



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Abderrahim SQALLI HOUSSAINI

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : *Sciences de l'Ingénieur*
OPTION : *Génie Mécanique*

**CHAMPS THERMIQUES ET MECANIKES
INDUITS PAR LE MOUVEMENT DES
DISLOCATIONS**

Soutenue le 10 Avril 1996 devant le Jury composé de :

J.R. KLEPACZKO	<i>Université de Metz</i>	Président
M. BERVEILLER	<i>ENI, Metz</i>	Dir. de thèse
A. CHRYSOCHOOS	<i>Université de Montpellier 2</i>	Rapporteur
O. FASSI-FEHRI	<i>ENSET, Rabat</i>	Rapporteur
C. LEXCELLENT	<i>Université de Besançon</i>	Rapporteur
A. EBERHARDT	<i>ENI, Metz</i>	Examineur
A. CARMASOL	<i>ENI, Metz</i>	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
U. R. associée au C.N.R.S., n° 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01

S/M3 96/5

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv	19960105
Cote	S/M3 96/5
Loc	Magasin

Abderrahim SQALLI HOUSSAINI

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : *Sciences de l'Ingénieur*
OPTION : *Génie Mécanique*

**CHAMPS THERMIQUES ET MECANIQUE
INDUITS PAR LE MOUVEMENT DES
DISLOCATIONS**

Soutenue le 10 Avril 1996 devant le Jury composé de :

J.R. KLEPACZKO	<i>Université de Metz</i>	Président
M. BERVEILLER	<i>ENI, Metz</i>	Dir. de thèse
A. CHRYSOCHOOS	<i>Université de Montpellier 2</i>	Rapporteur
O. FASSI-FEHRI	<i>ENSET, Rabat</i>	Rapporteur
C. LEXCELLENT	<i>Université de Besançon</i>	Rapporteur
A. EBERHARDT	<i>ENI, Metz</i>	Examineur
A. CARMASOL	<i>ENI, Metz</i>	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
U. R. associée au C.N.R.S., n° 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01

REMERCIEMENTS

C'est au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (L.P.M.M.) de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique (I.S.G.M.P.) que j'ai eu le privilège de pouvoir effectuer mes travaux de recherches. Mettre sur les rails un nouvel axe de recherche dans ce laboratoire été pour moi un vrai défi et une réelle satisfaction.

Je voudrais adresser à Monsieur le Professeur Janusz Ramon KLEPACZKO, Directeur de Recherche au C.N.R.S., mes plus vifs remerciements pour m'avoir fait l'honneur de présider mon Jury de thèse.

Il m'est agréable de témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Marcel BERVEILLER. Il m'a fait bénéficier de sa grande compétence grâce à ses conseils et sa clairvoyance qui m'ont constamment guidé et qui ont largement contribué à l'avancement de mes recherches. Ses encouragements permanents et son amical soutien m'ont grandement aidé dans les moments de doute et d'hésitation ; qu'il trouve ici l'expression de mes très sincères remerciements.

Que Messieurs André CHRYSOCHOOS, Professeur à l'université de Montpellier 2, Omar FASSI-FEHRI, Professeur à l'université Mohammed V et Directeur de l'E.N.S.E.T. de Rabat et Christian LEXCELLENT, Professeur à l'université de Besançon trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je suis très sensible à l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer au Jury.

Qu'il me soit permis de remercier vivement Monsieur André EBERHARDT, Professeur à l'E.N.I. de Metz, pour m'avoir fait bénéficier de sa compétence dans le domaine de *la physique des dislocations* et pour l'honneur qu'il me fait en participant à mon Jury de thèse.

Les outils informatiques utilisés dans ce travail font appel au logiciel de calcul formel *Mathematica*. Il est évident que sans les compétences en la matière de Monsieur Alain CARMASOL, maître de conférence à l'E.N.I. de Metz, la compréhension et l'utilisation de ce logiciel ne seraient une tâche facile.

J'exprime ma plus profonde sympathie à tous les membres du L.P.M.M., en particulier ceux qui n'ont ménagé ni leurs temps ni leurs efforts pour me soutenir moralement et scientifiquement au cours de ce travail.

Je réserve finalement ma profonde reconnaissance et mes chaleureux remerciements à mes parents, mes frères et soeurs qui m'ont manqués tout le long de ces années durant lesquelles, leurs soutiens étaient source de mes forces.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
<u>Premier chapitre:</u>	
ELEMENTS DE THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS	
I-1- Introduction.....	5
I-2- Description thermodynamique	6
I-3- Premier principe de la thermodynamique - Equation bilan d'énergie	7
I-4- Deuxième principe de la thermodynamique - Entropie.....	9
I-5- Méthode de l'état local.....	10
I-5-1- Analyse de la dissipation.....	12
I-5-2- Calcul de la dissipation intrinsèque dans le cas d'un milieu continu régulier	14
I-6- Calcul de la puissance intrinsèque dissipée dans le cas d'une discontinuité mobile.....	17
I-6-1- Introduction.....	17
I-6-2- Rappels mathématiques	18
a- Dérivée temporelle par rapport à un point mobile.....	18
b- Vitesse de variation par rapport à un domaine mobile.....	18
c- Intégrale d'une fonction singulière.....	19
I-6-3- Position du problème.....	20
I-6-4- Conséquence du premier principe.....	21
a- Application du premier principe au milieu isolé Ω_t	21
b- Application du premier principe au milieu non isolé Ω_Σ	23
I-6-5- Conséquence du second principe.....	24
a- Application du second principe au milieu isolé Ω_t	25
b- Application du second principe au milieu non isolé Ω_Σ	25
c- Application du second principe au milieu V_Σ	28
I-7- Conclusion.....	32
Références bibliographiques.....	33

Deuxième chapitre:

LES DISLOCATIONS DANS LES MILIEUX CONTINUS

II-1- Introduction.....	36
II-2- Rappel des équations fondamentales de la mécanique	
des milieux continus.....	37
II-2-1- Cinématique.....	37
II-2-2- Statique.....	38
II-2-3- Conditions de compatibilité.....	40
II-2-4- Tenseur d'incompatibilité.....	40
II-3- Rappel de la théorie élastique des dislocations.....	41
II-3-1- Préliminaire.....	41
II-3-2- Description géométrique d'une dislocation	42
II-3-3- Tenseur densité de dislocations.....	44
II-3-4- Méthodes de calcul des contraintes internes	47
a- Contraintes internes.....	47
b- Méthode du potentiel des contraintes.....	48
c- Méthode du tenseur de Green	50
II-3-5- Application au cas d'une dislocation coin rectiligne et isolée.....	53
II-3-6- Energie élastique de la dislocation coin rectiligne.....	56
II-4- Analyse des différentes forces exercées sur les singularités	
élastiques	57
II-4-1- Définition de la force sur une singularité élastique.....	57
II-4-2- Les différentes forces exercées sur les singularités élastiques	59
II-5- Force sur une dislocation	63
II-5-1- Cas d'une dislocation quelconque	63
II-5-2- Cas particulier d'une dislocation coin rectiligne	65
II-6- Conclusion.....	65
Références bibliographiques.....	66

Troisième chapitre:

**ETUDE DES CHAMPS THERMOELASTIQUES ASSOCIES
AU MOUVEMENT DES DISLOCATIONS**

III-1- Introduction	69
III-2- Equations de l'évolution thermomécanique	
d'une discontinuité mobile.....	69
III-2-1- Equation de propagation de la chaleur.....	69
III-2-2- Calcul de la dissipation intrinsèque volumique pour un milieu élastique.....	71
III-2-3- Equations du mouvement.....	71
III-3- Equations de la thermoélasticité couplée.....	72
III-4- Méthodes de résolution des équations	
de la thermoélasticité couplée.....	74
III-4-1- Méthode de W. Nowacki.....	75
III-4-2- Méthode de G. Eason & I.N. Sneddon.....	77
III-4-3- Méthode de H.D. Bui	78
III-5- Cas particulier d'une dislocation rectiligne coin mobile.....	79
III-5-1- Présentation du problème.....	79
III-5-2- Calcul du champ de température	80
III-5-3- Calcul des contraintes internes thermiques	90
III-5-4- Calcul de l'énergie élastique d'origine thermique	96
III-6- Application au cas des ensembles de dislocations.....	100
III-6-1- Les empilements de dislocations	101
III-6-2- Les bandes de cisaillement.....	102
III-7- Conclusion	104
Références bibliographiques.....	105

Quatrième chapitre:

CALCUL DE LA FORCE THERMODYNAMIQUE G

IV-1- Introduction	107
IV-2- Analyse thermoélastoplastique du problème d'une discontinuité mobile	107
IV-3- Cas du mouvement uniforme et quasi statique d'une dislocation coin rectiligne	110
IV-3-1- Résolution de l'équation thermique	112
IV-3-2- Résolution des équations du mouvement	114
IV-4- Calcul de la force thermodynamique G	116
IV-4-1- Calcul de la force G^c	119
a- Calcul de l'intégrale J_1^{cp}	120
b- Calcul de l'intégrale J_1^{cth}	121
IV-4-2- Calcul de la force G^E	122
IV-4-3- Calcul de la force G^d	123
a- Calcul de l'intégrale J_1^{dp}	124
b- Calcul de l'intégrale J_1^{dth}	125
c- Calcul de l'intégrale J_1^{dpth}	126
IV-5- Conclusion	132
Références bibliographiques	133
CONCLUSION	134

ANNEXES

Annexe A:

Calcul de la dissipation intrinsèque..... 136

A-1- Calcul de l'énergie libre d'Helmholtz $W(\underline{E}, \underline{\epsilon}^{\text{iné}})$ 137

A-2- Calcul de la puissance des efforts extérieurs141

Annexe B:

Comparaison entre les contraintes élastiques et les contraintes thermiques associées au mouvement d'une dislocation coin rectiligne..... 143

Annexe C:

Calcul de l'intégrale $u_{n,m}^{\text{th}}$ 146

C-1- Cas tridimensionnel..... 146

C-2- Cas bidimensionnel..... 148

Annexe D:

Calcul des déformations inélastiques macroscopiques 150

D-1- Calcul de la déformation thermique macroscopique 150

D-2- Calcul de la déformation plastique macroscopique 152

Références bibliographiques 154

INTRODUCTION

Au cours de la modélisation du comportement des matériaux, il est difficile d'ignorer les processus irréversibles. Ce sont des processus faisant intervenir des déformations inélastiques ou anélastiques s'accompagnant, comme dans tout mécanisme dissipatif, d'une dissipation intrinsèque provoquant un échauffement du solide. Depuis plusieurs années, des expériences de plus en plus poussées sont faites pour étudier le comportement des matériaux et surtout l'origine de ce phénomène d'échauffement. A partir de ces expériences, on a proposé plusieurs lois phénoménologiques complexes par le grand nombre de paramètres qu'elles contiennent et qu'il faut de surplus déterminer expérimentalement.

Pratiquement, tout phénomène inélastique ou anélastique est lié à la propagation de défauts (ponctuels, linéaires ou interfaces). L'analyse thermomécanique de tel phénomène montre que la source de chaleur peut être identifiée aux défauts mobiles créant ainsi des gradients thermiques importants. Ceci a plusieurs conséquences:

⇒ Un échauffement non uniforme qui influence d'une façon assez complexe le comportement global du matériau dans la mesure ou les propriétés thermomécaniques de ce dernier dépendront de la température (la chaleur spécifique, la cission critique...).

⇒ Les défauts sont évidemment accompagnés d'un champ de contrainte interne propre auquel s'ajoute, du fait du gradient thermique, des contraintes thermiques.

⇒ Ces champs de contraintes sont à l'origine d'une énergie élastique qui vient s'ajouter à celle due au chargement, ce qui complique l'analyse thermomécanique.

Pour une topologie quelconque de la microstructure, l'étude du problème précédent est très compliquée. C'est pour cette raison que, dans ce travail, on restreint cette topologie à une dislocation coin, rectiligne, isolée et mobile à vitesse propre uniforme. Mais les résultats obtenus sont cependant extensibles à des situations topologiques voisines:

- Maclage

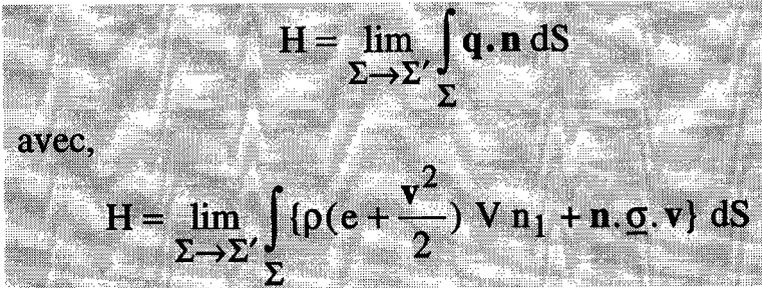
- Transformations martensitiques
- Bandes de cisaillement
- Empilements de dislocations

L'étude qu'on peut nommer "aspect thermique du mouvement des dislocations" a été en partie abordée, depuis plusieurs années, par J.D.Eshelby et al.[1] et par J.J.Gilman [2]. Ils se sont limités à l'étude du champ thermique créé par une dislocation mobile.

Pour accomplir ce travail, on s'est inspiré du problème de la fissure mobile [3], qui est fondamentalement très différent de celui des dislocations vu son aspect hétérogène.

Le présent travail a pour objectif, par une approche thermomécanique, d'inclure l'aspect thermique à la véritable plasticité introduite par le mouvement des dislocations. Globalement, c'est un problème très compliqué. Pour cela, on se limite à quelques hypothèses simplificatrices pour pouvoir l'aborder.

Dans le chapitre I, on rappelle les principes de la thermodynamique qui permettent d'une part d'introduire les forces thermodynamiques et d'autre part de calculer la dissipation intrinsèque pour un milieu régulier (absence ou immobilité des défauts). Leur application à un milieu contenant un défaut (singularité ou discontinuité) mobile conduit au fait que toute la dissipation intrinsèque est concentrée sur la discontinuité mobile constituant ainsi la source de chaleur d'intensité H:


$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

avec,

$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \left\{ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \right\} dS$$

Dans le chapitre II, on se limite au cas des dislocations comme cas particulier des défauts de structure. On rappelle la théorie élastique des

dislocations, les méthodes de calcul des contraintes internes ainsi que l'énergie élastique qui leur est associée. On termine ce chapitre par un calcul de la force que peut subir une dislocation quelconque [4,5] qu'on applique par la suite au cas particulier de la dislocation coin.

Dans le chapitre III, l'aspect thermique du mouvement de la dislocation coin est introduit en ignorant la déformation plastique. Tous les champs thermomécaniques ainsi que l'énergie élastique associés à la dislocation sont alors calculés et l'effet de la vitesse propre est discuté. Une étude quantitative de deux groupements de dislocations est faite en fin de ce chapitre.

Dans le chapitre IV, le couplage thermomécanique est introduit pour calculer la force thermodynamique G , déduite du premier chapitre, qui s'exerce sur la dislocation coin mobile:

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \{w n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}\} dS$$

Ceci est possible connaissant les champs thermomécaniques déterminés dans les chapitres II et III.

On termine ce mémoire par une conclusion générale et par des annexes portant sur le calcul de la dissipation intrinsèque en utilisant les champs macroscopiques et internes (Annexe A). Dans l'annexe B, on compare les différentes contraintes internes introduites par la dislocation rectiligne coin mobile. Pour calculer la force thermodynamique G , on aura à développer des expressions portant sur le tenseur de Green (Annexe C) et à calculer les déformations inélastiques macroscopiques (Annexe D).

- [1] **J.D.Eshelby & P.L.Pratt**, *Note on the Heating Effect of Moving Dislocations*, Acta.Metallurgica, Vol.4, (1956).
- [2] **J.J.Gilman**, *Micromechanics of Flow in Solids*, McGraw-Hill Book Company, (1969).
- [3] **H.D.Bui, A.Ehrlacher & Q.S.Nguyen**, *Propagation de Fissure en Thermoélasticité Dynamique*, J.Mécanique, Vol.19, No.4, p.p.697-723, (1980).
- [4] **J.D.Eshelby**, *The Continuum Theory of Lattice Defects*, Sol.Stat.Phys., Ed.F.Seitz & D.Turnbull (Academic Press Inc., New York), Vol.3, p.p.79-144, (1956).
- [5] **S.D.Gavazza**, *Energy Release Rates and Associated Forces on Singular Dislocations*, Dissertation, Stanford University, (1975).

CHAPITRE I

ELEMENTS DE THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

I-1- Introduction	5
I-2- Description thermodynamique.....	6
I-3- Premier principe de la thermodynamique -	
Equation bilan d'énergie	7
I-4- Deuxième principe de la thermodynamique - Entropie	9
I-5- Méthode de l'état local.....	10
I-5-1- Analyse de la dissipation.....	12
I-5-2- Calcul de la dissipation intrinsèque dans le cas d'un milieu continu régulier	14
I-6- Calcul de la puissance intrinsèque dissipée dans le cas d'une discontinuité mobile	17
I-6-1- Introduction	17
I-6-2- Rappels mathématiques.....	18
I-6-3- Position du problème.....	20
I-6-4- Conséquence du premier principe.....	21
I-6-5- Conséquence du second principe	24
I-7- Conclusion	32
Références bibliographiques	33

I-1- Introduction

Dans le cadre classique de l'étude du comportement des matériaux traitée par la mécanique des milieux continus, la réponse d'un système mécanique soumis à une sollicitation quelconque exige *a priori* une identification claire du système en question, de sa configuration et de l'ensemble des forces (extérieures et intérieures) agissant sur le milieu [1]. Il est actuellement connu que cette réponse du système, traduite en terme de déformation par exemple, n'est pas en général un phénomène purement mécanique, elle s'accompagne également d'effets thermiques [2]. La conception des structures nécessite donc un élargissement du champ d'études au comportement thermomécanique des matériaux. La thermodynamique est dans ce cas l'outil le plus intéressant pour tenir compte de ce double comportement (mécanique et thermique) de la déformation des milieux continus.

Depuis plusieurs décennies, la thermodynamique n'a cessé de connaître d'innombrables développements [3-7], mais en général, elle constitue une extension des trois caractéristiques de la mécanique classique (système, configuration et forces) aux cinq concepts suivants: *température, énergie interne, entropie, apport de chaleur et flux de chaleur*. En ce qui concerne les quatre premiers, se sont des champs scalaires alors que le flux de chaleur est un champ vectoriel, tous définis sur la globalité du milieu. D'autre part, il faut ajouter aux principes généraux issus de la mécanique classique, deux autres principes: *Le premier principe de la thermodynamique* qu'on appelle souvent *l'équation bilan d'énergie* et *le second principe de la thermodynamique* qui conduit à *l'inégalité de Clausius-Duhem*. Ainsi, la formulation de toute loi de comportement doit être en accord avec ces deux principes.

Un milieu continu ne peut que rarement être dans une situation régulière. Ceci vient du fait que des discontinuités ou singularités peuvent se trouver ou être facilement créées dans sa structure. L'objet de ce chapitre est donc d'examiner le comportement thermomécanique de telles situations en traitant d'abord le cas régulier. On a jugé utile de rappeler les deux principes de la thermodynamique pour en déduire les différentes formes de dissipation en se basant sur une méthode analogue à celle utilisée notamment par H.D.Bui

et col.[8] et L.B.Freund [9] dans le cas des milieux fissurés. On calculera par la suite la force thermodynamique exercée sur une singularité quelconque sous la forme d'une intégrale curviligne qui constitue une extension de celle obtenue par J.D.Eshelby avec le tenseur d'énergie-impulsion (energy-momentum) [10].

I-2- Description thermodynamique

Un processus thermodynamique est défini comme une évolution au cours du temps de la configuration du système, de l'ensemble des forces, de la température, de l'énergie interne, de l'entropie, de l'apport et du flux de chaleur [4].

En se limitant dans tout ce qui suit aux hypothèses de petites perturbations HPP (petites déformations et petites rotations), le processus thermodynamique sera donc décrit par huit fonctions qui dépendent de la position \mathbf{x} et du temps t :

- 1- Le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ décrivant le mouvement du milieu.
- 2- Le tenseur de contraintes symétrique $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}(\mathbf{x}, t)$.
- 3- Les forces volumiques $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ par unité de masse exercées sur le milieu par des chargements extérieurs.
- 4- L'énergie interne spécifique $e = e(\mathbf{x}, t)$.
- 5- L'apport de chaleur $h = h(\mathbf{x}, t)$ par unité de masse et de temps défini dans tout le volume.
- 6- Le vecteur flux de chaleur $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ au travers de la frontière.
- 7- L'entropie spécifique $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$.
- 8- La température locale $T(\mathbf{x}, t)$ supposée toujours positive ($T > 0$).

Ce processus doit être compatible avec les principes de la mécanique et avec la loi de conservation de l'énergie. Ceci conduira à faire un rappel du

premier et du second principe de la thermodynamique pour en déduire les différentes lois de conservation.

I-3- Premier principe de la thermodynamique - Équation bilan d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique ou loi de conservation de l'énergie postule qu'à chaque instant, la somme de la dérivée particulaire d'une fonction d'état thermodynamique du système appelée *énergie interne* E et de l'énergie cinétique K est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs P_e exercés sur le système et du taux de chaleur \dot{Q} reçue par le système:

$$\dot{E} + \dot{K} = P_e + \dot{Q} \quad (\text{I-1})$$

Pour définir la puissance des efforts extérieurs, on suppose que les éléments du système n'exercent pas entre eux d'actions à distance, c'est à dire on n'a plus que:

→ des forces de volume \mathbf{f} ,

→ des forces de surface s'exerçant sur le contour du domaine et définies par une densité surfacique $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$, où \mathbf{n} est la normale extérieure.

Pour un champ de vitesse \mathbf{v} (réel ou virtuel), l'expression de la puissance des efforts extérieurs s'écrit:

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\partial V} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad (\text{I-2})$$

ρ est la masse volumique.

De même, pour définir le taux de chaleur reçue, on suppose qu'il se compose:

→ d'un terme de conduction à la frontière, dont la contribution se traduit par l'intégrale de surface d'une densité $\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$,

→ d'un terme de volume qui correspond aux taux de chaleur fournie aux éléments du système par l'extérieur du volume V et dont la contribution est l'intégrale de volume d'une densité spécifique $h(\mathbf{x})$.

\dot{Q} est donné alors par:

$$\dot{Q} = - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho h \, dV \quad (\text{I-3})$$

L'énergie cinétique s'écrit sous la forme:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 \, dV \quad (\text{I-4})$$

Enfin, l'énergie interne s'exprimant en fonction de l'énergie interne spécifique e est donnée par la relation:

$$E = \int_V \rho e \, dV \quad (\text{I-5})$$

En tenant compte des expressions de P_e , \dot{Q} , K et E , le premier principe de la thermodynamique donné par la relation (I-1) pour un volume quelconque, s'écrit comme suit:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + h) dV + \int_{\partial V} (\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (\text{I-6})$$

D'autre part, le théorème de l'énergie cinétique est donné par:

$$P_e + P_i = \dot{K} \quad (\text{I-7})$$

où P_i est la puissance des efforts intérieurs définie par:

$$P_i = - \int_V \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} \, dV \quad (\text{I-8})$$

$\underline{\dot{\epsilon}}$ est le tenseur taux de déformation.

En combinant les relations (I-1) et (I-7), le premier principe est formulé autrement:

$$\frac{d}{dt} E = \dot{Q} - P_i \quad (\text{I-9})$$

Soit, en remplaçant P_i par son expression (I-8), on obtient à partir de (I-9) la forme globale du premier principe:

$$\int_V \rho \dot{e} dV = \int_V (\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} + \rho h) dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-10})$$

La forme locale (représentation eulérienne) de ce premier principe est ainsi déduite de (I-10) par le théorème de la divergence et mène à l'équation bilan d'énergie qui s'écrit sous la forme [11]:

$$\rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \text{div} \mathbf{q} + \rho h \quad (\text{I-11})$$

Pour que le rappel de la thermodynamique soit complet, il faut à présent introduire les deux autres variables à savoir la température et l'entropie.

I-4- Deuxième principe de la thermodynamique - Entropie

Ce principe fait intervenir deux notions importantes: la température absolue T et l'entropie S fonction de l'état thermodynamique du système qui exprime une variation d'énergie associée à une variation de température. On la définit à partir de sa densité spécifique η par:

$$S = \int_V \rho \eta dV \quad (\text{I-12})$$

Le second principe postule qu'à tout instant t et pour tout volume V , le taux de production d'entropie est toujours supérieur ou égal à celui due à la fois au flux de chaleur à travers la surface et à l'apport de chaleur par l'extérieur. Ceci se traduit par:

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_V \frac{\rho h}{T} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (\text{I-13})$$

Le théorème de la divergence permet d'écrire localement (I-13) exprimant le taux de production irréversible d'entropie [1,11]:

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\rho h}{T} \geq 0 \quad (\text{I-14})$$

Ainsi, en tenant compte de l'équation de l'énergie (I-11) et en introduisant la notion d'énergie libre spécifique ψ telle que:

$$\psi = e - T\eta \quad (\text{I-15})$$

on obtient l'inégalité dite de *Clausius-Duhem*:

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{T}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (\text{I-16})$$

Les variations de la masse volumique ρ sous HPP sont négligeables. Pour cette raison, on utilisera dans la suite des calculs, l'énergie libre et l'entropie par unité de volume définies par:

$$w = \rho\psi, \quad s = \rho\eta \quad (\text{I-17})$$

L'équation (I-16) devient alors:

$$\underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} - (\dot{w} + s\dot{T}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \quad (\text{I-18})$$

I-5- Méthode de l'état local

Pour décrire le comportement thermomécanique des milieux solides, il faut d'abord définir:

- Les variables d'état qui se composent de variables observables commandées et de variables internes ou cachées [12]. La connaissance de ces variables définit complètement en un point et à un instant donnés, l'état thermomécanique d'un milieu matériel, c'est-à-dire qu'elle permet la détermination de toutes les propriétés du système.

- Un potentiel thermodynamique duquel dérivent les lois d'état.

Si pour la majorité des matériaux (élastique, viscoélastique, plastique ou viscoplastique), la connaissance des variables observables est sans ambiguïté, celle des variables internes ne l'est souvent pas. En effet, les seules variables observables, commandées et contrôlées qui interviennent sont généralement la température T et la déformation totale $\underline{\epsilon}$.

Ceci dit, la connaissance de la déformation totale par exemple n'est jamais faite avec exactitude, elle est souvent donnée en valeur moyenne. Ceci provient du fait qu'au sein de l'élément matériel, il y a de nombreux facteurs qui peuvent influencer sa réponse, par exemple les changements de structure, l'existence des défauts de structure, leurs mobilités... Ces facteurs traduisent des mécanismes physiques (déformations élastiques, déformations inélastiques -plastique ou thermique- dues à la présence et au mouvement des défauts, etc.) et chimiques présents dans le matériau. Une connaissance globale de la déformation totale doit donc prendre en compte tous ces paramètres.

Ceci conduit alors à introduire la notion de variables internes qui apparemment peuvent être mesurées mais pas contrôlées d'où l'appellation de variables cachées. Selon la situation expérimentale, les variables internes peuvent être de natures différentes: déformations élastiques, déformations inélastiques, déclenchement de réactions chimiques, densité des dislocations, énergie associée aux degrés de liberté des molécules, configuration moléculaire des polymères, etc. Toutes ces variables internes possèdent les propriétés communes suivantes [7]:

- Elles décrivent des réarrangements de la microstructure de l'élément matériel,
- Elles se produisent sur une échelle micromécanique,
- Elles induisent une description en moyenne pour "monter" à l'échelle macroscopique.

En plus de ces trois propriétés, les variables internes peuvent être de natures dissipatives telles que les frottements internes, les déformations plastiques, les fissures, etc. Ceci veut dire que le solide qui présente ce type de

mécanisme est en évolution thermodynamique irréversible. Une étude de la dissipation s'impose alors pour déduire ces différentes formes.

I-5-1- Analyse de la dissipation

En toute généralité, on considère qu'un matériau est décrit par sa déformation totale $\underline{\epsilon}$ et par sa température absolue T comme variables observables, et par un ensemble de variables internes décrivant son état physico-chimique noté β . D'autre part on choisit pour potentiel thermodynamique, l'énergie libre volumique w fonction de $\underline{\epsilon}$, T et β :

$$w \equiv w(\underline{\epsilon}, T, \beta) \quad (\text{I-19})$$

avec,

$$\beta \equiv \{\underline{\epsilon}^e, \underline{\epsilon}^p, \alpha\} \quad (\text{I-20})$$

α représente aussi un certain nombre de variables internes qui en plus de $\underline{\epsilon}^e$ et $\underline{\epsilon}^p$ sert à identifier certains phénomènes physico-chimiques complexes à prendre en compte à l'échelle microscopique.

La différentielle totale de $w(\underline{\epsilon}, T, \beta)$ donnée par:

$$\dot{w} = \left(\frac{\partial w}{\partial \underline{\epsilon}} \right)_{T, \beta} \dot{\underline{\epsilon}} + \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{\underline{\epsilon}, \beta} \dot{T} + \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)_{\underline{\epsilon}, T} \dot{\beta} \quad (\text{I-21})$$

permet de définir,

\Rightarrow L'entropie volumique s , lorsque la déformation $\underline{\epsilon}$ et l'ensemble de variables internes β sont constants, par:

$$s = - \left(\frac{\partial w}{\partial T} \right)_{\underline{\epsilon}, \beta} \quad (\text{I-22})$$

\Rightarrow Les variables conjuguées de $\underline{\epsilon}$ (lorsque la température T et les variables β sont constantes) et de β (quand la température T et la déformation $\underline{\epsilon}$ sont constantes) qui s'appellent respectivement *contrainte réversible* $\underline{\sigma}_R$ et *force thermodynamique* \mathbf{b} appelée souvent *force généralisée* [1,13] par:

$$\underline{\sigma}_R = \left(\frac{\partial w}{\partial \underline{\varepsilon}} \right)_{T, \beta}, \quad \mathbf{b} = - \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)_{\underline{\varepsilon}, T} \quad (\text{I-23})$$

Dans ce cas la relation (I-21) s'écrit sous la forme:

$$\dot{w} = \underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\varepsilon}} - s\dot{T} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{I-24a})$$

ou bien:

$$\dot{w} + s\dot{T} = \underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{I-24b})$$

On définit alors la *puissance réversible reçue* par la quantité [8]:

$$d = \underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta} \quad (\text{I-25})$$

Le taux de production irréversible d'entropie \dot{s}_i est une caractéristique très importante des processus thermodynamiques irréversibles. Il est défini à partir du taux de production d'entropie totale \dot{s} :

$$\dot{s}_i = \dot{s} - \dot{s}_e \geq 0$$

Le taux de production d'entropie \dot{s}_e du à l'échange de chaleur est défini par:

$$\dot{s}_e = \frac{\rho h}{T} - \text{div} \frac{\mathbf{q}}{T}$$

h et ρ sont respectivement l'apport de chaleur et la densité volumique.

En utilisant l'expression du premier principe de la thermodynamique (I-11) et la relation (I-15), on trouve la relation suivante qui peut être aussi déduite de l'inégalité de Clausius-Duhem (I-18):

$$T \dot{s}_i = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - (\underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad} T}{T} \geq 0 \quad (\text{I-26})$$

La puissance $T \dot{s}_i$ liée à la production irréversible d'entropie est représentée par la somme de deux termes. Le premier est la dissipation intrinsèque

volumique notée φ_1 . Elle est égale à la différence entre la puissance des efforts intérieurs $\underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}$ et la puissance réversible d [14]:

$$\varphi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}} - (\underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\epsilon}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\underline{\beta}}) \quad (\text{I-27})$$

Le second est la dissipation thermique volumique notée φ_2 et définie par [14]:

$$\varphi_2 = - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{grad} T}{T} \quad (\text{I-28})$$

La puissance $T \dot{s}_i$ décrit finalement la dissipation volumique φ traduite par l'inégalité de Clausius-Duhem (I-26) et s'écrit sous la forme suivante:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \geq 0 \quad (\text{I-29})$$

Un système est dit réversible, si pour toute partie du système on a:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{I-30})$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dissipation.

Une hypothèse du découplage entre la dissipation intrinsèque et la dissipation thermique (ce qui ne veut pas dire que les effets thermiques et mécaniques sont découplés) est souvent utilisée [1,2], ce qui permet d'écrire:

$$\begin{cases} \varphi_1 \geq 0 \\ \varphi_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{I-31})$$

I-5-2- Calcul de la dissipation intrinsèque dans le cas d'un milieu continu régulier

Au cours de la mise en forme des matériaux, l'une des conséquences les plus immédiates est la présence des défauts de structure où ce qu'on appelle généralement des singularités. Ils peuvent être de différentes natures: Ponctuels, linéiques, surfaciques ou volumiques. On sous entend alors par milieu continu régulier, un milieu ne contenant pas de tels défauts (ce qui est

pratiquement impossible). Sinon les défauts présents dans le milieu sont immobiles. Cette régularité permettra d'introduire sans trop de difficultés, la notion de dérivée par rapport au temps d'une intégrale de volume. Ceci permettra de passer d'une étude à l'échelle microscopique à une échelle macroscopique pour pouvoir déterminer la puissance intrinsèque dissipée pour un milieu continu régulier de volume V .

Dans toute la suite, on fera une hypothèse simplificatrice qui consiste à négliger le taux de chaleur fourni aux éléments du système de volume V par l'extérieur ($h = 0$).

Dans ce cas, le taux de chaleur reçu \dot{Q} s'écrira sous la forme:

$$\dot{Q} = - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{I-32a})$$

Soit par application du théorème de la divergence:

$$\dot{Q} = - \int_V \text{div} \mathbf{q} \, dV \quad (\text{I-32b})$$

Le premier principe de la thermodynamique donné par l'équation (I-11) s'écrit alors sous la forme légèrement modifiée:

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{I-33})$$

En introduisant encore une fois la relation (I-15) définissant l'énergie libre spécifique ψ , la relation (I-33) devient alors:

$$\rho(\dot{\psi} + \eta \dot{T}) + \rho T \dot{\eta} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{I-34})$$

Soit en utilisant (I-24b) et les quantités exprimées par unité de volume, on obtient:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - (\underline{\underline{\sigma}}_R : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta}) = T \dot{s} + \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{I-35})$$

Le premier membre de l'égalité (I-35) est la dissipation intrinsèque volumique φ_1 . En utilisant l'hypothèse (I-31) de la positivité de φ_1 , la relation (I-35) peut être mise sous la forme:

$$\varphi_1 = T\dot{s} + \text{div}\mathbf{q} \geq 0 \quad (\text{I-36})$$

Comme le milieu de volume V considéré est régulier, l'intégration sur V de la relation (I-36) est donc licite. On appelle alors *puissance intrinsèque dissipée pour un milieu continu régulier de volume V* , la quantité D_V telle que:

$$D_V = \int_V \varphi_1 \, dV = \int_V T\dot{s} \, dV - \dot{Q} \quad (\text{I-37})$$

En éliminant \dot{Q} entre (I-1) et (I-37), cette dernière peut être écrite sous la forme suivante valable quelque soit le volume V :

$$D_V = P_e - \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dV + \int_V T\dot{s} \, dV \geq 0 \quad (\text{I-38})$$

Soit en remplaçant l'énergie interne e par (I-15) et en introduisant les quantités (I-17), l'expression ci-dessus devient alors [15]:

$$D_V = P_e - \frac{d}{dt} \int_V \left(w + \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) dV - \int_V \dot{T}s \, dV \geq 0 \quad (\text{I-39})$$

Dans le cadre usuel de la thermomécanique des milieux hétérogènes, on peut écrire cette puissance dissipée D_V donnée par la relation ci-dessus en fonction des contraintes et déformations macroscopiques ($\underline{\Sigma}$, \underline{E}). Pour cela, il est intéressant d'exprimer l'énergie libre w et la puissance des efforts extérieurs P_e en fonction de ces champs macroscopiques (Annexe A).

$$P_e = V \underline{\dot{E}} \underline{\Sigma} \quad (\text{I-40})$$

$$w = \frac{V}{2} (\underline{E} - \underline{E}^{\text{iné}}) \underline{C} (\underline{E} - \underline{E}^{\text{iné}}) + \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}' \underline{S} \underline{\sigma}' \, dV \quad (\text{I-41})$$

La relation (I-39) devient alors:

$$D_V = V \underline{\dot{\epsilon}}^{\text{iné}} \underline{\Sigma} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \underline{\sigma}' \underline{S} \underline{\sigma}' dV - \int_V s \dot{T} dV \quad (\text{I-42})$$

Cela veut dire que la puissance inélastique macroscopique n'est donc pas dissipée complètement, elle est emmagasinée sous forme d'une puissance élastique associée aux contraintes internes $\underline{\sigma}'$ augmentée d'une puissance traduisant un changement de l'état interne du matériau ($s \dot{T}$).

Dans le cas élastoplastique isotherme ($\underline{\epsilon}^{\text{iné}} = \underline{\epsilon}^p$ et $\dot{T} = 0$) par exemple, on retrouve la puissance dissipée classique [14,16]:

$$D_V = V \underline{\dot{\epsilon}}^p \underline{\Sigma} - \int_V \underline{\sigma}' \underline{S} \underline{\dot{\sigma}'} dV \quad (\text{I-43})$$

La dérivée par rapport au temps a été introduite dans l'intégrale de volume car le milieu est supposé régulier.

