Centre d'Analyse Non Linéaire
Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du doctorat de l'Université de Metz en Mathématiques

mention : Mathématiques appliquées,
par Mr François-Xavier VOIROL.

Titre de la thèse :

ETUDES DE QUELQUES EQUATIONS ELLIPTIQUES FORTEMENT NON LINEAIRES

Soutenue le 28 Novembre 1994 devant le jury composé de:

B. BRIGHI, maître de conférence à l'Université de Metz.
M. CHIPOT, professeur à l'Université de Metz.
A. HENROT, professeur à l'Université de Franche-Comté. Rapporteur.
I. SHAFRIR, professeur à l'Université de Metz.
F. B. WEISSLER, professeur à l'Université de Paris 13. Rapporteur.

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du

doctorat de l'Université de Metz

en Mathématiques

mention : Mathématiques appliquées,

par Mr **François-Xavier VOIROL.**

Titre de la thèse :

ETUDES DE QUELQUES EQUATIONS ELLIPTIQUES FORTEMENT NON LINEAIRES

Soutenue le 28 Novembre 1994 devant le jury composé de:

B. BRIGHI, maître de conférence à l'Université de Metz.

M. CHIPOT, professeur à l'Université de Metz.

A. HENROT, professeur à l'Université de Franche-Comté, Rapporteur

I. SHAFRIR, professeur à l'Université de Metz.

F. B. WEISSLER, professeur à l'Université de Paris, Rapporteur.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude envers M. Chipot qui m'a confié le sujet de ce travail, il a su ensuite me guider et m'encourager patiemment.

Je voudrais aussi remercier F.B. Weissler et A. Henrot qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que I.Shafrir et B. Brighi pour avoir accepté de participer à ce jury.

A la mémoire de mon père,
à ma mère,
à mon épouse,
et à mes enfants.

RESUME

Cette thèse comporte deux parties indépendantes.

La partie A étudie l'existence de solutions u du problème

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} \Delta u - |\nabla u|^q + \lambda |u|^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $p > 1$, $q > 1$ et $\lambda > 0$. Le cas d'un ouvert quelconque est envisagé, mais les principaux résultats sont obtenus dans le cas d'une boule de $\mathbf{R}^n$.

La partie B concerne la recherche de solutions positives du problème

$$\begin{cases} \Delta u = au^p & \text{sur} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u^q & \text{sur} \quad \Gamma_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $a > 0$, $p > 1$, ,$q > 1$; Γ_0 et Γ_1 formant un recouvrement de la frontière Γ de l'ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$. n est le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur.

TABLE DES MATIERES

PARTIE A

ETUDE D'UNE EQUATION ELLIPTIQUE SEMI-LINEAIRE AVEC UN TERME GRADIENT

CHAPITRE IV

NOUVEAUX RESULTATS DANS LE CAS $q = \dfrac{2p}{p+1}$

CHAPITRE V

UN RESULTAT SURPRENANT LORSQUE $p \geq \dfrac{n+2}{n-2}$

CHAPITRE VI

EXISTENCE DANS LE CAS D'UN OUVERT QUELCONQUE

PARTIE B

ON A CLASS OF NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS GROWING LIKE A POWER

INTRODUCTION DE LA PARTIE A

Le problème étudié dans cette partie est issu de l'article de M. Chipot et F. Weissler [CW] où l'on considère le problème parabolique

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - |\nabla u|^q + |u|^{p-1}u, & t > 0, \quad x \in \Omega \\ u(t,\ y) = 0, \quad t > 0, \quad y \in \Gamma \\ u(0,\ x) = \Phi(x) \quad x \in \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert borné de frontière régulière Γ et p et q sont des réels qui vérifient $p > 1,\ q > 1$.

De façon générale nous nous intéresserons ici à l'existence et au nombre de solutions du problème stationnaire

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} \Delta u - |\nabla u|^q + \lambda |u|^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Des résultats concernant ce problème ont été donnés par P. Quittner dans [Q2]. Il établit les résultats suivants:

Théorème. *1) Si $q \geq p$, il existe un réel $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (P_λ)*

a) n'a pas de solution si $\lambda < \lambda_0$,

b) a au moins une solution si $\lambda = \lambda_0$,

c) a au moins deux solutions si $\lambda > \lambda_0$.

2) Si $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ (dans le cas où $n > 2$) et $q < \min\{2,\ \dfrac{n+2}{n}\}$, il existe un réel $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (P_λ) a au moins une solution si $\lambda > \lambda_0$.

On peut remarquer que dans le cas $q \geq p$ la condition $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ qui joue un rôle dans le problème sans le terme gradient n'intervient plus ici (voir par exemple [FLN]).

En utilisant la théorie du degré de Leray-Schauder, nous obtenons le résultat suivant dans le chapitre VI

Théorème VI.2. *Soit $p > 1$, $q > 1$. Supposons d'autre part que $n \leq 2$ ou que $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n+2}{n-2}$. Il existe alors $\lambda_0 > 0$ tel que, si $\lambda \geq \lambda_0$, le problème (P_λ) admet au moins une solution dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

La majeure partie de cette étude est cependant consacrée au cas particulier où Ω est une boule de $\mathbf{R}^n$ de rayon R. La technique de Gidas, Ni et Nirenberg (voir [GNN]) montre que dans ce cas les solutions de (P_λ) sont radiales; aussi sommes nous amenés à étudier le problème suivant

$$(P_R) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{pour } 0 < r \leq R \\ u > 0 & \text{sur } [0;\ R[\\ u'\ (0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

où u est une fonction de $C^2([0;\ R])$

Rappelons en premier que le problème similaire à (P_R), mais sans le terme correspondant au gradient

$$(P'_R) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{pour } 0 < r \leq R \\ u > 0 & \text{sur } [0;\ R[\\ u'\ (0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

a une unique solution lorsque $n \leq 2$ ou lorsque $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n+2}{n-2}$. Si par contre on suppose $n \geq 3$ et $p \geq \dfrac{n+2}{n-2}$, (P'_R) n'a pas de solution. On trouve une démonstration de ce résultat dans l'article de A. Haraux et F. B. Weissler [HW]. On peut cependant le retrouver en utilisant la transformation utilisée dans le chapitre IV de cette thèse.

En ce qui concerne le problème (P_R), la principale méthode utilisée dans [CW] consiste à étudier les solutions de

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{pour } r > 0 \\ u(0) = a & \text{où } a > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

en faisant varier a.

Rappelons ici quelques résultats établis dans [CW] et qui seront cités soit parce qu'ils seront utilisés par la suite, soit parce qu'ils situent les différents cas qu'il restait à étudier.

Dans ce qui suit la numérotation des propositions et lemmes correspond à celle de [CW].

La proposition 4.4 précise le comportement d'une solution u de (P_a).

Proposition 4.4. *Pour tout $a > 0$ il existe une unique solution maximale de (P_a), u appartenant à $C^2([0;\ R_a[)$.*

De plus
1) $u' < 0$ sur $]0;\ R_a[$;
2) si $u > 0$ sur $[0;\ R_a[$ alors $R_a = +\infty$ et $\lim_{r\to+\infty} u(r) = \lim_{r\to+\infty} u'(r) = \lim_{r\to+\infty} u''(r) = 0$.

Comme dans [CW], nous appelerons $z(a)$ le premier zéro, s'il existe, de la solution u de (P_a), et si $u > 0$ sur $[0;\ +\infty[$ nous poserons $z(a) = +\infty$. On a alors la proposition 4.5 de [CW] qui donne les premiers renseignements sur la fonction z

Proposition 4.5. *L'ensemble $\{a > 0 :\ z(a) < +\infty\}$ est ouvert et z est continue sur cet ensemble; de plus $\lim_{a\to 0} z(a) = +\infty$.*

Le fait que $\lim_{a\to 0} z(a) = +\infty$ est démontré à partir d'une majoration de $|u'(r)|$: si $0 \le r \le z(a)$ alors
$$|u'(r)| \le \sqrt{2\lambda/(p+1)}\, a^{(p+1)/2}.$$

Les résultats qui suivent sont alors établis en dimension $n \le 2$ ou en dimension $n \ge 3$ lorsque $p < \dfrac{n+2}{n-2}$. Ils concernent successivement les valeurs de p et q pour lesquelles $q < \dfrac{2p}{p+1}$; $q = \dfrac{2p}{p+1}$ et $q \ge p$. La condition $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ provient de ce que le problème sans terme gradient

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda |u|^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

n'a pas de solution lorsque $p \ge \dfrac{n+2}{n-2}$. Nous verrons qu'en fait et, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le problème avec gradient peut avoir des solutions lorsque $p \ge \dfrac{n+2}{n-2}$.

A) Tout d'abord le cas où $q < \dfrac{2p}{p+1}$

Proposition 4.6. *Si $q < \dfrac{2p}{p+1}$ alors, pour tout $\lambda > 0$, on a $\limsup_{a\to+\infty} a^{\frac{p-1}{2}} z(a) < +\infty$ et $\lim_{a\to+\infty} z(a) = +\infty$.*

Ce résultat est obtenu en constatant que, si u est solution de (P_a), la fonction v_a définie par $v_a(r) = \dfrac{1}{a}\, u\Big(r\, a^{-\frac{p-1}{2}}\Big)$ vérifie

$$(2) \qquad v_a'' + \frac{n-1}{r} v_a' - a^{\frac{q(p+1)}{2} - p} |v_a'|^q + \lambda |v_a|^p = 0$$

ainsi que $v_a(0) = 1$ et $v_a'(0) = 0$. On compare alors, lorsque $a \to +\infty$, v_a avec la solution w de

$$(3) \qquad \begin{cases} w'' + \frac{n-1}{r} w' + \lambda |w|^p = 0 \\ w(0) = 1 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

Les propositions 4.5 et 4.6 permettent de conclure que si $q < \dfrac{2p}{p+1}$ le problème (P_R) a, quel que soit $R > 0$, au moins une solution. Le **corollaire 5.10** de [CW] démontre même que *si, de plus, $n = 1$ la solution est unique.*

B) En ce qui concerne le cas $q = \dfrac{2p}{p+1}$ l'égalité (2) permet de montrer le lemme suivant:

Lemme 4.7. *Si $q = \dfrac{2p}{p+1}$ alors, pour tout $a > 0$, $z(a) = a^{-\frac{p-1}{2}} z(1)$.*

Ceci montre que si $z(1)$ est fini alors $z(a)$ est fini quel que soit a et z définit une bijection strictement décroissante de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

Lorsque $n = 1$ intervient alors la valeur $\lambda_{p,\,1}$:

$$\lambda_{p,\,1} = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2p}{(p+1)^2}\right)^p.$$

En effet l'équation

$$(4) \qquad u'' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0$$

admet deux solutions du type

$$u(r) = k r^{-\frac{2}{p-1}}$$

lorsque $\lambda < \lambda_{p,\,1}$, une seule lorsque $\lambda = \lambda_{p,\,1}$ et aucune si $\lambda > \lambda_{p,\,1}$. L'équation (4) étant autonome, une application du théorème de Cauchy montre alors que si $\lambda \leq \lambda_{p,\,1}$ une solution u de (P_a) est strictement positive sur $[0; +\infty[$ (voir figure 1).

D'autre part, le **théorème 1.3** de [CW] montre que *si $\lambda > \lambda_{p,\,1}$ alors $z(a)$ est fini quel que soit $a > 0$.* Il en résulte que si $q = \dfrac{2p}{p+1}$ le problème (P_R) a une solution unique lorsque $\lambda > \lambda_{p,\,1}$ et aucune solution si $\lambda \leq \lambda_{p,\,1}$.

Lorsque $q = \dfrac{2p}{p+1}$ et $n > 1$ l'équation

$$(5) \qquad u'' + \frac{n-1}{r} u' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0$$

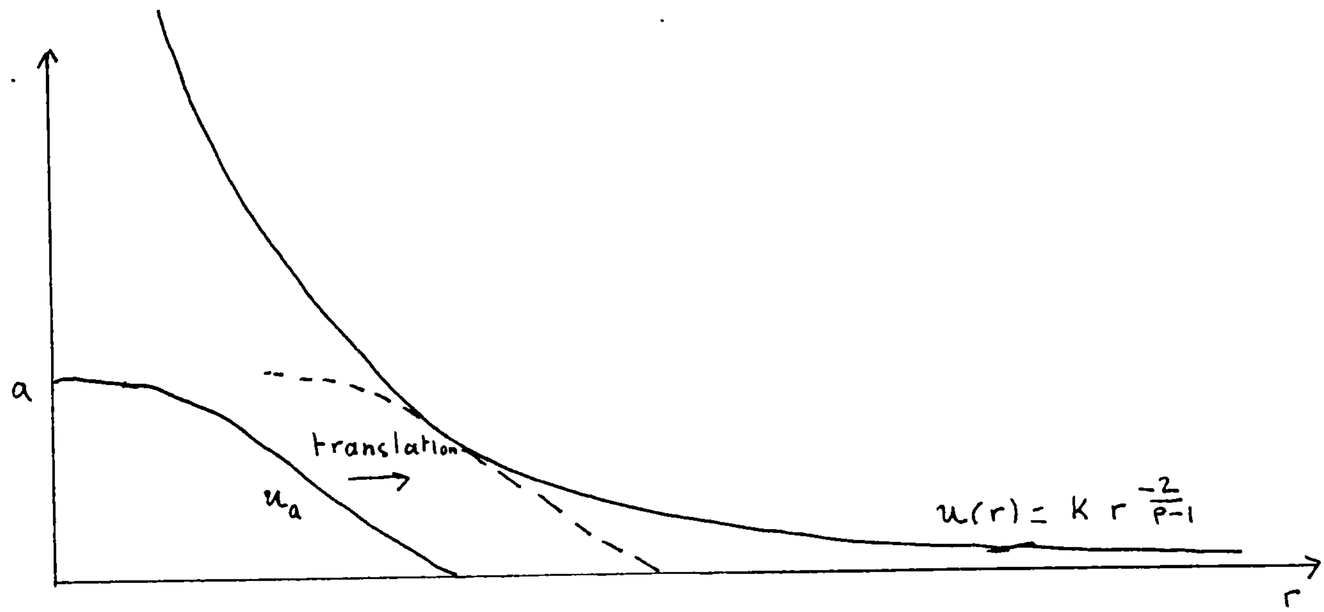


Figure 1

a des solutions de la forme

$$u(r) = kr^{-\frac{2}{p-1}}$$

si et seulement si $\lambda \leq \lambda_{p,\ n}$ où

$$\lambda_{n,p} = \frac{(2p)^p}{(p+1)^{p+1}(2p - np + n)^p}$$

La question se pose alors de savoir si lorsque $n \geq 2$ la valeur $\lambda_{p,\ n}$ est, de même que pour $n = 1$, la valeur critique pour laquelle le comportement de z change. La proposition 5.6 montre seulement que si $\lambda \leq \lambda_{p,\ 1}$ alors $z(a) = +\infty$ ($\lambda_{p,\ 1} < \lambda_{p,\ n}$).

Un article ultérieur de M. Fila et P. Quittner, [FQ] montre que si $\lambda > \lambda_{p,\ n}$ alors $z(a)$ est fini, le cas où $\lambda = \lambda_{p,\ n}$ n'étant pas encore éclairci.

Nous montrons dans le chapitre IV qu'en fait cette valeur $\lambda_{p,\ n}$ ne détermine pas le changement de comportement de z. Plus précisément

Théorème IV.1. *Soit* $q = \dfrac{2p}{p+1}$ *et*

A) $n = 2$

ou

B) $n \geq 3$ *et* $p < \frac{n}{n-2}$.

Soit u solution de

$$(IV.2) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 & si\ r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Il existe alors un réel $\lambda'_{n,\ p}$, $\lambda'_{n,\ p} < \lambda_{n,\ p}$ tel que, quel que soit λ, $\lambda > \lambda'_{n,\ p}$, $z(a)$ est fini.

Remarquons que le problème de l'existence d'une valeur critique pour λ et de sa valeur éventuelle n'est pas encore résolu.

C) Lorsque $q > \dfrac{2p}{p+1}$ et si $n \leq 2$ ou si $n \geq 3$ et $p < \frac{n+2}{n-2}$ la relation (2) permet de démontrer le lemme suivant de [CW]:

Lemme 5.2. $\limsup\limits_{a \to +\infty} a^{\frac{p-1}{2}}\ z(a) < +\infty$ *et si a est suffisament petit $z(a)$ est fini.*

De plus le **lemme 5.1** de [CW] montre que $z(a) \geq \lambda^{-\frac{1}{q}}\ a^{1-\frac{p}{q}}$ et donc que, si $q > p$, $\lim_{a \to +\infty} z(a) = +\infty$ et si $q = p$ $\liminf\limits_{a \to +\infty}\ z(a) \geq \lambda^{-\frac{1}{q}}$.

De ces lemmes 5.1 et 5.2 on peut déduire que

1) *si $q = p$ il existe un réel R_0 tel que (P_R) a au moins une solution si $R \geq R_0$ et aucune si $R < R_0$;*

2) *si $q > p$ il existe un réel R_0 tel que (P_R) a au moins deux solutions si $R > R_0$; au moins une si $R = R_0$ et aucune si $R < R_0$.*

On voit donc que le cas restant principalement à éclaircir est celui où $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$. Ceci occupe les chapitres II et III du présent travail.

Dans le chapitre II, nous nous intéressons au cas $n = 1$ et nous démontrons les résultats suivants:

Théorème II.3. *Soit $\dfrac{2p}{p+1} < q \leq p$ et u_a solution du problème (P_a).Pour tout $a > 0$, u_a s'annule en un point $z(a)$ et il existe $R_0 > 0$ indépendant de a tel que $z(a) > R_0$. De plus*

1) si $q = p$, $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a) = +\infty$;

2) si $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$, $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a)$ est un réel .

Théorème II.4. *1) Si $q = p$ il existe un réel $R_0 > 0$ tel que*

a) si $R < R_0$, (P_R) n'a pas de solution;

b) si $R = R_0$, (P_R) a au moins une solution;

c) si $R > R_0$, (P_R) a au moins deux solutions.

2) Si $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$, il existe des réels R_0 et R_1, $0 < R_0 < R_1$ tels que

a) si $R < R_0$, (P_R) n'a pas de solution;

b) si $R_0 \leq R \leq R_1$, (P_R) a au moins une solution;

c) si $R > R_1$, (P_R) a exactement une solution.

Dans le chapitre III, nous traitons le cas où $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$ avec soit $n = 2$, soit $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n}{n-2}$ et nous démontrons principalement les théorèmes suivants:

Théorème III.1. *Soit $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$ avec $n = 2$ ou $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n}{n-2}$. Toute solution u_a de (P_a) s'annule en un point et si $z(a)$ désigne le premier zéro de u_a il existe des réels α et β , $0 < \beta < \alpha$ tels que*

$$\limsup_{a \to +\infty} z(a) = \alpha \ \textit{et} \ \liminf_{a \to +\infty} z(a) = \beta.$$

Théorème III.2. *Il existe des réels R_0 et R_1, $0 < R_0 < R_1$ tels que sur une boule de rayon R le problème (P_R)*

a) n'a pas de solution si $R < R_0$;

b) a au moins une solution si $R_0 \leq R \leq R_1$;

c) a une solution unique si $R > R_1$.

On voit donc qu'il reste à traiter le cas où

$$\frac{2p}{p+1} < q < p, \ n \geq 3 \text{ et } \frac{n}{n-2} \leq p < \frac{n+2}{n-2}$$

Un article récent de J. Serrin, Y. Yan et H. Zou [SYZ] donne des résultats numériques obtenus sur ordinateur qui montrent l'apparition de nouveaux comportements pour l'application z lorsque ces dernières conditions sont remplies.

Enfin dans le cas $q > p$ nous obtenons le résultat suivant sans supposer la condition $p < \dfrac{n+2}{n-2}$.

Théoreme V.1.. *a) Si $q > p > 1$, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour toute solution u_a de (P_a), $a > A$ implique $z(a) < +\infty$.*

b) Il existe un réel $R_0 > 0$ tel que si $R > R_0$ le problème

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{(n-1)}{r} u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda u(r)^p = 0 & \textit{si } r > 0 \\ u > 0 & \textit{sur } [0;\ R[\\ u'(0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

a au moins deux solutions.

CHAPITRE I

PROPRIETES GENERALES

Nous démontrons dans ce chapitre quelques résultats qui seront utilisés par la suite.

I.1) CONTINUITE ET DIFFERENTIABILITE DE u PAR RAPPORT AUX PARAMETRES

Considérons le problème

$$(P_{a,\ \lambda,\ \mu}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - \mu|u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{pour } r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

avec $a > 0$; $\lambda > 0$; $\mu > 0$.

D'après [CW] on sait qu'il admet une solution que nous noterons $u_{a,\ \lambda,\ \mu}$. Soit $[0;\ d_{a,\ \lambda,\ \mu}[$ l'intervalle maximal sur lequel elle est définie et $[0;\ z(a,\ \lambda,\ \mu)[$ celui sur lequel $u_{a,\ \lambda,\ \mu} > 0$. Dans la suite, a_0, λ_0, μ_0 étant fixés et $\alpha > 0$ on posera

$$\mathcal{I}_\alpha =]a_0 - \alpha;\ a_0 + \alpha[\times]\lambda_0 - \alpha;\ \lambda_0 + \alpha[\times]\mu_0 - \alpha;\ \mu_0 + \alpha[$$

On a alors les deux théorèmes suivants qui seront utilisés plus loin.

Théorème I.1. *Soit $u_{a_0,\ \lambda_0,\ \mu_0}$ solution de $(P_{a_0,\ \lambda_0,\ \mu_0})$ et R. $0 < R < d_{a_0,\ \lambda_0,\ \mu_0}$. Il existe $\alpha > 0$ tel que si $(a,\ \lambda,\ \mu)$ appartient à $\mathcal{I}_\alpha$, alors $u_{a,\ \lambda,\ \mu}$ est définie sur $[0;\ R]$ et l' application définie sur $\mathcal{I}_\alpha \times [0;\ R]$ qui à $(a,\ \lambda,\ \mu,\ r)$ associe $u_{a,\ \lambda,\ \mu}(r)$ est continuement différentiable sur cet ensemble .*

Théorème I.2. *Avec les notations qui précèdent, soit $(a_0,\ \lambda_0,\ \mu_0)$ tel que $z(a_0,\ \lambda_0,\ \mu_0)$ est fini. Il existe un réel $\alpha' > 0$ tel que si $(a,\ \lambda,\ \mu)$ appartient à $\mathcal{I}_{\alpha'}$, alors $z(a,\ \lambda,\ \mu)$ est fini et z est continuement différentiable sur $\mathcal{I}_{\alpha'}$.*

En ce qui concerne le théorème I.1 de continuité et de différentiabilité seul le terme $\dfrac{n-1}{r}u'(r)$ empêche d'appliquer les résultats habituels. Aussi pour montrer la continuité (respectivement la différentiabilité) de l'application qui à $(a,\ \lambda,\ \mu,\ r)$ associe $u_{a,\ \lambda,\ \mu}(r)$ on doit procéder en deux étapes. Tout d'abord on montre qu'il existe un réel $R_1 > 0$ tel que sur $\mathcal{I}_\alpha \times [0;\ R_1]$ elle est continue (resp. différentiable) puis on applique les théorèmes classiques de continuité et de différentiabilité par rapport à des paramètres et à la valeur initiale.

Tant pour la continuité que pour la différentiabilité, nous ne traiterons que la première étape qui utilise le théorème de point fixe avec paramètres cité plus loin et le lemme I.3 qui en résulte.

On voit que la solution de $(P_{a,\ \lambda,\ \mu})$ vérifie

$$(I.1) \qquad \begin{cases} u(r) = a + \int_0^r v(s)ds \\ v(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1}\Big(\mu|v(s)|^q - \lambda|u(s)|^p\Big)ds \end{cases}$$

avec $u' = v$. C'est cette transformation que nous utiliserons pour la démonstration.

Lemme I.3. *Soit A une application de $\mathbf{R}^{k+3}$ dans $\mathbf{R}$ qui à $(\pi,\ x,\ y,\ s) = (\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_k,\ x,\ y,\ s)$ associe $A(\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_k,\ x,\ y,\ s)$, continue et localement lipschitzienne par rapport à x et y. Considérons le problème*

$$(P_{\pi,a}) \qquad \begin{cases} u''(r) + \dfrac{n-1}{r}u'(r) + A\big(\pi,\ u(r),\ u'(r),\ r\big) = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Soit π_0 et a_0 fixés; il existe alors des réels α et R_1 tels que si $\|\pi - \pi_0\| \leq \alpha$ et $|a - a_0| \leq \alpha$ le problème $(P_{\pi,\ a})$ a sur l'intervalle $[0;\ R_1]$ une solution unique notée $u_{\pi,\ a}$ et l'application définie sur $\mathcal{I}_\alpha \times [0;\ R_1]$ qui à $(\pi,\ a,\ r)$ associe $u_{\pi,\ a}(r)$ est continue ($\mathcal{I}_\alpha = \big\{(\pi;\ a)$ tels que $\|\pi - \bar{\pi}\| \leq \alpha$ et $|a - a_0| \leq \alpha\big\}$).

Enonçons tout d'abord le théorème de point fixe avec paramètres (Cf Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 1) que nous utiliserons dans la démonstration du lemme I.3 qui suit.

Théorème de point fixe avec paramètres. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ deux espaces de Banach, P_0 et E_0 deux boules de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ de centres p_0 et e_0, de rayons respectifs α et β ($\mathcal{P}$ est l'espace des paramètres). Soit φ une application continue de $P_0 \times E_0$ dans $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions suivantes*

1) il existe un réel k, $0 < k < 1$ tel que pour tout p de P_0, e et e' de E_0 on ait

$$\|\varphi(p,\ e) - \varphi(p,\ e')\|_{\mathcal{E}} \leq k\ \|e - e'\|_{\mathcal{E}}$$

2) $\|\varphi(p,\ e_0) - e_0\|_{\mathcal{E}} < \beta\ (1 - k)$.

Alors il existe une application unique $f : P_0 \to E_0$ telle que pour tout p de P_0 on ait $\varphi\Big(p,\ f(p)\Big) = f(p)$, et de plus f est continue.

Démonstration du lemme I.3. Considérons

$$(I.2) \qquad \begin{cases} u(r) = a + \displaystyle\int_0^r v(s)ds \\ v(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r -s^{n-1} A(\pi,\ u(s),\ v(s),\ s) ds \end{cases}$$

On voit que $u_{\pi,\ a}$ est solution de $(I.2)$ et que $u'_{\pi,\ a} = v$. Définissons les ensembles et l'application φ intervenant dans le théorème de point fixe.

a) $\mathcal{P} = \mathbf{R}^{k+1}$, $p = (\pi,\ a)$ et $\|(\pi,\ a)\| = \sup\{|\pi_1|,\ |\pi_2|,\ \ldots,\ |\pi_k|,\ |a|\}$; P_0 est la boule ouverte de $\mathcal{P}$ de centre $(\pi_0,\ a_0)$ de rayon $\alpha > 0$ (on a donc $P_0 = \mathcal{I}_\alpha$).

b) $\mathcal{U}$ est l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[0;\ R_1]$ et $\|u\|_{\mathcal{U}} = \sup\limits_{0 \leq r \leq R_1} |u(r)|$

$\mathcal{E} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$; $\|(u,\ v)\|_{\mathcal{E}} = \sup\{\|u\|_{\mathcal{U}},\ \|v\|_{\mathcal{U}}\}$ et E_0 est la boule de centre $e_0 = (X_0,\ Y_0)$ de rayon $\beta = 2\alpha$ où X_0 et $Y_0 : [0;\ R_1] \to \mathbf{R}$ sont définies par $X_0(r) = a_0$, $Y_0(r) = 0$.

c) Définissons $\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2) : P_0 \times E_0 \to \mathcal{E}$ par

$$(I.3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) = a + \int_0^r Y(s)ds \\ \varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r -s^{n-1} A(\pi,\ X(s),\ Y(s),\ s) ds \end{cases}$$

Montrons que φ_1 et φ_2 et donc φ sont continues.

Quels que soient $(\pi,\ a,\ X,\ Y)$ et $(\pi',\ a',\ X',\ Y')$ de $P_0 \times E_0$ on a

$$\left|\varphi_1(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_1(\pi',\ a',\ X',\ Y')(r)\right| \leq |a - a'| + R_1\ \|Y - Y'\|_{\mathcal{U}}$$

donc

$$\left\|\varphi_1(\pi,\ a,\ X,\ Y) - \varphi_1(\pi',\ a',\ X',\ Y')\right\| \leq |a - a'| + R_1 \|(X,\ Y) - (X',\ Y')\|_{\mathcal{E}} \qquad (I.4)$$

d'après la définition de la norme dans $\mathcal{E}$.

Quels que soient $(\pi,\ a,\ X,\ Y)$ et $(\pi',\ a',\ X',\ Y')$ de $P_0 \times E_0$ on a

$$\begin{aligned} &\left|\varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_2(\pi',\ a',\ X',\ Y')(r)\right| \\ &\qquad \leq \left|\varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_2(\pi,\ a,\ X',\ Y')(r)\right| \\ &\qquad + \left|\varphi_2(\pi,\ a,\ X',\ Y')(r) - \varphi_2(\pi',\ a',\ X',\ Y')(r)\right| \end{aligned}$$

$$\leq \left|\frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r -s^{n-1}\Big(A(\pi,\ a,\ X(s),\ Y(s),\ s) - A(\pi,\ a,\ X'(s),\ Y'(s),\ s)\ \Big)ds\right|$$
$$+ \left|\frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r -s^{n-1}\Big(A(\pi,\ a,\ X'(s),\ Y'(s),\ s) - A(\pi',\ a',\ X'(s),\ Y'(s),\ s)\ \Big)ds\right|$$

L'application A étant continue sur $\mathbf{R}^{k+3}$ l'ensemble d'applications $A_{x,\ y}$ où $|x| < |a_0| + \beta,\ |y| < \beta$ est uniformément équicontinu sur

$$\mathcal{I}_\alpha \times [0;\ R_1] = \{(\pi,\ a,\ s) \text{ tels que } \|\pi - \pi_0\| < \alpha,\ |a - a_0| < \alpha \text{ et } s \in [0;\ R_1]$$

Donc si $\sigma > 0$ est fixé il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple $(x,\ y)$ tel que $|x| < |a_0| + \beta,\ |y| < \beta$, les inégalités $\|\pi - \pi'\| < \eta$ et $|a - a'| < \eta$ impliquent $\big|A_{x,\ y}(\pi,\ a,\ s) - A_{x,\ y}(\pi',\ a',\ s))\big| < \sigma$. On en déduit que dans ces conditions

$$\left|\frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r -s^{n-1}\Big(A(\pi,\ a,\ X'(s),\ Y'(s),\ s) - A(\pi',\ a',\ X'(s),\ Y'(s),\ s)\Big)ds\right| \leq \sigma\frac{R_1}{n} \quad (I.5)$$

D'autre part A est localement lipschitzienne par rapport à x et y donc il existe $K > 0$ tel que $(\pi,\ a)$ appartient à P_0,s à $[0;\ R_1]$ et $(X,\ Y)$ à E_0 implique

$$\big|A(\pi,\ a,\ X(s),\ Y(s),\ s) - A(\pi,\ a,\ X'(s),\ Y'(s),\ s)\big| \leq K\big\|(X,\ Y) - (X',\ Y')\big\|_{\mathcal{E}}$$

Finalement on en déduit

$$(I.6)\quad \big|\varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_2(\pi',\ a',\ X',\ Y')(r)\big| \leq \frac{R_1}{n}\Big(\sigma + K\big\|(X,\ Y) - (X',\ Y')\big\|_{\mathcal{E}}\Big)$$

Ceci démontre la continuité de φ.

Montrons maintenant que les conditions 1) et 2) avec $k = \dfrac{1}{2}$ du théorème de point fixe sont vérifiées pour

$$R_1 < \inf\left\{\frac{n\beta}{2\big|A(\pi,\ a,\ a,\ 0)\big|},\ \frac{n}{2K},\ \frac{1}{2}\right\} \quad (I.7)$$

. Cherchons tout d'abord une valeur de R_1 pour laquelle la condition 1) est réalisée.

De l'inégalité (I.4) on déduit pour $\pi = \pi'$ et $a = a'$

$$\Big\|\varphi_1(\pi, a,\ X,\ Y) - \varphi_1(\pi,\ a,\ X',\ Y')\Big\| \leq R_1\ \|(X,\ Y) - (X',\ Y')\|_{\mathcal{E}}$$

donc, si $R \leq \dfrac{1}{2}$,

$$\Big\|\varphi_1(\pi,\ a,\ X,\ Y) - \varphi_1(\pi,\ a,\ X',\ Y') \leq \frac{1}{2}\big\|(X,\ Y) - (X',\ Y')\big\|_{\mathcal{E}}$$

Les inégalités (I.5) et (I.6) donnent pour $\pi = \pi'$ et $a = a'$

$$\big|\varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_2(\pi,\ a,\ X',\ Y')\big| \leq \frac{R_1}{n}K\big\|(X,\ Y) - (X',\ Y')\big\|_{\mathcal{E}}$$

puisque l'intégrale de (I.5) est nulle.

En prenant $R_1 < \dfrac{n}{2K}$ on obtient donc

$$\left|\varphi_2(\pi,\ a,\ X,\ Y)(r) - \varphi_2(\pi,\ a,\ X',\ Y')\right| \leq \frac{1}{2}\left\|(X,\ Y) - (X',\ Y')\right\|_{\mathcal{E}}$$

Pour que la condition 1) soit vérifiée il suffit donc que

$$R_1 < \inf\left\{\frac{n}{2K},\ \frac{1}{2}\right\}$$

Etudions maintenant $\left\|\varphi(p,\ e_0) - e_0\right\|$ lorsque $(\pi,\ a)$ appartient à $\mathcal{I}_\alpha = P_0$.

Rappelons que quel que soit $r \in [0;\ R_1]$ on a $X_0(r) = a_0$ et $Y_0(r) = 0$ et que E_0 est la boule ouverte de $\mathcal{E}$ de centre $(X_0,\ Y_0)$, de rayon $\beta = 2\alpha$. Tout d'abord $Y_0 = 0$ donc $\varphi_1(\pi,\ a,\ X_0,\ Y_0) = a + \displaystyle\int_0^r Y(s)ds = a$ et $\left\|\varphi_1(\pi,\ a,\ X_0,\ Y_0) - X_0\right\| = |a - a_0| < \dfrac{\beta}{2}$ puisque $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

Ensuite

$$\begin{aligned}\varphi_2(\pi,\ a,\ X_0,\ Y_0)(r) - Y_0(r) =& \varphi_2(\pi,\ a,\ X_0,\ Y_0)(r)\\ =& \frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r -s^{n-1}A(\pi,\ a,\ a,\ 0)ds\end{aligned}$$

puisque, pour tout s de $[0;\ R_1]$, $X_0(s) = a$ et $Y_0(s) = 0$.

On en déduit que $\left\|\varphi_2(\pi,\ a,\ X_0,\ Y_0) - Y_0\right\| \leq \dfrac{R_1}{n}\left|A(\pi,\ a,\ a,\ 0)\right|$ et la condition 2) du théorème de point fixe est vérifiée si $\dfrac{R_1}{n}\left|A(\pi,\ a,\ a,\ 0)\right| < \beta\dfrac{1}{2}$ soit si

$$R_1 < \frac{n\beta}{2\left|A(\pi,\ a,\ a,\ 0)\right|}$$

Ceci conduit à l'inégalité (I.7) ci-dessus.

Démonstration du théorème I.1. Examinons la continuité; elle résulte directement du lemme I.3 car (I.1) et (I.2) amènent à prendre

$$A : (\lambda,\ \mu,\ x,\ y) \mapsto \lambda|x|^p - \mu|y|^q$$

On voit que A est continue sur $\mathbf{R}^4$. D'autre part elle est localement lipschitzienne par rapport à x et y en effet supposons $|x\ | \leq \beta$, $|y| \leq \beta$, $|\lambda| \leq \beta$, $|\mu| \leq \beta$ on a alors

$$\begin{aligned}\left|A(\lambda,\ \mu,\ x,\ y) - A(\lambda,\ \mu,\ x,\ y)\right| &= \left|\lambda\Big(|x|^p - |x'|^p\Big) - \mu\Big(|y|^q - |y'|^q\Big)\right|\\ &\leq |\lambda\ \left|\left|x|^p - |x'|^p\right| \ -\ |\mu|\ \left||y|^q - |y'|^q\right|\\ &\leq \beta\ p\ \beta^{p-1}|x - x'| + \beta\ q\ \beta^{q-1}|y - y'|\end{aligned}$$

Etudions maintenant la différentiabilité.

