AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE

Présentée

à l'Université de Metz

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Metz

Spécialité: Mathématiques pures

par

Semi DHIEB

Transformée de Fourier adaptée et convoluteurs de Schwartz sur les groupes de Lie nilpotents

Soutenue le 28 mars 1995 devant la commission d'examen

Didier ARNAL	Professeur à l'Université de Metz	(Président)
Jean Claude CORTET	Professeur à l'Université de Bourgogne	(Rapporteur)
Roe GOODMAN	Professeur à l'Université de Rutgers	(Examinateur)
Jean LUDWIG	Professeur à l'Université de Metz	(directeur de thèse)
André ROUX	Professeur à l'Université de Metz	(Examinateur)
Ezzeddine SALHI	Professeur à l'Université de Sfax	(Rapporteur)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ

022 420524 1

THESE

Présentée
à l'Université de Metz
en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Metz

Spécialité: Mathématiques pures

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19950185
Cote S/M3 95/10
Loc Magasin

par

Semi DHIEB

Transformée de Fourier adaptée et convoluteurs de Schwartz sur les groupes de Lie nilpotents

Soutenue le 28 mars 1995 devant la commission d'examen

Didier ARNAL	Professeur à l'Université de Metz	(Président)
Jean Claude CORTET	Professeur à l'Université de Bourgogne	(Rapporteur)
Roe GOODMAN	Professeur à l'Université de Rutgers	(Examinateur)
Jean LUDWIG	Professeur à l'Université de Metz	(directeur de thèse)
André ROUX	Professeur à l'Université de Metz	(Examinateur)
Ezzeddine SALHI	Professeur à l'Université de Sfax	(Rapporteur)

A ma famille,
à Assawer,
et à tous mes amis.

REMERCIEMENTS

C'est un immense plaisir pour moi de pouvoir exprimer ma gratitude à l'égard du Professeur Jean LUDWIG, qui a largement contribué, par ses idées et conseils généreusement prodigués, par sa disponibilité et ses encouragements constants, à la réalisation de cet ouvrage dans les meilleures conditions possibles.

Je ne saurais trop remercier les Professeurs Jean Claude CORTET de l'Université de Bourgogne et Ezzeddine SALHI de l'Université de Sfax, qui m'ont fait le grand honneur d'être les rapporteurs de cette thèse.

C'est un honneur pour moi que le Professeur Didier ARNAL de l'Université de Metz, ait accepté de participer à ce jury et de le présider. Je l'en remercie sincèrement.

Les Professeurs Roe GOODMAN de L'Université de Rutgers et André ROUX de l'Université de Metz, ont eu la gentillesse de se pencher sur ce travail et d'accepter de faire partie du jury. Je tiens à les assurer de ma sincère gratitude.

J'exprime aussi mes vifs remerciements à tous les membres du département de mathématiques de l'Université de Metz qui m'ont permis la réalisation de cette thèse dans d'excellentes conditions.

TABLE DE MATIERES

INTRODUCTION

Etant donné un groupe localement compact G, il est important de connaître l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de G.
La recherche de $\hat{G}$ est en général difficile. Cependant, pour certaines classes de groupes, on dispose de procédés systématiques.
Si G est un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la méthode des orbites de Kirillov donne une paramétrisation concrète de $\hat{G}$. En effet, le groupe G agit sur le dual de son algèbre de Lie au moyen de la représentation coadjointe. Kirillov [22] a montré qu'il existe une correspondence biunivoque entre les classes d'équivalence des représentations unitaires, irréductibles de G et leurs orbites dans l'espace dual de $\mathfrak{g}$.

Soient φ une fonction de Schwartz sur G et π une représentation unitaire et irréductible de G. Alors,

$$\pi(\varphi) := \int_G \varphi(g)\pi(g)dg \tag{0.1}$$

est un opérateur traçable. La transformée de Fourier de φ est définie comme étant la transformée de Fourier euclidienne de $\varphi \circ \exp \in S(\mathfrak{g})$:

$$\hat{\varphi}(l) = \int_{\mathfrak{g}} (\varphi \circ \exp)(X) e^{-2\pi i < l \, , \, X>} dX, \quad l \in \mathfrak{g}^*. \tag{0.2}$$

La trace de l'opérateur $\pi(\varphi)$ est exprimée au moyen de la formule de Kirillov par:

$$tr\pi(\varphi) = \int_{\mathcal{O}} (\varphi \circ \exp)\hat{\ }(l) d\mu_{\mathcal{O}}(l), \tag{0.3}$$

où $\mu_{\mathcal{O}}$ est la mesure G-invariante unique sur l'orbite $\mathcal{O}$, convenablement normalisée. Cette mesure ne dépend pas du choix de la mesure de Haar dg sur G, pourvu qu'on utilise la mesure de Lebesgue correspondante dX sur $\mathfrak{g}$, définissant $\hat{\varphi}$. La mesure indiquée est caractérisée dans [33].

La transformée de Fourier de φ est aussi définie par:

$$\mathcal{F}\varphi(\pi) = tr\pi(\varphi), \quad \pi \in \hat{G}.$$

Cette définition permet d'établir la formule d'inversion de Fourier pour les fonctions définies sur G sous une même forme que dans le cas abélien:

$$\varphi(e) = \int_{\hat{G}} tr\pi(\varphi)d\mu(\pi), \tag{0.4}$$

où μ est la mesure de Plancherel sur G, décrite par Kirillov[23] et e l'élément neutre de G. Soient π une telle représentation et $\mathcal{O}_\pi$ l'orbite correspondante dans $\mathfrak{g}$. La transformée de Fourier adaptée introduite dans [5] et [1] sous le nom de la transformation de Fourier nilpotente , a fait après l'objet de plusieurs travaux. ([2], [28], [30]). Elle constitue une généralisation de la transformée de Fourier abélienne usuelle. On sait [42] qu'il existe des fonctions rationnelles p_j, q_j $(j = 1, ..., k)$ définies sur un ouvert de Zariski ϑ dense dans $\mathfrak{g}^*$, des fonctions λ_m $(m = 1, ..., n-2k)$, polynomiales et G-invariantes sur ϑ et un ouvert dense Λ de $\mathbb{R}^{n-2k}$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \vartheta &\longrightarrow \Lambda \times \mathbb{R}^{2k} \\ \xi &\longmapsto (\lambda(\xi), p(\xi), q(\xi)) \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme. Chaque orbite de $\lambda \in \mathfrak{g}^*$,

$$\mathcal{O}_\lambda = \{\xi \in \vartheta \text{ tel que } \lambda(\xi) = \lambda\} \simeq \lambda \times \mathbb{R}^{2k}$$

de G dans ϑ admet une carte de Darboux globale définie par les coordonnées p et q (en particulier la mesure $d\mu_{\mathcal{O}_\lambda}$ est égale à $dpdq$).

La transformée de Fourier adaptée introduite dans [1] est une isométrie

$$\Theta : \ L^2(G) \longrightarrow L^2(\mathfrak{g}^*, d\xi) = L^2(\vartheta, r(\lambda)d\lambda dpdq)$$

définie par

$$(\Theta f)(\lambda, p, q) = \int_{\mathfrak{g}} f(\exp X)e^{-2\pi i a(X,\lambda,p,q)}dX, \quad f \in S(G), \tag{0.5}$$

où $a(X, \lambda, p, q)$ est réelle, polynomiale en X, p et q et rationnelle en λ. Elle s'inverse en

$$f(\exp X) = \int (\Theta f)(\lambda, p, q)e^{2\pi i a(X,\lambda,p,q)}r(\lambda)dpdq, \tag{0.6}$$

où $r(\lambda)$ est une fonction rationnelle en λ définie sur ϑ et elle permet d'écrire la formule de la trace sous la forme

$$tr\pi_\lambda(f) = \int_{\mathcal{O}_\lambda} (\Theta f)(\xi)d\mu_{\mathcal{O}_\lambda}(\xi), \quad \lambda \in \vartheta, \ f \in S(G). \tag{0.7}$$

On se demande si on peut prolonger cette fonction sur $\mathfrak{g}^* \times G$ sans qu'elle perde ses caractéristiques. Ceci n'est pas en général possible de manière canonique. Cependant, nous allons construire une fonction définie sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B} \times G$ où $\mathfrak{B}$ désigne l'ensemble des bases de Malcev de $\mathfrak{g}$, jouissante des propriétés désirées.

Rappelons quelques notions de la théorie de Schwartz sur les espaces euclidiens. Soit V un espace vectoriel de dimension finie et notons $\mathcal{M}S(V)$, l'ensemble des endomorphismes continus E de $S(V)$, vérifiant:

$$E(l_x f) = l_x(Ef), \quad \forall x \in V, \ \forall f \in S(V),$$

où

$$l_x f(y) = f(y-x), \quad x, y \in V.$$

A l'endomorphisme E, on associe une distribution tempérée sur V, D_E, définie par:

$$< D_E \ , \ f >= Ef(0), \quad f \in S(V).$$

Il s'ensuit que:

$$Ef(x) = l_{-x}Ef(0) = E(l_x\tilde{f})(0) =< D_E \ , \ l_x\tilde{f} >:= (D * f)(x),$$

où

$$\tilde{f}(y) = f(-y), \quad y \in V.$$

Réciproquement, si $D \in S^*(V)$, alors

$$E_D : \ f \longmapsto D * f$$

est une application de $S^*(V)$ dans l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur V. Une question qui se pose: *Quelle condition faut-il avoir sur la distribution D pour que E_D appartienne à $\mathcal{M}S(V)$?* La réponse est donnée en termes de la transformée de Fourier. Pour $f \in S(V)$, la transformée de Fourier de f, $\hat{f}$, est définie sur V^*, l'espace dual de V par:

$$\hat{f}(\xi) = \int_V f(x) e^{-2\pi i <\xi, x>} dx, \quad \xi \in V^*.$$

L'application $f \longmapsto \hat{f}$ établie un isomorphisme entre $S(V)$ et $S(V^*)$ et permet de faire correspondre à une distribution tempérée D sur V, l'élément $\hat{D}$ de $S^*(V^*)$, défini par:

$$< \hat{D} \ , \ f > \ :=< D \ , \ \hat{f} >, \quad f \in S(V).$$

Schwartz [39] a montré que pour $D \in S^*(V)$, E_D appartient à $\mathcal{M}S(V)$ si et seulement si $\hat{D}$ est une fonction de classe C^∞ sur V^*, à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées. En outre, dans ce cas on a:

$$(D * f)\hat{\ }(\xi) = \hat{D}(\xi)\hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in V^*.$$

Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'espace de Schwartz $S(G)$ peut-être défini comme étant l'image de $S(\mathfrak{g})$ via l'application exp. Notons $S^*(G)$ son dual, l'espace des distributions tempérées sur G. Pour $f \in S(G)$, la transformée de Fourier de f, $\hat{f}$ est définie sur $\mathfrak{g}^*$, espace dual de $\mathfrak{g}$ par la formule (0.2). Soit Ad^* la représentation coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Définition:

Une distribution tempérée D sur $\mathfrak{g}^*$ est dite Ad^*-invariante si

$$< D \ , \ F \circ Ad^* >=< D \ , \ F > , \quad \forall F \in S(\mathfrak{g}^*).$$

Soit $f \in S(G)$. Notons

$$l_x f(y) = f(x^{-1}y) \ \text{ et } \ r_x f(y) = f(yx), \quad x, \ y \in G.$$

Une distribution D sur G est dite bi-invariante si

$$< D \ , \ l_x f > = < D \ , \ r_{x^{-1}} f >, \ \ \forall x \in G, \ \forall f \in S(G).$$

Un calcul direct montre qu'une distribution tempérée D sur G est bi-invariante si et seulement si $\hat{D} \in S^*(\mathfrak{g}^*)$ est Ad^*-invariante.
Notons $\mathcal{M}S(G)$, l'espace des endomorphismes continus de $S(G)$ qui commutent avec les translations à gauche et à droite par les éléments de G.
Comme dans le cas euclidien, pour tout $E \in \mathcal{M}S(G)$, il existe une distribution tempérée D_E sur G telle que

$$Ef(x) = (D_E * f)(x) := < D_E \ , \ l_x \tilde{f} >, \ \ \forall f \in S(G), \ \forall x \in G$$

Réciproquement, si $D \in S^*(G)$, on note, E_D l'application définie sur $S(G)$ par:

$$E_D f = D * f.$$

Jenkins a montré le résultat suivant:

Théorème:[21]

Soit $D \in S^*(G)$. L'endomorphisme E_D associé appartient à $\mathcal{M}S(G)$ si et seulement si $\hat{D}$ est une fonction C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$, Ad^*-invariante, à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées.

Une telle distribution sera dite un convoluteur central pour $S(G)$.
La démonstration de ce théorème est relativement longue, nous essayerons alors de donner une autre démonstration.

Plus précisément, cette thèse a été organisée comme suit:

. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions sur les goupes de Lie nilpotents et la théorie de leurs représentations. Nous exposons essentiellement la méthode des orbites de Kirillov et les polarisations associées à un élément du dual de l'algèbre de Lie qui est en position générale.

. Dans le second chapitre, nous définissons sur l'espace de Schwartz $S(G)$, de nouvelles transformées de Fourier adaptées , notées $(\ )^{\tilde{}}$, telles que la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$, $f \in S(G)$, soit égale à la norme de la fonction $\tilde{f}$ dans $L^2(\mathcal{O}_\pi, d\mu)$.

Lorsque l'algèbre de Lie est de pas deux, ou plus généralement, lorsque les orbites sous l'action coadjointe sont plates:

$$\mathcal{O} = l + \mathfrak{g}(l)^\perp, \ \ l \in \mathcal{O}$$

où

$$\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} \text{ tel que } < l \ , \ [X, \mathfrak{g}] > = (0)\},$$

on peut prendre dans ce cas la transformée de Fourier usuelle.

Dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ contient un idéal $\mathfrak{h}$ tel que si H désigne le sous-groupe fermé $\exp \mathfrak{h}$, toutes les H-orbites soient plates et que toute G-orbite $\mathcal{O}$ soit saturée par $\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O} + \mathfrak{h}^\perp,$$

nous contruisons une fonction a_0 sur $\mathfrak{g}^* \times G$ de classe C^∞ et donc, la transformée de Fourier adaptée qu'elle définit est un isomorphisme de $S(G)$ sur $S(\mathfrak{g}^*)$. En outre, si $\mathcal{O}$ est une orbite de G sous l'action coadjointe et π l'élément de $\hat{G}$ alors, pour toute fonction f appartenant à $S(G)$, la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$ est donnée par:

$$| \pi(f) |_{H.S}^2 = \int_{\mathcal{O}} | \tilde{f}(l) |^2 \, d\mu_\pi(l), \tag{0.8}$$

où μ_π est la mesure G-invariante sur l'orbite $\mathcal{O}$ déterminée par (0.3).

Dans la section 3 de ce chapitre, nous déterminons explicitement dans le cas général, une fonction a définie sur $\mathfrak{g}^* \times G$ tout entier. La transformée de Fourier adaptée qui en résulte vérifie la formule (0.8). Cette construction, liée à la détermination des polarisations, pose toujours le même problème de singularité en certains points de $\mathfrak{g}^*$. Nous construisons alors une autre fonction, notée aussi a, sur $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B} \times G$, où $\mathfrak{B}$ désigne l'ensemble des bases de Malcev de $\mathfrak{g}$ et nous définissons une nouvelle transformée de Fourier adaptée sur $S(G)$ par:

$$\tilde{f}(F, B) = \int_G f(x) e^{-ia(F,B,x)} dx, \quad (F, B) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B},$$

puis, nous déterminons l'image de $S(G)$ par cette application.

. Nous étudions dans le troisième chapitre les convoluteurs pour l'espace de Schwartz $S(G)$. Nous redémontrons par un calcul direct quelques propriétés des convoluteurs centraux énoncées dans [21] et nous donnons une approche de la démonstration du théorème énoncé plus haut.

Supposons que la distribution D soit un convoluteur non central. Autrement dit, les applications: $D * f$ et $f * D$ définies par:

$$D * f(x) = < D \ , \ l_x \tilde{f} > \quad \text{et} \quad f * D(x) = < D \ , \ r_x \tilde{f} >, \quad x \in G$$

sont dans $S(G)$, pour tout $f \in S(G)$. En général, le convoluteur D n'est pas donné par une fonction. Nous justifions cette affirmation par un exemple.

Réciproquement, si φ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$, *quelle condition doit-elle vérifier pour quelle soit la transformée de Fourier au sens des distributions d'un convoluteur?*

Nous exprimons dans ce cas, une condition suffisante et nous donnons une condition plus simple dans le cas du groupe de Heisenberg.

. Nous introduisons dans le dernier chapitre quelques notions sur les groupes de Lie variables et nous rappelons des résultats de calculs fonctionnels sur ces groupes. Ensuite, nous définissons les multiplicateurs (centraux) de Schwartz pour les groupes de Lie nilpotents variables et nous généralisons la conjecture de Howe caractérisant cette classe de multiplicateurs.

I

RAPPELS ET GENERALITES

Nous allons introduire dans ce chapitre quelques notions sur la théorie des représentations des groupes de Lie nilpotents d'une importance fondamentale pour le reste de ce travail. On renvoie le lecteur à [3] et [40] pour ce qui concerne la théorie des groupes de Lie.

Dans tout ce qui suit, G désignera un groupe de Lie connexe simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons [,] le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$.

1- Groupes de Lie nilpotents:

1-1- Définition:

Nous disons que G est nilpotent si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente; c'est à dire, la suite centrale décroissante $(\mathfrak{g}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{g}$ définie par:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \forall\, m \geq 2, \quad \mathfrak{g}^m = [\mathfrak{g}^{m-1}, \mathfrak{g}]$$

vérifie $\mathfrak{g}^m = \{0\}$ pour un certain m.

Soit r l'entier tel que $\mathfrak{g}^r \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}^{r+1} = \{0\}$, r est appelé le pas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Remarque :

Une condition nécessaire pour qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ soit nilpotente, est que pour chaque élément X de $\mathfrak{g}$, l'endomorphisme adX défini par

$$adX(Y) = [X, Y], \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}$$

est nilpotent puisque $adx(\mathfrak{g}^k)$ est inclus dans $\mathfrak{g}^{k+1}$.

Le théorème suivant est un outil considérable dans la théorie des groupes de Lie nilpotents:

1-2- Théorème d'Engel:[36]

Soit L une algèbre de Lie d'endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie. Supposons que tout élément de L soit nilpotent. Alors, il existe un vecteur non nul v de V tel que $Xv = 0$ pour tout X appartenant à L.

En tenant compte de la remarque précédente, nous déduisons que:

1-3- Corollaire:

$\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente si et seulement si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme adX est nilpotent.

Nous allons maintenant définir les bases de Jordan-Hölder et de Malcev d'une algèbre de Lie nilpotente.

1-4- Définition:

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $\mathfrak{B} = (b_1, ..., b_n)$ une base de $\mathfrak{g}$.

a) $\mathfrak{B}$ est dite une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ si pour tout k, $1 \leq k \leq n$, le sous-espace $\mathfrak{g}_k$ engendré par les vecteurs $(b_{k+1}, ..., b_n)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

b) $\mathfrak{B}$ est dite une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ si pour tout k, $1 \leq k \leq n$, le sous-espace $\mathfrak{g}_k$ engendré par les vecteurs $(b_{k+1}, ..., b_n)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Du théorème d'Engel, nous déduisons alors le corollaire suivant:

1-5- Corollaire:

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

1) Il existe une base de Malcev $\mathfrak{B} = (b_1, ..., b_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}$ soit l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $(b_{k+1}, ..., b_n)$ pour un certain k.

Nous disons alors que $\mathfrak{B}$ est une base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ ou passant par $\mathfrak{h}$.

Si en outre $\mathfrak{h}$ est aussi un idéal de $\mathfrak{g}$, alors il existe une base de Jordan-Hölder passant par $\mathfrak{h}$.

2) Si $\mathfrak{h}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

1-6- La formule de Campbell-Backer-Hausdorff:

Soit G un groupe de Lie connexe. Notons

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

l'aplication exponentielle, *log* son inverse et définissons

$$C(X, Y) = log(\exp X. \exp Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Cette fonction analytique et bien définie, converge normalement dans un voisinage de $(0,0)$ et ne dépend pas du choix des groupes de Lie localement isomorphes associés à $\mathfrak{g}$.
La formule de Campbell-Baker-Hausdorff qui en résulte nous permet de reconstituer G avec sa loi multiplicative connaissant uniquement la structure de $\mathfrak{g}$. Cette formule est donnée par:

$C(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] - \frac{1}{48}[Y,[X,[X,Y]]] + \frac{1}{48}[X,[Y,[Y,X]]] + ...$ (voir [17]).

Si G est un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'application exp est un difféomorphisme analytique et la formule de Campbell-Baker-Hausdorff est définie pour tous $X,Y \in \mathfrak{g}$.

Nous pouvons alors définir sur $\mathfrak{g}$ une structure de groupe de Lie nilpotent $(\mathfrak{g}, C)$ qui admet $\mathfrak{g}$ comme algèbre de Lie. Dans ces conditions, l'application exp n'est autre que l'identité.

Ceci nous ramène à définir des coordonnées sur G. Si $\mathfrak{g}$ est équipée d'un système de coordonnées associées à une base, les coordonnées correspondantes dans G seront appelées coordonnées exponentielles.

Soient G un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de G et $(b_1, ..., b_n)$ une base de Malcev passant par $\mathfrak{h}$. Notons H le sous-groupe de Lie fermé de G, $\exp \mathfrak{h}$.

1-7- Théorème:[7]

L'application

$$\mathbb{R}^k \longrightarrow G/H$$

$$(r_1, ..., r_k) \longmapsto \exp r_1 b_1 ... \exp r_k b_k.H$$

est un difféomorphisme. En outre, l'application

$$f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^k} f(\exp r_1 b_1 ... \exp r_k b_k) dr_1 ... dr_k,$$

où f est une fonction de classe C^∞ sur G/H, est une mesure G-invariante sur G/H. En particulier, si $H = \{e\}$, cette application définit une mesure de Haar sur G.

2- La théorie de Kirillov:

Dans la théorie de la représentation des groupes de Lie nilpotents, les représentations induites jouent un rôle déterminant. Nous voulons en parler brièvement.

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et H le sous-groupe fermé $\exp \mathfrak{h}$. Soit $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ une représentation unitaire irréductible de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\rho$. Notons $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions

$$\xi : G \longrightarrow \mathcal{H}_\rho$$

vérifiant :

i) Pour tout $h \in H$ et pour tout $g \in G$, $\xi(g.h) = \rho^*(h)\xi(g)$.

ii) L'application

$$g \longmapsto < \xi(g), x >_{\mathcal{H}_\rho}$$

est borélienne pour tout $x \in \mathcal{H}_\rho$.

iii) L'application

$$g \longmapsto | \xi(g) |_{\mathcal{H}_\rho}$$

est dans $L^2(G/H, dx)$ où dx est la mesure G-invariante sur G/H.

L'espace $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire

$$< \xi \ , \ \eta >_{\mathcal{H}} = \int_{G/H} < \xi(x) \ , \ \eta(x) >_{\mathcal{H}_\rho} dx \ , \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}$$

est un espace de Hilbert.

La représentation définie sur G par

$$\Big(\pi(x)(\xi)\Big)(y) = \xi(x^{-1}.y) \ , \ x, y \in G \text{ et } \xi \in \mathcal{H}$$

s'appelle la représentation de G induite de $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ et d'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}$.
On note

$$\pi = ind_H^G \rho.$$

Soient k la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et $(b_1, ..., b_k, b_{k+1}, ..., b_n)$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ passant par $\mathfrak{h}$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathcal{H}_\pi &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^k) \\ \xi \ &\longmapsto \Upsilon(\xi) \end{aligned}$$

définie par

$$\Upsilon(\xi)(t_1, ..., t_k) = \xi(\exp(t_1 b_1 ... \exp t_k b_k)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}_\pi$ dans $L^2(\mathbb{R}^k)$.
Le lecteur trouvera plus d'informations dans [32], [7].

L'importance de la représentation induite pour les groupes de Lie nilpotents devient claire grâce au théorème de Dixmier affirmant que chaque représentation unitaire irréductible de G est induite par un caractère d'un sous-groupe. Ceci nous conduit à la théorie de Kirillov (voir [22]).

2-1- Orbites de la représentation coadjointe:

Dans ce paragraphe, nous exposons quelques propriétés fondamentales des orbites coadjointes.
Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Alors, G agit sur $\mathfrak{g}$ à l'aide de la représentation adjointe: si $g \in G$, Adg est la différentielle à l'origine de l'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Adg est un isomorphisme sur $\mathfrak{g}$ et $(Adg)^{-1} = Adg^{-1}$. En différentiant l'application

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Adg, \end{aligned}$$

où $Aut(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des automorphismes de $\mathfrak{g}$, nous obtenons la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow End(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto adX \end{aligned}$$

définie par

$$adX(Y) = [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

($End(\mathfrak{g})$ étant l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{g}$).

A coté de ces deux représentations, nous citons la représentation contragrédiente de Ad qui est la représentation coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$ notée Ad^* et définie par

$$< Ad^*gl,\ X >=< l,\ Adg^{-1}X > \quad \forall g \in G,\ \forall l \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Sa différentielle au point e, élément neutre de G,

$$d(Ad^*)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g}^*)$$

est définie par

$$d(Ad^*)_e(X)(l)(Y) := ad^*Xl(Y) =< l, [X, Y] >$$

et si g est un point arbitraire de G,

$$d(Ad^*)_g = (Ad^*g) \circ d(Ad^*)_e = Ad^*g \circ ad^*.$$

Un sous-groupe utile de G associé à $l \in \mathfrak{g}^*$ est son stabilisateur

$$G(l) = \{g \in G \ : \ Ad^*g.l = l\}$$

qui est un sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie le radical de l, $\mathfrak{g}(l)$:

$$\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} \ \text{ tel que } \ < l, [X, Y] >= 0 \ \forall\ Y \in \mathfrak{g}\}.$$

L'orbite coadjointe d'un élément $l \in \mathfrak{g}^*$

$$\mathcal{O}_l = Ad^*G.l$$

est une sous-variété car le rang de la différentielle de l'application

$$\phi_l(g) = Ad^*g.l$$

est constant et est égal à $dim\mathfrak{g} - dim\mathfrak{g}(l)$ en tout point de G. On munit l'espace homogène $G/G(l)$ de sa structure de variété naturelle. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_l : G/G(l) &\longrightarrow \mathcal{O} \\ g.G(l) &\longmapsto Ad^*g.l \end{aligned}$$

est une bijection. L'espace tangent $T_l\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}$ en un point l est identifié au sous-espace $(ad^*\mathfrak{g})(l)$ de $\mathfrak{g}^*$, ou encore à l'espace affine $l + ad^*\mathfrak{g}(l)$.

Notons aussi, que toute orbite coadjointe $\mathcal{O}$ est un sous-ensemble fermé de $\mathfrak{g}^*$, donc sa structure de variété est déterminée par la topologie euclidienne de $\mathfrak{g}^*$.

Remarque:

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors, son radical $\mathfrak{g}(l)$ est de codimension paire. En effet, la forme bilinéaire

B_l induit une forme bilinéaire antisymétrique et non dégénérée $\tilde{B}_l$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l) \times \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$.

Donc, d'après un résultat standard d'algèbre linéaire, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$ est de dimension paire. Nous en déduisons alors que les orbites coadjointes sont de dimensions paires.

2-2- Polarisations:

2-2-1- Définition:

Soit $l \in \mathfrak{g}^*$ espace dual de $\mathfrak{g}$. Un sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dit isotrope par rapport à l pour la forme bilinéaire alternée B_l définie par

$$B_l(X,Y) = < l, [X,Y] > \quad , \ X, Y \in \mathfrak{g},$$

si

$$< l \ , \ [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] >= (0).$$

Si en outre, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale, $\mathfrak{h}$ s'appelle une polarisation de l.

