



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Metz

spécialité : Mathématiques

mention : Mathématiques appliquées

par Mr **Hamid JGHIMA.**

Titre de la thèse :

**CONTRIBUTION
À LA STABILITÉ ET LA STABILISATION
DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES**

Soutenue le 03 mai 1996 devant le jury composé de :

J.M. CORON, Professeur à l'ENS de Cachan. Président

R. GERARD, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Rapporteur.

H. HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon. Rapporteur.

R. OUTBIB, Docteur INRIA Lorraine.

A. ROUX, Professeur à l'Université de Metz.

G. SALLET, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

UNIVERSITE DE METZ

I S G M P

Laboratoire de Méthodes Mathématiques d'Analyse des Systèmes

URA – CNRS 399 et INRIA – Lorraine

~~S/M3 96/128~~
b 100330

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Metz

spécialité : Mathématiques

mention : Mathématiques appliquées

par Mr Hamid JGHIMA.

Titre de la thèse :

**CONTRIBUTION
À LA STABILITÉ ET LA STABILISATION
DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES**

Soutenue le 03 mai 1996 devant le jury composé de :

J.M. CORON, Professeur à l'ENS de Cachan. Président

R. GERARD, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Rapporteur.

H. HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon. Rapporteur.

R. OUTBIB, Docteur INRIA Lorraine.

A. ROUX, Professeur à l'Université de Metz.

G. SALLET, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

UNIVERSITE DE METZ

I S G M P

Laboratoire de Méthodes Mathématiques d'Analyse des Systèmes

URA - CNRS 399 et INRIA - Lorraine

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1996034 S
Cote	S/M3 96/128
Loc	Nogarin

REMERCEMENTS

A l'origine de ce travail, le Professeur G. SALLET. Il m'a accueilli au sein de son équipe de recherche et m'a fait confiance, ses conseils m'ont toujours accompagné. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à R. GERARD et H. HAMMOURI qui ont accepté de rapporter ce travail.

Je tiens à remercier J.M. CORON pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie de mon jury de thèse et de le présider.

A. ROUX m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse, je tiens à lui exprimer mes sincères remerciements.

Ma vive reconnaissance à R. OUTBIB pour tout l'intérêt qu'il a porté à cette thèse, pour sa disponibilité son soutien et ses conseils et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Que tous les membres du Projet CONGE de l'INRIA Lorraine ainsi que la secrétaire soient remerciés pour leur gentillesse et pour la bonne ambiance. Je tiens à remercier en particulier J.C. VIVALDA avec lequel plusieurs discussions ont été fructueuses.

Je ne saurais trop remercier des personnes comme Abderazak, Azzedine, Hassan, Pierre, Rachid et bien d'autres, pour leurs encouragements, leur présence et surtout, leur amitié.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui de leurs manières ont contribué à la réalisation de ce travail.

*A ma maman, ma tante, ma sœur et mes frères,
à leurs conjoints et leurs enfants,
pour leur dévouement et leur soutien permanent,
pour leur amour.*

*A Zohra,
pour sa tendresse et sa douceur.*

Table des matières

1	Introduction	3
2	Généralités	7
2.1	Introduction	7
2.2	Théorie de Lyapunov-LaSalle	7
2.2.1	Définitions	8
2.2.2	Fonctions de Lyapunov	8
2.2.3	Principe d'invariance de LaSalle	9
2.3	Stabilisation	11
2.3.1	Définitions	11
2.3.2	Des conditions nécessaires de stabilisation	12
2.4	Stabilité au sens de Lagrange	15
2.5	Les systèmes homogènes	16
3	Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels	19
3.1	Introduction et motivation	19
3.2	Étude d'un cas critique	21
3.3	Une condition nécessaire	23
3.4	Une condition suffisante	29
3.5	Remarque de conclusion	32
4	Stabilisation des systèmes homogènes	33
4.1	Introduction	33
4.2	Cas d'une dilatation standard	35
4.3	Cas général	40
4.3.1	Résultat principal	40
4.3.2	Démonstration du théorème principal.	41
4.3.3	Exemples	54
4.3.4	Étude d'un cas particulier.	56
4.4	Remarque de conclusion	59

5 Stabilisation par ajout d'intégrateurs 61

5.1 Introduction 61

5.2 Résultat principal 64

5.3 Exemples et applications 66

5.3.1 Exemples 66

5.3.2 Deux applications 67

5.4 Cas de système à zéro dynamique homogène 70

5.5 Commentaire sur le cas non régulier 74

6 ANNEXES 77

6.1 Annexe A 78

6.2 Annexe B 79

6.3 Annexe C 80

6.4 Annexe D 82

6.5 Annexe E 84

6.6 Annexe F 86

6.7 Annexe G 88

Bibliographie 89

1

Introduction

Cette thèse est une contribution au problème de la stabilité au sens de Lagrange et la stabilisation par retour d'état des systèmes non linéaires. Elle concerne essentiellement les systèmes homogènes.

Un premier résultat concerne la stabilité au sens de Lagrange de systèmes du type

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.1)$$

où X est un champ de vecteurs quadratique homogène.

Il s'agit de caractériser l'ensemble des systèmes dont toutes les trajectoires sont bornées pour un temps positif.

Dans les années soixante et soixante dix, le problème de la stabilité au sens de Lagrange des systèmes quadratiques plans a été entièrement résolu par des chercheurs comme L. Markus [Mar] et T. Date [Da]. Depuis, concernant les systèmes quadratiques tridimensionnels, aucun résultat significatif n'a été obtenu.

L'étude proposée dans ce travail traite d'une classe de systèmes de la forme (1.1) définie par une contrainte. Plus précisément, on va s'intéresser à des champs admettant la fonction $x_1^2 + x_2^2$ comme intégrale première. Ce sont donc des champs sur le cylindre. La motivation est due, entre autre, au fait que les équations d'Euler, décrivant la vitesse angulaire d'un corps rigide en rotation par rapport à un point fixe, font partie de cette classe. Il est montré que, d'une façon générale, comme c'est le cas dans $\mathbb{R}^2$, le système est instable: on montre que la classe des systèmes stables forme un ensemble de mesure

nulle dans la classe des systèmes quadratiques considérée. Dans le cas où le système est montré être stable, des intégrales premières sont alors proposées.

Ce résultat concerne les systèmes sans contrôle. Il représente donc un résultat sur les équations différentielles ordinaires. Le reste des résultats obtenus, est dans le domaine de la stabilisation des systèmes non linéaires par retour d'état régulier.

Nous nous intéressons tout d'abord à des systèmes du type

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=2}^n u_i Y_i(x), \quad (1.2)$$

avec $X(x) = a(x)\partial/\partial x_1$ et $Y_i(x) = \partial/\partial x_i$ ($i = 2 \dots n$). Où $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme homogène par rapport à une dilatation.

Cette classe de systèmes a été étudiée par de nombreux chercheurs (cf. les travaux de A. Bacciotti, J.M. Coron, W.P. Dayawansa, H. Hermes, M. Kawski, C.F. Martin, etc). L'intérêt est dû au fait que, d'une part, ces systèmes représentent, de par leurs propriétés, une première généralisation des systèmes linéaires. D'autre part, certains systèmes issus de situations pratiques sont homogènes.

Notre but est de proposer une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisabilité des systèmes homogènes par rapport à une dilatation.

Dans le cas où le système (1.2) est homogène au sens standard, nous proposons un feedback stabilisant explicite qui est polynomial.

Dans le cas d'une dilatation quelconque, nous considérons le cas des systèmes plans et nous proposons une loi de commande au moins continue qui rend l'origine un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Par rapport à la littérature, notre résultat est plus général dans le sens où la dilatation est quelconque. Des exemples de la littérature sont étudiés différemment pour proposer des lois de commande plus régulières ou pour obtenir des résultats globaux.

Enfin, les derniers types de résultats concernent le problème de la stabilisation par feedback dynamique. Il s'agit de stabiliser des systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (1.3)$$

quand le système réduit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (1.4)$$

est stabilisable.

Il y a maintenant une littérature abondante sur le sujet (cf. les travaux de C. Byrnes, J.M. Coron, A. Isidori, P.V. Kokotovic, L. Praly, P. Siebert, E.D. Sontag, H.J. Sussman, etc).

Nous proposons une nouvelle démonstration d'un résultat bien connu dans la théorie de la stabilisation, dit "lemme des intégrateurs". Le but de cette nouvelle démonstration est double. Tout d'abord, on va supposer que f est seulement de classe C^1 , dans ce cas, la démonstration classique, basée sur une technique d'élimination, fournit seulement un feedback continu. Ici, il est montré qu'on peut choisir un feedback au moins de classe C^1 . D'autre part, notre approche permet de donner explicitement le feedback, dans des situations où l'ancienne méthode montre seulement l'existence. Deux cas seront étudiés. Dans le cas où la zéro dynamique est un système homogène, nous proposons un feedback stabilisant et explicite qui ne dépend de la connaissance d'aucune fonction de Lyapunov. La motivation est due au fait que la stabilité asymptotique d'un système homogène peut être prouvée par l'utilisation du théorème de Coleman. Une autre situation concerne le cas où l'on connaît une fonction propre (pas forcément définie) dont la dérivée le long des trajectoires du système zéro dynamique est négative à l'extérieur d'un compact.

Comme corollaire de cette nouvelle démonstration, il est montré que la stabilisation statique d'un système analytique par un feedback analytique, implique sa stabilisation dynamique par un feedback analytique.

Ce travail est organisé de la façon suivante:

La première partie, contient un rappel de quelques définitions de base, ainsi que certains résultats de la théorie de la stabilité et la stabilisabilité des systèmes non linéaires.

Dans la deuxième partie, nous présentons la classe des systèmes quadratiques étudiée, et nous démontrons nos résultats les concernant.

La troisième partie est consacrée à la stabilisation des systèmes homogènes par retour d'état régulier.

La dernière partie traite le problème de la stabilisation des systèmes avec intégrateurs.

Finalement, à la fin de ce travail, un certain nombre d'annexes contenant des démonstrations auxiliaires sont proposées.

L'essentiel de ce travail, a été traité dans [IJO], [JO1],[JO2], [JO3] et [JO4].

2

Généralités

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des rappels de définitions et de résultats sur la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. On y trouve les définitions de la fonction de Lyapunov, le principe d'invariance de LaSalle et le théorème de Kurzweil. Nous rappelons aussi les conditions nécessaires de Brockett pour la stabilisation, ainsi que les récentes améliorations apportées, dans cette direction par J.M. Coron. Enfin, la dernière partie de ce chapitre concerne les systèmes homogènes, nous rappelons les différentes définitions de l'homogénéité, ainsi que le théorème de C. Coleman.

Nous rappellerons essentiellement les résultats qui sont pertinents par rapport à la suite de ce travail. Ainsi, nous ne citerons pas tout les travaux importants de la théorie de la stabilisation qui ne relèvent pas de notre problématique. Par exemple, les résultats de Z. Artstein, E.D. Sontag et J. Tsinias concernant la stabilisation par feedback régulier sauf peut être à l'origine, ceux de Jurdjevic-Quinn à propos des systèmes à dérive dissipative ainsi que les différentes améliorations apportées à ce sujet, les travaux de Chabour-Sallet-Vivalda sur les systèmes bilinéaires ou encore ceux de Pralý-Teel sur la semi-globale stabilisation.

Pour la clarté de la lecture, des exemples significatifs sont proposés.

2.2 Théorie de Lyapunov-LaSalle

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, X(x_0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où X est un champ de vecteurs au moins continu.

2.2.1 Définitions

Définition 1 *Un point x_0 est dit stable au sens de Lyapunov, si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 tel que toutes les trajectoires partantes d'un point quelconque de $\mathcal{U}$ à l'instant $t = 0$, restent dans $\mathcal{V}$ pour tout $t \geq 0$. Autrement dit :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X_t(x) - x_0\| < \epsilon.$$

Définition 2 *On dira que x_0 est attractif, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 , tel que pour tout x dans $\mathcal{U}$, $X_t(x)$ existe $\forall t \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$.*

x_0 sera dit globalement attractif, si on peut prendre $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

Il est à noter que la stabilité au sens Lyapunov d'un point d'équilibre n'implique pas forcément son attractivité. Inversement, on trouve dans [Ha] (voir p.191) un exemple de système qui admet un point attractif mais non stable au sens de Lyapunov.

Définition 3 *On dit que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, s'il est stable et attractif.*

x_0 est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

On remarque que pour montrer qu'un point d'équilibre admette une des propriétés ci-dessus, en utilisant les définitions, on doit résoudre explicitement le système différentiel (2.1), ce qui est, en général, très difficile voire impossible. En fait, on utilise le théorème suivant dû à Lyapunov.

2.2.2 Fonctions de Lyapunov

Théorème 2.1 *S'il existe une fonction $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 et différentiable sur $\mathcal{U} - \{x_0\}$ telle que :*

(a) $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$,

(b) $\dot{V}(x) = X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$,
avec

$$X.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle.$$

alors x_0 est un point d'équilibre stable pour le système (2.1).

Si de plus la fonction V est telle que

$$(c) \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} - \{x_0\},$$

alors x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Enfin, lorsqu'on peut prendre $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, et si V est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^+$ est un compact de $\mathbb{R}^n$), alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour (2.1).

Définition 4 Une fonction V qui satisfait (a) et (b) est appelée fonction de Lyapunov faible pour (2.1) en x_0 . Si en plus (c) est vérifiée, alors V est dite fonction de Lyapunov stricte pour (2.1) en x_0 .

On a aussi le théorème suivant dû à Kurzweil (voir aussi Massera [Mas] et Zubov [Zu]), dit le théorème inverse de Lyapunov.

Théorème 2.2 Si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, alors (2.1) admet une fonction de Lyapunov de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .

Dans le cas où le champ X est homogène et de classe C^1 , il est montré dans [Ha] (voir aussi [Ka2] et [Zu]) qu'on peut choisir la fonction de Lyapunov V homogène et aussi régulière que l'on veut (mais pas forcément de classe C^∞). L. Rosier, dans [Ro], a fait une extension de ce résultat pour un champ de vecteurs quasi-homogène qui est seulement continu.

2.2.3 Principe d'invariance de LaSalle

Pour montrer la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre, l'expérience montre qu'en général, il n'est pas facile de trouver une fonction de Lyapunov stricte. Cependant, si l'on dispose d'une fonction de Lyapunov faible pour le système, le théorème suivant permet alors de conclure.

Théorème 2.3 (Principe d'invariance de LaSalle [LL])

Si le système (2.1) admet en x_0 une fonction de Lyapunov faible V , au moins de classe C^1 . Alors, toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers M , le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n / X.V(x) = 0\}.$$

Dans la suite, M est appelé, ensemble de LaSalle.

Si V est en plus propre, alors, toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$ et donc, toutes les trajectoires tendent vers M . Dans ce cas, pour montrer que le point d'équilibre x_0 est globalement asymptotiquement stable, il suffit d'établir que $M = \{x_0\}$.

Remarque 1 *Notez que, comme dans la théorie moderne de la stabilité, on va supposer, d'une manière générale, que le champ de vecteurs X est seulement continu. Ce qui assure l'existence, mais pas forcément l'unicité, des solutions.*

Dans la suite de ce travail, on prendra x_0 l'origine de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Stabilisation

2.3.1 Définitions

Considérons le système contrôlé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs au moins de classe C^1 , avec $X(0, 0) = 0$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ (T désigne le transposé) représente le contrôle (on utilisera aussi les termes de feedback et loi de commande).

Le système (2.2) sera dit affine en le contrôle si le champ X est de la forme

$$X(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i,$$

où f est un champ de vecteurs appelé la dérive et $g_i (i = 1, \dots, m)$ les champs contrôlés.

Définition 5 *Le système (2.2) est dit stabilisable (par feedback statique), s'il existe une loi de commande $u = u(x)$, au moins continue, vérifiant $u(0) = 0$, telle que le système bouclé*

$$\dot{x} = X(x, u(x)),$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Définition 6 *On dira que (2.2) est stabilisable par un feedback dynamique s'il existe un entier $p < n$ tel que le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ \dot{y} = v \\ x \in \mathbb{R}^n; y, v \in \mathbb{R}^p \text{ et } u \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.3)$$

où (x, y) désigne l'état et (u, v) le contrôle.

est stabilisable.

Enfin, on dira que le système (2.2) est stabilisable par ajout d'intégrateurs lorsqu'on prend, dans (2.3), $u = y$.

2.3.2 Des conditions nécessaires de stabilisation

Le théorème suivant dû à Brockett donne des conditions nécessaires de stabilisation par feedback de classe C^1 .

Théorème 2.4 ([Br])

Si le système (2.2) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de l'origine, alors:

- (i) *Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*
- (ii) *Il existe un voisinage N de $(0,0)$ tel que pour tout $\xi \in N$, il existe un contrôle $u_\xi(\cdot)$ défini sur $[0, +\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = +\infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.*

(iii) *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : U \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto X(x, u), \end{aligned}$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Comme le montre l'exemple suivant, proposé par M. Kawski, la condition (i) n'est plus nécessaire si on se contente d'un feedback seulement continu :

Exemple 1 ([Ka3])

Le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \\ x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

ne vérifie pas la condition (i), cependant, il est stabilisable par la loi de commande continue définie par

$$u(x) = -x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^3.$$

Dans son livre (cf. [So2]), E.D. Sontag montre que (ii) est une condition nécessaire de stabilisabilité, même si la régularité du feedback souhaitée est seulement la continuité. Le théorème suivant, dû à J.M. Coron, fournit une condition nécessaire pour la stabilisabilité par feedback continu, qui est plus fine que (ii).

Théorème 2.5 ([Co1])

Si le système (2.2) est asymptotiquement stabilisable par un feedback dynamique, stationnaire et continu alors, pour $\epsilon > 0$ assez petit,

$$X_*(\sigma_{n-1}((x, u); |x| + |u| < \epsilon, X(x, u) \neq 0)) = \sigma_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0)(= \mathbb{Z}), \quad (2.4)$$

où $\sigma_{n-1}(A)$ désigne le groupe d'homotopie stable d'ordre $n - 1$ de A .

(Pour plus de détails, voir [Co1])

L'exemple suivant illustre l'apport de ce résultat et montre aussi que les conditions de Brockett ne sont pas suffisantes, même pour la stabilisation par feedback continu.

Exemple 2 ([Co1])

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - 3(x_1 - x_3)^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1 - x_3)^3 - 3(x_1 - x_3) x_2^2 \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ce système, malgré qu'il satisfait les conditions de Brockett, n'est pas stabilisable par un feedback continu. En effet, dans [Co1] (voir Proposition.6), il est montré que le système (2.5) ne vérifie pas la condition (2.4).

Notons que la condition (iii) est également nécessaire à l'existence d'un feedback stabilisateur qui soit continu.

Quand il est possible de montrer qu'un système n'est pas stabilisable par un feedback continu, des chercheurs se sont posé le problème de la stabilisation par une loi de commande discontinue ou instationnaire.

