DOCTORAT DE L'UNIVERSITE

DE METZ

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

THESE

PRESENTEE PAR

Mohamed OUMOUN

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

TITRE DE LA THESE:

CONTRIBUTION A LA STABILISATION GLOBALE DE CERTAINS SYSTEMES NON LINEAIRES

SOUTENUE LE 11 DECEMBRE 1995 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

J.P. GAUTHIER, professeur à l'INSA de Rouen	Rapporteur
H. HAMMOURI, professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1	Rapporteur
B. KLARES, professeur à l'Université de METZ	Examinateur
G. SALLET, professeur à l'Université de METZ	Président
J.C. VIVALDA, chargé de recherche à l'INRIA-Lorraine	Examinateur

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE
DE METZ

SPECIALITE : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

THESE

PRESENTEE PAR

MOHAMED OUMOUN

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

TITRE DE LA THESE:

CONTRIBUTION A LA STABILISATION GLOBALE DE CERTAINS SYSTEMES NON LINEAIRES

SOUTENUE LE 11 DECEMBRE 1995 DEVANT LE JURY COMPOSE DE :

J.P. GAUTHIER, professeur à l'INSA de Rouen	Rapporteur
H. HAMMOURI, professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1	Rapporteur
B. KLARES, professeur à l'Université de METZ	Examinateur
G. SALLET, professeur à l'Université de METZ	Président
J.C. VIVALDA, chargé de recherche à l'INRIA-Lorraine	Examinateur

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce travail, je tiens à remercier très chaleureusement le professeur Gauthier SALLET, directeur de recherche à l'INRIA-Lorraine pour mon initiation à un domaine de recherche très passionnant, pour les compétences qu'il m'a apportées et pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées tout au long de mes années d'étude.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Monsieur J. P. GAUTHIER professeur à l'INSA de Rouen et Monsieur H. HAMMOURI professeur à l'Université Claude Bernard Lyon *I* en acceptant d'être les rapporteurs de ce travail.

Mes plus vifs remerciements à Monsieur B. KLARES professeur à l'Université de Metz pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de siéger dans mon jury.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de L'INRIA. A ce titre je tiens à remercier tous ses membres, et en particulier R. CHABOUR et J. C. VIVALDA qui ont été toujours disponibles pour m'accorder aide et soutien et me faire profiter de leurs larges connaissances scientifiques. Je remercie également A. FERFERA, A. IGGIDR et M. PENGOV qui à divers titres m'ont aidé dans la réalisation de mes recherches.

Enfin, je remercie toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail, en particulier mes parents qui m'ont apporté un soutien financier et moral.

Table des matières

0
Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse au problème de la stabilisation, par retour d'état, de certains systèmes non linéaires.
Dans tout ce qui suit, le point d'équilibre sera l'origine et les systèmes considérés seront définis sur $\mathbb{R}^n$.

Dans le premier chapitre, on rappelle les différentes notions de stabilité et d'observabilité. Les principaux résultats de stabilisation y sont présentés.

Dans le second chapitre, on s'intéresse à la stabilisation des systèmes bilinéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{0.1}$$

Ce sont des systèmes singuliers pour lesquels le linéarisé à l'origine est indépendant du contrôle. Il y a très peux de résultats de stabilisation concernant ce type de systèmes : En dimension deux, une classification complète a été donnée par Chabour, Sallet et Vivalda [7]. Ils ont en particulier introduit des commandes homogènes de degré zéro pour stabiliser des systèmes non stabilisables par feedbacks continus.

En collaboration avec J. C. Vivalda [39], on considère une classe de systèmes bilinéaires en dimension trois pour lesquels on étudie la stabilisation par feedback continu et par feedback homogène de degré zéro. Le feedback stabilisant est explicitement donné.

Le troisième chapitre est consacré à la stabilisation des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{0.2}$$

où f est un champ de vecteurs continu et homogène de degré impair et B est une matrice constante de $\mathbb{R}_{n\times m}$.

Andreini, Baccioti et Stefani [1] donnent une condition suffisante de stabilisation. Cependant celle ci n'est pas nécessaire. Dans le cas où la matrice B est de rang $n-1$, Iggidr et Vivalda [23] donnent une condition nécessaire et suffisante de stabilisation. Dans le cas où B est quelconque, je donne [40] une condition nécessaire et suffisante de stabilisation par feedback continu et homogène de même degré d'homogénéité que f.

Dans le quatrième chapitre, en collaboration avec M. A. Hammami et J. C. Vivalda [22], on construit un observateur pour les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = Cx \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{0.3}$$

où f est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair et C est une matrice constante de $\mathbb{R}_{m\times n}$. Ce travail est une généralisation du résultat obtenu par Starkov [48].

Dans les chapitres 5 et 6, l'étude d'un système du type :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(X_0(x_s) + \sum_{j=1}^m u_j Y_j(x_s)\Big) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t X_i(x_s) dw_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t u_j Z_j(x_s) d\tilde{w}_s^j \tag{0.4}$$

où X_i, $0 \leq i \leq p$, Y_j et Z_j, $1 \leq j \leq m$ sont des champs de vecteurs de classe c^∞ s'annulant à l'origine, permet par l'introduction d'un bruit multiplicatif, la prise en compte d'erreurs de modélisation.

En collaboration avec R. Chabour [8] [9], on donne les versions stochastiques du théorème de Jurdjevic–Quinn [24] et des résultats d'Artstein [2] et Sontag [44].

1
Quelques rappels sur la stabilité et l'observabilité

1.1 Position du problème

On considère un système dont l'évolution peut être décrite par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X\left(x(t), u(t)\right) \\ x \in M, \ u \in \mathcal{U} \end{cases} \tag{1.1}$$

où M est une variété différentiable connexe appelée espace d'état et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ espace des contrôles, $x(t)$ représente l'état du système à l'instant t et X est un champ de vecteurs défini sur M. Dans ce travail, M sera l'espace $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Les problèmes auxquels on s'intéresse sont les suivants :
• Etant donné $x_0 \in M$, trouver un feedback $u = u(x)$ tel que le point x_0 soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = X\left(x(t), u\left(x(t)\right)\right) \tag{1.2}$$

• Construire un observateur pour le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X\left(x(t)\right) \\ y(t) = h(x(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{1.3}$$

Pour cela, rappelons les définitions suivantes.

1.2 Stabilité et attractivité d'un équilibre

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.4}$$

où X est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Définitions :

• Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point d'équilibre du champ de vecteurs $X(x)$ si $X(x_0) = 0$.

Un point d'équilibre x_0 est dit :

• stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \text{tel que } \ \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \ \forall t \geq 0, \ \|X_t(x) - x_0\| < \epsilon$$

où $X_t(x)$ est la solution du système (1.4) qui commence au point x à l'instant $t = 0$.

• attractif si :

$\exists \delta > 0$, $\forall x$ tel que $\|x - x_0\| < \delta$, $X_t(x)$ est définie pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t \to +\infty} X_t(x) = x_0$.

• x_0 est globalement attractif si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \to +\infty} X_t(x) = x_0$.

• x_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

• x_0 est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

1.2.2 Stabilisation à l'aide de la théorie de Lyapunov

Si dans l'étude théorique de la stabilisation des progrés considérables ont été accomplis ces dernières années, la théorie de Lyapunov y joue un rôle central. Lyapunov a montré les résultats suivants

Théorème 1.1 *Soient U un voisinage de x_0, point d'équilibre du système (1.4) et V une fonction continue de U dans $\mathbb{R}$ et différentiable sur $U \setminus \{x_0\}$ telle que :*

(i) $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ *pour tout* $x \in U \setminus \{x_0\}$,

(ii) $\dot{V}(x) = X.V(x) = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle \leq 0 \ \ \forall x \in U$

alors x_0 est un point d'équilibre stable pour le système (1.4).

Si de plus la fonction V est telle que

(iii) $\dot{V}(x) < 0 \;\; \forall x \in U \setminus \{x_0\}$

alors x_0 est asymptotiquement stable.

Une fonction V qui satisfait (i) est dite définie positive.

Maintenant si $U = \mathbb{R}^n$ et si V est définie positive et en plus propre c'est-à-dire $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$ alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Définition 1.1 *Une fonction V qui vérifie* (i) *et* (ii) *s'appelle une fonction de Lyapunov large pour le système (1.4) en x_0. Si* (iii) *est vérifié alors V s'appelle fonction de Lyapunov stricte pour (1.4) en x_0.*

Plus d'un demi-siècle après, on a prouvé le résultat réciproque suivant (Kurzweil [29], Massera [35], Zubov [52]).

Théorème 1.2 *Si X est continu et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.4) admet une fonction de Lyapunov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de x_0.*

Lorsque les propriétés géométriques du système permettent de trouver une fonction V définie positive telle que

$$X.V(x) \leq 0$$

on a le résultat suivant qui permet de conclure à l'asymptotique stabilité.

Théorème 1.3 (Principe d'invariance de LaSalle [32]) *Soit V une fonction de Lyapunov large, de classe C^1, pour (1.4) en x_0. Alors toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers Ω, le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans*

$$E = \{x \in M \,/\, X.V(x) = 0\}$$

Si en plus V est propre alors toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$ et donc toutes les trajectoires tendent vers Ω. Pour montrer que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, il suffit de montrer que $\Omega = \{x_0\}$.

Les théorèmes précédents prouvent que pour montrer qu'un point d'équilibre x_0 est stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov large en ce point. On a aussi le résultat suivant dû à Tchetaev [41] qui prouve l'instabilité d'un tel point.

Théorème 1.4 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $x_0 \in \partial\mathcal{O}$ ($\partial\mathcal{O}$ désigne la frontière de $\mathcal{O}$). S'il existe H une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $H > 0$ sur $\mathcal{O}$, $H = 0$ sur $\partial\mathcal{O}$ et $\dot{H} > 0$ sur $\mathcal{O}$, alors x_0 est un point d'équilibre instable.*

Dans tout ce qui suit, le point d'équilibre sera l'origine de $\mathbb{R}^n$.

1.3 Stabilisation des systèmes affines en la commande

Considérons le système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,u) \\ x \in U, \ u \in \mathcal{U} \end{cases} \tag{1.5}$$

où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et X est un champ de vecteurs tel que $X(0,0) = 0$.

Définition 1.2 *On dira que (1.5) est stabilisable s'il existe un feedback $u = u(x)$ tel que le système bouclé :*

$$\dot{x} = X(x, u(x))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

Dans la suite de ce paragraphe, on va rappeler quelques résultats qu'on utilisera par la suite, concernant la stabilisation des systèmes affines en contrôle.

1.3.1 Systèmes affines à dérive dissipative

Un des premiers résultats importants concernant cette classe de systèmes est dû à Jurdjevic et Quinn [24].

Théorème 1.5 (Jurdjevic-Quinn [24]) *soit*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.6}$$

où $X(x) = Ax$ *avec* A *une matrice antisymétrique de* $R_{n\times n}$. *Si*

$$\left\{ad^k XY(x),\ k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

alors (1.6) est G.A.S avec

$$u = -\langle x, Y(x)\rangle$$

Ce résultat a été ensuite généralisé à des systèmes affines quelconques par plusieurs auteurs, notamment dans [17] et [38] sous la forme suivante :

Théorème 1.6 ([38]) *soit*

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i Y^i(x) \tag{1.7}$$

un système C^∞ *défini sur* $\mathbb{R}^n$ *avec* $X(0) = 0$. *S'il existe une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie positive et propre telle que :*

(i) $X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) *L'ensemble*

$$W = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ /\ X^{k+1}V(x) = X^k Y^i V(x) = 0,\ k \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, m\right\}$$

est réduit à $\{0\}$.

Alors le système (1.7) bouclé avec $u_i(x) = -Y^i V(x)$ *est globalement asymptotiquement stable à l'origine.*

1.3.2 Construction du théorème d'Artstein pour les systèmes affines en contrôle

On a vu à travers le résultat précédent que la quête d'une commande stabilisante va de pair avec celle d'une fonction de Lyapunov convenant pour le système en boucle fermée, et il peut être utile de savoir s'il existe une fonction de Lyapunov héritant de propriétés géométriques dudit système, ce qui permettrait notamment de restreindre le choix et de répondre plus facilement à la question de la stabilité du système en boucle fermée. C'est ainsi que Sontag [44] a donné une démonstration constructive du théorème d'Artstein [2] pour les systèmes affines en contrôle.

Etant donné un système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,u) \\ x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{1.8}$$

et $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie positive et propre, on dira que V est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système (1.8) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), X(x,u) \rangle < 0 \; , \; \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

On peut remarquer que si (1.8) admet un feedback stabilisateur continu alors, d'après le théorème inverse de Lyapunov ([35], [29]), (1.8) admet une fonction de Lyapunov stricte de classe C^∞ et donc (1.8) admet une fonction de Lyapunov contrôlée.

Sontag ([44]) a démontré que si un système affine en contrôle admet une fonction de Lyapunov contrôlée, alors il est stabilisable avec un feedback C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; en plus, il a donné une formule explicite du feedback stabilisateur. On rappelle son résultat pour un système mono-entrée. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.9}$$

Supposons qu'il existe $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^∞, définie positive et propre telle que :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0 \; , \; \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

en d'autres termes :

$$\langle \nabla V(x), g(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$$

Posons

$$a(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad \text{et} \quad b(x) = \langle \nabla V(x), g(x) \rangle$$

alors

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-a(x) - \sqrt{a^2(x) + b^4(x)}}{b(x)} & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0 \end{cases}$$

stabilise (1.9).

1.4 Observabilité et observateurs

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{1.10}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $u \in \mathbb{R}^p$

Dans la quasi-totalité des systèmes concrets, on a rarement accès à l'état $x(t)$ du système, mais plutôt à une approximation $\hat{x}$ estimée par un observateur.

Définition 1.3 *On appelle observateur (ou reconstructeur de l'état) du système (1.10), tout système dynamique auxiliaire $\mathcal{O}$ permettant de reconstituer l'état $x(t)$ du système à observer à partir des entrées et sorties passées :*

$$\mathcal{O} : \begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{1.11}$$

Définition 1.4 *Le système dynamique $\mathcal{O}$ est appelé observateur asymptotique local si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) si pour t_1, $\hat{x}(t_1) = x(t_1)$ alors $\hat{x}(t) = x(t)$ pour tout $t \geq t_1$ et u admissible,

(ii) il existe un voisinage ouvert de l'origine $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour toute erreur initiale vérifiant $x(t_0) - \hat{x}(t_0) \in U$, on ait $x(t) - \hat{x}(t) \in U$, $\forall t \geq t_0$ et $\lim\limits_{t \to \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$.

Cet observateur est dit asymptotique global si dans la condition (ii) on remplace U par $\mathbb{R}^n$.

La notion d'observateur est toujours liée à celle de l'observabilité.

1.4.1 Distingabilité et observabilité

Un observateur a pour but d'estimer l'état. Ceci suppose que la connaissance des fonctions d'entrée et de sortie sur un intervalle de temps $[0, t[$, avec $t > 0$, permette de distinguer tout couple d'états initiaux.

Définition 1.5 *On considère le système (1.10). Deux états x_0 et x_1 sont dits indistingables, si pour toute fonction d'entrée $u(t)$ et pour tout $t \geq 0$, les sorties $h(\chi_u(t, x_0))$ et $h(\chi_u(t, x_1))$ qui en résultent sont égales.*

Réciproquement, on dit que x_0 et x_1 sont distingables s'il éxiste un temps $t \geq 0$ et une entrée admissible u tel que :

$$h(\chi_u(t, x_0)) \neq h(\chi_u(t, x_1))$$

où $\chi_u(t, x_0)$ est la solution à l'instant t du système (1.10) vérifiant $\chi_u(0, x_0) = x_0$.

la définition suivante est basée sur cette notion de distingabilité

Définition 1.6 *Le système (1.10) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts x_0 et x_1 indistingables.*

Pour les systèmes linéaires stationnaires, l'observabilité est caractérisée par la "condition du rang" bien connue :

Théorème 1.7 *Le système linéaire*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \\ y(t) = Cx(t) \end{array} \right. \tag{1.12}$$

$x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^p$

est observable si et seulement si le rang de la matrice $[C \quad CA ... CA^{n-1}]$ est égal à la dimension n de l'espace d'état.