Soit $\mathfrak{g}(l)$ le radical de l. Alors, si $\mathfrak{h}$ est une polarisation de l, la dimension de $\mathfrak{h}$ est

$$dim\mathfrak{h} = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} + dim\mathfrak{g}(l)).$$

2-2-2- Théorème:[22]

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors, il existe une polarisation de l.

Etant donné un élément l de $\mathfrak{g}^*$, le radical $\mathfrak{g}(l)$ est déterminé d'une manière unique mais l peut admettre plusieurs polarisations, qui conntiennent toutes $\mathfrak{g}(l)$. Cependant, ces polarisations ne peuvent pas être construites d'une manière systématique. Nous donnons ici une construction d'une polarisation dûe à M.Vergne, utilisant les bases de Jordan-Hölder.

2-2-3- Théorème:[41]

Soit

$$(0) \subset \mathfrak{g}_1 \subset ... \subset \mathfrak{g}_n$$

une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $dim\mathfrak{g}_j = j$ et soit $l \in \mathfrak{g}^*$. Notons l_j la restriction de l à $\mathfrak{g}_j$. Alors,

$$\mathfrak{h}(l) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}_j(l_j)$$

est une polarisation de l.

Démonstration:

Soient X et Y deux éléments de $\mathfrak{h}(l)$ tels que $X \in \mathfrak{g}_j(l_j)$ et $Y \in \mathfrak{g}_k(l_k)$. Supposons que $j \leq k$, alors,

$$< l \ , \ [X,Y] >=< l_k \ , \ [X,Y] >= 0.$$

De plus, si $W \in \mathfrak{g}_j$,

$$< l \ , \ [W,[X,Y]] >=< l \ , \ [X,[W,Y]] > + < l \ , \ [[W,X],Y] >= 0.$$

Ce qui prouve que $\mathfrak{h}(l)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à l.

Pour montrer que $dim\mathfrak{h}(l) = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} + dim\mathfrak{g}(l))$, nous raisonnons par récurrence sur $n = dim\mathfrak{g}$. Le résultat est évident si $\mathfrak{g}$ est abélienne. Supposons qu'il soit vrai pour les algèbres de dimension inférieur à n et soit

$$\mathfrak{h}'(l) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathfrak{g}_j(l_j).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$dim\mathfrak{h}'(l) = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g}_{n-1}(l_{n-1}) + (n-1)).$$

Deux cas qui se présentent:

<u>1^{er} cas:</u> $\mathfrak{g}(l) \subseteq \mathfrak{g}_{n-1}(l_{n-1})$, nous avons donc $\mathfrak{h}(l) = \mathfrak{h}'(l)$ et $dim\mathfrak{g}(l) = dimg_{n-1}(l_{n-1}) - 1$

<u>$2^{ème}$ cas:</u> $\mathfrak{g}_{n-1}(l_{n-1}) \subseteq \mathfrak{g}(l)$ et donc $dim\mathfrak{h}(l) = dim\mathfrak{h}'(l)+1$, $dim\mathfrak{g}(l) = dim\mathfrak{g}_{n-1}(l_{n-1})+1$.

Dans chacun des deux cas, on a $dim\mathfrak{h}(l) = \frac{1}{2}(dim\mathfrak{g} + dim\mathfrak{g}(l))$.

D'où $\mathfrak{h}(l)$ est une polarisation de l.

Soient $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation de l choisie. Alors, l'application $\chi_{l,\mathfrak{p}}$ définie sur $P = \exp\mathfrak{p}$ par

$$\chi_{l,\mathfrak{p}}(\exp Y) = e^{2\pi i<l,Y>}, \quad Y \in \mathfrak{p}$$

est une représentation de P de dimension 1. Nous pouvons donc former la représentation induite:

$$\pi_{l,\mathfrak{p}} = ind_P^G \chi_{l,\mathfrak{p}}.$$

2-2-4- Théorème:[22]

1) Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ deux polarisations de $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors, $\pi_{l,\mathfrak{p}}$ et $\pi_{l,\mathfrak{p}'}$ sont équivalentes et irréductibles, nous notons alors $\pi_l = \pi_{l,\mathfrak{p}}$ lorsque nous nous intéressons aux classes d'équivalence.

2) Pour une représentation unitaire irréductible π de G, il existe un $l \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\pi_l \simeq \pi$. De plus, $\pi_l \simeq \pi_{l'}$ si et seulement si l et l' appartiennent à la même orbite coadjointe de G.

Nous en déduisons alors que l'application

$$l \longmapsto \pi_{l,\mathfrak{p}}$$

est indépendante du choix de $\mathfrak{p}$ et l'application de Kirillov

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^*/Ad^*G &\longrightarrow \hat{G} \\ l &\longmapsto \pi_l \end{aligned}$$

est une bijection. Elle est en fait un homéomorphisme ([4], [20]).

Dans ce qui suit, l désignera un élément de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{h}$ une polarisation de l et $\pi = \pi_{l,\mathfrak{h}}$. Soit π_1 la représentation de $L^1(G)$ définie à partir de π par

$$\pi_1(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg, \ f \in L^1(G)$$

et dg est la mesure de Haar sur G.

Alors, π_1 est une représentation unitaire de l'algèbre involutive $L^1(G)$; c'est à dire, pour $f \in L^1(G)$, $\pi_1(f^*) = (\pi_1(f))^*$ où f^* est la fonction définie sur G par

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \ \forall x \in G.$$

Un simple calcul montre que pour $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ et $x \in G$,

$$\Big(\pi_1(f)(\xi)\Big)(x) = \int_{G/_H} f_{l,\mathfrak{h}}(x,y)\xi(y)d\dot{y}$$

où H est le sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$, $d\dot{y}$ est la mesure de Haar sur G/H et

$$f_{l,\mathfrak{h}}(x,y) := \int_H f(x.h.y^{-1})\chi_l(h)dh.$$

La mesure de Haar dh sur H est telle que dg soit égale à $dhd\dot{y}$.

On en déduit que $\pi_1(f)$ est un opérateur à noyau; et son noyau est la fonction $f_{l,\mathfrak{h}}$. Dans la suite, nous écrivons $\pi(f)$ au lieu de $\pi_1(f)$.

3-L'espace de Schwartz $S(G)$:

Rappelons la définition de l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$.

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un multi-indice. Nous notons

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} \ \text{ et } \ D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}...(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$$

où $(x_1, ..., x_n)$ sont les coordonnées de x dans une base arbitraire de $\mathbb{R}^n$.

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, à valeur dans $\mathbb{C}$ est dite de Schwartz si elle est de classe C^∞ et pour tous multi-indices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \mid x^\alpha D^\beta f(x) \mid < \infty.$$

On note $S(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$. La topologie de $S(\mathbb{R}^n)$ est déterminée par cette famille de semi-normes.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors l'espace de Schwartz $S(V)$ est défini par analogie avec $S(\mathbb{R}^n)$.

3-1- Remarque:

Soit $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur $\mathbb{R}^n$ à cœfficients polynomiaux. Il est clair alors que f appartient à $S(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\| Lf \|_\infty < \infty, \quad \forall \ L \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Soit maintenant G un groupe de Lie nilpotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$$

une application polynomiale; c'est à dire, l'application

$$log \circ \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathfrak{g}$$

est un difféomorphisme polynomial.

3-2- Exemples:

Les deux fonctions ψ_1 et ψ_2 de $\mathbb{R}^n$ vers G définies par

$$\psi_1(t_1, ..., t_n) = \exp(\sum_{i=1}^{n} t_i b_i) \quad où \ (b_1, ..., b_n) \text{ est une base de } \mathfrak{g}$$

et

$$\psi_2(t_1, ..., t_n) = \exp t_1 X_1 .....t_n X_n \quad avec \ (X_1, ..., X_n) \ \text{ est une base de Jordan-Hölder de } \mathfrak{g}$$

sont des difféomorphismes polynomiaux.

3-3- Définition:

Nous définissons $S(G)$ comme étant l'ensemble des fonctions f définies sur G telles que si ψ est un difféomorphisme polynomial alors $f \circ \psi$ appartienne à $S(\mathbb{R}^n)$. Cette définition est indépendante du choix de ψ.

Pour $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in C^\infty(G)$, les champs de vecteurs X_L et X_R invariants respectivement à gauche et à droite sont définis pour $g \in G$ par

$$X_L.f(g) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(g. \exp tX) - f(g)]$$

$$X_R.f(g) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(\exp(-tX).g) - f(g)].$$

Soient $\mathbb{C}\ [G]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de G sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur G à cœfficients polynomiaux.

Si $X \in \mathfrak{g}$, alors X_L et X_R sont dans $\mathcal{P}(G)$. Il en résulte que, pour toute base $(X_1, ..., X_n)$ de $\mathfrak{g}$ et pour toute fonction polynomiale p_α sur G, les monômes

$$p_\alpha X_L^\alpha = p_\alpha(g)(X_1)_L^{\alpha_1}...(X_n)_L^{\alpha_n}$$

$$p_\alpha X_R^\alpha = p_\alpha(g)(X_1)_R^{\alpha_1}...(X_n)_R^{\alpha_n}$$

sont dans $\mathcal{P}(G)$.

3-4- Proposition:[7]

Soient $(X_1, ..., X_n)$ *une base de* $\mathfrak{g}$ *et*

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$$

une application polynomiale. Alors, les familles de semi-normes suivantes sont équivalentes et déterminent la même topologie de $S(G)$*:*

(a) $\| x^\alpha D^\beta(f \circ \psi) \|_\infty$*;*

(b) $\| p_\alpha X_L^n \alpha f \|_\infty \quad , \quad p_\alpha \in \mathbb{C}\ [G]$*;*

(c) $\| p_\alpha X_R^n \alpha f \|_\infty \quad , \quad p_\alpha \in \mathbb{C}\ [G]$.

4- Vecteurs C$^\infty$ des représentations irréductibles d'un groupe de Lie nilpotent:

4-1- Définition:

Etant donnée une représentation unitaire π d'un goupe de Lie G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, un élément v de $\mathcal{H}_\pi$ est dit un vecteur de classe C^k pour la repésentation π, si la fonction f_v, définie sur G par

$$f_v(x) = \pi(x)v, \quad x \in G,$$

est de classe C^k. On note $\mathcal{H}_\pi^k$, l'espace des vecteurs de classe C^k pour la représentation π. On dit que $v \in \mathcal{H}_\pi$ est de classe C^∞, si

$$v \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_\pi^k = \mathcal{H}_\pi^\infty.$$

On a vu que tout élément X de $\mathfrak{g}$, agit sur les fonctions de classe C^k, comme étant un champ de vecteurs invariant à gauche:

$$(X_L.f)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x.\exp tX) - f(x)], \quad x \in G.$$

4-2- Proposition:[7]

Soient $(X_1, ..., X_n)$ *une base de* $\mathfrak{g}$ *et* v *un élément de* $\mathcal{H}_\pi$*. Alors,*
$v \in \mathcal{H}_\pi^k$ *si et seulement si, pour tout multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq k$,
toutes les dérivées $X_L^\alpha.f$ *existent et sont continues.*

L'algèbre enveloppante $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$, agit sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par les opérateurs $\pi(A)$, $A \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g})$, du fait que:

$$\begin{aligned}\pi(X^\alpha)(v) :&= \pi(X_1^{\alpha_1}...X_n^{\alpha_n})v \\ &= \pi(X_1)^{\alpha_1}...\pi(X_n)^{\alpha_n} v \\ &= (X_L^\alpha.f_v)(e)\end{aligned}$$

où $v \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et e l'élément neutre de G.

En vertu de la formule

$$X_L.f_{\pi(y)v}\ (x) = Ad(y^{-1}X).f_v(xy), \quad x,\ y \in \mathcal{H}_\pi^\infty,$$

il s'ensuit que les opérateurs $\pi(y)$, $y \in G$, laissent invariant l'espace $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

Considérons les opérateurs

$$\pi(\phi) = \int_G \phi(g)\pi(g)dg, \quad \phi \in C_c^\infty(G)$$

et soient $x \in G$ et $v \in \mathcal{H}_\pi^\infty$. On a:

$$\begin{aligned} X_L.f_{\pi(\phi)v}\ (x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\pi(x.\exp tX)\pi(\phi)v - \pi(x)\pi(\phi)v] \\ &= \lim_{t\to 0} \pi(x) \int_G \phi(y)\frac{1}{t}[\phi(\exp(-tX)y) - \phi(y)]\pi(y)vdy \\ &= \pi(x)(X_R.\phi)(v). \end{aligned}$$

Donc, si $(\phi_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^∞ sur G, à supports compacts et qui est une approximation de l'identité dans $L^1(G)$, nous voyons que $\mathcal{H}_\pi^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}_\pi$.

Supposons maintenant que G soit un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe et $\pi \in \hat{G}$. Il existe donc, une forme linéaire l sur $\mathfrak{g}$ et une polarisation $\mathfrak{p}$ de l telles que:

$$\pi = \pi_{l,\mathfrak{p}}.$$

Soient P le sous-groupe: $P = \exp \mathfrak{p}$ et $(X_1, ..., X_n)$ une base de Malcev pasant par la polarisation $\mathfrak{p}$ telle que $\mathfrak{p}$ soit engendrée par les vecteurs $(X_{k+1}, ..., X_n)$. L'application:

$$P \times \mathbb{R}^k \longrightarrow G$$

$$(y, (t_1, ..., t_k)) \longmapsto y.\exp(t_1 b_1) ... \exp(t_k b_k)$$

est un difféomorphisme. Ce qui nous permet de définir une isométrie:

$$J : L^2(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{H}_\pi$$

donnée par:

$$J(f)(y.t) = \chi_l(y)f(t), \quad \forall\, y \in P, \text{ et } \forall\, t \in \mathbb{R}^k,$$

où χ_l est le caractère défini sur P par:

$$\chi_l(\exp Y) = e^{2\pi i < l\ ,\ Y>}, \quad Y \in \mathfrak{p}.$$

On peut transférer l'action de G sur $\mathcal{H}_\pi$ à $\mathbb{R}^k$, utilisant l'isométrie J. On obtient donc, une représentation π' équivalente à π sur $L^2(\mathbb{R}^k)$, appelée une représentation de base de π.

Soient $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à cœfficients polynomiaux sur $\mathbb{R}^k$ et $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. La représentation π' s'étend à un homomorphisme associatif de $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$, dépendant de l, de la polarisation $\mathfrak{p}$ et du choix de la base de $\mathfrak{g}$.

4-3- Théorème:[7]

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente, $l \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation de l. Considérons une base de Malcev passant par $\mathfrak{p}$ et soit π' la représentation définie comme ci-dessus. Alors,

i) $\pi' \ : \ \mathfrak{u}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ est surjective.

ii) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\pi'(X)$ est un opérateur différentiel de degré 0 ou 1.

iii) Les cœfficients polynomiaux pour $\pi'(X)$ associé à une base de coordonnées de $\mathbb{R}^k$ dépendent d'une manière polynomiale de X.

iv) l'espace $\mathcal{H}_{\pi'}^{\infty}$ est isomorphe à $S(\mathbb{R}^k)$.

5- Les opérateurs de Hilbert-Schmidt:

5-1- Définition:

Soit $(X, d\mu)$ un espace mesurable. Un opérateur linéaire

$$A : L^2(X) \longrightarrow L^2(X)$$

est dit de Hilbert-Schmidt s'il existe une fonction K_A de $L^2(X \times X)$ telle que pour toute fonction f de $L^2(X)$, on ait

$$(Af)(x) = \int_X K_A(x,y) f(y) d\mu(y), \ \forall x \in X.$$

Si A est un opérateur de Hilbert-Schmidt, la norme de Hilbert-Schmidt de A est définie par

$$| A |_{H.S} = | K_A |_{L^2(X \times X)} \quad \text{(voir [15])}.$$

Soit $\{e_j\}_j$ est une base orthonormée de $L^2(X)$. L'opérateur A est de Hilbert-Schmidt si

$$\sum_j | Ae_j |_2^2 = \sum_{j,k} |< Ae_j \ , \ e_k >| < \infty.$$

Dans ce cas, il vient que

$$| A |_{H.S}^2 = \sum_j | Ae_j |_2^2 \, .$$

Cettte définition est indépendante de la base orthonormée choisie.

5-2- Remarque:

Soient A et B deux opérateurs de Hilbert-Schmidt. Alors, $A+B$, $A.B$ et l'adjoint de A, noté A^* sont aussi des opérateurs de Hilbert-Schmidt. En outre, la forme bilinéaire φ définie sur l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt $H.S(X)$ par

$$\varphi(A,B) = tr(B^*A) = \sum_j < B^*Ae_j, e_j >$$

est symétrique, définie positive. Elle définit donc une norme sur $H.S(X)$:

$$| A |^2_{H.S} = tr(A^*A), \quad A \in H.S(X).$$

Par suite, l'espace $H.S(X)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

Un opérateur C de la forme

$$C = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i, \quad A_i, B_i \in H.S(X)$$

s'appelle un opérateur traçable. Sa trace est déterminée par

$$trC = \sum_j < Ce_j, e_j > .$$

De plus, si C est un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^m$ de noyau K_C, la trace de C est donnée par:

$$trC = \int_{\mathbb{R}^m} K_C(x,x)dx.$$

(Voir [13])

5-3- Norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$:

Revenons aux traces des représentations $\pi \in \hat{G}$.

Soient $\mathcal{O}$ une orbite de $\mathfrak{g}^*$ sous l'action coadjointe, π la représentation correspondante et f appartenant à $S(G)$. D'après ce qui précède, nous constatons que $\pi(f)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On se demande si $\pi(f)$ est un opérateur traçable. Dixmier et Malliavan ont prouvé dans [11] que si f est une fonction de Schwartz sur G, alors, il existe deux fonctions f et g appartenant à $S(G)$ telles que

$$f = g * h .$$

On a alors que

$$\pi(f) = \pi(g) \circ \pi(h).$$

Donc, $\pi(f)$ est un opérateur traçable pour chaque $f \in S(G)$. De plus, la fonctionnelle θ_π, définie par

$$\theta_\pi(f) = tr(\pi)(f), \quad f \in S(G)$$

est une distribution tempérée sur $S(G)$ ([7]).

Kirillov a aussi montré qu'il existe sur l'orbite $\mathcal{O}$ une mesure $Ad^*(G)$-invariante $d\mu_\pi$ telle que

$$tr(\pi(f)) = \int_{\mathcal{O}} (f \circ \exp)\hat{}(l) d\mu_\pi(l),$$

où

$$(f \circ \exp)\ \hat{}(l) = \int_{\mathfrak{g}} (f \circ \exp)(X) e^{-2\pi i < l\ ,\ X >} dX,$$

dX étant la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$.
La norme de Hilbert-schmidt de l'opérateur $\pi(f)$ est alors donnée par

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = tr\pi(f^* * f) = \int_{\mathcal{O}_\pi} (f^* * f)\hat{} d\mu_\pi(l), \quad f \in S(G).$$

Remarquons aussi que la fonction $(f^* * f)\hat{}$ n'est pas positive. En outre, il se peut que la fonction f appartienne à $ker\pi$ sans que $(f^* * f)\hat{}$ soit nulle sur l'orbite $\mathcal{O}_\pi$.

II

TRANSFORMEE DE FOURIER ADAPTEE ET SEMI-NORME DE HILBERT-SCHMIDT SUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

1- Introduction :

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$ et par $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles sur G.

Soient $\pi \in \hat{G}$ et f une fonction de classe C^∞ sur G, à support compact. Alors, d'après la formule de la trace de Kirillov, la norme de Hilbert Schmidt de $\pi(f)$ est donnée par :

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = tr(\pi(f^*)\pi(f)) = \int_{\mathcal{O}_\pi} [(f^* * f) \circ exp]\,\hat{}\,(l) d\mu_\pi(l) \qquad (2.1)$$

où μ_π est une mesure G-invariante positive sur l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ de π.

La transformée de Fourier adaptée est introduite par D.Arnal et J.C.Cortet dans [1]. Ils ont prouvé que pour toute représentation π dans $\hat{G}$, il existe une fonction C^∞

$$a_\pi : O_\pi \times G \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que, si

$$\tilde{f}(l) = \int_G f(x) e^{-ia_\pi(l,x)} dx, \quad f \in L^1(G) \quad \text{et} \quad l \in \mathcal{O}_\pi,$$

alors,

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = \int_{\mathcal{O}_\pi} \mid \tilde{f}(l) \mid^2 d\mu_\pi(l). \qquad (2.2)$$

J.Ludwig ([28]) a donné une définition explicite de ces fonctions.

Ces fonctions a_π définissent alors une fonction a de $\mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont C^∞ en tout point l de $\mathfrak{g}^*$, en position générale.

Le problème au quel on s'intéresse dans ce chapitre, est de définir une fonction a sur $\mathfrak{g}^* \times G$ tout entier de classe C^∞. Dans ce cas, l'application :

$$(\ )^\sim : f \longmapsto \tilde{f}$$

sera un isomorphisme de $S(G)$ sur $S(\mathfrak{g}^*)$. Notons

$$(\ )^\vee : S(\mathfrak{g}^*) \longmapsto S(G)$$

l'application inverse. On aura

$$tr(\pi((\check{g})^*)\pi(\check{g})) = \int_{O_\pi} | g(l) |^2 \, d\mu_\pi(l)$$

pour toute représentation π en position générale et pour toute fonction g dans $S(\mathfrak{g}^*)$.

Dans le cas où pour tout $l \in \mathfrak{g}^*$ en position générale, l'orbite $\mathcal{O}$ de l sous l'action coadjointe est plate:

$$\mathcal{O} = l + \mathfrak{g}(l)^\perp,$$

cette transformée de Fourier est la transformée de Fourier usuelle sur $S(G)$.

Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ contient un idéal $\mathfrak{h}$ tel que si H est le sous-groupe fermé $\exp \mathfrak{h}$, toutes les H-orbites soient plates et toute orbite $\mathcal{O}$ de G soit saturée par $\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O} + \mathfrak{h}^\perp,$$

on peut construire une fonction a_0 de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^* \times G$ tout entier et la transformée de Fourier qu'elle définit sera un isomorphisme entre les espaces de Schwartz $S(G)$ et $S(\mathfrak{g}^*)$.

Dans le cas général, nous définissons une transformée de Fourier adaptée $(\ )^\sim$ sur l'espace de Schwartz $S(G)$. Cependant, si $f \in S(G)$, la fonction $\tilde{f}$ n'est pas C^∞ en tout point. Nous procèdons alors à la construction d'une fonction notée aussi a sur l'ensemble $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B} \times G$ où $\mathfrak{B}$ désigne l'ensemble des bases de Malcev de $\mathfrak{g}$ et par suite, une transformée de Fourier adaptée $(\ )^\sim$ définie sur $S(G)$ par

$$\tilde{f}(F,B) = \int_G f(x) e^{-ia(F,B,x)} dx, \quad f \in S(G) \text{ et } (F,B) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}.$$

Nous montrons une formule analogue à (2.2) et nous déterminons l'image de $S(G)$ par cette nouvelle transformée de Fourier adaptée.

2- Construction de a pour des algèbres particulières:

2-1- Orbites plates:

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note S($\mathfrak{g}$) l'espace de Schwartz de $\mathfrak{g}$.
L'espace de Schwartz $S(G)$ est défini par: $S(G) = \{f \in C^\infty(G)/f \circ exp \in S(\mathfrak{g})\}$.

Pour f appartenant à $S(G)$, on note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f définie par :

$$\hat{f}(l) = \int_{\mathfrak{g}} f(expX)e^{-2\pi i<l,X>}dX, \quad l \in \mathfrak{g}^*.$$

La mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ est transférée par la fonction exponentielle en une mesure de Haar sur le groupe G et pour l appartenant à $\mathfrak{g}^*$, on peut définir :

$$\hat{f}(l) = \int_G f(x)e^{-2\pi i<l,logx>}dx,$$

où log désigne l'inverse de la fonction exponentielle.

2-1-1- Proposition :([28])

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et G le groupe $\mathfrak{g}$ muni de la loi de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$x \cdot y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + ...$$

Soient $\mathcal{O}$ une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ et π l'élément de $\hat{G}$ correspondant. Supposons que l'orbite $\mathcal{O}$ soit plate:

$$\mathcal{O} = l + \mathfrak{g}(l)^\perp.$$

Alors,

$$|\ \pi(f)\ |_{H.S} = |\ \hat{f}\ |_{(L^2(\mathcal{O}),\mu_\pi)}, \quad \forall f \in S(G)$$

où μ_π est l'unique mesure G-invariante sur l'orbite $\mathcal{O}$ définie par la formule (0.3) .

Démonstration:

Soient f, $\mathcal{O}$ et π comme dans l'énoncée et soit l un élément de l'orbite $\mathcal{O}$. Comme l'orbite est plate, $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et la mesure canonique sur $\mathcal{O}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(l)^\perp$ [29]. (Les orbites plates ont plusieurs autres propriétés intéressantes. Voir par exemple [35] ou [36]). Donc,

$$\begin{aligned}
|\ \pi(f)\ |^2_{H.S} = tr\pi(f^* * f) &= \int_{\mathcal{O}} (f^* * f)\hat{}(l')d\mu_\pi(l') \\
&= \int_{\mathfrak{g}(l)^\perp} (f^* * f)\hat{}(l+u)du \\
&= \int_{\mathfrak{g}(l)^\perp} \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)\times\mathfrak{g}(l)} (f^* * f)(x \cdot h)e^{-i<l+u,x\cdot h>}d\dot{x}dhdu.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule d'inversion de Fourier, nous en déduisons que

$$
\begin{aligned}
\mid \pi(f) \mid^2_{H.S} &= \int_{\mathfrak{g}(l)} (f^* * f)(h) e^{-2\pi i<l,h>} dh \\
&= \int_{\mathfrak{g}(l)} \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l) \ \times \ \mathfrak{g}(l)} \overline{f(h'^{-1} \cdot y^{-1})} f((y \cdot h')^{-1} \cdot h) e^{-i<l,h>} dh' d\dot{y} dh \\
&= \int_{\mathfrak{g}(l)} \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l) \times \mathfrak{g}(l)} \overline{f(y^{-1} \cdot Ad(y) h'^{-1})} f(y^{-1} \cdot Ad(y) h'^{-1} \cdot h) e^{-i<l,h>} dh' d\dot{y} dh.
\end{aligned}
$$

Comme $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, nous avons que

$$
Ady.h'^{-1} \in \mathfrak{g}(l) \ \forall \ h' \in \mathfrak{g}(l).
$$

Posons $k' = Ad(y)h'^{-1}$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\mid \pi(f) \mid^2_{H.S} &= \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} \int_{\mathfrak{g}(l) \times \mathfrak{g}(l)} \overline{f(y^{-1} \cdot k')} f(y^{-1} \cdot k' \cdot h) e^{-i<l,h>} dk' dh d\dot{y}. \\
&= \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} \int_{\mathfrak{g}(l) \times \mathfrak{g}(l)} \overline{f(y^{-1} \cdot k')} f(y^{-1} \cdot h) e^{-i<l,k'^{-1} \cdot h>} dk' dh d\dot{y}
\end{aligned}
$$

(en effectuant un changement de variable $h \to k'^{-1}h$).