Le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = v \\ \dot{x}_3 = x_1 u - x_2 v, \end{cases} \quad (2.6)$$

proposé par R.W. Brockett, représente un exemple de système qui n'est pas stabilisable par feedback continu. Cependant, C. Samson [Sa] a montré qu'il est stabilisable par une loi de commande instationnaire de classe C^∞ qui est 2π -périodique. Il y a aussi d'autres résultats très intéressants concernant ce type de stabilisation. Par exemple, J.M. Coron et L. Rosier ont établi le théorème suivant

Théorème 2.6 ([CR])

Si le système $\dot{x} = f(x, u)$ est stabilisable par feedback discontinu, alors il est stabilisable par une loi de commande régulière instationnaire.

Si en plus f est affine en contrôle, alors le feedback peut être choisi stationnaire et continu.

Considérons le système analytique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et $f(0) = 0$.

Le théorème suivant proposé dans [DMK], donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation locale par feedback continu du système (2.7).

Théorème 2.7 ([DMK])

Le système (2.7) est localement asymptotiquement stabilisable par feedback continu, si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in B_\varepsilon(0) \cap \mathbb{R}_+^2$ et $q \in B_\varepsilon(0) \cap \mathbb{R}_-^2$ tels que $f(p) < 0$ et $f(q) > 0$.

D'un autre côté, M. Kawski a montré, dans [Ka3], que si le système (2.7) est commandable localement en "temps petit", alors il est stabilisable par feedback continu.

2.4 Stabilité au sens de Lagrange

Définition 7 *Le système différentiel*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.8)$$

est dit stable au sens de Lagrange, si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un réel positif $M(x_0)$, tel que

$$\|X_t(x_0)\| < M(x_0) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Autrement dit, toutes les trajectoires sont bornées.

Remarque 2 *Comme le montrent les exemples suivants, un système peut être stable au sens de Lyapunov (resp. au sens de Lagrange), sans qu'il le soit au sens de Lagrange (resp. au sens de Lyapunov) figure 1.a. (resp. figure 1.b).*

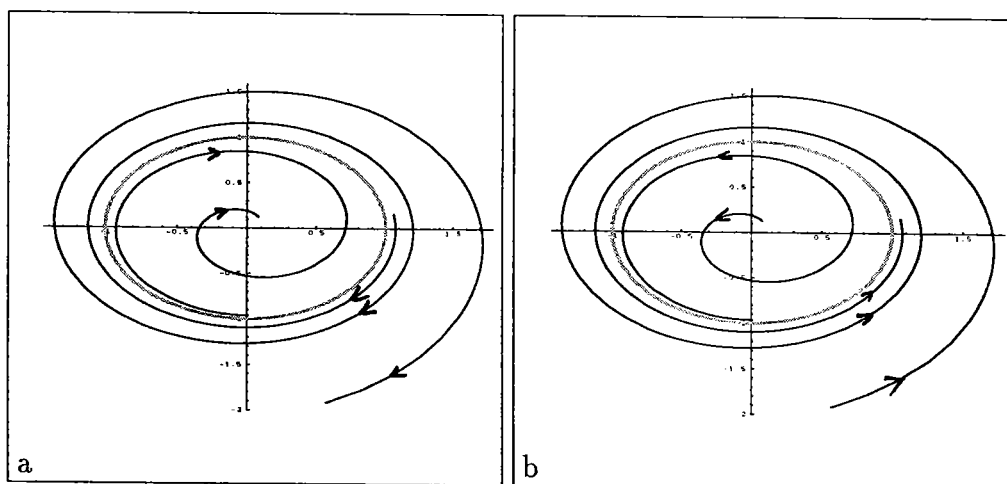


Figure 1

2.5 Les systèmes homogènes

Définition 8 *Etant donné des entiers naturels $r_1, \dots, r_n$ avec $r_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$. Une famille de dilatations est une fonction*

$$\begin{aligned} \Delta : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n). \end{aligned}$$

Une fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré k par rapport à la dilatation Δ , qu'on note aussi par $(r_1, \dots, r_n, k)$ -homogène, si et seulement si

$$\Phi \circ \Delta_\lambda = \lambda^k \Phi, \tag{2.9}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La définition classique d'une fonction homogène correspond au cas où $r_1 = \dots = r_n = 1$. Dans ce cas, on dit qu'il s'agit d'une dilatation standard.

Dans la littérature, on trouve aussi d'autres définitions de l'homogénéités. Par exemple, si dans la définition 8, on suppose que (2.9) est vérifiée seulement pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors, on parle de fonctions positivement homogènes. Si en plus $r_i \in \mathbb{R}$, on dit alors que la fonction Φ est quasi-homogène.

Remarque 3 *Si on note par H_m l'ensemble des fonctions $(r_1, \dots, r_n, m)$ -homogène, on peut facilement montrer que*

$$H_m \cdot H_k \subseteq H_{m+k}.$$

D'autre part, il est facile de prouver que, concernant les fonctions polynomiales, on peut toujours se ramener à la situation où le pgcd($r_1, \dots, r_n$) = 1.

La propriété suivante, qu'on utilisera dans le chapitre 4, concerne les fonctions homogènes dans le plan.

Proposition 2.1 *Soit P une fonction polynomiale (r_1, r_2, k) -homogène. Supposons que P s'annule en un point (x_0, y_0) . Alors, P s'annule sur la courbe $\Gamma(x_0, y_0)$ d'équation $x^{r_2} + by^{r_1} = 0$ où $b = -\frac{x_0^{r_2}}{y_0^{r_1}}$, si $y_0 \neq 0$. Si $y_0 = 0$, alors P s'annule sur la droite d'équation $y = 0$.*

Preuve: Voir Annexe A.

Considérons le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (2.10)$$

où f est un champ de vecteurs homogène de degré impair k .

En utilisant le changement de variable $y = \frac{x}{\|x\|}$ et en posant $r = \|x\|$ ($r^{k-1}(t)dt = d\tau$), on obtient un système défini sur la sphère unité S^2 par:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) - \langle f(y), y \rangle y \\ y \in S^2, \end{cases} \quad (2.11)$$

Le théorème suivant dû à C. Coleman, représente un résultat classique pour prouver la stabilité asymptotique des systèmes homogènes.

Théorème 2.8 ([Col])

Supposons que les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- (i) $\langle f(y), y \rangle < 0$ en tout point d'équilibre du système (2.11).
- (ii) $\int_0^T \langle f(y), y \rangle d\tau < 0$ pour toute solution périodique $y(\tau)$ du système (2.11) de période T .

Alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.10).

Récemment, une généralisation de ce résultat dans $\mathbb{R}^n$, a été proposée par M. Kawski. dans [Ka2].

Nous avons aussi le résultat suivant dû à W.P. Dayawansa, C.F. Martin et G. Knowles, concernant le système contrôlé plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (2.12)$$

avec f est une fonction de classe C^1 , qui est homogène de degré $\lambda = \frac{q}{2p+1}$ où p et q deux entiers naturels tels que $q \geq 2p+1$.

Théorème 2.9 ([DMK])

Le système (2.12) est localement stabilisable par un feedback continu, si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- (i) *q est impair et il existe $a \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $f(a) < 0$.*
- (ii) *q est pair et il existe $a, b \in \mathbb{R}_+^2$ tels que $f(a)f(b) < 0$.*

Dans ces deux cas, il existe une loi de commande analytique qui stabilise le système globalement.

3

Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels

3.1 Introduction et motivation

Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $X = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ où $Q_i (i = 1 \dots 3)$ sont des polynômes quadratiques homogènes dans $\mathbb{R}^3$.

Le problème de la stabilité au sens de Lagrange du système (3.1) revient à caractériser les systèmes de ce type pour lesquels toutes les trajectoires sont bornées.

Actuellement dans la littérature, il existe des classifications des champs quadratiques homogènes dans $\mathbb{R}^2$ desquels on peut déduire les classes des systèmes stables: une classification algébrique par L. Markus [Mar], et une autre géométrique par T. Date [Da]. Notons aussi qu'un certain nombre de papiers a été consacré à la classification des champs quadratiques dans $\mathbb{R}^2$, (cf. les travaux de W.A. Coppel [Cop], T. Date et M. Iri [DI], R.J. Dickson et L.M. Perker [DP]). Concernant les systèmes quadratiques dans $\mathbb{R}^3$, à notre connaissance, aucun résultat significatif n'a été établi.

Dans ce travail, on va s'intéresser à la situation où le système (3.1) vérifie la condition suivante :

$$x_1 Q_1(x) + x_2 Q_2(x) \equiv 0. \quad (3.2)$$

Il s'agit donc, de champs de vecteurs sur les cylindres.

20 3. Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels

Cette étude a été motivée, entre autre, par le fait que les équations d'Euler décrivant les équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide par rapport à un point fixe, vérifient la condition (3.2).

Sous la condition (3.2), l'étude de la stabilité du système (3.1) revient à celle de l'un des deux systèmes suivants:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \\ \dot{x}_3 = Q(x), \end{cases} \quad (3.3)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = Q(x), \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$Q(x) = q_1 x_1^2 + q_2 x_1 x_2 + q_3 x_1 x_3 + q_4 x_2^2 + q_5 x_2 x_3 + q_6 x_3^2. \quad (3.5)$$

En effet, il suffit de remarquer que la condition (3.2) entraîne que

$$Q_1(x) = x_2(ax_1 + bx_2 + cx_3)$$

et

$$Q_2(x) = -x_1(ax_1 + bx_2 + cx_3),$$

où a, b et c sont des réels.

Les changements de coordonnées linéaires qui permettent alors de mettre le champ de vecteurs X (avec la contrainte (3.2)) sous la forme (3.3) ou (3.4) sont respectivement

$$\begin{cases} x_1 := ax_1 + bx_2 \\ x_2 := -bx_1 + ax_2 \\ x_3 := x_3, \end{cases}$$

dans le cas où $c = 0$, et

$$\begin{cases} x_1 := x_1 \\ x_2 := x_2 \\ x_3 := ax_1 + bx_2 + cx_3, \end{cases}$$

si $c \neq 0$.

Notons enfin que la condition (3.2) implique, en particulier, que $(x_1(t))_{t \geq 0}$ et $(x_2(t))_{t \geq 0}$ sont bornés. Donc, prouver la stabilité du système (3.1)(3.2) revient à établir que $(x_3(t))_{t \geq 0}$ est borné.

3.2 Étude d'un cas critique

Concernant le système (3.3), on a le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Le système (3.3) est stable si et seulement si*

$$q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 = 0. \quad (3.6)$$

Preuve: La condition (3.6) est nécessaire. En effet, supposons (3.6) n'est pas vérifiée, alors, en prenant comme condition initiale:

- $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, et $x_3(0) = q_6$ si $q_6 \neq 0$,
- $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = q_5$, et $x_3(0) > |q_4|$ si $q_6 = 0$ et $q_5 \neq 0$,
- $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = q_4$ si $q_6 = 0$, $q_5 = 0$ et $q_4 \neq 0$,

on obtient dans chaque cas un ensemble $(x_3(t))_{t \geq 0}$ qui est non borné.

Dans la suite de la démonstration on supposera que la condition (3.6) est vérifiée. Après la transformation linéaire suivante:

$$\begin{cases} x_1 := x_1 \\ x_2 := x_2 \\ x_3 := x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2, \end{cases}$$

où $\alpha = \frac{q_1 q_3 - q_2}{q_3^2 + 1}$ et $\beta = \frac{q_3 q_2 + q_1}{q_3^2 + 1}$.

le système (3.3) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \\ \dot{x}_3 = q_3 x_1 x_3. \end{cases} \quad (3.7)$$

Un raisonnement simple montre que

$$x_3(t) = x_3(0) e^{q_3 \int_0^t x_1(s) ds}.$$

Pour prouver que $x_3(t)$ est bornée pour tout $t \geq 0$ il suffit alors de montrer que l'intégrale définie par $I(t) = \int_0^t x_1(s) ds$ est bornée pour tout $t \geq 0$.

Le plan défini par

$$P = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0\}$$

22 3. Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels

étant un plan invariant, $x_1(t)$ garde donc un signe constant. Supposons que $x_1(0) \leq 0$ (un raisonnement analogue peut être fait si $x_1(0) \geq 0$), alors $x_1(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$.

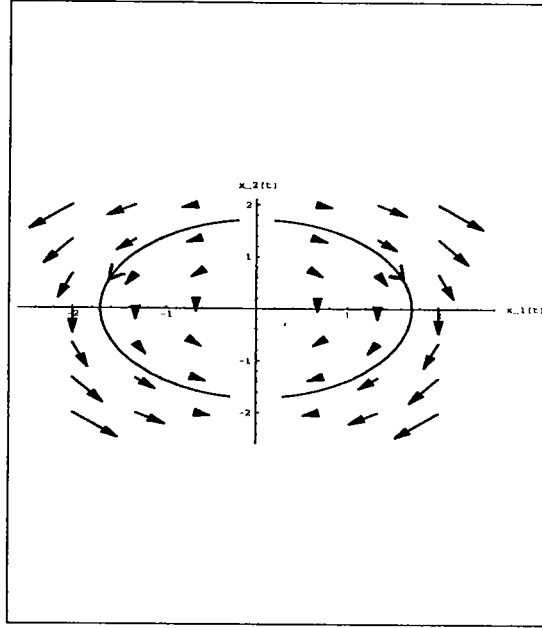


Figure 2

Il est facile de voir qu'il existe $t_0 \geq 0$, tel que $x_2(t) \leq x_2(t_0) < 0$ pour tout $t \geq t_0$ (voir Figure 2). Il vient alors que

$$0 \leq x_1(t)x_2(t_0) \leq x_1(t)x_2(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

par suite

$$|x_2(t_0)| \int_{t_0}^t |x_1(s)| ds = \int_{t_0}^t x_1(s)x_2(t_0) ds \leq \int_{t_0}^t x_1(s)x_2(s) ds = x_1(t) - x_1(t_0),$$

et comme $x_1(t)$ est bornée, il s'en suit donc que $I(t)$ est bornée pour $t \geq 0$.

Ceci termine la démonstration de la Proposition 3.1. □

3.3 Une condition nécessaire

Nous allons maintenant étudier la stabilité du système (3.4). Il est facile de voir que si $q_6 \neq 0$, comme précédemment, pour une condition initiale bien choisie, le système (3.4) n'est pas stable. De même on peut supposer, sans perte de généralité, que $q_2 = 0$. En effet, dans le cas contraire, il suffit de considérer le changement de variables suivant

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

Le système (3.4), compte tenu du fait que $q_6 = 0$, devient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = q_1^\theta x_1^2 + F(\theta) x_1 x_2 + q_4^\theta x_2^2 + (q_3^\theta x_1 + q_5^\theta x_2) x_3, \end{cases} \quad (3.9)$$

où $F(\theta) = (q_4 - q_1) \sin 2\theta + q_2 \cos 2\theta$.

Comme $F(0) = -F(\pi/2) = q_2$, il existe donc un réel $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tel que $F(\theta_0) = 0$. Finalement avec le changement de variables défini ci-dessus où $\theta = \theta_0$ et en posant $q_i^\theta := q_i$ ($i = 1, \dots, 5$) l'étude de la stabilité du système (3.4) revient à celle du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = q_1 x_1^2 + q_3 x_1 x_3 + q_4 x_2^2 + q_5 x_2 x_3. \end{cases} \quad (3.10)$$

□

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant:

Proposition 3.2 *Une condition nécessaire pour la stabilité du système (3.10) est*

$$q_1 + q_4 = 0. \quad (3.11)$$

Preuve: Supposons que $q_1 + q_4 \neq 0$. Tout d'abord, remarquons que si q_1 et q_4 sont du même signe, le système (3.10) n'est pas stable. En effet, de la troisième équation de (3.10) on tire

$$\frac{d}{dt}(x_3(t) + q_3 x_2(t) - q_5 x_1(t)) = q_1 x_1(t)^2 + q_4 x_2(t)^2.$$

24 3. Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels

Supposons $q_1 > 0$ et $q_4 > 0$ (un raisonnement analogue peut être fait pour $q_1 < 0$ et $q_4 < 0$). Comme la condition (3.2) implique que $x_1(t)^2 + x_2(t)^2$ est une constante pour tout $t \geq 0$, alors pour $x_1(0)^2 + x_2(0)^2 = 1$, on obtient

$$q_1 x_1(t)^2 + q_4 x_2(t)^2 \geq \bar{q} = \inf(q_1, q_4) \quad \forall t \geq 0,$$

et donc

$$x_3(t) + q_3 x_2(t) - q_5 x_1(t) \geq \bar{q} + ct \quad \forall t \geq 0,$$

où c est une constante.

il s'en suit que $x_3(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ (voir Figure 3).

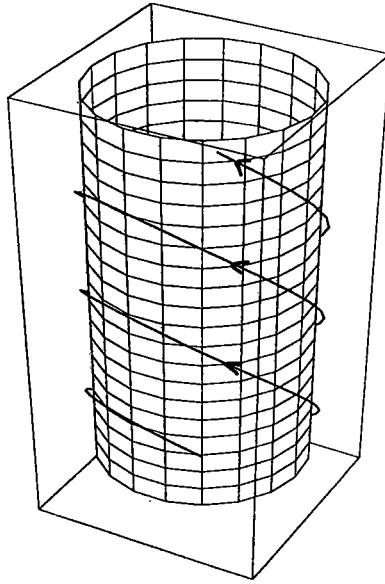


Figure 3

Dans la suite on supposera que $q_1 q_4 \leq 0$. En effectuant le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = -q_7 z + r(q_5 \cos \theta - q_3 \sin \theta), \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $q_7 = \frac{q_4 - q_1}{2}$.

prouver que le système (3.10) est instable, revient à montrer que l'ensemble $(z(t))_{t \geq 0}$, où $z(t)$ est solution du système suivant

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = q_7 z - r(q_5 \cos \theta - q_3 \sin \theta) \\ \dot{z} = r^2(\cos 2\theta + q_8), \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $q_8 = \frac{q_1 + q_4}{q_1 - q_4}$.

est non borné.

On peut, sans perte de généralité, prendre $r = 1$, ce qui nous permet de se ramener à l'étude du système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q_7 z - (q_5 \cos \theta - q_3 \sin \theta) \\ \dot{z} = \cos 2\theta + q_8. \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme q_1 et q_4 sont de signes opposés, alors q_7 et q_8 sont non nulles, en plus on a $|q_8| \leq 1$.

Dans la suite de la démonstration, nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 3.1 *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $z(0) \geq c$, si $\theta(0) = 0$, alors il existe $t_1 > 0$ qui vérifie $|\theta(t_1)| = 2\pi$.*

Preuve: Voir Annexe B.

Notez que, concernant le système (3.14), le phénomène d'explosion ne peut pas se produire. En effet, d'après la deuxième équation de (3.14) nous avons

$$|z(t) - z(0)| \leq (1 + |q_8|)t \quad \forall t \geq 0. \quad (3.15)$$

Maintenant, d'après (3.15) et la première équation de (3.14) on tire

$$\left| \frac{d\theta}{dt} \right| \leq |q_7| (|z(0)| + (1 + |q_8|)t) + |q_5| + |q_3|.$$

et donc

$$|\theta(t) - \theta(0)| \leq \frac{1}{2}(1 + |q_8|)t^2 + (|q_7 z(0)| + |q_5| + |q_3|)t \quad \forall t \geq 0.$$

Finalement, pour tout $t_0 > 0$, l'ensemble $((\theta(t), z(t)))_{t \in [0, t_0]}$ est borné.

