



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**

présentée à

**L'UNIVERSITE DE METZ**

Pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'INGENIEUR**

**- MECANIQUE -**

par

**Xavier LEMOINE**

**ANALYSE MICROMECHANIQUE DE LA FORMATION DES  
CELLULES DE DISLOCATIONS ET CONSÉQUENCES  
SUR LE COMPORTEMENT DES ACIERS**

Soutenue le 8 Décembre 1995 devant la commission d'examen

M. M. Berveiller, Directeur de thèse  
Mme C. Rey, Rapporteur  
M. F. Sidoroff, Rapporteur  
M. T. Bretheau  
M. G. Ferron  
M. S. Heurtault  
M. E. Kröner

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420542 5

Mécanique des Matériaux -  
RS 1215-  
Mécanique et Productique -  
5 Metz Cedex 01

# THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DE METZ**

Pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'INGENIEUR**

**- MECANIQUE -**

par

**Xavier LEMOINE**

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>- METZ |            |
| N° inv                               | 1995045 S  |
| Cote                                 | S/M3 95/24 |
| Loc                                  | Magasin    |

**ANALYSE MICROMECHANIQUE DE LA FORMATION DES  
CELLULES DE DISLOCATIONS ET CONSÉQUENCES  
SUR LE COMPORTEMENT DES ACIERS**

Soutenue le 8 Décembre 1995 devant la commission d'examen

M. M. Berveiller, Directeur de thèse  
Mme C. Rey, Rapporteur  
M. F. Sidoroff, Rapporteur  
M. T. Bretheau  
M. G. Ferron  
M. S. Heurtault  
M. E. Kröner

- Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux -  
- URA CNRS 1215-
- Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique -  
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01

## SOMMAIRE

|  |  |             |
|--|--|-------------|
| <b>Chapitre I :</b>  | <b>Introduction</b>  | <b>p 6</b>  |
| <b>Chapitre II :</b>   | <b>Hétérogénéités plastiques intra et intergranulaires : Analyse, classification, conséquences et stratégie pour une modélisation micromécanique</b> | <b>p 12</b> |
| <b>II.1 - Analyse et classification des hétérogénéités plastiques</b>                                      |  | <b>p 13</b> |
| II.1.1 - <u>Hétérogénéités plastiques intergranulaires</u>   |  | <b>p 13</b> |
| II.1.2 - <u>Hétérogénéités plastiques intragranulaires</u>   |  | <b>p 15</b> |
| a) <i>La subdivision des grains en différentes zones à glissement multiple homogène</i>                    |  | <b>p 15</b> |
| b) <i>Formulation des cellules de dislocations</i>   |  | <b>p 16</b> |
| c) <i>Microbandes de cisaillement</i>  |  | <b>p 19</b> |
| <b>II.2 - Caractéristiques des cellules de dislocations</b>  |  | <b>p 23</b> |
| II.2.1 - <u>Formation et effet de la température</u>   |  | <b>p 24</b> |
| II.2.2 - <u>Caractéristiques morphologiques</u>  |  | <b>p 26</b> |
| II.2.3 - <u>Influence du chargement</u>  |  | <b>p 33</b> |
| a) <i>Forme et orientation des cellules</i>  |  | <b>p 34</b> |
| b) <i>Texture de la microstructure</i>   |  | <b>p 35</b> |
| c) <i>Chargement complexe</i>  |  | <b>p 38</b> |
| <b>II.3 - Conséquences de la formation des hétérogénéités plastiques sur le comportement macroscopique</b> |  | <b>p 38</b> |
| II.3.1 - <u>Les acquis de la modélisation autocohérente</u>  |  | <b>p 39</b> |
| II.3.2 - <u>Les insuffisances des modèles actuels</u>  |  | <b>p 44</b> |
| <b>II.4 - Stratégie pour une modélisation micromécanique</b>   |  | <b>p 47</b> |
| II.4.1 - <u>Schéma classique de la modélisation du comportement local en élastoplastique</u>               |  | <b>p 47</b> |
| II.4.2 - <u>Mécanique et micromécanique des cellules de dislocations</u>                                   |  | <b>p 49</b> |

|   |                 |
|---|-----------------|
| <b>Chapitre III : Démarche thermomicromécanique</b>                     | <b>p 59</b>     |
| <b>III.1 - Cadre micromécanique de la description du problème</b>       | <b>p 59</b>     |
| III.1.1 - <u>Description cinématique</u>                                | p 59            |
| III.1.2 - <u>Contraintes</u>  | p 63            |
| a) <i>Formulation intégrale</i>   | p 64            |
| b) <i>L'inclusion classique</i>   | p 66            |
| c) <i>L'inclusion enrobée</i>   | p 68            |
| III.1.3 - <u>Opérateurs interfaciaux</u>                                | p 70            |
| <b>III.2 - Discontinuités interfaciales mobiles</b>                     | <b>p 72</b>     |
| III.2.1 - <u>Energie libre d'Helmholtz</u>                              | p 73            |
| III.2.2 - <u>Dérivée de l'énergie d'Helmholtz</u>                       | p 76            |
| III.2.3 - <u>Puissance des efforts extérieurs</u>                       | p 78            |
| III.2.4 - <u>Dissipation intrinsèque</u>                                | p 80            |
| <b>III.3 - Application au cas des cellules de dislocation</b>           | <b>p 81</b>     |
| III.3.1 - <u>Représentation simplifiée de la structure cellulaire</u>   | p 81            |
| III.3.2 - <u>Calcul de la dissipation</u>                               | p 85            |
| III.3.3 - <u>Cas particuliers - discussion</u>                          | p 91            |
| a) <i>Cas particuliers</i>  | p 91            |
| b) <i>Discussion</i>  | p 92            |
| <b>III.4 - Modèle biphasé - Calcul direct</b>                           | <b>p 93</b>     |
| III.4.1 - <u>Energie libre d'Helmholtz et sa dérivée</u>                | p 93            |
| III.4.2 - <u>Puissance des efforts extérieurs et dissipation</u>        | p 96            |
| <b>III.5 - Conclusion</b>   | <b>p 96</b>     |
| <br><b>Chapitre IV : Lois complémentaires et comportement global</b>    | <br><b>p101</b> |
| <b>IV.1 - Comportement global en élastoplasticité</b>                   | <b>p101</b>     |
| IV.1.1 - <u>Introduction du glissement plastique cristallographique</u> | p101            |
| IV.1.2 - <u>Comportement global</u>                                     | p103            |
| <b>IV.2 - Les forces critiques</b>                                      | <b>p104</b>     |
| <b>IV.3 - Eléments de physique de la dissipation</b>                    | <b>p106</b>     |
| IV.3.1 - <u>Ecrouissage par déformation plastique</u>                   | p107            |
| a) <i>Ecrouissage latent et auto-écrouissage</i>                        | p107            |
| b) <i>Ecrouissage non local</i>   | p109            |
| c) <i>Approximation biphasée de la structure cellulaire</i>             | p110            |

|   |      |
|---|------|
| IV.3.2 - <u>Evolution de la microstructure</u>  | p114 |
| a) <i>Influence des paramètres de la microstructure sur l'énergie interne</i>   | p115 |
| b) <i>Extension formelle au cas où la microstructure est contrainte</i>   | p118 |
| IV.4 - Conclusion   | p119 |
| <br>  |      |
| <b>Chapitre V : Modélisation simplifiée et applications numériques</b>  | p124 |
| <br>  |      |
| <b>V.1 - Hypothèses simplificatrices</b>  | p124 |
| V.1.1 - <u>Hypothèse sur la Fraction volumique</u>  | p124 |
| V.1.2 - <u>Hypothèses sur les Caractéristiques morphologiques</u>   | p125 |
| V.1.3 - <u>Hypothèse sur le glissement plastique</u>  | p126 |
| <b>V.2 - Résultats comparés avec des modèles précédents</b>   | p126 |
| V.2.1 - <u>Données initiales</u>  | p127 |
| V.2.2 - <u>Réponse élastoplastique</u>  | p127 |
| V.2.3 - <u>Texture cristallographique et anisotropie plastique</u>  | p132 |
| <b>V.3 - Résultats concernant la microstructure intragranulaire</b>   | p135 |
| V.3.1 - <u>Traction uniaxiale</u>   | p135 |
| V.3.2 - <u>Effet de certains paramètres</u>   | p140 |
| V.3.3 - <u>Autres trajets</u>   | p140 |
| <b>V.4 - Discussion</b>   | p147 |
| <br>  |      |
| <b>Chapitre VI : Conclusion générale</b>  | p151 |
| <br>  |      |
| <b>Références bibliographiques</b>  | p153 |
| <br>  |      |
| <b>Annexe A : Compléments de micromécanique</b>   | p165 |
| <br>  |      |
| <b>A1 - Condition de compatibilité d'Hadamard</b>   | p165 |
| <b>A2 - Liaison des tenseurs du type d'Eshelby <math>S^1</math> et <math>S^2</math> et l'opérateur interfacial <math>\mathcal{P}</math></b> | p166 |
| <b>A3 - Vérification de la relation (A.18) dans le cas d'une sphère de rayon unitaire (<math>a=1</math>) pour un milieu isotrope.</b>       | p168 |

|   |             |
|---|-------------|
| <b>A4 - Complément thermodynamique</b>  | <i>p173</i> |
| <b>Annexe B : Détermination des tenseurs : <math>S^1</math>, <math>S^2</math>, <math>S^3</math></b>   | <i>p177</i> |
| <b>B.1 - Caractérisation d'un ellipsoïde et de son évolution cinématique</b>  | <i>p177</i> |
| <b>B.2 - Méthode de calcul par transformée de Fourier</b>   | <i>p183</i> |
| B.2.1 - <u>Cas général</u>  | <i>p183</i> |
| B.2.2 - <u>Cas d'un milieu isotrope</u>   | <i>p190</i> |
| <b>B.3 - Conclusion</b>   | <i>p193</i> |
| <b>Annexe C : Recherche d'une forme analytique des tenseurs <math>T^1</math>, <math>T^2</math>, <math>T^3</math> des transformées de Fourier pour une sphère unitaire dans un milieu isotrope</b> | <i>p197</i> |

# CHAPITRE I :

## Introduction



## **CHAPITRE I :**

### **Introduction**

Lors de la transformation, par mise en forme, d'une tôle d'acier en un produit fini, le matériau subit généralement des chargements complexes, continus ou séquentiels. Ainsi dans le cas d'une boîte boisson, la première opération est un emboutissage suivi d'un repassage (en plusieurs passes). La partie supérieure du corps de boîte subit ensuite un rétreint pour la formation du col. D'autres exemples peuvent être cités mettant en oeuvre des chemins encore plus complexes comme dans le cas d'une portière de voiture ou d'un carter moteur.

Ces opérations de mise en forme mettent en jeu de grandes déformations plastiques et sont souvent limitées par :

- (a) des instabilités de type structure : plissement,
- (b) des instabilités ou localisations de type bande de cisaillement,
- (c) des endommagements du matériau (fissures-cavitations).

En soi, ces mécanismes limitent la capacité de mise en forme des matériaux et des procédés par les défauts géométriques ou (et) d'aspects qu'ils génèrent. Dans certains cas (certains chargements séquentiels), la localisation de la déformation (suivie de la rupture) est suffisamment précoce pour rendre impossible un second trajet de déformation..

Dans ce travail, on se limite au mécanisme (b) (localisation de type bande de cisaillement) dans la mesure où il précède le mécanisme (c) tout au moins dans le cas des aciers extra doux pour la mise en forme. Le mécanisme (a) relève d'une analyse de stabilité de la structure mécanique.

On a cherché à décrire le domaine de ductilité des aciers en introduisant les courbes limite de formage (CLF) qui dans le plan  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$  (déformations principales décrivant un trajet donné) délimitent le domaine

où la déformation est uniforme [BB90, CHM94]. Quoique d'un intérêt incontournable pour la conception et la mise au point du procédé, la détermination expérimentale des CLF est longue et fastidieuse, en particulier lors de trajets complexes. Par ailleurs l'acquisition de ces courbes ne renseigne pas sur l'origine des mécanismes physiques responsables de la perte de ductilité. Classiquement, deux classes de mécanismes sont introduits par la métallurgie physique :

- l'adoucissement textural [B78] résultant d'une rotation non aléatoire des réseaux cristallins.
- la formation d'une microstructure intragranulaire de dislocations sous la forme de cellules à faible densité de dislocations, et de parois à forte densité de dislocations [RB77, FS83, S86, M88, RS89].

Le premier mécanisme n'est sans doute pas intrinsèque dans la mesure où, après une restauration par un traitement thermique laissant la texture cristallographique inchangée mais modifiant la structure de dislocations, on retrouve la capacité de déformation du métal. La texture cristallographique joue cependant un rôle certain dans les mécanismes de coalescence des microbandes de cisaillement.

Le second mécanisme est plus intrinsèque dans la mesure où la structure de dislocations formée lors d'un trajet de déformation est fortement marquée à l'échelle du polycristal par ce dernier :

- les cellules possèdent des morphologies liées au trajet de déformation et peu dépendantes de la cristallographie sous-jacente.
- les orientations des cellules sont également plus corrélées au trajet de déformation qu'à la cristallographie sous-jacente.

La présence des cellules de dislocations se traduit, pour le chargement ultérieur, par différents effets :

- contraintes internes intragranulaires (ordre 3) importantes,

- modification anisotrope du libre parcours moyen des dislocations activées lors du second trajet.

En outre, on verra au chapitre III que le calcul de l'énergie libre d'un monocristal contenant une structure cellulaire comporte un terme non convexe, source d'instabilités. Cette analyse est confortée par des observations en MET. Au cours de ces observations, il a été remarqué lors de trajets complexes, la création de microbandes au niveau des grains. Ces microbandes sont les prémisses d'une instabilité plastique (la bande de cisaillement), car après quelques pourcents de déformation ces microbandes se transforment en macrobandes.

Le présent travail a pour objectif de décrire à la fois la formation de la structure cellulaire de dislocations et son effet sur le comportement élastoplastique intragranulaire par une modélisation micromécanique s'inscrivant dans le cadre de la plasticité cristalline. Contrairement aux modèles courants de transition d'échelle (Taylor, Autocohérent ...) qui supposent le glissement plastique uniforme dans les grains, la présence des cellules de dislocations traduit un mécanisme d'hétérogénéisation plastique intragranulaire : le champ des glissements plastiques, fortement hétérogène, peut être assimilé à un champ discontinu, à valeur faible dans les parois et importante à l'intérieur des cellules. Contrairement aux joints de grains, qui sont stationnaires par rapport à la matière, les parois de dislocations assimilées aux discontinuités du champ de déformation plastique sont "mobiles" et en tous les cas représentent une "variable" d'état (ou interne) du problème. L'analyse du pseudo potentiel de dissipation conduit en outre à introduire un effet d'écrouissage non local traduisant le durcissement des parois par une déformation plastique des cellules [K85, K94, M94, F95].

En adoptant l'hypothèse de séparabilité des échelles, le présent travail se concentre sur l'obtention d'une loi de comportement intragranulaire prenant en compte les phénomènes évoqués précédemment. La transition d'échelle mésoscopique-macroscopique (du grain vers le polycristal) est effectuée par une transition autocohérente classique. Dans le chapitre II, on analyse et classifie dans un état d'esprit micromécanique, les observations portant sur les cellules de dislocations et tirées de la littérature. Une stratégie de modélisation est élaborée et mise en oeuvre dans le chapitre III tant pour une surface de discontinuité mobile générale

que pour une représentation simplifiée de la microstructure cellulaire. Les lois complémentaires sont formulées dans le chapitre IV et aboutissent au comportement élastoplastique du grain. A partir d'hypothèses simplifiées pour les lois d'évolution, on présente dans le chapitre V, les premiers résultats obtenus après une mise en oeuvre numérique du modèle proposé.

## **Références bibliographiques**

- [B78]       BERVEILLER M., Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformation des polycristaux métalliques, 1978 Thèse d'état de l'université de Paris
- [BB90]      BARLAT F., BAUDELET B., Influence de l'endommagement sur la limite de formage, 1990, dans Physique et mécanique de la mise en forme des métaux, eds F. MOUSSY et P. FRANCIOSI, Presses de CNRS-IRSID, pp(461-469)
- [CHM94]     COL A., HEURTAULT S., MUNIER M., L'emboutissage, dans le livre de l'acier, 1994, eds G. BERANGER, G. HENRY et G. SANZ (SOLLAC), Tec et DOc Paris, pp(786-816)
- [F95]        FENNAN A., Homogénéisation élastoplastique discrète, 1995, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon
- [FS83]       FERNANDEZ J. V., SCHMITT J. H., Dislocation microstructures in steel during deep drawing, 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- [K85]        KRATOCHVIL J., A model of cyclic plastic hardening and softening of metals, 1985, Proc. Int. Conf. on Nonlinear Mechanics, Shangai, pp(560-560)
- [K94]        KRATOCHVIL J., Continuum mechanics approach to collective behavior of dislocations, 1994, Solid State Phenom., Vol.35-36, pp(71-86)
- [M88]        MUGHRABI H., Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(367-379)
- [M94]        MULLER D., Influence de l'écrouissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins, 1994, Thèse, Université de Metz.

- [RB77] RONDE-OUSTAU F., BAUDELET B., Microstructure and strain path in deep-drawing, 1977, Acta Metall., Vol.25, pp(1523-1529)
- [RS89] RAUCH E.F., SCHMITT J.H., Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(441-448)
- [S86] SCHMITT J.H., Contribution à l'étude de la micro-plasticité des aciers, 1986, Thèse de INPG Grenoble

# CHAPITRE II :

## Hétérogénéités plastiques intra et intergranulaires : Analyse, classification, conséquences et stratégie pour une modélisation micromécanique.

|  |             |
|--|-------------|
| <b>II.1 - Analyse et classification des hétérogénéités plastiques</b>                                      | <i>p 13</i> |
| II.1.1 - <u>Hétérogénéités plastiques intergranulaires</u>   | <i>p 13</i> |
| II.1.2 - <u>Hétérogénéités plastiques intragranulaires</u>   | <i>p 15</i> |
| <i>a) La subdivision des grains en différentes zones à glissement multiple homogène</i>                    | <i>p 15</i> |
| <i>b) Formulation des cellules de dislocations</i>   | <i>p 16</i> |
| <i>c) Microbandes de cisaillement</i>  | <i>p 19</i> |
| <b>II.2 - Caractéristiques des cellules de dislocations</b>  | <i>p 23</i> |
| II.2.1 - <u>Formation et effet de la température</u>   | <i>p 24</i> |
| II.2.2 - <u>Caractéristiques morphologiques</u>  | <i>p 26</i> |
| II.2.3 - <u>Influence du chargement</u>  | <i>p 33</i> |
| <i>a) Forme et orientation des cellules</i>  | <i>p 34</i> |
| <i>b) Texture de la microstructure</i>   | <i>p 35</i> |
| <i>c) Chargement complexe</i>  | <i>p 38</i> |
| <b>II.3 - Conséquences de la formation des hétérogénéités plastiques sur le comportement macroscopique</b> | <i>p 38</i> |
| II.3.1 - <u>Les acquis de la modélisation autocohérente</u>  | <i>p 39</i> |
| II.3.2 - <u>Les insuffisances des modèles actuels</u>  | <i>p 44</i> |
| <b>II.4 - Stratégie pour une modélisation micromécanique</b>   | <i>p 47</i> |
| II.4.1 - <u>Schéma classique de la modélisation du comportement local en élastoplastique</u>               | <i>p 47</i> |
| II.4.2 - <u>Mécanique et micromécanique des cellules de dislocations</u>                                   | <i>p 49</i> |

## **CHAPITRE II :**

### **Hétérogénéités plastiques intra et intergranulaires : Analyse, classification, conséquences et stratégie pour une modélisation micromécanique**

S'il est relativement facile de définir un milieu hétérogène élastique linéaire en introduisant un tenseur des modules élastiques  $C(r)$  dépendant de la position spatiale  $r$  de l'élément de volume étudié, il est cependant plus difficile de caractériser l'hétérogénéité d'un milieu elastoplastique. Dans les approches méso et macroscopiques classiques, on utilise le champ de déformation plastique comme "variable" interne ou "variable" de process. Les relations d'évolution des caractéristiques mécaniques (cissions critiques, écrouissage cinématique) ne dépendent, en général, que de la valeur du champ de déformation plastique au point considéré ou de sa valeur moyenne sur l'élément de volume. Si cette approche peut être considérée comme pertinente lorsque l'échelle microscopique la plus grande est celle du glissement plastique multiple homogène, elle apparaît comme insuffisante lorsque l'on veut traiter les problèmes de plasticité à partir d'une échelle proche de celle des dislocations prises individuellement ou collectivement. La modélisation des phénomènes physiques de plasticité à cette échelle microscopique est rendue nécessaire, non seulement pour améliorer la précision des modèles méso - macro déjà existants, mais avant tout pour rendre compte des comportements lors de trajets de chargements complexes dont la stabilité est fortement influencée par la microstructure intragranulaire induite.

Dans ce travail, on conservera également le champ de déformation plastique comme variable interne mais en autorisant (ou imposant) des caractéristiques observées expérimentalement qui n'ont pas été prises en compte dans les modèles précédents.

Dans le paragraphe suivant, on décrit, avant tout à partir des résultats de l'étude bibliographique, les différentes caractéristiques du champ de déformation plastique qu'on appelle "hétérogénéités plastiques". Les paragraphes II.2 et II.3 sont consacrés à l'analyse approfondie des



cellules de dislocations et de leurs conséquences sur le comportement macroscopique. Avant de présenter la démarche de modélisation développée dans le chapitre III, on discute les différents modèles existants et concernés par cette échelle (cf. paragraphe II.4).

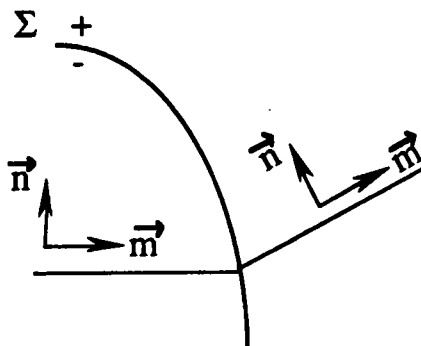
## **II.1 - Analyse et classification des hétérogénéités plastiques**

Avant d'aborder les hétérogénéités plastiques intragranulaires, il semble utile d'analyser celles provenant de la structure granulaire des polycristaux métalliques; étant entendu qu'on se limite, dans tout ce travail, à des matériaux macrohomogènes soumis à des chargements macrohomogènes. Les hétérogénéités d'ordre 1 (au sens de la classification introduite par l'analyse des contraintes par rayons X) sont donc exclues de la discussion.

### **II.1.1 - Les hétérogénéités plastiques intergranulaires**

Elles sont associées aux fluctuations du champ de déformation plastique de grain à grain ou de phase à phase dans les polycristaux multiphasés; elles correspondent à l'ordre 2 de l'analyse des contraintes par rayons X.

Leur origine est liée à la désorientation des réseaux cristallins de part et d'autre d'une interface ou surface de discontinuité telle que les joints de grains ou joints de phases. Au cours de la plastification, ces interfaces sont stationnaires par rapport à la matière et sont traitées comme telles dans les descriptions existantes.



*Fig II.1 : Joint de grains ou de phases*

Si on décrit collectivement ces interfaces par  $(\Sigma)$  et si on spécifie que l'écoulement plastique intragranulaire s'effectue par glissement plastique cristallographique d'amplitude  $\gamma g$  sur des systèmes de glissement de normale  $n g$  et dans la direction  $m g$ , le champ de la partie plastique  $\beta^p$  du gradient de déplacement total s'écrit :

$$\begin{aligned} r \in V^+ \quad \beta_{ij}^p(r) &= n_i^+ m_j^+ \gamma^+(r) \\ r \in V^- \quad \beta_{ij}^p(r) &= n_i^- m_j^- \gamma^-(r) \end{aligned} \quad (II.1).$$

Dans les modèles polycristallins usuels, on choisit de plus la valeur moyenne des  $\gamma$  sur les grains comme variables internes aboutissant ainsi à ce qu'il est convenu d'appeler le glissement plastique multiple homogène.

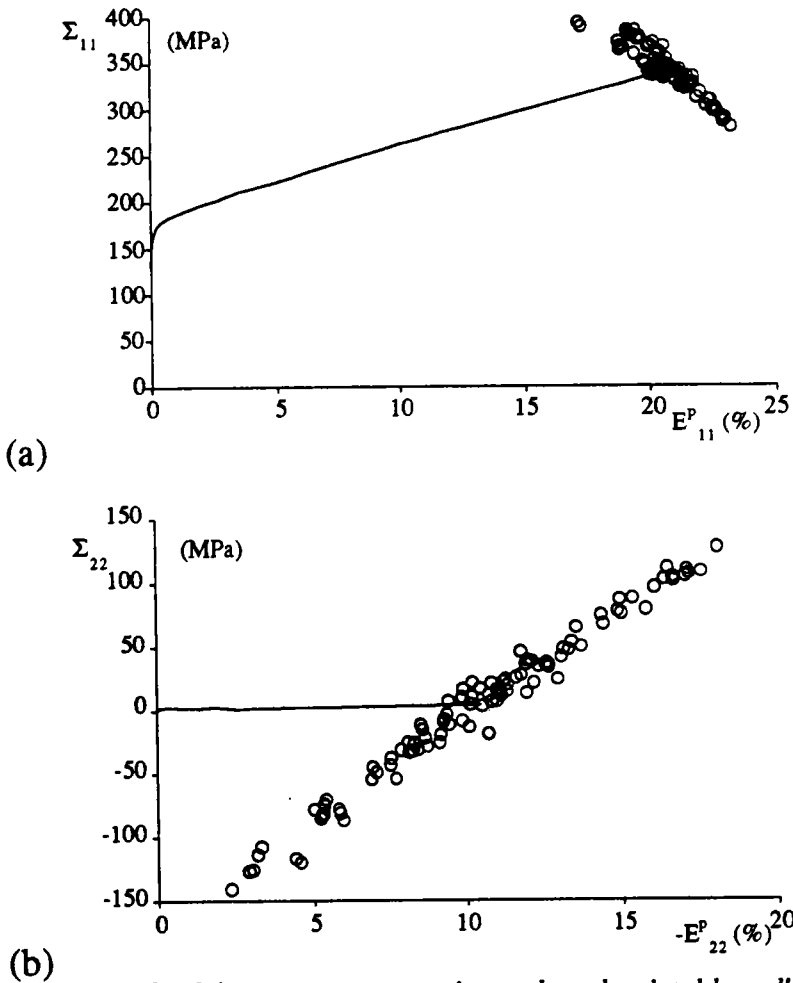


Fig II.2 : Réponses macroscopiques du polycristal lors d'une traction uniaxiale selon l'axe 1 et états mécaniques dans les grains pour  $EP=20\%$   
(a: composantes 11 ,b: composantes 22)

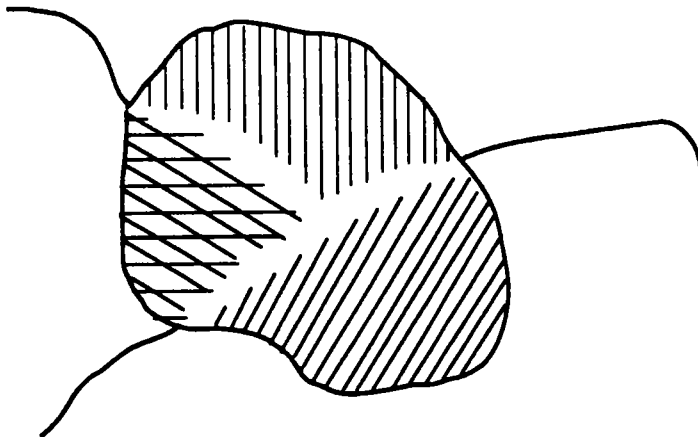
Les forces thermodynamiques conjuguées sont donc les cissions réduites moyennes sur ces systèmes de glissement négligeant ainsi les hétérogénéités plastiques intragranulaires. Dans le cas d'un polycristal monophasé CC (ou CFC), les fluctuations de  $\epsilon_P$  calculées à partir d'un modèle autocohérent sont de l'ordre de 5% pour une déformation moyenne de 20% (dans la direction de traction) et de l'ordre de 10% pour une déformation moyenne de 10% dans les directions transverses (cf. figure II.2).

Les contraintes internes résultant de ces hétérogénéités plastiques sont de l'ordre de grandeur du tiers de la limite d'écoulement macroscopique (cf. figure II.2).

### II.1.2 - Les hétérogénéités plastiques intragranulaires

Elles correspondent aux fluctuations d'ordre 3 de la classification introduite par l'analyse des contraintes par rayons X et peuvent être regroupées en deux sous-classes, selon leur origine et l'échelle d'observation.

*a) La subdivision des grains en différentes zones à glissement multiple homogène [R88].*



*Fig.II.3 : Subdivision des grains en différentes zones à glissement multiple homogène.*

Lorsque le nombre et la nature des systèmes de glissement actifs ne sont pas uniformes dans tout le volume du grain, l'hétérogénéité du mode de déformation plastique n'est cependant pas aléatoire. On observe en

général que des régions ou zones voient des combinaisons de systèmes actifs différents d'une zone à l'autre, le mode restant cependant plutôt uniforme à l'intérieur des zones (cf. figure II.3). On peut parler de glissement multiple hétérogène. L'origine de cette hétérogénéité est certainement reliée d'une part à la nature discrète des interactions intergranulaires et d'autre part aux joints triples.

La frontière entre ces zones est maintenant de nature tout à fait différente que le joint de grain, en tout cas du point de vue mécanique puisqu'il s'agit d'une frontière libre s'établissant et évoluant au cours de la déformation plastique. L'hétérogénéité plastique correspondante est difficile à évaluer mais on peut l'estimer du même ordre de grandeur que les fluctuations intragranulaires précédentes. Les conséquences sur le comportement global semblent négligeables par rapport à d'autres hétérogénéités intragranulaires (les cellules de dislocations) dans la mesure où la morphologie des microstructures associées à ces hétérogénéités plastiques est relativement aléatoire car corrélée à la désorientation relative des réseaux au passage des joints de grains.

### *b) La formation des cellules de dislocations*

Tant en chargement cyclique que monotone, la déformation plastique intragranulaire ou dans un monocristal n'est pas uniforme à l'échelle du  $\mu\text{m}$ . On observe, lorsque la température à laquelle est produite la déformation dépasse une température critique, la formation d'une structure de dislocations sous forme de cellules à faible densité de dislocations et des parois à forte densité.

De nombreuses études confirment cette observation. Luft [L91] définit cette température critique ou de transition ( $T_c$ ) pour les métaux à structure cristalline cubique centrée (CC) comme le molybdène ou le fer, entre  $0,1 T_f$  et  $0,2 T_f$  ( $T_f$  décrit la température de fusion en K du métal). Lorsque la déformation plastique s'effectue à une température inférieure à  $T_c$ , il apparaît une structure homogène de dislocations (cf. figure II.4). Le métal CC contient de longues dislocations vis de vecteurs de Burgers  $a/2 \langle 111 \rangle$ . Ces longues dislocations vis produites par paires de signes opposés sont dues à la grande mobilité des dislocations coins.

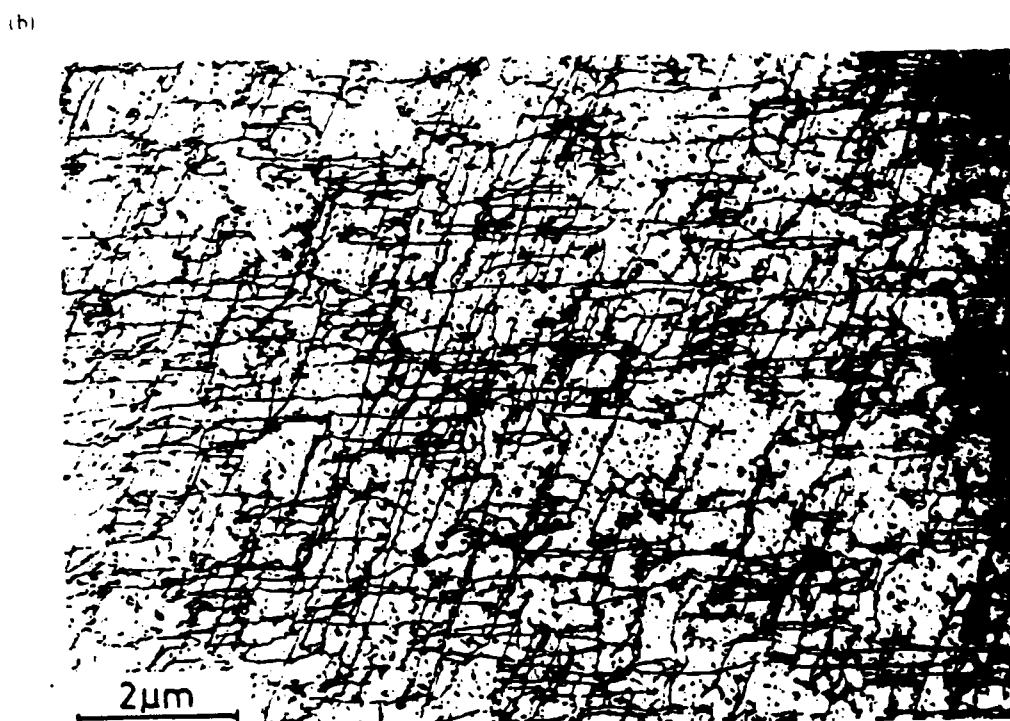
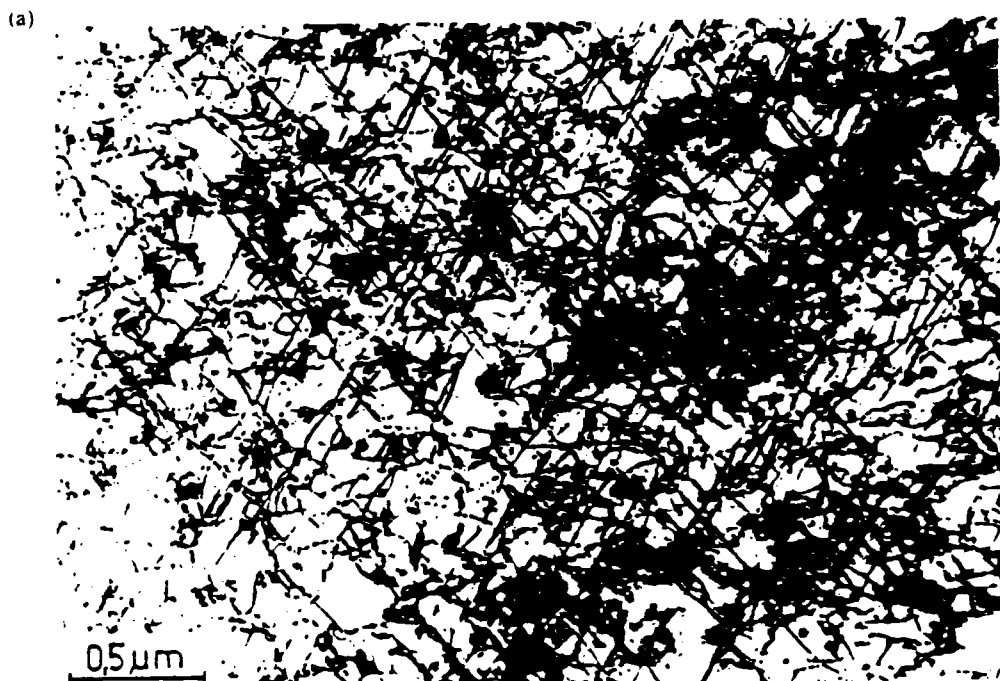
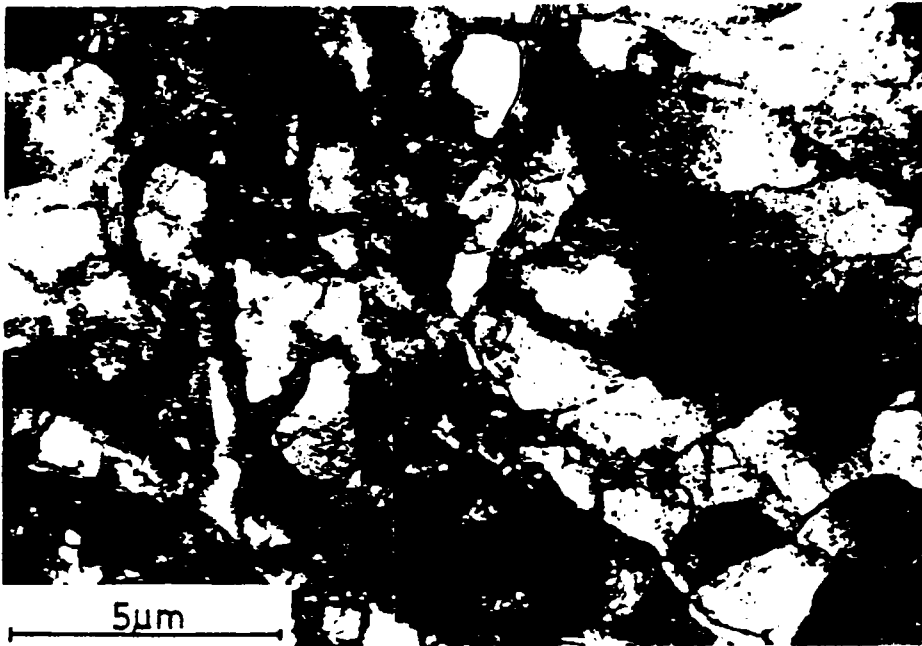


Fig.II.4 : Structure homogène de dislocations dans des métaux à structure cristalline CC après une déformation à basse température.

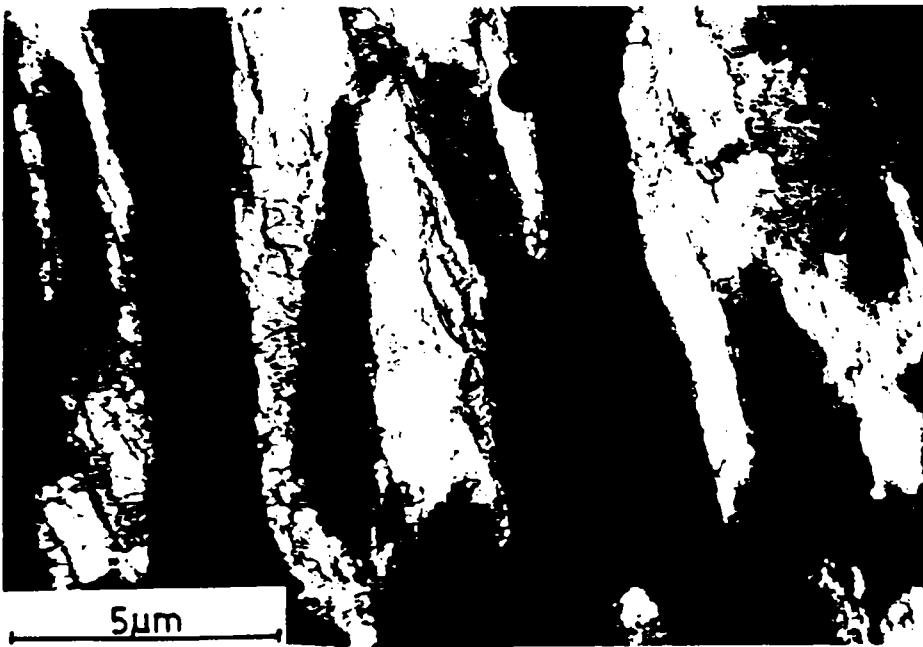
(a) monocristal de fer laminé à un taux de 10% à 77K [G75]

(b) monocristal de molybdène pour une traction uniaxiale de 2% à 77K [K72]

(a)



(b)



**Fig II 5 : Structure cellulaire des dislocations dans des métaux à structure cristalline CC après une déformation à la température au-dessus de la température de transition.**  
(a) monocristal de molybdène laminé à un taux de 80% à 573K [M75]  
(b) monocristal de fer pour une traction uniaxiale de 10% à 293K [L91]

Avec la montée de la température, la différence entre la mobilité des dislocations vis et des non-vis devient progressivement petite par rapport à l'activité thermique. Lorsque la température  $T$  de la déformation plastique est supérieure à la température de transition  $T_c$ , c'est-à-dire quand la mobilité des dislocations vis et coins sont comparables, les métaux de structure CC ont des comportements à la déformation similaires aux métaux à structure cubique face centrée.

Il apparaît alors des analogies entre ces deux types de structure, notamment une formabilité facile et une haute ductilité. En règle générale, un arrangement inhomogène des dislocations est développé. Après quelques pourcents de déformation plastique, une microstructure du type cellulaire est induite (cf. figure II.5). Les caractéristiques essentielles comme la taille, l'orientation, l'effet du chargement (monotone, séquentiel, complexe ...), ou la température sont présentés dans le paragraphe II.2.

### *c) Microbandes de cisaillement*

Une autre structure intragranulaire peut apparaître lors de la déformation plastique. Cette structure est une localisation de la déformation plastique sous forme de microbande, d'où l'appellation de microbande de cisaillement (cf. figure II.6).

L'un des premiers à utiliser le terme de microbande est Hu [H62]. Il définit par ce terme, une bande de déformation d'épaisseur de  $0,2\ \mu\text{m}$  séparant deux régions d'un même grain ayant chacune une orientation cristallographique légèrement différente ( $3$  à  $4^\circ$ ). Cette zone de transition est composée de dizaines de segments parallèles entre eux. Chaque segment ressemble à une cellule c'est-à-dire une zone de faible densité de dislocations entourée de deux parois à forte densité de dislocations.

On retrouve cette frontière entre deux régions à forte désorientation des lignes de glissement dans un même grain sous le terme de bande de transition. Par contre ces bandes de transition étudiées dans un acier ferritique inoxydable par Dymeck et Blicharski [DB84] n'ont pas la structure de dislocations décrite par Hu [H62]. Mais ils les identifient à un genre de joint de grain résultant de l'interpénétration des lignes de

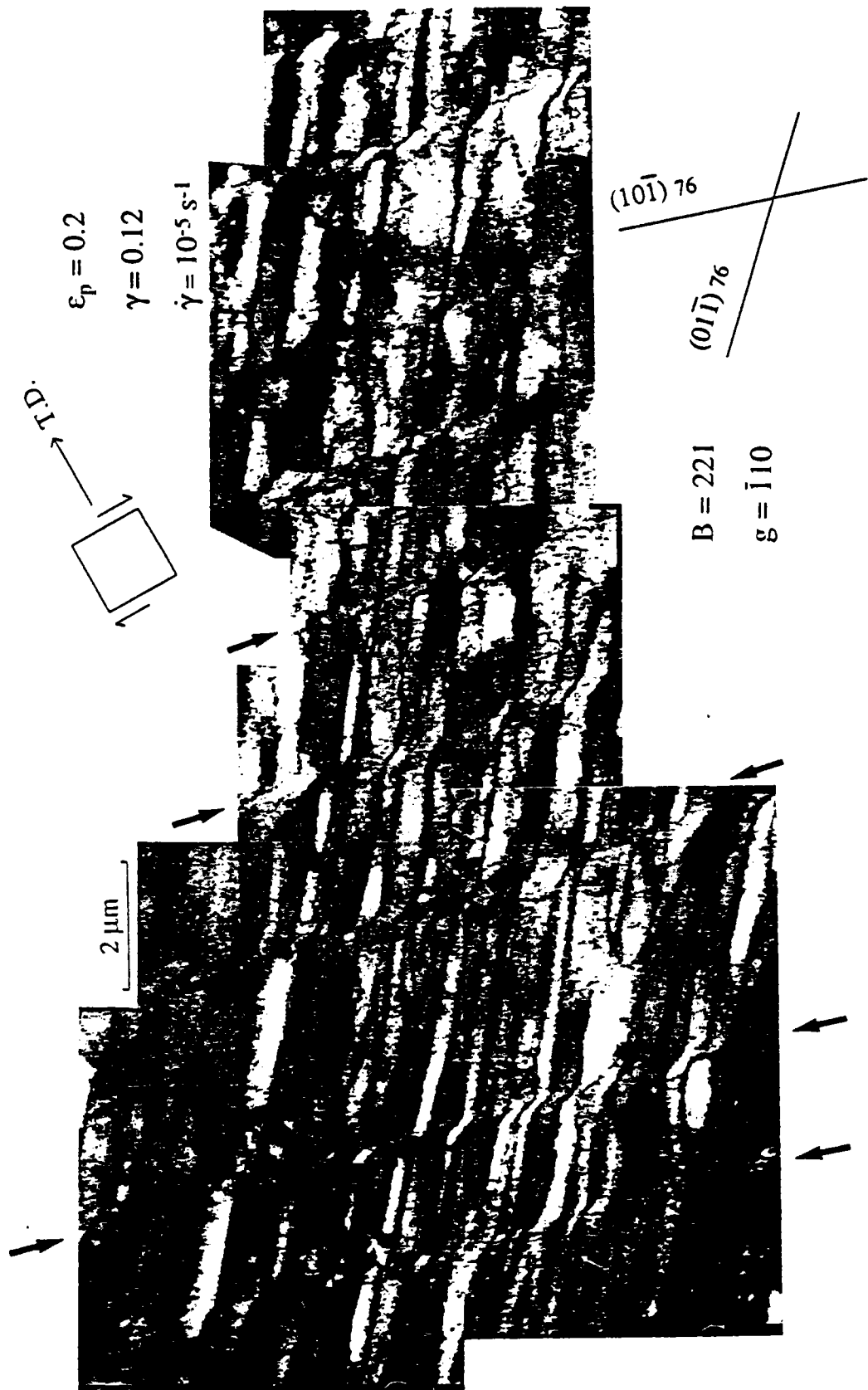


Fig II.6 : Microbandes réparties périodiquement dans les grains lors d'un trajet cisaillement-traction d'un acier doux [T92]



glissement. D'autres termes sont utilisés pour la structure définie par Hu [H62] : couche riche en dislocations [MN., MNM., HM84].

La définition de Hu [H62] du terme microbande correspond également au microbande de première génération définie par Hansen et al. [H90, JH90, BHK79, K89, HK86, H92, H93]. Ces bandes jouent le rôle de séparateur entre des régions appelées blocs de cellule, déformées par un petit nombre de système de glissement. Ces dernières bandes ne sont pas toujours parallèles à un plan de glissement.

Ces derniers auteurs [H90, H92, JH90, H93] définissent aussi une microbande de seconde génération. L'expression "seconde génération" est due au fait que ces microbandes se superposent à une première microstructure de dislocations généralement des cellules. Thuillier [T92] donne pour ces microbandes la définition suivante : "Une microbande est une structure intragranulaire de dislocations en forme de bande. Les microbandes d'un même grain parallèles entre elles sont isolées l'une de l'autre par une autre structure de dislocations de déformation et transportent un intense cisaillement. Elles sont plus ou moins parallèles à un plan de glissement".

L'aspect géométrique de ces bandes est une forme étroite et allongée d'épaisseur de 0,2 à 0,4  $\mu\text{m}$ . Ces microbandes peuvent traverser tout le grain mais parfois elles disparaissent au milieu d'un grain pour réapparaître plus loin [ALH91]. C'est une structure planaire à répartition périodique de forme parallépipédique. Ces bandes perturbent une autre structure [MH79]. Il faut noter deux points importants de cette microstructure. Le premier est que ces bandes sont parallèles à des plans de glissement cristallographique [T92, MH79, MHH81, ALH91]. Le second point reporte l'association de ces microbandes à une localisation de la déformation. Martin et Hartely [MH79] mettent en évidence cette localisation dans un échantillon cristallin, par le cisaillement éventuel des joints de grain.

Il y a fréquemment deux familles de microbandes dans un grain. Ces deux familles n'apparaissent pas simultanément car il est courant d'observer qu'une des deux familles cisaille l'autre [H93, T92].

Les dernières bandes de cisaillement ne sont pas une structure intragranulaire mais en découlent, comme nous allons le voir par la suite. Ce type de bande a été très étudié [AS80, BNFK92, MN., HM84, MH79, YD87, KM86, KR85, KM88, DHMA88, K90, I89], car c'est un prémisses de la ruine du matériau. En effet, Dève et al [DHMA88] disent à propos de la bande de cisaillement : "C'est un cisaillement localisé avant le début de l'endommagement par microrupture". Le tableau suivant (Tab.II.1) montre que ces bandes apparaissent macroscopiquement tard dans la déformation pour quelques matériaux [HM84].

| matériau                      | déformation $\epsilon$          |                     |
|-------------------------------|---------------------------------|---------------------|
|                               | bande microscopique             | bande macroscopique |
| bronze                        | 0,8 -3<br>(90% du volume total) | 2-5                 |
| acier                         | 1,3-2<br>(3% du volume total)   | 3-4                 |
| cuivre                        | 1-3<br>(5% du volume total)     | 2,5-3               |
| alliage de<br>cuivre-silicium | 0,4                             | 0,8-1,2             |

*Tab.II.1 : tableau précisant les plages de déformations lesquelles des bandes de cisaillement apparaissent.*

Une bande de cisaillement se définit [HM84, MH79] par une forme planaire résultant plus de la géométrie de l'échantillon et du procédé de déformation que de la déformation cristallographique. Ces bandes d'une épaisseur de 0,4 à 1,7  $\mu\text{m}$  pour une déformation de 1,1 à 6 [HM84] traversent les joints de grain sans déviation.

Généralement les auteurs sont d'accord sur cette définition mais diffèrent sur les conditions de leurs formations. Une majorité de ces auteurs suppose qu'une microstructure de dislocation (parois parallèles, ligne de glissement, microbande, lamelle, cellules allongées) est à l'origine de la bande de cisaillement. Dève et al. [DHMA88] montrent dans leur étude sur le monocristal d'un alliage de Fe-Ti-Mn que la bande de cisaillement est un regroupement de parois de dislocation parallèles au plan de glissement, mais indépendant des microbandes. Par contre, pour un polycristal d'aluminium, Korbel et Martin [KM86] affirment que la microbande s'étale à travers tout le grain, se propage dans le grain voisin

et cela jusqu'à la formation d'une bande de cisaillement. Ces mêmes auteurs [KM88] introduisent des bande de microcisaillement comme étape intermédiaire. Ce processus de formation de bande de cisaillement est décrit par la figure suivante (cf. figure II.7) :

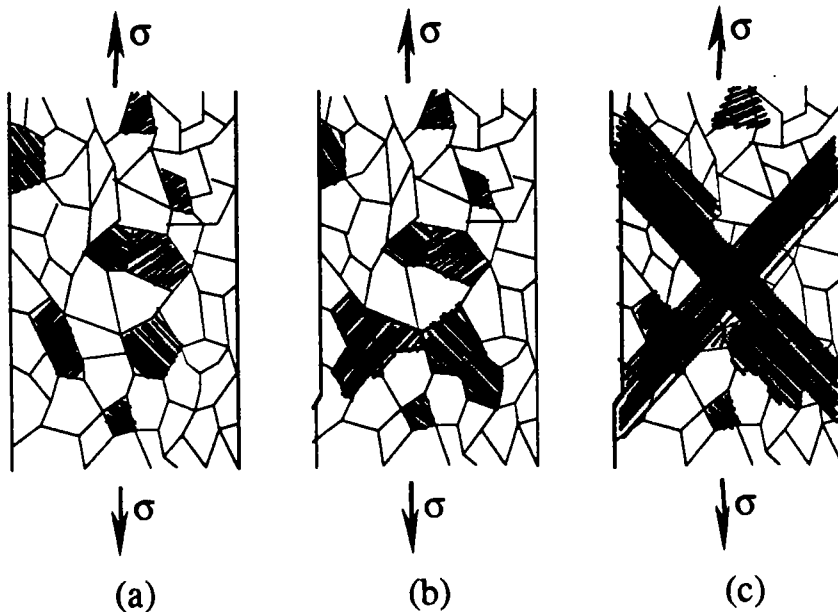


Fig II.7 : Visualisation schématique du développement du défaut géométrique (c) causé par nucléation (a) et propagation (b) des microbandes de cisaillement [KM88].

Morii et al. [MN., MNM.] proposent le même processus. Contrairement à ces auteurs, Inagaki [I89] affirme que les bandes de cisaillement proviennent des joints de grains.

D'autres études se sont intéressées à l'orientation de ces bandes par rapport au repère du chargement ou au repère cristallographique [YD87, MH79, BNFK92]. Korbel et al. [KR85] montrent que la bande de cisaillement n'est pas dépendante du mode de chargement, mais de la structure de dislocations sous-jacentes (cf. figure II.6). On peut donc logiquement attribuer la formation des microbandes à la microstructure de dislocations induite par le trajet de déformation antérieur.

## II.2 - Caractéristiques de cellules de dislocations

Dans ce paragraphe, les caractéristiques morphologiques des cellules sont analysées après la description de la formation et de l'effet de la

température sur les cellules de dislocations. Il conclut par l'étude de l'influence du chargement sur ces caractéristiques.

### II.2.1 - Formation et effet de la température

Après le recuit, une tôle laminée d'acier présente à l'intérieur des grains un milieu quasi homogène. Ce milieu est caractérisé par une distribution aléatoire d'un petit nombre de défauts non éliminés par le traitement thermique (lacunes, intersticiels, dislocations). Au cours d'une déformation plastique de cette tôle, il apparaît une microstructure cellulaire de dislocations, généralement pour l'acier aux environs de 10% de déformation.

La description de l'apparition de cellules est bien développée pour des monocristaux de Fer [PPL75] ou de Fer-Silicium [LS83], en trois stades schématisés par la figure II.8 pour une température ambiante.

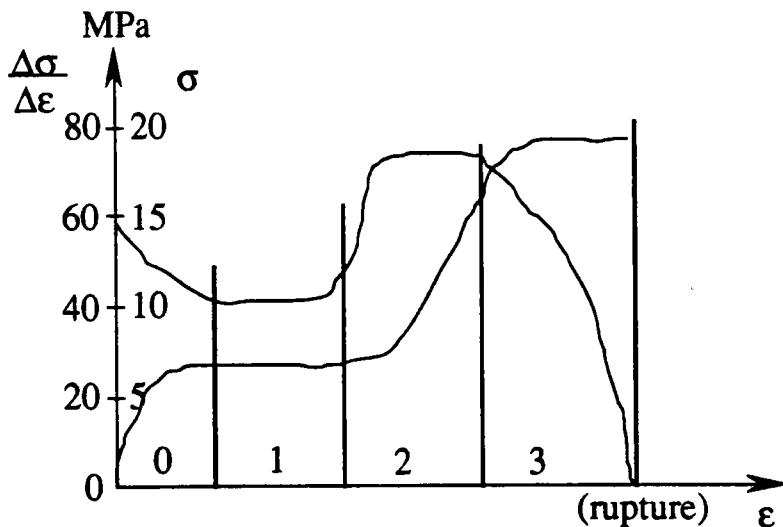


Fig.II.8 : Schématisation de la courbe de traction à 3 stades d'un monocristal et la variation correspondante du taux de consolidation avec la déformation plastique [PPL75].

