THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

Pour l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Spécialité : Mathématiques

Mention: Mathématiques Appliquées

par

Ioana-Andreea ENE

Titre: ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES D'ECOULEMENT DANS LES MILIEUX POREUX

Soutenue le 12.06.1995 à l'Université de Metz devant la commission d'examen:

Alain BOURGEAT	Professeur à l'Université de Saint-Etienne Rapporteur
Stefan BALINT	Professeur à l'Université de Timisoara Examinateur
Doina CIORANESCU	Directeur de Recherche CNRS, Université Pierre et Marie Curie Examinateur
Patrizia DONATO	Professeur à l'Université de Rouen Rapporteur
Srinivan KESAVAN	Professeur à l'Institut des Sciences Matématiques de Madras Examinateur
Thérèse LEVY	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie Examinateur
Jeannine SAINT JEAN PAULIN	Professeur à l'Université de Metz Directeur de thèse

A mes parents

AVANT-PROPOS

Qu'il me soit permis ici d'exprimer ma gratitude à Madame Jeannine Saint Jean Paulin pour avoir accepté de guider mes premiers pas dans la recherche.

Mes chaleureux remerciements vont à Madame Patrizia Donato et Monsieur Alain Bourgeat qui ont bien voulu être rapporteurs de cette thèse.

Cette thèse a été possible grâce à une bourse dans le cadre du Programme Tempus JEP 2797 "Développement des Mathématiques Appliquées en Roumanie", financé par la Communauté Européenne, que je tiens à remercier. Ce programme n'aurait jamais existé sans l'enthousiasme de Madame Doina Cioranescu. Je lui exprime ma profonde gratitude pour cela et avoir accepté d'être membre de ce jury.

Je remercie Madame Thérèse Levy et Messieurs Srinivan Kesavan et Stefan Balint qui ont acceptés d'être membres de ce jury.

Les nombreuses conversations avec Dan Polisevski m'ont aidée énormément. Je l'en remercie vivement.

Toute ma reconaissance à Dorin Moraru celui qui me fait confiance et m'encourage depuis mon adolescence, le professeur qui m'a donné le gout des mathématiques.

Enfin un grand merci , toute ma reconaissance et mon amour à mes parents, sans qui rien n'aurait été possible. Cette thèse leur est dedié. A ma mère qui m'a soutenue et supporté mes états d'âme durant ces années, à mon père qui est l'exemple pour moi.

CONTENU

Introduction 1

Chapitre 1. Cas du système Stokes dans la partie fluide

Introduction 6

§1. Formulation du problème 8

§2. Estimations a priori 13

§3. Le prolongement de la pression 14

§4. Le théorème de convergence pour $\varepsilon \to 0$ 19

§5. Le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{p}^{0\delta}$ 23

§6. Résolution du problème local 28

§7. Estimations pour $(\chi_\delta^{kh}, q_\delta^{kh})$ 33

§8. Estimations pour $(\eta^\delta, \pi^\delta)$ 36

§9. Le problème homogénéisé 38

§10. Passage à la limite avec $\delta \to 0$ 44

Chapitre 2. Cas du système Navier-Stokes dans la partie fluide

Introduction 49

§1. Formulation du problème 50

§2. Estimations a priori 54

§3. Prolongement de la pression 58

§4. Le théorème de convergence pour $\varepsilon \to 0$ 60

§5. Le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{Q}^{0\delta}$ 62

§6. Le problème homogénéisé 65

§7. Passage à la limite avec $\delta \to 0$ 68

Chapitre 3. Homogénéisation du problème de Neumann dans des milieux poreux avec double périodicité

Introduction 70

§2. Formulation du problème et estimations a priori 73

§3. Construction de l'opérateur de prolongement 77

§4. Passsage à la limite et problème homogénéisé 80

Annexe 1. Convergence double-échelle 94

Annexe 2. Convergence 3-échelle 101

Annexe 3. Un problème variationnel abstrait 115

Bibliographie 123

Introduction

Les écoulements dans les milieux poreux représentent un domaine d'intérêt pratique très connu. Les problèmes d'hydraulique souterraine, l'exploitation des gisements pétroliers, l'industrie chimique ou les problèmes liés à la pollution des eaux souterraines constituent quelques exemples d'applications. Pour bien comprendre les phénomènes qui ont lieu, il faut d'abord avoir les bons modèles. La complexité géométrique d'un milieu poreux, où on a des pores de dimensions et de formes très différentes, mais qui permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides, rend dès le début le problème de la modélisation de l'écoulement difficile. En commençant par la loi de Darcy, qui décrit au niveau macroscopique l'écoulement d'un fluide visqueux à travers un milieu poreux, on voit déjà apparaître des valeurs moyennes. Ce sont des moyennes de la vitesse ou de la pression.

La loi de Darcy, déduite de façon expérimentale la première fois, et les généralisations ultérieures de cette loi, ont constituée depuis des décennies un sujet d'interêt pour les mathématiciens, pour les mécaniciens et pour les ingénieurs. La possibilité d'obtenir une démonstration rigoureuse de la validité de cette loi est restée pendant plus d'un siècle un problème ouvert.

Mais durant toute cette période, les applications pratiques ont imposés l'utilisation d'autres équations pour décrire l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux élastique. On connait par exemple les équations de Biot. Dans l'exploitation des gisements pétroliers on rencontre assez souvent des milieux poreux fissurés. Ce sont là quelques exemples de problèmes qui nécessitent une bonne modélisation, en vue d'obtenir des équations qui peuvent traduire correctement la complexité des phénomènes.

L'apparition de la méthode de l'homogénéisation a permis dès le début d'obtenir pour la première fois une démonstration rigoureuse de la validité de la loi de Darcy (E. Sanchez-Palencia [38]). Mais cette méthode permet aussi la modélisation de beaucoup de phénomènes qu'on rencontre dans la mécanique, l'électromagnétisme, ou dans d'autres problèmes pratiques très différents.

Cette méthode, qu'on peut nommée plus précisément "l'analyse asymptotique des milieux à structure périodique" (A. Bensoussan, J-L. Lions et G. Papanicolau [8]) réside dans la recherche d'une équation (dite homogénéisée ou macroscopique) qui peut décrire des phénomènes qui ont lieu dans un milieu non-homogène. Ce passage d'un milieu non-homogène à un milieu homogène équivalent, revient du point de vue mathématique à un passage à la limite avec un ou plusieurs petits paramètres liés à la non-homogénéité du milieu.

Si le milieu non-homogène a une structure périodique on connait une démarche heuristique, nommée la méthode des échelles multiples (A. Bensoussan, J-L. Lions et G. Papanicolau [8]) qui nous permet de construire, d'un point de vue formel, l'équation homogénéisée ainsi que les coefficients homogénéisés. Cette démarche doit être suivie d'une démonstration de la convergence de la suite des solutions vers la solution macroscopique. Pour démontrer cette convergence on utilise le plus souvent la méthode de l'énergie (L. Tartar [44]).

Si le milieu non-homogène n'a pas une structure périodique, alors il existe des méthodes différentes (Γ-convergence, G-convergence, H-convergence) qui permettent la démonstration de la convergence du processus d'homogénéisation (E. De Giorgi, S. Spagnolo [19], L. Tartar [43], F. Murat [33]).

En 1989 G. Nguetseng [35], [36] a eu l'idée d'introduire la notion de convergence double-échelle. Ce type de convergence, qui s'applique dans le cas des milieux périodiques, d'une part justifie la méthode des échelles multiples et d'autre part vérifie la construction de l'équation homogénéisée et la démonstration de la convergence. G. Allaire [3] a développé cette méthode, de la convergence double-échelle, et l'a appliquée à beaucoup de cas particuliers. Récemment G. Allaire et M. Briane [4] ont introduit la notion de convergence multi-échelle qui permet de traiter d'une manière unitaire les milieux multi-périodiques.

Le but de cette thèse est l'étude de deux problèmes d'écoulement dans les milieux poreux. Pour décrire ces écoulements on va utiliser la convergence double-échelle et aussi la convergence triple-échelle. Plus précisement les deux problèmes qu'on se propose d'étudier sont: l'écoulement d'un fluide visqueux à travers un milieu poreux élastique de faible épaisseur et l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux fissuré.

Dans le premier chapitre nous allons étudier le problème de Stokes. La partie solide de notre milieu est considérée comme étant élastique, dans les hypothèses de l'élasticité linéarisée. La structure périodique du milieu nous conduit à introduire le petit paramètre ε, classique dans la théorie de l'homgénéisation. D'autre part puisqu'on suppose que le milieu élastique est à faible épaisseur ceci nous conduit à introduire un nouveau paramètre δ, plus petit que ε, $\delta << \varepsilon$. L'existence de ce deuxième paramètre va nous conduire après l'homogénéisation ($\varepsilon \longrightarrow 0$) à un nouveau passage à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$. Dans le paragraphe 1 on donne la formulation du problème, ainsi que le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème. Les estimations a priori concernant le déplacement se trouvent dans le paragraphe 2. Dans le paragraphe 3 on construit un nouveau prolongement de la pression pour lequel on obtient des estimations indépendantes des deux paramètres ε et δ. Si on cherche à prolonger la pression par le prolongement classique du à L. Tartar [44], et précisé plus tard par R. Lipton et M. Avellaneda [31], dans le cas qu'on considère, celui avec la partie solide élastique, ce prolongement ne nous assure pas la continuité du tenseur des contraintes. Si on cherche à prolonger directement la pression (voir C. Conca [17]) on obtient alors des estimations qui dépendent des puissances négatives de δ. Tous ces obstacles nous on conduit à construire d'abord une nouvelle pression dans la partie fluide, qui diffère par une constante de la pression proprement dite et ensuite prolonger cette nouvelle pression, dans la partie solide de façon à conserver la continuité du tenseur des contraintes sur l'interface fluide-solide. Le théorème de convergence pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ est donné dans le paragraphe 4. Par un choix spécifique à la méthode de la convergence double-échelle des fonctions test on obtient, dans le paragraphe 5 le problème local; on démontre l'existence et l'unicité de ce problème à l'aide d'un résultat connu de méthodes variationnelles (voir I. Babuska [6], F. Brezzi [9], V. Girault et P-A. Raviart [26]). Le paragraphe 6 est consacré à la résolution du problème local; de ce fait on introduit une série de trois problèmes pour lesquels on a des résultats d'existence et d'unicité, et ces problèmes vont nous permettre d'écrire la solution du problème local d'une façon plus explicite. Dans les paragraphes 7 et 8 on donne les estimations pour les trois problèmes introduits au paragraphe 9 et on obtient le problème homogénéisé (pour $\varepsilon \longrightarrow 0$), pour lequel on démontre l'existence et l'unicité de la solution. Enfin au paragraphe 10 on passe à la limite avec le deuxième petit paramètre δ. Après ce deuxième passage à la limite on voit que l'équation obtenue admet une unique solution, et décrit un milieu viscoélastique avec un terme de mémoire évanescente, phénomène déjà connu dans la littérature concernant les milieux continus: E. Sanchez-Palencia [38], M-L. Mascarenhas [32], D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [15].

Au chapitre 2 on passe à la généralisation naturelle des résultats qu'on a obtenus pour le problème de Stokes dans le premier chapitre. Donc dans ce deuxième chapitre on étudie le même problème, mais en prenant dans la partie fluide les équations de Navier-Stokes. En fait on a étudié le cas des équations de Navier-Stokes linéarisé; cette linéarisation, connue depuis longtemps (J-L. Lions [29]) nous permet d'utiliser la plupart des résultats obtenus dans le cas du système Stokes. Avec le système de Navier-Stokes linéarisé, l'étude de ce problème nous conduit finalement à des phénomènes de mémoire évanescente dans le problème homogénéisé. En plus un terme nouveau apparaîtra dans l'équation macroscopique.

Après la formulation du problème, au paragraphe 1, les estimations a priori sont données dans le paragraphe 2. Dans la section 3 on introduit, comme au chapitre 1, le prolongement de la nouvelle pression, ce qui nous permet de passer à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ (paragraphe 4). Le problème local, obtenu au paragraphe 5 est le même que celui obtenu au chapitre 1, donc on peut expliciter la solution de ce problème avec les mêmes techniques utilisées dans le premier chapitre. Dans les deux derniers paragraphes on obtient le problème homogénéisé, les coefficients homogénéisés et on passe à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$.

Le problème traité au chapitre 3 est différent de celui traité dans les deux premiers chapitres. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'homogénéisation du problème de Neumann dans des milieux poreux avec double périodicité. D'un point de vue mécanique ce problème représente un problème de double porosité, dans le cadre d'un milieu avec double périodicité. Après la formulation du problème et les estimations a priori, dans le paragraphe 3 on construit l'opérateur de prolongement, en utilisant les techniques introduites par D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [10] et aussi des résultats de C. Conca et P. Donato [18]. La section 4 est consacrée au passage à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$, et l'obtention du problème homogénéisé. Pour étudier ce problème on va utiliser la convergence triple-échelle, qui est un cas particulier de la convergence multi-échelle introduite par G. Allaire et M. Briane [4]. Il faut noter qu'il y a des différences entre le résultat général de Allaire et Briane et notre problème. Premièrement la géométrie du milieu qu'on étudie est complètement différente de celle utilisée par Allaire et Briane. Notre domaine décrit, par sa nature les milieux poreux fissurés (voir Th. Levy [28]) et ceci se traduit par l'introduction de la fonction caractéristique du domaine (voir P. Donato et J. Saint Jean Paulin [20]). Pour étudier la convergence du procéssus d'homogénéisation on a utilisé l'opérateur de prolongement introduit par D. Cioranescu et J. Saint Jean

Paulin [10], ce qui nous permet de travailler directement dans l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Dans l'annexe 1 on donne les résultats théoriques les plus importants concernant la convergence double-échelle, résultats qu'on trouve dans les articles de G. Nguetseng [35], [36] et de G. Allaire [3].

L'annexe 2 est consacrée à la méthode de la convergence 3-échelle. Les résultats sont ceux de G. Allaire et M. Briane [4], mais on peut noter des différences dans les points techniques des différents lemmes qu'on utilise.

Pour l'unité de la thèse on donne, dans l'annexe 3, les résultats variationnels abstraits introduits par I. Babuska [6] et F. Brezzi [9], et qu'on retrouve également dans V. Girault et P-A. Raviart [26].

CHAPITRE 1

CAS DU SYSTEME STOKES DANS LA PARTIE FLUIDE

Chapitre 1. Cas du système Stokes dans la partie fluide

Introduction

L'écoulement des fluides dans les milieux poreux déformables représente un domaine d'une grande importance pour les différentes applications qu'on rencontre dans l'ingénierie civile, chimie, biologie, etc. On peut donner simplement comme exemples: l'industrie du papier et le problème des suspensions très fines de particules déformables qu'on utilise dans l'industrie chimique.

La modélisation de tels écoulements comporte d'une part les équations de la dynamique des fluides dans les pores et d'autre part la loi de comportement du milieu déformable ce à quoi on rajoute le couplage entre les deux systèmes d'équations.

Dans ce chapitre on va considérer le cas du système de Stokes dans la partie fluide et les équations de l'élasticité linéarisée dans la partie solide, qui est supposée déformable. Dans le cadre général de la méthode de l'homogénéisation on va étudier le problème lié à deux paramètres ε et δ. Le paramètre ε est le paramètre classique de l'homogénéisation et δ représente le petit paramètre lié aux dimensions de la partie élastique, avec $\delta << \varepsilon$. Ceci revient à supposer que les fibres déformables ou les particules en suspensions sont plus petites que les dimensions de la cellule de périodicité. Donc, après un premier passage à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ on va faire tendre δ vers 0.

Comme on peut s'y attendre, l'équation obtenue comme limite est celle d'un milieu viscoélastique avec un terme de mémoire évanescente. D'ailleurs ce résultat est à rapprocher du résultat de D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [15] qui ont mis en évidence un tel phénomène dans le cadre d'un fluide visqueux avec un milieu élastique.

Toutefois on doit préciser quelques difficultés qu'on a du surmonter pour résoudre ce problème. D'abord il faut construire un prolongement de la pression dans la partie élastique qui assure la continuité des contraintes normales. Pour cela les prolongements qu'on connaît déjà, du à L. Tartar [44], à C. Conca [17] ou à R. Lipton et M. Avellaneda [31] n'assurent pas cette continuité des contraintes normales. Une fois ce prolongement construit on trouve un problème local qui n'est pas à divergence nulle (divergence de la vitesse du fluide) dans la partie fluide. Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème il faut utiliser un résultat du à I. Babuska [6] et F. Brezzi [9] (voir aussi V.Girault- P-A. Raviart [26]). Enfin pour résoudre ce problème on démontre que la solution de ce problème local est la somme de trois fonctions, solutions de trois problèmes différents. Les estimations a priori nous permettent ensuite d'effectuer le passage à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$. Ensuite on peut passer à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$.

Il faut préciser aussi que la forme explicite des coefficients homogénéisés ne peut pas être mise en evidence même pour des géométries particulières simples, parce que pour cela on a besoin d'une solution analytique d'un problème couplé fluide visqueux-milieu élastique sur la cellule de périodicité, que malheureusement on ne connaît pas.

§1. Formulation du problème

On considère une structure élastique mince, périodiquement distribuée, avec la période ε, dans un fluide. Le fluide et le solide sont connexes. On note Ω le domaine tout entier, dans lequel la partie solide est notée $\Omega^s_{\varepsilon\delta}$ et la partie fluide $\Omega^f_{\varepsilon\delta}$. Dans la cellule de base, $Y_{\varepsilon\delta}$, le solide est de l'ordre de $\delta << \varepsilon$, et de même, dans cette cellule $Y^s_{\varepsilon\delta}$ désigne la partie solide et $Y^f_{\varepsilon\delta}$ la partie fluide. L'interface fluide-solide est $\Gamma_{\varepsilon\delta} = \partial\,\Omega^s_{\varepsilon\delta} \bigcap \partial\,\Omega^f_{\varepsilon\delta}$. Dans la partie solide du domaine on va considérer le système de l'élasticité linéarisée et dans la partie fluide le système de Stokes.

On définit le tenseur des contraintes dans la partie solide, respectivement la partie fluide par:

$$\sigma^{s,\varepsilon\delta}_{ij} = a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon\delta}) \tag{1.1}$$

$$\sigma^{f,\varepsilon\delta}_{ij} = -p^{\varepsilon\delta}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(v^{\varepsilon\delta}) \tag{1.2}$$

On utilise la convention de sommation des indices répétés et la notation classique:

$$e_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.3}$$

Le vecteur $u^{\varepsilon\delta}$ est le déplacement du solide, $v^{\varepsilon\delta}$ la vitesse du fluide, $p^{\varepsilon\delta}$ la pression du fluide; μ est la viscosité du fluide et les a_{ijkh} sont les coefficients de l'élasticité qui sont bornés et vérifient les conditions de symétrie:

$$a_{ijkh} = a_{khij} = a_{jihk} \quad \forall i, j, k, h \in \{1, 2, 3\} \tag{1.4}$$

et la condition de coercivité:

$$\exists A \geq 0 \quad \text{tel que } \forall \xi_{ij} = \xi_{ji} \quad a_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \geq A\xi_{ij}\xi_{ij} \tag{1.5}$$

Dans le domaine Ω on note la partie fluide par $\Omega^f_{\varepsilon\delta}$ et la partie solide par $\Omega^s_{\varepsilon\delta}$. On note:

$$\Gamma_{\varepsilon\delta} = \partial\,\Omega^s_{\varepsilon\delta} \cap \partial\,\Omega^f_{\varepsilon\delta} \tag{1.6}$$

On considère le système suivant:

$$(1.7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} - \dfrac{\partial \sigma_{ij}^{f,\varepsilon\delta}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \times (0,T) \\ \operatorname{div} v^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \times (0,T) \\ \dfrac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \sigma_{ij}^{s,\varepsilon\delta}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^s \times (0,T) \end{cases}$$

avec les conditions aux bords et initiales suivantes:

$$(1.8) \qquad v^{\varepsilon\delta} = \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

$$(1.9) \qquad [u^{\varepsilon\delta}] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

$$(1.10) \qquad [\sigma_{ij}^{\varepsilon\delta} n_j] = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

$$(1.11) \qquad u^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{\varepsilon\delta}^s$$

$$(1.12) \qquad v^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{\varepsilon\delta}^f$$

$$(1.13) \qquad \begin{cases} u^{\varepsilon\delta}(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

[ ] représente le saut à l'interface fluide-solide et n est la normale sur cette interface.
On définit le tenseur des contraintes pour tout le domaine Ω par:

$$(1.14) \qquad \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta} = \begin{cases} \sigma_{ij}^{f,\varepsilon\delta} & \text{pour } x \in \Omega_{\varepsilon\delta}^f \\ \sigma_{ij}^{s,\varepsilon\delta} & \text{pour } x \in \Omega_{\varepsilon\delta}^s \end{cases}$$

Grâce à (1.8) on prolonge $v^{\varepsilon\delta}$ à Ω tout entier par:

$$v^{\varepsilon\delta} = \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \quad \text{sur } \Omega$$

et avec (1.14) on peut écrire le système (1.7) sous la forme suivante:

$$
(1.15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} = f_i \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \\ \operatorname{div} \dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \times (0,T) \end{cases}
$$

Pour obtenir une forme plus "facile" de la formulation variationnelle du problème, on définit les coefficients suivants:

$$
(1.16) \qquad a_{ijkh} = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \in Y_{\varepsilon\delta}^f \\ a_{ijkh} & \text{pour } y \in Y_{\varepsilon\delta}^s \end{cases}
$$

$$
(1.17) \qquad b_{ijkh} = \begin{cases} 2\mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ij}\delta_{kh}) & \text{pour } y \in Y_{\varepsilon\delta}^f \\ 0 & \text{pour } y \in Y_{\varepsilon\delta}^s \end{cases}
$$

On obtient alors la formulation variationnelle de (1.15) sous la forme suivante:

$$
(1.18) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u^{\varepsilon\delta}(x,t) \in [H_0^1(\Omega)]^N \ , p^{\varepsilon\delta}(x,t) \in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}^f) \quad \text{tels que:} \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} w_i dx + \int_\Omega a_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(u^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(w) dx + \int_\Omega b_{ijkh}^\varepsilon e_{kh}(\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) e_{ij}(w) dx \\ \\ \displaystyle - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} p^{\varepsilon\delta} \operatorname{div} w dx = \int_\Omega f_i w_i dx \quad \forall w \in [H_0^1(\Omega)]^N \\ \\ \operatorname{div} \dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \times (0,T) \end{cases}
$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité du problème (1.18) plus les conditions au bord et initiales on va la réduire à l'aide de la transformée de Laplace à un problème elliptique. Avec la définition classique:

$$
\widehat{u}(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t) dt
$$

alors (1.18) devient:

$$(1.19)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon\delta}(x,t) \in [H_0^1(\Omega)]^N \ , \widehat{p}^{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta}) \quad \text{tels que:} \\ \\ \lambda^2 \displaystyle\int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{w}_i dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}) e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(\bar{w}) dx - \\ \quad - \displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{p}^{\varepsilon\delta} \operatorname{div} \bar{w} dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{w}_i dx \quad \forall w \in [H_0^1(\Omega)]^N, \quad \forall Re\lambda \geq \lambda_0 > 0 \\ \\ \operatorname{div} \widehat{u}^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

On définit l'espace:

$$(1.20)\qquad V_{\varepsilon\delta} = [H_0^1(\Omega)]^N \cap \{w \mid \operatorname{div} w = 0 \quad \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta}\}$$

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses faites précédemment il existe une unique solution du problème (1.21):*

$$(1.21)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon\delta}(x,t) \in V_{\varepsilon\delta} \quad \text{tel que:} \\ \\ \lambda^2 \displaystyle\int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{w}_i dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}) e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(\bar{w}) dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{w}_i dx \\ \\ \forall w \in V_{\varepsilon\delta}, \quad \forall Re\lambda \geq \lambda_0 > 0 \end{cases}$$

Démonstration On définit:

$$(1.22)\qquad a(u,v) = \lambda^2 \int_\Omega u\bar{v} dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}) e_{kh}(u) e_{ij}(\bar{v}) dx, \quad \forall u, v \in V_{\varepsilon\delta}$$

$$(1.23)\qquad < \widehat{f}, v >= \int_\Omega \widehat{f}\bar{v} dx, \quad \forall u, v \in V_{\varepsilon\delta}$$

La forme donnée par (1.23) est une forme antilinéaire sur $V_{\varepsilon\delta}$ et a(., .) est une forme sesquilinéaire sur $V_{\varepsilon\delta}$,c'est à dire:

$$a(tu, pv) = t\bar{p}\, a(u,v) \quad t, p \in \mathbb{C}, \quad \forall u, v \in V_{\varepsilon\delta}$$

La forme a(., .) est coercive sur $V_{\varepsilon\delta}$ car nous avons:

$$|\frac{1}{\lambda}a(u,u)| \geq Re(\frac{1}{\lambda}a(u,u)) =$$

$$= Re(\lambda \int_\Omega u\bar{u}dx) + Re(\int_\Omega (\frac{1}{\lambda}a^\varepsilon_{ijkh} + b^\varepsilon_{ijkh})e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx)$$

$$= Re(\lambda \int_\Omega |u|^2dx) + Re(\int_\Omega (\frac{1}{\lambda}a^\varepsilon_{ijkh} + b^\varepsilon_{ijkh})e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx)$$

$$\geq \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + Re(\int_\Omega \frac{1}{\lambda}a^\varepsilon_{ijkh}e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx Re(\int_\Omega 2\mu e_{ij}(u)e_{ij}(\bar{u})dx$$

$$\geq \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq c'\|u\|^2_{V_{\varepsilon\delta}}$$

On note par abus de notation $L^2(\Omega)$ au lieu de $[L^2(\Omega)]^N$ pour ce qui est des normes de u.
D'après le théorème Lax-Milgram on a donc l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.21).
Dans la démonstration du théorème on a utilisé le résultat suivant:
Lemme 1.2 *Une norme sur $V_{\varepsilon\delta}$ équivalente à la norme de $V_{\varepsilon\delta}$ induite par $H^1_0(\Omega)$ est donnée par:*

$$u \mapsto (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

Remarque 1.3 On a aussi l'existence et l'unicité de $\widehat{p}^{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta})$ qui se déduit de la caractérisation de l'espace $V^{\perp}_{\varepsilon\delta}$ (voir Temam [45] et Girault-Raviart [26]).

Remarque 1.4 On remarque que dans le cas que nous traitons la pression n'a pas la moyenne nulle et donc on va être conduit à construire un prolongement de la pression de moyenne nulle.

§2. Estimations à priori

Pour obtenir des estimations on va utiliser la formulation variationnelle (1.21).

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses faites dans le paragraphe précédent on a:*

(2.1) $$\|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ.