D'après ce qui précède u et $u' = v$ sont continues par rapport à $(a,\ \lambda,\ \mu, r)$ donc l'application qui à $(a,\ \lambda,\ \mu, r)$ associe $u_{a,\ \lambda,\ \mu}(r)$ est déjà continuement différentiable par rapport à r

Les calculs étant semblables dans les autres cas, nous montrerons seulement que l'application est continuement différentiable par rapport à μ. Notons u la solution de $(P_{a,\ \lambda,\ \mu})$ où $(a,\ \lambda,\ \mu)$ appartient à $\mathcal{I}_\alpha$. Soit $(a,\ \lambda,\ \mu+\epsilon)$ appartenant aussi à $\mathcal{I}_\alpha$ (on prend $\epsilon \neq 0$); nous écrirons la solution de $(P_{a,\ \lambda,\ \mu+\epsilon})$ sous la forme $u + \epsilon u_\epsilon$. Nous montrerons alors que lorsque $\epsilon \to 0$ la fonction u_ϵ admet une limite uniforme sur l'intervalle $[0;\ R_1]$.

u et $u + \epsilon u_\epsilon$ vérifient respectivement les systèmes

$$\begin{cases} u(r) = a + \int_0^r v(s)ds \\ v(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1}\Big(\mu|v(s)|^q - \lambda|u(s)|^p\Big)ds \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (u+\epsilon u_\epsilon)(r) = a + \int_0^r (v+\epsilon v_\epsilon)(s)ds \\ (v+\epsilon v_\epsilon)(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1}\ \Big((\mu+\epsilon)\ \Big|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\Big|^q\ - \lambda\ \Big|(u+\epsilon u_\epsilon)(s)\Big|^p\Big)\ ds \end{cases}$$

et, d'après la continuité de $(u,\ u') = (u,\ v)$ par rapport aux paramètres, lorsque $\epsilon \to 0$, ϵu_ϵ et ϵv_ϵ tendent uniformément sur $[0;\ R_1]$ vers 0.

En effectuant les différences ligne par ligne on en déduit

$$(I.8)\qquad \begin{cases} u_\epsilon(r) = \int_0^r v_\epsilon(s)\ ds \\ (v+\epsilon v_\epsilon)(r)\ -\ v(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1}\ \Big\{\ (\mu+\epsilon)\ \Big|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\Big|^q - \mu\Big|v(s)\Big|^q \\ \qquad\qquad\qquad - \lambda\Big(\ \Big|(u+\epsilon u_\epsilon(s)\Big|^p\ -\ \Big|u(s)\Big|^p\ \Big)\ \Big\}ds \end{cases}$$

L'application qui à x associe $|x|^q$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ car $q > 1$; sa dérivée est l'application $x \mapsto q\ |x|^{q-1}\ \mathrm{sgn}(x)$ où $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x.

On a alors en utilisant le théorème des accroissements finis d'une part

$$(\mu+\epsilon)\ \Big|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\Big|^q - \mu\Big|v(s)\Big|^q$$

$$= \mu\ \Big(\Big|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\Big|^q -\ \Big|v(s)\Big|^q\ \Big) +\ \epsilon\Big|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\Big|^q$$

$$= \mu\, h(\epsilon,\ s)\ \epsilon\ v_\epsilon(s) + \ \epsilon\ \left|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\right|^q$$

où

$$(I.9) \qquad \begin{cases} h(\epsilon,\ s) = -q\ \left|n(\epsilon,\ s)\right|^{q-1}\ \mathrm{sgn}\big(n(\epsilon,\ s)\big) \\ n(\epsilon,\ s) \text{étant compris entre } (v+\epsilon v_\epsilon)(s) \text{ et } v(s) \end{cases}$$

n et h sont de plus des fonctions continues de ϵ et s puisque $q > 1$.

D'autre part

$$\lambda\Big(\ \left|(u+\epsilon u_\epsilon(s)\right|^p\ -\ \left|u(s)\right|^p\ \Big)$$

$$= \lambda\ k(\epsilon,\ s)\ \epsilon\ u_\epsilon(s) \text{ où}$$

$$(I.10) \qquad \begin{cases} k(\epsilon,\ s) = p\ \left|m(\epsilon,\ s)\right|^{p-1} \mathrm{sgn}\big(m(\epsilon,\ s)\big) \\ m(\epsilon,\ s) \text{étant compris entre } (u+\epsilon u_\epsilon)(s) \text{ et } u(s) \end{cases}$$

m et k sont aussi des fonctions continues de ϵ et s puisque $p > 1$.

Ceci conduit finalement à

$$v_\epsilon(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r s^{n-1}\ \Big(\mu\ h(\epsilon.\ s)\ \ v_\epsilon(s) + \ \ \left|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\right|^q\ -\ \lambda\ k(\epsilon.\ s)\ \ u_\epsilon(s)\ \Big) ds$$

Le système

$$\begin{cases} u_\epsilon(r) = \int_0^r v_\epsilon(s)\ ds \\ v_\epsilon(r) = \dfrac{1}{r^{n-1}} \displaystyle\int_0^r s^{n-1}\ \Big(\mu\ h(\epsilon,\ s)\ \ v_\epsilon(s) + \ \ \left|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\right|^q\ -\ \lambda\ k(\epsilon.\ s)\ \ u_\epsilon(s)\ \Big) ds \end{cases}$$

est du type $(I.2)$ étudié dans le lemme I.3 avec $a = 0$; $\pi = (\lambda,\ \mu.\ \epsilon)$ et

$$A(\lambda,\ \mu,\ \epsilon,\ x,\ y,\ s) = \mu\ h(\epsilon,\ s)\ \ y + \ \left|(v+\epsilon v_\epsilon)(s)\right|^q\ -\ \lambda\ k(\epsilon,\ s)\ \ x$$

On voit aisément que A est continue par rapport aux différentes variables et qu'elle est localement lipschitzienne par rapport à x et y; d'où le résultat.

Démonstration du théorème I.2. Il suffit d'appliquer le théorème des fonctions implicites en effet, d'après ce qui précède, la fonction $(a,\ \lambda,\ \mu,\ r) \mapsto u(a,\ \lambda,\ \mu.\ r)$ est différentiable et si $u(a,\ \lambda,\ \mu,\ r_0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\ \lambda,\ \mu,\ r_0) \neq 0$. De ceci résulte qu'il existe une fonction différentiable z d'un voisinage $\mathcal{I}_\alpha$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout $(a,\ \lambda,\ \mu)$ de $\mathcal{I}_\alpha$, $u(a,\ \lambda,\ \mu,\ r) = 0$ si et seulement si $r = z(a,\ \lambda,\ \mu)$.

I.2) COMPARAISONS ENTRE DIVERSES SOLUTIONS

Lemme préliminaire I.4. *Soit f une fonction continue de $[a;b[$ dans $\mathbf{R}$ et dérivable sur $]a;b[$.*

Si 1) $f(a) > c$

2) $f(r) = c$ implique $f'(r) > 0$

alors $f > c$ sur $]a;b[$.

Démonstration. On a $f(a) > c$ donc il existe un intervalle $[a;a_0[$ inclus dans $]a;b[$ sur lequel $f > c$. Supposons qu'on n'ait pas $f > c$ sur $]a;b[$; il existerait alors un intervalle $]a;a_1]$ inclus dans $]a;\ b[$ tel que $f > c$ sur $]a;a_1[$ et $f(a_1) = c$. Ceci impliquerait alors $f'(a_1) \leq 0$ d'où une contradiction avec l'hypothèse 2). ///

Lemme préliminaire I.5. *Soit f une fonction continue de $[a;\ b[$ dans $\mathbf{R}$, dérivable sur $[a;b[$.*

Si 1) $f(a) = c$

2) $f(r) = c$ implique $f'(r) > 0$

alors $f > c$ sur $]a;\ b[$.

Démonstration. On a $f(a) = c$ donc $f'(a) > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f > c$ sur $]a;a+\varepsilon[$. On termine alors comme dans la démonstration précédente.

Notations. Appelons $u_{R,\ D,\ a}$ la solution de

$$(P_{R,\ D,\ a}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 & \text{sur } [R;+\infty[\\ u(R) = a \\ u'(R) = D \end{cases}$$

où $R \geq 0$, $D \leq 0$ et $a > 0$.

S'il existe un réel supérieur à R qui annule $u_{R,\ D,\ a}$ on le note $z(R,\ D,\ a)$: sinon on pose $z(R,\ D,\ a) = +\infty$.

Proposition I.6. *Soit $0 \leq R_1 < R_2$ et $D_2 < D_1 \leq 0$: on note $u_1 = u_{R_1,\ D_1,\ a}$ et $u_2 = u_{R_2,\ D_2,\ a}$. Si $z(R_1,\ D_1,\ a) < +\infty$ et $z(R_2,\ D_2,\ a) = +\infty$ il existe un réel $R > R_1$ tel que $u_1(R) = u_2(R)$ (voir la figure 1 ci-dessous).*

Démonstration. Comme $z(R_2,\ D_2,\ a) = +\infty$, $u_2 > 0$ sur $[R_2;+\infty[$ et on sait d'après [CW] que $\lim\limits_{r\to+\infty} u_2(r) = 0$

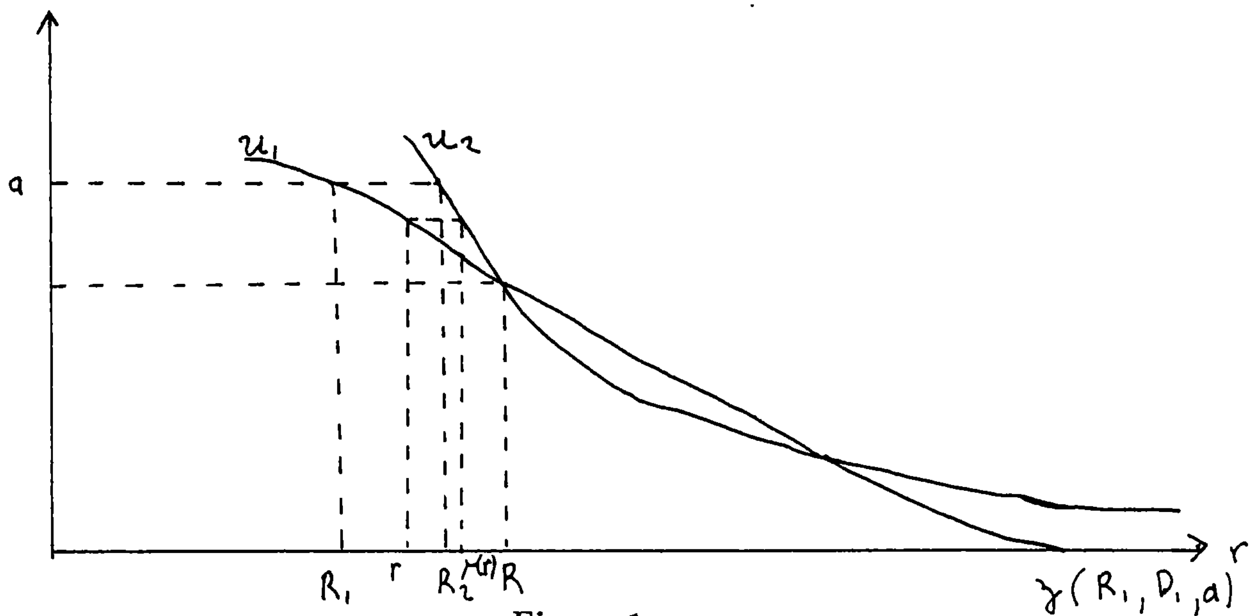


Figure 1.

Considérons l'application

$$\mu : [R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)] \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$$

qui a r associe le réel $\mu(r)$ tel que $u_2(\mu(r)) = u_1(r)$ si $r < z(R_1,\ D_1.\ a)$ et telle que $\mu\big(z(R_1,\ D_1,\ a)\big) = +\infty$.

μ est bien définie et continue sur $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ en effet u_1 et u_2 sont des bijections continues décroissantes de respectivement $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ et $[R_2;\ +\infty[$ sur $]0;\ a]$. De plus μ est dérivable sur $]R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ puisque $\mu = {u_2}^{-1} \circ u_1$ et que ${u_2}' \neq 0$ sur $]R_2; +\infty[$. $\mu(R_1) = R_2$ et $R_1 < R_2$ donc $\mu(R_1) > R_1$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mu(r) \neq r$ pour tout $r > R_1$; cela entrainerait $\mu(r) > r$ pour tout r de $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$. D'autre part $u_2'\big(\mu(R_1)\big) < u_1'(R_1)$ car $u_2'\big(\mu(R_1)\big) = u_2'(R_2) = D_2$ et $u_1'(R_1) = D_1$. Montrons qu'on a alors $u_2'\big(\mu(r)\big) < u_1'(r)$ pour tout r de $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ puis que ceci constitue une contradiction.

En dérivant la relation $u_2\big(\mu(r)\big) = u_1(r)$ par rapport à r sur l'intervalle $]R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ on obtient

$$(*) \qquad u_2'\big(\mu(r)\big)\ \mu'(r) = u_1'(r)$$

sur ce même intervalle. Soit f définie sur $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ par $f(r) = u_1'(r) - u_2'\big(\mu(r)\big)$; f est continue sur $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ et dérivable sur $]R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$

On a $f(R_1) = u_1'(R_1) - u_2'\big(\mu(R_1)\big) = D_1 - D_2$ donc $f(R_1) > 0$. Supposons qu'il existe r_1 de $]R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ tel que $f(r_1) = 0$. On en déduit $\mu'(r_1) = 1$ d'après (*) et $f'(r_1) = u_1''(r_1) - u_2''\big(\mu(r_1)\big)$

Soit $\alpha = u_1'(r_1) = u_2'(\mu(r_1))$ et $\beta = u_1(r_1) = u_2(\mu(r_1))$. On a

$$\begin{cases} u_1''(r_1) = -\frac{n-1}{r_1}\alpha + |\alpha|^q - \lambda\beta^p \\ u_2''(\mu(r)) = -\frac{n-1}{\mu(r_1)}\alpha + |\alpha|^q - \lambda\beta^p. \end{cases}$$

On a supposé $\mu(r) > r$ pour tout r de $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$, donc en particulier $\mu(r_1) > r_1$ et d'autre part $\alpha < 0$ donc, successivement $\dfrac{n-1}{r_1} > \dfrac{n-1}{\mu(r_1)}$, $-\dfrac{n-1}{r_1}\alpha > -\dfrac{n-1}{\mu(r_1)}\alpha$ et $f'(r_1) > 0$.

On obtient d'après le lemme préliminaire I.4. $f > 0$ sur l'intervalle $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$. Le fait que $u_2'(\mu(r)) < u_1'(r)$ et donc que $\mu'(r) < 1$ si r appartient à $[R_1;\ z(R_1,\ D_1,\ a)[$ implique alors que

$$\int_{R_1}^{z(R_1,\ D_1,\ a)} \mu'(s)ds \leq z(R_1,\ D_1,\ a) - R_1$$

soit encore

$$\mu(z(R_1,\ D_1,\ a)) \leq \mu(R_1) + z(R_1,\ D_1,\ a) - R_1$$

ce qui contredit le fait que $\mu\Big(z(R_1,\ D_1,\ a)\Big) = +\infty$ et que $u_2 > 0$ sur $[R_2; +\infty[$.

Remarque. Il est clair que dans les conditions de la proposition I.6 les représentations graphiques de u_1 et u_2 ne peuvent être tangentes, puisque, u_1 et u_2 vérifiant la même équation différentielle, elles seraient confondues ce qui est incompatible avec $R_1 < R_2$ et $D_2 < D_1$. La représentation graphique de u_2 coupe alors celle de u_1 en un deuxième point et il existe R', $R' > R$ tel que $u_1(R') = u_2(R')$.

Dans ce qui suit nous considérons le problème

$$(P_n) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{si } r \geq 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = a. \end{cases}$$

Soit $z_n(a)$ le premier zéro, s'il existe, de la solution u_n de (P_n). Si $u_n > 0$ sur $[0;\ +\infty[$, on pose $z_n(a) = +\infty$.

Nous comparons maintenant $z_n(a)$ et $z_1(a)$ lorsque $n > 1$.

Proposition I.7. *Soit u_n solution de (P_n); si $n > 1$ alors $u_n > u_1$ sur $]0;\ z_1(a)[$ et $z_n(a) \geq z_1(a)$, cette dernière inégalité étant stricte si $z_1(a)$ est fini.*

Démonstration. u_1 et u_n définissent des bijections de, respectivement, $[0;\ z_1(a)[$ et $[0;\ z_n(a)[$ sur $]0;\ a]$. Considérons la bijection μ de $[0;\ z_1(a)[$ sur $[0;\ z_n(a)[$ définie par $u_n(\mu(r)) = u_1(r)$ (voir figure 2 ci-dessous).

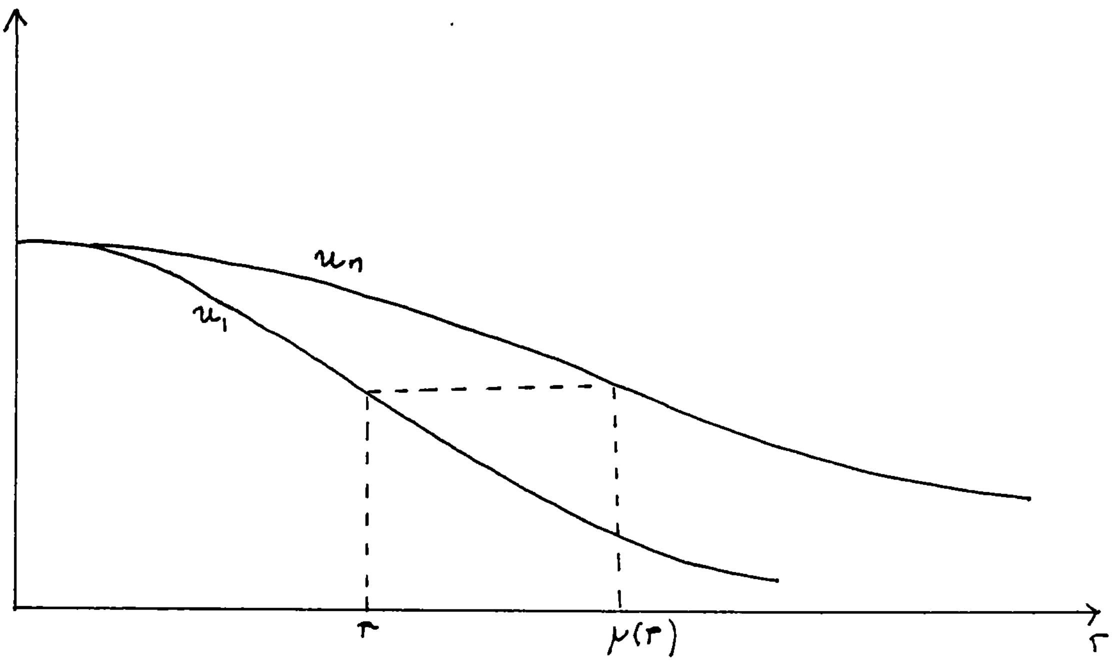


Figure 2.

On voit facilement que μ est continue sur $[0;\ z_1(a)[$, dérivable sur $]0;\ z_1(a)[$ et que si $0 < r < z_1(a)$,

$$\mu'(r) = \frac{u_1'(r)}{u_n'\big(\mu(r)\big)} \tag{I.11}$$

Montrons que, pour tout r de $]0;\ z_1(a)[$, $\mu(r) > r$. Pour cela on établit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que sur $[0;\ \varepsilon[$, $\mu' > 1$ et ensuite que $\mu' > 1$ sur $[0;\ z_1(a)[$. Il en résultera alors, étant donné que $\mu(0) = 0$, que $\mu(r) > r$ pour tout r de $]0;\ z_1(a)[$ et même qu'il existe des réels $\eta > 0$ et $\nu > 0$ tels que $\mu(r) > r + \eta$ pour tout r de $]0 + \nu;\ z_1(a)[$: la proposition en découlera.

Démontrons tout d'abord que μ est dérivable en 0.

u_n et u_1 sont C^2 sur leur ensemble de définition, $u_n'(0) = u_1'(0) = 0$ et $u_n''(0) = \dfrac{-\lambda a^p}{n}$ (voir par exemple la proposition 4.4 de [C.W]); on peut donc écrire

$$\begin{cases} u_1(r) = a + \dfrac{r^2}{2}u_1''(0) + r^2 g(r) \\ u_n\big(\mu(r)\big) = a + \dfrac{\mu^2(r)}{2}u_n''(0) + \mu^2(r)\ f\big(\mu(r)\big) \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{r\to 0} f(r) = \lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$.

Comme $u_n\big(\mu(r)\big) = u_1(r)$ on en déduit

$$\frac{\mu^2(r)}{r^2} = \frac{u_1''(0)/2\ +\ g(r)}{u_n''(0)/2\ +\ f\big(\mu(r)\big)}$$

et on obtient puisque $\mu \geq 0$ sur $[0;\ z_1(a)[$

$$(I.12) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{\mu(r)}{r} = \sqrt{\frac{u_1''(0)}{u_n''(0)}} = \sqrt{\frac{-\lambda a^p}{\frac{-\lambda a^p}{n}}} = \sqrt{n}$$

μ est donc dérivable en 0. Montrons maintenant que μ est C^1 sur $[0;\ z_1(a)[$; il suffit pour cela d'étudier, lorsque $r \to 0$, le quotient $\dfrac{u_1'(r)}{u_n'\big(\mu(r)\big)}$ d'après $(I.11)$, puisque seule la continuité en 0 peut tomber en défaut.

u_1' et u_n' étant C^1 sur leur ensemble de définition on a

$$\begin{cases} u_1'(r) = ru_1''(0) \ + \ rg_1(r) \\ \\ u_n'\big(\mu(r)\big) = \mu(r)u_n''(0) + \mu(r)\ f_1\big(\mu(r)\big) \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{r\to 0} f_1(r) = \lim\limits_{r\to 0} g_1(r) = 0$.

On a donc

$$\begin{aligned} \mu'(r) &= \frac{u_1'(r)}{u_n'\big(\mu(r)\big)} \\ &= \frac{r}{\mu(r)} \frac{u_1''(0) + g_1(r)}{u_n''(0) + f_1\big(\mu(r)\big)}. \end{aligned}$$

En utilisant $(I.12)$ on trouve alors $\lim\limits_{r\to 0} \mu'(r) = \sqrt{n}$, d'où il résulte que μ' est continue en 0.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, sur $]0;\ \varepsilon[$, $\mu' > 1$ et $\mu > r$ (car $\mu(0) = 0$).

Montrons maintenant que $\mu' > 1$ sur $[0;\ z_1(a)[$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel r_0, $0 < r_0 < z_1(a)$, tel que $\mu'(r_0) = 1$ et $\mu' > 1$ sur $[0;\ r_0[$. Considérons alors la fonction h définie sur $]0;\ z_1(a)[$ par

$$h(r) = u_n'\big(\mu(r)\big) - u_1'(r).$$

On a

$$(I.13) \qquad h'(r) = u_n''\big(\mu(r)\big)\mu'(r) - u_1''(r).$$

$\mu' > 1$ sur $[0;\ r_0[$ implique $h > 0$ sur ce même intervalle: on le voit en utilisant (I.11) et le fait que $u_1'(r)$ et $u_n'\big(\mu(r)\big)$ sont négatifs : $\mu'(r_0) = 1$ implique d'autre part $h'(r_0) = u_n''\big(\mu(r_0)\big) - u_1''(r_0)$ d'après (I.13) et $u_n'\big(\mu(r_0)\big) = u_1'(r_0)$ (d'après (I.11)) soit encore $h(r_0) = 0$.

On a $u_n\big(\mu(r_0)\big) = u_1(r_0)$ et $u_n'\big(\mu(r_0)\big) = u_1'(r_0)$. Les expressions de $u_n''\big(\mu(r_0)\big)$ et $u_1''(r_0)$ données par l'équation différentielle montrent que $u_n''\big(\mu(r_0)\big) = u_1''(r_0) - \dfrac{n-1}{\mu(r_0)} u_n'\big(\mu(r_0)\big)$.

Comme $u_n'(\mu(r_0)) < 0$ on en déduit $u_n''(\mu(r_0)) > u_1''(r_0)$. On aurait alors $h'(r_0) > 0$ d'après (I.13), d'où une contradiction puisque $h > 0$ sur $]0;\ r_0[$ et $h(r_0) = 0$.

On a donc montré que $\mu' > 1$ sur $[0; z_1(a)[$ ce qui termine la démonstration d'après ce que nous avons dit plus haut. ///

I.3) SENS DE VARIATION DE L'APPLICATION z ET CAS D' UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME (P_R) SUR UNE BOULE

Le lemme 4.7 de [C.W.] montre que lorsque $q = \frac{2p}{p+1}$ on a $z(a) = a^{-(p-1)/2}z(1)$; et donc en particulier si $z(1)$ est fini l'application z est strictement décroissante. La proposition suivante généralise en un certain sens cette propriété.

Proposition I.8. *On suppose que*

$$(I.14) \qquad \begin{cases} n \le 2 \\ \qquad\qquad ou \\ n \ge 3 \quad et\ p < \dfrac{n+2}{n-2}. \end{cases}$$

1) Si $q < \dfrac{2p}{p+1}$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, sur $]a_0;\ +\infty[$, z est strictement décroissante.

2) Si $q > \dfrac{2p}{p+1}$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, sur $]0;\ a_0[$, z est strictement décroissante.

Démonstration. Soit $u_{a,\ \lambda,\ \mu}$ la solution de

$$(P_{a,\ \lambda,\ \mu}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - \mu|u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{si } r \ge 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = a \end{cases}$$

et $z(a,\ \lambda,\ \mu)$ le premier zéro de $u = u_{a,\ \lambda,\ \mu}$ s'il existe.

Rappelons d'abord que, lorsque les conditions (I.14) sont vérifiées, $z(a,\ \lambda,\ 0)$ est fini quel que soit a et λ et que l'application $\mu \mapsto z(1,\ \lambda, \mu)$ est dérivable en 0 (Voir le théorème I.2). On sait d'après [CW] que si l'on pose $v_a(r) = \dfrac{1}{a}u(ra^{-\frac{p-1}{2}})$ alors v_a est solution de

$$(P_{1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - a^{q\frac{p+1}{2}-p}|u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{si } r \ge 0 \\ u'(0) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

On a donc avec la notation qui précède $v_a = u_{1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}}$

Dans le cas $q < \dfrac{2p}{p+1}$ (respectivement $q > \dfrac{2p}{p+1}$) on sait d'après la proposition 4.6 et le lemme 5.2 de [C.W.] que si a est assez grand (respectivement assez petit) alors $z(a,\ \lambda,\ 1)$ est fini. Supposons que ceci est réalisé. On a alors $u_{a,\ \lambda,\ 1}\big(z(a,\ \lambda,\ 1)\big) = 0$ et $v_a(r) = 0$ si $ra^{-\frac{p-1}{2}} = z(a,\ \lambda,\ 1)$ d'après la définition de v_a.

On en déduit

$$a^{-\frac{p-1}{2}} z(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}) = z(a,\ \lambda,\ 1)$$

En différentiant par rapport à a on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial a}(a,\ \lambda,\ 1) = \frac{\partial z}{\partial \mu}\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big)\Big(q\frac{p+1}{2} - p\Big)a^{q\frac{p+1}{2}-p-1}a^{-\frac{p-1}{2}}$$

$$-z\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big)\frac{p-1}{2}a^{-\frac{p-1}{2}-1}$$

$$= \frac{\partial z}{\partial \mu}\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big)\Big(q\frac{p+1}{2} - p\Big)a^{\frac{qp+q-3p-1}{2}} - z\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big)\frac{p-1}{2}a^{\frac{-p-1}{2}}.$$

Envisageons maintenant les deux cas $q < \dfrac{2p}{p+1}$ et $q > \dfrac{2p}{p+1}$.

1) Soit $q < \dfrac{2p}{p+1}$. Si $a \to +\infty$, $z\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big) \to z(1,\ \lambda,\ 0)$ et $\dfrac{\partial z}{\partial \mu}$ étant continue par rapport aux variables

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big) \to \frac{\partial z}{\partial \mu}(1,\ \lambda,\ 0).$$

D'autre part, en $+\infty$, $a^{\frac{-p-1}{2}}$ est prépondérant par rapport à $a^{\frac{qp+q-3p-1}{2}}$ équivaut à

$$-p-1 > qp+q-3p-1 \quad \text{et à} \quad q < \frac{2p}{p+1}.$$

Il existe donc un réel a_0 tel que, si $a > a_0$, $\dfrac{\partial z}{\partial a}(a,\ \lambda,\ 1)$ est du signe de

$$-z\Big(1,\ \lambda,\ 0\Big)\frac{p-1}{2}a^{\frac{-p-1}{2}}$$

c'est à dire strictement négatif . z est donc strictement décroissante sur $]a_0;\ +\infty[$.

2) Lorsque $q > \frac{2p}{p+1}$ la démonstration est du même type:

$$\text{si } a \to 0^+,\ \ z\Big(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\Big) \to z(1,\ \lambda,\ 0) \text{ et}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}\left(1,\ \lambda,\ a^{q\frac{p+1}{2}-p}\right) \to \frac{\partial z}{\partial \mu}(1,\ \lambda,\ 0).$$

En 0^+, $a^{\frac{-p-1}{2}}$ est prépondérant par rapport à $a^{\frac{qp+q-3p-1}{2}}$ équivaut à $-p-1 < qp+q-3p-1$ soit à $q > \dfrac{2p}{p+1}$.

Il existe donc un réel $a_0 > 0$ tel que si $0 < a < a_0$ $\dfrac{\partial z}{\partial a}(a,\ \lambda,\ 1)$ est du signe de

$$-z\left(1,\ \lambda,\ 0\right)\frac{p-1}{2}a^{\frac{-p-1}{2}}$$

donc strictement négatif . z est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0;\ a_0[$. ///

Corollaire. *Si $q < \frac{2p}{p+1}$ il existe un réel R_0, $R_0 > 0$ tel que si $R < R_0$ le problème (P_R) a une solution unique .*

Démonstration. (Voir figure 3 ci-dessous) D'après la proposition 4.5 de [CW] on sait que

$$z(a) \geq \frac{a^{-(p-1)/2}}{\sqrt{2\lambda/(p+1)}}$$

donc $a \leq a_0$ implique $z(a) \geq \dfrac{a_0{}^{-(p-1)/2}}{\sqrt{2\lambda/(p+1)}}$. L'application z est strictement décroissante sur $]a_0;\ +\infty[$ et on sait aussi d'après la proposition 4.6. que $\lim\limits_{a\to+\infty} z(a) = 0$; il existe $a_1 > a_0$ tel que $z(a_1) < \dfrac{a_0{}^{-(p-1)/2}}{\sqrt{2\lambda/(p+1)}}$. Sur $]0;\ a_1[$ on a alors $z > z(a_1)$; de plus z définit une bijection strictement décroissante de $[a_1;\ +\infty[$ sur$]0;\ z(a_1)]$. Soit alors $R_0 = z(a_1)$, pour tout $R < R_0$ il existe alors un réel unique a tel que $z(a) = R$. ///

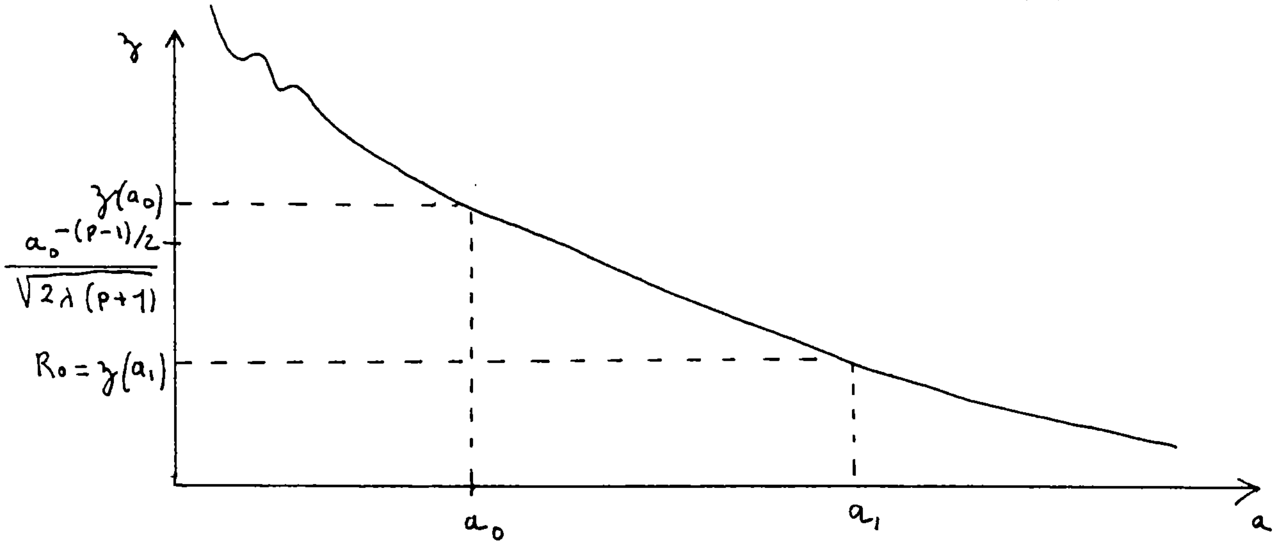


Figure 3.

CHAPITRE II

ETUDE DU CAS $\dfrac{2p}{p+1} < q$ EN DIMENSION 1

II.1) PRINCIPAUX RESULTATS; PROBLEME AUXILIAIRE (P'_B)

Dans l'article de M. Chipot et de F. Weissler les propriétés de l'application z sont étudiées en faisant varier a pour les solutions du problème

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u'' - |u'(r)|^q + \lambda |u(r)|^p = 0 & \text{si } r \geq 0, \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Le point de vue change ici. Supposons que $u\big(z(a)\big) = 0$, posons $u'\big(z(a)\big) = -b$ (on sait que $b > 0$ d'après [C.W.]) et considérons la fonction v définie sur $[0;\ z(a)]$ par $v(r) = u\big(z(a) - r\big)$. On a alors $v'(r) = -u'\big(z(a) - r\big)$ et $v''(r) = u''\big(z(a) - r\big)$ donc v est solution de l'équation différentielle $v''(r) - |v'(r)|^q + \lambda|v(r)|^p = 0$ sur $[0;\ z(a)]$ et de plus

$$\begin{cases} v\big(z(a)\big) = u(0) = a \\ v'\big(z(a)\big) = u'(0) = 0 \\ v(0) = u\big(z(a)\big) = 0 \\ v'(0) = -u'\big(z(a)\big) = b. \end{cases}$$

Nous allons faire varier b dans le problème (P'_b)

$$(P'_b) \qquad \begin{cases} v''(r) - |v'(r)|^q + \lambda|v(r)|^p = 0 & \text{si } r \geq 0 \qquad \text{(II.1)} \\ v(0) = 0 \\ v'(0) = b \end{cases}$$

où $b > 0$ et $\dfrac{2p}{p+1} < q$. Les solutions de (P'_b) seront notées v_b.

Notation II.1. Nous noterons $[0; s_b[$ l'intervalle maximal d'origine 0 sur lequel (v_b, v'_b) est définie. s_b peut être un réel ou $+\infty$.

Proposition II.1. *L'ensemble des réels r, $0 \leq r < s_b$ tels que $v'_b(r) > 0$ est un intervalle contenant* 0.

