



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

113 81682  
N° d'ordre

S/M 3 95/7

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DE METZ, FACULTE DES SCIENCES  
UFR MATHEMATIQUES, INFORMATIQUE, MECANIQUE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité

SCIENCES DE L'INGENIEUR  
(mention : AUTOMATIQUE)

par

Feng CHU

sujet de la thèse

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>- METZ |            |
| N° inv.                              | 19950125   |
| Cote                                 | S/M 3 95/7 |
| Loc                                  | Magasin    |

## CONCEPTION DES SYSTEMES DE PRODUCTION A L'AIDE DES RESEAUX DE PETRI : VERIFICATION INCREMENTALE DES PROPRIETES QUALITATIVES

Soutenance prévue le 10 Avril 1995 devant le Jury composé de :

M. Pierre LADET  
M. Gérard MOREL

Rapporteurs

M. Jean-Claude GENTINA

Examineurs

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420553 1

# TABLE DES MATIERES

## CHAPITRE I. - INTRODUCTION GENERALE

|                                |   |
|--------------------------------|---|
| 1.1 Motivations .....          | 2 |
| 1.2 Hypothèse de travail ..... | 4 |
| 1.3 Plan de la thèse .....     | 6 |

## CHAPITRE II. - ETAT DE L'ART

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 Introduction .....                                                | 9  |
| 2.2 Définitions de base .....                                         | 9  |
| 2.2.1 Définition des réseaux de Petri .....                           | 9  |
| 2.2.2 Règles de franchissement .....                                  | 11 |
| 2.2.3 Matrice d'incidence et équation fondamentale .....              | 13 |
| 2.3 Propriétés qualitatives et propriétés comportementales .....      | 14 |
| 2.3.1 Propriétés comportementales .....                               | 15 |
| 2.3.1.1 Atteignabilité .....                                          | 15 |
| 2.3.1.2 Bornitude .....                                               | 15 |
| 2.3.1.3 Vivacité et sans blocage .....                                | 16 |
| 2.3.1.4 Réversibilité et états d'accueil .....                        | 18 |
| 2.3.1.5 Persistance .....                                             | 19 |
| 2.3.2 Propriétés qualitatives .....                                   | 19 |
| 2.3.2.1 Vivacité structurelle .....                                   | 20 |
| 2.3.2.2 Répétitivité et consistance .....                             | 20 |
| 2.3.2.3 Bornitude structurelle et conservation .....                  | 21 |
| 2.4 Méthodes d'analyse .....                                          | 23 |
| 2.4.1 Méthodes faisant intervenir l'algèbre linéaire .....            | 24 |
| 2.4.2 Arbre des marquages atteignables et arbre de recouvrement ..... | 26 |
| 2.4.3 Techniques de réduction .....                                   | 29 |
| 2.4.4 Méthodes utilisant les verrous et les trappes .....             | 32 |
| 2.5 Sous-classes de réseaux de Petri .....                            | 34 |
| 2.5.1 Graphes d'événements .....                                      | 34 |
| 2.5.2 Machines à états .....                                          | 35 |
| 2.5.3 Réseaux de Petri à choix libre .....                            | 36 |

|                                                  |    |
|--------------------------------------------------|----|
| 2.5.4 Réseaux de Petri à choix asymétrique ..... | 37 |
| 2.5.5 Réseaux de Petri acycliques .....          | 37 |
| 2.5.6 Réseaux de Petri purs .....                | 38 |
| 2.6 Conclusion.....                              | 40 |

### CHAPITRE III. - VERIFICATION INCREMENTALE DE LA CONSISTANCE ET DE LA CONSERVATION

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 Introduction.....                                                     | 42 |
| 3.2 Une méthode de vérification de la consistance.....                    | 43 |
| 3.2.1 Forme standard dérivée d'une matrice et base des t-invariants ..... | 43 |
| 3.2.2 Une méthode de vérification de la consistance .....                 | 46 |
| 3.3 Ajout et fusion de places .....                                       | 51 |
| 3.3.1 Ajout de places .....                                               | 51 |
| 3.3.1.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé .....     | 51 |
| 3.3.1.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente.....            | 53 |
| 3.3.2 Fusion de places .....                                              | 55 |
| 3.4 Ajout et fusion de transitions .....                                  | 58 |
| 3.4.1 Cas où le réseau existant est consistant.....                       | 58 |
| 3.4.1.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé .....     | 58 |
| 3.4.1.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente.....            | 61 |
| 3.4.2 Cas où le réseau existant n'est pas consistant .....                | 68 |
| 3.4.3 Fusion de transitions .....                                         | 71 |
| 3.5 Ajout d'un sous-réseau de Petri .....                                 | 75 |
| 3.5.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé.....        | 76 |
| 3.5.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente .....             | 78 |
| 3.6 Synthèse des résultats .....                                          | 80 |
| 3.7 Conclusion.....                                                       | 81 |

### CHAPITRE IV. - VERIFICATION INCREMENTALE DE LA BORNITUDE STRUCTURELLE ET DE LA REPETITIVITE

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| 4.1 Introduction.....                                | 83 |
| 4.2 Ajout de places et/ou de transitions .....       | 84 |
| 4.2.1 Réseaux de Petri structurellement bornés ..... | 84 |
| 4.2.2 Réseaux de Petri absolument bornés .....       | 88 |
| 4.3 Fusion de transitions et de places .....         | 91 |
| 4.3.1 Fusion de transitions .....                    | 91 |

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.3.2 Fusion de places .....                                                                 | 93  |
| 4.4 Intégration par des places et recherche du composant structurellement borné maximal..... | 97  |
| 4.4.1 Intégration de deux sous-réseaux en ajoutant des places.....                           | 98  |
| 4.4.2 Recherche du composant structurellement borné maximal.....                             | 100 |
| 4.5 Synthèse des résultats .....                                                             | 101 |
| 4.6 Conclusion.....                                                                          | 102 |

## CHAPITRE V. - VERIFICATION INCREMENTALE DE L'ABSENCE DE BLOCAGE

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 Introduction.....                                                                                     | 104 |
| 5.2 Ajout de transitions .....                                                                            | 106 |
| 5.3 Ajout de places .....                                                                                 | 112 |
| 5.3.1 Détermination des verrous minimaux du réseau.....                                                   | 119 |
| 5.3.2 Détermination de la base des verrous.....                                                           | 121 |
| 5.4 Calcul de la trappe maximale contenue dans un verrou.....                                             | 124 |
| 5.5 Absence de blocage .....                                                                              | 126 |
| 5.5.1 Vérification de l'absence de blocage pour un réseau de Petri ordinaire.....                         | 126 |
| 5.5.2 Recherche de marquages initiaux pour l'absence de blocage .....                                     | 131 |
| 5.6 Vivacité de sous-classes de réseaux de Petri.....                                                     | 136 |
| 5.6.1 Vivacité des réseaux à choix asymétrique.....                                                       | 136 |
| 5.6.2 Vivacité et réversibilité des graphes d'événements augmentés de places de ressources partagées..... | 139 |
| 5.7 Modèles des gammes de fabrication .....                                                               | 150 |
| 5.7.1 Ligne de fabrication .....                                                                          | 151 |
| 5.7.2 Ligne d'assemblage/désassemblage .....                                                              | 151 |
| 5.7.3 Ligne avec conflit .....                                                                            | 152 |
| 5.8 Synthèse des résultats .....                                                                          | 155 |
| 5.9 Conclusion.....                                                                                       | 156 |

## CHAPITRE VI. - CONCLUSION GENERALE

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 6.1 Synthèse du travail.....     | 158 |
| 6.2 Directions de recherche..... | 159 |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| <b>Bibliographie.....</b> | <b>162</b> |
|---------------------------|------------|

# **CHAPITRE I**

## **INTRODUCTION GENERALE**

## 1.1 MOTIVATIONS

Dans un monde où la concurrence s'intensifie, l'augmentation de productivité devient un facteur crucial pour la survie des entreprises. En outre, l'évolution des technologies est de plus en plus rapide. Ces deux tendances exigent qu'un système de production puisse fabriquer une large variété de produits en petites séries. Les systèmes automatisés et flexibles connus sous le nom d'**ateliers flexibles** permettent justement d'atteindre cet objectif grâce à l'intégration de moyens multi-tâches et à l'automatisation des activités.

Un atelier flexible est typiquement un système à événements discrets dont les principales caractéristiques sont les suivantes [DES et al. 94] :

**Parallélisme** : Dans un système de production flexible, plusieurs opérations peuvent être exécutées simultanément;

**Asynchronisme** : Différentes opérations nécessitent des temps d'exécution différents;

**Evolution d'événements** : La fin d'une opération peut conduire à l'initiation de plusieurs nouvelles opérations. L'ordre de ces opérations n'est pas nécessairement unique;

**Conflit** : Il est possible que plusieurs processus demandent une ressource commune en même temps.

Un atelier flexible, qui autorise l'utilisation adéquate des moyens multi-tâches et de multi-ressources, permet effectivement d'augmenter la productivité. En revanche, une mauvaise conception peut engendrer des situations de blocage, c'est-à-dire des situations où aucune opération ne peut plus être exécutée. Par ailleurs, l'initiation simultanée de plusieurs opérations qui demandent une même ressource fait aussi apparaître des situations de conflit. Une résolution inadéquate des phénomènes de conflit non seulement ralentit la production, mais peut aussi conduire à des situations de blocage.

Pour éviter ces types de phénomènes, il faut que le système soit correctement conçu et qu'il soit bien contrôlé. La complexité des systèmes de production flexible rend indispensable le développement d'un outil qui fournit une aide à la conception et à l'analyse, à l'évaluation et au contrôle de ces systèmes. Ceci est précisément l'objectif ultime de notre étude.

Pour atteindre cet objectif, il faut un support puissant qui permette de modéliser correctement les systèmes étudiés. Les réseaux de Petri (que l'on désigne parfois par RdP pour raison de simplification) sont réputés pour leur capacité de répondre à cette demande. De nombreux travaux sont consacrés à l'évaluation et au contrôle des systèmes modélisés par des réseaux de

Petri. Dans notre étude, nous nous concentrons sur l'aspect d'aide à la conception en exploitant la capacité d'analyse des réseaux de Petri.

Un réseau de Petri est un outil à la fois mathématique et graphique. Comme outil mathématique, il permet d'analyser les propriétés du système de production et de caractériser les activités du système par un ensemble d'équations d'état. En tant qu'outil graphique, c'est un graphe biparti constitué de **places** et de **transitions** (représentées respectivement par des cercles et par des barres) reliées par des **arcs**. Les places peuvent représenter les stocks tampons et certaines places, dites places de ressources, contiennent des jetons qui représentent des ressources éventuellement partagées entre plusieurs tâches. Les transitions peuvent représenter les opérations. La structure du réseau permet de modéliser également le parallélisme, la synchronisation, la concurrence et le conflit. Les places sont associées à une certaine distribution de **jetons** qui constitue le **marquage** du réseau. Les jetons permettent de modéliser la dynamique du système. Le nombre de jetons dans une place indique la quantité de matières premières ou de produits semi-finis dans le stock tampon représenté par la place, ou le nombre de ressources partagées disponibles. Un marquage définit donc un état possible du système.

Depuis que Dr. Carl A. Petri a introduit la théorie des réseaux de Petri, ceux-ci n'ont cessé de se développer au plan théorique et au niveau des applications. Au plan théorique, de nombreux types de réseaux de Petri ont été introduits comme les réseaux de Petri temporisés (voir [RAM 74] et [CHR 83]), les réseaux de Petri stochastiques (voir [MOL 82] et [MOL 85]), les réseaux de Petri colorés (voir [ALL et al. 82], [ALL et al. 85] et [SIV et al. 85]), les réseaux de Petri continus (voir [DAV et al. 87]), etc. De nombreuses publications ont été consacrées à l'analyse des propriétés et l'évaluation des performances (voir [PER 81], [REI 82], [BRA 83], [MUR 89], [DAV et al. 89], [HIL et al. 89] et [LAF et al. 92], [PRO et al. 94], etc). Au plan des applications, les réseaux de Petri sont largement utilisés dans les domaines comme les systèmes de production, l'informatique et les communications. [DES et al. 94] conclut que les réseaux de Petri sont largement utilisés pour les raisons suivantes :

- Les réseaux de Petri permettent de modéliser la relation de précédence et l'intégration structurelle des événements stochastiques, parallèles et asynchrones. En plus, les graphes des réseaux de Petri aident à visualiser des systèmes complexes;
- Les conflits et les capacités des stocks tampons peuvent être facilement modélisés;
- Les éventuels blocages dans le modèle RdP d'un système peuvent être détectés;
- Le modèle RdP représente un outil de modélisation hiérarchique avec a fondement mathématique et pratique bien développé;
- Les extensions diverses des réseaux de Petri, comme les réseaux de Petri temporisés, les réseaux de Petri stochastiques, les réseaux de Petri colorés, par exemple, permettent d'analyser l'utilisation des ressources, la défaillance et la productivité;

- Les modèles RdP fournissent une plate-forme structurelle pour effectuer une analyse systématique des systèmes complexes;
- Les réseaux de Petri peuvent être utilisés pour implémenter des systèmes de contrôle en temps-réel dans les ateliers flexibles.

Les réseaux de Petri semblent être le seul outil capable à la fois de modéliser, d'analyser et d'évaluer des systèmes de production pendant la conception et le fonctionnement des systèmes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi les réseaux de Petri comme support tout au long du travail présenté dans le reste de ce mémoire.

## 1.2 HYPOTHESE DE TRAVAIL

L'étude qui suit est consacrée à la conception incrémentale des systèmes de production à l'aide des réseaux de Petri.

Lorsque nous concevons un système de production, le premier objectif, qui est aussi le plus important, est d'obtenir un système qui fonctionne correctement. Cela exige que la structure du système possède des bonnes propriétés qualitatives en termes des réseaux de Petri, comme par exemple, la vivacité, l'absence de blocage, le non dépassement de la capacité des stocks tampons, la possibilité de production répétitive et la possibilité à revenir à l'état initial du système. Certaines de ces propriétés ne dépendent que de la structure du réseau; les autres, par contre, font intervenir l'état initial. Nous nous intéressons, dans cette étude, à des propriétés importantes des systèmes modélisés par des réseaux de Petri.

Nous trouvons dans la littérature une approche par transformation et deux types d'approches par synthèse, à savoir les approches ascendantes et les approches descendantes. L'approche par transformation part d'un réseau de Petri donné et applique des règles de transformation [BER 87] jusqu'à l'obtention d'un réseau de Petri de faible taille. Il est alors possible de déduire les propriétés du réseau initial des propriétés du réseau transformé.

Une approche ascendante consiste à intégrer des sous-systèmes. Par exemple, Narahari et Viswanadham [NAR et al. 85a] ont montré qu'un p-invariant d'un RdP obtenu en fusionnant des places de RdPs peut se déduire de p-invariants de chacun des modules intégrés. Dans sa publication, Souissi [SOU 90] a donné des conditions pour que la vivacité soit préservée lorsque nous fusionnons les places de deux réseaux de Petri. Proth, Wang et Xie [PRO et al. 93] ont étudié sous quelles conditions les réseaux de Petri, reliés à l'aide de places d'interface, préservent les propriétés qualitatives souhaitables dans les modèles de systèmes de fabrication. Koh et DiCesare [KOH et al. 90] intègrent les sous-réseaux par fusion de chemins. Ils

considèrent les propriétés de bornitude et de vivacité. Depuis plusieurs années, le L.A.I.L (Laboratoire d'Automatique et Informatique Industrielle de Lille) développe une approche ascendante sur la conception et l'intégration du contrôle des réseaux de Petri qui modélisent les systèmes de production automatisés. Malheureusement la vérification des propriétés n'a pas été abordée (voir [GEN et al. 87], [BOU et al. 91] et [AUS et al.94]).

Les approches descendantes se déroulent à partir d'un modèle agrégé d'un système complexe. Elles consistent à détailler progressivement ce modèle en remplaçant des transitions ou des places par des modèles plus détaillés tout en préservant les propriétés qualitatives souhaitées. Valette [VAL 79] et Suzuki et Murata [SUZ et al. 83] utilisent des approches descendantes en remplaçant des places par des "blocs bien formés" tout en préservant la vivacité, la bornitude, la réversibilité, etc. Esparza et Silva [ESP et al. 91b] étudient les réseaux de Petri à choix libre. A l'aide de deux règles, ils montrent comment détailler un réseau à choix libre pour obtenir un autre réseau de Petri à choix libre, tout en préservant la bornitude et la vivacité. A noter que les règles proposées peuvent également être utilisées pour la simplification d'un réseau. Bien entendu, les références citées ne prétendent pas être exhaustives, mais représentent bien, de notre point de vue, les différentes tendances actuelles. Nous pourrions également consulter les papiers cités en références des études que nous venons de citer.

Il faut noter que des techniques d'analyse classiques (arbre des marquages atteignables, par exemple) ne sont applicables qu'aux réseaux de taille réduite et, de plus bornés.

L'approche que nous proposons dans la suite est totalement différente. Nous considérons le processus de conception incrémentale. Nous ne cherchons pas à étudier sous quelles conditions la combinaison de sous-réseaux, ou le raffinement d'un réseau, préservent telle ou telle propriété. Nous nous plaçons dans l'optique d'un ingénieur qui conçoit un modèle et qui souhaite savoir, à chaque étape de la conception, si son modèle conserve ou non les propriétés requises. Une étape consiste à ajouter une (ou des) stocks tampons(s) et/ou une (ou des) opération(s), ou encore relier deux sous-réseaux existants par fusion de stocks tampons ou d'opérations.

Les raisons pour lesquelles nous considérons la conception incrémentale sont les suivantes. Tout d'abord, la conception de systèmes se fait étape par étape dans la réalité. Il est courant que le concepteur ajoute des opérations ou des stocks tampons à un modèle existant, ou intègre des modules existants. Ensuite, dans un processus de conception incrémentale, les propriétés que nous étudions peuvent être vérifiées en n'examinant qu'une partie du système. Une autre motivation est que la conception incrémentale permet de détecter certaines erreurs avant l'obtention du modèle complet et d'accélérer par ce biais le cycle de conception.

Le fonctionnement effectif d'un système nécessite non seulement la connaissance des ateliers, mais aussi la connaissance de la disponibilité des matières premières et des moyens de transport, et l'affectation des machines aux différents produits ou aux différentes opérations, etc. Le premier type de connaissance ne concerne que la structure du système. Le deuxième type de connaissance, par contre, concerne l'état initial du système. Par conséquent, la capacité d'analyser différentes propriétés du système dépend des informations dont nous disposons.

Au moment de la conception, il est possible que nous ne disposions pas de l'information sur l'état initial du système. Dans ce cas nous ne pouvons pas vérifier les propriétés liées à l'état initial. Nous ne pouvons qu'aider l'utilisateur à vérifier des propriétés structurelles qui sont indépendantes de l'état initial, comme par exemple la non dépassement de capacité des stocks tampons, la possibilité de productions répétitives et la possibilité à revenir à l'état initial du système. En terme du modèle réseau de Petri, ces propriétés correspondent respectivement à la bornitude structurelle, la répétitivité et la consistance.

Lorsque nous disposons de l'état initial du système, nous pouvons nous intéresser à des propriétés comportementales comme la vivacité et l'absence de blocage du système. En plus, les résultats que nous obtenons permettent de vérifier ces propriétés sous des conditions moins strictes par rapport aux travaux précédents.

Pour résumer, l'objectif de cette thèse est de **vérifier progressivement des propriétés qualitatives du système au cours de la conception à l'aide des réseaux de Petri.**

## 1.3 PLAN DE LA THESE

Le travail que nous présentons dans cette thèse est organisé en six chapitres.

**Le chapitre II** est une revue succincte des réseaux de Petri généraux. Nous insistons sur les trois aspects suivants :

- Les propriétés comportementales et les propriétés structurelles ;
- Les méthodes d'analyse des réseaux de Petri;
- Des sous-classes des réseaux de Petri et leurs propriétés.

**Le chapitre III** est consacré à la vérification incrémentale de la consistance et de la conservation d'un modèle RdP en utilisant la base des t-invariants et le rang de la matrice d'incidence lorsque nous ajoutons ou fusionnons les places et/ou des transitions à un réseau de Petri existant. Les résultats obtenus nous permettent de vérifier la propriété du réseau global en n'examinant qu'une partie du réseau.

**Le chapitre IV** vérifie la propriété de bornitude structurelle et la répétitivité dans un processus de conception incrémentale. Les méthodes utilisées sont également basées sur la matrice d'incidence et l'algèbre linéaire.

**Le chapitre V** est consacré à deux propriétés très importantes des réseaux de Petri : l'absence de blocage et la vivacité. Il peut être considéré comme composé de deux parties. Dans la première partie, nous proposons des algorithmes pour chercher la base des verrous (resp. des trappes) du réseau obtenu lorsque nous ajoutons respectivement des transitions ou des places à un réseau existant. Les résultats obtenus nous permettent de ne rechercher que les nouvelles verrous (resp. trappes) de base liées aux transitions ou places ajoutées connaissant la base du réseau existant. La deuxième partie de ce chapitre présente des nouvelles conditions nécessaires et/ou suffisantes pour vérifier l'absence de blocage des réseaux de Petri ordinaires généraux, ou pour vérifier la vivacité de sous-classes des réseaux de Petri. Ces conditions, ou bien améliorent les résultats trouvés dans la littérature, ou bien concernent des problèmes jamais traités dans la littérature jusqu'à présent.

**Le chapitre VI** est une conclusion générale. Dans ce chapitre, nous synthétisons les résultats de cette thèse et discutons des limites de ce travail. Nous suggérons enfin des perspectives de recherche qui mériteraient d'être approfondies à la suite de ce travail.

# **CHAPITRE II**

## **ETAT DE L'ART**

## 2.1 INTRODUCTION

Les réseaux de Petri (RdP) sont connus comme un outil performant pour la modélisation et la conception des systèmes de production. Ceci est dû à leur caractéristique graphique et à la relation naturelle qui s'établit entre les éléments du modèle et les éléments physiques des systèmes. Dans le modèle RdP d'un processus de fabrication, les transitions représentent les opérations, les places représentent les stocks tampons, et les jetons la disponibilité des ressources ou/et des matières premières. L'évolution de l'état du système est modélisée par le franchissement des transitions. D'un point de vue formel, la structure d'un modèle de RdP est représentée par sa matrice d'incidence, et l'évolution du réseau peut être analysée par un ensemble d'équations d'états. Les réseaux de Petri sont donc à la fois un outil mathématique et un outil graphique. C'est pourquoi nous avons choisi de les utiliser au niveau de la conception des systèmes de production du point de vue fonctionnel.

Ce chapitre passe en revue de manière succincte les travaux rapportés dans la littérature. Ceci permettra d'une part d'uniformiser la terminologie utilisée tout au long de ce travail, et d'autre part de situer notre étude par rapport aux travaux antérieurs. Nous présentons en particulier les différentes propriétés structurelles ou comportementales des réseaux de Petri ainsi que des méthodes d'analyse de ces propriétés, établies aussi bien pour les réseaux de Petri généraux que pour des sous-classes des réseaux de Petri.

Ce chapitre est organisé en 6 sections. La section 2.2 rappelle les définitions des réseaux de Petri. La section 2.3 se concentre sur les propriétés comportementales et les propriétés structurelles. La section 2.4 présente quatre familles de méthodes d'analyse des réseaux de Petri. Ces méthodes seront utilisées dans cette thèse pour vérifier les propriétés souhaitées tout au long de la construction des modèles. La section 2.5 présente des sous-classes de réseaux de Petri, ainsi qu'une synthèse des propriétés de ces sous-classes. La section 2.6 conclut ce chapitre.

## 2.2 DEFINITIONS DE BASE

### 2.2.1 Définition des réseaux de Petri

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques notions fondamentales des réseaux de Petri, en commençant par leur définition formelle.

## Réseau de Petri :

Un réseau de Petri (RdP)  $N$  est un graphe biparti dont les noeuds sont des places et des transitions, et dans lequel les arcs relient les places aux transitions ou les transitions aux places.

Un réseau de Petri est souvent représenté par un quadruple  $N = (P, T, I, O)$ , où :

(1)  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  est l'ensemble des places.

(2)  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  est l'ensemble des transitions.

(3)  $I$  est une fonction avant de type  $P \times T \rightarrow \mathbb{IN}$  correspondant aux arcs allant d'une place à une transition.  $I(p, t) > 0$  signifie qu'il y a un arc allant de la place  $p$  vers la transition  $t$ ;  $I(p, t) = 0$  signifie qu'un tel arc n'existe pas.

(4)  $O$  est une fonction arrière de type  $T \times P \rightarrow \mathbb{IN}$  et correspond aux arcs allant d'une transition à une place.  $O(t, p) > 0$  signifie qu'il y a un arc allant de la transition  $t$  vers la place  $p$ ;  $O(t, p) = 0$  indique l'absence d'un tel arc.

### Exemple 2.1

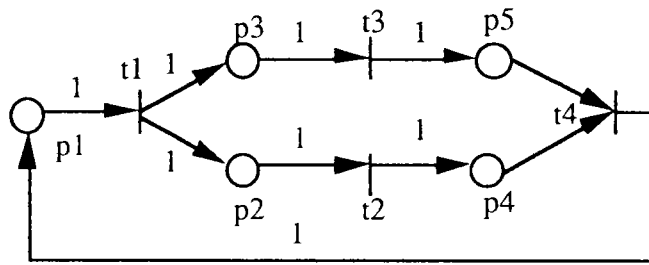


Figure 2.1 Réseau de Petri  $N$

La figure 2.1 fournit un exemple de réseau de Petri  $N$ . Dans cet exemple, nous avons  $m=5$  et  $n=4$ .  $P=\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  est l'ensemble des places, et  $T=\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  est l'ensemble des transitions. Les relations entre ces deux ensembles sont représentées par les fonctions  $I$  et  $O$ . Par exemple :  $I(p_1, t_1)=1$ ,  $O(t_1, p_1)=0$  et  $I(p_5, t_3)=0$  et  $O(t_3, p_5)=1$ . ♦

La structure d'un réseau de Petri est définie par ses places, ses transitions et ses fonctions avant et arrière. Comme nous le verrons plus loin, cette structure peut être facilement exprimée sous forme mathématique à l'aide de la matrice d'incidence.

Note : Dans la suite de cette thèse, un réseau de Petri est noté seulement  $N=(P,T)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

## Réseau de Petri marqué :

Un réseau de Petri marqué  $G = \langle N, M \rangle$  est un réseau de Petri  $N$  dans lequel nous associons associé un nombre entier de jetons (marquage) à chacune des places.  $M(p)$  est le marquage de la place  $p$ .  $M_0$  désignera souvent le marquage initial d'un réseau de Petri.

### 2.2.2 Règles de franchissement

Le nombre et la distribution des jetons dans un réseau de Petri peut changer au cours de l'évolution du système. Ce changement est réalisé par des franchissements de transitions. Ces franchissements se font en accord avec des règles que nous présentons plus loin. Avant de présenter ces règles, nous définissons quelques termes en relation avec les fonctions avant et arrière d'une transition ou d'une place.

Si  $O(t, p) \neq 0$  (resp.  $I(p, t) \neq 0$ ), on dit que  $p$  est une **place de sortie** (resp. **place d'entrée**) de la transition  $t$ , et que  $t$  est une **transition d'entrée** (resp. **transition de sortie**) de la place  $p$ . On utilisera les notations suivantes :

**Places d'entrée d'une transition.** On note  $\bullet t = \{p \mid I(p, t) > 0\}$  l'ensemble des places d'entrée de la transition  $t$ ;

**Places de sortie d'une transition.** On note  $t\bullet = \{p \mid O(t, p) > 0\}$  l'ensemble des places de sortie de la transition  $t$ ;

**Transitions d'entrée d'une place.** On note  $\bullet p = \{t \mid O(t, p) > 0\}$  l'ensemble des transitions d'entrée de la place  $p$ ;

**Transitions de sortie d'une place.** On note  $p\bullet = \{t \mid I(p, t) > 0\}$  l'ensemble des transitions de sortie de la place  $p$ .

Si une place (resp. transition) n'a aucune transition (resp. place) d'entrée, i.e.  $\bullet p = \emptyset$  (resp.  $\bullet t = \emptyset$ ), on l'appelle **place** (resp. **transition**) **source** ou **place** (resp. **transition**) **d'entrée**. Si une place (resp. transition) n'a aucune transition (resp. place) de sortie, i.e.  $p\bullet = \emptyset$  (resp.  $t\bullet = \emptyset$ ), on l'appelle **place** (resp. **transition**) **puits** ou **place** (resp. **transition**) **de sortie**.

### Règles de franchissement :

1) Une transition  $t$  est dite franchissable (ou tirable) pour un marquage  $M$  donné si le nombre de jetons dans chacune de ses places d'entrée  $p \in \bullet t$  est supérieur ou égal à la valuation de l'arc  $(p, t)$ , i.e.  $\forall p \in \bullet t, M(p) \geq I(p, t)$ .

- 2) Le fait qu'une transition soit franchissable n'implique pas qu'elle soit franchie immédiatement.
- 3) Il n'y a pas plus d'un franchissement à un instant donné pour une même transition.
- 4) Le franchissement de la transition  $t$  retire  $I(p, t)$  jetons de chaque place d'entrée  $p$  de la transition  $t$ , et ajoute  $O(t, p)$  jetons dans chaque place de sortie  $p$  de la transition  $t$ .

On note donc qu'il n'y a généralement pas conservation du nombre de jetons dans un RdP.

### Séquence de franchissements :

Si une série de transitions est franchie à partir d'un marquage  $M_0$ , nous aboutissons à un marquage  $M$ . Nous désignons cette séquence de franchissements par  $\sigma$ , et nous écrivons  $M_0[\sigma > M]$ .

### Vecteur caractéristique :

On désigne par  $V_\sigma$  le vecteur caractéristique (ou vecteur de comptage) de la séquence de franchissements  $\sigma$ . Sa  $j$ -ème composante représente le nombre d'occurrences de la transition  $t_j$  dans  $\sigma$ .

Il faut souligner qu'un vecteur caractéristique peut correspondre à plusieurs séquences de franchissements, mais que ces séquences ne sont pas toutes franchissables. Le vecteur caractéristique contient une information partielle du fait qu'il ne contient pas l'ordre de franchissement des transitions. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

#### Exemple 2.2

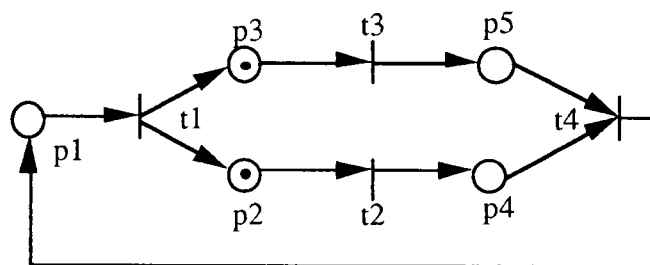


Figure 2.2 Réseau de Petri marqué

Dans la figure 2.2, nous représentons un réseau de Petri dont le marquage initial est  $M_0 = [0, 1, 1, 0, 0]$ . Après la séquence de franchissements  $\sigma = \{t_2, t_3, t_4, t_1, t_3\}$ , nous obtenons un marquage  $M = [0, 1, 0, 0, 1]$ . Le vecteur caractéristique correspondant à  $\sigma$  est  $V_\sigma = [1, 1, 2, 1]$ . Il est possible de vérifier qu'une autre séquence de franchissements

$\sigma_1 = \{t_3, t_2, t_4, t_1, t_3\}$  correspond au même vecteur caractéristique est également franchissable. Mais la séquence  $\sigma_2 = \{t_4, t_3, t_2, t_1, t_3\}$  ne l'est pas. ♦

### 2.2.3 Matrice d'incidence et équation fondamentale

#### Matrice d'incidence :

La matrice d'incidence  $C_{m \times n}$  d'un réseau de Petri  $N$ , où  $m$  est le nombre des places et  $n$  le nombre des transitions, est définie de la manière suivante :

$C = [c_{ij}]$ , avec

$$c_{i,j} = \begin{cases} +O(t_j, p_i) & \text{si } t_j \in \bullet p_i \\ -I(p_i, t_j) & \text{si } t_j \in p_i^\bullet \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $i = 1, 2, \dots, m$  et  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Nous pouvons également définir la matrice avant  $C^+ = [c_{ij}^+]$  et la matrice arrière  $C^- = [c_{ij}^-]$  de la manière suivante :

$$c_{ij}^+ = \begin{cases} O(t_j, p_i) & \text{si } t_j \in \bullet p_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad c_{ij}^- = \begin{cases} I(p_i, t_j) & \text{si } t_j \in p_i^\bullet \\ 0 & \text{sin on.} \end{cases}$$

Par définition, nous avons :  $C = C^+ - C^-$ .

A l'aide de la matrice d'incidence, nous pouvons vérifier des propriétés structurelles, comme par exemple la bornitude structurelle, la répétitivité, la consistance ou la conservation (voir la section 2.3).

Comme nous pouvons le constater à partir des règles de franchissement des transitions, seul le marquage d'un réseau de Petri caractérise la possibilité ou l'impossibilité de franchissement des transitions. Après une séquence de franchissements de transitions, nous arrivons à un autre marquage. Ce marquage peut être déterminé par l'équation fondamentale.

#### Equation fondamentale :

$$M = M_0 + CV_\sigma.$$

Elle donne le marquage  $M$  obtenu à partir de  $M_0$  si l'on franchit les transitions de  $\sigma$ , en supposant que  $\sigma$  soit franchissable. Comme nous l'avons souligné plus haut  $V_\sigma$  peut

correspondre à plusieurs séquences de franchissements, dont certaines ne sont pas franchissables.

### Exemple 2.3

Pour le réseau de Petri illustré dans la figure 2.2, la matrice avant , la matrice arrière et la matrice d'incidence s'écrivent respectivement comme suit :

$$C^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = C^+ - C^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Chaque colonne de la matrice C correspond à la modification du marquage apportée par le franchissement de la transition correspondant. Par exemple, la deuxième colonne de la matrice d'incidence C indique que le franchissement de la transition t2 consiste à retirer un jeton de la place p2 et à ajouter un jeton dans la place p4. Mais la matrice d'incidence n'indique pas si le franchissement en question est possible, car cette matrice est indépendante du marquage.

Si nous franchissons la série de transitions  $\sigma = \{t2, t3, t4, t1, t3\}$  de l'exemple 2.2, l'équation fondamentale s'écrit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = M_0 + CV_\sigma$$

♦

## **2.3 PROPRIETES STRUCTURELLES ET PROPRIETES COMPORTEMENTALES**

Si l'on veut concevoir et modéliser un système à l'aide des réseaux de Petri, la première question qu'on se pose est : "Quelles propriétés doit posséder ce modèle ?". Dans cette section, nous nous intéressons des propriétés qualitatives au point de vue des systèmes de production en termes des réseaux de Petri. Les propriétés qualitatives des réseaux de Petri se répartissent en

deux familles : les propriétés comportementales et les propriétés structurelles. Dans la suite, nous présentons ces deux familles de propriétés.

### 2.3.1 Propriétés comportementales

Les propriétés comportementales dépendent non seulement de la structure du réseau de Petri, mais aussi de son marquage initial. L'étude de ces propriétés est basée à la fois sur la matrice d'incidence et sur l'équation fondamentale.

#### 2.3.1.1 Atteignabilité

L'atteignabilité est une propriété importante dans l'étude des propriétés dynamiques d'un réseau de Petri. Comme le franchissement de transitions modifie la distribution et le nombre de jetons dans le réseau, une série de franchissements de transitions conduit à une série de marquages. Un marquage  $M$  est dit **atteignable** à partir du marquage initial  $M_0$  si il existe une séquence de franchissements  $\sigma$  qui transforme  $M_0$  en  $M$ , i.e.  $M_0[\sigma > M$ . L'ensemble des marquages atteignables pour le réseau marqué  $(N, M_0)$  est noté  $R(M_0)$ . L'ensemble des séquences de franchissements admissible est noté  $L(M_0)$ .

#### 2.3.1.2 Bornitude

Un réseau de Petri marqué  $(N, M_0)$  est dit **k-borné** ou simplement **borné** si le nombre de jetons dans chaque place ne dépasse pas un certain nombre entier fini  $k > 0$  quel que soit le marquage atteignable, i.e.  $M(p) < k, \forall p \in P$  et  $\forall M \in R(M_0)$ .

A réseau de Petri est dit **sain** si il est **1-borné**, i.e.  $M(p) \leq 1, \forall p \in P$  et  $\forall M \in R(M_0)$ .

Dans les systèmes de production, les places représentent souvent les stocks tampons. La propriété de bornitude garantit alors que la capacité des stocks tampons est limitée. Un réseau de Petri non borné peut conduire à une croissance incessante d'un stock tampon, alors que dans la réalité, il est impossible d'avoir un stock tampon à capacité infinie. Voici un exemple de réseau de Petri non borné.

### Exemple 2.4

Si nous répétons infiniment la séquence de franchissement  $\sigma = \{t1, t2\}$  dans le réseau illustré par la figure 2.3, le nombre de jetons dans la place p3 sans limite.

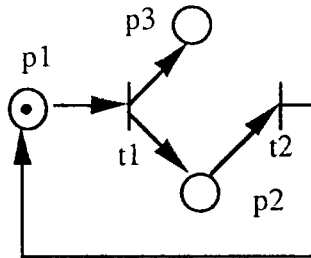


Figure 2.3 Un réseau de Petri non borné

◆

#### 2.3.1.3 Vivacité et sans blocage

Une transition  $t$  est dite **vivante** si, quel que soit  $M \in R(M_0)$ , il existe une séquence  $\sigma$  franchissable à partir de  $M$  et qui contient  $t$ .

Un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  est **vivant** si et seulement si, pour tout marquage atteignable  $M \in R(M_0)$ , et pour toute transition  $t$ , il existe une séquence de franchissements admissibles qui, partant de  $M$ , permet de franchir  $t$ .

Un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  est **sans blocage** si, pour tout marquage atteignable  $M \in R(M_0)$ , il existe toujours au moins une transition franchissable.

Un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  est **bloqué** si, pour un marquage atteignable  $M \in R(M_0)$ , il n'y a aucune transition franchissable.

Un réseau de Petri vivant est sans blocage, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie, comme nous pouvons le voir à partir de l'exemple suivant.

Exemple 2.5

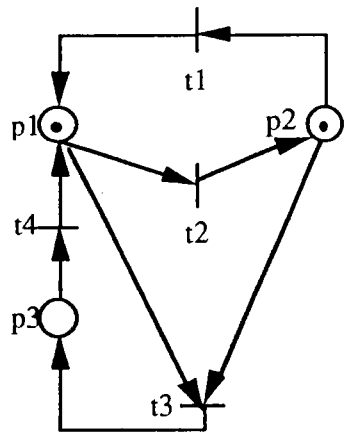


Figure 2.4 Un RdP est sans blocage

La figure ci-dessus illustre un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  qui est sans blocage, car les transitions  $t_1$  et  $t_2$  peuvent être franchies une infinité de fois. En revanche, ce RdP n'est pas vivant, puisqu'après le franchissement de la transition  $t_3$ , celle-ci n'est plus franchissable. ♦

Si un réseau marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant, c'est parce qu'au moins une transition n'est pas vivante. Intuitivement, l'augmentation du marquage initial pourrait favoriser la vivacité. L'exemple suivant montre que cette intuition est fausse.

Exemple 2.6

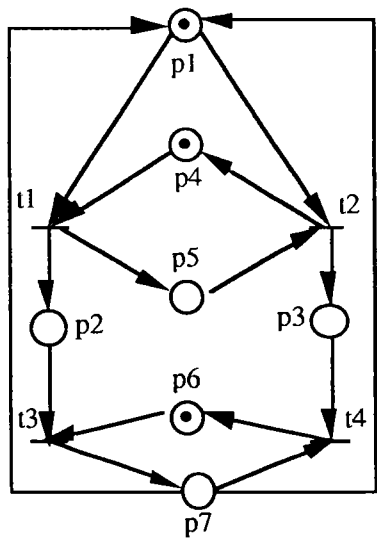


Figure 2.5 Un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  vivant

Le RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  illustré dans la figure 2.5 ( Voir [DIC et al. 93]) est vivant pour le marquage initial  $M_0=[1, 0, 0, 1, 0, 1, 0]$ . Si l'on ajoute un jeton dans la place  $p_5$ , alors le

marquage initial devient  $M_0'=[1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]$ , Nous avons  $M_0' \geq M_0$  et  $M_0' \neq M_0$ . Le réseau  $\langle N, M_0' \rangle$  n'est plus vivant car, après le franchissement de la transition  $t_2$ , il n'y a plus aucune transition franchissable. Le réseau est alors totalement bloqué. Par contre, le réseau  $N$  est structurellement vivant puisque il existe un  $M_0$  tel que  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant. Cet exemple montre que : 1) l'augmentation du marquage initial ne conduit pas nécessairement à la vivacité. ♦

### 2.3.1.4 Réversibilité et états d'accueil

Un réseau de Petri marqué  $(N, M_0)$  est dit **réversible** si l'on peut toujours revenir au marquage  $M_0$  à partir de tout marquage  $M$  atteignable à partir de  $M_0$ . Autrement dit un réseau de Petri est réversible si  $M_0 \in R(M), \forall M \in R(M_0)$ .

Un réseau réversible peut toujours revenir au marquage initial ou à l'état initial. Dans les systèmes de production, nous ne souhaitons pas nécessairement que les systèmes puissent revenir à l'état initial. Par contre, nous souhaitons souvent que le système puisse revenir à un état donné, que nous appelons état d'accueil, pour des raisons de réglage ou de redémarrage à la suite d'une panne.

Un marquage  $M'$  est dit **état d'accueil** si à partir d'un marquage quelconque  $M \in R(M_0)$ , nous pouvons toujours atteindre  $M'$ , i.e.  $M' \in R(M), \forall M \in R(M_0)$ .

Un réseau de Petri réversible a au moins un état d'accueil, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple 2.7

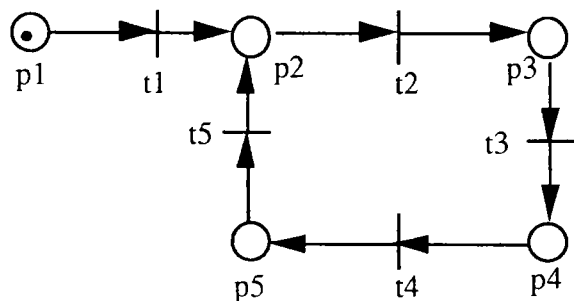


Figure 2.6 Un réseau de Petri non réversible

La figure ci-dessus représente un réseau de Petri non réversible mais qui a des états d'accueil. En effet, après le franchissement de la transition  $t_1$ , le réseau ne peut plus jamais revenir au marquage initial  $M_0=(1, 0, 0, 0, 0)$ , donc il n'est pas réversible. Par contre, tous les marquages atteignables à partir de  $M_0$  sont des états d'accueil. ♦

Il faut noter que les propriétés de vivacité, de bornitude et de réversibilité sont indépendantes les unes des autres.

### 2.3.1.5 *Persistence*

Un réseau de Petri est dit **persistant** si, quelles que soient les transitions franchissables à un instant donné, le franchissement de l'une d'elles ne rend pas les autres infranchissables.

Un réseau de Petri persistant est aussi appelé réseau sans décision (i.e. décision free), puisque le franchissement d'une transition n'empêche pas le franchissement des autres. Il n'est donc pas nécessaire de prendre une décision concernant le franchissement de telle ou telle transition. Il faut noter que la propriété de persistance dépend fortement du marquage initial du réseau.

Il est évident qu'un graphe d'événements (voir la section 2.5) est un réseau persistant.

#### Exemple 2.8

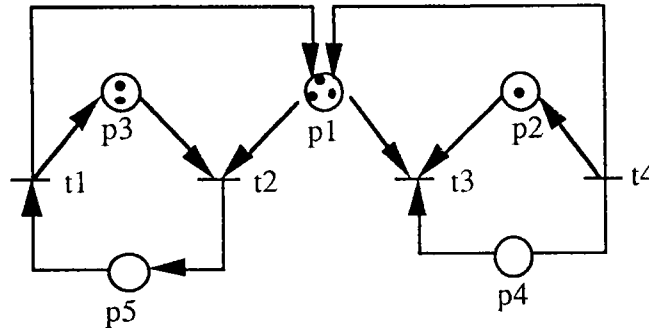


Figure 2.7 Un réseau de Petri persistant

Le réseau de Petri présenté dans la figure 2.7 est un réseau de Petri persistant [BRA 83] avec le marquage initial  $M_0 = [3, 1, 2, 0, 0]$ . Si  $M_0(p_1) = 1$ , le réseau n'est plus persistant, puisque le franchissement de l'une des transitions  $t_2$  ou  $t_3$  empêche le franchissement de l'autre. ♦

### 2.3.2 Propriétés structurelles

Les propriétés structurelles dépendent de la structure des réseaux de Petri, c'est-à-dire de la matrice d'incidence. Elles sont indépendantes du marquage initial  $M_0$ . Ces propriétés sont souvent vraies pour un marquage initial quelconque. Nous pouvons les vérifier à partir de la

quelconque. Nous pouvons les vérifier à partir de la matrice d'incidence, à l'exception de la vivacité structurelle : cette dernière est liée à l'existence d'un marquage initial. Nous pouvons comprendre que l'étude des propriétés structurelles est très importante lorsque nous concevons un système dans lequel nous ne connaissons pas encore le nombre de ressources disponibles.

Dans la suite, nous présentons les propriétés structurelles et les liens qui existent entre elles.

### 2.3.2.1 Vivacité structurelle

Un réseau de Petri  $N$  est **structurellement vivant** si il existe un marquage initial  $M_0$  tel que le réseau marqué  $G=\langle N, M_0 \rangle$  est vivant.

Il faut noter qu'un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  vivant implique que  $N$  est structurellement vivant, mais la réciproque n'est pas vraie. Dans l'exemple 2.6, le réseau  $N$  est structurellement vivant, mais le réseau  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant et le réseau  $\langle N, M_0' \rangle$  ne l'est pas.

### 2.3.2.2 Répétitivité et consistance

Un réseau de Petri est **répétitif** si il existe un marquage initial  $M_0$  et une séquence de franchissements  $\sigma$  à partir de  $M_0$  tel que chaque transition figure une infinité de fois dans  $\sigma$ . La définition équivalente en terme de la matrice d'incidence est la suivante : un réseau de Petri est répétitif si et seulement si il existe un vecteur  $Y > 0$  strictement positif tel que  $CY \geq 0$ . Il a été démontré qu'un réseau de Petri est répétitif si et seulement si  $\exists X \geq 0$  tel que  $X^T C \not\leq 0$  [MEM et al. 80].

Un réseau de Petri est **consistant** si il existe un marquage  $M_0$  et une séquence  $\sigma$  franchissable tels que  $M_0 \xrightarrow{\sigma} M_0$  et que chaque transition figure au moins une fois dans  $\sigma$ . Il a été démontré qu'un réseau de Petri est consistant si et seulement si il existe un vecteur  $Y > 0$  à composantes strictement positives tel que  $CY = 0$ . De manière équivalente un réseau de Petri est consistant, si et seulement si  $\exists X$  tel que  $X^T C \not\geq 0$  [MEM et al. 80].

Un réseau de Petri consistant est répétitif, mais la réciproque est fausse.

D'après les définitions de la vivacité et de la répétitivité, nous avons immédiatement une condition nécessaire de vivacité.

**Théorème 2.1** [BRA 83] : Un réseau de Petri structurellement vivant est répétitif, mais pas nécessairement consistant.

L'exemple suivant illustre ce théorème.

Exemple 2.9

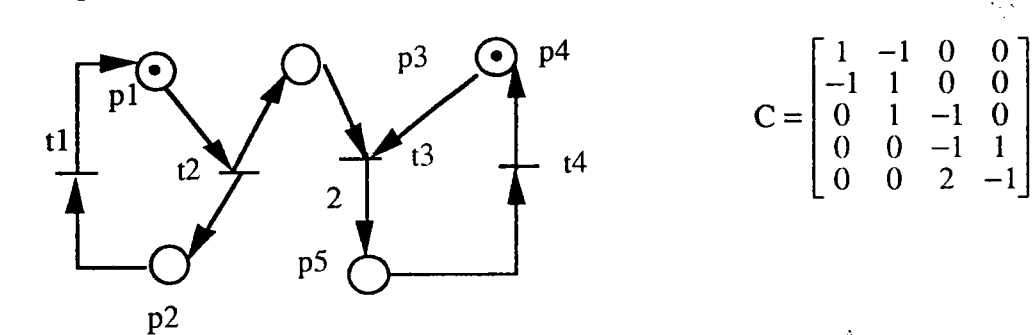


Figure 2.8. Un réseau de Petri vivant

Le réseau de Petri présenté ci-dessus a comme matrice d'incidence C. C'est un RdP vivant et répétitif, mais il n'est pas consistant. Il existe un vecteur  $Y^T = [1, 1, 1, 1]$  tel que  $C \times Y \geq 0$ . Donc il est répétitif. Mais il n'existe pas de vecteur  $Y > 0$  tel que  $CY = 0$ , donc il n'est pas consistant. ♦

**2.3.2.3 Bornitude structurelle et conservation**

Un réseau de Petri N est dit **structurellement borné** si il est borné quel que soit le marquage initial  $M_0$ . En terme de la matrice d'incidence, un réseau de Petri est structurellement borné si et seulement si il existe un vecteur  $X > 0$  strictement positif tel que  $X^T C \leq 0$ . Ou encore un réseau de Petri est structurellement borné si et seulement si  $\exists Y \geq 0$  tel que  $CY \not\geq 0$  [MEM et al. 80].

Un réseau de Petri structurellement borné est évidemment borné, mais la réciproque n'est pas vraie. Un réseau de Petri structurellement borné garantit que, quel que soit le marquage initial, il n'y a jamais d'accumulation de matière dans le système.

### Exemple 2.10

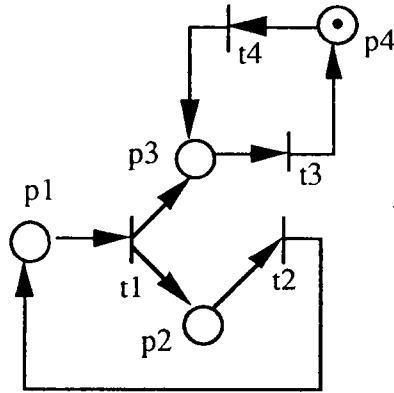


Figure 2.9 Un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  borné

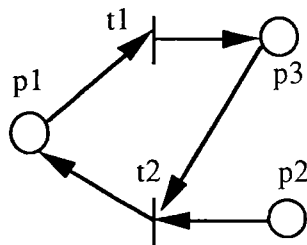
Le RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  ci-dessus est borné avec le marquage initial  $M_0 = [0, 0, 0, 1]$ . Mais si l'on modifie le marquage initial  $M'_0 = [1, 0, 0, 0]$ , le réseau  $\langle N, M'_0 \rangle$  n'est plus borné. Donc  $N$  n'est pas structurellement borné. ♦

Un réseau de Petri est **conservatif** si il existe un vecteur colonne  $X$  de dimension  $m$ , strictement positif, tel que  $X^T M = X^T M_0$  pour tout marquage  $M$  atteignable à partir d'un marquage initial quelconque  $M_0$ . Il a été montré qu'un réseau de Petri est conservatif si et seulement si il existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C = 0$ . Ou bien un réseau de Petri est conservatif, si et seulement si  $\exists Y$  tel que  $CY \leq 0$  [MEM et al. 80].

La propriété de conservation garantit, dans un système de production, que le nombre de ressources est constant et que les matières premières ne se détruisent pas, ni ne se multiplient.

Un réseau de Petri conservatif est structurellement borné, mais la réciproque n'est pas vraie.

### Exemple 2.11



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Figure. 2.10 Un RdP structurellement borné

Le RdP représenté dans la figure 2.10 a comme matrice d'incidence  $C$ . C'est un RdP structurellement borné, mais il n'est pas conservatif. En effet, il existe un vecteur  $X = [1, 1, 1]$

tel que  $X^T C \leq 0$ . Donc il est structurellement borné. Mais il n'existe pas de vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C = 0$ , donc il n'est pas conservatif. ♦

On dispose d'une condition nécessaire suivante pour qu'un RdP soit à la fois structurellement vivant et structurellement borné.

**Théorème 2.2 [SIF 87] :** Un réseau de Petri structurellement vivant et structurellement borné est consistant et conservatif, et il est fortement connexe.

Les méthodes d'analyse présentées dans la section suivante permettent de vérifier les propriétés que nous venons d'introduire.