Démonstration Dans la formulation variationnelle (1.21) on prend $w = \widehat{u}^{\varepsilon\delta}$ comme fonction test et on obtient:

$$\lambda^2 \int_\Omega (\widehat{u}^{\varepsilon\delta})^2 dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh} e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(\bar{\widehat{u}}^{\varepsilon\delta}) dx = \int_\Omega \widehat{f}\widehat{u}^{\varepsilon\delta} dx$$

D'où:

$$|\lambda^2| \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega \widehat{f}\,\bar{\widehat{u}}^{\varepsilon\delta} dx \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc:

$$|\lambda^2| \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)}$$

c'est-à-dire:

(2.2) $$\|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ, mais qui depend quand même de λ. En utilisant (1.6), (1.18) et (1.19) on obtient:

$$\exists A \geq 0 \quad \text{tel que} \quad (a^\varepsilon_{ijkh} + Re(\lambda) b^\varepsilon_{ijkh})\, \xi_{ij}\bar{\xi}_{kh} \geq (A + 2\lambda\mu)\xi_{ij}\bar{\xi}_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \bar{\xi}_{ij}$$

et donc on obtient à partir de la formulation (1.21):

$$(A + 2Re(\lambda)\mu) \int_\Omega |e(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})|^2 dx \leq \int_\Omega \widehat{f}\, \overline{\widehat{u}^{\varepsilon\delta}} dx$$

$$(A + 2Re(\lambda)\mu) \|e(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui entraîne:

$$\|e(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

d'où:

(2.3) $$\|\nabla \widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ.
Les relations (2.2) et (2.3) nous donnent l'inégalité annoncée (2.1).

§3. Prolongement de la pression

Dans tous les problèmes concernant le mélange d'un fluide avec un solide, on sait qu'il faut définir un prolongement de la pression. En fait la pression est bien définie dans la partie fluide, mais dans la partie solide il est toujours difficile de la définir. Il est bien connu que si on prend deux prolongements différents, à partir de la même valeur à l'interface fluide-solide, les deux peuvent avoir un sens d'autant plus que le gradient de la pression ne dépend pas du prolongement, puisqu'il est égal au gradient de la pression proprement dite. Mais pour les estimations a priori et la démonstration de la convergence du processus homogénéisé, il est important de construire effectivement le prolongement de la pression.

Dans la littérature, on connaît le prolongement classique dans le cas de l'écoulement dans les milieux poreux, c'est-à-dire le prolongement de la pression dans un solide rigide, fait par L. Tartar [44] et précisé plus tard par Lipton et Avellaneda [31]. Mais un tel prolongement ne permet pas d'assurer, dans le cas d'un solide élastique, la continuité du tenseur des contraintes. On peut travailler avec un prolongement brutal par zéro dans la partie solide, mais dans ce cas on obtient une convergence faible de la pression.

Une autre difficulté rencontrée dans notre problème consiste dans le fait que la partie solide occupe un volume assez petit par rapport au volume occupé par le fluide. Si on cherche à prolonger directement la pression, on obtient alors des estimations qui dépendent des puissances négatives de δ. Donc on peut passer à la limite avec ε, mais ultérieurement, quand on passe à la limite avec δ, on rencontre des difficultés supplémentaires.

Etant donné cette situation particulière, nous avons choisi un autre prolongement. En effet nous allons définir une nouvelle pression dans la partie fluide qui diffère par une constante de la pression proprement dite, ce qui est toujours possible compte tenu du fait que la pression intervient dans notre problème uniquement par son gradient. Ensuite on a prolongé cette nouvelle pression, dans la partie solide, de façon à conserver la continuité du tenseur des contraintes sur l'interface fluide-solide.

Définition 3.1 Si $\widehat{p^{\varepsilon\delta}} \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta})$ est la pression du fluide considéré alors on définit une autre pression de la manière suivante:

$$\widetilde{p^{\varepsilon\delta}} = \begin{cases} \widehat{p^{\varepsilon\delta}} - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{p^{\varepsilon\delta}} & \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \\ -\dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{p^{\varepsilon\delta}} & \text{dans } \Omega^s_{\varepsilon\delta} \end{cases} \tag{3.1}$$

Remarque 3.2 1) On remarque que ce n'est pas un prolongement de la pression qu'on définit, car $\widetilde{p^{\varepsilon\delta}} \neq \widehat{p^{\varepsilon\delta}}$ sur $\Omega^f_{\varepsilon\delta}$ mais effectivement on définit une nouvelle pression pour notre problème, qui va garder toutes les propriétés de l'ancienne pression, et qui en plus va nous permettre d'obtenir des estimations pour cette nouvelle pression. On souligne encore une fois l'importance d'une telle définition qui nous permet de garder toutes "les bonnes propriétés" de la pression $\widehat{p}^{\varepsilon\delta}$.

2) $\nabla\widetilde{p^{\varepsilon\delta}} = \nabla\widehat{p^{\varepsilon\delta}}$ dans $\Omega^f_{\varepsilon\delta}$, $\nabla\widetilde{p^{\varepsilon\delta}} = 0$ dans $\Omega^s_{\varepsilon\delta}$ (au sens faible).

3) Si on note:

$$\widetilde{\widehat{\sigma^{f,\varepsilon\delta}_{ij}}} = -\widetilde{p^{\varepsilon\delta}}\delta_{ij} + 2\lambda\mu e_{ij}(\widehat{u^{\varepsilon\delta}})$$

et

$$\widetilde{\sigma}^{s,\varepsilon\delta}_{ij} = -\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\delta_{ij} + a_{ijkh}e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})$$

alors on remarque que:

$$[\widetilde{\sigma}^{\varepsilon\delta}_{ij}n_j] = [\sigma^{\varepsilon\delta}_{ij}n_j] \text{ sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

et donc

$$[\widetilde{\sigma}^{\varepsilon\delta}_{ij}n_j] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

où:

$$\widetilde{\sigma}^{\varepsilon\delta}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{\sigma}^{s,\varepsilon\delta}_{ij} \text{ dans } \Omega^s_{\varepsilon\delta} \\ \\ \widetilde{\sigma}^{f,\varepsilon\delta}_{ij} \text{ dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Lemme 3.3 1) *La nouvelle pression* $\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}$ *est de moyenne nulle, c'est-à-dire qu'elle appartient à l'espace* $L^2_0(\Omega)$.

2)*En introduisant la nouvelle définition de la pression dans la formulation (1.21) l'équation reste inchangée, car on a:*

$$\int_{\Omega} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

Démonstration

1) Pour montrer que $\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}$ est de moyenne nulle on va évidemment calculer l'integrale de $\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}$ sur Ω en utilisant la définition (3.1),on a:

$$\int_{\Omega} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \Big(\widetilde{p}^{\varepsilon\delta} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx\Big) dx - \int_{\Omega^s_{\varepsilon\delta}} \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx\Big) dx =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx - \frac{|\Omega^f_{\varepsilon\delta}|}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx - \frac{|\Omega^s_{\varepsilon\delta}|}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx - \frac{|\Omega^f_{\varepsilon\delta}| + |\Omega^s_{\varepsilon\delta}|}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx - \frac{|\Omega|}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx = 0$$

donc $\widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \in L^2_0(\Omega)$

q.e.d.

2) Pour un $w \in H^1_0(\Omega)$ on va calculer à l'aide de la définition (3.1) le terme qui contient la pression dans la formulation variationnelle (1.19):

$$\int_{\Omega} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \Big(\widetilde{p}^{\varepsilon\delta} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \mathrm{div}\bar{w}\, dx - \int_{\Omega^s_{\varepsilon\delta}} \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \mathrm{div}\bar{w}\, dx =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx - \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \Big(\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \mathrm{div}\bar{w}\, dx\Big) - \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \Big(\int_{\Omega^s_{\varepsilon\delta}} \mathrm{div}\bar{w}\, dx$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx - \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \Big(\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \mathrm{div}\bar{w}\, dx + \int_{\Omega^s_{\varepsilon\delta}} \mathrm{div}\bar{w}\, dx\Big) =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx - \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \Big(\int_{\Omega} \mathrm{div}\bar{w}\, dx\Big) =$$

$$= \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx - \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\, dx\Big) \Big(\int_{\partial\Omega} w.nds\Big) = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div}\bar{w}\, dx$$

car $w \in H^1_0(\Omega)$.

Lemme 3.4 *Sous les hypothèses faites on a:*

$$\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2_0(\Omega)} \leq c \tag{3.2}$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ.

Démonstration

L'opérateur div: $[H^1_0(\Omega)]^N \longrightarrow L^2_0(\Omega)$ est surjectif, donc on en déduit l'existence d'un $w^{\varepsilon\delta} \in [H^1_0(\Omega)]^N$ tel que:

$$\begin{cases} \mathrm{div}\bar{w}^{\varepsilon\delta} = \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \\ \\ \|w^{\varepsilon\delta}\|_{H^1_0(\Omega)} \leq c\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2_0(\Omega)} \end{cases} \tag{3.3}$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ.

En prenant ce $w^{\varepsilon\delta}$ comme fonction test dans la formulation variationnelle (1.19) on obtient:

$$\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div} \bar{w}^{\varepsilon\delta}\, dx = \lambda^2 \int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{w}_i^{\varepsilon\delta}\, dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + b^\varepsilon_{ijkh}) e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(\bar{w}^{\varepsilon\delta})\, dx -$$

$$- \int_\Omega \widehat{f} \bar{w}^{\varepsilon\delta}\, dx$$

On a, grâce au choix de $w^{\varepsilon\delta}$ et au lemme 3.3:

$$\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2_0(\Omega)} = \int_\Omega \left(\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\right)^2 dx = \int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div} \bar{w}^{\varepsilon\delta}\, dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \mathrm{div} \bar{w}^{\varepsilon\delta}\, dx \tag{3.4}$$

Donc en majorant le membre de droite puis en utilisant $(3.3)_2$ on obtient:

$$\lambda^2 \int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{w}_i^{\varepsilon\delta} dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}) e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}) e_{ij}(\bar{w}^{\varepsilon\delta}) dx - \int_\Omega \widehat{f} \bar{w}^{\varepsilon\delta} dx \leq$$

$$\leq \lambda^2 \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \|w^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} + c\|e(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})\|_{L^2(\Omega)} \|e(w^{\varepsilon\delta})\|_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)} \|w^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq c_1 \|w^{\varepsilon\delta}\|_{H^1_0(\Omega)} + c_2 \|w^{\varepsilon\delta}\|_{H^1_0(\Omega)} + c_3 \|w^{\varepsilon\delta}\|_{H^1_0(\Omega)} \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq c\|w^{\varepsilon\delta}\|_{H^1_0(\Omega)} \leq c\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2_0(\Omega)}$$

D'où en comparant avec (3.4):

$$\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2_0(\Omega)} \leq c\, \|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2_0(\Omega)}$$

Et puisqu'on a aussi le lemme 3.3 on en déduit:

$$\|\widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2_0(\Omega)}\| \leq c \tag{3.5}$$

avec la constante c indépendante de ε et de δ. ce qui achève la démonstration.

§4. Le théorème de convergence pour $\varepsilon \longrightarrow 0$

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses faites précédemment on a:*
(i) *Il existe une fonction* $\widehat{u}^{0\delta} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ *telle que:*

$$\widehat{u}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \widehat{u}^{0\delta} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \tag{4.1}$$

$$\widehat{u}^{\varepsilon\delta} \quad \text{converge double-échelle vers } \widehat{u}^{0\delta} \tag{4.2}$$

(ii) *Il existe une fonction* $\widehat{u}^{1\delta}(x,y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/\mathbb{R})$ *telle que, quitte à extraire une sous-suite on a:*

$$\int_\Omega \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} \psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \Big(\frac{\partial \widehat{u}_i^{0\delta}}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial \widehat{u}_i^{1\delta}}{\partial y_j}(x,y)\Big)\psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.3}$$

$\forall \psi \in L_p^2(Y) \quad , \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$
(iii) *Il existe une fonction* $\tilde{p}^{0\delta}(x,y) \in L^2(\Omega, L_p^2(\tilde{Y})$ *telle que, quitte à extraire une sous-suite on a:*

$$\int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}(x)\psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \widetilde{p}^{0\delta}(x,y)\psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.4}$$

$\forall \psi \in L_p^2(Y) \quad , \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$

Démonstration:
(i) La relation (4.1) est une conséquence immédiate de l'estimation (2.1) obtenue précédemment.
La convergence (4.2) s'obtient facilement à l'aide de (4.1), de (2.1) et de la proposition 1.9 i) de l'annexe 1.
(ii) L'existence de $\widehat{u}^{1\delta}(x,y)$ et la convergence (4.3) sont des conséquences de la proposition 1.9 i) de l'annexe 1.
(iii) Pour la convergence (4.4) on utilise l'estimation (3.2) et on applique le théorème 2 de l'annexe 1.

Corollaire 4.2 *Les limites* $\widehat{u}^{0\delta}$, $\widehat{u}^{1\delta}(x,y)$, *et* $\widetilde{p}^{0\delta}(x,y)$ *ont les propriétés suivantes:*

$$\operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta}(x) + \operatorname{div}_y \widehat{u}^{1\delta}(x,y) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times Y_f \tag{4.5}$$

$$\widetilde{p}^{0\delta}(x,y) = cste \quad \text{sur} \quad \Omega \times Y_s \tag{4.6}$$

Démonstration

(i) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))$ avec $\psi(x,y) = 0$ pour $y \in Y_s$. On sait que $div\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta} = 0$ dans $\Omega^f_{\varepsilon\delta}$, alors en multipliant cette équation par un tel ψ et en intégrant sur Ω on obtient:

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div} \widehat{u}^{\varepsilon\delta} \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \longrightarrow \int_{\Omega \times Y_f} \big(\operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta}(x) + \operatorname{div}_y \widehat{u}^{1\delta}(x,y)\big) \psi(x,y) dx dy$$

D'où:

$$\int_{\Omega \times Y_f} \big(\operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta}(x) + \operatorname{div}_y \widehat{u}^{1\delta}(x,y)\big) \psi(x,y) dx dy = 0$$

Et donc:

$$\operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta}(x) + \operatorname{div}_y \widehat{u}^{1\delta}(x,y) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times Y_f$$

ce qui démontre (4.5).

(ii) Pour démontrer (4.6) on fait appel à la nouvelle définition de la pression (3.1):

$$\int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}(x) \psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} (\widetilde{p}^{\varepsilon\delta} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx) \psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx -$$

$$- \int_{\Omega^s_{\varepsilon\delta}} \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx \Big) \psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} \psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx -$$

$$- \Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} dx \Big) \Big(\int_\Omega \psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx \Big)$$

$\forall \psi \in L^2_p(Y), \quad \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$

Si on prend $\psi \in L^2_p(Y)$ tel que $\psi(y) = 0$ dans Y_f alors d'après la relation précédente, on a:

$$\int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}(x)\psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx = -\Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}dx\Big)\Big(\int_\Omega \psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx\Big) \tag{4.7}$$

et d'autre part:

$$\int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}(x)\psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \widetilde{p}^{0\delta}(x,y)\psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.8}$$

Mais:

$$\int_\Omega \psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.9}$$

D'après (4.7), (4.8), (4.9) on en déduit l'existence d'une limite A telle que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widetilde{p}^{\varepsilon\delta} = A \tag{4.10}$$

D'où:

$$-A\int_{\Omega\times Y} \psi(y)\phi(x)dxdy = \int_{\Omega\times Y} \widetilde{p}^{0\delta}(x,y)\psi(y)\phi(x)dxdy$$

Ceci équivaut à:

$$\int_{\Omega\times Y_s} (\widetilde{p}^{0\delta}(x,y) + A)\psi(y)\phi(x)dxdy = 0 \tag{4.11}$$

car on a choisi $\psi \in L^2_p(Y)$ telle que $\psi(y) = 0$ dans Y_f, d'où:

$$\widetilde{p}^{0\delta}(x,y) = -A \quad \text{sur} \quad \Omega\times Y_s$$

Remarque 4.3 La nouvelle définition de la pression et le choix de la constante dans la définition 3.1 jouent un rôle essentiel dans la démonstration du corollaire 4.2.

Remarque 4.4 Comme il est déjà connu dans l'étude des mélanges fluides-solides le déplacement limite n'est plus à divergence nulle. Ce phénomène a déjà été mis en évidence dans d'autres cas par Conca [17] .

Remarque 4.5 Les résultats que nous avons obtenus sont à rapprocher des résultats obtenus par D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [15], à la différence que nous avons travaillé avec une pression de moyenne nulle.

§5. Le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{p}^{0\delta}$

Pour simplifier un peu le problème on introduit:

$$p^{0\delta}(x,y) = \widetilde{p}^{0\delta} + A \tag{5.1}$$

où A est la constante déterminée par (4.10). Et dans ce cas, avec le corollaire 4.2 on a:

$$p^{0\delta}(x,y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_s \tag{5.2}$$

Maintenant pour obtenir le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{p}^{0\delta}$ dans la formulation variationnelle $(1.19)_1$ on prend comme fonction test $\varepsilon\psi^\varepsilon\phi$, avec $\psi \in [H^1_p(Y)]^N$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et avec la régle de derivation suivante:

$$\frac{\partial \psi_j^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\Big)^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$$

Ce la nous donne:

$$\begin{aligned} &\lambda^2\varepsilon\int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}\bar{\psi}_i^\varepsilon\bar{\phi}dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh})e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})e_{ij}(\varepsilon\bar{\psi}^\varepsilon\bar{\phi})dx - \\ &- \int_\Omega \widetilde{p}^{\varepsilon\delta}\mathrm{div}\,(\varepsilon\bar{\psi}^\varepsilon\bar{\phi})dx = \varepsilon\int_\Omega \widehat{f}_i\bar{\psi}_i^\varepsilon\bar{\phi}dx \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ou l'on a posé:

$$\begin{cases} e_{ij}(\bar{\varepsilon}\psi^\varepsilon\phi) = \bar{\phi}e^y_{ij}(\bar{\psi}) + \dfrac{\varepsilon}{2}\big(\bar{\psi}_i^\varepsilon\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_j} + \bar{\psi}_j^\varepsilon\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i}\big) \\[2ex] \mathrm{div}\,(\bar{\varepsilon}\psi^\varepsilon\phi) = \bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}\big(\dfrac{x}{\varepsilon}\big) + \varepsilon\bar{\psi}_i^\varepsilon\dfrac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i} \end{cases} \tag{5.4}$$

Dans tous les calculs qui suivent on va utiliser les notations e^y_{ij} et e^x_{ij} pour bien distinguer quand les dérivées sont prises par rapport à la variable y ou par rapport à la variable x. De même pour div_y et div_x.
En utilisant (5.4) dans (5.3) on obtient:

$$\lambda^2\varepsilon\int_\Omega \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}\bar{\psi}_i^\varepsilon\bar{\phi}dx+\int_\Omega(a^\varepsilon_{ijkh}+\lambda b^\varepsilon_{ijkh})e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})\Big(\bar{\phi}e^y_{ij}(\psi)+$$

(5.5)

$$+\frac{\varepsilon}{2}(\bar{\psi}_i^\varepsilon\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_j}+\bar{\psi}_j^\varepsilon\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i})\Big)dx-\int_\Omega\widehat{p}^{\varepsilon\delta}\Big(\bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}(\frac{x}{\varepsilon})+\varepsilon\bar{\psi}_i^\varepsilon\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i}\Big)dx=\varepsilon\int_\Omega\widehat{f}_i\bar{\psi}_i^\varepsilon\bar{\phi}dx$$

On passe à la limite double-échelle, pour $\varepsilon\longrightarrow 0$, dans la relation (5.3) et on obtient:

$$\int_{\Omega\times Y}\big(a_{ijkh}(y)+\lambda b_{ijkh}(y)\big)\big(e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})+e^y_{kh}(\widehat{u}^{1\delta})\big)\bar{\phi}e^y_{ij}(\bar{\psi})dxdy-$$

(5.6)

$$-\int_{\Omega\times Y}\widehat{p}^{0\delta}(x,y)\bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}dxdy=0$$

En utilisant (5.1) on voit qu'on a:

$$\int_{\Omega\times Y}p^{0\delta}(x,y)\bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}dxdy=\int_{\Omega\times Y}\widehat{p}^{0\delta}(x,y)\bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}dxdy+$$

$$+A\Big(\int_\Omega\bar{\phi}(x)dx\Big)\Big(\int_Y\mathrm{div}_y\bar{\psi}dy\Big)=\int_{\Omega\times Y}\widehat{p}^{0\delta}(x,y)\bar{\phi}\mathrm{div}_y\bar{\psi}dxdy$$

car $\int_Y \mathrm{div}_y\bar{\psi}dy=\int_{\partial Y}\bar{\psi}.nds=0 \quad \forall\psi\in H^1_p(Y)$.
Donc (5.6) peut s'écrire aussi sous la forme:

$$\int_{\Omega\times Y}\big(a_{ijkh}(y)+\lambda b_{ijkh}(y)\big)\big(e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})+e^y_{kh}(\widehat{u}^{1\delta})\big)\bar{\phi}e^y_{ij}(\bar{\psi})dxdy-$$

(5.7)

$$-\int_{\Omega\times Y}p^{0\delta}(x,y)\bar{\phi}div_y\bar{\psi}dxdy=0$$

D'ou en utilisant aussi (4.5) et (4.6) on obtient le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $p^{0\delta}$:

$$
(5.8) \qquad \begin{cases}
\displaystyle\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)\big(e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) + e^y_{kh}(\widehat{u}^{1\delta})\big)e^y_{ij}(\bar{\psi})dxdy- \\
\qquad \displaystyle - \int_{Y_f} p^{0\delta}(x,y)\mathrm{div}_y\bar{\psi}dy = 0 \quad \forall\, \psi \in H^1_p(Y) \\
\mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + \mathrm{div}_y\widehat{u}^{1\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_f \\
p^{0\delta}(x,y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_s
\end{cases}
$$

Théorème 5.1 *Pour $\widehat{u}^{0\delta}$ donné le système (5.8) a une seule et unique solution $(\widehat{u}^{1\delta}, p^{0\delta})$.*

Démonstration

On va appliquer dans ce cas le résultats abstraits de l'annexe 3. Donc on applique le corollaire 1 de cette annexe, avec, dans notre cas:

$$X = L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R})$$

$$M = \{\mu \in L^2(\Omega, L^2_p(Y))\,;\ \mu = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_s\}$$

$$a(.,.) : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$a(u,v) = \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)e^y_{kh}(u)e^y_{ij}(\bar{v})dy$$

$$b(.,.) : X \times M \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$b(v,\mu) = -\int_{Y_f} \mu(x,y)\,\mathrm{div}_y\bar{v}dy \quad \forall \mu \in M\,, \forall v \in X$$

$$< l, v >= -e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{ij}(\bar{v}) dy \quad \forall v \in X$$

$$< \chi, \mu >= \mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} \int_{Y_f} \mu(x, y) dy$$

Avec ça le problème local s'écrit alors:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^{1\delta} \in X, \ p^{0\delta} \in M \text{ tels que :} \\ \\ a(\widehat{u}^{1\delta}, \psi) + b(\psi, p^{0\delta}) =< l, \psi > \quad \forall \psi \in X \\ \\ b(\widehat{u}^{1\delta}, \mu) =< \chi, \mu > \quad \forall \mu \in M \end{cases}$$

Pour pouvoir appliquer le résultat du corollaire 1 il faut montrer que a(., .) est une forme sesquilinéaire, continue et coercive, que b(., .) est une forme sesquilinéaire, continue et vérifie la condition inf-sup (9) de l'annexe 3.

1) a(., .) est une forme sesquilinéaire:

Soit t, p$\in \mathbb{C}$, u, v$\in$ X, alors:

$$a(tu, pv) = \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{kh}(tu) e^y_{ij}(\bar{p}v) dy =$$

$$= t\bar{p} \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{kh}(u) e^y_{ij}(\bar{v}) dy =$$

$$= t\bar{p} a(u, v)$$

2) a(., .) est une forme continue:

$$|a(u, v)| \leq \int_Y |a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)| |e^y_{kh}(u)| |e^y_{ij}(\bar{v})| dy \leq$$

$$\leq c \|e^y(u)\|_{L^2(Y)} \|e^y(v)\|_{L^2(Y)} \leq c \|u\|_X \|v\|_X$$

3) a(., .) est une forme coercive:

$$|a(u, v)| \geq Re\big(a(u, v)\big) = Re\Big(\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{kh}(u) e^y_{ij}(\bar{v}) dy\Big) \geq$$

$$\geq (c_1 + \lambda_0 c_2)\|e(u)\|^2_{L^2(Y)} \geq c\|u\|^2_X$$

4) b(., .) est une forme sesquilinéaire:
Soit t, p$\in \mathbb{C}$, $\mu \in M$, v$\in$ X, alors:

$$b(pv, t\mu) = \int_{Y_f} t\mu(x,y) div_y(\bar{p}v) dy =$$

$$= t\bar{p} \int_{Y_f} \mu(x,y) div_y \bar{v} dy = t\bar{p} b(v,\mu)$$

5) b(., .) est une forme continue:

$$|b(v,\mu)| \leq \int_{Y_f} |\mu(x,y)||div_y \bar{v}| dy \leq c\|\mu\|_M \|v\|_X$$

6) b(., .) vérifie la condition inf-sup:
Donc il faut vérifier qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que:

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu)}{\|\mu\|_M \|v\|_X} \geq \beta$$

Soit $V = \{v \in X;\ b(v,\mu) = 0 \quad \forall \mu \in M\}$. La condition inf-sup nous dit en fait que:

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$$

Soit $\mu \in M$. Il existe un unique $v \in V^{\perp}$ tel que:

$$\begin{cases} div_y \bar{v} = -\mu(x,y) \\ \\ \|v\|_X \leq c\|\mu\|_M \end{cases}$$

D'ou on en déduit:

$$\frac{-\int_Y \mu(x,y) div_y \bar{v} dy}{\|v\|_X} \simeq \frac{\|\mu\|^2_M}{\|v\|_X} \geq \frac{1}{c}\|\mu\|_M$$

Donc la condition inf-sup est vérifiée avec $\beta = \frac{1}{c}$. Et avec tout ça on a vérifiée les hypothéses du corollaire 1 de l'annexe 3, donc pour $\widehat{u}^{0\delta}$ donné on a l'existence et l'unicité de la solution $(\widehat{u}^{1\delta}, p^{0\delta})$ du système (5.8).