Démonstration. Supposons $v'_b(r_0) = 0$, on ne peut avoir $v_b(r_0) = 0$ car alors $v_b = 0$ sur $[0;\ +\infty[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz; on a donc $v''(r_0) < 0$ d'après (II.1). De même , $r > r_0$ et $v'_b(r) = 0$ impliquerait $v''(r) < 0$. On a donc $v'_b < 0$ sur $]r_0;\ s_b[$ en appliquant le lemme I.5 avec $f = -v'$; $a = r_0$; $b = s_b$ et $c = 0$. v'_b admet donc au plus un seul zéro. ///

Notation II.2. Notons $[0; y_b[$ le plus grand intervalle d'origine 0 sur lequel $v'_b > 0$ avec éventuellement $y_b = +\infty$.

On a donc $v'_b > 0$ et $v_b \geq 0$ sur $[0; y_b[$ et sur cet intervalle l'équation (II.1) ci-dessus s'écrit $v'' - v'^q + \lambda v^p = 0$.

Remarque II.1. Si, dans le problème (P_a), $u(z(a)) = 0$ et $u'(z(a)) = -b$, alors la fonction v correspondante est solution de (P'_b) avec $z(a) = y_b$.

Concernant le problème (P'_b) nous démontrons les théorèmes II.2 et II.3.

Théorème II.2. *Soit* $\dfrac{2p}{p+1} < q$ *et* $n = 1$.

Il existe une valeur critique b_0 *et un réel* $R_0 > 0$, *tels que,* v_b *étant solution de* (P'_b)

1) *si* $b \geq b_0$ *alors* $v'_b > 0$ *sur l'intervalle maximal* $[0; s_b[$ *sur lequel* v_b *est définie et donc* $y_b = s_b$;

item 2) si $0 < b < b_0$ *alors* v'_b *a un unique zéro* y_b *sur* $[0; s_b[$ *et* $v'_b < 0$ *sur* $]y_b; s_b[$; *de plus* y_b *est borné inférieurement par la constante* R_0 *indépendante de* b;

3) $v''_{b_0} > 0$ *sur* $[0; s_{b_0}[$, $y_{b_0} = s_{b_0}$, $\lim_{r \to s_{b_0}} v'_{b_0} = +\infty$ *et* $\lim_{r \to s_{b_0}} v_{b_0} = +\infty$.

Le point le plus important dans la démonstration de ce théorème est le lemme II.6. Celui-ci montre que si b est assez grand $|v'(r)|^q$ est prépondérant par rapport à $|v(r)|^p$ dans l'équation différentielle.

Remarque II.2. Si $b \geq b_0$ on a $\lim_{r \to s_b} v'_b(r) = +\infty$ d'après les lemmes II.7 et II.8. On peut alors avoir

-soit $\lim_{r \to s_b} v_b(r) = +\infty$

-soit $\lim_{r \to s_b} v_b(r) = a$ où a est un réel.

Le lemme II.12 montre que si r tend vers s_{b_0} alors $v_{b_0}(r)$ tend vers $+\infty$. On établit alors le théorème II.3.

Théorème II.3. *Les conditions et les notations étant celles du théorème II.2 on a:*

1) *si* $q \geq p$, $s_{b_0} = +\infty$ *et* $\lim_{b \to b_0} y_b = +\infty$;

2) *si* $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$, s_{b_0} *est fini et* $\lim_{b \to b_0} y_b = s_{b_0}$.

Le théorème II.4 donne les propriétés qui en résultent pour l'application z (dépendant de a).

Théorème II.4. *Soit* $\dfrac{2p}{p+1} < q$, $n = 1$. u_a *étant la solution du problème* (P_a), *pour tout* $a > 0$, u_a *s'annule en un point* $z(a)$ *et il existe un réel* $R_0 > 0$ *indépendant de* a *tel que* $z(a) > R_0$. *De plus*

1) si $q \geq p$, $\lim_{a \to +\infty} z(a) = +\infty$;

2) si $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$, $\lim_{a \to +\infty} z(a)$ *est un réel strictement positif (égal au nombre* s_{b_0} *du théorème II.3).*

Le théorème II.5 en déduit le nombre de solutions du problème (P_R).

Théorème II.5. *1) Si* $q \geq p$ *et* $n = 1$, *il existe un réel* $R_0 > 0$ *tel que*

a) si $R < R_0$, (P_R) *n'a pas de solution;*

b) si $R = R_0$, (P_R) *a au moins une solution;*

c) si $R > R_0$, (P_R) *a au moins deux solutions.*

2) Si $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$ *et* $n = 1$, *il existe des réels* R_0 *et* R_1, $0 < R_0 < R_1$ *tels que*

a) si $R < R_0$, (P_R) *n'a pas de solution;*

b) si $R_0 \leq R \leq R_1$, (P_R) *a au moins une solution;*

c) si $R > R_1$, (P_R) *a exactement une solution.*

II.2) CROISSANCE STRICTE DE CERTAINES SOLUTIONS DU PROBLEME (P'_b)

Le lemme II.6 montre que si b est assez grand (supérieur à b_1) v_b est strictement croissante sur l'intervalle $[0; s_b[$ sur lequel elle est définie. Le lemme II.8 prouve alors que l'ensemble des réels b pour lesquels v_b est strictement croissante est un intervalle $[b_0; +\infty[$. Lorsque $0 < b < b_0$, v_b admet un maximum en y_b. Le lemme II.9 montre que la fonction m définie sur $]0; b_0[$ par $m : b \mapsto v_b(y_b)$ est une bijection strictement croissante de $]0; b_0[$ sur $]0; +\infty[$.

Lemme II.6. *Soit* $q > \dfrac{2p}{p+1}$ *il existe alors* b_1, $b_1 > 0$, *tel que* $b > b_1$ *implique* $v'_b > 0$ *sur* $[0; s_b[$.

Démonstration du lemme II.6. Soit q' un réel tel que

$$\frac{2p}{p+1} < q' < q \wedge 2 \tag{II.2}$$

où $q \wedge 2 = inf\{q, 2\}$.

D'après (II.2) on a $\dfrac{2p}{p+1} < q' < 2$ donc $2 - q' < 2 - \dfrac{2p}{p+1}$. On a alors

$$(2-q')p < (2 - \frac{2p}{p+1})p = \frac{2p}{p+1} < q.$$

On en déduit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^q}{2} - \lambda\left(\frac{2}{2-q'}\right)^p \cdot x^{(2-q')p} = +\infty.$$

Il existe donc un réel x_0 tel que si $x \geq x_0$

$$\frac{x^q}{2} - \lambda\left(\frac{2}{2-q'}\right)^p x^{(2-q')p} > 0. \tag{II.3}$$

Soit b_1 tel que $b_1 > x_0 \vee 1$ où $x_0 \vee 1 = sup\{x_0, 1\}$ et $b > b_1$. Considérons l'ensemble

$$S = \left\{ r \text{ tels que } r < s_b, v_b' > 0 \text{ et } v_b'' > \frac{1}{2}(v_b')^{q'} \text{ sur } [0; r[\right\}.$$

S contient 0 car $v_b''(0) = v_b'^q(0) > v_b'^{q'}(0)$. D'après sa définition S est donc un intervalle $[0; A[$. Nous allons montrer que $A = s_b$; on aura donc $y_b = s_b$. Supposons $A < s_b$. D'après la définition de S, $v_b' > 0$ et $v_b'' > \frac{1}{2}(v_b')^{q'}$ sur $[0; A[$. v_b' est donc croissante sur $[0; A[$ et $v_b' > b_1$ sur cet intervalle. Sur $[0; A[$ on a $v_b'' > \frac{1}{2}v_b'^{q'}$ soit encore

$$2 \cdot v_b'^{1-q'} \cdot v_b'' > v_b' \quad \text{i.e.} \quad \left[\frac{2}{2-q'} \cdot v_b'^{2-q'}\right]' > v_b'$$

En intégrant entre 0 et A on obtient

$$\frac{2}{2-q'} \cdot \left(v_b'^{2-q'}(A) - b^{2-q'}\right) > v_b(A) \text{ car } v_b(0) = 0 \text{ et } v_b'(0) = b$$

et donc $v_b(A) < \dfrac{2}{2-q'} \cdot v_b'^{2-q'}(A)$ car $q' < 2$.

Comme $v_b''(A) = (v_b')^q(A) - \lambda(v_b)^p(A)$

$$v_b''(A) > v_b'^q(A) - \lambda\left(\frac{2}{2-q'}\right)^p \cdot v_b'^{(2-q')\cdot p}(A)$$

et donc $v_b''(A) > \dfrac{v_b'^q(A)}{2} > \dfrac{v_b'^{q'}(A)}{2}$ d'après (II.2) et (II.3); on obtient alors une contradiction avec la définition de A . ///

Lemme II.7. *Concernant les solutions v_b de (P_b') on a l'alternative suivante:*

1) soit il existe un réel r_0, $0 < r_0 < y_b$ tel que $v_b''(r_0) = 0$ et dans ce cas $y_b < s_b$ et $v_b'' < 0$ sur $]r_0; y_b]$;

2) soit on a $v_b'' > 0$ sur $[0;\ y_b[$ et ceci implique alors $y_b = s_b$ et $\lim\limits_{r \to s_b^-} v_b'(r) = +\infty$.

Démonstration. Sur $]0; y_b[$ on a $v_b'' - v_b'^q + \lambda v_b^p = 0$ donc

$$(II.4) \qquad v_b''' - q v_b'^{q-1} v_b'' + \lambda p v_b^{p-1} v_b' = 0$$

1) Supposons d'abord qu'il existe un réel r_0, $0 < r_0 < y_b$, tel que $v_b''(r_0) = 0$. Si $v_b''(r_1) = 0$ avec $r_0 < r_1 < y_b$ alors d'après (II.4) $v_b'''(r_1) = -\lambda p\ v_b^{p-1}\ v_b'(r_1) < 0$. On en déduit que $v_b'' < 0$ sur $]r_0; y_b[$ d'après le lemme I.5 en prenant $f = -v_b''$ et $a = r_0$. Montrons maintenant que $y_b < s_b$. Raisonnons par l'absurde et supposons $y_b = s_b$.

a) Regardons d'abord le cas $y_b = s_b = +\infty$.

D'une part v_b' étant décroissante et positive sur $[r_0;\ +\infty[$ on aurait $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b'(r) = \alpha$ où α est un réel positif ou nul et v_b aurait une limite finie ou infinie. Mais d'autre part on ne pourrait avoir $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b(r) = +\infty$ puisque il existerait alors des réels r_2 et β tels que sur $[r_2;\ +\infty[$, $v_b'' < \beta < 0$ d'après (II.1) et ceci contredirait $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b'(r) = \alpha$. On ne pourrait avoir non plus $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b(r) = \gamma$ où γ est un réel strictement positif positif car ceci impliquerait $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b'(r) = 0$ et on aurait pour r assez grand $v_b''(r) < -\lambda\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^p$ d'où encore une contradiction avec $\lim\limits_{r \to +\infty} v_b'(r) = 0$.

b) Regardons maintenant le cas où $y_b = s_b$ est fini.

On a alors nécessairement $\lim\limits_{r \to y_b} v_b(r) = +\infty$ ou $\lim\limits_{r \to y_b} v_b'(r) = +\infty$. Mais, comme $v_b'' < 0$ sur $]r_0;\ y_b[$, v_b' est décroissante sur $[r_0;\ y_b[$ et donc majorée sur cet intervalle par un réel V. On ne peut donc clairement avoir $\lim\limits_{r \to y_b} v_b'(r) = +\infty$, et $\lim\limits_{r \to y_b} v_b(r) = +\infty$ est aussi impossible puisque l'on a, si $r_0 < r < y_b$, $\displaystyle\int_{r_0}^{r} v_b'(s)\, ds \leq V\,(r - r_0)$ et $v_b(r) \leq v_b(r_0) + V\,(r - r_0)$.

2) Supposons maintenant que $v_b'' > 0$ sur $[0;\ y_b[$. Comme $v_b'(0) > 0$ on ne peut avoir alors $v_b'(y_b) = 0$. On a donc $y_b = s_b$. Montrons que $\lim\limits_{r \to s_b} v_b'(r) = +\infty$. Supposons d'abord que s_b est fini; v_b' étant strictement croissante sur $[0; y_b[$, on ne peut avoir que $\lim\limits_{r \to y_b} v_b'(r) = +\infty$ ou $\lim\limits_{r \to y_b} v_b'(r) = \alpha$, α étant un réel. Le deuxième cas ne peut avoir lieu car on aurait aussi $\lim\limits_{r \to y_b} v_b(r) = \beta$ où β est un réel et on pourrait prolonger u_a

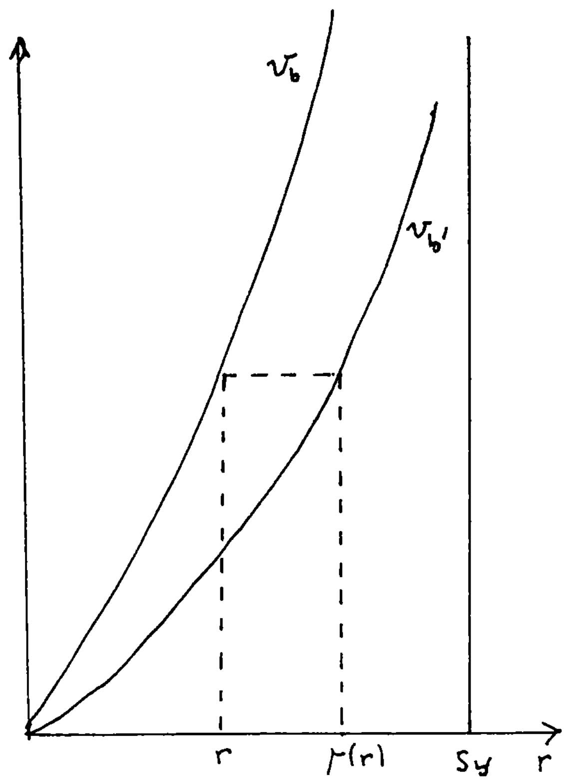


Figure 1.

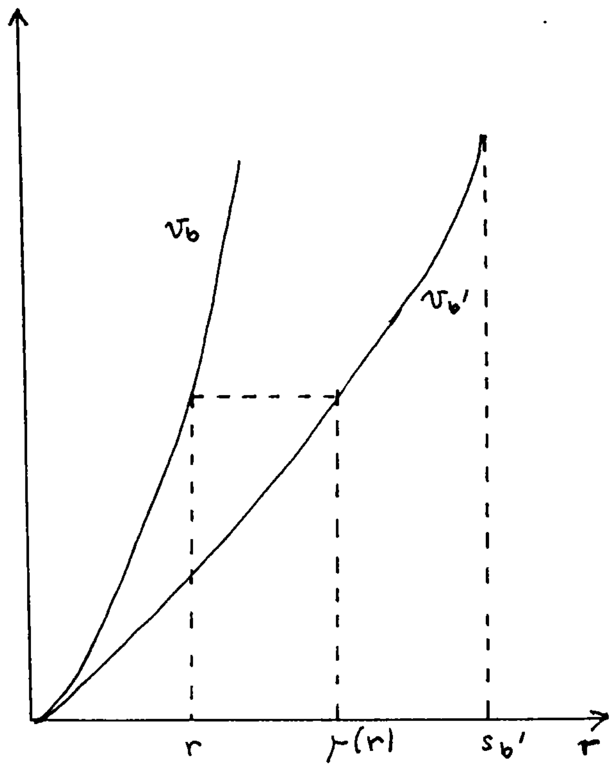


Figure 2.

au dela de y_b. Supposons enfin $s_b = +\infty$. v_b' étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$ $\lim_{r \to +\infty} v_b(r) = +\infty$ et on ne peut avoir $\lim_{r \to +\infty} v_b'(r) = \alpha$ où α est un réel positif car on aurait alors $\lim_{r \to +\infty} v_b''(r) = -\infty$ d'après (II.1).

Lemme II.8. *Si $v_{b'}' > 0$ sur $[0; s_{b'}[$ alors $v_b' > 0$ sur $[0; s_b[$ pour tout b tel que $b > b'$. L'ensemble des réels b tels que $v_b' > 0$ sur $[0; s_b[$ est un intervalle $[b_0; +\infty[$; de plus $\lim_{r \to s_{b_0}} v_{b_0}'(r) = +\infty$ et $v_{b_0}'' > 0$ sur $[0; s_{b_0}[$.*

Démonstration. Comme $v_{b'}' > 0$ sur $[0; s_{b'}[$, $v_{b'}$ est strictement croissante sur cet intervalle et on peut distinguer les deux cas suivants:

1) $\lim_{r \to s_{b'}} v_{b'}(r) = +\infty$

2) $\lim_{r \to s_{b'}} v_{b'}(r) = \alpha$ où α est un réel et donc $\lim_{r \to s_{b'}} v_{b'}'(r) = +\infty$. Soit $\mu : [0; y_b[\to \mathbf{R}$ la fonction qui à r associe le réel $\mu(r)$, s'il existe, défini par $v_{b'}(\mu(r)) = v_b(r)$ (voir les figures 1 et 2).

Il est clair que dans le cas 1) $\mu(r)$est toujours défini puisque $v_{b'}$ est alors une bijection de $[0; s_{b'}[$ sur $[0; +\infty[$.

Dans le cas 2), $\mu(r)$ pourrait ne pas être défini que si l'on avait $v_b(r) > \lim_{r\to s_{b'}} v_{b'}(r) = \alpha$. $v_b'\big(v_b{}^{-1}(\alpha)\big)$ serait alors fini; la suite de la démonstration montre qu'en fait ce cas ne peut se présenter et que μ est définie sur $[0;\, y_b[$.

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : [0; y_b[&\to \mathbf{R}\\ r &\mapsto v_b'(r) - v_{b'}'(\mu(r)).\end{aligned}$$

Montrons que $\varphi > 0$ sur l'intervalle inclus dans $[0; y_b[$ sur lequel φ est définie. On a

$$\varphi(0) = v_b'(0) - v_{b'}'(0) = b - b' \text{ donc } \varphi(0) > 0.$$

Supposons qu'il existe r_0 , $r_0 \in]0;\, y_b[$, tel que $\varphi > 0$ sur $[0; r_0[$ et $\varphi(r_0) = 0$. On aurait alors

$$\begin{cases} v_b(r_0) = v_{b'}(\mu(r_0)) \\ v_b'(r_0) = v_{b'}'(\mu(r_0)) \end{cases}$$

L'équation différentielle étudiée étant autonome, v_b serait translatée de $v_{b'}$ et on ne pourait avoir $v_b(0) = v_{b'}(0) = 0$.

Dans le cas 1), on a alors $\lim_{r\to y_b} v_b'(r) \geq \lim_{r\to y_b} v_{b'}'\big(\mu(r)\big) > 0$ donc $y_b = s_b$.

Dans le cas 2) où $\lim_{r\to s_{b'}} v_{b'}(r) = \alpha$ et $\lim_{r\to s_{b'}} v_{b'}'(r) = +\infty$, μ ne peut être définie seulement sur un intervalle $[0;\, R[$ strictement inclus dans $[0;\, y_b[$; en effet, comme nous l'avons dit plus haut, ceci impliquerait que $v_b'\big(v_b{}^{-1}(\alpha)\big)$ soit fini et on ne pourrait avoir pour tout r de $[0;\, R[$ $\varphi(r) > 0$ c'est à dire $v_b'(r) > v_{b'}'\big(\mu(r)\big)$.

μ est donc définie sur $[0;\, y_b[$ et

$$\lim_{r\to y_b} v_b'(r) \geq \lim_{r\to y_b} v_{b'}'\big(\mu(r)\big) > 0$$

d'où $y_b = s_b$.

Dans les deux cas on a donc $y_b = s_b$.

L'ensemble des réels b tels que $v_b' > 0$ sur $[0;\, s_b[$ est donc un intervalle du type $]b_0;\, +\infty[$ ou $[b_0;\, +\infty[$. Montrons que c'est le 2^{eme} cas qui est réalisé.

Si ce n'était pas le cas, on aurait $y_{b_0} < s_{b_0}$ et pour r tel que $y_{b_0} < r < s_{b_0}$; $v_{b_0}' < 0$. (v_b, v_b') étant continue par rapport à b, en prenant b assez proche de b_0 et $b > b_0$, on aurait encore $v_b'(r) < 0$ d'où une contradiction.

Du lemme II.7 résulte alors directement que $v_{b_0}'' > 0$ sur $[0;\, s_{b_0}[$ et que

$$\lim_{r\to s_{b_0}} v_{b_0}'(r) = +\infty.$$

Supposons que cela soit faux. Il existerait alors un réel a_0 n'ayant pas d'antécédent par m et ceci impliquerait $z(a_0) = +\infty$ ce qui contredirait le fait que, pour tout $a > 0$, $z(a)$ est fini d'après la proposition 5.11 de [CW]. Enfin pour tout $a > 0$ $z(a)$ est fini; il en résulte que l'image par m de $]0; b_0[$ est $]0; +\infty[$. ///

Démonstration du théorème II.2. D'après la proposition 4.5 de [CW] rappelée dans l'introduction on a le résultat suivant:

*) $\lim\limits_{a \to 0^+} z(a) = +\infty.$

La démonstration de cette proposition utilise la majoration

$$|u_a'(r)| \leq \sqrt{\frac{2\lambda}{(p+1)}}a^{\frac{(p+1)}{2}}$$

qui implique en particulier

**) $\lim\limits_{a \to 0^+} u_a'\big(z(a)\big) = 0.$

*) est un résultat

Soit ψ l'application définie sur $]0; +\infty[$ par $\psi(a) = u_a'\big(z(a)\big)$. L'application réciproque de ψ est m en effet $m(b) = v_b(y_b)$; il en résulte que ψ est strictement croissante d'après le lemme II.9. De **) on déduit $\lim\limits_{b \to 0^+} v_b(y_b) = 0$ puis de *) $\lim\limits_{b \to 0^+} z(v_b(y_b)) = +\infty$

On obtient donc

$$\lim_{b \to 0^+} y_b = +\infty \tag{II.5}$$

puisque on peut écrire $y_b = z(v_b(y_b))$.

Etudions maintenant la limite inférieure de y_b lorsque $b \to {b_0}^-$. $v_{b_0}' > 0$ sur $[0; s_{b_0}[$; donc, par continuité par rapport à b, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $b_0 - \eta < b < b_0$ implique $v_b' > 0$ sur $[0; s_{b_0} - \varepsilon[$ d'où $y_b > s_{b_0} - \varepsilon$. On en déduit

$$\lim_{b \to b_0^-} y_b \geq s_{b_0} > 0. \tag{II.6}$$

De même, la continuité de v_b' par rapport à b implique celle de l'application $b \mapsto y_b$. De (II.5) et (II.6) on déduit alors que lorsque b appartient à $]0; b_0[$, y_b est minoré par un réel strictement positif A. Ceci démontre le 1) et le 2) du théorème II.2. Les deux premières affirmations du 3) résultent directement du lemme II.8; la dernière sera démontrée par le lemme II.12.

II.3) LIMITE DE $z(a)$ LORSQUE $a \to +\infty$

II.3) a) Lemmes de comparaisons entre $v'^q(r)$ et $v^p(r)$.

Le lemme II.10 qui suit va permettre une comparaison précise des rôles des termes $v'^q(r)$ et $v^p(r)$ dans l'équation différentielle.

Lemme II.10. *Soit $q > \dfrac{2p}{p+1}$ et v solution de*

$$\begin{cases} v'' - |v'|^q + \lambda v^p = 0 \quad sur [0; s_b[\\ v(0) = 0 \\ v'(0) = b \end{cases}$$

S'il existe r_0, $0 < r_0 < y_b$, tel que $\left(\dfrac{v'^q}{v^p}\right)'(r_0) = 0$ alors $\dfrac{v'^q}{v^p}$ est strictement croissante sur $]r_0; y_b[$ et donc $y_b = s_b$.

Démonstration.

Sur $]0; y_b[$ on a

$$\left(\frac{v'^q}{v^p}\right)' = \frac{qv'^{(q-1)}v''v^p - pv^{p-1}v'^{(q+1)}}{v^{2p}} = \frac{v'^{(q-1)}}{v^{p+1}} \cdot (qv''v - pv'^2). \tag{II.7}$$

S'il existe r_0 de $]0; y_b[$ tel que $\left(\dfrac{v'^q}{v^p}\right)'(r_0) = 0$ alors

$$(qv''v - pv'^2)(r_0) = 0. \tag{II.8}$$

On a donc

$$\left(\frac{v'^q}{v^p}\right)''(r_0) = \left(\frac{v'^{q-1}}{v^{p+1}} \cdot (qv'''v + qv''v' - 2pv'v'')\right)(r_0). \tag{II.9}$$

Sur $[0; y_b[$ $v'' = v'^q - \lambda v^p$ et donc $v''' = qv'^{(q-1)}v'' - \lambda p v^{p-1} v'$.

En remplaçant dans (II.9) v''' par $qv'^{q-1}v'' - \lambda p\, v^{p-1}\, v'$ on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{v'^q}{v^p}\right)''(r_0) &= \left(\frac{v'^{q-1}}{v^{p+1}}\right)(r_0)\, \Big(q^2 v'^{q-1} v'' v - \lambda pq v^p v' + qv''v' - 2pv'v''\Big)(r_0) \\ &= \left(\frac{v'^q}{v^{p+1}}\right)(r_0)\, \Big(qv''v(qv'^{q-2}) - \lambda pq v^p + qv'' - 2pv''\Big)(r_0) \end{aligned}$$

L'égalité (II.8) permet de remplacer $qv''v(r_0)$ par $pv'^2(r_0)$ on a alors

$$\left(\frac{v'^q}{v^p}\right)''(r_0) = \left(\frac{v'^q}{v^{p+1}}\right)(r_0)\left(pqv'^q - \lambda pq\, v^p + pq\, v''\Big(\frac{1}{p} - \frac{2}{q}\Big)\right)(r_0)$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\Big(\frac{v'^q}{v^p}\Big)''(r_0) &= pq\frac{v'^q}{v^{p+1}}(r_0)\Big(v'^q - \lambda v^p + \big(\frac{1}{p} - \frac{2}{q}\big)v''\Big)(r_0) \\
&= pq\frac{v'^q}{v^{p+1}}(r_0)\Big(v''(r_0)\big(\frac{1}{p} - \frac{2}{q} + 1\big)\Big)
\end{aligned}
$$

puisque $v'' - v'^q + \lambda v^p = 0$ sur $[0; y_b[$.

Finalement on trouve

$$
\Big(\frac{v'^q}{v^p}\Big)''(r_0) = \frac{v'^q\ v''}{v^{p+1}}(r_0)\Big(q\ (p+1) - 2p\Big)
$$

$q > \dfrac{2p}{p+1}$ et $(qv''v - pv'^2)(r_0) = 0$ impliquent respectivement

$$
q\ (p+1) - 2p > 0 \quad \text{et} \quad v''(r_0) > 0.
$$

On en déduit

$$
\Big(\frac{v'^q}{v^p}\Big)''(r_0) > 0. \tag{II.10}
$$

Cette inégalité montre que si $\Big(\dfrac{v'^q}{v^p}\Big)'(r_0) = 0$ alors $\Big(\dfrac{v'^q}{v^p}\Big)'$ est strictement positive sur $]r_0; y_b[$. Ceci résulte en effet directement du lemme I.5 en prenant $f = \left(\dfrac{v'^q}{v^p}\right)'$, $a = r_0$, $b = y_b$, et $c = 0$.

Le fait que $\Big(\dfrac{v'^q}{v^p}\Big)' > 0$ sur $]r_0; y_b[$ implique que $\dfrac{v'^q}{v^p}$ est strictement croissante sur $]r_0; y_b]$. Le fait que y_b est alors égal à s_b résulte alors de ce que, v_b étant croissante sur $[0; y_b[$, il en est de même de v_b' qui ne peut donc pas s'annuler en y_b. ///

Lemme II.11. *Si $b < b_0$ alors $\dfrac{v'^q}{v^p}$ est strictement décroissante sur $]0; y_b[$.*

Démonstration. S'il existait r_0, $0 < r_0 < y_b$, tel que $\Big(\dfrac{v'^q}{v^p}\Big)'(r_0) = 0$ alors $\dfrac{v'^q}{v^p}$ serait strictement croissante sur $]r_0; y_b[$ (d'après le lemme II.10) et l'égalité (II.7) impliquerait $v'' > 0$ sur $[r_0; y_b[$. On ne pourrait donc avoir $v'(y_b) = 0$ sachant que $v' > 0$ sur $]0; y_b[$.

Comme $\lim\limits_{r \to 0} \dfrac{v'^q}{v^p}(r) = +\infty$ la seule possibilité est donc que $\dfrac{v'^q}{v^p}$ soit strictement décroissante sur $]0; y_b[$. ///

Du lemme II.11 résulte que $\dfrac{v_{b_0}'^q}{v_{b_0}^p}$ est décroissante sur $[0; s_{b_0}[$. Dans le cas contraire il existerait en effet un intervalle r_0 tel que $\left(\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}\right)'(r_0) > 0$ et pour $\varepsilon > 0$ assez petit $b_0 - \varepsilon \leq b \leq b_0$ impliquerait $\left(\frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}\right)'(r_0) > 0$ d'où une contradiction avec le lemme II.11.

D'après le lemme II.8 $\lim\limits_{r \to s_{b_0}} v'_{b_0}(r) = +\infty$ on en déduit alors $\lim\limits_{r \to s_{b_0}} v_{b_0}(r) = +\infty$. On a démontré

Lemme II.12. $\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}$ *est décroissante sur* $]0; s_{b_0}[$ *et* $\lim\limits_{r \to {s_{b_0}}^-} v_{b_0}(r) = +\infty$.

Le fait que $\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}$ soit décroissante et l'égalité

$$\frac{v''_{b_0}}{{v_{b_0}}^p} + \lambda = \frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p} \qquad (II.11)$$

impliquent que $\frac{v''_{b_0}}{{v_{b_0}}^p}$ décroit aussi sur $]0; s_b[$. Lorsque $q > \frac{2p}{p+1}$ la limite lorsque $r \to {s_{b_0}}^-$ de $\frac{v''_{b_0}}{{v_{b_0}}^p}$ ne peut être que 0 . Si ce n'était pas le cas, comme $v''_{b_0} > O$ sur $]0; s_{b_0}[$, on aurait en effet $\lim\limits_{r \to {s_{b_0}}^-} \frac{v''_{b_0}}{{v_{b_0}}^p}(r) = \alpha$ avec $\alpha > 0$. De (II.11) on déduirait alors

$$\lim_{r \to {s_{b_0}}^-} \frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}(r) = \lambda + \alpha.$$

Il existerait alors A , $0 < A < s_{b_0}$ tel que si $A < r < s_{b_0}$

$$\begin{cases} 2\alpha > \dfrac{v''_{b_0}}{{v_{b_0}}^p}(r) \geq \alpha \\ \\ \dfrac{{v'_{b_0}}^q}{v^p_{b_0}}(r) < \lambda + 2\alpha. \end{cases}$$

On aurait alors sur $]A; s_{b_0}[$

$$qv''_{b_0} v_{b_0} - p{v'_{b_0}}^2 \geq q\alpha {v_{b_0}}^{p+1} - p(\lambda + 2\alpha)^{\frac{2}{q}} {v_{b_0}}^{\frac{2p}{q}}.$$

Comme $q > \frac{2p}{p+1}$ et $\lim\limits_{r \to s_{b_0}} v_{b_0}(r) = +\infty$, $(qv''_{b_0} v_{b_0} - p{v'_{b_0}}^2)(r)$ serait strictement positif pour r assez grand. D'après l'égalité (II.5) il en serait de même de $(\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p})'(r)$: d'où une contradiction avec le lemme II.12.

On vient de démontrer

Lemme II.13. $\lim\limits_{r\to s_{b_0}^-} \dfrac{{v'_{b_0}}^{q}}{{v_{b_0}}^{p}}(r) = \lambda$

II.3) b) Démonstration du théorème II.3.1)

Rappelons la partie du théorème II.3 correspondant au cas $q \geq p$.

Théorème II.3.1) *Si $q \geq p$ alors $s_{b_0} = +\infty$ et* $\lim\limits_{b\to b_0^-} y_b = +\infty$.

Démonstration. Du lemme II.13 résulte que $\lim\limits_{r\to s_{b_0}^-} \dfrac{{v'_{b_0}}^{q}}{{v_{b_0}}^{p}}(r) = \lambda$

Soit $\varepsilon > 0$. $\dfrac{{v'_{b_0}}^{q}}{{v_{b_0}}^{p}}$ étant décroissante il existe r_0 tel que $s_{b_0} > r > r_0$ implique $\dfrac{{v'_{b_0}}^{q}}{{v_{b_0}}^{p}}(r) < \lambda + \varepsilon$. On a alors pour $r > r_0$,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{v'_{b_0}}{{v_{b_0}}^{\frac{p}{q}}}(s)ds < (\lambda+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}(r-r_0)$$

Si $p = q$, on en déduit

$v_{b_0}(r) < v_{b_0}(r_0) \cdot e^{(\lambda+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}(r-r_0)}$.

Si $q > p$, on a alors

$$\frac{1}{1-\frac{p}{q}}\left({v_{b_0}}^{1-\frac{p}{q}}(r) \; - {v_{b_0}}^{1-\frac{p}{q}}(r_0)\right) < (\lambda+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}(r-r_0)$$

soit encore

$${v_{b_0}}^{1-\frac{p}{q}}(r) < {v_{b_0}}^{1-\frac{p}{q}}(r_0) + \left(1-\frac{p}{q}\right)(\lambda+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}(r-r_0)$$

Dans les deux cas ces inégalités montrent que $s_{b_0} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{b\to b_0} y_b = +\infty$ en utilisant la continuité des solutions v_b par rapport à b. ///

II.3) c) Démonstration du théorème II.3.2)

Rappelons d'abord la partie du théorème II.3 correspondant au cas $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$

Théorème II.3.2) *Si* $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$ *alors s_{b_0} est fini et* $\lim\limits_{b\to b_0} y_b = s_{b_0}$.

Le fait que s_{b_0} est fini résulte de ce que $\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}$ est décroissante sur $[0; s_{b_0}[$ et $\lim\limits_{r \to s_{b_0}} \frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}(r) = \lambda$. On a alors $v'_{b_0} \geq \lambda^{\frac{1}{q}} v_{b_0}^{\frac{p}{q}}$ donc v_{b_0} explose en temps fini.

La démonstration de la deuxième partie du théorème II. 3. 2) se fait en écrivant (voir la figure 5 ci-dessous)

$$y_b - s_{b_0} = (y_b - r_b) + (r_b - \rho_b(N)) + \big(\rho_b(n) - \rho_{b_0}(N)\big) + \big(\rho_{b_0}(N) - s_{b_0}\big)$$

où

a) r_b est l'unique réel de $]0; y_b[$ tel que $\frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(r_b) = \lambda$; l'existence et l'unicité de r_b résultant de $\lim\limits_{r \to 0} \frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(r) = +\infty$, $\frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(y_b) = 0$ et $\frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}$ strictement décroissante sur $]0; y_b[$;

b) $\rho_b(N)$ et $\rho_{b_0}(N)$ sont définis par $v_b\big(\rho_b(N)\big) = v_{b_0}\big(\rho_{b_0}(N)\big) = N$ où N est un réel destiné à tendre vers $+\infty$.

Remarque. De l'égalité

$$\frac{v''_b}{{v_b}^p} + \lambda = \frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}$$

et de l'unicité de r_b résulte que, pour $b < b_0$, v'_b admet un maximum unique atteint en r_b. Cette remarque sera utilisée dans le chapitre III.

La majoration de $y_b - s_{b_0}$ nécessite la démonstration des lemmes II.14 à II.16.

Lemme II.14. $\lim\limits_{b \to b_0} v_b(r_b) = +\infty$.

Démonstration. Soit N un réel fixé, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b_0 - \varepsilon < b < b_0$ implique $v_b(r_b) > N$. Soit r' le réel tel que $v_{b_0}(r') = N + 1$.

On a $\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}(r') > \lambda + \varepsilon'$ où $\varepsilon' > 0$; en effet $\frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}$ est décroissante sur $]0; y_{b_0}[$ et $\lim\limits_{r \to y_{b_0}} \frac{{v'_{b_0}}^q}{{v_{b_0}}^p}(r) = \lambda$.

