Pironneau O., 1988, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*", Edition Masson.
- [P-2]Potier-Ferry M., 1987, "Foundations of elastic post-buckling theory", in *Buckling and Post-Buckling, Lecture Notes in Physics*,Vol. 288, pp 1-82 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [R-1]Raffai R., Laure P., 1993, "The influence of an axial mean on the Couette Taylor problem", *Europeen Journal of Mechanics, B/fluids* 12 n°3, pp 277-288.
- [R-2]Raviart P., 1981, "les méthodes des éléments finis en mécanique de fluides", Edition Eyrolles.
- [S-1]Segal A., Curvelier C., Van Steenhoven A.A., 1986, "Finite element methods of Navier-Stokes equations", Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherland.

- [S-2]Seydel R., 1988, "For equilibrium to chaos. Practical bifurcations theory and stability analysis", Elsevier, New York.
- [T-1]Temam R., 1977, "Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis", 2<sup>o</sup> Edition, North Holland, Amsterdam.
- [T-2]Thomasset F., Caussignac P., 1984, "Équations de Navier-Stokes bidimensionnelles", Bibliothèque MODULEF, VOL. 36, Version 84.
- [T-3]Tong P., 1971, "The finite element method in fluid flow analysis", In recent advances matrix methods of structural analysis and design, (Edition R.H. Gallager, Y. Yamada, and J.T. Oden), UAH press, Huntsville, pp 787-808.
- [V-1]Van Dyke M., 1970, "Analysis and improvement of perturbation series", Journal of Applied Mathematics, Vol. 27, n<sup>o</sup> 4, pp 423-450.
- [V-2]Van Dyke M., 1984, "Computer-extended series" Ann. Review of Fluid Mechanics, Vol. 16, pp 287-309.
- [W-1]Wagner W., Wriggers P., 1991, "Calculation of bifurcation points via fold curves", Non linear Computational Mechanics, Wagner W., Wriggers P., Eds, pp 64-84, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [Z-1]Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., 1991, "The finite element method", Fourth edition, Mac Graw Hill, London.

## **Orientation**

Dans cette partie, nous allons nous consacrer à la détermination numérique des points singuliers (points limites et points de bifurcation) par une méthode d'équilibre perturbé, en introduisant un indicateur de points singuliers bien adapté aux méthodes asymptotiques. Cet indicateur va être calculé par trois méthodes : la première permet de le calculer sous forme de série entière par rapport à un paramètre 'a', la seconde permet de transformer cette série en fraction rationnelle (approximants de Padé) et la troisième démarche consiste à le déterminer en chaque point de la branche fondamentale par un calcul direct.

Le premier chapitre de cette partie consiste à faire un rappel bibliographique sur les points singuliers et sur les principales méthodes numériques utilisées pour les déterminer.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, on applique une méthode basée sur l'introduction d'un nouvel indicateur de points singuliers pour déterminer les points limites et les points de bifurcation sur une branche non linéaire gouvernée par les équations de Navier-Stokes.

### 3.1 Rappels théoriques

Dans les chapitres (1) et (2), nous avons déterminé les courbes de solutions du système d'équations suivant :

$$f(u, \lambda) = 0 \quad (3.1)$$

Ce système de  $n$  équations à  $n$  inconnues  $u_i$  peut admettre aucune ou une ou plusieurs solutions dépendant d'un paramètre scalaire  $\lambda$ . Pour décrire ces courbes de solutions, on a adopté la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{aligned} u &= u(a) \\ \lambda &= \lambda(a) \end{aligned}$$

où " $a$ " est un paramètre donné.

Comme chaque courbe donne lieu à une direction tangente  $(u', \lambda')$ , " $'$ " représente la dérivée par rapport au paramètre ' $a$ '. On peut alors remplacer la recherche des courbes de solution par la recherche des directions tangentielles. Pour cela on peut se placer en un point de la solution triviale et dériver l'équation (3.1) par rapport au paramètre de contrôle ' $a$ '. Au point de solution considéré, on obtient alors :

$$\frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \lambda' = 0 \quad (3.2)$$

où  $\frac{\partial f}{\partial u}$  désigne l'opérateur tangent  $L_t$ . Le système (3.2) représente un système d'équations reliant les  $n + 1$  inconnues  $u'$  et  $\lambda'$  et permet de déterminer toutes les directions tangentes éventuelles. Dans le système (3.2), il reste encore une indétermination qui sera levée en introduisant une condition supplémentaire choisie comme une condition de normalisation :

$$\langle u', u' \rangle + \lambda' \lambda' = 1 \quad (3.3)$$

Si en un point  $(u(a), \lambda(a))$  solution de (3.1), l'opérateur  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est inversible, alors le théorème des fonctions implicites assure l'unicité de cette solution. Ce point est appelé donc *point régulier*.

Par contre, si en ce point l'opérateur  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est non inversible, alors ce point est appelé *point singulier* et peut correspondre soit à *un point limite* soit à *un point de bifurcation*.

### 3.1.1 Point limite et point de bifurcation.

#### Point limite

Un point limite est un point qui réalise un minimum local ou un maximum local du paramètre de charge  $\lambda$  sur une courbe de solution. Ici, on illustre ce point par l'exemple suivant :

$$f(u, \lambda) = u^2 - \lambda = 0 \tag{3.4}$$

La solution  $(u(\lambda), \lambda)$  de (3.4) est une parabole définie seulement pour  $\lambda \geq 0$ . Si  $\lambda = 0$ , il existe une seule solution  $u = 0$ , alors que si  $\lambda > 0$ , il y a deux solutions  $u = +\sqrt{\lambda}$  et  $u = -\sqrt{\lambda}$ . Le point  $(u = 0, \lambda = 0)$  est un point limite. Cette situation est représentée sur la figure (3.1).

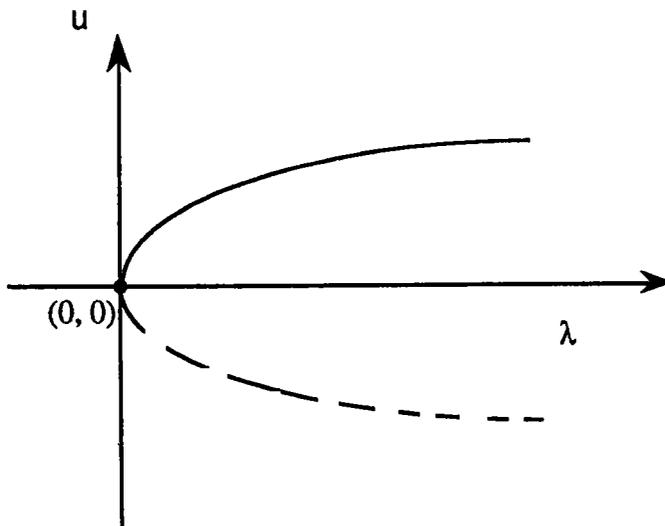


figure 3.1 : Point limite

Dans le cas où  $\lambda$  dépend explicitement du paramètre 'a', le point limite est caractérisé par :

$$\frac{d\lambda}{da} = 0 \tag{3.5}$$

**Point de bifurcation**

Par définition, un point singulier est dit point de bifurcation s'il est l'intersection d'au moins deux courbes de solutions. Pour illustrer ce point, nous traçons les courbes issues du système d'équations suivant :

$$f(u, \lambda) = u \lambda - u^3 = 0 \tag{3.6}$$

Ce système admet deux branches de solution  $(u, \lambda) = (0, \lambda)$  et  $(u, \lambda) = (\pm \sqrt{\lambda}, \lambda \geq 0)$ . La première branche de solution  $(0, \lambda)$  est stable pour  $\lambda \leq 0$  et instable pour  $\lambda \geq 0$ . La solution  $(\pm \sqrt{\lambda}, \lambda \geq 0)$  est stable pour tout  $\lambda \geq 0$ . Le point d'intersection  $(0, 0)$  de ces deux courbes de solutions est un point de bifurcation.

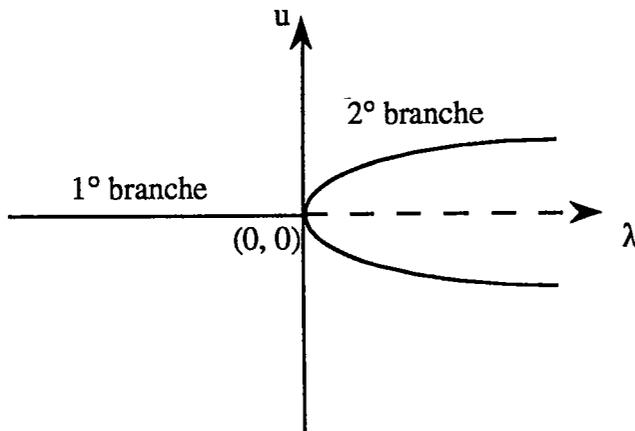


figure 3.2 : Point de bifurcation simple

**3.1.2 Caractérisation des points limites et des points de bifurcation**

En un point régulier l'opérateur  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est inversible, ceci veut dire que son rang (noté  $\text{rang}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$ ) est égale à  $n$  où  $n$  représente l'ordre de cet opérateur. Par contre, si cet opérateur est singulier alors son rang est inférieur à  $n$ . Pour simplifier l'analyse sur les points limites et les points de bifurcation, nous supposons qu'en ces points l'opérateur  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est singulier et est de rang  $n-1$ . Cela signifie que  $\frac{\partial f}{\partial u}$  admet un vecteur propre  $X$  associé à la valeur propre nulle ( $\zeta = 0$ ).

Au point critique  $(u_c, \lambda_c)$ , l'opérateur tangent  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est soumis à la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial u} X = \zeta X = 0 \quad (3.7)$$

Tenant compte de cette condition, la projection de (3.2) sur le mode  $X$ , nous permet d'écrire :

$$\lambda' \frac{\partial f}{\partial \lambda} X = 0 \quad (3.8)$$

Pour un  $\lambda'$  fixe, le système (3.2) est impossible si la formule (3.8) est différente de zéro et indéterminé si cette formule est égale à zéro. Il en résulte que si :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} X \neq 0 \quad (3.9)$$

alors la solution  $(X, 0)$  est l'unique solution de (3.9). Il s'agit d'une direction particulière verticale  $\lambda' = 0$  correspondante à un point limite. Par contre si

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} X = 0 \quad (3.10)$$

le système (3.10) admet une infinité de solutions au point singulier. On parle alors d'un point de bifurcation.

D'autres relations équivalentes à (3.9) et (3.10), se basant sur la détermination du rang de l'expression  $\left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)$  définie par :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) \begin{Bmatrix} V \\ \rho \end{Bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u} V + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \rho \quad (3.11)$$

où  $V$  est un vecteur et  $\rho$  un scalaire, permettent aussi d'identifier la nature des points singuliers. En effet,

$$\begin{cases} \text{Si } \text{rang} \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) = n & \implies \text{Le point singulier est un point limite} \\ \text{Si } \text{rang} \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right) = n - 1 & \implies \text{Le point singulier est un point de bifurcation} \end{cases}$$

### ***Théorème du point limite***

Le couple  $(u_c, \lambda_c)$  est un point limite si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1)  $f(u_c, \lambda_c) = 0$
- 2)  $\frac{\partial f}{\partial u}$  a une seule valeur propre nulle.
- 3) la condition (3.9) est satisfaite.

### ***Théorème du point de bifurcation simple***

Le couple  $(u_c, \lambda_c)$  est un point de bifurcation si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1)  $f(u_c, \lambda_c) = 0$
- 2)  $\frac{\partial f}{\partial u}$  a une seule valeur propre nulle
- 3) la condition (3.10) est satisfaite

### ***Exemple***

Sur cet exemple, on essaye d'illustrer les propriétés mathématiques des points limites et des points de bifurcation discutés précédemment. Nous considérons alors un système de deux équations scalaires dépendant d'un paramètre  $\lambda$  :

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2, \lambda) = 1 + \lambda(u_1^2 + u_2^2 - 1) = 0 \\ f_2(u_1, u_2, \lambda) = 10u_2 - \lambda u_2(2u_1^2 + u_2^2 + 1) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

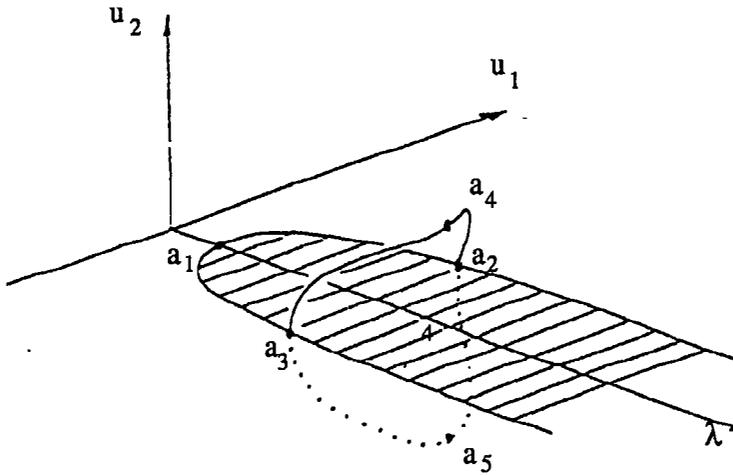
Ce système admet une solution triviale donnée par :

$$(u_1, u_2) = \left( \pm \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}, 0 \right) \quad (3.13)$$

définie pour  $\lambda \geq 1$ . Il admet également une solution secondaire :

$$(u_1, u_2) = \left( \pm \left( \frac{-2\lambda + 11}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}, \pm \left( \frac{3\lambda - 12}{\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.14)$$

définie pour une valeur de  $\lambda$  comprise entre 4 et 5.5. Ces branches de solutions sont tracées dans l'espace  $(u_1, u_2, \lambda)$ , figure (3.4).



**figure 3.4 :** Représentation graphique de l'exemple (3.12) avec indication des points limites et des points de bifurcation.

On remarque que sur la branche triviale, il existe un point limite en charge  $(0, 0, 1)$  et deux point de bifurcations  $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, 4)$  et que sur la branche de solutions secondaires, il y a deux points limites  $(0, \pm 3(11)^{\frac{1}{2}}, 5.5)$  On note également que ces deux branches de solution sont symétriques par rapport aux plans  $u_1 = 0$  et  $u_2 = 0$ . Pour connaître la nature de ces points, on cherche si une des conditions (3.9) ou (3.10) est satisfaite.

\*) Au point  $(0, 3(11)^{\frac{1}{2}}, 5.5)$  on a :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt{11} \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} -2/11 \\ 60/\sqrt[3]{11} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

en ce point on trouve aussi que :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} X = -\frac{2}{11} \neq 0$$

La condition (3.9) est satisfaite, ceci montre bien que le point  $(0, 3(11)^{\frac{1}{2}}, 5.5)$  est un point limite.

\*) Au point  $(\sqrt{3/4}, 0, 4)$  on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en ce point on trouve aussi que :

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} X = 0$$

La condition (3.10) est satisfaite, ceci montre bien que le point  $(0, 3(11)^{\frac{1}{2}}, 5.5)$  est un point limite. On note aussi que les opérateurs tangents sont non inversibles aux points singuliers.

### 3.1.4 Stabilité

Selon Lyapounov, une position d'équilibre  $u_0$  est stable si pour tout écart de position initiale et pour toute vitesse initiale suffisamment petite le système reste au voisinage de la position d'équilibre.

En pratique, la situation courante est la suivante : Lorsque le paramètre de bifurcation  $\lambda$  croît, on dispose d'une branche de solution stable si  $\lambda < \lambda_c$  et instable si  $\lambda > \lambda_c$  et vis versa. Le point de bifurcation est donné pour  $\lambda = \lambda_c$ .

En effet et d'après le critère de la seconde variation de l'énergie, il suffit de suivre la valeur propre minimale de l'opérateur  $\frac{\partial f}{\partial u}$ .

Sur la figure (3.5), nous présentons des courbes décrivant le principe d'échange de stabilité.

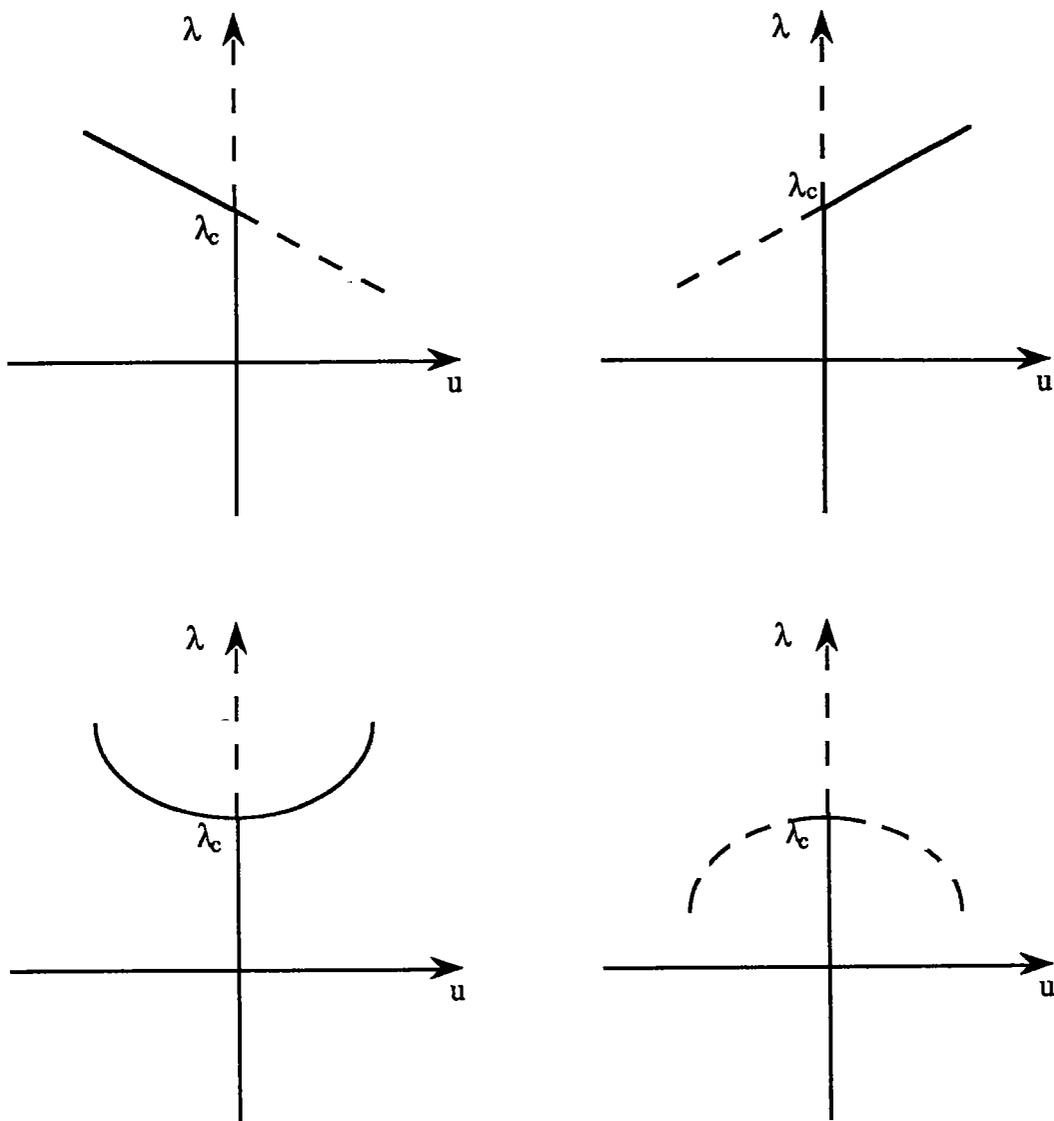


figure 3.5 : Stabilité des branches de solutions.

\_\_\_\_\_ STABLE  
 - - - - - INSTABLE

### 3.2 Rappels sur les méthodes numériques pour la détermination des points singuliers et de la stabilité.

Nous supposons que l'on sait calculer numériquement une branche de solution stationnaire. Il s'agit maintenant d'établir numériquement sa stabilité, de localiser précisément les points singuliers et de déterminer leur nature (point limite ou point de bifurcation). A cause du principe d'échange de la stabilité, la détermination de la stabilité sur une branche de solutions permet de localiser les points singuliers.

### 3.2.1 Calculs des valeurs propres

La méthode des valeurs propres est une des techniques les plus courantes pour la localisation de la stabilité et la détection des points singuliers. Cette technique se base sur la recherche des valeurs propres  $\zeta(\lambda)$  de la matrice jacobienne évaluée en toutes solutions  $(u, \lambda)$ . Les  $n$  valeurs propres complexes de cette matrice, notées par :

$$\zeta_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda) + i \beta_j(\lambda) \quad j = 1..n \quad (3.15)$$

varient en fonction du paramètre de contrôle  $\lambda$ .

Par définition, la perte de stabilité est atteinte une fois que la partie réelle  $\alpha_j(\lambda)$  d'une ou de plusieurs valeurs propres changent de signe.

On rappelle que la matrice jacobienne et ces valeurs propres peuvent être calculées numériquement ou analytiquement. Cette dernière proposition produit des résultats exacts mais souvent limités à des exemples simples et pour des systèmes à petit nombre de degrés de liberté. Dans le cas où le calcul se fait numériquement, Il est possible de suivre l'évolution de la plus petite valeur propre en fonction d'un paramètre, mais on ne peut jamais être sûr qu'elle reste toujours la plus petite. Cette situation est difficile à surveiller surtout si on a un nombre très grand de valeurs propres.

### 3.2.2 Notion d'indicateur.

#### *Définition de l'indicateur de points singuliers*

Un indicateur de points singuliers est une fonction à valeurs scalaires, noté  $\Delta\chi(u, \lambda)$ , définie le long d'une branche de solution tel que :

$$\Delta\chi(u_c, \lambda_c) = 0 \quad (3.16)$$

si  $(u_c, \lambda_c)$  est un point singulier.

