Centre d'Analyse Non Linéaire
Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du
Doctorat de l'Université de Metz
en Mathématiques

par Mr **Abdellah ELFANNI.**

Titre de la thèse :

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE NUMERIQUE RELATIVES A DES PROBLEMES NON CONVEXES

Soutenue publiquement le 20 Mai 1996 devant le jury composé de :

B. BEKKA : Professeur à l'Université de Metz. Examinateur.

B. BRIGHI : Maitre de conférence à l'Université de Metz. Examinateur.

M. CHIPOT : Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

M. MARION : Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon. Rapporteur.

J. SOKOLOWSKI : Professeur à l'Université de Nancy I. Rapporteur.

Centre d'Analyse Non Linéaire

Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Metz

en Mathématiques

par Mr **Abdellah ELFANNI.**

Titre de la thèse :

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE NUMERIQUE

RELATIVES A DES PROBLEMES NON CONVEXES

Soutenue publiquement le 20 Mai 1996 devant le jury composé de :

B. BEKKA : Professeur à l'Université de Metz. Examinateur.

B. BRIGHI : Maitre de conférence à l'Université de Metz. Examinateur.

M. CHIPOT : Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

M. MARION : Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon. Rapporteur.

J. SOKOLOWSKI : Professeur à l'Université de Nancy I. Rapporteur.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur M. Chipot qui n'a jamais ménagé son temps et son énergie pour me transmettre sa passion pour la recherche. C'est auprès de lui que j'ai approfondi mes connaissances et il m'est fort agréable aujourd'hui de le remercier pour son soutien constant, son enthousiasme et sa rigueur scientifique.

Les professeurs Madame M. Marion et Monsieur J. Sokolowski ont bien voulu lire et porter une appréciation sur ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma très sincère reconnaissance.

Je remercie Monsieur le Professeur B. Bekka qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie également B. Brighi d'avoir fait partie de ce jury et des discussions fructueuses qu'on a pu avoir.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien moral et financier.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS

Dans toute la suite, les notations utilisées sont, dans la plupart des cas, définies dans le texte. Néanmoins, quelques notations ou définitions classiques ont été omises. Nous les rappelons ci-dessous.

- Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on note

  - $\partial\Omega$ la frontière de Ω,

  - $|\Omega|$ la mesure (de Lebesgue) de Ω,

  - Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$, si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^1 (Cf. [R.T.] déf. 1.3-1 p.22).

- Pour Ω un ouvert de$\mathbb{R}^n$, on note

  - $W^{1,\infty}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u \ : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que u et toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ au sens des distributions soient mesurables au sens de Lebesgue et essentiellement bornées.

  - $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ telles que $u = 0$ sur $\partial\Omega$. (Cf. [G.T.]).

- Une triangulation d'un domaine borné et polygonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, est une décomposition finie du type

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K$$

telle que

(i) chaque élément $K \in \mathcal{T}$ est un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide,

(ii) les intérieurs de deux polyèdres de $\mathcal{T}$ sont disjoints,

(iii) toute face d'un polyèdre de $\mathcal{T}$ est soit face d'un autre polyèdre de $\mathcal{T}$, soit une partie de $\partial\Omega$.

(Cf. [R.T.]).

- Pour m et n deux entiers naturels, on note

  - $GL(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des matrices inversibles.

  - Si M est une matrice à m lignes et n colonnes, on note M^T sa matrice transposée.

  - $\delta_{m,n}$ le symbole de Kronecker égal à $\begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

- Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on note

  - Co($\mathcal{A}$) l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$,

  - $d(x,\ \mathcal{A})$ la distance de x à $\mathcal{A}$ i.e.

$$d(x,\ \mathcal{A}) = \inf_{a \in \mathcal{A}} |a - x|,$$

  - $B(x, \epsilon)$ la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ.

- $C(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$.

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous étudions quelques aspects numériques de problèmes variationnels non convexes. En général de tels problèmes n'admettent pas de minimiseurs. En échange les suites minimisantes développent des oscillations dans le but de minimiser leur énergie. Ces oscillations apparaissent dans plusieurs phénomènes physiques. En métallurgie, par exemple, elles sont observées au cours de la transformation martensitique de certains alliages, le plus étudié est l'Indium-Thalium (voir $[B.J._1]$ à ce sujet). De tels alliages profitent de leurs structures spécifiques pour dépenser le moins d'énergie. En effet, les transformations qu'ils subissent aboutissent à des changements de formes. Ceci laisse supposer l'existence d'une densité d'énergie mesurée par le gradient de la déformation et par la température à laquelle est soumis le matériau. A une certaine température, cette densité d'énergie emprunte des puits de potentiels permettant au matériau d'acquérir une configuration rendant l'énergie totale la plus petite possible.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier de frontière Γ interprété comme étant cette configuration. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une densité d'énergie supportée par p puits de potentiels i.e. il existe des éléments $w_1, \ldots, w_p,\ p \geq 2$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, p. \tag{0.1}$$

Soit $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ telle que

$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i) \ p.p. \text{ dans } \Omega \qquad (0.2).$$

($\mathrm{Co}(w_i)$ est l'enveloppe convexe des w_i).
On note par ψ une fonction continue positive telle que pour des constantes positives q et c

$$0 \leq \psi(\xi) \leq c \mid \xi \mid^q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{0.3}$$

On désigne par $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ l'ensemble :

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \ / \ v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma\}.$$

A une déformation $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ on associe les énergies

$$\int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{0.4}$$

$$\int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx. \tag{0.5}$$

On considère les problèmes de minimisation :

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{0.6}$$

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx. \tag{0.7}$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx. \tag{0.8}$$

On s'intéresse à leurs problèmes approchés obtenus en remplaçant $W^{1,\infty}(\Omega)$ et $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ par des espaces d'éléments finis V_h et $V_h^{\hat{A}}$ ($\hat{A}$ étant un approximé de A) :

$$\inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \tag{0.9}$$

$$\inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \tag{0.10}$$

$$\inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \tag{0.11}$$

Le cas où le ∇A est constant a été déja traité par plusieurs auteurs. Abordé d'abord en dimension un par C. Collins, D. Kinderlehrer et M. Luskin, (voir $[Co.K.L._1] - [Co.L._2]$, $[Co.]$), des estimations ont été obtenues en dimension supérieure par M. Chipot dans le cas scalaire (voir $[C._1]$, $[C._2]$, $[C.C.]$), puis généralisées au cas vectoriel par M. Chipot, C. Collins et D. Kinderlehrer (voir $[C.C.K.]$). Le cas non linéaire a été introduit et traité par M. Chipot (voir $[C._3]$), les estimations qui y sont obtenues ont été améliorées dans $[C.L.]$. Toutefois, ces estimations ne sont pas optimales. En effet grâce à de nouvelles fonctions test, nous allons obtenir en terme de h les mêmes puissances que le cas linéaire.

Nous nous sommes proposés de traiter au chapitre 2 les problèmes dits à deux puits i.e. que les puits w_i engendrent un espace vectoriel W de dimension un. On obtient :

Théorème 0-1 : *Supposons que Ω est convexe, que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (0.1). De plus, on suppose que ψ est une fonction continue satisfaisant (0.3), et*

$dimW = 1$. Alors si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (0.2), il existe une constante C indépendante de $h \in (0,1)$ telle que :

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{1}{2}}$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{r}{r+1}}$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{q}{q+1}},$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres.

Au chapitre 3 on traitera plus généralement les problèmes à plusieurs puits w_i. Toutefois on supposera qu'ils sont affinement indépendants i.e.

$$w_i - w_p \quad i = 1, \ldots, p-1, \quad \text{sont linéairement indépendants.} \tag{0.12}$$

On obtient :

Théorème 0-2 : *Supposons que Ω est convexe, que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (0.1). De plus, on suppose que ψ est une fonction continue satisfaisant (0.3), et les w_i satisfont (0.12). Si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (0.2), alors il existe une constante C indépendante de $h \in (0,1)$ telle que :*

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{1}{2}}$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{r}{r+1}}$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{q}{q+1}}$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres.

Pour cela on démontre d'abord au chapitre 1 que l'on peut prolonger $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant (0.2) en une fonction lipschitzienne $\tilde{A}$ sur $\mathbb{R}^n$ héritant des propriétés de A plus précisément on a :

Théorème 0.3: *Soit Ω un domaine convexe de $\mathbb{R}^n$. Si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (0.2) alors il existe une fonction lipschitzienne $\tilde{A}$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que*

- $\tilde{A}$ *prolonge* A,
- $\nabla\tilde{A} \in (L^{\infty}(\mathbb{R}^n))^n$,
- $\nabla\tilde{A}(x) \in Co(w_i)$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^n$.

On montrera aussi dans ce chapitre, sous certaines hypothèses, que les problèmes discrets (0.9)-(0.11) convergent vers les problèmes continues (0.6)-(0.8) généralisant ainsi les résultats obtenus dans le cas linéaire par B. Brighi et M. Chipot (voir $[B.]$, $[B.C._2]$).

Au chapitre 4, on montrera que les problèmes continus n'admettent pas en général des minimiseurs. On est conduit alors à étudier une certaine classe de suites minimisantes qui génèrent, comme on le verra, une même famille de mesure de Young traduisant ainsi le fait qu'il y a une certaine cohérence dans le comportement oscillatoire de ces suites. Remarquons que si (0.12) est vérifié et A vérifie (0.2) alors il existe des fonctions mesurables α_i uniques telles que

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x)\, w_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x) = 1. \tag{0.13}$$

On a :

<u>**Théorème 0.4 :**</u> *Supposons que φ est une fonction continue strictement positive vérifiant (0.1). Si u_h est une suite minimisante de (0.6), (0.7) ou (0.8) vérifiant*

$$|u_h|_\infty, ||\nabla u_h||_\infty \leq C,$$

alors ∇u_h définit une famille de mesure de Young $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ donnée par

$$\nu_x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x)\, \delta_{w_i} \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

où les α_i sont les fonctions qui figurent dans (0.13) et δ_{w_i} désigne la masse de Dirac au point w_i.

Au chapitre 5, on explicitera les différentes constantes du chapitre 3 qui permettent d'obtenir les mêmes estimations en considérant des problèmes à plusieurs puits et en réduisant l'ensemble des déformations admissibles en les obligeant à évoluer entre deux obstacles. On montrera également que les infima dans les problèmes discrets associés à ces problèmes sont atteints.

Le chapitre 6 est indépendant des autres chapitres. Nous allons y étudier le comportement à la limite des solutions d'une classe de problèmes non linéaires.

Chapitre 1

RESULTATS PRELIMINAIRES

1. Un théorème de prolongement.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $w_1, ..., w_p \in \mathbb{R}^n$ et A une application définie sur Ω. Avant d'énoncer le théorème de prolongement démontrons le lemme suivant:

Lemme 1.1: *Si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie*

$$A(x) - A(x') \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \ \forall x, x' \in \Omega \tag{1.1}$$

alors

$$\nabla A(x) \in Co(w_i) \ p.p. \ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

où $\wedge$ désigne l'infimum de fonctions, $Co(w_i)$ est l'enveloppe convexe des w_i.

Preuve:

On sait qu'il existe $u_h \in W^{1,\infty}(\Omega)$ (cf [C.3]) telle que

- $u_h \longrightarrow A$ uniformément,
- $\nabla u_h = w_i$ $(i = 1, \ldots, p.)$.

En extrayant une sous-suite qu'on note aussi par u_h on a:

- $\nabla u_h \rightharpoonup \nabla A$ faible $*$ dans $L^\infty(\Omega)$.

Soit maintenant B une boule quelconque incluse dans Ω, on a d'une part :

$$\frac{1}{|B|} \int_B \nabla u_h(x) dx \in \mathrm{Co}(w_i)$$

d'autre part

$$\frac{1}{|B|} \int_B \nabla u_h(x) dx \text{ converge vers } \frac{1}{|B|} \int_B \nabla A(x) dx.$$

Comme $\mathrm{Co}(w_i)$ est un fermé alors

$$\frac{1}{|B|} \int_B \nabla A(x) dx \in \mathrm{Co}(w_i).$$

En utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue on obtient :

$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i).$$

Remarque 1.1:

si

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x') \leq A(x) - A(x') \;\forall\, x, x' \in \Omega$$

alors

$$A(x) - A(x') \leq \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x-x') \;\forall\, x, x' \in \Omega$$

ceci car

$$-\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x') = \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x'-x).$$

où $\vee$ désigne le supremum de fonctions. On a le théorème de prolongement suivant:

Théorème 1.1: *Soient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, A une application lipschitzienne sur Ω telle que*

$$A(x) - A(x') \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x') \;\forall\, x, x' \in \Omega,$$

alors il existe une application lipschitzienne $\tilde{A}$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que

- *$\tilde{A}$ prolonge A,*
- *$\nabla\tilde{A} \in (L^{\infty}(\mathbb{R}^n))^n$,*
- *$\nabla\tilde{A}(x) \in Co(w_i)$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Preuve du théorème 1.1:

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\tilde{A}(x) = \inf_{e\in\Omega}\{A(e) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x)\}$$

alors:

- $\tilde{A}$ prolonge A.

En effet, soit $x \in \Omega$ d'abord $\tilde{A}(x) \leq A(x)$, et

$$\forall e \in \Omega \;\; A(e) - A(x) \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x)$$

donc

$$\forall e \in \Omega \;\; A(e) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x) \geq A(x)$$

i.e.

$$\tilde{A}(x) \geq A(x).$$

Ainsi

$$\tilde{A}(x) = A(x) \; \forall x \in \Omega.$$

• $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \; \tilde{A}(x) - \tilde{A}(y) \geq \wedge_{i=1}^{p} w_i.(x-y)$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(x) &= \inf_{e\in\Omega}\{A(e) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x)\} \\
&= \inf_{e\in\Omega}\{A(e) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-y) + \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-y) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x)\} \\
&\geq \inf_{e\in\Omega}\{A(e) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-y)\} + \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-y) \\
&(\text{car} \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-y) - \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(e-x) \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-y)) \\
&= \tilde{A}(y) + \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-y)
\end{aligned}$$

en prenant $y \in \Omega$ on déduit en particulier que $\tilde{A}$ ne prend que des valeurs finies.

• $\tilde{A}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

En effet, d'après la remarque 1.1 on a

$$|\tilde{A}(x) - \tilde{A}(y)| \leq C(w_i) \; |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

où $C(w_i)$ est une constante qui ne dépend que des w_i.

• $\nabla \tilde{A} \in (L^\infty(\mathbb{R}^n))^{\;n}$.

Ce résultat est classique. Nous en donnons ici une démonstration simple. En effet, soit F la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ définie par:

$$F(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{A}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$*$ F est continue pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

En effet, soient $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}$ et e_i le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{\tilde{A}(x+he_i) - \tilde{A}(x)}{h} \longrightarrow \frac{\partial \tilde{A}(x)}{\partial x_i} \text{ (au sens des distributions),}$$

et
$$|\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tilde{A}(x+he_i)-\tilde{A}(x)}{h}\varphi| \leq C(w_i)\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|dx,$$
en passant à la limite on obtient
$$|\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{A}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx| \leq C(w_i)\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|dx.$$
Soit $\tilde{F}$ le prolongement de F sur $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{F}$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^n)$, il existe alors $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ telle que
$$\tilde{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} gf \quad \forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$
en particulier
$$-\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{A}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g\,\varphi \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$
donc,
$$\frac{\partial\tilde{A}}{\partial x_i} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\ \forall i = 1,...,n.$$

• $\nabla\tilde{A} \in \mathrm{Co}(w_i)$ *p.p.* $x \in \mathbb{R}^n$.

En effet
$$\tilde{A}(x)-\tilde{A}(x') \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x')\ \forall x, x' \in \mathbb{R}^n,$$
en particulier
$$\tilde{A}(x)-\tilde{A}(x') \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x')\ \forall x, x' \in]-p,\ p[^{\,n}\ \forall\, p,\ \text{entier naturel},$$
en appliquant le lemme précédent à chaque $]-p,\ p[^{\,n}$ on obtient
$$\nabla\tilde{A}(x) \in \mathrm{Co}(w_i)\ p.p.\ x \in\,]-p,\ p[^{\,n}\ \forall p$$
donc
$$\nabla\tilde{A}(x) \in \mathrm{Co}(w_i)\ p.p.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

■

<u>**Remarque 1.2 :**</u> On va démontrer dans le chapitre 3 que si Ω est convexe et $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie
$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i)\ \text{p.p.}\ x \in \Omega$$
alors
$$A(x)-A(x') \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x-x')\ \forall x, x' \in \Omega$$
de sorte que A peut être prolongée en une fonction $\tilde{A}$ telle que
$$\nabla\tilde{A}(x) \in \mathrm{Co}(w_i)\ \text{p.p.}\ x \in \mathbb{R}^n$$

2. Résultats de convergence.

On suppose dans ce paragraphe que Ω est un domaine borné polyédral de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. On considère deux fonctions φ et ψ définies respectivement sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$.
Si A est une fonction lipschitzienne i.e.

$$A \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{2.1}$$

on note par $W^{1,\infty}(\Omega)$ l'ensemble:

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \ / \ v = A \text{ sur } \Gamma\}.$$

On considère le problème:

$$\begin{aligned} I &= \inf_{v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x)) \, dx, \\ &= \inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

On approche le problème I par un problème discret I_h en remplaçant $W_0^{1,\infty}(\Omega)$ par un espace d'éléments finis V_h et A par un approximé $\hat{A}$. Pour cela on considère une famille régulière $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de triangulations de Ω i.e. satisfaisant

$$\forall\, h > 0 \begin{cases} \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \ K \text{ est un n-simplexe.} \\ \max_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K) = h. \\ \exists \nu > 0 \text{ tel que } \forall K \in \mathcal{T}_h \ \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu. \end{cases}$$

h_K est le diamètre du n-simplexe K et ρ_K sa rondeur (i.e. le diamètre de la plus grande boule incluse dans K).
Si $P_1(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré 1 dans K, on pose:

$$V_h = \{v : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } v/_K \in P_1(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h \},$$

$$V_h^0 = \{v \in V_h \ / \ v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Si $\hat{A}$ est l'interpolé de A sur $\mathcal{T}_h$ (la dépendance de $\hat{A}$ en h sera omise dans toute la suite) i.e. $\hat{A}$ est l'unique fonction de V_h coïncidant avec A sur les sommets de $\mathcal{T}_h$, on considère le problème approché

$$\begin{aligned} I_h &= \inf_{v \in V_h^0} \int_\Omega \psi(v(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla \hat{A}(x)) \, dx, \\ &= \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $V_h^{\hat{A}} = \{v \in V_h \ / \ v = \hat{A} \text{ sur } \Gamma\}$. D'abord on a le lemme suivant:

Lemme 2.1: *Soient $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et v_h son interpolé sur $\mathcal{T}_h$, alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et v telle que*

$$|\nabla v_h(x)| \leq C \ ||\nabla v||_{L^\infty(\Omega)} \ p.p. \ dans \ \Omega. \tag{2.4}$$

Preuve: On va suivre la démonstration de [B.C.].

