



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

104889 .

5 104889

51

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Latifa Mouftakir

**EXCLU DU
PRÊT**

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

OPTION : MÉCANIQUE

HOMOGENÉISATION DES STRUCTURES ONDULÉES

Soutenue le 23 Juillet 1996 devant le jury composé de :

H. Lanchon-Ducauquis (INPL Nancy)
D. Caillierie (INPG Grenoble)
F. Léné (Université Paris VI)
N. Damil (Université Hassan II Casablanca)
C. Gardin (Université de Metz)
J. C. Roth (Université de Metz)
M. Potier-Ferry (Université de Metz)

Président
Rapporteur
Rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19961205
Cote	S/M3 96/58
Loc	Magasin

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux sous la direction du professeur Michel Potier-Ferry.

Tout d'abord je remercie vivement Michel Potier-Ferry qui a su dirigé ce travail avec enthousiasme et intelligence. Sa patience et son goût pour la recherche m'ont beaucoup aidé à comprendre le sens scientifique du mot "recherche".

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers C. Gardin et N. Damil qui ont accepté de juger ce travail et qui m'ont beaucoup aidé par leurs conseils.

Je remercie F. Léné et D. Caillerie d'avoir accepté la lourde tâche de rapporter ce travail.

Mes remerciements vont également à H. Lanchon-Ducauquis et J. C. Roth qui m'ont fait l'honneur de participer au membre de jury de cette thèse.

Je remercie sincèrement A. Naddari qui m'a beaucoup aidé, par ses grandes connaissances en informatique, dans la réalisation des calculs numériques.

Je ne saurais oublié de remercier mes amis A. Tri avec qui j'ai eu des discussions qui m'ont beaucoup apporté et K. El Hassania qui ont été pour moi d'un grand soutien durant ces années que j'ai passé loin de ma famille.

Je salue tous mes collègues thésards du groupe de calculs de structures avec qui j'ai passé de bons moments.

TABLE DES MATIÈRES

0. INTRODUCTION GENERALE

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION

- 1.1 Introduction
- 1.2 Méthode de l'énergie
- 1.3 Méthode asymptotique

2. HOMOGENÉISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE POUTRE ONDULÉE D'ÉPAISSEUR PETITE DEVANT LE PAS DES ONDULATIONS

- 2.1 Introduction
- 2.2 Position du problème
- 2.3 Principe de la méthode asymptotique
- 2.4 Modèle homogénéisé
 - 2.4.1 Traitement des équations d'équilibres
 - 2.4.2 Traitement des relations géométriques et des lois de comportements.
 - 2.4.3 Récapitulatif
- 2.5 Localisation
- 2.6 Conclusion

3. HOMOGENÉISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE POUTRE ONDULÉE D'ÉPAISSEUR COMPARABLE AU PAS DES ONDULATIONS

3.1 Introduction

3.2 Position du problème

3.3 Principe de la méthode des développements
asymptotiques

3.4 Modèle homogénéisé

3.4.1 Équations d'équilibres macroscopiques

3.4.2 Lois de comportement et coefficients
d'élasticité homogénéisés

3.5 Calcul des rigidités équivalentes par l'approche
unidimensionnelle et l'approche bidimensionnelle

3.6 Visualisation des contraintes de localisation

3.7 Quelques exemples de validation

3.8 Conclusion

4. MODÉLISATION ASYMPTOTIQUE D'UNE PLAQUE ONDULÉE D'ÉPAISSEUR COMPARABLE AU PAS DES ONDULATIONS

4.1 Introduction

4.2 Position du problème

4.3 Analyse asymptotique

4.4 Modèle homogénéisé

4.4.1- Équations d'équilibres macroscopiques

4.4.2 Traitement de la lois de comportement

4.4.3 Localisation

4.4.4 Lois de comportement macroscopiques

4.4.5 Coefficients d'élasticité homogénéisés

4.5 Récapitulatif

4.6 Calcul numériques des matrices de rigidité équivalentes en membrane et en flexion. proposition de formules approchées.

4.7 Exemples de validation

4.8 Conclusion

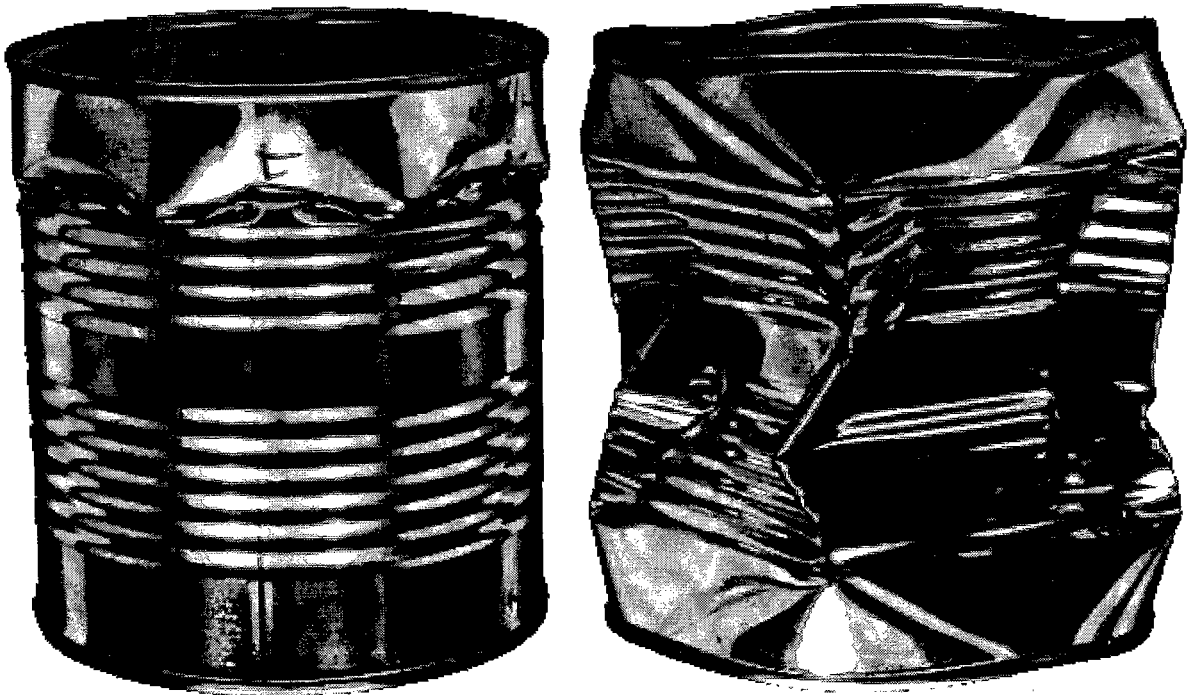
5. CONCLUSION GÉNÉRALE

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANNEXES

INTRODUCTION

Le présent travail fait suite à un travail antérieur fait par Siad L. et Potier-Ferry M. [29]. Il s'agissait de déterminer par une méthode asymptotique à double échelle de variation, le modèle de poutre droite équivalent à une poutre ondulée d'épaisseur très petite devant le pas des ondulations. Cette étude a été motivé par un problème souvent rencontré dans l'industrie alimentaire qui n'est autre que le problème de *flambage des boîtes alimentaires*. Pour rendre les boîtes plus rigides on leur fait subir des moulurations dans leur tronc ceci fait que la boîte n'est plus rigoureusement parlant un cylindre droit. Faire des calculs de charge critique sur une telle structure est beaucoup plus compliqué. Pour faciliter ce calcul il est nécessaire de déterminer par une méthode d'homogénéisation un cylindre droit qui aura le même comportement, vis à vis des chargements extérieurs, que la boîte moulurée et dont le matériau constitutif sera anisotrope. Sa matrice de rigidité s'exprimera en fonction des caractéristiques géométriques d'une moulure et des rigidités du matériau constitutif de la boîte initiale.



Flambage de boîtes alimentaires moulurées

L. Siad et M. Potier-Ferry [30] avait déterminé, lors d'un contrat industriel, par une homogénéisation asymptotique les expressions analytiques de la souplesse axiale M_{11} et la rigidité à la flexion circonférentielle D_{22} d'une coque cylindrique droite équivalente à une coque moulurée d'épaisseur très petite devant la longueur d'une ondulation. Or dans la pratique les structures ondulées ont généralement l'épaisseur et la période du même ordre de grandeur. D. Caillerie avait montré dans sa thèse [4] que les rigidités équivalentes d'une plaque mince à microstructure périodiques calculées par la méthode asymptotique en faisant tendre vers zéro d'abord l'épaisseur ensuite la période sont différentes du cas où l'on commence par faire tendre la période vers zéro et ensuite l'épaisseur qui sont aussi différentes du cas où on les considère du même ordre de grandeurs.

Le but de cette étude sera donc d'étendre les travaux faits concernant la détermination des modèles homogénéisés de certaines structures ondulées au cas où l'épaisseur de celles-ci serait du même ordre de grandeur que la longueur d'une ondulation. La méthode adoptée dans ce rapport est la méthode d'homogénéisation. Cette méthode a été développée depuis les années 70 par plusieurs auteurs E. Sanchez-Panencia [25], A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou [3], L. Tartar [32] et D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin [8]. Elle permet de remplacer un milieu hétérogène, dans notre cas l'hétérogénéité est géométrique, par un milieu homogène équivalent. Dans cette méthode, on peut procéder par deux techniques différentes. La première est la méthode de l'énergie ou méthode variationnelle dont on montrera les différentes étapes au premier chapitre et la seconde est la méthode asymptotique ou méthodes des échelles multiples qui consiste à postuler un développement formel de la solution mais constructif en fonction du petit paramètre du problème à savoir l'épaisseur ou la longueur d'une ondulation. La suite consiste à utiliser les résultats des théorèmes de convergences et d'existence et de l'unicité de la solution. Cette dernière méthode fera aussi l'objet d'un exemple au premier chapitre.

Présentation du rapport.

Dans *le premier chapitre* de ce rapport nous allons faire un rappel des techniques d'homogénéisation qui représentent un outil considérable permettant de rendre compte du rôle de certaines hétérogénéités (matérielles ou géométriques) dans le renforcement

des rigidités des structures. On citera aussi quelques domaines d'utilisation de ces techniques.

Au *deuxième chapitre* nous reprenons le travail de L. Siad et M. Potier-Ferry [29] qui consistait à trouver le modèle de poutre droite équivalente à une poutre ondulée d'épaisseur constante et très petite devant le pas des ondulations. Le but de ce chapitre est de généraliser cette étude au cas des poutres ondulées à épaisseurs pouvant être variables et surtout nous allons déterminer toutes les caractéristiques du modèle équivalent qui sera de type Bernoulli. Nous allons aussi déterminer les équations de localisation qui pourront être très utile pour faire une étude de l'influence des ondulations dans le comportement élastoplastiques de la poutre.

Dans *le troisième chapitre* nous traiterons le cas d'une poutre ondulée d'épaisseur du même ordre de grandeur que la longueur d'une ondulation. Nous déterminons par la méthode asymptotique le modèle équivalent et les rigidités équivalentes que nous comparerons avec celles du chapitre II pour des poutres à épaisseurs très petites.

Au *quatrième chapitre* nous poussons notre étude au cas d'une plaque ondulée. Cette étude est comparable à celle faite par A. Kalamkarov et Z. Parton [23] pour une structure différente. On établira par la suite une comparaison des rigidités calculées par la méthode asymptotique et l'approche tridimensionnelles et des résultats empiriques qu'on a trouvé dans la littérature [28], [21], [18].

GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION

Introduction

La méthode d'homogénéisation est une technique qui consiste à trouver pour un matériau qui présente de fortes hétérogénéités matérielles (matériau composite,...) ou géométriques (plaque perforée, tôle ondulée ...), un matériau (ou une structure) homogène équivalent (équivalente) **Fig.1**. En effet, faire des calculs directs sur de telles structures, par exemple des calculs de charges critiques ou de modes de flambage etc., par des méthodes standards telles que la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies, est beaucoup plus complexe et peut conduire à des résultats erronés. Ce n'est qu'après une étude par homogénéisation qui discerne l'échelle microscopique de l'échelle macroscopique que l'on peut implémenter sous une forme ou une autre les effets de ces phénomènes locaux dans les éléments finis. En calcul de structure, on montre qu'il y a une grande influence de ces hétérogénéités sur le comportement de la structure globale. Souvent la présence de ces hétérogénéités permet de renforcer la rigidité de la structure : on cite les exemples pratiques de structures ondulées, de coques raidies, de matériaux composites etc. **Fig.1**. L'homogénéisation permet donc de définir un milieu homogène équivalent dont les caractéristiques tiennent compte de l'état de ces hétérogénéités. Cette technique s'est bien développée depuis les années 1970. Les travaux de E. Sanchez-Palencia [25] A. Bensoussan, J.L Lions, G. Papanicolaou [3] et d'autres présentent une première formulation claire et simplifiée des problèmes d'homogénéisation sous forme d'un problème asymptotique avec petit paramètre.

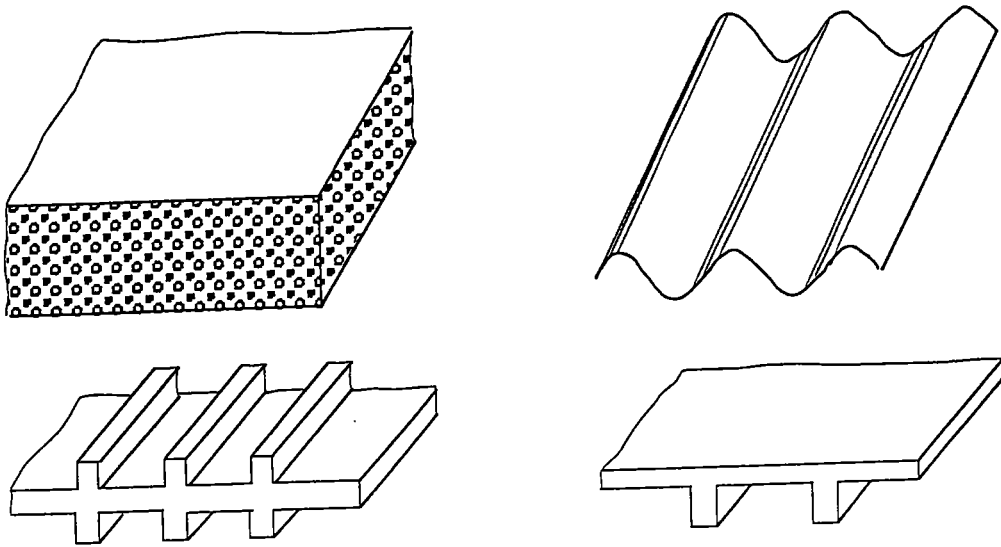


Fig.1 : Quelques structures non homogènes à géométrie périodique.

Les méthodes d'homogénéisation se basent surtout sur une hypothèse de périodicité. Ceci suppose que les champs physiques décrivant la structure fluctuent rapidement autour d'un champ moyen. L'idée est d'approcher la solution par ce champ moyen qui caractérisera en fait le milieu homogène équivalent. Plusieurs méthodes ont été proposées pour la détermination des caractéristiques du milieu homogène équivalent. On en cite la méthode de l'énergie ou la méthode variationnelle qui consiste à faire un passage à la limite rigoureux de la solution lorsque le petit paramètre d'échelle qui caractérise l'existence des hétérogénéités tend vers zéro J. L. Lions [20] et Tartar [32] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin [8]. Pour illustrer les différentes étapes suivies par cette méthode nous allons montrer par la suite comment l'appliquer à un problème de thermique simple posé sur une structure périodique de période très petite devant les autres dimensions de la structure. La deuxième méthode, que nous allons adopter tout au long de ce travail, est la méthode des développements asymptotiques ou méthode des échelles multiples. L'étude d'un problème par la méthode asymptotique débute nécessairement par une étude formelle qui consiste à postuler l'existence d'un développement asymptotique, en fonction du petit paramètre d'échelle du problème, de toutes les caractéristiques physiques de la structure à étudier. Une deuxième étape est bien entendu la justification rigoureuse de la solution formelle à l'aide d'un théorème de convergence. Cette méthode, étant pratique et simple, a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs et a été développée dans différents domaines. Dans ce qui suit

nous allons citer brièvement quelques domaines d'utilisation de la méthode asymptotique.

Structures minces

Les méthodes asymptotiques ont permis d'établir rigoureusement la théorie des plaques à partir de l'élasticité tridimensionnelle. Dans le livre de P. G. Ciarlet [7], on trouve une description précise de ces équations. En fait la méthode asymptotique appliquée aux plaques (ou coques) minces permet le passage d'un modèle tridimensionnel à un modèle formulé sur la surface moyenne de la plaque. P. Destuynder [12] a étudié, pour une plaque mince, le comportement asymptotique de la solution du modèle tridimensionnel de l'élasticité lorsque l'épaisseur ε de la plaque tend vers zéro. Il a donc cherché formellement la solution du problème sous forme d'un développement asymptotique en ε . Sous deux hypothèses de régularité portant d'une part sur les coefficients d'élasticité et les forces appliquées et d'autre part sur la géométrie de la structure, il a pu montrer que quand ε tend vers zéro les équations tridimensionnelles se simplifient et conduisent à des équations découplées qui représentent respectivement le modèle des plaques en flexion et celui des plaques membranaires.

Structures discrètes

Dans le cas des structures discrètes de type treillis, le but de la méthode d'homogénéisation asymptotique est de trouver *un milieu continu équivalent*. Ce modèle continu a un intérêt scientifique car il permet d'avoir une représentation analytique du comportement global d'une structure répétitive discrète. Ainsi il permet une compréhension plus fine des phénomènes mis en jeu. D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [9] ont étudié le comportement des structures treillis périodiques par cette méthode. Elles ont considéré deux paramètres qui sont la dimension de la cellule et l'épaisseur des barres. Le comportement des barres qui constituent le treillis est modélisé par les lois de la mécanique des milieux continus qui sont écrites en chaque point de la barre. Elles ont fait des études de convergence quand les petits paramètres tendent vers zéro. C'est une approche "d'homogénéisation des milieux continus". Elles ont aussi étudié par la même méthode [10] une grille périodiquement percée de trous où trois petits paramètres ont été considérés, la dimension de la cellule,

l'épaisseur de ses parois et l'épaisseur de la grille. Le comportement limite des structures étudiées lorsque les petits paramètres tendent vers zéro, est caractérisé par des expressions analytiques des coefficients du matériau. De la même façon D. Artola et G. Duvaut [1] ont fait une homogénéisation asymptotique d'une plaque renforcée par un système de barres soudées. D. Caillerie et P. Verna [5] ont développé également une technique d'homogénéisation adaptée aux milieux discrets.

Structures minces à microstructures périodiques

Dans le cadre des structures minces à microstructure périodique, D. Caillerie [4] a étudié par la méthode des développements asymptotiques le comportement d'une plaque linéairement élastique et anisotrope à structure périodique dans son plan. L'auteur a calculé les coefficients d'élasticité de la plaque dans trois cas. Le premier cas consistait à faire tendre vers zéro d'abord l'épaisseur de la plaque puis la taille des cellules qui la composent, dans le deuxième cas il s'agit de faire l'inverse, c'est-à-dire faire tendre d'abord la période vers zéro puis l'épaisseur de la plaque, et le troisième cas consiste à faire tendre simultanément l'épaisseur et la période vers zéro. Dans ces trois cas D. Caillerie a montré que les coefficients d'élasticité homogénéisés sont différents. Autrement dit, l'homogénéisation, c'est-à-dire la limite vers zéro de la taille d'une période et la limite vers zéro de l'épaisseur du domaine ne commutent pas. Ceci est un résultat important puisqu'il met en évidence le rapport entre l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la plaque et celui de la taille des cellules qui la composent.

Toujours dans le cas des structures minces et périodiques on cite *les structures ondulées* qui feront l'objet de ce travail. Ces structures sont d'un grand usage dans le domaine de l'industrie, à savoir tôles ondulées, boîtes alimentaires moulurées etc. En effet les ondulations permettent souvent de renforcer la rigidité de la structure. Toutefois des informations au niveau global de la structure sont difficiles à déterminer par un calcul direct (calcul de charge critique, modes de flambage, vibrations. ..). Il serait donc nécessaire de déterminer le modèle équivalent droit d'une structure ondulée. Dans un travail récent L. Siad et M. Potier-Ferry [29] se sont intéressés au cas d'une poutre ondulée d'épaisseur constante et très petite devant la longueur d'une ondulation. Le but était de déterminer le modèle de poutre droite équivalente à la poutre en question par une méthode de développement asymptotique à double échelle de variation : une échelle lente associée à la fibre moyenne de la

poutre et une échelle rapide décrivant la cellule de base représentée par une ondulation. Cette étude a permis de donner une formulation analytique des modules de rigidités équivalents en traction-compression et en flexion de la poutre ondulée. En flexion le résultat coïncide avec un résultat empirique de Seydel E. [30]. Ce travail sera complété dans le deuxième chapitre de ce rapport. En fait nous allons généraliser cette étude au cas d'une poutre ondulée à épaisseur variable et nous allons d'une part déterminer les propriétés du modèle équivalent qui sera de type Bernoulli et d'autre part retrouver les champs locaux qui faciliteront l'étude de certains phénomènes que le modèle homogénéisé ne peut prendre en compte. Dans le quatrième chapitre nous allons étudier un problème d'élasticité tridimensionnelle posé sur une plaque ondulée d'épaisseur comparable au pas des ondulations. Le but est de trouver le modèle de plaque droite équivalente. Cette étude est comparable à celle faite par V. Z. Parton et A. L. Kalamkarov [23] qui ont étudié un problème d'élasticité tridimensionnel d'une couche mince anisotrope de structure périodique dans deux direction de l'espace **Fig.2**. Les caractéristiques du matériau ainsi que l'épaisseur de la structure sont variables. Cette étude a été faite par une méthode d'homogénéisation asymptotique dans le cas où l'épaisseur et la période ont même ordre de grandeur. Les auteurs de cet article ont ramené le problème tridimensionnel à un problème classique de coque. Les coefficients d'élasticité homogénéisés sont exprimés en fonction des solutions des problèmes locaux posés sur la cellule de base, et on retrouve aussi les équations d'équilibre et la loi de comportement du modèle classique de coque. Une étude similaire a été faite par les mêmes auteurs pour calculer les coefficients effectifs thermoélastiques et thermiques pour la même structure.

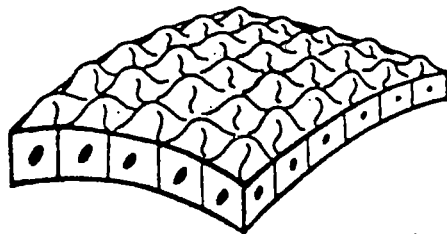


Fig.2 : Couche mince périodique non homogène.

Dans ce qui suit nous allons présenter les différentes étapes suivies par les deux méthodes (méthode de l'énergie et méthode asymptotique) pour la détermination du modèle homogénéisé. Les problèmes traités sont des problèmes classiques.

1. Méthode de l'énergie

Pour illustrer les différentes étapes suivies par cette méthode nous allons considérer un problème thermique simple et classique posé sur une structure périodique de période P très petite devant sa longueur L Fig.3. On pose $\eta = P/L$ le petit paramètre d'échelle du problème.

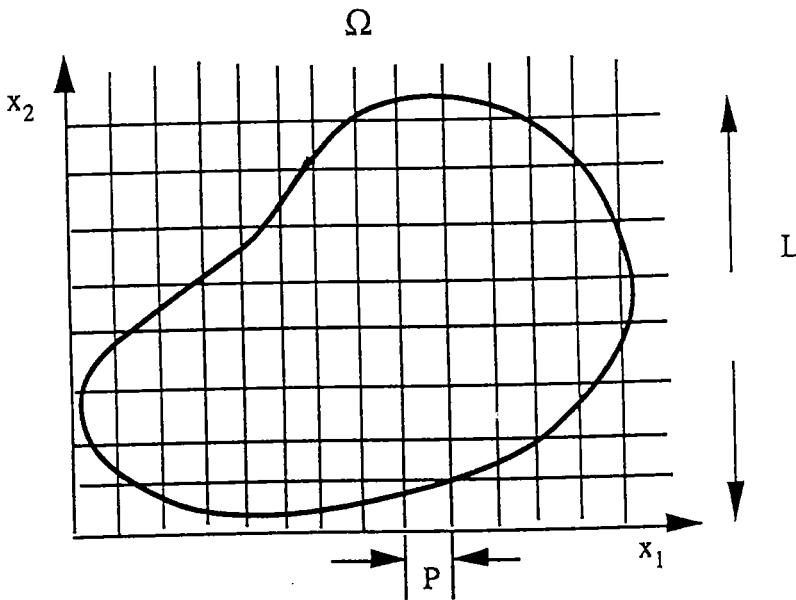


Fig.3 : Structure non homogène périodique.

1.1 Position du problème

Les coefficients physiques du matériau constitutif de la structure, k_{ij} , varient rapidement en fonction de η . Le problème se formule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (k_{ij}(\mathbf{x}/\eta) \frac{\partial u^\eta}{\partial x_j}) = -f & \text{dans } \Omega \\ u^\eta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où f désigne un terme de source qui est supposé donné.

Les étapes essentielles de la méthode de l'énergie appliquée au problème (1) sont les suivantes.

1.2 Formulation variationnelle du problème

La première étape de la méthode de l'énergie consiste à trouver une formulation variationnelle du problème. En effet on cherche u^η dans un espace V de Hilbert tel que :

$$V = \left\{ v/v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

En multipliant l'équation (1) par v appartenant à l'ensemble V , on obtient la formulation variationnelle suivante après des intégrations par parties :

$$a(u^\eta, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

où:

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega} k_{ij}(\mathbf{x}/\eta) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ L(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \end{cases}$$

Ci est bien dans le cadre d'application du théorème de Lax-Milgram, ce qui établit *l'existence et l'unicité* de la solution du problème (1).