§6. Résolution du problème local

On rappelle le problème local (5.7):

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)\big(e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) + e^y_{kh}(\widehat{u}^{1\delta})\big)e^y_{ij}(\bar{\psi})dxdy - \\ \qquad - \displaystyle\int_{Y_f} p^{0\delta}(x,y)\mathrm{div}_y\bar{\psi}dy = 0 \quad \forall\,\psi \in H^1_p(Y) \\ \mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + \mathrm{div}_y\widehat{u}^{1\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_f \\ p^{0\delta} = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_s \end{cases}$$

On se propose de résoudre ce système, c'est-à-dire de découpler et d'obtenir $\widehat{u}^{1\delta}$ et $p^{0\delta}$ en fonction de $\widehat{u}^{0\delta}$ et de fonctions qui dépendent seulement de y. Pour cela on va introduire une série de problèmes à l'aide desquels on va pouvoir écrire la solution de (5.7) d'une façon explicite. De plus pour ces trois problèmes qu'on introduit on obtient assez facilement des estimations qui vont nous permettre de passer à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ et puis avec $\delta \longrightarrow 0$.

Définition 6.1 Soit $(\chi^{kh}_\delta, q^{kh}_\delta) \in \big(H^1_p(Y), L^2(Y)\big)$ solution du problème suivant:

$$(6.1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta(y))e^y_{ij}(\bar{\psi})dy = \\ = -\displaystyle\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)e^y_{ij}(\bar{\psi})dy + \int_{Y_f} q^{kh}_\delta \mathrm{div}_y\,\bar{\psi}dy \quad \forall\psi \in H^1_p(Y) \\ \mathrm{div}_y\,\chi^{kh}_\delta = 0 \quad \text{dans } Y_f \\ q^{kh}_\delta = 0 \text{ dans } Y_s \end{cases}$$

Définition 6.2 Soit $(\eta^\delta, \pi^\delta) \in \big(H^1_p(Y), L^2(Y)\big)$ solution du problème suivant:

$$(6.2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{kh}(\eta^\delta) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy - \int_{Y_f} \pi^\delta \mathrm{div}_y \, \bar{\psi} dy = 0 \quad \forall \psi \in H^1_p(Y) \\ \mathrm{div}_y \eta^\delta = -1 \quad \text{dans} \quad Y_f \\ \pi^\delta(y) = 0 \quad \text{dans } Y_s \end{cases}$$

Théorème 6.3 *On a existence et unicité des solutions des problèmes (6.1) et (6.2).*

Démonstration

1) Existence et unicité de la solution de (6.1)

Pour ceci on va appliquer le corollaire 1 de l'annexe 3, avec dans ce cas:

$$X = H^1_p(Y)$$

$$M = \{\mu \in L^2_p(Y);\ \mu = 0 \text{ dans } Y_s\}$$

$$a(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$$

$$a(u,v) = \int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(u) e^y_{ij}(\bar{v}) dy \quad \forall\ u, v \in X$$

$$b(.,.) : X \times M \to \mathbb{C}$$

$$b(u,\mu) = -\int_{Y_f} \mu(y) \mathrm{div}_y \, \bar{u} dy \quad \forall u \in X,\ \mu \in M$$

$$< l, \bar{\psi} >= -\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy \quad \forall \psi \in X$$

et donc le problème (6.1) s'écrit maintenant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi^{kh}_\delta \in X,\ q^{kh}_\delta \in M \text{ tels que:} \\ a(\chi^{kh}_\delta, \psi) + b(\psi, q^{kh}_\delta) =< l, \psi > \quad \forall \psi \in X \\ b(\chi^{kh}_\delta, \mu) =< \chi, \mu > \quad \forall \mu \in M \end{cases}$$

Il est évident que $a(.,\ .)$ est une forme sesquilinéaire, continue et coercive (grâce aux conditions de coercivité et de symétrie vérifiées par les a_{ijkh} et b_{ijkh}). De même $b(.,\ .)$ est une forme sesquilinéaire et continue. Il nous reste donc à montrer que la forme $b(.,\ .)$ vérifie la condition inf-sup (9) de l'annexe 3.
Dans ce cas précis la condition inf-sup est équivalente à:

$$(6.4) \qquad \sup_{v \in H^1_p(Y)} \frac{\int_{Y_f} -\mu(y)\, div_y\, \bar{v} dy}{\|v\|_{H^1_p(Y)}} \geq \beta \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$$

Soit $V = \{v \in H^1_p(Y);\ b(v,\mu) = 0, \quad \forall \mu \in M\}$ et soit aussi $\mu \in M$. Alors il existe une unique solution $v \in V^{\perp}$ telle que:

$$\begin{cases} div_y \bar{v} = -\mu \\ \\ \|v\|_{H^1_p(Y)} \leq c\|\mu\|_M \end{cases}$$

On en déduit:

$$\frac{\int_{Y_f} -\mu(y)\, div_y\, \bar{v} dy}{\|v\|_{H^1_p(Y)}} = \frac{\|\mu\|^2_M}{\|v\|_{H^1_p(Y)}} \geq \frac{1}{c}\|\mu\|_M$$

d'où (6.4) avec $\beta = \frac{1}{c}$.
Puisque les hypothèses du corollaire 1 de l'annexe 3 sont vérifiées on a assuré l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.1).
2) Existence et unicité de la solution de (6.2)
On applique le corollaire 1 de l'annexe 3 avec dans ce cas:

$$X = H^1_p(Y)$$

$$M = \{\mu \in L^2_p(Y);\ \mu = 0 \text{ dans } Y_s\}$$

$$a(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$$

$$a(u,v) = \int_Y (a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)) e^y_{kh}(u) e^y_{ij}(\bar{v}) dy \quad \forall\ u,v \in X$$

$$b(.,.) : X \times M \to \mathbb{C}$$

$$b(u,\mu) = -\int_{Y_f} \mu(y)\mathrm{div}_y\, \bar{v} dy \quad \forall u \in X,\, \mu \in M$$

$$< l, v >= 0 \quad \forall v \in X$$

$$< \chi, \mu >= -\int_{Y_f} \mu(y) dy$$

donc le problème (6.2) s'écrit maintenant sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \eta^\delta \in X, \ \pi^\delta \in M \text{ tels que:} \\ \\ a(\eta^\delta, \psi) + b(\psi, \pi^\delta) = 0 \\ \\ b(\eta^\delta, \mu) =< \chi, \mu > \end{cases}$$

et on voit bien que encore une fois toutes les hypothèses du corollaire 1 sont vérifiées, donc on a assuré l'existence et l'unicité de la solution du système (6.2).

Théorème 6.4 *Soit* $(\chi_\delta^{kh}, q_\delta^{kh})$*et* $(\eta^\delta, \pi^\delta)$ *les uniques solutions de (6.1) et (6.2) . Alors l'unique solution du problème local (5.8) est donnée par:*

$$\widehat{u}^{1\delta}(x,y) = \eta^\delta(y)\,\mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})\chi_\delta^{kh}(y) \tag{6.3}$$

$$p^{0\delta}(x,y) = \pi^\delta(y)\,\mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})q_\delta^{kh}(y) \tag{6.4}$$

Démonstration

Si $p^{0\delta}$ est donné par (6.4) alors $(5.8)_3$ est vérifié car on a $(6.1)_3$ et $(6.2)_3$.
Si $\widehat{u}^{1\delta}$ est donné par (6.3) alors :

$$\mathrm{div}_y\widehat{u}^{1\delta} = \mathrm{div}_y\eta^\delta\,\mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})\mathrm{div}_y\chi_\delta^{kh}$$

et dans Y_f on a compte tenu de $(6.1)_2$ et $(6.2)_2$:

$$\mathrm{div}_y \widehat{u}^{1\delta} = -\mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta}$$

ce qui montre que $(5.8)_2$ est vérifiée.
Si $\widehat{u}^{1\delta}$ est donné par (6.3) alors on a aussi:

$$e^y_{lm}(\widehat{u}^{1\delta}) = e^y_{lm}(w + \eta^\delta)\,\mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)$$

Reste maintenant à montrer qu'on a $(5.8)_1$:

$$\int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)\big(e^x_{lm}(\widehat{u}^{0\delta}) + e^y_{lm}(\widehat{u}^{1\delta})\big) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy -$$

$$- \int_{Y_f} p^{0\delta}(x,y)\mathrm{div}_y \bar{\psi} dy = \int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)\big(e^x_{lm}(\widehat{u}^{0\delta}) + e^y_{lm}(\eta^\delta)\mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} +$$

$$+ e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)\big) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy - \int_{Y_f} \Big(\pi^\delta(y)\,\mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) q^{kh}_\delta(y)\Big)\mathrm{div}_y \bar{\psi} dy =$$

$$= e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)\big(\delta_{lk}\delta_{mh} + e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)\big) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy -$$

$$- e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) \int_{Y_f} q^\delta_\delta(y)\mathrm{div}_y \bar{\psi} dy + \mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{kh}(\eta^\delta) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy -$$

$$- \mathrm{div}_x \widehat{u}^{0\delta} \int_{Y_f} \pi^\delta \,\mathrm{div}_y \bar{\psi} dy = 0$$

car $(6.1)_1$ et $(6.2)_1$ sont vérifiées ce qui achève la démonstration.

§7. Estimations pour $(\chi_\delta^{kh}, q_\delta^{kh})$

Lemme 7.1 *Il existe deux constantes* c_1 *et* c_2 *indépendantes de* δ *telles qu'on a:*

$$\|\nabla_y \chi_\delta^{kh}\|_{L^2(Y)} \leq c_1 \tag{7.1}$$

$$\|q_\delta^{kh}\|_{L^2(Y)} \leq c_2 \tag{7.2}$$

Démonstration

1) Si on prend χ_δ^{kh} comme fonction test dans (6.1) on obtient:

$$\int_Y \big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)e_{lm}^y(\chi_\delta^{kh})e_{ij}^y(\bar{\chi}_\delta^{kh})dy = -\int_Y \big(a_{ijkh}(y)+\lambda b_{ijkh}(y)\big)e_{ij}^y(\bar{\chi}_\delta^{kh})dy$$

En utilisant la coercivité des coefficients $a_{ijkh} + \lambda b_{ijkh}$ on obtient:

$$\begin{aligned}&\int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)e_{lm}^y(\chi_\delta^{kh})e_{ij}^y(\bar{\chi}_\delta^{kh})dy \geq \\ &\geq c\int_Y e_{ij}^y(\bar{\chi}_\delta^{kh})e_{ij}^y(\chi_\delta^{kh})dy \geq c\|\nabla_y \chi_\delta^{kh}\|^2_{L^2(Y)}\end{aligned} \tag{7.3}$$

Et d'autre part:

$$\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)e_{ij}^y(\bar{\chi}_\delta^{kh})dy \leq c|Y|^{1/2}\|\nabla_y \chi_\delta^{kh}\|_{L^2(Y)} \tag{7.4}$$

Donc les relations (7.3) et (7.4) nous conduisent précisément à (7.1).

2) A l'aide de $(6.1)_1$ et $(6.1)_3$ on peut écrire:

$$\begin{aligned}&\int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)e_{lm}^y(\chi_\delta^{kh})e_{ij}^y(\bar{\psi})dy = \\ &-\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)e_{ij}^y(\bar{\psi})dy + \int_Y q_\delta^{kh}\,\mathrm{div}_y\bar{\psi}dy \quad \forall \psi \in H_p^1(Y)\end{aligned} \tag{7.5}$$

L'opérateur div: $H^1_p(Y) \to L^2(Y)$ est surjectif donc on en déduit l'existence d'un $\xi^\delta \in H^1_p(Y)$ tel que:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{div}_y \xi^\delta = q_\delta^{kh} \\ \\ \|\xi^\delta\|_{H^1_p(Y)} \le c\|q_\delta^{kh}\|_{L^2(Y)} \end{array}\right. \tag{7.6}$$

avec la constante c indépendante de δ (voir C. Conca [17] lemme 5.1).

On prend un tel ξ^δ comme fonction test dans (7.5) et cela nous donne:

$$\begin{aligned} \int_Y \left(q_\delta^{kh}\right)^2 dy = \int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\chi_\delta^{kh}) e^y_{ij}(\bar{\xi}^\delta) dy + \\ + \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{ij}(\bar{\xi}^\delta) dy \end{aligned} \tag{7.7}$$

En utilisant (7.1) et (7.6) on a :

$$\int_Y \left(q_\delta^{kh}\right)^2 dy = \int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\chi_\delta^{kh}) e^y_{ij}(\bar{\xi}^\delta) dy +$$

$$+ \int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big) e^y_{ij}(\bar{\xi}^\delta) dy \le$$

$$\le c\|e^y(\chi_\delta^{kh})\|_{L^2(Y)} \|e^y(\xi^\delta)\|_{L^2(Y)} + c|Y|^{1/2} \|e^y(\xi^\delta)\|_{L^2(Y)} \le$$

$$\le c_1\|\nabla_y \xi^\delta\|_{L^2(Y)} + c_2\|\nabla_y \xi^\delta\|_{L^2(Y)} \le$$

$$\le c\|\xi^\delta\|_{H^1_p(Y)} \le c\|q_\delta^{kh}\|_{L^2_0(Y)}$$

D'où on obtient:

$$\|q_\delta^{kh}\|^2_{L^2(Y)} \le c\|q_\delta^{kh}\|_{L^2(Y)}$$

et donc on obtient (7.2).

Remarque 7.2 D'après le lemme 7.1 on en déduit les convergences suivantes, qui ont lieu, quitte à extraire une sous-suite:

(7.8) $$\chi_\delta^{kh} \rightharpoonup \chi_*^{kh} \quad \text{dans } H_p^1(Y) \text{ faible}$$

(7.9) $$q_\delta^{kh} \rightharpoonup q_*^{kh} \quad \text{dans } L^2(Y) \text{ faible}$$

§ 8. Estimations pour le problème (6.2)

On rappelle le problème pour $(\eta^\delta, \pi^\delta)$:

$$(8.1) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_Y (a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)) e^y_{lm}(\eta^\delta) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy - \int_{Y_f} \pi^\delta \mathrm{div}_y \bar{\psi} dy = 0 \quad \forall \psi \in H^1_p(Y) \\ \mathrm{div}_y \eta^\delta = -1 \quad \text{dans} \quad Y_f \\ \pi^\delta(y) = 0 \quad \text{dans } Y_s \end{cases}$$

Remarque 8.1 Pour obtenir des estimations pour η^δ et π^δ on va appliquer une technique simillaire à celle utilisé par C. Conca [17] dans le cas 2-D.

Lemme 8.2 *Il existe des constantes indépendantes de δ telles qu'on a:*

$$(8.2) \qquad \|\nabla_y \eta^\delta\|_{L^2(Y)} \leq c_3$$

$$(8.3) \qquad \|\pi^\delta\|_{L^2(Y)} \leq c_4$$

Démonstration Soit:

$$\zeta^\delta(y) = \eta^\delta(y) - \frac{1}{3} y$$

alors si $(\eta^\delta, \pi^\delta)$ est l'unique solution de (8.1), $(\zeta^\delta, \pi^\delta)$ est solution du problème suivant:

$$(8.4) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_Y (a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)) e^y_{kh}(\zeta^\delta) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy - \int_{Y_f} \pi^\delta \mathrm{div}_y \bar{\psi} dy = \\ \displaystyle = -\frac{1}{3} \delta_{kh} \int_Y (a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)) e^y_{ij}(\bar{\psi}) dy \quad \forall \psi \in H^1_p(Y) \\ \mathrm{div}_y \zeta^\delta = 0 \quad \text{dans} \quad Y_f \\ \pi^\delta(y) = 0 \quad \text{dans } Y_s \end{cases}$$

On a existence et unicité de la solution de ce problème, avec le même résultat de Babuska-Brezzi. Si on prend ζ^δ comme fonction test dans (8.4), alors en utilisant la coercivité des coefficients $a_{ijkh} + \lambda b_{ijkh}$ on obtient:

$$\|e^y(\zeta^\delta)\|_{L^2_p(Y)} \leq c|Y|^{1/2}$$

d'où on voit que:

$$\|\nabla_y \eta^\delta\|_{L^2_p(Y)} \leq c_1|Y|^{1/2} + c_2$$

d'où l'inégalité (8.2). Pour obtenir (8.3) on utilise exactement la même technique que pour (7.2).

Remarque 8.3 D'après le lemme 8.2 on en déduit les convergences suivantes, qui ont lieu, quitte à extraire une sous-suite:

(8.5) $$\eta^\delta \rightharpoonup \eta^* \quad \text{dans } H^1_p(Y) \text{ faible}$$

(8.86 $$\pi^\delta \rightharpoonup \pi^* \quad \text{dans } L^2(Y) \text{ faible}$$

§ 9. Le problème homogénéisé (pour $\varepsilon \longrightarrow 0$)

Théorème 9.1 *Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ la limite double-échelle du système (1.19) est:*

$$(9.1)\quad \lambda^2 \int_\Omega \widehat{u}_i^{0\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega C^\delta_{ijkh} e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) e_{ij}(\bar{\phi}) dx + \int_\Omega D^\delta_{ijkh} div_x \, \widehat{u}^{0\delta} e_{ij}(\bar{\phi}) dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx$$

où les coefficients C^δ_{ijkh} et D^δ_{ijkh} sont donnés par:

$$(9.2)\quad C^\delta_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \Big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) + \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta) - q^{kh}_\delta(y)\delta_{ij} \Big) dy$$

$$(9.3)\qquad D^\delta_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \Big(\big(a_{ijlm}(y) + b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\eta^\delta) - \pi^\delta(y)\delta_{ij} \Big) \delta_{kh} dy$$

Démonstration

En utilisant les relations établies on passe à la limite double-échelle dans (1.19), avec $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on obtient:

$$\lambda^2 \int_{\Omega\times Y} \widehat{u}_i^{0\delta} \bar{\phi}_i dx dy + \int_{\Omega\times Y} \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)\big(e^x_{lm}(\widehat{u}^{0\delta}) + e^y_{lm}(\widehat{u}^{1\delta})\big) e_{ij}(\bar{\phi}) dx dy -$$

$$- \int_{\Omega\times Y} p^{0\delta}(x,y) \operatorname{div} \bar{\phi} dx dy = \int_{\Omega\times Y} \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx dy$$

Dans cette relation on remplace maintenant $\widehat{u}^{1\delta}$ et $p^{0\delta}(x,y)$ par leurs formes données dans (6.3) et (6.4).

$$\lambda^2|Y|\int_\Omega \widehat{u}_i^{0\delta}\bar{\phi}_i dx + \int_{\Omega\times Y}\big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)\big(e^x_{lm}(\widehat{u}^{0\delta})+$$

$$+ e^y_{lm}(\eta^\delta)\mathrm{div}_x\,\widehat{u}^{0\delta} + e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)\big)e_{ij}(\bar{\phi})dxdy -$$

$$-\int_{\Omega\times Y}\Big(\pi^\delta(y)\mathrm{div}_x\,\widehat{u}^{0\delta} + q^{kh}_\delta(y)e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})\Big)div\,\bar{\phi}dxdy =$$

$$= |Y|\int_\Omega \widehat{f}_i\bar{\phi}_i dx$$

$$\lambda^2|Y|\int_\Omega \widehat{u}_i^{0\delta}\bar{\phi}_i dx + \int_\Omega e^x_{lm}(\widehat{u}^{0\delta})e_{ij}(\bar{\phi})\Big(\int_Y\big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)dy\Big)+$$

$$+\Big(\int_\Omega \mathrm{div}_x\,\widehat{u}^{0\delta}e_{ij}(\bar{\phi})\Big)\Big(\int_Y\big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\eta^\delta)dy\Big)+$$

$$+\Big(\int_\Omega e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})e_{ij}(\bar{\phi})\Big)\Big(\int_Y\big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy\Big)-$$

$$-\Big(\int_\Omega \mathrm{div}_x(\widehat{u}^{0\delta})\mathrm{div}\,\bar{\phi}\Big)\Big(\int_Y \pi^\delta(y)dy\Big) - \Big(\int_\Omega e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})\mathrm{div}\,\bar{\phi}\Big)\Big(\int_Y q^{kh}_\delta dy\Big) =$$

$$= |Y|\int_\Omega \widehat{f}_i\bar{\phi}_i dx$$

$$\lambda^2|Y|\int_\Omega \widehat{u}_i^{0\delta}\bar{\phi}_i dxdy + \Big(\int_\Omega e^x_{kh}\,\widehat{u}^{0\delta} e_{ij}(\bar{\phi})\Big)\Big(\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) +$$

$$+ \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta) - q^{kh}_\delta(y)\delta_{ij}\big)dy\Big) +$$

$$+ \Big(\int_\Omega \mathrm{div}_x\,\widehat{u}^{0\delta} e_{ij}(\bar{\phi})\Big)\Big(\int_Y \Big(\big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\eta^\delta)dy -$$

$$- \pi^\delta(y)\delta_{ij}\Big)dy\Big) = |Y|\int_\Omega \widehat{f}_i\bar{\phi}_i dx$$

D'où si on introduit:

$$C^\delta_{ijkh} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \Big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y) + \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta) - q^{kh}_\delta(y)\delta_{ij}\Big)dy$$

$$D^\delta_{ijkh} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \Big(\big(a_{ijlm}(y) + b_{ijlm}(y)\big) e^y_{lm}(\eta^\delta) - \pi^\delta(y)\delta_{ij}\Big)\delta_{kh}dy$$

on obtient précisément (9.1).

Définition 9.2 On définit:

$$a(u,v) = \lambda^2\int_\Omega u\bar{v}dx + \int_\Omega \big(C^\delta_{ijkh} + D^\delta_{ijkh}\big) e_{kh}(u) e_{ij}(\bar{v})dx \tag{9.4}$$

$$L(v) = \int_\Omega \widehat{f}\bar{v}dx \quad \forall u, v \in H^1_0(\Omega) \tag{9.5}$$

Lemme 9.3 a) *$L(.)$ est une forme antilinéaire et continue.*
b) *$a(.,.)$ est une forme sesquilinéaire, continue et coercive.*

Démonstration

a) Pour démontrer que L(.) est antilinéaire il faut montrer qu'on a:

$$L(tv) = \bar{t}L(v) \quad \forall t, c \in \mathbb{C}, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

Dans notre cas on a:

$$L(tv) = \int_\Omega \widehat{f}\bar{t}\bar{v}dx = \bar{t}\int_\Omega \widehat{f}\bar{v}dx = \bar{t}L(v) \quad \forall t, c \in \mathbb{C}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Pour la continuité on a:

$$|L(v)| = |\int_\Omega \widehat{f}\bar{v}dx| \leq \int_\Omega |\widehat{f}||\bar{v}|dx \leq \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

b) La forme a(., .) est sesquilinéaire si et seulement si on a:

$$a(tu, pv) = t\bar{p}a(u, v) \quad \forall t, p \in \mathbb{C}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Donc on a:

$$a(tu, pv) = \lambda^2 \int_\Omega tu\bar{p}\bar{v}dx + \int_\Omega (C^\delta_{ijkh} + D^\delta_{ijkh})e_{kh}(tu)e_{ij}(\bar{p}v)dx =$$

$$= t\bar{p}\lambda^2 \int_\Omega u\bar{v}dx + \int_\Omega (C^\delta_{ijkh} + D^\delta_{ijkh})te_{kh}(u)\bar{p}e_{ij}(\bar{v})dx = t\bar{p}a(u, v)$$

Pour montrer la coercivité de la forme a(., .) on doit d'abord obtenir des estimations pour les coefficients C^δ_{ijkh} et D^δ_{ijkh}, c'est-à-dire:

$$|C^\delta_{ijkh}| \leq \int_Y |a_{ijkh}(y) + b_{ijkh}(y) + \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta) - q^{kh}_\delta \delta_{ij}|dy \leq$$

$$\leq \int_Y |a_{ijkh}(y) + b_{ijkh}(y)|dy + \int_Y |a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)||e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)|dy +$$

$$+ \int_Y |q^{kh}_\delta \delta_{ij}|dy \leq c_1 + c_2|Y|^{\frac{1}{2}}\|e^y(\chi^{kh}_\delta)\|_{L^2(Y)} + |Y|^{\frac{1}{2}}\|q^{kh}_\delta\|_{L^2(Y)} \leq c$$

Donc:

$$|C^\delta_{ijkh}| \leq c \tag{9.6}$$

avec la constante c indépendante de δ.

$$|D^{\delta}_{ijkh}| \leq \frac{1}{|Y|}\int_Y |a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)||e^y_{lm}(\eta^{\delta})|\delta_{kh}dy+$$

$$+\frac{1}{|Y|}\int_Y |\pi^{\delta}(y)|\delta_{ij}\delta_{kh}dy \leq$$

$$\leq c_1\|e^y_{lm}(\eta^{\delta})\|_{L^2(Y)}+c_2\|\pi^{\delta}\|_{L^2(Y)}$$

D'où:

$$|D^{\delta}_{ijkh}| \leq c \tag{9.7}$$

avec la constante c indépendante de δ.

Donc on obtient finalement:

$$|a(u,v)| \leq |\lambda^2|\int_\Omega |u||v|dx + \int_\Omega |C^{\delta}_{ijkh}+D^{\delta}_{ijkh}||e_{kh}(u)||e_{ij}(\bar{v})|dx \leq$$

$$\leq c_1\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}+c_2\|e(u)\|_{L^2(\Omega)}\|e(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)}$$

D'où:

$$|a(u,v)| \leq c\|u\|_{H^1_0(\Omega)}\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \quad \forall u,v \in H^1_0(\Omega) \tag{9.6}$$

Il nous reste à démontrer la coercivité de la forme a(., .):

$$|\frac{1}{\lambda}a(u,u)| \geq Re(\frac{1}{\lambda}a(u,u)) = Re(\lambda \int_{\Omega} u\bar{u}dx) +$$

$$+ Re\Big(\frac{1}{\lambda}\int_{\Omega}(C^{\delta}_{ijkh} + D^{\delta}_{ijkh})e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx\Big) \geq$$

$$\geq \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + Re\Big(\frac{1}{\lambda}\int_{\Omega}(C^{\delta}_{ijkh}e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx\Big) +$$

$$+ Re\Big(\frac{1}{\lambda}\int_{\Omega} D^{\delta}_{ijkh}e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{u})dx\Big) \geq$$

$$\geq \lambda_0 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|e(u)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq c\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$

Théorème 9.4 *L'équation (9.1) admet une solution unique.*
Démonstration À l'aide du lemme 9.3 on applique le théorème de Lax-Milgram.

§10. Passage à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$

Lemme 10.1 *Quitte à extraire une sous-suite on a la convergence suivante:*

$$\widehat{u}^{0\delta} \rightharpoonup \widehat{u}^{*} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \tag{10.1}$$

Démonstration

D'après le lemme 2.1 il existe une constante c indépendante de ε et de δ telle que:

$$\|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c$$

Et le théorème 4.1 nous assure:

$$\widehat{u}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \widehat{u}^{0\delta} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible pour } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Donc on en déduit:

$$\|\widehat{u}^{0\delta}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \tag{10.2}$$

avec la constante c indépendante de δ.

Et la convergence (10.1) est une conséquence directe de l'estimation (10.2).