26 3. Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratiques tridimensionnels

Supposons que $q_8 > 0$ (un raisonnement similaire peut être fait dans le cas $q_8 < 0$). Soit k une constante positive, négative si $q_8 < 0$, suffisamment grande (voir Figure 4) vérifiant en particulier

$$k > \sup(c, \frac{|q_3| + |q_5|}{|q_8 q_7|}) . \quad (3.16)$$

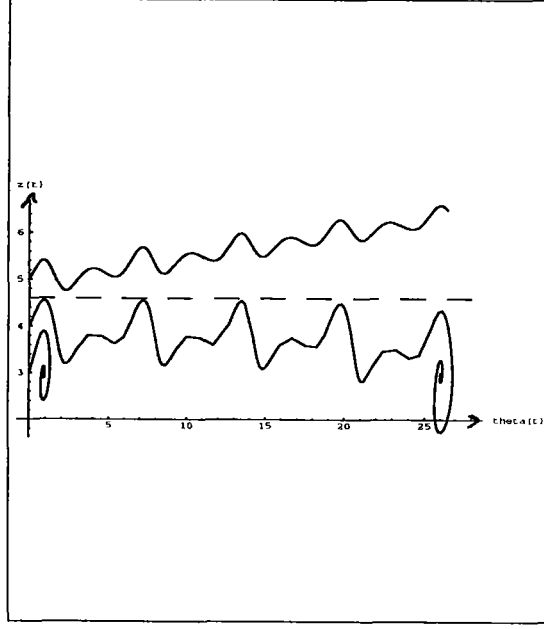


Figure 4

Posons $\theta(0) = 0$. De (3.14) il vient que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(z^2(t)) = \frac{1}{q_7}(\cos(2\theta(t)) + q_8)(\dot{\theta} + q_5 \cos \theta(t) - q_3 \sin \theta(t)) . \quad (3.17)$$

Une intégration donne

$$\frac{1}{2}(z^2(t_1) - z^2(0)) = q_8 \int_0^{t_1} z(s) ds + \int_0^{t_1} f(\theta(s)) ds ,$$

avec f la fonction définie par

$$f(y) = \frac{1}{q_7} \cos(2y)(q_5 \cos y - q_3 \sin y),$$

t_1 étant le plus petit réel positif tel que $|\theta(t_1)| = 2\pi$ et $z(0)$ une constante suffisamment grande de sorte que $z(t) > k \forall t \in [0, t_1]$.

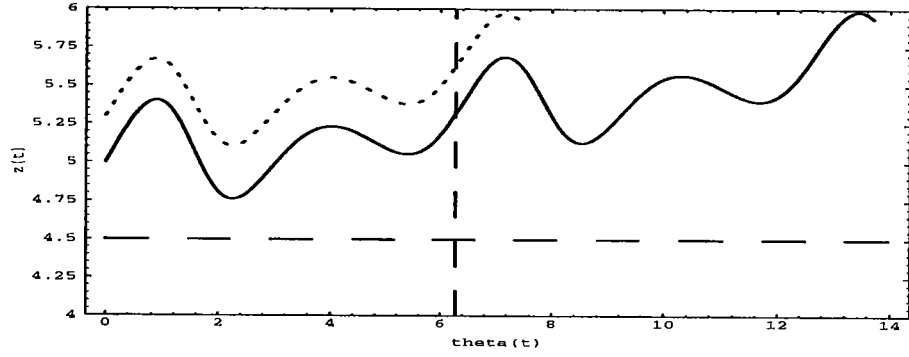


Figure 5

Compte tenu des deux inégalités suivantes

$$\int_0^{t_1} z(s) ds \geq kt_1 ,$$

et

$$\int_0^{t_1} |f(\theta(s))| ds \leq \frac{t_1}{|q_7|} (|q_3| + |q_5|) ,$$

on déduit que

$$\frac{1}{2} (z^2(t_1) - z^2(0)) \geq t_1 \tilde{k} ,$$

avec

$$\tilde{k} = q_8 k - \frac{|q_3| + |q_5|}{|q_7|} ,$$

qui, d'après (3.16), est une quantité strictement positive.

Comme le système (3.14) est 2π -périodique par rapport à θ , (i.e. si Y désigne le champ de vecteurs qui définit le système (3.14) alors $Y(2\pi + \theta, z) = Y(\theta, z) \quad \forall (\theta, z) \in \mathbb{R}^2$), on peut, par une succession de raisonnements analogues (voir Figure 5 pour une illustration géométrique), extraire $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels tels que

$$|\theta(t_n)| = 2n\pi \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(z^2(t_n) - z^2(0)) \geq t_n \tilde{k}.$$

Comme la quantité $\theta(t)$ n'explose pas, alors la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, par suite, $(z(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge aussi.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.2. □

Remarque 4 *La Proposition 3.2 montre, qu'au sein de la classe des systèmes quadratiques considérée, l'ensemble des systèmes stables au sens de Lagrange, comme c'est le cas dans $\mathbb{R}^2$, est un ensemble de mesure nulle.*

3.4 Une condition suffisante

Le but de ce paragraphe, est de fournir une condition suffisante pour la stabilité du système (3.10). La démonstration est constructive, et propose en même temps des intégrales premières pour le système considéré.

Dans la suite, on supposera que la condition (3.11) est satisfaite. Notons que les cas particuliers où dans le système (3.10) on a $q_1(q_3^2 + q_5^2) = 0$, il est facile de vérifier que la fonction définie par

$$V_1(x) = q_1 x_1 x_2 + \frac{1}{2}(-q_5 x_1 + q_3 x_2 + x_3)^2,$$

est une intégrale première qui, pour x_1, x_2 bornées, vérifie

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} V_1(x) = +\infty.$$

On en déduit que, dans ce cas, le système est stable.

Dans le reste de ce paragraphe, on supposera donc que $q_1(q_3^2 + q_5^2) \neq 0$ et on utilisera la quantité défini par $q_9 = \frac{-q_3 q_5}{q_1}$.

Nous avons le résultat suivant:

Proposition 3.3 *Si on a*

$$|q_3| = |q_5| \text{ et } q_9 \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[, \quad (3.18)$$

alors le système (3.10) est stable.

Preuve: Par le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x_1 := q_1 \left(\frac{-1}{q_5} x_1 - \frac{1}{q_3} x_2 \right) \\ x_2 := q_1 \left(\frac{1}{q_3} x_1 - \frac{1}{q_5} x_2 \right) \\ x_3 := x_3, \end{cases}$$

on ramène l'étude de la stabilité de (3.10)(3.18) à celle du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = q_9 x_1 (x_2 + x_3). \end{cases} \quad (3.19)$$

En remarquant qu'une intégrale première du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_3 \\ \dot{x}_3 = q_9(x_2 + x_3), \end{cases} \quad (3.20)$$

est aussi intégrale première pour le système (3.19). On est ramené à chercher W une intégrale première pour le système (3.20) qui vérifie, pour x_2 bornée, la condition suivante

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} W(x) = +\infty. \quad (3.21)$$

Soit

$$P(\lambda) = \lambda^2 - q_9\lambda + q_9,$$

le polynôme caractéristique associé au système linéaire (3.20), et λ_1 et λ_2 les racines de $P(\lambda)$. L'hypothèse (3.18) assure que λ_1 et λ_2 sont réelles dont, au moins, une est positive. Supposons par exemple $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $\lambda_1 \geq 0$.

En vertu de l'égalité suivante

$$\lambda_2 \dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) = -\lambda_2 x_3(t) + q_9(x_2(t) + x_3(t)),$$

et en utilisant le fait que $q_9 = \lambda_1 + \lambda_2$, on obtient

$$\lambda_2 \dot{x}_2(t) + \dot{x}_3(t) = \lambda_1(\lambda_2 x_2(t) + x_3(t)).$$

On en déduit que s'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que $\lambda_2 x_2(t_0) + x_3(t_0) = 0$, alors

$$\lambda_2 x_2(t) + x_3(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq t_0,$$

et donc $(x_3(t))_{t \geq 0}$ est borné.

Dans la suite, on suppose que

$$\lambda_2 x_2(t) + x_3(t) \neq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.22)$$

On va distinguer deux cas. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on considère alors la fonction définie par

$$W_1(x) = (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2}.$$

Le calcul de $\dot{W}_1$, la dérivée de W_1 le long des trajectoires du système (3.20), donne

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(x_2, x_3) = & -x_3 \left(\lambda_1^2 (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1-1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2} - \lambda_2^2 (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2-1} \right) \\ & + q_9 (x_2 + x_3) \left(\lambda_1 (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1-1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2} - \lambda_2 (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2-1} \right). \end{aligned}$$

En factorisant l'expression précédente, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{W}_1(x_2, x_3) = & (\lambda_1 x_2 + x_3)^{\lambda_1-1} (\lambda_2 x_2 + x_3)^{-\lambda_2-1} \left((\lambda_2 x_2 + x_3) (-\lambda_1^2 x_3 + q_9 \lambda_1 (x_2 + x_3)) \right. \\ & \left. + (\lambda_1 x_2 + x_3) (\lambda_2^2 x_3 - q_9 \lambda_2 (x_2 + x_3)) \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Puisque λ_1, λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique P , alors nous avons

$$\begin{aligned} -\lambda_1^2 x_3 + q_9 \lambda_1 (x_2 + x_3) &= q_9 (\lambda_1 x_2 + (-\frac{\lambda_1^2}{q_9} + \lambda_1) x_3) \\ &= q_9 (\lambda_1 x_2 + x_3), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 x_3 - q_9 \lambda_2 (x_2 + x_3) &= -q_9 (\lambda_2 x_2 + (-\frac{\lambda_2^2}{q_9} + \lambda_2) x_3) \\ &= -q_9 (\lambda_2 x_2 + x_3). \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression (3.23), il vient que $\dot{W}_1(x_2, x_3) = 0$. W_1 est donc constante sur les trajectoires du système (3.20). Comme la fonction W_1 vérifie, pour x_2 bornée, la condition (3.21), on conclut que l'ensemble $(x_3(t))_{t \geq 0}$ est borné.

Maintenant si $\lambda_1 = \lambda_2$ (leur valeur commune est alors égale à 2). On considère la fonction définie par

$$W_2(x) = (2x_2 + x_3) e^{\left(\frac{-x_3}{2x_2+x_3}\right)}.$$

Un raisonnement analogue montre que le calcul de $\dot{W}_2$, la dérivée de W_2 le long des trajectoires du système (3.20), donne

$$\dot{W}_2(x_2, x_3) = 0,$$

ce qui implique que W_2 est constante sur les trajectoires du système (3.20). Et puisque W vérifie, pour x_2 bornée, la condition (3.21), alors $(x_3(t))_{t \geq 0}$ est bornée.

Ceci termine la démonstration de la Proposition 3.3. □

3.5 Remarque de conclusion

Dans un article récent [Ol], il est montré que les systèmes de Lotka-Volterra, à savoir:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(Cx_2 + x_3) \\ \dot{x}_2 = x_2(Ax_3 + x_1) \\ \dot{x}_3 = x_3(Bx_1 + x_2) \\ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où A, B et C des éléments de $\mathbb{R}$.

admettent des intégrales premières polynomiales irréductible de degré au plus égal à 6. Ici, la méthode utilisée dans la démonstration de la Proposition 3.3, nous permet d'exhiber une suite de systèmes $(S_n)_{n \geq 2}$ stables au sens de Lagrange où chaque système (S_n) admet, en plus de l'intégrale première triviale définie par (3.2), une intégrale première polynômiale irréductible de degré n .

En effet, on vérifie aisément que le polynôme de degré n défini par

$$V_n(x) = \left(\frac{n-2}{n-1}x_2 + x_3\right)((2-n)x_2 + x_3)^{n-1},$$

est une intégrale première pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{(n-2)^2}{1-n}x_1(x_2 + x_3). \end{cases} \quad (S_n)$$

Notons qu'on a aussi la stabilité au sens de Lyapunov. En effet, il suffit pour cela de prendre comme fonction de Lyapunov faible pour le système (S_n) , la fonction $\tilde{V}_n$ définie par

$$\tilde{V}_n(x) = x_1^2 + x_2^2 + \left(\frac{n-2}{n-1}x_2 + x_3\right)((2-n)x_2 + x_3)^{n-1}.$$

Les cas qui n'ont pas été traités dans cette étude sont ceux où pour le système (3.10), on a $|q_3| \neq |q_5|$ ou bien $|q_3| = |q_5|$ et $q_9 \in]0, 4[$. Des simulations informatiques (faites avec le logiciel Mathematica), laissent à penser que si $|q_3| \neq |q_5|$, le système est instable (voir figures 6 et 7 dans Annexe G), et lorsque $|q_3| = |q_5|$ et $q_9 \in]0, 4[$, le système est stable.

4

Stabilisation des systèmes homogènes

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va s'intéresser au problème de la stabilisation globale des systèmes dont la dérive est un champ de vecteurs polynomial homogène.

Le problème de stabilisation des systèmes homogènes a fait l'objet de plusieurs études qui ont donné des résultats intéressants. En général, ces résultats se basent sur trois approches différentes.

La première, utilise le théorème de C. Coleman [Col]. L'idée de base est de trouver une loi de commande homogène pour laquelle le système bouclé satisfait les conditions du Théorème 2.8. Cette méthode a permis à des auteurs d'apporter des réponses à certaines questions intéressantes (voir par exemple [DMS]). Malheureusement, cette technique restreint le choix du feedback à la classe des fonctions homogènes. Or, comme il est montré dans [Ro] et [Sp], il existe des systèmes homogènes, qui sont stabilisables mais seulement avec un feedback non homogène.

La seconde approche, est basée sur une méthode d'approximation (voir par exemple [He2]). Cette technique est très intéressante, malheureusement, elle n'assure que des résultats locaux.

La troisième approche, est basée sur la théorie de Lyapunov-LaSalle. Cette méthode représente une approche classique et la difficulté consiste à trouver une bonne fonction de Lyapunov pour le champ bouclé. En fait, en général, la fonction de Lyapunov est construite simultanément avec la loi de commande stabilisante.

En utilisant cette dernière technique, nous proposons dans le paragraphe suivant

une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation des champs polynomiaux homogènes dans $\mathbb{R}^n$, par feedback polynomial. Dans le troisième paragraphe de ce chapitre, on trouvera une généralisation de ce résultat pour un champ de vecteurs plan homogène par rapport à une dilatation quelconque.

Il est à noter que dans ce travail, on ne va pas s'imposer la contrainte $r_1 \leq r_2$, souvent présente lors de l'étude des systèmes homogènes par rapport à une dilatation (voir par exemple [He3], [Ka2]).

4.2 Cas d'une dilatation standard

Le but de cette section est de donner une nouvelle démonstration des résultats concernant la stabilisation des systèmes polynomiaux homogènes obtenus dans [IV]. Par ailleurs, la condition nécessaire et suffisante que nous allons donner s'étend au cas de la stabilisation par feedback continu des systèmes plans homogènes par rapport à une dilatation quelconque.

Considérons le système suivant:

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=2}^n u_i Y_i(x), \quad (4.1)$$

avec $X(x) = a(x)\partial/\partial x_1$ et $Y_i(x) = \partial/\partial x_i$ ($i = 2 \dots n$). Où $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme homogène.

Le théorème suivant concerne la stabilisation du système (4.1) dans le cas d'une dilatation standard.

Théorème 4.1 *Si $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 1$, alors une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation par feedback polynomial du système (4.1) est:*

$$\text{Il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tels que } a(1, \lambda) < 0 \text{ et } a(-1, \mu) > 0. \quad (H)$$

Preuve: Il est clair que si (H) n'est pas vérifiée, alors pour une condition initiale telle que $x_1(0) > 1$ si $a(1, \lambda) > 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (resp $x_1(0) < -1$ si $a(-1, \mu) < 0 \forall \mu \in \mathbb{R}$), on vérifie aisément que, quelque soit la loi de commande considérée, l'origine n'est pas attractif. Le système n'est donc pas stabilisable.

Supposons maintenant que (H) est satisfaite. On peut, sans perte de généralité, se ramener au cas où

$$\lambda = (\lambda_1, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \mu = (\mu_1, 0, \dots, 0). \quad (4.2)$$

En effet, si (4.2) n'est pas vérifiée, il suffit de considérer le changement de variables défini par:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_i = x_i - \lambda_{i-1} x_1 \quad \text{pour } i \in \{2, \dots, n\}, \end{cases} \quad (4.3)$$

dans le cas où $\lambda = -\mu$.

et

$$\begin{cases} X_1 = x_1 \\ X_{i_0} = x_{i_0} \\ X_i = x_i - \lambda_{i-1}x_1 - \frac{\lambda_{i-1} + \mu_{i-1}}{\lambda_{i_0-1} + \mu_{i_0-1}}(x_{i_0} - \lambda_{i_0-1}x_1) \quad \text{pour } i \in \{2, \dots, n\} - \{i_0\}. \\ \text{où } i_0 \text{ est tel que } \lambda_{i_0-1} \neq -\mu_{i_0-1}, \end{cases} \quad (4.4)$$

si $\lambda \neq -\mu$.

Il est à noter que, comme ce changement de variables est linéaire, le système obtenu est encore homogène et, après un feedback préliminaire, il est toujours de la forme (4.1).

Nous allons tout d'abord, démontrer le théorème dans le cas où $n = 2$.

Un raisonnement simple nous permet, en utilisant l'homogénéité du polynôme a (cf. Proposition 2.1), d'écrire

$$a(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} a_1(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i x_1 + x_2)^{s_i}, \quad (4.5)$$

avec $a_1(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$ des réels non nuls tels que $\alpha_i \neq \alpha_j$ pour $i \neq j$ (on prendra $s = 0$ si $a(0, x_2) \not\equiv 0$ de même, $s_0 = 0$ si $a(x_1, 0) \not\equiv 0$).

On peut, sans perte de généralité, supposer que $s_0 = 0$. Il suffit pour cela de considérer le changement de variables suivant

$$\begin{cases} x_1 := x_1 \\ x_2 := -cx_1 + x_2, \end{cases}$$

où c est un réel vérifiant $c \geq 1 + \sup |\alpha_i|$.

Le polynôme a devient alors

$$a(x) = \alpha x_1^s a_1(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i x_1 + x_2)^{s_i}. \quad (4.6)$$

En utilisant, si nécessaire, un feedback préliminaire, l'étude de la stabilisation du système (4.1) (4.5) se ramène à celle du système (4.1) (4.6).

Nous allons distinguer deux cas selon les valeurs des $s_i (i = 1, \dots, n)$.