1.3 Estimation a priori

L'étape suivante consiste à montrer que la fonction $u^\eta(x)$ est borné, autrement dit qu'il existe une constante C telle que :

$$\|u^\eta\|_V \leq C$$

ce qui permet de déduire qu'il existe une sous-suite de u^η convergeant faiblement vers une fonction u^0 de V quand η tend vers zéro. On montre aussi l'existence d'une sous-suite de $k_{ij}(x/\eta) \frac{\partial u^\eta}{\partial x_j}$ convergeant faiblement vers ξ_i^0 quand η tend vers zéro. Par un passage à la limite on montre que ξ_i^0 est solution de l'équation suivante :

$$-\frac{\partial \xi_i^0}{\partial x_i} = f \quad \text{dans } \Omega$$

Après une démonstration technique, on montre que ξ_i^0 se met sous la forme :

$$\xi_i^0 = q_{ij} \frac{\partial u^0}{\partial x_j}$$

1.4 Équation homogénéisée

Les coefficients q_{ij} sont les coefficients thermiques homogénéisés et sont constants. Les coefficients homogénéisés se déduisent des fonctions $k_{ij}(x/\eta)$. La limite u^0 de u^η lorsque η tend vers zéro est donc solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -a_{ij} \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_i \partial x_j} = f & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

On montre que le problème (2) admet une solution unique, ce qui permet de déduire que c'est la suite u^η tout entière qui converge vers u^0 , et rend valide le choix de u^0 comme approximation de u^η .

2. Méthode asymptotique

Pour bien expliquer les différentes étapes de cette méthode on va considérer un problème classique d'élasticité linéaire posé sur une structure périodique. La structure a une longueur L , elle est rapportée à un repère orthonormé (O, x_1, x_2, x_3) . Désignons par P la longueur d'une période. Les dimensions d'une période étant très petites devant la longueur de la structure on pose alors $\eta = P / L$ le petit paramètre du problème. Pour étudier ce qui se passe au voisinage d'un point x , on fait subir à ce voisinage un fort grossissement de rapport $1/\eta$ et on se place ainsi à une nouvelle échelle que l'on qualifiera de *microscopique*. Les coordonnées dans cette échelle locale seront notées $(y_1=x_1/\eta, y_2=x_2/\eta, y_3=x_3/\eta)$

Fig.4. Dans la cellule de base (une période) règne donc des champs de déplacements, de déformations et de contraintes $(u^\eta, \varepsilon^\eta, \sigma^\eta)$. Le matériau constitutif de la structure est supposé être anisotrope de coefficients d'élasticité $a_{ijkl}^\eta(x/\eta)$. Le paramètre η étant petit, on cherche s'il existe $(u^0, \varepsilon^0, \sigma^0)$ limites de $(u^\eta, \varepsilon^\eta, \sigma^\eta)$ quand η tend vers 0. Si c'est le cas, la loi de comportement homogénéisée sera par définition la relation liant ces limites. C'est la technique adoptée par E. Sanchez-Palencia [26] et D. Cioranescu et J. Saint-Jean-Paulin [8].

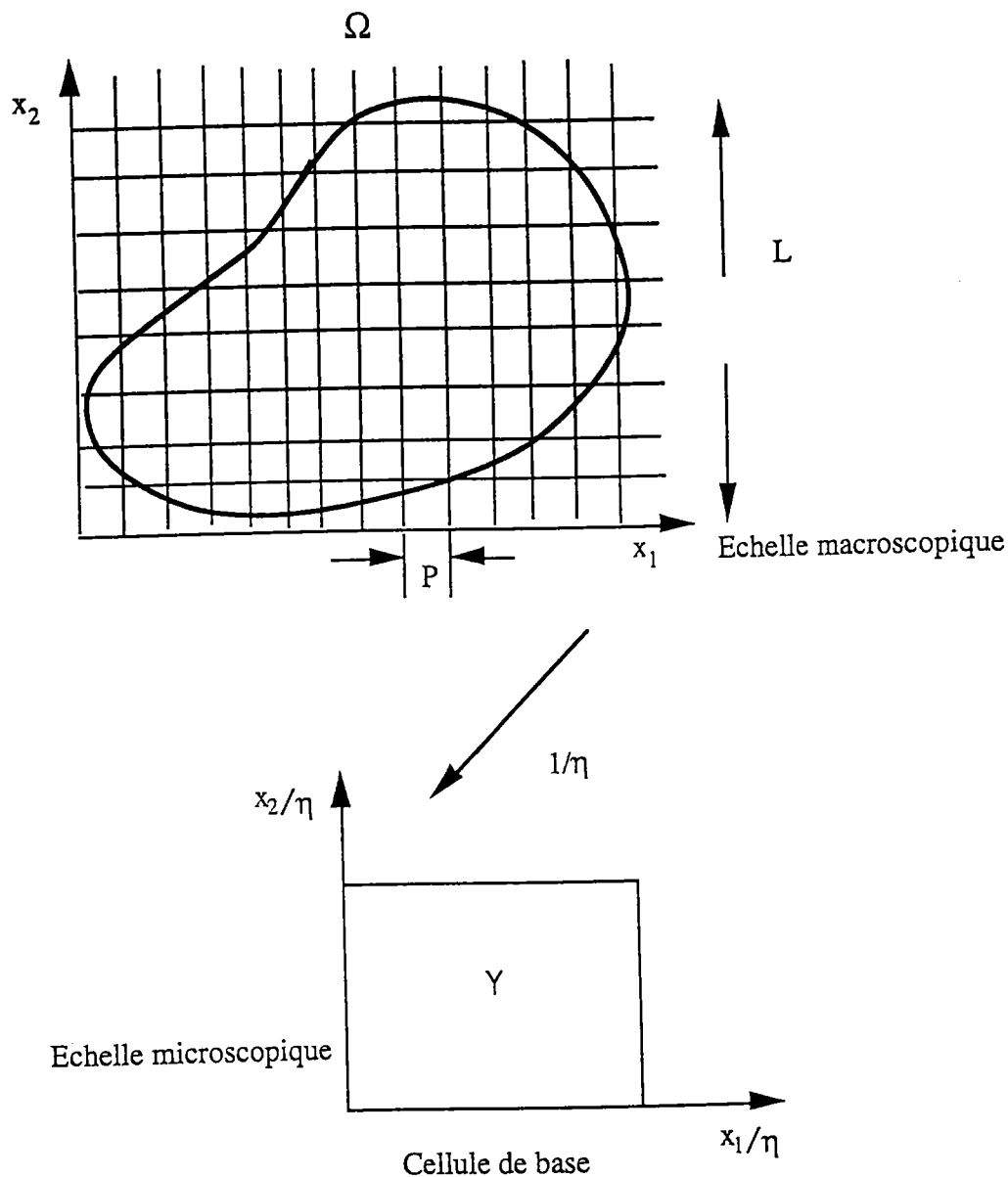


Fig.4 : Structure non homogène périodique et cellule de base.

2.1 Position du problème

Supposons que la structure, occupant un volume Ω , est soumise à des efforts volumiques imposés f , des efforts surfaciques F sur une partie Γ_F de sa frontière $\partial\Omega$, un déplacement nul étant imposé sur la partie complémentaire Γ_0 de $\partial\Omega$. Le champ de contrainte σ^η et de déplacement u^η sont solutions du problème d'élastostatique suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\eta + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \sigma^\eta = a^\eta : \varepsilon(u^\eta) \\ \sigma^\eta \cdot n = F & \text{sur } \Gamma_F \\ u^\eta = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$$

avec :

$$\varepsilon_{ij}(u^\eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\eta}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\eta}{\partial x_i} \right)$$

Le comportement de la cellule de base est défini par des coefficients d'élasticité qui varient périodiquement dans l'espace :

$$a_{ijkh}(y) = a_{ijkh}^\eta(x/\eta)$$

2.2 Développements asymptotiques

Ce problème, étant bien défini, admet donc une solution unique (voir G. Duvaut et J.L. Lions [13]). L'idée est de chercher (u^η, σ^η) sous forme d'un développement asymptotique à double échelle (x, y) en η . On développe les champs de déplacement et de contrainte de la façon suivante :

$$\begin{cases} u^\eta(x) = u^0(x, y) + \eta u^1(x, y) + \eta^2 u^2(x, y) + \dots \\ \sigma^\eta(x) = \sigma^0(x, y) + \eta \sigma^1(x, y) + \eta^2 \sigma^2(x, y) + \dots \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à substituer ces développements dans l'équation d'équilibre et la loi de comportement en tenant compte du fait que la dérivation par rapport à la variable globale x sera remplacée par une formule qui tient compte de la dépendance en la variable locale y soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial y_i} \\ \text{div} = \text{div}_x + \frac{1}{\eta} \text{div}_y \\ \varepsilon = \varepsilon_x + \frac{1}{\eta} \varepsilon_y \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \eta^{-1} \text{div}_y \sigma^0 + (\text{div}_y \sigma^1 + \text{div}_x \sigma^0 + f) + \dots = 0 \\ \sigma^0 + \eta \sigma^1 + \dots = a : (\eta^{-1} \varepsilon_y(u^0) + (\varepsilon_y(u^1) + \varepsilon_x(u^0)) + \dots) \end{cases}$$

On procède ensuite par une identification successive des termes de même puissance en η .

Ainsi à l'ordre -1 nous déduisons en première approximation que le champ de contrainte est localement auto-équilibré et le champ de déplacement ne dépend que de la variable lente x soit :

$$\begin{cases} \text{div}_y \sigma^0 = 0 \\ u^0 = u^0(x) \end{cases}$$

Ce résultat est très classique en homogénéisation. Le champ de déplacement à l'ordre 0 caractérise en fait le champ de déplacement macroscopique.

À l'ordre suivant on trouve que le champ de contrainte à l'ordre 0 s'écrit :

$$\sigma^0 = a : (\varepsilon_y(u^1) + \varepsilon_x(u^0))$$

On constate donc que (σ^0, u^1) est solution du problème suivant qui est posé sur la cellule de base et où la variable globale x joue le rôle d'un paramètre :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma^0 = 0 \\ \sigma^0 = a(y) : (\varepsilon_y(u^1) + \varepsilon_x(u^0)) \\ u^1 \text{ } Y\text{-périodique en } y \\ \sigma^0 \cdot n \text{ } Y\text{-antipériodique en } y. \end{cases}$$

2.3 Localisation

Ce problème étant linéaire il existe donc $\chi^{kh}(y)$ et $S^{kh}(y)$ tels que :

$$\begin{cases} u^1(x, y) = \chi^{kh}(y) \varepsilon_{x^{kh}}(u^0(x)) \\ \sigma^0(x, y) = S^{kh}(y) \varepsilon_{x^{kh}}(u^0(x)) \end{cases}$$

Les nouvelles inconnues $\chi^{kh}(y)$ et $S^{kh}(y)$ sont appelés tenseurs de localisation et sont donc solutions des problèmes locaux suivants :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y S^{kh} = 0 \\ S^{kh} = a(y) : \varepsilon(P^{kh} + \chi^{kh}) \quad \text{où } (P^{kh})_i = y_h \delta_{ki} \\ \chi^{kh} \text{ } Y\text{-périodique en } y. \\ S^{kh} \cdot n \text{ } Y\text{-antipériodique en } y. \end{cases}$$

qui sont des problèmes posés sur la cellule de base et admettent une solution unique à une constante additive près.

2.4 Homogénéisation

Une fois que les fonctions $\chi^{kh}(y)$ et $S^{kh}(y)$ sont connues, les coefficients homogénéisés se déduisent par application de l'opérateur moyenne à $S^{kh}(y)$.

L'opérateur moyenne est défini par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\cdot) dY \quad \text{où } |Y| \text{ est la mesure de } Y.$$

La moyenne sur la cellule de base de $\sigma^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ s'écrit :

$$\langle \sigma^0 \rangle = \langle S^{kh}(y) \rangle \varepsilon_{kh}(u^0)$$

Cette équation définit la loi de comportement homogénéisée où les coefficients de comportement homogénéisé (G. Duvaut [14]) s'écrivent :

$$q_{ijkh} = \langle S_{ij}^{kh} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(a_{ijpq}(y) \varepsilon_{y_{pq}}(P^{kh} + \chi^{kh}) \right) dY$$

Maintenant appliquons l'opérateur moyenne à l'équation d'équilibre à l'ordre zéro qui s'écrivait :

$$\operatorname{div}_y \sigma^1 = -f - \operatorname{div}_x \sigma^0$$

Par Y-antipériodicité de $\sigma^1 \cdot n$ sur les bords de Y, on obtient l'équation d'équilibre homogénéisée suivante :

$$\operatorname{div}_x \langle \sigma^0 \rangle + \langle f \rangle = 0$$

$$\text{En posant alors: } \langle \sigma^0(x, y) \rangle = \Sigma(x)$$

On obtient que le couple (u^0, Σ) est solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Sigma + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Sigma = q : \varepsilon(u^0) & \text{dans } \Omega \\ u^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \Sigma \cdot n = F & \text{sur } \Gamma_F \end{cases}$$

Ainsi on a substitué au milieu initial *un milieu élastique homogène* de coefficients constants q_{ijkl} . Les champs de contraintes $\Sigma(\mathbf{x})$ et $\varepsilon(\mathbf{u}^0) = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ solutions de ce problème sont appelés champs de contraintes et de déformations *macroscopiques*. On peut dire qu'un développement asymptotique cohérent en échelles multiples \mathbf{x} et $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\eta$ permet d'établir les équations globales du comportement du milieu (comportement en \mathbf{x}) dont les lois de comportement s'obtiennent à l'aide des équations en \mathbf{y} .

Les premiers termes non nuls des développements asymptotiques des champs $\varepsilon^\eta(\mathbf{u}^\eta)$ et σ^η sont $\varepsilon^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $\sigma^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$: ils constituent en fait les champs de déformations et de contraintes *microscopiques*.

HOMOGENÉISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE POUTRE ONDULÉE **D'ÉPAISSEUR PETITE DEVANT LE PAS DES ONDULATIONS**

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous reprenons un travail antérieur de L. Siad et M Potier-Ferry [29] qui consistait à calculer, par une méthode de développement asymptotique à deux échelles de variations, les modules de rigidités d'une poutre droite censée avoir la même réponse, aux différentes sollicitations, qu'une poutre ondulée. L'utilisation de la méthode asymptotique est justifiée lorsque le nombre d'ondulations de la poutre est suffisamment grand. Les modules de rigidités de la poutre droite sont appelés *rigidités équivalentes*. Ils s'expriment à l'aide des données géométriques et mécaniques de la poutre réelle. Cette étude a permis d'avoir une formulation analytique des modules de rigidité équivalents en traction-compression et en flexion. La poutre ondulée considérée avait une *épaisseur constante* et très petite devant le pas des ondulations. Notre contribution dans ce travail consiste à généraliser cette étude au cas où *l'épaisseur est variable* et à montrer que le modèle équivalent est bien le modèle de *Bernoulli*. Dans le dernier paragraphe nous allons nous intéresser à la détermination des grandeurs locales. Ceci a l'utilité de prévoir l'apparition de phénomènes non linéaires tels que la plastification ou bien la rupture de la structure etc.

2.2 Position du problème

Nous considérons une poutre ondulée dont la fibre moyenne est une courbe plane uniformément ondulée autour de l'axe Ox . Cette courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne s . On désigne par L la longueur totale de la structure suivant l'axe Ox . Nous supposons que la poutre présente un grand nombre

d'ondulations, noté N , qui se répètent de manière périodique dans la direction Ox . Nous pouvons alors définir le petit paramètre d'échelle du problème η par $1/N$. L'épaisseur, $h^\eta(s)$, de la poutre est variable et elle est très petite devant la longueur l^η d'une ondulation et sa profondeur H^η . Les longueurs l^η et H^η sont du même ordre de grandeur et sont très petites devant L , **Fig.5**.

Ainsi et par application d'une homothétie de rapport $1/\eta$ à la poutre, on obtient une cellule de base que l'on supposera symétrique par rapport à son centre **Fig. 1**. L'arc de courbe $S = s / \eta$ est la variable microscopique ou rapide et $Y(S) = y(s)/\eta$ représente l'équation de la courbe décrivant la cellule de base. Les longueurs $l = l^\eta / \eta$ et $H = H^\eta / \eta$ sont respectivement la longueur de la cellule de base et sa profondeur. Le matériau constitutif de la structure est linéairement élastique de module d'Young E . La poutre est soumise à des efforts contenus dans son plan, de densité linéique $f^\eta(s)$. Le problème consiste à déterminer par une méthode asymptotique le modèle de poutre droite équivalent à la poutre ondulée considérée.

Dans ce qui suit nous nous limitons à des déplacements dans le plan et nous désignons par $t(S)$ et $n(S)$ respectivement les vecteurs unitaires tangent et normal en S , **Fig.5**. La direction Ox , qui correspond à la fibre moyenne de la poutre ondulée, sera appelée dans la suite direction horizontale tandis que la direction Oy , elle, sera appelée direction verticale.

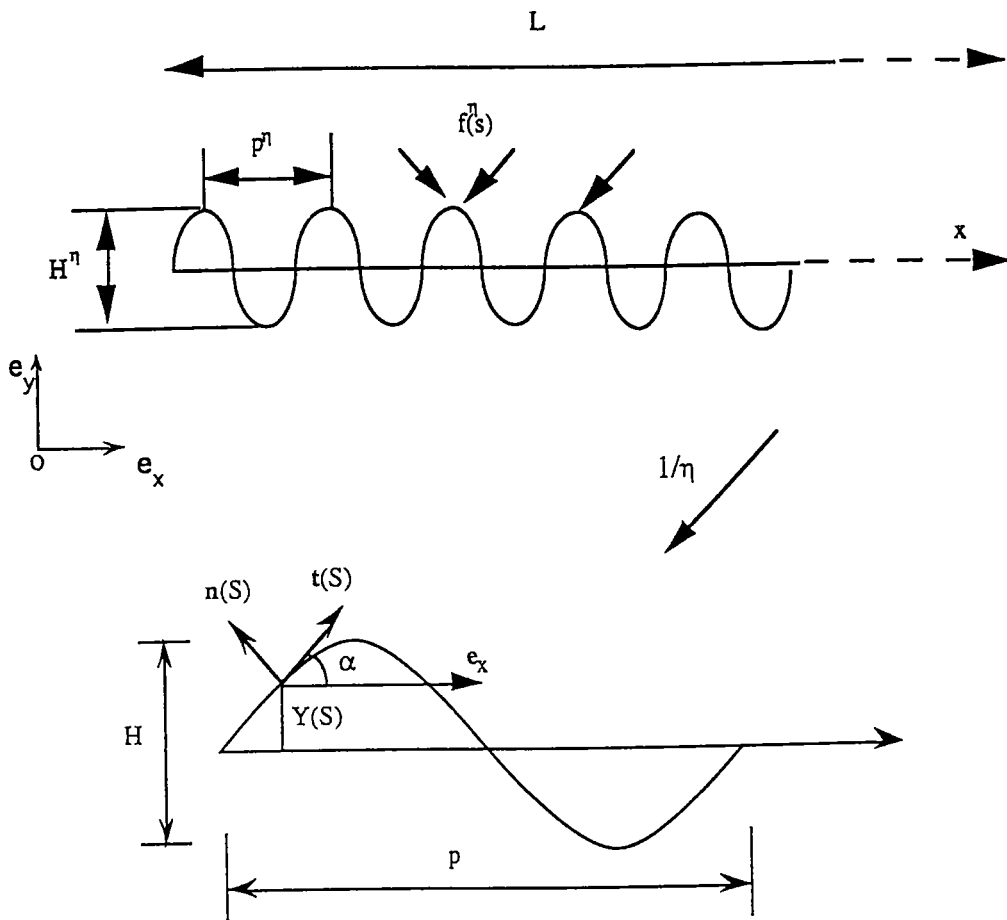


Fig.5 : Poutre ondulée et cellule de base.

Les équations régissant le problème se répartissent en trois groupes qui sont les équations d'équilibre, les relations purement géométriques entre déplacement et déformations, et les lois de comportement. On se place ici dans le cadre le plus simple de l'élasticité linéaire en petites perturbations. Le modèle de poutre peut tenir compte des déformations de cisaillement (modèle de Timoshenko).

2.2.1 Équations d'équilibres

Soient $R^\eta(s)$ et $M^\eta(s)$ les efforts résultants sur une section d'abscisse s Fig.6.

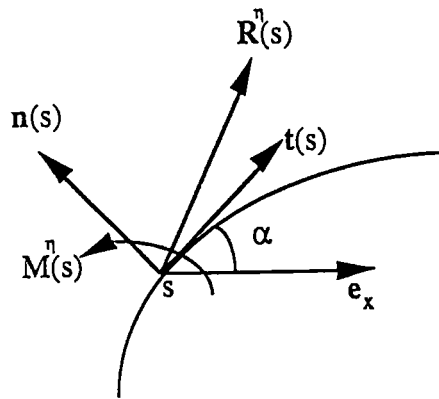


Fig.6 : Efforts résultants sur une section d'abscisse s.

Ces efforts obéissent aux équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dR^\eta}{ds}(s) + f^\eta(s) = 0 \\ \frac{dM^\eta}{ds}(s) + R^\eta(s) \cdot n(s) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

On décompose les vecteurs $n(S)$, $t(S)$ dans la base (e_x, e_y) de la façon suivante :

$$n(S) = -\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_y$$

$$t(S) = \cos \alpha e_x + \sin \alpha e_y$$

Par la suite, on définira un effort normal $N^\eta(s)$ et un effort tranchant $T^\eta(s)$ par projection sur la ligne moyenne de la poutre ondulée :

$$R^\eta(s) = N^\eta(s)e_x + T^\eta(s)e_y$$

2.2.2 Relations entre le déplacement et les déformations

$U^\eta(s)$ et $\beta^\eta(s)$ désignent respectivement les champs de déplacement et de rotation de la poutre, auxquels correspondent les champs de déformation $\varepsilon^\eta(s)$ et la variation de courbure $\kappa^\eta(s)$. Selon les cas, on exprimera le champ de déplacement $U^\eta(s)$ sur la base locale variable ou sur la base fixe (e_x, e_y) associée à la ligne moyenne :

$$\begin{aligned} U^\eta(s) &= u^\eta(s)t(s) + v^\eta(s)n(s) \\ &= u_x^\eta(s)e_x + v_y^\eta(s)e_y \end{aligned} \quad (2)$$

Avec:

$$\begin{cases} u^\eta(s) = u_x^\eta(s)\cos\alpha + v_y^\eta(s)\sin\alpha \\ v^\eta(s) = -u_x^\eta(s)\sin\alpha + v_y^\eta(s)\cos\alpha \end{cases}$$

Les champs de déformation et de variation de courbure sont alors donnés par :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^\eta(s) &= \frac{du^\eta}{ds}(s) - \frac{v^\eta}{\rho^\eta} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa^\eta(s) &= \frac{d\beta^\eta}{ds}(s) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

où $\rho^\eta(s)$ est le rayon de courbure de la fibre moyenne.

2.2.3 Lois de comportement

Le matériau constitutif de la poutre étant élastique les lois de comportement s'écrivent de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^\eta(s).t(s) = EA(s) \varepsilon^\eta(s) \\ M^\eta(s) = EI(s) \kappa^\eta(s) \\ \beta^\eta(s) = \frac{dv^\eta}{ds}(s) + \frac{u^\eta}{\rho^\eta} - \frac{R^\eta(s).n(s)}{kA\mu} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

où k est le coefficient de cisaillement de Timoshenko et μ le module de rigidité de cisaillement du matériau. $A(s)$ et $I(s)$ sont respectivement la section et l'inertie de la poutre en un point d'abscisse s .

Pour une poutre droite, l'analyse est immédiate vu la simplicité des expressions de $\varepsilon^\eta(s)$ et $\kappa^\eta(s)$ alors qu'en présence d'ondulations les variations de la courbure de la fibre moyenne compliquent la résolution du problème d'autant plus que η est petit. De nombreuses méthodes d'analyse mécanique ont été mises en oeuvre pour résoudre des problèmes en homogénéisation. La méthode adoptée ici consiste à chercher la solution sous forme d'un développement asymptotique en η .

2.3 Principe de la méthode asymptotique

En homogénéisation asymptotique la solution du problème posé en (1), (5) et (6) est écrite sous forme d'un développement asymptotique en puissances de η . Les coefficients de ce développement sont des fonctions de deux variables indépendantes : la variable macroscopique (lente) x qui parcourt l'axe moyen de la poutre ondulée Ox (à noter qu'on peut utiliser aussi s comme variable macroscopique) et la variable microscopique (rapide) S qui décrit la cellule de base définie après l'homothétie de rapport η . Ces coefficients sont aussi supposés l -périodiques en S .

Une analyse mécanique basée sur les ordres de grandeurs des différentes quantités introduites dans ce problème nous a conduit à poser pour celles-ci des développements sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} R^\eta(s) = R^0(x, S) + \eta R^1(x, S) + \dots \quad (8) \\ M^\eta(s) = \eta M^1(x, S) + \dots \quad (9) \\ u_x^\eta(s) = \eta^2 u_x^2(x, S) + \eta^3 u_x^3(x, S) + \dots \quad (10) \\ v_y^\eta(s) = \eta v_y^1(x, S) + \eta^2 v_y^2(x, S) + \eta^3 v_y^3(x, S) + \dots \quad (11) \\ \beta^\eta(s) = \eta \beta^1(x, S) + \eta^2 \beta^2(x, S) + \dots \quad (12) \\ f_x^\eta(s) = f_x^0(x, S) \quad (13) \\ f_y^\eta(s) = \eta f_y^1(x, S) \quad (14) \end{array} \right.$$

où tous les termes de ces développements sont 1-périodiques par rapport à la variable rapide S . Dans ces développements on remarque que la flèche $v_y(s)$ est plus grande que le déplacement axial $u_x(s)$ et que la force horizontale est plus importante que la force verticale : c'est la différence entre l'homogénéisation classique et la méthode que nous utilisons le long de ce travail.