Théorème 10.2 *Pour $\delta \longrightarrow 0$ la limite $\widehat{u}^{*}$ de $\widehat{u}^{0\delta}$ vérifie l'équation suivante:*

$$\lambda^2 \int_\Omega \widehat{u}_i^{*}\bar{\phi}_i dx + \int_\Omega (C_{ijkh}^{*} + D_{ijkh}^{*}) e_{kh}^{x}(\widehat{u}^{*}) e_{ij}(\bar{\phi}) dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi} dx \, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{10.3}$$

où:

$$C_{ijkh}^{*} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} C_{ijkh}^{\delta} \tag{10.4}$$

$$D_{ijkh}^{*} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} D_{ijkh}^{\delta} \tag{10.5}$$

Démonstration

On rappelle l'équation (9.1):

$$\lambda^2 \int_\Omega \widehat{u}_i^{0\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega (C^\delta_{ijkh} + D^\delta_{ijkh}) e^x_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) e_{ij}(\bar{\phi}) dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi} dx$$

En utilisant (9.6) et (9.7) on en déduit l'existence des:

$$C^*_{ijkh} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} C^\delta_{ijkh}$$

$$D^*_{ijkh} = \lim_{\delta \longrightarrow 0} D^\delta_{ijkh}$$

Avec ceci et en utilisant le lemme (7.1) on peut passer à la limite dans (9.1) et obtenir (10.3).

Pour une structure haute comme celles étudiées par D.Cioranescu et J.Saint Jean Paulin (voir [11], [12], [13], [14]) on peut obtenir une forme plus simple pour les coefficients homogénéisés. C'est-à-dire qu'on considère le domaine $\Omega = (-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2) \times (0, L)$. Dans ce domaine le solide est périodiquement distribué tout au long des barres horizontales et verticales. Les barres horizontales ont l'épaisseur $\varepsilon\delta/2$ et sont distribuées de façon périodique au long de (0, L) avec la période ε. Les quatres barres verticales ont l'épaisseur $\delta/2$ et la longeur L. Une période du domaine est: $Y_{\varepsilon\delta} = (-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2) \times (0, \varepsilon)$.

Théorème 10.3 *La forme explicite des C^*_{ijkh} et D^*_{ijkh} est donnée par:*

$$C^*_{ijkh} = \lambda b_{ijkh} + \int_Y \left(\lambda b_{ijlm} e^y_{lm}(\chi^{kh}_*) - q^{kh}_* \delta_{ij}\right) dy \tag{10.6}$$

$$D^*_{ijkh} = \int_Y \left(\lambda b_{ijkh} e^y_{kh}(\eta^*) - \pi^*(y) \delta_{ij}\right) dy \tag{10.7}$$

Démonstration

Pour obtenir cette forme explicite des coefficients C^*_{ijkh} et D^*_{ijkh} on va utiliser dans les calculs la forme précise de la cellule de base pour pouvoir passer à la limite quand $\delta \longrightarrow 0$, c'est à dire que les valeurs explicites des volumes de la partie fluide et solide de la cellule de base:

$$|Y_s| = 3\delta^2 - 2\delta^3,$$

$$|Y_f| = 1 - 3\delta^2 + 2\delta^3$$

vont nous permettre d'obtenir des estimations intéressantes.

$$C^*_{ijkh} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_Y \big(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\big)dy +$$

$$+ \int_Y \big(a_{ijlm}(y) + \lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy - \int_Y q^{kh}_\delta(y)\delta_{ij}dy =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\Big(|Y_s|a_{ijkh} + |Y_f|\lambda b_{ijkh} + \int_{Y_s} a_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy +$$

$$+ \int_{Y_f} \lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy - \int_Y q^{kh}_\delta(y)\delta_{ij}dy\Big) =$$

$$= \lambda b_{ijkh} - \int_Y q^{kh}_*(y)\delta_{ij}dy + \int_Y \lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_*)dy$$

et on a aussi:

$$\int_{Y_s} a_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy \le c|Y_s|^{\frac{1}{2}}\|e^y(\chi^{kh}_\delta)\|_{L^2(Y)} \tag{10.8}$$

d'où:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_s} a_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy = 0 \tag{10.9}$$

Et:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_f} \lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_Y \lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy - \int_{Y_s} \lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy\Big)$$

Mais en utilisant (7.8) on voit bien que:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_s}\lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy = 0 \tag{10.10}$$

et donc:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_f}\lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_\delta)dy = \int_{Y}\lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\chi^{kh}_*)dy \tag{10.11}$$

d'où (10.6). De même pour D^*_{ijkh} on a:

$$D^*_{ijkh} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\int_Y\big(a_{ijlm}(y)+\lambda b_{ijlm}(y)\big)e^y_{lm}(\eta^\delta)dy - \int_Y \pi^\delta(y)\delta_{ij}dy\Big)\delta_{kh}$$

D'après les calculs suivants:

$$\int_{Y_s} a_{ijkh}e^y_{kh}(\eta^\delta)dy \le c|Y_s|\|e^y(\eta^\delta)\|_{L^2(Y)} \tag{10.12}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_s} a_{ijkh}e^y_{kh}(\eta^\delta)dy = 0 \tag{10.13}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y_f}\lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\eta^\delta)dy = \int_{Y}\lambda b_{ijlm}e^y_{lm}(\eta^*)dy \tag{10.14}$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{Y}\pi^\delta(y)\delta_{ij}dy = \int_{Y}\pi^*(y)\delta_{ij}dy \tag{10.15}$$

On a (10.7).

Définition 10.4 On définit pour tout u et $v \in H^1_0(\Omega)$:

$$a^*(u,v) = \lambda^2\int_\Omega u\bar{v}dx + \int_\Omega\big(C^*_{ijkh}+D^*_{ijkh}\big)e_{kh}(u)e_{ij}(\bar{v})dx \quad \forall u,v\in H^1_0(\Omega) \tag{10.16}$$

$$L(v) = \int_\Omega \widehat{f}\bar{v}dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{10.17}$$

Il est facile de vérifier (à l'aide du lemme 9.3) que la forme $a^*(.,.)$ est sesquilinéaire, continue et coercive, et que la forme L(.) est antilinéaire et continue. D'où en utilisant le théorème de Lax-Milgram on a le résultat suivant:

Théorème 10.5 *L'équation (10.3) admet une solution $u^* \in H_0^1(\Omega)$ et une seule.*

Les formules (10.6), (10.7) permettent le calcul effectif des coefficients limites, par l'intermédiaire des problèmes adjoints déjà définis.

Il est important de remarquer aussi que l'équation limite (10.3) est une équation qui décrit un milieu viscoélastique, avec un terme de mémoire évanescente. Ce phénomène est déjà bien connu dans la littérature concernant les milieux continus: E. Sanchez-Palencia [38], M-L. Mascarenhas [32], D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [15].

CHAPITRE 2

CAS DU SYSTEME NAVIER-STOKES

DANS

LA PARTIE FLUIDE

Chapitre 2. Cas du système Navier-Stokes dans la partie fluide

Introduction

La généralisation naturelle des résultats qu'on a obtenus pour le problème de Stokes dans le premier chapitre est celui du système Navier-Stokes. Donc le but de ce chapitre est d'étudier le même problème mais en prenant dans la partie fluide les équations de Navier-Stokes.

Il est bien connu (E. Sanchez-Palencia [38]) que si on étudie le mouvement d'un fluide visqueux dans un milieu poreux rigide, en utilisant les équations de Navier-Stokes on arrive toujours à un problème non-linéaire. La non-linéarité qui intervient dans l'équation homogénéisée ne peut être explicitée, ce qui rend des résultats peu utilisables.

Cette observation reste valable aussi pour le cas d'un milieu élastique. L'interaction entre un fluide visqueux et un solide élastique est un problème ouvert, même dans le cas linéaire.

Pour éviter de telles difficultés supplémentaires nous allons étudier le cas du système Navier-Stokes linéarisé. Cette linéarisation connue depuis longtemps (J-L. Lions [29]) nous permet d'utiliser la plupart des résultats obtenus dans le cas du système Stokes. D'autre part il faut noter que dans la condition de continuité des contraintes normles on voit aparaître une non-linéarité, qui dans le cas de la linéarisation introduite par J-L. Lions peut-être évitée.

Avec le système de Navier-Stokes linéarisé l'étude du problème conduit finalement aussi à des phénomènes de mémoire longue dans le problème homogénéisé. En plus un terme nouveau aparaitra dans l'équation au niveau macroscopique.

Après la formulation du problème, avec la linéarisation dont on a déjà parlée, on fait les estimations a priori. Pour cela on a besoin de deux lemmes techniques pour pouvoir estimer les nouveaux termes qui interviennent. Dans la section 3 on introduit le prolongement de la nouvelle pression, ce qui nous permet de passer à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Le problème local qu'on obtient est le même que celui obtenu au chapitre 1, donc on peut expliciter la solution. Dans les deux derniers paragraphes on obtient le problème homogénéisé, les coefficients homogénéisés et on passe à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$.

§1. Formulation du problème

Le domaine reste le même que celui introduit au chapitre 1. On garde les mêmes tenseurs des contraintes dans la partie solide et dans la partie fluide, c'est à dire:

$$\sigma^{s,\varepsilon\delta}_{\varepsilon\delta} = a_{ijkh}\, e_{kh}(u^{\varepsilon\delta}) \tag{1.1}$$

$$\sigma^{f,\varepsilon\delta}_{\varepsilon\delta} = -p^{\varepsilon\delta}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(v^{\varepsilon\delta}) \tag{1.2}$$

La différence avec le problème traité dans le chapitre 1 réside dans le fait qu'on considère le sytème de Navier-Stokes dans la partie fluide. Donc on se propose d'étudier l'homogénéisation du système suivant:

$$\begin{cases} \rho_f \dfrac{\partial v^{\varepsilon\delta}}{\partial t} - \mu\Delta v^{\varepsilon\delta} + \rho_f\big(v^{\varepsilon\delta}.\nabla\big)v^{\varepsilon\delta} = f - \nabla p^{\varepsilon\delta} \quad \text{dans} \quad \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] \operatorname{div} v^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] \rho_s \dfrac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ijkh}e_{kh}(u^{\varepsilon\delta})\Big) = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega^s_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] v^{\varepsilon\delta} = \dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \qquad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \\[2ex] \mu \dfrac{\partial v_i^{\varepsilon\delta}}{\partial n} - p^{\varepsilon\delta} n_i - \dfrac{1}{2}\rho_f v_j^{\varepsilon\delta} v_i^{\varepsilon\delta} n_j = a_{ijkh}e_{kh}(u^{\varepsilon\delta})n_j \ \text{ sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases} \tag{1.3}$$

avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} u^{\varepsilon\delta}(x,0) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Suivant une idée de J-L. Lions [29], retrouvée aussi dans D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [15] on va linéariser le système, c'est à dire qu'on va faire disparaître la non-linéarité du problème; et ceci pour faire disparaître la non-linéarité de la condition de transmission $(1.3)_5$.On connaît la formule suivante:

$$(v.\nabla)v = \nabla(\frac{v^2}{2}) - v \wedge \text{rot } v \tag{1.5}$$

et on introduit une nouvelle pression:

$$q^{\varepsilon\delta} = p^{\varepsilon\delta} + \frac{1}{2}\rho_f \big(v^{\varepsilon\delta}\big)^2 \tag{1.6}$$

Ceci nous amène au système équivalent suivant:

$$\begin{cases} \rho_f \dfrac{\partial\, v^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} - \mu \Delta v^{\varepsilon\delta} + \rho_f \text{ rot } v^{\varepsilon\delta} \wedge v^{\varepsilon\delta} = f - \nabla q^{\varepsilon\delta} \quad \text{dans } \ \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\ \\ \text{div } v^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \ \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\ \\ \rho_s \dfrac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t^2} - \dfrac{\partial}{\partial\, x_j}\Big(a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon\delta})\Big) = f_i \quad \text{dans } \ \Omega^s_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\ \\ v^{\varepsilon\delta} = \dfrac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} \qquad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \\ \\ \mu \dfrac{\partial v_i^{\varepsilon\delta}}{\partial\, n} - q^{\varepsilon\delta} n_i = a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon\delta}) n_j \ \text{ sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases} \tag{1.7}$$

toujours avec les conditions initiales (1.4).

Remarque 1.1 Le problème de l'unicité reste ouvert dans le cas général.

Remarque 1.2 Pour l'existence d'une solution du système (1.7) voir J-L. Lions [29].

Grâce à $(1.7)_4$ on prolonge $v^{\varepsilon\delta}$ à Ω tout entier par:

$$v^{\varepsilon\delta} = \frac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} \qquad \text{sur } \Omega$$

et on peut alors mettre le système (1.7) sous la forme suivante:

$$(1.8) \qquad \begin{cases} \rho_f \dfrac{\partial^2\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t^2} - \mu\Delta v^{\varepsilon\delta} + \rho_f \operatorname{rot} v^{\varepsilon\delta} \wedge v^{\varepsilon\delta} = f - \nabla q^{\varepsilon\delta} \quad \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] \operatorname{div} \dfrac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} = 0 \quad \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] \rho_s \dfrac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t^2} - \dfrac{\partial}{\partial\, x_j}\Big(a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon\delta})\Big) = f_i \quad \text{dans } \Omega^s_{\varepsilon\delta} \times (0,T) \\[2ex] v^{\varepsilon\delta} = \dfrac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} \qquad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \\[2ex] \mu \dfrac{\partial}{\partial\, n}\Big(\dfrac{\partial\, u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t}\Big) - q^{\varepsilon\delta} n_i = a_{ijkh} e_{kh}(u^{\varepsilon\delta}) n_j \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

On définit les coefficients suivants:

$$(1.9) \qquad a_{ijkh}(y) = \begin{cases} 0, & y \in Y^f_{\varepsilon\delta} \\[2ex] a_{ijkh}, & y \in Y^s_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

$$(1.10) \qquad b_{ijkh}(y) = \begin{cases} 2\mu(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ij}\delta_{kh}), & y \in Y^f_{\varepsilon\delta} \\[2ex] 0, & y \in Y^s_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Les $a_{ijkh}(y)$ et les $b_{ijkh}(y)$ vérifient les mêmes conditions de symétrie et coercivité qu'au chapitre 1. Avec ça on a la formulation variationnelle du système (1.8):

$$
(1.11) \qquad \begin{cases}
\text{Trouver } u^{\varepsilon\delta}(x,t) \in [H_0^1(\Omega)]^N, \ q^{\varepsilon\delta}(x,t) \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta}) \text{ tels que :} \\[2ex]
\displaystyle\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2}\, \phi\, dx + \int_\Omega \Big(a^\varepsilon_{ijkh} \frac{\partial\, u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial\, x_h} + b^\varepsilon_{ijkh} \frac{\partial^2\, u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial\, x_h\, \partial\, t} \Big) \frac{\partial\, \phi}{\partial\, x_j} dx + \\[2ex]
\quad \displaystyle + \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \rho_f \Big(\text{rot}\, \big(\frac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t}\big) \wedge \big(\frac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t}\big) \Big)\, \phi\, dx - \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} q^{\varepsilon\delta} \text{div}\, \phi\, dx = \\
\quad\quad \displaystyle = \int_\Omega f_i\, \phi_i\, dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \\[2ex]
\displaystyle \text{div}\, \frac{\partial\, u^{\varepsilon\delta}}{\partial\, t} = 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega^f_{\varepsilon\delta} \times (0,T)
\end{cases}
$$

§2 Estimations a priori

A partir de la formulation variationnelle (1.11), on va établir des estimations, mais sur la transformée de Laplace de $u^{\varepsilon\delta}$; c'est à dire qu'on introduit:

$$\widehat{u}(x,\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda}\, u(x,t)dt$$

et alors:

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses faites précédemment on a:*

$$\|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \tag{2.1}$$

avec la constante indépendante de ε et de δ.

Démonstration

Dans la formulation variationnelle (1.11) on prend $\dfrac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}$ comme fonction test et cela nous donne:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2}\, \frac{\partial u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx + \int_\Omega \Big(a_{ijkh}^\varepsilon \frac{\partial u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} + b_{ijkh}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h\, \partial t}\Big)\, \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j\, \partial t}\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} \rho_f \Big(\text{ rot } (\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) \wedge (\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t})\Big) \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} q^{\varepsilon\delta} \text{ div } \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx =$$

$$= \int_\Omega f_i\, \frac{\partial u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx$$

C'est à dire:

$$\int_\Omega \rho \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} dx + \int_\Omega \Big(a_{ijkh}^\varepsilon \frac{\partial u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} + b_{ijkh}^\varepsilon \frac{\partial^2 u_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h\, \partial t}\Big) \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j\, \partial t}\, dx = \int_\Omega f_i \frac{\partial u_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx \tag{2.2}$$

Dans cette relation on passe à la transformée de Laplace:

$$\lambda^3 \int_\Omega \rho\big(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\big)^2 dx + \int_\Omega \lambda^2\, b^\varepsilon_{ijkh} \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_k}{\partial\, x_h} * \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_i}{\partial\, x_j}\, dx +$$

$$+\,\lambda \int_\Omega a^\varepsilon_{ijkh} \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_k}{\partial\, x_h} * \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_i}{\partial\, x_j}\, dx = \lambda \int_\Omega \widehat{f}_i\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_i\, dx$$

D'où:

$$\lambda^2 \int_\Omega \rho\big(\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\big)^2 dx + \int_\Omega \big(a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}\big) \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_k}{\partial\, x_h} * \frac{\partial\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_i}{\partial\, x_j}\, dx = \lambda \int_\Omega \widehat{f}_i\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}_i\, dx$$

$$|\lambda^2|\; c\; \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega \widehat{f}\, \widehat{u}^{\varepsilon\delta}\, dx$$

$$|\lambda^2|\; c\; \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|\widehat{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)}$$

Donc on en déduit:

$$\|\widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \le c \tag{2.3}$$

avec la constante indépendante de δ.

On a les résultats suivants:

$$\begin{cases} \|g * h\|_{L^r} \le \|g\|_{L^p} \|h\|_{L^q} \quad g \in L^p,\, h \in L^q \\ \\ \text{avec } \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \ge 0 \; p, q \ge 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \tag{2.5}$$

d'où on en déduit:

$$\|\frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} * \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} * \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \tag{2.6}$$

$$\leq c\|\frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h}\|_{L^2(\Omega)}|\frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j}\|_{L^2(\Omega)}$$

Et avec ça on obtient:

$$\|\nabla \widehat{u}^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{2.7}$$

avec la constante indépendante de ε et de δ. Les relations (2.3) et (2.7) nous conduisent à la relation (2.1).

Au cours de cette démonstration on a utilisé les résultats suivants:

Lemme 2.2 *On a :*

$$\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \rho_f \Big(\mathrm{rot}(\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) \wedge (\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t})\Big)\frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\, dx = 0 \tag{2.8}$$

Démonstration Voir J-L. Lions [29].

Lemme 2.3 *Soient a(.), b(.)∈ $L^2(\Omega)$ deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace $\widehat{a}(x,\lambda)$ et $\widehat{b}(x,\lambda)$. Alors:*

$$\widehat{a}(x,\lambda) * \widehat{b}(x,\lambda) = \widehat{ab}(x,\lambda) \tag{2.9}$$

le produit de convolution étant considéré par rapport à λ.

Démonstration

On va expliciter le membre de gauche, c'est à dire écrire le produit de convolution:

$$\widehat{a}(x,\lambda) * \widehat{b}(x,\lambda) = \int_0^\infty \widehat{a}(x,\lambda - s)\widehat{b}(x,s)ds =$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty e^{-t(\lambda - s)} a(t) dt \int_0^\infty e^{-ts} b(t) dt \Big) ds =$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t\lambda + ts} a(t) dt e^{-\xi s} b(\xi) d\xi dt \Big) ds =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t\lambda} a(t) \Big(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{(t-\xi)s} b(\xi) ds d\xi \Big) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t\lambda} a(t) \Big(\int_0^\infty e^{ts} \Big(\int_0^\infty e^{-\xi s} b(\xi) d\xi \Big) ds \Big) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t\lambda} a(t) \Big(\int_0^\infty e^{ts} b(s) ds \Big) dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-t\lambda} a(t) b(t) dt = \widehat{ab}(x, \lambda)$$

On a utilisé le résultat: $b(t) = \int_0^\infty e^{ts} \widehat{b}(s) ds$. Pour ce résultat voir Fomine et Kolmogorov [24].

§3 Prolongement de la pression

A partir de maintenant on va travailler sur le système (1.11) auquel on a appliqué une transformée de Laplace (comme celle du chapitre 1 §1). C'est à dire qu'on va travailler sur le système suivant:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases}
\text{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \widehat{q}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta}) \text{ tels que :} \\
\lambda^2 \displaystyle\int_\Omega \rho \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega (a^\varepsilon_{ijkh} + \lambda b^\varepsilon_{ijkh}) \frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x_j} dx - \\
\displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{q}^{\varepsilon\delta} \operatorname{div} \bar{\phi} dx + \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \lambda^2 (\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{ml}) \frac{\partial \widehat{u}_l^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} * \widehat{u}_m^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx = \\
= \displaystyle\int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx \quad \forall \phi \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \forall Re\lambda \geq \lambda_0 > 0 \\
\operatorname{div} \widehat{u}^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta}
\end{cases}
$$

Comme on peut s'attendre dans ce cas, du système Navier-Stokes dans la partie fluide, on va utiliser la nouvelle définition de la pression introduite au chapitre 1 § 3, bien sûr adaptée à cette situation.

Définition 3.1

Si $\widehat{q}^{\varepsilon\delta} \in L^2(\Omega^f_{\varepsilon\delta})$ est la pression du fluide considéré alors on définit une nouvelle pression de la manière suivante:

$$
(3.2) \qquad \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta} = \begin{cases}
\widehat{q}^{\varepsilon\delta} - \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{q}^{\varepsilon\delta} dx \text{ dans } \Omega^f_{\varepsilon\delta} \\
- \dfrac{1}{|\Omega|} \displaystyle\int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{q}^{\varepsilon\delta} dx \text{ dans } \Omega^s_{\varepsilon\delta}
\end{cases}
$$

Remarque 3.2 On a les mêmes propriétés de cette nouvelle pression que pour celle définie au chapitre 1. C'est à dire que le lemme 3.3 du chapitre 1 reste valable aussi dans ce cas, pour $\widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}$. Si on note:

$$\widetilde{\sigma}_{ij}^{f,\varepsilon\delta} = -\widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}\delta_{ij} + 2\mu\lambda e_{ij}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})$$

$$\widetilde{\sigma}_{ij}^{s,\varepsilon\delta} = -\widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}\delta_{ij} + a_{ijkh}e_{kh}(\widehat{u}^{\varepsilon\delta})$$

alors la condition:

$$\widetilde{\sigma}_{ij}^{f,\varepsilon\delta}n_j = \widetilde{\sigma}_{ij}^{s,\varepsilon\delta}n_j \quad \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta}$$

est équivalente à la condition $(1.7)_5$.

Avec tout ça on a:

Lemme 3.3 *Sous les hypothèses faites précédemment on a:*

(3.3) $$\|\widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}\|_{L_0^2(\Omega)} \leq c$$

avec la constante indépendante de ε et de δ.

Démonstration

La démonstration est la même que celle du lemme 3.3, chapitre 1 à la seule différence que pour le terme avec le produit de convolution on va utiliser à nouveau les relations (2.4)-(2.6).

§4 Le théorème de convergence pour $\varepsilon \longrightarrow 0$

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses faites précédemment on a:*
(i) *Il existe une fonction* $\widehat{u}^{0\delta} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ *telle que, quitte à extraire une sous-suite:*

$$\widehat{u}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \widehat{u}^{0\delta} \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \tag{4.1}$$

$$\widehat{u}^{\varepsilon\delta} \quad \text{converge double-échelle vers } \widehat{u}^{0\delta} \tag{4.2}$$

(ii) *Il existe une fonction* $\widehat{u}^{1\delta}(x,y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/\mathbb{R})$ *telle que, quitte à extraire une sous-suite:*

$$\int_\Omega \frac{\partial \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} \psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \Big(\frac{\partial \widehat{u}_i^{0\delta}}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial \widehat{u}_i^{1\delta}}{\partial y_j}(x,y)\Big)\psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.3}$$

$\forall \psi \in L_p^2(Y) \quad , \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$
(iii) *Il existe une fonction* $\widetilde{Q}^{0\delta}(x,y) \in L^2(\Omega, L_p^2(\tilde{Y})$ *telle que, quitte à extraire une sous-suite:*

$$\int_\Omega \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}(x)\psi^\varepsilon(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_{\Omega\times Y} \widetilde{Q}^{0\delta}(x,y)\psi(y)\phi(x)dxdy \tag{4.4}$$

$\forall \psi \in L_p^2(Y) \quad , \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$

Démonstration Voir la démonstration du théorème 4.1 du chapitre 1 §4.

Corollaire 4.2 *Les limites* $\widehat{u}^{0\delta}$, $\widehat{u}^{1\delta}$ *et* $\widetilde{Q}^{0\delta}$ *ont les propriétés suivantes:*

$$\operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta}(x) + \operatorname{div}_y \widehat{u}^{1\delta}(x,y) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times Y_f \tag{4.5}$$

$$\widetilde{Q}^{0\delta}(x,y) = B \quad \text{sur} \quad \Omega \times Y_s \tag{4.6}$$

où B est une constante.

Démonstration Voir la démonstration du corollaire 4.2 du chapitre 1.

Remarque 4.3 De même que dans le cas étudié au chapitre 1 la valeur de la constante qui apparaît dans la formule (4.6) est donnée par:

$$B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^f_{\varepsilon\delta}} \widehat{Q}^{\varepsilon\delta} \tag{4.7}$$

§5 Le problème local pour $\widehat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{Q}^{0\delta}$

On introduit:

$$Q^\delta(x,y) = \widetilde{Q}^{0\delta}(x,y) + B \tag{5.1}$$

où B est la constante déterminée par (4.7).