## 2.4 LES METHODES D'ANALYSE

Les réseaux de Petri peuvent modéliser des systèmes à événements discrets. Ces modèles doivent ensuite être analysés. De nombreux travaux ont été consacrés à l'analyse des réseaux de Petri. Nous passons certains d'entre eux en revue dans ce paragraphe.

Les méthodes d'analyse des réseaux de Petri peuvent être classées en quatre catégories :

- 1) méthodes faisant intervenir l'algèbre linéaire;
- 2) méthodes basées sur l'arbre des marquages atteignables ou sur l'arbre de recouvrement;
- 3) techniques de réduction;
- 4) méthodes utilisant les verrous et les trappes.

Les méthodes de la première classe analysent les réseaux de Petri à partir de leurs matrices d'incidence et de l'équation fondamentale dont les définitions se trouvent dans la section 2.2. Elles sont très efficaces pour étudier les propriétés de classes particulières de réseaux de Petri ou les propriétés structurelles des réseaux de Petri généraux. Leurs principaux inconvénients proviennent de l'existence de marquages non atteignables dans l'espace des solutions de l'équation fondamentale, et l'existence de vecteurs caractéristiques ne correspondant à aucune séquence de franchissements. Ceci est dû au fait que l'existence d'un vecteur non négatif  $V_\sigma$  vérifiant l'équation fondamentale n'est qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une séquence de franchissements aboutissant au marquage  $M$  à partir de  $M_0$  [BRA 83]. En règle générale, avec ces méthodes, nous ne pouvons trouver que des conditions nécessaires ou suffisantes d'atteignabilité de marquages.

La deuxième catégorie de méthodes sont des méthodes énumératives qui permettent de vérifier des propriétés des réseaux de Petri, par exemple la vivacité. Elles conviennent à tout

type de réseaux de Petri, mais l'utilisation de ces méthodes est limitée aux réseaux de Petri de petite taille.

La troisième catégorie concerne les méthodes qui utilisent des transformations qui préservent les propriétés souhaitées. Elles sont souvent utilisées pour l'analyse de classes particulières de réseaux de Petri.

La quatrième catégorie est basée sur la structure des réseaux de Petri. Elles permettent de vérifier des propriétés des réseaux de Petri ordinaires (voir la définition dans la section 2.5).

#### 2.4.1 Méthodes faisant intervenir l'algèbre linéaire

Comme nous l'avons vu précédemment, la structure d'un réseau de Petri peut être définie par sa matrice d'incidence. Sa dynamique peut être décrite par l'équation fondamentale. Les invariants que nous allons définir permettent de caractériser les propriétés des marquages atteignables et des transitions franchissables au cours de l'évolution du réseau. C'est la raison pour laquelle la matrice d'incidence, l'équation fondamentale, et les invariants, constituent la base des méthodes faisant intervenir l'algèbre linéaire. De nombreux travaux concernent ces méthodes. Citons en particulier [MUR 77], [SIL et al. 88], [COL et al. 91a] et [TER et al. 93]. L'objectif de ce paragraphe n'est pas de présenter ces méthodes, mais d'introduire les invariants qui sont des outils classiques utilisés dans les méthodes d'algèbre linéaire.

##### **p-invariant :**

Un **p-invariant** (appelé aussi p-semi-flot) est un  $m$ -vecteur  $X$  à éléments entiers non négatifs tel que  $X^T C = 0$ .

Autrement dit  $X$  est un p-invariant si et seulement si  $X^T M = X^T M_0$  quel que soit le marquage initial  $M_0$  et quel que soit le marquage atteignable  $M \in R(M_0)$ . C'est une conséquence immédiate de l'équation fondamentale [MEM et al. 80]. Cette définition indique qu'une certaine combinaison linéaire du marquage est invariante.

##### **t-invariant :**

Un **t-invariant** (appelé aussi t-semi-flot) est un  $n$ -vecteur  $Y$  à éléments entiers non négatifs tel que  $CY = 0$ .

Autrement dit  $Y$  est un t-invariant si, à partir d'un marquage  $M_0$ , il existe une séquence de franchissements  $\sigma$  telle que  $V_\sigma = Y$ , qui ramène à  $M_0$  [MEM et al. 80]. Il faut noter cependant

que le fait qu'il existe un t-invariant n'est qu'une condition nécessaire pour qu'un réseau de Petri soit réversible.

### Exemple 2.12

Un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  ci-dessus a comme matrice d'incidence  $C$  et comme marquage initial  $M_0=[1, 0, 0, 0, 0, 0]$ . Il existe un t-invariant  $X^\tau=[1, 1, 0, 0, 1, 1]$  tel que  $CX=0$ , mais il n'existe pas de séquence de franchissements correspondante qui conduit du marquage  $M_0$  à  $M_0$ . Donc l'existence d'un t-invariant n'est qu'une condition nécessaire pour qu'un réseau de Petri soit réversible. Le marquage  $M_k=[1, 0, 0, 0, 0, 0]$  est un marquage inatteignable et la solution  $X^\tau=[1, 1, 0, 0, 1, 1]$  est une fausse solution.

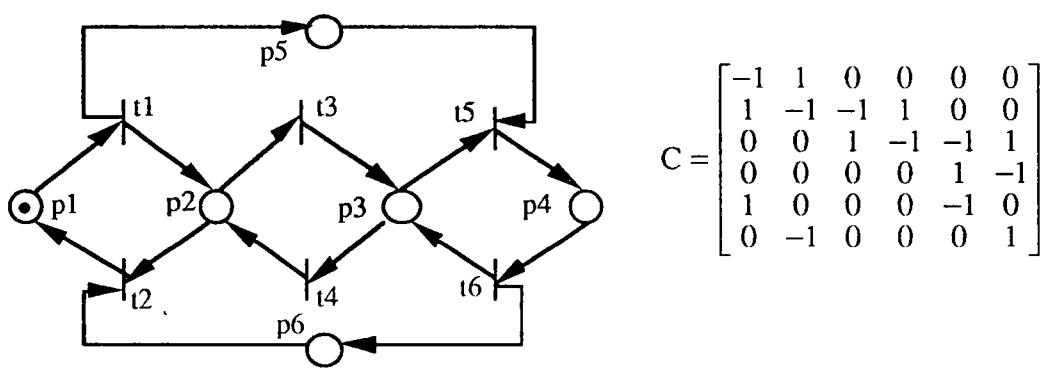


Figure 2.11 Un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  dont un t-invariant n'est pas un vecteur caractéristique admissible

L'ensemble des places (resp. transitions) correspondant aux éléments strictement positifs d'un p-invariant  $X$  (resp. t-invariant  $Y$ ) est appelé **support du p-invariant** (resp. **du t-invariant**), et est noté  $\|X\|$  (resp.  $\|Y\|$ ). Un **p-invariant** (resp. **t-invariant**) à **support minimal** est un p-invariant (t-invariant) dont le support n'est contenu dans le support d'aucun autre t-invariant.

Un t-invariant  $Y$  (resp. p-invariant  $X$ ) est dit **minimal** si il n'existe aucun autre t-invariant  $Y'$  (resp. p-invariant  $X'$ ) tel que  $Y'(t) \leq Y(t)$  (resp.  $X'(p) \leq X(p)$ ) pour toutes les transitions  $t$  (resp. toutes les places  $p$ ). Un t-invariant (resp. p-invariant) à support minimal correspond à un t-invariant (resp. p-invariant) minimal unique. L'ensemble de tous les t-invariants (resp. p-invariants) à support minimal constitue la base des t-invariants (resp. p-invariants). Il faut noter qu'un t-invariant (p-invariant) minimal n'est pas nécessairement un t-invariant (resp. p-invariant) à support minimal. Tout t-invariant (resp. p-invariant) est une combinaison linéaire de la base des t-invariants (resp. p-invariants).

### Exemple 2.13

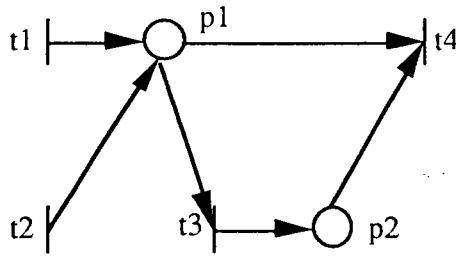


Figure 2.12 Une RdP ayant un t-invariant minimal qui n'est pas un t-invariant à support minimal

Pour le réseau de Petri présenté dans la figure 2.12,  $Y_1=(1, 1, 1, 1)^T$ ,  $Y_2=(2, 0, 1, 1)^T$  et  $Y_3=(0, 2, 1, 1)^T$  sont trois t-invariants minimaux. Parmi ces trois t-invariants, seuls  $Y_2$  et  $Y_3$  sont des t-invariants à support minimal. Le support de  $Y_1$ ,  $\{t1, t2, t3, t4\}$ , inclut le support de  $Y_2$ ,  $\{t1, t3, t4\}$ . Donc  $Y_1$  n'est pas un t-invariant à support minimal et  $Y_1=(Y_2+Y_3)/2$ . ♦

#### 2.4.2 Arbre des marquages atteignables et arbre de recouvrement

Pour connaître le comportement d'un réseau, l'idée la plus simple serait de construire l'**arbre des marquages atteignables** [BRA 83]. Dans l'arbre des marquages atteignables, chaque noeud correspond à un marquage atteignable, et l'arc reliant deux noeuds correspond au franchissement d'une transition qui conduit d'un marquage à l'autre. L'arbre des marquages atteignables est un moyen idéal pour vérifier les propriétés comme la vivacité et l'atteignabilité pour les réseaux bornés. Mais le problème se pose quand un réseau de Petri n'est pas borné, puisque le nombre de marquages atteignables devient alors infini, et le nombre de noeuds dans l'arbre des marquages atteignables est également infini. L'idée est donc de construire un arbre de marquages ayant un nombre fini de noeuds que l'on appelle **arbre de recouvrement** [BRA 83]. Dans cet arbre, nous introduisons un symbole  $\omega$  pour indiquer que le nombre de jetons dans une place est "infini".  $\omega$  a les propriétés suivantes : pour tout nombre entier  $k$ ,  $\omega > k$ ,  $\omega \pm k = \omega$  et  $\omega \geq \omega$ . L'algorithme suivant permet de construire l'arbre de recouvrement.

##### Algorithme 2.1 :

- 1° Poser  $M_0$  comme racine de l'arbre.
- 2° S'il est possible d'atteindre de nouveaux marquages par franchissement d'une transition, exécuter les étapes suivantes :
  - 2.1° Sélectionner un "nouveau" marquage  $M$ ;

- 2.2° Si  $M$  est identique à un marquage  $M^*$  du chemin conduisant de  $M_0$  à  $M$ , alors  $M$  est un "vieux" marquage. Aucun nouveau marquage ne sera plus dérivé de  $M$ .
- 2.3° Si aucune transition ne peut être franchie, on arrive à la situation de "blocage".
- 2.4° Si il existe des transitions franchissables pour  $M$ , exécuter les étapes suivantes pour chaque transition  $t$  franchissable à partir de  $M$  :
  - 2.4.1° Franchir la transition  $t$ . Nous obtenons un marquage  $M'$ .
  - 2.4.2° Si, dans le chemin allant de  $M_0$  à  $M$ , il existe un marquage  $M''$  tel que  $M'(p) \geq M''(p)$  pour chaque place  $p$  et  $M' \neq M''$ , i.e. si  $M''$  est couvert par  $M'$ , alors remplacer  $M'(p)$  par  $\omega$  pour chaque place  $p$  tel que  $M'(p) > M''(p)$ .
  - 2.4.3° Introduire  $M'$  comme une nouvelle feuille de l'arbre et établir la branche de  $M$  à  $M'$  marquée  $t$ .

◆

### Exemple 2.14

Le réseau de Petri représenté dans la figure 2.13 a) avec le marquage initial  $M_0 = (1, 0, 0)$  ont deux transitions  $t_2$  et  $t_4$  franchissables. Après avoir franchi  $t_2$  à partir de  $M_0$ , nous obtenons le marquage  $M_1$  à partir duquel il n'y a aucune transition franchissable, donc nous sommes dans la situation de "blocage". Après la franchissement de  $t_4$  à partir de  $M_0$ , nous obtenons le marquage  $M_3' = (1, 1, 0)$  qui couvre  $M_0$ , donc le nouveau marquage est  $M_3 = (1, \omega, 0)$ . A partir de  $M_3$ , après les franchissements de  $t_2$  et  $t_4$  respectivement, nous obtenons  $M_4 = (0, \omega, 1)$  et  $M_6 = (1, \omega, 0)$ . Puisque  $M_3 = M_6$ ,  $M_6$  est un noeud noté "vieux". De la même façon,  $M_5$  est un noeud "vieux" après avoir franchi  $t_3$  à partir de  $M_4$ . La figure 2.13 b) présente l'arbre de recouvrement.

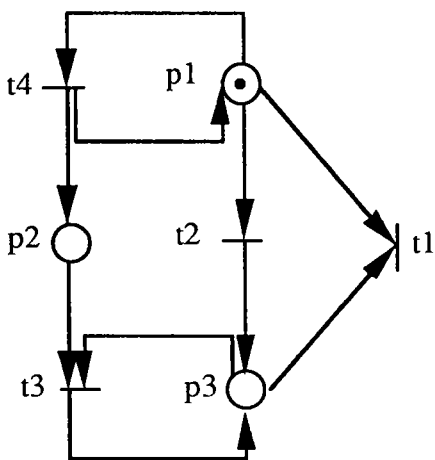


Figure 2.13 a) Un RdP

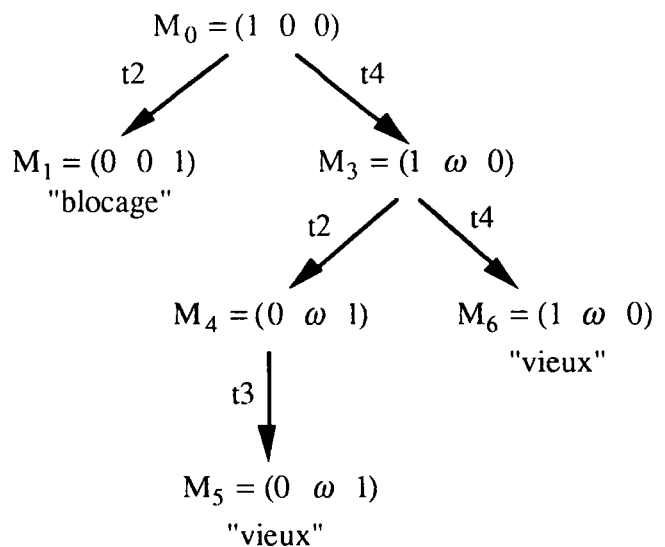


Figure 2.13 b) Son arbre de recouvrement

◆

Le **graphe de recouvrement** est un graphe orienté  $W = (V, E)$ , où  $V$  est l'ensemble des noeuds et  $E$  est l'ensemble des arcs. Chaque arc représente le franchissement d'une transition  $t$ .

Cette méthode est particulièrement efficace pour les réseaux de Petri bornés de petite taille. Si un arbre de recouvrement d'un RdP ne comporte pas de symbole " $\omega$ ", alors le réseau est borné. Dans le cas d'un réseau de Petri borné, le graphe de recouvrement contient tous les marquages atteignables, donc il est aussi le graphe des marquages atteignables. Le problème d'atteignabilité peut donc être résolu à l'aide du graphe des marquages atteignables.

A cause de l'utilisation du symbole " $\omega$ " nous ne pouvons pas vérifier, à l'aide du graphe de recouvrement, si un marquage donné  $M$  peut être atteint. Nous ne pouvons que vérifier si il existe un marquage  $M'$  tel que  $M' \geq M$ . Cette méthode ne peut donc pas résoudre le problème de vivacité et d'atteignabilité. Nous montrons, dans l'exemple suivant, que deux réseaux de Petri peuvent avoir le même arbre de recouvrement alors que l'un est vivant et l'autre ne l'est pas.

Exemple 2.15

Les figures 2.14 a) et b) représentent un RdP vivant et un RdP non vivant [MUR 89]. Ils ont le même arbre de recouvrement et le même graphe de recouvrement qui sont représentés dans les figures 2.15 a) et b).

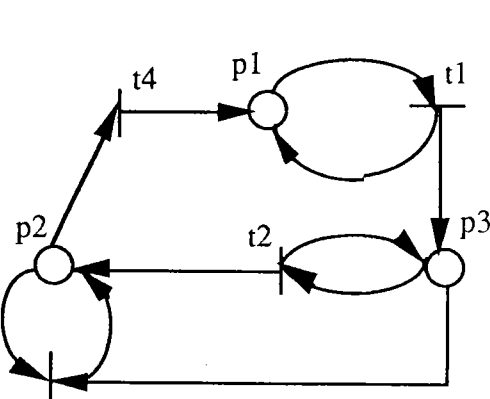


Figure 2.14 a) Un RdP vivant

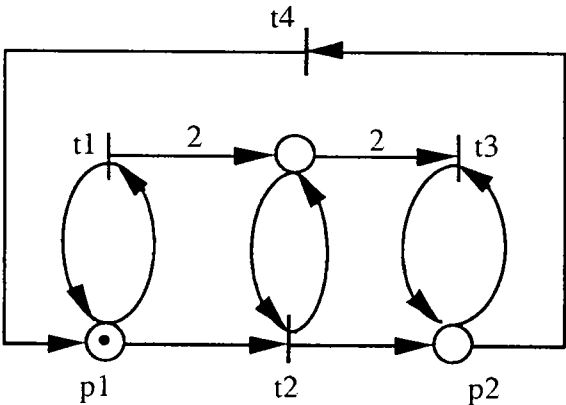


Figure 2.14 b) Un RdP non vivant

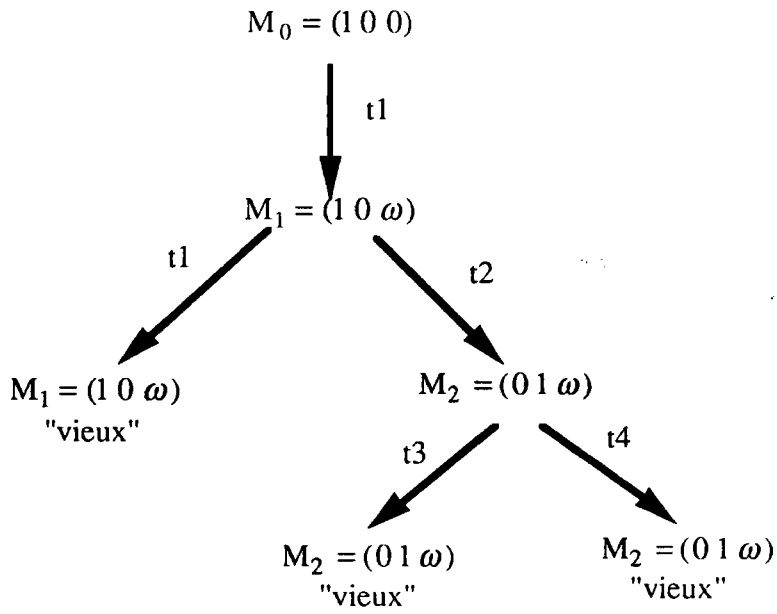


Figure 2.15 a) Arbre de recouvrement des deux réseaux

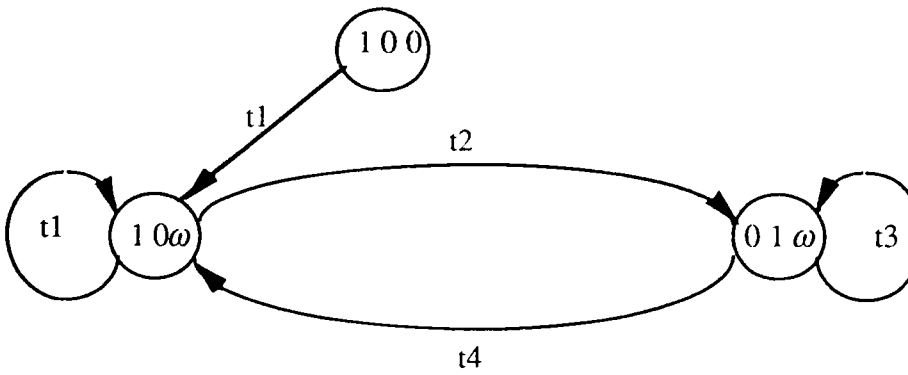


Figure 2.15 b) Graphe de recouvrement des deux réseaux

### 2.4.3 Techniques de réduction

Lorsque la taille du réseau de Petri étudié croît, les méthodes dérivées de l'algèbre linéaire deviennent difficiles à utiliser. La construction de l'arbre de recouvrement est aussi très longue. Nous souhaitons donc pouvoir diminuer la taille d'un réseau de Petri tout en préservant les propriétés souhaitées. Nous présentons ici 4 règles de réduction classiques [DAV et al. 89] qui transforment un réseau de Petri en un réseau plus simple en préservant certaines propriétés, comme la bornitude, la vivacité, la propriété de non blocage, l'existence d'états d'accueil et la conservation. Malheureusement, en utilisant ces règles, seules certaines places et transitions peuvent être réduites.

## Règle 1 (R1) : Substitution d'une place

Une place  $p$  est **substituable** si elle satisfait les trois conditions suivantes :

- 1) Les transitions de sortie de  $p$  n'ont qu'une place d'entrée  $p$ , i.e.  $\bullet t = \{p\}$ , pour  $\forall t \in p\bullet$ .
- 2) Il n'existe pas de transition qui soit à la fois transition d'entrée et transition de sortie de  $p$ , i.e.  $\nexists t$  tel que  $t \in \bullet p$  et  $t \in p\bullet$ .
- 3) Au moins une des transitions de sortie de  $p$  n'est pas une transition puits, i.e.  $\exists t \in p\bullet$  tel que  $t\bullet \neq \emptyset$ .

Alors la place  $p$ , ainsi que les transitions  $p\bullet$ , peuvent être supprimées.

### Exemple 2.16

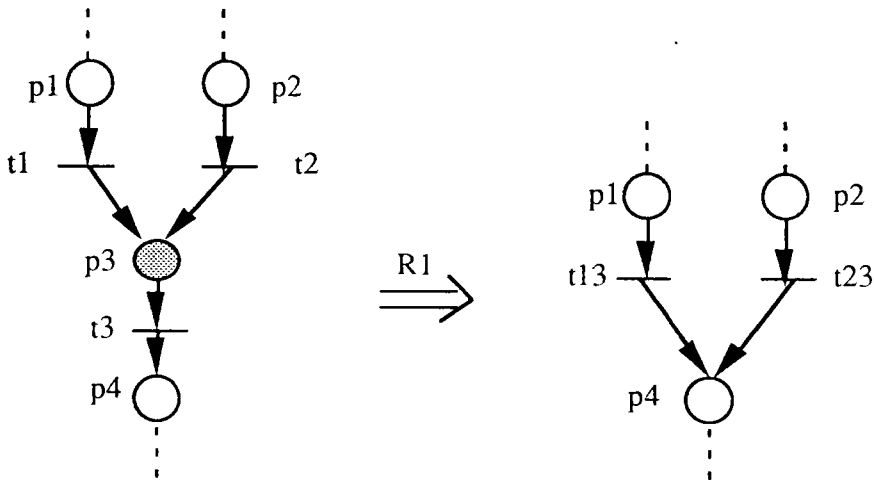


Figure 2.16 Un RdP avant et après l'utilisation de R1

Nous représentons dans la figure 2.16 un exemple qui utilise la règle R1. La transition  $t3$  n'a qu'une place d'entrée  $p3$  : la condition 1 est satisfaite. Il n'existe pas de transition qui soit à la fois transition d'entrée et transition de sortie de la place  $p3$  : la condition 2 est satisfaite. La place  $p3$  n'a qu'une transition de sortie qui n'est pas une transition puits. Donc la place  $p3$  est une place substituable. Après la substitution de la place  $p3$ , nous obtenons un autre réseau illustré également dans la figure 2.16. ♦

## Règle 2 (R2) : Simplification d'une place implicite

Une place  $p$  est dite **implicite** si elle satisfait les conditions suivantes :

- 1) Le marquage de  $p$  n'empêche jamais le franchissement de ses transitions de sortie, i.e.  $\forall t \in p\bullet$ , la relation  $M'(p') \geq I(p', t)$ ,  $\forall p' \in \bullet t - \{p\}$ , implique  $M(p) \geq I(p, t)$ .
- 2) Son marquage peut se déduire du marquage des autres places.

Exemple 2.17

Nous représentons dans la figure 2.17 un exemple dans lequel la place p3 peut être simplifiée à l'aide de la règle R2.

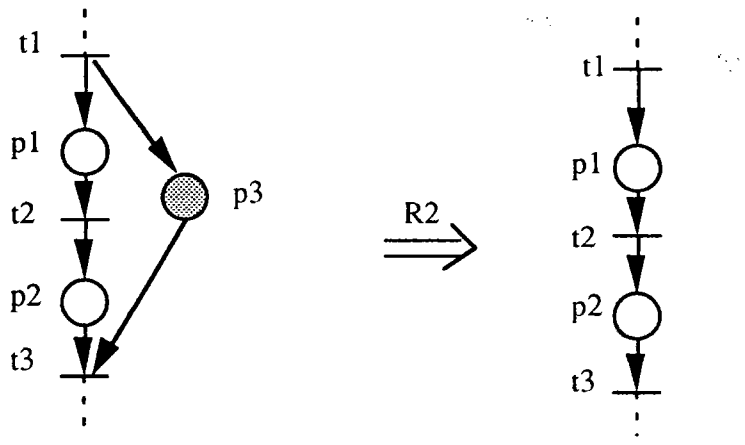


Figure 2.17 Un RdP avant et après l'utilisation de R2

**Règle 3 (R3) : Suppression de transitions neutres**

Une transition t est dite **neutre** si et seulement si l'ensemble de ses places d'entrée est identique à l'ensemble de ses places de sortie, i.e.  $\bullet t = t \bullet$ .

Exemple 2.18

Dans l'exemple illustré dans la figure 2.18, la transition t5 est une transition neutre qui satisfait la condition de la règle R3. Nous pouvons alors la simplifier.

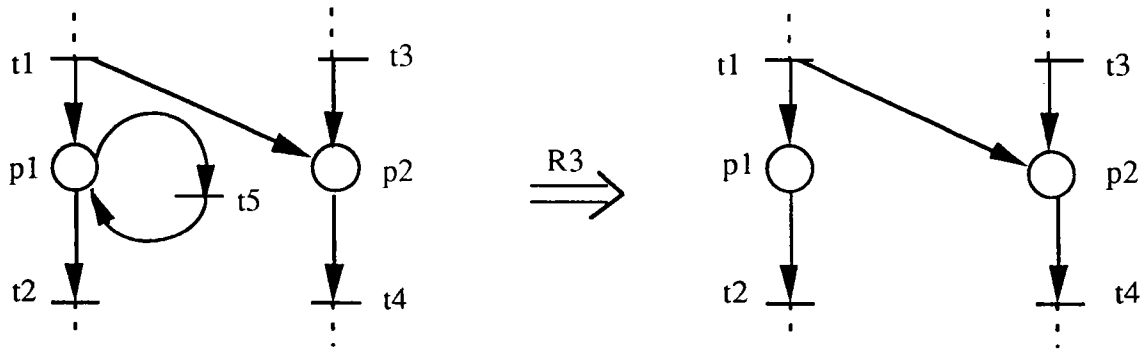


Figure 2.18 Un RdP avant et après l'utilisation de R3

#### Règle 4 (R4) : Suppression de transitions identiques

Deux transition  $t_i$  et  $t_j$  sont dites **identiques** si elles ont le même ensemble de places d'entrée et le même ensemble de places de sortie, i.e.  $\bullet t_i = \bullet t_j$  et  $t_i \bullet = t_j \bullet$ .

##### Exemple 2.19

Dans l'exemple de la figure 2.19, les transitions  $t_1$  et  $t_2$  ont les mêmes places d'entrée et les mêmes places de sortie. Elles satisfont donc la condition de la règle R4, et nous pouvons supprimer une de ces transitions. Dans cet exemple, nous supprimons la transition  $t_2$ .

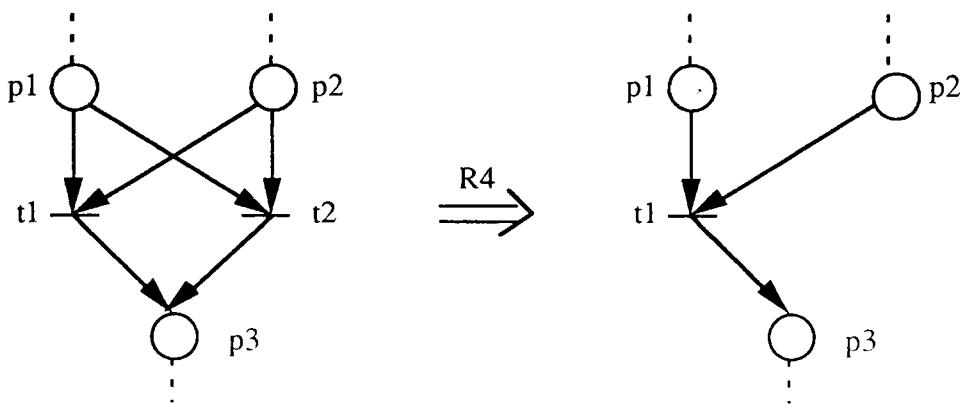


Figure 2.19 Un RdP avant et après utilisé R4

#### 2.4.4 Méthodes utilisant les verrous et les trappes

Considérons  $S$  (resp.  $Q$ )  $\subseteq P$  un ensemble non vide de places dans un réseau de Petri  $N = \langle P, T, I, O \rangle$ . Les définitions de verrou (resp. trappe) sont les suivantes :

**Verrou (ou blocage) :**

$S$  est un **verrou** si pour chaque transition  $t$ , le fait que  $t$  ait une place de sortie dans  $S$  implique qu'il a aussi une place d'entrée dans  $S$ . Plus simplement,  $S$  est un verrou si et seulement si  $\bullet S \subseteq S \bullet$ .

Si les places d'un verrou ne sont pas marquées par le marquage initial, alors elles restent toujours non marquées, quelle que soit l'évolution du réseau. Leurs transitions d'entrée et leurs transitions de sortie ne sont donc pas vivantes. Ceci implique donc que le réseau n'est pas vivant.

**Théorème 2.3 [BRA 83]** : Un réseau de Petri connexe  $\langle N, M_0 \rangle$  est **vivant** quel que soit  $M_0$  si et seulement si il ne contient pas de verrou.

**Trappe :**

$Q$  est une **trappe** si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- 1) Si une transition  $t$  a une place d'entrée dans  $Q$ , alors elle a aussi une place de sortie dans  $Q$ , i.e.  $\bullet Q \supseteq Q^\bullet$ ;
- 2)  $\forall t \in Q^\bullet, \exists p \in Q \cap t^\bullet$  tel que  $p^\bullet = \emptyset$  ou  $O(t, p) \geq \min_{t' \in p^\bullet} \{I(p, t')\}$ .

Dans les réseaux de Petri ordinaires, la deuxième condition est satisfaite automatiquement.

Si une trappe contient des jetons, alors elle contiendra des jetons quelle que soit l'évolution ultérieure du réseau.

Dans les réseaux ordinaires, les verrous et les trappes dépendent de la structure du réseau. Ils peuvent caractériser la vivacité ou l'absence de blocage de certaines sous-classes des réseaux de Petri ordinaires (voir la section 2.5).

**Composant verrou/trappe :**

$S$  est un composant verrou/trappe  $S/Q$  si il est à la fois un verrou et une trappe.

Si  $X$  est un p-invariant, cela implique que  $\|X\|$  est un composant verrou/trappe [COM 72], mais la réciproque n'est pas vraie.

**Un verrou (resp. une trappe) minimal(e) :**

Un verrou (resp. une trappe) est un verrou (resp. une trappe) minimal(e) si il n'existe pas d'autre verrou (resp. d'autre trappe)  $S'$  (resp.  $Q'$ ) tel que  $S \subseteq S'$  (resp.  $Q \subseteq Q'$ ).

**Un verrou (resp. une trappe) de base :**

Un verrou (resp. une trappe) est un verrou de base (resp. une trappe de base) si il (resp. elle) n'est pas l'union d'autres verrous (resp. trappes).

**La base des verrous (resp. des trappes) :**

L'ensemble des verrous ( resp. des trappes) de base constituent la base des verrous (resp. des trappes).

Un verrou (resp. une trappe) minimal(e) est un verrou de base (resp. une trappe de base), mais un verrou de base (resp. une trappe de base) n'est pas nécessairement un verrou (resp. une trappe) minimal(e). Tout verrou (resp. toute trappe) est une combinaison de la base des verrous (resp. des trappes).

Dans les figures suivantes, nous présentons un verrou et une trappe de réseau ordinaire.

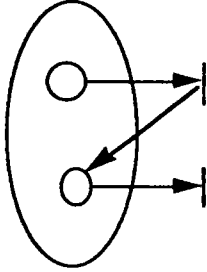


Figure 2.20 a) Un verrou

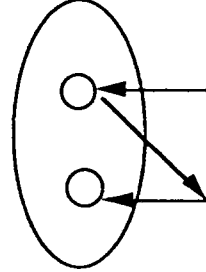


Figure 2.20 b) Une trappe

Il est reconnu qu'en règle générale, la vérification de certaines propriétés, comme la vivacité et la réversibilité d'un réseau de Petri, est très difficile. En revanche, pour certaines sous-classes des réseaux de Petri, ces propriétés peuvent être facilement vérifiées. Dans la section suivante, nous présentons des sous-classes de réseaux de Petri.

## 2.5 SOUS-CLASSES DE RESEAUX DE PETRI

Dans cette section, nous présentons certaines sous-classes de réseaux de Petri étudiées dans la littérature. Nous définissons en premier lieu les réseaux généralisés et les réseaux ordinaires.

Un **réseau de Petri généralisés** est un réseau dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs. Un réseau de Petri est **ordinaire** si le poids de tout arc est 1. Il a été démontré que tout réseau de Petri généralisé peut être transformé en un RdP ordinaire. Dans cette section, nous présentons des sous-classes de réseaux de Petri ordinaires, qui se distinguent par leurs structures.

### 2.5.1 Graphes d'événements

Un réseau de Petri ordinaire est un **graphe d'événements** (GE) si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie, i.e.  $\forall p \in P, |p \bullet| = 1$  et  $|\bullet p| = 1$ .

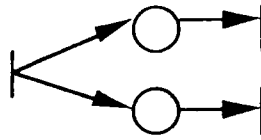


Figure 2.21 Un graphe d'événements

Un graphe d'événements est un réseau sans conflit. Il a les propriétés suivantes :

- 1) *Un graphe d'événements  $N$  est consistant , donc répétitif [DIC et al. 93].*
- 2) *Un graphe d'événements  $N$  fortement connexe est conservatif, donc structurellement borné [COM et al. 71].*
- 3) *Un graphe d'événements  $N$  fortement connexe est structurellement vivant et structurellement borné, donc consistant et conservatif [DIC et al. 93].*
- 4) *Un graphe d'événements marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant si et seulement si chaque circuit élémentaire contient au moins un jeton [COM et al. 71].*
- 5) *Un graphe d'événements marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est réversible si et seulement si il est vivant [COM et al. 71].*
- 6) *Dans un graphe d'événements  $N$ , l'ensemble des places d'un circuit élémentaire est un composant verrou/trappe minimal [DIC et al. 93].*

### 2.5.2 Machines à états

Un réseau de Petri ordinaire est une **machine à états** (ME) si et seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie, i.e.  $\forall t \in T, |t \bullet| = 1$  et  $|\bullet t| = 1$ .

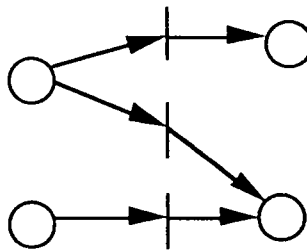


Figure 2.22 Une machine à états

Les machines à états permettent de modéliser les conflits. Elles ont les propriétés suivantes :

- 1) *Une machine à états  $N$  est conservative, donc structurellement bornée [DIC et al. 93].*

- 2) Une machine à états  $N$  fortement connexe est consistante, donc répétitive [DIC et al. 93].
- 3) Une machine à états  $N$  fortement connexe est structurellement vivante et structurellement bornée, donc consistante et conservative [DIC et al. 93].
- 4) Une machine à états connexe marquée  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivante si et seulement si elle est fortement connexe et si  $M_0$  a au moins un jeton [MUA 89].
- 5) L'ensemble des places d'une machine à états connexe est un composant verrou/trappe si et seulement si elle est fortement connexe [DIC et al. 93].

### 2.5.3 Réseaux de Petri à choix libre

Un **réseau de Petri à choix libre** est un RdP ordinaire dans lequel, si une place  $p$  a plusieurs transitions de sortie, alors  $p$  est la seule place d'entrée de chacune de ces transitions, i.e.  $\forall p \in P, |p^\bullet| > 1 \Rightarrow \forall t_k \in p^\bullet, |\bullet t_k| = 1$ .

Les figures suivantes montrent deux réseaux de Petri. L'un est un réseau de Petri à choix libre et l'autre ne l'est pas.

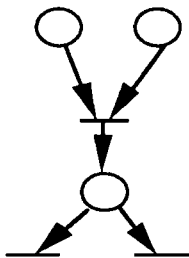


Figure 2.23 a) Un RdP à choix à libre

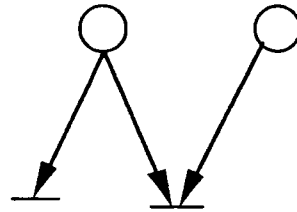


Figure 2.23 b) Un RdP à choix non libre

Un réseau de Petri à choix libre possède les propriétés suivantes :

- 1) Un réseau de Petri à choix libre  $N$  est structurellement vivant et structurellement borné si et seulement si il est consistant et conservatif, et si  $\text{rang}(C) = |T| + |P| - a - 1$ , où  $a$  est le nombre d'arcs orientés des places vers les transitions [DIC et al. 93].
- 2) Pour un réseau de Petri à choix libre marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  vivant et borné, il est réversible si et seulement si toutes les trappes sont marquées par  $M_0$  [BES et al. 90].
- 3) Un réseau de Petri à choix libre marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant si et seulement si chaque verrou contient une trappe marquée [MUR 89].

4) Si un réseau de Petri à choix libre marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant, la vivacité est préservée en augmentant  $M_0$ , i.e. pour tout  $M_0' \geq M_0$ , si  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant, alors  $\langle N, M_0' \rangle$  l'est [DIC et al. 93].

### 2.5.4 Réseaux de Petri à choix asymétrique

Un **réseau de Petri à choix asymétrique** est un réseau de Petri ordinaire dans lequel si tout deux places a une transition de sortie commune, alors l'ensemble de transitions de sorite d'une de ces places inclut ou égale celui de l'autre, i.e. pour tout  $p_1, p_2 \in P$ , si  $p_1 \cap p_2 \neq \emptyset$ , alors  $p_1^\bullet \subseteq p_2^\bullet$  or  $p_1^\bullet \supseteq p_2^\bullet$ .

Les figures suivantes montrent la différence entre un réseau à choix asymétrique et un réseau qui ne l'est pas.

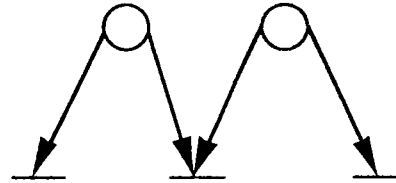
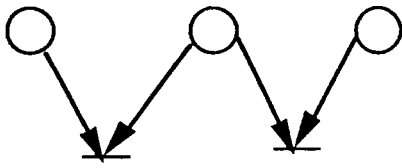


Figure 2.24 a) Un RdP à choix asymétrique      Figure 2.24 b) Un RdP à non choix asymétrique

Un réseau simple a la propriété suivante :

Un **réseau de Petri à choix asymétrique** marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant si chaque verrou contient une trappe marquée [DIC et al. 93].

Il faut souligner que le réseau simple inclut les 3 sous-classes de réseaux citées auparavant.

### 2.5.5 Réseaux de Petri acycliques

Un **réseau acyclique** est un RdP dans lequel il n'existe pas de circuits orientés.

Les figures suivantes illustrent la différence entre un réseau acyclique et un réseau cyclique.

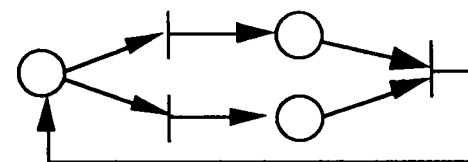
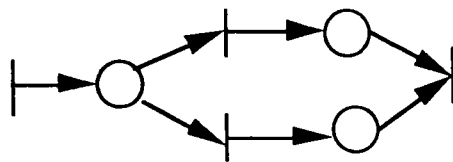


Figure 2.25 a) Un RdP acyclique

Figure 2.25 b) Un RdP cyclique

Un réseau acyclique possède les propriétés suivantes :

- 1) *Un réseau acyclique est vivant si il n'existe pas de place source, i.e. si il ne contient pas de verrou [BRA 83].*
- 2) *Dans un réseau acyclique avec marquage initial  $M_0$ ,  $M$  est atteignable à partir de  $M_0$  si et seulement si il existe un vecteur de comptage qui satisfait l'équation fondamentale, i.e.  $\exists Y \geq 0$ , tel que  $M = M_0 + CY$  [MUR 89].*
- 3) *Un réseau acyclique est réversible si il est consistant [MUR 89].*

### 2.5.6 Réseaux de Petri purs

Un réseau est dit **pur** si il n'existe pas de transition (resp. place) ayant une place ( resp. transition) d'entrée qui est également une place (resp. transition) de sortie. Autrement dit, un réseau de Petri est **impur** si et seulement si il existe un circuit élémentaire qui ne contient qu'une place et qu'une transition.

Les figures suivantes montrent respectivement un réseau pur et un réseau impur.

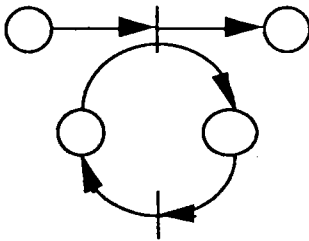


Figure 2.26 a) Un RdP pur

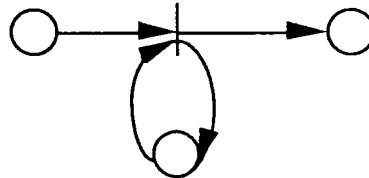


Figure 2.26 b) Un RdP impur

Si un réseau de Petri est pur, sa structure peut être complètement définie par sa matrice d'incidence. Si un RdP est impur, nous ne pouvons pas déduire sa structure de sa matrice d'incidence. Ceci est dû au fait que si le franchissement d'une transition retire et ajoute des jetons dans la même place, la matrice d'incidence n'indique pas la différence. Nous ne pouvons donc pas vérifier les propriétés structurelles des réseaux de Petri impurs en utilisant la matrice d'incidence. C'est le raison pour laquelle nous distinguons les réseaux de Petri purs et les réseaux de Petri impurs.

En revanche, tout réseau de Petri impur peut être transformé en un réseau de Petri pur. En plus cette transformation ne change pas les propriétés structurelles des réseaux. Les figures 2.27 et 2.28 illustrent la transformation pour deux types de RdP impurs.

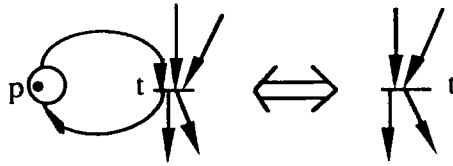


Figure 2.27 Transformation d'un RdP impur en un RdP pur

La figure 2.27 présente un RdP impur dans lequel la transition  $t$  a une place d'entrée  $p$  qui est également une place de sortie et dans lequel cette place est une place implicite. Selon la règle 2 du paragraphe 2.4.3, nous supprimons la place  $p$ , le réseau devient un RdP pur.

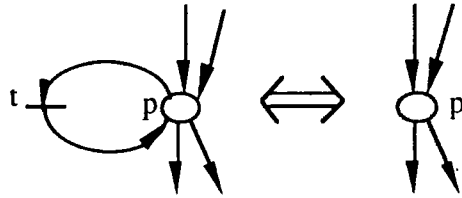


Figure 2.28 Transformation un RdP impur en un RdP pur

La figure 2.28 présente un RdP impur dans lequel la place  $p$  a une transition d'entrée  $t$  qui est également une transition de sortie et dans lequel cette transition est une transition neutre. Selon la règle 3 du paragraphe 2.4.3, nous supprimons la transition  $t$ , le RdP devient un RdP pur.

Voici un exemple de transformation d'un RdP impur en un RdP pur dans le cas général.

### Exemple 2.20

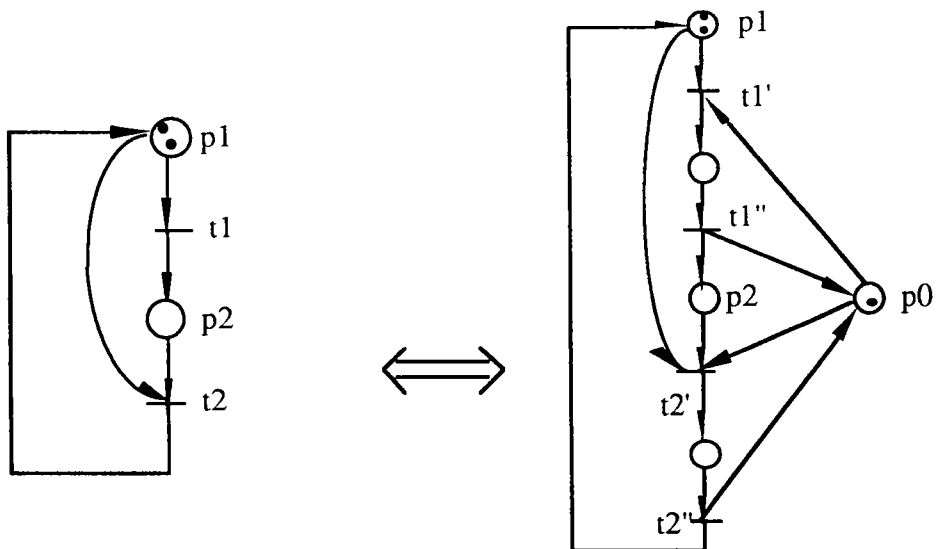


Figure 2.29 Transformation d'un RdP impur en un RdP pur

La figure 2.29 représente la transformation d'un RdP impur en RdP pur [DAV et al 89]. La figure de gauche est un RdP impur puisque la place  $p_1$  est à la fois place d'entrée et place de sortie de la transition  $t_2$ . La transformation de ce RdP en un RdP pur se fait en deux étapes. D'abord nous remplaçons toute transition de sortie  $t_j$  (où  $j = 1, 2$ ) de la place  $p_1$  par deux transitions  $t_j'$  et  $t_j''$  reliées par une place intermédiaire. Ensuite, nous ajoutons une place  $p_0$  qui contient un jeton, qui est une place d'entrée de toutes les transitions  $t_j'$  et place de sortie de toutes transitions  $t_j''$ . Ainsi, le franchissement de la transition  $t_j$  est remplacé par le franchissement en séquence de  $t_j'$  et  $t_j''$ . En effet, après le franchissement de  $t_j'$ , la seule transition du réseau franchissable est  $t_j''$ . Pour éviter la possibilité de franchir  $t_1$  entre  $t_2'$  et  $t_2''$ , il est nécessaire d'adjoindre à une transition pure telle que  $t_1$  deux transitions  $t_1'$  et  $t_1''$  séparées par une place. La droite de la figure 2.29 présente le RdP pur correspondant. ♦

## 2.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions des réseaux de Petri, et les règles de franchissement. Nous avons introduit les propriétés structurelles, les propriétés comportementales, ainsi que les liens qui existent entre elles. Nous avons ensuite présenté quatre familles de méthodes d'analyse des réseaux de Petri. Parmi les quatre familles, les méthodes dérivées de l'algèbre linéaire sont efficaces pour vérifier les propriétés structurelles, comme la consistance, et la conservation, mais elles ne permettent pas de résoudre le problème de vivacité. Les méthodes utilisant les arbres de recouvrement et de marquages atteignables sont utilisées pour les réseaux de Petri de petite taille. Les techniques de réduction sont utilisées pour simplifier les réseaux de Petri. Les réseaux simplifiés préservent les propriétés souhaitées, par exemple : la vivacité, la bornitude et l'absence de blocage, suivant le type de simplification utilisé. Les méthodes basées sur les verrous et les trappes conviennent aux sous-classes de réseaux de Petri ordinaires pour la vérification des propriétés comme la vivacité et l'absence de blocage. Finalement nous avons présenté des sous-classes des réseaux de Petri avec leurs propriétés.

A partir de la définition des propriétés des réseaux de Petri ainsi que de leur signification physique, nous pouvons comprendre l'importance de ces propriétés pour les systèmes modélisés à l'aide des réseaux de Petri, notamment pour les systèmes de production. Il est donc naturel que le concepteur de systèmes prenne soin de s'assurer de l'existence de ces propriétés dès la conception du système. Ceci permet de mieux comprendre l'intérêt de ce travail dans lequel nous proposons des outils d'aide à la décision dans un environnement de conception incrémentale, lorsque la propriété souhaitée est la consistance, la bornitude structurelle ou l'absence de blocage, etc.

## **CHAPITRE III**

# **VERIFICATION INCREMENTALE DE LA CONSISTANCE ET DE LA CONSERVATION**

## 3.1 INTRODUCTION

Nous avons dit, dans l'introduction générale, que l'aide que nous pouvons apporter à l'utilisateur dépend de l'information dont nous disposons. Il est courant que l'on ne dispose pas du marquage initial au cours de la construction d'un modèle réseau de Petri complexe. Dans ce cas, nous pouvons néanmoins aider l'utilisateur à vérifier la consistance ainsi que les autres propriétés qui indépendamment du marquage initial. Ceci permet de détecter certaines erreurs avant l'obtention du modèle complet et d'accélérer par ce biais le cycle de conception.

Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude de la consistance et de la conservation. Dans les deux chapitres qui suivent, nous étudions respectivement la bornitude structurelle, la répétitivité et l'absence de blocage.

La consistance est une propriété structurelle liée à la réversibilité et aux états d'accueil. Elle caractérise partiellement l'existence d'une séquence de franchissement qui ramène le système au état initial. Elle fournit une condition nécessaire pour pouvoir revenir périodiquement à un marquage donné, et donc permet, à l'aide d'un contrôle adéquat, de garder le système vivant et borné. Nous comprenons donc l'intérêt de cette propriété dans la modélisation de systèmes de fabrication.

La propriété de conservation caractérise le fait que dans un système de production, les matériaux ne peuvent ni se multiplier, ni se détruire spontanément.

Dans ce chapitre, nous ne parlons que de la consistance. En fait, les propriétés de consistance et de conservation sont symétriques : si un réseau de Petri est consistant, alors le réseau obtenu en remplaçant les places (resp. transitions) par les transitions (resp. places) est conservatif, et vice versa. Ainsi, les résultats exposés dans ce chapitre s'appliquent également à la conservation. Lorsque nous nous intéressons à la propriété de conservation, il suffit de remplacer la matrice d'incidence par sa transposée, les mots "transition" par "place" et "place" par "transition".

Ce chapitre est organisé en 7 sections. La section 3.2 définit quelques notions utilisées tout au long de ce chapitre et présente une méthode de vérification de la consistance. La section 3.3 (resp. 3.4) examine la fusion et l'ajout de places (resp. transitions). La section 3.5 étudie l'ajout d'un sous-réseau de Petri. La section 3.6 est une synthèse des résultats précédents. La section 3.7 conclut ce chapitre.

## 3.2 UNE METHODE DE VERIFICATION DE LA CONSISTANCE

Dans cette section, nous définissons quelques notions utilisées tout au long du chapitre. Comme nous étudions la consistance d'un réseau de Petri en examinant sa matrice d'incidence, nous définissons d'abord quelques opérations relatives à une matrice, notamment la forme standard dérivée d'une matrice et la base des t-invariants.

Par ailleurs, comme nous avons besoin de vérifier la consistance d'une partie d'un réseau de Petri de temps à autres (du moins au début de la conception), nous proposons une méthode de vérification de la consistance. Cette vérification peut aussi être effectuée en utilisant la méthode proposée dans la section 3.4 pour la recherche du composant consistant maximal.

Note : Dans ce chapitre, nous utilisons les notations introduites dans le chapitre 2. Notamment  $m$  et  $n$  désignent respectivement le nombre de places et le nombre de transitions d'un réseau de Petri.

### 3.2.1 Forme standard dérivée d'une matrice et base des t-invariants

Dans la suite, nous appelons combinaison linéaire relative à une ligne d'une matrice, une des opérations suivantes :

1. multiplier la ligne par un nombre non nul;
2. ajouter à la ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Après avoir effectué des combinaisons linéaires relatives aux lignes d'une matrice  $A$  de dimensions  $u \times v$ , nous obtenons une autre matrice  $A'$  de mêmes dimensions. Alors cette matrice peut être exprimée comme  $A' = L \times A$ , où  $L$  est une matrice inversible de dimensions  $u \times u$ . Nous savons que  $\text{rang}(A') = \text{rang}(A)$ .