I-6- Calcul de la puissance intrinsèque dissipée dans le cas d'une discontinuité mobile

I-6-1- Introduction

En pratique, les milieux ne sont souvent pas réguliers du fait de la présence mais surtout du mouvement des défauts de structure ou singularités (dislocations, fissures, interfaces...). Ils sont à l'origine d'une part de lieux géométriques où les champs de certaines grandeurs physiques peuvent être discontinus et/ou infinis et d'autre part, de plusieurs phénomènes physiques, notamment à cause de leurs mobilités.

Si la forme globale des différentes équations (1^{er} et 2^{ème} principe, puissance dissipée) reste comparable à celle rappelée dans le cas d'un milieu régulier, l'écriture locale ne l'est sûrement pas. On doit en effet, tenir compte de ces discontinuités dans la définition de la dérivée temporelle d'une intégrale de volume mobile et du théorème de la divergence ce qui fournit en outre les équations locales relatives à chaque constituant.

On propose à nouveau une étude détaillée des deux principes de la thermodynamique dans le cas où le milieu considéré contient une discontinuité mobile. Pour cela, on se base sur un calcul analogue effectué notamment par H.D.Bui et col.[8] et L.B.Freund [9] dans le cas des milieux fissurés.

I-6-2- Rappels mathématiques

On rappelle tout d'abord et brièvement les outils mathématiques concernant la dérivation temporelle d'abord par rapport à un point puis par rapport à un domaine mobiles [11] ainsi que l'intégrale de volume d'une fonction singulière.

a- Dérivée temporelle par rapport à un point mobile

Soit $f(\mathbf{x}, t)$ une fonction continue et dérivable définie en chaque point matériel d'un milieu continu et variable au cours du temps. La fonction f représente une grandeur physique (énergie, entropie...). La vitesse de variation de f lorsqu'on suit le mouvement d'un point M mobile à vitesse \mathbf{V} par rapport à un repère fixe de l'espace, est donnée par la dérivée particulière $\frac{df}{dt}$ telle que [17]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V_i f_{,i} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} f \quad (\text{I-44})$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ est la vitesse de variation de $f(\mathbf{x}, t)$ lorsque M est fixe dans l'espace.

b- Vitesse de variation par rapport à un domaine mobile

Si on considère une grandeur physique de densité f définie à chaque instant en tout point d'un domaine Ω mobile par rapport à un repère fixe de l'espace et de frontière $\partial\Omega$ de normale extérieure \mathbf{n} , la vitesse de variation de la quantité $F = \int_{\Omega} f d\Omega$ est donnée par [17]:

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-45})$$

Le premier terme du dernier membre de (I-45) représente la vitesse de variation de F quand le domaine Ω est fixe dans l'espace. Le second représente le flux de la densité f à travers la surface $\partial\Omega$ et qui intervient du fait du mouvement du domaine Ω . \mathbf{V} est la vitesse d'un élément de $\partial\Omega$.

c- Intégrale d'une fonction singulière

Si $f(\mathbf{x}, t)$ est par ailleurs une fonction qui a un comportement singulier au voisinage d'un point P , d'une ligne L ou à travers une surface Σ_0 , le calcul de $\int_{\Omega} f d\Omega$ devient compliqué. La méthode qu'on utilise le plus souvent pour

calculer cette intégrale se fonde sur l'introduction d'une surface (un contour dans le cas des problèmes plans) Σ qui englobe la singularité ainsi isolée du reste du domaine Ω . Le volume Ω est alors subdivisé en V_{Σ} limité par Σ et en $\Omega_{\Sigma} = \Omega - V_{\Sigma}$ (Figure I-1).

L'intégrale $\int_{\Omega} f d\Omega$ s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} f d\Omega + \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{V_{\Sigma}} f d\Omega \quad (\text{I-46})$$

Σ' désigne la géométrie caractéristique de chaque type de singularités (ponctuelle " $\Sigma' \equiv P$ ", linéique " $\Sigma' \equiv L$ " ou surfacique " $\Sigma' \equiv \Sigma_0$ ").

Compte tenu de la nature de la singularité, les modifications qu'il faut ajouter aux différentes équations ne sont pas les mêmes. Si on considère par exemple qu'on est en présence d'une discontinuité surfacique Σ_0 , alors on peut à ce moment là remplacer la limite quand la surface $\Sigma \rightarrow \Sigma_0$ par le saut des différentes grandeurs physiques à la surface de discontinuité Σ_0 en introduisant par exemple les opérateurs interfaciaux [18]. (I-45) s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\frac{dF}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \int_{\Sigma_0} [f] \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

$[f]$ représente le saut de la grandeur f à travers la surface Σ_0 .

Si par ailleurs la discontinuité est linéique L , alors on garde la limite $\Sigma \rightarrow L$ tout en choisissant pour Σ une surface constituée d'un tube enveloppant la singularité et de la surface limitée par L sur laquelle on applique la technique du saut de discontinuité [19].

I-6-3- Position du problème

Ces rappels mathématiques permettront d'illustrer les modifications que subiront d'une part les deux principes de la thermodynamique et d'autre part, la puissance dissipée dans le cas d'un milieu continu contenant une discontinuité mobile. Il est clair que la généralisation d'une telle démarche à n'importe quel type de discontinuité n'est pas évidente. Pour cette raison, on se limitera aux discontinuités rectilignes qu'on étudiera dans le cadre des problèmes plans. Ce choix permettra par la suite de traiter le cas des dislocations.

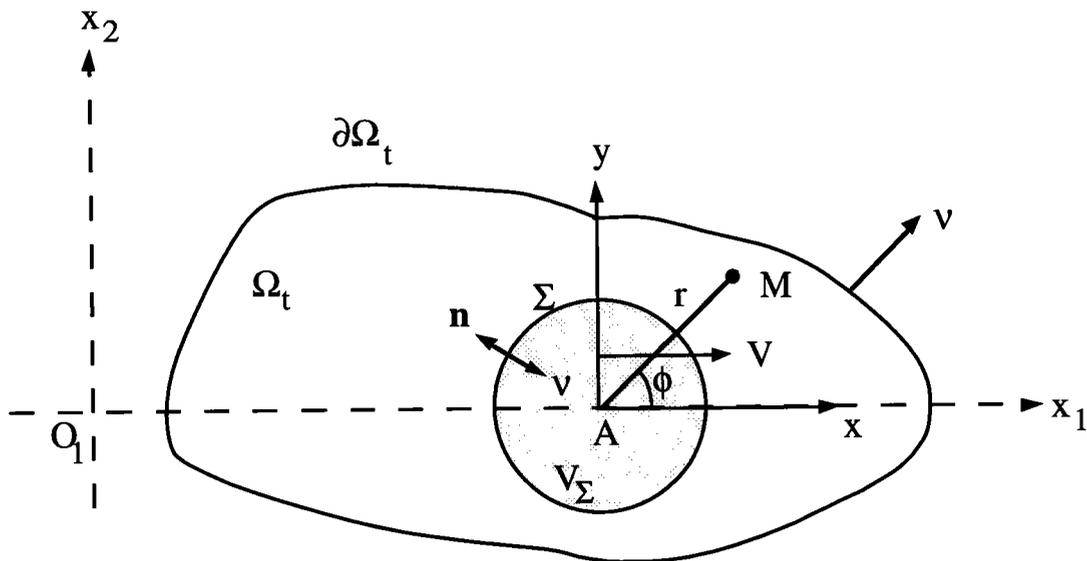


Figure I-1:
Propagation d'une discontinuité A dans un milieu continu.

Le mouvement de cette discontinuité est uniforme à vitesse constante V suivant l'axe des abscisses d'un repère fixe (O_1, x_1, x_2, x_3) . Le milieu occupe un volume Ω_t de frontière $\partial\Omega_t$ de normale extérieure v . Pour les raisons évoquées ci-dessus, on suppose que la discontinuité symbolisée par la lettre A , est entourée d'un volume V_Σ de frontière Σ de normale extérieure $n = -v$. A

cette discontinuité (sous entendu le volume V_Σ), on associe un repère mobile (A, x, y, z) possédant le même mouvement (vitesse V) que la discontinuité. Chaque point M de ce milieu sera repéré par l'angle ϕ et par le rayon r le séparant de la discontinuité (Figure I-1).

I-6-4- Conséquence du premier principe

Pour le système entier, le premier principe est donné par:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = P_e + \dot{Q} \quad (I-47)$$

où P_e et \dot{Q} sont respectivement donnés par (I-2) et (I-3).

La présence de la discontinuité mobile A dans le milieu Ω_t produira sûrement un site localisé où les diverses grandeurs physiques présentent un comportement singulier. Il en est ainsi pour la vitesse de déplacement v , l'énergie interne e , etc... Le calcul du membre gauche de (I-47) n'est alors pas évident et le résultat de l'intégration ne s'écrit pas forcément sous la forme $\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega$ car la fonction $\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right]$ n'est pas nécessairement intégrable au sens de Lebesgue sur tout le domaine Ω_t . Le calcul de cette intégrale se fera à l'aide de la relation (I-46) qui exige l'introduction de la surface Σ .

Pour alléger les calculs, on applique le premier principe (I-47) aux deux milieux Ω_t et Ω_Σ sous l'hypothèse simplificatrice suivante:

Hypothèse: On suppose que le milieu de volume Ω_t est isolé ($\dot{Q} = 0$), alors que le milieu de volume Ω_Σ ne l'est pas.

a- Application du premier principe au milieu isolé Ω_t

Le premier principe appliqué au système entier Ω_t isolé donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = P_e \quad (\text{I-48})$$

Ayant séparé le volume Ω_t en deux domaines Ω_Σ et V_Σ , le premier membre de (I-48) peut se mettre sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega \quad (\text{I-49})$$

Compte tenu de la définition attribuée aux deux volumes Ω_Σ et V_Σ , les deux termes du second membre de (I-49) ne se calculent pas de la même manière. On propose alors de les calculer séparément.

a1- Calcul de $\frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega$

Le volume V_Σ est un volume entourant la discontinuité et s'évanouissant sur elle. Il est entraîné avec elle dans le même mouvement par rapport au repère mobile (A, x, y, z) , ce qui veut dire que V_Σ est fixe puisque sa surface Σ est en translation simple. On peut alors d'une part, introduire le signe $\frac{d}{dt}$ à l'intérieur de l'intégrale étendue au volume V_Σ :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \int_{V_\Sigma} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega$$

et d'autre part, on peut supposer que la vitesse de variation de l'énergie totale $\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right]$ est bornée dans le volume V_Σ . Ceci constitue l'hypothèse H_2 de

Q.S.Nguyen [20] de l'intégrabilité de la fonction $\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right]$ pour la plupart des matériaux usuels. D'où le résultat suivant:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{V_{\Sigma}} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (\text{I-50})$$

a2- Calcul de $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega$

Le fait d'avoir introduit la surface Σ , signifie que le volume Ω_{Σ} possède maintenant une surface mobile par rapport au repère de référence (O_1, x_1, x_2, x_3) . Le calcul de $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega$ est facilité par l'utilisation de

la notion de la *dérivée particulière* (I-45). On rappelle que la discontinuité se déplace sur l'axe des abscisses à la vitesse V et que la normale extérieure à la surface Σ est v . (I-45) appliquée à l'intégrale $\int_{\Omega_{\Sigma}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega$ donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V v_1 dS$$

Sur la surface Σ , $\mathbf{n} = -v$, l'expression ci-dessus devient alors:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\Sigma}} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega - \int_{\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V n_1 dS \quad (\text{I-51})$$

En combinant les résultats (I-49)-(I-51), le premier principe (I-48) appliqué au système entier Ω_t supposé isolé, s'écrit finalement sous la forme:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \left[P_e - \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V n_1 dS \right] = 0 \quad (\text{I-52})$$

b- Application du premier principe au milieu non isolé Ω_{Σ}

Il s'agit cette fois-ci d'un milieu Ω_{Σ} régulier, en présence d'un flux de chaleur à travers la surface Σ . Le premier principe s'écrit donc sous la forme:

$$\int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\Omega = P_e - \int_{\Sigma} \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-53})$$

On élimine la puissance des efforts extérieurs P_e entre (I-52) et (I-53). Après simplification, le résultat peut se mettre sous la forme suivante:

$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-54})$$

avec,

$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \left\{ \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) V n_1 + \mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{v} \right\} dS \quad (\text{I-55})$$

Étant donné que \mathbf{q} est un flux de chaleur à travers la surface Σ , la relation (I-54) traduit physiquement la présence d'une source de chaleur. Comme Σ tend vers la surface (ou dimension) Σ' dans (I-54), cette source est alors concentrée sur la discontinuité A. La grandeur H donnée par (I-54) est éventuellement non nulle et nécessairement finie, ce qui justifie l'existence de la limite donnée par (I-55).

I-6-5- Conséquence du second principe

Pour un système quelconque, le second principe peut s'écrire selon deux formes équivalentes:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \eta dV \geq - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \quad (\text{I-56})$$

ou bien en introduisant la dissipation intrinsèque:

$$D_V = \int_V \rho T \dot{\eta} dV + \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-57})$$

Si on utilise le système entier Ω_t comme domaine d'intégration, des problèmes de singularités sur la discontinuité A se posent dans le calcul du premier

membre de l'inégalité (I-56). La décomposition de Ω_t en Ω_Σ et V_Σ s'impose, en supposant toujours que Ω_t est isolé alors que Ω_Σ ne l'est pas.

a- Application du second principe au milieu isolé Ω_t

Le second principe appliqué au système entier Ω_t isolé donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \eta \, d\Omega \geq 0 \quad (\text{I-58})$$

En appliquant la même démarche et la même hypothèse que celles utilisées au sous paragraphe (I-6-4) mais cette fois-ci appliquées à la vitesse de variation de l'entropie, on aboutit aux résultats suivants:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \frac{d}{dt} \int_{V_\Sigma} \rho \eta \, d\Omega = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{V_\Sigma} \frac{d}{dt} (\rho \eta) \, d\Omega = 0 \quad (\text{I-59})$$

et,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_\Sigma} \rho \eta \, d\Omega = \int_{\Omega_\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) \, d\Omega - \int_{\Sigma} \rho \eta \, V \, n_1 \, dS \quad (\text{I-60})$$

En tenant compte de (I-59) et de (I-60), l'expression (I-58) s'écrit sous la forme suivante:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \left[\int_{\Omega_\Sigma} \rho \dot{\eta} \, d\Omega - \int_{\Sigma} \rho \eta \, V \, n_1 \, dS \right] \geq 0 \quad (\text{I-61})$$

b- Application du second principe au milieu non isolé Ω_Σ

Dans ce cas, le second principe s'écrit sous la forme:

$$\int_{\Omega_\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) \, d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dS \geq 0 \quad (\text{I-62a})$$

On introduit dans cette expression la limite quand la surface Σ tend vers celle de la discontinuité Σ' :

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \left[\int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \right] \geq 0 \quad (\text{I-62b})$$

Pour que cette limite existe, il faut que les limites $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega$ et $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS$ existent séparément. Pour cela, on suppose généralement que le taux de production d'entropie est fini donc intégrable et par suite $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega$ existe. D'autre part, la température sur la discontinuité aussi élevée soit elle, ne peut réellement atteindre une valeur infinie, on la note $T_A \neq 0$, on a alors:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS = \frac{\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}{T_A} = \frac{H}{T_A}$$

l'existence de la limite (I-54) définissant H, implique que $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS$ existe aussi. La limite donnée par (I-62b) peut être écrite sous la forme:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega - \frac{H}{T_A} \geq 0 \quad (\text{I-63})$$

Si on considère maintenant la relation (I-59) tout en lui appliquant la notion de la dérivée particulaire, on a:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{V_{\Sigma}} \frac{d}{dt} (\rho \eta) d\Omega = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \left[\int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega + \int_{\Sigma} \rho \eta \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 dS \right] = 0$$

et si d'autre part, on tient compte de l'intégrabilité de la fonction $\frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta)$ qui peut se traduire par:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{V_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega = 0 \quad (\text{I-64})$$

alors la combinaison de ces deux dernières relations permet d'aboutir à l'égalité suivante:

$$\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \rho \eta V n_1 dS = 0 \quad (\text{I-65})$$

La partition de Ω_t en Ω_{Σ} et V_{Σ} permet d'écrire, tout en introduisant la limite quand Σ tend vers Σ' :

$$\begin{aligned} \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \eta d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \eta d\Omega \\ &= \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega - \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \rho \eta V n_1 dS \end{aligned}$$

d'où, en utilisant (I-65), le résultat suivant:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \eta d\Omega = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Omega_{\Sigma}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega \quad (\text{I-66})$$

Résultat qu'on injecte dans la relation (I-63) pour obtenir:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \eta d\Omega - \frac{H}{T_A} \geq 0 \quad (\text{I-67})$$

Comme T_A et H représentent respectivement la température et la source de chaleur concentrées sur la discontinuité A , $\frac{H}{T_A}$ devrait représenter le taux de production d'entropie au niveau de la discontinuité.

D'autres interprétations peuvent être données à H (ou à $\frac{H}{T_A}$) en appliquant le second principe cette fois-ci aux particules occupant le volume V_{Σ} .

c- Application du second principe au milieu V_Σ

Compte tenu de l'hypothèse de départ qui consistait à supposer que le domaine Ω_t est isolé alors que Ω_Σ ne l'est pas et ayant démontré que le domaine V_Σ contient maintenant une source de chaleur concentrée sur la discontinuité, il est clair que V_Σ n'est pas isolé. Le second principe est alors donné par:

$$\int_{V_\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \eta) d\Omega + \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} dS \geq 0 \quad (\text{I-68})$$

soit en passant à la limite quand Σ tend vers Σ' et en introduisant la température T_A , les résultats (I-54) et (I-64) permettent d'écrire:

$$\frac{H}{T_A} \geq 0 \quad (\text{I-69})$$

Ceci implique que la source de chaleur concentrée en A est une source chaude ($T_A > 0$). C'est justement grâce à cet aspect qu'on l'on arrive à mesurer la distribution de température au cours par exemple de la transformation martensitique, de l'évolution des bandes de cisaillement, de la propagation des fissures...

On applique maintenant la deuxième forme du second principe à savoir la formule (I-57) toujours sur ce système V_Σ :

$$D_{V_\Sigma} = \int_{V_\Sigma} \rho T \dot{\eta} dV + \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{I-70})$$

En passant à la limite quand Σ tend vers Σ' et en tenant compte de (I-64), on a:

$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} D_{V_\Sigma} \quad (\text{I-71})$$

H est donc la puissance intrinsèque dissipée concentrée en A.

Finalement, il a été démontré par application du second principe de la thermodynamique que la présence d'une ou plusieurs discontinuité(s)

mobile(s) constitue une source de chaleur chaude dont la puissance intrinsèque dissipée est H donnée soit par (I-55) soit par la relation ci-dessus. Chose qu'il faut prendre en compte dans le calcul de la puissance intrinsèque dissipée pour le système entier:

$$D_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \varphi_1 \, d\Omega + H \quad (\text{I-72})$$

En utilisant l'expression (I-27) donnant la puissance intrinsèque volumique φ_1 et la relation (I-24b), D_{Ω_t} s'écrira sous la forme générale suivante:

$$D_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} \dot{w} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} \dot{T} s \, d\Omega + H \quad (\text{I-73})$$

Compte tenu de la relation (A-12) donnant la densité volumique d'énergie libre d'Helmholtz w et de sa dérivée \dot{w} , on aboutit à la relation suivante:

$$D_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^{\text{iné}} \, d\Omega - \int_{\Omega_t} s \dot{T} \, d\Omega + H \quad (\text{I-74})$$

C'est une équation qui fait apparaître, comme dans tout processus irréversible, des mécanismes inélastiques ($\underline{\dot{\epsilon}}^{\text{iné}}$), des changements de l'état interne du matériau ($s \dot{T}$) et la dissipation H liée à la discontinuité. L'équation (I-74) permet de définir les forces thermodynamiques liées à chaque mécanisme: les contraintes $\underline{\sigma}$ associées à la vitesse de déformations inélastiques $\underline{\dot{\epsilon}}^{\text{iné}}$, l'entropie s correspondant à la variation de la température \dot{T} et enfin la force qu'on peut déduire de H qui représente la force motrice du mouvement de la discontinuité.

Étant donné la relation (I-65), la puissance intrinsèque dissipée H donnée par (I-55) peut être écrite en fonction de l'énergie libre volumique ψ :

$$H = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \left\{ \rho \left(\psi + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{v} \right\} dS \quad (\text{I-75})$$

La vitesse de déplacement \mathbf{v} n'est rien d'autre que la dérivée partielle du champ de déplacement par rapport au temps. Soit par application de (I-44), on peut écrire:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx -V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (\text{I-76})$$

En mettant la vitesse V en facteur, la puissance intrinsèque dissipée concentrée en A donnée par (I-75) devient alors:

$$H = G V \quad (\text{I-77})$$

avec:

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \left\{ \rho \left(\psi + \frac{v_i v_i}{2} \right) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} \right\} dS \quad (\text{I-78})$$

La grandeur G ainsi définie est appelée *force thermodynamique* sur la discontinuité.

En résumé, un milieu qui contient une discontinuité mobile, perd de l'énergie sous forme de dissipation intrinsèque (I-27). En retour, il reçoit une certaine quantité d'énergie sous forme de chaleur fournie par la discontinuité. Cet échange est bien illustré par la formule (I-54), c'est pourquoi G est aussi appelée *taux de restitution d'énergie*.

La relation (I-78) constitue l'extension de certaines relations utilisées au départ en élastostatique linéaire dans l'étude des dislocations et des fissures. En effet, pour modéliser la présence des imperfections cristallines en élasticité classique, Eshelby a introduit le concept de force sur une singularité élastique sous forme de dérivée de l'énergie totale par rapport à la position de la singularité [21]. Eshelby a remarqué que cette force peut être écrite sous forme d'une intégrale sur toute surface entourant la singularité [10, 22]. En l'absence de singularité, l'intégrale ainsi présentée par Eshelby devient nulle et constitue alors une loi de conservation. La version bidimensionnelle de cette force ou de cette loi, est utilisée en mécanique de la rupture par Rice [23] sous forme d'intégrale curviligne indépendante du contour d'intégration (intégrale J) pour analyser la concentration des contraintes et la nature des singularités en fond de fissure [23-25].

Par la suite, Knowles et Sternberg [26] ont établi trois lois de conservation en élastostatique linéaire dont l'une est celle trouvée indépendamment par Eshelby et par Rice. Ces lois de conservation prennent en compte les propriétés particulières du matériau élastique telles que l'homogénéité, l'isotropie et la linéarité du comportement.

En se basant sur le théorème de Noether, les lois de Knowles et Sternberg ont été étendues à l'élastodynamique linéaire isotherme par Fletcher [27] et à la thermoélasticité linéaire par Chudnovsky et al. [28], Bui et col.[29] et par Bui [30] qui a étudié les intégrales de contour se rattachant à ces lois de conservation dans le cas de la mécanique de la rupture. En thermoélasticité dynamique, Nguyen [31] a discuté la validité de (I-78) dans le cas général d'un matériau à paramètres internes. Bui et col.[8] se sont intéressés au cas particulier d'une fissure mobile dans un milieu quelconque.

On peut citer d'autres travaux pour déduire les lois de conservation ou bien les forces thermodynamiques s'appuyant cette fois-ci sur une méthode variationnelle où le Lagrangien joue un rôle central [32-34].

En remplaçant H par l'expression (I-77), et en introduisant la distribution de Dirac en A , la puissance intrinsèque dissipée pour le système entier D_{Ω_t} donnée par (I-72) s'écrit encore une fois sous la forme:

$$D_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} (\varphi_1 + GV\delta(A)) d\Omega \quad (I-79)$$

L'expression (I-72) ou (I-79) constitue un critère classique de propagation de la discontinuité. Il consiste à admettre l'existence d'une quantité G_c appelée valeur (force) critique telle que:

il y a propagation si $G = G_c$,
 pas de propagation si $G < G_c$.

I-7- Conclusion

Pour que l'étude des processus irréversibles soit complète, il faut définir deux potentiels. D'un côté, un potentiel thermodynamique qui conduit aux équations d'état. De l'autre côté, un potentiel de dissipation qui fournit les lois complémentaires d'évolution des variables décrivant les processus irréversibles. La thermodynamique de ces processus constitue un outil général pour étudier les phénomènes dissipatifs qui leur sont étroitement liés, en particulier, par l'introduction des forces thermodynamiques.

En s'appuyant sur une analyse de la dissipation intrinsèque, il a été rappelé dans ce chapitre qu'une discontinuité mobile se comporte comme une source de chaleur de puissance $H = G V$. La force thermodynamique G ainsi introduite, demeure une expression assez générale qui peut être appliquée moyennant quelques précautions à n'importe quelle discontinuité (dislocation, fissure,...) et à n'importe quel milieu (élastique, viscoélastique,...).

Par la suite, on va limiter l'étude au cas d'une dislocation coin rectiligne en mouvement uniforme dans un milieu élastique. Pour cela, le chapitre suivant sera consacré aux rappels des propriétés élastiques les plus importantes des dislocations.

- [1] **P.Germain**, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Tome I, Masson et Cie, Paris, (1973).
- [2] **J.Lemaître & J.L.Chaboche**, *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod, Paris, (1985).
- [3] **M.A.Biot**, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, J.Appl.Physics, Vol.27, No.3, (1956).
- [4] **B.D.Coleman & W.Noll**, *The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity*, Arch.Rat.Mech.Anal., Vol.13, p.p.167-178, (1963).
- [5] **A.E.Green & P.M.Naghdi**, *On Continuum Thermodynamics*, Arch.Rat.Mech.Anal., Vol.48, p.p.352-378, (1972).
- [6] **K.Hutter**, *The Foundations of Thermodynamics. Its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics*, Acta.Mechanica, Vol.27, p.p.1-54, (1977).
- [7] **J.Kestin & J.Bataille**, *Irreversible Thermodynamics of Continua and Internal Variables, Continuum Models of Discrete Systems*, University of Waterloo Press, Mont Gabriel, Quebec, (June 26 - July 2, 1977).
- [8] **H.D.Bui, A.Ehrlacher & Q.S.Nguyen**, *Propagation de Fissure en Thermoélasticité Dynamique*, J.Mécanique, Vol.19, No.4, p.p.697-723, (1980).
- [9] **L.B.Freund**, *Energy Flux into the Tip of an Extending Crack in an Elastic Solid*, J.of Elasticity, Vol.2, No.4, p.p.341-349, (1972).
- [10] **J.D.Eshelby**, *Energy Relations and Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics*, in *Inelastic Behavior of Solids*, Ed. M.F.Kanninen & al., McGraw-Hill, New York, p.p.77-115, (1970).
- [11] **C.Huet**, *Eléments de Théories des Mélanges*, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, (Edition 1983).
- [12] **J.Mandel**, *Variables Cachées, Puissance Dissipée, Dissipativité Normale*, Colloque du groupe français de rhéologie, *Thermodynamique des Comportements Rhéologiques*, (7 et 8 Décembre 1977).
- [13] **B.Halphen & Q.S.Nguyen**, *Sur les Matériaux Standards Généralisés*, J.Mécanique, Vol.14, No.1, (1975).

- [14] **D.Francois, A.Pineau & A.Zaoui**, *Comportement Mécanique des Matériaux*, Vol.1, Hermès, Paris, (1991).
- [15] **G.A.Maugin**, *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge University Press, (1992).
- [16] **W.T.Read & W.Shockley**, *Dislocation Models of Crystal Boundaries*, Physical Review, Vol.78, No.3, p.p.275-289,(1950).
- [17] **J.Mandel**, *Cours de Mécanique des Milieux Continus*, Tome I, Gauthier-Villars, Paris, (1966).
- [18] **R.Hill**, *Interfacial Operators in the Mechanics of Composite Media*, J.Mech.Phys.Solids, Vol.31, (1983).
- [19] **A.M.Kosevich**, *Crystal Dislocations and the Theory of Elasticity*, in *Dislocations in Solids*, Vol.1, Ed. F.R.N.Nabarro, North-Holland Publishing Company, (1979).
- [20] **Q.S.Nguyen**, *A Thermodynamic Description of the Running Crack Problem*, in *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, Ed.S.Nemat-Nasser, North-Holland Publishing Company, p.p.315-330, (1981).
- [21] **J.D.Eshelby**, *The Force on an Elastic Singularity*, Phil.Trans.Roy.Soc., London, Vol.A244, p.p.87-112, (1951).
- [22] **J.D.Eshelby**, *The Continuum Theory of Lattice Defects*, Sol.Stat.Phys., Ed.F.Seitz & D.Turnbull (Academic Press Inc., New York), Vol.3, p.p.79-144, (1956).
- [23] **J.R.Rice**, *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, J.Appl.Mech., Vol.35, p.p.379-387, (1968).
- [24] **G.P.Cherepanov**, *Crack Propagation in Continuous Media*, P.M.M., Vol.31, No.3, p.p.476-488, (1967).
- [25] **J.P.Hirth, R.G.Hoagland & C.H.Popelar**, *On Virtual Thermodynamic Forces on Defects and Cracks*, Acta.Metall., Vol.32, No.3, p.p.371-379, (1984).

- [26] **J.K.Knowles & E.Sternberg**, *On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics*, Arch.Rat.Mech.Anal., Vol.44, No.3, p.p.187-211, (1972).
- [27] **D.C.Fletcher**, *Conservation Laws in Linear Elastodynamics*, Arch.Rat.Mech.Anal., Vol.60, No.4, p.p.329-353, (1976).
- [28] **A.Chudnovsky & B.Gommerstadt**, *Thermodynamic and Energetic Forces in Thermoelasticity*, Int.J.Sol.Structures, Vol.22, No.7, p.p.721-727, (1986).
- [29] **H.D.Bui, J.Jaric & D.Radenkovic**, *Loi de Conservation en Thermoélasticité Linéaire*, Rapport interne No.3, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, (1977).
- [30] **H.D.Bui**, *Mécanique de la Rupture Fragile*, Masson, Paris, (1978).
- [31] **Q.S.Nguyen**, *Méthodes Energitiques en Mécanique de la Rupture*, J.Mécanique, Vol.19, No.2, p.p.363-386, (1980).
- [32] **A.G.Herrmann**, *On Conservation Laws of Continuum Mechanics*, Int.J.Sol.Structures, Vol.17, p.p.1-9, (1981).
- [33] **G.Francfort & A.G.Herrmann**, *Conservation Laws and Material Momentum in Thermoelasticity*, J.Appl.Mech., Vol.49, p.p.710-714, (1982).
- [34] **G.Francfort & A.G.Herrmann**, *A Contour Integral and an Energy Release Rate in Thermoelasticity*, Int.J.Sol.Structures, Vol.22, No.7, p.p.759-766, (1986).

CHAPITRE II

LES DISLOCATIONS DANS LES MILIEUX CONTINUS

II-1- Introduction	36
II-2- Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus	37
II-2-1- Cinématique	37
II-2-2- Statique	38
II-2-3- Conditions de compatibilité	40
II-2-4- Tenseur d'incompatibilité	40
II-3- Rappel de la théorie élastique des dislocations	41
II-3-1- Préliminaire	41
II-3-2- Description géométrique d'une dislocation	42
II-3-3- Tenseur densité de dislocations	44
II-3-4- Méthodes de calcul des contraintes internes	47
II-3-5- Application au cas d'une dislocation coin rectiligne et isolée	53
II-3-6- Energie élastique de la dislocation coin rectiligne	56
II-4- Analyse des différentes forces exercées sur les singularités élastiques	57
II-4-1- Définition de la force sur une singularité élastique	57
II-4-2- Les différentes forces exercées sur les singularités élastiques	59
II-5- Force sur une dislocation	63
II-5-1- Cas d'une dislocation quelconque	63
II-5-2- Cas particulier d'une dislocation coin rectiligne	65
II-6- Conclusion	65
Références bibliographiques	66

II-1- Introduction

Il est aujourd'hui clair, que les défauts de structure et leurs mobilité influencent énormément les propriétés du solide et constituent un vrai outil pour expliquer l'origine de plusieurs phénomènes physiques (la plasticité...). En vue de les prendre en compte, plusieurs développements ont eu lieu depuis les années cinquante, pour formuler une théorie générale des défauts de structure et de leurs mobilités. Par théorie générale, on sous entend les équations du mouvement, les principes de conservation et une définition générale de la force qui s'exerce sur un défaut ou entre défauts (force d'interaction). Parmi ces développements, on cite en particulier celui de J.D.Eshelby [1] qui fut le premier à construire une telle théorie en se basant essentiellement sur des notions classiques d'énergie. Ensuite, il y a les travaux de H.Zorsky [2] et de E.Kossecka [3] qui grâce à une formulation variationnelle se basant sur les notions du Lagrangien et du tenseur de Green, ont pu à leur tour formuler une théorie de mouvement des défauts de structure.

Dans un milieu cristallin, les défauts sont classés en défauts ponctuels (lacunes, interstitiels), linéiques (dislocations), surfaiques (fautes d'empilement, joints de grains) ou volumiques (précipités). La multiplication et/ou le déplacement de ces défauts provoquent dans le milieu des champs de déplacement, de rotation et de déformation qui ne peuvent être produits par un chargement appliqué. Les défauts sont alors à l'origine d'un certain état de contraintes appelées couramment contraintes internes. A ces contraintes est associé un terme d'énergie élastique additionnel par rapport à l'énergie due au chargement. On appelle alors force thermodynamique sur un défaut, la variation de l'énergie totale du système par rapport à une de ses configurations [1,4]. Elle peut être une force exercée par le chargement, une force d'interaction si d'autres sources de contraintes internes sont présentes dans le milieu ou une force image si le défaut se trouve en présence de surfaces libres. Le défaut par le biais de ses propres contraintes, peut par ailleurs exercer sur lui même une force baptisée self-force. Une telle force est certainement d'une grande importance. Sa connaissance permet en outre d'étudier le type d'équilibre (stable ou instable) et son influence sur la déformation plastique, la thermodynamique et la cinétique du défaut.

Au début de ce chapitre (§2), on va rappeler les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus afin de définir un certain nombre de tenseurs qu'on utilise souvent dans la théorie des dislocations (§3). A la fin de ce paragraphe, on va présenter les différentes méthodes de calcul des contraintes internes dues aux dislocations (en général aux défauts). Ceci conduira alors à introduire la définition classique de l'énergie totale pour déduire la notion de force thermodynamique exercée sur un défaut (§4). Au fur et à mesure de ces rappels, le cas particulier de la dislocation coin rectiligne isolée sera traité en calculant les différents champs élastiques qui lui sont associées, son énergie élastique et enfin la force qu'elle subit de la part du chargement extérieur et de la part d'autres sources de contraintes internes (§5).

II-2- Rappel des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus

Dans ce paragraphe, on va rappeler quelques notions de base de la mécanique des milieux continus. Ceci est nécessaire d'une part pour compléter l'étude thermodynamique des milieux continus traitée au chapitre précédent et d'autre part pour aborder des problèmes classiques des déformations plastiques liées notamment à la présence et au déplacement des dislocations.

L'hypothèse de continuité des milieux restreint le champ de déformation à un champ vérifiant les équations de compatibilité. La loi fondamentale de la dynamique déduite du théorème de l'énergie cinétique (I-7) impose au champ de contraintes d'obéir aux équations d'équilibre.

II-2-1- Cinématique

Le gradient de déplacement β_{ij} est défini par:

$$\underline{\beta} = \text{grad } \mathbf{u} \quad (\text{II-1a})$$

ou encore,

$$\beta_{ij} = u_{i,j} \quad (\text{II-1b})$$

Le tenseur de déformation $\underline{\varepsilon}$ n'est rien d'autre que la partie symétrique de $\underline{\beta}$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II-2})$$

alors que le tenseur de rotation $\underline{\omega}$ est la partie antisymétrique de $\underline{\beta}$:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \beta_{ji}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{II-3})$$

Généralement en inélasticité, les quantités totales $\underline{\beta}$, $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\omega}$ peuvent être décomposées en parties élastique et inélastique de la manière suivante:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^{\text{iné}} \quad (\text{II-4a})$$

$$\underline{\beta} = \underline{\beta}^e + \underline{\beta}^{\text{iné}} \quad (\text{II-4b})$$

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}^e + \underline{\omega}^{\text{iné}} \quad (\text{II-4c})$$

avec,

$$\underline{\beta}^e = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\omega}^e \quad (\text{II-4d})$$

$$\underline{\beta}^{\text{iné}} = \underline{\varepsilon}^{\text{iné}} + \underline{\omega}^{\text{iné}} \quad (\text{II-4e})$$

II-2-2- Statique

Soit un milieu continu fini de frontière ∂V , dans un état initial naturel (contraintes nulles). Ce milieu peut être soumis à l'action des forces extérieures (de densité volumique ρf_i) définies dans V et à des conditions aux limites sur sa frontière ∂V réparties selon trois catégories (Figure II-1):

1- Conditions aux limites en contrainte:

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^d \quad \text{sur } \partial V \quad (\text{II-5})$$

2- Conditions aux limites en déplacement:

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \partial V \quad (\text{II-6})$$

3- Conditions aux limites mixtes en contraintes et en déplacements:

$$\sigma_{ij} n_j = T_i^d \text{ sur } S_{T_i} \quad (II-7)$$

$$u_i = u_i^d \text{ sur } S_{u_i}$$

avec,

$$S_{u_i} \cup S_{T_i} = \partial V \quad (II-8)$$

et

$$S_{u_i} \cap S_{T_i} = \emptyset$$

\mathbf{n} est la normale unitaire extérieure à la frontière ∂V .