Si tous les $s_i (i = 1, \dots, n)$ sont pairs, alors d'après la condition (H) nous avons $\alpha < 0$ et s impair. Dans ce cas, on considère le feedback suivant

$$v_1(x) = -x_2, \quad (4.7)$$

et soit la fonction différentiable W_1 , définie positive et propre

$$W_1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

L'expression de $\dot{W}_1$, la dérivée de W_1 le long des trajectoires du système bouclé (4.1)(4.7), est donnée par

$$\dot{W}_1(x) = \alpha x_1^{s+1} a_1(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (\alpha_i x_1 + x_2)^{s_i} - x_2^2.$$

Comme $\alpha < 0$, s impair et $a_1(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, il est clair que

$$\dot{W}_1(x) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Donc W_1 est une fonction de Lyapunov stricte. Par conséquent, le système bouclé (4.1)(4.7) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Supposons maintenant qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que s_{i_0} soit impair. On peut sans perte de généralité, supposer que $i_0 = 1$.

Considérons dans ce cas le feedback suivant

$$v_2(x) = -\alpha x_1^s a_1(x) \frac{\partial W_2}{\partial x_1}(x) \prod_{2 \leq i \leq n} (\alpha_i x_1 + x_2)^{s_i} - \frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x). \quad (4.8)$$

avec

$$W_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{s_1 + 1}(\alpha_1 x_1 + x_2)^{s_1 + 1}.$$

Il est clair que W_2 est une fonction différentiable, définie positive et propre.

Le calcul de la dérivée de W_2 le long des trajectoires du champ bouclé (4.1)(4.8), après simplification, donne

$$\dot{W}_2(x) = \frac{\partial W_2}{\partial x_1}(x) \left(a(x) - \alpha x_1^s a_1(x) \frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x) \prod_{2 \leq i \leq n} (\alpha_i x_1 + x_2)^{s_i} \right) - \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x) \right)^2.$$

Puisque

$$\frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x) = (\alpha_1 x_1 + x_2)^{s_1},$$

il vient que

$$\dot{W}_2(x) = - \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_2}(x) \right)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Par suite le système (4.1)(4.8) est stable¹. Comme W_2 est propre, toutes les trajectoires du système bouclé sont bornées et donc, d'après le principe d'invariance de LaSalle, tendent vers M le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{W}_2(x) = 0\}.$$

Pour montrer que le système bouclé (4.1)(4.8) est globalement asymptotiquement stable, il suffit de prouver que $M = \{0\}$.

Soit $\tilde{x} \in M$. Alors, $\tilde{x}$ vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_1 \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 0 \\ \tilde{x}_1 \prod_{2 \leq i \leq n} (\alpha_i \tilde{x}_1 + \tilde{x}_i) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

comme $\alpha_1 \neq \alpha_i$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, donc $\tilde{x} = 0$ et par suite $M = \{0\}$.

Ceci termine la démonstration du théorème dans le cas $n = 2$. Pour le cas $n > 2$, nous allons utiliser le lemme suivant, proposé dans [BIW], [IS] et [Ou1], concernant la stabilisation du système avec intégrateur suivant.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (4.10)$$

Lemme 4.1 ([BIW] [IS] [Ou1]).

Supposons que le système $\dot{x} = f(x, 0)$ est globalement asymptotiquement stable à l'origine, et qu'on connaît V , une fonction définie positive et propre, telle que:

$$XV(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\{x \in \mathbb{R}^n / X^i.V(x) = 0, i \in \mathbb{N}^*\} = \{0\}, \quad (4.11)$$

où $X(x) = f(x, 0)$ et $X^i.V(x) = X(X^{i-1}V)$, $\forall i > 1$.

Alors, le système bouclé défini à partir de (4.10) avec le feedback suivant

$$u(x, y) = -g(x, y)\nabla V(x) - y, \quad (4.12)$$

1. Dans tout ce qui suit, on entend par stable, la stabilité au sens de Lyapunov.

où g est définie par

$$g(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, ty) dt, \quad (4.13)$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Comme, dans le système (4.1), la fonction a est polynomiale, g l'est aussi, et puisque les fonctions W_1, W_2 , sont des fonctions polynomiales qui vérifient (4.11), alors, en utilisant le lemme ci-dessus, on déduit que le système (4.1), bouclé avec le feedback polynomial (4.12), admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration du Théorème 4.1. □

La condition (H) est plus générale que les conditions proposées dans [IV] ainsi que celles du Théorème.2.9. En effet, dans le cas d'un système homogène par rapport à une dilatation standard, toutes ces formulations coïncident, mais, lorsqu'on considère une dilatation quelconque, la condition (H) reste une condition nécessaire et suffisante (c'est l'objet du paragraphe suivant) alors que, comme le montre l'exemple suivant, les conditions proposées dans [IV] et [DMK] ne sont plus suffisantes.

Exemple 3 Soit le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (4.14)$$

Ici, bien que le polynôme $a(x) = x_1 - x_2^2$ change de signe, le système (4.14) n'est pas stabilisable. En effet, pour tout réel ν , $a(-1, \nu) = -1 - \nu^2 < 0$, c'est à dire, la condition (H) n'est pas vérifiée.

4.3 Cas général

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les systèmes plans de type (4.1) homogènes par rapport à une dilatation quelconque.

Considérons le système

$$\dot{x} = X(x) + uY(x), \quad (4.15)$$

avec $X(x) = a(x)\partial/\partial x_1$ et $Y(x) = \partial/\partial x_2$, où $a(x)$ est un polynôme (r_1, r_2, k) -homogène.

Le but est de donner une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation globale du système (4.15) par un feedback au moins continu.

4.3.1 Résultat principal

Le théorème suivant est une généralisation, dans le cas d'une dilatation quelconque, du Théorème 4.1.

Théorème 4.2 *Supposons que l'une des conditions suivantes est satisfaite*

- (i) k est impair,
- (ii) r_1 est impair ou
- (iii) $r_2 > 1$.

Alors une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation par feedback au moins continu de (4.15) est :

$$\text{Il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } a(1, \lambda) < 0 \text{ et } a(-1, \mu) > 0. \quad (H)$$

Avant de donner la démonstration du Théorème 4.2, nous allons faire quelques remarques.

Dans le chapitre 2, nous avons montré que, comme a est un polynôme (r_1, r_2, k) -homogène, alors a peut se factoriser de la façon suivante

$$a(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} a_1(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (x_1^{r_1} + b_i x_2^{r_1})^{s_i} \prod_{n+1 \leq j \leq m} (x_1^{r_2} + b_j x_2^{r_1})^{s_j},$$

où a_1 est un polynôme défini positif, s_i ($i = 1, \dots, n$) des entiers impairs, s_j ($j = n+1, \dots, m$) des entiers pairs et b_l ($l = 1, \dots, m$) des réels non nuls.

Posons

$$a_2(x) = \prod_{n+1 \leq j \leq m} (x_1^{r_2} + b_j x_2^{r_1})^{s_j},$$

$$a_3(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1})^{s_i-1},$$

et $a_4 = a_1 a_2$.

Il vient que

$$a(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} a_3(x) a_4(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}). \quad (4.16)$$

Notons que la fonction a_4 définie par $a_4(x) = a_1(x) a_2(x)$ est positive, et elle vérifie la condition suivante

$$a_4(x_1, 0) = 0 \iff x_1 = 0. \quad (4.17)$$

Pour prouver la stabilisation de (4.15) nous allons d'abord montrer la stabilisation du système

$$\dot{x} = X_1(x) + uY(x), \quad (4.18)$$

avec $X_1(x) = \bar{a}(x) \partial / \partial x_1$, où $\bar{a}$ est donnée par

$$\bar{a}(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} a_4(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}).$$

Puis, pour conclure à la stabilisation du système (4.15), on utilise le résultat du lemme suivant.

Lemme 4.2 *Supposons que le système suivant $\dot{x} = f(x) + ug(x)$ est stabilisable. alors, pour toute fonction scalaire h continue, positive et qui vérifie $(h(x) = 0) \implies (f(x) = 0)$, le système $\dot{x} = h(x)f(x) + ug(x)$ est stabilisable.*

Preuve: Voir Annexe C.

4.3.2 Démonstration du théorème principal.

Nous allons distinguer plusieurs cas. Dans chaque cas, nous proposerons une loi de commande $u = u(x)$ au moins continue, et une fonction V de Lyapunov faible pour le champ bouclé. Pour montrer que le système bouclé est globalement asymptotiquement stable, il suffira alors d'établir que l'ensemble de LaSalle M est réduit à l'origine.

On va commencer par distinguer, selon la parité de s_0 , deux cas. Tout d'abord, supposons que s_0 est impair.

Considérons la loi de commande

$$u_1(x) = -\alpha x_1^{s_0+1} a_4(x) \prod_{1 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) - x_2, \quad (4.19)$$

et posons

$$V_1(x) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{s_0 + 1} x_2^{s_0+1}.$$

Il est clair que V_1 est différentiable, définie positive et propre. La dérivée de V_1 le long des trajectoires du système bouclé (4.15)(4.19) est donnée par

$$\dot{V}_1(x) = -x_2^{s_0+1} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

V_1 est donc une fonction de Lyapunov faible pour le système bouclé (4.15)(4.19).

On désigne par M_1 , le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_1(x) = 0\}.$$

Un raisonnement simple montre que M_1 est défini par

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2 = x_1 a_4(x_1, 0) = 0\}.$$

En vertu de l'inégalité (4.17) on obtient $M_1 = \{0\}$. D'après le principe d'invariance de LaSalle, le système bouclé admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Dans la suite de la démonstration, on suppose que s_0 est pair. Nous allons distinguer plusieurs cas, selon la valeur de n et les signes des b_i .

a. $n = 0$.

La fonction polynomiale $\bar{a}$ devient, dans ce cas,

$$\bar{a}(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} a_4(x).$$

D'après la condition (H), et puisque s_0 est pair, on déduit que $\alpha < 0$ et que s est impair.

Considérons alors la loi de commande $u = u(x)$ définie comme suit

$$u_2(x) = -\frac{\alpha}{s_0 + 1} x_1^s \theta'(x_1) a_4(x) - x_2^{s_0} (\theta(x_1) + x_2^{s_0+1}), \quad (4.20)$$

où $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe C^∞ tel que $\theta(y) = \theta(-y) > 0$ pour tout $y \neq 0$, $\theta(0) = 0$ et $\theta'(y) = 0$ seulement en $y = 0$, on suppose en plus que $\Gamma(\theta) \cap \Gamma(h_i) = \{0\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ avec $\Gamma(\theta)$ le graphe de la fonction θ et

$$\Gamma(h_i) = \{(y, h_i(y)), y \in \mathbb{R} \text{ et } h_i(y) = |b_i|^{-\frac{s_0+1}{r_1}} |y|^{\frac{r_2(s_0+1)}{r_1}}\}.$$

Un choix possible de la fonction θ est le suivant

$$\theta(y) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{y^2}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c est une constante suffisamment grande.

Nous allons montrer que ce feedback stabilise globalement le système (4.15). Pour cela, introduisons la fonction V_2 définie par

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(\theta(x_1) + x_2^{s_0+1})^2.$$

Il est clair que V_2 est une fonction de classe C^∞ , définie positive et propre. Le calcul de la dérivée de V_2 le long des trajectoires du système bouclé (4.15)(4.20) donne

$$\dot{V}_2(x) = -x_2^{s_0} \left(-\alpha x_1^{s+1} a_4(x) + (s_0 + 1)x_2^{s_0} (\theta(x_1) + x_2^{s_0+1})^2 \right).$$

Comme $\alpha < 0$, s impair et s_0 pair, alors

$$\dot{V}_2(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Par suite, le système (4.15)(4.20) est stable.

Notons par M_2 le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans l'ensemble E_2 défini par

$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_2(x) = 0\}.$$

Notre objectif est de montrer que M_2 est réduit à l'origine.

Un raisonnement simple montre que $M_2 \subseteq I \cup J$ où

$$I = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_2^{s_0} = 0 \text{ et } x_1 \theta'(x_1) a_4(x) = 0\},$$

et

$$J = \{x \in \mathbb{R}^2 / x_1 a_4(x) = 0 \text{ et } \theta(x_1) + x_2^{s_0+1} = 0 \text{ et } x_1 \theta'(x_1) a_4(x) = 0\}.$$

Si $x = (x_1, x_2) \in I$ alors

$$x_2 = 0 \text{ et } x_1 \theta'(x_1) a_4(x) = 0,$$

par suite, en utilisant (4.17), on déduit que $x_2 = x_1 = 0$. Donc $I = \{0\}$.

Soit maintenant $x = (x_1, x_2) \in J$. x vérifie alors le système suivant

$$\begin{cases} x_1 a_4(x) = 0 \\ \theta(x_1) + x_2^{s_0+1} = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Si $x_1 = 0$, la deuxième équation de (4.21) implique que $x_2 = 0$. Supposons maintenant que $x_1 \neq 0$. Le système (4.21) devient

$$\begin{cases} a_4(x) = 0 \\ \theta(x_1) + x_2^{s_0+1} = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

La première équation de (4.22) implique qu'il existe i dans $\{1, \dots, m\}$ tel que

$$x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1} = 0. \quad (4.23)$$

La deuxième équation de (4.22) donne

$$x_2 = -\theta(x_1)^{\frac{1}{s_0+1}}.$$

En remplaçant dans (4.23) x_2 par sa valeur, on obtient

$$x_1^{r_2} + (-1)^{r_1} b_i (\theta(x_1)^{\frac{r_1}{s_0+1}}) = 0.$$

Il s'en suit alors que

$$(\theta(x_1)^{\frac{r_1}{s_0+1}}) = (-1)^{r_1+1} \frac{1}{b_i} x_1^{r_2}.$$

Finalement, comme la fonction θ est positive,

$$\theta(x_1) = |b_i|^{-\frac{s_0+1}{r_1}} |x_1|^{\frac{r_2(s_0+1)}{r_1}},$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur la fonction θ . L'ensemble J est donc réduit à l'origine. Par suite $M_2 = \{0\}$, ce qui, en appliquant le principe d'invariance de LaSalle, permet de conclure que le système bouclé (4.15)(4.20) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Le lemme suivant sera, souvent, utilisé dans le reste de la démonstration.

Lemme 4.3 *Étant donné un réel b et des rationnels $r, \tilde{r}$ tels que $\tilde{r} \geq 1$ et $r > 1$. Alors, pour tout entiers i, j et p vérifiant*

$$p > \frac{r\tilde{r}}{r-1} \geq \frac{2i}{2j+1} > 1,$$

et pour tout réels δ, β suffisamment grands, la fonction f définie par

$$f(x, y) = |y|^r + by|x|^{\tilde{r}} + \delta x^{\frac{2i}{2j+1}} + \beta x^{2p},$$

est une fonction définie positive et propre.

Preuve: Voir Annexe D.

Nous allons maintenant traiter le cas $n \neq 0$. Pour cela, nous distinguons deux cas selon la parité de r_1 .

b. $n > 0$ et r_1 impair.

Considérons dans ce cas la fonction V_3 définie par

$$V_3(x) = \frac{1}{r_1 + 1} x_2^{r_1+1} + \frac{1}{b_1} x_2 x_1^{r_2} + \delta x_1^{q_1} + \beta x_1^{2p},$$

avec $q_1 = \frac{(r_1 + 1)r_2}{r_1}$.

Il est clair que la fonction V_3 est au moins de classe C^{r_2} (polynomial si $r_1 = 1$), en plus, V_3 est définie positive et propre. En effet, nous avons

$$V_3(x) \geq \tilde{V}_3(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où $\tilde{V}_3$ est définie par

$$\tilde{V}_3(x) = \frac{1}{r_1 + 1} x_2^{r_1+1} - \left| \frac{x_2}{b_1} \right| |x_1|^{r_2} + \delta x_1^{q_1} + \beta x_1^{2p},$$

qui, d'après le Lemme 4.3 et pour δ, β et p suffisamment grandes, est une fonction définie positive et propre.

Considérons la loi de commande définie par

$$u_3(x) = -b_1 \alpha x_1^{s_1} x_2^{s_0} a_4(x) \frac{\partial V_3}{\partial x_1}(x) \prod_{2 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) - (b_1^{-1} x_1^{r_2} + x_2^{r_1}). \quad (4.24)$$

La dérivée de V_3 le long des trajectoires du système bouclé (4.15)(4.24) est donnée par

$$\dot{V}_3(x) = -(b_1^{-1} x_1^{r_2} + x_2^{r_1})^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Alors le système (4.15)(4.24) est stable. Si on note par M_3 le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans

$$E_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_3(x) = 0\}.$$

Il vient que

$$M_3 \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_3(x) = \frac{d\dot{V}_3(x)}{dt} = 0\}.$$

Un raisonnement simple montre que si $x \in M_3$ alors x vérifie

$$\begin{cases} x_1^{r_2} + b_1 x_2^{r_1} = 0 \\ x_1^s x_2^{s_0} \prod_{2 \leq i \leq m} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) = 0, \end{cases} \quad (4.25)$$

ou bien

$$\begin{cases} x_1^{r_2} + b_1 x_2^{r_1} = 0 \\ 2\beta p x_1^{2p-1} + \delta q_1 x_1^{q_1-1} + r_2 b_1^{-1} x_1^{r_2-1} x_2 = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Puisque $b_i \neq b_1$ pour $i = 2 \dots m$, on obtient que le système (4.25) admet comme unique solution, la solution nulle. Il reste à montrer qu'il en est de même pour (4.26). De la première équation de (4.26) on tire

$$x_2 = -b_1^{-\frac{1}{r_1}} x_1^{\frac{r_2}{r_1}}. \quad (4.27)$$

Maintenant si on substitue cette valeur de x_2 dans la seconde équation de (4.26) on obtient

$$x_1^{q_1-1} \left(-r_2 b_1^{-\frac{1+r_1}{r_1}} + q_1 \delta + 2p\beta x_1^{2p-q_1} \right) = 0. \quad (4.28)$$

Puisque

$$2p - q_1 = 2\left(p - \frac{r_1 + 1}{2} \frac{r_2}{r_1}\right),$$

on déduit que la quantité

$$x_1^{2p-q_1} = x_1^{2\left(p - \frac{r_1 + 1}{2} \frac{r_2}{r_1}\right)},$$

est strictement positive pour tout $x_1 \neq 0$. Il s'en suit que pour δ suffisamment grande, l'équation (4.28) admet $x_1 = 0$ comme unique solution.

Le système (4.26) donne alors $x_2 = 0$, ce qui implique que l'ensemble M_3 est réduit à l'origine. Le principe d'invariance de LaSalle nous permet alors de conclure que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (4.15)(4.24).

C. $n > 0$ et r_1 est pair.

Nous allons commencer l'étude de ce cas par remarquer que sous ces hypothèses, on peut, sans perte de généralité, supposer que, d'une part, $\bar{k}$, le degré d'homogénéité du polynôme $\bar{a}$, est pair. En effet, comme a_4 ne change pas de signe, alors le degré d'homogénéité $\tilde{k}$ du polynôme a_4 est pair. Or, en identifiant les monômes de plus haut degré en x_2 dans les quantités $\bar{a}(\lambda^{r_1}x_1, \lambda^{r_2}x_2)$ et $\lambda^{\tilde{k}}\bar{a}(x_1, x_2)$, on obtient $\tilde{k} = s_0r_2 + r_1(s + nr_2) + \bar{k}$. Comme r_1, s_0 sont pairs, on déduit que $\bar{k}$ est pair. D'autre part, r_2 est impair et $r_2 \geq 3$. En effet si r_2 est pair, la fonction polynomiale $\bar{a}$ sera $(\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}, \frac{\bar{k}}{2})$ -homogène. Et comme k et r_1 sont pairs, alors, d'après les hypothèses du Théorème 4.2, $r_2 > 1$.