La remarque suivante nous permet de ne considérer que la matrice obtenue après une suite de combinaisons linéaires de lignes de la matrice d'incidence d'un réseau de Petri lorsque nous nous intéressons à la consistance.

**Remarque 3.1 :** Soit  $\hat{C} = L \times C$  la matrice obtenue après une suite de combinaisons linéaires relatives aux lignes de  $C_{m \times n}$ , matrice d'incidence d'un réseau de Petri. Ce

réseau est consistant si et seulement si il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $\hat{C}Y = 0$ . En effet si le réseau est consistant, nous savons que  $CY = 0$ , donc  $\hat{C}Y = LCY = 0$ .

Nous introduisons maintenant une matrice  $B_f$  de dimensions  $(n-r) \times n$ , où  $r$  est le rang de la matrice d'incidence  $C$  du réseau de Petri  $N$ , telle que  $\text{rang}(B_f) = n-r$  et  $CB_f^T = 0$ , où l'exposant  $\tau$  indique la transposée. Une telle matrice existe [MUR 89]. Par définition, les vecteurs lignes de  $B_f$  (qui sont indépendants les uns des autres) constituent la base de l'espace vectoriel engendré par les solutions du système  $CY = 0$ . Tout  $t$ -invariant est une combinaison linéaire des vecteurs des lignes de  $B_f$ . C'est pourquoi nous appelons  $B_f$  **base des  $t$ -invariants** du réseau de Petri  $N$ . Compte tenu de la définition de  $B_f$ , le théorème 3.1 est évident.

**Théorème 3.1** : Le réseau de Petri  $N$  est consistant si et seulement si il existe un vecteur colonne  $z$  tel que  $B_f^T z > 0$ .

Nous proposons un algorithme qui est obtenu à l'aide de la méthode de Gausse (voir [LUE 73] pour calculer la matrice  $\hat{C}$ . Dans la présentation de cet algorithme, nous désignons par  $\hat{C}_{i,\bullet}$  (resp.  $\hat{C}_{\bullet,i}$ ) le vecteur ligne (resp. colonne) constitué des éléments de la  $i$ -ème ligne (resp. colonne) de la matrice  $\hat{C}$ . A partir de la matrice  $\hat{C}$ , nous pouvons facilement obtenir la matrice  $B_f$ .

**Algorithme 3.1** :

1.  $\hat{C} = C$ ,  $i = 1$ ;
2. Chercher la première ligne notée  $i^* \geq i$  dans laquelle le numéro de la colonne où se trouve le premier élément non nul est le plus petit;
3. Si  $i^*$  n'existe pas, c'est-à-dire que toute ligne  $i^* \geq i$  est nulle, alors on s'arrête;
4. Si  $i^* \neq i$ , alors ajouter la ligne  $i^*$  à la ligne  $i$ ;
5. Chercher le premier élément  $\hat{c}_{i,j^*}$  non nul;
6. Diviser la ligne  $i$  par  $\hat{c}_{i,j^*}$ ;
7. Ajouter à toute ligne  $i'$  autre que la ligne  $i$  une ligne  $-\hat{c}_{i',j^*} \times \hat{C}_{i,\bullet}$ . Ceci annule les éléments de la colonne  $j^*$  sauf celui de la ligne  $i$ .
8.  $i = i + 1$ , aller à 2. ♦

En utilisant cet algorithme, nous pouvons obtenir une matrice  $\hat{C}$  de la forme donnée en (3.1) :

$$\hat{C} = L \times C = \begin{bmatrix} I_{r_1} & \hat{C}_{1,1} & 0 & \hat{C}_{2,1} & \dots & 0 & \hat{C}_{q,1} \\ 0 & 0 & I_{r_2} & \hat{C}_{2,2} & \dots & 0 & \hat{C}_{q,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I_{r_q} & \hat{C}_{q,q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow r_2 \\ \vdots \\ \updownarrow r_q \\ \updownarrow m-r \end{matrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow r_1 & \leftrightarrow s_1 & \leftrightarrow r_2 & \leftrightarrow s_2 & \dots & \leftrightarrow r_q & \leftrightarrow s_q \end{matrix}$$

où  $L$  est la matrice correspondant à la suite des combinaisons linéaires effectuées, et  $r = \sum_{i=1}^q r_i$  et  $n - r = \sum_{i=1}^q s_i$ . Comme dans l'algèbre linéaire, nous désignons par  $I_u$  la matrice identité de dimensions  $u \times u$  tout au long de cette thèse.

Dans la suite,  $\hat{C}$  de forme (3.1) sera appelée **forme standard dérivée de  $C$** .

A partir de la matrice  $\hat{C}$ , nous pouvons construire  $B_f$  comme suit :

$$B_f^\tau = \begin{bmatrix} -\hat{C}_{1,1} & -\hat{C}_{2,1} & -\hat{C}_{3,1} & \dots & \dots & -\hat{C}_{q,1} \\ I_{s_1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\hat{C}_{2,2} & -\hat{C}_{3,2} & \dots & \dots & -\hat{C}_{q,2} \\ 0 & I_{s_2} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\hat{C}_{q,q} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I_{s_q} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r_1 \\ \updownarrow s_1 \\ \updownarrow r_2 \\ \updownarrow s_2 \\ \vdots \\ \updownarrow r_q \\ \updownarrow s_q \end{matrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow s_1 & \leftrightarrow s_2 & \leftrightarrow s_3 & \dots & \dots & \leftrightarrow s_q \end{matrix}$$

Il est possible de vérifier que la matrice  $B_f$  ainsi obtenue satisfait la relation  $\hat{C} B_f^\tau = 0$  et que  $\text{rang}(B_f) = n - r$ . Par conséquent,  $C B_f^\tau = L^{-1} \hat{C} B_f^\tau = 0$ .

Nous remarquons que la forme standard dérivée de la matrice et le rang de la matrice peuvent être déterminés de manière incrémentale lorsque des transitions et/ou des places sont ajoutées à un réseau de Petri existant. Ceci correspond à l'ajout des colonnes et/ou des lignes à la matrice d'incidence  $C$  du RdP existant. La forme standard dérivée de  $C$

(voir la relation (3.1)) peut se mettre sous forme  $\hat{C} = L \times C = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  à une permutation de colonnes près. Lorsque nous ajoutons des colonnes, nous obtenons une matrice  $C1 = [C \ : C^*]$ . En appliquant la suite de combinaisons linéaires  $L$ , nous avons

$L \times C1 = [\hat{C} \quad : LC^*] = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}' & C_1^* \\ 0 & 0 & C_2^* \end{bmatrix}$ . Il suffit de poursuivre la méthode de Gauss pour transformer  $C_1^*$  et  $C_2^*$  en forme standard dérivée et nous obtenons la forme standard dérivée de C1 et  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C) + \text{rang}(C_2^*)$ . Lorsque nous ajoutons des lignes, nous obtenons une matrice  $C2 = \begin{bmatrix} C \\ \hat{C}^* \end{bmatrix}$ . En appliquant la suite des combinaisons linéaires L à

C, nous avons  $L \times C2 = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ C^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}' \\ 0 & 0 \\ C_1^* & C_2^* \end{bmatrix}$ . En annulant  $C_1^*$ , nous obtenons

$\begin{bmatrix} I_r & \hat{C}' \\ 0 & 0 \\ 0 & C_2^* - C_1^* \hat{C}' \end{bmatrix}$ . Nous pouvons alors obtenir aisément la forme standard de C2 et  $\text{rang}(C2) = \text{rang}(C) + \text{rang}(C_2^* - C_1^* \hat{C}')$ .

### 3.2.2 Une méthode de vérification de la consistance

Dans ce paragraphe, nous introduisons la matrice E est composée des lignes non nulles de la matrice  $\hat{C}$ . Cette matrice permet de diminuer les dimensions de la matrice d'incidence C et de vérifier la propriété de consistance du système.

On choisit les r premières lignes de  $\hat{C}$ , pour former la matrice E. Donc :

$$E = \begin{bmatrix} I_{r_1} & \hat{C}_{1,1} & 0 & \hat{C}_{2,1} & \cdots & 0 & \hat{C}_{q,1} \\ 0 & 0 & I_{r_2} & \hat{C}_{2,2} & \cdots & 0 & \hat{C}_{q,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{r_q} & \hat{C}_{q,q} \end{bmatrix} \quad (3.1')$$

Le réseau ayant C comme matrice d'incidence est consistant si et seulement si il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $EY = 0$ . En effet un réseau est consistant si et seulement si il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $\hat{C}Y = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} Y = EY = 0$ .

Nous avons aussi  $\text{rang}(E)=\text{rang}(\hat{C})=r$ . Car  $\text{rang}(\hat{C})=\text{rang}\left(\begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\text{rang}(E)$ . Cela implique qu'il existe  $r$  colonnes indépendantes. Après avoir permuté les colonnes, nous obtenons  $E_1$  et  $E_2$ , sous-matrices de  $E$ , respectivement de dimensions  $r \times r$  et  $r \times (n-r)$ , telles que  $\text{rang}(E_1)=r$ , et  $E_1$  est inversible.

Alors la vérification de la consistance s'effectue en vérifiant qu'il existe deux vecteurs  $Y_1$  et  $Y_2$  strictement positifs et respectivement de dimensions  $r$  et  $n-r$  tels que

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0$$

i.e.  $E_1 Y_1 + E_2 Y_2 = 0,$

ou encore  $Y_1 = -(E_1)^{-1} E_2 Y_2.$

En examinant (3.1'), nous voyons que nous pouvons faire en sorte que  $E_1$  soit une matrice identité. Nous nous plaçons dans ce cas. Ainsi la matrice  $(E_1)^{-1}$  est également une matrice identité. Les autres colonnes de  $E$  constituent  $E_2$ . Nous avons  $Y_1 = -E_2 Y_2$ . Comme  $Y_1 > 0$  et  $Y_2 > 0$ , nous obtenons la propriété suivante.

**Propriété 3.1 :** La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit consistant est qu'il existe un vecteur  $Y_2$  positif, tel que  $E_2 Y_2 < 0$ , où  $E_2$  est obtenu à partir de  $E$  en supprimant les colonnes qui constituent une matrice unité.

Dans les trois cas particuliers suivants, nous pouvons déterminer immédiatement la consistance.

- 1) Si les éléments d'une colonne de  $E_2$  sont tous strictement négatifs, alors l'inégalité précédente a une solution et le système est consistant. En effet, il suffit de prendre l'élément de  $Y_2$  correspondant à cette colonne suffisamment grand, et les autres éléments de  $Y_2$  suffisamment petits.
- 2) Si la somme des éléments de chaque ligne de  $E_2$  est négative, alors le système est consistant (il suffit de choisir  $Y_2$  ayant des éléments tous égaux à 1).
- 3) Si une ligne de  $E_2$  ne comporte que des éléments positifs ou nuls, alors le système n'est pas consistant.

Dans le cas général, nous faisons une transformation équivalente de manière à pouvoir utiliser la méthode de Dantzig. En effet, les trois énoncés suivants sont équivalents

1. Le système  $AX=0, X>0$  a une solution,
2. Le système  $AX=0, X\geq e$  a une solution,
3. Le système  $AX = -Ae, X\geq 0$  a une solution,

où  $e$  est le vecteur unité.

Le troisième énoncé peut être résolu à l'aide de la méthode de Dantzig améliorée que nous présentons ci-dessous. Par conséquent, la vérification de la consistance peut s'effectuer en remplaçant  $A$  par  $E$ .

La méthode de Dantzig permet de vérifier s'il existe une solution à l'équation  $AX=D$ , telle que  $X\geq 0$ , où  $A$  est une matrice de dimension  $u \times v$ ,  $D$  est un vecteur colonne de dimension  $u$ ,  $X$  est un vecteur colonne de dimension  $v$ . Nous supposons que le rang de  $A$  est  $u$  [KAU 70].

On choisit arbitrairement une base formée de  $u-1$  vecteurs  $U_i$  ( $i = 1, \dots, u-1$ ) et  $U_0=D$  de telle sorte que la matrice  $U=[U_0, U_1, \dots, U_{u-1}]$  soit inversible. Il faut noter que dans notre cas,  $A = E = [I_r, E_2]$ ,  $D=Ee$  et  $u = r$ . Il est donc toujours possible de trouver de tels vecteurs  $U_i$  ( $i \geq 1$ ) pour que  $[U_0, U_1, \dots, U_{u-1}]$  soit inversible, à condition, bien entendu, que  $D \neq 0$ . Il faut noter que  $D$  ne peut pas être combinaison linéaire de  $U_1, \dots, U_{u-1}$ . Lorsque  $D=0$ , la solution est immédiate : il suffit de prendre toutes les composantes de  $X$  égale à 0. Si  $D \neq 0$ , il existe un  $i^*$  tel que  $d_{i^*} \neq 0$ , où  $d_{i^*}$  est la valeur de la  $i^*$ -ème composante de  $D$ ; il suffit alors de prendre  $U_i = A_{\bullet i} \forall i < i^*$ , et  $U_i = A_{\bullet(i+1)} \forall i \geq i^*$ .

Ainsi, chacun des autres vecteurs  $\bar{U}_j$ , étant une combinaison linéaire des  $U_i$ , peut être exprimé comme suit :

$$\bar{U}_j = z_{0,j}U_0 + z_{1,j}U_1 + \dots + z_{u-1,j}U_{u-1} = \sum_{i=0}^{u-1} z_{i,j}U_i .$$

Voici l'algorithme qui vérifie l'existence d'une solution.

### Algorithme 3.2 :

1. Déterminer les matrices  $U$  et  $\bar{U}$ ; cette dernière est constituée des colonnes de  $A$  autres que  $U_1, U_2, \dots, U_{u-1}$ , où les dimensions de  $U$  et  $\bar{U}$  sont respectivement  $u \times u$  et  $u \times (v-u+1)$ .

2. Choisir arbitrairement  $u-1$  coefficients positifs  $w_i$  pour les vecteurs faisant partie de la base.

3. Calculer  $Z = U^{-1}\bar{U}$ , où les dimensions de  $Z$  est  $u \times (v-u+1)$ .

4. Test de  $z_{0,j}$ .

4.1) Si  $z_{0,j} \leq 0$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, v-u+1$ , alors il n'y a pas de solution, l'algorithme s'arrête.

4.2) Sinon, on ne sait pas encore si il existe une solution. Pour s'en assurer on sélectionne un  $j \geq 1$  tel que  $z_{0,j}$  soit le plus grand. Cet entier est l'indice du vecteur  $\bar{U}_j$  qui va entrer dans la base.

4.3) Si  $z_{i,j} \leq 0$  pour tout  $i = 1, \dots, u$ , il existe une solution.

4.4) Sinon, on ne sait pas si il existe une solution. Nous choisissons le vecteur de base qui va être remplacé par  $\bar{U}_j$ .

4.5) Pour cela, on considère une quantité  $\theta = \min_{i>0, z_{i,j}>0} (w_i / z_{i,j})$ , et le  $i$  qui réalise ce minimum.

4.6) On obtient ainsi le vecteur  $U_i$  à retirer de la base : la colonne de  $\bar{U}$  numérotée  $j$  et la colonne de  $U$  numérotée  $i$  permutent. Après la permutation, on obtient un nouveau  $U$  et  $\bar{U}$ .

5. Chercher les nouveaux coefficients.

$$\begin{aligned} w_i &= \theta; \\ w_k &= w_k - \theta z_{k,j} \quad k = 1, 2, \dots, i, \dots, u-1. \end{aligned}$$

6. Recommencer en 3°.

◆

Après un nombre fini d'itérations, l'algorithme s'arrête, et l'on sait s'il existe une solution.

### Exemple 3.1

Considérons l'exemple d'un stocker de type "dernier arrivé, premier utilisé" (i.e. Last-In-First-Out) que nous rencontrons dans les chaînes automatisées, et en particulier dans la fabrication du verre [PRO 92]. La figure 3.1 présente un tel stocker dont le modèle de réseau de Petri est donné dans la figure 3.2. En cas de panne de la partie aval, la première pièce fabriquée par la partie amont est placée en a (voir la figure 3.1). L'ensemble du stocker se déplace alors vers le haut et les pièces fabriquées suivantes sont placées en b, c jusqu'à d, après quoi le système se bloque jusqu'à la

remise en service de la partie aval. En cas de panne de la partie amont, la pièce stockée en dernier est utilisé d'abord, après quoi l'ensemble du stocker se déplace vers le bas. Si la panne de la partie amont se prolonge, nous utilisons l'avant dernière pièce stockée, puis le stocker se déplace vers le bas, et ainsi de suite jusqu'à ce que, soit le stocker soit vide (dans ce cas le système se bloque), soit la partie amont soit remise en service.

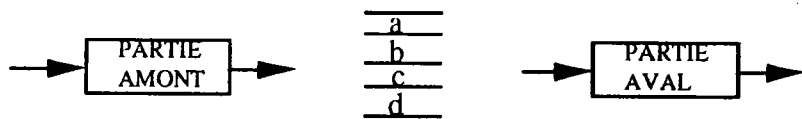


Figure. 3.1 Stocker LIFO

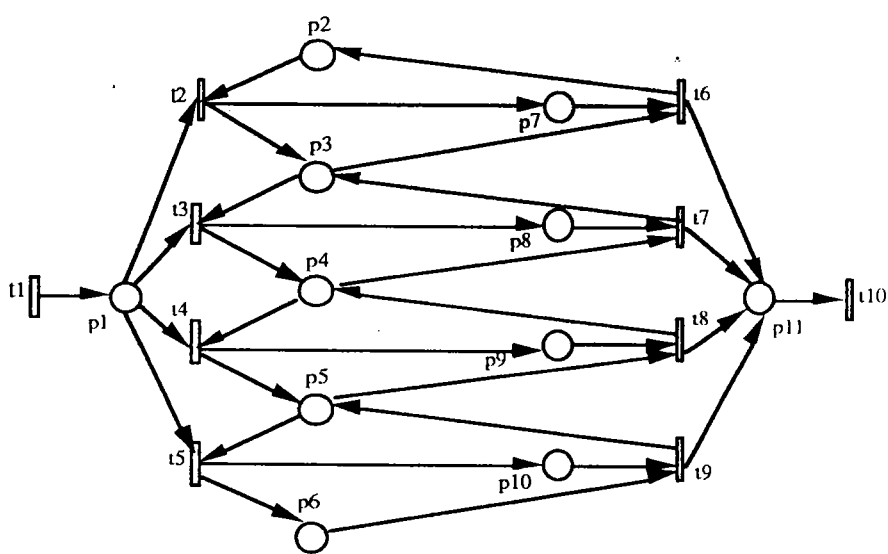


Figure.3.2 Modèle de réseau de Petri d'un stocker LIFO

La matrice d'incidence C de ce modèle est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après l'utilisation de l'algorithme 3.1 sur C, nous obtenons les matrices E et E<sub>2</sub> suivantes :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice E<sub>2</sub> ne correspond pas à un cas particulier. Nous sommes donc obligé d'utiliser l'algorithme 3.2. Nous trouvons que ce système est consistant en 0,083 secondes de CPU sur un IBM RISC 6000. ♦

Dans la suite, nous examinons la consistance d'un réseau de Petri obtenu à partir d'un réseau de Petri existant en ajoutant ou en fusionnant des places et/ou des transitions. Chaque résultat est illustré par un exemple. Il convient de souligner que bien que nous n'utilisions que des réseaux de Petri à valuation unitaire dans les exemples, nos résultats sont applicables aux réseaux de Petri à valuation quelconque.

### 3.3 AJOUT ET FUSION DE PLACES

D'après la définition de la consistance, nous montrons qu'en ajoutant uniquement des places à un réseau de Petri non consistant, le réseau obtenu reste non consistant. Nous ne nous intéressons donc qu'au cas où nous ajoutons des places à un réseau de Petri consistant. Nous montrons que la consistance du nouveau réseau peut être facilement décidée dans certains cas sans avoir à vérifier la consistance du réseau entier.

#### 3.3.1 Ajout de places

##### 3.3.1.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé

**Théorème 3.2** : Quand on ajoute *une place* à un réseau de Petri consistant N dont la matrice d'incidence est C pour construire un nouveau réseau N1 dont la matrice d'incidence est C1, si rang(C) = rang(C1), alors N1 est consistant.

**Démonstration :** Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la dernière ligne de  $C1$  correspond à la nouvelle place. Nous pouvons alors écrire  $C1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}$ . Comme  $\text{rang}(C) = \text{rang}(C1)$ ,  $C^*$  est une combinaison linéaire des lignes de  $C$ . Donc il existe un vecteur  $q$  tel que  $C^* = q^T C$ .

Si  $N$  est consistant, alors il existe un vecteur strictement positif  $Y$  tel que  $CY = 0$ . Par conséquent, nous avons  $C1 \times Y = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix} \times Y = \begin{bmatrix} CY \\ q^T CY \end{bmatrix} = 0$ , et le réseau  $N1$  est également consistant. Q.E.D.

Le corollaire suivant est la conséquence immédiate du théorème 3.2.

**Corollaire 3.1 :** Considérons deux réseaux de Petri  $N = (P, T)$  et  $N1 = (P \cup P', T)$ , dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C$  et  $C1$ . Si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$ , un vecteur  $Y$  est un t-invariant de  $N1$  si et seulement si il est un t-invariant de  $N$ . Ceci implique que si l'on ajoute *un ensemble de places* à un réseau de Petri  $N$  consistant sans augmenter le rang de la matrice d'incidence, alors le nouveau réseau  $N1$  est consistant.

### Exemple 3.2

On considère un réseau de Petri  $N$  (voir la figure 3.3) et sa matrice d'incidence  $C$

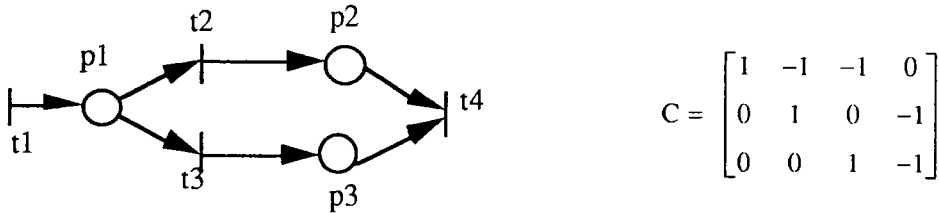
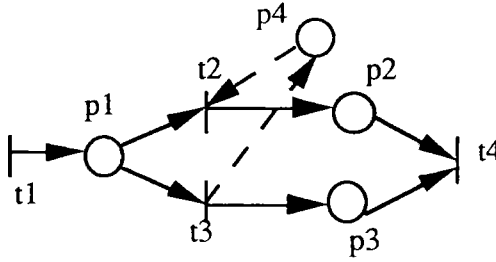


Figure 3.3 Réseau de Petri  $N$

On peut vérifier que  $\text{rang}(C) = 3$ . De plus,  $N$  est consistant car  $CY = 0$  si  $Y = [2, 1, 1, 1]^T$ .

On ajoute une place  $p4$  à  $N$  pour construire  $N1$  (voir la figure 3.4) dont la matrice d'incidence est  $C1$



$$C1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 3.4 Réseau de Petri N1

On peut vérifier que  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)=3$ , donc, selon le théorème 3.2, N1 est consistant. En effet, le vecteur  $Y = [2, 1, 1, 1]^T$  nous permet toujours d'obtenir  $C1 \times Y = 0$ . La séquence de franchissements correspondant à Y et qui nous permet de revenir au marquage initial est  $\langle t1, t3, t1, t2, t4 \rangle$ . ♦

### 3.3.1.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente

Nous examinons maintenant le cas où le rang de la matrice d'incidence du nouveau réseau est supérieur à celui de l'ancien réseau.

Quand nous ajoutons un ensemble  $P_k$  de k places à un réseau de Petri N consistant dont la matrice d'incidence est C pour construire un nouveau réseau de Petri N1 dont la

matrice d'incidence est  $C1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}$ , alors si  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)+k1$  où  $0 < k1 \leq k$  nous

pouvons supposer, sans perte de généralité, que les r lignes indépendantes de C sont numérotées de 1 à r, et que les k1 lignes qui contribuent à l'augmentation du rang sont numérotées de m+1 à m+k1. Nous définissons L' qui représente la transformation qui

conduit de C1 à  $C1' = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ C^* \end{bmatrix}$ , où  $\hat{C} = L \times C$  est la forme standard dérivée de C. Par

conséquent, avec les notations précédentes :  $L' = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$ .

Nous définissons ensuite L1 qui représente la transformation qui conduit de C1' à la forme standard dérivée de C1, soit  $\hat{C}1$  :

$$\hat{C}1 = L1 \times L' \times \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix} = L1 \times \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_r^* & C_1^* & C_2^* \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \\ \updownarrow k \end{matrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \hat{C}_2 - \hat{C}_1 \hat{C}_2^* \\ 0 & I_{k1} & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow k1 \\ \updownarrow m+k-r-k1 \end{matrix}$$

$\xleftarrow{r} \quad \xleftarrow{k1} \quad \xleftarrow{n-r-k1}$

Compte tenu des définitions précédentes :  $\hat{C} = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $C^* = \begin{bmatrix} C_r^* & C_1^* & C_2^* \end{bmatrix}$ .

Nous considérons le réseau de Petri  $N^{A1}$  (resp.  $N^{A2}$ ) dont la matrice d'incidence est  $C^{A1} = [I_r, \hat{C}_2 - \hat{C}_1 \hat{C}_2^*]$  (resp.  $C^{A2} = [I_{k1}, \hat{C}_2^*]$ ). Les colonnes de ces matrices sont définies à une permutation près.

**Théorème 3.3 :** (Condition nécessaire) On ajoute  $k$  places ( $k > 0$ ) à un réseau de Petri  $N$  consistant pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$ . Une condition nécessaire pour que  $N1$  soit consistant est que  $N^{A1}$  et  $N^{A2}$  le soient également.

**Démonstration :** Nous supposons que  $N1$  est consistant. Alors selon la remarque 3.1, il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $\hat{C}1 \times Y = 0$ . C'est-à-dire que :

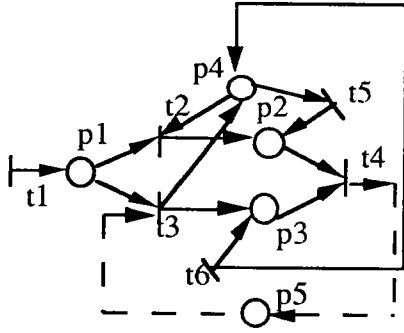
$$\hat{C}1 \times Y = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \hat{C}_2 - \hat{C}_1 \hat{C}_2^* \\ 0 & I_{k1} & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Cela signifie que

$C^{A1} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = [I_r, \hat{C}_2 - \hat{C}_1 \hat{C}_2^*] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0$  et  $C^{A2} \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = [I_{k1}, \hat{C}_2^*] \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0$ , ce qui implique que  $N^{A1}$  et  $N^{A2}$  sont aussi consistants. Q.E.D.

### Exemple 3.3

On ajoute une place  $p5$  au réseau  $N2$  consistant de la figure 3.9 du paragraphe 3.4.1.1 pour construire  $N3$  (voir la figure 3.5). La matrice d'incidence  $C3$  est la suivante :



$$C3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 3.5 Réseau de Petri N3

On obtient la forme standard :  $\hat{C}3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Puisque  $N^{A2}$  dont la matrice d'incidence est  $[0, 0, 1]$  n'est pas consistant, N3 n'est pas consistant selon le théorème 3.3. ♦

Remarques :

(i) Quand nous ajoutons une (ou un ensemble de) place(s) à un réseau de Petri N consistant pour construire un nouveau réseau de Petri N1, si  $\text{rang}(N1) > \text{rang}(N)$ , N1 peut être malgré tout consistant.

(ii) Si  $N^{A1}$  et  $N^{A2}$  sont consistants, et si  $\hat{N}$  est le réseau de Petri correspondant à  $\hat{C}1$ , alors il suffit de tester la consistance du sous-réseau de  $\hat{N}$  dont la matrice d'incidence est la restriction de  $\hat{C}1$  à ses lignes non nulles (voir la section 3.2). La consistance de  $\hat{N}$  peut être décidée à l'aide de l'algorithme 3.2 présenté dans la section 3.2.

### 3.3.2 Fusion de places

**Définition 3.1 :** Fusionner deux places  $p_1$  et  $p_2$  (resp. deux transition  $t_1$  et  $t_2$ ) appartenant au même réseau de Petri ou à deux réseaux de Petri différents consiste à remplacer le couple  $(p_1, p_2)$  (resp.  $(t_1, t_2)$ ) par une place unique  $p$  (resp. une transition unique  $t$ ) telle que :  $\bullet p = \bullet p_1 \cup \bullet p_2$  (resp.  $\bullet t = \bullet t_1 \cup \bullet t_2$ ) et  $p \bullet = p_1 \bullet \cup p_2 \bullet$  (resp.  $t \bullet = t_1 \bullet \cup t_2 \bullet$ ).

**Définition 3.2 :** Fusionner deux sous ensembles de places  $P_1$  (resp. de transitions  $T_1$ ) et  $P_2$  (resp.  $T_2$ ) appartenant au même réseau de Petri ou à deux réseaux de Petri différents

consiste à fusionner les places de  $P_1$  (resp. les transitions de  $T_1$ ) et  $P_2$  (resp.  $T_2$ ) deux à deux. Cela implique qu'il y a autant de places dans  $P_1$  (resp. de transitions dans  $T_1$ ) que dans  $P_2$  (resp.  $T_2$ ).

**Propriété 3.2 :** (Condition suffisante)

(i) Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri consistants par la fusion de deux ensembles  $P_1'$  et  $P_2'$  de places est consistant.

(ii) Le réseau de Petri obtenu après la fusion de deux ensembles  $P_1'$  et  $P_2'$  de places d'un même réseau de Petri consistant est également consistant.

**Démonstration :** (i) Désignons les sous-réseaux de Petri consistants que l'on souhaite fusionner respectivement par  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour

matrices d'incidence  $C_1=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix}$  et  $C_2=\begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix}$ , où  $C_{12}$  regroupe les lignes de  $C_1$  correspondant aux places de  $N_1$  à fusionner avec les places de  $N_2$  qui elles mêmes correspondent aux lignes de  $C_{21}$  dans  $C_2$ . Nous avons alors  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$  et  $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ . Nous obtenons un nouveau réseau  $N=N_1 \cup N_2$  dont la matrice d'incidence est  $C$  en fusionnant les places de  $N_1$  et  $N_2$  définies ci-dessus. Alors  $C$  peut être représentée

comme suit : 
$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{21} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Comme  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est consistant, alors il existe un  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ )  $>0$  tel que  $C_1 Y_1 = 0$  (resp.  $C_2 Y_2 = 0$ ). Alors le vecteur  $Y = [Y_1, Y_2] > 0$  est tel que  $CY = 0$ . Donc  $N$  est consistant.

(ii) Soient  $P_1'$  et  $P_2'$  deux ensembles de places à fusionner appartenant à un même réseau de Petri  $N$  consistant. Nous pouvons alors réécrire sa matrice d'incidence  $C = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_1' \\ C_2' \\ \vdots \end{bmatrix}$ , où

$C_1'$  (resp.  $C_2'$ ) regroupe les lignes correspondant à  $P_1'$  (resp.  $P_2'$ ). Comme  $N$  est consistant, il existe un  $Y > 0$  tel que  $CY = 0$ , donc  $C_1' Y = 0$  et  $C_2' Y = 0$ . Lorsque nous fusionnons les places  $P_1'$  et  $P_2'$ , nous obtenons un nouveau réseau de Petri  $N'$  dont la matrice d'incidence  $C'$  est obtenue en additionnant les lignes de  $C$  correspondant aux  $P_1'$

et  $P_2'$ , i.e.  $C' = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_1' + C_2' \\ \vdots \end{bmatrix}$ . Nous voyons que tout vecteur  $Y > 0$  tel que  $CY = 0$  est tel que  $C'Y = 0$ , puisque  $(C_1' + C_2')Y = 0$ . Donc  $N'$  est consistant. Q.E.D.

La fusion de deux places correspond au cas où  $|P_1| = |P_2| = 1$ .

Notons que la fusion de places appartenant à deux réseaux de Petri non consistants, ou de places appartenant au même réseau de Petri non consistant, peut conduire à un réseau de Petri consistant, comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple 3.4

Les figures suivantes représentent deux sous-réseaux de Petri  $N_1$  et  $N_2$ . Dans  $N_1$ , il existe une place puits  $p_2$  et dans  $N_2$ , une place source  $p_4$ . Donc ils ne sont pas consistants.

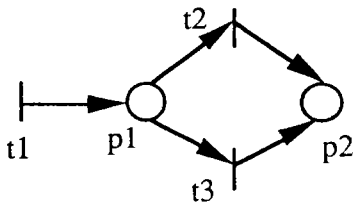


Figure 3.6 Réseau de Petri  $N_1$

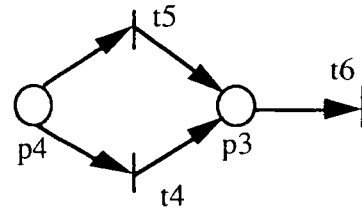


Figure 3.7 Réseau de Petri  $N_2$

En fusionnant les places  $p_2$  et  $p_4$ , nous obtenons le réseau  $N$  présenté dans la figure 3.8.

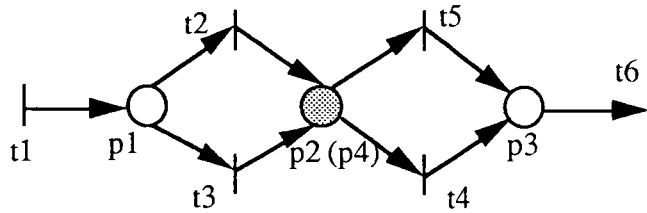


Figure 3.8 Réseau de Petri  $N$

Il existe un vecteur  $Y = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T$  permettant d'obtenir  $CY = 0$ . Donc le réseau obtenu est consistant. ♦

### 3.4 AJOUT ET FUSION DE TRANSITIONS

Dans ce paragraphe nous montrons que, quand nous ajoutons des transitions à un réseau de Petri consistant, la consistance peut être décidée en calculant le rang de la matrice d'incidence du nouveau réseau de Petri, ou en vérifiant la consistance d'un réseau de taille plus petite. Si le réseau initial n'est pas consistant, il est nécessaire que, l'ensemble de places et de transitions ajoutées, contienne au moins une transition pour espérer obtenir un RdP consistant. (voir le début de la section 3.3).

#### 3.4.1 Cas où le réseau existant est consistant

##### 3.4.1.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé

Avant de poursuivre, nous introduisons un lemme qui va servir à développer plusieurs démonstrations.

**Lemme 3.1** : Etant données deux matrices  $A$  et  $B$  de mêmes dimensions, où  $A$  est strictement positive et  $B$  est quelconque, il existe un scalaire  $s$  tel que  $s > 0$  et  $A + sB > 0$ .

**Démonstration.** Trivial. Il suffit de prendre  $s$  suffisamment petit.

Q.E.D.

**Théorème 3.4** : Lorsqu'on ajoute *une transition* à un réseau de Petri  $N$  consistant dont la matrice d'incidence est  $C$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$  dont la matrice d'incidence est  $C1$ ,  $N1$  est consistant si et seulement si  $\text{rang}(C) = \text{rang}(C1)$ .

**Démonstration** : 1° Condition suffisante :

Nous supposons que le rang de la matrice d'incidence  $C$  est  $r$  et que  $C1 = [C, C^*]$ , où  $C^*$  est la colonne correspondant à la transition introduite. Nous supposons également, sans perte de généralité, que les  $r$  colonnes indépendantes de  $C$  sont numérotées de 1 à  $r$ . Nous effectuons une suite de combinaisons linéaires  $L$  de lignes de  $C$  et de  $C1$  qui conduit à :

$$\hat{C} = L \times C = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{m-r} \end{matrix} \text{ et } \hat{C}1 = L \times C1 = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & \hat{C}^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{m-r} \\ \updownarrow_1 \end{matrix}$$

Nous calculons maintenant  $B_f$  et  $B1_f$  correspondant respectivement à  $N$  et  $N1$ . En utilisant (la relation (3.2)), nous obtenons,

$$B_f = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1^\tau & I_{n-r} \end{bmatrix} \text{ et } B1_f = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1^\tau & I_{n-r} & 0 \\ -(\hat{C}^*)^\tau & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant le théorème 3.1 et le fait que  $N$  est consistant, nous savons qu'il existe un

vecteur  $z$  tel que  $Y = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \times z > 0$ . Nous avons de manière équivalente  $z > 0$  et  $-\hat{C}_1 z > 0$ .

Nous démontrons maintenant la consistance du réseau  $N1$  en démontrant qu'il existe un vecteur  $z1 = [z^\tau, z^*]^\tau$ , où  $z^* > 0$  est un scalaire, tel que :

$$Y1 = B1_f^\tau \times z1 = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 & -\hat{C}^* \\ I_{n-r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 z - \hat{C}^* z^* \\ z \\ z^* \end{bmatrix} > 0.$$

On sait déjà que  $z > 0$ . Il suffit de démontrer qu'il existe un  $z^* > 0$  tel que  $-\hat{C}_1 z - \hat{C}^* z^* > 0$ . Comme  $-\hat{C}_1 z > 0$ , d'après le lemme 3.1, nous savons que le  $z^*$  cherché existe.

2° Condition nécessaire :

Nous démontrons que c'est aussi une condition nécessaire en démontrant que si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C) + 1$ ,  $N1$  n'est pas consistant.

Nous supposons que la matrice d'incidence  $C$  est de rang  $r$  et que  $C1 = [C, C^*]$  et nous supposons toujours que les  $r$  colonnes indépendantes de  $C$  sont numérotées de 1 à  $r$ . Si  $\text{rang}(C1) = r+1$ , après une suite de combinaisons linéaires  $L'$  de lignes de  $C1$ , nous obtenons une matrice  $\hat{C}1$  qui s'écrit comme suit :

$$\hat{C}1 = L' \times C1 = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_1 \\ \updownarrow_{m-r-1} \end{matrix}$$

$\xleftrightarrow{r} \quad \xleftrightarrow{n-r} \quad \xleftrightarrow{1}$

Pour tout vecteur  $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{n-r} \\ \updownarrow_1 \end{matrix} > 0$ , nous avons  $\hat{C}1 \times Y = \begin{bmatrix} * \\ Y_3 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$  (où \* représente un nombre quelconque). En tenant compte de la remarque 3.1, N1 n'est pas consistant.

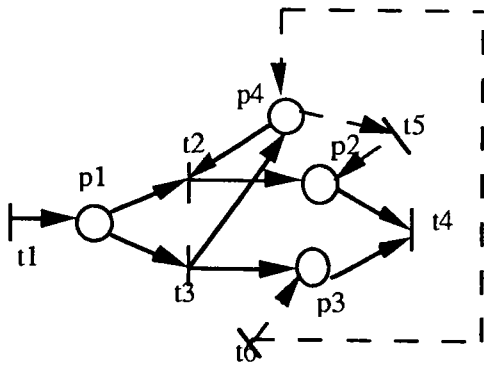
Q.E.D.

Nous pouvons déduire le corollaire 3.2 du théorème 3.4.

**Corollaire 3.2** : Si l'on ajoute *un ensemble de transitions* à un réseau de Petri consistant sans augmenter le rang de la matrice d'incidence, le nouveau réseau est également consistant.

### Exemple 3.5

On ajoute deux transitions t5, t6 au réseau N1 de la figure 3.4 pour construire N2 (voir la figure 3.9). La matrice d'incidence C2=[C1, C\*] est la suivante :



$$C2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 3.9 Réseau de Petri N2

Les formes standard de C1 et C2 sont respectivement :

$$\hat{C}1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{C}2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C2) = 3$ ,  $N2$  est consistant d'après le corollaire 3.2. Il est facile de vérifier directement que  $N2$  est consistant car  $C2 \times Y2 = 0$  pour  $Y2 = [2, 1, 1, 2, 1, 1]^T$ . La séquence de franchissements correspondant à  $Y2$  et qui ramène au marquage initial est :  $\langle t1, t3, t1, t2, t4, t6, t5, t4 \rangle$ . ♦

### 3.4.1.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente

**Théorème 3.5 :** Lorsqu'on ajoute *une transition* à un réseau de Petri  $N$  (consistant ou non) dont la matrice d'incidence est  $C$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$  dont la matrice d'incidence est  $C1$ ,  $N1$  n'est pas consistant si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C) + 1$ .

**Démonstration :** La démonstration est la même que celle de la condition nécessaire du théorème 3.4. En effet, si le rang augmente de 1, alors il n'existe pas de vecteur  $Y$  strictement positif tel que  $C1 \times Y = 0$ . Q.E.D.

### Exemple 3.6

On ajoute une transition  $t8$  au réseau de Petri consistant  $N4$  de la figure 3.13, section 3.5.1, pour construire  $N5$  (voir figure 3.10) dont la matrice d'incidence est  $C5 = [C4, C^*]$  :

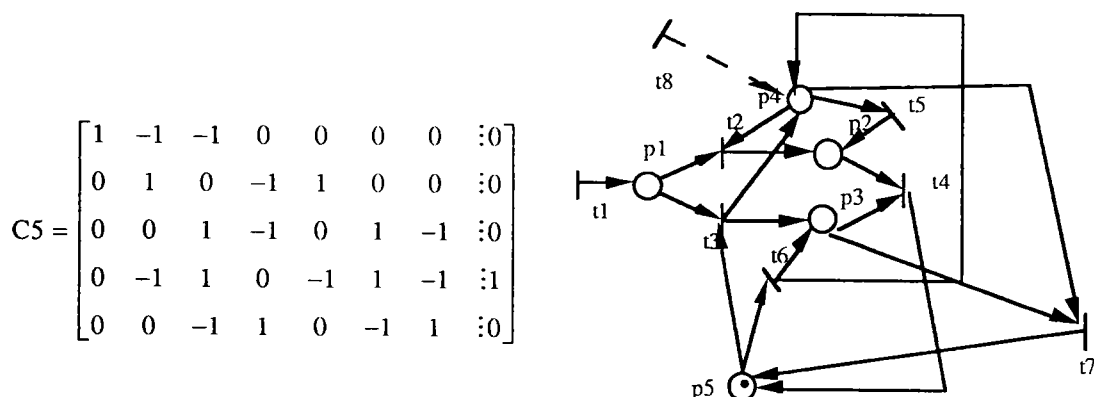


Figure 3.10 Réseau de Petri  $N5$

La forme standard de C5 est :  $\hat{C}5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comme  $\text{rang}(C5)=4=\text{rang}(C4)+1$ , N5 n'est pas consistant selon le théorème 3.5. Nous pouvons également vérifier directement que N5 n'est pas consistant car  $X^T C5 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1] \not\geq 0$  avec  $X^T = [0, 1, 0, 1, 1]$  (voir chapitre 2, paragraphe 2.3.2.2) ♦

**Corollaire 3.3** : Lorsqu'on ajoute un ensemble  $T_k$  de  $k$  transitions à un réseau de Petri N (consistant ou non) dont la matrice d'incidence est C pour construire un nouveau réseau de Petri N1 dont la matrice d'incidence est C1, alors N1 n'est pas consistant si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)+k$ ,  $k>0$ .

Nous considérons maintenant le cas où plusieurs transitions sont ajoutées. Quand nous ajoutons un ensemble  $T_k$  de  $k$  transitions à un réseau de Petri consistant N dont la matrice d'incidence est C pour construire un nouveau réseau de Petri N1 dont la matrice d'incidence est C1, trois cas sont possibles

- 1)  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$ ;
- 2)  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C) + k$ ;
- 3)  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C) + k1$  où  $0 < k1 < k$ .

Nous savons que dans le premier cas , N1 est consistant selon le corollaire 3.2, et que dans le deuxième cas, N1 n'est pas consistant selon le corollaire 3.3. Nous étudions maintenant le troisième cas.

Nous supposons que  $\text{rang}(C)=r$  et  $C1 = [C, C^*]$ , où  $C^*$  correspond aux  $k$  nouvelles transitions. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les  $r$  colonnes indépendantes de C sont numérotées de 1 à  $r$ , et que les  $k1$  transitions qui contribuent à l'augmentation du rang sont numérotées de  $n+1$  à  $n+k1$ . Alors il existe deux suites de combinaisons linéaires de lignes L et L1 telles que (voir équation (3.1)) :

$$\hat{C} = L \times C = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{m-r} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \xleftrightarrow{r} \\ \xleftrightarrow{n-r} \end{matrix} \quad (3.3)$$

$$\hat{C}1 = L1 \times C1 = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & I_{k1} & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{k1} \\ \updownarrow_{m-r-k1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \xleftrightarrow{r} & \xleftrightarrow{n-r} & \xleftrightarrow{k1} & \xleftrightarrow{k2} \end{matrix} \quad (3.4)$$

où  $k2 = k - k1$  est le nombre de transitions ajoutées et qui n'augmentent pas le rang.

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour que  $N1$  soit consistant. Ce résultat montre qu'il est possible de perdre la propriété de consistance en ajoutant une transition, mais de la retrouver par la suite en ajoutant une transition qui n'augmente pas le rang.

**Théorème 3.6 :** On ajoute un ensemble  $T_k$  de  $k$  transitions ( $k > 1$ ) à un réseau  $N$  consistant pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$ . Dans le cas où le rang de la matrice d'incidence augmente de  $k1$  avec  $0 < k1 < k$ ,  $N1$  est consistant si et seulement si le réseau de Petri  $N^A$  dont la matrice d'incidence est  $C^A = [I_{k1}, \hat{C}_2^*]$  (voir relation (3.4)) est consistant.

**Démonstration :** (Condition suffisante) Nous démontrons d'abord que si  $N^A$  est consistant, alors  $N1$  est consistant. Comme la matrice d'incidence de  $N^A$  est  $C^A = [I_{k1}, \hat{C}_2^*]$ , alors  $B_f^A$ , base des t-invariants de  $N^A$  est (voir la relation (3.2)) :

$$B_f^A = [-(\hat{C}_2^*)^T, I_{k2}]$$

Puisque  $N^A$  est consistant, il existe un vecteur  $z^A$  tel que :

$$Y^A = (B_f^A)^T \times z^A = \begin{bmatrix} -\hat{C}_2^* \\ I_{k2} \end{bmatrix} \times z^A > 0,$$

où  $z^A$  est un vecteur colonne de dimension  $k2$ , ce qui signifie que  $z^A > 0$  et  $-\hat{C}_2^* z^A > 0$ .

Considérons le réseau  $N$  et la relation (3.3). En tenant compte de la relation (3.2), nous obtenons la base des t-invariants de  $N$ , soit  $B_f = [-\hat{C}_1^T \quad I_{n-r}]$ . De plus, comme  $N$

est consistant, selon le théorème 3.1, il existe un vecteur  $z$  tel que

$$Y = B_f^\tau \times z = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \times z > 0 \text{ ou, de manière équivalente, } z > 0 \text{ et } -\hat{C}_1 z > 0.$$

Pour le réseau N1, en utilisant les relations (3.4) et (3.2), nous pouvons exprimer la base des t-invariants  $B1_f$  comme suit :

$$B1_f = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1^\tau & I_{n-r} & 0 & 0 \\ -(C_1^*)^\tau & 0 & -(C_2^*)^\tau & I_{k2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \downarrow_{n-r} \\ \downarrow_{k2} \end{matrix}$$

$\xleftarrow{r}$

$\xleftarrow{n-r}$

$\xleftarrow{k1}$

$\xleftarrow{k2}$

Selon le théorème 3.1, nous démontrons la consistance de N1 en démontrant qu'il

existe un  $z1 = \begin{bmatrix} z \\ sz^A \end{bmatrix}$  avec un scalaire  $s > 0$  tel que :

$$Y1 = B1_f^\tau \times z1 = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 & -\hat{C}_1^* \\ I_{n-r} & 0 \\ 0 & -\hat{C}_2^* \\ 0 & I_{k2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z \\ sz^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 z - s\hat{C}_1^* z^A \\ z \\ -s\hat{C}_2^* z^A \\ sz^A \end{bmatrix} > 0.$$

On sait déjà que  $z > 0$ ,  $z^A > 0$  et  $-\hat{C}_2^* z^A > 0$ . Il suffit de démontrer qu'il existe un scalaire  $s > 0$  tel que  $-\hat{C}_1 z - s\hat{C}_1^* z^A > 0$ . Comme  $-\hat{C}_1 z > 0$ , grâce au lemme 3.1, nous déduisons que le scalaire  $s$  cherché existe.

(Condition nécessaire) Nous démontrons que si N1 est consistant, alors  $N^A$  est consistant. En effet, si N1 est consistant alors, selon la remarque 3.1, il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $\hat{C}1 \times Y = 0$ , c'est-à-dire que :

$$\hat{C}1 \times Y = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & I_{k1} & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = 0.$$

Cela signifie que  $C^A \begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k1} & \hat{C}_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = 0$ , ce qui implique que  $N^A$  est aussi

consistant.

Q.E.D.

### Exemple 3.7

Nous ajoutons un ensemble de transitions  $t_8, t_9$  et  $t_{10}$  au réseau de Petri consistant  $N_4$  de la figure 3.13, section 3.5.1, pour construire  $N_6$  (voir figure 3.11) dont la matrice d'incidence est  $C_6=[C_4, C^*]$  :

$$C_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

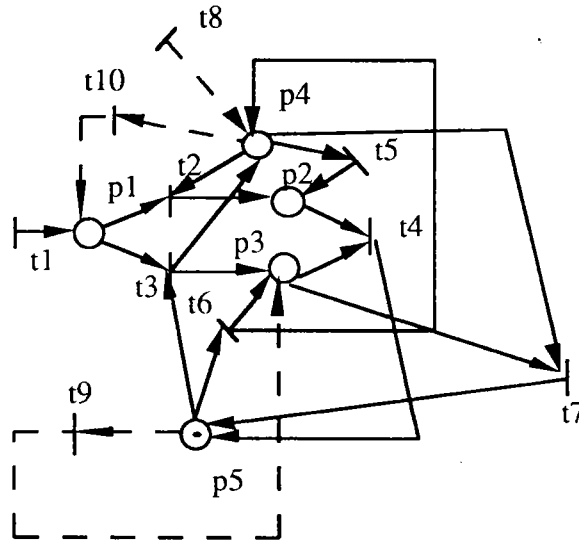


Figure 3.11 Réseau de Petri  $N_6$

La forme standard est :

$$\hat{C}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & I_1 & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque  $k = 3$ ,  $\text{rang}(C_6) = \text{rang}(C_4) + k_1 = \text{rang}(C_4) + 1 = 4$ , alors  $k_1 < k$ . La matrice d'incidence du réseau  $N^A$  est  $C^A = [I_1, \hat{C}_2^*] = [1, 0, -1]$ . Nous trouvons un  $z^A = [1, 1]$  tel que :

$$Y^A = (B_f^A)^T \times z^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

Evidemment  $N^A$  est consistant, donc  $N_6$  est consistant selon le théorème 3.6. Nous pouvons également montrer directement que  $N_6$  est consistant car  $C_6 \times Y_6 = 0$  pour  $Y_6 = [1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1]^T > 0$ . La séquence de franchissements correspondant à  $Y_6$  et qui ramène au marquage initial est :  $\langle t_1, t_3, t_8, t_{10}, t_2, t_4, t_6, t_5, t_8, t_7, t_9, t_4 \rangle$ . ♦

Lorsqu'un réseau de Petri n'est pas consistant, il est intéressant de savoir la cause de cette non consistance. Le composant consistant maximal que nous allons définir permettra de savoir quelles sont les transitions qui conduisent à la non consistance.

**Définition 3.3 :** Le composant consistant maximal du réseau de Petri  $N=(P, T)$  est un réseau de Petri  $N'$  consistant comportant toutes les places de  $N$  et un maximum de transitions de  $N$ . Autrement dit, un composant consistant maximal de  $N$  est constitué de  $P$  et du support d'un t-invariant à support maximal. Ou encore, il est constitué de  $P$  et de l'union des supports de tous les t-invariants.

Note : après la définition 3.3, nous savons que les transitions qui ne sont pas dans le composant consistant maximal conduisent à la non consistance.