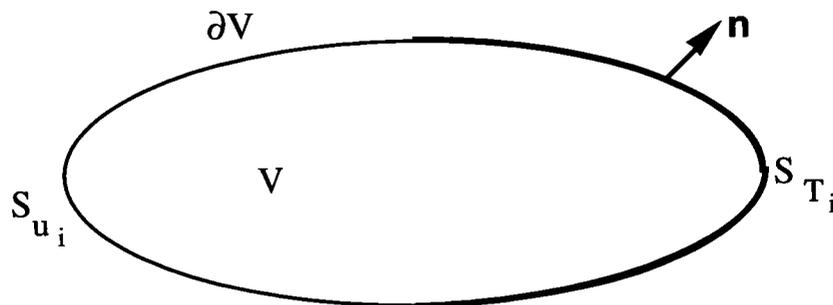


Figure II-1:

Conditions aux limites imposées à un milieu continu.

Sous l'effet de ces forces (volumiques et surfaciques) et de ces déplacements, le milieu sera le siège de contraintes σ_{ij} et d'un champ de déplacement u_i définis en tout point. Ce champ de contrainte doit satisfaire aux relations d'équilibre des forces et des moments qui s'écrivent en l'absence d'effets d'inertie:

- équilibre des forces: $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0 \quad (II-9a)$

- équilibre des moments: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (II-9b)$

II-2-3- Conditions de compatibilité

Dans l'hypothèse fondamentale de la continuité des milieux, ces derniers ne peuvent garder leurs cohésions (absence de trous ou de recouvrements de matière) dans l'espace euclidien, ce qui est généralement observé, que s'ils sont le siège d'un champ de déplacement \mathbf{u} tel que $\underline{\beta}$ en soit le gradient. Autrement dit, la différentielle $du_i = \beta_{ij} dx_j$ doit être totale exacte. Ceci s'exprime par les conditions de Cauchy à l'aide de l'opérateur rotationnel [5]:

$$\mathbf{Rot} \underline{\beta} = 0 \quad (\text{II-10a})$$

ou,

$$\epsilon_{ikl} \beta_{jl,k} = 0 \quad (\text{II-10b})$$

$\underline{\epsilon}$ est le tenseur permutation de Ricci:

$$\epsilon_{lmn} = \begin{cases} 1 & \text{si } (1, m, n) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si deux indices au moins sont égaux} \\ -1 & \text{si } (1, m, n) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

II-2-4- Tenseur d'incompatibilité

Une autre forme de relations de compatibilité est donnée par E.Kröner [5] qui introduit le tenseur incompatibilité Inc tel que:

$$\text{Inc} \underline{\epsilon} = 0 \quad (\text{II-12a})$$

ou,

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{lm,kn} = 0 \quad (\text{II-12b})$$

Si les déformations totales $\underline{\epsilon}$ sont compatibles, les composantes élastiques $\underline{\epsilon}^e$ et inélastiques $\underline{\epsilon}^{\text{iné}}$ ne le sont pas nécessairement. Dans ce cas, on introduit le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\eta}$ défini par [6]:

$$\underline{\eta} = \text{Inc} \underline{\epsilon}^e = -\text{Inc} \underline{\epsilon}^{\text{iné}} \quad (\text{II-13a})$$

soit,

$$\eta_{ij} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{lm,kn}^e = -\epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \epsilon_{lm,kn}^{\text{iné}} \quad (\text{II-13b})$$

Ce tenseur est utilisé dans la résolution des équations de mouvement par la méthode du potentiel des contraintes.

II-3- Rappel de la théorie élastique des dislocations

II-3-1- Préliminaire

La notion de dislocation a été introduite mathématiquement par Volterra (1907) comme une singularité élastique (mathématique) dans un milieu élastique. L'idée se précise dans les années 30 et une solution au paradoxe de la limite d'élasticité fût trouvée. En effet, G.I.Taylor [7], E.Orowan [8] et M.Polanyi [9] postulèrent indépendamment qu'une imperfection cristalline pouvait exister dans les réseaux cristallins, et que le mouvement de cette imperfection pour des valeurs de contraintes suffisantes provoquait une déformation. Par conséquent, ils ont expliqué d'une part pourquoi la limite d'élasticité expérimentale était inférieure à la limite théorique dont le calcul était fondé sur l'hypothèse de cisaillement global de toutes les liaisons atomiques du cristal. D'autre part, ils ont mis en évidence l'origine de la déformation plastique simplement par le passage de ces imperfections dans le plan de cisaillement. Ces imperfections ont portées le nom de "dislocation coin". J.M.Burgers [10] a étendu ce résultat à la "dislocation vis". Il a fallut attendre les années 50 pour que, grâce au développement de la microscopie électronique, les dislocations soient enfin observées (Hedges et Mitchel (1950) et Hirsch, Horne et Whelan (1956)).

L'historique du développement de la théorie élastique des dislocations a été marqué par deux périodes. Pendant la première (avant le début des années 60), les efforts se sont portés sur la résolution des problèmes statiques. Étant donné que les dislocations représentent une source de contraintes internes, il s'agissait en effet de trouver une solution aux équations d'équilibre dans le cas d'un milieu élastique contenant des dislocations fixes, de calculer l'énergie élastique associée aux champs obtenus et d'en déduire la force exercée sur les dislocations statiques [10, 11, 12]. Ce n'est qu'à la fin de cette période qu'on commence à s'intéresser à la dynamique des dislocations [13, 14]. Les différents résultats de cette période ainsi que les méthodes utilisées sont largement rappelés par R.de Wit [15] et par J.P.Hirth et J.Lothe [16]. Au cours de la deuxième période, c'est généralement toute une théorie de défauts

de structure dont les dislocations font partie, qui a été développée. Tout d'abord J.D.Eshelby [1, 4] a en outre donné une définition assez générale de la force sur n'importe quel défaut valable aussi bien en statique qu'en dynamique faisant intervenir le tenseur d'énergie-impulsion. Par la suite, H.Zorski [2] et J.Kossecki [17] ont déterminé les équations de base pour calculer le champ de déplacement, de vitesse et l'équation de mouvement d'une dislocation linéique. E.Kossecka [3] a généralisé ces équations pour une dislocation de géométrie et de mouvement quelconque.

II-3-2- Description géométrique d'une dislocation

Une dislocation, est un défaut que l'on peut définir par les opérations fictives suivantes [1, 18] (Figure II-2):

1- On coupe le milieu suivant une surface quelconque S limitée par une ligne L ;

2- On déplace sans les déformer les lèvres S_1 et S_2 de la coupure;

3- Ce déplacement peut être un cisaillement pur comme dans le cas d'une coupure plane, les surfaces S_1 et S_2 glissant l'une contre l'autre; sinon, il faut ajouter de la matière si le déplacement a créé un vide, en enlever dans le cas contraire;

4- On recolle les lèvres S_1 et S_2 en supprimant les contraintes externes que l'on avait appliquées pour effectuer le déplacement.

La dislocation ainsi construite peut être considérée comme un défaut surfacique ou bien comme un défaut linéique [3]. Mais l'intuition physique, les observations effectuées et les précédents travaux supposent le plus souvent que la dislocation est un défaut de structure linéique [4, 19, 20] et c'est ainsi qu'on va la considérer tout le long de ce travail.

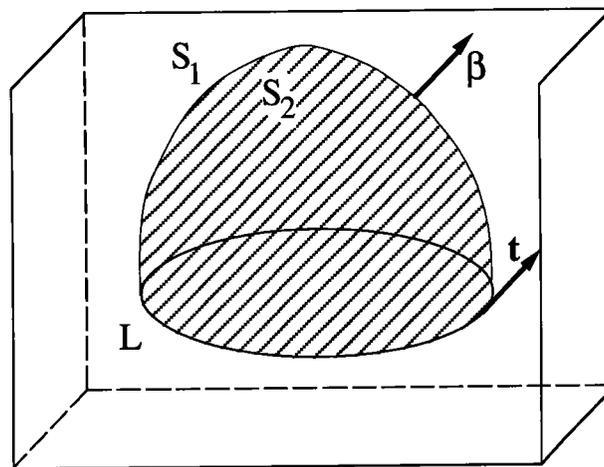


Figure II-2:
Construction d'une dislocation par coupure.

La dislocation formée comme précédemment, peut être de deux types:

a- Dislocation de Somigliana:

Les deux surfaces S_1 et S_2 sont déplacées et déformées. La dislocation de Somigliana est caractérisée par un vecteur déplacement β des surfaces de coupure qui dépend du point considéré sur la surface.

b- Dislocation de Volterra:

Les surfaces ne sont pas déformées mais seulement déplacées et on peut en distinguer des dislocations de translation et des dislocations de rotation.

Ainsi une dislocation est caractérisée par (Figure II-3):

⇒ La forme géométrique de la ligne L, définie par le vecteur unitaire le long de cette ligne t ;

⇒ Le déplacement relatif des lèvres β appelé souvent le vecteur de Burgers et noté par \mathbf{b} [10].

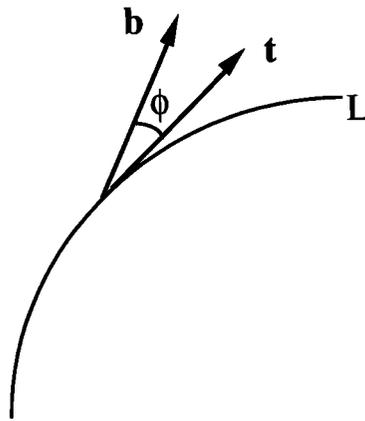


Figure II-3:
Vecteurs de Burgers et tangent d'une dislocation.

Selon le choix du vecteur de Burgers **b** et du vecteur tangent **t**, on peut identifier trois sortes de dislocations:

a- Dislocation coin:

Le vecteur de Burgers **b** est normal à la ligne de dislocation **t**.

b- Dislocation vis:

Le vecteur de Burgers **b** est parallèle à la ligne de dislocation **t**.

c- Dislocation mixte:

Le vecteur de Burgers **b** fait un angle ϕ avec la ligne de dislocation **t**.

II-3-3- Tenseur densité de dislocations

On considère un champ de gradient de déformations inélastiques incompatibles $\underline{\beta}^{iné}$ résultant d'une distribution de déformations inélastiques $\underline{\epsilon}^{iné}$ et de rotations inélastiques $\underline{\omega}^{iné}$. Les équations de compatibilité (II-10) portant sur $\underline{\beta}^{iné}$ n'étant pas satisfaites, on définit en tout point un tenseur $\underline{\alpha}$, ne s'annulant que pour $\underline{\beta}^{iné}$ compatible:

$$\underline{\alpha} = -\mathbf{Rot} \underline{\beta}^{\text{iné}} \quad (\text{II-14a})$$

ou encore:

$$\alpha_{ij} = -\epsilon_{ikl} \beta_{jl,k}^{\text{iné}} \quad (\text{II-14b})$$

Ce tenseur satisfait par définition aux relations de divergence nulle ($\text{div}(\mathbf{Rot}) \equiv 0$):

$$\text{div} \underline{\alpha} = 0 \quad (\text{II-15a})$$

ou:

$$\alpha_{ij,j} = 0 \quad (\text{II-15b})$$

Cette condition de divergence nulle traduit la loi des noeuds et signifie physiquement que les dislocations ne peuvent pas se terminer à l'intérieur du milieu. Elles doivent, ou bien rencontrer d'autres imperfections (surface, joint, dislocation), ou bien émerger à la surface du cristal ou bien boucler sur elles mêmes [10].

Si l'on considère maintenant une surface (S_Γ) (surface de Burgers) découpée dans le milieu et limitée par une courbe fermée (Γ) (circuit de Burgers) (Figure II-4), le flux de α_{ij} à travers cette surface peut s'exprimer par une intégrale curviligne sur (Γ):

$$\int_{S_\Gamma} \alpha_{ij} n_i dS = - \int_{S_\Gamma} \epsilon_{ikl} \beta_{jl,k}^{\text{iné}} n_i dS = - \oint_{\Gamma} \beta_{ij}^{\text{iné}} dx_i \quad (\text{II-16})$$

L'intégrale curviligne (II-16) n'est pas nulle, $\beta_{ij}^{\text{iné}}$ étant incompatible. Soit $du^{\text{iné}}$ un champ de "déplacement inélastique" qui a uniquement une signification différentielle et locale tel que $du_j^{\text{iné}} = \beta_{ij}^{\text{iné}} dx_i$ [5, 6]. On obtient alors:

$$\int_{S_\Gamma} \alpha_{ij} n_i dS = - \oint_{\Gamma} \beta_{ij}^{\text{iné}} dx_i = - \oint_{\Gamma} du_{ij}^{\text{iné}} = b_j \quad (\text{II-17})$$

La relation (II-17) est la définition du vecteur de Burgers de composantes b_j d'une dislocation.

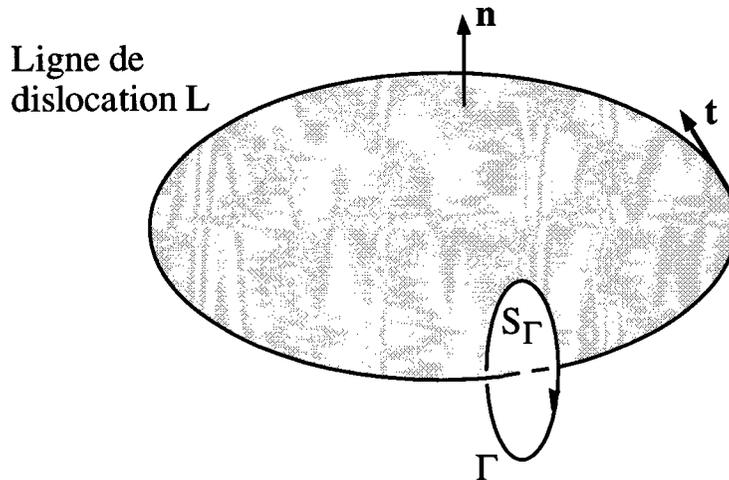


Figure II-4:
Circuit et surface de Burgers d'une dislocation.

La densité continue des dislocations α_{ij} définie par (II-17) représente donc un flux de dislocations dans la direction x_j perçant une surface unité d'un plan normal à la direction x_i . Ce qui peut être exprimé aussi par la relation locale suivante:

$$db_j = \alpha_{ij} n_i dS \quad (\text{II-18})$$

De cette relation on peut déduire:

- si $i = j$, la dislocation est vis;
- si $i \neq j$, la dislocation est coin.

si la dislocation est discrète, elle sera décrite à l'aide d'une distribution de Dirac.

Dans ce paragraphe, on a utilisé la notion globale de déformation inélastique pour déduire le tenseur de densité de dislocations et le vecteur de Burgers. Il reste à noter que lorsque cette déformation s'identifie à une déformation plastique, alors l'ultime source d'incompatibilité plastique et de contraintes internes est le mouvement et la multiplication des dislocations. Mais lorsque la déformation inélastique n'est pas une véritable déformation plastique (gradient de température...), on parle alors de déformation quasi

plastique. Une simple extension du concept de dislocation (quasi dislocation) permet alors de traiter ce cas en utilisant un formalisme identique au précédent [6, 21].

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à la déformation plastique liée à la présence des dislocations. Le cas d'une déformation quasi plastique fera l'objet du chapitre suivant.

II-3-4- Méthodes de calcul des contraintes internes

a- Contraintes internes

Les contraintes internes correspondent à des contraintes qui ne sont pas produites par le chargement imposé à la frontière. Elles satisfont les équations d'équilibre mais pas les conditions de compatibilité. En effet, soit un milieu auquel est imposée une déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ incompatible; celle-ci s'accompagne nécessairement d'une déformation additionnelle telle que la déformation totale soit compatible. D'où la présence d'un champ de contraintes internes associé à cette déformation additionnelle et relié à celle-ci, dans le cas où elle est purement élastique, par la loi de Hooke locale d'élasticité anisotrope que l'on supposera linéaire:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \quad (\text{II-19})$$

où $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ désignent les composantes du tenseur d'élasticité au point \mathbf{r} .

(II-19) peut être écrite autrement en faisant intervenir les composantes du tenseur complaisance $S_{ijkl}(\mathbf{r})$ au point \mathbf{r} :

$$\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) = S_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \quad (\text{II-20})$$

Si le milieu est homogène alors $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ (de même pour $S_{ijkl}(\mathbf{r})$) ne dépendent plus de la position \mathbf{r} :

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}, \quad S_{ijkl}(\mathbf{r}) = S_{ijkl} \quad (\text{II-21})$$

En général, C_{ijkl} possèdent les symétries suivantes qui restent valable aussi pour S_{ijkl} :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (\text{II-22})$$

Le champ de contraintes donné par (II-19) doit satisfaire aux conditions d'équilibre qui s'écrivent en l'absence des forces de volume et d'inertie:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{II-23})$$

La condition de compatibilité de la déformation totale devant être vérifiée:

$$\text{Inc} (\underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p) = 0 \quad (\text{II-24})$$

Les équations (II-23) ont été résolues pour différents milieux (isotrope, anisotrope) [17, 22] et pour différentes géométries de la ligne de dislocation (rectiligne, courbée) [23]. On rencontre souvent deux méthodes de résolution:

⇒ celle utilisant une approche statique c'est-à-dire exprimant le problème en termes de contraintes (ou de potentiel de contraintes) [5];

⇒ celle partant d'une approche cinématique, connue sous le nom de méthode (équations) de Navier et qui consiste à travailler en termes de déplacement [24, 25].

b- Méthode du potentiel des contraintes

On considère un milieu infini, isotrope à élasticité linéaire et soumis à un champ $\underline{\beta}^p$ connu incompatible. A partir de la relation (II-13), qui lie le tenseur d'incompatibilité Inc et la déformation élastique, et de la loi de comportement (II-20), on peut écrire les équations fondamentales que doivent satisfaire les champs de déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e$ et de contraintes internes $\underline{\sigma}$, telles que:

$$\text{div } \underline{\sigma} = 0$$

et,

$$\text{Inc} (\underline{S} \cdot \underline{\sigma}) = \underline{\eta} \quad (\text{II-25})$$

La méthode du potentiel des contraintes consiste à prendre $\underline{\sigma}$ comme

inconnue dans les équations fondamentales et à introduire un tenseur auxiliaire χ , symétrique, du second ordre, dit *potentiel des contraintes* tel que:

$$\underline{\sigma} = \text{Inc } \chi \quad (\text{II-26})$$

La condition d'équilibre (II-23) est alors vérifiée ($\text{div}(\text{Inc}) = 0$) et l'équation (II-25) s'écrit:

$$\text{Inc } (\underline{S} \cdot \text{Inc } (\chi)) = \underline{\eta} \quad (\text{II-27})$$

dont la solution en χ conduit à celle en $\underline{\sigma}$ par l'intermédiaire de (II-26).

On introduit ensuite un autre tenseur χ' qui dans le cas du milieu isotrope considéré est défini par [5]:

$$\chi_{ij} = 2\mu \left(\chi'_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi'_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{II-28})$$

ou,

$$\chi'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\chi_{ij} - \frac{\nu}{1+2\nu} \chi_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (\text{II-29})$$

vérifiant:

$$\text{div } \chi' = 0 \quad (\text{II-30})$$

Les équations (II-27) s'écrivent plus simplement:

$$\chi'_{ij, kkl} = \eta_{ij} \quad (\text{II-31a})$$

ou:

$$\Delta \Delta \chi' = \underline{\eta} \quad (\text{II-31b})$$

où $\Delta \Delta$ est l'opérateur bilaplacien.

Pour un milieu infini, la solution de ces équations aux dérivées partielles est [15]:

$$\chi'_{ij}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int_V \eta_{ij}(\mathbf{r}') \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} dV' \quad (\text{II-32})$$

connaissant le tenseur χ' on peut déduire d'abord le tenseur χ à l'aide de la relation (II-28). Les contraintes $\underline{\sigma}$ sont alors déduites de la relation (II-26).

c- Méthode du tenseur de Green

On considère toujours un milieu infini, élastique, homogène et isotrope. Les conditions aux limites (II-5)-(II-7) sont alors rejetées à l'infini et on note:

$$\Rightarrow \text{pour les contraintes: } \sigma_{ij}(\infty) = \Sigma_{ij} \quad (\text{II-33})$$

$$\Rightarrow \text{pour le déplacement: } u_i(\infty) = U_i^0$$

En utilisant la symétrie du tenseur \underline{C} , la loi de comportement élastique (II-19) peut se mettre sous la forme suivante:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl} (u_{k,l}(\mathbf{r}) - \beta_{kl}^p(\mathbf{r})) \quad (\text{II-34})$$

La combinaison des équations (II-34) et (II-9a) conduit aux équations d'équilibre suivantes:

$$C_{ijkl} u_{k,lj}(\mathbf{r}) - C_{ijkl} \beta_{kl,j}^p(\mathbf{r}) + \rho f_i(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{II-35})$$

ce qui constitue un système d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont les $u_i(\mathbf{r})$ ($i = 1, 2, 3$) et qu'il faut résoudre en tenant compte des conditions de frontières (II-33). Pour cela on fait appel à la technique du tenseur de Green \underline{G} pour le milieu infini homogène de constantes d'élasticité \underline{C} :

$G_{km}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ représente le déplacement dans la direction k , au point \mathbf{r} quelconque lorsqu'une force unité $f_i = \delta_{im} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ est appliquée au point \mathbf{r}' dans la direction m .

G_{km} est symétrique par rapport aux indices k et m . Il vérifie (II-35) c'est à dire:

$$C_{ijkl} G_{jn,ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \delta_{ln} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0 \quad (\text{II-36})$$

avec la condition auxiliaire que \underline{G} s'annule à l'infini.

δ_{im} est le tenseur de Kronecker et $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ est la distribution de Dirac à trois dimensions dont l'une des propriétés permet d'écrire:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = \int_V \delta_{in} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_1(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-37})$$

Le terme $\delta_{in} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ donné par (II-36) est remplacé dans (II-37):

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jn,ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_1(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-38})$$

On utilise ici les relations entre les dérivées partielles portant sur $G_{jn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, à savoir:

$$\begin{aligned} G_{jn,i}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= \frac{\partial}{\partial x_i} G_{jn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = - \frac{\partial}{\partial x'_i} G_{jn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ &= -G_{jn,i'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (\text{II-39a})$$

on a alors:

$$G_{jn,ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = G_{jn,i'k'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (\text{II-39b})$$

(II-38) devient:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jn,i'k'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_1(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-40})$$

En intégrant deux fois par partie et en utilisant le théorème de la divergence, l'intégrale (II-40) s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) &= - \int_{\partial V} C_{ijkl} G_{jn,i'}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_1(\mathbf{r}') n_{k'} dS' \\ &\quad + \int_{\partial V} C_{ijkl} G_{jn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_{1,k'}(\mathbf{r}') n_{i'} dS' \\ &\quad - \int_V C_{ijkl} G_{jn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') u_{1,k'i'}(\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (\text{II-41})$$

On injecte la relation donnée par (II-35) dans l'intégrale de volume de (II-41) tout en supposant les forces de volume nulles:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = & - \int_{\partial V} \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}') n_k' dS' \\ & + \int_{\partial V} \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u_{l,k'}(\mathbf{r}') n_i' dS' \\ & - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl,i}^p(\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (\text{II-42})$$

On intègre une fois par partie la seule intégrale de volume de (II-42). En utilisant (II-4b) et la symétrie du tenseur $\underline{\mathbf{C}}$, le champ de déplacement devient alors:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = & \int_{\partial V} \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}') n_k' dS' \\ & + \int_{\partial V} \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl}^e(\mathbf{r}') n_i' dS' \\ & - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (\text{II-43})$$

Compte tenu de la condition auxiliaire imposée au tenseur de Green à l'infini, la deuxième intégrale de surface de (II-43) s'annule. Les conditions aux limites en déplacement (II-33) permettent d'écrire le champ de déplacement comme suit:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_n^0(\mathbf{r}) - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-44})$$

avec,

$$\mathbf{U}_n^0(\mathbf{r}) = - \int_{\partial V} \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,i}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}') n_k' dS' \quad (\text{II-45})$$

L'expression (II-44) permet de trouver le déplacement total \mathbf{u}_n pour une distribution de déformation plastique $\underline{\beta}^p$ donnée. Ceci fait, il est facile de déduire les autres champs élastiques (déformation et contrainte) écrits eux aussi sous forme intégrale. Il suffit de procéder à une dérivation de \mathbf{u}_n , ce qui

se traduit par:

$$\mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_{n,m}^0(\mathbf{r}) - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-46})$$

Le champ de déformation totale est déduit donc à partir des relations (II-46) et (II-2). Par ailleurs, on peut calculer les contraintes en injectant (II-46) dans la relation (II-34).

II-3-5- Application au cas d'une dislocation coin rectiligne et isolée

Pour expliciter les expressions (II-44) ou (II-46) dans le cas particulier des dislocations, il faut préciser en outre la distribution de déformation plastique qu'engendrent ces dislocations et les conditions aux limites imposées à la frontière ∂V du milieu infini. Ces dernières sont choisies telles que:

$$\Rightarrow \text{pour les contraintes: } \sigma_{ij}(\infty) = 0 \quad (\text{II-47})$$

$$\Rightarrow \text{pour le déplacement: } u_i(\infty) = 0$$

Compte tenu de ces conditions, le gradient de déplacement (II-46) par exemple se réduit à l'intégrale de volume suivante:

$$\mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r}) = - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \beta_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{II-48})$$

Le gradient de déformation plastique d'une dislocation isolée le long d'une ligne L associé à un déplacement constant à travers une surface (S) est donné par l'expression générale suivante [26]:

$$\beta_{kl}^p = -\delta_k(S) b_l \quad (\text{II-49})$$

$\delta_k(S)$ est la fonction delta de Dirac sur la surface (S) et b_l est une composante du vecteur de Burgers de la dislocation.

Il reste alors à définir le tenseur de Green solution de l'équation différentielle (II-36). En effet, pour un milieu infini, homogène et isotrope, G_{ij} est donné par [27]:

$$G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right] \quad (\text{II-50})$$

$r = (x_i x_i)^{1/2}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Dans toute la suite de ce travail, on s'intéresse au cas particulier d'une dislocation coin rectiligne et isolée dont la ligne L est parallèle à l'axe x_3 et dont le vecteur de Burgers est dirigé vers les x_1 positifs et est noté b (Figure II-5).

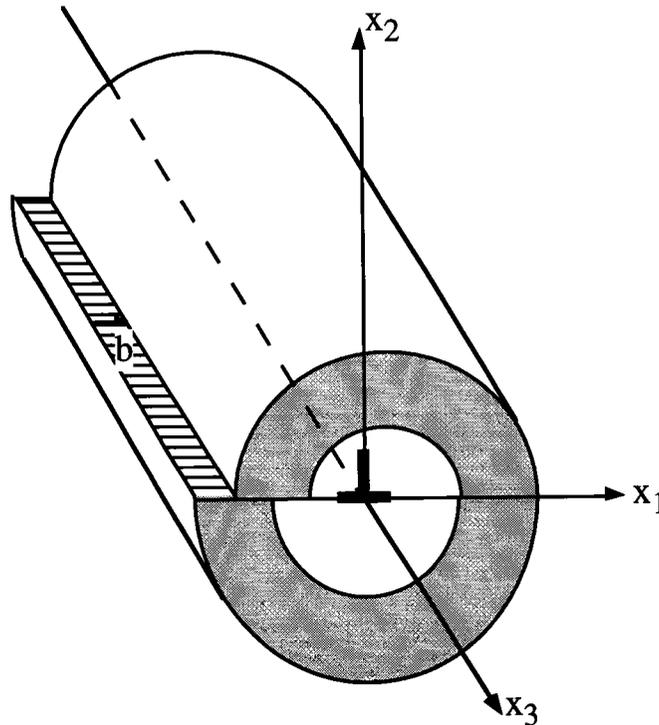


Figure II-5:
Dislocation coin rectiligne.

Dans ce cas, la distorsion plastique est donnée par [28]:

$$\beta_{21}^p = b H(-x_1) \delta(x_2) \quad (\text{II-51})$$

$H(x)$ est la fonction d'Heaviside.

La géométrie du problème ainsi posé permet de faire l'hypothèse de l'état de déformations planes ($\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$). Il en résulte que le tenseur des contraintes internes est tel que:

$$\begin{aligned}\sigma_{13} &= \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} &= \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})\end{aligned}\tag{II-52}$$

Les solutions de ce problème en déplacement et en contraintes internes calculées notamment par R.deWit [26] se présentent de la manière suivante:

⇒ en déplacement:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{b}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{x_1 x_2}{r^2} \right] \\ u_2 &= -\frac{b}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \log(r) + \frac{x_1^2}{r^2} \right] \\ u_3 &= 0\end{aligned}\tag{II-53}$$

⇒ en contraintes internes:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{x_2}{r^2} + 2 \frac{x_1^2 x_2}{r^4} \right] \\ \sigma_{22} &= -\frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{x_2}{r^2} - 2 \frac{x_1^2 x_2}{r^4} \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{x_1}{r^2} - 2 \frac{x_1 x_2^2}{r^4} \right]\end{aligned}\tag{II-54}$$

ν est le rapport de Poisson et μ le module de cisaillement.

Il faut noter qu'on peut retrouver les mêmes résultats en appliquant la méthode du potentiel des contraintes qui dans le cas de la dislocation coin

rectiligne se réduit à la fonction de contraintes d'Airy [5, 11].

II-3-6- Energie élastique de la dislocation coin rectiligne

La présence d'une telle dislocation introduit donc un champ de contraintes internes (II-54). Celles-ci contribuent à une augmentation de l'énergie totale par un terme qu'on appelle "self-énergie" de la dislocation. La densité de cette self-énergie est donnée par:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \quad (II-55)$$

On remplace dans (II-55) le champ de déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e$ par la relation (II-20), w_{el} devient:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (II-56)$$

Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, les composantes S_{ijkl} sont données par:

$$S_{ijkl} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (II-57)$$

En combinant (II-57) et (II-56), w_{el} s'écrit comme suit [11]:

$$w_{el} = \frac{1}{4\mu} [(1-\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 2 (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2)] \quad (II-58)$$

En remplaçant dans (II-58), les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} par leurs expressions données par (II-54), on a:

$$w_{el} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{b}{2\pi(1-\nu)} \right)^2 \left[\frac{x_1^2}{r^4} + (1-2\nu) \frac{x_2^2}{r^4} \right] \quad (II-59)$$

A partir des équations (II-53) et (II-54), on peut rapidement remarquer que les déplacements et les contraintes sont singuliers sur la

dislocation. Or la théorie élastique des dislocations ne peut être appliquée que dans un domaine où les champs élastiques sont réguliers. En d'autres termes, on se ramène à isoler la "mauvaise" région au voisinage immédiat de la ligne de la dislocation formant ce qu'on appelle couramment "le coeur de la dislocation". La dimension de ce coeur est souvent de l'ordre de grandeur du paramètre cristallin et à l'intérieur de laquelle les atomes sont désordonnés [29]. Ainsi, la mécanique des milieux continus ne peut être appliquée qu'à l'extérieur de cette région.

Pour calculer l'énergie élastique par unité de longueur de la dislocation, on intègre l'expression (II-59) sur un intervalle $[r_0, R]$ où r_0 représente le rayon du coeur de la dislocation et R représente la taille du milieu cristallin ou le plus fréquemment la demie distance entre deux dislocations. Le résultat de l'intégration se présente comme suit:

$$W_{el} = \frac{\mu b^2}{4\pi(1-\nu)} \log \frac{R}{r_0} \quad (\text{II-60})$$

un résultat classique de la théorie des dislocations, qui montre que la "self-énergie" de la dislocation coin rectiligne a un comportement singulier au niveau de la dislocation et croît avec R .

II-4- Analyse des différentes forces exercées sur les singularités élastiques

II-4-1- Définition de la force sur une singularité élastique

Le concept de force sur les défauts de structure ou singularités doit évidemment son origine à l'application de la thermodynamique à la mécanique des milieux continus.

Eshelby [1, 4] fut le premier à introduire la notion de force sur les singularités dans son approche entre la théorie continue des défauts de structure et la théorie de l'élasticité. Ainsi, en se basant sur la mécanique et sur la thermodynamique classique, il a donné une définition assez générale de la force dans un milieu élastique, valable pour n'importe quel défaut et

permettant de calculer tous les types de forces qui peuvent s'exercer sur ce défaut.

En effet, un milieu qui contient des singularités élastiques peut être décrit par la donnée d'un ensemble de paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ (chapitre I). Un tel ensemble peut inclure la position, la forme ou la dimension du défaut ou la distance relative entre deux défauts...

L'énergie totale du système E_{tot} fonction de cet ensemble de paramètres, est définie comme la somme de l'énergie élastique E_{el} et de l'énergie des efforts extérieurs E_{ext} [1]:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{el}}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) + E_{\text{ext}}(\alpha, \beta, \gamma, \dots) \quad (\text{II-61})$$

Si le système (ou plutôt la transformation qu'il subit) est adiabatique cette énergie totale est interprétée comme l'enthalpie et si le système est isotherme, E_{tot} représente alors l'énergie libre de Gibbs. En d'autres termes l'énergie élastique s'interprète comme une énergie interne dans le cas adiabatique ou comme une énergie libre d'Helmholtz dans le cas isotherme.

Avec ces notions classiques de thermodynamique, Eshelby a défini la force sur un défaut appelée *force généralisée* par la variation de l'énergie totale par rapport au paramètre α , soit:

$$\mathbf{F}(\alpha) = - \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial \alpha} \quad (\text{II-62})$$

L'équation d'équilibre est évidemment donnée par:

$$\mathbf{F}(\alpha) = 0 \quad (\text{II-63})$$

D'une façon plus générale, la force $\mathbf{F}(\alpha)$ peut être définie comme suit [30]:

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = -\mathbf{F}[\mathbf{V}] \quad (\text{II-64})$$

Le vecteur \mathbf{V} représente une vitesse de variation de l'un des paramètres et \mathbf{F}

est donc définie comme étant un opérateur linéaire qui prend en compte une variation quelconque de la configuration du défaut notée symboliquement par le vecteur V (sous entendu $\partial\alpha$).

II-4-2- Les différentes forces exercées sur les singularités élastiques

Soit un milieu élastique de volume V et de frontière ∂V sur laquelle un chargement $\Sigma_{ij} n_j$ est imposé. Ce milieu contient une singularité élastique Σ' (chapitre I) sur laquelle les champs de déplacement, de déformation et de contraintes internes sont singuliers. Pour cela une surface fermée arbitraire Σ contenant Σ' est introduite pour isoler les singularités cette fois-ci mathématiques (Figure II-6).

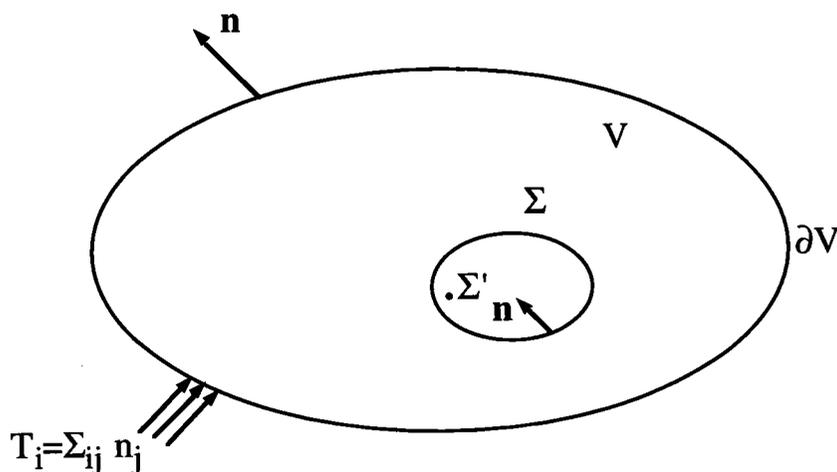


Figure II-6:

Une singularité élastique Σ' dans un milieu V sous chargement $\Sigma_{ij} n_j$.

Le champ de contraintes locales est la somme des contraintes imposées Σ_{ij} et des contraintes internes σ_{ij}^D introduites par la singularité Σ' :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \sigma_{ij}^D \quad (\text{II-65})$$

Pour déterminer la force sur Σ' , il faut tout d'abord expliciter les deux formes d'énergies E_{el} et E_{ext} constituant l'énergie totale.

L'énergie élastique du système est donnée par:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_V (\Sigma_{ij} + \sigma_{ij}^D) (E_{ij} + \varepsilon_{ij}^D) dV \quad (II-66)$$

E_{ij} est le champ de déformation élastique macroscopique et ε_{ij}^D le champ de déformation élastique lié au défaut.

(II-66) s'écrit sous une forme développée:

$$\begin{aligned} E_{el} = & \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} E_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D dV \\ & + \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^D dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^D E_{ij} dV \end{aligned} \quad (II-67)$$

Les deux derniers termes de E_{el} représentent l'énergie d'interaction élastique entre le chargement sur ∂V et la singularité Σ' :

$$E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \Sigma') = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^D dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^D E_{ij} dV \quad (II-68)$$

en élasticité linéaire isotrope on a:

$$\Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^D = C_{ijkl} E_{kl} \varepsilon_{ij}^D = \sigma_{ij}^D E_{ij} \quad (II-69)$$

donc (II-68) devient:

$$E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \Sigma') = \int_V \sigma_{ij}^D E_{ij} dV \quad (II-70)$$

en utilisant le théorème de la divergence, (II-70) s'écrit en terme d'intégrales de surfaces:

$$E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \Sigma') = \int_{\partial V} \sigma_{ij}^D U_i n_j dS - \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D U_i n_j dS \quad (II-71)$$

Puisque $\sigma_{ij}^D n_j = 0$ sur ∂V , (II-71) devient:

$$E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \underline{\Sigma}') = - \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D U_i n_j dS \quad (II-72)$$

Souvent on suppose que la singularité ne produit aucune traction sur la surface Σ , de ce fait on néglige le terme $E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \underline{\Sigma}')$ [1, 30].