En outre, du fait que $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on a

$$
< l, k'^{-1} \cdot h >=< l, h > - < l, k' > .
$$

Il s'ensuit donc que :

$$
\begin{aligned}
\mid \pi(f) \mid^2_{H.S} &= \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} [\int_{\mathfrak{g}(l)} \overline{f(-y-k')} e^{-i<l,k'>} dk' \int_{\mathfrak{g}(l)} f(-y+h) e^{-i<l,h>} dh] d\dot{y} \\
&= \int_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)} \mid f(y) \mid^2 d\dot{y} \\
&= \int_{\mathfrak{g}(l)^\perp} \mid \hat{f}(l+u) \mid^2 du
\end{aligned}
$$

(d'après la formule de Plancherel)

$$
= \int_{\mathcal{O}} \mid \hat{f}(l') \mid^2 d\mu_\pi(l').
$$

■

2-2- Orbite saturée par un idéal:

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente contenant un idéal $\mathfrak{h}$ tel que si H est le sous-groupe fermé $\exp \mathfrak{h}$, toutes les H-orbites soient plates:

$$
H \cdot l_{/\mathfrak{h}} = l_{/\mathfrak{h}} + \mathfrak{h}^\perp, \quad \forall l \in \mathfrak{g}^*.
$$

Considérons un sous-espace ϑ de $\mathfrak{g}$, supplémentaire à $\mathfrak{h}$. Pour h appartenant à $\mathfrak{h}$ et v appartenant à ϑ, posons :

$$h^{\frac{1}{2}v} := Ad\Big(exp(\frac{1}{2}v)\Big) \cdot h.$$

Soit a_0 la fonction définie sur $\mathfrak{g}^* \times G$ par:

$$a_0(F, x) = a_0(F, expv \cdot exph) =< F, v > + < F, h^{\frac{1}{2}v} > .$$

Il est clair que la fonction a_0 est linéaire en F, polynomiale en x et que

$$a_0(F, x^{-1}) = -a_0(F, x), \quad \forall F \in \mathfrak{g}^*, \ \forall x \in G.$$

Pour f dans $L^1(G)$ et l un élément de $\mathfrak{g}^*$, posons

$$\tilde{f}(l) = \int_G f(x) e^{-2\pi i a_0(l,x)} dx. \tag{2.4}$$

Il est facile de vérifier que l'application $(\ )^{\sim}$ ainsi définie est un isomorphisme de $S(G)$ dans $S(\mathfrak{g}^*)$.

Soit l un élément de $\mathfrak{g}^*$ telle que l'orbite $\mathcal{O}$ de l sous l'action coadjointe soit saturée par $\mathfrak{h}$; c'est à dire, $l + \mathfrak{h}^\perp \subset \mathcal{O}$ ou encore, $\mathcal{O} = \mathcal{O} + \mathfrak{h}^\perp$.

Notons $l_{/\mathfrak{h}}$ la restriction de l à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. Soit $(\mathfrak{g}_i)_{i=n-p}^n$ une suite de Jordan-Hölder partant de $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{n-p} \subset ... \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$$

et $\mathfrak{g}_i$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{i+1}$ de codimension 1.

Soit $\mathfrak{B}_0 = (b_{p+1}, ..., b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{h}$ pour l'action de $\mathfrak{g}$.

Nous allons compléter $\mathfrak{B}_0$ par des vecteurs $b_1, ..., b_p$ tels que $\mathfrak{B} = (b_1, ..., b_p, b_{p+1}, ..., b_n)$ soit une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ de la manière suivante:

Si $\mathfrak{g}_{n-p+1} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})$, alors, il existe $b_p \in \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}}) \setminus \mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{g}_{n-p+1} = \mathfrak{h} \oplus < b_p >$.

Sinon, on choisit un vecteur b_p qui complète $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_{n-p+1}$.

De même, pour $i = 2, ...p$, si $\mathfrak{g}_{n-p+i} \subset \mathfrak{g}_{n-p+i-1} + \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})$, alors, il existe

$$b_{p-i+1} \in \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}}) \setminus \mathfrak{g}_{n-p+i-1}$$

tel que

$$\mathfrak{g}_{n-p+i} = \mathfrak{g}_{n-p+i-1} \oplus < b_{p-i+1} > .$$

Sinon, on choisit b_{p-i+1} qui complète $\mathfrak{g}_{n-p+i-1}$ dans $\mathfrak{g}_{n-p+i}$.

Posons $\vartheta =< b_1, ..., b_p >$ et ϑ' un supplémentaire de $\vartheta \cap \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})$ dans ϑ:

$$\vartheta = \vartheta \cap \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}}) \dotplus \vartheta' \ et \ \vartheta' =< \{b_j / b_j \notin \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})\}_{j=1,...,p} > .$$

Considérons la décomposition du groupe G:

$$G = \exp \vartheta \cdot H = \exp \vartheta' \cdot \exp(\vartheta \cap \mathfrak{g}(l_{/\mathfrak{h}})) \cdot H.$$

L'orbite $\mathcal{O}$ est saturée par $\mathfrak{h}$. Sa paramétrisation de Pukanszky ([37]) est alors donnée par:

$$\mathcal{O} = \{\sum_{j=1}^{p} z_j b_j^* + \sum_{j=p+1}^{n} P_j(z_1, ..., z_d) b_j^*; (z_1, ...z_p, ..., z_d) \in \mathbb{R}^d\}$$

où d est la dimension de $\mathcal{O}$.

Notons $\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}$ la restriction de $\mathcal{O}$ à $\mathfrak{h}$:

$$\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}} = G \cdot (l_{/\mathfrak{h}}) = exp\vartheta' \cdot H \cdot (l_{/\mathfrak{h}}) = exp\vartheta' \cdot \mathcal{O}',$$

où $\mathcal{O}'$ est l'orbitre de $l_{/\mathfrak{h}}$ sous l'action de H.

Soient $d\xi$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^\perp$ et $d\mu'$ une mesure G-invariante sur $\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}$. Alors, la mesure G-invariante μ sur $\mathcal{O}$ est donnée par

$$d\mu = d\xi d\mu'.$$

2-2-1- Théorème:

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ tel que toutes les H-orbites soient plates et soit $\mathcal{O}$ une orbite saturée par $\mathfrak{h}$. Alors, pour toute fonction f dans $S(G)$, la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$ est donnée par:

$$| \pi(f) |_{H.S}^2 = \int_{\mathcal{O}} | \tilde{f}(l) |^2 d\mu(l),$$

où $(\ )^{\tilde{}}$ est l'application définie par (2.4).

Démonstration:

Soit f un élément de $S(G)$. On a,

$$\begin{aligned} | \pi(f) |_{H.S}^2 &= \int_{\mathcal{O}} [(f^* * f) \circ exp]\hat{\ }(l') d\mu(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}} \int_{\mathfrak{h}^\perp} [(f^* * f) \circ exp]\hat{\ }(\xi + l') d\xi d\mu'. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'inversion de Fourier, nous déduisons que

$$\begin{aligned} | \pi(f) |_{H.S}^2 &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}} [(f^* * f) \circ exp_{/\mathfrak{h}}]\hat{\ }(l') d\mu' \\ &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}} \int_{\mathfrak{h}} (f^* * f)(exp h) e^{-2\pi i < l', h >} dh d\mu'. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(f^* * f)(exph) &= \int_G f^*(y)f(y^{-1}\cdot exph)dy \\ &= \int_G \overline{f(y)}f(y.exph)dy \\ &= \int_{\mathfrak{h}\times\vartheta} \overline{f(expv\cdot expk)}f(expv\cdot expk\cdot exph)dkdv \\ &= \int_\vartheta ((f_v)^* *_H f_v)(exph)dv\end{aligned}$$

où $f_v(expk) = f(expv\cdot expk)$; $(k,v)\in\mathfrak{h}\times\vartheta$ et $*_H$ désigne le produit de convolution dans le groupe $H = \exp\mathfrak{h}$.

La mesure μ' étant G-invariante sur $\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}$. Nous obtenons alors,

$$\begin{aligned}\mid \pi(f)\mid^2_{H.S} &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}}\int_\vartheta\int_\mathfrak{h}((f_v)^* *_H f_v)(exph)e^{-2\pi i<l',h>}dhdvd\mu' \\ &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}}\int_\vartheta\int_\mathfrak{h}((f_v)^* *_H f_v)(exph)e^{-2\pi i<Ad^*(exp(-\frac{v}{2}))\cdot l',h>}dhdvd\mu' \\ &= \int_{\mathcal{O}_{/\mathfrak{h}}}\int_\vartheta\int_\mathfrak{h}((f_v)^* *_H f_v)(exph)e^{-2\pi i<l',h^{\frac{v}{2}}>}dhdvd\mu'.\end{aligned}$$

Soit π' l'élément de $\hat{H}$ correspondant à l'orbite $\mathcal{O}'$ de $l_{/\mathfrak{h}}$ dans H et notons $\mu_{\pi'}$ la mesure H-invariante sur $\mathcal{O}$' et dv' la mesure de Lebesgue sur ϑ'.

$$\begin{aligned}\mid \pi(f)\mid^2_{H.S} &= \int_{\mathcal{O}'}\int_{\vartheta'}\int_\vartheta\int_\mathfrak{h}((f_v)^* *_H f_v)(exph)e^{-2\pi i<Ad^*(expv').l',h^{\frac{1}{2}v}>}dhd\mu_{\pi'}(l')dvdv' \\ &= \int_\vartheta[\int_{\vartheta'}\int_{\mathcal{O}'}\mid\int_\mathfrak{h} f_v(exph)e^{-2\pi i<Ad^*(expv')l',h^{\frac{1}{2}v}>}dh\mid^2 d\mu_{\pi'}(l')dv']dv\end{aligned}$$

(d'après la proposition 2-1)

$$= \int_{\vartheta'\times\mathcal{O}'}[\int_\vartheta\mid\int_\mathfrak{h} f_v(exph)e^{-2\pi i<Ad^*(expv')l',h^{\frac{1}{2}v}>}dh\mid^2 dv]d\mu_{\pi'}(l')dv'$$

$$= \int_{\vartheta'\times\mathcal{O}'}\int_{\vartheta^*}\mid\int_{\vartheta\times\mathfrak{h}} f(expv\cdot exph)e^{-2\pi i<Ad^*(\exp v')l',h^{\frac{1}{2}v}>}e^{-2\pi i<\xi,v>}dvdh\mid^2 d\xi d\mu_{\pi'}(l')du$$

(d'après la formule de Plancherel).

D'où,

$$\mid\pi(f)\mid^2_{H.S}=\int_\mathcal{O}\mid\tilde{f}(l)\mid^2 d\mu_\pi(l).$$

■

2-3- Exemple:

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 6 engendrée par les vecteurs $X_1,...,X_6$ tels que

$$[X_1,X_2]=X_4,\ [X_1,X_3]=X_6,\ [X_1,X_5]=X_6,\ [X_2,X_3]=X_5,\ [X_4,X_3]=X_6.$$

La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ engendrée par $(X_2, ..., X_6)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de pas deux. Donc, toutes les H-orbites sont plates.

Soient $X = (x_1, ..., x_6) \in \mathfrak{g}$ et $l = (l_1, ..., l_6) \in \mathfrak{g}^*$; les coordonnées étant exprimées dans la base $(X_1, ..., X_6)$ respectivement dans sa base duale. Alors, les coordonnées de $Ad^* \exp X \cdot l$ sont données par

$$Ad^* \exp X \cdot l = \left\{ \begin{array}{c} l_1 + x_2 l_3 + x_3 l_6 - x_1 x_2 l_6 \\ l_2 + x_1 l_3 + \frac{1}{2} x_1^2 l_6 \\ l_3 - x_1 l_6 \\ l_4 + x_4 l_5 \\ l_5 - x_4 l_6 \\ l_6 \ . \end{array} \right.$$

Soient l un élément de $\mathfrak{g}^*$ et $\nu = \alpha X_1^*$ dans $\mathfrak{h}^\perp$, $\alpha \neq 0$. On a:

$$l + \nu = Ad^* \exp X \cdot l \Longleftrightarrow x_2 l_3 + x_3 l_6 = \alpha.$$

Donc, $l + \nu$ appartient à l'orbite $\mathcal{O}(l)$ pour tout l en position générale. C'est à dire, pour tout l appartenant à $\mathfrak{g}^*$ avec $l_3 \neq 0$ ou $l_6 \neq 0$. Ce qui prouve que, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de pas deux saturé par $\mathcal{O}(l)$ pour tout l en position générale. Par suite, l'application $(\ )^{\sim}$ définie par la formule (2-4) est un isomorphisme de $S(G)$ dans $S(\mathfrak{g}^*)$, vérifiant

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = \int_{\mathcal{O}} \mid \tilde{f}(l) \mid^2 d\mu_\pi(l), \quad \forall f \in S(G)$$

où $\mathcal{O}$ est une orbite de G sous l'action coadjointe et π est l'élément de $\hat{G}$ correspondant.

3- Cas général

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente d'espace dual $\mathfrak{g}^*$ et $B = (b_1, ..., b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ telle que b_n soit central.

Soit $F \in \mathfrak{g}^*$. Nous allons utiliser la construction réalisée par J.Ludwig et H.Zahir dans [30] pour déterminer une polarisation de F. Nous définissons alors une suite finie de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ de la manière suivante :
Soient

$$j_1 = max\{j : \ < F, [\mathfrak{g}, b_j] > \neq (0)\},$$
$$i_1 = max\{i : < F, [b_i, b_{j_1}] > \neq 0\}$$

et

$$\mathfrak{g}_1(F) = \{u \in \mathfrak{g} \ ; \ < F, [u, b_{j_1}] >= 0\}.$$

Alors, $\mathfrak{g}_1(F)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de codimension 1. Elle est donc un idéal de $\mathfrak{g}$. De plus. $\mathfrak{g}_1(F)$ contient le radical de F, $\mathfrak{g}(F)$.

Pour $i = 1, ..., n, i \neq i_1$, posons:

$$b_i^1 = b_i - \frac{< F, [b_i, b_{j_1}] >}{< F, [b_{i_1}, b_{j_1}] >} b_{i_1}.$$

La famille de vecteurs $\{b_i^1\}_{i \in \{1,...,n\}, i \neq i_1}$ ainsi construite est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_1(F)$.

Par récurrence, nous définissons:

$$j_p = max\{j : < F, [\mathfrak{g}_{p-1}(F), b_j^{p-1}] >\neq (0)\},$$

$$i_p = max\{i : < F, [b_i^{p-1}, b_{j_p}^{p-1}] >\neq 0\}$$

et

$$\mathfrak{g}_p(F) = \{u \in \mathfrak{g};\ < F, [u, b_{j_p}^{p-1}] >= 0\}.$$

Alors, $\mathfrak{g}_p(F)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{p-1}(F)$ et

$$b_i^p = b_i^{p-1} - \frac{< F, [b_i^{p-1}, b_{j_p}^{p-1}] >}{< F, [b_{i_p}^{p-1}, b_{j_p}^{p-1}] >} b_{i_p}^{p-1}, \quad i \in \{1, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_p\}$$

est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}_p(F)$.

Soit k, le plus petit entier tel que

$$< F, [\mathfrak{g}_k(F), b_j] >= (0), \quad \forall j \notin \{i_1, ..., i_k\}.$$

Alors, $\mathfrak{g}_k(F)$ est une polarisation de F qui coïncide avec celle de M.Vergne ([30]). En outre, la famille de vecteurs

$$\{b_{i_1}, b_{i_2}^1, ..., b_{i_k}^{k-1}\} \text{ et } \{b_i^k\}_{i\in\{1,...,n\}\setminus\{i_1,...,i_k\}}$$

est une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à la suite $\mathfrak{g}_1(F), ..., \mathfrak{g}_k(F)$.

Notons, $G_0 := G$ et pour tout $p = 1, ..., k$, $G_p := G_p(F) = \exp \mathfrak{g}_p(F)$.

Nous avons que

$$G_p = \{\exp(r_{p+1} b_{i_{p+1}}) \cdot G_{p+1};\ r_{p+1} \in \mathbb{R}\}.$$

Soient $p = 1, ..., k$, $h_p \in G_p$ et $\alpha_p \in \mathbb{R}$. Posons

$$h_p^{\alpha_p} := exp(\alpha_p b_{i_p}) \cdot h_p \cdot exp(-\alpha_p b_{i_p}).$$

3-1- Construction de la fonction a:

Nous définissons maintenant la fonction a par récurrence en posant :

$$\begin{aligned} a_k : \mathfrak{g}_k^* \times G_k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (F_k, h_k) &\longrightarrow a_k(F_k, h_k) =< F_k, h_k > \end{aligned}$$

et pour $p = 1, ..., k-1$,

$$a_p : \mathfrak{g}_p^* \times G_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(F_p = f_{i_{p+1}} b_{i_{p+1}}^* + F_{p+1}, exp r_{p+1} b_{i_{p+1}} \cdot h_{p+1}) \longrightarrow f_{i_{p+1}} r_{p+1} + a_{p+1}(F_{p+1}, {h_{p+1}}^{\frac{1}{2} r_{p+1}}),$$

où F_{p+1} est la restriction de F à $\mathfrak{g}_{p+1}^*$.

La fonction a est alors définie sur $\mathfrak{g}^* \times G$ par:

$$a(F,x) = a(f_{i_1}b_{i_1}^* + F_1, expr_1 b_{i_1} \cdot h_1) = f_{i_1}r_1 + a_1(F_1, h_1{}^{\frac{1}{2}r_1}), \quad F \in \mathfrak{g}^*, \; x \in G.$$

Pour $f \in L^1(G)$ et $F \in \mathfrak{g}^*$, posons:

$$\tilde{f}(F) = \int_G f(x) e^{-2\pi i a(F,x)} dx. \tag{2.5}$$

La fonction a est rationnelle en F, polynomiale en x. Donc, $\tilde{f}$ est une fonction C^∞ en tout point F de $\mathfrak{g}^*$ en position générale.

3-2- Théorème:[8]

Soient $\mathcal{O}$ une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ et π l'élément de $\hat{G}$ correspondant. Alors, pour toute fonction f dans $S(G)$, la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$ est donnée par:

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = \int_{\mathcal{O}} \mid \tilde{f}(l') \mid^2 d\mu_\pi(l'),$$

où $(\;)^{\tilde{}}$ est l'application définie par (2.5).

Démonstration:

Nous démontrons la proposition par récurrence sur k.
Si $k = 0$, l'orbite $\mathcal{O}$ est plate et $\mathfrak{g}(l)$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Le résultat découle alors de la *proposition 2-1-1.*

Supposons que $k \neq 0$. Soient $l_1 = l_{/\mathfrak{g}_1}$ et π_1 l'élément de $\hat{G}_1$ corréspondant à la G_1-orbite $\mathcal{O}_1$ de l_1.

Posons

$$l_1^s := Ad^*(expsb_{i_1}) \cdot l_1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = tr\pi(f^* * f) &= \int_{\mathcal{O}_\pi} (f^* * f)^{\tilde{}}(l) d\mu_\pi(l) \\
&= \int_{\mathcal{O}_1} \int_{\mathbb{R}} (f^* * f)_{/\mathfrak{g}_1}{}^{\tilde{}}(l_1^s) d\mu_{\pi_1}(l_1) ds \\
&\text{(d'après la formule d'inversion de Fourier)} \\
&= \int_{\mathcal{O}_1 \times \mathbb{R}} \int_{G_1} (f^* * f)(h) e^{-2\pi i < l_1^s, h>} dh d\mu_{\pi_1}(l_1) ds.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(f^* * f)(h) &= \int_G f^*(y) f(y^{-1} \cdot h) dy \\
&= \int_G \overline{f(y^{-1})} f(y^{-1} \cdot h) dy \\
&= \int_{G_1 \times \mathbb{R}} \overline{f(k^{-1} \cdot exp(-tb_{i_1}))} f(k^{-1} \cdot exp(-tb_{i_1}) h) dk dt.
\end{aligned}$$

En effectuant un changement de variable: $k \longrightarrow k^{\frac{t}{2}}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}(f^* * f)(h) &= \int_{G_1\times \mathbb{R}} \overline{f(exp(-\frac{t}{2}b_{i_1})\cdot k^{-1}\cdot exp(-\frac{t}{2}b_{i_1}))} f(exp(-\frac{t}{2}b_{i_1})\cdot k^{-1}\cdot exp(-\frac{t}{2}b_{i_1}).h)dkdt \\ &= \int_{\mathbb{R}}((f_t)^* *_{G_1} f_t)(h^{\frac{-t}{2}})dt\end{aligned}$$

où

$$f_t(k) = f(exp(-\frac{t}{2}b_{i_1})\cdot k\cdot exp(-\frac{t}{2}b_{i_1}))$$

et $*_{G_1}$, désigne le produit de convolution dans le groupe G_1.

Il vient donc que

$$\begin{aligned}\mid \pi(f)\mid^2_{H.S} &= \int_{\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}}\int_{G_1\times\mathbb{R}} ({f_t}^* *_{G_1} f_t)(h^{\frac{-t}{2}})e^{-2\pi i<l_1^s,h>}dhdtd\mu_{\pi_1}(l_1)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{G_1\times\mathcal{O}_1} ({f_t}^* *_{G_1} f_t)(h^{\frac{-t}{2}})e^{-2\pi i<{l_1}^{s+\frac{t}{2}},h>}dhd\mu_{\pi_1}(l_1)dsdt \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{G_1\times\mathcal{O}_1} ({f_t}^* *_{G_1} f_t)(h^{\frac{-t}{2}})e^{-2\pi i<{l_1}^s,h^{\frac{-t}{2}}>}dhdtd\mu_{\pi_1}(l_1)ds.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\mid \pi(f)\mid^2_{H.S} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}} \mid \int_{G_1} f_{-t}(h^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i a_1({l_1}^s,h^{\frac{t}{2}})}dh\mid^2 d\mu_{\pi_1}(l_1)dsdt \\ &= \int_{\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mid \int_{G_1} f(h)e^{-2\pi i a_1(l_1^s,h^{\frac{t}{2}})}dh\mid^2 dtd\mu_{\pi_1}(l_1)ds.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Plancherel, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mid \pi(f)\mid^2_{H.S} &= \int_{\mathcal{O}_1\times\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mid \int_{\mathbb{R}}\int_{G_1} f(exptb_{i_1}\cdot h)e^{-2\pi i t l_{i_1}}e^{-2\pi i a_1(l_1^s,h^{\frac{t}{2}})}dhdt\mid^2 dl_{i_1}d\mu_{\pi_1}(l_1)ds \\ &= \int_{\mathcal{O}_\pi} \mid \tilde{f}(l)\mid^2 d\mu_\pi(l).\end{aligned}$$

■

3-3- Proposition:

Pour tout $F \in \mathfrak{g}^*$ et pour tout $x \in G$,

$$a(F, x^{-1}) = -a(F, x).$$

Démonstration:

Nous démontrons la propriété par récurrence sur k. Elle est triviale si $k = 0$. Soit $x \in G$. Il existe $r_1 \in \mathbb{R}$ et $h \in G_1$ tels que: $x = expr_1b_{i_1}\cdot h$. Soit $F \in \mathfrak{g}^*$ et posons $\lambda_1 =< F, b_{i_1} >$. Alors,

$$\begin{aligned}
a(F,x^{-1}) &= a\Big(F, h^{-1}\cdot exp(-r_1 b_{i_1})\Big)\\
&= a\Big(F, exp(-r_1 b_{i1})\cdot[exp(r_1 b_{i_1})\cdot h^{-1}exp(-r_1 b_{i_1})]\Big)\\
&= -\lambda_1 r_1 + a_1\Big(F_1, [exp(r_1 b_{i_1})\cdot h^{-1}\cdot exp(-r_1 b_{i_1})]^{\frac{-1}{2}r_1}\Big)\\
&= -\lambda_1 r_1 + a_1\Big(F_1, [exp(\frac{1}{2}r_1 b_{i_1})\cdot h\cdot exp(\frac{-1}{2}r_1 b_{i_1})]^{-1}\Big)\\
&= -\lambda_1 r_1 + a_1\Big(F_1, [h^{\frac{1}{2}r_1}]^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$a_1(F_1, [h^{\frac{1}{2}r_1}]^{-1}) = -a_1(F_1, h^{\frac{1}{2}r_1}).$$

Il s'ensuit donc que

$$a(F,x^{-1}) = -\lambda_1 r_1 - a_1(F_1, h^{\frac{1}{2}r_1}) = -a(F,x).$$

■

3-4- Corollaire:

Soit f une fonction sur G. Posons

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}, \quad x\in G.$$

Alors, pour tout $f\in L^1(G)$, $\tilde{f^*} = \overline{\tilde{f}}$.

En effet, soit $l\in \mathfrak{g}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}
\tilde{f^*}(l) &= \int_G f^*(x)e^{-2\pi i a(l,x)}dx = \int_G \overline{f(x^{-1})}e^{-2\pi i a(l,x)}dx\\
&= \int_G \overline{f(x)}e^{-2\pi i a(l,x^{-1})}dx = \overline{\int_G f(x)e^{-2\pi i a(l,x)}dx}\\
&= \overline{\tilde{f}(l)}.
\end{aligned}$$

3-5- Proposition:

Soit $\mathcal{O}$ une orbite de G sous l'action coadjointe et π l'élément de $\hat{G}$ correspondant. Alors,

$$tr\pi(x)\pi(f) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{ia(l',x)}d\mu_\pi(l'), \quad \forall f\in S(G),\ \forall x\in G,$$

où $d\mu_\pi$ la mesure positive G-invariante sur l'orbite $\mathcal{O}$ donnée par la formule (0.3).

Démonstration:

Si f et g sont deux fonctions de Schwartz sur G. Alors,

$$tr\pi(f*g^*) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l').$$

En effet,

$$\begin{aligned} tr\pi[(f+g)*(f+g)^*] &= \int_{\mathcal{O}} (f+g)\tilde{}(l')\overline{(f+g)\tilde{}(l')}d\mu_\pi(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}} \mid \tilde{f}(l') \mid^2 d\mu_\pi(l') + \int_{\Omega} \mid \tilde{g}(l') \mid^2 d\mu_\pi(l') \\ &+ \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') + \int_{\mathcal{O}} \tilde{g}(l')\overline{\tilde{f}(l')}d\mu_\pi(l'). \end{aligned}$$

En outre,

$$tr\pi[(f+g)*(f+g)^*] = tr\pi(f*f^*) + tr\pi(g*g^*) + tr\pi(f*g^*) + tr\pi(g*f^*).$$

En identifiant les deux égalités, il s'ensuit que

$$tr\pi(f*g^*) + tr\pi(g*f^*) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') + \int_{\mathcal{O}} \tilde{g}(l')\overline{\tilde{f}(l')}d\mu_\pi(l').$$

En reprenant les mêmes calculs pour les fonctions f et ig, on obtient que

$$tr\pi(f*g^*) - tr\pi(g*f^*) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') - \int_{\mathcal{O}} \tilde{g}(l')\overline{\tilde{f}(l')}d\mu_\pi(l').$$

Donc,

$$\begin{aligned} tr\pi(f*g^*) &= \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{[\int_G g(x)e^{-ia(l,x)}dx]}d\mu_\pi(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\int_G g^*(x)e^{ia(l,x)}dx d\mu_\pi(l') \\ &= \int_G g^*(x)[\int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{ia(l,x)}d\mu_\pi(l')]dx. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$tr\pi(f*g^*) = \int_G g^*(x)tr\pi(x)\pi(f)dx.$$

Il vient alors que

$$\int_G g^*(x)[tr\pi(x)\pi(f) - \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{ia(l,x)}d\mu_\pi(l')]dx = 0$$

pour toute fonction de Schwartz g sur G. Par suite,

$$tr\pi(x)\pi(f) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{ia(l,x)}d\mu_\pi(l').$$

■

Pour $l \in \mathfrak{g}^*$, soit

$$\mathfrak{a}(l) = \bigcap_{g\in G} \mathfrak{g}(Ad^*g \cdot l) = \bigcap_{g\in G} Adg \cdot (\mathfrak{g}(l)).$$

Alors, $\mathfrak{a}(l)$ est le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{g}(l)$ et $\mathfrak{a}(l)$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe de G $A(l)$ défini par:

$$A(l) = \{x \in G \text{ tel que } \pi_l(x) \text{ est un multiple de l'identité}\},$$

où π_l est l'élément de $\hat{G}$ correspondant à l [29].
Il est aussi clair que

$$< Ad^*g \cdot l \ , \ Z > = < l \ , \ Z >, \ \ \forall Z \in \mathfrak{a}(l), \ \forall g \in G.$$

3-6- Corollaire:

Soit l un élément de $\mathfrak{g}^*$. Alors, pour tout x appartenant à G et pour tout Z appartenant à $\mathfrak{a}(l)$,

$$a(l, x \cdot \exp Z) =< l, Z > +a(l, x).$$

Démonstration:

Soient f une fonction de Schwartz sur G, $\mathcal{O}$ la G-orbite de F et π l'élément de $\hat{G}$ correspondant. D'après le corollaire précédent, on a:

$$tr\pi(x.\exp Z)\pi(f) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{ia(l',x.\exp Z)}d\mu_\pi(l'), \quad \forall x \in g, \ \forall Z \in \mathfrak{a}(l).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} tr\pi(x.\exp Z)\pi(f) &= e^{i<l,Z>}tr\pi(x)\pi(f) \\ &= \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{i<l,Z>}e^{ia(l',x)}d\mu_\pi(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')e^{i<l',Z>}e^{ia(l',x)}d\mu_\pi(l'). \end{aligned}$$

En identifiant ces deux égalités, nous en déduisons que

$$a(l, x \cdot \exp Z) =< l, Z > +a(l, x).$$

■

4- Une autre transformée de Fourier adaptée:

Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe; $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{B}$ l'ensemble de toutes les bases de Malcev de $\mathfrak{g}$. Alors, $\mathfrak{B}$ est une partie fermée de l'ensemble de toutes les bases de $\mathfrak{g}$. Cependant, $\mathfrak{B}$ n'est pas une variété différentiable. Dans ce paragraphe, nous allons construire une fonction a sur $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}) \times G$. Ensuite, nous définissons une nouvelle transformée de Fourier adaptée définie sur l'espace de Schwartz $S(G)$ jouissante des propriétés de celle construite dans le paragraphe précédent. En outre, cette nouvelle transformée de Fourier sera un isomorphisme entre $S(G)$ et un espace $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$ que l'on déterminera.

