Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Metz

en Mathématiques

par

Abdelhay Semlali

Grassmanniennes de dimension infinie, groupes de lacets et opérateur vertex

Soutenue publiquement le 19 Décembre 1996 devant le jury composé de :

A. TIHAMI	:	Professeur à l'Université de Marrakech. Rapporteur.
R. OUZILOU	:	Professeur à l'Université de Jean Monnet. Rapporteur.
A. BENABDALLAH	:	Professeur à l'Université de Lyon 1. Examinateur.
G. SALLET	:	Professeur à l'Université de Metz . Examinateur.
C. M. BENNIS	:	Maître de conférence à l'Université de Metz. Examinateur.
A. ROUX	:	Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur A. Roux de m'avoir proposé ce travail à travers lequel j'ai pu toucher à différents domaines des Mathématiques pures et un peu de systèmes intégrables.

Je le remercie de m'avoir accepté dans son équipe où j'ai eu l'occasion de découvrir par leurs activités, séminaires, congrés, cours de DEA, différents aspects des Mathématiques.

Je le remercie pour sa confiance, sa patience et ses conseils.

Messieurs les professeurs R. Ouzilou et A. Tihami ont bien voulu lire et porter une appréciation sur ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma très sincère reconnaissance.

Je remercie Messieurs les professeurs A. Benabdallah et G. Sallet qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie C. Bennis d'avoir fait partie de ce jury, de son soutien moral et des discussions fructueuses que nous avons pu avoir.

Je tiens aussi à remercier Monsieur le Professeur P. Van moerbeke qui n'a pas manqué de répondre à mes questions par courrier ou pendant mon séjour à Boston, à Paris et à Louvain La Neuve. Je le remercie pour ses nombreux encouragements, ses conseils et pour l'interêt qu 'il a porté à ce travail .

Je remercie l'Université de Brandies, le Centre Emile Borel et l'université catholique de Louvain pour leur hospitalité.

Je remercie également mes colègues de Metz, de Nancy et de Louvain La Neuve.

Je veux aussi exprimer mes sincères remerciements à tous mes amis pour l'aide morale qu'ils m'ont apportée.

Enfin, je remercie ma mère et mes frères pour leur soutien moral et financier.

A la mémoire de mon père,

A ma mère

A Abdelouahab, Abdelatif, Abdelhamid et Jamila.

TABLE
DES
MATIERES

PREMIERE PARTIE : QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DES GRASSMANNIENNES DE DIMENSION INFINIE

DEUXIEME PARTIE : GRASSMANNIENNES, GROUPES DE LACETS ET OPERATEURS VERTEX

Introduction

Parmi les variétés différentiables classiques on trouve la grassmannienne d'un espace vectoriel E de dimension n qu'on identifie souvent à $\mathbb{C}^n$. Cette variété définie au départ comme ensemble des sous espaces de $\mathbb{C}^n$ d'une certaine dimension m fixée, a une structure de variété différentiable de dimension $m(n-m)$, elle peut être vue comme espace homogène du groupe général linéaire et elle s'écrit

$$Gr(m,n) = GL(n,\mathbb{C})/B$$

où $GL(n,\mathbb{C})$ est le groupe général linéaire, et B le stabilisateur d'un certain élément de la grassmannienne $Gr(m,n)$.

En dimension infinie, on définit la grassamannienne pour un espace de Hilbert H séparable muni d'une polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ et H_- sont deux sous espaces de H de dimension infinie fermés, et la grassmannienne $Gr(H)$ est l'ensemble des sous espaces W fermés de H de dimension infinie, tels que

a) La projection orthogonale positive $pr_+ : W \longrightarrow H_+$ soit un opérateur de Fredholm .

b) La projection orthogonale négative $pr_- : W \longrightarrow H_-$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Soit $J : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire continu qui coïncide avec l'identité sur H_+ et moins l'identité sur H_- on définit le groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H)$ comme sous groupe du groupe général linéaire $GL(H)$ des opérateurs A tel que $[J, A]$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt .

En dimension finie, la grassmannienne $Gr(m,n)$ est l'espace homogène de tout le groupe général linéaire , mais en dimension infinie la grassmannienne $Gr(H)$ est l'espace homogène du groupe général linéaire restreint et non de tout le groupe général linéaire, et $Gr(H)$ s'écrit

$$Gr(H) = U_{res}(H)/U(H_+) \times U(H_-)$$

où $U(H_+) \times U(H_-)$ est le stabilisateur de H_+. Ceci justifie la terminologie grassmannienne .

Dans la première partie du travail que je présente dans ce mémoire, j'étudie quelques propriétés topologiques des grassmanniennes de dimension infinie, telles que la stratification de $Gr(H)$, les composantes connexes de $Gr(H)$, le lien entre les composantes connexes et les strates de $Gr(H)$, les composantes connexes et les ouverts de l'atlas associé à la structure de variété de $Gr(H)$ qui est une variété hilbertienne modelée sur l'espace de Hilbert

$L_2(H_+, H_-)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt. On précise aussi le lien qui existe entre les composantes connexes de $GL_{res}(H)$ et les strates de $Gr(H)$, les composantes connexes de $GL_{res}(H)$ les ouverts de l'atlas associé à la structure de $Gr(H)$. On étudie aussi les composantes connexes de la grassmannienne $Gr_0(H)$ ensemble des sous espaces W de $Gr(H)$ tels que $z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+$ pour un certain k. Cette dernière grassmannienne est dense dans $Gr(H)$. Algèbriquement cet ensemble est identifié à l'union des grassmanniennes de dimension finie, ce qui justifie la décomposition de $Gr_0(H)$ en cellules de Schubert. On donne aussi le lien qui existe entre les cellules et les composantes connexes de $Gr_0(H)$.

Aprés avoir introduit les coordonnées de Plücker et donné les démonstrations de certaines propriétés élémentaires concernant les bases admissibles et les opérateurs a déterminant. ainsi que la démonstration de la proposition qui donne le plongement de Plücker holomorphe de $Gr(H)$ dans l'espace projectif $P(l^2(\Phi))$ où $\Phi = \{S \subset \mathbb{Z} / \mathbb{N}\Delta S < \infty\}$, on donne les composantes connexes de $Gr_0(H)$ et de $Gr(H)$ en fonction des coordonnées de Plücker. L'identification algèbrique de $Gr_0(H)$ avec la limite inductive des grassmanniennes de dimensions finies, est aussi topologique. Pour le prouver, on a construit un isomorphisme topologique entre $Gr_0(H)$ et cette limite inductive des grassmanniennes de dimension finie, $Gr_0(H)$ étant dense dans $Gr(H)$, nous pouvons affirmer que la topologie de la grassmannienne $Gr(H)$ provient de la topologie des grassmanniennes de dimension finie .

Dans les deux parties de ce mémoire, on travaille avec l'espace de Hilbert $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ espace des fonctions sur S^1 de carrées sommables, muni de la base canonique $\{e_n : z \longrightarrow z^n\}_{n\in \mathbb{Z}}$ et de la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ est le sous espace de H engendré par la base hilbertienne $\{e_n\}_{n\geq 0}$ et H_- est l'espace de Hilbert engendré par la base hilbertienne $\{e_n\}_{n<0}$. Si A est un élément du groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H)$ on peut l'écrire sous forme d'une matrice carrée d' ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$.

Dans le paragraphe 1. on commence par la définition de $GL_{res}(H)$ et la démonstration de la proposition 1.2. On démontre la caractétrisation des éléments de $GL_{res}(H)$ suivante :

A un élément de $GL(H)$, A appartient à $GL_{res}(H)$ si et seulement si b et c sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt. De plus a et d sont des opérateurs inversibles modulo un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Cette caractérisation des éléments de $GL_{res}(H)$, est d'une grande utilité dans la suite .

Pour introduire la structure de variété de la grassmannienne $Gr(H)$, on a besoin des deux propositions (1.7 et 1.8) dont on propose une démonstration.

Proposition 1.7.

Pour W élément de $Gr(H)$, et A élément de $L_2(W, W^0)$, le graphe de A est un élément de $Gr(H)$.

Dans la démonstration de cette proposition on utilise un diagramme commutatif qui nous permet de démontrer que $pr_+ \circ i_{gr}(A)$ est de Fredholm et l'opérateur $pr_- \circ i_{gr}(A)$ est de Hilbert-Schmidt.

L'autre proposition donnée par

Proposition 1.8.

Soit U_W l'ensemble des graphes des opérateurs de $L_2(W, W^0)$ où W est un élément de $Gr(H)$, l'application définie de $L_2(W, W^0)$ dans U_W qui a un opérateur A associe son graphe, est une bijection.

nous donne une correspondance entre l'ensemble U_W des graphes des opérateurs de $L_2(W, W^0)$ et $L_2(W, W^0)$. L'utilité de ces deux propositions s'observe dans le deuxième paragraphe.

On propose aussi dans ce paragraphe 1. une démonstration de l'équivalence de la définition de la grassmannienne et

Définition

Un espace vectoriel fermé W de H, est élément de $Gr(H)$ si est seulement si, il est l'image de H_+ par un opérateur $L : H_+ \longrightarrow H$ tel que $pr_+ \circ L$ soit un opérateur de Fredholm, et l'opérateur $pr_- \circ L$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Dans la démonstration de cette équivalence on utilise aussi un diagramme commutatif pour montrer que la deuxième définition implique la première . Pour la réciproque, on utilise des techniques très classiques .

A la fin de ce paragraphe 1. on donne deux propositions (1.9 et 1.10) énoncées et démontrées par Pressley et Segal dans [PS], dont on propose des démonstrations plus développées .

La première proposition nous donne le stabilisateur de H_+ sous l'action du groupe $GL_{res}(H)$, et montre que le sous groupe unitaire $U_{res}(H)$ de $GL_{res}(H)$ agit transitivement sur $Gr(H)$.

La deuxième proposition précise la structure hilbertienne de la grassmannienne $Gr(H)$.

Dans le paragraphe 2. on définit la dimension virtuelle d'un élément W de la grassmannienne par

Soit W un élément de $Gr(H)$, l'indice de la projection orthogonale positive $pr_+|W$ de W sur H_+ est appelé dimension virtuelle, elle est notée *dimvirt*, et on a la formule

$$dimvirt(W) = dimvirt(ker(pr_+|W)) - dim(coker(pr_+|W))$$

On propose aussi dans ce paragraphe une démonstration de la proposition 2.2 qui donne la relation qui existe entre la dimension virtuelle de l'image d'un élément W de la grassmannienne, la dimension de $W \cap H_-$ et la dimension de $W^0 \cap H_+$, on y trouve aussi une relation entre la dimension virtuelle de l'image de W de $Gr(H)$ par un opérateur A de $GL_{res}(H)$, la dimension virtuelle de W et l'indice des éléments diagonaux de la matrice de A suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$. L'utilité de cette proposition sera précisé dans le paragraphe 6. de cette première partie .

Soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, et soit $\Phi = \{S \subset \mathbb{Z}/ \ \mathbb{N} \Delta S < \infty\}$, on obtient une collection de points $\{H_S\}_{S \in \Phi}$ de $Gr(H)$, où H_S est l'espace hilbertien engendré par la base $\{e_s\}_{s \in S}$, et on a la formule

$$dimvirt(H_S) = card(S - \mathbb{N}) - card(\mathbb{N} - S)$$

on appelle ce nombre le cardinal virtuel de S . Ceci nous permet d'énoncer

Proposition [PS]

Pour tout W dans $Gr(H)$, il existe un $S \in \Phi$ tel que la projection orthogonale de W sur H_S soit un isomorphisme. En d'autres termes, les ensembles $\{U_S\}_{S \in \Phi}$ forment un recouvrement ouvert de $Gr(H)$.

Cette proposition nous donne l'atlas associé à la structure de variété hilbertinne de $Gr(H)$. On termine ce paragraphe par la démonstration de cette dernière proposition. Pour tout W de la grassmannienne $Gr(H)$, il existe S dans Φ tel que la projection orthogonale de W sur H_S soit un isomorphisme . Dans la démonstration qu'on propose, on donne une construction de S ainsi que de l'isomorphisme associé , en utilisant deux diagrammes commutatifs . On donne aussi explicitement la transformation qui réalise le passage d'une polarisation à une autre .

Dans le paragraphe 3. on introduit des sous espaces de $Gr(H)$ denses dans $Gr(H)$, qu'on appelle aussi grassmannienne, tels que par exemple la grassmannienne $Gr_0(H)$ qu'on a déjà définie qui est une réunion de grassmanniennes de dimension finie, cette identification est du au fait que pour $l > k$, on a

$$\ldots \subset z^l H_+ \subset z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+ \subset z^{-l} H_+ \subset \ldots$$

ces sous espaces Wpeuvent être identifiés aux sous espaces de $z^{-k}H_+/z^kH_+$ qui est un espace isomorphe à l'espace H_k engendré par z^l avec $-k \leq l < k$. Donc les sous espaces W peuvent être identifiés aux éléments de $Gr(H_k)$. Les grassmanniennes $Gr(H_n)$ vérifient

$$\ldots \subset Gr(H_{k-1}) \subset Gr(H_k) \subset Gr(H_{k+1}) \subset \ldots$$

on propose aussi une démonstration de la proposition 3.2. qui caractérise les éléments de la grassmannienne $Gr_0(H)$ en fonction des éléments matriciaux des opérateurs de Hilbert-Schmidt correspondants . On dit qu'un élément W est comparable à H_+ si et seulement si la codimension de $W \cap H_+$ dans H_+ et la codimension de $W \cap H_+$ dans W, sont finies. On démontre que si W_T est le graphe de T avec T de rang fini, alors W_T est comparable à H_+ . On définit une autre grassmannienne $Gr_1(H)$ dense dans $Gr(H)$, comme étant ensemble des éléments W de $Gr(H)$ comparable à H_+. Une caractérisation des éléments de cette dernière grassmannienne est donnée par

La grassmannienne $Gr_1(H)$ est constituée des graphes des opérateurs de rang fini de H_S dans $(H_S)^0$.

On propose aussi une démonstration de cette caractérisation. D'autres grassmanniennes denses dans $Gr(H)$ sont données par

Définitions

1. La grassmannienne $Gr_\infty(H)$ est le sous ensemble de $Gr(H)$ constitué des graphes des opérateurs T de H_S dans $(H_S)^0$ dont les éléments T_{pq} ($p \in \mathbb{Z} - S, q \in S$) sont a décroissance rapide, i.e tel que les quantités $|p-q|^m T_{pq}$ soient bornées pour tout m .

2. La grassmannienne $Gr_\omega(H)$ est le sous ensemble de Gr(H) constitué des graphes des opérateurs T de H_S dont H_S^0 tel que les quantités $r^{p-q}T_{pq}$ soient bornées pour $0 < r < 1$.

La densité de ces grassmanniennes provient de la densité de leurs sous espaces correspondants dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt $L_2(H_+, H_-)$.

On propose aussi une démonstration de la proposition 3.9. qui donne le lien entre les grassmanniennes $Gr_\infty(H)$, $Gr_\omega(H)$ et $Gr_0(H)$ et fonctions différentiables, les fonctions analytiques-réelles et les polynômes trigonométriques. Ce lien ne caractérise pas ces grassmanniennes. La vraie caractérisation de ces grassmanniennes par des ensembles de fonctions est donnée par

Proposition 3.11.

1. La grassmannienne $Gr_{\infty}(H)$ est constituée des sous espaces W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de fonctions différentiables.

2. La grassmannienne $Gr_{\omega}(H)$ est constituée des W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de fonctions analytiques réelles .

3. La grassmannienne $Gr_0(H)$ est constituée des W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de polynômes trigonométriques.

On propose une démonstration de la proposition 3.11.

Dans le paragraphe 4. on introduit la notion de stratification de $Gr(H)$ par

Définitions

Soit W un élément de la grassmannienne $Gr(H)$.

1. On dit que W est transversal à H_- si et seulement si $W \cap H_- = \{0\}$ et $W + H_- = H$.

2. On dit que W est générique si et seulement si il est transversal à H_- et de dimension virtuelle nulle .

Soit $f \in L_2(S^1, \mathbb{C}\ ) = H$. f est dit d'ordre fini s, s'il est de la forme

$$\sum_{-\infty<k<s} f_k z^k$$

avec $\quad f_s \neq 0.$

Soit $S \in \Phi$, on appelle strate associée à S le sous ensemble $\Sigma_S = \{W \in Gr(H) \ / \ S_W = S\}$ de $Gr(H)$. Pour tout élément S de Φ de dimension virtuelle d, on peut indexer ces éléments de la façon suivante

$$S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, s_{-d+2}, ..., ...\}$$

avec $s_{-d} < s_{-d+1} < .... < ....$ De plus $s_k = k$ à partir d'un certain rang , ce qui permet d'ordonner les ensembles qui ont même cardinal virtuel par

$S \leq S^1$ si et seulement si $s_k^1 \leq s_k$ pour tout k, , et la longueur $l(S)$ de S est définie par

$$l(S) = \sum_{-d\leq k} (s_k - k)$$

alors $S < S_1 \Longrightarrow l(S) < l(S_1)$. On démontre dans la proposition 4.3. que pour tout $S \in \Phi$, la strate Σ_S est incluse dans l'ouvert U_S . Cette inclusion n'est pas évidente. La démonstration utilise un diagramme commutatif qui donne la construction d'un opérateur de Hilbert-Schmidt de H_S dans H_S^0 dont le graphe est égal à W élément de Σ_S fixé au départ.

Pour définir la stratification, on a besoin du sous groupe triangulaire inférieur strict $\aleph_-$ de $GL_{res}(H)$ constitué des éléments A tel que

$A(z^kH_-) = z^kH_-$ et $(A - Id)(z^kH_-) \subset z^{k-1}H_-$ pour tout k. La proposition 4.4. qui donne la stratification de $Gr(H)$ a été énoncée et démontrée par Pressley et Segal dans [PS] . Elle est donnée par :

a) La strate Σ_S est une sous variété fermée contractible de l'ouvert U_S, de codimension $l(S)$.

b) Σ_S est l'orbite de H_S sous l'action de $\aleph_-$.

c) Si $W \in U_S$ alors $S \geq S_W$.

d) La fermeture de Σ_S coïncide avec l'union des strates Σ_{S^1} pour les $S^1 \geq S$

Dans le paragraphe 5. on étudie la grassmannienne $Gr_0(H)$. Algébriquement cet ensemble est considéré comme union de grassmanniennes de dimension finie. Ces dernières ont une décomposition en cellules de Schubert . $Gr_0(H)$ a une décomposition en cellules de Schubert. Ces cellules sont définies par

Soient $f = \sum_{-n\leq k\leq n} f_k z^k$ un élément polynômial de H, on définit le co-ordre de f comme étant le plus petit k tel que $f_k \neq 0$.

Soit $W \in Gr_0(H)$, on définit S^W par

$S^W = \{s \in \mathbb{Z} \quad / \quad W$ contient un élément de co-ordre $s\}$ et pour tout S^W dans Φ, la cellule C_S est défini par

$$C_S = \{W \in Gr_0(H) \quad / \quad S^W = S\}$$

On définit aussi le sous groupe $\aleph_+$ triangulaire supérieur strict comme ensemble de tous les éléments A de $GL_{res}(H)$ tels que $A(z^kH_+) = z^kH_+$ et $(A - I)(z^kH_+) \subset z^{k+1}H_+$ pour tout k .

Les arguments et les propriétés qui donnent la décomposition cellulaires et la dualité entre cette décomposition de $Gr_0(H)$ et la stratification de $Gr(H)$, sont donnés par

1. C_S est une sous variété fermée de l'ouvert U_S de $Gr(H)$, difféomorphe à $\mathbb{C}^{l(S)}$.
2. Les cellules $\{C_S\}$ et les strates $\{\Sigma_S\}$ ont le même ensemble d'indice Φ .
3. La dimension de C_S est égal à la codimension de Σ_S .
4. Les cellules C_S sont les orbites de H_S sous l'action du sous groupe $\aleph_+$.
5. La fermeture de C_S est l'union des C_{S^1}, pour les $S^1 \leq S$.
6. C_S rencontre transversalement Σ_S en un seul point et ne rencontre aucune autre strate de même codimension .
7. C_S intersecte $\Sigma_{S'}$ si et seulement si $S \geq S'$, et $C_S \cap \Sigma_S = \{H_S\}$.

Dans le paragraphe 6. on étudie le lien de la grassmannienne $Gr(H)$ aux composantes connexes de $GL_{res}(H)$. Ces composantes connexes sont données par les sous ensembles $GL^i_{res}(H)$ de $GL_{res}(H)$ constitués d'opérateurs A tel que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, l'indice de Fredholm de a est égal à i .

Dans le paragraphe 2. la relation de la proposition (2.2.) qui lie la dimension virtuelle de l'image d'un élément W de $Gr(H)$ par un opérateur A de $GL_{res}(H)$ à la dimension virtuelle de W et l'indice des éléments diagonaux de la matrice de A suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, nous permet d'énoncer et de démontrer (proposition 6.1.) que pour tout W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle i, il existe un opérateur A dans $GL^i_{res}(H)$ tel que $A(H_+) = W$.

Dans la propostion 6.2. on démontre un résultat proche du résultat précédent . Pour W_1 et W_2 dans $Gr(H)$ de même dimension virtuelle, il existe un opérateur A dans $GL^0{}_{res}(H)$ tel que $A(W_1) = W_2$.

En conlusion pour tout i dans $\mathbb{Z}$ et W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle i on a

$$GL^i_{res}(H)(H_+) = GL^0_{res}(H)(W)$$

et la grassmannienne $Gr(H)$ est une union des $GL^i_{res}(H)(H_+)$ quand i parcourt $\mathbb{Z}$.

Dans le paragraphe 7. on démontre un lemme qui nous permet de retrouver les composantes connexes de la grassmannienne $Gr(H)$, ce lemme est donné par

Soit Φ^0 le sous ensemble des S de Φ tels que $s_k = k$ pour tout $k \geq -d$, où d est le cardinal virtuel de S. Il est facile de voir que pour tout d dans $\mathbb{Z}$, il existe un et un seul S dans Φ^0 de cardinal virtuel d, et on a $S^0 \leq S$, pour tout S dans Φ et pour S^0 dans Φ^0 ayant même cardinal virtuel. Ce lemme nous permet de montrer (proposition 7.2.) que pour la classe Φ^0 des ensembles S de Φ, la fermeture des strates Σ_S coïncide avec l'ensemble des W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle le cardinal virtuel de S, et de plus l'union de toutes ces strates est dense dans $Gr(H)$. On en déduit aussi un certain nombre de corollaires, tels que par exemple le corollaire 7.5. dans lequel on prouve que pour tout S de Φ^0, la fermeture de Σ_S est à la fois ouvert et fermé, et dans le corollaire 7.6. on montre que l'ensemble des éléments W de $Gr(H)$ qui ont une dimension virtuelle impaire (respectivement paire) est à la fois ouvert et fermé . Ceci nous permet d'énoncer et de démontrer la propostion 7.7, qui donne l'inclusion de U_S dans Σ_S dans le cas où $S \in \Phi^0$. Dans ces conditions la fermeture des ouverts U_S coïncide avec l'ensemble de tous les W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle le cardinal virtuel de S. Dans le corollaire 7.8. on démontre que $GL^i_{res}(H)(H_+)$ est connexe . Le théorème 7.10. nous donne la continuité de l'application dimension virtuelle qui nous permet d'énoncer et de montrer le corollaire 7.11, qui donne la relation entre les composantes connexes de $GL_{res}(H)$, les strates de $Gr(H)$ et les ouverts U_S .

Dans le paragraphe 8. on étudie la grassmannienne $Gr_0(H)$, on commence par la définition de l'ensemble T_d comme union des cellules C_S quand S parcourt Φ_d, (Φ_d étant l'ensemble des S de Φ de cardinal virtuel d) . Dans la proposition 8.1. on montre que T_d est connexe. La continuité de l'application "cardinal virtuel" nous permet de montrer le lien des composantes connexes de $Gr_0(H)$ à ces cellules . C'est l'objet du corollaire 8.8.

Les grassmanniennes de dimension finie ont une description en coordonnées de Plücker. la déscription de la grassmannienne $Gr(H)$ en coordonnées de Plücker est donnée dans le paragraphe 9 . Auparavant, on introduit la notion de base admissible donnée par

Définition

Soit W un élément de $Gr(H)$ de dimension virtuelle d, la suite $\{w_k\}_{k \geq -d}$ d'éléments de W est dite base admissible de W si :

1. L'application linéaire

$$w : z^{-d}H_+ \longrightarrow W$$

qui associe à z^k l'élément w_k de W, est un isomorphisme continu .

2. L'application composée $pr|_W \circ w$ (où $pr|_W$ est la projection orthogonale de W sur $z^{-d}H_+$) est un opérateur a déterminant.

L'existence d'une base admissible ainsi que le lien des bases admissibles aux opérateurs a déterminant sont l'objet de la

Proposition 9.3.

1. *La base canonique de W est admissible. l'opérateur $pr|_W \circ w - I$ associé à cette base est de rang fini .*

2. *Deux bases admissibles d'un même espace W, sont reliées par une matrice a déterminant.*

3. *Soit w une base admissible. et soit $S \in \Phi$ tel que $cardvirt(S) = dimvirt(W)$. alors l'opérateur $((p_S^W) \circ w)$ est un opérateur à déterminant. d'une manière plus précise l'opérateur $((p_S^W) \circ w) - I$ est un opérateur de rang fini .*

Cette proposition nous permet d'introduire la définition des coordonnées de Plücker de la façon suivante

$$\begin{cases} \Pi_S(w) = det(pr_S \circ w) & si \quad dimvirt(W) = cardvirt(S), \\ \Pi_S(w) = 0 & \qquad sinon \end{cases}.$$

Dans la dernière proposition de ce paragraphe on donne les caractérisations de U_S, de la strate Σ_S, des composantes connexes de $Gr(H)$, de $Gr_0(H)$ et les grassmanniennes $Gr_0(H)$, $Gr_w(H)$ et $Gr_\infty(H)$, en fonction des coordonnées de Plücker.

Dans le paragraphe 10, on étudie le lien topologique qui existe entre les grassmanniennes de dimension finie et les grassmanniennes de dimension infinie, en prenant la limite inductive des grassmanniennes de dimension finie de H_- et la grassmannienne $Gr^0(H)$ définie par

$$Gr^0(H) = \cup_{0 \leq k} Gr_k^0(H)$$

avec

$$Gr_k^0(H) = \{z^k H_+ \oplus E \quad / E \in \cup_{0 \leq n} Gr_n(z^k H_-)\}$$

Soit l'application

$$L : \cup_{0 \leq k} \cup_{0 \leq n} Gr_n(z^k H_-) \longrightarrow Gr^0(H)$$

définie par $L|_{\cup_{0 \leq n} Gr_n(z^k H_-)} = L_k$ où

$$L_k : \cup_{0 \leq n} Gr_n(z^k H_-) \longrightarrow Gr_k^0(H)$$

qui à E associe $L_k(E) = z^k H_+ \oplus E$

La proposition 10.1 nous montre que L_k est un homéomorphisme, ce qui entraine que l'application L est elle même un homéomorphisme. Il est facile de voir que $Gr^0(H)$ coïncide avec la grassmanniennes de Pressley-Segal $Gr_0(H)$. Autrement dit, $Gr^0(H)$ est une autre écriture de $Gr_0(H)$. Ceci nous permet de dire que l'identification algébrique de $Gr_0(H)$

avec l'union des grassmanniennes de dimension fini est aussi topologique. Donc la topologie de la grassmannienne $Gr(H)$ provient de la topologie des grassmanniennes de dimension finie .

Dans le paragraphe 11. on donne la généralisation de toute la théorie des grassmanniennes donnée dans les paragraphes précédents. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert de dimension infinie séparables. on définit l'idéal de Schatten d'ordre $p \geq 1$ noté $L_p(H_1, H_2)$ comme étant l'espace des opérateurs linéaires $A : H_1 \longrightarrow H_2$ tels que

$$\|A\|_p^p = tr(A^*A)^{\frac{p}{2}}.$$

Pour $p = 1$ et $H_1 = H_2$ on obtient l'espace des opérateurs nucléaires, et pour $p = 2$ on obtient l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Ces espaces L_p muni de la norme $\| \quad \|_p$ sont des espaces linéaires complets. La généralisation étudiée ici est dûe à Mickelsson dans [M] . La généralisation de définition du groupe général linéaire restreint est donnée par :

Pour tout p dans$\mathbb{N}^*$, $GL_p(H)$ est l'ensemble des opérateurs A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{H=H_+\oplus H_-}$$

linéaires bornés inversibles, tels que b et c soient des éléments de L_{2p} .

On démontre aussi dans ce paragraphe que certaines propriétés valables dans le cas $p = 1$ restent vraies pour tout $p \geq 1$. Les démonstrations sont des adaptations des démonstrations faites dans le cas $p = 1$. Celles-ci utilisant telles que l'équivalence d'homotopie de GL_p et $Fred(H_+)$ (objet de la proposition 11.4) et la contractibilité de ζ_p (objet de la proposition 11.6); ζ_p etant le sous groupe des opérateurs (A, q) de $GL_{2p} \times GL(H_+)$ tels que $a - q$ soit un élément de GL_p. On en déduit les groupes d'homotopies

$$\pi_i(GL_p^0) \cong \pi_{i-1}(GL^p), \quad i = 1, 2, ...$$

et

$$\pi_i(GL^p) \cong \pi_i(GL(n, \mathbb{C}\ ), \quad i < 2n$$

et on a $\pi_0(GL_p) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(GL_p^0) = 0$ et $\pi_2(GL_p) = \mathbb{Z}$. Le théoréme de Hurewicz montre que $H^2(GL_p^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

On termine ce paragraphe par la généralisation de la définition de la grassmannienne. où elle est définie pour tout $p \geq 0$ comme ensemble des W de H fermés de dimension infinie, tels que la projection orthogonale sur H_+ soit un opérateur de Fredholm et la projection orthogonale sur H_- soit un élément de L_{2p}. Tous les résultats énoncés dans les paragraphes précédents restent vrais pour la grassmannienne $Gr_p(H)$, en utilisant les mêmes arguments.

Dans le paragraphe 12, on introduit la notion d'extension centrale du groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H)$. Cette notion permet de justifier dans la deuxième partie. le passage de l'équation KP (non linéaire) à un système infini d'équations linéaires (appelé hérarchie) . On introduit aussi la notion de fibré déterminant sur la grassmannienne . Ces deux notions sont trés liées. En dimension finie, le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur la grassmannienne $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ et sur le fibré en droite déterminant associé par :

$$GL_n(\mathbb{C}) \times det(W) \longrightarrow det(GL_n(\mathbb{C})W)$$
$$(A, w_1 \wedge .... \wedge w_k) \mapsto Aw_1 \wedge ..... \wedge Aw_k$$

où $Aw_1 \wedge ..... \wedge Aw_k$ étant un élément de $det(AW)$.