Soit K un n-simplexe de la triangulation $\mathcal{T}_h$, il existe une application bijective F_K définie du n-simplexe unité $\hat{K}$ à valeurs dans K par:

$$F_K(\hat{x}) = B_K\hat{x} + b_K, \quad \text{où } B_K \in GL(\mathbb{R}^n), \ b_K \in \mathbb{R}^n.$$

Si $\hat{h}$ et $\hat{\rho}$ désignent le diamètre et la rondeur de $\hat{K}$ on a les majorations suivantes (cf [B.C.])

$$\begin{aligned} |B_K| &\leq n^{\frac{1}{2}} \tfrac{h_K}{\hat{\rho}} \\ |B_K^{-1}| &\leq n^{\frac{1}{2}} \tfrac{\hat{h}}{\rho_K}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $|B_K|$ et $|B_K^{-1}|$ sont les normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^{n^2}$ de B_K et B_K^{-1}. Ensuite on pose

$$\begin{aligned} w &= v \circ F_K, \\ w_h &= v_h \circ F_K. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Il est clair que w_h est une fonction affine et coïncide avec w en les sommets de $\hat{K}$, ainsi si e_j est le $j^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a:

$$w_h(e_j) - w_h(0) = w(e_j) - w(0)$$

donc

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x_j}(0, \ldots, t, \ldots, 0)dt,$$

par conséquent

$$|\frac{\partial w_h}{\partial x_j}| \leq ||\nabla w||_{L^\infty(\hat{K})},$$

en élevant au carré et en sommant sur j on obtient

$$|\nabla w_h| \leq n^{\frac{1}{2}} ||\nabla w||_{L^\infty(\hat{K})}. \tag{2.7}$$

Soit maintenant $\hat{x} \in \hat{K}$, en posant $x = F_K(\hat{x})$ on a

$$\begin{aligned}
|\nabla v_h(x)| &\leq |\nabla w_h|\ |B_K^{-1}| \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} |B_K^{-1}|\ ||\nabla w||_{L^\infty(\hat{K})} \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} |B_K^{-1}|\ |B_K|\ ||\nabla v||_{L^\infty(K)} \\
&\leq n^{\frac{1}{2}} |B_K^{-1}|\ |B_K|\ ||\nabla v||_{L^\infty(K)} \\
&\leq n^{\frac{3}{2}} \frac{\hat{h}}{\rho_K}\ \frac{h_K}{\hat{\rho}}\ ||\nabla v||_{L^\infty(K)} \\
&\leq n^{\frac{3}{2}} \nu \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}}\ ||\nabla v||_{L^\infty(K)} \\
&\leq n^{\frac{3}{2}} \nu \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}}\ ||\nabla v||_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned}$$

ceci sur tout n-simplexe K de la triangulation $\mathcal{T}_h$, ainsi

$$|\nabla v_h(x)| \leq n^{\frac{3}{2}} \nu \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}}\ ||\nabla v||_{L^\infty(\Omega)} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

■

Théorème 2.1: *Si φ et ψ sont deux fonctions continues et positives et $I = 0$ alors*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} I_h = 0.$$

Preuve: Soient $v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ et v_h son interpolé sur $\mathcal{T}_h$, $v_h \in V_h^0$. Par (2.4) et le théorème des accroissements finis on a

$$|v_h(x) - v(x)| \leq C\ h$$

où C est une constante indépendante de h. En outre

$$v_h \longrightarrow v \text{ dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ pour tout } p > n \quad (\text{ Cf [C.R.]}).$$

Par conséquent il existe une sous-suite extraite qu'on note aussi v_h telle que

$$\begin{aligned}
&v_h \longrightarrow v \text{ uniformément dans } \Omega, \\
&\nabla v_h \longrightarrow \nabla v \text{ p.p. dans } \Omega.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Par (2.4) et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_\Omega \psi(v_h(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v_h(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx = \int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x))\, dx.$$

Puisque v_h, $\hat{A}$, ∇v_h et $\nabla \hat{A}$ sont uniformément bornés alors

$$\int_\Omega \psi(v_h(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v_h(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx$$

est borné.

En appliquant ce qui précède à toute suite-extraite de v_h, on déduit que toute la suite

$$\int_\Omega \psi(v_h(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v_h(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx$$

converge vers

$$\int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x))\, dx.$$

Or

$$I_h \leq \int_\Omega \psi(v_h(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v_h(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx$$

donc

$$\limsup_{h \longrightarrow 0}\ I_h \leq \int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x))\, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$$

ou encore

$$\limsup_{h \longrightarrow 0}\ I_h \leq I. \tag{2.9}$$

Comme on a supposé $I = 0$ alors

$$\limsup_{h \longrightarrow 0}\ I_h = \liminf_{h \longrightarrow 0}\ I_h = \lim_{h \longrightarrow 0} I_h = 0.$$

■

<u>**Théorème 2.2:**</u> *Si φ et ψ sont des fonctions lipschitziennes alors*

$$\lim_{h \longrightarrow 0}\ I_h = I$$

<u>**Preuve:**</u> Sous l'hypothèse du théorème 2.2 il suffit de montrer que

$$\liminf_{h \longrightarrow 0}\ I_h \geq I. \tag{2.10}$$

En effet, d'après (2.9), on obtient

$$\limsup_{h \longrightarrow 0}\ I_h = \liminf_{h \longrightarrow 0}\ I_h = \lim_{h \longrightarrow 0} I_h = I.$$

Montrons alors (2.10), si φ et ψ sont lipschitziennes de constantes de Lipschitz C_1et C_2, on a pour tout $v \in V_h^0$

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x))\, dx \\
&= \int_\Omega \psi(v(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla A(x))\, dx \\
&- \int_\Omega \psi(v(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx \\
&+ \int_\Omega \psi(v(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx \\
&\leq C_1 \int_\Omega |\hat{A}(x) - A(x)| dx + C_2 \int_\Omega |\nabla \hat{A}(x) - \nabla A(x)| dx \\
&+ \int_\Omega \psi(v(x) + \hat{A}(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x) + \nabla \hat{A}(x))\, dx
\end{aligned}$$

ainsi

$$I \leq C_1 \int_\Omega |\hat{A}(x) - A(x)| dx + C_2 \int_\Omega |\nabla \hat{A}(x) - \nabla A(x)| dx + I_h.$$

Comme $\hat{A}$ converge vers A dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p > n$ (Cf [C.R.]) on obtient (2.10) en passant à la limite.

■

Considérons maintenant le problème

$$J = \inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx,$$

qu'on approche par le problème discret

$$J_h = \inf_{V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx.$$

Alors on a le théorème suivant:

Théorème 2.3: *On suppose que φ et ψ sont continues alors*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} J_h = J.$$

Preuve: D'abord on a

$$J_h \geq J$$

donc

$$\liminf_{h \longrightarrow 0} J_h \geq J.$$

En suivant la même démarche que la preuve du théorème 2.1 on obtient

$$\limsup_{h \longrightarrow 0} J_h \leq J$$

ainsi

$$\lim_{h \longrightarrow 0} J_h = \limsup_{h \longrightarrow 0} J_h = \liminf_{h \longrightarrow 0} J_h = J$$

d'où le théorème.

■

Chapitre 2

ETUDE DE PROBLEMES A DEUX PUITS.

1-Introduction:

Soit Ω un domaine borné polyédral de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ de frontière Γ.

Soient $w_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1, \ldots, p$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p, \tag{1.1}$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall\, w \neq w_i \;\; i = 1, \ldots, p, \tag{1.2}$$

$$\dim \mathrm{W} = 1. \tag{1.3}$$

où W est l'espace engendré par les w_i, dim désigne la dimension d'un espace vectoriel. On note par ψ une fonction continue positive telle que pour un certain $q > 0, c > 0$

$$0 \leq \psi(\xi) \leq c \mid \xi \mid^q \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

Si $A(x)$ est une fonction lipschitzienne i.e.

$$A \in W^{1,\infty}(\Omega), \tag{1.5}$$

on note par $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ l'ensemble,

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \;/\; v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma\}. \tag{1.6}$$

On considère les problèmes

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.7}$$

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.8}$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.9}$$

plus précisément on étudie le cas où

$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i) \; p.p. \text{ dans } \Omega. \tag{1.10}$$

($\mathrm{Co}(w_i)$ est l'enveloppe convexe des w_i)

Remarque 1.1: L'hypothèse (1.3) entraine que $\mathrm{Co}(w_i)$ se réduit à un segment qu'on peut supposer de sommets w_1 et w_2.

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations de Ω i.e. satisfaisant

$$\forall\, h > 0 \begin{cases} \forall\, K \in \mathcal{T}_h, \; K \text{ est un n-simplexe.} \\ \max\limits_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K) = h. \\ \exists \nu > 0 \text{ tel que } \forall K \in \mathcal{T}_h \;\; \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu. \end{cases}$$

h_K est le diamètre du n-simplexe K et ρ_K sa rondeur (i.e le diamètre de la plus grande boule incluse dans K).

Si $P_1(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré 1 dans K, on pose:

$$V_h = \{v : \; \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } v/_K \in P_1(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Si $\hat{A}$ est l'interpolé de A sur $\mathcal{T}_h$ i.e. $\hat{A}$ est l'unique fonction de V_h coïncidant avec A sur les sommets de $\mathcal{T}_h$, on pose

$$V_h^{\hat{A}} = \{v : \; \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } v/_K \in P_1(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h \; , v = \hat{A} \text{ sur } \Gamma\}. \tag{1.11}$$

Notre but est d'obtenir des estimations pour les infima :

$$\inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.12}$$

$$\inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.13}$$

$$\inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.14}$$

en terme de h.

On peut supposer que

$$0 \in \,]w_1, w_2[. \tag{1.15}$$

En effet, soit $w \in]w_1, w_2[$, alors

$$v \in W_A^{1,\infty}(\Omega) \text{ équivaut à } u(x) = v(x) - w.x \in W_{\tilde{A}}^{1,\infty}(\Omega)$$

et

$$\int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx = \int_\Omega \psi(u(x) - (A(x) - w.x) + \varphi(\nabla u(x) + w)\, dx$$

où $w.x$ est le produit scalaire de w par x, $\tilde{A}(x) = A(x) - w.x$. Si l'on pose $\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi + w)$, on aura à traiter le même problème avec $\tilde{\varphi}$ qui s'annule en $\tilde{w}_i = w_i - w$, lesquels satisfont

$$0 \in]\tilde{w}_1, \tilde{w}_2[\ ,\ \nabla\tilde{A}(x) \in]\tilde{w}_1, \tilde{w}_2[\text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Ainsi on peut supposer qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que

$$0 = \beta\, w_1 + (1 - \beta)\, w_2. \tag{1.16}$$

2- Estimations de l'énergie.

Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 2-1 : *Supposons que Ω est convexe, que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (1.1), (1.2). De plus, on suppose que ψ est une fonction continue satisfaisant (1.4), et les w_i satisfont (1.3). Alors si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.10), il existe une constante C indépendante de $h \in (0,1)$ telle que :*

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\tilde{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\tilde{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{r}{r+1}} \tag{2.2}$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{q}{q+1}}, \tag{2.3}$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres.

Remarquons que sans perdre de généralité on peut supposer que

$$w_1 = e_1\ ,\ w_2 = \frac{-\beta}{1-\beta}\, e_1$$

où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En effet, il existe une matrice inversible P telle que

$$w_1{}^T P^{-1} = e_1{}^T \text{ et } w_2{}^T P^{-1} = \tfrac{-\beta}{1-\beta}\, e_1{}^T.$$

Si on pose

$$\tilde{v}(x) = v(P^{-1}x)\ ,\ \tilde{A}(x) = A(P^{-1}x),$$

alors $\tilde{v}$ est définie sur $P(\Omega)$ ($P(\Omega)$ reste un domaine polyédral et la triangulation $\mathcal{T}_h$ est transformée en une triangulation $P(\mathcal{T}_h)$ de $P(\Omega)$ héritant des propriétés de $\mathcal{T}_h$). Si en plus on pose

$$\tilde{\varphi}(w) = \varphi(wP)$$

alors

$$\tilde{\varphi}(\nabla\tilde{v}(x)) = \tilde{\varphi}(\nabla v(P^{-1}x)P^{-1}) = \varphi(\nabla v(P^{-1}x)) \quad \text{p.p. } x \in P(\Omega)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx &= |\det P^{-1}| \int_{P(\Omega)} \psi(v(P^{-1}x) - A(P^{-1}x)) + \varphi(\nabla v((P^{-1}x))\, dx \\ &= |\det P^{-1}| \int_{P(\Omega)} \psi(\tilde{v}(x) - \tilde{A}(x)) + \tilde{\varphi}(\nabla\tilde{v}(x))\, dx,\end{aligned}$$

ainsi on passe d'une minimisation avec Ω, A, ψ, et φ à une minimisation équivalente introduisant $P(\Omega)$, $\tilde{A}$, ψ, et $\tilde{\varphi}$ avec

$$\tilde{\varphi}(e_1) = \tilde{\varphi}(\frac{-\beta}{1-\beta}\, e_1) = 0,$$

$$\nabla\tilde{A}(x) \in [e_1, \frac{-\beta}{1-\beta}\, e_1] \quad \text{p.p. } x \in P(\Omega).$$

On supposera dans toute la suite que

$$w_1 = e_1\ ,\ w_2 = \frac{-\beta}{1-\beta}\, e_1,$$

$$\nabla A(x) \in [e_1, \frac{-\beta}{1-\beta} e_1] \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Ceci entraine en particulier que A ne dépend que de la première variable. On ne distinguera pas A de son prolongement à $\mathbb{R}^n$ donné par le théorème 1.1 du chapitre 1. Pour prouver le théorème 2.1, on démontre d'abord les trois lemmes suivants:

Lemme 2.1 : *Si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie (2.4) alors*

$$A(x, x_2, \dots, x_n) - A(y, y_2, \dots, y_n) \geq \begin{cases} \frac{-\beta}{1-\beta}(x-y), & si \;\; x \geq y, \\ x - y & si \;\; x \leq y, \end{cases} \tag{2.5}$$

Preuve: Soient $(x, x_2, \dots, x_n)$, $(y, y_2, \dots, y_n)$ deux éléments de Ω alors

- Si $x \geq y$ on a

$$\begin{aligned} A(x, x_2, \dots, x_n) - A(y, y_2, \dots, y_n) &= A(x, 0, \dots, 0) - A(y, 0, \dots, 0) \\ &= \int_y^x \frac{\partial A}{\partial t}(t, 0, \dots, 0)dt \\ &\geq \frac{-\beta}{1-\beta}(x-y), \end{aligned}$$

d'après (2.4).

- Si $x \leq y$ on a

$$\begin{aligned} A(x, x_2, \dots, x_n) - A(y, y_2, \dots, y_n) &= A(x, 0, \dots, 0) - A(y, 0, \dots, 0) \\ &= \int_y^x \frac{\partial A}{\partial t}(t, 0, \dots, 0)dt \\ &= -\int_x^y \frac{\partial A}{\partial t}(t, 0, \dots, 0)dt \\ &\geq -(y-x), \\ &\geq x - y. \end{aligned}$$

■

Soient $z \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in]0,1[$, on définit les fonctions suivantes:

$$u(x, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{-\beta}{1-\beta}\, x & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

$$u_{h,z}(x, x_2, \dots, x_n) = u(x - zh^\alpha, x_2, \dots, x_n). \tag{2.7}$$

Remarque 2.1: Toutes les fonctions ci-dessus ne dépendent que de la première variable. Aussi identifie-t-on respectivement $(x, x_2, \dots, x_n)$, $(zh^\alpha, 0, \dots, 0)$ à x et zh^α. Notons aussi que le lemme 2.1 entraine:

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \;\; u_{h,z}(x) \leq A(x) - A(zh^\alpha). \tag{2.8}$$

Considérons maintenant la fonction:

$$u_h(x) = \vee_{\{z\ /\ zh^\alpha \in \Pi(\Omega)\}} \left(u_{h,z}(x) + A(zh^\alpha)\right). \tag{2.9}$$

où $\vee$ désigne le supremum de fonctions. $\Pi(\Omega)$ est la projection de Ω sur l'axe des x. Remarquons que

$$u_h(x) = u_h(x, x_2, \ldots, x_n) = u_h(x, 0, \ldots, 0).$$

On a alors:

Lemme 2.2: *Si $z_0 \in \mathbb{Z}$, alors $\forall\ x \in [z_0 h^\alpha,\ (z_0+1)h^\alpha]$ on a*

$$u_h(x) = \left(u_{h,z_0}(x) + A(z_0 h^\alpha)\right) \vee \left(u_{h,z_0+1}(x) + A((z_0+1)h^\alpha)\right). \tag{2.10}$$

i.e. dans chaque segment $[z_0 h^\alpha,\ (z_0+1)h^\alpha]$ le supremum dans (2.9) n'est pris que sur deux fonctions.