En supposant η petit, on fait tendre la taille des ondulations vers zéro, la longueur macroscopique L étant fixée. Or le modèle de départ (paragraphe précédent) fait intervenir plusieurs longueurs qui sont directement proportionnelles au rapport d'homothétie η : c'est le cas du rayon de courbure local, de l'épaisseur, de l'aire et du moment quadratique de la section droite qui sont proportionnels respectivement à η , η , η^2 et η^4 . Donc les coefficients du modèle de départ varient avec η , de la manière suivante :

$$\rho^\eta = \eta \rho^0(S)$$

$$EA = a(S) EI / \eta^2$$

où $\rho^0(S)$ est le rayon de courbure de la ligne moyenne après homothétie Fig.7 qui est supposé indépendant de η . De même on suppose que $a(S)$ ne dépend pas de η .

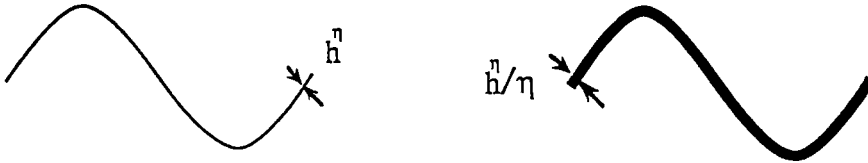


Fig.7 : Cellule de base avec homothétie sur l'épaisseur.

La suite des calculs consiste à reporter les développements (8), (9), (10), (11), (12), (13) et (14) dans les équations d'équilibres et de comportement (1), (5) et (6).

Il est essentiel en homogénéisation de distinguer la variable rapide (microscopique) S et la variable lente (macroscopique) x lors de la dérivation soit :

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial S} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial S} \quad (15)$$

$\alpha(S)$ étant l'angle formé entre e_x et $t(S)$, Fig.5.

Après identification dans les équations qui en ressortent des termes de même puissances en η , nous obtenons de nouvelles équations auxquelles on applique l'opérateur moyenne sur la cellule de base que nous définissons par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l (\cdot) dS$$

Ceci permettra de déterminer les efforts macroscopiques (homogénéisation) et d'écrire les grandeurs locales en fonction des grandeurs globales (localisation).

2.4 Modèle homogénéisé

L'obtention de la structure homogène équivalente passe par l'application d'une méthode d'homogénéisation géométrique. Le but est de définir les équations d'équilibres macroscopiques et leurs lois de comportement associées qui doivent être semblables à celles d'une poutre droite. En poursuivant la procédure ci-dessus nous allons d'abord commencer par retrouver les équations d'équilibre macroscopiques et leurs lois de comportements associées et on en déduira par la suite les modules de rigidités équivalentes.

2.4.1 Traitement des équations d'équilibres

En reportant les développements (8), (9), (13) et (14) dans les équations d'équilibre (1). En tenant compte de la relation (15), nous aboutissons aux développements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{\partial R^0}{\partial S} + \left(\frac{\partial R^0}{\partial s} + \frac{\partial R^1}{\partial S} + f^0 \right) + \\ \eta \left(\frac{\partial R^1}{\partial s} + \frac{\partial R^2}{\partial S} + f^1 \right) + \dots = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial M^1}{\partial S} + R^0 \cdot n \right) + \eta \left(\frac{\partial M^1}{\partial s} + \frac{\partial M^2}{\partial S} + R^1 \cdot n \right) + \dots = 0 \right. \quad (17)$$

Dans le système d'équations (16) et (17) on identifie tous les termes de même puissance en η . On obtient aux premiers ordres les résultats suivants :

i) *Ordre -1*

$$\frac{\partial R^0}{\partial S} = 0 \quad \text{soit} \quad R^0 = R^0(x)$$

ii) Ordre 0

a) À cet ordre, l'équation (16) donne :

$$\frac{\partial R^0}{\partial s} + \frac{\partial R^1}{\partial S} + f^0 = 0 \quad (16-0)$$

En appliquant à cette équation l'opérateur moyenne, défini précédemment, tout en utilisant l'hypothèse de périodicité de R^1 en S et en la projetant respectivement selon e_x et e_y on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dN^0}{dx} + \frac{\langle f_x^0 \rangle}{\langle \cos \alpha \rangle} = 0 \\ \frac{dT^0}{dx} = 0 \text{ soit } T^0 \text{ est une constante.} \end{cases}$$

En tenant compte de ces résultats, la projection de l'équation (16-0) selon e_x donne, après intégration par rapport à la variable locale S , la forme de l'effort normal à l'ordre 1 soit :

$$N^1(x, S) = N_m^1(x) - \int_0^S \left(\cos \alpha \frac{dN^0}{dx} + f_x^0 \right) dS$$

Cependant la projection de cette même équation (16-0) selon e_y permet de conclure que l'effort tranchant à l'ordre 1 dépend lentement de x soit :

$$T^1 = T^1(x)$$

b) L'équation (17) à l'ordre 0 s'écrit :

$$\frac{\partial M^1}{\partial S} + R^0 \cdot n = 0 \quad (17-0)$$

L'application de l'opérateur moyenne à cette équation permet de montrer que l'effort tranchant à l'ordre 0 est nul d'où :

$$R^0 = N^0(x) e_x$$

Ensuite, en utilisant le fait que $dY = \sin\alpha \, dS$, on intègre l'équation (17-0) par rapport à S . On obtient la forme du moment de flexion à l'ordre 1 soit :

$$M^1(x, S) = N^0(x) Y(S) + m^1(x)$$

iii) Ordre 1

a) L'équation (16) s'écrit :

$$\frac{\partial R^1}{\partial s} + \frac{\partial R^2}{\partial S} + f^1 = 0 \quad (16-1)$$

On applique l'opérateur moyenne à la projection de cette équation sur e_y et on obtient l'équation d'équilibre macroscopique vérifiée par l'effort tranchant soit :

$$\frac{dT^1}{dx} + \frac{\langle f_y^1 \rangle}{\langle \cos \alpha \rangle} = 0$$

b) L'équation (17) à l'ordre 1 est :

$$\frac{\partial M^1}{\partial s} + \frac{\partial M^2}{\partial S} + R^1 \cdot n = 0 \quad (17-1)$$

On applique l'opérateur moyenne à cette équation on obtient :

$$\langle \cos \alpha \rangle \frac{dm^1}{dx} + \langle Y(S) \cos \alpha \rangle \frac{dN^0}{dx} + \langle \cos \alpha \rangle T^1(x) - \langle N^1(x, S) \sin \alpha \rangle = 0$$

En écrivant $\sin \alpha = dY/dS$ et compte tenu de l'équation d'équilibre :

$$\cos \alpha \frac{dN^0}{dx} + \frac{\partial N^1}{\partial S} + f_x^0 = 0,$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle N^1(x, S) \sin \alpha \rangle &= \left\langle N^1 \frac{dY}{dS} \right\rangle = - \left\langle Y \frac{dN^1}{dS} \right\rangle \\ &= \langle Y(S) \cos \alpha \rangle \frac{dN^0}{dx} + \langle Y(S) f_x^0 \rangle \end{aligned}$$

La cellule de base étant symétrique par rapport à son centre, on en conclut que $\langle Y(S) \cos \alpha \rangle = 0$

On retrouve alors l'équation d'équilibre macroscopique des moments avec apparition d'un moment induit par la force horizontale extérieur f_x^0 soit :

$$\frac{dm^1}{dx} + T^1(x) + \frac{1}{\langle \cos \alpha \rangle} \langle -Y(S) f_x^0 \rangle = 0$$

2.4.2 Traitement des relations géométriques et des lois de comportement:

Les champs de déformation et de variation de courbure $\varepsilon^\eta(s)$ (3) et $\kappa^\eta(s)$ (7) sont écrits en fonction des coordonnées du vecteur déplacement dans la base

curviligne $(t(S), n(S))$. Il est donc nécessaire de donner les développements de u^η et v^η en fonction de u_x^η et v_y^η en effet :

$$\begin{cases} u^\eta = \eta \sin \alpha v_y^1 + \eta^2 (u_x^2 \cos \alpha + v_y^2 \sin \alpha) + \\ \quad \eta^3 (u_x^3 \cos \alpha + v_y^3 \sin \alpha) + \dots \\ v^\eta = \eta \cos \alpha v_y^1 + \eta^2 (-u_x^2 \sin \alpha + v_y^2 \cos \alpha) + \\ \quad \eta^3 (-u_x^3 \sin \alpha + v_y^3 \cos \alpha) + \dots \end{cases}$$

Ainsi le champ de déformation se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon^\eta(s) = & \frac{\partial v_y^1}{\partial S} \sin \alpha + \eta \left(\frac{\partial v_y^1}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial u_x^2}{\partial S} \cos \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial S} \sin \alpha \right) + \\ & \eta^2 \left(\frac{\partial u_x^2}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial u_x^3}{\partial S} \cos \alpha + \frac{\partial v_y^3}{\partial S} \sin \alpha \right) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Les termes en $\frac{1}{\rho^0}$ se simplifient en utilisant le fait que :

$$\frac{\partial \alpha(S)}{\partial S} = \frac{1}{\rho^0}$$

On reporte ce dernier développement (18) dans la loi de comportement (5) en prenant en considération les résultats obtenus précédemment et le développement qui résulte de l'homothétie réalisée au niveau de l'épaisseur soit $A = a I / \eta^2$. On obtient, après identifications des termes de même puissances en η , les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_y^1}{\partial S} = 0 \quad \text{soit} \quad v_y^1 = v_y^1(x) \\ \frac{\partial v_y^1}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial u_x^2}{\partial S} \cos \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial S} \sin \alpha = 0 \end{array} \right. \quad (18-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N^0(x) \frac{\cos \alpha}{E I a} = \frac{\partial u_x^2}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial u_x^3}{\partial S} \cos \alpha + \\ \frac{\partial v_y^3}{\partial S} \sin \alpha \end{array} \right. \quad (18-2)$$

D'autre part on écrit le développement de $\beta^\eta(s)$, selon la relation (7) et en tenant compte des résultats précédents, comme suit :

$$\begin{aligned} \beta^\eta(s) = & \eta \left(\frac{\partial v_y^1}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial u_x^2}{\partial S} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial S} \cos \alpha \right) + \\ & \eta^2 \left(-\frac{\partial u_x^2}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial u_x^3}{\partial S} \sin \alpha + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_y^3}{\partial S} \cos \alpha + \frac{N^0(x) \sin \alpha}{k \mu a I} \right) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ainsi la loi de comportement en cisaillement peut s'écrire sous la forme :

$$\beta^1 = \frac{\partial v_y^1}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial u_x^2}{\partial S} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial S} \cos \alpha \quad (19-1)$$

$$\beta^2 = -\frac{\partial u_x^2}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial u_x^3}{\partial S} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^3}{\partial S} \cos \alpha + \frac{N^0(x) \sin \alpha}{k \mu a I} \quad (19-2)$$

$$\beta^i = -\frac{\partial u_x^i}{\partial s} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^i}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial u_x^{i+1}}{\partial S} \sin \alpha + \frac{\partial v_y^{i+1}}{\partial S} \cos \alpha - \frac{R^{i-2} \cdot n}{k \mu a I} \quad \text{Pour } i \geq 3$$

De ce développement découle celui de la variation de courbure (4) soit :

$$\kappa^\eta(s) = \frac{\partial \beta^1}{\partial S} + \eta \left(\frac{\partial \beta^2}{\partial S} + \frac{\partial \beta^1}{\partial s} \right) + \eta^2 \left(\frac{\partial \beta^3}{\partial S} + \frac{\partial \beta^2}{\partial s} \right) + \dots$$

En introduisant ce dernier développement dans la loi de comportement des moments (6) et en identifiant tout les termes de même puissances en η on obtient aux deux premiers ordres les équations suivantes :

i) Ordre 0

$$\frac{\partial \beta^1}{\partial S} = 0 \quad \text{soit } \beta^1 = \beta^1(x)$$

ii) Ordre 1

$$\frac{m^1(x) + Y(S)N^0(x)}{EI} = \frac{\partial \beta^1}{\partial s} + \frac{\partial \beta^2}{\partial S}$$

En appliquant l'opérateur moyenne à cette équation et compte tenu de la périodicité en S et de la symétrie de la cellule de base, on obtient :

$$m^1(x) \left\langle \frac{1}{EI} \right\rangle = \langle \cos \alpha \rangle \frac{d\beta^1}{dx}$$

D'autre part des équations (18-1) et (19-1), on obtient la dérivée par rapport à S du vecteur déplacement à l'ordre 2 soit :

$$\frac{\partial U^2}{\partial S} = (\beta^1(x) - \frac{dv_y^1}{ds} \cos \alpha) n - (\frac{dv_y^1}{ds} \sin \alpha) t$$

La périodicité du vecteur déplacement par rapport à S permet d'écrire que :

$$\left\langle \frac{\partial u_x^2}{\partial S} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial v_y^2}{\partial S} \right\rangle = 0$$

Ceci nous fait aboutir au résultat important suivant :

$$\beta^1(x) = \frac{dv_y^1}{dx}$$

Ainsi la loi de comportement des moments à l'ordre 1 s'écrit sous la forme classique d'une loi de flexion de poutre :

$$m^1(x) \left\langle \frac{1}{EI} \right\rangle = \langle \cos \alpha \rangle \frac{d^2 v_y^1}{dx^2}$$

En combinant les équations (18-1) et (19-1) on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x^2}{\partial S} = -\beta^1(x) \sin \alpha = -\frac{dv_y^1}{dx} \sin \alpha \\ v_y^2 = v_y^2(x) \end{cases}$$

À ce niveau une intégration par rapport à S de la première équation fait aboutir à la forme de Bernoulli suivante :

$$u_x^2(x, S) = u_{xm}^2(x) - Y(S) \frac{dv_y^1}{dx}$$

On procède de la même façon avec les équations (18-2) et (19-2) soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^3}{\partial S} = & (\beta^2 + \frac{\partial u_x^2}{\partial s} \sin \alpha - \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \cos \alpha - \frac{N^0(x) \sin \alpha}{k \mu I a})n + \\ & (\frac{N^0(x) \cos \alpha}{E I a} - \frac{\partial u_x^2}{\partial s} \cos \alpha - \frac{\partial v_y^2}{\partial s} \sin \alpha)t \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à S du vecteur déplacement à l'ordre 3 est en moyenne nulle. En particulier sa composante selon \mathbf{e}_x donne :

$$N^0(x) \left\langle \frac{\cos^2 \alpha}{E I a} + \frac{\sin^2 \alpha}{k \mu I a} \right\rangle - \frac{d}{dx} \langle u_x^2 \cos \alpha \rangle - \langle \beta^2 \sin \alpha \rangle = 0$$

cependant :

$$\langle u_x^2 \cos \alpha \rangle = \langle \cos \alpha \rangle u_{xm}^2(x) \quad \text{et} \quad \langle \beta^2 \sin \alpha \rangle = - \left\langle Y(S) \frac{\partial \beta^2}{\partial S} \right\rangle$$

Or la loi de comportement des moments à l'ordre 1 permet d'écrire que :

$$\left\langle Y(S) \frac{\partial \beta^2}{\partial S} \right\rangle = N^0(x) \left\langle \frac{Y^2}{EI} \right\rangle$$

Ainsi on retrouve la loi de comportement macroscopique en traction-compression soit :

$$N^0(x) = \langle \cos \alpha \rangle \left[\left\langle \frac{\cos^2 \alpha}{EIa} + \frac{\sin^2 \alpha}{k \mu Ia} + \frac{Y^2}{EI} \right\rangle \right]^{-1} \frac{du_{xm}^2}{dx}$$

La composante selon e_y de la moyenne de la dérivée par rapport à S du vecteur déplacement à l'ordre 3 est nulle. Ceci nous fait aboutir au résultat suivant :

$$\langle \beta^2 \cos \alpha \rangle = \langle \cos \alpha \rangle \frac{dv_y^2}{dx} - N^0(x) \left\langle \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{EIa} - \frac{1}{k \mu Ia} \right) \right\rangle$$

2.4.3 Récapitulatif

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^\eta(s) = N^0(x) \mathbf{e}_x + \eta \left(N^1(x, S) \mathbf{e}_x + T^1(x) \mathbf{e}_y \right) + \mathbf{R}^2(x, S) + \dots \\ \mathbf{M}^\eta(s) = \eta \left(Y(S) N^0(x) + m^1(x) \right) + \eta^2 M^2(x, S) + \dots \\ \mathbf{U}^\eta(s) = \eta v_y^1(x) \mathbf{e}_y + \eta^2 \left(\left(u_{xm}^2(x) - Y(S) \frac{dv_y^1}{dx} \right) \mathbf{e}_x + v_y^2(x) \mathbf{e}_y \right) + \\ \quad \eta^3 U^3(x, S) + \dots \\ \beta^\eta(s) = \eta \beta^1(x) + \eta^2 \beta^2(x, S) + \dots \\ \varepsilon^\eta(s) = \eta^2 \varepsilon^2(x, S) + \dots \\ \kappa^\eta(s) = \eta \kappa^1(x, S) + \dots \end{array} \right.$$

Nous remarquons donc qu'au premier ordre, la résultante est une force horizontale. Elle varie lentement en fonction de x . La force verticale (l'effort

tranchant) n'apparaît qu'au deuxième ordre. Elle varie aussi lentement en fonction de x . On note qu'au premier ordre le moment se compose d'un moment à moyenne nulle qui est induit par la force horizontale à l'ordre zéro et d'un moment macroscopique qui varie lentement en fonction de x . Pour passer aux expressions naturelles des diverses quantités, nous définissons les efforts macroscopiques par :

$$\begin{cases} N(x) = N^0(x) & \text{effort normal macroscopique.} \\ T(x) = \eta T^1(x) & \text{effort tranchant macroscopique.} \\ M(x) = \eta m^1(x) & \text{moment de flexion macroscopique.} \end{cases}$$

En posant :

$$\begin{cases} f_x(x) = \frac{\langle f_x^0 \rangle}{\langle \cos \alpha \rangle} & \text{force linéique horizontale globale.} \\ f_y(x) = \eta \frac{\langle f_y^1 \rangle}{\langle \cos \alpha \rangle} & \text{force linéique verticale globale.} \\ m(x) = \eta \frac{\langle -Y(S) f_x^0 \rangle}{\langle \cos \alpha \rangle} & \text{moment de flexion global dû à la force linéique horizontale.} \end{cases}$$

Les efforts macroscopiques obéissent donc aux équations d'équilibres suivantes (voir pages 32, 33 et 34) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} + f_x(x) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dx} + f_y(x) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} + T(x) + m(x) = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

Ces équations sont bien les équations d'équilibre d'une poutre droite.

Pour le champ de déplacement on remarque qu'au premier ordre on a une déflexion et à l'ordre suivant on a un champ de type Bernoulli. En définissant le champ de déplacement macroscopique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m(x) = \eta^2 u_{xm}^2(x) \\ u(x, y) = \eta^2 u_x^2(x, S) \\ v(x) = \eta v_y^1(x) \end{array} \right.$$

on voit que le déplacement horizontale varie dans la cellule de base selon la loi de normalité de Bernoulli :

$$u(x, y) = u_m(x) - y(S) \frac{dv}{dx}$$

Ce champ de déplacement obéit aux lois de comportement macroscopiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = (EA)_{\text{équi}} \frac{du_m}{dx} \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(x) = (EI)_{\text{équi}} \frac{d^2v}{dx^2} \end{array} \right. \quad (24)$$

où $(EA)_{\text{équi}}$ et $(EI)_{\text{équi}}$ sont respectivement les modules de rigidité équivalents en traction-compression et en flexion. Ils s'écrivent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} (EA)_{\text{équi}} = \langle \cos \alpha \rangle \left[\left\langle \frac{\cos^2 \alpha}{EA} + \frac{\sin^2 \alpha}{k\mu A} + \frac{y^2}{EI} \right\rangle \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (EI)_{\text{équi}} = \langle \cos \alpha \rangle \left\langle \frac{I}{EI} \right\rangle^{-1} \end{array} \right. \quad (26)$$

Dans le cas d'une poutre ondulée d'épaisseur h constante ces modules deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} (EA)_{\text{équi}} = EA \langle \cos \alpha \rangle \left[\langle \cos^2 \alpha \rangle + \frac{E}{k\mu} \langle \sin^2 \alpha \rangle + \frac{12}{h^2} \langle y^2 \rangle \right]^{-1} \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (EI)_{\text{équi}} = EI \langle \cos \alpha \rangle \end{array} \right. \quad (28)$$

Le module équivalent de flexion est sans surprise puisqu'il ne diffère du module EI de la poutre droite que par le facteur $\cos \alpha$ en moyenne qui traduit le passage de l'abscisse curviligne s à la composante rectiligne x . On peut trouver l'expression du module de flexion équivalent dans la littérature ancienne [28]. En revanche la rigidité de traction-compression semble avoir été obtenue pour la première fois par L. Siad et M. Potier-Ferry [29]. Ce dernier module dépend fortement de la rigidité de flexion locale EI , ce qui est bien naturel : on a vu en effet qu'une traction macroscopique induit localement un moment de flexion.

Les résultats obtenus ici diffèrent aussi de la théorie des poutres droites ou de l'homogénéisation classique par une expression plus complexe de l'évolution locale des différents champs. La force R étant horizontale au premier ordre, elle varie lentement en fonction de x et ce n'est qu'à l'ordre suivant qu'apparaît l'effort tranchant ou la force verticale, comme dans tous les modèles de poutre

ou de plaque [6]. Le moment de flexion est la somme de deux termes; l'un de ces termes est lentement variable et il est relié à la courbure globale de la poutre déformée, comme en théorie des poutres classique. L'autre terme est le moment local induit par la force de traction : il est rapidement variable et à moyenne nulle et donc sans contribution à la loi de comportement globale en flexion. Ce nouveau terme intervient sur la loi de comportement globale en traction; il aurait une forte influence dans le domaine plastique.

Après retour aux variables physiques, le moment de flexion s'écrit sous la forme suivante :

$$M^n(s) = y(S)N^0(x) + M(x) + O(\eta^2)$$

Avec :

$$M(x) = (EI)_{\text{éq}} \frac{d^2v}{dx^2}$$

2.5 Localisation

L'avantage du modèle homogénéisé est qu'il simplifie le calcul de structure à l'échelle macroscopique, mais quand il s'agit de prévoir l'apparition de phénomènes non linéaires, au niveau de la microstructure, tels que les phénomènes de plastification ou bien de rupture etc ...ce modèle ne peut répondre à ces questions. Il serait donc nécessaire de définir les champs locaux. Dans ce paragraphe nous allons définir les champs de déformation et de variation de courbure locaux en fonction des efforts macroscopiques.

D'une part la loi de comportement à l'ordre 1 s'écrit (pages 37 et 38) :

$$m^1(x) \frac{I}{EI} + N^0(x) \frac{Y(S)}{EI} = \kappa^1(x, S)$$

D'autre part la loi de comportement en traction-compression à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(x, S) &= N^0(x) \left(\frac{\cos \alpha}{EI a} \right) \\ &= N^0(x) \varepsilon^{22}(S)\end{aligned}$$

2.6 Conclusion

Nous avons réalisé l'homogénéisation géométrique d'une poutre fortement ondulée. Le modèle de départ est celui de Timoshenko qui tient compte des déformations de cisaillement. Le modèle équivalent est une poutre droite satisfaisant globalement les équations du modèle de Bernoulli (20), (21), (22), (23) et (24). Les rigidités équivalentes dépendent des caractéristiques géométriques de la cellule de base ainsi que des coefficients mécaniques du matériau constitutif de la poutre.

HOMOGENÉISATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE POUTRE ONDULÉE D'ÉPAISSEUR COMPARABLE AU PAS DES ONDULATIONS

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons caractérisé le comportement asymptotique d'une poutre élastique ondulée grâce à une approche asymptotique standard à deux échelles de variations, une échelle lente associée à la fibre moyenne de la poutre et une échelle rapide associée à une ondulation. Dans ce qui suit nous supposons que l'échelle rapide est à deux variables, ce qui correspond à la situation d'une poutre ondulée *assez épaisse*, l'épaisseur étant du même ordre de grandeur que la longueur de l'ondulation. Dans le chapitre précédent, le modèle de départ était la théorie des poutres courbes. Ici, nous partons de l'élasticité **bidimensionnelle**. Les modules de rigidité obtenus seront valables quelle que soit l'épaisseur de l'ondulation, à condition qu'il y ait un assez grand nombre d'ondulations. En utilisant comme outil la méthode asymptotique, on se ramène à la résolution de trois problèmes d'élasticité linéaire plane posés sur une cellule de base. Le premier problème permet de calculer le module de rigidité équivalent en traction-compression de la poutre, le second est un problème en flexion (calcul de la rigidité équivalente en flexion) et le troisième est un problème en cisaillement. Il ne nous a pas été possible de trouver une solution analytique pour les deux premiers problèmes du fait de la complexité de la géométrie de la cellule de base. Nous avons donc été amenés à faire une résolution numérique en utilisant la méthode des éléments finis. Pour valider ce travail nous avons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, confronté les deux approches (l'approche unidimensionnelle et l'approche bidimensionnelle) dans le cas limite d'une poutre ondulée à épaisseur constante et petite devant le pas des ondulations.

3.2 Position du problème

On considère une poutre ondulée d'épaisseur variable et de matériau constitutif linéairement élastique. Sa fibre moyenne est une courbe plane uniformément ondulée autour de l'axe Ox et de longueur projetée sur cet axe égale à L. Les ondulations sont réparties de façon périodique selon Ox. On se propose de caractériser le comportement de la poutre lorsque l'épaisseur, le pas des ondulations et leurs profondeurs deviennent simultanément très petites devant L. Soit N le nombre d'ondulations. On choisit le petit paramètre d'échelle du problème η de telle sorte qu'il soit inversement proportionnel à N ou bien proportionnel à l'épaisseur de la poutre. Nous désignons par p^η et H^η le pas des ondulations et leur profondeur respectivement Fig.8.