En dimension infinie, le groupe qui correspond à $GL_n(\mathbb{C})$ et qui agit sur $Gr(H)$ n'est pas le groupe général linéaire $GL(H)$ en entier, mais le sous groupe $GL_{res}(H)$. L'action de ce sous groupe sur $Gr(H)$ n'est pas automatiquement induite sur det comme en dimension finie . Ceci est dit au fait que l'image d'une base admissible d'un élément W de la grassmannienne par un élément A de $GL_{res}(H)$ n'est pas automatiquement une base admissible de AW. Pour remédier à ce problème on fait appel à une extension centrale de $GL_{res}(H)$ dont l'action sur det couvre l'action de $GL_{res}(H)$ sur $Gr(H)$:

$$\widehat{GL_{res}}(H) = \mathbb{Z} \ltimes \widehat{GL^0_{res}}(H)$$

où $\widehat{GL^0_{res}}(H)$ étant une extension centrale de $GL^0_{res}(H)$.

1. Grassmannienne de dimension infinie et groupe général linéaire restreint.

Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $H = H_+ \oplus H_-$ une polarisation de H, où H_+ et H_- sont des sous espaces de H fermés de dimension infinie, la décomposition de cette polarisation est donnée par l'opérateur unitaire $J : H \longrightarrow H$ qui coïncide avec l'identité sur H_+ et moins l'identité sur H_-. Si nécessaire, on identifie H à $L^2(S^1, \mathbb{C})$ muni de la base canonique $\{e_n : z \longrightarrow z^n\}_{n\in \mathbb{Z}}$. Le produit scalaire de H défini pour f et g dans H par

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi i} \int \overline{f(z)} g(z) dz.$$

Le sous espace H_+ engendré par la base hilbertienne $\{e_n\}_{n\geq 0}$ est identifié au sous espace de $L^2(S^1, \mathbb{C})$ des fonctions admettant un prolongement analytique sur la boule unité fermée B^1. Le sous espace H_- engendré par la base hilbertienne $\{e_n\}_{n<0}$ est identifié au sous espace de $L^2(S^1, \mathbb{C})$ des fonctions admettant un prolongement analytique sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 1\}$ nul à l'infini.

Définition 1.1.

Le groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H)$ est le sous groupe des opérateurs A tels que le commutateur $[J, A]$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt . En particulier $J \in GL_{res}(H)$.

Si A appartient au groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H)$ on peut l'écrire sous forme d'une matrice carrée d' ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$.
Par exemple

$$J = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & -id \end{pmatrix}$$

Proposition 1.2.
Un élément A de $GL(H)$ appartient à $GL_{res}(H)$ si et seulement si b et c sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt. De plus a et d sont des opérateurs inversibles modulo un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Preuve :

Avec les notations ci dessus

$$[J, A] = JA - AJ = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le premier résultat .

Posons

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

l'inverse de A . Le calcul de AA^{-1} et $A^{-1}A$ donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} aa' + bc' = Id_{H_+} \\ ab' + bd' = 0 \\ ca' + dc' = 0 \\ cb' + dd' = Id_{H_-} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a'a + b'c = Id_{H_+} \\ a'b + b'd = 0 \\ c'a + d'c = 0 \\ c'b + d'd = Id_{H_-} \end{cases}$$

Celles-ci permettent de conclure que a et d sont des opérateurs inversibles modulo un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Par exemple $GL(H_+) \times GL(H_-) \subset GL_{res}(H)$.

Définition 1.3.

Le groupe unitaire général linéaire restreint $U_{res}(H)$ est le sous groupe de $GL_{res}(H)$ des opérateurs unitaires.

Remarque 1.4.

On définit une métrique sur $GL_{res}(H)$ par

$$d(A, A') = \|a - a'\| + \|d - d'\| + \|b - b'\|_2 + \|c - c'\|_2.$$

où $\| \quad \|$ est la norme d'opérateur, et $\| \quad \|_2$ la norme de Hilbert-Schmidt. $GL_{res}(H)$ muni de cette métrique a une structure de groupe de Lie-Banach modelé sur l'espace de Banach

$$L(H_+) \oplus L_2(H_+, H_-) \oplus L(H_-) \oplus L_2(H_-, H_+)$$

où $L(H_\pm)$ est l'espace des opérateurs bornés.

Définition 1.5.

La grassmannienne $Gr(H)$ est l'ensemble des sous espaces W de H, fermés, de dimension infinie tels que

i) La projection orthogonale positive $pr_+|_W : W \longrightarrow H_+$ soit un opérateur de Fredholm .

ii) La projection orthogonale négative $pr_-|_W : W \longrightarrow H_-$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Remarques 1.6.

1. il est facile de voir que H_+ est un élément de la grassmannienne .

2. En dimension finie, la grassmannienne peut être vue comme suit :

Soit $m < n$ deux entiers positifs . La grassmannienne complexe $Gr(m, n)$ est l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ de dimension m . La structure topologique et la structure différentielle sont données par l'égalité

$$Gr(m,n) = GL(n, \mathbb{C})/B,$$

où B est le stabilisateur d'un point quelconque de $Gr(m,n)$. Pour l'espace V engendré par des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, le stabilisateur B du point V est constitué des matrices bloc triangulaire de type :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

où a est une matrice carrée d'ordre m inversible, b est une matrice $m \times (n-m)$ quelconque, et d est une matrice carrée quelconque inversible d'ordre $(n-m)$. Comme quotient de deux groupes complexes, $Gr(m, n)$ est une variété complexe naturelle de dimension $m(n-m)$.

Pour généraliser la définition de $Gr(m, n)$, on considère la grassmannienne comme quotient de groupes . Soit $H = H_+ \oplus H_-$ une polarisation de H, $U(H_+) \times U(H_-)$ le stabilisateur de H_+ dans $U_{res}(H_+)$ (voir proposition 1.9.) . On peut définir la grassmannienne de H par:

$$Gr(H) = U_{res}(H)/U(H_+) \times U(H_-).$$

Montrons que cette définition est équivalente à la définition précédente, soit $W = AH_+$ avec A dans $GL_{res}(H)$. La projection orthogonale $pr_-|_W$est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et la projection orthogonale $pr_+|_W$ est un opérateur de Fredholm, parce que a est un opérateur de Fredholm et b est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Réciproquement :

Soit W un élément de $Gr(H)$. W est un élément de

$$Gr(H) = U_{res}(H)/U(H_+) \times U(H_-)$$

(d'aprés la proposition 1.9.) . Ceci justifie dans un sens la terminologie "grassmannienne".

Proposition 1.7.

Pour W élément de $Gr(H)$, et A élément de $L_2(W, W^0)$ (W^0 est l'orthogonal de W). le graphe de A est un élément de $Gr(H)$.

Preuve :

Pour un sous espace vectoriel fermé F de H soit i_F l'inclusion de F dans H . Soit A un élément de $L_2(W, W^0)$, on note $gr(A)$ le graphe de l'opérateur A .

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} gr(A) \arrow[r, hook, "i_{gr(A)}"] \arrow[d, "l"] & H \arrow[d, "P"'] \\ W \arrow[r, "id"'] & W \end{tikzcd}$$

où P est la projection orthogonale sur W parallèlement à W^0 . Il est évident que $P \circ i_{gr(A)}$ est un isomorphisme, donc l'opérateur $pr_+ \circ i_W \circ P \circ i_{gr(A)}$ est un opérateur de Fredholm . De même on peut aussi remarquer que l'opérateur $pr_+ \circ i_W \circ (I-P) \circ i_{gr(A)}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt . La somme de ces deux derniers opérateurs donne un opérateur de Fredholm à savoir $pr_+ \circ i_{gr(A)}$.

L'opérateur $pr_- \circ i_W$ est de Hilbert-Schmidt entraine que $pr_- \circ i_W \circ P \circ i_{gr(A)}$ est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt . Ceci nous permet de conclure que l'opérateur $pr_- \circ i_{gr(A)}$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Proposition 1.8.

Soit U_W l'ensemble des graphes des opérateurs de $L_2(W, W^0)$ où W est un élément de $Gr(H)$. L'application définie de $L_2(W, W^0)$ dans U_W qui à un opérateur A associe son graphe, est une bijection.

Preuve :

La démonstration découle de ce qui précède .

Il y a une autre définition équivalente à la définition de la grassmannienne donnée précèdemment, donnée par

Un sous espace vectoriel fermé W de H est élément de $Gr(H)$ si et seulement si. il est l'image de H_+ par un opérateur $L : H_+ \longrightarrow H$ tel que $pr_+ \circ L$ soit un opérateur de Fredholm et $pr_- \circ L$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Montrons cette équivalence :

En effet, supposons la première définition vraie et montrons la seconde . Soit U une isométrie de H_+ dans W, et soit $L = i_W \circ U$ défini de H_+ dans H, où i_W est l'inclusion de W dans H avec $Im(L) = W$. Il est clair que :

$$\begin{cases} Ker(pr_+ \circ L) = Ker(pr_+ \circ i_W \circ U) = U^{-1}(Ker(pr_+|_W)) \simeq Ker(pr_+|_W) \\ Im(pr_+ \circ L) \simeq Im(pr_+|_W) \end{cases}$$

$pr_+|_W$ un opérateur de Fredholm entraine que $pr_+ \circ L$ est un opérateur de Fredholm .

$pr_- \circ L = pr_- \circ i_W \circ U$ avec le fait que $pr_-|_W$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt entraine que $pr_- \circ L$ l'est aussi parce que U est une isométrie .

Réciproquement :

Supposons qu'il existe un opérateur $L : H_+ \longrightarrow H$ tel que $L(H_+) = W$, et $pr_- \circ L$ soit un opérateur de Hilbert-Schmidt et $pr_+ \circ L$ soit un opérateur de Fredholm.

Montrons que $pr_+|_W$ un opérateur de Fredholm .

Il est facile de voir que L peut s'écrire sous la forme $L = i_W \circ L'$ où L' un opérateur surjectif. Ceci entraine

$$Ker(pr_+ \circ L) = (L')^{-1}(Ker(pr_+|_W))$$

donc

$$dim(Ker(pr_+|_W)) \leq dim(Ker(pr_+ \circ L)),$$

et $Im(pr_+ \circ L) = Im(pr_+|_W)$. On en déduit que l'opérateur $pr_+|_W$ est de Fredholm .

Montrons que $pr_-|_W$ un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Soit $(Ker(L'))^0_{H_+}$ l'orthogonal de $Ker(L')$ dans H_+ .

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(Ker(L'))^0_{H_+} \arrow[r, hook, "i_{(Ker(L'))^0_{H_+}}"] \arrow[d, "L'|_{(Ker(L'))^0_{H_+}}"', "\wr"] & H_+ \arrow[d, "L"'] \\
W \arrow[r, hook, "i_W"] \arrow[d, "pr_-|_W"'] & H \arrow[d, "pr_-"'] \\
H_- \arrow[r, "id"] & H_-
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme nous permet de dire que l'opérateur $pr_- \circ L$ coïncide avec l'opérateur $(pr_-|_W) \circ (L'|(Ker(L'))^0_{H_+})$. $L'|_{(Ker(L'))^0_{H_+}}$ étant un isomorphisme, l'opérateur $pr_-|_W$ est de Hilbert-Schmidt .

Proposition 1.9. [PS]

Le sous groupe $U_{res}(H)$ de $GL_{res}(H)$ agit transitivement sur la grassmannienne $Gr(H)$. Le stabilisateur de H_+ est le sous groupe $U(H_+) \times U(H_-)$.

Preuve :

Soit W dans $Gr(H)$ montrons qu'il existe un opérateur A dans $U_{res}(H)$ tel que $A(H_+) = W$

En effet, soit $\{z^k\}_{k\in \mathbb{Z}}$ la base orthonormée naturelle de $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$, et $\{w_k\}_{k\in \mathbb{Z}}$ une autre base de H, telle que $\{w_k\}_{k\in \mathbb{N}}$ soit une base de W et $\{w_k\}_{k\in \mathbb{Z}^{*-}}$ une base orthonormée de W^0.

Soit l'isométrie $U : H_+ \longrightarrow H$ définie sur l'image des éléments de la base orthonormée naturelle de H_+ . $U(z^k) = w_k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Il est clair que $U(H_+) = W$. De la même façon on définit l'isométrie U^0 de H_- dans H par $U^0(z^k) = w_k$ pour tout k dans $\mathbb{Z}^{*-}$, on a $U^0(H_-) = W^0$.

La transformation $U \oplus U^0 : H_+ \oplus H_- \longrightarrow H_+ \oplus H_-$ est unitaire, de plus $(U \oplus U^0)(H_+) = W$. On peut écrire $U \oplus U^0$ sous la forme matricielle suivante :

$$U \oplus U^0 = \begin{pmatrix} U_+ & U^0{}_+ \\ U_- & U^0{}_- \end{pmatrix}_{H_+ \oplus H_-}$$

et comme W est dans $Gr(H)$, $U_+ = pr_+ \circ U$ est un opérateur de Fredholm et $U_- = pr_- \circ U$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt .
Pour montrer que $U \oplus U^0$ est dans $U_{res}(H)$, il suffit de montrer que $U^0{}_+$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt (Proposition 1.2.) .
En effet, développons $(U \oplus U^0)^*(U \oplus U^0) = id_H$.

$$(U \oplus U^0)^*(U \oplus U^0) = \begin{pmatrix} (U_+)^*U_+ + (U_-)^*U_- & (U_+)^*U^0{}_+ + (U_-)^*U^0{}_- \\ (U^0{}_+)^*U_+ + (U_-)^*U_- & (U^0{}_+)^*U^0{}_+ + (U^0{}_-)^*U^0{}_- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Id_{H_+} & 0 \\ 0 & Id_{H_-} \end{pmatrix}$$

Il en découle que $(U_+)^*U^0{}_+ = -(U_-)^*U^0{}_-$, ceci qui implique que $(U_+)^*U^0{}_+$est un élément de $L_2(H_-, H_+)$. $(U_+)^*$ est un opérateur de Fredholm (par hypothèse) donc il existe un opérateur B tel que $B(U_+)^* = Id_{H_+} + R$ avec R un opérateur de rang fini de H_+ dans H_+ . Ceci entraine que $U_+{}^0$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt . En effet, $(U_+)^*U_+{}^0$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt multiplié à gauche par B reste un opérateur de Hilbert-Schmidt . De plus $B(U_+)^* = (Id_{H_+} + R)$ donc $U^0{}_+ = B(U_+)^*U^0{}_+ - RU^0{}_+$ somme de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt ce qui achève la démonstration.

Montrons maintenant que le stabilisateur de H_+ dans U_{res} est le sous groupe $U(H_+) \times U(H_-)$.
En effet, soit A un élément du stabilisateur de H_+:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{H_+ \oplus H_-}$$

et

$$A(H_+) = \begin{pmatrix} a(H_+) \\ c(H_+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'opérateur c défini de H_+ dans H_- estdonc nul ($c = 0$) et $a(H_+) = H_+$. De plus $A(H_+) = H_+$ entraine $A^*(H_+) = H_+$. De la même manière que précédemment on conclut que $b^* = 0$ donc $b = 0$. $AA^* = A^*A = Id_H$ entraine que $a^*a = aa^* = Id_{H_+}$ et $d^*d = dd^* = Id_{H_-}$ donc $A \in U(H_+) \times U(H_-)$.

Réciproquement tout $A \in U(H_+) \times U(H_-)$ stabilise évidement H_+ .

Proposition 1.10.[PS]

La grassmannienne $Gr(H)$ est une variété hilbertienne modelée sur l'espace de Hilbert $L_2(H_+, H_-)$

Preuve [PS]

Soit U_W le sous ensemble de $Gr(H)$ constitué des graphes des opérateurs de Hilbert-Schmidt de W dans W^0, avec W un élément de $Gr(H)$. On a déjà montré que l'application qui à un opérateur A fait correspondre son graphe est bijective .

Soient W_1 et W_2 deux éléments de $Gr(H)$. A U_{W_1} correspond $I_1 = L_2(W_1, {W_1}^0)$, et à U_{W_2} correspond $I_2 = L_2(W_2, {W_2}^0)$, soit Φ_i l'application qui réalise la bijection entre U_{W_i} et $L_2(W_i, (W_i)^0)$donc à $U_{W_1} \cap U_{W_2}$ correspond $I_{12} = \Phi_1(U_{W_1} \cap U_{W_2})$ dans I_1 et $I_{21} = \Phi_2(U_{W_1} \cap U_{W_2})$ dans I_2.

On va montrer que le changement de coordonnées $\varphi : I_{12} \longrightarrow I_{21}$ est différentiable tout en calculant les ouverts I_{12} et I_{21} .

En effet, soit la transformation $W_1 \oplus {W_1}^0 \longrightarrow W_2 \oplus {W_2}^0$ qui a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

D'après la démonstration de la proposition précédente, les opérateurs a et d sont des opérateurs de Fredholm et b et c sont de Hilbert-Schmidt.

Supposons qu'un $W \in Gr(H)$ est simultanément le graphe de T_1 et T_2, $T_1 : W_1 \longrightarrow {W^0}_1$ et $T_2 : W_2 \longrightarrow {W^0}_2$ alors il existe un isomorphisme q de $W_1 \longrightarrow W_2$ tel que les opérateurs suivants coïncident :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id \\ T_1 \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} Id \\ T_2 \end{pmatrix} q$$

de W_1 dans $W_2 \oplus {W^0}_2$ .En égalant ces deux opérateurs on trouve que $q = a + bT_1$. $T_2 = (c + dT_1)(a + bT_1)^{-1} = \varphi(T_1)$ est analytique en T_1 dans l'ouvert $I_{12} = \{T_1 \in I_1 \ / \ a + bT_1$ inversible $\}$, donc $Gr(H)$ munie de la topologie dont les ouverts sont les sous ensembles U_W avec W dans $Gr(H)$, a une structure de variété hilbertienne .

Remarque 1.11.

Si on étend la définition de la grassmannienne en considérant la projection orthogonale pr_- non comme opérateur de Hilbert-Schmidt, mais uniquement comme opérateur compact, on obtient une variété de Banach modelée sur l'espace des opérateurs compacts . Pour justifier ceci, on utilise la démonstration de la proposition 1.10. .

2. Dimension virtuelle .

Définition 2.1.

Soit W dans $Gr(H)$. L'indice de la projection orthogonale positive $pr_+|_W$ de W sur H_+ est appelé dimension virtuelle est noté dimvirt, on a donc

$$dimvirt(W) = dim(ker(pr_+|_W)) - dim(coker(pr_+|_W)).$$

Proposition 2.2.

Pour tout W dans $Gr(H)$

a) On a

$$dimvirt(W) = dim(W \cap H_-) - dim(W^0 \cap H_+).$$

b) Si :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_{res}(H)$$

on a

$$dimvirt(AW) = dimvirt(W) + \chi(a)$$

où $\chi(a)$ est l'indice de l'opérateur de Fredholm a.

Preuve :

a) On a déjà $ker(pr_+|_W) = W \cap H_-$, donc $dim(ker(pr_+|_W)) = dim(W \cap H_-)$.

Montrons maintenant que $dim(coker(pr_+|_W)) = dim(W^0 \cap H_+)$. En effet, soit S le supplémentaire orthogonal de $Im(pr_+|_W)$ dans H_+.Montrons d'abord que S est inclus dans W^0. En effet, soit x un élément $S - \{0\}$. x n'est pas un élément de W car sinon x serait un élément de $Im(pr_+|_W) \cap S$ ce qui est impossible. Soit maintenant y un élément de W, il existe $y_+ \in Im(pr_+|_W)$ et $y_- \in H_-$ tel que $y = y_+ + y_-$. Il est clair que le produit scalaire de x et y est nul d'où l'inclusion de S dans W^0. Montrons maintenant que $S = H_+ \cap W^0$. En effet, il est clair que $S \subset H_+ \cap W^0$. Pour l'autre inclusion, soit x un élément de $H_+ \cap W^0$ il existe x_{pr_+} dans $Im(pr_+|_W)$ et x_S dans S tel que $x = x_{pr_+} + x_S$. On peut trouver aussi un élément z dans W tel que $z = x_{pr} + x_-$ avec $x_- \in H_-$. Le produit scalaire $(x, y)_H = \|x_{pr_+}\|^2 = 0$ donc $x_{pr_+} = 0$ d'où $W^0 \cap H_+ = S$. Par suite $dim(W^0 \cap H_+) = dim(S) = dim(H_+/Im(pr_+))$.

b) On fait la démonstration pour $W = H_+$.

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_+ \arrow[r, "A|_{H_+}"] \arrow[d, "id"'] & A(H_+) \arrow[d, "pr_+|_{A(H_+)}"'] \\
H_+ \arrow[r, "a"] & H_+
\end{tikzcd}$$

.

avec $A|_{H_+}$ la restriction de A à H_+. Ce diagramme commutatif montre que $pr_+ \circ A|_{H_+}$ coïncide avec l'opérateur a .

Du fait que le noyau de $pr_+|_{A(H_+)}$ contient $A(ker(pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+}))$ et A est inversible, la restriction de A à $ker(pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+})$ dans $ker(pr_+|_{A(H_+)})$ est une bijection . Donc $ker(pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+})$ coïncide avec $ker(pr_+|_{A(H_+)})$, et $Im(pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+})$ coïncide avec $Im(pr_+|_{A(H_+)})$, d'où

$$\begin{aligned}
\chi(pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+}) &= dim(ker(pr_+|_{A(H_+)})) - dim(coker(pr_+|_{A(H_+)})) \\
&= dimvirt(A(H_+))
\end{aligned}$$

or $pr_+|_{A(H_+)} \circ A|_{H_+}$ coïncide avec a, donc

$$dimvirt(A(H_+)) = \chi(a).$$

Maintenant montrons la formule pour tout W élément de $Gr(H)$. En effet, pour tout W dans $Gr(H)$, il existe$B$ dans $GL_{res}(H)$ tel que $B(H_+) = W$.

Posons

$$B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, on a

$$\begin{aligned} dimvirt(A(W)) &= dimvirt(AB(H_+)) \\ &= \chi(pr_+|_{AB(H_+)} \circ (AB)|_{H_+}) \\ &= \chi(aa' + bc') \\ &= \chi(a') + \chi(a) \\ &= dimvirt(W) + \chi(a) \quad c.q.f.d. \end{aligned}$$

Soit $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, et soit

$$\Phi = \{S \subset \mathbb{Z} \,/ \mathbb{N} \Delta S < \infty\}$$

on obtient donc une collection de points $\{H_S\}_{S \in \Phi}$ de $Gr(H)$ où H_S est l'espace hilbertien engendré par les ϵ_s pour s dans S. De plus

$$dimvirt(H_S) = card(S \backslash \mathbb{N}) - card(\mathbb{N} \backslash S).$$

On appelle ce nombre le cardinal virtuel de S.

Proposition 2.3.[PS]

Pour tout W dans $Gr(H)$, il existe un $S \in \Phi$ tel que la projection orthogonale de W sur H_S soit un isomorphisme . En d'autres termes les ensembles $\{U_S\}_{S \in \Phi}$ forment un recouvrement ouvert de $Gr(H)$.

Preuve :

La projection orthogonale $p_+^W : W \longrightarrow H_+$ est un opérateur de Fredholm, donc le noyau $ker(p_+^W)$ est de dimension finie . Il existe un sous ensemble S de $\mathbb{Z}_-$ tel que la projection orthogonle de $Ker(p_+^W)$ sur H_S soit un isomorphisme.

Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{p^W} & H_S \oplus Im(p_+^W) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ W & \xrightarrow{p_T^W} & H_T \end{array}$$

(avec p^W la projection orthogonale de W sur $H_S \oplus Im(p_+^W)$ et i l'inclusion de $H_S \oplus Im(p_+^W)$ dans H_T) montre que la projection orthogonale p_T^W de W sur H_T avec $T = \mathbb{N} \cup S$ est un opérateur de Fredholm injectif . Il existe F un sous espace de dimension finie tel que $H_T = Im(p_T^W) \oplus F$. Soit $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de F

$$f_i = \sum_{t \in T} b_t^i e_t \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il existe J un sous ensemble d'indice de T de cardinal n tel que $\det(b_t^i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ t \in J}} \neq 0$. Posons $K = Vect(\{e_t\}_{t \in J})$, il est clair que $H_T = H_{T'} \oplus K$ avec $T' = T - J$.

L'identité $H_T = Im(p_T^W) \oplus F \longrightarrow H_T = H_{T'} \oplus K$ a pour matrice

$$Id = \begin{pmatrix} p_{T'}^T|_{Im(p_T^W)} & p_{T'}^T|_F \\ p_K^T|_{Im(p_T^W)} & p_K^T|_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{T'}^T|_{Im(p_T^W)} & p_{T'}^T|_F \\ 0 & p_K^T|_F \end{pmatrix}$$

Ceci montre que $p_{T'}^T|_{Im(p_T^W)}$ est un isomorphisme .

Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow[\sim]{p_T^W} & Im(p_T^W) \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \wr\downarrow{\scriptstyle p_{T'}^T|_{Im(p_T^W)}} \\ W & \xrightarrow{p_{T'}^W} & H_{T'} \end{array}$$

ce diagramme est commutatif donc la projection orthogonale $p_{T'}^{W}$ est un isomorphisme c.q.f.d.

Maintenant on peut définir les cartes de $Gr(H)$ indéxées par Φ, de la manière suivante

Les ouverts sont les $U_{H_S} = U_S$ constitués des graphes des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_S vers ${H_S}^0$, représentés par les matrices d'ordre $S_1 \times S$ où $S_1 = \mathbb{Z} \setminus S$. Les fonctions de transition entre les cartes sont données par : $T_1 = (c + dT_0)(a + bT_0)^{-1}$ ou a, b. c et d sont les éléments de la matrice de la transformation :$W_1 \oplus (W_1)^0 \longrightarrow W_2 \oplus (W_2)^0$

3. Quelques sous espaces denses dans Gr(H)

Définition 3.1.[PS]

La grassmannienne $Gr_0(H)$ est le sous ensemble de $Gr(H)$ des W tel que $z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+$ pour un certain k .

Pour tout $l > k$ on a

$$\ldots \subset z^l H_+ \subset z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+ \subset z^{-l} H_+ \subset \ldots$$

ces sous espaces W peuvent être identifiés aux sous espaces de $z^{-k} H_+ / z^k H_+$ qui est un espace isomorphe à l'espace H_k engendré par z^l avec $-k \leq l < k$. Donc les sous espaces W peuvent être identifiés aux éléments de $Gr(H_k)$ .Comme les grassmanniennes $Gr(H_n)$ vérifient

$$\ldots \subset Gr(H_{k-1}) \subset Gr(H_k) \subset Gr(H_{k+1}) \subset \ldots,$$

$Gr_0(H)$ peut être elle même identifiée à l'union des grassmanniennes de dimension finie classiques $Gr(H_k)$.

Proposition 3.2.

La grassmannienne $Gr_0(H)$ est constituée de sous espaces W graphes des opérateurs de Hilbert-Schmidt qui ont seulement un nombre fini d'éléménts matriciaux non nuls .

Preuve

On se place dans la carte U_S, soit W un élément de U_S tel que

$$z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+$$

pour un certain k, et soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt défini de H_S dans $(H_S)^0$ tel que W soit le graphe de T . Il est clair que $T(H_S) \subset (H_S)^0 \cap z^{-k}H_+$ donc il existe un entier s tel que $T(H_S) \subset Vect(\{z^l / -s \leq l < s\})$ ceci montre que les éléments matriciaux T_{pq} de l'opérateur T sont nuls pour $p \geq s$ et $p < -s$. Pour $S \in \Phi$ on sait qu'il existe $l \geq 0$ tel que pour $k \geq l$ on a $z^k \in H_S$, donc $z^l H_+ \subset H_S$, pour t=sup(l, k) on a $z^t H_+ \subset H_S \cap W$ donc $T(z^t H_+)$=$\{0\}$ d'où $T_{pq} = 0$ pour $q \geq t$. Les éléments matriciaux T_{pq} de T non nuls sont inclus dans l'ensemble $\{T_{pq} \ / \ q < t \ et \ -s \leq p < s\}$ qui est un ensemble fini . Ceci montre que si W est dans $Gr_0(H)$ alors l'opérateur de Hilbert-Schmidt qui correspond à W a seulement un nombre fini de ces éléments matriciaux non nuls .

Montrons la réciproque

On se place encore dans U_S, soit W un élément de U_S tel que W soit le graphe d'un opérateur T de Hilbert-Schmidt qui a presque tous ces éléments matriciaux nuls, montrons que W est dans $Gr_0(H)$, en effet il existe $k > 0$ tel que

$$T(H_S) \subset Vect(\{z^l \ / -k \leq l < k\}) = H_E$$

avec $E = \{l \ / \ -k \leq l < k\}$, donc $W \subset H_{S \cup E}$, il existe $t > 0$ tel que

$$W \subset H_{S \cup E} \subset z^{-t}H_+$$

de même on peut trouver un $h > 0$ tel que pour tout $q > h$ $T_{pq} = 0$, (ceci parce que les T_{pq} sont presque tous nuls) c'est à dire $T(z^q) = 0$ donc $z^h H_+ \subset W$. Ceci montre que W vérifie

$$z^j H_+ \subset W \subset z^{-j}H_+$$

pour j =sup(t, h) et donc W est dans $Gr_0(H)$, ce qui achève la démonstration .

Définition 3.3.

Soit W un élément de la grassmannienne $Gr(H)$, on dit que W est comparable à H_+ si et seulement si la codimension de $W \cap H_+$ dans H_+, et la codimension de $W \cap H_+$ dans W sont finies .

Proposition 3.4.

Soit W_T le graphe de T où T est un opérateur de Hilbert-Schmidt de H_S dans $(H_S)^0$. Si T est de rang fini, alors W_T est comparable à H_+ .

Preuve

Soit W_T le graphe de l'opérateur T de rang fini . Il existe $g_1,\ldots\ldots,g_n$ dans ${H_S}^0$ tels que pour tout élément z^s de la base canonique de $H_S \cap H_+$ on ait $T(z^s) = \alpha g_i$ avec $i \in \{1,\ldots\ldots,n\}$. Posons

$$\begin{aligned} G_i &= T^{-1}(\{\alpha g_i \ / \ \alpha \in \mathbb{C} \ \}) \cap H_+ \\ &= \overline{vect(\{z^j\}_{j \in J_i})} \end{aligned}$$

tel que pour $j \in J_i$, $T(z^j) = \alpha_j g_i$. L'ensemble $I = \mathbb{N} - S$ est fini. Soit $\{z^{\beta_1},\ldots\ldots, z^{\beta_n}\}$ un sous ensemble d'éléments de la base canonique de $H_S \cap H_+$ tel que $T(z^{\beta_i}) = \alpha_i g_i$ avec $\alpha_i \neq 0$.

Montrons que

$$W \cap H_+ \oplus vect(z^{\beta_1},\ldots\ldots, z^{\beta_n}) \oplus vect(\{z^{s_i}\}_{i \in I}) = H_+.$$

En effet, soit z^s un élément de la base canonique de H_+ . Supposons que z^s n'est pas dans $vect(\{z^{s_j}\}_{j \in I}$. Il existe $i \in \{1,\ldots\ldots,n\}$ tel que $T(z^s) = a g_i$. Si $a = 0$ on a $z^s \in W \cap H_+$. si $a \neq 0$ on a $(z^s - \frac{a}{\alpha_i} z^{\beta_i}) \in W \cap H_+$ ceci parce que $T(z^{\beta_i}) = \alpha_i g_i$ donc

$$z^s \in W \cap H_+ \oplus vect(z^{\beta_1},\ldots\ldots, z^{\beta_n})$$

d'où

$$W \cap H_+ \oplus vect(z^{\beta_1},\ldots\ldots, z^{\beta_n}) \oplus vect(\{z^{s_i}\}_{j \in J}) = H_+.$$

Ceci montre que la codimension de $W \cap H_+$ dans H_+ est finie .