#### *Définition de la perte de stabilité*

On suppose que  $(u_c, \lambda_c)$  est un point singulier et que  $\lambda_c \in [\lambda_1, \lambda_2]$  avec  $(u_1, \lambda_1)$  et  $(u_2, \lambda_2)$  sont solutions du problème non linéaire (3.1). La perte de stabilité est alors caractérisée par le critère suivant :

$$\Delta\chi(u_1, \lambda_1) \Delta\chi(u_2, \lambda_2) < 0 \quad (3.17)$$

### Choix de l'indicateur

1) Généralement l'indicateur des points singuliers est choisi comme étant le maximum de toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$\Delta\chi = \max_j \alpha_j \quad (3.18)$$

Selon le signe de cet indicateur, on peut déduire la stabilité ou l'instabilité du système mécanique. L'autre avantage de cet indicateur réside dans le fait qu'il peut être un outil efficace pour détecter les points de bifurcation stationnaires ainsi que les points de bifurcation de Hopf qu'on définira ultérieurement.

2) Puisque la détermination des points singuliers est associée à la singularité de la matrice jacobienne, alors le déterminant de cette matrice est nul en ces points. Plusieurs auteurs proposent comme indicateur de point singulier le déterminant de cette matrice jacobienne, soit :

$$\Delta\chi = \det \frac{\partial f}{\partial u} \quad (3.19)$$

Cet indicateur est disponible le long de toute la branche car la détermination des solutions utilise la matrice jacobienne.

3) Si la matrice jacobienne  $\frac{\partial f}{\partial u}$  est symétrique alors elle est décomposable sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = {}^tP \ A \ P \quad (3.20)$$

où A est une matrice diagonale et P est triangulaire alors on peut prendre aussi comme indicateur de stabilité le maximum des  $A_j$  soit :

$$\Delta\chi = \max_j A_j \quad (3.21)$$

**Remarques complémentaires dans le cas d'une méthode de prédiction-corréction**

Ici, on rappelle la démarche souvent utilisée pour détecter la stabilité et les points singuliers tout en utilisant une méthode itérative. Pour faciliter l'analyse, on suppose que le problème non linéaire (3.1) est résolu par une méthode de prédiction-corréction et que les solutions de ce problème sont représentées par les points suivants :

$$(u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2), \dots, (u_n, \lambda_n).$$

Le principe de cette méthode (dite méthode indirecte) consiste à introduire un indicateur de point singulier évalué en chaque point  $(u_i, \lambda_i)$  de la branche [A-1][S-2]. Le point critique est atteint si cet indicateur s'annule et la perte de stabilité correspond à un changement de signe de cet indicateur. Ce principe est illustrée sur la figure suivante, figure (3.6).

Sur cette figure, on présente la branche de solution obtenue point par point (figure 3.6a) et en chaque point la valeur de l'indicateur est évaluée (figure 3.6b). La perte de stabilité est alors caractérisé par la formule (3.17) qui dans ce cas est définie par :

$$\Delta\chi(u_{i-1}, \lambda_{i-1}) \Delta\chi(u_i, \lambda_i) < 0 \tag{3.22}$$

Ainsi, on localise l'intervalle  $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$  qui contient la charge critique  $\lambda_c$ . Cette valeur critique ainsi que le mode de bifurcation  $u_c$  peuvent être déterminés par des interpolations linéaires successives [S-3] soient :

$$\begin{cases} \lambda_c = \lambda_{i-1} + (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \frac{\Delta\chi(u_{i-1}, \lambda_{i-1})}{\Delta\chi(u_{i-1}, \lambda_{i-1}) - \Delta\chi(u_i, \lambda_i)} \\ u_c = u_{i-1} + (u_i - u_{i-1}) \frac{\Delta\chi(u_{i-1}, \lambda_{i-1})}{\Delta\chi(u_{i-1}, \lambda_{i-1}) - \Delta\chi(u_i, \lambda_i)} \end{cases} \tag{3.23}$$

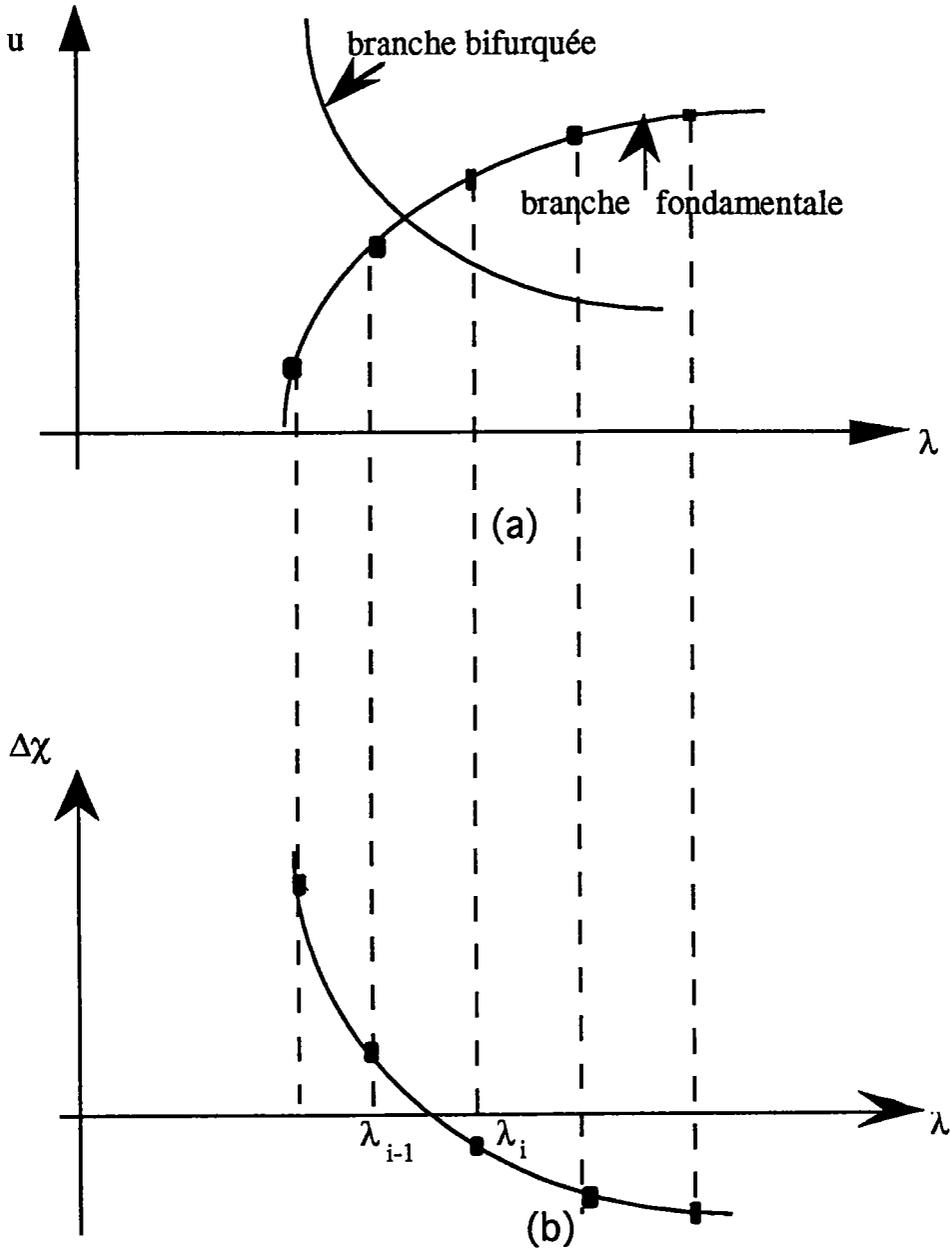


figure 3.6 : Principe de la méthode indirecte pour calculer les points singuliers.

**Exemple**

Nous reprenons l'exemple défini par les équations (3.12), en traçant la solution  $u_1$  en fonction de  $\lambda$  pour des valeurs de  $\lambda$  comprises dans l'intervalle  $[0, 5.5]$ , figure (3.7). Ensuite on trace le déterminant de la matrice jacobienne qui est aussi fonction du paramètre de contrôle  $\lambda$ .

On remarque, d'après la figure (3.7), que l'utilisation du déterminant est efficace pour détecter les points singuliers. Aux points critiques  $(0, 0, 1)$  et  $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, 4)$ , le déterminant s'annule. Notre avantage dans cet exemple est d'exploiter l'expression analytique du système (3.12). Nous concluons que pour les petits systèmes, cet indicateur est efficace surtout si on peut le calculer analytiquement.

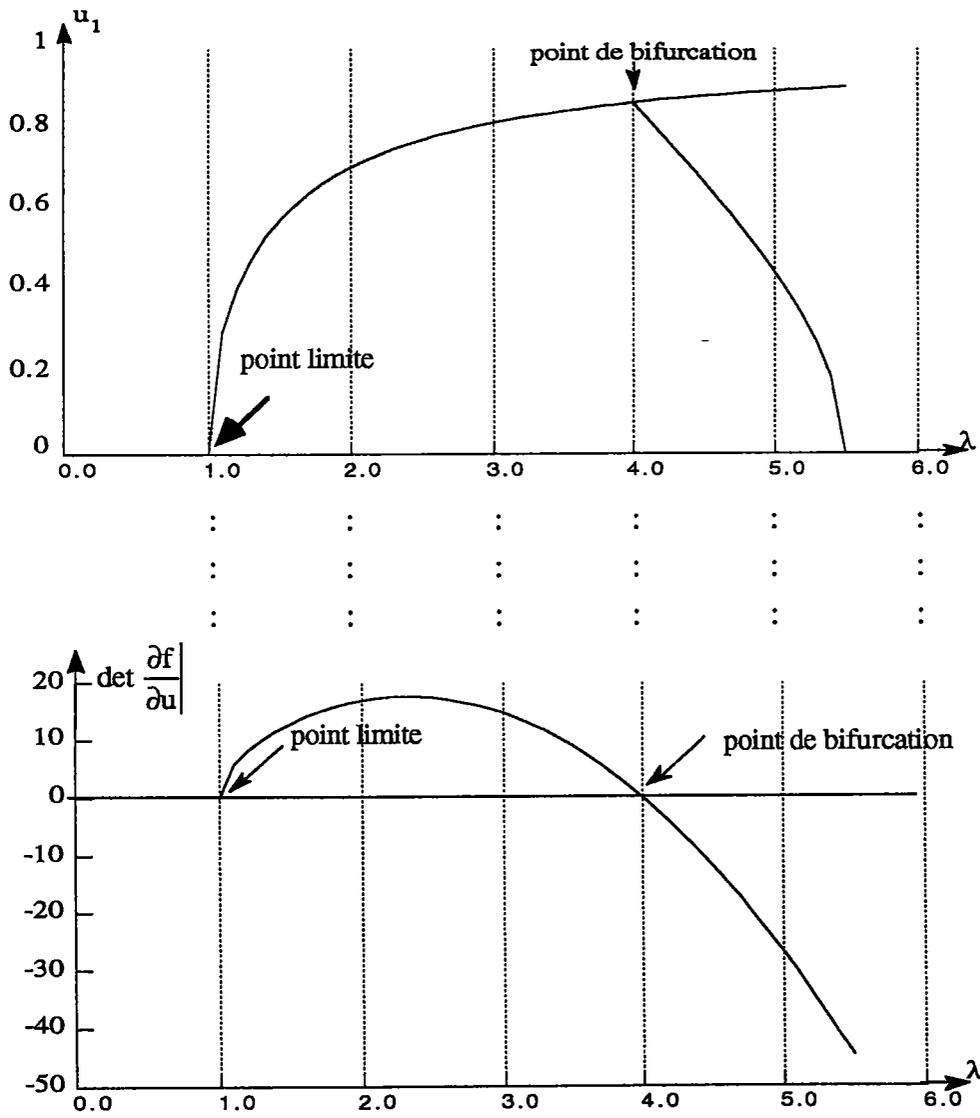


figure 3.7 : Application de la méthode indirecte pour l'exemple (3.12)

### 3.2.3 Recherche directe des points singuliers

La méthode directe consiste à résoudre un système d'équations contenant l'équation d'équilibre (3.1) et une équation supplémentaire dont les solutions correspondent aux points singuliers [K-1][W-2]. Cette équation supplémentaire est souvent prise comme étant l'indicateur de points singuliers. Le système d'équations résultant est défini par :

$$F(u, \lambda) = \begin{pmatrix} f(u, \lambda) \\ \Delta\chi(u, \lambda) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

Ce système admet  $n+1$  inconnues  $(u, \lambda)$  et  $n+1$  équations. Les points singuliers sont alors solutions de ce système. Parmi les auteurs qui ont travaillé sur cette méthode on trouve Abott [A-1] qui a choisi comme équation supplémentaire le déterminant de la matrice jacobienne. Mais sa méthode est restreinte pour des systèmes à petits nombres de degrés de liberté car le déterminant doit être calculé analytiquement ce qui est difficile à obtenir pour les systèmes à grands nombres de degrés de liberté.

Pour déterminer les points singuliers ainsi que les modes correspondants, plusieurs auteurs [W-1], [W-2] et [S-3] ont proposé de résoudre un système contenant l'équation d'équilibre, une équation caractérisant directement les points singuliers et une troisième équation permettra de calculer les modes associés à ces points. Le système global à résoudre est alors :

$$F(u, X, \lambda) = \begin{pmatrix} f(u, \lambda) \\ \frac{\partial f}{\partial u} X \\ \varphi(X) - A \end{pmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

où  $A$  est une constante et  $\varphi$  est une fonctionnelle dépendante du mode de bifurcation  $X$ . Ce système possède alors  $2n + 1$  inconnues  $(u, X, \lambda)$  et  $2n + 1$  équations. Les points singuliers et les modes associés à ces points sont solutions du système global (3.25). Cette méthode présente l'inconvénient de doubler le nombre d'inconnues ce qui demande un temps de calcul très grand surtout si le système possède un grand nombre de degrés de liberté.

**Remarque :**

On note que le choix de la troisième équation du système (3.25) doit être soigneusement fait pour éviter de ne trouver que des points limites.



## 4.1 Méthode proposée

On a vu dans le chapitre précédent que la détermination numérique des instabilités numériques s'effectue souvent grâce à des indicateurs classiques de points singuliers tels que le déterminant de la matrice de rigidité tangente ou le plus petit pivot de cette même matrice. Ces indicateurs sont difficilement adaptables aux méthodes asymptotiques. Ici, on introduit un indicateur de points singuliers bien adapté aux méthodes asymptotiques. Les points singuliers sont atteints lorsque l'indicateur passe par zéro. Une première présentation de cet indicateur se trouve dans la thèse de Boutyour (1994) [B-3] dédiée aux structures élastiques. Son adaptation pour les équations de Navier-Stokes est présentée dans ce chapitre.

### Principe

Pour détecter les points de bifurcation sur une branche de solution  $(u, \lambda)$ , on introduit une petite perturbation  $\Delta u$  du vecteur  $u$  soit :

$$v = u(\lambda) + \Delta u \quad (4.1)$$

En introduisant (4.1) dans l'équation d'équilibre (3.1), on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u_c = 0 \quad (4.2)$$

où  $\Delta u_c$  est le mode propre associé à la valeur propre nulle. Nous pensons alors résoudre ce problème grâce à des indicateurs de points singuliers. Or les indicateurs classiques de points singuliers discutés dans les paragraphes précédents ne se prêtent pas très bien à une représentation sous formes de séries entières et aux systèmes à grand nombre de degrés de liberté et en conséquence on va définir un indicateur de bifurcation bien adapté. En effet, on se donne un vecteur  $h$  et l'on définit le problème d'équilibre perturbé suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Delta u = \Delta \chi(\lambda) h \quad (4.3)$$

où le scalaire  $\Delta \chi(\lambda)$  est l'intensité de la perturbation et  $\Delta u$  représente la réponse à la perturbation. Dans la mesure où  $\Delta \chi$  n'est pas fixe, l'équation (4.3) représente un système

de  $n+1$  inconnues  $(\Delta u, \Delta \chi)$  pour  $n$  équations. Par conséquent, On se donne une condition supplémentaire pour que le problème (4.3) admette une solution unique à chaque point régulier de la branche de solution fondamentale. En effet, on impose que le vecteur  $\Delta u - \Delta u_0$  soit dans l'orthogonal à  $\Delta u_0$  :-

$$\langle \Delta u - \Delta u_0, \Delta u_0 \rangle = 0 \quad (4.4)$$

où  $\Delta u_0$  est la réponse à la perturbation  $h$  au voisinage du point de départ.

La fonction scalaire  $\Delta \chi(\lambda)$  représente alors notre indicateur de point singulier. En effet, chaque zéro de  $\Delta \chi(\lambda)$  correspond à un point singulier et le mode de point singulier est obtenu à l'aide du vecteur  $\Delta u$  correspondant.

### Exemple

Ici, on va appliquer notre méthode sur l'exemple (3.12) pour calculer la valeur critique de  $\lambda$  qui donne le point limite et le point de bifurcation. Ce système admet une position d'équilibre donné par la formule (3.14) pour toutes les valeurs de  $\lambda$  supérieures ou égales à 1. En appliquant la méthode proposée, les points singuliers sont solutions du problème aux valeurs propres (4.2), qui dans ce cas s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 2\lambda\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} & 0 \\ 0 & 12-3\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

On voit nettement qu'on a deux points critiques pour  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 4$ . Nous essayons ici de retrouver le même résultat à partir de la fonction  $\Delta \chi(\lambda)$ . On introduit alors une perturbation en force  $\Delta \chi(\lambda) h$ , où  $h$  est un vecteur force choisi. Ensuite on cherche les valeurs de  $\lambda$  qui annulent l'indicateur. Le système perturbé équivalent à la formule (4.3), peut se formuler de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} 2\lambda\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} & 0 \\ 0 & 12-3\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} = \Delta \chi(\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Ce système comporte deux équations pour trois inconnues  $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta \chi(\lambda)$ . On impose alors une condition supplémentaire pour que le problème (4.6) admette une solution unique. Pour cela, on a choisi la condition supplémentaire suivante :

$$\langle \Delta u - \Delta u_0, \Delta u_0 \rangle = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{où } \Delta u_0 = \begin{bmatrix} \Delta u_1^0 \\ \Delta u_2^0 \end{bmatrix} \text{ et } \Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

où  $\Delta u_0$  est défini ici pour  $\lambda = 2$  et  $\Delta \chi = 1$ , c'est à dire que le vecteur  $\Delta u_0$  vérifié l'équation :

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^0 \\ \Delta u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\text{Ceci permet d'écrire le vecteur } \Delta u_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

La projection de l'équation sur le vecteur  $\Delta u_0$ , nous permet d'écrire la fonction  $\Delta \chi(\lambda)$  comme suit :

$$\Delta \chi(\lambda) = -11 \frac{\lambda \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} (\lambda - 4)}{36\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \lambda + 4\lambda \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} \quad (4.9)$$

$\Delta \chi(\lambda)$  est une fraction rationnelle en  $\lambda$  qui s'annule pour  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 4$ , figure (4.1). Ces deux points représentent respectivement le point limite et le point de bifurcation.

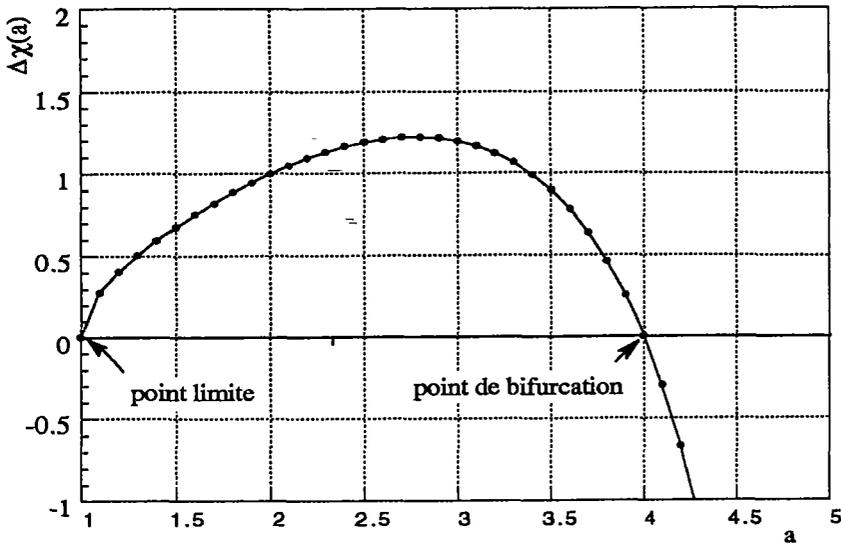


figure 4.1 : Application de la méthode proposée pour l'exemple (3.12).

## 4.2 Adaptation de la méthode proposée pour la détection des singularités du problème stationnaire des équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont décrites en forme d'opérateurs par la formule (2.9) dont les variables sont la vitesse  $U$ , la pression  $p$  et le paramètre de contrôle  $\lambda$ . Pour caractériser les points singuliers, notre méthode se base sur la perturbation de ce problème non linéaire. Pour cela, on considère les perturbations  $\Delta v$  et  $\Delta p$  respectivement de la vitesse du fluide et de la pression :

$$\mathbf{v} = U(\mathbf{a}) + \Delta v \qquad \mathbf{q} = p(\mathbf{a}) + \Delta p \qquad (4.10)$$

Le triplet  $(U(\mathbf{a}), p(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a}))$  est déjà calculé dans les chapitres précédents.

En injectant les équations (4.10) dans (2.9) et en négligeant les termes non linéaires, on obtient un problème de valeurs propres, équivalent au problème (4.3), qui dans notre formalisme s'écrit :

$$\begin{cases} L(\Delta v) + Q(U(\mathbf{a}), \Delta v) + Q(\Delta v, U(\mathbf{a})) + D^t(\Delta p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (4.11)$$

L'analyse linéaire du problème (4.11) consiste à trouver la valeur critique de ' $\mathbf{a}$ ' (on en déduira la valeur critique du nombre de Reynolds car il dépend de ' $\mathbf{a}$ ') pour laquelle la solution fondamentale  $(U(\mathbf{a}), p(\mathbf{a}), \lambda(\mathbf{a}))$  perd son unicité. Dans le cas stationnaire, cette perte d'unicité est caractérisée par un changement de signe d'une valeur propre réelle de l'opérateur tangent du problème aux valeurs propres associé à (4.11).