Preuve: Soient $z \in \mathbb{Z}$ et $x \in [z_0 h^\alpha,\ (z_0+1)h^\alpha]$, on va distinguer deux cas:

- Si $z \leq z_0$ alors $zh^\alpha \leq z_0 h^\alpha \leq x$, ainsi

$$\begin{aligned}
u_{h,z_0}(x) + A(z_0 h^\alpha) &= u(x - z_0 h^\alpha) + A(z_0 h^\alpha) \\
&= \frac{-\beta}{1-\beta}(x - z_0 h^\alpha) + A(z_0 h^\alpha) \\
&= \frac{-\beta}{1-\beta}(x - zh^\alpha) + \frac{-\beta}{1-\beta}(zh^\alpha - z_0 h^\alpha) + A(z_0 h^\alpha) \\
&= u_{h,z}(x) + A(zh^\alpha) + A(z_0 h^\alpha) - A(zh^\alpha) + \frac{-\beta}{1-\beta}(zh^\alpha - z_0 h^\alpha) \\
&\geq u_{h,z}(x) + A(zh^\alpha),
\end{aligned}$$

puisque $A(z_0 h^\alpha) - A(zh^\alpha) + \frac{-\beta}{1-\beta}(zh^\alpha - z_0 h^\alpha) \geq 0$ par le lemme 2.1.

- Si $z_0 + 1 \leq z$ alors $x \leq (z_0+1)h^\alpha \leq zh^\alpha$, ainsi

$$\begin{aligned}
u_{h,z_0+1}(x) + A((z_0+1)h^\alpha) &= u(x - (z_0+1)h^\alpha) + A((z_0+1)h^\alpha) \\
&= x - (z_0+1)h^\alpha + A((z_0+1)h^\alpha) \\
&= x - zh^\alpha + zh^\alpha - (z_0+1)h^\alpha + A((z_0+1)h^\alpha) \\
&= u_{h,z}(x) + A(zh^\alpha) + A((z_0+1)h^\alpha) - A(zh^\alpha) + zh^\alpha - (z_0+1)h^\alpha \\
&\geq u_{h,z}(x) + A(zh^\alpha).
\end{aligned}$$

ceci d'après le lemme 2.1.

■

On a aussi:

Lemme 2.3: *Sous les hypothèses précédentes on a pour une constante positive C indépendante de h*

$$A(x) - Ch^{\alpha} \leq u_h(x) \leq A(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Preuve: Soit $z \in \mathbb{Z}$ tel que $zh^{\alpha} \in \Pi(\Omega)$ alors d'après la remarque 2.1 on a

$$u_{h,z}(x) + A(zh^{\alpha}) \leq A(x)$$

ainsi

$$u_h(x) \leq A(x).$$

En outre il existe un z tel que $x \in [zh^{\alpha}, (z+1)h^{\alpha}]$, on a alors

$$\begin{aligned} u_h(x) &\geq u_{h,z}(x) + A(zh^{\alpha}) \\ &= u_{h,z}(x) + (A(zh^{\alpha}) - A(x)) + A(x) \\ &\geq A(x) - Ch^{\alpha}. \end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 2.1:

Preuve du (2.3): Considérons la fonction u_h introduite dans (2.9), u_h est affine sur tous les n-simplexes sauf sur ceux dont la projection sur $\mathbb{R}$ rencontre les zh^{α} ou rencontre le point x_z du segment $[zh^{\alpha}, (z+1)h^{\alpha}]$ tel que

$$u_{h,z}(x_z) + A(zh^{\alpha}) = u_{h,z+1}(x_z) + A((z+1)h^{\alpha}).$$

On remplace u_h par son interpolé $\hat{u}_h$ sur $\mathcal{T}_h$, alors $u_h \in V_h$. Puisque

$$\nabla u_h(x) = e_1 \text{ ou } \frac{-\beta}{1-\beta} e_1 \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

alors $\nabla \hat{u}_h$ est uniformément borné d'après le lemme 2.1 du chapitre 1. Ainsi, par le théorème des accroissements finis on a

$$|u_h(x) - \hat{u}_h(x)| \leq Ch$$

pour une constante C indépendante de h. Alors, par (2.11) et puisque $h, \alpha \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} |\hat{u}_h(x) - A(x)| &\leq |\hat{u}_h(x) - u_h(x)| + |u_h(x) - A(x)| \\ &\leq Ch + Ch^\alpha \leq Ch^\alpha. \end{aligned}$$

Ceci entraine que

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h - A(x))dx \leq C|\Omega|h^{\alpha q}.$$

Il nous reste à estimer

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx = \int_S \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx$$

où S est l'ensemble des n-simplexes tels que

$$\nabla \hat{u}_h(x) \neq e_1 \text{ ou } \frac{-\beta}{1-\beta}e_1.$$

Puisque le gradient de $\hat{u}_h$ est uniformément borné on a

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx \leq C|S|.$$

Les n-simplexes sont de diamètres inférieurs à h donc

$$|S| \leq (N(h^\alpha) + M(h^\alpha))h\ d,$$

où d est le diamètre de Ω, $N(h^\alpha)$ est le nombre des zh^α contenus dans $\Pi(\Omega)$ et $M(h^\alpha)$ est le nombre des x_z associés à ces zh^α. Il est clair que

$$M(h^\alpha) = N(h^\alpha) - 1$$

et

$$M(h^\alpha)h^\alpha = (N(h^\alpha) - 1)h^\alpha \leq d$$

par suite

$$N(h^\alpha)h^\alpha \leq d + h^\alpha \leq d + 1,$$

par conséquent

$$|S| \leq Ch^{1-\alpha}.$$

Ainsi

$$E_h^3 \leq C(h^{\alpha q} + h^{1-\alpha})) \leq Ch^{\alpha q \wedge 1-\alpha}$$

où $\wedge$ désigne le minimum de nombres. Mais $\alpha q \wedge 1-\alpha$ est maximum lorsque $\alpha q = 1-\alpha$ i.e. $\alpha = \frac{1}{q+1}$ d'où (2.3).

Preuve du (2.1),(2.2): Pour réaliser la condition au bord on remplace la fonction u_h par la fonction

$$v_h(x) = u_h(x) \vee (A(x) - \text{dist}(x,\Gamma)).$$

Par (2.11) il est clair que cette fonction coïncide avec A sur Γ. Si on désigne par $\hat{v}_h$ son interpolé alors $\hat{v}_h \in V_h^{\hat{A}}$. Par (2.11) on a

$$|u_h(x) - A(x)| \le Ch^\alpha.$$

Ainsi, si

$$\text{dist}(x,\Gamma) \ge Ch^\alpha$$

alors

$$v_h(x) = u_h(x).$$

Maintenant si

$$v_h(x) = A(x) - \text{dist}(x,\Gamma)$$

on a nécessairement

$$|v_h(x) - A(x)| = \text{dist}(x,\Gamma) \le Ch^\alpha$$

par conséquent

$$|v_h(x) - A(x)| \le Ch^\alpha.$$

Puisque

$$|v_h(x) - \hat{v}_h(x)| \le Ch$$

alors

$$|\hat{v}_h(x) - A(x)| \le Ch^\alpha,$$

de sorte que

$$\int_\Omega \psi(\hat{v}_h(x) - A(x))dx \le Ch^{\alpha q}. \tag{2.12}$$

Comme dans la preuve du (2.3) on a

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{v}_h(x))dx \le C|I|$$

où I est l'ensemble où l'on interpole. Rappelons que si

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha$$

on a

$$v_h(x) = u_h(x)$$

ainsi, quand

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h$$

on a

$$\hat{v}_h = \text{l'interpolé de } u_h.$$

Si on pose

$$I_1 = \{x \ / \ \text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h\}$$

alors l'estimation trouvée dans la première partie donne

$$\int_{I_1} \varphi(\nabla \hat{v}_h(x)) dx \leq Ch^{1-\alpha}. \tag{2.13}$$

Maintenant on doit estimer

$$\int_{I \backslash I_1} \varphi(\nabla \hat{v}_h(x)) dx$$

mais $I \backslash I_1$ est un h^α–voisinage de Γ. Puisque $\nabla \hat{v}_h$ reste uniformément borné on obtient

$$\int_{I \backslash I_1} \varphi(\nabla \hat{v}_h(x)) dx \leq Ch^\alpha. \tag{2.14}$$

En rassemblant (2.12)-(2.14) on obtient

$$\int_\Omega \psi(\hat{v}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{v}_h(x)) \, dx \leq C\{h^{\alpha q} + h^\alpha + h^{1-\alpha}\} \leq C\{h^{\alpha r} + h^{1-\alpha}\}, \tag{2.15}$$

et

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{v}_h(x) dx \leq C\{h^\alpha + h^{1-\alpha}\}. \tag{2.16}$$

Dans (2.15) l'estimation est la meilleure possible lorsque $\alpha r = 1 - \alpha$ i.e. $\alpha = \frac{1}{r+1}$. Ceci donne (2.2). Dans (2.16) l'estimation est optimale pour $\alpha = \frac{1}{2}$ lequel donne (2.1). Ceci termine la preuve du théorème (2.1).

■

Chapitre 3

ETUDE DE PROBLEMES A PLUSIEURS PUITS

1-Introduction:

Soit Ω un domaine borné polyédral de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ de frontière Γ. Soient $w_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1, \ldots, p$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p, \tag{1.1}$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall\, w \neq w_i \; i = 1, \ldots, p, \tag{1.2}$$

$$w_i - w_p, \quad i = 1, \ldots, p-1 \quad \text{sont linéairement indépendants .} \tag{1.3}$$

On note par ψ une fonction continue positive telle que pour des constantes positives q et c

$$0 \leq \psi(\xi) \leq c \mid \xi \mid^q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Si $A(x)$ est une fonction lipschitzienne i.e.

$$A \in \; W^{1,\infty}(\Omega),$$

on note par $W_A^{1,\infty}(\Omega)$ l'ensemble,

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in \; W^{1,\infty}(\Omega) \; / \; v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma\}.$$

On considère les problèmes

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.5}$$

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.6}$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.7}$$

on s'intéresse aussi au cas où

$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i) \; p.p. \text{ dans } \Omega \tag{1.8}$$

($\mathrm{Co}(w_i)$ est l'enveloppe convexe des w_i)
Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations de Ω i.e. satisfaisant

$$\forall h > 0 \begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}_h, \; K \text{ est un n-simplexe.} \\ \max\limits_{K\in \mathcal{T}_h} (h_K) = h. \\ \exists \nu > 0 \text{ tel que } \forall K \in \mathcal{T}_h \; \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu. \end{cases}$$

Si $P_1(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré 1 dans K, on pose:

$$V_h = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \; v/_K \in P_1(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Si $\hat{A}$ est l'interpolé de A sur $\mathcal{T}_h$ i.e. $\hat{A}$ est l'unique fonction de V_h coïncidant avec A sur les sommets de $\mathcal{T}_h$, on pose

$$V_h^{\hat{A}} = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}, \; v/_K \in P_1(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h, \; v = \hat{A} \text{ sur } \Gamma\}.$$

Notre but est toujours d'obtenir des estimations pour les infima :

$$\inf_{v\in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.9}$$

$$\inf_{v\in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.10}$$

$$\inf_{v\in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \tag{1.11}$$

en terme de h.

Remarque1-1: Si $\nabla A \in \mathrm{Co}(w_i)$ on n'a pas nécessairement

$$\nabla \hat{A} \in \mathrm{Co}(w_i).$$

En effet sur $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$, on définit la fonction A par:

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{si } -1 \leq y \leq 0 \\ -y+1 & \text{si } \; 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

sur le triangle de sommets $v_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}), v_2 = (0,0)$,
on a

$$\nabla A = \pm(0,1) \in [(0,-1),(0,1)]$$

et

$$\nabla \hat{A}(x,y) = (1,0) \notin [(0,-1),(0,1)].$$

Remarque 1-2: Dans le cas où A est affine sur chaque face de Γ alors $\hat{A}$=A sur Γ. On note aussi que (1.9)- (1.11) sont bien définis, par contre (1.5)- (1.7) nécessitent le fait que φ soit borélienne.

Remarquons d'abord que sans perdre de généralité on peut supposer que

$$0 \in ir(Co(w_i)) \tag{1.12}$$

où $ir(Co(w_i))$ désigne l'intérieur relatif de $Co(w_i)$ i.e. son intérieur par rapport à l'espace engendré par les $w_i - w_p$. En effet, soient $w \in ir(Co(w_i))$, u et v tels que

$$v = u + w.x$$

où $w.x$ désigne le produit scalaire de w par x, on a alors

$$v \in W_A^{1,\infty}(\Omega) \iff u \in W_{\tilde{A}}^{1,\infty}(\Omega)$$

où $\tilde{A}(x) = A(x) - w.x$, ainsi on est amené à minimiser

$$\int_\Omega \psi(u(x) - (A(x) - w.x)) + \varphi(w + \nabla u(x))\, dx$$

sur l'espace $W_{\tilde{A}}^{1,\infty}(\Omega)$, et si on pose

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(w + \xi),\ \tilde{A}(x) = A(x) - w.x$$

on traitera alors le même problème avec des puits $w_i - w$ qui satisfont,

$$0 \in ir(Co(w_i - w)),\ \nabla \tilde{A} \in Co(w_i - w)\ p.p.\ x \in \Omega.$$

On suppose donc (1.12) vérifié, ainsi il existe des $\alpha_i \in (0,1)$ tels que

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i w_i \text{ et } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1. \tag{1.13}$$

2- Estimations de l'énergie.

Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 2-1 : *Supposons que Ω est convexe, que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ et satisfaisant (1.1), (1.2). De plus, on suppose que ψ est une fonction continue satisfaisant (1.4), et les w_i satisfont (1.3). Alors si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.8), il existe une constante C indépendante de $h \in (0,1)$ telle que :*

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{r}{r+1}} \tag{2.2}$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq Ch^{\frac{q}{q+1}} \tag{2.3}$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres.

Remarque 2-1 :

En supposant par exemple que $\lim_{|\xi| \to +\infty} \varphi(\xi) = +\infty$ ou $\lim_{|\xi| \to +\infty} \psi(\xi) = +\infty$, on peut alors montrer grâce à un argument de compacité que (2-1)-(2-3) sont atteints (Cf [C.C] ou [C]).

Pour prouver le théorème (2-1) on aura besoin de quelques lemmes d'abord on a :

Lemme 2-1 : *Supposons que $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.8). Alors si le segment $[x, x']$ est inclu dans Ω on a :*

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \leq A(x) - A(x') \leq \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \tag{2.4}$$

où $\wedge$ désigne le minimum de nombres et $\vee$ désigne le maximum de nombres.

Preuve: On considère l'ensemble Ω_ϵ et la famille de fonctions A_ϵ $(\epsilon > 0)$ définis par:

$$\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \ / \ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$$

$$A_\epsilon(x) = \rho_\epsilon * A(x) = \int_\Omega \rho_\epsilon(x - y) A(y) dy, \quad x \in \Omega_\epsilon$$

où $\rho_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est de support $B(0, \epsilon)$ et vérifie

$$\int_{B(0,\epsilon)} \rho_\epsilon(x) dx = 1.$$

il existe un ϵ_0 tel que $[x, x'] \subset \Omega_\epsilon \ \forall\ 0 < \epsilon < \epsilon_0$.
Pour $x \in \Omega_\epsilon$ on a

$$\begin{aligned}\nabla A_\epsilon(x) &= \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\nabla A(y)\, dy \\ &= \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(y)\, w_i\, dy \\ &= \sum_{i=1}^{p}\int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\ \alpha_i(y)\ dy\ w_i\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\ \alpha_i(y)\ dy &= \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(y)\ dy \\ &= \int_{B(x,\epsilon)} \rho_\epsilon(x-y)\ dy = 1\end{aligned}$$

donc

$$\nabla A_\epsilon(x) \in \mathrm{Co}(w_i)\ \forall\ x \in\ \Omega_\epsilon.$$

Par le théorème des accroissement finis on a pour un $z \in [x, x']$ et des α_i

$$\begin{aligned}A_\epsilon(x) - A_\epsilon(x') &= \nabla A_\epsilon(z).(x - x') \\ &= \sum_{i=1}^{p}\ \alpha_i w_i.(x - x').\end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \leq w_i.(x - x') \leq \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x - x')$$

et

$$\sum_{i=1}^{p}\ \alpha_i = 1$$

on déduit

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \leq A_\epsilon(x) - A_\epsilon(x') \leq \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x - x')$$

et le résultat découle du fait que

$$A_\epsilon \longrightarrow A \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Remarque 2-2: Une conséquence immédiate de ce lemme est que $A(x) - A(x') = 0$ sur chaque segment $[x, x']$ tel que $x - x' \in W^\perp$ où $W^\perp$ désigne l'orthogonal de l'espace W engendré par les w_i, $i = 1, \ldots, p$.