Soit $2k$ la dimension maximale des G-orbites qui sont en position générale. Alors, pour tout $l \in \mathfrak{g}^*$ en position générale et pour toute polarisation $\mathfrak{p}(l)$ de l, la codimension de $\mathfrak{p}(l)$ est k.

Pour $B = (b_1, ..., b_n)$ appartenant à $\mathfrak{B}$, on note

$$\mathfrak{h}(B) := Vect(b_{k+1}, ..., b_n)$$

et

$$\mathfrak{h}_2(B) := [\mathfrak{h}(B), \mathfrak{h}(B)].$$

Si B appartient à $\mathfrak{B}$, on note

$$B_0 = B \quad et \quad B_i = (b_{i+1}, ..., b_n), \quad i = 1, ..., n-1.$$

Comme B est une base de Malcev,

$$\mathfrak{h}(B_i) := Vect(b_{i+1}, ..., b_n), \quad i = 1, ..., n-1$$

est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. De plus, $\mathfrak{h}(B_{i+1})$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{h}(B_i)$. Soit $H(B_i)$ le sous-groupe fermé $\exp \mathfrak{h}(B_i)$. Nous identifions dans la suite $H(B_i)$ à $\exp(\mathbb{R}b_{i+1}) \cdot H(B_{i+1})$.

Nous allons définir la fonction a sur $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}) \times G$ de la façon suivante:

Soient

$$\begin{aligned} a_k(B_k) : \mathfrak{h}^*(B_k) \times H(B_k) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (F_k, h_k) &\longrightarrow \; < F_k, h_k >_{B_k} \end{aligned}$$

et pour $p = 1, ..., k-1$,

$$a_p(B_p) : \mathfrak{h}^*(B_p) \times H(B_p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par:

$$\begin{aligned} a_p(B_p)(F_p, h_p) &= a_p(B_p)(\lambda_{p+1} b_{p+1}^* + F_{p+1}, \exp r_{p+1} b_{p+1} \cdot h_{p+1}) \\ &= \lambda_{p+1} r_{p+1} + a_{p+1}(B_{p+1})(F_{p+1}, h_{p+1}^{\frac{1}{2} r_{p+1}}) \end{aligned}$$

où

$$h_{p+1}^{\frac{1}{2} r_{p+1}} := \exp(\frac{1}{2} r_{p+1} b_{p+1}) \cdot h_{p+1} \cdot \exp(\frac{-1}{2} r_{p+1} b_{p+1}).$$

Notons,

$$a_p(F_p, B_p, h_p) = a_p(B_p)(F_p, h_p).$$

Tenant compte de ces notations, on définit la fonction a sur $(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}) \times G$ par

$$a(F, B, x) = a(\lambda_1 b_1^* + F_1, B, \exp r_1 b_1 \cdot h_1) = \lambda_1 r_1 + a_1(F_1, B_1, h_1^{\frac{1}{2} r_1}).$$

Il est clair que a est une fonction linéaire en F, polynomiale en x et en B.

4-1- Remarque:

Soient A un isomorphisme d'algèbres de $\mathfrak{g}$ dans une autre algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}'$ et soit A^* son adjoint, défini sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$< A^*F \ , \ x' > = < F \ , \ A^{-1}x' >, \quad F \in \mathfrak{g}^*, \ x' \in \mathfrak{g}'.$$

Pour $B = (b_1, ..., b_n) \in \mathfrak{B}$, notons

$$^{A}B = (Ab_1, ..., Ab_n).$$

Alors, pour tout $x' \in G' = \exp \mathfrak{g}'$ et pour tout couple $(F, B) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}$,

$$a(A^*F, \ ^{A}B, x') = a(F, B, A^{-1}x').$$

En effet, posons $B' = \ ^{A}B = (b'_1, ..., b'_n)$ et soit $x' \in G'$. Ecrivons x' sous la forme

$$x' = \exp(r'_1 b'_1) \cdot h'_1, \quad r'_1 \in \mathbb{R}, \ h'_1 \in \mathfrak{h}(B'_1).$$

Alors,

$$A^{-1}x' = \exp(r_1' A^{-1} b_1') \cdot (A^{-1} h_1').$$

En outre, d'après la définition de a, on a

$$a(A^*F,\ {}^A B, x') = < A^*F\ ,\ x' > + a_1(A_1^* F_1, B_1', h_1'^{\frac{1}{2}r_1'}),$$

où A_1 est la restriction de A à $\mathfrak{h}(B_1')$. Le résultat s'ensuit alors en raisonnant par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Pour $f \in L^1(G)$, posons

$$\tilde{f}(F,B) = \int_G f(x) e^{-ia(F,B,x)} dx, \quad (F,B) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{B}, \tag{2.6}$$

où dx est la mesure de Haar sur G définie dans le *capitre I, théorème 1-7* à l'aide de la base B .

4-2- Proposition:

Soit B une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ fixée. Alors, pour toute fonction f appartenant à $S(G)$, l'application

$$F \longmapsto \tilde{f}(F,B)$$

est dans $S(\mathfrak{g}^*)$. En outre,

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \tilde{f}(F,B) e^{ia(F,B,x)} dF = f(x)\ , \quad \forall x \in G.$$

Démonstration:

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, l'application $(\ )\tilde{}$ est simplement la transformée de Fourier usuelle. Supposons que la dimension de $\mathfrak{g}$ soit strictement supérieure à deux et notons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}(B_1)$ et $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$. Alors, pour tout $F \in \mathfrak{g}^*$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(F,B) &= \int_G f(x) e^{-ia(F,B,x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_1} f(\exp(r_1 b_1) \cdot h_1) e^{-ir_1 f_1} e^{-ia_1(F_1, B_1, h_1^{\frac{1}{2}r_1})} dh_1 dr_1 \\
&\text{(d'après la définition de } a\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\int_{H_1} f(\exp(\tfrac{1}{2} r_1 b_1) \cdot h_1 \cdot \exp(\tfrac{1}{2} r_1 b_1)) e^{-ia_1(F_1,B_1,h_1)} dh_1] e^{-ir_1 f_1} dr_1.
\end{aligned}$$

Posons

$$f_1(r_1, F_1) = \int_{H_1} f(\exp(\frac{1}{2} r_1 b_1) \cdot h_1 \cdot \exp(\frac{1}{2} r_1 b_1)) e^{-ia_1(F_1,B_1,h_1)} dh_1.$$

Comme la fonction f est dans $S(G)$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que l'application

$$(r_1, F_1) \longmapsto f_1(r_1, F_1)$$

est dans $S(\mathbb{R}^n)$. Par suite, la fonction $\tilde{f}$ est dans $S(\mathfrak{g}^*)$.

Soient $x \in G$ et $f \in S(G)$. Alors,

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \tilde{f}(F,B)e^{ia(F,B,x)}dF = \int_{\mathfrak{g}^*} [\int_G f(y)e^{-ia(F,B,y)}dy]e^{ia(F,B,x)}dF$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{h}_1^*} [\int_{\mathbb{R}} \int_{H_1} f(\exp t_1 b_1 \cdot k_1)e^{-ia_1(F_1,B_1,k_1^{\frac{1}{2}t_1})}e^{-it_1 f_1}dk_1 dt_1]e^{ia_1(F_1,B_1,h_1^{\frac{1}{2}r_1})}e^{ir_1 f_1}dF_1 df_1$$

$$= \int_{\mathfrak{h}_1^*} \int_{H_1} [\int_{\mathbb{R}^2} f(\exp \frac{t_1}{2}b_1 \cdot k_1 \cdot \exp \frac{t_1}{2}b_1)e^{-it_1 f_1}e^{ir_1 f_1}dt_1 df_1]e^{-ia_1(F_1,B_1,k_1)}\times$$

$$\times e^{ia_1(F_1,B_1,h_1^{\frac{1}{2}r_1})}dk_1 dF_1$$

(en effectuant un changement de variable $k_1 \to (k_1)^{\frac{-t}{2}}$).

En appliquant la formule d'inversion, il vient que

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \tilde{f}(F,B)e^{ia(F,B,x)}dF = \int_{\mathfrak{h}_1^*} \int_{H_1} f(\exp \frac{r_1}{2}b_1 \cdot k_1 \cdot \exp \frac{r_1}{2}b_1)e^{-ia_1(F_1,B_1,k_1)}e^{ia_1(F_1,B_1,h_1^{\frac{1}{2}r_1})}dk_1 dF_1$$

$$= f(\exp r_1 b_1 \cdot h_1) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence).}$$

■

Soient $F \in \mathfrak{g}^*$ et $G(F)$ son stabilisateur:

$$G(F) = \{g \in G \ \text{ tel que } \ Ad^*g \cdot F = F\}.$$

Soit B une base de Malcev passant par une polarisation de F. Pour $g \in G$ tel que $g = g_0 \cdot k$, $g_0 \in G/G(F)$ et $k \in G(F)$, on note

$$^gF = Ad^*g \cdot F \quad \text{et} \quad ^{\dot{g}}B = (Adg_0 \cdot b_1, ..., Adg_0 \cdot b_n).$$

4-3- Proposition:

Soient F appartenant à $\mathfrak{g}^*$, $B = (b_1, ..., b_n)$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ telle que le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs $(b_{k+1}, ..., b_n)$ soit une polarisation de F et π l'élément de $\hat{G}$ associé à F. Alors, pour toute fonction f dans $S(G)$, la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\pi(f)$ est donnée par:

$$\mid \pi(f) \mid_{H.S}^2 = \int_{G/G(F)} \mid \tilde{f}(\ ^gF,\ ^{\dot{g}}B) \mid^2 d\dot{g}.$$

Démonstration:

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, l'application $(\ )\tilde{}$ coïncide avec la transformée de Fourier usuelle. Supposons alors que $\mathfrak{g}$ soit de dimension > 2.

Notons $\mathfrak{h}_1$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par les vecteurs $(b_2, ..., b_n)$, H_1 le sous-groupe $\exp \mathfrak{h}_1$ et F_1 la restriction de F à $\mathfrak{h}_1$. Soient $\mathcal{O}$ la G-orbite de F et $\mathcal{O}_1$ la H_1-orbite de F_1. Il en résulte, d'après la démonstration du théorème 3-2, que si f_t est la fonction définie sur H_1 par

$$f_t(k) = f\Big(\exp(\frac{t}{2}b_1) \cdot k \cdot \exp(\frac{t}{2}b_1)\Big), \quad k \in H_1,$$

$$
\begin{aligned}
|\,\pi(f)\,|_{H.S}^2 &= \int_{\mathcal{O}_1\times\mathrm{I\!R}}\int_{H_1\times\mathrm{I\!R}} \Big((f_t)^* *_{H_1} f_t\Big)(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i< \,^{s}l_1',h_1>}dtdh_1d\mu_{\pi_1}(l_1')ds\\
&= \int_{H_1/H_1(F_1)\times\mathrm{I\!R}}\int_{H_1\times\mathrm{I\!R}} \Big((f_t)^* *_{H_1} f_t\Big)(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i< \,^{s\cdot g_1}F_1,h_1>}dtdh_1d\dot{g}_1ds\\
&= \int_{H_1/H_1(F_1)\times\mathrm{I\!R}}\int_{H_1\times\mathrm{I\!R}} \Big((f_t)^* *_{H_1} f_t\Big)(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i< \,^{s\cdot g_1}F_1,h_1^{\frac{t}{2}}>}dtdh_1d\dot{g}_1ds
\end{aligned}
$$

(en éffectuant un changement de variable $s \to s - \frac{t}{2}$)

$$
= \int_{H_1/H_1(\,^{s}F_1)\times\mathrm{I\!R}}\int_{H_1\times\mathrm{I\!R}} \Big((f_t)^* *_{H_1} f_t\Big)(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i< \,^{g_1\cdot s}F_1,h_1^{\frac{t}{2}}>}dtdh_1d\dot{g}_1ds,
$$

avec

$$
^{s}F_1 = Ad^*(\exp sb_1)\cdot F_1.
$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient que

$$
|\,\pi(f)\,|_{H.S}^2 = \int_{\mathrm{I\!R}^2}\int_{H_1/H_1(\,^{s}F_1)} \Big|\int_{H_1} f_t(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i a_1(\,^{g_1\cdot s}F_1,\,^{\dot{g}_1\cdot s}B_1,h_1^{\frac{t}{2}})}dh_1\Big|^2\, d\dot{g}_1dsdt
$$

$$
= \int_{\mathrm{I\!R}^2\times H_1/H_1(F_1)}\Big|\int_{\mathrm{I\!R}}\int_{H_1} f_t(h_1^{\frac{t}{2}})e^{-2\pi i a_1(\,^{g_1\cdot s}F_1,\,^{\dot{g}_1\cdot s}B_1,h_1^{\frac{t}{2}})}e^{-2\pi i\lambda_1 t}dh_1dt\Big|^2\, d\lambda_1d\dot{g}_1ds
$$

(d'après la formule de Plancherel)

$$
= \int_{\mathrm{I\!R}^2\times H_1/H_1(F_1)}\Big|\int_{\mathrm{I\!R}}\int_{H_1} f(\exp tb_1\cdot h_1)e^{-2\pi i a(\lambda_1 b_1^* + \,^{s\cdot g_1}F_1,\,^{s\cdot\dot{g}_1}B,\exp tb_1\cdot h_1)}dh_1dt\Big|^2\, d\lambda_1d\dot{g}_1ds.
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|\,\pi(f)\,|_{H.S}^2 &= \int_{G/G(F)}\Big|\int_G f(x)e^{-2\pi i a(\,^{g}F,\,^{\dot{g}}B,x)}dx\Big|^2\, d\dot{g}\\
&= \int_{G/G(F)}|\,\tilde{f}(\,^{g}F,\,^{\dot{g}}B)\,|^2\, d\dot{g}.
\end{aligned}
$$

■

Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, les deux corollaires suivants se démontrent de la même façon que la proposition 3-5 et le corollaire 3-6 du paragraphe 3.

4-4- Corollaire:

Pour tout x appartenant à G et pour tout Z appartenant à $\mathfrak{a}(F) := \bigcap_{g\in G}\mathfrak{g}(Ad^*g.F)$,

$$
a(F,B,x\cdot\exp Z) = < F,Z > + a(F,B,x).
$$

4-5- Corollaire:

Pour toute fonction f appartenant à $S(G)$ et pour tout élément x de G,

$$tr\pi(x)\pi(f) = \int_{G/G(F)} \tilde{f}(\,{}^{g}F)e^{ia(\,{}^{g}F,\,{}^{\dot{g}}B,x)}d\dot{g},$$

où π est l'élément de $\hat{G}$ correspondant à F.

5- Image de $S(G)$ par une transformée de Fourier adaptée:

Soit $B = (b_1, ..., b_n)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$, fixons une structure euclidienne $< , >$ qui nous permet d'identifier $\mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ et notons $\mathfrak{g}^*_{gén}$ l'ensemble de tous les éléments S appartenant à $\mathfrak{g}^*$ qui sont en position générale pour la construction de la polarisation de Vergne $\mathfrak{h}(S)$ de S associée à la base B et pour $\mathfrak{h}_2(S) := [\mathfrak{h}(S), \mathfrak{h}(S)]$. C'est à dire, l'application

$$S \longmapsto (\mathfrak{h}(S), \mathfrak{h}_2(S))$$

définit une sous variété lisse de la variété de tous les couples (E, F), $E \subset F$ où E et F sont des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ de dimensions respectives $n-k$ et $n-k_0$, k étant la codimension des $\mathfrak{h}(S)$ et k_0 celle des $\mathfrak{h}_2(S)$.

Soit $\mathfrak{B}_0$ l'ensemble des applications lisses

$$B:\ S \longmapsto B(S)$$

définies sur $\mathfrak{g}^*_{gén}$, où $B(S)$ est une base de Malcev orthogonale passant par $\mathfrak{h}(S)$ et $\mathfrak{h}_2(S)$.

Considérons l'ensemble

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) = \{(F, B(S)), S \in \mathfrak{g}^*_{gén},\ F \in \mathfrak{h}_2(S)^{\perp} \text{ et } B \in \mathfrak{B}_0\}.$$

Soit maintenant $(\ )^{\sim}$ l'application définie sur $S(G)$ par

$$\tilde{f}(F, B(S)) = \int_G f(x)e^{-ia(F,B(S),x)}dx,\quad f \in S(G) \text{ et } (F, B(S)) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{g}). \qquad (2.7)$$

Remarque:

Soient $S \in \mathfrak{g}^*_{gén}$ et $B = (b_1, ..., b_n)$ et $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ deux bases de Malcev de $\mathfrak{g}$ telles que

$$b_j(S) = b'_j(S)\ ,\quad j = 1, ..., k.$$

Alors, pour tout $F \in \mathfrak{g}^*$ tel que $(F, B(S))$ et $(F, B'(S))$ appartiennent à $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$,

$$\tilde{f}(F, B(S)) = (\tilde{f}(F, B'(S)),\quad \forall f \in S(G).$$

On fixe

$$B:\ S \longmapsto B(S) = (b_1(S), ..., b_k(S), b_{k+1}(S), ..., b_{k_0}(S), b_{k_0+1}(S), ..., b_n(S))$$

avec $\mathfrak{h}(S) = Vect(b_{k+1}(S), ..., b_n(S))$ et $\mathfrak{h}_2(S) = Vect(b_{k_0+1}(S), ..., b_n(S))$

et on note $\mathcal{P}u(\mathfrak{g})$ l'ensemble des opérateurs différentiels sur G à cœfficients polynomiaux.

5-1- Théorème:

Pour tout D appartenant à $\mathcal{P}u(\mathfrak{g})$, il existe un opérateur différentiel $\hat{D}$ à cœfficients polynomiaux en F et C^∞ en $S \in \mathfrak{g}^*_{gén}$, tel que

$$(Df)\tilde{} = \hat{D}\tilde{f}\ , \quad \forall f \in S(G).$$

Démonstration:

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le théorème est évident si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne. Supposons alors qu'elle soit de dimension ≥ 3.

Supposons en premier lieu que le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ soit de dimension 1. D'après la construction de $B(S), S \in \mathfrak{g}^*_{gén}$ (*paragraphe 3*), on a que

$$b_1(S) = b_{i_1}, \quad \forall S \in \mathfrak{g}^*_{gén}$$

et il existe j_1 tel que

$$[b_{i_1}, b_{j_1}] = b_n \in \mathfrak{z}.$$

On décompose $\mathfrak{g}$ sous la forme:

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}b_{i_1} \oplus \mathfrak{g}_1,$$

où $\mathfrak{g}_1$ est le centralisateur de b_{j_1}. On a alors

$$\tilde{f}(F, B(S)) = \int_{\mathbb{R}}\int_{G_1} f(\exp r_1 b_{i_1} \cdot h_1) e^{-iF_{i_1} r_1} e^{-ia_1(F_1, B_1(S_1), h_1^{\frac{1}{2}r_1})} dr_1 dh_1,$$

où $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$, $F_{i_1} =< F, b_{i_1} >$ et F_1 est la restriction de F à $\mathfrak{g}_1$.

Soient $m, p \in \mathbb{N}$ et $D_1 \in \mathcal{P}u(\mathfrak{g}_1)$.Alors,

$$(r_1^m \partial^p_{r_1} D_1 f)\tilde{} = F^p_{i_1} \partial^m_{F_{i_1}} \hat{D}_1 \tilde{f}$$

(en appliquant l'hypotèse de récurrence).

Supposons maintenant que $\mathfrak{z}$ soit de dimension supérieure à deux. Pour décrire la multiplication par un polynôme P, prenons les monômes X^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si $\alpha = (1, 0, ..., 0)$, alors, $X^\alpha = X_1(S)$ et on a

$$(X_1(S)f)\ \tilde{}(F, B(S)) = \int_G X_1(S) f(x) e^{-ia(F, B(S), x)} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{G_1(S)} X_1(S) f(\exp X_1(S) b_1(S) \cdot h) e^{-iF_1(S)X_1(S)} e^{-ia_1(F_1(S), B_1(S_1), h^{\frac{1}{2}X_1(S)})} dX_1(S)$$

D'où

$$(X_1(S)f)\ \tilde{} = \partial_1 \tilde{f}.$$

Soit Y un élément de $\mathfrak{g}$ non central tel que le sous-espace $V := [\mathfrak{g}, Y]$ soit inclus dans $\mathfrak{z}$. Si $V = \mathbb{R}Z$, $Z \in \mathfrak{z}$, alors, il existe X appartenant à $\mathfrak{g}$ tel que $[X, Y] = Z$. La démonstration est dans ce cas, analogue à celle lorsque le centre est de dimension 1.

Suppososons donc que la dimension de V soit au moins deux, notons S_0 la restriction de S à V et soit W un élément de V orthogonal à S_0. Alors,

$$S_0 + tW \in \mathfrak{h}_2(S + tW)^\perp\ , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En effet, écrivons $\mathfrak{h}_2(S+tW)$ sous la forme

$$\mathfrak{h}_2(S+tW) = \mathfrak{h}_2(S+tW)\cap V \oplus \mathfrak{k}(S+tW), \quad \text{(somme orthogonale)}.$$

Alors,

$$< S_0+tW, \mathfrak{k}(S+tW) >= (0) \text{ et } < S_0+tW, \mathfrak{h}_2(S+tW)\cap V >=< S+tW, \mathfrak{h}_2(S+tW) >= 0.$$

D'où,

$$S_0 + tW \in \mathfrak{h}(S+tW)\cap \mathfrak{h}_2(S+tW)^{\perp}.$$

De même,

$$-tS_0 + W \in \mathfrak{h}(S+tW)\cap \mathfrak{h}_2(S+tW)^{\perp}.$$

Soit $B(S+tW) = (b_1(S+tW), ..., b_n(S+tW)$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ passant par $\mathfrak{h}(S+tW)$ et par $\mathfrak{h}_2(S+tW)$ telle que $b_{k+1}(S+tW) = S_0+tW$, $b_{k+2}(S+tW) = -tS_0+W$ et pour $j = k+3, ..., n$, $b_j(S+tW)$ est orthogonal à W. On note

$$\begin{aligned} F(S+tW) &= \sum_{i=1}^{k_0} F_i b_i(S+tW) \\ &= \sum_{i=1}^{k} F_i b_i(S+tW) + F_{k+1}(S_0+tW) + F_{k+2}(-tS_0+W) + ... \end{aligned}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} < F(S+tW)\ ,\ sW > &=< F_{k+1}(S_0+tW) + F_{k+2}(-tS_0+W)\ ,\ sW > \\ &= tsF_{k+1} + sF_{k+2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit x appartenant à G:

$$x = x_0 \exp sW\ ,\quad s \in \mathbb{R} \text{ et } x_0 \in G/\mathbb{R}W.$$

D'après le corollaire 4-4, on a que

$$a(F, B(S+tW), x_0 \exp sW) =< F(S+tW)\ ,\ sW > +a(F, B(S+tW), x_0).$$

D'autre part, d'après (2.8), on a que

$$\partial_{F_{k+1}}\partial_t < F(S+tW)\ ,\ sW >= s.$$

Il vient donc que

$$\begin{aligned} \partial_{F_{k+1}}\partial_t/_{t=0} e^{-ia(F,B(S+tW),x_0\exp sW)} &= -ise^{-ia(F,B(S),x_0\exp sW)} \\ &\quad + A_k(F,B(S),x_0)e^{-ia(F,B(S),x_0\exp sW)} \end{aligned}$$

et $A_k(F,B(S),x_0)$ est indépendante de W. Soit $P_W(X) =< X\ ,\ W >$. On a alors,

$$\begin{aligned} (P_W f)\check{}(F,B(S)) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{G/\mathbb{R}W} sf(x_0\exp sW)e^{-i<F\ ,\ sW>}e^{-ia(F,(B(S),x_0)}d\dot{x}_0 ds \\ &= i\partial_{F_{k+1}}\partial_t/_{t=0}\int_{\mathbb{R}}\int_{G/\mathbb{R}W} f(x_0\exp sW)e^{-i<F\ ,\ sW>}e^{-ia(F,(B(S+tW),x_0)}d\dot{x}_0 ds \\ &+ \int_{\mathbb{R}}\int_{G/\mathbb{R}W} A_k(F,B(S),x_0)f(x_0\exp sW)e^{-i<F\ ,\ sW>}e^{-ia(F,(B(S),x_0)}d\dot{x}_0 ds. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit alors en appliquant l'hypothèse de récurrence.

■

Nous allons maintenant déterminer l'image de $S(G)$ par cette nouvelle transformée de Fourier adaptée.