En effet, la recherche des points singuliers est liée à la recherche d'une valeur propre réelle nulle. Comme dans le paragraphe (4.1), on introduit dans le système (4.11) une "force de perturbation"  $h(x_i)$  donnée, dont l'intensité est mesurée par un scalaire inconnu  $\Delta\chi$ . Le triplet  $(\Delta v, \Delta p, \Delta\chi)$  est maintenant solution de l'équation perturbée suivante :

$$\begin{cases} L_t^a(\Delta v) + D^t(\Delta p) = \Delta\chi h & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (4.12)$$

avec  $L_t^a$  est l'opérateur tangent pris en un point de la branche fondamentale,  $L_t^a(.) = L(.) + Q(U(a), .) + Q(., U(a))$ . Cet opérateur dépend d'une manière non linéaire du paramètre 'a'. A ce niveau, il reste encore une indétermination dans le problème (4.12), on impose alors la condition supplémentaire suivante :

$$\langle \Delta v - \Delta v_0, \Delta v_0 \rangle = 0 \quad (4.13)$$

où  $\Delta v_0$  est la réponse à la perturbation  $h$  à l'origine.

On s'intéresse alors à l'évolution de la solution  $(\Delta v, \Delta p, \Delta \chi)$  lorsqu'on parcourt la branche fondamentale. La fonction scalaire  $\Delta \chi(a)$  est donc l'indicateur de bifurcation annoncé. La technique consiste à déterminer cet indicateur et à chercher les valeurs du paramètre 'a' qui l'annulent.

On note que l'annulation de cet indicateur caractérise un point singulier, mais pour savoir si ce point singulier est un point limite ou un point de bifurcation, la vérification des conditions (3.9) et (3.10) est nécessaire.

#### **4.2.1 Méthode directe pour calculer l'indicateur de points singuliers**

La discrétisation des problèmes (4.12) et (4.13) s'écrit :

$$\begin{cases} [K_t^a][\Delta v(a)] = \Delta \chi(a)[h] \\ [\Delta v(a)]^t[\Delta v_0] = [\Delta v_0]^t[\Delta v_0] \end{cases} \quad (4.14)$$

où  $[K_t^a]$  est la matrice discrétisée de l'opérateur  $L_t^a$ . Pour calculer directement cet indicateur, il suffit d'évaluer la matrice de rigidité tangente  $[K_t^a]$  en chaque point de la branche fondamentale. La résolution de ce problème permet d'obtenir l'indicateur sous la forme suivante :

$$\Delta \chi(a) = \frac{[\Delta v_0]^t[\Delta v_0]}{[K_t^a]^{-1} [h]^t[\Delta v_0]} \quad (4.15)$$

En utilisant cette formule, la fonction  $\Delta \chi(a)$  peut être tracée pour tout paramètre 'a'. Le calcul direct de l'indicateur est très coûteux en temps car il faut assembler la matrice  $[K_t^a]$  et résoudre un système linéaire pour chaque valeur de 'a', il représente néanmoins un moyen efficace pour valider nos résultats.

### 4.2.2 Détermination de l'indicateur par une méthode asymptotique numérique

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé la branche de solutions fondamentale  $(U(a), p(a), \lambda(a))$  sous forme de séries entières par rapport au paramètre 'a' au voisinage d'une solution connue  $(U_0, p_0, \lambda_0)$ . En restant dans la même logique, nous développons les perturbations  $\Delta v$ ,  $\Delta p$  et  $\Delta \chi$  en séries entières en fonction du même paramètre 'a' :

$$\begin{cases} \Delta v = \Delta v_0 + a \Delta v_1 + a^2 \Delta v_2 + a^3 \Delta v_3 + a^4 \Delta v_4 + \dots \\ \Delta p = \Delta p_0 + a \Delta p_1 + a^2 \Delta p_2 + a^3 \Delta p_3 + a^4 \Delta p_4 + \dots \\ \Delta \chi = 1 + a \Delta \chi_1 + a^2 \Delta \chi_2 + a^3 \Delta \chi_3 + a^4 \Delta \chi_4 + \dots \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $\Delta v_0$  et  $\Delta p_0$  représentent la réponse à la perturbation h au point  $(U_0, p_0, \lambda_0)$ .

En injectant les développements (2.12) et (4.16) dans les formules (4.12) et (4.13), et en identifiant suivant les puissances de 'a', on obtient la série de problèmes linéaires suivants :

ordre 0 :

Trouver  $(\Delta v_0, \Delta p_0, 1)$  vérifiant :

$$\begin{cases} L_t^0(\Delta v_0) + D^t(\Delta p_0) = h & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.17)$$

ordre p :

Trouver  $(\Delta v_p, \Delta p_p, \Delta \chi_p)$  vérifiant:

$$\begin{cases} L_t^0(\Delta v_p) + D^t(\Delta p_p) = \Delta \chi_p h - \sum_{r=1}^p Q(U_r, \Delta v_{p-r}) - Q(\Delta v_{p-r}, U_r) & \text{dans } \Omega \\ D(\Delta v_p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Delta v_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \langle \Delta v_p, \Delta v_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $L_t^0$  est l'opérateur tangent au point régulier  $(U_0, p_0, \lambda_0)$  donné par la formule (2.12).

On note que ces problèmes sont semblables aux problèmes (2.14). La principale différence réside dans le fait que le second membre dépend cette fois-ci des termes des séries de solutions fondamentales et des termes de perturbation calculés précédemment.

### Résolution

Pour la discrétisation des problèmes (4.18) à chaque ordre, nous adoptons une démarche d'éléments finis analogue à celle du paragraphe (2.2.3). Une première étape consiste à construire une base à divergence nulle à partir des vecteurs  $[\Delta v_i]$  :

$$[\Delta v_i] = [R_d] [\Delta v'_i] \quad i = 1, \dots, p \quad (4.19)$$

Ensuite et en appliquant les mêmes démarches que précédemment, la résolution du problème (4.18) à l'ordre  $p$  se fait comme suit :

$$\begin{cases} [\Delta v'_p]^{nl} = [K_t]^{-1} [\Delta F_p^{nl}] \\ \chi_p = - \frac{[\Delta v'_0]^t [R_d]^t [R_d] [\Delta v'_p]^{nl}}{[\Delta v'_0]^t [R_d]^t [R_d] [\Delta v'_0]^{nl}} \\ [\Delta v'_p] = \chi_p [\Delta v'_0] + [\Delta v'_p]^{nl} \end{cases} \quad (4.20)$$

Il suffit de décomposer une seule fois la matrice de rigidité tangente  $[K_t]$ , ce qui a été déjà fait pour calculer la branche fondamentale. La tâche la plus importante dans cette résolution reste alors la construction du second membre à chaque ordre qui dépend des termes de la série (2.12) et des termes  $\Delta v_i$  calculés précédemment. En résumé, la méthode asymptotique numérique, présentée ici, nous permet de déterminer une représentation analytique de l'indicateur, ce qui permettra d'avoir exactement le zéro de l'indicateur sans avoir besoin d'une interpolation comme cela est le cas dans les méthodes itératives. Ces représentations polynomiales ont bien sûr un rayon de convergence fini. Seuls les zéros de l'indicateur situés à l'intérieur du rayon de convergence sont retenus.

### 4.2.3 Application numérique

#### Problème de l'écoulement entre deux cylindres

La courbe de la figure (2.13) (test de l'écoulement entre deux cylindres) laisse apparaître un point limite et immédiatement suivi d'un point de bifurcation. Pour confirmer l'existence de ces points critiques, nous appliquons la démarche présentée ci-dessus. Nous avons calculé les séries (4.16) en chaque pas de la branche fondamentale et nous avons représenté l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. La fonction  $\Delta\chi(a)$  obtenue pour le premier pas de la branche fondamentale à partir d'une vitesse nulle est représentée sur la figure (4.2).

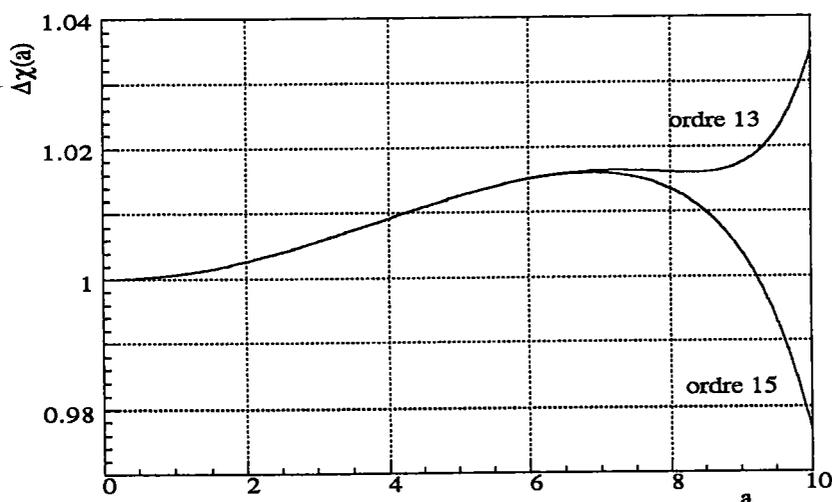


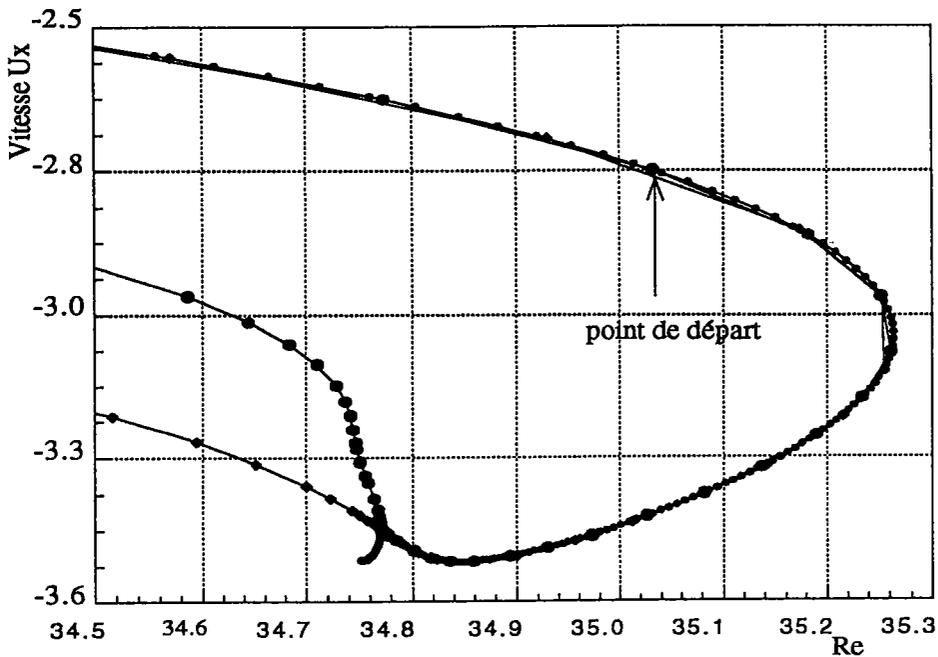
figure 4.2 : Représentation polynomiale de l'indicateur de bifurcation  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. L'indicateur ne s'annule pas car on est loin de la bifurcation. Le point de départ est  $Re = 0$ .

On voit nettement, figure (4.2), que l'indicateur ne s'annule pas à l'intérieur du rayon de convergence qui semble être autour de  $a = 7$  (équivalent à un Reynolds de l'ordre 19). Il n'y a donc ni bifurcation stationnaire, ni point limite (ce qui est évident) au cours de ce premier pas. On note que le rayon de convergence de l'indicateur représenté en série semble souvent très voisin de celui de la série initiale. Et comme on cherche les points singuliers à l'intérieur du rayon de convergence, on recommence la même procédure à partir d'un point défini au voisinage de la singularité. Le point de départ est pris cette fois-ci pour un  $Re = 35.04$ , figure (4.3a).

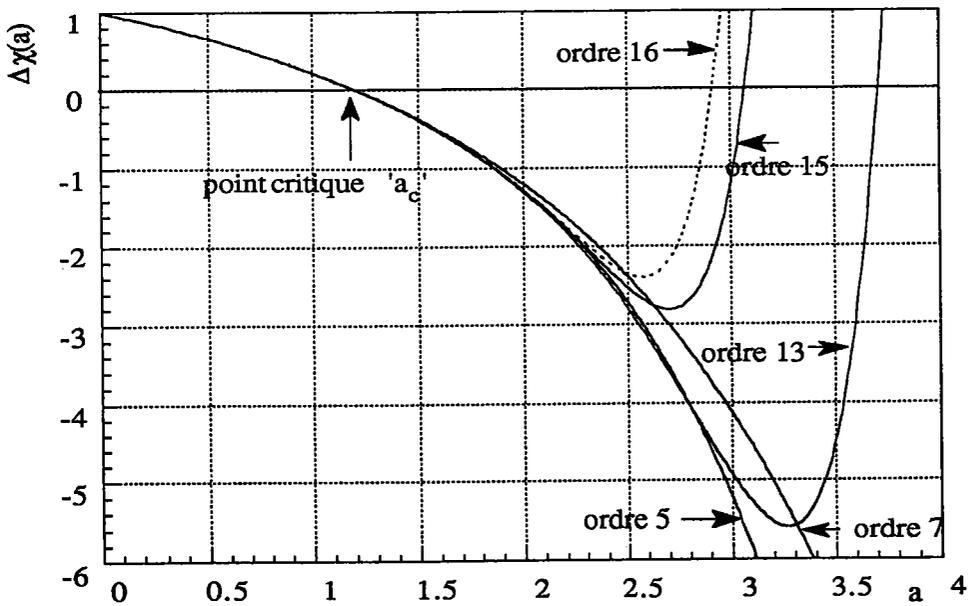
On voit aussi, figure (4.3b), que la représentation polynomiale de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  s'annule pour un  $a_c = 1.19$  à l'intérieur de son rayon de convergence. De plus la vitesse  $\Delta v(a_c)$  vérifie en ce point la condition (3.9). Ceci confirme que ce point est un point limite.

On note également qu'avec des troncatures à des petits ordres (ordres 5 et 7) le rayon de convergence des séries dépasse largement le point singulier et que plus l'ordre de troncature des séries augmente (ordres 13, 15 et 16) plus la représentation polynomiale diverge rapidement (le mot diverge ici indique la divergence après le rayon de convergence). Ceci semble indiquer que si on prend des ordres de troncatures très grands, la représentation polynomiale diverge juste au point singulier. On en déduit que l'on peut déterminer facilement les points singuliers qu'avec un petit nombre de termes des séries (4.16).

D'après la figure (4.4a), on voit nettement la présence d'un point de bifurcation juste après le point limite. Pour trouver ce point de bifurcation, on a calculé la représentation polynomiale de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  à partir d'un point juste après le point limite. Le rayon de convergence de cette représentation ne traverse pas l'axe des zéros car il est pénalisé par la présence de la singularité (proximité d'un point de bifurcation). En un point très proche de la forte accumulation de pas et pour un  $Re = 34.8$ , on a recalculé cet indicateur en tronquant les séries (4.16) aux ordres 5 et 7, figure (4.4b). Sur cette figure, l'indicateur s'annule à l'intérieur du rayon de convergence pour une valeur  $a_c = 0.00165$  correspondant au point de bifurcation stationnaire.

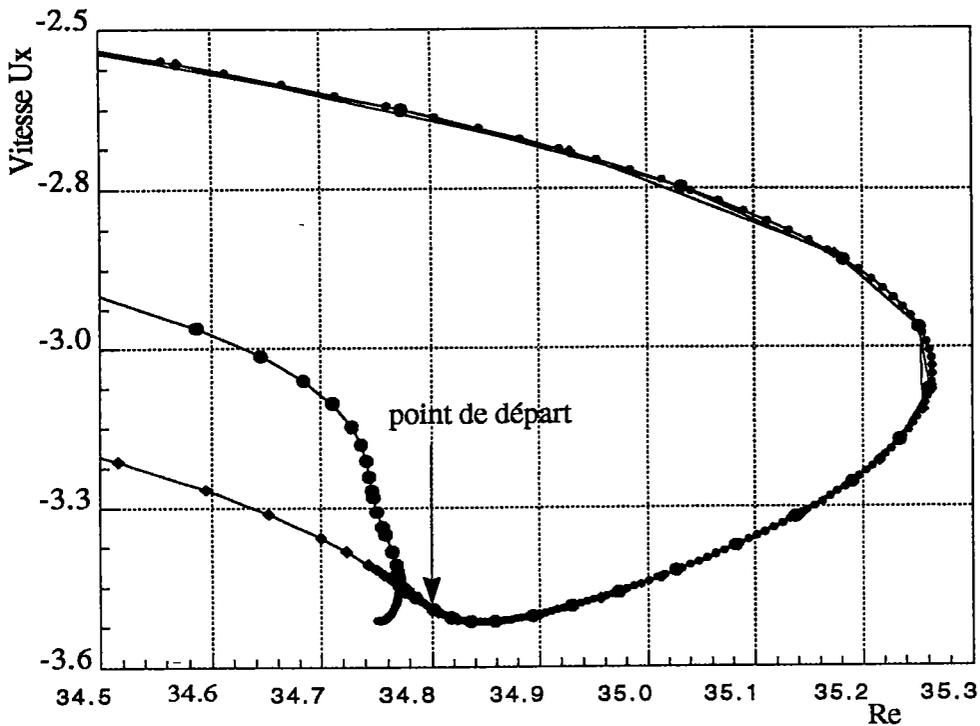


(a)

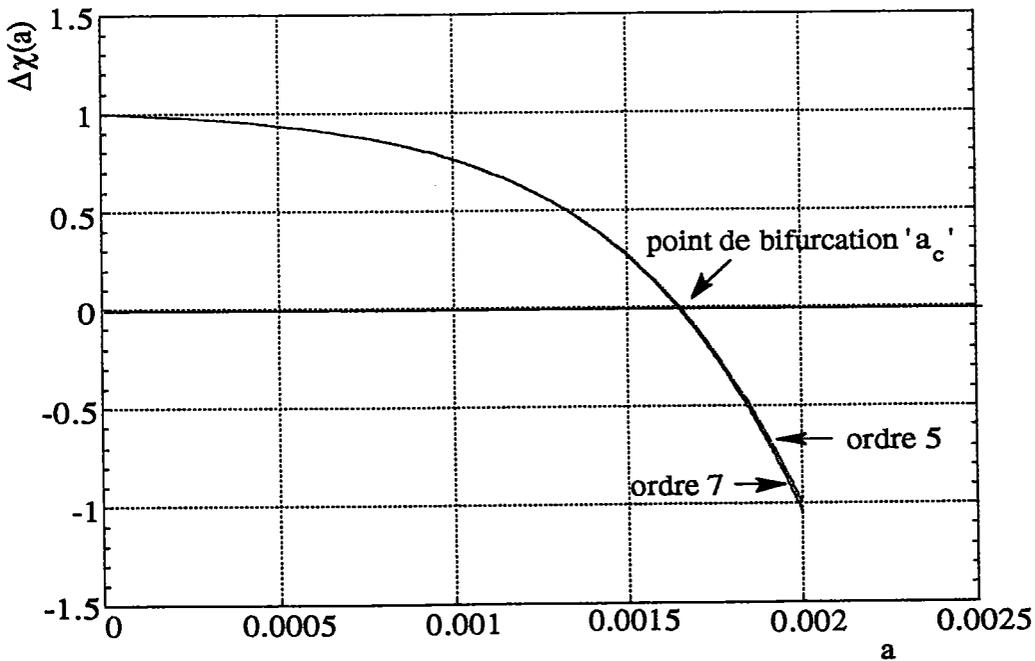


(b)

figure 4.3 : (a) Représentation polynomiale de la branche fondamentale pour l'exemple de l'écoulement entre deux cylindres. Le point de départ pour recalculer l'indicateur est pris à un  $Re = 35.04$ . (b) Représentation polynomiale de l'indicateur de bifurcation  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. L'indicateur s'annule pour une valeur de  $a_c = 1.19$ .



(a)

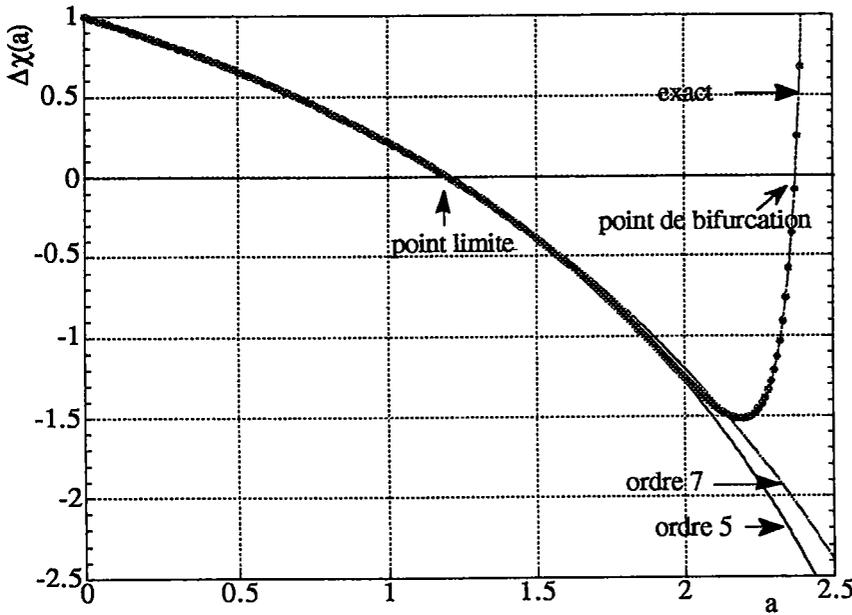


(b)

**figure 4.4:** (a) Représentation polynomiale de la branche fondamentale . Le point de départ pour recalculer est pris à un  $Re = 34.8$ . (b) Représentation polynomiale de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre ' $a$ '. L'indicateur s'annule pour une valeur  $a_c = 0.00165$  indiquant le point de bifurcation.

