Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Metz

en Mathématiques

par Mr **Mustapha AMEUR.**

Titre de la thèse :

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ALGÈBRES DE HOPF.

Soutenue publiquement le 17 Octobre 1996 devant le jury composé de :

H. BENAMOR	:	Maître de conférence à l'Université de Metz. Rapporteur.
Y. FELIX	:	Professeur à l'Université de Louvain-La-Neuve. Rapporteur.
R. GOBLOT	:	Professeur à l'Université de Lille I. Examinateur.
A. ROUX	:	Professeur à l'Université de Metz . Directeur de thèse.
A. TIHAMI	:	Professeur à l'Université de Marrakech. Rapporteur.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur A. Roux de m'avoir proposé de travailler sur les algèbres de Hopf, un domaine trés intéréssant par l'étendue des applications de celles-ci. Sa gentillesse, sa disponibilité, ses conseils et son aide trés précieuse m'ont beaucoup touché, Je tiens ici à lui exprimer ma profonde gratitude.

Je voudrais remercier Messieurs H. Benamor, Y. Félix et A. Tihami, qui ont bien voulu lire cette thèse et d'y apporter leurs appréciations.

Je remercie Monsieur R. Goblot d'avoir bien voulu examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Enfin, je remercie mes parents pour leur soutien moral et financier, ainsi que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

A mes chers parents.

A mes frères et soeurs.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif, par algèbre (resp. cogèbre) on entend une $\mathbb{k}$-algèbre associative et unitaire (resp. $\mathbb{k}$-cogèbre coassociative et coünitaire).

Dans l'étude de l'homologie ou la cohomologie d'un groupe de Lie, H. Hopf [9] a fait apparaître une nouvelle structure associant les structures d'algèbre et de cogèbre, c'est la structure d'algèbre de Hopf. Plus généralement, en topologie, l'homologie ou la cohomologie d'un espace topologique V connexe (ou H-espace), muni d'une application continue $f : V \times V \to V$, telle qu'il existe un point $x_0 \in V$ satisfaisant à

$$f(x_0, x) = f(x, x_0) = x \qquad \text{pour tout } x \in V.$$

Ainsi x_0 est l'élément neutre pour la loi de composition f. On sait que l'espace vectoriel $H^*(V; \mathbb{k})$ sur $\mathbb{k}$, admet une structure d'algèbre graduée commutative, c'est l'algèbre de cohomologie, la multiplication étant induite par l'application diagonale $V \to V \times V$. D'autre part, la loi de composition $f : V \times V \to V$ définit un homomorphisme d'algèbres graduées

$$\Delta : H^*(V; \mathbb{k}) \to H^*(V; \mathbb{k}) \otimes H^*(V; \mathbb{k}),$$

appelé application diagonale de $H^*(V; \mathbb{k})$. Cette application possède la propriété suivante:
Soit $\varepsilon : H^*(V; \mathbb{k}) \to \mathbb{k}$ l'augmentation définie par l'injection $x_0 \to V$; l'homomorphisme composé

$$H^*(V; \mathbb{k}) \xrightarrow{\ \Delta\ } H^*(V; \mathbb{k}) \otimes H^*(V; \mathbb{k}) \xrightarrow{\ \varepsilon\otimes 1\ } H^*(V; \mathbb{k}),$$

est induit par l'application $x \mapsto f(x_0, x)$; donc c'est l'identité; de même, $(1 \otimes \varepsilon)\Delta$ est l'identité. Ceci exprime que $H^*(V; \mathbb{k})$, comme algèbre graduée munie d'une application diagonale admet une structure d'algèbre de Hopf graduée connexe (voir [19],[21]). Depuis, on rencontre la structure d'algèbre de Hopf sur plusieur algèbres connues, l'algèbre de Steenrod, l'algèbre de groupe, l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, etc....

Dans [9], H. Hopf avait montré qu'une algèbre de Hopf graduée connexe commutative de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle est l'algèbre extérieure sur des générateurs de degrés impairs. Par la suite, on s'est intéressé à étudier la structure en tant qu'algèbre d'une algèbre de Hopf graduée connexe, sur ce sujet Leray a montré qu'une algèbre de Hopf graduée connexe commutative sur un corps de carctéristique nulle est isomorphe en tant qu'algèbre au produit tensoriel de l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degrés impairs et de l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de degrés pairs, dans [5], A. Borel donne un théorème analogue dans le cas où la caractéristique du corps est non nulle. A ce stade, on s'est posé la question suivante, que se passe-t-il si on supprime l'hypothèse de la commutativité ?. Dans [3], on a montré qu'une algèbre de Hopf graduée connexe sur un corps de caractéristique nulle, où tout élément homogène est nilpotent, est commutative et cocommutative. Donc, par un résultat de Milnor-Moore [14] c'est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments primitifs, qui sont de degrés impairs. Ce qui en fait, généralise le théorème de Hopf en dimension finie, puisque dans ce cas tout élément est nilpotent. Pour plus de détails sur les algèbres de Hopf graduées, l'article de Milnor-Moore [14] est une bonne référence.

Les applications des algèbres de Hopf sont très nombreuses, elles interviennent en topologie, dans les groupes algébriques affines, dans les groupes quantiques, etc...,et l'une des applications aussi est la théorie de Galois, où on s'intéresse à l'étude de l'action d'une algèbre de Hopf sur une algèbre. Sur ce sujet, J. Bergen s'est intéressé dans un de ses articles [4], à savoir quand est ce que les sous-algèbres de Hopf d'une algèbre de Hopf ont toutes des sous-algèbres d'invariants distinctes. Dans [2], on a généralisé ses résultats pour une algèbre de Hopf de dimension quelconque, et en prenant une classe de modules contenant les modules fidèles utilisés par J. Bergen.

Dans ce qui suit on va détailler le contenu de chaque chapitre.

Le chapitre 1 est consacré à des rappels sur les algèbres de Hopf abstraites, i.e, non graduées, et sur d'autres structures se rattachant à celles-ci, telles que les structures de modules, de comodules, modules rationnels, et modules de Hopf, sur aussi les notions attachées aux algèbres de Hopf telles que, les intégrales et le dual restreint, on rappelle aussi les principaux résultats qui nous servirons dans toute la suite.

Dans le chapitre 2, on s'est intéressé à quelques travaux autour de la $5^{ième}$ conjécture de Kaplansky [10], la liberté des algèbres de Hopf comme modules sur leurs sous-algèbres de Hopf, en vue de les appliquer aux algèbres de Hopf graduées connexe (voir Chapitre 3). On s'est intéressé donc à étudier un article de Radford [18] qui nous donne des conditions pour la liberté des algèbres de Hopf en dimension infinie,

Théorème 1. Si H est une algèbre de Hopf irréductible et pointée, alors H est libre comme B-module à gauche (et à droite), où $B \subseteq H$ est une sous-algèbre de Hopf de H.

Théorème 2. Soient H une algèbre de Hopf et B une sous-algèbre de Hopf de H. Si $Corad\ H \subseteq B$ alors, H est libre comme B-module à gauche (et à droite).

On s'est intéressé aussi aux travaux de Nichols et Zoeller, qui après des résultats partiels, ont montré le théorème suivant en dimension finie,

Théorème [15]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie, et soit B une sous-algèbre de Hopf de H. Alors tout (H, B)-module de Hopf à gauche est libre comme B-module à gauche. En particulier, H est libre comme B-module à gauche.

Qui est une génèralisation du théorème de Lagrange pour les algèbres de Hopf. Et en dimension infinie, ils ont montré le théorème suivant,

Théorème [16]. Soit H une algèbre de Hopf, et soit B une sous-algèbre de Hopf semisimple de dimension finie. Alors H est libre comme B-module, de plus tout (H, B)-module de Hopf est libre comme B-module.

Dans le chapitre 3, section 1, on a donné des généralités sur les algèbres de Hopf graduées connexes, et en s'inspirant du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on s'est posé la question: quand est-ce que le gradué associé à une algèbre de Hopf filtrée est une algèbre extérieure? sur ce point on a montré que le gradué associé à une algèbre de Hopf filtrée connexe cocommutative ne peut pas être une algèbre extérieure. Dans la section 2 on a fait des remarques sur le dual des algèbres de Hopf graduées. Dans la section 3, on a fait des remarques sur les algèbres de Hopf graduées connexes, et on a montré le résultat suivant,

Proposition. Soit H une algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie, et soit $n = max\{m \in \mathbb{N} \text{ tel que } H_m \neq 0\}$. Alors $\int_H = H_n$.

Dans la section 4, on a montré que, irréductible pointé pour les algèbres de Hopf abstraites est équivalent à connexe pour les algèbres de Hopf graduées. D'où, en utilisant un résultat de Radford on a montré la proposition suivante

Proposition. Soit H une algèbre de Hopf graduée connexe, et soit B une sous-algèbre de Hopf de H. Alors H est libre comme B-module.

Dans la section 5, en utilisant le fait qu'une algèbre de Hopf graduée connexe commutative et cocommutative est l'algèbre extérieure sur ses éléments primitifs, qui est un résultat de Milnor-Moore [14], on montre les deux théorèmes de structure suivants, pour un corps $\Bbbk$ de caractéristique nulle,

Théorème 1 [3]. Soit A une $\Bbbk$-algèbre de Hopf graduée connexe où tout élément homogène de degré strictement positif est nilpotent, alors A est commutative et cocommutative, par suite A est l'algèbre extérieure sur ses éléments primitifs.

Théorème 2 [3]. Toute $\Bbbk$-algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie est commutative et cocommutative.

Ce dernier étant une généralisation du théorème de Hopf, comme conséquence, on a le théorème suivant,

Théorème. Si H est une algèbre de Hopf graduée connexe, dont la graduation s'arrête, alors la dimension de H est finie.

Dans le chapitre 4, on généralise les deux théorèmes suivants de J. Bergen,

Théorème 1[4]. Soient H une algèbre de Hopf de dimension finie, et M un H-module fidèle. Si $H_1 \neq H_2$ sont deux sous-algèbres de Hopf de H, alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

Théorème 2[4]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Si $H_1 \neq H_2$ sont deux sous-algèbres de Hopf de H. Alors $\int_{H_1} \neq \int_{H_2}$.

On montre alors, que si dans le théorème 2[4] on prends une algèbre de Hopf H de dimension infinie, on a

Théorème 1[2]. Soient H une algèbre de Hopf, H_1 et H_2 deux sous-algèbres de Hopf telles que la dimension de H_1 soit finie et $H_1 \neq H_2$. Alors $H_1^{inv} \neq H_2^{inv}$.

On montre aussi que dans le théorème 1[4], on peut prendre une classe de modules plus grande que celle des modules fidèles, d'où le théorème:

Théorème 2[2]. Soient H une algèbre de Hopf, ε sa counité, et M un H-module tel que $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$.
Si H_1 et H_2 sont deux sous-algèbres de Hopf de H, telles que la dimension de H_1 est finie et $H_1 \neq H_2$, alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

On montre aussi par un exemple, en considérant l'algèbre de groupe, que M fidèle n'est pas équivalente (en général) à la condition $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$. Dans la deuxième partie de ce chapitre on a appliqué ces résultats aux représentations des groupes finis.

Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LES ALGÈBRES DE HOPF

Dans ce chapitre, on rappelle les notions sur les algèbres de Hopf qui nous seront utiles dans ce travail. Et pour plus de details on consultera [1] ou [20].

I. Définitions.

Dans ce paragraphe on donne une définition d'une algèbre de Hopf sur un corps commutatif $\mathbb{k}$ quelconque. Sauf mention du contraire tous les produits tensoriels sont pris sur $\mathbb{k}$.

I.1 Algèbre.

I.1.1 Définition. Soit A un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Une structure d'algèbre sur $\mathbb{k}$ ou $\mathbb{k}$-algèbre (associative et unitale) sur A est la donnée de deux applications linéaires: la multiplication $\phi : A \otimes A \longrightarrow A$, et l'unité η: $\mathbb{k} \longrightarrow A$ vérifiant les deux propriétés suivantes

$$(1)\ \phi(id \otimes \phi) = \phi(\phi \otimes id),$$
$$(2)\ \phi(\eta \otimes id) = id = \phi(id \otimes \eta).$$

(1) exprime l'associativité du produit, et (2) exprime que $\eta(1_{\mathbb{k}})$ est l'unité de A notée 1_A. Dans toute la suite $\phi(a \otimes b)$ sera noté ab.

Soient V, W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$, et soit $\tau_{V,W}$: $V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$, l'application définie par

$$\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v.$$

On dira que A est commutative si $\phi\tau_{A,A} = \phi$.

I.1.2 Définition. Soit (A, ϕ, η) une $\Bbbk$-algèbre. Si on pose $\phi' = \phi\tau_{A,A}$, alors (A, ϕ', η) est aussi une algèbre, appelée algèbre opposée de A notée A^{op}. Si A est commutative, alors $A^{op} = A$.

I.1.3 Définition. Soient (A, ϕ_A, η_A) et (B, ϕ_B, η_B) deux algèbres, et soit f une application linéaire de A dans B. f est un morphisme d'algèbres si

$$f\phi_A = \phi_B(f \otimes f) \text{ et } f\eta_A = \eta_B.$$

I.1.4 Définition. Un idéal de A est un sous-espace vectoriel I de A tel que

$$\phi(I \otimes A + A \otimes I) \subseteq I.$$

Dans ce cas, le quotient A/I hérite de A une structure d'algèbre de sorte que la projection canonique $p : A \longrightarrow A/I$ soit un morphisme d'algèbres.

I.2 Cogèbre.

Dans ce qui suit on va donner la définition d'une structure duale de la structure d'algèbre.

I.2.1 Définition. Soit C un espace vectoriel sur $\Bbbk$. Une structure de cogèbre sur $\Bbbk$ ou $\Bbbk$-cogèbre (coassociative et coünitale) sur C est la donnée de deux applications linéaires: la comultiplication Δ: $C \longrightarrow C \otimes C$, et la coünité ε: $C \longrightarrow \Bbbk$ vérifiant les deux propriétés suivantes

$$(1') \ (id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta,$$
$$(2') \ (\varepsilon \otimes id)\Delta = id = (id \otimes \varepsilon)\Delta.$$

Suivant les notations de Sweedler [20], on écrit

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)}, \quad \text{pour } c \in C,$$

la propriété de la coassociativité (1') est alors

$$\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}} = \sum_{(c)} c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}$$

qu'on note simplement par $\sum_{(c)} c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$, pour $c \in C$. Et la propriété de la coünité (2') s'écrit

$$\sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = \sum_{(c)} c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}).$$

On dira que C est cocommutative si $\Delta = \tau_{C,C}\Delta$.

I.2.2 Définition. Soit (C, Δ, ε) une cogèbre. Si on pose $\Delta^{op} = \tau_{C,C}\Delta$, alors $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ est aussi une cogèbre, appelée cogèbre opposée de C notée C^{op}. Si C est cocommutative, alors $C^{op} = C$.

I.2.3 Définitions. Soit C une cogèbre sur $\Bbbk$.
(i) C est irréductible si deux sous-cogèbres quelconques de C admettent une intersection non vide.
(ii) C est simple si elle n'admet pas de sous-cogèbres propres non nulles.
(iii) C est pointée si toute sous-cogèbre simple de C est de dimension 1.
(iv) Le coradical de C est la somme de toutes les sous-cogèbres simples de C, on le note: $Corad\ C$.
(v) C est filtrée s'il existe des sous-espaces

$$C(0) \subset C(1) \subset ... \subset C \text{ avec } C = \cup C(i) \text{ et } \Delta(C(n)) \subset \sum_{i=0}^{n} C(i) \otimes C(n-i).$$

Si de plus $C(0) = \Bbbk$, on dit que C est connexe.

I.2.4 Définition. Soient $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(C', \Delta_{C'}, \varepsilon_{C'})$ deux cogèbres. et soit f une application linéaire de C dans C'. f est un morphisme de cogèbres si

$$(f \otimes f)\Delta_C = \Delta_{C'} f \quad \text{et } \varepsilon_C = \varepsilon_{C'} f.$$

I.2.5 Définition. Un coïdéal de C est un sous-espace vectoriel I de C tel que

$$\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C \text{ et } \varepsilon(I) = 0.$$

Dans ce cas, le quotient C/I hérite de C une structure de cogèbre de sorte que la projection canonique $p : C \longrightarrow C/I$ soit un morphisme de cogèbres.