En utilisant la continuité de $b \to \frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(r')$ et de $b \to v_b(r')$ on voit qu'il existe ε, $\varepsilon > 0$ tel que $b_0 > b > b_0 - \varepsilon$ implique

$$\begin{cases} \frac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(r') & > \lambda + \varepsilon \\ v_b(r') & > N \end{cases}$$

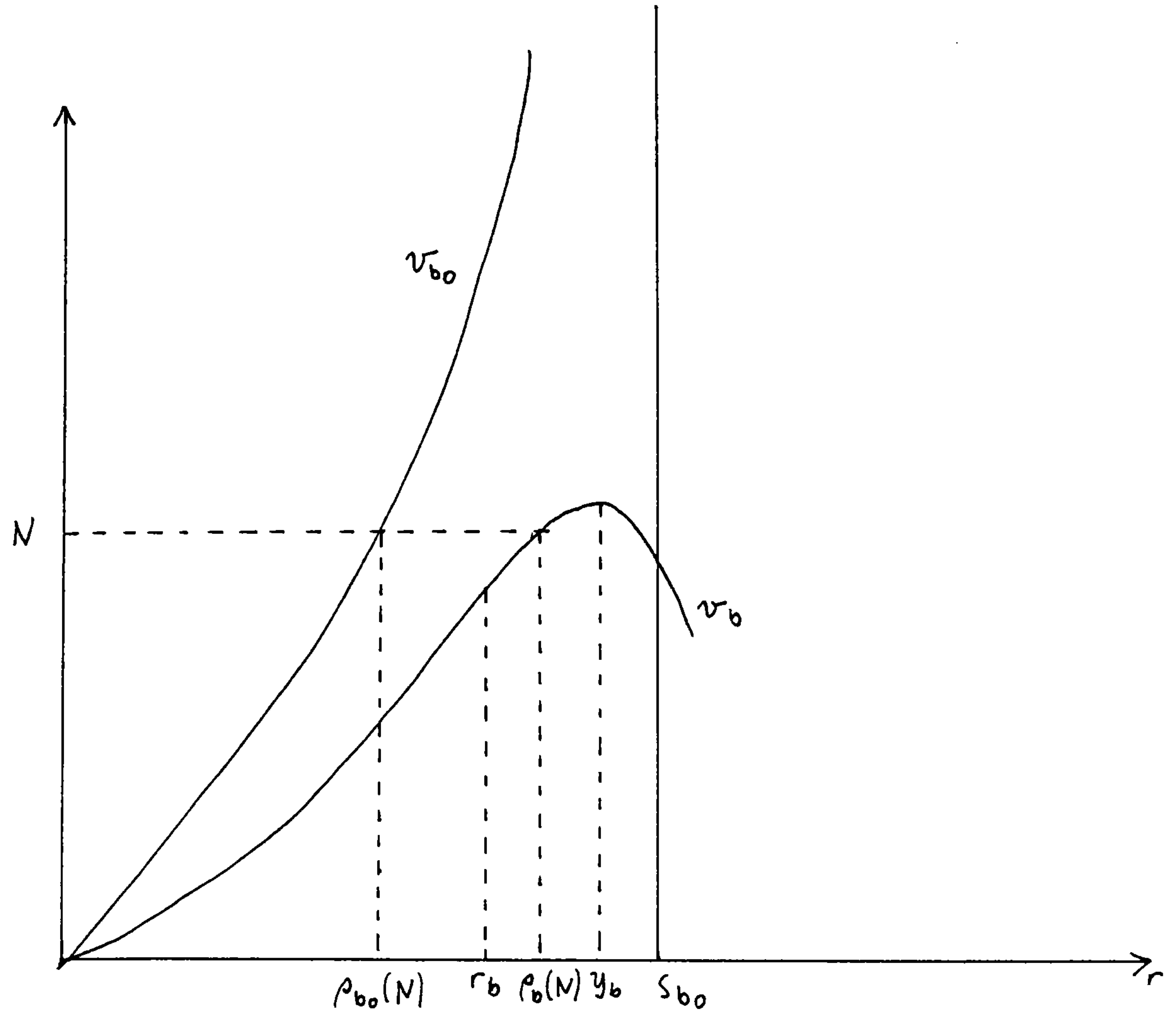


Figure 5.

L'application $r \to \frac{v_b'^q}{v_b{}^p}(r)$ étant décroissante sur $]0;y_b[$, on aura $r_b > r'$. L'application $r \to v_b(r)$ étant croissante sur $]0;y_b[$ on obtient $v_b(r_b) > v_b(r') > N$. ///

Soit N, $N > 0$ fixé; d'après le lemme précédent, il existe un réel $b(N)$ tel que $b(N) < b < b_0$ implique $v_b(r_b) > N$.

Lemme II.15. *Soit N un réel, $N > 0$, et $b(N)$ défini comme ci- dessus. b tel que $b(N) < b < b_0$ et $\rho_b(N)$ le réel tel que $v_b(\rho_b(N)) = N$.*

On a alors

$$r_b - \rho_b(N) < \frac{1}{(\frac{p}{q} - 1) \cdot \lambda^{\frac{1}{q}}} \cdot \frac{1}{N^{\frac{p}{q}-1}}.$$

Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé il existe N_1 tel que si $N > N_1$, $b(N) < b < b_0$ implique $|r_b - \rho_b(N)| < \varepsilon$.

Démonstration. L'application $\frac{v_b'^q}{v_b{}^p}$ est décroissante sur $[\rho_b(N); r_b]$. On a donc $\frac{v_b'^q}{v_b{}^p} \geq \lambda$ et $\frac{v_b'}{v_b{}^{\frac{p}{q}}} \geq \lambda^{\frac{1}{q}}$ sur $[\rho_b(N); r_b]$. En intégrant cette dernière relation sur $[\rho_b(N); r_b]$ on obtient

$$\frac{1}{\frac{p}{q}-1} \cdot \left(\frac{1}{v_b{}^{\frac{p}{q}-1}}(\rho_b(N)) - \frac{1}{v_b{}^{\frac{p}{q}-1}}(r_b) \right) \geq \lambda^{\frac{1}{q}} (r_b - \rho_b(N))$$

d'ou le résultat puisque $v_b(\rho_b(N)) = N$. ///

Lemme II.16. *Avec les notations ci-dessus* $\lim_{b \to b_0{}^-} (y_b - r_b) = 0$.

Démonstration. Soit $b < b_0$. Par définition de r_b, $\frac{v'^q}{v^p}(r_b) = \lambda$ et, comme sur $]0; y_b[$ $\frac{v''}{v^p} + \lambda = \frac{v'^q}{v^p}$, $v''(r_b) = 0$ et v' atteint son maximum en r_b.

Soit $[r_b; r_b + \alpha]$ le plus grand intervalle d'origine r_b sur lequel $v' \geq \frac{v'(r_b)}{2}$. Si r appartient à cet intervalle $v(r) \geq v(r_b) + (r - r_b) \cdot \frac{v'(r_b)}{2}$ et comme $v''(r) = v'^q(r) - \lambda v^p(r)$ on a alors

$$\begin{aligned} v''(r) &\leq v'^q(r_b) - \lambda \left(v(r_b) + (r - r_b) \cdot \frac{v'(r_b)}{2} \right)^p \\ &\leq v'^q(r_b) - \lambda \left(v^p(r_b) + p v^{p-1}(r_b)(r - r_b) \cdot \frac{v'(r_b)}{2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{v'^q}{v^p}(r_b) = \lambda$, en remplaçant $v'^q(r_b)$ par $\lambda v^p(r_b)$ dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$v''(r) \leq -\lambda p v^{p-1}(r_b) \cdot (r - r_b) \cdot \frac{v'(r_b)}{2}.$$

On a $v'(r_b + \alpha) = v'(r_b) + \int_{r_b}^{r_b+\alpha} v''(s) ds$ et donc

$$v'(r_b + \alpha) = \frac{v'(r_b)}{2} \leq v'(r_b) - \frac{\lambda p}{4} \cdot v^{p-1}(r_b) \alpha^2 v'(r_b)$$

d'où

$$\alpha^2 \leq \frac{2}{\lambda p v^{p-1}(r_b)}.$$

En utilisant le lemme II.14 on déduit que si $b \to b_{0-}$ alors $\alpha \to 0$.

On a $v'(r_b + \alpha) = \frac{v'(r_b)}{2}$. D'autre part, pour tout réel β tel que $r_b + \alpha \leq r_b + \alpha + \beta \leq y_b$ on a

$$\begin{aligned} v(r_b + \alpha + \beta) &\geq v(r_b + \alpha) \\ v'(r_b + \alpha + \beta) &\leq v'(r_b + \alpha). \end{aligned}$$

Du fait que v est croissante sur $[r_b; y_b]$ et que v' est décroissante sur cet intervalle, il résulte que si $\eta_0 \geq 0$ est tel que

$$r_b \leq r_b + \alpha \leq r_b + \alpha + \eta \leq y_b$$

alors $v''(r_b + \alpha + \eta) \leq v''(r_b + \eta)$.

Comme $v'(r_b + \alpha) = \dfrac{v'(r_b)}{2}$ et $v_b'(y_b) = 0$ on en déduit que $y_b - (r_b + \alpha) \leq \alpha$ et donc que $y_b \leq r_b + 2\alpha$. On obtient donc $\lim\limits_{b \to b0-} y_b - r_b = 0$. ///

Fin de la démonstration du théorème II.3.2)

On écrit $y_b - s_{b_0} = (y_b - r_b) + \big(r_b - \rho_b(N)\big) + \big(\rho_b(N) - \rho_{b_0}(N)\big) + \big(\rho_{b_0}(N) - s_{b_0}\big)$ où $\rho_{b_0}(N)$ est défini par $v_{b_0}\big(\rho_{b_0}(N)\big) = N$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Montrons qu'il existe $\alpha, \alpha > 0$, tel que $b_0 - \alpha < b < b_0$ implique $|y_b - s_{b_0}| < \varepsilon$.

On choisit d'abord N_0 tel que $N > N_0$ implique $|\rho_{b_0}(N) - s_{b_0}| < \frac{\varepsilon}{4}$. Le lemme II.15 montre qu'on peut trouver N_1 tel que si $N > N_1$, il existe $\alpha_0(N)$, $\alpha_0(N) > 0$ pour lequel $b_0 - \alpha(N) < b < b_0$ implique $\left|r_b - \rho_b(N)\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

D'après le lemme II.16, il existe $\alpha_1 > 0$ tel que $b - \alpha_1 < b < b_0$ implique $|y_b - r_b| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Soit alors $M = \sup\{N_0, N_1\}$. En utilisant la continuité des solutions de l'équation différentielle par rapport à b , pour tout $N > M$ on peut trouver $\alpha_2(N)$ tel que $\alpha > \alpha_2(N)$ implique $|\rho_{b_0}(N) - \rho_b(N)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Les 4 inégalités sont réalisées dès que $N > M$ et que α vérifie $0 < \alpha < \inf\ \big\{\alpha_0(N), \alpha_1, \alpha_2(N)\big\}$. D'où le résultat.

Démonstration du théorème II.4. On a vu (cf. lemmes II.9 et II.16) que, pour $0 < b < b_0$, l'application $b \longmapsto m(b) = v_b(y_b)$ est continue et strictement croissante de $]0; b_0[$ sur $]0; +\infty[$. On a donc $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a) = \lim\limits_{b \to b_0^-} y_b$. Les assertions du théorème II.4 en résultent. ///

Démonstration du théorème II.5. Les assertions du théorème II.5 découlent directement de celles du théorème II.4 à l'exception de 2) c) qui utilise en plus la proposition I.8 2). Celle-ci énonce que, si $q > \dfrac{2p}{p+1}$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, sur $]0; a_0[$, z est strictement décroissante. Comme z est continue sur $[a_0; +\infty[$ et que $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a)$ est fini, il existe un réel R_1' tel que $z < R_1'$ sur $[a_0; +\infty[$. D'autre part z est strictement décroissante sur $]0; a_0[$ et $\lim\limits_{a \to 0} z(a) = +\infty$: il existe donc un réel $a_1 < a_0$ tel que $z(a_1) > R_1'$ et pour tout $R > z(a_1)$ l'équation $z(a) = R$ a une solution unique. ///

CHAPITRE III

CAS OU $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$ EN DIMENSION n

III.I) PRESENTATION DES RESULTATS

Dans ce chapitre nous étendons les propriétés vues au chapitre II aux solutions de

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 & \text{pour } r > 0 \\ u\ (0) = a \\ u'\ (0) = 0 \end{cases}$$

dans le cas

$$\begin{cases} n \leq 2 \\ \text{ou} \\ n \geq 3 \quad \text{et } p < \frac{n}{n-2} \end{cases} \qquad \text{et } \frac{2p}{p+1} < q < p. \tag{III.1}$$

Concernant les solutions u_a du problème (P_a) on a le théorème suivant:

Théorème III.1. *Si (III.1) est vérifié alors toute solution u_a de (P_a) s'annule en point et si $z(a)$ désigne le premier zéro de u_a il existe des réels α et β , $0 < \beta < \alpha$ tels que*

$$\limsup_{a \to +\infty} z(a) = \alpha \ \ et \ \ \liminf_{a \to +\infty} z(a) = \beta.$$

Le théorème III.2 en donne les conséquences concernant le problème (P_R) sur une boule B_R de rayon R dans $\mathbf{R}^n$. Rappelons que le problème (P_R) défini dans l'introduction est le suivant:

$$(P_R) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{pour } 0 < r \leq R \\ u > 0 & \text{sur } [0;\ R[\\ u'\ (0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

Théorème III.2. *Supposons (III.1) vérifié. Il existe des réels $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$, $0 < \mathcal{R}_0 < \mathcal{R}_1$ tels que sur une boule de rayon R le problème (P_R)*

a) n'a pas de solution si $R < \mathcal{R}_0$;

b) a au moins une solution si $\mathcal{R}_0 \leq R \leq \mathcal{R}_1$;

c) a une solution unique si $R > \mathcal{R}_1$.

La démonstration du théorème III.1 se fait en décomposant l'intervalle sur lequel $u_a > 0$ en deux parties. Sur la première (correspondant à la proposition III.3 qui suit), on montre que si le réel a_1 est assez grand et si $a > a_1$ on peut comparer u_a avec une fonction $\tilde{u}_{\tilde{a}}$ sur l'intervalle sur lequel $a_1 < u_a < a$, $\tilde{u}_{\tilde{a}}$ étant solution de

$$(\tilde{P}_{\tilde{a}}) \begin{cases} u'' - 2\,|u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ u(0) = \tilde{a} \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Il résulte de cette comparaison qu'il existe un réel R_0 tel que $a > a_1$ et $u_a(r) \geq a_1$ implique $r \leq R_0$.

Remarque. Les propriétés des solutions $\tilde{u}_{\tilde{a}}$ sont analogues à celles des fonctions u_a étudiées dans le chapitre II puisque seul le coefficient de $|u'|^q$ change et que $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$.

Sur la deuxième partie on utilise le comportement asymptotique de u_a étudié dans la proposition III.4.

Proposition III.3. *Il existe des réels $A_1 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que si $A_1 < a_1 < a$ et si R est le réel tel que $u_a(R) = a_1$ alors*

$$0 < R \leq R_0. \tag{1}$$

De plus pour tout a_1, $a_1 > A_1$, il existe un réel $D_0 < 0$ (D_0 dépendant de a_1) tel que, R étant défini comme ci-dessus,

$$D_0 < u_a'(R) \leq 0. \tag{2}$$

(voir figure 1).

Proposition III.4. *On suppose (III.1) réalisé. Soit $R \geq 0$, $D \leq 0$, $a > 0$. Pour toute solution de*

$$(P_{R,\,D,\,a}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r} u' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 & sur\ [R; +\infty[\\ u\ (R) = a \\ u'\ (R) = D \end{cases}$$

il existe un réel R' dépendant de R, D et $a$tel que $u(R') = 0$.

Dans la démonstration de la proposition III.3, les lemmes III.5 et III.6 donnent des propriétés concernant les solutions $\tilde{u}_a$ de $(\tilde{P}_a)$, le lemme III.7 concerne les solutions u_a de (P_a) . La démonstration de la proposition III.4 utilise les lemmes III.8 à III.11. L'idée de la démonstration de la propriété III.4 est d'étudier le comportement asymptotique des

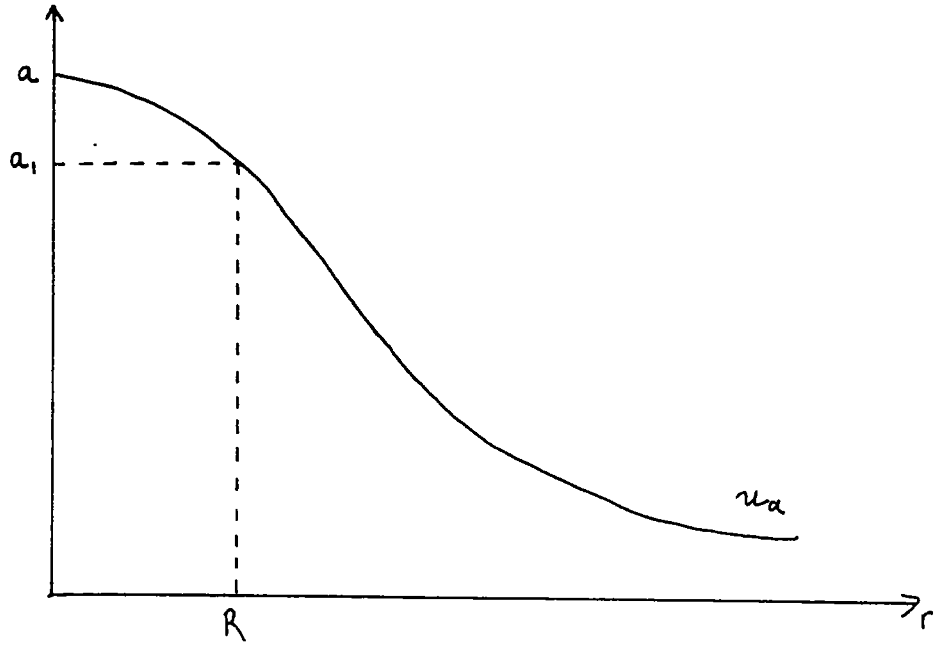


Figure 1.

solutions u_a strictement positives comme dans l'article de J. Serrin et H. Zou [SZ] : la démonstration étant ici plus rapide (en particulier grâce aux lemmes III.8 et III.9).

Rappelons enfin le théorème suivant démontré au chapitre I.

Théorème I.4. *On suppose*

$$\begin{cases} n \leq 2 & \\ & ou \\ n \geq 3 & et \;\; p < \dfrac{n+2}{n-2}. \end{cases}$$

1) Si $q < \dfrac{2p}{p+1}$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, sur $]a_0; +\infty[$, z est strictement décroissante.

2) Si $q > \dfrac{2p}{p+1}$, il existe un réel $a_0 > 0$ tel que, sur $]0; a_0[$, z est strictement décroissante.

Démonstration du théorème III.1. Soit A_1 défini par la proposition III.3, $a_1 > A_1$ et u_a solution de (P_a) où $a > a_1$. La restriction de u_a à $[R; +\infty[$ est alors solution de (P_{R,D,a_1})

$$(P_{R,\,D,\,a_1}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{sur } [R; +\infty[\\ u(R) = a_1 \\ u'(R) = D \end{cases}$$

où $0 < R \leq R_0$, $D_0 \leq D \leq 0$ d'après la proposition III.3. En utilisant la proposition III.4 on voit qu'il existe un réel $z(R, D)$ tel que $u_a\big(z(R, D)\big) = 0$. z est continue sur le compact $[0;\ R_0] \times [D_0;\ 0]$ donc il existe des réels α' et β' , $0 < \beta' < \alpha'$ tels que, pour tout couple

$(R; D)$ de cet ensemble, $\beta' \leq z(R; D) \leq \alpha'$. Il en résulte qu'il existe des réels α et β tels que

$$\limsup_{a \to +\infty} z(a) = \alpha \text{ et } \liminf_{a \to +\infty} z(a) = \beta.$$

De plus $\beta > 0$. Ceci résulte de la comparaison de u_a avec la solution $\bar{u}_a$ de

$$(\bar{P}_a) \begin{cases} u'' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Si $\bar{z}(a)$ est le plus petit réel r strictement positif tel que $\bar{u}_a(r) = 0$, on a en effet, d'après la proposition I.7 du chapitre I, $z(a) > \bar{z}(a)$ quel que soit $a > 0$. Comme le théorème II.4 montre que $\lim\limits_{a \to +\infty} \bar{z}(a)$ est un réel strictement positif, on en déduit que $\beta > 0$. ///

Démonstration du théorème III.2. L'application z est continue sur $]0; +\infty[$, $\liminf\limits_{a \to +\infty} z(a) = \beta$ avec $\beta > 0$ et $\lim\limits_{a \to 0} z(a) = +\infty$ donc il existe un réel $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_0 > 0$, tel que, pour tout a de $]0; +\infty[$, $z(a) \geq \mathcal{R}_0$. Ceci prouve le a) et b). Démontrons alors le c) en utilisant le théorème I.4 cité ci-dessus. Soit a_0 le réel tel que z est strictement décroissante sur $]0; a_0[$. En utilisant maintenant le fait que l'application z est continue sur $]0; +\infty[$ et que $\limsup\limits_{a \to +\infty} z(a) = \alpha$ où $\alpha > 0$ on voit que z est majorée par un réel R_2 sur $[a_0; +\infty[$. Soit $a'_1 < a_0$ tel que $z(a'_1) > R_2$ (a'_1 existe puisque $\lim\limits_{a \to 0} z(a) = +\infty$). z est alors majorée sur $[a'_1; +\infty[$ par R_2; z étant une bijection strictement décroissante de $]0; a'_1[$ sur $]z(a'_1); +\infty[$, pour tout $R > z(a'_1)$ il existe un réel a unique tel que $z(a) = R$ et de plus $a \in]0; a'_1[$. Ceci démontre le c) en prenant $\mathcal{R}_1 = z(a'_1)$.

III.2) ENCADREMENT PARTIEL DE u

Démonstration de la proposition III.3.

Démontrons tout d'abord que si a_1 est fixé, $a_1 > 0$, il existe un réel D_0, $D_0 < 0$ tel que si $a > a_1$ et si R désigne le réel tel que $u_a(R) = a_1$ alors $D_0 < u'_a(R) < 0$ (ce qui correspond à l'inégalité (2) de la proposition III.3) .

Considérons pour cela la fonction notée $\bar{u}_a$ solution de

$$(\bar{P}_a) \begin{cases} u'' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Les propriétés de la fonction $\bar{u}_a$ ont été étudiées au chapitre II. On sait qu'il existe un réel $z(a)$ tel que $\bar{u}_a(z(a)) = 0$. Soit v définie comme dans le II.1 par $v(r) = \bar{u}_a(z(a) - r)$;

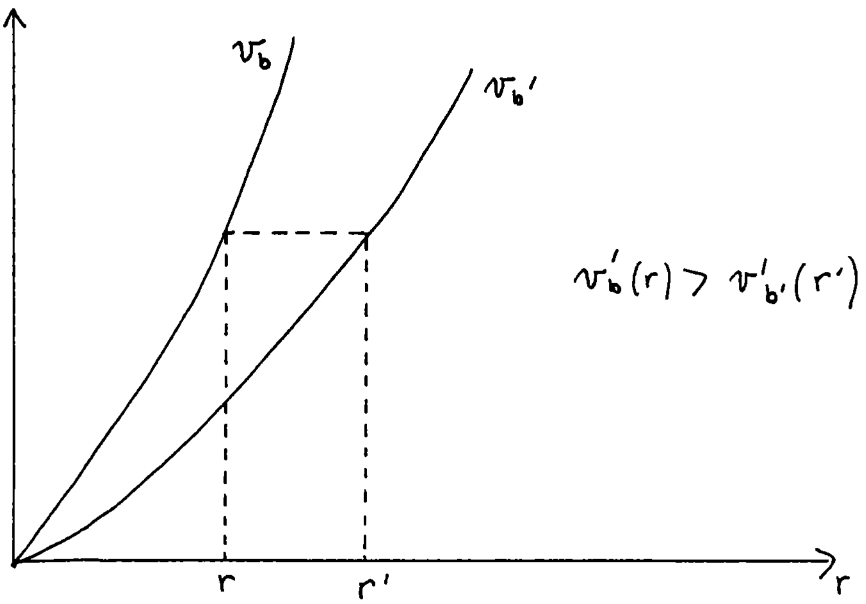


Figure 2.

on a alors

$$v'(r) = -\bar{u}'_a\big(z(a) - r\big) \qquad (*)$$

Soit $v'(0) = b$. On a alors $b < b_0$ où b_0 est la valeur définie au théorème II.2. Nous utilisons alors le lemme III.6 démontré ci-dessous (page 45):

Lemme III.6. *1) Soit b et b' deux réels tels que $0 < b' < b$; si $0 < r < y_b$, $O < r' < y_{b'}$ et $v_b(r) = v_{b'}(r')$ alors $v'_b(r) > v'_{b'}(r')$.*

Ce lemme implique que si $b < b_0$ et $v_{b_0}(r) = v_b(r') = a_1$ avec $0 < r' < y_b$ alors $v'_b(r') < v'_{b_0}(r)$.

$$v'_b\big(v_b^{-1}(a_1)\big) < v'_{b_0}\big(v_{b_0}^{-1}(a_1)\big)$$

(voir figure 2 ci-dessous).

Notons $-D_0$ le réel $v'_{b_0}(r)$ (où $D_0 < 0$).

On a donc

$$0 \leq v'_b(r') < -D_0 \qquad (**)$$

et $\bar{u}'_a\big(\bar{u}_a^{-1}(a_1)\big) > D_0$ d'après (*) et (**). On déduit alors de la démonstration de la proposition I.7 vue au chapitre I que $u'_a\big(u_a^{-1}(a_1)\big) > D_0$ (puisque u_a et $\bar{u}_a$ correspondent respectivement à des solutions en dimension n et 1) soit encore $u'_a(R) > D_0$. Ceci démontre l'inégalité (2) de la proposition III.3.

Montrons maintenant qu'il existe un réel a_1 pour lequel l'inégalité (1) est réalisée. Concernant les solutions $\tilde{u}_a$ de $(\tilde{P}_a)$

$$(\tilde{P}_a)\begin{cases} u'' - 2\,|u'|^q + \lambda\, u^p = 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

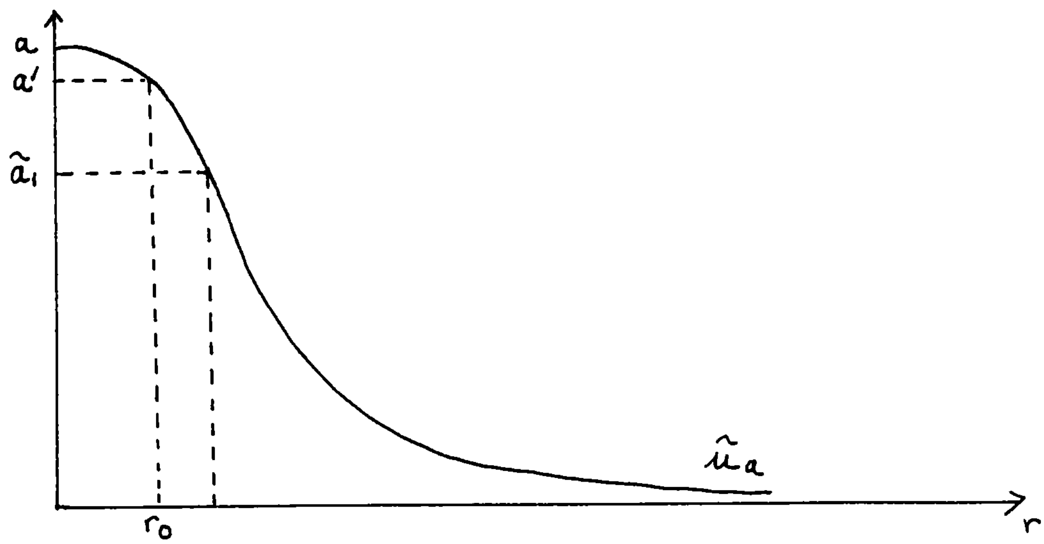


Figure 3.

nous utiliserons le lemme suivant

Lemme III.5. *Soit $D < 0$, il existe un réel $\tilde{a}_1 > 0$ tel que pour tout $a' \geq \tilde{a}_1$ il existe a, $a > a'$ pour lequel $\tilde{u}_a$ vérifie les propriétés suivantes (voir figure 3 ci-dessous):*

1) si r_0 est le réel tel que $\tilde{u}_a(r_0) = a'$ alors $\tilde{u}'_a(r_0) = D$;

2) si $\tilde{a}_1 \leq \tilde{u}_a(r) \leq a'$ alors $\tilde{u}'_a(r) \leq D$.

Démonstration du lemme III.5. D'après le chapitre II, il existe $\tilde{z}(a)$ tel que $\tilde{u}_a\big(\tilde{z}(a)\big) = 0$.

Dans la démonstration nous utiliserons les fonctions v_b définies par $v_b(r) = \tilde{u}_a\big(\tilde{z}(a) - r\big)$ qui vérifient

$$(P'_b) \qquad \begin{cases} v''(r) - 2\,|v'(r)|^q + \lambda |v(r)|^p = 0 & \text{si } r \geq 0 \qquad \text{(III.2)} \\ v(0) = 0 & \\ v'(0) = b & \text{où } b = -\tilde{u}'_a\big(\tilde{z}(a)\big). \end{cases}$$

Le coefficient de $|v'(r)|^q$ étant -2 au lieu de -1, nous utiliserons les propriétés démontrées au chapitre II.

Rappelons que b_0 est le plus petit réel strictement positif tel que v_b explose en temps fini. D'autre part, si $0 < b < b_0$, v'_b atteint son maximum pour $r = r_b$ où r_b est l'unique réel tel que $\dfrac{{v'_b}^q}{v_b^p}(r_b) = \dfrac{\lambda}{2}$ et on a la relation $\dfrac{v''_b}{v_b^p} + \lambda = 2\,\dfrac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}$ (cf. la remarque précédant le lemme II.14).

Etablissons tout d'abord le lemme suivant:

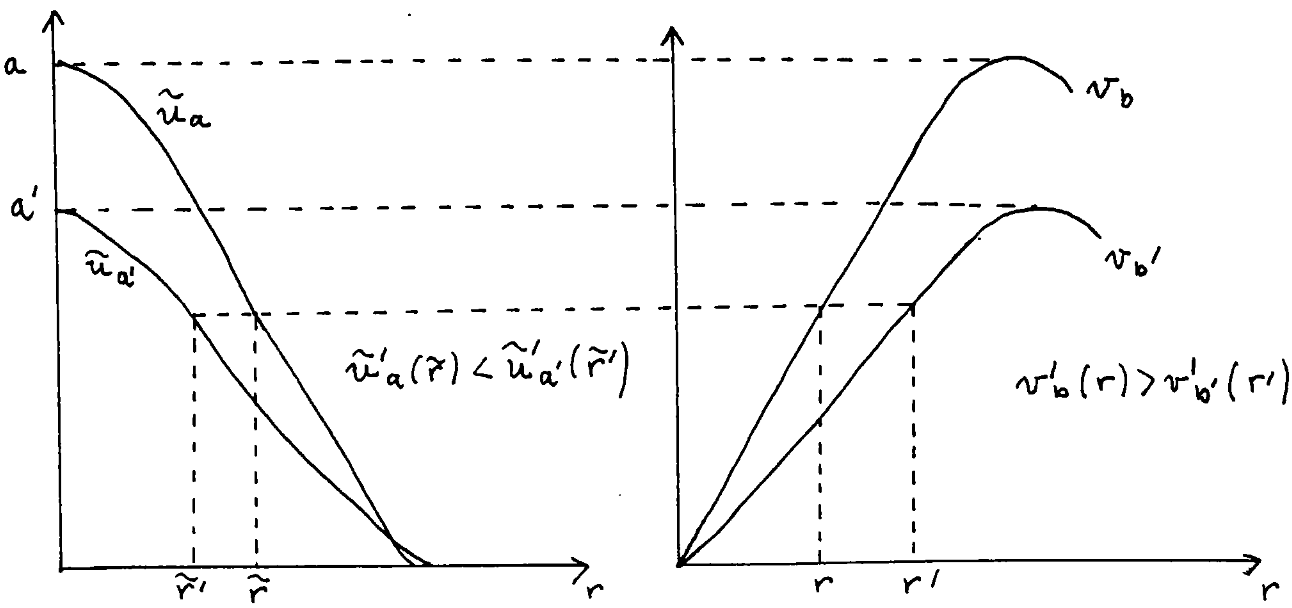


Figure 4.

Lemme III.6. *1) Soit b et b' deux réels tels que $0 < b' < b$; si $0 < r < y_b$, $O < r' < y_{b'}$ et $v_b(r) = v_{b'}(r')$ alors $v'_b(r) > v'_{b'}(r')$.*

2) Soit a et a' deux réels tels que $0 < a' < a$, si $\tilde{u}_a(\tilde{r}) = \tilde{u}_{a'}(\tilde{r}')$ alors $\tilde{u}'_a(\tilde{r}) < \tilde{u}'_{a'}(\tilde{r}')$.

Démonstration. $v'_b(0) > v'_{b'}(0)$ donc si on avait $v'_b(r) \leq v'_{b'}(r')$, il existerait deux réels r_1 et r'_1 , $0 < r_1 < r$ et $0 < r'_1 < r'$, tels que $v_b(r_1) = v_{b'}(r'_1)$ et $v'_b(r_1) = v'_{b'}(r'_1)$; ce qui constituerait une contradiction avec le théorème de Cauchy.

Déduisons en le 2). (Voir figure 4 ci-dessous) Soit donc $0 < a' < a$, et considérons les fonctions v_b et $v_{b'}$ définies par $v_b(r) = \tilde{u}_a\big(\tilde{z}(a) - r\big)$ et $v_{b'}(r) = \tilde{u}_{a'}\big(\tilde{z}(a') - r\big)$. D'après le lemme II.9 on a $b' < b$ puisque $a > a'$, d'où en utilisant le 1) $v'_b(r) > v'_{b'}(r')$ lorsque $v_b(r) = v_{b'}(r')$. On a alors $-\tilde{u}'_a(\tilde{r}) > -\tilde{u}'_{a'}(\tilde{r}')$ si $\tilde{u}_a(\tilde{r}) = \tilde{u}_{a'}(\tilde{r}')$. ///

On sait que, si $0 < b < b_0$, $v'_b(r)$ atteint entre 0 et y_b son maximum pour $r = r_b$ et que $\dfrac{{v'_b}^q}{{v_b}^p}(r_b) = \lambda$. Il existe donc un réel que nous noterons r_a tel que $|\tilde{u}'_a|$ est croissante sur $[0;\ r_a]$ et décroissante sur $[r_a;\ z(a)]$. On a la relation suivante similaire à celle pour les fonctions v_b :

$$\frac{|\tilde{u}'_a|^q}{\tilde{u}_a^p}(r_a) = \frac{\lambda}{2} \qquad (III.3)$$

Du lemme III.6 résulte alors le corollaire

Corollaire. *1) Soit b et b' deux réels tels que $0 < b' < b < b_0$, on a alors $v'_b(r_b) > v'_{b'}(r_{b'})$.*

2) Soit $0 < a' < a$ on a alors $\tilde{u}'_a(r_a) < \tilde{u}'_{a'}(r_{a'})$

Démonstration du corollaire. On sait d'après le lemme II.9 que si $b > b'$ alors $v_b(y_b) > v_{b'}(y_{b'})$. Il existe donc un réel r tel que $v_{b'}(r_{b'}) = v_b(r)$ et par le lemme III.6 $v'_{b'}(r_{b'}) < v'_b(r)$ d'où $v'_{b'}(r_{b'}) < v'_b(r_b)$ puisque r_b est le réel pour lequel v'_b atteint son maximum. Le 2) en résulte car $\tilde{u}'_a(r_a) = -v'_b(r_b)$ et $\tilde{u}'_{a'}(r_{a'}) = -v'_{b'}(r_{b'})$.///

Fin de la démonstration du lemme III.5. On sait que $\lim_{b \to b_0 -} v_b(r_b) = +\infty$ (d'après le lemme II.14) donc on a aussi $\lim_{a \to +\infty} \tilde{u}_a(r_a) = +\infty$; d'autre part d'après le corollaire précédent l'application $a \mapsto |\tilde{u}'_a(r_a)|$ est strictement croissante et il en est alors de même d'après (III.3) de $a \mapsto \tilde{u}_a(r_a)$, il existe alors un réel $\tilde{a}_2$ tel que

1) $\tilde{u}_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) = \dfrac{|D|^{\frac{q}{p}}}{\lambda^{\frac{1}{p}}}$ et donc

$$\tilde{u}'_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) = D \tag{III.4}$$

d'après (III.3);

2) si $a > \tilde{a}_2$, $\tilde{u}_a(r_a) > \dfrac{|D|^{\frac{q}{p}}}{\lambda^{\frac{1}{p}}}$ et $\tilde{u}'_a(r_a) < D$.