Montrons maintenant que la codimension de $W \cap H_+$ dans W est finie . En effet, soit le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} W \cap H_+ \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & H_+ \arrow[d, "id"] \\ W \arrow[r, "p_+^W"'] & H_+ \end{tikzcd}$$

où i_1 et i_2 sont les inclusions de $W \cap H_+$ dans H_+ et dans W . Les deux applications horizontales sont des opérateurs de Fredholm,(ainsi que l'identité), donc l'application i_2 est aussi un opérateur de Fredholm dont l'indice est $\chi(i_2) = \chi(i_1) - \chi(p_+^W)$, ce qui achève la démonstration .

Définition 3.5.

La grassmannienne $Gr_1(H)$ est le sous ensemble de $Gr(H)$ constitué de tous les sous espaces W qui sont comparables à H_+ .

Proposition 3.6.

La grassmannienne $Gr_1(H)$ est constituée des graphes des opérateurs de H_S dans $(H_S)^0$ de rang fini .

Preuve

Il est facile de voir que l'opérateur projection orthogonale de H_+ sur $(H_S)^0$ est de rang fini, donc en particulier sa restriction à $W \cap H_+$ est aussi de rang fini .

W étant comparable à H_+ . Il existe donc un sous espace S de dimension finie tel que

$$W = (W \cap H_+) \oplus S.$$

La projection orthogonale $p_{S^0}^W$ de W sur $(H_S)^0$ peut s'écrire sous la forme $p_{S^0}^W = p_{S^0}^W|_{W \cap H_+} \oplus p_{S^0}^W|_S$ où $p_{S^0}^W|_{W \cap H_+}$ est la restriction de la projection orthogonale de W sur $(H_S)^0$ qui est un opérateur de rang fini, et $p_{S^0}^W|_S$ la restriction à S de cette même projection qui est aussi un opérateur de rang fini, donc $p_{S^0}^W$ est un opérateur de rang fini .

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "p_S^W", "\sim"'] \arrow[d, "id"'] & H_S \arrow[d, "T"', "\wr"] \\ W \arrow[r, "p_{S^0}^W"] & (H_S)^0 \end{tikzcd}$$

montre que T est un opérateur de rang fini.

Définition 3.7.

1. La grassmannienne $Gr_\infty(H)$ est le sous ensemble de $Gr(H)$ constitué des graphes des opérateurs T de H_S dans $(H_S)^0$ dont les éléments T_{pq} ($p \in \mathbb{Z} - S, q \in S$) sont a décroissance rapide, i.e tel que les quantités $|p-q|^m T_{pq}$ soient bornées pour tout m .

2. La grassmannienne $Gr_\omega(H)$ est le sous ensemble de Gr(H) constitué des graphes des opérateurs T de H_S dans ${H_S}^0$ tels que les quantités $r^{p-q}T_{pq}$ soient bornées pour $0 < r < 1$.

Remarque 3.8.

La densité de ces grassmanniennes dans $Gr(H)$ provient de la densité des sous espaces correspondants dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt $L_2(H_+, H_-)$.

Proposition 3.9.

1. Pour tout élément W de $Gr_\infty(H)$, il existe un sous espace constitué de fonctions différentiables dense dans W

2. Pour tout élément W de $Gr_\omega(H)$, il existe un sous espace constitué de fonctions analytiques-réelles dense dans W.

3. Pour tout élément W de $Gr_0(H)$, il existe un sous espace constitué de polynômes trigonométriques dense dans W .

Preuve

1. Soit W un élément de $Gr_\infty(H)$, et soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt dont le graphe est égal à W . Les éléments de l'ensemble

$$\{w_q = z^q + \sum_{p<q} T_{pq} z^p\}_{q \in S}$$

forment une base hilbertienne de W . Comme T est un opérateur à décroissance rapide, il existe $C > 0$ tel que

$$|T_{pq}| < \frac{C}{|p-q|^m}$$

pour tout m et $p < q$, ceci montre que les sommes partielles de w_q convergent uniformément vers w_q de même que les dérivées de tout ordre de ces sommes partielles convergent uniformément vers les dérivées de w_q qui sont des sommes finies, donc les w_q sont des fonctions régulières, l'espace vectoriel engendré par ces w_q est dense dans W ce qui achève la démonstration .

Démonstration analogue pour 2. et 3.

Remarque 3.10.

Ces conditions ne caractérisent pas ces grassmanniennes, parce que le graphe de $Tz^k = \frac{1}{k+1}z^{-k}$ n'appartient à aucune de ces grassmanniennes même s'il a des sous espaces de fonctions différentiables, de fonctions analytiques-réelles et de polynômes trigonométriques qui soient denses dans le graphe de T .

Proposition 3.11.

1. La grassmannienne $Gr_\infty(H)$ est constituée des sous espaces W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de fonctions différentiables.

2. La grassmannienne $Gr_\omega(H)$ est constituée des W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de fonctions analytiques réelles .

3. La grassmannienne $Gr_0(H)$ est constituée des W de $Gr(H)$ pour lesquels les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de polynômes trigonométriques.

Preuve :

Soit W un élément de $Gr_\infty(H)$. Il existe un opérateur T de Hilbert-Schmidt de H_S dans $(H_S)^0$ tel que W soit le graphe de T . Soit f un élément de W . On sait que f peut s'écrire sous la forme $f = f_S + T(f_S)$. Il est facile de voir que $pr_-(f_S)$ est une fonction régulière(ceci parce que S contient un nombre fini d'entiers négatifs).

Montrons maintenant que $pr_-(T(f_S))$ est une fonction régulière.

En effet, on sait aussi que f_S peut s'écrire sous la forme

$$f_S = \sum_{s \in S} a_s z^s$$

la norme $\|f_S\| = (\sum_{s\in S} |a_s|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Il existe une constante $C > 0$ tel que

$$|a_s T(z^s)| < C|a_s|$$

(ceci est dû à la continuité de l'opérateur T), donc $\sum_{s\in S} a_s T(z^s)$ converge uniformément vers $T(f_S)$, et on a

$$T(f_S) = T(\sum_{s\in S} a_s z^s) = \sum_{s\in S} a_s T(z^s).$$

T un opérateur a décroissance rapide, entraine que les fonctions

$$T(z^s) = \sum_{p<s} T_{ps}(z^p)$$

sont régulières (ceci est du au fait que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, il existe C_n tel que

$$|\frac{\partial^n}{\partial z^n}(T_{ps}z^p)| \leq \frac{C_n}{|p-s|^m}).$$

Soit la suite

$$u_n(p,s) = \frac{|p(p-1)(p-2).....(p-n+1)|}{(s-p)^{n+1}}$$

il est facile de voir que pour $s_1 < s_2$ et $p < \inf(s_1, s_2)$ on a

$$u_n(p, s_2) \leq u_n(p, s_1).$$

Ceci montre que la suite $u_n(p,s)$ est une suite décroissante par rapport s, donc il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout couple (p,s) qui vérifie $p < s$ on a

$$u_n(p,s) < C_1.$$

On sait aussi qu'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $k \geq l$ on a $s_k = k$.

Posons maintenant

$$L(s) = \sum_{p<s} \frac{1}{(s-p)^{2m}}$$

pour $s \geq l$ la suite $L(s)$ est décroissante majorée par $L(l)$. De plus l'ensemble $\{L(s_{-d}), L(s_{-d+1}), ..., L(s_{l-1})\}$ est borné, ce qui implique qu'il existe C_2 tel que

$$L(s) < C_2 \ \forall s \in S.$$

Comme T est un opérateur a décroissance rapide, il existe $C_3 > 0$ tel que

$$|T_{pq}| < \frac{C_3}{|p-q|^{m+n+3}}$$

donc pour montrer que $pr_-(f_S)$ est régulière il suffit de montrer que pour tout n la série

$$\mathbf{R_S} = \sum_{s\in S}\sum_{p<s} p(p-1)(p-2).....(p-n+1)T_{ps}z^{p-n}$$

converge uniformément.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R_S}\| &\leq \sum_{s\in S}\|\sum_{p<s} p(p-1)(p-2).....(p-n+1)T_{ps}z^{p-n}\| \\
&\leq \sum_{s\in S}(\sum_{p<s}\frac{{C_3}^2}{|s-p|^{2m+2n+6}}|p(p-1)(p-2).....(p-n+1)|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{s\in S} C_3C_1(\sum_{p<s}\frac{1}{|s-p|^{2m+4}})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{s\in S}\frac{C_3C_1}{|s-p_0|^2}(\sum_{p<s}\frac{1}{|s-p|^{2m}})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{s\in S}\frac{C_3C_1C_2}{|s-p_0|^2} < \infty
\end{aligned}$$

On utilise la même démonstration pour montrer que l'ensemble image de $pr_+|_{W^0}$ ne contient que des fonctions régulières, ceci parce que W^0 est le graphe de l'opérateur $-T^*$ qui est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Montrons la réciproque .

Soit W un élément de $Gr(H)$, si W est le graphe d'un opérateur T de Hilbert-Schmidt de H_S dans H_S^0, supposons que l'ensemble image de pr_- est constitué de fonctions régulières et montrons que l'opérateur T est à décroissance rapide .

En effet, soit f un élément de W, $f = f_S + T(f_S)$. On sait que $pr_-(f)$ est une fonction régulière donc $pr_-(T(f_S))$ est aussi régulière . Ceci montre que l'ensemble image de T est constitué lui aussi de fonctions régulières, donc l'opérateur T est défini en réalité de H_S

dans $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$. Par le théorème du graphe fermé on conclut que cette application est continue.

Soient maintenant T_1 et T_2 deux opérateurs de même nature que T, et soient les applications T_i définies de S^1 dans le dual de H_S avec $i = 1, 2$, qui à z dans S^1 associe $\tilde{T}_i(z) = T_i(.)z$ où $\tilde{T}_i(z)$ est une fonction définie de H_S dans $\mathbb{C}$ par $\tilde{T}_i(z)(f) = T_i(f)(z)$. Supposons que $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$. Ceci est équivalent à dire que pour tout z dans S^1 on a $\tilde{T}_1(z) = \tilde{T}_2(z)$, donc pour tout f dans H_S $T_1(f)(z) = T_2(f)(z)$ ceci montre que $T_1(f) = T_2(f)$ donc $T_1 = T_2$. Ceci nous permet d'identifier ces opérateurs aux fonctions $\tilde{T}$.

L'application $\tilde{T}$ est faiblement differentiable i.e pour tout f dans H_S, la fonction $T(f)$: $S^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est régulière, en particulier pour les éléments z^k de la base canonique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial z^n}(T(z^q)) &= \frac{\partial^n}{\partial z^n}(\sum_{p<q} T_{pq} z^p) \\ &= \sum_{p<q} T_{pq} p(p-1).....(p-m-1) z^{p-m}\end{aligned}.$$

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial^n}{\partial z^n}(T(z^q))\| &\leq (\sum_{p<q} |T_{pq}|^2 |p(p-1).....(p-m-1) z^{p-m}|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1\end{aligned}.$$

Il existe aussi une autre constante $C_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}|q|^m (\sum_{p<q} |T_{pq}|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C_2 + (\sum_{p<-|q|} |T_{pq}|^2 |p(p-1).....(p-m-1) z^{p-m}|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 + C_2\end{aligned}.$$

La quantité

$$|q|^m (\sum_p |T_{pq}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

est donc bornée pour q tendant vers l'infini et m quelconque .

Supposons que l'image de pr_+ constituée de fonctions régulières donc pour tout f dans H^0_S on a $-T^*(f)$ est une fonction régulière . On utilise les mêmes techniques pour montrer que la régularité des fonctions $-T^*(z^p)$ implique que la quantité

$$|p|^m(\sum_q |T_{pq}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

est bornée quand p tend vers l'infini est m quelconque . Cette condition et la condition précédente analogue à cette dernière sont équivalentes à la décroissance rapide de l'opérateur T .

Même démonstration pour 2. et 3.

Remarque 3.12.

$Gr_\infty(H)$ est la grassmannienne la plus connue de ces quatres grassmanniennes. On s'y réfère comme grassmannienne régulière Sa description montre que c'est une variété modelée sur l'espace nucléaire métrisable des matrices T=$\{T_{pq} : p < 0, 0 \leq q\}$ où la topologie est définie par la suite de semi normes $\varrho_m(T)$ =Sup$|p-q|^m|T_{pq}|$ On peut aussi décrire $Gr_\infty(H)$ directement en termes de sous espaces de $C^\infty(S^1)$ des fonctions régulières sur le cercle (muni de la topologie usuelle) . Cette grassmannienne est constituée de tous les sous espaces W fermés de $C^\infty(S^1)$ tels que la projection de W sur $C^\infty_+(S^1)$ soit un opérateur de Fredholm et la projection de W sur C^∞_- soit un opérateur compact(où $C^\infty_- = C^\infty \cap H_-$ et $C^\infty_+ = C^\infty \cap H_+$) .

Proposition 3.13. [PS]

Toute fonction analytique $f : Gr(H) \longrightarrow \mathbb{C}$ *est constante sur toute composante connexe .*

Preuve [PS]:

Il suffit de montrer que f est localement constante sur $Gr_0(H)$, mais $Gr_0(H)$ est l'union des grassmanniennes $Gr(H_{-n,n})$ de dimension finie, et comme les $Gr(H_{-n,n})$ sont des variétés algébriques compactes, toute fonction analytique sur $Gr(H_{-n,n})$ est localement constante d'où le résultat .

4. Stratification de $Gr(H)$:

Définitions 4.1.

Soit W un élément de la grassmannienne $Gr(H)$.

1. On dit que W est transversal à H_- si $W \cap H_- = \{0\}$ et $W + H_- = H$.

2. On dit que W est générique s'il est transversal à H_- et de dimension virtuelle nulle .

Un élément $f \in L_2(S^1, \mathbb{C})=H$ est dit d'ordre fini s, s'il est de la forme

$$(\star\star) \qquad \sum_{-\infty<k\leq s} f_k z^k$$

avec $f_s \neq 0$.

Soit W^{fini} le sous ensemble W des éléments d'ordres finis . Le sous-espace des éléments de H_S d'ordre fini est dense dans H_S, de plus la projection orthogonale de W sur H_S est un isomorphisme ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.2.

W^{fini} est dense dans W .

Les éléments de W qui sont d'ordre fini et inférieur ou égal à m, forment un espace de dimension finie $W_m = W \cap z^{m+1}H_-$. On note d_m la dimension de cet espace .

On définit les ensembles $S_W = \{$ s $\in \mathbb{Z}$ / W contient un élément d'ordre s$\}$.

Les ensembles S_W sont dans Φ, et le cardinal virtuel de S_W n'est autre que la dimension virtuelle de W. Le nombre d'éléments de S_W d'ordre inférieur où égal à m, est égal à la dimension de W_m qui est $m+1+d$, ce qui montre que si m est assez grand la projection de W sur $z^{m+1}H_+$ est surjective.

Soit $s \in S_W$, et soit w_s un élément de W est de la forme $(**)$ avec $f_s = 1$ (voir définition 4.1). alors $\{w_s\}_{s\in S_W}$ est une base de W^{fini} au sens algébrique .

Soit H_S l'espace de Hilbert engendré par $\{z^s\}_{s\in S}$. La projection orthogonale de W sur H_S est un isomorphisme . Le choix $w_s \in W$ est unique tel que sa projection soit z^s . On appelle cette base la base canonique de W.

Soit $S \in \Phi$, on appelle strate associée à S le sous ensemble $\Sigma_S = \{W \in Gr(H)$ / $S_W = S\}$ de $Gr(H)$.

Pour tout élément S de Φ de dimension virtuelle d, on peut indéxer ces éléments de la façon suivante

$$S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, s_{-d+2}, \ldots, \ldots\}$$

avec $s_{-d} < s_{-d+1} < \ldots < \ldots$ de plus $s_k = k$ à partir d'un certain rang . Ceci nous permet d'ordonner les ensembles qui ont même cardinal virtuel, en posant :

$S \leq S^1$ si et seulement si ${s_k}^1 \leq s_k$ pour tout k .

On définit aussi $d_m(S)$ comme étant la dimension de $z^{m+1}H_- \cap H_S$, on voit aussi que $S \leq S^1$ si et seulement si $d_m(S) \leq d_m(S^1)$. La longueur $l(S)$ de S est définie par

$$l(S) = \sum_{-d \leq k} (s_k - k)$$

On a alors $S < S_1 \Longrightarrow l(S) < l(S_1)$.

Proposition 4.3.

Pour tout $S \in \Phi$ *on a :* $\Sigma_S \subset U_S$.

Preuve :

Soit $W \in \Sigma_S$. On a déjà montré que la projection orthogonale de W sur H_S est un isomorphisme .

Supposons que W soit le graphe de l'opérateur $T' = (p_{S'}^W)^{-1} - I$ de Hilbert-Schmidt défini de $H_{S'}$ dans $(H_{S'})^0$, et montrons que $T = (p_S^W)^{-1} - I$ est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt de H_S dans $(H_S)^0$.

En effet, la transformation identique : $H_{S'} \oplus (H_{S'})^0 \longrightarrow H_S \oplus (H_S)^0$ est un isomorphisme qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec b et c deux opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{S'} & \xrightarrow[\sim]{(p_S^W)\circ(p_{S'}^W)^{-1}} & H_S \\ {\scriptstyle id_{H_{S'}}+T'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_{H_S}+T} \\ W_{H_{S'}\oplus(H_{S'})^0} & \xrightarrow{I_W} & W_{H_S\oplus(H_S)^0} \end{array}$$

montre que l'opérateur $T = (c + dT') \circ (p^W{}_S) \circ (p_{S'}^W)^{-1}$ est bien un opérateur de Hilbert-Schmidt donc $W \in U_S$ et par suite $\Sigma_S \subset U_S$.

Introduisons maintenant le sous groupe triangulaire inférieur strict $\aleph_-$ de $GL_{res}(H)$ constitué des éléments A tel que

$A(z^k H_-) = z^k H_-$ et $(A - Id)(z^k H_-) \subset z^{k-1} H_-$ pour tout k.

La stratification de $Gr(H)$ est donnée par

Proposition 4.4.[PS]

a) La strate Σ_S est une sous variété fermée contractible de l'ouvert U_S, de codimension $l(S)$.

b) Σ_S est l'orbite de H_S sous l'action de $\aleph_-$.

c) Si $W \in U_S$ alors $S \geq S_W$.

d) La fermeture de Σ_S coïncide avec l'union des strates Σ_{S^1} pour les $S^1 \geq S$.

Preuve

a) On a déjà montré que $\Sigma_S \subset U_S$ et que si $W \in U_S$, la projection orthogonale de W sur H_S est un isomorphisme, de plus W a une unique base $\{w_s\}_{s\in S}$ qui se projette sur $\{z^s\}_{s\in S}$. Il est clair que $W \in \Sigma_S$ si est seulement si w_s a pour ordre s pour tout $s \in S$. Si W est le graphe de $T : H_S \longrightarrow (H_S)^0$, alors $w_s = z^s + Tz^s$ peut s'ecrire

$$w_s = z^s + \sum_{p<s} T_{ps} z^p.$$

W est dans Σ_S quand les éléments matriciaux T_{pq} sont nuls pour $p > q$ (ceci parce que w_s est d'ordre s) . Montrons maintenant que le nombre de couples $(p, q) \in (\mathbb{Z} \setminus S) \times S$ tels que $p > q$ est égal à $l(S)$.

En effet, on sait que pour $S \in \Phi$ il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $s_k = k$ pour $k \geq l$.

Pour $q = l-1$, le nombre de couples $(p, s_{l-1}) \in (\mathbb{Z} \setminus S) \times S$ tel que $p > s_{l-1}$ est égal à $(l - 1 - s_{l-1})$.

Pour $q = l-2$, le nombre de couples $(p, s_{l-2}) \in (\mathbb{Z} \setminus S) \times S$ tel que $p > s_{l-2}$ est égal à $(l - 2 - s_{l-2})$.

On fait la même chose pour les couples (p, q) quand q varie entre $l-3$ et $-d = cardvirt(S)$. le nombre total de couples (p, q) tel que $p > q$ est égal à la somme

$$\sum_{k=-d}^{k=l-1} (k - s_k) = \sum_{k=-d}^{\infty} (k - s_k) = l(S)$$

de plus Σ_S correspond à un sous espace de Hilbert de $L_2(H_S, (H_S)^0)$ de codimension $l(S)$.

b) Soit W un élément de Σ_S, supposons que W est le graphe de $T : H_S \longrightarrow (H_S)^0$. Soit $pr_S : H \longrightarrow H_S$ la projection orthogonale de H sur H_S . Montrons que l'opérateur $A = I + T \circ pr_S$ appartient à $GL_{res}(\mathrm{H})$.

En effet, il est clair que l'opérateur $[A, J] = [T \circ pr_S, J]$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt donc $A \in GL_{res}(\mathrm{H})$, on peut facilement montrer que $A \in \aleph_-$, de plus $A(H_S) = W$ donc Σ_S est bien l'orbite de H_S sous l'action de $\aleph_-$.

c) Soit W un élément de U_S, la projection orthogonale de W sur H_S ne peut que diminuer l'ordre d'un élément, dans notre cas cette projection est bijective. Le nombre d'éléments de H_S linéairement indépendants d'ordre inférieur ou égal à m est inférieur ou égal au nombre d'éléments de W linéairement indépendants d'ordre inférieur ou égal à m ce qui est équivalent à

$$card\{s \in S / s \leq m\} \geq card\{s \in S_W / s \leq m\}$$

pour tout m , i.e $S \geq S_W$, donc si $W \in U_S$ alors $S \geq S_W$.

d) Soit W un élément de la fermeture de Σ_S, il existe W_1 dans $U_{S_W} \cap \Sigma_S$ tel que $S_W \geq S_{W_1} = S$, donc W est bien dans $\bigcup_{S' \geq S} \Sigma_S$ d'où l'inclusion de la fermeture de Σ_S dans $\bigcup_{S' \geq S} \Sigma_S$.

5. Décomposition cellulaire $Gr_0(H)$:

L'étude de la grassmannienne $Gr_0(H)$ est liée d'une manière directe aux grassmanniennes de dimension finie . Ce lien algébrique est aussi topologique (voir paragraphe 10) En dimension finie, les espaces homogènes algébriques complexes du groupe unitaire U_n sont des grassmanniennes et des drapeaux, pour toute partition K d'ordre n, où $K = (k_1, k_2, ..., k_r)$, $k_i > 0$ et $\sum k_i = n$, le drapeau Fl_K est défini comme l'espace des r-uplets $E = (E_1, ..., E_r)$ formés de sous espaces de $\mathbb{C}^n$ tels que $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_r$ et $dim(E_i) = k_1 + ... + k_i$. Dans le cas $K = (k, n-k)$, le drapeau Fl_k coïncide avec la grassmannienne $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ ensemble de tous les sous espaces de $\mathbb{C}^n$ de dimension k .

Le drapeau Fl_K est l'espace homogène par l'action du groupe unitaire U_n, et comme $U_{k_1} \times ... \times U_{k_r}$ est le stabilisateur de $E = (E_1, ..., E_r)$ où les E_i sont les sous espaces de $\mathbb{C}^{k_1+...+k_i}$ engendrés par les $k_1 + ... + k_i$ premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Le drapeau Fl_K peut être identifié à $U_n/U_{k_1} \times ... \times U_{k_r}$. L'une des propriétés importantes des drapeaux Fl_K est la décomposition en cellules complexes, c'est à dire en sous espaces isomorphes à $\mathbb{C}^r$ pour un certain r, et qui sont des orbites de B^+ sur Fl_K, où B^+ est le sous groupe des matrices triangulaires supérieures. La grassmannienne $Gr_k(\mathbb{C}^n)$, qui est un drapeau particulier, est l'union de $\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ cellules C_m indéxées par les suites $m = (m_1, ..., m_k)$ telles que $1 \leq m_1 < m_2 < ... < m_k \leq n$, et les C_m sont définies par

$$C_m = \{W \subset \mathbb{C}^n / dim(W \cap \mathbb{C}^j) = i \ \ quand \ \ m_i \leq j \leq m_{i+1}\}$$

et $dim(C_m) = \sum(m_i - i)$.

Cette décomposition est classique . Elle est connue sous le nom de décomposition en cellules de Schubert .

Soit $f = \sum_{-n \leq k \leq n} f_k z^k$ un élément polynômial de H . On définit le co-ordre de f comme étant le plus petit k tel que $f_k \neq 0$.

Soit $W \in Gr_0(H)$, on définit S^W par

$S^W = \{s \in \mathbb{Z} \ / \ W$ contient un élément de co-ordre $s\}$ et pour tout S^W dans Φ, la cellule C_S est définie par

$$C_S = \{W \in Gr_0(H) \ / \ S^W = S\}$$

On définit aussi le sous groupe $\aleph_+$ triangulaire supérieur strict comme ensemble de tous les éléments A de $GL_{res}(H)$ tels que $A(z^k H_+) = z^k H_+$ et $(A - I)(z^k H_+) \subset z^{k+1} H_+$ pour tout k .

En utilisant des arguments semblables à ceux utilisés pour les strates. on peut voir que les ensembles C_S vérifient les propriétés suivantes :

1. *C_S est une sous variété fermée de l'ouvert U_S de $Gr(H)$. difféomorphe à $\mathbb{C}^{l(S)}$.*

2. *Les cellules $\{C_S\}$ et les strates $\{\Sigma_S\}$ ont le même ensemble d'indice Φ .*

3. *La dimension de C_S est égal à la codimension de Σ_S .*

4. *Les cellules C_S sont les orbites de H_S sous l'action du sous groupe $\aleph_+$.*

5. *La fermeture de C_S est l'union des C_{S^1}, pour les $S^1 \leq S$.*

Ces propriétés montrent que les ensembles C_S pour S dans Φ vérifient la définition de la décomposition en cellules de Schubert, donc la grassmannienne $Gr_0(H)$ se décompose en cellules de Schubert . Ceci est en accord avec le fait que $Gr_0(H)$ est vue comme union des grassmanniennes de dimension finie. Cette décomposition est duale de la stratification de $Gr(H)$. cette dualité est observée dans les propriétés précédentes et les deux propriétés suivantes

a) C_S rencontre transversalement Σ_S en un seul point et ne rencontre aucune autre strate de même codimension .

b) C_S intersecte $\Sigma_{S'}$ si et seulement si $S \geq S'$, et $C_S \cap \Sigma_S = \{H_S\}$.

6. Grassmannienne et composantes connexes de $GL_{res}(H)$.

Notations

1.$GL^i_{res}(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs A tel que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, l'indice de a est égal à i .

2. $GL^i_{res}(H)(W) = \{A(W) \quad / \quad A \in GL^i_{res}(H)\}$.

3. E_i désigne l'ensemble des sous espaces W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle i .

Proposition 6.1.

Pour tout W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle i, il existe un opérateur A dans $GL^i_{res}(H)$ tel que $A(H_+) = W$.

Preuve :

Soit W dans $Gr(H)$. On sait que le groupe unitaire $U_{res}(H)$ agit transitivement sur la grassmannienne $Gr(H)$. Ceci implique qu'il existe un opérateur A dans $U_{res}(H)$ tel que $A(H_+) = W$. L'opérateur A peut s'écrire sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$,et la proposition (2.2.) montre que

$$dimvirt(W) = dimvirt(H_+) + \chi(a),$$

donc $dimvirt(W) = i$, ceci parce que $dimvirt(H_+) = 0$.

Proposition 6.2.

Pour W_1 et W_2 dans $Gr(H)$ de même dimension virtuelle, il existe un opérateur A dans $GL^0_{res}(H)$ tel que $A(W_1) = W_2$.

Preuve :

La démonstration découle de ce qui précède .

Corollaire 6.3.

Pour tout entier relatif i et tout W élément de E_i on a

$$E_i = GL^i_{res}(H)(H_+) = GL^0_{res}(H)(W).$$

Remarques 6.4.

1. $GL^0_{res}(H)$ est la composante connexe de l'identité .
2. Les composantes connexes de $GL_{res}(H)$ sont les $GL^i_{res}(H)$.

3. On va voir par la suite une certaine transmission de composantes connexes de $GL_{res}(H)$ à $Gr(H)$.

Corollaire 6.5.

La grassmannienne $Gr(H)$ est égale à l'union des $GL^i_{res}(H)(H_+)$.

Preuve :

On a déjà une inclusion de $Gr(H)$ dans l'union des $GL^i_{res}(H)(H_+)$. Il reste à montrer l'autre inclusion .

En effet, Pour tout A dans $GL_{res}(H)$, on sait que A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$ avec a et d sont des opérateurs de Fredholm. et c, b sont de Hilbert-Schmidt .

La projection orthogonale positive de $A(H_+)$ sur H_+, coïncide avec l'opérateur a qui est un opérateur de Fredholm (on a utilisé la proposition 1.2.).

La projection orthogonale négative de $A(H_+)$ sur H_+ coïncide avec l'opérateur c qui est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

Remarque 6.6.

La démonstration du corollaire 6.5. justifie la remarque 1.6. .

Corollaire 6.7.

$Gr(H)$ est égale à l'union des $U^i_{res}(H)(H_+)$ quand i parcourt $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.8.

L'action de $GL_{res}(H)$ sur $Gr(H)$ n'est pas libre .

Preuve :

Il suffit de voir qu'il existe A dans $GL_{res}(H)$tel que $A(H_+) = H_+$ et $A \neq Id$.

En effet, soit ϵ un opérateur compact, l'opérateur $1+\epsilon$ est un opérateur de Fredholm tel que $\chi(1+\epsilon)=\chi(1)$. Pour
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\epsilon\end{pmatrix}$$
on a $A(H_+)=Id(H_+)=H_+$, et A est dans $GL_{res}(H)$. Ceci montre que cette action n'est pas libre .

7. Composantes connexes de $Gr(H)$

Soit Φ^0 le sous ensemble de Φ tel que pour tout $S\in\Phi^0$ on ait $s_k=k$ pour tout $k\geq -d$, où d est le cardinal virtuel de S . Il est facile de voir que pour tout d dans $\mathbb{Z}$. Il existe un et un seul S dans Φ^0 de cardinal virtuel d .

Lemme 7.1.

Pour tout S dans Φ et pour S^0 dans Φ^0 de même cardinal virtuel on a $S^0\leq S$.

Preuve :

Soit S dans Φ de cardinal virtuel d . On sait qu'il existe un et un seul S^0 dans Φ^0 de cardinal virtuel d . Montrons que ce S^0 vérifie l'inégalité du lemme .

En effet, pour S dans Φ, il existe $m(S)$ dans $\mathbb{Z}$ tel que pour tout $k\geq m(S)$ on a $s_k=k$.