Soit $v_1, ..., v_{p-1}$ la base duale de la base $w_i - w_p$, i.e. la base telle que

$$(w_i - w_p).v_j = \delta_{ij} \quad \forall\, i, j = 1, ..., p-1. \tag{2.5}$$

On désigne par x_z les sommets du réseau de taille h^α (α sera déterminé ultérieurement) engendré par les v_i i.e. pour $z = (z_1, ..., z_{p-1}) \in \mathbb{Z}^{p-1}$ on pose

$$x_z = \sum_{i=1}^{p-1} z_i h^\alpha v_i. \tag{2.6}$$

Ensuite, soit la fonction Λ définie par

$$\Lambda(x) = \bigvee_{z \in \mathbb{Z}^{p-1}} \left(\wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) + \tilde{A}(x_z) \right) \tag{2.7}$$

où $\tilde{A}$ est le prolongement de A défini dans le théorème1.1 du chapitre 1.

La fonction Λ est constante sur la direction de $W^\perp$ et on peut la considérer comme fonction de $x \in W$ ou $x \in \mathbb{R}^n$. Par une cellule unité du réseau engendré par les $h^\alpha v_i$ on désigne les ensembles du type:

$$C_z = x_z + \left\{ \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i h^\alpha v_i \;/ \beta_i \in [0, 1] \right\}$$

où x_z est défini par (2.6). Alors on a:

Lemme 2.2: *Supposons que Ω est convexe. Sous les hypothèses précédentes, si on désigne par C_{z_0} une cellule unité du réseau engendré par $h^\alpha v_i$ et par E l'ensemble*

$$E = \{ z \in \mathbb{Z}^{p-1} \;/\; z_i = 0 \text{ ou } 1 \;\; \forall\, i = 1, ..., p-1 \},$$

alors on a

$$\Lambda(x) = \bigvee_{z' \in z_0 + E} \left(\wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \tilde{A}(x_{z'}) \right) \;\; \forall\, x \in C_{z_0}. \tag{2.8}$$

i.e. dans (2.7) au lieu de prendre le supremum sur un nombre de z qui peut être non borné quand $h \to 0$ il suffit de le prendre sur un nombre fini de z.

Preuve: Supposons que $x \in C_{z_0}$, et fixons $z \in \mathbb{Z}^{p-1}$. Alors, pour un certain $l = 1, ..., p$ on a

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) = w_l.(x - x_z). \tag{2.9}$$

On affirme qu'il existe un $z' \in z_0 + E$ tel que

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) = \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x_{z'} - x_z). \tag{2.10}$$

Pour prouver ceci on va montrer l'existence d'un $z' \in z_0 + E$ tel que

$$\begin{cases} w_i.(x - x_{z'}) \geq w_l.(x - x_{z'}) & \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l, \\ w_i.(x_{z'} - x_z) \geq w_l.(x_{z'} - x_z) & \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l. \end{cases} \tag{2.11}$$

En effet, si (2.11) est vérifié, en utilisant (2.9) on a

$$\begin{aligned} \wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) &= w_l.(x - x_z) \\ &= w_l.(x - x_{z'}) + w_l.(x_{z'} - x_z) \\ &= \wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \wedge_{i=1}^{p} w_i.(x_{z'} - x_z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

et (2.10) s'en suit.

Supposons que

$$x = \sum_{k=1}^{p-1} (\beta_k + z_{0k}) h^\alpha v_k \ , \ x_z = \sum_{k=1}^{p-1} z_k h^\alpha v_k \ , \ x_{z'} = \sum_{k=1}^{p-1} z'_k h^\alpha v_k. \tag{2.13}$$

Alors (2.9) s'écrit

$$(w_i - w_l).x \geq (w_i - w_l).x_z \quad \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l$$

ou

$$\sum_{k=1}^{p-1} \{\beta_k + z_{0k}\}(w_i - w_l).v_k \geq \sum_{k=1}^{p-1} z_k (w_i - w_l).v_k \quad \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l. \tag{2.14}$$

De même (2.11) s'écrit

$$\sum_{k=1}^{p-1} \{\beta_k + z_{0k}\}(w_i - w_l).v_k \geq \sum_{k=1}^{p-1} z'_k (w_i - w_l).v_k \quad \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} z'_k (w_i - w_l).v_k \geq \sum_{k=1}^{p-1} z_k (w_i - w_l).v_k \quad \forall\, i = 1, ..., p,\ i \neq l. \tag{2.15}$$

Par (2.5) on a

- Quand $l \neq p$

  * Si $i = p$,

$$(w_i - w_l).v_k = -\delta_{lk}. \tag{2.16}$$

  * Si $i \neq p$,

$$\begin{aligned}(w_i - w_l).v_k &= [(w_i - w_p) + (w_p - w_l)].v_k \\ &= (w_i - w_p).v_k + (w_p - w_l).v_k \\ &= \delta_{ik} - \delta_{lk}\end{aligned}$$

i.e.

$$(w_i - w_l).v_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i, l, \\ 1 & \text{si} \quad k = i, \\ -1 & \text{si} \quad k = l. \end{cases} \tag{2.17}$$

- Quand $l = p$

$$(w_i - w_l).v_k = \delta_{ik}. \tag{2.18}$$

Examinons d'abord le cas $l \neq p$, alors (2.14), (2.15) s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} -(\beta_l + z_{0l}) \geq -z_l \\ (\beta_i + z_{0i}) - (\beta_l + z_{0l}) \geq z_i - z_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1,\ i \neq l \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} -(\beta_l + z_{0l}) \geq -z'_l \\ (\beta_i + z_{0i}) - (\beta_l + z_{0l}) \geq z'_i - z'_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1,\ i \neq l \end{cases} \tag{2.20}$$

$$\begin{cases} -z'_l \geq -z_l \\ z'_i - z'_l \geq z_i - z_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1,\ i \neq l. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ainsi, sachant (2.19), on cherche $z' \in z_0 + E$ tel que

$$\begin{cases} -(\beta_l + z_{0l}) \geq -z'_l \geq -z_l \\ (\beta_i + z_{0i}) - (\beta_l + z_{0l}) \geq z'_i - z'_l \geq z_i - z_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1,\ i \neq l. \end{cases} \tag{2.22}$$

Puisque $\beta_l \in [0,1]$, on choisit

$$z'_l = z_{0l} + 1 \ , \begin{cases} z'_i = z_{0i} + 1 & \text{si} \quad \beta_i \geq \beta_l, \\ z'_i = z_{0i} & \text{si} \quad \beta_i < \beta_l, \qquad i = 1, ..., p-1, \ i \neq l. \end{cases} \tag{2.23}$$

Dans le cas où $\beta_i \geq \beta_l$, puisque z_l, $z_i - z_l$ sont des entiers vérifiant (2.19) on a

$$\begin{cases} -(\beta_l + z_{0l}) \geq -(z_{0l} + 1) \geq -z_l \\ (\beta_i + z_{0i}) - (\beta_l + z_{0l}) \geq (z_{0i} + 1) - (z_{0l} + 1) \geq z_i - z_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1, \ i \neq l, \end{cases} \tag{2.24}$$

ce qui donne (2.22) dans ce cas. Dans le cas où $\beta_i < \beta_l$, puisque $-1 \leq \beta_i - \beta_l < 0$ on a

$$\begin{cases} -(\beta_l + z_{0l}) \geq -(z_{0l} + 1) \geq -z_l \\ (\beta_i + z_{0i}) - (\beta_l + z_{0l}) \geq z_{0i} - (z_{0l} + 1) \geq z_i - z_l \quad \forall\, i = 1, ..., p-1, \ i \neq l, \end{cases} \tag{2.25}$$

ceci entraine également (2.22).

Il reste à traiter le cas où $l = p$. Dans ce cas, le système à résoudre est (d'après (2.15), (2.18))

chercher z' tel que

$$\beta_i + z_{0i} \geq z'_i \quad \forall \quad i \neq p, \tag{2.26}$$

sachant que

$$\beta_i + z_{0i} \geq z_i \quad \forall \quad i \neq p,$$

il est clair que $z' = z_0$ convient. Ceci démontre (2.10).

Pour compléter la preuve du lemme (2.3), considérons un point $x \in C_{z_0}$. Si x_z est un sommet quelconque, par (2.11), il existe un $z' \in z_0 + E$ tel que

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) = \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x_{z'} - x_z).$$

En utilisant le lemme 2.1 on déduit que

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) \leq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \tilde{A}(x_{z'}) - \tilde{A}(x_z)$$

i.e.

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) + \tilde{A}(x_z) \leq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \tilde{A}(x_{z'})$$

et ceci complète la démonstration.

On a aussi:

<u>**Lemme 2-3:**</u> *Supposons que Ω est convexe, sous les hypothèses précédentes on a pour une constante C indépendante de h*

$$A(x) - Ch^{\alpha} \leq \Lambda(x) \leq A(x) \; \forall \; x \in \Omega \tag{2.27}$$

Preuve: Soit $z \in \mathbb{Z}^{p-1}$ en utilisant le lemme 2.1 on a

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) + \tilde{A}(x_z) \leq A(x) \; \forall \; x_z$$

donc

$$\Lambda(x) \leq A(x),$$

soit $x' \in P_W(\Omega)$ ($P_W(\Omega)$ est la projection orthogonale de Ω sur W) la composante de x sur $P_W(\Omega)$, il existe un z_0 tel que $x' \in C_{z_0}$, ainsi

$$\Lambda(x) \geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z_0}) + \tilde{A}(x_{z_0})$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x' - x_{z_0}) + \tilde{A}(x_{z_0})$$

$$\geq -Ch^{\alpha} + \tilde{A}(x_{z_0}) - A(x) + A(x)$$

$$\geq -Ch^{\alpha} + A(x)$$

d'où le lemme.

<u>**Preuve du théorème 2.1**</u>

<u>**Preuve de 2.3 :**</u> Soit $\hat{u}_h$ l'interpolé de la fonction $\Lambda(x)$ introduite dans (2.7), $\hat{u}_h \in V_h$. Remarquons que

$$\nabla\Lambda(x) = w_i \;\; p.p.$$

donc Λ est une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz uniformément bornée. Le lemme 2.1 du chapitre 1 entraine que le gradient de $\hat{u}_h$ est aussi uniformément borné. Ainsi par le théorème des accroissements finis on a pour une constante C

$$| \Lambda(x) - \hat{u}_h(x) | \leq Ch$$

et puisque $\alpha,\ h \in (0,1)$

$$\begin{aligned} | A(x) - \hat{u}_h(x) | &\leq | A(x) - \Lambda(x)| + | \Lambda(x) - \hat{u}_h(x) | \\ &\leq Ch^\alpha + Ch \leq Ch^\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$| A(x) - \hat{u}_h(x) | \leq Ch^\alpha. \tag{2.28}$$

Ceci entraine que

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h - A(x))dx \leq C\,|\Omega\,|h^{q\alpha} \tag{2.29}$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω.

On aura aussi à estimer

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx.$$

Le $\nabla \hat{u}_h = w_i$ sauf peut-être sur l'ensemble S où l'on interpole, puisque $\nabla \hat{u}_h$ reste uniformément borné on a

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx = \int_S \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))dx \leq C| S |$$

où $|S|$ est la mesure de S.

L'interpolation a lieu sur un h-voisinage des arêtes de $\Lambda(x)$ i.e. un voisinage de l'ensemble

où $\Lambda(x)$ présente une discontinuité en son gradient. $\Lambda(x)$ a un saut en gradient dans

une cellule du réseau engendré par les $h^\alpha(v_i)$ quand l'une des fonctions

$$w_i.(x - x_z) + \tilde{A}(x_z)$$

est égale à une autre.

Donc ces deux fonctions sont égales sur un ensemble de mesure (p-2)-dimensionnelle bornée par $C(h^\alpha)^{p-2}$ (c'est l'intersection d'un hyperplan et d'une cellule de diamètre borné par Ch^α).

Puisque dans (2.7) le supremum est pris sur un nombre fini de fonctions on a

$$|S| \leq C(h^\alpha)^{p-2} h N(h^\alpha) \tag{2.30}$$

où $N(h^\alpha)$ est le nombre de cellules de taille h^α incluses dans $P_W(\Omega)$. Il est clair que

$$N(h^\alpha).(h^\alpha)^{p-1} \leq C$$

donc (2.30) s'écrit

$$|S| \leq Ch^{1-\alpha}. \tag{2.31}$$

En rassemblant (2.29)-(2.31) on obtient

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) \leq C\big[h^{\alpha q} + h^{1-\alpha}\big],$$

la puissance est la meilleure possible lorsque $1 - \alpha = \alpha q$ i.e. $\alpha = \frac{1}{1+q}$ d'où (2.3).

Preuve du (2.1)-(2.2): Considérons encore une fois la fonction $\Lambda(x)$. Pour réaliser la condition au bord on considère la fonction

$$u_h(x) = \Lambda(x) \vee (A(x) - \text{dist}(x, \Gamma))$$

où $\text{dist}(x, \Gamma)$ désigne la distance de x à la frontière Γ, par (2.27) on a

$$u_h(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma.$$

Soit $\hat{u}_h$ l'interpolé de u_h sur $\mathcal{T}_h$, $\hat{u}_h \in V_h^{\hat{A}}$, d'après (2.27) on a

$$|A(x) - \Lambda(x)| \leq Ch^\alpha.$$

D'où si

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha,$$

alors

$$u_h(x) = \Lambda(x).$$

Maintenant si

$$u_h(x) = A(x) - \text{dist}(x, \Gamma),$$

on a alors

$$|u_h(x) - A(x)| = \text{dist}(x, \Gamma) \leq Ch^\alpha$$

donc

$$|u_h(x) - A(x)| \leq Ch^\alpha.$$

Or

$$|u_h(x) - \hat{u}_h(x)| \leq Ch$$

donc

$$|\hat{u}_h(x) - A(x)| \leq Ch^\alpha. \tag{2.32}$$

Ainsi

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h(x) - A(x))\ dx\ \leq Ch^{\alpha q} \tag{2.33}$$

et comme précédemment on a

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\ dx\ \leq\ C|S| \tag{2.34}$$

où $|S|$ est la mesure de l'ensemble S où l'on interpole.

Mais si

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha,$$

alors

$$u_h(x) = \Lambda(x).$$

Donc quand $\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h$ on a

$$\hat{u}_h = \text{ l'interpolé de } \Lambda(x).$$

D'après ce qui précède si on pose

$$S_1 = \{x\ /\ \text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h\}$$

on obtient:

$$\int_{S_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\ dx \leq Ch^{1-\alpha}. \tag{2.35}$$

Il nous reste à estimer

$$\int_{S \backslash S_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\ dx.$$

$S \backslash S_1$ est un h^α-voisinage de Γ et puisque le gradient de $\hat{u}_h$ est uniformément borné on obtient:

$$\int_{S \backslash S_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\ dx \leq Ch^\alpha. \tag{2.36}$$

Combinant (2.33)-(2.36) on obtient

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\ dx \leq C\big[h^{\alpha q} + h^{1-\alpha} + h^\alpha\big]$$

et

$$\int_\Omega \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\, dx \leq C\big[h^{1-\alpha} + h^\alpha\big].$$

Cette dernière estimation est la meilleure possible lorsque $1-\alpha = \alpha$ i.e. $\alpha = \frac{1}{2}$ et ceci prouve (2.1).

Si on pose $r = q \wedge 1$ alors

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\, dx \leq C\big[h^{\alpha r} + h^{1-\alpha}\big].$$

Cette estimation est la meilleure possible losque $1-\alpha = \alpha r$ i.e. $\alpha = \frac{1}{r+1}$ donc

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\, dx \leq C h^{\frac{r}{r+1}}$$

ce qui prouve (2.2)

Remarque 2-4: Dans le cas où Ω est non convexe et sous les hypothèses du théorème 2-1 on a pour une constante C

$$E_h^i \leq C h^{\frac{r}{r+1}} \quad i = 1,2,3 \tag{2.37}$$

où $r = q \wedge 1$.

En effet $E_h^1 \leq E_h^2$ et puisque $V_h^{\hat{A}} \subset V_h$, $E_h^3 \leq E_h^2$

donc il suffit de démontrer (2.37) pour $i = 2$.

Mais un domaine polyédral peut être décomposé en sous-domaines polyédraux Ω_i

$i = 1,\ldots,N$ qui sont convexes. Donc sur chaque Ω_i on construit un u_h comme précédemment.

u_h satisfait la condition au bord sur chaque Ω_i. Soit $\hat{u}_h$ l'interpolé de ces fonctions sur $\mathcal{T}_h$, l'estimation de

$$\int_\Omega \psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\, dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \psi(\hat{u}_h(x) - A(x)) + \varphi(\nabla \hat{u}_h(x))\, dx$$

s'obtient de la même manière que la $2^{ème}$ partie du théorème 2-1.

Lorsque $q \leq 1$ on a $E_h^i \leq C h^{\frac{q}{q+1}} i = 1,2,3$.

Mais on a une estimation meilleure pour E_h^1 à savoir $E_h^1 \leq C h^{\frac{1}{2}}$.