$\tilde{u}_{\tilde{a}_2}$ correspond d'après sa définition à une fonction notée $v_{\tilde{b_2}}$ où $\tilde{b_2} < b_0$ et, en utilisant le corollaire précédent et (III.3), on voit que $\tilde{a_2}$ est le seul réel a pour lequel u'_a admet un minimum égal à D.

Posons $\tilde{a}_1 = \dfrac{|D|^{\frac{q}{p}}}{\lambda^{\frac{1}{p}}}$ (voir figure 5) et montrons que si $a' > \tilde{a}_1$ les conditions 1) et 2) du lemme III.5 sont vérifiées c'est à dire qu'il existe $a > \tilde{a}_1$ tel que

1) si r_0 est le réel tel que $\tilde{u}_a(r_0) = a'$ alors $\tilde{u}'_a(r_0) = D$;

2) si $\tilde{a}_1 \leq \tilde{u}_a(r) \leq a'$ alors $\tilde{u}'_a(r) \leq D$.

Appelons $\tilde{u}_\infty$ la fonction correspondant à v_{b_0}. $\tilde{u}_\infty$ est solution de

$$(\tilde{P}_\infty)\begin{cases} u'' - 2\,|u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ \lim\limits_{r \to 0^+} u(r) = +\infty \\ u(s_{b_0}) = 0 \end{cases}$$

$[0; s_{b_0}[$ étant comme au chapitre II l'intervalle maximal sur lequel v_{b_0} est définie . $\tilde{u}'_\infty$ est croissante sur $]0; s_{b_0}]$ d'après le théorème II.2.3).

Soit enfin $\tilde{u}$ la solution de

$$(\tilde{P}_{a',\,D})\begin{cases} u'' - 2\,|u'|^q + \lambda |u|^p = 0 \\ \tilde{u}(0) = a' \\ \tilde{u}'(0) = D \end{cases} \qquad \text{où } a' > a_1$$

avec $q < p$.

Pour la suite voir la figure 5.

Si r_∞ est le réel tel que

$$\tilde{u}_\infty(r_\infty) = \tilde{u}_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) = \tilde{a}_1$$

on a $\tilde{u}'_\infty(r_\infty) < \tilde{u}'_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2})$; en effet $\tilde{u}_{\tilde{a}_2}$ correspondant à $v_{\tilde{b_2}}$ où $\tilde{b_2} < b_0$ et $\tilde{u}_\infty$ à v_{b_0}, si $v_{b_0}(r) = v_{\tilde{b_2}} = \tilde{a}_1$ alors d'après le lemme III.6 $v'_{b_0}(r) > v'_{\tilde{b_2}}(r')$ et donc $\tilde{u}'_\infty(r_\infty) < \tilde{u}'_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2})$.

Soit enfin r'_∞ le réel tel que $\tilde{u}_\infty(r'_\infty) = a'$, on a $r'_\infty < r_\infty$ et comme $\tilde{u}'_\infty$ est croissante sur $]0; s_{b_0}]$, $\tilde{u}'_\infty(r'_\infty) < \tilde{u}'_\infty(r_\infty) < D$.

On a donc

$$\begin{cases} \tilde{u}_\infty(r'_\infty) = \bar{u}(0) = a' \\ \tilde{u}'_\infty(r'_\infty) < \bar{u}'(0) = D \end{cases}$$

d'après la définition de $\bar{u}$.

$\bar{u}$ correspond à une fonction v_b et $b < b_0$; en effet si r et r' sont les réels tels que $v_b(r) = v_{b_0}(r') = a'$ alors $v'_b(r) < v'_{b_0}(r')$ et donc $b < b_0$ d'après le lemme III.6 1).

Ceci montre qu'il existe des réels $\bar{r}$ et $\bar{R}$ tels que $\bar{u}(\bar{R}) = 0$ et $\bar{u}'(\bar{r}) = 0$. Soit $\bar{u}(\bar{r}) = a$; on a alors $\tilde{u}_a(r) = \bar{u}(\bar{r}+r)$ pour tout r pour lequel $\tilde{u}_a(r)$ est défini puisque $\tilde{u}_a$ et $\bar{u}$ vérifient la même équation différentielle autonome et que $\bar{u}(\bar{r}) = \tilde{u}_a(0) = a$. On en déduit que

$$\text{si } r_0 \text{ est le réel tel que } \tilde{u}_a(r_0) = a' \text{ alors } \tilde{u}'_a(r_0) = D \text{ car } \bar{u}(0) = a',\ \bar{u}'(0) = D \qquad (III.5)$$

(d'après les deux dernières égalités définissant le problème $(\tilde{P}_{a',\,D})$). Ceci démontre le 1) du lemme III.5.

Enfin, montrons que si $\tilde{a}_1 \leq \tilde{u}_a(r) \leq a'$, $\tilde{u}'_a(r) \leq D$. On a $\tilde{u}'_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) = D = \tilde{u}'_a(r_0)$ et $\tilde{u}_a(r_0) = a' > \tilde{u}_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2})$. Comme $\tilde{u}_{\tilde{a}_2}$ est la seule fonction dont la valeur minimale de la dérivée est égale à D, on déduit du corollaire du lemme III.6 que $a > \tilde{a}_2$. De $a > \tilde{a}_2$ résulte alors d'après le lemme III.6 2) que

$$\text{si } r_1 \text{ est le réel tel que } \tilde{u}_a(r_1) = \tilde{u}_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) \text{ alors } \tilde{u}'_a(r_1) < D \qquad (III.6)$$

(en effet on a

$$\tilde{u}'_{\tilde{a}_2}(r_{\tilde{a}_2}) = D$$

d'après (III.4)). Comme $\tilde{u}'_a$ est décroissante sur $[0;\ r_a]$, croissante sur $[r_a, \tilde{z}(a)]$ on déduit alors de (III.5) et (III.6) que $\tilde{a}_1 \leq \tilde{u}_a(r) \leq a'$ implique $\tilde{u}'_a(r) \leq D$.

Lemme III.7. *Soit $D < -1$. Si le réel a'_1 est assez grand alors on a l'un des deux cas suivants lorsque $a > a'_1$:*

a) ${u_a}^{-1}(a'_1) \leq 1$

b) ${u_a}^{-1}(a'_1) > 1$ et si r est tel que $r \geq 1$ et $u_a(r) > a'_1$ alors $u'_a(r) < D$.

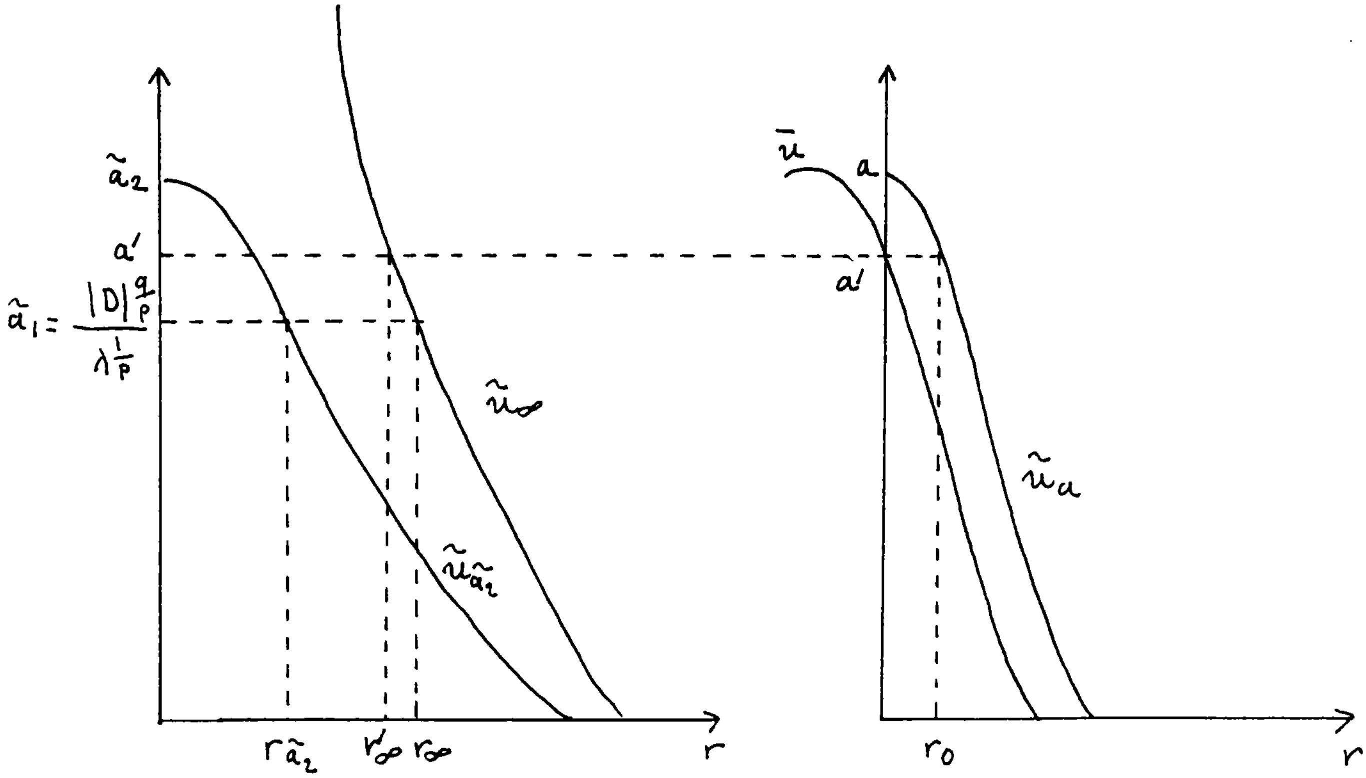


Figure 5.

Démonstration du lemme III.7.. L'idée est de montrer que si a'_1 est assez grand alors:

1) si $u_a > a'_1$ sur $[\frac{1}{2}; 1[$ il existe r_0 de $[\frac{1}{2}; 1]$ tel que $u'_a(r_0) < D$;

2) les conditions $r \geq \frac{1}{2}$, $u'_a(r) = D$ et $u_a(r) \geq a'_1$ impliquent $u''_a(r) < 0$.

Cherchons a'_1 pour que 1) soit réalisé. Nous nous plaçons dans le cas où $D \leq u'_a(\frac{1}{2}) < 0$ et $u_a > a'_1$ sur $[\frac{1}{2}; 1]$. Soit $[\frac{1}{2}; \alpha[$ le plus grand intervalle d'extrémité $\frac{1}{2}$, sur lequel $D \leq u'_a$. Remarquons que si $u''_a < 2D$ sur $[\frac{1}{2}; \alpha[$ on a alors $\alpha < 1$. Cette condition implique en effet que si r appartient à $[\frac{1}{2}; \alpha]$ alors

$$\begin{aligned} u'_a(r) &< u'_a(\frac{1}{2}) + 2\ D(r - \frac{1}{2}) \\ &< 2\ D(r - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

On ne peut alors avoir $\alpha \geq 1$ car la relation $u'_a(r) < 2\ D\left(r - \frac{1}{2}\right)$ sur $[\frac{1}{2}; \alpha]$ impliquerait en particulier

$$\begin{aligned} u'_a(1) &< 2\ D(1 - \frac{1}{2}) \\ &< D \end{aligned}$$

Supposons donc

$$r \geq \frac{1}{2}, \quad D \leq u_a'(r) < 0 \text{ et } u_a(r) \geq a_1' \tag{III.7}$$

La première relation de (III.7) implique $2 \geq \dfrac{1}{r}$ qui combinée avec la deuxième donne

$$2D \leq \frac{u_a'(r)}{r} \text{ puis } -2(n-1)\ D \geq -\frac{n-1}{r}u_a'(r).$$

De l'égalité

$$u_a''(r) = -\frac{n-1}{r}u_a'(r) + |u_a'(r)|^q - \lambda u_a^p(r)$$

et de (III.7) on peut donc déduire que si $r \geq \frac{1}{2}$ alors

$$u_a''(r) \leq -2\ (n-1)\ D + |D\ |^q - \lambda {a_1'}^p.$$

La condition $u_a''(r) < 2\ D$ est donc réalisée pour $r \geq \frac{1}{2}$ si

$$-2(n-1)\ D + \ |D|^q - \lambda\, {a_1'}^p \ < 2\ D$$

soit si $-2n\ D + |D|^q < \ \lambda\ {a_1'}^p$ ou encore

$$a_1' > \left(\frac{-2nD + |D|^q}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarquons maintenant que si a_1' est choisi tel que (III.7) implique $u_a''(r) < 2D$ alors les conditions du 2), plus fortes que celles de (III.7), entrainent $u_a''(r) < 0$ puisque $D < 0$.

Il suffit donc pour que 1) et 2) soient vérifiées que

$$a_1' > \left(\frac{-2nD + |D|^q}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrons maintenant que 1) et 2) entrainent bien que l'on a soit a) soit b) si $a > a_1'$. Considérons alors $a > a_1'$ et supposons ${u_a}^{-1}(a_1') > 1$. Cette dernière inégalité implique $u_a > a_1'$ sur $[\frac{1}{2}; 1[$ et il existe d'après 1) un réel r_0 de $[\frac{1}{2}; 1]$ tel que $u_a'(r_0) < D$. Soit r' le réel défini par $u_a(r') = a_1'$, montrons que $u_a' < D$ sur $[r_0;\ r']$. Comme d'après 2) $r \geq \frac{1}{2}$, $u_a'(r) = D$ et $u_a(r) \geq a_1'$ impliquent $u_a''(r) < 0$ il suffit d'appliquer le lemme I.4 en prenant $f = -u_a'$, $a = r_0$, $b = r'$, $c = -D$ pour obtenir que si ${u_a}^{-1}(a_1') > 1$ et si r est tel que $r \geq 1$ et $u_a(r) > a_1'$ alors $u_a'(r) < D$.

Fin de la Démonstration de la propriété III.3. Nous démontrons maintenant que si a_1 est assez grand, il existe un réel R_0 pour lequel $a > a_1$ et $u_a(R) = a_1$ implique

$R < R_0$. Remarquons que si $r \geq 1$ et $u'_a(r) = \alpha$ avec $\alpha < 0$ on a successivement $\dfrac{\alpha}{r} \geq \alpha$, $\dfrac{n-1}{r}\,\alpha - |\alpha|^q \geq (n-1)\alpha - |\alpha|^q$. On a alors

$$\frac{n-1}{r}\,\alpha\ - |\alpha|^q > -2\,|\alpha|^q \qquad (III.8)$$

dès que

$$|\alpha|^q > (n-1)(-\alpha) \ \text{ soit } |\alpha| > (n-1)^{\frac{1}{q-1}}.$$

On prend $D = -(n-1)^{\frac{1}{q-1}}$, $a_1 = \sup\{a'_1, \tilde{a}_1\}$ (où a'_1 et $\tilde{a}_1$ ont été définis respectivement par les lemmes III.7 et III.5) et $a > a_1$. Deux cas peuvent alors se présenter.

1) Soit le réel R tel que $u_a(R) = a_1$ est inférieur ou égal à 1.

2) Soit ce même réel R est supérieur à 1. Seul ce deuxième cas est à étudier: on doit démontrer qu'il existe un réel R_0 indépendant de a tel que $R < R_0$. D'après le lemme III.7 si $r \geq 1$ et $u_a(r) > a_1$ alors $u'_a(r) < D$. Posons $u_a(1) = a'$, on a $a' > a_1$ puisque $1 < R$ et d'autre part

$$u'_a(1) < -(n-1)^{\frac{1}{q-1}}. \qquad (III.9)$$

On peut alors trouver d'après le lemme III.5 $\tilde{a}, \tilde{a} > a_1$ tel que

$$1)\ \text{si } \tilde{u}_{\tilde{a}}(r) = a' \text{ alors } \tilde{u}'_{\tilde{a}}(r) = -(n-1)^{\frac{1}{q-1}} \qquad (III.10)$$

$$2)\ \text{si } a_1 \leq \tilde{u}_{\tilde{a}}(r) \leq a' \text{ alors } \tilde{u}'_{\tilde{a}}(r) < \ -(n-1)^{\frac{1}{q-1}}$$

u_a est une bijection décroissante de $[1; R]$ sur $[a_1; a']$. (Voir la figure 6 ci-dessous) Soient $\tilde{r}_2$ et $\tilde{r}_3$ tels que $\tilde{u}_{\tilde{a}}(\tilde{r}_2) = a'$, $\tilde{u}_{\tilde{a}}(\tilde{r}_3) = a_1$ et soit μ l'application de $[1; R]$ dans $[\tilde{r}_2; \tilde{r}_3]$ définie par $\tilde{u}_{\tilde{a}}(\mu(r)) = u_a(r)$. μ est au moins de classe C^2 sur $[1; R]$ puisque $\mu = \tilde{u_a}^{-1} \circ u_a$.

On a pour tout r de $[1; R]$

$$\tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r))\ \mu'(r)\ =\ u'_a(r) \qquad (III.11)$$

Montrons que pour tout r de $[1; R]$ on a $u'_a(r) < \tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r))$.

Soit f définie sur $[1;R]$ par $f\ =\ \tilde{u}'_{\tilde{a}} \circ \mu - u'_a$. Il en résulte que

$$f'(r) = \tilde{u}''_{\tilde{a}}(\mu(r))\ \mu'(r) - u''_a(r) \qquad (III.12)$$

On a en premier lieu $u'_a(1) < -(n-1)^{\frac{1}{q-1}}$ d'après (III.9) et $\tilde{u}'_{\tilde{a}}(\ \mu(1))\ =\ -(n-1)^{\frac{1}{q-1}}$ d'après (III.10) donc $f(1) > 0$. Montrons que si r_0 appartient à $[1; R[$ et $f(r_0) = 0$ alors

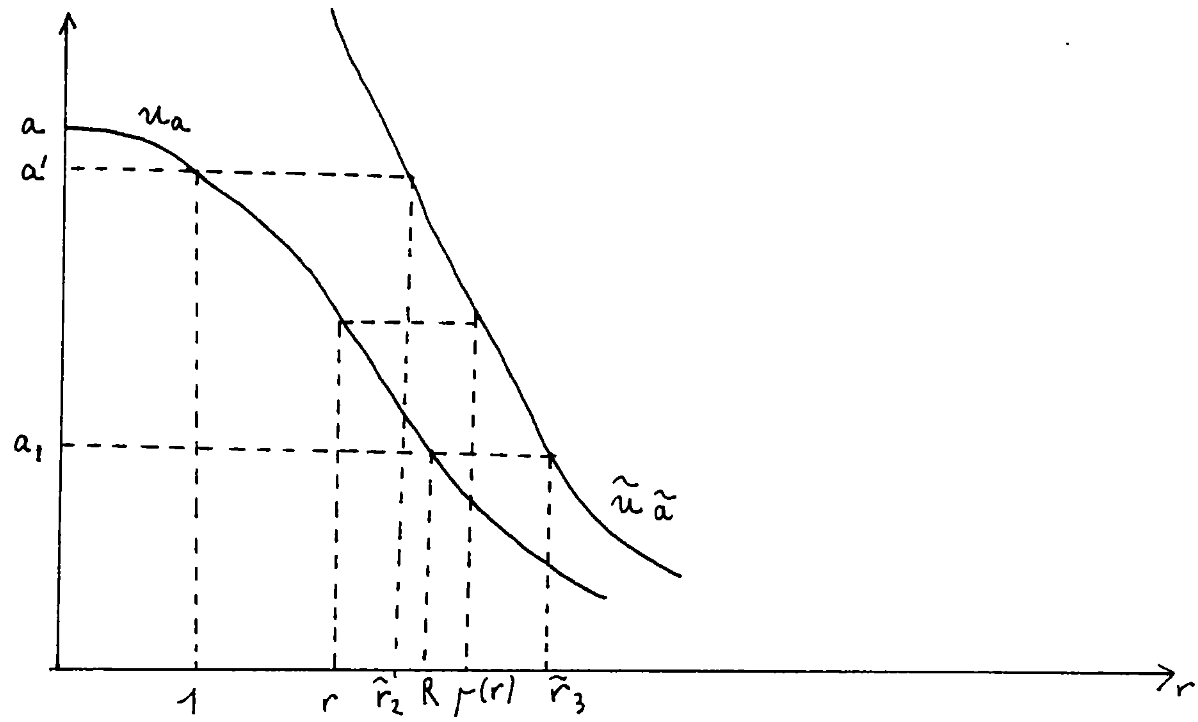


Figure 6.

$f'(r_0) > 0$. $f(r_0) = 0$ implique $\tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r_0)) \; - \; u'_a(r_0) = 0$ et $\mu'(r_0) = 1$ d'après (III.11). La relation (III.12) devient alors

$$f'(r_0) = \tilde{u}''_{\tilde{a}}(\mu(r_0)) \; - u''_a(r_0)$$

Posons $\alpha = u'_a(r_0) = \tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r_0))$ et $\tilde{u}_{\tilde{a}}(\mu(r_0)) = u_a(r_0) = \beta$

On a alors
$$\begin{cases} \tilde{u}''_{\tilde{a}}(\mu(r_0)) = 2\,|\alpha|^q \; - \; \lambda\beta^p \\ u''_a(r_0) \; = -\frac{n-1}{r_0}\,\alpha \; + \; |\alpha|^q - \lambda\beta^p \end{cases}$$

et donc $f'(r_0) > 0$ d'après la relation (III.8). Le lemme préliminaire I.4 implique alors que, si r appartient à $[1; R[$, $f(r) > 0$ soit encore

$$0 \; > \; \tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r)) \; > \; u'_a(r). \qquad (III.13)$$

Montrons maintenant que $R - 1 < \tilde{r}_3 \; - \; \tilde{r}_2$.

On a $u_a(1) = a'$ et $u_a(R) = a_1$ donc $1 = u_a^{-1}(a')$, $R = u_a^{-1}(a_1)$ et

$$R - 1 = \int_{a'}^{a_1} (u_a^{-1})'(s)\; ds = \int_{a'}^{a_1} \frac{1}{u'_a\big(u_a^{-1}(s)\big)}\; ds$$

De même

$$\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2 = \int_{a'}^{a_1} \frac{1}{\tilde{u}'_{\tilde{a}}\big(\tilde{u}_{\tilde{a}}^{-1}(s)\big)}\, ds$$

Posons $u_a(r) = s$, on a alors, d'après la définition de μ, $\tilde{u}_{\tilde{a}}(\mu(r)) = s$ soit

$$\begin{cases} u_a^{-1}(s) = r \\ \tilde{u}_{\tilde{a}}^{-1}(s) = \mu(r). \end{cases}$$

Comme, d'après (III.13), pour tout r de $[1; R[$

$$0 > \tilde{u}'_{\tilde{a}}(\mu(r)) > u'_a(r)$$

on obtient si s appartient à $[a_1; a']$

$$0 > \tilde{u}'_{\tilde{a}}\big(\tilde{u}_{\tilde{a}}^{-1}(s)\big) > u'_a\big(u_a^{-1}(s)\big)$$

et donc

$$\frac{1}{u'_a\big(u_a^{-1}(s)\big)} > \frac{1}{\tilde{u}'_{\tilde{a}}\big(\tilde{u}_{\tilde{a}}^{-1}(s)\big)}.$$

On a alors puisque $a_1 < a'$

$$\int_{a'}^{a_1} \frac{1}{u'_a\big(u_a^{-1}(s)\big)}\, ds < \int_{a'}^{a_1} \frac{1}{\tilde{u}'_{\tilde{a}}\big(\tilde{u}_{\tilde{a}}^{-1}(s)\big)}\, ds$$

soit $R - 1 < \tilde{r}_3 - \tilde{r}_2$. On sait que la fonction qui à a associe $\tilde{z}(a)$ tel que $\tilde{u}\big(\tilde{z}(a)\big) = 0$ est continue et $\lim\limits_{a \to +\infty} \tilde{z}(a)$ est un réel . Il existe donc R_1 tel que si $\tilde{a} > a_1$ alors $\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2 < R_1$ et

$a > a_1$ implique $R - 1 < R_1$ soit $R < 1 + R_1$. ///

III.3) COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SOLUTION STRICTEMENT POSITIVE

La démonstration de la propriété III.4 utilise les lemmes III.8 à III.10 qui donnent des encadrements asymptotiques des solutions de

$$(P_{R,D,b}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda u^p = 0 & \text{sur } [0; +\infty[\\ u\ (R) = b & \\ u'\ (R) = D & \text{où } D < 0 \end{cases}$$

dans le cas où elles seraient strictement positives sur $[R; +\infty[$.

Lemme III.8. *Soit*

$$\begin{cases} n \leq 2 \\ \text{ou} \\ n \geq 3 \quad \text{et } p < \frac{n+2}{n-2} \end{cases}$$

ainsi que $\dfrac{2p}{p+1} < q$. *Supposons que u est une solution strictement positive sur* $[R; +\infty[$ *de*

$$(P_{R,\,D,\,b}) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda u^p = 0 & \text{si } r \geq R \\ u(R) = b & \text{où } b > 0 \\ u'(R) = D & \text{où } D < 0 \end{cases}$$

Il existe alors des réels ρ *et* C_1 *strictement positifs tels que* $r > \rho$ *implique* $u(r) \leq C_1 r^{\frac{-2}{p-1}}$.

Démonstration du lemme III.8. On sait d'après le lemme 5.2 de [CW] que, les conditions portant sur n, p et q ci-dessus étant réalisées et si a est assez petit, les solutions u_a de

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0 & \text{sur } [0; +\infty[\\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

admettent un zéro $z(a)$ et qu'il existe C tel que $z(a) \leq C\ a^{-\frac{(p-1)}{2}}$.

Soit u solution de $(P_{R,\,D,\,b})$. Si $u > 0$ sur $[R; +\infty[$ il existe alors d'après la propriété I.6 du chapitre I un réel R_0, $R \leq R_0 \leq z(a)$ tel que $u(R_0) = u_a(R_0)$.

D'autre part $u\big(z(a)\big) \leq a$ (voir figure 7).

De $z(a) \leq C\ a^{-\frac{(p-1)}{2}}$ on déduit que $a^{\frac{p-1}{2}} \leq \dfrac{C}{z(a)}$ et $a \leq \left(\dfrac{C}{z(a)}\right)^{\frac{2}{p-1}}$.

Il en résulte que si a est assez petit $u\big(z(a)\big) \leq \dfrac{C_1}{z(a)^{\frac{2}{p-1}}}$ donc il existe ρ tel que $r > \rho$ implique $u(r) \leq C_1 r^{\frac{-2}{p-1}}$.

Lemme III.9. *Soit*

$$\begin{cases} n \leq 2 \\ \text{ou} \\ n \geq 3 \quad \text{et } p < \frac{n}{n-2} \end{cases}$$

ainsi que $\dfrac{2p}{p+1} < q$. *Si u est une solution strictement positive sur* $[R; +\infty[$ *de*

$$\begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda u^p = 0 & \text{si } r \geq R \\ u(R) = b & \text{où } b > 0 \\ u'(R) = D & \text{où } D < 0 \end{cases}$$

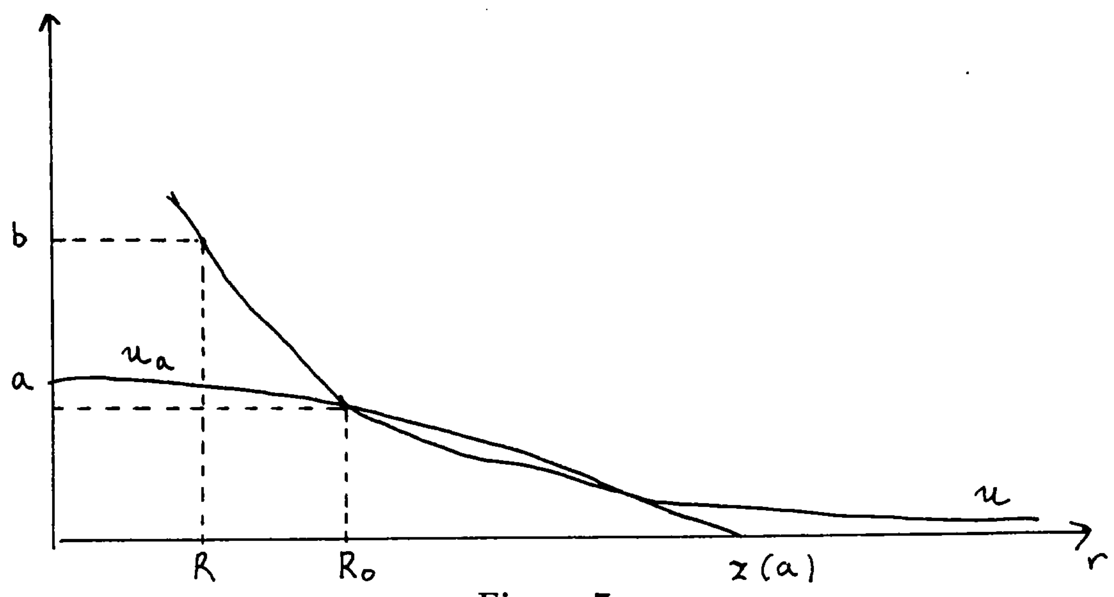


Figure 7.

il existe $C_2 > O$ et $\rho > 0$ tels que $r > \rho$ implique $|u'(r)| \leq C_2 r^{\frac{-(p+1)}{p-1}}$.

Démonstration du lemme III.9. Voir l'article de J. Serrin et H. Zou [SZ]

Lemme III.10. *Soit $\alpha > 1$ et u vérifiant*

$$\lim_{r \to +\infty} u(r) = 0, \ u'' + \frac{\alpha}{r} u' < 0 \quad et\ u > 0 sur [R; +\infty[$$

Il existe alors des réels C_3 et ρ tels que $u(r) \geq C_3\ r^{1-\alpha}$ si $r \geq \rho$.

Démonstration du Lemme III.10. On remarque tout d'abord que quel que soit C la fonction v définie par $v(r) = C\ r^{1-\alpha}$ vérifie $v''(r) + \frac{\alpha}{r} v'(r) = 0$ si $r > 0$. Soit C tel que $v'(R) = u'(R)$.

Soit f définie sur $[R; +\infty[$ par $f(r) = v'(r) - u'(r)$. On a $f(R) = 0$. Supposons que $R_1 \geq R$ et $f(R_1) = 0$. On a alors

$$\begin{cases} u''(R_1) < \frac{-\alpha}{R_1} u'(R_1) \\ v''(R_1) = \frac{-\alpha}{R_1} v'(R_1) = \frac{-\alpha}{R_1} u'(R_1) \end{cases}$$

d'où $f'(R_1) = v''(R_1) - u''(R_1) > 0$. D'après le lemme préliminaire I.5 on a donc sur $[R; +\infty[$ $f \geq 0$ et $u' \leq v'$. On en déduit

$$\int_r^{+\infty} u'(s)\, ds \leq \int_r^{+\infty} v'(s)\, ds \text{ pour tout } r > R.$$

Puisque $\lim_{r \to +\infty} u(r) = \lim_{r \to +\infty} v(r) = 0$ il en résulte $u(r) \geq C\ r^{1-\alpha}$. ///

Démonstration de la proposition III.4. D'après le lemme III.9, il existe des réels $\rho > 0$ et $C_2 > 0$ tels que $r > \rho$ implique $|u'(r)| \leq C_2\, r^{-\frac{p+1}{p-1}}$.

On peut donc écrire pour tout $r > \rho$

$$u'(r) = C_2 m(r) r^{-\frac{p+1}{p-1}}$$

avec $-1 \leq m(r) < 0$.

On a alors

$$\begin{cases} |u'(r)|^q = C_2{}^q\, |m(r)|^q\, r^{-\frac{q(p+1)}{p-1}} \\ \dfrac{u'(r)}{r} = C_2\, m(r)\, r^{\frac{-2p}{p-1}}. \end{cases}$$

$q > \dfrac{2p}{p+1}$ implique que en $+\infty$ le terme en $r^{\frac{-2p}{p-1}}$ est prépondérant sur celui en $r^{-\frac{q(p+1)}{p-1}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe alors $\rho' > \rho$ tel que $r > \rho'$ implique

$$\varepsilon\frac{u'(r)}{r} + |u'(r)|^q \leq 0.$$

Pour $r \geq \rho'$ on a d'autre part

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0$$

et donc en ajoutant membre à membre

$$u''(r) + \frac{n+\varepsilon-1}{r}u'(r) + \lambda|u(r)|^p \leq 0.$$

Comme $n \geq 2$ on peut alors appliquer le lemme III.10 avec $\alpha = n + \varepsilon - 1 > 1$ et il existe un réel $\rho'' > \rho'$ tel que $r > \rho''$ implique $C_3\, r^{2-n-\varepsilon} \leq u(r)$.

Si $r \in]\rho''; +\infty[$, on obtient donc

$$C_3\, r^{2-n-\varepsilon} \leq u(r) \leq C_1\, r^{\frac{-2}{p-1}}.$$

Si $n = 2$ ceci implique alors que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\dfrac{2}{p-1} \leq \varepsilon$ ce qui est impossible.

Si $n \geq 3$ la même relation entraine que, pour tout $\varepsilon > 0$, $n + \varepsilon - 2 \geq \frac{2}{p-1}$ et donc $p \geq \frac{n}{n-2}$. Il en résulte que, si $n = 2$ ou si $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n}{n-2}$, il existe $R' > R$ tel que $u(R') = 0$. ///

CHAPITRE IV

NOUVEAUX RESULTATS DANS LE CAS $q = \dfrac{2p}{p+1}$

Dans ce chapitre nous étudions lorsque $q = \dfrac{2p}{p+1}$ les solutions u_a de (P_a)

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{pour } r > 0 \\ u\ (0) = a \\ u'\ (0) = 0 \end{cases}$$

$z(a)$ désignant toujours le premier zéro, lorsqu'il existe, de u_a ; si $u_a > 0$ sur $[0;\ +\infty[$ on pose $z(a) = +\infty$. Rappelons que z vérifie la relation $z(a) = a^{-\frac{p-1}{2}}\ z(1)$ et que donc, soit $z(a) = +\infty$ quel que soit $a > 0$, soit $z(a)$ est fini quel que soit $a > 0$ et z est une bijection strictement décroissante de $[0;\ +\infty[$ sur $[0;\ +\infty[$ (Cf. le lemme 4.7 de [CW]). La valeur de λ intervient dans le comportement de la fonction z. Le IV.1) étudie le cas où $n = 2$ puis celui pour lequel $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n}{n-2}$; le IV.2) celui où $n \geq 3$ et $\dfrac{n}{n-2} \leq p < \dfrac{n+2}{n-2}$.

IV.1) CAS OU $p < \frac{n}{n-2}$

A) UNE CONJECTURE INFIRMEE

Dans leur article , M. Chipot et F. Weissler ont montré que si $q = \dfrac{2p}{p+1}$ et $p < \dfrac{n}{n-2}$ l'équation

$$(IV.I) \qquad u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0$$

admet une solution de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ si et seulement si $\lambda \leq \lambda_{n,p}$ où

$$\lambda_{n,p} = \frac{(2p)^p}{(p+1)^{p+1}(2p - np + n)^p}$$

En dimension 1 cette équation ne dépend pas explicitement de r et si $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ en est une solution , il en est de même de $u(r) = k(r+c)^{\frac{-2}{p-1}}$ où c est une constante réelle.