Considérons alors l'espace $S\Big(\mathfrak{N}(\mathfrak{g})\Big)$ des fonctions φ définies sur $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$, de classe C^∞ et vérifiant les propriétés suivantes:

i) L'application

$$F \longmapsto \varphi(F, B(S))$$

est dans $S\Big(\mathfrak{h}_2(S)\Big)^\perp$ pour tout $S \in \mathfrak{g}^*_{gén}$.

ii) Pour tout champ d'opérateurs différentiels en S, D_S, à cœfficients bornés sur $\mathfrak{g}^*_{gén}$ et pour tous multi-indices α et β appartenant à $\mathbb{N}^{k_0}$, il existe une constante positive $C = C_{\alpha,\beta,D,B}$ telle que

$$\sup_{F,S} \mid F^\alpha \partial_F^\beta D_S \varphi(F, B(S)) \mid < C q(B(S)),$$

où

$$q(B(S)) \geq \| D_S(B(S)) \| = \sup_i \| D_S b_i(S) \| .$$

iii) Pour toutes bases de Malcev $B = (b_1, ..., b_n)$ et $B' = (b'_1, ..., b'_n)$ de $\mathfrak{g}$, pour tout S appartenant à $\mathfrak{g}^*_{gén}$ tels que $b_j(S) = b'_j(S)$, $j = 1, ..., k$, et pour tout $F \in \mathfrak{g}^*$ tel que $(F, B(S))$ et $(F, B'(S))$ appartiennent à $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$,

$$\varphi(F, B(S)) = \varphi(F, B'(S)) \text{ et } \hat{D}\varphi(F, B(S)) = \hat{D}\varphi(F, B'(S)) , \quad \forall D \in \mathcal{P}\mathsf{u}(\mathfrak{g}).$$

iv) Pour tout opérateur $D \in \mathcal{P}\mathsf{u}(\mathfrak{g})$, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{k_0}$,

$$\sup_{F,S} \mid F^\alpha \hat{D}\varphi(F, B(S)) \mid < \infty.$$

v) Pour tout $x \in G$ et pour tout $F \in \mathfrak{g}^*$,

$$\int_{G/G(F)} \varphi({}^gF, B({}^gS)) e^{-ia({}^gF, B({}^gS), x)} d\dot{g}$$

ne dépend pas de $B(S)$. On note $\dot{\varphi}(\mathcal{O}_F, x)$ la valeur de cette intégrale, où $\mathcal{O}_F$ désigne la G-orbite de F.

5-2- Proposition:

Pour tout f appartenant à $S(G)$, la fonction $\tilde{f}$ définie par (2.7) est dans $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$.

Démonstration:

Les propriétés i), iii), iv) et v) sont déjà vérifiées. Pour vérifier la propriété ii), on raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Soit $(F, B(S)) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$. La fonction a est linéaire en F, polynomiale en $x \in G$. Donc, si D_S est un champ d'opérateurs différentiels en S, à cœfficients bornés sur $\mathfrak{g}^*_{gén}$, il existe $\alpha_0 \in \mathbb{N}^{k_0}$, un polynôme P sur G et une fonction C de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*_{gén}$ tels que

$$D_S a(F, B(S), x) = C(S) F^{\alpha_0} P(x).$$

Donc,

$$F^\alpha \partial_F^\beta D_S \tilde{f}(F(B(S)) = C(S) F^\gamma \partial_F^\beta (Pf)\tilde{}, \quad (\gamma = \alpha + \alpha_0).$$

D'autre part, si $\mathfrak{g}_1(S) = Vect(b_2(S), ..., b_n(S))$ et $G_1(S)$ est le sous-groupe $\exp \mathfrak{g}_1(S)$, en écrivant F sous la forme $F = f_1 b_1(S) + F_1$ où F_1 est la restriction de F à $\mathfrak{g}_1(S)$, il vient que

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(F, B(S)) &= \int_G f(x) e^{-ia(F,B(S),x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1(S)} f(\exp r_1 b_1(S) \cdot h) e^{-if_1 r_1} e^{-ia_1(F_1,(B_1(S_1), h^{\frac{1}{2} r_1})} dh dr_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{G_1(S)} f(\exp r_1 b_1(S) \cdot h^{\frac{-1}{2} r_1}) e^{-if_1 r_1} e^{-ia_1(F_1,(B_1(S_1), h)} dh dr_1.
\end{aligned}$$

Donc, $\partial_{f_1}^m \tilde{f}(F, B(S)) = (r_1^m f)\tilde{}(F, B(S))$ et $f_1^p \tilde{f}(F, B(S)) = (Q \partial_{r_1}^p f)\tilde{}(F, B(S))$, où Q est un polynôme sur G.
En outre,

$$F_1^\alpha \partial_{F_1}^\beta \tilde{f}(F, B(S)) = \int_{\mathbb{R}} [F_1^\alpha \partial_{F_1}^\beta \int_{G_1(S)} f(\exp r_1 b_1(S) \cdot h^{\frac{-1}{2} r_1}) e^{-ia_1(F_1,(B_1(S_1),h)} dh] e^{-if_1 r_1} dr_1.$$

Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction f_{r_1}, définie sur $G_1(S)$ par $f_{r_1}(h) = f(\exp r_1 b_1(S) \cdot h^{\frac{-1}{2} r_1})$.

■

Remarque:

Soient S et S' deux éléments de $\mathfrak{g}^*_{gén}$ et F appartenant à $\mathfrak{g}^*$ tels que

$$F \in \mathfrak{h}_2(S)^\perp \cap \mathfrak{h}_2(S')^\perp.$$

Alors, pour toute fonction φ dans $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$, les valeurs de $\{\varphi({}^gF, B({}^gS)), \ \ g \in G\}$ sont déterminées par les valeurs de $\{\varphi({}^gF, B({}^gS')), \ \ g \in G\}$.

En effet, soient φ_S et $\varphi_{S'}$ les fonctions définies sur l'orbite $\mathcal{O}$ de F par

$$\varphi_S(l) = \varphi(l, B(S)) \ \text{ et } \ \varphi_{S'}(l) = \varphi(l, B(S')) \ , \ l \in \mathcal{O}.$$

Alors, φ_S et $\varphi_{S'}$ sont dans $S(\mathcal{O})$. En outre, si f appartient à $S(G)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} \varphi_S(l)\tilde{f}_S(l)d\mu_{\mathcal{O}}(l) &= \int_{\mathcal{O}} \varphi_S(l)[\int_G f(x)e^{-ia(l,B(S),x)}dx]d\mu_{\mathcal{O}}(l)\\ &= \int_G f(x)[\int_{\mathcal{O}} \varphi_S(l)e^{-ia(l,B(S),x)}d\mu_{\mathcal{O}}(l)]dx\\ &= \int_G f(x)[\int_{\mathcal{O}} \varphi_{S'}(l)e^{-ia(l,B(S'),x)}d\mu_{\mathcal{O}}(l)]dx\\ &= \int_{\mathcal{O}} \varphi_{S'}(l)\tilde{f}_{S'}(l)d\mu_{\mathcal{O}}(l).\end{aligned}$$

Il est clair aussi que

$$\| \tilde{f}_S \|_{L^2(\mathcal{O})}=\| \tilde{f}_{S'} \|_{L^2(\mathcal{O})} .$$

Donc, si $\mathcal{U}_{S,S'}$ est l'isométrie de $L^2(\mathcal{O})$ telle que $\mathcal{U}_{S,S'}(\tilde{f}_S) = \tilde{f}_{S'}$, il s'ensuit que

$$\mathcal{U}_{S,S'}(\varphi_S) = \mathcal{U}_{S,S'}(\varphi'_S).$$

5-3- Proposition:

Soit φ un élément de $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$. Alors, pour tout D appartenant à $\mathcal{P}u(\mathfrak{g})$, $\hat{D}\varphi$ appartient aussi à $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$.

Démonstration:

Soit ψ la fonction définie sur $\mathfrak{g}^*_{gén}$ par:

$$\psi(F) = \varphi(F, B(F)), \quad F \in \mathfrak{g}^*_{gén},$$

où $B(F)$ est la base de Malcev ortonormalisée passant par la polarisation associée à F, construite dans le paragraphe 3. Fixons $F \in \mathfrak{g}^*_{gén}$ et considérons une fonction Q définie sur $\mathfrak{g}^*$, de classe C^∞, Ad^*-invariante telle que $Q \equiv 1$ dans un voisinage Ad^*-invariant de F et $Q \equiv 0$ en dehors de $\mathfrak{g}^*_{gén}$. Alors, il existe une fonction $f_Q \in S(G)$ telle que

$$\tilde{f}_Q(F', B(F')) = (Q.\psi)(F'), \quad \forall F' \in \mathfrak{g}^*_{gén}.$$

Comme $\tilde{f}_Q({}^gF', {}^gB(S))$ est déterminée par $\tilde{f}_Q({}^gF', {}^gB(F'))$, on a que $\tilde{f}_Q({}^gF', {}^gB(S)) = \varphi({}^gF', {}^gB(S))$ dans un voisinage Ad^*-invariant de F. Par suite,

$$\hat{D}\varphi = \hat{D}\tilde{f}_Q = (Df_Q)\tilde{}$$

dans un voisinage Ad^*-invariant de F. Ce qui prouve que

$$\int_{G/G(F)} \hat{D}\varphi({}^gF, B({}^gS))e^{-ia({}^gF,B({}^gS),x)}d\dot{g}$$

ne dépend pas de $B(S)$.

■

A une fonction $\varphi \in S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$, on fait correspondre la fonction $\check{\varphi}$ définie sur G par

$$\begin{aligned}\check{\varphi}(x) &= \int_{\mathfrak{g}^*/Ad^*} \dot{\varphi}(\mathcal{O}, x) d\mu(\mathcal{O}) \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*/Ad^*} \int_{G/G(F)} \varphi(\ {}^gF, B(\ {}^gS)) e^{ia(\ {}^gF, B(\ {}^gS), x)} d\dot{g}, \quad x \in G.\end{aligned}$$

5-4- théorème:

L'application $(\ )^{\tilde{}}$ définie par (2.7) est un isomorphisme de $S(G)$ dans $S\Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$. Son inverse est l'application $(\ )^{\check{}}$.

Démonstration:

Soit $\varphi \in \Big(\mathfrak{R}(\mathfrak{g})\Big)$. Alors, pour tout x appartenant à G,

$$\begin{aligned}\check{\varphi}(x) &= \int_{\mathfrak{g}^*/Ad^*} [\int_{G/G(F)} \varphi(\ {}^gF, B(\ {}^gS)) e^{ia(\ {}^gF, B(\ {}^gS), x)} d\dot{g}] d\overline{F} \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*/Ad^*} [\int_{G/G(F)} \varphi(\ {}^gF, B(\ {}^gF)) e^{ia(\ {}^gF, B(\ {}^gF), x)} d\dot{g}] d\overline{F} \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(F, B(F)) e^{ia(F, B(F), x)} dF.\end{aligned}$$

La fonction φ_0 définie sur $\mathfrak{g}^*$ par $\varphi_0(F) = \varphi(F, B(F))$ appartient à $L^2(\mathfrak{g}^*)$. Donc, pour toute fonction f de Schwartz sur G,

$$\begin{aligned}< \varphi_0\ ,\ \tilde{f}_0 >_{L^2(\mathfrak{g}^*)} &= \int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(F, B(F)) \overline{\tilde{f}(F, B(F)} dF \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(F, B(F)) [\int_G \overline{f(x)} e^{ia(F, B(F), x)} dx] dF \\ &= \int_G [\int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(F, B(F)) e^{ia(F, B(F), x)} dF] \overline{f(x)} dx \\ &= \int_G \check{\varphi}(x) \overline{f(x)} dx \\ &=< \check{\varphi}\ ,\ f >_{L^2(G)} .\end{aligned}$$

En outre, si D est un élément de $\mathcal{P}u(\mathfrak{g})$. Alors, $(\hat{D}\varphi)_0$ appartient aussi à $L^2(\mathfrak{g}^*)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}< (\hat{D}\varphi)_0\ ,\ (\tilde{f})_0 >_{L^2(\mathfrak{g}^*)} &=< \varphi_0\ ,\ (\hat{D}\tilde{f})_0 >_{L^2(\mathfrak{g}^*)} =< \varphi_0\ , (Df)^{\tilde{}}{}_0 >_{L^2(\mathfrak{g}^*)} \\ &=< \check{\varphi}\ ,\ Df >_{L^2(G)} =< D\check{\varphi}\ ,\ f >_{L^2(G)} .\end{aligned}$$

On en déduit donc que $D\check{\varphi}$ appartient à $L^2(G)$, pour tout opérateur D dans $\mathcal{P}u(\mathfrak{g})$. Ce qui prouve que $\check{\varphi}$ est dans $S(G)$.

Nous montrons maintenant la formule d'inversion. Soient x un élément de G et f une fonction de Schwartz sur G. Alors,

$$\begin{aligned}
(\tilde{f})\check{}(x) &= \int_{\mathfrak{g}^*} \tilde{f}(l, B(l)) e^{ia(l,B(l),x)} dl \\
&= \int_{\mathfrak{g}^*/Ad^*} \int_{\Omega} \tilde{f}(\,{}^g l, B(\,{}^g l)) e^{ia(\,{}^g l, B(\,{}^g l), x)} d\dot{g} d\mu(\Omega) \\
&= \int_{\hat{G}} tr\pi(x)\pi(f) d\mu(\pi)
\end{aligned}$$

(d'après le corollaire 4-5)

$= f(x)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème.

■

6- Exemple:

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension 8, et $B = (b_1, ..., b_8)$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ telle que:

$$[b_8, b_2] = b_1; \quad [b_3, b_7] = b_1; \quad [b_4, b_5] = b_1; \quad [b_6, b_5] = b_2;$$

$$[b_4, b_6] = b_3; \quad [b_8, b_6] = b_4; \quad [b_6, b_7] = b_5.$$

Le centre de $\mathfrak{g}$ et donc de dimension 1 et il est engendré par le vecteur b_1.

Remarque:

Considérons un élément F de $\mathfrak{g}^*$ tel que $< F, b_1 >\neq 0$. Son stabilisateur $\mathfrak{g}(F)$ est

$$\mathfrak{g}(F) = \{x \in \mathfrak{g}/ < F, [x, \mathfrak{g}] >= (0)\} =< \{b_1, b_6 - \frac{f_3}{f_1}b_5 - \frac{f_2}{f_1}b_4 - \frac{f_5}{f_1}b_3 - \frac{f_4}{f_1}b_2\} > .$$

Alors, toute polarisation de F n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$.

En effet, soit $\mathfrak{p}$ une polarisation de F et soit $X = \sum_{i=1}^{8} x_i b_i$ un élément de $\mathfrak{p}$. Posons

$$Y := [X, b_8] = -x_2 b_1 - x_6 b_4 \quad \text{et} \quad Z := [X, b_7] = x_3 b_1 + x_6 b_5.$$

Supposons que $\mathfrak{p}$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors, Y et Z appartiennent à $\mathfrak{p}$. Par conséquent,

$$0 =< F, [Y, Z] >= x_6^2 f_1.$$

Ce qui prouve que $x_6 = 0$. Comme $\mathfrak{g}(F)$ est inclus dans $\mathfrak{p}$, x_6 ne peut pas être nul.
Par suite, $\mathfrak{p}$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$.

1) On va construire une polarisation de $F = (f_1, ..., f_8)$, avec $f_1 \neq 0$ et par suite, une transformée de Fourier adaptée sur $\mathfrak{g}^*$ par la méthode décrite dans le paragraphe 3.

Dans cet exemple on a :

$$k = 3; \quad j_1 = 2; \quad i_1 = 8; \quad j_2 = 3; \quad i_2 = 7; \quad j_3 = 4; \quad i_3 = 5,$$

$$\mathfrak{g}_1(F) =< \{b_1, ..., b_7\} >,$$
$$\mathfrak{g}_2(F) =< \{b_1, ..., b_6\} >,$$

et

$$\mathfrak{g}_3(F) =< \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_6 - \frac{f_3}{f_1} b_5\} > .$$

On a donc

$$\mathfrak{g} =< b_8, b_7, b_5 > \oplus \mathfrak{g}_3(F).$$

Soit $G_3(F) = \exp \mathfrak{g}_3(F)$. Le groupe $G := (\mathfrak{g}, C.B.H)$ est difféomorphe à

$$\exp(\mathbb{R} b_8) \cdot \exp(\mathbb{R} b_7) \cdot \exp(\mathbb{R} b_5) \cdot G_3(F).$$

Tenant compte de ce difféomorphisme et de la décomposition de $\mathfrak{g}$ faite plus haut, un élément $x \in G$ et un élément $F \in \mathfrak{g}^*$, s'écrivent respectivement sous la forme:

$$x = \exp(r_1 b_8) \cdot \exp(r_2 b_7) \cdot \exp(r_3 b_5) \cdot h_3(F), \quad r_1,\ r_2,\ r_3 \in \mathbb{R} \text{ et } \ h_3(F) \in G_3(F)$$

et

$$F = \lambda_1 {b_8}^* + \lambda_2 {b_7}^* + \lambda_3 {b_5}^* + F_3, \quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ et } \ F_3 \in \mathfrak{g}_3^*(F).$$

Pour $i = 8,\ 7,\ 5$, on note

$$x^{\alpha_i} = \exp \alpha_i b_i \cdot x \cdot \exp(-\alpha_i b_i), \quad x \in G,\ \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

La fonction a est définie donc sur $\mathfrak{g}^* \times G$ par

$$\begin{aligned} a(F, x) &= a(\lambda_1 {b_8}^* + \lambda_2 {b_7}^* + \lambda_3 {b_5}^* + F_3, expr_1 b_8 \cdot expr_2 b_7 \cdot expr_3 b_5 \cdot h_3(F)) \\ &= \lambda_1 r_1 + a_1(\lambda_2 {b_7}^* + \lambda_3 {b_5}^* + F_3, [expr_2 b_7 \cdot expr_3 b_5 \cdot h_3(F)]^{\frac{1}{2} r_1}). \end{aligned}$$

Comme b_8 et b_7 commutent, on a

$$\begin{aligned} [expr_2 b_7 \cdot expr_3 b_5 \cdot h_3(F)]^{\frac{1}{2} r_1} &= exp \frac{1}{2} r_1 b_8 \cdot expr_2 b_7 \cdot expr_3 b_5 \cdot h_3(F) \cdot exp(-\frac{1}{2} r_1 b_8) \\ &= expr_2 b_7 \cdot [expr_3 b_5 \cdot h_3(F)]^{\frac{1}{2} r_1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$a(F, x) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + a_2(\lambda_3 {b_5}^* + F_3, [(expr_3 b_5 \cdot h_3(F))^{\frac{1}{2} r_1}]^{\frac{1}{2} r_2}).$$

En outre,

$$\begin{aligned} [(expr_3 b_5 \cdot h_3(F))^{\frac{1}{2} r_1}]^{\frac{1}{2} r_2} &= exp(\frac{1}{2} r_1 b_8 + \frac{1}{2} r_2 b_7) \cdot h_3(F) \cdot exp(-\frac{1}{2} r_1 b_8 - \frac{1}{2} r_2 b_7) \\ &= exp[x_5\ b_6 - (x_5\ \frac{f_3}{f_1} + \frac{1}{2} r_2 x_5) b_5 \\ &\quad + (x_4 + \frac{1}{2} r_1 x_5\ ) b_4 + x_3 b_3 + x_2 b_2 + (x_1 + \frac{1}{2} r_1 x_2 - \frac{1}{2} r_2 x_3) b_1 \\ &= exp(-\frac{1}{2} r_2 x_5\ ) b_5) \cdot exp\{x_5\ (b_6 - \frac{f_3}{f_1} b_5) \\ &\quad + (x_4 + \frac{1}{2} r_1 x_5\ ) b_4 + x_3 b_3 + (x_2 - \frac{1}{2} r_2 x_5^2) b_2 \\ &\quad + [x_1 + \frac{1}{2} r_1 x_2 - \frac{1}{2} r_2 x_3 - (\frac{1}{4} r_2 x_5\ )(x_4 + \frac{1}{2} r_1 x_5\ )] b_1\} \\ &= exp(-\frac{1}{2} r_2 x_5\ ) b_5) \cdot h_3'(F). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$a(F,x) = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3(r_3 - \frac{1}{2}r_2x_5\ )$

$+ < F_3, log[exp(\frac{1}{2}r_3 - \frac{1}{4}r_2x_5\ ) \cdot h_3'(F) \cdot (-\frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{4}r_2x_5\ )b_5] >$

$= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3(r_3 - \frac{1}{2}r_2x_5\ )$

$+ < F_3, x_5\ (b_6 - \frac{f_3}{f_1}b_5) + (x_4 + \frac{1}{2}r_1x_5\ )b_4 + x_3b_3 + (x_2 - \frac{1}{2}r_3x_5\ )b_2$

$+(x_1 + \frac{1}{2}r_1x_2 - \frac{1}{2}r_2x_3 - \frac{1}{2}r_3x_4 - \frac{1}{4}r_1r_3x_5\ )b_1 > .$

Par suite,

$$\begin{aligned} a(F,x) &= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3(r_3 - \frac{1}{2}r_2x_5\ ) + x_6f_6 - \frac{f_3}{f_1}f_5x_5 \\ &+ (x_4 + \frac{1}{2}r_1x_5\ )f_4 + x_3f_3 + (x_2 - \frac{1}{2}r_3x_5\ )f_2 \\ &+ (x_1 + \frac{1}{2}r_1x_2 - \frac{1}{2}r_2x_3 - \frac{1}{2}r_3x_4 - \frac{1}{4}r_1r_3x_5\ )f_1. \end{aligned}$$

2) la sous-algèbre $\mathfrak{g}_1 =< \{b_1, b_2, ..., b_6\} >$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de pas deux.

En outre, l'orbite d'un élément $F = (f_1, ..., f_8) \in \mathfrak{g}^*$ tel que $f_1 \neq 0$ est paramétrisée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(F) &= Ad^*(G)F \\ &= \{f_1b_1^* + \alpha_1b_2^* + \alpha_2b_3^* + \alpha_3b_4^* + \alpha_4b_5^* + \frac{1}{f_1}[\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + f_6f_1 - f_5f_3 - f_4f_2]b_6^* \\ &+ \alpha_5b_7^* + \alpha_6b_8^*, \quad \alpha_1, ..., \alpha_6 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Soit

$$\nu = \alpha b_7^* + \beta b_8^* \in \mathfrak{g}_1^\perp, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $F = (f_1, ..., f_8) \in \mathfrak{g}^*,\ f_1 \neq 0$,

$$F + \nu \in \mathcal{O}(F).$$

Ce qui prouve que l'orbite $\mathcal{O}(F)$ est saturée par $\mathfrak{g}_1$.

Donc, d'après *le paragraphe 2-2,* on peut définir la fonction a pour tout couple $(F,x) = \Big((f_1, f_2, ... f_8), expx_7b_7 \cdot expx_8b_8 \cdot exp(\sum_{i=1}^{6} x_ib_i)\Big)$ appartenant à $\mathfrak{g}^* \times G$ par :

$$\begin{aligned} a(F,x) &= x_7f_7 + x_8f_8 \\ &+ < \sum_{i=1}^{6} f_ib_i{}^*, log[exp(\frac{1}{2}x_7b_7 + \frac{1}{2}x_8b_8) \cdot exp(\sum_{i=1}^{6} x_ib_i) \cdot exp(-\frac{1}{2}x_7b_7 - \frac{1}{2}x_8b_8)] > \\ &= x_7f_7 + x_8f_8 + < \sum_{i=1}^{6} f_ib_i{}^*, x_6b_6 - (x_5 + \frac{1}{2}x_7x_6)b_5 + (x_4 + \frac{1}{2}x_8x_6)b_4 + x_3b_3 \\ &+ x_2b_2 + (x_1 + \frac{1}{2}x_2x_8 - \frac{1}{2}x_3x_7)b_1 > . \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} a(F,x) &= x_7f_7 + x_8f_8 + x_6f_6 - (x_5 + \frac{1}{2}x_7x_6)f_5 + (x_4 + \frac{1}{2}x_8x_6)f_4 \\ &+ x_3f_3 + x_2f_2 \\ &+ (x_1 + \frac{1}{2}x_2x_8 - \frac{1}{2}x_3x_7)f_1. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que cette définition de a coïncide avec l'application :

$$\mathfrak{g}^* \times G \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(F, x = expx_7b_7 \cdot expx_8b_8 \cdot exp\sum_{i=1}^{6} x_ib_i)) \longmapsto \ < F, (x_7b_7 + x_8b_8) \cdot_{C.B.H} \sum_{i=1}^{6} x_ib_i >,$$

où $\cdot_{C.B.H}$ est la loi de Campbell-baker-Hausdorff dans $\mathfrak{g}$.

L'application $(\ )^{\tilde{}}$ construite à l'aide de cette fonction a est évidement un isomorphisme de S(G) vers S($\mathfrak{g}^*$).

III

LES CONVOLUTEURS DE SCHWARTZ POUR LES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

1- Introduction:

Soient G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe; $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Notons $S(G)$ l'espace de Schwartz de G et $S^*(G)$ l'espace des distributions tempérées sur G.

Si f et T sont respectivement des éléments de $S(G)$ et de $S^*(G)$, le produit de convolution de T par f est donné par

$$T * f(x) = < T \ , \ l_x \underline{f} >, \quad x \in G,$$

où

$$l_x f(y) = f(x^{-1} \cdot y) \quad et \quad \underline{f}(x) = f(x^{-1}), \quad x, y \in G.$$

De même, pour $x \in G$ et $f \in S(G)$, posons

$$r_x f(y) = f(y.x), \quad y \in G.$$

Alors, on définit le produit de convolution de f par T par:

$$f * T(x) = < T \ , \ r_x \underline{f} >, \quad x \in G.$$

1-1- Définitions:

i) On appelle multiplicateur à gauche (respectivement à droite) de $S(G)$, tout endomorphisme continu D de $S(G)$ tel que pour toutes fonctions f et g dans $S(G)$, on ait

$$D(f) * g = D(f * g), \text{ (respectivement } f * D(g) = D(f * g)).$$

ii) Soit T une distribution de $S(G)$. On dit que T est un convoluteur à gauche (respectivement à droite) si $T * f$ (respectivement $f * T$) est dans $S(G)$, pour tout f appartenant à $S(G)$.

La distribution T est dite un convoluteur bilatère (ou simplement un convoluteur), si elle est à la fois un convoluteur à gauche et à droite.

1-2- Proposition: [31]

Pour tout multiplicateur à gauche (respectivement à droite) D de $S(G)$, il existe un unique convoluteur à gauche (respectivement à droite) T_D tel que pour tout f appartenant à $S(G)$, on ait

$$D(f) = T_D * f \text{ (respectivement } D(f) = f * T_D).$$

Soit f appartenant à $S(G)$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathfrak{g}} f(\exp X) e^{-2\pi i <\xi, X>} dX.$$

De la même façon, si F est un élément de S($\mathfrak{g}^*$), sa transformée de Fourier est définie sur $\mathfrak{g}$ par

$$\hat{F}(X) = \int_{\mathfrak{g}^*} F(\xi) e^{-2\pi i <\xi, X>} d\xi.$$

La transformée de Fourier $\hat{T}$ d'une distribution tempérée T est définie sur S($\mathfrak{g}^*$) par

$$< \hat{T} \, , \, F > = < T \, , \, \hat{F} \circ log > .$$

Notons $\mathcal{C}S(G)$, l'ensemble des convoluteurs sur G; c'est à dire, l'ensemble des distributions D appartenant à $S^*(G)$ telles que pour tout f dans $S(G)$, $D * f$ et $f * D$ sont des fonctions de Schwartz sur G.

Dans le cas abélien, Schwartz a montré dans [39] qu'un élément D de $S^*(\mathbb{R}^n)$ est un convoluteur si et seulement si $\hat{D}$ est une fonction C^∞ à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées. Dans [24], le lecteur trouvera aussi une caractérisation analogue des multiplicateurs pour $L^p(G)$, lorsque G est un groupe abélien, localement compact.

Corwin a donné la caractérisation suivante des multiplicateurs à gauche d'un groupe de Lie nilpotent:

1-4- Théorème:[6]

Soit T une distribution tempérée sur le groupe de Lie nilpotent G. Les assertions suivantes sont équivalentes:

i) T est un convoluteur à gauche;

ii) pour tout entier k, il existe une fonction intégrable $u = u_k$, vérifiant

$$\int_G (1 + \| x \|^2)^k \mid u(x) \mid dx < \infty \qquad (*)$$

et un entier R tels que

$$T * f = u * (1 - \Delta)^R * f, \quad \forall\, f \in S(G)$$

où Δ désigne le laplacien relativement à une base $(X_1, ..., X_n)$ de l'algèbre de Lie de G:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} X_i^2;$$

iii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un nombre fini d'opérateurs différentiels invariants à gauche $D_1, ..., D_r$ et des fonctions $u_1, ..., u_r$, vérifiant $(*)$, tels que

$$T = \sum_{j=1}^{r} D_j u_j.$$

Dans ce chapitre, nous donnons une approche de la démonstration de la conjecture de Howe [18], caractérisant les convoluteurs centraux pour $S(G)$. Rappelons que ce résultat a été prouvé par Jenkins [21]. Ensuite, nous donnons une condition suffisante pour qu'une fonction appartenant à $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ soit la transformée de Fourier au sens de distributions d'un convoluteur. Une condition plus simple sera donnée dans le cas du groupe de Heisenberg. Enfin, nous citons un exemple d'un convoluteur pour l'espace de Schwartz du groupe de Heisenberg et qui n'est pas déterminé par une fonction.