**Propriété 3.3 :** Le composant consistant maximal  $N'$  de  $N$  est unique.

**Démonstration :** Nous démontrons cette propriété par l'absurde. Soient  $N'$  et  $N''$  (dont les ensembles de transitions sont respectivement  $T'$  et  $T''$ ) deux composants consistants maximaux différents de  $N$ . Nous avons alors  $T' \neq T''$ . Comme  $N'$  et  $N''$  sont consistants,  $T'$  et  $T''$  sont respectivement les supports de t-invariants de  $N$ ,  $Y'$  et  $Y''$ . Il est évident que  $T' \cup T''$  est le support de toute combinaison linéaire positive de  $Y'$  et  $Y''$ . Cette combinaison donne un autre t-invariant de  $N$ . Cela signifie que  $P$  et  $T' \cup T''$  constituent un sous-réseau consistant de  $N$ . Puisque  $T' \neq T''$ ,  $T' \cup T'' \supset T'$ ,  $T' \cup T'' \supset T''$ . Cette relation implique que  $N'$  et  $N''$  ne sont pas des composants consistants maximaux de  $N$ . Q.E.D.

Le théorème suivant établit le lien entre le composant consistant maximal du réseau d'origine et celui du nouveau réseau obtenu après l'ajout de transitions.

**Théorème 3.7 :** On ajoute un ensemble  $T_k$  de  $k$  transitions à un réseau  $N=(P, T)$  consistant dont la matrice d'incidence est  $C$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N_1$ . Le composant consistant maximal  $N_1'$  de  $N_1$  est constitué de  $P$  et de  $T \cup \bar{T}$  où  $\bar{T}$  est

l'ensemble des transitions du composant consistant maximal  $(N^A)'$  du réseau  $N^A$  ( $N^A$  est le réseau de Petri correspondant à la matrice  $C^A = [I_{k1}, \hat{C}_2^*]$  de la relation (3.4)).

**Démonstration :** Soit  $T^*$  l'ensemble des transitions du composant consistant maximal de  $N1$ . Nous démontrons d'abord que le réseau  $N1'=(P, T \cup \mathcal{T})$  est consistant. Autrement dit, nous démontrons que  $(T \cup \mathcal{T}) \subseteq T^*$ . Pour cela, nous renumérotions les transitions de  $N^A$  de telle sorte que les transitions de  $\mathcal{T}$  soient numérotées de  $n+1, n+2, \dots, n+|\mathcal{T}|$ . Cette opération ne change pas les propriétés du réseau. Nous pouvons alors réécrire :

$C1 = [C, C_{11}^*, C_{12}^*]$ , où  $C_{11}^*$  correspond à  $\mathcal{T}$ .

$$\text{Alors : } \hat{C}1 = L1 \times C1 = \begin{bmatrix} I_r & C_1 & \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ 0 & 0 & \hat{C}_{1,1}^* & \hat{C}_{2,2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{k1} \\ \updownarrow_{m-r-k1} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \xleftarrow{r} & \xleftarrow{n-r} & \xleftarrow{|\mathcal{T}|} & \xleftarrow{k-|\mathcal{T}|} \end{matrix}$$

Il faut noter que  $\hat{C}_{1,1}^*$  et  $\hat{C}_{2,2}^*$  constituent la matrice d'incidence de  $N^A$ . Nous savons que  $C_{11}^*$  est la matrice d'incidence du réseau  $(N^A)'$  constitué des places de  $N^A$  et des transitions de  $\mathcal{T}$ . De plus, d'après la définition du composant consistant maximal, à partir des hypothèses du problème, nous savons que ce dernier réseau est consistant. Nous pouvons alors terminer la preuve que  $N1'$  est consistant en utilisant le théorème 3.6.

Nous démontrons maintenant que  $T^*=T \cup \mathcal{T}$ . Supposons que  $T^* \neq T \cup \mathcal{T}$ , alors nous pouvons écrire  $T^*=T \cup \mathcal{T}''$ , avec  $\mathcal{T}'' \supset \mathcal{T}$ . Nous renumérotions les transitions de  $N^A$  de telle sorte que les transitions de  $\mathcal{T}''$  soient de  $n+1, n+2, \dots, n+|\mathcal{T}''|$ . Nous pouvons alors écrire :

$C1 = [C, C_1^{**}, C_2^{**}]$ , où  $C_1^{**}$  correspond à  $\mathcal{T}''$ .

$$\text{On obtient alors : } \hat{C}1 = L1 \times C1 = \begin{bmatrix} I_r & \hat{C}_1 & \hat{C}_1^* & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & \hat{C}_1^{**} & \hat{C}_2^{**} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que  $\hat{C}_1^{**}$  et  $\hat{C}_2^{**}$  constituent la matrice d'incidence de  $N^A$  et que  $[C, C_1^{**}]$  constitue la matrice d'incidence du composant consistant maximal de  $N1$ . D'après le théorème 3.6 et le fait que  $N$  est consistant, nous pouvons dire que le réseau correspondant à la matrice  $\hat{C}_1^{**}$  est consistant, c'est-à-dire que le réseau constitué des

places de  $N^A$  et des transitions de  $T''$  est consistant. Comme  $T'' \supset T$ , cela signifie que le réseau  $(N^A)'$  n'est pas le composant consistant maximal de  $N^A$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Par conséquent  $T = T''$ . Autrement dit,  $T^* = T \cup T$ . Q.E.D.

D'après le théorème 3.7, chaque fois qu'on ajoute un ensemble de transitions à un réseau de Petri consistant, si nous pouvons trouver le composant consistant maximal de  $N^A$ , alors nous pouvons trouver le composant consistant maximal du réseau global. Nous proposons maintenant un algorithme pour calculer le composant consistant maximal. Quand nous ajoutons un ensemble de places à un réseau de Petri, si nous cherchons le composant consistant maximal, il faut considérer le réseau complet.

### Algorithme 3.3 : (Calcul du composant consistant maximal)

Nous désignons par  $C$  la matrice d'incidence du réseau de Petri  $N$  considéré et par  $N'$  le composant consistant maximal cherché :

Etape 1 : Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max \sum_{t \in T} z_t$$

sous les conditions suivantes :

$$z_t \leq Y[t] \quad \forall t \in T$$

$$0 \leq z_t \leq 1 \quad \forall t \in T$$

$$CY = 0 \quad \text{et} \quad Y \geq 0$$

où  $Y$  est un vecteur colonne de dimension  $n \times 1$  et de composantes  $Y[t]$ ;

$T$  est l'ensemble des transitions de  $N$ .

Etape 2 :  $\{ t / Y[t] > 0 \}$  constitue le composant consistant maximal. Cet ensemble peut être vide. ♦

*Remarque* : Soit  $k = \sum_{t \in T} z_t$ . Si  $k = n$ , où  $n$  est le nombre de transitions, le réseau de Petri est consistant.

### 3.4.2 Cas où le réseau existant est non consistant

Considérons un réseau de Petri  $N$  non consistant dont la matrice d'incidence est  $C$  et dont le composant consistant maximal est  $N' = (P, T')$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $C = [C' \ C'']$ , où  $C'$  correspond à  $T'$  et est donc la matrice

d'incidence de  $N'$ . Nous avons vu qu'il existe une suite de combinaisons linéaires telles que :

$$\hat{C} = L \times C = \begin{bmatrix} I_{r'} & \hat{C}' & 0 & \hat{C}'' \\ 0 & 0 & I_{r''} & \hat{C}_1'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow_{r'} \\ \Downarrow_{r''} \\ \Downarrow_{m-r'-r''} \end{matrix} \quad \text{où } L \times C' = \begin{bmatrix} I_{r'} & \hat{C}' \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } L \times C'' = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}'' \\ I_{r''} & \hat{C}_1'' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\xleftarrow{|T'|} \xleftarrow{|T-T'|} \xrightarrow{|T_k|}$

Lorsque nous ajoutons un ensemble  $T_k$  de  $k$  transitions à  $N$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$ , la matrice d'incidence peut être écrite comme  $C1 = [C, C^*]$ . Après une suite de combinaisons linéaires de lignes nous obtenons,

$$\hat{C}1 = L1 \times C1 = \begin{bmatrix} I_{r'} & \hat{C}' & 0 & \hat{C}'' & 0 & \hat{C}^* \\ 0 & 0 & I_{r''} & \hat{C}_1'' & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r^*} & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow_{r'} \\ \Downarrow_{r''} \\ \Downarrow_{r^*} \\ \Downarrow_{m-r'-r''-r^*} \end{matrix}$$

$\xleftarrow{|T'|} \xleftarrow{|T-T'|} \xleftarrow{|T_k|}$

Soit  $T_1 \subseteq (T - T') \cup T_k$  l'ensemble des transitions du composant consistant maximal  $(N^B)'$  du réseau  $N^B$  dont la matrice d'incidence est

$$C^B = \begin{bmatrix} I_{r''} & \hat{C}_1'' & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & I_{r^*} & \hat{C}_2^* \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow_{r''} \\ \Downarrow_{r^*} \end{matrix} \quad (3.5)$$

$\xleftarrow{|T-T'|} \xleftarrow{|T_k|}$

Alors le théorème suivant est vrai.

**Théorème 3.8 :** Le composant consistant maximal de  $N1$  est  $N1' = (P, T' \cup T_1)$  et  $N' = (P, T')$  est le composant consistant maximal du réseau  $N$ .

**Démonstration :** Similaire à la démonstration du théorème 3.7.

Q.E.D.

**Corollaire 3.4 :** Le réseau de Petri  $N1$  est consistant si et seulement si  $N^B$  dont la matrice d'incidence est  $C^B$  (voir la relation 3.5) est consistant ou, de manière équivalente, si  $T_1 = (T - T') \cup T_k$ .

### Exemple 3.8

On ajoute trois transitions  $t_9$ ,  $t_{10}$ ,  $t_{11}$  à  $N_5$  (voir figure 3.10) pour construire  $N_7$  (voir figure 3.12) dont la matrice d'incidence est  $C_7=[C_5, C^*]$  :

$$C_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

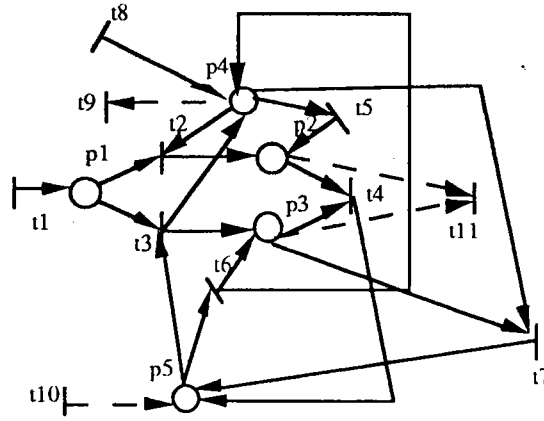


Figure 3.12 Réseau de Petri  $N_7$

En utilisant l'algorithme 3.3, nous obtenons le composant consistant maximal de  $N_5$  qui exclut la transition  $t_8$  du réseau  $N_5$ .

La forme standard de  $N_7$  est :

$$\hat{C}_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -1 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r1} & \hat{C}_{1,1} & 0 & \hat{C}_{2,1} & 0 & \hat{C}_{3,1} \\ 0 & 0 & I_{r2} & \hat{C}_{2,2} & 0 & \hat{C}_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r3} & \hat{C}_{3,3} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice d'incidence  $C^B$  de  $C_7$  est :

$$C^B = \begin{bmatrix} I_{r2} & \hat{C}_{2,2} & 0 & \hat{C}_{3,2} \\ 0 & 0 & I_{r3} & \hat{C}_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On peut vérifier que  $N^B$  est consistant en utilisant le vecteur  $Y^T = [1, 1, 1, 1]$ , donc  $N7$  est consistant selon le corollaire 3.6. Nous pouvons vérifier directement que  $N7$  est consistant car  $C7 \times Y7 = 0$  pour  $Y7 = [3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T > 0$ . La séquence de franchissements correspondant à  $Y7$  est :  $\langle t1, t10, t3, t1, t2, t4, t1, t3, t7, t6, t5, t11, t8, t9 \rangle$ . ♦

### 3.4.3 Fusion de transitions

Nous considérons maintenant la fusion des transitions.

**Propriété 3.4** : Lorsqu'on fusionne des transitions de deux sous-réseaux, une condition nécessaire pour que le réseau obtenu soit consistant est que les deux sous-réseaux soient consistants.

**Démonstration** : Désignons les sous-réseaux de Petri consistants respectivement par  $N_1 = (P_1, T_1)$  et  $N_2 = (P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour matrice d'incidence  $C_1 = [C_{11}, C_{12}]$  et  $C_2 = [C_{21}, C_{22}]$  où  $C_{12}$  est l'ensemble des colonnes de  $C_1$  correspondant aux transitions de  $N_1$  à fusionner avec les transitions de  $N_2$  associée aux colonnes  $C_{21}$  dans  $C_2$ . En fusionnant les transitions définies ci-dessus, nous obtenons un

nouveau réseau  $N = N_1 \cup N_2$  dont la matrice d'incidence est  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ . Si  $N$  est consistant, alors il existe un vecteur  $Y > 0$  tel que  $CY = 0$ . C'est-à-dire que :

$$C \times Y = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Cela signifie que

$$C_1 \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [C_{11} \quad C_{12}] \times \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad C_2 \times \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = [C_{21} \quad C_{22}] \times \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{ce qui implique que } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont consistants.} \quad \text{Q.E.D.}$$

**Propriété 3.5** : Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri consistants par la fusion de deux transitions est consistant.

**Démonstration :** Désignons les sous-réseaux de Petri consistants respectivement par  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour matrice d'incidence  $C_1=[C_{11}, c_1^*]$  et  $C_2=[c_2^*, C_{22}]$ , où  $c_1^*$  est la colonne de  $C_1$  correspondant à la transition de  $N_1$  à fusionner avec la transition de  $N_2$  associée à la colonne  $c_2^*$  dans  $C_2$ . En fusionnant les transitions définies ci-dessus, nous obtenons un nouveau réseau

$$N=N_1 \cup N_2 \text{ dont la matrice d'incidence est } C = \begin{bmatrix} C_{11} & c_1^* & 0 \\ 0 & c_2^* & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Comme  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est consistant, il existe un vecteur  $Y_1 = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ y_1^* \end{bmatrix} > 0$  tel que

$$C_{11}Y_{11} + c_1^*y_1^* = 0 \text{ ( resp. } Y_2 = \begin{bmatrix} y_2^* \\ Y_{22} \end{bmatrix} > 0 \text{ tel que } C_{22}Y_{22} + c_2^*y_2^* = 0). \text{ En choisissant le}$$

$$\text{vecteur } Y = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ y_1^* \\ (y_1^* / y_2^*) \cdot Y_{22} \end{bmatrix} > 0, \text{ nous obtenons } CY=0. \text{ Donc } N \text{ est consistant. } \quad \text{Q.E.D.}$$

**Théorème 3.9 :** Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri consistants  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$ , de matrices d'incidence  $C_1$  et  $C_2$  respectivement, en fusionnant de deux ensembles  $T_1^* \subseteq T_1$  et  $T_2^* \subseteq T_2$  de transitions est consistant si au moins une des conditions suivantes est satisfaite.

(1) Il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que :

$$\forall t \in T_i^*, \exists Y_{i,t} \geq 0 \text{ tel que } C_i Y_{i,t} = 0 \text{ et } \|Y_{i,t}\| \cap T_i^* = \{t\}. \text{ avec } \bigcup_{t \in T_i^*} \|Y_{i,t}\| = T_i^*.$$

(2)  $\exists Y_i > 0$  tel que  $C_i Y_i = 0$  et  $\forall t \in T_i^*, Y_i(t) = a_i, a_i \in \mathbb{R}^+, \forall i=1,2$ , où  $a_i$  est les valeurs de composantes d'un t-invariant  $Y_i$  qui correspondent aux transitions à fusionner.

**Démonstration :** Désignons par  $q$  le nombre de transitions à fusionner, c'est-à-dire  $|T_1^*| = |T_2^*| = q$ .

Sans perte de généralité, la matrice d'incidence de  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) peut être écrite :  $C_1=[C_{11}, c_{1,1}, c_{1,2}, \dots, c_{1,q}]$  (resp.  $C_2=[c_{2,1}, c_{2,2}, \dots, c_{2,q}, C_{22}]$ ), où les colonnes  $c_{1,j}$  de  $C_1$  correspondent aux transitions de  $N_1$  à fusionner avec les transitions de  $N_2$  relatives

aux colonnes  $c_{2,j}$  de  $C_2$ . Nous construisons un nouveau réseau  $N=N_1 \cup N_2$ , dont la matrice d'incidence est  $C$ , en fusionnant les transitions de  $N_1$  et  $N_2$  définies ci-dessus.  $C$  peut être représentée comme suit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,q} & 0 \\ 0 & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,q} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

**Condition 1 :**

Sans perte de généralité, nous supposons que la condition 1) est vérifiée pour  $i=1$ . Le vecteur correspondant à la  $j$ -ème transition à fusionner est alors de forme :

$$Y_{1,j} = \begin{bmatrix} Y_{1,j}^* \\ 0 \\ \vdots \\ y_{1,j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

où  $y_{1,j} > 0$ ,  $\forall j=1, 2, \dots, q$ .

D'après la condition 1), nous savons que

$$C_1 Y_{1,j} = C_{11} Y_{1,j}^* + c_{1,j} y_{1,j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, q.$$

Nous en déduisons que  $C_1 \sum_{j=1}^q Y_{1,j} = C_{11} \sum_{j=1}^q Y_{1,j}^* + \sum_{j=1}^q c_{1,j} y_{1,j} = 0$ . Comme nous avons

en outre  $\bigcup_{t \in T_1} \|Y_{1,t}\| = T_1$ , nous obtenons  $\sum_{j=1}^q Y_{1,j}^* > 0$ .

Comme  $N_2$  est consistant, nous savons qu'il existe un vecteur :

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_{2,1} \\ \vdots \\ y_{2,j} \\ \vdots \\ y_{2,q} \\ Y_2^* \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{tel que } C_2 Y_2 = \sum_{j=1}^q c_{2,j} y_{2,j} + C_{22} Y_2^* = 0.$$

$$\text{Par ailleurs : } (y_{2,j} / y_{1,j}) C_1 Y_{1,j} = (y_{2,j} / y_{1,j}) C_{11} Y_{1,j}^* + c_{1,j} y_{2,j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, q.$$

Cette dernière relation et le fait que  $C_1 Y_{1,j} = 0, \forall j = 1, 2, \dots, q$ , implique que :

$$C_1 \sum_{j=1}^q (y_{2,j} / y_{1,j}) Y_{1,j} = \sum_{j=1}^q c_{1,j} y_{2,j} + C_{11} \sum_{j=1}^q (y_{2,j} / y_{1,j}) Y_{1,j}^* = 0. \text{ Comme nous avons en}$$

$$\text{outre } \bigcup_{t \in T_1^*} \|Y_{1,t}\| = T_1, \text{ nous obtenons } \sum_{j=1}^q (y_{2,j} / y_{1,j}) Y_{1,j}^* > 0.$$

$$\text{Le vecteur } Y = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^q (y_{2,j} / y_{1,j}) Y_{1,j}^* \\ y_{2,1} \\ y_{2,2} \\ \vdots \\ y_{2,q} \\ Y_2^* \end{bmatrix} > 0 \text{ permet donc d'obtenir } CY = 0.$$

Donc N est consistant.

### Condition 2 :

Si la condition 2) est satisfaite, alors dans  $N_1$  (resp.  $N_2$ ), il existe un vecteur  $Y_1$  (resp.  $Y_2$ ) dans lequel les composantes correspondant aux transitions à fusionner ont mêmes valeurs  $a_1$  (resp.  $a_2$ ). Nous pouvons exprimer  $Y_1$  et  $Y_2$  respectivement comme  $Y_1 = [Y_{11}^\tau, a_1, a_1, \dots, a_1]^\tau$  et  $Y_2 = [a_2, a_2, \dots, a_2, Y_{22}^\tau]^\tau$ . Le vecteur  $Y = [Y_{11}^\tau, a_1, \dots, a_1, (a_1/a_2) Y_{22}^\tau]^\tau > 0$  permet donc d'obtenir

$$CY = \begin{bmatrix} C_1 Y_{11} \\ (a_1/a_2) C_2 Y_{22} \end{bmatrix} = 0.$$

Le réseau N est donc consistant.

Q.E.D.

Nous proposons un algorithme pour vérifier les conditions du théorème 3.9.

**Algorithme 3.4 :** Soit un réseau de Petri  $N = (P, T)$  dont la matrice d'incidence est  $C$ ,  $T^* \subset T$  l'ensemble de places à fusionner avec celles d'un autre réseau.

**Pour vérifier la condition (1)**

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{t^* \in T^*} Y_{t^*}[t]$$

sous les conditions :

$$\begin{aligned} \sum_{t^* \in T^*} Y_{t^*}[t] &\geq 1 & \forall t \in T \\ CY_{t^*} &= 0, Y_{t^*} \geq 0 & \forall t^* \in T^* \\ Y_{t^*}[t'] &= 0 & \forall t' \in T^* - \{t^*\}, \forall t^* \in T^* \end{aligned}$$

La condition 1) du théorème 3.9 est satisfaite si et seulement si ce problème a une solution pour au moins un des deux sous-réseaux que l'on souhaite à relier par fusion de transitions.

**Pour vérifier la condition (2)**

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max \sum_{t \in T} z_t$$

sous les conditions :

$$\begin{aligned} z_t &\leq Y[t] & \forall t \in T \\ 0 &\leq z_t \leq 1 & \forall t \in T \\ CY &= 0 \quad \text{et} \quad Y \geq 0 \\ Y[t_i^*] &= Y[t_j^*] & \forall t_i^* \in T^*, \forall t_j^* \in T^*, i \neq j \end{aligned}$$

Si pour chacun des deux sous-réseaux, la valeur du critère donne le nombre de transitions du réseau correspondant, alors la condition 2) du théorème 3.9 est satisfaite.

### 3.5 AJOUT D'UN SOUS-RESEAU DE PETRI

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié la consistance d'un réseau de Petri obtenu en ajoutant ou fusionnant uniquement des places ou uniquement des transitions. Lorsque nous ajoutons à la fois des transitions et des places, l'analyse de la

consistance du système devient plus compliquée, puisque l'augmentation de rang s'explique, soit par les transitions ajoutées soit par les places ajoutées, ou soit à la fois par les transitions et les places ajoutées. Dans ce paragraphe, nous recherchons la cause de l'augmentation de rang lorsque nous ajoutons un sous-réseau de Petri à ce réseau. Si l'augmentation de rang s'explique soit par les transitions ajoutées ou soit par les places ajoutées, et nous pouvons utiliser certains résultats obtenus dans les paragraphes précédents pour examiner la consistance du réseau obtenu. Si l'augmentation de rang s'explique par les transitions et les places ajoutées, nous proposons des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'examiner. Deux cas sont à considérer suivant que le rang augmente ou non.

Noter que si le réseau de Petri d'origine n'est pas consistant, il se peut que le nouveau réseau le soit. Dans ce cas, c'est l'ajout de transitions et non l'ajout de places qui explique le retour à la consistance.

### 3.5.1 Cas où le rang de la matrice d'incidence reste inchangé

Si le rang de la matrice d'incidence n'est pas modifié par l'ajout d'un sous-réseau, alors nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 3.5 :** Si on ajoute un ensemble de transitions  $T'$  et un ensemble de places  $P'$  à un réseau de Petri consistant  $N=(P,T)$  pour construire  $N1=(P\cup P',T\cup T')$ , alors si le rang reste le même, le nouveau réseau est également consistant.

**Démonstration :** Considérons un réseau de Petri consistant  $N=(P, T)$  de matrice d'incidence  $C$  et de rang  $\text{rang}(C)=r$ . L'ajout d'un sous-réseau  $N'=(P', T')$  peut toujours être considéré comme l'ajout de l'ensemble de transitions  $T'$  d'abord, suivi de l'ajout de l'ensemble de places  $P'$ . L'ajout de  $T'$  au réseau  $N$  permet de construire un réseau intermédiaire  $N''=(P, T\cup T')$  dont la matrice d'incidence est  $C''$ . Puisque  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$ , nous avons obligatoirement  $\text{rang}(C'')=\text{rang}(C)$ . D'après le corollaire 3.1,  $N''$  est consistant. Lorsque nous ajoutons ensuite l'ensemble de places  $P'$  au réseau  $N''$  pour construire le réseau final  $N1=(P\cup P',T\cup T')$  dont la matrice d'incidence est  $C1$ , comme  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C'')=\text{rang}(C)$ , d'après le corollaire 3.2,  $N1$  est consistant.

Q.E.D.

#### Exemple 3.9

Nous ajoutons une transition  $t7$  et une place  $p5$  à  $N2$  de la figure 3.7 pour construire  $N4$  (voir figure 3.13) dont la matrice d'incidence est  $C4$  :

$$C4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & \end{bmatrix}$$

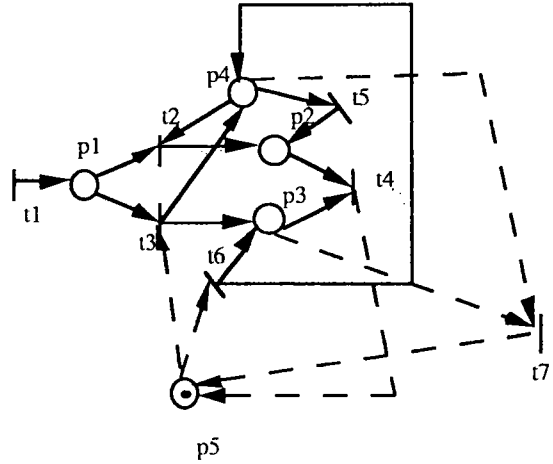


Figure 3.13 Réseau de Petri N4

La forme standard de C4 est :

$$\hat{C}4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque  $\text{rang}(C4)=\text{rang}(C2)=3$  et que N2 est consistant, alors N4 est consistant d'après le corollaire 3.5. ♦

Soit  $C'$  la matrice d'incidence de  $N'$  qui va ajouter à  $N$ , le corollaire 3.5 considère un cas équivalent à celui où l'on relie deux sous-réseaux  $N$  et  $N'$  par des arcs. Le fait que  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$  implique que  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C) \geq \text{rang}(C')$ , puisque le rang du réseau obtenu après la reliure ne peut qu'augmenter. Lorsque  $\text{rang}(C') > \text{rang}(C)$ , nous avons alors  $\text{rang}(C1) > \text{rang}(C)$ , la consistance de N1 peut quand même être décidée lorsque  $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C')$  et que  $N'$  est consistant. Le dernier raisonnement est le même que dans le corollaire 3.5 en considérant l'ajout de  $N$  à  $N'$ .

**Corollaire 3.6 :** Lorsque l'on relie, par des arcs, deux sous-réseaux de Petri consistants  $N=(P,T)$  et  $N'=(P', T')$  (où  $P \cap P' = \emptyset$  et  $T \cap T' = \emptyset$ ) respectivement de matrices d'incidence  $C$  et  $C'$ , pour construire le réseau  $N1=N \cup N'=(P \cup P', T \cup T')$  de matrice d'incidence  $C1$ , si  $\text{rang}(C1)=\text{Max}(\text{rang}(C), \text{rang}(C'))$ , alors N1 est consistant.

Lorsque  $\text{rang}(C1) > \text{rang}(C)$  ou lorsque  $N'$  n'est pas consistant, la consistance ne peut pas être décidée immédiatement. De toute manière, dans ces cas nous avons  $\text{rang}(C1) > \text{rang}(C)$ . Nous pouvons alors considérer que le rang est augmenté seulement par rapport à  $\text{rang}(C)$ . Le paragraphe suivant examine ce cas de figure.

### 3.5.2 Cas où le rang de la matrice d'incidence augmente

Soient  $N$  et  $N1$  respectivement le réseau de Petri d'origine et celui obtenu en ajoutant un ensemble de  $f$  places et un ensemble de  $k$  transitions à  $N$ . Désignons respectivement par  $C$  et  $C1 = \begin{bmatrix} C & C_k \\ C_f & C_{f,k} \end{bmatrix}$  les matrices d'incidence correspondantes. Le corollaire 3.5

nous indique que si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$  et si  $N$  est consistant, alors  $N1$  est consistant. Nous examinons le cas où le rang de la matrice d'incidence a augmenté, c'est-à-dire que  $\text{rang}(C1) > \text{rang}(C)$ . Cette augmentation peut être due à l'une des raisons suivantes :

1) Le rang a augmenté seulement en raison de l'ajout de transitions (les lignes de  $[C_f, C_{f,k}]$  correspondant aux places ajoutées sont des combinaisons linéaires de celles de  $[C, C_k]$ , mais des colonnes de  $C_k$  sont linéairement indépendantes de celles de  $C$ ). Deux cas sont alors possibles. Si  $\text{rang}(C1) - \text{rang}(C) < k$ , où  $k$  est le nombre de transitions ajoutées; alors la consistance de  $N1$  peut être décidée à l'aide du théorème 3.6. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si  $\text{rang}(C1) - \text{rang}(C) = k$ ,  $N1$  n'est pas consistant (voir corollaire 3.3).

2) Le rang a augmenté seulement en raison de l'ajout de places (les colonnes de  $\begin{bmatrix} C_k \\ C_{f,k} \end{bmatrix}$  correspondant aux transitions ajoutées sont des combinaisons linéaires de celles de  $\begin{bmatrix} C \\ C_f \end{bmatrix}$ , mais des lignes de  $C_f$  sont linéairement indépendantes de celles de  $C$ ). Supposons que  $\text{rang}(C1) - \text{rang}(C) = f1 \leq f$ , où  $f$  est le nombre de places ajoutées. Les formes standards de  $C$  et  $C1$  sont respectivement :

$$\hat{C} = L \times C = \left[ \begin{array}{c|c} \underbrace{I_r}_{\leftarrow r} & \underbrace{\hat{C}_1}_{\leftarrow n-r} \end{array} \right] \begin{array}{l} \updownarrow_r \\ \updownarrow_{m-r} \end{array}$$

$$\hat{C}1 = L1 \times C1 = \left[ \begin{array}{cc|cc} I_r & 0 & \hat{C}_{11} & :\hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I_{f1} & \hat{C}_2^* & :\hat{C}_3^* \\ 0 & 0 & 0 & : 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} I_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \hat{C}_{11} \\ 0 \\ \dots \\ \hat{C}_2^* \end{matrix}} \right\} f \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_n \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\tilde{k}}$$

*Condition suffisante 1 (CS1) :* Si le réseau de Petri  $N^A$  dont la matrice d'incidence est

$C^A = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & I_{f1} \end{array} \right] \begin{array}{c} \hat{C}_{11} \\ \hat{C}_2^* \end{array}$  est consistant, alors  $N1$  est consistant (voir la démonstration de la condition suffisante du théorème 3.6).

L'idée de cette condition est que si le rang a augmenté seulement du fait des places ajoutées, nous pouvons ne pas tenir compte de l'influence des transitions ajoutées. Malheureusement ce n'est qu'une condition suffisante. Si  $N^A$  n'est pas consistant,  $N1$  peut quand même être consistant. Nous sommes donc obligés de vérifier la consistance du réseau complet.

3) Le rang a augmenté en partie en raison de l'ajout de places et en partie en raison de l'ajout de transitions (au moins deux des sous-matrices d'incidence  $C_f$ ,  $C_k$  et  $C_{f,k}$  de  $C1$  contribuent à l'augmentation du rang). Dans ce cas, nous pouvons soit directement vérifier la consistance du réseau entier, soit utiliser d'abord des conditions nécessaires ou suffisantes pour vérifier la consistance du réseau en vérifiant celle des sous-réseaux si elles s'appliquent.

Soit  $\hat{C}1$  la forme standard de  $C1$  :

$$\hat{C}1 = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} I_r & 0 & \hat{C}_{11} & : & 0 & 0 & \hat{C}_1^* \\ 0 & 0 & 0 & : & I_{k1} & 0 & \hat{C}_2^* \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & : & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I_{f1} & \hat{C}_3^* & : & 0 & 0 & C_4^* \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & I_{f2} & C_5^* \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} I_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} \hat{C}_{11} \\ 0 \\ \dots \\ \hat{C}_3^* \end{matrix}} \right\} f \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_n \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_k \end{array}$$

où  $0 < k1 < k$ ,  $0 < f1 + f2 \leq f$ .

Nous définissons des sous-réseaux de Petri  $N^{A1}$ ,  $N^{A2}$ ,  $N^{A3}$ ,  $N^{A4}$ , dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C^{A1}$ ,  $C^{A2}$ ,  $C^{A3}$ ,  $C^{A4}$  définies ci-dessous :

$$C^{A1} = [I_{k1}, \hat{C}_2^*]$$

$$C^{A2} = [I_{f2}, \hat{C}_5^*]$$

$$C^{A3} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & \hat{C}_{11} \\ 0 & I_{f1} & \hat{C}_3^* \end{bmatrix}$$

$$C^{A4} = \begin{bmatrix} I_{k1} & 0 & \hat{C}_2^* \\ 0 & I_{f2} & \hat{C}_5^* \end{bmatrix}$$

*Conditions nécessaire 1 (CN1) :*  $N^{A1}$  et  $N^{A2}$  et  $N^{A4}$  sont consistants si N1 l'est (voir la démonstration du théorème 3.3).

*Condition suffisante 2 (CS2) :* Si  $N^{A3}$  et  $N^{A4}$  sont consistants, alors N1 est consistant (voir la démonstration de la condition suffisante du théorème 3.6).

Ces conditions peuvent être aussi utilisées pour vérifier la consistance d'un nouveau réseau de Petri obtenu quand nous ajoutons des transitions et des places à un réseau de Petri non consistant.

### 3.6 SYNTHESE DES RESULTATS

Nous donnons, dans le tableau 3.1, une synthèse des résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Tableau 3.1 Synthèse des résultats

| Consist. de N | Action                                                   | Condition                                                             | Consist. de N1 | Réf. |
|---------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------|------|
| Oui           | Ajout d'une place                                        | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$                                   | Oui            | T3.2 |
| Oui           | Ajout de plusieurs places                                | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$                                   | Oui            | C3.1 |
| *Oui          | Fusion de places                                         |                                                                       | Oui            | P3.2 |
| Oui           | Ajout d'une transition                                   | ssi $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$                                  | Oui            | T3.4 |
| qqc           | Ajout d'une transition                                   | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)+1$                                 | Non            | T3.5 |
| Oui           | Ajout de k transitions                                   | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$                                   | Oui            | C3.2 |
| Oui           | Ajout de k transitions                                   | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)+k$                                 | Non            | C3.3 |
| Oui           | Ajout de k transitions                                   | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)+k1$<br>et ssi $N^A$ est consistant | Oui            | T3.6 |
| Non           | Ajout de k transitions                                   | ssi $N^B$ est consistant                                              | Oui            | C3.4 |
| *Oui          | Fusion de deux transitions                               |                                                                       | Oui            | P3.5 |
| *Oui          | Fusion des transitions                                   | condition (1) ou (2)                                                  | Oui            | T3.9 |
| Oui           | Ajout de plusieurs places<br>et de plusieurs transitions | si $\text{rang}(C1)=\text{rang}(C)$                                   | Oui            | C3.5 |

- où : 1) RdP initial est N de matrice d'incidence C (sauf dans les cas indiqués par "\*");
- 2) Le RdP résultat est N1 de matrice d'incidence C1;
- 3)  $0 < k1 < k$ ;
- 4) T (resp. C et P) signifie théorème (resp. corollaire et propriété).

### 3.7 CONCLUSION

Notre objectif dans ce chapitre a été de suivre la propriété de consistance tout au long d'un processus de conception d'un modèle fonctionnel d'un système de fabrication. Nous souhaitons atteindre cet objectif en effectuant, dans la mesure du possible, uniquement des vérifications partielles, donc rapides du point de vue des temps de calcul. Les résultats résumés dans la section précédente, sont encourageants. Des résultats comparables concernant la bornitude structurelle et l'absence de blocage sont établis et présentés dans les deux chapitres suivants.

## **CHAPITRE IV**

# **VERIFICATION INCREMENTALE DE LA BORNITUDE STRUCTURELLE ET DE LA REPETITIVITE**

## 4.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à deux autres propriétés structurelles importantes pour les systèmes automatisés : la bornitude structurelle et la répétitivité. La bornitude structurelle est très importante lorsque nous concevons des systèmes de fabrication automatisés car elle garantit que les en-cours resteront à un niveau limité quelles que soient les décisions prises. Si une place n'est pas bornée, alors le stock tampon représenté par cette place peut être saturé et peut donc bloquer la production. La bornitude structurelle permet d'éviter cette situation quel que soit l'état initial du système et son évaluation.

La répétitivité caractérise partiellement la vivacité structurelle d'un RdP. Elle implique que chaque transition d'un RdP vivant peut être franchie un nombre infini de fois. Elle est clairement une propriété importante d'un système de production bien conçu.

Dans ce chapitre, nous ne parlons que de la bornitude structurelle. En fait, la bornitude structurelle et la répétitivité sont symétriques : si un réseau de Petri est structurellement borné, alors le réseau obtenu en remplaçant les places (resp. transitions) par les transitions (resp. places) est répétitif, et vice versa. Ainsi, les résultats exposés dans ce chapitre s'appliquent également à la répétitivité. Lorsque nous nous intéressons à la propriété de répétitif, il suffit de remplacer la matrice d'incidence par sa transposée, les mots "transition" par "place" et "place" par "transition".

Nous étudions la bornitude structurelle d'un réseau de Petri obtenu à partir d'un réseau de Petri existant soit en ajoutant, soit en fusionnant des places et/ou des transitions, ou encore en reliant deux sous-réseaux de Petri à l'aide de nouvelles places. Les résultats obtenus nous permettent de vérifier, dans certains cas, la bornitude structurelle du réseau entier en n'examinant qu'une partie du réseau.

Ce chapitre est organisé en 6 sections. La section 4.2 considère l'ajout de places et /ou de transitions à un réseau de Petri. La section 4.3 étudie l'intégration de deux sous-réseaux de Petri par fusion de transitions ou de places. La section 4.4 examine l'intégration de deux sous-réseaux de Petri à l'aide de nouvelles places et la recherche du composant structurellement borné maximal d'un réseau de Petri. La section 4.5 résume les résultats de ce chapitre. La section 4.6 est une conclusion.

## 4.2 AJOUT DE PLACES ET/OU DE TRANSITIONS

Dans cette section, nous étudions le cas où nous ajoutons des places et/ou des transitions à un réseau de Petri structurellement borné ou absolument borné pour construire un nouveau réseau. Nous établissons des conditions suffisantes pour que celui-ci soit encore structurellement borné ou absolument borné. La définition des réseaux absolument bornés se trouve dans le paragraphe 4.2.2.

### 4.2.1. Réseaux de Petri structurellement bornés

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux réseaux de Petri structurellement bornés. D'après les définitions de place (resp. transition) source et de place (resp. transition) puits données dans le chapitre 2, la propriété suivante est presque immédiate.

**Propriété 4.1 :** (i) Quand on ajoute une (des) place(s) source(s) (resp. transition(s) puits) à un réseau de Petri structurellement borné, le nouveau réseau de Petri est toujours structurellement borné.

(ii) Quand on ajoute une (des) transition(s) source(s) à un réseau de Petri structurellement borné ou non, le nouveau réseau de Petri n'est pas structurellement borné.

**Démonstration :** (i) Considérons un réseau de Petri  $N$  structurellement borné avec comme matrice d'incidence  $C$ . Il existe un vecteur  $X$  tel que  $X^T C \leq 0$ . Nous ajoutons un ensemble de places source  $P'$  à  $N$  pour construire le nouveau réseau  $N1$  de matrice

d'incidence  $C1 = \begin{bmatrix} C \\ C_{P'} \end{bmatrix}$ . D'après la définition d'une place source, nous avons  $\bullet p = \emptyset$ ,

donc  $C_{P'} \leq 0$ . Tout vecteur  $X_{P'} > 0$  est tel que  $X_{P'}^T \times C_{P'} \leq 0$ , donc

$$X1^T \times C1 = \begin{bmatrix} X^T & X_{P'}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ C_{P'} \end{bmatrix} = X^T C + X_{P'}^T C_{P'} \leq 0.$$

$N1$  est alors structurellement borné. Si nous ajoutons un ensemble de transitions puits  $T'$  à  $N$  pour construire  $N1$  de matrice d'incidence  $C1 = [C, C_{T'}]$ , nous avons  $t \bullet = \emptyset$  d'après la définition d'une transition puits, donc  $C_{T'} \leq 0$ . Le même vecteur  $X > 0$  permet d'obtenir  $X^T \times C1 = [X^T C, X^T C_{T'}]$ , et  $N1$  est structurellement borné.

(ii) Si nous ajoutons un ensemble de transitions sources  $T''$  à  $N$  pour construire  $N1$  de matrice d'incidence  $C1=[C, C_{T''}]$ , nous avons  $\bullet t = \emptyset$  d'après la définition d'une transition puits, donc  $C_{T''} \geq 0$ . Un vecteur strictement positif  $X > 0$  implique que  $X^T C_{T''} > 0$ . Pour tout vecteur  $X > 0$ , nous avons donc  $X^T \times C1 = [X^T C, X^T C_{T''}] \not\leq 0$ , alors  $N1$  n'est pas structurellement borné. Q.E.D.

La remarque suivante nous permet d'établir le lien entre la bornitude structurelle et la conservation.

**Propriété 4.2** : Un réseau de Petri  $N$  de matrice d'incidence  $C$  est structurellement borné si et seulement si il existe un vecteur  $C_b \geq 0$  de dimension  $1 \times n$  tel que le réseau de

Petri  $N'$  correspondant à la matrice  $\begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix}$  est conservatif.

**Démonstration** : Supposons que  $N$  soit structurellement borné. Alors il existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C \leq 0$ . Si nous prenons  $C_b = -X^T C$ , alors  $C_b \geq 0$ , et nous avons

$\begin{bmatrix} X^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix} = X^T C + C_b = 0$ . D'après la définition de la conservation (Chapitre 2, section

2.3.2.3), le réseau dont la matrice d'incidence est  $\begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix}$  est conservatif. Ceci termine la démonstration de la condition nécessaire. Supposons qu'il existe un vecteur  $C_b \geq 0$  tel que

le réseau  $N'$  correspondant à la matrice  $C' = \begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix}$  soit conservatif. Il existe un vecteur

$X' > 0$  tel que  $(X')^T C' = 0$ .  $X'$  peut être réécrit comme  $X' = \begin{bmatrix} X \\ x \end{bmatrix}$ , où  $X$  (resp.  $x$ )

correspondant  $C$  (resp.  $C_b$ ). Nous avons alors  $(X')^T C' = X^T C + x C_b$ , c'est-à-dire que  $X^T C = -x C_b$ . Nous savons que  $x > 0$  et  $C_b \geq 0$ , donc  $X^T C \leq 0$ . En prenant en compte le fait que  $X > 0$ , nous en déduisons que le réseau correspondant à la matrice d'incidence  $C$  est structurellement borné. Q.E.D.

En utilisant cette propriété, nous pouvons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 4.1 :** Quand on ajoute *une place* à un réseau de Petri structurellement borné N de matrice d'incidence C pour construire un nouveau réseau N1 de matrice d'incidence

$$C1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}, \text{ si } \text{rang}(C1) = \text{rang}(C), \text{ N1 est structurellement borné.}$$

**Démonstration :** Si N est structurellement borné, selon la propriété 4.2, il existe un

vecteur  $C_b \geq 0$  tel que le réseau de Petri N', dont la matrice d'incidence est  $C' = \begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix}$ , est

conservatif. Quand nous ajoutons une place  $p^*$  à N nous ajoutons la même place  $p^*$  à N' pour construire N1' dont la matrice d'incidence peut être écrite comme  $(C1')^T = [C, C_b, C^*]^T$ . Puisque  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$ , alors il existe un vecteur q tel que

$$C^* = C \times q, \text{ ce qui implique que } C^* = [q \ 0] \times \begin{bmatrix} C \\ C_b \end{bmatrix} = [q \ 0] \times C'. \text{ Cette dernière relation}$$

signifie que  $\text{rang}(C1') = \text{rang}(C')$ . Selon les résultats obtenus pour la conservation (voir chapitre 3, théorème 3.2) et du fait que N' est conservatif, nous en déduisons que N1' est également conservatif. D'après la propriété 4.2, N1 est structurellement borné.

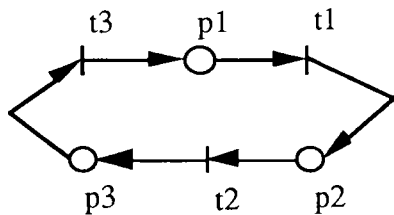
Q.E.D.

Le corollaire suivant est immédiat d'après le théorème 4.1.

**Corollaire 4.1 :** Quand on ajoute *un ensemble de places* à un réseau de Petri structurellement borné dont la matrice d'incidence est C pour construire un nouveau réseau N1 dont la matrice d'incidence est C1, si  $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$ , alors N1 est structurellement borné.

#### Exemple 4.1

On considère un réseau de Petri N (voir figure 4.1) de matrice d'incidence C :



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Figure 4.1 Réseau de Petri N

On peut vérifier que  $\text{rang}(C)=2$ . De plus,  $N$  est structurellement borné car  $X^T C \leq 0$  avec  $X^T = [1, 1, 1]$ . Nous ajoutons deux places  $p_4$  et  $p_5$  à  $N$  pour construire  $N_1$  (voir

figure 4.2) dont la matrice d'incidence est  $C_1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}$  :

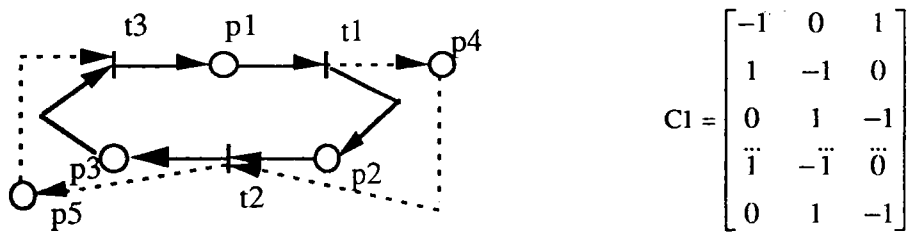


Figure 4.2. Réseau de Petri  $N_1$

On peut vérifier que  $\text{rang}(C_1)=\text{rang}(C)=2$ . Selon le corollaire 4.1,  $N_1$  est structurellement borné. Effectivement, le vecteur  $X^T = [2, 1, 1, 1, 1]$  nous permet d'obtenir  $X^T C_1 \leq 0$ . ♦

**Théorème 4.2 :** Quand on ajoute *une transition* à un réseau de Petri structurellement borné  $N$  de matrice d'incidence  $C$  pour construire un nouveau réseau  $N_1$  de matrice d'incidence  $C_1 = [C, C^*]$ , s'il existe un vecteur  $q \geq 0$  tel que  $C^* = C \times q$ , alors  $N_1$  est structurellement borné.

**Démonstration :** Si  $N$  est structurellement borné, alors il existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C \leq 0$ . Si en plus il existe un  $q \geq 0$  tel que  $C^* = Cq$ , alors le même vecteur  $X > 0$  permet d'obtenir  $X^T C_1 = [X^T C, X^T Cq] \leq 0$ . Donc  $N_1$  est structurellement borné. Q.E.D.

Exemple 4.2

On ajoute une transition  $t_5$  au réseau de Petri  $N$  structurellement borné de la figure 4.4 pour construire  $N_1$  (voir figure 4.3). La matrice d'incidence  $C_1 = [C, C^*]$  est la suivante :

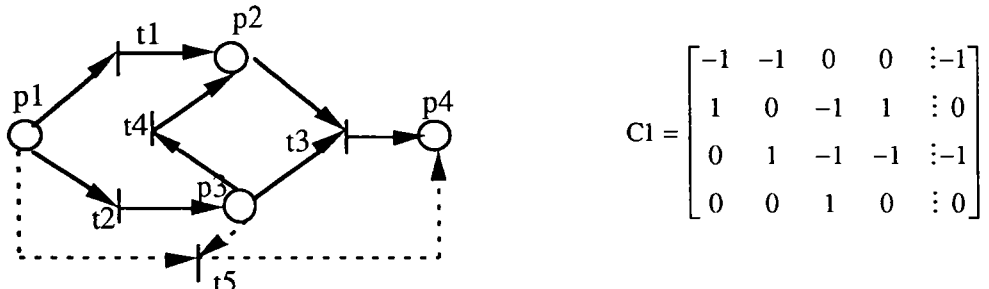


Figure 4.3 Réseau de Petri  $N_1$

On peut vérifier que  $C1_{\bullet,15} = C1_{\bullet,11} + C1_{\bullet,13}$ . Selon le théorème 4.2,  $N1$  est structurellement borné. En effet le même vecteur  $X^T = [3, 1, 2, 1]$  permet d'obtenir  $X^T C1 \leq 0$ . ♦

#### 4.2.2. Réseaux de Petri absolument bornés

Maintenant nous étudions les réseaux de Petri absolument bornés que nous définissons ci-dessous.

**Définition 4.1** : Un réseau de Petri est **absolument borné** s'il existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C < 0$ .

Un module de RdP absolument borné signifie quel que soit les machines, les opérations et les buffets ajoutées en base sur ce module, il n'y a jamais de capacité dépassée pour le module entier.

Par définition, un réseau de Petri absolument borné est toujours structurellement borné. Il faut noter qu'un réseau de Petri absolument borné peut être conservatif ou non.

**Théorème 4.3** : Si un réseau de Petri  $N$  est absolument borné, le nouveau réseau de Petri  $N1$  obtenu en ajoutant des places à  $N$  reste absolument borné (donc structurellement borné) quel que soit le nombre de places ajoutées.

**Démonstration** : La matrice d'incidence du réseau  $N1$  peut être écrite comme

$C1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}$ . Puisque  $N$  est absolument borné, il existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C < 0$ ,

alors il existe un vecteur  $X^* > 0$  dont les composantes sont suffisamment petites pour que

$(X1)^T \times C1 = [X^T, (X^*)^T] \times \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix} = X^T C + (X^*)^T C^* < 0$ . Comme  $[X, X^*] > 0$ , Nous en

déduisons que  $N1$  est absolument borné.

Q.E.D.

#### Exemple 4.3

On considère le réseau de Petri  $N$  (voir figure 4.4) et la matrice d'incidence  $C$  :

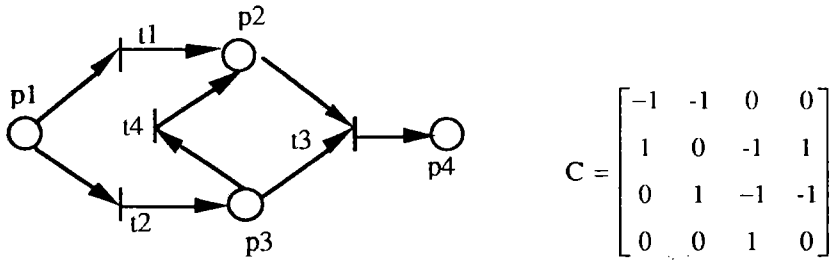


Figure 4.4 Réseau de Petri N

On peut vérifier que N est absolument borné car  $X^T C < 0$  si  $X^T = [3, 1, 2, 1]$ .

On ajoute 3 places p5, p6 et p7 à N pour construire N1 (voir figure 4.5) dont la

matrice d'incidence est  $C1 = \begin{bmatrix} C \\ C^* \end{bmatrix}$ .

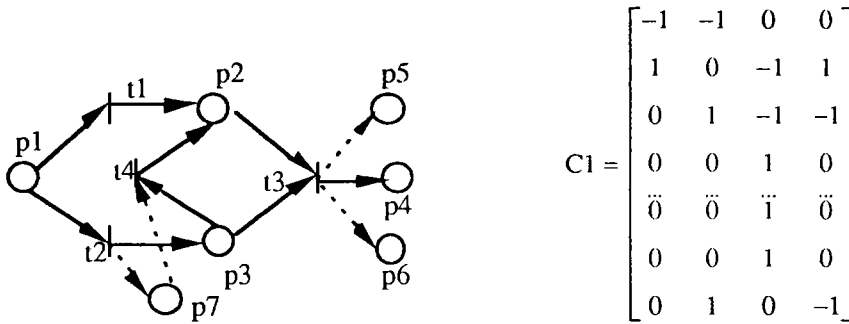


Figure 4.5 Réseau de Petri N1

N1 est absolument borné selon le théorème 4.3. En effet le vecteur  $X^T = [5, 1, 3, 1, 1, 1, 1]$  est tel que  $X^T C1 < 0$ . ♦

**Théorème 4.4 :** Considérons un réseau de Petri absolument borné  $N_1 = (P_1, T_1)$  dont la matrice d'incidence est  $C_1$ , nous ajoutons un autre réseau de Petri  $N_2 = (P_2, T_2)$  pour construire un nouveau réseau de Petri N. Si  $T_2 \cap \bullet P_1 = \emptyset$  et  $t \cap P_1 \neq \emptyset, \forall t \in T_2$ , alors N est absolument borné.