On peut se demander s'il existe un équivalent de la condition du rang pour les systèmes non linéaires. La notion d'observabilité est globale : chaque point est distingable de tous les autres, même s'ils sont très éloignés. Au contraire, une condition du rang est de nature locale. On ne peut s'attendre qu'à une équivalence partielle.

1.4.2 Entrées universelles

Si un système linéaire (1.12) est observable, pour toute entrée $u(t)$, on peut reconstruire l'état initial. En effet, si on considère deux états initiaux x_0 et x_1, la quantité :

$$y_1(t) - y_0(t) = C(\chi_u(t, x_1) - \chi_u(t, x_0)) = Ce^{At}(x_1 - x_0)$$

ne dépend pas de l'entrée.

Cette propriété n'est en général pas vraie pour les systèmes non linéaires. Le fait qu'un système soit observable au sens de la définition 1.6 constitue donc une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'on puisse concevoir un observateur.

Il se peut en effet que certaines entrées u ne permettent pas de distinguer tout couple d'états initiaux distincts, comme l'exemple suivant le montre :

Exemple Soit le système bilinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x, \quad u \in \{0, 1\} \\ \\ y = x_1 \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que ce système est observable. Par exemple, avec $u \equiv 1$, le système linéaire engendré est observable. Cependant, pour $u \equiv 0$, deux valeurs différentes de x_2 sont indistingables, le système linéaire engendré n'est donc pas observable. Il n'est évidemment pas possible de construire un observateur qui fonctionne avec $u \equiv 0$, ni même avec des entrées voisines qui poseraient sans doute des problèmes de sensibilité.

Définition 1.7 *Une fonction d'entrée u est dite universelle pour le système (1.10) sur l'intervalle $[0, t]$ si tout couple d'états initiaux distincts x_o et x_1 peut être distingué par les sorties sur l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire s'il existe $\tau \in [0, t]$ tel que*

$$h(\chi_u(\tau, x_0)) \neq h(\chi_u(\tau, x_1))$$

Une entrée universelle sur $\mathbb{R}^+$ est dite universelle.
Une entrée non universelle est dite singulière.

La notion d'entrée universelle permet de définir une classe intéressante de systèmes : les systèmes uniformément observables.

Définition 1.8 *Un système dont toutes les entrées sont universelles est dit uniformément observable, ou encore, observable pour toute entrée.*

Si, pour tout $t > 0$, toutes les entrées sont universelles sur $[0, t]$, le système est dit uniformément localement observable.

On peut remarquer qu'un système linéaire observable est uniformément localement observable. Pour les systèmes non linéaires, l'observabilité n'implique pas en général l'observabilité uniforme.

2

Stabilisation d'une classe de systèmes bilinéaires dans $\mathbb{R}^3$

2.1 Introduction

Cette partie fait suite à plusieurs efforts récents concernant la stabilisation des systèmes homogènes (voir par exemple [7, 27, 28]). Si la stabilisation des systèmes linéaires est un problème résolu depuis longtemps, pour les systèmes non linéaires la question est beaucoup plus complexe. Dans ce dernier cas, il n'est pas possible d'avoir, en général, des résultats globaux. Classiquement, on obtient des conditions suffisantes de stabilisation locale par un feedback régulier en considérant le système linéarisé autour d'un point d'équilibre. Ainsi, Brockett [5] a démontré qu'une condition nécessaire d'existence d'une loi de commande stabilisatrice de classe C^1 en l'origine, est que le système linéarisé n'admette pas de mode instable incontrôlable.

Le but de ce travail est de construire explicitement des lois de commandes continues ou homogènes et analytiques sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et qui stabilisent asymptotiquement les systèmes bilinéaires de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R}\ A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \end{array} \right. \tag{2.1}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

avec $\det B \neq 0$ et ($\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_3 < 0$) ou ($\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_1\lambda_2 < 0$). On note par (A, B) un tel système.

Le linéarisé du système (2.1) au voisinage de l'origine est $\dot{x} = Ax$, ce qui ne donne aucune information sur la stabilisation du système (2.1). L'idée fondamentale est que si X est un champ de vecteurs (définie sur $\mathbb{R}^3$) homogène, il induit un système dynamique sur un espace de dimension inférieure : la sphère S^2. La construction d'un feedback homogène est basée sur l'utilisation du théorème de Coleman [11] qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système homogène sur $\mathbb{R}^3$ soit globalement asymptotiquement stable.

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^3$ et f est un champ de vecteurs homogène (non nécessairement polynomial) de degré impair k. Soient $r = \|x\|$ et $y = x/r$. En dérivant $x = ry$ et en posant $r^{m-1}(t)dt = d\tau$, on obtient un système sur la sphère S^2 en écrivant l'équation vérifiée par $\dot{y}$

$$\dot{y} = f(y) - \langle f(y), y \rangle y \tag{2.3}$$

($\langle\, ,\, \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien). Coleman [11] a montré le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Coleman) *L'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le syst'eme (2.2) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

a) $\langle f(y), y \rangle < 0$ *pour tous les points d'équilibres de (2.3).*

b) $\int_0^T \langle f(y), y \rangle d\tau < 0$ *pour toute solution périodique* $y(\tau)$ *du système (2.3) (T désigne la période de* $y(\tau)$*).*

Les points d'équilibres du système (2.3) sont trouvés en écrivant que les vecteurs y et $f(y)$ sont linéairement dépendants, ce qui est équivalent à dire que :

$$\begin{vmatrix} f_1(y) & y_1 \\ f_2(y) & y_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_2(y) & y_2 \\ f_3(y) & y_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} f_3(y) & y_3 \\ f_1(y) & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On va donner une classification complète (du point de vue de la stabilisation asymptotique) de ces systèmes par un feedback continu ou homogène de degré 0. Auparavant nous faisons les deux remarques suivantes :

1. Dire que le système (A, B) est asymptotiquement stabilisable est équivalent à dire que le système $(A + \gamma B, B)$ est asymptotiquement stabilisable pour tout réel γ. En effet, si le feedback $x \mapsto u(x)$ stabilise (A, B), le feedback $x \mapsto -\gamma + u(x)$ stabilise $(A + \gamma B, B)$.

2. Pour le système (A, B), l'asymptotique stabilité est une propriété indépendante du système de coordonnées dont lequel les matrices A et B sont écrites.

On dit que le système (A, B) est asymptotiquement contrôlable à l'origine si, de tout point, on peut atteindre n'importe quel voisinage de l'origine.

Dans le cas où λ_1, λ_2 et λ_3 ont le même signe, le système (A, B) est stabilisable par un feedback constant, car si $\mid \alpha \mid$ est suffisament grande, les valeurs propres de $A + \alpha B$ sont proches de $\alpha\lambda_i$.

Remarque : Soit A la réunion des points d'équilibres et des courbes périodiques du système (2.3) sur S^2. Soit C le cône engendré par A. Alors les deux conditions a et b du théorème de Coleman sont équivalentes à l'asymptotique stabilité de la restriction du système (2.2) à C.

2.2 Cas où $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_3 < 0$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$.

2.2.1 Cas où A est à valeurs propres réelles

Dans une base bien choisie de $\mathbb{R}^3$, les matrices A et B peuvent s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où $c = 0$ ou bien $c = 1$ et $a = d$.

Théorème 2.2 *Le système (A, B) est stabilisable si et seulement si a et d sont strictement négatifs et, dans ce cas, la stabilisation peut être accomplie à l'aide d'un feedback constant.*

Démonstration : Si $a < 0$ et $d < 0$ et si α est choisi positif et suffisament petit, toutes les valeurs propres de $A + \alpha B$ sont à parties réelles strictement négatives.

Supposons, maintenant, que $d \geq 0$. On considère la fonction définie sur $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ x_2 > 0, x_3 > 0 \}$ par :

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_2^{-\lambda_3} x_3^{\lambda_1}$$

Pour toute commande u, le calcul de $\dot{H}$, la dérivée de H le long des trajectoires du système (A, B) donne :

$$\dot{H} = -\lambda_3 d H$$

Les fonctions H et $\dot{H}$ sont positives sur l'intérieur de Ω et H s'annule sur la frontière de cet ensemble. Par application du théorème de Tchetaev [41], on peut affirmer qu'on ne peut pas trouver de feedback qui rende le système (A, B) stable à l'origine.

Si $a \geq 0$ et $c = 0$, la preuve est la même avec $H(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-\lambda_3} x_3^{\lambda_1}$ et $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3, x_1 > 0, x_3 > 0\}$.

2.2.2 Cas où A est à valeurs propres non réelles

Dans une base bien choisie de $\mathbb{R}^3$, les matrices A et B peuvent s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.3 *Le système (A, B) est stabilisable si et seulement si a est strictement négatif et, dans ce cas, la stabilisation peut être accomplie à l'aide d'un feedback constant.*

Démonstration Si $a < 0$, la preuve est la même que dans le théorème 2.2.

Supposons que $a \geq 0$ et considérons la fonction définie sur $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 \neq 0, x_3 > 0 \}$ par :

$$H(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)^{-\lambda_3/2} x_3^{\lambda_1}$$

Pour tout feedback u, le calcul de $\dot{H}$, la dérivée de H le long des trajectoires du système (A, B) donne :

$$\dot{H} = -\lambda_3 a (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{-\lambda_3}{2}} x_3^{\lambda_1}$$

On a $H > 0$ sur Ω, $H = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\dot{H} \geq 0$ sur Ω, donc on peut conclure comme dans le théorème 2.2.

2.3 Cas où $\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

Dans cette section, puisque u stabilise le système (A, B) est équivalent à $-u$ stabilise le système $(A, -B)$ on peut supposer que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$.

2.3.1 Cas où $a_{12} a_{21} = 0$

Supposons $a_{21} = 0$ (si $a_{12} = 0$ le raisonnement est le même), la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où b peut être choisi positif.

Théorème 2.4 *Le système (A, B) est stabilisable si et seulement si $c < 0$ et $c\lambda_1 - a\lambda_2 < 0$, dans ce cas, la stabilisation peut être assurée par un feedback constant.*

Démonstration : Les inégalités du théorème sont équivalentes à :

$$-\frac{c}{\lambda_2} < 0 \text{ et } -\frac{c}{\lambda_2} < -\frac{a}{\lambda_1}$$

ainsi, on peut trouver un nombre réel $\alpha < 0$ tel que $-\frac{c}{\lambda_2} < \alpha < -\frac{a}{\lambda_1}$; pour un tel α, on a $a + \alpha\lambda_1 < 0$ et $c + \alpha\lambda_2 < 0$, donc les valeurs propres de la matrice $A + \alpha B$ sont strictement négatives.

- Si $c\lambda_1 - a\lambda_2 \geq 0$, prenons un feedback u et considérons la fonction définie sur $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^3 \; / \; x_1 > 0, x_2 > 0 \}$ par :

  $$H(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1}$$

  La dérivée de H le long des trajectoires du système bouclé (A, B) est égale à :

  $$\dot{H}(x_1, x_2, x_3) \;=\; x_1^{-\lambda_2 - 1} x_2^{\lambda_1} \left((c\lambda_1 - a\lambda_2) - b\lambda_2 x_2\right)$$

  On peut voir que H satisfait les hypothèses du théorème de Tchetaev.

- Si $c \geq 0$, le raisonnement est le même avec :

  $$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^3 \; / \; x_2 > 0, x_3 > 0 \} \text{ et } H(x_1, x_2, x_3) = x_2^{\lambda_1} x_3^{-\lambda_2}$$

2.3.2 Cas où $a_{12}a_{21} < 0$

Si on effectue le changement de coordonnées linéaires dont la matrice de passage est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } m_1 = \varepsilon\sqrt{| \, a_{12} \, |},\, m_2 = \sqrt{| \, a_{21} \, |} \text{ et } \varepsilon = \text{signe de } a_{21},$$

la matrice B reste inchangée tandis que la matrice A devient :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } b = \sqrt{| \, a_{12}a_{21} \, |} > 0$$

On note $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les matrices suivantes :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la stabilisation du système (A, B), introduisons les quantités suivantes :

- $I_1 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 - 4b^2\lambda_1\lambda_2 = [\mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B} - \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B})]^2 - 4\det\tilde{A}\det\tilde{B};$
- $I_2 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = \mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B}^2 - \mathrm{Tr}\,\tilde{B}.\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B});$
- $I_3 = 2[b^2(\lambda_1+\lambda_2)^2 - (c\lambda_1 - a\lambda_2)^2]$
  $= 2\mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B}.\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B}) - \mathrm{Tr}\,\tilde{A}^2.(\mathrm{Tr}\,\tilde{B})^2 - (\mathrm{Tr}\,\tilde{A})^2.\mathrm{Tr}\,\tilde{B}^2;$
- $I_4 = c\lambda_1 + a\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B} - \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B}).$

Théorème 2.5 *Le système (A, B) est asymptotiquement stabilisable par feedback constant si et seulement si une au moins des conditions suivantes est vérifiée*

1. $I_4 \leq 0$ *et* $I_2 < 0$;
2. $I_4 \leq 0$ *et* $I_3 > 0$;
3. $I_2 < 0$ *et* $\det\tilde{A} > 0$;
4. $I_3 > 0$ *et* $\det\tilde{A} > 0$.

Démonstration : Pour un réel α soit :

$$P(X) = (\alpha\lambda_1 - X)\left(X^2 - (a+c+\alpha(\lambda_1+\lambda_2))\,X + \lambda_1\lambda_2\alpha^2 + (c\lambda_1 + a\lambda_2)\alpha + ac + b^2\right)$$

le polynôme caractéristique de la matrice $A + \alpha B$.