2- Convoluteurs centraux pour $S(G)$:

2-1- Définition:

Soit D un endomorphisme continu de $S(G)$. On dit que D est un multiplicateur central pour $S(G)$ si D est à la fois un multiplicateur à gauche et à droite.

Soit f une fonction de Schwartz sur G et x un élément de G. On désigne par $l_x f$ et $r_x f$ les translatés respectives de f à gauche et à droite par x.

2-2- Proposition:

Soit D un multiplicateur pour $S(G)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

i) D est un multiplicateur central pour $S(G)$.

ii) Pour tout f dans $S(G)$ et pour tout x appartenant à G,

$$D(l_x f) = l_x D(f) \text{ et } D(r_x f) = r_x D(f).$$

Démonstration:

Soient D un multiplicateur central pour $S(G)$ et $(g_n)_n$ une unité approchée de $S(G)$; c'est à dire, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, g_n est une fonction de classe C^∞ à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{n}$ et telle que $\int_G g_n(x)dx = 1$. On a alors,

$$\lim_{n\to\infty} f * g_n = \lim_{n\to\infty} g_n * f = f \quad \forall f \in S(G).$$

Soit x dans G. Alors,

$$D(l_x f * g_n) = l_x f * D(g_n) = l_x(f * D(g_n)) = l_x D(f * g_n).$$

Comme D est continu, on a par passage à la limite que $D(l_x f) = l_x D(f)$.
De même,

$$D(r_x(g_n * f)) = D(g_n * r_x f) = D(g_n) * r_x f = r_x D(g_n * f).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on a alors, $D(r_x f) = r_x D(f)$.

Réciproquement, soit D un multiplicateur pour $S(G)$ qui commute avec les translations à gauche et à droite par des éléments de G. Alors, pour toutes fonctions f et g appartenant à $S(G)$,

$$\begin{aligned} f * D(g) &= \int_G f(y) l_y D(g) dy = \int_G f(y) D(l_y g) dy = \int_G D(f(y) l_y g) dy \\ &= D(\int_G f(y) l_y g dy) \text{ (car D est un endomorphisme continu)} \\ &= D(f * g). \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} D(f) * g &= \int_G D(f)(y) l_y g dy = \int_G g(y) r_{y^{-1}} D(f) dy = \int_G g(y) D(r_{y^{-1}} f) dy \\ &= D(\int_G g(y) r_{y^{-1}} f dy) \\ &= D(f * g). \end{aligned}$$

■

Soit T une distribution tempérée sur G. Rappelons que le produit de convoluion à gauche (respectivement à droite) de T par une fonction de Schwartz f est défini par

$$T * f(x) = < T, l_x \underline{f} > \quad \text{(respectivement } f * T(x) = < T, r_{x^{-1}} \underline{f} >), x \in G.$$

2-3- Définition:

Un convoluteur T pour $S(G)$ est dit central, si pour toutes fonctions f et g de $S(G)$,

$$T * (f * g) = (T * f) * g = f * (T * g).$$

2-4- Remarque:

Soient D un multiplicateur pour $S(G)$ et T_D le convoluteur associé.
Le convoluteur T_D est central si et seulement si D est un multiplicateur central.

En effet, si D est un multiplicateur central, alors,

$$\begin{aligned} T_D * (f * g) = D(f * g) = D(f) * g &= (T_D * f) * g \\ &= f * D(g) = f * (T_D * g). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que T_D est un convoluteur central. La réciproque est aussi trivialement vérifiée. En outre, un convoluteur T est central si et seulement si

$$< T \ , \ l_x r_x f > = < T \ , \ f >, \ \ \forall x \in G, \ \forall f \in S(G).$$

En effet, T est un convoluteur central si et seulement si l'endomorphisme D_T de $S(G)$ défini par

$$D_T(f) = T * \underline{f}, \ \ f \in S(G)$$

est un multiplicateur central. Soient donc $x \in G$ et $f \in S(G)$. On a

$$\begin{aligned} < T \ , \ l_x r_x f > &= D_T(l_x r_x f)(e) \\ &= l_x r_x(D_T(f))(e) \text{ (d'après la proposition 2-2)} \\ &= D_T(f)(e) \\ &=< T \ , \ f >, \end{aligned}$$

où e désigne l'élément neutre de G.

Soit π une représentation unitaire irréductible sur G et T un convoluteur pour $S(G)$. L'espace $\pi(S(G))$ est algébriquement irréductible sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$ [18]. L'opérateur $\pi(T)$ défini sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par:

$$\pi(T)\Big(\pi(f)\xi\Big) = \pi(T * f)\xi.$$

est un endomorphisme continu de $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

2-5- Proposition:

Si T est un convoluteur central, alors,

$$\pi(T) = \hat{T}(\pi) I_{\mathcal{H}_\pi^\infty}$$

où $\hat{T}(\pi)$ appartient à $\mathbb{C}$ et $I_{\mathcal{H}_\pi^\infty}$ désigne l'identité de $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

Démonstration:

Soient f et g dans $S(G)$. On a:

$$\begin{aligned} \pi(T)\pi(f)\Big(\pi(g)\xi\Big) &= \pi(T * f)\Big(\pi(g)\xi\Big) \\ &= \pi\Big((T * f) * g\Big)(\xi) \\ &= \pi\Big(f * (T * g)\Big)(\xi) \\ &= \pi(f)\pi(T)\Big(\pi(g)\xi\Big). \end{aligned}$$

L'opérateur $\pi(T)$ commute alors avec $\pi(f)$ pour tout f appartenant à $S(G)$. Donc, d'après le lemme de Schur,

$$\pi(T) = \hat{T}(\pi) I_{\mathcal{H}_\pi^\infty}.$$

■

Dans la suite, nous munissons $\hat{G}$ de sa topologie usuelle. Rappelons que cette topologie est décrite de la façon suivante:

Une suite $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\hat{G}$ converge vers π si et seulement si pour tout ξ dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$, il existe une suite $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_{\pi_k}^\infty$ telle que

$$\lim_{k \to \infty} < \pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k >=< \pi(f)(\xi) \ , \ \xi > \ \forall f \in S(G).$$

2-6- Proposition:

Soit T un convoluteur central pour $S(G)$. L'application,

$$\begin{aligned} \hat{G} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \pi &\longmapsto \hat{T}(\pi) \end{aligned}$$

est continue pour la topologie de $\hat{G}$ décrite plus haut.

Démonstration:

Soient $\pi \in \hat{G}$ et $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\hat{G}$ qui converge vers π. Choisissons une fonction f dans $S(G)$ et un élément ξ de $\mathcal{H}_\pi^\infty$ tels que

$$< \pi(f)\xi \ , \ \xi > \neq 0.$$

Il existe donc une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{H}_{\pi_k}^\infty$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} < \pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k > = < \pi(f)(\xi) \ , \ \xi > .$$

En outre,

$$\begin{aligned} < \pi_k(T * f)\xi_k \ , \xi_k > &= < \pi_k(T)\pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k > \\ &= \hat{T}(\pi_k) < \pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k > . \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\hat{T}(\pi_k) = \frac{< \pi_k(T * f)\xi_k \ , \xi_k >}{< \pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k >}.$$

En faisant tendre k vers l'infini, on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \hat{T}(\pi_k) &= \lim_{k\to\infty} \frac{< \pi_k(T * f)\xi_k \ , \xi_k >}{< \pi_k(f)(\xi_k) \ , \ \xi_k >} \\ &= \frac{< \pi(T * f)\xi \ , \xi >}{< \pi(f)(\xi) \ , \ \xi >} \\ &= \frac{< \pi(T)\pi(f)\xi \ , \ \xi >}{< \pi(f)\xi \ , \ \xi >} \\ &= \hat{T}(\pi). \end{aligned}$$

■

Soient maintenant ξ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ une polarisation de ξ. Notons P, le sous-groupe de G, $P := \exp \mathfrak{p}$. Nous définissons sur $S(G)$, l'opérateur Q_ξ par

$$Q_\xi(f)(\exp X) = \int_{\mathfrak{p}} f(\exp(X + m))e^{-2\pi i < \xi, m >} dm, \quad f \in S(G) \text{ et } X \in \mathfrak{g}.$$

On sait que ([39]) si T est un convoluteur pour $S(\mathbb{R}^n)$, alors,

$$(T * f)\hat{} = \hat{T}\hat{f}, \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n),$$

où $(\ )\hat{}$ désigne la transformée de Fourier usuelle sur $S(\mathbb{R}^n)$.

Si T est un convoluteur central pour $S(G)$ où G est un groupe de Lie nilpotent, ce résultat n'est plus vrai. La proposition suivante a été prouvée dans [21]. Nous la redémontrons ici par un calcul direct.

2-7- Propsition:

Soient ξ appartenant à $\mathfrak{g}^*$ et χ_ξ, le caractère sur P défini par:

$$\chi_\xi(\exp m) = e^{-2\pi i<\xi,m>}.$$

Soit π, la représentation de G induite de P par χ_ξ. Alors, pour tout convoluteur central T pour $S(G)$ et pour toute fonction f dans $S(G)$,

$$\hat{T}(\pi)Q_\xi(f) = Q_\xi(f * T) = Q_\xi(T * f).$$

Démonstration:

Soit $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de l'unité. Alors,

$$\lim_{k\to\infty} \pi(T * g_k)(Q_\xi(f)) = \lim_{k\to\infty} Q_\xi(T * g_k * f).$$

On en déduit que

$$\pi(T)Q_\xi(f) = Q_\xi(T * f).$$

Comme $\pi(T) = \hat{T}(\pi)$, le résultat s'ensuit.

■

On peut regarder $\hat{T}$ comme une fonction sur $\mathfrak{g}^*$ définie par

$$\hat{T}(l) := \hat{T}(\pi_l)$$

qui est donc une fonction continue, Ad^*-invariante sur $\mathfrak{g}^*$.

2-8- Proposition:

Soit T un convoluteur central pour $S(G)$. Alors, $\hat{T}$ est une fonction C^∞ en tout point $l \in \mathfrak{g}^*$, en position générale.

Démonstration:

Soient $l \in \mathfrak{g}^*$, en position générale, $\mathcal{O}$ l'orbite de l sous l'action coadjointe et π l'élément de $\hat{G}$ correspondant. Alors, d'après la *proposition 3-5* du chapitre précédent, on a que pour toutes fonctions f et g dans $S(G)$,

$$tr\pi\Big((T * f) * g^*\Big) = \int_{\mathcal{O}} (T * f)\tilde{}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l').$$

D'autre part, T est un convoluteur central. Par conséquent,

$$\begin{aligned} tr\pi\Big((T * f) * g^*\Big) &= tr\pi\Big(T * (f * g^*)\Big) = \hat{T}(l)tr\pi(f * g^*) \\ &= \hat{T}(l)\int_{\mathcal{O}} \tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') \\ &= \int_{\mathcal{O}} \hat{T}(l')\tilde{f}(l')\overline{\tilde{g}(l')}d\mu_\pi(l') \end{aligned}$$

(car $\hat{T}$ est une fonction Ad^*-invariante).

D'où pour tout élément l de $\mathfrak{g}^*$ en position générale et pour toute fonction f dans $S(G)$,

$$(T * f)\tilde{}(l) = \hat{T}(l)\tilde{f}(l).$$

Comme pour tout $f \in S(G)$, l'application $\tilde{f}$ et de classe C^∞ en tout point l de $\mathfrak{g}^*$ en position générale, le résultat s'ensuit.

■

Remarques:

1) Soit T un convoluteur central et g un élément de $S(G)$. ALors,

$$\begin{aligned} < T, \underline{g} >= T * g(e) &= \int_{\hat{G}} tr\pi(T * g)d\mu(\pi) = \int_{\hat{G}} \hat{T}(\pi) \int_{\mathcal{O}_\pi} \hat{g}(\xi)d\mu_\pi(\xi)d\mu(\pi) \\ &= \int_{\hat{G}} \int_{\mathcal{O}_\pi} \hat{T}(\xi)\hat{g}(\xi)d\mu_\pi(\xi)d\mu(\pi) = \int_{\mathfrak{g}^*} \hat{T}(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Ceci prouve que cette définition de $\hat{T}$ coïncide avec celle de la transformée de Fourier usuelle d'une distribution. C'est à dire, si F appartient à S($\mathfrak{g}^*$) et $\hat{F}$ désigne l'élément de $S(G)$ défini par

$$\hat{F}(\exp X) = \int_{\mathfrak{g}^*} F(X)e^{-2\pi i<\xi X>}d\xi \ \ \forall X \in \mathfrak{g},$$

alors, $\hat{T}$ est défini par

$$< \hat{T}, F >=< T, \hat{F} > \ \ \forall F \in S(\mathfrak{g}^*).$$

2) Rappelons qu'une distribution $T \in S^*(G)$ est dite bi-invariante si

$$< T \ , \ l_x r_x f >=< T \ , \ f >, \ \ \forall f \in S(G), \ \forall x \in G$$

et qu'une distribution $D \in S^*(\mathfrak{g}^*)$ est dite Ad^*-invariante si

$$< D \ , \ f \circ Ad^* x >=< D \ , \ f >, \ \ \forall f \in S(\mathfrak{g}^*), \ \forall x \in G.$$

Alors, $T \in S^*(G)$ est bi-invariante si et seulement si $\hat{T} \in S^*(\mathfrak{g}^*)$ est Ad^*-invariante.

En effet, soient $f \in S(G)$ et $x \in G$. Alors, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$\begin{aligned} (l_x r_x f)\hat{}(\xi) &= \int_{\mathfrak{g}} f(x^{-1} \exp Y x)e^{-2\pi i<\xi, \ Y>}dY \\ &= \int_{\mathfrak{g}} f(\exp(Adx.Y))e^{-2\pi i<\xi, \ Y>}dY \\ &= \int_{\mathfrak{g}} f(\exp Y)e^{-2\pi i<Ad^* x\cdot\xi, \ Y>}dY \\ &= \hat{f}(Ad^* x \cdot \xi). \end{aligned}$$

Supposons que le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ soit de dimension ≥ 2 et soit ϑ, un sous-espace de $\mathfrak{z}$ de codimension 1. On identifie dans ce qui suit le sous-espace ϑ au sous-groupe fermé $\exp\vartheta$. A un élément f de $S(G)$, on associe la fonction f_ϑ définie sur G/ϑ par:

$$f_\vartheta(x) = \int_\vartheta f(x \cdot v)dv.$$

Notons que si x est un élément de G, alors $(l_x f)_\vartheta = l_x(f_\vartheta)$ et $(\underline{f})_\vartheta = (f_\vartheta)_\_$.

2-9- Lemme:

L'application

$$f \longmapsto f_\vartheta$$

est une surjection de $S(G)$ sur $S(G/\vartheta)$.

Démonstration:

Il est clair que si f est une fonction de Schwartz sur G, la fonction f_ϑ est dans $S(G/\vartheta)$. Réciproquement, soient g dans $S(G/\vartheta)$ et g_1 l'élément de $S(\vartheta)$ tel que

$$\hat{g}_1(0) = \int_\vartheta g_1(v)dv = 1.$$

Alors, $f = ((g \circ \exp) \otimes g_1) \circ log$ est un élément de S(G) et

$$\begin{aligned} f_\vartheta(\exp X) &= \int_\vartheta f(\exp(X+V))dV = \int_\vartheta ((g \circ \exp) \otimes g_1)(X+V)dV \\ &= \int_\vartheta g(\exp X) g_1(V)dV \\ &= g(\exp X). \end{aligned}$$

■

A une distribution tempérée T de G, on fait correspondre la distribution tempérée T_ϑ de G/ϑ définie par:

$$< T_\vartheta, f_\vartheta > = \int_\vartheta < T, l_v f > dv.$$

2-10- Proposition:

Soit T un convoluteur central pour $S(G)$. Alors.

i) T_ϑ est un convoluteur central pour $S(G/\vartheta)$.

ii) $(T_\vartheta)\hat{} = \hat{T}/_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^*} = \hat{T}/_{\vartheta^\perp}$.

Démonstration:

i) Soient f et g deux éléments de $S(G)$. Alors. $f_\vartheta * g_\vartheta = (f * g)_\vartheta$ (les produits de convolution étant respectivement dans $S(G/\vartheta)$ et dans $S(G)$).

En effet, si x appartient à G/ϑ, on a

$$\begin{aligned}
(f_\vartheta * g_\vartheta)(x) &= \int_{G/\vartheta} f_\vartheta(y) g_\vartheta(y^{-1}\cdot x)d\dot{y} \\
&= \int_{G/\vartheta}\Big(\int_\vartheta f(y\cdot v)dv \int_\vartheta g(y^{-1}\cdot x\cdot u)du\Big)d\dot{y} \\
&= \int_\vartheta\Big(\int_{G/\vartheta}\int_\vartheta f(y\cdot v)g(v^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x\cdot u)d\dot{y}du\Big)dv \\
&\text{(en effectuant un changement de variable } u\longmapsto v^{-1}\cdot u) \\
&= \int_\vartheta\Big(\int_{G/\vartheta}\int_\vartheta f(y\cdot v)g(v^{-1}\cdot y^{-1}\cdot x\cdot u)d\dot{y}dv\Big)du \\
&= \int_\vartheta\int_G f(y)g(y^{-1}\cdot x\cdot u)dydu \\
&= \int_\vartheta (f*g)(x\cdot v)dv \\
&= (f*g)_\vartheta.
\end{aligned}$$

Soient T un convoluteur pour $S(G)$ et $f\in S(G)$. Alors, pour tout x appartenant à G,

$$\begin{aligned}
(T_\vartheta * f_\vartheta)(x) &= < T_\vartheta, l_x(f_\vartheta)_{_} > = < T_\vartheta, (l_x\underline{f})_\vartheta > \\
&= \int_\vartheta < T, l_v l_x\tilde{f} > dv = \int_\vartheta (T*f)(v\cdot x)dv.
\end{aligned}$$

D'où

$$T_\vartheta * f_\vartheta = (T*f)_\vartheta.$$

De même,

$$f_\vartheta * T_\vartheta = (f*T)_\vartheta.$$

Supposons maintenant que T soit central. On a

$$\begin{aligned}
(T_\vartheta * f_\vartheta)*g_\vartheta &= (T*f)_\vartheta * g_\vartheta = \Big((T*f)*g\Big)_\vartheta \\
&= \Big(T*(f*g)\Big)_\vartheta = T_\vartheta * (f*g)_\vartheta = T_\vartheta*(f_\vartheta * g_\vartheta).
\end{aligned}$$

Par suite, T_ϑ est un convoluteur central pour $S(G/\vartheta)$.

ii) D'après la définition de T_ϑ, on a

$$\begin{aligned}
< T_\vartheta, f_\vartheta > &= \int_\vartheta < T, l_v f > dv = \int_\vartheta < \hat{T}, (l_{\exp V} f)\hat{} > dV \\
&= \int_\vartheta\int_{\mathfrak{g}^*} \hat{T}(\eta)(l_{\exp V}f)\hat{}(\eta)d\eta dV \\
&= \int_\vartheta\int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^*\times\vartheta^*} \hat{T}(\xi+\nu)(l_{\exp V}f)\hat{}(\xi+\nu)d\dot{\xi}d\nu dV \\
&= \int_\vartheta\int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^*\times\vartheta^*} \hat{T}(\xi+\nu)\int_{\mathfrak{g}} f(\exp(Y+V))e^{-2\pi i<\xi+\nu, Y>}dYd\dot{\xi}d\nu dV.
\end{aligned}$$

En identifiant $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}/\vartheta \times \vartheta$, il vient que,

$$< T_\vartheta, f_\vartheta >= \int_\vartheta \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^* \times \vartheta^*} \hat{T}(\xi+\nu) \int_{\mathfrak{g}/\vartheta \times \vartheta} f(\exp(Y+U+V)) e^{-2\pi i<\xi+\nu, Y+U>} d\dot{Y} dU d\dot{\xi} d\nu dV$$

$$= \int_\vartheta \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^* \times \vartheta^*} \hat{T}(\xi+\nu) [\int_{\mathfrak{g}/\vartheta \times \vartheta} f(\exp(Y+V)) e^{-2\pi i<\xi, Y>} e^{-2\pi i<\nu, U>} d\dot{Y} dU] d\dot{\xi} d\nu dV$$

(en effectuant un changement de variable $V \longmapsto V - U$)

$$= \int_\vartheta \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^* \times \mathfrak{g}/\vartheta} [\int_{\vartheta \times \vartheta^*} \hat{T}(\xi+\nu) f(\exp(Y+V)) e^{-2\pi i<\nu, U>} dU d\nu] e^{-2\pi i<\xi, Y>} d\dot{Y} d\dot{\xi} dV.$$

En appliquant la formule d'inversion de Fourier, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} < T_\vartheta, f_\vartheta > &= \int_\vartheta \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^* \times \mathfrak{g}/\vartheta} \hat{T}(\xi) f(\exp(Y+V)) e^{-2\pi i<\xi, Y>} d\dot{Y} d\dot{\xi} dV \\ &= \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^* \times \mathfrak{g}/\vartheta} \hat{T}(\xi)(f_\vartheta)(\exp Y) e^{-2\pi i<\xi, Y>} d\dot{Y} d\dot{\xi} \\ &= \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^*} \hat{T}(\xi)(f_\vartheta)\hat{}(\xi) d\dot{\xi}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$< T_\vartheta, f_\vartheta >=< (T_\vartheta\hat{}, (f_\vartheta)\hat{} >= \int_{(\mathfrak{g}/\vartheta)^*} (T_\vartheta)\hat{}(\xi)(f_\vartheta)\hat{}(\xi) d\dot{\xi}.$$

En identifiant ces deux égalités, on en déduit alors que

$$(T_\vartheta)\hat{} = \hat{T}/(\mathfrak{g}/\vartheta)^* = \hat{T}/\vartheta^{\perp}.$$

■

2-11- Théorème:[21]

Soit $T \in S^*(G)$. Alors, T est un convoluteur central pour $S(G)$ si et seulement si $\hat{T}$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$, Ad^*-invariante et à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées.

3- Une condition suffisante pour qu'une fonction soit la transformée de Fourier d'un convoluteur:

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et considérons la suite déscendante

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}], \quad i = 1, 2...$$

Soit r le rang de $\mathfrak{g}$; c'est à dire l'entier tel que $\mathfrak{g}_r \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{r+1} = \{0\}$. Ce qui implique que si $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_r$ est inclus dans $\mathfrak{z}$.

Soient ϑ_0 un supplémentaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ et pour tout $i = 1, ..., r-1$, choisissons un sous-espace ϑ_i de $\mathfrak{g}_i$, supplémentaire de $\mathfrak{g}_{i+1}$. Posons aussi $\vartheta_r = \mathfrak{g}_r$. On a alors,

$$\mathfrak{g} = \vartheta_0 \oplus \vartheta_1 \oplus \cdots \oplus \vartheta_{r-1} \oplus \vartheta_r. \tag{3.1}$$

Pour $j \in \{1, ..., r\}$, soit n_j la dimension de ϑ_j et $\mathfrak{B}_j = (b_1^j, ..., b_{n_j}^j)$ une base de ϑ_j.

Soit $G := (\mathfrak{g}, C.B.H)$. Si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$, la multiplication de X par Y à l'aide de la loi de Cambel-Baker-Hausdorff est

$$X \cdot Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + ... \tag{3.2}$$

Remarquons que si $U \in \mathfrak{z}$, alors, pour tous X,Y dans $\mathfrak{g}$,

$$X.(Y + U) = X.Y + U.$$

Soient

$$X = \sum_{i=0}^{r} X_i \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=0}^{r} Y_i,$$

deux éléments de $\mathfrak{g}$, tels que, pour tout $i = 0, ..., r$, X_i et Y_i sont dans ϑ_i, alors,

$$X \cdot Y = X_0 + Y_0 + \sum_{i=1}^{r} X_i + Y_i + C_i(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1}). \tag{3.3}$$

où $C_i(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1})$ appartient à ϑ_i, $i = 1, ..., r$ et pour tous $i, j \in \{1, ..., r\}$, C_i est un polynôme de degré $i - j$ en X_j (respectivement en Y_j).

Dans la suite, on convient que pour $i = 0$, $C_i(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1}) = 0$.

En vertu de (3.1), un élément ξ de $\mathfrak{g}^*$ s'écrit sous la forme: $\xi = (\xi_0, ..., \xi_r)$ avec $\xi_i \in \vartheta_i^*$. Pour tout $j = 0, ..., r$, si $X_j \in \vartheta_j$, $\xi_j \in \vartheta_j^*$ et $\alpha_j = (\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,n_j}) \in \mathbb{N}^{n_j}$, on note:

$$X_j^{\alpha_j} = X_{j,1}^{\alpha_{j,1}} \cdots X_{j,n_j}^{\alpha_{j,n_j}} \quad \text{et} \quad \xi_j^{\alpha_j} = \xi_{j,1}^{\alpha_{j,1}} \cdots \xi_{j,n_j}^{\alpha_{j,n_j}}$$

où $X_{j,k}$ (respectivement $\xi_{j,k}$) est la $k^{\text{ième}}$ composante de X_j (respectivement de ξ_j) dans une base $\mathfrak{B}_j$ de ϑ_j choisie arbitrairement (respectivement dans sa base duale).

3-1- Proposition :

Soient φ une fonction définie sur $\mathfrak{g}^*$ de classe C^∞ et f appartenant à $S(G)$. Alors, pour tous $(\alpha_0,\ldots,\alpha_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times \ldots \times \mathbb{N}^{n_r}$, on a

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_0^{\alpha_0}\cdots\xi_r^{\alpha_r} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi$$
$$=\sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)P_j(X_0,\ldots,X_{r-1})D_jf(Y)e^{-2\pi i<\xi,X.Y>}dY\,d\xi$$

où les P_j sont des polynômes en $X_0,\ldots,X_{r-1}$, tels que pour tout $i=0,\ldots,r-1$, le degré de P_j en X_i est inférieur ou égal à $\sum_{k=1}^{r-i} k \mid \alpha_{r-(i+k)} \mid$.

Démonstration:

i) Nous montrons en premier lieu, que pour tout $i=1,\ldots,r$,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-i}^{\alpha_{r-i}} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)P_j(X_0,\ldots,X_{i-1})D_jf(Y)\times$$
$$\times\, e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi$$

avec $P_j(X_0,\ldots,X_{i-1})$ sont des polynômes de degrés $\leq (i-j)\mid \alpha_{r-i}\mid$ en X_j $(j=0,\ldots,i-1)$.

Nous raisonnons par récurrence sur i. Comme ξ_r est dans $\mathfrak{z}^*$, d'après (3.2), on a que

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_r^{\alpha_r} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi = \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\partial_{Y_r}^{\alpha_r} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi.$$

De même, si $i=1$,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-1}^{\alpha_{r-1}} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)P_j(X_0)D_jf(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY\,d\xi$$

où les $P_j(X_0)$ sont des polynômes en X_0 de degrés $\leq\mid\alpha_{r-1}\mid$ et les D_j sont des opérateurs différentiels à cœfficients polynomiaux sur $\mathfrak{g}$.