Chapitre 4

ANALYSE DES SUITES MINIMISANTES.

1-Introduction:

On suppose toujours ici que Ω est un domaine borné polyédral de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ de frontière Γ . Soit Γ_0 une partie de la frontière de mesure strictement positive. Soient $w_i \in \mathbb{R}^n$ $i = 1, \ldots, p$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p, \tag{1.1}$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall\, w \neq w_i \; i = 1, \ldots, p, \tag{1.2}$$

$$w_i - w_p, \quad i = 1, \ldots, p-1 \quad \text{sont linéairement indépendants .} \tag{1.3}$$

On note par ψ une fonction continue positive telle que pour des constantes positives q et c

$$0 \leq \psi(\xi) \leq c \mid \xi \mid^q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Si $A \in W^{1,\infty}(\Omega)$, on note par V^A l'ensemble,

$$V^A = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \ / \ v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

On suppose que

$$\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i) \tag{1.5}$$

et on considère les problèmes

$$\inf_{v \in V^A} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.6}$$

$$\inf_{v \in V^A} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.7}$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx. \tag{1.8}$$

Soit maintenant $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations de Ω. On pose:

$$V_h = \{v : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } v/_K \in \ P_1(K)\ \forall K \in \ \mathcal{T}_h \ \}.$$

Si $\hat{A}$ est l'interpolé de A sur $\mathcal{T}_h$, on pose

$$V_h^{\hat{A}} = \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue, } v/_K \in P_1(K) \; \forall K \in \mathcal{T}_h, \; v = \hat{A} \text{ sur } \Gamma_0\}.$$

Alors on a le théorème:

Théorème 1.1: *Sous les hypothèses précédentes et si φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ alors il existe une constante C indépendante de $h \in (0,1)$ telle que :*

$$E_h^1 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x)) \, dx \leq C h^{\frac{1}{2}}$$

$$E_h^2 = \inf_{v \in V_h^{\hat{A}}} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \leq C h^{\frac{r}{r+1}}$$

$$E_h^3 = \inf_{v \in V_h} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \leq C h^{\frac{q}{q+1}}$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres.

Preuve: Les estimations de E_h^1 et E_h^2 s'obtiennent en les majorant au moyen de la fonction $\hat{u}_h \in V_h^{\hat{A}}$ introduite dans la preuve du théorème 2.1 du chapitre 3.

2. La non existence de minimiseurs:

On s'attend à priori à ce que $\hat{u}_h$ converge vers un point réalisant le minimum pour (1.6)-(1.8). Cependant ce n'est pas le cas parce que de tels problèmes peuvent ne pas admettre de minimiseurs. Remarquons d'abord que la suite d'éléments de V^A :

$$v_h = \Lambda(x) \vee (A(x) - \text{dist}(x, \Gamma_0)),$$

($\Lambda(x)$ est la fonction introduite au chapitre 3) est telle que

$$|v_h(x) - A(x)| \leq C h^\alpha$$

et

$$\nabla v_h(x) = w_i \quad p.p. \quad x \in \Omega_h$$

où

$$\Omega_h = \{x \in \Omega \;\; / \;\; dist(x, \Gamma_0) \geq C h^\alpha \;\; \},$$

donc

$$\inf_{v \in V^A} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x)) \, dx \leq C(h^{\alpha q} + h^\alpha) \; \forall \, h \in (0,1),$$

en faisant tendre h vers 0, on obtient alors que les trois infima (1.6), (1.7) et (1.8) sont tous égaux à 0. Ensuite en faisant les hypothèses supplémentaires suivantes:

$$0 < \psi(\xi) \quad \forall\, \xi \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla A(x) \neq w_i \quad \text{sur un ensemble de mesure strictement positive}, \tag{2.2}$$

$$w_i - w_p \quad \text{engendrent un sous-espace } W \text{ propre de } \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

et

$$\forall x \in \Omega \;\; \exists\, x_0 \in \Gamma_0 \quad \text{tel que} \quad (x,\, x_0) \subset \Omega \quad \text{et} \quad x - x_0 \in W^{\perp}, \tag{2.4}$$

où $W^{\perp}$ est l'espace orthogonal de W, on a le théorème suivant:

Théorème 2.1 : *On suppose que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$. Si (2.1), (2.2) (respectivement (2.2), (2.3) et (2.4)) sont vérifiés, alors*

$$\inf_{v \in V^A} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\; dx,$$

$$\inf_{v \in W^{1,\infty}(\Omega)} \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))\; dx,$$

$$(\textit{ respectivement } \inf_{v \in V^A} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\; dx)$$

ne sont pas atteints.

Remarque 2.1: Soit $\nu_1, ..., \nu_l$ une base orthonormée de $W^{\perp}$ grâce à (2.4) on a une inégalité de Poincaré du type (cf [C$_2$])

$$\int_\Omega |v(x)|dx \;\leq\; C \int_\Omega |\nabla_\nu\, v(x)|dx \quad \forall\, v \in V_0, \tag{2.5}$$

où $V_0 = \{v \in\; W^{1,\infty}(\Omega) \;/\; v(x) = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$,
(∇_ν désigne le vecteur de composantes $\partial/\partial\nu_i$, $|\quad|$ la norme euclidienne).

Preuve du théorème 2.1 :

Supposons qu'il existe un $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \psi(u(x) - A(x)) + \varphi(\nabla u(x))\, dx = 0$$

donc

$$\int_\Omega \psi(u(x) - A(x))\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega \varphi(\nabla u(x))\, dx = 0$$

d'où

$$u(x) = A(x) \ \ p.p. \ \ x \in \Omega \quad \text{et} \quad \nabla u(x) = w_i \ \ p.p. \ \ x \in \Omega$$

ceci contredit (2.2).

Supposons maintenant qu'il existe un $u \in V^A$ tel que

$$\int_\Omega \varphi(\nabla u(x))\, dx = 0$$

donc

$$\nabla u(x) = w_i \ p.p. \ x \in \Omega \tag{2.6}$$

puisque $\partial u/\partial \nu_j = \nabla u(x).\nu_j$ et $\nabla A(x) \in \mathrm{Co}(w_i)$ on a

$$\nabla_\nu (u(x) - A(x)) = 0$$

par (2.5) on déduit que

$$u(x) = A(x)$$

ceci contredit (2.2).

3. Etude des suites minimisantes-Mesures de Young:

L'absence de minimiseurs nous conduit à l'étude des suites minimisantes. Elles génèrent, comme on va le voir, une même famille de mesures de Young . D'abord (1.3) et (1.5) entrainent qu'il existe des fonctions mesurables α_i uniques telles que

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x)\, w_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x) = 1. \tag{3.1}$$

Rappelons que si une suite $u_h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. est telle que

$$|u_h|_\infty, ||\nabla u_h||_\infty \;\leq\; C, \tag{3.2}$$

où C est une constante indépendante de h, alors ∇u_h définit une famille de mesures de Young, plus précisément il existe une sous-suite extraite de u_h qu'on note également u_h et une famille de mesures de Young $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ sur $\mathbb{R}^n$, telles que l'on ait

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \int_\Omega F(x,\ \nabla u_h(x))\ dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} F(x,\ \lambda)\ d\nu_x(\lambda)\ dx \tag{3.3}$$

où F est une fonction de Carathéodory (voir Annexe). Alors on a le théorème:

<u>**Théorème 3.1:**</u> *Supposons que φ est une fonction continue vérifiant (1.1)-(1.4). Soit u_h une suite minimisante de (1.6), (1.7) ou (1.8). Si (3.2) est vérifié alors ∇u_h définit une famille de mesure de Young $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ donnée par*

$$\nu_x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(x)\ \delta_{w_i}\ p.p.\ \ x \in \Omega \tag{3.4}$$

où les α_i sont les fonctions qui figurent dans (3.1) et δ_{w_i} désigne la masse de Dirac au point w_i.

<u>**Preuve:**</u> D'après (3.2), il existe une sous-suite extraite qu'on notera aussi u_h telle que

$$u_h \longrightarrow u \text{ uniformément} \tag{3.5}$$

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla u \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } * \tag{3.6}$$

avec $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Soit $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ la famille de mesure de Young définie par ∇u_h. Donc pour une sous-suite extraite et dans tous les cas on a .

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \int_\Omega \varphi(\nabla u_h) dx \;=\; \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx \;=\; 0.$$

Donc,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = 0 \; p.p. \; x \in \Omega$$

et ν_x est supportée par les puits. Par conséquent

$$\nu_x = \sum_{i=1}^{p} \beta_i(x) \delta_{w_i} \tag{3.7}$$

pour des fonctions mesurables β_i.

Cas (1.7), (1.8)

Si u_h est une suite minimisante, on a grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_\Omega \psi(u_h(x) - A(x)) \, dx \longrightarrow \int_\Omega \psi(u(x) - A(x)) \, dx = 0.$$

Donc

$$u(x) = A(x). \tag{3.8}$$

Puisque la limite de u_h est unique toute la suite converge vers A.
D'après (3.6) et (3.8) on a

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla A \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } * . \tag{3.9}$$

Soit maintenant B une boule quelconque incluse dans Ω. On a par (3.3)

$$\int_B \nabla u_h(x) \, dx \longrightarrow \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \lambda d\nu_x(\lambda) dx = \sum_{i=1}^{p} \int_B \beta_i(x) dx \; w_i.$$

En outre,

$$\int_B \nabla u_h(x) dx \longrightarrow \int_B \nabla A(x) dx.$$

Donc

$$\int_B \nabla A(x) dx = \sum_{i=1}^{p} \int_B \beta_i(x) dx \; w_i.$$

Puisque

$$\int_B \nabla A(x) \, dx = \sum_{i=1}^{p} \int_B \alpha_i(x) dx \; w_i,$$

par (1.3) on obtient

$$\int_B \alpha_i(x) dx = \int_B \beta_i(x) dx \; \forall i = 1, ..., p.$$

En divisant par $|B|$ et en utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue on obtient

$$\alpha_i(x) = \beta_i(x) \ p.p. \ x \in \Omega$$

D'où l'unicité de la mesure de Young et (3.4).

Cas (1.7)

En appliquant (3.3), on obtient par (3.7)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla_\nu(u_h(x) - A(x))|dx &= \int_\Omega [\sum_{j=1}^{l}\{(\nabla u_h(x) - \nabla A(x)).\nu_j\}^2]^{\frac{1}{2}} dx \\
&\longrightarrow \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} [\sum_{j=1}^{l}((\lambda - \nabla A(x)).\nu_j)^2]^{\frac{1}{2}} d\nu_x(\lambda) \, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^{l} \beta_i [\sum_{j=1}^{l}((w_i - \nabla A(x)).\nu_j)^2]^{\frac{1}{2}} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque les ν_j sont des éléments de $W^\perp$. Par conséquent

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \int_\Omega |(u_h(x) - A(x))|dx = 0$$

ainsi

$$u_h \longrightarrow A \ \text{ uniformément}$$

et

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla A \text{ dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

et on conclut comme auparavant.

4. Analyse numérique des oscillations:

L'unicité de la mesure de Young associée aux problèmes (1.6)-(1.8) laisse présager qu'il y a une certaine cohérence des oscillations des suites minimisantes. En effet, sous les hypothèses du théorème 3.1, leur comportement commun se traduit, comme on va le voir, par le fait qu'elles minimisent leur énergie en choisissant leurs gradients autour de chacun des puits avec une probabilité qui tend vers une constante. Dans toute cette partie on supposera que (2.1)-(2.4) sont vérifiés. On note par Π la projection sur les puits w_i, plus précisément Π est la fonction définie par:

$$\Pi(\xi) = w_i$$

où w_i est tel que

$$|\xi - w_i| = \min_j |\xi - w_j|. \tag{4.1}$$

Il se peut qu'il y ait plus d'un puits qui vérifie (4.1), mais on choisit celui qui a le plus petit indice i. Il est clair que Π est une fonction borélienne, alors on a le lemme suivant:

Lemme 4.1: *Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $w \in W$ et $\nu \in W^\perp$ tel que $|\nu| = 1$ alors on a*

$$|(b - w).\nu| \leq |b - \Pi(b)| = min_j |b - w_j|. \tag{4.2}$$

Preuve: Si P_W désigne la projection orthogonale sur W alors on a

$$\begin{aligned} |(b-w).\nu| &= | \ [(b-w) - P_W(b-w)].\nu \ | \\ &\leq | \ (b-w) - P_W(b-w) \ | \\ &\leq | \ (b-w) - (w_i - w)| \quad \forall\, i \\ &\leq | \ b - w_i \ | \quad \forall\, i \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Le comportement de la fonction φ au voisinage des puits est primordial. Aussi suppose-t-on qu'il existe des constantes $\lambda_1 > 0$ $p > 1$ telles que

$$\lambda_1 |w - \Pi(w)|^p \leq \varphi(w) \ \ \forall\, w \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

On suppose parallèlement qu'il existe des constantes λ_2, $q > 1$ telles que

$$\lambda_2 |\xi|^q \leq \psi(\xi) \ \forall \ \ \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Pour $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ on pose :

$$E_1(v) = \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))dx$$

$$E_2(v) = \int_\Omega \psi(v(x) - A(x)) + \varphi(\nabla v(x))dx$$

Alors on a les lemmes suivants :

Lemme 4.2: *Soient $B \subset \Omega$ un sous domaine de Ω, $r \leq p$, et $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ alors il existe une constante $C = C(B, r, p, \lambda_1)$ telle que*

$$\int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v)|^r dx \leq C E_1(v)^{\frac{r}{p}}. \tag{4.5}$$

Preuve: En appliquant l'inégalité de Hölder et (4.3) on a

$$\begin{aligned}\int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v)|^r dx &\leq |B|^{1-\frac{r}{p}} \left\{\int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v)|^p dx\right\}^{\frac{r}{p}} \\ &\leq |B|^{1-\frac{r}{p}} \lambda_1^{\frac{-r}{p}} E_1^{\frac{r}{p}}.\end{aligned}$$

Lemme 4.3: *Soient $B \subset \Omega$ un sous domaine régulier de Ω, $r, s > 1$ et $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Alors il existe une constante $C = C(B, r, s)$ telle que*

$$\int_{\partial B} |v(x)|^r d\sigma(x) \leq C\left\{\int_B |v(x)|^{(r-1)s'} dx\right\}^{\frac{1}{s'}} ||v||_{1,s,B} \tag{4.6}$$

où s' est le conjugué de s i.e. $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, $d\sigma(x)$ est la mesure superficielle sur ∂B et

$$||v||_{1,s,B} = \left\{\int_B |v(x)|^s + |\nabla v(x)|^s\right\}^{\frac{1}{s}}.$$

Preuve: En appliquant le théorème de trace:

$$\int_{\partial B} |u| \, d\sigma(x) \leq C \int_B |u(x)| + |\nabla u(x)| dx \tag{4.7}$$

à $u = |v|^r$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} |v|^r \, d\sigma(x) &\leq C \int_B |v(x)|^r + r|v(x)|^{r-1}|\nabla v(x)| dx \\ &= C \int_B |v(x)|^{r-1}|v(x)| + r|v(x)|^{r-1}|\nabla v(x)| dx\end{aligned}$$

et grâce à l'inégalité de Hölder on a

$$\int_B |v(x)|^{r-1}|v(x)| \leq \{\int_B |v(x)|^{(r-1)s'}\}^{\frac{1}{s'}} \{\int_B |v(x)|^s dx\}^{\frac{1}{s}}$$

et

$$\int_B |v(x)|^{r-1}|\nabla v(x)|dx \leq \{\int_B |v(x)|^{(r-1)s'}\}^{\frac{1}{s'}} \{\int_B |\nabla v(x)|^s dx\}^{\frac{1}{s}}$$

donc

$$\int_{\partial B} |v(x)|^r d\sigma(x) \leq C\{\int_B |v(x)|^{(r-1)s'}dx\}^{\frac{1}{s'}} \; ||v||_{1,s,B}.$$

Lemme 4.4: *Supposons que $B \subset \Omega$ est un domaine régulier. On pose $s = min\,(p,\ q)$. Alors on a*

I. il existe une constante $C = C(B, \lambda_i, p, q)$ telle que

$$|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\; dx| \leq CE_2(v)^{\frac{1}{q+s'}}\{E_1(v)^{\frac{s'}{(q+s')p}} + E_2(v)^{\frac{s'}{(q+s')q}} + 1\}, \tag{4.8}$$

où $s' = \frac{s-1}{s}$.

II. Si (3.3) et (3.4) sont vérifiés alors il existe une constante $C = C(B, \lambda_1, p)$ telle que

$$|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\; dx| \leq CE_1(v)^{\frac{1}{pp'}}\{E_1(v)^{\frac{1}{p^2}} + 1\} \tag{4.9}$$

où $p' = \frac{p-1}{p}$.