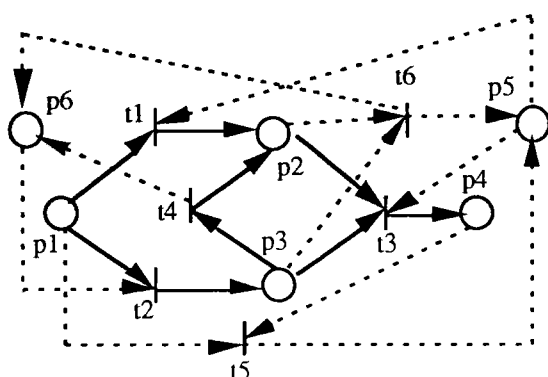
**Démonstration :** Le réseau de Petri N peut être considéré comme construit en deux étapes : ajouter un ensemble de transitions  $T_2$  à  $N_1$  pour construire  $N'$ , ensuite ajouter un ensemble de places  $P_2$  à  $N'$  pour construire N. Si  $N_1$  est absolument borné, alors il existe un vecteur strictement positif  $X > 0$  tel que  $X^T C_1 < 0$ . Quand nous ajoutons un ensemble de transitions  $T_2$  à  $N_1$ , la matrice d'incidence du réseau obtenu  $N'$  est  $C' = [C_1, C_{21}]$ . Si  $T_2 \cap \bullet P_1 = \emptyset$  et  $t \cap P_1 \neq \emptyset, \forall t \in T_2$ , alors  $C_{21} \leq 0$  et  $C_{21(i, \cdot)} \neq 0, \forall t \in T_2$ . Ceci est équivalent à ajouter un ensemble de transitions puits à  $N_1$ . Alors le vecteur  $X > 0$  permet aussi

d'obtenir  $X^T C_{21} < 0$ , donc  $N'$  est absolument borné. Quand nous ajoutons un ensemble de places  $P_2$  à  $N'$  pour construire  $N$ , selon le théorème 4.3,  $N$  est absolument borné.

Q.E.D.

#### Exemple 4.4

On ajoute deux places  $p_5$  et  $p_6$  et deux transitions  $t_5$  et  $t_6$  au réseau de Petri  $N$  absolument borné de la figure 4.4 pour construire  $N_1$  (voir figure 4.6). La matrice d'incidence  $C_1$  est la suivante :



$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figure 4.6 Réseau de Petri  $N_1$

Comme  $\{t_5, t_6\} \cap \bullet\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \emptyset$  et  $t_i \cap \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \bullet \neq \emptyset$ ,  $i=5,6$ , la condition du théorème 4.4 est satisfaite et  $N_1$  est absolument borné. En effet le vecteur  $X^T = [3, 1, 3, 1, 1, 1]$  est tel que  $X^T C_1 < 0$ . ♦

Il faut souligner que si un réseau de Petri n'est pas structurellement borné, le réseau obtenu après avoir ajouté des transitions n'est pas structurellement borné. En fait, si nous ajoutons des transitions à un réseau de Petri  $N$  non structurellement borné dont la matrice d'incidence est  $C$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N_1$  dont la matrice d'incidence est  $C_1 = [C, C^*]$ , comme  $N$  n'est pas structurellement borné, alors pour tout  $X > 0$ , nous avons  $X^T C \not\leq 0$ , nous avons également  $X^T C_1 \not\leq 0$ , donc  $N_1$  n'est pas structurellement borné. Quand un réseau de Petri n'est pas structurellement borné, il faut ajouter au moins une place pour le rendre structurellement borné.

### 4.3 FUSION DE TRANSITIONS ET DE PLACES

Nous allons montrer que la fusion d'une (de) transition(s) de deux sous-réseaux de Petri structurellement bornés ou bien d'un même réseau de Petri structurellement borné préserve toujours la bornitude structurelle. Ce n'est par contre pas toujours le cas pour la fusion de places de deux réseaux de Petri structurellement bornés.

#### 4.3.1 Fusion de transitions

**Propriété 4.3 :** (i) Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri structurellement bornés par la fusion de deux ensembles  $T_1'$  et  $T_2'$  de transitions est structurellement borné.

(ii) Le réseau de Petri obtenu après la fusion de deux ensembles de transitions  $T_1'$  et  $T_2'$  d'un même réseau de Petri structurellement borné est également structurellement borné.

**Démonstration :** (i) Désignons les sous-réseaux de Petri structurellement bornés que l'on souhaite fusionner respectivement par  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour matrices d'incidence  $C_1=[C_{11}, C_{12}]$  et  $C_2=[C_{21}, C_{22}]$ , où  $C_{12}$  regroupe les colonnes de  $C_1$  correspondant aux transitions de  $N_1$  à fusionner avec les transitions de  $N_2$  qui elles mêmes correspondent aux colonnes de  $C_{21}$  dans  $C_2$ . Nous avons alors  $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$  et  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ . Nous obtenons un nouveau réseau  $N = N_1 \cup N_2$  dont la matrice d'incidence est  $C$  en fusionnant les transitions de  $N_1$  et  $N_2$

définies ci-dessus. Alors  $C$  peut être représentée comme suit :  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ .

Comme  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est structurellement borné, alors il existe un  $X_1$  (resp.  $X_2$ )  $>0$  tel que  $X_1^T C_1 = [X_1^T C_{11}, X_1^T C_{12}] \leq 0$  (resp.  $X_2^T C_2 = [X_2^T C_{21}, X_2^T C_{22}] \leq 0$ ). Alors le vecteur  $X=[X_1, X_2] > 0$  est tel que

$$X^T C = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = [X_1^T C_{11}, X_1^T C_{12} + X_2^T C_{21}, X_2^T C_{22}] \leq 0.$$

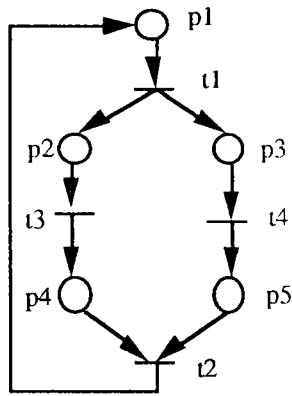
Donc  $N$  est structurellement borné.

(ii) Soient  $T_1'$  et  $T_2'$  deux ensembles de transitions à fusionner appartenant à un même réseau de Petri  $N$  structurellement borné. Nous pouvons alors réécrire sa matrice

d'incidence  $C=[\dots C_1', C_2' \dots]$ , où  $C_1'$  (resp.  $C_2'$ ) regroupe les colonnes correspondant à  $T_1'$  (resp.  $T_2'$ ). Comme  $N$  est structuellement borné, il existe un  $X>0$  tel que  $X^T C \leq 0$ , donc  $X^T C_1' \leq 0$  et  $X^T C_2' \leq 0$ . Lorsque nous fusionnons les transitions  $T_1'$  et  $T_2'$ , nous obtenons un nouveau réseau de Petri  $N'$  dont la matrice d'incidence  $C'$  est obtenue en additionnant les colonnes de  $C$  correspondant aux  $T_1'$  et  $T_2'$ , i.e.  $C'=[\dots C_1' + C_2' \dots]$ . Nous voyons que tout vecteur  $X>0$  tel que  $X^T C \leq 0$  est tel que  $X^T C' \leq 0$ , puisque  $X^T (C_1' + C_2') \leq 0$ . Donc  $N'$  est structuellement borné. Q.E.D.

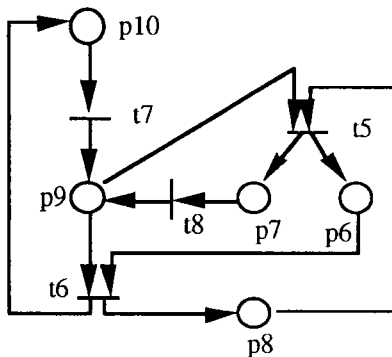
#### Exemple 4.5

On considère deux réseaux de Petri  $N_1$  (voir figure 4.7) et  $N_2$  (voir figure 4.8) structuellement bornés dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C_1$  et  $C_2$ . Nous fusionnons les transitions  $t_3, t_4$  de  $N_1$  avec les transitions  $t_7, t_8$  de  $N_2$  pour construire  $N$  (voir figure 4.9).



$$C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ t1 \quad t2 \quad t3 \quad t4 \end{matrix}$$

Figure 4.7 Réseau de Petri  $N_1$



$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p6 \\ p7 \\ p8 \\ p9 \\ p10 \\ t7 \quad t8 \quad t5 \quad t6 \end{matrix}$$

Figure 4.8 Réseau de Petri  $N_2$

$N_1$  et  $N_2$  sont structuellement bornés, car les vecteurs  $X_1^T=[2, 1, 1, 1, 1]$  et  $X_2^T=[1, 1, 1, 1, 1]$  permettent d'obtenir  $X_1^T C_1 \leq 0$  et  $X_2^T C_2 \leq 0$ .

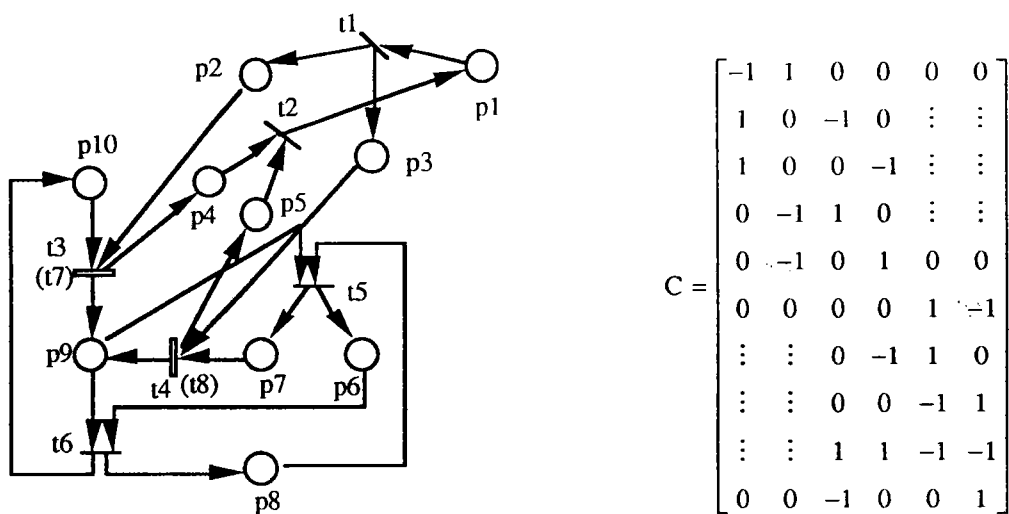


Figure 4.9 Réseau de Petri N

Après la fusion des transitions  $t_3$  et  $t_4$  de  $N_1$  avec les transitions  $t_7$  et  $t_8$  de  $N_2$ , nous obtenons  $N$ . Selon la propriété 4.3,  $N$  est structurellement borné. Effectivement, le vecteur  $X^T = [2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  nous permet d'obtenir  $X^T C \leq 0$ . ♦

#### 4.3.2 Fusion de places

Nous étudions le cas où nous fusionnons des places.

**Propriété 4.4 :** Lorsqu'on fusionne des places de deux sous-réseaux, une condition nécessaire pour que le réseau obtenu soit structurellement borné est que les deux sous-réseaux soient structurellement bornés.

**Démonstration :** Désignons les sous-réseaux de Petri structurellement bornés respectivement par  $N_1 = (P_1, T_1)$  et  $N_2 = (P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour matrices

d'incidence  $C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix}$  et  $C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix}$  où  $C_{12}$  regroupe les lignes de  $C_1$  correspondant aux places de  $N_1$  à fusionner avec les places de  $N_2$  associées aux lignes  $C_{21}$  dans  $C_2$ . En fusionnant les places définies ci-dessus, nous obtenons un nouveau réseau  $N = N_1 \cup N_2$

dont la matrice d'incidence est  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{21} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$ . Si  $N$  est structurellement borné, alors il

existe un vecteur  $X > 0$  tel que  $X^T C \leq 0$ . C'est-à-dire que :

$$X^T C = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T & X_3^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{12} & C_{21} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} = [X_1^T C_{11} + X_2^T C_{12}, X_2^T C_{21} + X_3^T C_{22}] \leq 0.$$

Cela signifie que

$$\begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} \times C_1 = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} = X_1^T C_{11} + X_2^T C_{12} \leq 0 ,$$

$$\begin{bmatrix} X_2^T & X_3^T \end{bmatrix} \times C_2 = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \end{bmatrix} = X_1^T C_{21} + X_2^T C_{22} \leq 0.$$

Ce qui implique que  $N_1$  et  $N_2$  sont structurellement bornés.

Q.E.D.

**Propriété 4.5 :** Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri structurellement bornés par la fusion de deux places est structurellement borné.

**Démonstration :** Désignons les sous-réseaux de Petri structurellement bornés respectivement par  $N_1 = (P_1, T_1)$  et  $N_2 = (P_2, T_2)$  qui ont respectivement pour matrice

d'incidence  $C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} \\ c_1^* \end{bmatrix}$  et  $C_2 = \begin{bmatrix} c_2^* \\ C_{22} \end{bmatrix}$  où  $c_1^*$  est la ligne de  $C_1$  correspondant à la place de

$N_1$  à fusionner avec la place de  $N_2$  associée à la ligne  $c_2^*$  dans  $C_2$ . En fusionnant les places définies ci-dessus, nous obtenons un nouveau réseau  $N = N_1 \cup N_2$  dont la matrice

$$\text{d'incidence est } C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ c_1^* & c_2^* \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Comme  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est structurellement borné, alors il existe un vecteur  $X_1^T = [X_{11}^T \ x_1^*] > 0$  tel que  $X_{11}^T C_{11} + x_1^* c_1^* \leq 0$  (resp.  $X_2^T = [X_{22}^T \ x_2^*] > 0$  tel que

$X_{22}^T C_{22} + x_2^* c_2^* \leq 0$ ). Alors le vecteur  $X = \begin{bmatrix} X_{11} \\ x_1^* \\ (x_1^* / x_2^*) \bullet X_{22} \end{bmatrix} > 0$  permet d'obtenir

$X^T C \leq 0$ . Donc  $N$  est structurellement borné.

Q.E.D.

### Exemple 4.6

On considère deux réseaux de Petri  $N_1$  (voir figure 4.7) et  $N_2$  (voir figure 4.8) structurellement bornés dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C_1$  et  $C_2$ . Nous fusionnons la place  $p_1$  de  $N_1$  avec la place  $p_{10}$  de  $N_2$  pour construire  $N$  (voir figure

4.10) dont la matrice d'incidence est  $C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ c_1^* & c_2^* \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}$ , où la ligne  $c_1^*$  (resp.  $c_2^*$ ) correspond à la place  $p_1$  de  $N_1$  (resp.  $p_{10}$  de  $N_2$ ).

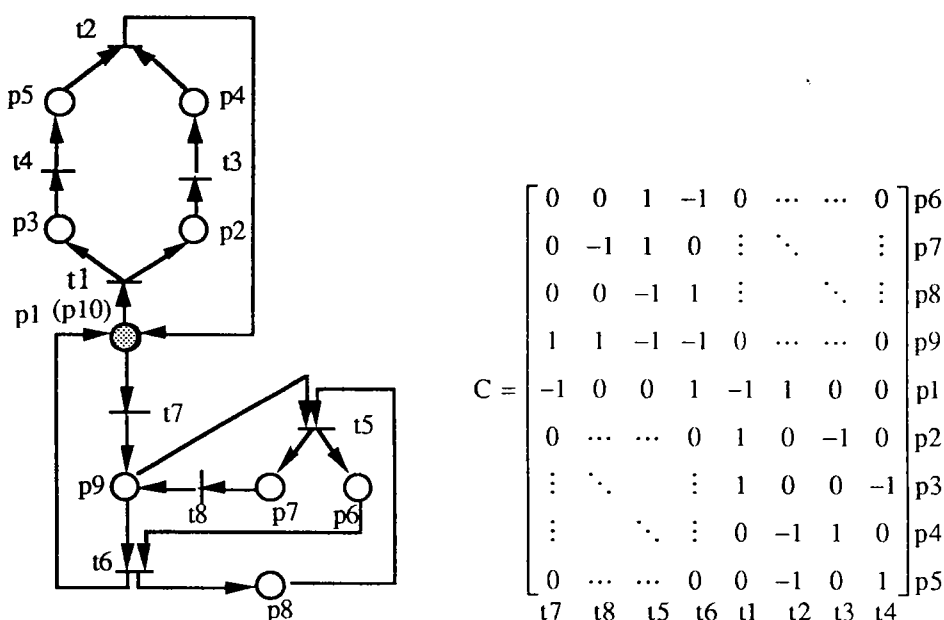


Figure 4.10. Réseau de Petri  $N$

Selon la propriété 4.5,  $N$  est structurellement borné. En effet, le vecteur  $X^r = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1]$  nous permet d'obtenir  $X^r C \leq 0$ . ♦

**Propriété 4.6 :** Le réseau de Petri obtenu en reliant deux sous-réseaux de Petri structurellement bornés  $N_1 = (P_1, T_1)$  et  $N_2 = (P_2, T_2)$  de matrices d'incidence respectives  $C_1$  et  $C_2$  par la fusion de deux ensembles  $P_1^* \subseteq P_1$  et  $P_2^* \subseteq P_2$  de places est structurellement borné si au moins une des conditions suivantes est satisfaite.

(1) Il existe un  $i \in \{1, 2\}$  tel que :

$$\forall p \in P_i^*, \exists X_{i,p} \geq 0 \text{ tel que } X_{i,p}^r C_i \leq 0, \|X_{i,p}\| \cap P_i^* = \{p\} \text{ et } \bigcup_{p \in P_i^*} \|X_{i,p}\| = P_i.$$

(2)  $\exists X_i > 0$  tel que  $X_i^T C_i \leq 0$  et  $\forall p \in P_i^*, X_i(p) = a_i, a_i \in \mathbb{R}^+, \forall i = 1, 2$ .

**Démonstration :** Similaire à la démonstration du théorème 3.9.

Q.E.D.

Nous proposons un algorithme pour vérifier les conditions du théorème 4.5.

**Algorithme 4.1 :** Soient un réseau de Petri  $N = (P, T)$  dont la matrice d'incidence est  $C$ , et soit  $P^* \subset P$  l'ensemble de places à fusionner avec celles d'un autre réseau.

#### Pour vérifier la condition (1)

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant pour chacun des deux sous-réseaux :

$$\min \sum_{p \in P} \left( \sum_{p^* \in P^*} X_{p^*}[p] \right)$$

sous les conditions :

$$\begin{aligned} \sum_{p^* \in P^*} X_{p^*}[p] &\geq 1 & \forall p \in P \\ X_{p^*}^T C &\leq 0, X_{p^*} \geq 0 & \forall p^* \in P^* \\ X_{p^*}[p'] &= 0 & \forall p' \in P^* - \{p^*\}, \forall p^* \in P^* \end{aligned}$$

La condition 1) du théorème 4.5 est satisfaite si et seulement si ce problème a une solution pour au moins un des deux sous-réseaux.

#### Pour vérifier la condition (2)

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant pour chacun des sous-réseaux :

$$\max \sum_{p \in P} z_p$$

sous les conditions :

$$\begin{aligned} z_p &\leq X[p] & \forall p \in P \\ 0 &\leq z_p \leq 1 & \forall p \in P \\ X^T C &\leq 0 \text{ et } X \geq 0 \\ X[p_i^*] &= X[p_j^*] & \forall p_i^* \in P^*, \forall p_j^* \in P^*, i \neq j \end{aligned}$$

Si pour chacun des deux sous-réseaux, le valeur du critère donne le nombre de places du réseau correspondant, alors la condition 2) du théorème 4.5 est satisfaite. ♦

### Exemple 4.7

On considère deux réseaux de Petri  $N_1$  (voir figure 4.7) et  $N_2$  (voir figure 4.8) structurellement bornés dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C_1$  et  $C_2$ . Nous fusionnons les places  $p1$  et  $p4$  de  $N_1$  avec les places  $p10$  et  $p6$  de  $N_2$  pour construire  $N$  (voir figure 4.11) dont la matrice d'incidence est  $C$ .

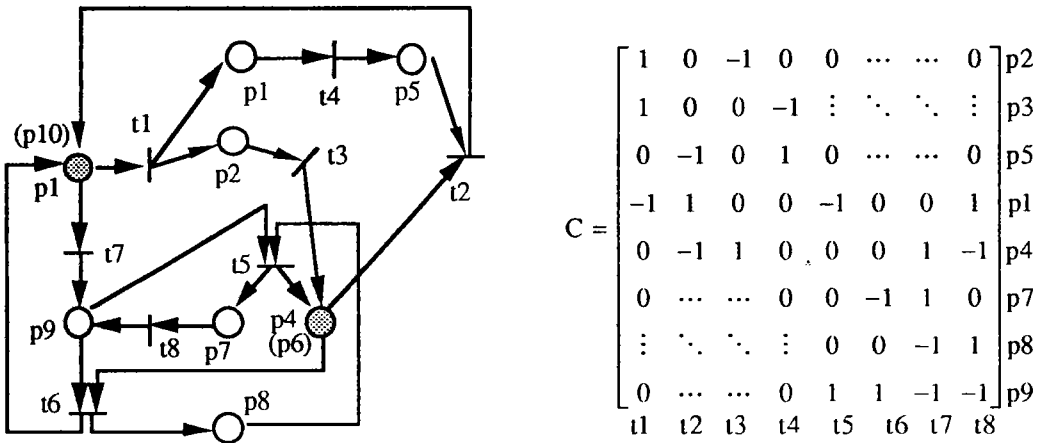


Figure 4.11 Réseau de Petri  $N$

Il existe deux vecteurs  $X_{21}^\tau = [1, 0, 1, 0, 0]$  et  $X_{22}^\tau = [0, 1, 0, 1, 1]$  tels que  $X_{21}^\tau C_2 \leq 0$  et  $X_{22}^\tau C_2 \leq 0$ . La condition 1) du théorème 4.5 est satisfaite, donc  $N$  est structurellement borné. Effectivement le vecteur  $X^\tau = [1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$  nous permet d'obtenir  $X^\tau C \leq 0$ . ♦

## 4.4 INTEGRATION PAR DES PLACES ET RECHERCHE DU COMPOSANT STRUCTURELLEMENT BORNE MAXIMAL

Dans cette section, nous cherchons dans quelle condition le réseau entier est structurellement borné quand nous relions deux sous-réseaux de Petri par des places ajoutées. Nous étudions aussi comment chercher le composant structurellement borné maximal d'un réseau (voir paragraphe 4.4.2) qui n'est pas structurellement borné.

#### 4.4.1 Intégration de deux sous-réseaux en ajoutant des places

**Définition 4.2** : En intégrant deux sous-réseaux de Petri  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$  en ajoutant un ensemble  $P^*$  de places, le réseau obtenu est  $N=(P_1 \cup P_2 \cup P^*, T_1 \cup T_2)$ .

**Théorème 4.5** : Quand on relie deux sous-réseaux de Petri structurellement bornés  $N_1=(P_1, T_1)$  et  $N_2=(P_2, T_2)$  dont les matrices d'incidence sont respectivement  $C_1$  et  $C_2$  en ajoutant un ensemble de places  $P^*$ , si le sous-réseau de Petri  $N^* = (P^*, T_1 \cup T_2)$  est structurellement borné, alors le réseau global  $N=N_1 \cup N_2 \cup N^*$  est structurellement borné.

**Démonstration** : La matrice d'incidence du réseau de Petri  $N^*$  peut être écrite comme  $C^*=[C_1^*, C_2^*]$ , où  $C_1^*$  (resp.  $C_2^*$ ) correspond à  $T_1$  (resp.  $T_2$ ). Comme  $N^*$  est structurellement borné, alors il existe un vecteur  $X^*>0$  tel que  $(X^*)^T C^* \leq 0$ , autrement dit, nous avons :

$$(X^*)^T C_1^* \leq 0 \text{ et } (X^*)^T C_2^* \leq 0. \quad (4.1)$$

Par ailleurs, comme  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est structurellement borné, il existe un vecteur  $X_1>0$  (resp.  $X_2 > 0$ ) tel que

$$X_1^T C_1 \leq 0 \text{ (resp. } X_2^T C_2 \leq 0). \quad (4.2)$$

La matrice d'incidence du réseau  $N$  obtenu après l'ajout de  $P^*$  s'écrit  $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1^* & C_2^* \end{bmatrix}$ .

Compte tenu des relations (4.1) et (4.2), le vecteur  $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X^* \end{bmatrix} > 0$  conduit à

$$X^T C = \begin{bmatrix} X_1^T & X_2^T & (X^*)^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ C_1^* & C_2^* \end{bmatrix} = [X_1^T C_1 + (X^*)^T C_1^*, \quad X_2^T C_2 + (X^*)^T C_2^*] \leq 0.$$

Le réseau  $N$  est donc structurellement borné.

Q.E.D.

### Exemple 4.8

On considère deux réseaux de Petri  $N_1$  (voir figure 4.7) et  $N_2$  (voir figure 4.8) structurellement bornés dont les matrices d'incidence sont  $C_1$  et  $C_2$  respectivement. Nous ajoutons deux places  $p_{11}$  et  $p_{12}$  pour relier ces deux réseaux et nous obtenons le réseau de Petri  $N$  représenté dans la figure 4.12. Sa matrice d'incidence  $C$  est ci-dessous :

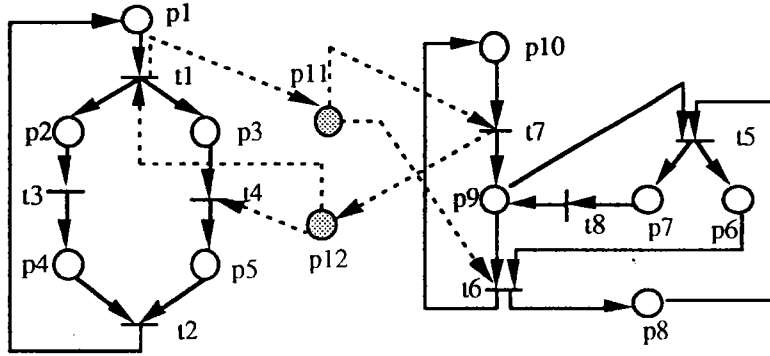


Figure 4.12 Réseau de Petri obtenu après intégration en ajoutant des places

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \\ p7 \\ p8 \\ p9 \\ p10 \\ p11 \\ p12 \end{matrix}$$

$t1 \quad t2 \quad t3 \quad t4 \quad t7 \quad t8 \quad t5 \quad t6$

Nous supposons que les places ajoutées ( $p_{11}$ ,  $p_{12}$ ) et les transitions ( $t1$ ,  $t4$ ,  $t6$ ,  $t7$ ) qui sont reliées à ces places constituent un réseau  $N^*$  dont la matrice d'incidence est

$$C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Il existe un vecteur } (X^*)^T = [1, 1] \text{ tel que } (X^*)^T C^* \leq 0, \text{ donc } N^*$$

est structurellement borné. Selon le théorème 4.6, le réseau  $N$  est structurellement borné. En effet, le vecteur  $X^T = [2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$  nous permet de vérifier que  $X^T C \leq 0$ . ♦

#### 4.4.2 Recherche du composant structurellement borné maximal

Dans le cas où le réseau de Petri n'est pas structurellement borné, la recherche du composant structurellement borné maximal nous permet de connaître précisément la cause de la non bornitude structurelle.

**Définition 4.3 :** Un composant structurellement borné maximal du réseau de Petri  $N=(P, T)$  est un réseau de Petri  $N'$  structurellement borné comportant toutes les transitions de  $N$  et un maximum de places de  $N$ . Autrement dit,  $N'$  est constitué de  $T$  et des places correspondant aux composants positifs d'un vecteur  $X \geq 0$  tel que  $X^T C \leq 0$ . Le problème consiste à chercher un vecteur  $X$  tel que  $\|X\|$  soit maximal.

**Propriété 4.4 :** Le composant structurellement borné maximal  $N'$  de  $N$  est unique.

**Démonstration :** Nous démontrons cette propriété par l'absurde. Soient  $N'$  et  $N''$  (dont les ensembles de places sont respectivement  $P'$  et  $P''$ ) deux composants structurellement bornés maximaux différents de  $N$ . Nous avons alors  $P' \neq P''$ . Comme  $N'$  (resp.  $N''$ ) est structurellement borné,  $P'$  (resp.  $P''$ ) est le support d'un vecteur  $X' \geq 0$  (resp.  $X'' \geq 0$ ), tel que  $(X')^T C \leq 0$ . Il est évident que  $P' \cup P''$  est le support de toute combinaison linéaire positive de  $X'$  et  $X''$ . Cette combinaison donne un autre vecteur  $X \geq 0$  tel que  $X^T C \leq 0$ . Cela signifie que  $P' \cup P''$  et  $T$  constitue un sous-réseau structurellement borné de  $N$ . Puisque  $P' \neq P''$ ,  $P' \cup P'' \supset P'$ ,  $P' \cup P'' \supset P''$ . Cette relation implique que  $N'$  et  $N''$  ne sont pas des composants structurellement bornés maximaux de  $N$ . Q.E.D.

L'algorithme 4.2 nous permet de trouver le composant structurellement borné maximal.

**Algorithme 4.2 :** Pour un réseau de Petri  $N$  dont la matrice d'incidence est  $C$ , on peut calculer le composant structurellement borné maximal  $N'$  de  $N$  :

Etape 1 : Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max \sum_{p \in P} z_p$$

sous les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} z_p &\leq X[p] & \forall p \in P \\ 0 &\leq z_p \leq 1 & \forall p \in P \\ X^T C &\leq 0 \quad \text{et} \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

Etape 2 :  $\{p/ X[p] > 0\}$  constitue l'ensemble des places du composant structurellement borné maximal. Cet ensemble peut être vide. ♦

Remarque : Si  $\sum_{p \in P} z_p = m$ , où  $m$  est le nombre de places, le réseau de Petri est structurellement borné.

### 4.5 SYNTHESE DES RESULTATS

Nous donnons, dans le tableau 4.1, une synthèse des résultats obtenus dans les sections précédentes.

Tableau 4.1. Synthèse des résultats

| Born.<br>de N | Action                                        | Condition                                                                                          | Born.<br>de N1 | Réf. |
|---------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------|
| Oui(s)        | Ajout d'une place                             | si $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$                                                              | Oui(1)         | T4.1 |
| Oui(s)        | Ajout de plusieurs places                     | si $\text{rang}(C1) = \text{rang}(C)$                                                              | Oui(1)         | C4.1 |
| Oui(s)        | Ajout d'une transition                        | si $C^* = Cq$ , où $q > 0$                                                                         | Oui(1)         | T4.2 |
| Oui(s)        | Fusion de transitions                         |                                                                                                    | Oui(1)         | P4.3 |
| Oui(s)        | Fusion de deux places                         |                                                                                                    | Oui(1)         | P4.4 |
| Oui(s)        | Fusion de places                              | Condition (1) ou (2) du<br>théorème 4.5                                                            | Oui(1)         | P4.5 |
| Oui(s)        | Intégration de deux<br>RdPs en ajoutant $P^*$ | $N^*$ est struct. borné                                                                            | Oui(1)         | T4.5 |
| Oui(a)        | Ajout de places                               |                                                                                                    | Oui(2)         | T4.3 |
| Oui(a)        | Ajout de $N_2$ à $N_1$                        | Si $T_2 \cap \bullet P_1 = \emptyset$ et<br>$t \cap P_1 \bullet \neq \emptyset, \forall t \in T_2$ | Oui(2)         | T4.4 |

- où :
- 1)  $N$  dont la matrice d'incidence est  $C$  est le RdP initial;
  - 2)  $N1$ , dont la matrice d'incidence est  $C1$ , est le réseau résultant;
  - 3)  $T$  (resp.  $C$  et  $P$ ) signifie théorème (resp. corollaire et propriété);
  - 4) (s) indique structurellement borné; (a) indique absolument borné.

## 4.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié la bornitude structurelle des réseaux de Petri obtenus à partir des réseaux de Petri existants, soit en ajoutant des places et/ou des transitions, soit en fusionnant des places ou des transitions, soit en reliant deux sous-réseaux par des places. Ces résultats nous permettent dans certains cas de vérifier la bornitude structurelle en ne considérant qu'une partie du système .

## **CHAPITRE V**

# **VERIFICATION INCREMENTALE DE L'ABSENCE DE BLOCAGE**

## 5.1 INTRODUCTION

Dans les systèmes de production, le nombre de ressources, comme par exemple les machines, les robots et les stocks tampons, est limité. Les conflits entre produits qui souhaitent accéder aux mêmes ressources peuvent conduire à des phénomènes de blocage : aucune opération n'est plus alors possible. Une conception bien faite ne devrait pas permettre une telle situation. L'absence de blocage est donc une propriété fortement souhaitée dès la conception du système. Dans ce chapitre, nous examinons l'évolution de cette propriété tout au long du processus de conception d'un système modélisé à l'aide des réseaux de Petri.

Parmi les travaux qui s'intéressent aux situations de blocage des réseaux de Petri, nous trouvons la publication de [VIS et al. 90]. Les auteurs ont mis en évidence quatre causes possibles de blocage dans un système de production :

1. **Exclusion mutuelle** : une ressource ne peut pas être utilisée simultanément par plusieurs processus;
2. **Sans interruption** : les ressources utilisées restent occupées jusqu'à ce que le processus en cours soit entièrement terminé;
3. **Occupation et attente** : il existe un processus qui occupe au moins une ressource et qui attend des ressources supplémentaires qui sont occupées par d'autres processus;
4. **Attente circulaire** : il existe un ensemble de processus  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$  tel que  $\pi_i$  attend une ressource occupée par  $\pi_{i+1}$  pour tout  $i=1, \dots, n-1$ , et que  $\pi_n$  attend une ressource occupée par  $\pi_1$ .

Pour résoudre le problème de blocage, trois types de méthodes ont été développées. Le premier est qualifié de **prévention de blocage**. Ces méthodes consistent à concevoir le système tel que le modèle de RdP correspondant soit vivant et que la situation de blocage soit impossible. [DAT et al. 84], [ZHO et al. 92] et [ESP et al. 93] ont utilisé ce type de méthodes. Mais l'application de ces méthodes se limite toujours à des cas particuliers ou à des sous-classes de RdP.

Le deuxième type de méthodes s'appelle "**deadlock avoidance**" que l'on peut traduire par "**éviter les blocages**". Il consiste à utiliser des politiques de contrôle pour éviter l'apparition de blocage, dans un modèle de RdP où des phénomènes de blocage sont possibles. [BAN et al. 90], [VIS et al. 90] et [BAR et al. 94] ont développé des méthodes de ce type.

Le troisième type de méthodes peut être qualifié de "**détection de blocages**". Ces méthodes consistent à vérifier l'existence (ou l'absence) de blocage dans un modèle RdP. Ces

méthodes conviennent bien à la conception des systèmes de production et permettent de trouver des erreurs de conception. [MUR et al. 89] utilisent les invariants des RdP pour détecter la présence de blocages dans les modèles de réseaux de Petri des systèmes “Ada”. [TER et al. 93b] a proposé une condition suffisante pour vérifier l'absence de blocage en utilisant l'équation fondamentale. Cette condition s'applique aux RdP généraux, mais le volume important de calculs nécessaires empêche son application dans la pratique. [COM 72] et [JAN et al. 80] ont proposé une méthode utilisant les verrous et les trappes (voir Chapitre 2, paragraphe 2.4.4) pour vérifier l'absence de blocage dans les RdP ordinaires.

Du fait que tout RdP peut être transformé en un RdP ordinaire, et que les définitions de verrou et de trappe sont simples, les méthodes faisant intervenir les verrous et les trappes semblent faciles à utiliser. Puisque tout verrou (resp. toute trappe) est une combinaison de verrous (resp. de trappes) de base (voir Chapitre 2, paragraphe 2.4.4), alors la connaissance de verrous (resp. de trappes) de base équivaut à la connaissance de tous les verrous (resp. toutes les trappes). Pour trouver la base des verrous et des trappes d'un RdP, il existe plusieurs méthodes : [KIN et al. 86] utilisent l'équation logique, [LAU 87] propose une approche basée sur l'algèbre linéaire, [EZP et al. 91] considèrent l'équation linéaire avec des variables d'écart et [ERW et al. 94] étudient la matrice d'incidence de signe (voir section 5.3). Malheureusement, lorsque le système est grand, même si l'on ne considère que la base des verrous (resp. trappes) le nombre de possibilités reste très important.

Dans ce chapitre, nous considérons des réseaux de Petri ordinaires. Ceci n'est pas très restrictif car tout réseau général peut être transformé en un réseau ordinaire tout en préservant les propriétés structurelles. Cela nous permet d'utiliser les verrous pour l'étude des blocages. Par contre, nous ne nous limitons pas aux réseaux purs.

Nous proposons des méthodes qui ne cherchent que des verrous. Ces méthodes s'appliquent également à la recherche des trappes, du fait que la définition de verrou et celle de trappe des réseaux de Petri ordinaires sont symétriques. En effet, un verrou d'un réseau de Petri ordinaire  $N=(P, T, I, O)$  est une trappe d'un réseau inverse  $N^{-1}=(P, T, I', O')$ , où  $I'=O$ , et  $O'=I$ . Pour trouver les trappes dans un réseau de Petri ordinaire  $N$ , il suffit d'inverser l'orientation des arcs de  $N$  et de chercher les verrous dans le réseau de Petri obtenu.

Notre objectif dans ce chapitre est de fournir une aide aux ingénieurs qui conçoivent un système de manière progressive et qui cherchent à garantir l'absence de blocage pour des réseaux ordinaires généraux, ou à garantir la vivacité pour des sous-classes de RdP.

Ce chapitre peut être regroupé en deux parties. La première partie est consacrée à la recherche la base des verrous (resp. de trappes), l'ensemble des verrous minimaux et la trappe maximale dans un verrous minimal, dans un processus de conception incrémentale. A chaque

étape de la conception incrémentale, nous ne cherchons que les nouveaux verrous (resp. nouvelles trappes) de base, ou les nouveaux verrous minimaux (resp. nouvelles trappes minimales) qui concernent les transitions ou les places ajoutées.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'il y ait absence de blocage pour les réseaux de Petri ordinaires généraux et pour que la vivacité de sous-classes de RdP soit vérifiée. Ces conditions étant basées sur la notion de verrou et de trappe; nos méthodes font donc partie de la famille "**détection de blocage**". Lorsque la vérification effectuée n'assure pas l'absence de blocage, nous proposons un principe de recherche qui permet de trouver des marquages initiaux pour qu'il n'y ait pas de situation blocage dans les réseaux de Petri ordinaires généraux, ou que des sous-classes de réseaux de Petri soient vivants. Ce complément fait donc partie de la famille "**prévention de blocage**".

Ce chapitre est organisé en 9 sections. Les sections 5.2 et 5.3 présentent respectivement les résultats obtenus dans le cas d'ajout de transitions et dans le cas d'ajout de places. La section 5.4 propose une méthode qui cherche la trappe maximale dans un verrou minimal. La section 5.5 vérifie l'absence de blocage pour tout réseau de Petri et propose un principe de recherche de marquages initiaux afin qu'un RdP marqué soit sans blocage. La section 5.6 est consacrée à la vivacité de deux sous-classes de RdP : les **réseaux à choix asymétrique** et les **graphes d'événements augmenté de places de ressources partagées**. La section 5.7 s'intéresse à des modèles des gammes de fabrication. La section 5.8 est une synthèse des résultats obtenus. La section 5.9 est la conclusion.

## 5.2 AJOUT DE TRANSITIONS

Cette section établit des résultats qui mettent en évidence l'influence sur les verrous de l'ajout de transitions à un réseau de Petri existant. A l'aide de ces résultats, nous pouvons trouver la base des verrous (c'est-à-dire l'ensemble des verrous de base) du réseau de Petri obtenu à partir la base des verrous du réseau de Petri initial en examinant seulement les transitions ajoutées. Un algorithme qui permet de trouver la nouvelle base du réseau est inclus dans cette section.

Nous examinons d'abord l'influence de l'ajout d'une transition à un réseau de Petri sur le nombre de verrous.

Avant de poursuivre, nous introduisons quelques notations nécessaires à la présentation. Pour un ensemble de places  $S$  dans un réseau de Petri  $N$ , noté par  $S(N)$ ,  $\bullet S(N)$  (resp.  $S\bullet(N)$ ) désigne l'ensemble des transitions d'entrée (resp. de sortie) de  $S(N)$ .

**Théorème 5.1 :** Quand on ajoute *une transition*  $\tau$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire un nouveau réseau  $N1$ , aucun nouveau verrou n'apparaît. Autrement dit, tout verrou de  $N1$  est un verrou de  $N$ . Cela implique que le nombre de verrous ne peut que diminuer ou rester inchangé.

**Démonstration :** Supposons qu'il existe un ensemble de places  $S$  qui est un verrou dans  $N1$  alors qu'il ne l'est pas dans  $N$ . Donc  $\bullet S(N1) \subseteq S \bullet(N1)$  et que  $\bullet S(N) \not\subseteq S \bullet(N)$ . Si  $S$  n'est pas un verrou de  $N$ , la relation  $\bullet S(N) \not\subseteq S \bullet(N)$  implique qu'il existe au moins une transition  $t \in \bullet S(N)$  telle que  $t \notin S \bullet(N)$ . De plus  $t \neq \tau$  car  $t \notin N$  et  $t \in N$ . Comme nous avons soit  $S \bullet(N1) = S \bullet(N)$ , soit  $S \bullet(N1) = S \bullet(N) \cup \{\tau\}$ , nous déduisons que  $t \notin S \bullet(N1)$ . Par ailleurs, comme  $\bullet S(N) \subseteq \bullet S(N1)$ , nous avons  $t \in \bullet S(N1)$ . Par conséquent  $\bullet S(N1) \not\subseteq S \bullet(N1)$ , donc  $S$  n'est pas non plus un verrou de  $N1$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Q.E.D.

D'après le théorème 5.1, nous avons immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 5.1 :** L'ajout d'un ensemble de transitions à un réseau de Petri ne génère pas de nouveaux verrous. Donc le nombre de verrous n'augmente pas.

Lorsque l'on ajoute une transition  $\tau$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire  $N1$ , la base des verrous  $SB$  de  $N$  peuvent être regroupées en 3 sous-ensembles différents, selon leur lien avec la transition  $\tau$  dans le réseau  $N1$ . Ces ensembles sont les suivants :

- 1)  $S_1$  : sous-ensemble de verrous de base pour lesquels la transition  $\tau$  est seulement une transition d'entrée  
 $S_1 = \{S \mid \tau \in \bullet S, \tau \notin S \bullet\}$ .
- 2)  $S_2$  : sous-ensemble de verrous de base pour lesquels la transition  $\tau$  est une transition de sortie  
 $S_2 = \{S \mid \tau \in S \bullet\}$ .
- 3)  $S_3$  : sous-ensemble de verrous de base pour lesquels la transition  $\tau$  n'est ni une transition d'entrée ni une transition de sortie (il n'y a pas d'arc entre  $\tau$  et les places de ces verrous de base)  
 $S_3 = \{S \mid \tau \notin \bullet S, \tau \notin S \bullet\}$ .

En distinguant ces trois sous-ensembles de verrous de base, nous pouvons faire la remarque suivante.

**Remarque 5.1.** Pour tout verrou  $V$  de  $N$ , il existe trois sous-ensembles  $S'_1 \subseteq S_1$ ,  $S'_2 \subseteq S_2$  et  $S'_3 \subseteq S_3$ , dont au moins un n'est pas vide, tels que  $V = \left( \bigcup_{S \in S'_1} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_2} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_3} S \right)$ .

Nous examinons maintenant le changement de la base apporté par l'ajout d'une transition.

**Théorème 5.2 :** Lorsqu'on ajoute *une transition*  $\tau$  à  $N$ , tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_1$  n'est plus un verrou de base de  $N1$ . Tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_2$  ou  $S_3$  est un verrou de base de  $N1$ .

**Démonstration :** Pour tout verrou de base  $B$  de  $N$  tel que  $B \in S_1$ , nous avons  $\tau \in \bullet B(N1)$ ,  $\tau \notin B \bullet(N1)$ , c'est-à-dire que  $\bullet B(N1) \not\subseteq B \bullet(N1)$ .  $B$  n'est pas un verrou de  $N1$ , donc  $B$  n'est pas un verrou de base de  $N1$ . Ceci démontre que tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_1$  n'est pas un verrou de base de  $N1$ .

Tout verrou de base  $B$  de  $N$  tel que  $B \in S_2 \cup S_3$ , est un verrou de  $N1$ , d'après la définition de sous-ensembles  $S_2$  et  $S_3$ . Si  $B$  n'était pas un verrou de base de  $N1$  alors il serait l'union d'autres verrous de  $N1$  qui sont nécessairement des verrous de  $N$  d'après le théorème 5.1, ce qui est contradictoire avec l'affirmation que  $B$  est un verrou de base de  $N$ . Ceci démontre que tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_2$  ou  $S_3$  est un verrou de base de  $N1$ . Q.E.D.

**Théorème 5.3 :** Lorsque l'on ajoute *une transition*  $\tau$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$ , si  $B$  est un nouveau verrou de base de  $N1$ , alors il existe un verrou de base  $S_i \in S_1$  et un verrou de base  $S_j \in S_2$  telles que  $B = S_i \cup S_j$  et  $S_i \setminus S_j \neq \emptyset$ .

**Démonstration :** Comme  $B$  est un nouveau verrou de base de  $N1$ ,  $B$  est aussi un verrou de  $N1$ , et donc un verrou de  $N$  d'après le théorème 5.1. Selon la remarque 5.1, il existe trois sous-ensembles  $S'_1 \subseteq S_1$ ,  $S'_2 \subseteq S_2$  et  $S'_3 \subseteq S_3$  tels que  $B = \left( \bigcup_{S \in S'_1} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_2} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_3} S \right)$ . Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer  $|S'_1| = |S'_2| = 1$  et  $S'_1 \setminus S'_2 \neq \emptyset$ . Pour cela, nous démontrons d'abord que  $S'_2 \neq \emptyset$ , ensuite  $S'_3 = \emptyset$ , puis  $S'_1 \neq \emptyset$  et enfin  $|S'_1| = |S'_2| = 1$ .

a). Si  $S'_2 = \emptyset$ ,  $B = \left( \bigcup_{S \in S'_1} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_3} S \right)$ . Nous avons alors  $\tau \in \bullet B$ , et  $\tau \notin B \bullet$ , ce qui implique que  $\bullet B \not\subseteq B \bullet$ , c'est-à-dire que  $B$  n'est pas un verrou de  $N1$ , ce qui est contradictoire avec l'affirmation que  $B$  est un verrou de  $N1$ . Ceci démontre que  $S'_2 \neq \emptyset$ .

b). Nous savons que  $\left( \bigcup_{S \in S'_1} S \right) \cup \left( \bigcup_{S \in S'_2} S \right)$  est un verrou de  $N1$ . Si  $S'_3 \neq \emptyset$  alors  $\left( \bigcup_{S \in S'_3} S \right)$  est aussi un verrou de  $N1$ . Alors  $B$  ne peut pas être un verrou de base de  $N1$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du théorème. Ainsi nous avons  $S'_3 = \emptyset$ .

c). Si  $S'_1 = \emptyset$ , nous obtenons  $B = \left( \bigcup_{S \in S'_2} S \right)$ . Ceci implique soit que  $B$  n'est pas un verrou de base de  $N1$  (si  $|S'_2| > 1$  en considérant le théorème 5.2), soit que  $B$  est un ancien verrou de base

de  $N$  (si  $|S'_2|=1$ ). Ainsi pour que  $B$  soit un nouveau verrou de base de  $N1$ , il faut que  $S'_1 \neq \emptyset$  et  $S'_2 \neq \emptyset$ .

d). Nous démontrons maintenant que pour que  $B$  soit un nouveau verrou de base de  $N1$ , il

faut que  $|S'_1|=1$  et  $|S'_2|=1$ . En effet nous pouvons réécrire  $B = \bigcup_{S'_2 \in S_2} \left( \bigcup_{S'_1 \in S_1} (S'_1 \cup S'_2) \right)$ . Nous savons déjà que  $S'_1 \cup S'_2$  est un verrou de  $N1$ ,  $\forall S'_1 \in S_1, \forall S'_2 \in S_2$ . Pour que  $B$  soit un verrou de base et que  $S'_1 \neq \emptyset$  et  $S'_2 \neq \emptyset$ , la seule solution possible est que  $|S'_1|=|S'_2|=1$ .

Finalement si  $S_i \setminus S_j = \emptyset$ , alors  $B = S_i \cup S_j = S_j$ . Donc  $B$  est un verrou de base de  $N$ ,  $B$  n'est pas un nouveau verrou de base de  $N1$ . Q.E.D.

Il faut noter que le théorème 5.3 n'est qu'une condition nécessaire pour la composition d'un nouveau verrou de base. En d'autres termes l'union de deux verrous de base de  $N$ ,  $S_i \in S_1$  et  $S_j \in S_2$ , n'est pas nécessairement un verrou de base de  $N1$ . C'est le cas par exemple lorsqu'il existe deux verrous de base  $S_j \in S_2$  et  $S_k \in S_3$  tels que  $S_i \cup S_j = S_j \cup S_k$ .

**Corollaire 5.2** : Lorsque l'on ajoute une transition  $\tau$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire un nouveau réseau de Petri  $N1$ , la base de  $N1$  reste la même que celles de  $N$ , si et seulement si l'ensemble  $S_1$  est vide dans  $N$ .

**Démonstration :**

a). (Condition suffisante) D'après le théorème 5.3, si  $S_1 = \emptyset$ , il n'y a pas de nouveau verrou de base. Autrement dit, si  $S_1 = \emptyset$ , tout verrou de base de  $N1$  est un verrou de base de  $N$ . D'après le théorème 5.2, si  $S_1 = \emptyset$ , tout verrou de base de  $N$  est un verrou de base de  $N1$ . Ceci démontre que si  $S_1 = \emptyset$ , la base de  $N1$  et celle de  $N$  soit les mêmes.

b). (Condition nécessaire) D'après le théorème 5.2, si  $S_1 \neq \emptyset$ , tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_1$  n'est plus un verrou de base de  $N1$ . La base ne peut donc pas rester la même.

Q.E.D.

Lorsqu'après l'ajout d'une transition la base reste la même, autrement dit  $S_1 = \emptyset$ , les verrous restent aussi nécessairement les mêmes. Ceci est le cas de l'ajout d'une transition de sortie (voir Chapitre 2, paragraphe 2.2.2). Nous avons donc la propriété suivante.

**Propriété 5.1** : Après l'ajout d'une transition de sortie à un réseau de Petri, les verrous restent les mêmes.

Du théorème 5.2, nous pouvons aussi déduire la propriété suivante.

**Propriété 5.2 :** Après l'ajout d'une transition d'entrée à un réseau de Petri, les verrous qui contiennent une place reliée à cette transition ne sont plus des verrous.

D'après le théorème 5.3, pour trouver les nouveaux verrous de base, il suffit de vérifier toutes les combinaisons possibles de deux verrous de base appartenant respectivement à  $S_1$  et à  $S_2$ . Par ailleurs, d'après le théorème 5.3, tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_2 \cup S_3$  reste un verrou de base dans  $N1$ , et tout verrou de base de  $N$  appartenant à  $S_1$  n'est plus un verrou de base dans  $N1$ . En basant sur ces remarques, nous proposons un algorithme pour trouver la base dans le réseau  $N1$  obtenu après l'ajout d'une transition à un réseau  $N$ , en connaissant la base de  $N$ . Dans le cas où l'on ajoute plusieurs transitions, la base du nouveau réseau peut être obtenue en appliquant successivement l'algorithme autant de fois que de transitions ajoutées.

**Algorithme 5.1** (Chercher la base des verrous en ajoutant une transition  $\tau$ ):

Considérons l'ajout d'une transition  $\tau$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire le réseau  $N1$ .

1. Numéroté les verrous de base appartenant à  $S_1$  (resp.  $S_2$  et  $S_3$ ) comme  $S_{1,1}, S_{1,2}, \dots, S_{1,a}$  (resp.  $S_{2,1}, S_{2,2}, \dots, S_{2,b}$  et  $S_{3,1}, S_{3,2}, \dots, S_{1,c}$ ), où  $a=|S_1|$ ,  $b=|S_2|$  et  $c=|S_3|$ .
2. Si  $a=0$ , les verrous de base de  $N1$  sont les mêmes que ceux de  $N$  selon le corollaire 5.2, **fin** de l'algorithme.
3. Chercher l'ensemble  $S$  de nouveaux verrous de base potentiels de  $N1$ .
  - 3.1.  $S := \emptyset$ .
  - 3.2. **Pour**  $i$  de 1 à  $a$  **faire**

**Pour**  $j$  de 1 à  $b$  **faire**

Si  $S_{1,i} \not\subseteq S_{2,j}$  et  $S_{1,i} \cup S_{2,j} \notin S$ , alors  $S_{1,i} \cup S_{2,j}$  est un verrou de base potentiel :

$S := S \cup \{S_{1,i} \cup S_{2,j}\}$ .