Il résulte alors du théorème de Cauchy que si $\lambda \leq \lambda_{1,p}$ le problème (P_R) ne peut avoir de solution en dimension 1. M. Chipot et F. Weissler montrent aussi, et la proposition I.7 du chapitre I le prouve , que si $\lambda \leq \lambda_{1,p}$ le problème (P_R) n'a pas non plus de solution en dimension $n, n \geq 1$.

Dans un article plus récent, M.Fila et P. Quittner démontrent que si $\lambda > \lambda_{n,p}$ alors $z(a)$ est fini quel que soit a; mais le problème demeure de savoir si l'on peut avoir simultanément une solution de l'équation (IV.1) de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ et $z(a)$ fini.

Remarquons cependant que,lorsque l'on étudie le problème similaire à (P_a) sans le terme correspondant à $|\nabla u|^q$ on a toujours, si $\dfrac{n}{n-2} < p < \dfrac{n+2}{n-2}$, à la fois une solution de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ et $z(a)$ fini. On est ici dans un cas semblable puisqu'on a le théorème suivant:

Théorème IV.1. *Soit* $q = \dfrac{2p}{p+1}$ *et*

A) $n = 2$

ou

B) $n \geq 3$ *et* $p < \frac{n}{n-2}$.

Soit u_a *solution de*

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 & si\ r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Il existe alors un réel $\lambda'_{n,\ p}$, $\lambda'_{n,\ p} < \lambda_{n,\ p}$ *tel que, quel que soit* λ, $\lambda > \lambda'_{n,\ p}$, $z(a)$ *est fini.*

Remarque IV.1. Lorsque $\lambda = \lambda_{n,\ p}$, il existe une seule solution de (IV.I) de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ (d'après la démonstration de la proposition 5.5 de [C.W]) et sa représentation graphique coupe celle de la solution de (P_a) quel que soit a; ceci résulte de la propriété I.6. Dans le cas où $\lambda'_{n,\ p} < \lambda < \lambda_{n,\ p}$ l'équation (IV.1) a deux solutions distinctes de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ dont les représentations graphiques coupent celle de la solution de (P_a).

Démonstration. Nous transformons tout d'abord le problème (P_a) puis nous étudions successivement les cas $n = 2$ et $n \geq 3$.

B) TRANSFORMATION EN UN SYSTEME AUTONOME

Comme dans l'article [FQ] de M. Fila et P. Quittner, utilisons la transformation

$$(IV.2) \qquad \begin{cases} X(t) = \dfrac{-ru'}{u} \\ Y(t) = r^2u^{p-1} \\ r(t) = e^t. \end{cases}$$

Pour l'autonomie de la démonstration, nous reprenons les calculs et certains résultats de [FQ] dans les propositions IV.2 et IV.3.

On trouve d'abord puisque $r'(t) = r(t)$

$$\begin{aligned}
X'(t) &= \frac{-(ru' + r^2u'')u + u'r^2u'}{u^2} \\
&= \frac{r^2u'^2 - ru'u - r^2u''u}{u^2} \\
&= \left(\frac{ru'}{u}\right)^2 - \frac{ru'}{u} - \frac{r^2u''}{u} \\
&= X^2 + X - \frac{r^2}{u}\Big((-u')^q - \lambda u^p - \frac{(n-1)}{r}u'\Big).
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$X'(t) = (2-n)X + X^2 + \lambda Y - X^{\frac{2p}{p+1}}\, Y^{\frac{1}{p+1}}.$$

D' autre part $Y'(t) = 2r^2u^{p-1} + r^2\,(p-1)\,u^{p-2}\,u'\,r$

$$\begin{aligned}
&= r^2\, u^{p-1}\Big(2 \,+\, r\,(p-1)\frac{u'}{u}\Big) \\
&= Y\,\big(2 - (p-1)\,X\big).
\end{aligned}$$

Enfin, si u vérifie de plus $u(0) = a$ et $u'(0) = 0$ alors

$$\lim_{t\to-\infty} Y(t) = \lim_{t\to-\infty} X(t) = 0, \text{ d'après (IV.2) et } \lim_{t\to-\infty}\frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{n}{\lambda}.$$

Cette dernière égalité résulte de ce que $\dfrac{Y(t)}{X(t)} = \dfrac{r^2u^{p-1}}{-r\frac{u'}{u}} = -\dfrac{ru^p}{u'}$. Or, si $t \to -\infty$, $r \to 0$ et $\dfrac{u'(r)}{r} \to -\lambda\dfrac{u^p(0)}{n}$ puisque $u'' + \dfrac{n-1}{r}u' = |u'|^q - \lambda u^p$ et $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{u'(r)}{r} = u''(0)$.

Résumons ces résultats dans la proposition suivante:

Proposition IV.2. *Soit u solution du problème*

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0 & si\ r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Si l'application $(X, Y) :]-\infty, +\infty[\to \mathbf{R}^2$ qui à t associe $\big(X(t), Y(t)\big)$ est définie par (IV.2) alors (X, Y) est solution du système autonome

$$(IV.3) \qquad \begin{cases} x'(t) = (2-n)x \;+\; x^2 + \lambda y - \; x^{\frac{2p}{p+1}}y^{\frac{1}{p+1}} \\ \\ y'(t) = y\big(2 - (p-1)x\big) \end{cases}$$

et on a les conditions suivantes en $-\infty$

$$(IV.4) \qquad \lim_{t\to-\infty} Y(t) = \lim_{t\to-\infty} X(t) = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{n}{\lambda}.$$

Rappelons encore (d'après un lemme de [FQ]) qu'une trajectoire de (IV.3) située pour $t = t_0$ à l'intérieur du premier quadrant reste dans ce quadrant pour $t > t_0$ et qu'il existe une seule trajectoire venant de l'origine, sa pente étant $\frac{n}{\lambda}$.

IDEE DE LA SUITE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME IV.1.

L'application z étant ouverte, il suffit de se placer dans le cas où $\lambda = \lambda_{n,p}$. Si l'on démontre que dans ce cas $z(a)$ est fini, il en résultera qu'il existe un réel $\lambda'_{n,p} < \lambda_{n,p}$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda'_{n,p}$, $z(a)$ est encore fini quel que soit $a > 0$.

Pour ne pas surcharger l'écriture nous laisserons λ dans les calculs.

Soit $f(x,y) = (2-n)x + x^2 + \lambda y - x^{\frac{2p}{p+1}} y^{\frac{1}{p+1}}$ et $g(x,y) = y(2-(p-1)x)$

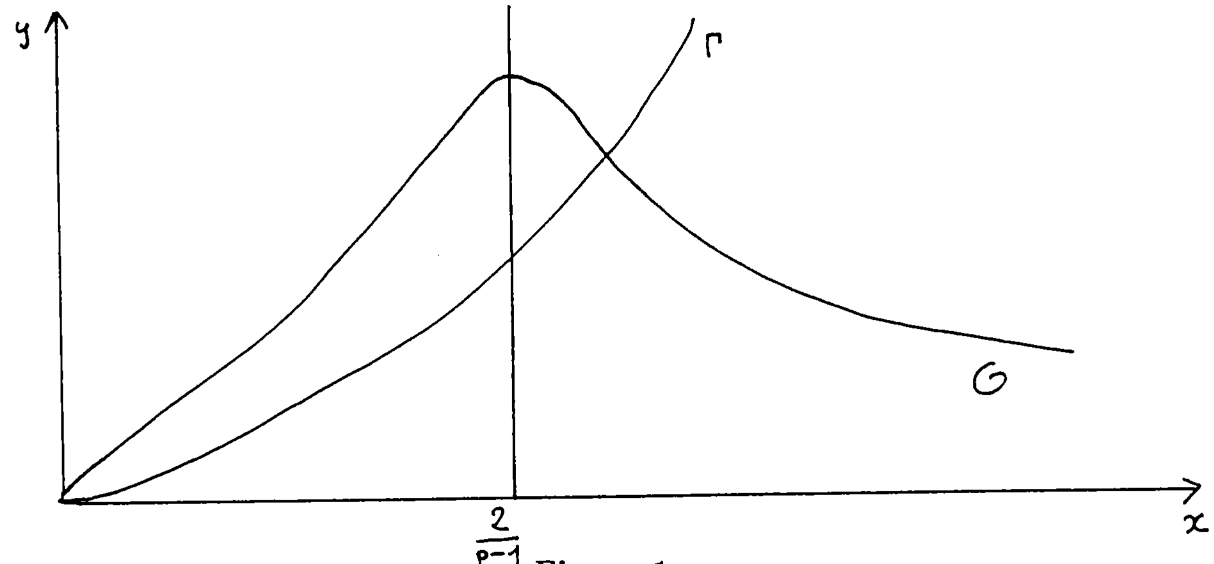


Figure 1.

Remarquons en premier que $g(x,\ y) = 0$ si $y = 0$ ou si $x = \frac{2}{p-1}$.

Nous allons étudier l'ensemble Γ défini par $x \geq 0,\ y \geq 0,\ f(x,y) = 0$.

Lorsque $n = 2$ cet ensemble Γ est une demi-parabole définie par $x \geq 0$ et $y = \frac{x^2}{(\lambda(p+1))^{\frac{p+1}{p}}}$ qui coupe donc la droite d'équation $x = \frac{2}{p-1}$ en un seul point (Voir la figure 1).

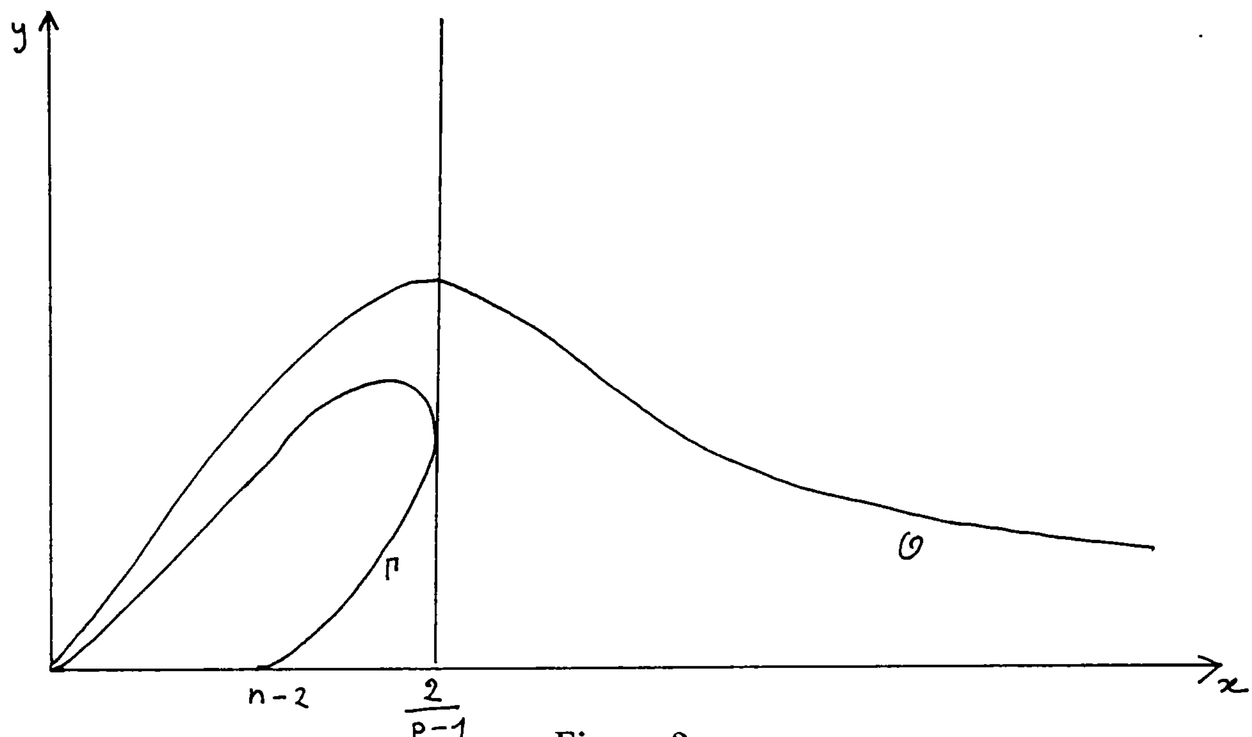


Figure 2.

On situe alors l'orbite $\mathcal{O}$ du système $(IV.3)$ correspondant à l'application $t \mapsto \big(X(t), Y(t)\big)$ par rapport à Γ. On montre que $\mathcal{O}$

a) est située au dessus de Γ lorsque $0 < X(t) < \dfrac{2}{p-1}$ en remarquant que sur la partie correspondante de Γ le champ de vecteurs est "vertical et orienté vers le haut",

b) coupe la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$ au dessus de Γ (en étudiant par linéarisation le champ de vecteurs autour du point d' intersection de Γ avec cette droite),

c) puis que $X(t)$ explose en temps fini (Voir figure 1).

Lorsque $n \geq 3$ ce même ensemble Γ est tangent à la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$ (pour $\lambda = \lambda_{n,\,p}$) et situé dans le demi-plan défini par $x \leq \dfrac{2}{p-1}$ (voir figure 2). On montre ensuite que, pour $0 < X(t) \leq \dfrac{2}{p-1}$, $\mathcal{O}$ est située au dessus de Γ, puis que pour $X(t) > \dfrac{2}{p-1}$, $X'(t) > 0$ et $Y'(t) < 0$. on en déduit alors que $X(t)$ explose en temps fini.

Proposition IV.3. *Soit $\lambda = \lambda_{n,p}$ et x fixé, $x > 0$, $f(x,\, y)$ admet alors un unique minimum pour $y = h(x) = \dfrac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$.*

Ce minimum vaut

$$m(x) = f\big(x,\ h(x)\big) = x\ (n-2)\Big(\frac{p-1}{2}x - 1\Big) \qquad (IV.5)$$

Le champ de vecteurs $\Big(f(x,\ y),\ (g(x,\ y)\Big)$ *a sur la demi-droite définie par* $x = \dfrac{2}{p-1}$ *et* $y \geq 0$ *un seul point singulier* A *de cordonnées* $(x_1,\ y_1)$ *avec* $x_1 = \dfrac{2}{p-1}$ *et* $y_1 = h(x_1)$.

Démonstration de la proposition IV.3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = \lambda - \dfrac{1}{p+1}x^{\frac{2p}{p+1}}y^{\frac{-p}{p+1}}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) < 0$ si $0 < y < \dfrac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) > 0$ si $y > \dfrac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$.

L'application $y \mapsto f(x,\ y)$ admet alors un unique minimum pour $y = \dfrac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$.

Il vaut

$$f\left(x,\ \frac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}\right) = (2-n)\ x\ +\ x^2\left(\frac{\lambda^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{p+1}{p}} - p}{\lambda^{\frac{1}{p}}(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}\right).$$

Or

$$\lambda_{n,p} = \frac{(2p)^p}{(p+1)^{p+1}(2p-np+n)^p}$$

donc

$$\lambda^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{p+1}{p}} = \frac{2p}{2p-np+n}$$

et

$$\frac{\lambda^{\frac{1}{p}}(p+1)^{\frac{p+1}{p}} - p}{\lambda^{\frac{1}{p}}(p+1)^{1+\frac{1}{p}}} = \frac{2p - p(2p-np+n)}{2p} = \frac{2p - 2p^2 + np^2 - np}{2p} = (p-1)\Big(\frac{n}{2} - 1\Big).$$

On obtient donc finalement

$$f\big(x,\ h(x)\big) = (2-n)x + x^2(p-1)\Big(\frac{n}{2} - 1\Big) = x\ (n-2)\ \Big(\frac{p-1}{2}x - 1\Big).$$

Le fait que le champ de vecteurs $\Big(f(x,\ y),\ (g(x,\ y)\Big)$ a sur la demi-droite définie par $x = \dfrac{2}{p-1}$, $y \geq 0$ un seul point singulier A de cordonnées $(x_1,\ y_1)$ avec $x_1 = \dfrac{2}{p-1}$ et

$y_1 = h(x_1)$ se déduit aisément de l'expression de $m(x)$. Ceci termine la démonstration de la propriété IV.3. ///

Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par $0 < x < \frac{2}{p-1}$ et $y > 0$, on a $g(x, y) > 0$. Si on considère une orbite définie par une application $t \mapsto \big(X_1(t), Y_1(t)\big)$ passant dans cet ensemble pour $t = t_0$ on a à priori trois comportements possibles puisque le champ de vecteurs $\Big(f(x, y), (g(x, y)\Big)$ n'a pas de point singulier dans $\mathcal{E}$:

1) soit lorsque $t \to \alpha$ (avec $\alpha = +\infty$ ou α réel) $Y_1(t) \to +\infty$, et $X_1(t) < \frac{2}{p-1}$ pour $t \geq t_0$;

2) soit l'orbite coupe la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$

3) soit cette orbite admet pour point limite le point singulier du champ de vecteur de cordonnées $\Big(\dfrac{2}{p-1}, h\big(\dfrac{2}{p-1}\big)\Big)$.

Notons d'abord que le cas 1) ne peut avoir lieu en effet en utilisant les expressions de $X_1'(t)$ et $Y_1'(t)$ données par (IV.3) on en déduirait que $\lim\limits_{t\to\alpha} \dfrac{Y_1'(t)}{X_1'(t)} = \dfrac{2}{\lambda}$. Il existerait alors un réel t_1, $t_0 < t_1 < \alpha$, tel que $t > t_1$ implique $\frac{Y_1'(t)}{X_1'(t)} \leq \frac{3}{\lambda}$. En considérant ensuite t_2 tel que $t_1 < t_2 < \alpha$ et par intégration entre t_1 et t_2, on aurait alors

$$\int_{t_1}^{t_2} Y_1'(s)\, ds \leq \int_{t_1}^{t_2} X_1'(s)\, ds$$

soit $Y_1(t_2) - Y_1(t_1) + X_1(t_1) \leq X_1(t_2)$.

Comme $\lim\limits_{t\to\alpha} Y_1(t_2) = +\infty$, on en déduirait $\lim\limits_{t\to\alpha} X_1(t_2) = +\infty$ d'où une contradiction puisqu'on a supposé que pour $t \geq t_0$ $X_1(t) < \frac{2}{p-1}$.

C) ETUDE DU CAS $n = 2$

D'après la proposition IV.3, quel que soit $x > 0$ la fonction $y \mapsto f(x, y)$ admet un unique minimum et il vaut

$$f\left(x, \frac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}\right) = 0.$$

puisque $n = 2$. L'ensemble défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $f(x,y) = 0$ est donc une demi-parabole définie par $x \geq 0$ et $y = h(x) = \dfrac{x^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$. De plus si $x > 0$, $y > 0$ et $y \neq h(x)$ alors $f(x, y) > 0$.

Comme $\lim_{t \to -\infty} \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{n}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$ l'orbite $\mathcal{O}$ définie par l'application $t \to \big(X(t), Y(t)\big)$ est donc au voisinage du point O au dessus de la demi-parabole.

Le champ de vecteurs $\big(f(x,y), g(x,y)\big)$ s'annule en deux points du quart de plan défini par $x \geq 0$, $y \geq 0$: $O(0,0)$ et $A\left(\frac{2}{p-1}, h\left(\frac{2}{p-1}\right)\right)$.

Si $0 < x < \frac{2}{p-1}$ et $y = h(x)$, alors $f(x,\ y) = 0$ et $g(x,\ y) > 0$, la trajectoire définie par l'application $t \to \big(X(t), Y(t)\big)$ ne peut donc que couper la droite d'équation $x = \frac{2}{p-1}$ en un point d'ordonnée strictement supérieureà $h\left(\frac{2}{p-1}\right)$ ou avoir pour point limite le point A. Montrons qu' en fait c'est la première possibilité qui a lieu.

Pour cela, étudions la différentielle du champ de vecteurs $(x,\ y) \to \big(f(x,\ y),\ g(x,\ y)\big)$ au voisinage du point A d'abscisse $x_1 = \frac{2}{p-1}$ et d'ordonnée $y_1 = h(x_1)$.

LINEARISATION DU CHAMP DE VECTEURS

On a $f(x,y) = x^2 + \lambda y - \ x^{\frac{2p}{p+1}} y^{\frac{1}{p+1}}$ donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = 2x - \frac{2p}{p+1} x^{\frac{p-1}{p+1}} y^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = \lambda - \frac{1}{p+1} x^{\frac{2p}{p+1}} y^{\frac{-p}{p+1}}.$$

$x_1 = \frac{2}{p-1}$ et $\lambda = \lambda_{2,\ p} = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}$

donc $\lambda(p+1) = \left(\frac{p}{p+1}\right)^p$ et $\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{p+1}$.

On en déduit $y_1 = h(x_1) = \frac{x_1^2}{\big(\lambda(p+1)\big)^{\frac{p+1}{p}}}$

$$= \frac{\left(\frac{2}{p-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{p+1}\right)^{p+1}} = \frac{4}{(p-1)^2}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}.$$

Montrons que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_1,\ y_1) = 0.$$

On a $y_1 = h(x_1)$ or $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ h(x)) = 2x\left(1 - \frac{p}{p+1} x^{\frac{-2}{p+1}} h(x)^{\frac{1}{p+1}}\right)$

et comme $h(x) = x^2\Big(\dfrac{p+1}{p}\Big)^{p+1}$ on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ h(x)) = 2x\Big(1 - \frac{p}{p+1} x^{\frac{-2}{p+1}} x^{\frac{2}{p+1}} \frac{p+1}{p}\Big) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) = 0.$$

D'autre part $y \mapsto f(x_1,\ y)$ atteint son minimum pour $y = y_1$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1,\ y_1) = 0$.

On a de même $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) = -\dfrac{4}{p-1}\Big(\dfrac{p+1}{p}\Big)^{p+1}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) = 0$.

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} (x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4}{p-1}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Montrons qu'alors la trajectoire coupe la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$ en un point d'ordonnée strictement supérieure à y_1.

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}'$ du plan défini par

$$0 < x < x_1 \text{ et } h(x) \leq y \leq y_1$$

et posons

$$a = x - x_1, \quad b = y - y_1.$$

Soit d'autre part $h'(x_1) = C_1$ la pente de la tangente à la parabole au point d'abscisse x_1. On voit géométriquement (voir figure 3 ci dessous) que, lorsque $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{E}'$,

$$\frac{b}{a} < C_1. \qquad (IV.5)$$

Ensuite , l'expression de

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} (x_1, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4}{p-1}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1} & 0 \end{pmatrix}$$

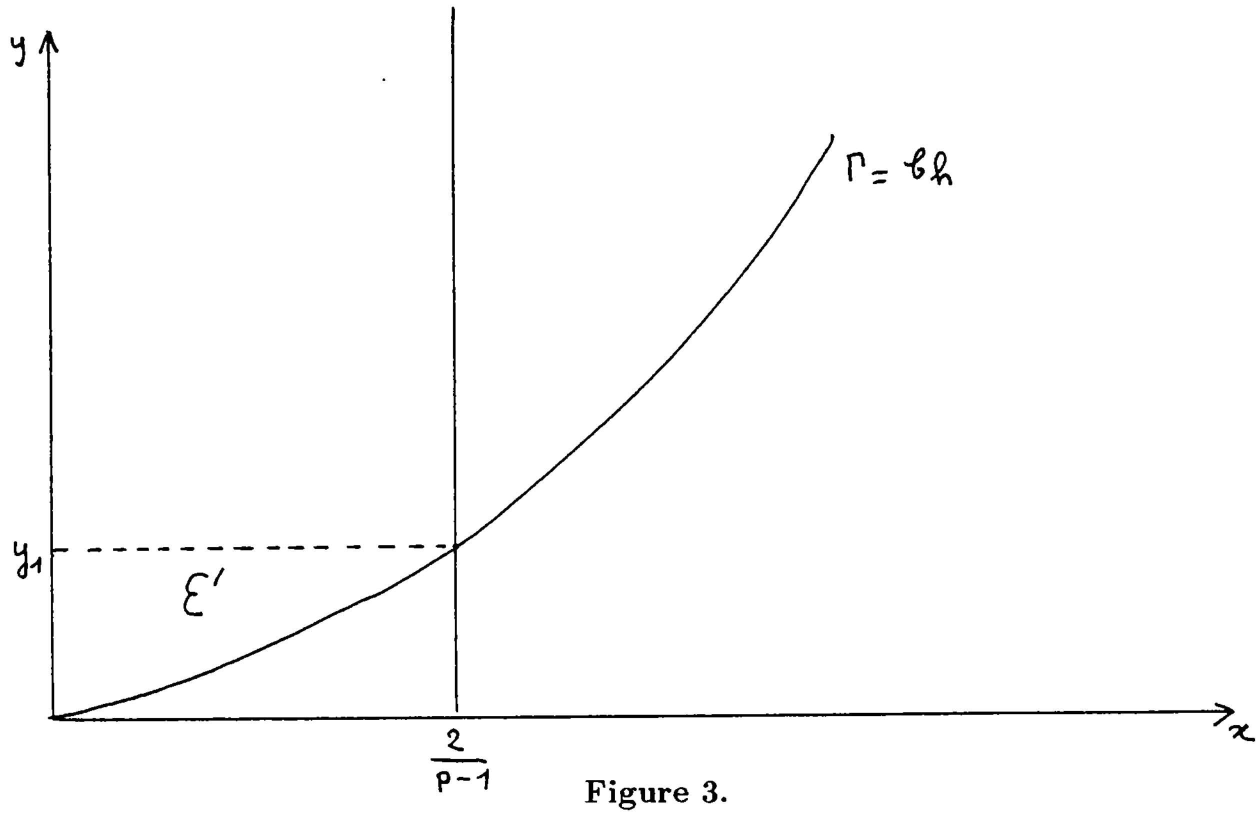


Figure 3.

montre qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que d'une part $-\epsilon < a < 0$ et $-\epsilon < b \leq 0$ impliquent puisque $f \geq 0$ sur $\mathcal{E}$

$$0 \leq f(x_1 + a,\ y_1 + b) < \frac{C_2}{4\ C_1(1 + C_1)}(a + b)$$

où

$$C_2 = \frac{-4}{p-1}\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1,\ y_1)$$

d'autre part

$$g(x_1 + a,\ y_1 + b) > \frac{a\ C_2}{2} \qquad (IV.6)$$

Lorsque $(x,\ y)$ appartient à $\mathcal{E}$ et que $-\epsilon < a < 0$ et $-\epsilon < b \leq 0$ on a donc d'après (IV.5)

$$a\ C_1 < b \leq 0,\ \text{et}\ f(x_1 + a,\ y_1 + b) < \frac{C_2}{4C_1(1 + C_1)}(a + aC_1) < \frac{a\ C_2}{4C_1}$$

et finalement

$$\frac{g(x_1 + a,\ y_1 + b)}{f(x_1 + a,\ y_1 + b)} > 2C_1$$

en utilisant (IV.6).

On en déduit qu'une trajectoire du champ de vecteurs $\big(f(x,\ y),\ g(x,\ y)\big)$ passant pour $t = t_0$ par un point $(x,\ y)$ appartenant à $\mathcal{E}'$ et tel que

$$-\epsilon < a < 0 \text{ et } -\epsilon < b \leq 0 \text{ où } a = x - x_1,\ b = y - y_1$$

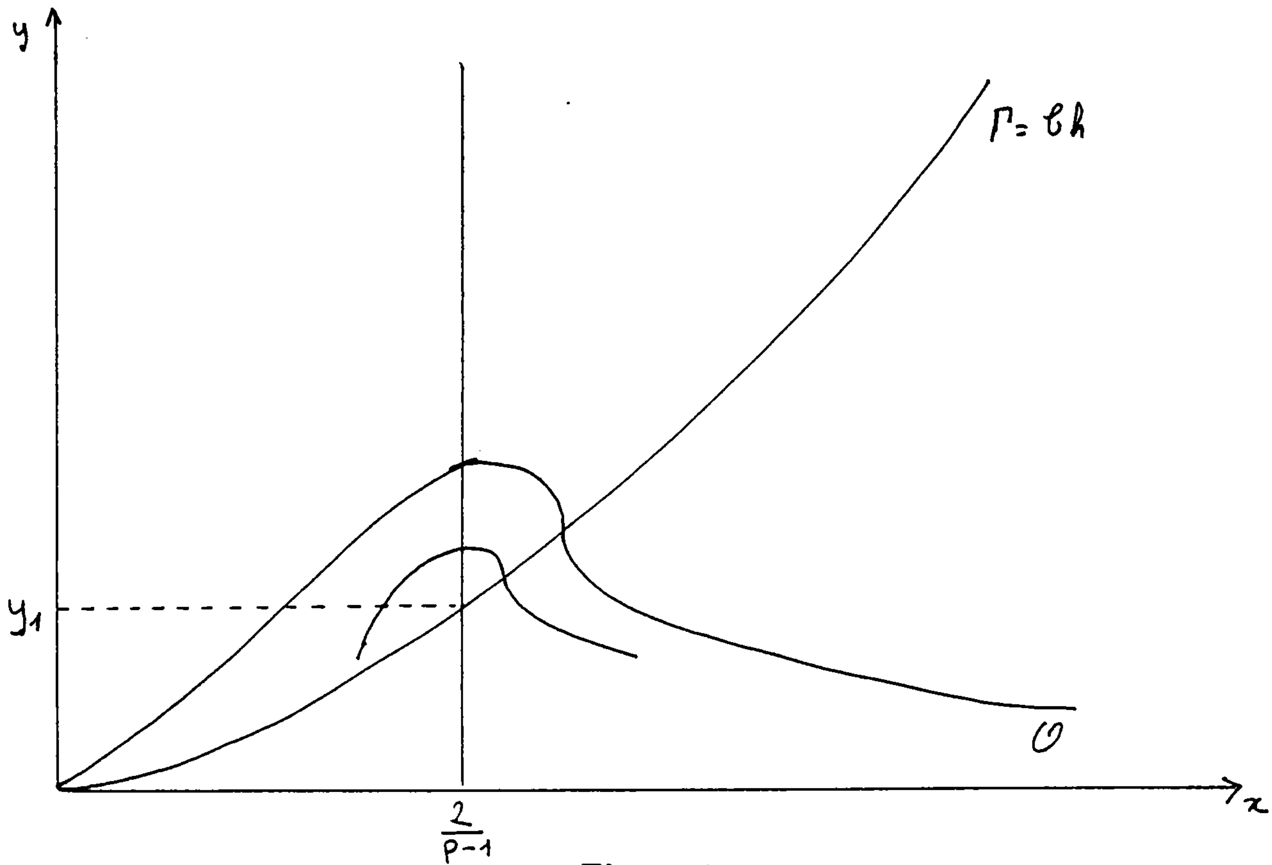


Figure 4.

(voir la figure 4) coupe pour $t_1 > t_0$ la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$ en un point d'ordonnée strictement supérieure à y_1.

Les trajectoires du champ de vecteurs ne pouvant se couper, il en résulte que la trajectoire $\mathcal{O}$ coupe aussi pour une valeur t'_1 de t la droite d'équation $x = \dfrac{2}{p-1}$ en un point d'ordonnée strictement supérieure à $y_1 = h(x_1)$ (voir la figure 4).

Si $X(t) > x_1$, $g\Big(X(t)\,Y(t)\Big) < 0$ et $f\Big(X(t),\,Y(t)\Big) > 0$ sauf si $Y(t) = h\Big(X(t)\Big)$; donc, pour $t \geq t'_1$, d'une part $Y(t) \leq Y(t'_1)$ et d'autre part X est strictement croissante. La première équation de (IV.3) montre alors qu'il existe des réels α et x_2 , $\alpha > 0$ et $x_2 > 0$ tels que si $x > x_2$ alors $f\big(x(t), y(t)\big) > \alpha x^2$. On en déduit que X explose en temps fini T et $z(a) = e^T$.

D) ETUDE DU CAS $n \geq 3$ ET $p < \dfrac{n}{n-2}$.

Proposition IV.4. *Soit $\lambda = \lambda_{n,\,p}$. La courbe Γ définie par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $f(x,\,y) = 0$ admet une tangente en tout point. Une demi -droite définie par $x = c$, $y \geq 0$ coupe Γ en 1 point si $c = \dfrac{2}{p-1}$, 2 points si $n-2 \leq c < \dfrac{2}{p-1}$, 1 point si $0 \leq c < n-2$.*

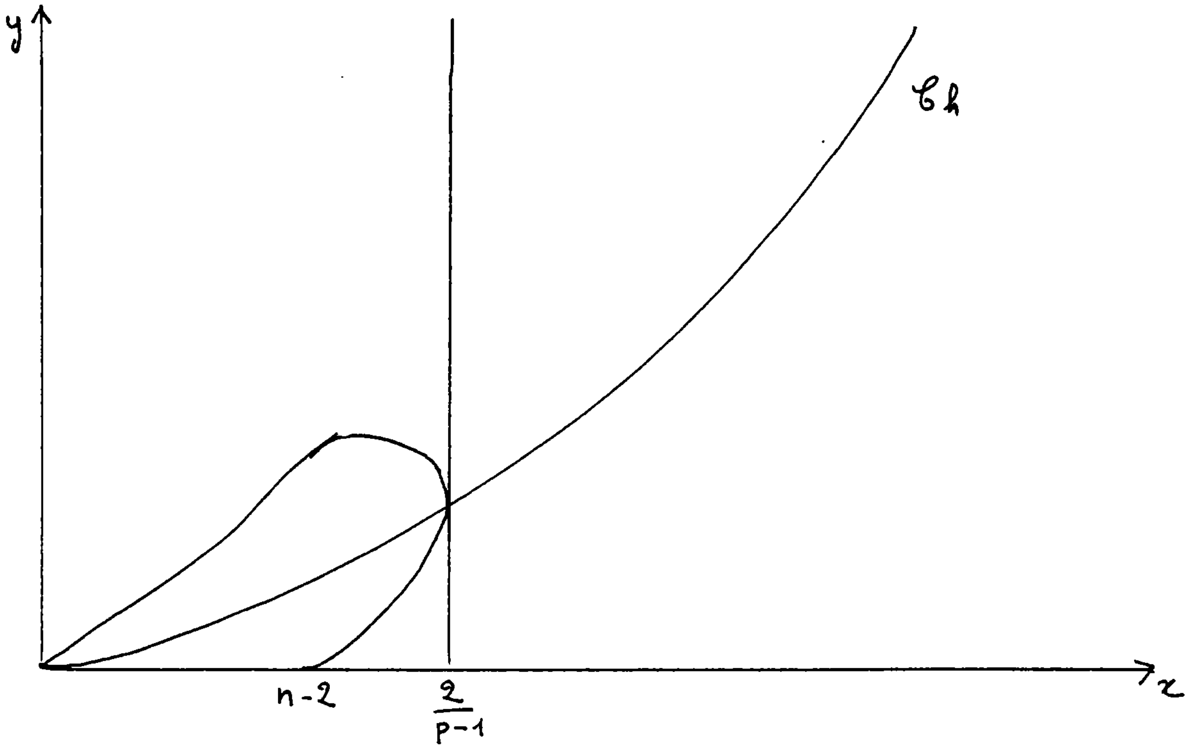


Figure 5.

D'autre part Γ est la réunion des graphes Γ_1 et Γ_2 de deux fonctions h_1 et h_2. $\Gamma_1 = \{(x,\ y)$ *tels que* $x \geq 0\ y \geq 0,\ f(x,\ y) = 0$ *et* $y \leq h(x)\}$

$\Gamma_2 = \{(x,\ y)$ *tels que* $x \geq 0\ y \geq 0,\ f(x,\ y) = 0$ *et* $y \geq h(x)\}$ *(voir la figure 5).*

Démonstration. D'une part $f(x,\ 0) = (2-n)x+x^2$ donc $f < 0$ sur $]0;\ n-2[$ et $f > 0$ sur $]n-2;\ +\infty[$. D'autre part, d'après la proposition IV.3, pour x fixé, $x > 0$, l'application $y \longmapsto f(x,\ y)$ admet un unique minimum en $y = h(x)$; il vaut $m(x) = x\ (n-2)\Big(\frac{p-1}{2}\ x - 1\Big)$. Ce minimum est strictement négatif si $0 < x < \frac{2}{p-1}$, nul si $x = \frac{2}{p-1}$ et strictement positif si $x > \frac{2}{p-1}$. Une demi-droite définie par $x = C$, $y \geq 0$ a donc en commun avec Γ

- un point si $0 < C < n-2$ ou si $C = \frac{2}{p-1}$
- deux points si $n-2 \leq C < \frac{2}{p-1}$
- aucun point si $x > \frac{2}{p-1}$.