I.3 Bigèbre.

Maintenant on va définir une structure associant la structure d'algèbre et la structure de cogèbre.

I.3.1 Définition. Une bigèbre H est un espace vectoriel sur $\Bbbk$ muni d'une structure d'algèbre et d'une structure de cogèbre (i.e, $(H, \phi, \eta, \Delta, \varepsilon)$) telle que ϕ et η sont des morphismes de cogèbres, ou ce qui est équivalent Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.

I.3.2 Définition. Soient A et B deux bigèbres, f une application linéaire de A dans B. f est un morphisme de bigèbres si f est à la fois un morphisme d'algèbres et de cogèbres.

I.3.3 Définition. Un biidéal de H est un sous-espace vectoriel I de H qui est à la fois un idéal et un coïdéal. Dans ce cas, le quotient H/I hérite de H une structure de bigèbre de sorte que la projection canonique $p : H \longrightarrow H/I$ soit un morphisme de bigèbres.

I.4 Algèbre de Hopf.

I.4.1 Produit de convolution. Soit $(H, \phi, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre, on désignera la cogèbre H par H^c et l'algèbre H par H^a, alors $\mathfrak{L}(H^c, H^a)$ muni du produit de convolution $\star$ défini par:

$$f \star g(h) = \phi(f \otimes g)\Delta(h) = \sum_{(h)} f(h_{(1)})g(h_{(2)}) \quad \text{pour } f, g \in \mathfrak{L}(H^c, H^a)$$

admet une structure d'algèbre d'unité $\eta\varepsilon$.

I.4.2 Antipode. Un élément S dans $\mathfrak{L}(H^c, H^a)$ est appelé antipode, si S est l'inverse de l'identité par rapport à $\star$ (i.e, $Id \star S = \eta\varepsilon = S \star Id$), en notations de [20]

$$\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)} = h1_H = \sum_{(h)} h_{(1)}S(h_{(2)}).$$

I.4.3 Définition. Une bigèbre admettant un antipode est appelée une algèbre de Hopf et sera notée $(H, \phi, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$.

I.4.4 Définition. Soient H et K deux algèbres de Hopf. Une application linéaire f de H dans K est un morphisme d'algèbres de Hopf si f est un morphisme de bigèbres et $fS_H = S_K f$.

I.4.5 Définition. Un idéal de Hopf de H est un biidéal I de H tel que $S(I) \subset I$. Dans ce cas, le quotient H/I hérite de H une structure d'algèbre de Hopf de sorte que la projection canonique $p : H \longrightarrow H/I$ soit un morphisme d'algèbres de Hopf.

I.4.6 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf. Alors

1) S est un antimorphisme d'algèbres, i.e,

$$S(hk) = S(k)S(h),\ \forall h, k \in H, \quad \text{et } S(1) = 1.$$

2) S est un antimorphisme de cogèbres, i.e,

$$\Delta S = \tau_{H,H}(S \otimes S)\Delta, \quad \text{et } \varepsilon S = \varepsilon.$$

Preuve. 1) Considérons les morphismes $\mu, \nu, \rho : H \otimes H \longrightarrow H$ donnés par:

$$\mu(g \otimes h) = gh,\ \nu(g \otimes h) = S(h)S(g), \text{ et } \rho(g \otimes h) = S(gh).$$

$\mathfrak{L}((H \otimes H)^c, H^a)$ est une algèbre sous le produit de convolution $\star$. Posons $\eta = \eta_{H^a}$ et $\varepsilon = \varepsilon_{(H\otimes H)^c}$, on va montrer que $\rho \star \mu = \eta\varepsilon = \mu \star \nu$. Puisque $\eta\varepsilon$ est l'identité sous $\star$, ceci va entrainer que $\mu = \nu$ ce qu'on veut montrer.

$$
\begin{aligned}
\rho \star \mu(g \otimes h) &= \sum_{(g\otimes h)} \rho((g \otimes h)_{(1)})\mu((g \otimes h)_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} \rho(g_{(1)} \otimes h_{(1)}))\mu(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} S(g_{(1)}h_{(1)}))g_{(2)}h_{(2)} \\
&= \sum_{(gh)} S((gh)_{(1)})(gh)_{(2)} \text{ (car } H \text{ est une bigèbre, et } \Delta \text{ est un morphisme d'algèbres.)} \\
&= (S \star I)(gh) \\
&= \varepsilon(gh) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h).
\end{aligned}
$$

D'autre part on a

$$
\begin{aligned}
(\mu \star \nu)(g \otimes h) &= \sum_{(g),(h)} \mu(g_{(1)} \otimes h_{(1)})\nu(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} g_{(1)}h_{(1)}S(h_{(2)})S(g_{(2)}) \\
&= \sum_{(g),(h)} g_{(1)}\varepsilon(h)S(g_{(2)}) \\
&= (\sum_{(g)} g_{(1)}S(g_{(2)}))\varepsilon(h) \\
&= \varepsilon(g)\varepsilon(h).
\end{aligned}
$$

ce qui prouve 1).

2) est démontré de la même façon que 1), en remplaçant μ par Δ, ν par $\tau_{H,H}(S \otimes S)\Delta$ et ρ par ΔS de $H \longrightarrow H \otimes H$.

I.4.7 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf d'antipode bijectif S, alors H^{op} munit de la structure de cogèbre opposée, est aussi une algèbre de Hopf d'antipode S^{-1}.

Preuve. Il est clair que H^{op} admet une structure de bigèbre, reste à savoir si S^{-1} est un antipode de H^{op}. Il est clair que S^{-1} est un anti-automorphisme de H, soit $h \in H$,

$$\begin{aligned}\sum_{(h)} S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)} &= \sum_{(h)} S^{-1}(h_{(2)})S^{-1}S(h_{(1)}) \\ &= S^{-1}(\sum_{(h)} S(h_{(1)})h_{(2)}) \\ &= S^{-1}(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)1_H.\end{aligned}$$

D'où, $S^{-1} \star id = \eta\varepsilon$. De même on montre que $id \star S^{-1} = \eta\varepsilon$, donc S^{-1} est bien un antipode pour H^{op}.

I.4.8 Dualité pour les algèbres de Hopf. Si H est une algèbre de Hopf et H^* son dual algèbrique, les applications

$$\Delta^* : H^* \otimes H^* \longrightarrow (H \otimes H)^* \longrightarrow H^*$$

$$\varepsilon^* : \Bbbk \longrightarrow H^*$$

définissent une structure d'algèbre sur H^*, et comme $H^* \otimes H^*$ n'est pas isomorphe en général à $(H \otimes H)^*$, alors H^* n'admet pas de structure de cogèbre. Dans le cas où H est de dimension finie l'isomorphisme existe, et les applications

$$\phi^* : H^* \longrightarrow (H \otimes H)^* \simeq H^* \otimes H^*$$

$$\eta^* : H^* \longrightarrow \Bbbk$$

définissent une structure de cogèbre sur H^*, d'où en dimension finie H^* est aussi une algèbre de Hopf.

Pour contourner cette difficulté en dimension infinie, on introduit la notion de dual restreint qu'on notera H° défini par

$$H^\circ = \{g \in H^* \text{ tel que } ker\ g \text{ contient un idéal cofini } \}$$

dans ce cas on a la proposition suivante

I.4.8.1 Proposition. H induit de manière canonique une structure d'algèbre de Hopf sur H°.

Preuve. Il suffit de montrer que $H^\circ \otimes H^\circ \simeq (H \otimes H)^\circ$. Puisque H est de dimension infinie, on n'a que l'injection canonique

$$i : H^* \otimes H^* \hookrightarrow (H \otimes H)^*$$

définie par $(\alpha\otimes\beta)(h\otimes g)=\alpha(h)\beta(g)$. Montrons d'abord que $i(H^\circ\otimes H^\circ)=(H\otimes H)^\circ$ dans $(H\otimes H)^*$. En effet, soient $\alpha,\beta\in H^\circ$ et supposons que I (resp. J) est un idéal cofini de H sur lequel α (resp. β) s'annule. Alors $\alpha\otimes\beta$ s'annule sur $I\otimes H+H\otimes J$, qui est un idéal cofini dans $H\otimes H$. Donc $H^\circ\otimes H^\circ\subset(H\otimes H)^\circ$.

Si $\gamma\in(H\otimes H)^\circ$, soit K un idéal cofini dans $H\otimes H$ sur lequel γ s'annule. Posons

$$I=K\cap(H\otimes\Bbbk)$$
$$J=K\cap(\Bbbk\otimes H)$$

alors I et J sont des idéaux cofinis dans H et on a

$$(I\otimes H+H\otimes J)\subset K$$

on peut donc voir γ comme un élément de $\big((H\otimes H)/(I\otimes H+H\otimes J)\big)^*$. Or, l'injection

$$(H/I)^*\otimes(H/J)^*\hookrightarrow(H/I\otimes H/J)^*=\big((H\otimes H)/(I\otimes H+H\otimes J)\big)^*$$

est surjective, puisque H/I et H/J sont de dimension finie. D'où $\gamma\in H^\circ\otimes H^\circ$. Ce qui complète la preuve.

Remarque. H° est la plus grande algèbre de Hopf contenue dans H^*.

I.5 Module. Si (A,ϕ,η) est une algèbre, un A-module à gauche est la donnée d'un espace vectoriel N sur $\Bbbk$ et d'une application $\psi: A\otimes N\longrightarrow N$ telle que

$$\psi(id\otimes\psi)=\psi(\phi\otimes id),$$

et $\psi(\eta\otimes id)$ est l'isomorphisme canonique $\Bbbk\otimes N\longrightarrow N$.

De même on peut définir un module à droite. Pour $a\in A$, $n\in N$ on note $\psi(a\otimes n)=a.n$.

I.6 Comodule. Si (C,Δ,ε) est une cogèbre, un C-comodule à droite est la donnée d'un espace vectoriel M sur $\Bbbk$ et d'une application $\omega: M\longrightarrow M\otimes C$ telle que

$$(id\otimes\Delta)\omega=(\omega\otimes id)\omega,$$

et $(id\otimes\varepsilon)\omega$ est l'isomorphisme canonique $M\longrightarrow M\otimes\Bbbk$.

Pour $m\in M$, on écrit: $\omega(m)=\sum_{(m)}m_{(0)}\otimes m_{(1)}\in M\otimes C$. De même on peut définir un comodule à gauche, et on écrit pour $m\in M$: $\omega(m)=\sum_{(m)}m_{(-1)}\otimes m_{(0)}\in C\otimes M$. On prend toujours $m_{(0)}$ dans M.

I.7 Module de Hopf. Soit H une algèbre de Hopf. Soit M un H-module à droite et un H-comodule à droite.

M est appelé module de Hopf si la condition suivante est vérifiée:

$\omega(m.h) = \sum_{(h)(m)} m_{(0)}.h_{(1)} \otimes m_{(1)}h_{(2)}$, appelée condition de cohérence.

I.7.1 Théorème de structure des modules de Hopf.

Si H est une algèbre de Hopf, M un module de Hopf à droite et

$$M' = \{m \in M \mid \omega(m) = m \otimes 1\}$$

alors $M'_H = M' \otimes H \longrightarrow M$ est un isomorphisme de modules de Hopf.

Ce théorème exprime qu'une $\Bbbk$-base de M' est une H-base de M.

Preuve. Soit $P : M \longrightarrow M$ la composition suivante

$$M \xrightarrow{\ \omega\ } M \otimes H \xrightarrow{I \otimes S} M \otimes H \xrightarrow{\ \psi\ } M,$$

i.e, $P = \psi((I \otimes S)\omega$, et pour $m \in M$ $P(m) = \sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(1)})$.

Montrons que $ImP \subset M'$, i.e, $\omega(P(m)) = P(m) \otimes 1$.

$$\begin{aligned}
\omega(P(m)) &= \omega(\sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(1)})) \\
&= \sum_{(m)} \omega(m_{(0)}.S(m_{(1)})) \\
&= \sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)}S(m_{(2)}) \quad \text{, par la condition de cohérence} \\
&= \sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(2)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)}) \\
&= \sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(1)}) \otimes 1, \ \ \varepsilon \text{ étant la coünité} \\
&= P(m) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Donc $P(M) \subset M'$, en fait P est définie de $M \longrightarrow M'$. Définissons $\alpha : M' \otimes H \longrightarrow M$ par

$$\alpha(m' \otimes h) = m'.h, \ \text{pour } m' \in M', h \in H$$

et $\beta : M \longrightarrow M' \otimes H$ par

$$\beta = (P \otimes I)\omega, \text{ c.à.d, } \beta(m) = \sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}.$$

Montrons que $\beta\alpha = I_{M'\otimes H}$ et $\alpha\beta = I_M$

$$\begin{aligned}\alpha\beta(m) &= \alpha(\sum_{(m)} m_{(0)}.S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\ &= \sum_{(m)} (m_{(0)}.S(m_{(1)})).m_{(2)} \\ &= \sum_{(m)} m_{(0)}.(S(m_{(1)}).m_{(2)}) \\ &= \sum_{(m)} m_{(0)}.\varepsilon(m_{(1)}) \\ &= m.\end{aligned}$$

De plus pour $m' \in M, \ h \in H$

$$\begin{aligned}\beta\alpha(m' \otimes h) &= \beta(m'.h) \\ &= (P \otimes I)\omega(m'.h) \\ &= (P \otimes I)(\sum_{(h)} m'.h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\ &= \sum_{(h)} P(m'.h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\ &= \sum_{(h)} m'.(h_{(1)}.S(h_{(2)})) \otimes h_{(3)} \\ &= \sum_{(h)} m'\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\ &= m' \otimes h.\end{aligned}$$

Donc α et β sont inverse l'une de l'autre, ce qui entraîne que α est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Il est facile de voir que α et β sont des morphismes de modules de Hopf, c.à.d, des morphismes de modules et de comodules.

I.8 Module rationnel. La notion de module rationnel apparaît, quand on étudie la relation qui existe entre les comodules d'une cogèbre et les modules de son algèbre duale.

Soit C une cogèbre, C^* son algèbre duale, et soit (M,ω) un C-comodule à droite où $\omega : M \longrightarrow M \otimes C$, il est facile de voir que (M, ψ_ω) est un C^*-module à gauche, où ψ_ω est la composition suivante

$$C^* \otimes M \xrightarrow{I\otimes\omega} C^* \otimes M \otimes C \xrightarrow{\tau_{C^*,M}\otimes I} M \otimes C^* \otimes C \xrightarrow{I\otimes<,>} M \otimes \Bbbk \longrightarrow M.$$

Maintenant si on se donne une structure de C^*-module sur M, à quelle condition aura-t-on une structure de C-comodule sur M?

Soit (M,ψ) un C^*-module à gauche, définissons

$$\omega : M \longrightarrow \mathfrak{L}(C^*, M)$$

par

$$\omega(m)(c^*) = \psi(c^* \otimes m) = c^*.m$$

il existe des injections naturelles, $M \hookrightarrow M \otimes C^{**} \xrightarrow{f} \mathfrak{L}(C^*, M)$ où

$$f(m \otimes c^{**})(c^*) = < c^{**}, c^* > m.$$

I.8.1 Définition. M est dit un C^*-module rationnel si $\omega(M) \subset M \otimes C$.

On obtient que si M est un C^*-module rationnel, alors (M,ω) est un C-comodule à droite. Il y'a donc équivalence entre les C-comodules à droite et les C^*-modules à gauche.

On va donner maintenant un important resultat sur les modules rationnels voir [20].

I.8.1.1 Théorème. Soient C une cogèbre, et M, N deux C^*-modules, avec M rationnel.

1) Tout sous-module de M est rationnel.

2) Tout sous-module cyclique de M est de dimension finie.

3) N admet un unique sous-module rationnel maximal, noté N^{rat}, qui est égale à la somme de tous les sous-modules rationnels de N.

I.8.1.2 Théorème fondamental des cogèbres.

Soit C une cogèbre, et soit c un élément de C. La sous-cogèbre de C engendrée par c est de dimension finie.

Preuve. Pour montrer que l'intersection des sous-cogèbres contenant c est de dimension finie, il suffit de montrer que c est contenu dans une sous-cogèbre de C de dimension finie. Cette sous-cogèbre va être en fait $J^\perp$ pour un certain idéal cofini de C^*.