**Validation**

Pour le cas des deux cylindres, la représentation en séries polynomiales a montré l'existence d'un point limite et d'un point de bifurcation. L'indicateur de bifurcation s'est annulé une première fois au point limite et une deuxième fois au point de bifurcation. Pour confirmer ce résultat, nous avons tracé l'indicateur de points singuliers avec la méthode directe en utilisant la formule (4.15). Le résultat est décrit sur la figure (4.5).



**figure 4.5** : Représentation polynomiale et directe de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. L'indicateur s'annule pour  $a_c = 1.19$  et ce aussi bien par la méthode asymptotique que par la méthode directe. Le point de départ est le même que celui de la figure (4.3b). L'indicateur calculé par la méthode directe s'annule une deuxième fois au point  $a_c = 2.36$  indiquant le point de bifurcation.

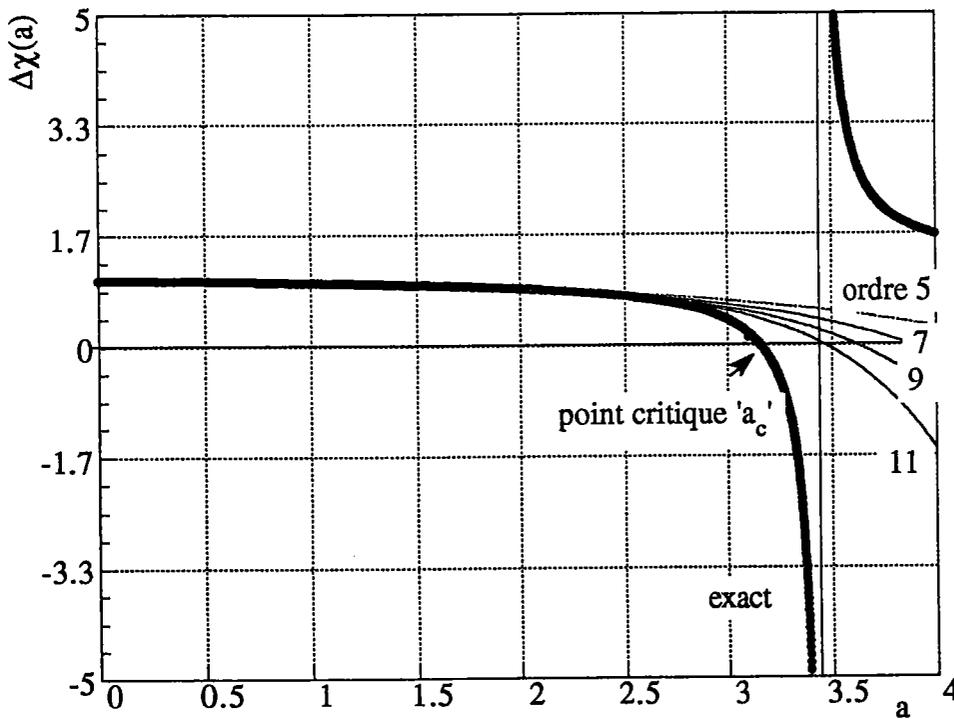
Le calcul de l'indicateur par la représentation (4.15) a donné exactement les mêmes valeurs critiques de 'a' qui annulent l'indicateur de points singuliers (point limite et point de bifurcation) que celles données par les représentations polynomiales.

**Problème de l'écoulement autour du cylindre**

Nous avons calculé également l'indicateur de points singuliers par la méthode directe et par la méthode asymptotique numérique pour l'exemple de l'écoulement autour du cylindre. Les résultats sont présentés sur la figure (4.16).

Sur cette figure, on remarque que le rayon de convergence des séries polynomiales ne traverse par l'axe des zéros, car il est limité par la présence d'un pôle au voisinage du point critique. Par contre, on constate que la représentation directe de l'indicateur donne ce point singulier même au voisinage de ce pôle.

Les représentations polynomiales sont insuffisantes pour détecter les points limites et les points de bifurcation. Une représentation en fraction rationnelle peut être alors un moyen plus fiable pour surmonter ce genre de problèmes.



**figure 4.6 :** Représentation polynomiale et directe de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. Le rayon de convergence est limité par la présence du pôle et par suite l'indicateur ne s'annule pas à l'intérieur de ce rayon. Par contre l'indicateur donné par la formule (4.15) s'annule pour  $a_c = 3.2$  correspondant au point critique. Le point de départ est donné pour un  $Re = 35.78$ .

## **Discussion**

Les tests numériques en fluide ont confirmé que l'association d'un indicateur de point singulier et d'une méthode asymptotique numérique est très efficace pour la détermination des points limites et des points de bifurcation stationnaires simples. Cet algorithme, qui se base sur l'introduction d'un problème perturbé, permet de déterminer une représentation analytique de l'indicateur. Cette représentation donne exactement le point singulier sans avoir recours à des interpolations comme c'est le cas pour les algorithmes itératifs.

On a aussi constaté que le rayon de convergence des séries est souvent assez voisin de la valeur critique cherchée. Ceci est dû au fait que l'indicateur présente souvent un pôle proche de la valeur critique [B-3]. Heureusement, l'approximation obtenue en tronquant les séries à des ordres plus bas ( 5 et 7) est souvent très bonne bien au delà de la valeur critique, pourvu que les points de départ soient assez proches des points singuliers. C'est pourquoi une bonne stratégie consiste souvent à choisir de tels points de départ et à se limiter à quelques termes de la série.

Dans l'exemple de l'écoulement entre deux cylindres, nous avons observé que notre méthode de continuation fait apparaître une accumulation de pas sans zone d'arrêt pour un Reynolds voisin de 35.2. De plus on observe une séparation des branches au voisinage de cette zone. Grâce au calcul de l'indicateur, on a bien montré que cette difficulté est due à la présence d'un point limite et d'un point de bifurcation dans cette zone.

Des phénomènes d'accumulations semblables, mais avec une zone d'arrêt numérique ont été trouvés dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre . On peut se demander si ces zones d'arrêt correspondent aussi à des bifurcations, mais qui seraient plus difficiles à appréhender numériquement. A cet effet, nous avons calculé l'indicateur de points singuliers le long des branches présentées aux figures (2.11) à partir d'un point voisin de la forte accumulation de pas. Cet indicateur s'annule plusieurs fois au voisinage de cette zone d'arrêt numérique, figure (4.7).

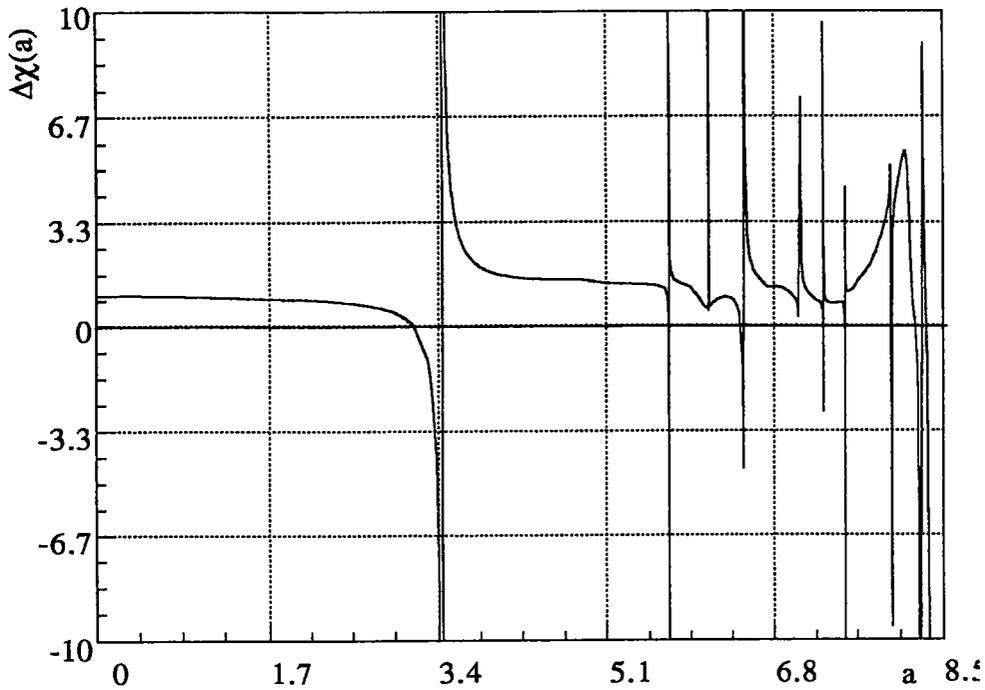


figure 4.7 : Représentation directe de l'indicateur  $\Delta\chi(a)$  en fonction du paramètre 'a'. L'indicateur de bifurcation s'annule plusieurs fois et pour des valeurs de 'a' très proches. Le point de départ est le même que celui de la figure (4.6). La branche fondamentale est obtenue par une méthode asymptotique numérique.

Ceci semble indiquer que le problème d'arrêt numérique est dû à l'existence de plusieurs points de bifurcation rapprochés et que notre technique de continuation ne permet pas encore d'avancer à travers le grand nombre de branches de solutions dues à ces bifurcations multiples ou quasi-multiples.

### 4.3 Amélioration des séries par des approximants de Padé

Dans ce paragraphe, on a introduit la technique des approximants de Padé de deux manière. La première consiste à transformer la représentation polynomiale de l'indicateur en une représentation fractionnelle et la seconde est la méthode des approximants de Padé par projection.

#### *Approximants de Padé sur la série entière de l'indicateur*

Les méthodes asymptotiques numériques nous permettent de calculer les termes des séries (4.16) jusqu'à un ordre  $L+M+1$ . Cette série est approchée par une fraction rationnelle

dont le dénominateur est un polynôme de degré L et le numérateur est un polynôme de degré M :

$$\begin{aligned} \Delta\chi(a) &= 1 + a \Delta\chi_1 + a^2 \Delta\chi_2 + \dots + a^{L+M} \Delta\chi_{L+M} \\ &= P[L / M] \end{aligned} \tag{4.21}$$

Pour le choix de L et de M, il est préférable que P[L/M] soit équivalent à 'a' pour les grands valeurs de 'a'.

***Approximants de Padé par projection***

Comme dans le paragraphe (2.4.1), nous commençons par construire une base orthogonale  $\Delta v_k^\perp$  en appliquant la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} \Delta v_0 &= \alpha_0^0 \Delta v_0^\perp \\ \Delta v_1 &= \alpha_0^1 \Delta v_0^\perp + \alpha_1^1 \Delta v_1^\perp \\ &: \\ &: \\ \Delta v_p &= \sum_{k=0}^p \alpha_k^p \Delta v_k^\perp \end{aligned} \tag{4.22}$$

où les vecteurs  $\Delta v_k^\perp$  satisfont l'équation d'orthogonalité suivante :

$$\langle \Delta v_k^\perp, \Delta v_p^\perp \rangle = \delta_{pk} \tag{4.23}$$

et les coefficients  $\alpha_k^p$  sont donnés par :

$$\alpha_k^p = \frac{\langle \Delta v_p, \Delta v_k^\perp \rangle}{\langle \Delta v_k^\perp, \Delta v_k^\perp \rangle} \quad \text{pour } 1 < k < p \tag{4.24}$$

$$\alpha_p^p = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p^0 = 0$$

Dans cette nouvelle base orthogonale, le vecteur  $\Delta v(a)$  est construit comme suit :

$$\Delta v(a) = \sum_{k=0}^p a^k f_k(a) \Delta v_k^\perp \quad (4.25)$$

où les fonctions  $f_k(a)$  s'écrivent :

$$f_k(a) = \sum_{i=k}^p a^{i-k} \alpha_i^k \quad (4.26)$$

Après cette étape, on remplace chaque polynôme en un approximant de Padé  $P_k [L_k / M_k]$ . De cette façon, on obtient le vecteur perturbation sous la forme suivante :

$$\Delta v(a) = \sum_{k=0}^p a^k P_k [L_k / M_k](a) \Delta v_k^\perp \quad (4.27)$$

Enfin, l'indicateur  $\Delta \chi(a)$  est obtenue par projection de l'équation (4.12) sur le vecteur  $\Delta v_0^\perp$  :

$$\begin{aligned} \Delta \chi(a) = \frac{1}{\langle h, \Delta v_0^\perp \rangle} & \left[ \sum_{k=0}^p a^k P_k [L_k / M_k] \left\{ \langle L(\Delta v_k^\perp, \Delta v_0^\perp) \rangle + \sum_{j=0}^p a^j \langle Q(v_j, \Delta v_k^\perp), \Delta v_0^\perp \rangle \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=0}^p a^j \langle Q(\Delta v_k^\perp, v_j), \Delta v_0^\perp \rangle \right\} + \sum_{j=0}^p a^j \langle D^t(\Delta p_j), \Delta v_0^\perp \rangle \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Finalement , le calcul de l'indicateur par cette méthode de projection ne demande qu'un bon choix des approximants  $P_k [L_k, M_k]$ .

### ***Application pour l'écoulement entre les deux cylindres***

Sur la figure (4.8), on présente d'une part les nouvelles représentations de l'indicateur  $\Delta \chi(a)$  obtenues en insérant des approximants de Padé et d'autre part, la valeur exacte  $\Delta \chi(a)$  donnée par la formule (4.15) pour le cas des deux cylindres.

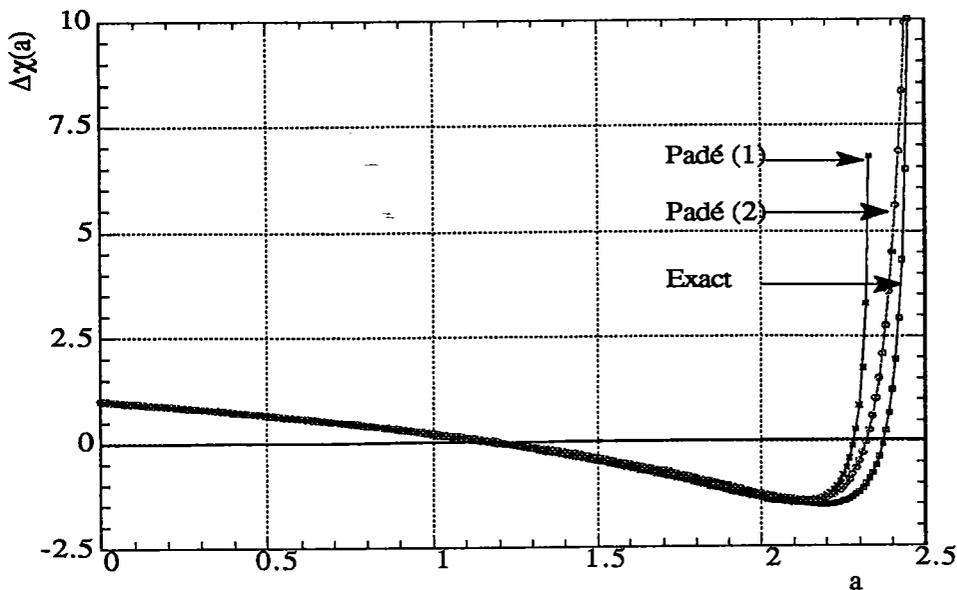


figure 4.8 : Représentation de la fonction  $\Delta\chi(a)$  par la formule (4.15) et par des approximants de Padé pour le cas des deux cylindres. Padé (1) : Approximants de Padé avec utilisation de la formule (4.21) : L' approximant de Padé utilisé P[8/7]. Padé (2) : Approximants de Padé avec utilisation de la formule (4.28) : Les approximants de Padé utilisés sont :  $P_1[8/8]$ ,  $P_2[8/7]$ ,  $P_3[8/6]$ ,  $P_4[8/5]$ .

Dans un premier temps les trois courbes coïncident parfaitement et s'annulent simultanément au même point correspondant au premier point singulier. Ce point est donné pour un 'a' de l'ordre de 1.19. Un léger écart existe entre ces courbes au voisinage du deuxième point singulier. Le choix des approximants de Padé a été fait avec une stratégie qui consiste à prendre tous les quantités  $a^k P_k[L_k/M_k]$  de l'ordre de 'a' lorsque 'a' tend vers l'infini. Nous considérons que le résultat trouvé est satisfaisante car on a pris seulement quatre approximants de Padé. On pense que si on augmente le nombre d'approximants de Padé ainsi que les ordres, on peut résoudre facilement l'écart entre la solution exacte et les représentations fractionnelles.

#### **4.4 Conclusion**

Nous avons testé un indicateur de points singuliers bien adapté aux techniques de développement en série. Il permet de localiser précisément les points singuliers sur une branche non linéaire et de calculer les modes correspondants. Pour le calculer, nous avons proposé trois méthodes. La première est la méthode asymptotique numérique qui conduit à une représentation polynomiale. La seconde consiste à réarranger la représentation polynomiale au moyen d'approximants de Padé. Enfin, on calcule cet indicateur directement en chaque point solution, mais pour un coût numérique beaucoup plus grand. Cet indicateur est plus fiable et plus facile à utiliser que les indicateurs classiques parce que l'on peut exploiter pleinement la représentation en série de la branche fondamentale. Dans le cas de points limites, le rayon de convergence des séries est souvent très au delà du point singulier, ce qui permet facilement leur détection. Dans le cas de points de bifurcation le rayon de convergence dépasse rarement le point singulier. C'est pourquoi nous conseillons de choisir des points de départ proches des points de bifurcation en se limitant à des ordres de développement assez petits.

Nous confirmons que les accumulations de pas dans les méthodes de continuation sont bien liées à la présence d'un ou de plusieurs points de bifurcation.

Au voisinage d'un seul point de bifurcation, après l'accumulation de pas, la branche peut continuer sur la fondamentale, ou sur une des branches bifurquées .

Le calcul de l'indicateur par la formule (4.15) montre une forte accumulation de pas et un arrêt numérique de la méthode de continuation au voisinage de plusieurs bifurcations rapprochées.

Afin d'étendre le champ d'application de ces méthodes, nous développons dans la suite, des algorithmes pour la détection des points de bifurcation de Hopf.

## **References**

- [A-1] Abott J. P., 1978, "An efficient algorithm for the determination of certain bifurcations points" *J. Compt. Appl. Math.*, Vol. 4, pp 19-27.
- [B-1] Benjamin T. B., 1978 a, "Bifurcation phenomena in steady flows of viscous fluid. I. Theory", *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 359, pp 1-26.
- [B-2] Benjamin T. B., 1978 a, "Bifurcation phenomena in steady flows of viscous fluid. II. Experiments", *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. 359, pp 27-43.
- [B-3] Boutyour H., 1994, "Méthode asymptotique numérique pour le calcul des bifurcations applications aux structures élastiques", Thèse de l'université de Metz.
- [D-1] Demay Y., Iooss G., 1984, "Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation", *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, pp 193-216.
- [I-1] Iooss G., Joseph D.D., 1991, "Elementary stability and bifurcation theory", Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [K-1] Kubicek M., Marek M., 1979, "Evaluation of limit point and bifurcations points for algebraic equations and nonlinear boundary-value problems" *Appl. Math. Comput.* Vol. 5, pp253-264.
- [L-1] Laure P., Demay Y., 1988, "Symbolic computation and equation on the center manifold to the Couette-Taylor problem", *Computers and fluids*, Vol. 16 N° 3, pp 229-238.
- [P-1] Potier-Ferry M., 1987, "Bifurcation et stabilité pour les systèmes décrivant d'un potentiel", *Journal Mecanique*, Vol. 17 N° 4, pp 579-608.
- [R-1] Raffaï R., P. Laure, 1993, "The influence of an axial mean flow on the Couette-Taylor problem", *Eur. J. Mech. B/Fluids*, Vol. 12, pp 277-288.
- [S-1] Seydel R., 1979, "Numerical computation of branch points in ordinary differential equations", *Numer. Math.*, Vol. 32, pp 51-68.
- [S-2] Seydel R., 1979, "Numerical computation of primary bifurcation points in ordinary differential equations", *Proceedings of a conference in Oberwolfach 1978*, Basel: Birkhauser. ISNM, Vol. 48, pp161-169.
- [S-3] Seydel R., 1988, "From equilibrium to chaos. Practical bifurcations theory and stability analysis", Elsevier, New York.
- [S-4] Simpson R.B., 1975, "A method for the numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations" *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 12, pp439-451.

[T-1]Thomas B., Planchard J., 1991, "Stabilité dynamique en interaction fluide-structure", Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches D'EDF, Série C N° 3, pp 21-53.

[T-2]Tri A., Cochelin B., Potier-Ferry, 1995, "Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une méthode asymptotique-numérique", Revue Européenne des Elements finis.

[W-1]Wagner W., Wriggers P., 1991, "Calculation of bifurcation points via fold curves", Non linear Computational Mechanics, Wagner W., Wriggers P., Eds, pp 64-84, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[W-2]Wriggers P., Simo J.C., 1990, "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points", Int. J. Numer. Methods Engng., Vol. 70, pp 329-347.

## **Orientation**

Dans cette partie, nous allons nous consacrer à la détermination numérique des points de bifurcation de Hopf par une méthode d'équilibre perturbé, en introduisant un indicateur de bifurcation bien adapté aux méthodes asymptotiques. Cet indicateur va être calculé sous forme de série entière par rapport à deux paramètres (le paramètre de contrôle 'a' et une pulsation  $\omega$ )

Le premier chapitre de cette partie consiste à faire un rappel bibliographique sur les points de bifurcation de Hopf et sur quelques méthodes numériques utilisées pour les déterminer.