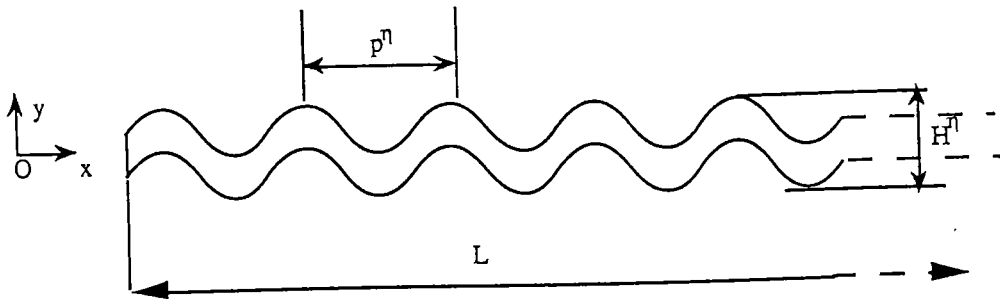


Fig.8: Poutre épaisse ondulée .

Nous avons à résoudre un problème classique d'élasticité linéaire plane (contrainte plane) posé sur une structure élancée de géométrie répétitive. On note $U^\eta(x)$, $\varepsilon^\eta(x)$ et $\sigma^\eta(x)$ respectivement les champs de déplacement, de déformation linéarisée associé et de contrainte, où x désigne le vecteur position de coordonnées x et y . Les équations gouvernant l'équilibre et le comportement de la structure sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma^\eta(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^\eta(\mathbf{U}^\eta(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}^\eta + {}^t \nabla \mathbf{U}^\eta) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{A} : \varepsilon^\eta(\mathbf{U}^\eta(\mathbf{x})) \end{array} \right. \quad (3)$$

A étant le tenseur des modules d'élasticité et $\mathbf{f}^\eta(\mathbf{x})$ la densité surfacique des efforts extérieurs. Le vecteur déplacement $\mathbf{U}^\eta(\mathbf{x})$ est décomposé sur la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ selon :

$$\mathbf{U}^\eta(\mathbf{x}) = u^\eta(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + v^\eta(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 \quad (4)$$

L'idée est de chercher la solution $(\mathbf{U}^\eta, \varepsilon^\eta, \sigma^\eta)$ du problème posé en (1), (2) et (3) sous forme d'un développement asymptotique en η .

3.3 Principe de la méthode des développements asymptotiques

L'analyse asymptotique que nous proposons pour modéliser le comportement de la poutre considérée est analogue à celle faite au chapitre précédent. En effet, elle est basée sur le fait qu'il existe deux échelles de variations. Les variations lentes ou macroscopiques sont prises en compte par une seule variable, soit x , qui se rapporte à la fibre moyenne de la poutre ondulée. Les variations rapides sont prises en compte par deux variables X et Y décrivant la cellule de base **Fig.9** avec :

$$X = x/\eta \quad \text{et} \quad Y = y/\eta$$

La cellule de base Y (une ondulation) est obtenue après avoir réalisé une homothétie de rapport $1/\eta$ sur la structure. Cette cellule de base sera supposée

indépendante du petit paramètre η , de même que les longueurs $\mathbf{p} = \mathbf{p}^\eta/\eta$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\eta/\eta$.

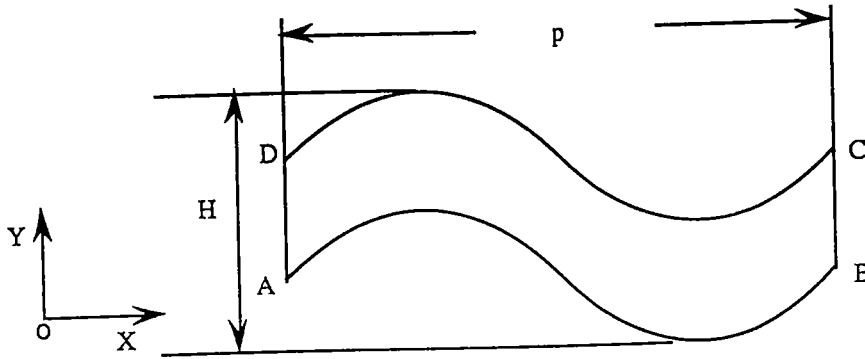


Fig.9 : Cellule de base.

Le principe consiste à écrire les différentes quantités décrivant le comportement de la structure sous forme d'un développement asymptotique en η . Nous supposons que la périodicité de la géométrie de la structure entraîne celle des perturbations. Cette hypothèse conjuguée avec une analyse mécanique de ces quantités conduit aux développements suivants :

$$\sigma^\eta(\mathbf{x}) = \sigma^0(\mathbf{x}, X, Y) + \eta \sigma^1(\mathbf{x}, X, Y) + \dots \quad (5)$$

$$u^\eta(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, X, Y) + \eta u^1(\mathbf{x}, X, Y) + \dots \quad (6)$$

$$v^\eta(\mathbf{x}) = \eta^{-1} v^{-1}(\mathbf{x}, X, Y) + v^0(\mathbf{x}, X, Y) + \eta v^1(\mathbf{x}, X, Y) + \dots \quad (7)$$

$$f_x^\eta(\mathbf{x}) = f_x^0(\mathbf{x}, X, Y) \quad (8)$$

$$f_y^\eta(\mathbf{x}) = \eta f_y^1(\mathbf{x}, X, Y) \quad (9)$$

où tous les termes de ces développements sont p -périodiques ($p = p^\eta/\eta$) par rapport à la variable rapide X . Le développement posé diffère de l'homogénéisation classique, la flèche $v(\mathbf{x})$ étant supposée plus grande que le déplacement axial. En ce sens, la méthode utilisée se rapproche des passages élasticité 2D - poutre ou bien élasticité 3D - plaque [6], qui sont d'ailleurs des cas

particuliers des analyses présentées dans cette thèse. De même la force verticale est supposée plus petite que la force horizontale. La suite des calculs consiste à reporter les développements (5), (6), (7), (8) et (9) dans les équations (1), (2) et (3), en tenant compte des règles habituelles des développements en échelles multiples qui discernent les variables locales X et Y des variables globales x et y soit :

$$\nabla(\cdot) = \frac{1}{\eta} \nabla_{(X,Y)}(\cdot) + \nabla_{(x,y)}(\cdot)$$

$$\operatorname{div} \sigma = \frac{1}{\eta} \operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma + \operatorname{div}_{(x,y)} \sigma$$

Ensuite nous identifions, dans les équations qui en ressortent, les diverses puissances en η ce qui conduit à de nouvelles équations. À ces équations on applique l'opérateur moyenne qu'on définit par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\operatorname{mes}(Y)} \iint_Y (\cdot) \, dXdY$$

où $\operatorname{mes}(Y)$ désigne la surface de la cellule de base notée par Y .

Ceci permettra de définir les efforts généralisés macroscopiques (effort normal, effort tranchant et moment de flexion). Nous montrerons que ces efforts satisfont les équations d'équilibre d'une poutre droite et nous retrouvons aussi les lois de comportement auxquelles ils satisfont. On déterminera par la suite les grandeurs locales en fonction des grandeurs macroscopiques (localisation).

3.4 Modèle homogénéisé

Le but de ce paragraphe est de déterminer les équations d'équilibres et les lois de comportement homogénéisées et d'en déduire les modules de rigidités équivalents de la poutre droite équivalente.

3.4.1 Équations d'équilibre macroscopiques

Nous reportons le développement du champ de contrainte (5) et celui des efforts volumiques (8) et (9) dans les équations d'équilibre (1). Nous obtenons le développement suivant :

$$\frac{1}{\eta} \operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma^0(x, X, Y) + \left(\operatorname{div}_{(x,y)} \sigma^0(x, X, Y) + \operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma^1(x, X, Y) + f^0(x, X, Y) \right) + \eta \left(\operatorname{div}_{(x,y)} \sigma^1(x, X, Y) + \operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma^2(x, X, Y) + f^1(x, X, Y) \right) + \dots = 0$$

Nous identifions ensuite à zéro les termes de même puissance en η . Nous obtenons aux différents ordres les résultats suivants.

À l'ordre -1

$$\operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma^0(x, X, Y) = 0 \tag{10}$$

On constate que le tenseur des contraintes à l'ordre zéro est auto-équilibré.

À l'ordre 0

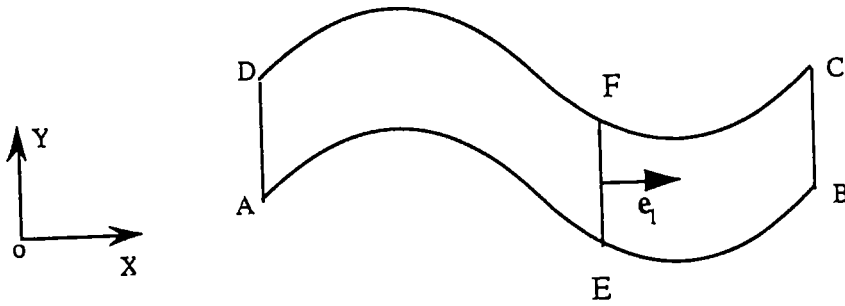


Fig.10

D'après (10) et la condition aux limites $\sigma^0 \cdot n = 0$ sur AE et DF **Fig.10**, la poutre comprise entre AD et EF est en équilibre à l'ordre zéro, ce qui entraîne une équation d'équilibre des résultantes et une équation d'équilibre des moments :

$$\begin{cases} \int_E^F \sigma_{11}^0 dY = \int_A^D \sigma_{11}^0 dY \\ \int_E^F Y \sigma_{11}^0 dY = \int_A^D Y \sigma_{11}^0 dY \end{cases}$$

et ceci bien sûr quelle que soit la section EF. Il s'ensuit que les résultantes sur l'épaisseur des quantités σ_{11}^0 et $Y \sigma_{11}^0$ sont indépendantes de X et donc qu'elles sont liées à leur moyenne sur la surface ABCD :

$$\begin{cases} \frac{1}{EF} \int_E^F \sigma_{11}^0 dY = \langle \sigma_{11}^0 \rangle \\ \frac{1}{EF} \int_E^F Y \sigma_{11}^0 dY = \langle Y \sigma_{11}^0 \rangle \end{cases} \quad \text{pour toute section EF.}$$

Pour une poutre ondulée d'épaisseur variable, on définit l'effort normal sur l'épaisseur par une résultante des contraintes sur le domaine physique soit :

$$N(x) = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle \sigma_{11}^0 \rangle \quad (12)$$

De même, on définit le moment de flexion macroscopique M et la force horizontale linéique macroscopique f_x par:

$$M(x) = \eta^2 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle -Y\sigma_{11}^0 \rangle \quad (13)$$

$$f_x = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle f_x^0 \rangle$$

Nous retrouvons alors l'équation d'équilibre de l'effort normal macroscopique suivante :

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0 \quad (14)$$

L'étape suivante consiste à chercher l'équation d'équilibre du moment. A cet effet, on multiplie la première équation du système (11) par Y et on applique l'opérateur moyenne à l'équation qui en résulte. Compte tenu des conditions de périodicité et de surface libre, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{d\langle Y\sigma_{11}^0 \rangle}{dx} - \langle \sigma_{12}^1 \rangle + \langle Yf_x^0 \rangle = 0$$

On raisonne comme pour l'effort normal et on définit l'effort tranchant généralisé macroscopique par :

$$T(x) = \eta^2 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle \sigma_{12}^1 \rangle \quad (15)$$

On trouve alors l'équation d'équilibre des moments soit :

$$\frac{dM(x)}{dx} + T(x) + m(x) = 0 \quad (16)$$

où $m(x)$ désigne le moment de flexion macroscopique induit par la force horizontale soit :

$$m(x) = \eta^2 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle -Yf_x^0 \rangle$$

À l'ordre 1

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}^2}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{11}^1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}^2}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{22}^2}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{12}^1}{\partial x} + f_y^1 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Nous appliquons l'opérateur moyenne à la deuxième équation de ce système. On obtient l'équation suivante :

$$\frac{d \langle \sigma_{12}^1 \rangle}{dx} + \langle f_y^1 \rangle = 0$$

La force verticale linéique macroscopique étant définie par :

$$f_y = \eta^2 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle f_y^1 \rangle,$$

on retrouve l'équation d'équilibre de l'effort tranchant macroscopique soit :

$$\frac{dT(x)}{dx} + f_y(x) = 0 \quad (18)$$

Les équations (14), (16) et (18) sont bien les équations d'équilibres d'une poutre droite où $N(x)$, $T(x)$ et $M(x)$ sont respectivement l'effort normal, l'effort tranchant et le moment de flexion d'une poutre droite.

3.4.2 Lois de comportements et coefficients d'élasticité homogénéisés

Du développement du vecteur déplacement (6) et (7) il s'ensuit le développement suivant pour le champ de déformation (2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^\eta = \eta^{-1} \frac{\partial u^0}{\partial X} + \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial X} + \eta \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial X} \right) + \dots \\ \varepsilon_{22}^\eta = \eta^{-2} \frac{\partial v^{-1}}{\partial Y} + \eta^{-1} \frac{\partial v^0}{\partial Y} + \frac{\partial v^1}{\partial Y} + \eta \frac{\partial v^2}{\partial Y} + \dots \\ 2\varepsilon_{12}^\eta = \eta^{-2} \frac{\partial v^{-1}}{\partial X} + \eta^{-1} \left(\frac{\partial v^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial X} + \frac{\partial u^0}{\partial Y} \right) + \\ \quad \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial X} + \frac{\partial u^1}{\partial Y} + \eta \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial X} + \frac{\partial u^2}{\partial Y} \right) + \dots \end{array} \right.$$

En substituant ce développement ainsi que celui du champ de contrainte (5) dans la loi de comportement (en contraintes planes) (3), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^0 + \eta \sigma_{11}^1 + \dots = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\tau_1^{-2} \nu \frac{\partial v^{-1}}{\partial Y} + \eta^{-1} \left(\frac{\partial u^0}{\partial X} + \nu \frac{\partial v^0}{\partial Y} \right) + \right. \\ \quad \left. \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial u^1}{\partial X} + \nu \frac{\partial v^1}{\partial Y} \right) + \eta \left(\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial X} + \nu \frac{\partial v^2}{\partial Y} \right) + \dots \right) \\ \sigma_{22}^0 + \eta \sigma_{22}^1 + \dots = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\eta^{-2} \frac{\partial v^{-1}}{\partial Y} + \eta^{-1} \left(\nu \frac{\partial u^0}{\partial X} + \frac{\partial v^0}{\partial Y} \right) + \right. \\ \quad \left. \left(\nu \frac{\partial u^0}{\partial x} + \nu \frac{\partial u^1}{\partial X} + \frac{\partial v^1}{\partial Y} \right) + \eta \left(\nu \frac{\partial u^1}{\partial x} + \nu \frac{\partial u^2}{\partial X} + \frac{\partial v^2}{\partial Y} \right) + \dots \right) \\ 2\sigma_{12}^0 + 2\eta \sigma_{12}^1 + \dots = \frac{E}{1 + \nu} \left(\eta^{-2} \frac{\partial v^{-1}}{\partial X} + \eta^{-1} \left(\frac{\partial v^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial X} + \frac{\partial u^0}{\partial Y} \right) \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial X} + \frac{\partial u^1}{\partial Y} \right) + \eta \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial X} + \frac{\partial u^2}{\partial Y} \right) + \dots \right) \end{array} \right.$$

Nous identifions ensuite tous les termes de même puissance en η , on trouve :

À l'ordre -2

$$\frac{\partial v^{-1}}{\partial Y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v^{-1}}{\partial X} = 0 \quad \Rightarrow \quad v^{-1} = v^{-1}(x)$$

À l'ordre -1

$$\begin{cases} \frac{\partial u^0}{\partial X} + v \frac{\partial v^0}{\partial Y} = 0 \\ v \frac{\partial u^0}{\partial X} + \frac{\partial v^0}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial v^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial u^0}{\partial Y} + \frac{\partial v^0}{\partial X} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Les deux premières équations de ce système montrent que :

$$u^0 = u^0(x, Y) \quad \text{et} \quad v^0 = v^0(x, X)$$

La troisième équation du système (19) nous permet d'écrire u^0 et v^0 de la façon suivante :

$$\begin{cases} u^0(x, Y) = u_m^0(x) + Y k_1(x) \\ v^0(x, X) = v_m^0(x) + X k_2(x) \end{cases}$$

où $k_1(x)$ et $k_2(x)$ sont reliés par :

$$k_2(x) = -\frac{dv^{-1}}{dx} - k_1(x)$$

À l'échelle microscopique $k_1(x)$ et $k_2(x)$ sont des constantes donc des données du problème local. Puisque v^0 doit être périodique en X la fonction $k_2(x)$ est

nulle. Ainsi le développement approprié pour le champ de déplacement $U^\eta(\mathbf{x})$ s'écrit sous la forme suivante :

$$U^\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta} v^{-1}(x) \mathbf{e}_2 + \left[\left(u_m^0(x) - Y \frac{dv^{-1}}{dx}(x) \right) \mathbf{e}_1 + v_m^0(x) \mathbf{e}_2 \right] + \eta U^1(x, X, Y) + \dots \quad (20)$$

Nous remarquons que le champ de déplacement $U^\eta(\mathbf{x})$ admet pour terme principal une *déflexion* $v^{-1}(x)$ et à l'ordre suivant un champ de déplacement de type *Bernoulli*. Le terme principal du champ des tenseurs de déformation correspondant à (20) s'écrit :

$$\varepsilon^0(x, X, Y) = \varepsilon_{(X,Y)}(U^1) + \frac{du_m^0}{dx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{d^2 v^{-1}}{dx^2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{dv_m^0}{dx} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

où :

$$\varepsilon_{(X,Y)}(U^1) = \frac{1}{2} \left(\nabla_{(X,Y)} U^1 + {}^t \nabla_{(X,Y)} U^1 \right)$$

La loi de comportement à l'ordre zéro s'écrit donc comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_{11}^0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial X} + \nu \frac{\partial v^1}{\partial Y} + \frac{du_m^0}{dx} - Y \frac{d^2 v^{-1}}{dx^2} \right) \\ \sigma_{22}^0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu \frac{\partial u^1}{\partial X} + \frac{\partial v^1}{\partial Y} + \nu \left(\frac{du_m^0}{dx} - Y \frac{d^2 v^{-1}}{dx^2} \right) \right) \\ 2\sigma_{12}^0 = \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\partial v^1}{\partial X} + \frac{\partial u^1}{\partial Y} + \frac{dv_m^0}{dx} \right) \end{cases}$$

Nous constatons que (σ^0, U^1) est solution du problème élastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{(X,Y)} \sigma^0 = 0 \\ \sigma^0 = A : [\varepsilon_{(X,Y)}(U^1) - \varepsilon^{res}] \\ \varepsilon^{res} = \frac{du_m^0}{dx} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d^2v^{-1}}{dx^2} \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{dv_m^0}{dx} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ U^1(x, X, Y) \text{ est } p\text{-périodique par rapport à } X. \\ \sigma^0 \cdot n|_{AD} + \sigma^0 \cdot n|_{BC} = 0 \\ \sigma^0 \cdot n|_{AB} = \sigma^0 \cdot n|_{CD} = 0 \\ n \text{ est le vecteur normal extérieur.} \end{array} \right.$$

Localisation

Le problème local, qui est posé sur la cellule de base Fig.9 et où x joue le rôle d'un paramètre fixé, est donc un problème d'élasticité plane bien posé ayant pour solution unique (modulo les déplacements rigides) (σ^0, U^1) . Nous remarquons, dans la formule (21), que le tenseur de déformation total s'écrit comme une somme d'une déformation locale et d'une déformation résiduelle. Cette dernière est une combinaison linéaire des trois quantités macroscopiques $\frac{du_m^0}{dx}$, $\frac{d^2v^{-1}}{dx^2}$ et $\frac{dv_m^0}{dx}$. La linéarité de ce problème nous permet donc d'écrire la solution sous forme d'une combinaison linéaire de ces quantités soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^0(x, X, Y) &= \frac{du_m^0}{dx}(x) \Sigma^1(X, Y) + \frac{d^2v^{-1}}{dx^2}(x) \Sigma^2(X, Y) \\ &\quad + 1/2 \frac{dv_m^0}{dx}(x) \Sigma^3(X, Y) \end{aligned} \right. \quad (22-1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U^1(x, y_1, y_2) &= \frac{du_m^0}{dx}(x) U^{11}(X, Y) + \frac{d^2v^{-1}}{dx^2}(x) U^{12}(X, Y) \\ &\quad + 1/2 \frac{dv_m^0}{dx}(x) U^{13}(X, Y) \end{aligned} \right. \quad (22-2)$$

où Σ^1 , Σ^2 et Σ^3 sont respectivement les tenseurs de localisation des effets de traction-compression, de flexion et de cisaillement. Les expressions linéaires (22-1) et (22-2) permettent la décomposition de ce problème local en trois problèmes locaux P_1 , P_2 et P_3 d'élasticité plane posés sur la cellule de base **Fig.9**.

Le problème P_1 de solution (Σ^l, U^{1l}) se formule de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{div}_{(X,Y)} \Sigma^l &= 0 \\ \Sigma^l &= A : [\varepsilon_{(X,Y)}(U^{1l}) - \varepsilon^l] \\ \varepsilon^l &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U^{1l}(X, Y) &\text{ est } p\text{-périodique par rapport à } X \\ \Sigma^l \cdot n|_{AD} + \Sigma^l \cdot n|_{BC} &= 0 \\ \Sigma^l \cdot n|_{AB} = \Sigma^l \cdot n|_{CD} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ce problème permet de calculer la réponse de la cellule de base à une déformation imposée et constante dans le sens axial. Nous considérons donc que ce problème est un problème en traction-compression.

Le problème P_2 donne la réponse à une déformation imposée dans le sens axial et qui varie linéairement par rapport à la variable Y . On peut donc le considérer comme un problème de flexion. Il se formule comme suit :

Problème P_2 : Trouver (Σ^2, U^{12}) solution de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{(X,Y)} \Sigma^2 = 0 \\ \Sigma^2 = A : [\varepsilon_{(X,Y)}(U^{12}) - \varepsilon^2] \\ \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ U^{12}(X, Y) \text{ est } p\text{-périodique par rapport à } X. \\ \Sigma^2 \cdot n|_{AD} + \Sigma^2 \cdot n|_{BC} = 0 \\ \Sigma^2 \cdot n|_{AB} = \Sigma^2 \cdot n|_{CD} = 0 \end{array} \right.$$

De même, le problème P_3 peut être considéré comme la réponse à un cisaillement résiduel. Il se formule comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{(X,Y)} \Sigma^3 = 0 \\ \Sigma^3 = A : [\varepsilon_{(X,Y)}(U^{13}) - \varepsilon^3] \\ \varepsilon^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ U^{13}(X, Y) \text{ est } p\text{-périodique par rapport à } X. \\ \Sigma^3 \cdot n|_{AD} + \Sigma^3 \cdot n|_{BC} = 0 \\ \Sigma^3 \cdot n|_{AB} = \Sigma^3 \cdot n|_{CD} = 0 \end{array} \right.$$

La solution exacte de ce problème peut être obtenue et la contrainte correspondante est nulle :

$$\Sigma^3 = 0$$

$$U^{13} = -Ye_1$$

En fait, le déplacement U^{13} ressemble à un champ de cisaillement uniforme et il compense un champ dû à la déflexion $v^{-1}(x)$. Ce troisième problème n'a donc pas de contribution à la contrainte.

3.4.2.1 Les lois de comportement homogénéisées

Après application de l'opérateur moyenne à l'équation de localisation (22-1) on obtient l'équation suivante :

$$\langle \sigma_{11}^0 \rangle = \frac{du_m^0}{dx} \langle \Sigma_{11}^1 \rangle + \frac{d^2 v^{-1}}{dx^2} \langle \Sigma_{11}^2 \rangle$$

Ensuite on multiplie cette même équation (22-1) par Y et on prend la moyenne. On trouve.

$$\langle Y\sigma_{11}^0 \rangle = \frac{du^0}{dx} \langle Y\Sigma_{11}^1 \rangle + \frac{d^2 v^{-1}}{dx^2} \langle Y\Sigma_{11}^2 \rangle$$

La symétrie de la cellule de base entraîne des propriétés de symétrie des champs Σ^1 et Σ^2 , qui conduisent en particulier aux relations (Annexe!) :

$$\langle \Sigma_{11}^2 \rangle = \langle Y\Sigma_{11}^1 \rangle = 0$$

Ceci permet de découpler les effets de traction-compression et de flexion et par suite on a :

$$\begin{cases} \langle \sigma_{11}^0 \rangle = \frac{du_m^0}{dx} \langle \Sigma_{11}^1 \rangle \\ \langle Y\sigma_{11}^0 \rangle = \frac{d^2v^{-1}}{dx^2} \langle Y\Sigma_{11}^2 \rangle \end{cases}$$

Pour faciliter la lecture des résultats, il est intéressant d'introduire un champ de déplacement "macroscopique" ou moyen :

$$\begin{cases} u(x) = u_m^0(x) \\ v(x) = \eta^{-1}v^{-1}(x) \end{cases}$$

qui correspond aux premiers termes des développements posés (6) et (7).