Soit $\rightharpoonup : C^* \otimes C \longrightarrow C$, l'action de C^*-module à gauche sur C, qui provient de la structure de C-comodule via Δ (voir les modules rationnels), "$\rightharpoonup$" est définie par

$$c^* \rightharpoonup c = \sum_{(c)} c_{(1)} < c^*, c_{(2)} > .$$

En fait, C est un C^*-module rationnel sous "$\rightharpoonup$ ". Ainsi $N = C^* \rightharpoonup c$ (le sous-module engendré par c) est rationnel et de dimension finie puisque c'est un sous-module cyclique d'un module rationnel.

Posons $J = \{c^* \in C^* \text{ tel que } c^* \rightharpoonup N = 0\}$, nous allons montrer que $J^\perp$ est la sous-cogèbre désirée.

Remarquons que $J = ker\ \pi$, où $\pi : C^* \longrightarrow End_{\Bbbk}(N)$ est le morphisme d'algèbres donné par: $\pi(c^*)[n] = c^* \rightharpoonup n$, ainsi $C^*/J \simeq Im\ \pi \subset End_{\Bbbk}(N)$, d'où J est un idéal cofini de C^* car $dim(C^*/J) \leq dim(N) < \infty$.

Puisque J est un idéal de C^*, $J^\perp$ est une sous-cogèbre de C, et elle est de dimension finie. Il reste à montrer que $c \in J^\perp$. Par définition, si $c^* \in J$ on a

$$\begin{aligned} 0 &=< \varepsilon, c^* \rightharpoonup c > \\ &=< \varepsilon, \sum_{(c)} c_{(1)} < c^*, c_{(2)} >> \\ &= \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)}) < c^*, c_{(2)} > \\ &=< c^*, c > , \text{ car } \sum_{(c)} \varepsilon(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} = 1 \otimes c. \end{aligned}$$

Donc $\forall c^* \in J, \quad < c^*, c >= 0$, d'où $c \in J^\perp$. Ce qui complète la preuve.

II. Intégrale.

II.1 Définition. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Un élément $t \in H$ est une intégrale à gauche - resp. à droite - dans H ~~si~~

$ht = \varepsilon(h)t$ - resp. $th = \varepsilon(h)t$ -, pour tout $h \in H$.

On note l'espace des intégrale à gauche - resp. à droite - par $\int_H^g$ - resp. $\int_H^d$ -, et on dit que H est unimodulaire si $\int_H^g = \int_H^d$.

II.2 Théorème [13]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors

1) $\int_H^g$ et $\int_H^d$ sont de dimension 1.

2) S est bijective.

3) H est un H^*-module cyclique.

4) H est une algèbre de Frobenius.

Preuve. Voir [13].

On généralise la notion d'intégrale au cas d'une algèbre de Hopf H de dimension infinie en posant:

II.3 Définition. $t \in H^*$ est dit une intégrale à gauche (resp. à droite) sur H si $h^*.t =< h^*, 1_H > t$ (resp. $t.h^* =< h^*, 1_H > t$), pour tout $h^* \in H^*$.

II.4 Définition. H est semi-simple si tout H-module est complètement réductible.

L'une des applications des intégrales est une version du théorème de Maschke pour les algèbres de Hopf, dû à Larson et Sweedler. On rappelle que, pour un groupe fini G, $\Bbbk(G)$ est semi-simple si et seulement si $|G|^{-1} \in \Bbbk$.

Traduisons ceci en langage des intégrales. Soit $t = \sum_{g\in G} g \in \int_{\Bbbk(G)}$ alors $\varepsilon(t) = |G|$, ainsi $|G|^{-1} \in \Bbbk$ si et seulement si $\varepsilon(t) \neq 0$ dans $\Bbbk$, d'où le théorème de Maschke:

II.5 Théorème [13]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Alors H est semi-simple si et seulement si $\varepsilon(\int_H) \neq 0$.

Preuve. Supposons que H est semi-simple, alors il existe un idéal à gauche I tel que

$$H = I \oplus ker(\varepsilon).$$

On a pour $x \in ker(\varepsilon)$, $y \in I$: $xy \in I \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$, ainsi $xy = 0 = \varepsilon(x)y$. Alors, pour tout $h \in H$, posons $h = (h - \varepsilon(h)1_H) + \varepsilon(h)1_H$, donc pour $y \in I$,

$$\begin{aligned} hy &= (h - \varepsilon(h)1_H)y + \varepsilon(h)y \\ &= \varepsilon(h)y, \quad \text{car } (h - \varepsilon(h)1_H) \in ker(\varepsilon). \end{aligned}$$

Donc on obtient que pour tout $h \in H$, $hy = \varepsilon(h)y$ pour $y \in I$, d'où $I \subseteq \int_H$ qui est de dimension 1, d'après ce qui précède, donc $I = \int_H$. Et puisque $H = I \oplus ker(\varepsilon)$, on conclut que $\varepsilon(\int_H) \neq 0$.

Réciproquement, Si $\varepsilon(\int_H) \neq 0$, choisissons un $z \in \int_H$ tel que $\varepsilon(z) = 1$. En utilisant ce z, on va montrer que tout H-module M est complétement réductible, i.e, si N est un H-sous-module de M, alors N admet un complémentaire dans M. Soit $\pi : M \longrightarrow N$ une projection linéaire, telle que $\pi_{/N} = Id_N$. Et définissons $\tilde{\pi} : M \longrightarrow N$ par

$$\tilde{\pi}(m) = \sum_{(z)} z_{(1)}.\pi(S(z_{(2)}.m) \quad \text{pour tout } m \in M.$$

En particulier pour $n \in N$

$$\tilde{\pi}(n) = \sum_{(z)} z_{(1)}.\pi(S(z_{(2)}.n) = \sum_{(z)} z_{(1)}S(z_{(2)}).n = \varepsilon(z).n = n,$$

d'où $\tilde{\pi}$ est une projection de M dans N, ainsi $M = N \oplus ker(\tilde{\pi})$ en tant qu'espaces vectoriels.

Montrons maintenant que $\tilde{\pi}$ est un morphisme de H-modules. Remarquons tout d'abord que pour tout $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\Delta(z) \otimes h &= \Delta(z) \otimes \sum_{(h)} \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} \Delta(\varepsilon(h_{(1)})z) \otimes h_{(2)} \\
&= \sum_{(h)} \Delta(h_{(1)}z) \otimes h_{(2)} \quad \text{car } z \in \int_H \\
&= \sum_{(h)} h_{(1)})z_{(1)} \otimes h_{(2)}z_{(2)} \otimes h_{(3)}.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $m \in M,\ h \in H$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(h.m) &= \sum_{(z)} z_{(1)}.\pi(S(z_{(2)}.h.m) \\
&= \sum_{(z),(h)} h_{(1)})z_{(1)}.\pi(S(h_{(2)}z_{(2)})h_{(3)}.m) \quad \text{par l'égalité ci-dessus} \\
&= \sum_{(z),(h)} h_{(1)})z_{(1)}.\pi(S(z_{(2)})S(h_{(2)})h_{(3)}.m) \\
&= \sum_{(z),(h)} h_{(1)})z_{(1)}.\pi(\varepsilon(h_{(2)})S(z_{(2)})h_{(3)}.m) \\
&= h.\tilde{\pi}(m).
\end{aligned}$$

D'où $\tilde{\pi}$ est un morphisme de modules, donc $M = N \oplus ker(\tilde{\pi})$ est vérifiée pour la structure de H-module.

On va donner maintenant un résultat de Sweedler qu'on va utiliser au chapitre 4.

II.6 Proposition [20]. Soit H une algèbre de Hopf, si H contient un idéal de dimension finie, alors H est de dimension finie.

III. Le wedge.

III.1 Définition. Soit C une cogèbre, et soient U, V deux sous-espaces de C le "wedge" $U \wedge V$ est le sous-espace vectoriel défini par:

$$U \wedge V = \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V).$$

III.2 Proposition. Soit C une cogèbre, si $U, V \subseteq C$ sont deux sous-espaces de C, alors,

$$U \wedge V = (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}.$$

III.3 Corollaire. Si U et V sont deux sous-cogèbres de C, alors $U \wedge V$ est aussi une sous-cogèbre de C, et on a $U + V \subset U \wedge V$.

Preuve. U étant une sous-cogèbre de C, $U^{\perp}$ est un idéal de C^*. De même V étant une sous-cogèbre de C, $V^{\perp}$ est un idéal de C^*, d'où $U^{\perp}V^{\perp}$ est un idéal de C^*, ainsi $(U^{\perp}V^{\perp})^{\perp} = U \wedge V$ est une sous-cogèbre de C.

III.4 Lemme. Si U, V sont deux sous-cogèbres de C, alors : $U \subseteq U \wedge V$, et $V \subseteq U \wedge V$.

Preuve. On a $\Delta(U) \subseteq U \otimes U$, et $\Delta(U \wedge V) \subseteq U \otimes C + C \otimes V$ donc $\Delta(U) \subseteq U \otimes C + C \otimes V$ d'où $U \subseteq \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V) = U \wedge V$.
De même $V \subseteq U \wedge V$.

Maintenant on définit la suite $V^{(n)}$ inductivement en posant:

$$V^{(0)} = V \text{ et } V^{(n)} = V \wedge V^{(n-1)} \ pour\ n \geq 1.$$

III.5 Corollaire. Si V est une sous-cogèbre de C, alors $V^{(n)}$ est aussi une sous-cogèbre de C pour $n \geq 0$.

Remarque. En posant $V^{(-1)} = (0)$ on aura : $V^{(-1)} \subseteq V^{(0)} \subseteq V^{(1)} \subseteq ... \subseteq V^{(\infty)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} V^{(n)}$.
En effet, par un raisonnement par récurrence, on a:

$V^{(-1)} = (0) \subseteq V = V^{(0)}$

$V^{(0)} = V \subseteq V^{(1)} = V \wedge V$, puisque V est une sous-cogèbre de C,

$\Delta(V) \subseteq V \otimes V \subseteq V \otimes C + C \otimes V$,
donc $V^{(0)} = V \subseteq \Delta^{-1}(\Delta(V)) \subseteq \Delta^{-1}(V \otimes C + C \otimes V) = V^{(1)}$.
On suppose que l'inclusion est vraie à l'ordre n, et on la montre pour l'ordre (n+1).
On a : $V^{(n+1)} = \Delta^{-1}(V \otimes C + C \otimes V^{(n)})$ par hypothése de récurrence $V^{(n-1)} \subseteq V^{(n)}$.
donc $V^{(n+1)} \supseteq \Delta^{-1}(V \otimes C + C \otimes V^{(n-1)}) = V^{(n)}$.
d'où $V^{(n)} \subseteq V^{(n+1)}$.

III.6 La filtration coradicale sur une sous-cogèbre. Soit C une cogèbre, et $R = Corad\, C$.
Si on pose $C_i = \wedge^{i+1} R$ et $C = \bigcup_{i \in N} C_i$.
On a C_i est une sous-cogèbre et $C_i \subset C_{i+1}$. Ceci munit C de la filtration coradical.

Chapitre II

LIBERTÉ DES ALGÈBRES DE HOPF

Dans ce chapitre on va détailler les travaux de Nichols-Zoeller et de Radford sur la liberté des algèbres de Hopf comme modules sur leurs sous-algèbres de Hopf, un problème qui a été posé par Kaplansky dans [10].

I. Préliminaires.

I.1 Définition. Soit H une bigèbre, et soit B une sous-bigèbre de H. On appelle (H, B)-module de Hopf à gauche, tout B-module à gauche M, admettant aussi la structure de H-comodule à gauche, tel que l'application de structure de comodule $\omega : M \to H \otimes M$ soit un morphisme de B-modules à gauche.

On note la catégorie des (H, B)-modules à gauche par ${}^H_B\mathfrak{M}$.

Dans un premier temps, on va restreindre le problème au cas où le (H, B)-module M est de dimension finie. On remarque que H appartient à ${}^H_B\mathfrak{M}$.

I.2 Proposition [17]. Soit H une bigèbre sur $\Bbbk$. Soient $B \subseteq H$ une sous-bigèbre et $C \subseteq H$ une sous-cogèbre telle que $BC \subseteq C$. Supposons que pour tout M dans ${}^C_B\mathfrak{M}$ de la forme $M = BV$, où $V \subseteq M$ est un sous-comodule simple, M soit libre comme B-module à gauche. Alors tout $(0) \neq M \in {}^C_B \mathfrak{M}$ est libre comme B-module à gauche.

Preuve. Soit $(0) \neq M \in {}^C_B \mathfrak{M}$.

On dit qu'un sous-ensemble $L \subseteq M$ est une base partielle de M, si L est une base pour BL comme B-module, et si BL est aussi un sous- comodule de M.

Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des bases partielles de M, on a $\mathfrak{L} \neq \emptyset$ (car on a toujours une base partielle). $\mathfrak{L}$ est ordonné par l'inclusion, alors on peut appliquer le lemme de Zorn, ainsi il existe une base partielle maximale notée L , et on va montrer que $BL = M$.

Supposons que $BL \not\subseteq M$, alors il existe un sous-comodule simple $0 \neq V' \subseteq M/BL$. Soit la projection

$$\pi : M \to M/BL,$$

alors $U = \pi^{-1}(V')$ est un sous-comodule de M, avec $BL \not\subseteq BU$ car $BL = \pi^{-1}(0)$, et $BU/BL \simeq BV' \neq 0$ qui est libre comme B-module par hypothèse. Donc on peut étendre L en une base partielle plus grande, ce qui contredit sa maximalité, d'où $BL = M$, ce qui implique que M est libre comme B-module.

Pour le corollaire de cette proposition, on va donner une démonstration différente de celle donnée par Radford dans [18].

Corollaire. Soit H une bigèbre, et soit B une sous-bigèbre de H de dimension finie. Supposons que tout $M \in_B^H \mathfrak{M}$ de dimension finie, soit libre comme B-module à gauche. Alors tout $M \in_B^H \mathfrak{M}$ est libre comme B-module à gauche.

Preuve. D'après la proposition précédente, il suffirait de montrer que tout $M \in_B^H \mathfrak{M}$ de la forme $M = BV$ avec V un sous-comodule simple, est de dimension finie.

M étant un H-comodule à gauche, M est un H^*-module rationnel à droite, et V étant un H-comodule à gauche de M, V est un H^*-module rationnel à droite.

Pour $v \in V$, soit E le H^*-sous-module de V engendré par v. E étant un H^*-module rationnel cyclique, E est de dimension finie.

$$E = v.H^* \subseteq V \qquad \text{avec } dimE < \infty,$$

et de plus E admet la structure de H-sous-comodule à gauche de M avec $E \subseteq V$ qui est simple, d'où $E = V$ ainsi $dimV < \infty$, et puisque B est de dimension finie, alors BV est assi de dimension finie, ce qui complète la preuve.

I.3 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf d'antipode S, et soit B une sous-algèbre de Hopf de H. Soit $M \in_B^H \mathfrak{M}$. Considérons $H \otimes M$ comme étant un B-module à gauche via l'opération suivante

$$b * (h \otimes m) = \sum_{(b)} hS(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}.m \quad ; \ \forall b \in B, h \in H, m \in M.$$

Alors, $(H \otimes M, *) \simeq M^{(dim\ H)}$ comme B-modules à gauche.

Preuve. Notons par H_0 l'espace vectoriel H, muni d'une structure de B-module à gauche via:

$$b.h = \varepsilon(b)h; \quad b \in B, h \in H_0,$$

alors $(H_0 \otimes M) \simeq M^{(dim\ H)}$ comme B-modules à gauche, où $H_0 \otimes M$ est muni de la structure de B-module à gauche induite de celle de H_0 et de celle de M en posant:

$$b.(h \otimes m) = \sum_{(b)} b_{(1)}.h \otimes b_{(2)}.m = \sum_{(b)} \varepsilon(b_{(1)})h \otimes b_{(2)}.m,$$

mais cet isomorphisme n'est pas de façon évidente un isomorphisme de$B$-modules à gauche, si on munit $H \otimes M$ de la structure de B-module à gauche $*$.