Le système (A, B) est stabilisable par feedback constant si et seulement si on peut trouver α tel que $\alpha\lambda_1 < 0$, $T = a + c + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ et $D = \lambda_1\lambda_2\alpha^2 + (\lambda_1 c + \lambda_2 a)\alpha + ac + b^2 > 0$. Le discriminant de D en tant que polynôme en α est égale à I_1 qui est strictement positif; les deux racines de D sont :

$$\alpha_1 = \frac{-(\lambda_1 c + \lambda_2 a) + \sqrt{I_1}}{2\lambda_1\lambda_2} \qquad \alpha_2 = \frac{-(\lambda_1 c + \lambda_2 a) - \sqrt{I_1}}{2\lambda_1\lambda_2}$$

Pour avoir $\alpha\lambda_1 < 0$ et $D > 0$, il faut trouver α tel que $\alpha < 0$ (car $\lambda_1 > 0$) et $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (car $\lambda_1\lambda_2 < 0$). Ceci est possible si $\alpha_1 < 0$, ce qui est équivalent à : $-I_4 + \sqrt{I_1} > 0$; si $I_4 \leq 0$, cette inégalité est satisfaite; si $I_4 > 0$, cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} & I_1 > I_3^2 \\ \Leftrightarrow\ & (c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 - 4b^2\lambda_1\lambda_2 > (c\lambda_1 + a\lambda_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 + ac = \det\tilde{A} > 0 \end{aligned}$$

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\,\tilde{B} = 0$, alors $T = a + c$ est négative si et seulement si $I_2 = 2\lambda_1^2(a+c) < 0$.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, pour avoir $T < 0$ il faut trouver α tel que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ et $\alpha < -\dfrac{a+c}{\lambda_1+\lambda_2}$, ceci est possible si et seulement si $\alpha_1 < -\dfrac{a+c}{\lambda_1+\lambda_2}$ ce qui est équivalent à :
$$I_2 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) < (\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{I_1}$$
Si $I_2 < 0$, cette inégalité est vérifiée; si $I_2 \geq 0$, elle est équivalente à :
$$\begin{array}{ll} & I_2^2 < (\lambda_1+\lambda_2)^2 I_1 \\ \Leftrightarrow & 4\lambda_1\lambda_2\left((c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 - b^2(\lambda_1+\lambda_2)^2\right) = -2\lambda_1\lambda_2 I_3 > 0 \\ \Leftrightarrow & I_3 > 0 \end{array}$$

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, le raisonnement est le même. ∎

On va maintenant examiner le cas où le système (A, B) est stabilisable par feedback homogène. Pour cela, introduisons les notations suivantes :
$$\tilde{a} = \frac{c\lambda_1 - a\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad \alpha = \frac{(2\tilde{a} + \delta)(\lambda_1 - \lambda_2)}{2}$$
où δ est une constante positive. On note r_1 et r_2 ($r_1 < 0$, $r_2 > 0$) les solutions de l'équation :
$$b\lambda_2 r^2 + \alpha r + b\lambda_1 = 0 \tag{2.4}$$
On note P le produit scalaire $P(x) = \langle\, Ax + u(x)Bx, x\,\rangle$, on a :
$$P(x) \;=\; ax_1^2 + cx_2^2 + (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_1 x_3^2)u(x)$$

Théorème 2.6 *Si les hypothèses du théorème 2.5 ne sont pas satisfaites, le système (A,B) n'est pas stabilisable par feedback constant mais si $a \geq 0$ ou bien $a < 0$ et $\det \tilde{A} > 0$, le système (A,B) est stabilisable par feedback homogène de degré 0. En effet, on peut prendre le feedback suivant :*
$$u(x) = \frac{c-a}{\lambda_1-\lambda_2} + \frac{1+r_1^2}{r_1(\lambda_1-\lambda_2)} \times$$
$$\frac{-2br_1\lambda_1\alpha x_1^2 + r_1\left(b^2(\lambda_1-\lambda_2)^2 - \alpha^2\right)x_1x_2 - 2br_1\lambda_2\alpha x_2^2 + b^2(\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)x_3^2}{b(\lambda_1^2(1+r_1^2)x_1^2 + \lambda_2^2(1+r_1^2)x_2^2 + (\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)x_3^2)}$$

Démonstration : Soit,
$$\dot{y} = X(y) = (A + u(y)B)y - \langle (A+u(y)B)y, y\rangle y \qquad y \in S^2 \tag{2.5}$$
la projection du système bouclé (A, B) sur S^2, la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. On va étudier le portrait de phase de ce système sur S^2.

Premièrement, il est clair que l'équateur (cercle d'équation $y_3 = 0$) est invariant sous l'action du champ X. Par ailleurs on va prouver que le cercle d'équation $r_1y_1 - y_2 = 0$ est aussi invariant et qu'il y a six points singuliers : les pôles $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ et quatre points localisés sur l'équateur. Finalement, on montrera que le système (2.5) n'admet pas de courbe périodique (autre que les points singuliers) et que la restriction du système (A, B) aux droites engendrées par les points singuliers est asymptotiquement stable.

Le cercle d'équation $r_1y_1 - y_2 = 0$ est invariant : Soit $y = (y_1, y_2, y_3)$ un point vérifiant $r_1y_1 - y_2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} r_1X_1(y) - X_2(y) &= \Big(-b(1+r_1^2) + (a-c)r_1 + r_1(\lambda_1 - \lambda_2)u(y_1, r_1y_1, y_3)\Big)\, y_1 \\ &= -\frac{(b\lambda_2 r_1^2 + \alpha r_1 + b\lambda_1)^2}{b(\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)((1+r_1^2)y_1^2 + y_3^2)}(1+r_1^2)y_1^3 \end{aligned}$$

qui est nul car r_1 satisfait l'équation (2.4).

Les points singuliers du champ de vecteurs X : $y \in S^2$ est un point singulier de (2.5) si et seulement s'il satisfait les équations suivantes obtenues en tenant compte du fait que les vecteurs $X(y)$ et y sont linéarement dépendants :

$$\begin{aligned} -b(y_1^2 + y_2^2) + (a-c)y_1y_2 + u(y)(\lambda_1 - \lambda_2)y_1y_2 &= 0 && (2.6)\\ (ay_1 - by_2)y_3 &= 0 && (2.7)\\ (by_1 + cy_2)y_3 - u(y)(\lambda_1 - \lambda_2)y_2y_3 &= 0 && (2.8) \end{aligned}$$

On note φ le membre gauche de l'équation (2.6).

On déduit de ces équations que les pôles $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ sont des points singuliers de (2.5), les autres points singuliers possibles étant localisés sur l'équateur (cercle d'équation $y_3 = 0$) ainsi que sur le cercle d'équation $ay_1 - by_2 = 0$.

Tout d'abord, on va prouver que quatre points singuliers sont localisés sur l'équateur : Soit $y = (y_1, y_2, 0)$ un point de l'équateur, d'une part, les équations (2.7) et (2.8) sont évidemment satisfaites. D'autre part, on a :

$$\varphi(y) = -\frac{(1+r_1^2)(b\lambda_2 y_2^2 + \alpha y_1y_2 + b\lambda_1 y_1^2)^2}{b(\lambda_1^2(1+r_1^2)y_1^2 + \lambda_2^2(1+r_1^2)y_2^2)}$$

Ainsi, les solutions de l'équations (2.6) sont les quatre points de l'équateur $\pm((1+r_i^2)^{-1/2}, r_i(1+r_i^2)^{-1/2}, 0)$ $(i = 1, 2)$.

Maintenant, on va prouver qu'il n'existe pas de points singuliers sur le cercle d'équation $ay_1 - by_2 = 0$ autre que les deux pôles N et S. Soit $y = (y_1, y_2, y_3)$ un point vérifiant $ay_1 - by_2 = 0$ et $y \neq N$, $y \neq S$, on a :

$$\varphi(y) = \frac{-r_1(1+r_1^2)(a^2\lambda_2 + a\alpha + b^2\lambda_1)^2 y_1^2 + b^2(\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)(a - br_1)(b - ar_1)y_3^2}{b^3 r_1(\lambda_1^2(1+r_1^2)y_1^2 + \lambda_2^2(1+r_1^2)y_2^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 r_1^2)y_3^2)} y_1^2$$

Si $a \geq 0$, puisque $y \neq N$ et $y \neq S$, le numérateur de cette égalité est toujours strictement positif.

Si $a < 0$, on a $b^2 + ac > 0$ et on peut vérifier que

$$\text{pour } \delta = -2\frac{\lambda_1(b^2 + ac)}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad \text{on a } r_1 = \frac{a}{b}$$

Ainsi pour $a \neq -b$, il est possible de choisir δ tel que l'expression $(a - br_1)(b - ar_1)$ soit strictement positive. Dans le cas où $a = -b$, comme $b^2 + ac > 0$, il est facile de voir que le système (A, B) satisfait les hypothèses du théorème 2.5.

Solutions périodiques : Une éventuelle solution périodique peut être localisée seulement dans l'une des régions délimitées par l'équateur et le cercle d'équation $r_1 y_1 - y_2 = 0$ (car ces deux cercles sont invariants). Maintenant, par application du théorème de Poincaré-Bendixon, il y aura au moins un point singulier à l'intérieur d'une telle courbe, mais on a vu que tous les points singuliers sont situés sur l'équateur ou sur le cercle d'équation $r_1 y_1 - y_2 = 0$. Ainsi le système (2.5) n'admet pas de courbes périodiques.

Pour conclure, il suffit de montrer que la restriction du système bouclé (A, B) aux directions invariantes est asymptotiquement stable. Autrement dit, il faut montrer que le produit scalaire P est négatif sur les points singuliers du système (2.5).

Asymptotique stabilité de la restriction du système bouclé aux directions invariantes : Les droites invariantes sont la droite qui passe par les points $N(0, 0, 1)$ et $S(0, 0, -1)$ et les droites D_i $(i = 1, 2)$ d'équation $x_2 - r_i x_1 = 0$ $(i = 1, 2)$ localisées dans le plan $x_3 = 0$.

Pour prouver l'asymptotique stabilité, on calcule le produit scalaire $P(x)$ où x est un point de ces droites.

Pour la droite (NS), on a

$$P(0, 0, x_3) = \lambda_1 u(0, 0, x_3)x_3^2 = \lambda_1 \left(\frac{c - a}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{1 + r_1^2}{r_1(\lambda_1 - \lambda_2)} b\right) x_3^2$$

- Si $a \geq 0$, $P(0, 0, x_3)$ est négatif si r_1 est suffisamment proche de zéro (*c-à-d.* si δ est suffisamment grand).

- Si $a < 0$, on a $b^2 + ac > 0$; dans ce cas, on a vu qu'on peut choisir $\delta > 0$ tel que r_1 soit proche de $\frac{a}{b}$. Et si r_1 est voisin de $\frac{a}{b}$, P est proche de

$$\frac{b^2 + ac}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} x_3^2$$

qui est strictement négatif.

Pour la droite D_1, on a :

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, 0) &= (a + cr_1^2 + (\lambda_1 + r_1^2\lambda_2)u(x_1, r_1x_1, 0)) \\ &= \tilde{a}(1 + r_1^2)x_1^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 r_1^2)(-2b\lambda_1\alpha + r_1(b^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \alpha^2) - 2br_1^2\lambda_2\alpha)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)} x_1^2 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $\tilde{a} = -\delta/2 + \alpha/(\lambda_1 - \lambda_2)$, on a :

$$P(x_1, x_2, 0) = -\frac{\delta}{2}(1 + r_1^2)x_1^2 + \frac{(b\lambda_2 r_1^2 + \alpha r_1 + b\lambda_1)(br_1(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \alpha(\lambda_1 + r_1^2\lambda_2))}{b(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + r_1^2\lambda_2^2)} x_1^2$$

Puisque $b\lambda_2 r_1^2 + \alpha r_1 + b\lambda_1 = 0$, on a $P = (-\delta/2)(1 + r_1^2)x_1^2$ qui est strictement négatif.

Pour la droite D_2, on a :

$$\begin{aligned} P &= (a + cr_2^2 + (\lambda_1 + r_2^2\lambda_2)u(x_1, r_2x_1, 0)) \\ &= -\frac{\delta}{2}(1 + r_2^2)x_1^2 + \frac{(b\lambda_2 r_2^2 + \alpha r_2 + b\lambda_1)(br_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - \alpha(\lambda_1 + r_2^2\lambda_2))}{b(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^2 + r_2^2\lambda_2^2)} x_1^2 \end{aligned}$$

Le fait que $b\lambda_2 r_2^2 + \alpha r_2 + b\lambda_1 = 0$, implique que $P = (-\delta/2)(1 + r_2^2)x_1^2$ qui est strictement négatif. La démonstration du théorème 2.6 est ainsi terminée. ∎

Théorème 2.7 *Si les hypothèses des théorèmes (2.5) et (2.6) ne sont pas satisfaites, le système (A, B) n'est stabilisable ni par feedback homogène de degré 0 ni par feedback continu.*

Démonstration : Si les hypothèses du théorème (2.6) ne sont pas vérifiées, alors $a < 0$ et $b^2 + ac \leq 0$.

Supposons qu'il existe un feedback u homogène de degré 0 qui stabilise le système (A, B). Rappelons que l'ensemble des points singuliers de la projection du système (A, B) (c-à-d, le système (2.5)), sur lequel on devrait avoir $P(y) < 0$, est donné par les équations (2.6–2.8). Puisque $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ sont points singuliers et $\lambda_1 > 0$, il est nécessaire que $u(0, 0, x_3) < 0$ pour tout $x_3 \neq 0$.

Supposons que le système (2.5) admet un point singulier (différent de N et S) sur le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $ay_1 - by_2 = 0$. L'équation (2.6) donne pour ce point :

$$\begin{aligned} u(y_1, y_2, y_3) &= \frac{c-a}{\lambda_1 - \lambda_2} + b\frac{y_1^2 + y_2^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)y_1y_2} \\ &= \frac{ac + b^2}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

et le produit scalaire P est égal à :

$$P = \lambda_1 \frac{(a^2+b^2)(b^2+ac)}{ab^2(\lambda_1 - \lambda_2)}y_1^2 + \lambda_1 \frac{b^2+ac}{a(\lambda_1-\lambda_2)}y_3^2$$

qui est positif, donc le système (2.5) n'admet pas de points singuliers (autres que N et S) sur le cercle $\mathcal{C}$.
Pour $(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{C}$ on a :

$$\varphi(y) = \frac{-(b^2+ac) + a(\lambda_1 - \lambda_2)u(y_1, y_2, y_3)}{b}y_1^2.$$

Cette expression ne doit pas changer de signe sur $\mathcal{C}$ — car on peut facilement vérifier que si les deux équations (2.6) et (2.7) sont vérifiées, il en est de même pour l'équation (2.8). Ainsi on aura un point singulier sur $\mathcal{C}$ (autre que N et S) — et, puisque $u(0,0,1) < 0$, $\varphi(y)$ doit être positive (car pour $y \in \mathcal{C}$, et y voisin de $(0,0,1)$, $\varphi(y) > 0$). D'un autre côté, $\varphi(-1,0,0) = -b < 0$ donc l'expression $\varphi(y_1, y_2, 0)$ s'annule en un point $(y_1, y_2, 0)$ tel que $\frac{y_1}{y_2} \in]-\infty, \frac{a}{b}[$. Ceci prouve l'existence d'un point singulier pour le système (2.5) sur l'équateur. Pour un tel point, le produit scalaire P est égal à :

$$P(y_1, y_2, 0) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(b\lambda_2\frac{y_2}{y_1} + (c\lambda_1 - a\lambda_2) + b\lambda_1\frac{y_1}{y_2}\right)$$

Puisque la fonction $\psi : r \mapsto b\lambda_2 r + (c\lambda_1 - a\lambda_2) + b\lambda_1/r$ est décroissante et puisque $\psi(a/b) = \lambda_1(b^2+ac)/a \geq 0$, on peut conclure que $P(y_1, y_2, 0) \geq 0$. Ainsi, les hypothèses du théorème de Coleman ne sont pas satisfaites, donc le système (A, B) ne peut pas être stabilisable par feedback homogène de degré 0.

Maintenant on va montrer que le système (A, B) ne peut pas être stabilisable par feedback continu.

Supposons qu'il existe un feedback continu $u = u(x)$ qui rende l'origine asymptotiquement stable (localement ou globalement). On rappelle qu'on a : $a < 0$ et $b^2 + ac \leq 0$, donc on a les deux cas suivants :

1^{er} **cas :** $a < 0$ et $b^2 + ac < 0$: Dans ce cas, pour tout réel α, la matrice $A + \alpha B$ a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive ce qui contredit le fait que $A + u(0)B$ est dissipative.

2^{eme} **cas :** $a < 0$ et $b^2 + ac = 0$: Pour que le système (A, B) soit stabilisable par feedback continu, il faut que $A + u(0)B$ ait des valeurs propres à partie réelle négative. En tenant compte du fait que $a < 0$ et $b^2 + ac = 0$, on a forcément $u(0) = 0$ (car si $\alpha \neq 0$, $A + \alpha B$ a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive). En plus, l'origine est le seul point d'équilibre sur le plan P d'équation $bx_1 + cx_2 = 0$, ainsi le signe de u ne change pas sur P (car si $x \in P^*$ avec $u(x) = 0$, alors x est un point d'équilibre). Et puisque le plan P contient la droite d'équation $x_1 = x_2 = 0$, qui est invariante, on a $u < 0$ sur P^*.