Dans ce cas en utilisant le corollaire 4.2 du paragraphe précédent on a:

$$Q^\delta(x,y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_s \tag{5.2}$$

La formulation variationnelle (3.1) s'écrit à l'aide de la définition (3.2):

$$\begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in L^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ \\ \lambda^2 \displaystyle\int_\Omega \rho \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega \big(a_{ijkh}^\varepsilon + \lambda b_{ijkh}^\varepsilon\big) \frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x_j} dx - \\ \\ \displaystyle\int_\Omega \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta} \operatorname{div} \bar{\phi} dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} \lambda^2 \big(\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{ml}\big) \frac{\partial \widehat{u}_l^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} * \widehat{u}_m^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx = \\ \\ \quad = \displaystyle\int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx \quad \forall \phi \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \forall Re\lambda \geq \lambda_0 > 0 \\ \\ \operatorname{div} \widehat{u}^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \end{cases} \tag{5.3}$$

Maintenant pour obtenir le problème local pour $\hat{u}^{1\delta}$ et $\widetilde{Q}^{0\delta}$ dans la formulation variationnelle (3.1) on prend comme fonction test $\varepsilon\psi^\varepsilon\phi$, avec $\psi \in [H_p^1(Y)]^N$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et avec la règle de dérivation suivante:

$$\frac{\partial \psi_j^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\Big)^\varepsilon (x) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \psi_j}{\partial y_i}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$$

Cela nous donne:

$$\lambda^2 \int_\Omega \rho \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \varepsilon \bar{\psi}_i^\varepsilon \bar{\phi} dx + \int_\Omega \left(a_{ijkh}^\varepsilon + \lambda b_{ijkh}^\varepsilon\right) \frac{\partial \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_h} \left(\phi \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \psi_i^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) dx$$

$$(5.4) \qquad - \int_\Omega \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta} (\bar{\phi} \operatorname{div}_y \bar{\psi}(\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \psi_i^\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) dx +$$

$$+ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} \lambda^2 \left(\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{ml}\right) \frac{\partial \widehat{u}_l^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} * \widehat{u}_m^{\varepsilon\delta} \varepsilon \bar{\psi}_i^\varepsilon \bar{\phi} dx = \varepsilon \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\psi}_i^\varepsilon \bar{\phi} dx$$

Si on passe à la limite double-échelle dans cette formulation on voit bien que le terme qui contient le produit de convolution va disparaître et donc on obtient le même problème local que celui obtenu dans le paragraphe 5 du chapitre 1, c'est à dire:

$$(5.5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_Y \left(a_{ijkh}(y) + \lambda b_{ijkh}(y)\right) \left(e_{kh}^x(\hat{u}^{0\delta}) + e_{kh}^y(\hat{u}^{1\delta})\right) e_{ij}^y(\bar{\psi}) dx dy - \\ \qquad \displaystyle - \int_{Y_f} Q^{0\delta}(x,y) \operatorname{div}_y \bar{\psi} dy = 0 \quad \forall \psi \in H_p^1(Y) \\ \operatorname{div}_x \hat{u}^{0\delta} + \operatorname{div}_y \hat{u}^{1\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times Y_f \\ Q^{0\delta} = 0 \text{ dans } \Omega \times Y_s \end{cases}$$

En appliquant les résultats abstraits de l'annexe 3 on a, pour $\widehat{u}^{0\delta}$ donné, l'existence et l'unicité de la solution $(\widehat{u}^{1\delta}, Q^{0\delta})$ du problème local (5.5). Puisque le problème local est identique à celui du cas traité au premier chapitre, il est évident que les résultats, concernant le problème local, qui ont été démontrés pour le cas Stokes restent valables dans notre cas, celui où on a le système Navier-Stokes dans le fluide. Donc l'unique solution du problème (5.5) est donnée par:

$$(5.6) \qquad \widehat{u}^{1\delta}(x,y) = \eta^\delta(y) \operatorname{div}_x \widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta}) \chi_\delta^{kh}(y)$$

$$Q^{0\delta}(x,y) = \pi^\delta(y)\,\mathrm{div}_x\widehat{u}^{0\delta} + e_{kh}(\widehat{u}^{0\delta})q_\delta^{kh}(y) \tag{5.7}$$

où $(\chi_\delta^{kh}, q_{kh}^\delta)$ est l'unique solution du problème (6.1) du chapitre 1 et $(\eta^\delta, \pi^\delta)$ est l'unique solution du problème (6.2) du chapitre 1.

On a aussi les estimations du chapitre 1 concernant les solutions des problèmes (6.1), (6.2) et (6.3) données au chapitre 1; c'est à dire qu'il existe des constantes indépendantes de δ telles qu'on ait:

$$\|\nabla_y\, \chi_\delta^{kh}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 \tag{5.8}$$

$$\|q_{kh}^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \tag{5.9}$$

$$\|\nabla_y\, \eta^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c_3 \tag{5.10}$$

$$\|\pi^\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c_4 \tag{5.11}$$

Remarque Toujours d'après les résultats établis au chapitre 1 on en déduit les convergences suivantes, qui ont lieu, quitte à extraire une sous-suite:

$$\chi_\delta^{kh} \rightharpoonup \chi_*^{kh} \quad \text{dans } H_p^1(Y) \quad \text{faible} \tag{5.12}$$

$$q_{kh}^\delta \rightharpoonup q_*^{kh} \quad \text{dans } L^2(Y) \quad \text{faible} \tag{5.13}$$

$$\eta^\delta \rightharpoonup \eta^* \quad \text{dans } H_p^1(Y) \quad \text{faible} \tag{5.14}$$

$$\pi^\delta \rightharpoonup \pi^* \quad \text{dans } L^2(Y) \quad \text{faible} \tag{5.15}$$

§6 Le problème homogénéisé (pour $\varepsilon \longrightarrow 0$)

On rappelle la formulation variationnelle de notre problème:

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta}(x,\lambda) \in L^2(\Omega) \text{ tels que :} \\ \lambda^2 \displaystyle\int_\Omega \rho \widehat{u}_i^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega \big(a_{ijkh}^\varepsilon + \lambda b_{ijkh}^\varepsilon\big) \frac{\partial\, \widehat{u}_k^{\varepsilon\delta}}{\partial\, x_h} \frac{\partial\, \bar{\phi}_i}{\partial\, x_j} dx - \\ \displaystyle\int_\Omega \widetilde{Q}^{\varepsilon\delta} \operatorname{div} \bar{\phi} dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^f} \lambda^2 \big(\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{ml}\big) \frac{\partial\, \widehat{u}_l^{\varepsilon\delta}}{\partial\, x_j} * \widehat{u}_m^{\varepsilon\delta} \bar{\phi}_i dx = \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx \quad \forall \phi \in [H_0^1(\Omega)]^N,\ \forall Re\lambda \geq \lambda_0 > 0 \\ \operatorname{div} \widehat{u}^{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}^f \end{cases}$$

Théorème 6.1 *Pour* $\longrightarrow 0$*, la limite double-échelle du système (6.1) est:*

$$(6.2)\qquad \begin{aligned} &\lambda^2 \int_\Omega m(\rho) \widehat{u}_i^{0\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega \big(C_{ijkh}^\delta + D_{ijkh}^\delta\big) e_{kh}^x(\widehat{u}^{0\delta}) e_{ij}(\bar{\phi}) dx + \\ &+ \lambda^2 \int_\Omega \Big(E_{ijkh}^\delta \frac{\partial\, \widehat{u}_j^{0\delta}}{\partial\, x_k}\Big) * \widehat{u}_h^{0\delta} \bar{\phi}_i dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx \end{aligned}$$

quelque soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $Re\,\lambda \geq \lambda_0 > 0$*; où* $m(\rho) = \dfrac{1}{|Y|}\displaystyle\int_Y \rho\, dy$ *et les coefficients* C_{ijkh}^δ *et* D_{ijkh}^δ *sont donnés par les formules (9.2) et (9.3) du chapitre 1. Les coefficients* E_{ijkh}^δ *sont donnés par:*

$$(6.3)\qquad E_{ijkh}^\delta = \big(\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}\big) \int_{Y_f} \Big(\delta_{lj}\delta_{sk} + \frac{\partial\, \eta_l^\delta}{\partial\, y_s}\delta_{jk} + \frac{\partial\, \chi_{\delta,l}^{kh}}{\partial y_s}\delta_{jh}\Big) dy$$

Démonstration

Pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on veut passer à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (6.1). D'après le chapitre 1 on sait passer à la limite dans tous les termes de l'équation (6.1), à l'exception de celui qui contient le produit de convolution. Pour passer à la limite dans ce terme on observe d'abord que, puisque le produit de convolution est pris par rapport à λ alors on a la convergence double-échelle suivante, qui a lieu, quitte à extraire une sous-suite:

$$(6.4)\qquad \left(\nabla \widehat{u}^{\varepsilon\delta}\right) * \widehat{u}^{\varepsilon\delta} \text{ converge double-échelle vers } \left(\nabla_x \widehat{u}^{0\delta} + \nabla_y \widehat{u}^{1\delta}\right) * \widehat{u}^{0\delta}$$

ceci à cause du théorème de convergence 4.1.

Et donc on en déduit que si on passe à la limite double-échelle dans (6.1), avec $\phi \in \mathcal{D}$ on obtient:

$$\lambda^2 \int_\Omega m(\rho) \widehat{u}_i^{0\delta} \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega \left(C_{ijkh}^\delta + D_{ijkh}^\delta \delta_{kh}\right) e_{kh}^x(\widehat{u}^{0\delta}) e_{ij}(\bar{\phi}) dx +$$

$$(6.5)\qquad + \int_{\Omega \times Y_f} \lambda^2 \left(\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}\right)\left(\frac{\partial \widehat{u}_l^{0\delta}}{\partial x_s} + \frac{\partial \widehat{u}_l^{1\delta}}{\partial y_s}\right) * \widehat{u}_h^{0\delta} \bar{\phi}_i dx =$$

$$= \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx$$

et en tenant compte de (5.6) :

$$\int_{\Omega \times Y_f} \lambda^2 \left(\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}\right)\left(\frac{\partial \widehat{u}_l^{0\delta}}{\partial x_s} + \frac{\partial \widehat{u}_l^{1\delta}}{\partial y_s}\right) * \widehat{u}_h^{0\delta} \bar{\phi}_i dx =$$

$$= \int_\Omega \lambda^2 \left(\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}\right) \int_{Y_f} \left(\frac{\partial \widehat{u}_l^{0\delta}}{\partial x_s} + \frac{\partial \eta_l^\delta}{\partial y_s}\frac{\partial \widehat{u}_j^{0\delta}}{\partial x_k}\delta_{jk} + \frac{\partial \chi_{\delta,l}^{kh}}{\partial y_s}\frac{\partial \widehat{u}_h^{0\delta}}{\partial x_k}\right) dy * \widehat{u}_h^{0\delta} \bar{\phi}_i dx =$$

$$= \int_\Omega \lambda^2 \left(\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}\right) \int_{Y_f} \left(\delta_{lj}\delta_{sk} + \frac{\partial \eta_l^\delta}{\partial y_s}\delta_{jk} + \frac{\partial \chi_{\delta,l}^{kh}}{\partial y_s}\delta_{jh}\right) dy\, \frac{\partial \widehat{u}_j^{0\delta}}{\partial x_k} * \widehat{u}_h^{0\delta} \bar{\phi}_i dx =$$

$$= \lambda^2 \int_\Omega \left(E^\delta_{ijkh} \frac{\partial \widehat{u}^{0\delta}_j}{\partial x_k} \right) * \widehat{u}^{0\delta}_h \bar{\phi}_i dx$$

La dernière égalité a lieu si on prend les coefficients E^δ_{ijkh} donnés par (6.3). D'où si on remplace dans (6.5) on obtient précisémment (6.2).

§ 7. Passage à la limite avec $\delta \longrightarrow 0$

Le résultat donné par le lemme 10.1 du chapitre 1 §10 est valable aussi dans ce cas, donc on a:

$$\widehat{u}^{0\delta} \rightharpoonup \widehat{u}^* \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \tag{7.1}$$

et on en déduit:

Théorème 7.1 *Pour $\delta \longrightarrow 0$ la limite $\widehat{u}^*$ de $\widehat{u}^{0\delta}$ vérifie l'équation suivante:*

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \int_\Omega m(\rho)\widehat{u}_i^* \bar{\phi}_i dx + \int_\Omega \left(C^*_{ijkh} + D^*_{ijkh}\right) e_{kh}(\widehat{u}^*) e_{ij}(\bar{\phi})\, dx + \\ &+ \lambda^2 \int_\Omega \left(E^*_{ijkh} \frac{\partial \widehat{u}_j^*}{\partial x_h}\right) * \widehat{u}_h^* \bar{\phi}_i dx = \int_\Omega \widehat{f}_i \bar{\phi}_i dx \end{aligned} \tag{7.2}$$

ceci pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, où:

$$\begin{cases} C^*_{ijkh} = \lim\limits_{\delta \to 0} C^\delta_{ijkh} \\ D^*_{ijkh} = \lim\limits_{\delta \to 0} D^\delta_{ijkh} \\ E^*_{ijkh} = \lim\limits_{\delta \to 0} E^\delta_{ijkh} \end{cases} \tag{7.3}$$

Démonstration

Toujours d'après les résultats établis au chapitre 1 on sait que les coefficients C^δ_{ijkh} et D^δ_{ijkh} sont bornés par des constantes indépendantes de δ et donc on connaît l'existence des coefficients limites C^*_{ijkh} et D^*_{ijkh}. Il nous reste à montrer maintenant que les E^δ_{ijkh} sont aussi bornés:

$$|E^{\delta}_{ijkh}| \leq |\delta_{il}\delta_{hs} - \delta_{is}\delta_{hl}| \int_{Y_f} |\delta_{il}\delta_{sk} + \frac{\partial \eta^{\delta}_{l}}{\partial y_s}\delta_{jk} + \frac{\partial \chi^{kj}_{\delta,l}}{\partial y_s}|dy \leq$$

$$\leq c_1 \int_{Y} \Big(|\delta_{lj}\delta_{sk}| + |\frac{\partial \eta^{\delta}_{l}}{\partial y_s}\delta_{jk}| + |\frac{\partial \chi^{kj}_{\delta,l}}{\partial y_s}|\Big) dy \leq c_1 c_2$$

car on a les estimations données (5.8)-(5.11). Donc on en déduit:

$$|E^{\delta}_{ijkh}| \leq c \tag{7.4}$$

avec la constante indépendante de δ. D'où on en déduit l'existence de:

$$E^{*}_{ijkh} = \lim_{\delta \to 0} E^{\delta}_{ijkh}$$

et donc si on passe à la limite dans (6.2) avec $\delta \longrightarrow 0$ on obtient (7.2).

Remarque 7.2 On voit que dans le cas d'un système Navier-Stokes linéarisé dans la partie fluide on utilise, car ils restent valables, de façon essentielle les résultats qui ont été démontrés dans le cas d'un système Stokes dans la partie fluide. La différence entre les deux cas est plus évidente pour l'équation limite (7.2) qui contient un terme en plus, celui avec le produit de convolution.

CHAPITRE 3

HOMOGENEISATION DU PROBLEME DE NEUMANN

DANS

DES MILIEUX POREUX AVEC DOUBLE PERIODICITE

Chapitre 3. Homogénéisation du problème de Neumann dans des milieux poreux avec double périodicité

§1. Introduction

L'écoulement des fluides à travers des milieux poreux représente un problème d'une grande importance, avec de nombreuses applications dans l'exploitation des gisements pétroliers, la pollution, la géophysique, etc. Dans la pratique des exploitations pétrolières on rencontre le plus souvent des milieux poreux fissurés. Dans ce cas un problème sur lequel on a beaucoup discuté est la modélisation de ces mouvements. En effet on connaît les équations proposées par Barenblatt et Zheltov [7] qui introduisent deux pressions différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. On décrit, dans ce cas, l'écoulement moyen, ou macroscopique, avec deux équations qui contiennent un terme de transfert entre les blocs poreux et les fissures; ce terme est représenté par la différence des deux pressions.

En utilisant la méthode de l'homogénéisation, Th. Levy [28] et P. Donato et J. Saint Jean Paulin [20] ont proposé un modèle qui contient une double périodicité. Plus précisément dans les fissures l'écoulement est périodique en ε et dans les blocs poreux en ε^2. Le résultat qu'on obtient en passant à la limite est une loi de Darcy avec un tenseur de perméabilité différent du tenseur classique de la loi de Darcy (E. Sanchez-Palencia [38]).

Un autre modèle d'écoulement dans les milieux poreux fissurés, proposé par T. Arbogast, U. Hornung et J. Douglas [5], U. Hornung [27], connu comme le modèle de double porosité, consiste dans l'introduction de deux perméabilités très différentes dans les blocs poreux et dans les fissures. Plus précisément si on suppose que la perméabilité des fissures est de l'ordre de l'unité, alors dans les blocs poreux on prend une perméabilité de l'ordre de ε^2. Le résultat du processus d'homogénéisation qu'on obtient est un modèle avec deux pressions et donc avec un terme de transfert lié à la différence des deux pressions.

Il faut noter que le modèle avec double périodicité est un modèle d'écoulement stationnaire tandis que le modèle avec double porosité est un modèle d'écoulement non-stationnaire.

Le problème qui se pose et de savoir s'il y a un lien entre ces deux modèles.

Pour répondre à cette question nous allons étudier un problème de Neumann, qui représente d'un point de vue mécanique un problème de double porosité, dans le cadre d'un milieu avec double périodicité. Le résultat d'homogénéisation qu'on va démontrer est qu'au niveau macroscopique on a une loi de Darcy, ce qui veut dire, qu'au moins dans le cas stationnaire, les deux modèles coïncident.

D'un point de vue mécanique, on sait que l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux est décrit par:

la loi de Darcy:

$$v = -k\,(\nabla p - f) \tag{1.1}$$

où v est le vecteur vitesse, p la pression, k le tenseur de perméabilité (qui est symétrique et défini positif, cf. E. Sanchez-Palencia [38]), et f les forces extérieures.

l'équation de continuité:

$$\text{div } v = 0 \tag{1.2}$$

la condition sur les frontières imperméables:

$$v.n = 0 \tag{1.3}$$

On voit donc, que d'un point de vue mathématique, on est conduit à résoudre un problème de Neumann:

$$-\text{div } (A\nabla u) = f \tag{1.4}$$

$$A\nabla u.n = 0 \tag{1.5}$$

En plus si l'on considère maintenant que le milieu poreux est formé par des fissures d'ordre ε et des blocs poreux qui contiennent des inclusions (ou des trous d'ordre ε^2, le problème de Neumann qu'on a à résoudre est tel qu'on cherche des solutions doublement périodiques, en ε et ε^2.

Pour étudier ce problème on va utiliser la méthode de la convergence triple-échelle, qui est un cas particulier de la convergence multi-échelle introduite par G. Allaire et M. Briane [4].

Il faut souligner qu'il y a des différences entre le résultat général de Allaire et Briane et notre problème. Notre domaine décrit, par sa nature les milieux poreux fissurés (voir Th. Levy [28]) et ceci se traduit par l'introduction de la fonction caractéristique du domaine, mieux adaptée à l'étude des écoulements dans des milieux poreux (voir P. Donato et J. Saint Jean Paulin [20]). De ce point de vue, à notre avis, le problème de Neumann que nous étudions décrit bien les phénomènes à double porosité. Enfin pour étudier la convergence du processus d'homogénéisation nous allons utiliser l'opérateur de prolongement introduit par D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin [10] au lieu du prolongement par zéro utilisé par Allaire et Briane. Cela nous permet de travailler directement dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et donc d'éviter des démonstrations ultérieures d'appartenance à cet espace. On peut aussi noter des différences dans les points techniques des différents lemmes qu'on utilise.

§2 Formulation du problème et estimations a priori

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$. On considère l'ouvert:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus S_\Omega^\varepsilon$$

où le fermé S_Ω^ε est obtenu de la manière suivante: Soit Y et Z deux cellules de référence fixées,

$$Y = [0, y_1^0] \times [0, y_2^0] \times [0, y_3^0]$$

$$Z = [0, z_1^0] \times [0, z_2^0] \times [0, z_3^0]$$

et on pose: $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)$, $z^0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)$. On note $F \subset Y$ et $S \subset Z$ deux sous-ensembles fermés avec des frontières régulières et tels que:

(2.1) $$|F| \neq 0 \quad |S| \neq 0$$

où $|\,.\,|$ denote la mesure de Lebesgue 3-D.

On répète F et S par "Y-périodicité" et respectivement par "Z-périodicité" et on suppose que:

(2.2) $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \left(F + ky^0\right) \text{ et } \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3} \left(Z + kz^0\right) \text{ ont une frontière de classe } C^1$$

On suppose aussi que:

quel que soit ε il existe un ensemble fini $K_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^3$ tel que

(2.3) $$\bigcup_{k\in K_\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}\left(Z + kz^0\right) = Y$$

Cela veut dire que pour tout ε la période Y est couverte exactement par un nombre fini de cellules translatées de $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$Z. Le paramètre ε est censé tendre vers 0.

On pose:

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} S_Y^\varepsilon &= (Y\setminus F)\bigcap\Big(\bigcup_{k\in K_\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}(S+kz^0)\Big)\\ Y^\varepsilon &= Y\setminus S_Y^\varepsilon \end{aligned}$$

On suppose que $S_Y^\varepsilon \bigcap F = \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$. Puisque S_Y^ε est un sous-ensemble de $Y \setminus F$, un sous-ensemble de fermés ("inclusions") distribués périodiquement avec la période $\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$ et de la même dimension que la période. On suppose aussi pour simplifier que:

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ il existe un ensemble fini } H_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^3 \text{ tel que}$$

$$\bigcup_{h\in\mathbb{Z}^3}\varepsilon\big(S_Y^\varepsilon + hy^0\big)\bigcap\Omega = \bigcup_{h\in H_\varepsilon}\varepsilon\big(S_Y^\varepsilon + hy^0\big)$$

Cela veut dire que la structure de Ω_ε présente une double périodicité (ε et ε^2). Les zones dans lesquelles les inclusions sont concentrées sont ε - périodiques et de dimension ε. Les inclusions dans chaque zone sont ε^2 - périodiques et de dimension ε^2.

On veut étudier avec la méthode de l'homogénéisation le système suivant:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon\\[2ex] u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega\\[2ex] \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial S_\Omega^\varepsilon \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Soit l'espace:

$$V_\varepsilon = \{\phi \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

On prend $\phi \in V_\varepsilon$ et on multiplie l'équation $(2.5)_1$ par cette fonction test. On obtient:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \, \phi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \, \phi \, dx$$

Mais on a la formule de Green:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \, \phi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \; \nabla \phi \, dx - \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \, \phi \, ds$$

c'est-à-dire qu'on a, compte tenu des conditions $(2.5)_2$ et $(2.5)_3$, et du fait que $\phi \in V_\varepsilon$:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \, \phi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \; \nabla \phi \, dx$$

Alors on obtient la formulation variationnelle du système (2.5):

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in V_\varepsilon \text{ tel que:} \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \; \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f \, \phi \, dx \quad \forall \phi \in V_\varepsilon \end{cases}$$

Théorème 2.1 *Le système (2.7) admet une unique solution.*

Démonstration

Si on pose:

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \; \nabla v \, dx$$

$$L(v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \, v \, dx$$

le théorème de Lax-Milgram est vérifié pour *a(., .)* qui est une forme bilinéaire, continue et coercive, et L(.) qui est une forme linéaire et continue. Donc on a assuré l'existence et l'unicité de la solution u_ε de (2.7).

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses faites précédemment on a:*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \tag{2.8}$$

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c \tag{2.9}$$

avec les constantes indépendantes de ε.

Démonstration

Dans (2.7) on prend u_ε comme fonction test ce qui nous donne:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f\, u_\varepsilon\, dx$$

d'où:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.10}$$

Dans ce cas on a l'inégalité de Poincaré:

$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c\, \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \tag{2.11}$$

avec la constante c indépendante de ε. Les inégalités (2.10) et (2.11) nous conduisent exactement aux inégalités annoncées (2.8) et (2.9).

Remarque. Tous les résultats qu'on démontre peuvent être étendus au cas ou les inclusions sont périodique avec la période r_ε et de dimension r_ε, avec

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \tag{2.12}$$

Le cas qu'on a choisi de traiter, i.e. $r_\varepsilon = \varepsilon^2$, est le cas physique, celui qui nous permet d'établir la relation entre le modèle avec double périodicité et le modèle avec double porosité, dans le cas stationnaire.

§3 Construction de l'opérateur de prolongement

Pour pouvoir passer à la limite dans le système (2.7) on est obligé de construire un opérateur de prolongement $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega))$. Pour ceci on va utiliser les techniques introduites par D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [10] et aussi des résultats de C. Conca et P. Donato [18].

Lemme 3.1 *Il existe une famille $\{P_\varepsilon\}$ d'opérateurs de prolongement linéaires et continus, $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(V_\varepsilon, H_0^1(\Omega))$ qui vérifie:*

$$(P_\varepsilon \phi)(x) = \phi(x) \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega |\nabla(P_\varepsilon \phi)|^2 dx \leq c \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 dx \quad \forall \phi \in V_\varepsilon \tag{3.2}$$

avec la constante c indépendante de ε.

Démonstration

Pour démontrer l'existence d'une telle famille d'opérateurs on voit qu'il suffit de démontrer l'existence d'une famille $Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(Y_\varepsilon), H^1(Y))$ qui vérifie:

$$(Q_\varepsilon \phi)(x) = \phi(x) \quad \forall x \in Y_\varepsilon \tag{3.3}$$

$$\int_Y |\nabla(Q_\varepsilon \phi)|^2 dx \leq c \int_{Y_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 dx \quad \forall \phi \in H^1(Y_\varepsilon) \tag{3.4}$$

avec la constante indépendante de ε.

<u>Construction de Q_ε</u>

<u>$1^{ère}$ étape</u>

On note 2S = $\widetilde{D}$, D = $\widetilde{D} \setminus S$. D'après D. Cioranescu et J. Saint-Jean Paulin [10] on sait qu'il existe un opérateur:

$$q \in \mathcal{L}(H^1(D), H^1(\widetilde{D}))$$

tel que:

$$(q\psi) = \psi(y) \quad \forall y \in D \tag{3.5}$$

$$\int_{\widetilde{D}} |\nabla(q\psi)|^2 dy \leq c_1 \int_D |\nabla\psi|^2 dy \quad \forall \psi \in H^1(D) \tag{3.6}$$

où c_1 dépend seulement de S.

On introduit les notations suivantes:

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} Z = Z_{\varepsilon^2}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} S = S_{\varepsilon^2}$$

$$Z^*_{\varepsilon^2} = Z_{\varepsilon^2} \setminus \overline{S}_{\varepsilon^2}$$

$2^{ème}$ étape

Lemme 3.2 *Il existe un opérateur de prolongement $q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(Z^*_{\varepsilon^2}), H^1(Z_{\varepsilon^2}))$ tel que:*

$$(q_\varepsilon\phi)(x) = \phi(x) \quad \forall x \in Z^*_{\varepsilon^2} \tag{3.7}$$

$$\int_{Z_{\varepsilon^2}} |\nabla(q_\varepsilon\phi)|^2 dx \leq c \int_{Z^*_{\varepsilon^2}} |\nabla\phi|^2 dx \quad \forall \phi \in H^1(Z^*_{\varepsilon^2}) \tag{3.8}$$

Démonstration du lemme 3.2

A l'aide de l'opérateur q on définit q_ε de la manière suivante:

Pour $\phi \in H^1(Z^*_{\varepsilon^2})$

$$(q_\varepsilon\phi)(x) = \begin{cases} \phi(x) \text{ si } x \in Z^*_{\varepsilon^2} \\ \\ (q\psi)(x) \text{ si } x \in \overline{S}_{\varepsilon^2} \end{cases} \tag{3.9}$$

où $\psi(z) = \phi(\frac{x}{\varepsilon^2})$, $z = \frac{x}{\varepsilon^2}$.