**finpour**
4. **finpour**
4. Eliminer les faux verrous de base
 

**Pour** tout ensemble de places  $B \in S$  **faire**

  - 4.1. Calculer l'union, notée  $B'$ , des verrous appartenant à  $S_2$ , à  $S_3$  ou à  $S$  et qui sont des sous-ensembles de  $B$ , c'est-à-dire
 
$$B' = \left( \bigcup_{\substack{S \in S_2 \\ S \subseteq B}} S \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{S \in S_3 \\ S \subseteq B}} S \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{S \in S \\ S \subseteq B}} S \right),$$
  - 4.2. Si  $B' = B$  alors  $B$  est un faux verrou de base,  $S := S - \{B\}$ .

**finpour**

5. La base des verrous de N1 est  $\mathcal{SB}_1 = \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$ . ♦

L'exemple suivant illustre l'utilisation de cet algorithme pour trouver la base des verrous du réseau N1 obtenu après l'ajout d'une transition au réseau de Petri N.

#### Exemple 5.1

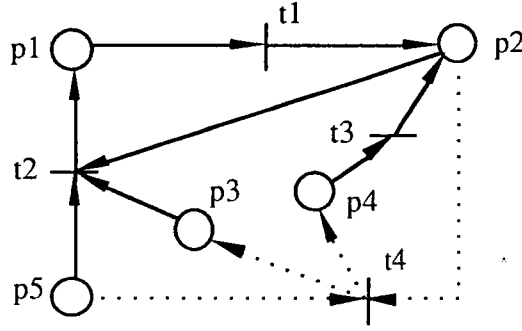


Figure 5.1 Réseau de Petri N1

Nous considérons l'ajout d'une transition  $t_4$  à un réseau de Petri N pour construire N1 présenté dans la figure 5.1. Dans cette figure, les pointillés représentent la partie ajoutée. Supposons que nous connaissions la base des verrous de N. En fait, nous pouvons l'obtenir à l'aide de la méthode proposée par [ERW et al. 94] (voir section 5.3) ou bien en construisant N à partir de l'ensemble des places  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  et  $T = \{\emptyset\}$  et en répétant 3 fois l'algorithme 5.1, considérant chaque fois l'ajout d'une des transitions  $t_1, t_2$  et  $t_3$ .

La base des verrous de N est :  $\mathcal{SB} = \{ \{p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{p_3, p_5\}, \{p_4\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\} \}$ .

La base des verrous de N se classent en trois sous-ensembles, comme indiqué précédemment :

- a)  $\mathcal{S}_1 = \{ \{p_3\}, \{p_1, p_3\}, \{p_4\} \}$ .
- b)  $\mathcal{S}_2 = \{ \{p_3, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\} \}$ .
- c)  $\mathcal{S}_3 = \emptyset$ .

A l'étape 2 de l'algorithme 5.1, comme  $a \neq 0$ , l'algorithme continue.

A l'étape 3, nous obtenons les nouveaux verrous de base potentiels suivants :  $\{p_1, p_3, p_5\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ .

Après la vérification effectuée à l'étape 4, les nouveaux verrous de base sont :  $\{p_1, p_3, p_5\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .

Enfin, nous aboutissons la base des verrous du réseau  $N1$  :  $\mathcal{SB}_1 = \{ \{p3, p5\}, \{p1, p2, p4\}, \{p1, p2, p4, p5\}, \{p1, p3, p5\}, \{p3, p4, p5\}, \{p1, p2, p3, p4\} \}$ . ♦

Dans cette section, nous avons étudié le cas d'ajout de transitions à un réseau de Petri existant. Nous avons montré comment déduire la base des verrous du réseau obtenu en base sur celle du réseau initial. Lorsque nous construisons un modèle RdP de manière incrémentale, nous avons également besoin d'ajouter des places, et donc de connaître l'évolution de la base des verrous dans ce cas. Ceci fait l'objet de la section suivante.

### 5.3 AJOUT DE PLACES

Dans cette section, nous étudions l'évolution de la base des verrous lorsque nous ajoutons des places à un réseau de Petri existant. A partir des résultats obtenus, nous proposons un algorithme pour trouver la base du réseau obtenu après l'ajout des places connaissant la base du réseau initial.

Nous examinons d'abord l'influence des places ajoutées sur l'évolution de la base des verrous.

**Théorème 5.4** : Lorsque l'on ajoute une place  $q$  à un réseau de Petri  $N$  pour construire un nouveau réseau  $N1$ , tout verrou de base de  $N$  est un verrou de base de  $N1$ . En plus, tout nouveau verrou de base de  $N1$  contient la place  $q$ .

**Démonstration** : Pour un sous-ensemble de places quelconque  $S$  de  $N$ , l'ajout d'une place ne change pas les transitions d'entrée et de sortie de tout sous-ensemble des places initiales. Il est évident que tout verrou de  $N1$  ne contenant pas la place  $q$  est un verrou de  $N$  et que tout verrou de  $N$  est un verrou de  $N1$ .

Tout verrou de base  $B$  de  $N$  est un verrou de  $N1$  et ne contient pas la place  $q$ . Si  $B$  n'est pas un verrou de base de  $N1$ ,  $B$  est l'union de verrous de  $N1$  qui ne contiennent pas la place  $q$ . Ces verrous étant eux-mêmes des verrous de  $N$ ,  $B$  est l'union de verrous de  $N$ , ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que  $B$  est un verrou de base de  $N$ . Ceci termine la démonstration que tout verrou de base de  $N$  est un verrou de base de  $N1$ .

Tout verrou de base  $B$  de  $N1$  est tel que  $\bullet B \subseteq B \bullet$ . Si il ne contient pas la place  $q$ , alors il est un verrou de  $N$ . Nous démontrons que dans ce cas il est aussi un verrou de base de  $N$ . En effet, si il n'est pas un verrou de base de  $N$ , alors il est l'union d'autres verrous de  $N$  qui sont

eux mêmes des verrous de N1 (voir la première partie de la démonstration), ce qui implique que B n'est pas un verrou de base de N1. Nous sommes alors en contradiction avec l'hypothèse.  
Q.E.D.

Par ailleurs, le fait que tout verrou de base de N est un verrou de base de N1 implique que le nombre de verrous ne peut qu'augmenter ou rester le même après l'ajout d'une place.

**Corollaire 5.3 :** En ajoutant *un ensemble de places* à un réseau de Petri, le nombre de verrous ne peut qu'augmenter ou rester le même. Les nouveaux verrous de base contiennent au moins une des places ajoutées.

**Propriété 5.3 :** Si l'on ajoute une place d'entrée (voir Chapitre 2, paragraphe 2.2.2) à un réseau de Petri, cette place est un nouveau verrou de base.

Pour étudier l'influence des places ajoutées sur l'évolution de la base pour tout réseau de Petri ordinaire, nous présentons d'abord les résultats de [ERW et al. 94], puisque l'algorithme que nous proposons est une extension de leurs résultats. [ERW et al. 94] ont notamment introduit un type de matrice, appelée **matrice d'incidence de signes**, et des règles opératoires, dont les définitions sont les suivantes.

**Définition 5.1 :** Pour un réseau de Petri N avec n transitions et m places, la matrice d'incidence de signes est  $A=[a_{i,j}]$  de dimension  $n \times m$ , est définie comme suit :

- $a_{i,j} = +$  si la place  $p_j$  est une place de sortie de la transition  $t_i$ ;
- $a_{i,j} = -$  si la place  $p_j$  est une place d'entrée de la transition  $t_i$ ;
- $a_{i,j} = \pm$  si la place  $p_j$  est une place d'entrée et une place de sortie de la transition  $t_i$ ;
- $a_{i,j} = 0$  s'il n'y a pas d'arc reliant la place  $p_j$  et la transition  $t_i$ .

**Définition 5.2 :** L'opération d'addition, notée par  $\oplus$ , est une opération binaire commutative sur l'ensemble  $=\{+, -, 0, \pm\}$ . Elle est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 + \oplus - &= \pm, \\
 + \oplus \pm &= \pm, \\
 a \oplus a &= a, & \forall a \in E, \\
 \pm \oplus a &= \pm, & \forall a \in E, \\
 0 \oplus a &= a, & \forall a \in E.
 \end{aligned}$$

A partir de la matrice d'incidence de signes et de l'opération d'addition, les auteurs cités ci-dessus ont ensuite établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de places soit un verrou.

**Théorème 5.5 [ERW et al. 94]** : Un ensemble de  $k$  places  $S=\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  est un verrou (resp. trappe) dans un réseau de Petri  $N$  si et seulement si l'addition des  $k$  vecteurs colonnes de la matrice d'incidence de signes  $A$ ,  $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k$  ne contient aucune composante "+" (resp. "-"), où  $A_j$  est le vecteur colonne correspondant à la place  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Définition 5.3** : Un verrou est dit un **verrou minimal de la place  $p$**  si il contient la place  $p$  et si il n'est pas inclus dans aucun autre verrou contenant la place  $p$ .

Un verrou minimal d'une place possède la propriété suivante.

**Théorème 5.6 [ERW et al. 94]** : Un verrou est un verrou minimal de la place  $p$  si et seulement si il est un verrou de base du réseau.

Il faut noter qu'un verrou minimal de la place  $p$  n'est pas nécessairement un verrou minimal du réseau puisqu'un verrou de base n'est pas nécessairement un verrou minimal. Mais l'union des ensembles des verrous minimaux de toutes les places constitue la base des verrous du réseau. Il contient donc tous les verrous minimaux.

Nous nous intéressons maintenant à l'ensemble des verrous minimaux  $SB_j$  de la place  $p_j$  dans lequel chaque verrou est un verrou de base qui contient la place  $p_j$  et qui appartiennent à un réseau de Petri  $N$  ayant  $m$  places et  $n$  transitions et dont la matrice d'incidence de signes est  $A$ . L'algorithme suivant a été proposé par [ERW et al. 94] pour calculer cet ensemble.

**Algorithme 5.2** (Chercher les verrous minimaux de la place  $p_j$ ) :

C'est une méthode arborescente. Dans cet arbre, un noeud  $h$  est représenté par un sous-ensemble de places  $P_h$  ainsi qu'un vecteur colonne  $V_h$  qui est l'addition des vecteurs colonne correspondant aux places de ce sous-ensemble. Un nœud descendant d'un nœud comporte une place supplémentaire. De plus, dans le déroulement de l'algorithme, les noeuds sont regroupés dans deux listes : **nouveaux** et **feuilles**. Voici le détail de l'algorithme.

1. Poser le noeud  $o$  comme la racine de l'arbre, où  $P_o=\{p_j\}$ ,  $V_o=A_j$ , et le mettre dans la liste des nouveaux noeuds. Initialiser la liste "feuilles" à vide. nouveaux:= $\{o\}$ , feuilles:= $\emptyset$ .
2. **Tant que nouveaux  $\neq \emptyset$  faire**
  - 2.1. Sélectionner un nouveau noeud  $h \in$  nouveaux, l'éliminer de la liste nouveaux : nouveaux:=nouveaux- $\{h\}$ .

2.2. Si  $V_h$  ne contient aucun élément "+", le mettre dans la liste des feuilles :  
 $feuilles := feuilles \cup \{h\}$  et **aller** en 2.1; **Sinon** continuer.

2.3. Sélectionner un des éléments "+" dans  $V_h$ .

2.4. Trouver la ligne, notée  $i$ , correspondant à l'élément "+" dans  $V_h$ .

2.5. **Pour** toute colonne  $k$  telle que  $a_{i,k} \in \{-, \pm\}$ , créer un nouveau nœud  $h'$  tel que  
 $P_{h'} = P_h \cup \{p_k\}$  et  $V_{h'} = V_h \oplus A_k$ , et le mettre dans la liste de nouveaux nœuds :  
 $nouveaux := nouveaux \cup \{h'\}$ , **finpour**.

**fantantque**.

3. L'ensemble des verrous minimaux potentiels de la place  $p_j$  est alors  
 $SB_j := \{P_h \mid h \in \text{feuilles}\}$ .

4. Eliminer les verrous non minimaux. **Tant qu'il** existe un ensemble de places  $P1 \in SB_j$  tel  
qu'il existe un autre ensemble  $P2 \in SB_j$  tel que  $P2 \subsetneq P1$ , alors  $P1$  n'est pas un verrou  
minimal de la place  $p_j$ . Il faut l'éliminer :  $SB_j := SB_j - \{P1\}$ , **fantantque**. ♦

La raison pour laquelle nous choisissons un élément "+" quelconque est que les autres  
éléments "+" ne sont pas modifiés dans les nœuds descendants. Nous pouvons donc les  
considérer ultérieurement.

En utilisant l'algorithme 5.2 pour toutes les places du réseau, nous obtenons un ensemble  
des verrous minimaux  $SB_j$  pour chaque place  $p_j$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ . L'union de ces  $m$  ensembles,  
c'est-à-dire  $SB = \bigcup_{1 \leq j \leq m} SB_j$ , nous fournit la base du réseau.

### Exemple 5.2

Considérons le RdP N1 de l'exemple 5.1. Sa matrice d'incidence de signes  $A$  est la suivante:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p1 & p2 & p3 & p4 & p5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} t1 \\ t2 \\ t3 \\ t4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} - & + & 0 & 0 & 0 \\ + & - & - & 0 & + \\ 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & - & + & + & - \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pour construire l'arbre de verrous minimaux de la place p1, nous utilisons l'algorithme 5.2. Nous posons d'abord le nœud 1 tel que  $P_1=\{p1\}$  comme la racine de l'arbre, le vecteur  $V_1$  est alors,

$$V_1 = A_1 = \begin{bmatrix} - \\ + \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La 2-ème composante de  $V_1$  est "+" et dans la 2-ème ligne de A, il existe deux composantes "-" qui se trouvent respectivement dans les colonnes 2 et 3. Les vecteurs colonnes  $A_2$  et  $A_3$  de A correspondant respectivement aux places p2 et p3 peuvent s'ajouter à  $V_1$  pour neutraliser la composante "+" de  $V_1$ . Après l'addition respective de  $A_2$  et de  $A_3$  à  $V_1$ , nous obtenons deux nouveaux nœuds 2 et 3 tels que  $P_2=\{p1, p2\}$  et  $P_3=\{p1, p3\}$  et

$$V_2 = V_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} - \\ + \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ + \\ - \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = V_1 \oplus A_3 = \begin{bmatrix} - \\ + \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \pm \\ 0 \\ + \end{bmatrix}.$$

Pour le vecteur colonne  $V_2$ , il existe un élément "+" dans la 3-ème ligne et, dans la 3-ème ligne de A, il existe une composante "-" au niveau de la 4-ème colonne. La place p4 peut être ajoutée à  $P_2$  pour construire le nœud 4 tel que  $P_4=\{p1, p2, p4\}$  et

$$V_4 = V_2 \oplus A_4 = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ + \\ - \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{bmatrix}.$$

Le nœud 4 est un nouveau nœud pour lequel il n'y a pas de composante "+" dans le vecteur  $V_4$ . Donc il devient une feuille, la liste feuilles devient donc {4}.

Pour le nœud 3, il existe un élément "+" dans la 4-ème ligne du vecteur  $V_3$ . Et dans la 4-ème ligne de A, il existe deux composantes "-" se trouvant respectivement dans les colonnes 2 et 5. Ces places peuvent s'ajouter au nœud 3 pour créer les nœuds 5 et 6 respectivement. Nous obtenons donc,  $P_5=\{p1, p3, p5\}$  et  $P_6=\{p1, p3, p2\}$  et

$$V_5 = V_3 \oplus A_5 = \begin{bmatrix} - \\ \pm \\ 0 \\ + \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ + \\ 0 \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ \pm \\ 0 \\ \pm \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_6 = V_3 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} - \\ \pm \\ 0 \\ + \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ + \\ \pm \end{bmatrix}.$$

Les noeuds 5 et 6 sont des descendants du noeud 3. Ce sont deux nouveaux noeuds. Dans  $V_5$  correspondant au noeud 5, il n'existe plus de composante "+". Ce noeud devient donc une feuille. La liste "feuilles" devient donc  $\text{feuilles}=\{4, 5\}$ . Dans le vecteur  $V_6$  correspondant au noeud 6, il existe un élément "+" à la 3-ème ligne. Nous trouvons dans la 3-ème ligne de  $A$ , une composante "-" dans la 4-ème colonne. Nous pouvons donc créer un noeud 7, descendant du noeud 6 avec la place  $p_4$ . Donc,  $P_7=\{p_1, p_3, p_5, p_4\}$  et

$$V_7 = V_6 \oplus A_4 = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ + \\ \pm \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \\ + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{bmatrix}.$$

Le noeud 7 est un nouveau noeud dans lequel il n'existe plus d'élément "+". Il devient donc une feuille. La liste "feuilles" est alors  $\{4, 5, 7\}$ . Il n'y a plus de nouveaux noeuds, et l'algorithme se termine.

L'arbre correspondant à la place  $p_1$  est représenté dans la figure 5.2.

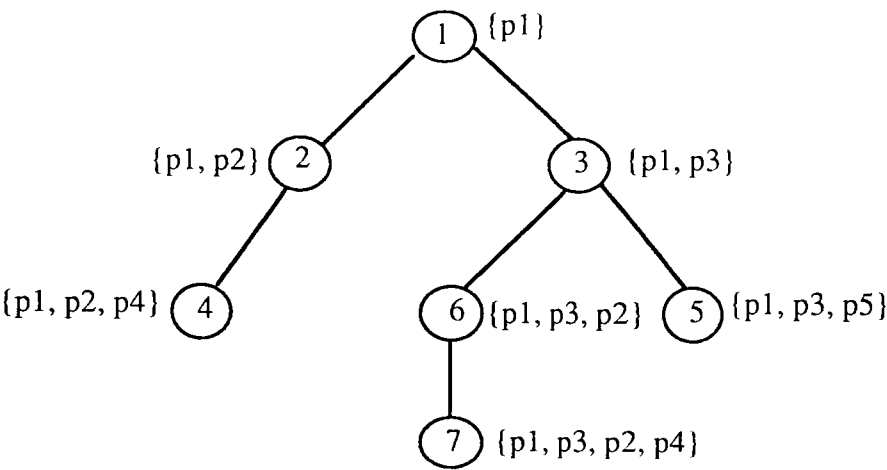
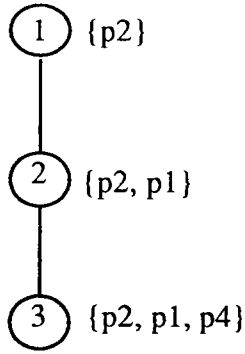


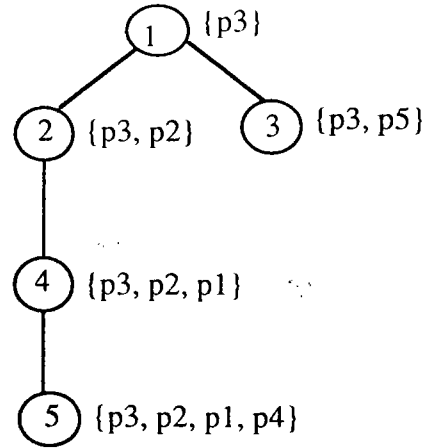
Figure 5.2 L'arbre des verrous minimaux de la place  $p_1$

Il y a au total 3 feuilles correspondant aux 3 verrous  $P_1=\{p_1, p_2, p_4\}$ ,  $P_2=\{p_1, p_3, p_2, p_4\}$  et  $P_3=\{p_1, p_3, p_5\}$ . Parmi ces 3 verrous,  $P_1 \subset P_2$ ,  $P_2$  n'est donc pas un verrou minimal de  $p_1$ .  $P_1$  et  $P_3$  sont des verrous minimaux de  $p_1$  et des verrous de base du RdP  $N$ . Finalement,  $SB_1=\{P_1, P_3\} = \{\{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_5\}\}$

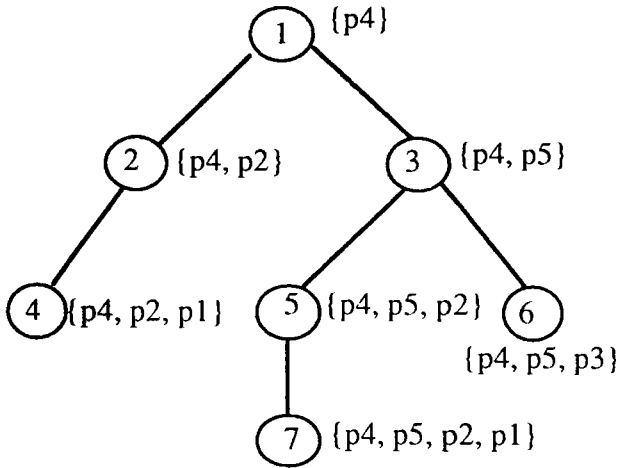
En appliquant l'algorithme 5.2, nous pouvons également construire les arbres des verrous minimaux pour les places  $p_2, p_3, p_4$  et  $p_5$ . Ils sont représentés dans la figure suivante :



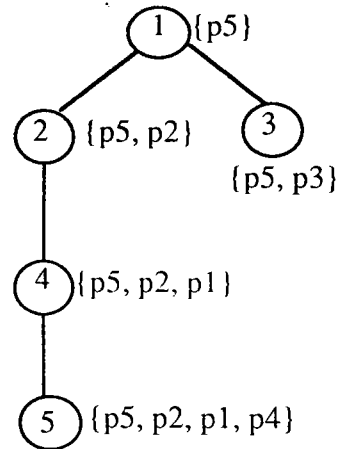
a) L'arbre pour p2.



b) L'arbre pour p3.



c) L'arbre pour p4.



d) L'arbre pour p5.

Figure 5.3. Les arbres des verrous minimaux

L'ensemble des verrous minimaux de la place p2 est  $SB_2 = \{ \{p1, p2, p4\} \}$ .

L'ensemble des verrous minimaux de la place p3 est  $SB_3 = \{ \{p1, p2, p3, p4\}, \{p3, p5\} \}$ .

L'ensemble des verrous minimaux de la place p4 est  $SB_4 = \{ \{p1, p2, p4\}, \{p1, p2, p4, p5\}, \{p3, p4, p5\} \}$ .

L'ensemble des verrous minimaux de la place p5 est  $SB_5 = \{ \{p1, p2, p4, p5\}, \{p3, p5\} \}$ .

Donc la base des verrous de N est  $SB = \bigcup_{1 \leq j \leq 5} SB_j = \{ \{p1, p2, p4\}, \{p1, p3, p5\}, \{p1, p2, p3, p4\}, \{p3, p5\}, \{p3, p4, p5\}, \{p1, p2, p4, p5\} \}$ . ♦

D'après la définition de la base des verrous, si nous connaissons la base des verrous, alors nous pouvons connaître facilement tous les verrous minimaux. Selon le théorème 5.4, lorsque nous ajoutons une place, les nouveaux verrous de base du réseau obtenu contiennent toujours cette place. Pour la même raison, les nouveaux verrous minimaux contiennent toujours cette place. Et les verrous de base (resp. les verrous minimaux) du réseau d'origine sont toujours des verrous de base (resp. des verrous minimaux) dans le nouveau réseau. Par conséquent, si nous connaissons la base des verrous (resp. les verrous minimaux) du réseau d'origine et si nous pouvons calculer les nouveaux verrous de base (resp. les nouveaux verrous minimaux) contenant la place ajoutée, alors nous connaissons la base des verrous (resp. les verrous minimaux) du réseau obtenu.

Les raisons pour lesquelles nous distinguons les nouveaux verrous de base et les nouveaux verrous minimaux est que : 1) le volume de calcul pour trouver les nouveaux verrous minimaux est beaucoup moins important que celui qui est nécessaire pour trouver les nouveaux verrous de base lorsque nous ajoutons des places (on peut le voir à partir des algorithmes suivants); 2) pour vérifier certaines propriétés, par exemple l'absence de blocage ou la vivacité (voir la section 5.4), nous n'avons besoin que de calculer les verrous minimaux.

Dans la pratique, nous pouvons rencontrer des cas particuliers où nous connaissons toutes les transitions dont nous avons besoin dans un modèle RdP existant et où nous n'ajoutons que des places dans la construction à venir. Par exemple, nous pouvons n'ajouter que des places de ressources partagées dans un graphe d'événements (voir la section 5.5). Ce qui rend ce qui précède particulièrement intéressant.

Dans la suite, nous distinguons deux cas de figure : dans l'un nous cherchons les verrous minimaux et dans l'autre la base des verrous.

### 5.3.1 Détermination des verrous minimaux du réseau

Dans ce paragraphe, nous considérons un réseau  $N$  avec un ensemble de verrous minimaux  $\mathcal{SM} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ . Nous ajoutons une place  $q$  au réseau  $N$  pour construire  $N1$ . Nous savons que les verrous minimaux de  $N$  sont également des verrous minimaux de  $N1$ . Si nous pouvons trouver les nouveaux verrous minimaux, alors nous connaissons tous les verrous minimaux de  $N1$ . Selon le théorème 5.6, tout verrou minimal  $S$  de la place  $q$  est un verrou de base de  $N1$ . Nous savons également qu'un verrou de base n'est pas nécessairement un verrou minimal de  $N1$ , autrement dit, un verrou minimal de la place  $q$  n'est pas nécessairement un verrou minimal de  $N1$ . Pour vérifier si un tel  $S$  est un verrou minimal de  $N1$ , nous devons le comparer avec les verrous  $S_i$  de  $\mathcal{SM}$ . Si il existe un verrou  $S_i \in \mathcal{SM}$  tel que  $S_i \subset S$ , alors  $S$  n'est pas un verrou minimal de  $N1$ , sinon  $S$  est un nouveau verrou minimal de  $N1$ .

L'algorithme suivant est basé sur cet idée. Il permet de trouver les nouveaux verrous minimaux contenant la place q dans le réseau N1 obtenu après l'ajout de la place q au réseau N, en connaissant l'ensemble des verrous minimaux de N,  $\mathcal{SM}$ .

**Algorithme 5.3** (Chercher les verrous minimaux lorsqu'on ajoute une place q) :

Considérons un réseau de Petri N dont l'ensemble des verrous minimaux est  $\mathcal{SM}$ . Nous ajoutons une place q à N pour construire N1.

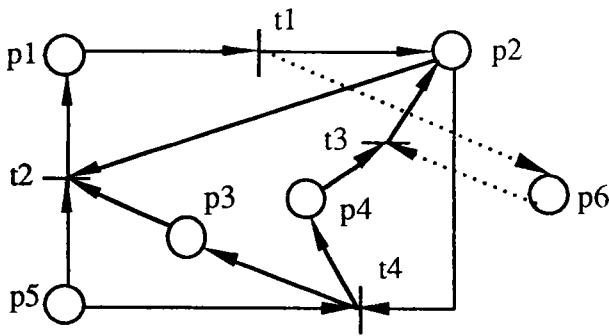
1. Construire l'arbre de verrous minimaux qui correspond à la place q et l'ensemble des verrous minimaux  $SB_q$  en utilisant l'algorithme 5.2.
2. Eliminer les verrous minimaux de la place q qui ne sont pas des verrous minimaux de N1.

Pour tout verrou S appartenant à  $SB_q$ , si  $\exists S' \in \mathcal{SM}$  tel que  $S \supset S'$ , alors S n'est pas un verrou minimal de N1, il faut l'éliminer :  $SB_q = SB_q - \{S\}$ .

3. L'ensemble des verrous minimaux de N1 est alors  $\mathcal{SM}_1 = \mathcal{SM} \cup SB_q$ . ♦

### Exemple 5.3

Considérons le RdP N1 de la figure 5.1. Nous y ajoutons une place p6 pour construire le réseau N2 représenté dans la figure 5.4. Sa matrice d'incidence de signe A est :



$$A = \begin{bmatrix} - & + & 0 & 0 & 0 & :+ \\ + & - & - & 0 & + & :0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & :- \\ 0 & - & + & + & - & :0 \end{bmatrix}$$

Figure 5.4 RdP N2

L'ensemble des verrous minimaux de N1 est  $\mathcal{SM} = \{ \{p1, p2, p4\}, \{p1, p2, p3\}, \{p3, p5\} \}$ . En utilisant l'algorithme 5.2 pour la place p6, nous obtenons les verrous minimaux de la place p6,  $SM_6 = \{ \{p1, p2, p6\}, \{p1, p3, p5, p6\} \}$ . Le verrou  $\{p1, p3, p5, p6\}$  n'est pas un verrou minimal de N2 puisqu'il contient le verrou minimal  $\{p3, p5\}$ . L'ensemble des verrous minimaux de N1 est alors  $\mathcal{SM}_1 = \{ \{p1, p2, p4\}, \{p1, p2, p3\}, \{p3, p5\}, \{p1, p2, p6\} \}$ . ♦

### 5.3.2 Détermination de la base des verrous

Dans ce paragraphe, nous considérons un réseau de Petri  $N=(P, T)$  dont la base des verrous est  $\mathcal{SB} = \{S_1, S_2, \dots, S_b\}$  et dans lequel nous ajoutons une place  $q$  pour construire le réseau  $N_1$ . Selon le théorème 5.4, nous savons que les verrous de base de  $N$  sont des verrous de base de  $N_1$  et qu'un nouveau verrou de base contient la place  $q$ .

Selon l'algorithme 5.2, nous pouvons trouver l'ensemble des verrous minimaux de la place  $q$  du réseau  $N_1$ , noté par  $SB_q$ . D'après le théorème 5.6, tout verrou de  $SB_q$  est un verrou de base de  $N_1$ . Par contre, l'algorithme 5.2 ne permet pas de trouver tous les verrous de base contenant la place  $q$ , puisqu'il existe des verrous de base de  $N_1$  contenant la place  $q$  qui ne sont pas des verrous minimaux de la place  $q$ . A titre d'exemple, considérons le réseau de Petri de la figure 5.2. L'ensemble des verrous minimaux de la place  $p_6$  est  $SM_6 = \{ \{p_1, p_2, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\} \}$  alors que l'ensemble de nouveaux verrous de base de  $N_1$  est  $\{ \{p_1, p_2, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\}, \{p_1, p_2, p_3, p_6\}, \{p_1, p_2, p_5, p_6\} \}$ . Parmi ces nouveaux verrous de base,  $\{p_1, p_2, p_3, p_6\}, \{p_1, p_2, p_5, p_6\}$  ne sont pas des verrous minimaux de la place  $p_6$  puisqu'ils couvrent le verrou  $\{p_1, p_2, p_6\}$ .

Pour retrouver tous les verrous de base, une méthode directe est d'utiliser l'algorithme 5.2 pour chaque place de  $N_1$ . Cette méthode permet de trouver la base des verrous de  $N_1$ . Mais dans ce cas, nous ne pouvons pas profiter de la connaissance de la base des verrous de  $N$ . Le volume de calcul est donc important. Pour éviter cet inconvénient, nous cherchons un algorithme qui ne calcule que les nouveaux verrous de base de  $N_1$ .

Avant de poursuivre, nous introduisons la définition suivante qui est analogue de celle du verrou minimal de la place de [ERW et al. 94].

**Définition 5.4 :** Pour deux places données  $p$  et  $q$ , un verrou est dit **verrou minimal des deux places**  $p$  et  $q$  s'il contient ces deux places et si il n'est inclus dans aucun autre verrou contenant ces deux places.

L'algorithme suivant permet de calculer l'ensemble de verrous-minimaux des deux places  $p$  et  $q$ .

**Algorithme 5.4 :** (Chercher l'ensemble de verrous-minimaux de deux places  $p_i$  et  $p_j$ )

1. Construire un nouveau nœud  $o$  comme la racine avec  $P_o = \{p_i, p_j\}$ ,  $V_o = A_i \oplus A_j$ , et le mettre dans la liste des nouveaux noeuds :  $nouveaux := \{o\}$ . Initialiser la liste des feuilles à vide.  $feuilles := \emptyset$ .

Les étapes 2–4 sont identiques à celles de l'algorithme 5.2. ♦

Dans ce qui suit,  $SM_{ij}$  désigne l'ensemble des verrous minimaux des deux places  $p_i$  et  $p_j$ .

**Théorème 5.7 :** Pour tout verrou minimal de la place  $p_i$ ,  $S_i$ , il est un verrou-minimal des deux places  $p_i$  et  $p_j$  s'il contient la place  $p_j$ .

**Démonstration.** Supposons que  $S_i$  ne soit pas un verrou minimal des deux places  $p_i$  et  $p_j$ . Il existe alors un verrou  $V$  contenant les places  $p_i$  et  $p_j$  tel que  $V \subset S_i$ . Comme  $V$  et  $S_i$  contiennent tous les deux la place  $p_i$ , d'après la définition,  $S_i$  n'est pas un verrou minimal de la place  $p_i$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du théorème. Q.E.D.

Revenons maintenant à la recherche de la base des verrous du réseau obtenu après l'ajout d'une place  $q$  au réseau  $N$ .

**Théorème 5.8 :** Pour toute place  $p \in P$  du réseau  $N$ , un verrou minimal  $S$  des deux places  $p$  et  $q$  est un verrou minimal de la place  $p$  dans  $N1$  si et seulement si  $S$  ne couvre pas un verrou de base de  $N$  contenant la place  $p$ .

**Démonstration :** (Condition nécessaire) Evident d'après la définition du verrou minimal de la place  $p$ .

(Condition suffisante) Nous démontrons la condition suffisante par l'absurde. Supposons que  $S$  ne soit pas un verrou minimal de la place  $p$  dans  $N1$ . Il couvre alors au moins un verrou minimal  $S'$  de la place  $p$  dans  $N1$ . Selon le théorème 5.6,  $S'$  est un verrou de base de  $N1$ . Puisque  $S$  ne couvre pas un verrou de base de  $N$  contenant la place  $p$  (l'hypothèse du théorème), alors  $S'$  ne couvre pas non plus un verrou de base de  $N$  contenant la place  $p$ . Le Théorème 5.4 implique que  $S'$  contient aussi la nouvelle place  $q$ . Selon le théorème 5.7,  $S'$  est aussi un verrou minimal des deux places  $p$  et  $q$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $S$  est un verrou minimal des deux places  $p$  et  $q$ . Q.E.D.

D'après le théorème 5.8, nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 5.4 :** Pour toute place  $p \in P$ , un verrou minimal  $S$  des deux places  $p$  et  $q$  est un verrou minimal de la place  $p$  dans  $N1$  si et seulement si  $S$  ne couvre pas un verrou de base de  $N$  qui est un verrou minimal de la place  $p$ .

Le Théorème 5.6 montre que pour trouver la base des verrous de  $N1$ , il suffit de connaître tous les verrous minimaux de la place  $p$  pour chacune des places du réseau  $N1$ . Pour toute place

$p \in P$ , les verrous minimaux de la place  $p$  dans  $N1$  peuvent être distingués en deux types : ceux qui contiennent la place  $q$  et ceux qui ne la contiennent pas. Les verrous du premier type font déjà partie de la base des verrous de  $N$ . Ceux du deuxième type sont des verrous minimaux des deux places  $p$  et  $q$  selon le Théorème 5.7. Par conséquent, connaissant déjà la base des verrous du réseau  $N$ , pour connaître la base des verrous du réseau  $N1$ , il suffit de connaître les verrous minimaux des deux places  $p$  et  $q$  pour toute place  $p \in P$ , et les verrous minimaux de la place  $q$ .

A partir de ces remarques et en utilisant les théorèmes 5.7 et 5.8, l'algorithme suivant permet de trouver la base de verrous du réseau  $N1$  obtenu après l'ajout d'une place  $q$  au réseau  $N$ , lorsqu'on connaît la base des verrous de  $N$ , dont l'ensemble est noté  $\mathcal{SB}$ .

**Algorithme 5.5 :** (Chercher la base des verrous lorsqu'on ajoute la place  $q$ )

Considérons un réseau de Petri  $N=(P, T)$  avec  $m$  places et  $n$  transitions. La base des verrous de  $N$  est  $\mathcal{SB}$ . Nous y ajoutons une place  $q$  pour construire  $N1$ . Nous cherchons la base de  $N1$ , notée  $\mathcal{SB}_1$ .

1. Calculer l'ensemble de verrous minimaux de la place  $q$ ,  $\mathcal{SB}_q$ , en utilisant l'algorithme 5.2.
2.  $\mathcal{SB}_1 = \mathcal{SB} \cup \mathcal{SB}_q$ .
3. **Pour** toute place  $p \in P$  **faire**
  - 3.1 Calculer l'ensemble de verrous minimaux des deux places  $p$  et  $q$  de  $N1$  en utilisant l'algorithme 5.4 et noter cet ensemble  $\mathcal{SM}_{p,q}$ .
  - 3.2 Identifier l'ensemble des verrous minimaux de la place  $p$  appartenant à  $\mathcal{SB}$ , noté  $\mathcal{SB}_p$ .
  - 3.3 Pour tout verrou  $S$  de  $\mathcal{SM}_{p,q}$ , si  $S \not\supseteq S'$ ,  $\forall S' \in \mathcal{SB}_p$ , alors poser  $\mathcal{SB}_1 := \mathcal{SB}_1 \cup \{S\}$ .
4.  $\mathcal{SB}_1$  est la base des verrous de  $N1$ . ♦

#### Exemple 5.4

Considérons le RdP  $N2$  de la figure 5.2. La nouvelle place est  $p6$ . La base de verrous de  $N1$  est  $\mathcal{SB}_1 = \{ \{p1, p2, p4\}, \{p1, p3, p5\}, \{p1, p2, p3, p4\}, \{p3, p5\}, \{p3, p4, p5\}, \{p1, p2, p4, p5\} \}$ .

En utilisant l'algorithme 5.2, nous trouvons que l'ensemble des verrous minimaux de la place  $p6$  est  $\mathcal{SB}_6 = \{p1, p2, p6\}, \{p1, p3, p5, p6\}$

Les ensembles des verrous minimaux des deux places  $p_i$  (où  $i=1, \dots, 5$ ) et  $p_6$  dans  $N_2$  sont :

$$SM_{1,6} = \{ \{p_1, p_2, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\} \};$$

$$SM_{2,6} = \{ \{p_1, p_2, p_6\} \};$$

$$SM_{3,6} = \{ \{p_1, p_2, p_3, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\} \};$$

$$SM_{4,6} = \{ \{p_1, p_2, p_4, p_6\}, \{p_1, p_3, p_4, p_5, p_6\} \};$$

$$SM_{5,6} = \{ \{p_1, p_2, p_5, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\} \}.$$

Les ensembles de verrous minimaux de la place  $p_i$  ( où  $i = 1, \dots, 5$ ) dans  $N_1$  sont

$$SB_1 = \{ \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_5\} \};$$

$$SB_2 = \{ \{p_1, p_2, p_4\} \};$$

$$SB_3 = \{ \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\} \};$$

$$SB_4 = \{ \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_3, p_4, p_5\} \};$$

$$SB_5 = \{ \{p_3, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\} \}.$$

Après élimination des verrous qui ne sont pas des verrous de base de  $N_2$ , nous obtenons la base des verrous de  $N_2$ ,  $SB_2 = \{ \{p_1, p_2, p_4\}, \{p_1, p_3, p_5\}, \{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{p_3, p_5\}, \{p_3, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_4, p_5\}, \{p_1, p_2, p_6\}, \{p_1, p_3, p_5, p_6\}, \{p_1, p_2, p_3, p_6\}, \{p_1, p_2, p_5, p_6\} \}$ . ♦

Dans cette section, nous avons étudié le cas où nous ajoutons des places. Avec les résultats obtenus, nous pouvons trouver la base des verrous du réseau obtenu par de cet ajout, à partir de la base des verrous du réseau d'origine et en cherchant les nouveaux verrous de base contenant des places ajoutées. Dans la section suivante, nous présentons une méthode simple pour chercher la trappe maximale dans un verrou.

## 5.4 CALCUL DE LA TRAPPE MAXIMALE CONTENUE DANS UN VERROU

Dans les deux sections précédentes, nous avons montré comment calculer la base des verrous ou les verrous minimaux du réseau obtenu après avoir ajouté des transitions ou des

places à un réseau existant. Pour vérifier certaines propriétés structurelles, comme la vivacité et l'absence de blocage par exemple, nous avons besoin de savoir si il existe une trappe contenue dans un verrou minimal. Dans cette section, nous présentons une méthode simple qui permet de trouver la trappe maximale contenue dans un verrou.

D'après la définition d'une trappe, un ensemble de places  $S$  est un verrou, mais il n'est pas une trappe, si et seulement si  $\exists q \in S$  tel que  $\exists t \in q \bullet$  tel que  $t \bullet \cap S = \emptyset$ . Nous savons que de telles places ne fait pas partie de la trappe maximale contenue dans un verrou. Donc nous faisons  $S' = S - \{q\}$  et nous continuons à étudier l'ensemble  $S'$ . Ce processus continue jusqu'à obtenir un ensemble  $S'' \subseteq S$  dans lequel il n'existe plus de place du type  $q$ . Comme l'ensemble  $S$  des places de départ, est fini, ce processus se termine après un nombre fini d'itérations. Si  $S'' \neq \emptyset$ , alors  $S$  contient une trappe  $S''$ ; sinon  $S$  ne contient pas de trappe.

Selon le théorème 5.5, nous savons qu'un ensemble de places  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  est un verrou (resp. une trappe) si et seulement si le vecteur  $V$  obtenu, par l'addition des  $k$  vecteurs colonnes  $A_i$  (où  $i=1, \dots, k$ ) ne contient aucune composante "+" (resp. "-"), où  $A_i$  est le vecteur colonne de la matrice d'incidence de signe correspondant à la place  $p_i$ . Un ensemble de places est un verrou/trappe si et seulement si le vecteur  $V$  ne contient ni composante "+", ni composante "-". Si le vecteur  $V$  contient au moins une composante "-", alors l'ensemble des places correspondant au vecteur  $V$  n'est pas une trappe.

Algorithme suivant permet de trouver une trappe dans un verrou.

**Algorithme 5.6 :** (Chercher la trappe maximale contenue dans un verrou)

Considérons un réseau de Petri  $N=(P, T)$  dont la matrice d'incidence de signe est  $A$ , de dimensions  $n \times m$ . Soit  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  un verrou de  $N$  et  $V = \bigoplus_{i=1}^k A_i$ .

1. Poser  $S' = S$ .
2. Vérifier si  $S$  est un verrou/trappe. Si  $V$  ne contient aucune composante "-", alors  $S$  est un verrou/trappe, **fin** de l'algorithme; **sinon** continuer.
3. **Tant que**  $V$  contient une composant "-", **faire**
  - 3.1. Sélectionner une composante "-" dans  $V$  et identifier la lignes correspondante  $i$  et faire  $S' := S' - \{p_j \in S' \mid A_{i,j} = -1\}$ .
  - 3.2. Si  $S' = \emptyset$ ,  $S$  ne contient pas de trappe, **fin** de l'algorithme; **sinon** faire  $V = \bigoplus_{p_j \in S'} A_j$ .
4. Si  $S' = \emptyset$ ,  $S$  ne contient pas de trappe; **sinon**  $S'$  est la trappe maximale contenue dans  $S$ . ♦

### Exemple 5.5

Considérons un verrou minimal  $\{p_1, p_2, p_4\}$  dans la figure 5.4. Poser  $S' = \{p_1, p_2, p_4\}$ .  $V = A_1 \oplus A_2 \oplus A_4 = [\pm, \pm, -, \pm]^T$ . A l'étape 2, nous savons que  $S$  n'est pas un verrou/trappe. A l'étape 3, nous trouvons une composante "-" à la troisième ligne, qui correspond à la place  $p_4$ . Donc  $S' = S' - \{p_4\}$ . L'addition des vecteurs colonnes correspondant aux places de  $S'$  nous donne  $V = A_1 \oplus A_2 = [\pm, \pm, +, -]^T$ . Puisque la 4-ème composante de  $V$  est "-",  $S'$  n'est pas une trappe. En supprimant la place correspondante  $p_2$ ,  $S' = \{p_1\}$ . A la fin de l'algorithme, nous obtenons  $S' = \emptyset$ . Donc le verrou  $\{p_1, p_2, p_4\}$  ne contient pas de trappe. ♦

## 5.5 ABSENCE DE BLOCAGE

Dans les trois sections précédentes, nous avons développé des méthodes pour rechercher la base des verrous et l'ensemble de verrous minimaux dans les réseaux de Petri qui modélisent des systèmes que l'on conçoit de manière incrémentale. Dans cette section, nous étudions l'absence de blocage en utilisant les méthodes basées sur les verrous et les trappes. Nous étudions d'abord l'absence de blocage pour un réseau de Petri ordinaire quelconque. Ensuite nous présentons un principe de recherche des marquages initiaux pour que le réseau soit sans blocage.

### 5.5.1 Vérification de l'absence de blocage pour un réseau de Petri ordinaire

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence une condition suffisante pour que le système soit sans blocage pour les réseaux de Petri ordinaires généraux. Elle permet de vérifier si le réseau est sans blocage même dans le cas où certains verrous minimaux ne contiennent pas de trappe. Elle améliore donc la condition de Commoner considérée jusqu'ici comme la plus puissante. Cette dernière ne s'applique qu'au cas où chaque verrou minimal contient une trappe marquée. Nous rappelons la condition de Commoner ci-dessous.

**Définition 5.5 (Condition de Commoner) [COM 72] :** Un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est dit satisfaire la condition de Commoner si et seulement si : 1) tout verrou minimal de  $N$  contient une trappe; 2) la trappe maximale de chaque verrou minimal est marquée par  $M_0$ .

**Propriété 5.4 [JAN et al. 80] :** Si un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  satisfait la condition de Commoner, alors il est sans blocage.

La condition de Commoner est une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas blocage dans les réseaux de Petri ordinaires. Elle constitue aussi une condition suffisante pour que la vivacité des réseaux à choix asymétrique (voir Chapitre 2, section 2.5) soit vérifiée, et une condition

nécessaire et suffisante pour que la vivacité des réseaux à choix libre (voir Chapitre 2, section 2.5) soit vérifiée. Par contre, si dans un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , il existe un verrou minimal qui ne contient pas de trappe, alors la condition de Commoner ne permet plus de vérifier s'il est sans blocage. En effet, un verrou contenant une trappe marquée assure que, quel que soit le marquage atteignable, il contient toujours un jeton. Par conséquent, si nous pouvons prouver qu'un verrou contient au moins un jeton quel que soit le marquage atteignable, alors le verrou est toujours actif. Dans le cas contraire, nous avons la définition d'un verrou mortel.

**Définition 5.6 :** Un verrou est appelé **verrou mortel** si, soit il ne contient aucun jeton pour le marquage initial, soit il existe un marquage atteignable dans lequel le verrou n'est pas marqué.

Il faut noter que le fait qu'un verrou soit mortel ou non est toujours lié au marquage initial. D'après la définition 5.6, nous avons les propriétés suivantes.

**Propriété 5.5 :** Un verrou qui contient une trappe marquée n'est pas un verrou mortel (selon la définition de trappe).

**Propriété 5.6.** Un réseau de Petri marqué ne contenant pas de verrou minimal mortel est sans blocage.

**Démonstration :** Dans un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , si il n'existe aucun verrou minimal mortel, alors chaque verrou minimal contient au moins un jeton pour le marquage initial  $M_0$  et pour tout marquage atteignable. Ceci implique que chaque verrou minimal contient au moins un jeton, quelle que soit l'évolution du marquage. Donc  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage. Q.E.D.

D'après la propriété 5.6, il est important de vérifier s'il existe des verrous minimaux mortels dans un réseau marqué. Le théorème suivant permet de développer une méthode qui permet d'effectuer cette vérification.

**Théorème 5.9 :** Dans un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  si, pour chaque verrou minimal  $S$ , nous avons  $F_S > 0$ , alors il n'existe pas de verrou minimal mortel dans  $\langle N, M_0 \rangle$ .  $F_S$  est la valeur optimale du critère du problème de programmation linéaire suivant noté (PPL):

$$F_S = \mathbf{Min}_{M,Y} \left( \sum_{p \in S} M(p) \right)$$

sous les conditions

$$M = M_0 + CY \text{ et } M \geq 0, Y \geq 0.$$

(PPL)

**Démonstration :** Pour un verrou minimal  $S$ , si la valeur optimale du critère  $F_S$  du problème de programmation linéaire PPL est supérieure à 0, c'est-à-dire si pour toute solution de

l'équation fondamentale, nous avons  $\sum_{p \in S} M(p) > 0$ , alors l'ensemble des solutions de l'équation

fondamentale inclut l'ensemble des marquages atteignables (voir [COM et al. 91b], proposition 2.1). Alors  $S$  contient toujours au moins un jeton, quel que soit le marquage atteignable. Donc  $S$  n'est pas un verrou mortel. Si pour tout verrou minimal  $S$ , la valeur optimale du critère  $F_S$  telle que  $F_S > 0$ , alors aucun verrou minimal ne sera vide quelle que soit l'évolution du système, donc il n'existe pas de verrou minimal mortel. Q.E.D.

Dans un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , il existe deux types de verrous minimaux : les uns contiennent une trappe marquée, les autres ne contiennent pas de trappe ou pas de trappe marquée. Nous savons déjà qu'un verrou minimal contenant une trappe marquée n'est jamais mortel (propriété 5.6). Nous n'avons plus qu'à vérifier les verrous minimaux qui ne contiennent pas de trappe ou pas de trappe marquée. Le corollaire suivant permet de résoudre ce problème.

**Corollaire 5.5 :** Soit un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  donné. Désignons par  $\mathcal{S}_V$  l'ensemble des verrous minimaux qui ne contiennent pas de trappe ou pas de trappe marquée. Si pour tout  $S \in \mathcal{S}_V$ , nous avons  $F_S > 0$ , alors il n'existe pas de verrou minimal mortel dans  $\langle N, M_0 \rangle$ , où  $F_S$  est la valeur optimale du critère du problème de programmation linéaire PPL.

D'après le corollaire 5.5, pour vérifier si un réseau marqué comporte des verrous minimaux mortels, il faut résoudre autant de problèmes de programmation linéaire que le nombre de verrous minimaux ne contenant pas de trappe ou pas de trappe marquée. Le corollaire suivant permet de vérifier l'existence de verrou minimal mortel en résolvant un seul problème de programmation quadratique.

**Corollaire 5.6 :** Pour un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  donné, désignons par  $\mathcal{S}_V$  l'ensemble des verrous minimaux qui ne contiennent pas de trappe ou pas de trappe marquée. Si  $F > 0$ , alors il n'existe pas de verrou minimal mortel, où  $F$  est la valeur optimale du critère du problème de programmation quadratique suivant :

$$F = \underset{M, Y, Z}{\text{Min}} \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_V} z_S \left( \sum_{p \in S} M(p) \right) \right)$$

sous les conditions

(PPQ)

$$M = M_0 + CY$$

$$M \geq 0, Y \geq 0$$

$$0 \leq z_S \leq 1$$

$$\sum_{S \in S_V} z_S = 1$$

**Démonstration** : Nous démontrons ce corollaire par l'absurde. Supposons qu'il existe un verrou minimal mortel  $S' \in S_V$ . Alors il y a un marquage atteignable  $M \in R(M_0)$  tel que

$$M(S') = \sum_{p \in S'} M(p) = 0 \text{ et } M = M_0 + CY. \text{ Par conséquent, si nous prenons comme solution } z_{S'} = 1 \text{ et}$$

$z_S = 0$ , pour tout  $S \in S_V$  et  $S \neq S'$ , la valeur du critère correspondante du problème PPQ prend la valeur 0, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que la valeur optimale du critère est  $F > 0$ .

Q.E.D.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la propriété 5.7.

**Corollaire 5.7** : Si un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  satisfait la condition du théorème 5.9 ou la condition du corollaire 5.5, alors il est sans blocage.