Le stade 0 (de 0 à 2%) correspond à une présence de dislocations dans les cristaux principalement de type vis. La densité de boucles et de dipôles coin est importante dès le début de la déformation. Ces débris sont cependant isolés.

Pour le stade 1 (de 2 à 4%), les dislocations vis secondaires sont nombreuses et les écheveaux allongés s'organisent autour d'amas de boucles et constituent des obstacles au mouvement de dislocations.

Le stade 2 (de 4 à 7,5-9%) décrit la transition entre la structure ouverte du stade 1 et celle fermée du stade 3. En effet la structure d'abord constituée de dislocations orientées selon une seule direction évolue progressivement vers une structure bi-dimensionnelle bien définie.

Finalement, la structure fermée des cellules de dislocations définit le stade 3 (de 7,5-9 à 10,5-15%).

Ces différents stades proposés par Pollnow et al. [PPL75] pour un monocristal de fer soumis à une traction uniaxiale sont plus ou moins bien respectés selon l'orientation initiale de la direction de traction D.T. Au cours d'un trajet de cisaillement d'un monocristal de fer-silicium, Libovicky et Sestak [LS83] font des remarques similaires à propos de ces trois stades. Ils signalent l'absence du stade 2 pour une structure cristalline cubique centrée (CC), mais définissent un stade de transition 1 - 3 compris dans un cisaillement de  $\gamma = 0,68$  à  $0,94$ .

Sans mentionner de stade de formation, Tabata et al. [TYF78] décrivent le même processus pour un monocristal d'aluminium : des enchevêtrements isolés de dislocations grossissant au cours de la déformation plastique deviennent des parois de cellules. Keh et Weissmann [KW63] dans un fer polycristalin, tout comme Lan et al. [LKD92] dans une étude de l'influence de la température sur les cellules, observent la même évolution de formation des cellules.

Comme on l'a vu dans le paragraphe II.1.2.b, l'existence d'une température de transition entre la formation et la non-formation des cellules pour les métaux à structure cubique centrée [L91], implique que la formation des cellules est plus ou moins influencée selon la température à laquelle est effectué le trajet de déformation [KW63, LKD92]. En effet, la figure II.9 illustre cet effet de la température pour un polycristal de fer. Cette figure II.9 montre la tendance de la formation des cellules en fonction de la déformation et de la température de déformation. Les cercles vides indiquent les conditions d'essais dans lesquelles il n'y a pas d'observation de cellules et les ronds pleins la formation complète des

cellules dans tous les grains observés. Il semble que la formation de la microstructure cellulaire soit retardée lors des déformations à basse température [KW63].

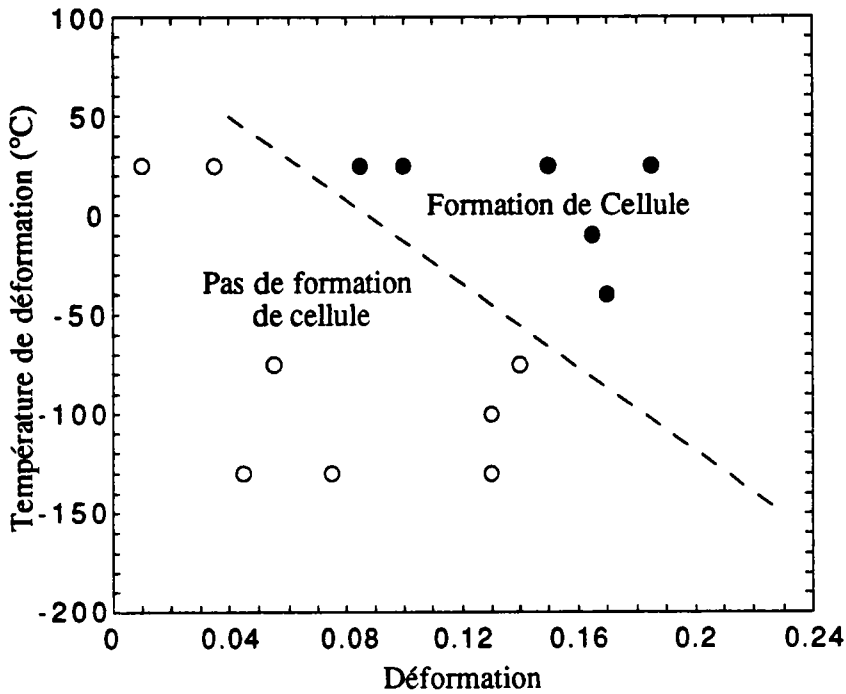


Fig.II.9 : Influence de la température de déformation sur la déformation des cellules de dislocations [KW63].

Swann [S63] montre pour un aluminium, que la microstructure cellulaire est plus marquée pour une déformation à 25°C que pour une déformation à -196°C.

On remarque également que la température de déformation influence la taille des cellules de dislocations. Il est généralement observé [KW63, S63], que plus la température de déformation est élevée, plus la taille des cellules obtenues est grande. Par contre Takeuchi [T70] signale sur une étude d'un monocristal de fer déformé entre 25°C et 900°C, une diminution de la densité linéaire des parois des cellules de dislocations avec la température.

Seule ici, l'influence de la température sur la taille des cellules est analysée. Les caractéristiques dimensionnelles, dont les tailles, sont développées dans la partie suivante. Mais avant d'aborder cette partie, on

fait une dernière remarque à propos des températures lors de trajet complexe, autrement dit les trajets doubles.

Les micrographies de la figure II.10 illustrent bien l'effet de température de déformation sur les cellules pour différents trajets doubles.

Ces micrographies montrent deux exemples de trajets complexes. Le premier est un préchargement à 25° C de 8% suivi d'une déformation de 5,5 % à -135° C, et le second décrit un chargement de 19% à 25° C sur une pièce déformée de 13% à -135° C. Le premier exemple met en évidence une détérioration de la microstructure marquée par des cellules induite par le premier trajet, due au second trajet à basse température (cf. figure II.10.a et c). Par contre, le second exemple illustre l'effet inverse qui montre une formation des cellules par le second trajet sur une distribution uniforme des dislocations obtenue après 13% de déformation à - 135° C (cf. figure II.10.b et d).

### II.2.2 - Caractéristiques morphologiques

On analyse les caractéristiques morphologiques de la structure cellulaire en partant de l'effet de la taille de grains. Hansen [H90] fait remarquer que dans un polycristal de cuivre, on observe une déformation hétérogène plus importante dans les gros grains ( $>>50\text{ }\mu\text{m}$ ) que dans les petits grains ( $<<50\text{ }\mu\text{m}$ ). Dans les grains de grande taille, cette hétérogénéité entraîne la création de sous-domaines intragranulaires possédant une désorientation cristallographique de quelques dixièmes de degrés.

L'accommodation de ces régions entraîne une accumulation de dislocations aux frontières de ces sous-domaines créant ainsi des murs denses de dislocations (DDW) ou des microbandes de 1ère génération (MB) définies dans le paragraphe II.1.2.a. Ces types de sous-domaines sont observés pour les matériaux possédant des gros grains comme l'aluminium [H90, JH90, H93], ou le nickel [HN89]. Mais pour des matériaux à petits grains comme l'acier [FS83, RS89, RB77, T92], cette subdivision des grains n'existe pas. Hansen et al. [H90, JH90] introduisent pour les sous grains le terme de "bloc de cellules". Comme pour les



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig II.10 : Distribution des dislocations pour un polycristal de fer lors de trajets doubles [KW63].

(a) 8% à 25°C      (c) 8% à 25°C puis 5,5% à -135°C  
(b) 13% à -135°C      (d) 13% à -135°C puis 19% à 25°C



matériaux à petits grains, l'hétérogénéité plastique crée dans ces régions une structure cellulaire de dislocations. La figure II.11 résume l'effet de la taille des grains sur la microstructure intragranulaire de dislocations.

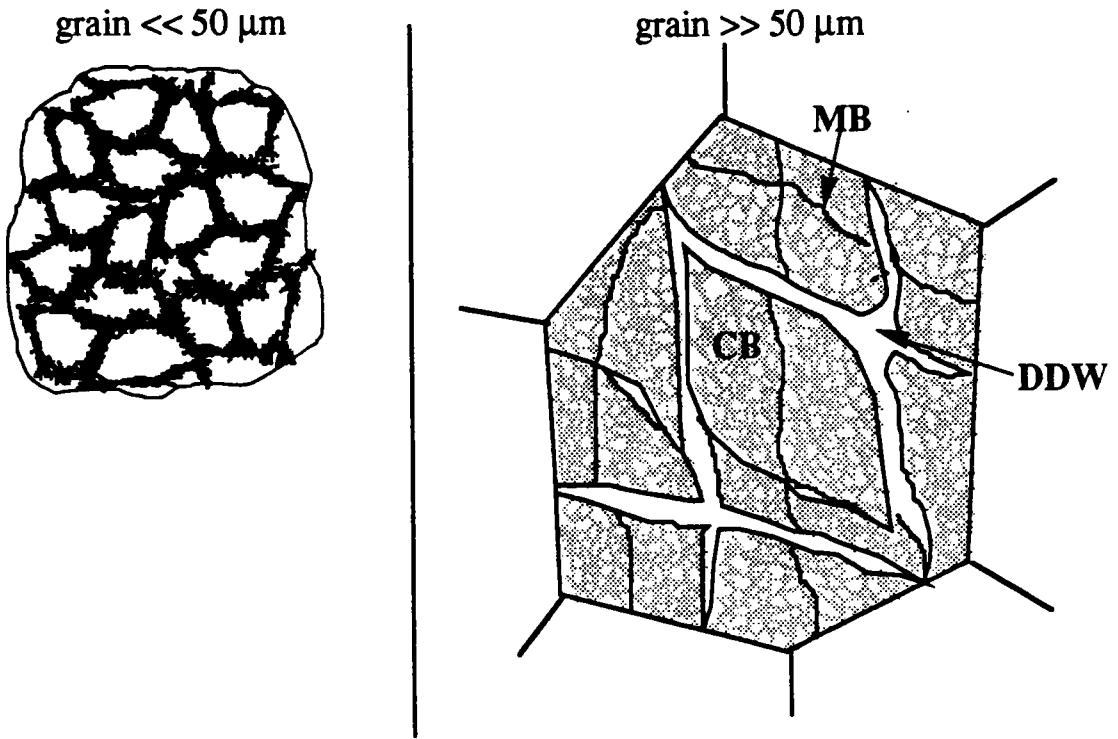


Fig II.11 : Effet de la taille du grain.

Pour fixer les idées, on peut admettre que, dans l'acier, la taille des cellules est de l'ordre de  $1\ \mu\text{m}$ , celle de s grains de  $10\ \mu\text{m}$  et l'épaisseur des parois coresspond à  $0.1\ \mu\text{m}$ .

Maintenant on aborde la caractérisation des parois notamment son épaisseur. En général, l'épaisseur des parois de dislocation diminue avec l'augmentation de la déformation. Ce phénomène est observé pour n'importe quel chemin de déformation. Pour un acier doux, Schmitt [S86, FS83] met en évidence cette caractérisation pour trois types de trajet monotone de déformation (traction uniaxiale (u.t.) - déformation plane (p.s.) et expansion équi biaxiale (e.e.)) par la figure II.12 où l'épaisseur tend vers la valeur de  $0,1\ \mu\text{m}$  au cours de la déformation quelle que soit la sollicitation.

La figure II.12 donne l'épaisseur des parois mesurée dans le plan de la tôle normalement à la plus grande direction de la paroi en fonction de la déformation équivalente au sens de Von Mises. Morris et Martin

[MM84] retrouvent ce phénomène pour un aluminium. Schmitt [S86] relie cette caractérisation à une minimisation du champ de contrainte à longue distance, due à l'enchevêtrement de dislocations par réarrangement à l'intérieur des parois.

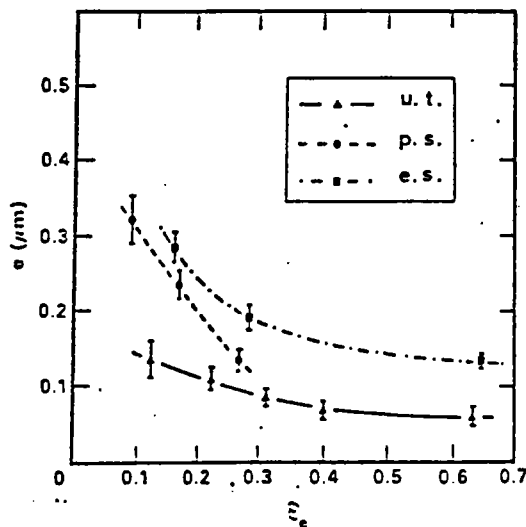


Fig II.12 : Variation des épaisseurs ( $e$ ) de parois mesurées en fonction de la déformation équivalente ( $\epsilon_e$ ) pour quelques trajets de chargement. [FS83].

Comme pour l'épaisseur des parois, il faut noter une évolution des dimensions des cellules de dislocations au cours de la déformation. Le tableau II.2 reporte, pour plusieurs matériaux, le diamètre ( $d$ ) ou la racine carrée d'aire ( $\sqrt{A}$ ) des cellules obtenues par différents types de chargement. On peut remarquer dans ce tableau qu'après une forte décroissance au début de la déformation, le diamètre des cellules de dislocations tend progressivement vers une valeur asymptotique. Schmitt [S86] affirme que cette diminution de la taille des cellules correspond à la création de nouvelles parois au cours de la déformation plastique. Kocks et al. [KHS80] confirment cette conclusion. La saturation semble liée à la restauration dynamique résultante de la compétition entre la création et l'annihilation des dislocations.

Tabata et al. [TFHM82] montrent une décroissance similaire pour une longueur de lignes de glissement. En effet dans un monocristal d'aluminium [111], Tabata et al. [TYF78] observent des lignes de glissement dans chaque cellule (cf. figure II.13).

| Matériau  | Chargement                | Référence   | déformation<br>(%)<br>ou cission<br>(MPa)      | d ou $\sqrt{A}$<br>( $\mu\text{m}$ ) |
|-----------|---------------------------|-------------|--|--------------------------------------|
| Aluminium | Laminage                  | BHK89       | 10 %<br>30 %                                   | 2,5<br>1-1,4                         |
|           |                           | H94         | ( $\text{eq. Von Mises}$ )<br>6%<br>12%<br>41% | 3,4<br>2,1<br>1,3                    |
|           |                           | HL88        | 100%<br>200%<br>300%                           | 0,6<br>0,4<br>0,4                    |
|           | Traction                  | TYF78       | 6%<br>20%                                      | 4,6-2,6<br>2,8-1,8<br>1,6-1,4        |
|           | ?                         | S63         | 10%<br>25%                                     | 3<br>1,8-2,8                         |
|           |                           |             |  |                                      |
| Argent    | ?                         | S63         | 10%<br>25%                                     | 0,5<br>0,5                           |
| Nickel    | ?                         | S63         | 25%  | 0,5                                  |
| Or        | ?                         | S63         | 10%  | 0,5                                  |
| Cuivre    | ?                         | PA80        | 20 MPa<br>30 MPa<br>40 MPa                     | 3,2<br>2,2<br>1,5                    |
|           | ?                         | S63         | 10%<br>25%                                     | 1<br>0,6-0,9                         |
|           | Traction                  | KT80        | 20 MPa<br>50 MPa<br>100 MPa                    | 4-2<br>1,7-0,8<br>0,8-0,4            |
| Fer       | Traction                  | LKD92       | 6%<br>20%<br>35%                               | 2<br>1,3<br>1,1                      |
| Acier     | Traction                  | FS83        | 10%  | 0,8                                  |
|           |                           | S86         | 40%<br>60%                                     | 0,4<br>0,3                           |
|           |                           | KW63        | 4%<br>14%<br>28%                               | 2,1<br>1,5<br>1,5                    |
|           | Déformation<br>plane      | FS83<br>S86 | 15%<br>20%                                     | 1,4<br>1                             |
|           | Expansion<br>équibiaxiale | FS83        | 15%  | 1,7                                  |
|           |                           | S86         | 40%<br>60%                                     | 1,1<br>0,8                           |

Tab.II.2 Dimension (le diamètre d ou la racine carrée de l'aire  $\sqrt{A}$ ) des cellules de dislocations au cours d'une déformation plastique pour quelques matériaux.

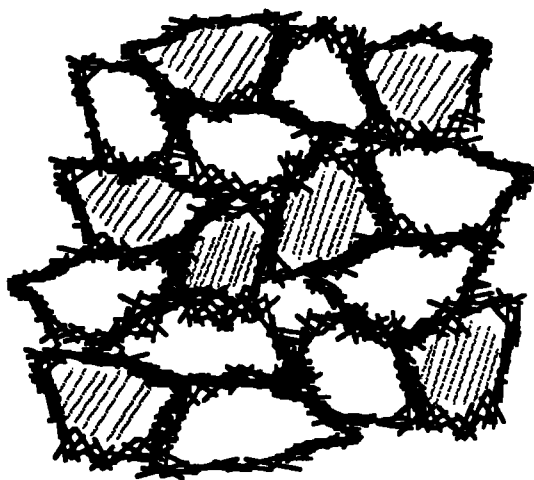


Fig.II.13 : Lignes de glissement dans la structure cellulaire [TYF78].

Une conclusion de Tabata et al. [TYF78] indique que les dislocations mobiles s'arrêtent exactement aux parois de cellules, de sorte que le libre parcours moyen des dislocations mobiles est déterminé par la taille des cellules. Cette conclusion est fondée sur une étude de micrographies montrant qu'aucune ligne de glissement ne se propage à une cellule voisine au travers des parois. A l'aide d'une caméra rapide, le suivi d'une dislocation dans la structure cellulaire a permis de d'établir la conclusion précédente ainsi que de décrire le mouvement des dislocations mobiles durant une déformation. La figure II.14 schématise pour une cellule circulaire les différents stades de propagation d'une dislocation mobile.

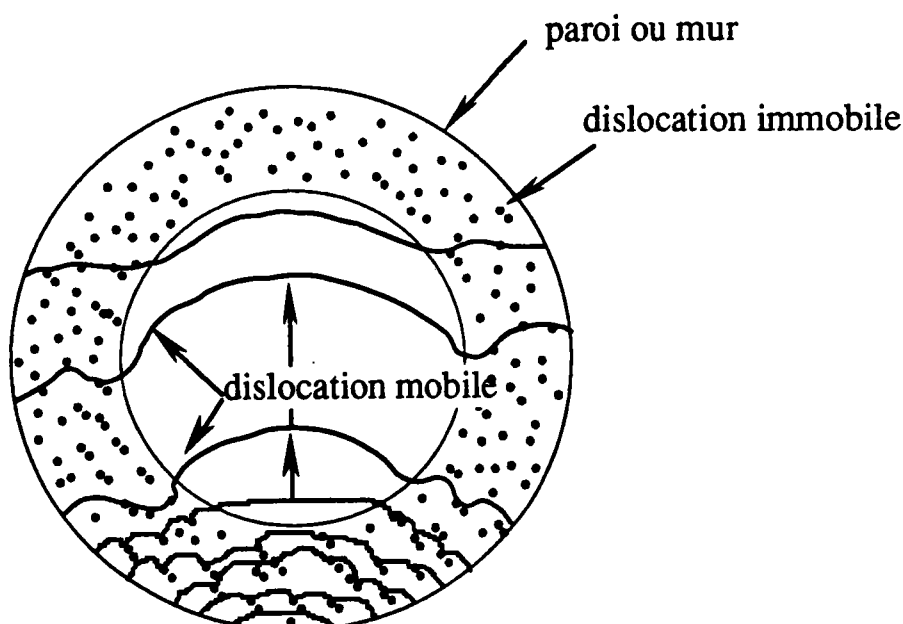


Fig.II.14 : Schématisation des étapes successives d'un mouvement d'une dislocation mobile dans une cellule [TFHM82].

Sous l'action d'une contrainte, une dislocation émise d'une source située dans une paroi, se déplace. La vitesse de cette dislocation mobile est plus grande à l'intérieur des cellules que dans les parois. En effet, la forêt de dislocations dans les murs freine le déplacement de la dislocation mobile. Cela explique que dans les parois, chaque dislocation de la forêt joue le rôle de point d'ancrage pour la dislocation mobile. Quand la contrainte appliquée augmente, ces points d'attache se rompent et la dislocation avance. La vitesse des dislocations augmente très rapidement au début de sa progression, puis décroît lentement avant d'atteindre la paroi opposée où elle est arrêtée par la forêt de dislocations (cf. figure II.15).

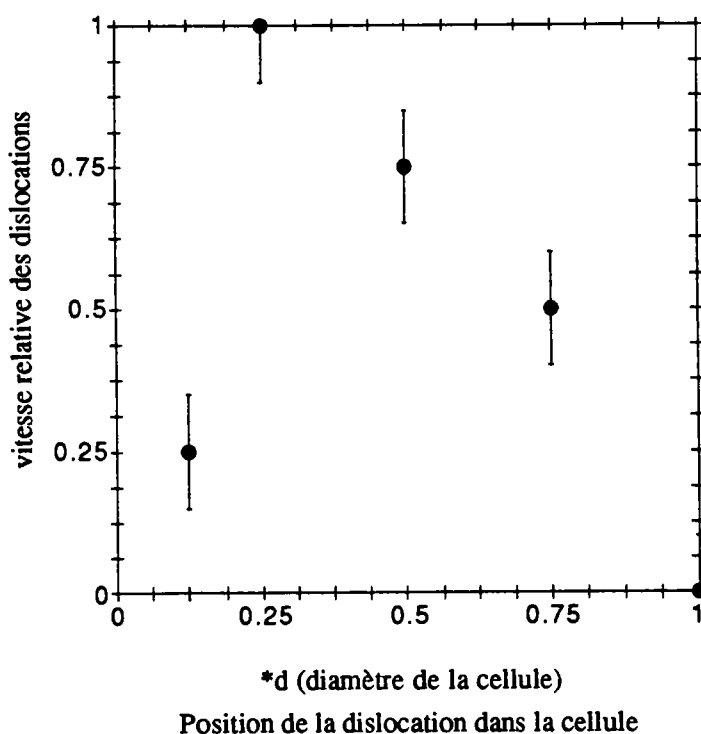


Fig II.15 : Evolution de la vitesse d'une dislocation dans la cellule [TFHM82].

### II.2.3 - Influence du chargement

La forme et l'orientation des cellules de dislocation induites apparaissent comme une des conséquences du mode de chargement. Dans un premier temps, on étudie les formes et les orientations des cellules selon le trajet de déformation. Puis, cette étude est suivie par une analyse de l'orientation des plans des systèmes actifs obtenue par le modèle

autocohérent élastoplastique. Finalement, on conclut ce paragraphe par des commentaires sur les trajets complexes.

*a) Forme et orientation des cellules*

Selon le type de chargement, les cellules de dislocation possèdent une forme et une orientation particulières. En effet, il est généralement observé des cellules allongées et rectangulaires pour un trajet en traction uniaxiale, sur des monocristaux [PPL75, T70, LS83] ou sur des polycristaux [FS83, LDY93, RB77, S86, KW63]. D'autres types de chargement font apparaître des cellules allongées comme le laminage [I89, S63] ou comme le cisaillement [RS89]. Par contre un chargement en expansion équi biaxiale fournit des cellules équiaxes [RB77, S86, FS83], de même que pour les essais de torsion [HN89]. Il existe des trajets de déformation où les cellules n'ont pas de forme particulière comme lors d'une déformation plane [FS83, S86].

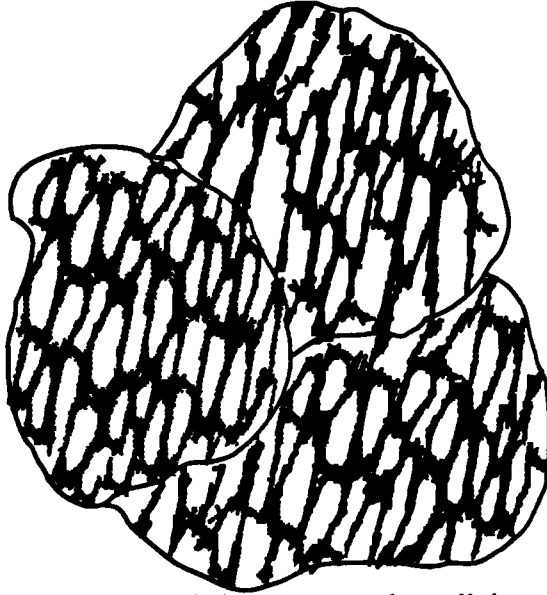
Pour l'orientation des cellules, une observation générale peut être faite. Cette constatation est que les murs des cellules de dislocation sont parallèles aux plans de glissement. Ce commentaire est surtout effectué pour des cellules allongées [T92, T70, L91, FS83, S86, I89].

| Matériau | Chargement              | Référence   | Orientation             |
|----------|-------------------------|-------------|-------------------------|
| Acier    | Traction uniaxiale      | LDY93       | 31° / DT<br>-37,5° / DT |
|          |                         | FS83<br>S86 | 33 à 66° / DT           |
|          |                         | RS89        | 35 à 65° / DT           |
|          | Cisaillement            | RS89        | // ou $\perp$ à DC      |
|          | Déformation plane       | FS83<br>S86 | 0 à 15° / DDP           |
|          | Expansion équi biaxiale | FS83<br>S86 | pas d'orientation       |
| Fer      | Laminage                | I89         | 35° / DL                |

*Tab.II.3 Orientations des cellules de dislocations au cours d'une déformation plastique pour quelques matériaux.*

*(DT: direction de traction, DC: direction de cisaillement, DDP: direction de la déformation plane, DL: direction de laminage).*

Les orientations obtenues sont résumées dans le tableau II.3 à partir duquel on peut conclure que l'orientation des cellules résulte d'un effet plus global que local : l'orientation se répercute d'un grain à l'autre (cf. figure II.16).



*Fig II.16 Effet global de l'orientation des cellules allongées dans un polycristal.*

#### *b) Texture de la microstructure*

Dans ce paragraphe, à l'aide d'une simulation par la méthode autocohérente élastoplastique classique, on compare l'orientation du plan du système de glissement le plus actifs au cours de la déformation plastique, dans chaque grain à celles des parois de cellules de dislocations par rapport à un axe du chargement présentées dans le tableau II.3.

Cette comparaison se limite à un matériau à structure cubique centrée comme l'acier mais sans texture initiale. Les systèmes de glissement pris en compte pour ce type de structure sont  $\{110\} \langle 111 \rangle$  et  $\{112\} \langle 111 \rangle$ . Le comportement élastique est supposé isotrope et se réduit à deux coefficients ( $\mu = 80$  GPa et  $\nu = 0,3$ ). La cission critique initiale est identique pour tous les systèmes, et la matrice d'écrouissage  $H$  linéaire tient compte de l'écrouissage latent et de l'auto-écrouissage. Quatre types de trajets monotones (traction uniaxiale UT, expansion équilibriaux EEB, cisaillement ST et laminage RT) sont simulé par :

$$\dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{UT} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{EEB} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{ST} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \text{RT} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'orientation des plans correspondant aux deux systèmes de glissement les plus actifs dans chaque grain est représentée sous forme de projection stéréographique dans le plan de la tôle (1,2) (cf. figure II.17) pour différents niveaux de la déformation plastique EP (5%, 20%, 40%).

On note la formation d'une texture de la microstructure [LBM94] (cf. figure II.17). Pour chaque chargement, la distribution des points projetés apparaît être concentrée sous la forme d'un nuage ou zone immédiatement après une déformation plastique (EP = 5%) en dépit de l'isotropie de la texture cristallographique. La forme et l'orientation de ces zones ou nuages dépendent fortement du trajet de déformation et suivent approximativement la loi de Schmid. Quand la déformation plastique croît (EP = 20% -> 40%), ces zones ou nuages deviennent plus marqués, plus concentrés sous quelques orientations "idéales" ou "fibres" différentes de l'orientation initiale observée pour EP = 5%.

Le tableau II.4 regroupe les angles obtenus (pour EP = 40%) entre ces nuages ou zones et l'un des axes du chargement (DL : direction de laminage, DT : direction de traction, DN : direction normale à l'expansion équibiaxée, DC: direction de cisaillement). On retrouve des orientations similaires à celles du tableau II.3 autrement dit celles des parois des cellules de dislocations. Ces deux tableaux confirment la constatation que les murs des cellules de dislocations sont presque parallèles au plan de glissement (quelques ° près), et l'effet global du chargement au niveau du polycristal.

| type de chargement   | angle (°) | axe de référence |
|----------------------|-----------|------------------|
| laminage             | 30-50     | /1 (DL)          |
| traction uniaxiale   | 30-45     | /1 (DT)          |
| expansion équibiaxée | 30-70     | /3 (DN)          |
| cisaillement         | 20-10     | /2 ou 1 (DC)     |

Tab II.4 : Estimation des zones ou nuages des orientations des plans de glissement les plus actifs obtenues par un schéma autocohérent élastoplastique à EP = 40%



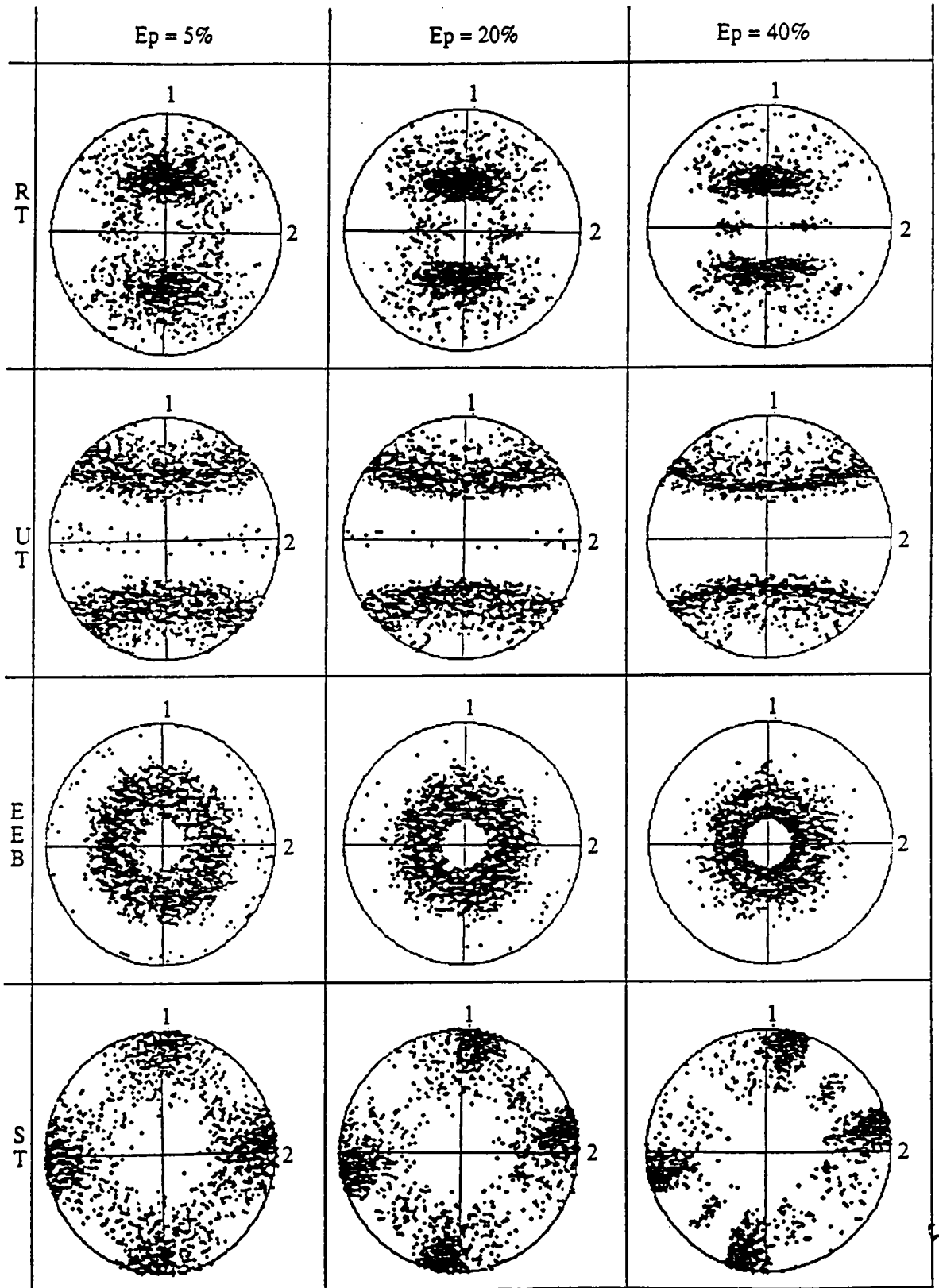


Fig II.17 Figures de pôle des orientations des deux systèmes les plus actifs, pour un polycristal CC non texturé, pour quelques trajets et à différentes déformations plastiques [LMB94].

*c) Chargements complexes*

Dans ce paragraphe II.2, traitant des caractéristiques des cellules de dislocation, il reste à aborder les trajets complexes, c'est-à-dire à analyser l'effet du second chargement sur la microstructure des dislocations induite lors du préchargement.

La première constatation indique que la microstructure induite par un premier trajet évolue, après une période transitoire vers une situation correspondant à celle qui aurait induite le second trajet [S86, FS83].

Pour la deuxième constatation, on peut noter que plus la prédéformation est importante, plus la microstructure du second trajet tarde à s'établir. Dans certain cas de trajets complexes, il apparaît une localisation de la déformation plastique sous la forme de microbandes, par exemple la séquence cisaillement-traction étudiée par Thuillier [T92] sur un acier doux.

Généralement, après 10% de déformation du second trajet, la plupart des grains paraissent avoir perdu la "mémoire" de la prédéformation. Fernandes et al. [FS83] le confirment lors d'essais en traction uniaxiale sur des tôles d'acier doux prédéformées par une expansion équibiaxée. Dans ces essais, les cellules allongées et rectangulaires remplacent peu à peu les cellules équiaxes dues à la prédéformation.

Pour la taille des cellules, Schmitt [S86] remarque qu'elle est d'autant plus faible, à un taux de déformation donnée, que la prédéformation est plus importante; il fait la même constatation pour l'épaisseur des parois.

### **II.3 - Conséquence de la formation des hétérogénéités plastiques sur le comportement macroscopique**

Les hétérogénéités plastiques d'ordre 2 (intergranulaires) (à l'exception de la formation du développement et de la coalescence des bandes de cisaillement) ont fait l'objet de nombreuses observations et modélisations souvent appelées modèles polycristallins ou modèles micro-

macro [S28, T38, L57, K58, K61, H65, BZ81]. De la longue expérience acquise par l'élaboration, la mise en oeuvre et l'exploitation du modèle autocohérent élastoplastique, on peut dégager à la fois les acquis d'une telle approche et ses insuffisances qui apparaissent clairement liées à la non prise en compte des hétérogénéités plastiques d'ordre 3 correspondantes à la formation et à l'évolution des cellules de dislocations.

### **II.3.1 - Les acquis de la modélisation autocohérente**

Il convient de rappeler ici que, les étapes de localisation et d'homogénéisation étant bien maîtrisées, les hypothèses relatives au comportement des grains correspondent à celles d'un glissement multiple homogène faisant intervenir une matrice d'écrouissage [L93,LKB90] éventuellement non linéaire. Cette matrice qui peut être déduite de mesure expérimentale [F83] traduit avant tout l'écrouissage propre et latent des systèmes de glissement. Malgré cette description simpliste qui ignore tout effet explicite d'ordre 3, des résultats en bon accord avec des mesures expérimentales sont obtenus pour des chargements monotones et multiaxés [LKB90, LBRM95].

Ils concernent :

- \* l'écrouissage monotone,
- \* la texture cristalline,
- \* les contraintes internes,
- \* les surfaces de plasticité,
- \* l'anisotropie plastique.

Pour appliquer ce modèle, on a besoin d'identifier quelques paramètres du matériau accessibles par des mesures expérimentales comme la texture cristallographique (obtenue par diffraction de rayons X) ou la forme des grains (micrographie). Une courbe de traction uniaxiale permet de déterminer la matrice d'écrouissage H.

La suite de ce paragraphe illustre pour un acier [LBRM95], les acquis cités précédemment. Pour une structure cubique centrée, deux familles de systèmes de glissement ont été utilisées pour décrire le

glissement plastique. Ces familles sont  $\{110\} \langle 111 \rangle$  et  $\{112\} \langle 111 \rangle$ . Le comportement élastique est supposé isotrope et se réduit aux deux coefficients de Lamé ( $\lambda = 120$  GPa et  $\mu = 80$  GPa). Une sélection à 1000 orientations (donc 1000 grains) permet d'obtenir une bonne description de la texture [RBL92].

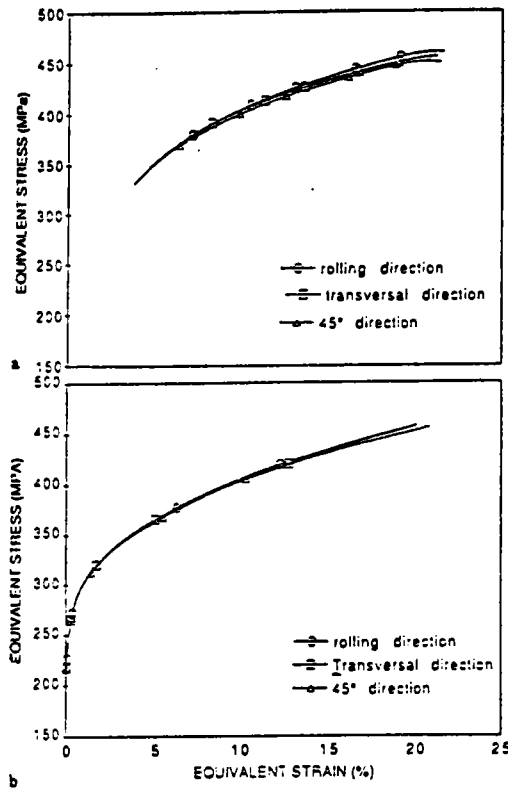


Fig II.18 : Courbes de traction uniaxiale expérimentale et simulée [LBRM95].

L'écoulement monotone est mis en évidence par deux autres essais de traction uniaxiale : (transverse et 45° par rapport à la direction de laminage). La figure II.18 présente ces résultats simulés et expérimentaux.

Dans la figure II.19, on retrouve le bon accord entre les figures de pôles expérimentales et simulées pour un chargement "rétreint suivi d'un repassage". Pour les contraintes internes, la figure II.20 illustre les fluctuations des contraintes microscopiques et les déformations plastiques pour une traction uniaxiale dans la direction 1. Pour une déformation plastique macroscopique de 30%, les déformations microscopiques sont étalées entre 22 - 35% et pour une valeur moyenne de 580 MPa les contraintes varient de 410 à 630 MPa.

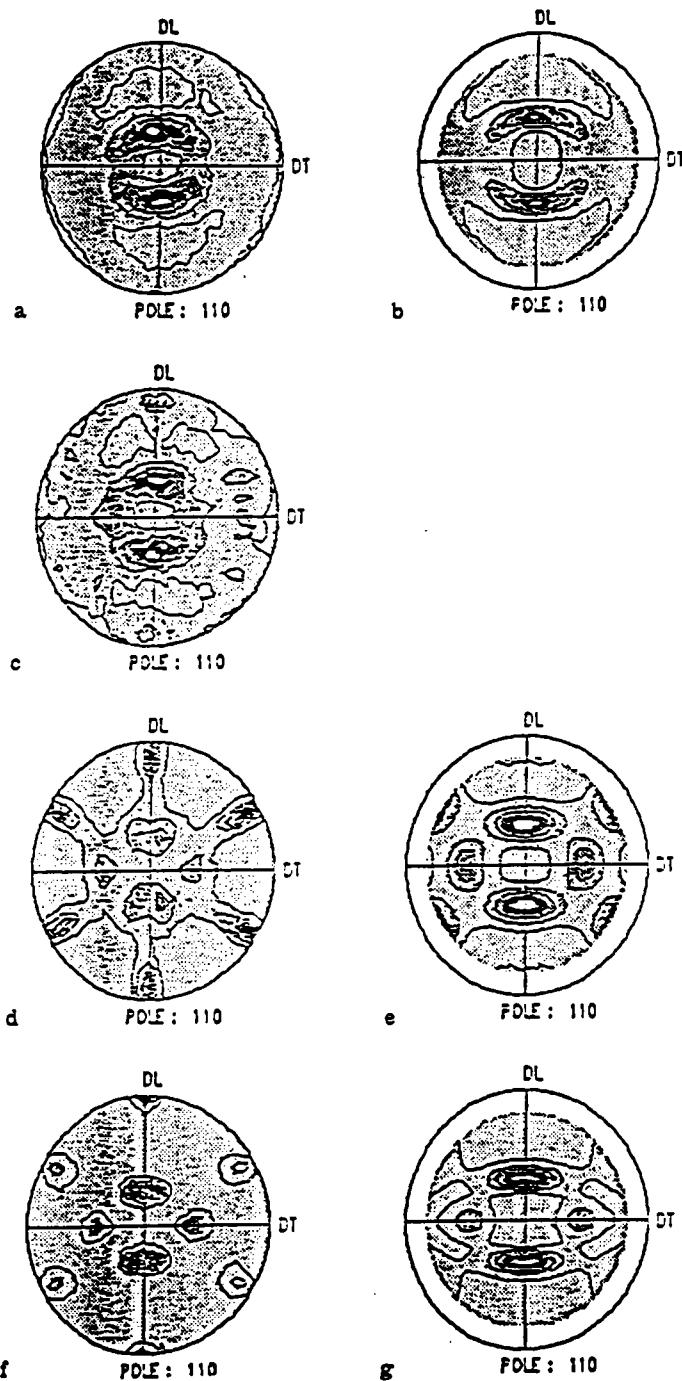


Fig II.19 : Evolution de la figure de pôle [110] pour un chargement de rétreint suivi d'un repassage [LBRM95].

(a) représentation de la texture initiale

(b) figure de pôle expérimentale

(c-d) texture après 10-50% de rétreint

(e) figure de pôle expérimentale après un rétreint de 50%

(f-g) figure de pôle simulée et expérimentale après le repassage

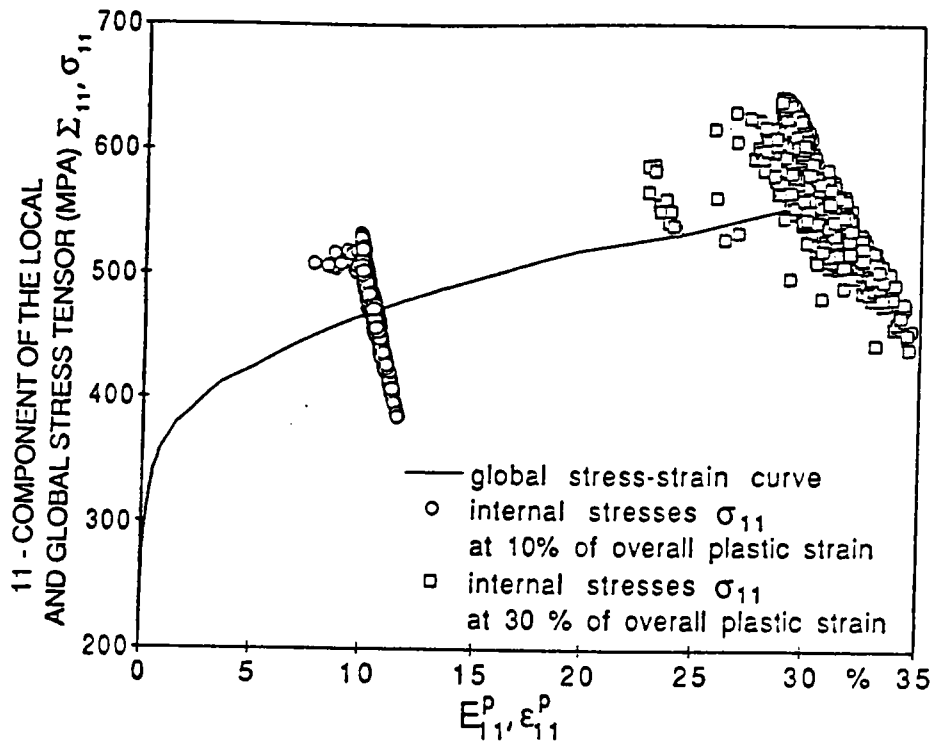


Fig II.20 : Courbe contrainte-déformation macroscopique pour une traction uniaxiale ( $\Sigma_{11}$ ) et valeurs microscopiques des grains du polycristal pour deux niveaux (10% et 30%) de la déformation plastique  $E^P$  [LBRM95].

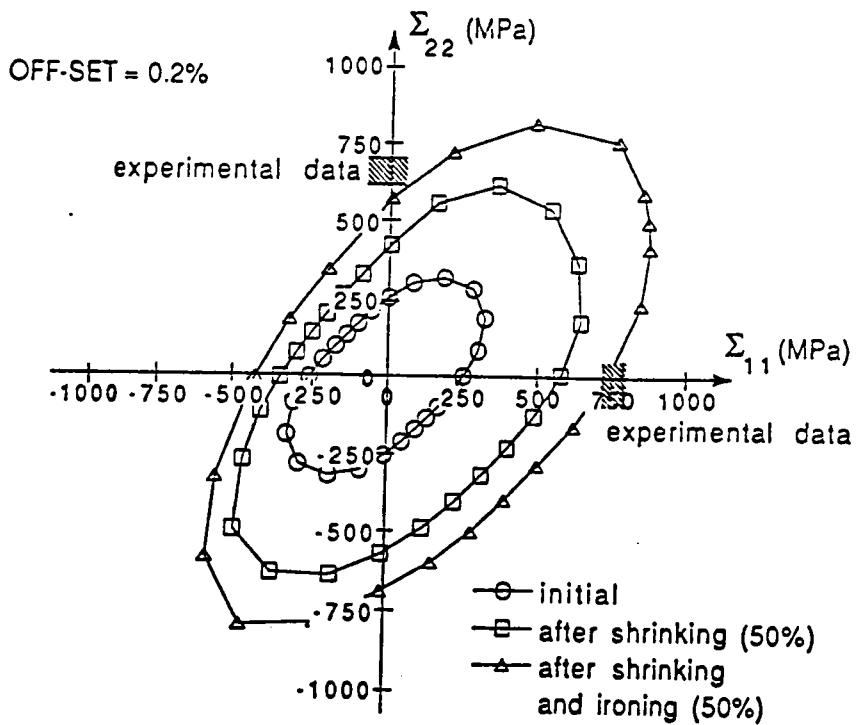


Fig II.21 Evolution des surfaces de plasticité ( $\Sigma_{11}-\Sigma_{22}$ ) pour un chargement complexe [LBRM95].

La figure II.21 montre les différentes surfaces de plasticité définies pour un offset de 0,2% de déformation plastique pour un chargement de rétreint suivi d'un repassage. Les deux points expérimentaux de cette figure II.21 concordent bien avec la surface finale de ce trajet complexe.

Le dernier acquis, l'anisotropie plastique, est illustré par le coefficient de Lankford  $r$  défini par :

$$r = \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}} \quad (\text{II.2}),$$

où  $\epsilon_{22}$  est la déformation transverse et  $\epsilon_{33}$  la déformation normale, pour une traction uniaxiale selon l'axe 1. Dans la figure II.22, ce coefficient  $r$  est présenté pour deux aciers dont la texture initiale est différente en fonction de la déformation plastique.

Comme annoncé, on peut admettre que le comportement macroscopique et la texture sont bien décrits par le modèle autocohérent classique.

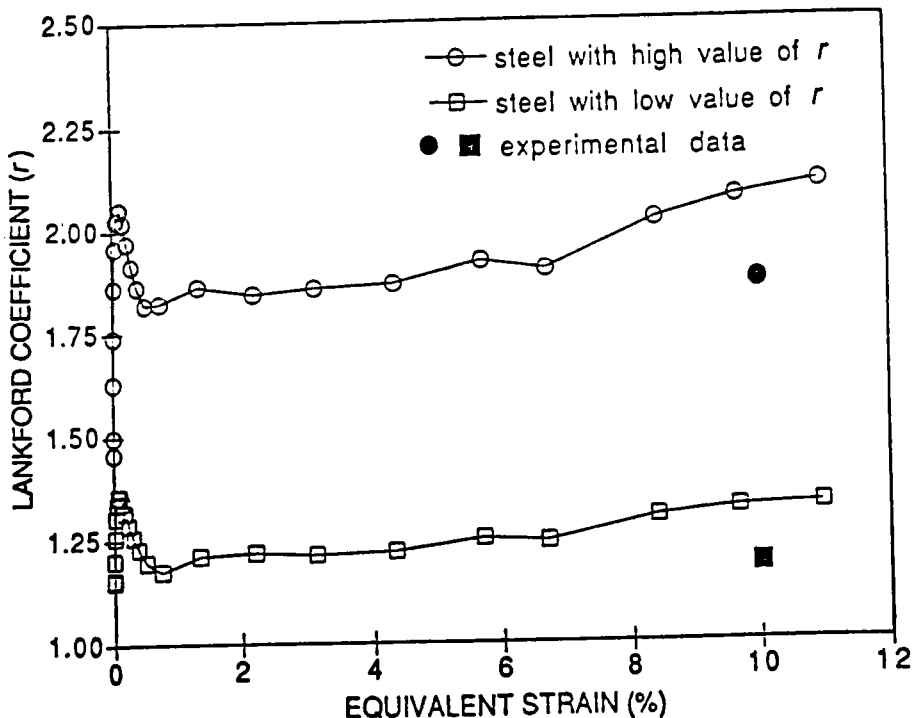


Fig II.22 : Evolution du coefficient de Lankford  $r$  en fonction de la déformation plastique pour une traction uniaxiale dans la direction de laminage [LBRM95].

### **II.3.2 - Les insuffisances des modèles actuels**

De manière générale, elles sont de deux ordres :

- celles qui sont liées à l'approximation autocohérente (ou Taylorienne ou toute autre approche) de l'équation intégrale,
- celles qui sont liées à la description du comportement intercristallin.

La discussion menée dans ce chapitre indique clairement que des progrès significatifs ne peuvent être atteints que si la transition d'échelle micro-méso est traitée de façon plus physique et moins phénoménologique.

Les insuffisances se traduisent notamment par l'incapacité des modèles actuels à décrire la ductilité (apparition de bandes de cisaillement macroscopiques conduisant à une localisation importante de la déformation plastique) et le comportement lors de certains trajets complexes (prédéformation dans une direction suivie d'un rechargement dans une autre direction). Pour illustrer ces insuffisances, on détaille deux exemples.

Le premier concerne l'évolution de la texture cristallographique lors d'un laminage croisé. En effet Berveiller et al. [BNFK92] montrent la non concordance des figures de pôles expérimentales et des textures simulées obtenues par un trajet complexe. Ce trajet se constitue par un laminage à un taux de 60% suivi d'un autre de 10% dans le sens transversal c'est-à-dire à 90° du sens de laminage du premier chargement, pour un polycristal de cuivre. Cette non concordance des résultats numériques avec les mesures expérimentales s'explique par l'apparition d'une hétérogénéité plastique transgranulaire. Cette hétérogénéité se traduit par une localisation de la déformation plastique sous la forme de bande de cisaillement.

Le second exemple reprend les expériences de Korbel et Martin [KM88] parmi d'autres [GB73, HAM76, LS79, WL83, RSB86, LDY92, S86, T92, HRT92]. Dans ce deuxième cas, les essais étudiés sont des



trajets complexes. En rhéologie, les résultats expérimentaux de ces essais séquentiels sont classés en trois types indépendamment des modes de déformation (cf. figure II.23) :

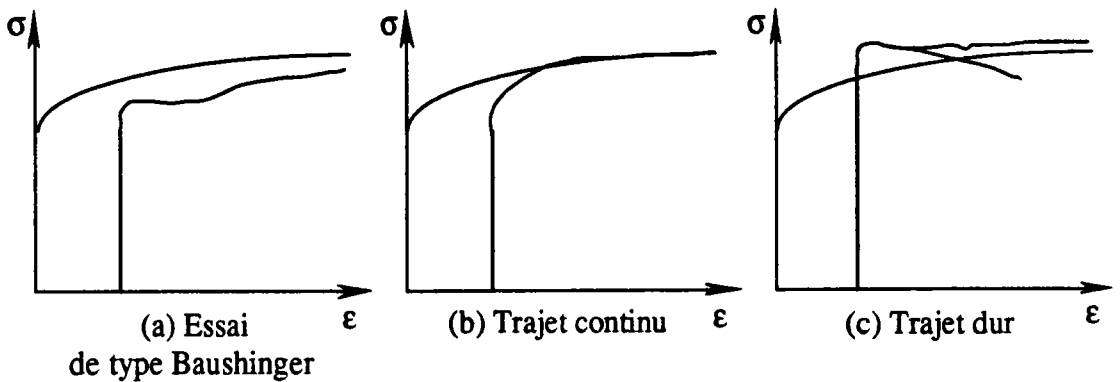


Fig II.23 : Les trois types de réponse contrainte-déformation lors de trajets complexes [T92].

- Le type Baushinger décrit le comportement connu sous le nom d'effet Baushinger, défini par l'obtention d'une contrainte à la recharge du matériau prédéformé plus faible que celle du matériau non prédéformé, lorsque la direction de sollicitation est inversée comme les essais traction compression.
- Le trajet continu représente la réponse d'une décharge puis recharge dans les mêmes conditions lors d'un trajet monotone. Ici on retrouve les caractéristiques du matériau non prédéformé.
- Le trajet dur regroupe tous les autres trajets complexes non cités dans les deux premiers cas. On obtient généralement une contrainte de recharge supérieure à celle du matériau non prédéformé suivi d'un adoucissement.

Korbel et Martin [KM88] avec un taux de laminage de 10, 20 ou 30% suivi d'une traction uniaxiale suivant la direction de laminage ou transverse analysent des trajets de la troisième catégorie, c'est-à-dire des trajets durs.