Définissons maintenant $F : H_0 \otimes M \to (H \otimes M, *)$ par

$$F(h \otimes m) = \sum_{(m)} hS(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} \quad \forall h \in H, m \in M.$$

F est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'inverse F^{-1} défini par

$$F^{-1}(h \otimes m) = \sum_{(m)} h.m_{(1)} \otimes m_{(2)} \quad h \in H, m \in M.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(F \circ F^{-1})(h \otimes m) &= F(\sum_{(m)} h.m_{(1)} \otimes m_{(2)}) \\
&= \sum_{(m)(m_{(2)})} h.m_{(1)}S(m_{(2)(1)}) \otimes m_{(2)(2)} \\
&= \sum_{(m)} h.m_{(1)}S(m_{(2)}) \otimes m_{(3)}; \quad \text{par la convention de Sweedler} \\
&= \sum_{(m)} h(I \star S)(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} \\
&= \sum_{(m)} h\eta(\varepsilon(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}; \quad \text{car } I \star S = \eta\varepsilon \\
&= \sum_{(m)} h\varepsilon(m_{(1)})\eta(1_{\Bbbk}) \otimes m_{(2)} \\
&= \sum_{(m)} h \otimes \varepsilon(m_{(1)})m_{(2)} \\
&= h \otimes m; \quad \text{par la propriété de la coünité.}
\end{aligned}$$

Et par le même type de calcul, on trouve que $(F^{-1} \circ F)(h \otimes m) = h \otimes m$. De plus, F est un isomorphisme de B-modules à gauche, en effet on a

$$\begin{aligned} b.(h \otimes m) &= \sum_{(b)} \varepsilon(b_{(1)}) h \otimes b_{(2)}.m \\ &= \sum_{(b)} h \otimes \varepsilon(b_{(1)}) b_{(2)}.m \\ &= h \otimes b.m, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} F(b.(h \otimes m)) &= F(h \otimes b.m) \\ &= \sum_{(b)(m)} hS(b_{(1)}.m_{(1)}) \otimes b_{(2)}.m_{(2)} \\ &= \sum_{(b)(m)} hS(m_{(1)}S(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}.m_{(2)} \\ &= b * (\sum_{(m)} hS(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\ &= b * F(h \otimes m), \end{aligned}$$

d'où $(H \otimes M, *) \simeq H_0 \otimes M \simeq M^{(dim\ H)}$ comme B-modules à gauche.

I.4 Proposition. Soit B une algèbre de Hopf, et soit W un B-module à gauche. Alors, $B \otimes W$ est libre comme B-module à gauche, et si de plus l'antipode S_B de B est bijectif, alors $W \otimes B$ est aussi libre comme B-module à gauche.

Preuve. B étant un B-module à gauche, vérifions que $B \otimes W$ est aussi un B-module à gauche.

Soit l'application $\psi : B \otimes (B \otimes W) \longrightarrow B \otimes W$ définie par

$$\psi(a \otimes (b \otimes w)) = a.(b \otimes w) = \sum_{(a)} a_{(1)} b \otimes a_{(2)}.w.$$

On a

$$\begin{aligned} a.(a'.(h \otimes w)) &= a(\sum_{(a')} a'_{(1)} b \otimes a'_{(2)}.w) \\ &= \sum_{(a)(a')} a_{(1)}(a'_{(1)} b) \otimes a_{(2)}(a'_{(2)}.w) \\ &= \sum_{(a)(a')} (a_{(1)} a'_{(1)}) b \otimes (a_{(2)} a'_{(2)}).w \\ &= (aa').(b \otimes w), \end{aligned}$$

d'où $B \otimes W$ est un B-module à gauche.

Vérifions que $B \otimes W$ admet une structure de B-comodule à gauche.
Soit $\omega = \Delta \circ I : B \otimes W \to B \otimes (B \otimes W)$ défini par

$$\omega(a \otimes w) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes w.$$

A-t-on $(\Delta \otimes I)\omega = (I \otimes \omega)\omega$?
Soient $a \in B$ et $v \in W$,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes I)\omega(a \otimes v) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v) \\ &= \sum_{(a)(a_{(1)})} a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)} \otimes v \\ &= \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes (a_{(3)} \otimes v),\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}(I \otimes \omega)\omega(a \otimes v) &= (I \otimes \omega)(\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes v) \\ &= \sum_{(a)(a_{(2)})} a_{(1)} \otimes a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} \otimes v \\ &= \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes (a_{(3)} \otimes v),\end{aligned}$$

d'où $(\Delta \otimes I)\omega = (I \otimes \omega)\omega$, donc $B \otimes W$ est un B-comodule à gauche.

Vérifions maintenant que $B \otimes W$ est un module de Hopf à gauche. A-t-on la condition de cohérence? i.e,

$$\omega(b.(a \otimes v)) = \sum_{(b)(a\otimes v)} b_{(1)}(a \otimes v)_{(1)} \otimes b_{(2)}.(a \otimes v)_{(2)}.$$

On a

$$\begin{aligned}\omega(b.(a \otimes v)) &= \omega(\sum_{(b)} b_{(1)}a \otimes b_{(2)}.v) \\ &= \sum_{(b)(b_{(1)})(a)} b_{(1)(1)}a_{(1)} \otimes b_{(1)(2)}a_{(2)} \otimes b_{(2)}.v\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$\sum_{(b)(a\otimes v)} b_{(1)}(a \otimes v)_{(1)} \otimes b_{(2)}.(a \otimes v)_{(2)} = \sum_{(b)(b_{(2)})(a)} b_{(1)}a_{(1)} \otimes b_{(2)(1)}a_{(2)} \otimes b_{(2)(2)}.v,$$

donc par la convention de Sweedler

$$\sum_{(b)(b_{(1)})(a)} b_{(1)(1)}a_{(1)} \otimes b_{(1)(2)}a_{(2)} \otimes b_{(2)}.v = \sum_{(b)(b_{(2)})(a)} b_{(1)}a_{(1)} \otimes b_{(2)(1)}a_{(2)} \otimes b_{(2)(2)}.v,$$

d'où $B \otimes W$ est un module de Hopf, et d'après le théorème de structure des modules de Hopf, $B \otimes W$ est libre comme B-module à gauche, d'où la première partie de la proposition.

Pour $W \otimes B$, on a toujours la structure de B-module à gauche, pour la structure de B-comodule, on ne peut avoir que la structure de B-comodule à droite, d'où pour avoir la structure de B-comodule à gauche, on doit remplacer la structure de cogèbre sur B par la structure de cogèbre opposée, B gardant toujours une structure d'algèbre de Hopf, ceci est possible car S_B est bijectif, (voir § I, proposition I.4.7)

Soit (C, Δ, ε) une cogèbre, et soit M un C-comodule à droite pour l'application de structure

$$\begin{aligned} \omega : M &\to M \otimes C \\ m &\mapsto \sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)}. \end{aligned}$$

Avec $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ on a une structure de C-comodule à gauche sur M, définie par

$$\begin{aligned} \omega' : M &\to C \otimes M \\ m &\mapsto \sum_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)}. \end{aligned}$$

A-t-on $(I \otimes \omega')\omega' = (\Delta^{op} \otimes I)\omega'$?

Soit $m \in M$,

$$\begin{aligned} (I \otimes \omega')\omega'(m) &= (I \otimes \omega')(\sum_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)}) \\ &= \sum_{(m)(m_{(0)}} m_{(-1)} \otimes m_{(0)}^{(-1)} \otimes m_{(0)}^{(0)} \\ &= \sum_{(m)} m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)}, \end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned} (\Delta^{op} \otimes I)\omega'(m) &= (\Delta^{op} \otimes I)(\sum_{(m)} m_{(-1)} \otimes m_{(0)}) \\ &= \sum_{(m)(m_{(-1)}} m_{(-1)}^{(2)} \otimes m_{(-1)}^{(1)} \otimes m_{(0)} \\ &= \sum_{(m)} m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)}. \end{aligned}$$

On vérifie par les mêmes techniques de calculs que $W \otimes B$ est aussi un module de Hopf, ce qui nous permet d'obtenir la seconde partie de la proposition.

II. Cas des algèbres de Hopf de dimensions finies.

Dans cette partie on va s'intéresser aux algèbres de Hopf de dimensions finies, On sait que de telles algèbres sont des algèbres de Frobenius, ce qui nous permettera d'utiliser les propriétés de ces algèbres voir [7].

II.1 Définitions. Soit A une algèbre sur $\Bbbk$.

1) Un élément $e \in A$ est dit idempotent si et seulement si $ee = e$.

2) Deux éléments idempotents e et f dans A sont dits orthogonaux si $ef = fe = 0$.

3) Un élément idempotent $e \in A$ est dit primitif, si e n'est pas la somme de deux idempotents orthogonaux non triviaux.

II.2 Modules principaux indécomposables. Les modules principaux indécomposables à gauche de A, sont les modules à gauche composant le A-module à gauche A, qui sont de la forme Ae, où e est un idempotent primitif de A.

II.3 Lemme. Soit A une algèbre de Frobenius, et soient W un A-module à gauche et P_i, $i = 1, ..., t$ les modules principaux indécomposables de A. Alors, W est fidèle si et seulement si chaque P_i est isomorphe à une somme composante de W.

Preuve. (voir [7]).

II.4 Proposition. Soit B une algèbre de Hopf de dimension finie, et soit W un B-module à gauche de type fini. Alors, il existe $r \geq 0$ tel que $W^{(r)} \simeq F \oplus E$ comme B-modules, où F est libre et E est non fidèle.

Preuve. Soient $P_1, ..., P_t$; les B-modules à gauche principaux indécomposables, on a alors $B \simeq P_1^{(n_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(n_t)}$; comme B-modules à gauche.

Soit maintenant un B-module à gauche W de type fini.

Si W est non fidèle, alors on prend $r = 1$, $F = (0)$, et $E = W$.

Si W est fidèle, soit $r = ppmc(n_1, ..., n_t)$, et posons $W \simeq P_1^{(w_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(w_t)} \oplus Q$; où aucune des composantes de Q n'est indécomposable principale, alors $W^{(r)} \simeq P_1^{(rw_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(rw_t)} \oplus Q^{(r)}$; posons $s = min(rw_1/n_1, ..., rw_t/n_t) = rw_i/n_i$, donc $\forall j \in \{1, ..., t\}$ $\quad rw_j/n_j = s + s_j$, pour $j \neq i$, d'où

$$\begin{aligned}W^{(r)} &\simeq P_1^{(sn_1+s_1n_1)} \oplus ... \oplus P_i^{(sn_i)} \oplus ... \oplus P_t^{(sn_t+s_tn_t)} \oplus Q^{(r)} \\ &\simeq P_1^{(sn_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(sn_t)} \oplus \{P_1^{(s_1n_1)} \oplus ... \oplus P_{i-1}^{(s_{i-1}n_{i-1})} \oplus P_{i+1}^{(n_i+1)} \oplus ... \oplus P_t^{(s_tn_t)} \oplus Q^{(r)}\} \\ &\simeq B^{(s)} \oplus E;\end{aligned}$$

où P_i n'est isomorphe à aucune des sommes composantes de E, d'où E est non fidèle, et d'autre part $F = B^{(s)}$ est libre comme B-module.

II.5 Proposition. Soit B une algèbre de Hopf de dimension finie, et soit W un B-module à gauche de type fini. Supposons que pour un $r \geq 1$ $W^{(r)}$ est libre comme B-module à gauche. Alors W est libre comme B-module à gauche.

Preuve. Posons $B = B_1 \oplus ... \oplus B_n$; comme somme directe de B-modules principaux indécomposables.

Soit $\lambda \neq 0$ une intégrale à gauche de B, posons $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$, où $\lambda_i \in B_i$; $i = 1, ..., n$, et pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ λ_i est une intégrale de B_i, or puisque la dimension de B est finie, alors $dim \int_B^g = 1$, d'où $\lambda = \lambda_1$ (par exemple) et $\lambda_i = 0$ pour $i > 1$ sinon $\int_B^g$ serait engendré par plus d'un élément. De plus pour $i > 1$, B_i ne peut contenir une intégrale à gauche de B, d'où B_i n'est pas isomorphe à B_1, pour tout $i > 1$.

Soient maintenant $P_1 = B_1, P_2, ..., P_t$, les B-modules à gauche principaux indécomposables. Alors $B \simeq P_1^{(n_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(n_t)}$, comme B-modules à gauche, d'après ce qui précède $n_1 = 1$.

Soit W un B-module à gauche de type fini, tel que $W^{(r)}$ est libre comme B-module, donc il existe $s \geq 1$ tel que $W^{(r)} \simeq B^{(s)}$, d'où d'après le théorème de Krull-Schmidt toute composante indécomposable de W est un B-module principal indécomposable, posons donc $W \simeq P_1^{(w_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(w_t)}$, alors

$$\begin{aligned}W^{(r)} &\simeq P_1^{(rw_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(rw_t)} \\ &\simeq P_1^{(sn_1)} \oplus ... \oplus P_t^{(sn_t)} \\ &\simeq B^{(s)}\end{aligned}$$

on a alors, $rw_i = sn_i$; $i = 1, ..., t$; et puisque $n_1 = 1$ alors $r\overline{w_1} = s$ d'où $w_i = w_1n_i$, $\forall i \in \{1, ..., t\}$. On obtient donc que $W \simeq B^{(w_1)}$, d'où W est libre comme B-module à gauche.

II.6 Théorème. Soit B une algèbre de Hopf de dimension finie. Soit W un B-module à gauche de type fini. Supposons qu'il existe un B-module à gauche fidèle de type fini L tel que $L \otimes W \simeq W^{(dim\ L)}$ comme B-modules à gauche. Alors W est libre comme B-module à gauche.

Preuve. D'après la proposition II.4, il existe un $r > 0$ tel que: $W^{(r)} \simeq F \oplus E$, où F est libre et E non fidèle. D'où on a

$$\begin{aligned} L \otimes W^{(r)} &\simeq (L \otimes W)^{(r)} \\ &\simeq (W^{(r)})^{(dim\ L)}, \text{ (ceci par hypothèse).} \end{aligned}$$

Pour montrer que W est libre, il suffit de le montrer pour $W^{(r)}$, par la proposition II.4. Ainsi on peut remplacer $W^{(r)}$ par W, et on peut supposer sans perdre en généralités que $W \simeq F \oplus E$ avec F libre et E non fidèle.

De même d'après la proposition II.4, il existe $r' > 0$ tel que $L^{(r')} \simeq F' \oplus E'$, où F' est libre et E' est non fidèle. Sous les mêmes arguments, on peut prendre aussi $L \simeq F' \oplus E'$. Or puisque L est fidèle par hypothèse $F' \neq (0)$. Posons $t = dim\ L$, à partir de $L \otimes W \simeq W^{(t)}$ on obtient

$$\begin{aligned} F^{(t)} \oplus E^{(t)} &\simeq (F \oplus E)^{(t)} \\ &\simeq W^{(t)} \\ &\simeq L \otimes W \\ &\simeq (L \otimes F) \oplus (L \otimes E), \end{aligned}$$

or F est un B-module libre, et $L \otimes B$ est aussi un B-module libre d'après la proposition I.4, d'où $(L \otimes F)$ est un B-module libre, donc $F^{(t)} \simeq (L \otimes F)$, et par le théorème de Krull-Schmidt on a aussi $E^{(t)} \simeq (L \otimes E)$. Donc

$$\begin{aligned} E^{(t)} &\simeq L \otimes E \\ &\simeq (F' \oplus E') \otimes E \\ &\simeq (F' \otimes E) \oplus (E' \otimes E), \text{ où } E' \otimes E \text{ est non fidèle} \end{aligned}$$

Si $E \neq (0)$, alors par la proposition I.4, $B \otimes E$ est libre comme B-module, d'où $F' \otimes E$ est un B-module à gauche libre, or puisque $E^{(t)}$ est non fidèle ceci est impossible, d'où $E = (0)$ et $W = F$ qui est un B-module libre.

II.7 Théorème [15]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie, et soit B une sous-algèbre de Hopf de H. Alors tout (H, B)-module de Hopf à gauche est libre comme B-module à gauche. En particulier, H est libre comme B-module à gauche.

Preuve. Par le corollaire de la proposition I.2, on va se réstreindre aux (H, B)-modules de Hopf de dimensions finies M. Par la proposition I.3, on a $H \otimes M \simeq M^{(dim\ H)}$ comme B-modules à gauche en posant $L = H$, on obtient par le théorème précédent que M est libre comme B-module à gauche, puisque la dimension de H est finie. En particulier, H est un (H, B)-module de Hopf de dimension finie, donc H est libre comme B-module à gauche.

Remarque. Tout ce qui précède reste vrai pour la structure de module à droite.