Pour $k=m(S)-1$ on a $s_k<s_{m(S)}=m(S)=s^0_{m(S)}$, ce qui entraine que $s_k\leq k=m(S)-1=s^0_{(m(S)-1)}$.

Pour $k=m(S)-2$ on a $s_k<s_{k+1}\leq k+1=s^0_{(k+1)}$ ceci implique que $s_k\leq k={s^0}_k$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à l'ordre $-d$ qui est égal $-cardvirt(S)$. On obtient finalement $s_k\leq k=s^0_k$ pour tout k, c'est à dire $S^0\leq S$.

Proposition 7.2.

a) Pour tout S dans Φ^0, la fermeture de (Σ_S) coïncide avec l'union des strates Σ_{S_1} pour les S_1 qui vérifient $S\leq S_1$, cette fermeture coïncide aussi avec $GL_{res}^{cardvirt(S)}(H)(H_+)$.

b) L'union des strates Σ_S quand S parcourt Φ^0 est dense dans $Gr(H)$.

Preuve :

a) Pour tout S^0 dans Φ^0 et pour tout S dans Φ de même cardinal virtuel on a $S^0\leq S$.

Ceci implique que la fermeture de Σ_{S^0} coïncide avec l'union de toutes les strates Σ_S telles que $cardvirt(S) = cardvirt(S^0)$. Elle coïncide aussi avec $GL_{res}^{cardvirt(S^0)}(H)(H_+)$.

b) Il suffit de remarquer que l'union des fermetures des strates Σ_S quand S parcourt Φ^0 est incluse dans la fermeture de l'union des strates Σ_S quand S parcourt Φ^0 .

Remarque 7.3.

Il est facile de voir que pour tout S dans Φ^0, l'union de tous les ouverts $U_{S'}$ avec S' de même cardinal virtuel que S coïncide avec la fermeture de Σ_S, et coïncide aussi avec l'espace $GL_{res}^{cardvirt(S)}(H)(H_+)$.

Corollaire 7.4.

Pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ l'union des $GL^i_{res}(H)(H_+)$ pour i dans $\mathbb{Z} \setminus J$ est un ouvert de la grassmannienne $Gr(H)$.

Preuve :

La démonstration résulte du fait que l'espace $GL^i_{res}(H)(H_+)$ est fermé dans $Gr(H)$.

Corollaire 7.5.

1. *Pour S dans Φ^0, la fermeture de Σ_S est à la fois ouverte et fermée .*
2. *La grassmannienne $Gr(H)$ n'est pas connexe .*

Corollaire 7.6.

L'ensemble des éléments W de $Gr(H)$ qui ont une dimension virtuelle impaire (respectivement paire) est à la fois ouvert et fermé dans $Gr(H)$.

Proposition 7.7.

1. *Pour tout S dans Φ^0 on a $\Sigma_S = U_S$.*
2. *Pour tout S dans Φ^0 on a $\overline{U_S} = GL_{res}^{cardvirt(S)}(H)(H_+)$.*

Preuve :

1. On a déjà vu que $\Sigma_S \subset U_S$, il reste à montrer l'autre inclusion .

En effet, soit W dans U_S d'après la proposition (4.2.) on a $S_W \leq S$, or S est le plus petit des S^0 de Φ qui ont même cardinal virtuel que S . Ceci implique que $S_W = S$ donc W est un élément de Σ_S .

Corollaire 7.8.

Pour tout i dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble $GL^i_{res}(H)(H_+)$ est connexe .

Preuve :

La démonstration résulte du fait que U_S est homéomorphe à $L_2(H_S, (H_S)^0)$.

Corollaire 7.9.

L'union des U_S quand S parcourt Φ^0 est dense dans $Gr(H)$.

Théorème et définition 7.10.

Soit l'application dimension virtuelle, de $Gr(H)$ dans $\mathbb{Z}$ qui à W fait correspondre la dimension virtuelle de W .

La dimension virtuelle est une application localement constante donc continue de $Gr(H)$ dans $\mathbb{Z}$.

Preuve :

Evidente .

Corollaire 7.11.

Les composantes connexes de la grassmannienne $Gr(H)$ sont les ensembles

$$GL^i_{res}(H)(H_+) = Fer(U_{S_i}) = Fer(\Sigma_{S_i}) = \{W \in Gr(H) \quad / \quad dimvirt(W) = i\}$$

pour S_i dans Φ et de cardinal virtuel i ($Fer(A)$ la fermature de A) .

Remarque 7.12.

On a vu dans la remarque (6.4.) que les composantes connexes de $GL_{res}(H)$ sont les sous ensembles $GL^i_{res}(H)$, et dans le corollaire (7.11.) on a vu que les composantes connexes de $Gr(H)$ sont les sous ensembles $GL^i_{res}(H)(H_+)$. Ceci montre qu'il y a une sorte de transmission de composantes connexes . On a vu aussi les relations qui existent entre les composantes connexes de $Gr(H)$, la stratification de $Gr(H)$, les composantes connexes de $GL_{res}(H)$ et l'atlas associé à $Gr(H)$.

8. Composantes connexes de la grassmannienne $Gr_0(H)$.

D'une manière analogue à celle du paragraphe précédent, on montre des résultats semblables à ceux de la grassmannienne $Gr(H)$ concernant la grassmannienne $Gr_0(H)$ muni de sa décomposition cellulaire .

Pour d dans $\mathbb{Z}$ on note Φ_d l'ensemble des S dans Φ de cardinal virtuel d et on note T_d l'union des cellules C_S quand S parcourt Φ_d .

Proposition 8.1.

Pour tout d dans $\mathbb{Z}$, la fermeture de T_d coïncide avec T_d .

Preuve :

Soit W dans la fermeture de T_d . Supposons que W n'est pas dans T_d . L'intersection de T_d avec U_{S^W} n'est pas vide . Soit W_1 un élément de cette intersection . S^{W_1} et S^W ont même cardinal virtuel ce qui est absurde .

Corollaire 8.2.

i) Pour d_0 dans $\mathbb{Z}$, l'union des T_d pour d dans $\mathbb{Z} \setminus \{d_0\}$ est un fermé de la grassmannienne $Gr_0(H)$.

ii) Soit J un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ fini, l'union des T_d pour d dans $\mathbb{Z} \setminus J$ est un ouvert de $Gr_0(H)$.

Preuve :

Pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que la fermeture de l'union des T_d pour d parcourt $\mathbb{Z} \setminus \{d_0\}$ est égale à l'union des T_d pour d dans $\mathbb{Z} \setminus \{d_0\}$.

En effet, supposons qu'il existe un W_1 dans la différence des deux ensembles précédents. Ceci implique qu'il existe un W dans l'intersection de l'union des T_d quand d parcourt $\mathbb{Z} \setminus \{d_0\}$ avec U_{S^W}, ce qui est absurde parce que W ne peut pas avoir deux cardinaux virtuels différents .

Corollaire 8.3.

Pour toute partie J de $\mathbb{Z}$ finie, l'union des T_d quand d varie dans J est un ensemble à la fois ouvert et fermé .

Corollaire 8.4.

L'ensemble des sous espaces W de $Gr_0(H)$ tel que S^W de cardinal virtuel impair (respectivement pair), est à la fois ouvert et fermé .

Corollaire 8.5.

$Gr_0(H)$ n'est pas connexe .

En fait la non connexité de $Gr_0(H)$ découle de celle de $Gr(H)$.

Proposition 8.6.

T_d est connexe pour tout d dans $\mathbb{Z}$.

Preuve :

Soit d dans $\mathbb{Z}$ fixé, et soit S dans Φ de cardinal virtuel d, rappelons que C_S est connexe. et soit S_0 dans Φ^0 de même cardinal virtuel que S . On sait aussi que pour toute S dans Φ_d, on a $S_0 \leq S$ ceci montre que C_{S_0} est incluse dans la fermeture de C_S, donc C_{S_0} rencontre la fermeture de C_S, pour toute S dans Φ_d ceci implique que T_d est connexe .

Théorème 8.7.

L'application "cardinal virtuel" définie de $Gr_0(H)$ dans $\mathbb{Z}$ qui à W dans $Gr_0(H)$ fait correspondre le cardinal de S^W est continue .

Corollaire 8.8.

Les composantes connexes de la grassmannienne $Gr_0(H)$ sont les ensembles T_d .

Remarque 8.9.

Dans ce paragraphe on a vu la relation qui existe entre les cellules et les composantes connexes de $Gr_0(H)$, en revanche il n'y a pas de relation entre les traces des ouverts de l'atlas associé à $Gr(H)$ et les composantes connexes de $Gr_0(H)$, ceci parce que les ensembles Φ_d ne sont pas majorés .

9. Coordonnées de Plücker

Les grassmanniennes de dimension finie sont décrites par les coordonnées de Plücker, ce qui est une description simple et classique .

Dans cette section on donne une généralisation de cette description . Cette généralisation nous permet de décrire la grassmannienne $Gr(H)$, ses strates, ses composantes connexes et les sous espaces de $Gr(H)$ denses . Elles nous permet aussi de décrire les cellules et les composantes connexes de la grassmannienne $Gr_0(H)$.

On a vu aussi que tout W appartenant à $Gr(H)$ a une base cannonique Dans ce paragraphe on introduit la notion de base admissible de W .

Définition 9.1.

Soit W un élément de $Gr(H)$ de dimension virtuelle d, la suite $\{w_k\}_{k\geq -d}$ d'éléments de W est dite base admissible de W si :

1. L'application linéaire

$$w : z^{-d}H_+ \longrightarrow W$$

qui associe à z^k l'élément w_k de W, est un isomorphisme continu .

2. L'application composée $pr|_W \circ w$ (où $pr|_W$ est la projection orthogonale de W sur $z^{-d}H_+$) est un opérateur a déterminant.

Remarque 9.2.

L'existence d'une base admissible est prouvée dans la proposition 9.3. où la démonstration est faite pour la base canonique .

Proposition 9.3.

1. La base canonique de W est admissible, l'opérateur $pr|_W \circ w - I$ associé à cette base est de rang fini .

2. Deux bases admissibles d'un même espace W, sont reliées par une matrice a déterminant.

3. Soit w une base admissible, et soit $S \in \Phi$ tel que $cardvirt(S) = dimvirt(W)$. alors l'opérateur $((p_S^W) \circ w)$ est un opérateur a déterminant. d'une manière plus précise l'opérateur $((p_S^W) \circ w) - I$ est un opérateur de rang fini .

Preuve

1. La base canonique de W est admissible .

En effet, soit $\{w_k\}_{k \geq -d}$ la base canonique de W, et soit l le plus petit élément de $\mathbb{Z}$ tel que $s_k = k$ pour $k \geq l$. Il est clair que H_S peut s'écrire sous la forme

$$H_S = vect(z^{s-d}, \ldots\ldots, z^{s_l-1}) \oplus H_{S^l}$$

où $S^l = \{l, l+1, \ldots\ldots\}$, et $z^{-d}H_+ = vect(z^{-d}, \ldots\ldots z^{l-1}) \oplus H_{S^l}$ .L'appllication linéaire suivante est un isomorphisme continu:

$$w = L \oplus (p^W{}_S)^{-1}|_{H_{S^l}} \; z^{-d}H_+ = vect(z^{-d}, \ldots\ldots, z^{l-1}) \oplus H_{S^l} \longrightarrow W$$

On définit L sur la base canonique de $vect(z^{-d}, \ldots\ldots, z^{l-1})$ par la donnée de l'image de chaque élément de la base canonique : $L(z^k) = w_k$ pour $-d \leq k \leq l-1$.

Montrons maintenant que $pr \circ w$ est un opérateur a déterminant . En effet, il suffit de travailler avec les éléments de la base $\{z^k\}_{k \geq -d}$:

$$\begin{aligned}(pr|_W \circ w - I)(z^k) &= (pr|_W \circ w)(z^k) - z^k \\ &= pr|_W(z^k + T(z^k)) - z^k \\ &= pr|_W(T(z^k))\end{aligned}$$

ceci pour $k \geq -d$. $T(z^k)$ est dans l'orthogonal de H_S, donc il est dans l'orthogonal de H_{S^l} et par suite sa projection orthogonale sur $z^{-d}H_+$ est soit nulle soit dans $vect(z^{-d}, \ldots\ldots, z^{l-1})$. Ceci montre que $Im(w) \subset vect(z^{-d}, \ldots\ldots, z^{l-1})$, donc l'opérateur $(pr|_W \circ w - I)$ est de rang fini .

2. Soit W un élément de la grassmannienne $Gr(H)$ et soient w et w' deux bases admissibles de W de $Gr(H)$, la matrice qui transforme la base admissible w en w'est un opérateur a déterminant . En effet, soit t cette transformation $tow = w'$, entraine $t = w^{-1}ow'$ qui est un isomorphisme continu. On sait que l'application $pr \circ w' - I$ appartient à l'idéal de Schatten $L_1(z^{-d}H_+, z^{-d}H_+)$ donc l'application $(pr o w' - I)o(w')^{-1} o w = pr o w - (w')^{-1} o w$ elle aussi

appartient à $L_1(z^{-d}H_+, z^{-d}H_+)$ or $pr \circ w - (w')^{-1} \circ w = (pr \circ w - I) - (((w')^{-1} \circ w) - I)$. Ceci montre que l'opérateur $(((w')^{-1} \circ w) - I)$ appartient à $L_1(z^{-d}H_+, z^{-d}H_+)$ donc $(w')^{-1} \circ w$ est bien un opérateur a déterminant .

3. On reprend la même démonstration de 1.

On peut définir maintenant les coordonnées de Plücker une fois qu'on a justifié que l'opérateur $((pr_S) \circ w)$ est un opérateur a déterminant .

Définition 9.4.

On définit les coordonnées de Plücker par :

$$\begin{cases} \Pi_S(w) = det(pr_S \circ w) & si \;\; dimvirt(W) = cardvirt(S), \\ \Pi_S(w) = 0 & sinon \end{cases} .$$

Remarques 9.5.

1. Pour W' une autre base de W on a

$$\Pi_S(w') = \triangle_{ww'} \Pi_S(w),$$

où $\triangle_{ww'}$ est le déterminant de la matrice reliant w' et w qui est un déterminant fini (proposition 9.3.) . Ceci montre que les coordonnées de Plücker ne dépendent que de W.

2. Si A est un opérateur a déterminant, A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Proposition 9.6.

Les coordonnées de Plücker définssent un plongement holomorphe:

$$\Pi \;\; : \; Gr(H) \longrightarrow P(l^2(\Phi))$$

dans l'espace projectif de l'espace $l^2(\Phi)$ où

$$\Phi = \{S \subset \mathbb{Z} \; / \mathbb{N} \triangle S < \infty\}.$$

Preuve

Montrons d'abord que pour toute base admissible w on a:

$$(**) \qquad \sum_{S\in\Phi} \|\Pi_S(w)\|^2 < \infty$$

L'opérateur

$$w = w_+ \oplus w_- \ : \ z^{-d}H_+ \longrightarrow \quad H = z^{-d}H_+ \oplus z^{-d}H_-$$

avec $w_+ = pr_+ \circ w$ est un opérateur à déterminant, et $w_- = pr_- \circ w$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc $ww^* = ww^*{}_+ \oplus ww^*{}_-$ est un opérateur à déterminant qui est inversible d'où $det(w) \neq 0$. Donc pour montrer $(**)$ il suffit de montrer que

$$\sum_{S\in\Phi} \|\Pi_S(w)\|^2 = det(ww^*).$$

En effet, on va faire la démonstration pour les W de $Gr_0(H)$, et par densité on conclut pour les éléments de $Gr(H)$.

On a déjà montré que $w_+ - I$ est un opérateur de rang fini . Montrons maintenant que cet opérateur n'a qu'un nombre fini d'éléments matriciaux non nuls dans la base canonique de $z^{-d}H_+$.

$$w : z^{-d}H_+ \longrightarrow W \longrightarrow z^{-d}H_+$$

il existe $j \in \mathbb{Z}$ tel que $z^jH_+ \subset W \subset z^{-j}H_+$ ceci parce que W est dans $Gr_0(H)$. Supposons que W est le graphe de l'opérateur de Hilbert-Schmidt $T : H_S \longrightarrow (H_S)^0$. On sait que pour S, il existe l_0 dans $\mathbb{Z}$ tel que $s_k = k$ pour $k \geq l_0$. Soit l=sup(j, l_0) l'espace z^lH_+ est inclus dans z^jH_+, donc z^lH_+ est inclus dans W, soit L le suplémentaire orthogonale de z^lH_+ dans W, et soit $\{z^k\}_{k\geq l}$ la base canonique de z^lH_+ . Les éléments de cette base sont invariants par la projection orthogonale de W sur H_S. On peut compléter la base canonique de z^lH_+ par une base de L pour obtenir une base canonique de W.

Soit $\{w_k\}_{k\geq -d}$ une base canonique de W, dont les éléments pour $k \geq l$ coïncident avec les éléments $\{z^k\}_{k\geq l}$. Donc $(w_+ - I)(z^s) = 0$ pour $s \geq l$ ce qui montre que $(w_+ - I)$ a seulement un nombre fini d'éléments matriciaux non nuls .

Montrons maintenant que w_- a un nombre fini de ces éléments matriciaux non nuls . En effet, pour $k \geq$ sup$(l, 0)$, on a $w_-(z^k) = pr_- \circ w(z^k) = pr_-(w_k) = pr_-(z^k) = 0$ ce qui montre que w_- a un nombre fini d'élélments matriciaux non nuls . Dans ces conditions. $(**)$ se traduit par l'assertion suivante: si P et Q sont deux matrices $n \times m$ et$m \times n$ avec $n \leq m$ on a :

$$det(PQ) = \sum_S det(P_S) det(Q_S)$$

où S des sous ensembles de $\{1, 2 \ldots, m\}$ à n éléments et P_S, Q_S sont les sous matrices $n \times n$ de P et Q qui correspondent à S .

Pour montrer que Π est un plongement, on va considérer le cas des sous espaces W graphes des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_+ dans H_- . La base canonique $\{w_k\}_{k \geq 0}$ de W est donnée par :

$$w_q = z^q + \sum_{p<0} T_{pq} z^p.$$

Soit $s \in \Phi_0$, et soient $A = S - \mathbb{N}$ et $B = \mathbb{N} - S$. Ces deux ensembles ont le même cardinal .

La matrice de l'opérateur $pr_S \circ w$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} & & & & & 0 & \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \ddots \\ & & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

où M une sous matrice $n \times n$ de la matrice de l'opérateur T . Il est clair que le déterminant de $pr_S \circ w$ est égal au déterminant d'une sous matrice formée de T_{pq}. Ceci montre que les coordonnées de Plücker sont formées de tous les éléments matriciaux de l'opérateur T et les déterminants des sous matrices finies de la matrice de T, le reste des coordonnées est constituées de zéros . Ceci montre que cette application est un plongement analytique .

La stratification de $Gr(H)$, la décomposition cellulaire de $Gr_0(H)$ ainsi que celle de $Gr_0(H)$, de $Gr_\infty(H)$ et de $Gr_w(H)$, et les composantes connexes de $Gr(H)$ et de $Gr_0(H)$. sont décrites par les coordonnées de Plücker dans la proposition suivante :

Proposition 9.7.

1. $W \in U_S \iff \Pi_S(W) \neq 0$.
2. $W \in \Sigma_S \iff \Pi_S(W) \neq 0$ et $\Pi_{S'}(W) = 0$ quand $S' < S$.
3. $W \in C_S \iff \Pi_S(W) \neq 0$ et $\Pi_{S'}(W) = 0$ à moins que $S' \leq S$.
4. $W \in GL^d_{res}(H)(H_+) \iff$ il existe au moins un S dans Φ_d tel que $\Pi_S(W) \neq 0$.
5. $W \in T_d \iff W$ dans $Gr_0(H)$ et il existe au moins un S dans Φ_d tel que $\Pi_S(W) \neq 0$.
6. $W \in Gr_0(H) \iff \Pi_S(W) = 0$ sauf pour un nombre fini de S .
7. $W \in Gr_w(H) \iff r^{-l(S)}\Pi_S(W)$ est bornée pour tout S dans Φ et un $r < 1$.
8. $W \in Gr_\infty(H) \iff l(S)^m\Pi_S(W)$ est bornée pour tout S dans Φ , et pour tout m .

Preuve

1. Supposons W dans U_S, la projection orthogonale $pr_S : W \longrightarrow H_S$ est un isomorphisme . Soit w une base admissible de W . L'opérateur $pr_S \circ w$ est un opérateur inversible a déterminant donc $det(pr_S \circ w) \neq 0$ d'où Π_S (W)$\neq 0$.

Réciproquement : supposons $\Pi_S(W) \neq 0$, alors pour toute base admissible w de W, l'opérateur $pr_s \circ w$ est inversible, donc la projection orthogonale $pr_S : W \longrightarrow H_S$ est un isomorphisme, et la proposition (4.4.) nous montre que W est un élément de U_S .

2. Supposons W dans Σ_S, donc W est dans U_S, d'où $\Pi_S(W) \neq 0$. Soit maintenant S' un élément de Φ de même cardinal virtuel que S tel que $S' < S$, donc $S \not\leq S'$. Ceci montre que W n'appartient pas a $U_{S'}$ donc $\Pi_{S'}(W) = 0$ (D'près la proposition 4.4.).

Réciproquement: supposons $\Pi_S(W) \neq 0$. D'après l'assertion 1, on a $W \in U_S$ donc $S_W \leq S$, $s_{W_k} = s_k$ pour tout k, car sinon on aura $S_W < S$ qui entraine Π_{S_W}(W)$= 0$ ce qui est impossible, donc $S_W = S$ i.e W est dans Σ_S .

3. Supposons W dans C_S, donc W est dans U_S ce qui entraine Π_S(W)$\neq$0 . Soit S' un élément de Φ de même cardinal virtuel que S, on a $S' \not\leq S$ ou $S' \leq S$, donc $W \notin U_{S'}$ ou $S' \leq S$. d'où $\Pi_{S'}(W) = 0$ ou $S' \leq S$.

Réciproquement: supposons $\Pi_S(W) \neq 0$, et $\Pi_{S'}(W) = 0$ à moins que $S' \leq S$.

$\Pi_S(W) \neq 0$ donc $W \in U_S$ et par suite $S \leq S^W$. On ne peut pas avoir $S \not\leq S^W$ car sinon on aurait $\Pi_{S^W}(W) = 0$ ce qui est impossible parce que W est dans U_{S^W}, donc $S = S^W$ et par suite W est dans C_S .

4. Si W est dans $GL^d_{res}(H)(H_+)$, W est dans U_{S_W} et par suite $\Pi_{S_W}(W) \neq 0$.

Réciproquement: supposons qu'il existe un S dans Φ_d tel que $\Pi_S(W) \neq 0$. Ceci implique que W est dans U_S, et par suite $W \in GL^d_{res}(H)(H_+)$.

5. Si W est dans T_d, W est dans C_{S^W}, donc $W \in Gr_0(H)$ et $\Pi_{S^W}(W) \neq 0$.

Réciproquement: supposons que $W \in Gr_0(H)$ et qu'il existe un S dans Φ_d tel que $\Pi_S(W) \neq 0$. Ceci montre qu'il existe $S' \in \Phi_d$ tel que W soit dans $C_{S'}$ donc W est dans T_d .

6. Supposons W dans $Gr_0(H)$, on a montré dans la proposition 9.6. que pour chaque S dans Φ, le déterminant de l'opérateur $pr_S \circ w$ est donné par le déterminant d'une sous matrice finie de la matrice (T_{pq}) de l'opérateur T qui a pour graphe W . Comme W est dans $Gr_0(H)$, la matrice de T n'a qu'un nombre fini d'éléments matriciaux non nuls, donc la matrice de T n'a qu'un nombre fini de sous matrices finies inversibles, et par suite $\Pi_S(W) = 0$ pour presque tout S dans Φ .

Réciproquement: soit W un élément de $Gr(H)$. Supposons $\Pi_S(W) = 0$ sauf pour un nombre fini de S . Ceci montre que la matrice de T n'a qu'un nombre fini d'éléments matriciaux non nuls, ceci parce que tous les éléments T_{pq} figurent parmi les coordonnées de Plücker(voir démonstration de la proposition 9.6.), et on a W dans $Gr_0(H)$.

Pour le reste de la démonstration voir [PS] .

10. Lien topologique entre les grassmanniennes de dimension finie et infinie.

Dans ce paragraphe on se propose de trouver un lien topologique entre les grassmanniennes de dimensions finies et les grassmanniennes de dimensions infinies . Pour cela on prend la limite inductive des grassmanniennes de dimensions finies de H_- et la grassmannienne $Gr^0(H)$ définie par

$$Gr^0(H) = \cup_{0 \leq k} Gr^0_k(H)$$

où

$$Gr^0_k(H) = \{z^k H_+ \oplus E \quad / E \in \cup_{0 \leq n} Gr_n(z^k H_-)\}$$

et on construit un homéomorphisme entre elles .

Soit l'application

$$L : \cup_{0\leq k} \cup_{0\leq n} Gr_n(z^k H_-) \longrightarrow Gr^0(H)$$

définie par $L|_{\cup_{0\leq n} Gr_n(z^k H_-)} = L_k$ avec

$$L_k : \cup_{0\leq n} Gr_n(z^k H_-) \longrightarrow Gr_k^0(H)$$

qui à E associe $L_k(E) = z^k H_+ \oplus E$

Proposition 10.1.[S]

L'application L_k est une bijection .

Preuve :

Pour montrer que L_k est bijective il suffit de remarquer que son inverse $L_k{}^{-1}$ est l'application :

$$Gr_k^0(H) \longrightarrow \cup_{0\leq n} Gr_n(z^k H_-)$$

qui à W associe $W \cap z^k H_-$.

Proposition 10.2.[S]

L'application L_k est un homéomorphisme .

Preuve :

On va faire la démonstration pour $k = 0$.

Pour montrer que L_0 est un homéomorphisme, il suffit de montrer que l'image d'une base topologique de $\cup_{0\leq n} Gr_n(H_-)$ est une base topologique de $Gr_0^0(H)$.

La famille des ensembles $\{U_{(E,n)}/n \in \mathbb{N}$ et E dans $Gr_n(H_-)\}$ forme une base topologique de $\cup_{0\leq n} Gr_n(H_-)$ avec $U_{(E,n)} = \{E' \in Gr_n(H_-)/E' \cap E^0 = \{0\}\}$. De même, les ouverts $U_{H_+\oplus E} \cap Gr^0(H) = U_{H_+\oplus E} \cap Gr_0^0(H)$ forment une base topologique de $Gr^0(H)$ quand E parcourt $\cup_{0\leq n} Gr_n(H_-)$ (voir [S]) .

Montrons que $L(U_{(E,n)}) = U_{H_+\oplus E} \cap Gr^0(H)$. Soit E un élément de $Gr_n(H_-)$. Montrons que $U_{H_+\oplus E} \cap Gr^0(H) \subset L(U_{(E,n)})$. En effet, soit $H_+ \oplus E'$ un élément de $U_{H_+\oplus E} \cap Gr^0(H)$. On a donc l'égalité entre la dimension virtuelle de $H_+ \oplus E'$ et la dimension virtuelle de $H_+ \oplus E$. ce qui se traduit par l'égalité de la dimension de E' avec la dimension de E . De plus $pr_E(H_+ \oplus E') = pr_E(E') = E$. Ceci montre que l'application $pr_E : E' \longrightarrow E$ est un isomorphisme donc l'intersection de E' avec l'orthogonal de E est réduite à $\{0\}$, d'où la première inclusion .

Montrons maintenant l'autre inclusion.

En effet, soit $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H_+ . D'après ce qui précède la projection $pr_E : E' \longrightarrow E$ est un isomorphisme . Soit $\{e_i\}_{-n\leq i\leq -1}$ une base orthonormée de E, donc $\{pr_E{}^{-1}(e_i)\}_{-n\leq i\leq -1}$ est une base de E' . Posons $\psi(e_i) = pr_E{}^{-1}(e_i) - e_i$ qui est un élément de l'orthogonal de E et soit la famille $\{y_k\}_{k\geq -n}$ telle que $y_k = z^k$ si $k \in \mathbb{N}$ et $y_k = e_k$, sinon .

Il est clair que les éléments de la famille $\{y_k\}_{k\ \in\mathbb{N}\cup\{-n,\ldots\ldots,-1\}}$ forment une base orthonormée de $H_+ \oplus E$.

Soit l'opérateur T défini de $H_+ \oplus E$ dans son orthogonal, par la donnée des images des éléments de la base $\{y_k\}_{k\ \in\mathbb{N}\cup\{-n,\ldots\ldots,-1\}}$ de la façon suivante : $T(y_k) = 0$ pour k dans $\mathbb{N}$ et $T(y_k) = \psi(y_k)$ pour k dans $\{-n,\ldots\ldots,-1\}$. Montrons que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt .

En effet,

$$\begin{aligned}(\|T(y_k)\|^2)^{\frac{1}{2}} &= (\sum_{k=-n}^{k=-1} \|T(e_k)\|^2 + \sum_{k=0}^{k=\infty} \|T(z^k)\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{k=-n}^{k=-1} \|T(e_k)\|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\end{aligned}$$

Montrons maintenant que le graphe de T coïncide avec $H_+ \oplus E'$.

En effet, $H_+ \oplus E'$ n'est autre que la fermeture de l'espace engendré par

$$\{z^k, e_i + \psi(e_i)k \in\mathbb{N}, -n \leq i \leq -1\}.$$

Montrons la première inclusion .

Pour cela, il suffit de montrer que $vect(\{z^k, e_i + \psi(e_i)k \in\mathbb{N}, -n \leq i \leq -1\})$ est inclus dans le graphe de T.

En effet, soit

$$\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j + \psi(e_j))$$

un élément quelconque de $vect(\{z^k, e_i + \psi(e_i) k \in \mathbb{N}, -n \leq i \leq -1\})$.

$$\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j + \psi(e_j)) = (\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j)) + T(\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j))$$

implique que l'élément qu'on a pris dans $vect(\{z^k, e_i + \psi(e_i) k \in \mathbb{N}, -n \leq i \leq -1\})$ est aussi dans le graphe de T.

Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de montrer que le graphe de T restreint à $vect(\{z^k, e_i k \in \mathbb{N}, -n \leq i \leq -1\})$ est inclus dans $H_+ \oplus E'$.

En effet, soit

$$(\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j)) + T(\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j))$$

un élément du graphe de T.

$$(\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j)) + T(\sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j)) = \sum_{k=0}^{k=m} \lambda_k z^k + \sum_{j=-n}^{j=-1} \lambda_j(e_j + \psi(e_j))$$

est dans $H_+ \oplus E'$ ce qui achève la démonstration .

Corollaire 10.3.

L'application L est un homéomorphisme .

Proposition 10.4.

La grassmannienne $Gr_0(H)$ coïncide avec la grassmannienne $Gr^0(H)$.

Preuve

La démonstration de cette proposition découle de ce qui précède .