Soit alors $i\in\{2,\ldots,r\}$. On a que

$$\partial_{Y_{r-i-1,k}} <\xi\,,\,X\cdot Y> = \partial_{Y_{r-i-1,k}} \sum_{j=0}^{r} <\xi_{r-j}, X_{r-j}+Y_{r-j}+C_{r-j}(X_0,\ldots,X_{r-j-1},Y_0,\ldots,Y_{r-j-1})>.$$

Comme pour tout $j>i$, $C_{r-j}(X_0,\ldots,X_{r-j-1},Y_0,\ldots,Y_{r-j-1})$ ne dépend pas de Y_{r-i-1}, il vient que,

$$\partial_{Y_{r-i-1,k}} <\xi\,,\,X\cdot Y> = \xi_{r-i-1,k}+\sum_{j=0}^{i} <\xi_{r-j}, \partial_{Y\,r-i-1,k}C_{r-j}(X_0,\ldots,X_{r-j-1},Y_0,\ldots,Y_{r-j-1})>.$$

En outre, pour tout $j = 0, ..., i$,

$$\partial_{Y\,r-i-1,k} C_{r-j}(X_0, ..., X_{r-j-1}, Y_0, ..., Y_{r-j-1})$$

ne dépend pas de $X_{i-j+1}, ..., X_{r-j-1}$. Posons

$$P_j(Y, X_0, ..., X_{i-j}) = \partial_{Y\,r-i-1,k} C_{r-j}(X_0, ..., X_{r-j-1}, Y_0, ..., Y_{r-j-1}).$$

Alors, P_j est un polynôme de degré $i-j+1$ en X_0, $i-j$ en X_1,...,1 en X_{i-j}.

Par conséquent,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\partial Y_{r-i-1,k}\, f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi = \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-i-1,k} f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi$$

$$+ \sum_{j=0}^{i} \varphi(\xi) < \xi_{r-j}, P_j(Y, X_0, ..., X_{i-j}) \acute{f}(Y) e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi.$$

Fixons un j appartenant à $\{0, ..., i\}$ et des coordonnées $\xi_{r-j,p}$ de ξ_{r-j} et $P_{j,p}$ de P_j. Alors,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-j,p}\; P_{j,p}\;(Y, X_0, ..., X_{i-j}) f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X.Y>} dY d\xi$$

$$= \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi) P_{j,p}\;(Y, X_0, ..., X_{i-j}) \partial_{Y\,r-i-1,p}\; f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi) < \xi_{r-K}\;,\; Q_k(Y, X_0, ..., X_{j-k}) > \; P_{j,p}\,(Y, X_0, ..., X_{i-j}) f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi.$$

Les polynômes Q_k , $k = 0, ..., j-1$, sont de degrés $i-k+1$ en X_0, $i-k-1$ en X_1,..., 1 en X_i.

Le degré maximal qui correspond à $k = 0$ est alors, $i+1$ en X_0, $i-1$ en X_1,..., 1 en X_i.

Donc, en passant de ξ_{r-j} à ξ_{r-k}, $(k = 0, ..., j-1)$, le polynôme reste toujours de degré inférieur ou égal à $i+1$ en X_0, i en X_1,...,1 en X_i. D'où,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-i-1,k}\; f(Y) e^{-2\pi i<\xi, X.Y>} dY d\xi = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi) P_j(X_0, ..., X_i) D_j f(Y) \times$$
$$\times\, e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi,$$

avec P_j est un polynôme de degré i+1 en X_0,...,1 en X_i et Dj un opérateur différentiel sur G à cœfficients polynomiaux.

En recommençant cette opération, on en déduit que

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_{r-i-1}^{\alpha_{r-i-1}} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi =$$

$$\sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)P_j(X_0,...,X_i)D_j\ f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi$$

où les D_j sont des opérateurs différentiels à cœfficients polynomiaux et pour tout j, P_j est un polynôme de degré $(i+1-k)\mid \alpha_{r-i-1}\mid$ en X_k pour tout $k\in\{0,...,i\}$.

ii) En vertu de i), il s'ensuit que,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\xi_0^{\alpha_0}\cdots\xi_r^{\alpha_r} f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)P_j(X_0,...,X_{r-1})D_j\ f(Y)\times$$
$$\times\, e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi$$

avec P_j est un polynôme de degré inferieur ou égal à

$$\mid \alpha_{r-1}+2\alpha_{r-2}...+r\alpha_0\mid \ \text{ en } X_0,$$

$$\mid \alpha_{r-2}+2\alpha_{r-3}...+(r-1)\alpha_0\mid \ \text{ en } X_1,$$

$$...$$

$$\mid \alpha_0\mid \ \text{ en } X_{r-1}.$$

Autrement dit, pour tout $i=0,...,r-1$, le degré de P_j en X_i est inferieur ou égal à $\mid \sum_{k=1}^{r-i} k\alpha_{r-(i+k)}\mid$.

■

3-2- Proposition :

Soient φ une fonction définie sur $\mathfrak{g}^*$ de classe C^∞ et f appartenant à $S(G)$. Notons, $D_\varphi * f$, l'application définie sur G par

$$D_\varphi * f(X) = \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi\ ,\quad X\in G.$$

Alors, pour tout $i=0,...,r$ et pour tous multi-indices $\beta_0,...,\beta_i$,

$$X_0^{\beta_0}...X_i^{\beta_i}D_\varphi * f(X) = \sum \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_i}^{\gamma_i}\varphi(\xi)f_\gamma(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dYd\xi.$$

La somme est sur $\gamma=(\gamma_0,...,\gamma_i)$ avec

$$\mid\gamma_j\mid\le\mid \beta_j+\sum_{p=1}^{i-j}p.\beta_{j+p}\mid,\quad j=0,...,i$$

et les fonctions f_γ sont dans $S(G)$.

Démonstration:

Nous allons montrer la proposition par récurrence sur i.
Soient X_0 appatenant à ϑ_0, β_0 dans $\mathbb{N}^{n_0}$ et $X_{0,k}$ la $k^{ième}$ composante de X_0 dans la base $\mathfrak{B}_0$. on a que

$$X_{0,k}\ D_\varphi * f(X) = \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_{0,k}}\ \varphi(\xi)\underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi$$
$$+\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)Y_{0,k}\ \underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi.$$

Il est clair alors que

$$X_0^{\beta_0}D_\varphi * f(X) = \sum_{|\delta_0|\leq|\beta_0|}\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial^{\gamma_0}\xi_0\varphi(\xi)Y_0^{\delta_0}\underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi.$$

Supposons que la proposition soit vraie jusqu'au rang i. On a donc

$$X_{i+1}^{\beta_{i+1}}.X_0^{\beta_0}...X_i^{\beta_i}D_\varphi * f(X) = \sum\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_i}^{\gamma_i}\varphi(\xi)X_{i+1}^{\beta_{i+1}}f_\gamma\ (Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi$$

(la somme est sur $\mid \gamma_j \mid\leq\mid \beta_j + \sum_{p=1}^{i-j} p\beta_{j+p}\mid$)

$= \sum\sum\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0+\gamma_0'}...\partial_{\xi_i}^{\gamma_i+\gamma_i'}\partial_{\xi_{i+1}}^{\gamma_{i+1}}\varphi(\xi)f_{\gamma,\gamma'}\ (Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi$. La deuxième somme est sur $\mid \gamma_{i+1}\mid\leq\mid \beta_{i+1}\mid$ et pour tout $j = 0,...,1$, $\mid \gamma_j' \mid\leq (i+1-j)\mid \beta_{i+1}\mid$. Donc, pour tout $j = 0,...,1$,

$$\mid \gamma_j + \gamma_j' \mid\leq\mid \beta_j + \sum_{p=1}^{i-j} p\beta_{j+p} + (i-j+1)\beta_{i+1}\mid$$
$$\leq\mid \beta_j + \sum_{p=1}^{i-j+1} p\beta_{j+p}\mid.$$

On en déduit alors que

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)X_0^{\beta_0}...X_r^{\beta_r}f(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi = \sum\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_r}^{\gamma_r}\varphi(\xi)f_\gamma(Y)e^{-2\pi i<\xi,X\cdot Y>}dY d\xi$$

où la somme est sur $\mid \gamma_r \mid\leq\mid \beta_r\mid$ et pour $j = 0,...,r-1$, $\mid \gamma_j \mid\leq\mid \beta_j + \sum_{p=1}^{r-j} p\beta_{j+p}\mid$.

■

Soit maintenant φ une fonction définie sur $\mathfrak{g}^*$ de classe C^∞ à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées.

3-3- Théorème:

Supposons que la fonction φ vérifie la condition $(\mathcal{C})$ suivante:
pour tout $(\beta_0, ..., \beta_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times ... \times \mathbb{N}^{n_r}$, il existe $(\alpha_0, ..., \alpha_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times ... \times \mathbb{N}^{n_r}$ tels que quelques soient $\gamma_0, ..., \gamma_{r-1}$ vérifiant

$$| \gamma_j \leq | \sum_{k=1}^{r-j} k \mid \alpha_{r-(j+k)} + \sum_{p=1}^{r-j-k} p\alpha_{r-(j+k+p)} |, \quad j = 0, ..., r-1,$$

on ait: $(\mathcal{C})$

$$| \partial_{\xi_0}^{\beta_0+\gamma_0} ... \partial_{\xi_{r-1}}^{\beta_{r-1}+\gamma_{r-1}} \partial_{\xi_r}^{\beta_r} \varphi(\xi) | \leq C \mid \xi_0^{\alpha_0} \mid ... \mid \xi_r^{\alpha_r} \mid .$$

Alors, la distribution tempérée D_φ, définie sur $S(G)$ par

$$< D_\varphi \ , \ f > = < \varphi \ , \ \hat{f} >, \quad f \in S(G),$$

est un convoluteur pour $S(G)$.

Démonstration:

Soient f une fonction de Schwartz sur G et X un élément de G. Alors,

$$\begin{aligned} D_\varphi * f(X) &= < D_\varphi, l_X \underline{f} > = < \varphi, (l_X \underline{f})\hat{} > \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \int_G \varphi(\xi) l_X \underline{f}(Y) e^{-2\pi i <\xi, Y>} dY d\xi \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \int_G \varphi(\xi) \underline{f}(Y) e^{-2\pi i <\xi, X\cdot Y>} dY d\xi \\ &= \int_{\mathfrak{g}^*} \int_G \frac{\varphi(\xi)}{\xi_0^{\alpha_0} ... \xi_r^{\alpha_r}} \xi_0^{\alpha_0} ... \xi_r^{\alpha_r} \underline{f}(Y) e^{-2\pi i <\xi, X\cdot Y>} dY d\xi. \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 1, il vient que

$$D_\varphi * f(X) = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*} \int_G \frac{\varphi(\xi)}{\xi_0^{\alpha_0} ... \xi_r^{\alpha_r}} P_j(X_0, ..., X_{r-1}) D_j \tilde{f}(Y) e^{-2\pi i <\xi, X\cdot Y>} dY d\xi$$

avec degré de P_j en $(X_i) = \beta_i \leq | \sum_{k=1}^{r-i} k\alpha_{r-(i+k)} |, \ i = 0, ..., r-1$.

Mais, en vertu de la *proposition 3-2*, on a

$$D_\varphi * f(X) = \sum_j \int_{\mathfrak{g}^*} \int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0} ... \partial_{\xi_{r-1}}^{\gamma_{r-1}} \frac{\varphi(\xi)}{\xi_0^{\alpha_0} ... \xi_r^{\alpha_r}} D_j \ \underline{f}(Y) e^{-2\pi i <\xi, X\cdot Y>} dY d\xi$$

avec

$$\begin{aligned} | \gamma_j | &\leq \beta_j + \sum_{p=1}^{r-j} p\beta_{j+p} | \\ &\leq | \sum_{k=1}^{r-j} k\alpha_{r-(j+k)} + \sum_{p=1}^{r-j} p \sum_{k=1}^{r-j-p} k\alpha_{r-(j+p+k)} | \\ &\leq \sum_{k=1}^{r-j} k \mid \alpha_{r-(j+k)} + \sum_{p=1}^{r-j} kp\alpha_{r-(j+k+p)} | . \end{aligned}$$

Si la fonction φ vérifie la condition $(\mathcal{C})$, alors,

$$| \partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_{r-1}}^{\gamma_{r-1}}\varphi(\xi) | \leq C | \xi_0^{\alpha_0} | ... | \xi_r^{\alpha_r} | .$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \varphi(\xi)\underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>}dY d\xi$$

est bornée indépendamment de X.

Pour déduire que $D_\varphi * f$ est une fonction de Schwartz sur G, il suffit de vérifier que pour tout $\beta = (\beta_0, ..., \beta_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times ... \times \mathbb{N}^{n_r}$,

$$\sup_{X \in \mathfrak{g}} | X^\beta D_\varphi * f(X) | < \infty, \quad X^\beta = X_0^{\beta_0}...X_r^{\beta_r}.$$

Or d'après la proposition 3-2,

$$X_0^{\beta_0}...X_r^{\beta_r} D_\varphi * f(X) = \sum \int_{\mathfrak{g}^*}\int_G \partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_r}^{\gamma_r}\varphi(\xi)\underline{f}(Y)e^{-2\pi i<\xi, X\cdot Y>}dY d\xi.$$

De plus, si φ vérifie la condition $(\mathcal{C})$, la fonction

$$\partial_{\xi_0}^{\gamma_0}...\partial_{\xi_r}^{\gamma_r}\varphi, \quad (\gamma_0, ..., \gamma_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times ... \times \mathbb{N}^{n_r},$$

vérifie aussi cette condition ce qui prouve que $D_\varphi * f$ est dans $S(G)$.

■

3-4- Corollaire:

Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ et supposons qu'il existe un entier k, tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on ait

$$| D^\alpha\varphi(\xi) | \leq (1 + \| \xi \|^2)^k, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Alors, φ définit un convoluteur pour $S(G)$.

4- Le groupe de Heisenberg:

Le groupe de Heisenberg H_n est le groupe d'éléments $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni d'une loi de multiplication définie par

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}[< x_1, y_2 > - < x_2, y_1 >])$$

où $< , >$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

On peut réaliser H_n comme étant l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n+2$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & I_n & y^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x = (x_1, ..., x_n) \text{ et } y^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ est engendrée par les éléments $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, Z$ avec

$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z.$$

(Les autres crochets sont ou bien nuls ou bien donnés par une antisymétrie ou une linéarité).

Nous remarquons alors que H_n muni de la loi de multiplication définie plus haut n'est autre que l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}_n$ munie de la formule de Campbell-Backer-Hausdorff. Pour plus de détails concernant le groupe de Heisenberg qui est un exemple typique d'un groupe de Lie nilpotent de pas deux et dont le centre est de dimension 1, nous envoyons le lecteur à [10],[37] et [38].

Soient $\varphi \in L^2(\mathfrak{h}_n^*)$ et T_φ la distribution tempérée de H_n définie par

$$< T_\varphi, f > = < \varphi, \hat{f} > \quad \forall f \in S(H_n)$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathfrak{h}_n} f(\exp(X)) e^{-2\pi i < \xi, X >} dX, \quad \xi \in \mathfrak{h}_n{}^*.$$

Soit x un élément de H_n. Alors,

$$T_\varphi * f(x) = < T_\varphi, l_x \underline{f} > = < \varphi, (l_x \underline{f})\hat{} > = \int_{\mathfrak{h}_n^*} \varphi(\xi)(l_x \underline{f})\hat{}(\xi) d\xi.$$

Dans la suite, nous identifions $\mathfrak{h}_n$ et H_n à $\mathbb{R}^{2n+1}$, $x = (x_1, x_2, t)$ (respectivement $y = (y_1, y_2, s)$) désignera un élément de H_n et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda)$ désignera un élément de $\mathfrak{h}_n^*$.

On a:

$$\begin{aligned} T_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi)(l_x \underline{f})(y) e^{-2\pi i < \xi, y >} dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi) \underline{f}(y) e^{-2\pi i < \xi, x \cdot y >} dy d\xi \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi) \underline{f}(y) e^{-2\pi i [< \xi_1, x_1 + y_1 > + < \xi 2, x_2 + y_2 > + \lambda(s + t + \frac{1}{2}(< x_1, y_2 > - x_2, y_1 >)]} dy d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi) \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \underline{f}(y) e^{-2\pi i (< y_1, \xi_1 - \frac{1}{2}\lambda x_2 > + < y_2, \xi_2 + \frac{1}{2} l x_1 > + \lambda s)} dy \Big) e^{-2\pi i < \xi, x >} d\xi.$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} T_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi) \hat{\underline{f}}(\xi_1 - \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 + \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) e^{-2\pi i < \xi, x >} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi_1 + \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) \hat{\underline{f}}(\xi) e^{-2\pi i < \xi, x >} d\xi. \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $C^{\infty, k}_{s, mod}(\mathfrak{h}_n^*)$ l'ensemble des fonctions φ appartenant à $C^\infty(\mathfrak{h}_n^*)$ et vérifiant la condition $(\mathcal{C}')$ suivante :

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, il existe $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$, $q_1 + q_2 <\mid \alpha_1 + \alpha_2 \mid$ et une constante positive C tels que pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda) \in \mathfrak{h}_n^*$,

($\mathcal{C}$')

$$| D^\alpha \varphi(\xi) | \leq C(1+ \| \xi \|^2)^k (1+ \| \xi_1 \|^2)^{\frac{q_1}{2}} (1+ \| \xi_2 \|^2)^{\frac{q_2}{2}} (1 + \lambda^2)^{\frac{q_3}{2}}.$$

Dans la suite, nous supposons que $n = 1$. Le calcul est analogue pour les dimensions supérieures.

4-1- Lemme:

Pour tout élément φ de $C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$, pour toute fonction f dans $S(H_1)$, et pour tout multi-indice α, la fonction $(T_{D^\alpha\varphi} * f)$ est bornée.

Démonstration:

Nous raisonnons par récurrence sur $| \alpha |$. Comme φ, $\partial_{\xi_1}\varphi(\xi_1, \xi_2, \lambda)$, $\partial_{\xi_2}\varphi(\xi_1, \xi_2, \lambda)$ et $\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\varphi(\xi_1, \xi_2, \lambda)$ sont majorées par un polynôme en λ, $T_{\partial_{\xi_1}\varphi} * f$, $T_{\partial_{\xi_2}\varphi} * f$ et $T_{\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}\varphi} * f$ sont bornées.

Soient φ un élément de $C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$ et $\alpha = (i, j, l) \in \mathbb{N}^3$. Il existe alors, un entier q tel que

$$\varphi_{\alpha,q} = \frac{D^\alpha \varphi}{(1 + \xi_1^2)^{\frac{i-1}{2}} (1 + \xi_2^2)^{\frac{j-1}{2}} (1 + \lambda^2)^q}$$

appartienne à $C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$.

Soient x appartenant à H_1 et f dans $S(H_1)$. Alors,

$$\begin{aligned}(T_{D^\alpha\varphi} * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha\varphi(\xi_1 + \frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2 - \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)\underline{\hat{f}}(\xi)e^{-2\pi i<\xi,x>}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{\alpha,q}(\xi_1 + \frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2 - \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)(1 + (\xi_1 + \frac{\lambda}{2}x_2)^2)^{\frac{i-1}{2}}(1 + (\xi_2 - \frac{\lambda}{2}x_1)^2)^{\frac{j-1}{2}} \times \\ &\qquad \times (1 + \lambda^2)^q \underline{\hat{f}}(\xi)e^{-2\pi i<\xi,x>}d\xi.\end{aligned}$$

Pour montrer que $T_{D^\alpha\varphi} * f$ est bornée pour toute fonction f dans $S(H_1)$, il suffit de montrer que

$$B_{\alpha,q}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_{\alpha,q}(\xi_1 + \frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2 - \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)x_2^{i-1}x_1^{j-1}\underline{\hat{f}}(\xi)e^{-2\pi i<\xi,x>}d\xi$$

est bornée. En outre,

$$B_{\alpha,q}(x) = \sum_{\substack{m+n=j-1\\p+k=i-1}} C_\alpha(m,n,p,k) \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{\xi_1}^m\partial_{\xi_2}^p\varphi_{\alpha,q}(\xi_1 + \frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2 - \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)\partial_{\xi_1}^n\partial_{\xi_2}^k\underline{\hat{f}}(\xi)e^{-2\pi i<\xi,x>}d\xi.$$

Comme $\varphi_{\alpha,q} \in C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$, on a d'après l'hypothèse de récurrence, que pour toute fonction $f \in S(H_1)$, la fonction,

$$T_{\partial_{\xi_1}^m\partial_{\xi_2}^p\varphi_{\alpha,q}} * f$$

est bornée pour tout $(m,p) \in \mathbb{N}^2, m \leq j-1, n \leq i-1$. Ce qui prouve que $B_{\alpha,q}$ est bornée. Par suite, $T_{D^\alpha\varphi} * f$ est bornée.

■

4-2- Théorème:

Pour tout entier k, pour toute fonction φ appartenant à $C^{\infty,k}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$, la distribution T_φ est un convoluteur pour $S(H_1)$.

Démonstration:

Supposons que $k = 0$. Soient $\varphi \in C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$ et $f \in S(H_1)$. Alors, pour tout $x = (x_1, x_2, t) \in H_1$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^3$,

$$x^\alpha D^\beta(T_\varphi * f)(x) = \sum_{\gamma,\nu} \int_{\mathbb{R}^3} D^\gamma \varphi(\xi_1 + \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda)\hat{f}_\nu(\xi) e^{-2\pi i<\xi,x>} d\xi$$

où les fonctions f_ν sont dans $S(H_1)$.

Comme pour tout $\beta \in \mathbb{N}^3$, pour tout $f \in S(H_1)$, $T_{D^\beta\varphi} * f$ est bornée, on en déduit que $T_\varphi * f$ est dans $S(H_1)$.

Supposons que $k > 0$ et soit φ un élément de $C^{\infty,k}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$. Alors, la fonction

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{(1+ \| \xi \|^2)^k}$$

appartient à $C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$.

Par conséqent,

$$T_{\varphi_k} * f \in S(H_1), \quad \forall\, f \in S(H_1).$$

Soit $x \in H_1$. On a:

$$\begin{aligned} T_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_k(\xi_1 + \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda)(1+ \| (\xi_1 + \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) \|^2)^k \hat{f}(\xi) \times \\ &\qquad \times e^{-2\pi i<\xi,x>} d\xi \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha \varphi_k(\xi_1 + \frac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \frac{1}{2}\lambda x_1, \lambda)\hat{f}_\beta(\xi) e^{-2\pi i<\xi,x>} d\xi. \end{aligned}$$

Comme φ_k est dans $C^{\infty,0}_{s,mod}(\mathfrak{h}_1^*)$, $D^\alpha\varphi_k$ l'est aussi pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ et définit donc d'après le lemme précédent, un convoluteur pour $S(H_1)$. Il s'ensuit alors que $T_\varphi * f$ appartient à $S(H_1)$ et par suite, T_φ est un convoluteur de Schwartz pour H_1.

■

4-3- Exemple:

Soit φ la foncion définie sur $\mathfrak{h}_1^*$ par

$$\varphi(\xi) = e^{i||\xi||^2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3.$$

Il est clair que φ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{h}_1^*$ et à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées. Cependant, elle ne vérifie pas la condition (C') du théorème précédent. Nous allons montrer qu'elle ne définit pas un convoluteur pour $S(H_1)$. En effet, supposons que φ définisse un convoluteur D_φ et soient $f \in S(H_1)$ et $X = (x_1, x_2, t) \in H_1$. Alors,

$$\begin{aligned}
D_\varphi * \underline{f}(X) &= \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi) f(Y) e^{-i<\xi, X\cdot Y>} dY d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi_1 - \frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2 + \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)\hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda t)} d\xi_1 d\xi_2 d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} e^{i[(\xi_1 - \frac{\lambda}{2}x_2)^2 + (\xi_2 + \frac{\lambda}{2}x_1)^2 + \lambda^2]} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda t)} d\xi_1 d\xi_2 d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\frac{\lambda^2}{4}(x_1^2 + x_2^2)} e^{i||\xi||^2} e^{i\lambda(\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda t)} d\xi_1 d\xi_2 d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\lambda^2}{4}(x_1^2 + x_2^2)} [\int_{\mathbb{R}^2} e^{i||\xi||^2} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda) e^{-i\lambda(\xi_1(x_1 + x_2) + \xi_2(x_2 - x_1))} d\xi_1 d\xi_2] e^{-i\lambda t} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{\lambda^2}{4}(x_1^2 + x_2^2)} [e^{i||\xi||^2}\hat{f}]\,\hat{}^{\,1,2}(\lambda(x_1 + x_2), \lambda(x_2 - x_1), \lambda) e^{-i\lambda t} d\lambda.
\end{aligned}$$

Soit f appartenant à $S(H_1)$ telle que

$$\hat{f}(\xi) = e^{-i||\xi||^2} e^{-\pi||\xi||^2}, \quad \xi \in \mathfrak{h}_1^*.$$

Alors,

$$[e^{i||\xi||^2}\hat{f}]\,\hat{}^{\,1,2}(X) = e^{-\pi||X||^2}$$

et

$$[e^{i||\xi||^2}\hat{f}]\,\hat{}^{\,1,2}(\lambda(x_1 + x_2), \lambda(x_2 - x_1), \lambda) = e^{-\pi\lambda^2[2x_1^2 + 2x_2^2 + 1]}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(D_\varphi * \underline{f})\,\hat{}^{\,3}(x_1, x_2, 0) &= \int_{\mathbb{R}} (D_\varphi * \underline{f})(x_1, x_2, t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\frac{\lambda^2}{4}(x_1^2 + x_2^2)} e^{-\pi\lambda^2[2x_1^2 + 2x_2^2) + 1]} e^{-i\lambda t} d\lambda dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par suite, $D_\varphi * \underline{f}$ n'est pas dans $S(H_1)$.

5- Un convoluteur qui n'est pas donné par une fonction:

Nous avons vu dans le paragraphe précédent des exemples de convoluteurs de Schwartz qui sont définis par des fonctions. La question qu'on se pose est la suivante:
Est ce que, comme dans le cas abélien, tout convoluteur d'un groupe de Lie nilpotent est déterminé par une fonction?
La réponse est négative comme on va le voir dans l'exemple suivant suggéré par D. Müller [34].