Compte tenu de cette remarque, l'expression donnant l'énergie élastique (II-67) devient:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} E_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^D \varepsilon_{ij}^D dV \quad (II-73)$$

qui peut être transformé par l'application encore une fois du théorème de la divergence et du fait que $\sigma_{ij}^D n_j = 0$ sur ∂V :

$$E_{el} = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} E_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D u_i^D n_j dS \quad (II-74)$$

Par ailleurs l'énergie des efforts extérieurs s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} E_{ext} &= - \int_{\partial V} \Sigma_{ij} (U_i + u_i^D) n_j dS \\ &= - \int_{\partial V} \Sigma_{ij} U_i n_j dS - \int_{\partial V} \Sigma_{ij} u_i^D n_j dS \end{aligned} \quad (II-75)$$

et en appliquant toujours le théorème de la divergence et le fait que $E_{el}^{int}(\underline{\Sigma}, \underline{\Sigma}')$ peut être supposée nulle, (II-75) devient:

$$E_{ext} = - \int_{\partial V} \Sigma_{ij} U_i n_j dS - \int_{\Sigma} \Sigma_{ij} u_i^D n_j dS \quad (II-76)$$

L'expression de l'énergie totale (II-61) peut être écrite alors sous la forme:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \int_V \Sigma_{ij} E_{ij} dV - \int_{\partial V} \Sigma_{ij} U_i n_j dS$$

$$- \int_{\Sigma} \Sigma_{ij} u_i^D n_j dS - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D u_i^D n_j dS \quad (\text{II-77})$$

L'expression de la force sur la singularité Σ' est déterminée par la variation de l'énergie totale (II-77). En maintenant fixe le chargement sur ∂V , cette variation prend la forme suivante:

$$-\delta E_{\text{tot}} = \delta \int_{\Sigma} \Sigma_{ij} u_i^D n_j dS + \delta \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D u_i^D n_j dS \quad (\text{II-78})$$

Le premier terme représente la force qu'exerce le chargement $\Sigma_{ij} n_j$ sur Σ' , alors que le deuxième terme constitue la force qu'exerce la singularité sur elle-même et qu'on appelle une "self-force". On écrit alors (II-78) sous la forme:

$$-\delta E_{\text{tot}} = -\delta E(\underline{\Sigma}, \Sigma') - \delta E_{\text{self}} \quad (\text{II-79})$$

avec:

$$\delta E(\underline{\Sigma}, \Sigma') = -\delta \int_{\Sigma} \Sigma_{ij} u_i^D n_j dS \quad (\text{II-80})$$

$$\delta E_{\text{self}} = -\delta \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^D u_i^D n_j dS \quad (\text{II-81})$$

A partir d'un raisonnement analogue se basant aussi sur la notion d'énergie totale, J.D.Eshelby [1] a montré que la force sur la singularité (défaut) Σ' peut se mettre sous la forme suivante:

$$F_i = \int_{\Sigma} P_{ji} n_j dS \quad (\text{II-82})$$

avec,

$$P_{ji} = w \delta_{ji} - \sigma_{ij} u_{i,1} \quad (\text{II-83})$$

P_{ji} est appelé le tenseur d'énergie-impulsion d'Eshelby où w représente l'énergie libre par unité de volume.

Dans le cas de l'élasticité linéaire infinitésimale, une simple décomposition des champs de contrainte et de déplacement en des termes provenant du chargement extérieur, de la présence d'autres défauts et du défaut Σ' lui-même, conduit à la conclusion suivante [1]: F_1 est la force que peut subir le défaut Σ' sous l'action de l'extérieur, de la présence d'autres sources de contraintes internes et enfin de l'action de Σ' lui-même.

La force F_1 possède un équivalent dans la mécanique des milieux fissurés connu sous le nom d'intégrale J de Rice [31] et appelé souvent le taux d'énergie dissipée. Au premier chapitre, on a trouvé l'extension de (II-82) dans le cas de la thermoélasticité dynamique donné par la formule (I-78).

II-5- Force sur une dislocation

II-5-1- Cas d'une dislocation quelconque

A partir de l'expression (II-79), la force sur une dislocation quelconque (rectiligne ou courbée) peut-être due soit au chargement extérieur (éventuellement aux autres sources de contraintes internes), soit à son propre champ de contraintes. Dans ce cas, la self-force résulte de l'action d'un élément de la boucle de dislocation sur un autre de la même boucle. C'est une force qui dépend au moins de la courbure de la boucle [30]. Dans ce paragraphe, on ne s'intéresse pas à cette force, on ne rappelle que celle due au chargement $\underline{\Sigma}$.

Dans le cas d'une dislocation quelconque, la surface Σ peut être remplacée par la surface de coupure S limitée par la ligne de dislocation L (Figure II-2). A travers cette surface, le champ de déplacement u_i^D subit une discontinuité de l'ordre du vecteur de Burgers \mathbf{b} . La relation (II-80) s'écrit alors sous la forme:

$$\delta E(\underline{\Sigma}, \Sigma') = -b_i \delta \int_S \Sigma_{ij} n_j dS \quad (\text{II-84})$$

Si on suppose qu'un élément de la ligne de dislocation $d\mathbf{L}$ se déplace d'une distance $\delta\mathbf{r}$ (Figure II-7), ce déplacement entraîne une variation de l'aire de la surface S telle que $\delta\mathbf{S} = \delta\mathbf{r} \times d\mathbf{L}$, soit:

$$\delta S_j = \epsilon_{jmn} \delta x_m dL_n = \epsilon_{jmn} \delta x_m t_n dL$$

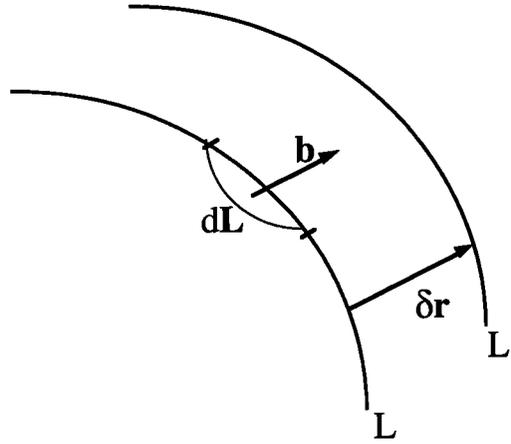


Figure II-7:
Force exercée sur une dislocation.

Ceci étant, la variation de l'énergie (II-84) peut être mise sous la forme d'une intégrale curviligne étendue à la ligne de la dislocation [20, 30]:

$$\delta E(\underline{\Sigma}, \Sigma') = - \oint_L \epsilon_{jmn} b_i \Sigma_{ij} \delta x_m t_n dL \quad (\text{II-85})$$

t_n est la composante du vecteur tangent à la ligne de dislocation L.

Le coefficient de δx_m sous le signe intégrale de l'expression (II-85) est la force agissant sur l'unité de longueur de la ligne de dislocation due aux contraintes appliquées $\underline{\Sigma}$. L'expression (II-85) peut être écrite sous une forme "locale" telle que:

$$f_m = -\epsilon_{jmn} b_i \Sigma_{ij} t_n \quad (\text{II-86})$$

L'expression (II-86) correspond tout simplement à la force de Peach-Koehler [12]. Elle peut être aussi calculée à partir de l'intégrale (II-82). Une formule identique à (II-86) est calculée à partir d'un formalisme se basant sur le Lagrangien [32]. Notons que jusqu'à présent, $\underline{\Sigma}$ était considérée comme des contraintes appliquées par l'extérieur. En réalité, elles peuvent être aussi des contraintes de toutes natures, sauf celles créées par la dislocation elle-même à

cause de leurs natures singulières [33].

II-5-2- Cas particulier d'une dislocation coin rectiligne

Dans ce cas, on considère une dislocation coin rectiligne parallèle à l'axe x_3 (Figure II-5), soumise à l'action d'une contrainte de cisson Σ_{12} . La seule composante de la force f_m donnée par (II-86) qui s'exerce sur cette dislocation est [28]:

$$f_1 = b \Sigma_{12} \quad (\text{II-87})$$

b est la composante du vecteur de Burgers de la dislocation dirigé selon x_1 positif. La force f_1 est perpendiculaire à la ligne de la dislocation L .

Du fait de l'aspect rectiligne de la dislocation considérée, la self-force qu'elle exerce sur elle même est nulle. La dislocation rectiligne est en position d'équilibre.

II-6- Conclusion

Sans prétendre être exhaustif, on a essayé dans ce chapitre de faire le tour de la théorie continue des dislocations. A ce propos, la littérature est très riche et on peut trouver des notions et des informations précises et beaucoup plus complètes que la bibliographie présentée à la fin du chapitre et qui est donnée uniquement à titre indicatif. Le but de ce chapitre est de mettre le doigt sur l'une des causes et pas les moindres de la plasticité représentée par les dislocations, de constater que ces dislocations peuvent subir des forces exercées par le chargement (auquel on peut ajouter d'autres sources de contraintes internes) et/ou par leurs propres champs.

Dans le chapitre suivant, on va étudier un nouveau aspect des dislocations (quasi dislocation) lié à la dissipation thermique (chapitre I) et qui est de nature différente de la véritable plasticité (quasi plasticité).

- [1] **J.D.Eshelby**, *The Continuum Theory of Lattice Defects*, Sol.Stat.Phys., Ed. F.Seitz & D.Turnbull (Academic Press Inc., New York), Vol.3, p.p.79-144, (1956).
- [2] **H.Zorski**, *Theory of Discrete Defects*, Arch.Mech.Stos., Vol.3, No.18, p.p.302-372, (1966).
- [3] **E.Kossecka**, *Theory of Dislocation Lines in a Continuous Medium*, Arch.Mech.Stos., Vol.2, No.21, p.p.167-190, (1969).
- [4] **J.D.Eshelby**, *The Force on an Elastic Singularity*, Phil.Trans.Roy.Soc. London, Vol.A244, p.p.87-112, (1951).
- [5] **E.Kröner**, *Dislocation Field Theory*, in *Theory of Crystal Defects*, Academy of Sciences, Prague, p.p.231-256, (1966).
- [6] **A.Zaoui**, *Aspects Fondamentaux de la Plasticité des Polycristaux Métalliques*, dans *Dislocations et Déformation Plastique*, École d'été d'Yrivals, (1979).
- [7] **G.I.Taylor**, *The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals*, Proc.Roy.Soc., Vol.A145, p.p.362-415, (1934).
- [8] **E.Orowan**, *Zur Kristallplastizität, I, II, III*, Zeit.Phys., Vol.89, p.p.605-659, (1934).
- [9] **M.Polanyi**, *Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte*, Zeit.Phys., Vol.89, p.p.660-664, (1934).
- [10] **J.M.Burgers**, *Some Considerations on the Fields of Stress Connected with Dislocations in a Regular Crystal Lattice*, Proc.Kon.Nederl.Acad.Wetenschap, (Amsterdam), Vol.42, p.p.293-325, (1939).
- [11] **J.S.Koehler**, *On the Dislocation Theory of Plastic Deformation*, Phys.Rev., Vol.60, p.p.397-410, (1941).

- [12] **M.Peach & J.S.Koehler**, *The Forces Exerted on Dislocations and the Stress Fields Produced by Them*, Phys.Rev., Vol.80, No.3, p.p.436-439, (1950).
- [13] **F.C.Frank**, *On the Equations of Motion of Crystal Dislocations*, Proc.Phys.Soc., Vol.A62, p.p.131-134, (1949).
- [14] **J.D.Eshelby**, *Uniformly Moving Dislocations*, Proc.Phys.Soc., Vol.62, No.353A, p.p.307-314, (1949).
- [15] **R.de Wit**, *The Continuum Theory of Stationary Dislocations*, Sol.Stat.Phys., Ed. F.Seitz & D.Turnbull, Vol.10, p.p.249-292, (1960).
- [16] **J.P.Hirth & J.Lothe**, *Theory of Dislocations*, McGraw-Hill Book Company, (1968).
- [17] **J.Kossecki**, *The Green Tensor and the Displacement and Stress Fields Due to a Dislocation in Anisotropic Medium*, Arch.Mech.Stos., Vol.5, No.22, p.p.497-513, (1970).
- [18] **J.Bernard & A.Michel & J.Philibert & J.Talbot**, *Metallurgie Générale*, Masson, (1984).
- [19] **J.Friedel**, *Les Dislocations*, Ed. Gauthier-Villars, Paris, (1956).
- [20] **L.Landau & E.Lifchitz**, *Théorie de l'élasticité*, Ed. MIR, Moscou, (1967).
- [21] **G.Saada**, *Incompatibilités et Contraintes Internes*, dans *Dislocations et Déformation Plastique*, École d'été d'Yrivals, (1979).
- [22] **J.Kossecki**, *Two-Dimensional Green Tensor in an Infinite Anisotropic Elastic Medium*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, Vol.22, No.1, (1974).

- [23] **S.D.Gavazza & D.M.Barnett**, *The Self-Force on a Planar Dislocation Loop in an Anisotropic Linear-Elastic Medium*, J.Mech.Solids, Vol.24, p.p.171-185, (1976).
- [24] **R.de Wit**, *Theory of Disclinations: II. Continuous and Discrete Disclinations in Anisotropic Elasticity*, J.Res.Nat.Bur.Stand.(U.S), Vol.77A (Phys. and Chem.), No.1, p.p.49-100, (1973).
- [25] **R.deWit**, *Theory of Disclinations: III. Continuous and Discrete Disclinations in Isotropic Elasticity*, J.Res.Nat.Bur.Stand.(U.S), Vol.77A (Phys. and Chem.), No.3, p.p.359-368, (1973).
- [26] **R.deWit**, *Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations*, J.Res.Nat.Bur.Stand.(U.S), Vol.77A (Phys. and Chem.), No.5, (1973).
- [27] **T.Mura**, *Micromechanics of Defects in Solids*, Second edition, Martinus Nijhoff Publishers, (1987).
- [28] **A.M.Kosevich**, *Crystal Dislocations and the Theory Elasticity, in Dislocations in Solids*, Vol.1, Ed. F.R.N.Nabarro, North-Holland Publishing Company, (1979).
- [29] **M.S.Duesbery**, *The Mechanical Properties of the Dislocation Core*, Contemp.Phys., Vol.27, No.2, p.p.145-168, (1986).
- [30] **S.D.Gavazza**, *Energy Release Rates and Associated Forces on Singular Dislocations*, Dissertation, Stanford University, (1975).
- [31] **J.R.Rice**, *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*, J.Appl.Mech., Vol.35, p.p.379-387, (1968).
- [32] **A.N.Stroh**, *Force on a Moving Dislocation*, Phys.Rev., Vol.128, No.1, p.p.55-61, (1962).
- [33] **T.Mura**, *Periodic Distributions of Dislocations*, Proc.Roy.Soc., Vol.A280, p.528, (1964).

CHAPITRE III

ETUDE DES CHAMPS THERMOELASTIQUES ASSOCIES AU MOUVEMENT DES DISLOCATIONS

III-1- Introduction.....	69
III-2- Equations de l'évolution thermomécanique	
d'une discontinuité mobile.....	69
III-2-1- Equation de propagation de la chaleur	69
III-2-2- Calcul de la dissipation intrinsèque volumique	
pour un milieu élastique	71
III-2-3- Equations du mouvement	71
III-3- Equations de la thermoélasticité couplée	72
III-4- Méthodes de résolution des équations	
de la thermoélasticité couplée	74
III-4-1- Méthode de W.Nowacki	75
III-4-2- Méthode de G.Eason & I.N.Sneddon	77
III-4-3- Méthode de H.D.Bui.....	78
III-5- Cas particulier d'une dislocation	
rectiligne coin mobile.....	79
III-5-1- Présentation du problème	79
III-5-2- Calcul du champ de température.....	80
III-5-3- Calcul des contraintes internes thermiques	90
III-5-4- Calcul de l'énergie élastique d'origine thermique.....	96
III-6-Application au cas des ensembles de dislocations	100
III-6-1- Les empilements de dislocations.....	101
III-6-2- Les bandes de cisaillement.....	102
III-7- Conclusion.....	104
Références bibliographiques	105

III-1- Introduction

Dans ce chapitre, on ne considère que l'aspect thermique du mouvement des discontinuités. Tous les autres paramètres ou variables internes qui peuvent influencer la réponse d'un matériau seront donc négligés. On commence, en se basant sur les résultats du premier chapitre, par rappeler les équations de l'évolution thermomécanique d'un milieu quelconque contenant une discontinuité mobile et on examine ensuite le cas particulier d'un milieu élastique avec une dislocation coin mobile.

Une fois les équations de l'évolution thermomécanique formulées, on rappelle trois méthodes de résolution de telles équations à savoir celles de W.Nowacki [1], de G.Eason et I.N.Sneddon [2] et en fin de H.D.Bui et col. [3]. Ceci fait, on centre par la suite l'étude thermoélastique au cas du mouvement uniforme d'une dislocation rectiligne coin dans un milieu élastique. Les champs thermiques et mécaniques étant calculés, on étudie alors l'effet de la vitesse de déplacement de la dislocation sur ces champs.

III-2- Equations de l'évolution thermomécanique d'une discontinuité mobile

III-2-1- Equation de propagation de la chaleur

Il a été vérifié au premier chapitre, qu'une discontinuité mobile se comportait comme une source de chaleur de puissance GV , G étant la force thermodynamique exercée sur la discontinuité et V sa vitesse. Il a été démontré par ailleurs (I-79) que la puissance intrinsèque dissipée pour un milieu continu quelconque est donnée par:

$$D_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} (\varphi_1 + G V \delta(A)) d\Omega \geq 0 \quad (\text{III-1})$$

Autrement dit, l'équation qui décrit l'évolution du champ de température dans un milieu pas forcément élastique contenant une discontinuité mobile peut être déduite de (I-36) et de (III-1) et elle s'écrit en un point quelconque du volume Ω_t sous la forme suivante:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + T\dot{s} - \varphi_1 = GV\delta(A) \quad (\text{III-2})$$

Par rapport à l'équation thermique classique, la différence essentielle provient du second terme de l'égalité (III-2) qui constitue, comme mentionné auparavant, une nouvelle source de chaleur et qui s'annule pour un point régulier du volume.

Il faut noter que, pour une discontinuité quelconque, la puissance intrinsèque dissipée φ_1 et la puissance dissipée concentrée GV sont de natures différentes.

Ainsi, on peut conclure de l'équation (III-2) qu'une structure contenant une (ou plusieurs) discontinuité(s) mobile(s) est le siège d'une double interaction entre les effets thermiques et mécaniques:

⇒ un couplage thermoélastique classique en chaque point de la structure décrit par les deux fonctions φ_1 et $T\dot{s}$.

⇒ un nouveau couplage thermoélastique provenant de la création de sources thermiques par dissipation d'énergie mécanique, au voisinage des discontinuités mobiles traduit par le terme $GV\delta(A)$.

Dans toute la suite de ce travail, on choisira pour loi de comportement thermique, la loi de conduction de la chaleur de Fourier linéaire:

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T \quad (\text{III-3})$$

k est le coefficient de conductivité thermique caractéristique du milieu qu'on suppose constant, ne dépendant ni de la température ni de la position.

Si on injecte la loi thermique (III-3) dans l'équation (III-2), on aboutit alors à l'équation différentielle que doit satisfaire le champ de température T dans un milieu quelconque:

$$k \Delta T - T\dot{s} + \varphi_1 + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{III-4})$$

III-2-2- Calcul de la dissipation intrinsèque volumique pour un milieu élastique

On rappelle que pour un milieu quelconque, l'énergie libre w dépend dans le cas général des variables internes β et des variables observables: la déformation totale $\underline{\varepsilon}$ et la température T . La dissipation intrinsèque volumique φ_1 s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\varphi_1 = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - (\underline{\sigma}_R : \dot{\underline{\varepsilon}} - \mathbf{b} \cdot \dot{\beta})$$

Dans le cas d'un milieu élastique et dans l'hypothèse où les variables internes sont volontairement négligées, l'énergie libre w ne dépend plus que du tenseur de déformation totale $\underline{\varepsilon}$ et de la température T [4]. Donc de (I-23) on peut déduire:

$$\underline{\sigma}_R = \frac{\partial w}{\partial \underline{\varepsilon}} = \underline{\sigma}, \quad \mathbf{b} = -\frac{\partial w}{\partial \beta} = \mathbf{0} \quad (\text{III-5})$$

c'est-à-dire que la dissipation intrinsèque volumique pour un milieu élastique est nulle:

$$\varphi_1 = 0 \quad (\text{III-6})$$

En tenant compte de (III-6), l'équation de l'évolution thermique (III-4) s'écrit sous la forme suivante:

$$k \Delta T - T\dot{s} + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{III-7})$$

III-2-3- Equations du mouvement

L'écriture locale du théorème de l'énergie cinétique permet de formuler les équations du mouvement sous une forme générale:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + \rho f_i = 0 \quad (\text{III-8})$$

III-3- Equations de la thermoélasticité couplée

Dans le cas d'un milieu élastique, homogène et isotrope, l'énergie libre $w(\underline{\varepsilon}, \theta)$ s'écrit généralement sous la forme suivante [1]:

$$w(\underline{\varepsilon}, \theta) = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - m \theta \varepsilon_{kk} - c T \log\left(\frac{T}{T_0}\right) - (s_0 - c) T + w_0 \quad (\text{III-9})$$

avec,

$$m = (3\lambda + 2\mu) \alpha \quad (\text{III-10})$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé.

α est le coefficient de dilatation thermique.

c est la chaleur volumique.

$\theta = T - T_0$, représente la différence entre la température absolue T et la température à l'état naturel (contraintes nulles) T_0 .

s_0 et w_0 représentent respectivement l'entropie volumique et l'énergie libre à l'état naturel.

Il faut remarquer dans l'expression de l'énergie libre (III-9), que la température θ n'a pas été linéarisée du fait qu'elle pourrait atteindre localement des valeurs élevées notamment au voisinage de la discontinuité mobile. Dans le cas des fissures mobiles par exemple, des expériences ont mis en évidence des échanges thermiques importants et des températures pouvant atteindre localement des chiffres considérables [5]. C'est pour cette raison que par exemple H.D.Bui et col. [3] ou Q.S.Nguyen [6] n'ont pas linéarisé l'équation de la chaleur décrivant l'évolution thermique autour d'une fissure rectiligne mobile.

A partir de (I-22), de (III-5) et de (III-9), on peut déduire les relations de comportement traduisant l'entropie volumique s et le champ de contraintes de composantes σ_{ij} :

$$s = -\frac{\partial w}{\partial T} = m \varepsilon_{kk} + c \log\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0 \quad (\text{III-11})$$

et,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} - m (T - T_0) \delta_{ij} \quad (\text{III-12})$$

à partir desquelles les équations thermomécaniques s'écrivent:

$$k\Delta T - c\dot{T} - mT\dot{\epsilon}_{kk} + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{III-13})$$

$$(\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} - m \mathbf{grad}T - \rho \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = 0 \quad (\text{III-14})$$

Les équations (III-13) et (III-14) constituent un ensemble d'équations différentielles couplées de la thermoélasticité non linéaire.

Dans les équations du mouvement (III-14), la détermination du champ de déplacement \mathbf{u} est directement liée à la connaissance du champ de température T . Inversement, la détermination de T dans (III-13) est liée à la connaissance du champ \mathbf{u} . Ce sont donc des équations couplées à deux niveaux. D'une part, les champs mécaniques et thermiques sont couplés en chaque point de la structure par la présence des coefficients thermoélastiques. D'autre part, il y a couplage entre ces champs au niveau de la discontinuité par la puissance dissipée GV définie en fonction des valeurs des champs mécaniques (I-78).

Ceci dit, une étude d'équations différentielles n'est complète qu'en définissant les conditions aux limites et initiales.

Si les conditions aux limites mécaniques rappelées au second chapitre décrivent l'action de forces sur la surface d'un milieu, les conditions aux limites thermiques décrivent quant à elles l'action de l'environnement thermique sur le même milieu de volume V . Ce qui se traduit sur la surface extérieure ∂V par les expressions classiques suivantes:

1- La température T est décrite sur ∂V par une fonction de la position et du temps:

$$T = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial V, t > 0 \quad (\text{III-15})$$

2- Le gradient de température $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}$ est donné sur ∂V par une fonction de la position et du temps:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial V, t > 0 \quad (\text{III-16})$$

Cette condition correspond à un flux de chaleur à travers la surface ∂V . Le cas $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$ décrit une isolation thermique du milieu.

3- La température est décrite par la fonction suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \alpha\right) T(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial V, t > 0 \quad (\text{III-17})$$

α est une constante.

4- Une condition mixte qui constitue une combinaison des précédentes conditions sur des parties de la surface ∂V .

Il reste alors à préciser les conditions initiales. Pour la température, la condition initiale consiste à décrire sa distribution à l'instant $t = 0$ en terme de position, c'est-à-dire:

$$T(\mathbf{x}, 0) = l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, t = 0 \quad (\text{III-18})$$

La déformation du milieu est déterminée à l'instant initial par les fonctions:

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = g_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in V, t = 0$$

l, g_i, f_i sont des fonctions connues.

III-4- Méthodes de résolution des équations de la thermoélasticité couplée

On présente ici trois méthodes de résolution des équations de la thermoélasticité couplées développées notamment d'une part par W.Nowacki [1] et par G.Eason & I.N.Sneddon [2] concernant la thermoélasticité couplée linéaire en T et d'autre part par H.D.Bui et col. [3] concernant la thermoélasticité couplée non linéaire en T .

A cause de problèmes mathématiques liés au couplage thermomécanique, le nombre de solutions formelles de ces équations différentielles est très limité. Elles sont possibles pour des applications dans des situations simplifiées.

Avant de rappeler ces différentes méthodes de résolution, on écrit les équations de la thermoélasticité couplée sous une forme vectorielle:

$$k\Delta T - c\dot{T} - mT\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{III-20})$$

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} - m\operatorname{grad}T - \rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f} = 0 \quad (\text{III-21})$$

III-4-1- Méthode de W.Nowacki

Cette méthode s'applique aux problèmes de la thermoélasticité couplée linéaire en T [1]. Ceci signifie que la variation du champ de température T par rapport à la température T_0 de l'état naturel du milieu est faible, ce qui se traduit par la condition suivante:

$$\left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| \ll 1 \quad (\text{III-22})$$

En tenant compte de (III-22) et en prenant $s_0 = 0$ et $w_0 = -cT_0$, l'expression donnant l'énergie libre volumique (III-9) devient alors:

$$w(\underline{\varepsilon}, \theta) = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - m \theta \varepsilon_{kk} - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \quad (\text{III-23})$$

On retrouve alors l'expression quadratique habituelle à partir de laquelle, l'équation (III-20) dans le cas présent s'écrit sous la forme:

$$k\Delta T - c\dot{T} - \eta\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{III-24})$$

avec $\eta = mT_0$.

L'équation (III-21) reste inchangée.

La méthode de résolution consiste à découpler les deux équations (III-24) et (III-21) par une décomposition du champ de déplacement \mathbf{u} et des forces volumiques \mathbf{f} en:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\Psi, \quad \text{div}\Psi = 0 \quad (\text{III-25a})$$

$$\mathbf{f} = \rho(\text{grad}\vartheta + \text{rot}\chi), \quad \text{div}\chi = 0 \quad (\text{III-25b})$$

La substitution de ces relations dans les équations (III-24) et (III-21) conduit aux relations suivantes:

$$\left(\Delta - \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial t}\right)T - \frac{\eta}{k} \Delta\Phi = -\frac{GV}{k} \delta(A) \quad (\text{III-26a})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi = \beta T - \frac{1}{c_1^2} \vartheta \quad (\text{III-26b})$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi = -\frac{1}{c_2^2} \chi \quad (\text{III-26c})$$

avec:

$$\beta = \frac{m}{\lambda + 2\mu} = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha \quad (\text{III-27})$$

$$c_1 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} : \text{vitesse des ondes longitudinales.} \quad (\text{III-28a})$$

$$c_2 = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} : \text{vitesse des ondes de cisaillement.} \quad (\text{III-28b})$$

ν , ρ , Δ et K sont respectivement le rapport de poisson, la masse volumique, le Laplacien et la diffusivité thermique.

En éliminant le champ de température entre (III-26a) et (III-26b), on trouve deux nouvelles équations différentielles: la première portant uniquement sur l'inconnue Φ et la deuxième sur l'inconnue Ψ sachant que les fonctions ϑ et χ sont des données du problème. Ces équations s'écrivent comme suit:

$$\left[\Delta_1 D - \frac{\eta}{k} \beta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right] \Phi = -\frac{\beta}{K} G V \delta(A) - \frac{1}{c_1^2} D \vartheta \quad (\text{III-29a})$$

$$\Delta_2 \Psi = -\frac{1}{c_2^2} \chi \quad (\text{III-29b})$$

avec:

$$\Delta_\alpha = \Delta - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \alpha = 1, 2$$

et

$$D = \Delta - \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial t}$$

On remarque donc à partir des équations (III-29), que la connaissance de Φ est indépendante de celle de la température T , c'est justement de ce découplage dont il s'agit en introduisant Φ et Ψ et non pas du découplage d'effets thermomécaniques.

Malheureusement, des équations du type (III-29) sont très difficiles à résoudre d'où la nécessité de simplifier d'avantage le problème à étudier.

III-4-2- Méthode de G.Eason & I.N.Sneddon

La méthode de G.Eason & I.N.Sneddon [2] s'applique aussi aux problèmes de la thermoélasticité couplée linéaire en T . Ce qui veut dire que les équations à résoudre par cette deuxième méthode sont l'équation thermique (III-24) et l'équation de mouvement (III-21). Pour résoudre ce système d'équations différentielles, Eason et col. introduisent la transformée de Fourier à quatre dimensions de chaque quantité physique présente dans les équations.

La transformée de Fourier d'une fonction $f(x_1, x_2, x_3, t)$ est définie par l'intégrale suivante:

$$\bar{f}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{E_4} f(x_1, x_2, x_3, t) \exp[i(x_p \xi_p + \omega t)] dx \quad (\text{III-30})$$

où $dx = dx_1 dx_2 dx_3 dt$ et E_4 représente l'espace (x_1, x_2, x_3, t) .

En appliquant cette transformée aux équations (III-24) et (III-21), on aboutit au système d'équations algébriques suivant:

$$-(\xi^2 - i \frac{\omega}{K}) \bar{T} = -\eta' \omega \xi_k \bar{u}_k - \frac{GV}{k} \bar{\delta}(A) \quad (III-31a)$$

$$-(\lambda + \mu) \xi_i \xi_k \bar{u}_k - (\mu \xi^2 - \rho \omega^2) \bar{u}_i = -i \xi_i m \bar{T} - \bar{f}_i \quad (III-31b)$$

avec, $\eta' = \frac{\eta}{k}$.

En éliminant \bar{T} entre (III-31a) et (III-31b), on aboutit à l'expression suivante:

$$\begin{aligned} (\mu \xi^2 - \rho \omega^2) (\xi^2 - i \frac{\omega}{k}) \bar{u}_i + \left[(\lambda + \mu) (\xi^2 - i \frac{\omega}{k}) - im \eta' \omega \right] \xi_i \xi_k \bar{u}_k \\ = im \frac{GV}{k} \xi_i \bar{\delta}(A) \end{aligned} \quad (III-32)$$

C'est une équation qui permet donc de calculer les transformées de Fourier des composantes du champ de déplacement \mathbf{u} indépendamment de \bar{T} dont la connaissance se fait à partir de l'équation (III-31a) en y injectant les solutions trouvées par (III-32). Enfin, pour retrouver les champs \mathbf{u} et T , on applique la transformée inverse de Fourier aux solutions $\bar{\mathbf{u}}$ et \bar{T} .

Cette méthode a donc l'avantage de découpler mathématiquement les équations de l'évolution thermomécanique mais elle a l'inconvénient de mener à des intégrales très difficiles à calculer. Souvent les solutions restent sous forme d'intégrales, alors que des solutions exactes sont espérées dans des cas simples telles que des applications unidimensionnelles.

III-4-3- Méthode de H.D.Bui

Cette méthode utilisée surtout en mécanique de la rupture [3] permet de résoudre une équation thermique plus complète et du même coup plus complexe que celle résolue par les deux premières méthodes. Il s'agit de l'équation thermique (III-20) où le champ de température n'a pas été linéarisé. L'équation de mouvement reste la même et est donnée par la relation (III-21).

La méthode consiste alors à chercher une solution sous forme d'un développement asymptotique en déplacement et en température:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots \quad (\text{III-33a})$$

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + \dots \quad (\text{III-33b})$$

Ces différents termes sont rangés par ordre de singularité mathématique spatiale décroissante.

La méthode ainsi présentée a l'avantage de s'attaquer à une équation thermique compliquée, elle a aussi l'avantage de découpler mathématiquement les équations de l'évolution thermomécanique. Mais elle a bien évidemment l'inconvénient de ne donner que des solutions approchées.

Après ce rappel des équations de l'évolution thermomécanique et des différentes méthodes de les résoudre, on s'intéresse au cas particulier d'une dislocation rectiligne.

III-5- Cas particulier d'une dislocation rectiligne coin mobile

III-5-1- Présentation du problème:

Il s'agit d'étudier le mouvement uniforme d'une dislocation coin rectiligne dans un milieu infini, élastique, homogène et isotrope, fixe par rapport à un repère cartésien (O_1, x_1, x_2, x_3) .

La dislocation d'axe Oz parallèle à O_1x_3 , se déplace à vitesse uniforme V dans la direction O_1x_1 positive. On note (O, x, y, z) un repère lié à la dislocation (Figure III-1).

La géométrie du problème permet de faire l'hypothèse de l'état de déformations planes ($\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = \epsilon_{33} = 0$). Il en résulte que le tenseur de contraintes est tel que:

$$\begin{cases} \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2\mu(1 + \nu)\alpha(T - T_0) \end{cases} \quad (\text{III-34})$$

Pour les caractéristiques thermomécaniques du matériau, elles sont supposées être indépendantes des coordonnées spatiales et de la température.

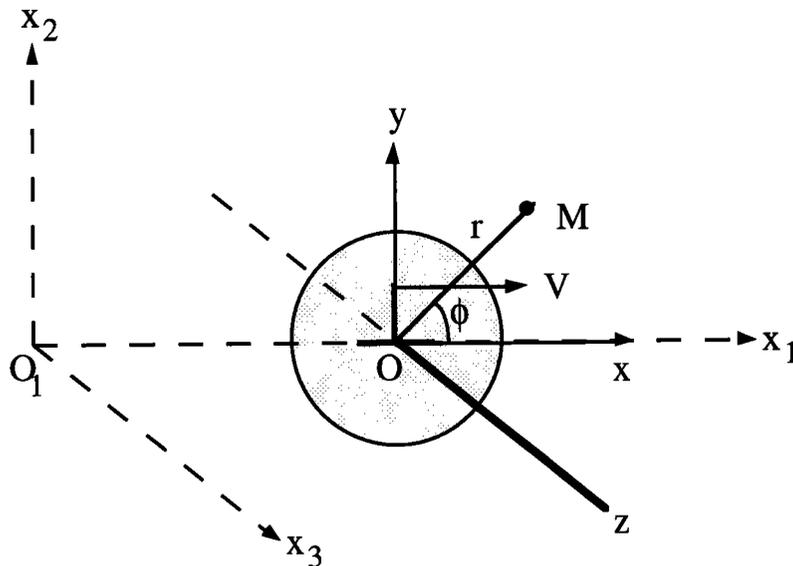


Figure III-1:
dislocation coin rectiligne mobile.

III-5-2- Calcul du champ de température

La dislocation ainsi décrite, peut être assimilée à une source de chaleur linéique mobile. L'équation thermique que doit satisfaire le champ de température d'une telle source est donnée par l'équation (III-13) qu'on rappelle de nouveau:

$$k\Delta T - c\dot{T} - mT\text{div}\dot{u} + GV\delta(O) = 0$$

Pour résoudre cette équation, il faut choisir l'une des deux voies suivantes:

- Résoudre une équation thermique non linéaire en T,
- Résoudre une équation thermique linéaire en T.

Pour cette étude, on va se placer dans le deuxième cas de figure pour les raisons suivantes:

1- Une équation thermique linéaire en T est sûrement plus facile à résoudre analytiquement qu'une équation non linéaire,

2- Si on suppose que le champ de température subit de grandes variations par rapport à la température T_0 , il est dans ce cas injustifiable de considérer constantes et indépendantes de la température, les caractéristiques thermomécaniques du matériau,

3- Expérimentalement, on ne connaît pas l'importance de la température au voisinage d'une dislocation rectiligne.