Nous allons distinguer plusieurs cas selon les signes des b_i ($i = 1, \dots, n$).

C.1. Les b_i ($i = 1, \dots, n$) sont tous du même signe.

On suppose, en utilisant, si nécessaire, un changement de variables puis un feedback préliminaire, que les b_i ($i = 1, \dots, n$) sont tous négatifs.

Comme s_0 est pair, on suppose aussi, en re-appliquant, si nécessaire, le Lemme 4.2, que $s_0 \leq 2$.

Posons

$$a_5(x) = \alpha x_1^{s_0} a_4(x) \prod_{2 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} - |b_i| x_2^{r_1}),$$

alors

$$\bar{a}(x) = x_2^{s_0} (x_1^{r_2} - |b_1| x_2^{r_1}) a_5(x).$$

Dans la suite de ce paragraphe, φ et ψ désignent les fonctions scalaires suivantes

$$\psi(y) = \sqrt{|b_1|} |y| y^{\frac{r_1}{2}-1},$$

et

$$\varphi(y) = \begin{cases} y^{\frac{r_2}{2}} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces notations, considérons la fonction V_4 définie par

$$V_4(x) = \int_0^{x_2} \psi(\tau) d\tau + x_2 \varphi(x_1) + \delta x_1^{q_2} + \beta x_1^{2p},$$

où β, δ désignent des constantes positives suffisamment grandes, p un entier non nul, et q_2 est tel que

$$q_2 = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } r_2 = 3 \text{ et } r_1 \notin \{2, 4, 6\} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Il est clair que, puisque $r_2 \geq 3$, V_4 est au moins de classe C^1 , de plus, nous avons

$$V_4(x) \geq \tilde{V}_4(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où $\tilde{V}_4$ est définie par

$$\tilde{V}_4(x) = \int_0^{x_2} \psi(\tau) d\tau - |x_2| |x_1|^{\frac{r_2}{2}} + \delta x_1^{q_2} + \beta x_1^{2p},$$

qui, d'après le Lemme 4.3, est définie positive et propre. Il s'en suit que V_4 l'est aussi.

Considérons maintenant la loi de commande continue définie par

$$u_4(x) = \begin{cases} -x_2^{s_0} (\varphi(x_1) - \psi(x_2)) a_5(x) \frac{\partial V_4}{\partial x_1}(x) - (\varphi(x_1) + \psi(x_2)) & \text{si } x_1 \geq 0 \\ e^{-c\psi^2(x_2)} (x_1^{r_2} - |b_1| x_2^{r_1}) a_5(x) \frac{\partial V_4}{\partial x_1}(x) - \psi(x_2) & \text{si } x_1 \leq 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

où c une constante suffisamment grande.

La dérivée de V_4 le long des trajectoires du système bouclé (4.15)(4.30) est donnée par

$$\dot{V}_4(x) = \begin{cases} -(\varphi(x_1) + \psi(x_2))^2 & \text{si } x_1 \geq 0 \\ \left(\psi(x_2) e^{-c\psi^2(x_2)} + x_2^{s_0} \right) (x_1^{r_2} - |b_1| x_2^{r_1}) a_5(x) \frac{\partial V_4}{\partial x_1}(x) - \psi^2(x_2) & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases} \quad (4.31)$$

Il est clair que lorsque $x_1 \geq 0$, on a $\dot{V}_4(x) \leq 0$.

Supposons maintenant que $x_1 \leq 0$. Tout d'abord, il est évident que

$$\frac{\partial V_4}{\partial x_1}(x) = 2p\beta x_1^{2p-1} + \delta q_2 x_1^{q_2-1} \leq 0. \quad (4.32)$$

Ensuite, puisque r_2 est impair, nous avons

$$(x_1^{r_2} - |b_1|x_2^{r_1}) \leq 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}.$$

Enfin, on vérifie facilement que a_5 ne change pas de signe sur $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$. Or, la condition (H) assure l'existence de $\mu \in \mathbb{R}$ telle que $\bar{a}(-1, \mu) > 0$. Donc

$$\mu^{s_0}((-1)^{r_2} - |b_1|\mu^{r_1})a_5(-1, \mu) > 0.$$

On en déduit que $a_5(x) \leq 0$ pour tout $x_1 \leq 0$.

Pour montrer que $\dot{V}_4(x) \leq 0$ quand $x_1 \leq 0$, il suffit alors de vérifier que

$$\psi(x_2)e^{-c\psi^2(x_2)} + x_2^{s_0} \geq 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R},$$

ou encore, puisque s_0 est pair,

$$(|b_1|^{\frac{1}{2}}\epsilon_{r_1}(x_2)x_2^{\frac{r_1}{2}-s_0}e^{-c\psi^2(x_2)} + 1) \geq 0 \quad \forall x_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

avec $\epsilon_{r_1}(y) = (\text{sgn}(y))^{\frac{r_1}{2}+1}$.

On peut, sans perte de généralité, supposer que $\frac{r_1}{2} - s_0 \geq 0$. En effet, si $\frac{r_1}{2} - s_0 < 0$, alors $r_1 = s_0 = 2$. Dans ce cas, en re-appliquant le Lemme 4.2 avec $h(x_2) = x_2^{\frac{4}{3}}$, on se ramène à la situation $r_1 = 2$, $s_0 = \frac{2}{3}$ qui satisfait la condition $\frac{r_1}{2} - s_0 \geq 0$.

Si on note par g la fonction réelle définie par

$$g(y) = |b_1|^{\frac{1}{2}}\epsilon_{r_1}(y)y^{\frac{r_1}{2}-s_0}e^{-cy^{r_1}} + 1,$$

on a bien g continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $g(0) = 1 > 0$. De plus, g admet des limites positives à l'infini ($+\infty$ si $s_0 \neq 0$, et 1 si $s_0 = 0$).

Prouver l'inégalité (4.33), revient alors à montrer que g est positive en ses extrémums. Nous avons

$$g'(y) = |b_1|^{\frac{1}{2}}\epsilon_{r_1}(y)\left(\left(\frac{r_1}{2} - s_0\right)y^{\frac{r_1}{2}-s_0-1} - cr_1y^{\frac{r_1}{2}-s_0+r_1-1}\right)e^{-cy^{r_1}},$$

par suite

$$g'(y) = 0 \iff y^{\frac{r_1}{2}-s_0-1}\left(\frac{r_1}{2} - s_0 - cr_1y^{r_1}\right) = 0.$$

Le minimum de la fonction g est donc atteint en l'un des points suivants

$$y_0 = 0 ,$$

$$y_1 = \left(\frac{r_1 - 2s_0}{2r_1 c} \right)^{\frac{1}{r_1}} \quad \text{ou}$$

$$y_2 = - \left(\frac{r_1 - 2s_0}{2r_1 c} \right)^{\frac{1}{r_1}} .$$

Des calculs directs montrent que $g(0) \geq 0$, $g(y_1) \geq 0$ (y_1 étant positive) et que

$$g(y_2) = -|b_1|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r_1 - 2s_0}{2|b_1|cr_1} \right)^{\frac{r_1 - 2s_0}{2r_1}} e^{-\frac{r_1 - 2s_0}{2r_1}} + 1.$$

Pour avoir $g(y_2) \geq 0$, il suffit alors de supposer que la constante c , définie dans (4.30), est telle que

$$c > \frac{r_1 - 2s_0}{2r_1} |b_1|^{\frac{2s_0}{r_1 - 2s_0}} .$$

L'inégalité (4.33) étant satisfaite, alors $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, V_4 est une fonction de Lyapunov faible pour le système bouclé (4.15)(4.30).

Soit M_4 le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans

$$E_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_4(x) = 0\}.$$

Un raisonnement simple montre que

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_4(x) = 0\} \subseteq L_1 \cup L_2,$$

où L_1 et L_2 sont des ensembles définis par:

$$L_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} / \varphi(x_1) + \psi(x_2) = 0\},$$

et

$$L_2 = \mathbb{R}^- \times \{0\}.$$

Comme M_4 est invariant par le champ bouclé, alors, pour tout x dans $M_4 \cap L_2$, on a

$$x_2 = 0$$

et

$$x_1 a_5(x_1, 0) \frac{\partial V_4}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0.$$

Mais puisque $x_1 \leq 0$, il vient, en utilisant (4.32) et (4.17), que $x_1 = 0$ et donc $x = 0$. Ceci implique que $M_4 \cap L_2$ est réduit à l'origine.

Maintenant, si $x \in M_4 \cap L_1$, comme $b_i \neq b_1$ pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$ alors, x est solution du système suivant

$$\begin{cases} \varphi(x_1) + \psi(x_2) = 0 \\ x_2 \varphi'(x_1) + q \delta x_1^{q_2-1} + 2p\beta x_1^{2p-1} = 0 \\ x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

De la première équation de (4.34) on tire

$$x_2 = -|b_1|^{-\frac{1}{r_1}} x_1^{\frac{r_2}{r_1}}. \quad (4.35)$$

En remplaçant x_2 par sa valeur dans la seconde équation de (4.34), on obtient

$$-\frac{r_2}{2} |b_1|^{-\frac{1}{r_1}} x_1^{\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_2}{2} - 1} + q_2 \delta x_1^{q_2-1} + 2p\beta x_1^{2p-1} = 0. \quad (4.36)$$

D'après (4.29), nous avons $\frac{r_2}{2} \geq q_2$. Alors, pour des constantes p, δ et β suffisamment grandes, l'équation (4.36) admet $x_1 = 0$ comme unique solution. L'équation (4.35) implique alors que $x_2 = 0$.

M_4 est donc réduit à $\{0\}$. En utilisant le principe d'invariance de LaSalle, on déduit que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (4.15)(4.30).

C.2. Il existe $i_0, j_0 \leq n$ tels que $b_{i_0} b_{j_0} < 0$.

On suppose, sans perte de généralité, que $b_1 > 0$ et $b_2 < 0$. Soit maintenant η , la fonction scalaire définie par

$$\eta(y) = \begin{cases} b_1 y^{r_1} & \text{si } y \geq 0 \\ b_2 y^{r_1} & \text{si } y \leq 0. \end{cases}$$

$\bar{a}$ devient alors

$$\bar{a}(x) = \alpha x_1^s x_2^{s_0} (x_1^{r_2} + \eta(x_2))(x_1^{r_2} + \eta(-x_2)) a_4(x) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}).$$

Considérons alors la fonction suivante

$$V_5(x) = \int_0^{x_2} \eta(\tau) d\tau + x_2 x_1^{r_2} + \delta x_1^2 + \beta x_1^{2p},$$

avec $\delta, \beta > 0$ et p suffisamment grandes.

V_5 est bien une fonction de classe C^{r_1} , définie positive et propre. En effet, il suffit de remarquer que

$$V_5(x) \geq \tilde{V}_5(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

où $\tilde{V}_5$ est définie par

$$\tilde{V}_5(x) = \inf(b_1, -b_2)x_2^{r_1+1} - |x_2||x_1|^{r_2} + \delta x_1^2 + \beta x_1^{2p},$$

qui, d'après le lemme 4.2, est définie positive et propre.

Considérons maintenant le feedback défini par

$$u_5(x) = -\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} (x_1^{r_2} + \eta(-x_2)) a_4(x) \frac{\partial V_5}{\partial x_1}(x) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) - (x_1^{r_2} + \eta(x_2)). \quad (4.37)$$

Un calcul direct, montre que $\dot{V}_5$, la dérivée de V_5 le long des trajectoires du système bouclé (4.15)(4.37), est donnée par

$$\dot{V}_5(x) = -(x_1^{r_2} + \eta(x_2))^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Alors le système (4.15)(4.37) est stable.

Notons par M_5 le plus grand ensemble invariant par le champ bouclé, et contenu dans

$$E_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 / \dot{V}_5(x) = 0\}.$$

Il vient que pour tout $x \in M_5$, on a

$$\begin{cases} x_1^{r_2} + \eta(x_2) = 0 \\ (x_1^{r_2} + \eta(-x_2)) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

ou bien

$$\begin{cases} x_1^{r_2} + \eta(x_2) = 0 \\ r_2 x_2 x_1^{r_2-1} + 2\delta x_1 + 2p\beta x_1^{2p-1} = 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Puisque $b_i \neq b_j$ pour $i \neq j$, il est clair que $x = 0$ est la seule solution de (4.38).

Maintenant, supposons que x vérifie (4.39). De la première équation de (4.39) on tire que

$$x_2 = b_1^{-\frac{1}{r_1}} |x_1|^{\frac{r_2}{r_1}} \quad \text{si } x_1 < 0$$

et

$$x_2 = b_2^{-\frac{1}{r_1}} x_1^{\frac{r_2}{r_1}} \quad \text{si } x_1 > 0.$$

En remplaçant, dans la deuxième équation de (4.39), x_2 par sa valeur puis en multipliant le résultat par x_1 on obtient

$$-r_2 b_1^{-\frac{1}{r_1}} |x_1|^{\frac{r_2}{r_1} + r_2} + 2\delta x_1^2 + 2p\beta x_1^{2p} = 0 \quad \text{si } x_1 < 0, \quad (4.40)$$

et

$$r_2 b_2^{-\frac{1}{r_1}} x_1^{\frac{r_2}{r_1} + r_2} + 2\delta x_1^2 + 2p\beta x_1^{2p} = 0 \quad \text{si } x_1 > 0. \quad (4.41)$$

du fait que $r_2 \geq 3$, ces deux équations admettent, pour δ, β et p suffisamment grandes, $x = 0$ comme unique solution. Il s'en suit alors que M_5 est réduit à l'origine. En utilisant le principe d'invariance de LaSalle, on déduit que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (4.15)(4.37).

Ceci termine la démonstration du Théorème 4.2. □

Après des modifications légères de la démonstration ci-dessus, on obtient aussi la proposition suivante qui concerne le cas où aucune des conditions (i), (ii), (iii) du Théorème 4.2, n'est satisfaite.

Proposition 4.1 *Supposons k, r_1 pairs et $r_2 = 1$. S'il existe $i_0, j_0 \leq n$ tels que $b_{i_0} b_{j_0} < 0$, alors (H) est une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation du système (4.15).*

Preuve: Il suffit de prendre la loi de commande suivante

$$u_6(x) = -\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_0} (x_1^{r_2} + \eta(-x_2)) a_4(x) \frac{\partial V_6}{\partial x_1}(x) \prod_{3 \leq i \leq n} (x_1^{r_2} + b_i x_2^{r_1}) - (x_1^{r_2} + \eta(x_2)), \quad (4.42)$$

et de considérer la fonction V_6 définie par

$$V_6(x) = \int_0^{x_2} \eta(\tau) d\tau + x_2 x_1^{r_2} + \delta x_1^{\frac{r_1}{r_1-1}} + \beta x_1^{2p},$$

avec $\delta, \beta > 0$ et p suffisamment grandes.

En utilisant le même raisonnement que ci-dessus, on montre que V_6 est une fonction de Lyapunov faible pour le système (4.15)(4.42), puis, en appliquant le principe d'invariance de LaSalle, on obtient la proposition. □

4.3.3 Exemples

Nous allons maintenant montrer sur deux exemples, issus de la littérature, l'apport de la technique utilisée ici.

Comme premier exemple, nous considérons une classe de système étudiée dans [DMK] par W.P. Dayawansa, C.F. Martin et G. Knowles. Nous montrons que la technique développée ici, fournit une loi de commande stabilisante qui est polynomiale, dans certaines situations où dans [DMK], les auteurs proposent un feedback qui est seulement de classe C^1 .

Exemple 4 .

Considérons le cas particulier où dans le système (4.15), le polynôme a est défini par

$$\begin{cases} a(x) = \alpha x_1^\mu + \eta x_2^\nu \\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \mu, \nu \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha, \eta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.43)$$

Il est clair que lorsque $\eta = 0$, la condition (H) est équivalente à $\alpha < 0$ et μ est impair. Dans ce cas, on a le feedback stabilisant $u(x) = -x_2$.

Supposons maintenant que $\eta \neq 0$. On peut, sans perte de généralité prendre $\eta = -1$.

Soit μ_i et ν_i ($i = 1, 2$) des entiers tels que

$$\mu = \mu_1 2^{\mu_2} \quad \text{et} \quad \nu = \nu_1 2^{\nu_2},$$

où μ_1 et ν_1 sont des entiers impairs.

Nous avons la proposition suivante:

Proposition 4.2 *Supposons (H) est satisfaite. Si $\nu_2 < \mu_2$, alors le système (4.15)(4.43) est globalement asymptotiquement stable par un feedback polynomial.*

Preuve: *Sous les hypothèses ci-dessus, on peut toujours écrire le polynôme a de la manière suivante*

$$a(x) = (\alpha_1 x_1^{\mu_1 2^{\mu_2}} - x_2^{\nu_1}) P(x), \quad (4.44)$$

où P un polynôme défini et positif.

En effet, la condition $\nu_2 < \mu_2$ implique que $\mu_2 \neq 0$, par suite μ est pair. Si $\nu_2 = 0$, on a la forme (4.44). Si maintenant $\nu_2 \neq 0$, la condition (H) implique alors que α est positive. En décomposant la fonction polynomiale a , on obtient:

$$(\alpha^{\frac{1}{2}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2}} - x_2^{\nu_1 2^{\nu_2}}) = (\alpha^{\frac{1}{2}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2-1}} - x_2^{\nu_1 2^{\nu_2-1}}) (\alpha^{\frac{1}{2}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2-1}} + x_2^{\nu_1 2^{\nu_2-1}}).$$

Par une suite de décompositions analogues on arrive à

$$a(x) = \left(\alpha^{\frac{1}{2^{\nu_2}}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2 - \nu_2}} - x_2^{\nu_1} \right) \prod_{i=1}^{\nu_2} \left(\alpha^{\frac{1}{2^i}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2 - i}} + x_2^{\nu_1 2^{\nu_2 - i}} \right).$$

Finalement, si on pose

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\nu_2} \left(\alpha^{\frac{1}{2^i}} x_1^{\mu_1 2^{\mu_2 - i}} + x_2^{\nu_1 2^{\nu_2 - i}} \right) \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha^{\frac{1}{2^{\nu_2}}},$$

on obtient (4.44).

En utilisant comme fonction de Lyapunov, la fonction polynomiale définie par

$$V(x) = \frac{1}{\nu_2 + 1} x_2^{\nu_2 + 1} + x_2 x_1^{\mu_1 2^{\mu_2}} + \delta x_1^2 + \beta x_1^{2p},$$

qui, d'après le Lemme 4.3, est définie positive et propre et en procédant comme dans la démonstration du Théorème 4.2 (cas où $n > 0$ et r_1 impair), on peut montrer que la loi de commande polynomiale donnée par

$$u(x) = -\alpha_1 P(x) \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) - (x_1^{\mu_1 2^{\mu_2}} + x_2^{\nu_1}), \quad (4.45)$$

est stabilisante pour le système (4.15)(4.44).

Ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

Dans le deuxième exemple, nous allons améliorer un résultat proposé dans [Hu].

Exemple 5 .

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1^2 + \lambda_1 x_1 x_2^m + \lambda_2 x_2^{2m} \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (4.46)$$

Il est clair que si

$$\Delta = \lambda_1^2 - 4\alpha\lambda_2 \leq 0,$$

l'origine ne peut être rendu attractif. Supposons alors que $\Delta > 0$.

Il est montré dans [Hu] que si m est impair, le système (4.46) est localement stabilisable. Maintenant, puisque la dérive du système (4.46) est une fonction polynomiale $(m, 1, 2m)$ -homogène, on peut, en utilisant la méthode développée dans le sous paragraphe précédent,

d'une part, montrer que lorsque m est impair, le système (4.46), bouclé avec la loi de commande (4.30), admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

D'autre part, dans le cas où m est pair, si on suppose que $\alpha\lambda_2 < 0$, le système (4.46) devient alors sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_1 - \bar{\lambda}_1 x_2^m)(x_1 - \bar{\lambda}_2 x_2^m) \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad (4.47)$$

où $\bar{\lambda}_1 = \frac{-\lambda_1 - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\bar{\lambda}_2 = \frac{-\lambda_1 + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ avec $\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 < 0$.

En appliquant le résultat de la Proposition 4.1, on déduit que le système (4.47) est globalement asymptotiquement stable.

4.3.4 Étude d'un cas particulier.

Le but de ce sous-paragraphe, est d'étudier la stabilisation du système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^s (x - y^2) \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (4.48)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $s \in \mathbb{N}$

qui correspond à la situation critique où $r_2 = 1, r_1$ pair et tous les b_i sont de même signe.

Pour ce système, on a le résultat suivant

Proposition 4.3 *Le système (4.48) est stabilisable par feedback continu, si et seulement si, la condition (H) est satisfaite.*

Preuve: Il est clair que (H) est une condition nécessaire pour la stabilisation du système (4.48). Supposons donc que (H) est vérifiée. Pour stabiliser le système (4.48), nous allons utiliser le lemme suivant

Lemme 4.4 ([K])

Étant donné le système défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.49)$$

S'il existe une fonction continue V , définie positive et propre telle que les deux conditions suivantes sont satisfaites

(i) $V(X_t(x_0)) \leq V(x_0)$ pour tout $t \geq 0$,

(ii) $[V(X_t(x_0)) = V(x_0) \text{ pour tout } t \geq 0] \Rightarrow x_0 = 0$.

Alors le système (4.49) est globalement asymptotiquement stable.

Considérons maintenant, la loi de commande suivante

$$u(x, y) = \begin{cases} -\alpha(\sqrt{x} - y) \left(\frac{1}{2} x^{s-\frac{1}{2}} (\sqrt{x} + y) + x^{s+1} \right) - (\sqrt{x} + y) & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.50)$$

Et soit V la fonction définie par

$$V(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} ((\sqrt{x} + y)^2 + x^2) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} (x^2 + y^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

V est continue, différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, y) / y \in \mathbb{R}\}$ définie positive et propre. Dans le demi-plan $x \leq 0$, le système bouclé (4.48)(4.50) s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^s (x - y^2) \\ \dot{y} = -y. \end{cases} \quad (4.51)$$

L'hypothèse (H), implique que $\alpha < 0$ et s est pair, ou bien $\alpha > 0$ et s est impair. Il est clair que dans ce cas, l'origine est attractive.

Supposons maintenant que $x > 0$. Le calcul de $\dot{V}$, la dérivée de V le long des trajectoires du système (4.48)(4.50), donne

$$\dot{V}(x) = -(\sqrt{x} + y)^2 \leq 0.$$

Soit maintenant $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ une solution complète du système bouclé (4.48)(4.50), contenue dans l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x} + y = 0\}.$$

On a alors

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1(t) = 0 \\ \dot{\gamma}_2(t) = -\alpha \gamma_1(t)^{s+1} (\sqrt{\gamma_1(t)} - \gamma_2(t)). \end{cases} \quad (4.52)$$

On déduit que $\gamma_1(t) = \gamma_1(0)$ pour tout $t \geq 0$, donc

$$\gamma_2(t) = -\sqrt{\gamma_1(0)} \quad \forall t \geq 0,$$

par suite

$$\dot{\gamma}_2(t) = 0.$$

Finalement, $\gamma_1(0), \gamma_2(0)$ vérifient le système

$$\begin{cases} \sqrt{\gamma_1(0)} + \gamma_2(0) = 0 \\ -\alpha\gamma_1(0)^{s+1}(\sqrt{\gamma_1(0)} - \gamma_2(0)) = 0, \end{cases} \quad (4.53)$$

qui admet comme unique solution le couple $(0, 0)$. En appliquant le Lemme 4.4, on conclut que le système (4.48)(4.50) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration de la Proposition 4.3. □

4.4 Remarque de conclusion

La méthode développée ici est générale, elle traite presque l'ensemble de tout les systèmes homogènes plans . Dans le cas où le système est stabilisable, la loi de commande stabilisante est donnée explicitement . En outre, notre technique permet de retrouver des résultats de la littérature et d'améliorer certains d'entre eux. Cependant, concernant la régularité du feedback stabilisant, dans certaines situations, cette technique ne donne pas le feedback stabilisant le plus régulier. Ainsi, pour le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2(x + y^n) \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (4.54)$$

la technique proposée ici donne un feedback continu, alors que dans le cas $n = 3$, R. Outbib et G Sallet proposent dans [OS2], le feedback polynomial stabilisant suivant

$$u(x) = -(y^3 + 2x)(3y^2 + 2).$$

Il y a aussi l'exemple suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2(x - 2y^3) \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (4.55)$$

étudié par W.M. Boothby et R. Marino dans [BM], pour lequel les auteurs, en se basant sur une analyse géométrique du système, proposent le feedback stabilisant

$$u(x) = (x - y^3)^3,$$

tandis qu'avec la méthode utilisée ici, on aboutit à un feedback qui est seulement de classe C^2 .

Le problème de la recherche du feedback stabilisant le plus régulier, est un problème ardu, qui conduit à des questions, à notre avis, intéressantes. Par exemple, concernant le système (4.54), lorsque $n = 3$ on a un feedback stabilisant qui est polynomial. Quand $n = 4$, le système n'est évidemment pas stabilisable. Dans le cas $n = 5$, le système est stabilisable, mais on ne dispose, jusqu'à présent, que d'un feedback stabilisant continu. Existe-il un feedback stabilisant de classe C^1 ?

5

Stabilisation par ajout d'intégrateurs

5.1 Introduction

Dans cette partie de la thèse on va s'intéresser au problème de la stabilisation globale des systèmes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (5.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ et f est un champ de vecteurs au moins de classe C^1 qui vérifie $f(0, 0) = 0$.

Il est bien connu (cf. [BI][Ko][Ts]) que, lorsque f est de classe C^∞ , si le système réduit

$$\dot{x} = f(x, v) \quad (5.2)$$

est globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback $v = \bar{v}(x)$ de classe C^∞ , alors le système (5.1) l'est aussi. Plus précisément, dans [Ts], il est montré que si (5.2) est stabilisable par un feedback de classe C^r ($r \geq 2$), alors (5.1) est stabilisable par un feedback de classe C^{r-1} .

La démonstration classique est basée sur une procédure d'élimination (voir par exemple la démonstration du Théorème 2.1 [BI]). La loi de commande utilisée pour prouver la stabilisabilité de (5.1) dépend d'une fonction de Lyapunov stricte du système bouclé

$$\dot{x} = f(x, \bar{v}(x)). \quad (5.3)$$

Malheureusement, une telle fonction qui, d'après le théorème inverse de Lyapunov, existe, n'est pas toujours possible à exhiber. Par conséquent, on n'a pas explicitement la loi de commande stabilisante pour le système (5.1).

Des auteurs (cf. [BIW][IS][Oul]), en utilisant le principe d'invariance de LaSalle, ont montré qu'on peut construire une loi de commande stabilisante qui dépend seulement d'une fonction de Lyapunov faible du système (5.3).

Il est à noter que cette technique de stabilisation a été utilisée par E.D. Sontag et H.J. Sussmann (cf. [SoSu]), pour répondre au problème de stabilisation des équations de la vitesse angulaire pour un corps rigide qui présente une symétrie.

Un premier objectif dans ce chapitre, est d'affaiblir les hypothèses classiques pour la stabilisation par ajout d'intégrateurs. En particulier, nous allons proposer une nouvelle démonstration pour prouver la stabilisation du système (5.1) quand (5.2) est stabilisable.

Un deuxième objectif consiste à proposer, dans un cas particulier, un nouveau feedback stabilisant pour (5.1) qui ne dépend d'aucune fonction de Lyapunov. Plus précisément, nous allons traiter le cas où le système (5.3) est homogène. Notre motivation est due au fait que la démonstration de la stabilité globale du système (5.3) peut être basée sur le théorème de Coleman (cf. Théorème 2.8, Chapitre 2), dans des telles situations on ne connaît même pas des fonctions de Lyapunov faibles pour le système (5.3).

Comme conséquence de notre théorème principal, des nouveaux résultats sur la stabilisation par feedback dynamique seront proposés. En particulier, on va montrer que si un système analytique de la forme (5.2) est stabilisable par un feedback analytique, alors le système augmenté (5.1) est aussi stabilisable par un feedback analytique

Dans ce qui suit, nous allons supposer, sans perte de généralité, que $\bar{v}(x) \equiv 0$. En effet, si $\bar{v}(x) \not\equiv 0$, en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} x := x \\ y := y - \bar{v}(x), \end{cases} \quad (5.4)$$

le système (5.1) devient alors

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y) \\ \dot{y} = u - J(\bar{v})(x)f_1(x, y), \end{cases} \quad (5.5)$$

où f_1 est définie par $f_1(x, y) = f(x, y + \bar{v}(x))$ et $J(\bar{v})$, désigne le jacobien de $\bar{v}$.

Puis, en utilisant le feedback préliminaire

$$u := u - J(\bar{v})(x)f(x, y) ,$$

on obtient alors un système équivalent, de la forme (5.1), pour lequel le système réduit (5.2) est stabilisable avec $\bar{v}(x) \equiv 0$. Ainsi, on supposera, sans perte de généralité, que le système zéro dynamique

$$\dot{x} = f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, 0), \quad (5.6)$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Dans la suite de ce chapitre on utilisera G pour désigner la quantité définie par

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, ty) dt . \quad (5.7)$$

$\|\cdot\|_n$ désignera la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|_{n \times m}$, la norme dans $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices réelles d'ordre (n, m)) définie par $\|A\|_{n \times m}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

5.2 Résultat principal

Notre premier résultat concerne le cas où une fonction scalaire V différentiable, propre et positive pour $\|x\|_n > M$ ($M > 0$) et telle que

$$\dot{V}_{(5.6)} = \langle f_0(x), \nabla V(x) \rangle < -1 \quad \text{pour} \quad \|x\|_n > M. \quad (5.8)$$

est connue.

Remarque 5 *Comme le système (5.6) est supposé être globalement asymptotiquement stable à l'origine, une telle fonction V existe toujours (voir Annexe E).*

Théorème 5.1 *Pour toute fonction scalaire k de classe C^∞ , qui vérifie*

$$k(x, y) \geq \|G(x, y)\|_{n \times m}^2 \|\nabla V(x)\|_n^2 + 1, \quad (5.9)$$

le système (5.1) bouclé par

$$u(x, y) = -y k(x, y), \quad (5.10)$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, nous allons d'abord énoncer un lemme qui sera utilisé par la suite.

Considérons le système défini par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = F_1(z) \\ \dot{z}_2 = -z_2 F_2(z), \end{cases} \quad (5.11)$$

où $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. F_1 et F_2 deux fonctions au moins de classe C^1 avec $F_2(z) > a > 0$.

Lemme 5.1 *Si le système suivant*

$$\dot{z}_1 = F_1(z_1, 0), \quad (5.12)$$

est globalement asymptotiquement stable à l'origine, et s'il existe une fonction scalaire différentiable et propre $V(z)$ qui vérifie

$$\dot{V}_{(5.11)}(z) \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m} / \|z_1\| \geq \alpha\},$$

où α est une constante positive.

Alors le système (5.11) est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Preuve: Voir Annexe F.

Démonstration du Théorème 5.1. Considérons la fonction définie par

$$W(x, y) = V(x) + \frac{1}{2} \|y\|_m^2.$$

W est bien une fonction différentiable, positive pour $\|x\|_n > M$ et propre. La dérivée de W le long des trajectoires du système bouclé (5.1)(5.10) est donnée par

$$\dot{W}(x, y) = \dot{V}_{(5.6)}(x) + \nabla V(x)G(x, y)y - \|y\|_m^2 k(x, y).$$

Comme

$$|\nabla V(x)G(x, y)y| \leq \|\nabla V(x)G(x, y)\|_m \|y\|_m,$$

il vient que

$$\dot{W}(x, y) \leq \dot{V}_{(5.6)}(x) + \|\nabla V(x)G(x, y)\|_m \|y\|_m - \|y\|_m^2 k(x, y). \quad (5.13)$$

La partie droite de l'inégalité (5.13) peut être considérée comme un polynôme de degré deux en $\|y\|_m$ avec le discriminant suivant

$$\Delta(x, y) = \|\nabla V(x)G(x, y)\|_m^2 + 4k(x, y)\dot{V}_{(5.6)}(x).$$

En utilisant les inégalités (5.8) et (5.9), on obtient

$$\Delta(x, y) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \|x\|_n \geq M,$$

finalement

$$\dot{W}(x, y) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \|x\|_n \geq M.$$

En appliquant alors le résultat du Lemme 5.1, on déduit que le système bouclé (5.1)(5.10) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration du Théorème 5.1 .

□

5.3 Exemples et applications

5.3.1 Exemples

Les deux exemples suivants, illustrent l'apport du Théorème 5.1.

Exemple 6 *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + \cos x_2 - 1 + yx_1 \\ \dot{x}_2 = \sin^2 x_1 - x_2 + yx_2 \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (5.14)$$

où $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ et $y \in \mathbb{R}$.

le système réduit est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + \cos x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = \sin^2 x_1 - x_2. \end{cases} \quad (5.15)$$

Il est montré dans [MY] que le système (5.15) est globalement asymptotiquement stable à l'origine. Notons que la démonstration de la stabilité asymptotique, proposée dans [MY], ne dépend de l'existence d'aucune fonction de Lyapunov. Maintenant, des calculs simples montrent que la dérivée de $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ le long des trajectoires de (5.15) est négative quand $\|x\|_2$ est suffisamment grande, ainsi, d'après le Théorème 5.1, la fonction définie par

$$u(x, y) = -y(\|x\|_2^4 + 1),$$

est un feedback stabilisant pour (5.14). □

L'exemple suivant, montre l'apport du Théorème 5.1, concernant la régularité du feedback stabilisant, par rapport à la méthode utilisée dans [BI].

Exemple 7 *Soit le système différentiel suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^{\frac{4}{3}} \\ \dot{y} = u. \end{cases} \quad (5.16)$$

où x, y des éléments de $\mathbb{R}$.

Le système réduit est donné par l'équation

$$\dot{x} = -x + v, \quad (5.17)$$

qui est globalement asymptotiquement stable par le feedback $v(x) \equiv 0$.

Comme $f(x, y) = -x + y^{\frac{4}{3}}$ est seulement de classe C^1 , la méthode classique, basée sur la procédure d'élimination, aboutit à une loi de commande de la forme

$$u(x, y) = -\frac{dV}{dx}y^{\frac{1}{3}} - y,$$

où V désigne une fonction de Lyapunov pour le système réduit (5.17).

qui est seulement continue.

Maintenant, en utilisant le résultat du Théorème 5.1, on dispose, pour le système (5.16), d'un feedback stabilisant polynomial donné par

$$u(x, y) = -y(x^2(y^2 + 1) + 1).$$

5.3.2 Deux applications

Comme une première application du Théorème 5.1, on propose une amélioration d'un résultat établi par P.V. Kokotovic et H.J. Sussmann.

Il est montré dans [SuK] (voir Théorème 6.1), que si la zéro dynamique est globalement asymptotiquement stable, alors le système (5.1) est semi-globalement stabilisable par une famille de lois de commande linéaires, (c'est à dire que pour tout compact K , il existe une loi de commande linéaire $v = v_K(x)$ tel que le système $\dot{x} = f(x, v_K(x))$ soit localement asymptotiquement stable, et que le bassin d'attraction contient K).

Le corollaire suivant qui constitue une première application du Théorème 5.1, montre qu'en plus de la semi-globale stabilité par une famille de feedback linéaire, le système bouclé est globalement asymptotiquement stable.

Corollaire 5.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 telle que $\dot{x} = f(x, 0)$ est globalement asymptotiquement stable à l'origine. Alors pour tout compact K de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, il existe u_K , un feedback de classe C^∞ qui est linéaire sur K , tel que le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u_K(x, y), \end{cases}$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve: Soit ρ un réel positif pour lequel la boule $B_\rho(0)$, de centre l'origine et de rayon ρ , contient le compact K . Soit aussi C_K la constante définie par

$$C_K = \sup_{(x,y) \in B_{\rho+1}(0)} (g(x,y) \|\nabla V(x,y)\|^2 + 1),$$

avec g une fonction de classe C^∞ qui vérifie $g(x,y) \geq \|G(x,y)\|_{n \times m}^2$.

Pour établir le corollaire, nous allons utiliser le résultat du Théorème 5.1 avec k définie par

$$k(x,y) = C_K + (g(x,y) \|\nabla V(x,y)\|^2 + 1) \theta(x,y), \quad (5.18)$$

avec θ une fonction de classe C^∞ nulle sur $B_\rho(0)$ et supérieure à 1 à l'extérieur de $B_{\rho+1}(0)$.

Un choix possible de θ est donné par:

$$\theta(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|x\|_n^2 + \|y\|_m^2 - \rho^2}} + 1 & \text{si } \|x\|_n^2 + \|y\|_m^2 > \rho^2. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, il est facile de vérifier que la condition (5.9) est satisfaite et que le feedback défini par (5.10)(5.18) est linéaire sur K et qu'il est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

D'où le corollaire. □

Une deuxième application concerne le cas des systèmes analytiques. Pour un système globalement asymptotiquement stable à l'origine, même s'il est polynomial, on peut seulement garantir que la fonction de Lyapunov, dont l'existence est assurée par le théorème inverse de Lyapunov, est de classe C^∞ mais non nécessairement analytique. Ainsi, la démonstration classique (voir par exemple [BI]), assure seulement, pour le système augmenté, un feedback de classe C^∞ .

Le but du corollaire suivant, est de montrer que si un système analytique est stabilisable par un feedback analytique, alors le système augmenté est aussi stabilisable par un feedback analytique.