Dans le deuxième chapitre de cette partie, on applique une méthode basée sur l'introduction d'un nouvel indicateur pour déterminer les points de bifurcation de Hopf sur une branche non linéaire. Pour son application, nous avons pensé au problème de l'écoulement autour du cylindre car on a montré, expérimentalement, l'existence d'un point de bifurcation de Hopf au voisinage d'un Reynolds de l'ordre de 46. Et comme, on doit chercher notre indicateur de bifurcation sur toute la branche, le problème d'arrêt numérique que nous avons rencontré dans le chapitre 2 ne nous permet pas d'arriver jusqu'à cette valeur. Pour cela, nous allons consacrer la dernière partie de ce chapitre à l'adaptation de notre algorithme de bifurcation de Hopf aux structures soumises à des forces suiveuses.

### 5.1 Rappel théorique sur la bifurcation de Hopf

Notre analyse a été consacré jusqu'à maintenant à l'étude des branches de solutions et des points de bifurcation stationnaires en se basant sur la résolution des équations (3.1) soit :

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda) = 0$$

Les solutions  $u(\lambda)$  cherchées étaient indépendantes du temps. Mais cette situation n'est qu'un cas particulier du fait que l'équilibre peut se transformer en un mouvement oscillatoire dépendant du temps. Ceci se traduit mathématiquement par :

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda) \neq 0 \tag{5.1}$$

Si en plus la solution stationnaire bifurque non pas vers une autre solution stationnaire mais vers une solution périodique, alors on a une bifurcation de Hopf.

#### *Exemple*

Pour illustrer la bifurcation de Hopf, on considère l'exemple suivant [S-1] :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 + u_1(\lambda - (u_1^2 + u_2^2)) \\ \dot{u}_2 = -u_1 + u_2(\lambda - (u_1^2 + u_2^2)) \end{cases} \tag{5.2}$$

Le point stationnaire  $(u_1, u_2) = (0, 0)$  est le seul point stationnaire de ce système. En ce point la matrice jacobienne qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

a deux valeurs propres soit  $\zeta_{1,2} = \lambda \pm i$ . D'après le principe de la stabilité linéaire, la solution  $(0, 0)$  est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .



D'après cette figure, on remarque qu'à  $\lambda = 0$ , il y a changement de stabilité d'une solution stable à un cycle limite. Le cycle limite qui encercle la solution instable a une amplitude proportionnelle à  $\sqrt{\lambda}$ . Le point  $(u_1, u_2, \lambda) = (0, 0, 0)$  est alors un point de bifurcation de Hopf. A ce point de bifurcation correspond une paire de valeurs propres purement imaginaires de la matrice jacobienne.

## 5.2 Caractérisation du point de bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf se repère par le développement des orbites périodiques à partir d'un point stable fixe. Historiquement, les résultats de base de cette théorie ont pour origine le travail de Poincaré en 1892, [M-1]. Puis elle a été fortement discuté par Andronov et al. en 1930 [M-1]. Le travail de Hopf en 1942 a permis d'étendre cette théorie de la dimension 2 (Lyapounov) à une dimension plus grande en montrant le théorème suivant :

### *Théorème de Hopf*

On considère un système d'équation différentielle de dimension  $n$  gouverné par :

$$\frac{du}{dt} = f(u, \lambda)$$

Où  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda$  est un paramètre de bifurcation.

1) On suppose que ce système possède une solution stationnaire  $u(\lambda)$  telle que :

$$f(u(\lambda), \lambda) = 0 \tag{5.7}$$

2) la matrice jacobienne  $L_t^\lambda = \frac{\partial f}{\partial u}$  au point stationnaire admet  $n$  valeurs propres notées :

$$\zeta_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda) + i\beta_j(\lambda) \quad \text{où} \quad j=1, \dots, n \tag{5.8}$$

On les classe de sorte que  $\alpha_1(\lambda) > \alpha_2(\lambda) > \dots > \alpha_n(\lambda)$ .

3) On suppose qu'il existe une valeur critique  $\lambda_c$ , telle que :

$$a) \zeta_1(\lambda_c) = \bar{\zeta}_2(\lambda_c) = i \omega_c \tag{5.9}$$

$$b) \alpha_j(\lambda_c) < 0 \quad j = 3, \dots, n \quad (5.10)$$

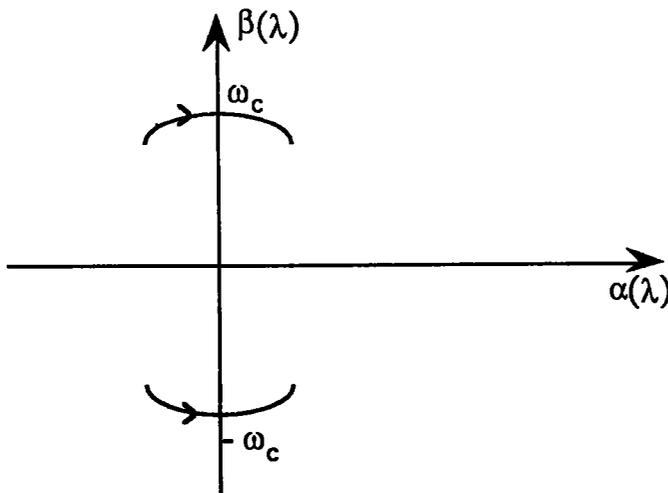
$$c) \frac{d\alpha_1(\lambda_c)}{d\lambda} \neq 0 \quad (5.11)$$

Alors le point  $\lambda = \lambda_c$  est un point de bifurcation de Hopf, c'est à dire il y a naissance des cycles limites au point  $(u_c, \lambda_c)$ . La période initiale de l'oscillation d'amplitude nulle est

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

**Commentaire**

Pour mieux comprendre le théorème de Hopf, nous visualisons la trajectoire des valeurs propres de la matrice jacobienne dans le plan complexe, figure (5.2). Nous considérons que toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne sont calculées au voisinage de  $\lambda_c$ .



**figure 5.2 :** Trajectoires des valeurs propres.

Au voisinage d'une bifurcation de Hopf,  $\zeta_1(\lambda_c) = \bar{\zeta}_2(\lambda_c) = i \omega_c$ , il y a localement une seule solution périodique pour chaque valeur de  $\lambda$ .

### 5.3 Rappels sur les méthodes numériques utilisées pour déterminer les points de bifurcation de Hopf

Le nombre de travaux réalisé pour localiser les points de bifurcation de Hopf numériquement est relativement faible par rapport à ceux réalisés pour localiser les points de bifurcation stationnaires. On a vu que le point  $(u_c, \lambda_c)$  est un point singulier si la matrice jacobienne est singulière en ce point. En particulier, ce point satisfait la condition suivante :

$$\det \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right) = 0 \quad (5.12)$$

En revanche le point  $(u_c, \lambda_c)$  est un point de bifurcation de Hopf si la condition suivante est satisfaite en ce point :

$$\det \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \omega_c I \right) = 0 \quad (5.13)$$

où  $I$  représente la matrice unité d'ordre  $n$ .

En général, le paramètre  $\omega_c$  est inconnu et le déterminant de (5.13) n'est pas facile à obtenir. Ceci rend plus difficile la détection des points de bifurcation de Hopf. Ici, on fait un rappel sur quelques techniques numériques souvent utilisées pour détecter les points de bifurcation de Hopf.

#### 5.3.1 Méthode de valeurs propres

Cette méthode est la plus standard pour résoudre ce genre de problème. Pour l'appliquer, on suppose que les solutions stationnaires sont déjà déterminées. Par suite, on admet que toutes les solutions  $(u_i, \lambda_i)$  et  $(u_{i+1}, \lambda_{i+1})$  sont déjà calculées et que la bifurcation de Hopf est caractérisée par la recherche de la valeur critique  $\lambda_c$  telle que  $\lambda_c \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ . En effet et pour déterminer le point de bifurcation de Hopf, on suit la démarche suivante :

- a) Calculer toutes les valeurs propres  $\{\zeta_k(\lambda_{i+1})\}$ ,  $k=1, \dots, n$  de la matrice jacobienne au point  $(u_{i+1}, \lambda_{i+1})$ .
- b) Calculer le nombre  $n^{i+1}$  qui correspond au nombre de valeurs propres  $\zeta_k(\lambda_{i+1})$  avec une partie réelle positive ( $\text{Re} \{\zeta_k(\lambda_{i+1})\} > 0$ ).
- c) Enfin calculer le nombre  $\Delta n^{i+1} = n^{i+1} - n^i$ , où  $n^i$  est le nombre de valeurs propres à parties réelles positives calculées dans le pas précédent.

Si  $|\Delta n^{i+1}| = 1$ , on a alors un point singulier (point limite ou point de bifurcation simple) au voisinage de cette zone et si  $|\Delta n^{i+1}| = 2$ , il y a possibilité d'avoir une bifurcation de Hopf dans l'intervalle  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ .

Le nombre  $n^i$  peut être calculer en utilisant le théorème de Routh-hurwitz.

Si on désigne par  $n$  la dimension de la matrice jacobienne, le nombre d'opérations exigées par cet algorithme est de l'ordre de  $4n^3$  si la matrice est non symétrique et pleine. Ces méthodes sont coûteuses en temps et ne peuvent être efficaces que pour des systèmes à petit nombre de degrés de liberté.

### 5.3.2 Localisation de la perte de stabilité

La méthode des valeurs propres permet de localiser la zone  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$  où une paire de valeurs propres entre deux états stationnaires  $(u_i, \lambda_i)$  et  $(u_{i+1}, \lambda_{i+1})$  satisfait la condition :

$$\alpha_k(\lambda_{i+1}) \alpha_k(\lambda_i) < 0 \quad (5.14)$$

Pour les localiser précisément, on utilise des interpolation linéaires successives. En particulier, on suppose que  $\lambda_{i-1}, \lambda_i, \zeta_{\pm}(\lambda_{i-1})$  et  $\zeta_{\pm}(\lambda_i)$  sont déjà calculés. En appliquant ces interpolations successives, on obtient :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \left\{ \frac{\lambda_i - \lambda_{i-1}}{\alpha(\lambda_i) - \alpha(\lambda_{i-1})} \right\} \alpha(\lambda_i) \quad (5.15)$$

et on estime  $\zeta_{\pm}(\lambda_{i+1})$  par  $\zeta_{\pm}(\lambda_{i+1}) = i \omega_{i+1}$ , avec

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \left\{ \frac{\omega_i - \omega_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} \right\} \alpha(\lambda_i) \quad (5.16)$$

Cette résolution permet de calculer exactement les points critiques ainsi que les vecteurs propres correspondant à la valeur propre  $\zeta_{\pm}(\lambda_{i+1})$ . Des techniques similaires sont suggérées par Hassard [H-1]

### 5.3.3 Méthode directe

Dans cette section, on utilise une autre alternative pour localiser le point de bifurcation de Hopf. On considère alors un système d'équations qui s'écrit de la façon suivante :

$$G(u, b, c, w, \lambda) = \begin{pmatrix} f(u, \lambda) \\ \frac{\partial f}{\partial u} b + \omega c \\ \frac{\partial f}{\partial u} c - \omega b \\ N(b, c) = 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.17)$$

Le point de bifurcation de Hopf  $(u_c, \lambda_c)$  satisfait cette relation si la valeur propre  $\zeta(\lambda_c) = i\omega(\lambda_c) = i\omega_c$ . Le vecteur  $b + ic$  représente le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $i\omega(\lambda)$ .  $N(b, c)$  représente deux conditions de normalisation.

Pour détecter le point de bifurcation de Hopf  $z_c = (u_c, b_c, c_c, \omega_c, \lambda_c)$ , il suffit de chercher une racine isolée de l'équation (5.17). C'est à dire chercher à ce que la matrice  $\frac{\partial G}{\partial z}$  au point  $z = z_c$  soit non singulière. On a établi [J-1] que cette matrice est non singulière si la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial b} b + \frac{\partial N}{\partial c} c & \frac{\partial N}{\partial b} c - \frac{\partial N}{\partial c} b \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

est non singulière au point  $(b_c, c_c)$  et que  $N(0, 0) \neq 0$ .

Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Jepson [J-1].

De point de vue pratique, cette méthode est très coûteuse car on calcule un très grand nombre d'inconnues ainsi que la détermination de  $\frac{\partial G}{\partial z}$  fait intervenir les dérivées secondes de  $f$  ce qui alourdi considérablement le calcul numérique de ses racines.

## **5.4 Conclusion**

Nous avons fait un rappel sur quelques méthodes utilisées pour détecter le point de bifurcation de Hopf numériquement. Ces méthodes sont coûteuses en temps vu le nombre d'opérations exigées par chaque étape de calcul surtout si le nombre de degrés de liberté est grand.

Dans le prochain chapitre, nous proposons une nouvelle technique de détection des points de bifurcation de Hopf qui appartient à la classe des méthodes asymptotiques numériques. Le principe de notre méthode consiste à caractériser les points de bifurcation de Hopf au moyen d'un problème d'équilibre perturbé qui nous permet d'introduire un indicateur de la bifurcation de Hopf bien adapté.

## 6.1 Algorithme pour la détection des points de bifurcation de Hopf

### Principe de la méthode

Notre point de départ est le problème linéarisé de (5.1) soit :

$$\frac{du}{dt} = L_t^a u \quad (6.1)$$

où  $L_t^a$  représente la matrice jacobienne au point stationnaire  $(u(a), \lambda(a))$  où  $u(a)$  et  $\lambda(a)$  sont des fonctions paramétrées par 'a'.

D'après le théorème de Hopf, chercher les points de bifurcation de Hopf revient à chercher une valeur critique 'a<sub>c</sub>' tel qu'en ce point toutes les valeurs propres de  $L_t^{a_c}$  ont leur parties réelles négatives, sauf deux qui devront être purement imaginaires.

Ceci se traduit mathématiquement par :

$$L_t^{a_c} u_c = i\omega_c u_c \quad (6.2)$$

où  $u_c = u(a_c)$  représente le mode de bifurcation correspondant à la valeur propre  $i\omega_c$ .

Pour éviter de travailler dans l'espace des complexes, on introduit le changement de variable suivant :

$$u_c = U_1^c + iU_2^c \quad (6.3)$$

En injectant cette équation dans (6.2), nous obtenons deux systèmes réels :

$$\begin{cases} L_t^{a_c} U_1^c = -\omega_c U_2^c \\ L_t^{a_c} U_2^c = \omega_c U_1^c \end{cases} \quad (6.4)$$

Ce problème est réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$L(a_c, \omega_c) U_c = 0 \quad (6.5)$$

$$\text{où } L(a, \omega) = \begin{bmatrix} L_t^a & \omega I \\ -\omega I & L_t^a \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U_c = \begin{bmatrix} U_1^c \\ U_2^c \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

On obtient alors un problème de valeurs propres dans l'espace des réels, mais avec une dimension double. La recherche des points de bifurcation de Hopf est caractérisée désormais par la recherche d'un couple  $(a_c, \omega_c)$  vérifiant la relation (6.5).

### Introduction d'un indicateur

Comme dans le chapitre précédent, nous introduisons un indicateur de bifurcation qui cette fois-ci dépend de deux paramètres. On se donne un vecteur  $\mathbf{h}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , un scalaire  $\beta(a, \omega)$  et on perturbe le problème (6.5) pour obtenir :

$$\mathbf{L}(a, \omega) \mathbf{U}(a, \omega) = \beta(a, \omega) \mathbf{h} \quad (6.7)$$

Les inconnues du problème (6.7) sont alors l'indicateur de bifurcation  $\beta(a, \omega)$  et le vecteur  $\mathbf{U}(a, \omega)$ . Pour que ce problème admette une solution unique, on impose la condition supplémentaire suivante :

$$\langle \mathbf{U}(a, \omega) - \mathbf{U}(0, 0), \mathbf{U}(0, 0) \rangle = 0 \quad (6.8)$$

où le vecteur  $\mathbf{U}(0, 0)$  vérifié :

$$\mathbf{L}(0, 0) \mathbf{U}(0, 0) = \beta(0, 0) \mathbf{h} \quad (6.9)$$

$$\text{avec} \quad \beta(0, 0) = 1 \quad (6.10)$$

### Résumé :

L'indicateur de bifurcation de Hopf  $\beta(a, \omega)$  est une fonction scalaire dépendant de deux paramètres, le paramètre de contrôle 'a' et la pulsation  $\omega$ . La recherche des points de bifurcation de Hopf est caractérisée par la recherche des couples  $(a_c, \omega_c)$  qui annulent cet indicateur. Ce dernier est obtenu en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{L}(a, \omega) \mathbf{U}(a, \omega) = \beta(a, \omega) \mathbf{h} \\ \langle \mathbf{U}(a, \omega) - \mathbf{U}(0, 0), \mathbf{U}(0, 0) \rangle = 0 \\ \beta(0, 0) = 1 \end{cases} \quad (6.11)$$

Ceci sera fait par deux méthodes. La première est la méthode directe qui consiste à calculer directement l'indicateur des équations (6.11). La seconde est une méthode

asymptotique numérique permettant de calculer l'indicateur sous forme d'une série entière.

### 6.1.1 Méthode directe pour le calcul de l'indicateur

Cette méthode consiste à calculer l'indicateur en exploitant directement les équations du problème (6.11) Soient :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

$U_1, U_2, h_1$  et  $h_2$  son définies dans  $\mathbb{R}^n$ .

En introduisant les équations (6.12) dans (6.11), on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} L_t^a U_1 + \omega U_2 = \beta(a, \omega) h_1 \\ L_t^a U_2 - \omega U_1 = \beta(a, \omega) h_2 \end{cases} \quad (6.13)$$

On multiplie le système (6.13) par  $L_t^a$ , puis on substitue les équations entre elles, nous obtenons :

$$\begin{cases} [(L_t^a)^2 + \omega^2 I] U_1 = \beta(a, \omega) g_1 \\ [(L_t^a)^2 + \omega^2 I] U_2 = \beta(a, \omega) g_2 \end{cases} \quad (6.14)$$

où

$$\begin{cases} g_1(a, \omega) = L_t^a h_1 - \omega h_2 \\ g_2(a, \omega) = L_t^a h_2 + \omega h_1 \end{cases} \quad (6.15)$$

Les vecteurs  $U_1$  et  $U_2$  sont de dimension  $n$  et ont pour composantes respectivement  $U_1^i$  et  $U_2^i$ . Pour calculer ces composantes, nous avons appliqué au problème (6.14) la méthode de Cramer qui nous a permis d'obtenir :

$$\begin{cases} U_1^i(a, \omega) = \beta(a, \omega) \frac{\Delta_1^i(a, \omega)}{\det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I]} & i \in [1, n] \\ U_2^i(a, \omega) = \beta(a, \omega) \frac{\Delta_2^i(a, \omega)}{\det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I]} & i \in [\bar{1}, n] \end{cases} \quad (6.16)$$

Où les  $\Delta_1^i(a, \omega)$  et  $\Delta_2^i(a, \omega)$  représentent les déterminants de Cramer. Ces déterminants dépendent des paramètres 'a' et  $\omega$ . D'une manière globale le vecteur  $U(a, \omega)$  s'écrit :

$$U(a, \omega) = \beta(a, \omega) \frac{\Delta(a, \omega)}{\det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I]} \quad (6.17)$$

où 
$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1^i \\ \Delta_2^i \end{pmatrix}$$

On injecte l'expression (6.17) dans (6.8), on déduit l'indicateur de bifurcation qui s'écrit :

$$\beta(a, \omega) = \langle U(0, 0), U(0, 0) \rangle \frac{\det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I]}{\langle \Delta(a, \omega), U(0, 0) \rangle} \quad (6.18)$$

D'après cette équation, on remarque que pour annuler l'indicateur  $\beta(a, \omega)$ , il suffit d'annuler le  $\det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I]$ . Par ailleurs, on montre que le numérateur de (6.18) est une fonction positive car :

$$\text{num}(a, \omega) = \det[(L_t^a)^2 + \omega^2 I] = \left| \det[(L_t^a) - i \omega I] \right|^2 \geq 0 \quad (6.19)$$

Tenant compte de cette remarque, on montre que les points de bifurcation de Hopf correspondent aux couples  $(a_c, \omega_c)$  caractérisant le minimum de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$ . Par conséquent les couples  $(a_c, \omega_c)$  sont solutions du système d'équations suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a_c, \omega_c) = 0 \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a_c, \omega_c) = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

**Exemple**

Pour illustrer cette méthode, basée sur l'introduction d'un indicateur de bifurcation, nous l'appliquons à l'exemple (5.2), en prenant  $\lambda = a$  :

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -u_2 + u_1(a - u_1^2 - u_2^2) \\ \frac{du_2}{dt} = u_1 + u_2(a - u_1^2 - u_2^2) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne au point stationnaire (0, 0) s'écrit :

$$L_t^a = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Les points donnant la bifurcation de Hopf correspondent à  $a_c = 0$  et  $\omega_c = \pm 1$ .

Nous essayons de calculer ce point par la méthode directe. Pour cela on calcule Le numérateur de (6.19) qui s'écrit :

$$\text{num}(a, \omega) = \omega^4 + 2(a^2 - 1)\omega^2 + (a^2 + 1)^2 \tag{6.21}$$

Après, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a, \omega) = 4a\omega^2 + 4a(a^2 + 1) \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a, \omega) = 4\omega^3 + 4(a^2 - 1)\omega \end{cases} \tag{6.22}$$

Ce système a pour solution ( $a_c = 0, \omega_c = \pm 1$ ). Ce point correspond à un point de bifurcation de Hopf.

**6.1.2 Propriétés de l'indicateur de bifurcation.**

On remarque, d'après l'équation (6.21), que le numérateur est un polynôme pair de degré  $2n$  par rapport à  $\omega$ . D'une manière générale, il a été montré [B-1] que si la matrice  $L_t^a$  est affine en  $a$ , le numérateur (6.21) est un polynôme de degré  $2n$  en  $\omega$  tel que :

$$\det((L_t^a)^2 + \omega^2 I) = \omega^{2n} + \omega^{2n-2} P_2(a) + \dots + P_{2n}(a) \quad (6.23)$$

où Les  $P_{2i}(a)$  sont des polynômes de degré  $2i$  en 'a' avec  $i = 1, \dots, n$ .