Corollaire 1. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie, alors le nombre de sous-algèbres de Hopf de H divise la dimension de H.

Corollaire 2. Si H est une algèbre de Hopf de dimension p premier, alors H n'admet pas de sous-algèbres de Hopf propres.

III. Cas des algèbres de Hopf de dimension infinie.

On sait qu'une algèbre de Hopf de dimension infinie n'est pas libre en général sur ses sous-algèbres de Hopf. Dans ce paragraphe, on va donner quelques cas où on a la liberté.

III.1 Liberté sur une sous-algèbre de Hopf contenant le coradical.

III.1.1 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf, et soit $B \subseteq H$ une sous-algèbre de Hopf. Supposons que $U, V \subseteq H$ soient deux B-modules à gauche (resp. à droite) via la multiplication dans H. Alors, $U \wedge V$ est aussi un B-module à gauche (resp. à droite).

Preuve. Soient $b \in B$ et $w \in U \wedge V$ montrons que $b.w \in U \wedge V$.

$$\begin{aligned}\Delta(b.w) &= \Delta(b).\Delta(w); \text{ car } \Delta \text{ est un homomorphisme d' algèbres}\\ &= \Big(\sum_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}\Big)\Big(\sum_{i} u_i \otimes a_i + d_i \otimes v_i\Big)\\ &= \sum_{(b)}\sum_{i} \big(b_{(1)}.u_i \otimes b_{(2)}.a_i + b_{(1)}.d_i \otimes b_{(2)}.v_i\big) \in (U \otimes H + H \otimes V)\end{aligned}$$

d' où $b.w \in U \wedge V$. Par conséquent, $U \wedge V$ est un B-sous-module à gauche.

III.1.2 Lemme. Soient H une algèbre de Hopf, $B \subseteq H$ une sous-algèbre de Hopf, et soit $C \subseteq H$ une sous-cogèbre de H qui est aussi un B-module à gauche. Alors $N = (B \wedge C)/C$ est libre comme B-module à gauche.

Preuve. Il suffit alors de montrer que N est un B-module de Hopf à gauche pour pouvoir conclure avec le théorème de structure des modules de Hopf.

N est un B-comodule à gauche.

En effet, C et B sont deux sous-cogèbres de H, alors $B \wedge C$ est aussi une sous-cogèbre de H, N admet la structure de $B \wedge C$-comodule donnée par

$$\begin{aligned}\omega : N &\longrightarrow (B \wedge C) \otimes N\\ \overline{a} &\longmapsto \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \overline{a}_{(2)}.\end{aligned}$$

Il faut vérifier que pour $a \in B$ on a, $\omega(\overline{a}) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \overline{a}_{(2)}$ avec $a_{(1)} \in B \wedge C$.

On a $a \in B \wedge C$, donc

$$a\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} \in (B \wedge C) \otimes (B \wedge C),$$

par conséquent $\overline{a}_{(2)} \in N$, d'où ω est bien définie.
Il faut vérifier aussi que si $\overline{a} = \overline{a'}$ alors $\omega(\overline{a}) = \omega(\overline{a'})$.

Or $\overline{a} = \overline{a'}$ implique que $a - a' \in C$ alors $\Delta(a - a') \in C \otimes C$ puisque C est une cogèbre. Par conséquent

$$\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} - \sum_{(a')} a'_{(1)} \otimes a'_{(2)} \in C \otimes C,$$

donc

$$\Delta(a) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i \otimes d_i + \sum_{i=n+1}^{i=n+m} b_i \otimes d_i,$$

$$\Delta(a') = \sum_{i=0}^{i=n} b'_i \otimes d'_i + \sum_{i=n+1}^{i=n+m} b_i \otimes d_i$$

où $\sum_{i=0}^{i=n} b_i \otimes d_i$ et $\sum_{i=0}^{i=n} b'_i \otimes d'_i$ appartiennent à $C \otimes C$, et $\sum_{i=n+1}^{i=n+m} b_i \otimes d_i \in (B \wedge C) \otimes (B \wedge C)$.
Donc

$$\omega(\overline{a}) = \sum_{i=n+1}^{i=n+m} b_i \otimes \overline{d}_i$$

et

$$\omega(\overline{a'}) = \sum_{i=n+1}^{i=n+m} b_i \otimes \overline{d}_i,$$

d'où $\omega(\overline{a}) = \omega(\overline{a'})$.

Par conséquent ω définit bien une structure de $B \wedge C-$comodule à gauche sur N. En fait ω définit une structure de B-comodule à gauche sur N, soit $a \in B \wedge C$, $\overline{a} \in N$ on a

$$\omega(\overline{a}) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \overline{a}_{(2)} \in (B \wedge C) \otimes N,$$

il suffirait de voir donc que $a_{(1)} \in B$, puisque $a \in B \wedge C$, $\Delta(a) \in B \otimes A + A \otimes C$, donc $a_{(1)} \in A$ ou $a_{(1)} \in B$. De plus $\Delta(a) \in (B \wedge C) \otimes (B \wedge C)$ ce qui implique que $a_{(1)} \in B \wedge C$, et on a $\Delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ donc si $a_{(1)} \notin B$ alors $a_{(2)} \in C$ nécéssairement, d'où
$\omega(\overline{a}) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \overline{a}_{(2)} = 0$, donc pour les $a_{(1)} \otimes \overline{a}_{(2)}$ non nuls, $a_{(1)} \in B$.

D'où $\omega(N) \subseteq B \otimes N$ donc N est bien un B-comodule à gauche.

N est un B-module à gauche.
$B \wedge C$ est un B-module à gauche puisque B et C en sont, d'où N admet aussi une structure de B-module à gauche.

N est un B-module de Hopf à gauche.
Pour voir ceci il suffit de vérifier la condition de cohérence.
Soient $b \in B$, $\overline{n} \in N$, on a $b.\overline{n} \in N$, et

$$\omega(b.\overline{n}) = \sum_{(b),(\overline{n})} b_{(1)}.n_{(1)} \otimes b_{(2)}.\overline{n}_{(2)},$$

puisque les structures de B-module et de B-comodule sont définies naturellement sur N, d'où N est un B-module de Hopf à gauche.

Donc par le théorème de structure des modules de Hopf, N est libre comme B-module à gauche.

Corollaire. Soit H une algèbre de Hopf, et soit $B \subseteq H$ une sous-algèbre de Hopf, alors $B^{(n)}$ est libre comme B-module à gauche (et à droite) pour $n \geq 0$.
Et si $Corad\ H \subseteq B$ alors, H est libre comme B-module à gauche (et à droite).

Preuve. D'aprés le lemme précédent, $B^{(n+1)}/B^{(n)} = (B \wedge B^{(n)})/B^{(n)}$ est libre comme B-module à gauche, et montrons par récurrence que $B^{(n)}$ est libre comme B-module à gauche pour $n \geq 0$.

$n = 0$: $B^{(0)} = B$ qui est libre comme B-module à gauche (trivial).

Hypothése de récurrence: Supposons que $B^{(n)}$ est libre comme B-module à gauche, et montrons que $B^{(n+1)}$ l'est aussi.

Puisque la suite

$$0 \longrightarrow B^{(n)} \longrightarrow B^{(n+1)} \longrightarrow B^{(n+1)}/B^{(n)} \longrightarrow 0 \text{ est exacte },$$

alors $B^{(n+1)}$ est libre comme B-module à gauche.
Pour la seconde partie du corollaire, on sait que $H_0^{(\infty)} = H$, avec $H_0 = Corad\ H$, donc si $H_0 \subseteq B \subseteq H$ alors $B^{(\infty)} = H$, d'où d'après la première partie du corollaire, H est libre comme B-module à gauche.

Remarque. $B^{(n)} = B^{(n-1)} \wedge B$, d'où en modifiant le lemme précédent, on peut remplacer à gauche par à droite.

III.1.3 Lemme. Soit C une cogèbre. Alors toute sous-cogèbre de C contient une sous-cogèbre simple de C.

Preuve. Soit T une sous-cogèbre de C, et soit $v \in T$, on sait que la sous-cogèbre $< v >$ engendrée par v est de dimension finie, ceci d'aprés le théorème fondamental des cogèbres.

On a $< v > \subseteq T$, si $< v >$ n' est pas simple, il existe T_1 une sous-cogèbre propre de $< v >$, si T_1 n'est pas simple , alors il existe T_2 une sous-cogèbre propre de T_1, et ainsi de suite.

Ce processus s'arrête nécéssairement, alors il existe une suite $T_n \geq 1$ de sous-cogèbres strictement décroissante pour l'inclusion, ce qui contredit le fait que $< v >$ est de dimension finie.

Remarque. S'il existe une seule sous-cogèbre simple, alors toute sous-cogèbre contient cette sous-cogèbre simple, qui est en fait le coradical.

Corollaire. Si H est une algèbre de Hopf irréductible, alors H est libre comme B-module à gauche (et à droite), où $B \subseteq H$ est une sous-algèbre de Hopf de H.

Preuve. Puisque H est irréductible, alors $Corad\ H$ est la seule sous-cogèbre simple de H, d'où $Corad\ H \subseteq B$ pour toute B sous-algèbre de Hopf de H, ainsi d'après le corollaire précédent, H est libre comme B-module à gauche (et à droite).

Remarque. Le corollaire précédent est une généralisation d'un résultat de Radford, qui suppose que H est une algèbre de Hopf irréductible et pointée.

III.2 Cas où la sous-algèbre de Hopf est de dimension finie semisimple.

Ce cas a été établi par W. Nichols et B. Zoeller dans [16], pour montrer le théorème principal on aura besoin de la proposition suivante.

III.2.1 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf, et soit B une sous-algèbre de Hopf telle que S_B est injectif. Alors tout (H, B)-module de Hopf $M \neq (0)$ est fidèle comme B-module à gauche.

Preuve. Puisque S_B est injectif, l'homomorphisme de B-modules

$$S_B \otimes I : B \otimes M \longrightarrow (B \otimes M, *), \text{ où } * \text{ est la structure définie précédemment,}$$

suivi de l'injection $i : (B \otimes M, *) \hookrightarrow (H \otimes M, *)$, injecte $B \otimes M$ dans $(H \otimes M, *)$ comme B-modules. Or, d'après la proposition I.3, $M^{(dim\ H)}$ contient un B-sous-module isomorphe à $B \otimes M$. Et d'après la proposition I.4, $B \otimes M$ est libre, d'où on conclut que $M^{(dim\ H)}$ est fidèle, donc M est fidèle.

III.2.2 Théorème [16]. Soit H une algèbre de Hopf, et soit B une sous-algèbre de Hopf semisimple de dimension finie. Alors H est libre comme B-module, de plus tout (H, B)-module de Hopf est libre comme B-module.

Preuve. Soit M un (H, B)-module de Hopf de dimension infinie. Si M n'est pas libre comme B-module, alors pour un B-module simple L la somme W de sous-modules de M qui ne sont pas isomorphes à L est de dimension inférieure à celle de M. Alors, N le (H, B)-sous-module de Hopf de M engendré par W ($N = W \leftharpoonup H^*$), est aussi de dimension inférieure à celle de M. D'où M/N est un (H, B)-module de Hopf non nul, ne contenant aucune copie de L. Donc M/N n'est pas fidèle ce qui contredit la proposition III.2.1.

Chapitre III

ALGÈBRES DE HOPF GRADUÉES CONNEXES

I. Généralités.

Dans tout ce qui suit on ne considèrera que les espaces vectoriels gradués positivement et connexes.

I.1 Espace vectoriel gradué.

I.1.1 Définitions.

1) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. V est dit gradué positivement, si V s'écrit:

$$V = \oplus_{n \geq 0} V_n,$$

où les V_n sont des sous-espaces vectoriels de V pour $n \geq 0$.

On dira que V est gradué connexe si $V_0 = \mathbb{k}$, et de type fini si pour tout $n \geq 0$ V_n est de dimension finie.

2) Les éléments de V_n sont dits homogènes de degré n, i.e, pour $v \in V_n$ le degré de v qu'on notera $|v| = n$.

3) Soient V, W deux espaces vectoriels gradués, et soit f une application linéaire de V dans W, f est dite de degré n, s'il existe une famille d'applications linéaires f_i de V_i dans W_{i+n}, telle que $f_{/V_i} = f_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

I.2 Algèbre graduée. (A, ϕ, η) est une algèbre graduée, si A est graduée en tant qu'espace vectoriel, et si les applications linéaires ϕ et η sont de degré 0, i.e

$$\mathbb{k} \subset A_0, \text{ et } \phi(A_i \otimes A_j) \subset A_{i+j}.$$

En particulier, l'unité 1_A est homogène de degré zéro. On dit que A est commutative (ou anticommutative) si, $\forall a, b \in A$ homogènes,

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba.$$

I.3 Cogèbre gradué. (C, Δ, ε) est une cogèbre gradué, si C est graduée en tant qu'espace vectoriel, et si les applications linéaires Δ et ε sont de degré 0, i.e,

$$\Delta(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}, \text{ et } \varepsilon(C_n) = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

On définit de façon évidente les morphismes gradués d'algèbres et de cogèbres graduées.

I.4 Algèbre de Hopf graduée. $(H, \phi, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf graduée, si H est graduée en tant qu'espace vectoriel, vérifiant:

$$\phi(H_i \otimes H_j) \subset H_{i+j},$$

$$\Delta(H_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} H_i \otimes H_{n-i},$$

$$\text{et } \varepsilon(H_n) = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

Remarques. Soit H une algèbre de Hopf graduée connexe.

(i) La comultiplication est donnée par:

$$\forall x \in H_n, \ \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \Delta_+(x)$$

où,

$$\Delta_+(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x'_i \otimes x''_{n-i} \text{ et } x'_i \in H_i, \ x''_{n-i} \in H_{n-i}.$$

(ii) Le sous-espace vectoriel des éléments primitifs de H est noté $P(H)$, et on rappelle que $P(H) = \{x \in H \text{ tel que } \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$.

(iii) Soit $\tau : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H$ l'application définie par: $\tau(x_i \otimes x_j) = (-1)^{|x_i||y_j|} x_j \otimes x_i$ où $x_k \in H_k, k = i, j$. On pose $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$ et on dit que que H est cocommutative si $\Delta^{op} = \Delta$.

(iv) On définit le commutateur de deux éléments homogènes a, b de H par:

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba$$

Remarque. On remarque que pour les algèbres de Hopf graduées, on n'a besoin que de la structure de bigèbre pour les définir, car dans ce cas l'existence de l'antipode est assurée.

I.5 Algèbre tensorielle. Soit V un espace vectoriel. On pose: $T^0(V) = \mathbb{k}$, $T^1(V) = V$ et $T^n(V) = V^{\otimes n}$ (le produit tensoriel de n copies de V) si $n > 1$.
Les isomorphismes canoniques

$$T^n(V) \otimes T^m(V) \simeq T^{n+m}(V)(n, m \geq 0)$$

permettent de définir un produit associatif sur l'espace vectoriel $T(V) = \oplus_{n\geq 0} T^n(V)$.
Munie de cette structure d'algèbre, $T(V)$ est appelée l'algèbre tensorielle de V. Explicitement le produit est donné par la formule:

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n).(x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}.$$

Il est évident que $T(V)$ est une algèbre de Hopf graduée dont $T^n(V)$ est l'espace des éléments homogènes de degré n, et dont la comultiplication est donnée par

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \ \forall x \in V.$$

I.6 Algèbre symétrique. Soit V un espace vectoriel. L'algèbre symétrique $S(V)$ est le quotient de $T(V)$

$$S(V) = T(V)/I(V)$$

par l'idéal bilatère $I(V)$ engendré par les éléments $xy - yx$ où x et y parcourent V. Si $x_1, ..., x_n$ sont des éléments de V, on note encore $x_1...x_n$ la classe de $x_1...x_n$ dans $S(V)$. Le sous-espace de $S(V)$ engendré par les éléments $x_1...x_n$ est noté $S^n(V)$.

Il est évident que $S(V)$ est une algèbre de Hopf commutative et graduée dont $S^n(V)$ est l'espace des éléments homogènes de degré n.

I.7 Algèbre extérieure. Soit V un espace vectoriel. L'algèbre extérieure $E(V)$ est le quotient de $T(V)$

$$E(V) = T(V)/J(V)$$

parl'idéal bilatère $J(V)$ engendré par les éléments $x \otimes x$ où x parcourt V. Si $x_1, ..., x_n$ sont des éléments V, on note $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ la classe $x_1 \otimes ... \otimes x_n$ dans $E(V)$. Le sous-espace de $E(V)$ engendré par les éléments $x_1 \wedge ... \wedge x_n$ est noté $E^n(V)$.