Sous cette hypothèse de la linéarité de la température, l'équation thermique s'écrit encore une fois sous la forme suivante:

$$k\Delta T - c\dot{T} - \eta \operatorname{div} \dot{u} + GV\delta(O) = 0 \quad (\text{III-35})$$

On rappelle que cette équation peut être résolue entre autres par la méthode de W.Nowacki ou celle de G.Eason et I.N.Sneddon. Mais elle reste toujours très compliquée à résoudre, d'autant plus que les auteurs mentionnés ci-dessus et d'autres n'ont pu obtenir des solutions analytiques que pour des situations simples notamment en supposant négligeable l'effet du couplage thermomécanique classique traduit par le terme " $\eta \operatorname{div} \dot{u}$ " [7]. Sous cette deuxième hypothèse simplificatrice, le champ de température $T(x_1, x_2, x_3, t)$ doit satisfaire à l'équation thermique facile à résoudre:

$$k\Delta T - c\dot{T} + GV\delta(O) = 0 \quad (\text{III-36})$$

On introduit maintenant le système de coordonnées (O,x,y,z) mobile avec la dislocation (Figure III-1):

$$x = x_1 - Vt, \quad y = x_2, \quad z = x_3. \quad (\text{III-37})$$

On peut montrer [8, 9] que l'on atteint très vite un état de mouvement quasi-stationnaire, c'est-à-dire que le champ de température exprimé dans le repère mobile ne dépend plus du temps t:

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} \approx -V \frac{\partial T}{\partial x}$$

et d'autre part, le Laplacien exprimé dans le repère mobile est donné par:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

En tenant compte de ces relations, l'équation (III-36) peut alors s'écrire sous la forme:

$$\Delta T + \frac{V}{K} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{GV}{k} \delta(O) = 0 \quad (\text{III-38})$$

A cette équation différentielle, il faut ajouter des conditions aux limites. Elles seront du type flux et s'écriront sous la forme suivante:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-39})$$

La solution de (III-38) dans le cas d'une source de chaleur rectiligne mobile est déduite de la solution d'une source ponctuelle mobile.

En effet, on suppose qu'une source linéique mobile peut être représentée par une répartition continue de sources ponctuelles mobiles. La solution de (III-38) pour une source ponctuelle mobile est donnée par [10]:

$$\frac{GV}{4\pi kR} \exp\left(-\frac{V}{2K}(R+x)\right) \quad (\text{III-40})$$

avec $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Chaque source ponctuelle mobile d'intensité $GVdz$ au point de cote z , contribue à un accroissement de température donnée par:

$$\frac{GVdz}{4\pi kR} \exp\left(-\frac{V}{2K}(R+x)\right) \quad (\text{III-41})$$

En intégrant (III-41) le long de la ligne de la dislocation (droite z), on obtient donc le champ de température d'une dislocation (source linéique) mobile telle que [10, 11]:

$$T(x, y) = \frac{GV}{2\pi k} \exp\left(-\frac{Vx}{2K}\right) K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) \quad (\text{III-42})$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et K_0 est la fonction de Bessel modifiée de second espèce d'ordre 0. La solution (III-42) satisfait bien évidemment aux conditions aux limites (III-39).

En utilisant les développements asymptotiques de la fonction de Bessel K_0 :

$$\begin{aligned} K_0(z) &\approx -\ln(z), & z \ll 1 \\ K_0(z) &\approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}, & z \gg 1 \end{aligned}$$

on peut facilement vérifier que le champ de température donné par (III-42) s'annule à l'infini.

La force thermodynamique G sur la dislocation rectiligne mobile ne peut être calculée que lorsque tout le problème d'évolution a été complètement résolu. Donc à ce stade de calcul, G reste une inconnue du problème. Mais, il serait néanmoins très intéressant de connaître une estimation de ce champ de température. Pour cela, on sait que le mouvement de la dislocation doit obéir au critère classique de propagation (chapitre I) qui suggère l'existence d'une force G_c en dessous de laquelle, la dislocation reste fixe. On suppose alors que cette force critique est la force de Peach et Koehler que subirait la dislocation coin en présence d'une contrainte de cisssion τ [12]:

$$G_c = b \tau \quad (\text{III-43})$$

En tenant compte de cette force critique, le champ de température s'écrira sous la forme suivante:

$$T(x, y) = \frac{b \tau V}{2\pi k} \exp\left(-\frac{Vx}{2K}\right) K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) \quad (\text{III-44})$$

ou bien en introduisant les coordonnées polaires (Figure III-1):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned}$$

(III-44) s'écrira comme suit:

$$T(r, \phi) = \frac{b \tau V}{2\pi k} \exp\left(-\frac{Vr}{2K} \cos\phi\right) K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) \quad (\text{III-45})$$

Pour un milieu donné, (III-44) (ou (III-45)) est une fonction des paramètres V , la vitesse de la dislocation et r , la distance séparant la dislocation d'un point du milieu.

Afin de représenter cette dépendance, on étudiera le mouvement d'une dislocation dans quatre matériaux (le Cuivre, l'Aluminium, le Nickel et le Fer) dont les caractéristiques thermomécaniques sont données dans le tableau (III-1).

	ν	$\lambda \cdot 10^{-4}$ (MPa)	$\mu \cdot 10^{-4}$ (MPa)	k (W/mK)	$K \cdot 10^4$ (m ² /s)	$\rho \cdot 10^{-3}$ (kg/m ³)	$\alpha \cdot 10^6$ (K ⁻¹)	c/ρ (Ws/kgK)
Cuivre	0.37	13.1	4.6	393	1.14	8.96	16.5	384
Aluminium	0.35	6.1	2.5	222	0.91	2.69	23.9	900
Nickel	0.33	16.4	8.0	92	0.23	8.90	13.3	440
Fer	0.27	11.3	8.2	75	0.20	7.87	11.7	460

Tableau III-1:

Les caractéristiques thermomécaniques du Cuivre, de l'Aluminium, du Nickel et du Fer [13].

Sur les figures (III-2)-(III-7), on a représenté le profil et les lignes de niveaux de la fonction $T(x,y)$ pour différentes vitesses de mouvement de la dislocation dans le Cuivre (ce qui reste valable aussi pour les autres matériaux). Pour cela, on a pris un vecteur de Burgers de l'ordre de $b = 2\text{Å}$ et une contrainte appliquée de l'ordre de $\tau = 100 \text{ MPa}$.

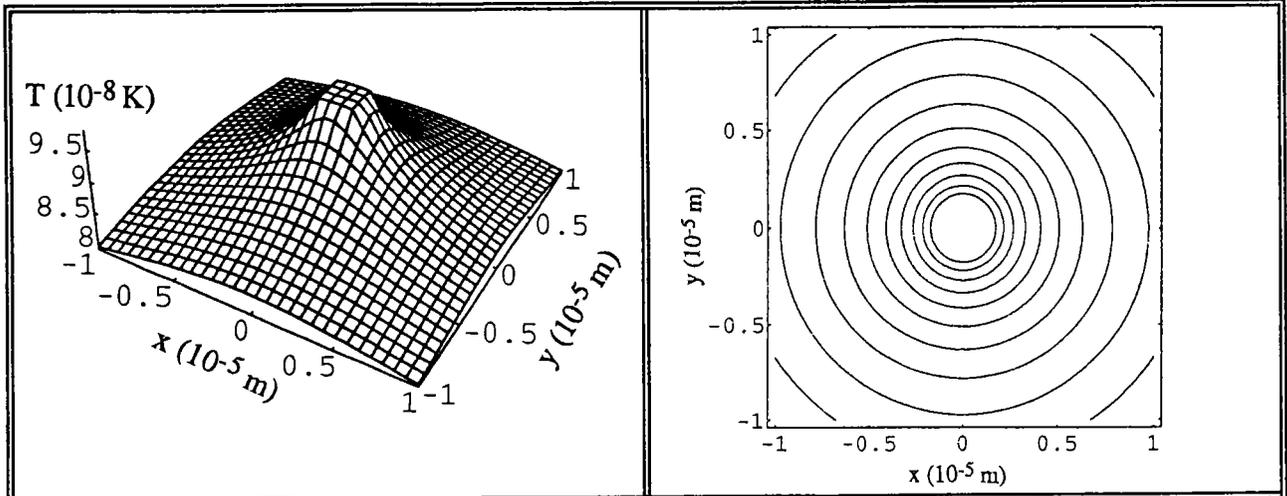


Figure III-2:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 10^{-3}$ m/s.

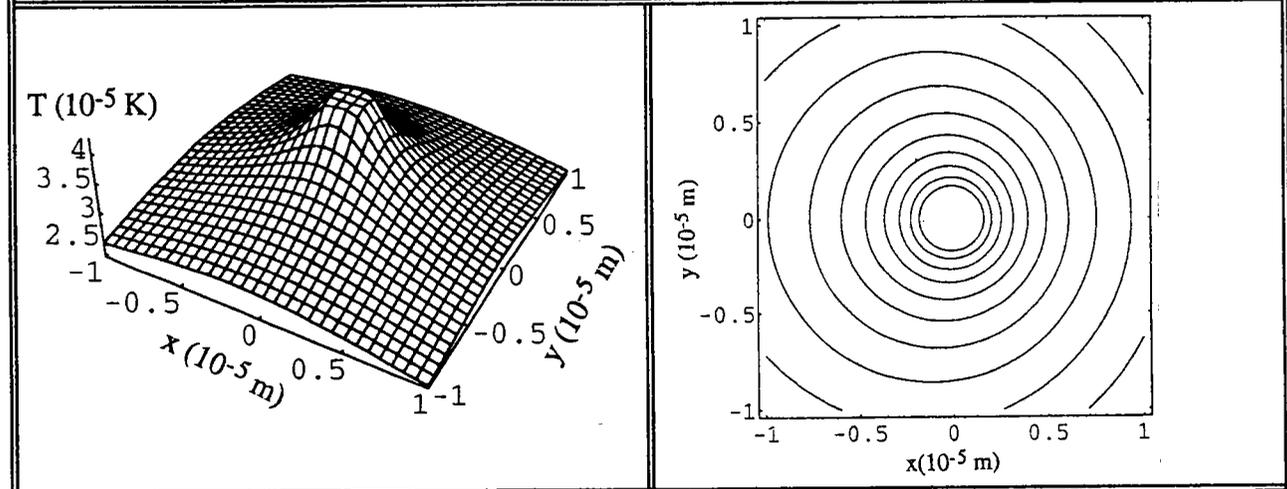


Figure III-3:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 1$ m/s.

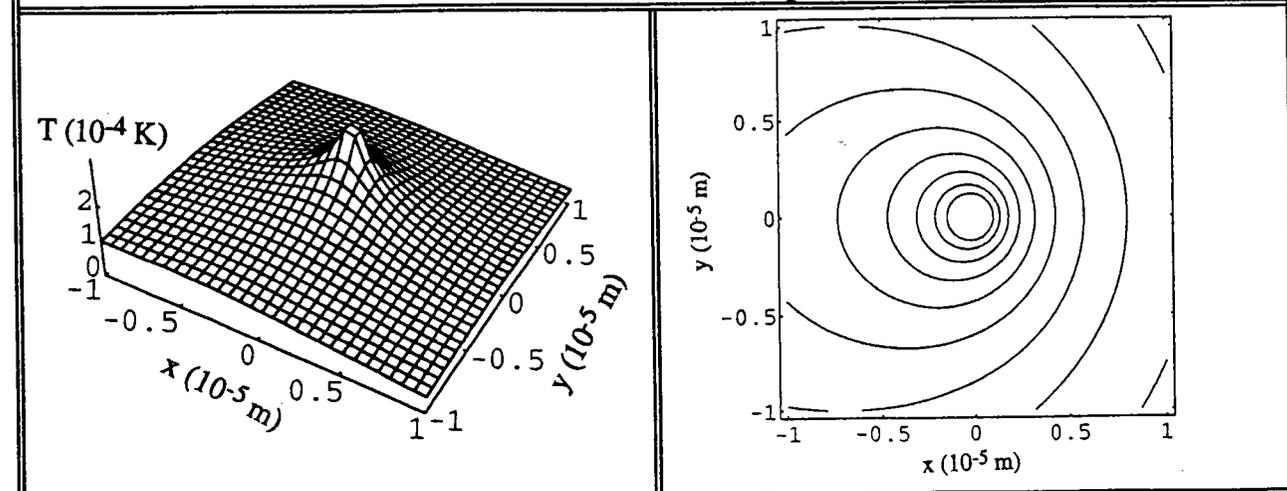


Figure III-4:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 10$ m/s.

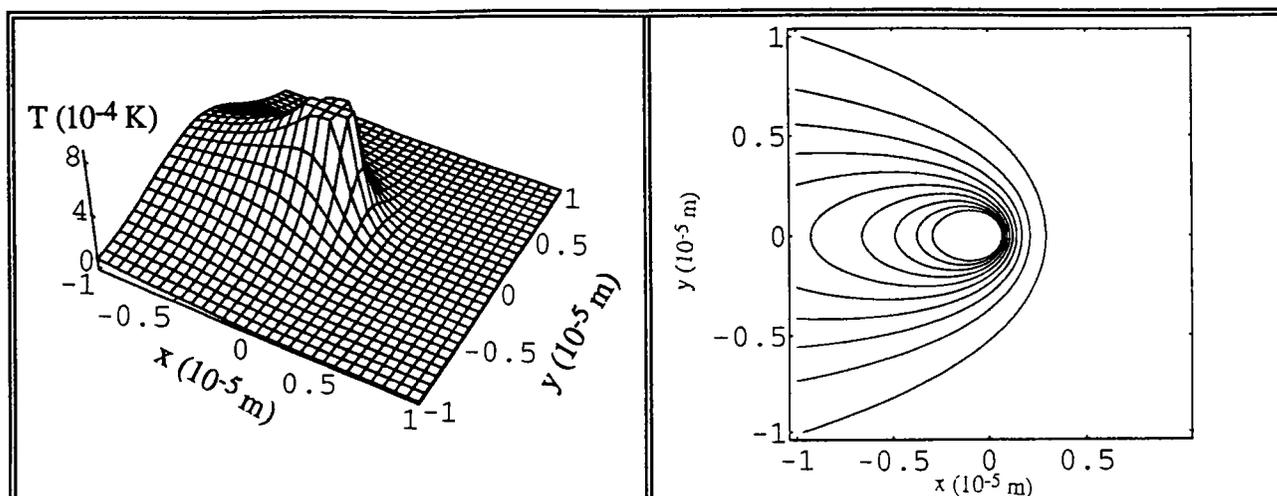


Figure III-5:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 10^2$ m/s.

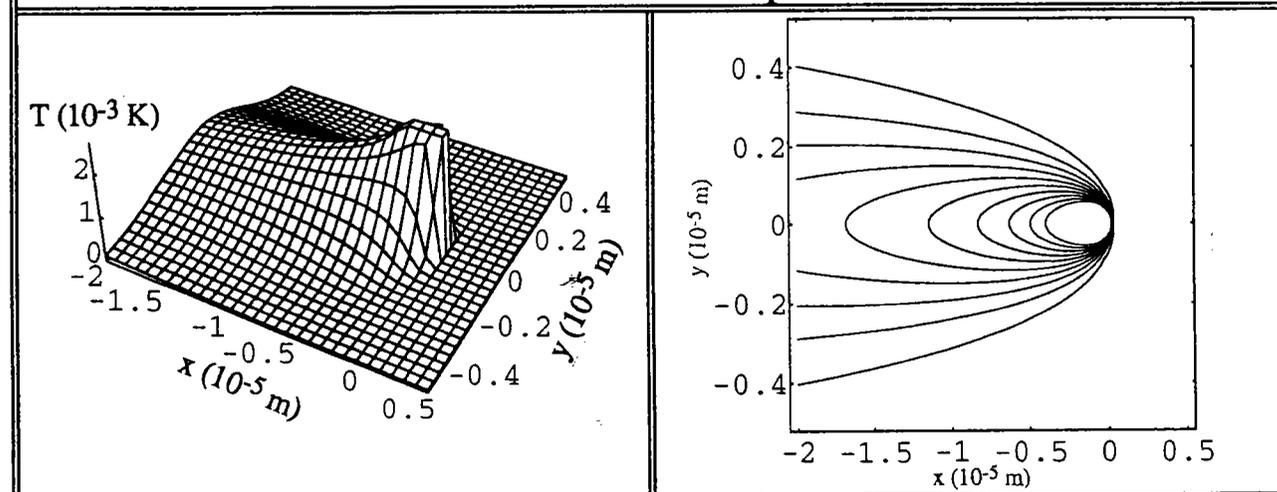


Figure III-6:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 10^3$ m/s.

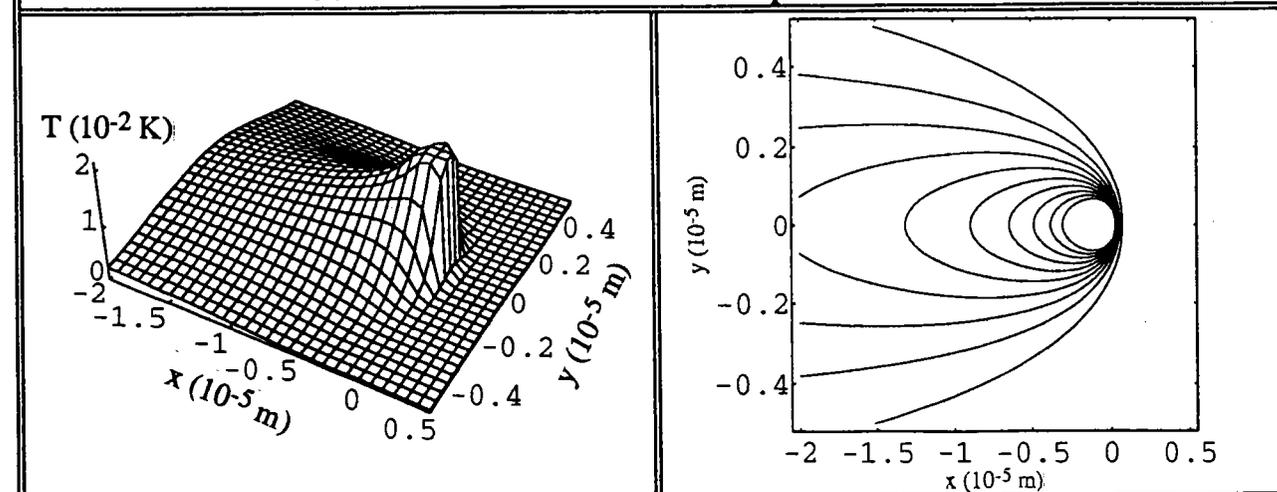


Figure III-7:
Courbes de niveaux et 3D pour $V = 5 \cdot 10^3$ m/s.

On remarque que pour des vitesses faibles ($V \leq 1$ m/s), les lignes de niveaux ou courbes isothermes sont des quasi-cercles concentriques comparables à ceux que représenterait le champ de température d'une source de chaleur stationnaire dont la quantité de chaleur q est constante ($T_s = -\frac{q}{2\pi k} \log(r)$). Ceci traduit pour de telles vitesses, une distribution uniforme de la température au tour de la dislocation.

Les courbes isothermes pour des vitesses de déplacement plus grandes ($V > 1$ m/s), sont nettement différentes des cercles de la source stationnaire. Elles ont tendance à se concentrer vers l'arrière de la dislocation.

En s'intéressant cette fois-ci aux profils de température, on remarque que les valeurs de la fonction $T(x,y)$ sont de plus en plus élevées au fur et à mesure que la vitesse V augmente mais elles restent tout de même faibles.

On considère maintenant la deuxième écriture du champ de température à savoir l'expression (III-45). Elle dépend de l'angle ϕ et de la distance r qui sépare la dislocation d'un point du milieu. Dans la série de courbes ci-dessous (Figure III-8a-f), une représentation par rapport à l'angle ϕ est faite pour une distance $r = 2 \mu\text{m}$. On vérifie d'abord comme précédemment la nature croissante du champ de température en fonction de la vitesse V puis la tendance de la zone "chaude" à se situer derrière la dislocation et à se limiter au plan $(x,0) \equiv (\phi=\pi)$ pour de grandes vitesses.

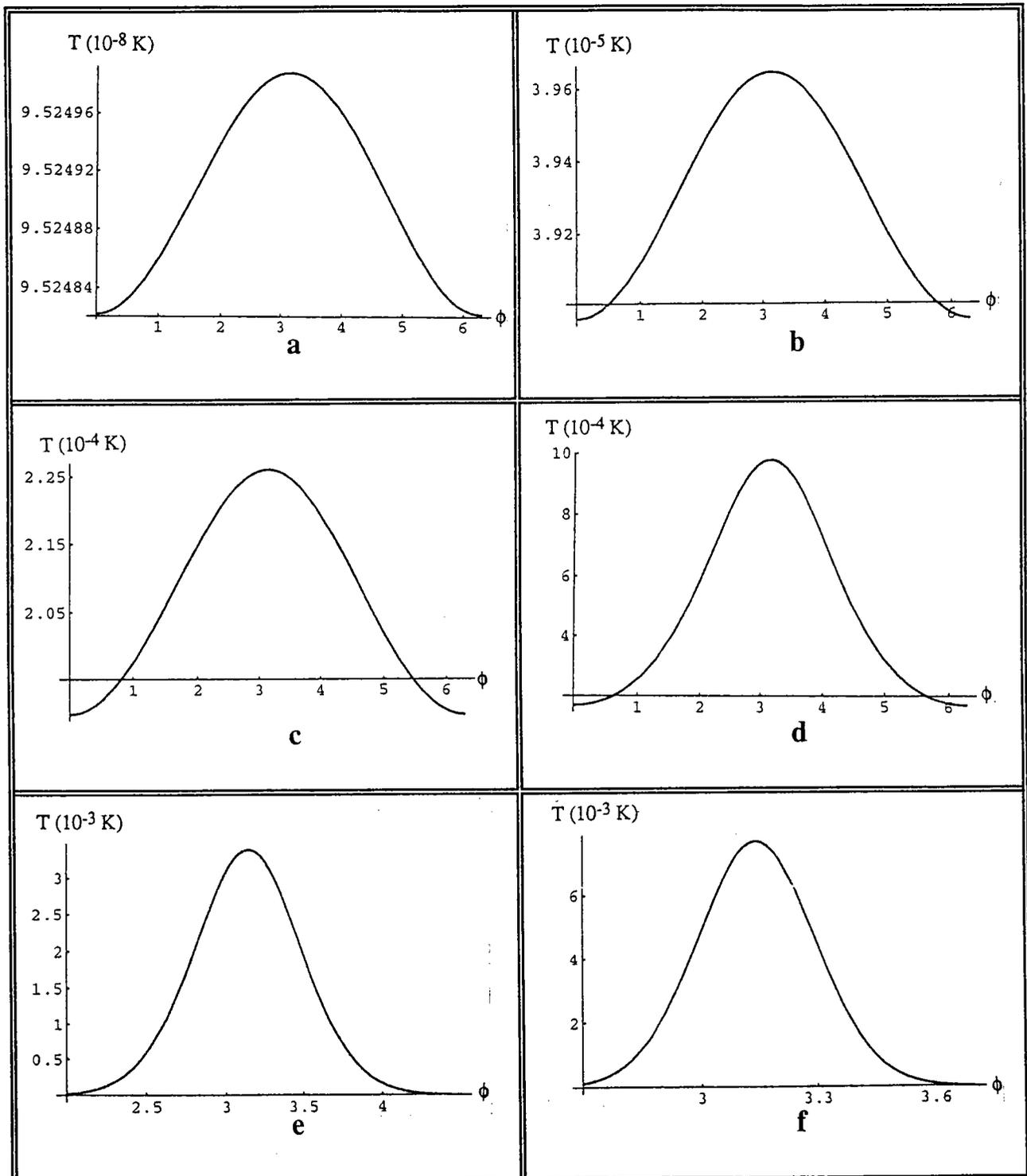


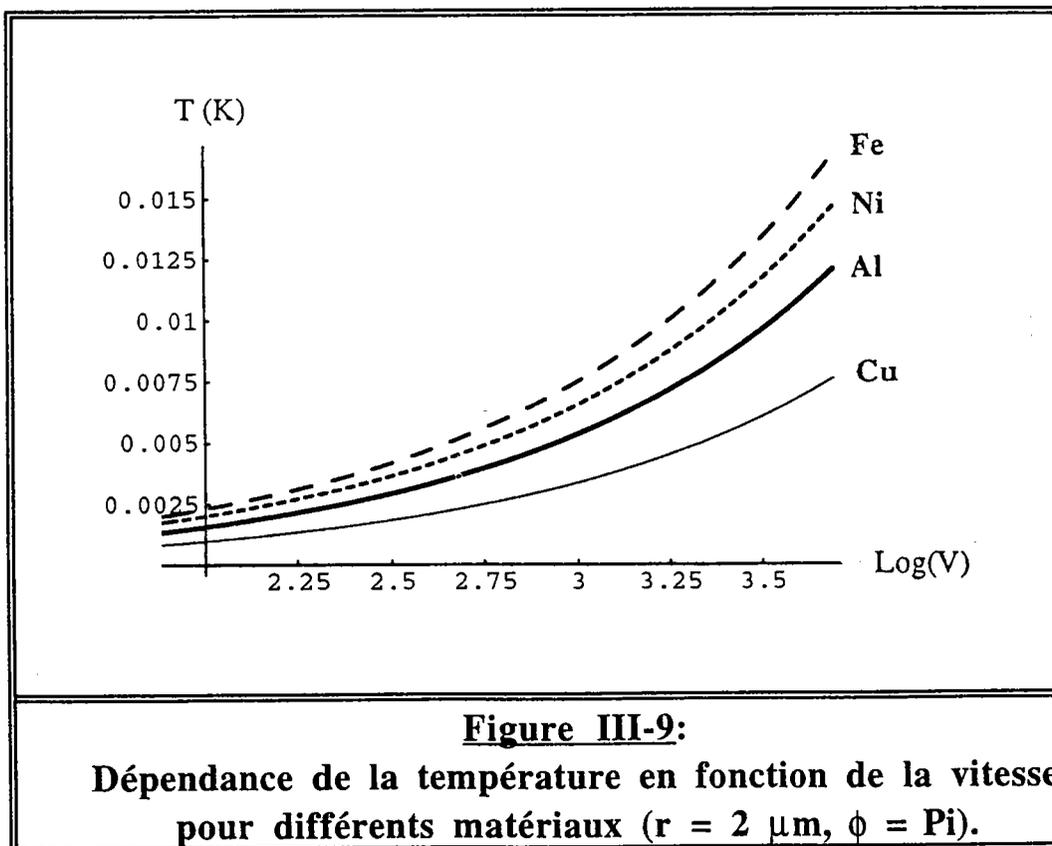
Figure III-8:

Champ de température en fonction de l'angle ϕ pour $r = 2 \mu\text{m}$ et à différentes vitesses de mouvement de la dislocation:

(a) $V = 10^{-3}$ m/s. (b) $V = 1$ m/s. (c) $V = 10$ m/s. (d) $V = 10^2$ m/s.

(e) $V = 10^3$ m/s. (f) $V = 5 \cdot 10^3$ m/s.

La dépendance de la température en fonction de la vitesse est mise en évidence sur la figure (III-9) pour les quatre matériaux (Cu, Al, Ni, Fe). Pour $r = 2 \mu\text{m}$, on a représenté la température maximale (pour $\phi = \pi$) en fonction du logarithme de la vitesse. Pour cela, on a choisi une plage de vitesses assez large allant de petites valeurs (à partir de $3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$) jusqu'aux grandes valeurs (de l'ordre de la vitesse du son dans chaque matériau considéré). Ces courbes traduisent, pour chaque matériau pris séparément, l'aspect croissant de la température en fonction de la vitesse. La comparaison entre les quatre matériaux montre une grande sensibilité à la vitesse quand la conductivité thermique est faible.



On vient de voir que l'effet du mouvement de la dislocation coin rectiligne en terme d'élévation de température est faible, ce qui avait été constaté par Eshelby et al.[12]. Cependant ce champ de température n'étant pas uniforme, il est source de contraintes internes d'origine thermique.

III-5-3- Calcul des contraintes internes thermiques

Pour résoudre l'équation (III-21), les hypothèses suivantes seront prises en compte:

- 1- Les forces volumiques nulles ($f_i=0$);
- 2- L'effet d'inertie négligé ($\rho \ddot{u}_i \approx 0$).

Dans ce cas, les équations de Navier de la thermoélasticité s'écrivent sous la forme suivante:

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} = m T_{,i} \quad (\text{III-46})$$

La méthode choisie pour résoudre cette équation est celle de W.Nowacki décrite auparavant.

Dans le cas d'un milieu infini, Nowacki [1] a montré que le champ de déplacement \mathbf{u} peut être décrit uniquement en fonction de l'inconnue scalaire Φ appelée *potentiel de déplacement thermoélastique* [14]:

$$\mathbf{u} = \text{grad}\Phi \quad (\text{III-47a})$$

ou sous une écriture indicielle:

$$u_i = \Phi_{,i} \quad (\text{III-47b})$$

Les composantes du tenseur des déformations $\underline{\varepsilon}$ s'écrivent alors:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \Phi_{,ij} \quad (\text{III-48})$$

Compte tenu de ceci et des hypothèses 1 et 2, la relation (III-26b) conduit à l'équation de Poisson:

$$\Delta\Phi = \beta T \quad (\text{III-49})$$

Par ailleurs l'expression des contraintes données par l'équation du Duhamel-Neumann, peut être formulée en fonction du potentiel Φ en introduisant les expressions (III-48) et (III-49) dans la relation (III-12), on obtient alors:

$$\sigma_{ij} = 2\mu (\Phi_{,ij} - \Delta\Phi \delta_{ij}) \quad i,j = 1,2 \quad (\text{III-50})$$

Alors que la composante σ_{33} est donnée par la relation (III-34b) ou bien par la relation suivante:

$$\sigma_{33} = -2\mu \Delta\Phi$$

Dans le cas général, la solution de (III-49) est donnée par l'intégrale de Poisson [1] telle que:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} T(\xi) \Phi^*(\mathbf{x}, \xi) dV(\xi) \quad (\text{III-51})$$

Par comparaison avec la notion du tenseur de Green du second chapitre, $\Phi^*(\mathbf{x}, \xi)$ est appelée la fonction de Green pour l'équation (III-49). $\Phi^*(\mathbf{x}, \xi)$ satisfait à l'équation différentielle suivante:

$$\Delta\Phi^* = \beta \delta(\mathbf{x} - \xi) \quad (\text{III-52})$$

Pour un milieu infini, la solution de (III-52) est bien connue et est donnée par:

$$\Phi^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{\beta}{4\pi} \frac{1}{R(\mathbf{x}, \xi)} \quad (\text{III-53})$$

$R(\mathbf{x}, \xi)$ est la distance entre les points \mathbf{r} et ξ .

Dans le cas des problèmes plans, la solution de l'équation de Poisson est donnée par:

$$\Phi(x, y) = \frac{\beta}{2\pi} \int_{\partial\Omega} T(\xi_1, \xi_2) \log(r) d\xi_1 d\xi_2 \quad (\text{III-54})$$

c'est-à-dire que:

$$\Phi^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\beta}{2\pi} \log(r) \quad (\text{III-55})$$

et ceci provient du fait que:

$$\Delta \log(r) = 2\pi \delta(x - \xi_1) \delta(y - \xi_2) \quad (\text{III-56})$$

avec $r^2 = (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2$

A vrai dire l'équation (III-51) (ou (III-54)) ne permet pas de calculer le potentiel Φ car elle conduit à une intégrale dont l'expression mathématique n'est pas connue. Pour procéder autrement, il suffit de remarquer que les contraintes σ_{ij} ne dépendent que des dérivées secondes de Φ , c'est-à-dire que le calcul de Φ n'est pas nécessaire. Pour cela, on dérive (III-49) par rapport à x et en tenant compte de (III-38), on a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi) = -\beta \frac{K}{V} \Delta(T + \Phi_0) \quad (III-57)$$

avec

$$\Phi_0(x, y) = \frac{GV}{2\pi k} \log(r) \quad (III-58)$$

Après permutation des dérivées dans le premier membre de (III-57), on déduit une solution particulière de (III-57):

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi = -\beta \frac{K}{V} (T + \Phi_0) \quad (III-59)$$

Les dérivées secondes de Φ sont alors déduites en fonction des dérivées premières de T et de Φ_0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\beta \frac{K}{V} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\beta \frac{K}{V} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (III-60)$$

Le problème plan se traduit aussi par le fait que Φ et Φ_0 sont indépendantes de z , et par suite:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \Delta\Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (III-61)$$

soit avec (III-49) et (III-60a), on a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \beta T + \beta \frac{K}{V} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \quad (\text{III-62})$$

Connaissant T et Φ_0 , on peut donc calculer les dérivées secondes du potentiel $\Phi(x,y)$. Soit:

$$\Phi_{,11} = \frac{\beta G}{4\pi k} V \left[\left\{ K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \right\} \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) - \frac{2K}{V} \frac{x}{r^2} \right] \quad (\text{III-63a})$$

$$\Phi_{,22} = \frac{\beta G}{4\pi k} V \left[\left\{ K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \right\} \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) + \frac{2K}{V} \frac{x}{r^2} \right] \quad (\text{III-63b})$$

$$\Phi_{,12} = \frac{\beta G}{4\pi k} V \frac{y}{r} \left[K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) - \frac{2K}{V} \frac{1}{r} \right] \quad (\text{III-63c})$$

A partir de l'expression (III-50), on peut en fin déduire les contraintes $\sigma_{ij}(x,y)$ sous la forme:

$$\sigma_{11} = -NV \left[\left\{ K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \right\} \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) + \frac{2K}{V} \frac{x}{r^2} \right] \quad (\text{III-64a})$$

$$\sigma_{22} = -NV \left[\left\{ K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{x}{r} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \right\} \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) - \frac{2K}{V} \frac{x}{r^2} \right] \quad (\text{III-64b})$$

$$\sigma_{12} = NV \frac{y}{r} \left[K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) - \frac{2K}{V} \frac{1}{r} \right] \quad (\text{III-64c})$$

La contrainte σ_{33} est donnée par:

$$\sigma_{33} = -2NV \exp \left(-\frac{Vx}{2K} \right) K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \quad (\text{III-64d})$$

avec: $N = \frac{\mu\beta G}{2\pi k}$

K_1 est la fonction de Bessel modifiée de second espèce d'ordre 1. Elle s'écrit en fonction de K_0 comme suit:

$$K_1(z) = -K_0'(z)$$

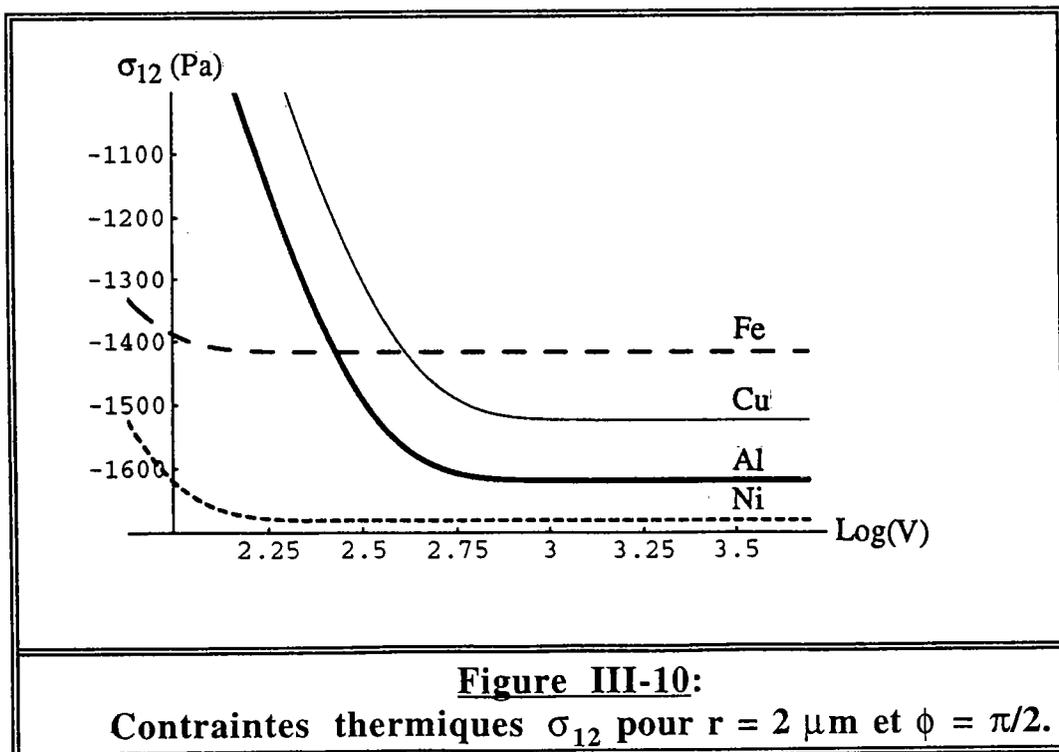
A partir de cette relation, on déduit les développements de K_1 pour de petites et grandes valeurs de z :

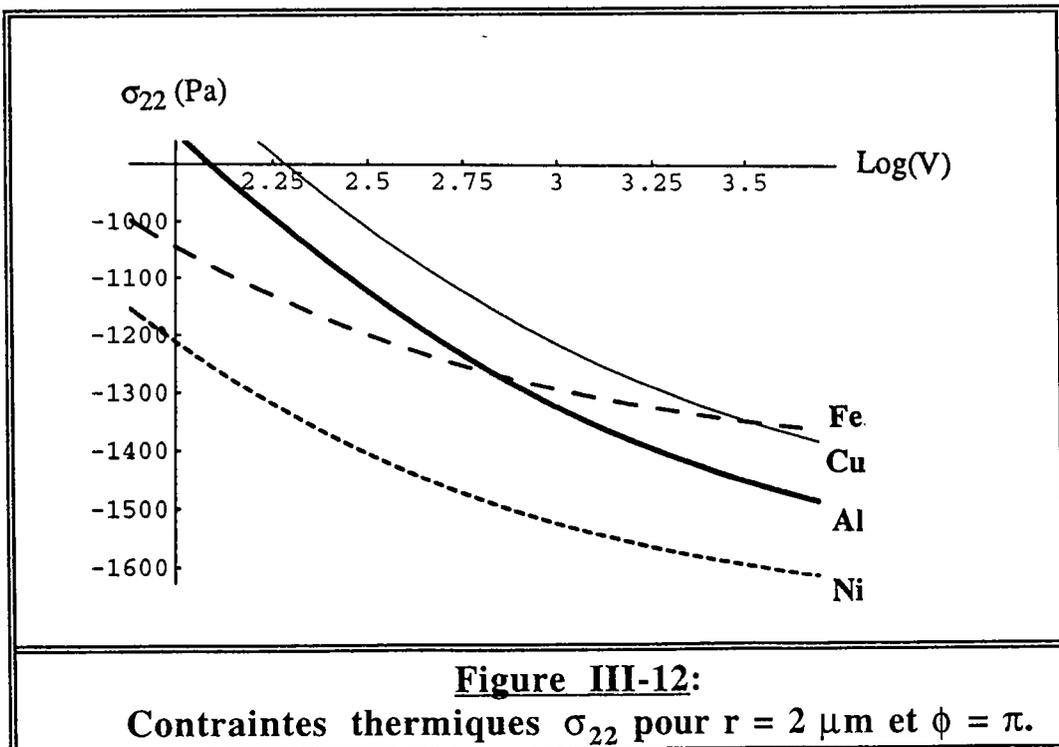
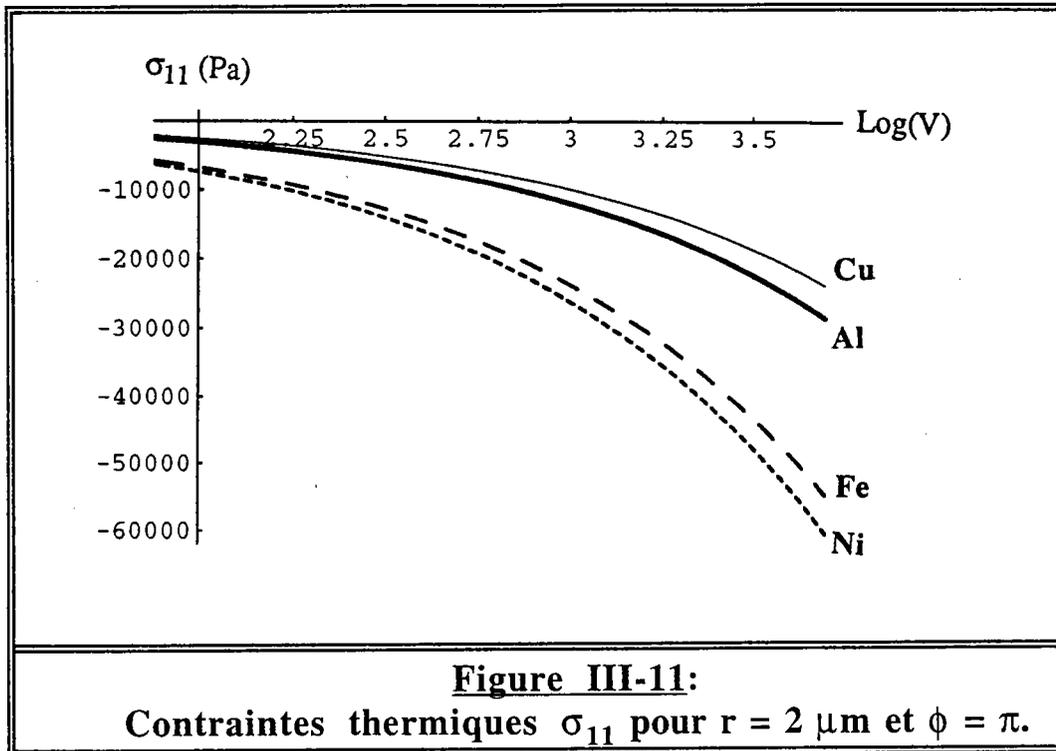
$$K_1(z) \approx \frac{1}{z}, \quad z \ll 1$$

$$K_1(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad z \gg 1$$

Compte tenu de ces développements et du critère classique de propagation $G = G_c = b \tau$, on peut vérifier aisément que les contraintes internes σ_{ij} s'annulent d'une part quand la vitesse de mouvement de la dislocation V tend vers zéro et d'autre part quand r tend vers l'infini.