D'autre part, on va calculer l'indice de l'origine pour la restriction du système (A, B) sur le plan P_1 : $x_3 = 0$ qui est invariant. Le champ de vecteurs $Ax + uBx$ a la même direction que le vecteur $(c\lambda_1, -b\lambda_2)$ si et seulement si

$$(bx_1 + cx_2)(c\lambda_1 + a\lambda_2 + u\lambda_1\lambda_2) = 0$$

Si on considère un cercle C de centre 0 et de rayon suffisament petit on a

$$c\lambda_1 + a\lambda_2 + u\lambda_1\lambda_2 > 0 \quad \text{car} \quad u(0) = 0$$

Ainsi, le champ de vecteurs est colinéaire avec $(c\lambda_1, -b\lambda_2)$ en deux points : intersection du cercle C avec la droite d'équation $bx_1 + cx_2 = 0$. Un simple calcul montre que le champ de vecteurs coupe, aux deux points, la direction du vecteur $(c\lambda_1, -b\lambda_2)$ dans le sens antitrigonométrique. On endéduit que l'indice $i(C) = -1$ ce qui implique que l'origine ne peut pas être un point attractif. Ainsi le système (A, B) ne peut pas être stabilisable par feedback continu, ce qui termine la démonstration. ■

2.3.3 Cas où $a_{12}a_{21} > 0$.

Comme dans le paragraphe précédent, on fait le changement de coordonnées linéaires dont la matrice de passage est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } m_1 = \varepsilon\sqrt{| a_{12} |}, \ m_2 = \sqrt{| a_{21} |} \text{ et } \varepsilon = \text{signe de } a_{12}.$$

Avec ce changement de coordonnées, la matrice B reste inchangée tandis que A devient :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } b > 0.$$

Comme auparavant, introduisons les quantités suivantes :

- $I_1 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 + 4b^2\lambda_1\lambda_2 = \left(\mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B} - \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B})\right)^2 - 4\det\tilde{A}\det\tilde{B};$
- $I_2 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = \mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B}^2 - Tr\tilde{B}.\mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B});$
- $I_3 = c\lambda_1 + a\lambda_2 = \mathrm{Tr}\,\tilde{A}.\mathrm{Tr}\,\tilde{B} - \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}\tilde{B})$

où :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \; \tilde{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.8 *Le système* (A, B) *est asymptotiquement stabilisable par feedback constant si et seulement si une au moins des conditions suivantes est satisfaite*

- $I_1 > 0$, $I_2 < 0$ *et* $I_3 \leq 0$;
- $I_1 > 0$, $I_2 < 0$ *et* $\det\tilde{A} > 0$.

Démonstration : Pour α réel soit :

$$P(X) = (\alpha\lambda_1 - X)\left(X^2 - (a + c + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2))\,X + \lambda_1\lambda_2\alpha^2 + (\lambda_1 c + \lambda_2 a)\alpha + ac - b^2\right)$$

le polynôme caractéristique de la matrice $A + \alpha B$.

Le système (A, B) est stabilisable par feedback constant si et seulement si, on peut trouver α tel que $\alpha\lambda_1 < 0$, $T = a + c + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ et $D = \lambda_1\lambda_2\alpha^2 + (\lambda_1 c + \lambda_2 a)\alpha + ac - b^2 > 0$. Le discriminant de D en tant que polynôme en α est égale à I_1. Si I_1 est strictement positif, les deux racines de D sont :

$$\alpha_1 = \frac{-(\lambda_1 c + \lambda_2 a) + \sqrt{I_1}}{2\lambda_1\lambda_2} \qquad \alpha_2 = \frac{-(\lambda_1 c + \lambda_2 a) - \sqrt{I_1}}{2\lambda_1\lambda_2}$$

Pour avoir $\alpha\lambda_1 < 0$ et $D > 0$, il faut que I_1 soit strictement positif et il faut trouver α tel que $\alpha < 0$ (car $\lambda_1 > 0$) et $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (car $\lambda_1\lambda_2 < 0$).

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\,\tilde{B} = 0$, alors $T = a + c$ est strictement négatif si et seulement si $I_2 = 2\lambda_1^2(a + c) < 0$.
- Si $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, pour avoir $T < 0$, il faut trouver α tel que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ et $\alpha < -\dfrac{a+c}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Ceci est possible si et seulement si $\alpha_1 < -\dfrac{a+c}{\lambda_1 + \lambda_2}$, ce qui équivaut à :

$$I_2 = (c\lambda_1 - a\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) < (\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{I_1}$$

Cette inégalité est satisfaite si $I_2 < 0$. Si $I_2 \geq 0$, elle est équivalente à :

$$\begin{aligned} & I_2^2 < (\lambda_1 + \lambda_2)^2 I_1 \\ \Leftrightarrow\ & -4\lambda_1\lambda_2(c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 < 4\lambda_1\lambda_2 b^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (c\lambda_1 - a\lambda_2)^2 < -(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

- Si $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, le raisonnement et le même.

Finalement, pour avoir $\alpha\lambda_1 < 0$ et $D > 0$, il faut trouver α tel que $\alpha < 0$ et $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Ceci est possible si et seulement si $\alpha_1 < 0$, ce qui est équivalent à $-I_3 + \sqrt{I_1} > 0$. Cette dernière inégalité est équivalente à $I_3 \leq 0$ ou bien $I_3 > 0$ et $I_3^2 < I_1$ ce qui équivaut $\det\tilde{A} > 0$. ∎

Théorème 2.9 *Si $I_1 \leq 0$ ou $I_2 \geq 0$, le système (A, B) n'est pas asymptotiquement contrôlable à l'origine.*

Démonstration : Prenons pour u un contrôle quelconque et considérons la fonction définie sur
$\mathcal{R} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \}$ par :

$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1}$$

La dérivée de H le long des trajectoires du système (A, B) est donnée par :

$$\dot{H}(x_1, x_2, x_3) = x_1^{-\lambda_2 - 1} x_2^{\lambda_1 - 1} (b\lambda_1 x_1^2 + (c\lambda_1 - a\lambda_2)x_1 x_2 - b\lambda_2 x_2^2)$$

Si $I_1 \leq 0$ ou $I_2 \geq 0$, $\dot{H}$ est toujours positive sur $\mathcal{R}$. D'autre part, H est strictement positive sur $\mathcal{R}$ et s'annule sur la frontière de $\mathcal{R}$. D'après le théorème de Tchetaev [41], on peut conclure que le système (A, B) n'est pas stabilisable. ∎

Théorème 2.10 *Si $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, $I_3 > 0$ et $\det\tilde{A} \leq 0$, le système (A, B) n'est stabilisable ni par feedback homogène de degré 0 ni par feedback continu.*

Remarque : Il est facile de vérifier que :

$$I_1 < 0 \text{ et } I_3 > 0 \Longrightarrow a < 0$$

Démonstration : Notons X la projection du système bouclé (A, B) sur S^2 :

$$X(y) = (A + u(y)B)y - \langle (A + u(y)B)y, y \rangle y \tag{2.9}$$

Supposons qu'il existe un feedback homogène de degré 0 qui stabilise le système (A, B). Alors $y \in S^2$ est un point singulier de (2.9) si et seulement s'il satisfait les équations suivantes obtenues en écrivant que les vecteurs $X(y)$ et y sont linéairement dépendants :

$$-by_1^2 + (a-c)y_1y_2 + by_2^2 + u(y)(\lambda_1 - \lambda_2)y_1y_2 = 0 \tag{2.10}$$
$$(ay_1 + by_2)y_3 = 0 \tag{2.11}$$
$$(by_1 + cy_2)y_3 - u(y)(\lambda_1 - \lambda_2)y_2y_3 = 0. \tag{2.12}$$

On remarque que les pôles $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ sont points singuliers, donc il est nécessaire que $u(0,0,1) < 0$.

Supposons, maintenant, que le système (2.9) admette un point singulier $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ sur le cercle C d'équation $ay_1 + by_2 = 0$, d'après l'équation (2.10) on obtient :

$$u(y_1, y_2, y_3) = \frac{ac - b^2}{a(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Le produit scalaire $P(y) = \langle\, (A + u(y)B)y), y\,\rangle$ est égal à :

$$P(y) = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 + (\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_1 y_3^2)u(y)$$

Evaluée en y^0, cette expression donne :

$$P(y^0) = \frac{\lambda_1(ac - b^2)(a^2 + b^2)}{ab^2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(y_1^0\right)^2 + \frac{\lambda_1(ac - b^2)}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(y_3^0\right)^2$$

qui est positive, donc le système (2.9) ne peut pas avoir de points singuliers sur le cercle C autres que N et S. Par conséquent on peut affirmer que la partie gauche de l'équation (2.10) ne change pas de signe sur le cercle C — car on peut vérifier facilement que si les deux équations (2.10) et (2.11) sont satisfaites, il en est de même pour l'équation (2.12) — et évaluée sur ce cercle, cette expression donne :

$$\varphi(y) = \frac{y_1^2}{b}\left(ac - b^2 - a(\lambda_1 - \lambda_2)u(y)\right);$$

Puisque $a < 0$, $ac - b^2 \leq 0$ et $u(0,0,1) < 0$, on voit que $\varphi(y)$ est toujours négative sur C. Ainsi, on a d'une part $\varphi(y_1, -\frac{a}{b}y_1, 0) < 0$, d'autre part $\varphi(0,1,0) = b > 0$, donc $\varphi(y_1, y_2, 0)$ s'annule pour un point $(y_1, y_2, 0)$ sur l'équateur tel que $\frac{y_2}{y_1} \in]-\frac{a}{b}, +\infty[$. En un tel point, la valeur de u est :

$$u(y_1^0, y_2^0, 0) = \frac{c - a}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{b((y_1^0)^2 - (y_2^0)^2)}{y_1^0 y_2^0(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

et la valeur du produit scalaire P est égale à :

$$P(y_1^0, y_2^0, 0) = \frac{(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2}{y_1^0 y_2^0(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(b\lambda_1 \left(y_1^0\right)^2 + (c\lambda_1 - a\lambda_2)y_1^0 y_2^0 - b\lambda_2 \left(y_2^0\right)^2\right)$$

Le discriminant du polynôme $-b\lambda_2 r^2 + (c\lambda_1 - a\lambda_2)r + b\lambda_1$ est égal à $I_1 > 0$; ses deux racines sont :

$$r_1 = \frac{c\lambda_1 - a\lambda_2 + \sqrt{I_1}}{2b\lambda_2} \qquad r_2 = \frac{c\lambda_1 - a\lambda_2 - \sqrt{I_1}}{2b\lambda_2}$$

et on a $r_2 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{c\lambda_1 + a\lambda_2 - \sqrt{I_1}}{2b\lambda_2} < 0$ puisque :

$$I_1 = (c\lambda_1 + a\lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(ac - b^2) \leq (c\lambda_1 + a\lambda_2)^2 \quad \text{car} \quad ac - b^2 \leq 0$$

Comme $\dfrac{y_2^0}{y_1^0} > -\dfrac{a}{b} \geq r_2$, l'expression $P(y_1^0, y_2^0, 0)$ est positive.

En résumé, on est confronté aux deux situations suivantes :

1. Le système (2.9) a un point singulier sur le cercle C pour lequel le produit scalaire P est positif.

2. Le système (2.9) n'a pas de points singuliers sur le cercle C, mais, dans ce cas, on a forcément un point singulier sur l'équateur pour lequel le produit scalaire P est positif.

Ainsi, le système (2.9) admet au moins un point singulier pour lequel le produit scalaire P est positif, d'où par application du théorème de Coleman, le système (A, B) n'est pas stabilisable par feedback homogène de degré 0.

Maintenant, on va montrer que le système (A, B) ne peut pas être stabilisable par feedback continu. En effet, supposons qu'il existe un feedback continu $u = u(x)$ qui asymptotiquement stabilise (localement ou globalement) le système (A, B). D'après les hypothèses on a : $a < 0$ et $ac - b^2 \leq 0$.

Si $ac - b^2 < 0$, pour tout réel α, la matrice $A + \alpha B$ a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive. Ce qui contredit le fait que $A + u(0)B$ est dissipative.

Si $ac - b^2 = 0$, le raisonnement est le même que pour le théorème (2.7). ∎

3
Stabilisation des systèmes homogènes impairs

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la stabilisation des systèmes non linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs continu et homogène de degré impair (i.e toutes les composantes du champ sont des fonctions continues et homogènes de même degré k impair dans $\mathbb{N}^*$) et B est une matrice constante dans $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Les techniques de linéarisation ne peuvent pas s'appliquer pour stabiliser localement ce type de systèmes. Le but de ce travail est de donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces systèmes soit globalement asymptotiquement stabilisables (G.A.S) par feedbacks continus et homogènes, de même degré d'homogénéité que f.

Les systèmes de la forme (3.1) ont été étudiés dans [1] et [23]. Dans [1], A. Andreini, A. Baccioti, et G. Stefani ont donné une condition suffisante de stabilité du système (3.1), A. Iggidr et J. C. Vivalda [23] ont donné une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système (3.1) dans le cas où rang de $B = n - 1$.

3.2 Fonction de Lyapunov pour les systèmes continus et homogènes

Tout d'abord, on va rappeller un résultat concernant les fonctions de Lyapunov pour les systèmes continus et homogènes, dû à L. Rosier [42], puis on étudiera la stabilisabilité du système (3.1).

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.2}$$

où X est un champ de vecteurs continu et homogène.

Définition 3.1 *On dit qu'un champ de vecteurs X est homogène de degré p, si pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

$$X(\lambda x) = \lambda^p X(x)$$

Lorsque l'origine est asymptotiquement stable pour un champ de vecteurs X homogène de classe C^1, il existe une fonction de Lyapunov V homogène et définie positive qui vérifie $X.V(x) < 0, \quad \forall x \neq 0$.

Dans le cas où X est homogène et uniquement continu, Rosier [42] a montré les résultats suivants :

Théorème 3.1 *Si X est continu, homogène de degré q et si $x_0 = 0$ est un point d'equilibre asymptotiquement stable, alors il existe une fonction : $\bar{V}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. $\bar{V} \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$; $p \in \mathbb{N}^*$.
2. $\bar{V}(0) = 0, \quad \bar{V}(x) > 0, \quad \forall x \neq 0$ *et* $\bar{V}(x) \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$.
3. $\bar{V}$ *est homogène :* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \bar{V}(tx) = t^k \bar{V}(x), \quad k > p$
4. $\forall x \neq 0, \quad \nabla \bar{V}(x).X(x) < 0$.

Puisque le champ X est homogène, on rappelle que la stabilité locale et la stabilité globale sont équivalentes [20]. En appliquant le théorème de Kurzweil, la fonction de Lyapunov V sera de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, une fonction de Lyapunov homogène $\bar{V}$ candidate est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soient X et p comme dans le théorème 3.1. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que :*

$$f = \begin{cases} 0 & sur \ (-\infty, 1] \\ 1 & sur \ [2, +\infty) \end{cases} \quad et \ f' \geq 0 \ sur \ \mathbb{R}$$

soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors la fonction

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^{k+1}}(f \circ V)(sx_1, ..., sx_n)ds & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et satisfait :

1. $\nabla\bar{V}(x).X(x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$
2. $\bar{V}(tx) = t^k\bar{V}(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *et* $t > 0$.

En plus, si $k > p$, alors $\bar{V}$ est de classe C^p en 0.

On remarque que k et p sont arbitrairement choisis dans $\mathbb{N}^*$, donc on peut les choisir aussi grand que l'on veut pour que $\bar{V}$ soit suffisament régulière à l'origine.

3.3 Stabilisation

Après changement de coordonnées linéaire, le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = g_1(y) \\ \vdots \\ \dot{y}_q = g_q(y) \\ \dot{y}_{q+1} = g_{q+1}(y) + \tilde{u}_{q+1} \\ \vdots \\ \dot{y}_n = g_n(y) + \tilde{u}_n \end{cases} \tag{3.3}$$

Où $n - q$ est le rang de B et $g = {}^t(g_1, ..., g_n)$ est un champ de vecteurs continu homogène de même degré que f.

Introduisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H) Il existe une fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, propre, définie positive et homogène telle que :

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) g_i(y) < 0, \quad \forall y \in E$$

où

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \frac{\partial V}{\partial y_{q+1}}(y) = ... = \frac{\partial V}{\partial y_n}(y) = 0 \right\}$$

Théorème 3.2 *Le système (3.3) est globalement asymptotiquement stable par un feedback continu et homogène de même degré que g, si et seulement si l'hypothèse (H) est satisfaite.*

Démonstration : Puisque V est supposée être homogène et définie positive, son degré d'homogénéité est pair noté d. Pour montrer que la condition H est suffisante, on va prouver la proposition suivante qui donne le feedback stabilisant.