De même $E(V)$ est une algèbre de Hopf graduée commutative dont $E^n(V)$ est l'espace des éléments homogènes de degré n.

I.8 Algèbre enveloppante. A l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ on associe une algèbre $U(\mathfrak{g})$ appelée l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, définie de la manière suivante: soit $I(\mathfrak{g})$ l'ideal bilatère de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ engendré par tous les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$ où x, y parcourent $\mathfrak{g}$. On pose :

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g}).$$

Les éléments engendrants $I(\mathfrak{g})$ ne sont pas homogènes pour la graduation de $T(\mathfrak{g})$ définie précédemment. Il n'existe donc pas de graduation sur l'algèbre enveloppante compatible avec celle de l'algèbre tensorielle. Cependant $U(\mathfrak{g})$ est filtrée comme quotient de $T(\mathfrak{g})$. Et on démontre que l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ admet la structure d'algèbre de Hopf filtrée connexe (voir [11]). Et on a le théorème suivant,

Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $gr(U(\mathfrak{g}))$ l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée $U(\mathfrak{g})$, et $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$. Alors l'homorphisme canonique $\omega : S(\mathfrak{g}) \longrightarrow gr(U(\mathfrak{g}))$ est un isomorphisme.

Preuve. Voir Bourbaki [6].

Question: Quand est-ce que le gradué associé à une algèbre de Hopf filtrée connexe, est une algèbre extérieure?

On ne peut pas répondre à cette question pour le moment, on va donner un cas où le gradué associé à une algèbre de Hopf filtrée connexe ne peut pas être une algèbre extérieure.

Théorème 1. Soit H une bigèbre cocommutative, sur un corps de caractéristique 0.

S'il existe sur H une filtration compatible avec sa structure de bigèbre, alors le morphisme $f : U(P(H)) \longrightarrow H$ est un isomorphisme.

Preuve. f est le prolongement de l'injection canonique $P(H) \longrightarrow H$, pour une démonstration complète voir [6] pages 15,16 et 17.

Dans ce théorème, si on rajoute l'hypothèse que H est une bigèbre pointée irréductible, ce qui est équivalent à la connexité pour la filtration ou pour la graduation. Ce théorème peut être prolongé à une algèbre de Hopf, car une bigèbre filtrée (ou graduée) connexe est une algèbre de Hopf. D'où on en déduit le résultat suivant.

Corollaire. Soit H une algèbre de Hopf filtrée connexe cocommutative, alors, $gr(H)$ est isomorphe en tant qu'algèbre de Hopf graduée à l'algèbre symetrique $S(P(H))$.

Preuve. Découle du théorème de P-B-W et du théorème 1 précédent.

On conclut donc, que le gradué associé à une algèbre de Hopf filtrée connexe cocommutative ne peut pas être une algèbre extérieure.

II. Dualité pour les algèbres de Hopf graduées.

II.1 Définition. Soit $H = \oplus_{n \geq 0} H_n$ une algèbre de Hopf graduée. H est dite de type fini, si pour tout $n \geq 0$, $dim H_n < \infty$.

II.2 Proposition.

1) Soit (A, ϕ, η) une algèbre graduée de type fini. Alors A^* est une cogèbre graduée dont le coproduit est ϕ^* et la coünité est η^*.

2) Soit (C, Δ, ε) une cogèbre graduée. Alors C^* est une algèbre graduée dont la multiplication est Δ^* et l'unité est ε^*.

Preuve. 1) Repose sur le fait que pour un espace vectoriel V de dimension finie

$$(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$$

et 2) repose sur l'injection

$$V^* \otimes V^* \hookrightarrow (V \otimes V)^*$$

en dimension quelconque.

II.3 Corollaire. Si $H = \oplus_{n \geq 0} H_n$ est une algèbre de Hopf graduée de type fini, alors $H^* = \oplus_{n \geq 0} H_n^*$ admet aussi une structure d'algèbre de Hopf graduée.

Remarque. Dans le cas des algèbres de Hopf graduées de type fini le dual admet toujours une structure d'algèbre de Hopf, même si la dimension globale est infinie, ce qui n'est pas le cas pour les algèbres de Hopf abstraites (voir chapitre I).

III. Remarques sur les intégrales.

Pour les algèbres de Hopf graduées de type fini, la définition des intégrales est équivalente à celle des intégrales pour une algèbre de Hopf de dimension finie.

III.1 Définition. Soit H une algèbre de Hopf graduée de type fini. Alors, $t \in H$ est une intégrale à gauche (resp. à droite) si pour tout $h \in H$, $ht = \varepsilon(h)t$ (resp. $th = \varepsilon(h)t$).

On se propose maintenant d'étudier l'existence des intégrales pour les algèbres de Hopf graduées de type fini. On a la proposition suivante:

III.2 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf graduée de type fini, de dimension infinie. Alors, $\int_H = \{0\}$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition [20] du chapitre I.

On remarque que pour les algèbres de Hopf abstraites de dimensions infinies, les intégrales peuvent exister, ce qui n'est pas le cas pour les algèbres de Hopf graduées de type fini, donc le seul cas pour ce type d'algèbres de Hopf, où les intégrales existent est en dimension finie, de plus on peut les localiser dans le cas connexe, d'où la proposition suivante:

III.3 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie, et soit $n = max\{m \in \mathbb{N}$ tel que $H_m \neq 0\}$. Alors $\int_H = H_n$.

Preuve. Posons $H = \Bbbk \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_n$. On sait que pour $h \in H$

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} h, & \text{si } |h| = 0 \\ 0, & \text{si } |h| \geq 1. \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $H_n \subseteq \int_H$, et puisque $dim \int_H = 1$, alors $\int_H = H_n$.

Soit $t \in H_n$, et soit $h \in H$,

$$ht = \begin{cases} \varepsilon(h)t, & \text{si } |h| = 0 \\ 0, & \text{si } |h| \geq 1. \end{cases}$$

donc pour tout $h \in H$, $ht = \varepsilon(h)t$, et par suite $t \in \int_H$.

Remarque. $dim\ H_n = dim\ \int_H = 1$.

III.4 Définition. On appelle polynôme de Poincaré d'une algèbre de Hopf graduée de type fini, le polynôme $P(t) = \sum_{n \geq 0}(dim\ H_n)t^n$.

Dans le cas d'une algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie H, le polynôme de Poincaré est

$$P(t) = 1 + a_1 t + ... + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$$

où les $a_i = dim\ H_i,\ i = 1, ..., n-1$.

IV. Liberté des algèbres de Hopf graduées connexes.

Dans ce paragraphe on va appliquer les résultats du chapitre II sur la liberté des algèbres de Hopf aux algèbres de Hopf graduées, en particulier les algèbres de Hopf graduées connexes.

IV.1 Proposistion. Si H est une algèbre de Hopf graduée, alors H_0 est une sous-algèbre de Hopf de H.

Preuve. En effet H_0 est stable pour la multiplication, et $\Delta(H_0) \subseteq H_0 \otimes H_0$.

IV.2 Proposition. Si C une cogèbre graduée, C_0 contient toute sous-cogèbre simple (i.e $CoradC \subseteq C_0$).

IV.3 Proposition. Si H est une algèbre de Hopf graduée connexe, alors H est irréductible pointée, et $CoradH = H_0$.

Preuve . Puisque $H_0 \simeq \Bbbk$, et que H_0 contient toutes les sous-cogèbres simples de H, alors il ne peut y'avoir qu'une seule sous-cogèbre simple de dimension 1, d'où H est irréductible pointée, et $CoradH = H_0$.

IV.4 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf graduée et connexe, et soit B une sous-algèbre de Hopf de H. Alors H est libre comme B-module à gauche (et à droite).

Preuve. D'aprés la proposition IV.3, H est irréductible pointée, d'où par le corollaire du lemme III.1.3 (chapitre 2) H est libre comme B-module.

IV.5 Proposition. Si H est une algèbre de Hopf graduée, alors H est libre comme H_0-module.

Preuve. On sait que $CoradH \subseteq H_0$, donc d'aprés le corollaire du lemme III.1.2 (chapitre 2), H est libre comme H_0-module.

Remarque.

Tout ce qu'on a fait pour les algèbres de Hopf graduées connexes reste vrai pour les algèbres de Hopf filtrées connexes.

IV.6 Corollaire. L'algèbre enveloppante U($\mathfrak{g}$) est libre comme module sur toutes ses sous-algèbres de Hopf.

Commentaire. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, et soit $\mathfrak{W}(\mathfrak{g}) = \{W \subseteq U(\mathfrak{g}),$ tel que: W est une sous-algèbre et $U(\mathfrak{g})$ est libre comme module sur W $\}$. On sait que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple le centre $Z(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ [12]. Mais en général $Z(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{W}(\mathfrak{g})$ [8], d'après le corollaire ci-dessus l'ensemble des sous-algèbres de Hopf de l'algèbre de Hopf $U(\mathfrak{g})$ est contenu dans $\mathfrak{V}(\mathfrak{g})$. Ce qui montre que le centre $Z(\mathfrak{g})$ n'est pas en génèral une sous-algèbre de Hopf et que $\mathfrak{V}(\mathfrak{g})$ n'est pas vide.

V. Structures des algèbres de Hopf graduées connexes.

Dans [9], Hopf avait montré qu'une algèbre de Hopf graduée connexe commutative de dimension finie est une algèbre exterieure sur des générateurs de degrés impairs. D'autres mathématiciens se sont intéressés à étudier la structure en tant qu'algèbre des algèbres de Hopf graduées connexes de types finis sur un corps commutatif de caractéristique nulle, tel que Leray qui a donné le théorème de structure suivant,

Théorème de Leray. Soit H une algèbre de Hopf graduée connexe commutative de type fini sur un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique nulle. Alors comme algèbre graduée, $H \simeq \mathbb{k}$, ou $H \simeq E \otimes S$, E étant l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degrés impairs, et S l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de degrés pairs.

Pour une démonstration de ce théorème, on pourra consulter [19]. Un théorème analogue est dû à A. Borel [5] pour une algèbre de Hopf graduée connexe commutative sur un corps de caractéristique non nulle.

Dans ce qui suit, en s'aidant du résultat de Milnor-Moore,

Proposition [14]. Si H est une algèbre de Hopf graduée connexe commutative et cocommutative, alors H est l'algèbre extérieure sur ses éléments primitifs.

On va montrer que le résultat de Hopf reste toujours vrai en supprimant la commutativité, et plus généralement on a le théorème suivant:

V.1 Théorème. Soit A une $\mathbb{k}$-algèbre de Hopf graduée connexe où tout élément homogène de degré strictement positif est nilpotent, alors A est commutative et cocommutative, par suite A est l'algèbre extérieure sur ses éléments primitifs.

Comme conséquence, on a le résultat suivant:

V.2 Théorème. Toute $\mathbb{k}$-algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie est commutative et cocommutative.

Remarque. Le théorème V.2 montre qu'il n'existe pas d'algèbre de Hopf graduée connexe de dimension finie dont la dimension n'est pas une puissance de 2.

V.3 Démonstration du théorème V.1

La démonstration du théorème V.1 se fait en plusieurs étapes. tout d'abord, on regarde les éléments primitifs de A.

Lemme 1. Soit A une $\Bbbk$-algèbre de Hopf graduée connexe où tout élément homogène de degré strictement positif est nilpotent, alors:

(1) Les éléments homogènes de $P(A)$ sont de degré impair.

(2) Si a et b sont deux éléments homogènes de $P(A)$, alors $[a,b]=0$.

Preuve. (1) Montrons que si a est un élément homogène de $P(A)$, alors a est de degré impair. Supposons que $|a|$ est pair, donc $(a\otimes 1)(1\otimes a)=(1\otimes a)(a\otimes 1)$, et par suite

$$\Delta(a^n)=\Delta(a)^n=(a\otimes 1+1\otimes a)^n=1\otimes a^n+a^n\otimes 1+\sum_{k=1}^{k=n-1}C_n^k a^{n-k}\otimes a^k.$$

Comme a est nilpotent, il existe un plus petit entier m tel que $a^m=0$. Supposons que $m\geq 2$, $\Delta(a^m)=0$ implique que $\sum_{k=1}^{k=m-1}C_m^k a^{m-k}\otimes a^k=0$, or $\{a^{m-k}\otimes a^k,\ 1\leq k\leq m-1\}$ est un système libre. Donc contradiction, par conséquent $m=1$, i.e, $a=0$.

(2) Soient a,b deux éléments primitifs homogènes de A.

$$\begin{aligned}
\Delta([a,b]) &= \Delta(ab)-(-1)^{|a||b|}\Delta(ba) \;=\Delta(a)\Delta(b)-(-1)^{|a||b|}\Delta(b)\Delta(a)\\
&=(1\otimes a+a\otimes 1)(1\otimes b+b\otimes 1)-(-1)^{|a||b|}(1\otimes b+b\otimes 1)(1\otimes a+a\otimes 1)\\
&=1\otimes ab+(-1)^{|a||b|}b\otimes a+a\otimes b+ab\otimes 1-(-1)^{|a||b|}(1\otimes ba+b\otimes a+(-1)^{|a||b|}a\otimes b+ba\otimes 1)\\
&=1\otimes(ab-(-1)^{|a||b|}ba)+(ab-(-1)^{|a||b|}ba)\otimes 1\\
&=1\otimes[a,b]+[a,b]\otimes 1.
\end{aligned}$$

Donc $[a,b]$ est primitif de degré pair car a et b sont de degré impair, d'où $[a,b]=0$.

Remarques. (i) Si a est primitif homogène, alors $a^2=0$.

(ii) Si a et b sont dans $P(A)$, alors $(a+b)^2=0$.

Soit E la sous-algèbre de Hopf de A engendrée par $P(A)$. D'après le lemme 1, c'est une algèbre commutative et cocommutative, donc E est l'algèbre extérieure sur $P(A)$ (voir [14]). Dans toute la suite il s'agira de montrer que $A=E$.

Notons par I l'idéal d'augmentation de E, i.e, $I=\oplus_{p\geq 1}E_p$ où $E_p=E\cap A_p$.

Si $A\neq E$, soit $L=\{c\in A\setminus E$ tel que: $\Delta_+(c)\in I\otimes I\}$.

Lemme 2. L est non vide.

Preuve. Comme $A\neq E$, il existe un élément homogène c de degré minimal tel que

$c \in A \setminus E$. Montrons que $c \in L$, si on pose $|c| = n$ on a alors

$$\Delta_+(c) = \sum_{i=1}^{n-1} c'_i \otimes c''_{n-i}.$$

Le caractère minimal de c implique que c'_i et c''_{n-i} sont des éléments de E, comme ils sont de degré strictement positif, ils sont dans I. Donc $c \in L$.

Proposition 1. Soient c un élément de L et t un élément de $P(A)$ avec c et t homogènes, alors $[t, c]$ est un élément de $P(A)$.

Preuve. On a

$$\Delta([t, c]) = 1 \otimes [t, c] + [t, c] \otimes 1 + \Delta(t)\Delta_+(c) - (-1)^{|c|}\Delta_+(c)\Delta(t),$$

Montrons que $\Delta(t)\Delta_+(c) - (-1)^{|c|}\Delta_+(c)\Delta(t) = 0$. En effet, posons $\Delta_+(c) = \sum_{(c)} c' \otimes c''$, $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$ alors

$$\begin{aligned}\Delta(t)\Delta_+(c) &= (t \otimes 1 + 1 \otimes t)(\sum_{(c)} c' \otimes c'') \\ &= \sum_{(c)} tc' \otimes c'' + (-1)^{|c'|} c' \otimes tc''\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(-1)^{|c|}\Delta_+(c)\Delta(t) &= (-1)^{|c|}(\sum_{(c)} c' \otimes c'')(t \otimes 1 + 1 \otimes t) \\ &= (-1)^{|c|}(\sum_{(c)} (-1)^{|c''|} c't \otimes c'') + c' \otimes c''t \\ &= \sum_{(c)} (-1)^{|c|+|c''|} c't \otimes c'') + (-1)^{|c|} c' \otimes c''t.\end{aligned}$$

Or $(-1)^{|c|+|c''|} = (-1)^{|c|-|c''|+2|c''|} = (-1)^{|c'|}$. Donc $\Delta(t)\Delta_+(c) - (-1)^{|c|}\Delta_+(c)\Delta(t) = \sum_{(c)} tc' \otimes c'' + (-1)^{|c'|} c' \otimes tc'' + (-1)^{|c|} \sum_{(c)} (-1)^{|c|-|c'|} c't \otimes c'') - (-1)^{|c|} \sum_{(c)} c' \otimes c''t$ $= \sum_{(c)} [t, c'] \otimes c'' - (-1)^{|c|} \sum_{(c)} c' \otimes [c'', t]$.