La figure II.24 montre les courbes de traction obtenues. On remarque la forme particulière d'un trajet dur qui peut être décrite en quatre stades (cf. figure II.23 c) :

- (a) une étape initiale du stade élastoplastique de la déformation de traction qui s'étend d'environ 1% de l'allongement, quelle que soit la valeur du préchargement et de la direction de traction,
- (b) un changement brusque de la pente de la courbe autrement dit du changement de signe de cette pente,
- (c) une décroissance linéaire de la force avec l'allongement,
- (d) un changement de pente en accentuant la décroissance, suivi ou non d'un segment linéaire.

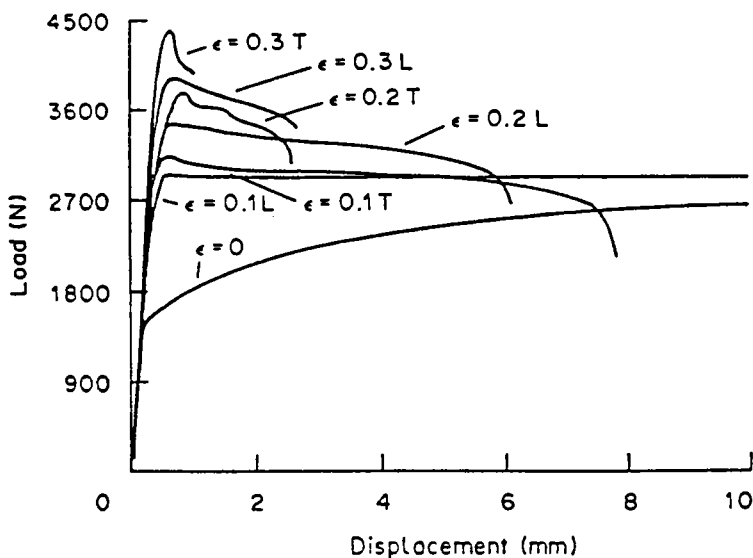


Fig II.24 : Courbe de traction d'éprouvettes préformées ( $\epsilon$ ) par un laminage. Une direction de traction parallèle (L) et perpendiculaire (T) à la direction de laminage sont envisagées [KM88].

C'est ce type de courbe que les modèles actuels polycristallins n'arrivent pas à obtenir, car ces résultats dépendent fortement du premier chargement et les modèles actuels ne tiennent compte de l'histoire du matériau, au niveau intragranulaire, que par l'intermédiaire de l'écrouissage des systèmes de glissement. Or, on a vu que la microstructure intragranulaire jouait un rôle important dans la réponse du second trajet, notamment sur l'apparition d'une localisation de la déformation plastique par microbande (cf. paragraphe II.1.2.c).

## II.4 - Stratégies pour une modélisation micromécanique

Dans ce paragraphe, on discute de la pertinence des modèles micromécaniques déjà proposés pour prendre en compte les hétérogénéités plastiques. On se limite d'emblée au problème des cellules de dislocations, c'est-à-dire à leur formation, leur développement et leurs conséquences sur le comportement intracristallin. On utilisera le modèle autocohérent élastique pour la transition méso-macro (du grain au polycristal). Ceci revient implicitement à accepter le principe de séparation des échelles.

Dans la deuxième partie, on traduit en termes mécaniques et micromécaniques les données physiques (mécanismes et microstructure) discutées précédemment (cf. paragraphe II.2) et on présente également le cadre de la modélisation nouvelle développée dans les chapitres suivants. Mais avant, on montre l'inadéquation des modèles micromécaniques élastoplastiques usuels aux nouveaux problèmes posés.

### II.4.1 - Schéma classique de la modélisation du comportement local en élastoplasticité

En se limitant au domaine des petites transformations et de l'élasticité homogène, les équations du comportement élastoplastique se ramènent à :

- la décomposition additive des vitesses de déformation :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (\text{II.3}),$$

- la loi de comportement élastique :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (\text{II.4}),$$

- la composition de la déformation plastique en glissement plastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = R_{ij}^g \dot{\gamma}^g \quad (\text{II.5}),$$

- la loi de Schmidt :

$$\tau_c^g = H^{gh} \dot{\gamma}^h \quad (\text{II.6}),$$

qui traduit l'écrouissage local et latent.

Pour les systèmes actifs, on a :

$$R_{ij}^g \dot{\sigma}_{ij} = H^{gh} \dot{\gamma}^h \quad (\text{II.7}).$$

Des relations (II.3) à (II.5), l'équation (II.7) devient :

$$R_{ij}^g C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - R_{kl}^h \dot{\gamma}^h) = H^{gh} \dot{\gamma}^h \quad (\text{II.8}),$$

soit :

$$(H^{gh} + R_{ij}^g C_{ijkl} R_{kl}^h) \dot{\gamma}^h = R_{ij}^g C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{II.9}),$$

ou encore :

$$\dot{\gamma}^h = M^{hg} R_{ij}^g C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{II.10}).$$

On obtient à partir de (II.3) à (II.5), la loi locale :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (I_{klmn} - R_{kl}^h M^{hg} R_{pq}^g C_{pqmn}) \dot{\epsilon}_{mn} \quad (\text{II.11}).$$

D'où les modules tangents :

$$l_{ijmn} = C_{ijkl} (I_{klmn} - R_{kl}^h M^{hg} R_{pq}^g C_{pqmn}) \quad (\text{II.12}),$$

qui dépendent de  $r$  pour un milieu hétérogène. Les conditions sur une interface stationnaire s'écrivent :

$$[\dot{\sigma}_{ij}] n_j = 0 \quad (\text{II.13}),$$

et

$$[\dot{\epsilon}_{ij}] = \frac{1}{2}(\dot{\lambda}_i n_j + \dot{\lambda}_j n_i) \quad (\text{II.14}).$$

Ce schéma est correct pour un milieu élastoplastique classique, mais doit être revu dans sa globalité pour un milieu à microstructure induite dans lequel on a un degré de liberté supplémentaire (la frontière mobile entre les domaines à déformation plastique différente) et des mécanismes de couplage entre l'écrouissage de ces différents domaines.

#### II.4.2 - Mécanique et micromécanique des cellules de dislocations

A la base, la déformation plastique procède d'un mouvement de multiplication et d'annihilation des dislocations qui sont des défauts linéiques du réseau cristallin. Avec le développement des outils informatiques, on a vu apparaître des modèles numériques décrivant les phénomènes précédents pour un grand nombre de défauts, traduisant ainsi le comportement collectif des dislocations [FR92, GP94, GS94, PA80, KE88].

Cette démarche se heurte cependant à des difficultés importantes liées :

- au choix des conditions aux limites à imposer sur l'élément de volume,
- au fait que le mouvement des dislocations est traité individuellement et non collectivement,
- aux capacités informatiques qui restent malgré tout limitées,
- aux difficultés d'introduire cette démarche dans la transition méso-macro.

A cette approche, nous préférons développer une démarche plus globale, fondée sur des concepts de thermomicromécanique des milieux continus dans lesquels on conserve la spécificité du mouvement de dislocations sur des systèmes de glissement traduite par le concept usuel de glissement plastique cristallographique :

- + la présence des cellules est traduite dans le fait que le champ des glissements plastiques est hétérogène et apparaît sous forme de champs uniformes par morceaux ou domaines.
- + la frontière de ces domaines correspond à des discontinuités surfaciques mobiles par rapport à la matière, ce qui les différencie des joints de grains.

L'ensemble de ces frontières intragranulaires correspond à la microstructure associée aux cellules de dislocations, microstructure qui est induite pendant un trajet de déformation et susceptible d'évoluer au cours du chargement. Dans la pratique, on considère que cette microstructure peut être décrite par un matériau du type biphasé à frontière mobile, ce qui limite les paramètres décrivant cette microstructure et rend opérationnelle la démarche adoptée.

Par la présence des frontières mobiles, cette modélisation se différencie de celles proposée par Mughrabi [M88] et d'autres [NGH85, K85] qui utilisent un schéma classique de matériau hétérogène biphasé (sans frontière mobile) pour décrire les cellules de dislocations.

Elle se démarque également des approches dites non locales [MBK92, F95] dans lesquelles on introduit formellement un module d'écrouissage ( $H(r, r')$ ) non local ou un opérateur différentiel d'ordre supérieur [K94] sans pour autant être capable ni de préciser la forme analytique du module d'écrouissage non local (la dépendance de  $H$  avec  $r$  et  $r'$ ), ni de justifier la nature de l'opérateur différentiel choisi.

La partie cinématique de la modélisation étant esquissée, on verra également dans la partie thermodynamique et statique, comment le concept d'écrouissage isotrope et cinématique non local est préservé et comment globalement le mécanisme de formation des cellules correspond à un processus d'hétérogénéisation c'est-à-dire d'un durcissement d'une partie du grain par la déformation plastique d'une autre partie.

## **Références bibliographiques**

- [ALH91] ANANTHAN V.S., LEFFERS T., HANSEN N., Characteristics of second generation microbands in cold-rolled copper, 1991, Scripta Metallurgica, Vol.25, pp(137-142)
- [AS80] ANAND L., SPITZIG W.A., Initiation of localized shear bands in plane strain, 1980, J. Mech. Phys. Solids, Vol.28, pp(113-128)
- [BHK89] BAY B., HANSEN N., KUHLMANN-WILSDORF D., Deformation structures in lightly rolled pure aluminium, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A112, pp(385-397)
- [BNFK92] BERVEILLER M., NADARI A., FAKRI N., KORBEL A., The role of shear bands in the evolution of copper texture, 1992, International Journal of Plasticity, Vol.8, pp(001-009)
- [BZ81] BERVEILLER M., ZAOUI A., Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes, 1981, dans comportements rhéologiques et structures des Matériaux, Eds C.HUET et A. ZAOUI, pp(175-199)
- [DB84] DYMECK S., BLICHARSKI M.R., The structure of transition bands in ferritic stainless steels, 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(99-104)
- [F84] FRANCIOSI P., Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement: modélisation pour un chargement complexe quasi statique, 1984, Thèse de l'université de Paris-Nord
- [F95] FENNAN A., Homogénéisation élastoplastique discrète, 1995, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon
- [FR92] FREED A.D., RAJ S.V., Three dimensional deformation analysis of two-phase dislocation substructures, 1992, Scripta Metal. Mater., Vol.27, pp(233-238)

- [FS83] FERNANDEZ J. V., SCHMITT J. H., Dislocation microstructures in steel during deep drawing, 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- [G75] GÜTH A., Räumliche Versetzungsanordnung in gewalzten Eiseneinkristallen, 1975, Dissertation A, AdW de DDR, ZFW Dresden
- [GB73] GHOSH A.K., BACKOFEN W.A., Strain hardening and instability in biaxially stretched sheet, 1973, Metall. transactions, Vol.4, pp(1113-1123)
- [GP94] GROMA I., PAWLEY G.S., Dislocation cell formation in a 2D simulation, 1994, Solid State Phenomena, Vol.35-36, pp(369-374)
- [GS94] GORYACHEV S.B., SHALENKOV A.V., Theory and computer simulation of dislocation structure relaxation during annealing, 1994, Solid State Phenomena, Vol.35-36, pp(375-380)
- [H62] HU H., Microbands in a rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization, 1962, Acta Met., Vol.10, pp(1112-1116)
- [H65] HILL R., A self-consistent mechanics of composite materials, 1965, J. Mech. Phys. Solids., Vol.13, pp(213-222)
- [H90] HANSEN N., Cold deformation microstructures, 1990, Mat. Science and Technology, Vol.6, pp(1039-1046)
- [H92] HANSEN N., Deformation microstructures, 1992, Scripta Metall. et Mat., Vol.27, pp(1447-1452)
- [H93] HUGUES D.A., Microstructural evolution in a non cell forming metal Al-Mg, 1993, Acta Met., Vol.41, N°5, pp(1421-1430)



- [H94] HANSEN N., Flow stress and microstructural parameters., 1994, In "Numerical predictions of deformation processes and the behaviour of real materials.", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDESØRENSEN, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, N.J. SØRENSEN, 15th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(325-334)
- [HAM76] HUTCHINSON J.W., ARTHEY R., MALMSTROM P., On anomalously low work-hardening in pre-strained metals, 1976, Scripta Met., Vol.10, pp(673-675)
- [HK86] HANSEN N., KUHLMANN-WILSDORF D., Low Energy Dislocation Structures due to unidirectional deformation at low temperatures, 1986, Materials Science and Engineering, Vol.81, pp(141-161)
- [HL88] HANSEN N., LEFFER T., Microstructures, textures and mechanical properties after large strain, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(519-531)
- [HM84] HATHERLY M., MALIN A.S., Shear bands in deformed metals, 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(449-454)
- [HN89] HUGUES D.A., NIX W.D., Strain hardening and substructural evolution in Ni-Co solid solutions at large strains, 1989, Materials Science and Engineering., Vol.A122, pp(153-172)
- [HRT92] HU Z., RAUCH E.F., TEODOSIU C., Work-hardening behavior of mild steel under stress reversal at large strains, 1992, , , pp(839-856)
- [I89] INAGAKI H., Development of microstructures and textures during cold rolling of polycrystalline Iron containing an excess amount of dissolved carbon, 1989, z.Metallkde, pp(474-483)
- [JH90] JUUL JENSEN D., HANSEN N., Flow stress anisotropy in aluminium, 1990, Acta Met., Vol.38, pp(1369-1380)
- [K58] KRÖNER E., Kontinuums Theorie des Versetzungen und Eigenspannungen, 1958, Springer Verlag.
- [K61] KRÖNER E., Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, 1961, Acta Metall., Vol.9, pp(155-161)

- [K72] KAUN L., Das Gleitverhalten und die Versetzungsstruktur von Molybdäneinkristallen in Abhängigkeit von der Kristallorientierung und Verformungstemperatur, 1972, Dissertation A, AdW de DDR, ZFW Dresden
- [K85] KRATOCHVIL J., A model of cyclic plastic hardening and softening of metals, 1985, Proc. Int. Conf. on Nonlinear Mechanics, Shanghai, pp(560-560)
- [K89] KUHLMANN-WILSDORF D., Theory of plastic deformation: properties of low energy dislocation structure, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(1-41)
- [K90] KORBEL A., The mechanism of strain localization in metals, 1990, Archives of metallurgy, Vol.35, pp(177-203)
- [K94] KRATOCHVIL J., Continuum mechanics approach to collective behavior of dislocations, 1994, Solid State Phenom., Vol.35-36, pp(71-86)
- [KE88] KUBIN L.P., ESTRIN Y., Strain nonuniformities and plastic instabilities, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(573-583)
- [KHS80] KOCKS U.F., HASEGAWA T., SCATTERGOOD R.O., On the origin of cell walls and lattice misorientations during deformation, 1980, Scripta Met., Vol.14, pp(449-454)
- [KM86] KORBEL A., MARTIN P., Microscopic versus macroscopic aspect of shear bands deformation, 1986, Acta Met., Vol.34, N°10, pp(1905-1909)
- [KM88] KORBEL A., MARTIN P., Microstructural event of macroscopic strain localization in prestrained tensile specimens, 1988, Acta Met., Vol.36, N°9, pp(2575-2586)
- [KR85] KORBEL A., RICHET M., Formation of shear bands during cyclic deformation of aluminium, 1985, Acta Met., Vol.33, N°11, pp(1971-1978)

- [KT80] KAWASAKI Y., TAKEUSHI T., Cell structures in copper single crystals deformed in the [001] and [111] axes, 1980, Scripta Met., Vol.14, pp(183-188)
- [KW63] KEH A.S., WEISSMANN S., Deformation in body-centered cubic Metals, 1963, In Electron Microscopy and Strenght of crystal, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(231-300)
- [L57] LIN T.H., Analysis of elastic and plastic strains of a FCC crystal, 1957, J. Mech. Phys. Solids, Vol.5, pp(143-149)
- [L91] LUFT A., Microstructural processes of plastic instabilities in strengthened metals, 1991, Progress in Materials Science, Vol.35, pp(97-204)
- [L93] LIPINSKI P., Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies, à partir des méthodes de transition d'échelles, 1993, Thèse d'habilitation de l'Université de Metz.
- [LBRM95] LIPINSKI P., BERVEILLER M., REUBREZ E., MORREALE J., Transition theories of elastic-plastic deformation of metallic polycrystals, 1995, Arch. of Applied Mechanics, Vol.95, pp(291-311)
- [LDY93] LIU Y.Z., DONG D.Y., YUAN K., Experimental investigation of microstructural damage in an A-K sheet subjected to two-stage straining, 1993, J. of Mat. Process. Tech., Vol.39, pp(133-143)
- [LKB90] LIPINSKI P., KRIER J., BERVEILLER M., Elastoplasticité des métaux en grandes déformations: comportement global et évolution de la structure interne, 1990, Rev. Phys. Appl., Vol.25, pp(361-388)
- [LKD92] LAN Y., KLAAR H.J., DAHL W., Evolution of dislocation structure and deformation behavior of iron at different temperature, part 1, 1992, Metallurg. Transactions A, Vol.23A, pp(537-544)
- [LMB94] LEMOINE X., MULLER D., BERVEILLER M., Texture of microstructures in BCC Metals for various loading paths, 1994, Mat. Science Forum, Vol.157-162, pp(1821-1826)

- [LS79] LLOYD D.J., SANG H., The influence of strain path on subsequent mechanical properties - Orthogonal tensile paths, 1979, Metall. transactions A, Vol.10A, pp(1767-1772)
- [LS83] LIBOVICKY S., SESTAK B., Development of the dislocation arrangement in Fe-0.9wt% Si single crystals deformed in tension, 1983, Phil Mag. A, Vol.47, pp(63-78)
- [M75] MÜHLHAUS CH., Qualitative Untersuchungen zur Temperaturabhängigkeit des Verformungs- und Bruchverhaltens gewalzter Molybdäneinkristalle mit ausgewählten Versetzungsstrukturen, 1975, Dissertation A, AdW de DDR, ZFW Dresden
- [M88] MUGHRABI H., Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(367-379)
- [MH79] MALIN A.S., HATHERLY M., Microstructure of cold-rolled copper, 1979, Metal Science, pp(463-472)
- [MHH81] MALIN A.S., HUBER J., HATHERLY M., The microstructure of rolled copper single crystals, 1981, Z. Metallkde, pp(310-317)
- [MKB92] MULLER D., KRATOCHVIL J., BERVEILLER M., Non-local hardennings in metals, 1992, In "Modelling of plastic deformation and its engineering applications", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, N. HANSEN, D. JUUL JENSEN, T. LEFFERS, H. LILHOLT, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, B. RALPH, 13th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(367-372)
- [MM84] MORRIS M.A., MARTIN J.L., Evolution of internal stresses and substructure during creep at intermediate temperatures, 1984, Acta Met. , Vol.32,N°4, pp(549-561)
- [MN.] MORII K., NAKAYAMA Y., Shear bands in rolled single crystals of FCC metals, .....pp(327-336)
- [MNM.] MORII K., NAKAYAMA Y., MECKING H., Factors contributing to shear band formation in Al-3%Mg single crystals, .....pp(117-122)

- [NGH85] NIX W.D., GIBELING J.C., HUGUES D.A., Time-dependent deformation of metals, *Met. Trans. A*, vol 16A, pp(1985-2215)
- [PA80] PRINZ F.B., ARGON A.S., Dislocation cell formation during plastic deformation of copper single crystals, 1980, *Phys. Stat. Sol.*, Vol.57, pp(741-753)
- [PPL75] POLLNOW D., PENELLE R., LACOMBE P., Relations entre les propriétés plastiques et la microstructure de monocristaux de fer déformés par traction à la température ambiante, 1975, *Mém. Scien. Revue Métallurgie*, pp(491-503)
- [R88] REY C., Effects of grain boundaries on the mechanical behavior of grains in polycrystals, 1988, *Revue Phys. Appl.*, Vol.23, pp(491-500)
- [RB77] RONDE-OUSTAU F., BAUDELET B., Microstructure and strain path in deep-drawing, 1977, *Acta Metall.*, Vol.25, pp(1523-1529)
- [RBL92] REUBREZ E., BERVEILLER M., LIPINSKI P., Optimal crystallographic texture determination for metal forming processes using a self-consistent model, 1992, In "Modelling of plastic deformation and its engineering applications", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, N. HANSEN, D. JUUL JENSEN, T. LEFFERS, H. LILHOLT, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, B. RALPH, 13th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(403-408)
- [RS89] RAUCH E.F., SCHMITT J.H., Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear, 1989, *Materials Science and Engineering*, Vol.A113, pp(441-448)
- [RSB86] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., BAUDELET B., Effect of a prestain on the subsequent yielding of low carbon steel sheets, 1986, *International Journal of Plasticity*, Vol.2, N°4, pp(371-378)
- [S28] SACHS A., Zur Ableitung einer Fließbedingung, 1928, *Z. der V.D.I.*, Vol.72, pp(739-..)

- [S63] SWANN P.R., Dislocation arrangements in face-centered cubic metals and alloys, 1963, In *Electron Microscopy and Strenght of crystal*, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(131-181)
- [S86] SCHMITT J.H., Contribution à l'étude de la microplasticité des aciers, 1986, Thèse de INPG Grenoble
- [T38] TAYLOR G.Y., Plastic strain in metals, 1938, *J. Inst. Metals*, Vol.62, pp(307-324)
- [T70] TAKEUSHI T., Work-hardening of iron single crystal between 25°C and 900°C, 1970, *Japanese J. of Applied Phys.*, Vol.9, N°4, pp(391-400)
- [T92] THUILLIER S., Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux, 1992, Thèse de INPG Grenoble
- [TFHM82] TABATA T., FUJITA H., HIRAOKA M., MIYAKE S., The relationship between flow stress and dislocation behavior in [111] aluminium single crystal, 1982, *Philo. Mag. A*, Vol.46, pp(801-816)
- [TYF78] TABATA T., YAMANAKA S., FUJITA H., In situ deformation of the [111] Aluminium single crystals observed by high voltage electron microscopy, 1978, *Acta. Metall.*, Vol.26, N°4, pp(405-411)
- [WL83] WAGONER R.H., LAUKONIS J.V., Plastic behavior of aluminium-killed steel following Plane-Strain Deformation, 1983, *Metall. Transaction A*, Vol.14A, pp(1487-1495)
- [YD87] YEUNG W.Y., DUGGAN B.J., Shear band angles in rolled FCC Materials, 1987, *Acta Met.*, Vol.35, N°2, pp(541-548)

# CHAPITRE III :

## Approche thermomicromécanique

|   |                 |
|---|-----------------|
| <b>III.1 - Cadre micromécanique de la description du problème</b>     | <i>p 59</i>     |
| III.1.1 - <u>Description cinématique</u>                              | <i>p 59</i>     |
| III.1.2 - <u>Contraintes</u>  | <i>p 63</i>     |
| <i>a) Formulation intégrale</i>                                       | <i>p 64</i>     |
| <i>b) L'inclusion classique</i>                                       | <i>p 66</i>     |
| <i>c) L'inclusion enrobée</i>   | <i>p 68</i>     |
| III.1.3 - <u>Opérateurs interfaciaux</u>                              | <i>p 70</i>     |
| <br><b>III.2 - Discontinuités interfaciales mobiles</b>               | <br><i>p 72</i> |
| III.2.1 - <u>Energie libre d'Helmholtz</u>                            | <i>p 73</i>     |
| III.2.2 - <u>Dérivée de l'énergie d'Helmholtz</u>                     | <i>p 76</i>     |
| III.2.3 - <u>Puissance des efforts extérieurs</u>                     | <i>p 78</i>     |
| III.2.4 - <u>Dissipation intrinsèque</u>                              | <i>p 80</i>     |
| <br><b>III.3 - Application au cas des cellules de dislocation</b>     | <br><i>p 81</i> |
| III.3.1 - <u>Représentation simplifiée de la structure cellulaire</u> | <i>p 81</i>     |
| III.3.2 - <u>Calcul de la dissipation</u>                             | <i>p 85</i>     |
| III.3.3 - <u>Cas particuliers - discussion</u>                        | <i>p 91</i>     |
| <i>a) Cas particuliers</i>  | <i>p 91</i>     |
| <i>b) Discussion</i>  | <i>p 92</i>     |
| <br><b>III.4 - Modèle biphasé - Calcul direct</b>                     | <br><i>p 93</i> |
| III.4.1 - <u>Energie libre d'Helmholtz et sa dérivée</u>              | <i>p 93</i>     |
| III.4.2 - <u>Puissance des efforts extérieurs et dissipation</u>      | <i>p 96</i>     |
| <br><b>III.5 - Conclusion</b>   | <br><i>p 96</i> |

## CHAPITRE III :

### Approche thermomicromécanique

Dans ce chapitre, on développe tout d'abord les aspects cinématiques et énergétiques (Energie libre) d'un solide contenant des surfaces  $\Sigma$  de discontinuité du champ de déformation plastique. On fait apparaître la dissipation intrinsèque associée à la progression de la déformation plastique volumique et au mouvement de la surface  $\Sigma$ . Cette approche est ensuite utilisée pour élaborer un modèle simplifié de la microstructure intragranulaire de dislocations, modèle reposant sur l'assimilation de cette microstructure à un matériau biphasé évolutif. Ce modèle fait alors apparaître, en plus des déformations plastiques de chaque "phase", des variables internes décrivant la microstructure.

#### III.1 - Cadre micromécanique de la description du problème

##### III.1.1 - Description cinématique

Cette étude se limite aux transformations infinitésimales (petite déformation et petite rotation) dans le cas quasi-statique (les forces d'inerties sont négligées). La condition de continuité du champ de déplacement se traduit par les équations de compatibilité (III.1), et le principe fondamental de la dynamique impose l'équation (III.2) d'équilibre au champ de contrainte. Ces hypothèses valables sur les grandeurs macroscopiques et microscopiques entraînent pour le champ de contrainte  $\sigma_{ij}$  et le gradient  $\beta_{ij}$  du champ de déplacement  $u_i$ , les équations suivantes :

$$\text{rot}\beta = \epsilon_{ikl} \beta_{jl,k} = \epsilon_{ikl} u_{j,lk} = 0 \quad (\text{III.1}),$$

et

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{III.2}).$$



Une décomposition du gradient  $\beta$  est définie souvent par un tenseur de déformation  $\epsilon$  et par un tenseur de rotation  $\omega$  :

$$\beta_{ij} = u_{i,j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (\text{III.3}),$$

où  $\epsilon_{ij}$  est la partie symétrique de  $\beta_{ij}$  et  $\omega_{ij}$  la partie antisymétrique définies par les équations :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{III.4}),$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{III.5}).$$

Pour les conditions aux limites, on se limite au cas d'un déplacement imposé sur la surface extérieure  $S$  du volume  $V$  sous la forme :

$$u_i^d = E_{ij}x_j + \Omega_{ij}x_j \quad (\text{III.6}),$$

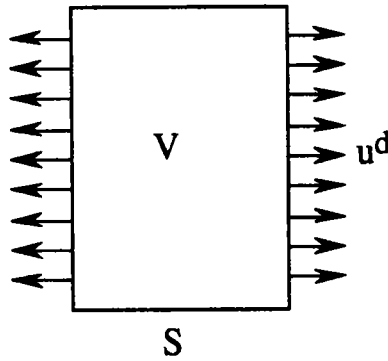


Fig.III.1 : Conditions aux limites.

où la déformation  $E_{ij}$  et la rotation  $\Omega_{ij}$  macroscopiques découlent de (III.3) et (III.6) comme une moyenne volumique des grandeurs microscopiques :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}(r) dV \quad (\text{III.7}),$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \omega_{ij}(r) dV \quad (\text{III.8}).$$

Une autre décomposition physique du gradient de déplacement  $\beta_{ij}$  séparant la réponse élastique du matériau des réponses inélastiques qui dans notre problème, sont réduites à la partie plastique, peut s'écrire :

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^e + \beta_{ij}^p \quad (\text{III.9}).$$

Cette décomposition s'applique également aux tenseurs de déformation  $\epsilon_{ij}$  et de rotation  $\omega_{ij}$  :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (\text{III.10}),$$

$$\omega_{ij} = \omega_{ij}^e + \omega_{ij}^p \quad (\text{III.11}).$$

De l'équation (III.10), la déformation totale  $E_{ij}$  devient donc :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \left( \epsilon_{ij}^e(r) + \epsilon_{ij}^p(r) \right) dV \quad (\text{III.12}).$$

En appliquant la loi de comportement élastique en tout point  $r$  du volume  $V$  :

$$\epsilon_{ij}^e(r) = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}(r) \quad (\text{III.13}),$$

et en définissant la contrainte macroscopique  $\Sigma$  comme la moyenne volumique des contraintes microscopiques :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(r) dV \quad (\text{III.14}),$$

l'équation (III.12) s'écrit :

$$E_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} + \frac{1}{V} \int_V \left( \epsilon_{ij}^p(r) \right) dV \quad (\text{III.15}).$$

Les constantes élastiques  $C$  étant supposées uniformes, la déformation plastique macroscopique  $E^P$  apparaît alors comme la moyenne volumique de la déformation plastique  $\varepsilon^P(r)$  locale :

$$E_{ij}^P = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_{ij}^P(r)) dV \quad (\text{III.16}).$$

On a donc :

$$E_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} + E_{ij}^P \quad (\text{III.17}).$$

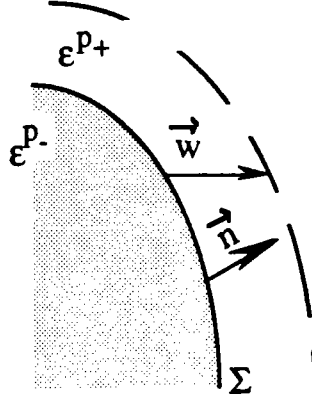


Fig.III.2 : Saut de la déformation plastique à la surface  $\Sigma$ .

Le champ  $\varepsilon^P$  étant discontinu, l'évolution  $E^P$  de la déformation plastique macroscopique provient à la fois de la vitesse de déformation plastique locale  $\dot{\varepsilon}^P(r)$  et du mouvement des surfaces de discontinuité  $\Sigma$ . Si on néglige la vitesse propre des particules par rapport à celle des discontinuités, conformément à l'hypothèse des petites déformations, on a alors [G73] :

$$\frac{dE_{ij}^P}{dt} = \dot{E}_{ij}^P = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \varepsilon_{ij}^P(r)}{\partial t} dV - \frac{1}{V} \int_{\Sigma} [\varepsilon_{ij}^P] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \quad (\text{III.18}),$$

$$\frac{dE_{ij}^P}{dt} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\varepsilon}_{ij}^P dV - \frac{1}{V} \int_{\Sigma} [\varepsilon_{ij}^P] w_{\alpha} n_{\alpha} d\Sigma \quad (\text{III.19}),$$

$$[\varepsilon_{ij}^P] = \varepsilon_{ij}^{P+} - \varepsilon_{ij}^{P-} \quad (\text{III.20}).$$

où  $[\epsilon^p_{ij}]$  exprime le saut (III.20) du tenseur de déformation plastique à la surface  $\Sigma$ ,  $w_\alpha$  est le vecteur vitesse de la surface  $\Sigma$  et  $n_\alpha$  sa normale (cf. figure III.2).

### III.1.2 - Contraintes

Dans une démarche thermodynamique limitée à la plasticité des métaux, l'énergie libre provient exclusivement de l'énergie élastique associée aux déformations élastiques liées au chargement extérieur et aux contraintes internes.

Dans l'hypothèse d'une élasticité homogène et linéaire, la densité d'énergie élastique  $w(\epsilon^e)$  s'écrit :

$$w(\epsilon^e) = \frac{1}{2} \epsilon^e_{ij} C_{ijkl} \epsilon^e_{kl} \quad (\text{III.21}),$$

où apparaissent les contraintes :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon^e_{kl} \quad (\text{III.22}).$$

Les équations (III.10) et (III.6) montrent clairement les sources de contraintes dont le calcul, à partir de techniques classiques utilisant les fonctions de Green, est rappelé dans ce paragraphe et appliqué à des topologies utilisées par la suite. Deux cas sont étudiés : le premier cas correspond au problème classique d'une inclusion (cf. figure III.3) et le deuxième s'apparente au problème de l'inclusion enrobée (cf. figure III.4). Avant de détailler ces deux cas particuliers, on explicite la formulation intégrale pour la déformation totale.

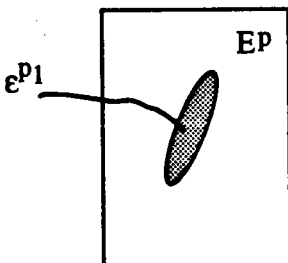


Fig.III.3 : Inclusion classique.

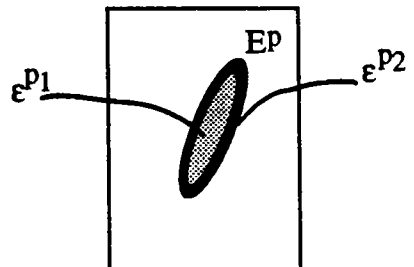


Fig.III.4 : Inclusion enrobée.

a) Formulation intégrale

Pour un milieu à élasticité homogène, à partir de la loi de comportement élastique :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}\beta_{kl}^e(r) \quad (III.23),$$

et de la décomposition du gradient du déplacement (III.9), l'équation d'équilibre (III.2) sans force volumique s'écrit :

$$C_{ijkl}u_{k,lj}(r) - C_{ijkl}\beta_{kl,j}^p(r) = 0 \quad (III.24).$$

La résolution du système d'équations aux dérivées partielles (III.24) dont les inconnues sont les déplacements  $u_i(r)$  tenant compte des conditions de frontière à l'infini, fait appel au tenseur de Green  $\mathcal{G}$  pour le milieu infini homogène de constantes d'élasticité  $C$ .

Ce tenseur de Green  $\mathcal{G}_{ij}(r-r')$  décrivant le déplacement au point  $r$  dans la direction  $i$  sous l'effet d'une force unité  $f_i = \delta_{ij} \delta(r-r')$  appliquée au point  $r'$  dans la direction  $j$ , est défini par :

$$C_{ijkl}\mathcal{G}_{km,jl}(r) - \delta_{im}\delta(r-r') = 0 \quad (III.25),$$

où  $\delta_{im}$  est le tenseur de Krönecker et  $\delta(r-r')$  est la distribution de Dirac dont les propriétés permettent d'écrire :

$$u_i(r) = \int \delta_{im}\delta(r-r')u_m(r')dV' \quad (III.26).$$

En substituant l'équation (III.25) dans (III.26) on écrit :

$$u_i(r) = - \int C_{mjkl}\mathcal{G}_{ki,jl}(r-r')u_m(r')dV' \quad (III.27).$$

Utilisant les propriétés suivantes :

$$\mathcal{G}_{ij,k}(r-r') = -\mathcal{G}_{ij,k'}(r-r') \quad (\text{III.28}),$$

et

$$\mathcal{G}_{ij,kl}(r-r') = \mathcal{G}_{ij,k} \gamma'_{l'}(r-r') \quad (\text{III.29}),$$

l'équation (III.27) devient :

$$u_i(r) = - \int C_{mjkl} \mathcal{G}_{ki,j'l'}(r-r') u_m(r') dV' \quad (\text{III.30}).$$

Selon le théorème de la divergence et des conditions à l'infini ( $u_i = u_i^d$ ), cette dernière relation (III.30) s'écrit :

$$u_i(r) = u_i^d(r) - \int C_{mjkl} \mathcal{G}_{ki}(r-r') u_{m,j'l'}(r') dV' \quad (\text{III.31}).$$

De la relation (III.24), on obtient :

$$u_i(r) = u_i^d(r) - \int \mathcal{G}_{ki}(r-r') C_{klmn} \beta_{mn,l'}^p(r') dV' \quad (\text{III.32}),$$

qui se transforme par intégration par partie en :

$$u_i(r) = u_i^d(r) + \int \mathcal{G}_{ki,l'}(r-r') C_{klmn} \beta_{mn}^p(r') dV' \quad (\text{III.33}).$$

On déduit de (III.33) immédiatement le gradient de déplacement et des propriétés (III.28) :

$$\beta_{ij}(r) = u_{i,j}(r) = u_{i,j}^d(r) - \int \mathcal{G}_{ki,lj}(r-r') C_{klmn} \beta_{mn}^p(r') dV' \quad (\text{III.34}).$$

Par symétrisation, la déformation totale  $\epsilon_{ij}(r)$  s'écrit avec les conditions aux limites (III.6) :

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} + \int \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} \varepsilon_{mn}^p(r') dV' \quad (\text{III.35}),$$

où  $\Gamma_{ijkl}$  est le tenseur de Green modifié défini par :

$$\Gamma_{ijkl}(r-r') = -\frac{1}{2} (\mathcal{G}_{ik,jl}(r-r') + \mathcal{G}_{jk,il}(r-r')) \quad (\text{III.36}).$$

Par la composition de la déformation totale (III.10), on obtient :

$$\varepsilon_{ij}^e(r) + \varepsilon_{ij}^p(r) = E_{ij}^e + E_{ij}^p + \int \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} \varepsilon_{mn}^p(r') dV' \quad (\text{III.37}).$$

La multiplication de cette équation (III.37) et la loi de comportement élastique (III.22) donnent :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(r) = & \Sigma_{ij} + C_{ijkl} (E_{kl}^p - \varepsilon_{kl}^p(r)) \\ & + \int C_{ijkl} \Gamma_{klpq}(r-r') C_{pqmn} \varepsilon_{mn}^p(r') dV' \end{aligned} \quad (\text{III.38}).$$

### b) L'inclusion classique

La topologie de ce premier cas, correspond à une inclusion de volume  $V^1$  déformée par une déformation plastique uniforme  $\varepsilon^{p1}$  et d'une matrice infinie homogène subissant une déformation plastique  $E^p$ .

A l'aide de la fonction indicatrice d'Heaviside  $\theta^1(r)$  définie par :

$$\theta^1(r) = \begin{cases} 1, r \in V^1 \\ 0, r \notin V^1 \end{cases} \quad (\text{III.39}),$$

la partie plastique de la déformation  $\varepsilon^p(r)$  s'écrit :

$$\epsilon_{ij}^P(r) = E_{ij}^P + (\epsilon_{ij}^{P1} - E_{ij}^P) \theta^1(r) \quad (\text{III.40}).$$

Ces deux valeurs  $\epsilon^{P1}$  et  $E^P$  sont supposées uniformes dans leur volume respectif. Cette formulation (III.44) correspond à la généralisation par Kröner [K61] de la solution d'Eshelby [E57] au cas où la matrice a subi une déformation plastique uniforme. A l'interface S enveloppant le volume  $V^1$ , le déplacement est continu.

On déduit de l'équation (III.40) la déformation totale  $\epsilon_{ij}(r)$  :

$$\epsilon_{ij}(r) = E_{ij} + \int_{V^1} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} (\epsilon_{mn}^{P1} - E_{mn}^P) dV' \quad (\text{III.41}),$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} E_{mn}^P dV' = 0 \quad (\text{III.42}).$$

La définition du tenseur  $T^1$  d'ordre 4 :

$$T_{ijkl}^1(r) = - \int_{V^1} \mathcal{G}_{ik,jl}(r-r') dV' \quad (\text{III.43}),$$

permet de compacter la déformation totale  $\epsilon_{ij}(r)$  (III.41) en :

$$\epsilon_{ij}(r) = E_{ij} + \frac{1}{2} \{ T_{ijkl}^1(r) + T_{jikl}^1(r) \} C_{klmn} (\epsilon_{mn}^{P1} - E_{mn}^P) \quad (\text{III.44}).$$

La définition du tenseur d'Eshelby :

$$S_{ijmn}^1 = \frac{1}{2} \{ T_{ijkl}^1 + T_{jikl}^1 \} C_{klmn} \quad (\text{III.45}),$$

donne finalement pour la déformation totale dans l'inclusion :

$$\epsilon_{ij}^1 = E_{ij} + S_{ijkl}^1 (\epsilon_{kl}^{P1} - E_{kl}^P) \quad (\text{III.46}).$$



La décomposition de la déformation totale en partie élastique et plastique (III.10) permet d'écrire la déformation élastique dans l'inclusion :

$$\epsilon_{ij}^{e1} = E_{ij} + S_{ijkl}^1 (\epsilon_{kl}^{p1} - E_{kl}^p) - \epsilon_{kl}^{p1} \quad (\text{III.47}).$$

De même manière, cette décomposition appliquée sur la déformation totale macroscopique  $E_{ij}$  donne :

$$\epsilon_{ij}^{e1} = E_{ij}^e + (I_{ijkl} - S_{ijkl}^1) (E_{kl}^p - \epsilon_{kl}^{p1}) \quad (\text{III.48}),$$

où  $I_{ijkl}$  est le tenseur unité d'ordre 4 :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (\text{III.49}).$$

La loi de comportement d'élasticité (III.22) employée pour les déformations élastiques  $\epsilon_{ij}^{e1}$  de l'inclusion (III.52) et pour les déformations élastiques macroscopiques  $E_{ij}^e$  permet de déduire la contrainte dans l'inclusion  $\sigma^1$  :

$$\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij} + C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) (E_{mn}^p - \epsilon_{mn}^{p1}) \quad (\text{III.50}),$$

où la contrainte macroscopique est égale à :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}^e \quad (\text{III.51}).$$

### c) L'inclusion enrobée

Utilisée par la suite, l'inclusion enrobée pose un problème qui relève d'une démarche identique à l'inclusion classique et qui correspond à une topologie d'une inclusion de volume  $V^1$  déformée par une déformation plastique uniforme  $\epsilon^{p1}$  entourée d'une couche de volume  $V^2$

déformée par  $\epsilon^{P2}$  et d'une matrice infinie, homogène subissant une déformation plastique  $E^P$ . A l'aide de deux fonctions d'Heaviside  $\theta^1(r)$  pour l'inclusion  $V^1$  et  $\theta^I(r)$  pour l'inclusion composite de volume  $V^I = V^1 + V^2$ , la déformation plastique  $\epsilon^P(r)$  se traduit par :

$$\epsilon_{ij}^P(r) = E_{ij}^P + \left( \epsilon_{ij}^{P2} - E_{ij}^P \right) \theta^I(r) + \left( \epsilon_{ij}^{P1} - \epsilon_{ij}^{P2} \right) \theta^1(r) \quad (\text{III.52}).$$

De l'équation intégrale (III.35) et de (III.42), on déduit que :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(r) = E_{ij} + \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} \left( \epsilon_{mn}^{P2} - E_{mn}^P \right) dV' \\ + \int_{V^1} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} \left( \epsilon_{mn}^{P1} - \epsilon_{mn}^{P2} \right) dV' \end{aligned} \quad (\text{III.53}),$$

qui se réduit pour un point  $r$  appartenant à l'inclusion  $V^1$  et par l'hypothèse de deux inclusions homothétiques et concentriques (donc de même tenseur d'Eshelby  $S^1$  pour les deux inclusions), en :

$$\epsilon_{ij}^1 = E_{ij} + S_{ijkl}^1 \left( \epsilon_{kl}^{P2} - E_{kl}^P \right) + S_{ijkl}^1 \left( \epsilon_{kl}^{P1} - \epsilon_{kl}^{P2} \right) \quad (\text{III.54}).$$

Après simplification, la relation (III.54) devient :

$$\epsilon_{ij}^1 = E_{ij} + S_{ijkl}^1 \left( \epsilon_{kl}^{P1} - E_{kl}^P \right) \quad (\text{III.55}).$$

On obtient ici la même relation que (III.46) de l'inclusion classique. Donc la même contrainte dans l'inclusion de volume  $V^1$  est déduite :

$$\sigma_{ij}^1 = \Sigma_{ij} + C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) \left( E_{mn}^P - \epsilon_{mn}^{P1} \right) \quad (\text{III.56}).$$

Par contre, la contrainte dans  $V^2 (=V^I - V^1)$  est plus complexe et peut être évaluée à partir d'opérateurs interfaciaux développés par Hill [H72].

### III.1.3 - Opérateurs interfaciaux

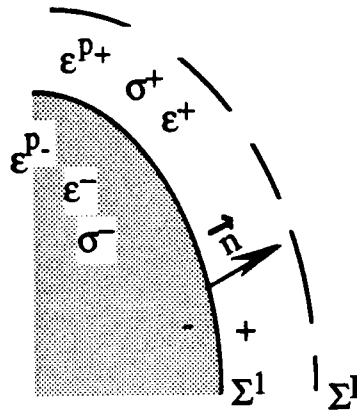


Fig.III.5 : Surface de discontinuité.

Ce concept d'opérateurs interfaciaux est développé par Hill [H72] dans un premier temps au milieu élastique isotrope à partir d'une décomposition sous forme d'invariant de tenseurs du second rang décrivant l'état mécanique sur une surface parfaite de discontinuité.

Exprimé par Laws [L75] et Walpole [W78] pour des milieux élastiques anisotropes, il peut être étendu pour d'autres types de réponse du matériau comme la viscoélasticité, ou la plasticité.

Hill [H83] explique que ces sauts de discontinuité des tenseurs de contraintes et de déformations à l'interface sont reliés par des opérateurs interfaciaux.

Ces opérateurs sont définis à partir des deux conditions de continuité à l'interface. La première est la continuité du déplacement  $[u_i]=0$ . Cette condition entraîne pour la déformation :

$$[\epsilon_{ij}] = \frac{1}{2}(\lambda_i n_j + \lambda_j n_i) = \epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^- \quad (\text{III.57}),$$

où  $n_i$  est la normale de la surface  $\Sigma$  et  $\lambda_j$  un vecteur arbitraire fonction de l'interface.

Ce vecteur  $\lambda_j$  est déterminé par la deuxième condition précisant l'équilibre de l'interface  $[\sigma_{ij}n_j]=0$  et par la loi de comportement élastique (III.22).

De toutes ces conditions, on obtient la relation :

$$C_{ijkl}\lambda_k n_l n_j = C_{ijkl} \left[ \varepsilon_{kl}^p \right] n_j \quad (\text{III.58}).$$

En introduisant la matrice de Christoffel  $C_{ik}$  comme égale à  $C_{ijkl} n_l n_j$ , le saut  $[\varepsilon_{ij}]$  s'exprime par :

$$[\varepsilon_{ij}] = \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn} \left[ \varepsilon_{mn}^p \right] \quad (\text{III.59}),$$

où

$$\mathcal{P}_{ijkl} = \frac{1}{4} \left( C_{ik}^{-1} n_j n_l + C_{il}^{-1} n_j n_k + C_{jk}^{-1} n_i n_l + C_{jl}^{-1} n_i n_k \right) \quad (\text{III.60}).$$

$\mathcal{P}$  est un des opérateurs interfaciaux défini par Hill [H83].

Hill définit deux opérateurs interfaciaux de la manière suivante :

- $\mathcal{P}$  : génère les tenseurs extérieurs et annihile les tenseurs intérieurs
- $\mathcal{Q}$  : génère les tenseurs intérieurs et annihile les tenseurs extérieurs

La propriété reliant ces deux opérateurs :

$$C_{ijkl} \mathcal{P}_{klmn} + Q_{ijkl} C_{klmn}^{-1} = I_{ijmn} = \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn} + C_{ijkl}^{-1} Q_{klmn} \quad (\text{III.61}),$$

permet d'obtenir le second opérateur interfacial  $\mathcal{Q}$ :

$$Q_{ijkl} = \left( I_{ijmn} - C_{ijpq} \mathcal{P}_{pqmn} \right) C_{mnkl} \quad (\text{III.62}).$$

Finalement , le saut de contrainte  $[\sigma]$  à l'interface se détermine à partir de la loi de comportement élastique :

$$[\sigma_{ij}] = -Q_{ijkl} [\epsilon_{kl}^p] \quad (\text{III.63}).$$

### III.2 - Discontinuités interfaciales mobiles

Comme dans toute démarche thermodynamique [R71, LC78, H86, M92, S90b] on est amené à calculer la dissipation  $\mathcal{D}$  du système étudié qui est décrit dans le paragraphe précédent. La définition de la dissipation intrinsèque découle des deux premiers principes de la thermodynamique.

Le premier principe impose la conservation de l'énergie. Il est exprimé par la relation :

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = P_{\text{ext}} + Q \quad (\text{III.64}),$$

où  $\dot{\mathcal{E}}$  et  $\dot{\mathcal{K}}$  sont les dérivées temporelles respectivement de l'énergie interne  $\mathcal{E}$  et de l'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  du volume  $V$ ,  $Q$  le taux de chaleur reçue par le domaine étudié et  $P_{\text{ext}}$  la puissance des efforts extérieurs.

Le second principe postule que le taux de production d'entropie  $\dot{\mathcal{S}}$  est toujours supérieur ou égal au taux de chaleur reçue divisé par la température  $\theta$ . Soit :

$$\dot{\mathcal{S}} \geq \frac{Q}{\theta} \quad (\text{III.65}).$$

De ces deux principes, on obtient l'inégalité suivante :

$$\theta \dot{\mathcal{S}} - \dot{\mathcal{E}} - \dot{\mathcal{K}} + P_{\text{ext}} \geq 0 \quad (\text{III.66}).$$

L'approximation quasi-statique ( $\dot{\mathcal{K}} = 0$ ) et la définition de l'énergie libre d'Helmholtz  $\mathcal{W}$  :

$$\mathcal{W} = \mathcal{E} - \theta \mathcal{S} \quad (\text{III.67}),$$

réduisent l'inégalité (III.66) à :

$$P_{\text{ext}} - (\dot{\mathcal{W}} + \dot{\theta} S) \geq 0 \quad (\text{III.68}).$$

Cette dernière relation appliquée à l'ensemble du solide V est généralement appelée "inégalité dissipative". Sous une forme locale en un point r du domaine V, elle se transforme en l'inégalité connue de Clausius-Duhem.

En définissant la dissipation comme égale au terme de gauche de l'inégalité (III.71), on obtient dans l'approximation isotherme ( $\dot{\theta} = 0$ )

$$\mathcal{D} = P_{\text{ext}} - \dot{\mathcal{W}} \quad (\text{III.69}).$$

Dans la suite, on calcule successivement l'énergie libre, sa dérivée, la puissance des efforts extérieurs et par conséquent la dissipation intrinsèque pour un solide élastoplastique contenant des surfaces de discontinuités plastiques mobiles.

### III.2.1 - Energie libre d'Helmholtz $\mathcal{W}(E, \varepsilon^p_{cr})$

Sous la condition d'une température constante, l'énergie élastique couramment appelée sous cette hypothèse l'énergie libre d'Helmholtz  $\mathcal{W}$ , se définit pour un volume V :

$$\mathcal{W}(E, \varepsilon^p(r)) = \int_V w(r) dV \quad (\text{III.70}),$$

où  $w(r)$ , la densité volumique d'énergie libre d'Helmholtz au point r, est égale en fonction de la déformation élastique et des contraintes à :

$$w(r) = \frac{1}{2} \sigma(r) : \varepsilon^e(r) \quad (\text{III.71}).$$

En utilisant la relation de compatibilité en petites déformations :

$$\varepsilon_{ij}(r) = \varepsilon^e_{ij}(r) + \varepsilon^p_{ij}(r) \quad (\text{III.72}),$$

et les symétries du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$ , la relation (III.70) avec l'équation (III.71), produit

$$\mathcal{W}(E, \varepsilon^P(r)) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) (u_{i,j}(r) - \varepsilon_{ij}^P(r)) dV \quad (\text{III.73}),$$

soit

$$\mathcal{W}(E, \varepsilon^P(r)) = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) u_{i,j}(r) dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^P(r) dV \quad (\text{III.74}).$$

L'intégration par partie de la première intégrale donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(E, \varepsilon^P(r)) &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}(r) u_i(r))_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}(r) u_i(r) dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^P(r) dV \end{aligned} \quad (\text{III.75}).$$

Du fait de l'équation d'équilibre  $\sigma_{ij,j}=0$ , la deuxième intégrale (III.75) est nulle. En appliquant sur la première intégrale le théorème de la divergence, on obtient :

$$\mathcal{W}(E, \varepsilon^P(r)) = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}(r) u_i(r) n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^P(r) dV \quad (\text{III.76}),$$

où  $S$  est la surface délimitant le volume  $V$  et  $n_j$  les composantes de la normale extérieure à cette surface  $S$ .

Or, pour tout point  $r$  de coordonnées  $x_k$  de cette surface  $S$ , le vecteur déplacement  $u_i$  est décrit par les tenseurs de la déformation  $E$  et de rotation  $\Omega$  imposés par la relation suivante :

$$u_i^d(r) = (E_{ij} + \Omega_{ij}) x_j \quad (\text{III.77}).$$

Les propriétés de symétrie des tenseurs  $E$  et  $\sigma$  ( $E_{ik} = E_{ki}$ ), d'antisymétrie de  $\Omega$  ( $\Omega_{ik} = -\Omega_{ki}$ ) et de leur produit, permettent d'obtenir à partir de (III.76) et (III.77) :

$$\mathcal{W}(E, \epsilon^P(r)) = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}(r) E_{ik} x_k n_j dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV \quad (III.78).$$

Du théorème de la divergence appliqué sur la première intégrale de (III.78), l'énergie  $\mathcal{W}$  s'écrit alors :

$$\mathcal{W}(E, \epsilon^P(r)) = \frac{1}{2} E_{ik} \int_V (\sigma_{ij}(r) x_k)_{,j} dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV \quad (III.79).$$

Utilisant la propriété  $\sigma_{ij,j} = 0$  et la relation  $x_{k,j} = \delta_{kj}$ , l'équation (III.79) devient :

$$\mathcal{W}(E, \epsilon^P(r)) = \frac{1}{2} E_{ij} \int_V \sigma_{ij}(r) dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV \quad (III.80).$$

Soit à partir de (III.14) (la contrainte macroscopique  $\Sigma$ )

$$\mathcal{W}(E, \epsilon^P(r)) = \frac{1}{2} E_{ij} \Sigma_{ij} V - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV \quad (III.81).$$

On peut décomposer la contrainte  $\sigma(r)$  en deux parties :

$$\sigma(r) = \Sigma + \sigma'(r) \quad (III.82).$$

En introduisant la contrainte interne  $\sigma'(r)$  qui possède les propriétés suivantes :

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma'(r) dV = 0 \quad (III.83),$$

et



$$\sigma'_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{III.84}),$$

l'énergie libre d'Helmholtz s'écrit maintenant :

$$\mathcal{W}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_{ij} \Sigma_{ij} V - \frac{1}{2} \int_V (\Sigma_{ij} + \sigma'_{ij}(\mathbf{r})) \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{r}) dV \quad (\text{III.85}).$$

En éliminant  $\Sigma$  à partir de  $\Sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{E}_{kl}^e$  (III.86), et en utilisant la propriété (III.16), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})) &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_{ij} - \mathbf{E}_{ij}^P) \mathbf{C}_{ijkl} (\mathbf{E}_{kl} - \mathbf{E}_{kl}^P) V \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^P(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.87}),$$

où  $\sigma'(\mathbf{r})$  ne dépend que du champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})$  et plus précisément des incompatibilités du champ  $\boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})$ . Le calcul de  $\sigma'(\mathbf{r})$  correspond à une démarche classique de mécanique des matériaux partant soit des fonctions de Green (cf. paragraphe III.1.2), soit des méthodes introduisant un potentiel des contraintes [K58].