Avec cette définition on voit bien que q_ε vérifie (3.7). Il nous reste à montrer qu'on a aussi (3.8). On a:

$$\int_{S_{\varepsilon^2}} |\nabla_x (q_\varepsilon \phi)|^2 dx = \varepsilon^2 \int_S |\nabla_z (q\psi)|^2 dz \tag{3.10}$$

et en utilisant aussi (3.6) on obtient:

$$\int_{S_{\varepsilon^2}} |\nabla_x (q_\varepsilon \phi)|^2 dx \leq c_1 \varepsilon^2 \int_S |\nabla_z \psi|^2 dy = c_1 \int_{S_{\varepsilon^2}} |\nabla_x \phi|^2 dx$$

D'où:

$$\int_{Z_{\varepsilon^2}} |\nabla_x (q_\varepsilon \phi)|^2 dx \leq (1 + c_1) \int_{Z^*_{\varepsilon^2}} |\nabla\, \phi|^2 dx$$

qui démontre (3.8) avec $c = 1 + c_1$.

<u>$3^{ème}$ étape (Définition de Q_ε)</u>

Pour $\phi \in H^1(Y_\varepsilon)$ on définit:

$$(Q_\varepsilon \phi)(x) = \begin{cases} (q_\varepsilon \phi)(x) \text{ si } x \in Z_{\varepsilon^2} \\ \\ \phi(x) \text{ si } x \in F \end{cases} \tag{3.11}$$

(quand on prend $x \in Z_{\varepsilon^2}$ dans cette définition on sous-entend la réunion des Z_{ε^2} contenus dans Y).

Avec cette définition Q_ε vérifie (3.3) et (3.4).

§4 Passage à la limite et problème homogénéisé

Puisque $P_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$ dans Ω_ε et $u_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ on en déduit que $P_\varepsilon u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$. Et on se rappelle aussi qu'on a les estimations (2.8) et (2.9), donc la suite $(P_\varepsilon u_\varepsilon)$ reste bornée dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \tag{4.1}$$

avec la constante indépendante de ε.

En appliquant la proposition 2 de l'annexe 2, sur la convergence 3-échelle, on a les résultats suivants:

Théorème 4.1 *Sous les hypothèses précédentes on a:*
(i) Quitte à extraire une sous-suite, les convergences suivantes ont lieu:

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u(x) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} \tag{4.2}$$

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \text{ converge 3-échelle } u(x) \tag{4.3}$$

(ii) Il existe deux fonctions $u_1(x,y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/\mathbb{R})$, $u_2(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/\mathbb{R})$ *telles que, quitte à extraire une sous-suite on a:*

$$\nabla\big(P_\varepsilon u_\varepsilon\big) \text{ converge 3-échelle } \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z) \tag{4.4}$$

Si on utilise le prolongement P_ε la formulation variationnelle (2.7) s'écrit:

$$\int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon}(x)\nabla\big(P_\varepsilon u_\varepsilon\big)\,\nabla\phi\,dx = \int_\Omega \chi_{\Omega_\varepsilon}(x)\,f(x)\,\phi(x)\,dx \tag{4.5}$$

pour toute fonction $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Maintenant on va établir le problème local et le problème homogénéisé pour (4.5).

Théorème 4.2 *Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ la limite 3-échelle de (4.5) est donnée par:*

$$\int_{\Omega\times Y\times Z}\Big(\chi_F(y)+\chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\Big(\nabla_x u(x)+\nabla_y u_1(x,y)+$$

$$(4.6)\qquad +\nabla_z u_2(x,y,z)\Big)\Big(\nabla_x\Phi(x)+\nabla_y\Phi_1(x,y)+\nabla_z\Phi_2(x,y,z)\Big)=$$

$$=\Big(\frac{|F|}{|Y|}+\frac{|Y\setminus F|}{|Y|}\frac{|Z\setminus S|}{|Z|}\Big)\int_\Omega f(x)\,\Phi(x)dx$$

et ceci $\forall\,\Phi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi_1\in\mathcal{D}(\Omega,C_p^\infty(Y))$, $\Phi_2\in\mathcal{D}(\Omega,C_p^\infty(Y\times Z))$

Démonstration

On rappelle que:

$$\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega\,|\,\chi_{\Omega_\varepsilon}(x)=1\}$$

et on a:

$$\chi_{\Omega_\varepsilon}(x)=\chi_F(\frac{x}{\varepsilon})+\chi_{Y\setminus F}(\frac{x}{\varepsilon})\chi_{Z\setminus S}(\frac{x}{\varepsilon^2})$$

Pour toute fonction $\Psi(x,y,z)\in\mathcal{D}(\Omega,C_p^\infty(Y\times Z))$, on a, compte tenu de la définition 2 de l'annexe 2:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega(\chi_F(\frac{x}{\varepsilon})+\chi_{Y\setminus F}(\frac{x}{\varepsilon})\chi_{Z\setminus S}(\frac{x}{\varepsilon^2}))\,\Psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx=$$

$$(4.7)\qquad \int_{\Omega\times Y\times Z}\Big(\chi_F(y)+\chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\Psi(x,y,z)dxdydz$$

Dans (4.5) on va prendre des fonctions test de la forme suivante:

$$\Phi(x)+\varepsilon\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon})+\varepsilon^2\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})$$

avec $\Phi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi_1\in\mathcal{D}(\Omega,C_p^\infty(Y))$, $\Phi_2\in\mathcal{D}(\Omega,C_p^\infty(Y\times Z))$. La règle de dérivation étant:

$$\nabla = \nabla_x + \varepsilon^{-1}\nabla_y + \varepsilon^{-2}\nabla_z$$

on a:

$$\nabla\Big(\Phi(x) + \varepsilon\,\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\,\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})\Big) = \nabla_x\Phi(x) + \varepsilon\,\nabla_x\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) +$$

$$\nabla_y\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\,\nabla_x\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) + \varepsilon\,\nabla_y\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) + \nabla_z\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})$$

Si on introduit cette fonction dans (4.5) on obtient:

$$\int_\Omega \big(\chi_F(\frac{x}{\varepsilon}) + \chi_{Y\setminus F}(\frac{x}{\varepsilon})\chi_{Z\setminus S}(\frac{x}{\varepsilon^2})\big)\,\nabla\big(P_\varepsilon u_\varepsilon\big)\big(\nabla_x\Phi(x) + \varepsilon\nabla_x\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon})$$

$$+ \nabla_y\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\nabla_x\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) + \varepsilon\nabla_y\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2}) + \nabla_z\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})\big)dx =$$

$$= \int_\Omega \big(\chi_F(\frac{x}{\varepsilon}) + \chi_{Y\setminus F}(\frac{x}{\varepsilon})\chi_{Z\setminus S}(\frac{x}{\varepsilon^2})\big)\,\big(\Phi(x) + \varepsilon\Phi_1(x,\frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2\Phi_2(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})\big)dx$$

On passe à la limite dans cette relation en tenant compte du théorème 4.1 et de la relation (4.7):

$$\int_{\Omega\times Y\times Z} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\Big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) +$$

$$+ \nabla_z u_2(x,y,z)\Big)\Big(\nabla_x\Phi(x) + \nabla_y\Phi_1(x,y) + \nabla_z\Phi_2(x,y,z)\Big)dxdydz =$$

$$= \int_{\Omega\times Y\times Z} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\,f(x)\,\Phi(x)dxdydz$$

On peut se poser la question qu'est ce qui nous permet de passer à la limite dans cette équation puisqu'on a deux suites qui convergent toutes les deux 3-échelle. Le résultat donné par le théorème 3 de l'annexe 2, nous permet de passer à la limite dans cette équation; et on a aussi:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\chi_F(\frac{x}{\varepsilon})+\chi_{Y\setminus F}(\frac{x}{\varepsilon})\chi_{Z\setminus S}(\frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)}=\|\chi_F(y)+\chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\|_{L^2(\Omega\times Y\times Z)}$$

ce qui nous permet d'obtenir:

$$\int_{\Omega\times Y\times Z}\Big(\chi_F(y)+\chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\Big(\nabla_x u(x)+\nabla_y u_1(x,y)+\nabla_z u_2(x,y,z)\Big)\Big(\nabla_x\Phi(x)+$$

$$+\nabla_y\Phi_1(x,y)+\nabla_z\Phi_2(x,y,z)\Big)dxdydz=$$
$$=\int_\Omega\Big(\frac{|F|}{|Y|}+\frac{|Y\setminus F|}{|Y|}\frac{|Z\setminus S|}{|Z|}\Big)f(x)\,\Phi(x)dx$$

exactement (4.6). q.e.d

On note:

$$A(y,z)=\chi_F(y)+\chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)$$

Définition 4.3 Soit $w\in H^1_p(Z\setminus S)/\mathbb{R}$ l'unique solution du problème suivant:

$$(4.8)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_z\big(A(y,z)\,\nabla_z w\big)=-\operatorname{div}_z\big(A(y,z)\big) \text{ dans } Z\setminus S\\ \\ A(y,z)\big(Id-\nabla_z w\big).n=0 \text{ sur } \partial S\end{cases}$$

Définition 4.4 Soit :

$$(4.9)\qquad A_1(y)=\int_{Z\setminus S}A(y,z)\big(Id-\nabla_z w\big)dz$$

Définition 4.5 Soit $v\in H^1_p(F)/\mathbb{R}$ l'unique solution du problème suivant:

$$
(4.10) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_y\big(A_1(y)\,\nabla_y v\big) = -\operatorname{div}_y\big(A_1(y)\big) \text{ dans } F \\[2ex] A_1(y)\big(Id - \nabla_y v\big).n = 0 \text{ sur } \partial F \setminus \partial Y \end{cases}
$$

En prenant succesivement dans (4.6) comme fonctions test $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\Phi_1 \equiv 0$, $\Phi_2 \equiv 0$ puis $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))$ et $\Phi \equiv 0$, $\Phi_2 \equiv 0$ puis $\Phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$ et $\Phi \equiv 0$, $\Phi_1 \equiv 0$ le système (4.6) s'écrit sous la forme suivante, au sens des distributions:

$$
(4.11) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_z\big(A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big)\big) = 0 \text{ dans } \Omega \times Y \times (Z \setminus S) \\[2ex] -\operatorname{div}_y\Big[\displaystyle\int_Z A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big)\Big] = 0 \text{ dans } \Omega \times F \\[2ex] -\operatorname{div}_x\Big(\displaystyle\int_Y \int_Z A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big)\Big) = \\[2ex] \qquad = \Big(\dfrac{|F|}{|Y|} + \dfrac{|Y \setminus F|}{|Y|}\dfrac{|Z \setminus S|}{|Z|}\Big) f(x) \text{ dans } \Omega \\[2ex] A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big).n = 0 \text{ sur } \partial S \\[2ex] \displaystyle\int_Z A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big).n = 0 \text{ sur } \partial F \setminus \partial Y \\[2ex] u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\[2ex] u_1 \text{ Y-périodique} \\[2ex] u_2 \text{ Y-périodique et Z-périodique} \end{cases}
$$

Théorème 4.6 *Le système (4.11) a une unique solution* $(u, u_1, u_2) \in$

$H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/\mathbb{R})$.

Démonstration

On a établi (4.6) pour des fonctions test $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\Phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))$, $\Phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$. Par densité (4.6) a lieu aussi pour des fonctions test $\Phi \in H^1_0(\Omega)$, $\Phi_1 \in L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R})$, $\Phi_2 \in L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/\mathbb{R})$. Donc on a:

$$\int_{\Omega\times Y\times Z} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\Big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) +$$

$$+ \nabla_z u_2(x,y,z)\Big)\Big(\nabla_x \Phi(x) + \nabla_y \Phi_1(x,y) + \nabla_z \Phi_2(x,y,z)\Big) dxdydz = \tag{4.12}$$

$$= \int_\Omega \Big(\frac{|F|}{|Y|} + \frac{|Y\setminus F|}{|Y|}\frac{|Z\setminus S|}{|Z|}\Big) f(x)\,\Phi(x) dx$$

ceci pour tout $(\Phi, \Phi_1, \Phi_2) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/\mathbb{R})$.

La forme bilinéaire définie par le membre de gauche de (4.12) est coercive sur l'espace $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/\mathbb{R})$ muni de la norme:

$$\|\nabla_x \Phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_y \Phi_1(x,y)\|_{L^2(\Omega\times Y)} + \|\nabla_z \Phi_2\|_{L^2(\Omega\times Y\times Z)}$$

Donc le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité de la solution (u, u_1, u_2) de (4.12) dans l'espace $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R}) \times L^2(\Omega \times Y, H^1_p(Z)/\mathbb{R})$.

En réintegrant par parties (4.12) on obtient (4.11), d'où le résultat.

Remarque. On en déduit aussi que dans le théorème 4.1 les suites $(P_\varepsilon u_\varepsilon)$ et $\nabla(P_\varepsilon u_\varepsilon)$ convergent toutes entières vers leurs limites respectives.

En fait d'après (4.11) le problème homogénéisé, au sens des distributions est donné par:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x\Big(\displaystyle\int_Y\int_Z A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big)\Big) = \\ \\ = \Big(\dfrac{|F|}{|Y|} + \dfrac{|Y\setminus F|}{|Y|}\dfrac{|Z\setminus S|}{|Z|}\Big) f(x) \text{ dans } \Omega \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.13}$$

A l'aide des définitions 4.3, 4.4 et 4.5 on peut mettre $u_1(x,y)$ et $u_2(x,y,z)$ sous la forme suivante:

$$u_1(x,y) = -v(y)\nabla_x u(x) \tag{4.14}$$

$$u_2(x,y,z) = -w(z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big) \tag{4.15}$$

On voit que:

$$\nabla_y u_1(x,y) = -\nabla_y v(y)\,\nabla_x u(x)$$

$$\nabla_z u_2(x,y,z) = -\nabla_z w(z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big) =$$

$$= -\nabla_z w(z)\big(\nabla_x u(x) - \nabla_y v(y)\,\nabla_x u(x)\big) =$$

$$= -\nabla_z w(z)\big(Id - \nabla_y v(y)\big)\nabla_x u(x)$$

D'où on en déduit:

$$A(y,z)\big(\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)\big) =$$

$$= A(y,z)\Big(\big(Id - \nabla_y v(y)\big)\nabla_x u(x) - \nabla_z w(z)\big(Id - \nabla_y v(y)\big)\nabla_x u(x) =$$

$$A(y,z)\big(Id - \nabla_y v(y)\big)\big(Id - \nabla_z w(z)\big)\nabla_x u(x)$$

Définition 4.7 Soit:

$$A^h = \int_F A_1(y)\big(Id - \nabla_y v(y)\big)dy$$

Alors le problème homogénéisé (4.13) peut être mis sous la forme suivante:

$$
(4.17) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_x\big(A^h \nabla_x u(x)\big) = \Big(\dfrac{|F|}{|Y|} + \dfrac{|Y \setminus F|}{|Y|}\dfrac{|Z \setminus S|}{|Z|}\Big) f(x) \text{ dans } \Omega \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\,\Omega \end{cases}
$$

Théorème 4.8 *Sous les hypothèses faites précédemment on a existence et unicité des solutions des problèmes (4.8), (4.10) et (4.17).*

Démonstration

1) Existence et unicité de la solution pour le problème (4.8).

On rappelle le problème (4.8):

$$
\begin{cases} -\operatorname{div}_z\big(A(y,z)\,\nabla_z w\big) = -div_z\big(A(y,z)\big) \text{ dans } Z \setminus S \\ \\ A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big).n = 0 \text{ sur } \partial\,S \end{cases}
$$

avec:

$$
A(y,z) = \chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)
$$

On définit:

$$
a_1(.,.) : \Big(H^1_p(Z \setminus S)/\mathbb{R}\Big) \times \Big(H^1_p(Z \setminus S)/\mathbb{R}\Big) \longrightarrow \mathbb{R}
$$

$$
a_1(\phi,\psi) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\nabla_z\phi\,\nabla_z\psi\,dz
$$

$$
L(\psi) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\,\nabla_z\psi\,dz
$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram il faut montrer que $a_1(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive, et aussi que L(.) est une forme linéaire et continue.

Le fait que L(.) est une forme linéaire et continue est immédiat (la forme est définie sur l'espace quotient donc indépendante du représentant choisi dans la classe d'équivalence), de même que le fait que $a_1(.,.)$ est une forme bilinéaire.

$$|a_1(.,.)| \leq \int_{Z\setminus S} |A(y,z)|\; |\nabla_z\phi|\; |\nabla_z\psi| dz \leq$$

$$\leq \|\nabla_z\phi\|_{L^2(Z\setminus S)} \|\nabla_z\psi\|_{L^2(Z\setminus S)}$$

car on a:

$$|A(y,z)| = |\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\, \chi_{Z\setminus S}(z)| \leq$$

$$\leq |\chi_F(y)| + |\chi_{Y\setminus F}(y)|\, |\chi_{Z\setminus S}(z)| \leq 1$$

D'où on obtient:

$$|a_1(\phi,\psi)| \leq \|\nabla_z\phi\|_{L^2(Z\setminus S)} \|\nabla_z\psi\|_{L^2(Z\setminus S)}$$

$$a_1(\phi,\phi) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\big(\nabla_z\phi\big)^2 dz =$$

$$= \int_{Z\setminus S} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\, \chi_{Z\setminus S}(z)\Big)\big(\nabla_z\phi\big)^2 dz =$$

$$= \chi_F(y) \int_{Z\setminus S} \big(\nabla_z\phi\big)^2 dz + \chi_{Y\setminus F}(y) \int_{Z\setminus S} \big(\nabla_z\phi\big)^2 dz =$$

$$= \big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\big) \|\nabla_z\phi\|^2_{L^2(Z\setminus S)} =$$

$$= \chi_Y(y) \|\nabla_z\phi\|^2_{L^2(Z\setminus S)} = \|\nabla_z\phi\|^2_{L^2(Z\setminus S)}$$

car $y \in Y$. Donc:

$$a_1(\phi,\phi) = \|\nabla_z\phi\|^2_{L^2(Z\setminus S)}$$

Et on a la coercivité et la continuité de la forme $a_1(.,.)$, d'où l'existence et l'unicité de la solution $w \in H^1_p(Z\setminus S)/\mathbb{R}$.

2) Existence et unicité de la solution du problème (4.10).

Le problème (4.10) est:

$$
(4.10) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}_z\big(A_1(y)\,\nabla_z v\big) = -\operatorname{div}_z\big(A_1(y)\big) \text{ dans } F \\ \\ A_1(y)\big(Id - \nabla_z v\big).n = 0 \text{ sur } \partial F \setminus \partial Y \end{cases}
$$

avec:

$$
A_1(y) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big)dz
$$

Comme pour le cas du problème (4.8) on définit:

$$
a_2(.,.) : H_p^1(F)/\mathbb{R} \times H_p^1(F)/\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}
$$

$$
a_2(\phi,\psi) = \int_F A_1(y)\nabla_y\phi \; \nabla_y\psi \; dy
$$

$$
L(\psi) = \int_F A_1(y) \; \nabla_y\psi \; dy
$$

Et on veut montrer que la forme bilinéaire $a_2(.,.)$ est continue et coercive:

$$
|a_2(\phi,\psi)| \leq \int_F |A_1(y)| \; |\nabla_y\phi|\,|\nabla_y\psi|dy \leq
$$

$$
\leq c|Z\setminus S| \int_F |\nabla_y\phi| \; |\nabla_y\psi|dy \leq
$$

$$
\leq c|Z\setminus S| \; \|\nabla_y\phi\|_{L^2(F)}\|\nabla_y\psi\|_{L^2(F)}
$$

d'où:

$$
(4.11) \qquad |a_2(\phi,\psi)| \leq c|Z\setminus S| \; \|\nabla_y\phi\|_{L^2(F)}\|\nabla_y\psi\|_{L^2(F)}
$$

Ceci car on a:

$$
|A_1(y)| = |\int_{Z\setminus S} A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big)dz| \leq
$$

$$\leq \int_{Z\setminus S} |A(y,z)||Id - \nabla_z w| dz \leq \|a(y,z)\|_{L^2(Z\setminus S)} \|Id - \nabla_z w\|_{L^2(Z\setminus S)}$$

et d'après la définition de A(y, z) on a:

$$\int_{Z\setminus S} A(y,z)^2 dz = \int_{Z\setminus S} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\chi_{Z\setminus S}(z)\Big)^2 dz =$$

$$= \int_{Z\setminus S} \Big(\chi_F^2(y) + 2\chi_F(y)\chi_{Y\setminus F}(y)\chi_{Z\setminus S}(z) + \chi_{Y\setminus F}^2(y)\chi_{Z\setminus S}^2(z)\Big) dz =$$

$$= \int_{Z\setminus S} \Big(\chi_F^2(y) + \chi_{Y\setminus F}^2(y)\chi_{Z\setminus S}^2(z)\Big) dz =$$

$$= \int_{Z\setminus S} \Big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\chi_{Z\setminus S}(z)\Big) dz =$$

$$= \chi_F(y)|Z\setminus S| + \chi_{Y\setminus F}(y)|Z\setminus S| =$$

$$= \chi_F(y)|Z\setminus S| = |Z\setminus S|$$

puisque le problème (4.10) est défini dans F. Donc on a:

$$\|A(y,z)\|_{L^2(Z\setminus S)} = |Z\setminus S|^{1/2}$$

et d'après (4.8) on obtient:

$$\|\nabla_z w\|_{L^2(Z\setminus S)} \leq |Z\setminus S|^{1/2}$$

et donc avec ceci on obtient (4.11).

$$a_2(\phi,\phi) = \int_F A_1(y)\big(\nabla_y \phi\big)^2 dy =$$

$$\int_F \Big(\Big(\int_{Z\setminus S} A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big) dz\Big)\big(\nabla_y \phi\big)^2\Big) dy =$$

$$= \int_F \Big(\chi_F(y)\int_{Z\setminus S}\big(Id - \nabla_z w\big) dz + \chi_{Y\setminus F}(y)\int_{Z\setminus S}\big(Id - \nabla_z w\big) dz\Big)\big(\nabla_y\phi\big)^2 dy\Big) =$$

$$= \int_F \Big(\chi_F(y) \int_{Z\setminus S} (Id - \nabla_z w) dz \big(\nabla_y \phi\big)^2\Big) dy =$$

$$= \int_F \Big(\int_{Z\setminus S} (Id - \nabla_z w) dz \big(\nabla_y \phi\big)^2\Big) dy \leq$$

$$\leq c \int_F \big(\nabla_y \phi\big)^2 dy = c\|\nabla_y \phi\|^2_{L^2(F)}$$

parce qu'on a démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.8) et donc on peut affirmer que l'integrale $\int_{Z\setminus S} |Id - \nabla_z w| dz$ =cste.

3) Existence et unicité de la solution du problème (4.17)

On rappelle le problème homogénéisé (4.17):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x\big(A^h \nabla_x u(x)\big) = \Big(\dfrac{|F|}{|Y|} + \dfrac{|Y\setminus F|}{|Y|}\dfrac{|Z\setminus S|}{|Z|}\Big) f(x) \text{ dans } \Omega \\ \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

avec:

$$A^h = \int_Y A_1(y)\big(Id - \nabla_y v(y)\big) dy$$

Comme pour les deux cas précédents on définit:

$$a(.,.) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(\phi, \psi) = \int_\Omega A^h \ \nabla_x \phi \, \nabla_x \psi \ dx$$

$$L(\psi) = \int_\Omega \theta \, f \, \psi \, dx$$

avec la notation $\theta = \dfrac{|F|}{|Y|} + \dfrac{|Y\setminus F|}{|Y|} \ \dfrac{|Z\setminus S|}{|Z|}$

On veut à nouveau démontrer que la forme bilinéaire a(., .) est une forme continue et coercive.

$$|a(\phi, \psi)| = |\int_\Omega A^h \ \nabla_x \phi \ \nabla_x \psi \ dx| \leq$$

$$\leq \int_\Omega |A^h| \; |\nabla_x \phi \; ||\nabla_x \psi| dx \leq c \|\nabla_x \phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_x \psi\|_{L^2(\Omega)}$$

car à partir des problèmes (4.8) et (4.10), pour lesquels on a démontré des résultats d'existence et d'unicité, on en déduit des estimations pour les solutions w et v. Pour ce qui est de la coercivité de la forme a(., .) on a:

$$a(\phi, \phi) = \int_\Omega A^h \big(\nabla_x \phi\big)^2 dx \geq c \|\nabla_x \phi\|_{L^2(\Omega)}$$

car:

$$A^h = \int_F \int_{Z \setminus S} A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big)\big(Id - \nabla_y v\big) dy =$$

$$\int_F \int_{Z \setminus S} \big(\chi_F(y) + \chi_{Y \setminus F}(y) \chi_{Z \setminus S}(z)\big)\big(Id - \nabla_z w\big)\big(Id - \nabla_y v\big) dydz =$$

$$= \int_F \chi_F(y) \int_{Z \setminus S} \big(Id - \nabla_z w\big)\big(Id - \nabla_y v\big) dydz =$$

$$= \int_F \big(Id - \nabla_y v dy\big) \int_{Z \setminus S} \big(Id - \nabla_z w dz\big) = cste$$

car on a démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.8) et donc A^h est une matrice constante, et on peut montrer par les méthodes habituelles qu'elle est définie positive et symétrique. cqfd

Remarque Si au lieu du problème (2.5) on considère le problème:

$$(4.18) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\big(K_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\big) = f \text{ dans } \Omega_\varepsilon \\ \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \\ K_\varepsilon \nabla u_\varepsilon . n = 0 \text{ sur } \partial S^\varepsilon_\Omega \end{cases}$$

avec K_ε tenseur défini positif et coercif alors en suivant le même raisonnement on obtient à la fin toujours l'équation (4.17) comme équation homogénéisée, sauf que dans ce cas on a:

$$A(y,z) = K(y,z)\big(\chi_F(y) + \chi_{Y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\big)$$

$$A_1(y) = \int_{Z\setminus S} A(y,z)\big(Id - \nabla_z w\big)dz$$

$$A^h = \int_F A_1(y)\big(Id - \nabla_y v\big)dy$$

Si de plus K_ε est symétrique alors les tenseurs A^h et A_1 sont aussi symétriques.

ANNEXE 1

Annexe 1

Résultats théoriques concernant la convergence double-échelle

La convergence double-échelle a été introduite par G. Nguetseng [35], [36] et a été développpée par G. Allaire [3]. C'est une méthode qui est apparue par la nécessité de démontrer la convergence d'une fonctionnelle rencontrée souvent dans l'homogénéisation:

$$F_\varepsilon(\psi) = \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx$$

avec u_ε à support compact et borné dans L^2.