11. Groupe général linéaire restreint, homotopie et idéaux de Schatten .

Dans ce paragraphe on précise la généralisation des définitions de la grassmannienne et du groupe général linéaire restreint, cette généralisation est donnée par :

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert de dimensions infinies séparables . Pour tout $p \geq 1$, on définit l'espace $L_p = L_p(H_1, H_2)$ comme étant l'espace des opérateurs linéaires $A : H_1 \longrightarrow H_2$ tels que

$$\|A\|_p^p = tr(A^*A)^{\frac{p}{2}}$$

Pour $p = 1$ et $H_1 = H_2$, on obtient l'espace des opérateurs nucléaires, et pour $p = 2$ on obtient l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Les espaces L_p muni de la norme $\| \quad \|_p$ sont des espaces linéaires complets. Les propriétés principales des idéaux de Schatten sont données par

Proposition 11.1. [Si]

Soient H_1, H_2 et H_3 trois espaces de Hilbert de dimensions infinies séparables.

i) Soient $A \in L_p(H_1, H_2)$, $B \in L(H_2)$ et $C \in L(H_1)$ alors le produit BAC est un élément de $L_p(H_1, H_2)$.

ii) Soient p, q, r trois entiers naturels tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$. Si A est un élément de $L_p(H_1, H_2)$ et B est un élément de $L_q(H_2, H_3)$ alors BA est dans $L_r(H_1, H_3)$.

iii) Les espaces L_p vérifient

$$L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset .....$$

et pour $p < q$ l'espace L_p est dense dans l'espace L_q muni de la norme $\| \quad \|_q$.

$L(H)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés de H dans H .

Preuve:

voir [Si]

Soit $H = H_+ \oplus H_-$ un espace de Hilbert séparable, $H\pm$ sont des sous espaces de H fermés et de dimension infinie . La définition suivante est une généralisation de la définition du groupe général linéaire restreint .

Définition 11.2.

Pour tout p élément de $\mathbb{N}^*$. on définit le groupe $GL_p(H)$ comme ensemble des opérateurs A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{H=H_+\oplus H_-}$$

linéaires bornés et inversibles, où $a : H_+ \longrightarrow H_-$, $d : H_- \longrightarrow H_-$. $b : H_- \longrightarrow H_+$ et $c : H_+ \longrightarrow H_-$ sont des opérateurs linéaires tels que b, c soient des éléments de L_{2p} .

Remarque 11.3.

1) Les opérateurs a et d sont des opérateurs de Fredholm, d'près la démonstration de la proposition 1.2. .

2) On peut définir une métrique sur GL_p par :

Soient A, A' deux éléments de GL_p .

$$d(A, A') = \|a - a'\| + \|d - d'\| + \|b - b'\|_{2p} + \|c - c'\|_{2p}.$$

$\|\ \|$ est la norme d'opérateurs usuelle . Elle est utilisée pour les blocs de la diagonale . Il est clair que cette topologie donne au groupe GL_p une structure de groupe de Lie-Banach modelé sur l'espace de Banach $L(H_+) \oplus L_{2p}(H_+, H_-) \oplus L(H_-) \oplus L_{2p}(H_-, H_+)$.

3) La chaine de plongements d'idéaux de Schatten conduit à

$$GL_0 \subset GL_1 \subset \ldots\ldots \subset GL_\infty$$

où le groupe GL_0 est constitué de tous les opérateurs

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{H=H_+\oplus H_-}$$

tels que les blocs b, c soient des opérateurs de rang fini. Pour $p < q$ le groupe GL_p est dense dans GL_q .

Proposition 11.4.

Soit $Fred(H_+)$ l'espace des opérateurs de Fredholm de H_+ dans H_+, l'application

$$\pi : GL_p \longrightarrow Fred(H_+)$$

qui à un opérateur A associe l'opérateur a est une équivalence d'homotopie .

Preuve :

Soit B le sous groupe de GL_p constitué de tous les éléments de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

B est contractile . La projection canonique de GL_p sur GL_p/B est une équivalence d'homotopie Cette projection peut s'écrire de la manière suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

donc GL_p/B est un sous ensemble ouvert de $Fred(H_+) \times L_2(H_+, H_-)$. L'application

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \longmapsto a$$

est aussi une équivalence d'homotopie, ceci montre que l'application π est elle-même une équivalence d'homotopie .

On aura besoin d'une autre chaine infinie de groupes linéaires définie par

$$GL^0 \subset GL^1 \subset GL^2 \subset .... \subset GL^{\infty}$$

où GL^p est le groupe de tous les opérateurs A linéaires inversibles d'un espace de Hilbert de dimension infinie séparable tel que $A - I \in L_p$. GL^p est muni d'une topologie donnée par la métrique

$$d(A, A') = \|A - A'\|_p$$

pour tout A et A' dans GL^p .

Il est clair que GL^p est un groupe de Lie Banach modelé sur L_p .

Si A est un élément de GL_P^0, l'indice de a est nul . Il existe un opérateur t de rang fini tel que $q = t - a$ soit un opérateur inversible, et par conséquent pour tout A dans GL_p^0, il existe un opérateur q dans $GL(H_+)$ tel que $aq^{-1} - I$ soit dans L_p . Ceci nous permet d'énoncer la définition suivante :

Définition 11.5.

ζ_p est le sous groupe des opérateurs (A, q) de $GL_{2p} \times GL(H_+)$ tel que $a - q$ soit un élément de GL_p .

ζ_p est muni d'une topologie définie par

$$\| (A, q) \| = \| a \| + \| d \| + \| b \|_{2p} + \| c \|_{2p} + \| a - q \|_p.$$

Le groupe GL^p agit à droite sur le groupe ζ_p . Son action est donnée par

$$(A, q)t = (A, qt)$$

Le quotient ζ_p / GL^p n'est autre que le groupe GL_p^0, et comme l'action donnée précédemment est libre, le groupe ζ_p peut être vu comme un GL^p-fibré principal sur GL_p^0.

Proposition 11.6.

Le groupe ζ_p est contractile .

Preuve

Cette démonstration est une adaptation de la démonstration dans le cas $p = 1$ donnée dans [PS] .

En effet, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\zeta_p \arrow[r, "L"] \arrow[d] & GL(H_+) \times L_p(H) \arrow[d, "T"'] \\
GL_p^0 \arrow[r, "h"] & Fred^0(H_+)
\end{tikzcd}$$

où $L(A, q) = (q, aq^{-1} - 1)$, $h(A) = a$ et $T(q, t) = (1 + t)q$ et $Fred^0(H_+)$ est l'espace des opérateurs de Fredholm d'indice nul. Les deux applications verticales sont des fibrations de fibre le groupe Γ_p des opérateurs A tels que $A - I \in L_p$. Le diagramme précédent est un diagramme cartésien i.e la fibration de gauche provient de la fibration de droite . Il est clair que l'application h est une équivalence d'homotopie, ce qui entraine que L est elle même une équivalence d'homotopie, et $GL(H_+) \times L_p(H)$ est contractile (d'aprés le théorème de Kuiper voir [Ku]) ce qui achève la démonstration .

Il découle de cette proposition que les groupes d'homotopies sont donnés par

$$\pi_i(GL_p^0) \cong \pi_{i-1}(GL^p), \quad i = 1, 2, \ldots$$

et

$$\pi_i(GL^p) \cong \pi_i(GL(n, \mathbb{C})), \quad i < 2n$$

d'après les travaux de Palais (voir [P]), et donc $\pi_0(GL_p) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(GL_p^0) = 0$ et $\pi_2(GL_p) = \mathbb{Z}$. Le théoréme de Hurewicz montre que le groupe $H^2(GL_p^2,\ \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

On a vu dans le paragraphe 1. que pour $m < n$ des entiers naturels, la définition de la grassmannienne

$$Gr(m, n) = GL(n, \mathbb{C})/B$$

se généralise à la dimension infinie par

$$Gr(H) = GL_{res}(H)/B$$

où $B = U(H_+) \times U(H_-)$ est le stabilisateur de H_+ . Cette dernière généralisation est elle-même généralisée par

$$Gr_p(H) = GL_p(H)/B_p$$

où B_p est le stabilisateur de H_+ . L'analogue de la définition de la grassmannienne donnée au début du paragraphe 1. est donnée par la

Définition 11.7.

La grassmannienne $Gr_p(H)$ est l'ensemble des sous espaces W de H fermés de dimension infinie tel que

i) La projection orthogonale positive $pr_+|_W : W \longrightarrow H_+$ soit un opérateur de Fredholm .

ii) La projection orthogonale négative $pr_-|_W : W \longrightarrow H_-$ soit un élément de L_{2p} .

Ces grasssmanniennes sont des variétés modelées sur les idéaux de Schatten L_{2p}. On peut aussi facilement remarquer que la chaine d'inclusions

$$GL_0 \subset GL_1 \subset GL_2 \subset ....$$

conduit aux plongements naturels suivants

$$Gr_0 \subset Gr_1 \subset Gr_2 \subset ...... \subset Gr_\infty,$$

avec Gr_p simplement connexe et dense dans Gr_q pour $p < q$, et le groupe triangulaire B_p est contractile. La topologie de Gr_p est similaire à celle de GL_p. L'équivalence d'homotopie $GL_p \cong GL_q$ entraine l'équivalence d'homotopie $Gr_p \cong Gr_q$ pour tous p, q . Ceci est justifié par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
B_p \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & GL_p \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & GL_p/B_p \arrow[d] \\
B_q \arrow[r] & GL_q \arrow[r] & GL_q/B_q
\end{tikzcd}$$

duquel on déduit que le seconde groupe d'homotopie est égal à $\mathbb{Z}$, ce qui entraine que le second groupe de cohomologie de Gr_p pour tout p coïncide avec $\mathbb{Z}$. De même on peut voir que les composantes connexes de Gr_p sont les sous ensembles des éléments de Gr_p tels que les projections orthogonales positives ont le même indice de Fredholm. D'une manière plus générale, tous les résultats énoncés dans les paragraphes précédents pour $Gr(H)$ sont valables pour $Gr_p(H)$ en utilisant presque les mêmes arguments .

12. Extension centrale de $GL_{res}(H)$ et fibré déterminant sur la grassmannienne.

Dans cette section, on introduit la notion d'extension centrale de $GL_{res}(H)$ et la notion de fibré en droite déterminant sur la grassmannienne qui sont deux notions très liées, les éléments des fibres du fibré en droite déterminant sont donnés par l'expression formelle :

$$\lambda w_{-d} \wedge w_{-d+1} \wedge w_{-d+2} \wedge ...... = [\lambda, w]$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $w = \{w_k\}$ une base admissible de W .

En dimension finie, les fibres de ce fibré en droite déterminant sont les espaces $det(W) = \bigwedge^k(W)$ pour tout W dans $Gr(H)$, et les éléments de $\bigwedge^k(W)$ sont donnés par l'expression

$$\lambda w_1 \wedge w_2 \wedge .... \wedge w_k$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, et $\{w_i\}$ une base de W . On a déjà vu que la matrice t qui relie deux bases admissibles $\{w_i\}$ et $\{w_i'\}$ de W est un opérateur a déterminant et

$$\lambda w_0 \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge ... = \lambda det(t) w_0' \wedge w_1' \wedge w_2' \wedge ...$$

donc $[\lambda, w]$ est identifié à $[\lambda det(t), w']$, où $t = \{t_{ij}\}$ et $w_i = \sum t_{ij} w_j'$.

Il est clair que la fibre $det(W)$ est un espace vectoriel complexe de dimension un, et l'union des fibres $det(W)$ pour W dans $Gr(H)$ est un fibré en droite déterminant . En effet, pour tout $S \in \Phi$ l'ensemble ouvert U_S est identifié à l'ensemble des graphes des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_S dans H_S^0. Le graphe W_T de l'opérateur T a une base admissible $\{w_i\}$, où

$$w_i = z^q + \sum_{p \notin S} T_{pq} z^p \quad (*).$$

où $s_i = q$ et $S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, s_{-d+2}, ...\}$, et la partie de det au dessus de U_S est identifiée à $\mathbb{C} \times U_S$ par

$$(\lambda, W_T) \in \mathbb{C} \times U_S \longleftrightarrow [\lambda, w] \in det$$

où w est donnée par $(*)$.

les fonctions de transition entre les trivialisations locales sont données par :

Soit W_T le graphe de l'opérateur $T : H_S \longrightarrow H_S^0$. Supposons que W_T appartient à $U_S \cap U_{S'}$. Il existe $T' : H_{S'} \longrightarrow H_{S'}^0$ un autre opérateur de Hilbert-Schmidt tel que $W_T = W_{T'}$.

D'après les paragraphes précédents $T' = (c + dT)(a + bT)^{-1}$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est la matrice qui relie S et S' .Donc

$$(\lambda, W_T) \in \mathbb{C} \times U_S \longrightarrow (\lambda', W_{T'}) \in \mathbb{C} \times U_{S'}$$

où $\lambda' = \lambda det(a + bT)$ est une fonction analytique en (λ, T) et on obtient un fibré en droite déterminant holomorphe.

La grassmannienne $Gr(H)$ est l'espace homogène de l'action du groupe $GL_{res}(H)$. Il est naturel de chercher une action qui couvre cette dernière et qui agit sur le fibré en droite déterminant. En dimension finie le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ agit sur la grassmannienne $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ et sur le fibré en droite déterminant associé, cette action est décrite par

Soient A un élément de $GL_n(\mathbb{C})$ et $w_1 \wedge .... \wedge w_k$ un élément de $det(W)$, l'action de A sur $w_1 \wedge ... \wedge w_k$ est donnée par l'expression $Aw_1 \wedge ..... \wedge Aw_k$ qui est un élément de $det(AW)$.

En dimension infinie, le groupe qui correspond à $GL_n(\mathbb{C})$ et qui agit sur $Gr(H)$ n'est pas le groupe général linéaire $GL(H)$ entier, mais le sous groupe $GL_{res}(H)$ d'où la terminologie groupe général linéaire restreint . L'action de ce sous groupe sur $Gr(H)$ n'est pas automatiquement induite sur *det* comme en dimension finie, ceci est dû au fait que l'image d'une base admissible d'un élément W de la grassmannienne par un élément A de $GL_{res}(H)$ n'est pas toujours une base admissible de AW . Pour remédier à ce problème on fait appel à la notion d'extension centrale de groupes plus exactement à une extension centrale de $GL_{res}(H)$ dont l'action sur *det* couvre l'action de $GL_{res}(H)$ sur $Gr(H)$.

Rappelons donc quelques généralités utiles pour la suite.

Soit G un groupe topologique, et soit $K \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow G$ une suite exacte .

Définition 12.1.

$\widehat{G}$ est dit extension centrale de G, si et seulement si le centre de $\widehat{G}$ contient K et le groupe quotient $\widehat{G}/K$ est isomorphe à G.

On rappelle aussi la définition d'une représentation unitaire projective d'un groupe G.

Définition 12.2.

U est dite représentation unitaire projective du groupe G si pour tout g dans G, l'opérateur unitaire $U(g) : H \longrightarrow H$ verifie

$$U(g)U(g') = C(g, g')U(gg')$$

pour tout g et g' dans G, et où $C(g, g')$ est un nombre complexe de module un .

La fonction $C : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ est appelée cocycle de la représentation .

Pour obtenir une extension centrale de $GL_{res}(H)$, on commence d'abord par exhiber une extension

$$K \longrightarrow \zeta \longrightarrow GL^0_{res}(H)$$

de la composante connexe de l'identité de $GL_{res}(H)$ par le sous groupe K des opérateurs

$$q : H_+ \longrightarrow H_+$$

a déterminant et qui sont inversibles . Le sous groupe K est muni de la topologie définie par la norme trace . On a déjà défini dans le paragraphe 11. le goupe ζ_p pour un p quelconque. Pour $p = 1$

$$\zeta_1 = \{(a, q) \in GL_{res}(H) \times GL(H_+)/a - q \in L_1(H)\}.$$

La composante connexe de l'identité $GL^0_{res}(H)$ est le sous groupe de $GL_{res}(H)$ des opérateurs

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tel que $Ind(a) = 0$. Il existe un opérateur t de rang fini tel que $q = a + t$ soit un opérateur inversible . Ceci montre que le sous groupe ζ_1 est une extension de $GL^0_{res}(H)$ et on a la fibration suivante

$$K \longrightarrow \zeta_1 \longrightarrow GL^0_{res}(H)$$

cette dernière fibration génère une suite exacte longue de groupes d'homotopies donnée par

$... \longrightarrow \pi_n(K) \longrightarrow \pi_n(\zeta_1) \longrightarrow \pi_n(GL^0_{res}(H)) \longrightarrow \pi_n(K).... \longrightarrow \pi_(K) \longrightarrow \pi_1(\zeta_1) \longrightarrow$
$\pi_1(GL^0_{res}(H)) \longrightarrow \pi_0(K) \longrightarrow \pi_0(\zeta_0) \longrightarrow \pi_0(GL^0_{res}(H))$

et comme ζ_1 est contractile on a

$$0 \longrightarrow \pi_n(GL^0_{res}(H)) \longrightarrow \pi_{n-1}(K) \longrightarrow 0$$

ce qui entraine

$$\pi_i(GL^0_{res}(H)) \cong \pi_{i-1}(K).$$

Dans le paragraphe précédent on a donné un certain nombre de propriétés du groupe ζ_p qui restent valable pour le groupe ζ_1 telle que par exemple le fait que ζ_1 n'est pas un sous groupe topologique $GL_{res}(H) \times GL(H_+)$, et ζ_1 muni de la topologie induite par le plongement donné par l'application qui à (A, q), associe $(A, a - q)$ a une structure de groupe de Lie Banach . Cette dernière propriété découle du fait que ζ_1 est un ouvert de $GL_{res}(H) \times L_1(H)$. Notre but est d'obtenir une extension centrale de $GL^0_{res}(H)$ par $\mathbb{C}^*$, à partir de ζ_1 . Pour cela on utilise l'homomorphisme déterminant $det : K \longrightarrow \mathbb{C}^*$. Cette extension est tout simplement ζ_1/N où N est le noyau de l'homomophisme det, et on a la fibration suivante

$$\mathbb{C}^* \cong K/N \longrightarrow \zeta_1/N \longrightarrow GL^0_{res}(H).$$

En fait, on cherche à avoir une extension centrale de $GL_{res}(H)$. Soit σ un élément de $GL_{res}(H)$ qui s'ecrit

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

suivant la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, tel que l'indice de a soit égal à un . Le sous groupe de $GL_{res}(H)$ engendré par σ est identifié à $\mathbb{Z}$, et $GL_{res}(H)$ est un produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ avec la composante connexe $GL^0_{res}(H)$, et l'action de σ sur $GL^0_{res}(H)$ est donnée par l'application $A \longrightarrow \sigma A \sigma^{-1}$. Ce produit semi-direct est définie par

$$(n, A)\,(n', A') = (n + n', A\sigma^n A'\sigma^{-n}).$$

On choisit σ unitaire, par exemple $\sigma(z^k) = z^{k+1}$ pour tout k dans $\mathbb{Z}$. L'automorphisme de $GL^0_{res}(H)$ dans $GL^0_{res}(H)$ qui à A associe $\sigma A \sigma^{-1}$ est couvert par l'endomorphisme $\widehat{\sigma}$ de ζ_1 dans ζ_1 qui à (A, q) associe $(\sigma A \sigma^{-1}, q_\sigma)$ où

$$q_\sigma = \begin{cases} \sigma q \sigma^{-1} & sur \;\; \sigma(H_+) \\ 1 & sur \;\; H_+ \ominus \sigma(H_+) \end{cases}.$$

L'extension centrale $\widehat{GL_{res}}(H)$ du groupe $GL_{res}(H)$ tout entier est donnée par le produit semi-direct suivant

$$\widehat{GL_{res}}(H) = \mathbb{Z} \ltimes \widehat{GL^0_{res}}(H)$$

où l'action de $\mathbb{Z}$ sur $GL^0_{res}(H)$ est définie par l'action du générateur σ .

Théorème 12.3.[PS]

L'action de $GL_{res}(H)$ sur $Gr(H)$ est couvert par une action de $\widehat{GL_{res}}(H)$ sur le fibré en droite déterminant .

Preuve

Considérons au départ la composante connexe $Gr^0 = GL^0_{res}(H)(H_+)$ constituée des espaces W de $Gr(H)$ de dimension virtuelle nulle, une base admissible de W est un isomorphisme

$$w : H_+ \longrightarrow W$$

telle que

$$w_+ : H_+ \longrightarrow H_+$$

soit un opérateur à déterminant . On a vu que le sous groupe ζ_1 est l'ensemble des paires (A, q) tel que aq^{-1} soit un opérateur a déterminant et où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On définit une action de ζ_1 sur l'ensemble des bases admissibles par

$$(A, q).w = Awq^{-1}.$$

Il est clair que $(Awq^{-1})_+ = aw_+q^{-1} + bw_-q^{-1}$ est un opérateur à déterminant ce qui montre que cette action est bien définie, et par suite l'action du sous groupe ζ_1 sur det est définie de la façon suivante

$$(A, q).[\lambda, w] = [\lambda, (A, q)w].$$

Le sous groupe N de ζ_1 des paires $(1, q)$ tel que $det(q) = 1$ agit d'une manière triviale sur det . Cette action nous donne une action de ζ_1/N sur det, où ζ_1/N est la composante connexe de l'identité de $\widehat{GL_{res}}(H)$.

Pour faire agir $\widehat{GL^0_{res}}(H)$ sur la partie de det au dessus de Gr^d sous ensemble de $Gr(H)$ des W de dimension virtuelle d, on définit l'automorphisme $\widehat{\sigma}$ pour couvrir l'automorphisme $A \longrightarrow \sigma A \sigma^{-1}$ de $GL^0_{res}(H)$ où l'application $\sigma : H \longrightarrow H$ est donnée par la multiplication par z . L'action de $\widehat{A}$ élément de $\widehat{GL^0_{res}}(H)$ sur det/Gr^d est donnée par l'action de $\sigma^{-d}\widehat{\sigma}^d\widehat{A}\sigma^d$, où $\sigma : det \longrightarrow det$ est définie par

$$\sigma[\lambda, w] = [\lambda, \sigma w].$$

Comme $\widehat{GL_{res}}(H)$ est le produit semi-direct de $\widehat{GL^0_{res}}(H)$ par le sous groupe cyclique engendré par σ, on a donc une action de $\widehat{GL_{res}}(H)$ sur det .

DEUXIEME PARTIE

GRASSMANNIENNES , GROUPES DE LACETS

ET

OPERATEURS VERTEX

Introduction.

Dans la deuxième partie on n'étudie pas réellement les grassmanniennes, mais des applications de cette théorie, ainsi que le lien des groupes de lacets au groupe général linéaire restreint avec les grassmanniennes . On s'intéresse ici à l'utilisation des grassmanniennes dans la résolution de certaines équations non linéaires telles que l'équation KP, l'équation KdV, et des réductions de l'équation KP et ... . Mikio Sato et Yasuko Sato ont utilisé le plongement et les coordonnées de Plücker pour construire des solutions de l'équation KP, en transformant une équation non linéaire en un système infini d'équations linéaires. Le principe de cette transformation est fondé sur l'interprétation du système KP non linéaire quand il est écrit sous forme d'identité de Hirota en disant que l'élément W de la grassmanienne $Gr(H)$ appartient à l'orbite du vecteur vacuum de l'espace de Fock sous l'action de l'extension centrale $\widehat{GL_{res}}(H)$ du groupe général linéaire restreint . Ceci se traduit par un système linéaire de coordonnées de Plücker de W . Ces relations donnent les équations de la hiérarchie KP. L'action de l'extension centrale $\widehat{GL_{res}}(H)$ est utilisée pour construire d'autre solutions de la hiérarchie KP . Pour plus de détails voir [M]. L'introduction des opérateurs vertex permet de donner les solutions de la heirarchie KP explicitement. Ces opérateurs agissent sur ce qu'on appelle la fonction tau introduite par l'école de Kyoto voir [SS] et [DJKM] . Cette fonction est liée aux éléments de la grassmannienne $Gr(H)$. On étudie ici l'équivalent de l'action de l'opérateur vertex, qui agit sur les éléments de la grassmannienne .

Dans le premier paragraphe on donne des généralités sur les groupes de Lie de dimension infinie . On rappelle au départ quelques propriétés du groupe de Lie $\mathcal{C}(X, G)$ des applications continues de l'espace compact X dans le groupe de Lie G de dimension finie, $\mathcal{C}(X, G)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme . On précise aussi la structure différentiable de ce groupe et par suite sa structure de groupe de Lie . On s'intéresse aussi au groupe $\mathcal{C}^\infty(S^1, G)$ des applications différentiables, appelé groupe des lacets dans G, est noté LG . Les ouverts de l'atlas associé à LG sont définis de la même manière que les ouverts de l'atlas associé à $\mathcal{C}(X, G)$, LG est muni de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées partielles de tout ordre . Cette topologie donne à LG une structure d'espace topologique séparable métrisable complet, et non pas une structure d'espace de Banach . L'espace $\mathcal{C}^\infty(X, G)$, pour X compact, est un groupe de Lie de dimension infinie dont l'algèbre de Lie associée est l'espace $C^\infty(X, g)$ où g est l'algèbre de Lie associée à G. On exhibe aussi dans ce paragraphe quelques sous groupes de LG, tels que le sous groupe $L_{an}G$ des lacets analytiques-réels, le sous groupe $L_{rat}G$ des lacets rationnels et le sous groupe $L_{pol}G$ des lacets polynômiaux .

Dans le paragraphe 2, on travaille avec l'espace de Hilbert $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. Soit $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des lacets continus de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$, $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $H^{(n)}$ par multiplication d'opérateurs, c'est à dire si γ est une fonction de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$, l'opérateur M_γ correspondant à cette action est défini par $M_\gamma f = \gamma f : z \mapsto \gamma(z)f(z)$. Les opérateurs M_γ commutent avec l'opérateur M_z, opérateur de multiplication par la fonction scalaire $z = e^{i\theta}$, mais $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas l'ensemble de tous les éléments de $GL(H^{(n)})$ qui commutent avec l'opérateur M_z. Un théorème dû à Pressley-Segal dans [PS] dont on reprend la démonstration nous donne l'ensemble des opérateurs de $GL(H^{(n)})$ qui commutent avec M_z, et qui est $L_{meas}GL_n(\mathbb{C})$ groupe des applications bornées mesurables de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$. On donne aussi une démonstration de la proposition 2.3 dans le cas de n quelconque, du à Segal-Wilson [SW] dans le cas $n = 1$ et qui nous donne l'inclusion des lacets continuement différentiables dans le groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H^{(n)})$. Ceci nous donne le lien entre le groupe des lacets LG et le groupe général linéaire restreint $GL_{res}(H^{(n)})$.

On munit $GL_{res}(H^{(n)})$ de la topologie définie par la norme suivante :

Soit A un opérateur de $H^{(n)}$ dans $H^{(n)}$ borné

$$\|A\|_J = \|A\| + \|[A, J]\|_2.$$

où $\| \ \|$ est la norme d'opérateurs et $\| \ \|_2$ est la norme de Hilbert-Schmidt .

La topologie de $LGL_n(\mathbb{C})$ induite par $GL_{res}(H^{(n)})$ est donnée par

Soit $\gamma = \sum \gamma_k z^k$ une fonction sur S^1, à valeurs matricielles; alors la norme de Hilbert-Schmidt du commutateur $[M_\gamma, J]$ est donnée par

$$\|\gamma\|_{2,\frac{1}{2}} = \{\sum |k| \ \|\gamma_k\|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci prouve que le groupe des lacets $LGL_n(\mathbb{C})$ n'est pas un sous groupe topologique de $GL_{res}(H^{(n)})$.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Banach des fonctions γ sur S^1 mesurables, et à valeurs matricielles telles que

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_\infty + \|\gamma\|_{2,\frac{1}{2}} < \infty$$

(où $\|\ \|_\infty$ est la norme de L^∞). Le groupe $GL_n(\mathcal{A})$ noté $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C}\ )$ est un sous groupe de Lie Banach, ceci nous permet de dire que $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C}\ )$ est le sous groupe de $GL_{res}(H^{(n)})$ des éléments qui commutent avec l'opérateur de multiplication M_z .

Dans le paragraphe 3, on introduit les modèles grassmanniens du sous groupe ΩU_n des lacets γ tels que $\gamma(1) = 1$. On a déjà vu que si γ est un lacet dans $GL_n(\mathbb{C}\ )$ continuement différentiable, l'opérateur de multiplication M_γ est un élément de $GL_{res}(H^{(n)})$, donc le groupe $LGL_n(\mathbb{C}\ )$ agit sur la grassmannienne. L'ensemble des éléments de la grassmannienne $Gr(H^{(n)})$ qui représentent les modèles grassmanniens des groupes de lacets est donné par $Gr^{(n)}$ sous ensemble fermé de $Gr(H^{(n)})$ des sous espaces W tels que $zW \subset W$. On rappelle aussi le théorème 3.2, où Pressley et Segal montrent dans [PS] que le sous groupe unitaire $L_{\frac{1}{2}}U_n$ de U_{res} agit transitivement sur $Gr^{(n)}$. Ils montrent aussi que le stabilisateur de H_+ est le groupe U_n des lacets constants, ce qui permet d'écrire $\Omega_{\frac{1}{2}}U_n = L_{\frac{1}{2}}U_n/U_n$ et de l'identifier à la grassmannienne $Gr^{(n)}$. La proposition 3.4, nous donne les modèles grassmanniens des groupes de lacets .

Dans le paragraphe 4, on donne la définition d'un opérateur pseudo-différentiel, d'une fonction d'onde et son adjoint, d'une fonction tau, de l'identité bilinéaire qui permet de définir la fonction tau et l'opérateur vertex, ces définitions sont données d'une manière formelle, on cite aussi quelques exemples concernant le calcul du produit de deux opérateurs pseudo-différentiels, ce produit est donné par la règle de Leibnitz . On introduit aussi dans ce paragraphe la hiérarchie KP, et on donne le théorème fondamental (théorème et définition 4.3) qui donne cette hiérarchie et la définition de la fonction tau, les fonctions d'ondes, des opérateurs d'ondes et de l'identité bilinéaire . A la fin de ce paragraphe, on donne un théorème énoncé et démontré par M.Sato et Y.Sato dans [SS] qui donne les fonctions d'ondes en fonction de tau .