### III.2.2 - Dérivée de l'énergie d'Helmholtz

Comme cela a été signalé dans l'introduction de ce paragraphe III.2, le calcul de la dissipation passe par celui de la dérivée temporelle de l'énergie interne qui se ramène ici à l'énergie libre d'Helmholtz. De la dérivation particulière d'une intégrale de volume contenant des surfaces de discontinuité  $\Sigma$  et de la définition de l'énergie d'Helmholtz (III.70) on a, à nouveau :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{W}}{dt}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})) &= \dot{\mathcal{W}}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}^P(\mathbf{r})) \\ &= \int_V \frac{\partial w}{\partial t}(\mathbf{r}) dV - \int_{\Sigma} [w] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \end{aligned} \quad (\text{III.88}),$$

où  $w_\alpha$  est la vitesse de propagation et  $n_\alpha$  sa normale de la surface  $\Sigma$ .  $[w]$  est le saut de la densité volumique de l'énergie au travers de la surface  $\Sigma$ .

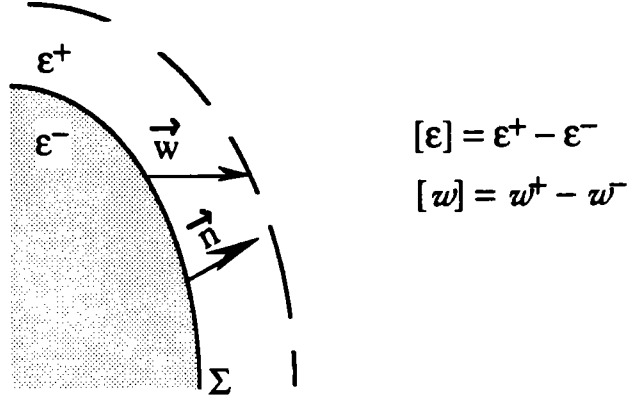


Fig.III.6 : Saut de la densité volumique de l'énergie libre d'Helmholtz au travers de la surface  $\Sigma$ .

La première intégrale se transforme en :

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t}(r) dV = \int_V \dot{w}(r) dV = \int_V \sigma_{ij}(r) (\dot{\epsilon}_{ij}(r) - \dot{\epsilon}_{ij}^p(r)) dV \quad (\text{III.89}),$$

du fait de la symétrie des compliances élastiques  $C_{ijkl}$  et des équations (III.71) et (III.72).

Sous l'hypothèse de l'élasticité uniforme, le saut  $[w]$  peut être exprimé [BPB91] par :

$$[w] = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^+ (\epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^{p+}) - \sigma_{ij}^- (\epsilon_{ij}^- - \epsilon_{ij}^{p-}) \right) \quad (\text{III.90}),$$

soit

$$[w] = \frac{1}{2} \left( (\epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^{p+}) C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^+ - \epsilon_{kl}^{p+}) - (\epsilon_{ij}^- - \epsilon_{ij}^{p-}) C_{ijkl} (\epsilon_{kl}^- - \epsilon_{kl}^{p-}) \right) \quad (\text{III.91}).$$

Par les symétries du tenseur d'élasticité  $C$ , on peut écrire que :

$$[w] = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p] \quad (\text{III.92}).$$

La dérivée temporelle de l'énergie libre d'Helmholtz d'un volume contenant des surfaces de discontinuité s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \int_V \sigma_{ij}(r) (\dot{\epsilon}_{ij}(r) - \dot{\epsilon}_{ij}^p(r)) dV \\ & - \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+(r) + \sigma_{ij}^-(r)) [\epsilon_{ij}(r) - \epsilon_{ij}^p(r)] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \end{aligned} \quad (\text{III.93}).$$

### III.2.3 - Puissance des efforts extérieurs

En l'absence de forces volumiques ( $f_i = 0$ ), la puissance des efforts extérieurs (surfacciques uniquement)  $T_i$  sur  $S$  s'écrit pour un champ de vitesse  $v_i$  :

$$P_{\text{ext}} = \int_S T_i v_i dS \quad (\text{III.94}).$$

Soit à partir de  $\sigma_{ij} n_j = T_i$  (III.95):

$$P_{\text{ext}} = \int_S \sigma_{ij} n_j v_i dS \quad (\text{III.96}).$$

Le théorème de la divergence appliqué à une intégrale surfaccique enveloppant un volume  $V$  contenant des surfaces de discontinuité  $\Sigma$ , transforme l'équation (III.96) en :

$$P_{\text{ext}} = \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV + \int_{\Sigma} [\sigma_{ij} n_j v_i] dS \quad (\text{III.97}).$$

Or, aux interfaces de discontinuité, les équations d'équilibre (III.2) et de compatibilité (III.1) entraînent les relations suivantes :

$$[\sigma_{ij}n_j] = \sigma_{ij}^+ n_j - \sigma_{ij}^- n_j = 0 \quad (\text{III.98}),$$

et

$$[u_i] = u_i^+ - u_i^- = 0 \quad (\text{III.99}).$$

Ces conditions d'interface parfaite devant être maintenues au cours du déplacement des surfaces  $\Sigma$ , on obtient les relations d'Hadamard (cf Annexe A) liant les vitesses matérielles  $v_i$  à la vitesse de propagation  $w$  et à la normale  $n$  des interfaces :

$$[v_i] = -[u_{i,j}n_j]w_\alpha n_\alpha \quad (\text{III.100}).$$

Des équations (III.98) et (III.100) ainsi que de l'équation d'équilibre (III.2), la puissance des efforts extérieurs (III.97) devient :

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij}v_{i,j}dV - \int_\Sigma \sigma_{ij}n_j[u_{i,k}n_k]w_\alpha n_\alpha dS \quad (\text{III.101}).$$

Or,  $v_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}$ , et du fait que le double produit d'un tenseur symétrique  $\sigma_{ij}$  et d'un tenseur antisymétrique  $\dot{\omega}_{ij}$  est nul, il reste :

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}dV - \int_\Sigma \sigma_{ij}n_j[u_{i,k}]n_k w_\alpha n_\alpha dS \quad (\text{III.102}).$$

La discontinuité admissible du gradient du déplacement au travers d'une interface doit être de la forme [H61, W67] :

$$[u_{i,j}] = u_{i,j}^+ - u_{i,j}^- = \lambda_i n_j \quad (\text{III.103}),$$

où  $\lambda$  est un vecteur arbitraire, fonction de l'interface. De l'équation (III.103), on peut expliciter le terme de la deuxième intégrale (III.102) :

$$\sigma_{ij}n_j[u_{i,k}]n_k = \sigma_{ij}n_j\lambda_i n_k n_k \quad (\text{III.104}).$$

Or  $n_k n_k = 1$  et on a sur la surface  $\Sigma$ ,  $\sigma_{ij} n_j = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ n_j + \sigma_{ij}^- n_j)$ , ce qui donne :

$$\sigma_{ij} n_j [u_{i,k}] n_k = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) \lambda_i n_j \quad (\text{III.105}),$$

soit

$$\sigma_{ij} n_j [u_{i,k}] n_k = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [u_{i,j}] \quad (\text{III.106}).$$

A cause de la symétrie du tenseur de contrainte, le saut du gradient de déplacement  $[u_{i,j}]$  peut être remplacé par le saut du tenseur de déformation  $[\epsilon_{ij}]$ . On obtient finalement pour la puissance des efforts extérieurs la forme suivante :

$$P_{\text{ext}} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV - \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-) [\epsilon_{ij}] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad (\text{III.107}).$$

### III.2.4 - Dissipation intrinsèque

Il reste maintenant à déterminer la dissipation donnée par :

$$\mathcal{D} = P_{\text{ext}} - \dot{\mathcal{W}} \quad (\text{III.69}),$$

à partir des équations déterminant la puissance des efforts extérieurs (III.107) et la dérivée temporelle de l'énergie d'Helmholtz (III.93) sous la forme :

$$\mathcal{D} = \int_V \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) dV - \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^+(r) + \sigma_{ij}^-(r)) [\epsilon_{ij}^p(r)] w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad (\text{III.108}).$$

Comme pour tout processus de dissipation [M92, PS93], l'équation (III.108) ne fait apparaître que des mécanismes inélastiques qui sont, dans ce problème :

- la vitesse de déformation plastique volumique  $\dot{\epsilon}_{ij}^p(r)$ ,

- le mouvement propre des surfaces de discontinuité  $w_\alpha n_\alpha$ .

Les forces thermodynamiques correspondantes à la vitesse de déformation plastique sont les contraintes de Cauchy  $\sigma_{ij}$  et le terme  $\left\{ -\frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^+(r) + \sigma_{ij}^-(r) \right) \left[ \varepsilon_{ij}^p(r) \right] \right\}$  apparaissant sous la forme d'un tenseur moment énergétique représente la force motrice du mouvement propre des surfaces de discontinuité  $\Sigma$ .

Cette description déjà simplifiée et globalisée par rapport au mouvement réel des dislocations prises individuellement reste encore complexe à mettre en oeuvre pour une microstructure quelconque. Dans le prochain paragraphe, on tire profit du fait que la microstructure cellulaire peut être représentée raisonnablement par une description fondée sur des morphologies d'inclusions plastiques, pour simplifier (III.108).

### III.3 - Application au cas des cellules de dislocations

#### III.3.1 - Représentation simplifiée de la structure cellulaire

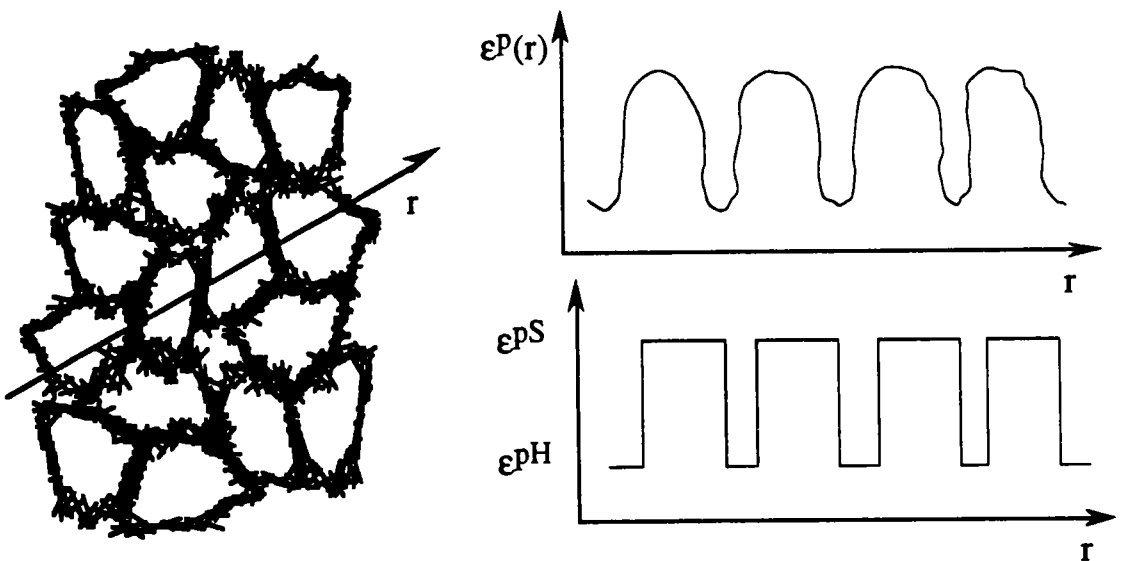


Fig III.7 : Représentation schématique de la déformation plastique en présence de cellules de dislocations

Si on part de l'idée que la déformation plastique est importante à l'intérieur des cellules de dislocations du fait de leur grande mobilité et

par voie de conséquence faible dans les parois, on peut représenter le champ  $\varepsilon_P(r)$  par un champ uniforme par morceaux (cf. figure III.7).

Cette partition du volume  $V$  d'un grain en deux parties  $V^S$  ( $S = \text{Soft} - \text{molle}$ ) et  $V^H$  ( $H = \text{Hard} - \text{dure}$ ) simplifie le champ  $\varepsilon_P(r)$  et entraîne pour une variable macroscopique  $\mathcal{M}$  décrite comme une moyenne volumique de  $m$  sur  $V$  :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{V} \int_V m dV \quad (\text{III.109}),$$

une forme simplifiée :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{V} \frac{V^S}{V^S} \int_{V^S} m dV + \frac{1}{V} \frac{V^H}{V^H} \int_{V^H} m dV \quad (\text{III.110}),$$

soit

$$\mathcal{M} = f m^S + (1 - f) m^H \quad (\text{III.111}),$$

où  $f = \frac{V^S}{V}$  est la fraction volumique des cellules de dislocations, et  $(1 - f) = \frac{V^H}{V}$  celle des parois. La moyenne volumique par phase de la variable concernée s'écrit :

$$m^\alpha = \frac{1}{V^\alpha} \int_{V^\alpha} m dV \quad \text{où } \alpha = H, S \quad (\text{III.112}).$$

Cette représentation des variables macroscopiques comme la contrainte, la déformation totale ou la déformation plastique, implique également une modification de la relation (III.83) sur les contraintes internes  $\sigma'$  :

$$f \sigma'_{ij}{}^S + (1 - f) \sigma'_{ij}{}^H = 0 \quad (\text{III.113}).$$

Une autre hypothèse sur la structure cellulaire de dislocations sera utile pour décrire les frontières  $\Sigma$ . En effet, pour pouvoir modéliser l'évolution des formes et des orientations des cellules, on est amené à

choisir une forme géométrique simple correspondant à une forme ellipsoïdale. Dans ce cas, les paramètres de morphologie se réduisent aux demi-axes de l'ellipsoïde pour la forme et à trois angles d'Euler définissant l'orientation du repère propre de l'ellipsoïde par rapport au repère du cristal (cf. figure III.8).

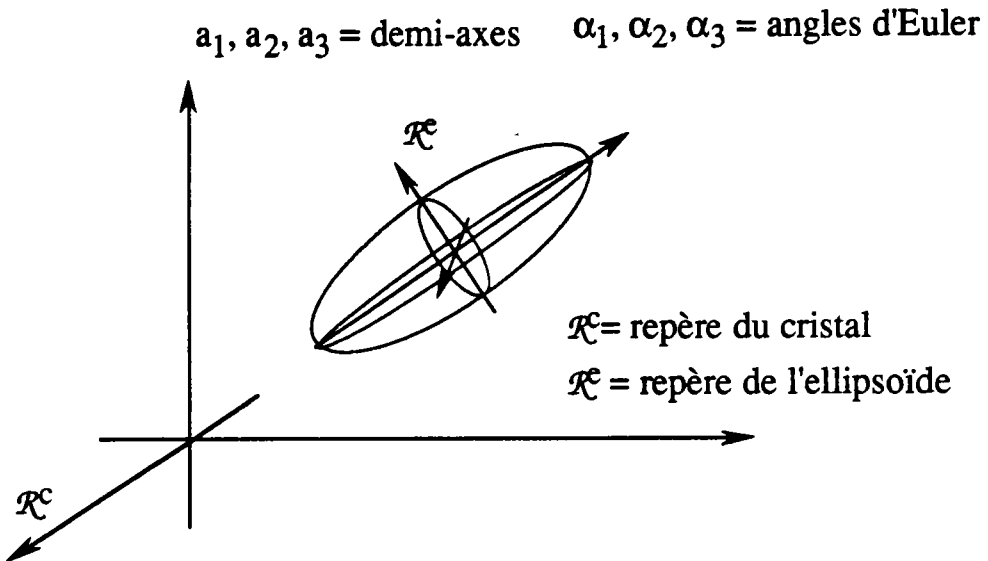


Fig.III.8 : Description ellipsoïdale.

Pour tenir compte des aspects topologiques associés au fait que les dislocations sont mobiles à l'intérieur des cellules et sont stockées dans les parois, il est judicieux d'utiliser une représentation de la microstructure par un motif d'inclusion enrobée (cf. figure III.9).

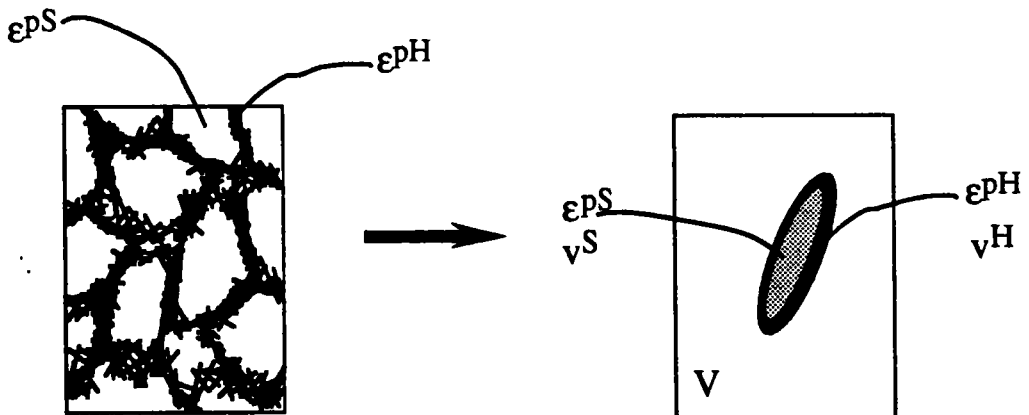


Fig.III.9 : Motif d'une cellule de dislocations.

Une cellule est donc représentée par deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques appelées "inclusion composite" de volume  $v^I$ . Le volume  $V$  constitué de  $\mathcal{N}$  motifs est tel que :



$$\mathcal{V}^I = V = \mathcal{V}(v^H + v^S) \quad (\text{III.114}).$$

$v^H$  et  $v^S$  désignent le volume des zones H et S pour une cellule. On a la relation évidente :

$$\frac{\mathcal{V}^I}{V} = \frac{\mathcal{V}^H}{V} + \frac{\mathcal{V}^S}{V} \quad (\text{III.115}),$$

et on suppose que la proportion de phase H est la même dans le grain que dans l'inclusion composite. On a donc :

$$f = \frac{\mathcal{V}^S}{V} = \frac{V^S}{V} = \frac{v^S}{v^I} \quad (\text{III.116}),$$

$$(1 - f) = \frac{\mathcal{V}^H}{V} = \frac{V^H}{V} = \frac{v^H}{v^I} \quad (\text{III.117}).$$

Les interactions entre inclusions composites sont décrites en plongeant celles-ci dans une matrice déformée plastiquement par  $E^P$  si bien que la topologie élémentaire à résoudre correspond à la figure (III.10).

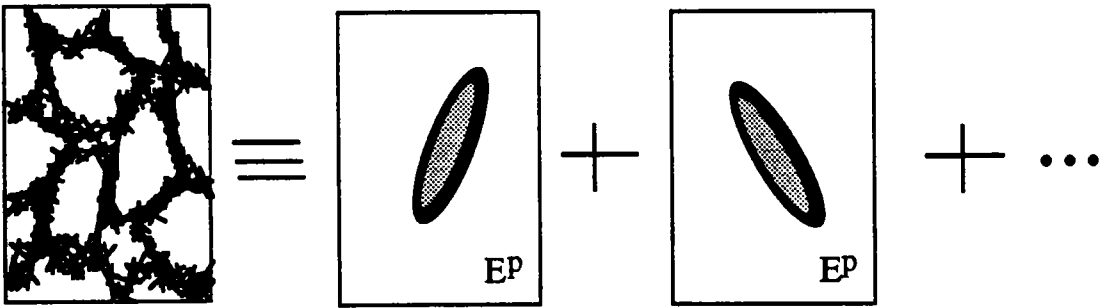


Fig III.10 : Modèle de la microstructure cellulaire.

Cette représentation implique, pour les problèmes d'évolution qu'il n'y a pas de création de nouveau motif ( $\dot{\mathcal{N}} = 0$ ) et que par conséquent :

$$\dot{v}^I = 0 \quad (\text{III.118}),$$

car  $\dot{V} = 0$  par hypothèse.

Finalement, les variables décrivant la microstructure et le champ  $\epsilon^P(r)$  sont :

- la déformation plastique  $\epsilon^{PS}$  à l'intérieur des cellules,
- la déformation plastique  $\epsilon^{PH}$  pour les parois,
- la fraction volumique  $f$  des cellules,
- la morphologie de l'inclusion interne représentée soit par les variables  $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  soit par un tenseur  $A_{ij}$  décrivant l'ellipsoïde interne par l'équation classique :

$$A_{ij}x_i x_j = 1 \quad (III.119).$$

### III.3.2 - Calcul de la dissipation

Dans ce paragraphe, on calcule la dissipation par unité de volume pour le problème simplifié décrit dans la figure (III.11).

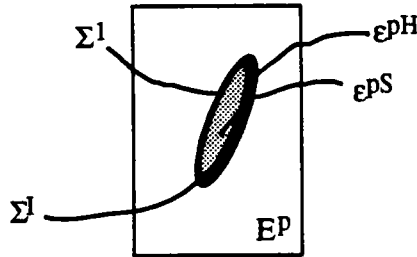


Fig.III.11 : Modèle simplifié

De la Dissipation provenant :

- de la déformation plastique des 2 "phases"
- du mouvement des deux interfaces  $\Sigma^I$  et  $\Sigma^I$ ,

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{V} = & \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(r) \dot{\epsilon}_{ij}^P(r) dV \\ & - \frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^I} \left( \sigma_{ij}^{+I}(r) + \sigma_{ij}^{-I}(r) \right) \left[ \epsilon_{ij}^P(r) \right]^I w_\alpha^I n_\alpha^I dS \\ & - \frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^I} \left( \sigma_{ij}^{+I}(r) + \sigma_{ij}^{-I}(r) \right) \left[ \epsilon_{ij}^P(r) \right]^I w_\alpha^I n_\alpha^I dS \end{aligned} \quad (III.120).$$

où  $[\varepsilon_{ij}^p(r)]^I$  et  $[\varepsilon_{ij}^p(r)]^I$  représentent respectivement le de la déformation plastique aux interfaces  $\Sigma^I$  et  $\Sigma^I$ .

La dérivée de la déformation plastique peut se définir pour un matériau biphasé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p(r) = \dot{\varepsilon}^{ps} , r \in V^S \\ \dot{\varepsilon}^p(r) = \dot{\varepsilon}^{ph} , r \in V^H \end{cases} \quad (\text{III.121}).$$

Sous ces hypothèses, la première intégrale  $I^1$  de l'équation (III.120) se réécrit :

$$I^1 = \frac{1}{V} \left( \dot{\varepsilon}_{ij}^{ps} \int_{V^S} \sigma_{ij}(r) dV + \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph} \int_{V^H} \sigma_{ij}(r) dV \right) \quad (\text{III.122}).$$

On trouve les moyennes volumiques de contrainte  $\sigma^H$  et  $\sigma^S$  dans chaque phase. Cette intégrale  $I^1$  prend donc la forme suivante :

$$I^1 = f \dot{\varepsilon}_{ij}^{ps} \sigma_{ij}^S + (1-f) \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph} \sigma_{ij}^H \quad (\text{III.123}).$$

Pour les deux intégrales de surface  $I^2$  et  $I^3$  de l'équation (III.120), l'utilisation des opérateurs interfaciaux (cf. paragraphe III.1.3) permet de définir la contrainte  $\sigma^+$  d'un bord de la surface  $\Sigma$  à partir de la contrainte  $\sigma^-$  de l'autre coté de l'interface  $\Sigma$ , et du saut de la déformation plastique  $[\varepsilon^p]$  sur  $\Sigma$  :

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- - (I_{ijkl} - C_{ijmn} \mathcal{P}_{mnkl}) C_{klpq} [\varepsilon_{pq}^p] \quad (\text{III.124}),$$

avec l'opérateur interfacial  $\mathcal{P}$  défini par la relation (III.60).

Un agrandissement de l'inclusion composite sur les deux surfaces de discontinuité permet de détailler les contraintes interfaciales (cf .figure III.12).

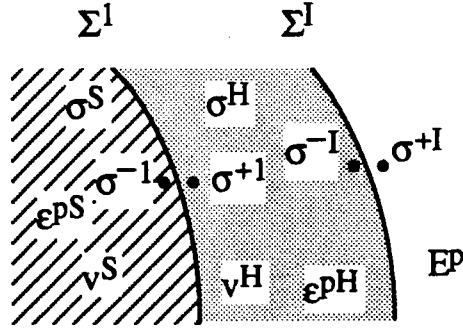


Fig.III.12 : Agrandissement sur les interfaces  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^2$

Du fait que le saut de déformation plastique  $[\epsilon^P]^1$  est uniforme sur la surface de discontinuité  $\Sigma^1$ , on peut développer l'intégrale  $I^2$  :

$$I^2 = -\frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^1} \left( \sigma_{ij}^{+1} + \sigma_{ij}^{-1} \right) \left[ \epsilon_{ij}^P \right]^1 w_\alpha^1 n_\alpha^1 dS \quad (\text{III.125}).$$

Avec l'hypothèse de contrainte uniforme dans l'inclusion interne,  $\sigma^{-1}$  est égale à la contrainte moyenne  $\sigma^S$  dans ce volume  $v^S$  déterminé dans le paragraphe III.1.2 par la relation (III.56). Cette contrainte  $\sigma^S$  s'écrit, avec la déformation plastique macroscopique  $E^P$  décrite par l'équation (III.111) :

$$\sigma_{ij}^S = \Sigma_{ij} - (1-f) C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) \Delta \epsilon_{mn}^P \quad (\text{III.126}),$$

où

$$\Delta \epsilon_{mn}^P = \epsilon_{mn}^{PS} - \epsilon_{mn}^{PH} \quad (\text{III.127}).$$

Pour la contrainte  $\sigma^{+1}$ , la relation (III.63) utilisant l'opérateur interfacial  $Q^1$  permet d'obtenir :

$$\sigma_{ij}^{+1} = \sigma_{ij}^{-1} - Q_{ijkl}^1 \left[ \epsilon_{kl}^P \right]^1 \quad (\text{III.128}),$$

où le saut de déformation plastique est égale sur la surface  $\Sigma^1$  :

$$\left[ \epsilon_{mn}^P \right]^1 = \epsilon_{mn}^{P+1} - \epsilon_{mn}^{P-1} = \epsilon_{mn}^{PH} - \epsilon_{mn}^{PS} = -\Delta \epsilon_{mn}^P \quad (\text{III.129}).$$

L'intégrale  $I^2$  s'écrit donc :

$$I^2 = \sigma_{ij}^S \Delta \varepsilon_{ij}^p \frac{\mathcal{N}}{V} \int_{\Sigma^1} w_{\alpha}^1 n_{\alpha}^1 dS + \Delta \varepsilon_{ij}^p \Delta \varepsilon_{kl}^p \frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^1} Q_{ijkl}^1 w_{\alpha}^1 n_{\alpha}^1 dS \quad (\text{III.130}).$$

La première intégrale de surface de l'équation (III.130) décrit l'évolution du volume  $v^S$  enveloppé par la surface fermée  $\Sigma^1$ . La définition (III.65) et la résolution (A.18) d'une intégrale  $J$  précisée dans l'annexe A :

$$J = \int_{V^{\beta}} \mathcal{P}_{ijkl}^{\beta} C_{klmn} w_{\alpha}^{\beta} n_{\alpha}^{\beta} dV \quad (\text{III.131}),$$

$$J = S_{ijmn}^1 \dot{V}^{\beta} - S_{ijmnpq}^2 V^{\beta} \dot{A}_{pq} \quad (\text{III.132}),$$

donnent l'intégrale  $I^2$  pour un matériau biphasé :

$$I^2 = \sigma_{ij}^S \Delta \varepsilon_{ij}^p \frac{\mathcal{N}^S}{V} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}^1) \Delta \varepsilon_{kl}^p \frac{\mathcal{N}^S}{V} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p \frac{\mathcal{N}^S}{V} \quad (\text{III.133}).$$

Une démarche similaire pour l'intégrale  $I^3$  est suivie :

$$I^3 = -\frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^1} (\sigma_{ij}^{+I} + \sigma_{ij}^{-I}) [\varepsilon_{ij}^p]^I w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS \quad (\text{III.134}),$$

où

$$\sigma_{ij}^{+I} = \sigma_{ij}^{-I} - Q_{ijkl}^I [\varepsilon_{kl}^p]^I \quad (\text{III.135}),$$

et

$$[\varepsilon_{mn}^p]^I = E_{mn}^p - \varepsilon_{mn}^{PH} = f(\varepsilon_{mn}^{PS} - \varepsilon_{mn}^{PH}) = f \Delta \varepsilon_{mn}^p \quad (\text{III.136}),$$

avec l'hypothèse d'uniformité de  $[\varepsilon^p]^I$  sur la surface  $\Sigma^I$ .

L'intégrale  $I^3$  s'écrit alors :

$$I^3 = -f\Delta\epsilon_{ij}^p \frac{\mathcal{N}}{V} \int_{\Sigma^I} \sigma_{ij}^{-I} w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS \quad (III.137).$$

$$+ f^2 \Delta\epsilon_{ij}^p \Delta\epsilon_{kl}^p \frac{\mathcal{N}}{2V} \int_{\Sigma^I} Q_{ijkl}^I w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS$$

Contrairement à la relation (III.130), ici  $\sigma^{-I}$  n'est pas uniforme sur la surface  $\Sigma^I$ . Une dérivation de la moyenne volumique des contraintes  $\sigma^H$  du domaine  $v^H$  permet de connaître la première intégrale  $J^1$  de l'équation (III.137) en termes de matériau biphase à structure ellipsoïdale.

Soit  $v^H \sigma_{ij}^H = \int_{v^H} \sigma_{ij}(r) dV$  et sa dérivation donne :

$$\dot{\overline{v^H \sigma_{ij}^H}} = \int_{v^H} \dot{\sigma}_{ij}(r) dV + \int_{\partial v^H} \sigma_{ij}(r) w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad (III.138).$$

Or, le volume  $v^H$  possède comme la surface extérieure  $\partial v^H$ , les surfaces de discontinuité  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^I$  (de normale  $n^1$  et  $n^I$  respectivement à  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^I$  (cf. figure III.13)), et la contrainte est égale à  $\sigma^{+1}$  et  $\sigma^{-I}$  respectivement sur  $\Sigma^1$  et  $\Sigma^I$ . La première intégrale de (III.138) décrit la moyenne volumique de la dérivée de contrainte  $\sigma^H$  du volume  $v^H$ .

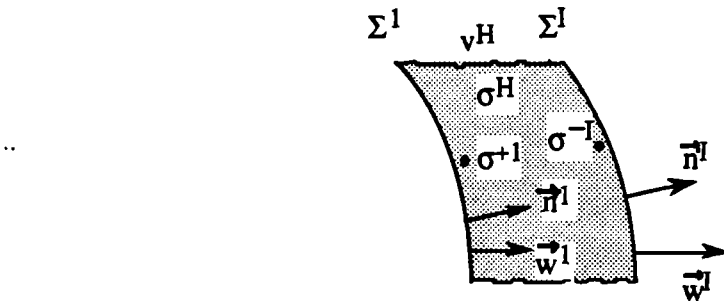


Fig III.13 : Description des contraintes sur le volume  $v^H$

$$\dot{\overline{v^H \sigma_{ij}^H}} = v^H \dot{\sigma}_{ij}^H + \int_{\Sigma^I} \sigma_{ij}^{-I} w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS - \int_{\Sigma^1} \sigma_{ij}^{+1} w_{\alpha}^1 n_{\alpha}^1 dS \quad (III.139).$$

D'autre part, le membre de gauche de (III.139) est égal à :

$$\overbrace{v^H \dot{\sigma}_{ij}^H} = v^H \dot{\sigma}_{ij}^H + \dot{v}^H \sigma_{ij}^H \quad (\text{III.140}).$$

En regroupant les équations (III.139) et (III.140), il reste que l'intégrale  $\mathcal{J}^1$  est égale à :

$$\mathcal{J}^1 = \int_{\Sigma^I} \sigma_{ij}^{-I} w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS = \dot{v}^H \sigma_{ij}^H + \int_{\Sigma^1} \sigma_{ij}^{+1} w_{\alpha}^1 n_{\alpha}^1 dS \quad (\text{III.141}).$$

En reprenant les conditions (III.128) à (III.132), l'intégrale  $\mathcal{J}^1$  devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1 = & \sigma_{ij}^H \dot{v}^H + \sigma_{ij}^S \dot{v}^S + C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}^1) \Delta \varepsilon_{kl}^p \dot{v}^S \\ & + C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p v^S \end{aligned} \quad (\text{III.142}).$$

Des hypothèses (III.114) à (III.118), on déduit que  $\dot{v}^H = -\dot{v}^S$  à condition que le nombre  $\mathcal{N}$  de cellules dans le volume  $V$  et le volume  $V$  n'évoluent pas. Des définitions des contraintes dans chaque phase  $S$  et  $H$ , la différence de ces contraintes  $\sigma^S$  et  $\sigma^H$  est égale à :

$$\sigma_{ij}^S - \sigma_{ij}^H = -C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \varepsilon_{mn}^p \quad (\text{III.143}).$$

De ces remarques, il reste de  $\mathcal{J}^1$  :

$$\mathcal{J}^1 = C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p v^S \quad (\text{III.144}).$$

La deuxième intégrale  $\mathcal{J}^2$  de la relation (III.137) se résolve de manière identique à la deuxième intégrale de l'équation (III.130), sauf que la surface  $\Sigma^1$  et le volume  $v^S$  sont remplacés par  $\Sigma^I$  et  $v^I$ . Du fait que les ellipsoïdes  $I$  et  $1$  sont homothétiques et concentriques, les tenseurs  $S^1$  et  $S^2$  sont identiques. La condition (III.118) entraîne donc pour l'intégrale  $\mathcal{J}^2$  :

$$j^2 = \int_{\Sigma^I} Q_{ijkl}^I w_{\alpha}^I n_{\alpha}^I dS = C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} v^I \quad (\text{III.145}).$$

Des résultats de  $j^1$  (III.144) et de  $j^2$  (III.145), l'intégrale  $I^3$  (III.137) devient :

$$\begin{aligned} I^3 = & -f \Delta \varepsilon_{ij}^p \frac{\mathcal{V}^S}{V} C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p \\ & + f^2 \Delta \varepsilon_{ij}^p \frac{\mathcal{V}^I}{V} C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p \end{aligned} \quad (\text{III.146}).$$

Les hypothèses (III.114) à (III.117) et les résolutions des intégrales  $I^1$  (III.123),  $I^2$  (III.133) et  $I^3$  (III.146) permettent de définir la dissipation par unité de volume dans le cas d'un matériau biphasé à structure ellipsoïdale évolutive :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{V} = & f \dot{\varepsilon}_{ij}^{pS} \sigma_{ij}^S + (1-f) \dot{\varepsilon}_{ij}^{pH} \sigma_{ij}^H \\ & + \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} S_{mnklpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \varepsilon_{kl}^p \\ & + \dot{f} \left\{ \Sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \varepsilon_{ij}^p C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}^1) \Delta \varepsilon_{kl}^p \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.147}).$$

Dans le paragraphe suivant, après un cas particulier, on commentera cette équation (III.147).

### III.3.3 - Cas particulier - Discussion

#### *a) cas particulier*

Si on se restreint à une évolution homothétique des ellipsoïdes modélisant les cellules de dislocations, alors des variables décrivent la morphologie (fraction volumique  $f$  et le tenseur  $A_{ij}$ ), seule la fraction volumique  $f$  évolue. Car l'évolution homothétique n'entraîne qu'un



changement de volume des phases et non une modification de forme ou d'orientation. La conséquence est que :

$$\dot{S}_{mnkl}^1 = 0 \text{ ou } S_{mnklpq}^2 = 0 \quad (\text{III.148}).$$

Dans ce cas, la dissipation (III.147) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{V} = & f \dot{\epsilon}_{ij}^{PS} \sigma_{ij}^S + (1-f) \dot{\epsilon}_{ij}^{PH} \sigma_{ij}^H \\ & + \dot{f} \left\{ \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}^1) \Delta \epsilon_{kl}^P \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.149}).$$

### b) Discussion

Les démarches thermodynamiques [R71, LC78, H86, M92, S90b] expriment la dissipation sous la forme générale :

$$\frac{\mathcal{D}}{V} = F_i (\Sigma_{kl}, X_j) \dot{X}_i \quad (\text{III.150}),$$

où  $F_i$  décrit la force thermodynamique motrice de la variable interne  $X_i$  et dépend de la variable de contrôle, ici la contraintes macroscopiques  $\Sigma_{kl}$ , et des variables internes  $X_j$ . Pour le modèle simplifié représentant la microstructure cellulaire de dislocations à l'intérieur des grains du polycristal, on déduit de la dissipation (III.147) les variables internes suivantes :

- les déformations plastiques de chaque phase  $\epsilon^{PS}$ ,  $\epsilon^{PH}$ ,
- la fraction volumique des cellules  $f$ ,
- les paramètres de l'ellipsoïde  $a_i$ ,  $\alpha_i$ .

De cette relation (III.147), on retrouve les forces motrices classiques liées aux déformations plastiques à une fraction volumique près : les contraintes moyennes de chaque phase  $\sigma^\alpha$  ( $\alpha=S,H$ ). On obtient également deux nouvelles forces motrices, l'une pour la fraction

volumique et l'autre pour les paramètres de l'ellipsoïde. Ces forces motrices s'écrivent :

$$\begin{cases} F_{\epsilon_{ij}^{PS}} = f \sigma_{ij}^S \\ F_{\epsilon_{ij}^{PH}} = (1-f) \sigma_{ij}^H \\ F_f = \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \\ F_{A_{pq}} = \frac{1}{2} f (1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \Delta \epsilon_{mn}^P \end{cases} \quad (III.151).$$

### III.4 - Modèle biphasé - Calcul "direct"

Dans ce paragraphe, l'équation (III.147) est vérifiée à l'aide d'un calcul "direct". Ce calcul reprend la démarche thermodynamique, mais appliquée au matériau biphasé. Autrement dit, on détermine l'énergie libre d'Helmholtz  $\mathcal{W}$  pour ce cas, puis on calcule sa dérivée. Et la dissipation est obtenue en soustrayant à la puissance des efforts extérieurs cette dérivée.

#### III.4.1 - Energie libre d'Helmholtz et sa dérivée

De l'équation (III.87) et de l'hypothèse d'un matériau biphasé, seule l'intégrale de l'énergie libre  $\mathcal{W}$  se modifie en :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV &= \frac{1}{2} \int_{V^S} \sigma'_{ij}(r) \epsilon_{ij}^{PS} dV \\ &+ \frac{1}{2} \int_{V^H} \sigma'_{ij}(r) \epsilon_{ij}^{PH} dV \end{aligned} \quad (III.152),$$

car sur  $V^S$   $\epsilon_P(r) = \epsilon^{PS}$  et sur  $V^H$   $\epsilon_P(r) = \epsilon^{PH}$ .

Par la propriété de moyenne volumique sur chaque phase définie en (III.112), et par unité de volume, on trouve pour (III.152) :

$$\frac{1}{2V} \int_V \sigma'_{ij}(r) \epsilon_{ij}^P(r) dV = \frac{1}{2} f \sigma'_{ij}^S \epsilon_{ij}^{PS} + \frac{1}{2} (1-f) \sigma'_{ij}^H \epsilon_{ij}^{PH} \quad (\text{III.153}).$$

Dans l'équation (III.153), il reste à expliciter la contrainte interne  $\sigma^S$  dans les cellules. La généralisation par Kröner [K61] de la solution d'Eshelby [E57] du problème d'inclusion au cas où la matrice a subi une déformation plastique uniforme, développée dans le paragraphe III.1.2, permet d'obtenir la relation des contraintes internes suivante :

$$\sigma'_{ij}^S = C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) \left( E_{mn}^P - \epsilon_{mn}^{PS} \right) \quad (\text{III.154}).$$

Selon la relation (III.111) appliquée à la déformation plastique  $E^P$  macroscopique, on trouve pour  $\sigma^S$  :

$$\sigma'_{ij}^S = -(1-f) C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) \left( \epsilon_{mn}^{PS} - \epsilon_{mn}^{PH} \right) \quad (\text{III.155}).$$

On peut maintenant exprimer l'énergie libre d'Helmholtz par unité de volume, en fonction des variables de plasticité dans chaque phase ( $\epsilon^{PS}$ ,  $\epsilon^{PH}$ ) et des variables de morphologie de la microstructure cellulaire à travers la fraction volumique  $f$  et le tenseur d'Eshelby  $S^1$  pour la forme et d'orientation des cellules et la variable macroscopique, la déformation totale imposée  $E$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}}{V} (E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A) &= \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^P) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^P) \\ &+ \frac{1}{2} f (1-f) \left( \epsilon_{ij}^{PS} - \epsilon_{ij}^{PH} \right) C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1(A) \right) \left( \epsilon_{mn}^{PS} - \epsilon_{mn}^{PH} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.156}),$$

avec  $E_{ij}^P = f \epsilon_{ij}^{PS} + (1-f) \epsilon_{ij}^{PH}$ .

Dans cette relation (III.156), cinq types de variables sont dépendantes du temps :

- la variable pilote c'est-à-dire la déformation appliquée à la frontière  $E$

- les déformations plastiques dans chaque phase  $\epsilon^{PS}$ ,  $\epsilon^{PH}$
- les variables de morphologie des cellules  $f$  et  $A_{ij}$   
(à travers le tenseur d'Eshelby  $S^1$ )

La dérivation de l'équation (III.156) avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\epsilon}_{ij}^P = f \dot{\epsilon}_{ij}^{PS} + (1-f) \dot{\epsilon}_{ij}^{PH} + \dot{f} \Delta \epsilon_{ij}^P \\ \Delta \epsilon_{ij}^P = \epsilon_{ij}^{PS} - \epsilon_{ij}^{PH} \\ \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^P = \dot{\epsilon}_{ij}^{PS} - \dot{\epsilon}_{ij}^{PH} \end{array} \right. \quad (III.157),$$

donne :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{W}}{V} (E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A) &= \Sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \Sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P \\ &- \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \epsilon_{mn}^P \\ &+ \frac{1}{2} \dot{f} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \\ &+ \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^P \left\{ C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \right. \\ &\left. + C_{mnkl} (I_{klij} - S_{klij}^1) \right\} \Delta \epsilon_{mn}^P \end{aligned} \quad (III.158),$$

De la définition du tenseur d'Eshelby  $S^1$  donnée dans l'annexe B, on peut écrire la relation suivante :

$$S_{ijkl}^1 = \frac{1}{2} (T_{ijmn}^1 + T_{jimn}^1) C_{mnkl} \quad (III.159).$$

Du fait de cette définition (III.159) et des symétries des constantes élastiques  $C$ , le dernier terme de la relation (III.158) devient :

$$\mathcal{T} = \left\{ C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) + C_{mnkl} (I_{klij} - S_{klij}^1) \right\} \quad (III.160),$$

soit

$$\mathcal{T} = \left\{ C_{ijmn} + C_{ijkl} T_{klpq}^1 C_{pqmn} + C_{mnij} + C_{mnkl} T_{klpq}^1 C_{pqij} \right\} \quad (III.161).$$

Si on développe les sommations des doubles produits contractés  $C:T^1:C$ , on peut démontrer que :

$$C_{ijkl} T_{klpq}^1 C_{pqmn} = C_{mnkl} T_{klpq}^1 C_{pqij} \quad (\text{III.162}).$$

Donc  $\mathcal{T}$  s'écrit à partir de la définition (III.159)

$$\mathcal{T} = 2C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \quad (\text{III.163}).$$

Avec les contraintes moyennes définies dans chaque phase par :

$$\sigma_{ij}^S = \Sigma_{ij} - (1-f)C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \quad (\text{III.164}),$$

et

$$\sigma_{ij}^H = \Sigma_{ij} + fC_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \quad (\text{III.165}),$$

la dérivée de l'énergie d'Helmholtz par unité de volume devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathcal{W}}}{V} (E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A) = & \Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} - f \sigma_{ij}^S \dot{\epsilon}_{ij}^{PS} - (1-f) \sigma_{ij}^H \dot{\epsilon}_{ij}^{PH} \\ & - \dot{f} \left\{ \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \right\} \\ & - \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \dot{A}_{pq} \Delta \epsilon_{mn}^P \end{aligned} \quad (\text{III.166}).$$

#### III.4.2 - Puissance des efforts extérieurs et dissipation

Pour calculer la puissance des efforts extérieurs dans le cas d'un matériau biphasé, on reprend l'équation (III.94) :

$$P_{\text{ext}} = \int_S T_i v_i dS \quad (\text{III.94}).$$

Les conditions aux limites :

$$v_i = \dot{E}_{ij} x_j \quad (\text{III.167}),$$

permettent d'écrire :

$$P_{\text{ext}} = \int_S T_i \dot{E}_{ij} x_j dS \quad (\text{III.168}).$$

De l'équation (III.95)  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  et du théorème de la divergence, on obtient :

$$P_{\text{ext}} = \dot{E}_{ij} \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dV \quad (\text{III.169}),$$

où  $E_{ij}$  est uniforme et  $\sigma_{ik}$  continu dans le volume  $V$

L'équation d'équilibre ( $\sigma_{ik,k} = 0$ ) et la relation suivante

$$x_{j,k} = \delta_{jk} \quad (\text{III.170}),$$

donnent avec la définition de la contrainte macroscopique :

$$P_{\text{ext}} = V \dot{E}_{ij} \Sigma_{ij} \quad (\text{III.171}).$$

Finalement, dans le cas d'un matériau biphasé à structure ellipsoïdale, la dissipation par unité de volume défini par (III.69) et à partir des résultats de la dérivation de l'énergie d'Helmholtz (III.166) et de la puissance des efforts extérieurs (III.171) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{V} = & f \dot{\epsilon}_{ij}^{PS} \sigma_{ij}^S + (1-f) \dot{\epsilon}_{ij}^{PH} \sigma_{ij}^H \\ & + f \left\{ \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijmn} (I_{mnkl} - S_{mnkl}^1) \Delta \epsilon_{kl}^P \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.172}).$$

Cette dernière relation (III.172) est identique à l'équation (III.147) obtenue lors de l'application de la formule générale de la dissipation.

### **III.5 - Conclusion**

Dans ce chapitre, on a trouvé par deux démarches (cf. paragraphes III.3 et III.4) la dissipation intrinsèque au cas d'une description simplifiée par deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques représentant la microstructure cellulaire de dislocations. Cette dissipation nous a permis de définir les forces thermodynamiques (cf. paragraphe III.3.3). Dans l'annexe A, on présente d'autres manières de déterminer ces mêmes forces motrices.

## Références bibliographiques

- [BPB91] BERVEILLER M., PATOOR E., BUISSON M., Thermodynamical constitutive equations for shape memory alloys, 1991, J. de Phys. IV, Colloque C4, supp. au J. de Phys. III, Vol.1, pp(387-396)
- [E57] ESHELBY J.D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, 1957, Proc. Roy. Soc., A241, pp(376-396)
- [G73] GERMAIN P., Cours de mécanique des milieux continus, 1973, tome 1 Théorie générale, eds. Masson et cie Paris
- [H61] HILL R., Discontinuity relations in mechanics of solids, 1961, in Progress in solid mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp(245-276)
- [H72] HILL R., An invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites, 1972, in Continuum mechanics and related problems of analysis, Moscow, pp(597-604)
- [H83] HILL R., Interfacial operators in the mechanics of composite media, 1983, J. Mech. Phys. Solids., Vol.31, N°4, pp(347-357)
- [H86] HILL R., Energy-momentum tensor in elastostatics : some reflections on the general theory, 1986, J. Mech. Phys. Solids., Vol. 34, N°3, pp(305-317)
- [K61] KRÖNER E., Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, 1961, Acta Metall., Vol.9, pp(155-161)
- [L75] LAWS N., On interfacial discontinuities in elastic composites, 1975, J. Elasticity, Vol.5, pp(227-235)
- [LC78] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., Mécanique des milieux continus, 1978, Greco Grandes déformations et endommagement, eds Dunod Paris



- [M92] MAUGIN G.A., the thermodynamics of plasticity and fracture, 1992, in Cambridge in Applied mathematics, eds Cambridge University Press
- [PS93] PRADEILLES-DUVAL R.M., STOLZ C., Relations entre grandeurs microscopiques et macroscopiques en présence de discontinuités mobiles, 1993, Actes du 11ème congrès français de mécanique Lille-villeneuve d'ascq, Vol.4, pp(157-160)
- [R71] RICE J.R., Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity, 1971, J. Mech. Phys. Solids, Vol.19, pp(433-455)
- [S90b] SCHAPERY R.A., A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure, 1990, J. Mech. Phys. Solids, Vol.38, N°2, pp(215-253)
- [W67] WALPOLE L.J., The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium, 1967, Proc. Roy. Soc., Vol.A300, pp(270-289)
- [W78] WALPOLE L.J., A coated inclusion in an elastic medium, 1978, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.83, pp(495-506)

# CHAPITRE IV :

## Lois complémentaires et comportement global

|   |             |
|---|-------------|
| <b>IV.1 - Comportement global en élastoplasticité</b>                         | <i>p101</i> |
| IV.1.1 - <u>Introduction du glissement plastique cristallographique</u>       | <i>p101</i> |
| IV.1.2 - <u>Comportement global</u>   | <i>p103</i> |
| <b>IV.2 - Les forces critiques</b>  | <i>p104</i> |
| <b>IV.3 - Eléments de physique de la dissipation</b>                          | <i>p106</i> |
| IV.3.1 - <u>Ecrouissage par déformation plastique</u>                         | <i>p107</i> |
| <i>a) Ecrouissage latent et auto-écrouissage</i>                              | <i>p107</i> |
| <i>b) Ecrouissage non local</i>   | <i>p109</i> |
| <i>c) Approximation biphasée de la structure cellulaire</i>                   | <i>p110</i> |
| IV.3.2 - <u>Evolution de la microstructure</u>                                | <i>p114</i> |
| <i>a) Influence des paramètres de la microstructure sur l'énergie interne</i> | <i>p115</i> |
| <i>b) Extension formelle au cas où la microstructure est contrainte</i>       | <i>p118</i> |
| <b>IV.4 - Conclusion</b>  | <i>p119</i> |

## **CHAPITRE IV :**

### **Lois complémentaires et comportement global**

Dans le chapitre précédent, une représentation simplifiée de la microstructure cellulaire de dislocation a permis d'introduire des variables internes décrivant cette microstructure et d'obtenir l'énergie libre et la dissipation pour le volume  $V$  d'un grain. Afin de déduire la loi de comportement global du grain, il reste à introduire les lois d'évolutions de ces variables internes au travers des lois complémentaires.

En se limitant à la plasticité à froid, la forme des lois complémentaires sera choisie du type indépendant du temps et à température fixe. On se retrouve donc dans le cadre des matériaux standards généralisés.

Dans le premier paragraphe, après l'introduction du glissement plastique cristallographique dans la dissipation (III.150), on rappelle la démarche permettant d'obtenir la loi de comportement du grain sous forme incrémentale. On analyse ensuite les forces critiques correspondant aux différentes variables introduites. La dernière partie de ce chapitre donne une tentative d'interprétation physique de ces forces critiques.

#### **IV.1 - Comportement global en élastoplasticité**

##### **IV.1.1 - Introduction du glissement plastique cristallographique**

Avant d'obtenir la loi de comportement global du grain à partir des lois d'évolution des variables internes, on introduit le glissement plastique cristallographique qui exprime que la vitesse de déformation plastique  $\dot{\epsilon}^P$  dans les phases S et H est obtenue par un glissement plastique cristallographique.

En supposant que l'orientation cristallographique est préservée dans chaque grain, les zones molles (S) et dures (H) possèdent le même tenseur de Schmidt  $R_{ij}^g$  défini pour le système de glissement  $g$  par :

$$R_{ij}^g = \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i)^g \quad (IV.1).$$

Cette conséquence se traduit sur les déformations plastiques dans chaque phase par les relations suivantes :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{PS} = R_{ij}^g \dot{\gamma}_S^g \quad (IV.2),$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{PH} = R_{ij}^g \dot{\gamma}_H^g \quad (IV.3),$$

où  $\dot{\gamma}$  est l'évolution du glissement dans chaque "phase".

Du fait des équations (IV.2) et (IV.3), la dissipation par unité de volume (III.147) dans le cas d'un matériau biphasé à structure ellipsoïdale, devient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}}{V} = & f \sigma_{ij}^S R_{ij}^g \dot{\gamma}_S^g + (1-f) \sigma_{ij}^H R_{ij}^g \dot{\gamma}_H^g + \dot{f} \left\{ \Sigma_{ij} R_{ij}^g \Delta \gamma^g \right. \\ & - \frac{1}{2} (1-2f) R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) R_{mn}^h \Delta \gamma^h \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} f (1-f) R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \dot{A}_{pq} R_{mn}^h \Delta \gamma^h \end{aligned} \quad (IV.4),$$

où

$$\Delta \gamma^g = \gamma_S^g - \gamma_H^g \quad (IV.5).$$

Les forces thermodynamiques se déduisent de la relation (IV.4) s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned} F_{\gamma_S^g} = & f \sigma_{ij}^S R_{ij}^g \\ = & f R_{ij}^g \left\{ \Sigma_{ij} - \frac{1}{2} (1-f) C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) R_{mn}^h \Delta \gamma^h \right\} \end{aligned} \quad (IV.6),$$

$$\begin{aligned}
 F_{\gamma_H^g} &= (1-f)\sigma_{ij}^H R_{ij}^g \\
 &= (1-f)R_{ij}^g \left\{ \Sigma_{ij} + \frac{1}{2}fC_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) R_{mn}^h \Delta\gamma^h \right\}
 \end{aligned}
 \tag{IV.7},$$

$$F_f = \Sigma_{ij} R_{ij}^g \Delta\gamma^g - \frac{1}{2}(1-2f)R_{ij}^g \Delta\gamma^g C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1 \right) R_{mn}^h \Delta\gamma^h
 \tag{IV.8},$$

$$F_{A_{pq}} = \frac{1}{2}f(1-f)R_{ij}^g \Delta\gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 R_{mn}^h \Delta\gamma^h
 \tag{IV.9}.$$

#### IV.1.2 - Comportement global

En ayant exprimé les forces thermodynamiques à partir de  $\Sigma$ , considéré comme variable de contrôle et en fonction des variables internes, la réponse macroscopique est alors la déformation totale :

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^p
 \tag{IV.10},$$

soit avec la définition de la déformation plastique macroscopique  $E^p$  pour un matériau biphasé :

$$E_{ij} = E_{ij}^e + f\varepsilon_{ij}^{ps} + (1-f)\varepsilon_{ij}^{ph}
 \tag{IV.11}.$$

L'accroissement  $\dot{E}$  de  $E$ , provient alors :

- de la variation de la déformation élastique :

$$\dot{E}_{ij}^e = C_{ijkl}^{-1} \dot{\Sigma}_{kl}
 \tag{IV.12},$$

- de la variation de la déformation plastique à travers des variables internes  $\gamma_S^g$ ,  $\gamma_H^g$ ,  $f$  :

$$\dot{E}_{ij}^p = f R_{ij}^g \dot{\gamma}_S^g + (1 - f) R_{ij}^g \dot{\gamma}_H^g + f R_{ij}^g \Delta \gamma^g \quad (IV.13).$$

L'évolution de ces variables internes s'obtiendra à partir des lois complémentaires développées dans la suite de ce chapitre et se résume au système suivant :

$$\dot{X} = (\Sigma, X) \dot{\Sigma} \quad (IV.14).$$

La variable  $X$  de la relation (IV.14) englobe toutes les variables internes :

- les amplitudes de glissement plastique dans chaque phase  $\gamma_S$  et  $\gamma_H$ ,
- la fraction volumique des cellules de dislocations  $f$ ,
- l'orientation et la forme des cellules ( $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) à travers le tenseur  $A_{ij}$ .