Comme c' s'écrit comme somme de produits d'éléments primitifs, alors $[t, c'] = 0$. Pour celà il suffit d'utiliser suffisamment de fois la relation:

$$[ab, c] = a[b, c] + (-1)^{|b||c|}[a, c]b.$$

De même $[c'', t] = 0$, d'où le résultat.

Corollaire. Soit c un élément homogène de L et soit t un élément de $P(A)$, alors $[t,c]=0$ ou bien c est de degré pair.

C'est une conséquence immédiate du lemme 1 et de la proposition 1.

Proposition 2. Tout élément homogène de L est de degré impair.

Preuve. Soient c un élément homogène de L et C la sous-algèbre de A engendrée par c et E, c'est une sous-algèbre de Hopf. En effet, par définition de L, $\Delta(C) \subseteq C \otimes C$. Il reste à montrer que $S(C) \subseteq C$. Pour cela , il suffit de montrer que $S(c) \in C$. Posons $\Delta_+(c) = \sum_{i=1}^{n-1} c'_i \otimes c''_{n-i} \in I \otimes I$. De la relation:

$$m \circ (S \otimes 1) \circ \Delta = \mu \circ \varepsilon$$

appliquée à c, on a

$$0 = S(c) + c + \sum_{i=1}^{n-1} S(c'_i)c''_{n-i}$$

d'où,

$$S(c) = -c - \sum_{i=1}^{n-1} S(c'_i)c''_{n-i}$$

Comme $\Delta_+(c) \in I \otimes I$, alors $S(c) \in C$. La proposition 1 permet d'écrire tout élément de C sous la forme $\sum a_n c^n$ avec $a_n \in E$. Soit maintenant CI l'idéal à gauche de C engendré par I. De ce qui précède, on déduit que CI est un idéal de Hopf ce qui permet de munir C/CI d'une structure d'algèbre de Hopf graduée connexe vérifiant les mêmes hypothèses de nilpotence que A. Pour des raisons évidentes de degré, la classe de c dans C/CI n'est pas nulle et on a

$$\Delta(\bar{c}) = \bar{c} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{c} + \overline{\Delta_+(c)}$$

or, $\Delta_+(c) \in I \otimes I$ d'où, $\overline{\Delta_+(c)} = 0$. Il en résulte que $\bar{c}$ est primitif et par le lemme 1, il est de degré impair. Comme le passage au quotient conserve le degré, c est lui même de degré impair.

Le corollaire de la proposition 1 et la proposition 2 donnent le corollaire suivant:

Corollaire. Soient t un élément de $P(A)$, et c un élément de L, alors $[t,c]=0$.

Dans la suite, on fixe c un élément homogène de L. Soient $P_c = \{t_1, ..., t_n\}$ l'ensemble de tous les éléments primitifs homogènes qui apparaissent dans la décomposition de c'_i, c''_{n-i}

comme somme de produits d'éléments primitifs, et E_c la sous-algèbre de Hopf de A engendrée par P_c. Si on désigne par C_c la sous-algèbre de A engendrée par E_c et c, on a la proposition suivante.

Proposition 3. C_c est une sous-algèbre de Hopf de A commutative et de dimension finie.

Preuve. Comme $\Delta(c) \in C_c \otimes C_c$ et $\Delta(E_c) \subseteq C_c \otimes C_c$, alors C est une sous-cogèbre de A. Soit S l'antipode de A, on a $S(E_c) \subseteq E_c$ et

$$\Delta(c) = 1 \otimes c + c \otimes 1 + \sum_{(c)} c' \otimes c'' \text{ où } c', c'' \in I$$

on sait que $c + S(c) + \sum_{(c)} S(c')c'' = \varepsilon(c) \bullet 1 = 0$ donc $S(c) + c = -\sum_{(c)} S(c')c'' \in E_c$. Alors $S(c) \in C_c$.

D'où C_c est une sous-algèbre de Hopf de A.

D'après la proposition 2 on a c est de degré impair, donc par le corollaire de la proposition 2, $[c, t] = 0$ pour tout $t \in P_c$. Par conséquent, C_c est commutative. Et comme $t^2 = 0$ pour tout $t \in P_c$ et c est nilpotent, alors C_c est de dimension finie.

Supposons que A soit cocommutative, alors C_c serait commutative et cocommutative, donc C_c serait engendrée par ses éléments primitifs (voir [14]) ce qui contredit le fait que $c \notin E$.

Revenons au cas où A n'est pas supposée cocommutative. C_c est toujours commutative de dimension finie, donc l'espace dual C_c^* de C_c est une algèbre de Hopf graduée connexe cocommutative. La remarque ci-dessus donne que C_c^* est commutative. Il en résulte que C_c est cocommutative, et par [14] C_c est engendrée par ses éléments primitifs ce qui contredit le fait que $c \notin E$.

Donc l'hypothèse $A \neq E$ est fausse, et donc $A = E$, ce qui entraîne que A est commutative et cocommutative.

Comme conséquence de ce résultat on a le théorème suivant:

V.3 théorème. Si H est une algèbre de Hopf graduée connexe, dont la graduation s'arrête, alors la dimension de H est finie.

Preuve. Conséquence du théorème V.1, par la finitude de la dimension d'une algèbre exterieure engendrée par un espace vectoriel de dimension finie.

Chapitre IV

ALGÈBRES DE HOPF ET THÉORIE DE GALOIS

Dans l'étude de l'action d'une algèbre de Hopf H sur une algèbre A, J. Bergen [4] s'est interessé à déterminer quand il existe une correspondance de Galois entre les sous algèbres de Hopf de H et certaines sous-algèbres de A. En particulier, il s'est intressé a savoir quand est ce que les sous-algèbres de Hopf d'une algèbre de Hopf ont toutes des sous-algèbres d'invariants distinctes. Ce chapitre est une généralisation du travail de J. Bergen.

I. Préliminaires

Soit H$(\phi, \eta, \Delta, \varepsilon)$ une algèbre de Hopf sur un corps commutatif $\Bbbk$. Dans toute la suite on adoptera les notations de [20].

I.1 Définition. Soient H une algèbre de Hopf, H_1 une sous-algèbre de Hopf de H, et M un H-module.

i) Un élément x de H est dit invariant si $h.x = \varepsilon(h)x$, quelque soit h élément de H. L'ensemble des éléments invariants de H est noté H^{inv}.

i i) Un élément m de M est dit H_1-invariant si $h.m = \varepsilon(h)m$, quelque soit h élément de H_1.

L'ensemble des éléments invariants de M sous l'action de H_1 est noté M^{H_1}.

I.2 Proposition. Soient H une algèbre de Hopf, H_1 une sous-algèbre de Hopf de H, et M un H-module. Alors:

i) H^{inv} est un idéal à gauche de H.

i i) Si H est commutative, alors M^{H_1} est un sous-module de M.

Remarques.

1) Si H est de dimension finie, alors H^{inv} coïncide avec l'idéal des intégrales de H qu'on note $\int_H$.

2) Si H est de dimension infinie, alors $H^{inv} = \{0\}$. (On le montrera dans la suite).

I.3 Proposition. Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, si on pose $\omega_{H_1} = H_1 \cap ker(\varepsilon)$, alors:

$$M^{H_1} = \{m \in M : h.m = 0 \quad \forall\, h \in \omega_{H_1}\}.$$

Preuve. Soit $m \in M^{H_1}$ et $h \in \omega_{H_1}$, alors $h.m = \varepsilon(h)m = 0$. Soit m un élément de M tel que $h.m = 0$ pour tout h élément de ω_{H_1} et soit $f \in H_1$, posons $f_1 = f - \varepsilon(f)1_H$, alors $\varepsilon(f_1) = \varepsilon(f) - \varepsilon(f)\varepsilon(1_H) = 0$, donc $f_1.m = 0$. Par conséquent $f.m = \varepsilon(f)m$, d'où $m \in M^{H_1}$.

Remarque. Si H_1 est de dimension finie, alors $\int_{H_1} \neq \{0\}$ est l'annulateur à droite de ω_{H_1} dans H_1.

I.4 Proposition. Soient H une algèbre de Hopf, H_1 et H_2 deux sous-algèbres de Hopf de H, alors la sous-algèbre B de H engendrée par H_1 et H_2 est aussi une sous-algèbre de Hopf de H, qu'on notera $< H_1, H_2 >$.

Preuve. Rappellons que Δ est un morphisme d'algèbres, et que S l'antipode est un anti-homomorphisme d'algèbres. Comme les éléments de B sont sommes de produits d'éléments de H_1 et de H_2, alors on a $\Delta(B) \subseteq B \otimes B$ et $S(B) \subseteq B$, par conséquent B est une sous-algèbre de Hopf de H.

On va donner maintenant une proposition qui est une conséquence immédiate de la proposition II.6 [20] du chapitre I.

I.5 Proposition. Soit H une algèbre de Hopf. H est de dimension infinie si, et seuleument si $H^{inv} = \{0\}$.

Preuve. Si on suppose $H^{inv} \neq \{0\}$, alors il existe x un élément non nul de H^{inv}, tel que le sous-espace vectoriel V engendré par x forme un idéal de dimension 1 de H, or d'après la proposition II.6 chapitre I, H serait de dimension finie, d'où si H est de dimension infinie, on a $H^{inv} = \{0\}$.

Réciproquement, si H est de dimension finie alors $H^{inv} = \int_H$ qui est de dimension 1, donc $H^{inv} \neq \{0\}$, d'où si $H^{inv} = \{0\}$, alors H est de dimension infinie.

On va donner maintenant, les résultat principaux de J. Bergen [4].

Lemme 1[4]. Si M est un H-module et H_1, H_2 sont deux sous-algèbres de Hopf de H, alors $M^K = M^{H_1} \cap M^{H_2}$, où $K =< H_1, H_2 >$.

Preuve. Puisque K contient H_1 et H_2, il est clair que M^K est inclu dans M^{H_1} et dans M^{H_2}. D'où $M^K \subseteq M^{H_1} \cap M^{H_2}$.

Pour l'autre inclusion, supposons que $m \in M^{H_1} \cap M^{H_2}$ et $h = h_1 h_2 ... h_n$, où $h_i \in H_1 \cup H_2$. Puisque ε est un morphisme d'algèbres, on a

$$\begin{aligned} h.m &= (h_1 h_2 ... h_n).m = (h_1 h_2 ... h_{n-1}).(h_n.m) \\ &= (h_1 h_2 ... h_{n-1}).\varepsilon(h_n)m = ... = \varepsilon(h_1)\varepsilon(h_2)...\varepsilon(h_n)m \\ &= \varepsilon(h_1 h_2 ... h_n)m = \varepsilon(h)m. \end{aligned}$$

Donc si $h \in K$ alors $h = a_1 + a_2 + ... + a_s$, où chaque a_i est un produit d'éléments de $H_1 \cup H_2$. D'où, par ce qui précède on obtient

$$h.m = (a_1 + a_2 + ... + a_s).m = \varepsilon(a_1 + a_2 + ... + a_s)m = \varepsilon(h)m,$$

ce qui implique que $m \in M^K$, d'où $M^{H_1} \cap M^{H_2} \subseteq M^K$.

Lemme 2[4]. Si H est une algèbre de Hopf de dimension finie, et si $H_1 \neq H$ est une sous-algèbre de Hopf de H, alors $\int_{H_1} \neq \int_H$.

Preuve. Supposons qu'il existe un $t \in \int_H$ tel que $0 \neq t \in \int_{H_1}$. D'après le théorème IV.2.7 du chapitre II, H est libre comme H_1-module à gauche donc il existe $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ des éléments de H tels que:

$$H = H_1 e_1 \oplus H_1 e_2 \oplus ... \oplus H_1 e_n.$$

Puisque $\int_H$ est un idéal de H de dimension 1, alors $t.e_1 = \alpha_1 t$ et $t.e_2 = \alpha_2 t$ pour α_1, α_2 éléments de $\Bbbk$, et puisque $t \in H_1$, il s'ensuit que α_1 et α_2 sont non nulles, donc

$$(\alpha_2 t).e_1 - (\alpha_1 t).e_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2).t = 0.$$

Par conséquent e_1 et e_2 sont liés, ce qui contredit le fait qu'ils appartiennent à une base de H sur H_1, d'où $\int_{H_1} \neq \int_H$.

En combinant ces deux lemmes, on démotre les deux théorèmes principaux de [4] suivants.

Théorème 1[4]. Soient H une algèbre de Hopf de dimension finie, et M un H-module fidèle. Si $H_1 \neq H_2$ sont deux sous-algèbres de Hopf de H, alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

Théorème 2[4]. Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie. Si $H_1 \neq H_2$ sont deux sous-algèbres de Hopf de H. Alors $\int_{H_1} \neq \int_{H_2}$.

Remarque. On peut se demander que si $K =< H_1, H_2 >$, alors $\int_K$ peut être obtenu de $\int_{H_1}$ et $\int_{H_2}$. On va montrer que ce n'est pas le cas, par exemple si on prend $G = S_n$ le groupe symétrique, G_1 le sous-groupe engendré par un élément g de G d'ordre 2, et G_2 le sous-groupe engendré par h d'ordre n tels que g et h engendrent G. Etant donné un corps $\Bbbk$, posons $H = \Bbbk(G)$ l'algèbre de groupe, et soient H_1 et H_2 les sous-algèbres de Hopf $\Bbbk(G_1)$ et $\Bbbk(G_2)$, $\int_{H_1}$ est le sous-espace engendré par $1 + g$ et $\int_{H_2}$ est engendré par $1 + h + ... + h^{n-1}$. Pourtant pour $K =< H_1, H_2 >= H$, $\int_K$ est engendré par la somme des $n!$ éléments de G.

II. Résultats Principaux

Le résultat qu'on va donner maintenant est une généralisation du théorème 2[4].

II.1 Théorème. Soient H une algèbre de Hopf, H_1 et H_2 deux sous-algèbres de Hopf telles que la dimension de H_1 soit finie et $H_1 \neq H_2$. Alors $H_1^{inv} \neq H_2^{inv}$.

Preuve. Pour démontrer ce théorème on va étudier deux cas selon que H_2 est de dimension finie ou infinie.

Premier cas: La dimension de H_2 est infinie. Par la proposition I.5, $H_2^{inv} = \{0\}$, or H_1 est de dimension finie donc par la même proposition on a $H_1^{inv} \neq \{0\}$, d'où le résultat.

Deuxième cas: La dimension de H_2 est finie. Alors $H_2^{inv} = \int_{H_2}$, et on a $H_1^{inv} = \int_{H_1}$. Donc celà revient dans ce cas à montrer que $\int_{H_1} \neq \int_{H_2}$.
Pour celà considérons la sous-algèbre de Hopf $B =< H_1, H_2 >$ de H, et supposons que $\int_{H_1} = \int_{H_2} = I$, alors I est un idéal de B. Comme I est unidimensionnel, et $I \subseteq B$, par la propositon [20], B est de dimension finie. Donc $\int_B = \int_{H_1} = \int_{H_2}$ car ε est un morphisme d'algèbres, ce qui est faux d'après le lemme 1[4].

Le théorème suivant est une généralisation du théorème 1[4] de J. Bergen.

II.2 Théorème. Soient H une algèbre de Hopf , et M un H-module fidèle. Soient H_1 et H_2 deux sous-algèbres de Hopf de H telles que la dimension de H_1 est finie et $H_1 \neq H_2$. Alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

Preuve. Soit la sous-algèbre de Hopf $B =< H_1, H_2 >$ de H, alors H_1 est une sous-algèbre de Hopf de B. Si on suppose que $M^{H_1} = M^{H_2}$, alors $M^B = M^{H_1} = M^{H_2}$. Soit $0 \neq t \in \int_{H_1}$, donc $\omega_{H_1}.(t.M) = 0$ ce qui implique que $t.M \subseteq M^{H_1} = M^B$, d'où $\omega_B.(t.M) \subseteq \omega_B.M^B$. Or B agit fidèlement sur M, on a donc $\omega_B.t = 0$, ce qui implique que $t \in B^{inv}$. Donc $\int_{H_1} \subseteq B^{inv}$, ce qui est faux par le théorème II.1, d'où $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

Maintenant on va étendre ce résultat à une classe de H-modules contenant la classe des H-modules fidèles.