Si on se donne  $h_2 = 0$  et on suppose que l'opérateur tangent est affine par rapport au paramètre 'a', on montre que le dénominateur de l'équation (6.18) est un polynôme pair de degré  $2n-2$  en  $\omega$  et il s'écrit sous la forme suivante :

$$\langle \Delta(a, \omega), U(0, 0) \rangle = \omega^{2n-2} Q_1(a) + \omega^{2n-4} Q_3(a) + \dots + Q_{2n-1}(a) \quad (6.24)$$

où Les  $Q_{2i-1}(a)$  sont des polynômes de degré  $2i-1$  en 'a' avec  $i = 1, \dots, n$ .

Un développement de Taylor au voisinage de  $\omega = 0$ , du polynôme (6.23) par rapport au polynôme (6.24) jusqu'à l'ordre  $4n-2$  nous permet d'obtenir la forme suivante de l'indicateur :

$$\beta(a, \omega) = \frac{P_{2n}(a)}{Q_{2n-1}} + \frac{R_{4n-3}}{Q_{2n-1}^2} \omega^2 + \frac{R_{6n-6}}{Q_{2n-1}^3} \omega^4 + \dots + \frac{R_{4n^2-6n+3}}{Q_{2n-1}^{2n}} \omega^{4n-2} + O_a(\omega^{4n}) \quad (6.25)$$

où Les  $Q_{2n-1}(a), P_{2n}(a), R_{4n-3}(a), \dots$  sont des polynômes de degrés respectives  $2n-1, 2n, 4n-3, \dots$  en 'a'.

**Remarque**

On note que si 'a' est suffisamment grand, les quantités  $\frac{P_{2n}(a)}{Q_{2n-1}}, \frac{R_{4n-3}}{Q_{2n-1}^2}, \frac{R_{6n-6}}{Q_{2n-1}^3}, \dots, \frac{R_{4n^2-6n+3}}{Q_{2n-1}^{2n}}$  du polynôme (6.25) sont équivalentes respectivement à  $a, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^3}, \dots, \frac{1}{a^{4n-3}}$ .

**6.2 Méthode asymptotique numérique pour calculer l'indicateur de bifurcation**

On propose dans ce paragraphe de calculer l'indicateur par une méthode asymptotique numérique. Le principe de cette méthode est de développer  $U(a, \omega)$  et  $\beta(a, \omega)$  sous forme de séries entières :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a^p \omega^q \beta_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a^{p-q} \omega^q \beta_{p-q,q} \tag{6.26}$$

$$U(a, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a^p \omega^q U_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p a^{p-q} \omega^q U_{p-q,q} \tag{6.27}$$

On suppose que la matrice  $L_t^a$  est analytique en 'a' et elle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$L_t^a = L_t^0 + a L_1 + a^2 L_2 + a^3 L_3 + \dots \tag{6.28}$$

où les  $L_i$  sont des matrices connues pour chaque  $i$  compris entre 1 et  $p$ . Tenant compte de cette équation, la forme globale de la matrice  $L(a, \omega)$  s'écrit comme suit :

$$L(a, \omega) = L_0 + \omega M + \sum_{p=1}^{\infty} a^p L_p \tag{6.29}$$

avec

$$L_0 = \begin{bmatrix} L_t^0 & 0 \\ 0 & L_t^0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad L_p = \begin{bmatrix} L_p & 0 \\ 0 & L_p \end{bmatrix}$$

Les matrices  $M$  et  $L_i$  sont des matrices connues et indépendantes de 'a' et  $\omega$ . En injectant les équations (6.30) et (6.27) dans (6.11), puis on identifie suivant les puissances de 'a' et de  $\omega$ , on obtient une succession de problèmes qui s'écrivent sous les formes suivantes :

L'ordre 0

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{0,0} = \beta_{0,0} \mathbf{h} \\ \beta_{0,0} = 1 \end{cases} \quad (6.30)$$

L'ordre a :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{1,0} = \beta_{1,0} \mathbf{h} - \mathbf{L}_1 \mathbf{U}_{0,0} \\ \langle \mathbf{U}_{1,0}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

L'ordre  $\omega$  :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{0,1} = \beta_{0,1} \mathbf{h} - \mathbf{M} \mathbf{U}_{0,0} \\ \langle \mathbf{U}_{0,1}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.32)$$

L'ordre  $a\omega$  :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{1,1} = \beta_{1,1} \mathbf{h} - \mathbf{M} \mathbf{U}_{1,0} - \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{0,1} \\ \langle \mathbf{U}_{1,1}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.33)$$

L'ordre  $a^p\omega^q$  :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_{p,q} = \beta_{p,q} \mathbf{h} - \mathbf{M} \mathbf{U}_{p,q-1} - \sum_{r=0}^q \mathbf{L}_r \mathbf{U}_{p-r,q} \\ \langle \mathbf{U}_{p,q}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle = 0 \\ \text{Avec } \mathbf{U}_{p,-1} = 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

On s'intéresse alors à la recherche des couples  $(\mathbf{U}_{p,q}, \beta_{p,q})$ . Pour cela on suppose que  $\mathbf{L}_t^0$  est inversible et par suite  $\mathbf{L}_0$  est également inversible. Ceci assure l'existence d'une solution unique pour chaque problème. Ces solutions sont obtenues en résolvant les problèmes (6.30 à 6.34) de la sorte :

A l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{0,0} = (\mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{h} \\ \beta_{0,0} = 1 \end{cases} \quad (6.35)$$

A l'ordre  $a^p \omega^q$  :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{p,q} = \mathbf{M} \mathbf{U}_{p,q-1} + \sum_{r=0}^q \mathbf{L}_r \mathbf{U}_{p-r,q} \\ \mathbf{U}_{p,q}^{\text{nl}} = (\mathbf{L}_0)^{-1} \mathbf{F}_{p,q} \\ \beta_{p,q} = \frac{\langle \mathbf{U}_{p,q}^{\text{nl}}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle}{\langle \mathbf{U}_{0,0}, \mathbf{U}_{0,0} \rangle} \\ \mathbf{U}_{p,q} = \beta_{p,q} \mathbf{U}_{0,0} - \mathbf{U}_{p,q}^{\text{nl}} \end{cases} \quad (6.36)$$

Dans cette résolution, la détermination de tous les couples  $(\mathbf{U}_{p,q}, \beta_{p,q})$  ne demande qu'une inversion de la matrice  $\mathbf{L}_0$ . Une fois que cette résolution est terminée, les couples  $(\mathbf{U}_{p,q}, \beta_{p,q})$  nous permettent d'écrire le vecteur  $\mathbf{U}(a, \omega)$  et l'indicateur  $\beta(a, \omega)$  sous forme de séries entières.

### 6.2.1 Points de bifurcation de Hopf

La méthode asymptotique numérique nous a permis de calculer facilement la fonction  $\beta(a, \omega)$ . En respectant les propriétés de l'indicateur  $\beta(a, \omega)$  discutées dans les paragraphes précédents, nous avons l'idée de transformer cette représentation polynomiale en fraction rationnelle. Cette transformation se fait en introduisant les approximants de Padé. En effet la série (6.26) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a^p \omega^q \beta_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} g_q(a) \omega^q \quad (6.37)$$

$$\text{où } g_q(a) = \sum_{p=0}^{\infty} a^p \beta_{p,q} \quad (6.38)$$

L'utilisation des approximants de Padé se fait en deux étapes. La première consiste à remplacer les fonctions scalaires  $g_q(a)$  par des approximants de Padé  $P_q[L_q/M_q]$ , par conséquent l'équation (6.37) devient :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{q=0}^{\infty} P_q[L_q / M_q] \omega^q \quad (6.39)$$

On obtient alors un polynôme en  $\omega$  dont les coefficients sont des fractions rationnelles en 'a'. La deuxième étape consiste à remplacer le polynôme (6.39) en un approximant de Padé par rapport à  $\omega$ ,  $P[L / M]$  :

$$\beta(a, \omega) = \frac{P_1(a, \omega)}{P_2(a, \omega)} = P[L / M] \quad (6.40)$$

Où  $P_1(a, \omega)$  et  $P_2(a, \omega)$  sont des polynômes dépendant des deux paramètres. Cette formule est équivalent à l'équation (6.18) de la méthode directe. Pour cela et pour déterminer les points de bifurcation de Hopf, on résout le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial a}(a_c, \omega_c) = 0 \\ \frac{\partial P_1}{\partial \omega}(a_c, \omega_c) = 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

Le couple  $(a_c, \omega_c)$  est solution de ce système d'équations.

### 6.2.2 Choix des approximants de Padé.

Pour assurer un bon choix des approximants de Padé, nous proposons une stratégie exploitant les propriétés de l'indicateur caractérisées par les équations (6.23), (6.24) et (6.5). Ces propriétés sont obtenues en supposant que la matrice  $L_t^a$  est affine en 'a' et que la deuxième composante de la force perturbatrice  $h_2$  est nulle. Cette dernière condition montre que les composantes  $\beta_{p,q}$  sont nulles si  $q$  est impaire. Par conséquent l'équation (6.26) se réécrit sous la forme suivante :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{q=0}^{\infty} g_{2q}(a) \omega^{2q} \quad (6.42)$$

En introduisant les approximants de Padé, on cherche alors l'indicateur sous la forme suivante :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{q=0}^{\infty} P_{2q}[L_{2q} / M_{2q}] \omega^{2q} \quad (6.43)$$

Le choix des approximants de Padé a été fait de sorte que l'équation (6.43) soit équivalente à l'équation (6.25), soient :

$$\begin{aligned} P_0[L_0 / M_0] &= P_0[2n / 2n - 2] && \text{équivalent à } a \text{ si 'a' est grand} \\ P_2[L_2 / M_2] &= P_2[4n - 3 / 4n - 2] && \text{équivalent à } 1/a \text{ si 'a' est grand} \\ P_4[L_4 / M_4] &= P_4[6n - 6 / 6n - 3] && \text{équivalent à } 1/a^3 \text{ si 'a' est grand} \\ &: && \\ &: && \\ &: && \\ &: && \\ P_{2n-2}[L_{2n-2} / M_{2n-2}] &= P_{2n-2}[6n - 6 + 3 / 4n^2 - 2n] && \text{équivalent à } 1/a^{3n-4} \text{ si 'a' est grand} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Par rapport à  $\omega$ , on retransforme l'équation (6.43) en un approximant d'ordre  $L = 2n$  (correspondant au degré du numérateur (6.23) en  $\omega$ ) et  $M = 2n-2$  (correspondant au degré du dénominateur (6.24) en  $\omega$ ). Autrement dit :

$$P[L / M] = P[2n / 2n - 2] \quad \text{équivalent à } \omega^2 \text{ si } \omega \text{ est grande} \quad (6.45)$$

En résumé, notre stratégie est basée sur le principe de transformer la série entière  $\beta(a, \omega)$  en une fraction rationnelle dont le numérateur  $P_1(a, \omega)$  est équivalent à (6.23) et dont le dénominateur  $P_2(a, \omega)$  est équivalent à (6.24).

### Exemple

A titre d'illustration, nous appliquons cette méthode à l'exemple (5.2). En tronquant la série (6.26) à l'ordre  $4n - 2 = 6$ , l'indicateur de bifurcation de Hopf est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \beta(a, \omega) &= 1 + a^2 + (-1 + 4a^2 - 4a^4)\omega^2 + (4a^2 - 8a^4 + 12a^6 - 16a^8)\omega^4 + \\ & \quad (4a^2 - 12a^4 + 24a^6 - 40a^8 + 60a^{10} - 84a^{12})\omega^6 + o_a(\omega^8) \end{aligned} \quad (6.46)$$

La stratégie des approximants de Padé décrite précédemment, qui est caractérisée par les équations (6.44) pour 'a' et par les équations (6.45) pour  $\omega$ , a permis de calculer le numérateur  $P_1(a, \omega)$  de (6.5) qui s'écrit pour cet exemple comme suit :

$$P_1(a, \omega) = \omega^4 + 2(a^2 - 1)\omega^2 + (a^2 + 1)^2 \quad (6.47)$$

En suite, on résout le système (6.41). Celui ci permet de trouver exactement le point de bifurcation de Hopf ( $a_c = 0, \omega_c = \pm 1$ ) qui est le même que celui calculé par la méthode directe.

### 6.3 Détection des points de bifurcation de Hopf pour les structures élastiques soumises à des forces non conservatives

Dans le chapitre (1), on n'a traité que des problèmes de structures en supposant que le chargement est statique et conservatif. Or, on ne doit pas oublier que les chargements extérieures sont rarement statiques et que les structures ont aussi des comportements dynamiques et sont fortement confronté à des instabilités dynamiques dangereuses. Les propriétés dynamiques appliquées dans ce travail, sont fermement liées à des structures soumises à des forces non conservatives [B-2][Z-1]. Ces forces dites 'forces suiveuses' sont en général dépendantes du mouvement et de la déformation des structures sur lesquelles elles agissent. Dans ce cas, la perte de stabilité des systèmes se manifeste par des oscillations avec des amplitudes croissantes. Plusieurs travaux de recherche ainsi que des méthodes numériques et expérimentales ont été développés pour prévenir des risques de ces instabilités dynamiques surtout en aéronautique [Z-1]. Une grande partie de ces recherches a été consacrée à la détection des points de bifurcation de Hopf et à la perte de stabilité liée à des oscillations périodiques d'amplitudes croissantes.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons spécialement à la détection des bifurcations de Hopf d'une structure soumise à des forces non conservatives avec une méthode asymptotique numérique. Notre principal objectif est de tester notre algorithme sur des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté.

#### 6.3.1 Cadre d'étude.

Pour des questions de généralité, on adopte les équations de l'élasticité 3D non linéaire. On considère alors un solide élastique de densité volumique  $\rho$  occupant un domaine  $\Omega_0$  de frontière  $\partial\Omega_0$  et qui reçoit un déplacement imposé  $\lambda u_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial\Omega_u$ . Ce solide est soumis à des chargements conservatifs de volumes  $\lambda b$  sur  $\Omega_0$  et de surfaces  $\lambda t$  sur  $\partial\Omega_f$ . En plus de ces chargements conservatifs, on ajoute des chargements

non conservatifs caractérisés par les forces de volumes  $\lambda \mathbf{b}^{nc}(\mathbf{u})$  sur  $\Omega_0$  et par les forces surfaciques  $\lambda \mathbf{t}^{nc}(\mathbf{u})$  sur  $\partial\Omega_f$ . On suppose que les chargements non conservatifs dépendent linéairement du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ .

**Formulation variationnelle du problème.**

D'après les travaux de Bolotin [B-2] et Ziegler [Z-1], on remarque que la méthode statique est insuffisante pour prédire la charge critique des systèmes lors d'une instabilité dynamique. Par conséquent, la méthode la plus appropriée pour décrire ce genre de problèmes est la méthode dynamique.

Pour des raisons pratiques décrites dans le chapitre (1), nous adoptons toujours la formulation mixte d'Hellinger-Reissner. En effet, le point de départ de notre analyse est la variation de la fonctionnelle mixte qui s'écrit en dynamique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta HR(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \mathbf{S}, \delta\mathbf{S}, \lambda) &= \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}:\delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) + \delta\mathbf{S}:\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) - \mathbf{S}:\mathbf{D}^{-1}:\delta\mathbf{S}) \, dv - \delta T_e \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

où

$$\delta\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}'(\delta\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\gamma}^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (6.49)$$

avec  $\mathbf{D}$  est le tenseur d'élasticité du matériau,  $\delta T_e$  est le travail virtuel des chargements extérieurs et des termes d'inertie soit :

$$\delta T_e = \delta W^c + \delta W^{nc} + \delta W_i \quad (6.50)$$

où  $\delta W^c$  est le travail virtuel des efforts extérieurs conservatifs :

$$\delta W^c(\delta\mathbf{u}) = \lambda \left[ \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{b} \delta\mathbf{u} \, dv + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \delta\mathbf{u} \, ds \right] = \lambda P_e^c(\delta\mathbf{u}) \quad (6.51)$$

$\delta W^{nc}$  est le travail virtuel des efforts extérieurs non conservatifs :

$$\delta W^{nc}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \lambda \left[ \int_{\Omega_0} \rho \mathbf{b}^{nc}(\mathbf{u}) \delta\mathbf{u} \, dv + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t}^{nc}(\mathbf{u}) \delta\mathbf{u} \, ds \right] = \lambda P_e^{nc}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \quad (6.52)$$

et  $\delta W_i$  représente le travail des termes d'inertie :

$$\delta W_i(u, \delta u) = - \int_{\Omega_0} \rho \ddot{u} \delta u \, dv \quad (6.53)$$

La variation des travaux virtuels s'écrit d'une manière globale sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta T_e = \lambda \left[ \int_{\Omega_0} \rho (\mathbf{b}^{nc}(u) + \mathbf{b}) \delta u \, dv + \int_{\partial\Omega_f} (\mathbf{t}^{nc}(u) + \mathbf{t}) \delta u \, ds \right] dv \\ - \int_{\Omega_0} \rho \ddot{u} \delta u \, dv \end{aligned} \quad (6.54)$$

et par conséquent les équations d'équilibres traduisant la dynamique des structures soumises à des forces conservatives et non conservatives se réécrivent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\gamma}(u) + \delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\gamma}(u) - \mathbf{S} : \mathbf{D}^{-1} : \delta \mathbf{S}) \, dv + \int_{\Omega_0} \rho \ddot{u} \delta u \, dv \\ - \lambda \left[ \int_{\Omega_0} \rho (\mathbf{b}^{nc}(u) + \mathbf{b}) \delta u \, dv + \int_{\partial\Omega_f} (\mathbf{t}^{nc}(u) + \mathbf{t}) \delta u \, ds \right] = 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Cette équation est quadratique par rapport au vecteur inconnu défini par :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}$$

Toutes les grandeurs décrites ci-dessus sont fonctions du paramètre temps.

En vue d'appliquer une méthode de perturbation, la formule (6.55) se réécrit sous la forme condensée suivante :

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{Q}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \lambda \mathbf{F}^c + \lambda \mathbf{F}^{nc}(\mathbf{U}) \quad (6.56)$$

Où  $\mathbf{L}$  est un opérateur linéaire,  $\mathbf{Q}$  est quadratique et  $\mathbf{F}$  est le vecteur des forces conservatives. Ces opérateurs sont définies par les formules (1.9), (1.10) et (1.11) respectivement.

$\mathbf{M}$  est l'opérateur de Masse et  $\mathbf{F}^{nc}$  est le vecteur des chargements non conservatifs. Ces opérateurs sont donnés par les relations suivantes :

$$\langle \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}), \delta \mathbf{U} \rangle = \int_{\Omega_0} \rho \ddot{u} \delta u \, dv \quad (6.57)$$

$$\langle F^{nc}(U), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} \rho b^{nc}(u) \delta u \, dv + \int_{\Omega_f} t^{nc}(u) \delta u \, ds \quad (6.58)$$

Le vecteur  $F^{nc}(U)$  est supposé linéaire en  $U$ .

Il est très connu que la valeur critique de chargement de certain problème de stabilité dynamique est très influencée par l'existence ou non d'un amortisseur [B-2]. Il est donc nécessaire d'utiliser un système visqueux, même si la viscosité  $\alpha$  est très petite. Pour cela, on introduit dans la formulation variationnelle un opérateur d'amortissement noté  $C$  et définit par :

$$\langle C(\dot{U}), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} \alpha \dot{u} \delta u \, dv \quad (6.59)$$

Finalement, les équations dynamiques d'une structure soumise à des forces non conservatives se formule ainsi :

trouver  $(U = \begin{pmatrix} u \\ S \end{pmatrix}, \lambda)$  vérifiant :

$$\begin{cases} L(U) + Q(U, U) + M(\ddot{U}) + C(\dot{U}) = \lambda F^c + \lambda F^{nc}(U) \\ u = \lambda u_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (6.60)$$

### 6.3.2 Calcul des branches de solutions stationnaires par une méthode asymptotique.

Dans ce paragraphe, nous n'avons pas l'objectif de refaire tous le calcul pour avoir une branche de solution non linéaire pour les structures élastiques mais nous nous intéressons aux changement qui affectent les équations lorsque les structures sont soumises à des chargements non conservatifs. En effet, on suppose que  $(U_0, \lambda_0)$  est une solution stationnaire de (6.60) puis on cherche les autres solutions stationnaires  $(U, \lambda)$  sous formes de séries entières :

$$\begin{cases} U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots + a^pU_p \\ \lambda = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + a^3\lambda_3 + \dots + a^p\lambda_p \end{cases} \quad (6.61)$$

En injectant ces développements dans le problème (6.60) et dans la définition (1.19) du paramètre 'a', puis on identifié tous les termes du même puissance en 'a', on obtient une succession d'équations scalaires dans chaque ordre. Le problème complet à l'ordre  $p \geq 2$  s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (U_p = \begin{pmatrix} u_p \\ S_p \end{pmatrix}, \lambda_p) \text{ tel que :} \\ L(U_p) + 2Q(U_0, U_p) - \lambda_0 F^{nc}(U_p) = \lambda_p (F^c + F^{nc}(U_0)) \\ \quad - \sum_{r=1}^p (Q(U_r, U_{p-r}) - \lambda_r F^{nc}(U_{p-r})) \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \\ u = \lambda_p u_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (6.62)$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur  $L_t^{nc}$  défini cette fois ci par :

$$L_t^{nc}(\cdot) = L(\cdot) + 2Q(U_0, \cdot) - \lambda_0 F^{nc}(\cdot) \quad (6.63)$$

On remarque que par rapport aux équations du chapitre (1), l'opérateur tangent (6.63) et le second membre du problème (6.62) contiennent des termes supplémentaires provenant de la définition des forces non conservatives dans les équations. On suppose que  $L_t^{nc}$  est régulier au point  $(U_0, \lambda_0)$ , par suite les problèmes (6.62) admettent à chaque ordre une solution unique.