Ainsi et en tenant compte des définitions (12) et (13) des efforts généralisés macroscopiques, on trouve qu'ils obéissent à des lois de comportement macroscopiques en traction-compression et en flexion qui sont identiques à celles d'une poutre droite de type Bernoulli :

$$\begin{cases} N(x) = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle \Sigma_{11}^1 \rangle \frac{du}{dx} \\ M(x) = \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle -Y\Sigma_{11}^2 \rangle \frac{d^2v}{dx^2} \end{cases} \quad (23)$$

3.4.2.2 Rigidités équivalentes

La résolution des problèmes P_1 et P_2 , est forcément numérique vu la complexité de la géométrie de la cellule de base. Les solutions (Σ^1, U^{11}) et (Σ^2, U^{12}) des problèmes P_1 et P_2 déterminent le comportement à la traction-compression et à la

flexion de la poutre considérée. On rappelle que les coefficients de comportement homogénéisés sont les coefficients qui relient la moyenne sur la cellule de base de la déformation à la moyenne de la contrainte [15].

Du système d'équation (23), on déduit la définition des *modules de rigidités équivalents* en traction-compression $(EA)_{\text{équi}}$ et en flexion $(EI)_{\text{équi}}$ de la poutre droite équivalente.

$$\begin{cases} (EA)_{\text{équi}} = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle \Sigma_{11}^1 \rangle \\ (EI)_{\text{équi}} = \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{p} \langle -Y \Sigma_{11}^2 \rangle \end{cases} \quad (24)$$

Ces expressions semblent plus ou moins dépendre du choix du petit paramètre η , qui est toujours arbitraire. En fait, on peut montrer facilement qu'un changement de petit paramètre de la forme $\eta^* = k\eta$ (k étant une constante) ne modifie pas les expressions des rigidités équivalentes. Si on choisit le petit paramètre η ayant la dimension d'une longueur soit :

$$\eta = \frac{\text{mes}Y^\eta}{p^\eta}$$

où $\text{mes}Y^\eta$ est la surface d'une ondulation à l'échelle physique (avant l'homothétie), la cellule de base et les variables X et Y sont sans dimension. Dans ce cas les rigidités équivalentes s'écrivent :

$$\begin{cases} (EA)_{\text{équi}} = \frac{\text{mes}Y^\eta}{p^\eta} \langle \Sigma_{11}^1 \rangle \\ (EI)_{\text{équi}} = \left(\frac{\text{mes}Y^\eta}{p^\eta} \right)^2 \langle -y \Sigma_{11}^2 \rangle \end{cases}$$

Récapitulatif

On a donc substitué à un problème d'élasticité plane posé sur une poutre ondulée, d'épaisseur comparable avec le pas des ondulations, un problème de poutre élastique posé sur un segment de droite. Le problème global posé sur la poutre droite équivalente consiste à trouver $u(x)$, $v(x)$, $M(x)$ et $N(x)$ obéissant aux équations d'équilibres et aux lois de comportement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} + f_x = 0 \quad P.54 \\ \frac{dT}{dx} + f_y = 0 \quad P.55 \\ \frac{dM}{dx} + T(x) + m(x) = 0 \quad P.54 \\ N(x) = (EA)_{\text{équi}} \frac{du}{dx} \quad P.63 \\ M(x) = (EI)_{\text{équi}} \frac{d^2v}{dx^2} \quad P.63 \\ \text{Conditions aux limites} \end{array} \right.$$

Dans le paragraphe qui suit nous donnons les résultats numériques des problèmes P₁ et P₂ pour des poutres ondulées d'épaisseur constante. Nous calculerons ensuite les modules de rigidités équivalents que nous comparerons avec les résultats du premier chapitre pour le cas des poutres ondulées d'épaisseur très petite devant le pas des ondulations.

3.5 Calcul des rigidités équivalentes par l'approche unidimensionnelle et l'approche bidimensionnelle

On considère une poutre ondulée d'épaisseur t constante et de pas d'ondulation p Fig.11. La cellule de base est constituée par des arcs de cercles concentriques symétriques par rapport au centre de la cellule, d'angle d'inclinaison Θ Fig.11 Pour différentes valeurs de t et de Θ , nous avons procédé à une résolution numérique des problèmes P_1 et P_2 posés sur une cellule de base (ondulation) et ensuite nous avons déterminé les modules de rigidités équivalents de la poutre, en traction-compression et en flexion. Pour les poutres d'épaisseur t très petite devant le pas des ondulations nous avons aussi fait ces calculs avec l'approche unidimensionnelle du chapitre précédent qu'on a comparée avec les calculs numériques.

La résolution numérique des problèmes P_1 et P_2 a été réalisée par le logiciel d'éléments finis ABAQUS. On a utilisé des éléments triangulaires à six noeuds et à deux degrés de liberté par noeud. Avec ce type d'éléments l'interpolation est quadratique ce qui nous a permis d'avoir une bonne convergence des résultats. Le calcul des modules de rigidités équivalents a nécessité la mise en place d'un programme de calcul de moyenne.

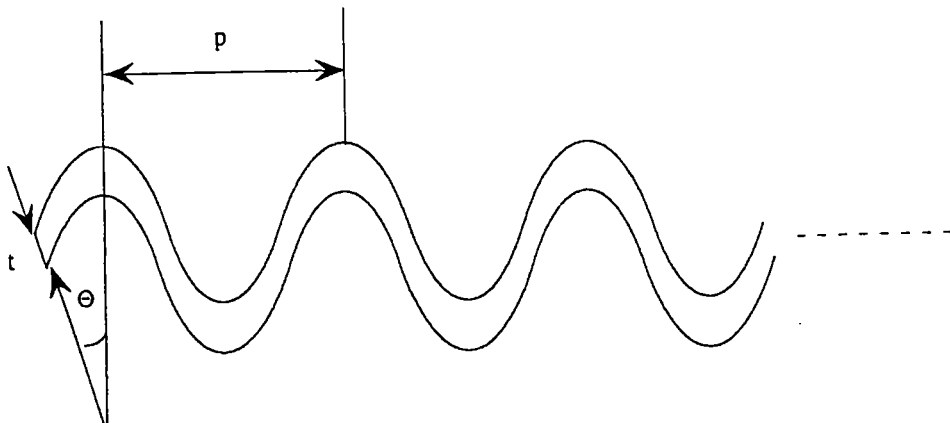


Fig.11

Calcul du module de rigidité équivalent en traction-compression

Pour un angle d'inclinaison $\theta = \pi/8$

En faisant varier l'épaisseur t de la poutre, on a calculé la rigidité équivalente en traction-compression $(EA)_{\text{équi}}$ par la formule (24) en utilisant l'approche bidimensionnelle. Le calcul a nécessité la résolution numérique du problème P_1 . Ensuite on a calculé ce même module de rigidité mais avec l'approche unidimensionnelle du chapitre précédent. Sur la Fig.(12.a) on a représenté le rapport des deux rigidités calculées respectivement par l'approche unidimensionnelle et l'approche bidimensionnelle en fonction d'un coefficient de forme qu'on a choisi égal à $p/2t$ où p est la période des ondulations.

Le calcul unidimensionnel a été fait pour le cas où on tient compte des déformations de cisaillement avec un coefficient de Timoshenko $k = 5/6$ (cas d'une poutre à section rectangulaire) (formule (27) du chapitre II) et en négligeant complètement le cisaillement c'est à dire en prenant k infini (modèle de Bernoulli).

Les mêmes résultats ont été présentés sous forme de tableau (voir **Tableau 1**).

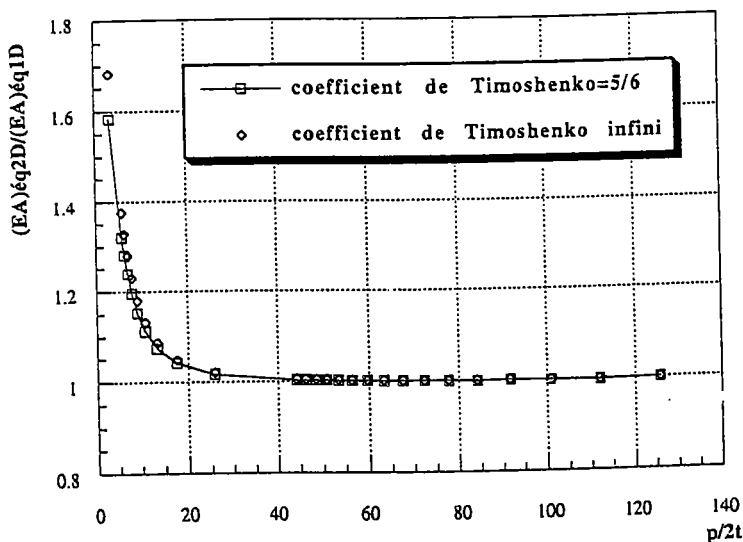


Fig.(12.a)



Cellule de base pour $p/2t = 17.4$ soit 4% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli



Cellule de base pour $p/2t = 5.76$ soit 24% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli

Fig.(12.b)

Interprétation

Les résultats obtenus par les deux approches sont cohérents : pour des cellules de base minces, l'approche unidimensionnelle, qui, rappelons-le, conduit à une formule analytique, donne la même rigidité que l'approche bidimensionnelle, que l'on peut considérer ici comme exacte. Pour des cellules de base plus épaisses, l'approche unidimensionnelle sous-estime la rigidité. Comme on pouvait le deviner, la rigidité équivalente obtenue à partir du modèle de Timoshenko est inférieure à celle obtenue par le modèle de Bernoulli : elle est donc plus éloignée du résultat de référence obtenu par l'approche bidimensionnelle.

L'approche unidimensionnelle est valable (avec un écart maximum de 4%) pour un élancement $p/2t$ supérieur ou égal à 17. Quelques cas de cellules de base plus épaisses ont été représentés sur la **Fig.(12.b)** : on constate que l'approche unidimensionnelle donne des résultats qualitativement valables (à 20 ou 30% près), même lorsque la forme de la cellule de base diffère fortement d'une structure élancée.

p/2t	125.7	50.7	25.7	17.4	13.26	10.76	5.76
(EA) _{éq} 1-D k=5/6	0.7845	12.012	91.09	285.362	617.58	1088.2	4893.24
(EA) _{éq} 1-D k infini	0.7846	12.023	91.423	287.544	625.28	1107.43	5092.05
(EA) _{éq} 2D	0.7848	12.055	92.986	299.506	671.53	1231.41	6725.61
Écart % (1)	0.042	0.36	2.038	4.72	8.03	11.63	27.24
Écart % (2)	0.026	0.265	1.68	4	6.88	10.06	24.28

Tableau 1: $\theta = \pi / 8$

(1) l'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D ($k = 5/6$)

(2) l'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D (k infini).

Pour $\theta = \pi / 4$

On a reporté (Fig.(13.a) et Tableau 2) les rigidités équivalentes obtenues avec un angle d'inclinaison plus grand que dans le cas précédent. Les résultats sont tout à fait comparables, mais la zone de validité est cette fois beaucoup plus grande avec une tolérance de 4%, l'approche unidimensionnelle donne une valeur correcte de la rigidité jusqu'à un élancement p/2t égal à 7. Par ailleurs, les résultats obtenus avec le modèle de Timoshenko sont beaucoup moins bons que ceux obtenus avec le modèle de Bernoulli.

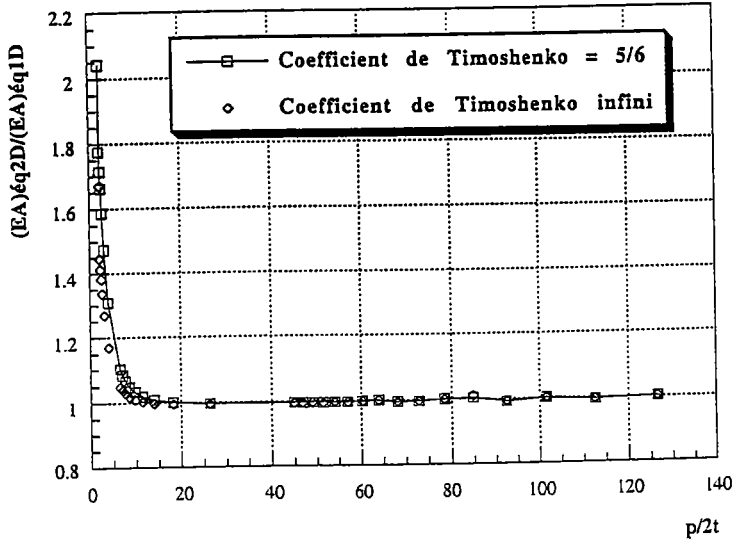


Fig (13.a)



Cellule de base pour $p/2t = 6.41$ soit 4% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli



Cellule de base pour $p/2t = 3.91$ soit 14.5% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli

Fig.(13.b)

$p/2t$	126.41	9.74	8.55	7.	6.41	3.91	3
$(EA)_{\text{éq}}$ 1-D $k=5/6$	0.16844	437.96	655.43	1230.20	1583	6733.27	13205.1
$(EA)_{\text{éq}}$ 1-D $k \text{ infi}$	0.16846	448.26	675.33	1285.52	1666	7531.52	15329.34
$(EA)_{\text{éq}}$ 2D	0.1687	451.91	686.41	1332.45	1745.66	8813.78	19457.79
Écart % (1)	0.178	3.1	4.51	7.67	9.31	23.6	32.13
Écart % (2)	0.165	0.81	1.61	3.52	4.56	14.54	21.21

Tableau 2: $\Theta = \pi/4$

- (1) l'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D ($k = 5/6$)
 (2) l'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D ($k \text{ infini}$).

Nous avons aussi fait plusieurs calculs de $(EA)_{\text{éq}}$ pour des poutres ayant des angles θ différents ce qui nous a permis de faire les mêmes remarques que pour $\Theta = \pi/4$ et $\Theta = \pi/8$. En effet pour un angle Θ quelconque on remarque que les résultats analytiques et numériques sont les mêmes à quelques pour-cent près jusqu'à une certaine valeur critique de $(p/2t)$ où l'écart devient plus important. Cette limite peut être considérée comme étant la limite de validité de l'approche unidimensionnelle. En effet au delà de cette limite la poutre est localement une poutre épaisse et il est donc nécessaire d'utiliser l'approche bidimensionnelle. On remarque aussi que plus Θ est grand plus l'écart entre le calcul numérique et le calcul analytique, qui tient compte du cisaillement, augmente. Dans les tableaux 1 et 2 on remarque que les résultats analytiques lorsque k est infini approchent mieux les résultats numériques.

Calcul du module de rigidité équivalent en flexion

Pour les mêmes poutres que précédemment, nous avons calculé le module de rigidité équivalent en flexion $(EI)_{\text{équi}}$ analytiquement avec l'approche unidimensionnelle (28) (chapitre II) et numériquement (24) en faisant la résolution par élément finis du problème en flexion P_2 .

Nous remarquons que pour θ égale à $\pi / 8$ (Tableau 3) le calcul analytique et le calcul asymptotique numérique coïncident à -6% près dans la zone $p/2$ supérieur ou égal $3t$. Le Tableau 4 montre que pour θ égale à $\pi / 4$ les deux approches donnent des résultats analogues à 6% près dans la zone $p/2$ égal à $6t$.

Comme pour la rigidité en traction on a tracé dans la courbe 10 le rapport entre le calcul unidimensionnel et le calcul bidimensionnel du module de rigidité équivalent en flexion dans le cas où θ égale à $\pi / 8$. Cette courbe montre bien que ce rapport est approximativement égal à l'unité lorsque l'élanement $p/2t$ est assez grand.

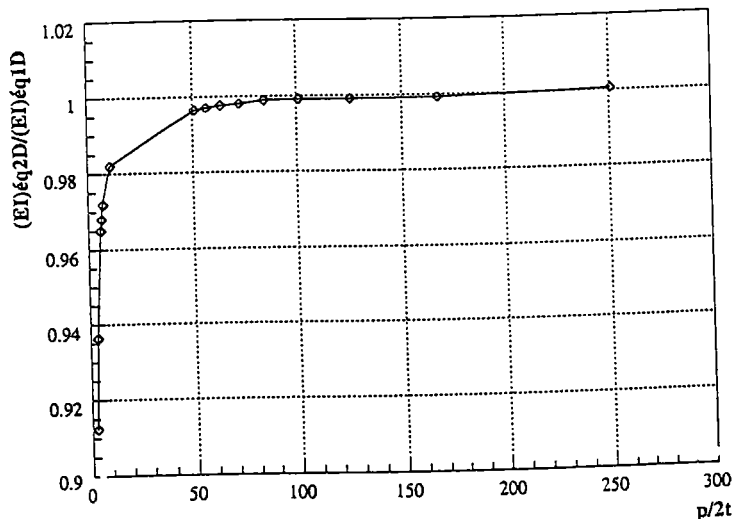
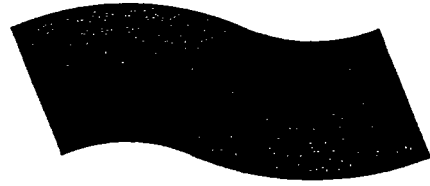


Fig.(14.a)



Cellule de base pour $p/2t = 5.76$ soit -4% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli



Cellule de base pour $p/2t = 1.76$ soit -14.26% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli

Fig.(14.b) : $\Theta = \pi / 8$

$p / 2t$	125.76	44.24	10.76	7.01	5.76	3.26	1.76
$(E)_{\text{eq}}$ 1-D	0.00104	0.0247	2.0302	8.3157	16.24	129.93	2030.2
$(E)_{\text{eq}}$ 2-D	0.001037	0.0246	1.9935	8.081	15.67	121.66	1776.81
Écart %	-0.18	-0.4	-1.84	-2.9	-3.6	-6.79	-14.26

Tableau 3: $\Theta = \pi / 8$



Cellule de base pour $p/2t = 9.74$ soit -4% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli



Cellule de base pour $p/2t = 2.66$ soit -19% d'écart entre l'approche 2-D et l'approche 1-D de Bernoulli

Fig.15: $\Theta = \pi / 4$

p / 2t	126.41	44.9	26.41	9.74	7.	6.41	2.66
(EI)éq 1-D	0.0009603	0.02282	0.12	3.24	10.94	15.005	960.337
(EI)éq 2-D	0.0009545	0.02265	0.118	3.11	10.34	14.106	804.688
Écart %	-0.609	-0.7268	-1.36	-4	-5.78	-6.37	-19.34

Tableau 4: $\Theta = \pi / 4$

3.6 Visualisation des contraintes de localisation

Dans les figures a, b et c on représente la distribution des contraintes de localisation, dans la cellule de base, des effets de traction-compression solutions du problème P_1 pour le cas d'une poutre ondulée assez épaisse. On remarque que toutes ces représentations sont symétriques par rapport au centre de la cellule de base. La composante du tenseur de localisation dans la direction 11, Fig. a, est fortement variable dans l'épaisseur les lignes de niveaux étant à peu près parallèles à la ligne moyenne de la cellule de base comme pour une poutre droite. La composante S_{22} , Fig. b, est d'un ordre dix fois plus petit que S_{11} mais elle est plus importante que pour une poutre droite. Dans la figure c on remarque que la composante de cisaillement est effectivement à moyenne nulle sur la cellule de base mais elle est localement presque aussi importante que la composante principale S_{11} .

Les figures d, e et f représentent la solution en contrainte du problème de localisation P_2 (problème en flexion). S_{11} est la plus importante, mais les deux

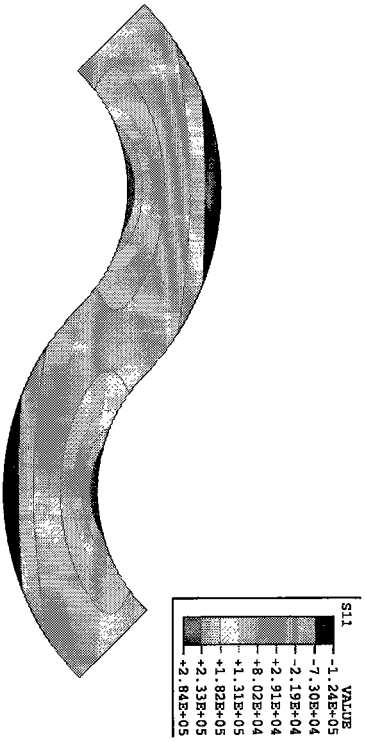


Fig.a : SOLUTION DU PROBLEME P1 : S11

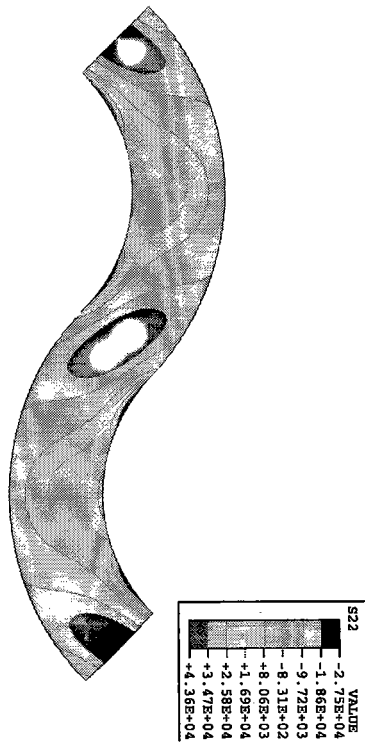


Fig.b : SOLUTION DU PROBLEME P1 : S22

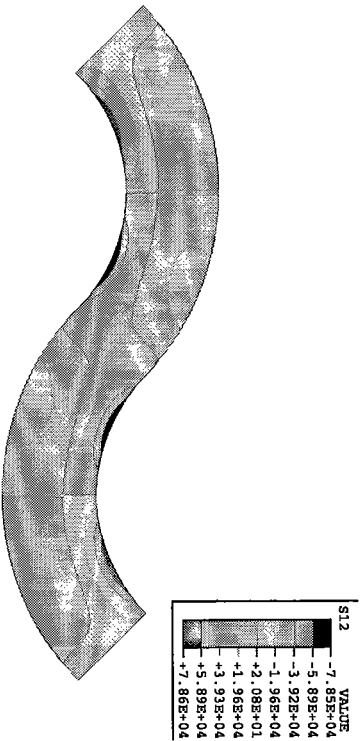


Fig.c : SOLUTION DU PROBLEME P1 : S12

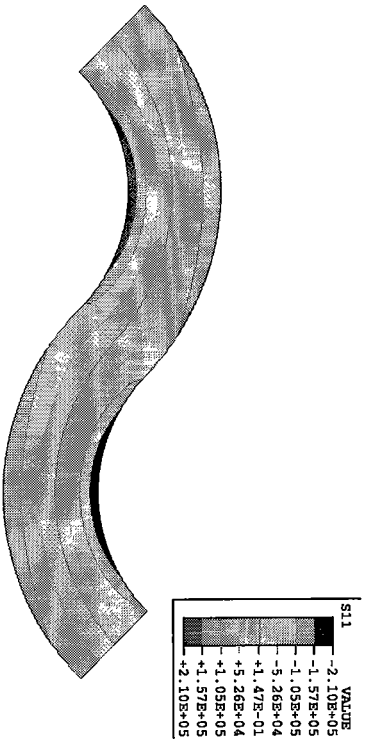


Fig.d : SOLUTION DU PROBLEME P2 : S11

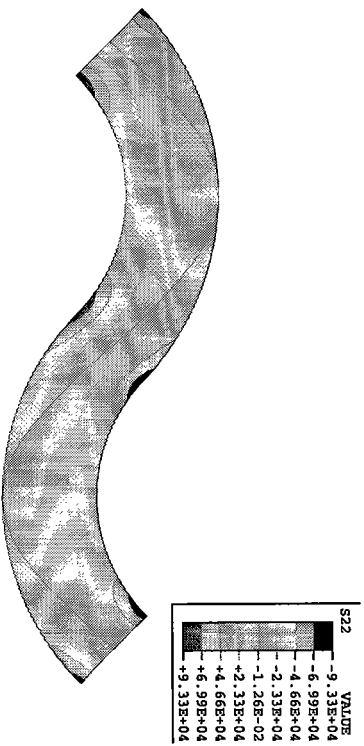


Fig.e : SOLUTION DU PROBLEME P2 : S22



Fig.f : SOLUTION DU PROBLEME P2 : S12

autres composantes ne sont pas négligeables. Dans ce cas les lignes de niveaux de la composante S_{11} suivent à peu près l'ondulation. Toutes les composantes du tenseur contrainte sont antisymétriques par rapport au centre de la cellule de base, ce qui justifie que la moyenne de ce tenseur est nulle.

3.7 Quelques exemples de validation

3.7.1 Nous avons calculé les modules de rigidités équivalents pour le cas de deux poutres constituées par le même matériau mais ayant des surfaces différentes et le cas de deux poutres ayant même quantité de matière mais distribuée différemment dans les deux poutres. Dans le premier cas il est évident que les modules de rigidités équivalents en traction-compression et en flexion de la poutre qui a le moins de matière et donc la surface la plus petite sont inférieurs à ceux de l'autre. Pour vérifier cela nous avons calculé les modules de rigidités équivalents d'une poutre ondulée épaisse de surface S_1 Fig.16 et d'une poutre ondulée de surface S_2 inférieur à S_1 Fig.17.

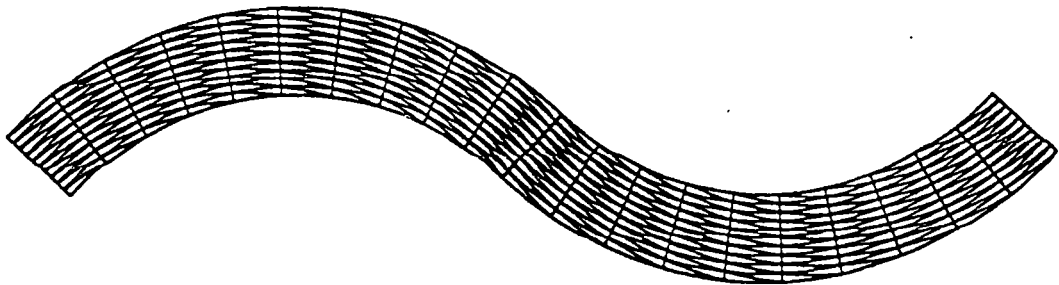


Fig.16 : Cellule de base d'une poutre ondulée de surface S_1 .