II.3 Théorème. Soient H une algèbre de Hopf, ε sa counité, et M un H-module tel que $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$.
Si H_1 et H_2 sont deux sous-algèbres de Hopf de H, telles que la dimension de H_1 est finie et $H_1 \neq H_2$, alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

Preuve. Soit $\Bbbk$ le corps de base. L'application bilinéaire $\psi : H \times \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$ définie par $\psi(h, \alpha) = \varepsilon(h)\alpha$, définit une structure de H-module sur $\Bbbk$. Pour cette structure $ann(\Bbbk) = ker(\varepsilon)$. Posons $N = M \oplus \Bbbk$, alors N est un H-module pour l'action $h.(m + \alpha) = h.m + \varepsilon(h)\alpha$ pour tout $h \in H$, $m \in M$, $\alpha \in \Bbbk$. Comme $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$, alors N est un module fidèle, et d'après le théorème II.2, $N^{H_1} \neq N^{H_2}$. Comme $\Bbbk^{H_1} = \Bbbk^{H_2} = \Bbbk$, alors $M^{H_1} \neq M^{H_2}$.

La condition M fidèle n'est pas équivalente (en général) à la condition $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$. En effet, soit $G = \{g_i;\ i = 0, ..., n\}$ un groupe fini, on pose $g_0 = e$ où e est l'élément neutre de G. On associe à G son algèbre de groupe
$\Bbbk(G) = \{\sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i\ ;\ k_i \in \Bbbk\}$, qui admet la structure d'algèbre de Hopf, en posant

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \text{et} \quad \varepsilon(g) = 1 \quad \forall g \in G.$$

On a $ker(\varepsilon) = \{\sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i \ / \sum_{i=0}^{i=n} k_i = 0\}$.

Soit maintenant, M le sous-espace vectoriel de $\Bbbk(G)$ engendré par la famille $\{(e - g_i); i = 1, ..., n\}$. M admet la structure de $\Bbbk(G)$-module induite par la multiplication de $\Bbbk(G)$, puisque en fait $M = ker(\varepsilon)$ qui est un idéal de $\Bbbk(G)$. L'annulateur de M est donné par $ann(M) = \{k \sum_{i=0}^{i=n} g_i,\ k \in \Bbbk\}$, en effet, $\forall j \in \{0, ..., n\}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{i=n} g_i(e - g_j) &= \sum_{i=0}^{i=n} g_i - \sum_{i=0}^{i=n} g_i g_j \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} g_i - \sum_{i=0}^{i=n} g_i \\ &= 0\end{aligned}$$

d'où $\{k \sum_{i=0}^{i=n} g_i,\ k \in \Bbbk\} \subseteq ann(M)$.

Pour l'autre inclusion, soit $z = \sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i \in ann(M)$. Soit $l \in \{0, ..., n\}$, montrons que $k_l = k_0$. Il existe $j \in \{0, ..., n\}$ tel que $g_l g_j = g_j g_l = e$, comme z est un élément de $ann(M)$, alors $\sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i = \sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i g_j$. En identifiant les coefficients de g_0, on obtient $k_0 = k_l$. Par conséquent $z = k_0 \sum_{i=0}^{i=n} g_i$, d'où $ann(M) \subseteq \{k \sum_{i=0}^{i=n} g_i,\ k \in \Bbbk\}$.

On conclut que $ann(M) = \{k \sum_{i=0}^{i=n} g_i,\ k \in \Bbbk\}$ et M n'est pas fidèle.

Vérifions maintenant que $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$, soit $x = \sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i \in annn(M) \cap ker(\varepsilon)$, donc $\sum_{i=0}^{i=n} k_i = 0$ et $x = k \sum_{i=0}^{i=n} g_i$, d'où le système

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{i=n} k_i = 0 \\ k_i = k, \quad \text{i=0,...,n} \end{cases}$$

donc pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $\quad k_i = 0$, ce qui implique que $x = 0$. On conclut que

$$ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}.$$

Ce que nous venons de faire est un cas particulier du cas plus général suivant: Soient H une algèbre de Hopf de dimension finie semi-simple, et $M = ker(\varepsilon)$, comme $ker(\varepsilon)$ est un idéal de H, on peut munir M d'une structure de H-module via la multiplication de H. Montrons que $ann(M) = \int_H$. Soit $t \in \int_H$ et $m \in M$, $\quad t.m = \varepsilon(m)t = 0$, d'où $t \in ann(M)$, donc $\int_H \subseteq ann(M)$. Pour l'autre inclusion, soit x un élément non nul de $ann(M)$. Comme H est semi-simple, alors par le théorème II.5 chapitre I généralisant le théorème de Maschke on a $\varepsilon(\int_H) \neq 0$, d'où $H = M \oplus \int_H$. Donc pour $m \in M$, $x.m = 0 = \varepsilon(m)x$, et pour $t \in \int_H$ considérons $m = (t - \varepsilon(t)1_H) \in M$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= x.m \\ &= x.t - \varepsilon(t)x \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $x.t = \varepsilon(t)x$. Donc pour tout h élément de H: $x.h = \varepsilon(h)x$, d'où $x \in \int_H$. D'où $ann(M) = \int_H$, puisque la dimension de H est finie on a $\int_H \neq 0$, par conséquent M n'est pas fidèle. Montrons maintenant que $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$, on a

$$ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \int_H \cap ker(\varepsilon),$$

d'après le théorème II.5 chapitre I, $\varepsilon(\int_H) \neq 0$ car H est semi-simple, d'où

$$ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}.$$

II.4 Corollaire. Soit H une algèbre de Hopf commutative. Si H possède un H-module M simple tel que $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$, alors $\Bbbk 1_H$ est la seule sous-algèbre de Hopf de dimension finie de H.

Preuve. Supposons qu'il existe L une sous-algèbre de Hopf de dimension finie distincte de $\Bbbk 1_H$ et de H. Par le théorème II.3, $M^L \neq M^{\Bbbk 1_H} = M$ et $M^H \neq M^{\Bbbk 1_H} = M$. Comme M est simple, alors $M^L = M^H = \{0\}$ ce qui est faux par le théorème II.3.

Remarques.

1) Soient H une algèbre de Hopf de dimension supérieure strictement à 1, M un H-module. Si H est intègre, alors la condition $ann(M) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$ est équivalente à M est un module fidèle. En effet, si $ann(M) \neq \{0\}$ alors on peut considérer un élément x non nul de $ann(M)$, considérons un élément y non nul de $ker(\varepsilon)$, un tel élément existe du fait que $dim\ ker(\varepsilon) = (dim\ H) - 1 \neq 0$. Comme $ann(M)$ et $ker(\varepsilon)$ sont des idéaux de H, alors $xy \in ann(M) \cap ker(\varepsilon)$. Puisque H est intègre, $xy \neq 0$ et par suite $ann(M) \cap ker(\varepsilon) \neq \{0\}$.

2) Si H une algèbre de Hopf de dimension finie supérieure strictement à 1, alors H n'est pas intègre. En effet, soit $0 \neq t \in \int_H$ et soit $0 \neq x \in ker(\varepsilon)$, $tx = \varepsilon(x)t = 0$. ce qui prouve que H n'est pas intègre.

3) Si dans le théorème II.3, on prend H_1 et H_2 de dimensions infinies, le résultat n'est plus vrai en général. En effet, soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie et $\mathfrak{g}_1$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. On sait que l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)$ de $\mathfrak{g}_1$ est une sous-algèbre de Hopf de l'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Si on considère $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ comme module sur elle même, alors il est fidèle, et il est facile de voir que $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_1)} = \{0\}$.

4) Soit H une algèbre de Hopf, et soit M un module sur H ne vérifiant pas l'hypothèse du théorème II.3, c-à-d, $ann(M) \cap ker(\varepsilon) \neq \{0\}$. Alors le résultat du théorème II.3 n'est pas vrai en général. En effet, sur $\Bbbk$ on a une structure de H-module induite par la counité ε, ce module vérifie $ann(\Bbbk) = Ker\varepsilon$, et on a $\Bbbk^{H_1} = \Bbbk^{H_2} = \Bbbk$ quelque soit H_1 et H_2 des sous-algèbres de Hopf de H.

III. Applications aux représentations des groupes finis

Dans ce paragraphe on va donner un résultat équivalent au théorème II.3 pour les représentations des groupes finis.

Soit $G = \{g_i;\ i = 0, ..., n\}$ un groupe fini, et soit (V, π) une représentation de G, avec V un espace vectoriel de dimension finie. On sait que π se prolonge en un morphisme d'algèbres; $\tilde{\pi} : \mathbb{k}(G) \longrightarrow End(V)$, défini par:

$$\tilde{\pi}(x) = \tilde{\pi}(\sum_{i=0}^{i=n} k_i g_i) = \sum_{i=0}^{i=n} k_i \pi(g_i)$$

pour tout $x \in \mathbb{k}(G)$. On définit sur V une structure de $\mathbb{k}(G)$-module par $g.v = \pi(g)(v)$ pour $g \in G$ et $v \in V$. Si G_1 et G_2 sont deux sous-groupes de G distincts, alors $\mathbb{k}(G_1)$ et $\mathbb{k}(G_2)$ sont deux sous-algèbres de Hopf distinctes de $\mathbb{k}(G)$.

III.1 Définition. Soit G_1 un sous-groupe de G,

$$V^{G_1} = \{v \in V :\ g.v = v \quad \forall g \in G_1\}$$

est l'ensemble des invariants de V sous l'action de G_1.

III.2 Lemme. Soient G un groupe fini, et G_1 un sous-groupe de G, alors $V^{G_1} = V^{\mathbb{k}(G_1)}$.

Preuve. Soit $v \in V^{G_1}$, et soit $g \in G$ alors $g.v = v = \varepsilon(g)v$, car $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G_1$, d'où pour tout $x = \sum_{g\in G_1} k_g g \in \mathbb{k}(G_1)$, $x.v = \sum_{g\in G_1} k_g g.v = \sum_{g\in G_1} k_g \varepsilon(g)v = \varepsilon(x)v$, d'où $v \in V^{\mathbb{k}(G_1)}$. Donc $V^{G_1} \subset V^{\mathbb{k}(G_1)}$.

Soit $v \in V^{\mathbb{k}(G_1)}$, alors $x.v = \varepsilon(x)v$, pour tout $x \in \mathbb{k}(G_1)$, ce qui implique que $\sum_{g\in G_1} k_g(g.v) = \varepsilon(\sum_{g\in G_1} k_g g).v = \sum_{g\in G_1} k_g \varepsilon(g)v = (\sum_{g\in G_1} k_g)v$, car $\varepsilon(g) = 1$. Donc $g.v = v$, pour tout $g \in G_1$, d'où $v \in V^{G_1}$. On conclut que $V^{\mathbb{k}(G_1)} \subset V^{G_1}$.

III.3 Définition. Soit V un espace vectoriel. une partie $A = \{e_1, ..., e_n\}$ de V est dite presque-libre si elle vérifie la propriété suivante: $\sum_{i=1}^{i=n} k_i e_i = 0$, où $(k_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathbb{k}$, implique que $\sum_{i=1}^{i=n} k_i \neq 0$, ou $k_1 = ... = k_n = 0$.

Remarque . Un système libre est presque-libre.

III.4 Proposition. Soit G un groupe fini, et soit (V, π) une représentation de G de dimension finie. Alors,

i) $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est libre dans $End(V)$ si et seulement si V est fidèle.

i i) $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est presque-libre si et seulement si $ann(V) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$.

Preuve.

i) Supposons que $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ soit libre dans $Gl(V)$, et soit

$x = \sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i \in \Bbbk(G)$, tel que $x.v = 0\ \forall v \in V$, alors $(\sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i).v = (\sum_{i=0}^{i=1} k_i \pi(g_i))(v) = 0$ pour tout $v \in V$. Ce qui implique que $\sum_{i=0}^{i=1} k_i \pi(g_i) = 0$, donc $k_i = 0$ pour tout $i = 0, ..., n$, car $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est libre dans $End(V)$, d'où $x = \sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i = 0$. Donc V est fidèle.

Réciproquement, supposons maintenant que V est fidèle, c-à-d, $ann(V) = \{0\}$. Donc $\tilde{\pi}$ est injective, par suite $\tilde{\pi}(\{g_i;\ i = 0, ..., n\}) = \{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est libre.

i i) Supposons que $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est presque-libre. Soit $x = \sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i$ un élément de $ann(V) \cap ker(\varepsilon)$, donc $\sum_{i=0}^{i=1} k_i = 0$ et $\sum_{i=0}^{i=1} k_i \pi(g_i) = 0$, par suite $k_1 = ... = k_n = 0$, ce qui implique que $x = 0$. D'où $ann(V) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$.

Réciproquement, supposons maintenant que $ann(V) \cap ker(\varepsilon) = \{0\}$.
Soit $(k_i)_{1 \le i \le n} \subset \Bbbk$, tel que $\sum_{i=0}^{i=1} k_i \pi(g_i) = 0$, ce qui implique que $\sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i$ est un élément de $ann(V)$. Par conséquent, $\sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i = 0$ ou $\sum_{i=0}^{i=1} k_i g_i$ n'est pas un élément de $ker(\varepsilon)$, d'où $k_1 = ... = k_n = 0$ ou $\sum_{i=1}^{i=n} k_i \neq 0$. Donc $\{\pi(g_i);\ i = 0, ..., n\}$ est presque-libre.

III.4 Proposition. Soit G un groupe fini, et soit (V, π) une représentation de G de dimension finie telle que $\{\pi(g);\ g \in G\}$ soit presque-libre dans $End(V)$. Soient G_1 et G_2 deux sous-groupes de G tels que $G_1 \neq G_2$, alors $V^{G_1} \neq V^{G_2}$.

Preuve. Découle facilement du théorème II.3, de la proposition III.3, et du lemme III.2.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. Abe, Hopf Algebras, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[2] M. Ameur et S. Benayadi, Sur les invariants de modules sur une algèbre de Hopf, à paraître dans Communications in Algebra.

[3] M. Ameur, S. Benayadi, C. Bennis et A. Roux, Sur les algèbres de Hopf graduées connexes, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I, p. 511-514, 1996.

[4] J. Bergen, A correspondence theorem for modules over Hopf algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 343-345.

[5] A. Borel, Sur les cohomologies des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math,57(1953), 115-207.

[6] N. Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, chap. 2 et 3, Hermann, Paris, 1972.

[7] C. W. Curtis et I. Reiner, Representation Theory of Finite groups and Associative Algebras, Interscience, New york, 1962.

[8] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-villars XXXVII, Paris, 1974.

[9] H. Hopf, Ueber die Topologie..., Ann. of Math., 42(1941), 22-52.

[10] I. Kaplansky, Bialgebras, University of Chicago Lectures Notes, 1975.

[11] C. Kassel, Quantum Groups, Springer-Verlag, New York 1995.

[12] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, Amer. J. Math., 85(1963), 327-404.

[13] R. G. Larson et M. Sweedler, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras.

[14] J. W. Milnor et J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math., 81(1965), 211-264.

[15] W. D. Nichols and M. B. Zoeller, A Hopf algebra freeness theorem, Amer. J. Math. 111 (1989), 381-385.

[16] W. D. Nichols and M. B. Richmond (Zoeller), Freeness of infinite dimensionnal Hopf algebras, Comm. Algebra, 20(1992), 1489-1492.

[17] D. Radford, Freeness (projectivity) criteria for Hopf algebras, J. Pure Appl. Algebra, 11(1977),15-28.

[18] D. Radford, Pointed Hopf Algebras Are Free over Hopf Subalgebras, Journal of Algebra, 45(1977), 266-273.

[19] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Mc Graw Hill series in higher mathematics,1966.

[20] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969.

[21] M. Zissmann, Espaces de Hopf, Algèbres de Hopf, Séminaire H. CARTAN-J. C. MOORE, 1959/60, n° 2.