La convergence double-échelle donne une description beaucoup plus réaliste des suites des fonctions oscillantes, et elle offre une altenative à la méthode de l'énergie introduite par L. Tartar, pour démontrer la convergence du processus homogénéisé. La force de cette méthode réside aussi dans le fait qu'elle donne une version mathématique de la méthode des développements deux-échelles.

Pour la commodité du lecteur nous rappelons ici les principaux résultats dont nous aurons besoin. Pour les démonstrations voir [3], [35] et [36]. On va introduire d'abord quelques notations:

$$\Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N \; N \geq 1$$

$$Y = [0,1]^N \text{ est le cube unité fermé.}$$

$$\widetilde{Y} \text{ est le prolongement Y-périodique de Y à tout } \mathbb{R}^3$$

$$C_p^\infty \text{ est l'espace des fonctions } C^\infty \text{ Y-périodiques dans } \mathbb{R}^N$$

$$\mathcal{D}_p(Y) = \left\{ \begin{array}{l} w \in C_p^\infty \mid supp\, w \subset \widetilde{Y};\, \exists r \geq 0 \text{ tel que } w(y) = 0 \text{ pour tout } y \in \widetilde{Y} \text{ avec} \\ d(y, \widetilde{\Gamma}) \leq r \text{ ou } \widetilde{Y} = \partial \widetilde{Y} \end{array} \right\}.$$

$$L_p^2(Y) = \{w \in L^2_{loc}(\widetilde{Y}) \mid w \text{ Y-périodique } \}$$

$$H_p^1(Y) = \{w \in L_p^2(Y) \mid \frac{\partial w}{\partial y_i} \in L_p^2(Y) \, i \in 1, ...N\}$$

$\mathcal{K}(\bar{\Omega})$ c'est l'ensemble de toutes les restrictions à Ω des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ à support compact.

Définition 1: Une suite $(u_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ converge double-échelle vers une limite $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ si et seulement si pour tout $\psi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))$ on a:

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_\Omega \int_Y u_0(x,y)\psi(x,y)dxdy$$

D'habitude dans l'homogénéisation des différents types d'équations on utilise deux étapes: la dérivation formelle du problème local et du problème homogénéisé à l'aide des développements asymptotiques et la méthode de l'énergie. Ces deux étapes ont peu de choses en commun. Dans certains cas c'est difficile de travailler avec la méthode de l'énergie; cette méthode ne tire pas tous les avantages de la structure périodique du problème, en particulier elle utilise très peu les informations obtenues en utilisant les développements deux-échelles. Ceci n'est pas surprenant compte tenu du fait que la méthode de l'energie n'a pas été conçue par L.Tartar pour des problèmes périodiques, mais plutôt dans le cadre plus général de la H-convergence. Donc la méthode de la convergence double-échelle est précisément conçue pour étudier les équations aux dérivées partielles avec des coefficients périodiquement oscillants. Cette méthode est auto-contenue. Une de ces caractéristiques est l'introduction du problème homogénéisé double-échelle, qui est un système d'équations correctement posé et qui est une combinaison des problèmes homogénéisés et locaux usuels.

Théorème 2: *Quelle que soit (u_ε) suite bornée dans $L^2(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite, et il existe une limite $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ telle que cette sous- suite converge double-échelle vers u_0.*

Lemme 3: *Soit $\psi(x,y) \in L^2(\Omega, C_p(Y))$ (i.e. mesurable et ψ^2 sommable en $x \in \Omega$, à valeurs dans l'espace de Banach des fonctions continues, Y-périodiques en y). Alors, quel que soit $\varepsilon \geq 0$ $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ est mesurable sur Ω, et on a:*

$$(2) \qquad \|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi(x,y)\|_{L^2(\Omega, C_p(Y))} \equiv [\int_\Omega \sup_{y \in Y} |\psi(x,y)|^2 dx]^{1/2}$$

$$(3) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})^2 dx = \int_\Omega \int_Y \psi(x,y)^2 dx dy$$

Définition 4: Une fonction $\psi(x,y)$ Y-périodique en y et qui satisfait (3) est dite une fonction test admissible.

Remarque 5: Toute suite u_ε qui admet un développement asymptotique de la forme:

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + ...$$

où les fonctions $u_i(x,y)$ sont régulières et Y-périodiques en y, converge double-échelle vers le premier terme du développement $u_0(x,y)$.

Au vu de cette remarque on a déjà un aperçu du principal intérêt de la méthode de la convergence double-échelle: même si le développement asymptotique est inconnu ca permet de justifier rigoureusement l'existence de son premier terme $u_0(x,y)$. Ceci est bienvenu dans la théorie de l'homogénéisation où de tels développements asymptotiques sont utilisés de manière empirique.

Proposition 6: *Soit (u_ε) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ qui converge double-échelle vers une limite $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Alors u_ε converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers:*

$$u(x) = \int_Y u_0(x,y) dy$$

De même on a:

$$(4) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Dans cette proposition on voit que pour une suite donnée, dans $L^2(\Omega)$, bornée il y a beaucoup plus d'information dans sa limite double-échelle u_0 que dans sa limite faible- L^2 u; car u_0 contient des informations sur les oscillations périodiques de u_ε, tandis que u est simplement la moyenne (par rapport à y) de u_0. La limite double-échelle capte seulement les oscillations qui sont en résonance avec les fonctions test $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$. Pour voir si cette information supplémentaire nous conduit à une quelconque convergence forte on a le théorème suivant:

Théorème 7: *Soit (u_ε) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ qui converge double-échelle vers une limite $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$. On suppose que:*

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y)}$$

Alors quel que soit (v_ε) suite qui converge double-échelle vers $v_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ on a:

$$(6) \qquad u_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x) \rightharpoonup \int_Y u_0(x,y)v_0(x,y)dy \quad dans \quad \mathcal{D}'(\Omega) - faible$$

De même si $u_0(x,y) \in L^2(\Omega, C_p(Y))$ on a:

$$(7) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x, \frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

La condition(5) peut être interprétée comme si " u_0 contient les oscillations de la suite u_ε ". Le résultat (6) peut être défini comme une convergence forte double-échelle pour la suite u_ε. Ce qui est remarquable, c'est que cela nous permet de passer à la limite dans un produit de deux convergences faibles dans $L^2(\Omega)$. Pour un ε donné, la fonction $u_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ne doit pas être nécessairement mesurable dans Ω, si $u_0(x,y)$ appartient à $L^2(\Omega \times Y)$. Donc pour que (7) ait un sens , on demande une certaine régularité: plus précisément, on se restreint aux fonctions $u_0(x,y) \in L^2(\Omega, C_p(Y))$. Dans le vocabulaire de l'homogénéisation on dirait que (7) est un résultat de type correcteur. La suite u_ε est approximée par sa limite double-échelle $u_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$, et le correcteur précis est $u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) - u(x)$.

Lemme 8: *Toute fonction $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$ est la limite double-échelle d'une suite de $L^2(\Omega)$.*

La proposition suivante cherche à avoir des résultats pour des cas où on a des suites des dérivées qui sont bornées.

Proposition 9: (i) *Soit (u_ε) une suite bornée dans $H^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega)$. Alors (u_ε) converge double-échelle vers u(x) et il existe $u_1(x,y) \in L^2(\Omega, H^1_p(Y)/\mathbb{R})$ telle que quitte à extraire une sous-suite ∇u_ε converge double-échelle vers $\nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y)$.*
(ii) Soit (u_ε) et $(\varepsilon \nabla u_\varepsilon)$ deux suites bornées dans $L^2(\Omega)$. Alors il existe une fonction $u_0(x,y) \in L^2(\Omega, H^1_p(Y))$ telle que quitte à extraire une sous-suite, u_ε et $\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ converge double- échelle vers $u_0(x,y)$ et respectivement $\nabla_y u_0(x,y)$.
(iii) Soit (u_ε) une suite bornée avec $div\, u_\varepsilon = 0$, dans $L^2(\Omega)$, qui converge double-échelle vers $u_0(x,y) \in L^2(\Omega \times Y)$. Alors:

$$\operatorname{div}_y u_0(x,y) = 0 \tag{8}$$

$$\int_Y \operatorname{div}_x u_0(x,y)dy = 0 \tag{9}$$

Corollaire 10: *Soit (u_ε) une suite bornée dans $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Il existe $u_0(x,y) \in L^p(\Omega \times Y)$ telle que quitte à extraire une sous-suite, u_ε converge double-échelle vers $u_0(x,y)$, i.e. $\forall \psi(x,y) \in \mathcal{D}(\Omega, C^\infty_p(Y))$ on a:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \int_{\Omega \times Y} u_0(x,y)\psi(x,y)dxdy \tag{10}$$

Définition 11: Soit $Y = \left(-1/2, 1/2\right)^N$. On définit un borné $Y_0 \subset Y$ avec les propriétés suivantes:
(i) $\forall j \in \{1, ...N\}$ les ensembles suivants:

$$\partial Y_0 \cap \{y \,|\, y_j = -1/2\} \quad \text{ont des mesures différentes de 0}$$

$$\partial Y_0 \cap \{y \,|\, y_j = 1/2\} \quad \text{ont des mesures différentes de 0}$$

et sont symétriques par rapport à $\{y \,|\, y_j = 0\}$.
(ii) Y_0 contient un cylindre Q_j de longeur 1, avec l'axe parallèle avec l'axe y_j, $j \in \{1, ...N\}$.
(iii) Si $Y_0 \neq Y$, $\Gamma = Y_0 \cap (Y \setminus Y_0)$ est régulière.
(iv) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, régulier. On note: $\Omega_\varepsilon^0 = \Omega \cap \varepsilon Y_0$, $Y_0 \neq Y$.

Théorème 12: *Soit $(v_\varepsilon) \subset H^1(\Omega)$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que:*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_\varepsilon^0} |\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}|^2 dx \leq c \tag{12}$$

Alors on peut extraire une sous-suite telle que pour $\varepsilon \to 0$ on a:

$$v_\varepsilon \rightharpoonup \tilde{v}_0 \quad dans \quad L^2(\Omega) - faible \tag{13}$$

où $\tilde{v}_0(x) = \int_Y v_0(x, y) dy$.

$$\int_\Omega v_\varepsilon w_\varepsilon \phi dx \to \int_{\Omega \times Y} v_0(x, y) w(y) \phi(x) dx dy \tag{14}$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon^0} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} w_\varepsilon \phi dx \to \int_{\Omega \times Y_0} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial u_1}{\partial y_i}(x, y) \Big) w(y) \phi(x) dx dy \tag{15}$$

pour $i \in \{1, ...N\}$, $\forall w \in L_p^2$, $\forall \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ où $v_0 \in L^2(\Omega, L_p^2(Y)$ est donnée par $v_0(x, y) = u(x) + u_r(x, y)$ avec $u \in H^1(\Omega)$, $u_r(x, y) = 0$ p.p. dans Y_0 et pour presque tout $x \in \Omega$, $u_1 \in L^2(\Omega, H_p^1(Y_0)/\mathbb{C})$. De plus si $v_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

Lemme 13: *Soit* $(v_\varepsilon) \subset L^2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *ouvert borné) tel que:*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{16}$$

Alors on peut extraire une sous-suite telle que, pour $\varepsilon \to 0$ *on a:*

$$\int_\Omega v_\varepsilon w_\varepsilon \phi dx \to \int_{\Omega\times Y} v_0(x,y)w(y)\phi(x)dxdy \tag{17}$$

$\forall w \in L^2_p$, $\forall \phi \in \mathcal{K}(\bar{\Omega})$ et $v_0 \in L^2(\Omega, L^2_p(Y)$.

ANNEXE 2

Annexe 2

Convergence 3-échelle

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, N≥ 2, $Y = [0,1]^N$, $Z = [0,1]^N$. On note $C_p^\infty(Y \times Z)$ l'espace des fonctions de deux variables indéfiniment différentiables sur $\mathbb{R}^N$, Y-périodiques et Z-périodiques. Les résultats donnés dans cette annexe sont à rapprocher du travail de G. Allaire et M.Briane [4], toutefois il y a des différences dues au cas triple-échelle qu'on traite; il faut noter que la démonstration de la proposition 2 qui est donnée, est originale et est particulierement adaptée à notre cas.

Définition 1 Soit u_ε une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. On dit que u_ε converge 3-échelle vers une limite $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ si et seulement si pour toute fonction $\psi(x,y,z) \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z)$ on a:

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x,y,z)\psi(x,y,z)dxdydz$$

Définition 2 On dit qu'une fonction $\psi(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$, Y-périodique et Z-périodique est une fonction test admissible si et seulement si on a:

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})|dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z |\psi(x,y,z)|dxdydz$$

Lemme 1 *Soit $\psi_0(x,y,z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ Alors pour tout $\varepsilon > 0$ $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})$ est une fonction mesurable sur Ω et on a:*

$$(3) \qquad \|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi(x,y,z)\|_{L^2(\Omega, C_p(Y\times Z))} \equiv \left(\int_\Omega \sup_{(x,y)\in Z} |\psi(x,y,z)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et $\psi(x,y,z)$ est une fonction test admissible dans le sens de la définition 2.

Pour démontrer ce lemme on va utiliser le résultat suivant:

Lemme 2 *Une fonction* $\psi(x,y,z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ *si et seulement si il existe* $E \in \Omega$ *sous-ensemble indépendant de* y *et de mesure nulle tel que:*
(i) $\forall x \in \Omega \setminus E \quad (y,z) \mapsto \psi(x,y,z)$ *est une fonction continue, Y-périodique et Z-périodique.*
(ii)$\forall (y,z) \in (Y \times Z) \quad x \mapsto \psi(x,y,z)$ *est une fonction mesurable sur* Ω.
(iii) $x \mapsto \sup_{(y,z)\in Y\times Z} |\psi(x,y,z)|$ *a une norme* L^2 *finie.*

Démonstration On rappelle le résultat suivant:

Soit $f : \Omega \longrightarrow$ E, où E est un espace de Banach séparable et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fonctions, denses faibles-* dans la boule unité du dual E' de E. Alors f est mesurable si et seulement si les fonctions $x \mapsto < \Phi_n(x), f(x) >_{E',E}$ sont mesurables.

On applique ce résultat pour $E = C_p(Y \times Z)$ et $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des masses de Dirac dans les points rationnels de $Y \times Z$. D'où le résultat.

Démonstration du lemme 1

D'après le lemme 2 on sait que $\psi(x,y,z)$ est une fonction de type Carathéodory, et donc on en déduit qu'elle est mesurable. Alors (3) est une conséquence de la définition de la norme:

$$\|\psi(x,y,z)\|_{L^2(\Omega,C_p(Y\times Z))} \equiv \left(\int_\Omega \sup_{(x,y)\in Z} |\psi(x,y,z)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

On va démontrer maintenant que $\psi(x,y,z)$ vérifie (2), c'est à dire que $\psi(x,y,z)$ est une fonction test admissible:

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on introduit un maillage du cube $Y \times Z$ fait par $n^N \times n^N$ petits cubes $Y_i \times Z_i$, chaque cube Y_i et Z_i étant de dimension $\frac{1}{n^N}$. Les principales propriétés de ce maillage sont:

$$Y \times Z = \left(\bigcup_{i=1}^{n^N} Y_i\right) \times \left(\bigcup_{i=1}^{n^N} Z_i\right)$$

$$|Y_i| = |Z_i| = \frac{1}{n^N}$$

$$|Y_i \cap Y_j| = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

$$|Z_i \cap Z_j| = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Soit $\chi_i(y,z)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $Y_i \times Z_i$, prolongée par Y-périodicité et Z-périodicité à $\mathbb{R}^N$ et soit $(y_i^1, z_i^1) \in Y_i \times Z_i$. On fait une approximation de toute fonction $\psi(x,y,z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z)$ par une fonction en escalier en (y, z) définie par:

$$\psi_n(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n^N \times n^N} \psi(x,y,z)\chi_i(y,z)$$

On démontre (2) pour ψ_n et après avec le passage à la limite $n \longrightarrow \infty$ le résultat reste valable pour ψ. D'après le lemme 2 on sait que $x \mapsto \psi(x,y,z)$ est une fonction de $L^2(\Omega)$ et $\chi_i(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) \in L^\infty(\Omega)$. Comme χ_i est périodique on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \psi(x, y_i^1, z_i^1)\chi_i(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx = |Y_i \times Z_i| \int_\Omega \psi(x, y_i^1, z_i^1)dx$$

En sommant cette égalité pour $i \in \{1, ..., n^N\}$ on a (2) pour ψ_n. Il nous reste à passer à la limite avec $n \longrightarrow \infty$. On démontre d'abord que $\psi_n \longrightarrow \psi$ dans la topologie forte de $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$. On définit:

$$\delta_n(x) = \sup_{(y,z) \in Y \times Z} |\psi_n(x,y,z) - \psi(x,y,z)|$$

La fonction $(y,z) \mapsto \psi_n(x,y,z) - \psi(x,y,z)$ est continue par morceaux dans $Y \times Z$ pour presque tout x. Donc dans la définition de δ_n le sup pour $(y,z) \in Y \times Z$ peut être remplacé par le sup pour $(y,z) \in \big(Y \cap \mathbb{Q}\big) \times \big(Z \cap \mathbb{Q}\big)$. La fonction δ_n étant le sup d'une famille de fonctions mesurables elle est aussi mesurable et

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n(x) = 0$$

presque par tout dans Ω, car ψ est continue en (y, z) et:

$$0 \leq \delta_n(x) \leq 2 \sup_{(y,z) \in Y \times Z} |\psi(x,y,z)| \in L^2(\Omega)$$

Avec le théorème de Lebesgue (convergence dominée) $\delta_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

$$|\int_\Omega \psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx - \int_\Omega\int_Y\int_Z \psi(x,y,z)dxdydz| \leq$$

$$\leq |\int_\Omega \psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx - \int_\Omega \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx| +$$

$$+ |\int_\Omega \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx - \int_\Omega\int_Y\int_Z \psi_n(x,y,z)dxdydz| +$$

$$+ |\int_\Omega\int_Y\int_Z \psi(x,y,z)dxdydz - \int_\Omega\int_Y\int_Z \psi_n(x,y,z)dxdydz|$$

On a:

$$|\int_\Omega \psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx - \int_\Omega \psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx| \leq$$

(4)
$$\leq \int_\Omega \sup_{(y,z)\in Y\times Z} |\psi(x,y,z) - \psi_n(x,y,z)|dx =$$

$$= \|\psi_n - \psi\|_{L^2(\Omega, C_p(Y\times Z))}$$

Pour n fixé on passe à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ d'où:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |\int_\Omega \psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx - \int_\Omega \psi(x,y,z)dxdydz \leq$$

$$\leq 2\|\psi_n - \psi\|_{L^2(\Omega, C_p(Y\times Z))}$$

Et en passant à la limite dans (4) avec $n \longrightarrow \infty$ on obtient (2).

Théorème 1 *Pour toute suite (u_ε) bornée dans $L^2(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite et il existe une limite $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega\times Y\times Z)$ telle que cette sous-suite converge 3-échelle vers u_0.*

Démonstration Soit u_ε bornée dans $L^2(\Omega)$. Alors il existe $c > 0$ tel que:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c$$

Si $\psi(x,y,z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ alors $\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) \in L^2(\Omega)$ et on a:

$$(5) \qquad |\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx| \leq c\|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\psi(x,y,z)\|_{L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))}$$

Donc pour ε fixé $\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx$ est une forme linéaire bornée sur $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$. Le dual de $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ est l'espace $L^2(\Omega, M_p(Y \times Z))$, où $M_p(Y \times Z)$ est l'espace des mesures de Radon, Y-périodiques en y et Z-périodiques en z.

Le théorème de Riesz nous assure l'existence et l'unicité de $\mu_\varepsilon \in L^2(\Omega, M_p(Y \times Z))$ tel que:

$$(6) \qquad < \mu_\varepsilon, \psi >= \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx$$

et μ_ε est bornée dans $L^2(\Omega, M_p(Y \times Z))$ d'après (4). Comme $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ est un espace séparable on peut extraire d'une suite bornée dans son dual une sous-suite qui converge faible-$*$, donc il existe $\mu_0 \in L^2(\Omega, M_p(Y \times Z))$ tel que, quitte à extraire une sous-suite, on a, quel que soit $\psi \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$:

$$(7) \qquad < \mu_\varepsilon, \psi > \longrightarrow < \mu_0, \psi >$$

Le deux relations (5) et (6) nous donnent, pour tout $\psi \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$:

$$(8) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx =< \mu_0, \psi >$$

On sait que:

$$(9) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \|\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi(x,y,z)\|_{L^2(\Omega \times Y \times Z)}$$

d'où:

$$| < \mu_0, \psi > | \leq c\|\psi\|_{L^2(\Omega\times Y\times Z)}$$

D'après la densité de $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ dans $L^2(\Omega \times Y \times Z)$ et avec le théorème de représentation de Riesz μ_0 est identifié avec une fonction $u_0 \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$, i.e.:

$$(10) \qquad < \mu_0, \psi >= \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x, y, z)dxdydz$$

Proposition 1 *Soit* (u_ε) *une suite de fonctions de* $L^2(\Omega)$ *qui converge 3-échelle vers* $u_0(x, y, z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$*. Alors* (u_ε) *converge aussi vers* $u(x) = \int_Y \int_Z u_0(x, y, z)dydz$ *dans* $L^2(\Omega)$ *-faible. Et de plus on a:*

$$(11) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y\times Z)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration Dans (1) on prend ψ(x) comme fonction test, d'où:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x)dx = \int_\Omega \Big(\int_Y \int_Z u_0(x, y, z)dydz\Big)\psi(x)dx$$

c'est-à-dire:

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y \int_Z u_0(x, y, z)dydz \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

Pour obtenir (10), avec $\psi(x, y, z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ on calcule:

$$\int_\Omega \Big(u_\varepsilon(x) - \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\Big)^2 dx = \int_\Omega (u_\varepsilon)^2 dx + \int_\Omega \big(\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\big)^2 dx - 2\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})dx$$

Passant à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega (u_\varepsilon)^2 dx \geq \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x, y, z)\psi(x, y, z)dxdydz - \int_\Omega \int_Y \int_Z \psi(x, y, z)^2 dxdydz$$

D'où en utilisant une suite de fonctions régulières qui converge fortement vers u_0 dans $L^2(\Omega \times Y \times Z)$ on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega (u_\varepsilon)^2 dx \geq \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x,y,z)^2 dxdydz$$

et l'inégalité Cauchy-Schwarz donne l'autre inégalité de (10).

Théorème 2 *Soit (u_ε) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ qui converge 3-échelle vers une limite $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$. On suppose que:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega \times Y \times Z)} \tag{12}$$

Alors pour toute suite (v_ε) qui converge 3-échelle vers une limite $v_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ on a:

$$u_\varepsilon(x)\, v_\varepsilon(x) \rightharpoonup \int_Y \int_Z u_0(x,y,z)\, v_0(x,y,z) dydz \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ faible} \tag{13}$$

De plus si $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{14}$$

Démonstration Soit $(\psi_n(x,y,z))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions régulières de $L^2(\Omega, C_p(Y \times Z))$ telle que:

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x,y,z) = u_0(x,y,z) \quad \text{dans} L^2(\Omega \times Y \times Z) \text{ fort}$$

D'après la définition de la convergence 3-échelle, le lemme 2 et la relation (11) on a:

$$\lim_{\varepsilon} \int_\Omega [u_\varepsilon(x) - \psi_n(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})]^2 dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z \big(u_0(x,y,z) - \psi_n(x,y,z)\big)^2 dxdydz \tag{15}$$

Passant à la limite avec $n \longrightarrow \infty$ dans (15) on obtient:

$$(16) \qquad \lim_{n\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega [u_\varepsilon(x)-\psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})]^2dx=0$$

Soit (v_ε) une suite qui converge 3-échelle vers une limite $v_0(x,y,z)$. Pour tout $\Phi\in\mathcal{D}(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega \Phi(x)u_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x)dx=\int_\Omega \Phi(x)v_\varepsilon(x)\psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx+$$

$$+\int_\Omega \Phi(x)[u_\varepsilon(x)-\psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})]v_\varepsilon dx$$

On passe à la limite dans cette relation avec $\varepsilon\longrightarrow 0$ et on obtient:

$$|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Phi(x)u_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x)dx-\int_\Omega\int_Y\int_Z \Phi(x)\psi_n(x,y,z)v_0(x,y,z)|\leq$$

$$\leq c\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(x)-\psi_n(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})\|_{L^2(\Omega)}$$

Et après on passe à la limite avec $n\longrightarrow\infty$ et on obtient:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \Phi(x)u_\varepsilon(x)v_\varepsilon(x)dx=\int_\Omega\int_Y\int_Z \Phi(x)u_0(x,y,z)v_0(x,y,z)dxdydz$$

Proposition 2 (i) *Soit u_ε une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, qui converge faiblement vers sa limite u (x), dans $H^1(\Omega)$. Alors u_ε converge 3-échelle vers u (x) et il existe deux fonctions $u_1(x,y)\in L^2(\Omega,H^1_p(Y)/\mathbb{R})$,$u_2(x,y,z)\in L^2(\Omega\times Y,H^1_p(Z)/\mathbb{R})$ telles que, quitte à extraire une sous-suite, ∇u_ε converge 3-échelle vers*
$\nabla u(x)+\nabla_y u_1(x,y)+\nabla_z u_2(x,y,z)$.
(ii) *Soient u_ε* et *$\varepsilon^2 u_\varepsilon$ deux suites bornées dans $L^2(\Omega)$, respectivement $\left(L^2(\Omega)\right)^N$.*
Alors il existe une fonction $u_0(x,y,z)\in L^2(\Omega\times Y,H^1_p(Z)/\mathbb{R})$ tel que, quitte à extraire une sous-suite, u_ε et ∇u_ε converge 3-échelle vers $u_0(x,y,z)$ respectivement
$\nabla_z u_2(x,y,z)$.
Démonstration (i) u_ε est une suite bornée dans $H^1(\Omega)$, donc on en déduit:

$$(17)\qquad \begin{cases} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \\ \\ \|\nabla\, u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \end{cases}$$

D'où en utilisant le théorème 1 on a assuré l'existence et l'unicité de deux fonctior $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ et $\chi(x,y,z) \in \left(L^2(\Omega \times Y \times Z)\right)^N$ telles que:

$$(18)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \Phi(x) u_\varepsilon(x) \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z \psi(x,y,z) u_0(x,y,z) dx dy dz$$

$$(19)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \nabla\, u_\varepsilon \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z \Psi(x,y,z) \chi(x,y,z) dx dy dz$$

et ceci quel que soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p(Y \times Z))$, $\Psi \in \left(\mathcal{D}(\Omega, C_p(Y \times Z))\right)^N$.
En désintegrant par parties on obtient:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\varepsilon^2 \int_\Omega \nabla\, u_\varepsilon \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = -\int_\Omega u_\varepsilon \big(\varepsilon^2\, div_x \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + \\ &+ \varepsilon\, div_y \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) + div_z \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2})\big) \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \longrightarrow 0$ cette relation nous donne:

$$(21)\qquad 0 = \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x,y,z)\, div_z \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx dy dz$$

D'où:

$$(22)\qquad u_0(x,y,z) = u_0(x,y)$$

Donc maintenant on peut en déduire:

(23)
$$\int_\Omega u_\varepsilon \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx \longrightarrow \int_\Omega \int_Y u_0(x,y)\phi(x,y)dxdy$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))$:

Pour $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y))^N$ on a:

(24)
$$\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = -\int_\Omega u_\varepsilon\big(\varepsilon div_x \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) + div_y \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\big)$$

Si on passe à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans cette relation on a:

(25)
$$0 = -\int_\Omega \int_Y u_0(x,y) div_y \Phi(x,y)dxdy$$

D'où:

(26)
$$u_0 = u_0(x)$$

On rappelle que:

(27)
$$u_\varepsilon \rightharpoonup u(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

et aussi:

(28)
$$u_\varepsilon \text{ converge 3-échelle vers } u_0(x)$$

et la relation entre les deux est donnée par:

$$\int_Y \int_Z u_0(x,y)dydz = |Y||Z|u_0(x) = u(x)$$

tout ceci parce que si on a (26) u_ε converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers la moyenne de sa limite 3-échelle. Donc on en déduit que pour toute sous-suite de u_ε sa limite 3-échelle est la même que sa limite L^2 faible. Donc toute la suite u_ε converge 3-échelle vers u(x).