Dans le paragraphe 5, on introduit l'algébre de Clifford $A(U)$ de l'espace vectoriel U défini comme somme directe de deux espaces V et V^* de dimension infinie, avec $V = \bigoplus_{j\in\ \mathbb{Z}} \mathbb{C}\ \psi_j$ et $V^* = \bigoplus_{j\in\ \mathbb{Z}} \mathbb{C}\ \psi_j^*$. Cette algébre dite de Clifford est définie comme quotient de l'algèbre non commutative libre sur U par les relations

$$[w_1, w_2]_+ = (w_1|w_2)$$

où $[\ldots]_+$ est l'anticommutateur défini par $[w_1, w_2]_+ = w_1w_2 + w_2w_1$, le produit symétrique $(.|.)$ est défini par

$$(\psi_n|\psi_m) = (\psi_n^*|\psi_m^*) = 0$$

et

$$(\psi_n|\psi_m^*) = \delta_{m,n}.$$

L'espace U est décomposable en $U = U_{cr} \oplus U_{an}$ où U_{an} est le sous espace annhilation défini par

$$U_{an} = \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\ \psi_n \oplus \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\ \psi_n^*$$

et U_{cr} est le sous espace création défini par

$$U_{cr} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\ \psi_n \oplus \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\ \psi_n^* \qquad .$$

Comme espace vectoriel, l'algébre de Clifford $A(U)$ est isomorphe à l'espace

$$\wedge^\infty U = \bigoplus_{j\geq 0} \wedge^j U.$$

Ceci nous permet de définir l'espace de Fock fermionique $F = F(U_{an} \oplus U_{cr})$ par

$$F = A(U)/A(U)U_{an}$$

où $A(U)U_{an}$ est un idéal à gauche de $A(U)$. Le vecteur vacuum parfait est donné par

$$|vac>= 1\ mod\ A(U)U_{an}.$$

De la même manière, on définit l'espace de Fock dual par

$$F^* = A(U)/U_{cr}A(U)$$

et le vecteur vacuum dual est égal à 1 modulo $U_{cr}A(U)$. Une base de F est donnée par les vecteurs

$$\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi_{i_1}^*....\psi_{i_r}^*|vac>$$

où $j_1 > .... > j_s \geq 0 > i_1 > .... > i_r$. Une base de l'espace de Fock dual F^* est donnée par les vecteurs

$$< vac|\psi^*_{i_1}.....\psi^*_{i_r}\psi_{j_1}.....\psi_{j_s}$$

où $i_1 > .... > i_r \geq 0 > j_1 > ... > j_s$. Une identification naturelle de F^* à F est donnée par

$$< vac|\psi_{j_s}.....\psi_{j_1}\psi^*_{i_r}....\psi^*_{i_1} \longleftrightarrow \psi_{i_1}....\psi_{i_r}\psi^*_{j_1}....\psi^*_{j_s}|vac >$$

L'espace F^* n'est pas le dual de F . L'identification précédente de F à F^*, avec un produit hermitien sur F nous permet d'obtenir le dual de F comme une complétion de F^*. Quand F est muni du produit hermitien $< .|. >$ tel que la base de F donnée précédemment soit orthonormée, on obtient (proposition 5.2.1) $(\psi_i)^* = \psi^*_i$.

Dans le paragraphe 6, on introduit le produit extérieur infini pour faire le lien avec les espaces de Fock fermioniques . On définit un autre espace L comme espace vectoriel engendré par le produit extérieur infini des éléments de V suivants

$$\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3}...... \qquad (i_j > i_{j+1})$$

pour lesquels il existe un entier d tel que $i_n = -n + d$ pour n assez grand . L'espace L est isomorphe à F, cet isomorphisme est donné par

$$|vac > \longleftrightarrow \psi_{-1} \wedge \psi_{-2} \wedge \psi_{-3} \wedge ....$$

$$\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}.....\psi^*_{i_r}|vac > \longleftrightarrow (-1)^{i_1+...+i_r+1}\psi_{j_1} \wedge .... \wedge \psi_{j_s} \wedge \psi_{-1} \wedge ...\widehat{\psi_{i_1}} \wedge ..... \wedge \widehat{\psi_{i_r}} \wedge ....$$

On définit un autre espace vectoriel F_0 utile dans la suite . F_0 est un sous espace vectoreil de F, défini à partir de la base de F donnée précédemment en prenant $r = s$ et

$$F_0 = vect(\psi_{j_1}....\psi_{j_r}\psi^*_{i_1}....\psi^*_{i_r}|vac >)$$

Le sous espace F_0 est isomorphe à l'espace L_0 engendré par les produits extérieurs infinis suivants

$$\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge ....$$

où $i_j > i_{j+1}$ et $i_n = -n$ pour n assez grand . On utilise le même procédé pour définir l'espace dual F^*_0 . L'application qui donne l'identification de F^*_0 à F_0 donnée précédemment devient

$$....\psi_{j_2} \wedge \psi_{j_1} \wedge \psi_{j_0} \longleftrightarrow \psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge \psi_{i_{-3}} \wedge .... \quad (*)$$

où $i_{-1} > i_{-2} > \dots$ et les indices j_k sont les indices qui ne sont pas dans$\{i_{-1}, i_{-2}, i_{-3}, \dots\}$.

Dans ce même paragraphe, on introduit une autre manière d'indexer les vecteurs de F_0:

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies d'entiers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$ plus la suite nulle . Cet ensemble paramétrise la base de F_0 donnée précédemment. La suite vide est associée au vecteur $|vac>$, la partition $Y = (\lambda_1, \dots\dots, \lambda_k)$ est associée au vecteur

$$\Gamma_Y = \psi_{\lambda_1 - 1} \wedge \psi_{\lambda_2 - 2} \wedge \dots.$$

Les partitions Y sont représentées par les diagrammes de Young . On donne aussi dans ce paragraphe la fermeture $\overline{F_0}$ de F_0 formellement, comme espace des séries formelles

$$\sum_{Y \in S} a_Y \Gamma_Y$$

où les a_Y sont des nombres complexes . L'espace $\overline{F_0^*}$ définit de la même façon la fermeture de l'espace F_0^* . $\overline{F_0}$ est l'espace dual de F_0 pour le produit $< .|. >$. A la fin de ce paragraphe on introduit les opérateurs shift sur $\overline{F_0}$ définis par

$$\mathbf{\Lambda}_n = \sum_i : \psi_i \wedge \psi_{i+n}^* :$$

Ces opérateurs nous permettent d'introduire dans la suite la correspondance Boson-Fermion, on cite aussi quelques propriétés de ces opérateurs dont on propose des démonstrations, telles que par exemple l'adjoint de $\mathbf{\Lambda}_n$ est égal à $\mathbf{\Lambda}_{-n}$, et le crochet

$$[\mathbf{\Lambda}_n, \mathbf{\Lambda}_m] = n\delta_{m+n}.$$

On aura besoin aussi de certaines représentations de groupes et d'algèbres de Lie :

Soit $A \in End(V)$, on définit $R(A)$ par

$$R(A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots = A\psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge \dots,$$

R est une représentation du groupe de Lie des éléments inversibles de $End(V)$.

Une représentation d'algèbres de Lie de $End(V)$ est donnée par

$$\begin{aligned} r(A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots = & A\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \dots \\ & + \psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

la relation entre ces deux représentations est donnée par la proposition 6.5.1, l'étude de l'exemple 6.5.2, nous permet d'écrire $r(C_n) = \mathbf{\Lambda}_n$ où l'opérateur C_n est défini par $C_n\psi_i = \psi_{i-n}$ et

$$\begin{aligned} exp(\sum_{i>0} t_i \mathbf{\Lambda}_i) &= exp(\sum_{i>0} t_i r(C_i)) \\ &= R(exp(\sum_{i>0} t_i C_i)). \end{aligned}$$

Ces notions sont introduites est de pouvoir établir dans le paragraphe 7, de la correspondance Boson-Fermion définie comme suite :

Soit t la suite infinie de variables :

$$t = (x, t_2, t_3, ...)$$

Soit $\mathbb{C}\ [t]$ l'ensemble des polynômes en ces variables, la correspondance Boson-Fermion est un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{C}\ [t]$ et F_0, autrement dit, $\mathbb{C}\ [t]$ est l'espace de Fock bosonique correspondant à F_0. Soit v un vecteur de F_0, cette correspondance est donnée par l'isomorphisme

$$\mathcal{F} : F_0 \longrightarrow \mathbb{C}\ [t]$$

avec

$$\mathcal{F}(v)(t) = < vac|(exp(\sum_{i>0} t_i \mathbf{\Lambda}_i)v) > .$$

et son opérateur pull-back est donné par

$$\mathcal{F}^* \quad : End(\mathbb{C}\ [t]) \longrightarrow End(F_0).$$

On définit aussi les polynômes de Schur élémentaires S par

$$exp(\sum_{k\geq 1} z^k t_k) = \sum_{i\geq 0} z^i S_i(t)$$

et les polynômes de Schur généralisés associés à Y sont définis par

$$S_Y(t) = det[(S_{\lambda_i+j-1}(t))_{i,j}].$$

Dans la proposition 7.1, on redémontre la formule

$$\mathcal{F}(\Gamma_Y) = S_Y,$$

qui donne le polynôme de Schur généralisé comme image de Γ_Y par la correspondance Boson-Fermion .

Comme fermeture formelle de l'espace $\mathbb{C}\ [t]$, on prend l'espace $\mathbb{C}\ [[t]]$ engendré par les séries suivantes

$$\sum_{Y\in S} a_Y S_Y,$$

où les a_Y sont des nombres complexes.

Dans le paragraphe 8, on étudie les fonctions tau définis d'une manière formelle comme suit :

Soit $\mathbb{C}\ [[\mu,\mu^{-1}]][[t]]$ l'ensemble des séries formelles

$$\sum_{Y\in S} a_Y(\mu) S_Y$$

où

$$a_Y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \mu^i$$

est une série formelle et S_Y est le polynôme de Schur.

Soient maintenant les opérateurs suivants

$$\mathbf{X} : \mathbb{C}\ [[t]] \longrightarrow \mathbb{C}\ [[\mu,\mu^{-1}]][[t]]$$
$$\tilde{\mathbf{X}} : \mathbb{C}\ [[t]] \longrightarrow \mathbb{C}\ [[\mu,\mu^{-1}]][[t]]$$

définis par

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t,\mu)P(t) &= exp(\sum_1^{\infty} t_i\mu^i)P(t-[\mu^{-1}])\\ &= exp(\sum_1^{\infty} t_i\mu^i)exp(\sum_1^{\infty} -\frac{1}{i}\mu^{-i}\frac{\partial}{\partial t_i})P(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu)P(t) &= exp(\sum_1^{\infty} -t_i\mu^i)P(t+[\mu^{-1}])\\ &= exp(\sum_1^{\infty} -t_i\mu^i)exp(\sum_1^{\infty} \frac{1}{i}\mu^{-i}\frac{\partial}{\partial t_i})P(t)\end{aligned}$$

où $[x] = (x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \ldots)$.

Les fonctions tau sont les séries de $\mathbb{C}$ $[[t]]$ qui vérifient l'identité bilinéaire suivante

$$\oint \mathbf{X}(t,z)\tau(t)\tilde{\mathbf{X}}(t',z)\tau(t')dz = \oint \tau(t-[z^{-1})\tau(t'+[z^{-1}])exp(\sum_1^{\infty}(t_i - t'_i)z^i)dz$$
$$= 0 \qquad \forall \quad t, t'.$$

On donne quelques propriétés de ces opérateurs et des fonctions tau, dont on propose des démonstrations . A la fin de ce paragraphe on donne un corrollaire (corollaire 8.4) qui montre que le polynôme de Schur généralisé $\mathcal{F}(\Gamma_Y)$ est une fonction tau .

Dans le paragraphe 9, on étudie les opérateurs vertex dans les espaces de Fock. Dans l'espace de Fock bosonique l'opérateur vertex est défini de la façon suivante :

Soit $\mathbb{C}$ $[[\mu, \mu^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}]][[t]]$ l'ensemble des séries formelles

$$\sum_{Y \in S} a_Y(\mu, \lambda)S_Y.$$

où

$$a_Y(\mu, \lambda) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} a_{i,j}\mu^i\lambda^j$$

est une série formelle et S_Y est le polynôme de Schur.

L'opérateur vertex $\mathbf{X} : \mathbb{C}$ $[[t]] \longrightarrow \mathbb{C}$ $[[\mu, \mu^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}]][[t]]$ est défini par

$$\mathbf{X}(t, \mu, \lambda)P(t) = exp(\sum_1^{\infty} t_i(\mu^i - \lambda^i))P(t + [\lambda^{-1}] - [\mu^{-1}])$$
$$= exp(\sum_1^{\infty}(\mu^{-i} - \lambda^{-i})\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_i})P(t)$$

où $P(t)$ est un élément de $\mathbb{C}$ $[[t]]$.

L'expression de l'opérateur vertex dans l'espace de Fock fermionique est donnée par la proposition 9.2.1.

Dans le paragraphe 10, qui est un paragraphe de synthèse, on étudie le lien entre les éléments de la grassmannienne Gr^n, les fonctions d'ondes et la fonction tau, ce lien a été étudié par Jean Fastré dans [F] et Pierre van Moerbeke dans [Vm] . Plus exactement on s'intéresse ici à l'équivalent de l'opérateur vertex qui agit sur les éléments de la grassmannienne . L'écriture de cet opérateur dans l'espace de Fock fermionique donne la réponse à ce problème, mais les expressions de l'équivalent de cette action sur les lacets et sur les éléments de Gr^n quand ils sont écrits en termes de fonctions d'ondes, reste un problème ouvert.

1. Groupes de lacets .

Un groupe de Lie de dimension infinie, est un groupe Γ qui a une structure de variété différentiable de dimension infinie, tel que l'application produit $\Gamma\times\Gamma \longrightarrow \Gamma$ et l'application inverse $\Gamma \longrightarrow \Gamma$ soient différentiables . L'espace tangent au point l'identité, est une algèbre de Lie dont le crochet de Lie est défini en identifiant les vecteurs tangents au point l'identité aux champs de vecteurs invariants à gauche . Si pour tout élément ξ de cette algébre de Lie, il existe un et un seul groupe à un-paramètre $\gamma_\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$ tel que $\gamma'_\xi(0) = \xi$ alors l'application exponentielle est bien définie, c'est le cas de tous les exemples classiques.

L'exemple le plus simple des groupes de Lie de dimension infinie, est celui du groupe $\mathcal{C}(X,G)$ des applications continues de l'espace compact X dans le groupe de Lie G de dimension finie. $\mathcal{C}\ (X,G)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme . Si U est un voisinage ouvert de l'identité dans G, homéomorphe à un ouvert $\hat{\mathrm{U}}$ de l'algèbre de Lie g de G, alors $\mathcal{U} = \mathcal{C}(X,\mathrm{U})$ est un voisinage ouvert de l'identité de $\mathcal{C}(X,G)$ homéomorphe à l'ensemble ouvert $\mathcal{C}(X,\hat{\mathrm{U}})$ de l'espace de Banach $\mathcal{C}(X,\mathrm{g})$. Si f est un élément de $\mathcal{C}(X,G)$, alors $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}.f$ est un voisinage de f homéomorphe à $\mathcal{C}(X,\hat{\mathrm{U}})$. Les ensembles $\mathcal{U}_f$ forment un atlas, qui donne à $\mathcal{C}(X,G)$ une structure de variété différentiable et par suite une structure de groupe de Lie . On s'intéresse au groupe de Lie $\mathcal{C}^\infty(S^1,G)$ groupe des applications différentiables, appelé groupe des lacets dans G, il est noté LG . L'atlas $\{\mathcal{U}_f\}$ associé à $\mathcal{C}^\infty(S^1,G)$ est défini de la même manière que l'atlas associé à $\mathcal{C}(X,G)$. On trouve que l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(X,\hat{\mathrm{U}})$ est un ouvert de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(X,g)$ des applications différentiables de X dans g. La topologie de $\mathcal{C}^\infty(X,G)$ est définie en prenant les ensembles $\mathcal{U}_f$ comme des ouverts homéomorphes à l'ouvert $\mathcal{C}^\infty(X,\hat{\mathrm{U}})$ de E. La topologie de E est la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées partielles de tout ordre . Cette topologie donne à E une structure d'espace topologique séparable métrisable complet, et non pas une structure d'espace de Banach. Quand $X = S^1$ la convergence des suites $\{f_k\}$ dans E vers f signifie que $(\frac{d^n f_k}{d\theta^n})$ converge uniformement vers $\frac{d^n f}{d\theta^n}$ pour tout n. Il est facile de voir que $\mathcal{C}^\infty(X,G)$ est un groupe de Lie de dimension infinie, et que $\mathcal{C}^\infty(X,g)$ est l'algébre de Lie de $\mathcal{C}^\infty(X,G)$, l'application exponentielle

$$exp: \ \mathcal{C}^\infty(X,g) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(X,G)$$

est un homéomorphisme local au voisinage de l'identité.

Parmi les sous groupes de LG, on trouve le sous groupe $L_{an}G$ des lacets analytiques-réels dont l'étude ne présente pas trop de difficultés . Si on suppose G plongé dans U_n le sous groupe des matrices unitaires , un lacet γ de $L_{an}G$ est développable en séries de Fourier

$$\gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$$

donc un lacet analytique-réel, est un lacet développable en série de Fourier qui converge dans une couronne $r \leq |z| \leq r^{-1}$ avec $r < 1$, i.e tel que $\|\gamma_k r^{-|k|}\|$ soit bornée pour tout k et un certain $r < 1$. La topologie naturelle de $L_{an}G$ est considérée comme limite directe des groupes de Lie Banach $L_{an,r}G$ constitué de fonctions holomorphes dans $r \leq |z| \leq r^{-1}$. Le groupe $L_{an,r}G$ est muni de la topologie de la convergence uniforme et il est facile de voir que $L_{an}G$ est un groupe de Lie dont l'algébre de Lie est l'espace $L_{an}g$. On s'intéresse aussi au sous groupe $L_{rat}G$ des lacets rationels i.e les lacets tels que, considérés comme fonctions à valeurs matricielles ils s'écrivent sous forme de quotient de polynômes de z qui n'ont pas de pôles sur $|z| = 1$. De plus $L_{rat}G$ est dense dans LG .

$L_{pol}G$ est le sous groupe des lacets polynômiaux, c'est à dire le sous groupe des séries de Laurent en z et z^{-1} finies . On peut aussi dire que $L_{pol}G$ est l'union des sous ensembles $L_{pol,N}G$ des lacets $\gamma(z) = \sum \gamma_k z^k$, tels que $\gamma_k = 0$ quand $|k| > N$. Les sous ensembles $L_{pol,N}G$ sont compacts, et $L_{pol}G$ muni de la topolgie limite directe est un groupe de Lie dont l'algébre de Lie est l'espace vectoriel $L_{pol}g$ des séries

$$\sum_{k=-N}^{N} \xi_k z^k$$

où les ξ_k sont dans le complexifié $g_{\mathbb{C}}$ de l'algébre de Lie g avec $\xi_{-k} = \overline{\xi_k}$. L'espace vectoriel $L_{pol}g$ est limite directe des sous espaces $L_{pol,N}g$ de dimensions finies . Cet espace est muni de la topologie limite directe.

Il n'y a pas d'application exponentielle entre $L_{pol}g$ et le groupe de Lie $L_{pol}G$ parce qu'en général l'exponentielle d'une série finie, n'est pas une série finie. Le groupe $L_{pol}G$ a pour complexifié $L_{pol}G_{\mathbb{C}}$ constitué des lacets dans $G_{\mathbb{C}}$ donnés par les polynômes de Laurent $\gamma(z) = \sum \gamma_k z^k$ ainsi que leurs inverses. (dans le cas $L_{pol}G$ on n'a pas besoin de préciser que l'inverse d'un lacet polynômial est polynômial, parce que pour $\gamma \in LG$ on a $\gamma^{-1} = \gamma^*$).

Si $G = U_n$ alors $L_{pol}G_{\mathbb{C}}$ coïncide avec $GL(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$. En général, si G est un groupe algébrique alors $L_{pol}G_{\mathbb{C}}$ est l'espace des points de G à valeurs dans $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ dans le sens de la géométrie algébrique. Dans certain cas $L_{pol}G$ est dense dans LG mais pas toujours. (par exemple pour $G = T$ où T est le tore).

2. Lien entre le groupe $LGL_n(\mathbb{C})$ et le groupe général linéaire restreint.

Dans ce paragraphe on travaille avec l'espace de Hilbert $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. Soit $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des lacets continus de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$. $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ agit sur l'espace de Hilbert $H^{(n)}$ par multiplication d'opérateurs, c'est à dire si γ est une fonction de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$, l'opérateur M_γ qui correspond à cette action est défini de $H^{(n)}$ dans $H^{(n)}$ par $M_\gamma f = \gamma f$. De plus la norme de l'opérateur M_γ est donnée par $\|\gamma\|_\infty$. Il en découle que l'application $\gamma \mapsto M_\gamma$ plonge le groupe de Lie Banach $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ comme sous groupe fermé (muni de la topologie induite) dans le groupe de Lie Banach $GL(H^{(n)})$ des opérateurs bornés inversibles dans $H^{(n)}$. On rappelle que $GL(H^{(n)})$ muni de la norme d'opérateurs est un ouvert de l'algèbre de Banach $B(H^{(n)})$ des opérateurs bornés dans $H^{(n)}$.

Les opérateurs M_γ commutent avec l'opérateur M_z, opérateur de multiplication par la fonction scalaire $z = e^{i\theta}$. Mais $L_{cst}GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas l'ensemble de tous les éléments de $GL(H^{(n)})$ qui commutent avec l'opérateur M_z .

Théorème 2.1.[PS]

L'ensemble des opérateurs de $GL(H^{(n)})$ qui commutent avec l'opérateur M_z est égal au groupe $L_{meas}GL_n(\mathbb{C})$ des applications bornées mesurables de S^1 dans $GL_n(\mathbb{C})$.

On rappelle que γ est borné si et seulement si $\|\gamma(\theta)\|$ et $\|\gamma(\theta)^{-1}\|$ sont bornées sauf sur un ensemble négligeable .

Preuve [P.S]

Soit A un élément de $GL(H^{(n)})$ qui commute avec M_z, et soit $\gamma_i = Ac_i$ où c_i est le ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Il est clair que les γ_i sont des éléments de $H^{(n)}$, et les c_i sont considérés comme des fonctions constantes de $H^{(n)}$. On définit la fonction matricielle γ par les vecteurs γ_i qui forment les colonnes de γ . Cette fonction est clairement mesurable. Soit f un élément de $H^{(n)}$, f est approché par un élément de la forme $\sum p_i(z)c_i$, où les p_i sont des polynômes en z et z^{-1}. A commute avec l'opérateur M_z . Ceci nous permet d'écrire :

$$A(\sum p_i(z)c_i) = \sum p_i(z)\gamma_i = M_\gamma(\sum p_i(z)c_i)$$

donc $A = M_\gamma$, et les normes $\|\gamma(\theta)\|$ et $\|\gamma(\theta)^{-1}\|$ sont essentiellement bornées .

L'espace des lacets continus dans $GL_n(\mathbb{C})$ peut être considéré comme sous groupe de $GL(H^n)$. Les lacets réguliers sont contenus dans $GL_{res}(H^{(n)})$ (voir proposition (2.3.)). Dans la définition du groupe général linéaire restreint on a toujours décomposé l'espace de Hilbert $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ en $H^{(n)}{}_+ \oplus H^{(n)}{}_-$, où

$$H^{(n)}{}_+ = \{ f \in H^{(n)} : f(\theta) = \sum_{k\geq 0} f_k e^{ik\theta} \text{ } où \text{ } f_k \in \mathbb{C}^n \}$$

et

$$\begin{aligned} H^{(n)}{}_- &= (H^{(n)}{}_+)^0 \\ &= \{ f \in H^{(n)} : f(\theta) = \sum_{k<0} f_k e^{ik\theta} \text{ } où \text{ } f_k \in \mathbb{C}^n \}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, on décompose $H^{(n)}$ en sous espaces propres (positif et négatif) de l'opérateur de rotation infinitesimal $-i\frac{d}{d\theta}$.

Corollaire 2.2.

L'ensemble des opérateurs unitaires de $GL(H^{(n)})$ qui commutent avec l'opérateur M_z est égal au groupe $L_{meas}U_n(\mathbb{C})$ des applications bornées mesurables de S^1 dans $U_n(\mathbb{C})$.

Proposition 2.3. [PS]

Si $\gamma : S^1 \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est continuement différentiable, alors l'opérateur de multiplication M_γ est un élément de $GL_{res}(H^{(n)})$.

Les sous espaces W de $Gr(H^{(n)})$ qui sont de la forme $\gamma H^{(n)}{}_+$ pour $\gamma \in LGL_n(\mathbb{C})$, ont la propriété $zW \subset W$, car l'action de γ commute avec la multiplication par la fonction z qui est une fonction à valeurs scalaires . L'orbite de $H^{(n)}{}_+$ sous l'action de $LGL_n(\mathbb{C})$ est caractérisée par cette propriété (on écrit $\gamma H^{(n)}{}_+$ au lieu de $M_\gamma H^{(n)}{}_+$ et zW au lieu de $M_z(W)$).

Preuve de 2.3.[PS]

Soit γ un lacet qui s'écrit comme série de Fourier

$$\gamma(\theta) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}$$

où les γ_k sont des matrices carrées d'ordre n. L'opérateur M_γ est représenté dans la base canonique de $H^{(n)}$ par une matrice ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) notée (M_{pq}) dont les éléments matriciaux sont les matrices carrées $M_{pq} = \gamma_{p-q}$ d'ordre n . On va montrer que les composantes $(H^{(n)}{}_+ \longrightarrow H^{(n)}{}_-)$ et $(H^{(n)}{}_- \longrightarrow H^{(n)}{}_+)$ de l'opérateur M_γ, sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt . En d'autres termes, il suffit de montrer que

$$\sum_{p\geq 0,q<0} \|M_{pq}\|^2 = \sum_{k\geq 1} k\|\gamma_k\|^2 < \infty \quad et \quad \sum_{p<0,q\geq 0} \|M_{pq}\|^2 = \sum_{k\geq 1} k\|\gamma_{-k}\|^2 < \infty$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{k\in \mathbb{Z}} (|k|+1)\ \|\gamma_k\|^2 < \infty.$$

Cette inégalité est vraie quand γ est continuement différentiable, et le carré de la norme L^2 de la dérivée γ' de γ est égal

$$\sum_{k\in \mathbb{Z}} (k^2)\ \|\gamma_k\|^2.$$

$GL_{res}(H^{(n)})$ est muni de la topologie définie par la norme suivante

Soit A un opérateur de $H^{(n)}$ dans $H^{(n)}$ borné

$$\|A\|_J = \|A\| + \|[A,J]\|_2.$$

où $\|\ \|$ est la norme d'opérateurs et $\|\ \|_2$ est la norme de Hilbert-Schmidt .

La topologie de $LGL_n(\mathbb{C}\ )$ induite par $GL_{res}(H)$ est donnée par

Soit $\gamma = \sum \gamma_k z^k$ une fonction sur S^1, à valeurs matricielles, alors la norme de Hilbert-Schmidt du commutateur $[M_\gamma, J]$ est donnée par

$$\|\gamma\|_{2,\frac{1}{2}} = \{\sum |k|\ \|\gamma_k\|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

cette norme est connue sous le nom de norme de Sobolev. Donc le groupe $LGL_n(\mathbb{C})$ des lacets n'est pas un sous groupe topologique de $GL_{res}(H)$, parce qu'il a une topologie plus fine que son image par l'injection canonique de $LGL_n(\mathbb{C})$ dans $GL_{res}(H)$.

Maintenant soit $\mathcal{A}$ l'algébre de Banach des fonctions γ sur S^1 mesurables, et qui sont à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_\infty + \|\gamma\|_{2,\frac{1}{2}} < \infty$$

(où $\| \ \|_\infty$ est la norme de L^∞) le groupe $GL_n(\mathcal{A})$ noté $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C})$ est un sous groupe de Lie Banach, ce qui nous permet d'énoncer :

Proposition 2.4.[PS]
$L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C})$ est le sous groupe de $GL_{res}(H^{(n)})$ des éléments qui commutent avec l'opérateur de multiplication M_z .

La fonction

$$g = \sum_{k>1}^{\infty} \frac{sin(k\theta)}{k(Log(k))^{\frac{1}{2}}}$$

est une fonction continue dont la norme est $\|g\|_{2,\frac{1}{2}}$ est infinie . Ceci montre que la fonction g n'est pas un élément de $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C})$ et par suite $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C})$ ne contient pas toutes les fonctions continues . En revanche si on prend un lacet γ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la norme est $\|\gamma\|_{2,\frac{1}{2}} < \infty$ (voir Proposition 2.3.), la continuité de γ entraine que $\|\gamma\|_\infty$ est finie . Ceci montre que tous les lacets de classe $\mathcal{C}^\infty$ sont dans $L_{\frac{1}{2}}GL_n(\mathbb{C})$.

Corollaire 2.5.
$L_{\frac{1}{2}}U_n(\mathbb{C})$ est le sous groupe unitaire de $U_{res}(H^{(n)})$ des éléments qui commutent avec l'opérateur de multiplication M_z .

3. Modèles grassmanniens du groupe ΩU_n .

Définition 3.1
ΩU_n est le sous groupe des lacets γ tels que $\gamma(1) = 1$.

Le groupe $LGL_n(\mathbb{C})$ agit sur l'espace de Hilbert $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$. On a vu dans la proposition (2.3) que si γ est un lacet dans $GL_n(\mathbb{C})$ continuement différentiable. l'opérateur multiplication M_γ est dans $GL_{res}(H^{(n)})$, donc le groupe $LGL_n(\mathbb{C})$ agit aussi sur la grassmannienne $Gr(H^{(n)})$.

Définition 3.2.

La grassmannienne $Gr^{(n)}$ est le sous ensemble fermé de $Gr(H^{(n)})$ constitué des sous espaces W tels que $zW \subset W$.

Cet ensemble est le modèle grassmannien de l'espace des lacets.

Thèorème 3.3.[PS]

Le groupe $L_{\frac{1}{2}}U_n$ agit transitivement sur $Gr^{(n)}$ Et le stabilisateur de H_+ est le groupe U_n des lacets constants.

On rappelle que $L_{\frac{1}{2}}U_n$ est le commutateur de l'opérateur M_z dans $U_{res}(H^{(n)})$. Il est facile de voir que $\gamma H_+^{(n)} = H_+^{(n)}$ si et seulement si $\gamma \in L^+GL_n(\mathbb{C})$.

Preuve

Montrons d'abord que si W est un élément de $Gr^{(n)}$ alors zW a une codimension dans W égale à n .

En effet, considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} zW \arrow[r, hook] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ zH_+^{(n)} \arrow[r] & H_+^{(n)} \end{tikzcd}$$

où les applications horizontales sont des inclusions, les applications verticales sont des projections orthogonales . Ce sont aussi des opérateurs de Fredholm qui n'ont pas le même indice, mais l'application horizontale $zH_+^{(n)} \longrightarrow H_+^{(n)}$ est un opérateur de Fredholm d'indice $-n$, donc l'application $zW \longrightarrow W$ un opérateur de Fredholm d'indice $-n$ (ceci d'aprés la formule de l'indice de la composée de deux fonctions $\chi(AB) = \chi(A) + \chi(B)$. donc $dim(W/zW) = n)$.

Soit maintenant $\{w_1, \ldots\ldots, w_n\}$ une base orthonormée de $W \ominus zW$ le supplémentaire orthogonal de zW dans W, les vecteurs w_i sont à valeurs vectorielles . A partir de cette base on peut construire une fonction matricielle γ sur S^1 d'ordre $n \times n$, et $\gamma(\theta)$ est donné sous forme d'une matrice unitaire pour presque tout $\theta \in S^1$ ie. $\gamma \in L_{meas}U_n$ (Corollaire 2.2). Les vecteurs w_k peuvent s'écrire de la façon suivante:

$$w_k(\theta) = \sum_m w_{km} e^{im\theta}$$

avec $w_{km} \in \mathbb{C}^n$, il est clair que $< w_k(\theta), w_l(\theta) >= \delta_{kl}$. L'opérateur M_γ est donc un opérateur unitaire sur $H^{(n)}$ et il satisfait

$$M_\gamma(H_+^{(n)} \ominus z^k H_+^{(n)}) = W \ominus z^k W$$

pour tout k .