Preuve: Si n désigne la normale extérieure à B, alors on a par le théorème de la divergence

$$\begin{aligned}|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\; dx| &= |\int_{\partial B} (v(x) - A(x)).n\; d\sigma(x)| \\ &\leq \int_{\partial B} |(v(x) - A(x))|\; d\sigma(x). \end{aligned}\tag{4.10}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le lemme (4.3) on obtient

$$\begin{aligned}|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\; dx| &\leq |\partial B|^{1-\frac{1}{r}}\left\{\int_{\partial B} |(v(x) - A(x))|^r d\sigma(x)\right\}^{\frac{1}{r}} \\ &\leq |\partial B|^{1-\frac{1}{r}}\left\{\int_B |v(x) - A(x)|^{(r-1)s'}dx\right\}^{\frac{1}{rs'}} \; ||v - A||_{1,s,B}^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}\tag{4.11}$$

-Cas I: On choisit r tel que $(r-1)s' = q$ i.e. $r = \frac{q+s'}{s'}$, on obtient par (4.11) et la condition (4.4)

$$|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\, dx| \le CE_2(v)^{\frac{1}{q+s'}} ||v - A||_{1,s,B}^{\frac{s'}{q+s'}}. \tag{4.12}$$

Ensuite, par l'inégalité de Hölder

$$\int_B |v(x) - A(x)|^s\, dx \le |B|^{1-\frac{s}{q}} \Big\{ \int_B |v(x) - A(x)|^q dx \Big\}^{\frac{s}{q}} \le CE_2(v)^{\frac{s}{q}}. \tag{4.13}$$

Moyennant le lemme 4.2 on a

$$\begin{aligned} \int_B |\nabla(v - A)|^s\, dx &\le C\Big\{ \int_B |\nabla v - \Pi(\nabla v)|^s\, dx + \int_B |\Pi(\nabla v) - A|^s\, dx \Big\} \\ &\le CE_1^{\frac{s}{p}} + C. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Combinant les inégalités (4.13) et (4.14) on obtient

$$||v - A||_{1,s,B}^s \le C\{E_1(v)^{\frac{s}{p}} + E_2(v)^{\frac{s}{q}} + 1\}.$$

Par (4.12) on obtient (4.8).

-Cas II: On choisit $r = s = p$ donc $(r-1)s' = p$ dans (4.11), ainsi

$$|\int_B \nabla(v(x) - A(x))\, dx| \le C\Big\{ \int_\Omega |v(x) - A(x)|^p dx \Big\}^{\frac{1}{pp'}} ||v(x) - A(x)||_{1,p,\Omega}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.15}$$

Grâce à (2.4) on a

$$\Big(\int_\Omega |v(x) - A(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \le C\Big(\int_\Omega |\nabla_\nu(v(x) - A(x))|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.16}$$

Or d'après le lemme 4.1 on a

$$|(\nabla v(x) - \nabla A(x)).\nu_i| \le |(\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))| \quad \forall \quad i = 1, ..., l$$

donc

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{l} |(\nabla v(x) - \nabla A(x)).\nu_i|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \le l^{\frac{1}{2}}\ |(\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))|,$$

d'où

$$|\nabla_\nu(v(x) - A(x))|^p \le l^{\frac{p}{2}}\ |(\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))|^p$$

ainsi

$$\left\{\int_\Omega |\nabla_\nu(v(x)-A(x))|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq l^{\frac{1}{2}} \left\{\int_\Omega |(\nabla v(x)-\Pi(\nabla v(x))|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.17}$$

Combinant ceci avec (4.15) et (4.16) on obtient

$$|\int_B \nabla(v(x)-A(x))\, dx| \leq C E_1^{\frac{1}{pp'}} ||v(x)-A(x)||_{1,p,\Omega}^{\frac{1}{p}}.$$

Par (4.16) et (4.17) on a

$$\int_\Omega |(v(x)-A(x))|^p dx \leq C \int_\Omega |(\nabla v(x)-\Pi(\nabla v(x))|^p dx \leq C E_1(v). \tag{4.18}$$

En prenant $s=p$ dans (4.14) on obtient

$$\int_B |\nabla(v(x)-A(x))|^p\, dx \leq C E_1(v) + C \tag{4.19}$$

et (4.9) s'en suit comme précédemment.

Soit $B \subset \Omega$ un domaine régulier. Pour $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $0 < R < \frac{1}{2}\,|w_i - w_j| \quad \forall \quad i,j = 1,...,p,\ i \neq j$ on pose

$$B_i^R = B_i^R(v) = \{x \in B \ / \ \Pi(\nabla v(x)) = w_i,\ |\nabla v(x) - w_i)| < R\} \tag{4.20}$$

$$B_{ex}^R = B_{ex}^R(v) = B \setminus \cup_i B_i^R. \tag{4.21}$$

<u>**Proposition 4.1 :**</u> *Supposons que (4.3) est vérifié, si $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$ il existe une constante $C = C(B,\lambda,p)$ telle que*

$$|B_{ex}^R| \leq C E_1(v)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.22}$$

<u>**Preuve :**</u> Remarquons que dans B_{ex}^R on a

$$|\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))| \geq R.$$

Ainsi,

$$R B_{ex}^R \leq \int_{B_{ex}^R} |\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))| dx \leq \int_B |\nabla v(x) - \Pi(\nabla v(x))| dx$$

et le résultat découle de (4.5).

Remarque 4.1: Si v_n est une suite minimisante de (1.6)-(1.8) alors $E_1(v_n) \longrightarrow 0$. Par conséquent, la probabilité pour que v_n ait son gradient dans B à l'extérieur d'un R-voisinage des puits tend vers 0.

Pour évaluer $|B_i^R|$ on a le théorème :

Théorème 4.1: *Supposons que $B \subset \Omega$ est un domaine régulier. On pose $s = min(p, q)$, $s' = \frac{s-1}{s}$, alors il existe une constante $C = C(B, w_i, \lambda_i, p, q)$ telle que*

$$||B_i^R| - \bar{\alpha}_i|B|| \leq C\{E_1^{\frac{1}{p}} + E_2^{\frac{1}{q+s'}}(E_1^{\frac{s'}{(q+s')p}} + E_2^{\frac{s'}{(q+s')q}} + 1)\} \quad \forall \ i = 1, ..., p. \tag{4.23}$$

Si (3.3), (3.4) sont vérifiés alors

$$||B_i^R| - \bar{\alpha}_i|B|| \leq C\{E_1^{\frac{1}{p}} + E_1^{\frac{1}{pp'}}(E_1^{\frac{1}{p^2}} + 1)\} \quad \forall \ i = 1, ..., p \tag{4.24}$$

où

$$\bar{\alpha}_i = \frac{1}{|B|} \int_B \alpha_i(x)dx,$$

les α_i sont les fonctions figurant dans (3.10) et $E_i = E_i(v)$.

Preuve:
On a d'une part

$$\int_{\cup_i B_i^R} \Pi(\nabla v(x))dx - \int_B \nabla A(x)dx = \sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - \int_B \alpha_i(x)dx)w_i$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)w_i$$

d'autre part

$$\int_{\cup_i B_i^R} \Pi(\nabla v(x))dx - \int_B \nabla A(x)dx = \int_B (\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x))dx + \int_B \nabla v(x) - \nabla A(x)dx$$
$$- \int_{B_{ex}} \Pi(\nabla v(x))dx. \tag{4.25}$$

Par (4.5) on a

$$|\int_B (\Pi(\nabla v(x)) - \nabla v(x))dx| \leq CE_1^{\frac{1}{p}}$$

Par (4.22) on a

$$\int_{B_{ex}} \Pi(\nabla v(x))dx \leq C(w_i)|B_{ex}| \leq CE_1^{\frac{1}{p}}$$

Associant ceci au lemme 4.4 on obtient

$$|\sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)w_i| \leq C\{E_1^{\frac{1}{p}} + E_2^{\frac{1}{q+s'}}\{E_1^{\frac{s'}{(q+s')p}} + E_2^{\frac{s'}{(q+s')q}} + 1\}\}. \tag{4.26}$$

Si (3.3) et (3.4) sont vérifiés on a

$$|\sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)w_i| \leq C\{E_1^{\frac{1}{p}} + E_1^{\frac{1}{pp'}}\{E_1^{\frac{1}{p^2}} + 1\}\}. \tag{4.27}$$

En posant

$$I = \sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)w_i$$

on obtient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} (|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)w_i = I, \\ \sum_{i=1}^{p} |B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{p}\ |B_i^R| - |B| = -|B_{ex}|, \end{cases} \tag{4.28}$$

de sorte que $(|B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i)$ est solution du système linéaire

$$Mx = b \tag{4.29}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_p \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} I \\ -|B_{ex}| \end{pmatrix}.$$

Comme les $w_i - w_p$ sont linéairement indépendants, la matrice M de type $(n+1) \times p$ est de rang p et le système (4.29) admet une seule solution donnée par

$$x = (M^T M)^{-1} M^T b \tag{4.30}$$

(M^T est la transposée de M) et on a

$$|x| \leq ||(M^T M)^{-1} M^T||\ |b| \tag{4.31}$$

où $||\quad||$ est la norme matricielle associée à la norme euclidienne. Ainsi

$$||B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i| \leq C\max(|I|, |B_{ex}^R|).$$

Ainsi on a (4.23) et (4.24).

Remarque 4.2 : Si v_n est une suite minimisante de (1.6)-(1.8) alors sous les hypothèses du théorème 4.1 on a par (4.23) et (4.24)

$$\frac{|B_i^R|}{|B|} \longrightarrow \bar{\alpha}_i, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Autrement dit, dans B le ∇v_n prend les valeurs w_i avec une probabilité approchant $\bar{\alpha}_i$.

Corollaire 4.1: *Sous les hypothèses du théorème 4.1, si u_h est une suite minimisante de (1.6)-(1.8) telle que*

- $E_2(u_h) \leq Ch^{\alpha}$, *alors*

$$||B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i| \leq Ch^{\alpha\ min\ (\frac{1}{p}, \frac{1}{q+s'})}, \quad pour\ i = 1, ..., p. \tag{4.32}$$

- $E_1(u_h) \leq Ch^{\frac{1}{2}}$, *alors*

$$||B_i^R| - |B|\ \bar{\alpha}_i| \leq Ch^{\frac{1}{2pp'}}, \qquad pour\ i = 1, ..., p. \tag{4.33}$$

Preuve : Ceci résulte des estimations (4.23), (4.24).

Remarque 4.3: L'estimation (4.33) correspond au problème de minimisation (2.1), tandis que (4.32) correspond aux problèmes (2.2) et (2.3) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ pour (2.2) et $\alpha = \frac{q}{q+1}$ pour (2.3).

Chapitre 5

ETUDE DE PROBLEMES DE PUITS AVEC CONTRAINTES

1- Introduction:

On désigne toujours par Ω un domaine borné polyédral de $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ de frontière Γ et par φ une fonction positive définie sur $\mathbb{R}^n$ et s'annulant en w_i, $i = 1, \dots, p$ lesquels satisfont

$$w_i - w_p, \quad i = 1, \dots, p-1 \quad \text{sont linéairement indépendants} . \tag{1.1}$$

On note aussi par ψ une fonction continue telle que pour des constantes positives q et $c > 0$

$$0 \leq \psi(\xi) \leq c \mid \xi \mid^q \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Si $A(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sont trois fonctions lipschitziennes i.e.

$$\alpha, \ \beta, \ A \in W^{1,\infty}(\Omega)$$

telles que

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \text{ sur } \Omega,$$

$$\alpha(x) \leq A(x) \leq \beta(x) \text{ sur } \Gamma,$$

on note par

$$K_{\alpha,\beta} = \{ v \in \ W^{1,\infty}(\Omega) \ / \ \alpha(x) \leq v(x) \leq \beta(x) \text{ dans } \Omega \ \},$$

$$K_{A,\alpha,\beta} = \{ v \in K_{\alpha,\beta} \ / \ v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma \ \},$$

$$G(x) = (\alpha(x) \vee A(x)) \wedge \beta(x),$$

où $\wedge$ désigne l'infimum de fonctions et $\vee$ le supremum. Les ensembles $K_{\alpha,\beta}$ et $K_{A,\alpha,\beta}$ sont non vides puisque $G \in K_{A,\alpha,\beta} \subset K_{\alpha,\beta}$. On suppose que

$$M = \inf_{x \in \Omega} \ (G(x) - \alpha(x)) > 0. \tag{1.3}$$

On considère les problèmes

$$\inf_{v\in K_{A,\alpha,\beta}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.4}$$

$$\inf_{v\in K_{A,\alpha,\beta}} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.5}$$

$$\inf_{v\in K_{\alpha,\beta}} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx. \tag{1.6}$$

On s'intéresse également au cas où

$$\nabla G(x)\in \mathrm{Co}(w_i) \text{ p.p. dans } \Omega \tag{1.7}$$

($\mathrm{Co}(w_i)$ est l'enveloppe convexe des w_i). On considère $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulations de Ω. On pose:

$$V_h=\{v:\ \Omega\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue},\ v/_K\in\ P_1(K)\ \forall K\in\ \mathcal{T}_h\ \},$$

$$\Sigma_h=\{p\in\bar\Omega\ \ /\ p \text{ est un sommet de K } \in \mathcal{T}_h\ \},$$

$$\Sigma_h^0=\{p\in\Sigma_h\ \ /\ p\notin\Gamma\ \}$$

et

$$K_h=\{v_h\in V_h\ /\ \alpha(p)\le\ v_h(p)\ \le\ \beta(p)\ \forall\, p\in\Sigma_h^0\ \},$$

$$K_{A,h}=\{v_h\in K_h\ /\ v_h(p)=A(p)\ \forall\, p\in\ \Sigma_h\cap\Gamma\ \}.$$

Notre but est d'obtenir des estimations pour les infima

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.8}$$

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.9}$$

$$\inf_{v\in K_h} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{1.10}$$

en terme de h.

2- Estimations de l'énergie.

Soit $v_1,\ldots,v_{p-1}$ la base duale de la base w_i-w_p, i.e. la base telle que

$$(w_i-w_p).v_j=\delta_{ij}\quad \forall\, i,j=1,\ldots,p. \tag{2.1}$$

Alors on a le résultat suivant:

Théorème 2-1 : *Supposons que Ω est convexe, que φ est bornée sur les bornés de $\mathbb{R}^n$. De plus, on suppose que ψ est une fonction continue satisfaisant (1.2) et les w_i satisfont (1.1). Alors sous les hypothèses précédentes et si $G \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.3) et (1.7), il existe une constante C indépendante de $0 < h < \inf((\frac{M}{N})^\gamma,\ 1)$ telle que :*

$$E_h^1 = \inf_{K_{A,h}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

$$E_h^2 = \inf_{K_{A,h}} \int_\Omega \psi(v(x) - G(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{r}{r+1}} \tag{2.3}$$

$$E_h^3 = \inf_{K_h} \int_\Omega \psi(v(x) - G(x)) + \varphi(\nabla v(x))\, dx \leq C h^{\frac{q}{q+1}} \tag{2.4}$$

où $r = q \wedge 1$, $\wedge$ désigne le minimum de deux nombres,

$N = 2\ (p-1) \max_i |w_i| \max_i |v_i|$,
$\gamma = 2$ *dans le cas (2.2),* $\gamma = r + 1$ *dans le cas (2.3),* $\gamma = q + 1$ *dans le cas (2.4).*

Avant de prouver le théorème (2-1) rappelons quelques lemmes du chapitre 3:

Lemme 2-1 : *Supposons que $G \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfait (1.9). Alors si le segment $[x, x']$ est inclu dans Ω on a :*

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \leq G(x) - G(x') \leq \bigvee_{i=1}^{p} w_i.(x - x') \tag{2.5}$$

où $\wedge$ désigne le minimum de nombres et $\vee$ désigne le maximum de nombres.

On désigne par x_z les sommets du réseau de taille h^α, $(\alpha = \frac{1}{\gamma})$ engendré par les v_i i.e. pour $z = (z_1, ..., z_{p-1}) \in \mathbb{Z}^{p-1}$ on pose

$$x_z = \sum_{i=1}^{p-1} z_i h^\alpha v_i. \tag{2.6}$$

Ensuite, soit la fonction Λ définie par

$$\Lambda(x) = \bigvee_{z \in \mathbb{Z}^{p-1}} (\wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) + \tilde{G}(x_z)) \tag{2.7}$$

où $\tilde{G}$ est le prolongement de G à $\mathbb{R}^n$. Par une cellule unité du réseau engendré par les $h^\alpha v_i$ on désigne les ensembles du type:

$$C_z = x_z + \{\sum_{i=1}^{p-1} \beta_i h^\alpha v_i \ /\beta_i \in [0,1]\}$$

où x_z est défini par (2.6). Alors on a:

Lemme 2.2: *Supposons que Ω est convexe. Sous les hypothèses précédentes, si on désigne par C_{z_0} une cellule unité du réseau engendré par $h^\alpha v_i$ et par E l'ensemble*

$$E = \{z \in \mathbb{Z}^{p-1} \ / \ z_i = 0 \ ou \ 1 \ \ \forall i = 1, ..., p-1\},$$

alors on a

$$\Lambda(x) = \bigvee_{z' \in z_0 + E} (\wedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z'}) + \tilde{G}(x_{z'})) \ \ \forall x \in C_{z_0}. \tag{2.8}$$

i.e. dans (2.7) au lieu de prendre le supremum sur un nombre de z qui peut être non borné quand $h \to 0$ il suffit de le prendre sur un nombre fini de z.

On a aussi:

Lemme 2-3: *Supposons que Ω est convexe, sous les hypothèses précédentes on a :*

$$G(x) - N \ h^\alpha \ \leq \Lambda(x) \ \leq \ G(x) \ \forall x \in \Omega \tag{2.9}$$

où $N = 2 \ (p-1) \ \max_i |w_i| \ \max_i |v_i|$.