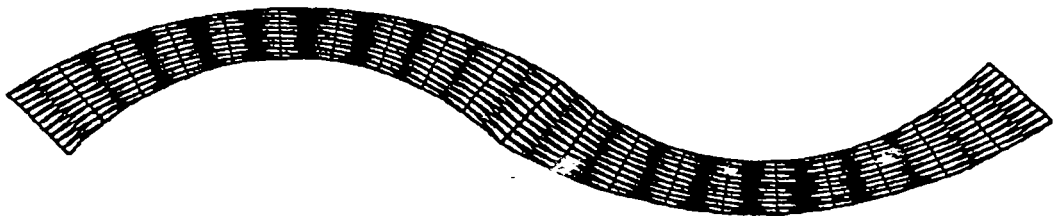


Fig.17 : Cellule de base d'une poutre ondulée de surface S_2 inférieur à S_1 .

Le matériau constitutif des deux poutres est élastique isotrope de module de Young $E = 200000$ MP. On note par R^S , R^T , R^F respectivement le rapport des deux surfaces $\frac{S_1}{S_2}$, le rapport des modules de rigidités équivalents en

traction-compression des deux poutres $\frac{(EA)_{\acute{e}q}(S_1)}{(EA)_{\acute{e}q}(S_2)}$ et le rapport de leurs

modules de rigidités équivalents en flexion $\frac{(EI)_{\acute{e}q}(S_1)}{(EI)_{\acute{e}q}(S_2)}$. Les résultats trouvés

sont regroupés dans les tableaux suivants :

$(EA)_{\acute{e}q}(S_1)$	$(EA)_{\acute{e}q}(S_2)$	R^S	R^T
1745.66	686.48	1.436	2.543

$(EI)_{\acute{e}q}(S_1)$	$(EI)_{\acute{e}q}(S_2)$	R^S	R^F
14.11	4.81	1.436	2.93

Ces deux tableaux montrent bien que la poutre qui a le plus de matière (surface S_1) a les modules de rigidités les plus élevés.

La poutre de surface S_2 a une épaisseur variable et donc une distribution non uniforme de la quantité de matière le long de la poutre. Nous considérons maintenant une poutre ondulée de surface S_2 et d'épaisseur constante **Fig.18** donc de distribution uniforme de la matière.



Fig.18 : Cellule de base d'une poutre ondulée de surface S_2 et d'épaisseur constante.

On calcule ses rigidités équivalentes en traction-compression et en flexion qu'on rapporte à celles de la poutre précédente de surface S2 Fig.17. On trouve alors les résultats suivants :

$(EA)_{\acute{e}q}$	$(EI)_{\acute{e}q}$	R^T	R^F
743.68	5.38	1.1	1.12

On remarque que la poutre ayant une distribution uniforme de la quantité de matière (épaisseur constante) Fig.18 est plus rigide que celle qui présente une distribution non uniforme de la quantité de matière Fig.17, mais l'écart de 10% semble assez faible compte tenu du changement de forme imposé à la cellule de base.

3.7.2 Calcul des rigidités équivalentes en traction-compression et en flexion d'un treillis en carré.

Dans un travail antérieur, qui consiste à étudier les vibrations globales d'un treillis en carré, C. Gardin [15] avait déterminé une expression analytique des modules de rigidités équivalents en traction-compression et en flexion d'un treillis en carré. Le treillis Fig.19 est constitué par un matériau élastique isotrope de module de Young E, I et A sont respectivement l'inertie et la section d'une barre du treillis. On note par N_c le nombre de cellules qui constituent le treillis. Les modules de rigidités équivalents en traction-compression et en flexion s'écrivent alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} (EI)_{\acute{e}q} = 2EI + EA \frac{L^2}{2N_c^2} \\ (EA)_{\acute{e}q} = 2EA \end{cases} \quad (\text{C. Gardin [15]})$$

Avec : $\frac{L}{N_c} = p$

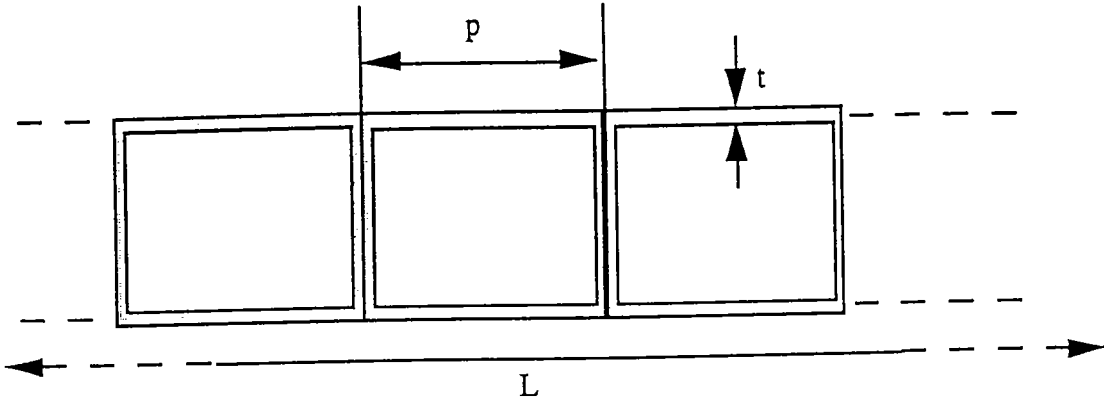


Fig.19 : Treillis en carrée.

De notre côté nous avons fait un calcul de ces coefficients avec l'approche bidimensionnelle en faisant la résolution numérique des problèmes P1 et P2 dans le cas où la cellule de base a la forme d'un carré Fig.19. L'élanement p/t étant pris égal à 50.5. Le module de Young E du matériau constitutif de la structure est égal à 200000 MP. les résultats trouvés sont regroupés dans les tableaux suivants :

$(EI)_{\acute{e}q}$ (1)	$(EI)_{\acute{e}q}$ (2)	Écart en %
0.2601	0.2604	0.13

$(EA)_{\acute{e}q}$ (1)	$(EA)_{\acute{e}q}$ (2)	Écart en %
400.0	400.65	0.16

(1) calculé par la formule de C. Gardin [15].

(2) calculé par l'approche 2-D.

Ces tableaux montrent bien la bonne concordance entre les résultats analytiques et les résultats numériques à un pourcentage d'erreur très faible soit 0.13% pour la flexion et 0.16% pour la traction-compression.

3.8 Conclusion

À partir d'une méthode asymptotique classique en homogénéisation, nous avons montré que le modèle homogénéisé d'une poutre ondulée, d'épaisseur comparable au pas des ondulations, est celui d'une poutre droite satisfaisant les équations du modèle de Bernoulli. La détermination des modules de rigidités de ce modèle, liés aux rigidités équivalentes cherchées, a nécessité la résolution de deux problèmes linéaires d'élasticité plane posés sur une cellule de base, qui ont été résolus par éléments finis.

MODÉLISATION ASYMPTOTIQUE D'UNE PLAQUE ONDULÉE **D'ÉPAISSEUR COMPARABLE AU PAS DES ONDULATIONS**

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier le comportement de la solution *tridimensionnelle* d'un problème élastique de plaque ondulée lorsque *l'épaisseur* de celle-ci, qui est du *même ordre de grandeur que le pas des ondulations* et que leurs profondeurs, devient petite devant la longueur de la plaque. Nous nous plaçons dans le cadre de l'élasticité linéaire et on utilisera comme précédemment la technique des développements asymptotiques. Il s'agit donc d'étudier le comportement de cette plaque grâce à une approche asymptotique à deux échelles de variations, une échelle lente associée au plan moyen de la plaque et une échelle rapide associée à une ondulation. Le nombre d'ondulations N de la plaque étant assez grand, le petit paramètre de l'analyse asymptotique du problème η est défini comme précédemment : on le choisit de telle façon qu'il soit proportionnel soit à $1/N$ soit à l'épaisseur de la plaque. Le but escompté de cette étude est donc de trouver pour la structure en question un modèle équivalent de plaque plane (modèle bidimensionnel), de montrer qu'il est de type Love-Kirchoff et de déterminer sa matrice de rigidité équivalente.

4.2 Position du problème

On considère une plaque uniformément ondulée autour de l'axe Ox_1 , Fig.20, de longueur projetée sur cet axe égal à L et sa longueur projetée sur Ox_2 est l . Nous désignons par p^n et H^n le pas des ondulations et leur profondeur respectivement. Le matériau constitutif de la plaque est élastique linéaire isotrope. On se propose de caractériser le comportement d'une telle structure lorsque son épaisseur, la période des ondulations et leur profondeur deviennent simultanément très petites devant L .

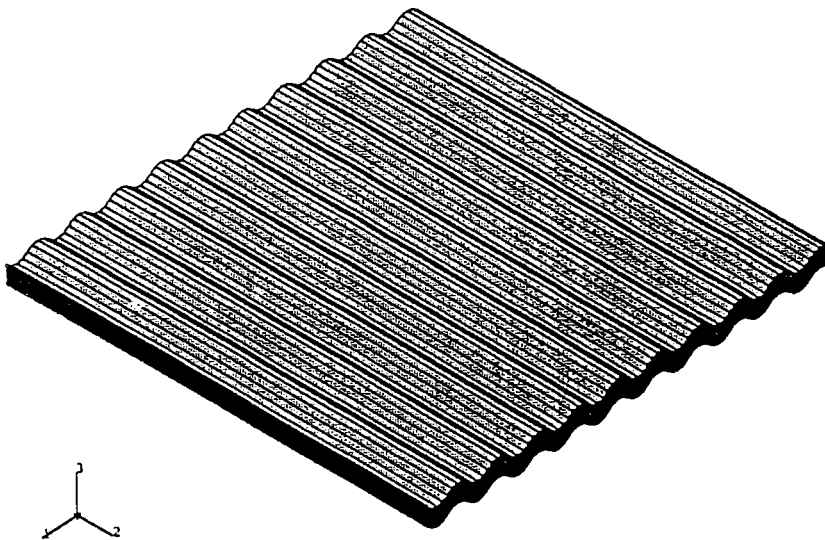


Fig.20 : Plaque ondulée .

Équations du problème tridimensionnel de départ

Nous désignons par $u_i^n(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ les composantes du champ de déplacements des points de coordonnées (x_1, x_2, x_3) de la plaque. Les composantes du champ de contrainte seront notées par :

$$\sigma_{ij}^n(x_1, x_2, x_3), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Nous supposons que le champ de contrainte est symétrique soit :

$$\sigma_{ij}^\eta = \sigma_{ji}^\eta \quad i, j = 1, 2, 3$$

Les forces appliquées seront de type volumique de composantes :

$$f_i^\eta(x_1, x_2, x_3) \quad i = 1, 2, 3$$

On définit le champ de déformation linéarisé associé au champ de déplacement U^η de composantes (u_i^η) par :

$$\varepsilon_{ij}^\eta(U^\eta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\eta}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\eta}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

Sur les surfaces ondulées de la plaque, on suppose que le vecteur contrainte est nul soit :

$$\sigma_{ij}^\eta n_j = 0 \quad \text{où } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 1, 3$$

où $n = n_j e_j$ est le vecteur normal extérieur au volume occupé par la plaque. On désigne par A le tenseur des modules d'élasticité du matériau constitutif de la plaque. Les équations gouvernant *l'équilibre* et *le comportement* de la structure sont :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^\eta(x) + f^\eta(x) = 0 & (1) \\ \sigma^\eta(x) = A : \varepsilon^\eta(U^\eta(x)) & (2) \end{cases}$$

Le vecteur déplacement $U^\eta(x)$ s'écrit dans la base (e_1, e_2, e_3) comme suit :

$$U^\eta(\mathbf{x}) = u^\eta_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + u^\eta_2(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + w^\eta(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 \tag{3}$$

Le problème consiste à trouver un champ de déplacements et un champ de contrainte satisfaisant simultanément l'équation de bord libre, l'équation d'équilibre (1) et l'équation de comportement (2) lorsque l'épaisseur de la plaque, la longueur d'une ondulation et sa profondeur deviennent très petites.

4.3 Analyse asymptotique

Le but de cette étude est de trouver le modèle bidimensionnel de plaque droite équivalente à la plaque ondulée ci-dessus Fig.20, autrement dit un modèle où les inconnues peuvent s'exprimer à l'aide de variables définies uniquement sur la surface moyenne de la plaque. Pour ce faire nous allons appliquer une méthode asymptotique à deux échelles de variations. Les variations macroscopiques seront caractérisées par les deux variables x_1 et x_2 relatives aux axes du plan moyen de la plaque. Comme il est habituel en théorie des plaques et des coques, un indice grec α, β , etc.. ne peut prendre que les valeurs 1 et 2. Les variations rapides sont prises en compte par les deux variables $y_1 = x_1/\eta$ et $y_3 = x_3/\eta$. La cellule de base Fig.21 est décrite par les variables microscopiques (y_1, y_3). Pour simplifier la discussion, on supposera que la cellule de base Y a un centre de symétrie (le point O de la figure 21).

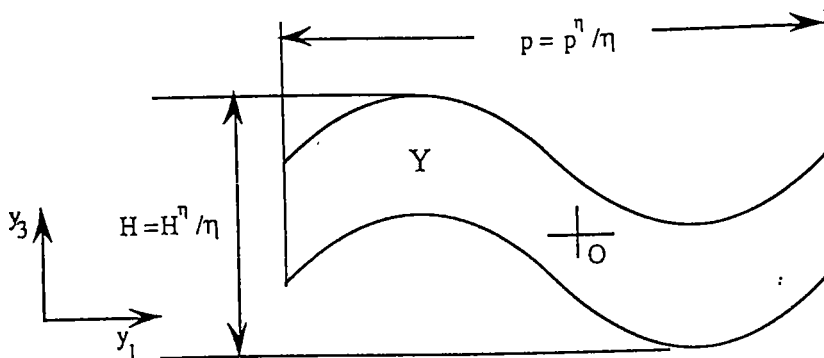


Fig.21 : Cellule de base.

Nous attribuons aux différentes grandeurs intervenant dans les équations (1), (2) et (3) les développements asymptotiques suivants qui sont sous une forme analogue à celles utilisées aux chapitres précédents :

$$\sigma^\eta(\mathbf{x}) = \sigma^0(x_1, x_2, y_1, y_3) + \eta \sigma^1(x_1, x_2, y_1, y_3) + \dots \quad (4)$$

$$u_1^\eta(\mathbf{x}) = u_1^0(x_1, x_2, y_1, y_3) + \eta u_1^1(x_1, x_2, y_1, y_3) + \dots \quad (5)$$

$$u_2^\eta(\mathbf{x}) = u_2^0(x_1, x_2, y_1, y_3) + \eta u_2^1(x_1, x_2, y_1, y_3) + \dots \quad (6)$$

$$w^\eta(\mathbf{x}) = \eta^{-1} w^{-1}(x_1, x_2, y_1, y_3) + w^0(x_1, x_2, y_1, y_3) + \eta w^1(x_1, x_2, y_1, y_3) + \dots \quad (7)$$

$$f_1^\eta(\mathbf{x}) = f_1^0(x_1, x_2, y_1, y_3) \quad (8)$$

$$f_2^\eta(\mathbf{x}) = f_2^0(x_1, x_2, y_1, y_3) \quad (9)$$

$$f_3^\eta(\mathbf{x}) = \eta f_3^1(x_1, x_2, y_1, y_3) \quad (10)$$

La géométrie de la structure est bien sûr périodique. Nous supposons que les différents termes de ces développements sont des fonctions périodiques de la variable microscopique y_1 . La suite des calculs est classique en homogénéisation et consiste à reporter ces développements dans les équations (1) et (2) en tenant compte de la relation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial y_3} \end{cases} \quad (11)$$

Ensuite on identifie dans les équations qui en ressortent les termes de même puissances en η , ce qui conduit à de nouvelles équations auxquelles on applique l'opérateur moyenne qu'on définit par :

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{mes(Y)} \iint_Y (\cdot) dy_1 dy_3$$

où $mes(Y)$ est cette fois-ci la mesure de la surface ondulée de la cellule de base qu'on note par Y .

Nous obtiendrons par la suite les efforts macroscopiques. Enfin nous montrerons que les champs de contraintes généralisées macroscopiques satisfont les équations du modèle de plaque droite.

4.4 Modèle homogénéisé

4.4.1 Équations d'équilibre macroscopiques

Nous reportons le développement (4) du champ de contrainte et les expressions (8), (9) et (10) des efforts volumiques dans l'équation d'équilibre (1) en tenant compte de (11). Ensuite nous identifions les différents termes de même puissances en η et nous obtenons :

A l'ordre -1

$$div_y \sigma^0 = 0 \quad (12)$$

A l'ordre 0

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^1}{\partial y_i} + \frac{\partial \sigma_{\alpha \beta}^0}{\partial x_\beta} + f_\alpha^0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{i3}^1}{\partial y_i} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}^0}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\alpha i}^1}{\partial y_i} + \frac{\partial \sigma_{\alpha \beta}^0}{\partial x_\beta} + f_\alpha^0 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{i3}^1}{\partial y_i} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}^0}{\partial x_\alpha} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

On applique l'opérateur moyenne aux équations (13) et (14) en tenant compte des conditions aux limites et de périodicité, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle}{\partial x_\beta} + \langle f_\alpha^0 \rangle = 0 \end{array} \right. \quad (15-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle \sigma_{\beta 3}^0 \rangle}{\partial x_\beta} = 0 \end{array} \right. \quad (15-2)$$

Avec les conditions d'anti-périodicité de $\sigma^0 \cdot n$ et de surfaces libres, on montre facilement que $\langle \sigma_{i3}^0 \rangle = 0$ et $\langle y_3 \sigma_{i3}^0 \rangle = 0$ (Annexe2).

En faisant la même analyse que dans le chapitre III, on définit les contraintes macroscopiques de membrane par :

$$N_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle \quad (16)$$

et on définit les efforts surfaciques macroscopiques par :

$$f_\alpha(x_1, x_2) = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \langle f_\alpha^0 \rangle$$

L'équation (15-1) permet d'écrire :

$$\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha = 0 \quad (17)$$

A l'ordre 1

$$\frac{\partial \sigma_{3i}^2}{\partial y_i} + \frac{\partial \sigma_{\alpha 3}^1}{\partial x_\alpha} + f_3^1 = 0 \quad \text{Avec } i = 1, 3$$

On applique l'opérateur moyenne à cette équation et on obtient :

$$\frac{\partial \langle \sigma_{\alpha 3}^I \rangle}{\partial x_\alpha} + \langle f_3^I \rangle = 0$$

On définit l'effort macroscopique de cisaillement par :

$$Q_\alpha(x_1, x_2) = \eta^2 \frac{mes(Y)}{P} \langle \sigma_{\alpha 3}^I \rangle \quad (18)$$

et on pose :

$$f_3(x_1, x_2) = \eta^2 \frac{mes(Y)}{P} \langle f_3^I \rangle$$

On trouve que Q_α vérifie l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + f_3 = 0 \quad (19)$$

Maintenant, si on multiplie l'équation (13) par y_3 et on y applique l'opérateur moyenne, on trouve alors :

$$\frac{\partial \langle y_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle}{\partial x_\alpha} - \langle \sigma_{\beta 3}^I \rangle + \langle y_3 f_\beta^0 \rangle = 0$$

La contrainte généralisée macroscopique en flexion est définie par :

$$M_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \eta^2 \frac{mes(Y)}{P} \langle -y_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle \quad (20)$$

Posons :

$$m_\alpha(x_1, x_2) = \eta^2 \frac{\text{mes}(Y)}{P} \langle -\gamma_3 f_\alpha^0 \rangle$$

Les contraintes généralisées macroscopiques en flexion vérifient donc l'équation d'équilibre suivante :

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} + Q_\beta + m_\beta = 0 \quad (21)$$

Les équations (17), (19) et (21) sont bien les équations d'équilibre d'une plaque plane.

4.4.2 Traitement de la loi de comportement

Compte tenu du développement du champ de déplacement (5), (6) et (7) le champ de déformation se développe de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^\eta &= \eta^{-1} \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial y_1} \right) + \eta \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^2}{\partial y_1} \right) + \dots \\
 \varepsilon_{22}^\eta &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \eta \frac{\partial u_2^1}{\partial x_2} + \dots \\
 \varepsilon_{33}^\eta &= \eta^{-2} \frac{\partial w^{-1}}{\partial y_3} + \eta^{-1} \frac{\partial w^0}{\partial y_3} + \frac{\partial w^1}{\partial y_3} + \eta \frac{\partial w^2}{\partial y_3} + \dots \\
 2\varepsilon_{12}^\eta &= \eta^{-1} \frac{\partial u_2^0}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^1}{\partial y_1} \right) + \\
 &\quad \eta \left(\frac{\partial u_2^1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y_1} \right) + \dots \\
 2\varepsilon_{13}^\eta &= \eta^{-2} \frac{\partial w^{-1}}{\partial y_1} + \eta^{-1} \left(\frac{\partial w^{-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w^0}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1^0}{\partial y_3} \right) + \\
 &\quad \left(\frac{\partial w^0}{\partial x_1} + \frac{\partial w^1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1^1}{\partial y_3} \right) + \eta \left(\frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1^2}{\partial y_3} \right) + \dots \\
 2\varepsilon_{23}^\eta &= \eta^{-1} \left(\frac{\partial w^{-1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial y_3} \right) + \left(\frac{\partial w^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^1}{\partial y_3} \right) + \eta \left(\frac{\partial w^1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y_3} \right) + \dots
 \end{aligned} \right.$$

On introduit ce développement ainsi que celui du champ de contrainte (4) dans la loi de comportement (2). Ensuite on identifie tous les termes de mêmes puissance en η . On obtient aux premiers ordres les résultats suivants :

À l'ordre -2

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial w^{-1}}{\partial y_3} &= 0 \\
 \frac{\partial w^{-1}}{\partial y_1} &= 0
 \end{aligned} \right. \Rightarrow w^{-1} = w^{-1}(x_1, x_2)$$

À l'ordre -1:

On obtient d'une part le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \nu) \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} + \nu \frac{\partial w^0}{\partial y_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} + \frac{\partial w^0}{\partial y_3} = 0 \\ \nu \frac{\partial u_1^0}{\partial y_1} + (1 - \nu) \frac{\partial w^0}{\partial y_3} = 0 \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y_3} + \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial w^0}{\partial y_1} = 0 \end{array} \right.$$

Pour satisfaire ce système d'équations, u_1^0 et w^0 doivent s'écrire sous la forme suivante, où apparaissent des fonctions définies sur le plan moyen qui sont la flèche à l'ordre -1, des composantes du déplacement des points du plan moyen $u_1^M(x_1, x_2)$ et $w^M(x_1, x_2)$ et aussi une fonction $k(x_1, x_2)$ qui reste à préciser :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^0 = u_1^0(x_1, x_2, y_3) = k(x_1, x_2)y_3 + u_1^M(x_1, x_2) \\ w^0 = w^0(x_1, x_2, y_1) = -(k(x_1, x_2) + \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_1})y_1 + w^M(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

Comme toutes les composantes du champ de déplacement doivent être p-périodiques en y_1 , la fonction $k(x_1, x_2)$ se déduit de la flèche par une relation de type Love-Kirchoff :

$$k(x_1, x_2) = -\frac{\partial w^{-1}}{\partial x_1}$$

D'autre part on obtient aussi l'expression de la composante du champ de déplacement selon la direction 2 soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2^0}{\partial y_3} + \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial y_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2^0(x_1, x_2, y_3) = -y_3 \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_2} + u_2^M(x_1, x_2)$$

En récapitulant on trouve que le développement asymptotique du champ de déplacement s'écrit de la façon suivante :

$$U^\eta(\mathbf{x}) = \eta^{-1} w^{-1}(x_1, x_2) \mathbf{e}_3 + (u_\alpha^0(x_1, x_2, y_3) \mathbf{e}_\alpha + w^0(x_1, x_2) \mathbf{e}_3) + \dots$$

$$\text{où } u_\alpha^0(x_1, x_2, y_3) = -y_3 \frac{\partial w^{-1}}{\partial x_\alpha} + u_\alpha^M(x_1, x_2)$$

On remarque donc que le champ de déplacement $U^\eta(\mathbf{x})$ admet au premier ordre une *déflexion* $w^{-1}(x_1, x_2)$ et à l'ordre suivant un champ de déplacement horizontal de type *Love-Kirchoff*.