Corollaire 5.2 *Supposons que le système analytique suivant*

$$\dot{x} = f(x,u), \quad (5.19)$$

est stabilisable par un feedback analytique. Alors le système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = v, \end{cases} \quad (5.20)$$

est stabilisable par un feedback analytique.

Preuve: Considérons k , une fonction de classe C^∞ qui vérifie la condition (5.9). D'après le théorème de Whitney (voir par exemple [Gr]¹ page 130), il existe une fonction analytique $\bar{k}$ telle que

$$|\bar{k}(x, y) - k(x, y)| \leq 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Maintenant, soit k_1 la fonction définie par

$$k_1(x, y) = \bar{k}(x, y) + 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Il est clair que cette fonction est analytique et vérifie la condition (5.9). Finalement, un feedback analytique qui stabilise le système augmenté (5.20) est donné par

$$v(x, y) = J(\bar{u})(x)f(x, y) - yk_1(x, y),$$

où $\bar{u}(x)$ est le feedback analytique stabilisant pour (5.19).

D'où le corollaire. □

1. Nous tenons à remercier J.M. Coron de nous avoir indiqué cette référence.

5.4 Cas de système à zéro dynamique homogène

Dans ce paragraphe, nous allons considérer le cas où le système zéro dynamique est homogène (i.e. toutes les composantes de $f_0(x)$ sont homogènes de même degré $\lambda \in \mathbb{N}^*$) et asymptotiquement stable. Le but est de prouver que dans ce cas, on peut, sans exiger la connaissance d'aucune fonction de Lyapunov, donner explicitement, un feedback stabilisant pour le système (5.1).

Théorème 5.2 *Le système bouclé défini à partir de (5.1) avec la loi de commande*

$$u(x, y) = -y \left(\|G(x, y)\|_{n \times m}^2 + 1 \right), \quad (5.21)$$

est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Preuve: Le système (5.6) étant homogène asymptotiquement stable, il existe alors, d'après le théorème de Kurzweil, une fonction scalaire homogène $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive qui vérifie

$$\dot{H}_{(5.6)}(x) = \langle f_0(x), \nabla H(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Considérons maintenant la fonction W_1 définie par

$$W_1(x, y) = H(x) e^{\frac{1}{2}\|y\|_m^2} + \frac{1}{2}\|y\|_m^2.$$

Un calcul simple montre que $\dot{W}_1$, la dérivée de W_1 le long des trajectoires du système bouclé (5.1)(5.21), est donnée par

$$\dot{W}_1(x, y) = e^{\frac{1}{2}\|y\|_m^2} P(x, y) - \|y\|_m^2 \left(\|G(x, y)\|_{n \times m}^2 + 1 \right),$$

où P est définie par

$$P(x, y) = \dot{H}_{(5.6)}(x) + \nabla H(x) G(x, y) y - \|y\|_n^2 H(x) \left(\|G(x, y)\|_{n \times m}^2 + 1 \right),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

En utilisant l'inégalité

$$|\nabla H(x) G(x, y) y| \leq \|\nabla H(x) G(x, y)\|_m \|y\|_m,$$

on déduit que

$$P(x, y) \leq \dot{H}_{(5.6)}(x) + \|\nabla H(x) G(x, y)\|_m \|y\|_m - \|y\|_m^2 H(x) \left(\|G(x, y)\|^2 + 1 \right). \quad (5.22)$$

La partie droite de l'inégalité (5.22) peut être considérée comme un polynôme de degré deux en $\|y\|_m$, donc, pour prouver que P est négative pour $\|x\|_n$ suffisamment grande, nous allons montrer que le discriminant

$$\Delta(x, y) = \|G^T(x, y)\nabla H(x)\|_m^2 + 4H(x)\dot{H}_{(5.6)}(x) \left(\|G(x, y)\|_{n \times m}^2 + 1 \right),$$

est négatif pour $\|x\|_n$ suffisamment grande.

D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\|G^T(x, y)\nabla H(x)\|_m^2 \leq \|G(x, y)\|_{n \times m}^2 \|\nabla H(x)\|_n^2.$$

Comme H et f_0 sont homogènes (de degré respectivement l et λ), alors $\|\nabla H(x)\|_n^2$ et $H(x)\dot{H}_{(5.6)}(x)$ sont aussi homogènes de degré respectivement $\mu = 2(l - 1)$ et $\nu = l + (l - 1) + \lambda$.

Si on note par L, m les quantités suivantes

$$L = \max_{x \in S^{n-1}} (\|\nabla H(x)\|_n^2),$$

et

$$m = \min_{x \in S^{n-1}} H(x)\dot{H}_{(5.6)}(x),$$

où S^{n-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Il vient que

$$\|\nabla H(x)\|_n^2 \leq L\|x\|_n^\mu \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$|H(x)\dot{H}_{(5.6)}(x)| \geq m\|x\|_n^\nu.$$

Comme H est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (5.6), on a $m \neq 0$. En plus $\mu < \nu$, donc il existe une constante M telle que

$$L\|x\|_n^\mu < m\|x\|_n^\nu \quad \text{pour tout} \quad \|x\|_n \geq M.$$

Par conséquent,

$$\|\nabla H(x)\|_n^2 < -H(x)\dot{H}_{(5.6)}(x) \quad \text{pour} \quad \|x\|_n \geq M. \quad (5.23)$$

Il en découle que pour $\|x\|_n \geq M$, la quantité $\Delta(x, y)$ est négative et donc $\dot{W}_1(x, y) \leq 0$. Finalement, en appliquant le Lemme 5.1, on conclut que le système bouclé (5.1)(5.21) est globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration du Théorème 5.2. □

Un cas particulier de (5.1), est celui où la fonction f est polynomiale et homogène de degré δ . Un certain nombre d'auteurs ont traité le problème de la stabilisation de ce type de systèmes par une loi de commande polynomiale homogène de degré δ . Dans ce sens, une condition suffisante pour la stabilisation, a été d'abord proposée dans [ABS]. Puis, une version plus générale de ce résultat a été établie dans [DM2] et d'une manière différente dans [SS2].

Le but de la proposition suivante, c'est de re-établir ce résultat avec une démonstration plus simple.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = u, \end{cases} \quad (5.24)$$

où $y_1 \in \mathbb{R}^m$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ et les composantes de f sont des polynômes homogènes qui sont tous de même degré impair δ .

Proposition 5.1 *Si le système*

$$\dot{y}_1 = f(y_1, v),$$

est stabilisable par un feedback linéaire

$$\bar{u}(y_1) = Ay_1.$$

Alors, le système (5.24) est stabilisable par un feedback polynomial homogène de degré δ .

Preuve: Avec le changement de variables défini par (5.4), le système (5.24) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f(y_1, Ay_1 + y_2) \\ \dot{y}_2 = -Af(y_1, Ay_1 + y_2) + u. \end{cases} \quad (5.25)$$

En utilisant le feedback polynomial homogène de degré δ ,

$$u(y) = Af(y_1, Ay_1 + y_2) - y_2 \|y_2\|_m^{\delta-1}, \quad (5.26)$$

on obtient le système bouclé suivant

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 = -y_2 \|y_2\|_m^{\delta-1}, \end{cases} \quad (5.27)$$

où $f_1(y_1, y_2) = f(y_1, Ay_1 + y_2)$.

Du fait que le système

$$\dot{y}_1 = f_1(y_1, 0), \quad (5.28)$$

est supposé être globalement asymptotiquement stable à l'origine, on déduit, d'après le Théorème 1.1 de [SS2], que le système triangulaire (5.27) est localement asymptotiquement stable. Comme c'est un système homogène, il admet, d'après le Théorème 1.17 de [Ha], l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration de la proposition. $\square$

5.5 Commentaire sur le cas non régulier

Il est à noter que plusieurs papiers ont été consacrés à la stabilisation du système (5.1) quand le système (5.2) est stabilisable par un feedback non régulier (non C^1). Dans ce cas, comme le montre les deux exemples suivants proposés par J.M. Coron et L. Rosier, (cf. [CR]), la stabilisabilité d'un système ne peut plus être déduite à partir de celle du système réduit qui lui est associé.

Exemple 8 ([CR])

Le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/3} - u \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.29)$$

est stabilisable par le feedback continu $u(x) = 2x^{1/3}$, alors que le système augmenté n'est pas stabilisable (même pas par une loi de commande discontinu ou instationnaire).

Exemple 9 ([CR])

Le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1u^2, \end{cases} \quad (5.30)$$

est stabilisable par un feedback discontinu, alors que le système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 2x_1y^2 \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (5.31)$$

ne l'est pas.

Néanmoins, dans [Ro], l'auteur montre que si le système (5.2) est stabilisable par un feedback $u \in C^1(U \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \cap C^0(U, \mathbb{R})$, alors, sous une certaine condition, le système augmenté est aussi stabilisable.

Finalement, remarquons que si, en général, on cherche à déduire la stabilisabilité du système (5.1) de celle du système (5.2), comme le montre l'exemple suivant, la stabilisabilité du système (5.1) n'implique pas automatiquement celle du système (5.2).

Exemple 10 ([CP])

Soit $f : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie par

$$f(x, y) = f(x_1, x_2, y) = - \left((\|x_1\|^2 + x_2^2)^3 - C^2 (y^3 - \|x_1\|^2 y + x_2^3)^2 \right) x,$$

où C est une constante, $n \geq 2$.

Il est montré dans Dans [CP] que le système

$$\dot{x} = f(x, u),$$

n'est pas stabilisable par un feedback continu, alors que, pour C suffisamment grande, le système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad (5.32)$$

est localement asymptotiquement stabilisable par un feedback presque analytique.

6

ANNEXES

6.1 Annexe A

Ici, nous allons démontrer la Proposition 2.1 concernant les polynômes homogènes dans le plan.

Preuve: D'après Remarque 3, (page 16), r_1, r_2 ne sont pas tous les deux pairs. Supposons par exemple r_1 impair, et calculons P le long de $\Gamma(x_0, y_0)$.

Soit $(x, y) \in \Gamma(x_0, y_0)$, alors

$$y = -b^{-\frac{1}{r_1}} x^{\frac{r_2}{r_1}}.$$

En remplaçant cette valeur dans l'expression de P on obtient

$$P(x, y) = P(x, -b^{-\frac{1}{r_1}} x^{\frac{r_2}{r_1}}),$$

et donc

$$P(x, y) = P(x^{\frac{1}{r_1} r_1}, -b^{-\frac{1}{r_1}} x^{\frac{r_2}{r_1}}).$$

En utilisant l'homogénéité de P , il vient que

$$P(x, y) = x^{\frac{k}{r_1}} P(1, -b^{-\frac{1}{r_1}}),$$

ce qui donne, en remplaçant b par sa valeur,

$$P(x, y) = x^{\frac{k}{r_1}} x_0^{-\frac{k}{r_1}} P(x_0, y_0).$$

Comme $P(x_0, y_0) = 0$, alors P s'annule sur la courbe $\Gamma(x_0, y_0)$.

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

6.2 Annexe B

Considérons le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q_7 z - (q_5 \cos \theta - q_3 \sin \theta) \\ \dot{z} = \cos 2\theta + q_8, \end{cases} \quad (6.1)$$

où q_7 et q_8 sont deux constantes non nulles, avec $|q_8| \leq 1$.

Posons $\theta(0) = 0$. Le but de cette annexe est de démontrer le Lemme 3.1 (voir page 25)

Preuve: D'après la deuxième équation du système (6.1), il vient que

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| \leq 1 + |q_8|.$$

Donc, pour $t \in [0, 1]$, nous avons

$$|z(t) - z(0)| \leq (1 + |q_8|)t \leq 1 + |q_8|. \quad (6.2)$$

Supposons que $z(0)$ vérifie

$$z(0) \geq 2(1 + |q_8|). \quad (6.3)$$

Alors, de (6.2)(6.3) et de la première équation de (6.1), on tire

$$q_7 \frac{d\theta}{dt} \geq q_7^2 (z(0) - (1 + |q_8|)) - |q_7|(|q_5| + |q_3|) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Après intégration sur $[0, 1]$ on obtient

$$q_7 \theta(1) \geq q_7^2 (z(0) - (1 + |q_8|)) - |q_7|(|q_5| + |q_3|).$$

Si on suppose, qu'en plus de (6.3), $z(0)$ vérifie aussi

$$z(0) \geq 1 + |q_8| + \frac{1}{|q_7|}(|q_5| + |q_3| + 2\pi),$$

alors

$$|\theta(1)| \geq 2\pi.$$

Il suffit finalement de prendre

$$c = \sup(2(1 + |q_8|), 1 + |q_8| + \frac{1}{|q_7|}(|q_5| + |q_3| + 2\pi)).$$

D'où le lemme. □

6.3 Annexe C

Dans cette annexe, nous reprenons, avec de légères modifications, un lemme proposé dans [Ou2]

Lemme 6.1 ([Ou2]) *Supposons que le système*

$$\dot{x} = X(x) + uY(x), \quad (6.4)$$

est stabilisable par un feedback $\bar{u}(x)$ de classe C^r .

Alors, pour toute fonction scalaire f de classe C^r , telle que:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad (f(x) = 0 \implies X(x) = 0),$$

le système

$$\dot{x} = f(x)X(x) + uY(x), \quad (6.5)$$

est stabilisable par un feedback de classe C^r .

Preuve: En vertu du théorème inverse de Lyapunov, il existe une fonction V , de classe C^∞ telle que:

$$\dot{V}_{(6.4)}(x) = X.V(x) + \bar{u}(x)Y.V(x) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

En particulier,

$$\text{si } X(x) = 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ alors } Y.V(x) < 0. \quad (6.6)$$

Maintenant, considérons le feedback suivant :

$$u(x) = f(x)\bar{u}(x) - Y.V(x). \quad (6.7)$$

Alors, $\dot{V}_{(6.5)}$, la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (6.5)(6.7), est donnée par :

$$\dot{V}_{(6.5)}(x) = f(x)\dot{V}_{(6.4)}(x) - (Y.V(x))^2(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0. \quad (6.8)$$

Nous allons montrer que $\dot{V}_{(6.5)}$ est une fonction définie négative. En effet, si on note Ω l'ensemble défini par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}_{(6.5)} = 0\},$$

alors

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / Y.V(x) = 0\},$$

donc

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n / X(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / Y.V(x) = 0\},$$

et grâce à (6.6) on a

$$\{x \in \mathbb{R}^n / X(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / Y.V(x) = 0\} = \{0\}.$$

Le lemme est ainsi démontré.

□

6.4 Annexe D

Cette annexe est consacrée à la démonstration du Lemme 4.3, (voir page 45).

Preuve: Il s'agit de montrer que

$$f(x, y) > 0 \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \neq (0, 0). \quad (6.9)$$

Pour cela, introduisons la fonction scalaire g_λ , paramétrée par $\lambda \in \mathbb{R}$, définie par

$$g_\lambda(y) = f(\lambda, y).$$

Montrer (6.9) revient donc à prouver que $g_\lambda(y) > 0$ pour tout $(\lambda, y) \neq (0, 0)$.

Il est clair que pour $\lambda = 0$, $g_0(y) = f(0, y)$ est strictement positive pour tout $y \neq 0$. Nous allons donc supposer dans la suite que $\lambda \neq 0$.

Comme $r > 1$, la fonction g_λ est de classe C^1 et vérifie

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} g_\lambda(y) = +\infty,$$

le problème revient à prouver que g_λ admet des valeurs strictement positives sur l'ensemble

$$E = \{y \in \mathbb{R} / g'_\lambda(y) = 0\}.$$

Un raisonnement simple montre que si y est élément non nul de E , alors y vérifie

$$|y| = (-\epsilon(y) \frac{b}{r})^{\frac{1}{r-1}} |\lambda|^{\frac{\tilde{r}}{r-1}}.$$

avec $\epsilon(y) = \text{sgn}(y)$.

En calculant la valeur de g_λ en ces points, on obtient

$$g_\lambda(y) = d |\lambda|^{\frac{\tilde{r}r}{r-1}} + \delta \lambda^{\frac{2i}{2j+1}} + \beta \lambda^{2p},$$

où $d = (-\epsilon(y) \frac{b}{r})^{\frac{r}{r-1}} + \epsilon(y) b (-\epsilon(y) \frac{b}{r})^{\frac{1}{r-1}}$.

compte tenu de l'inégalité

$$p > \frac{r\tilde{r}}{r-1} \geq \frac{2i}{2j+1} > 1,$$

et de l'inégalité

$$d \leq \tilde{d} = (1+r) \left| \frac{b}{r} \right|^{\frac{r}{r-1}},$$

il vient que pour tout δ , $\beta > \tilde{d}$,

$$g_\lambda(y) = f(x, y) > 0,$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

La fonction f est ainsi définie positive. En posant, si nécessaire, $\beta := \beta + 1$, on conclut qu'elle est aussi propre.

Ceci termine la démonstration du lemme.

□

6.5 Annexe E

Dans cette annexe, nous allons montrer le résultat suivant.

Lemme 6.2 *Si le système $\dot{x} = f(x)$ est globalement asymptotiquement stable, alors, il existe une fonction scalaire V de classe C^∞ , propre, positive pour tout $\|x\|_n > M$ ($M > 0$) et qui vérifie:*

Pour tout réel $\delta > 0$,

$$\dot{V}(x) = \langle f(x), \nabla V(x) \rangle < -M \quad \text{pour tout} \quad \|x\| > \delta. \quad (6.10)$$

Preuve: Comme $\dot{x} = f(x)$ est globalement asymptotiquement stable, il est bien connu, d'après le théorème inverse de Lyapunov, qu'il existe une fonction W de Lyapunov telle que

$$\langle f(x), \nabla W(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \quad (6.11)$$

Nous allons commencer par montrer qu'il existe une fonction scalaire h de classe C^∞ qui vérifie

$$h(W(x)) \langle f(x), \nabla W(x) \rangle < -M \quad \text{pour} \quad \|x\| > \delta.$$

Notons par M_n, m_n ($n \geq 1$) les réels positifs tels que:

$$\text{si } n + \delta - 1 \leq W(x) \leq n + \delta \quad \text{alors} \quad m_n \leq \|x\| \leq M_n.$$

Soient α_n, β_n , les quantités positives suivantes

$$\alpha_n = \min_{m_n \leq \|x\| \leq M_n} |\langle f(x), \nabla W(x) \rangle|,$$

et

$$\beta_n = \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{M}{\alpha_i} + 1.$$

Si on note par k la fonction définie par

$$k(y) = \beta_n \quad \text{pour } y \in]n - 1, n] \quad (n \geq 2),$$

alors k satisfait, par construction, à

$$\text{si } \|x\| > \delta \quad \text{alors} \quad k(W(x)) \langle f(x), \nabla W(x) \rangle < -M.$$

On choisit comme fonction h , toute fonction de classe C^∞ telle que

$$h(y) \geq k(y) \quad \text{pour tout } y \geq \delta.$$

Finalement, si on prend comme fonction V la fonction définie par

$$V(x) = \int_0^{W(x)} h(s) ds ,$$

comme h est une fonction scalaire positive, la fonction V ainsi définie est une fonction de classe C^∞ , propre et positive pour tout $\|x\|_n > M$, en plus, puisque

$$\nabla V(x) = h(W(x)) \nabla W(x),$$

alors on a

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \\ &= \langle h(W(x)) \nabla W(x), f(x) \rangle , \end{aligned}$$

par suite

$$\dot{V}(x) = h(W(x)) \langle \nabla W(x), f(x) \rangle ,$$

ce qui, d'après (6.11), vérifie la condition (6.10).