Maintenant on veut établir la convergence 3-échelle pour ∇u_ε. Pour ceci dans (20) on choisit Ψ tel que:

$$\left\{\begin{array}{l} div_y \Psi(x,y,z) = 0 \\ \\ div_z \Psi(x,yz) = 0 \end{array}\right. \tag{29}$$

et cela nous donne:

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x)\Psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx = -\int_\Omega u_\varepsilon(x) div_x \Psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx \tag{30}$$

et on passe à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (30):

$$\int_\Omega\int_Y\int_Z \chi(x,y,z)\Psi(x,y,z)dxdydz = -\int_\Omega\int_Y\int_Z u(x) div_x\Psi(x,y,z)dxdydz$$

ce qui implique:

$$\int_\Omega\int_Y\int_Z (\chi(x,y,z) - \nabla u(x))\Psi(x,y,z)dxdydz = 0 \tag{31}$$

La relation (29) a lieu pour des fonctions $\Psi(x,y,z) \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y\times Z))^N$ avec:

$$\left\{\begin{array}{l} div_y \Psi(x,y,z) = 0 \\ \\ div_z \Psi(x,yz) = 0 \end{array}\right.$$

Dans (29) on choisit Ψ de la forme suivante:

$$\Psi(x,y,z) = \Psi_1(x,y)\Psi_2(x,z)$$

et qui vérifie (29), ce qui nous donne:

$$(32) \qquad \int_\Omega \int_Y \int_Z (\chi(x,y,z) - \nabla u(x))\Psi_1(x,y)\Psi_2(x,z)dxdydz = 0$$

Pour tirer la conclusion de l'énoncé on prend pour simplifier la relation:

$$(33) \qquad \int_Y \int_Z w(y,z)v_1(y)v_2(z)dydz = 0$$

avec $w \in \big(L^2(Y \times Z)\big)^N$ et $v_1(y)v_2(z) \in C_p^\infty(Y \times Z)^N$ avec:

$$\begin{cases} div_y(v_1(y)v_2(z)) = 0 \\ \\ div_z(v_1(y)v_2(z)) = 0 \end{cases}$$

On en déduit:

$$\int_Y v_1(y)\Big(\int_Z w(y,z)v_2(z)dz\Big)dy = 0$$

ce qui implique l'existence d'un $p_1 \in L^2(Y)$ tel que:

$$(34) \qquad \int_Z w(y,z)v_2(z)dz = \nabla_y p_1(y)$$

On peut écrire:

$$\nabla_y p_1(y) = \frac{1}{\int_Z v_2(z)dz} \int_Z \nabla_y p_1(y)v_2(z)dz$$

Donc (32) s'écrit alors:

$$\int_Z \Big(w(y,z) - \frac{1}{\int_Z v_2(z)dz}\nabla_y p_1(y)\Big)v_2(z)dz = 0$$

Pour simplifier on introduit la constante dans le gradient et alors:

$$\int_Z \Big(w(y,z) - \frac{1}{\int_Z v_2(z)dz}\nabla_y p_1^*(y)\Big)v_2(z)dz = 0$$

D'où on en déduit l'existence d'un $p_2 \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que:

$$w(y,z) - \nabla_y p_1^*(y) = \nabla_z p_2(y,z)$$

c'est à dire:

$$w(y,z) = \nabla_y p_1^*(y) + \nabla_z p_2(y,z) \tag{35}$$

En se rappellant (32) et (35) on obtient dans notre cas:

$$\chi(x,y,z) = \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)$$

avec $u_1(x,y) \in L^2(\Omega, H_p^1(Y)/\mathbb{R})$ et $u_2(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y, H_p^1(Z)/\mathbb{R})$. Donc:

$$\nabla u_\varepsilon \text{ converge 3-échelle vers } \nabla_x u(x) + \nabla_y u_1(x,y) + \nabla_z u_2(x,y,z)$$

(ii) On sait que:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{36}$$

$$\|\varepsilon^2 \nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{37}$$

Donc on en déduit d'après le théorème 1 l'existence et l'unicité de deux fonctions $u_0(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)$ et $\chi(x,y,z) \in L^2(\Omega \times Y \times Z)^N$ telles que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon \psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z u_0(x,y,z) \psi(x,y,z) dx dy dz \tag{38}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varepsilon^2 \nabla u_\varepsilon \Psi(x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}) dx = \int_\Omega \int_Y \int_Z \chi(x,y,z) \Psi(x,y,z) dx dy dz \tag{39}$$

pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))$ et tout $\Psi \in \mathcal{D}(\Omega, C_p^\infty(Y \times Z))^N$. En désintégrant par parties on a:

$$\int_\Omega \varepsilon^2 \nabla\, u_\varepsilon(x)\Psi(x,\frac{x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2})dx = -\int_\Omega u_\varepsilon\big(\varepsilon^2 div_x\Psi + \varepsilon div_y\Psi + div_z\Psi\big)dx$$

Si on passe à la limite avec $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans cette relation on obtient:

$$\int_\Omega\int_Y\int_Z \chi(x,y,z)\Psi(x,y,z)dxdydz = -\int_\Omega\int_Y\int_Z u_0(x,y,z)div_z\Psi dxdydz$$

d'où:

$$\int_\Omega\int_Y\int_Z \big(\chi(x,y,z) - \nabla_z u_0(x,y,z)\big)\Psi(x,y,z)dxdydz = 0$$

d'où:

$$\chi(x,y,z) = \nabla_z u_0(x,y,z)$$

c'est à dire:

(40) $\qquad \varepsilon^2\nabla\, u_\varepsilon$ converge 3-échelle vers $\nabla_z u_0(x,y,z)$

Théorème 3 *Soit* Ω_ε *un domaine comme celui décrit au chapitre 3, et soit* u_ε *une suite bornée dans* $H^1(\Omega_\varepsilon)$ *par une constante indépendante de* ε*. On note par* $\widetilde{u}_\varepsilon$ *le prolongement par zéro de* u_ε *dans* $\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$*. Alors il existe les fonctions* $u(x)\in H^1(\Omega)$, $u_1(x,y)\in L^2(\Omega,H^1_p(Y))$, $u_2(x,y,z)\in L^2(\Omega\times Y,H^1_p(Z))$ *telles que quitte à extraire une sous-suite on a:*

(41) $\qquad \widetilde{u}_\varepsilon$ converge 3-échelle $\big(\chi_F(y)+\chi_{y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\big)\,u(x)$

(42) $\qquad \nabla\,\widetilde{u}_\varepsilon$ converge 3-échelle $\big(\chi_F(y)+\chi_{y\setminus F}(y)\,\chi_{Z\setminus S}(z)\big)\,\big(\nabla\,u(x)+\nabla_y u_1(x,y)+$
$+\,\nabla_z u_2(x,y,z)\big)$

Démonstration Voir G. Allaire et M. Briane [4].

ANNEXE 3

Annexe 3

Un problème variationnel abstrait

On rappelle ici des résultats classiques sur les formulation variationnelles type Babuska-Brezzi. Les énoncées et leurs démonstrations sont rédigés pour la commodité du lecteur, à partir de V. Girault et P-A. Raviart [26].

Soient X et M deux espaces de Hilbert munis des normes $\| . \|_X$ et $\| . \|_M$. Soient X' et M' leurs duals et $\| . \|_{X'}$ et $\| . \|_{M'}$ leurs normes respectives. On note comme d'habitude par $< .,. >$ le produit de dualité entre les espaces X et X' où entre M et M'. On introduit deux formes bilinéaires et continues:

$$a(.,.) \, : \, X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$b(.,.) \, : \, X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec les normes:

$$\|a\| = \sup_{u,v \in X; u,v \neq 0} \frac{a(u,v)}{|u|_X \, |v|_X}$$

$$\|b\| = \sup_{u \in X, u \neq 0; \mu \in M; \mu \neq 0} \frac{b(u,\mu)}{|u|_X \, |\mu|_M}$$

Alors on considère le problème variationnel suivant, nommé Problème Q:

Si on se donne $l \in X'$ et $\chi \in M'$ trouver une paire $(u, \lambda) \in X \times M$ telle que:

(1) $$a(u,v) + b(v,\lambda) = < l, v > \quad \forall v \in X$$

(2) $$b(u,\mu) = < \chi, \mu > \quad \forall \mu \in M$$

Avec les formes bilinéaires $a(.,.)$ et $b(.,.)$ on peut définir les opérateurs linéaires associés $A \in \mathcal{L}(X, X')$ et $B \in \mathcal{L}(X, M')$:

$$(3) \qquad < Au, v >= a(u,v) \quad \forall u, v \in X$$

$$(4) \qquad < Bv, \mu >= b(v,\mu) \quad \forall v \in X \;, \forall \mu \in M$$

Soit $B' \in \mathcal{L}(M, X')$ le dual de B, i.e.

$$(5) \qquad < B'\mu, v >=< \mu, Bv >= b(v,\mu) \quad \forall v \in X \;, \forall \mu \in M$$

On peut vérifier aisément que:

$$(6) \qquad \|A\|_{\mathcal{L}(X,X')} = \|a\| \qquad \|B\|_{\mathcal{L}(X,M')} = \|b\|$$

Avec ces opérateurs le Problème Q admet la forme équivalente suivante:

Trouver $(u, \lambda) \in X \times M$ tel que:

$Au + B'\lambda = l$ dans X'

$Bu = \chi$ dans M'

On introduit maintenant l'opérateur linéaire $\Phi \in \mathcal{L}(X \times M; X' \times M')$ défini par:

$$\Phi(v,\mu) = \big(Av + B'\mu, Bv\big)$$

Alors on dira que Problème Q est bien posé si Φ est un isomorphisme de $X \times M$ dans $X' \times M'$.

Le but est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que le Problème Q soit bien posé.

On pose:

$$V = \mathrm{Ker}(B)$$

et plus généralement pour chaque $\chi \in M'$ on définit la variété affine:

$$V(\chi) = \{v \in X; \quad Bv = \chi\}$$

Et on a:

$$(7) \qquad \begin{cases} V(\chi) = \{v \in X; \quad b(v,\mu) = <\chi,\mu> \quad \forall \mu \in M\} \\ \\ V = V(0) \end{cases}$$

De plus la continuité de l'opérateur B implique que V est un sous-espace fermé de X.

Maintenant on associe au Problème Q le problème suivant:

Problème P:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\text{Trouver } u \in V(\chi) \quad \text{tel que:} \\ \\ &a(u,v) = <l,v> \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Si $(u,\lambda) \in X \times M$ est une solution du Problème Q alors $u \in V(\chi)$ et u est une solution de (8), i.e. u est une solution du Problème P. On définit maintenant:

$$V^0 = \{g \in X'; \quad <g,v>= 0 \quad \forall v \in V\}$$

Lemme 1 *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
(i) *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que:*

$$(9) \qquad \inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v,\mu)}{\|v\|_X \, \|\mu\|_M} \geq \beta$$

(ii) *L'opérateur B' est un isomorphisme de M dans V^0 et:*

$$(10) \qquad \|B'\mu\|_{X'} \geq \beta \|\mu\|_M \quad \forall \mu \in M$$

(iii) *L'opérateur B est un isomorphisme de $V^{\perp}$ dans M' et :*

$$\|Bv\|_{M'} \geq \beta \|v|_X \quad \forall v \in V^{\perp} \tag{11}$$

Démonstration

1) On démontre que (i) et (ii) sont équivalentes. Avec l'aide de (5), (i) veut dire qu'on a:

$$\|B'\mu\|_{X'} = \sup_{v \in X\ v \neq 0} \frac{< B'\mu, v >}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M \ \forall \mu \in M$$

donc (9) et (10) sont équivalentes. Pour démontrer que (i) implique (ii) il nous reste à montrer que, avec la condition (10), B' est un isomorphisme de M dans V^0.

De (10) on en déduit que B' est un opérateur bijectif de M dans $\mathcal{R}(B')$ avec l'inverse continu. Donc B' est un isomorphisme de M dans $\mathcal{R}(B')$ et $\mathcal{R}(B')$ est un sous-espace fermé de X'. Il nous reste à montrer que:

$$\mathcal{R}(B') = V^0$$

Pour ceci on applique le théorème du graphe fermé de Banach (cf. K. Yosida [43]) qui nous assure que:

$$\mathcal{R}(B') = \left(\mathrm{Ker}(B)\right)^0 = V^0$$

ce qui démontre 1).

2) On montre maintenant que (ii) et (iii) sont équivalentes.

Tout d'abord on observe que V^0 peut être identifié du point de vue isométrique avec $\left(V^{\perp}\right)'$. Pour $v \in X$ soit $v^{\perp}$ la projection orthogonale de v dans $V^{\perp}$. Alors pour chaque $g \in \left(V^{\perp}\right)'$ on associe l'élément $\widetilde{g} \in X'$ défini par:

$$< \widetilde{g}, v > = < g, v^{\perp} > \quad \forall v \in X$$

Evidemment $\widetilde{g} \in V^0$ et il est facile de vérifier que la correspondance $g \mapsto \widetilde{g}$ est une bijection isométrique de $\left(V^{\perp}\right)'$ dans V^0. Donc ceci nous permet d'identifier $\left(V^{\perp}\right)'$ et V^0.

Par conséquent on a que B est un isomorphisme de M dans $V^{\perp}$ avec

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(M,V^{\perp})} \leq \frac{1}{\beta}$$

si et seulement si B' est un isomorphisme de M dans $\left(V^{\perp}\right)' = V^{0}$ avec

$$\|\left(B'\right)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V^{0},M)} \leq \frac{1}{\beta}$$

Donc les propriétés (ii) et (iii) sont équivalentes.

Remarque La condition (9), appelée la "condition inf-sup" a été introduite indépendamment par I. Babuska [6] et F. Brezzi [9].

Pour démontrer notre principal résultat on introduit l'opérateur linéaire et continu $\pi \in \mathcal{L}(X', V')$ défini par:

$$< \pi f, v >=< f, v > \quad \forall f \in X' \quad \forall v \in X$$

Et on a:

$$\|\pi f\|_{V'} \leq \|f\|_{X'}$$

Théorème 1 *Le* Problème Q *est bien-posé si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:*
(i) L'opérateur πA *est un isomorphisme de* v *dans* V'
(ii) La forme bilinéaire $b(.,.)$ *satisfait la condition inf-sup (9).*

Démonstration

1) Les conditions (i) et (ii) sont suffisantes. Le lemme 1 et la relation (9) nous assurent qu'il existe un unique élément $u_0 \in V^{\perp}$ tel que:

$$\begin{cases} Bu_0 = \chi \\ \\ \|u_0\|_X \leq \dfrac{1}{\beta}\|\chi\|_{M'} \end{cases}$$

Donc le Problème Q peut être mis sous la forme équivalente suivante:

$$\begin{cases} \text{Trouver } w = u - u_0 \in V \text{ tel que} \\ \\ a(w,v) =< l, v > -a(u_0, v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

ou qui satisfait:

$$\pi A w = \pi(l - A u_0)$$

Puisque πA est un isomorphisme de V dans V' alors le Problème P a une unique solution $u = u_0 + w \in V(\chi)$ et on a:

$$\|w\|_X \leq c_1 \|\pi(l - A u_0)\|_{V'} \leq c_1 \|l - A u_0\|_{X'}$$

donc:

$$\|u\|_X \leq c_2 \big(\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}\big)$$

Donc $l - A u_0 \in V^0$, d'où d'après le lemme 1 il existe un unique $\lambda \in M$ tel que:

$$B'\lambda = l - Au$$

avec:

$$\|\lambda\|_M \leq \frac{1}{\beta} \|l - Au\|_{X'} \leq c_3 \big(\|l\|_{X'} + \|\chi\|_{M'}\big)$$

Donc le Problème Q a une unique solution (u, λ) et l'application $(l, \chi) \mapsto (u, \lambda)$ est continue de $X' \times M'$ dans $X \times M$, ce qui veut dire que Φ est un isomorphisme de $X' \times M'$ dans $X \times M$.

2) Les conditions (i) et (ii) sont nécessaires. On suppose que Φ est un isomorphisme de $X \times M$ dans $X' \times M'$.

On montre d'abord que la condition inf-sup (9) est vérifiée.

Soit $\chi \in M'$ et on pose $(u, \lambda) = \Phi^{-1}(0, \chi)$. On a $Bu = \chi$ tel que $\mathcal{R}(B) = M'$. Donc B est continu et bijectif de $V^\perp$ dans M'. Donc d'après le lemme 1 la condition (9) est vérifiée.

On va montrer maintenant que πA est un isomorphisme de V dans V'. On vérifie d'abord que l'opérateur πA est injectif sur V. Soit $u \in V$ qui satisfait $\pi A u = 0$ tel que $Au \in V^0$. Puisque la condition inf-sup est vérifiée, d'après le lemme 1 l'opérateur B est un isomorphime de M dans V^0. Donc il existe un unique $\lambda \in M$ tel que:

$$B'\lambda = -Au$$

Donc on a $\Phi(u, \lambda) = 0$, c'est à dire $u = 0$.

Maintenant on vérifie que πA est surjectif. Soit $g \in V'$, d'après le théorème Hahn-Banach il existe au moins un élément $l \in X'$ tel que $g = \pi l$. On pose:

$$(u, \lambda) = \Phi^{-1}(l, 0)$$

Clairement $u \in V$ et

$$Au + B'\lambda = l$$

Puisque pour tous les $v \in V$:

$$< \pi B'\lambda, v >=< B'\lambda, v >=< \lambda, Bv >= 0$$

on a $\pi B'\lambda = 0$ tel que

$$\pi Au = \pi l = g$$

Donc πA est une application bijective, linéaire et continue de V dans V' et donc un isomorphisme de V dans V'.

Remarque Dans la première partie de la démonstration du théorème 1 on a utilisé le fait que le Problème P admet une unique solution aussitôt que πA est un isomorphisme de V dans V' et que la variété affine $V(\chi)$ est non-vide. La condition inf-sup (9) implique évidemment que $V(\chi)$ est non-vide.

Corollaire 1 *On suppose que la forme bilinéaire a(., .) est V-elliptique, i.e. il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

(12) $$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V$$

Alors le Problème P *est bien posé si et seulement si la forme bilinéaire $b(.,\ .)$ satisfait la condition inf-sup (9).*

Démonstration Soit $l \in V'$. Puique a(., .) est V-elliptique on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram, donc il existe un unique $u \in V$ tel que:

$$a(u,v) = < l, v > \quad \forall v \in V$$

ou sous une forme équivalente:

$$\pi A u = l$$

De plus l'application $l \mapsto u$ est continue de V' dans V. Donc πA est un isomorphisme de V dans V' et le résultat suit d'après le théorème 1.

Remarque Tous les résultats peuvent être étendus au cas où X et M sont des espaces de Banach réflexifs. L'espace V reste inchangé, mais $V^{\perp}$ est remplacé par l'espace quotient X/V.

Bibliographie

[1] G. Allaire, "Thèse de doctorat de l'Université de Paris 6", (1989)

[2] G. Allaire, "Homogenization of a Stokes flow in a connected porous medium", Asymptotic Analysis, 2, 1989

[3] G. Allaire, "Homogenization and two-scale convergence", SIAM J. Math. Anal., 23, 6, 1482-1518, 1992

[4] G. Allaire et M. Briane, "Multi-scale convergence and reiterated homogenization", Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, R 94019, 1994

[5] T. Arbogast, J. Douglas, U. Hornung, "Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory", SIAM J. Math. Anal., 21, 823-836, 1990

[6] I. Babuska, "The finite element method with lagrangian multipliers", Numer. Math., 20, 179-192, 1973

[7] G. I. Barenblatt, I. P. Zheltov, I. N. Kocina, "Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks", J. Appl. Math. Mech., 24, 1286-1303, 1960

[8] A. Bensoussan, J-L. Lions, G. Papanicolau, "*Asymptotic analysis for periodic structures*", North Holland, Amsterdam, 1978

[9] F. Brezzi, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", R. A. I. R. O., Anal. Numer. R2, 129-181, 1974

[10] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Homogenization in open sets with holes", J. Math. Anal. Appl., 71, 2, 590-607, 1979

[11] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Reinforced and honeycomb structures", J. Math. pures et Appliquées, 65, 403-422, 1986

[12] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Tall structures- problems of towers and cranes", Proc. of Int. Conf. Appl. of Multiple Scaling in Mechanics, Eds. P. G.

Ciarlet et E. Sanchez-Palencia, R. M. A. 4, Masson, Paris, 77-92, 1987

[13] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Elastic Behaviour of very thin cellular structures", Material Instabilities in Continuum Mechanics, Ed. J. M. Ball, Clarendon Press, Oxford, 64-75, 1988

[14] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Mathematical study of large space structures", Stabilization of flexible structures, Ed. J. P. Zolesio, Lect. Notes in Control, 147,Springer, 6-16, 1990

[15] D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin, "Particules déformables en suspension dans un fluide visqueux", E. D. F. Bull. de la Dir. d'études et recherches, série C Math., Info., 1, 53-76, 1991

[16] D. Cioranescu et P. Donato, "Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés", Asymptotic Analysis, 1, 115-138, 1988

[17] C. Conca, "On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics", J. Math. Pures et Appliquées., 64, 31-75, 1985

[18] C. Conca et P. Donato, "Non-homogeneous Neumann problems in domains with small holes", Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 22, 4, 561-607, 1988

[19] E. De Giorgi et S. Spagnolo, "Sulla convergenza degli integrali dell-energia per operatori ellitici del secondo ordine", Boll. Un. mat. It. 8, 391-411, 1973

[20] P. Donato et J. Saint Jean Paulin, "Stokes flow in a porous medium with double periodicity", Progress in Partial Differential Equations: the Metz surveys, Eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin et I. Shafrir, Pitman, Longman Press, 116-129, 1994

[21] H. Ene et B. Vernescu, "Viscosity dependent behaviour of viscoelasticporous media", Asymptotic theories for plates and shells, Eds. R. P. Gilbert et K. Hackl, Longman House, 1995

[22] H. Ene et G. Pasa, *"Metoda omogenizarii, aplicatii la teoria materialelor compozite"*, Editura Academiei, 1987 (en roumain)

[23] H. Ene et D. Polisevschi, *"Thermal flow in porous media"*, D. Reidel Publishing Company, 1987

[24] Fomine et Kolmogorov, *"Functional Analysis"*, Graylock Press, Rochester, 1957

[25] G. Geymonat et E. Sanchez-Palencia, "Dégénerescence de la loi de Darcy pour un écoulement à travers des obstacles de petite concentration", C. R. A. S., 293, 1, 1981

[26] V. Girault et P-A. Raviart, *"Finite element methods for Navier-Stokes equations"*, Springer Series in Computational Mathematics, 5, 1986

[27] U. Hornung, "Applications of the homogenization method to flow and transport in porous media", Summer School on Flow and Transport in Porous Media, Ed. Xiao Shutie, World Scientific, 167-222, 1992

[28] T. Levy, "Filtration in a porous fissured rock: influence of the fissures connexity", European J. Mech., B/Fluids, 9,4, 309-327, 1990

[29] J-L. Lions, *"Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires"*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969

[30] L. Landau et E. Lifschitz, *"Mécanique des fluides"*, Editions Mir, 1971

[31] R. Lipton et M. Avellaneda, "A Darcy law for slow viscous flow past a stationary array of bubbles", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 114A, 71-79, 1990

[32] M-L. Mascarenhas, "Homogenization of a viscoelastic equation with non-periodic coefficients", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 106 A, 143-160, 1987

[33] F. Murat, "H-convergence", Rapport du Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, 1978

[34] J. Necas, *"Equations aux dérivées partielles"*, Presse Univ. Montreal, 1965

[35] G. Nguetseng, "A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization", SIAM J. Math. Anal., 20, 608-623, 1989

[36] G. Nguetseng, "Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics", SIAM J. Math. Anal., 21, 6, 1394-1414, 1990

[37] D. Polisevschi, "On the homogenization of fluids through periodic media", Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino, 42, 2, 1987

[38] E. Sanchez Palencia, *"Non-homogeneous media and vibration theory"*, Lecture Notes in Physics, 127, pringer, Berlin, 1980

[39] E. Sanchez Palencia, "On the asymptotics of the fluid flow past an array of fixed obstacles", Int. J. Eng. Science, 20, 1291-1301, 1982

[40] E. Sanchez Palencia, "Boundary value problems in domains containing perforated walls", Nonlinear PDE's and Appl., Collège de France seminar, Eds. H. Brezis et J-L. Lions, Research Notes in Math., Pitman, 70, 309-325, 1982

[41] E. Sanchez Palencia et J. Sanchez-Hubert, *"Vibration and coupling of continuous systems, asymptotic methods"*, Springer, Berlin, 1989

[42] J. Sanchez-Hubert, "Asymptotic study of the macroscopic behaviour of a solid-fluid mixture", Math. Meth. in the Appl. Science, 2, 1-11, 1980

[43] L. Tartar, "Cours Pécot", Collège de France, non-publié, 1977

[44] L. Tartar, "Convergence of the homogenization process", appendice de [38]

[45] R. Temam, *"Navier-Stokes equations"*, North-Holland, Amsterdam, 1978

[46] K. Yosida, *"Functional analysis"*, Springer, Berlin, 1965