Preuve: Soit $z \in \mathbb{Z}^{p-1}$ en utilisant le lemme 2.1 on a

$$\bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_z) + \tilde{G}(x_z) \ \leq \ G(x) \ \forall x_z$$

donc

$$\Lambda(x) \ \leq \ G(x),$$

soit $x' \in P_W(\Omega)$ ($P_W(\Omega)$ est la projection orthogonale de Ω sur W) la composante de x sur $P_W(\Omega)$, il existe un z_0 tel que $x' \in C_{z_0}$, x' s'écrit:

$$x' = x_{z_0} + \sum_{i=1}^{p-1} \beta_i \ h^\alpha v_i \ \ \beta_i \in [0,1]$$

ainsi,

$$|x' - x_{z_0}| \leq (p-1) \max_i |v_i| h^\alpha$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\Lambda(x) &\geq \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x - x_{z_0}) + \tilde{G}(x_{z_0}) \\
&= \bigwedge_{i=1}^{p} w_i.(x' - x_{z_0}) + \tilde{G}(x_{z_0}) \\
&\geq -(p-1)\max_i |w_i| \ \max_i |v_i| \ h^\alpha + \tilde{G}(x_{z_0}) - G(x) + G(x) \\
&\geq -2(p-1)\max_i |w_i| \ \max_i |v_i| \ h^\alpha + G(x)
\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Preuve du théorème 2.1 La fonction $\Lambda \in K_{\alpha,\beta}$. En effet, par le lemme 2.3 on a

$$\Lambda(x) \leq G(x) \leq \beta(x).$$

Puisque $h < (\frac{M}{N})^\gamma$, $\gamma = \frac{1}{\alpha}$ on a

$$\alpha(x) \leq G(x) - 2\,(p-1)\max_i |w_i| \ \max_i |v_i| h^\alpha \leq \Lambda.$$

En outre la fonction

$$\Lambda(x) \vee \big(G(x) - \mathrm{dist}(x, \Gamma)\big)$$

appartient à $K_{A,\alpha,\beta}$. La démonstration se fait de la même manière que le théorème 2.1 du chapitre 3.

3- Résultats d'existence:

On considère les problèmes approchés:

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{3.1}$$

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{3.2}$$

$$\inf_{v\in K_h} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx, \tag{3.3}$$

on va établir dans le théorème qui va suivre, sous certaines hypothèses, que les infima (3.1)-(3.3) sont en fait atteints.

Théorème 3.1: *On suppose que φ et ψ sont continues alors il existe un u_h, $v_h \in K_{A,h}$ tels que*

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \varphi(\nabla v(x))\, dx = \int_\Omega \varphi(\nabla u_h(x))\, dx \tag{3.4}$$

et

$$\inf_{v\in K_{A,h}} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx = \int_\Omega \psi(v_h(x)-G(x))+\varphi(\nabla v_h(x))\, dx. \tag{3.5}$$

Si de plus on suppose que·

$$\lim_{|\xi|\longrightarrow+\infty} \varphi(\xi)=+\infty \tag{3.6}$$

alors il existe un $u_h \in K_h$ tel que

$$\inf_{v\in K_h} \int_\Omega \psi(v(x)-G(x))+\varphi(\nabla v(x))\, dx = \int_\Omega \psi(u_h(x)-G(x))+\varphi(\nabla u_h(x))\, dx \tag{3.7}$$

Preuve: Une fonction $v_h \in K_{A,h}$ est complètement déterminée par ses valeurs aux noeuds de la triangulation. On note par X le vecteur des valeurs de v_h aux noeuds appartenant à Σ_h^0 i.e.

$$X=\big(v_h(n_1),\dots,v_h(n_s)\big) \text{ avec } \alpha(n_i)\le v_h(n_i)\le\beta(n_i)\ \forall\, i=1,\dots,s,$$

alors

$$\int_\Omega \varphi(\nabla v_h(x))\, dx$$

et

$$\int_\Omega \psi(v_h(x)-G(x))+\varphi(\nabla v_h(x))\, dx$$

deviennent respectivement deux fonctions F et H continues en X qu'on est amené à minimiser sur un compact K où

$$K = \{ X \in \mathbb{R}^s \; / \; \alpha(n_i) \leq X_i \leq \beta(n_i) \; i = 1, \ldots s\}$$

d'où (3.4) et (3.5).

Montrons maintenant (3.7), dans ce cas on est amené à minimiser H sur l'ensemble non borné

$$K' = \{ X \in \mathbb{R}^m \; / \; \alpha(n_i) \leq X_i \leq \beta(n_i) \; i = 1, \ldots s\}$$

où $m > s$ est le nombre total des noeuds de la triangulation. Si

$$\lim_{|X| \longrightarrow +\infty} H(X) = +\infty \tag{3.8}$$

on sera amené à minimiser H sur un compact inclu dans K'. Si $|X| \longrightarrow +\infty$ alors X admet une composante $X_i = v_h(n_i)$ qui tend vers $+\infty$ où n_i est un noeud de la frontière sommet d'un simplexe K. Si n_j est un sommet de K n'appartenant pas à la frontière alors on a

$$\begin{aligned} v_h(n_i) - v_h(n_j) &= \nabla v_h.(n_i - n_j) \\ &\leq |\nabla v_h| \; |n_i - n_j \; | \end{aligned}$$

donc

$$|\nabla v_h| \geq \frac{v_h(n_i) - \beta(n_j)}{|n_i - n_j \; |} \tag{3.9}$$

ainsi

$$\int_\Omega \psi(v_h(x) - G(x)) + \varphi(\nabla v_h(x)) \, dx \geq |K| \varphi(\nabla v_{h/K})$$

et le résultat découle de (3.6) et (3.9).

Chapitre 6

PASSAGE A LA LIMITE DANS UNE CLASSE DE PROBLEMES NON LINEAIRES

1-Introduction :

On considère dans $\mathbb{R}^2$ le domaine $\Omega_l = (-l, l) \times (-1, 1)$ où le paramètre positif l est destiné à tendre vers l'infini. Soient f une fonction de $L^2(-1,1)$ et a une fonction régulière telle que pour des constantes positives α et β :

$$0 < \alpha \leq a(t) \leq \beta \ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

On désigne par u_l une solution du problème quasi linéaire :

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}(a(u_l)\frac{\partial u_l}{\partial y}) = f \quad \text{dans} \quad \Omega_l \\ u_l \in H_0^1(\Omega_l). \end{cases} \tag{1.2}$$

L'existence d'une telle solution peut être montrée à l'aide du Théorème du point fixe de Schauder (cf $[A.C]$). Cependant on ne sait pas si (1.2) a une solution unique si a est supposé par exemple continu . On s'intéresse au comportement limite de u_l et on voudrait montrer qu'à la limite u_l ne dépend que de la variable y.
Pour cela on note par u_∞ l'unique solution du problème unidimensionel :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y}(a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y}) = f \quad \text{dans} \quad (-1,1) \\ u_\infty \in H_0^1(-1,1). \end{cases} \tag{1.3}$$

On considère le difféomorphisme :

$$\Pi^l : \quad \Omega_{l_0} \longrightarrow \Omega_l$$

$$(x, y) \longrightarrow (\frac{l}{l_0}x, y). \tag{1.4}$$

et on désigne par $\tilde{u}_l$ la moyenne de u_l sur $(-l, l)$ i.e.

$$\tilde{u}_l(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u_l(x,y)dx = \frac{1}{2l_0}\int_{-l_0}^{l_0} u(l)(x,y)dx \tag{1.5}$$

où $u(l) = u_l \circ \Pi^l$. Remarquons que

$$\tilde{u}_l \in H_0^1(-1,1). \tag{1.6}$$

On espère en fait montrer que u_l converge vers u_∞. Dans le cas linéaire i.e. lorsque $a(t)$ est une fonction constante, ceci est démontré dans un travail commun (non publié) de S. Antontsev, M. Chipot et T. Leblanc. Nous allons étudier, dans ce qui va suivre, le cas non linéaire. Plus précisément nous allons démontrer que la moyenne $\tilde{u}_l$ de u_l converge vers l'unique solution de (1.3).

2-Théorème de convergence :

D'abord, nous allons nous ramener au domaine fixe Ω_{l_0}. Pour ce faire écrivons (1.2) sous forme variationnelle :

$$\int_{\Omega_l} \frac{\partial u_l}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + a(u_l)\frac{\partial u_l}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_{\Omega_l} fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_l). \tag{2.1}$$

Moyennant le changement de variable Π^l on obtient :

$$\int_{\Omega_{l_0}} \frac{\partial u_l}{\partial x}\circ \Pi^l \frac{\partial v}{\partial x}\circ \Pi^l + a(u_l \circ \Pi^l)\frac{\partial u_l}{\partial y}\circ \Pi^l \frac{\partial v}{\partial y}\circ \Pi^l = \int_{\Omega_{l_0}} fv\circ \Pi^l \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_l). \tag{2.2}$$

Or $\forall v \in H_0^1(\Omega_l)$ on a $v \circ \Pi^l \in H_0^1(\Omega_{l_0})$ et

$$\frac{\partial (v\circ \Pi^l)}{\partial x} = \frac{l}{l_0}\frac{\partial v}{\partial x}\circ \Pi^l, \quad \frac{\partial (v\circ \Pi^l)}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}\circ \Pi^l \tag{2.3}$$

par conséquent (2.2) s'écrit :

$$\int_{\Omega_{l_0}} (\frac{l_0}{l})^2 \frac{\partial u(l)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + a(u(l))\frac{\partial u(l)}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_{\Omega_{l_0}} fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_{l_0}). \tag{2.4}$$

Ensuite soit A la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$A(u) = \int_0^u a(s)ds. \tag{2.5}$$

Il est clair que la fonction A est une bijection vérifiant :

$$\alpha|u-v| \leq |A(u) - A(v)| \leq \beta|u-v|. \tag{2.6}$$

En outre (2.4) devient :

$$\int_{\Omega_{l_0}} (\frac{l_0}{l})^2 \frac{\partial u(l)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial A(u(l))}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_{\Omega_{l_0}} fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega_{l_0}). \tag{2.7}$$

Avant d'énoncer le théorème de convergence on aura besoin des lemmes suivants :

<u>**Lemme 2.1 :**</u> Sous les notations précédentes on a les convergences :

$$(\frac{l_0}{l})^2 \frac{\partial u(l)}{\partial x} \to 0 \text{ fort dans } L^2(\Omega_{l_0}) \tag{2.8}$$

$$A(u(l)) \to A(u_\infty) \text{ fort dans } L^2(\Omega_{l_0}) \tag{2.9}$$

<u>**Preuve :**</u> On note par $|| \quad ||$ la norme dans $L^2(\Omega_{l_0})$. En choisissant $v = u(l)$ dans (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{l_0}} (\frac{l_0}{l})^2(\frac{\partial u(l)}{\partial x})^2 + a(u(l))(\frac{\partial u(l)}{\partial y})^2 &= \int_{\Omega_{l_0}} fu(l) \\ &\leq ||f|| \, ||u(l)||. \end{aligned}\tag{2.10}$$

Combinant ceci avec l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned}\alpha \int_{\Omega_{l_0}} (\frac{\partial u(l)}{\partial y})^2 &\leq ||f|| \, ||u(l)|| \\ &\leq C||f|| \, ||\frac{\partial u(l)}{\partial y}||.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$||\frac{\partial u(l)}{\partial y}|| \leq \frac{C}{\alpha}||f|| \tag{2.11}$$

$$||(\frac{l_0}{l})\frac{\partial u(l)}{\partial x}||^2 \leq \frac{C^2}{\alpha}||f||^2. \tag{2.12}$$

Or

$$(\frac{l_0}{l})^2 \frac{\partial u(l)}{\partial x} = \frac{l_0}{l} . \frac{l_0}{l} \frac{\partial u(l)}{\partial x}$$

donc par (2.12) on a :

$$(\frac{l_0}{l})^2 \frac{\partial u(l)}{\partial x} \to 0 \text{ fort dans } L^2(\Omega_{l_0}). \tag{2.13}$$

Montrons maintenant que

$$A(u(l)) \to A(u_\infty) \text{ fort dans } L^2(\Omega_{l_0})$$

En effet, en appliquant l'inégalité de Poincaré on obtient :

$$\begin{aligned}||A(u(l))|| &\leq C||\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}|| \\ &= C||a(u(l))\frac{\partial u(l)}{\partial y}|| \\ &\leq C\beta||\frac{\partial u(l)}{\partial y}||.\end{aligned}$$

Par (2.11) on a :

$$||A(u(l))||, \quad ||\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}|| \leq C \tag{2.14}$$

où C est une constante indépendante de l. En extrayant une sous suite on a :

$$A(u(l)) \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_{l_0})$$

$$\frac{\partial A(u(l))}{\partial y} \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial y} \text{ dans } L^2(\Omega_{l_0}). \tag{2.15}$$

Montrons d'abord que $w = A(u_\infty)$. En effet, par passage à la limite dans (2.5) on obtient :

$$\int_{\Omega_{l_0}} \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \int_{\Omega_{l_0}} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_{l_0}). \tag{2.16}$$

Soient $\psi \in \mathcal{D}(-1,1)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(-l_0,l_0)$ telle que$\int_{-l_0}^{l_0}\varphi(x)dx = 1$. (2.16) entraine en prenant $v = \varphi \otimes \psi$:

$$\int_{-1}^{1}(\int_{-l_0}^{l_0}\frac{\partial w}{\partial y}(x,y)\varphi(x)dx)\frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \int_{-1}^{1} f(y)\psi(y)dy$$

soit encore

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial y}(\int_{-l_0}^{l_0} w(x,y)\varphi(x)dx)\frac{\partial \psi}{\partial y}dy = \int_{-1}^{1} f(y)\psi(y)dy \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(-1,1).$$

Ainsi $\int_{-l_0}^{l_0} w(x,y)\varphi(x)dx \in H_0^1(-1,1)$ est solution du problème de Dirichlet

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \int_{-1}^{1} f\psi \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(-1,1).$$

L'unicité de la solution entraine que :

$$A(u_\infty) = \int_{-l_0}^{l_0} w(x,y)\varphi(x)dx \text{ p.p. } x \in (-1,1)$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(-l_0, l_0)$ telle que $\int_{-l_0}^{l_0} \varphi(x)dx = 1$. D'où

$$\int_{-l_0}^{l_0} w(x,y)\varphi(x)dx = A(u_\infty)\int_{-l_0}^{l_0} \varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(-l_0, l_0)$$

ou encore

$$\int_{-l_0}^{l_0} (w(x,y) - A(u_\infty))\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(-l_0, l_0)$$

d'où

$$w = A(u_\infty) \quad \text{p.p.}$$

En appliquant ce qui précède à toute suite extraite de $A(u(l))$ on conclut que $A(u(l))$ admet une seule valeur d'adhérence . Donc

$$A(u(l)) \rightharpoonup A(u_\infty) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_{l_0})$$

$$\frac{\partial A(u(l))}{\partial y} \rightharpoonup \frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y} \text{ dans } L^2(\Omega_{l_0}). \tag{2.17}$$

En prenant $v = A(u(l))$ dans (2.7) on obtient :

$$\int_{\Omega_{l_0}} (\frac{\partial A(u(l))}{\partial y})^2 \leq \int_{\Omega_{l_0}} fA(u(l)).$$

Or par (1.3) on a :

$$\int_{\Omega_{l_0}} fA(u(l)) = \int_{\Omega_{l_0}} a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y} a(u(l))\frac{\partial u(l)}{\partial y}.$$

D'où

$$\int_{\Omega_{l_0}} (\frac{\partial A(u(l))}{\partial y})^2 \leq \int_{\Omega_{l_0}} a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y} a(u(l))\frac{\partial u(l)}{\partial y}.$$

Par (2.17) on obtient en passant à la limite :

$$\overline{\lim} \int_{\Omega_{l_0}} (\frac{\partial A(u(l))}{\partial y})^2 \leq (a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y})^2.$$

Comme

$$\frac{\partial A(u(l))}{\partial y} \rightharpoonup a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y} \text{ dans } L^2(\Omega_{l_0}),$$

alors $\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}$ converge fortement dans $L^2(\Omega_{l_0})$ vers $\frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y} = a(u_\infty)\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$. Et (2.9) s'en suit par l'inégalité de Poincaré.

Lemme 2.2 : $u(l)$ converge fortement vers u_∞ dans $L^2(\Omega_{l_0})$.

Preuve : Par (2.6) A^{-1} est une fonction Lipschitzienne telle que

$$|A^{-1}(u) - A^{-1}(v)| \leq \frac{1}{\alpha}|u - v|.$$

On en déduit :

$$||u(l) - u_\infty|| = ||A^{-1}A(u(l)) - A^{-1}A(u_\infty)|| \leq \frac{1}{\alpha}||A(u(l)) - A(u_\infty)||.$$

Par le Lemme précédent on conclut que

$$u(l) \text{ converge fortement dans } L^2(\Omega_{l_0}) \text{ vers } u_\infty.$$

Lemme 2.3 : $\frac{\partial u(l)}{\partial y}$ converge fortement vers $\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$ dans $L^2(\Omega_{l_0})$

Preuve : Puisque $u(l)$ et $\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}$ convergent respectivement vers u_∞ et $\frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y}$ dans $L^2(\Omega_{l_0})$. Alors il existe des suites extraites $u(l)$ et $\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}$ et une fonction $g \in L^2(\Omega_{l_0})$ telles que

$$u(l) \longrightarrow u_\infty \text{ p.p. dans } \Omega_{l_0}$$

$$\frac{\partial A(u(l))}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y} \text{ p.p. dans } \Omega_{l_0}$$

$$\left|\frac{\partial A(u(l))}{\partial y}\right| \leq g.$$

Ainsi

$$\frac{\partial u(l)}{\partial y} = \frac{1}{a(u(l))}\frac{\partial A(u(l))}{\partial y} \longrightarrow \frac{1}{a(u_\infty)}\frac{\partial A(u_\infty)}{\partial y} = \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \text{ p.p. dans } \Omega_{l_0}$$

et

$$\left|\frac{\partial u(l)}{\partial y}\right| \leq \frac{1}{\alpha}\, g.$$

Par le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient :

$$\frac{\partial u(l)}{\partial y} \longrightarrow \frac{\partial u_\infty}{\partial y} \text{ fort dans } L^2(\Omega_{l_0}).$$

En appliquant ce qui précède à toute suite extraite de $\frac{\partial u(l)}{\partial y}$ on conclut que toute la suite $\frac{\partial u(l)}{\partial y}$ converge vers $\frac{\partial u_\infty}{\partial y}$ dans $L^2(\Omega_{l_0})$.