Pour déduire que $M_\gamma(H_+^{(n)}) = W$ il faut prouver que $\cap z^k W = \{0\}$.

En effet, supposons que w est un élément de $\cap z^k W$ et que $\|w\| = 1$. $z^{-k}w$ appartient à W et ceci pour tout k . Comme la projection orthogonale $pr_- : W \longrightarrow H_-^{(n)}$ est un opérateur compact, on peut trouver une sous suite de $\{pr_-(z^{-k}w)\}$ qui converge vers $v \in H_-^{(n)}$. Il est clair que $\|v\| = 1$ puisque la suite $z^k pr_-(z^{-k}w)$ converge vers w . $\|v\|^2 = lim < v, z^{-k}w >$. Pour tout v et w dans $H^{(n)}$, il est donc impossible que $< v, z^{-k}w >$ converge vers 0 quand k tend vers l'infini .

La composante ($H_+^{(n)} \longrightarrow H_-^{(n)}$) est factorisable en ($H_+^{(n)} \longrightarrow W \longrightarrow H_-^{(n)}$) . Ceci montre que cette composante est un opérateur de Hilbert-Schmidt . De même la composante ($H_-^{(n)} \longrightarrow H_+^{(n)}$) qui est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt parce que M_γ est unitaire, donc M_γ est un élément de $U_{res}(H)$.

On a montré que $L_{\frac{1}{2}}U_n$ agit transitivement sur $Gr^{(n)}$, or pour tout γ dans $L_{\frac{1}{2}}U_n$ tel que $\gamma H_+^{(n)} = H_+^{(n)}$, γ préserve le sous espace $H_+^{(n)} \ominus z^k H_+^{(n)}$, donc γ appartient à U_n .

Remarque 3.3.

Le théorème 3.2 montre que $\Omega_{\frac{1}{2}}U_n = L_{\frac{1}{2}}U_n/U_n$ peut être identifié à la grassmannienne $Gr^{(n)}$. Ceci avec la proposition 3.4, justifie la terminologie " modèle grassmannien" . La proposition suivante donne les sous ensembles qui correspondent aux sous espaces de $\Omega_{\frac{1}{2}}U_n$.

Proposition 3.4.

Dans la correspondance de $Gr^{(n)}$ avec $\Omega_{\frac{1}{2}}U_n$ on a :

1. $Gr_0^{(n)}$ *est identifié à* $\Omega_{pol}U_n$.
2. $Gr_1^{(n)}$ *est identifié à* $\Omega_{rat}U_n$.
3. $Gr_w^{(n)}$ *est identifié à* $\Omega_{an}U_n$.
4. $Gr_\infty^{(n)}$ *est identifié à* ΩU_n .

Les grassmanniennes $Gr_0^{(n)}$, $Gr_1^{(n)}$, $Gr_w^{(n)}$ et $Gr_\infty^{(n)}$ sont définies par

$$Gr_\alpha^{(n)} = Gr^{(n)} \cap Gr_\alpha(H^{(n)}.$$

Preuve

Au départ on montre que si W est dans $Gr_\alpha^{(n)}$ où $\alpha = 0, 1, w, \infty$, alors $W \ominus zW$ est constitué de fonctions du genre de la correspondance . On va considérer le cas régulier, c'est à dire que si W est dans Gr_∞ alors par la proposition (3.11) les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-^{(n)}$ et $pr_+ : (zW)^0 \longrightarrow H_+$ sont constitués de fonctions régulières donc les éléments de $W \ominus zW$ ont des projections orthogonales régulières sur $H_-^{(n)}$ et $H_+^{(n)}$ et sont donc des fonctions régulières . De même pour les autres grassmanniennes $Gr_0^{(n)}$ et $Gr_w^{(n)}$.

Dans le cas de la grassmannienne Gr_1, on sait que l'ensemble image par la projection orthogonale $W \longrightarrow H_-^{(n)}$ est constitué de fonctions rationnelles . Ceci est équivalent à dire qu'il existe un polynôme $p(z)$ tel que $p(z)W \subset H_+^{(n)}$ ce qui n'est pas vrai automatiquement. Mais cette proprieté est vraie sous la condition $zW \subset W$. Pour cela on peut prendre pour $p(z)$ le polynôme minimal de la transformation induite par M_z sur l'espace $W/W \cap H_+^{(n)}$ de dimension finie .

D'une manière similaire, l'ensemble image par la projection orthogonale $(zW)^0 \longrightarrow H_+$ est constitué de fonctions rationnelles . On a besoin d'un polynôme $q(z^{-1})$ tel que $q(z^{-1})W^0 \subset H_-^{(n)}$. ce qui est équivalent à $q(z)H_+^{(n)} \subset W$. On prend q le polynôme minimal de la transformation M_z sur $H_+^{(n)}/W \cap H_+^{(n)}$.

Dans le cas inverse, il est évident que l'action de $L_{pol}U_n$ préserve Gr_0, et $L_{rat}U_n$ préserve Gr_1 parce que l'existence des polynômes $p(z)$ et $q(z)$ tels que $p(z)W \subset H_+$ et $q(z)H_+^{(n)} \subset W$, est une condition nécessaire et suffisante pour que W soit dans $Gr_1^{(n)}$.

Le groupe LU_n des lacets régulier préserve Gr_∞ car les ensembles images par les deux projections orthogonales $pr_- : W \longrightarrow H_-^{(n)}$ et $pr_+ : W^0 \longrightarrow H_+^{(n)}$ sont constitués de fonctions régulières, et $L_{an}U_n$ préserve Gr_w par la correspondante caractérisation de Gr_w. Ceci complète la démonstration de 3.4.

4. Généralités sur les fonctions tau, fonctions d'ondes et les opérateurs vertex.

Dans ce paragraphe on donne la définition d'un opérateur pseudo-différentiel, d'une fonction d'onde, de la fonction tau et de l'opérateur vertex . Ces définitions sont données d'une manière formelle . On donnera dans la suite d'autres définitions équivalentes à ces dernières dans des conditions bien précises.

Un opérateur pseudo-différentiel en $d = \dfrac{\partial}{\partial x}$ est donné d'une manière formelle par

$$L = d + \sum_{k \leq -1} a_j(x) d^j$$

qui est un élément de $d + \mathcal{D}^-$ et où $[d, x] = 1$.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}^- \oplus \mathcal{D}^+$ a une structure d'algébre de Lie donnée par le crochet suivant

$$[P, Q] = P.Q - Q.P$$

le produit . d'opérateurs pseudo différentiels est défini par la mutiplication usuelle associative appelée règle de Leibnitz :

Soient L et L' deux opérateurs pseudo-différentiels, donc

$$L.L' = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} : \frac{\partial^k}{\partial d^k}(L) . \frac{\partial^k}{\partial x^k}(L') :$$

où $\frac{\partial}{\partial d}$ est la dérivation formelle par rapport à d et : : est l'ordre normal, i.e. dans le produit intérieur : :, il place toujours la dérivée d à droite comme si l'expression ne dépend pas de x .

Exemple 4.1.

Pour $n, m \geq 0$ on a

$$ad^n.bd^m = \sum_{k=0}^{n} C_k^n ab^{(k)} d^{n+m-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} : \frac{\partial^k}{\partial d^k}(ad^n).\frac{\partial^k}{\partial x^k}(bd^n) :$$

$$\begin{aligned} d^{-1}.a &= ad^{-1} - a'd^{-2} + a"d^{-3} + (-1)^k a^k d^{-k-1} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} : \frac{\partial^k}{\partial d^k}(d^{-1}).\frac{\partial^k}{\partial x^k}(a) : \end{aligned}$$

L'ensemble des équations de déformation de L

$$L = d + \sum_{k \leq -1} a_j(x; t_1, t_2, ...)d^j, \quad (t_1, t_2, ...) \in \mathbb{C}^{\infty},$$

est donné par la hiérarchie KP

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L], \quad n = 1, 2, ... \quad (*)$$

et

$$[(L^n)_+, L] = [L^n - (L^n)_-, L] = -[(L^n)_-, L] \in \mathcal{D}^-.$$

Les équations $(*)$ définissent un nombre infini de champs de vecteurs sur $d \oplus \mathcal{D}^-$.

Remarque 4.2.

Les fonctions a_j vues comme fonctions de t_1 et de x peuvent être écrites de la façon suivante

$$a_j(x; t_1, t_2, ...) = a_j(x + t_1, t_2, ...).$$

et la variable t_1 est identifiée à la variable x .

En effet, calculons $\frac{\partial L}{\partial t_n}$ de deux manières différentes:

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = [L_+, L] = [d, L] = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{\partial a_j}{\partial x} d^j.$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{\partial a_j}{\partial t_1} d^j.$$

Ceci entraine

$$\frac{\partial a_j}{\partial t_1} = \frac{\partial a_j}{\partial x}.$$

Théorème et définition 4.3.

Les assertions suivantes sont équivalentes

a) $\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L], \quad n = 1, 2, \ldots$

b) $\frac{\partial (L^m)_+}{\partial t_n} - \frac{\partial (L^n)_+}{\partial t_m} = [(L^n)_+, (L^m)_+], \quad n, m = 1, 2, \ldots$

c) *Il existe une fonction*

$$\psi(t, z) = (\sum_0^{\infty} w_n(t) z^{-n}) exp(\sum_1^{+\infty} t_j z^j)$$

appelée fonction d'onde, avec $w_0(t) = 1$ *telle que*

$$\begin{cases} L\psi = z\psi \\ \frac{\partial \psi}{\partial t_n} = (L^n)_+ \psi \end{cases}$$

d) *Il existe un opérateur*

$$S(t) = \sum_0^{\infty} w_n(t) d^{-n}$$

élément de $I + \mathcal{D}^-$ *appelé opérateur d'onde,* $w_0(t) = 1$ *tel que*

$$\begin{cases} LS = Sd \\ \frac{\partial S}{\partial t_n} = -(L^n)_- S \end{cases}$$

e) Il existe $S(t)$ dans $I + \mathcal{D}^-$ tel que

$$\frac{\partial S}{\partial t_n} = -(Sd^n S^{-1})_- S \quad n = 1, 2...$$

f) Il existe

$$\psi(t, z) = (\sum_0^{\infty} w_n(t) z^{-n}) exp(\sum_1^{+\infty} t_j z^j)$$

une fonction d'onde et sa fonction d'onde adjointe

$$\psi(t, z)^* = (\sum_0^{\infty} w_n^*(t) z^{-n}) exp(-\sum_1^{+\infty} t_j z^j)$$

telles que ces deux fonctions vérifient l'identité bilinéaire suivante

$$\oint \psi(t, z)\psi^*(t', z) dz = 0$$

le long d'un contour autour de $z = \infty$.

Preuve :

Voir [Vm]

Si les conditions du théorème 4.2. sont satistaites, on a

$$\psi(t, z) = Sexp(\textstyle\sum_1^{+\infty} t_j z^j) \qquad \text{et} \qquad \psi(t, z) = (S^T)^{-1} exp(-\textstyle\sum_1^{+\infty} t_j z^j)$$

avec

$S(t) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(t) d^{-j}$ et $S^T(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-d)^{-j} w_j(t)$. La fonction d'onde ψ et sa fonction duale ψ^* vérifient

$$\begin{cases} L\psi = z\psi & \dfrac{\partial \psi}{\partial t_n} = (L^n)_+ \psi \\ L^T \psi^* = z\psi & \dfrac{\partial \psi^*}{\partial t_n} = -(L^T)_+^n \psi^* \end{cases}$$

On définit maintenant les polynômes élémentaires de Schur $S_n(t)$ par

$$exp(\sum_{1}^{+\infty} t_j z^j) = \sum_{0}^{+\infty} S_n(t_1, t_2, ...) z^n$$
$$= 1 + t_1 z + (\frac{1}{2}t_1^2 + t_2)z^2$$
$$+ (\frac{1}{6}t_1^3 + t_1 t_2 + t_3)z^3 + ...$$

avec $S_n(t) = \frac{1}{n!}t_1^n + ... + t_n$

Ces polynômes conduisent à la construction des opérateurs différentiels suivants

$$S_n(\pm\partial) = S_n(\pm\frac{\partial}{\partial t_1}, \pm\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \pm\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, ...)$$

Soit f une fonction régulière, le dévoloppement de Taylor nous donne

$$f(t \pm [s]) = f(t_1 \pm s, t_2 \pm \frac{1}{2}s^2, t_3 \pm \frac{1}{3}s^3, ...)$$
$$= \sum_{0}^{+\infty} S_n(\pm\partial) f(t) s^n.$$

Le théorème de Sato nous donne la fonction d'onde en fonction de τ.

Posons maintenant $\sum = \sum_{j=0}^{\infty} t_j z^j$ et $\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial t_j}$

Définitions 4.4.

Soit $\mathbb{C}$ $[[t]]$ l'espace des séries formelles en t où $t = (x, t_1, t_2, ...)$ $\qquad t \in \mathbb{C}$

1. soit μ un paramètre formel, on définit sur $\mathbb{C}$ $[[t]]$ les opérateurs suivants

$$\mathbf{X}(t, \mu)h(t) = exp(\sum_{i>0}^{\infty} t_i \mu^i) h(t - [\mu^{-1}])$$

$$\tilde{\mathbf{X}}(t, \mu)h(t) = exp(-\sum_{i>0}^{\infty} t_i \mu^i) h(t + [\mu^{-1}])$$

où $[a] = (a, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{3}a^3, ...)$ *et* $h(t) \in \mathbb{C}\ [[t]]$.

2. *On appelle fonction tau, toute série fomelle de* τ *de* $\mathbb{C}\ [[t]]$, *qui vérifie l'identité bilinéaire suivante*

$$\oint \mathbf{X}(t,\mu)\tau(t)\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu)\tau(t')d\mu = 0 \qquad \forall t, t'$$

on intègre autour de l'infini .

Théorème [Sato] 4.5.

Les fonctions d'ondes ψ *et* ψ^* *peuvent être représentées en termes de fonctions tau, et on a*

$$\psi(t,z) = Sexp(\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j) = \frac{\tau(t-[z^{-1}])}{\tau(t)} exp(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i) = exp(\sum) \frac{exp(-\eta)\tau}{\tau}$$

et

$$\psi^*(t,z) = (S^T)^{-1} exp(-\sum_{j=1}^{\infty} t_j z^j) = \frac{\tau(t+[z^{-1}])}{\tau(t)} exp(-\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i) = exp(-\sum) \frac{exp(+\eta)\tau}{\tau}$$

avec $[s] = (s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{3}s^3, ...)$.

Preuve

Voir [SS]

5.Espace de Fock, fonction tau, fonctions d'ondes et grassmannienne.

Les grassmanniennes de dimension infinie sont des variétés de dimension infinie régulières (hilbertiennes) et presque régulières (de Banach) . L'étude de ce type de variété présente moins de difficultés que les autres variétés de dimension infinie . En plus elles ont des propriétés topologiques et géométriques très importantes . Mikio Sato et Yasuko Sato ont été les premiers à utiliser les grassmanniennes de dimension infinie plus exactement le plongement et les coordonnées de Plüker pour construire des solutions de l'équation KP (Kadomtsev-Petviatshivili). Pour construire ces solutions, ils ont transformé un système d'équations non linéaires en un système infini d'équations linéaires . Parmi les exemples étudiés au départ en trouve l'équation KdV (Kortveg-de Vries)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Pour trouver des solutions de l'exemple cité, M.Sato et Y.Sato ont considéré d'une manière naturelle un système infini d'équations linéaires . L'ensemble de ces équations est appelé hierarchie KdV . Cette hiérarchie se déduit de la hiérarchie KP . Le principe de cette transformation est fondé sur l'interprétation du système KP non linéaire quand il est écrit sous forme d'identité de Hirota en disant que l'élément W de la grassmannienne $Gr(H)$ appartient à l'orbite du vecteur vacuum de l'espace de Fock sous l'action de l'extension centrale $\widehat{GL_{res}}(H)$. Ceci peut être traduit par un système de relations linéaires de coordonnées de Plücker de W . Ces relations donnent les équations de la hiérarchie KP .

L'action de l'extension centrale du groupe général linéaire restreint $\widehat{GL_{res}}(H)$ est utilisé pour construire d'autres solutions de la hiérarchie KP . On utilise aussi la correspondance Boson-Fermion pour écrire d'une manière directe l'action de $\widehat{GL_{res}}(H)$ en termes de variables bosoniques des solutions, et l'introduction des opérateurs vertex permet de donner les solutions de la hiérarchie KP explicitement .

5.1. Espace de Fock .

5.1.1. Algébre de Clifford .

Soit $V = \bigoplus_{j\in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\ \psi_j$ un espace vectoriel muni de la base $\{\psi_j\}_{j\in \mathbb{Z}}$, et soit $V^* = \bigoplus_{j\in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\ \psi_j^*$ un autre espace vectoriel muni de la base $\{\psi_j^*\}_{j\in \mathbb{Z}}$. L'espace vectoriel U est la somme directe de V et V^* et on définit l'algébre de Clifford $A(U)$ comme quotient de l'algébre non commutative libre sur U par les relations

$$[w_1, w_2]_+ = (w_1|w_2)$$

où $[.,.]_+$ est l'anticommutateur défini par $[w_1, w_2]_+ = w_1w_2 + w_2w_1$, le produit symétrique $(.|.)$ est défini par

$$(\psi_n|\psi_m) = (\psi_n^*|\psi_m^*) = 0$$

et

$$(\psi_n|\psi_m^*) = \delta_{m,n}.$$

L'espace U est décomposable en $U = U_{cr} \oplus U_{an}$ où U_{an} est le sous espace annhilation défini par

$$U_{an} = \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\ \psi_n \oplus \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{C}\ \psi_n^*$$

et U_{cr} est le sous espace création défini par

$$U_{cr} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{C}\ \psi_n \oplus \bigoplus_{n<0} \mathbb{C}\ \psi_n^*$$

le produit symétrique $(.|.)$ est décomposable en deux composantes non symétriques . Cette décomposition est donnée par

$$(v|w) = < v|w > + < w|v >$$

ceci pour tout v et w dans U, avec $< v|w >= 0$ si $v \in U_{cr}$ ou $w \in U_{an}$ et $< v|w >= (v|w)$ si $v \in U_{an}$ et $w \in U_{cr}$.

On définit $R(a) = (-1)^l.a$ pour $a = w_1.....w_l$ et les w_i dans U, les contractions i_w et j_w sont dans $End(A(U))$ et elles sont définies par la règle de Liebnitz de la manière suivante:

$i_w(1) = 0$

$i_w(v) =< w|v >$

$i_w(a.b) = i_w(a).b + R(a).i_w(b)$

$j_w(1) = 0$

$j_w(v) =< v|w >$

$j_w(a.b) = a.j_w(b) + j_w(a).R(b).$

Il est facile de voir que $i_w = 0$ si $w \in U_{cr}$ et $j_w = 0$ si $w \in U_{an}$.

L'espace $\wedge^\infty U$ est défini par

$$\wedge^\infty U = \bigoplus_{j \geq 0} \wedge^j U.$$

Comme espace vectoriel, l'espace $\wedge^\infty U$ est isomorphe à $A(U)$. Cet isomorphisme est donné par l'ordre normal noté : : . Plus précisement pour tout α dans $\wedge^\infty U$ et w dans U on a

$: 1 :\ = 1$

$: w \wedge \alpha : = w : \alpha : -i_w : \alpha :$

$: \alpha \wedge w : = : \alpha : w - j_w : \alpha :$

et

$$: \psi_i \wedge \psi_j^* : = \psi_i \psi_j^* - < \psi_i | \psi_j^* >$$
$$= \begin{cases} \psi_i \psi_j^* - 1 = -\psi_j^* \psi_i & si \quad i = j < 0, \\ \psi_i \psi_j^* & sinon \end{cases} .$$

5.1.2. Espace de Fock fermionique .

L'ensemble $A(U)U_{an}$ est un idéal à gauche de $A(U)$, on définit l'espace de Fock fermionique $F = F(U_{an} \oplus U_{cr})$ par

$$F = A(U)/A(U)U_{an}$$

le vecteur vacuum parfait est donné par

$$|vac >= 1 \ mod \ A(U)U_{an}$$

de la même manière, on définit l'espace de Fock dual par

$$F^* = A(U)/U_{cr}A(U)$$

et le vecteur vacuum dual est égal à 1 modulo $U_{cr}A(U)$. Une base de F est donnée par les vecteurs

$$\psi_{j_1} .... \psi_{j_s} \psi_{i_1}^* .... \psi_{i_r}^* |vac >$$

où $j_1 > .... > j_s \geq 0 > i_1 > .... > i_r$.

Une base de l'espace de Fock dual F^* est donnée par les vecteurs

$$< vac | \psi_{i_1}^* ..... \psi_{i_r}^* \psi_{j_1} ..... \psi_{j_s}$$

où $i_1 > .... > i_r \geq 0 > j_1 > ... > j_s$. Une identification naturelle de F^* à F est donnée par

$$< vac | \psi_{j_s} ..... \psi_{j_1} \psi_{i_r}^* .... \psi_{i_1}^* \longleftrightarrow \psi_{i_1} .... \psi_{i_r} \psi_{j_1}^* .... \psi_{j_s}^* |vac >$$

L'espace F^* n'est pas le dual de F . L'identification précédente de F à F^*, avec un produit hermitien sur F nous permet d'obtenir le dual de F, comme une complétion de F^*.

L'espace de Fock est un module à gauche sur $A(U)$, dont la multiplication à gauche est donnée par

$$\psi_n(\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}....\psi^*_{i_r}|vac>) = \psi_n\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}....\psi^*_{i_r}|vac>$$

$$= \begin{cases} 0 \quad si \quad (\ n<0 \ \ et \ n \neq i_1, i_2, ..., i_r) \ \ ou \ \ n \in \{j_1, ..., j_s\} \\ (-1)^{s+k-1} \ \psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{j_1}.....\widehat{\psi^*_{i_k}}...\psi^*_{i_r}|vac> \qquad si \ \ n = i_k \end{cases}.$$

et

$$\psi^*_n(\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}....\psi^*_{i_r}|vac>) = \begin{cases} 0 \quad si \quad (\ n \geq 0 \ \ et \ n \neq j_1, i_2, ..., j_s) \ \ ou \ \ n \in \{i_1, ..., i_r\} \\ (-1)^{k-1} \ \psi_{j_1}....\widehat{\psi_{j_k}}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}.....\psi^*_{i_r}|vac> \qquad si \ \ n = j_k \\ (-1)^{s} \ \psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_n\psi^*_{i_1}.....\psi^*_{i_r}|vac> \end{cases}.$$

On introduit maintenant un produit hermitien $<.|.>$ en considérant la base de F donnée précédemment comme base orthonormée, ce qui conduit à la

Proposition 1.2.1.

Pour le produit $<.|.>$, *on a* $(\psi_i)^*$ *dans* $End(F)$ *et*

$$(\psi_i)^* = \psi^*_i.$$

6. Produit extérieur infini et espace de Fock .

6.1. Produit extérieur infini.

L'espace vectoriel L engendré par les produits extérieurs infinis de V suivants

$$\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3}...... \qquad (i_j > i_{j+1})$$

pour lesquels il existe un entier d tel que $i_n = -n + d$ pour n assez grand . L'espace L est isomorphe à F, cet isomorphisme est donné par

$$|vac> \longleftrightarrow \psi_{-1} \wedge \psi_{-2} \wedge \psi_{-3} \wedge ....$$

$$\psi_{j_1}....\psi_{j_s}\psi^*_{i_1}.....\psi^*_{i_r}|vac> \longleftrightarrow (-1)^{i_1+...+i_r+1}\psi_{j_1} \wedge .... \wedge \psi_{j_s} \wedge \psi_{-1} \wedge ...\widehat{\psi_{i_1}} \wedge ..... \wedge \widehat{\psi_{i_r}} \wedge ....$$

et l'action de ψ_n sur F est un produit extérieur sur L, et l'action de ψ_n^* sur F est une contraction de ψ_n^* sur L, données par

$$\psi_n(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ....) = \psi_n \wedge \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ....$$

et

$$\psi_n^*(\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ....) = \begin{cases} (-1)^l \psi_{i_1} \wedge .... \wedge \widehat{\psi_n} \wedge .... & si \quad n = i_l \quad pour \quad un \quad certain \quad l \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

On fait de même sur l'espace F^*, et on a

$$< vac| \longleftrightarrow .... \wedge \psi_2 \wedge \psi_1 \wedge \psi_0.$$

On définit un autre espace vectoriel F_0 utile dans la suite . F_0 est un sous espace de F, défini à partir de la base de F donnée précédemment en prenant $r = s$ et

$$F_0 = vect(\psi_{j_1} ....\psi_{j_r} \psi_{i_1}^* ....\psi_{j_r}^* |vac >)$$

Le sous espace F_0 est isomorphe à l'espace L_0 engendré par les produits extérieurs infinis suivants

$$\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge \psi_{i_3} \wedge ....$$

où $i_j > i_{j+1}$ et $i_n = -n$ pour n assez grand . On utilise le même procédé pour définir l'espace dual F_0^* . L'application qui donne l'identification de F_0^* à F_0 donnée précédemment devient

$$....\psi_{j_2} \wedge \psi_{j_1} \wedge \psi_{j_0} \longleftrightarrow \psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge \psi_{i_{-3}} \wedge .... \quad (*)$$

où $i_{-1} > i_{-2} > ...$ et les indices j_k sont les indices qui ne sont pas dans$\{i_{-1}, i_{-2}, i_{-3}, ...\}$. ils sont classés par ordre décroissant.

Dorénavant, on ne fait pas de distinction entre L, (resp.L_0) et F, (resp.F_0) .

6.2. Diagramme de Young et base de F_0 .

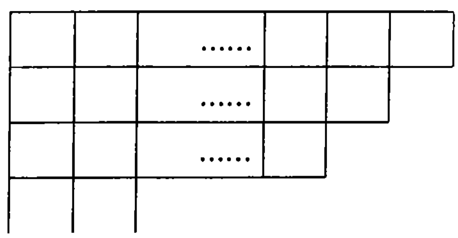
Dans cette section, on introduit une autre manière d'indexer les vecteurs de F_0. Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... > 0$ plus la suite nulle. Cet ensemble paramétrise la base de F_0 donnée précédemment. La suite vide est associée au vecteur $|vac>$. la partition $Y = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_k)$ est associée au vecteur

$$\Gamma_Y = \psi_{\lambda_1 - 1} \wedge \psi_{\lambda_2 - 2} \wedge \ldots.$$

Le degré du vecteur Γ_Y est

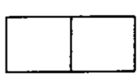
$$d(\Gamma_Y) = \lambda_1 + \ldots. + \lambda_k.$$

Soit $Y = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots. > 0)$ une partition d'entiers . Cette partition est représentée par un diagramme de Young donné par

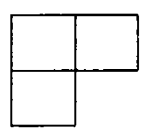


$Y = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \qquad)$

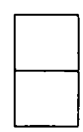
Exemple 6.2.1.



$Y = (2)$



$Y = (2, 1)$



$Y = (1, 1)$

6.3. Fermeture de F_0 et dualité

On donne la fermeture $\overline{F_0}$ de F_0 formellement, comme espace des séries formelles

$$\sum_{Y \in S} a_Y \Gamma_Y$$

où les a_Y sont des nombres complexes . L'espace $\overline{F_0^*}$ définit de la même façon la fermeture de l'espace F_0^* . $\overline{F_0}$ est l'espace dual de F_0 pour le produit $< .|. >$. En utilisant l'identification $(*)$, on remarque que le dual de F_0 peut être identifié à $\overline{F_0^*}$, de même que le dual de $\overline{F_0}$ peut être aussi identifié à F_0^* .

6.4. Opérateurs shift .

Les opérateurs shift sur $\overline{F_0}$ sont définis par

$$\mathbf{\Lambda}_n = \sum_i : \psi_i \wedge \psi_{i+n}^* :$$

où : : est l'ordre normal introduit précédemment.

Pour $n = 0$ on a

$$\sum_i \psi_i \psi_i^* |vac >= (1 + 1 + ...)|vac >$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_0 &= \sum_i : \psi_i \wedge \psi_i^* : \\ &= 0.\end{aligned}$$

La relation

$$d(\mathbf{\Lambda}_n \Gamma_Y) = d(\Gamma_Y) - n$$

montre que le degré l de $\mathbf{\Lambda}_n(\sum_{Y \in S} a_Y \Gamma_Y)$ est obtenu à partir de l'image d'un nombre fini de Γ_Y . Plus précisement son degré est $l + n$, donc on peut conclure que l'action de $\mathbf{\Lambda_n}$ sur la fermeture formelle $\overline{F_0}$ est bien définie .

Proposition 6.4.1.

Pour le produit $< .|. >$ on a

$$\mathbf{\Lambda}_n^* = \mathbf{\Lambda}_{-n}.$$

Preuve

Soit n un entier non nul, d'aprés la proposition 1.2.1. on a

$$\begin{aligned}(\sum_i : \psi_i \wedge \psi_{i+n}^* :)^* &= (\sum_i \psi_i \psi_{i+n}^*)^* \\ &= \sum_i \psi_{i+n} \psi_i^* \\ &= \sum_i \psi_i \psi_{i-n}^*\end{aligned}$$

et

$$[\Lambda_n, \Lambda_m] = n\delta_{m+n}.$$

6.5.Théorie des représentations et produit extérieur infini.

Soit $A \in End(V)$. On définit $R(A)$ par

$$R(A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... = A\psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge ...,$$

R est une représentation du groupe de Lie de l'ensemble des éléments inversibles de $End(V)$. Une représentation d'algébre de Lie de $End(V)$ est donnée par

$$\begin{aligned} r(A)\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... &= A\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... \\ &+ \psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge ... \\ &+ ... \end{aligned}$$

quand ceci a un sens .

Proposition 6.5.1.

Soit A un élément de $End(V)$,

$$exp(r(A)) = R(exp(A)).$$

Preuve

Le développement de l'exponentielle nous donne

$$\begin{aligned}
exp(r(A))\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... = \; & \psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... \\
& + A\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... \\
& + \psi_{i_1} \wedge A\psi_{i_2} \wedge ... \\
& + ... \\
& + \frac{1}{2}(A^2\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... \\
& + \frac{1}{2}(\psi_{i_1} \wedge A^2\psi_{i_2} \wedge ... \\
& + ... \\
& + 2A\psi_{i_1} \wedge \psi_{i_2} \wedge ... \\
& + \psi_{i_1} \wedge 2A\psi_{i_2} \wedge ... \\
& + ... \\
& = (1 + A + \frac{A^2}{2} + ...)\psi_{i_1} \wedge (1 + A + \frac{A^2}{2} + ...)\psi_{i_2} \wedge ...
\end{aligned}$$

Exemple 6.5.2.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'opérateur C_n par $C_n\psi_i = \psi_{i-n}$, sa matrice est donnée par

$$(\delta_{i,j-n})_{i,j} = \begin{pmatrix}
\ddots & & \ddots & & & & & \\
& 0 & & 1 & & & & \\
& & 0 & & 1 & & & \\
& & & 0 & \overset{n}{\leftrightarrow} & 1 & & \\
& & & & 0 & & 1 & \\
& & & & & 0 & & 1 \\
& & & & & & \ddots & & \ddots
\end{pmatrix}$$

si $n \neq 0$, on a

$$r(C_n) = \mathbf{\Lambda}_n$$

et

$$\begin{aligned}
exp(\sum_{i>0} t_i\mathbf{\Lambda}_i) &= exp(\sum_{i>0} t_i r(C_i)) \\
&= R(exp(\sum_{i>0} t_iC_i))
\end{aligned}$$

Si $n = 0$, $r(C_0) = r(Id)$.