Proposition 3.2 *Si la condition (H) est réalisée alors le système (3.3) (et donc le système (3.1)) est G. A. S à l'aide du feedback donné par :*

$$\begin{cases} \tilde{u}_i(y) = -\lambda \|y\|^{k-d+1} \dfrac{\partial V}{\partial y_i}(y) & si \;\; y \neq 0 \\ 0 & si \;\; y = 0 \end{cases} \qquad pour \;\; i \in \{q+1, ..., n\} \tag{3.4}$$

Démonstration de la proposition : Il est simple de vérifier que $\tilde{u}$ est continu sur $\mathbb{R}^n$ et homogène de degré k.
Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que :

$$\dot{V}(y) < 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Soit C^+ le cône fermé :

$$C^+ = \{y \in \mathbb{R}^n : \;\; \nabla V(y) g(y) \geq 0\}$$

et C^- son cône complémentaire :

$$C^- = \{y \in \mathbb{R}^n : \;\; \nabla V(y) g(y) < 0\}$$

La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (3.3-3.4) est :

$$\dot{V}(y) = \nabla V(y) g(y) - \lambda \|y\|^{k-d+1} \sum_{i=q+1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}(y)\right)^2$$

$\dot{V}$ est une fonction homogène de degré pair $d + k - 1$; donc son signe ne change pas le long de toute droite passant par l'origine. D'où, il suffit de montrer que $\dot{V}$ est strictement négative sur la sphère unitée S.

Pour tout $y \in S$ on a :

$$\dot{V}(y) = \nabla V(y) g(y) - \lambda \sum_{i=q+1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}(y)\right)^2$$

Soient δ_1 et δ_2 les nombres suivants :

$$\delta_1 = \max_{y \in S} \nabla V(y) g(y), \quad \delta_2 = \min_{y \in S \cap C^+} \sum_{i=q+1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}(y)\right)^2$$

S et $S \cap C^+$ sont compacts, donc δ_1 et δ_2 existent. En plus, sous l'hypothèse (H), on remarque que $E \subset C^-$, d'où $E \cap C^+ = \emptyset$, ce qui implique que

$$\sum_{i=q+1}^{n} \Big(\frac{\partial V}{\partial y_i}(y)\Big)^2 > 0, \quad \forall y \in S \cap C^+$$

donc $\delta_2 > 0$. En choisissant $\lambda > \dfrac{\delta_1}{\delta_2}$, on a bien $\dot{V}(y) < 0 \;\; \forall y \in S$.

Ceci prouve que l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé (3.3-3.4).

Montrons, maintenant, que la condition (H) est une condition nécessaire pour que le système (3.3) soit stabilisable par feedback continu et homogène de même degré que g.

Supposons qu'un tel feedback existe, alors, la partie droite du système (3.3) sera un champ de vecteurs continu et homogène. D'après le théorème 3.1, il existe une fonction de Lyapunov V homogène telle que :

$$\dot{V}(y) = \nabla V(y) g(y) + \sum_{i=q+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) \tilde{u}_i(y) < 0.$$

En particulier si $y \in E$ on a :

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) g_i(y) < 0.$$

Ceci complète la démonstration du théorème. ■

Exemple : Considérons le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -2x_1^3 - 5x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2 - x_2^3 + x_1 x_3^2 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 5x_1 x_2^2 - 2x_2^3 + x_2 x_3^2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3 + 5x_2^3 + u = f_3(x_1, x_2, x_3) + u \end{array} \right. \tag{3.5}$$

On ne peut pas utiliser les résultats prouvés dans [23] puisque le rang de B est égal à 1.

On peut aussi montrer facilement qu'on ne peut pas trouver de matrice symétrique définie positive qui satisfait l'hypothèse donnée dans [1] :

$$Ker^t BP \subset \{x \in \mathbb{R}^3 :^t xPf(x) < 0\} \cup \{0\}$$

Par contre si on considère la fonction homogène et définie positive suivante

$$V(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 (x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2) + (x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2)^2 + x_3^4 = \tilde{V}(x_1, x_2) + x_3^4$$

elle satisfait l'hypothèse (H). En effet, dans ce cas on a

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : \frac{\partial V}{\partial x_3}(x) = 0\right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \ x_3 = 0\}$$

et on peut facilement vérifier que pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in E$ on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(x) f_1(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) f_2(x_1, x_2, x_3) = -2(x_1^2 + x_2^2)\tilde{V}(x_1, x_2) < 0$$

En appliquant le résultat prouvé ci-dessus

$$u(x_1, x_2, x_3) = -4\lambda x_3^3$$

est un feedback homogène qui stabilise le système (3.5) pour une valeur de $\lambda > \frac{\delta_1}{\delta_2}$.

4
Observateur pour les systèmes polynomiaux homogènes de degré impair

4.1 Introduction

Dans la quasi-totalité des systèmes concrets, pour des raisons de réalisabilité technique, la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à un instant donné t, l'état $x(t)$ ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie $y(t)$ à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité, l'état $x(t)$ peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé : $u([0,t])$, $y([0,t])$.
Le but d'un observateur est précisement de fournir une "estimation" de la valeur courante de l'état en fonction des entrées et sorties passées.

Si la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires invariants a été résolue dans le cadre déterministe par Luenberger [33] et stochastique par Kalman [25], la grande diversité des systèmes non linéaires a engendré de nombreuses études sur les observateurs non linéaires (voir par exemple [4, 12, 18, 50, 51]), et ce sujet reste toujours d'actualité. L'existence d'un observateur est toujours liée à l'observabilité dont plusieurs résultats, concernant les systèmes non linéaires, ont été faits ces dernières années [15, 19, 36, 46, 47].

Dans ce travail, on donnera une condition suffisante pour l'existence d'un observateur pour les systèmes polynomiaux homogènes de degré impair, que l'on construira explicitement.

4.2 Système et hypothèses

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x) \\ y = Cx \end{cases} \tag{4.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $h(x) = {}^t(h_1(x), ..., h_n(x))$ est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair $k \geq 1$, et C est une matrice constante de $\mathbb{R}_{(m \times n)}$.

Rappelons que h est homogène de degré k signifie : $h(\lambda x) = \lambda^k h(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Dans toute la suite, on supposera que le système (4.1) est observable.

Soit $p \in \mathbb{N}$ le rang de C. Dans une base de $\mathbb{R}^n$, le système (4.1) s'écrira sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y_i = \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \neq 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, ..., p \end{cases} \tag{4.2}$$

où $f = {}^t(f_1, ..., f_n)$ est un champ de vecteurs polynomial et homogène de même degré que h.

Remarquons que, puisque le changement de coordonnées effectué est linéaire, l'observabilité du système (4.1) est équivalente à celle du système (4.2) et si le système (4.2) admet un observateur, il en est de même pour le système (4.1). Ainsi, dans tout ce qui suit, on considérera le système sous la forme (4.2).

Un observateur pour le système (4.2) est un système de la forme

$$\dot{\hat{x}} = g(\hat{x}, y) \tag{4.3}$$

qui produit l'estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$, du système (4.2). Plus précisément, si les systèmes (4.2) et (4.3) sont initialisés au même point ($x(0) = \hat{x}(0)$), on veut avoir $\hat{x}(t) = x(t)$, $\forall t \geq 0$ (donc il faudrait que : $g(x, Cx) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$), et si $e = \hat{x} - x$, on souhaite que le système

$$\dot{e} = g(x + e, y) - f(x) \tag{4.4}$$

soit globalement asymptotiquement stable à l'origine.

On va donner quelques définitions dont nous aurons besoin par la suite.

Définition 4.1 *On appelle fonction de classe K, toute fonction φ : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \longmapsto \varphi(r)$, continue, strictement croissante et nulle à l'origine.*

Définition 4.2 *Soit V : $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$*

1. *On dira que V est définie positive s'il existe une fonction φ de classe K telle que*

$$V(x,t) \geq \varphi(\|x\|), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[$$

2. *Si en plus $\varphi(\|x\|) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, la fonction $V(x,t)$ sera dite radialement non bornée.*

Remarque : Pour les fonctions autonomes $V(x)$,

1. V définie positive est équivalent à $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
2. V est radialement non bornée entraîne que $V(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, c'est-à-dire que V est propre.

Proposition 4.1 *Une condition nécessaire pour que (4.3) soit un observateur pour le système (4.2) est l'existence d'une fonction de classe C^1, $V(e,t)$, définie positive et radialement non bornée telle que :*

$$\nabla V(e,t)\big(f(x+e) - f(x)\big) + \frac{\partial V}{\partial t}(e,t) < 0, \quad \forall e \in KerC \setminus \{0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0 \tag{4.5}$$

Démonstration : Le système (4.3) est un observateur global pour le système (4.2) si l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour l'équation de l'erreur (4.4) . Dans ce cas, par le théorème inverse de Lyapunov [20], il existe une fonction de classe C^1, $V(e,t)$, définie positive et radialement non bornée telle que :

$$\nabla V(e,t)\big(g(\hat{x}, y) - f(x)\big) + \frac{\partial V}{\partial t}(e,t) < 0, \quad \forall e \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0 \tag{4.6}$$

Maintenant, si $e \in KerC \setminus \{0\}$, on a :

$$C\hat{x} = Cx = y$$

ce qui implique

$$g(\hat{x}, y) = g(\hat{x}, Cx) = g(\hat{x}, C\hat{x}) = f(\hat{x}) = f(x + e)$$

et l'inégalité (4.6) devient :

$$\nabla V(e,t)\big(f(x+e)-f(x)\big)+\frac{\partial V}{\partial t}(e,t)<0,\quad \forall e\in KerC\setminus\{0\},\quad \forall x\in \mathbb{R}^n,\quad \forall t\geq 0 \quad (4.7)$$

ce qui termine la démonstration. ■

Dans la suite, on va supposer l'existence d'une fonction de classe C^1 définie positive $V:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, homogène, propre et indépendante du temps t qui satisfait les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ $\nabla V(e)\big(f(x+e)-f(x)\big)<0,\quad \forall e\in KerC\setminus\{0\},\quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$

$(\mathcal{H}_2)$ $\dfrac{\partial V}{\partial e_i}(e)=0,\quad$ pour $i=1,..,p,\quad \forall e\in KerC.$

$(\mathcal{H}_3)$ $\langle\nabla V(e),{}^tCCe\rangle\geq 0,\quad \forall e\in\mathbb{R}^n.$

Remarque : La condition $(\mathcal{H}_1)$ n'est autre que l'inégalité (4.5) dans le cas où la fonction de Lyapunov de la proposition est en plus indépendante du temps et homogène.

4.3 Conception de l'observateur :

Considérons le système :

$$\dot{\hat{x}}=f(\hat{x})-\alpha\Big(\|\hat{x}\|^{k-1}+\|{}^tC(C\hat{x}-y)\|^{k-1}\Big){}^tC(C\hat{x}-y)\quad \text{avec}\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha>0 \quad (4.8)$$

Théorème 4.1 *Soient f et C comme énoncés auparavant. S'il existe une fonction V de classe C^1 définie positive, propre et homogène qui satisfait les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ ou bien $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_3)$, alors pour un certain $\alpha>0$, le système (4.8) est un observateur asymptotique global pour le système (4.2).*

Démonstration : Tout d'abord, puisque V est définie positive et homogène, son degré d'homogénéité est pair, on le note $2d$.

En utilisant (4.2) et (4.8) et le fait que $e=\hat{x}-x$, l'équation d'erreur est donnée par :

$$\dot{e}=f(x+e)-f(x)-\alpha\Big(\|x+e\|^{k-1}+\|{}^tCCe\|^{k-1}\Big){}^tCCe \quad (4.9)$$

Supposons que $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont satisfaites, pour montrer que le système (4.8) est un observateur global pour (4.2), il suffit de montrer que le système (4.9) est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Considérons la fonction suivante :

$$W(e) = \frac{1}{2d}({}^te^tCCe)^d + U(e)$$

où $U(e) = V(0,...,0,e_{p+1},...,e_n)\ \forall e \in \mathbb{R}^n$. Il est facile de voir que W est de classe C^1, définie positive, propre et homogène de même degré d'homogénéité que V, $2d$, et

$$\nabla W = ({}^te^tCCe)^{d-1}.{}^te^tCC+$$

$$\Big(0,\ldots,0,\frac{\partial V}{\partial e_{p+1}}(0,\ldots,0,e_{p+1},\ldots,e_n),\ldots,\frac{\partial V}{\partial e_n}(0,\ldots,0,e_{p+1},\ldots,e_n)\Big)$$

Puisque ${}^t({}^tCCe) = {}^t(\lambda_1^2e_1,...,\lambda_p^2e_p,0,...,0)$, la dérivée de W le long des trajectoires de (4.9) est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{W}(e) = \ & \nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big) \\ & -\alpha({}^te^tCCe)^{d-1}\big(\|x+e\|^{k-1}+\|{}^tCCe\|^{k-1}\big)\|{}^tCCe\|^2\end{aligned} \tag{4.10}$$

Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,e) = \nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big)-\alpha({}^te^tCCe)^{d-1}\big(\|x+e\|^{k-1}+\|{}^tCCe\|^{k-1}\big)\|{}^tCCe\|^2$$

On a :

$$F(\lambda x,\lambda e) = \lambda^{2d+k-1}F(x,e)\ \ \forall (x,e)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

donc $\dot{W}$ est homogène comme fonction en (x,e), de degré pair $2d+k-1$. Ainsi, son signe ne change pas le long de toute droite de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ passante par l'origine. Ce signe peut être évalué sur la sphère :

$$S = \Big\{(x,e)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n/\ \|(x,e)\| = \sqrt{\|x\|^2+\|e\|^2} = \sqrt{2}\Big\}.$$

Soit

$$\mathcal{D}_1 = \Big\{(x,e)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n/\|x\| = 1,\ \|e\| = 1\Big\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \Big\{(x,e)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n/1 < \|x\| \le \sqrt{2},\ \|e\| < 1\Big\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \Big\{(x,e)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n/\|x\| < 1,\ 1 < \|e\| \le \sqrt{2}\Big\}$$

On a, évidemment :

$$S \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$$

Soit

$$C_+ = \Big\{(x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \ \nabla W\big(f(x+e) - f(x)\big) \geq 0\Big\}$$

et

$$C_- = \Big\{(x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \ \nabla W\big(f(x+e) - f(x)\big) < 0\Big\}$$

Sur $C_- \cap \big(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3\big)$, on a :

$$\dot{W}(e) < 0 \tag{4.11}$$

Maintenant, pour montrer que $\dot{W}(e) < 0 \ \ \forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, il suffit de montrer que :

$$\dot{W}(e) < 0, \ \ \forall (x,e) \in C_+ \cap \big(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3\big) \ \text{ avec } \ e \neq 0$$

Soit π_2 la deuxième projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ définit par :

$$\begin{array}{rll} \pi_2 : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & (x,e) & \longmapsto e \end{array}$$