Ceci termine la démonstration du lemme.

□

6.6 Annexe F

Le but de cette annexe est de démontrer le Lemme 5.1 (voir page 64)

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = F_1(z) \\ \dot{z}_2 = -z_2 F_2(z), \end{cases} \quad (6.12)$$

où $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ et F_1 et F_2 deux fonctions au moins de classe C^1 . On suppose que F_2 vérifie $F_2(z) > a > 0$.

Il s'agit de démontrer que si le système

$$\dot{z}_1 = F_1(z_1, 0), \quad (6.13)$$

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, et s'il existe une fonction scalaire V différentiable et propre qui vérifie

$$\dot{V}_{(6.12)}(z) \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m} / \|z_1\| \geq \alpha\},$$

où α est une constante positive.

Alors, l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (6.12).

Pour cela, nous allons commencer par démontrer que le système suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = F_3(z) F_1(z) \\ \dot{z}_2 = -z_2, \end{cases} \quad (6.14)$$

où $F_3(z) = \frac{1}{F_2(z)}$.

admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Puisque le système (6.13) est supposé être globalement asymptotiquement stable à l'origine, alors, d'après le théorème inverse de Lyapunov, il admet une fonction de Lyapunov W de classe C^∞ . En calculant la dérivée de W le long des trajectoires du système suivant

$$\dot{z}_1 = F_3(z_1, 0) F_1(z_1, 0), \quad (6.15)$$

on obtient

$$\dot{W}_{(6.15)}(z_1) = F_3(z_1, 0) \dot{W}_{(6.13)}(z_1).$$

Il est clair que $\dot{W}_{(6.15)}(z_1) < 0$ pour tout $z_1 \neq 0$, par suite, le système (6.15) est globalement asymptotiquement stable. D'autre part, la dérivée de V le long des trajectoires du système (6.14) est donnée par

$$\dot{V}_{(6.14)}(z) = F_3(z)\dot{V}_{(6.12)}(z),$$

qui est négative sur Ω . Le système (6.14) est bien un système triangulaire qui vérifie les hypothèses du Théorème 4.2 de [SS1], et donc, il est globalement asymptotiquement stable à l'origine. Soit alors H , une fonction de Lyapunov associée à ce système. La dérivée de H le long des trajectoires du système (6.12) est donnée par

$$\dot{H}_{(6.12)}(z) = F_2(z)\dot{H}_{(6.14)}(z).$$

Comme $F_2(z) > 0$ et H est de Lyapunov pour (6.14), on déduit que

$$\dot{H}_{(6.12)}(z) < 0 \quad \forall z \neq 0.$$

Par conséquent, le système (6.12) admet l'origine comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Ceci termine la démonstration du lemme. □

6.7 Annexe G

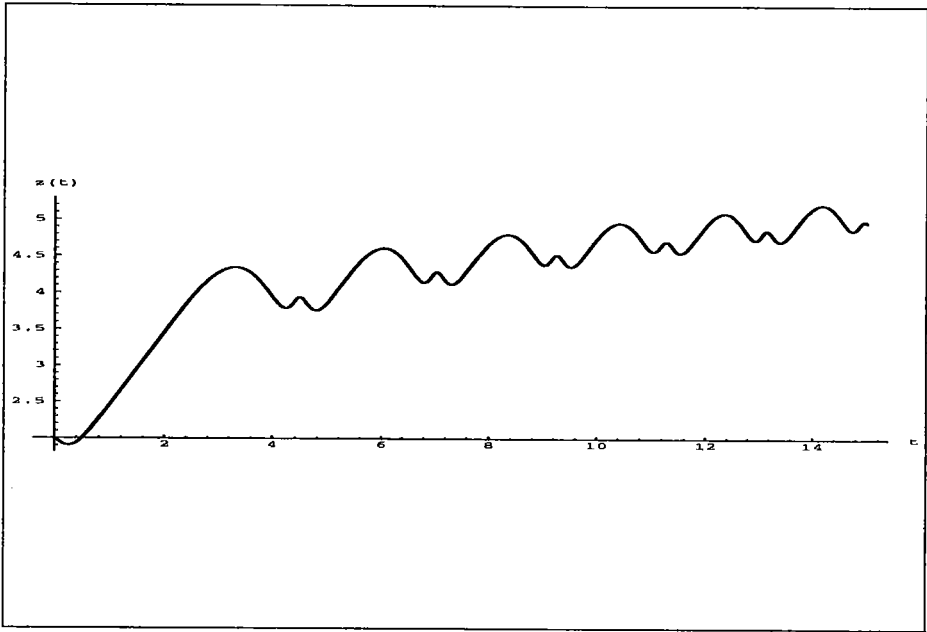


Figure 6

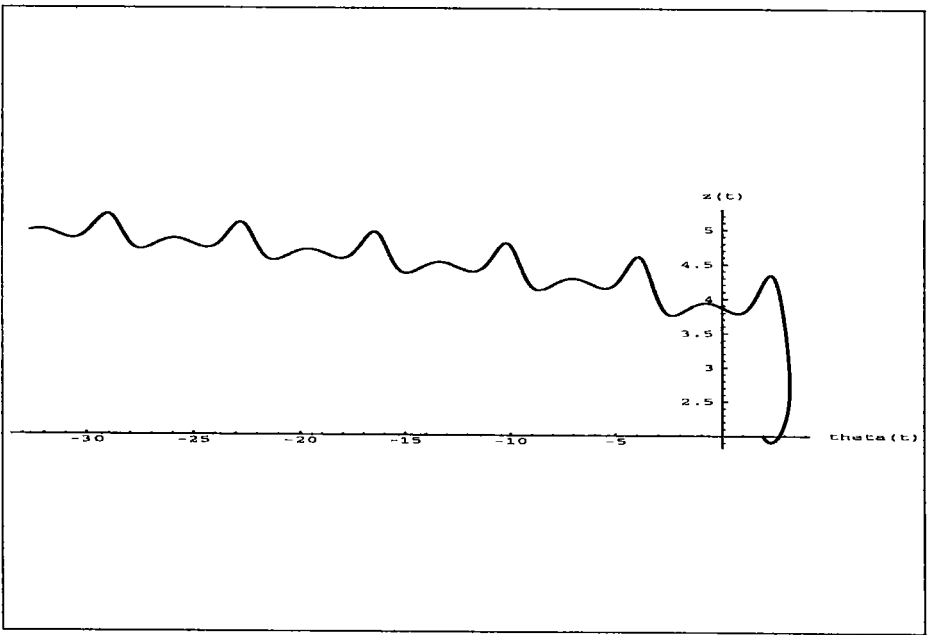


Figure 7

Bibliographie

- [Ay] D. Aeyels. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. *Systems & Control Letters*, 5, pp. 289-294, 1985.
- [ABS] A. Andreini, A. Bacciotti and G. Stefani. Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree. *Systems & Control Letters*, 10, pp. 251-256, 1988.
- [Ar] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal. TMA*, 7, pp. 1163-1173, 1983.
- [Ba] A. Bacciotti. Local stabilization of nonlinear control systems. *Series on advances in mathematics for applied sciences*, vol.8, World Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong, 1992.
- [BM] W.M. Boothby and R. Marino. Feedback linearization of planar nonlinear systems II. *Proc. 28th IEEE-CDC Conference*, Tampa, Florida, December, pp. 1970-1974, 1989..
- [Br] R.W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pp. 181-191. Brockett, Milmann, Sussmann, 1983.
- [BI] C. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, 12, pp. 437-442, 1989.
- [BIW] C.I. Byrnes, A. Isidori and J.C.Willems. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE transaction on control*, vol 36, N 11, pp. 1228-1240, November 1991.
- [CSV] R. Chabour, G.Sallet and J.C.Vivalda. Stabilisation of Nonlinear Systems: A Bilinear Approach. *Math. Control Signals Systems*, 6, pp. 224-246, 1993.
- [Col] C. Coleman. Asymptotic stability in 3-space . Cesari, LaSalle, Lefschetz(ed.) Contributions to the theory of Nonlinear Oscillations, V; *Annals of Mathematics Studies*. 45, Princeton University Press, 1960.

- [Cop] W.A. Coppel. A survey of quadratic systems. *J. Diff. Eq*, 2, pp. 293-304, 1966.
- [Co1] J.M. Coron. A necessary condition for feedback stibilisation. *Syst. Contr. Lett*, 14, pp. 227-232, 1990.
- [Co2] J.M. Coron. Linearized control systems and applications to smooth stabilization. *SIAM J. Control and Optimization*, 32, pp. 358-386, 1994.
- [Co3] J.M. Coron. On the stabilization in finite time locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback *SIAM J. Control and Optimization*, 33, pp. 805-833, 1995.
- [CK] J.M. Coron and E. Kerai Explicit feedback stabilizing the attitude of a rigid spacecraft with tow control torques. à paraitre dans *Automatica*
- [CP] J.M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, 17, pp. 89-104, 1991.
- [CR] J.-M. Coron and L. Rosier A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization. *J. Mathematical Systems, Estimation and Control*, 4, pp. 67-84, 1994.
- [Da] T. Date. Classification and Analysis of Two-Dimensional Real Homogeneous Quadratic Differential Equation. *J. Diff. Eq*, 32, pp. 311-334, 1979.
- [DI] T. Date and M. Iri. Canonical Forms of Real Homogeneous Quadratic Transformations. *J. Diff. Eq*, 56, pp. 650-682, 1976.
- [DM1] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. Two examples of stabilizable second order systems. in Proc. Montana Conference on Computation and Control, Montana State University, Bozeman, MT Juin 1988.
- [DM2] W.P. Dayawansa, C.F. Martin. A remark on a theorem of Andreini, Bacciotti and Stefani. *Systems & Control Letters*, 13, pp. 363-364, 1989.
- [DMK] W.P. Dayawansa, C.F. Martin and G. Knowles. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 28, pp. 1321-1349, 1990.
- [DMS] W.P. Dayawansa, C.F. Martin and S. Samelson. Asymptotic stabilization of a generic class of three dimensional homogeneous quadratic systems. *Systems & Control Letters*, 24, pp. 115-123, 1995.
- [DP] R.J. Dickson and L.M. Perker. Bounded Quadratic System in the plane. *J. Diff. Eq*, 7, pp. 251-273, 1970.

- [Gr] M. Gromov. Partial Differential Relations. *Ergebnisse Mathematik3, F.Olge 9*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [Hu] X. Hu. Stabilization of planar nonlinear systems by polynomial feedback control. *Systems & Control Letters*, Vol 22., pp 177-185, 1994.
- [Ha] W. Hahn. Stability of Motion. *Springer Verlag*, 1967.
- [He1] H. Hermes. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. Differential Equations, Stability and control, S.ELAYDI ed., *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 127, Marcel Dekker, Inc. p. 249-260, 1990.
- [He2] H. Hermes. Nilpotent and high-order approximations of vector field systems. *SIAM Review*, 33, N 2, pp. 238-264, June 1991.
- [He3] H. Hermes. Asymptotic Stabilizing Feedback Controls *Journal of Differential Equations*, 92, pp. 76-89, 1991.
- [He4] H. Hermes. Asymptotic stabilization of planar systems. *Systems & Control Letters*, 17, pp. 437-443, 1991.
- [He5] H. Hermes. Homogeneous feedback controls for homogeneous systems. *Systems & Control Letters*, 24, pp. 7-11, 1995.
- [IJO] A. Iggidr, H. Jghima and R. Outbib. Global Feedback Stabilization of Homogeneous Polynomial Systems. Soumis à *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*.
- [IS] A. Iggidr and G. Sallet. Nonlinear stabilization by adding an integrators. *KY-BERNETIKA*, 30, N 5, pp. 499-506, 1994.
- [IV] A. Iggidr and J.C Vivalda. Global stabilization of homogeneous polynomial systems in $\mathbb{R}^3$. *Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications*, 18, N 12, pp. 1181-1186, 1992.
- [Is] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. *Springer-Verlag*, 1989.
- [JO1] H. Jghima and R. Outbib. Lagrange stability of a class of quadratic systems in $\mathbb{R}^3$. Présenté à la deuxième conférence internationale sur les équations différentielles. Marrakech, juin 95.
- [JO2] H. Jghima and R. Outbib. A Remark on the Stabilization of Homogeneous Polynomial Systems. *Appl. Math. Letters*, 9, N 2, pp. 47-48, 1996.
- [JO3] H. Jghima and R. Outbib. Comments on the stabilization of nonlinear systems by adding an integrator. *IEEE transaction on control*. À paraître.

- [JO4] H. Jghima and R. Outbib. Stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes. quadratiques dans $\mathbb{R}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t 322, Série I, pp. 935-938, 1996.
- [JQ] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, 28, pp. 381-389, 1978.
- [K] B. Kalitine. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *R.A.I.R.O. Automatique/ Systems Analysis and Control*, 16, N3, pp. 275-286, 1982.
- [Ka1] M. Kawski. Stabilization and nilpotent approximations Proc. *27th IEEE Conference on Decision & Control*, II, pp. 1244-1248, 1988.
- [Ka2] M. Kąwski. Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control-Theory and Advanced Technology*, 6, N 4, pp. 497-516, 1990.
- [Ka3] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, 12, pp. 169-175, 1990.
- [Ko] D.E. Koditscheck. Adaptive techniques for mechanical systems. In *Fifth Yale workshop on adaptive systems*, pp. 259-265, Yale University, New Haven, CT, 1987.
- [KS] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 13, pp. 125-133, 1989.
- [LL] J. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, 1961.
- [Mar] L. Markus. Quadratic differential equations and non-associative algebras. *Ann. Math. Studies*, N 45, Princeton Univ. Press, pp. 185-213, 1960.
- [MY] L. Markus and H. Yamabe. Global stability criteria for differential systems. *Oseka Math. J*, 12, pp. 305-317, 1960.
- [Mas] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, 64, pp. 182-206, 1956.
- [Ol] J.Moulin Ollagnier Polynomial first integrals of the Lotka-Volterra system. Pré-publication, 1995. Université d'Orsay.
- [Ou1] R. Outbib. Stabilisation d'une classe de systèmes affines en contrôles. Proceedings of *European control conference*, pp. 480-484, Grenoble 1991

- [Ou2] R. Outbib. Sur la stabilisation globale des systèmes non linéaires par retour d'état régulier. *Thèse de l'université de Metz, 1994.*
- [OS1] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, 18, pp. 93-98, 1992.
- [OS2] R. Outbib and G. Sallet. Stabilization by dynamic feedback. Workshop on Nonsmooth Analysis and Differential Geometric Methods in Optimal Control. *I.M.A Minneapolis 1993.*
- [Ro] L. Rosier. Etude de quelques problemes de stabilisation. *Thèse de l'université de Paris XI 1993.*
- [Sa] C. Samson. Velocity and torque feedback control of nonholonomic cart. *Advanced Robot Control*, Proceeding's of the International Workshop on Nonlinear and Adaptativ Control: Issues In Robotics, Grenoble, France, Nov. 21-23, 1990. C. Canudas de Wit ed., Lecture Note in Control and Information Sciences, vol. 162, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, pp. 125-151, 1991.
- [SKS] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composed systems. *SIAM J. Control and Optimisation*, 28, pp. 1491-1503, 1990.
- [SS1] P. Seibert and R. Suarez. Global stabilization of nonlinear cascades systems, *Systems & Control Letters*, N 14, pp 347-352, 1990.
- [SS2] P. Seibert and R. Suarez. Global stabilization of a certain class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, N 16, pp. 17-23, 1991.
- [So1] E.D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE transaction on control* N 34, pp. 435-443, 1989.
- [So2] E.D. Sontag. Mathematical Control Theory. Deterministic finite dimentional Systems. Texts in applied Mathematics 6, Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo-Hong Kong, 1990.
- [SoSu] E.D. Sontag and H.J. Sussmann, Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body. *Systems and Control Letters*, 12, pp. 213-217 1988.
- [Sp] R. Sepulcheres. Contributions to nonlinear control systems analysis by means of the direct method of Liapunov. *Ph.D.Thesis, Louvain, Belgium 1994.*
- [SuK] H.J. Sussmann and P.V. Kokotovic. The Peaking Phenomenom and the Global Stabilization of Nonlinear Systems. *IEEE transaction on control*, vol 36, N 4, p. 424-440, April 1991.

- [TP] A.R. Teel and L. Praly Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback *SIAM J. Control and Optimization*, 33, N 5, pp. 1443-1488, 1995.
- [Ts] J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilizability. *Mathematics of control, Signals and systems*, 2, pp. 343-357, 1989.
- [Yo] T. Yoshizawa. Liapunov's Function and Boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2, pp. 71-103, 1958.
- [Zu] V.I. Zubov. Methods of A.M. Lyapunov and their Applications. (*Noordhoff, Leiden, 1964*).

CONTRIBUTION À LA STABILITÉ ET LA STABILISATION DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Résumé

Cette thèse est une contribution aux problèmes de la stabilité au sens de Lagrange et de la stabilisation par retour d'état des systèmes non linéaires. Elle concerne essentiellement les systèmes homogènes.

Un premier résultat concerne la stabilité au sens de Lagrange d'une classe de systèmes quadratique tridimensionnels. Plus précisément, on étudie les champs définis sur les cylindres.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous présentons une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation, par une loi de commande au moins continue, des systèmes polynomiaux homogènes par rapport à une dilatation. Dans le cas d'une dilatation standard, nous proposons explicitement un feedback stabilisant polynomial.

Finalement, les derniers types de résultats concernent le problème de la stabilisation par feedback dynamique. Nous donnons une nouvelle démonstration d'un résultat bien connu dans la théorie de la stabilisation dit "lemme des intégrateurs". Cette nouvelle approche permet de donner explicitement le feedback stabilisant pour le système augmenté, dans des situations où l'ancienne méthode montre seulement l'existence. De plus, le feedback proposé est plus régulier.

Abstract

This thesis is a contribution to the problems of the stability in sens of Lagrange and the stabilization by feedback law of nonlinear systems. It concerns mainly the homogeneous systems.

A first result concerns the stability in sens of Lagrange of a class of tridimensional quadratic systems. More precisely, we study the class of vector fields on the cylinders.

In the second part of this work, we present a necessary and suffisante condition for the stabilization by means of a continuous feedback of polynomial homogeneous system with respect to a dilation. In the case of a standard dilation, we propose explicitly polynomial stabilizing feedback.

Finally, the least kind of results concerns the proplem of the stabilization by a dynamic feedback. We give a new proof of a well-known result in the theory of stabilization called "Integrators lemma". This new approach permits to give explicitly the stabilizing feedback for the augmented system, in some situations when the classical method shows only the existence. Moreover, the proposed feedback law is more smooth.