Finalement, le comportement global élastoplastique donné par :

$$\dot{E}_{ij} = L_{ijkl}^{-1} \dot{\Sigma}_{kl} \quad (IV.15),$$

où  $L_{ijkl}$  est le module tangent dépendant des variables internes  $X_i$  et de la variable pilote  $\Sigma$  se déduit des équations (IV.10 à IV.14).

## IV.2 Les forces critiques

En plasticité indépendante du temps, il est couramment défini un domaine convexe décrit par une origine  $O$  et une valeur seuil. Ce convexe est généralement appelé domaine élastique. En effet, lorsque la valeur seuil n'est pas atteinte, seule la déformation élastique est présente. La déformation irréversible, ici la plasticité, s'active quand la valeur de la force motrice atteint la valeur seuil. Pour les variables internes  $X_i$ , ce convexe s'applique sur les forces thermodynamiques motrices et on est amené à définir des forces critiques dépendant des variables internes.

L'évolution des variables internes  $X_i$  se traduit de la manière suivante :

$$\dot{X}_i = 0 \text{ si } \begin{cases} F_i(\Sigma, X) < F_i^c(X) & (a) \\ \forall \dot{F}_i(\Sigma, X) & (b) \end{cases} \quad (IV.16),$$

$$\dot{X}_i = 0 \text{ si } \begin{cases} F_i(\Sigma, X) = F_i^c(X) & (a) \\ \dot{F}_i(\Sigma, X) \leq 0 & (b) \end{cases} \quad (IV.17),$$

$$\dot{X}_i \neq 0 \text{ si } \begin{cases} F_i(\Sigma, X) = F_i^c(X) & (a) \\ \dot{F}_i(\Sigma, X) > 0 & (b) \end{cases} \quad (IV.18).$$

Dans le dernier cas (IV.18), la règle de cohérence décrite par :

$$\dot{F}_i(\Sigma, X) = \dot{F}_i^c(X) \quad (IV.19),$$

permet d'obtenir la variation des variables internes  $X_i$  en fonction de la variable pilote  $\Sigma_{kl}$ .

En effet, les équations suivantes :

$$\dot{F}_i(\Sigma, X) = \frac{\partial F_i}{\partial \Sigma_{kl}}(\Sigma, X) \dot{\Sigma}_{kl} + \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\Sigma, X) \dot{X}_j \quad (IV.20),$$

$$\dot{F}_i^c(X) = \frac{\partial F_i^c}{\partial X_j}(X) \dot{X}_j \quad (IV.21),$$

permettent de trouver le système défini précédemment (IV.14) pour les variables actives :

$$\left( \frac{\partial F_i^c}{\partial X_j}(X) - \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(\Sigma, X) \right) \dot{X}_j = \frac{\partial F_i}{\partial \Sigma_{kl}}(\Sigma, X) \dot{\Sigma}_{kl} \quad (IV.22),$$

soit, de manière formelle :

$$\dot{X}_i = \mathcal{M}_{kl}^i \dot{\Sigma}_{kl} \quad (\text{IV.23}).$$

De ce système (IV.23), on déduit la loi de comportement du grain (IV.15) en partant de la loi de comportement élastique (IV.12) et de la variation de déformation plastique (IV.13) généralisée ici pour toutes les variables internes  $X_i$  :

$$\dot{E}_{kl}^p = M_{kl}^i \dot{X}_i \quad (\text{IV.24}),$$

où  $M_{kl}^i$  prend les valeurs notées dans le tableau (IV.1) pour chaque variable  $X_i$ .

|              |              |                  |                            |       |            |
|--------------|--------------|------------------|----------------------------|-------|------------|
| $X_i :$      | $\gamma_S^g$ | $\gamma_H^g$     | $f$                        | $a_i$ | $\alpha_i$ |
| $M_{kl}^i :$ | $f R_{kl}^g$ | $(1-f) R_{kl}^g$ | $R_{kl}^g \Delta \gamma^g$ | 0     | 0          |

Tableau IV.1 : valeurs de la matrice  $M_{kl}^i$

On trouve donc :

$$\dot{E}_{ij} = \left( C_{ijkl}^{-1} + M_{ij}^t \mathcal{M}_{kl}^t \right) \dot{\Sigma}_{kl} \quad (\text{IV.25}).$$

Le module tangent  $L$  de la loi de comportement (IV.15) du grain est alors égal à :

$$L_{ijkl} = \left( C_{ijkl}^{-1} + M_{ij}^t \mathcal{M}_{kl}^t \right)^{-1} \quad (\text{IV.26}).$$

Il reste, autant que faire se peut, à expliciter les expressions pour les forces critiques.

### IV.3 - Eléments de physique de la dissipation

Dans le paragraphe précédent IV.2, on a introduit les forces critiques  $F_j^c$  dépendantes des variables internes  $X_j$ . Ici on propose les lois complémentaires permettant de définir ces forces critiques et donc



d'obtenir l'évolution des variables internes. Ces lois sont conçues d'une manière phénoménologique si on ne part pas de concepts micromécaniques déduits des observations expérimentales à l'échelle des dislocations. Dans le problème étudié ici, une théorie sur les dislocations permettra une définition des forces critiques moins phénoménologique. Cette théorie est développée dans la thèse d'I. Régnier. Dans ce paragraphe, on abordera seulement les aspects connus de ces forces critiques pour chaque variable interne  $X_i$ . Dans un premier temps, l'écrouissage par déformation plastique sera développé et sera suivi par une analyse de l'évolution des variables de microstructure.

#### IV.3.1 - Ecrouissage par déformation plastique (variables $\gamma_S$ et $\gamma_H$ )

Ici, on rappelle les concepts classiques d'écrouissage latent et d'auto-écrouissage que l'on étend au cas de l'écrouissage non local [M94, F95].

##### *a) Ecrouissage latent et auto-écrouissage*

La formulation suivante en tout point  $r$  :

$$\dot{\tau}_c^g(r) = H^{gh}(r) \dot{\gamma}^h(r) \quad (\text{IV.27}),$$

est un moyen simple et classique de décrire l'évolution des taux de cission critique sur les systèmes  $g$ ,  $\dot{\tau}_c^g(r)$ , en fonction des vitesses de glissement  $\dot{\gamma}^h(r)$  sur les systèmes actifs  $h$ . La matrice  $H$  de cette relation (IV.27) est généralement appelée matrice d'écrouissage. Franciosi [F84] a traduit cette matrice  $H$  de manière phénoménologique, plus ou moins sous une forme simplifiée, par la description des phénomènes de mouvement et de stockage (en moyenne) des dislocations dans les plans de glissement.

Pour un monocristal du type CFC, dont les systèmes de glissement sont du type  $\{111\} \langle 110 \rangle$  (soit 12 systèmes), Franciosi et al. [FBZ80] définissent la matrice d'écrouissage par deux paramètres déterminant les interactions fortes et faibles entre les systèmes de glissement. Le terme  $H^1$  (des faibles interactions) décrit l'auto-écrouissage, autrement dit

l'influence du glissement  $\gamma_g$  sur la cission critique du système  $g$ . Ce terme  $H^1$  correspond à la pente du stade 2 d'un essai de traction sur le monocristal. Le paramètre  $H^2$  (fortes interactions) décrit l'écrouissage latent. On peut définir l'écrouissage latent par l'influence des systèmes actifs  $g$  sur la cission critique des systèmes de glissement non actifs, mais pouvant s'activer pour un autre type d'essai de chargement.

Des études identiques ont été effectuées pour les métaux cristallins du type CC [F83, F84]. Par rapport aux systèmes CFC, le choix des systèmes de glissement cristallographique représentant les mécanismes de déformation plastique selon la température et la pureté du métal est moins net. En effet, il est généralement accepté que les mécanismes de glissement des métaux CC sont décrits par les directions  $\langle 111 \rangle$  et par deux familles de plans  $\{110\}$  et  $\{112\}$  (soit 24 systèmes), mais parfois dans de rares cas, on rajoute la famille de plan  $\{123\}$  [L93]. D'après Franciosi [F83], on peut reprendre la définition de la matrice d'écrouissage  $H$  sous la forme de deux paramètres d'interactions fortes  $H^2$  et faibles  $H^1$ .

On peut résumer de la manière suivante la répartition des deux paramètres  $H^1$  et  $H^2$  dans la matrice d'écrouissage  $H^{gh}(r)$  :

$$H^{gh}(r) = H^1 \quad (\text{IV.28}),$$

si les deux systèmes  $g$  et  $h$  ont le même plan (systèmes coplanaires) ou la même direction (systèmes colinéaires) de glissement, ou si les directions de glissement des deux systèmes sont perpendiculaires. Pour les autres cas, on admet :

$$H^{gh}(r) = H^2 \quad (\text{IV.29}).$$

La valeur initiale  $\tau_c^0$  de la cission critique correspond au frottement des dislocations avec le réseau cristallin. Ce paramètre  $\tau_c^0$  peut facilement s'obtenir par l'analyse de la courbe de traction du polycristal, si on suppose que tous les systèmes de glissement ont la même valeur initiale.

*b) Ecrouissage non local*

La formulation (IV.27) définissant l'évolution de taux de cisson critique est suffisante quand on considère le grain du polycristal comme un milieu homogène [LB89, LKB90, L93, LBRM95]. Mais cette relation ne suffit pas à décrire le durcissement des parois des cellules de dislocations par le mouvement de dislocations dans les cellules. En effet, il faudrait dans l'équation (IV.27) tenir compte dans l'évolution des taux de cisson critique en un point  $r$ , du glissement plastique en un point  $r'$ , d'où l'introduction de l'aspect non-local de l'écrouissage [MKB93, M94, MKB93, MLBK94, F95].

En conservant toutefois le glissement cristallographique comme mécanisme élémentaire de la déformation plastique, la formulation (IV.27) devient :

$$\dot{\tau}_c^g(r) = \int_V H^{gh}(r, r') \dot{\gamma}^h(r') dV' \quad (IV.30),$$

où  $V$  est le volume du cristallite considéré, et  $H$  est la matrice d'écrouissage non local. Cette relation (IV.30) conserve la notion d'écrouissage latent et d'auto-écrouissage définis dans le paragraphe précédent (IV.3.1.a).

En effet, on retrouve l'équation (IV.27) à l'aide des propriétés de la distribution de Dirac  $\delta$  et de la définition suivante :

$$H^{gh}(r, r') = H^{gh}(r) \delta(r - r') \quad (IV.31).$$

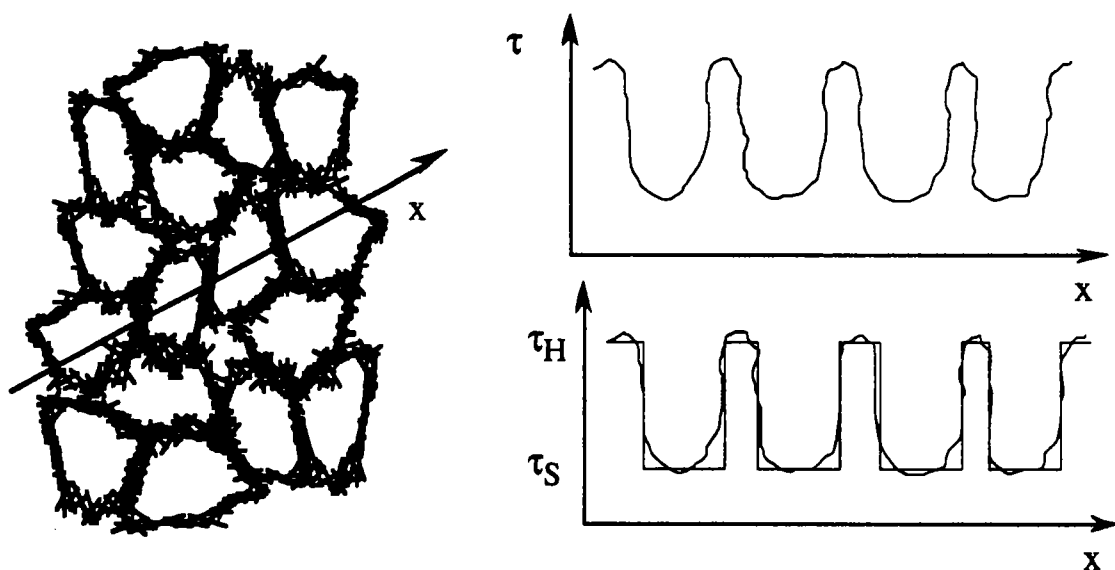
Cette formulation (IV.30) non locale s'adapte facilement dans le principe à la microstructure cellulaire des dislocations. Le mouvement de dislocations à l'intérieur des cellules est décrit par le glissement  $\gamma(r')$ . Le stockage de ces dislocations dans les parois entraînant le durcissement de ces parois est traduit par la variation de la cisson critique au point  $r$ . L'obtention d'une forme générale de matrice  $H$  dépendante de l'histoire du matériau et de la microstructure cellulaire des dislocations est difficile du fait des connaissances imparfaites du comportement individuel ou

collectif des dislocations. L'approximation biphasée de la structure cellulaire [MLBK94] permet de contourner cette difficulté.

*c) Approximation biphasée de la structure cellulaire*

On reprend ici la description de la microstructure cellulaire des dislocations par un modèle composite biphasé défini dans le paragraphe (III.3.1). Ce modèle représente l'intérieur des cellules à faible densité de dislocations par une phase molle et les parois des cellules à forte densité de dislocations par une phase dure [M88, M94].

L'évolution spatiale des cisssions critiques associées à une structure cellulaire de dislocations montre de forts gradients.



*Fig.IV.1 : Description biphasée de la structure cellulaire de dislocations  
(variation de  $\tau$  le long d'un vecteur  $\vec{x}$ )*

La figure IV.1 décrit la représentation de ces forts gradients induisant l'hypothèse d'uniformité par morceaux pour évaluer les effets caractéristiques de la structure cellulaire. On remplace ainsi  $\dot{\gamma}(\mathbf{r})$  et  $\dot{\tau}(\mathbf{r})$  par leur valeur moyenne dans chaque phase :

$$\dot{\gamma}^g(\mathbf{r}) = \dot{\gamma}_{\alpha}^g = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_{V_{\alpha}} \dot{\gamma}^g(\mathbf{r}) dV \quad (\text{IV.32}),$$

$$\dot{\tau}_c^g(r) = \dot{\tau}_{c\alpha}^g = \frac{1}{V^\alpha} \int_{V^\alpha} \dot{\tau}_c^g(r) dV \quad (\text{IV.33}),$$

avec  $\alpha = H$  ou  $S$ .

Dans cette description de composite biphasé, la formulation non locale de l'évolution des taux de cisssion critique (IV.30) devient dans chaque phase :

$$\dot{\tau}_{c\alpha}^g = \frac{1}{V^\alpha} \int_{V^\alpha} \int_V H^{gh}(r, r') \dot{\gamma}^h(r') dV' dV \quad (\text{IV.34}).$$

Et l'introduction de l'équation (IV.32) dans (IV.34), permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{c\alpha}^g = \frac{1}{V^\alpha} & \left( \int_{V^\alpha} \int_{V^S} H^{gh}(r, r') dV' dV \right) \dot{\gamma}_S^h \\ & + \frac{1}{V^\alpha} \left( \int_{V^\alpha} \int_{V^H} H^{gh}(r, r') dV' dV \right) \dot{\gamma}_H^h \end{aligned} \quad (\text{IV.35});$$

Finalement pour chaque phase ( $\alpha = H, S$ ) le taux de cisssion critique est égal à :

$$\dot{\tau}_{cS}^g = H_{SS}^{gh} \dot{\gamma}_S^h + H_{SH}^{gh} \dot{\gamma}_H^h \quad (\text{IV.36}),$$

$$\dot{\tau}_{cH}^g = H_{HS}^{gh} \dot{\gamma}_S^h + H_{HH}^{gh} \dot{\gamma}_H^h \quad (\text{IV.37}),$$

avec les définitions des matrices d'interaction  $H_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = H, S$ ) suivantes :

$$H_{\alpha\beta}^{gh} = \frac{1}{V^\alpha} \int_{V^\alpha} \int_{V^\beta} H^{gh}(r, r') dV' dV \quad (\text{IV.38}).$$

Il reste maintenant à relier ces matrices d'interaction  $H_{\alpha\beta}$  entre les phases avec différents paramètres physiques. Ce lien se fonde sur des concepts de dislocations, notamment sur des phénomènes de stockage et d'annihilation des dislocations dans les parois [MKB92, EM79]. Les quatre relations suivantes définissent ces matrices d'interaction en fonction de paramètres de dislocations dans le cas du glissement multiple [M94] :

$$H_{HS}^{gh} = \frac{b\mu^2}{\tau_{cH}^g - \tau_{cH}^{0g}} \left( \frac{a_{(g)h}}{L^{(h)}} - ya_{(g)l} \rho_H^l A_{HS}^{(l)h} \right) \quad (IV.39),$$

$$H_{HH}^{gh} = - \frac{b\mu^2}{\tau_{cH}^g - \tau_{cH}^{0g}} ya_{(g)l} \rho_H^l A_{HH}^{(l)h} \quad (IV.40),$$

$$H_{SS}^{gh} = \frac{\alpha_{SS}}{\tau_{cS}^g - \tau_{cS}^{0g}} a_{(g)h} \quad (IV.41),$$

$$H_{SH}^{gh} = 0 \quad (IV.42),$$

ici les indices entre parenthèses ne sont pas sommés.

- $b$  : désigne le module du vecteur de burgers.
- $\mu$  : représente le module de cisaillement du matériau.
- $Lg$  : est le libre parcours moyen des dislocations dans les cellules sur le système  $g$ .
- $\tau_{c\alpha}^{0g}$  : définit la cission critique initiale dans la phase  $\alpha$  ( $\alpha=H, S$ ) avant plastification sur le système  $g$ .
- $a_{(g)h}$  : est la matrice décrivant l'anisotropie des interactions entre les systèmes de glissement et est définie sur les concepts d'écrouissage latent et d'auto-écrouissage [FBZ80].
- $\rho_{\alpha}^l$  : décrit la densité de dislocations dans la phase  $\alpha$  ( $\alpha=H, S$ ) sur le système  $g$ .
- $y$  : détermine la distance caractéristique d'annihilation des dislocations.

$A_{HH}^{gh}$ : traduit l'influence locale du système h sur l'annihilation des dislocations appartenant au système g de la zone H.

$A_{HS}^{gh}$  : désigne l'aspect non local de l'annihilation des dislocations de la zone H.

Les relations (IV.39) et (IV.40) sont déduites d'une part d'un phénomène non local d'augmentation [PA84, NGH85] de densité de dislocations dans la phase dure et d'autre part d'un phénomène local ou non local d'annihilation des dislocations [M94]. Le phénomène d'augmentation se fonde sur une description du dépôt de dislocations produites et mobiles à l'intérieur des cellules dans les parois par l'équation dans le cas de cellules fermées [M88] :

$$d\rho_H^{g+} = \frac{2}{bL(g)} \dot{\gamma}_S^g \quad (\text{IV.43}),$$

où  $d\rho_H^{g+}$  désigne l'augmentation de densité de dislocations dans les parois. Ce phénomène se fonde également sur la loi de Taylor :

$$\tau_c = \mu b \sqrt{\rho} \quad (\text{IV.44}),$$

généralisée au cas anisotrope correspondant au glissement multiple

$$\tau_c^g = \tau_c^{0g} + \mu b \sqrt{a_{gh} \rho^h} \quad (\text{IV.45}).$$

Le phénomène d'annihilation des dislocations provient de la généralisation d'une description scalaire [EM79] :

$$d\rho^- = -\frac{2y}{b} \rho \dot{\gamma} \quad (\text{IV.46}),$$

à celle du glissement multiple et en tenant compte de l'origine des dislocations produisant l'annihilation (soit des parois  $\dot{\gamma}_H^h$ , soit de la phase molle  $\dot{\gamma}_S^h$ ) [M94] :

$$d\rho_H^g = -\frac{2\gamma}{b}\rho_H^g \left( A_{HS}^{(g)h} \dot{\gamma}_S^h + A_{HH}^{(g)h} \dot{\gamma}_H^h \right) \quad (\text{IV.47}).$$

Les relations (IV.41) et (IV.42) ont été choisies de manière phénoménologique pour décrire la situation suivante :

- $H_{SS}$ , une valeur faible (constante ou saturante) traduit la faible augmentation de la densité de dislocations dans la phase molle S.
- $H_{SH}$ , une valeur nulle, décrit la non crédibilité des effets non locaux de la phase dure H sur la phase molle S.

#### IV.3.2 - Evolution de la microstructure intragranulaire

La microstructure intragranulaire des dislocations correspond avant tout pour les métaux cristallins à une structure cellulaire (cf. chapitre II). Cette structure définit deux zones. L'une possédant une faible densité de dislocation représente l'intérieur des cellules et l'autre de forte densité de dislocations correspond aux parois. La figure IV.2 schématise grossièrement une cellule de dislocations formée par un glissement d'une boucle de dislocations dans les cellules pour se bloquer dans les parois.

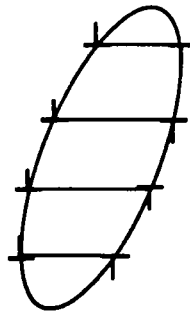


Fig.IV.2: Cellule de dislocations

Dans le chapitre III, on a simplifié le mouvement des parois ( $w_\alpha n_\alpha$ ) considérées comme une surface de discontinuité non stationnaire, par l'évolution des paramètres de forme ( $a_i$  : demi-axes de l'ellipsoïde) et d'orientation ( $\alpha_i$  : angles d'Euler du repère de l'ellipsoïde par rapport au cristal) regroupés dans le tenseur  $A_{ij}$  et dans la fraction volumique des cellules  $f$ . Avant de rechercher les forces critiques sur  $f$  et  $A$ , il convient



d'analyser le côté "cinématique" de la force motrice c'est-à-dire l'effet de la microstructure sur l'énergie libre (élastique)  $\mathcal{W}$ .

En effet les relations (IV.6 à IV.9) montrent clairement deux types de couplages lorsqu'on analyse la contribution respective de la variable pilote  $\Sigma$  et des contraintes internes.

- Le chargement extérieur ( $\Sigma$ ) agit sur  $\gamma_S$ ,  $\gamma_H$  et  $f$  mais pas sur  $A$ .
- La force sur  $f$  provient du chargement extérieur  $\Sigma$  et des contraintes internes regroupant la contribution de  $f$ ,  $\Delta\gamma$  et  $S^1(A)$ .
- La force sur  $A$  ne fait intervenir que les variables internes  $f$ ,  $\Delta\gamma$  et  $S^2(A)$ .

On retrouve d'ailleurs ce résultat dans la relation liant la déformation macroscopique  $E^P$  aux variables internes où la contribution de  $A$  n'apparaît pas (cf. tableau IV.1). Indépendamment des forces critiques sur  $A$ , ceci nous amène à analyser l'énergie interne en fonction des seules variables internes contenues dans  $A$ .

*a) Influence des paramètres de la microstructure sur l'énergie interne*

Pour le modèle simplifié des deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques et d'un matériau biphasé représentant la microstructure cellulaire de dislocations, l'énergie élastique par unité de volume (énergie libre d'Helmholtz) est définie par la relation (III.159) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{W}}{V} \left( E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A \right) = & \frac{1}{2} \left( E_{ij} - E_{ij}^P \right) C_{ijkl} \left( E_{kl} - E_{kl}^P \right) \\ & + \frac{1}{2} f(1-f) \left( \epsilon_{ij}^{PS} - \epsilon_{ij}^{PH} \right) C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1(A) \right) \left( \epsilon_{mn}^{PS} - \epsilon_{mn}^{PH} \right) \end{aligned} \quad (III.159),$$

De cette équation (III.159), on remarque deux contributions, l'une provenant des conditions appliquées à la frontière extérieure du volume

étudié (le grain). L'autre obtenue à partir des contraintes internes sur l'énergie élastique. Seule la deuxième contribution appelée énergie élastique interne  $\mathcal{W}^I$  est étudiée dans la suite du paragraphe :

$$\mathcal{W}^I = \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1(A) \right) \Delta \epsilon_{mn}^P \quad (\text{IV.48}).$$

Pour permettre l'observation de l'influence des paramètres de la microstructure sur cette énergie élastique interne  $\mathcal{W}^I$ , on suppose que la déformation plastique dans la cellule se réduit seulement à un système de glissement plastique d'amplitude  $\gamma$ , de direction  $m_i$  et de normale  $n_i$  de plan de glissement. La déformation plastique dans les parois est supposée nulle. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon_{ij}^{PH} = 0 \\ \Delta \epsilon_{ij}^P = \epsilon_{ij}^{PS} = \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i) \gamma = R_{ij} \gamma \end{cases} \quad (\text{IV.49}),$$

et l'énergie élastique interne devient :

$$\mathcal{W}^I = \frac{1}{2} f(1-f) \gamma^2 R_{ij} C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn}^1(A) \right) R_{mn} \quad (\text{IV.50}).$$

On simplifie également la forme de l'ellipsoïde en prenant la forme d'une pièce de monnaie ("penny-shape") ( $a_1=a_2 \gg a_3$ ), ce qui ramène l'exemple à une description plane où seulement deux variables morphologiques interviennent (cf Figure IV.3).

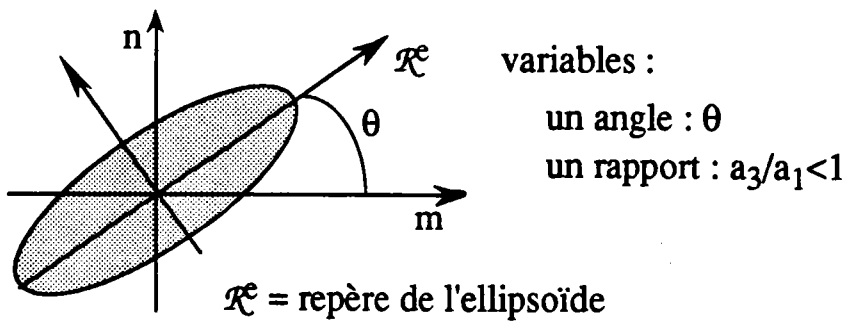


Fig IV.3: Description plane de l'exemple

Par une méthode d'invariant [R95] permettant un découplage des variables de forme (demi-axes) et des variables d'orientation de l'ellipsoïde (angles) dans l'énergie élastique interne  $\mathcal{W}^I$ , on a obtenu les trois courbes suivantes (cf. figure IV.4) (selon trois rapports  $a_3/a_1$ ) pour un matériau isotrope ( $\mu=80\ 000\text{MPa}$ ,  $\nu=0,3$ ) de fraction volumique  $f$  des cellules égale à 0,8 et pour une amplitude de glissement  $\gamma$  de 10%. Ces courbes donnent l'énergie élastique interne  $\mathcal{W}^I$  en fonction de l'angle  $\theta$  déterminant l'orientation du repère de l'ellipsoïde avec le repère du système de glissement ( $m_i, n_i$ ).

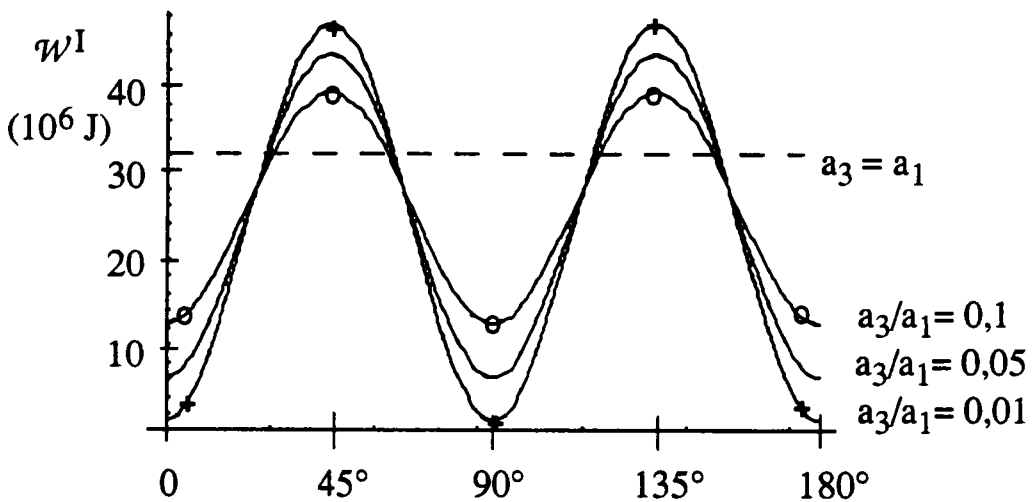


Fig.IV.4 : Courbes de l'énergie élastique interne obtenue [R95]

Lorsque la microstructure est "isotrope" (inclusions sphériques) on retrouve évidemment une énergie indépendante de  $\theta$  mais d'un niveau important. Par contre, si on laisse aux dislocations la possibilité de s'organiser dans l'espace selon une configuration contrainte sous forme d'ellipsoïde, on constate que certaines configurations sont favorables par rapport à d'autres.

- Le rapport de forme doit être le plus proche de 0.
- L'orientation de l'ellipsoïde correspond aux axes du système de glissement, ce qui conforte l'idée que les parois sont reliées aux systèmes de glissement actifs.

Cependant, cette analyse se complique dans le cas d'un glissement multiple. La différence d'énergie entre les configurations extrêmes est considérable, ce qui nous autorisera, dans un premier temps

(cf. chapitre V), à poser que la configuration morphologique sera celle qui minimise l'énergie libre. De la figure IV.5, on remarque également que les structures à faible énergie sont celles correspondant à une structure dipolaire de dislocations ainsi que cela a été observé au MET.

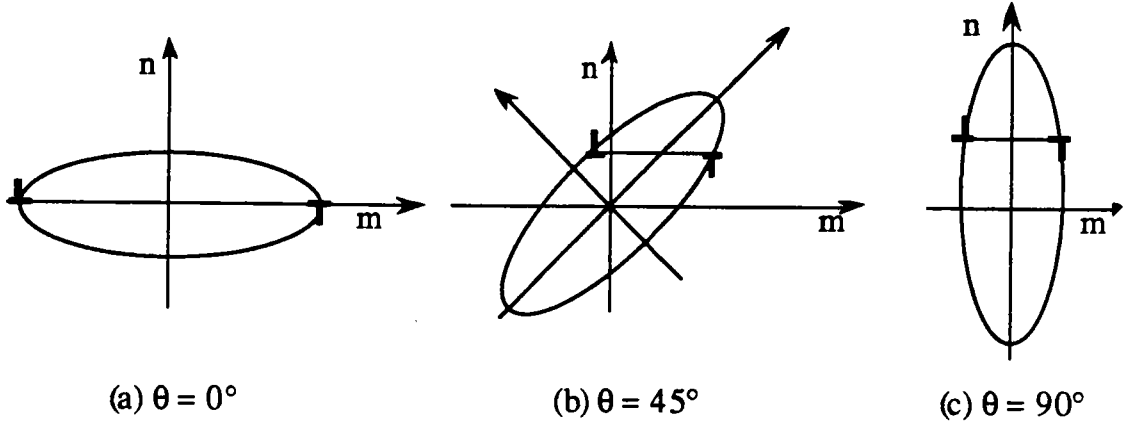


Fig IV.5: Description des positions des extrêmes des courbes de l'énergie élastique interne

On constate que dans la relation (IV.50) la direction  $m_i$  et la normale  $n_i$  du plan de glissement jouent le même rôle, d'où la conséquence que les courbes (cf figure IV.4) possèdent une période de  $90^\circ$  et une symétrie par rapport à l'angle  $\theta=45^\circ$ .

#### *b) Extension formelle au cas où la microstructure est contrainte*

Dans la partie précédente, on a montré l'influence des paramètres de morphologie sur l'énergie élastique. Même si l'énergie élastique joue un rôle sans doute décisif sur la microstructure, on peut cependant penser que les enchevêtrements des dislocations des parois permettant une optimisation énergétique de la microstructure nécessite une force motrice suffisante pour atteindre la force critique correspondants. On introduit classiquement pour les variables internes décrivant la microstructure, la formulation simple définissant la force critique  $F_i^c$  comme le produit d'une matrice d'interaction  $H$  et des variables internes  $X_i$  :

$$F_i^c = F_i^{c0} + H^{ij}X_j \quad (\text{IV.51}).$$

De cette relation (IV.51), on obtient l'évolution des forces critiques sous la forme simple de :

$$\dot{F}_i^c = H^{ij} \dot{X}_j \quad (IV.52).$$

La dérivée partielle des forces critiques par rapport aux variables internes égale à :

$$\frac{\partial F_i^c}{\partial X_j} = H^{ij} \quad (IV.53),$$

qui est introduite dans la relation (IV.22), permet de déterminer la loi de comportement du grain (IV.25).

Il reste maintenant à exprimer cette matrice d'interaction  $H^{ij}$  de l'équation (IV.52) et la valeur initiale  $F_i^{c0}$  des forces critiques  $F_i^c$  de la relation (IV.51) de ces variables internes  $X_i$  de morphologie (fraction volumique  $f$ , demi-axes  $a_i$  et angles d'orientation  $\alpha_i$  de l'ellipsoïde). La détermination de cette matrice  $H$  et de la force critique initiale  $F_i^{c0}$  n'est pas abordée dans ce présent travail, mais définit le sujet de la thèse d'I. Régnier qui explicitera ces paramètres par une démarche fondée sur des concepts de dislocations.

Pour les résultats numériques de cette thèse, le premier paragraphe du chapitre suivant V donne une première approche de manière phénoménologique de cette matrice d'interaction pour certain type de trajet de déformation.

#### **IV.4 - Conclusion**

Comme on l'a vu dans ce chapitre, la détermination de la loi de comportement global du cristal (IV.25) à partir de la dissipation  $\mathcal{D}$  (III.150) dans le cas d'une représentation de la microstructure cellulaire de dislocations, s'effectue par l'intermédiaire de forces critiques  $F_i^c$  pour chacune des variables internes  $X_j$ . Les hypothèses du paragraphe IV.3

permettent l'écriture de l'évolution des forces critiques d'une manière simplifiée :

$$\dot{F}_i^c = \mathcal{H}^{ij} \dot{X}_j \quad (\text{IV.54}),$$

où  $\dot{X}_j$  définit l'évolution des variables internes  $X_j$  qui sont :

- les amplitudes de glissement de chaque phase ( $\gamma^S$  et  $\gamma^H$ ),
- la fraction volumique des cellules ( $f$ ),
- les paramètres de l'ellipsoïde ( $a_i$  et  $\alpha_i$ ).

$\mathcal{H}^{ij}$  décrit la matrice d'interaction ou d'écrouissage entre les différentes variables internes  $X_i$ . De la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{F}_{\gamma_S}^c \\ \dot{F}_{\gamma_H}^c \\ \dot{F}_f^c \\ \dot{F}_{a_i}^c \\ \dot{F}_{\alpha_i}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{SS}^{ij} & \mathcal{H}_{SH}^{ij} & \mathcal{H}_{Sf}^{ij} & \mathcal{H}_{Sa}^{ij} & \mathcal{H}_{S\alpha}^{ij} \\ \mathcal{H}_{HS}^{ij} & \mathcal{H}_{HH}^{ij} & \mathcal{H}_{Hf}^{ij} & \mathcal{H}_{Ha}^{ij} & \mathcal{H}_{H\alpha}^{ij} \\ \mathcal{H}_{fS}^{ij} & \mathcal{H}_{fH}^{ij} & \mathcal{H}_{ff}^{ij} & \mathcal{H}_{fa}^{ij} & \mathcal{H}_{f\alpha}^{ij} \\ \mathcal{H}_{aS}^{ij} & \mathcal{H}_{aH}^{ij} & \mathcal{H}_{af}^{ij} & \mathcal{H}_{aa}^{ij} & \mathcal{H}_{a\alpha}^{ij} \\ \mathcal{H}_{\alpha S}^{ij} & \mathcal{H}_{\alpha H}^{ij} & \mathcal{H}_{\alpha f}^{ij} & \mathcal{H}_{\alpha a}^{ij} & \mathcal{H}_{\alpha\alpha}^{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_S^j \\ \dot{\gamma}_H^j \\ \dot{f} \\ \dot{a}_j \\ \dot{\alpha}_i \end{pmatrix} \quad (\text{IV.55}),$$

on peut définir les différents types de matrice d'interaction  $\mathcal{H}$ .

Comme on peut remarquer dans les forces thermodynamiques  $F_{\gamma_S}^i$  et  $F_{\gamma_H}^i$  sur les amplitudes de glissement  $\gamma_S$  et  $\gamma_H$  de chaque phase (IV.6 et IV.7), ces dernières sont égales aux cissions résolues ( $\tau_S$  et  $\tau_H$ ) multipliées par la fraction volumique de la phase concernée :

$$F_{\gamma_S}^g = f R_{ij}^g \sigma_{ij}^S = f \tau_S^g \quad (\text{IV.56}),$$

$$F_{\gamma_H}^g = (1-f) R_{ij}^g \sigma_{ij}^H = (1-f) \tau_H^g \quad (\text{IV.57}).$$

De la même manière, les composantes de la matrice d'interaction  $\mathcal{H}$  entre les différents systèmes de glissement des phases dure (H) et molle

(S) ( $\mathcal{H}_{SS}$ ,  $\mathcal{H}_{SH}$ ,  $\mathcal{H}_{HS}$ ,  $\mathcal{H}_{HH}$ ) peuvent être reliées à celles de la matrice d'écrouissage  $H$  non locale décrite dans le paragraphe IV.3.1.b par les équations (IV.39 à IV.42), à l'aide des fractions volumiques des phases :

$$\mathcal{H}_{HS}^{gh} = (1 - f) H_{HS}^{gh} \quad (\text{IV.58}),$$

$$\mathcal{H}_{HH}^{gh} = (1 - f) H_{HH}^{gh} \quad (\text{IV.59}),$$

$$\mathcal{H}_{SS}^{gh} = f H_{SS}^{gh} \quad (\text{IV.60}),$$

$$\mathcal{H}_{SH}^{gh} = f H_{SH}^{gh} \quad (\text{IV.61}).$$

Le tableau IV.2 regroupe les autres composantes de la matrices  $\mathcal{H}$  selon les types d'interactions.

| type d'interaction   | composantes de la matrice $\mathcal{H}$  |
|--|--|
| auto-interaction   | $\mathcal{H}_{ff}, \mathcal{H}_{aa}, \mathcal{H}_{\alpha\alpha}$   |
| interactions entre les variables de la microstructure              | $\mathcal{H}_{fa}, \mathcal{H}_{af}, \mathcal{H}_{f\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha f}, \mathcal{H}_{a\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha a}$   |
| interactions entre la microstructure et les glissements plastiques | $\mathcal{H}_{Sf}, \mathcal{H}_{fS}, \mathcal{H}_{Hf}, \mathcal{H}_{fH}, \mathcal{H}_{Sa}, \mathcal{H}_{aS}, \mathcal{H}_{Ha}, \mathcal{H}_{aH}, \mathcal{H}_{S\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha S}, \mathcal{H}_{H\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha H}$ |

Tab.IV.2 : classement des composantes de la matrice  $\mathcal{H}$  selon le type d'interactions.

La détermination des termes de cette matrice ne peut se faire sans l'apport de la physique des dislocations. Cette tâche est nécessaire pour cerner le problème de la formation et de l'évolution de la microstructure de dislocations et pour déduire leurs conséquences sur le comportement du grain et du polycristal. Cependant, on peut déjà tirer quelques conclusions de la présente étude en adoptant des hypothèses restrictives, simplificatrices mais fondées sur des considérations physiques. Ceci fait l'objet du chapitre V.

## **Références bibliographiques**

- [EM79] ESSMANN U., MUGHRABI H., Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities, 1979, Phil. Mag. A, Vol.40, pp(735-756)
- [F83] FRANCIOSI P., Glide mechanisms in b.c.c. crystals: an investigation of the case  $\alpha$ -iron through multislip and latent hardening tests, 1983, Acta Met., Vol.31, N°9, pp(1331-1342)
- [F84] FRANCIOSI P., Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement: modélisation pour un chargement complexe quasi statique, 1984, Thèse de l'université de Paris-Nord
- [FBZ80] FRANCIOSI P., BERVEILLER M., ZAOUI A., Latent hardening in copper and aluminium single crystal, 1980, Acta Met., Vol.28, pp(273-283)
- [L93] LIPINSKI P., Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies, à partir des méthodes de transition d'échelles, 1993, Thèse d'habilitation de l'Université de Metz.
- [LB89] LIPINSKI P., BERVEILLER M., Elastoplasticity of microinhomogeneous metals at large strains, 1989, Int. J. of Plast., Vol.5, pp(149-172)
- [LBRM95] LIPINSKI P., BERVEILLER M., REUBREZ E., MORREALE J., Transition theories of elastic-plastic deformation of metallic polycrystals, 1995, Arch. of Applied Mechanics, Vol.95, pp(291-311)
- [LKB90] LIPINSKI P., KRIER J., BERVEILLER M., Elastoplasticité des métaux en grandes déformations: comportement global et évolution de la structure interne, 1990, Rev. Phys. Appl., Vol.25, pp(361-388)



- [M88] MUGHRABI H., Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals, 1988, *Revue Phys. Appl.*, Vol.23, pp(367-379)
- [M94] MULLER D., Influence de l'écrouissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins, 1994, Thèse, Université de Metz.
- [MKB92] MULLER D., KRATOCHVIL J., BERVEILLER M., Non-local hardennings in metals, 1992, In "Modelling of plastic deformation and its engineering applications", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, N. HANSEN, D. JUUL JENSEN, T. LEFFERS, H. LILHOLT, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, B. RALPH, 13th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(367-372)
- [MKB93] MULLER D., KRATOCHVIL J., BERVEILLER M., Effets des écrouissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse en traction-compression et sur les contraintes internes, 1993, *C. R. Acad. Sci.*, Vol.316, pp(435-440)
- [MLB94] MULLER D., LEMOINE X., BERVEILLER M., Nonlocal behavior of elastoplastic metals : theory and results, 1994, *Trans. of the ASME*, Vol.116, pp(378-383)
- [MLBK94] MULLER D., LEMOINE X., BERVEILLER M., KRATOCHVIL J., Non-local behavior of metals, 1994, *Solid State Phenomena*, Vol.35-36, pp(393-398)
- [NGH85] NIX W.D., GIBELING J.C., HUGUES D.A., Time-dependent deformation of metals, *Met. Trans. A*, vol 16A, pp(1985-2215)
- [PA84] PRINZ F.B., ARGON A.S., The evolution of plastic resistance in large strain plastic flow of single phase subgrain forming metals, 1984, *Acta Met.*, Vol.32, N°7, pp(1021-1028)
- [R95] REGNIER I., communication interne

# CHAPITRE V :

## Modélisation simplifiée et applications numériques

|   |             |
|---|-------------|
| <b>V.1 - Hypothèses simplificatrices</b>                            | <i>p124</i> |
| V.1.1 - <u>Hypothèse sur la Fraction volumique</u>                  | <i>p124</i> |
| V.1.2 - <u>Hypothèses sur les Caractéristiques morphologiques</u>   | <i>p125</i> |
| V.1.3 - <u>Hypothèse sur le glissement plastique</u>                | <i>p126</i> |
| <b>V.2 - Résultats comparés avec des modèles précédents</b>         | <i>p126</i> |
| V.2.1 - <u>Données initiales</u>                                    | <i>p127</i> |
| V.2.2 - <u>Réponse élastoplastique</u>                              | <i>p127</i> |
| V.2.3 - <u>Texture cristallographique et anisotropie plastique</u>  | <i>p132</i> |
| <b>V.3 - Résultats concernant la microstructure intragranulaire</b> | <i>p135</i> |
| V.3.1 - <u>Traction uniaxiale</u>                                   | <i>p135</i> |
| V.3.2 - <u>Effet de certains paramètres</u>                         | <i>p140</i> |
| V.3.3 - <u>Autres trajets</u>                                       | <i>p140</i> |
| <b>V.4 - Discussion</b>   | <i>p147</i> |

## **CHAPITRE V :**

### **Modélisation simplifiée et applications numériques**

Face à la complexité des lois complémentaires et à la difficulté d'établir les lois d'évolutions à partir des mécanismes physiques, le problème de la formation des cellules est traité numériquement dans ce chapitre à partir d'hypothèses simplificatrices décrites dans le paragraphe V.1. On présente des résultats originaux dans les paragraphes V.2 et V.3, résultats qui sont discutés et comparés avec ceux obtenus par une modélisation autocohérente classique ou évoluée (la structure cellulaire est fixée *a priori*).

#### **V.1 - Hypothèses simplificatrices**

##### **V.1.1 - Hypothèse sur la fraction volumique**

Si on analyse les micrographies obtenues par microscopie électronique à transmission [FS83, S86] en évaluant l'épaisseur des parois et celle des cellules, on constate qu'après quelques pourcents de déformation plastique ( $\approx 3\%$ ), la fraction volumique de cellules reste pratiquement constante, tout au moins pour un trajet monotone. Lors de chargements séquentiels, cette observation n'est plus respectée : au début du second trajet, la microstructure induite par le premier trajet est progressivement dissoute et la nouvelle topologie caractéristique du second trajet se forme. Cet aspect du problème ne sera pas pris en compte par la suite.

En se limitant pour le moment, à des trajets monotones, il est donc raisonnable d'admettre que la fraction volumique de cellules est une donnée du matériau dépendant sans doute de l'énergie de faute d'empilement (CFC), et de la température. D'après les mesures de Schmitt [S86], on peut raisonnablement admettre que la fraction volumique  $f$  est environ égale à 0,8.

### V.1.2 - Hypothèses sur les caractéristiques morphologiques

La représentation de la microstructure cellulaire par un ellipsoïde enrobé constitue en soi une approximation, mais conduit à un bon compromis entre la finesse de la description et le temps de calcul. Dans le paragraphe IV.3.2, on a vu qu'indépendamment des forces critiques associées aux paramètres morphologiques ( $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ), ces paramètres constituent déjà un facteur important d'accommodation de l'énergie libre.

Par ailleurs, la détermination des forces critiques pour les variables étant difficile, une première approche consiste à admettre le concept de configuration de faible énergie introduite au sens de métallurgie physique (Lows Energy Dislocations Structure, LEDS) par D. Kuhlmann-Wilsdorf [K87, K89] et d'autres. Ceci revient à annuler la force motrice sur A, c'est-à-dire d'après (IV.9) à poser :

$$\frac{1}{2} f(1-f) R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 R_{mn}^h \Delta \gamma^h = 0 \quad (V.1).$$

Puisque  $f$  est constant, on a aussi :

$$R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 R_{mn}^h \Delta \gamma^h = 0 \quad (V.2).$$

On constate que, l'amplitude de la déformation n'apparaît qu'au travers de la combinaison des systèmes actifs. On s'attend donc à ce qu'une morphologie et une orientation stationnaires apparaissent lorsque l'activité (nombre, nature des systèmes de glissement et amplitude relative) plastique est stabilisée. Le calcul de  $S^2$  est effectué pour un milieu isotrope dans l'annexe B. Lorsque la déformation progresse, l'hypothèse précédente conduit à admettre une réactualisation instantannée de la microstructure. On peut alors trouver l'évolution des paramètres  $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  en différenciant l'équation (V.3), ce qui donne pour  $\dot{A}$  :

$$\begin{aligned} & R_{ij}^g \Delta \dot{\gamma}^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 R_{mn}^h \Delta \gamma^h + R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 R_{mn}^h \Delta \dot{\gamma}^h \\ & R_{ij}^g \Delta \gamma^g C_{ijkl} S_{klmnpqrs}^3 \dot{A}_{rs} R_{mn}^h \Delta \gamma^h = 0 \end{aligned} \quad (V.3),$$

où  $S_{klmnpqrs}^3 = \frac{\partial S_{klmnpq}^2}{\partial A_{rs}}$  est calculé dans l'annexe B.

La résolution des  $\dot{\gamma}$  en fonction du chargement imposé au grain se faisant par les méthodes classiques courantes en plasticité, on déduit de la relation (V.3) l'évolution de  $\dot{A}$  donc celle des variables décrivant la microstructure. Cette approche numérique lourde et complexe est actuellement simplifiée par l'introduction d'une représentation utilisant la théorie des invariants (Thèse d'I. Régnier).

### V.1.3 - Hypothèse sur le glissement plastique

Du fait des hypothèses restrictives précédentes sur la fraction volumique et les caractéristiques morphologiques, on choisit également comme première approche, de conserver les valeurs des matrices d'interaction ( $H_{SS}$ ,  $H_{SH}$ ,  $H_{HS}$ ,  $H_{HH}$ ) obtenues pour l'écrouissage non local avec une microstructure non évolutive des cellules de dislocations [M94]. Pour conserver un temps de calcul informatique raisonnable, on a supposé dans le cas d'un matériau de structure CC, que la déformation plastique se réduit à une seule famille de systèmes de glissement : la famille  $\langle 111 \rangle \{110\}$ , et ceci pour les deux phases, ce qui donne 2 fois 12 systèmes de glissement dans le grain.

## V.2 - Résultats comparés avec des modèles précédents

Dans les paragraphes V.2 et V.3, on présente des résultats obtenus par le modèle développé dans les chapitres précédents. Ces résultats concernent le comportement global  $\gamma$  compris sous l'angle de l'anisotropie plastique et l'évolution de la structure interne et de l'état mécanique des différentes "phases" (déformations, contraintes, morphologie). Il est clair que dans ce modèle, on est en présence de fluctuations microscopiques tant intergranulaires (les effets d'ordre 2 de la classification par l'analyse aux RX) qu'intragranulaires (effets d'ordre 3), ce qui implique une représentation adéquate des résultats.

Dans un premier temps (cf. paragraphe V.2), les grandeurs mécaniques sont moyennées sur chaque grain pour faire apparaître les fluctuations intergranulaires. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par une modélisation autocohérente classique où le grain est traité de manière uniforme. On s'attend normalement à des différences faibles, particulièrement pour les trajets monotones. Les résultats spécifiques concernant l'échelle intragranulaire seront présentés dans le paragraphe V.3. Auparavant, on présente les paramètres et conditions retenus pour le calcul et les significations des représentations choisies.

### V.2.1 - Données initiales

La structure polycristalline est représentée par 100 grains sphériques, dont les réseaux cristallins ont une orientation aléatoire. Dans le cas de la simulation de textures de déformation, un ensemble de 1000 grains a été utilisé. L'élasticité est supposée isotrope et homogène ( $\mu=80$  GPa,  $\nu=0,3$ ). Les systèmes de glissement choisis sont ceux des CC :  $\langle 111 \rangle \{110\}$ . Le tableau V.1 regroupe les autres paramètres numériques.

En général, les courbes décrivent la contrainte soit macroscopique soit moyennée sur l'ensemble des phases H et S en fonction des déformations plastiques correspondantes. Pour avoir une idée des fluctuations microscopiques (ordre 3) et mésoscopiques (ordre 2), on représente l'état mécanique local ( $\sigma$ ,  $\epsilon^p$ ) correspondant à l'échelle retenue pour un chargement macroscopique donné (généralement  $E^p=20\%$ ).

### V.2.2 - Réponse élastoplastique

La planche V.1 représente tout d'abord les résultats obtenus par un schéma autocohérent classique lors d'une traction uniaxiale selon l'axe 1.