Exemple 5.6 :

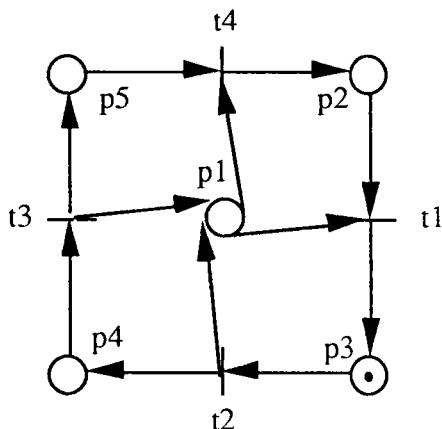


Figure 5.5 Un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$

La figure 5.5 représente un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  [DIC et al. 93]. Nous voyons qu'il possède deux verrous minimaux :  $\{p1, p3, p4\}$  et  $\{p2, p3, p4, p5\}$ . Parmi eux, le verrou  $\{p1, p3, p4\}$  ne contient pas de trappe, tandis que le verrou  $\{p2, p3, p4, p5\}$  est lui même une trappe marquée. Par conséquent, ce réseau ne satisfait pas la condition de Commoner. Nous ne pouvons pas vérifier l'absence de blocage en utilisant la propriété 5.4. Notre méthode permet d'affirmer que le réseau est sans blocage. Pour cela nous appliquons le corollaire 5.5 sur le

verrou  $S=\{p1, p3, p4\}$ . Après résoudre le problème PPL, nous obtenons  $F_S=1$ . Donc la condition du corollaire 5.5 est satisfaite, selon le corollaire 5.7,  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage. ♦

Le corollaire 5.7 fournit une condition suffisante d'absence de blocage. Même si il existe un verrou minimal  $S$  tel que la valeur optimale du critère  $F_S$  est 0, il peut très bien ne pas être un verrou minimal mortel. Ceci vient du fait que toutes les solutions de l'équation fondamentale ne sont pas des marquages atteignables. Il suffit qu'il y ait un  $M$  vérifiant l'équation fondamentale et qui ne soit pas un marquage atteignable pour que  $F_S=0$ . Par conséquent, lorsqu'il existe un verrou minimal pour lequel la valeur optimale du critère du problème PPL est nulle, nous ne pouvons pas affirmer que le réseau est sans blocage. Par contre, après l'application du corollaire 5.5, nous pouvons identifier tous les verrous minimaux qui sont susceptibles d'être mortels. Désignons par  $S^*$  l'union de ces verrous minimaux (qui constitue elle même un verrou). Le théorème suivant permet d'avoir plus d'information sur l'absence de blocage.

**Théorème 5.10 :** Si pour un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  l'union des verrous minimaux susceptibles d'être mortels,  $S^*$ , n'est pas vide, et si il existe une trappe minimale marquée  $S_t$  tel que  $S_t^* \cap (S^*)^* = \emptyset$ , alors  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage.

**Démonstration :** Si il existe une trappe minimale marquée  $S_t$  telle que  $S_t^* \cap (S^*)^* = \emptyset$ , aucune place de  $S^*$  n'empêche le franchissement d'une transition de sortie de  $S_t$ . Alors les transitions de sortie de  $S_t$  sont toujours franchissables. Donc  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage. Q.E.D.

L'application du Théorème 5.10 est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 5.7 :

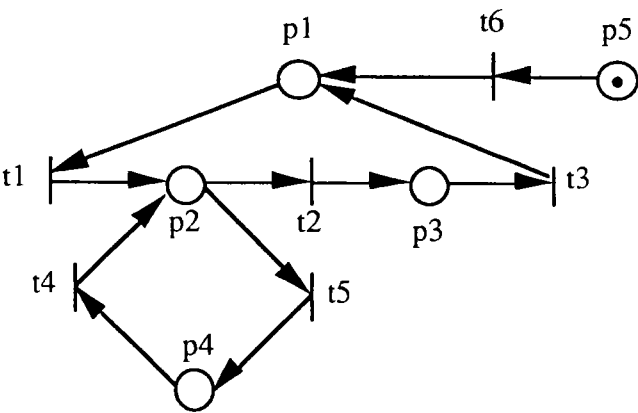


Figure 5.6 Un RdP N1

La figure 5.6 représente un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  (voir [PRO et al. 94]) qui a un verrou minimal  $S^*=\{p5\}$  et qui ne contient pas de trappe. En utilisant le corollaire 5.5, la valeur

optimale du critère est  $F_S=0$ , Donc nous ne pouvons pas affirmer que  $RdP \langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage. Cependant, il existe une trappe minimale marquée  $S_t = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  telle que  $S_t^\bullet \cap (S^*)^\bullet = \{t_6\}$ , donc  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage selon le théorème 5.10. En effet, après le franchissement de  $t_6$ , à l'exception de la transition  $t_6$ , les autres transitions peuvent être franchies une infinité de fois. Le RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est donc sans blocage. ♦

Si l'on peut déterminer  $S^*$ , union des verrous minimaux qui sont véritablement mortels dans un réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , nous avons le corollaire suivant

**Corollaire 5.8** : Le réseau de Petri marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage, si et seulement si il existe une trappe minimale marquée  $S_t$  tel que  $S_t^\bullet \cap (S^*)^\bullet = \emptyset$ .

Il est clair que, par la méthode de programmation linéaire, nous ne pouvons que trouver l'ensemble  $S^*$  qui est l'union des verrous susceptibles d'être mortels et non l'ensemble  $S^*$  qui est l'union des verrous minimaux qui sont véritablement mortels. Il reste donc à résoudre le problème qui consiste à trouver l'ensemble de verrous minimaux qui deviennent vides au cours de l'évolution du réseau.

### 5.5.2 Recherche de marquages initiaux pour l'absence de blocage

Lorsque, dans un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , il existe des blocages, ou lorsque l'on ne peut pas être sûr que ce réseau est sans blocage, nous souhaitons pouvoir trouver des autres marquages initiaux  $M_0'$  tel que  $\langle N, M_0' \rangle$  ne comporte pas de verrou minimal mortel. Ceci fait l'objet de ce paragraphe. Pour un réseau de Petri ordinaire général, nous ne pouvons que garantir qu'il est sans blocage s'il n'existe pas de verrou minimal mortel. Pour certaines sous-classes de RdP, par contre, nous pouvons garantir que le réseau est vivant lorsqu'il n'y a pas de verrou minimal mortel.

L'idée de la recherche des marquages initiaux qui évitent les verrous minimaux mortels est :

- (i) de connaître d'abord les conditions nécessaires sur le marquage initial pour qu'un verrou minimal ne comportant pas de trappe marquée soit mortel, et,
- (ii) de chercher ensuite un marquage initial qui ne vérifie ces conditions nécessaires pour aucun verrou minimal ne comportant pas de trappe marquée.

Considérons un RdP marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ . Supposons qu'il existe un verrou minimal  $S$  ne contenant pas de trappe marquée et qui devient non marqué pour un marquage atteignable  $M$ , c'est-à-dire que  $S$  est un verrou minimal mortel, ce qui implique que

$$\sum_{p \in S} M(p) = 0. \quad (5.1)$$

En utilisant la relation (5.1) dans l'équation fondamentale, nous obtenons un ensemble d'inégalités :

$$\begin{cases} M1 = M1_0 + C1 \times Y \geq 0 \\ M2 = M2_0 + C2 \times Y = 0 \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $M1_0$ ,  $M1$  et  $C1$  (resp.  $M2_0$ ,  $M2$  et  $C2$ ) sont respectivement constitués des lignes de  $M_0$ ,  $M$  et de  $C$  correspondant l'ensemble des places P-S (resp. S).

Puisque le verrou S est un verrou mortel, alors la relation (5.2) a une solution. La relation (5.2) peut être réécrite comme suit

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ -C2 \end{bmatrix} \times Y \geq \begin{bmatrix} -M1_0 \\ -M2_0 \\ M2_0 \end{bmatrix} \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Selon le théorème de Faraks-Minkowski (voir [PRO et al. 94]), le système (5.3) a une solution si et seulement si le problème suivant a une solution.

$$\begin{cases} u^T \times \begin{bmatrix} -M1_0 \\ -M2_0 \\ M2_0 \end{bmatrix} > 0 \\ u^T \times \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \\ -C2 \end{bmatrix} \leq 0 \\ u = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Introduisons un vecteur  $v=u2-u3$ , nous obtenons

$$u1^T \times C1 + v^T \times C2 \leq 0 \quad (5.5)$$

$$u1^T \times M1_0 + v^T \times M2_0 < 0 \quad (5.6)$$

Si nous pouvons trouver une base  $\bar{u}$  (  $\geq 0$  ) et  $\bar{v}$ , de l'espace vectoriel engendré par les solutions de l'inégalité (5.5) on obtient , en l'introduisant dans la relation (5.6) :

$$(\bar{u})^T \times M1_0 + (\bar{v})^T \times M2_0 < 0 \tag{5.6'}$$

La relation (5.6') fournit les conditions à réunir sur le marquage initial pour que le verrou minimal S soit mortel pour un marquage atteignable. Si l'on arrive à trouver des marquages initiaux  $M_0$  tel que :

$$(\bar{u})^T \times M1_0 + (\bar{v})^T \times M2_0 \geq 0 \tag{5.7}$$

le verrou minimal S sera toujours marqué, quel que soit le marquage atteignable.

Par conséquent, dans un RdP N, tous marquages initiaux  $M_0$  tel que la relation (5.7) soient vérifiée pour tout verrou minimal S ne contenant pas de trappe marquée, alors le réseau  $\langle N, M_0 \rangle$  est sans blocage.

Tout ce qui a été présenté ci-dessus est seulement un principe général pour trouver des marquages initiaux  $M_0$  tel que  $\langle N, M_0 \rangle$  soit sans blocage. En pratique, il est difficile de trouver une base  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$ . L'exemple suivant illustre la procédure pour trouver un marquage initial  $M_0$  pour que  $\langle N, M_0 \rangle$  soit sans blocage dans un cas particulier.

Exemple 5.8 :

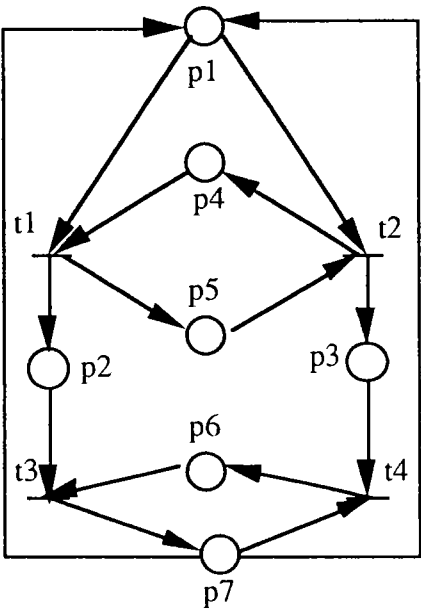


Figure 5.7 Un RdP N

La figure 5.7 représente un RdP N dans lequel il y a 5 verrous minimaux : {p4, p5}, {p6, p7}, {p1, p2, p3}, {p1, p3, p6} et {p1, p2, p7}. Parmi ces 5 verrous minimaux, les trois premiers sont aussi des trappes, les deux derniers ne contiennent pas de trappe. Pour les trois premiers verrous minimaux, si il existe un marquage initial  $M_0$  tel que :

$$\left. \begin{array}{l} M_{4,0} + M_{5,0} > 0 \\ M_{6,0} + M_{7,0} > 0 \\ M_{1,0} + M_{2,0} + M_{3,0} > 0 \end{array} \right\} \quad (5.8.1)$$

alors ils resteront toujours marqués.

Pour les deux derniers verrous, nous devons trouver dans quelle condition ces verrous ne seront jamais vide.

Supposons que le verrou minimal {p1, p3, p6} reste vide au cours de l'évolution du système, alors  $M_1 + M_3 + M_6 = 0$ . L'équation fondamentale du réseau N s'écrit :

$$M_1 = M_{1,0} + y_3 + y_4 - y_1 - y_2 = 0 \quad (5.8.2)$$

$$M_2 = M_{2,0} + y_1 - y_3 \geq 0 \quad (5.8.3)$$

$$M_3 = M_{3,0} + y_2 - y_4 = 0 \quad (5.8.4)$$

$$M_4 = M_{4,0} + y_2 - y_1 \geq 0 \quad (5.8.5)$$

$$M_5 = M_{5,0} + y_1 - y_2 \geq 0 \quad (5.8.6)$$

$$M_6 = M_{6,0} + y_4 - y_3 = 0 \quad (5.8.7)$$

$$M_7 = M_{1,0} + y_3 - y_4 \geq 0 \quad (5.8.8)$$

A partir des relations (5.8.2), (5.8.4) et (5.8.7), nous obtenons :

$$y_1 = M_{1,0} + M_{6,0} + 2M_{3,0} + y_2$$

$$y_3 = M_{6,0} + y_4$$

$$y_4 = M_{3,0} + y_2$$

$$y_1 - y_3 = M_{1,0} + M_{3,0}$$

A partir de ces relations et des relations (5.8.3), (5.8.5), (5.8.6) et (5.14.8), nous obtenons:

$$M_{2,0} + M_{1,0} + M_{3,0} \geq 0 \quad (5.8.9)$$

$$M_{4,0} - M_{1,0} - M_{6,0} - 2M_{3,0} \geq 0 \quad (5.8.10)$$

$$M_{5,0} + M_{1,0} + M_{6,0} + 2M_{3,0} \geq 0 \quad (5.8.11)$$

$$M_{1,0} + M_{6,0} \geq 0 \quad (5.8.12)$$

Pour que le verrou minimal {p1, p3, p6} ne soit pas mortel, il suffit qu'une des 4 relations ci-dessus ne soit pas vraie. Puisque le marquage d'une place est toujours supérieur ou égal à 0, les relations (5.8.9), (5.8.11) et (5.8.12) sont toujours vraies. Par contre, il est possible que la relation (5.8.10) ne soit pas vraie. Donc la condition suffisante pour que le verrou minimal {p1, p3, p6} ne soit pas mortel est :

$$M_{4,0} - M_{1,0} - M_{6,0} - 2M_{3,0} < 0 \quad (5.8.13)$$

Avec le même raisonnement, une condition suffisante pour que le verrou minimal  $\{p1, p2, p7\}$  ne soit pas mortel est :

$$M_{5,0} - M_{1,0} - M_{7,0} - 2M_{2,0} < 0 \quad (5.8.14)$$

En tenant compte des contraintes (5.8.13) et (5.8.14) et disant que la trappe maximale d'un verrou minimal doit être marquée pour le marquage initial, une condition suffisante sur des marquages initiaux  $M_0$  pour que le réseau marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  soit sans est la suivante :

$$\begin{cases} M_{6,0} + M_{7,0} > 0 \\ M_{4,0} + M_{5,0} > 0 \\ M_{1,0} + M_{2,0} + M_{3,0} > 0 \\ M_{1,0} + M_{6,0} + 2M_{3,0} > M_{4,0} \\ M_{1,0} + M_{7,0} + 2M_{2,0} > M_{5,0} \end{cases} \quad (5.8.15)$$

Un marquage initial possible vérifiant (5.8.15) est  $M_0 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ . Avec ce marquage initial,  $\langle N, M_0 \rangle$  sera sans blocage. ♦

Il faut noter que, pour un RdP  $N$  donné, il est possible qu'avec la méthode décrite ci-dessus, nous ne trouvons aucun marquage initial  $M_0$  tel que  $\langle N, M_0 \rangle$  soit sans blocage, comme le montre l'exemple suivant.

#### Exemple 5.9 :

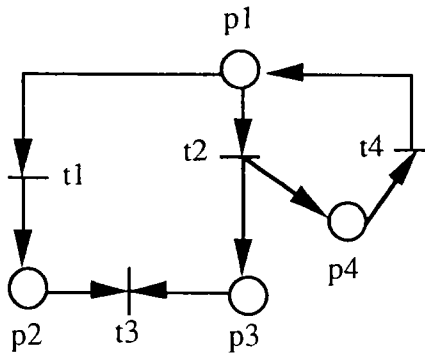


Figure 5.8 Un RdP  $N$

La figure 5.8 représente un RdP  $N$  dans lequel il y a deux verrous minimaux  $\{p1, p2, p4\}$  et  $\{p1, p3, p4\}$ . Le verrou minimal  $\{p1, p2, p4\}$  est lui même une trappe et le verrou minimal  $\{p1, p3, p4\}$  ne contient pas de trappe. Supposons que  $M_1 + M_3 + M_4 = 0$ , alors l'équation fondamentale du réseau  $N$  s'écrit :

$$M_1 = M_{1,0} + y_3 + y_4 - y_1 - y_2 = 0 \quad (5.9.1)$$

$$M_2 = M_{2,0} + y_1 - y_3 \geq 0 \quad (5.9.2)$$

$$M_3 = M_{3,0} + y_2 - y_3 = 0 \quad (5.9.3)$$

$$M_4 = M_{4,0} + y_2 - y_4 = 0 \quad (5.9.4)$$

Suivant les relations (5.9.1), (5.9.3) et (5.9.4), nous obtenons :

$$y_1 = M_{1,0} + M_{3,0} + M_{4,0} + y_2$$

$$y_3 = M_{3,0} + y_2$$

$$y_4 = M_{4,0} + y_2$$

En introduisant ces relations dans la relation (5.9.2), nous obtenons :  $M_{2,0} + M_{1,0} + M_{4,0} \geq 0$ . Cette relation doit toujours être vérifiée. Avec la méthode présentée ci-dessus, nous ne trouvons donc pas de marquage initial  $M_0$  tel que  $\langle N, M_0 \rangle$  soit sans blocage. En effet, quel que soit le marquage initial  $M_0$ ,  $\langle N, M_0 \rangle$  sera sujet à blocage. ♦

## 5.6 VIVACITE DE SOUS-CLASSES DES RESEAUX DE PETRI

Dans la section précédente, nous avons étudié l'absence de blocage pour les réseaux de Petri ordinaires généraux. Dans cette section, nous considérons des sous-classes de réseaux de Petri : réseaux à choix asymétrique (voir Chapitre 2, paragraphe 2.5.4) et graphes d'événements (voir Chapitre 2, paragraphe 2.5.1) augmentés de places de ressources partagées. Nous verrons que certains résultats développés dans la section précédente peuvent être appliqués pour la vivacité de ces sous-classes de réseaux de Petri.

### 5.6.1 Vivacité des réseaux à choix asymétrique

Nous savons que la condition de Commoner est une condition suffisante de la vivacité des réseaux à choix asymétrique (rappel Chapitre 2, paragraphe 2.5.4). Malheureusement, si dans un RdP il existe un verrou minimal qui ne contient pas de trappe marquée, la condition de Commoner ne permet plus de vérifier la vivacité.

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence une condition suffisante moins stricte de la vivacité des réseaux à choix asymétrique. L'idée de départ consiste à étudier la structure particulière des réseaux à choix asymétrique. En effet, si dans un réseau à choix asymétrique, tout verrou minimal ne contenant pas de trappe est toujours marqué quelle que soit l'évolution du système, alors ce réseau à choix asymétrique est vivant.

Avant de poursuivre, nous introduisons le lemme suivant.

**Lemme 5.1.** Dans un réseau à choix asymétrique marqué  $\langle N, M_0 \rangle$ , s'il existe un marquage  $M \in R(M_0)$  et une transition  $t$  tels que  $t$  n'est plus franchissable à partir de  $M$  quel que soit le marquage atteignable, alors il existe un marquage  $M' \in R(M)$  et une place  $p \in \bullet t$  tels que  $M''(p)=0$ , pour tout marquage  $M'' \in R(M')$ .

**Démonstration.** Supposons que la conclusion du lemme 5.1 soit fausse. Cela signifie que pour tout marquage  $M' \in R(M)$  et pour toute place  $p \in \bullet t$ , il existe un marquage  $M'' \in R(M')$  tel que  $M''(p) > 0$ .

Dans un réseau à choix asymétrique, pour toute paire de places  $p_i, p_j \in P$ , si  $p_i^\bullet \cap p_j^\bullet \neq \emptyset$ , alors  $p_i^\bullet \subseteq p_j^\bullet$  ou  $p_i^\bullet \supseteq p_j^\bullet$ . Sans perte de généralité, nous pouvons numéroter les places de telle sorte que  $p_1^\bullet \subseteq p_2^\bullet \subseteq \dots \subseteq p_k^\bullet$ , et que  $p_i \in \bullet t, \forall 1 \leq i \leq k$ , où  $k = |\bullet t|$ .

Notons par  $n_1$  le plus petit  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) tel que  $M(p_i)=0$ , c'est-à-dire que  $M(p_{n_1})=0$ , et  $M(p_j) > 0, \forall 1 \leq j < n_1$ . Ce  $n_1$  existe car sinon  $M(p_j) > 0, \forall 1 \leq j \leq k$ , ce qui impliquerait que la transition  $t$  est franchissable au marquage  $M$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. D'après la supposition, il existe un marquage  $M_1 \in R(M)$  tel que  $M_1(p_{n_1}) > 0$ . Si nous notons  $\sigma$  la séquence de franchissements correspondante qui conduit le marquage de  $M$  à  $M_1$ . La transition  $t$  ne peut pas figurer dans  $\sigma$ , puisqu'elle n'est pas franchissable pour tout marquage  $M'$  tel que  $M' \in R(M)$  et  $M_1 \in R(M')$ . Pour la même raison, pour toute transition  $\tau \in p_i^\bullet, 1 \leq i < n_1$ , puisque  $p_i^\bullet \subseteq p_{n_1}^\bullet$ ,  $\tau$  ne figure pas non plus dans la séquence  $\sigma$ . Ces remarques conduisent à la conclusion suivante :  $M_1(p_j) \geq M(p_j) > 0, \forall 1 \leq j < n_1$ . Si nous désignons par  $n_2$  le plus petit  $i$  tel que  $M_1(p_i)=0$ , les deux cas suivants sont possibles :

- (i)  $n_2$  n'existe pas, auquel cas toutes les places d'entrée de la transition  $t$  sont marquées,  $t$  peut alors être franchie, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse du lemme.
- (ii)  $n_2$  existe, et nous avons alors  $n_2 > n_1$ .

Dans le deuxième cas, nous réitérons le même raisonnement à partir de  $M_1$  comme à partir de  $M$  et ainsi de suite. Nous arrivons nécessairement à un marquage où toutes les places d'entrée de la transition  $t$  sont marquées. Nous arrivons à la même conclusion que dans le premier cas, c'est-à-dire une conclusion en contradiction avec l'hypothèse du lemme. Q.E.D.

**Théorème 5.11 :** Un RdP à choix asymétrique marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant si et seulement si il n'existe pas de verrou mortel.

**Démonstration :** (Condition suffisante) Nous démontrons que si le réseau marqué n'est pas vivant, alors il existe un verrou mortel. Pour cela, nous construisons un sous-ensemble de places  $P'$  qui est un verrou mortel.

Si le réseau marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant, il existe un marquage  $M \in R(M_0)$  et une transition  $t$  qui n'est plus franchissable à partir de  $M$  quel que soit le marquage atteignable. D'après le lemme 5.1, il existe un marquage  $M_1 \in R(M)$  et une place  $p \in \bullet t$  tels que  $M'(p)=0$ , pour tout marquage  $M' \in R(M_1)$ . Nous posons  $P'=\{p\}$ .

La seule raison possible pour laquelle la place  $p \in \bullet t$  n'est plus jamais marquée à partir de  $M_1$  est qu'aucune de ses transitions d'entrée n'est franchissable à partir de  $M_1$ . Chacune de ces transitions possède donc la même propriété que la transition  $t$ . Pour chacune de ces transitions, nous pouvons alors trouver au moins une de ses places correspondante. Ces places sont aussi incluses dans l'ensemble  $P'$ . A partir de ces places, nous pouvons encore trouver des transitions non franchissables à partir desquelles nous pouvons trouver des places non marquées et ainsi de suite. L'ensemble  $P'$  évolue jusqu'à arriver à une situation où  $P'$  n'évolue plus. Cette situation existe nécessairement, puisque  $P'$  est un sous-ensemble de  $P$  qui est lui-même un ensemble fini. Par construction, il existe un marquage atteignable à partir de  $M$  tel qu'aucune des places appartenant à  $P'$  n'est marquée. Par construction, pour toute transition  $t \in \bullet P'$ ,  $t$  n'est pas franchissable, alors au moins une de ses places d'entrée appartient à  $P'$ . C'est-à-dire qu'il existe une place  $p \in P'$  telle que  $p \in \bullet t$ , ce qui implique que  $t \in (P')^\bullet$ . Ceci démontre que  $P'$  est un verrou. Comme il n'est plus marqué à partir d'un certain marquage, c'est un verrou mortel.

(Condition nécessaire) Lorsqu'il existe un verrou minimal mortel  $S$ , il existe un marquage atteignable  $M$  dans lequel  $S$  n'est plus marqué. Nous savons qu'un verrou vide reste vide quel que soit le marquage atteignable. Les transitions de sortie de  $S$  ne peuvent plus jamais être franchissables, donc  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant. Q.E.D.

En utilisant ce théorème, nous avons la propriété suivante.

**Propriété 5.7 :** Si un RdP à choix asymétrique marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  satisfait la condition du théorème 5.9 ou la condition du corollaire 5.5, alors il est vivant.

Exemple 5.10 :

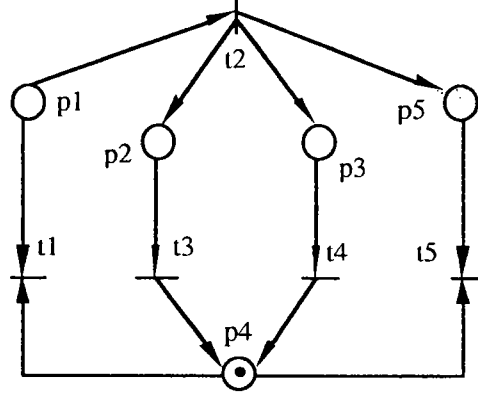


Figure 5.9 Un RdP à choix asymétrique  $\langle N, M_0 \rangle$  vivant

La figure 5.9 représente un RdP à choix asymétrique marqué  $\langle N, M_0 \rangle$  (voir [MUR 89]) dans lequel il y a un seul verrou minimal marqué  $S = \{p1, p2, p3, p4\}$  ne contenant pas de trappe. En utilisant le problème PPL à  $S$ , nous obtenons  $F_S = 1$ , la condition du corollaire 5.5 est satisfaite. Par conséquent, selon la propriété 5.7, le réseau  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant. ♦

### 5.6.2 Vivacité et réversibilité des graphes d'événements augmentés de places de ressources partagées

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux réseaux de Petri obtenus par l'ajout de places de ressources partagées à des graphes d'événements (voir Chapitre 2, paragraphe 2.5.1) existants. Un tel réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$ , composé de deux ensembles de places  $P$  et  $\mathcal{R}$  et d'un ensembles de transitions  $T$ , est défini de la manière suivante :

<H1> L'ensemble des places  $P$  et l'ensemble des transitions  $T$  forment un graphe d'événements, noté par  $G$ . Nous remarquons que  $G$  peut ne pas être connexe.

<H2> Chaque place de ressource partagée  $r \in \mathcal{R}$  est liée à  $k_r > 1$  couples de transitions dont l'ensemble est noté par  $D^r := \{(t_{a1}^r, t_{b1}^r), (t_{a2}^r, t_{b2}^r), \dots, (t_{ak_r}^r, t_{bk_r}^r)\}$ , où  $t_{ai}^r, t_{bi}^r \in T, \forall 1 \leq i \leq k_r$ .  $D^r$  satisfait les conditions suivantes :

- i)  $r \bullet = \{t_{a1}^r, t_{a2}^r, \dots, t_{ak_r}^r\}$  et  $\bullet r = \{t_{b1}^r, t_{b2}^r, \dots, t_{bk_r}^r\}$ ;
- ii)  $t_{ai}^r \neq t_{aj}^r$ , et  $t_{bi}^r \neq t_{bj}^r$ , pour  $i \neq j, \forall i, j \in N_r$ , où  $N_r = \{1, 2, \dots, k_r\}$ ;
- iii) Si  $t_{ai}^r \neq t_{bi}^r$ , il existe un chemin élémentaire  $O_i^r$  dans  $G$  reliant  $t_{ai}^r$  à  $t_{bi}^r$ .

<H3> Chaque circuit élémentaire dans  $G$  est marqué par  $M_0$ .

<H4> Le marquage initial  $M_0$  marque toutes les places de ressource, i.e.  $M_0(r) > 0, \forall r \in \mathcal{R}$  et aucune des places de  $O_i^r$  n'est marquée par  $M_0$ .

Ces hypothèses correspondent au fait qu'à l'instant initial, toutes les ressources sont disponibles. Un jeton dans une place de ressource partagée  $r$  est utilisé pour le franchissement d'une transition  $t_{ai}^r$ , passe ensuite dans le chemin  $O_i^r$ , et revient enfin à la place  $r$  après le franchissement de la transition  $t_{bi}^r$ .

Nous examinons d'abord la structure de ce réseau. Examinons d'abord la matrice d'incidence. Nous pouvons constater que chaque ligne comporte autant de "+1" que de "-1", les autres éléments étant tous nuls. En effet, pour une place  $p \in P$ , nous avons  $|\bullet p| = |p \bullet| = 1$ , et pour une place de ressource partagée  $r \in \mathcal{R}$ , nous avons  $|\bullet r| = |r \bullet| = k_r$ . Partant de ce constat, examinons l'équation fondamentale. Désignons par  $M$  le marquage atteignable à partir de  $M_0$  après une séquence de franchissement  $\sigma$ , et par  $V_\sigma$  le vecteur de comptage de  $\sigma$ . Pour une place  $p \in P$ , nous savons que  $|\bullet p| = |p \bullet| = 1$ . Par abus de notations, nous désignons aussi par  $\bullet p$  (resp.  $p \bullet$ ) la transition d'entrée (resp. de sortie) de la place  $p$ . Nous avons alors

$$M(p) = M_0(p) + V_\sigma(\bullet p) - V_\sigma(p \bullet), \quad \forall p \in P. \quad (5.8)$$

De plus, nous avons

$$V_\sigma(\bullet p) \leq V_\sigma(p \bullet), \quad \forall p \in P \text{ telle que } M_0(p) = 0 \quad (5.9)$$

Pour une place de ressource partagée, nous avons également

$$M(r) = M_0(r) + \sum_{i=1}^{k_r} (V_\sigma(t_{bi}^r) - V_\sigma(t_{ai}^r)), \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (5.10)$$

Selon la relation (5.8) et considérant que chaque place de  $G$  n'a qu'une transition d'entrée et qu'une transition de sortie, pour l'ensemble des places du chemin  $O_i^r$ , nous avons l'équation fondamentale suivante :

$$\sum_{p \in O_i^r} M(p) = \sum_{p \in O_i^r} M_0(p) + V_\sigma(t_{ai}^r) - V_\sigma(t_{bi}^r). \quad (5.11)$$

Selon la relation (5.11) et en tenant compte du fait que  $M(p) \geq 0$  et  $M_0(p) = 0, \forall p \in O_i^r$ , la relation suivante est vraie :

$$V_{\sigma}(t_{bi}^r) \leq V_{\sigma}(t_{ai}^r), \quad \forall i \in N_r, \forall r \in \mathcal{R}. \quad (5.12)$$

De plus le chemin  $O_i^r$  n'est pas marqué par  $M$ , i.e.  $M(p)=0, \forall p \in O_i^r$ , si et seulement si

$$V_{\sigma}(t_{bi}^r) = V_{\sigma}(t_{ai}^r), \quad \forall t \in \mathcal{R}, \forall i \in N_r. \quad (5.13)$$

Selon les relations (5.10) et (5.11), nous avons la propriété suivante

**Propriété 5.8 :** Toute place  $r \in \mathcal{R}$  avec unie à les places dans tous les chemins  $O_i^r$ , où  $i=\{1, 2, \dots, k_r\}$  constitue un p-invariant et il satisfait la relation suivante :

$$M(r) + \sum_{i \in N_r} \sum_{p \in O_i^r} M(p) = M_0(r) + \sum_{i \in N_r} \sum_{p \in O_i^r} M_0(p), \quad \forall M \in R(M_0). \quad (5.14)$$

Avant de d'établir une condition nécessaire et suffisante de vivacité d'un tel réseau, nous introduisons le théorème suivant.

**Théorème 5.12 :** Un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  qui satisfait les hypothèses  $\langle H1 \rangle, \dots, \langle H4 \rangle$  est réversible si il est vivant.

**Démonstration :** Considérons un marquage atteignable quelconque  $M \in R(M_0)$  où  $M \neq M_0$  et désignons par  $\sigma$  la séquence de franchissements correspondante. Désignons par  $\bar{V} = \max_{t \in T} V_{\sigma}(t)$ , et par  $\mathcal{T} = \{t \in T \mid V_{\sigma}(t) < \bar{V}\}$ , nous avons nécessairement  $\mathcal{T} \neq \emptyset$ , car sinon  $V_{\sigma}(t) = \bar{V}, \forall t \in T$ , ce qui implique que  $M = M_0$  avec les relations (5.8) et (5.10), c'est-à-dire que le réseau est réversible.

Nous démontrons qu'il existe une séquence de franchissements qui emmène le marquage de  $M$  à  $M_0$ . Nous supposons qu'il existe une transition  $t \in \mathcal{T}$  franchissable pour  $M$  et qu'après le franchissement de celle-ci, nous obtenons un marquage  $M_1$  avec la séquence de franchissements correspondante  $\sigma_1$ . Par construction, nous avons :  $V_{\sigma_1} \geq V_{\sigma}$ ,  $V_{\sigma_1} \neq V_{\sigma}$  et  $\max_{t \in T} V_{\sigma_1}(t) = \bar{V}$ . En réitérant à partir de  $M_1$  le même raisonnement que celui qui a été fait à partir de  $M$ , et ainsi de suite, nous arrivons nécessairement à un marquage  $M'$  avec la séquence de franchissements correspondante  $\sigma'$  telle que  $V_{\sigma'}(t) = \bar{V}, \forall t \in T$ . Avec cette séquence de franchissements, nous obtenons  $M' = M_0$ .

Donc il suffit de démontrer qu'il existe une transition  $t \in \mathcal{T}$  franchissable pour  $M$ . La démonstration se fait par l'absurde. Nous démontrons que si aucune transition  $t \in \mathcal{T}$  n'est franchissable pour  $M$ , alors il existe un ensemble de places  $P'$  qui est un verrou mortel, ce qui implique que le réseau n'est pas vivant. Cela contredit l'hypothèse du théorème.

Nous supposons qu'aucune transition  $t \in \mathcal{T}$  n'est pas franchissable pour  $M$ , nous désignons cette hypothèse par  $\langle H5 \rangle$ . Dans ce qui suit, nous montrons en 2 étapes qu'il existe un verrou mortel.

1) Dans la première étape, nous démontrons que  $\forall t \in \mathcal{T}$ , il existe un chemin élémentaire  $\mathcal{C}(t)$  reliant une place de ressource  $r$  à  $t$  tel qu'aucune place de  $\mathcal{C}(t)$  n'est marquée par  $M$  et que les places autres que  $r$  appartiennent à  $P$ .

Puisque la transition  $t$  n'est pas franchissable, il existe au moins une place  $p \in \bullet t$  telle que  $M(p)=0$ . Si  $p$  est une place de ressource, la démonstration est faite.

Sinon, nous avons  $p \in P$ . D'après la relation (5.9),  $V_{\sigma}(\bullet p) \leq V_{\sigma}(p \bullet) < \bar{V}$ , ce qui implique que  $\bullet p \in \mathcal{T}$ . Nous trouvons alors le chemin  $t_1 p_1 t_0$  avec  $t_1 = \bullet p$ ,  $p_1 = p$  et  $t_0 = t$ .

Le même processus se poursuit avec  $t_1$  et il se termine par un chemin élémentaire  $t_h p_h t_{h-1} p_{h-1} \dots t_0$  avec  $p_i \in P$ ,  $\forall 1 \leq i \leq h$ , dans un des trois cas suivants :

i) Soit la transition  $t_h$  est déjà rencontrée, i.e.  $t_h = t_i$  avec  $0 \leq i \leq h-1$ . Alors nous avons un circuit élémentaire  $t_h p_h t_{h-1} p_{h-1} \dots p_{i+1} t_i$  dans le graphe d'événement  $G$  qui n'est pas marqué par  $M$ . Puisque ce circuit élémentaire est un  $p$ -invariant, alors il n'est pas marqué par  $M_0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\langle H3 \rangle$ ;

ii) Soit la transition  $t_h$  n'a pas de place d'entrée. Elle est alors franchissable pour  $M$ . De plus, d'après la relation (5.9),  $V_{\sigma}(t_h) \leq V_{\sigma}(t_{h-1}) \leq \dots \leq V_{\sigma}(t_0) = V_{\sigma}(t) < \bar{V}$ , c'est -à-dire que  $t_h \in \mathcal{T}$  et elle est franchissable. Cela contredit l'hypothèse  $\langle H5 \rangle$ .

iii) Soit la transition  $t_h$  possède une place d'entrée qui est une place de ressource  $r \in \mathcal{R}$ , est qui n'est pas marquée par  $M$ , i.e.  $\exists r \in \bullet t_h$ , telle que  $M(r)=0$ . Alors  $r t_h p_h t_{h-1} p_{h-1} \dots t_0$  est le chemin recherché.

2) Dans la deuxième étape, nous démontrons qu'il existe un verrou mortel.

Nous partons d'une place de ressource  $r$  trouvée dans l'étape 1) et posons  $P' := \{r\}$ .

Considérons chaque transition d'entrée  $t_{bi}^r$  de  $r$ , et nous distinguons deux cas :  
 $V_{\sigma}(t_{bi}^r) = V_{\sigma}(t_{ai}^r)$  et  $V_{\sigma}(t_{bi}^r) < V_{\sigma}(t_{ai}^r)$ .

Si  $V_{\sigma}(t_{bi}^r) = V_{\sigma}(t_{ai}^r)$ , d'après la relation (5.11), le chemin  $O_i^r$  reliant  $t_{ai}^r$  et  $t_{bi}^r$  n'est pas marqué par  $M$ , Nous ajoutons les places de  $O_i^r$  dans  $P'$ , i.e.  $P := P' \cup \{p, \forall p \in O_i^r\}$ .

Si  $V_{\sigma}(t_{bi}^r) < V_{\sigma}(t_{ai}^r)$ , nous avons  $V_{\sigma}(t_{bi}^r) < \bar{V}$ , ce qui signifie que  $t_{bi}^r \in \mathcal{T}$ .  $t_{bi}^r$  n'est pas franchissable d'après l'hypothèse <H5>. Selon l'étape 1), il existe une place de ressource  $r'$  tel que  $M(r') = 0$  et un chemin  $\mathcal{C}(t_{bi}^r)$  reliant  $r'$  à  $t_{bi}^r$  tel qu'aucune place de  $\mathcal{C}(t_{bi}^r)$  n'est marquée par  $M$  et que les places autres que  $r'$  sont dans  $P$ . Nous ajoutons les places de  $\mathcal{C}(t_{bi}^r)$  dans  $P'$ , i.e.  $P' := P' \cup \{r'\} \cup \{p, \forall p \in \mathcal{C}(t_{bi}^r)\}$ .

Nous répétons la deuxième étape pour chacune de ces places de ressources  $r'$ . Le processus se termine après un nombre fini d'itérations car le nombre de places de ressource est fini.

Par construction, pour toute place  $p \in P \cap P'$ , la transition d'entrée  $\bullet p$  est soit la transition de sortie d'une autre place  $p'' \in P \cap P'$ ; soit une transition de sortie d'une place  $r \in P \cap \mathcal{R}$ . Pour toute transition d'entrée  $t_{bi}^r$  de  $r \in \mathcal{R}$  dans  $P'$ , si  $t_{ai}^r = t_{bi}^r$ ,  $t_{bi}^r$  est également une transition de sortie de  $r$ ; si  $t_{ai}^r \neq t_{bi}^r$ , il existe une place  $p \in P \cap P'$  tel que  $p \bullet = t_{bi}^r$ . Par conséquent, nous avons la relation  $\bullet P' \subseteq P \bullet$ . Autrement dit,  $P'$  est un verrou. En plus, aucune place de  $P'$  n'est marquée par  $M$ , donc  $P'$  est un verrou mortel. Ceci termine la démonstration qu'il existe une transition  $t \in \mathcal{T}$  franchissable pour  $M$ .

Nous avons montré qu'il existe une séquence de franchissements qui emmène le marquage de  $M$  à  $M_0$ .  
Q.E.D.

**Théorème 5.13** : Soit  $\langle N, M_0 \rangle$  un réseau de Petri vivant satisfaisant <H1>, <H2> et <H3>. Alors il existe un marquage atteignable,  $M^* \in R(M_0)$ , tel que

<C1>  $\exists Y \in \mathbb{N}^{|T|}$  tel que  $M^* = M_0 + CY$ ,

<C2> Aucune des places dans  $O_i^r$  n'est marquée par  $M^*$ .

De plus,  $M^*(r) > 0, \forall r \in \mathcal{R}$ .

**Démonstration :** D'après la structure de  $\langle N, M_0 \rangle$ , nous savons que le vecteur  $I \in N^{|T|}$  tel que  $I[t]=1, \forall t \in T$  est un  $t$ -invariant. Donc, la condition  $\langle C1 \rangle$  implique :

$$M_0 = M^* - CY = M^* + CY^*$$

$$\text{où } Y^* = \bar{Y} \times I - Y \text{ et } \bar{Y} = \max_{t \in T} \{Y[t]\}.$$

Comme pour les relations (5.8), (5.9), (5.10) et (5.11), nous avons

$$M_0(p) = M^*(p) + Y^*[\bullet p] - Y^*[p\bullet], \quad (5.8')$$

$$Y^*[\bullet p] \leq Y^*[p\bullet], \quad \forall p \in P \text{ telle que } M_0(p)=0, \quad (5.9')$$

$$M_0(r) = M^*(r) + \sum_{i=1}^{k_r} (Y^*[t_{bi}^r] - Y^*[t_{ai}^r]), \quad \forall r \in \mathcal{R}, \quad (5.10')$$

$$\sum_{p \in O_i^f} M_0(p) = \sum_{p \in O_i^f} M^*(p) + Y^*(t_{ai}^r) - Y^*(t_{bi}^r) \quad (5.11')$$

Nous montrons qu'il existe une séquence de franchissements qui emmène le marquage de  $M_0$  à  $M^*$ . La démonstration est identique à celle du théorème 5.12 en remplaçant  $M_0$  par  $M^*$ ,  $M$  par  $M_0$ ,  $V_\sigma$  par  $Y^*$  et les relations (5.8) — (5.11) par (5.8') — (5.11').

Il nous reste à démontrer que  $M^*(r) > 0, \forall r \in \mathcal{R}$ . Pour cela, considérons un marquage  $M \in R(M^*)$ . Selon la propriété 5.1, nous avons

$$M(r) + \sum_{i \in N_r} \sum_{p \in O_i^f} M(p) = M^*(r) + \sum_{i \in N_r} \sum_{p \in O_i^f} M^*(p), \quad \forall r \in \mathcal{R},$$

D'après la condition  $\langle C2 \rangle$ ,

$$M(r) + \sum_{i \in N_r} \sum_{p \in O_i^f} M(p) = M^*(r), \quad \forall r \in \mathcal{R}.$$

Si  $M^*(r)=0$  pour une certaine place  $r \in \mathcal{R}$ , nous avons

$$M(r)=0, \quad \forall M \in R(M^*).$$

Cela implique que les transitions  $t_{ai}^r$  ne sont plus franchissables à partir de  $M^*$ . Cela contredit la vivacité de  $\langle N, M_0 \rangle$ . Q.E.D.

**Lemme 5.2 :** Pour deux transitions  $t'$  et  $t''$  telles qu'il existe un chemin élémentaire dans  $G$  reliant  $t'$  à  $t''$ ,  $t'$  est vivant si  $t''$  l'est.

**Démonstration :** Selon l'hypothèse, il existe un chemin élémentaire  $t_0 p_1 t_1 \dots p_n t_n$  tel que  $t_0 = t'$ ,  $t_n = t''$  et  $p_i \in P$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$ . Nous supposons  $t'$  n'est plus franchissable à partir d'un marquage  $M_1$ . Pour tout marquage atteignable  $M \in R(M_1)$  tel que  $M_1 \xrightarrow{\sigma} M$ , selon la relation (5.8), nous avons

$$\sum_{i=1}^n M(p_i) = \sum_{i=1}^n M_1(p_i) + V_{\sigma}(t') - V_{\sigma}(t'')$$

Puisque  $t'$  n'est plus franchissable,  $V_{\sigma}(t') = 0$ , et  $\sum_{i=1}^n M(p_i) \geq 0$ , ce qui implique

$$V_{\sigma}(t'') \leq \sum_{i=1}^n M_1(p_i)$$

Cela implique à son tour que  $t''$  n'est plus franchissable après un nombre fini de franchissements à partir de  $M_1$ . Ceci contredit la vivacité de  $t''$ . Par conséquent,  $t'$  est vivant. Q.E.D.

**Lemme 5.3 :** Pour toute place de ressource  $r$ , pour tout  $i \in N_r$ , la transition  $t_{ai}^r$  est vivante si et seulement si la transition  $t_{bi}^r$  est vivante.

**Démonstration.** (Condition suffisante) La démonstration est la même que celle du lemme 5.2.

(Condition nécessaire). Si une transition est vivante, alors nous avons l'hypothèse suivante : elle peut être franchies une infinité de fois.

Selon les relations (5.11) et (5.14) et du fait  $M_0(p) = 0$ ,  $\forall p \in O_i^r$ , nous avons

$$\sum_{p \in O_i^r} M(p) = V_{\sigma}(t_{ai}^r) - V_{\sigma}(t_{bi}^r)$$

$$\sum_{p \in O_i^r} M(p) \leq M_0(r) - M(r)$$

La combinaison de ces deux relations donne

$$0 \leq M(r) \leq M_0(r) + V_{\sigma}(t_{bi}^r) - V_{\sigma}(t_{ai}^r), \quad (5.15)$$

Si la transition  $t_{bi}^r$  n'est pas vivante, il existe un marquage  $M_1$  atteignable à partir de  $M_0$  tel que  $t_{bi}^r$  n'est plus jamais franchissable. Désignons par  $\sigma_1$  la séquence de franchissements correspondante. La non vivacité de  $t_{bi}^r$  implique que pour toute séquence de franchissements  $\sigma_2$  à partir de  $M_1$ , nous avons  $V_{\sigma_1 \circ \sigma_2}(t_{bi}^r) = V_{\sigma_1}(t_{bi}^r)$  (l'opération "  $\circ$  " signifie la concaténation). En utilisant (5.15), nous obtenons,  $V_{\sigma_1 \circ \sigma_2}(t_{ai}^r) \leq V_{\sigma_1}(t_{bi}^r) + M_0(r)$ , ce qui signifie que la transition  $t_{ai}^r$  n'est pas vivante. Q.E.D.

**Théorème 5.14 :** Un réseau de Petri  $\langle N, M_0 \rangle$  satisfaisant les hypothèses  $\langle H1 \rangle - \langle H4 \rangle$  est vivant si et seulement si il ne contient pas de verrou mortel.

**Démonstration.** (Condition nécessaire) Evidente car  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant si il contient un verrou mortel.

(Condition suffisante) Nous démontrons cette condition suffisante en démontrant que si  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant, il contient nécessairement un verrou mortel.

Si le réseau  $\langle N, M_0 \rangle$  n'est pas vivant, il existe un marquage  $M$  et un ensemble non vide de transitions  $T'$  tels que les transitions appartenant à  $T-T'$  sont vivantes alors que celles appartenant à  $T'$  ne sont plus jamais franchissables à partir du marquage  $M$ .

Nous remarquons que l'ensemble des places  $P$  peut être partitionné en quatre sous-ensembles de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_1 &= \{p \in P \mid \bullet p \in T-T' \text{ et } p \bullet \in T-T'\}, \\ P_2 &= \{p \in P \mid \bullet p \in T' \text{ et } p \bullet \in T'\}, \\ P_3 &= \{p \in P \mid \bullet p \in T-T' \text{ et } p \bullet \in T\}, \\ P_4 &= P - P_1 - P_2 - P_3 = \{p \in P \mid \bullet p \in T' \text{ et } p \bullet \in T-T'\}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.2, il n'y a pas de chemin élémentaire de  $T'$  vers  $T-T'$ , donc  $P_4 = \emptyset$ .

L'ensemble des places de ressource peut être partitionné en trois sous-ensembles :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{r \in \mathcal{R} \mid \bullet r \subseteq T-T' \text{ et } r \bullet \subseteq T-T'\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{r \in \mathcal{R} \mid \bullet r \subseteq T' \text{ et } r \bullet \subseteq T'\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \mathcal{R} - \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.3, pour toute place de ressource  $r \in \mathcal{R}$  et pour tout  $i \in N_r$ ,  $t_{ai}^r \in T'$  si et seulement si  $t_{bi}^r \in T'$ . Donc nous avons

$$t_{ai}^r \in T' \quad \Leftrightarrow \quad t_{bi}^r \in T', \quad \forall i \in N_r, \quad \forall r \in \mathcal{R} \quad (5.16)$$

La structure du réseau de Petri est illustrée par la figure 5.10 :

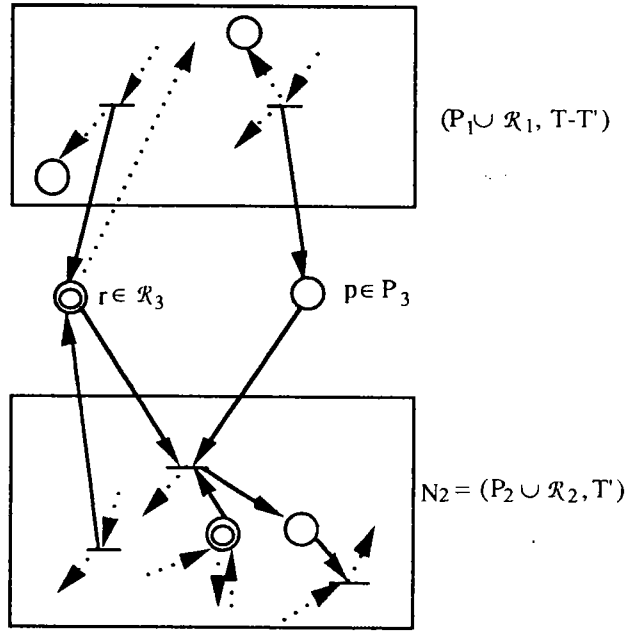


Figure 5.10 La structure du réseau de Petri N

Puisque les places appartenant à  $P_2 \cup P_3 \cup R_2 \cup R_3$  sont les places d'entrée de  $T'$ , nous examinons maintenant l'évolution du marquage de chacun de ces sous-ensembles.

Le marquage des places appartenant à  $R_2$  ou à  $P_2$  ne se modifie pas à partir de  $M$ , puisqu'aucune de leurs transitions d'entrée et de sortie n'est franchissable. Aucun jeton ne peut s'ajouter à ces places ni les quitter.

Puisque les transitions appartenant à  $T'$  ne sont plus franchissables et celles de  $T-T'$  sont vivantes à partir de  $M$ , nous supposons, sans perte de la généralité, que les places de  $P_3$  sont toutes marquées par  $M$ , i.e.  $M(p) > 0, \forall p \in P_3$ . Des jetons peuvent s'ajouter à ces places, mais aucun jeton ne peut les quitter

Supposons également qu'il existe un marquage  $M_1 \in R(M)$  tel que

$$M_1(r) > 0, \quad \forall r \in R_3. \quad (5.17)$$

De plus, les transitions appartenant à  $T'$  n'étant plus franchissables à partir de  $M$ , nous avons

$$M_1(p) > 0, \quad \forall p \in P_3. \quad (5.18)$$

Considérons le sous-réseau de Petri de  $\langle N, M_1 \rangle$  obtenu à partir de  $\langle N_2, M_1' \rangle$  en supprimant les places de  $P_1$ , de  $R_1$  et les transitions de  $T-T'$ , et  $M_1'(q) = M_1(q)$ ,

$\forall q \in P_2 \cup P_3 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ . Puisque les transitions de  $T'$  ne peuvent plus être franchies à partir de  $M_1$  dans le réseau  $\langle N, M_0 \rangle$ , alors aucune transition du réseau  $\langle N_2, M_1' \rangle$  ne peut être franchie. Cela signifie que l'ensemble de places  $S$  vides dans le réseau  $\langle N_2, M_1' \rangle$  forme un verrou mortel. D'après les relations (5.17) et (5.18),  $S$  ne contient que des places de  $P_2 \cup \mathcal{R}_2$ . Par conséquent,  $S$  est un verrou mortel du réseau  $\langle N, M_0 \rangle$ . Cela contredit l'hypothèse du théorème.

Il nous reste encore à démontrer l'existence de  $M_1$ . Pour cela, nous considérons le réseau de Petri  $\langle N_1, M' \rangle$  obtenu à partir de  $\langle N, M \rangle$  en supprimant les places de  $P_2$ , de  $P_3$ , de  $\mathcal{R}_2$ , et les transitions de  $T'$ , donc  $N_1 = (P_1 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3, T - T')$  et  $M'(q) = M(q) \forall q \in P_1 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ . La vivacité des transitions de  $T - T'$  à partir de  $M$  implique la vivacité de  $\langle N_1, M' \rangle$ . L'existence de  $M_1$  est démontrée s'il existe un marquage  $M^*$  atteignable dans  $N_1$  à partir de  $M'$  tel que  $M^*(r) > 0, \forall r \in \mathcal{R}_3$ .