L'influence de la vitesse sur les contraintes σ_{ij} est mise en évidence sur les figures (III-10)-(III-12) où l'on a représenté pour les quatre matériaux, les contraintes maximale ($\phi=\pi$ pour σ_{11} et σ_{22} et $\phi=\pi/2$ pour σ_{12}) pour $r=2 \mu\text{m}$ en fonction du logarithme de la vitesse. Comme pour la température, on remarque que les contraintes thermiques sont des fonctions croissantes de la vitesse de mouvement de la dislocation coin rectiligne.





Par ailleurs, on peut remarquer aussi à partir de ces figures, que les contraintes thermiques ne sont pas très importantes et n'excèdent pas quelques kPa même au voisinage de la dislocation et pour des vitesses élevées. Une comparaison par rapport aux contraintes élastiques de la dislocation coin rectiligne (II-54) est faite dans l'annexe B.

III-5-4- Calcul de l'énergie élastique d'origine thermique

La densité d'énergie élastique associée à la dislocation mobile est donnée par (II-55) sauf que les contraintes internes sont cette fois-ci d'origine thermique. Cette densité s'écrit sous la forme suivante:

$$w_{el} = 2\mu \frac{1+\nu}{1-\nu} (\alpha T)^2 - \frac{1}{2\mu} (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2) \quad (\text{III-65})$$

La relation (III-65) est équivalente à celle donnée par M.Matczynski & G.C.Sih [15]:

$$w_{el} = \frac{1}{4\mu} [(1+\nu) (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 2 (\sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2)] + \mu (1+\nu) (\alpha T)^2$$

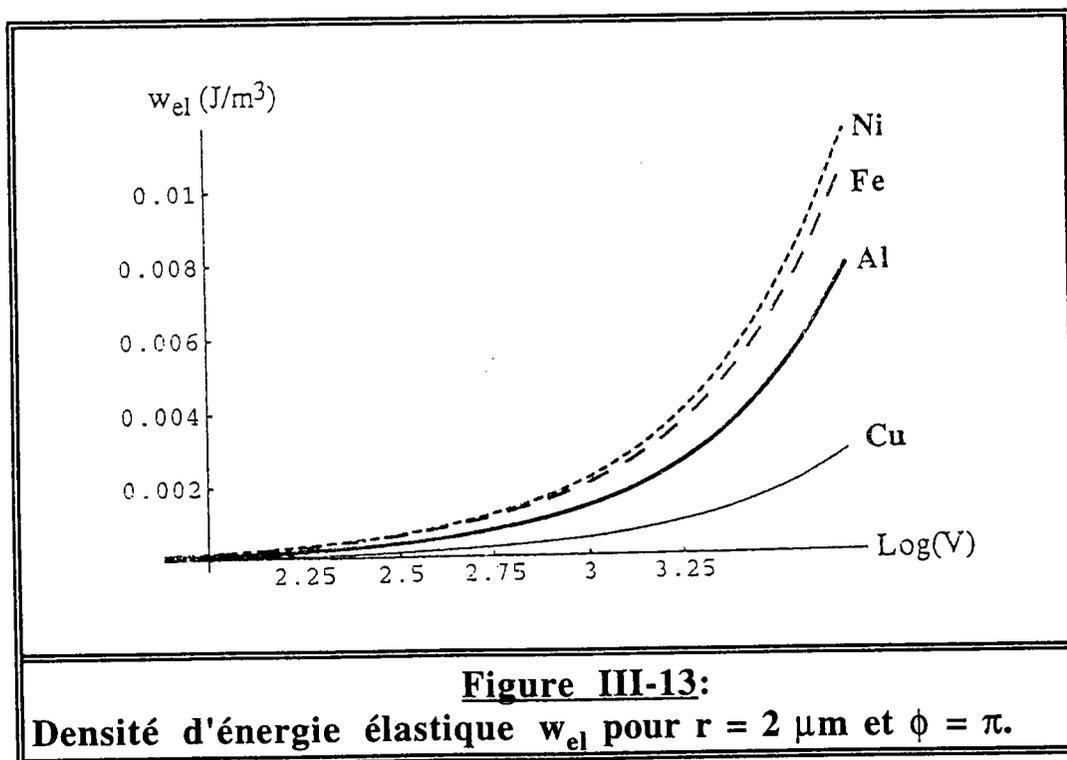
Cette dernière relation diffère de (II-58) par le deuxième terme du membre droit dont l'origine est la condition (III-34b) imposée par le problème des déformations planes sur la contraintes thermique σ_{33} .

En injectant le champ de température (III-42) et les contraintes internes (III-64) dans (III-65), la densité d'énergie élastique est donnée par l'expression suivante:

$$w_{el} = \frac{N^2}{2\mu} V^2 \left[\frac{3-5\nu}{1+\nu} K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K} \right) e^{-\frac{Vx}{K}} + \left\{ K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) e^{-\frac{Vx}{2K}} - \frac{2K}{Vr} \right\}^2 \right] \quad (\text{III-66})$$

M.Matczynski & G.C.Sih [15] ont évalué une densité d'énergie équivalente à (III-66) pour une source mobile dont la puissance est constante. La dépendance en fonction de la vitesse de mouvement n'apparaît alors que par le biais de l'expression entre crochet dans (III-66). Par une évaluation addimensionnelle, M.Matczynski & G.C.Sih ont prévu d'éventuels sites d'endommagement plastique ou de fracture pour lesquels la densité d'énergie passe soit par un maximum soit par un minimum.

Pour le cas actuel (expression (III-66)), la dépendance en fonction de la vitesse est plus forte par la présence en facteur d'un terme en V^2 . Pour cette raison et contrairement à M.Matczynski & G.C.Sih [15], la densité d'énergie transférée au système est d'autant plus élevée que la vitesse V est plus importante (Figure III-13).



Les figures (III-14) montrent que la densité d'énergie élastique a tendance aussi à se limiter derrière la dislocation ($\phi=\pi$) pour de grandes vitesses de mouvement de la dislocation comme c'était le cas pour la température.

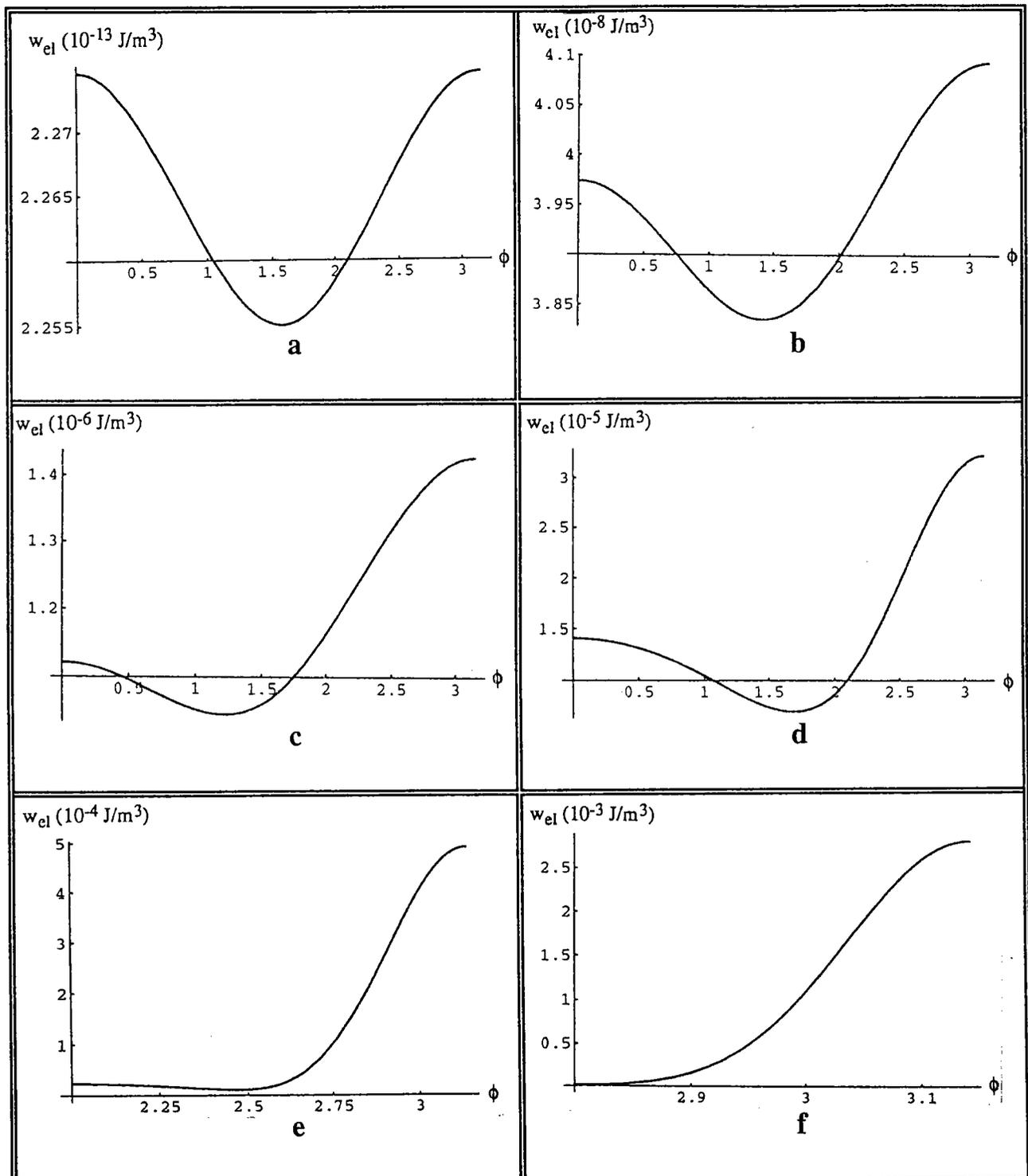


Figure III-14:

Densité d'énergie élastique en fonction de l'angle ϕ pour $r = 2 \mu\text{m}$ et à différentes vitesses de mouvement de la dislocation:

- (a) $V = 10^{-3}$ m/s. (b) $V = 1$ m/s. (c) $V = 10$ m/s. (d) $V = 10^2$ m/s.
 (e) $V = 10^3$ m/s. (f) $V = 5 \cdot 10^3$ m/s.

Le calcul de l'énergie élastique se déduit évidemment de sa densité par une simple intégration sur tout le volume du milieu en prenant soin d'isoler la singularité mathématique par l'introduction du rayon du coeur de la dislocation r_0 . En utilisant des techniques d'intégration des fonctions de Bessel, l'intégration par rapport à l'angle ϕ conduit à l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
 W = \frac{\pi N^2}{\mu} V^2 & \left[\left(\frac{2K}{V}\right)^2 \log\left(\frac{R}{r_0}\right) + \int_{r_0}^R r K_1^2\left(\frac{Vr}{2K}\right) I_0\left(\frac{Vr}{K}\right) dr \right. \\
 & + \frac{3-5\nu}{1+\nu} \int_{r_0}^R r K_0^2\left(\frac{Vr}{2K}\right) I_0\left(\frac{Vr}{K}\right) dr \\
 & \left. - \frac{4K}{V} \int_{r_0}^R K_1\left(\frac{Vr}{2K}\right) I_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) dr \right] \quad (III-67)
 \end{aligned}$$

I_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0.

L'intégration par rapport à r ne peut se faire que numériquement puisqu'on ne peut pas donner des expressions mathématiques connues pour de telles intégrales. Généralement, c'est une énergie qui ne dépasse pas une dizaine de μev même pour des vitesses et des rayons assez importants et ceci en comparaison avec l'énergie élastique d'origine plastique donnée par l'expression (II-60) qui est souvent de l'ordre de l'électronvolt (eV). Si on prend par exemple une dislocation coin de vecteur de Burgers de $2 \cdot 10^{-10}$ m se déplaçant à une vitesse $V = 100$ m/s dans le cuivre sous l'effet d'une contrainte $\tau = 100\text{MPa}$, les énergies élastiques d'origines thermique et plastique dans une région comprise entre $r_0 = 5$ b et $R=20 \mu\text{m}$ sont respectivement de l'ordre de 10^{-14} J/m et de $2 \cdot 10^{-9}$ J/m soit par atome le long de la dislocation $13 \mu\text{eV}$ et 3 eV environ.

En conclusion, si les dislocations constituent l'origine de la plasticité dans les métaux, on a essayé dans cette partie de leur attribuer un autre phénomène qui a un lien assez étroit avec l'échauffement local (hot spot). Le fait d'avoir introduit la notion de dislocation individuelle avait pour but d'essayer de modéliser cet échauffement d'une façon simple. En évaluant les

champs de température et de contraintes thermiques ainsi que l'énergie élastique, on s'est rendu compte que l'effet d'une seule dislocation est très négligeable même pour des vitesses de mouvement approchant la vitesse des ondes dans les métaux. Cela veut-il dire que la dislocation n'intervient pas dans ce genre de phénomène (échauffement local)?

M.Matczynski & G.C.Sih [15], ont estimé qu'une source de chaleur mobile et de puissance quelconque peut être la cause d'éventuelles sites d'endommagement ou de fracture. La dislocation en est un cas particulier. D'autre part, le fait de traiter le cas d'une dislocation unique est une façon très simpliste mais nécessaire pour modéliser les phénomènes liés aux dislocations. Pour cela, on propose dans la suite d'étudier d'une manière quantitative le comportement non pas d'une seule dislocation mais cette fois-ci d'un ensemble de dislocations.

III-6- Application au cas des ensembles de dislocations

Initialement, la densité de dislocations (nombre de dislocations perçant une surface unité) dans un matériau est de l'ordre de 10^6 à 10^7 dislocations par cm^2 . Après déformation (plastique), cette densité augmente jusqu'à atteindre des valeurs de l'ordre de 10^{10} à 10^{12} dislocations par cm^2 . Au cours de cette déformation, les dislocations initialement présentes et nouvellement créées dans un échantillon, ont généralement tendance à se regrouper sous forme d'amas cellulaires plus ou moins complexes qui dépendent du mode de sollicitation appliquée.

Sans rentrer dans les détails de formation de ces cellules de dislocations, on peut juste noter que se sont des configurations où la localisation de la déformation est très marquante et où on peut s'attendre par conséquent à des échauffements locaux qu'on tentera d'évaluer. On citera pour cela et en particulier les configurations les plus rencontrées telles que les joints de grains, les empilements et les bandes de cisaillement. D'ailleurs, les deux dernières ont un lien assez net avec la première, elles forment souvent des jonctions.

III-6-1- Les empilements de dislocations

Sous l'action d'un chargement et dans des conditions favorables, une source de Frank-Read libère une après l'autre un certain nombre de dislocations (boucles). Le déplacement de ces dislocations peut être freiné voire même arrêté à la rencontre d'obstacles (joints de grains par exemple). Les dislocations vont alors s'empiler les unes sur les autres (Figure III-15a) constituant ainsi une des raisons du durcissement des cristaux.

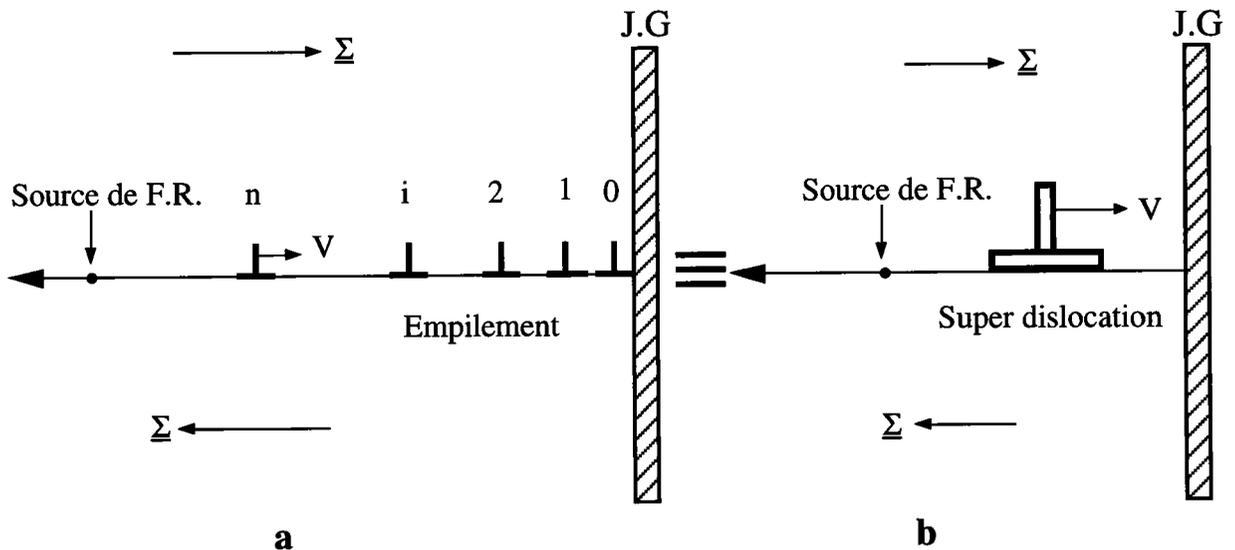


Figure III-15:

(a) Empilement de dislocations. (b) Super dislocation.

Chaque dislocation "i" de l'empilement est soumise à l'action des dislocations voisines et à celle des contraintes appliquées $\underline{\Sigma}$. La position de cette dislocation dans l'empilement est donc déterminée par la condition d'équilibre de ces forces telle que [16]:

$$\frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j} - \Sigma b = 0 \quad \text{(III-68)}$$

n est le nombre de dislocations dans l'empilement.

A partir de la relation (III-68), on déduit généralement deux résultats très importants. En tête de l'empilement, les contraintes sont multipliées par le facteur n. D'autre part, on peut calculer, par une méthode de récurrence, la

taille de l'empilement L et le nombre de dislocations n susceptibles d'être empilées [17]. Ceux ci sont donnés par une même relation:

$$L = \frac{n\mu b}{\pi(1-\nu)\Sigma} \quad (\text{III-69})$$

La concentration de contraintes en tête de l'empilement $n\Sigma$ peut être regardée comme étant une contrainte Σ appliquée à une "super dislocation" de vecteur de Burgers nb (Figure III-15b). Si par ailleurs cette "super dislocation" se déplace à une vitesse uniforme V , alors le champ thermique qu'elle crée autour d'elle peut être estimé à n fois le champ thermique d'une dislocation isolée de vecteur de Burgers b et mobile à la même vitesse V (III-44).

Il reste alors à préciser la longueur de l'empilement L et le nombre de dislocations qu'il contient. En général, on estime que l'empilement peut s'étaler tout le long d'un grain. Le nombre de dislocations est ainsi déduit à partir de (III-69) pour une contrainte Σ donnée. Si on prend par exemple le cas du Cuivre avec un grain de taille $20 \mu\text{m}$, les dislocations pouvant s'empiler pour une contrainte de l'ordre de 100 MPa , sont approximativement au nombre de 430 dislocations. Donc, si on considère la "super dislocation" de vecteur de Burgers $430b$ mobile à une vitesse de l'ordre de 100 m/s , le champ de température dont elle est l'origine est de l'ordre de $0,4\text{K}$ et $3,3\text{K}$ à une distance de $2\mu\text{m}$ et 2\AA respectivement. Mais en réalité, on n'arrive pas à observer expérimentalement un tel nombre de dislocations par empilement, elles sont au maximum une dizaine. Dans ce cas, le champ thermique de la "super dislocation" est encore plus faible, de l'ordre d'un centième de degré.

III-6-2- Les bandes de cisaillement

Au cours de la déformation plastique, les cellules de dislocations sont composées de zones de faible densité de dislocations entourées de parois contenant une forte densité de dislocations. De telles configurations conduisent le plus souvent à la formation de microbandes qui sont des structures intragranulaires de dislocations de forme étroite (épaisseur qui varie de $0,2$ à $0,4 \mu\text{m}$) et allongée (elles peuvent se développer sur toute la longueur du grain). Lorsque les conditions sont favorables, les microbandes peuvent

développer une autre structure de dislocations qui peut se propager d'un grain à l'autre puis à travers tout l'échantillon. Ces bandes (ou microbandes) sont porteuses d'un intense cisaillement qui est lié à la déformation plastique par la relation de Schmidt:

$$\beta_{ij}^p = \sum_k n_i^k m_j^k \gamma^k \quad (\text{III-70})$$

La sommation est effectuée sur tous les systèmes actifs k dont \mathbf{n}^k et \mathbf{m}^k sont respectivement la normale au plan de glissement et la direction du glissement du système k et γ^k est l'amplitude de glissement sur ce système.

Si on considère qu'un ensemble de n dislocations de même nature et de vecteurs de Burgers b sont à l'origine de la coalescence d'une bande de cisaillement de largeur c , le cisaillement développé par cette bande est donné par:

$$\gamma = \frac{nb}{c} \quad (\text{III-71})$$

Cette relation permet alors de connaître le nombre de dislocations qu'on peut associer à une bande connaissant évidemment l'intensité du cisaillement γ et la largeur c de la bande.

Soit par exemple une bande de largeur $c = 0,4 \mu\text{m}$ obtenue par l'application d'une contrainte suffisante de l'ordre du GPa et produisant un cisaillement $\gamma = 1$, le nombre de dislocations de vecteur de Burgers $b = 2 \text{ \AA}$ est approximativement de l'ordre de $n = 2000$ dislocations. Si cette bande peut être assimilée à une dislocation de vecteur de Burgers $2000 b$ et si elle est animée d'une vitesse $V = 500 \text{ m/s}$ (vitesse d'une bande de cisaillement mesurée par A.Marchand et col.[18]), le champ de température qu'elle crée est de l'ordre de 400 K à une distance de l'ordre de 10 nm . C'est une température appréciable qui peut augmenter avec le cisaillement produit et avec la largeur de la bande. La température ainsi calculée est du même ordre de grandeur que celle mesurée par A.Marchand et col. dans le cas d'un acier.

III-7- Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié l'aspect thermique du mouvement d'une dislocation indépendamment des autres paramètres internes susceptibles d'influencer la réponse du matériau. On espérait, comme pour le cas d'une fissure mobile, atteindre des grandeurs significatives du champ de température et des contraintes thermiques. Même si ce but n'est pas atteint, on peut affirmer par l'approche de M.Matczynski & G.C.Sih que la dislocation assimilée à une source de chaleur mobile peut être l'origine d'éventuelles sites d'endommagement et de fracture. D'autre part, même si l'effet d'une seule dislocation est négligeable, celui d'un ensemble assez élevé de dislocations peut être considérable et permettra d'expliquer d'une manière simple l'origine des élévations de températures rencontrées dans les bandes de cisaillement par exemple.

Pour évaluer numériquement tous les champs introduits dans ce chapitre, on a été obligé de fixer la force thermodynamique G à sa valeur critique prise égale à la force de P.K. Dans le chapitre suivant, on tentera de calculer G dans le cas général où la plasticité et la thermique introduites par la dislocation seront prises en compte.

- [1] **W.Nowacki**, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, Second Edition, (1986).
- [2] **G.Eason & I.N.Sneddon**, *The Dynamic Stresses Produced in Elastic Bodies by Uneven Heating*, Proc.Roy.Soc.Edinburgh, Vol.65, Sec.A., (1959).
- [3] **H.D.Bui, A.Ehrlacher & Q.S.Nguyen**, *Propagation de Fissure en Thermoélasticité Dynamique*, J.Mécanique, Vol.19, No.4, (1980).
- [4] **M.A.Biot**, *Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics*, Journal of Applied Physics, Vol.27, No.3, (1956).
- [5] **R.Weichert & K.Schönert**, *Heat Generation at the Tip of Moving Crack*, J.Mech.Phys.Solids, Vol.26, p.p.151-161, (1978).
- [6] **Q.S.Nguyen**, *Effets Thermiques en Fond de Fissure, Mécanique de la Rupture*, Séminaire organisé avec le L.M.S.de l'école polytechnique par le collège international des sciences de la construction, Saint-Rémy les Chevreux, (France), (1982).
- [7] **B.A.Boley & J.H.Weiner**, *Theory of Thermal Stresses*, R.E.Krieger Publishing Company, INC.Krieger Drive, Malabar, Florida, (1985).
- [8] **A.M.Freudenthal & J.H.Weiner**, *On the Thermal Aspect of Fracture*, J.App.Ph., Vol.27, No.1, p.44, (1956).
- [9] **J.J.Gilman**, *Micromechanics of Flow in Solids*, McGraw-Hill Book Company, (1969).
- [10] **H.S.Carslaw & J.C.Jaeger**, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, Second Edition, (1959).
- [11] **D.Rosenthal**, *The Theory of Moving Sources of Heat and its Application to Metal Treatments*, Transactions of the A.S.M.E., (1946).
- [12] **J.D.Eshelby & P.L.Pratt**, *Note on the Heating Effect of Moving Dislocations*, Acta.Metallurgica, Vol.4, (1956).

- [13] **American Institute of Physics Handbook**, McGraw-Hill Book Company, (1972).
- [14] **J.N.Goodier**, *On the Integration of the Thermoelastic Equations*, Phil.Mag., Vol.23, No.157, (1937).
- [15] **M.Matczynski & G.C.Sih**, *Prediction of Damage Sites Ahead of a Moving Source*, in *Defects, Fractures and Fatigue*, Proceedings of the second international symposium, Mont Gabriel, Canada, (1983).
- [16] **J.Weertman & J.R.Weertman**, *Elementary Dislocation Theory*, M.S.M.S., New York, (1967).
- [17] **D.Francois, A.Pineau et A.Zaoui**, *Comportement Mécanique des Matériaux*, Vol.1, Hermès, Paris, (1991).
- [18] **A.Marchand & J.Duffy**, *An Experimental Study of the Formation Process of Adiabatic Shear Bands in a Structural Steel*, J.Mech.Phys.Solids, Vol.36, No.3, p.p.251-283, (1988).

CHAPITRE IV

CALCUL DE LA FORCE THERMODYNAMIQUE G

IV-1- Introduction	107
IV-2- Analyse thermoélastoplastique du problème d'une discontinuité mobile.....	107
IV-3- Cas du mouvement uniforme et quasi statique d'une dislocation coin rectiligne.....	110
IV-3-1- Résolution de l'équation thermique	112
IV-3-2- Résolution des équations du mouvement.....	114
IV-4- Calcul de la force thermodynamique G.....	116
IV-4-1- Calcul de la force G^c	119
IV-4-2- Calcul de la force G^E	122
IV-4-3- Calcul de la force G^d	123
IV-5- Conclusion	132
Références bibliographiques	133

IV-1- Introduction

Dans les chapitres précédents, on a traité séparément le comportement plastique et le comportement thermique du mouvement d'une discontinuité. Mais en réalité ces deux comportements sont indissociables: une discontinuité mobile est à la fois une source de déformation plastique et de déformation thermique.

Le but de ce chapitre est de tenir compte de cette coexistence thermoplastique et de calculer par conséquent les champs mécaniques (déplacement, déformation et contrainte) et thermique résultants. Pour cela, les méthodes du tenseur et de la fonction de Green (potentiel thermoélastique) seront de nouveau utilisées pour résoudre les équations de synthèse.

Les solutions trouvées dépendront toujours de l'inconnue G dont le calcul fera l'objet du paragraphe (IV-4) dans le cas particulier d'une dislocation coin rectiligne mobile.

IV-2- Analyse thermoélastoplastique du problème d'une discontinuité mobile

On rappelle qu'au premier chapitre, on a vu qu'une discontinuité mobile se comportait comme une source de chaleur mobile et que si à cette discontinuité est associée une certaine distribution de déformation plastique, alors le champ de déformation totale ϵ_{ij} au sein du matériau est donné par:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{iné} \quad (IV-1)$$

$\epsilon_{ij}^{iné}$ est la partie inélastique du champ de déformation due à la présence et au mouvement de la discontinuité. $\epsilon_{ij}^{iné}$ est constituée d'un terme plastique ϵ_{ij}^p et d'un autre thermique ϵ_{ij}^{th} , telle que:

$$\epsilon_{ij}^{iné} = \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^{th} \quad (IV-2)$$

avec,

$$\epsilon_{ij}^{th} = \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (IV-3)$$

Remarque:

⇒ Si $\varepsilon_{ij}^{iné} = \varepsilon_{ij}^p$, cette situation se ramène au cas élastique avec la présence d'une déformation plastique;

⇒ Si $\varepsilon_{ij}^{iné} = \varepsilon_{ij}^{th}$, on retrouve le cas thermoélastique du dernier chapitre.

Pour tenir compte de ces deux phénomènes de natures différentes (la plasticité et la thermique), le potentiel thermodynamique d'où dériveront les lois de comportement, doit localement dépendre des deux variables observables $\underline{\varepsilon}$ et T et de la variable cachée $\underline{\varepsilon}^p$:

$$w = w(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, T)$$

En partant uniquement de cette écriture de w et des relations (I-23) et (I-27), on peut déduire l'expression de la dissipation intrinsèque volumique sous la forme:

$$\varphi_1 = -\underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}}^p \quad (IV-4)$$

Pour établir les équations différentielles décrivant l'évolution thermoélasto-plastique, il convient de préciser le potentiel thermodynamique $w(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, T)$. En effet, on considère toujours le cas d'un milieu élastique, homogène et isotrope pour lequel $w(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, T)$ s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} w(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, T) = & \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) \\ & + \mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) \\ & - c T \text{Log}\left(\frac{T}{T_0}\right) - (s_0 - c) T + w_0 \end{aligned} \quad (IV-5)$$

A partir de (IV-5), on déduit encore une fois les relations ou lois de comportement concernant l'entropie s et le champ de contraintes σ_{ij} telles que:

$$s = -\frac{\partial w}{\partial T} = m (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) + c \text{Log}\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0 \quad (\text{IV-6a})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) \delta_{ij} + 2 \mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) \quad (\text{IV-6b})$$

ou bien sous la forme:

$$s = m (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p) - 3m\alpha (T - T_0) + c \text{Log}\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0 \quad (\text{IV-7a})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p) \delta_{ij} + 2 \mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) - m (T - T_0) \delta_{ij} \quad (\text{IV-7b})$$

En se basant sur (IV-7a) et (III-4), la nouvelle équation thermique s'écrit sous la forme suivante:

$$k\Delta T - c\dot{T} - mT(\dot{\varepsilon}_{kk} - \dot{\varepsilon}_{kk}^p) + 3m\alpha T\dot{T} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + GV\delta(A) = 0 \quad (\text{IV-8})$$

Bui et coll.[1] et Q.S.Nguyen [2] ont résolu numériquement une équation équivalente à (IV-8), pour une fissure mobile dans un milieu élastique parfaitement plastique sans source de chaleur concentrée à la pointe de la fissure ($G=0$). Cette équation est écrite en faisant apparaître la trace des contraintes déduite de (IV-7b) telle que:

$$k\Delta T - c\dot{T} - \alpha T \dot{\sigma}_{kk} - \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0 \quad (\text{IV-8}')$$

Par rapport à l'équation thermique classique, l'équation (IV-8) présente un certain nombre de nouveaux termes. On citera en particulier le terme $mT\dot{\varepsilon}_{kk}^p$ qui représente un couplage supplémentaire entre les deux champs de déformations inélastiques, en l'occurrence la déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ et la déformation thermique $\underline{\varepsilon}^{th}$ par le biais du champ de température T .

D'autre part, les relations (II-9a) et (IV-7b) conduisent aux équations du mouvement qui se mettent sous la forme:

$$(\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - m T_{,i} - \lambda \varepsilon_{kk,i}^p - 2\mu \varepsilon_{ik,k}^p + \rho f_i = 0 \quad (\text{IV-9})$$

Comme il s'agit d'un milieu élastique, homogène et isotrope, on peut écrire l'équation (IV-9) autrement en faisant intervenir le tenseur d'élasticité C_{ijkl} tel que:

$$C_{ijkl} u_{k,lj} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^{iné} + \rho f_i = 0 \quad (IV-10)$$

Les équations (IV-8) et (IV-10) constituent un système d'équations différentielles couplées de la thermoélastoplasticité non linéaire en T et pour une distribution donnée de la déformation plastique. Elles permettent de déterminer les champs thermomécaniques causés par une discontinuité quelconque en mouvement dans un milieu élastique.

On vérifie très facilement que dans le cas isotherme ($T = \text{constante}$), on retrouve l'équation du mouvement (II-35) résolue au chapitre II. Alors que dans le cas $\underline{\varepsilon}^P=0$, on retrouve les équations différentielles de la thermoélasticité non linéaire du chapitre III.

Pour résoudre ces équations, on considère comme aux chapitres précédents, le cas d'une dislocation coin rectiligne en mouvement uniforme avec quelques hypothèses simplificatrices.