La figure V.1.a reproduit la courbe de traction globale ainsi que les états mécaniques  $(\sigma_{11}, \epsilon_{11}^p)$  des 100 grains constituant le polycristal pour des déformations plastiques macroscopiques de 10% et de 20%. On observe que les contraintes locales fluctuent autour de la contrainte

| paramètres   | symboles                                     | valeurs                            |
|--|--|------------------------------------|
| cission critique initiale (la même pour tous les grains et les phases)   | $\tau_c^0$                                   | 65 MPa                             |
| vecteur de Burgers   | b  | 1 Å                                |
| libre parcours moyen des dislocations (le même pour tous les systèmes)   | L  | 6,4 µm                             |
| distance caractéristique d'annihilation des dislocations   | y  | 4,7 Å                              |
| (étant donné que les matrices $A_{HS}$ et $A_{HH}$ sont l'identité d'ordre 2)<br>coefficient d'annihilation de $H_{HH}$ (IV.40) et de $H_{HS}$ (IV.39) | $\alpha_{HH} = \alpha_{HS}^-$<br>$= yb\mu^2$ | $3 \cdot 10^{-10} \text{ (MPa)}^2$ |
| coefficient de création de $H_{HS}$ (IV.39)  | $\alpha_{HS}^+ = \frac{b\mu^2}{L}$           | $1 \cdot 10^5 \text{ (MPa)}^2$     |
| coefficient de $H_{HS}$ (IV.41)  | $\alpha_{SS}$                                | $900 \text{ (MPa)}^2$              |
| coefficient d'anisotropie  | $a = \frac{H^1}{H^2}$                        | 1,5                                |
| fraction volumique des cellules  | f  | 0,8                                |
| paramètres initiaux de forme de l'ellipsoïde   | a1   | 1                                  |
|  | a2   | 1,02                               |
|  | a3   | 0,98                               |
| paramètres initiaux d'orientation de l'ellipsoïde  | $\alpha_1$                                   | 17°                                |
|  | $\alpha_2$                                   | 5°                                 |
|  | $\alpha_3$                                   | 26°                                |

Tab.V.1 : Paramètres initiaux des calculs numériques

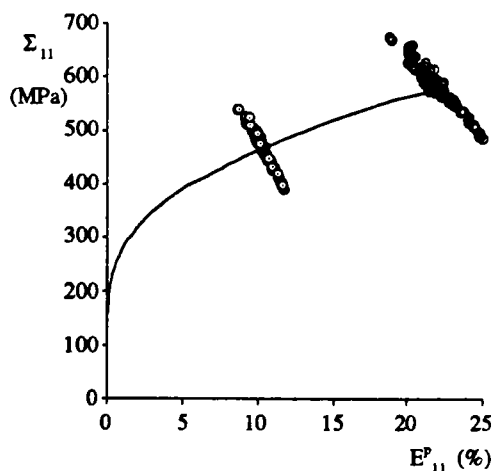


Fig.V.1.a : composante 11

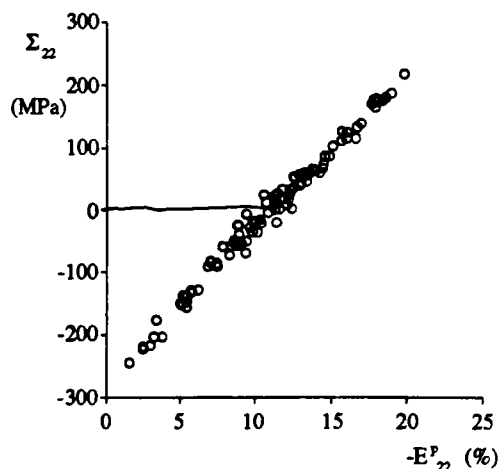


Fig.V.1.b : composante 22

### Légende :

- Réponse macroscopique du polycristal (ordre 1)
- état mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation plastique de 20%)
- ◐ état mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation plastique de 10%)

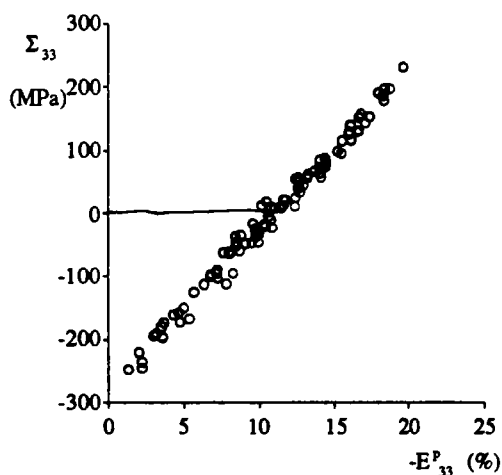


Fig.V.1.c : composante 33

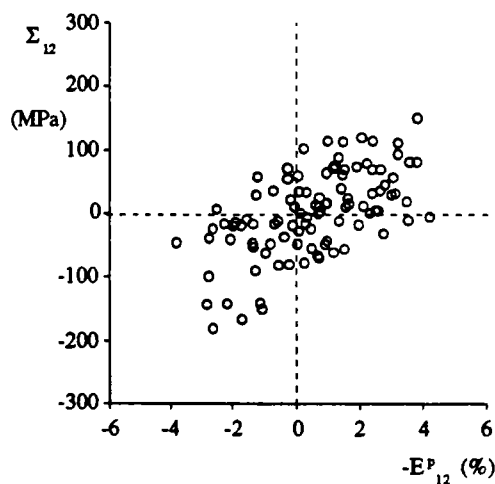


Fig.V.1.d : composante 12

**Planche V.1 : Réponse macroscopique d'un polycristal soumis à une traction uniaxiale selon l'axe 1, et état mécanique intergranulaire (ordre 2). Résultats obtenus par un schéma autocohérent classique**



macroscopique dans un intervalle que l'on peut estimer à  $\Sigma_{11} \pm \frac{\Sigma_{11}}{5}$ . Pour les déformations, les fluctuations sont dans l'intervalle de  $E_{11}^P \pm \frac{E_{11}^P}{10}$ . Pour les contraintes, ces fluctuations ont été validées par des mesures de RX [K92, M94] et correspondent bien à l'énergie stockée et à son évolution.

Pour les autres composantes, on retrouve bien les règles de moyenne :

$$\bar{\sigma}_{ij} = \Sigma_{ij} \text{ et } \bar{\epsilon}_{ij}^P = E_{ij}^P \quad (\text{V.4 et V.5}),$$

mais maintenant les fluctuations sont beaucoup plus importantes tant pour les contraintes que pour les déformations. Pour les composantes 22 et 33, on a les intervalles :

$$-\frac{\Sigma_{11}}{3} < \sigma_{22}, \sigma_{33} < \frac{\Sigma_{11}}{3} \quad (\text{V.6}),$$

et pour les déformations :

$$\frac{E_{11}^P}{2} - \frac{E_{11}^P}{2} \leq \epsilon_{22}^P, \epsilon_{33}^P \leq \frac{E_{11}^P}{2} + \frac{E_{11}^P}{2} \quad (\text{V.7}).$$

Pour les autres composantes 12 (et aussi 13 et 23), les fluctuations de  $\epsilon^P$  sont plus faibles que pour  $\epsilon_{22}^P$ , et pour les contraintes, on est dans une situation intermédiaire entre  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ .

Lorsqu'on prend en compte la microstructure intragranulaire des cellules de dislocations, on retrouve des courbes similaires aux précédentes (cf. planche V.2 et V.1) tant pour les réponses macroscopiques ( $\Sigma$ ,  $E^P$ ) que pour les états mécaniques ( $\sigma$ ,  $\epsilon^P$ ) des 100 grains à une déformation plastique macroscopique donnée (10% ou 20%), ainsi que pour les fluctuations de déformations ou de contraintes. Par contre, tout en conservant des fluctuations identiques, l'état de contrainte-déformation du second ordre pour la composante 12 apparaît plus concentré que celui

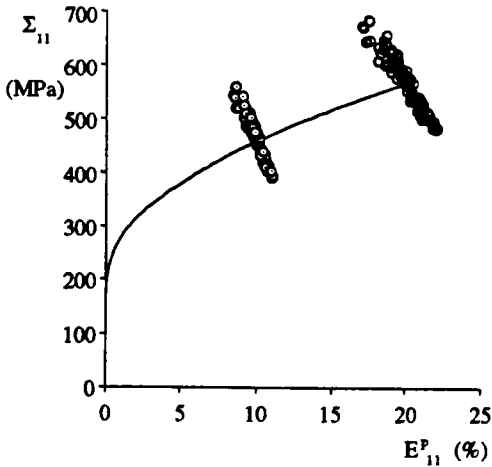


Fig.V.2.a : composante 11

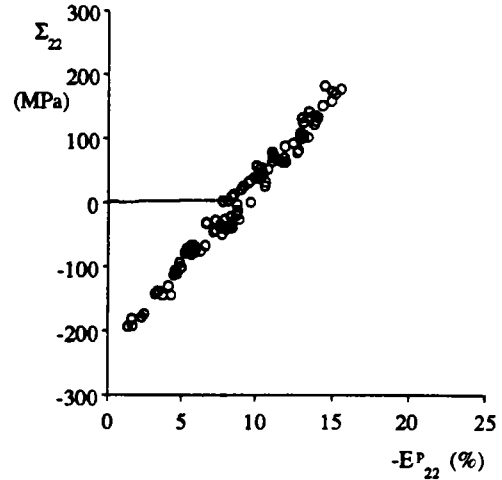


Fig.V.2.b : composante 22

Légende :

- Réponse macroscopique du polycristal (ordre 1)
- état mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation plastique de 20%)
- ⊙ état mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation plastique de 10%)

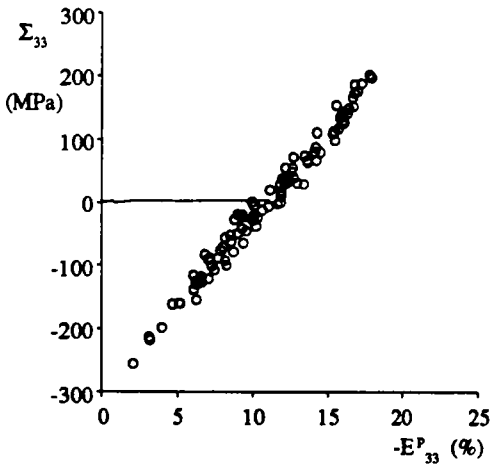


Fig.V.2.c : composante 33

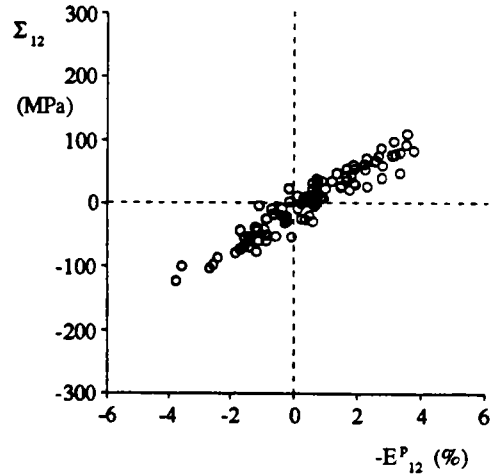


Fig.V.2.d : composante 12

**Planche V.2 : Réponse macroscopique d'un polycristal soumis à une traction uniaxiale selon l'axe 1, et état mécanique intergranulaire (ordre 2). Résultats obtenus par un schéma autocohérent classique avec prise en compte de la microstructure intragranulaire**

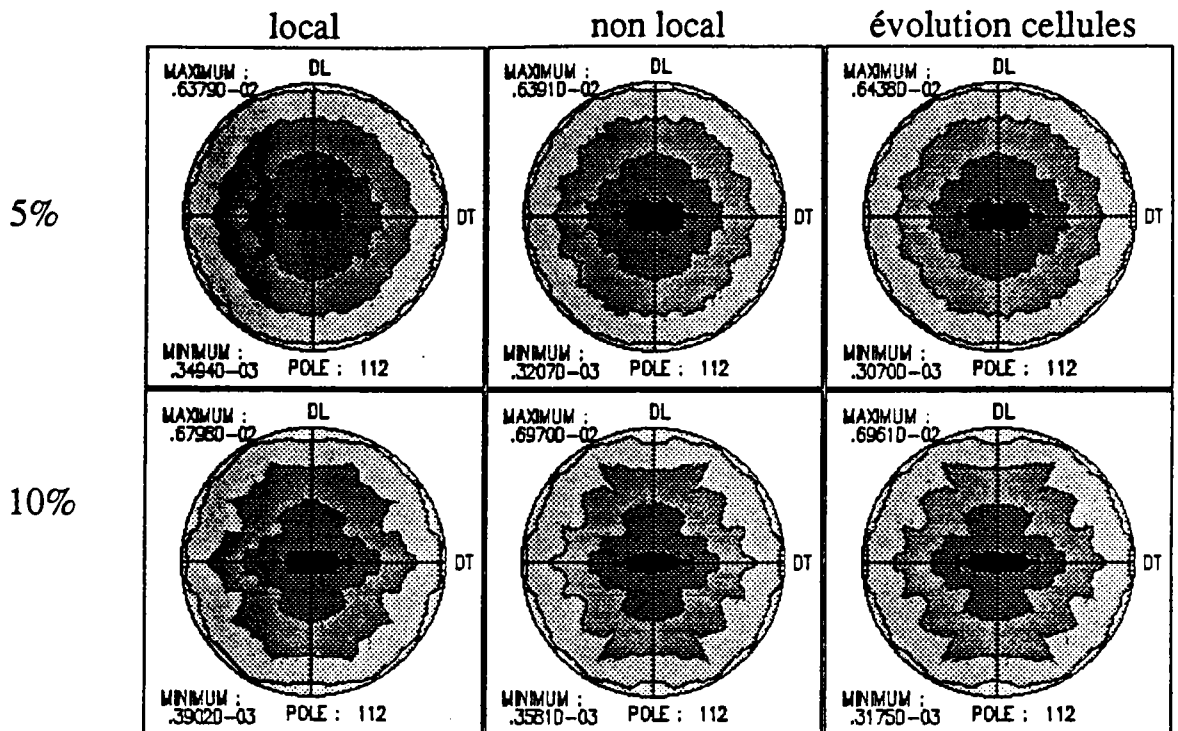


Fig.V.6 : comparaison de figures de pôle (112) des différents programmes

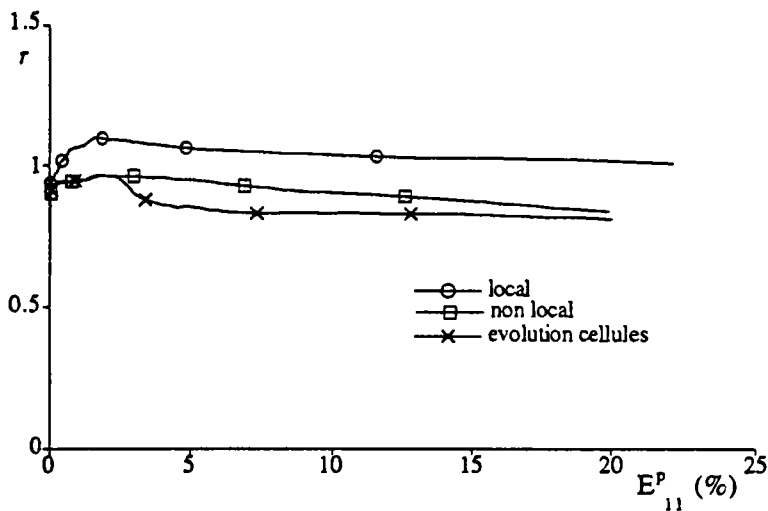


Fig.V.7 : coefficient de Lankford obtenu par trois modèles différents pour une texture initiale isotrope

Ces mêmes modèles (local, non local, avec évolution des cellules), ont été utilisés pour déterminer le coefficient d'anisotropie plastique (coefficient de Lankford  $r$ ) défini par :

obtenu par le modèle précédent (cf. figures V.2.d et V.1.d). On obtient une forme similaire aux composantes 22 et 33.

### V.2.3 - Texture cristallographique et anisotropie plastique

Les figures (V.3) à (V.6) représentent pour quatre pôles différents (200, 110, 111, 112) la texture cristallographique (1000 grains) correspondant à deux niveaux de déformation plastique ( $E^p=5\%$  et  $10\%$ ) obtenue lors d'un essai de traction uniaxiale selon l'axe 1, par l'intermédiaire de trois modèles. Le modèle appelé "local" correspond au schéma autocohérent élastoplastique classique. Le modèle "non local" tient compte de l'écrouissage non local mais pour une microstructure intragranulaire fixée a priori et constante. Le troisième modèle ("évolution cellule") correspond au problème décrit dans ce travail incluant donc l'écrouissage non local et une microstructure cellulaire évolutive. Les résultats sont semblables, indiquant comme attendu que les rotations sont uniformes à l'intérieur des grains et que l'activité moyenne des glissements sur les différents systèmes actifs est comparable d'un modèle à l'autre.

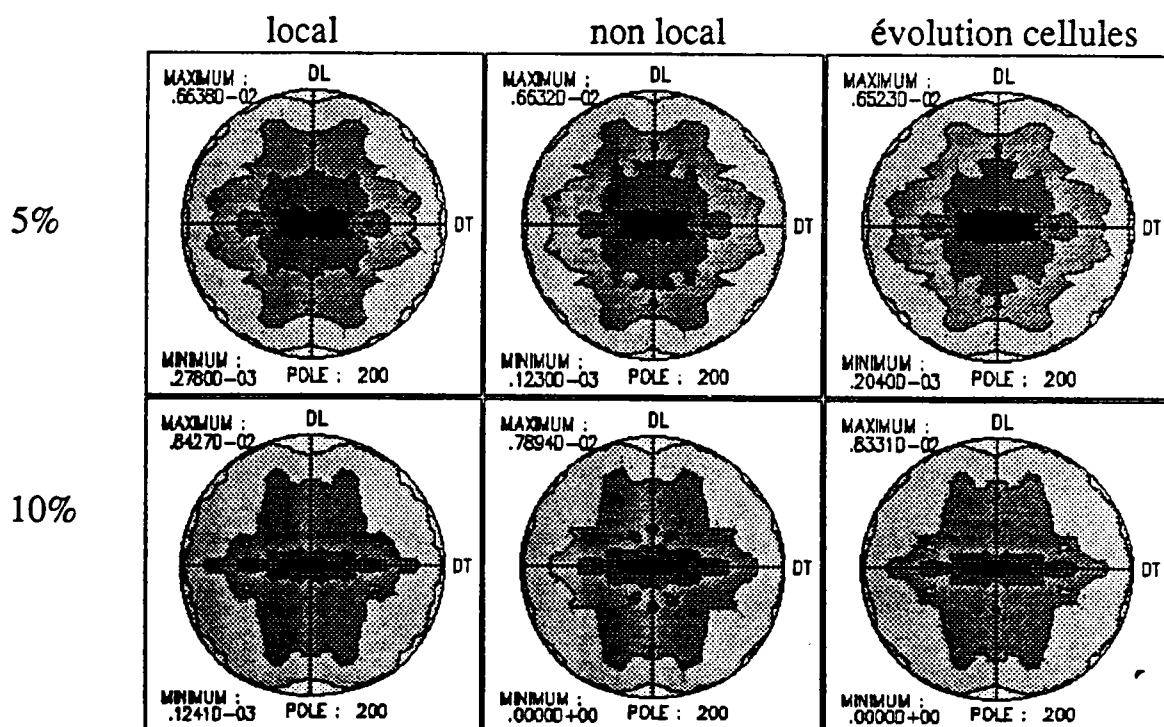


Fig.V.3 : comparaison de figures de pôle (200) des différents programmes

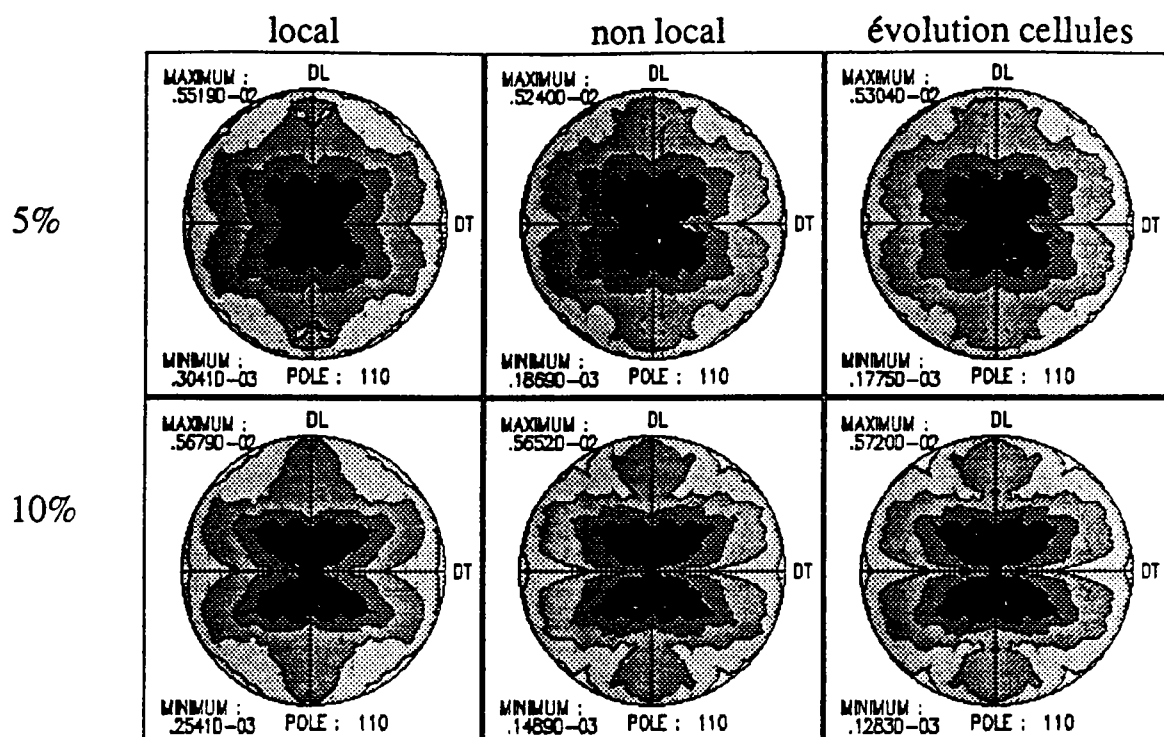


Fig.V.4 : comparaison de figures de pôle (110) des différents programmes

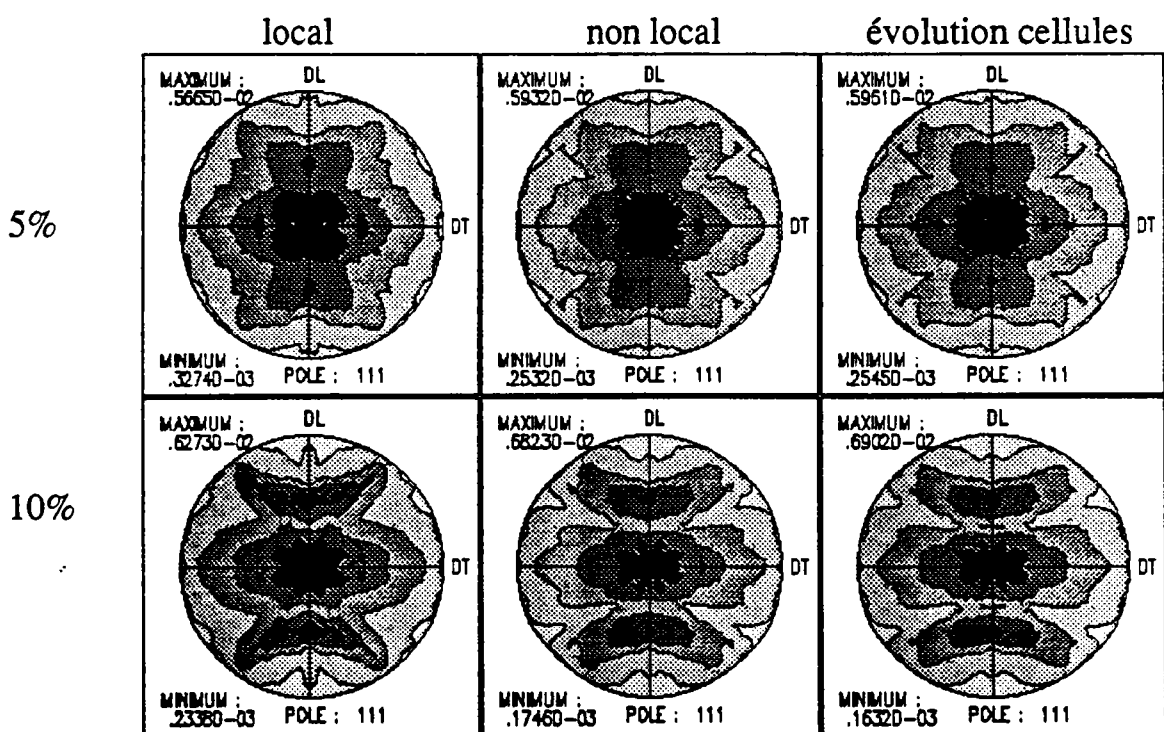


Fig.V.5 : comparaison de figures de pôle (111) des différents programmes

$$r = \frac{\varepsilon_{22}^p}{\varepsilon_{33}^p} \quad (V.3),$$

lors d'un essai de traction selon l'axe 1 (avec 100 grains). La texture initiale étant isotrope, on retrouve dans la figure V.7, un rapport proche de 1 pour les trois modèles. La différence entre le modèle "local" et les deux autres provient sans doute du fait que le "pencil glide" (glissement selon  $\langle 111 \rangle \{110\}$  et  $\langle 111 \rangle \{112\}$ ) a été pris en compte dans le modèle "local".

### V.3 - Résultats concernant la microstructure intragranulaire

Dans ce paragraphe, on s'attache à l'évolution des paramètres morphologiques décrivant la microstructure et des états mécaniques intragranulaires tout d'abord dans le cas d'un essai de traction uniaxiale selon l'axe 1 puis (cf. paragraphe V.3.3) pour d'autres trajets.

#### V.3.1 - Traction uniaxiale

Par rapport à la planche V.2, la prise en compte de la microstructure intragranulaire permet de faire apparaître en plus des fluctuations intergranulaires :

- l'évolution des contraintes et déformations plastiques moyennées sur le polycristal de chaque phase,
- et les états mécaniques locaux (dans chaque phase de chaque grain).

La planche V.8 représente de manière condensée les résultats de la planche V.2 auxquels on rajoute les résultats moyennés ou individualisés de chaque phase.

On observe une séparation nette des réponses des deux phases, la phase dure étant fortement durcie par rapport (et par) la phase molle. On atteint maintenant des niveaux de contraintes considérables dans la phase

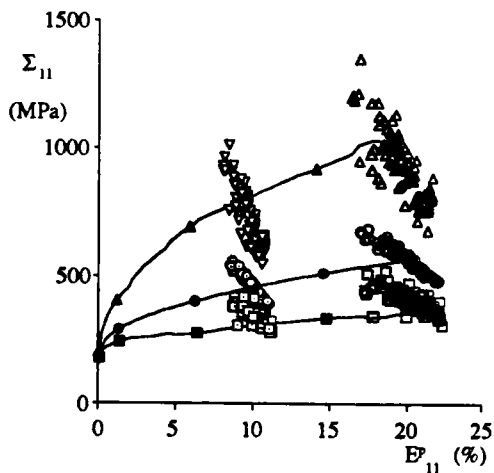


Fig.V.8.a : composante 11

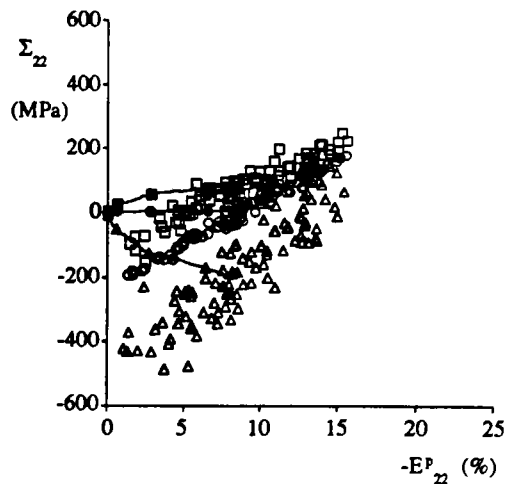


Fig.V.8.b : composante 22

### Légende :

—●— Réponse macroscopique polycristal (ordre 1)

Moyennes sur tout le polycristal :

—■— de la phase S —▲— de la phase H

Etat mécanique de chaque grain (ordre 2) :

○ (à une déformation de 20%)

◐ (à une déformation de 10%)

Etat mécanique de chaque phase dans chaque grain (ordre 3) :

phase H phase S

△ (à une déformation de 20%) □

▽ (à une déformation de 10%) ◐

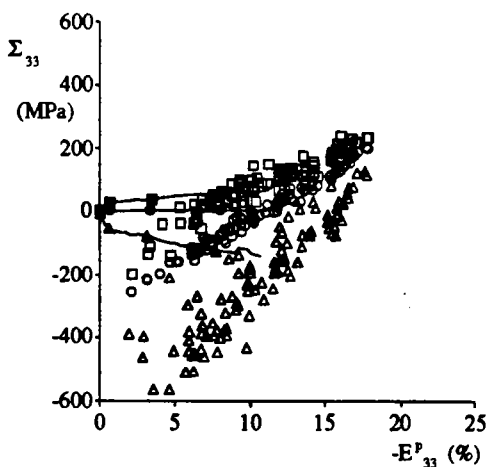


Fig.V.8.c : composante 33

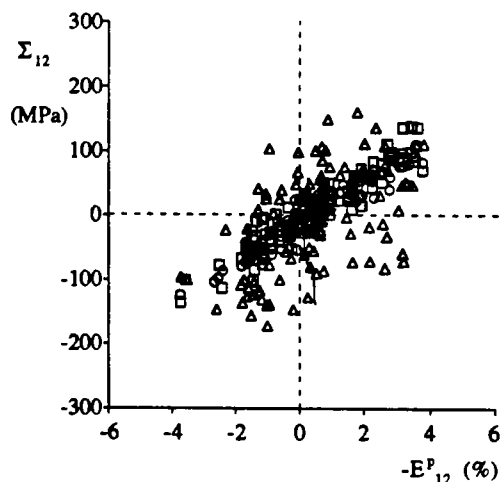


Fig.V.8.d : composante 12

**Planche V.8 : Aux résultats de la planche V.2, on rajoute les fluctuations intragranulaires et leurs moyennes sur tout le polycristal**

dure (1000 MPa par rapport à 500 MPa) en accord semi-quantitatif avec les mesures de Mughrabi [M88] qui donnent des contraintes dans la phase dure égales à 3 fois la limite d'écoulement. Par contre, si on compare les cisssions maximales (cf. paragraphe V.4), on retrouve un rapport de 2.6 entre la cisssion dans la phase dure et la cisssion maximale imposée au polycristal indépendamment du trajet de déformation.

Par contre, en ce qui concerne les déformations plastiques intragranulaires, les fluctuations restent comparables à celles que l'on a déterminées à l'échelle intergranulaire. Ce résultat est surprenant dans la mesure où on s'attend à une hétérogénéisation plastique assez sensible due notamment à l'écrouissage non local. On peut sans doute l'attribuer aux hypothèses simplificatrices adoptées pour les lois d'évolution.

La planche V.9 permet de suivre l'évolution moyenne des rapports des demi-axes des ellipsoïdes représentant la structure cellulaire (cf. figure V.9.a) en fonction de l'amplitude de la déformation de traction. En partant d'une morphologie proche d'une sphère, on trouve assez rapidement (vers  $E_P \approx 5\%$ ) une morphologie stable correspondant à une forme d'ellipsoïde de révolution dont les rapports extrêmes sont de l'ordre de 1,5.

Les figures V.9.b et V.9.c représentent les rapports des demi-axes des cellules dans les 100 grains pour une déformation plastique de 20%. On observe que si la moyenne se situe bien au voisinage de 1,5, certaines cellules présentent une ellipticité importante pouvant aller jusqu'à un facteur 20. Evidemment ces rapports de forme dépendent de l'orientation cristallographique des grains qui conditionne les systèmes de glissement actifs.

Pour un grain donné ( $\varphi_1=131^\circ$ ,  $\phi=48^\circ$  et  $\varphi_2=358^\circ$ ) les figures V.10 (a, b, c) représentent respectivement en fonction de la déformation macroscopique :

- l'évolution des rapports des demi-axes,
- l'évolution du nombre de systèmes actifs (pour tout le grain),
- l'évolution des trois angles d'Euler repérant l'ellipsoïde par rapport au cristal.



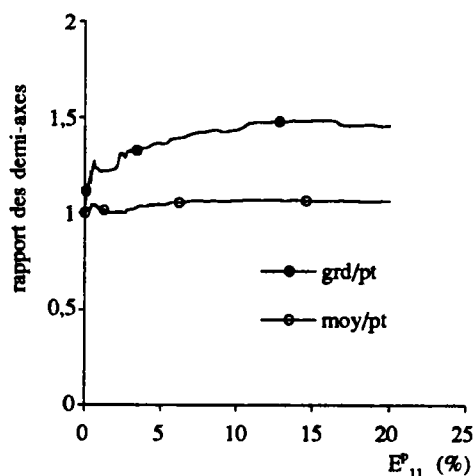


Fig.V.9.a : moyennes des rapports des demi-axes sur tout le polycristal

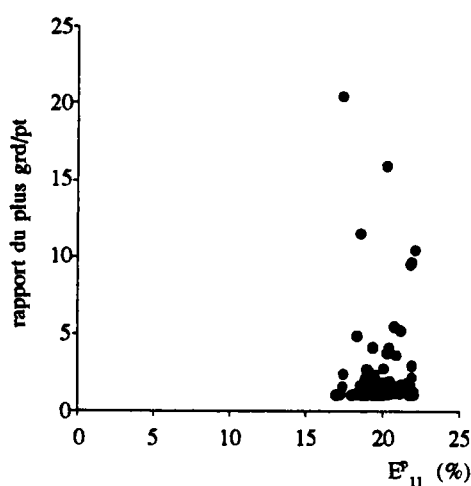


Fig.V.9.b : rapport du plus grand sur le plus petit demi-axe pour une déformation plastique macroscopique de 20%

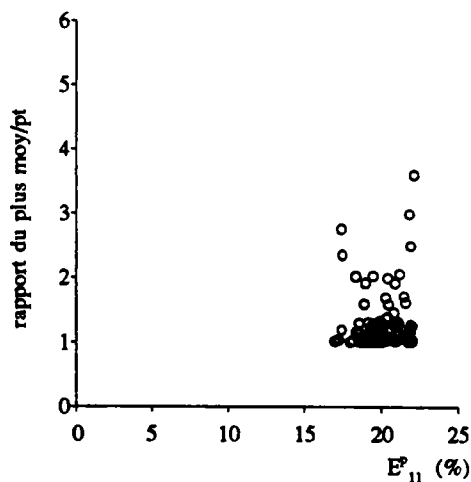


Fig.V.9.c : rapport du moyen sur le plus petit demi-axe pour une déformation plastique macroscopique de 20%

**Planche V.9 : Rapport des demi-axes de l'ellipsoïde dans chaque grain lors d'un essai de traction uniaxiale et leurs moyennes sur tout le polycristal**

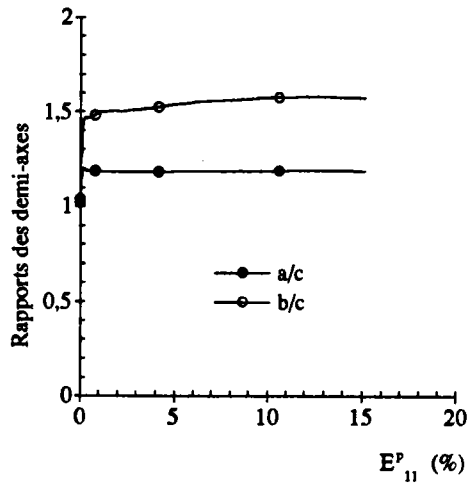


Fig.V.10.a : Rapports des demi-axes de l'ellipsoïde

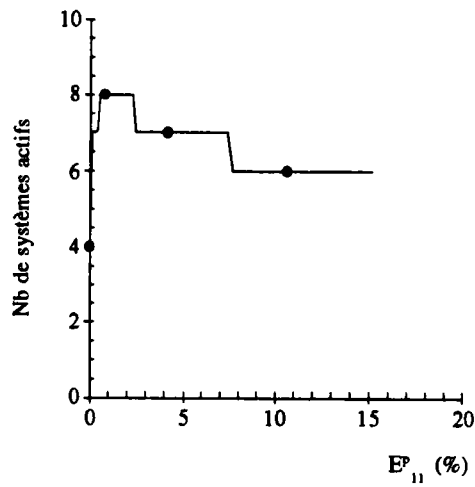


Fig.V.10.b : Nombre des systèmes actifs

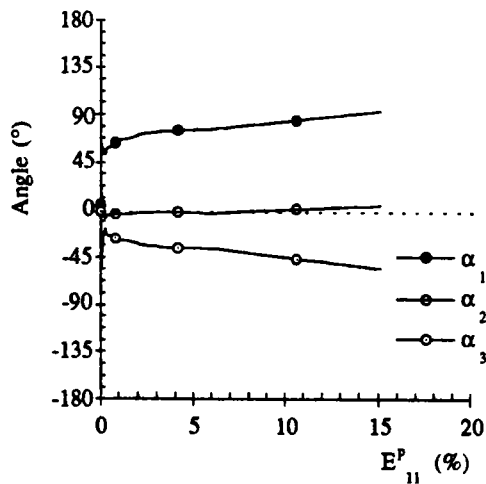


Fig.V.10.c : Angles d'Euler d'orientation de l'ellipsoïde

**Planche V.10 : Pour un grain donné, évolution des paramètres de forme et d'orientation de l'ellipsoïde représentant la cellule de dislocations**

On note des évolutions très rapides au début du chargement, liées à la mise en place des systèmes actifs.

### V.3.2 - Effet de la fraction volumique, du paramètre d'annihilation et de l'anisotropie de l'écroutissage latent

Pour une fraction volumique de phase molle plus faible ( $f=0,7$  au lieu de  $0,8$ ), on ne détecte dans les figures V.11.a et b, qu'un durcissement global du polycristal; les courbes moyennes des phases dures et molles sont comparables et les dispersions des états mécaniques sont semblables.

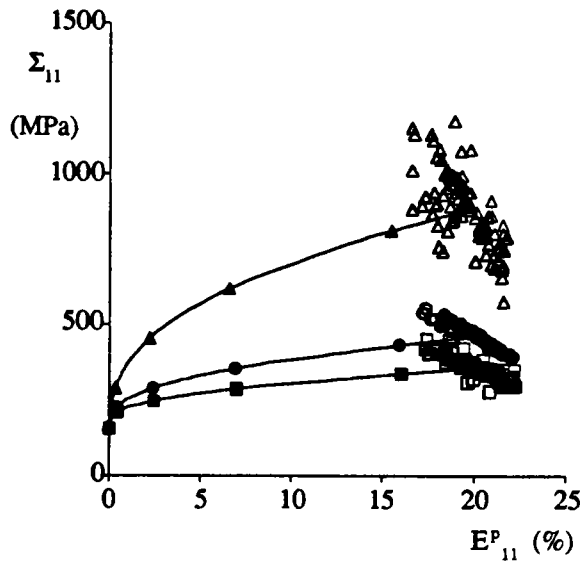
Par contre si dans les mêmes conditions, on augmente le coefficient d'annihilation (paramètre  $\alpha_{HH}$  et  $\alpha_{HS}^-$  égaux à  $y\beta\mu^2$  dans les matrices d'interaction  $H_{HH}$  et  $H_{HS}$ ), on constate une diminution sensible de l'hétérogénéisation intragranulaire (cf. planche V.12).

L'augmentation du facteur d'anisotropie traduisant un écroutissage latent plus important (paramètre  $a=H^1/H^2$  valeur utile pour certaines composantes (cf. paragraphe IV.3.1) de la matrice  $a_{gh}$  des équations (V.39) à (V.42)) augmente l'hétérogénéisation interphase et les dispersions des états mécaniques intragranulaires (cf. planche V.13).

### V.3.3 - Autres trajets

Les planches de V.14 à V.16 présentent les résultats obtenus par trois autres modes de déformation, autre que la traction uniaxiale selon l'axe 1. Avec les mêmes données initiales décrites dans le paragraphe V.2.1 pour la traction uniaxiale, dans ce paragraphe, on étudie un laminage, un rétreint et un cisaillement. Ces chargements diffèrent par la forme du tenseur de contraintes  $\Sigma$  appliqué :

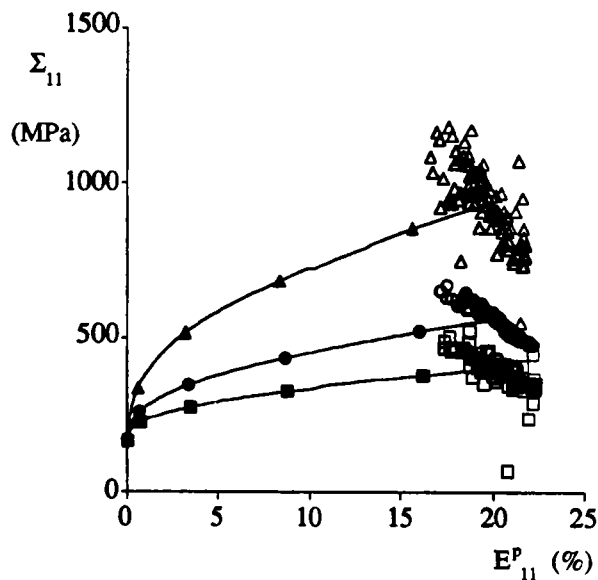
| Laminage  | Rétreint  | Cisaillement   |
|---|---|--|
| $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |



*Fig.V.11.a :  $f=0,8$*

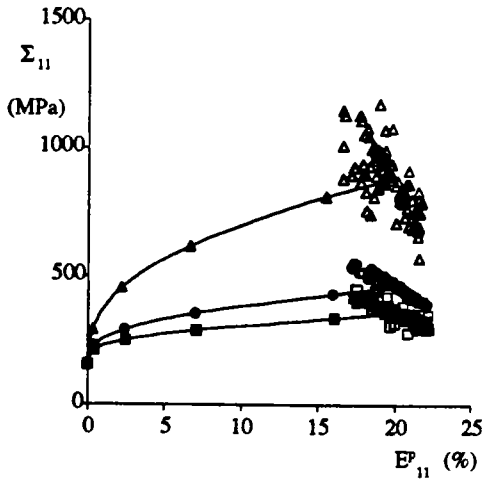
### Légende :

- Réponse macroscopique polycristal (ordre 1)
- Etat mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation de 20%)
- phase H phase S
- ▲ Etat mécanique de chaque phase dans chaque grain (ordre 3)  
(à une déformation de 20%) ◻
- ▲— Moyennes sur tout le polycristal —■—

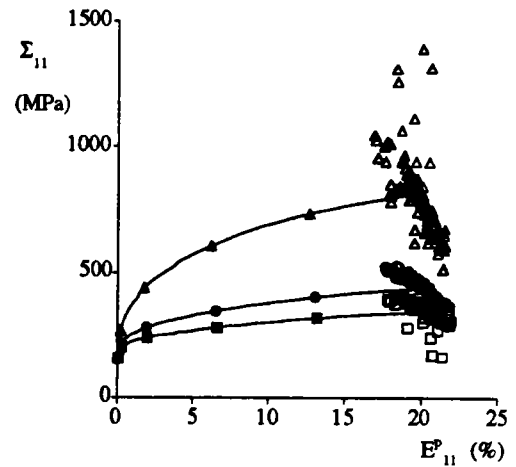


**Fig.V.11.b :  $f=0,7$**

**Planche V.11 : influence de la fraction volumique**



**Fig.V.12.a :  $\alpha_{HH}=3 \cdot 10^{-10} (MPa)^2$**



**Fig.V.12.b :  $\alpha_{HH}=3 \cdot 10^{-9} (MPa)^2$**

### Légende :

- Réponse macroscopique polycristal (ordre 1)
- Etat mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation de 20%)
- phase H
- △ Etat mécanique de chaque phase dans chaque grain (ordre 3)  
(à une déformation de 20%)
- phase S
- 
- ▲— Moyennes sur tout le polycristal —■—

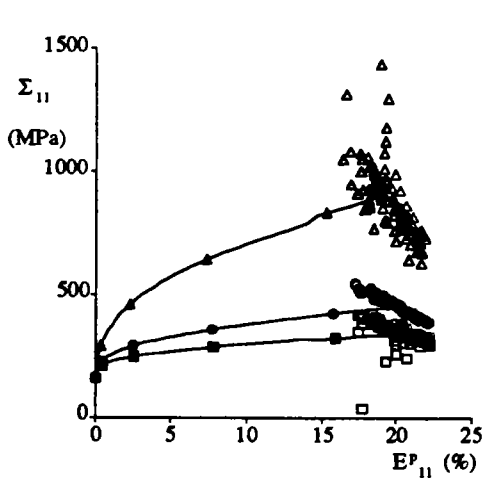


Fig.V.13.a :  $a=1.1$

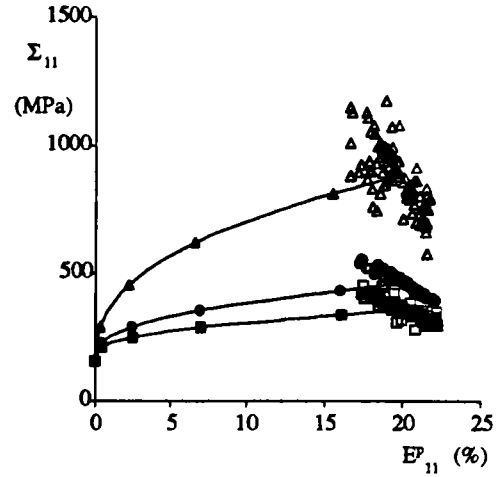


Fig.V.13.b :  $a=1.3$

Légende :

- Réponse macroscopique polycristal (ordre 1)
- Etat mécanique de chaque grain (ordre 2)  
(à une déformation de 20%)

phase H

phase S

- △ Etat mécanique de chaque phase  
dans chaque grain (ordre 3)  
(à une déformation de 20%)

□

- ▲— Moyennes sur tout le polycristal
- 

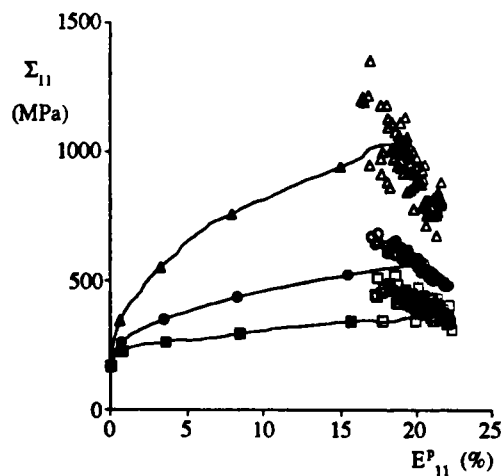


Fig.V.13.c :  $a=1.5$

**Planche V.13 influence du coefficient d'anisotropie**

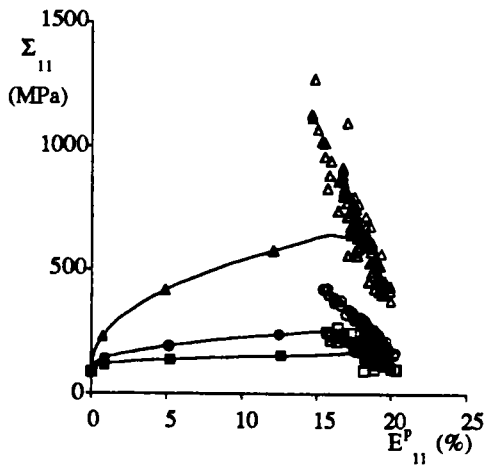


Fig.V.14.a : composante 11

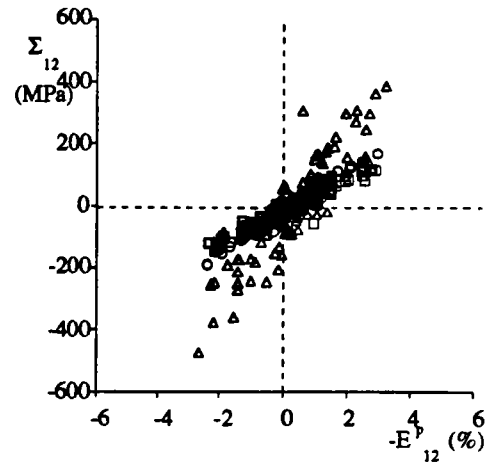


Fig.V.14.b : composante 12

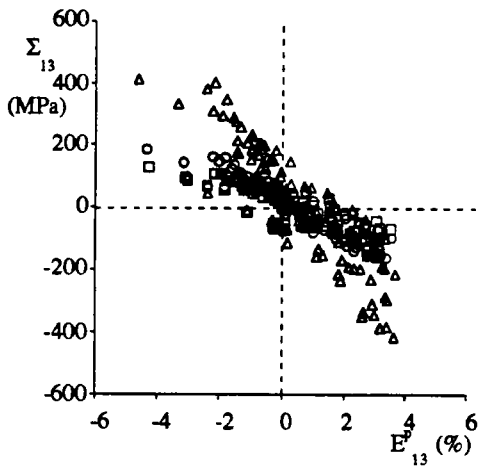


Fig.V.14.c : composante 13

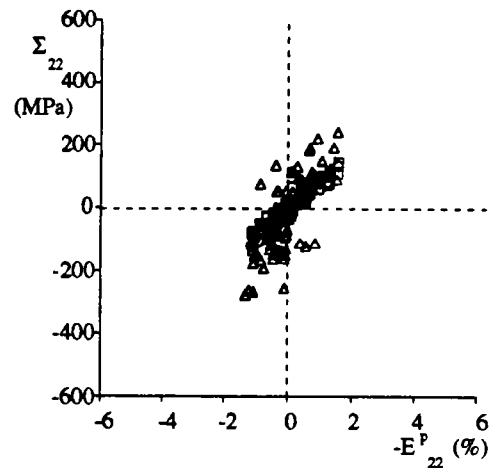


Fig.V.14.d : composante 22

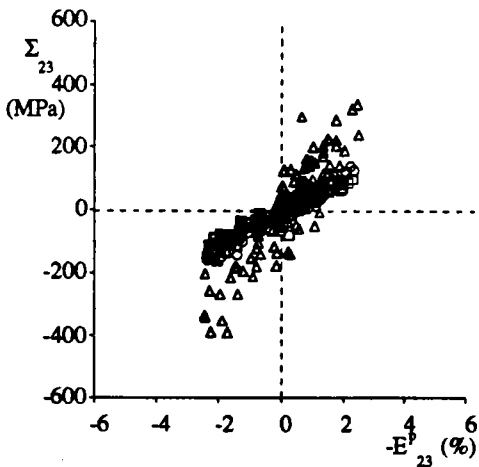


Fig.V.14.e : composante 23

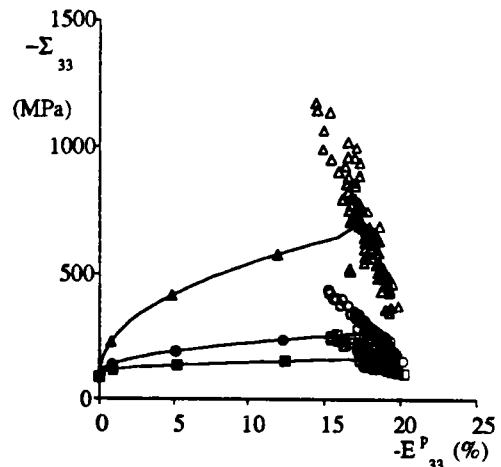


Fig.V.14.f : composante 33

**Planche V.14 Réponses contraintes-déformations plastiques du polycristal et à un état figé de  $E^p=20\%$ , obtenues pour un essai de laminage**  
(pour la légende cf. planche V.13)

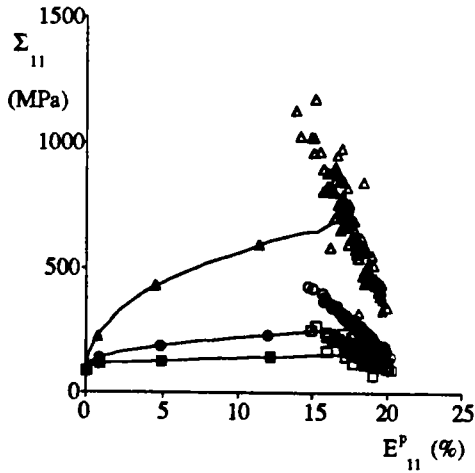


Fig.V.15.a : composante 11

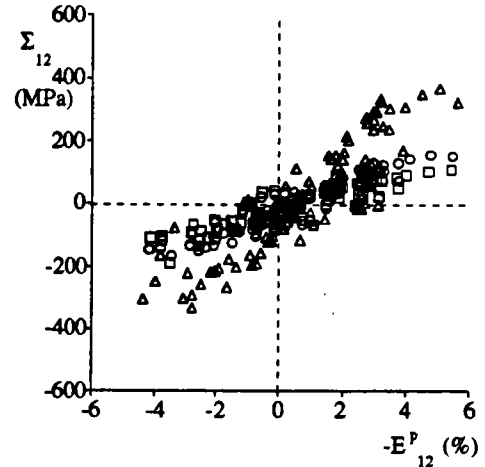


Fig.V.15.b : composante 12

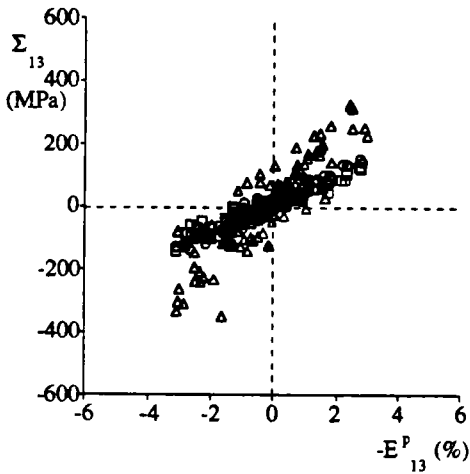


Fig.V.15.c : composante 13

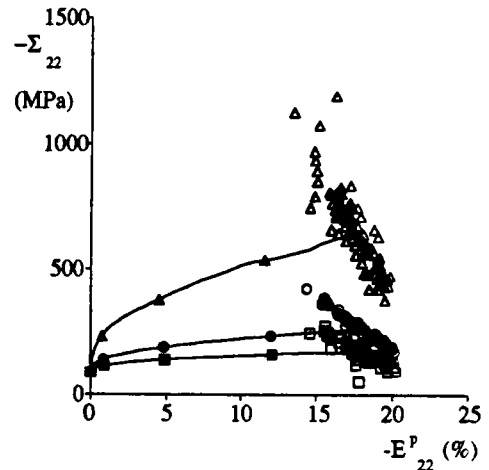


Fig.V.15.d : composante 22

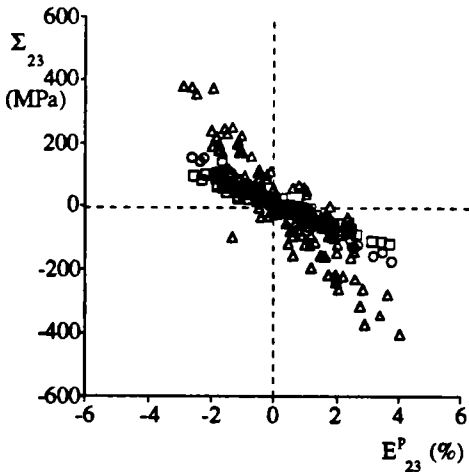


Fig.V.15.e : composante 23

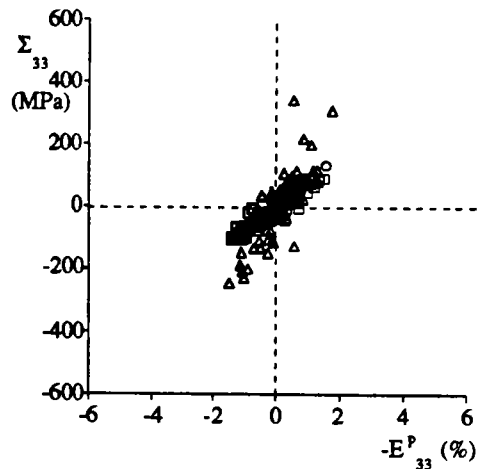


Fig.V.15.f : composante 33

**Planche V.15 Réponses contraintes-déformations plastiques du polycristal et à un état figé de  $E^p=20\%$ , obtenues pour un essai de rétreint**  
(pour la légende cf. planche V.13)



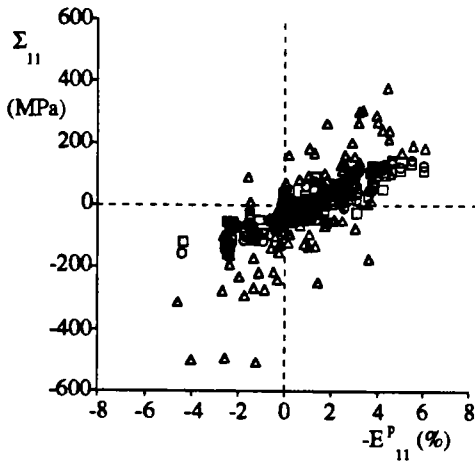


Fig.V.16.a : composante 11

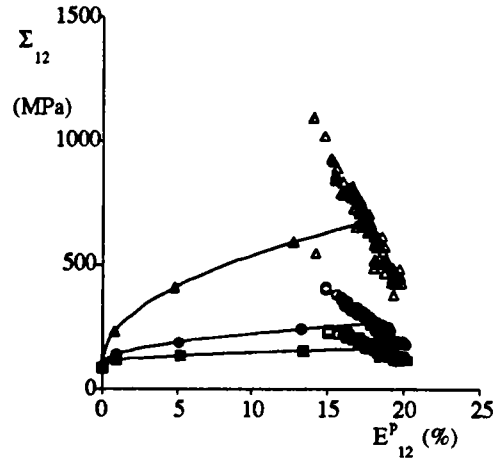


Fig.V.16.b : composante 12

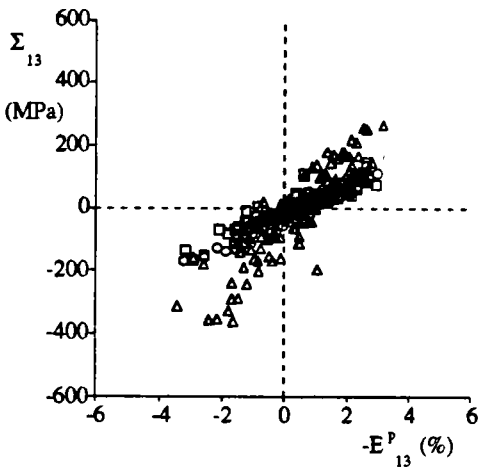


Fig.V.16.c : composante 13

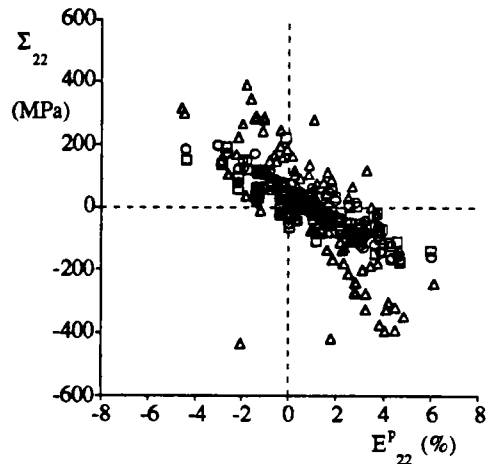


Fig.V.16.d : composante 22

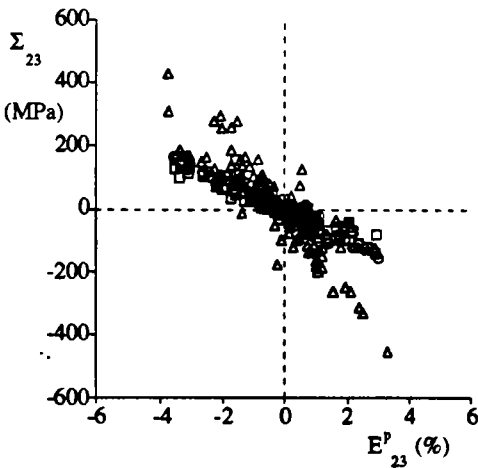


Fig.V.16.e : composante 23

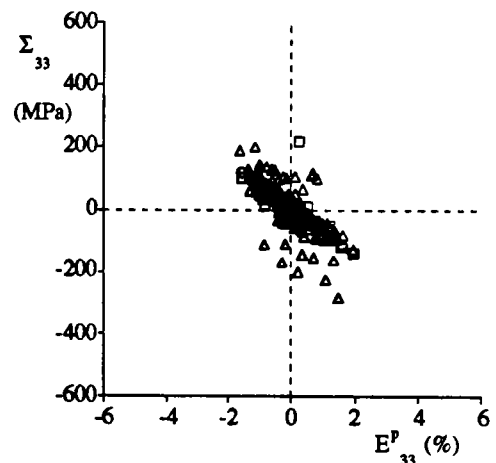


Fig.V.16.f : composante 33

**Planche V.16 Réponses contraintes-déformations plastiques du polycristal et à un état figé de  $E^p=20\%$ , obtenues pour un essai de cisaillement**  
(pour la légende cf. planche V.13)

On retrouve dans ces trois planches V.14, V.15 et V.16, les courbes du type de réponse du polycristal correspondant au mode de chargement appliqué. Autrement dit, les composantes 11 du laminage, du rétreint et les composantes 12 du cisaillement réagissent comme les composantes 11 d'une traction uniaxiale. Les composantes 22 du rétreint et 33 du laminage sont de valeurs opposées aux composantes 11 de ces mêmes trajets et ceci autant pour les contraintes que pour les déformations plastiques. Les contraintes maximales obtenues lors de ces trois essais ( $\Sigma_{11}=267$  MPa pour le laminage et le rétreint et  $\Sigma_{12}=267$  MPa pour l'essai de cisaillement) sont égales environ à la moitié de la contrainte maximale ( $\Sigma_{11}=570$  MPa) de la traction uniaxiale (cf. planche V.8).