On sait que l'algébre de Lie $End(V)$ est engendrée par les opérateurs $E_{i,j}$ définis par

$$E_{i,j}(\psi_k) = \begin{cases} \psi_i & si \quad k = j. \\ 0 & sinon \end{cases} .$$

et les commutateurs sont donnés par

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k} E_{i,l} - \delta_{i,l} E_{k,j}$$

Proposition 6.5.3.

$$r(E_{i,j}) = \psi_i \circ \psi_j^*.$$

On définit maintenant l'application linéaire $\tilde{\sigma} : End(V) \longrightarrow End(\overline{F_0})$ par

$$\tilde{\sigma}(E_{i,j}) =: \psi_i \wedge \psi_j^* :$$

Proposition 6.5.4.

on a

$$[: \psi_i \wedge \psi_j^* :, : \psi_k \wedge \psi_l^* :] = \delta_{j,k} : \psi_i \wedge \psi_i^* : -\delta_{i,l} : \psi_k \wedge \psi_j^* : +\delta_{j,k}\delta_{i,l}(< \psi_i \psi_j^* > - < \psi_j \psi_j^* >)$$

donc $\tilde{\sigma}$ est une représentation de l'extension centrale $End(V) \oplus k\mathbb{C}$ de $End(V)$ avec une charge centrale $k = 1$.

Preuve

D'après les relations qui définissent l'algébre de Clifford $A(U)$, on a

$$\begin{aligned}\psi_i\psi_j^*\psi_k\psi_l^* &= -\psi_i\psi_k\psi_j^*\psi_l^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_l^*\\ &= \psi_k\psi_i\psi_j^*\psi_l^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_l^*\\ &= -\psi_k\psi_i\psi_j^*\psi_l^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_l^*\\ &= \psi_k\psi_l^*\psi_i\psi_j^* - \delta_{i,l}\psi_k\psi_j^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_l^*.\end{aligned}$$

L'opérateur $\psi_i \wedge \psi_j^* - \psi_i\psi_j^* =$ constante, ceci nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}[: \psi_i \wedge \psi_j^* :, : \psi_k \wedge \psi_l^* :] &= [\psi_i\psi_j^*, \psi_k\psi_l^*]\\ &= -\delta_{i,l}\psi_k\psi_j^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_l^*\\ &= \delta_{j,k} : \psi_i \wedge \psi_l^* : -\delta_{i,l} : \psi_k \wedge \psi_j^* :\\ &+ \delta_{j,k}\delta_{i,l}(< \psi_i\psi_i^* > - < \psi_k\psi_k^* >).\end{aligned}$$

7. Correspondance Boson-Fermion .

Dorénavant, on note t la suite infinie des variables suivantes :

$$t = (x, t_2, t_3, ...)$$

Soit $\mathbb{C}\ [t]$ l'ensemble des polynômes en ces variables . La correspondance Boson-Fermion est un isomorphisme linéaire entre $\mathbb{C}\ [t]$ et F_0, autrement dit, $\mathbb{C}\ [t]$ est l'espace de Fock bosonique correspondant à F_0 . Soit v un vecteur de F_0, la correspondance Boson-Fermion est donnée par

$$\mathcal{F} : F_0 \longrightarrow \mathbb{C}\ [t]$$

avec

$$\mathcal{F}(v)(t) =< vac|(exp(\sum_{i>0} t_i\mathbf{\Lambda}_i)v) > .$$

et l'opérateur pull-back est donné par

$$\mathcal{F}^* \quad : End(\mathbb{C}\ [t]) \longrightarrow End(F_0)$$

$$\mathcal{F}^*(J_n) = \mathbf{\Lambda}_n$$

où

$$J_n = \frac{\partial}{\partial t_n} \quad si \quad n > 0$$
$$= (-n)t_n \quad si \quad n \leq 0.$$

Le produit $< .|. >$ sur F_0 correspond à

$$< P|Q >= \overline{P}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots).Q(x, t_2, \ldots)|_{t=0}$$

sur l'espace $\mathbb{C}\ [t]$ le degré du vecteur v de F_0 sur $\mathbb{C}\ [t]$ est donné par $d(t_i) = i$ et $d(PQ) = d(P)d(Q)$.

Dans la suite on donne une forme explicite et simple de l'isomorphisme $\mathcal{F}$ en utilisant les polynômes de Schur généralisés .Les polynômes de Schur élémentaires sont définis par

$$exp(\sum_{k\geq 1} z^k t_k) = \sum_{i\geq 0} z^i S_i(t)$$

Par exemple

$S_0(t) = 1$

$S_1(t) = t_1$

$S_2(t) = \frac{t_1^2}{2} + t_2$

$S_3(t) = \frac{t_1^3}{6} + t_1 t_2 + t_3$, etc ...

Soit $Y \in \mathcal{S}$ une partition d'entiers, les polynômes de Schur généralisés associés à Y sont définis par

$$S_Y(t) = det(S_{\lambda_i+j-1}(t))_{i,j}.$$

Par exemple

$S_{1,1} = \frac{t_1^2}{2} - t_2$

$S_{2,1} = \frac{t_1^3}{3} - t_3$, etc ...

Proposition 7.1.

Soient $Y = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > 0$ *une partition d'entiers.*

$$\Gamma_Y = \psi_{\lambda_1 - 1} \wedge \psi_{\lambda_2 - 2} \wedge ... \in F_0$$

et $S_Y(t)$ *le polynôme de Schur généralisé associé à* Y. *Alors la correspondance Boson-Fermion prend la forme simple suivante :*

$$\mathcal{F}(\Gamma_Y) = S_Y.$$

Preuve

Si Y est la suite vide, on a $\mathcal{F}(\Gamma_0) = 1$. Pour les autres cas, l'exemple 1.7.2. nous permet de les calculer de la manière suivante :

$(S_{j-i})_{i,j\in\,\mathbb{Z}}$ est la matrice de $exp(\sum_{i<0} t_i C_i)$, de plus

$$\begin{aligned} exp(\sum_{i>0} t_i)\mathbf{A_i}(\psi_{\lambda_1-1} \wedge \psi_{\lambda_2-2} \wedge ...) &= exp(\sum_{i>0} t_i C_i)\psi_{\lambda_1-1} \wedge exp(\sum_{i>0} t_i C_i)\psi_{\lambda_2-2} \wedge ... \\ &= \sum_{j_{-1}>j_{-2}>...} det(S_{j-i})^{\lambda_1-1,\lambda_2-2,...}_{j_{-1},j_{-2},...} \psi_{j_{-1}} \wedge \psi_{j_{-2}} \wedge ... \end{aligned}$$

où $(S_{ji})^{\lambda_1-1,\lambda_2-2,...}_{j-1,j-2,...}$ est la matrice de $(S_{j-i})_{i,j\in\,\mathbb{Z}}$ formée de colonnes $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, ...$ et des lignes $j_{-1}, j_{-2}, ...$. De la définition de la correspondance Boson-Fermion on en déduit que $\mathcal{F}(\Gamma_Y)$ est la composante du vecteur vacuum de

$$exp(\sum_{i>0} t_i \mathbf{A_i})(\psi_{\lambda_1-1} \wedge \psi_{\lambda_2-2} \wedge ...)$$

ceci entraine

$$\mathcal{F}(\Gamma_Y) = det(S_{j-i})^{\lambda_1-1,\lambda_2-2,...}_{-1,-2,...}$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Gamma_Y) &= det(S_{\lambda_i+j-i})_{i,j} \\ &= S_Y. \end{aligned}$$

Comme fermeture formelle de l'espace $\mathbb{C}$ $[t]$, on prend l'espace $\mathbb{C}$ $[[t]]$ engendré par les séries suivantes

$$\sum_{Y \in S} a_Y S_Y,$$

où a_Y est un nombre complexe .

L'espace $\mathbb{C}$ $[[t]]$ est appelé espace de Fock bosonique, et il est isomorphe à $\overline{F_0}$.

8. Fonctions tau .

Soit $\mathbb{C}$ $[[\mu, \mu^{-1}]][[t]]$ l'ensemble des séries formelles

$$\sum_{Y \in S} a_Y(\mu) S_Y$$

où

$$a_Y = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \mu^i$$

est une série formelle et S_Y est le polynôme de Schur introduit dans le paragraphe précédent. Soient maintenant les opérateurs suivants

$$\mathbf{X} : \mathbb{C}\ [[t]] \longrightarrow \mathbb{C}\ [[\mu, \mu^{-1}]][[t]]$$

$$\tilde{\mathbf{X}} : \mathbb{C}\ [[t]] \longrightarrow \mathbb{C}\ [[\mu, \mu^{-1}]][[t]]$$

définis pour tout $P \in \mathbb{C}$ $[[t]]$ par

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t,\mu)P(t) &= exp(\sum_1^\infty t_i \mu^i) P(t - [\mu^{-1}]) \\ &= exp(\sum_1^\infty t_i \mu^i) exp(\sum_1^\infty -\frac{1}{i}\mu^{-i}\frac{\partial}{\partial t_i}) P(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu)P(t) &= exp(\sum_1^\infty -t_i \mu^i) P(t + [\mu^{-1}]) \\ &= exp(\sum_1^\infty -t_i \mu^i) exp(\sum_1^\infty \frac{1}{i}\mu^{-i}\frac{\partial}{\partial t_i}) P(t)\end{aligned}$$

où $[x] = (x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, ...)$.

Les fonctions tau sont les séries de $\mathbb{C}$ $[[t]]$ qui vérifient l'identité bilinéaire suivante

$$\oint \mathbf{X}(t,z)\tau(t)\tilde{\mathbf{X}}(t',z)\tau(t')dz = \oint \tau(t-[z^{-1})\tau(t'+[z^{-1}])exp(\sum_1^\infty (t_i - t'_i)z^i)dz$$
$$= 0 \quad \forall \quad t, t'.$$

Proposition 8.1.

On a

$$[\mathbf{X}(t,\mu), J_n] = (\delta_{n,0} - \mu^n)\mathbf{X}(t,\mu).$$
$$[\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu), J_n] = (\mu^n - \delta_{n,0})\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu).$$

Ces commutateurs caractérisent les opérateurs $\mathbf{X}$ *et* $\tilde{\mathbf{X}}$ *à une constante près* .

Pour la démonstration voir [F] .

Noter aussi que

$$\mathbf{X}(t,\mu)(1) = exp(\sum_1^\infty t_i\mu^i)$$
$$= \sum_{i\geq 0} \mu^i S_i(t) \quad .$$

Soient $T : F \longrightarrow F$, $T^* : F \longrightarrow F$ les deux opérateurs linéaires agissant sur l'espace de Fock, qui sont définis par

$$T\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ... = \psi_{i_{-1}-1} \wedge \psi_{i_{-2}-2} \wedge ...,$$

et

$$T^*\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ... = \psi_{i_{-1}+1} \wedge \psi_{i_{-2}+2} \wedge ....$$

Proposition 8.2.

Par la correspondance Boson-Fermion $\mathcal{F}$, *les opérateurs* $\mathbf{X}$ *et* $\tilde{\mathbf{X}}$ *correspondent à*

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu)) = T\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mu^i\psi_i$$

et

$$\mathcal{F}^*(\tilde{\mathbf{X}}(t,\mu)) = T^* \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu^{-1-j}\psi_j^*.$$

Preuve

L'opérateur $\mathbf{X}$ est caractérisé à une constante multiplicative près par

$$[\mathbf{X}(t,\mu), J_n] = (\delta_{n,0} - \mu^n)\mathbf{X}(t,\mu).$$

Les relations qui définissent l'algèbre de Clifford $A(U)$ nous permet de calculer

$$\begin{aligned} T\psi_i\psi_j\psi_{j+n}^* &= -T\psi_j\psi_i\psi_{j+n}^* \\ &= T\psi_j\psi_{j+n}^*\psi_i - \delta_{i,j+n}T\psi_j \\ &= \psi_{j-1}\psi_{j+n-1}^*T\psi_i - \delta_{i,j+n}T\psi_j. \end{aligned}$$

L'opérateur $:\psi_i \wedge \psi_j^* : -\psi_i\psi_j^*$ est constant, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} [T\psi_i, :\psi_j \wedge \psi_{j+n}^* :] &= [T\psi_i, \psi_j\psi_{j+n}^*] \\ &= -\delta_{i,j+n}T\psi_j + (\psi_{j-1}\psi_{j+n-1}^*)T\psi_i. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [T\sum_i \mu^i\psi_i, \Lambda_n] &= \sum_{i,j} \mu^i [T\psi_i, :\psi_j \wedge \psi_{j+n}^* :] \\ &= -\mu^n \sum_i \mu^i T\psi_i + \delta_{n,0}\sum_i \mu^i T\psi_i. \end{aligned}$$

De l'égalité

$$\sum_i T\psi_i|vac> = \sum_{i>0}\Gamma_i$$

on déduit que notre constante vaut 1 .

Proposition 8.3.

Les fonctions tau qui correspondent aux vecteurs $\gamma \in \overline{F^0}$, vérifient l'identité bilinéaire suivante :

$$\sum_i (\psi_i \otimes \psi_i^*)\gamma = 0.$$

Cette identité est équivalente à

$$\sum_i (T\psi_i \odot T^*\psi_i^*)\gamma = 0$$

qui est équivalente à

$$\oint \mathbf{X}(t,\mu)\mathcal{F}(\gamma)(t).\tilde{\mathbf{X}}(t',\mu)\mathcal{F}(\gamma)(t')d\mu = 0 \quad \forall \ t, t' \ .$$

Corollaire 8.4.

Soit $Y \in S$ une partition d'entiers, le vecteur $\Gamma_Y \in F_0$ satisfait l'identité bilinéaire de la proposition précédente, donc tout polynôme de Schur généralisé $\mathcal{F}(\Gamma_Y)$ est une fonction tau .

Preuve

On sait que $\psi_k(\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ...) = 0$ si ψ_k figure dans l'expression $\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ....$ et $\psi_k^*(\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ...) = 0$ si ψ_k ne figure pas dans l'expression $\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ...$ Ceci entraine

$$\psi_k \odot \psi_k^*(\psi_{i_{-1}} \wedge \psi_{i_{-2}} \wedge ...) = 0 \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pour le reste de la démonstration voir [F] .

9. Opérateur vertex .

9.1 Opérateur vertex dans l'espace de Fock bosonique .

Soit $\mathbb{C}\ [[\mu,\mu^{-1},\lambda,\lambda^{-1}]][[t]]$ l'ensemble des séries formelles

$$\sum_{Y \in S} a_Y(\mu,\lambda) S_Y.$$

où

$$a_Y(\mu,\lambda) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} a_{i,j}\mu^i\lambda^j$$

est une série formelle et S_Y est le polynôme de Schur.

L'opérateur vertex $\mathbf{X} : \mathbb{C}\ [[t]] \longrightarrow \mathbb{C}\ [[\mu, \mu^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}]][[t]]$ est défini par

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t, \mu, \lambda)P(t) &= exp(\sum_{1}^{\infty} t_i(\mu^i - \lambda^i))P(t + [\lambda^{-1}] - [\mu^{-1}])\\ &= exp(\sum_{1}^{\infty}(\mu^{-i} - \lambda^{-i})\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_i})P(t)\end{aligned}$$

où $P(t)$ est un élément de $\mathbb{C}\ [[t]]$.

On a

Lemme 9.1.1.

$$[\mathbf{X}(t, \mu, \lambda), J_n] = (\lambda^n - \mu^n)\mathbf{X}(t, \mu, \lambda).$$

ce commutateur caractérise à une constante multiplicative près l'opérateur vertex $\mathbf{X}$. *et si* $\mu = \lambda$ *cet opérateur vertex est réduit à l'identité.*

Pour la démonstration voir [F] .

9.2. Opérateur vertex dans l'espace de Fock fermionique .

Proposition 9.2.1

Par la correspondance Boson-Fermion $\mathcal{F}$, *l'opérateur vertex correspond à*

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t, \mu, \lambda)) = (\frac{\mu}{\lambda} - 1)\sum_{i,j}\frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_j : +1 \quad .$$

Preuve

L'opérateur vertex $\mathbf{X}$ est caractérisé à une constante multiplicative près, par

$$[\mathbf{X}(t, \mu, \lambda), J_n] = (\lambda^n - \mu^n)\mathbf{X}(t, \mu, \lambda).$$

Les relations qui définissent l'algèbre de Clifford $A(U)$ nous permettent de calculer

$$\begin{aligned}\psi_i\psi_j^*\psi_k\psi_{k+m}^* &= -\psi_i\psi_k\psi_j^*\psi_{k+m}^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_{k+m}^*\\ &= \psi_k\psi_i\psi_j^*\psi_{k+m}^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_{j+m}^*\\ &= -\psi_k\psi_i\psi_{k+m}^*\psi_j^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_{j+m}^*\\ &= \psi_k\psi_{k+m}^*\psi_i\psi_j^* - \delta_{i,k+m}\psi_{i-m}\psi_j^* + \delta_{j,k}\psi_i\psi_{j+m}^*\end{aligned}$$

L'opérateur $: \psi_i \wedge \psi_j^* : - \psi_i \psi_j^*$ étant constant nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}[: \psi_i \wedge \psi_j^* :,: \psi_k \wedge \psi_{k+m}^* :] &= [\psi_i \psi_j^*, \psi_k \psi_{k+m}^*] \\ &= -\delta_{i,k+m} \psi_{i-m} \psi_j^* + \delta_{j,k} \psi_i \psi_{j+k}^*\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[A, \mathbf{\Lambda_n}] &= (\frac{\mu}{\lambda} - 1) \sum_{i,j,k} \frac{\mu^i}{\lambda^j} [: \psi_i \wedge \psi_j^* :,: \psi_k \wedge \psi_{k+n}^* :] \\ &= (\frac{\mu}{\lambda} - 1) \sum_{i,j,k} \frac{\mu^i}{\lambda^j} (\psi_i \psi_{j+n}^* - \psi_{i-n} \psi_j^*)\end{aligned}$$

où

$$A = (\frac{\mu}{\lambda} - 1) \sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_j^* : +1.$$

En utilisant l'ordre normal pour calculer cette série, on a

$$\begin{aligned}[A, \mathbf{\Lambda_n}] = (\frac{\mu}{\lambda} - 1)&(\sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_{j+n}^* : \\ &- \sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_{i-n} \wedge \psi_j^* : \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} (< \psi_i \psi_{j+n}^* > - < \psi_{i-n} \psi_j^* >) \\ &= (\lambda^n - \mu^n)(\frac{\mu}{\lambda} - 1) \sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_j^* : \\ &+ (\frac{\mu}{\lambda} - 1) \lambda^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu^i}{\lambda^i} \\ &= (\lambda^n - \mu^n) \mathbf{X}(t, \mu, \lambda).\end{aligned}$$

la constante multiplicative est égale à 1 .

10. Opérateur vertex et grassmannienne .

Dans ce paragraphe les éléments de la grassmannienne sont considérés au départ comme des ensembles formés de séries de Laurent formelles . Ceci permet de donner la construction de la fonction τ_W associée à l'élément W de Gr^n . La fonction d'onde ψ_τ et sa fonction d'onde duale ψ_τ^* sont données en fonction de la fonction tau . Ceci donne la relation entre les éléments W de Gr^n et leurs fonctions tau et fonctions d'ondes ψ_τ et ψ_τ^* (voir [F] et [Vm]) . Un élément W de la grassmannienne Gr^n peut être vu comme fermeture d'un espace vectoriel engendré par les dérivées de la fonction d'onde par rapport à x au point $t = 0$ (voir [F] et [Vm]).

L'opérateur vertex introduit dans les paragraphes précédents agit sur la fonction tau, cette fonction génère un et un seul élément W_τ de la grassmannienne Gr^n . On aimerait bien trouver une action qui agit sur les éléments W de la grassmannienne Gr^n, qui traduit l'action de l'opérateur vertex sur la fonction τ correspondante à W . Pour cela on fait appel aux différentes écritures des éléments W; plus exactement à deux écritures : la première est celle qui donne W en fonction des dérivées de la fonction d'onde par rapport à x au point $t = 0$, donc on cherche à traduire l'action de l'opérateur vertex sur la fonction tau par une action équivalente exprimée en termes des éléments de cette dernière écriture mais qui agit sur l'élément W_τ. La deuxième écriture est celle qui donne W en fonction des lacets, i.e pour tout W de Gr^n il existe un et un seul lacet γ tel que $W = \gamma H_+$. Dans ce cas on cherche une action agissant sur γ équivalente à l'action de l'opérateur vertex sur τ_W . Malheuresement ces deux écritures ne donnent pas ce qu'on attend, et c'est la correspondance Boson-Fermion et l'écriture de l'opérateur vertex dans l'espace de Fock fermionique qui donnent une réponse correcte à la question.

Considérons l'espace H comme l'espace des séries de Laurent formelles en z^{-1} à coefficients complexes. Soit $Y = \{\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq ... \geq \lambda_2 > 0\}$ une partition d'entiers qu'on complète par une suite infinie de 0, l'élément de l'ensemble Φ correspondant à la partition Y est donné par

$$S_Y = \{0 - \lambda_0, 1 - \lambda_1, ..., k - \lambda_k, k + 1, k + 2, ...\}$$

la strate $\Sigma_Y = \Sigma_{S_Y}$ correspondante à la partition Y est le sous ensemble de $Gr(H)$ constitué de sous espace $W \subset H$ tel que

$$W = \overline{vect(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ...)}$$

où

$$\Phi_k = z^{k-\lambda_k} + \sum_{i<k-\lambda_k} a_{i,k} z^i$$

où les $a_{i,k} \in \mathbb{C}$.

La grassmannienne $Gr(H)$ est l'union de toutes les strates Σ_Y.

Soit maintenant W un élément de la plus grande strate Σ_0 . On choisit la base de W, donnée par $\{1 + a_{0,1}z^{-1} + a_{0,2}z^{-2} + \ldots,\quad z + a_{1,1}z^{-1} + a_{1,2}z^{-2} + \ldots,\quad z^n + a_{n,1}z^{-1} + a_{n,2}z^{-2} + \ldots,\quad \ldots\}$. Cette base particulière est appelée base normalisée .

Soient maintenant $I : H \longrightarrow V$ et $J : H \longrightarrow V$ les deux isomorphismes définis par

$$I(z^i) = \psi_{-1-i} \qquad \text{et} \qquad J(z^i) = \psi_i \qquad .$$

Les séries Φ_k éléments de la base normalisée de W ont toutes un coefficient de plus haut degré égal à 1 .

Un élément W de Gr^n s'écrit de la façon suivante

$$W = \overline{vect(\Phi_d(z), \Phi_{d-1}(z), \ldots \quad)}$$

Soit l'application $\sigma : Gr \longrightarrow \overline{F_0}$ définie par

$$\sigma(W) = I\Phi_d(z) \wedge I\Phi_{d+1}(z) \wedge \ldots$$

Pour W dans Σ_0, on a

$$\sigma(W) = (\psi_{-1} + a_{0,1}\psi_0 + a_{0,2}\psi_1 + \ldots \quad) \wedge (\psi_{-1} + a_{0,1}\psi_0 + a_{0,2}\psi_1 + \ldots \quad) \wedge \ldots \quad .$$

De même, on définit $\sigma^* : Gr \longrightarrow \overline{F_0^*}$ par

$$\sigma^*(W) = \quad \ldots \wedge J\Phi_{d+2}(z) \wedge J\Phi_{d+1}(z) \wedge J\Phi_d(z).$$

Dans Σ_0, on a

$$\sigma^*(W) = \quad \ldots \ \wedge (\psi_0 + a_{1,1}\psi_{-1} + a_{1,2}\psi_{-2} + \ldots \quad) \wedge (\psi_1 + a_{0,1}\psi_{-1} + a_{0,2}\psi_{-2} + \ldots \quad)$$

Théorème 10.1.

Soit $W \in Gr$. Alors, $\sigma(W)$ satisfait l'identité bilinéaire

$$(\sum_i \psi_i \otimes \psi_i^*)\sigma(W) = 0$$

et donc $\mathcal{F}(\sigma(W))$ est une fonction tau .

Preuve

Pour simplifier les notations, on donne la démonstration pour les W de Σ_0 . Pour les autres cas seule change la troncature de la sommation suivant le signe des indices .

$$(\sum_i \psi_i \otimes \psi_i^*) = (\sum_{i<0}(\psi_i + \sum_{j\geq 0} a_{-i-1,j+1}\psi_j) \otimes \psi_i^*) + (\sum_{i\geq 0} \psi_i \otimes (\psi_i^* - \sum_{j\geq 1} a_{j-1,i+1}\psi_{-j}^*)).$$

Pour $i < 0$,

$$(\psi_i + \sum_{j\geq 0} a_{-i-1,j+1}\psi_j).(\psi_{-1} + \sum_{j\geq 0} a_{0,j+1}\psi_j) \wedge (\psi_{-2} + \sum_{j\geq 0} a_{1,j+1}\psi_j) \wedge ... \quad = 0$$

et pour $i \geq 0$, on

$$(\psi_i^* + \sum_{j\geq 0} a_{-i-1,j+1}\psi_{-j}^*).(\psi_{-1} + \sum_{j\geq 0} a_{0,j+1}\psi_j) \wedge (\psi_{-2} + \sum_{j\geq 0} a_{1,j+1}\psi_j) \wedge ... \quad = 0$$

donc

$$\sum_i \psi_i \otimes \psi_i^*((\psi_{-1} + \sum_{j\geq 0} a_{0,j+1}\psi_j) \wedge (\psi_{-2} + \sum_{j\geq 0} a_{1,j+1}\psi_j) \wedge ... \quad) = 0$$

La fonction tau associée à W est $\tau_W = \mathcal{F}(\sigma(W))$. W est dans la strate Σ_0 si et seulement si la composante vaccum $< vac|\sigma(W) >$ de $\sigma(W)$ est égale à 1 .

La correspondance Boson-Fermion $\mathcal{F}$ est une application linéaire de F_0 dans l'espace de Fock bosonique $\mathbb{C}\ [t]$. Son pull-back $\mathcal{F}^*$ est une application de l'espace $End(\mathbb{C}\ [t])$ dans $End(F_0)$. Dans l'espace de Fock fermionique, l'opérateur vertex s'écrit

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu,\lambda)) = (\mu - 1)\sum_{i,j} \frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_j :$$

et dans $\overline{F_0}$, l'élément W de la grassmannienne Gr^n s'écrit $\sigma(W)$. L'image de $\sigma(W)$ par la correspondance Boson-Fermion nous donne un élément de l'espace de Fock bosonique qui est une fonction tau . On cherche ici l'equivalent de l'action de l'opérateur vertex sur la fonction τ qui agit d'une manière directe sur l'élément W_τ de Gr^n correspondant. $\mathcal{F}(\sigma(W))$ est une fonction tau, et l'action de l'opérateur vertex est donnée par

$$\mathbf{X}(t,\mu,\lambda)\mathcal{F}(\sigma(W)) = \mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu,\lambda))(\sigma(W))$$

et

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu,\lambda)) = (\mu - 1)\sum_{i,j}\frac{\mu^i}{\lambda^j} : \psi_i \wedge \psi_j :$$

est l'écriture de l'opérateur vertex dans l'espace de Fock fermionique . $\mathbf{X}(t,\mu,\lambda)$ est l'écriture de l'opérateur vertex dans l'espace de Fock bosonique. Toutes ces écritures nous permettent de conclure que la transformation

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu,\lambda))\sigma$$

donne l'équivalent de l'action de l'opérateur vertex sur les éléments W de la grassmanienne Gr^n .

Théorème 10.2.

L'équivalent de l'action de l'opérateur vertex sur les éléments de la grassmannienne Gr^n est donné par

$$\mathcal{F}^*(\mathbf{X}(t,\mu,\lambda))\sigma.$$

Références :

[DJKM] **Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., Miwa, T.**: Transformation groups for soliton equations, in: Proc.RIMS Symp. Nonlinear integrable systems-Classical theory and quantum theory (Kyoto 1981), pp.39-119. Singapore : World Scientific 1983.

[F] **Fastré, J.**: Boson-correspondance for W-algebras, Bäcklund-Darboux transformations and the equation [L, P] $= L^n$, University of Louvain, doctoral dissertation (1993) .

[H] **Husemoller, D.,**1975 : Fiber Bundles .Springer-Verlag, New york, Heidelberg, Berlin (Second edition) .

[K] **Kac, V. G.** : Infinite-dimensional Lie algebras, 3rd edition, Cambridge Univ. Press.

[Ku] **Kuiper, N. H.**: The Homotopy type of the Unitary Group of Hilbert Space, Pergamon Press . 1965, Topology Vol 3, pp 19 -30.

[M] **Mickelsson, J .,**: Current Algebras and Groups. Plenum Press. New york and London 1986 .

[MR] **Mickelsson, J . and S . Rajeev.** : Current Algebras and Determinant Bundles over Infinite-Dimension Grassmannians. commun. Math . Phys. 116, p 365, 1988 .

[Pa] **Palais, R.S.** : Seminar on the Atiah-Singer Index Theorem . Annals Mathematics Studies, N.57 . Prenceton University Press .

[P] **Palais, R.S.** 1965 : On the Homotopy Type of certain Groups of operators . Topology 3, p 271, 1965 .

[PS] **Pressley, A. and G. Segal** : Loop Groups Clarrendon Press, Oxford, 1986 .

[S] **Semlali, A** : Grassmanniennes, stratification et décomposition cellulaire. Article soumis .

[Sa] **Sato, M.** : The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics vpl 49 (1989), Part1, 51-66.

[Se] **Segal, G. B.,** Unitary representations of Some infinite dimensional groups, commun . Math-Phys., 80 (1981), p 301 - 42 .

[Si] **Simon B.,** Trace ideals and their applications, London Mathematical Society, Lectures notes Vol. 35. Cambridge University Press, Cambridge 1965.

[Sp] **Spivak , M** :A comprehensive Introduction to Differential Geometry . Publish or Perish, Inc , Berkekey ,1979 .

[SS] **Sato, M., Sato, Y.** : Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds, Lect. notes in Num. Appl. Anal.5 259-271 (1982).

[SW] **Segal .G and G. Wilson** :Loop Groups and equations of KdV type . Publ . Math .IHES N^0 61. p 5, 1985.

[Vm] **van Moerbeke, P.** : Integrable foundations of string theory, CIMPA summer school at Sophia-Antipolis (June 1991), World Scentific (1993).

[Z] **Zygmund, A.,** Trigonometric series Second edition. Cambridge University . Press. Cambridge, 1977 .