A l'ordre zéro:

A cet ordre la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma^0 = A : (\varepsilon_y(U^1) - \varepsilon^{res})$$

Comme dans le chapitre précédent, la déformation résiduelle fictive se décompose en un terme de membrane, un terme de cisaillement qui ne créera pas de contrainte et un terme de flexion :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{res} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}^M}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}^M}{\partial x_{\alpha}} \right) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial w^0}{\partial x_{\alpha}} (\delta_{i\alpha} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j\alpha}) \\ & + y_3 \frac{\partial^2 w^{-1}}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}} \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \end{aligned}$$

A ce stade de calcul, on se retrouve avec une formulation claire et simplifiée du problème local. En effet, il s'agit de résoudre un problème d'élasticité linéaire posé sur la cellule de base qui consiste à trouver (σ^0, U^1) solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y \sigma^0 = 0 \\ \sigma_{ij}^0 = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}^0 \\ \varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ijy}(U^1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{\alpha}^M}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial v_{\beta}^M}{\partial x_{\alpha}} \right) \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial w^0}{\partial x_{\alpha}} (\delta_{i\alpha} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j\alpha}) - y_3 \frac{\partial^2 w^{-1}}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}} \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} \\ \alpha, \beta = 1, 2 \text{ et } i, j, m, n = 1, 2, 3 \\ U^1 \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ \sigma^0 \cdot n \text{ est antipériodique en } y_1 \\ \sigma^0 \cdot n = 0 \text{ sur les surfaces libres} \end{array} \right.$$

4.4.3 Localisation

Le problème local ainsi posé admet une solution unique (σ^0, U^1) (modulo les translations). Cependant on peut remarquer qu'il se formule comme un problème

à déformation résiduelle ce qui facilitera sa résolution numérique. Cette dernière s'écrit comme combinaison linéaire :

- des déformations macroscopiques de membrane :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\alpha}^M}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}^M}{\partial x_{\alpha}} \right)$$

- des variations de courbures de la surface moyenne de la plaque :

$$\kappa_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{\partial^2 w^{-1}}{\partial x_{\beta} \partial x_{\alpha}}$$

- et des déformations macroscopiques de cisaillements :

$$\varepsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \frac{\partial w^0}{\partial x_{\alpha}}$$

La linéarité de ce problème nous permet d'écrire la solution en déplacement et en contrainte comme combinaison linéaire de $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha 3}$ et $\kappa_{\alpha\beta}^{-1}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) qui, sont indépendants des coordonnées microscopiques y_1 et y_3 , et qui peuvent être considérés à l'échelle microscopique comme des données du problème local. A cause de cette linéarité, il existe donc trois champs de vecteurs de localisation des déplacements $U^{\alpha\beta}(y)$, $V^{\alpha\beta}(y)$ et $U^{\alpha}(y)$ en sorte que la solution U^1 s'écrit sous la forme :

$$U^1(x_1, x_2, y_1, y_3) = U^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \varepsilon_{\alpha\beta} + U^{\alpha}(y_1, y_3) \varepsilon_{\alpha 3} + V^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \kappa_{\alpha\beta}^{-1} \quad (22)$$

ce qui permet d'écrire le champ de contrainte sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, y_1, y_3) &= s_{ij}^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \varepsilon_{\alpha\beta} + m_{ij}^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \kappa_{\alpha\beta}^{-1} \\ &+ \tau_{ij}^\alpha(y_1, y_3) \varepsilon_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (23)$$

Les tenseurs de localisation des contraintes sont reliés aux vecteurs de localisations des déplacements par des relations déduites de la loi de comportement :

$$\left\{ \begin{aligned} s_{ij}^{\alpha\beta} &= A_{ijmn} \frac{\partial u_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} + A_{ij\alpha\beta} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} m_{ij}^{\alpha\beta} &= A_{ijmn} \frac{\partial v_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} - y_3 A_{ij\alpha\beta} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_{ij}^\alpha &= A_{ijmn} \frac{\partial u_m^\alpha}{\partial y_n} + 2A_{ij\alpha 3} \end{aligned} \right. \quad (26)$$

où $i, j, m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 3$

Les relations (22) et (23) nous permettent de décomposer le problème local en une série de huit problèmes élastiques, posés sur la cellule de base **Fig.21**, trois pour la localisation en membrane, trois pour la localisation en flexion et deux pour la localisation en cisaillement. Il s'agit de problèmes intermédiaires entre l'élasticité bidimensionnelle et l'élasticité tridimensionnelle. Les champs sont définis sur la cellule de base bidimensionnelle, mais il y a trois composantes du champ de déplacement et six composantes du champ de contraintes comme inconnues. Lorsque le matériau est isotrope, on peut décomposer chacun de ces problèmes en un problème plan (déformations planes) et un problème antiplan.

Etude de la localisation en membrane.

D'après (12) et (24), les problèmes de localisation en membrane, $P^{\alpha\beta}$, consistent à trouver $(S^{\alpha\beta}, U^{\alpha\beta})$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y S^{\alpha\beta} = 0 \\ S_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ijmn} \frac{\partial u_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} + A_{ij\alpha\beta} \\ U^{\alpha\beta} \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ S^{\alpha\beta} \cdot n \text{ est antipériodique en } y_1 \\ S^{\alpha\beta} \cdot n = 0 \text{ sur les surfaces libres} \end{array} \right.$$

Pour un matériau isotrope il est possible de décomposer le problème de localisation en membrane en un problème plan (déformations planes) et un problème antiplan. Décomposons d'abord le déplacement selon le plan de la cellule de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^{\alpha\beta} = UP^{\alpha\beta} + u_2^{\alpha\beta} e_2 \\ UP^{\alpha\beta} = u_1^{\alpha\beta} e_1 + u_3^{\alpha\beta} e_3 \end{array} \right.$$

La décomposition analogue pour les contraintes introduit des contraintes $SP^{\alpha\beta}$ dans le plan de la cellule de base, des contraintes de cisaillement antiplan $SA^{\alpha\beta}$ et des contraintes normales $S_{22}^{\alpha\beta}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{\alpha\beta} = SP^{\alpha\beta} + SA^{\alpha\beta} + S_{22}^{\alpha\beta} e_2 \otimes e_2 \\ SP^{\alpha\beta} = SP_{11}^{\alpha\beta} e_1 \otimes e_1 + SP_{33}^{\alpha\beta} e_3 \otimes e_3 + SP_{13}^{\alpha\beta} (e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) \\ SA^{\alpha\beta} = SA_{12}^{\alpha\beta} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + SA_{32}^{\alpha\beta} (e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3) \end{array} \right.$$

La première étape consiste à résoudre le problème plan (déformations planes) qui est défini dans le plan (y_1, y_3) et qui permettra de définir le déplacement plan, les contraintes planes et les contraintes normales $S_{22}^{\alpha\beta}$, il se formule de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y SP^{\alpha\beta} = 0 \\ SP_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ijmn} \frac{\partial u_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} + A_{ij\alpha\beta} \text{ avec } i, j, m \text{ et } n = 1, 3 \\ S_{22}^{\alpha\beta} = E \delta_{2\alpha} \delta_{2\beta} + \nu (SP_{11}^{\alpha\beta} + SP_{33}^{\alpha\beta}) \\ UP^{\alpha\beta} \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ SP^{\alpha\beta} \cdot n \text{ est antipériodique en } y_1 \\ SP^{\alpha\beta} \cdot n = 0 \text{ sur les bords libres} \end{array} \right. \quad (\text{SP})$$

La deuxième étape consiste à déterminer $u_2^{\alpha\beta}$ solution du problème antiplan suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_2^{\alpha\beta}(y_1, y_3) = 0 \\ u_2^{\alpha\beta} \text{ } P\text{-périodique en } y_1. \\ \frac{\partial u_2^{\alpha\beta}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial u_2^{\alpha\beta}}{\partial y_3} n_3 = -(\delta_{1\alpha} \delta_{2\beta} + \delta_{2\alpha} \delta_{1\beta}) n_1 \text{ sur les bords libres.} \end{array} \right.$$

Etude de la localisation en flexion

Les problèmes de localisation des effets de flexion consistent à trouver $(m^{\alpha\beta}, V^{\alpha\beta})$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y m^{\alpha\beta} = 0 \\ m_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ijmn} \frac{\partial v_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} - y_3 A_{ij\alpha\beta} \\ V^{\alpha\beta} \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ m^{\alpha\beta} \cdot n \text{ est antipériodique en } y_1 \\ m^{\alpha\beta} \cdot n = 0 \text{ sur les bords ondulés} \end{array} \right.$$

En faisant la même remarque que précédemment, les trois étapes sont identiques à celles du problème en $S^{\alpha\beta}$ sauf que la déformation résiduelle fictive dans ce cas est linéaire en y_3 . En effet, on décompose le déplacement selon le plan de la cellule et les contraintes de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^{\alpha\beta} = VP^{\alpha\beta} + v_2^{\alpha\beta} e_2 \\ VP^{\alpha\beta} = v_1^{\alpha\beta} e_1 + v_3^{\alpha\beta} e_3 \end{array} \right.$$

et

$$\begin{cases} m^{\alpha\beta} = mP^{\alpha\beta} + mA^{\alpha\beta} + m_{22}^{\alpha\beta} e_2 \otimes e_2 \\ mP^{\alpha\beta} = mP_{11}^{\alpha\beta} e_1 \otimes e_1 + mP_{33}^{\alpha\beta} e_3 \otimes e_3 + mP_{13}^{\alpha\beta} (e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1) \\ mA^{\alpha\beta} = mA_{12}^{\alpha\beta} (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + mA_{32}^{\alpha\beta} (e_3 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3) \end{cases}$$

Le problème plan (déformations planes) se formule comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y mP^{\alpha\beta} = 0 \\ mP_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ijmn} \frac{\partial v_p^{\alpha\beta}}{\partial y_n} - y_3 A_{ij\alpha\beta} \text{ avec } i, j, m \text{ et } n = 1, 3 \\ m_{22}^{\alpha\beta} = -E y_3 \delta_{2\alpha} \delta_{2\beta} + v (mP_{11}^{\alpha\beta} + mP_{33}^{\alpha\beta}) \\ VP^{\alpha\beta} \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ mP^{\alpha\beta} \cdot n \text{ est antipériodique en } y_1 \\ mP^{\alpha\beta} \cdot n = 0 \text{ sur les bords libres} \end{cases} \quad (\text{mP})$$

Le problème antiplan permet de déterminer $v_2^{\alpha\beta}$ tel que :

$$\begin{cases} \Delta v_2^{\alpha\beta} (y_1, y_3) = 0 \\ v_2^{\alpha\beta} \text{ } P\text{-périodique en } y_1. \\ \frac{\partial v_2^{\alpha\beta}}{\partial y_1} n_1 + \frac{\partial v_2^{\alpha\beta}}{\partial y_3} n_3 = y_3 (\delta_{1\alpha} \delta_{2\beta} + \delta_{2\alpha} \delta_{1\beta}) n_1 \text{ sur les bords libres.} \end{cases}$$

Etude de la localisation en cisaillement

Les deux derniers problèmes sont des problèmes en cisaillement. Ils se formulent ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y \tau^\alpha = 0 \\ \tau_{ij}^\alpha = A_{ijmn} \frac{\partial u_m^\alpha}{\partial y_n} + 2A_{ij\alpha 3} \\ U^\alpha \text{ } p\text{-périodique en } y_1 \\ \tau^\alpha \cdot n \text{ est antipériodique} \\ \tau^\alpha \cdot n = 0 \text{ sur les surfaces ondulées} \end{array} \right.$$

Les problèmes en τ^α ressemblent au problème P_3 du chapitre précédent et ont donc une solution en contrainte exactement nulle.

4.4.4 Lois de comportement macroscopiques

On applique l'opérateur moyenne à l'équation de localisation des contraintes (23). On se ramène à l'équation macroscopique suivante :

$$\langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle = \langle S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle \varepsilon_{\gamma\delta} + \langle m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle \kappa_{\gamma\delta}^{-1} \quad (28)$$

En faisant de même mais en multipliant cette fois-ci l'équation (23) par y_3 , on trouve alors :

$$\langle y_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle = \langle y_3 S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle \varepsilon_{\gamma\delta} + \langle y_3 m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle \kappa_{\gamma\delta}^{-1} \quad (29)$$

La périodicité des champs de déplacement et de contrainte ainsi que la symétrie de la cellule de base montrent qu'il y a découplage entre les effets de membranes et de flexion soit (Annexe 2):

$$\begin{cases} \langle m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle = 0 \\ \langle y_3 S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle = 0 \end{cases}$$

Remarque:

D'après la propriété d'isotropie du tenseur de raideur A , les quantités A_{1112} , A_{3312} et A_{1312} sont nulles. En conséquence le problème plan (SP) d'inconnues SP^{12} et UP^{12} correspond à des données nulles. La solution est donc nulle.

Ceci permet de conclure que:

$$SP^{12} = 0, \text{ donc } S_{11}^{12} = S_{22}^{12} = S_{33}^{12} = S_{13}^{12} = 0$$

De même pour le problème plan (mP) en (m^{12}, V^{12}) soit:

$$m_{11}^{12} = m_{22}^{12} = m_{33}^{12} = m_{13}^{12} = 0$$

Pour se ramener à l'échelle physique ou réelle, on pose :

$$w(x_1, x_2) = \eta^{-1} w^{-1}(x_1, x_2) \Rightarrow \kappa_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \eta^{-1} \kappa_{\alpha\beta}^{-1}(x_1, x_2)$$

Ainsi en utilisant la définition des contraintes de membrane et de flexion macroscopiques (16) et (20), on obtient les lois de comportement macroscopiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta} = \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left(\langle s_{\alpha\beta}^{11}(y_1, y_3) \rangle \varepsilon_{11} + \langle s_{\alpha\beta}^{22}(y_1, y_3) \rangle \varepsilon_{22} + \right. \\ \left. \langle s_{\alpha\beta}^{12}(y_1, y_3) \rangle \varepsilon_{12} \right) \quad (30) \\ \\ M_{\alpha\beta} = -\eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left(\langle y_3 m_{\alpha\beta}^{11}(y_1, y_3) \rangle \kappa_{11} + \langle y_3 m_{\alpha\beta}^{22}(y_1, y_3) \rangle \kappa_{22} + \right. \\ \left. \langle y_3 m_{\alpha\beta}^{12}(y_1, y_3) \rangle \kappa_{12} \right) \quad (31) \end{array} \right.$$

Une conséquence du résultat précédent :

$$\langle \sigma_{i3}^0 \rangle = \langle y_3 \sigma_{i3}^0 \rangle = 0$$

est que :

$$\langle S_{i3}^{\alpha\beta} \rangle = \langle y_3 m_{i3}^{\alpha\beta} \rangle = 0$$

La loi de comportement généralisée macroscopique en membrane s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left((\langle \varepsilon_{11}(U^{11}) \rangle + 1) \varepsilon_{11} + \right. \\ \left. (\langle \varepsilon_{11}(U^{22}) \rangle + \nu) \varepsilon_{22} \right) \\ \\ N_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left(\nu (\langle \varepsilon_{11}(U^{11}) \rangle + 1) \varepsilon_{11} + \right. \\ \left. (\nu \langle \varepsilon_{11}(U^{22}) \rangle + 1) \varepsilon_{22} \right) \\ \\ N_{12} = \frac{E}{1 + \nu} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left(\langle \varepsilon_{12}(U^{12}) \rangle + 1/2 \right) \varepsilon_{12} \end{array} \right.$$

En flexion cette loi s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} M_{11} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left((\langle y_3 \varepsilon_{11}(V^{11}) \rangle - \langle y_3^2 \rangle) \kappa_{11} + \right. \\ &\quad \left. (\langle y_3 \varepsilon_{11}(V^{22}) \rangle - \nu \langle y_3^2 \rangle) \kappa_{22} \right) \\ M_{22} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} \left(\nu (\langle y_3 \varepsilon_{11}(V^{11}) \rangle - \langle y_3^2 \rangle) \kappa_{11} + \right. \\ &\quad \left. (\nu \langle y_3 \varepsilon_{11}(V^{22}) \rangle - \langle y_3^2 \rangle) \kappa_{22} \right) \\ M_{12} &= -\frac{E}{1+\nu} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle y_3 \varepsilon_{12}(V^{12}) \rangle - \langle y_3^2 \rangle) \kappa_{12} \end{aligned} \right.$$

4.4.5 Coefficients d'élasticité homogénéisés

Des lois de comportements macroscopiques (30) et (31), on déduit les coefficients de rigidités équivalents de la plaque. Par un raisonnement simple utilisant la périodicité en y_1 et le fait que le vecteur contrainte est nul sur les surfaces ondulées, on montre que la matrice de rigidité équivalente est symétrique soit (Annexe2) :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle s_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle &= \langle s_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \rangle \\ \langle y_3 m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(y_1, y_3) \rangle &= \langle y_3 m_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}(y_1, y_3) \rangle \end{aligned} \right.$$

On remarque donc que le matériau équivalent est élastique orthotrope. Sous forme matricielle la loi de comportement en membrane du matériau équivalent s'écrit :

$$\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle \varepsilon_{11}(U^{11}) \rangle + 1) \\ C_{12} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle \varepsilon_{11}(U^{22}) \rangle + \nu) \\ C_{21} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} \nu (\langle \varepsilon_{11}(U^{11}) \rangle + 1) \\ C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\nu \langle \varepsilon_{11}(U^{22}) \rangle + 1) \\ C_{33} = \frac{E}{1 + \nu} \eta \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\nu \langle \varepsilon_{12}(U^{12}) \rangle + 1/2) \end{cases}$$

En flexion elle s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle -y_3 \varepsilon_{11}(V^{11}) \rangle + \langle y_3^2 \rangle) \\ D_{12} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle -y_3 \varepsilon_{11}(V^{22}) \rangle + \nu \langle y_3^2 \rangle) \\ D_{21} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} \nu (\langle -y_3 \varepsilon_{11}(V^{11}) \rangle + \langle y_3^2 \rangle) \\ D_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\nu \langle -y_3 \varepsilon_{11}(V^{22}) \rangle + \langle y_3^2 \rangle) \\ D_{33} = \frac{E}{1 + \nu} \eta^3 \frac{\text{mes}(Y)}{P} (\langle -y_3 \varepsilon_{12}(V^{12}) \rangle + \langle y_3^2 \rangle) \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{cases} C_{21} = \nu C_{11} \\ D_{21} = \nu D_{11} \end{cases}$$

4.5 Récapitulatif

Par une méthode d'homogénéisation asymptotique on a réussi à réduire un problème tridimensionnel posé sur une plaque ondulée en un problème bidimensionnel posé sur le plan moyen d'une plaque équivalente à la plaque ondulée. Ce dernier problème consiste à trouver $u_\alpha^M(x_1, x_2)$, $w(x_1, x_2)$, $N_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$, $M_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ et $Q_\alpha(x_1, x_2)$ vérifiant les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha = 0 \end{array} \right. \quad P. 88$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha} + f_3 = 0 \end{array} \right. \quad P. 89$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + Q_\alpha + m_\alpha = 0 \end{array} \right. \quad P. 90$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{N\} = [C]\{\varepsilon\} \end{array} \right. \quad P. 104$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{M\} = [D]\{\kappa\} \end{array} \right. \quad P. 105$$

Conditions aux limites.

4.6 Calculs numériques des matrices de rigidité équivalente en membrane et en flexion. Proposition de formules approchées.

Dans ce paragraphe, nous allons effectuer le calcul numérique des coefficients de la matrice de rigidité équivalente d'une plaque ondulée. Le matériau constitutif de la plaque est élastique isotrope de module de Young E égal à $2 \cdot 10^5$ MP et de coefficient de Poisson ν égal à 0.3. La plaque est d'épaisseur t constante et d'angle d'inclinaison Θ . Sur la Fig.22 on a tracé la projection de la structure dans le plan de l'ondulation. Une ondulation est en fait constituée par des arcs de cercles concentriques et symétriques par rapport au centre de l'ondulation. Dans ce paragraphe l'angle Θ est pris égal à $\pi / 4$. Les résultats trouvés seront comparés à d'autres résultats analytiques ou empiriques concernant les plaques ondulées d'épaisseur très petite devant le pas des ondulations. Dans cette application numérique nous avons choisi η égale à 0.1. Dans ce paragraphe nous n'allons pas faire le calcul numériques des coefficients de rigidités C_{33} et D_{33} .

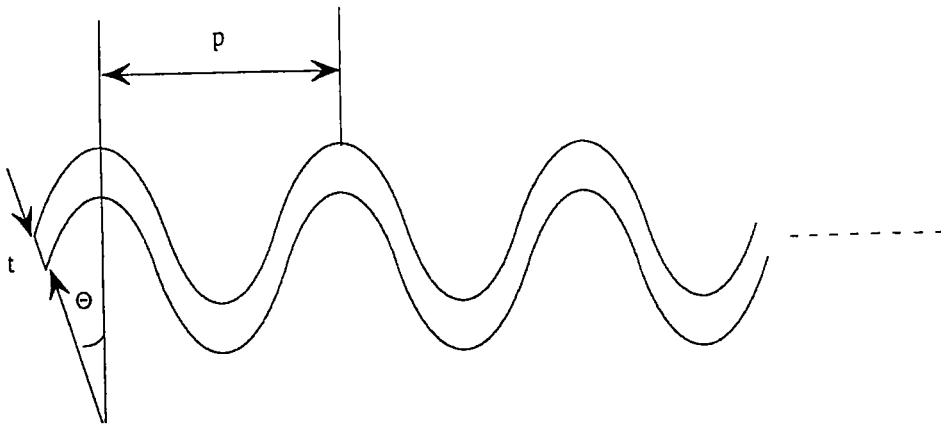


Fig.22

4.6.1 Calcul des rigidité en membrane C_{11} , C_{12} , C_{21} et C_{22}

Après résolution numérique du problème en (SP^{11}, UP^{11}) on trouve à partir de la loi de comportement que :

$$S_{22}^{11} = \nu(SP_{11}^{11} + SP_{33}^{11})$$

ce qui permet donc de calculer C_{12} . Ensuite la résolution du problème en (SP^{22}, UP^{22}) permet de calculer C_{21} . Les résultats numériques sont regroupés dans le tableau suivant :

$p/2t$	126.41	63.91	54.04	26.414
C_{11}	0.185	1.4597	2.424	21.733
$\eta \langle SP_{33}^{11} \rangle$	$2.376 \cdot 10^{-5}$	$1.49 \cdot 10^{-5}$	$5.02 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$
C_{12}	0.0556	0.437	0.7273	6.52
C_{21}	0.0556	0.437	0.72728	6.5199
C_{12}/C_{11}	0.3	0.3	0.3	0.3

On remarque donc que C_{12} et C_{21} sont identiques et que le rapport C_{12}/C_{11} est pratiquement constant. De ce fait on retrouve que le coefficient de Poisson "effectif" du matériau équivalent qui est défini comme étant le rapport entre la rigidité équivalente en membrane dans la direction 12 C_{12} et celle dans la direction 11 C_{11} est le même que celui du matériau constitutif de la plaque ondulée :

$$\frac{C_{12}}{C_{11}} = \nu^{eff} \approx \nu$$

La résolution du problème en (SP^{22}, UP^{22}) permet aussi de calculer C_{22} en effet :

$$S_{22}^{22} = E + \nu(SP_{11}^{22} + SP_{33}^{22})$$

Comme la plaque ne présente pas d'ondulations dans la direction de l'axe Ox_2 , on devine que la rigidité de membrane dans ce sens est voisine de celle d'une plaque droite. En faisant varier l'épaisseur t de la plaque on a fait le calcul de C_{22} et on l'a rapporté à la rigidité membranaire dans la direction 22 d'une plaque droite de même épaisseur soit :

$$C_{22}^d = \frac{E t}{1 - \nu^2} \quad t \text{ est l'épaisseur de la plaque.}$$

On désigne par R le rapport entre les deux rigidités. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

$p/2t$	126.41	63.91	54.04	26.414
C_{22}	886.12	1767.33	2096.66	4384.46
C_{22}^d	879.12	1758.24	2087.91	4395.6
R	1.0079	1.0051	1.0041	0.99

Le tableau nous montre que les deux résultats sont très voisins.

4.6.2 Calcul de la matrice de rigidité en flexion D_{11} , D_{12} , D_{21} et D_{22}

La résolution numérique des problèmes en (mP^{11}, VP^{11}) et (mP^{22}, VP^{22}) permet le calcul de D_{12} , D_{21} et D_{22} , en effet :

$$\begin{cases} y_3 m_{11}^{11} = y_3 m P_{11}^{11} \\ y_3 m_{22}^{11} = \nu (y_3 m P_{11}^{11} + y_3 m P_{33}^{11}) \\ y_3 m_{11}^{22} = y_3 m P_{11}^{22} \\ y_3 m_{22}^{22} = E y_3^2 + \nu (y_3 m P_{11}^{22} + y_3 m P_{33}^{22}) \end{cases}$$

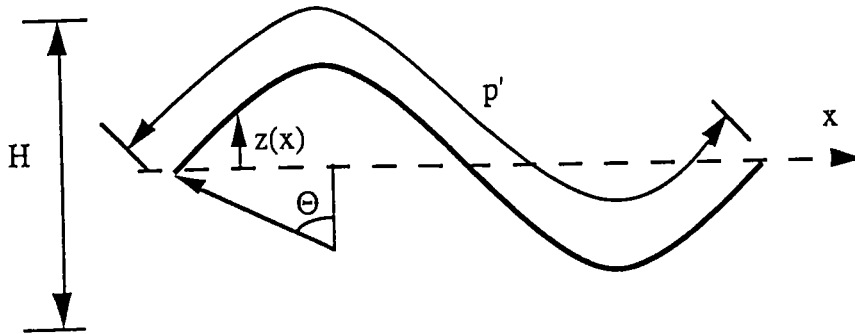
Les résultats numériques de D_{11} , D_{12} et D_{21} sont regroupés dans le tableau suivant :

$p/2t$	126.4142	63.91	54.04	26.4142
D_{11}	0.00104	0.0083	0.014	0.13
$\eta^3 \langle y_3 m P_{33}^{11} \rangle$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$7.25 \cdot 10^{-7}$	$2.21 \cdot 10^{-7}$	$9.75 \cdot 10^{-7}$
D_{21}	0.000314	0.0025	0.0042	0.039
D_{12}	0.000314	0.0025	0.0042	0.039
D_{12}/D_{11}	0.3	0.3	0.3	0.3

On remarque que le rapport D_{12}/D_{11} est constant et égal au coefficient de Poisson effectif défini précédemment soit :

$$\frac{D_{12}}{D_{11}} = \nu^{eff} \approx \nu$$

Nous avons aussi effectué le calcul numérique de D_{22} qu'on a comparé avec un calcul analytique de cette rigidité équivalente [30]. Ce calcul a été fait par L. Siad et M. Potier-Ferry lors d'un contrat industriel. La structure à étudier est une tôle ondulée d'épaisseur constante et très petite devant la longueur d'une ondulation. La projection, dans le plan des ondulations (x, z), d'une cellule de base (une ondulation) se présente ainsi:



On désigne par s l'abscisse curviligne et t l'épaisseur de la tôle. Une ondulation est constitué par deux arcs de cercle de même rayon et symétriques par rapport au centre de l'ondulation. On prend Θ égal à $\pi / 4$. La formule analytique du module de rigidité en flexion dans la direction 22 s'écrit :

$$D_{22}^{an} = E I_x = E t \int_0^{p'} z^2(s) ds$$

où I_x est le moment d'inertie d'une mouleure par rapport à l'axe des x .