Considérons le groupe de Heisenberg H_1 muni de la structure définie dans *le paragraphe précédent*. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞, à support compact et nulle sur un voisinage de zéro. Soit T la distribution tempérée sur H_1, définie par

$$< T \ , \ f >:= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(0,0,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda, \quad f \in S(H_1).$$

Alors, T est un convoluteur pour $S(H_1)$. En effet, soient $X = (x_1, x_2, t) \in H_1$ et $f \in S(H_1)$. On a

$$\begin{aligned} T * f(X) &=< T \ , \ l_X\underline{f} >= \int_{\mathbb{R}} (l_X\underline{f})\,\hat{}\,(0,0,\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{H_1} \underline{f}(X^{-1}\cdot Y)e^{-i<(0,0,\lambda)\ ,\ Y>}\varphi(\lambda)dYd\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{H_1} \underline{f}(Y)e^{-i<(0,0,\lambda)\ ,\ X\cdot Y>}\varphi(\lambda)dYd\lambda. \end{aligned}$$

Le groupe H_1 s'identifie à $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$\begin{aligned} T * f(X) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \underline{f}(y_1,y_2,s)e^{-i\lambda(s+t+\frac{1}{2}x_1y_2-\frac{1}{2}x_2y_1)}\varphi(\lambda)dy_1dy_2dsd\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \underline{f}(y_1,y_2,s)e^{i\frac{\lambda}{2}x_2y_1}dy_1e^{-i\frac{\lambda}{2}x_1y_2}dy_2e^{-i\lambda s}ds\varphi(\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\underline{f}}(-\frac{\lambda}{2}x_2, \frac{\lambda}{2}x_1, \lambda)\varphi(\lambda)e^{-i\lambda t}d\lambda. \end{aligned}$$

Il est clair alors que,

$$T * f \in S(H_1), \quad \forall\ f \in S(H_1).$$

Ce qui prouve que T est un convoluteur à gauche. Un calcul analogue montre que T est aussi un convoluteur à droite.
Soient $f_1 \in S(\mathbb{R}^2)$ telle que $\hat{f}_1(0,0) = 1$ et $f_2 \in S(\mathbb{R})$. Posons: $f = f_1 \otimes f_2$. On a donc:

$$< T \ , \ f >= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_2(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda.$$

Supposons que T soit défini par une fonction ψ, alors

$$< T \ , \ f >=< \psi \ , \ \hat{f} >= \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi_1,\xi_2,\lambda)\hat{f}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2]\hat{f}_2(\lambda)d\lambda.$$

En identifiant ces deux égalités, il vient que

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi_1,\xi_2,\lambda)\hat{f}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2, \quad \forall f_1 \in S(\mathbb{R}^2).$$

Donc
$$\forall\ (\xi_1,\xi_2,\lambda) \in \mathbb{R}^3,\quad \psi(\xi_1,\xi_2,\lambda) = \varphi(\lambda).$$
On en déduit donc que:
$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda) \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,\quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad \forall f_1 \in S(\mathbb{R}^2).$$
Pa conséquent, la fonction φ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

IV

GROUPES DE LIE VARIABLES

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques notions sur les groupes de Lie variables, (voir [25], [26], [27]). Ensuite, nous rappelons un théorème de calcul fonctionnel sur les groupes de Lie nilpotents variables. Puis, nous définissons les multiplicateurs (centraux) de Schwartz pour les groupes de Lie nilpotents variables et nous généralisons la conjecture de Howe caractérisant cette classe de multiplicateurs.

1- Définition:

Soient $\mathfrak{g}$ un espace vectoriel réel de dimension n et M un espace topologique séparable au sens de Hausdorff et localement compact. Nous disons que $(\mathfrak{g}, M)$ est une algèbre de Lie variable de dimension n si:

1) Pour tout m appartenant à M, il existe une application bilinéaire

$$[\ ,\ ]_m : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

telle que $\mathfrak{g}_m := (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_m)$ soit une algèbre de Lie.

2) L'application:

$$\begin{aligned} M \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (m, x, y) &\longmapsto [x, y]_m \end{aligned}$$

est continue.

$(\mathfrak{g}, M)$ est dite une algèbre de Lie nilpotente (respectivement exponentielle, résoluble...) variable si quelque soit m dans M, $\mathfrak{g}_m$ est une algèbre de Lie nilpotente (respectivement exponentielle, résoluble,...).

Dans la suite, nous nous intéressons aux algèbres de Lie nilpotentes variables. Nous supposons aussi que l'espace M soit compact.

Soit G l'espace localement compact $\mathfrak{g}$. Pour m appartenant à M, nous définissons sur G une loi de multiplication de groupes notée $\cdot_m$ en utilisant la loi de Campbell-Baker-Hausdorff:

$$x \cdot_m y = x + y + \frac{1}{2}[x, y]_m + ...; \quad x, y \in G.$$

Donc, $G_m := (G, \cdot_m)$ est un groupe de Lie nilpotent, ce qui définit une structure de groupe de Lie nilpotent variable (G, M).

Pour tout m appartenant à M, la mesure de Haar sur le groupe G_m est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$.

2- L'espace de Schwartz $S(G, M)$:

Nous définissons l'espace $L^1(G, M)$ par:

$$L^1(G,M) = \{f \text{ définie sur M} \times G \text{ telle que } \quad | f |_1 = \sup_m \int_G | f(m,x) | \, dx < \infty\}.$$

Par analogie avec l'espace de Schwartz $S(G)$, l'espace de Schwartz $S(G, M)$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions f sur $M \times G$, vérifiant:

1) La fonction f est continue et l'application:

$$m \longmapsto p_m f := f(m,.),$$

définie par

$$p_m \ f(x) = f(m, x), \quad x \in G,$$

est à support compact dans M.

2) Pour tout $m \in M$, $p_m f \in S(G_m)$.

Soient f et g deux éléments de $S(G, M)$. le produit de convolution de f par g est défini par

$$(f * g)(m, x) = \int_g f(m, y) g(m, y^{-1_m} \cdot_m x) dy$$

où $y^{-1_m} = -y$ est l'inverse de y.

3- Calculs foncionnels:

Soit (G, M) un groupe de Lie nilpotent variable. Nous allons munir $S(G, M)$ d'une famille de semi-normes qui font de cet espace un espace de Fréchet pour le produit de convolution. L'espace M étant supposé compact.

Considérons un voisinage U de l'origine, compact et symétrique et pour m appartenant à M, soit τ_m la fonction sous-additive définie sur G par

$$\tau_m(0) = 0 \text{ et } \quad \tau_m(x) = min\{k / x \in U^{k(\cdot_m)}\} \text{ si } x \neq 0$$

où

$$U^{k(\cdot_m)} = \underbrace{U \cdot_m \dots \cdot_m U}_{k \text{ fois}}.$$

Il est clair alors que $\tau_m(x \cdot_m y) \leq \tau_m(x) + \tau_m(y); \quad x, y \in G$.

Posons

$$w_m(x) = 1 + \tau_m(x), \quad m \in M \text{ et } x \in G.$$

3-1- Lemme:

Soit U la boule unité de $\mathfrak{g}$. Alors,

1) Pour tout $\alpha \geq 0$, pour tout $m \in M$ et pour tout $x, y \in G$

$$w_m^\alpha(x) \geq 1 \ , \ w_m^\alpha(-x) = w_m^\alpha(x) \ , \ w_m^\alpha(x \cdot_m \ y) \leq w_m^\alpha(x) w_m^\alpha(y)$$

et

$$w_m(x) \leq 2 + \parallel x \parallel .$$

2) Notons $\mid U^{k(\cdot_m)} \mid$ la mesure de Haar de $U^{k(\cdot_m)}$. Alors, il existe un entier N et une constante positive C tels que

$$\mid U^{k(\cdot_m)} \mid \leq C(1+k)^N, \ \forall m \in M \ et \ k \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration:

1) Les premières affirmations sont évidentes. Soient alors (m, x) dans $M \times G$ et montrons que $w_m(x) \leq 2 + \parallel x \parallel$.

Si $\parallel x \parallel \leq 1$, $x \in U$ et donc $w_m(x) = 2$. Supposons alors que $\parallel x \parallel \geq 1$. Soit p l'entier strictement positif tel que

$$\parallel x \parallel - 1 < p \leq \parallel x \parallel .$$

Posons $u = \frac{x}{\parallel x \parallel} \in U$. Comme $\parallel (\parallel x \parallel - p)u \parallel = \parallel x \parallel - p < 1$, $(\parallel x \parallel - p)u \in U$.
Ce qui prouve que

$$\begin{aligned} x &= (p + \parallel x \parallel - p)u \\ &= pu \cdot_m (\parallel x \parallel - p)u \in U^{(p+1)(\cdot_m)}. \end{aligned}$$

D'où $\tau_m(x) \leq p + 1 \leq \parallel x \parallel + 1$ et par suite $w_m(x) = 1 + \tau_m(x) \leq 2 + \parallel x \parallel$.

2) Soit $m \in M$. On appelle m-idéal de $\mathfrak{g}$, un sous-espace $\mathfrak{h}(m)$ de $\mathfrak{g}$ qui est un idéal de $\mathfrak{g}_m$.

Désignons par $\mathfrak{B}_m = (e_1(m), ..., e_n(m))$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que le sous-espace $\mathfrak{g}_i(m)$ engendré par les vecteurs $(e_{i+1}(m), ..., e_n(m))$ soit un m-idéal de $\mathfrak{g}$. Autrement dit, $\mathfrak{B}_m$ est une base de Malcev de $\mathfrak{g}_m$. Alors, si X et Y sont deux éléments de $\mathfrak{g}$ de coordonnées respectives $(x_1(m), ..., x_n(m))$ et $(y_1(m), ..., y_n(m))$ dans la base $\mathfrak{B}_m$,

$$X \cdot_m Y = \sum_{i=1}^{n} [x_i(m) + y_i(m) + P_i(x_1(m), y_1(m), ..., x_{i-1}(m), y_{i-1}(m))] e_i(m) \qquad (4.1)$$

où les P_i sont des polynômes de degrés $\leq n$ déterminés par les structures d'algèbres.

Soit $m \in M$. En se servant des techniques utilisées dans [12], nous allons montrer que

$$\sup_{X \in U^{k(\cdot_m)}} [sup(\mid x_1(m) \mid, ..., \mid x_n(m) \mid)] \leq C(1 + k^R) \qquad (4.2)$$

où C et R sont des constantes qui ne dépendent que de la dimension de $\mathfrak{g}$.

Nous raisonnons par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est abélienne, l'assertion est évidente . Supposons alors que la dimension de $\mathfrak{g}$ soit supérieure à trois et appliquons l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}/_{\mathbb{R}e_n(m)}$. On a

$$\sup_{X \in U^{k(\cdot m)}} [sup(\mid x_1(m) \mid, ..., \mid x_{n-1}(m) \mid)] \leq C(1 + k^\alpha). \tag{4.3}$$

De plus, $P_n(x_1(m), y_1(m), ..., x_{n-1}(m), y_{n-1}(m)) \leq B(m)[1 + sup(\mid x_1(m) \mid, \mid y_1(m) \mid, ..., \mid x_{n-1}(m) \mid, \mid y_{n-1}(m) \mid)]^\beta$, où β est majorée par la dimension de $\mathfrak{g}$ et $B(m)$ dépend des structures d'algèbres. Comme l'application

$$\begin{aligned} M \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (m, x, y) &\longmapsto [x, y]_m \end{aligned}$$

est continue, $B(m)$ est bornée sur M par une constante B.
Posons

$$f(k) = \sup_{m \in M} \sup_{X \in U^{k(\cdot m)}} (\mid x_1(m) \mid, ..., \mid x_n(m) \mid).$$

Soit $X \in U^{k(\cdot m)}$. Il existe alors un élément $X'(m)$ dans $U^{(k-1)(\cdot m)}$ et un élément $X''(m)$ dans U tels que $X = X'(m)._m X''(m)$. D'après l'inégalité (4.2), on a

$$\sup_{X \in U^{(k-1)(\cdot m)}} (\mid x'_1(m) \mid, ..., \mid x'_{n-1}(m) \mid) \leq C_1 \Big(1 + (k-1)^\alpha\Big).$$

En outre,

$$\begin{aligned} \mid x_n(m) \mid &= \mid x'_n(m) + x''_n(m) + P_n(x'_1(m), x''_1(m), ..., x'_{n-1}(m), x''_{n-1}(m) \mid \\ &\leq \mid x'_n(m) \mid + \mid x''_n(m) \mid + B[1 + sup(\mid x'_1(m) \mid, \mid x''_1(m) \mid, ..., \mid x'_{n-1}(m) \mid, \mid x''_{n-1}(m) \mid)]^\beta \\ &\leq \mid x'_n(m) \mid + \mid x''_n(m) \mid + B[1 + C_1 \Big(1 + (k-1)^\alpha\Big)]^\beta. \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que

$$\begin{aligned} \mid x_n(m) \mid &\leq f(k-1) + 1 + B[1 + C_1 \Big(1 + (k-1)^\alpha\Big)]^\beta \\ &\leq C_1 \Big(1 + (k-1)^\alpha\Big) + B[1 + C_1 \Big(1 + (k-1)^\alpha\Big)]^\beta. \end{aligned}$$

En vertu de (4.3), il s'ensuit que

$$f(k) \leq f(k-1) + P(k),$$

où P est un polynôme dont le degré est indépendant de m. Par suite,

$$f(k) \leq f(1) + P(2) + ... + P(k)$$

■

Soit $(X_1, ..., X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Posons

$$D^\alpha = X_1^{\alpha_1} * ... * X_n^{\alpha_n} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Nous munissons $S(G,M)$ de la famille de semi-normes suivantes:

$$\| f \|_{N,p} = [\sup_{m\in M} \int_G w_m^{2N} \sum_{|\alpha|\le N} | D^\alpha * p_m f(x) |^p \, dx]^{\frac{1}{p}}, \quad f \in S(G,M).$$

Alors, pour $f, g \in S(G,M)$, on obtient l'estimation suivante:

$$\| f * g \|_{N,p} \le \| f \|_{N,p} \, \| g \|_{N,1} .$$

Nous voyons donc que ces semi-normes font de l'espace $S(G,M)$ muni du produit de convolution une algèbre de Fréchet involutive.

Soit B une algèbre de Banach involutive. Nous disons qu'une fonction φ opère sur un élément $f \in B$ si la transformée de Gelfand $\hat{f}$ de f associée à la plus petite sous-algèbre de Banach A contenant f est réelle et s'il existe $g \in A$ tel que $\varphi \circ \hat{f} = \hat{g}$. On note $g = \varphi\{f\}$.

Pour $f \in B$, posons

$$e(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(if)^j}{j!}.$$

On suppose que $\| e(nf) \|_B = O(| n |^N)$ quand $| n | \to \infty$. Alors, toute fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact et telle que $\varphi(0) = 0$, opère sur f et

$$\varphi\{f\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) e(\lambda f) d\lambda.$$

3-2- Théorème:[27]

Soit (G,M) un groupe de Lie nilpotent variable. Soit φ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact et telle que $\varphi(0) = 0$. Pour $f = f^* \in S(G,M)$ on a

$$e(\lambda f) \in S(G,M), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad \varphi\{f\} \in S(G,M).$$

Démonstration:

La première partie du théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.1 et du corollaire 2.2 de [19]. Nous montrons alors que $\varphi\{f\} \in S(G,M)$. Soit $f \in S(G,M)$.

$$\begin{aligned} \| \varphi\{f\} \|_{N,p}^p &= \sup_{m\in M} \int_G w_m^{2N} \sum_{|\alpha|\le N} | D^\alpha * p_m(\varphi\{f\})(x) |^p \, dx \\ &= (\frac{1}{2\pi i})^p \sup_{m\in M} \int_G w_m^{2N} \sum_{|\alpha|\le N} | D^\alpha * \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) e(\lambda \, p_m f)(x) d\lambda |^p \, dx. \end{aligned}$$

La fonction φ est à support compact et la fonction $\lambda \longmapsto e(\lambda \, p_m f)$ est continue. En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\| \varphi\{f\} \|_{N,p}^p \le C \sup_{m\in M} \int_G w_m^{2N} \sum_{|\alpha|\le N} | D^\alpha * e(\lambda_0 \, p_m f)(x) d\lambda |^p \, dx,$$

où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et C est une constante positive. Comme $e(\lambda_0 \, p_m f) \in S(G,M)$, le résultat s'ensuit.

■

4- Multiplicateurs de Schwartz pour les groupes de Lie variables:

4-1- Définition:

On appelle multiplicateur à gauche (respectivement à droite) pour $S(G,M)$, tout endomorphisme continu T de $S(G,M)$ vers $S(G,M)$ tel que

$$T(f*g) = T(f)*g \quad (\text{respectivement } T(f*g) = f*T(g)), \quad \forall f,\ g \in S(G,M).$$

Un multiplicateur T pour $S(G,M)$ est dit central s'il est à la fois un multiplicateur à gauche et à droite.

Soient T un multiplicateur central pour $S(G,M)$, m un élément de M fixé et φ une fonction continue sur M. Pour f appartenant à $S(G)$, posons

$$T_\varphi(m)(f) = T(\varphi \otimes f)(m,.).$$

4-2- Proposition:

Soit T un multiplicateur pour $S(G,M)$. Alors, Pour tout $m \in M$ et pour toute fonction φ continue sur M telle que $\varphi(m) = 1$, $T_\varphi(m)$ est un multiplicateur pour $S(G_m)$ qui ne dépend pas de φ.

Démonstration:

Il est clair que $T_\varphi(m)$ est un endomorphisme continu de $S(G,M)$. Montrons que $T_\varphi(m)$ ne dépend pas de φ.

Soit f un élément de $S(G,M)$ tel que $f(m,x) = 0$ pour tout x appartenant à G. Alors,

$$T(f)(m,x) = 0, \quad \forall x \in G.$$

En effet, si $\{g_k\}_k$ est une approximation de l'identité dans $S(G,M)$, alors,

$$\begin{aligned} T(g_k * f)(m,x) &= (T(g_k)*f)(m,x) \\ &= \Big(p_m(T*g_k) *_m p_m f\Big)(x) = 0, \end{aligned}$$

où $*_m$ désigne le produit de convolution dans $S(G_m)$. Par passage à la limite, on a

$$T(f)(m,x) = 0.$$

Soient φ et φ' deux fonctions définies sur M, continues , telles que $\varphi(m) = \varphi'(m) = 1$. Alors, pour tout x appartenant à G,

$$((\varphi - \varphi') \otimes f)(m,x) = 0.$$

Donc,

$$T\Big((\varphi - \varphi') \otimes f\Big)(m,x) = 0.$$

Ce qui prouve que

$$T(\varphi \otimes f)(m,x) = T(\varphi' \otimes f)(m,x)$$

et donc, $T_\varphi(m)$ ne dépend pas de φ.

Montrons maintenant que $T_\varphi(m)$ est un multiplicateur pour $S(G_m)$.
Notons 1, la fonction définie sur M par

$$1(m) = 1, \quad \forall m \in M.$$

Soient f et g deux fonctions de Schwartz sur G_m. Alors,

$$\varphi \otimes (f *_m g) = (\varphi \otimes f) * (1 \otimes g).$$

Par conséqent,

$$\begin{aligned} T_\varphi(m)(f *_m g) &= p_m[T\Big(\varphi \otimes (f *_m g)\Big)] \\ &= p_m[T\Big((\varphi \otimes f) * (1 \otimes g)\Big)] \\ &= p_m[T\Big((\varphi \otimes f)\Big) * (1 \otimes g)] \quad \text{(car T est un multiplicateur pour S(G,M))} \\ &= T_\varphi(m)(f) *_m g. \end{aligned}$$

Par suite, $T_\varphi(m)$ est un multiplicateur pour $S(G_m)$.

■

Dans la suite, on note $T(m)$ au lieu de $T_\varphi(m)$ si φ est une fonction continue sur M telle que $\varphi(m) = 1$.

4-3- Corollaire:

Soit T un multiplicateur pour $S(G, M)$. Alors, pour tout couple (m, x) de $M \times G$ et pour toute fonction f appartenant à $S(G, M)$,

$$T(f)(m, x) = T(m)(p_m f)(x);$$

c'est à dire, pour tout élément m de M,

$$p_m\Big(T(f)\Big) = T(m)(p_m f).$$

En effet, d'après la définition de $T(m)$, on a

$$T(m)(p_m f)(x) = T(\varphi \otimes p_m f)(m, x).$$

Comme

$$(\varphi \otimes p_m f)(x) = \varphi(m) p_m f(x) = f(m, x),$$

on a:

$$T\Big((\varphi \otimes p_m f)\Big)(m, x) = T(f)(m, x).$$

Par suite,

$$T(m)(p_m f) = p_m\Big(T(f)\Big).$$

4-4- Théorème:

Soit T un multiplicateur pour $S(G,M)$. Alors, T est un multiplicateur central si et seulement si pour tout m appartenant à M, $T(m)$ est un multiplicateur central pour $S(G_m)$.

Démonstration:

Soit T un multiplicateur pour $S(G,M)$. Pour toutes fonctions f et g dans $S(G,M)$ et pour tout $m \in M$, on a

$$T(m)(p_m f) = T(m)(p_m g) \Longleftrightarrow p_m(T(f)) = p_m(T(g)).$$

En effet, $p_m(T(f)) = T(m)(p_m f) = T(m)(p_m g) = p_m(T(g))$.

Supposons que pour tout élément m de M, $T(m)$ soit central. Alors,

$$\begin{aligned} T(f*g)(m,x) &= p_m\Big(T(f*g)\Big)(x) \\ &= T(m)(p_m(f*g))(x) \quad \text{(d'après la proposition 2)} \\ &= T(m)(p_m f *_m p_m g))(x). \end{aligned}$$

Comme $T(m)$ est central, il vient que

$$\begin{aligned} T(f*g)(m,x) &= \Big(T(m)(p_m f) *_m p_m g\Big)(x) \\ &= p_m(T(f)) *_m p_m g(x) \\ &= p_m\Big(T(f)*g\Big)(x) \\ &= \Big(T(f)*g\Big)(m,x). \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que T soit central et soient f et g dans $S(G)$. D'après la définition de $T(m)$, on a

$$\begin{aligned} T(m)(f *_m g) &= p_m\Big(T(\varphi \otimes (f *_m g)\Big) \\ &= p_m\Big(T((\varphi \otimes f) * (\varphi \otimes g))\Big) \\ &= p_m\Big(T(\varphi \otimes f) * (\varphi \otimes g)\Big) \\ &\quad \text{(car T est central).} \end{aligned}$$

Mais,

$$p_m[(\varphi \otimes f) * (\varphi \otimes g) = p_m[\varphi \otimes (f *_m g)],$$

il s'ensuit donc que

$$T(m)(f *_m g) = [p_m T(\varphi \otimes f)] *_m p_m(\varphi \otimes g) = T(m)(f) *_m g.$$

■

Soit $m \in M$ et notons Ad^*_m l'application coadjointe dans G_m.

4-5- Corollaire:

Soit ψ une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$. Alors, ψ définit un multiplicateur central pour $S(G,M)$ si et seulement si ψ est une fonction à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées et pour tout $m \in M$, ψ est Ad^*_m-invariante.

REFERENCES

[1] D.Arnal, J.C.Cortet: Nilpotent Fourier transform and applications. *Letters in Mathmatical Physics.* **9**, P. 25-34, (1985).

[2] D. Arnal, S. Gutt: Décomposition de $L^2(G)$ et transformation de Fourier adaptée pour un groupe G nilpotent. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, Paris,* **306**, Série I, P. 25-28, (1988).

[3] N. Bourbaki: Eléments de mathématiques: Groupes et algèbres de Lie. *Herman*, (1972).

[4] I. Brown: Dual topologyof a nilpotent Lie group. *Ann. Sci. École norm. Sup.* , **6**, P. 407-411, (1973).

[5] J.C. Cortet: Thèse, *Dijon*, (1983).

[6] L.Corwin: Tempred distributions on the Heisenberg groups whose convolution with Schwartz class functions are Schwartz class. *Journal of Functional Analysis*; **44**, N° 3, P. 328-347, (1981).

[7] L. Corwin, F. Greenleaf: Representations of nilpotent Lie groups and their applications. *Cambridge University Prees*, Cambridge, New York, Port Chester, (1990).

[8] S. Dhieb: Transformée de Fourier adaptée et semi-norme de Hilbert-Schmidt sur les groupes de Lie nilpotents. *Travaux Mathématiques .C.U. Luxembourg* **VI**, P. 111-128, (1994).

[9] J Dixmier: Algèbres enveloppantes. *Gauthier-Villars, Paris*, (1974).

[10] J.Dixmier: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III. *Canadian J. Math.* **10**, P. 321-348, (1958).

[11] J. Dixmier, P. Malliavan: Factorisation des fonctions et des vecteurs indéfiniment différentiables. *Bull. Soc. Math.* , **102**, P. 305-330, (1978).

[12] J. Dixmier: Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires. *Pub. Math. Inst. Hautes Etudes Scientfiques* , *Paris*, **6**, P. 305-317, (1960).

[13] I. Gohberg, M.G. Krein: Introduction of the theory of linear non-self-adjoint-operators. *Amer. Math . Soc*, **143**, P. 131-133, (1969).

[14] R. Goodman: Analytic and entire vectors for representation of Lie groups, *Transactions of the American Math. Society*, **143**, P. 55-76, (sept. 1969).

[15] P.R. Halmos, V.S. Sunder: Bonded integral operators on L^2-spaces. *Springer, Verlag*, (1978).

[16] S. Helgason: Groups and Geometric Analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions. *Academic Press, Inc*, (1984).

[17] G.Hochschild: The structure of Lie groups. *San Francisco, Holden-Day*, P. 197-208, (1965).

[18] R.Howe: On a connection between nilpotent Lie groups and oscillatory integrals associated to singularities; *Pacific J. Math*, **73**, P. 329-363, (1977).

[19] A. Hulanicki: A functionnal calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups. *Studia Mathematica*, **78**, P. 253-266, (1984).

[20] K.T. Joy: A description of the topology on the dual space of a nilpotent Lie group. *Pacific Journal of Mathematics*, **112**, P. 135-139, (1984).

[21] J.W. Jenkins: A characterization of bi-invariant Schwartz space multipliers on nilpotent Lie groups. *Studia Mathematica*, T. XCII, P. 101-129, (1989).

[22] A.A.Kirillov: Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups. *USPEHI. MATH. NAUK*, **17**, P. 57-110, (1962).

[23] A.A.Kirillov: Mesure de Plancherel pour les groupes de Lie nilpotents. *Funkcional'nyj Analiz*, **vol 1, fasc 4**, P. 84-85, (1967).

[24] R.Larsen: An introduction to the theory of multipliers, *Springer-Verlag* , **175**, (1971).

[25] H.Leptin, J.Ludwig: Variable groups and a proof of Kirillov's conjecture. *Preprint, Universität Bielefeld, Fak. Math. Germany*, (03-1992).

[26] J.Ludwig: On the behaviour of sequences in the dual of a nilpotent Lie group. *Mathematische Annalen*, **287**, P. 239-257, (1990).

[27] J. Ludwig, G. Rosenbaum, J. Samuel: The elements of bonded trace in the C^*-algebra of a nilpotent Lie group. *Inventiones Mathematicae*, **83**, P. 167-190, (1986).

[28] J.Ludwig: On the Hilbert Schmidt Semi-Norms of L^1 of a nilpotent Lie group. *Math.Ann.*, **273**, P. 383-395, (1986).

[29] J.Ludwig: Good ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group. *Math.Z.*, **161**, 195-210, (1978).

[30] J.Ludwig, H. Zahir: On the nilpotent $*-$ Fourier transform. *Letters in Mathmatical Physics*, **30**, P. 22-34, (1994).

[31] J.Ludwig: Les convoluteurs de l'algèbre de Schwartz. *Travaux Mathématiques, C. U. Luxembourg*, **IV**, P. 99-137, (1992).

[32] G.W. Mackey: Induced Representations of locally compact groups I. *Annals of Math.*, Vol 55-56, P. 101-139, (1952).

[33] C.C. Moore, J. Wolf: Square integrable representations of nilpotent Lie groups. *Trans. Amer. Math. Soc*, **185**, P. 445-462, (1973).

[34] D. Müller: Communication personnelle.

[35] R. Penney: Canonical objects in Kirillov theory on nilpotent Lie groups. *Proc. Am. Math. Soc.* **66**, (1977).

[36] L. Pukanszky: Unitary representations of solvable Lie groups. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Paris.* Série 4, P. 457-608, (1971).

[37] L.Pukanszky: Leçons sur les représentations des groupes. *Dunod. Paris*, (1967).

[38] C.Rockland: Hypoellipticity on the Heisenberg group-Representation-Theretic criteria. *Trans. Amer. Math. Society*, **240**, P 1-52, (1978).

[39] L.Schwartz: Théorie des distributions. Tome II. *Hermann, Paris*, (1959).

[40] V.S.Varadarajan: Lie groups, Lie algebras and their Representations. *Prentice-Hall Series in Modern Analysis*, (1974).

[41] M.Vergne: Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble. *Comptes-Rendus de l'Académie des Scienses, Paris* **270**, Série A, P. 704-707, (1970).

[42] M.Vergne: La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **100**, P. 301-335, (1972).