On note $\mathcal{Q}_2 = \pi_2(C_+)$ la deuxième projection de C_+ sur $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{Q}_2$ est fermé par ce que C_+ est fermé et par ce que π_2 envoie les ouverts sur les ouverts. De $(\mathcal{H}_1), (\mathcal{H}_2)$ et en tenant compte de la forme de W et U, on peut déduire que pour tout $e \in KerC \setminus \{0\}$, on a :

$$\nabla W(e)\big(f(x+e) - f(x)\big) = \nabla U(e)\big(f(x+e) - f(x)\big) = \nabla V(e)\big(f(x+e) - f(x)\big) < 0$$

ce qui implique que :

$$\mathbb{R}^n \times KerC \subset C_- \cup \mathbb{R}^n \times \{0\}$$

Puisque $C_- \cap C_+ = \emptyset$, on a :

$$\mathcal{Q}_2 \cap KerC = \{0\} \tag{4.12}$$

D'autre part, soit G la fonction définie de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$G(x,e) = \nabla W(e)\big(f(x+e) - f(x)\big) \ \text{ pour tout } \ (x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$G(\lambda(x,e)) = G(\lambda x, \lambda e) = \lambda^{2d+k-1} \nabla W(e)\big(f(x+e) - f(x)\big) = \lambda^{2d+k-1} G(x,e)$$

ce qui implique que G est homogène sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que $\mathcal{Q}_2$ est un cône. En effet, pour $e \in \mathcal{Q}_2$, $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x,e) \in C_+$, donc $G(x,e) \geq 0$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$G(\lambda x, \lambda e) = \lambda^{2d+k-1} G(x,e) \geq 0$$

car $2d+k-1$ est pair, ce qui implique que $(\lambda x, \lambda e) \in C_+$ et donc $\lambda e \in \mathcal{Q}_2$. Le fait que $\mathcal{Q}_2$ soit un cône entraine que

$$\{e/\ \|e\| = r\} \cap \mathcal{Q}_2 = \Big\{re/\ e \in \{\|e\| = 1\} \cap \mathcal{Q}_2\Big\}, \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

En utilisant le fait que $\mathcal{Q}_2$ est un fermé et $\{\|e\| = 1\}$ est un compact, donc $\{\|e\| = 1\} \cap \mathcal{Q}_2$ est compact, et en tenant compte de l'égalité (4.12), on a :

$$\min_{\{\|e\|=1\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{k+1}({}^te{}^tCCe)^{d-1} = h_1 > 0$$
$$\min_{\{\|e\|=1\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{2}({}^te{}^tCCe)^{d-1} = h_2 > 0$$

A la suite de l'égalité (4.13), on a aussi

$$\min_{\{\|e\|=r\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{k+1}({}^te{}^tCCe)^{d-1} = r^{2d+k-1}h_1$$
$$\min_{\{\|e\|=r\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{2}({}^te{}^tCCe)^{d-1} = r^{2d}h_2$$

Soit

$$H = \max_{(x,e)\in C_+\cap(\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3)} \Big\|\nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big)\Big\|$$

- Sur $\mathcal{D}_1 \cap C_+$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{W}(e) &\leq H - \alpha \min_{\{\|e\|=1\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{k+1}({}^te{}^tCCe)^{d-1} \\ &\leq H - \alpha h_1 < 0 \end{aligned}$$

si on choisit α tel que :

$$\alpha > \frac{H}{h_1} \tag{4.14}$$

- Si $(x,e) \in \mathcal{D}_2 \cap C_+$ avec $\|e\| = r > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{W}(e) &= \nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big) - \\ &\quad \alpha\Big(\|x+e\|^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 \\ &\leq \nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big) - \\ &\quad \alpha\Big((\|x\|-\|e\|)^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 \\ &\leq \nabla W(e)\big(f(x+e)-f(x)\big) - \\ &\quad \alpha\Big((1-\|e\|)^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 \end{aligned}$$

1. Si $\|e\| = r \geq \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{W}(e) &\leq H - \alpha\|{}^tCCe\|^{k+1}({}^te{}^tCCe)^{d-1} \\
&\leq H - \alpha \min_{\{\|e\|=r\}\cap\mathcal{Q}_2} \|{}^tCCe\|^{k+1}({}^te{}^tCCe)^{d-1} \\
&\leq H - \alpha r^{2d+k-1}h_1 \\
&\leq H - \alpha\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2d+k-1}h_1
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement négative si on choisit α tel que :

$$\alpha > \frac{H.2^{2d+k-1}}{h_1} \tag{4.15}$$

2. Si $\|e\| = r < \frac{1}{2}$, on a :

$$\Big|\nabla W(e)(f(x+e) - f(x))\Big| \leq \|\nabla W(e)\|\,\|f(x+e) - f(x)\|$$

Puisque W est homogène de degré $2d$, ∇W est aussi homogène de degré $2d-1$, et donc :

$$\|\nabla W(e)\| \leq \delta_1\|e\|^{2d-1}$$

car

$$\begin{aligned}
\|\nabla W(e)\| &= \left\|\nabla W\Big(\|e\|\frac{e}{\|e\|}\Big)\right\| \\
&= \|e\|^{2d-1}\left\|\nabla W\Big(\frac{e}{\|e\|}\Big)\right\| \leq \max_{e'\in S^n}\|\nabla W(e')\|\|e\|^{2d-1}
\end{aligned}$$

où S^n est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ qui est compacte. Et puisque f est polynomiale on a

$$|f_j(x+e) - f_j(x)| = \left|\sum_{\alpha^i,\beta^i} a^j_{\alpha^i,\beta^i} x_1^{\alpha_1^i}\ldots x_n^{\alpha_n^i} e_1^{\beta_1^i}\ldots e_n^{\beta_n^i}\right|$$

avec

$$\alpha^i = \alpha_1^i + \ldots + \alpha_n^i,\quad \beta^i = \beta_1^i + \ldots + \beta_n^i,\quad \alpha^i + \beta^i = k \text{ et } \beta^i \geq 1 \;\; \forall i$$

En tenant compte du fait que $\|e\| < 1$, $\|x\| > 1$, $\alpha^i + \beta^i = k$ et $\beta^i \geq 1$ pour tout i, on a :

$$\|f(x+e) - f(x)\| \leq \delta_2 \|e\| \|x\|^{k-1}$$

donc

$$\left|\nabla W(e)(f(x+e) - f(x))\right| \leq \delta_1 \delta_2 r^{2d} \|x\|^{k-1}$$

et

$$\begin{aligned}
\dot{W}(e) &\leq \delta_1\delta_2 r^{2d}\|x\|^{k-1} - \alpha(1-r)^{k-1}({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 \\
&\leq \delta_1\delta_2 r^{2d}(\sqrt{2})^{k-1} - \alpha(\frac{1}{2})^{k-1} \min_{\{\|e\|=r\}\cap Q_2} ({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 \\
&\leq \delta_1\delta_2 r^{2d}(\sqrt{2})^{k-1} - \alpha(\frac{1}{2})^{k-1} h_2 r^{2d}
\end{aligned}$$

Cette quantité est strictement négative si on choisit α tel que :

$$\alpha > \frac{\delta_1\delta_2(2\sqrt{2})^{k-1}}{h_2} \tag{4.16}$$

- Si $(x,e) \in \mathcal{D}_3 \cap C_+$, alors $\|e\| = r > 1$, et ainsi

$$\begin{aligned}
\dot{W}(e) &\leq H - \alpha\|{}^tCCe\|^{k+2}({}^te{}^tCCe)^{d-1} \\
&\leq H - \alpha \min_{\{\|e\|=r\}\cap Q_2} \|{}^tCCe\|^{k+2}({}^te{}^tCCe)^{d-1} \\
&\leq H - \alpha r^{2d+k-1} h_1 \\
&\leq H - \alpha h_1
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité est strictement négative par le choix de $\alpha > \dfrac{H}{h_1}$.

Maintenant, si α est choisi tel que les trois inégalités (4.14),(4.15) et (4.16) sont satisfaites, ce qui est toujours possible, alors on a :

$$\dot{W}(e) < 0, \quad \forall (x,e) \in C_+ \cap \left(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3\right) \text{ avec } e \neq 0$$

L'expression précédente en conjonction avec (4.11), donne

$$\dot{W}(e) < 0 \quad \forall (x,e) \in \Big(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3\Big) \quad \text{avec} \quad e \neq 0$$

et par conséquent

$$\dot{W}(e) < 0 \quad \forall e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ainsi, W est une fonction de Lyapunov stricte pour le système (4.9), donc son origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable. D'où, le système (4.8) est un observateur asymptotique globale pour le système (4.2).

Maintenant si $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_3)$ sont satisfaites, le raisonnement est le même avec la fonction de Lyapunov

$$W(e) = \frac{1}{2d}(e^T C^T C e)^d + V(e)$$

en effet, la dérivée de W le long des trajectoires de (4.9) est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{W}(e) &= \nabla W(e)\Big(f(x+e) - f(x)\Big) \\ &\quad -\alpha\Big(\|x+e\|^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)\Big(({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2 + \langle \nabla V(e), {}^tCCe\rangle\Big) \\ &\leq \nabla W(e)\Big(f(x+e) - f(x)\Big) - \alpha\Big(\|x+e\|^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)({}^te{}^tCCe)^{d-1}\|{}^tCCe\|^2\end{aligned}$$

cette dernière inégalité est la même que l'inégalité (4.10), la démonstration du théorème 4.1 est ainsi terminée. ∎

Remarque : Dans le cas où le système (4.2) est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{4.17}$$

où B est une matrice de $\mathbb{R}_{n \times m}$. Alors si f et C satisfont les hypothèses du théorème 4.1 et si le système (4.17) est observable, il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \alpha\Big(\|\hat{x}\|^{k-1} + \|{}^tC(C\hat{x} - y)\|^{k-1}\Big)^t C(C\hat{x} - y) + Bu \tag{4.18}$$

soit un observateur asymptotique global pour le système (4.17). En effet, l'équation de l'erreur est donnée par :

$$\dot{e} = f(x+e) - f(x) - \alpha\Big(\|x+e\|^{k-1} + \|{}^tCCe\|^{k-1}\Big)^t CCe \tag{4.19}$$

qui est globalement asymptotiquement stable à l'origine.

4.4 Exemple :

Une classe de système qui satisfait les hypothèses du théorème 4.1 est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x,z) \\ \dot{z} = f_2(x,z) \\ y = x \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $z \in \mathbb{R}^m$, f_1 et f_2 sont des champs de vecteurs polynomials homogènes de même degré impair, tel qu'il existe une fonction $V: \ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie positive, propre et homogène vérifiant :

$$\nabla V(z_2)\Big(f_2(x, z_1 + z_2) - (f_2(x, z_1)\Big) < 0, \ \ \forall x \in R^{n-m}, \ \ \forall z_1 \in \mathbb{R}^m, \ \ \forall z_2 \in \mathbb{R}^m$$

Exemple : Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + x_3^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \\ \dot{x}_3 = -x_3^3 + x_1 x_2^2 + x_1^3 \\ y = \ {}^t(x_1, x_2) \end{cases}$$

Pour ce système, on ne peut pas trouver de matrice P symétrique définie positive qui satisfait les conditions de Starkov [48] à savoir :

$P^tCC =^t CCP$

$\mathrm{Con}_+ \cap (\mathrm{Ker}C \times \mathbb{R}^n) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^n$

$\mathrm{Con}_+ \cap (\mathbb{R}^n \times \mathrm{Ker}CP) \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$

avec :
$\mathrm{con}_+ = \{(x,e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / \ {}^te P\,(f(x+e) - f(x)) \geq 0\}$

Le résultat de [48] ne peut donc pas être appliqué pour construire un observateur.

Maintenant, on peut prendre, pour le système précédent, la fonction suivante

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

qui est définie positive, propre, homogène et qui satisfait les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$.

En effet, dans ce cas, on a

$$KerC = \{e \in \mathbb{R}^3 : e_1 = e_2 = 0\}$$

Ainsi on peut facilement vérifier que :

$$\frac{\partial V}{\partial e_1}(e) = \frac{\partial V}{\partial e_2}(e) = 0, \quad \forall e = \ {}^t(e_1, e_2, e_3) \in KerC$$

et

$$\nabla V(e)\Big(f(x+e) - f(x)\Big) = -e_3^4 - 3x_3e_3^3 - 3x_3^2e_3^2 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3, \quad \forall e \in KerC \setminus \{0\}$$

En appliquant le théorème 4.1, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \alpha\Big(\|\hat{x}\|^2 + \|{}^tC(C\hat{x} - y)\|^2\Big)^t C(C\hat{x} - y)$$

soit un observateur pour le système considéré.

5

A Jurdjevic-Quinn theorem for stochastic nonlinear systems

R. Chabour and M. Oumoun
INRIA-Lorraine (CONGE Project) & URA-CNRS 399 - M.M.A.S.
CESCOM – Technopôle METZ 2000 – 4, rue Marconi
57070 METZ – FRANCE
e-mail : {chabour,oumoun}@ilm.loria.fr

ABSTRACT : In this paper, we provide a formula for a stabilizing feedback law for control stochastic differential equations. This result extends Jurdjevic-Quinn's theorem to nonlinear control systems corrupted by noise.

Keywords : Jurdjevic-Quinn's theorem, Nonlinear stochastic systems, Feedback law, Stochastic stability, Lyapunov function.

5.1 Introduction

The aim of this paper is an extension of the well knoun Jurdjevic-Quinn's theorem [24] to provide a stabilizing feedback law using a bounded control for a general stochastic affine control systems.

The stabilization of deterministic affine control nonlinear systems by smooth feedback laws has been investigated by many authors in the last past years (see [30, 34, 45, 38] and reference there in).

For controled stochastic differential equations, when only the drift is corrupted by a noise, Florchinger [13] gave sufficient Lyapunov-like conditions, which are the same as in deterministic case.

In this paper, we deal with systems where every thing is corrupted by multiplicative noises, under the same hypothesis as in [13], we show that system proposed is globally asymptotically stable in probability and we give a stabilizing feedback law.

This paper is divided in three sections organized as follows. In section one, we recall some definitions and results concerning the asymptotic stability in probability for the solution of a stochastic differential equation proved by Khasminskii (see [21]) or Arnold (see [3]). In section two, we introduce the class of control stochastic differential equations we are dealing with in this paper, and we recall the result established in[13]. In section three, we extend the result proved by Outbib and Sallet [38] that concerns the generalization of Jurdjevic-Quinn'theorem [24] to deterministic affine control systems when the drift as well as the controled part are corrupted by a noise.

5.2 Stochastic stability

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ be an usual probability space and denote by w a standard $\mathbb{R}^m$-valued Wiener process defined on this space. Denote by $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ the complete right-continuous filtration generated by w. Let $x_t \in R^n$ be the stochastic process solution of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \tag{5.1}$$

where $X_0, X_1, ..., X_m$ are $(m+1)$ C_b^1-vector fields on $\mathbb{R}^n$ vanishing at the origin which we write for any x in $\mathbb{R}^n$ as,

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} \quad 0 \leq i \leq m.$$

Moreover, the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (5.1), denoted by $\mathcal{L}$, is defined for any functional Ψ in $C^2(\mathbb{R}^n)$ by

$$\mathcal{L}\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} X_{0,i}(x)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{i,j}(x)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

where

$$a^{i,j}(x) = \sum_{k=1}^{m} X_{k,i}(x)X_{k,j}(x), \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Furthermore, for any t in $\mathbb{R}_+^n$ and x_0 in $\mathbb{R}^n$, denote by $x_t(x_0)$, the solution at time t of the stochastic differential equation (6.1) starting from the state x_0.
The different notions of stochastic stability we are dealing with in this paper are the following

Definition 5.1 *The solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (5.1) is said to be stable in probability if for any $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that*

$$|x_0| < \delta \Rightarrow P\left(\sup_{t>0} |x_t(x_0)| > \epsilon\right) = 0.$$

If, in addition, there exists a neighbourhood D of the origin such that

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in D$$

the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (6.1) is said to be asymptotically stable in probability. It is globally asymptotically stable in probability (G.A.S.P) if

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Furthermore, the following criterions in terms of Lyapunov function for the stochastic stability hold (see [3, 21]).

Theorem 5.1 *Let D be a neighbourhood of the point $x = 0$ which is contained in $\mathbb{R}^n$ together with its boundary, and assume that there exists a Lyapunov function V defined in D (i.e. a proper function V positive definite mapping D into $\mathbb{R}$) such that*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0 \ \ (\textit{respectively } \mathcal{L}V(x) < 0), \ \ \forall x \in D, \ x \neq 0$$

Then, the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (6.1) is stable (respectively asymptotically stable) in probability. It is G.A.S.P if

$$\mathcal{L}V(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$$

In this paper, we shall make use of the latter Theorem and a stochastical version of Lasalle's invariance principle (see [31]), in order to prove that the class of nonlinear stochastic control systems introduced in the following section is globally asymptotically stabilizable in probability.