■

Maintenant on est en mesure de démontrer le théorème de convergence :

Théorème 2.1 : Sous les hypothèses et les notations précédentes on a :

$$\lim_{l \to +\infty} \tilde{u}_l = u_\infty \quad \text{fort dans } H_0^1(-1,1).$$

Preuve : on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left|\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial y} - \frac{\partial u_\infty}{\partial y}\right|^2 dy &= \int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{2l_0}\left(\int_{-l_0}^{l_0} \frac{\partial u(l)}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u_\infty}{\partial y}(y)dx\right)\right|^2 dy \\ &\leq \frac{1}{2l_0}\int_{\Omega_{l_0}} \left|\frac{\partial u(l)}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u_\infty}{\partial y}(y)\right|^2\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Jensen. Le théorème découle alors du Lemme précédent.

■

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[$A.C$] N. André and M. Chipot : A remark on uniqueness for quasilinear elliptic equations. A paraitre dans les Proceedings du Banach Center.

[$B.$] H. Brezis : Analyse fonctionnelle, théorie et application. Masson (1983).

[B.J.$_1$] J. M. Ball and R. D. James : Fine phase mixtures as minimizers of energy. Arch. Rational Mech. Anal., 100, (1987), p. 13-52.

[B.J.$_2$] J. M. Ball and R. D. James : Proposed experimental tests of a theory of fine microstructures. Phil. Trans. Roy. Soc. London (to appear).

[B.M] J. M. Ball and F. Murat : $W^{1,p}$ quasiconvexity and variational problems for multiples integrals. J. Funt. Anal., 58, (1984), p. 255-253.

[B.] B. Brighi : Sur quelques problèmes de calcul des Variations et l'approximation de leur fonctionnelle relaxé. Thesis, University of Metz (1991).

[B.C.$_1$] B. Brighi and M. Chipot : Approximation in nonconvex problems. Proceedings of the first European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Pont-à-Mousson, June 1991. Pitman research notes in mathematics ♯ 267.

[$C.$] P. G. Ciarlet : Plates and junctions in elastic multi-structures, An asymptotic analysis. Masson, Springer-Verlag (1990).

[B.C.$_2$] B. Brighi and M. Chipot : Approximated convex envelope of a function. SIAM J. of numerical Analysis.

[C.$_1$] M. Chipot : Hyperelasticity for crystals. European Jour. of App. Math., 1, (1990), p. 113-129.

[C.$_2$] M. Chipot : Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems. Numerische Mathematik, 59, (1991), p. .747-767.

[C.$_3$] M. Chipot : Energy estimates for variational problems with nonhomogeneous boundary conditions. Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications, Vol 2, Nonlinear mathematical problems in industry, (1993), p. 473-487.

[C.C.] M. Chipot and C. Collins : Numerical approximation in variational problems with potential wells. SIAM J. of Numerical Analysis, 29, 4, (1993), p. 473-487.

[C.C.K.] M. Chipot and C. Collins and D. Kinderlehrer : Numerical analysis of oscillations in multiple well problems. Numerische Mathematik, 70, (1995), p. 259-282.

[C.E.] M. Chipot and A. Elfanni : On the numerical analysis of some variational problems with nonhomogeneous boundary conditions. (To appear)

[C.K.] M. Chipot and D. Kinderlehrer : Equilibrium configurations of crystals. Arch. Rational Mech. Anal., 103, (1988), p. 237-277.

[C.L.] M. Chipot and W. Li : Variational problems with potential wells and nonhomogeneous boundary conditions. Series on Advances in Mathematics for applied Sciences, Vol 18, Calculus of variations, homogeniazation and continuum mechanics, G. Bouchitté, G. Buttazzo and P. Suquet Edts, World Scientific, Vol 18, (1994), p. 149-168.

[C.M.] M. Chipot and S. Müller : Sharp energy estimates to finte element approximations for non-convex problems (to appear).

[Co.] C. Collins : Thesis, University of Minnesota, 1990.

[Co.K.L.] C. Collins, D. Kinderlehrer and M. Luskin : Numerical approximation of the solution of a variational problem with a double well potential. SIAM J. Numer. Anal., 28, (1991), p. 321-332.

[Co.L.$_1$] C. Collins and M. Luskin : The computation of austenetic-martensitic phase transition. In Partial Differencial Equations and Continum Models of Phase Transitions, Lecture Notes in Physics ♯ 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-verlag, Berlin, New York, (1989), p. 34-50.

[Co.L.$_2$] C. Collins and M. Luskin : Computational results for phase transition in shape memory materials. In smart Materials, Structure, and Mathematical Issues, C. Rogers, ed. Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania , (1989), p. 198-215.

[Co.L.$_3$] C. Collins and M. Luskin : Numerical modeling of the microstructure of crystals with symmetry-related variants. In Proceedings of the ARO US-Japan Workshop on smart /Intelligent Materials, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania (to appear).

[Co.L.$_4$] C. Collins and M. Luskin : Optimal order error estimates for the finte element approximation of the solution of a nonconvex variational problem. Preprint, (1990).

[C.R.] P. G. Ciarlet and P.A. Raviart : Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method. Computer methods in applied mechanics and engneering 2 (1973), p. 17-31
North-Holland publishing Company.

[D.] B. Dacorogna : Weak continuity and weak lower semicontinuity of non linear functionals. Springer Lectures Notes ♯ 922, (1982).

[E.] J. L. Ericksen : Some constrainted elastic crystals. In Material Instabilities in Continum Mechanics and related Problems, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 119-137.

[E.T.] I. Ekeland & R. Temam : Analyse convexe et problèmes variationnels. Dunod, Paris, (1974).

[F.$_1$] I. Fonseca : Variational methods for elastic crystals. Arch. Rat. Mech. Anal., 97, (1985), p. 189-220.

[F.$_2$] I. Fonseca . The lower quasiconvex envelope of stored energy function for an elastic crystal. J. Math. Pures et App. 67, (1988), p. 175-195.

[G.T.] D. Gilbarg and N. S. Trudinger : Elliptic Partial Differencial Equations of Second Order. Springer Verlag, (1985).

[J.$_1$] R. D. James : Basic principles for the improvement of shape-memory and related materials. In smart Materials, Structure, and Mathematical Issues, C. Rogers, ed. Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, PA, (1989).

[J.$_2$] R. D. James : Microstructure and weak convergence. In Material Instabilities in Continum Mechanics and Related Problems, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 175-196.

[J.K.] R. D. James and D. Kinderlehrer : Theory of diffusionless phase transitions. In Partial Differencial Equations and Continum Models of Phase transitions., Lecture Notes in Physics ♯ 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-verlag, Berlin, New York, (1989), p. 51-84.

[K.] D. Kinderlehrer : Remarks about equilibrium configurations of crystals. In Material Instabilities in Continum Mechanics and Related Problems, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 217-242.

[Ko.] R. Kohn : The relationship between linear and nonlinear variational models of coherent phase transitions. In Proceedings of seventh Army Conference on applied Mathematics and Computing, West Point, june 1989.

[L.] W. Li : Thesis, Univresity of Metz, (1993).

[R.T.] P. A. Raviart, J. M. Thomas : Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris, (1988).

ANNEXE

MESURES DE YOUNG

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction continue et une suite $u_k \in (L^\infty(\Omega))^m$. On considère la suite de fonctions $\psi(x, u_k(x))$. Si u_k converge vers u et $\psi(., u_k(.))$ converge vers $\bar{\psi}$, alors en général $\bar{\psi} \neq \psi(., u(.))$. La notion de mesures de Young associée à u_k va nous permettre d'exprimer $\bar{\psi}$. Avant d'énoncer le théorème d'existence des mesures de Young, rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle. L'espace

$$C_0(\mathbb{R}^m) = \{f \in C(\mathbb{R}^m) \ : \ \lim_{|\lambda| \to +\infty} f(\lambda) = 0\}$$

est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme. Son espace dual est l'espace des mesures de Radon noté $M(\mathbb{R}^m)$ muni de la norme

$$||\mu||_{M(\mathbb{R}^m)} = |\mu|(\mathbb{R}^m).$$

Puisque $C_0(\mathbb{R}^m)$ est séparable on a :

$$\left(L^1(\Omega, \ C_0(\mathbb{R}^m))\right)' = L^\infty_{w^*}(\Omega, \ M(\mathbb{R}^m))$$

sous le produit dual

$$< \mu, \psi > = \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x, \lambda) d\mu_x(\lambda) dx$$

avec $\psi \in L^1(\Omega, \ C_0(\mathbb{R}^m))$ et $\mu \in L^\infty_{w^*}(\Omega, \ M(\mathbb{R}^m))$ où

$$\begin{aligned} L^\infty_{w^*}(\Omega, \ M(\mathbb{R}^m)) = \Big\{ f : \Omega \to M(\mathbb{R}^m) \ : \ & \text{f est faiblement * mesurable,} \\ & ||f(x)||_{M(\mathbb{R}^m)} \text{ est mesuarable en } x \text{ et} \\ & ||f(x)||_{M(\mathbb{R}^m)} \leq M \text{ (constante) p.p. } x \in \Omega \Big\}. \end{aligned}$$

La norme dans $L^\infty_{w^*}(\Omega, \ M(\mathbb{R}^m))$ est

$$||\mu|| = \sup \operatorname{ess}_{x \in \Omega} ||\mu_x||_{M(\mathbb{R}^m)}.$$

On a alors le théorème :

Théorème : *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $u_k : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une suite de fonctions mesurables telle que :*

$$|u_k(x)| \leq C \ p.p. \ x \in \Omega \ \forall k$$

où C *est une constante.*

Alors il existe une sous-suite extraite qu'on note aussi u_k *et une famille de mesures de probabilité* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *telle que si*

$$\psi(x, u_k(x)) \rightharpoonup \bar{\psi}\ L^\infty(\Omega)\ faible\ *$$

on a

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x,\lambda) d\nu_x(\lambda)\ p.p.\ \ x \in \Omega.$$

Pour démontrer le théorème on aura besoin du Lemme suivant :

Lemme : *Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u_k : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *une suite de fonctions mesurables telle que pour une constante positive* C *on a*

$$|u_k(x)| \leq C\ p.p.\ x \in \Omega\ \forall k$$

alors :

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_k |[x\ /\ |u_k(x)| \geq j]| = 0 \tag{A.1}$$

où $|A|$ *désigne la mesure de l'ensemble* A.

Preuve : on a :

$$\begin{aligned}
|[x\ /\ |u_k(x)| \geq j]| &= \int_{[x\ /\ |u_k(x)|\geq j]} 1dx \\
&\leq \int_{[x\ /\ |u_k(x)|\geq j]} \frac{|u_k(x)|}{j} dx \\
&\leq \int_\Omega \frac{|u_k(x)|}{j} dx \\
&\leq C\frac{|\Omega|}{j}
\end{aligned}$$

d'où le Lemme. ∎

Preuve du Théorème : Pour tout k on définit $\mu_k \in L^\infty_{w^*}(\Omega,\ M(\mathbb{R}^m))$ par

$$\mu_k(x) = \delta_{u_k(x)}$$

où δ_a est la masse de Dirac au point $a \in \mathbb{R}^m$. Pour $\psi \in L^1(\Omega,\ C_0(\mathbb{R}^m))$ on a :

$$\begin{aligned}
< \mu_k, \psi > &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x,\lambda)\ d\delta_{u_k(x)} dx \\
&= \int_\Omega \psi(x, u_k(x))\ dx.
\end{aligned}$$

Il est clair que

$$||\mu_k|| = 1 \ \forall\ k.$$

Par le Théorème de Banach-Alaouglu-Bourbaki (voir [B.] Théorème III. 15 p.42) il existe une sous-suite extraite qu'on note aussi μ_k et $\nu \in L^{\infty}_{w^*}(\Omega,\ M(\mathbb{R}^m))$ tels que

$$\mu_k \rightharpoonup \nu \ \text{ dans } \ L^{\infty}_{w^*}(\Omega,\ M(\mathbb{R}^m)) \text{ faible } *$$

i.e.

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega} \psi(x, u_k(x))dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx \qquad (A.2)$$

pour tout $\psi \in L^1(\Omega,\ C_0(\mathbb{R}^m))$.

Montrons que (A.2) peut s'étendre à toute fonction ψ de Carathéodory. On suppose d'abord que ψ est une fonction positive telle que

$$\psi(x, u_k(x)) \rightharpoonup \bar{\psi} \ \text{ dans } L^{\infty}(\Omega) \ \text{ faible } *.$$

$\psi(x, u_k(x))$ est en particulier uniformément borné. Soient θ^j la fonction auxiliaire définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$\theta^j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq j \\ 1 - |t| + j & \text{si } j \leq |t| \leq j+1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq j+1 \end{cases}$$

et $\psi^j(x, \lambda) = \theta^j(|\lambda|)\theta^j(\psi(x, \lambda))\psi(x, \lambda)$. Il est clair que

i) $\psi^j = \psi$ si $\psi \leq j$ et $|\lambda| \leq j$

ii) $\psi^j \in L^1(\Omega,\ C_0(\mathbb{R}^m))\ \ \forall\ k$

iii) $0 \leq \psi^j \leq \psi \ \ \forall\ k$

iv) ψ^j est une suite croissante

v) $\lim\limits_j \psi^j(x, \lambda) = \psi(x, \lambda)$.

En outre on a :

$$\begin{aligned} |\int_{\Omega} \psi^j(x, u_k(x)) - \psi(x, u_k(x))dx| &\leq \int_{\Omega} |\psi^j(x, u_k(x)) - \psi(x, u_k(x))| dx \\ &\leq 2 \int_{[x/|u_k(x)| \geq j] \cup [x/\ \psi(x, u_k(x)) \geq j]} \psi(x, u_k(x)) dx \\ &\leq C \ \{ \ |[x/|u_k(x)| \geq j]| + |[x/\ \psi(x, u_k(x)) \geq j]| \ \} \\ &\leq C \ \{ \ \sup_k |[x/|u_k(x)| \geq j]| + \sup_k |[x/\ \psi(x, u_k(x)) \geq j]| \ \}. \end{aligned}$$

D'après $(A.2)$ on obtient

$$|\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\psi^j(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx-\int_\Omega\bar{\psi}(x)dx|\leq C\,\{\ \sup_k|[x/|u_k(x)|\geq j]|+\sup_k|[x/\ \psi(x,u_k(x))\geq j]|\ \}$$

Par le Théorème de la convergence monotone on a :

$$\lim_j\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\psi^j(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx.$$

En utilisant $(A.1)$ on obtient :

$$\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx=\int_\Omega\bar{\psi}(x)dx.$$

Par conséquent $(A.2)$ est vrai pour toute fonction ψ de Carathéodory positive. En appliquant ce qui précède aux parties positive et négative ψ^+ et ψ^- de ψ on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega\psi(x,u_k(x))dx=\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx$$

pour toute fonction ψ de Carathéodory telle que $\psi(x,u_k(x))$ converge dans $L^\infty(\Omega)$ faible *.

Soit B une boule quelconque incluse dons Ω. Puisque $\psi(x,u_k(x))$ converge dans $L^\infty(\Omega)$ faible * vers $\bar{\psi}$ alors $\chi_B(x)\psi(x,u_k(x))$ converge aussi dans $L^\infty(\Omega)$ faible* vers $\chi_B\bar{\psi}$. En appliquant $(A.2)$ à $\chi_B(x)\psi(x,\lambda)$ on obtient :

$$\int_\Omega\int_{\mathbb{R}^n}\chi_B(x)\psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)dx=\int_\Omega\chi_B(x)\bar{\psi}(x)dx.$$

En divisant par $|B|$ et en appliquant le Théorème de différentiation de Lebesgue on obtient :

$$\bar{\psi}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)\ \text{p.p.}\ \ x\in\Omega. \qquad (A.3)$$

Par la semi continuité de la norme on a :

$$||\nu||\leq\liminf||\delta_{u_k(x)}||=1$$

i.e.

$$||\nu_x||_{M(\mathbb{R}^m)}\leq 1\ \ \text{p.p.}\ x\in\Omega.$$

En appliquant $(A.3)$ à $\psi(x,\lambda)=1$ on obtient :

$$\nu_x(\mathbb{R}^m)=1.$$

Ainsi

$$\nu_x(\mathbb{R}^m)=||\nu_x||_{M(\mathbb{R}^m)}=1\ \ \text{p.p.}\ x\in\Omega.$$

Par conséquent $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ est une famille de probabilité.

■