### ***Retour à une formulation en déplacement***

Puisque les formulations en déplacement sont bien adaptées aux méthodes d'éléments finis, nous réécrivons les équations (6.62) en une formulation en déplacement. Pour cela nous remplaçons les termes de la formule (6.62) par leurs équations dépendantes des contraintes et des déplacements. En effet, en introduisant les notations utilisées dans (1.9), (1.10), (1.11), (6.57), (6.58) et (6.59) le problème à l'ordre  $p$  (6.62) se réécrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega_0} \left( S_p : (\gamma^l(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u)) + S_0 : 2\gamma^{nl}(u_0, u_p) + \right) dv - \lambda_0 P_e^{nc}(u_p, \delta u) \\
 \delta S : (\gamma^l(u_p) + 2\gamma^{nl}(u_0, u_p)) \\
 = - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^{p-1} (S_r : 2\gamma^{nl}(u_{p-r}, \delta u) + \delta S : \gamma^{nl}(u_r, u_{p-r})) \right) dv \\
 + \lambda_p (P_e^c(\delta u) + P_e^{nc}(u_0, \delta u)) + \sum_{r=1}^{p-1} \lambda_r P_e^{nc}(u_{p-r}, \delta u) \\
 \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \\
 u = \lambda_p u_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u
 \end{array} \right. \quad (6.64)$$

La résolution de ce problème sera faite en éliminant les contraintes de l'équation (6.64). Ceci, se fait en introduisant la relation de comportement suivante :

$$S_p = D : \left( \gamma^l(u_p) + 2\gamma^{nl}(u_0, u_p) + \sum_{r=1}^{p-1} (\gamma^{nl}(u_r, u_{p-r})) \right) \quad (6.65)$$

Cette équation a été trouvé en annulant  $\delta u$ . Par conséquent, le problème (6.64) est transformé en un problème dont les inconnues sont les déplacements  $u_p$  et le chargement  $\lambda_p$  suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega_0} \left( (\gamma^l(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u)) : D : (\gamma^l(u_p) + 2\gamma^{nl}(u_0, u_p)) + S_0 : 2\gamma^{nl}(u_0, u_p) \right) dv - \lambda_0 P_e^{nc}(u_p, \delta u) \\
 = - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^{p-1} (S_r : 2\gamma^{nl}(u_{p-r}, \delta u) + \left( \sum_{r=1}^{p-1} \gamma^{nl}(u_r, u_{p-r}) \right) : D : (\gamma^l(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u))) \right) dv \\
 + \lambda_p (\delta P_e^c(\delta u) + P_e^{nc}(u_0)) + \sum_{r=1}^{p-1} \lambda_r P_e^{nc}(u_{p-r}, \delta u) \\
 \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \\
 u = \lambda_p u_d \quad \text{sur } \partial\Omega_u
 \end{array} \right. \quad (6.66)$$

Une fois les déplacements  $u_p$  calculés, les contraintes  $S_p$  s'obtiennent par la relation de comportement (6.65).

### Discrétisation

Avant de discrétiser le problème (6.66), on décrit brièvement la méthode des éléments finis utilisée [C-1] pour résoudre ce genre de problème. En effet, et après décomposition du domaine  $\Omega_0$  en élément finis, on approche le champs de déplacement  $u_p$  et sa partie virtuelle  $\delta u$  à des déplacements nodaux  $v_p$  et  $\delta v$  soient :

$$[u_p] = [N][v_p] \quad [\delta u] = [N][\delta v] \quad (6.67)$$

où  $[N]$  représente la fonction de forme classique. Les champs de déformations réels et virtuels sont approchés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 1) \quad [\gamma] &= [\gamma^l] + [\gamma^{nl}] = [\gamma^l] + \frac{1}{2}[A(v_p)][\Theta(v_p)] \\ &= [\gamma^l] + \frac{1}{2}[A(v_p)][G][v_p] \end{aligned} \quad (6.68)$$

La partie non linéaire de la déformation est écrite comme étant le produit de la matrice  $[A(v)]$  et du vecteur  $[\Theta(v)]$ . Ces deux quantités dépendent linéairement de vecteur  $v$ . La matrice  $[G]$  relie le déplacement nodal  $v$  et le vecteur  $[\Theta(v)]$ .

$$\begin{aligned} 2) \quad [\delta\gamma] &= [\delta\gamma^l] + [\delta\gamma^{nl}] = [B(v_p)][\delta v] \\ &= ([B^l] + [B^{nl}(v_p)])[\delta v] = ([B^l] + [A(v_p)][G])[\delta v] \end{aligned} \quad (6.69)$$

où  $[B^l]$  est la matrice de déformation classique et  $[B^{nl}(v)]$  est linéaire en  $v$ .

En adoptant cette démarche, les deux premières équations du problème (6.66) à l'ordre p sont transformées au problème discrétisé suivant :

$$\begin{cases} [K_t^{nc}] [v_p] = [K_t] + [K^{nc}] [v_p] = \lambda_p [F] + [F_p] \\ [u_p] [u_1] + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad (6.70)$$

La matrice  $[K_t]$  est la même matrice de rigidité discrétisée de l'opérateur (1.16) et elle correspond à la matrice de rigidité tangente d'une structure élastique soumise à des forces conservatives. Cette matrice n'est pas affecté par la présence des forces non

conservatives. En fait, l'effet de ces chargements est introduit par une matrice de rigidité non symétrique  $[K^{nc}]$ , dite matrice de correction, dans la matrice de rigidité globale  $[K_t^{nc}]$ . Le vecteur  $[F_p]$  ne dépend que des vecteurs  $[v_r]$  et des coefficients  $\lambda_r$  calculés précédemment.

Par rapport aux chargements conservatifs, des termes dues aux chargements non conservatifs sont ajoutés dans le second membre des équations (6.70).

Finalement, les inconnues  $v_p$  et  $\lambda_p$  sont déterminées en résolvant numériquement le problème linéaire (6.70) avec une seule inversion de la matrice de rigidité tangente non symétrique  $[K_t^{nc}]$  et en incluant les conditions sur les frontières. Les contraintes  $S_p$  sont données par la relation de comportement.

### 6.3.3 Adaptation de l'algorithme proposé pour les structures.

Pour caractériser les instabilités dynamiques, la méthode asymptotique se base sur la perturbation du problème non linéaire (6.60). On considère la fluctuation  $\Delta V$  telle que:

$$U = U(a) + \Delta V \quad (6.71)$$

En injectant cette équation dans (6.60) et en négligeant les termes non linéaires, on obtient le problème perturbé linéarisé suivant :

$$\begin{cases} L(\Delta V) + 2Q(U(a), \Delta V) + M(\Delta \ddot{V}) + C(\Delta \dot{V}) = \lambda(a) F^{nc}(\Delta V) \\ \Delta V = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (6.72)$$

Les solutions de ce problème sont cherchées sous la forme exponentielle suivante :

$$\Delta V(t) = \Delta v e^{\zeta t} \quad (6.73)$$

Après introduction de cette équation dans (6.72), on obtient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} L(\Delta v) + 2Q(U(a), \Delta v) + \zeta^2 M(\Delta v) + \zeta C(\Delta v) = \lambda(a) F^{nc}(\Delta v) \\ \Delta v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (6.74)$$

Par définition, la perte de stabilité associée à la bifurcation de Hopf est liée à l'existence d'une paire de valeurs propres imaginaires pures de la matrice de rigidité tangente et toutes les autres valeurs propres sont à parties réelles négatives. Ceci, se traduit ici par l'existence d'une valeur critique 'a<sub>c</sub>' (chargement critique λ(a<sub>c</sub>)) tellequ'en ce point on a une valeur propre ζ(a<sub>c</sub>) = i ω<sub>c</sub>. En injectant cette condition dans la première équation du problème (6.74), on obtient :

$$L(\Delta v_c) + 2Q(U(a_c), \Delta v_c) - \omega_c^2 M(\Delta v_c) + i\omega_c C(\Delta v_c) = \lambda(a_c)F^{nc}(\Delta v_c) \quad (6.75)$$

où Δv<sub>c</sub> est le mode propre correspondant à la valeur propre ζ(a<sub>c</sub>). En faisant le changement de variable suivant

$$\Delta v_c = \Delta v_c^1 + i \Delta v_c^2 \quad (6.76)$$

le problème (6.75) devient :

$$\begin{cases} L(\Delta v_c^1) + 2Q(U(a_c), \Delta v_c^1) - \omega_c^2 M(\Delta v_c^1) - \omega_c C(\Delta v_c^2) = \lambda(a_c)F^{nc}(\Delta v_c^1) \\ L(\Delta v_c^2) + 2Q(U(a_c), \Delta v_c^2) - \omega_c^2 M(\Delta v_c^2) + \omega_c C(\Delta v_c^1) = \lambda(a_c)F^{nc}(\Delta v_c^2) \end{cases} \quad (6.77)$$

En un point de la branche fondamentale (U(a), λ(a)), on se donne une perturbation en force h d'intensité β, on obtient un problème équivalent à (6.7) soit :

$$\mathbf{I}L_t^a(\Delta V) - \omega^2 \mathbf{I}M(\Delta V) + \omega \mathbf{I}C(\Delta V) = \lambda(a)\mathbf{I}F^{nc}(\Delta V) + \beta(a, \omega) \mathbf{h} \quad (6.78)$$

avec

$$\mathbf{I}L_t^a = \begin{bmatrix} L_t^a & 0 \\ 0 & L_t^a \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}F^{nc} = \begin{bmatrix} F^{nc} & 0 \\ 0 & F^{nc} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}C = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad \Delta V = \begin{bmatrix} \Delta v^1 \\ \Delta v^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta v^i = \begin{bmatrix} \Delta u^i \\ \Delta S^i \end{bmatrix}, \quad i=1,2.$$

Pour que ce problème admette une solution unique, on impose la condition supplémentaire suivante :

$$\langle \Delta V - \Delta V_{0,0}, \Delta V \rangle = 0 \quad (6.79)$$

où  $\Delta V_{0,0}$  est la réponse à la perturbation  $\mathbf{h}$  au point  $(a = 0, \omega = 0)$ .

On s'intéresse alors à l'évolution de  $(\Delta V, \beta)$  lorsqu'on parcourt la branche de solution stationnaire. Notre technique consiste à calculer l'indicateur  $\beta(a, \omega)$  et à chercher les couples  $(a_c, \omega_c)$  qui l'annulent.

### Méthode de perturbation

Pour déterminer le couple  $(\Delta V, \beta)$ , on utilise un développement asymptotique en fonction des paramètres 'a' et  $\omega$ . Pour cela, on adopte les mêmes représentations que (6.26) et (6.27) soient :

$$\beta(a, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a^p \omega^q \beta_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^q a^{p-q} \omega^q \beta_{p-q,q} \quad (6.80)$$

$$\Delta V(a, \omega) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a^p \omega^q \Delta V_{p,q} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^q a^{p-q} \omega^q \Delta V_{p-q,q} \quad (6.81)$$

En injectant (6.80) et (6.81) dans (6.78) et (6.79) et en identifiant suivant les puissances de 'a' et  $\omega$ , on obtient une succession des problèmes linéaires mixtes en  $(\Delta V_{p,q}, \beta_{p,q})$ :

ordre 0 en a et ordre 0 en  $\omega$

$$\begin{cases} \mathbf{IL}_t(\Delta V_{0,0}) - \lambda_0 \mathbf{IF}^{nc}(\Delta V_{0,0}) = \beta_{0,0} \mathbf{h} \\ \beta_{0,0} = 1 \end{cases} \quad (6.82)$$

ordre p en a et ordre q en  $\omega$ :

$$\begin{cases} \mathbf{IL}_t(\Delta V_{p,q}) - \lambda_0 \mathbf{IF}^{nc}(\Delta V_{p,q}) = \beta_{p,q} \mathbf{h} + \mathbf{IM}(\Delta V_{p,q-2}) + \mathbf{IC}(\Delta V_{p,q-1}) \\ \quad - \sum_{r=1}^p \left( \mathbf{IL}_r(\Delta V_{p-r,q}) + \lambda_r \mathbf{IF}^{nc}(\Delta V_{p-r,q}) \right) \\ \langle \Delta V_{p,q}, \Delta V_{0,0} \rangle = 0 \end{cases} \quad (6.83)$$

$$\text{où } \mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } L_i(\cdot) = Q(U_i, \cdot) + Q(\cdot, U_i) \quad (6.84)$$

On note que tous ces problèmes ont le même opérateur tangent. Cet opérateur est défini par :

$$\mathbf{L}_t^{\text{nc}} = \begin{bmatrix} L_t^{\text{nc}} & 0 \\ 0 & L_t^{\text{nc}} \end{bmatrix}$$

où  $L_t^{\text{nc}}$  est défini par la formule (6.63).

### Retour en une formulation en déplacement

Le problème variationnel à l'ordre p en a et q en  $\omega$  sous forme explicite s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left( \Delta S_{p,q}^1 : (\gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{\text{nl}}(u_0, \delta u)) + S_0 : 2\gamma^{\text{nl}}(\Delta u_{p,q}^1, \delta u) + \right. \\ & \left. \delta S : (\gamma^1(\Delta u_{p,q}^1) + 2\gamma^{\text{nl}}(u_0, \Delta u_{p,q}^1) - D^{-1} : \Delta S_{p,q}^1) \right) dv - \lambda_0 P_e^{\text{nc}}(\Delta u_{p,q}^1, \delta u) \\ & = \beta_{p,q} h_1 + \sum_{r=1}^p \lambda_r P_e^{\text{nc}}(\Delta u_{p-r,q}^1, \delta u) + \int_{\Omega_0} \rho \Delta u_{p,q-2}^1 \delta u \, dv - \int_{\Omega_0} \alpha \Delta u_{p,q-1}^2 \delta u \, dv \\ & - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^p (S_r : 2\gamma^{\text{nl}}(\Delta u_{p-r,q}^1, \delta u) + \Delta S_{p-r,q}^1 : 2\gamma^{\text{nl}}(u_r, \delta u) + \delta S : \gamma^{\text{nl}}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^1)) \right) dv \\ & \hspace{20em} (6.85) \\ & \int_{\Omega_0} \left( \Delta S_{p,q}^2 : (\gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{\text{nl}}(u_0, \delta u)) + S_0 : 2\gamma^{\text{nl}}(\Delta u_{p,q}^2, \delta u) + \right. \\ & \left. \delta S : (\gamma^1(\Delta u_{p,q}^2) + 2\gamma^{\text{nl}}(u_0, \Delta u_{p,q}^2) - D^{-1} : \Delta S_{p,q}^2) \right) dv - \lambda_0 P_e^{\text{nc}}(\Delta u_{p,q}^2, \delta u) \\ & = \beta_{p,q} h_2 + \sum_{r=1}^p \lambda_r P_e^{\text{nc}}(\Delta u_{p-r,q}^2, \delta u) + \int_{\Omega_0} \rho \Delta u_{p,q-2}^2 \delta u \, dv + \int_{\Omega_0} \alpha \Delta u_{p,q-1}^1 \delta u \, dv \\ & - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^p (S_r : 2\gamma^{\text{nl}}(\Delta u_{p-r,q}^2, \delta u) + \Delta S_{p-r,q}^2 : 2\gamma^{\text{nl}}(u_r, \delta u) + \delta S : \gamma^{\text{nl}}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^2)) \right) dv \end{aligned} \right.$$

La résolution de ce problème variationnel suivant  $\delta S$  donne les lois de comportement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta S_{p,q}^1 = D: \left( \gamma^1(\Delta u_{p,q}^1) + 2\gamma^{nl}(u_0, \Delta u_{p,q}^1) + \sum_{r=1}^p \gamma^{nl}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^1) \right) \\ \Delta S_{p,q}^2 = D: \left( \gamma^1(\Delta u_{p,q}^2) + 2\gamma^{nl}(u_0, \Delta u_{p,q}^2) + \sum_{r=1}^p \gamma^{nl}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^2) \right) \end{array} \right. \quad (6.86)$$

en injectant ces deux expressions dans (6.85), on obtient les équations d'équilibre qui ne dépendent que des déplacements :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \left( \left( \gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u) \right) : D: \left( \gamma^1(\Delta u_{p,q}^1) + 2\gamma^{nl}(u_0, \Delta u_{p,q}^1) \right) \right) dv - \lambda_0 P_e^{nc}(\Delta u_{p,q}^1, \delta u) \\ + S_0 : 2\gamma^{nl}(\Delta u_{p,q}^1, \delta u) \\ = \beta_{p,q} h_1 + \sum_{r=1}^p \lambda_r P_e^{nc}(\Delta u_{p-r,q}^1, \delta u) + \int_{\Omega_0} \rho \Delta u_{p,q-2}^1 \delta u \, dv - \int_{\Omega_0} \alpha \Delta u_{p,q-1}^2 \delta u \, dv \\ - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^p \left( S_r : 2\gamma^{nl}(\Delta u_{p-r,q}^1, \delta u) + \Delta S_{p-r,q}^1 : 2\gamma^{nl}(u_r, \delta u) \right) - \gamma^{nl}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^1) : D: \left( \gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u) \right) \right) dv \\ \int_{\Omega_0} \left( \left( \gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u) \right) : D: \left( \gamma^1(\Delta u_{p,q}^2) + 2\gamma^{nl}(u_0, \Delta u_{p,q}^2) \right) \right) dv - \lambda_0 P_e^{nc}(\Delta u_{p,q}^2, \delta u) \\ + S_0 : 2\gamma^{nl}(\Delta u_{p,q}^2, \delta u) \\ = \beta_{p,q} h_2 + \sum_{r=1}^p \lambda_r P_e^{nc}(\Delta u_{p-r,q}^2, \delta u) + \int_{\Omega_0} \rho \Delta u_{p,q-2}^2 \delta u \, dv + \int_{\Omega_0} \alpha \Delta u_{p,q-1}^1 \delta u \, dv \\ - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^p \left( S_r : 2\gamma^{nl}(\Delta u_{p-r,q}^2, \delta u) + \Delta S_{p-r,q}^2 : 2\gamma^{nl}(u_r, \delta u) \right) - \gamma^{nl}(u_r, \Delta u_{p-r,q}^2) : D: \left( \gamma^1(\delta u) + 2\gamma^{nl}(u_0, \delta u) \right) \right) dv \end{array} \right. \quad (6.87)$$

### Discrétisation

La discrétisation par éléments finis des problèmes (6.87) et de la condition supplémentaire mènent à des problèmes d'algèbre linéaire que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \left[ K_t^{nc} \right] \left[ \Delta u_{p,q}^1 \right] = \beta_{p,q} \left[ h_1 \right] + \left[ F_{p,q}^1 \right] + \left[ M \right] \left[ \Delta u_{p,q-2}^1 \right] + \left[ C \right] \left[ \Delta u_{p,q-1}^2 \right] \\ \left[ K_t^{nc} \right] \left[ \Delta u_{p,q}^2 \right] = \beta_{p,q} \left[ h_2 \right] + \left[ F_{p,q}^2 \right] + \left[ M \right] \left[ \Delta u_{p,q-2}^2 \right] - \left[ C \right] \left[ \Delta u_{p,q-1}^1 \right] \\ \left[ \Delta u_{p,q} \right] \left[ \Delta u_{0,0} \right] = 0 \end{cases} \quad (6.88)$$

où les vecteur  $\left[ F_{p,q}^1 \right]$  et  $\left[ F_{p,q}^2 \right]$  ne dépendent que des coefficients  $\lambda_r$ ,  $U_r$  et des vecteurs  $\Delta v_{r,s}^1$  et  $\Delta v_{r,s}^2$  telque  $r+s < q+p$ . La matrice  $\left[ K_t^{nc} \right]$  est la même matrice de rigidité tangente qui nous a permis de calculer les couples  $(U_r, \lambda_r)$ .

$$\text{avec } \left[ \Delta u_{p,q} \right] = \begin{bmatrix} \Delta u_{p,q}^1 \\ \Delta u_{p,q}^2 \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

En résolvant le problème (6.89) à chaque ordre, on obtient les déplacements  $\left[ \Delta u_{p,q} \right]$  et les coefficients  $\beta_{p,q}$ . Une fois que les déplacements sont calculés les lois de comportements nous permettent de calculer les contraintes  $\left[ \Delta S_{p,q} \right]$ .

$$\text{où } \left[ \Delta S_{p,q} \right] = \begin{bmatrix} \Delta S_{p,q}^1 \\ \Delta S_{p,q}^2 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

**Remarque :**

on note que

$$\begin{cases} \left[ \Delta u_{r,s} \right] = 0 & \text{si } r < 0 \text{ où si } s < 0 \\ \left[ \Delta S_{r,s} \right] = 0 & \text{si } r < 0 \text{ où si } s < 0 \end{cases} \quad (6.91)$$

**Résolution du problème discrétisé**

On montre ici les principales étapes de calcul introduites dans le code de calcul EVE pour résoudre le système (6.88). Pour cela, on applique les mêmes démarches que dans [C-1], et on obtient les expressions suivantes :

$$[\mathbf{K}_t^{\text{nc}}] = \int \left( {}^t[\mathbf{B}][\mathbf{D}][\mathbf{B}] + {}^t[\mathbf{G}][\mathbf{S}_0] \right) dv + [\mathbf{K}^{\text{nc}}] \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{p,q}^1] = - \int & \left\{ {}^t[\mathbf{G}] \left( \sum_{r=1}^p {}^t[\mathbf{A}(\Delta u_{p-r,q}^1) [\mathbf{S}_r] + {}^t[\mathbf{A}(\Delta \mathbf{S}_{p-r,q}^1) [\mathbf{u}_r]] \right) \right. \\ & \left. + [\mathbf{B}(u_0)] {}^t[\mathbf{D}] \left( \sum_{r=1}^p [\mathbf{A}(\Delta u_{p-r,q}^1) [\Theta(\mathbf{u}_r)]] \right) \right\} dv \\ & + \sum_{r=1}^p \left( \lambda_r [\mathbf{K}^{\text{nc}}] [\Delta u_{p-r,q}^1] \right) + [\mathbf{M}] [\Delta u_{p,q-2}^1] + [\mathbf{C}] [\Delta u_{p,q-1}^2] \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$[\Delta \mathbf{S}_{p,q}] = [\mathbf{D}] \left\{ [\mathbf{B}(u_0)] [\Delta u_{p,q}^1] + \sum_{r=1}^p [\mathbf{A}(u_r)] [\Theta(\Delta u_{p-r,q}^1)] \right\} \quad (6.94)$$