5.3 Problem statement

The purpose of this section is to introduce the class of control nonlinear stochastic differntial equations we are dealing with in this paper.
Consider the stochastic process solution $x_t \in \mathbb{R}^n$ of the multi input stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(X_0(x_s) + \sum_{j=1}^m u_j Y_j(x_s)\Big) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t X_i(x_s) dw_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t u_j Z_j(x_s) d\tilde{w}_s^j \quad (5.2)$$

where

1. $X_i = {}^t(X_{i,1}, ..., X_{i,n})$, $0 \leq i \leq p$, $Y_j = {}^t(Y_{j,1}, ..., Y_{j,n})$, and $Z_j = {}^t(Z_{j,1}, ..., Z_{j,n})$ $1 \leq j \leq m$, are smooth vector fields on $\mathbb{R}^n$ vanishing at the origin. ${}^tA$ denote the transposed matrix of A.

2. u_j, $1 \leq j \leq m$, are bounded real-valued control laws.

the stochastic differential system (5.2) is said to be asymptotically feedback stabilizable in probability at the origin if there exists a function $u = {}^t(u_1, ..., u_m)$ mapping $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^m$, vanishing in the origin, such that the equilibrium solution $x_t \equiv 0$ of the closed-loop system,

$$\begin{aligned} x_t = x_0 + \textstyle\int_0^t \Big(X_0(x_s) + \sum_{j=1}^m u_j(x_s)Y_j(x_s)\Big)ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \\ + \textstyle\sum_{j=1}^m \int_0^t u_j(x_s)Z_j(x_s)d\tilde{w}_s^j \end{aligned} \tag{5.3}$$

is asymptotically stable in probability.

In the case where only the drift is corrupted by a noise, systems (6.2) becomes

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(X_0(x_s) + \sum_{j=1}^m u_j Y_j(x_s)\Big)ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \tag{5.4}$$

this system have been studied in [13]. Under condition that (5.4) is of "Jurdjevic-Quinn" type, see definition 5.2, Florchinger [13] proved that (5.4) is globally asymptotically stable in probability and he gave a stabilizing feedback law.

In the following, we state the same sufficient conditions as in [13] under which there exists a stabilizing feedback law for the stochastic differential system (5.2)

5.4 Main result

The aim of this section is to state and prove the main result of this paper which is an extension of Jurdjevic-Quinn's theorem to our framework.

Denoting by L the second order differential operator associated with the stochastic differential equation (6.2) given for any function Ψ in $C^2(\mathbb{R}^n)$ by

$$L\Psi(x) = \sum_{i=1}^n X_{0,i}(x)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^p X_{k,i}(x)X_{k,j}(x)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Furthermore, for any smooth function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ that is proper, positive and definite, and for any $x \in \mathbb{R}^n$, introduce the following functionals defined by

$$a_{v,k}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n Z_{k,i}(x)Z_{k,j}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

and

$$b_{v,k}(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_{k,i}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)$$

In order to state the main result of this paper, introduce the following definition of "Jurdjevic-Quinn" type stochastic systems,

Definition 5.2 *The control stochastic differential equation (5.2) is said to be a "Jurdjevic-Quinn" type stochastic system if there exists a smooth function $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ that is proper and definite positive such that*

1. $LV(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
2. *The set*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / \; L^{k+1}V(x) = L^k Y_j V(x) = 0; \quad k \in \mathbb{N}; \quad j = 1, ..., m\}$$

is reduced to $\{0\}$.

Therefore, the following theorem gives a formula for a stabilizing feedback law for the stochastic differential equation (5.2) provided a smooth, proper and definite positive function which satisfies the conditions of definition 5.2, is known.

Theorem 5.2 *Assume there exists a smooth, proper and definite positive function which satisfies the conditions of definition 5.2 (i.e system (6.2) is of "Jurdjevic-Quinn" type) then, the feedback law u defined by*

$$u_j(x) = -\frac{b_{v,j}(x)}{\beta_{v,j}(x)} \quad \text{where} \quad \beta_{v,j}(x) = 1 + a_{v,j}^2(x), \quad 1 \leq j \leq m \tag{5.5}$$

is a stabilizing feedback law for the stochastic system (5.2).

Proof Denote by $\mathcal{L}$ the infinitesimal generator of the closed-loop system

$$\begin{aligned} x_t = x_0 + \textstyle\int_0^t \Big(X_0(x_s) + \sum_{j=1}^m u_j(x_s)Y_j(x_s)\Big)ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \\ + \textstyle\sum_{j=1}^m \int_0^t u_j(x_s)Z_j(x_s)d\tilde{w}_s^j \end{aligned} \tag{5.6}$$

deduced from (5.2) when the control law u is given by (5.5).
Therefore, for any $x \in \mathbb{R}^n$, we have

$$\mathcal{L}V(x) = LV(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{v,k}^2(x)}{\beta_{v,k}(x)}\Big(\frac{a_{v,k}(x)}{\beta_{v,k}(x)} - 1\Big)$$

Since the stochastic system (5.2) is of "Jurdjevic-Quinn" type, and using the fact that

$$\frac{a_{v,k}(x)}{\beta_{v,k}(x)} - 1 < 0 \text{ and } \frac{b_{v,k}^2(x)}{\beta_{v,k}(x)} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, ..., m$$

it follows

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Hence, by making use of theorem 5.1, the equilibrium solution $x_t = 0$ of the stochastic differential equation (5.6) is stable in probability.

According to the stochastical version of LaSalle's invariance principle (see [31]), the processus x_t converges in probability to the largeste invariant set $\mathcal{U}$ whose support is contained in the locus $\mathcal{L}V(x_t) = 0$ for all $t \geq 0$. Let x_t be a complete solution of the closed-loop system (5.6) along which $\mathcal{L}V(x_t) = 0, \quad \forall t \geq 0$, we must show that $x_t = 0$ for all $t \geq 0$.
Obviously, $\mathcal{L}V(x) = 0$ for any $x \neq 0$, if and only if

$$LV(x) = b_{v,i}(x) = Y_i V(x) = 0, \quad i = 1, ..., m$$

So, for $x_t \in \Omega$ we have

$$LV(x_t) = Y_1 V(x_t) = ... = Y_m V(x_t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Then, successive differentiation by means of Itô's formula yield,

$$L^{k+1}V(x_t) = L^k Y_1 V(x_t) = ... = L^k Y_m V(x_t) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0$$

Therefore, since (5.2) is a "Jurdjevic-Quinn" type stochastic system, by definition refdjq, we can deduce that the stochastic process $x_t = 0, \ \forall t \geq 0$, hence $\mathcal{U} = \{0\}$. This implies that the equilibrium solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (5.6) is globally asymptotically stable in probability. The proof is now completed.

6

On a universal formula for the stabilisation of control stochastic nonlinear systems

R. Chabour and M. Oumoun
INRIA-Lorraine (CONGE Project) & URA-CNRS 399 - M.M.A.S.
CESCOM – Technopôle METZ 2000 – 4, rue Marconi
57 070 METZ – FRANCE
e-mail : {chabour,oumoun}@ilm.loria.fr

abstract : This paper presents an explicit formula for a stabilizing feedback law for control stochastic differential equations. This result extends Artstein's theorem to nonlinear control systems corrupted by noise.

Key–Words : Artstein's theorem, Nonlinear stochastic systems, Feedback law, Stochastic stability.

6.1 Introduction

The main object of this paper is an extension of Artstein's theorem [2] to nonlinear stochastic differential equations. The goal is to provide explicit feedback control law that globally asymptotically stabilizes in probability a given nonlinear stochastic system, under the assumption that a 'control–Lyapunov function' is known. The result represents a continuation of a line of work started in [8], that concerns stabilization in probability of control stochastic systems which are affine in control, where every thing is corrupted by a noise. In Bilinear stochastic case, Chabour and Florchinger have study the stabilizability in probability of a class of this system in [10].

For the same system in deterministic case, Sontag [34, 44] gave an explicit proof of the theorem due to Artstein which states that the existence of a smooth control–Lyapunov function implies smooth stabilizability.

The stochastic differential equations affine in the control, when only the drift is corrupted by a noise are studied by Florchinger [14]. This class of stochastic systems does not engender the stochastic version of Artstein's theorem, indeed, the proof as well as the feedback law given by Florchinger are exactly the same as those given by lin and Sontag [34].

This paper is divided in three sections organized as follow. In section one, we recall some definitions and results concerning the asymptotic stability in probability for the trivial solution of a stochastic differential equations proved by Khasminskii (see [21]) or Arnold (see [3]). In section two, we introduce the class of control stochastic systems we are dealing with in this paper. In section three we extend the result proved by Sontag [34, 44] that concerns an explicit proof for the Artstein's theorem when the drift as well as the controled part are corrupted by a noise in the section three.

6.2 Stability of stochastic systems

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ be an usual probability space and denote by w a standard $\mathbb{R}^m$-valued Wiener process defined on this space. Denote by $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ the complete right-continuous filtration generated by w. Let $x_t \in \mathbb{R}^n$ be the stochastic process solution of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t X_0(x_s)ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t X_i(x_s)dw_s^i \tag{6.1}$$

where $X_0, X_1, ..., X_m$ are $(m+1)$ C_b^1-vector fields on $\mathbb{R}^n$ vanishing at the origin which we write for any x in $\mathbb{R}^n$ as,

$$X_i(x) = \sum_{k=1}^n X_{i,k}(x)\frac{\partial}{\partial x_k} \quad 0 \leq i \leq m.$$

Moreover, the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (6.1), denoted by $\mathcal{L}$, is defined for any functional Ψ in $C^2(\mathbb{R}^n)$ by

$$\mathcal{L}\Psi(x) = \sum_{i=1}^n X_{0,i}(x)\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

where

$$a^{i,j}(x) = \sum_{k=1}^m X_{k,i}(x)X_{k,j}(x), \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Furthermore, for any t in $\mathbb{R}_+^n$ and x_0 in $\mathbb{R}^n$, denote by $x_t(x_0)$, the solution at time t of the stochastic differential equation (6.1) starting from the state x_0.
The different notions of stochastic stability we are dealing with in this paper are the following

Definition 6.1 *The solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (6.1) is said to be stable in probability if for any $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that*

$$|x_0| < \delta \Rightarrow \ P\left(\sup_{t>0} |x_t(x_0)| > \epsilon\right) = 0.$$

If, in addition, there exists a neighbourhood D of the origin such that

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in D$$

the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (6.1) is said to be asymptotically stable in probability. It is globally asymptotically stable in probability (G.A.S.P) if

$$P\left(\lim_{t\to+\infty} |x_t(x_0)| = 0\right) = 1, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Furthermore, the following criterions in terms of Lyapunov function for the stochastic stability hold (see [3, 21]).

Theorem 6.1 *Let D be a neighbourhood of the point $x = 0$ which is contained in $\mathbb{R}^n$ together with its boundary, and assume that there exists a Lyapunov function V defined in D (i.e. a proper function V positive definite mapping D into $\mathbb{R}$) such that*

$$\mathcal{L}V(x) \leq 0 \ \ (\textit{respectively} \ \mathcal{L}V(x) < 0), \ \ \forall x \in D, \ x \neq 0$$

Then, the solution $x_t \equiv 0$ of the stochastic differential equation (6.1) is stable (respectively asymptotically stable) in probability. It is G.A.S.P if

$$\mathcal{L}V(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0$$

6.3 Statement of the problem

The purpose of this section is to introduce the class of nonlinear stochastic control systems we are dealing with in this paper.

Consider the stochastic process solution $x_t \in \mathbb{R}^n$ of the stochastic differential equation written in the sense of Itô,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(f_1(x_s) + ug_1(x_s)\Big)ds + \int_0^t f_2(x_s)dw_s + \int_0^t ug_2(x_s)d\tilde{w}_s \tag{6.2}$$

where $f_i = {}^t(f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, $i = 1, 2$, $g_j = {}^t(g_{j,1}, \dots, g_{j,n})$, $j = 1, 2$, are smooth vector fields on $\mathbb{R}^n$ and $f_1(0) = f_2(0) = 0$. ${}^tA$ denote the transposed matrix of A. u, is a real-valued control law.

The stochastic differential system (6.2) is said to be asymptotically feedback stabilizable in probability at the origin if there exists a function u mapping $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}$, vanishing in the origin, such that the equilibrium solution $x_t \equiv 0$ of the closed-loop system,

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(f_1(x_s) + u(x_s)g_1(x_s)\Big)ds + \int_0^t f_2(x_s)dw_s + \int_0^t u(x_s)g_2(x_s)d\tilde{w}_s \tag{6.3}$$

is asymptotically stable in probability.

For a given smooth function $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denote by a_v, b_v and c_v the functionals defined by

$$a_v(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{2,i}(x)g_{2,j}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

$$b_v(x) = \sum_{i=1}^{n} g_{1,i}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x)$$

and

$$c_v(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{1,i}(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{2,i}(x)f_{2,j}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Recall that the second order differential operator c_v is the infinitesimal generator associated with the stochastic differential equation (6.2) when $u \equiv 0$.

Then, we can introduce the following notion of control Lyapunov function for the stochastic differential system (6.2).

Definition 6.2 *A smooth, proper and definite positive function V mapping $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}$ is said to be a control Lyapunov function (henceforth just 'clf') for the stochastic differential system (6.2) if and only if,*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \Big(a_v(x)u^2 + b_v(x)u + c_v(x)\Big) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Recall that positive definite means that $V(0) = 0$ and $V(x) > 0$ for $x \neq 0$, and proper means that $V(x) \to \infty$ as $\|x\| \to \infty$.

In the case where only the drift is corrupted by a noise, systems (6.2) becomes

$$x_t = x_0 + \int_0^t \Big(f_1(x_s) + ug_1(x_s)\Big)ds + \int_0^t f_2(x_s)dw_s \tag{6.4}$$

this system have been studied in [14]. Under condition that there exists a clf V for the system (6.4), Florchinger prove that the feedback u given by Lin–Sontag [34] stabilizes globally asymptotically (6.4) in probability.

In the following, we state sufficient conditions under which there exists a stabilizing feedback law for the stochastic differential system (6.2).

6.4 Main result

The aim of this section is to state and prove the main result of this paper on the feedback stabilization of the class of control stochastic differential equations introduced in the previous section.

Proposition 6.1 *A necessary condition for a smooth, proper and definite positive function $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a clf for the system (6.2), is the following implication* $(\mathcal{H}_1)$

$$\Delta_v(x) \leq 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_v(x) < 0 \\ \text{or} \\ a_v(x) = 0 \quad \text{and} \quad c_v(x) < 0 \end{cases}$$

where

$$\Delta_v(x) = b_v(x)^2 - 4a_v(x)c_v(x)$$

Proof The condition $(\mathcal{H}_1)$ of the proposition is precisely

1. $\Delta_v(x) < 0 \Longrightarrow a_v(x) < 0$
2. $\Delta_v(x) = 0$ and $a_v(x) \neq 0 \Longrightarrow a_v(x) < 0$
3. $\Delta_v(x) = 0$ and $a_v(x) = 0 \Longrightarrow c_v(x) < 0$

Assume that V is a clf for the system (6.2), then we have

$$\inf_{u\in\mathbb{R}}\left(a_v(x)u^2 + b_v(x)u + c_v(x)\right) < 0, \quad \forall x \neq 0. \tag{6.5}$$

On one hand, if $\Delta_v(x) < 0$ (respectively, $\Delta_v(x) = 0$ and $a_v(x) \neq 0$) then the equation

$$a_v(x)u^2 + b_v(x)u + c_v(x)$$

has the same sign as $a_v(x)$ for any $u \in \mathbb{R}$ (respectively, for any $u \in \mathbb{R}\backslash\{-b_v(x)/2a_v(x)\}$), and since V is a clf for the system (6.2), in order to have (6.5) we must have $a_v(x) < 0$.