IV-3- Cas du mouvement uniforme et quasi statique d'une dislocation coin rectiligne

Pour résoudre les équations thermomécaniques (IV-8) et (IV-10), on se place dans les cas de figures suivants:

h₁- La linéarité du champ de température T au voisinage de la température de référence T_0 traduite par: $\left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| \ll 1$,

h₂- L'effet du couplage thermomécanique est négligé,

h₃- Les forces de volumes sont aussi négligées,

h₄- On suppose que le champ de déplacement imposé à l'infini est tel que:

$$U_i^0(\mathbf{r}) = E_{ij} x_j \quad (IV-11)$$

E_{ij} étant le champ de déformation imposé à l'infini tel que:

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^p + E_{ij}^{th} \quad (IV-12)$$

Cette relation est déduite de (A-10) en remplaçant la déformation inélastique macroscopique $\underline{E}^{iné}$ par la somme des déformations plastique et thermique macroscopiques \underline{E}^p et \underline{E}^{th} respectivement.

En prenant toujours $s_0=0$ et $w_0=-cT_0$ et compte tenu de la linéarité de la température, l'énergie interne w s'écrit comme suit:

$$w(\underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}^p, \theta) = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p - \varepsilon_{kk}^{th}) + \mu (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \quad (IV-13)$$

à partir de laquelle on déduit les équations de l'évolution thermoélasto-plastique:

$$k \Delta T - (c - 3\alpha\eta) \dot{T} + \eta \dot{\varepsilon}_{kk}^p - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + GV\delta(A) = 0 \quad (IV-14a)$$

$$C_{ijkl} u_{k,lj} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^{iné} = 0 \quad (IV-14b)$$

Dans ces équations $\varepsilon_{ij}^{iné}$ représente la déformation inélastique introduite par la présence et le mouvement de la dislocation coin rectiligne. Sa déformation plastique est donnée par (cf. chapitre II):

$$\varepsilon_{12}^p = \frac{b}{2} H(-x) \delta(y) \quad (IV-15)$$

alors que la déformation thermique est donnée par l'expression (IV-3) où T est le champ de température solution de l'équation différentielle (IV-14a).

IV-3-1- Résolution de l'équation thermique

Avant d'aborder la résolution de (IV-14a), on fait quelques remarques qui permettront de simplifier d'avantage l'équation thermique.

Remarques:

1- La première remarque concerne le coefficient de \dot{T} dans l'équation (IV-14a) à savoir le terme $(c-3\alpha\eta)$ avec $\eta=\alpha(3\lambda+2\mu)T_0$.

	$\lambda \cdot 10^{-4}$ (MPa)	$\mu \cdot 10^{-4}$ (MPa)	$\alpha \cdot 10^6$ (K ⁻¹)	c (MPa/K)	$3\alpha^2(3\lambda+2\mu)T_0$ (MPa/K)
Cu	13.1	4.6	16.5	3.44	$3.96 \cdot 10^{-4} T_0$
Al	6.1	2.5	23.9	2.42	$3.99 \cdot 10^{-4} T_0$
Ni	16.4	8.0	13.3	3.91	$3.30 \cdot 10^{-4} T_0$
Fe	11.3	8.2	11.7	3.62	$2.06 \cdot 10^{-4} T_0$

Tableau (IV-1):
Comparaison entre c et $3\alpha\eta$.

Dans le tableau (IV-1), on compare numériquement les coefficients c et $3\alpha\eta$ pour différents matériaux. On remarque alors que pour une température de référence raisonnable T_0 , on a:

$$3\alpha\eta \ll c$$

ce qui permet de ne maintenir que le terme $c\dot{T}$ dans l'équation thermique.

2- le choix de la dislocation coin rectiligne conduit à une trace de la déformation plastique nulle:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0$$

3- En utilisant le repère mobile et le fait qu'un état de mouvement quasi stationnaire peut être rapidement atteint, on a:

$$\dot{T} \approx -V T_{,1}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p \approx -V \epsilon_{ij,1}^p$$

4- Dans le cas de la dislocation coin rectiligne, on a à partir de la relation (IV-15):

$$\epsilon_{12,1}^p = -\frac{b}{2} \delta(x) \delta(y)$$

c'est-à-dire que les deux termes:

$$\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^p \approx -V \sigma_{12} \epsilon_{12,1}^p = \frac{bV}{2} \sigma_{12} \delta(x) \delta(y)$$

et

$$GV \delta(A) = GV \delta(x) \delta(y)$$

qui traduisent la variation de la déformation plastique ($\sigma_{12} \dot{\epsilon}_{12}^p$) et la puissance intrinsèque dissipée (GV) associées à la même entité qui est la dislocation coin mobile, sont nuls en un point régulier du volume Ω .

Compte tenu de ces quatre remarques, l'équation thermique devient:

$$k \Delta T + c V T_{,1} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \text{ (régulier)} \in \Omega \quad \text{(IV-16)}$$

Il ne faut pas oublier la condition source exprimée par la relation (I-54) qu'on rappelle ici:

$$GV = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

La solution de (IV-16) satisfaisant les mêmes conditions aux limites (III-39) a été calculée au troisième chapitre:

$$T(x, y) = \frac{GV}{2\pi k} \exp\left(-\frac{Vx}{2K}\right) K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right)$$

IV-3-2- Résolution des équations du mouvement

Pour résoudre les équations (IV-14b), on utilise la méthode du tenseur de Green comme au deuxième chapitre. En s'appuyant sur l'hypothèse h_4 , le gradient du champ de déplacement est donné par:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{nm} - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \\ - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (IV-17)$$

L'expression (IV-17) est formée de trois termes dont la signification est la suivante:

⇒ Un terme traduisant le comportement du gradient de déplacement à l'infini donné par \mathbf{E}_{nm} ,

⇒ Un terme dû uniquement à la distribution de la déformation plastique et traduit par l'intégrale qu'on note:

$$\mathbf{u}_{n,m}^p(\mathbf{r}) = - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \quad (IV-18)$$

⇒ En fin un terme d'origine thermique donné par l'intégrale notée:

$$\mathbf{u}_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = - \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}') dV' \quad (IV-19)$$

On peut remarquer que le calcul des deux intégrales $\mathbf{u}_{n,m}^p(\mathbf{r})$ et $\mathbf{u}_{n,m}^{th}(\mathbf{r})$ peut se faire séparément puisque les deux champs de déformations inélastiques $\underline{\varepsilon}^p$ et $\underline{\varepsilon}^{th}$ sont bien évidemment indépendants l'un de l'autre. Ceci veut dire que les composantes de $\mathbf{u}_{n,m}^p(\mathbf{r})$ peuvent être déduites de celles du champ de déplacement données par (II-53). Par ailleurs, pour calculer $\mathbf{u}_{n,m}^{th}(\mathbf{r})$, on effectue tout d'abord le produit $\mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ (Annexe C), l'intégrale (IV-19) se réduit à:

$$\mathbf{u}_{n,m}^{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \left[-\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_V \frac{1}{R} \theta(\mathbf{r}') dV' \right] \quad (\text{IV-20})$$

avec $\theta = T - T_0$

En comparant (IV-20) avec les relations (III-51) et (III-53), on conclut que:

$$\mathbf{u}_{n,m}^{\text{th}}(\mathbf{r}) = \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-21})$$

Le calcul des fonctions $\Phi_{,nm}(\mathbf{r})$ a fait l'objet du chapitre III.

Finalement, on peut écrire $\mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r})$ sous la forme suivante:

$$\mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{nm} + \mathbf{u}_{n,m}^p(\mathbf{r}) + \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-22})$$

A partir de (II-2), on peut déduire les composantes du champ de déformation totale sous la forme:

$$\varepsilon_{nm}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{nm} + \mathbf{e}_{nm}^p(\mathbf{r}) + \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-23})$$

Pour cela, on a utilisé la symétrie du potentiel thermoélastique Φ et de la déformation macroscopique $\underline{\mathbf{E}}$ ainsi que le tenseur de Green modifié $\Gamma_{jnim}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ telle que:

$$\mathbf{e}_{nm}^p(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{C}_{ijkl} \Gamma_{jnim}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{IV-24})$$

ou:

$$\Gamma_{jnim}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{2}(\mathbf{G}_{jn,im}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mathbf{G}_{jm,in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \quad (\text{IV-25})$$

En conclusion, les hypothèses et les remarques évoquées en ce début de chapitre ont permis de simplifier les équations de l'évolution thermo-mécanique du mouvement d'une dislocation coin rectiligne. Elles ont permis aussi de trouver une solution à ces équations simplifiées en fonction des solutions du problème physique et thermique pris séparément.

Il faut remarquer par ailleurs que les solutions dépendent toujours de la force thermomécanique G , l'inconnue du problème d'évolution. Les champs thermiques et mécaniques permettront de calculer cette inconnue.

IV-4- Calcul de la force thermodynamique G

Les champs thermomécaniques calculés aux paragraphes précédents serviront à calculer la force thermodynamique G formulée au premier chapitre. Appliquée au cas de la dislocation coin rectiligne en mouvement quasi statique, la force G donnée par (I-78) devient:

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \int_{\Sigma} \{ w n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} \} dS \quad (\text{IV-26})$$

Dans le cas des dislocations quelconques (courbées), on prend généralement la surface Σ comme étant un tube enveloppant la dislocation. Dans le cas où elle est rectiligne Σ est choisie sous forme de cylindre de rayon r_0 équivalent au rayon du coeur de la dislocation et ceci pour éliminer évidemment la région où la mécanique des milieux continus ne peut plus être appliquée.

En faisant apparaître la première composante de l'intégrale J de Rice, l'expression (IV-26) s'écrit sous la forme suivante:

$$G = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} J_1 \quad (\text{IV-27})$$

avec:

$$J_1 = \int_{\Sigma} \{ w n_1 - \Omega_j n_j \} dS \quad (\text{IV-28})$$

Ω_j est un vecteur tel que:

$$\Omega_j = \sigma_{ij} u_{i,1} \quad (\text{IV-29})$$

σ_{ij} sont les contraintes données par les relations (IV-7b).

J_1 dépend du potentiel thermodynamique w et du vecteur Ω_j . Ces quantités données respectivement par les expressions (IV-5) et (IV-29) dépendent à leur tour de la solution globale du problème qu'on rappelle:

⇒ en déplacement:

$$\mathbf{u}_{n,m}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{nm} + \mathbf{u}_{n,m}^d(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-30a})$$

avec:

$$\mathbf{u}_{n,m}^d(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{n,m}^p(\mathbf{r}) + \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-30b})$$

⇒ en déformation:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nm}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{nm} + \boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^d(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-31a})$$

avec:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^d(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_{nm}^p(\mathbf{r}) + \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV-31b})$$

La lettre “d” signifie que les champs $\mathbf{u}_{n,m}^d(\mathbf{r})$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}_{nm}^d(\mathbf{r})$ sont des champs qui ne peuvent être produits que par la présence et le mouvement de la dislocation et en aucun cas par le chargement imposé à la frontière.

En introduisant les expressions (IV-31) dans l'expression (IV-13), on propose une écriture de l'énergie libre w sous la forme suivante:

$$w = w^E + w^c + w^d \quad (\text{IV-32})$$

avec,

$$w^E = \frac{\lambda}{2} E_{kk} E_{kk} + \mu E_{ij} E_{ij} \quad (\text{IV-33a})$$

$$w^c = \lambda E_{kk} (\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{th}) + 2\mu E_{ij} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{th}) \quad (\text{IV-33b})$$

$$\begin{aligned} w^d = & \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{th})(\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{th}) \\ & + \mu (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{th}) (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^d - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{th}) - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-33c})$$

Selon cette partition, l'énergie libre w est constituée d'une énergie w^E dont l'origine est le chargement imposé à la frontière du milieu, d'une énergie w^d dont l'origine sont les champs internes et en fin d'une énergie w^c qui représente en quelque sorte une énergie d'interaction entre le chargement appliqué (E_{ij}) et la dislocation.

On applique ce même raisonnement au calcul de Ω_j donné par (IV-29) en y injectant les relations (IV-7b), (IV-30) et (IV-31). On obtient alors:

$$\Omega_j = \Omega_j^E + \Omega_j^c + \Omega_j^d \quad (IV-34)$$

avec,

$$\Omega_j^E = \lambda E_{kk} E_{jl} + 2 \mu E_{ij} E_{il} \quad (IV-35a)$$

$$\begin{aligned} \Omega_j^c = & \lambda E_{kk} u_{j,1}^d + \lambda E_{jl} (\varepsilon_{kk}^d - \varepsilon_{kk}^{th}) \\ & + 2 \mu E_{il} (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) + 2 \mu E_{ij} u_{i,1}^d \end{aligned} \quad (IV-35b)$$

$$\Omega_j^d = \lambda u_{j,1}^d (\varepsilon_{kk}^d - \varepsilon_{kk}^{th}) + 2 \mu u_{i,1}^d (\varepsilon_{ij}^d - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th}) \quad (IV-35c)$$

En injectant les relations (IV-32) et (IV-34) dans (IV-28), J_1 peut se mettre sous la forme suivante:

$$J_1 = J_1^E + J_1^d + J_1^c \quad (IV-36)$$

avec,

$$J_1^X = \int_{\Sigma} \{w^X n_1 - \Omega_j^X n_j\} dS, \quad X=E, d, c \quad (IV-37)$$

Par application de la limite quand $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ aux expressions (IV-36) et (IV-37), on retrouve des relations analogues portant cette fois-ci sur G:

$$G = G^E + G^d + G^c \quad (IV-38)$$

avec,

$$G^X = \lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} J_1^X, \quad X=E, d, c \quad (IV-39)$$

On interprète G^E comme étant la force qu'exerce le chargement lorsqu'aucune dislocation n'est présente dans le milieu. G^d représente la force qu'on a appelé au second chapitre, la "self-force" qu'exerce la dislocation sur elle même par le biais de ses propres champs. En fin G^c est la force qu'exerce le couplage entre le chargement et la dislocation sur cette dernière.

IV-4-1- Calcul de la force G^c

On rappelle que l'intégrale J_1^c est donnée par:

$$J_1^c = \int_{\Sigma} \{w^c n_1 - \Omega_j^c n_j\} dS$$

Pour calculer w^c , on injecte la relation (IV-31b) dans (IV-33b), on trouve alors:

$$w^c = w^{cp} + w^{cth} \quad (IV-40)$$

avec,

$$w^{cp} = \lambda E_{kk} e_{kk}^p + 2 \mu E_{ij} (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (IV-41a)$$

$$w^{cth} = \lambda E_{kk} (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{th}) + 2 \mu E_{ij} (\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) \quad (IV-41b)$$

On remarque alors que l'énergie d'interaction w^c peut être partagée en une énergie d'interaction w^{cp} entre le chargement imposé et les champs internes d'origine plastique et en une autre w^{cth} entre le chargement imposé et les champs internes d'origine thermique.

De la même façon, on introduit (IV-30) et (IV-31) dans (IV-35b), on a alors:

$$\Omega_j^c = \Omega_j^{cp} + \Omega_j^{cth} \quad (IV-42)$$

avec,

$$\begin{aligned} \Omega_j^{cp} = & \lambda E_{kk} u_{j,1}^p + \lambda E_{j1} e_{kk}^p + 2 \mu E_{i1} (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \\ & + 2 \mu E_{ij} u_{i,1}^p \end{aligned} \quad (IV-43a)$$

$$\begin{aligned} \Omega_j^{cth} = & \lambda E_{kk} \Phi_{,j1} + \lambda E_{j1} (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{th}) \\ & + 2 \mu E_{i1} (\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) + 2 \mu E_{ij} \Phi_{,i1} \end{aligned} \quad (IV-43b)$$

Par conséquent, en injectant les relations (IV-40) et (IV-42) dans l'expression donnant J_1^c , on aboutit aux relations suivantes:

$$J_1^c = J_1^{cp} + J_1^{cth} \quad (IV-44)$$

avec,

$$J_1^{\text{cp}} = \int_{\Sigma} (w^{\text{cp}} n_1 - \Omega_j^{\text{cp}} n_j) dS \quad (\text{IV-45a})$$

$$J_1^{\text{cth}} = \int_{\Sigma} (w^{\text{cth}} n_1 - \Omega_j^{\text{cth}} n_j) dS \quad (\text{IV-45b})$$

a- Calcul de l'intégrale J_1^{cp} :

On écrit J_1^{cp} donnée par (IV-45a) sous la forme suivante:

$$J_1^{\text{cp}} = \int_{\Sigma} \alpha_1^{\text{cp}} n_1 dS - \int_{\Sigma} \alpha_2^{\text{cp}} n_2 dS \quad (\text{IV-46})$$

α_1^{cp} et α_2^{cp} sont définies comme suit:

$$\alpha_1^{\text{cp}} = w^{\text{cp}} - \Omega_1^{\text{cp}} \quad (\text{IV-47a})$$

$$\alpha_2^{\text{cp}} = \Omega_2^{\text{cp}} \quad (\text{IV-47b})$$

En utilisant la sommation sur l'indice répété, ces deux quantités sont données par:

$$\alpha_1^{\text{cp}} = -(\lambda + 2\mu) (E_{11} u_{1,1}^p - E_{22} e_{22}^p) + 2\mu E_{12} (e_{12}^p - \epsilon_{12}^p - u_{2,1}^p)$$

$$\alpha_2^{\text{cp}} = (\lambda + 2\mu) (E_{12} e_{kk}^p + E_{22} u_{2,1}^p) + \{\lambda u_{2,1}^p + 2\mu (e_{12}^p - \epsilon_{12}^p)\} E_{11}$$

Pour intégrer ces deux expressions, on rappelle que le problème de la dislocation mobile est plan et par conséquent la surface Σ est assimilée à un contour Γ de rayon $r > r_0$. On applique les coordonnées polaires r et ϕ ce qui conduit à:

$$n_1 d\Gamma = r \cos \phi d\phi \quad (\text{IV-48})$$

$$n_2 d\Gamma = r \sin \phi d\phi$$

Par intégration de α_1^{cp} et α_2^{cp} , on a:

$$\int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{cp}} n_1 d\Gamma = \mu b E_{12} \quad (\text{IV-49})$$

et

$$\int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{cp}} n_2 d\Gamma = -\mu b E_{12} \quad (\text{IV-50})$$

L'intégrale J_1^{cp} est donnée par:

$$J_1^{\text{cp}} = 2\mu b E_{12} \quad (\text{IV-51})$$

b- Calcul de l'intégrale J_1^{cth} :

De la même manière, on écrit J_1^{cth} donnée par (IV-45b) comme suit:

$$J_1^{\text{cth}} = \int_{\Sigma} \alpha_1^{\text{cth}} n_1 dS - \int_{\Sigma} \alpha_2^{\text{cth}} n_2 dS \quad (\text{IV-52})$$

α_1^{cth} et α_2^{cth} sont définies par:

$$\alpha_1^{\text{cth}} = w^{\text{cth}} - \Omega_1^{\text{cth}} \quad (\text{IV-53a})$$

$$\alpha_2^{\text{cth}} = \Omega_2^{\text{cth}} \quad (\text{IV-53b})$$

En utilisant les relations entre le potentiel thermoélastique et les autres champs thermomécaniques, on a:

$$\alpha_1^{\text{cth}} = (\lambda \beta - 3K \alpha) \theta E_{22} - \{(\lambda + 2\mu) E_{11} + \lambda E_{22}\} \Phi_{,11} + 2\mu E_{22} \Phi_{,22}$$

$$\alpha_2^{\text{cth}} = (\lambda + 2\mu) E_{kk} \Phi_{,12}$$

Soit par intégration:

$$\int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{cth}} n_1 d\Gamma = 3K \alpha \frac{GV}{2k} \left[r K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - r K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{2K}{V} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{K}{V} \right] E_{kk} \quad (\text{IV-54})$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{cth}} n_2 d\Gamma = 3K \alpha \frac{GK}{2k} \left[2K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - 1 \right] E_{kk} \quad (\text{IV-55})$$

En combinant les deux expressions (IV-54) et (IV-55), J_1^{cth} est donnée par:

$$J_1^{\text{cth}} = 3K \alpha \frac{GV}{2k} \left[r K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - r K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{2K}{V} \right] E_{kk} \quad (\text{IV-56})$$

A partir de la relation (IV-44), on écrit J_1^c comme suit:

$$J_1^c = 3K \alpha \frac{GV}{2k} \left[r K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - r K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) + \frac{2K}{V} \right] E_{kk} + 2\mu b E_{12} \quad (\text{IV-57})$$

La force G^c est alors déduite de (IV-57) par application de la limite (IV-39c).

IV-4-2- Calcul de la force G^E

On rappelle que J_1^E est donnée par:

$$J_1^E = \int_{\Sigma} \{ w^E n_1 - \Omega_j^E n_j \} dS$$

w^E et Ω_j^E données par (IV-33a) et (IV-35a) ne dépendent que du champ de déformation imposé à la surface. w^E et Ω_j^E sont des constantes qu'on peut faire sortir du signe intégral. On écrit J_1^E de la manière suivante:

$$J_1^E = (w^E - \Omega_1^E) \int_{\Gamma} n_1 d\Gamma - \Omega_2^E \int_{\Gamma} n_2 d\Gamma \quad (\text{IV-58})$$

Les deux intégrales de contour sont évidemment nulles. (IV-58) devient alors:

$$J_1^E = 0 \quad (\text{IV-59})$$

Par conséquent la force G^E est nulle:

$$G^E = 0 \quad (\text{IV-60})$$

Ceci traduit le fait que l'effet du chargement imposé en terme de force sur un milieu ne contenant pas de discontinuité est nul.

IV-4-3- Calcul de la force G^d

J_1^d est donnée par l'intégrale suivante:

$$J_1^d = \int_{\Sigma} \{w^d n_1 - \Omega_j^d n_j\} dS$$

Pour calculer w^d et Ω_j^d (sous entendu J_1^d), on utilise la même démarche que celle utilisée pour calculer J_1^c .

En substituant la relation (IV-31b) dans (IV-33c), w^d peut se mettre sous la forme suivante:

$$w^d = w^{dp} + w^{dth} + w^{dpth} \quad (\text{IV-61})$$

avec:

$$w^{dp} = \frac{\lambda}{2} e_{kk}^p e_{kk}^p + \mu (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (\text{IV-62a})$$

$$\begin{aligned} w^{dth} = & \frac{\lambda}{2} (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{th})(\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{th}) \\ & + \mu (\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{th})(\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{th}) - \frac{c}{2T_0} \theta^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-62b})$$

$$w^{\text{dpth}} = \lambda e_{kk}^p (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{\text{th}}) + 2\mu (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)(\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{\text{th}}) \quad (\text{IV-62c})$$

de même, Ω_j^d peut s'écrire comme suit:

$$\Omega_j^d = \Omega_j^{\text{dp}} + \Omega_j^{\text{dth}} + \Omega_j^{\text{dpth}} \quad (\text{IV-63})$$

avec,

$$\Omega_j^{\text{dp}} = \lambda u_{j,l}^p e_{kk}^p + 2\mu u_{i,l}^p (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (\text{IV-64a})$$

$$\Omega_j^{\text{dth}} = \lambda \Phi_{,jl} (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{\text{th}}) + 2\mu \Phi_{,il} (\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{\text{th}}) \quad (\text{IV-64b})$$

$$\begin{aligned} \Omega_j^{\text{dpth}} &= \lambda \Phi_{,jl} e_{kk}^p + \lambda u_{j,l}^p (\Phi_{,kk} - \varepsilon_{kk}^{\text{th}}) \\ &+ 2\mu u_{i,l}^p (\Phi_{,ij} - \varepsilon_{ij}^{\text{th}}) + 2\mu \Phi_{,il} (e_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \end{aligned} \quad (\text{IV-64c})$$

En tenant compte de (IV-61) et de (IV-63), J_1^d peut se mettre sous la forme suivante:

$$J_1^d = J_1^{\text{dp}} + J_1^{\text{dth}} + J_1^{\text{dpth}} \quad (\text{IV-65})$$

avec

$$J_1^Y = \int_{\Sigma} \{w^Y n_1 - \Omega_j^Y n_j\} dS, \quad Y=\text{dp, dth, dpth} \quad (\text{IV-66})$$

a- Calcul de l'intégrale J_1^{dp} :

J_1^{dp} donnée par (IV-66) peut être mise sous la forme suivante:

$$J_1^{\text{dp}} = \int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dp}} n_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dp}} n_2 d\Gamma \quad (\text{IV-67})$$

α_1^{dp} et α_2^{dp} sont définies comme suit:

$$\alpha_1^{\text{dp}} = w^{\text{dp}} - \Omega_1^{\text{dp}} \quad (\text{IV-68a})$$

$$\alpha_2^{\text{dp}} = \Omega_2^{\text{dp}} \quad (\text{IV-68b})$$

En développant ces expressions, on a:

$$\alpha_1^{\text{dp}} = \frac{\lambda}{2} (e_{22}^p - e_{11}^p)(e_{11}^p + e_{22}^p) - \mu (e_{11}^p e_{11}^p - e_{22}^p e_{22}^p) + 2\mu(e_{12}^p - \varepsilon_{12}^p)(e_{12}^p - \varepsilon_{12}^p - u_{2,1}^p)$$

$$\alpha_2^{\text{dp}} = \lambda u_{2,1}^p e_{11}^p + (\lambda + 2\mu) u_{2,1}^p e_{22}^p + 2\mu u_{1,1}^p (e_{12}^p - \varepsilon_{12}^p)$$

Soit par intégration sur le contour Γ :

$$\int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dp}} n_1 d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-69})$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dp}} n_2 d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-70})$$

En se basant sur ces deux dernières relations et sur (IV-67), on a:

$$J_1^{\text{dp}} = 0 \quad (\text{IV-71})$$

b- Calcul de l'intégrale J_1^{dth} :

De même, on écrit J_1^{dth} sous la forme suivante:

$$J_1^{\text{dth}} = \int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dth}} n_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dth}} n_2 d\Gamma \quad (\text{IV-72})$$

α_1^{dth} et α_2^{dth} sont définies comme suit:

$$\alpha_1^{\text{dth}} = w^{\text{dth}} - \Omega_1^{\text{dth}} \quad (\text{IV-73a})$$

$$\alpha_2^{\text{dth}} = \Omega_2^{\text{dth}} \quad (\text{IV-73b})$$

Tous calculs faits, on trouve:

$$\alpha_1^{\text{dth}} = \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) T^2$$

$$\alpha_2^{\text{dth}} = 0$$

Soit par intégration sur le contour Γ :

$$\int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dth}} n_1 d\Gamma = -2\pi \left(\frac{GV}{2\pi k} \right)^2 \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{K} \right) \quad (\text{IV-74})$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dth}} n_2 d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-75})$$

En combinant les relations (IV-72), (IV-74) et (IV-75), on a:

$$J_1^{\text{dth}} = -2\pi \left(\frac{GV}{2\pi k} \right)^2 \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{K} \right) \quad (\text{IV-76})$$

c- Calcul de l'intégrale J_1^{dpth} :

On écrit J_1^{dpth} sous la forme suivante:

$$J_1^{\text{dpth}} = \int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dpth}} n_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dpth}} n_2 d\Gamma \quad (\text{IV-77})$$

α_1^{dpth} et α_2^{dpth} sont définies comme suit:

$$\alpha_1^{\text{dpth}} = w^{\text{dpth}} - \Omega_1^{\text{dpth}} \quad (\text{IV-78a})$$

$$\alpha_2^{\text{dpth}} = \Omega_2^{\text{dpth}} \quad (\text{IV-78b})$$

Tous calculs faits, on trouve:

$$\alpha_1^{\text{dpth}} = (\lambda \beta - 3K \alpha) e_{22}^p T + 2\mu e_{22}^p \Phi_{,22} - 2\mu e_{11}^p \Phi_{,11} \\ + 2\mu \Phi_{,12} (e_{12}^p - \varepsilon_{12}^p - u_{2,1}^p) - \lambda \Phi_{,11} e_{kk}^p$$

$$\alpha_2^{\text{dpth}} = (\lambda \beta - 3K \alpha) u_{2,1}^p T + (\lambda + 2\mu) e_{kk}^p \Phi_{,12} \\ + 2\mu u_{2,1}^p \Phi_{,22} + 2\mu \Phi_{,11} (e_{12}^p - \varepsilon_{12}^p)$$

Soit par intégration sur le contour Γ :

$$\int_{\Gamma} \alpha_1^{\text{dpth}} n_1 d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-79})$$

$$\int_{\Gamma} \alpha_2^{\text{dpth}} n_2 d\Gamma = 0 \quad (\text{IV-80})$$

En combinant les relations (IV-77), (IV-79) et (IV-80), on a:

$$J_1^{\text{dpth}} = 0 \quad (\text{IV-81})$$

Finalement, J_1^d est obtenue en injectant dans (IV-65) les relations (IV-71), (IV-76) et (IV-81):

$$J_1^d = -2\pi \left(\frac{GV}{2\pi k}\right)^2 \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0}\right) r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K}\right) I_1 \left(\frac{Vr}{K}\right) \quad (\text{IV-82})$$

A partir des quantités J_1^c , J_1^E et J_1^d , la première composante J_1 de l'intégrale de Rice est donnée par:

$$J_1 = 3K \alpha \frac{GV}{2k} \left[r K_0 \left(\frac{Vr}{2K}\right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K}\right) \right. \\ \left. - r K_1 \left(\frac{Vr}{2K}\right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K}\right) + \frac{2K}{V} \right] E_{kk} + 2\mu b E_{12} \quad (\text{IV-83}) \\ - 2\pi \left(\frac{GV}{2\pi k}\right)^2 \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0}\right) r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K}\right) I_1 \left(\frac{Vr}{K}\right)$$

En appliquant la limite (IV-27) quand le rayon r du contour Γ tend vers le rayon r_0 du coeur de la dislocation ($r \rightarrow r_0$), on trouve que la force thermodynamique G est solution de l'équation du second ordre suivante:

$$A G^2 + B G + C = 0 \quad (\text{IV-84})$$

tels que:

$$A = \frac{V^2}{2\pi k^2} \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) \lim_{r \rightarrow r_0} \left(r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{K} \right) \right) \quad (\text{IV-85})$$

$$B = 1 - 3K \alpha \frac{V}{2k} E_{kk} \left[\frac{2K}{V} + \lim_{r \rightarrow r_0} \left(r K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) - r K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) \right) \right] \quad (\text{IV-86})$$

$$C = -2\mu b E_{12} \quad (\text{IV-87})$$

En utilisant les relations (A-9) et (A-10), on peut écrire les coefficients B et C en fonction des contraintes macroscopiques Σ_{ij} . Pour cela, on calcule d'abord les déformations inélastiques macroscopiques E^p et E^{th} . Dans le cas du milieu infini considéré jusqu'à maintenant, on vérifie aisément que ces déformations inélastiques sont nulles (Annexe D). Ce qui conduit aux deux relations suivantes:

$$E_{12} = \frac{1}{2\mu} \Sigma_{12}$$

et

$$E_{kk} = \frac{1}{3K} \Sigma_{kk}$$

avec $3K = 3\lambda + 2\mu$

Les coefficients A et B dépendent de plusieurs paramètres en particulier de la vitesse V du mouvement de la dislocation coin et du rayon de son coeur r_0 à travers le rapport $\frac{Vr_0}{2K}$. Selon les valeurs de ces deux paramètres, plusieurs cas peuvent être envisagés. En permettant à V de

pouvoir varier sur une plage de vitesses assez large allant de petites vitesses de l'ordre de 10^{-3} m/s à de grandes vitesses de l'ordre de la vitesse des ondes dans le matériau, on se contentera de n'étudier en fin de compte que trois cas selon la valeur de r_0 .

Normalement r_0 représente un rayon de l'ordre de quelques vecteurs de Burgers (1^{er} cas). Mais on va étendre cette valeur et lui permettre d'en prendre d'autres telles que la distance entre deux dislocations, d'abord dans un milieu déformé d'une densité de dislocations élevée de l'ordre de 10^{12} dislocations/cm² (2^{ème} cas), puis dans un milieu non déformé avec une faible densité de l'ordre de 10^6 dislocations/cm² (3^{ème} cas). Connaissant ainsi les valeurs de r_0 et de V , le rapport $\frac{Vr_0}{2K}$ qui figure dans les différentes fonctions de Bessel est soit supérieur soit inférieur à 1. Une étude asymptotique se basant sur celle des fonctions de Bessel permet de simplifier considérablement les coefficients A et B:

$$\Rightarrow \frac{Vr_0}{2K} \ll 1$$

$$A \approx \frac{1}{2\pi k^2} \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) \frac{V^3 r_0^2}{2K} \left(\ln \left(\frac{Vr_0}{4K} \right) \right)^2 \quad (\text{IV-85})$$

$$B \approx 1 + \frac{\alpha}{2k} \Sigma_{kk} \frac{V^2 r_0^2}{4K} \ln \left(\frac{Vr_0}{4K} \right) \quad (\text{IV-86})$$

$$\Rightarrow \frac{Vr_0}{2K} \gg 1$$

$$A \approx \frac{K^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi k^2} \left(\mu \frac{5\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 - \frac{c}{2T_0} \right) \sqrt{\frac{V}{r_0}} \quad (\text{IV-85})$$

$$B \approx 1 - \frac{K}{k} \alpha \Sigma_{kk} \quad (\text{IV-86})$$

On vérifie dans les trois cas et pour un matériau donné que le coefficient A est négligeable et tend vers zéro quelque soient les valeurs de r_0

et de V. (IV-84) se réduit finalement à une équation affine basée uniquement sur l'étude asymptotique du coefficient B.

Dans le premier cas ($r \leq nb$ avec $n \leq 10$), le rapport $\frac{Vr_0}{2K}$ est toujours inférieur à 1 et le coefficient B est égal à l'unité. La force thermodynamique G n'est rien d'autre que la force de Peach et Koehler $G = b \Sigma_{12}$. Ce résultat reste valable même pour $r_0 \rightarrow 0$ où les limites suivantes sont utilisées [3]:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r K_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} r K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_0 \left(\frac{Vr}{2K} \right) &= \frac{2K}{V} \\ \lim_{r \rightarrow 0} K_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{2K} \right) &= -\frac{1}{2} \\ \lim_{r \rightarrow 0} r K_0^2 \left(\frac{Vr}{2K} \right) I_1 \left(\frac{Vr}{K} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{IV-89}$$

Dans le deuxième cas où la distance entre deux dislocations est de l'ordre de 10 nm soit une distance équivalente à 50 b, $\frac{Vr_0}{2K}$ est toujours inférieur à 1 et B tend encore une fois vers 1, ce qui conduit à la même conclusion que celle du premier cas.

Le troisième cas qui correspond à un milieu non déformé, deux dislocations sont séparées d'environ 10 μm soit une distance de l'ordre de 510^4 b. Compte tenu de la valeur de la vitesse V, on distingue deux possibilités:

$$* \text{ Si } V \leq V_0 \approx 25 \text{ m/s alors } \frac{Vr_0}{2K} \leq 1$$

Le coefficient B tend dans ce cas vers 1 et on retrouve le même résultat que dans les précédentes situations.

$$* \text{ Si } V > V_0 \approx 25 \text{ m/s alors } \frac{Vr_0}{2K} > 1$$

B est donné dans ce cas par une expression qui ne dépend ni du rayon r_0 ni de la vitesse $V > V_0$. C'est à dire qu'à l'exception du vecteur de Burgers b , B ne dépend d'aucune autre caractéristique de la dislocation mobile. B est fonction uniquement du chargement appliqué et des caractéristiques physiques du matériau. G est donnée alors par:

$$G = \frac{b\Sigma_{12}}{1 - \frac{K}{k} \alpha \Sigma_{kk}} \quad (\text{IV-90})$$

Cette expression diffère de la force de Peach et Koehler par la présence au dénominateur du terme $1 - \frac{K}{k} \alpha \Sigma_{kk}$. On vérifie facilement que, pour n'importe quelle intensité de chargement et pour n'importe quel matériau, ce dernier terme est toujours voisin de 1. La force thermodynamique G tend aussi dans ce cas vers la force de Peach et Koehler.

La force thermodynamique G se réduit finalement à la force de Peach et Koehler quelque soient les valeurs de r_0 et de V. Dans le cas particulier $r_0 \rightarrow 0$, si on prend séparément chaque type de contraintes et que l'on applique les limites (IV-84) aux expressions (IV-51), (IV-56), (IV-71), (IV-76) et (IV-81), on s'apercevra que les forces que peuvent exercer les contraintes thermiques toutes seules G^{dth} ou couplées aux autres types de contraintes G^{dpth} et G^{cth} sur la dislocation coin rectiligne et mobile sont nulles. Ce qui est aussi valable pour les contraintes internes d'origine plastique G^{dp} [4]. Les contraintes internes n'ont donc aucun effet sur la dislocation rectiligne, par conséquent elle n'a pas d'effet de retour sur elle même. Ceci veut dire que la dislocation rectiligne mobile soumise à l'action du chargement est souvent en position d'équilibre.

IV-5- Conclusion

Une dislocation coin, rectiligne et mobile considérée comme une source de chaleur mobile produit un champ de température et des contraintes thermiques qui viennent s'ajouter aux contraintes élastiques créées par la même dislocation. Bien que l'élévation de température calculée au chapitre précédent reste faible, on avait espéré, à cause du caractère non uniforme du champ thermique, pouvoir obtenir une force thermodynamique qui s'exerce sur la dislocation coin, rectiligne et mobile. Cette force ne peut être d'origine thermique, puisqu'elle s'identifie exactement à la force de Peach et Koehler.