En faisant varier l'épaisseur t de la tôle, on calcule cette rigidité par l'approche tridimensionnelle et en utilisant l'expression ci-dessus. Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau suivant :

$p/2t$	126.41	63.91	54.04	26.41
D_{22}^{an}	5.093	10.366	12.393	27.393
D_{22}	5.0503	10.194	12.1505	26.296
Écart %	-0.84	-1.68	-1.99	-4.17

On en conclut que les résultats analytiques et numériques coïncident pour des épaisseurs très petites par rapport à la période des ondulations. Au delà d'une limite, qui dépend de l'écart qu'on peut tolérer, le modèle analytique n'est plus valable et il faudra dans ce cas utiliser le résultat de l'approche tridimensionnelle.

4.7 Exemples de validation

Dans ce qui suit nous allons calculer les modules de rigidités équivalents D_{11} et D_{22} de deux types de plaques que nous allons comparer avec leurs expressions empiriques trouvées dans la littérature.

4.7.1 Plaque consolidée par des pièces de renfort équidistantes.

On considère une plaque mince renforcée symétriquement par rapport à son plan moyen, de matériau constitutif élastique isotrope de module de Young E égale à 2.10^5 MP et de coefficient de Poisson ν égal à 0.3, le renfort a un module de Young E' Fig.23. Les expressions analytiques, se basant sur l'expérience, des modules de rigidités équivalents en flexion de la plaque D_{11} et D_{22} sont données par [21], [18] et [34] :

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \\ D_{22} = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} + \frac{E' I}{p} \end{cases} \quad [21]$$

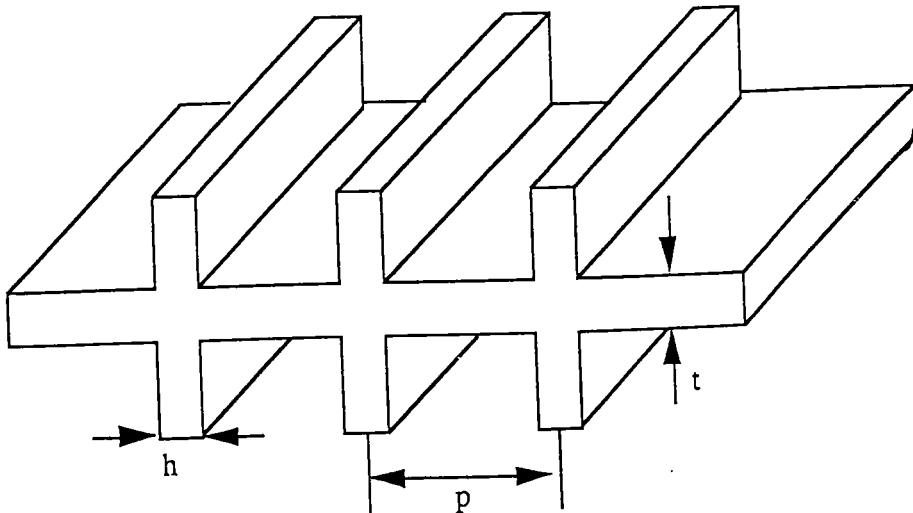


Fig.23 : Plaque consolidée par des pièces de renfort équidistantes

Nous considérons une plaque renforcée symétriquement par rapport à son plan moyen par des pièces de renforts **Fig.23**. Les caractéristiques géométriques de cette plaque sont : p/t égal à 25.5 et t/h égal à 2. Nous supposons que les modules de Young E et E' sont égaux. Nous calculons les rigidités équivalentes en flexion D_{11} et D_{22} par les expressions données en [21] et par la méthode adoptée dans ce chapitre. Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau suivant :

D_{11} (1)	D_{11} (2)	Écart	D_{22} (1)	D_{22} (2)	Écart
0.001172	0.0012	2.71 %	0.0063	0.0064	2.95 %

(1) calculé par la formule [21].

(2) calculé par l'approche 3-D.

Ce tableau montre que le calcul analytique et le calcul numérique coïncident à 2.71% près pour la rigidité à la flexion dans la direction 11 et à 2.95% près pour la rigidité à la flexion dans la direction 22, ce qui représente un écart très petit.

4.7.2 Dalle renforcée par une série de nervures équidistantes.

Pour le cas d'une dalle renforcée par une série de nervures **Fig.24** les coefficients de rigidités à la flexion D_{11} et D_{22} ont été estimés par le biais de l'expérience [21] et ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{E p t^3}{12(p - t - t \alpha^3)} \\ D_{22} = \frac{E I}{p} \end{cases} \quad [21]$$

où E est le module de d'Young du matériau constitutif de la dalle, I est le moment d'inertie d'une section en T de largeur p et α est le rapport de l'épaisseur de la dalle et de la hauteur d'une nervure.

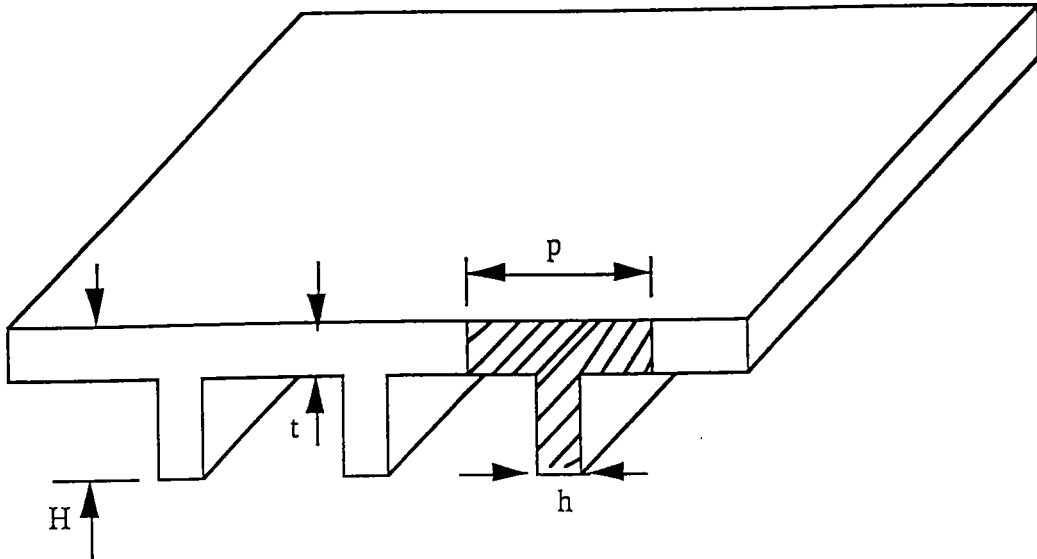


Fig.24 : Dalle renforcée par une série de nervures équidistantes.

Pour une dalle ayant les caractéristiques géométriques suivantes :

$$p/t = 51, h/t = 4 \text{ et } H/p = 0.156$$

de module de Young égal à 2.10^5 MP et de coefficient de Poisson égal à 0.3, nous avons fait le calcul des modules des rigidités en flexion D_{11} et D_{22} en utilisant les expressions [21] et en suivant la méthode adoptée dans ce chapitre (approche 3-D). Les résultats de calculs sont regroupés dans le tableau suivant :

D_{11} (1)	D_{11} (2)	Écart	D_{22} (1)	D_{22} (2)	Écart
0.001087	0.001088	0.2 %	0.00238	0.002316	-2.97 %

(1) calculé par la formule [21].

(2) calculé par l'approche 3-D.

On remarque que les résultats analytiques et les résultats donnés numériquement par l'approche tridimensionnelle sont identiques à 0.2% près pour D_{11} et -2.97% près pour D_{22} .

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que le modèle équivalent d'une plaque ondulée, d'épaisseur du même ordre de grandeur que la longueur d'une ondulation, est de type Love-Kirchoff. Nous avons aussi montré que le matériau équivalent est élastique orthotrope. La matrice de rigidité équivalente en membrane et en flexion est entièrement déterminée par la résolution de six problèmes d'élasticité tridimensionnelle. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre nous avons montré que cette approche peut aussi s'appliquer à des structures raidis ou généralement des structures de géométrie périodique.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce rapport nous avons dans une première partie réalisé l'homogénéisation géométrique d'une poutre ondulée d'épaisseur petite devant le pas des ondulations. Le modèle de départ est celui de Timoshenko qui tient compte des déformations de cisaillement. Le modèle homogénéisé est une poutre droite de type *Bernoulli* dont les rigidités équivalentes s'expriment aussi bien en fonction du matériau constitutif de la poutre de départ que des caractéristiques géométriques d'une ondulation. Cette modélisation permet surtout de simplifier toute étude de stabilité ou de rupture d'une poutre ondulée ou généralement une poutre de structure géométrique périodique puisque ce résultat est aussi valable pour d'autres types de géométrie.

Dans la deuxième étape nous avons fait une étude analogue mais plus générale concernant une poutre ondulée assez épaisse c'est à dire dont la période et l'épaisseur sont assez proches. Le modèle homogénéisé est également de type *Bernoulli*. La détermination des modules de rigidités équivalents passe par la résolution de deux problèmes linéaires d'élasticité plane (contraintes planes) posés sur une cellule de base (une ondulation). Cette résolution a été faite par un code d'éléments finis. Nous avons ensuite confronté les deux approches unidimensionnelle et bidimensionnelle pour le calcul des modules de rigidités équivalentes en traction-compression et en flexion dans le cas d'une poutre ondulée ayant un élancement $p/2t$ très grand (p étant la période et t l'épaisseur de la poutre). Les résultats étaient cohérents jusqu'à une certaine limite à partir de laquelle les deux approches s'écartent, ce qui s'explique par le fait que l'approche unidimensionnelle n'est plus valable au delà de cette limite. Cette étude peut être appliquée à d'autres structures répétitives comme les treillis : nous avons montré que le calcul des modules de rigidités équivalents d'un treillis en carré par l'approche bidimensionnelle est le même que le calcul de ces derniers en utilisant les expressions analytiques de C. Gardin [15].

Dans le dernier chapitre, nous avons réalisé une modélisation asymptotique d'une plaque ondulée assez épaisse. Le modèle de départ est un modèle linéaire tridimensionnel élastique. Nous avons montré que le modèle équivalent est de type *Love-Kirchoff* et que la matrice de rigidité équivalente est *orthotrope*. La détermination des coefficients de la matrice de rigidité équivalente passe par la résolution numérique de six problèmes d'élasticité linéaires et tridimensionnels. Pour valider notre modélisation nous avons comparé le calcul de la matrice de rigidité équivalente en flexion avec le calcul fait à l'aide d'expressions analytiques trouvées dans la littérature pour le cas de plaque dont l'épaisseur est très petite devant le pas des ondulations. Les résultats étaient cohérents. Nous avons également montré que notre approche peut s'appliquer à des structures raidies, comme on en utilise dans la construction aéronautique.

Nous concluons donc que cette étude est généralisable à des structures périodiques de géométrie différentes. Elle permet de faciliter l'étude à l'échelle globale à savoir calcul de charge critique etc.... Cette étude est aussi utile puisqu'elle permettra d'analyser facilement l'influence des ondulations sur le comportement élastoplastique de la structure à travers les équations de localisations.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] Artola D. et Duvaut G.

"Homogénéisation d'une plaque renforcée" CRAS, Paris, N° 284, Série A, P. 707-710, 21 Mars 1977.

[2] Bath K.J.

"Finite element procedures in engineering analysis" Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 1982.

[3] Bensoussan A., Lions J.L et Papanicolaou G.

"Asymptotic analysis for periodic structures" North Holland, Amsterdam 1978.

[4] Caillerie D.

"Etude de quelques problèmes de perturbation en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique" Thèse d'état, Université P. et M. Curie, Paris 1982.

[5] Caillerie D., P. Trompette, P. Verna

"Homogeneization of periodic trusses" Congrès IASS, Madrid, 1989.

[6] Ciarlet P. G. et Destuynder P.

"A justification of the two dimensionnal linear plate model" J. de Mécanique, v. 18, N° 2, 1979.

[7] Ciarlet P. G.

"Plates and junctions in elastic multi-structures" Masson, Paris, 1990.

[8] Cioranescu D., Saint-Jean Paulin J.

"Une méthode d'étude du comportement global des matériaux composites: L'homogénéisation" Images des Mathématiques, supplément au numéro 69, P. 15-23 Courrier du CNRS, 1988.

[9] Cioranescu D. et Saint-Jean Paulin J.

"Problèmes de Neumann et de Dirichlet dans des structures réticulées de faible épaisseur"
CRAS, Paris, V.303, série I, N°1, P. 7-10, 1986.

[10] Cioranescu D. et Saint-Jean Paulin J.

"Asymptotic analysis of elastic wireworks" Univ. P. & M. Curie CNRS, Lab. Anal.
Num., R 89008.

[11] Destuynder P.

"Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes
asymptotiques" Thèse d'état, Université Paris VI, 1980.

[12] Destuynder P.

"Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité" Masson, Paris, 1986.

[13] Duvaut G. et Lions J.L.

"Les inéquations en mécanique et en physique" Dunod, Paris, 1972.

[14] Duvaut G.

"Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, Application à l'étude des
matériaux composites élastiques à structure périodique, Homogénéisation" Theoretical
and Applied Mechanics, W.T. Koiter Editor, P. 119-132, North Holland Publishing
Company 1976.

[15] Gardin C.

"Communication personnelle" A paraître

[16] Gardin C.

"Contribution à l'étude du contact thermoélastique" Thèse, Institut National
Polytechnique de Lorraine, 1988.

[17] Germain P.

"Cours de mécanique des milieux continus" Masson. Paris, 1973.

[18] Lekhniskii S.G.

"Anisotropic plates" Gordon and Breach Science Publishers, New York, P. 294, 1968.

[19] Léné F.

"Contribution à l'étude des matériaux composites et de leurs endommagements" Thèse d'état, Paris VI 1984.

[20] Lions J. L.

"Cours d'homogénéisation" Collège de France, (1975, 1976, 1977).

[21] Kani S.N. and Sverdlov I.A.

"Calculation of airplane strength" Oborongiz, Moscow, P. 254, 1940.

[22] Mouftakir L., Siad L. et Potier-Ferry M.

"Homogénéisation géométrique d'une poutre ondulée épaisse" 11^{ème} Congrès Français de Mécanique, Lille-VILLENEUVE D'ASQ, V.5, P. 33-36, 1993.

[23] Parton V.Z., Kalamkarov A. L.

"Thermoelasticity of regularly nonhomogeneous thin curved layer with rapidly varying thickness" Journal of Thermal Stresses, n°11, P.405-420, 1988.

[24] Persson L.E., Persson L., Svanstedt N. et Wyller J.

"The homogenisation method" Studentlitteratur, Lund (Sweden), 1993.

[25] E. Sanchez-Palencia

"Sur certains phénomènes physiques d'homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation" C.R.A.S. Paris, sér.A, 286, P. 903-906, 1978.

[26] E. Sanchez-Palencia

"Non homogenous media and vibration theory" Lecture Notes in Physics, n°127, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[27] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia

"Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation" Masson, Paris, 1992.

[28] Seydel E.

"Shear-buckling test with corrugated sheets" DVL, 1931.

[29] L. Siad et M. Potier-Ferry

"Homogénéisation géométrique d'une poutre ondulée" C.R.A.S., série II, P.425-430, 1992.

[30] L. Siad et M. Potier-Ferry

"Flambage des boîtes alimentaires" L.P.M.M., Metz, Rapport de contrat Sollac-Ledepp, Florange, 1992.

[31] Suquet P.

"Plasticité et homogénéisation" Thèse d'état, Université P. et M. Curie, Paris, 1982.

[32] Tartar L.

"Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles" Cours Peccot, Collège de France 1977.

[33] Temam R.

"Analyse numérique : résolution approchée d'équations aux dérivées partielles" Presses universitaires de France, Paris, 1970.

[34] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.

"Théorie des plaques et des coques" Dunod, P.367-369, 1961.

[35] Verna P., Caillerie D.

"Homogénéisation d'un treillis plan hyperstatique intérieurement" Congrès StruCoMe, Paris, 1990.

[36] Verna P.

"Modélisation continue des structures discrètes par homogénéisation: cas des treillis" Institut National Polytechnique de Grenoble, Thèse, Janvier 1991.

[37] Zienkiewicz O.C.

"La méthode des éléments finis" McGraw-Hill, 1973.

Annexe 1

1.a) Montrons que $\langle \sigma_{\alpha 2}^0 \rangle = 0$ pour $\alpha = 1, 2$.

On avait trouvé qu'à l'ordre zéro le tenseur contrainte est auto-équilibré en effet :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial y_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}^0}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial y_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{a11})$$

On multiplie ce système d'équations par y_2 on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial (y_2 \sigma_{11}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial (y_2 \sigma_{12}^0)}{\partial y_2} - \sigma_{12}^0 = 0 \\ \frac{\partial (y_2 \sigma_{21}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial (y_2 \sigma_{22}^0)}{\partial y_2} - \sigma_{22}^0 = 0 \end{cases} \quad (\text{a12})$$

Ensuite on applique l'opérateur moyenne à ces deux équations on trouve :

$$\begin{cases} \iint_Y \left(\frac{\partial (y_2 \sigma_{11}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial (y_2 \sigma_{12}^0)}{\partial y_2} \right) dY - \iint_Y \sigma_{12}^0 dY = 0 \\ \iint_Y \left(\frac{\partial (y_2 \sigma_{21}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial (y_2 \sigma_{22}^0)}{\partial y_2} \right) dY - \iint_Y \sigma_{22}^0 dY = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème de la divergence on peut écrire :

$$\begin{cases} \iint_Y \left(\frac{\partial(y_2 \sigma_{11}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial(y_2 \sigma_{12}^0)}{\partial y_2} \right) dY = \int_{\Gamma} y_2 (\sigma_{11}^0 n_1 + \sigma_{12}^0 n_2) d\Gamma \\ \iint_Y \left(\frac{\partial(y_2 \sigma_{21}^0)}{\partial y_1} + \frac{\partial(y_2 \sigma_{22}^0)}{\partial y_2} \right) dY = \int_{\Gamma} y_2 (\sigma_{21}^0 n_1 + \sigma_{22}^0 n_2) d\Gamma \end{cases}$$

Γ étant le contour de la cellule de base Fig.9. La condition de bords libres permet d'annuler cette intégrale dans AB et DC et La condition de périodicité en y_1 permet de l'annuler dans AD et BC et on a alors :

$$\begin{cases} \langle \sigma_{12}^0 \rangle = 0 \\ \langle \sigma_{22}^0 \rangle = 0 \end{cases}$$

1.b) On procède de la même façon mais cette fois-ci on multiplie le système d'équations (a11) par y_2^2 . On trouve alors que :

$$\begin{cases} \langle y_2 \sigma_{12}^0 \rangle = 0 \\ \langle y_2 \sigma_{22}^0 \rangle = 0 \end{cases}$$

1.c) A partir de l'équation de localisation (22-1), on déduit des deux résultats précédents que :

$$\begin{cases} \langle \Sigma_{12}^1 \rangle = \langle y_2 \Sigma_{12}^1 \rangle = \langle \Sigma_{12}^2 \rangle = \langle y_2 \Sigma_{12}^2 \rangle = 0 \\ \langle \Sigma_{22}^1 \rangle = \langle y_2 \Sigma_{22}^1 \rangle = \langle \Sigma_{22}^2 \rangle = \langle y_2 \Sigma_{22}^2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de ces résultats on va montrer que :

$$\langle y_2 \Sigma_{11}^1 \rangle = \langle \Sigma_{11}^2 \rangle = 0$$

1) En effet, le tenseur de localisation Σ^1 s'écrit :

$$\begin{cases} \Sigma_{11}^1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11}(U^1) + 1 + \nu \varepsilon_{22}(U^1)) \\ \Sigma_{22}^1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_{11}(U^1) + \nu + \varepsilon_{22}(U^1)) \\ \Sigma_{12}^1 = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}(U^1) \end{cases}$$

Le principe consiste à multiplier ces équations par y_2 et à appliquer l'opérateur moyenne. En utilisant les résultats précédents on trouve que :

$$\langle y_2 \Sigma_{11}^1 \rangle = E (\langle y_2 \varepsilon_{11}(U^1) \rangle + \langle y_2 \rangle)$$

La symétrie de la cellule de base ainsi que les conditions de périodicité permettent d'avoir :

$$\langle y_2 \Sigma_{11}^1 \rangle = 0$$

2) Le tenseur Σ^2 s'écrit :

$$\begin{cases} \Sigma_{11}^2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11}(U^2) - y_2 + \nu \varepsilon_{22}(U^2)) \\ \Sigma_{22}^2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_{11}(U^2) - \nu y_2 + \varepsilon_{22}(U^2)) \\ \Sigma_{12}^2 = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}(U^2) \end{cases}$$

On lui applique l'opérateur moyenne en tenant compte des résultats précédents on trouve :

$$\langle \Sigma_{11}^2 \rangle = E(\langle \varepsilon_{11}(U^2) \rangle - \langle y_2 \rangle)$$

ce qui permet de conclure que :

$$\langle \Sigma_{11}^2 \rangle = 0$$

Annexe 2

2.a) On procède de la même façon que 1.a), 1.b) et 1.c) pour montrer que :

$$\begin{cases} \langle \sigma_{i3}^0 \rangle = \langle y_3 \sigma_{i3}^0 \rangle = 0 & i = 1, 2, 3 \\ \langle m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \rangle = \langle y_3 S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \rangle = 0 & \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \end{cases}$$

2.b) Symétrie de la matrice de rigidité homogénéisée :

On montre que :

$$\begin{cases} \langle S_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \rangle = \langle S_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \rangle \\ \langle y_3 m_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \rangle = \langle y_3 m_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \rangle \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

Cette démonstration est analogue à celle fait dans [24].

Symétrie de la matrice de rigidité en membrane

On a la relation suivante :

$$\left\langle S_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_i^{kh}}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (S_{ij}^{\alpha\beta} u_i^{kh}) \right\rangle - \left\langle u_i^{kh} \frac{\partial S_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \right\rangle \quad S1$$

Or :

$$\begin{cases} \text{auto-équilibre de } S_{ij}^{\alpha\beta} & \Rightarrow \left\langle u_i^{kh} \frac{\partial S_{ij}^{\alpha\beta}}{\partial y_j} \right\rangle = 0 \\ \begin{cases} S_{ij}^{\alpha\beta} & p\text{-périodique} \\ u_i^{kh} & p\text{-périodique} \end{cases} & \Rightarrow \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} (S_{ij}^{\alpha\beta} u_i^{kh}) \right\rangle = 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\left\langle S_{ij}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_i^{kh}}{\partial y_j} \right\rangle = 0$$

Ainsi on peut écrire la succession d'équation suivantes :

$$\begin{aligned} \langle S_{ij}^{\alpha\beta} \rangle &= \langle S_{mn}^{\alpha\beta} \delta_{mi} \delta_{nj} \rangle \\ &= \left\langle S_{mn}^{\alpha\beta} \delta_{mi} \delta_{nj} + S_{mn}^{\alpha\beta} \frac{\partial u_m^{ij}}{\partial y_n} \right\rangle \\ &= \left\langle S_{mn}^{\alpha\beta} \left(\delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{\partial u_m^{ij}}{\partial y_n} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

A ce stade on utilise la loi de comportement soit :

$$S_{ij}^{\alpha\beta} = A_{ijmn} \frac{\partial u_m^{\alpha\beta}}{\partial y_n} + A_{ij\alpha\beta}$$

on obtient :

$$\langle S_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \left\langle A_{mnkh} \left(\frac{\partial u_k^{\alpha\beta}}{\partial y_h} + \delta_{k\alpha} \delta_{h\beta} \right) (\delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{\partial u_m^{ij}}{\partial y_n}) \right\rangle$$

En utilisant la symétrie du tenseur de comportement A, on obtient :

$$\langle S_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \left\langle S_{kh}^{ij} \left(\frac{\partial u_k^{\alpha\beta}}{\partial y_h} + \delta_{k\alpha} \delta_{h\beta} \right) \right\rangle$$

ce qui nous fait aboutir à la relation de symétrie suivante :

$$\langle S_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \langle S_{\alpha\beta}^{ij} \rangle$$

Symétrie de la matrice de rigidité en flexion

la relation S1 est aussi valable pour le tenseur $m^{\alpha\beta}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \langle -y_3 m_{ij}^{\alpha\beta} \rangle &= \langle -y_3 m_{mn}^{\alpha\beta} \delta_{mi} \delta_{nj} \rangle \\
 &= \left\langle -y_3 m_{mn}^{\alpha\beta} \delta_{mi} \delta_{nj} + m_{mn}^{\alpha\beta} \frac{\partial v_m^{ij}}{\partial y_n} \right\rangle \\
 &= \left\langle m_{mn}^{\alpha\beta} \left(-y_3 \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{\partial v_m^{ij}}{\partial y_n} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle A_{mnkh} \left(\frac{\partial v_k^{\alpha\beta}}{\partial y_h} - y_3 \delta_{k\alpha} \delta_{h\beta} \right) \left(-y_3 \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{\partial v_m^{ij}}{\partial y_n} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle m_{kh}^{ij} \left(-y_3 \delta_{mi} \delta_{nj} + \frac{\partial v_m^{ij}}{\partial y_n} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\langle -y_3 m_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \langle -y_3 m_{\alpha\beta}^{ij} \rangle$$