On the other hand, if $\Delta_v(x) = 0$, and $a_v(x) = 0$ then $b_v(x) = 0$, so, we have inequality (6.5) if $c_v(x) < 0$. Thus the proposition is proved. ∎

In the sequal we will assume the existence of a clf $V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, for the system (6.2), which satisfies the following hypothesis :

$(\mathcal{H}_2) : a_v(x) < 0 \Longrightarrow \Delta_v(x) < 0.$

Theorem 6.2 *If there is a smooth clf V for the system (6.2) which satisfies $(\mathcal{H}_2)$, then there is a smooth feedback u which globally asymtotically stabilizes system (6.2) in probability.*

Proof First, since V is a clf for the system (6.2), then $(\mathcal{H}_1)$ is fulfilled. If in addition, $(\mathcal{H}_2)$ is satisfied, then we have

$\Delta_v(x) < 0 \Longleftrightarrow a_v(x) < 0$

$\Delta_v(x) = 0 \Longleftrightarrow a_v(x) = b_v(x) = 0 \Longrightarrow c_v(x) < 0$

$a_v(x) > 0 \Longrightarrow \Delta_v(x) > 0$

Now, let us introduce the following smooth functions φ and ψ mapping $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}$ defined by

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 4\varepsilon \\ 1 & \text{if } y \geq 4\varepsilon + 1 \end{cases} \quad \text{and } \varphi'(y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \geq 1$$

and

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 0 \\ 1 & \text{if } y \geq 1 \end{cases} \quad \text{and } \psi'(y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

If $a_v(x) > 0$, then $\Delta_v(x) > 0$, denote by $\lambda_{1,v}(x)$ and $\lambda_{2,v}(x)$ the two roots of the equation $a_v(x)\lambda^2 + b_v(x)\lambda + c_v(x) = 0$ we have

$$\lambda_{1,v}(x) = \frac{-b_v(x) - \sqrt{\Delta_v(x)}}{2a_v(x)} \quad , \quad \lambda_{2,v}(x) = \frac{-b_v(x) + \sqrt{\Delta_v(x)}}{2a_v(x)}$$

Taking into account $(\mathcal{H}_1)$, we can deduce from a basic result of calculus that,

$$\text{if } \lim_{x \to x_0} a_v(x) = a_v(x_0) = 0, \quad x_0 \neq 0 \tag{6.6}$$

then

$$\lim_{x \to x_0} \lambda_{1,v}(x) = -\infty \text{ and } \lim_{x \to x_0} \lambda_{2,v}(x) = -\frac{c_v(x_0)}{b_v(x_0)}, \text{ if } b_v(x_0) > 0 \tag{6.7}$$

$$\lim_{x \to x_0} \lambda_{1,v}(x) = -\frac{c_v(x_0)}{b_v(x_0)} \text{ and } \lim_{x \to x_0} \lambda_{2,v}(x) = +\infty, \text{ if } b_v(x_0) < 0 \tag{6.8}$$

$$\lim_{x \to x_0} \lambda_{1,v}(x) = -\infty \text{ and } \lim_{x \to x_0} \lambda_{2,v}(x) = +\infty, \text{ if } b_v(x_0) = 0 \tag{6.9}$$

For $a_v(x) > 0$, which implies $\Delta_v(x) > 0$, let $A(x)$, $B(x)$ and $C(x)$ be the following quantities,

$$A(x) = \psi\Big(\lambda_{1,v}(x) + \varepsilon\Big)\Big(\lambda_{1,v}(x) + \varepsilon\Big) + \Big(1 - \psi(\lambda_{2,v}(x) - \varepsilon)\Big)\Big(\lambda_{2,v}(x) - \varepsilon\Big)$$

$$B(x) = \varphi\Big(\lambda_{2,v}(x) - \lambda_{1,v}(x)\Big)$$

$$C(x) = \frac{\lambda_{1,v}(x) + \lambda_{2,v}(x)}{2}$$

It is easy to say that for all $a_v(x) > 0$ we have

$$B(x)A(x) + (1 - B(x))C(x) \in]\lambda_{1,v}, \lambda_{2,v}[, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Indeed :

If $\lambda_{2,v}(x) - \lambda_{1,v}(x) \geq 4\varepsilon$, then $A(x) \in]\lambda_{1,v}(x), \lambda_{2,v}(x)[$. So, since $B(x) \in [0, 1]$, we have $B(x)A(x) + (1 - B(x))C(x) \in]\lambda_{1,v}, \lambda_{2,v}[$

If $\lambda_{2,v}(x) - \lambda_{1,v}(x) \leq 4\varepsilon$, then $B(x) = 0$ which implies $B(x)A(x) + (1 - B(x))C(x) = C(x) \in]\lambda_{1,v}, \lambda_{2,v}[$.

Now, the feedback u defined by

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } \Delta_v(x) \leq 0 \\ B(x)A(x) + (1 - B(x))C(x) & \text{if } a_v(x) > 0 \\ \Big(1 - \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon)\Big)\Big(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon\Big) & \text{if } a_v(x) = 0 \text{ and } b_v(x) > 0 \\ \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + \varepsilon)(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + \varepsilon) & \text{if } a_v(x) = 0 \text{ and } b_v(x) < 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

is a smooth stabilising one for the stochastic differential system (6.2). Indeed, by using the fact that φ ψ, $\lambda_{1,v}$ and $\lambda_{2,v}$ when $\Delta_v > 0$ are smooth functions, and taking into account the form of φ and ψ, in conjonction with the formulas (6.6), (6.7), (6.8) and (6.9), we easly verify that u is smooth.

Denote by $\mathcal{L}$ the infinitesimal generator of the cloosed-loop system deduced from (6.2) when the control law u is given by (6.10).

Therefore, for any $x \in \mathbb{R}^n$, we have

$$\mathcal{L}V(x) = a_v(x)u^2(x) + b_v(x)u(x) + c_v(x), \quad \text{where } u^2(x) = u(x)u(x).$$

On one hand, if $a_v(x) > 0 \overset{\mathcal{H}_1}{\Longrightarrow} \Delta_v > 0$, then

$$u(x) = B(x)A(x) + (1 - B(x))C(x) \in]\lambda_{1,v}, \lambda_{2,v}[$$

which imply that,

$$\mathcal{L}V(x) = a_v(x)u^2(x) + b_v(x)u(x) + c_v(x) < 0$$

On the other hand, if $a_v(x) = 0$, we have to consider the three following cases.

1. If $b_v(x) > 0$, then

$$u(x) = \Big(1 - \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon)\Big)\Big(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon\Big) \leq -\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon < -\frac{c_v(x)}{b_v(x)}$$

and therefore

$$\mathcal{L}V(x) = b_v(x)u(x) + c_v(x) < 0$$

2. If $b_v(x) = 0$, then $u(x) = 0$, using $\mathcal{H}_1$ we get,

$$\mathcal{L}V(x) = c_v(x) < 0$$

3. If $b_v(x) < 0$, then

$$u(x) = \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + 1)(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + 1) > -\frac{c_v(x)}{b_v(x)}$$

which implies

$$\mathcal{L}V(x) = b_v(x)u(x) + c_v(x) < 0$$

Finally, if $a_v(x) < 0 \overset{\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2}{\Longleftrightarrow} \Delta_v < 0$ then

$$\mathcal{L}V(x) = a_v(x)u^2(x) + b_v(x)u(x) + c_v(x)$$

has the same sign as $a_v(x) < 0$, it follows that

$$\mathcal{L}V(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Hence, for any $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, we have

$$\mathcal{L}V(x) < 0$$

and according with the stochastic Lyapunov theorem 6.1, the equilibrium solution $x_t \equiv 0$ of the closed-loop system deduced from (6.2) when u is given by (6.10) is globally asymptotically stable in probability. This completes the proof of our theorem.

Remark In deterministic case, system (6.2) becomes

$$\dot{x} = f_1(x) + ug_1(x) \tag{6.11}$$

In this case, we have

$$a_v(x) = 0, \quad b_v(x) = \langle \nabla V(x), f_1(x) \rangle, \quad \text{and} \quad c_v(x) = \langle \nabla V(x), g_1(x) \rangle$$

then the feedback u defined by (6.10) becomes

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } b_v(x) = 0 \\ \left(1 - \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon)\right)\left(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} - \varepsilon\right) & \text{if } b_v(x) > 0 \\ \psi(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + \varepsilon)(-\frac{c_v(x)}{b_v(x)} + \varepsilon) & \text{if } b_v(x) < 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

and it is a smooth feedback stabilizer for the deterministic system (6.11).

Bibliographie

[1] A. Andreini, A. Baccioti and G. Stefani, Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree, *Systems & Control Letters* **10** (1988) 251–256.

[2] Z. Artstein, Stabilization with relaxed controls, *Nonlinear Anal. TMA* **7** (1983) 1163–1173.

[3] L. Arnold, *Stochastic differential equations : Theory and applications*, Wiley, New York (1974).

[4] G. Bornard and H. Hammouri, A High Gain Observer for a Class of Uniformaly Observable Systems, *Proc. 30th Conf. Decision & Control*, Brighton (1991) 1494–1496.

[5] R.W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, Brockett, Milmann, Sussmann, (1983).

[6] C. Byrnes and A. Isidori, New results and examples in nonlinear feedback stabilization, *Systems & Control Letters* **12** (1989) 437–442.

[7] R. Chabour, G. Sallet and J. C. Vivalda, Stabilization of nonlinear systems : a bilinear approach, *MCSS* **6** (1993) 224–246.

[8] R. Chabour and M. Oumoun, A Jurdjevic–Quinn theorem for stochastic nonlinear systems, *Journal Stochastic Analysis and Applications,* (accépté).

[9] R. Chabour and M. Oumoun, On a universal formula for the stabilization of control stochastic nonlinear systems, soumis au *Journal Stochastic Analysis and Applications.*

[10] R. Chabour and P. Florchinger, Stabilization of a class of biliner stochastic differential sysyems, In *Nonlinear Control Systems Design Symposium*, volume 2, pages 828–831, Tahoe City, California, 1995. IFAC (NOLCOS 95).

[11] C. Coleman, Asymptotic stability in 3-space, In Lefschetz Cesari, LaSalle, editor, *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, volume 45 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1960).

[12] F. Celle, J. P. Gauthier, D. Kazakos and G. Sallet, Synthesis of nonlinear observers : a harmonic-analysis approach, *Math. Syst. Th* **22** (1989) 291–322.

[13] P. Florchinger, A stochastic version of Jurdjevic-Quinn theorem, *J.Stochastic Analysis and applications* **12** (1994) 473–480.

[14] P. Florchinger, A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. *Journal Stochastic Analysis & Applications* **11** (1993) : 155–162.

[15] J. P. Gauthier, *Structure des systèmes non linéaires*, Éditions du CNRS, (1984).

[16] J.P. Gauthier and G. Bornard, Observability for any $u(t)$ of a class of bilinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contrl, AC* **26** (1981) 922–926.

[17] J.P. Gauthier et G. Bornard, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, Editions du CNRS (1981).

[18] J.P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, A simple observer for nonlinear systems : Application to bioreactors, *IEEE Trans. Automat. Contrl* **36** (1992) 875–880.

[19] J. P. Gauthier and I. A. K. Kupka, Observability and observers for nonlinear systems, *SIAM J. Control and Optimization* **32** (1994) 975–994.

[20] W. Hahn, *Stability of Motion*. Springer Verlag, (1967).

[21] R. Z. Has'minskii, *Stochastic stability of differential equations*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).

[22] M. A. Hammami, M. Oumoun and J. C. Vivalda, Observer for homogeneous systems of odd degree, soumis au *Systems and Control Letters*.

[23] A. Iggidr and J.C. Vivalda, Global stabilization of homogeneous polynomial systems in $\mathbb{R}^n$, *Nonlinear Anal. TMA* **18** (1992) 1181–1186.

[24] V. Jurdjevic and J.P. Quinn, Controllability and stability, *Journal of Differential Equations* **28** (1978) 381–389.

[25] R. Kalman and R. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, *Journ. of Basic Engineering* **82D** (1960) 35–40.

[26] M. Kawski, Stabilization of nonlinear systems in the plane, *Systems & Control Letters* **12** (1990) 169–175.

[27] M. Kawski, Feedback stabilization, homogeneity and nonlinear dynamics on spheres. In S. Kodama H. Kimura, editor, *Recent Advances in Mathematical Theory of Systems, Networks and Signal Processing*, pages 365–370, Tokyo, 1992. mita-press.

[28] M. Kawski, Geometric homogeneity and stabilisation. In *Nonlinear Control Systems Design Symposium*, volume 1, pages 164–169, Tahoe City, California, 1995. IFAC (NOLCOS 95).

[29] J. Kurzweil, On the inversion of liapunov's second theorem on stability of motion. *AMS Translations* **24** (1963) 19–77.

[30] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann, A positive real codition for global stabilization of nonlinear systems, *Systems & Control Letters* **13** (1989) 125–133.

[31] H.J. Kushner, Stochastic stability. In Stability of Stochastic Dynamical Systems (R. Curtain ed.). *Lecture Notes in Mathematics* 294 Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1972) 97–124.

[32] J. Lasalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method with applications.* Academic Press, New-York, (1961).

[33] D. G. Luenberger, newblock Observers for multivariable systems, *IEEE Trans. on Autom. Cont* **11** (1966) 190–197.

[34] Y. Lin, E. D. Sontag, A universal formula for stabilization with bounded controls.*Systems & control letters* **16**(1991) : 393–397.

[35] J.L. Massera, Contribution to stability theory, *Annals of Mathematics* **64** (1956) 182–206.

[36] H. Nijmeijer, Observability of a class of nonlinear systems : a geometric approach, *Int. Journal of Control* **36** (1982) 867–874.

[37] R. Luesink and H. Nijmeijer, On the stabilisation of bilinear systems via constant feedback, *Linear Algebra and its Applications* (1989) 457–474.

[38] R. Outbib and G. Sallet, Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited, *Systems & Control Letters* **18** (1992) 93–98.

[39] M. Oumoun and J. C. Vivalda, On the stabilisation of a class of bilinear systems in 3–space, saumis à *European Journal of Control.*

[40] M. Oumoun, Fedback Stabilization of Homogeneous Systems of Odd Degree, 3^{rd} *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control and Automation* **2** 367–370, Limassol, Cyprus, 1995.

[41] N. Rouche and J. Mawhin, *Equations différentielles ordinaires*, volume 2. Masson et Cie - Paris, (1973).

[42] L. Rosier, Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector fields, *Systems & Control Letters* **19** (1992) 467–473.

[43] A. Saberi, P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann, Global stabilization of partially linear composed systems, *SIAM J. Control and Optimisation* **28** (1990) 1491–1503.

[44] E.D. Sontag, A universal construction of arstein's theorem on nonlinear stabilization, *Systems & Control Letters* **13** (1989) 117–123.

[45] E.D. Sontag, Feedback stabilization of nonlinear systems, In *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, pages 61–81. Eds Kaashoek M.A, van Schuppen J.H, Ran A.C.M, Birkhauser (1990).

[46] E. Sontag, On the observability of polynomial systems, *SIAM Journ. of Cont. and Optim.* **17** (1979).

[47] H. J. Sussmann, Single input observability of continuous time systems, *Math. Systems Theory* **12** (1989) 371–393.

[48] K. E. Starkov, Observers for polynomial systems : algebraic method of construction, *Institute of command problems. Science Academy Russia - Moscou*, (1994).

[49] J. Tsinias, A theorem on global stabilization, *Systems & Control Letters* **17** (1991) 357–362.

[50] J. Tsinias, Observer design for nonlinear systems, *Systems & Control Letters* **13** (1989) 135–142.

[51] J. Tsinias, Further results on the obsrver design problem, *Systems & Control Letters* **14** (1990) 411–418.

[52] V. I. Zubov, *Methods of A.M. Lyapunov and their Applications,* Noordhoff, Leiden, (1964).