- [1] **H.D.Bui, A.Ehrlacher & Q.S.Nguyen**, *Thermomechanical Coupling in Fracture Process, Thermomechanical Coupling in Solids*, Ed.H.D.Bui and Q.S.Nguyen, IUTAM, (1987).
- [2] **Q.S.Nguyen**, *Effets Thermiques en Fond de Fissure, Mécanique de la Rupture*, Séminaire organisé avec le L.M.S. de l'école polytechnique par le collège international des sciences de la construction, Saint-Rémy les Chevreux, (France), (1982).
- [3] **I.S.Gradshteyn & I.M.Ryzhik**, *Table of Integrals, Series and Products*, Fourth Edition, Academic Press, (1965).
- [4] **J.P.Hirth & J.Lothe**, *Theory of Dislocations*, McGraw-Hill Book Company, (1968).

CONCLUSION

Le champ d'application de la mécanique des milieux continus s'élargit à des situations de plus en plus micromécanique (inclusions, microbande, cellules de dislocations...). Traiter ou modéliser de telles situations se heurte souvent à des problèmes de taille liés à la nature des singularités présentes (ponctuelle, linéique ou surfacique).

Le mouvement des dislocations qui est à l'origine de la plasticité dans les métaux, en est un cas particulier. Cependant, la plasticité constitue un phénomène dissipatif. Le but de ce travail était donc de chercher un lien entre le mouvement des dislocations et la dissipation.

Le meilleur moyen pour arriver à cette fin est la thermodynamique des processus irréversibles. En effet, en s'intéressant à une analyse de la dissipation intrinsèque déduite des deux principes de la thermodynamique, on peut assimiler la dislocation mobile à une source de chaleur linéique mobile. C'est une méthode qui a été envisagée pour expliquer les élévations de température associées aux phénomènes dissipatifs et d'associer ainsi aux dislocations un autre type de déformations inélastiques: la déformation thermique.

Bien que la température ainsi introduite par la dislocation soit faible, sa nature non uniforme est source de contraintes internes et donc d'énergie élastique supplémentaire. L'effet d'une seule dislocation mobile traduit justement par la température, les contraintes et l'énergie n'est pas très important. Celui d'un ensemble de dislocations n'est pas forcément négligeable et peut être suffisamment significatif. Cet aspect indique la complexité du couplage thermomécanique lié à ce type de phénomène.

Ce couplage peut avoir deux causes. Le premier est tout simplement lié aux constantes thermomécaniques. Le second intervient par le biais de la force thermodynamique associée à la puissance intrinsèque dissipée. Le calcul de cette force dans le cas de la dislocation coin, rectiligne et mobile confirme la nature stable d'une telle dislocation (rectiligne). Les champs internes, en particulier ceux d'origine thermique, liés à cette dislocation n'exercent aucune action de retour sur elle-même.

Une perspective consiste à faire la même étude portant surtout sur l'aspect thermique du mouvement d'une boucle de dislocation en quasi-statique comme en dynamique. On peut s'attendre, vu les interactions entre les éléments de la boucle, à des résultats très intéressants concernant les champs thermiques et surtout une éventuelle self-force susceptible d'expliquer l'instabilité d'une telle configuration.

ANNEXES

Annexe A:

Calcul de la dissipation intrinsèque.....	136
A-1- Calcul de l'énergie libre d'Helmholtz $W(\underline{E}, \underline{\epsilon}^{in\acute{e}})$	137
A-2- Calcul de la puissance des efforts extérieurs.....	141

Annexe B:

Comparaison entre les contraintes élastiques et les contraintes thermiques associées au mouvement d'une dislocation coin rectiligne.....	143
---	------------

Annexe C:

Calcul de l'intégrale $u_{n,m}^{th}$	146
C-1- Cas tridimensionnel.....	146
C-2- Cas bidimensionnel.....	148

Annexe D:

Calcul des déformations inélastiques macroscopiques.....	150
D-1- Calcul de la déformation thermique macroscopique	150
D-2- Calcul de la déformation plastique macroscopique.....	152
Références bibliographiques	154

ANNEXE A

La dissipation intrinsèque associée à la progression de la déformation inélastique est calculée à partir de la relation (I-39) dans le cadre usuel de la thermomécanique des milieux hétérogènes. Pour cela, on calcule l'énergie libre et la puissance des efforts extérieurs en y faisant apparaître les quantités macroscopiques et locales (internes). Ce calcul se limite aux transformations infinitésimales dans le cas quasi-statique. La dissipation intrinsèque s'écrit alors sous la forme suivante:

$$D_V = P_e - \frac{d}{dt} \int_V w \, dV - \int_V s\dot{T} \, dV \geq 0 \quad (\text{A-1})$$

Pour les conditions aux limites, on choisit le cas d'un déplacement imposé sur la surface extérieure ∂V du volume V sous la forme:

$$U_i^0(\mathbf{r}) = E_{ij} x_j \quad (\text{A-2})$$

où la déformation macroscopique E_{ij} est la moyenne volumique de la grandeur microscopique ε_{ij} :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) \, dV \quad (\text{A-3})$$

A partir de la décomposition physique de la déformation ε_{ij} séparant la réponse élastique ε_{ij}^e du matériau des réponses inélastiques $\varepsilon_{ij}^{\text{iné}}$, la déformation E_{ij} s'écrit comme suit:

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r})) \, dV \quad (\text{A-4})$$

On applique la loi de comportement élastique en tout point \mathbf{r} du volume V en utilisant le tenseur de complaisance \underline{S} :

$$\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) = S_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \quad (\text{A-5})$$

et en définissant la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}$ comme la moyenne volumique des contraintes microscopiques:

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-6})$$

E_{ij} s'écrit alors sous la forme:

$$E_{ij} = S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-7})$$

On définit alors la déformation inélastique macroscopique comme la moyenne volumique de la déformation inélastique locale $\underline{\varepsilon}^{\text{iné}}(\mathbf{r})$:

$$E_{ij}^{\text{iné}} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-8})$$

On applique la loi de comportement (A-5) aux quantités macroscopiques:

$$E_{ij}^e = S_{ijkl}(\mathbf{r}) \Sigma_{kl} \quad (\text{A-9})$$

On écrit finalement:

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^{\text{iné}} \quad (\text{A-10})$$

Dans la suite, on calcule successivement et d'une manière directe l'énergie libre, sa dérivée par rapport au temps, la puissance des efforts extérieurs et finalement la dissipation intrinsèque.

A-1- Calcul de l'énergie libre d'Helmholtz $W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}})$

L'énergie libre d'Helmholtz $W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}})$ est donnée par:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \int_V w(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-11})$$

$w(\mathbf{r})$ est la densité volumique d'énergie libre d'Helmholtz au point \mathbf{r} , elle est donnée par:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}(\mathbf{r}) : \underline{\varepsilon}^e(\mathbf{r}) \quad (\text{A-12})$$

En utilisant la décomposition de la déformation ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^{iné}(\mathbf{r}) \quad (\text{A-13})$$

et les symétries du tenseur de contrainte σ_{ij} , les relations (A-11) et (A-12) conduisent à:

$$W(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\varepsilon}^{iné}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) (u_{i,j}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^{iné}(\mathbf{r})) dV \quad (\text{A-14})$$

soit en développant:

$$W(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\varepsilon}^{iné}) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_{i,j}(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{iné}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-15})$$

En gardant la deuxième intégrale de volume telle qu'elle est et en intégrant par partie la première, l'expression (A-15) s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} W(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\varepsilon}^{iné}) &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}))_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{iné}(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

Du fait de l'équation d'équilibre utilisée dans tout ce travail $\sigma_{ij,j} = 0$, la deuxième intégrale de (A-16) est nulle. Le théorème de la divergence permet de transformer la première intégrale, (A-16) devient:

$$W(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\varepsilon}^{iné}) = \frac{1}{2} \int_{\partial V} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{iné}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-17})$$

n_j sont les composantes de la normale extérieure à la surface ∂V délimitant le volume V .

Or, en utilisant la condition au limite (A-2) qui permet de transformer l'intégrale de surface de (A-17), l'énergie libre d'Helmholtz devient:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} E_{ik} \int_{\partial V} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) x_k n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-18})$$

Le théorème de la divergence permet de faire la démarche inverse en transformant cette fois-ci l'intégrale de surface en intégrale de volume:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} E_{ik} \int_V (\sigma_{ij}(\mathbf{r}) x_k)_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-19})$$

Utilisant l'équation d'équilibre et le fait que $x_{k,j} = \delta_{kj}$, l'équation (A-19) devient:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} E_{ij} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-20})$$

En introduisant la contrainte macroscopique donnée par (A-6), l'expression (A-21) devient:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} V E_{ij} \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-21})$$

On décompose les contraintes $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ en contraintes internes $\underline{\sigma}'(\mathbf{r})$ et macroscopiques $\underline{\Sigma}$ telles que:

$$\underline{\sigma}(\mathbf{r}) = \underline{\Sigma} + \underline{\sigma}'(\mathbf{r}) \quad (\text{A-22})$$

Les contraintes internes $\underline{\sigma}'(\mathbf{r})$ possèdent les deux propriétés suivantes:

$$\frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma}'(\mathbf{r}) dV = 0 \quad (\text{A-23})$$

et

$$\sigma'_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{A-24})$$

L'énergie libre d'Helmholtz s'écrit maintenant sous la forme:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} V E_{ij} \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \int_V (\Sigma_{ij} + \sigma'_{ij}(\mathbf{r})) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-25})$$

En introduisant la déformation inélastique macroscopique définie par (A-8), l'expression (A-25) devient:

$$W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) = \frac{1}{2} V (E_{ij} - E_{ij}^{\text{iné}}) \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-26})$$

La contrainte macroscopique peut être remplacée par la déformation élastique macroscopique par application de la loi de comportement (A-9). (A-26) s'écrit finalement sous la forme:

$$\begin{aligned} W(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) &= \frac{1}{2} V (E_{ij} - E_{ij}^{\text{iné}}) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^{\text{iné}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (\text{A-27})$$

On a ainsi déterminé l'énergie libre d'Helmholtz en fonction des quantités macroscopiques et locales (les contraintes internes et les déformations inélastiques). L'énergie libre (A-27) peut être plus développée une fois les contraintes internes sont calculées par l'une des deux méthodes classiques (méthode du tenseur de Green ou celle du potentiel des contraintes).

Le calcul de la dissipation intrinsèque (A-1) passe par celui de la dérivée par rapport au temps de l'énergie libre d'Helmholtz (A-27).

$$\begin{aligned} \dot{W}(\underline{E}, \underline{\varepsilon}^{\text{iné}}) &= \frac{d}{dt} \int_V w(\mathbf{r}) dV \\ &= V (\dot{E}_{ij} - \dot{E}_{ij}^{\text{iné}}) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^{\text{iné}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (\text{A-28})$$

A-2- Calcul de la puissance des efforts extérieurs

En l'absence des forces volumiques, la puissance des efforts extérieurs est donnée par:

$$P_e = \int_{\partial V} \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS \quad (\text{A-29})$$

Les conditions aux limites en vitesse de déformation imposée:

$$v_i^0(\mathbf{r}) = \dot{E}_{ij} x_j \quad (\text{A-30})$$

permettent d'écrire (A-29) sous la forme:

$$P_e = \int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \dot{E}_{ik} x_k \, dS \quad (\text{A-31})$$

(A-31) peut être transformée en intégrale de volume:

$$P_e = \dot{E}_{ik} \int_V (\sigma_{ij} x_k)_{,j} \, dV \quad (\text{A-32})$$

L'équation d'équilibre $\sigma_{ij,j} = 0$ et la relation $x_{k,j} = \delta_{kj}$ donnent avec la définition de la contrainte macroscopique (A-6) l'expression de la puissance des efforts extérieurs suivante:

$$P_e = V \dot{E}_{ij} \Sigma_{ij} \quad (\text{A-33})$$

Finalement, en combinant les relations (A-1),(A-28) et (A-33), la dissipation intrinsèque s'écrit sous la forme suivante:

$$D_V = V \dot{E}_{ij}^{\text{iné}} \Sigma_{ij} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{\text{iné}}(\mathbf{r}) \, dV - \int_V \mathbf{s}(\mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) \, dV \quad (\text{A-34})$$

En utilisant les mêmes techniques de calculs qu'auparavant et les propriétés des contraintes internes (A-23) et (A-24), on peut écrire autrement la dissipation D_V :

$$D_V = V \dot{E}_{ij}^{\text{iné}} \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) S_{ijkl} \sigma'_{kl}(\mathbf{r}) dV - \int_V s(\mathbf{r}) \dot{T}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-35})$$

D'où la relation (I-42).

Dans le cas d'un milieu régulier, on peut introduire la dérivée particulière à l'intérieur de l'intégrale dans (A-35). On obtient alors:

$$D_V = V \dot{E}_{ij}^{\text{iné}} \Sigma_{ij} - \int_V \dot{\sigma}'_{ij}(\mathbf{r}) S_{ijkl} \sigma'_{kl}(\mathbf{r}) dV - \int_V s(\mathbf{r}) \dot{T}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-36})$$

Dans le cas élastoplastique isotherme, on retrouve l'expression (I-43):

$$D_V = V \dot{E}_{ij}^p \Sigma_{ij} - \int_V \dot{\sigma}'_{ij}(\mathbf{r}) S_{ijkl} \sigma'_{kl}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A-37})$$

Si le milieu contient cette fois-ci des singularités, le calcul de la dérivée particulière dans (A-35) n'est plus évident et il faut alors faire appel à la technique rappelée au chapitre I.

ANNEXE B

Pour comparer les contraintes élastique et thermique créées par la dislocation coin rectiligne et mobile à vitesse uniforme V , on suppose la présence de deux dislocations 1 et 2 (Figure B-1).

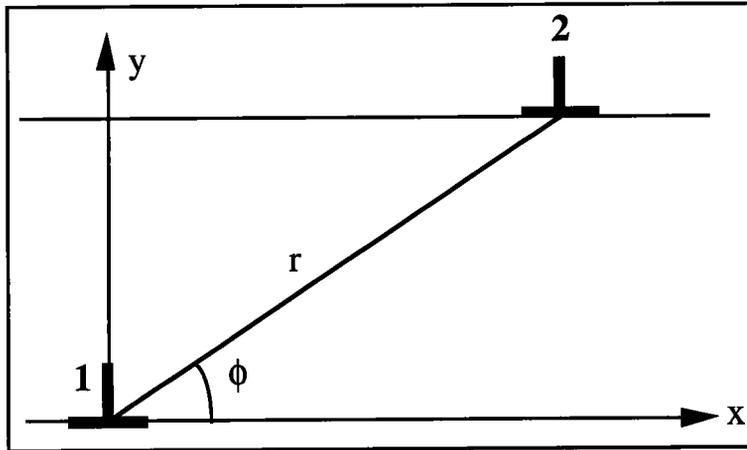


Figure B-1:
Position relative des dislocations 1 et 2.

La dislocation mobile 1 engendre un champ de contraintes thermiques $\underline{\sigma}^{\text{th}}$ donné par (III-64) auquel est soumise l'autre dislocation 2 dont le plan de glissement est parallèle à celui de la dislocation 1. La dislocation 2 est en outre soumise au champ de contraintes élastiques $\underline{\sigma}^{\text{él}}$ dû à la présence de la dislocation 1 dont les composantes sont données par (II-54).

En utilisant les coordonnées polaires r et ϕ telles que:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \tag{B-1}$$

les dislocations 1 et 2 sont maintenant repérées par le rayon r qui les sépare et par l'angle ϕ .

On introduit (B-1) dans les expressions des contraintes thermique (III-64) et élastique (II-54). Les contraintes $\underline{\sigma}^{\text{th}}$ et $\underline{\sigma}^{\text{él}}$ dépendent alors de la vitesse V , de la distance r et de l'angle ϕ . La comparaison des contraintes se fera à travers l'expression $\frac{\sigma_{ij}^{\text{él}} - \sigma_{ij}^{\text{th}}}{\sigma_{ij}^{\text{él}}}$ en fonction de la vitesse V pour $r=2 \mu\text{m}$ et

pour différentes valeurs de ϕ . Comme la dépendance des contraintes thermiques $\underline{\sigma}^{th}$ en fonction de ϕ évolue avec la vitesse (comme pour le cas de la température (Figure III-8)), le choix de ϕ se base surtout sur des valeurs où les contraintes élastiques ne sont pas nulles.

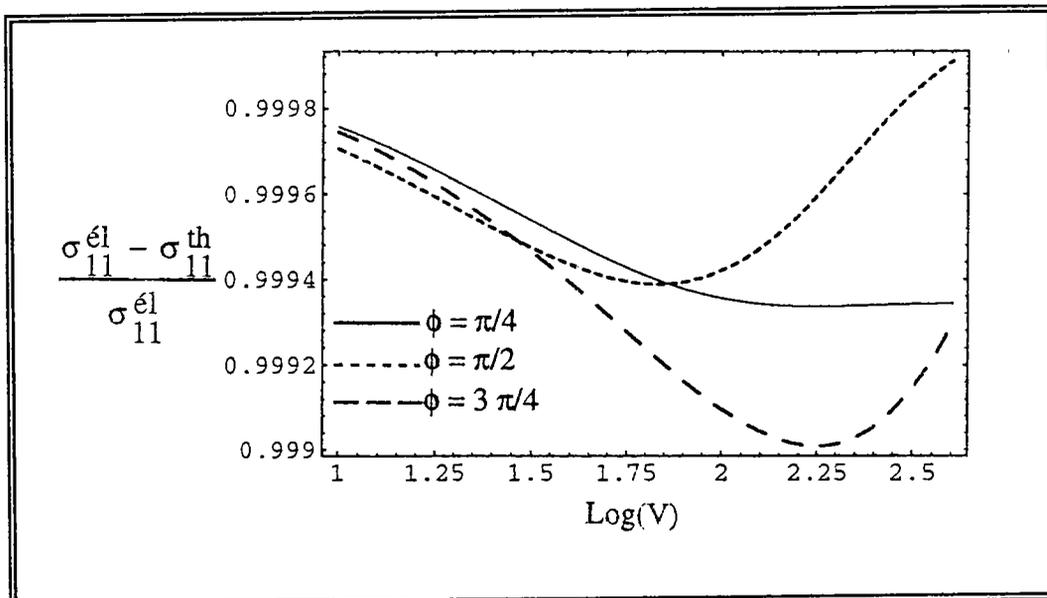


Figure B-2:
Comparaison entre σ_{11}^{th} et σ_{11}^{el} pour $r = 2 \mu\text{m}$.

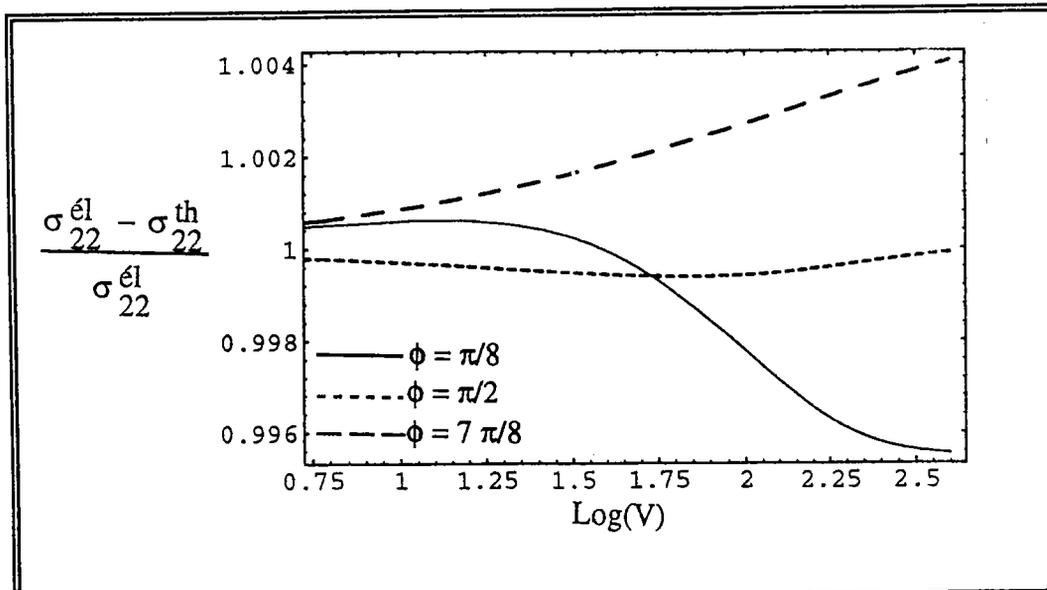
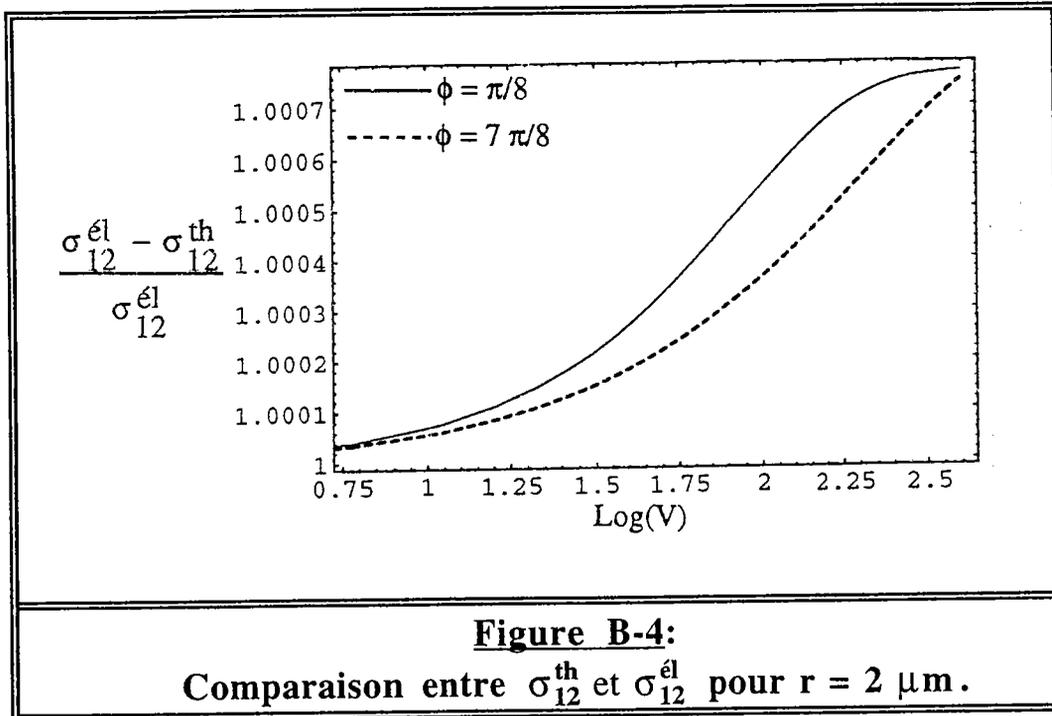


Figure B-3:
Comparaison entre σ_{22}^{th} et σ_{22}^{el} pour $r = 2 \mu\text{m}$.



On remarque alors que quelque soit la composante des contraintes élastique et thermique, le rapport $\frac{\sigma_{ij}^{el} - \sigma_{ij}^{th}}{\sigma_{ij}^{el}}$ est toujours très voisin de 1. En d'autre terme, le rapport $\frac{\sigma_{ij}^{th}}{\sigma_{ij}^{el}}$ tend vers zéro. Ceci veut dire que, pour r et ϕ donnés, la contrainte σ_{ij}^{th} est nulle si non elle est négligeable devant σ_{ij}^{el} .

ANNEXE C

En utilisant la méthode du tenseur de Green, le terme d'origine thermique du gradient de déplacement est donné par:

$$u_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jn,im}(\mathbf{R}) \varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}') dV' \quad (C-1)$$

$$\begin{aligned} \text{avec, } R^2 &= \bar{x}_i \bar{x}_i = (x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i) \\ r^2 &= x_i x_i & i=1,2,3 \\ r'^2 &= \xi_i \xi_i \end{aligned}$$

ε_{kl}^{th} est la déformation thermique introduite par la dislocation mobile:

$$\varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}) = \alpha \theta(\mathbf{r}) \delta_{kl} \quad (C-2)$$

avec $\theta = T - T_0$

Le tenseur d'élasticité C_{ijkl} pour un milieu isotrope ne dépend pas de la position, il est donné par:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk} \quad (C-3)$$

C-1- Cas tridimensionnel

Le tenseur de Green pour un milieu infini, homogène et isotrope est donné par (II-50) ou par la relation suivante [1]:

$$G_{jn}(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\delta_{jn} R_{,qq} - \frac{1}{2(1-\nu)} R_{,jn} \right) \quad (C-4)$$

En tenant compte de (C-3) et (C-4), on peut calculer le terme $C_{ijkl} G_{jn,im}(\mathbf{R})$ sous la forme [1]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} G_{jn,im}(\mathbf{R}) &= \frac{1}{8\pi} \left(\delta_{ln} R_{,kqqm} + \delta_{kn} R_{,lqqm} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1-\nu} R_{,klnm} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{kl} R_{,nqqm} \right) \end{aligned} \quad (C-5)$$

La combinaison des relations (C-2) et (C-5) permet de calculer le terme sous le signe intégrale (C-1):

$$C_{ijkl} G_{jn,im}(\mathbf{R}) \varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{8\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} R_{,nqqm} \theta(\mathbf{r}') \quad (C-6)$$

La dérivée d'ordre 4 de R est donnée par:

$$R_{,nqqm} = -2 \frac{\delta_{nm}}{R^3} + 6 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^5} \quad (C-7)$$

Les relations (C-6) et (C-7) permettent d'écrire (C-1) sous la forme suivante:

$$u_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_V \left(-\frac{\delta_{nm}}{R^3} + 3 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^5} \right) \theta(\mathbf{r}') dV' \quad (C-8)$$

Il faut remarquer par ailleurs que:

$$-\frac{\delta_{nm}}{R^3} + 3 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^5} = \left(\frac{1}{R} \right)_{,nm} \quad (C-9)$$

Compte tenu de (C-9), on écrit (C-8) sous la forme suivante:

$$u_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \left[-\frac{\beta}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \theta(\mathbf{r}') dV' \right] \quad (C-10)$$

avec, $\beta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha$

Le fait d'avoir écrit la dérivée seconde par rapport à x_n et x_m à l'extérieur de l'intégrale est licite puisque l'intégration s'effectue sur V' (sous entendu ξ_j).

Dans l'expression (C-10), on peut remarquer la présence du potentiel thermoélastique donné par:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\beta}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \theta(\mathbf{r}') dV' \quad (C-11)$$

Finalement, on a:

$$u_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (C-12)$$

C-2- Cas bidimensionnel

Dans ce cas le tenseur de Green est donné par [2]:

$$G_{jn}(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{\bar{x}_j \bar{x}_m}{R^2} - (3-4\nu) \delta_{jn} \text{Log}(R) \right] \quad (C-13)$$

avec, $R^2 = \bar{x}_i \bar{x}_i$, $i = 1,2$

On calcule d'abord le terme $G_{jn,im}(\mathbf{R})$:

$$G_{jn,im}(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{\delta_{nm} \delta_{ij}}{R^4} + \frac{\delta_{jm} \delta_{nj}}{R^2} - \right. \\ \left. 2 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m \delta_{ij} + \bar{x}_m \bar{x}_j \delta_{in} + \bar{x}_j \bar{x}_n \delta_{im} + \bar{x}_i \bar{x}_n \delta_{jm} + \bar{x}_i \bar{x}_j \delta_{nm}}{R^4} + \right. \\ \left. \frac{\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_n \bar{x}_m}{R^6} - (3-4\nu) \left(\frac{\delta_{jn} \delta_{im}}{R^2} - 2 \frac{\bar{x}_i \bar{x}_m \delta_{jn}}{R^4} \right) \right] \quad (C-14)$$

La combinaison des relations (C-2) ,(C-3) et (C-14) permet de calculer le terme sous le signe intégrale (C-1) dans le cas bidimensionnel:

$$C_{ijkl} G_{jn,im}(\mathbf{R}) \varepsilon_{kl}^{th}(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[-\frac{\delta_{nm}}{R^2} + 2 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^4} \right] \theta(\mathbf{r}') \quad (C-15)$$

La relation (C-1) s'écrit alors sous la forme suivante:

$$u_{n,m}^{th}(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_S \left(-\frac{\delta_{nm}}{R^2} + 2 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^4} \right) \theta(\mathbf{r}') dS' \quad (C-16)$$

Comme pour (C-9), il faut remarquer que:

$$-\frac{\delta_{nm}}{R^2} + 2 \frac{\bar{x}_n \bar{x}_m}{R^4} = -(\text{Log}R)_{,nm} \quad (\text{C-17})$$

Compte tenu de (C-17), on écrit (C-16) sous la forme suivante:

$$u_{n,m}^{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \left[\frac{\beta}{2\pi} \int_S \text{Log}(R) \theta(\mathbf{r}') dS' \right] \quad (\text{C-18})$$

On retrouve alors l'expression (IV-20) dans le cas bidimensionnel qui peut être écrite aussi en fonction du potentiel thermoélastique Φ :

$$u_{n,m}^{\text{th}}(\mathbf{r}) = \Phi_{,nm}(\mathbf{r}) \quad (\text{C-19})$$

avec,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\beta}{2\pi} \int_S \text{Log}(R) \theta(\mathbf{r}') dS' \quad (\text{C-20})$$

ANNEXE D

La déformation inélastique introduite par le mouvement de la dislocation coin rectiligne s'écrit de la façon suivante:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{iné}} = \varepsilon_{ij}^{\text{p}} + \varepsilon_{ij}^{\text{th}} \quad (\text{D-1})$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^{\text{p}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \delta_j(S) + \mathbf{b}_j \delta_i(S)) \quad (\text{D-2})$$

et

$$\varepsilon_{ij}^{\text{th}} = \alpha T \delta_{ij} \quad (\text{D-3})$$

$\delta_i(S)$ est la fonction de Dirac sur la surface S. T est le champ de température induit par le mouvement de la dislocation.

Dans l'annexe A, on a défini les déformations inélastiques macroscopiques par la moyenne sur le volume V des déformations inélastiques locales:

$$\mathbf{E}_{ij}^{\text{p}} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{\text{p}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{D-4})$$

$$\mathbf{E}_{ij}^{\text{th}} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{\text{th}}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{D-5})$$

Il s'agit dans cet annexe de calculer $\mathbf{E}_{ij}^{\text{p}}$ et $\mathbf{E}_{ij}^{\text{th}}$ dans le cas de la dislocation décrite au chapitre III (Figure III-1), mobile dans un milieu infini.

D-1- Calcul de la déformation thermique macroscopique $\mathbf{E}_{ij}^{\text{th}}$

Cette déformation est donnée par:

$$\mathbf{E}_{ij}^{\text{th}} = \frac{1}{V} \int_V \alpha T \delta_{ij} dV \quad (\text{D-6})$$

avec

$$T = \frac{GV}{2\pi k} e^{-\frac{Vx}{2K}} K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) \quad (\text{D-7})$$

Comme le champ de température de la dislocation mobile ne dépend que de x et y , on peut transformer l'intégrale de volume en une intégrale surfacique de telle manière qu'on puisse écrire (D-6) sous la forme suivante en remplaçant l'intégrale étendue à l'infini par une limite:

$$E_{ij}^{th} = \frac{GV}{2\pi k} \alpha \delta_{ij} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{Vr}{2K} \cos \phi} K_0\left(\frac{Vr}{2K}\right) r dr d\phi}{\int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\phi} \quad (D-8)$$

On a introduit par ailleurs les coordonnées polaires r et ϕ . En faisant le changement de variable $x = \frac{Vr}{2K}$ et en intégrant par rapport à ϕ [3], (D-8) devient:

$$E_{ij}^{th} = \frac{GV}{2\pi k} \alpha \delta_{ij} \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\int_0^X x K_0(x) I_0(x) dx}{\int_0^X x dx} \quad (D-9)$$

avec $X = \frac{VR}{2K}$

Pour calculer l'intégrale au numérateur de (D-9), on passe par les développements asymptotiques des différentes fonctions de Bessel K_0 et I_0 :

$$K_0(z) \approx -\ln(z), \quad z \ll 1$$

$$K_0(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}, \quad z \gg 1$$

$$I_0(z) \approx 1, \quad z \ll 12$$

$$I_0(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad z \gg 12$$

à partir desquels, on définit trois intervalles où la fonction $x K_0(x) I_0(x)$ possède trois formes différentes:

$$\begin{aligned} \text{sur } [0,1], \quad x K_0(x) I_0(x) &\approx -x \ln(x) \\ \text{sur } [1,12], \quad x K_0(x) I_0(x) &\approx -\sqrt{\frac{x}{2}} e^{-x} \\ \text{sur } [12,X], \quad x K_0(x) I_0(x) &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration sur chaque intervalle, le rapport

$$\frac{\int_0^X x K_0(x) I_0(x) dx}{\int_0^X x dx} \text{ varie en } \frac{1}{X} \text{ et on obtient donc:}$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\int_0^X x K_0(x) I_0(x) dx}{\int_0^X x dx} = 0 \quad (\text{D-10})$$

Finalement, la déformation thermique macroscopique est nulle $E_{ij}^{th} = 0$.

D-2- Calcul de la déformation plastique macroscopique E_{ij}^p

Pour la dislocation coin rectiligne, la déformation plastique est déduite de (D-2) sous la forme suivante:

$$\epsilon_{12}^p = -\frac{b}{2} \delta_2(S) \quad (\text{D-11})$$

En injectant cette expression dans (D-4), on a:

$$E_{12}^p = -\frac{b}{2} \frac{\int_V \delta_2(S) dV}{V} \quad (\text{D-12})$$

On utilise l'une des propriétés de la fonction de Dirac qui permet de passer d'une intégrale de volume à une intégrale surfacique [4], (D-12) devient:

$$E_{12}^p = -\frac{b}{2} \frac{\int dS_2}{V} \quad (D-13)$$

Dans le cas de la dislocation coin de la figure (III-1), $dS_2 = -dx_1 dx_3$. Si le milieu est fini, E_{12}^p est différente de zéro. Par contre si le milieu est infini, on peut facilement supposer que E_{12}^p est nulle.

On a ainsi déterminé que les deux déformations inélastiques macroscopiques (E_{12}^p , E_{ij}^{th}) correspondant au mouvement d'une dislocation coin rectiligne sont nulles. La déformation totale macroscopique se réduit dans ce cas à la seule déformation élastique macroscopique E_{ij}^e .

- [1] **R.deWit**, *Theory of Disclinations: III. Continuous and Discrete Disclinations in Isotropic Elasticity*, J.Res.Nat.Bur.Stand.(U.S), Vol.77A (Phys. and Chem.), No.3, p.p.359-368, (1973).
- [2] **T.Mura**, *Micromechanics of Defects in Solids*, Second edition, Martinus Nijhoff Publishers, (1987).
- [3] **I.S.Gradshteyn & I.M.Ryzhik**, *Table of Integrals, Series and Products*, Fourth Edition, Academic Press, (1965).
- [4] **R.deWit**, *Theory of Disclinations: II. Continuous and Discrete Disclinations in Anisotropic Elasticity*, J.Res.Nat.Bur.Stand.(U.S), Vol.77A (Phys. and Chem.), No.1, p.p.49-100, (1973).

CHAMPS THERMIQUES ET MECANIQUES INDUITS PAR LE MOUVEMENT DES DISLOCATIONS

Résumé

Au cours de la modélisation des comportements des matériaux, il est difficile d'ignorer les processus irréversibles. Ce sont des processus faisant intervenir des déformations inélastiques ou anélastiques s'accompagnant d'une dissipation intrinsèque provoquant un échauffement du solide. Pratiquement, tout phénomène inélastique ou anélastique est lié à la propagation de défauts. L'analyse thermomécanique de tel phénomène montre que la source de chaleur peut être identifiée aux défauts mobiles créant ainsi des gradients thermiques importants.

Dans ce travail, nous avons traité les effets dissipatifs et les mécanismes de couplage thermoélastique associés aux mouvements des dislocations. Les outils mis en place sont établis dans un cadre très général mais appliqués à l'étude des effets thermomécaniques de la mobilité uniforme d'une dislocation coin rectiligne dans un milieu élastique.

Pour analyser les effets thermomécaniques liés aux mouvements des dislocations, nous avons utilisé le formalisme de la thermodynamique des processus irréversibles. Nous avons ainsi montré que l'existence d'une dislocation mobile dans le milieu se traduit par la présence d'une source de chaleur linéique dissipative. Cette source engendre des variations de la température qui à leur tour engendrent des déformations et des contraintes thermiques. L'analyse de ces champs montre que les couplages thermomécaniques induits par le mouvement des dislocations prisés individuellement restent extrêmement faibles. Par contre, l'extension de cette étude au mouvement des dislocations prisés collectivement telle que la bande de cisaillement a permis d'aboutir à des effets thermiques très importants.

Par ailleurs, l'étude thermodynamique a permis d'introduire la force thermodynamique associée au mouvement de la dislocation. Le calcul de cette force, à partir des différents champs thermomécaniques induits par la présence et le mouvement de la dislocation coin rectiligne, permet d'établir que quelle que soient la vitesse propre et le rayon du coeur de la dislocation, cette force s'identifie bien à celle de Peach et Koehler et ne peut en aucun cas être causée par les champs thermomécaniques propres de la dislocation.

Mots-Clés

Contraintes thermiques	Force thermodynamique
Couplage thermomécanique	Potentiel thermoélastique
Dislocations	Tenseur de Green
Dissipations	Thermodynamique des processus irréversibles