Pour les fluctuations des états mécaniques dans chaque grain (ordre 2) et dans chaque phase (ordre 3) à un niveau de déformation plastique macroscopique  $E^P=20\%$ , ainsi que pour les moyennes des contraintes d'ordre 3 sur tout le polycristal, on retrouve les aspects et les intervalles obtenus pour une traction uniaxiale (cf. paragraphe V.3.1), adaptés au trajet concerné (composantes et niveau de contraintes (2 fois moins que pour la traction)).

La planche V.19 représente pour ces mêmes essais de déformation, l'évolution de la moyenne sur le polycristal des deux rapports de forme ( $a_1/a_3$  et  $a_2/a_3$ ), et pour un état macroscopique donné  $E^P=20\%$  ces deux rapports dans chaque grain. Tout comme pour la traction uniaxiale, on remarque qu'après quelques pourcents, la moyenne de ces rapports de forme évolue peu.

## **V.4 - Discussion**

Le mécanisme de formation des cellules de dislocations conduit à l'introduction de fluctuations d'ordre 3, fluctuations qui sont cependant fortement corrélées au niveau du polycristal puisqu'elles dépendent au travers de l'équation (V.3), de l'hétérogénéisation des grains en liaison avec le trajet de déformation imposé. Ainsi, les figures V.8 ont clairement montré que dans les phases dures, existait un état de contrainte important et corrélé au trajet macroscopique.

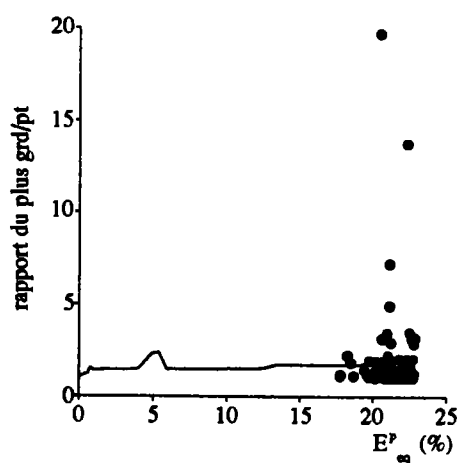


Fig.V.19.a : grd/pt pour le laminage

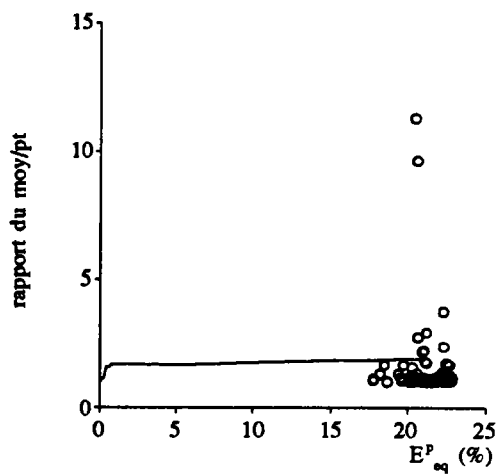


Fig.V.19.b : moy/pt pour le laminage

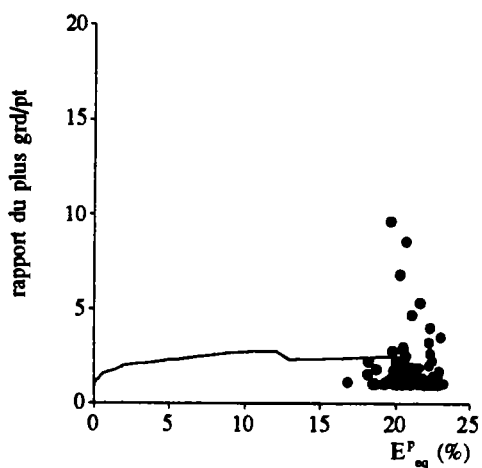


Fig.V.19.c : grd/pt pour le rétreint

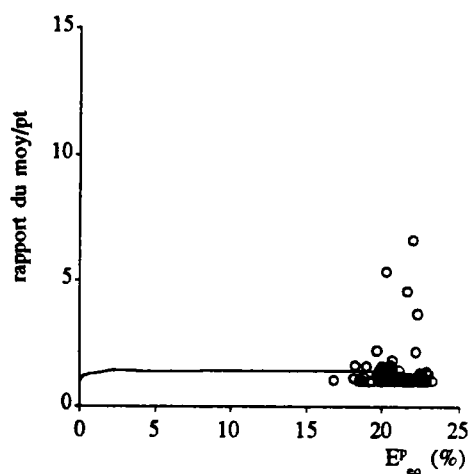


Fig.V.19.d : moy/pt pour le rétreint

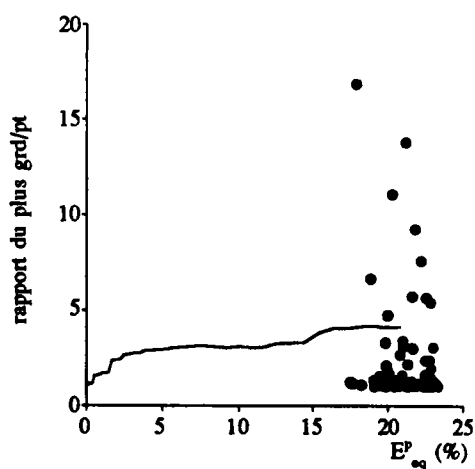


Fig.V.19.e : grd/pt pour le cisaillement

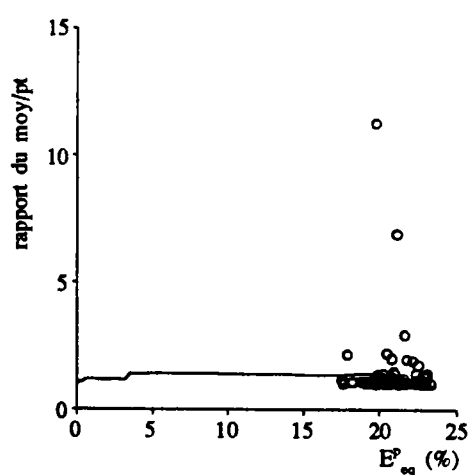


Fig.V.19.f : moy/pt pour le cisaillement

**Planche V.19 Evolution de la moyenne des rapports des demi-axes sur tout le polycristal et rapports des demi-axes pour  $E^p=20\%$**

Si on analyse l'état de contrainte moyen au niveau de l'ensemble des "phases" dures (cf. tableau V.2 et figure V.20), on trouve un état de contrainte présentant une forte cisssion (690 MPa) par rapport à celle imposée au polycristal (270 MPa). De plus cette cisssion importante n'est pas orientée comme celle provenant de la contrainte appliquée mais fait un angle de 40° par rapport à la direction de traction. Cette orientation est proche de celle observée pour les bandes de cisaillement. On observe également la présence d'une forte contrainte normale positive (1060 MPa) qui peut sans doute être reliée à des mécanismes d'endommagement. L'analyse des résultats obtenus pour d'autres trajets de déformation aboutit à des conclusions similaires.

| indices de $\sigma$ | polycristal | phase S | phase H |
|---------------------|-------------|---------|---------|
| 11                  | 570         | 360     | 1050    |
| 12                  | 0           | 60      | -130    |
| 13                  | 0           | -10     | 20      |
| 22                  | 5           | 90      | -200    |
| 23                  | 0           | -30     | 70      |
| 33                  | 5           | 70      | -140    |
| I                   | 570         | 370     | 1060    |
| II                  | 5           | 100     | 150     |
| III                 | 5           | 50      | -230    |

Tab.V.2 : Etat de contrainte à une déformation macroscopique  
 $E_P=20\%$  pour un essai de traction,  
et état de contrainte principale

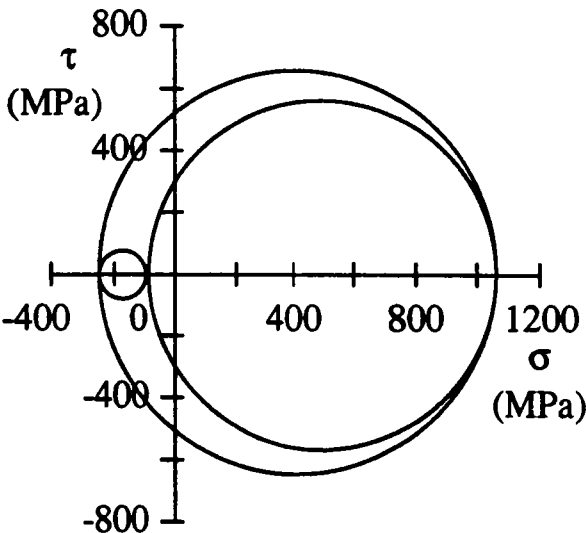


Fig.V.20 : Cercles de Mohr de la phase dure  
pour un essai de traction uniaxiale

## **Références bibliographiques**

- [FS83] FERNANDEZ J. V., SCHMITT J. H., Dislocation microstructures in steel during deep drawing, 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- [K87] KUHLMANN-WILSDORF D., LEDS : Properties and effects of low energy dislocation structures, 1987, Materials Science and Engineering, Vol.86, pp(53-66)
- [K89] KUHLMANN-WILSDORF D., Theory of plastic deformation: properties of low energy dislocation structure, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(1-41)
- [M94] MULLER D., Influence de l'écrouissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins, 1994, Thèse, Université de Metz.
- [S86] SCHMITT J.H., Contribution à l'étude de la micro-plasticité des aciers, 1986, Thèse de INPG Grenoble

# CHAPITRE VI :

## Conclusion générale

## **CHAPITRE VI :**

### **Conclusion générale**

Dans la première partie de cette thèse (cf. chapitre II), on a vu l'importance de la prise en compte de la microstructure intragranulaire en vue de la modélisation du comportement élastoplastique des métaux lors de trajets complexes. Dans ce travail, on a proposé une modélisation du comportement du cristal en tenant compte de la microstructure cellulaire des dislocations pour l'introduire dans le schéma autocohérent élastoplastique décrivant la transition d'échelle méso-macroscopique. Cette modélisation de la microstructure passe par l'intermédiaire d'une description simplifiée de la structure cellulaire par deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques pour une cellule de dislocations, et par un milieu équivalent (la matrice) pour les autres cellules introduisant ainsi l'hypothèse d'un matériau biphasé évolutif.

La mise en place de cette description simplifiée se fait au travers d'une démarche thermodynamique (cf. chapitre III), tout d'abord en considérant le grain comme un volume contenant des surfaces de discontinuité mobiles. Puis, on applique le résultat de cette démarche à la description simplifiée modélisant la microstructure intragranulaire. La dissipation obtenue par cette méthode permet de déterminer les forces thermodynamiques agissant sur les variables internes qui se réduisent pour la description simplifiée par :

- la fraction volumique des cellules ( $f$ ),
- les paramètres de l'ellipsoïde ( $a_i$  et  $\alpha_i$ ),
- les amplitudes de glissement plastique ( $\gamma_S$  et  $\gamma_H$ ) de chaque phase.

L'obtention de la loi de comportement élastoplastique du grain se déduit de cette dissipation par l'intermédiaire de lois complémentaires (cf. chapitre IV), qui introduisent dans le cas de la plasticité des forces critiques pour chaque variable interne. Du fait de la complexité des lois d'évolution de ces forces critiques en fonction des variables internes, et de

certaines tenseurs ( $S^2$  et  $S^3$ ), on a idéalisé certaines lois complémentaires afin d'obtenir des premiers résultats. Dans le chapitre V, malgré les hypothèses restrictives (sur les matrices d'interaction  $H$ , sur la fraction volumique, sur la morphologie), on trouve des résultats assez conformes aux rares mesures expérimentales. Ces résultats concernent les déformations et contraintes d'ordre 1, 2 et 3, et les demi-axes de l'ellipsoïde, dans le cas de trajets monotones. Ces hypothèses restrictives ne permettent pas l'étude des trajets complexes.

Actuellement (thèse d'I. Régnier), on cherche à améliorer l'obtention des matrices d'interaction  $H$  (donc l'évolution des forces critiques) et des tenseurs ( $S^2$  et  $S^3$ ) par des hypothèses moins restrictives. Utilisant une méthode d'invariant pour découpler dans le tenseur d'Eshelby  $S^1$  et dans ses dérivées ( $S^2$  et  $S^3$ ), l'influence des demi-axes ( $a_i$ ) et celle des angles ( $\alpha_i$ ) d'orientation de l'ellipsoïde. En parallèle, une démarche cherche à relier les forces critiques à la densité de dislocations qui elle-même est reliée aux hétérogénéités plastiques. Ceci permettra d'obtenir une approche globale fondée simultanément sur l'évaluation micromécanique de l'énergie libre et les restrictions sur les variables internes construites à partir de considérations physiques de la plasticité.



# **REFERENCES**

# **BIBLIOGRAPHIQUES**

## **Références bibliographiques**

- [ALH91] ANANTHAN V.S., LEFFERS T., HANSEN N., Characteristics of second generation microbands in cold-rolled copper, 1991, Scripta Metallurgica, Vol.25, pp(137-142)
- [AS80] ANAND L., SPITZIG W.A., Initiation of localized shear bands in plane strain, 1980, J. Mech. Phys. Solids, Vol.28, pp(113-128)
- [B78] BERVEILLER M., Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformation des polycristaux métalliques, 1978 Thèse d'état de l'université de Paris
- [BB90] BARLAT F., BAUDELET B., Influence de l'endommagement sur la limite de formage, 1990, dans Physique et mécanique de la mise en forme des métaux, eds F. MOUSSY et P. FRANCIOSI, Presses de CNRS-IRSID, pp(461-469)
- [BHK89] BAY B., HANSEN N., KUHLMANN-WILSDORF D., Deformation structures in lightly rolled pure aluminium, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A112, pp(385-397)
- [BNFK92] BERVEILLER M., NADARI A., FAKRI N., KORBEL A., The role of shear bands in the evolution of copper texture, 1992, International Journal of Plasticity, Vol.8, pp(001-009)
- [BPB91] BERVEILLER M., PATOOR E., BUISSON M., Thermodynamical constitutive equations for shape memory alloys, 1991, J. de Phys. IV, Colloque C4, supp. au J. de Phys. III, Vol.1, pp(387-396)
- [BZ81] BERVEILLER M., ZAOUI A., Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes, 1981, dans comportements rhéologiques et structures des Matériaux, Eds C.HUET et A. ZAOUI, pp(175-199)

- [CHM94] COL A., HEURTAULT S., MUNIER M., L'emboutissage, dans le livre de l'acier, 1994, eds G. BERANGER, G. HENRY et G. SANZ (SOLLAC), Tec et DOc Paris, pp(786-816)
- [CSB94] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M., Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials, 1994, Transaction of the ASME, Vol.16, pp(274-278)
- [CSB95a] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M., Comportement élastique global des composites à inclusions enrobées : modélisation micromécanique et applications, 1995, 2<sup>ème</sup> congrès de mécanique, Casablanca Maroc, pp(223-232)
- [CSB95b] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M., Elastic composites with coated reinforcements : a micromechanical approach for non homothetic topology, 1995, Int. J. Engng Sci., Vol.33, N°6, pp(829-843)
- [DB84] DYMECK S., BLICHARSKI M.R., The structure of transition bands in ferritic stainless steels, 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(99-104)
- [DHMA88] DEVE H., HARREN S., McCULLOUGH C., ASARO R.J., Micro and macroscopic aspects of shear band formation in internally nitrated single crystals of Fe-Ti-Mn alloys, 1988, Acta Met., Vol.36, N°2, pp(341-365)
- [E57] ESHELBY J.D., The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, 1957, Proc. Roy. Soc., A241, pp(376-396)
- [EM79] ESSMANN U., MUGHRABI H., Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformation and limits of dislocation densities, 1979, Phil. Mag. A, Vol.40, pp(735-756)
- [F71] FAIVRE G., Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope, 1971, J. Physique, Vol.32, pp(325-331)
- [F83] FRANCIOSI P., Glide mechanisms in b.c.c. crystals: an investigation of the case  $\alpha$ -iron through multislip and latent hardening tests, 1983, Acta Met., Vol.31, N°9, pp(1331-1342)

- [F84] FRANCIOSI P., Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement: modélisation pour un chargement complexe quasi statique, 1984, Thèse de l'université de Paris-Nord
- [F95] FENNAN A., Homogénéisation élastoplastique discrète, 1995, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon
- [FBZ80] FRANCIOSI P., BERVEILLER M., ZAOUI A., Latent hardening in copper and aluminium single crystal, 1980, Acta Met., Vol.28, pp(273-283)
- [FR92] FREED A.D., RAJ S.V., Three dimensional deformation analysis of two-phase dislocation substructures, 1992, Scripta Metal. Mater., Vol.27, pp(233-238)
- [FS83] FERNANDEZ J. V., SCHMITT J. H., Dislocation microstructures in steel during deep drawing, 1983, Phil. Mag., Vol.A48, pp(841-870)
- [G73] GERMAIN P., Cours de mécanique des milieux continus, 1973, tome 1 Théorie générale, eds. Masson et cie Paris
- [G75] GÜTH A., Räumliche Versetzungsanordnung in gewalzten Eiseneinkristallen, 1975, Dissertation A, AdW de DDR, ZFW Dresden
- [G77] GHARHEMANI F., Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusion in an anisotropic elastic materials, 1977, Mech. Res. Commun., Vol.4, pp(89-91)
- [GB73] GHOSH A.K., BACKOFEN W.A., Strain hardening and instability in biaxially streched sheet, 1973, Metall. transactions, Vol.4, pp(1113-1123)
- [GP94] GROMA I., PAWLEY G.S., Dislocation cell formation in a 2D simulation, 1994, Solid State Phenomena, Vol.35-36, pp(369-374)
- [GS94] GORYACHEV S.B., SHALENKOV A.V., Theory and computer simulation of dislocation structure relaxation during annealing, 1994, Solid State Phenomena, Vol.35-36, pp(375-380)

- [H03] HADAMARD J., Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, 1903, cours du collège de France, Paris
- [H61] HILL R., Discontinuity relations in mechanics of solids, 1961, in Progress in solid mechanics 2, eds I.N. SNEDDON and R. HILL, North Holland Amsterdam, pp(245-276)
- [H62] HU H., Microbands in a rolled Si-Fe crystal and their role in recrystallization, 1962, Acta Met., Vol.10, pp(1112-1116)
- [H65] HILL R., A self-consistent mechanics of composite materials, 1965, J. Mech. Phys. Solids., Vol.13, pp(213-222)
- [H72] HILL R., An invariant treatment of interfacial discontinuities in elastic composites, 1972, in Continuum mechanics and related problems of analysis, Moscow, pp(597-604)
- [H83] HILL R., Interfacial operators in the mechanics of composite media, 1983, J. Mech. Phys. Solids., Vol.31, N°4, pp(347-357)
- [H86] HILL R., Energy-momentum tensor in elastostatics : some reflections on the general theory, 1986, J. Mech. Phys. Solids., Vol. 34, N°3, pp(305-317)
- [H90] HANSEN N., Cold deformation microstructures, 1990, Mat. Science and Technology, Vol.6, pp(1039-1046)
- [H92] HANSEN N., Deformation microstructures, 1992, Scripta Metall. et Mat., Vol.27, pp(1447-1452)
- [H93] HUGUES D.A., Microstructural evolution in a non cell forming metal Al-Mg, 1993, Acta Met., Vol.41, N°5, pp(1421-1430)

- [H94] HANSEN N., Flow stress and microstructural parameters., 1994, In "Numerical predictions of deformation processes and the behaviour of real materials.", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, N.J. SØRENSEN, 15th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(325-334)
- [HAM76] HUTCHINSON J.W., ARTHEY R., MALMSTROM P., On anomalously low work-hardening in pre-strained metals, 1976, Scripta Met., Vol.10, pp(673-675)
- [HK86] HANSEN N., KUHLMANN-WILSDORF D., Low Energy Dislocation Structures due to unidirectional deformation at low temperatures, 1986, Materials Science and Engineering, Vol.81, pp(141-161)
- [HL88] HANSEN N., LEFFER T., Microstructures, textures and mechanical properties after large strain, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(519-531)
- [HM84] HATHERLY M., MALIN A.S., Shear bands in deformed metals, 1984, Scripta Met., Vol.18, pp(449-454)
- [HN89] HUGUES D.A., NIX W.D., Strain hardening and substructural evolution in Ni-Co solid solutions at large strains, 1989, Materials Science and Engineering., Vol.A122, pp(153-172)
- [HRT92] HU Z., RAUCH E.F., TEODOSIU C., Work-hardening behavior of mild steel under stress reversal at large strains, 1992, , , pp(839-856)
- [I89] INAGAKI H., Development of microstructures and textures during cold rolling of polycrystalline Iron containing an excess amount of dissolved carbon, 1989, z.Metallkde, pp(474-483)
- [JH90] JUUL JENSEN D., HANSEN N., Flow stress anisotropy in aluminium, 1990, Acta Met., Vol.38, pp(1369-1380)
- [K58] KRÖNER E., Kontinuums Theorie des Versetzungen und Eigenspannungen, 1958, Springer Verlag.
- [K61] KRÖNER E., Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, 1961, Acta Metall., Vol.9, pp(155-161)

- [K65] KNEER G., Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln Vielkristalliner Aggregate mit Texture, 1965, Phys. stat. sol., Vol.9, pp(825-838)
- [K72] KAUN L., Das Gleitverhalten und die Versetzungsstruktur von Molybdäneinkristallen in Abhängigkeit von der Kristallorientierung und Verformungstemperatur, 1972, Dissertation A, AdW der DDR, ZFW Dresden
- [K85] KRATOCHVIL J., A model of cyclic plastic hardening and softening of metals, 1985, Proc. Int. Conf. on Nonlinear Mechanics, Shanghai, pp(560-560)
- [K89] KUHLMANN-WILSDORF D., Theory of plastic deformation: properties of low energy dislocation structure, 1989, Materials Science and Engineering, Vol.A113, pp(1-41)
- [K90] KORBEL A., The mechanism of strain localization in metals, 1990, Archives of metallurgy, Vol.35, pp(177-203)
- [K94] KRATOCHVIL J., Continuum mechanics approach to collective behavior of dislocations, 1994, Solid State Phenom., Vol.35-36, pp(71-86)
- [KE88] KUBIN L.P., ESTRIN Y., Strain nonuniformities and plastic instabilities, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(573-583)
- [KHS80] KOCKS U.F., HASEGAWA T., SCATTERGOOD R.O., On the origin of cell walls and lattice misorientations during deformation, 1980, Scripta Met., Vol.14, pp(449-454)
- [KM86] KORBEL A., MARTIN P., Microscopic versus macroscopic aspect of shear band deformation, 1986, Acta Met., Vol.34, N°10, pp(1905-1909)
- [K87] KUHLMANN-WILSDORF D., LIDS : Properties and effects of low energy dislocation structures, 1987, Materials Science and Engineering, Vol.86, pp(53-66)

- [KM88] KORBEL A., MARTIN P., Microstructural event of macroscopic strain localization in prestrained tensile specimens, 1988, *Acta Met.*, Vol.36, N°9, pp(2575-2586)
- [KR85] KORBEL A., RICHET M., Formation of shear bands during cyclic deformation of aluminium, 1985, *Acta Met.*, Vol.33, N°11, pp(1971-1978)
- [KT80] KAWASAKI Y., TAKEUSHI T., Cell structures in copper single crystals deformed in the [001] and [111] axes, 1980, *Scripta Met.*, Vol.14, pp(183-188)
- [KW63] KEH A.S., WEISSMANN S., Deformation in body-centered cubic Metals, 1963, In *Electron Microscopy and Strenght of crystal*, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(231-300)
- [L57] LIN T.H., Analysis of elastic and plastic strains of a FCC crystal, 1957, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.5, pp(143-149)
- [L75] LAWS N., On interfacial discontinuities in elastic composites, 1975, *J. Elasticity*, Vol.5, pp(227-235)
- [L77] LAWS N., The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material, 1977, *Phys. stat. sol.*, Vol.7, pp(91-97)
- [L91] LUFT A., Microstructural processes of plastic instabilities in strengthened metals, 1991, *Progress in Materials Science*, Vol.35, pp(97-204)
- [L93] LIPINSKI P., Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies, à partir des méthodes de transition d'échelles, 1993, Thèse d'habilitation de l'Université de Metz.
- [LB89] LIPINSKI P., BERVEILLER M., Elastoplasticity of microinhomogeneous metals at large strains, 1989, *Int. J. of Plast.*, Vol.5, pp(149-172)
- [LBM94] LEMOINE X., MULLER D., BERVEILLER M., Texture of microstructures in BCC Metals for various loading paths, 1994, *Mat. Science Forum*, Vol.157-162, pp(1821-1826)



- [LBRM95] LIPINSKI P., BERVEILLER M., REUBREZ E., MORREALE J., Transition theories of elastic-plastic deformation of metallic polycrystals, 1995, Arch. of Applied Mechanics, Vol.95, pp(291-311)
- [LC78] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., Mécanique des milieux continus, 1978, Greco Grandes déformations et endommagement, eds Dunod Paris
- [LDY93] LIU Y.Z., DONG D.Y., YUAN K., Experimental investigation of microstructural damage in an A-K sheet subjected to two-stage straining, 1993, J. of Mat. Process. Tech., Vol.39, pp(133-143)
- [LKB90] LIPINSKI P., KRIER J., BERVEILLER M., Elastoplasticité des métaux en grandes déformations: comportement global et évolution de la structure interne, 1990, Rev. Phys. Appl., Vol.25, pp(361-388)
- [LKD92] LAN Y., KLAAR H.J., DAHL W., Evolution of dislocation structure and deformation behavior of iron at different temperature, part 1, 1992, Metallurg. Transactions A, Vol.23A, pp(537-544)
- [LM73] LIN S.C., MURA T., Elastic fields of inclusions in anisotropic media (II), 1973, Phys. stat. sol. (a), Vol.15, pp(281-285)
- [LS79] LLOYD D.J., SANG H., The influence of strain path on subsequent mechanical properties - Orthogonal tensile paths, 1979, Metall. transactions A, Vol.10A, pp(1767-1772)
- [LS83] LIBOVICKY S., SESTAK B., Development of the dislocation arrangement in Fe-0.9wt% Si single crystals deformed in tension, 1983, Phil Mag. A, Vol.47, pp(63-78)
- [M75] MÜHLHAUS CH., Qualitative Untersuchungen zur Temperaturabhängigkeit des Verformungs- und Bruchverhaltens gewalzter Molybdäneinkristalle mit ausgewählten Versetzungsstrukturen, 1975, Dissertation A, AdW de DDR, ZFW Dresden

- [M87] MURA T., Micromechanics of defects in solids, 1987, in Mechanics of elastic and inelastic solids, eds Martinus nijhoff publishers
- [M88] MUGHRABI H., Dislocation clustering and long-range internal stresses in monotonically and cyclically deformed metal crystals, 1988, Revue Phys. Appl., Vol.23, pp(367-379)
- [M92] MAUGIN G.A., the thermodynamics of plasticity and fracture, 1992, in Cambridge in Applied mathematics, eds Cambridge University Press
- [M94] MULLER D., Influence de l'écrouissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins, 1994, Thèse, Université de Metz.
- [MH79] MALIN A.S., HATHERLY M., Microstructure of cold-rolled copper, 1979, Metal Science, pp(463-472)
- [MHH81] MALIN A.S., HUBER J., HATHERLY M., The microstructure of rolled copper single crystals, 1981, Z. Metallkde, pp(310-317)
- [MK71] MURA T., KINOSHITA N., Green's functions for anisotropic elasticity, 1971, Phys. stat. sol. (b), Vol.47, pp(607-618)
- [MKB92] MULLER D., KRATOCHVIL J., BERVEILLER M., Non-local hardennings in metals, 1992, In "Modelling of plastic deformation and its engineering applications", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, N. HANSEN, D. JUUL JENSEN, T. LEFFERS, H. LILHOLT, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, B. RALPH, 13th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(367-372)
- [MKB93] MULLER D., KRATOCHVIL J., BERVEILLER M., Effets des écrouissages couplés de différentes parties d'un métal sur la réponse en traction-compression et sur les contraintes internes, 1993, C. R. Acad. Sci., Vol.316, pp(435-440)
- [MLB94] MULLER D., LEMOINE X., BERVEILLER M., Nonlocal behavior of elastoplastic metals : theory and results, 1994, Trans. of the ASME, Vol.116, pp(378-383)

- [MLBK94] MULLER D., LEMOINE X., BERVEILLER M., KRATOCHVIL J., Non-local behavior of metals, 1994, Solid State Phenomena, Vol.35-36, pp(393-398)
- [MM84] MORRIS M.A., MARTIN J.L., Evolution of internal stresses and substructure during creep at intermediate temperatures, 1984, Acta Met. , Vol.32,N°4, pp(549-561)
- [MN.] MORII K., NAKAYAMA Y., Shear bands in rolled single crystals of FCC metals, .....pp(327-336)
- [MNM.] MORII K., NAKAYAMA Y., MECKING H., Factors contributing to shear band formation in Al-3%Mg single crystals, .....pp(117-122)
- [NGH85] NIX W.D., GIBELING J.C., HUGUES D.A., Time-dependent deformation of metals, Met. Trans. A, vol 16A, pp(1985-2215)
- [PA80] PRINZ F.B., ARGON A.S., Dislocation cell formation during plastic deformation of copper single crystals, 1980, Phys. Stat. Sol., Vol.57, pp(741-753)
- [PA84] PRINZ F.B., ARGON A.S., The evolution of plastic resistance in large strain plastic flow of single phase subgrain forming metals, 1984, Acta Met., Vol.32, N°7, pp(1021-1028)
- [PPL75] POLLNOW D., PENELLE R., LACOMBE P., Relations entre les propriétés plastiques et la microstructure de monocristaux de fer déformés par traction à la température ambiante, 1975, Mém. Scien. Revue Métallurgie, pp(491-503)
- [PS93] PRADEILLES-DUVAL R.M., STOLZ C., Relations entre grandeurs microscopiques et macroscopiques en présence de discontinuités mobiles, 1993, Actes du 11ème congrès français de mécanique Lille-villeneuve d'ascq, Vol.4, pp(157-160)
- [R71] RICE J.R., Inelastic constitutive relations for solids : an internal-variable theory and its application to metal plasticity, 1971, J. Mech. Phys. Solids, Vol.19, pp(433-455)

- [R88] REY C., Effects of grain boundaries on the mechanical behavior of grains in polycrystals, 1988, *Revue Phys. Appl.*, Vol.23, pp(491-500)
- [R95] REGNIER I., communication interne
- [RB77] RONDE-OUSTAU F., BAUDELET B., Microstructure and strain path in deep-drawing, 1977, *Acta Metall.*, Vol.25, pp(1523-1529)
- [RBL92] REUBREZ E., BERVEILLER M., LIPINSKI P., Optimal crystallographic texture determination for metal forming processes using a self-consistent model, 1992, In "Modelling of plastic deformation and its engineering applications", Eds S.I. ANDERSEN, J.B. BILDE-SØRENSEN, N. HANSEN, D. JUUL JENSEN, T. LEFFERS, H. LILHOLT, T. LØRENTZEN, O.B. PEDERSEN, B. RALPH, 13th Risø Int. Symposium on Materials Science, pp(403-408)
- [RS89] RAUCH E.F., SCHMITT J.H., Dislocation Substructures in Mild Steel Deformed in Simple Shear, 1989, *Materials Science and Engineering*, Vol.A113, pp(441-448)
- [RSB86] RAPHANEL J.L., SCHMITT J.H., BAUDELET B., Effect of a prestrain on the subsequent yielding of low carbon steel sheets, 1986, *International Journal of Plasticity*, Vol.2, N°4, pp(371-378)
- [S28] SACHS A., Zur Ableitung einer Fließbedingung, 1928, *Z. der V.D.I.*, Vol.72, pp(739-..)
- [S63] SWANN P.R., Dislocation arrangements in face-centered cubic metals and alloys, 1963, In *Electron Microscopy and Strength of crystal*, Eds G. THOMAS, J. WASHBURN, pp(131-181)
- [S86] SCHMITT J.H., Contribution à l'étude de la microplasticité des aciers, 1986, Thèse de INPG Grenoble
- [S90a] SABAR H., Problèmes d'inclusions à frontière mobile et application, 1990, Thèse de l'université de Metz

- [S90b] SCHAPERY R.A., A theory of mechanical behavior of elastic media with growing damage and other changes in structure, 1990, J. Mech. Phys. Solids, Vol.38, N°2, pp(215-253)
- [T38] TAYLOR G.Y., Plastic strain in metals, 1938, J. Inst. Metals, Vol.62, pp(307-324)
- [T70] TAKEUSHI T., Work-hardening of iron single crystal between 25°C and 900°C, 1970, Japanese J. of Applied Phys. ,Vol.9, N°4, pp(391-400)
- [T92] THUILLIER S., Rhéologie et microstructure associées à un trajet complexe de déformation pour une nuance d'acier doux, 1992, Thèse de INPG Grenoble
- [TFHM82] TABATA T., FUJITA H., HIRAOKA M., MIYAKE S., The relationship between flow stress and dislocation behavior in [111] aluminium single crystal, 1982, Philo. Mag. A, Vol.46, pp(801-816)
- [TYF78] TABATA T., YAMANAKA S., FUJITA H., In situ deformation of the [111] Aluminium single crystals observed by high voltage electron microscopy, 1978, Acta. Metall., Vol.26, N°4, pp(405-411)
- [W67] WALPOLE L.J., The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium, 1967, Proc. Roy. Soc., Vol.A300, pp(270-289)
- [W78] WALPOLE L.J., A coated inclusion in an elastic medium, 1978, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.83, pp(495-506)
- [W91] WALPOLE L.J., A rotated rigid ellipsoidal inclusion in an elastic medium, 1991, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.433, pp(179-207)
- [WL83] WAGONER R.H., LAUKONIS J.V., Plastic behavior of aluminium-killed steel following Plane-Strain Deformation, 1983, Metall. Transaction A, Vol.14A, pp(1487-1495)
- [YD87] YEUNG W.Y., DUGGAN B.J., Shear band angles in rolled FCC Materials, 1987, Acta Met., Vol.35, N°2, pp(541-548)

# **ANNEXE A :**

## **Compléments de micromécanique**

- |   |             |
|---|-------------|
| <b>A1 - Condition de compatibilité d'Hadamard</b>   | <i>p165</i> |
| <b>A2 - Liaison des tenseurs du type d'Eshelby <math>S^1</math> et <math>S^2</math> et l'opérateur interfacial <math>\mathcal{P}</math></b> | <i>p166</i> |
| <b>A3 - Vérification de la relation (A.18) dans le cas d'une sphère de rayon unitaire (<math>a=1</math>) pour un milieu isotrope.</b>       | <i>p168</i> |
| <b>A4 - Complément thermodynamique</b>  | <i>p173</i> |

## ANNEXE A :

### Compléments de micromécanique

#### A1 - Condition de compatibilité d'Hadamard

Dans le chapitre III, on a utilisé la condition de compatibilité d'Hadamard [H03] pour une interface parfaite  $\Sigma$  de discontinuité de vitesse de déplacement  $v_i$  :

$$[v_i] = -[u_{i,j}n_j]w_\alpha n_\alpha \quad (\text{III.100}).$$

Pour obtenir cette relation (III.100), on part de l'hypothèse d'interface parfaite qui respecte les conditions de compatibilité, c'est-à-dire pas de recouvrement de matière ou de décollement. Ces conditions se traduisent par l'équation suivante :

$$[u_i] = 0 \quad \forall t \quad (\text{A.1}).$$

Or, la dérivation du déplacement  $u_i$  s'écrit :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}w_j \quad (\text{A.2}).$$

où  $w_i$  décrit la vitesse de propagation de  $\Sigma$ . Quel que soit le temps  $t$ , la relation (A.1) est vérifiée, et on en déduit que :

$$d[u_i] = [du_i] = 0 \quad (\text{A.3}).$$

De la définition de la vitesse des particules :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (\text{A.4}),$$

et des équations (A.2) et (A.3), on a donc :

$$[v_i] = -[u_{i,j}]w_j \quad (A.5).$$

Or les relations :

$$[u_{i,j}] = \lambda_i n_j \text{ et } n_\alpha n_\alpha = 1 \quad (A.6),$$

permettent d'obtenir la condition de compatibilité d'Hadamard :

$$[v_i] = -[u_{i,j}n_j]w_\alpha n_\alpha \quad (A.7).$$

## **A2 - Liaison des tenseurs du type d'Eshelby $S^1$ et $S^2$ et l'opérateur interfacial $\mathcal{P}$**

Dans les développements de la démarche thermomécanique , on est amené à déterminer l'intégrale  $\mathcal{J}$  suivante en fonction des tenseurs  $S^1$  et  $S^2$  :

$$\mathcal{J} = \int_{\Sigma} \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn} w_\alpha n_\alpha dS \quad (A.8),$$

où  $\mathcal{P}_{ijkl}$  est l'opérateur interfacial défini dans le paragraphe III.1.3 par la relation (III.60).  $w_\alpha$  et  $n_\alpha$  sont respectivement la vitesse de propagation et la normale de la surface fermée  $\Sigma$  entourant le volume  $V^I$ .

Une première relation permettant de relier l'opérateur  $\mathcal{P}$  au tenseur d'Eshelby  $S^1$  peut être définie à partir d'une équation donnée par Walpole [W91].

$$\int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl} (r^+ - r') dV' - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl} (r^- - r') dV' = \mathcal{P}_{ijkl} \quad (A.9).$$

Cette dernière relation (A.9) est facilement obtenue par la définition de l'opérateur  $\mathcal{P}$  (III.60) :



$$\mathcal{P}_{ijkl} = \frac{1}{4} \left( C_{ik}^{-1} n_j n_l + C_{il}^{-1} n_j n_k + C_{jk}^{-1} n_i n_l + C_{jl}^{-1} n_i n_k \right) \quad (\text{III.60}),$$

et par la relation intégrale de la déformation totale en un point  $r$  d'un volume  $V$  :

$$\varepsilon_{ij}(r) = E_{ij} - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl}(r-r') C_{klmn} \varepsilon_{mn}^p(r') dV' \quad (\text{A.10}).$$

La multiplication de l'équation (A.9) par les constantes élastiques  $C_{ijkl}$  et l'utilisation de la définition du tenseur d'Eshelby en fonction de celui de Green ( $\mathcal{G}$ ) :

$$S_{ijmn}^1 = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl}(r-r') C_{klmn} dV' \quad (\text{A.11}),$$

pour un point  $r$  appartenant au volume  $V^I$  donc pour  $r^-$  de la relation (A.9), permettent d'obtenir :

$$\int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl}(r^+ - r') C_{klmn} dV' = \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn} - S_{ijmn}^1 \quad (\text{A.12}).$$

Cette équation (A.12) a été également déterminée par Cherkaoui et al. [CSB94, CSB95a, CSB95b], dans une théorie appliquée à l'inclusion enrobée. Maintenant, il ne reste plus qu'à établir une liaison avec la dérivée temporelle du tenseur  $S^1$  pour pouvoir définir complètement  $\mathcal{J}$  (A.8).

La dérivée première temporelle de  $S^1$  donne :

$$\dot{S}_{ijmn}^1 = S_{ijmnpq}^2 \dot{A}_{pq} = - \int_{\Sigma^+} \mathcal{G}_{ik,jl}(r^- - r'^+) C_{klmn} w_\alpha n_\alpha dS' \quad (\text{A.13}),$$

où  $A$  est un tenseur décrivant les paramètres de l'ellipsoïde ( $a_1, a_2, a_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ) de surface  $\Sigma$  est de volume  $V^I$ .

Comme le tenseur  $S^1$ , la dérivée  $S^2$  est homogène dans l'inclusion ellipsoïdale :

$$S_{ijmn}^1 = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} S_{ijmn}^1 dV$$

et

$$S_{ijmnpq}^2 = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} S_{ijmnpq}^2 dV \quad (A.14).$$

De la propriété (A.14) et d'une propriété du tenseur de Green :

$$\int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl} (r^- - r'^+) dV' = \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl} (r^+ - r'^-) dV' \quad (A.15),$$

l'équation (A.13) se réécrit :

$$S_{ijmnpq}^2 \dot{A}_{pq} V^I = \int_{\Sigma} (S_{ijmn}^1 - \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn}) w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad (A.16).$$

Du fait de la définition de :

$$\dot{V}^I = \int_{\Sigma} w_{\alpha} n_{\alpha} dS \quad (A.17),$$

on a finalement l'intégrale  $\mathcal{J}$  (A.8) :

$$\mathcal{J} = \int_{\Sigma} \mathcal{P}_{ijkl} C_{klmn} w_{\alpha} n_{\alpha} dS = S_{ijmn}^1 \dot{V}^I - S_{ijmnpq}^2 \dot{A}_{pq} V^I \quad (A.18).$$

**A3 - Vérification de la relation (A.18) dans le cas d'une sphère de rayon unitaire ( $a=1$ ) pour un milieu isotrope.**

a) Calcul de  $\mathcal{R}^1 = S_{ijmn}^1 \dot{V}^I - S_{ijmnpq}^2 \dot{A}_{pq} V^I$

La définition (A.17) et la relation (B.10) permettent d'obtenir :

$$\dot{V}^I = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} A_{pq}^{-1} \dot{A}_{qr} x_r n_p dS \quad (A.19).$$

Le théorème de la divergence et la relation  $x_{i,j} = \delta_{i,j}$  modifient l'équation (A.19) sous la forme :

$$\dot{V}^I = -\frac{1}{2} A_{pq}^{-1} \dot{A}_{qp} \int_{V^I} dV = -\frac{1}{2} A_{pq}^{-1} \dot{A}_{qp} V^I \quad (A.20).$$

Le tenseur d'Eshelby  $S_{ijkl}^1$  et sa dérivée  $S_{ijklpq}^2$  définis selon les relations de l'annexe B (B.1 et B.20) peuvent se réécrire de la manière suivante :

$$S_{ijkl}^1 = \frac{1}{2} (T_{ijmn}^1 + T_{jimn}^1) C_{mnkl} \quad (A.22),$$

et

$$\begin{aligned} S_{ijklpq}^2 = & \frac{1}{8} \left( A_{pt}^{-1} (T_{ijmntq}^2 + T_{jimntq}^2) \right. \\ & \left. + A_{qt}^{-1} (T_{ijmntp}^2 + T_{jimntp}^2) \right) C_{mnkl} \\ & - \frac{1}{4} A_{pq}^{-1} (T_{ijmn}^1 + T_{jimn}^1) C_{mnkl} \end{aligned} \quad (A.23),$$

où  $T_{ijmn}^1$  et  $T_{ijmnpq}^2$  sont déterminés par (B.22 et B.23).

La relation  $\mathcal{R}^1$  se transforme à partir des équations (A.20 à A.23) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 = & -\frac{1}{8} \left( A_{pt}^{-1} (T_{ijmntq}^2 + T_{jimntq}^2) \right. \\ & \left. + A_{qt}^{-1} (T_{ijmntp}^2 + T_{jimntp}^2) \right) C_{mnkl} \dot{A}_{pq} V^I \end{aligned} \quad (A.24).$$

Le cas d'une sphère unitaire ( $a=1$ ) pour un milieu isotrope, entraîne les relations suivantes :

$$A_{pq}^{-1} = a^2 \delta_{pq} = \delta_{pq} \quad (A.25),$$

$$V^I = \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{4\pi}{3} \quad (A.26).$$

Le tenseur  $T_{ijmnpq}^2$  défini dans ce cas par la relation (B.68), en tenant compte des symétries :

$$S_{ijkl}^1 = S_{jikl}^1 = S_{ijlk}^1 = S_{jilk}^1 \quad (A.27),$$

donne finalement  $\mathcal{R}^1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^1 = \frac{\pi}{105(1-\nu)\mu} & \left( \delta_{ij} (\delta_{kl} \delta_{mn} + 2\bar{\Delta}_{klmn}) + 2\delta_{kl} \bar{\Delta}_{ijmn} \right. \\ & \left. - 4(5-7\nu)\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} - 2(6-7\nu)\delta_{mn} \bar{\Delta}_{ijkl} \right) C_{mnkl} \dot{A}_{pq} \end{aligned} \quad (A.28),$$

avec les définitions :

$$\bar{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (A.29),$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} = \frac{1}{4} & \left( \delta_{ik} \bar{\Delta}_{jlmn} + \delta_{il} \bar{\Delta}_{jkmn} + \delta_{im} \bar{\Delta}_{jnkl} + \delta_{in} \bar{\Delta}_{jmk l} \right) \\ & \quad (A.30). \end{aligned}$$

$$b) \text{ Calcul de } \mathcal{R}^2 = \int_{\Sigma} \mathcal{P}_{ijkl} C_{klrs} w_{\alpha} n_{\alpha} dS$$

Selon Hill [H83], l'opérateur interfacial  $\mathcal{P}_{ijkl}$  pour un milieu isotrope est égal à :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ijkl} = \frac{1}{4\mu} & \left( \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k \right) \\ & - \frac{1}{2\mu(1-\nu)} n_i n_j n_k n_l \end{aligned} \quad (A.31).$$

Sous cette condition et selon l'équation (B.10), la relation  $\mathcal{R}^2$  se réécrit :

$$\mathcal{R}^2 = \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tq} C_{klrs} \left( \int_{\Sigma} \frac{1}{2\mu(1-\nu)} n_i n_j n_k n_l n_p x_q dS - \int_{\Sigma} \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) n_p x_q dS \right) \quad (A.32).$$

La sphère de rayon unitaire ( $a=1$ ) entraîne en plus de l'équation (A.25), les relations suivantes :

$$x_i = a n_i = n_i \quad (A.33),$$

$$n_i = \chi_i \quad (A.34),$$

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (A.35),$$

où  $\chi_i$  sont les cosinus directeurs définis par :

$$\begin{cases} \chi_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \chi_3 = \cos \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix} \quad (A.36).$$

Pour déterminer la relation  $\mathcal{R}^2$ , il ne reste plus que deux types d'intégrales à résoudre :

$$\Delta_{ijkl}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \sin \theta d\theta d\varphi \quad (A.37),$$

et

$$\Delta_{ijklpq}^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \chi_p \chi_q \sin \theta d\theta d\varphi \quad (A.38),$$

soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 = \frac{1}{2} \dot{A}_{pq} C_{klrs} & \left( \frac{1}{2\mu(1-\nu)} \Delta_{ijklpq}^3 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\mu} \left( \delta_{ik} \Delta_{jlpq}^2 + \delta_{il} \Delta_{jkpq}^2 + \delta_{jk} \Delta_{ilpq}^2 + \delta_{jl} \Delta_{ikpq}^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (A.39).$$

Le déroulement de l'obtention des intégrales  $\Delta_{ijkl}^2$  et  $\Delta_{ijklpq}^3$  est développé dans l'annexe C. Et on obtient :

$$\Delta_{ijkl}^2 = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2\bar{\Delta}_{ijkl}) \quad (A.40),$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{ijklmn}^3 = \frac{4\pi}{105} & (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 2\delta_{ij} \bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl} \bar{\Delta}_{ijmn} \\ & + 2\delta_{mn} \bar{\Delta}_{ijkl} + 8\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn}) \end{aligned} \quad (A.41).$$

Finalement une relation (A.42) pour  $\mathcal{R}^2$  identique à celle de  $\mathcal{R}^1$  (A.28) est déterminée :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^2 = \frac{\pi}{105(1-\nu)\mu} & (\delta_{ij} (\delta_{kl} \delta_{mn} + 2\bar{\Delta}_{klmn}) + 2\delta_{kl} \bar{\Delta}_{ijmn} \\ & - 4(5-7\nu) \bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} - 2(6-7\nu) \delta_{mn} \bar{\Delta}_{ijkl}) C_{mnkl} \dot{A}_{pq} \end{aligned} \quad (A.42),$$

avec les définitions :

$$\bar{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (A.29),$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} = \frac{1}{4} & (\delta_{ik} \bar{\Delta}_{jlmn} + \delta_{il} \bar{\Delta}_{jkmn} + \delta_{im} \bar{\Delta}_{jknk} + \delta_{in} \bar{\Delta}_{jmk}) \end{aligned} \quad (A.30).$$

## A4 - Compléments thermodynamiques

Une autre manière d'obtenir les forces thermodynamiques est développée dans ce paragraphe. On peut noter que dans la démarche déroulée dans le chapitre III, les forces thermodynamiques découlent de l'énergie libre d'Helmholtz  $\mathcal{W}(E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, A, f)$  par la relation suivante :

$$F_{X_i} = - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial X_i}(E_{kl}, X_j) \quad (A.43),$$

où les variables internes  $X_i$  sont :

- $\epsilon^{PS}$  et  $\epsilon^{PH}$  : déformation plastique par phase S et H
- $f$  : fraction volumique des cellules
- les demi-axes  $a_i$  et les angles  $\alpha_i$  de l'ellipsoïde regroupés dans le tenseur  $A_{ij}$ .