Ensuite, si $0 < x < \dfrac{2}{p-1}$ et $y \neq h(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) \neq 0$.

Enfin en $A\Big(\dfrac{2}{p-1};\ h\big(\dfrac{2}{p-1}\big)\Big)$ on a puisque

$$m(x) = f\big(x,\ h(x)\big) = (2-n)x\ +\ x^2(p-1)\Big(\frac{n}{2}-1\Big)$$

$$\frac{\partial m}{\partial x}\Big(\frac{2}{p-1}\Big) = (2-n) + 2\ \frac{2}{p-1}(p-1)\Big(\frac{n-2}{2}\Big) = n-2$$

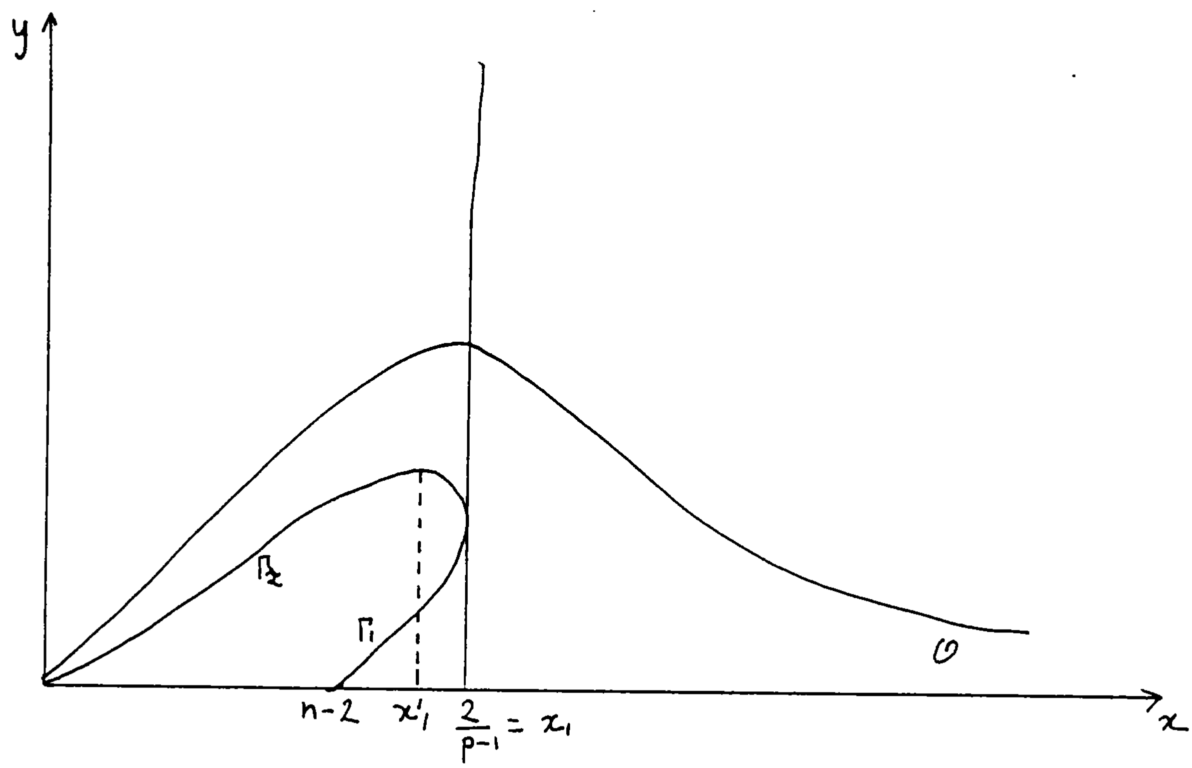


Figure 6.

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(\dfrac{2}{p-1};\ h\big(\dfrac{2}{p-1}\big)\Big) = 0$ et que

$$\frac{\partial m}{\partial x}\Big(\frac{2}{p-1}\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{2}{p-1};\ h\big(\frac{2}{p-1}\big)\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{2}{p-1};\ h\big(\frac{2}{p-1}\big)\Big)\, h'\Big(\frac{2}{p-1}\Big))$$

il en résulte que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{2}{p-1};\ h\big(\frac{2}{p-1}\big)\Big) \neq 0.$$

Ceci montre qu'en tout point $M(x;\, y)$ de Γ tel que $y > 0$, soit $\dfrac{\partial m}{\partial x}(M) \neq 0$, soit $\dfrac{\partial m}{\partial y}(M) \neq 0$. Il existe donc deux fonctions $h_1 : [n-2;\ \frac{2}{p-1}] \to \mathbf{R}$ et $h_2 : [0;\ \frac{2}{p-1}] \to \mathbf{R}$ telles que $f(x,\ y) = 0$ si et seulement si $y = h_1(x)$ ou $y = h_2(x)$ et vérifiant les conditions suivantes:

1) si $n - 2 < x < \dfrac{2}{p-1}$ alors $h_1(x) < h(x)$;

2) si $0 < x < \dfrac{2}{p-1}$ alors $h(x) < h_2(x)$;

3) $h(\frac{2}{p-1}) = h_1(\frac{2}{p-1}) = h_2(\frac{2}{p-1})$.

De plus h_2 est différentiable en 0 en effet $f(x,\ y) = (2-n)\, x + \lambda y + o\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ et donc $h_2'(0) = \dfrac{n-2}{\lambda}$. On peut aussi vérifier que $h_1'(n-2) = 0$.

Comme Γ est différentiable en $(x_1,\ y_1)$, il existe x'_1, $0 < x'_1 < x_1$ tel que h_2 est décroissante sur $[x'_1,\ x_1]$.

Considérons maintenant la trajectoire $\mathcal{O}$ correspondant à $t \mapsto \Big(X(t),\ Y(t)\Big)$. Elle est au dessus du graphe Γ_2 de h_2 dans un voisinage du point O car on a $h'_2(0) = \dfrac{n-2}{\lambda}$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{n}{\lambda}$ d'après la proposition (IV.2). g étant continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $\varepsilon < x \le x'_1$ alors $g\big(x,\ h_2(x)\big) > \eta$. Comme d'autre part $0 < x < x'_1$ implique $f\big(x,\ h_2(x)\big) = 0$; la trajectoire $\mathcal{O}$ reste ensuite strictement au- dessus de Γ_2 lorsque $0 < X(t) < x'_1$. Enfin $x'_1 < X(t) < x_1$ implique $g\big(X(t), Y(t)\big) \ge 0$ et donc $Y(t) > h_2(x'_1)$ (voir figure 6).

$\mathcal{O}$ coupe alors la droite d'équation $x = x_1$ puisque sur cette droite le seul point singulier du champ de vecteur est $A\big(x_1,\ h_2(x_1)\big)$ et que $h_2(x_1) < h_2(x'_1)$ (rappelons que d'après le 3) ci dessus $h_2(x_1) = h(x_1)$). On termine comme dans le cas de la dimension 2 en remarquant que si $X(t) > x_1$ alors $f\Big(X(t),\ Y(t)\Big) > 0$ et que $g\Big(X(t),\ Y(t)\Big) < 0$ ce qui implique que $Y(t)$ est borné puis que $X(t)$ explose en temps fini T , $z(a) = e^T$.

IV.2.) CAS OU $n \ge 3$ et $\frac{n}{n-2} \le p < \frac{n+2}{n-2}$.

Nous démontrons le théorème suivant pour lequel le cas

$$\begin{cases} n \ge 3 \\ \dfrac{n}{n-2} \le p < \dfrac{n+2}{n-2} \\ q = \dfrac{2p}{p+1} \end{cases}$$

est un cas particulier.

Théorème IV. 5. *On considère u_λ solution de*

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda|u|^p = 0 \quad \text{si } r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

avec $p < \dfrac{n+2}{n-2}$ si $n \ge 3$.

Si $1 < q < 2$ il existe λ_0, $\lambda_0 > 0$ et α :$]\lambda_0;\ +\infty[\to \mathbf{R}$ tels que si $\lambda > \lambda_0$ alors $u_\lambda\big(\alpha(\lambda)\big) = 0$; de plus $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \alpha(\lambda) = 0$.

Remarque. D'après la proposition 5.5 de [CW], si $n \geq 3$ et $p \geq \frac{n}{n-2}$ et $q = \dfrac{2p}{p+1}$ l'équation

$$u'' + \frac{n-1}{r}u' - |u'|^q + \lambda |u|^p = 0$$

a une solution de la forme $u(r) = kr^{\frac{-2}{p-1}}$ quel que soit $\lambda > 0$. De même que dans le IV.1) la représentation graphique de cette solution coupe lorsque $\lambda > \lambda_0$ celles de (P_a) quel que soit a.

L'argument de la solution qui suit a été trouvé indépendamment par Hulshof.

Démonstration Soit $v_t : [0; +\infty[\to \mathbf{R}$ l'application définie par $v_t(r) = u_\lambda(tr)$. v_t vérifie alors $v_t'(r) = tu_\lambda'(tr)$ et $v_t''(r) = t^2\ u_\lambda''(tr)$.

On a donc si $r \geq 0$

$$\frac{v_t''(r)}{t^2} + \frac{n-1}{t^2 r}v_t'(r) - \frac{|v_t'(r)|^q}{t^q} + \lambda |v_t(r)|^p = 0$$

ou encore

$$v_t''(r) + \frac{n-1}{r}v_t'(r) - t^{2-q}|v_t'(r)|^q + \lambda t^2 |v_t(r)|^p = 0.$$

Soit $t > 0$ tel que $\lambda t^2 = 1$. On a $t = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc $\lambda \to +\infty$ implique $t \to 0$ et $t^{2-q} \to 0$ puisque $2 > q$.

v_t est donc solution du problème noté $(P_{(a,\lambda,\mu)})$ dans le chapitre I avec $\lambda = 1$ et $\mu = t^{2-q}$; c'est à dire que v_t vérifie

$$(P_{a,\ \lambda,\ \mu}) \qquad \begin{cases} v_t'' + \dfrac{n-1}{r}v_t' - t^{2-q}|v_t'|^q + |v_t|^p = 0 \\ v_t(0) = a \\ v_t'(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction z définie au chapitre I est continue par rapport à a, λ et μ,et , pour $p < \dfrac{n+2}{n-2}$, $z(a,\ 1,\ 0)$ est fini quel que soit a strictement positif; il existe donc un réel μ_0, $\mu_0 > 0$, tel que $0 < \mu < \mu_0$ implique $z(a,\ 1,\ \mu) < +\infty$.

Si $0 < t^{2-q} < \mu_0$, alors $0 < t < mu_0{}^{\frac{1}{2-q}}$ et $\dfrac{1}{t} > \dfrac{1}{mu_0{}^{\frac{1}{2-q}}}$. Comme $\lambda = \dfrac{1}{t^2}$ on obtient $\lambda > \dfrac{1}{mu_0{}^{\frac{2}{2-q}}}$.

Si $0 < t^{2-q} < \mu_0$ alors $z(a,\ 1,\ t^{2-q}$ est fini et $v_t\Big(z(a,\ 1,\ t^{2-q}\Big) = 0$; on a alors, d'après la définition de v_t, $u_\lambda\Big(t\, z(a,\ 1,\ t^{2-q})\Big) = 0$. C'est à dire que $z(a,\ \lambda,\ 1) = t\, z(a,\ 1,\ t^{2-q})$ est fini.

Enfin si $\lambda \to +\infty$, $t \to 0$ et $t^{2-q} \to 0$ donc $z(a,\, 1,\, t^{2-q}) \to z(a,\, 1,\, 0)$ et $t\, z(a,\, 1,\, t^{2-q}) \to 0$. C'est à dire finalement

$$\lim_{\lambda \to +\infty} z(a,\, \lambda,\, 1) = 0$$

d'où le théorème en prenant $\lambda_0 = \dfrac{1}{\mu_0^{\frac{2}{2-q}}}$ et $\alpha = z(a,\, \lambda,\, 1)$. ///

CHAPITRE V

UN RESULTAT SURPRENANT LORSQUE $p \geq \dfrac{n+2}{n-2}$

On sait que si u_a est solution de

$$\begin{cases} u''(r) + \dfrac{n-1}{r}u'(r) + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{si } r > 0 \\ u(o) = a & , \ a > 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

avec $n \geq 3$ et $p \geq \dfrac{n+2}{n-2}$ alors $u_a > 0$ sur $[0; +\infty[$. On peut se demander si ce comportement est modifié en rajoutant le terme $-|u'(r)|^q$ dans l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème ci dessous répond par l'affirmative à cette question.

Dans ce qui suit on étudie les solutions u_a du problème (P_a)

$$(P_a) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{(n-1)}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda u(r)^p = 0 & \text{si } r > 0 \\ u(0) = a \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème V.1. *a) Soit u_a solution de (P_a). Si $q > p > 1$ et si $A > 0$ est assez grand, pour tout $a > A$ il existe un réel $z(a)$ tel que $u_a(z(a)) = 0$; de plus* $\lim\limits_{a \to +\infty} z(a) = +\infty$.

b) Il existe un réel $R_0 > 0$ tel que si $R > R_0$ le problème (P_R)

$$(P_R) \qquad \begin{cases} u''(r) + \frac{(n-1)}{r}u'(r) - |u'(r)|^q + \lambda u(r)^p = 0 & \textit{si } r > 0 \\ u > 0 & \textit{sur } [0;\ R[\\ u'(0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{cases}$$

a au moins deux solutions.

Démonstration. On compare les solutions u_a du problème (P_a) avec la solution $\tilde{u}_1$ du problème suivant

$$(\tilde{P}_1) \qquad \begin{cases} u''(r) - 2|u'(r)|^q + \lambda|u(r)|^p = 0 & \text{si } r \geq 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

dont on sait qu'elle s'annule en au moins un point de $]0, \infty[$. On appelle $\tilde{z}(1)$ le plus petit réel positif r tel que $\tilde{u}_1(r) = 0$.

Lemme V.2. *Soit* $r_1 > 0$, *on a alors* $\lim_{a \to +\infty} (r_1) = +\infty$.

Démonstration du lemme V.2. On sait en effet d'après le lemme 5.1 de [CW] que pour tout $r \geq 0$

$$u'_a(r) \geq -\lambda^{\frac{1}{q}} a^{\frac{p}{q}}.$$

On en déduit que

$$\int_0^r u'_a(s)\, ds \geq -\lambda^{\frac{1}{q}} a^{\frac{p}{q}} r$$

et donc que $u_a(r) \geq a - r\lambda^{\frac{1}{q}} a^{\frac{p}{q}}$. Pour que $u_a(r_1) > a'$ soit réalisé, il suffit que $a - r_1\lambda^{\frac{1}{q}} a^{\frac{p}{q}} > a'$. Comme $\dfrac{p}{q} < 1$, $\lim_{a \to +\infty} a - r_1\lambda^{\frac{1}{q}} a^{\frac{p}{q}} = +\infty$ d'où l'existence de a_0. ///

Soit maintenant $a_1 > 1$ et μ_{a_1} l'application de $[0, \tilde{z}(1)[$ dans $[0, +\infty[$ qui à r associe le réel $\mu_{a_1}(r)$ tel que $\tilde{u}_1(r) = u_{a_1}(\mu_{a_1}(r))$. (voir Figure 1).

L'application μ_{a_1} est bien définie en effet on sait que si $u_{a_1} > 0$ sur $[0, +\infty[$ alors $\lim_{r \to +\infty} u_{a_1}(r) = 0$.

On a deux cas:

1) soit, pour tout $r \in [0, \tilde{z}(1)[$,

$$\tilde{u}'_1(r) > u'_{a_1}(\mu_{a_1}(r)); \qquad (V.1)$$

2) soit il existe un réel $r \in [0; \tilde{z}(1)[$ tel que $\tilde{u}'_1(r) = u'_{a_1}(\mu_{a_1}(r))$. On désigne alors par r_2 le plus petit de ces réels.

Examinons successivement ces deux cas.

Montrons d'abord que dans le **premier cas** on a $z(a_1) < +\infty$.

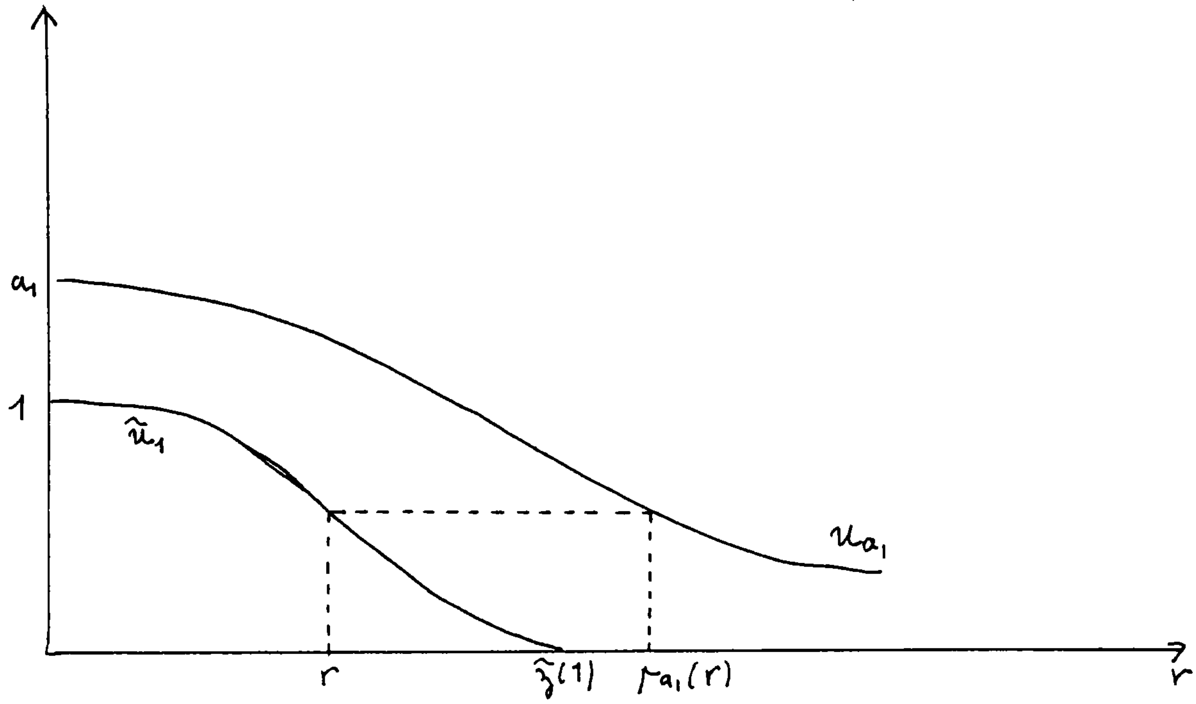


Figure 1.

Soit $a' < 1$ et $\tilde{u}_1(\tilde{r}) = u_{a_1}\big(\mu_{a_1}(\tilde{r})\big) = a'$. On peut alors écrire que

$$\begin{cases} \tilde{r} = \tilde{u}_1^{-1}(a') \\ \mu_{a_1}(\tilde{r}) = {u_{a_1}}^{-1}(a'). \end{cases}$$

D'autre part $\tilde{u}_1(0) = 1$ et $u_{a_1}\big(\mu_{a_1}(0)\big) = 1$ d'où

$$\begin{cases} 0 = \tilde{u}_1^{-1}(1) \\ \mu_{a_1}(0) = {u_{a_1}}^{-1}(1). \end{cases}$$

On en déduit alors que

$$\tilde{r} = \tilde{u}_1^{-1}(a') - \tilde{u}_1^{-1}(1) = \int_1^{a'} (\tilde{u}_1^{-1})'(s)\,ds$$

et que

$$\mu_{a_1}(\tilde{r}) - \mu_{a_1}(0) = u_{a_1}^{-1}(a') - u_{a_1}^{-1}(1) = \int_1^{a'} (u_{a_1}^{-1})'(s)\,ds.$$

ou encore

$$\tilde{r} = \int_1^{a'} \frac{1}{\tilde{u}_1'\big(\tilde{u}_1^{-1}(s)\big)}\,ds \tag{V.2}$$

et

$$\mu_{a_1}(\tilde{r}) - \mu_{a_1}(0) = \int_1^{a'} \frac{1}{\tilde{u}_a'\big(u_{a_1}^{-1}(s)\big)}\, ds. \tag{V.3}$$

Si $\tilde{u}_1(r) = s$ alors d'après la définition de μ_{a_1}

$$u_{a_1}\big(\mu_{a_1}(r)\big) = \tilde{u}_1(r) = s,$$

c'est à dire

$$r = \tilde{u}_1^{-1}(s) \quad \text{et} \quad \mu_{a_1}(r) = u_{a_1}^{-1}(s). \tag{V.4}$$

D'après (V.1), pour tout r tel que $0 < r < \tilde{z}(1)$, $0 > \tilde{u}_1'(r) > u_{a_1}'\big(\mu_{a_1}(r)\big)$ donc

$$0 > \tilde{u}_1'\big(\tilde{u}_1^{-1}(s)\big) > u_{a_1}'\big(u_{a_1}^{-1}(s)\big)$$

et

$$\frac{1}{u_{a_1}'\big(u_{a_1}^{-1}(s)\big)} > \frac{1}{\tilde{u}_1'\big(\tilde{u}_1^{-1}(s)\big)}.$$

En intégrant cette relation entre 1 et a' et en tenant compte du fait que $1 > a'$, on a alors d'après (V.2) et (V.3)

$$\mu_{a_1}(\tilde{r}) - \mu_{a_1}(0) < \tilde{r} \quad \text{c'est à dire } \mu_{a_1}(\tilde{r}) < \mu_{a_1}(0) + \tilde{r}.$$

Lorsque $a' \to 0$, $\tilde{r} \to \tilde{z}(1)$, et $\mu_{a_1}(\tilde{r})$ est donc majoré par $\mu_{a_1}(0) + \tilde{z}(1)$, ce qui implique $z(a_1) < \mu_{a_1}(0) + \tilde{z}(1)$.

Montrons maintenant qu'il existe un réel A tel que $a > A$ implique $z(a) < +\infty$. D'après le lemme V.2, il existe un réel A tel que, si $a > A$, $u_a\big(z(a_1)\big) > a_1$. Si r' est le réel tel que $u_a(r') = a_1$, on a alors $u_a'(r') < u_{a_1}'(0)$. La proposition I.7 du chapitre I montre alors, puisque il ne peut exister un réel r, vérifiant $0 < r < z(a_1)$ et $u_a(r) = u_{a_1}(r)$ (voir la figure 2) que $z(a)$ est fini.

Dans le **deuxième cas**, on désigne par r_2 le plus petit des réels r positifs tels que $\tilde{u}_1'(r) = u_{a_1}'\Big(\mu_{a_1}(r)\Big)$. Posons $m = \sup_{r \in [r_2;\, \tilde{z}(1)]} \tilde{u}_1'(r)$; on a $m < 0$ en effet $\tilde{u}_1'$ est continue sur $[0; \tilde{z}(1)]$, $\tilde{u}_1' < 0$ sur $]0; \tilde{z}(1)]$ et $r_2 > 0$.

Voici l'idée de la démonstration. u_a vérifiant (P_a), désignons tout d'abord par $\mu_a : [0; \tilde{z}(1)] \to \mathbf{R}$ l'application qui à r associe le réel $\mu_a(r)$ tel que $u_a\big(\mu_a(r)\big) = \tilde{u}_1(r)$.

On montre que l'on peut trouver $A > 0$ tel que pour tout $a > A$ (voir figure 3)

a) $u_a'\big(\mu_a(r_2)\big) < u_{a_1}'\big(\mu_{a_1}(r_2)\big) = \tilde{u}_1'(r_2)$

b) $r_3 \geq r_2$ et $u_a'\big(\mu_a(r_3)\big) = \tilde{u}_1'(r_3) \leq m$ implique $u_a''\big(\mu_a(r_3)\big) < \tilde{u}_1''(r_3)$.

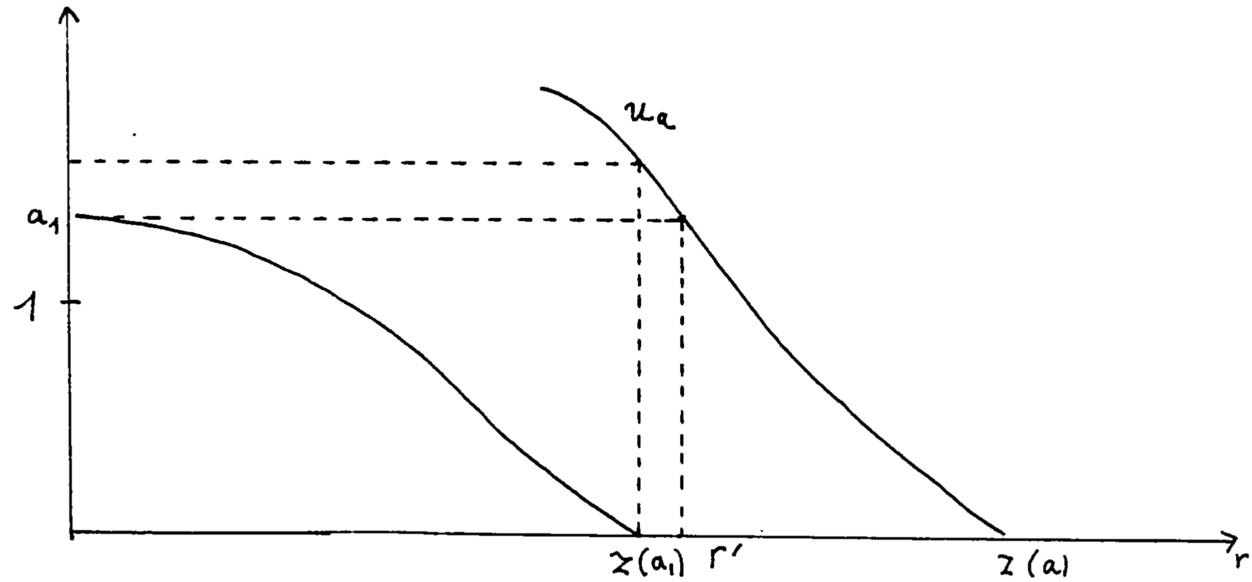


Figure 2.

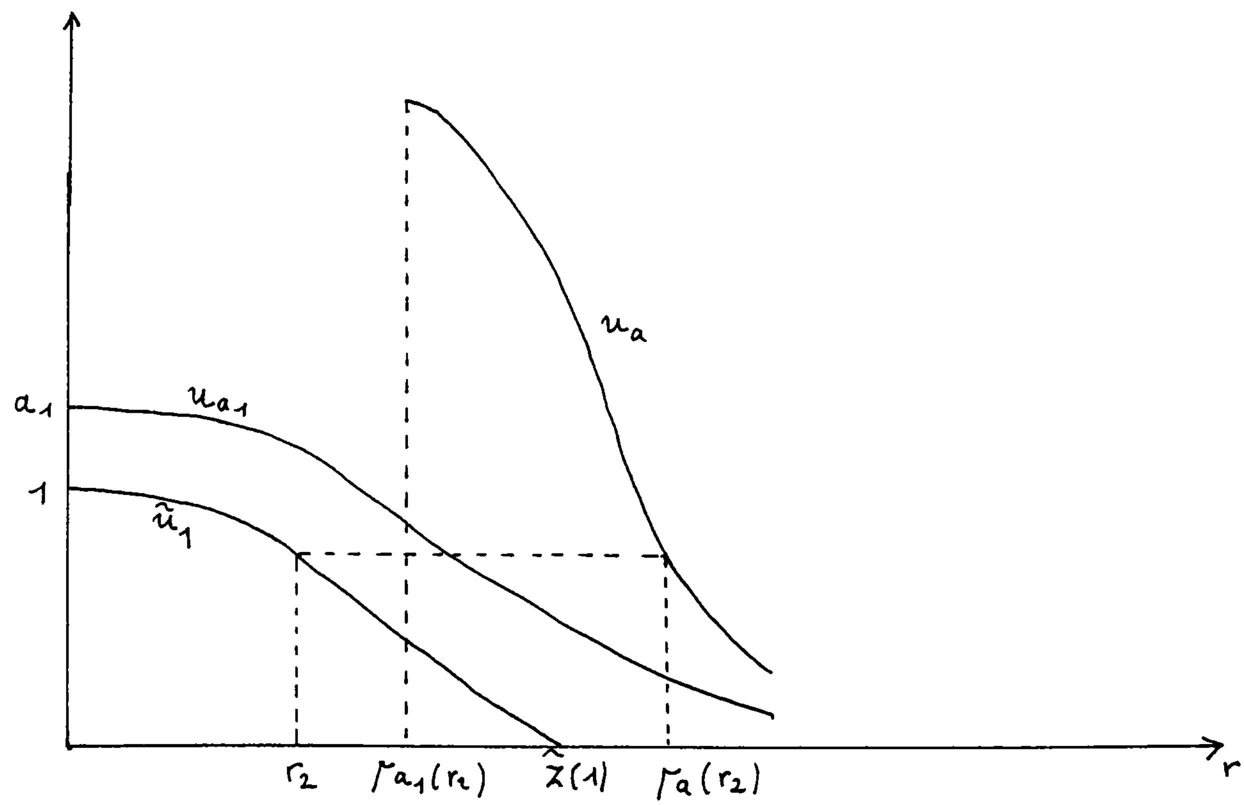


Figure 3.

De **a)** et **b)** on déduira alors que $u'_a(\mu_a(r)) < \tilde{u}'_1(r)$ si $r \geq r_2$ et on concluera comme dans le premier cas.

Nous verrons qu'en fait (voir figure 3) le **a)** est réalisé si $u_a\big(\mu_{a_1}(r_2)\big) > a_1$.

D'autre part, pour le **b)**, si nous notons

$$\begin{cases} \alpha = u_a\big(\mu_a(r_3)\big) = \tilde{u}_1(r_3) \\ \beta = u'_a\big(\mu_a(r_3)\big) = \tilde{u}'_1(r_3) \end{cases}$$

le **b)** est réalisé si

$$-\frac{n-1}{\mu_a(r_3)}\beta + |\beta|^q - \lambda\alpha^p < 2|\beta|^q - \lambda\alpha^p$$

c'est à dire si

$$\frac{n-1}{\mu_a(r_3)}|\beta| < |\beta|^q$$

et finalement

$$\mu_a(r_3) > \frac{n-1}{|\beta|^{q-1}}. \tag{V.5}$$

Comme $|\beta| > |m|$ et que $r_3 \geq r_2$, (V.5) est réalisé si

$$\mu_a(r_2) > \frac{n-1}{|m|^{q-1}}. \tag{V.6}$$

Comme $\tilde{u}_1(r_2) = u_a\big(\mu_a(r_2)\big)$, pour que (V.6) soit vérifié, il suffit d'avoir

$$u_a\left(\frac{n-1}{|m|^{q-1}}\right) > \tilde{u}_1(r_2) \qquad (V.7).$$

On peut choisir d'après le lemme V.2 un réel A' tel que $a > A'$ implique (V.7).

Montrons maintenant que si A'' est assez grand alors **a)** est vérifié c'est à dire que $u'_a\big(\mu_a(r_2)\big) < {u_{a_1}}'\big(\mu_{a_1}(r_2)\big)$.

Tout d'abord, d'après le lemme V.2, il existe un réel A'' tel que $a > A''$ implique $u_a\big(\mu_{a_1}(r_2)\big) > a_1$ (voir figure 4).

Considérons l'application $\mu_{a_1;a} : [0; \mu_{a_1}(r_2)] \rightarrow \mathbf{R}$ qui à r associe le réel $\mu_{a_1;a}(r)$ tel que $u_{a_1}(r) = u_a\big(\mu_{a_1;a}(r)\big)$. L'application $\mu_{a_1;a}$ peut s'écrire $u_a^{-1} \circ u_{a_1}$ et donc $\mu_{a_1;a}$ est dérivable sur $]0; \mu_{a_1}(r_2)[$; on a sur cet intervalle

$$u'_{a_1}(r) = u'_a\big(\mu_{a_1;a}(r)\big)\mu'_{a_1;a}(r). \tag{V.8}$$

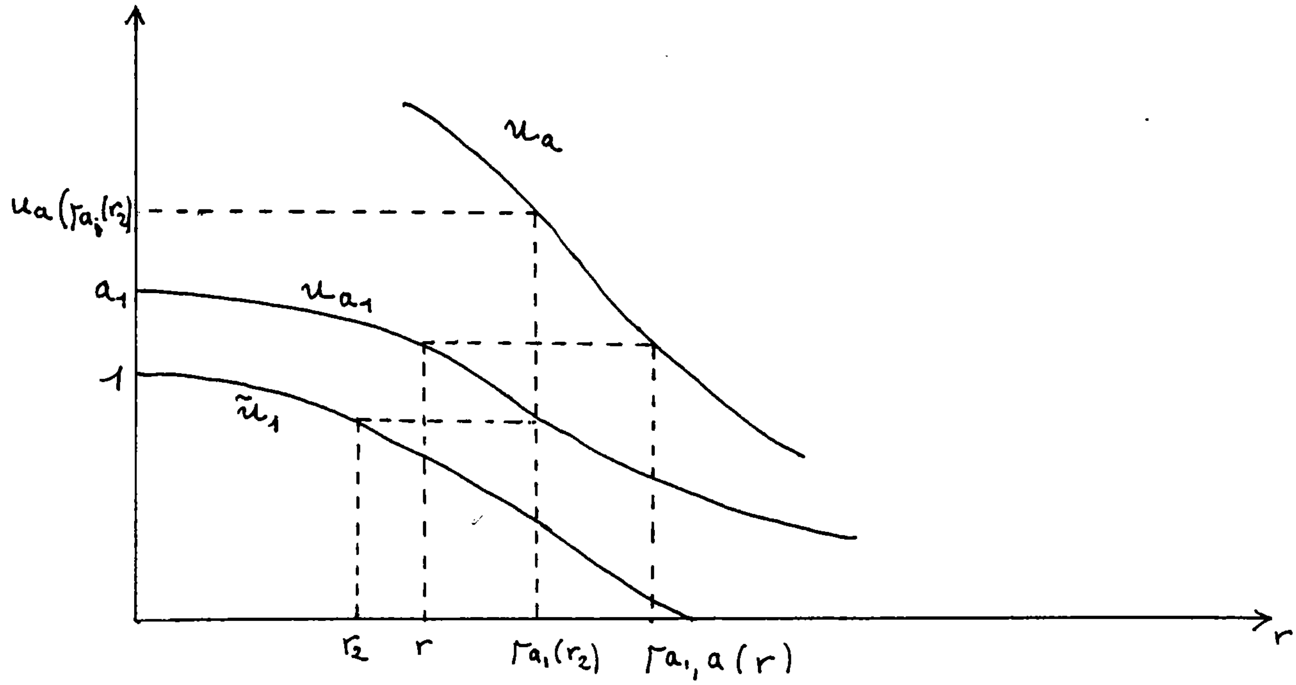


Figure 4.

Soit d'autre part

$$f : [0; \mu_{a_1}(r_2)] \to \mathbf{R}$$

l'application qui à r associe

$$f(r) = u'_{a_1}(r) - u'_a\big(\mu_{a_1;a}(r)\big).$$

f est dérivable sur $]0; \mu_{a_1}(r_2)[$ et

$$f'(r) = u''_{a_1}(r) - u''_a\big(\mu_{a_1;a}(r)\big)\,\mu'_{a_1,a}(r).$$

On a $f(0) = u'_{a_1}(0) - u'_a\big(\mu_{a_1;a}(0)\big) = -u'_a\big(\mu_{a_1;a}(0)\big)$ donc $f(0) > 0$.