L'existence de  $M^*$  est établie à l'aide du théorème 5.13. Pour cela, nous définissons le vecteur  $Y$  comme suit :

$$Y[t] = \bar{V} - V_\sigma[t], \quad \forall t \in T - T',$$

où  $\sigma$  est la séquence de franchissements du réseau  $\langle N, M_0 \rangle$  telle que  $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$  et

$$\bar{V} = \max_{t \in T - T'} V_\sigma[t].$$

Posons  $M^* = M' + C_1 \times Y$  où  $C_1$  est la matrice d'incidence de  $N_1$ . Puisque  $Y[t] \geq 0, \forall t \in T - T'$ , la condition  $\langle C1 \rangle$  du théorème 5.13 est satisfaite. D'après la relation (5.11), nous avons :

$$\sum_{p \in O_i^r} M^*(p) = \sum_{p \in O_i^r} M'(p) + Y(t_{ai}^r) - Y(t_{bi}^r), \quad \forall r \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3, \forall i \in N_r \text{ tel que } t_{bi}^r \in T - T'.$$

D'après la définition de  $M'$ ,

$$M'(p) = M_0(p) + V_\sigma[\bullet p] - V_\sigma[p \bullet].$$

La combinaison des deux relations précédentes donne :

$$\begin{aligned} \sum_{p \in O_i^r} M^*(p) &= \sum_{p \in O_i^r} (M_0(p) + V_\sigma[\bullet p] - V_\sigma[p \bullet]) + Y(t_{ai}^r) - Y(t_{bi}^r) \\ &= \sum_{p \in O_i^r} M_0(p) + V_\sigma[t_{ai}^r] - V_\sigma[t_{bi}^r] + \bar{V} - V_\sigma[t_{ai}^r] - \bar{V} + V_\sigma[t_{bi}^r] \\ &= \sum_{p \in O_i^r} M_0(p) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse <H4>, nous avons

$$\sum_{p \in O_i^T} M_0(p) = 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3, \forall i \in N_r \text{ tel que } t_{bi}^r \in T - T'.$$

La condition <C2> du théorème 5.13 est satisfaite. De plus il est aisé de vérifier que  $\langle N_1, M' \rangle$  satisfait <H1>, <H2> et <H3>. Donc,  $M^*$  est atteignable à partir de  $M'$  dans  $\langle N_1, M' \rangle$  selon le théorème 5.13,  $\forall r \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ .

Nous concluons  $\langle N, M_0 \rangle$  est vivant si et seulement si il ne contient pas de verrou mortel.

Q.E.D.

Pour vérifier si un verrou est mortel, il suffit de trouver une séquence de franchissements et un marquage atteignable tels que ce verrou soit vide. Dans le pire des cas, nous devons vérifier tous les marquages atteignables. Mais la vérification de la non existence d'un verrou mortel consiste à résoudre un problème de programmation linéaire. Nous avons le corollaire suivant.

**Propriété 5.9 :** Soit un réseau de Petri satisfaisant les hypothèses <H1> – <H4>. Si il satisfait la condition du théorème 5.9 ou la condition du corollaire 5.5, alors il est vivant.

#### Exemple 5. 11

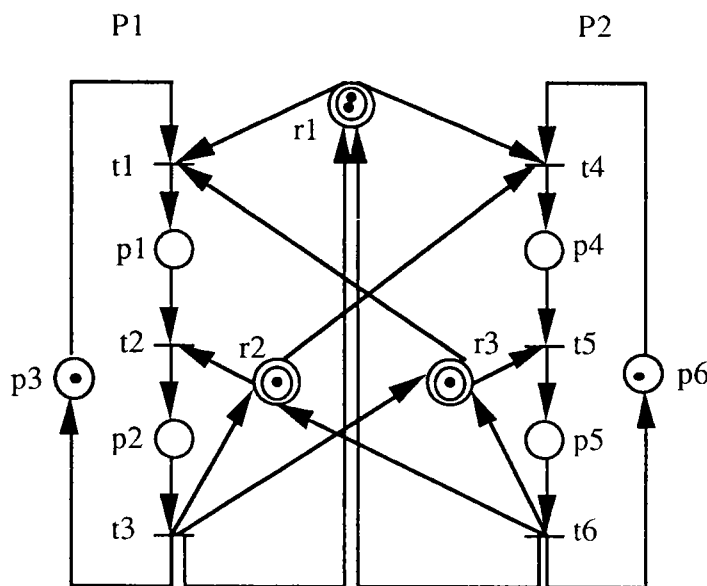


Figure 5.11 Un réseau  $\langle N, M_0 \rangle$

La figure 5.11 (voir [PRO et al. 94]) représente un système modélisé par un RdP pour fabriquer deux types de produits P1 et P2 en utilisant 3 robots partagés notés respectivement  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ . Son modèle RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  satisfait les hypothèses <H1> — <H4>. En utilisant les algorithmes 5.4 et 5.6, nous savons qu'il existe un verrou minimal  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  ne

contenant pas de trappe. Selon le théorème 5.14, ce système est totalement bloqué si et seulement si  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  est mortel.

En effet, le verrou  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  est susceptible d'être mortel si il ne satisfait pas la condition du corollaire 5.5, c'est -à-dire si le système linéaire suivant a une solution :

$$M = M_0 + CY$$

$$M(p_2) = M(p_5) = M(r_2) = M(r_3) = 0$$

$$M \geq 0 \text{ et } Y \geq 0$$

où  $C$  est la matrice d'incidence de dimensions  $9 \times 6$ .

Après des manipulation algébriques et en considérant les hypothèse  $\langle H3 \rangle$  et  $\langle H4 \rangle$ , le verrou  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  peut être mortel si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$M_0(p_3) - M_0(r_3) \geq 0$$

$$M_0(p_6) - M_0(r_2) \geq 0$$

$$M_0(r_1) - M_0(r_2) - M_0(r_3) \geq 0.$$

Le marquage initial  $M_0$  illustré dans la figure 5.11 satisfait ces conditions, donc le verrou  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  est éventuellement mortel. En fait, la séquence de franchissement  $\sigma = \{t_1, t_4\}$  rend le verrou  $\{p_2, p_5, r_2, r_3\}$  mortel. Désormais aucune transition n'est franchissable et le système est totalement bloqué.

Par contre, si nous prenons un autre marquage initial  $M_0' = [M_0'(p_1), \dots, M_0'(p_6), M_0'(r_1), M_0'(r_2), M_0'(r_3)] = [0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$  qui satisfait la condition du corollaire 5.5, alors  $\langle N, M_0' \rangle$  est vivant. ♦

## 5.7 MODELES DES GAMMES DE FABRICATION

Dans cette section, nous montrons d'abord des gammes de fabrication de base et les modèles de RdP correspondants. La vivacité de ces modèles est facile à vérifier. Nous examinons ensuite comment résoudre le problème de vivacité dans le cas où il existe des ressources partagées dans une même gamme de fabrication ou entre plusieurs gammes de fabrication.

Nous faisons l'hypothèse qu'une opération ne peut être exécutée que par une seule machine. Une **gamme de fabrication** est un graphe qui représente le processus de fabrication indiquant la machine à utiliser pour chaque opération ainsi que l'ordre dans lequel ces opérations doivent être exécutées. Comme notre étude ne fait pas intervenir les temps opératoire, une gamme de fabrication est aussi appelée **routage**. Dans la suite nous présentons trois types de routages et leurs modèles de RdP [PRO 92].

5.7.1. Ligne de fabrication

Une ligne de fabrication est une série de  $n$  ressources ( $n > 0$ ) qui exécutent chacune une opération (notées  $O$ ). Les machines qui exécutent ces opérations sont rangées dans l'ordre d'exécution des opérations. Des stocks tampons (notés  $S$ ) sont implantés entre chaque paire d'opérations successives, comme le montre l'exemple de la figure 5.12.

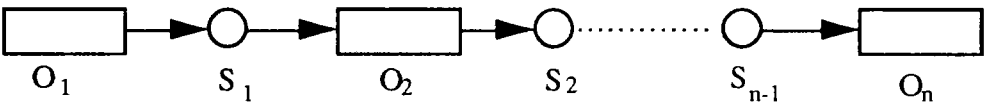


Figure 5.12 ligne de fabrication

Le routage d'une série d'opérations peut être modélisé par les RdP. Une opération peut être représentée par une transition et un stock tampon par une place (voir la figure 5.13).

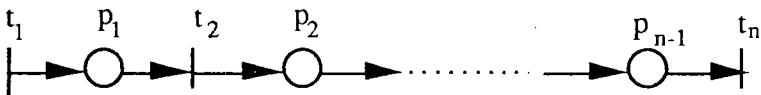


Figure 5.13 Un modèle de RdP du routage de fabrication

5.7.2. Ligne d'assemblage/désassemblage

Une ligne d'assemblage/désassemblage est similaire à une ligne de fabrication, sauf que l'exécution de certains types d'opérations pour fabriquer un produit semi-fini ou un produit fini (appelées opérations d'assemblage) nécessite différentes matières premières ou différents produits semi-finis. Pour exécuter les opérations de désassemblage, nous avons besoin d'une matière première ou d'un produit semi-fini. Après une opération de désassemblage, nous obtenons plusieurs produits semi-finis ou produits finis. Un exemple est illustré dans la figure 5.14.

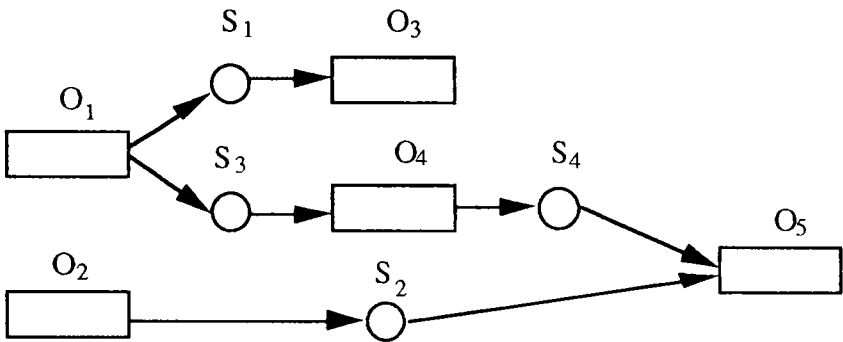


Figure 5.14 Une ligne d'assemblage/désassemblage

Cette ligne d'assemblage/désassemblage nécessite 5 opérations parmi lesquelles l'opération 1 est une opération de désassemblage et l'opération 5 est une opération d'assemblage. Il faut noter que l'opération 5 ne peut pas être exécutée si l'un de ses stocks d'entrée est vide. Le modèle de RdP du routage d'assemblage/désassemblage est représenté par la figure 5.15.

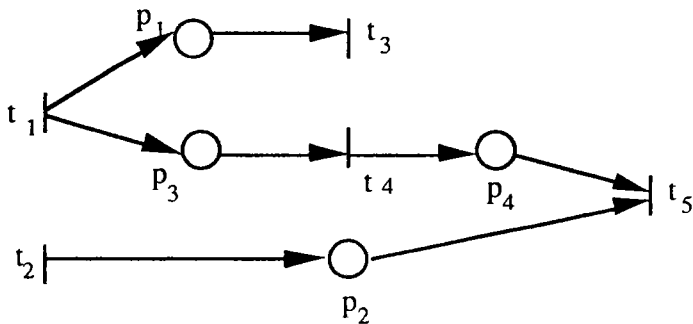


Figure 5.15 Un modèle de RdP de routage d'assemblage/désassemblage

### 5.7.3. Ligne avec conflit

Une ligne avec conflit est composées plusieurs lignes de fabrication. Dans un tel système, plusieurs opérations demandent une ressource commune ou une matière commune en même temps et un demi-produit peut être fabriqué par plusieurs différentes opérations.

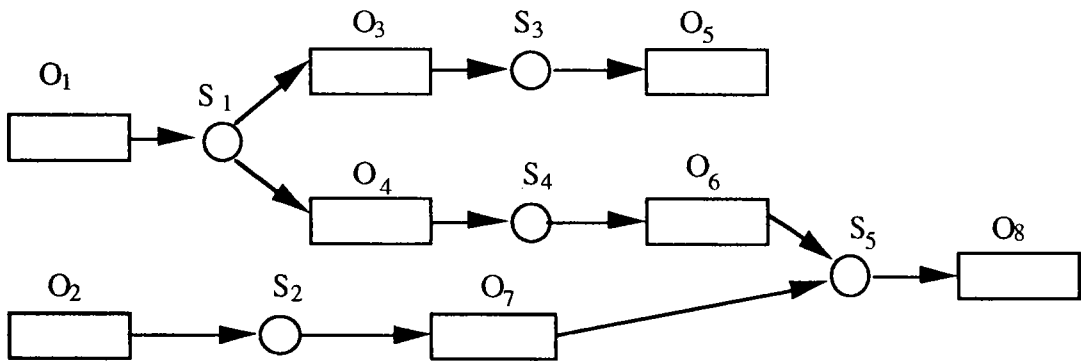


Figure 5.16 Une ligne de conflit

La ligne avec conflit est représentée dans la figure 5.16 comporte 8 opérations. Dans cette ligne, l'opération O3 ou à l'opération O4 demandent le même produit semi-fini. Et le produit semi-fini qui sert à l'opération 8 peut être fabriqué soit par l'opération O6, ou soit par l'opération O7. Le modèle de RdP est donné dans la figure 5.17.

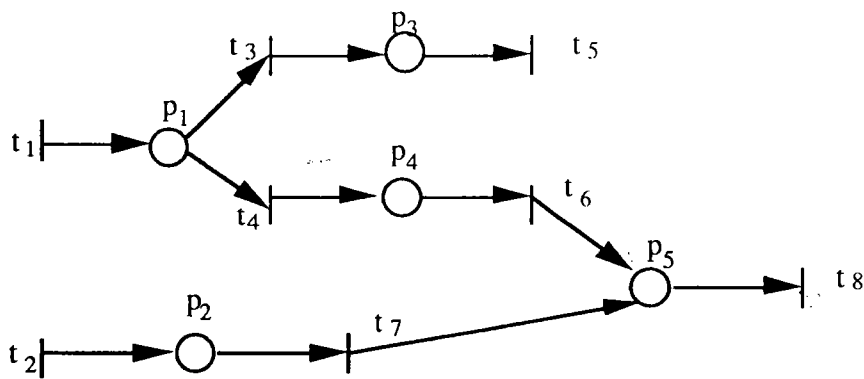


Figure 5.17 Modèle de RdP du routage avec conflit

On voit que les modèles de RdP représentés ci-dessus sont soit des graphes d'événement, soit des machines à états, soit des réseaux à choix libre. Ils permettent de modéliser la synchronisation, le conflit, l'assemblage et le désassemblage. Nous les appelons modèles de base. La vérification de la vivacité de ces modèles de base est présentée dans la section 2.5. Un système complexe peut être considéré comme la combinaison de ces modèles de base.

Si dans un modèle de base, ou entre plusieurs modèles de base, il existe des machines communes ou des robots communs, alors les opérations utilisant une même machine ou un même robot ne peuvent qu'être exécutées les unes après les autres. La machine (ou le robot) avec les opérations qu'il exécute forment alors une exclusion mutuelle. Dans un RdP avec exclusion mutuelle il existe souvent des situations de blocage. [ZHO et al 89a] ont distingué deux types d'exclusions mutuelles : exclusions mutuelles parallèles ("parallel mutual exclusions" : **PME**) et exclusions mutuelles sérielles ("serial mutual exclusion" : **SME**). Il a été démontré qu'en ajoutant ces types d'exclusions mutuelles à un RdP vivant, le RdP obtenu est vivant (certaines conditions supplémentaires doivent être satisfaites lorsqu'il s'agit de SME). Dans la définition de ces deux types d'exclusions mutuelles, il y a une condition commune à satisfaire : *si une ressource d'une place de ressource partagée est utilisée, alors il existe une séquence de franchissements telle que la ressource reviendra à la place de ressource partagée*. C'est une condition très stricte. Pour satisfaire cette condition, il faut examiner les marquages atteignables. En fait, l'application de cette condition est limitée par la structure d'un RdP avec les places de ressources partagées. Surtout lorsque nous utilisons plusieurs places de ressources partagées dans un RdP, l'application de cette méthode devient difficile. Considérons l'exemple 5.12 (voir [PET 81]).

### Exemple 5.12

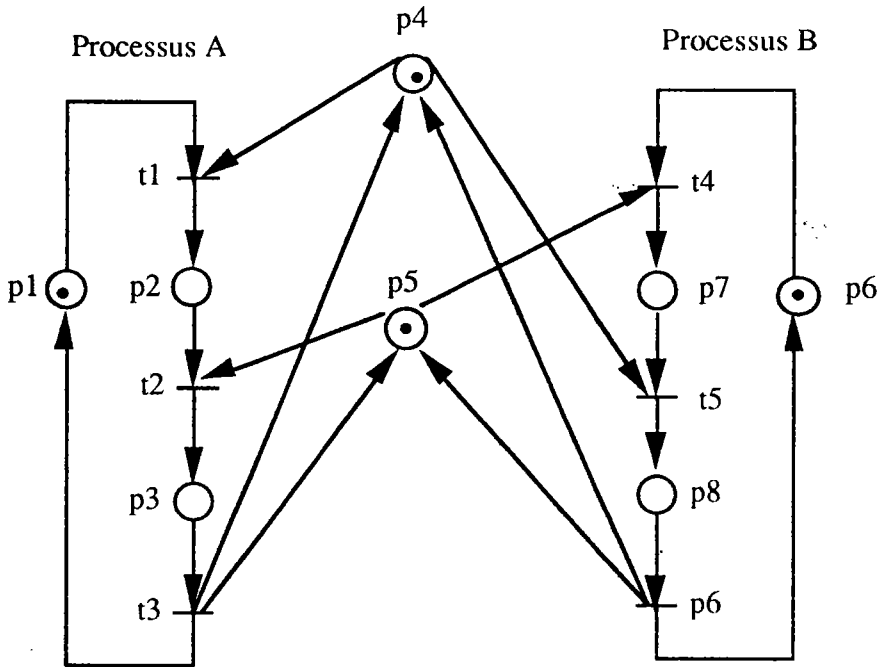


Figure 5.18 Un RdP de blocage

La figure 5.18 représente un RdP  $\langle N, M_0 \rangle$  avec  $M_0 = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)^T$  dans lequel les places  $p4$  et  $p5$  représentent respectivement les deux ressources partagées. L'exécution du processus A et du processus B demande ces deux ressources partagées. Une structure d'exclusion mutuelle du RdP est  $(p4, \{(t1, t3), (t5, t6)\})$ , une autre est  $(p5, \{(t2, t3), (t4, t6)\})$ . Aucune de ces structures est un 2-PME (un PME avec deux paires de transitions), parce qu'aucune de ces structures ne satisfait la définition de PME (indiquée dans le paragraphe précédent). Considérons par exemple l'exclusion mutuelle  $(p4, \{(t1, t3), (t5, t6)\})$ . Lorsqu'un marquage atteignable est  $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)^T$ , les transitions  $t1$  et  $t5$  sont franchissables. Mais  $t3$  ne peut pas être franchie après le franchissement de  $t1$ ;  $t6$  ne peut pas être franchie après le franchissement de  $t5$ . En fait, le système est bloqué à partir du marquage atteignable  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ .

En effet, ce RdP est un réseau à choix asymétrique, dans lequel il y a un verrou minimal  $\{p3, p4, p5, p8\}$  ne contenant pas de trappe. Le marquage atteignable  $(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$  est tel que ce verrou est mortel. Selon le théorème 5.11, ce réseau n'est pas vivant. ♦

Nous examinons l'ajout de places de ressources partagées dans les modèles de base des RdP. Si le réseau obtenu est un réseau à choix asymétrique, alors les résultats obtenus dans le paragraphe 5.6.1 permettent de vérifier la vivacité des ces RdP. Si le réseau obtenu n'est pas un réseau à choix asymétrique, mais si le modèle de base avant l'ajout des places de ressources

partagées est un graphe d'événements (pas nécessairement connexe), les résultats obtenus dans le paragraphe 5.6.2 permettent de vérifier la vivacité. Nous avons donc la conclusion suivante.

**En ajoutant des places de ressources partagées à une machine à états, à un réseau à choix libre ou à un réseau à choix asymétrique, si le réseau obtenu est un réseau à choix asymétrique et si il satisfait la condition de la propriété 5.7, alors il est vivant.**

**En ajoutant des places de ressources partagées à un graphe d'événements, si le réseau obtenu satisfait la condition de la propriété 5.9, alors il est vivant.**

### 5.8 SYNTHÈSE DES RESULTATS

Nous fournissons des tableaux pour synthétiser les résultats obtenus dans les sections précédentes.

Les résultats théoriques obtenus dans la première partie de ce chapitre servent de base pour établir les algorithmes cités dans le tableau 5.1.

Tableau 5.1 Synthèse des algorithmes

| Action                 | Objectif                                 | Résultats      |
|------------------------|------------------------------------------|----------------|
| Ajout d'une transition | chercher la base des verrous             | Algorithme 5.1 |
| Ajout d'une place      | chercher l'ensemble des verrous minimaux | Algorithme 5.3 |
| Ajout d'une place      | chercher la base des verrous             | Algorithme 5.5 |
|                        | chercher la trappe maximale d'un verrou  | Algorithme 5.6 |

Tableau 5.2 Synthèse de l'absence de blocage et de vivacité

| RdP       | Condition                   | Résultat             | Réf.                   |
|-----------|-----------------------------|----------------------|------------------------|
| ordinaire | si il n'existe pas de V.M.  | sans blocage         | Corollaire 5.7.        |
| CA        | ssi il n'existe pas de V.M. | vivant               | Théorème 5.11          |
| GER       | ssi il n'existe pas de V.M. | vivant et réversible | Théorèmes 5.12 et 5.14 |

où CA signifie "réseau ordinaire à choix asymétrique";

GER signifie "graphe d'événement augmenté de places de ressources partagées";

V.M. signifie "verrou mortel".

## 5.9 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord présenté des méthodes pour trouver la base des verrous (resp. de trappes), ou l'ensemble des verrous (resp. trappes) minimaux dans une construction incrémentale d'un modèles de RdP, c'est-à-dire lorsqu'on ajoute des transitions ou des places à un réseau de Petri existant. Ensuite, nous avons étudié l'absence de blocage pour tout réseau de Petri ordinaire général et la vivacité de deux sous-classes de RdPs : les réseaux à choix asymétrique et les graphes d'événements augmentés de places de ressources partagées. Nous avons aussi proposé une approche pour trouver des marquages initiaux afin qu'un RdP ne contiennent pas de verrou minimal mortel. Enfin nous avons représenté des modèles de base de RdP, dans lesquels nous pouvons ajouter des places de ressources partagées. Les résultats obtenus permettent de vérifier la vivacité des modèles obtenus.

# **CHAPITRE VI**

## **CONCLUSION GENERALE**

Pour conclure, nous rappelons d'abord les points essentiels de ce travail et commentons les contributions et les limites des résultats obtenus. Ensuite nous proposons des axes de recherches qui méritent d'être approfondis dans le futur.

## 6.1 SYNTHESE DU TRAVAIL

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés, à la conception incrémentale des modèles réseaux de Petri de systèmes de production qui sont des systèmes à événements discrets. Notre objectif ultime est de développer un outil pour fournir une aide aux utilisateurs tout au long d'un processus de conception. Nous avons vu, dans l'introduction générale, l'intérêt des réseaux de Petri dans la modélisation des systèmes à événements discrets (systèmes de production en particulier). Notre étude est consacrée à des propriétés structurelles des réseaux de Petri que désirent le concepteur du système. Nous avons étudié les propriétés suivantes dans un environnement de conception incrémentale :

- les propriétés de consistance et de conservation;
- les propriétés de bornitude structurelle et de répétitivité;
- l'absence de blocage et la vivacité.

Le fonctionnement d'un système physique nécessite la connaissance de l'état initial comme par exemple la disponibilité des matières premières, des moyens de transport, etc. En revanche, au moment de la conception, il est possible que l'on ne dispose pas de ces informations. Dans ce cas, nous ne pouvons qu'aider l'utilisateur à vérifier des propriétés structurelles qui sont indépendantes de l'état initial du système, comme par exemple la consistance, la conservation, la bornitude structurelle et la répétitivité. Dans le cas où l'on dispose de l'état initial du système, les résultats obtenus dans notre travail permettent à l'utilisateur de vérifier l'absence de blocage des RdPs ordinaires généraux et la vivacité de sous-classes de réseaux de Petri.

En ce qui concerne les propriétés de consistance et de conservation, les résultats obtenus nous permettent de vérifier ces propriétés de manière incrémentale en utilisant la **base des t-invariants** et le **rang de la matrice d'incidence** qui se calculent de façon progressive, lorsque nous ajoutons ou fusionnons les transitions et/ou des places. Les résultats obtenus dans le cas d'ajout de transitions sont des conditions nécessaires et suffisantes puisque l'augmentation du rang ne change qu'une partie de la base des t-invariants. Les résultats obtenus dans le cas d'ajout de places sont des conditions nécessaires ou suffisantes puisque l'augmentation du rang peut conduire à un changement total de la base des t-invariants.

Quant aux propriétés de bornitude structurelle et de répétitivité, les résultats obtenus nous permettent de vérifier ces propriétés en utilisant la **matrice d'incidence** lorsque nous ajoutons ou fusionnons des transitions ou des places. Les résultats obtenus ne sont que des conditions suffisantes puisque la vérification de ces propriétés consiste à satisfaire un ensemble d'inégalités.

Pour ce qui concerne l'absence de blocage et la vivacité, nous développons des **méthodes basées sur les verrous et les trappes**. Nous proposons d'abord des algorithmes qui cherchent la base de verrous (resp. de trappes) de manière incrémentale lorsque nous ajoutons des transitions ou des places. Ensuite nous présentons des conditions suffisantes et des conditions nécessaires et suffisantes pour vérifier l'absence de blocage dans les réseaux de Petri ordinaires généraux et pour vérifier la vivacité des réseaux à choix asymétrique et des graphes d'événements augmentés des places de ressources partagées. Les conditions suffisantes améliorent la condition de Commoner considérée jusqu'ici comme la moins stricte. Ces résultats sont par contre limités par le fait que l'on ne dispose pas de méthode efficace pour vérifier la condition nécessaire de l'absence de blocage et de la vivacité. Dans le cas où l'on ne peut pas déterminer si un réseau de Petri est sans blocage (ou vivant), nous indiquons seulement le principe pour trouver des marquages initiaux pour qu'un réseau de Petri ordinaire soit sans blocage, ou qu'un réseau à choix asymétrique ou un graphe d'événements augmentés de places de ressources partagées soit vivant.

Du point de vue théorique, nous avons étudié les propriétés structurelles des modèles de réseaux de Petri des systèmes de production en utilisant soit des méthodes faisant intervenir l'algèbre linéaire, soit des méthodes basées sur les verrous et les trappes. Du point de vue pratique, ce travail considère un environnement de conception tout à fait réaliste où l'on conçoit un système étape par étape. Toutes les propriétés étudiées peuvent être vérifiées de façon incrémentale : c'est-à-dire que seulement une partie des calculs est nécessaire à chaque étape. Cette démarche exploite la propriété et la structure du réseau d'origine d'une part, et permet d'économiser le temps de calcul pour vérifier ces propriétés du réseau obtenu, d'autre part.

## 6.2 DIRECTIONS DE RECHERCHE

Au long terme, notre étude doit permettre le développement d'un outil d'aide à la conception. Cela concerne essentiellement la mise au point informatique des résultats théoriques, pour que cet outil soit convivial. Avant cela, nous avons besoin d'approfondir les études théoriques, pour qu'un tel développement soit possible.

C'est pourquoi nous suggérons, pour le moyen terme, trois axes de recherche qui nous semblent mériter d'être approfondis. Nous sommes aussi convaincus que les études sur ces axes seront prometteuses.

### **1) Développement d'une méthode efficace pour vérifier la condition nécessaire d'absence de blocage et de vivacité; développement d'une méthode systématique pour trouver des marquages initiaux**

Nous avons montré que la vérification de l'absence de blocage pour les réseaux ordinaires et de la vivacité pour des sous-classes des réseaux de Petri se ramènent à la vérification de l'existence de verrous mortels. Avec nos résultats, nous savons que, dans le pire des cas, nous devons chercher tous les marquages atteignables pour pouvoir être sûrs de l'existence d'un verrou mortel. Une méthode plus efficace qui permette de vérifier l'existence d'un verrou mortel est souhaitable pour vérifier la condition nécessaire d'absence de blocage des réseaux ordinaires et la vivacité des sous-classes de réseaux de Petri.

Dans le chapitre V, paragraphe 5.5.2, nous avons introduit un principe général pour trouver des marquages initiaux pour lequel un RdP ordinaire est sans blocage, ou une sous-classe de RdP est vivante. Beaucoup d'études sont encore nécessaires pour que ce principe général devienne une méthode simple et systématique.

### **2) Vérification incrémentale des propriétés comportementales**

Dans cette étude, nous avons obtenu de nombreux résultats pour vérifier progressivement les propriétés *structurelles* d'un modèle de RdP. L'aspect quantitatif est aussi important que l'aspect qualitatif, puisque le but lorsqu'on conçoit un système n'est pas seulement de le faire fonctionner mais aussi de le faire fonctionner à moindre coût. C'est pourquoi nous insistons aussi sur une étude en vérification incrémentale des propriétés *comportementales* des modèles réseaux de Petri.

### **3) Diagnostic des erreurs de la conception**

Lorsque l'ajout de transitions et/ou de places conduit à une perte de la propriété souhaitée du système, c'est qu'il y a des erreurs dans le processus de conception. Trouver la cause des erreurs et les corriger est un travail très important. Pour cela, une étude plus approfondie de l'algèbre linéaire et le développement de méthodes basées sur la représentation graphique des réseaux sont indispensables.

En conclusion, l'idée de départ de ce travail (vérification incrémentale) est originale et correspond aussi à la réalité industrielle. Nous pensons que les résultats sont suffisamment généraux pour être appliqués à d'autres domaines que le domaine de la production. Nous sommes confiants dans l'avenir de cette direction de recherche, puisque son importance se situe non seulement dans l'aspect théorique, mais aussi et surtout dans ses applications pratiques. Nous souhaitons donc voir beaucoup d'autres travaux aller dans la même direction.

## BIBLIOGRAPHIE

[ALA et al. 85] H. Alaiwan et J.M. Toudic, "*Recherche des semi-flots, des verrous et des trappes dans les réseaux de Petri*", Technique et Sciences Informatiques, vol. 4, n°1, pp. 103-112.

[ALL et al. 82] H. Alla et P. Ladet, "*Spécificatoin et commande des ateliers fleibles - Utilisation des réseaux de Petri colorés*", extrait de "Le point en Productique", vol. 1, Edition Lavoisier.

[ALL et al. 85] H. Alla, P. Ladet, J. Martinez et M. Silva, "*Modelling and validation of complex systems by coloured Petri nets; application to a flexible manufacturing system*", in LNCS, Springer-Verlag, pp. 15-31.

[AUS et al. 94] C. Ausfelder, E. Castelain et J.C. Gentina, "*A method for hierarchical modeling of the command of Flexible manufacturing systems*", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 24, n° 4, pp. 564-573.

[BAN et al. 90] Z.A. Banaszak et B.H. Krogh, "*Deadlock avoidance in flexible manufacturing systems with concurrently competing process flows*", IEEE Trans. on Robotices and Automation, vol. 6, no. 6., pp. 724-734.

[BAR et al. 89] K. Barkaoui et B. Lemaire, "*An effective characterization of minimal deadlocks and traps in Petri nets based on graph theory*", Proc. of 10th Petri Net Conference on Theory and Applications of Petri Nets.

[BAR et al. 92] K. Barkaoui et M. Minoux, "*A polynomial-time graph algorithm to decide liveness of some basic classes of bounded Petri nets*", Springer-Verlag, LNCS, no. 616, pp. 62-74.

[BAR et al 94] K. Barkaoui et I. B. AbdallahB, "*An efficient deadlock avoidance control policy in FMS using structural analysis of Petri nets*", IEEE Inter. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics, pp. 525-530.

[BER 83] G. Berthelot, "*Transformation et analyse des réseaux de Petri*", Thèse d'Etat, Université Paris VI.

[BER 85] G. Berthelot, "*Checking properties of nets using transformation*", Advance in Petri Nets 1985, LNCS, Springer-Verlag, pp. 19-40.

[BER 87] G. Berthelot, "*Transformations and Decompositions of Nets*", Advance Course on Petri Nets, LNCS 254, pp. 359-376.

[BES 87] E. Best, "*Structural theory of Petri nets : the free choice hiatus*", LNCS 254, Springer-Verlag, pp. 168-206.

[BES et al. 90] E. Best, L. Cherskasova, J. Desel et J. Esparza, "*Characterization of home states in free choice systems*", Hildesheimer Informatik-Berichte, n° 7/90.

[BOU et al. 91] J.P. Bourey et J.C. Gentina, "*Conception structurée et modulaire d'architectures de contrôle réparti en production flexible manufacturing*", APII, n° 25, pp. 349-376.

- [BRA 83] G.W. Brams, "*Réseaux de Petri : théorie et pratique*", (2 vol.), Masson, Paris.
- [CAM et al. 91] J. Campos, G. Chiola et M. Silva, "*Properties and performance bounds for closed free choice synchronized monoclase queueing networks*", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 36, no. 12, pp. 1368-1382.
- [CAS et al. 85] E. Castelain, D. Corbeel et J.C. Gentina, "*Comparative simulations of control processes described by Petri nets*", Proceedings of COMPINT 85 : Computer Aided Technologies, pp. 530-532.
- [CHU et al. 93a] F. Chu, J.M. Proth et V.M. Savi, "*Planning and Scheduling Based on Petri Nets*", CAR&FOF' 93, Advances in Manufacturing Systems, pp. 49-56.
- [CHU et al. 93b] F. Chu, J.M. Proth et V.M. Savi, "*Ordonnancement basé sur les réseaux de Petri*", Rapport de Recherche de l'INRIA, no. 1960.
- [CHU et al. 93c] F. Chu, J.M. Proth et F. Vernadat, "*Planning and Scheduling of Discrete Manufacturing Systems: a Petri Net Based Framework*", 10th International Symposium on Applications of Systems Theory, pp. 277-295.
- [CHU et al. 93d] C.B. Chu, F. Chu et J.M. Proth, "*Vérification de la consistance et de la conservation d'un réseau de Petri*", Rapport de Recherche de l'INRIA, no. 2070.
- [CHU et al. 94a] C.B. Chu, F. Chu, J.M. Proth et X.L. Xie, "*Vérification incrémentale de la consistance d'un réseau de Petri*", Accepté pour publication dans TSI, aussi Rapport de Recherche de l'INRIA, no. 2186.
- [CHU et al. 94b] F. Chu et J.M. Proth, "*Conception des systèmes à événement discrets à l'aide des réseaux de Petri : la propriété de bornitude structurelle*", Rapport de Recherche de l'INRIA, no. 2245.
- [CHU et al. 95] F. Chu et X.L. Xie, "Siphon and trap generation in an incremental design process based on Petri nets", Conférence ETFA '95.
- [CHR 83] P. Chretienne, "*Les réseaux de Petri temporisés*", Uni. de Paris VI, These d'Etat.
- [COF et al 71] E.G. Coffman, M.J. Elphick et A. Shoshan, "*Systems deadlocks*", Computing Surveys, vol. 3, no. 2, pp. 67-78.
- [COL et al. 90] J.M. Colom, J. Campos et M. Silva, "*On liveness analysis through linear algebraic techniques*", Dpto. Ing. Eléctrica e Informatica, Research Report RR-90-11.
- [COL et al. 91a] J.M. Colom et M. Silva, "*Convex geometry and semiflows in P/T nets*", Advances in Petri Nets '90, LNCS 483, Springer-Verlag, Berlin, pp.79-112.
- [COL et al.91b] J.M. Colom et M. Silva, "*Improving the linearly based characterization of P/T nets*", Advances in Petri Nets '90, LNCS 483, Springer-Verlag, Berlin, pp. 113-145.
- [COM et al. 71] F. Commoner, A. Holt, S. Even et A. Pnueli, "*Marked directed graphs*", Journal of Computer and System Science, vol. 5, pp. 511-523.
- [COM 72] F. Commoner, "*Deadlocks in Petri nets*", Report CA-7206-2311, Massachusetts Computer Associates Wakefield, Mass.
- [CRU et al. 91] D. Cruette, J.P. Bourey et J.C. Jentina, "*Hierarchical specification and validation of operating sequences in the context of FMS*", Computer Integrated Manufacturing Systems, vol. 4, n° 3.

- [DAT et al. 84] A. Datta et S. Ghosh, " *Synthesis of a class of Deadlock-free Petri nets*", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 31, no. 3, pp. 486-506.
- [DAV et al. 87] R. David et H. Alla, " *Continuous Petri nets*", in Proc. Int. Work-shop Timed Petri Nets, pp. 262-271.
- [DAV et al. 89] R. David et H. Alla, " *Du grafcet aux réseaux de Petri*", Hermès, Paris.
- [DAV et al. 94] R. David et H. Alla, " *Petri nets for modeling of dynamic systems — a survey*", Automatica, vol. 30, no° 2, pp. 175-202.
- [DES et al 94] A. Desrochers et R.Y. Al-Jaar, " *Applications of Petri nets in manufacturing systems*", IEEE Press.
- [DIC et al. 93] F. DiCesare, G. Harhalakis, J.M. Proth, M. Silva et F. Vernadat, " *Practice of Petri nets in manufacturing*", Chapman & Hall.
- [ERW et al 94] R. Erwin et T. Murata, " *Generation basis siphons and traps of Petri nets using the sign incidence matrix*", IEEE Transaction on Systems - I : Fundamental Theory and Application, vol. 41, no. 4, pp. 266-271.
- [ESP et al 91a] J. Esparza et M. Silva, " *On the analysis and synthesis of free choice systems*", Advance in Petri Nets '90, LNCS 483, pp. 243-286.
- [ESP et al. 91b] J. Esparza et M. Silva, " *Top-down synthesis of live and bounded free-choice systems*", Proc. of 11th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets, pp. 63-86.
- [ESP et al. 93] J. Espeleta et Martinez, " *Synthesis of live models for a class of FMS*", Proc. of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 557-563.
- [EZP et al. 91] J. Ezpeleta, J.M. Couvreur et M. Silva, " *A new technique for finding a generation family of siphons, traps and st-components, application to colored Petri nets*", Procs. 12th Int. Conf. on Appl. and Theory of Petri Nets, vol. 1, pp. 126-147.
- [GEN et al. 87] J.C. Gentina et D. Corbeel, " *Coloured adaptive structured Petri net : A tool for the Automatic synthesis of Hierarchical control of flexible manufacturing systems*", Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1166-1173.
- [GHA et al. 94a] M.K. Ghabri et P. Ladet, " *Dynamic Petri nets and their applications*", Rensselaer's Fourth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, pp. 93-98..
- [GHA et al. 94b] M. K. Ghabri et P. Ladet, " *Controlled continuous Petri nets*", IEEE International Conference on Robotics and Automation", vol. 1, pp. 788-793.
- [HIL et al. 89] H.P. Hillion et J.M. Proth, " *Performance evaluation to job-shop systems using timed event graphs*", IEEE trans. on Automatic Control, vol. 34, no. 1, pp. 3-9.
- [HIL 89] H.P. Hillion, " *Modélisation et analyse des systèmes de production discrets par les réseaux de Petri temporisés*", Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.
- [JAN et al. 80] M. Jantzen et R. Valk, " *Formal properties of place transition nets*", LNCS n° 84.
- [KAU 70] A. Kaufmann, " *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle - 1 (Les mathématiques de l'entreprise)*", Dunod.

- [KIN et al. 86] M. Kinuyama et T. Murata, "*Generating siphons and traps by Petri net representation of logic equations*", in Procs. 2nd Conf. of the Net Theory SIG-IEICE, pp.93-100.
- [KOH et al. 90] I. Koh et F. DiCesare, "*Transformation methods for generalized Petri nets and their applications to flexible manufacturing systems*", Proc. of the 2th Int. Conf. on CIM, pp. 364-371.
- [KOH et al. 92] I. Koh et F. DiCesare, "*Modular transformation methods for generalized Petri nets and their application to automated manufacturing systems*", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 21, no. 6, pp. 1512-1522.
- [LAF et al. 92] S. Laftit et J.M. Proth et X.L. Xie, "*Optimization of invariant criteria for event graphs*", IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 37, no. 5, pp. 547-555.
- [LAU 87] K. Lautenbach, "*Linear algebraic calculation of deadlocks and traps*", in Coucurrency and Nets - Advances in Petri Nets, New York : Springer - Verlag, pp. 315-336.
- [LAU 86] K. Lautenbach, "*Linear algebraic techniques for place/transitions nets*", Net Theory and Application, LNCS, no. 254, Springer-Verlag, pp. 142-167. .
- [LEE et al. 85] K.H. Lee et J. Favrel, "*Hierarchical reduction method for analysis and decomposition of Petri nets*", IEEE trans. Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-15, no. 2, pp. 272-281.
- [LEE et al. 87] K.H. Lee, J. Favrel et P. Baptiste, "*Generalized Petri net reduction method*", IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, vol. SMC-17, no. 2, pp. 297-303.
- [LUE 73] D. G. Luenberger, "*Introduction to linear and nonlinear programming*", Addison-Wesley Publishing Company.
- [MAR 81] J. Martinez et M. Silva, "*A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net*", Second European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, pp. 411-422.
- [MEH 89] M.L. Mehta, "*Matrix theory (Selected topics and useful results)*", Les Editions de Phisique, Les Ulis.
- [MEM et al. 80] G. Memmi et G. Roucairol, "*Linear algebra in net theory*", LNCS, vol. 84, pp. 213-223.
- [MIN et al. 88] M. Minoux et K. Barkaoui, "*polynomial algorithms for finding deadlocks, traps and other substructures relevant to Petri net analysis*", Internal research report N° 212 of the Laboratoire MASI, Univ. Paris 6.
- [MOL 82] M.K. Molloy, "*Performance analysis using stochastic Petri nets*", IEEE Trans. Computers, vol. C-31, n° 9, pp. 913-917.
- [MOL 85] M.K. Molloy, "*Discrete time stochastic Petri nets*", IEEE Trans. Software Eng., vol. SE-11, n° 4, pp. 417-423.
- [MU et al. 92] D.J. Mu et F. DiCesare, "*A synthesis method for Petri Net Modeling of automated manufacturing systems with shared resources*", Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control, pp. 1184-1189.
- [MUR 77] T. Murata, "*Circuit theoretic analysis and synthesis of marked graphs*", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 24, no. 7, pp. 400-405.

[MUR et al.86] T. Murata, N. Komoda et K. Matsumoto, "*A Petri net based controller for flexible and maintainable sequence control and its applications in factory automation*", IEEE Trans. Ind. Electron., vol. IE-33, pp. 1-8.

[MUR 89] T. Murata, "*Petri nets : properties, analysis and applications*", in Procs. IEEE, vol. 77, no. 4, pp. 541-580.

[MUR et al. 89] T. Murata, S. Boris et S.M. Shatz, "*Detection of Ada static deadlocks using Petri net invariants*", IEEE Trans. on Software Engineering, vol. 15, no. 3, pp.314-326.

[NAR et al. 85a] Y. Narahari et N. Viswanadham, "*On the invariants of coloured Petri nets*", Advance in Petri nets 1985, LNCS 222, Springer-Verlag, pp. 330-345.

[NAR et al 85b] Y. Narahari et N. Viswanadham, "*A Petri net approach to the modelling and analysis of flexible manufacturing systems*", Annals of Operations Research, vol. 3, pp. 449-472.

[OHI et al. 93] H. Ohl, E. Castelain et J. C. Gentina, "*State dependent release control in flexible manufacturing systems*", IEEE-SMC, vol. 1, pp. 295-300.

[OHL et al. 94] H. Ohl, E. Castelain et J. C. Gentina, "*Synchrony theory applied to control problems in flexible manufacturing systems*", IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, vol. 2, pp. 1690-1694.

[PET 81] J.L. Peterson, "*Petri net theory and the modelling of systems*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[PRO et al. 91] J.M. Proth et X.L. Xie, "*A demand-to-manufacturing-requirement model based on predefined Configurations*", European Journal of Operation Research, vol. 53, n° 3, pp. 297-308.

[PRO 92] J.M. Proth, "*Conception et gestion des systèmes de production*", Presses Universitaires de France.

[PRO et al. 93] J.M. Proth et L. Wang et X.L. Xie, "*A class of Petri nets for manufacturing system integration*", Rapport de Recherche de l'INRIA, no. 2055.

[PRO et al. 94] J.M. Proth et X.L. Xie, "*Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*", Masson.

[RAM 74] C. Ramchandani, "Analysis of asynchronous courant systems by timed Petri nets", Ph.D. thesis, MIT, Cambridge Mass.

[REI 82] W. Reisig, "*Petri nets*", Springer-Verlag.

[SIF 87] J. Sifakis, "*Structural properties of Petri nets*", Mathematical Foundations of Computers Science, LNCS, no. 64, Springer-Verlag.

[SIL et al. 85] M. Silva, J. Martinez, P; Ladet et H. Alla, "*Generalized inverses and the calculation of symbolic invariants for coloured Petri nets*", , TSI, vol. 4, n° 1, pp. 113-126.

[SIL et al. 88] M. Silva et J.M. Colom, "*On the computation of structural synchronic invariants in P/T nets*", Advances in Petri Nets '88, LNCS 340, Springer-Verlag, pp. 386-417.

[SIL et al. 89] M. Silva et R. Valette, "*Peri nets and flexible manufacturing*", Advance in Petri Nets 1989, LNCS 424, Springer-Verlag, pp. 374-417.

[SOU 90] Y. Souissi, "*On liveness preservation by composition of nets via a set of places*",

Proc. of the XIth Int. Conf. on application and Theory of Petri Nets, pp. 277-295.

[SUZ et al. 83] I. Suzuki and T. Murata, "*A method for stepwise refinement and abstraction of Petri nets*", Journal of Computer and Systems Sciences, 27(1), pp. 51-76.

[TER et al. 93a] E. Teruel et M. Silva, "*Liveness and home states in equal conflict systems*", In Applications and Theory of Petri Nets 1993, LNCS, Springer-Verlag, pp. 415-432.

[TER et al. 93b] E. Teruel, J.M. Colom et M. Silva, "*Linear analysis of deadlock-freeness of Petri net models*", Proc. of ECC 93, pp.513-518.

[TOU 81] J.M. Toudic, "*Algorithme d'analyse structurelle des réseaux de Petri*", Thèse de 3ème Cycle, Université Paris VI.

[VAL 79] R. Valette, "*Analysis of Petri nets by stepwise refinements*", Journal of Computer and Systems Sciences, vol. 18, pp. 35-46.

[VIS et al. 90] N. Viswanadham, Y. Narahari et T.L. Johnson, "*Deadlock prevention and deadlock avoidance in flexible manufacturing systems using Petri net models*", IEEE Trans on Robotics and Automation, vol. 6, no. 6., pp. 713-723.

[WYS et al. 91] R.A. Wysk, N.S. Yang et S. Joshi, "*Detection of deadlocks in flexible manufacturing cells*", IEEE trans. on Robotics and Automation, vol. 7, no. 6, pp. 853-859.

[XIE 91] X.L. Xie, "*Hierarchical production control of a flexible manufacturing system*", *Applied Stochastic Models and Data Analysis*", vol. 7, n° 4, pp. 343-360.

[XIE 93] X.L. Xie, "*On the impact of randomness in production lines controlled by kanbans*", Proc. of the 2nd European Control Conference (ECC' 93), vol. 1, pp. 158-163.

[XIE 93] X.L. Xie, "*Performance analysis of a transfer line with unreliable machines and finite buffers*", IIE Transactions, vol. 1, n° 25, pp. 99-108.

[ZHO et al. 89a] M.C Zhou, F. DiCesare et A.A. Desrochers, "*A top-down modular approach to synthesis of Petri net models for manufacturing systems*", Proc. of IEEE Robotics and Automation Conf., pp. 534-539.

[ZHO et al 89b] M.C. Zhou et F. DiCesare, "*Adaptive design of Petri net controllers for error recovery in automated manufacturing systems*", IEEE Trans. on Syst. Man : Cybernetics, vol. 19, no° 5, pp. 963-973.

[ZHO et al. 91] M.C. Zhou et F. DiCesare, "*Parallel and sequential mutual exclusion for Petri net modeling of Manufacturing systems with shared resources*", IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 7, no. 4., pp. 515-527.

[ZHO et al. 92] M.C Zhou, F. DiCesare et A.A. Desrochers, "*A hybrid methodology for synthesis of Petri net models for manufacturing systems*", IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 8, no° 3, pp. 350-361.

## CONCEPTION DES SYSTEMES DE PRODUCTION A L'AIDE DE RESEAUX DE PETRI: VERIFICATION INCREMENTALE DES PROPRIETES QUALITATIVES

**Résumé :** Dans ce travail, nous nous intéressons à la conception des systèmes de production à l'aide des réseaux de Petri (RdP). L'objectif est de vérifier les propriétés qualitatives dans un processus de conception incrémentale.

Le bon fonctionnement d'un système en phase opérationnelle nécessite une conception adéquate. Cela exige que le modèle réseaux de Petri possède de bonnes propriétés qualitatives : la consistance, la conservation, la bornitude structurelle, la répétitivité, l'absence de blocage, vivacité, etc.

Nous considérons le processus de conception incrémentale dans lequel la conception se fait étape par étape, ce qui correspond à la réalité industrielle. Chaque étape consiste à ajouter des transitions et/ou des places à un modèle existant, ou à intégrer des modèles existants par fusion de places et/ou de transitions. Nous nous plaçons dans l'optique d'un ingénieur qui conçoit un modèle et qui souhaite savoir, à chaque étape de la conception, si son modèle conserve ou non les propriétés requises. Les résultats rassemblés dans cette thèse fournissent une base théorique pour le développement d'un outil qui va dans ce sens. Grâce aux nouveaux résultats théoriques que nous développons, la vérification des propriétés du modèle peut être effectuée en n'examinant qu'une partie du modèle.

En utilisant des méthodes basées sur l'algèbre linéaire, nous établissons des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour préserver la consistance, la conservation, la bornitude structurelle ou la répétitivité, dans différents cas de figure.

La vérification de l'absence de blocage et de la vivacité est basée sur la méthode de verrous et de trappes. Nous démontrons des théorèmes qui mettent en évidence l'évolution de la base des verrous ou des trappes au cours de la conception incrémentale. Ces résultats nous permettent de développer des algorithmes pour déterminer la base des verrous ou des trappes. Nous définissons la notion de verrou mortel à partir de laquelle nous établissons des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'absence de blocage pour tout réseau ordinaire et de vivacité pour les réseaux asymétriques et les graphes d'événements augmentés de places de ressources partagées. Nous développons un algorithme de programmation linéaire pour vérifier l'absence de verrous mortels.

**Mots clés :** Systèmes de production, Réseaux de Petri, Conception, Propriétés qualitatives, Consistance, Conservation, Bornitude structurelle, Répétitivité, Blocage, Vivacité.

## DESIGN OF MANUFACTURING SYSTEMS BASED ON PETRI NETS: INCREMENTAL VERIFICATION OF QUALITATIVE PROPERTIES

**Abstract.** In this work, we are interested in the production systems design based on Petri nets. The objective is to check the qualitative properties of the system in a step by step design process.

An efficient behavior of a system needs an appropriate design. Thus, the Petri net model of the system should possess desirable qualitative properties, namely : consistency, conservativeness, structural boundedness, repetitiveness, deadlock-freeness and liveness, and so on.

We consider a step by step design process which corresponds to a real life situation. The action taken at each step consists of adding places and/or transitions to an existing model, or of integrating several existing models by merging places and/or transitions. We examine the problem from the point of view of an engineer who designs a model and who wants to know, at each step of the design process, if his model preserves the required properties. The results presented in this thesis provide a theoretical basis for the development of a tool devoted to this kind of tests. The theoretical results presented in this work allow to perform these checkings by only considering a part of the whole model.

Using linear algebraic methods, we propose necessary and/or sufficient conditions to preserve consistency, conservativeness, structural boundedness and repetitiveness.

Deadlock-freeness and liveness are checked using siphons and traps. We prove theorems that give the evolution of the siphon and trap bases from step to step in the design process. These results allow to develop algorithms to find out the siphon and trap bases. We define the notion of fatal siphon from which we establish necessary and/or sufficient conditions for the deadlock-freeness of any ordinary Petri nets and the liveness of asymmetric nets and event graphs with shared resource places. We show that the absence of fatal siphons can be checked out by a linear program.

**Keywords.** Manufacturing systems, Petri nets, Design, Qualitative properties, Consistency, Conservativeness, Structural boundedness, Repetitiveness, Deadlock, Liveness.