L'énergie libre d'Helmholtz appliquée au matériau biphasé et à la représentation simplifiée de la structure cellulaire par deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques : exposé dans le paragraphe III.3.1, s'écrit avec les variables internes ci-dessus par unité de volume :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(E, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A) = & \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^P) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^P) \\ & + \frac{1}{2} f(1-f) (\epsilon_{ij}^{PS} - \epsilon_{ij}^{PH}) C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1(A)) (\epsilon_{mn}^{PS} - \epsilon_{mn}^{PH}) \end{aligned} \quad (III.156),$$

où  $E_{ij}^P = f \epsilon_{ij}^{PS} + (1-f) \epsilon_{ij}^{PH}$ .

L'application de la relation (A.43) sur l'énergie libre d'Helmholtz permet de retrouver les forces thermodynamiques (III.151) avec la propriété (III.163) et les définitions (III.164 et III.165) pour les contraintes de chaque phase par :

$$\begin{cases} F_{\epsilon_{ij}^{PS}} = f \sigma_{ij}^S \\ F_{\epsilon_{ij}^{PH}} = (1-f) \sigma_{ij}^H \\ F_f = \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^P - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^P \\ F_{A_{pq}} = \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \Delta \epsilon_{mn}^P \end{cases} \quad (A.44).$$

On remarque également que la contrainte macroscopique est déduite par cette relation :

$$\Sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E_{ij}}(E_{kl}, X_m) \quad (A.45).$$

On peut également déterminer les forces thermodynamiques par l'énergie complémentaire  $\Psi$  dont la variable de contrôle est la contrainte  $\Sigma_{ij}$  et non plus la déformation totale  $E_{ij}$ . Cette énergie complémentaire  $\Psi(\Sigma, X_k)$  [R71] dépendante des mêmes variables internes que pour l'énergie libre d'Helmholtz  $\mathcal{W}(E, X_k)$ , se déduit par la relation :

$$\Psi(\Sigma, X_k) = E_{ij} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial E_{ij}}(E, X_k) - \mathcal{W}(E, X_k) \quad (A.46).$$

Des relations (A.45) et (III.156), l'énergie complémentaire (A.46) se réécrit avec l'utilisation de la loi du comportement élastique (III.51) :

$$\begin{aligned} \Psi(\Sigma, \epsilon^{PS}, \epsilon^{PH}, f, A) &= \frac{1}{2} \Sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1} \Sigma_{kl} + E_{ij}^P \Sigma_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{2} f(1-f) \Delta \epsilon_{ij}^P C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1(A)) \Delta \epsilon_{mn}^P \end{aligned} \quad (A.47),$$

$$\text{où } \Delta \epsilon_{ij}^P = \epsilon_{ij}^{PS} - \epsilon_{ij}^{PH}.$$

Tout comme la première démarche (par l'énergie libre d'Helmholtz), on a des relations similaires à (A.45) et à (A.43). Ces



équations déterminent les forces thermodynamiques des variables internes  $X_i$  et la déformation totale  $E_{ij}$  par :

$$F_{X_i} = \frac{\partial \Psi}{\partial X_i}(\Sigma_{kl}, X_j) \quad (A.48),$$

$$E_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \Sigma_{ij}}(\Sigma_{kl}, X_m) \quad (A.49).$$

Par la relation (A.48), on retrouve encore les mêmes forces thermodynamiques, à l'aide des équations (III.163 à III.165) :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\epsilon_{ij}^{ps}} = f \sigma_{ij}^S \\ F_{\epsilon_{ij}^{ph}} = (1-f) \sigma_{ij}^H \\ F_f = \Sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (1-2f) \Delta \epsilon_{ij}^p C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^1) \Delta \epsilon_{mn}^p \\ F_{A_{pq}} = \frac{1}{2} f (1-f) \Delta \epsilon_{ij}^p C_{ijkl} S_{klmnpq}^2 \Delta \epsilon_{mn}^p \end{array} \right. \quad (A.50).$$

## **Références bibliographiques**

- [CSB94] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M.,  
Micromechanical approach of the coated inclusion  
problem and applications to composite materials, 1994,  
Transaction of the ASME, Vol.16, pp(274-278)
- [CSB95a] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M.,  
Comportement élastique global des composites à inclusions  
enrobées : modélisation micromécanique et applications,  
1995, 2<sup>ème</sup> congrès de mécanique, Casablanca Maroc,  
pp(223-232)
- [CSB95b] CHERKAOUI M., SABAR H., BERVEILLER M.,  
Elastic composites with coated reinforcements : a  
micromechanical approach for non homothetic topology,  
1995, Int. J. Engng Sci., Vol.33, N°6, pp(829-843)
- [H03] HADAMARD J., Leçons sur la propagation des ondes et  
les équations de l'hydrodynamique, 1903, cours du collège  
de France, Paris
- [H83] HILL R., Interfacial operators in the mechanics of  
composite media, 1983, J. Mech. Phys. Solids., Vol.31,  
N°4, pp(347-357)
- [R71] RICE J.R., Inelastic constitutive relations for solids : an  
internal-variable theory and its application to metal  
plasticity, 1971, J. Mech. Phys. Solids, Vol.19, pp(433-  
455)
- [W91] WALPOLE L.J., A rotated rigid ellipsoidal inclusion in  
an elastic medium, 1991, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol.433,  
pp(179-207)

# **ANNEXE B :**

## **Détermination des tenseurs : $S^1$ , $S^2$ , $S^3$**

|  |             |
|--|-------------|
| <b>B.1 - Caractérisation d'un ellipsoïde et de son évolution cinématique</b> | <i>p177</i> |
| <b>B.2 - Méthode de calcul par transformée de Fourier</b>                    | <i>p183</i> |
| B.2.1 - <u>Cas général</u>   | <i>p183</i> |
| B.2.2 - <u>Cas d'un milieu isotrope</u>                                      | <i>p190</i> |
| <b>B.3 - Conclusion</b>  | <i>p193</i> |

## Annexe B :

### Détermination des tenseurs $S^1, S^2, S^3$

Dans cette annexe B, on rappelle une méthode d'obtention du tenseur d'Eshelby  $S^1$  défini selon les techniques de Green pour une inclusion ellipsoïdale par :

$$\begin{aligned} S_{ijmn}^1(r, t) &= - \int_{V^I} \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{ik,jl} + \mathcal{G}_{jk,il}) (r - r') C_{klmn} dV' \\ &= \int_{V^I} \Gamma_{ijkl} (r - r') C_{klmn} dV' \end{aligned} \quad (B.1).$$

On étends cette méthode aux dérivées  $S^2$  et  $S^3$  du tenseur  $S^1$  par rapport aux paramètres de morphologie (demi-axes et angles) contractés en un tenseur  $A_{ij}$ . Les relations entre ce tenseur  $A_{ij}$  et les paramètres de morphologie sont définies dans la suite de cette annexe. Avant d'aborder proprement dit cette méthode, une formulation dans le paragraphe suivant des dérivées  $S^2$  et  $S^3$  en fonction du tenseur de Green est proposée ainsi que les caractéristiques et l'évolution cinématique dues à la forme ellipsoïdale.

#### B.1 - Caractérisation d'un ellipsoïde et de son évolution cinématique

Par dérivation particulière de l'équation (B.1), on obtient que la dérivée première par rapport au temps est égale à :

$$\frac{dS_{ijmn}^1}{dt}(r, t) = \int_{\partial V^I} \Gamma_{ijkl} (r - r') C_{klmn} v_p n_p dS' \quad (B.2),$$

où  $v$  est la vitesse de la surface de l'ellipsoïde et  $n$  sa normale. Ceci avec l'hypothèse que le tenseur de Green, ainsi que le tenseur des constantes élastiques  $C$ , ne dépendent pas du temps.

En appliquant le théorème de la divergence, l'équation (B.2) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dS_{ijmn}^1}{dt}(r, t) = & - \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} v_{p'} dV' \\ & + \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} v_{p',p'} dV' \end{aligned} \quad (B.3),$$

avec la propriété des dérivées du tenseur de Green :

$$\mathcal{G}_{ik,jlp}(r-r') = -\mathcal{G}_{ik,jlp'}(r-r') \quad (B.4).$$

De la même manière, on définit la dérivée seconde du tenseur d'Eshelby par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S_{ijmn}^1}{dt^2}(r, t) = & \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,pq}(r-r') C_{klmn} v_{p'} v_{q'} dV' \\ & - \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} (v_{p',q'} v_{q'} + v_{p'} v_{q',q'}) dV' \\ & - \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,q}(r-r') C_{klmn} v_{p',p'} v_{q'} dV' \\ & + \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} (v_{p',p'} v_{q'} + v_{p',p'} v_{q',q'}) dV' \\ & - \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} \frac{dv_{p'}}{dt} dV' \\ & + \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} \frac{dv_{p',p'}}{dt} dV' \end{aligned} \quad (B.5).$$

Dans les équations (B.3) et (B.5) on peut remarquer l'intervention de la vitesse de déplacement  $v$  de l'enveloppe d'un volume fermé et de ses dérivées temporelles ou spatiales. L'application des propriétés de l'ellipsoïde réduit tous ces termes de vitesse, de gradient ou d'accélération à des fonctions du tenseur de morphologie  $A_{ij}$  et de ses dérivées première et secondaire par rapport au temps. En effet, un ellipsoïde est décrit par trois demi-axes dans son repère (cf. figure B.1) principal et par trois angles d'Euler pour l'orientation entre ce repère principal par rapport au repère du réseau cristallin. Et ces six paramètres peuvent être regroupés dans le tenseur  $A_{ij}$  obtenu à partir de l'équation d'un ellipsoïde dans un repère quelconque :

$$A_{ij}x_i x_j = 1 \quad (B.6),$$

où  $x_i$  sont les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde.

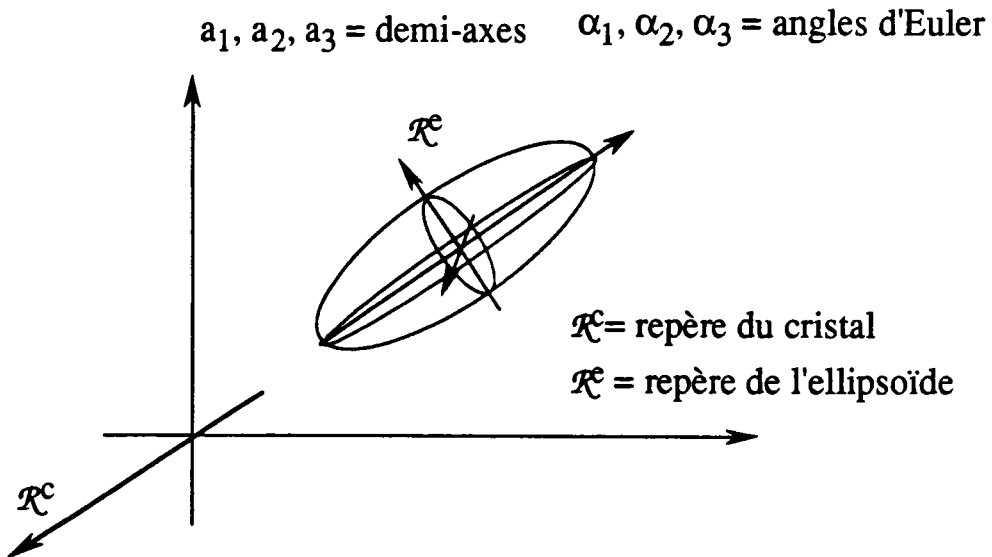


Fig.B.1 Description ellipsoïdale.

Dans son repère propre, l'ellipsoïde possède comme tenseur  $A_{ij}$  :

$$A_{ij}^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_3^2} \end{pmatrix} \quad (B.7),$$

ce qui donne la relation courante d'un ellipsoïde, soit :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad (\text{B.8}).$$

En utilisant la matrice  $b_{ij}$  de passage entre un repère quelconque où sont définis les angles  $\alpha_i$  et le repère propre de l'ellipsoïde, on a la définition de  $A_{ij}$  en fonction des demi-axes  $a_i$  et des angles  $\alpha_i$  :

$$A_{ij}(a_k, \alpha_l) = b_{im}(\alpha_l) b_{jn}(\alpha_l) A_{mn}^e(a_k) \quad (\text{B.9}).$$

Par dérivation temporelle de l'équation (B.6), la vitesse  $v$  de la surface de l'ellipsoïde vaut :

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = -\frac{1}{2} A_{ik}^{-1} \dot{A}_{kl} x_l \quad (\text{B.10}).$$

On obtient également ses dérivées temporelles ou spatiales :

$$v_{i,j} = \dot{x}_{i,j} = -\frac{1}{2} A_{ik}^{-1} \dot{A}_{kj} \quad (\text{B.11}),$$

$$v_{i,jk} = 0 \quad (\text{B.12}),$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} A_{ik}^{-1} \dot{A}_{kl} A_{lm}^{-1} \dot{A}_{mn} x_n - A_{ik}^{-1} \ddot{A}_{kl} x_l \right\} \quad (\text{B.13}),$$

$$\frac{dv_{i,j}}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ A_{im}^{-1} \dot{A}_{mn} A_{nk}^{-1} \dot{A}_{kj} - A_{ik}^{-1} \ddot{A}_{kj} \right\} \quad (\text{B.14}),$$

avec la propriété :

$$\dot{A}_{ij}^{-1} = -A_{ik}^{-1} \dot{A}_{kl} A_{lj}^{-1} \quad (\text{B.15}).$$

A partir des équations (B.10) à (B.15), les relations (B.3) et (B.5) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{dS^1_{ijmn}}{dt}(r, t) = & \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{ts} \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} x'_s dV' \\ & - \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tp} \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} dV' \end{aligned} \quad (B.16),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2 S^1_{ijmn}}{dt^2}(r, t) = & \frac{1}{4} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tr} A_{qu}^{-1} \dot{A}_{us} \\ & \times \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,pq}(r-r') C_{klmn} x'_r x'_s dV' \\ & - \left( A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tq} A_{qu}^{-1} \dot{A}_{ur} + \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tr} A_{qu}^{-1} \dot{A}_{uq} \right) \\ & \times \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} x'_r dV' \\ & + \frac{1}{2} \left( A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tq} A_{qu}^{-1} \dot{A}_{up} + \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \dot{A}_{tp} A_{qu}^{-1} \dot{A}_{uq} \right) \\ & \times \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} dV' \\ & + \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \ddot{A}_{tr} \int_{V^I} \Gamma_{ijkl,p}(r-r') C_{klmn} x'_r dV' \\ & - \frac{1}{2} A_{pt}^{-1} \ddot{A}_{tp} \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') C_{klmn} dV' \end{aligned} \quad (B.17).$$

En factorisant les dérivées temporelles première et secondaire du tenseur  $A_{ij}$  avec la prise en compte de ses symétries et par identification avec les relations suivantes :

$$\frac{dS^1_{ijkl}}{dt}(r, t) = S^2_{ijklpq} \dot{A}_{pq} \quad (B.18),$$

et



$$\frac{d^2 S_{ijkl}^1}{dt^2}(r, t) = S_{ijklpqrs}^3 \dot{A}_{pq} \dot{A}_{rs} + S_{ijklpq}^2 \ddot{A}_{pq} \quad (B.19),$$

on obtient :

$$S_{ijklpq}^2 = -\frac{1}{4} C_{mnkl} \left\{ \frac{1}{2} A_{tq}^{-1} (T_{ijmntp}^2 + T_{jimntp}^2) + \frac{1}{2} A_{tp}^{-1} (T_{ijmntq}^2 + T_{jimntq}^2) - A_{pq}^{-1} (T_{ijmn}^1 + T_{jimn}^1) \right\} \quad (B.20),$$

et

$$\begin{aligned} S_{ijklpqrs}^3 = & -\frac{1}{32} \left\{ A_{tp}^{-1} A_{ur}^{-1} (T_{ijmntqus}^3 + T_{jimntqus}^3) \right. \\ & + A_{tq}^{-1} A_{ur}^{-1} (T_{ijmntpus}^3 + T_{jimntpus}^3) \\ & + A_{tp}^{-1} A_{us}^{-1} (T_{ijmntqur}^3 + T_{jimntqur}^3) \\ & + A_{tq}^{-1} A_{us}^{-1} (T_{ijmntpur}^3 + T_{jimntpur}^3) \left. \right\} C_{mnkl} + \frac{1}{16} C_{mnkl} \\ & \times \left\{ \left( A_{tp}^{-1} A_{qr}^{-1} + A_{tq}^{-1} A_{pr}^{-1} + A_{pq}^{-1} A_{tr}^{-1} \right) (T_{ijmnts}^2 + T_{jimnts}^2) \right. \\ & + \left( A_{tp}^{-1} A_{qs}^{-1} + A_{tq}^{-1} A_{ps}^{-1} + A_{pq}^{-1} A_{ts}^{-1} \right) (T_{ijmnt r}^2 + T_{jimnt r}^2) \\ & + \left( A_{tr}^{-1} A_{sp}^{-1} + A_{ts}^{-1} A_{rp}^{-1} + A_{rs}^{-1} A_{tp}^{-1} \right) (T_{ijmntq}^2 + T_{jimntq}^2) \\ & + \left. \left( A_{tr}^{-1} A_{sq}^{-1} + A_{ts}^{-1} A_{rq}^{-1} + A_{rs}^{-1} A_{tq}^{-1} \right) (T_{ijmntp}^2 + T_{jimntp}^2) \right\} \\ & - \frac{1}{8} \left( A_{pq}^{-1} A_{rs}^{-1} + A_{rp}^{-1} A_{qs}^{-1} + A_{rq}^{-1} A_{ps}^{-1} \right) C_{klmn} (T_{ijmn}^1 + T_{jimn}^1) \end{aligned} \quad (B.21),$$

où

$$T_{ijkl}^1(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl}(r - r') dV' \quad (B.22),$$

$$T_{ijklmn}^2(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jlm}(r - r') x'_n dV' \quad (B.23),$$

$$T_{ijklmnpq}^3(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jlmp}(r - r') x'_n x'_q dV' \quad (B.24).$$

La détermination des tenseurs  $S^1, S^2$  et  $S^3$  donnés respectivement par les relations (B.1), (B.20) et (B.21) nécessite le calcul des intégrales :

$$T_{ijkl}^1(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jl}(r - r') dV' \quad (B.22),$$

$$T_{ijklmn}^2(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jlm}(r - r') x'_n dV' \quad (B.23),$$

$$T_{ijklmnpq}^3(r, t) = - \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik,jlmp}(r - r') x'_n x'_q dV' \quad (B.24).$$

La résolution de ces trois intégrales (B.22), (B.23) et (B.24) est complexe, du fait de la présence du tenseur de Green  $\mathcal{G}$ . Seule une méthode numérique permet de les obtenir dans les cas d'un ellipsoïde quelconque dans un milieu anisotrope. Une formulation explicite de ces intégrales est abordée par une méthode par transformée de Fourier pour un milieu isotrope et un ellipsoïde sphérique. Dans le paragraphe suivant, on développe le principe de cette méthode.

Etant donné que les angles  $\alpha_i$  d'Euler sur l'orientation de l'ellipsoïde n'interviennent que par l'intermédiaire du tenseur  $A_{ij}$ , la fin de cette annexe traitera uniquement les demi-axes et utilisera la définition (B.7) du tenseur  $A_{ij}$  dans le repère principal de l'ellipsoïde.

## **B.2 - Méthode de calcul par transformée de Fourier**

### **B.2.1 - Cas général**

Une méthode numérique pour le problème d'une inclusion ellipsoïdale a été proposée pour le calcul de  $T^1$  (B.22) par Kneer [K65] et reprise par d'autres [MK71, LM73, L77, G77]. Sabar [S90a] a étendu cette méthode à

la détermination du tenseur  $T_{ijklmn}^2$  quand  $m = n$ . Elle consiste à utiliser la transformée de Fourier du tenseur de Green  $\mathcal{G}$  et à intégrer dans l'espace  $k$  (conjugué de  $r$ ). Cette méthode numérique utilisable pour un ellipsoïde quelconque dans un milieu anisotrope peut être explicitée pour des ellipsoïdes particuliers dans un milieu isotrope.

Etant données les formes similaires des équations (B.22), (B.23) et (B.24), une écriture réduite est posée sous la forme de :

$$\tau_{ijkl}(r, t) = -\frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \int_{V^I} \mathcal{G}_{ik}(r - r') f(r') dV' \quad (B.25),$$

où l'opérateur de dérivation  $D$  et la fonction  $f$  sont selon les cas :

pour (B.22) :

$$D = 1 \quad f(r') = 1 \quad \forall r' \in V^I \quad (B.26),$$

pour (B.23) :

$$D = \frac{\partial}{\partial x_m} \quad f(r') = x'_n \quad \forall r' \in V^I \quad (B.27),$$

pour (B.24) :

$$D = \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_p} \quad f(r') = x'_n x'_q \quad \forall r' \in V^I \quad (B.28).$$

Soit la transformée de Fourier du tenseur de Green :

$$\tilde{\mathcal{G}}_{jn}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{jn}(r) e^{-i(k_m x_m)} dV \quad (B.29),$$

et de son inverse :

$$\mathcal{G}_{jn}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V^k} \tilde{\mathcal{G}}_{jn}(k) e^{i(k_m x_m)} dV^k \quad (B.30),$$

avec  $dV^k = dk_1 dk_2 dk_3$ , où  $k$  est le vecteur conjugué du vecteur  $r$ .

Or le tenseur de Green  $\mathcal{G}$  est défini comme la solution de l'équation différentielle d'équilibre :

$$C_{ijkl} \mathcal{G}_{jn,ik}(r) + \delta_{ln} \delta(r) = 0 \quad (B.31).$$

On a donc besoin des dérivées première et secondaire spatiales du tenseur de Green. De la relation (B.30) il découle :

$$\mathcal{G}_{jn,i}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V^k} ik_i \tilde{\mathcal{G}}_{jn}(k) e^{i(k_m x_m)} dV^k \quad (B.32),$$

et

$$\mathcal{G}_{jn,ik}(r) = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{V^k} k_i k_k \tilde{\mathcal{G}}_{jn}(k) e^{i(k_m x_m)} dV^k \quad (B.33).$$

On définit également la transformée de Fourier de Dirac :

$$\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) e^{-i(k_m x_m)} dV = 1 \quad (B.34),$$

et son inverse :

$$\delta(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V^k} e^{i(k_m x_m)} dV^k \quad (B.35).$$

Les résultats (B.33) et (B.35) permettent de réécrire l'équation d'équilibre (B.31) sous la forme suivante :

$$C_{ijkl} \tilde{\mathcal{G}}_{jn}(k) k_i k_k = \delta_{ln} \quad (B.36).$$

Par substitution du tenseur de Green  $\mathcal{G}$  par sa transformée de Fourier (B.30), l'équation (B.25) devient :

$$\begin{aligned} T_{ijkl}(r, t) = & -\frac{1}{8\pi^3} \frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\ & \times \int_{V^l} \int_{V^k} \tilde{G}_{ik}(k) f(r') e^{i(k_m(x_m - x'_m))} dV^k dV' \end{aligned} \quad (B.37).$$

En prenant comme repère, le repère R d'origine O, centre de l'ellipsoïde et ayant pour axes les trois diamètres orthogonaux de l'inclusion, et l'introduction des cosinus directeurs du vecteur k on notera  $\chi_j$  (où  $j = 1, 2, 3$ ) décrit de la manière suivante :

$$k_j = \|k\| \chi_j \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad (B.38),$$

avec

$$\begin{cases} \chi_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \chi_3 = \cos \theta \end{cases} \quad (B.39),$$

où  $\|k\|$  (module du vecteur k)  $\theta, \varphi$  sont les coordonnées sphériques de k ( $\|k\| \in [0, +\infty[; \theta \in [0, \pi] \varphi \in [0, 2\pi]$ ), permet de transformer la relation (B.36) en :

$$C_{ijkl} \tilde{G}_{jn}(k) k^2 \chi_i \chi_k = \delta_{ln} \quad (B.40).$$

En posant :

$$C_{ijkl} \chi_i \chi_k = M_{jl}(\chi) \quad (B.41),$$

l'équation (B.40) s'écrit alors :

$$k^2 \tilde{G}_{jn}(k) = M_{jn}^{-1}(\chi) \quad (B.42).$$

La définition de  $dV^k$  (B.30) devient avec le changement en coordonnées sphériques :

$$dV^k = k^2 dk dS(\chi) \quad (B.43),$$

où  $dS(\chi)$  est l'élément de surface sur la sphère (S) dans l'espace  $k$  :

$$dS(\chi) = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (B.44).$$

Avec l'application de toutes les équations précédentes, la relation (B.37) se réécrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ijkl}(r, t) = & -\frac{1}{8\pi^3} \frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\ & \times \int_{V^I} \int_0^{+\infty} \int_S M_{ik}^{-1}(\chi) f(r') e^{i(\|k\| \chi_m(x_m - x'_m))} dk dS(\chi) dV' \end{aligned} \quad (B.45).$$

Or d'après Faivre [F71], l'intégrale sur  $k$  est complexe, cependant le tenseur  $M_{ik}^{-1}$  est réel et seule la partie réelle de l'intégrale sur  $k$  doit donner une contribution finale non nulle. On laisse donc de côté sa partie imaginaire.

Or la partie réelle :

$$\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} e^{i(\|k\| \chi_m(x_m - x'_m))} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\|k\| \chi_m(x_m - x'_m))} dk \quad (B.46),$$

et l'utilisation de la propriété de la fonction de Dirac unidirectionnelle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\|k\|\eta} dk = 2\pi \delta(\eta) \quad (B.47),$$

permettent de modifier l'équation (B.45) en :

$$\begin{aligned} T_{ijkl}(r, t) = & -\frac{1}{8\pi^2} \int_S M_{ik}^{-1}(\chi) \frac{D\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \\ & \times \int_{V^I} f(r') \delta(\chi_m(x_m - x'_m)) dV' dS(\chi) \end{aligned} \quad (B.48).$$

Du fait qu'en dehors de l'inclusion  $V^I$ , le produit scalaire  $\chi.(r - r')$  et la fonction  $f(r')$  sont nuls, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{V^I} f(r') \delta(\chi_m(x_m - x'_m)) dV' = \\ \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r') \delta(\chi_m(x_m - x'_m)) dV' \end{aligned} \quad (B.49).$$

A l'aide d'un théorème donné par Kecs et Téodorescu [KT74], l'intégrale précédente  $I_f(r')$  devient :

$$I_{f(r)} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(r') \delta(\chi_m(x_m - x'_m)) dV' = \frac{1}{\chi_\alpha} \iint_P f(r') dx'_r dx'_s \quad (B.50),$$

avec  $p$  le plan de normale  $\chi$  et  $(\alpha, r, s)$  étant une permutation circulaire de  $(1, 2, 3)$ .

L'intégrale  $I_f(r')$  dont les zones d'intégration sont décrites dans la figure B.2, est une intégrale de surface classique et a pour chaque cas les solutions suivantes :

1er cas :  $f(r')=1$

$$\frac{1}{\chi_\alpha} \iint_P dx'_r dx'_s = \frac{a_1 a_2 a_3 \pi}{\kappa} (1 - \mathcal{H}^2) \quad (B.51),$$

avec

$$\kappa = \sqrt{a_1^2 \chi_1^2 + a_2^2 \chi_2^2 + a_3^2 \chi_3^2} \quad (B.52),$$

et

$$\mathcal{H} = \frac{\chi_i x_i}{\kappa} \quad (\text{B.53}),$$

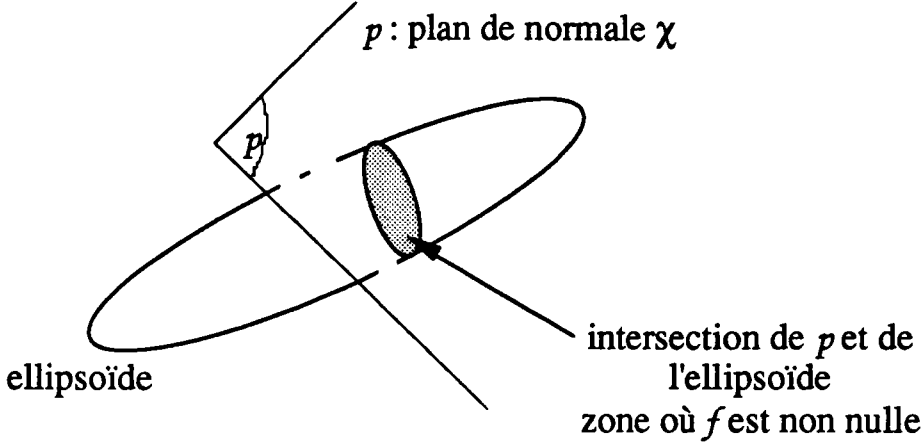


Fig.B.2 : Zone d'intégration de l'intégrale  $I_f(r')$

2ème cas :  $f(r') = x'_n$

$$\frac{1}{\chi_\alpha} \iint_p x'_n dx'_r dx'_s = a_N^2 \chi_n \frac{a_1 a_2 a_3 \pi}{\kappa^2} (1 - \mathcal{H}^2) \mathcal{H} \quad (\text{B.55}),$$

3ème cas :  $f(r') = x'_n x'_q$

$$\frac{1}{\chi_\alpha} \iint_p x'_n x'_q dx'_r dx'_s = a_N^2 a_Q^2 \chi_n \chi_q \frac{a_1 a_2 a_3 \pi}{\kappa^3} (1 - \mathcal{H}^2) \mathcal{H}^2 \quad (\text{B.56}).$$

Pour les différents cas, la substitution des résultats (B.51), (B.54) et (B.55) dans l'intégrale (B.48) et les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \left[ (1 - \mathcal{H}^2) \right] = -2 \frac{\chi_j \chi_l}{\kappa^2} \quad (\text{B.56}),$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_l \partial x_m} \left[ (1 - \mathcal{H}^2) \mathcal{H} \right] = -6 \frac{\chi_j \chi_l \chi_m}{\kappa^3} \quad (\text{B.57}),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x_j \partial x_l \partial x_m \partial x_p} \left[ (1 - \mathcal{H}^2) \mathcal{H}^2 \right] = -24 \frac{\chi_j \chi_l \chi_m \chi_p}{\kappa^4} \quad (\text{B.58}),$$



permettent finalement d'obtenir :

$$T_{ijkl}^1 = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} \int_S M_{ik}^{-1}(\chi) \frac{\chi_j \chi_l}{\kappa^3} dS \quad (B.59),$$

$$T_{ijklmn}^2 = \frac{3a_1 a_2 a_3 a_N^2}{4\pi} \int_S M_{ik}^{-1}(\chi) \frac{\chi_j \chi_l \chi_m \chi_n}{\kappa^5} dS \quad (B.60),$$

$$T_{ijklmnpq}^3 = \frac{3a_1 a_2 a_3 a_Q^2 a_N^2}{\pi} \int_S M_{ik}^{-1}(\chi) \frac{\chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p \chi_q}{\kappa^7} dS \quad (B.61).$$

Tout comme l'a indiqué Eshelby au sujet du tenseur  $T^1$ , les tenseurs  $T^2$  et  $T^3$  sont uniformes dans l'inclusion ellipsoïdale. Dans le cas général, une méthode numérique classique (intégration par points de Gauss) permet d'obtenir ces trois intégrales (B.59), (B.60) et (B.61), mais une évaluation analytique de ces tenseurs est connue uniquement dans le cas d'un milieu isotrope.

### B.2.2 - Cas d'un milieu isotrope

Dans le cas d'un milieu isotrope, le tenseur des constante élastique  $C_{ijkl}$  vaut avec le coefficient de Poisson  $\nu$  et le module de cisaillement  $\mu$  :

$$C_{ijkl} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (B.62).$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier du tenseur de Green est connue explicitement [B78] et le tenseur  $M^{-1}$  devient :

$$M_{ik}^{-1}(\chi) = \frac{1}{\mu} \left( \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right) \quad (B.63).$$

Pour un ellipsoïde quelconque, les intégrales  $T^1$ ,  $T^2$  et  $T^3$  deviennent donc :

$$T_{ijkl}^1 = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\mu\pi} \int_S \left( \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right) \frac{\chi_j \chi_l}{\kappa^3} dS \quad (B.64),$$

$$T_{ijklmn}^2 = \frac{3a_1 a_2 a_3 a_N^2}{4\pi\mu} \int_S \left( \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right) \frac{\chi_j \chi_l \chi_m \chi_n}{\kappa^5} dS \quad (B.65),$$

et

$$T_{ijklmnpq}^3 = \frac{3a_1 a_2 a_3 a_Q^2 a_N^2}{\pi\mu} \times \int_S \left( \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right) \frac{\chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p \chi_q}{\kappa^7} dS \quad (B.66),$$

Pour une sphère unitaire, c'est-à-dire que  $a_1=a_2=a_3=1$  et  $\kappa=1$ , les intégrales  $T^1$ ,  $T^2$  et  $T^3$  se réduisent à :

$$T_{ijkl}^1 = \frac{1}{4\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.67),$$

$$T_{ijklmn}^2 = \frac{3}{4\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.68),$$

et

$$T_{ijklmnpq}^3 = \frac{3}{\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p \chi_q \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.69).$$

De ces relations, il suffit d'effectuer les intégrales doubles sur  $\theta$  et  $\varphi$  des fonctions trigonométriques de la forme  $\cos^n \theta$  et  $\sin^m \varphi$ . De l'annexe C, on trouve donc comme résultats analytiques pour un milieu isotrope et pour une sphère unitaire :

$$T_{ijkl}^1 = \frac{1}{30(1-\nu)\mu} \left( (9-10\nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right) \quad (B.70),$$

$$\begin{aligned} T_{ijklmn}^2 = & \frac{1}{70(1-\nu)\mu} \left( (13-14\nu)\delta_{ik}(\delta_{jl}\delta_{mn} + 2\bar{\Delta}_{jlmn}) \right. \\ & - (\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + 2\delta_{ij}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\bar{\Delta}_{ijmn} \\ & \left. + 2\delta_{il}\bar{\Delta}_{jkmn} + 2\delta_{im}\bar{\Delta}_{jnk l} + 2\delta_{in}\bar{\Delta}_{jmkl}) \right) \end{aligned} \quad (B.71),$$

$$\begin{aligned} T_{ijklmnpq}^3 = & \frac{2}{315(1-\nu)\mu} \left( (17-18\nu)\delta_{ik}(\delta_{jl}\delta_{mn}\delta_{pq} \right. \\ & + 2\delta_{jl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 2\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jlmn} + 2\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jlpq} \\ & + 8\bar{\bar{\Delta}}_{jlmnpq}) - (\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{pq} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\delta_{pq} \\ & + 2\delta_{ij}\delta_{kl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 2\delta_{ij}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{klpq} \\ & + 2\delta_{ij}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{ijpq} \\ & + 2\delta_{kl}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{ijmn} + 2\delta_{il}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jkpq} \\ & + 2\delta_{ip}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jqkl} + 2\delta_{iq}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jpkl} \\ & + 2\delta_{il}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jkmn} + 2\delta_{im}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jnkl} \\ & + 2\delta_{in}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jmkl} + 2\delta_{il}\delta_{jk}\bar{\Delta}_{mnpq} \\ & + 8\delta_{ij}\bar{\bar{\Delta}}_{klmnpq} + 8\delta_{kl}\bar{\bar{\Delta}}_{ijmnpq} + 8\delta_{il}\bar{\bar{\Delta}}_{jkmnpq} \\ & + 16\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijmnpqlpq} + 16\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijpqklmn} \\ & \left. + 4\bar{\Delta}_{ijmn}\bar{\Delta}_{klpq} + 4\bar{\Delta}_{ijpq}\bar{\Delta}_{klmn} \right) \end{aligned} \quad (B.72),$$

avec

$$\bar{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (B.73),$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} = \frac{1}{4}(\delta_{ik}\bar{\Delta}_{jlmn} + \delta_{il}\bar{\Delta}_{jkmn} + \delta_{im}\bar{\Delta}_{jnkl} + \delta_{in}\bar{\Delta}_{jmkl}) \quad (B.74),$$

$$\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijklmnpq} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \bar{\bar{\Delta}}_{jlmnpq} + \delta_{il} \bar{\bar{\Delta}}_{jk mnpq}) \quad (\text{B.75}).$$

Dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale ( $a_1 > a_2 > a_3$ ) la détermination des composantes des tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$  se ramène au calcul d'intégrales elliptiques :

$$F(\varphi, K) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - K \sin^2 \psi}} d\psi \quad (\text{B.76}),$$

et

$$E(\varphi, K) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - K \sin^2 \psi} d\psi \quad (\text{B.77}),$$

avec

$$\varphi = \sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}} \quad (\text{B.78}),$$

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2 - a_3^2}} \quad (\text{B.79}).$$

Or, ces intégrales ne sont pas connues explicitement dans le cas général d'inclusion  $a_1 > a_2 > a_3$  sauf pour quelques cas particuliers comme la pièce de monnaie (pennyshape  $a_1 = a_2 \gg a_3$ ) et d'autres [M87].

### B.3 Conclusion

Ces trois tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$  peuvent être obtenus également par intégration par points de Gauss. Dans le cas de la sphère unitaire ( $a=1$ ) dans un milieu isotrope ( $\nu=0,3, \mu=80000$  MPa), les tableaux B.1, B.2 et B.3 donnent les valeurs numériques non nulles des différentes méthodes, tout en conservant les symétries des tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$  résumées dans le tableau B.4. Ce tableau B.4 regroupe les indices selon leurs symétries, par exemple pour le tenseur  $T^1$ , on obtient :

$$T_{ijkl}^1 = T_{ilkj}^1 = T_{klij}^1 = T_{klji}^1 \quad (\text{B.80}).$$

Dans les tableaux B.1, B.2 et B.3, on obtient des valeurs semblables par les deux méthodes (intégration numérique par points de Gauss et formulation analytique) pour les tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$ .

| indices | valeur venant des équations analytiques | valeur venant par intégrations numériques |
|---------|---|---|
| 1 1 1 1 | .23810E-05                              | .23810E-05                                |
| 1 1 2 2 | -.59524E-06                             | -.59524E-06                               |
| 1 2 1 2 | .35714E-05                              | .35714E-05                                |

Tab.B.1 : valeur des composantes non nulles du tenseur  $T^1$  pour une sphère

| indices     | valeur venant des équations analytiques | valeur venant par intégrations numériques |
|-------------|---|---|
| 1 1 1 1 1 1 | .36735E-05                              | .36735E-05                                |
| 1 1 1 1 2 2 | .17347E-05                              | .17347E-05                                |
| 1 1 2 2 1 1 | -.76531E-06                             | -.76534E-06                               |
| 1 1 2 2 2 2 | -.76531E-06                             | -.76527E-06                               |
| 1 1 2 2 3 3 | -.25510E-06                             | -.25510E-06                               |
| 1 2 1 2 2 2 | .67347E-05                              | .67347E-05                                |
| 1 2 1 2 3 3 | .22449E-05                              | .22449E-05                                |

Tab.B.2 : valeur des composantes non nulles du tenseur  $T^2$  pour une sphère

|                  | groupes de symétrie |        |
|------------------|---------------------|--------|
| $T^1_{ijkl}$     | ik                  | jl     |
| $T^2_{ijklmn}$   | ik                  | jlmn   |
| $T^3_{ijklmnpq}$ | ik                  | jlmnpq |

Tab.B.4 : symétries des tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$  pour une sphère

| indices         | valeur venant des équations analytiques | valeur venant par intégrations numériques |
|-----------------|---|---|
| 1 1 1 1 1 1 1 1 | .95238E-05                              | .95215E-05                                |
| 1 1 1 1 1 1 2 2 | .25850E-05                              | .25875E-05                                |
| 1 1 1 1 1 2 1 2 | .25850E-05                              | .25875E-05                                |
| 1 1 1 1 2 1 2 1 | .25850E-05                              | .25875E-05                                |
| 1 1 1 1 2 2 2 2 | .32653E-05                              | .32627E-05                                |
| 1 1 1 2 2 1 2 2 | .32653E-05                              | .32627E-05                                |
| 1 2 1 2 2 1 2 1 | .32653E-05                              | .32627E-05                                |
| 1 1 1 1 2 2 3 3 | .10884E-05                              | .10884E-05                                |
| 1 1 1 1 2 3 2 3 | .10884E-05                              | .10884E-05                                |
| 1 2 1 2 3 1 3 1 | .10884E-05                              | .10884E-05                                |
| 1 1 2 1 1 1 1 2 | -.17007E-05                             | -.16984E-05                               |
| 1 1 2 1 1 1 2 1 | -.17007E-05                             | -.16984E-05                               |
| 1 1 2 1 1 2 2 2 | -.10204E-05                             | -.10228E-05                               |
| 1 1 2 1 2 1 2 2 | -.10204E-05                             | -.10228E-05                               |
| 1 1 2 1 1 2 3 3 | -.34014E-06                             | -.34015E-06                               |
| 1 1 2 1 1 3 2 3 | -.34014E-06                             | -.34015E-06                               |
| 1 1 2 2 3 1 3 1 | -.34014E-06                             | -.34015E-06                               |
| 1 2 1 2 2 2 2 2 | .19728E-04                              | .19731E-04                                |
| 1 2 1 2 2 2 3 3 | .39456E-05                              | .39456E-05                                |
| 1 2 1 2 2 3 2 3 | .39456E-05                              | .39456E-05                                |
| 1 2 1 2 3 2 3 2 | .39456E-05                              | .39456E-05                                |

*Tab.B.3 : valeur des composantes non nulles du tenseur  $T^3$  pour une sphère*

## Références bibliographiques

- [B78] BERVEILLER M., Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformation des polycristaux métalliques, 1978, Thèse d'état de l'université de Paris
- [F71] FAIVRE G., Hétérogénéités ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope, 1971, J. Physique, Vol.32, pp(325-331)
- [G77] GHARHEMANI F., Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusion in an anisotropic elastic materials, 1977, Mech. Res. Commun., Vol.4, pp(89-91)
- [K65] KNEER G., Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln Vielkristalliner Aggregate mit Texture, 1965, Phys. stat. sol., Vol.9, pp(825-838)
- [L77] LAWS N., The determination of stress and strain concentrations at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material, 1977, Phys. stat. sol., Vol.7, pp(91-97)
- [LM73] LIN S.C., MURA T., Elastic fields of inclusions in anisotropic media (II), 1973, Phys. stat. sol. (a), Vol.15, pp(281-285)
- [M87] MURA T., Micromechanics of defects in solids, 1987, in Mechanics of elastic and inelastic solids, eds Martinus nijhoff publishers
- [MK71] MURA T., KINOSHITA N., Green's functions for anisotropic elasticity, 1971, Phys. stat. sol. (b), Vol.47, pp(607-618)
- [S90a] SABAR H., Problèmes d'inclusions à frontière mobile et application, 1990, Thèse de l'université de Metz

# **ANNEXE C :**

**Recherche d'une forme analytique  
des tenseurs  $T^1$ ,  $T^2$ ,  $T^3$  des transformées de Fourier  
pour une sphère unitaire dans un milieu isotrope**



## ANNEXE C :

### Recherche d'une forme analytique des tenseurs $T^1, T^2, T^3$ des transformées de Fourier pour une sphère unitaire dans un milieu isotrope

Les composantes des tenseurs  $T^1, T^2$  et  $T^3$ , pour une inclusion sphérique de rayon unitaire à partir de la méthode de transformée de Fourier ont pour forme:

$$T_{ijkl}^1 = \frac{1}{4\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.67),$$

$$T_{ijklmn}^2 = \frac{3}{4\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.68),$$

$$T_{ijklmnpq}^3 = \frac{3}{\pi\mu} \int_S \chi_j \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p \chi_q \left\{ \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \chi_i \chi_k \right\} dS \quad (B.69),$$

où

$$dS = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (B.44),$$

avec les cosinus directeurs définis par le système:

$$\begin{cases} \chi_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \chi_3 = \cos \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix} \quad (B.39).$$

Des relations (B.67 à B.69), on remarque quatre types d'intégrales à déterminer :

$$\Delta_{ij}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \sin \theta d\theta d\varphi \quad (C.1),$$

$$\Delta_{ijkl}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \sin \theta d\theta d\varphi \quad (C.2),$$

$$\Delta_{ijklmn}^3 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \sin \theta d\theta d\varphi \quad (C.3),$$

$$\Delta_{ijklmnpq}^4 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p \chi_q \sin \theta d\theta d\varphi \quad (C.4).$$

Les composantes non nulles de  $\Delta_{ij}^1$  sont calculées facilement :

$$\Delta_{11}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \quad (C.5),$$

$$\Delta_{22}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \quad (C.6),$$

$$\Delta_{33}^1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} \quad (C.7),$$

et se condensent sous la forme:

$$\Delta_{ij}^1 = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad (C.8).$$

De la même manière que pour  $\Delta_{ij}^1$ , on définit les composantes non nulles pour  $\Delta_{ijkl}^2$ ,  $\Delta_{ijklmn}^3$ ,  $\Delta_{ijklmnpq}^4$  (cf tableaux C.1, C.2 et C.3). Puis, elles se condensent de la manière suivante:

$$\Delta_{ijkl}^2 = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\bar{\Delta}_{ijkl}) \quad (C.9),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ijklmn}^3 = \frac{4\pi}{105} & (\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + 2\delta_{ij}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\bar{\Delta}_{ijmn} \\ & + 2\delta_{mn}\bar{\Delta}_{ijkl} + 8\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn}) \end{aligned} \quad (C.10),$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ijklmnpq}^4 = \frac{4\pi}{945} & (\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{pq} + 2\delta_{ij}\delta_{kl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 2\delta_{ij}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{klpq} \\ & + 2\delta_{ij}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{ijpq} + 2\delta_{kl}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{ijmn} \\ & + 2\delta_{mn}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{ijkl} + 8\delta_{ij}\bar{\bar{\Delta}}_{klmnpq} + 8\delta_{kl}\bar{\bar{\Delta}}_{ijmnpq} \\ & + 8\delta_{mn}\bar{\bar{\Delta}}_{ijkpq} + 8\delta_{pq}\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} + 48\bar{\bar{\bar{\Delta}}}_{ijklmnpq} \\ & + 4\bar{\Delta}_{ijkl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 4\bar{\Delta}_{ijmn}\bar{\Delta}_{klpq} + 4\bar{\Delta}_{ijpq}\bar{\Delta}_{klmn}) \end{aligned} \quad (C.11),$$

où

$$\bar{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (C.12),$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} = \frac{1}{4} (\delta_{ik}\bar{\Delta}_{jlmn} + \delta_{il}\bar{\Delta}_{jkmn} + \delta_{im}\bar{\Delta}_{jnkl} + \delta_{in}\bar{\Delta}_{jmkl}) \quad (C.13),$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\bar{\Delta}}}_{ijklmnpq} = \frac{1}{6} & (\delta_{ik}\bar{\bar{\Delta}}_{jlmnpq} + \delta_{il}\bar{\bar{\Delta}}_{jkmnpq} + \delta_{im}\bar{\bar{\Delta}}_{jnklpq} \\ & + \delta_{in}\bar{\bar{\Delta}}_{jmklpq} + \delta_{ip}\bar{\bar{\Delta}}_{jqklmn} + \delta_{iq}\bar{\bar{\Delta}}_{jpklmn}) \end{aligned} \quad (C.14).$$

Finalement les intégrales  $T^1, T^2$  et  $T^3$  définies respectivement par les relations (B.67), (B.68) et (B.69), deviennent :

$$T_{ijkl}^1 = \frac{1}{30(1-\nu)\mu} \left( (9-10\nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right) \quad (C.15),$$

$$T_{ijklmn}^2 = \frac{1}{70(1-\nu)\mu} \left( (13-14\nu)\delta_{ik} \left( \delta_{jl}\delta_{mn} + 2\bar{\Delta}_{jlmn} \right) - \left( \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + 2\delta_{ij}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\bar{\Delta}_{ijmn} + 2\delta_{il}\bar{\Delta}_{jkmn} + 2\delta_{im}\bar{\Delta}_{jnkl} + 2\delta_{in}\bar{\Delta}_{jmk l} \right) \right) \quad (C.16),$$

$$T_{ijklmnpq}^3 = \frac{2}{315(1-\nu)\mu} \left( (17-18\nu)\delta_{ik} \left( \delta_{jl}\delta_{mn}\delta_{pq} + 2\delta_{jl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 2\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jlmn} + 2\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jlpq} + 8\bar{\bar{\Delta}}_{jlmnpq} \right) - \left( \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{pq} + \delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\delta_{pq} + 2\delta_{ij}\delta_{kl}\bar{\Delta}_{mnpq} + 2\delta_{ij}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{klpq} + 2\delta_{ij}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{klmn} + 2\delta_{kl}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{ijpq} + 2\delta_{kl}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{ijmn} + 2\delta_{il}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jkpq} + 2\delta_{ip}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jqkl} + 2\delta_{iq}\delta_{mn}\bar{\Delta}_{jpk l} + 2\delta_{il}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jkmn} + 2\delta_{im}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jnkl} + 2\delta_{in}\delta_{pq}\bar{\Delta}_{jmk l} + 2\delta_{il}\delta_{jk}\bar{\Delta}_{mnpq} + 8\delta_{ij}\bar{\bar{\Delta}}_{klmnpq} + 8\delta_{kl}\bar{\bar{\Delta}}_{ijmnpq} + 8\delta_{il}\bar{\bar{\Delta}}_{jkmnpq} + 16\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijm nklpq} + 16\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijpqklmn} + 4\bar{\Delta}_{ijmn}\bar{\Delta}_{klpq} + 4\bar{\Delta}_{ijpq}\bar{\Delta}_{klmn} \right) \right) \quad (C.17),$$

avec les définitions suivantes :

$$\bar{\Delta}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} \right) \quad (C.12),$$

$$\bar{\bar{\Delta}}_{ijklmn} = \frac{1}{4} \left( \delta_{ik}\bar{\Delta}_{jlmn} + \delta_{il}\bar{\Delta}_{jkmn} + \delta_{im}\bar{\Delta}_{jnkl} + \delta_{in}\bar{\Delta}_{jmk l} \right) \quad (C.13),$$

$$\bar{\bar{\bar{V}}}_{ijklmnpq} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \bar{\bar{\Delta}}_{jlmnpq} + \delta_{il} \bar{\bar{\Delta}}_{jk mnpq} \right) \tag{C.18}.$$

| $\Delta^2_{ijkl}$ | Définition  | valeur            |
|-------------------|---|-------------------|
| $\Delta^2_{1111}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^4 \varphi \, d\theta \, d\varphi$                | $\frac{4\pi}{5}$  |
| $\Delta^2_{2222}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \sin^4 \varphi \, d\theta \, d\varphi$                | $\frac{4\pi}{5}$  |
| $\Delta^2_{3333}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos^4 \theta \, d\theta \, d\varphi$                   | $\frac{4\pi}{5}$  |
| $\Delta^2_{1122}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi$ | $\frac{4\pi}{15}$ |
| $\Delta^2_{1133}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi$  | $\frac{4\pi}{15}$ |
| $\Delta^2_{2233}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \, d\theta \, d\varphi$  | $\frac{4\pi}{15}$ |

Tab.C.1 Détermination des composantes non nulles de  $\Delta^2_{ijkl}$

| $\Delta^3_{ijklmn}$ | Définition  | valeur             |
|---------------------|---|--------------------|
| $\Delta^3_{111111}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^6 \varphi d\theta d\varphi$                              | $\frac{4\pi}{7}$   |
| $\Delta^3_{222222}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \sin^6 \varphi d\theta d\varphi$                              | $\frac{4\pi}{7}$   |
| $\Delta^3_{333333}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos^6 \theta d\theta d\varphi$                                 | $\frac{4\pi}{7}$   |
| $\Delta^3_{111122}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$               | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{111133}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta \cos^4 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{222233}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta \sin^4 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{112222}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\theta d\varphi$               | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{113333}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^4 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{223333}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^4 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{35}$  |
| $\Delta^3_{112233}$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$ | $\frac{4\pi}{105}$ |

Tab.C.2 Détermination des composantes non nulles de  $\Delta^3_{ijklmn}$

| $\Delta_{ijklmnpq}^4$ | Définition  | valeur             |
|-----------------------|---|--------------------|
| $\Delta_{11111111}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^9 \theta \cos^8 \varphi d\theta d\varphi$                              | $\frac{4\pi}{9}$   |
| $\Delta_{22222222}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^9 \theta \sin^8 \varphi d\theta d\varphi$                              | $\frac{4\pi}{9}$   |
| $\Delta_{33333333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos^8 \theta d\theta d\varphi$                                 | $\frac{4\pi}{9}$   |
| $\Delta_{11111122}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^9 \theta \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$               | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{11111133}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^2 \theta \cos^6 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{22222233}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^2 \theta \sin^6 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{11112222}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^9 \theta \sin^4 \varphi \cos^4 \varphi d\theta d\varphi$               | $\frac{4\pi}{105}$ |
| $\Delta_{11113333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^4 \theta \cos^4 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{105}$ |
| $\Delta_{22223333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^4 \theta \sin^4 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{105}$ |
| $\Delta_{11222222}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^9 \theta \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$               | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{11333333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^6 \theta \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{22333333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^6 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi$                | $\frac{4\pi}{63}$  |
| $\Delta_{11112233}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^4 \varphi d\theta d\varphi$ | $\frac{4\pi}{315}$ |
| $\Delta_{11222233}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^7 \theta \cos^2 \theta \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$ | $\frac{4\pi}{315}$ |
| $\Delta_{11223333}^4$ | $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^4 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi$ | $\frac{4\pi}{315}$ |

Tableau C.3: Détermination des composantes non nulles de  $\Delta_{ijklmnpq}^4$