Pour des questions pratiques, nous avons pris le vecteur  $[\mathbf{h}_2] = [\mathbf{0}]$ . Suite à ce choix, l'algorithme utilisé pour résoudre le problème (6.88) est le suivant :

Évaluation de la solution à l'ordre 0 en 'a' et 0 en  $\omega$  :

On résout :

$$\begin{cases} [\Delta u_{0,0}^1] = [\mathbf{K}_t^{\text{nc}}]^{-1} [\mathbf{h}_1] \\ \beta_{0,0} = 1 \\ [\Delta \mathbf{S}_{0,0}^1] = [\Delta u_{0,0}^2] = [\Delta \mathbf{S}_{0,0}^2] = [\mathbf{0}] \end{cases} \quad (6.95)$$

Évaluation de la solution à l'ordre p en 'a' et q en  $\omega$  :

A chaque point de Gauss, on évalue :

$$\left. \begin{aligned}
 1) \quad [\Delta S_{p,q}^1]_{nl} &= [D] \left\{ \sum_{r=1}^p [A(u_r)] [\Theta(\Delta u_{p-r,q}^1)] \right\} \\
 2) \quad [\Delta S_{p,q}^1]_* &= \left\{ \sum_{r=1}^p [A(u_r)] {}^t[\Delta S_{p-r,q}^1] + [A(\Delta u_{p-r,q}^1)] {}^t[S_r] \right\} \\
 3) \quad [F_{p,q}^1]_{nl} &= - \int \left\{ {}^t[G] {}^t[\Delta S_{p,q}^1]_* + [B(u_0)] {}^t[\Delta S_{p,q}^1]_{nl} \right\} \\
 4) \quad [F_{p,q}^1] &= [F_{p,q}^1]_{nl} + \sum_{r=1}^p (\lambda_r [K^{nc}] [\Delta u_{p-r,q}^1]) \\
 &\quad + [M] [\Delta u_{p,q-2}^1] + [C] [\Delta u_{p,q-1}^2]
 \end{aligned} \right\}$$

et on résout

$$5) \quad [\Delta u_{p,q}^1]_{nl} = [K_t^{nc}]^{-1} [F_{p,q}^1]$$

Les inconnues sont données par:

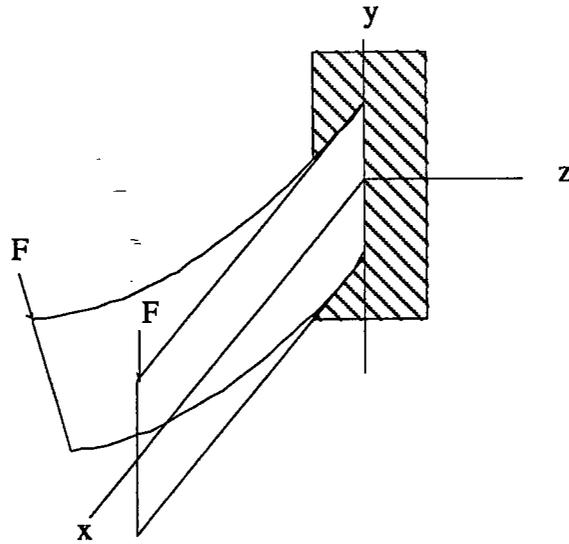
$$6) \quad \beta_{p,q} = \frac{[\Delta u_{p,q}^1]_{nl} {}^t[\Delta u_{0,0}^1]}{[\Delta u_{0,0}^1] {}^t[\Delta u_{0,0}^1]} \quad (6.96)$$

$$7) \quad [\Delta u_{p,q}^1] = \beta_{p,q} [\Delta u_{0,0}^1] + [\Delta u_{p,q}^1]_{nl}$$

Pour calculer les inconnues  $[\Delta u_{p,q}^2]$  et  $[\Delta S_{p,q}^2]$ , on refait la même procédure que précédemment en éliminant les étapes (6) et (7) car  $[h_2] = [0]$ .

### Application

Notre application a été consacré au flambage d'une poutre soumise à des forces suivieuses c'est à dire à des forces qui suivent complètement les rotations en leurs points d'applications. Pour l'analyse de la stabilité linéaire, on suppose que le vecteur force reste attaché au plan de la section et qu'il suit la rotation de la section. Pour présenter les performances de notre algorithme pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté, on considère une poutre encastree à une extrémité et chargée transversalement à l'autre. Cette poutre a été discrétisée avec un maillage régulier de 40 éléments DKT.



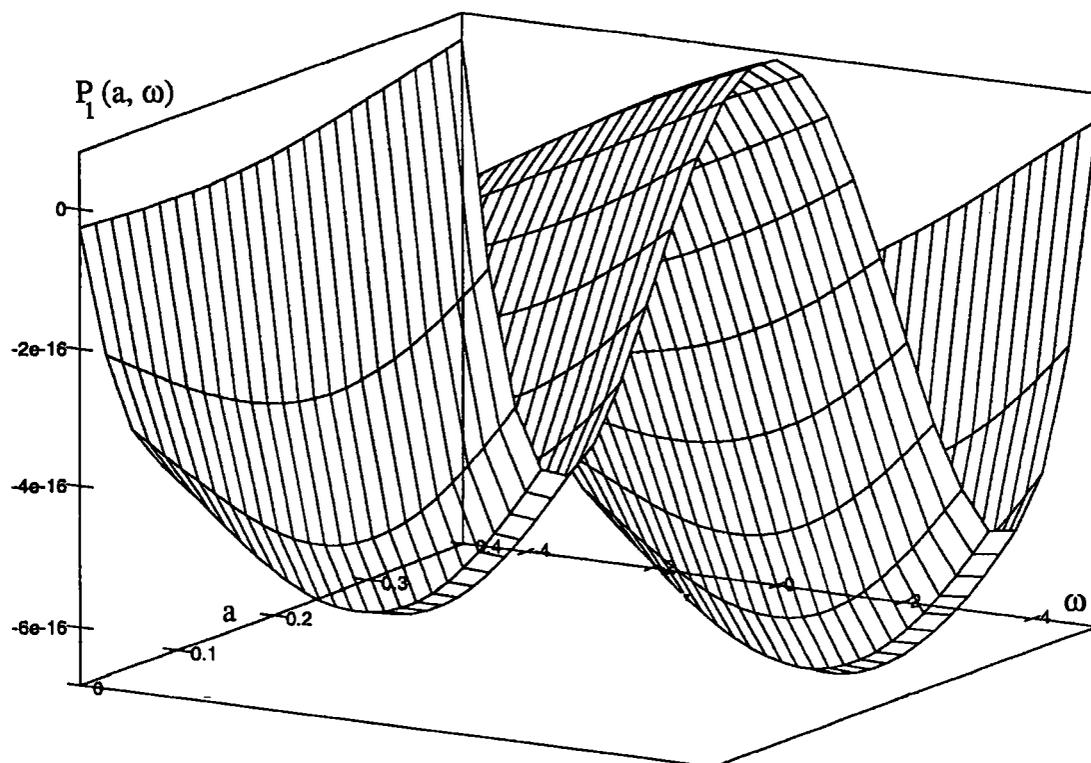
**figure 6.1** : Poutre soumise à une force suiveuse à son extrémité. Carctéristiques de la poutre : longueur = 10, largeur = 3, épaisseur = 0.3, module de Young  $E = 100000$ , la masse volumique  $\rho = 0.001$ .

Pour ce problème, nous avons calculé les termes  $\beta_{i,j}$  jusqu'à l'ordre 22 en  $a$  et en  $\omega$ . Ceci nous a permis de calculer l'indicateur de bifurcation de Hopf  $\beta(a, \omega)$  en représentation polynomiale. En suivant, les mêmes démarches discutées précédemment, nous avons transformé cette série en fraction rationnelle et par suite déterminé la fonction  $P_1(a, \omega)$  en utilisant le logiciel de calcul formel Maple.

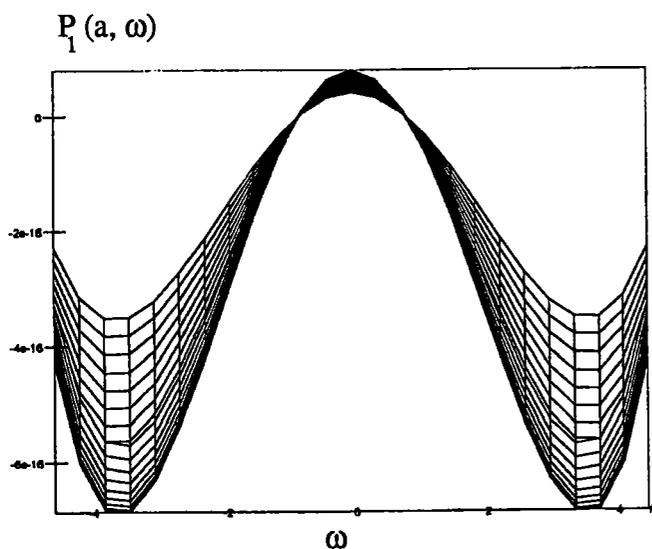
Sur la figure (6.2), on présente la fonction  $P_1(a, \omega)$  calculée en transformant la série polynomiale en fraction rationnelle avec un approximant  $P[6/4]$  en  $\omega$  et en utilisant pour le paramètre 'a' les approximants suivants :

$P_0[11/10]$	équivalent à 'a'
$P_2[9/10]$	équivalent à '1/a'
$P_4[7/10]$	équivalent à '1/a <sup>3</sup> '
$P_6[5/10]$	équivalent à '1/a <sup>5</sup> '
$P_8[3/10]$	équivalent à '1/a <sup>7</sup> '
$P_{10}[1/10]$	équivalent à '1/a <sup>9</sup> '

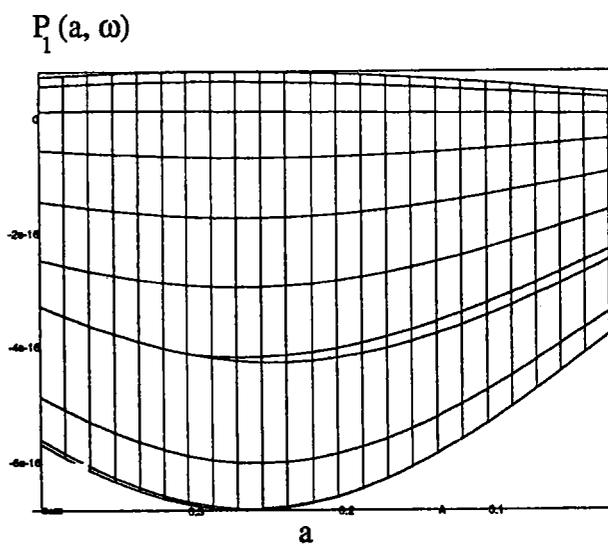
Sur cette figure, on voit nettement que la fonction  $P_1(a, \omega)$  possèdent deux minimums donnés par les couple  $(a_c = 0.26, \omega_c = \pm 3.47)$ . On note aussi que la fonction  $P_1(a_c = 0.26, \omega_c = \pm 3.47)$  est approximativement nulle pour cette valeur critique. On a trouvé également qu'en ces points l'indicateur de bifurcation est nul. Le point  $(a_c = 0.26, \omega_c = \pm 3.47)$  correspond alors au point de bifurcation de Hopf pour ce problème.



(a)



(b)



(c)

**figure 6.2** : Représentation de la fonction  $P_1(a, \omega)$  en utilisant l'approximant de Padé  $P[6/4]$  en  $\omega$  et les approximants  $P_0[11/10]$ ,  $P_2[9/10]$ ,  $P_4[7/10]$ ,  $P_6[5/10]$ ,  $P_8[3/10]$  et  $P_{10}[1/10]$  en 'a'.

(a) Représentation spatiale. (b) Vu [0-90]. (c) Vu [90-90]. Le point de bifurcation de Hopf est donné par le couple  $(a_c = 0.26, \omega_c = \pm 3.47)$ .

Pour confirmer ce résultat, nous avons calculé la valeur critique  $a_c$  en utilisant les travaux de Como[C-2]. Nous avons obtenu une valeur  $a_c$  de l'ordre de 0.246. Ce même résultat a été confirmé aussi en utilisant d'autres stratégies d'approximants de Padé.

## 6.4 Conclusion

Nous avons montré que l'association d'une méthode d'indicateur de bifurcation et d'une méthode asymptotique permet la détection des points de bifurcation de Hopf.

Par cette méthode nous avons déterminé le point de bifurcation de Hopf pour une poutre soumise à une force suiveuse. Mais, cette méthode présente certaines difficultés, en particulier la gestion des séries à deux paramètres. La transformation de ces séries en approximants de Padé entraîne des formules très grandes et difficiles à résoudre. Nous pensons qu'il faudrait garder la technique de l'indicateur, mais le calculant d'une autre manière.

## Références :

- A-1] Argyris J.H., Mlejnek H.P., 1991, "Dynamics of structures" Vol 5, Elsevier Sciences publishers, Amsterdam, North Holland.
- [B-1] Ben saadi E.H., 1995, "Calcul des branches de solutions périodiques et des points de bifurcation de Hopf par une Méthode Asymptotique Numérique", Thèse de l'Université de Metz, Mars 1995.
- [B-2] Bolotin V.V., 1963, "Nonconservative problems of the theory of elastic stability", Pergamon press, New York.
- [C-1] Cochelin B., 1994-b, "Méthodes Asymptotiques Numériques pour le calcul non linéaire géométrique des structures élastiques", Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, Mars 1994.
- [C-2] Como M., 1966, "Lateral buckling of cantilever subjected to a transverse follower forces, Internat. J. Solids Structures, Vol 2, pp 515, 523
- [D-1] Demay Y., Iooss G., 1984, "Calcul des solutions bifurquées pour le problème de Couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation", Journal de Mécanique théorique et appliquée, pp 193-216.
- [H-1] Hassard B.D., Kazirnoff N.D., Wan Y.H., 1981, "Theory and application of Hopf bifurcation", Cambridge university press.
- [I-1] Iooss G., Joseph D.D., 1991, "Elementary stability and bifurcation theory", Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[J-1] Jepson A.D., 1981, "Numerical Hopf bifurcation", Thèse à l'institut de technologie en Californie.

[K-1] Kubicek M., Holodoniok M., 1983, "Evaluation of Hopf bifurcation points in parabolic equations describing heat and mass transfer chemical reactors", Chem. Eng. Science, Vol 39, pp 593-599.

[M-1] Marsden J.E., M. McCracken, 1976, "Hopf bifurcation and its applications" Springer-Verlag, New York.

[S-1] Seydel R., 1988, "From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis", Elsevier, New York.

[V-1] Valid R., 1995, "The nonlinear theory of shells through variation principles : from elementary algebra to differential geometry", John Wiley and Sons Ltd, England.

[Z-1] Ziegler H., 1977, "principales of structural stability", 2° eds, Birkhause, Basel/Stuttgart.

## 7. Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une méthode asymptotique numérique pour le suivi des branches de solutions des écoulements des fluides visqueux incompressibles. On a contribué aussi à l'extension de cette méthode pour la détection des points de bifurcation stationnaires sur les branches de solutions caractérisant les écoulements visqueux, ainsi que la détection des points de bifurcations de Hopf sur une branche représentant une structure soumise à des forces non conservatives.

Dans la première partie, nous confirmons la supériorité des méthodes asymptotiques numériques pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles par rapport aux méthodes itératives classiques. D'une part, les coûts de calculs sont faibles car la détermination d'une branche de solutions sous forme d'une série asymptotique ne nécessite qu'une seule factorisation de la matrice de rigidité globale. D'autre part, l'automatisation des méthodes asymptotiques par le biais des méthodes de continuation a rendu ces méthodes plus robustes et plus faciles à utiliser. Dans le cas de l'écoulement à l'intérieur de deux cylindres, cette méthode nous a permis de calculer la branche de solution fondamentale ainsi que les deux branches bifurquées, après une forte accumulation, en ne variant que le paramètre de précision. Dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, l'explication des arrêts numériques reste alors un problème ouvert, mais des travaux récents ont montré que ces arrêts n'étaient pas forcément représentatifs du problème continu.

Dans la deuxième partie, nous avons adapté la méthode asymptotique pour la détection des points de bifurcation stationnaires sur une branche de solution. Grâce à un problème perturbé, nous avons introduit un indicateur de bifurcation fonction d'un seul paramètre (paramètre de contrôle) qui se prête bien aux développements asymptotiques. L'avantage de cet indicateur réside dans le fait qu'on a une représentation polynomiale (analytique). Le point de bifurcation correspond aux zéros de l'indicateur à l'intérieur du rayon de convergence des séries. L'autre avantage, c'est que la représentation polynomiale peut se transformer facilement en fraction rationnelle ce qui permet de déterminer les points de bifurcation au delà du rayon de convergence des séries. L'application de cette méthode s'est montré très efficace pour les fluides visqueux incompressibles.

Dans la troisième partie, nous avons consacré notre étude à la détection des points de bifurcation de Hopf. Comme dans la deuxième partie, nous avons introduit dans le problème perturbé un indicateur de bifurcation dépendant de deux paramètres (le

paramètre de contrôle 'a' et la pulsation  $\omega$ ). Cet indicateur a été cherché en séries entières par rapport à ces deux paramètres puis en fraction rationnelle grâce aux approximants de Padé. Nous avons établi aussi que le numérateur de cette fraction est toujours positif. Par conséquent détecter le point de bifurcation de Hopf revient à chercher le couple  $(a_c, \omega_c)$  correspondant au minimum de ce numérateur. L'application de cet algorithme pour le problème d'une poutre soumise à des forces suiveuses a donné des résultats satisfaisants. Son application pour des problèmes d'écoulements de fluides et pour des problèmes d'interactions fluide-structure sera parmi les perspectives de ce travail.

**Annexe A : Méthode de Padé à dénominateur commun.**

Le vecteur  $U$  est cherché en séries entières par rapport au paramètre 'a', sous la forme suivante :

$$U = U_0 + a U_1 + a^2 U_2 + a^3 U_3 + \dots + a^p U_p \quad (A1)$$

Après construction de la base orthogonale suivante :

$$U_j^\perp = \frac{1}{\alpha_j^j} \left\{ U_j - \sum_{n=2}^{j-1} \alpha_n^j U_n^\perp \right\} \quad \text{avec} \quad U_1 = U_1^\perp \quad (A2)$$

Le vecteur  $U$  se réécrit dans cette base comme suit :

$$U = U_0 + aU_1 + \sum_{j=2}^p a^j f_j(a) U_j^\perp \quad (A3)$$

$$\text{avec} \quad f_j(a) = \sum_{i=j}^p a^{i-j} \alpha_i^j \quad (A4)$$

**Calcul des  $\alpha_i^j$  en fonction des  $U_i$  :**

Pour calculer les coefficients  $\alpha_i^j$ , on projette le vecteur  $U_i^\perp$  donné par la formule (A2) sur le vecteur  $U_j$  et on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_i^j &= \langle U_j, U_i^\perp \rangle = \left\langle U_j, \frac{1}{\alpha_i^i} \left\{ U_i - \sum_{n=2}^{i-1} \alpha_n^i U_n^\perp \right\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha_i^i} \left( \langle U_j, U_i \rangle - \sum_{n=2}^{i-1} \alpha_n^i \langle U_j, U_n^\perp \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_i^i} \left( \langle U_j, U_i \rangle - \sum_{n=2}^{i-1} \alpha_n^i \alpha_n^j \right) \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\left\{ c_0^{p-1} = \alpha_{p-1}^{p-1} \right. \quad (A9)$$

et à l'ordre 1, on obtient la relation supplémentaire suivante :

$$0 = \alpha_p^{p-1} + \alpha_{p-1}^{p-1} d_1 \quad (A10)$$

En résolvant tous les équations supplémentaires, les coefficients  $d_j$  sont déterminés de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = 1 \\ \text{et pour } j \geq 1, \text{ on a :} \\ d_j = \frac{1}{\alpha_{p-j}^{p-j}} \left( \sum_{n=0}^{j-1} \alpha_{p-n}^{p-j} d_n \right) \end{array} \right. \quad (A11)$$

**Réécriture du vecteur  $U$  en fraction rationnelle :**

En introduisant les relations (A6) dans (A3), on obtient le vecteur  $U$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U(a) = & U_0 + a U_1 + a^2 U_2^{\perp} \left( \frac{c_0^2 + a c_1^2 + \dots + a^{p-3} c_{p-3}^2}{1 + a d_1 + a^2 d_2 + \dots + a^{p-2} d_{p-2}} \right) \\ & + a^3 U_3^{\perp} \left( \frac{c_0^3 + a c_1^3 + \dots + a^{p-4} c_{p-4}^4}{1 + a d_1 + a^2 d_2 + \dots + a^{p-2} d_{p-2}} \right) + \dots + \\ & + a^{p-1} U_{p-1}^{\perp} \left( \frac{c_0^{p-1}}{1 + a d_1 + a^2 d_2 + \dots + a^{p-2} d_{p-2}} \right) \end{aligned} \quad (A12)$$

puis on remplace les coefficients  $c_i^j$  en fonction des coefficients  $d_j$  (par exemple (A7) et (A9)),  $U(a)$  devient :

$$U(a) = U_0 + a U_1 + \sum_{k=2}^{p-1} a^k U_k \left( \frac{\sum_{n=0}^{p-k-1} a^n d_n}{\sum_{n=0}^{p-2} a^n d_n} \right) \quad (\text{A13})$$

Pour déterminer le paramètre  $\lambda$  en approximant de Padé à dénominateurs commun, on applique la même démarche que précédemment, et on obtient :

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a \lambda_1 + \sum_{k=2}^{p-1} a^k \lambda_k \left( \frac{\sum_{n=0}^{p-k-1} a^n d_n}{\sum_{n=0}^{p-2} a^n d_n} \right) \quad (\text{A14})$$