Supposons $f(r_4) = 0$. On aurait alors $u'_{a_1}(r_4) = u'_a\left(\mu_{a_1;a}\right)(r_4) = \beta$ où β est un réel. D'autre part d'après (V.8) $\mu'_{a_1;a}(r_4) = 1$. On obtient alors

$$f'(r_4) = u''_{a_1}(r_4) - u''_a\big(\mu_{a_1;a}(r_4)\big)$$

Si l'on pose

$$u_{a_1}(r_4) = u_a\big(\mu_{a_1;a}(r_4)\big) = \alpha$$

alors

$$\begin{cases} u''_{a_1}(r_4) = -\dfrac{n-1}{r_4}\beta + |\beta|^q - \lambda\alpha^p \\ u''_a\big(\mu_{a_1;a}(r_4)\big) = -\dfrac{n-1}{\mu_{a_1;a}(r_4)}\beta + |\beta|^q - \lambda\alpha^p. \end{cases}$$

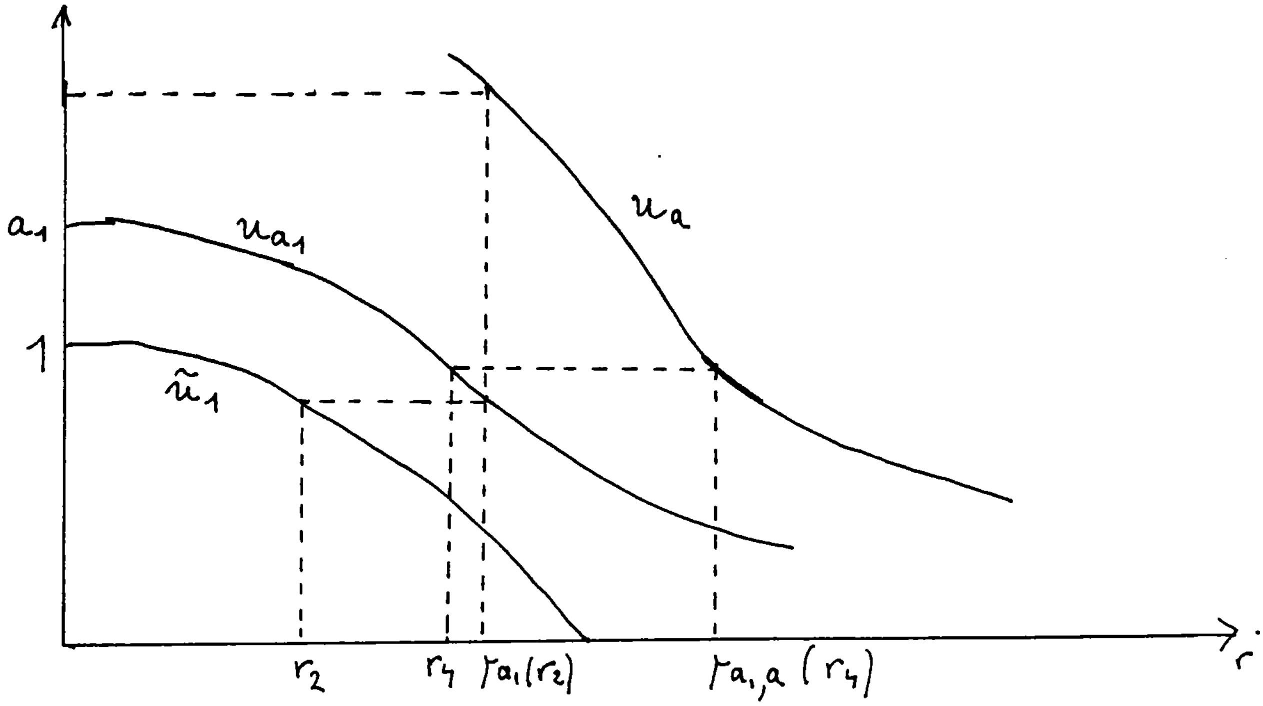


Figure 5.

Or $\mu_{a_1;a}(r_4) > r_4$ (voir figure 5).

On en déduit en utilisant le lemme I.5 que $f > 0$ sur $[0; \mu_{a_1}(r_2)[$. La condition **a)** est donc réalisée si $a > A''$.

On choisit alors $A_1 > \sup\{A', A''\}$ pour que **a)** et **b)** soient simultanément vérifiés.

En reprenant une démonstration semblable à celle que nous venons juste de faire, on déduit alors que $u'_a(\mu_a(r)) < \tilde{u}'_1(r)$ si $r \geq r_2$. Nous sommes alors ramenés au cas 1. Ceci démontre le théorème V.1 a). Le b) résulte alors de ce que $\lim_{a\to 0} z(a) = \lim_{a\to+\infty} z(a) = +\infty$.///

CHAPITRE VI

EXISTENCE DANS LE CAS D'UN OUVERT QUELCONQUE

VI.1.) POSITION DU PROBLEME ET PRINCIPAUX RESULTATS

Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ de classe au moins $C^{2,\alpha}$ et on suppose que

$$1 < p < \frac{n+2}{n-2} \quad ; \; q > 1 \; ; \; \lambda > 0 \quad \text{et } a \geq 0$$

On recherche une fonction u de $C^2(\bar{\Omega})$ solution du problème (P_λ)

$$(P_\lambda) \qquad \begin{cases} \Delta u - |\nabla u|^q + \lambda u^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Ce problème est relié au suivant noté (P'_a)

$$(P'_a) \qquad \begin{cases} \Delta u - a|\nabla u|^q + u^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

On a le

Théorème VI.1. *Soit $p > 1$, $q > 1$. Supposons d'autre part que $n \leq 2$ ou que $n \geq 3$ et $p < \frac{n+2}{n-2}$. Il existe $a_0 > 0$ tel que si $0 \leq a \leq a_0$ alors (P'_a) admet au moins une solution dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

De ce théorème résulte alors le théorème VI.2.

Théorème VI.2. *Soit $p > 1$, $q > 1$. Supposons d'autre part que $n \leq 2$ ou que $n \geq 3$ et $p < \frac{n+2}{n-2}$. Il existe alors $\lambda_0 > 0$ tel que, si $\lambda \geq \lambda_0$, le problème (P_λ) admet au moins une solution dans $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

La démonstration du théorème VI.1 utilise la théorie du degré de Leray-Schauder et en particulier le résultat suivant :

Théorème d'homotopie. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, U un ouvert borné de $\mathcal{B}$ et $A > 0$. Soit $K : [0, A] \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application continue et compacte qui à (a, x) associe $K(a, x) = K_a(x)$. Si $deg(I - K_0; U; 0) \neq 0$ et $0 \notin (I - K_a)(\partial U)$ quel que soit $a \in [0, A]$ alors pour tout a vérifiant $0 \leq a \leq A$ on a $deg(I - K_a; U; 0) \neq 0$ et K_a a au moins un point fixe dans U.*

Définissons maintenant K et $\mathcal{B}$.

Soit L l'application réciproque de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet au bord de Ω. L définit une application de $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Le problème

$$\begin{cases} \Delta u - a|\nabla u|^q + u^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

s'écrit alors $u = L(-a|\nabla u|^q + u^p)$ et enfin $(I - K_a)(u) = 0$ où $K_a(u) = L(-a|\nabla u|^q + u^p)$.

Dans ce qui suit nous montrerons que l'on peut prendre u dans $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Soit C le cône des fonctions continues, positives ou nulles sur $\bar{\Omega}$.

On sait d'après un article de D.G. De Figueiredo, P.L. Lions et R.D. Nussbaum, [FLN], qu'il existe r et R, $0 < r < R$, tels que si $U_1 = \{u \in C \text{ tels que } r < \|u\|_{L^\infty}(\bar{\Omega}) < R\}$ alors $deg(I - K_0; U_1; 0) \neq 0$. K_0 a donc au moins un point fixe u et $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Ce résultat est obtenu à partir d'une estimation à priori de $\|u\|_{L^\infty}(\bar{\Omega})$.

Pour tenir compte du terme $a|\nabla u|^q$ dans le problème (P'_a) nous travaillons dans l'espace $\mathcal{B} = C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ des fonctions C^1 sur $\bar{\Omega}$ dont les dérivées partielles du premier ordre appartiennent à $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, α appartenant à $]0; 1[$.

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions u continues sur $\bar{\Omega}$ telles que

$$\| u \|_\alpha = \sup_{(x,y)\in\bar{\Omega}^2,\ x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

est fini.

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ est muni de la norme

$$\|u\|_{0,\alpha} = \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \|u\|_\alpha.$$

$C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ est muni d'une structure d'espace de Banach grâce à la norme $\| u \|_{1,\alpha}$ où

$$\| u \|_{1,\alpha} = \| u \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \max_{1\leq i\leq n} \| D_i u \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \max_{1\leq i\leq n} \| D_i u \|_{0,\alpha} .$$

1) Soit $F_a : C^{1,\,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^0(\bar{\Omega})$ définie par $F_a(u) = -a|\nabla u|^q + |u|^p$. D'après le lemme VI.3 qui suit $F_a(C^{1,\,\alpha}(\bar{\Omega})) \subset C^{0,\,\alpha}(\bar{\Omega})$

2) On a $L(C^{0,\,\alpha}(\bar{\Omega})) \subset C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.

3) Soit i l'injection canonique : $i : C^{2,\,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{1,\,\alpha}(\bar{\Omega})$.

K_a est alors définie par: $K_a = i \circ L \circ F_a$.

Le fait que K_a est bien définie et compacte résulte du lemme V.3 ainsi que des théorèmes A et B qui suivent.

Lemme VI.3. *Soit B une boule de centre O, de rayon R de $C^{1,\,\alpha}(\bar{\Omega})$. $F_a(B)$ est alors incluse dans une boule B' de $C^{0,\,\alpha}(\bar{\Omega})$ et F_a est uniformément continue sur B.*

Théorème A. *Soit Ω un ouvert borné et 1-régulier. L'injection canonique $i : C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ est continue et compacte.*

Théorème B. *Il existe une constante $K > 0$ telle que si $u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$ alors $\| Lu \|_{2,\,\alpha} \leq K \| u \|_{\alpha}$.*

VI.2) CONTINUITE DE L'APPLICATION $F_a : C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \to C^{0,\,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Lemme VI.3. *Soit B une boule de centre O, de rayon R de $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. $F_a(B)$ est alors incluse dans une boule B' de $C^{0,\,\alpha}(\bar{\Omega})$ et F_a est uniformément continue sur B.*

Démonstration du lemme VI.3.

On a

$$\| F_a(u) - F_a(v) \|_{0,\alpha}$$

$$= \Big\| -a\big(|\nabla u|^q - |\nabla v|^q\big) + |u|^p - |v|^p \Big\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \Big\| -a\big(|\nabla u|^q - |\nabla v|^q\big) + |u|^p - |v|^p \Big\|_{\alpha}$$

$$\leq |a| \left\{ \| \, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \, \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \Big\| |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \Big\|_{\alpha} \right\} + \| \, |u|^p - |v|^p \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \Big\| |u|^p - |v|^p \Big\|_{\alpha}.$$

$$\leq \sup\{1, |a|\} \left\{ \| \, |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \, \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \Big\| |\nabla u|^q - |\nabla v|^q \Big\|_{\alpha} \right.$$

$$\left. + \| \, |u|^p - |v|^p \|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \Big\| |u|^p - |v|^p \Big\|_{\alpha} \right\}.$$

Il suffit donc de montrer que les applications $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ de $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ qui à u associent respectivement $\mathcal{G}_1(u) = |\nabla u|^q$ et $\mathcal{G}_2(u) = |u|^p$ sont uniformément continues sur les boules de centre 0 de rayon R de $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$

Soit $F_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ l'application qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)^{\frac{q}{2}}$ et $F_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ celle qui à x associe $(x^2)^{\frac{p}{2}}$. On peut alors définir des applications $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de respectivement $\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$ et $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ par

$$\big(\mathcal{F}_1(u)\big)(x) = \big(\mathcal{F}_1(u_1, \dots, u_n)\big)(x) = F_1\big(u_1(x), \dots, u_n(x)\big)$$

et

$$\big(\mathcal{F}_2(u)\big)(x) = F_2\big(u(x)\big);$$

$\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$ étant muni de la norme

$$\|u\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n} = \|(u_1, \dots, u_n)\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n} = \sup_{1 \le i \le n} \|u_i\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

On peut alors écrire

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_1 \circ \nabla \text{ et } \mathcal{G}_2 = \mathcal{F}_2 \circ i$$

où $\nabla : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \to \left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$ et i est l'injection de $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Il est évident que i est uniformément continue. Il en est de même de ∇. Montrons que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont uniformément continues sur les boules de rayons R de leurs ensembles de départ.

De façon plus générale, nous allons montrer que, si $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \le i \le n} (|x_1|, \dots, |x_n|)$) est une application de classe C^1, on peut définir une application

$$\mathcal{F} : \left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n \to C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$$

par

$$\big(\mathcal{F}_1(u)\big)(x) = \big(\mathcal{F}_1(u_1, \dots, u_n)\big)(x) = F_1\big(u_1(x), \dots, u_n(x)\big)$$

qui de plus est uniformément continue sur toute boule de rayon R de $\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$.

Tout d'abord, considérons une boule B_R de $\mathbf{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Il existe alors des constantes K et C telles que

1) si $x \in B_R$ alors $|F(x)| \leq K$;

2) si $x \in B_R$ et $y \in B_R$ alors $|F(x) - F(y)| \leq C \|x - y\|$.

Soit d'autre part $\mathcal{B}_R$ la boule de centre 0, de rayon R de $\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$.

Si u appartient à $\mathcal{B}_R$, on a alors, pour tout x de $\bar{\Omega}$, $|F(u(x))| \leq K$; et pour $x \in \bar{\Omega}$, $y \in \bar{\Omega}$, $x \neq y$

$$
\begin{aligned}
|F(u(x)) - F(u(y))| &\leq C \|u(x) - u(y)\| \\
&\leq C \|u\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n} |x - y|^\alpha
\end{aligned}
$$

Ceci montre qu'alors $\mathcal{F}(u)$ appartient à $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathcal{B}_R$.

Si u et v appartiennent à $\mathcal{B}_R$, on a

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |F(u(x)) - F(v(x))| \\
&\leq C \sup_{x \in \Omega} \|u(x) - v(x)\| \\
&\leq C \|u - v\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n}
\end{aligned}
$$

Majorons ensuite $\|\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)\|_\alpha$.

On a successivement

$$
\Big|F(u(x)) - F(v(x)) - F(u(y)) + F(v(y))\Big|
$$

$$
= \left| \int_0^1 \frac{dF}{dt}\Big(u(y) + t\,(u(x) - u(y))\Big)\, dt \;-\; \int_0^1 \frac{dF}{dt}\Big(v(y) + t\,(v(x) - v(y))\Big)\, dt \right|
$$

$$
= \left| \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(u(y) + t\,(u(x) - u(y))\Big)\Big(u_i(x) - u_i(y)\Big)\, dt \right.
$$

$$
\left. - \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(v(y) + t\,(v(x) - v(y))\Big)\Big(v_i(x) - v_i(y)\Big)\, dt \right|
$$

$$= \left| \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(u(y) + t\,(u(x) - u(y))\Big)\Big(u_i(x) - u_i(y) - v_i(x) + v_i(y)\Big)\, dt \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(v(y) + t\,(v(x) - v(y))\Big) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(u(y) + t\,(u(x) - u(y))\Big) \right\} \Big(v_i(x) - v_i(y)\Big)\, dt \right|$$

Majorons les valeurs absolues de chacunes des deux intégrales.

En ce qui concerne la première, F étant de classe C^1, il existe une constante C_1 telle que, sur B_R, $\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right| \leq C_1$ quel que soit i.

D'autre part, pour tout i,

$$\left|u_i(x) - u_i(y) - v_i(x) + v_i(y)\right| \leq \|u - v\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n} |x - y|^\alpha.$$

La valeur absolue de la première intégrale est donc majorée par

$$n\, C_1\, \|u - v\|_{\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n} |x - y|^\alpha.$$

Pour la deuxième intégrale on utilise le fait que F est de classe C^1. Pour tout $\alpha > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|x - y| < \varepsilon$ alors

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial F}{\partial x_i}(y)\right| < \alpha.$$

t étant compris entre 0 et 1, on a

$$\left|v(y) + t\,(v(x) - v(y)) \;-\; u(y) - t\,(u(x) - u(y))\right| \leq 3\|v - u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}.$$

Donc si $\|v - u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{3}$ alors, quels que soient x et y de $\bar{\Omega}$, on a

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(v(y) + t\,(v(x) - v(y))\Big) - \frac{\partial F}{\partial x_i}\Big(u(y) + t\,(u(x) - u(y))\Big)\right| < \alpha.$$

Enfin $|v_i(x) - v_i(y)| \leq \|v\|_\alpha |x - y|^\alpha$.

Finalement si $\|v - u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{3}$ on obtient

$$\Big|F(u(x)) - F(v(x)) - F(u(y)) + F(v(y))\Big| \leq n\, C_1\, \|u - v\|_{\left(C^{0,\alpha}(\Omega)\right)^n} |x - y|^\alpha + \alpha \|v\|_\alpha |x - y|^\alpha.$$

Ceci montre que $\mathcal{F}$ définit une application uniformément continue de $\left(C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\right)^n$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Les applications $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont donc uniformément continues sur les boules de centre 0 de rayon R de $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. ///

VI.3) DEMONSTRATION DES THEOREMES VI.1 ET VI.2

Fin de la démonstration du théorème VI.1. D'après la démonstration du théorème 2.1 de [FLN], on sait que:

1) il existe des réels r et R, $0 < r < R$ tels que si

$$U_1 = \{u \in C^0(\Omega) \text{ tels que } r < \|u\|_0 < R\}$$

alors deg $(I - K_0; U_1; 0) \neq 0$ et d'autre part si $\|u\|_0$ est égal à r ou R u n'est pas solution de (P_0');

2) il existe un réel C tel que quelle que soit la solution u_0 de (P_0')

$$(P_0') \qquad \begin{cases} \Delta u + u^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

$\|\nabla u_0\|_0 < C$. Comme toute solution u_0 de (P_0') appartient à $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ et qu'il existe une constante K telle que $\|u\|_{2,\alpha} \leq K\|u\|_{0,\alpha}$ on en déduit qu'il existe une autre constante $\mathcal{C}$ telle que $\|u_0\|_{1,\alpha} \leq \mathcal{C}$.

Soit alors
$$U = U_1 \cap \{u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \text{ tels que } \|u\|_{1,\alpha} < \mathcal{C}\}.$$
Montrons qu'il existe un réel A strictement positif tel que si a appartient à $[0; A]$ alors $0 \notin (I - K_a)(\partial U)$.

Si u appartient à ∂U on a $\|u\|_0 = r$, $\|u\|_0 = R$ ou $\|u\|_{1,\alpha} = \mathcal{C}$.

Supposons qu'il existe une suite $(\epsilon_n, u_n), n \in N$ de $]0; +\infty[\times \left(C^{1,\alpha}(\Omega) \cap \partial U\right)$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ et

$$(P_{\epsilon_n}') \qquad \begin{cases} \Delta u_n - \epsilon_n|\nabla u_n|^q + |u_n|^p = 0 & \text{sur } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_n > 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

La suite (u_n) serait alors bornée dans $C^{1,\alpha}(\Omega)$ ainsi que la suite $-\epsilon_n|\nabla u_n|^q + |u_n|^p$ dans $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ d'après le lemme V.3. Soit $\|-\epsilon_n|\nabla u_n|^q + |u_n|^p\|_{0,\alpha} \leq \mathcal{C}'$.

La suite $u_n = L\left(-\epsilon_n|\nabla u_n|^q + |u_n|^p\right)$ étant alors majorée dans $C^{2,\alpha}$ on pourrait en extraire une sous-suite convergente dans $C^{1,\alpha}$. Soit $\bar{u}$ la limite de cette sous suite; $\bar{u}$ serait alors solution de (P'_0) avec l'une des conditions $\|\bar{u}\|_0 = r$, $\|\bar{u}\|_0 = R$ ou $\|\bar{u}\|_{1,\,\alpha} = \mathcal{C}$ d'où une contradiction avec le 1) ci-dessus.

Toutes les conditions du théorème d'homotopie sont donc vérifiées et le théorème VI.1 est démontré.

Démonstration du théorème VI.2. Si l'on pose $\overline{u} = tu$ alors $\overline{u}$ est solution de

$$\Delta\overline{u} - \ at^{1-q}|\nabla\overline{u}|^q + t^{1-p}\ \overline{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

$a\ t^{1-q} = 1$ équivaut à $t = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{1-q}}$ et à $t^{1-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p-1}{q-1}}$

A chaque solution u_a de (P'_a) pour $a \in [0; A]$ on associe ainsi une solution $\tilde{u}_\lambda$ de (P_λ) où $\lambda \geq \lambda_0$ avec $\lambda_0 = \left(\dfrac{1}{A}\right)^{\frac{p-1}{q-1}}$.

Remarque. Dans le cas d'une boule de rayon R, on sait (voir [CW]) que le problème (P_R) a toujours une solution dans le cas $q < \dfrac{2p}{p+1}$ avec soit $n \leq 2$ soit $n \geq 3$ et $p < \dfrac{n+2}{n-2}$. La méthode employée ici dans le cas d'un ouvert quelconque ne permet pas de conclure à un tel résultat lorsque les conditions ci-dessus sont vérifiées.

BIBLIOGRAPHIE

[AW] L. Alfonsi et F. B. Weissler, *Blow up in $\mathbf{R}^N$ for a parabolic equation with a damping nonlinear gradient term*, Nonlinear Diffusion Equations and their Equilibrium States, L. A. Peletier et al.(eds.), Birkhauser Boston Inc. , New York, à paraitre.

[C] M. Chipot, *On a class of nonlinear elliptic equations* , Proceedings of the Banach Center, à paraitre.

[CW] M. Chipot and F.B. Weissler, *Some blow up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term*, SIAM J. Math.Anal.20 (1989), 886-907.

[CW2] M. Chipot and F.B. Weissler, *On the elliptic problem $\Delta u - |\nabla u|^q + \lambda u^p = 0$*, Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States, Vol. I, W.-Ni, L. A. Peletier, J. B. Serrin (eds.),Springer, New-york, 1988, 237-243.

[D] M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations* , Collection ell ipses, Paris, 1989.

[FLN] D. G. De Figueiredo, P.-L. Lions,R.D. Nussbaum, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. pures et appliquées.**61** (1982), 41-63

[FQ] M. Fila and P. Quittner, *Radial ground states for a semilinear elliptic equation with a gradient term*, preprint.

[HW] A. Haraux et F. B. Weissler,*Non-uniqueness for a semilinear initial value problem*, Indiana Univ. Math. J., **31** (1982) , pp.167-189.

[GNN] B. Gidas, W.M. Ni et L. Nirenberg, *Symetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., 68 (1979), 209-243.

[Q1] P. Quittner, *Blow-up for semilinear parabolic equations with a gradient term*, Math. Methods Appli. Sci. **14** (1991), 413-417.

[Q2] P. Quittner, *On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems*,

[SZ] J. B. Serrin and H. Zou, *Existence and non existence results for ground states of quasilinear elliptic equations*, à paraitre.

[PSZ] L. A. Peletier, J. B. Serrin and H. Zou, *Ground states of a quasilinear equation*, Differential and Integral Equations, Volume **7**, Number **4**, July 1994, 1063-1082.

[SYZ] J. Serrin, Y. Yan and H. Zou *A numerical study of the existence and non-existence of ground states and their bifurcation for the equations of Chipot and Weissler*, preprint.

ON A CLASS OF NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS GROWING LIKE A POWER

M. Chipot an F. Voirol

Université de Metz
Département de Mathématiques
Ile de Saulcy, 57045 Metz-Cedex 01
(France)

1. Introduction

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbf{R}^n$ with boundary Γ. This paper is concerned with the problem of finding u positive solution to

$$\begin{cases} \Delta u = a u^p \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u^q \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

where a, p, q are positive constants such that p, $q > 1$. Γ_0, Γ_1 are two portions of the boundary Γ that we will assume to be disjoint and covering Γ, n is the outward unit normal to Γ. Moreover, we will assume that Γ_0 has a positive superficial measure. We refer the reader to [C.F.Q.] for the case where $\Gamma_1 = \Gamma$.

The above problem models the equilibrium of the temperature u in a domain Ω. It is assumed that cooling is provided at a rate proportional to u^p inside the body and a flux of heat is entering the boundary through Γ_1 at a rate u^q. The other part of the boundary is maintained at a constant temperature. The question is then to determine if an equilibrium can be reached by the temperature inside the body.

2. The one dimensional case

In this section we consider the problem of finding $u > 0$ such that

$$\begin{cases} u'' = au^p & \text{on} \quad (0, L), \\ u(0) = 0 \quad , & u'(L) = u^q(L). \end{cases} \tag{2.1}$$

where $p,\ q > 1,\ a > 0$.

In this case the situation is complete and we have the following result:

Theorem 2.1 : The problem (2.1) can be described through the following cases.

(1) If $2q > p+1$, then the problem (2.1) has for any $L > 0$ a unique nontrivial solution.

(2) If $2q = p + 1$,
for $a < q$ the problem (2.1) has for any $L > 0$ a unique nontrivial solution,
for $a \geq q$ the problem (2.1) has no nontrivial solution.

(3) If $2q < p + 1$, then there exists $L^* > 0$ such that
for $L < L^*$ the problem (2.1) has no nontrivial solution,
for $L = L^*$ the problem (2.1) has a unique nontrivial solution,
for $L > L^*$ the problem (2.1) has two nontrivial solutions.

Proof of (1) : We introduce u_m the solution of the Cauchy problem

$$\begin{cases} u_m'' = au_m^p, \\ u_m(0) = 0, \\ u_m'(0) = m. \end{cases} \tag{2.2}$$

where m is a positive constant and we denote by $[0, l_m)$ the interval where the solution exists.

Then we set

$$b(m, r) = \frac{u_m'(r)}{u_m^q(r)} \quad \forall\ (m, r) \in (0, +\infty) \times (0, l_m). \tag{2.3}$$

We claim that for any $m > 0$ the function

$$r \longrightarrow b(m, r)$$

is decreasing on $(0, l_m)$. Indeed if we mutiply the first equation of (2.2) by u_m' we obtain

$$\frac{1}{2}(u_m'^2)' = \frac{a}{p+1}(u_m^{p+1})'.$$

Integrating between 0 and r we get

$$\frac{1}{2}u_m'^2(r) - \frac{1}{2}m^2 = \frac{a}{p+1}u_m^{p+1}(r)$$

hence

$$u_m'(r) = \sqrt{m^2 + \frac{2a}{p+1}u_m^{p+1}(r)}. \tag{2.4}$$

So, we deduce

$$b(m,r) = \frac{u_m'(r)}{u_m^q(r)} = \sqrt{m^2 u_m^{-2q}(r) + \frac{2a}{p+1}u_m^{p+1-2q}(r)}. \tag{2.5}$$

u being clearly increasing on $(0, l_m)$ it follows since $p+1-2q<0$ that $r \to b(m,r)$ is decreasing on $(0, l_m)$. Next, let us establish the following lemma:

Lemma 3.1 : Let $\alpha > 0$ and $(m,r) \in (0,+\infty) \times (0, l_m)$. Then, $(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, r\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) \in (0,+\infty) \times (0, l_{m\alpha^{\frac{p+1}{2}}})$ and one has

$$b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, r\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = \alpha^{\frac{p+1-2q}{2}} b(m,r). \tag{2.6}$$

Proof of Lemma 3.1: Consider

$$s(t) = \alpha u_m(\alpha^{\frac{p-1}{2}}t). \tag{2.7}$$

One has

$$s'(t) = \alpha^{\frac{p+1}{2}} u_m'(\alpha^{\frac{p-1}{2}}t) \tag{2.8}$$

$$s''(t) = \alpha^p u_m''(\alpha^{\frac{p-1}{2}}t) = \alpha^p a u_m^p(\alpha^{\frac{p-1}{2}}t) = a s^p(t). \tag{2.9}$$

So, $s(t)$ satisfy

$$\begin{cases} s'' = a s^p, \\ s(0) = 0, \\ s'(0) = m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, \end{cases} \tag{2.10}$$

and by the uniqueness of the solution of the Cauchy problem

$$s = u_{m\alpha^{\frac{p+1}{2}}} \quad , \quad l_{m\alpha^{\frac{p+1}{2}}} = \alpha^{-\frac{p-1}{2}} l_m. \tag{2.11}$$

Next, we have

$$b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, r\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = \frac{s'(r\alpha^{-\frac{p-1}{2}})}{s^q(r\alpha^{-\frac{p-1}{2}})} = \alpha^{\frac{(p+1-2q)}{2}} \frac{u_m'(r)}{u_m^q(r)}$$

which gives (2.6). From (2.6) we deduce easily that for r fixed the function

$$m \to b(m,r)$$

is decreasing. First note that for $m' > m$ one has, since the trajectories of the system (2.2) cannot cross,

$$u_m(r) \leq u_{m'}(r) \quad , \quad u'_m(r) \leq u'_{m'}(r)$$

and thus

$$l_m \geq l_{m'}. \tag{2.12}$$

So, for $r > 0$ fixed, $b(m,r)$ is defined on some interval $(0, m_r)$. Next, $m' > m$ can be written as

$$m' = m\alpha^{\frac{p+1}{2}} \tag{2.13}$$

for some $\alpha > 1$. Then, since b is decreasing in r and by (2.6)

$$b(m', r) < b(m', r\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, r\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = \alpha^{\frac{p+1-2q}{2}} b(m,r) < b(m,r).$$

and the result follows. We are now in a position to establish (1). First remark that by (2.12),

$$\lim_{m \to 0} l_m \tag{2.14}$$

exists. We claim that this limit is $+\infty$. This follows clearly from the continuous dependence in m of the solution to the Cauchy problem (2.2) and from the fact that for $m = 0$, the solution is 0 and defined on the whole real line.

Thus, given a L, one can find $m > 0$ such that $L < l_m$. If $b(m, L) = 1$, then u_m provides us with a solution to our problem. If $b(m, L) > 1$ one can select $\alpha > 1$ such that

$$b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, L\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = \alpha^{\frac{p+1-2q}{2}} b(m, L) = 1.$$

Then, due to the fact that b is decreasing in r

$$b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, L) < b(m\alpha^{\frac{p+1}{2}}, L\alpha^{-\frac{p-1}{2}}) = 1 < b(m, L). \tag{2.15}$$

But due to the continuity of the map $m \to b(m, L)$ one can find $m_0 \in (m, m\alpha^{\frac{p+1}{2}})$ such that

$$b(m_0, L) = 1$$

and u_{m_0} is solution to our problem. In the case where $b(m, L) < 1$ one proceeds the same way selecting $\alpha < 1$.

To see that uniqueness holds, assume that we have two distinct solutions u_1, u_2 to (2.1). Then,

$$m_1 = u'_1(0) \neq u'_2(0) = m_2$$

and we cannot have

$$b(m_1, L) = b(m_2, L).$$

Thus, uniqueness follows.

Proof of (2) : So, we assume $2q = p + 1$ and as above we introduce u_m the solution to (2.1). In this case (2.5) reads

$$b(m, r) = \frac{u_m'(r)}{u_m^q(r)} = \sqrt{\frac{m^2}{u_m^{2q}(r)} + \frac{a}{q}}. \tag{2.16}$$

Since u_m is increasing, $r \to b(m, r)$ is decreasing on $(0, l_m)$. Moreover, we claim that

$$\lim_{r \to l_m} u_m(r) = +\infty. \tag{2.17}$$

Indeed the above limit clearly exists. Moreover, $(u, v) = (u_m, u_m')$ is solution to the system

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = au^p, \\ u(0) = 0 \quad , \quad v(0) = m. \end{cases} \tag{2.18}$$

u, v are both increasing and have a limit. If $l_m < +\infty$, and $\lim_{r \to l_m} u_m(r) < +\infty$ then, due to the first equation of (2.18) $\lim_{r \to l_m} u_m''(r) < +\infty$ and so does $\lim_{r \to l_m} u_m'(r)$ which is impossible. If now $l_m = +\infty$, and $\lim_{r \to l_m} u_m(r) < +\infty$ then $u_m''(r)$ and thus $u_m'(r)$ are unbounded which contradicts the fact that u_m is. So, in all cases we have (2.17). It follows from (2.16) that for any $r > l_m$

$$b(m, r) > \lim_{r \to l_m} b(m, r) = \sqrt{\frac{a}{q}}. \tag{2.19}$$

Thus, when $a \geq q$ the problem (2.1) cannot have a solution. (The case $a = q$ gives rise to no solution due to the fact that $u_m(r)$ is unbounded when $r \to l_m$).

When $a < q$, then, clearly, for any m we can find a unique L_m such that

$$b(m, L_m) = 1. \tag{2.20}$$

Now, it is easy to check that if u_1 denotes the solution to (2.2) corresponding to $m = 1$ then (compare to (2.7)-(2.10)), $v(t) = \alpha u_1(\alpha^{\frac{p-1}{2}} t)$ satisfies

$$\begin{cases} v'' = av^p \quad \text{on} \quad (0, \alpha^{-\frac{p-1}{2}} L_1) \\ v(0) = 0 \\ v'(\alpha^{-\frac{p-1}{2}} L_1) = \alpha^q. \end{cases} \tag{2.21}$$

Thus,

$$u_{\alpha^q}(t) = \alpha u_1(\alpha^{\frac{p-1}{2}} t) \quad , \quad L_{\alpha^q} = \alpha^{-\frac{p-1}{2}} L_1. \tag{2.22}$$

It follows that for any $L > 0$ there exists a unique α such that

$$L = \alpha^{-\frac{p-1}{2}} L_1 \tag{2.23}$$

and u_{α^q} is the unique solution to (2.1). This completes the proof of (2).

Proof of (3) : So, we assume throughout this part that $2q < p+1$. We introduce as before the solution u_m to (2.2). Recall that we have (see (2.4))

$$u_m'(r) = \sqrt{m^2 + \frac{2a}{p+1} u_m^{p+1}(r)}. \tag{2.24}$$

So, in order for $u_m(L)$ to solve

$$u_m'(L) = u_m^q(L)$$

it needs to be a root of the equation

$$F(u) = u^{2q} - \frac{2a}{p+1} u^{p+1} - m^2 = 0. \tag{2.25}$$

We have

$$F'(u) = 2qu^{2q-1} - 2au^p \tag{2.26}$$

hence $F'(u) = 0$ if and only if u equal

$$\tau = (\frac{q}{a})^{\frac{1}{p+1-2q}}. \tag{2.27}$$

Thus, F is increasing between 0 and τ starting from the value $-m^2$ and decreasing after τ going to $-\infty$ when $u \to +\infty$. So, in order for the equation (2.25) to have a root we need to have

$$F(\tau) \geq 0 \tag{2.28}$$

which reads after an easy computation

$$(\frac{q}{a})^{\frac{2q}{p+1-2q}} \{1 - \frac{2q}{p+1}\} \geq m^2. \tag{2.29}$$

So, in order for u_m to be a solution to (2.1) we have to restrict m to satisfy

$$0 < m \leq M = (\frac{q}{a})^{\frac{q}{p+1-2q}} \{1 - \frac{2q}{p+1}\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.30}$$

In this case (2.25) has two roots

$$R_1(m) < \tau < R_2(m) \tag{2.31}$$

which coincide with τ in the case where $m = M$. Going back to (2.24) we have

$$\frac{u_m'(r)}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}u_m^{p+1}(r) + m^2}} = 1 \tag{2.32}$$

hence integrating (recall that $u_m' > 0$)

$$\int_0^{u_m(r)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}} = r. \tag{2.33}$$

Then it is clear that u_m is a solution to (2.1) for $L = L_1(m),\ L_2(m)$ where

$$L_i(m) = \int_0^{R_i(m)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}}, \quad i = 1, 2. \tag{2.34}$$

Since every solution to (2.1) is a solution to (2.2) for some m, when m varies the numbers $L_i(m)$ are going to run over all the possible values for L. So we need to study the functions $L_1(m),\ L_2(m)$. Let us start with $L_2(m)$.

Lemma 2.2 : The function L_2 is a decreasing function of m on $(0, M]$. Moreover,

$$\lim_{m\to 0} L_2(m) = +\infty \quad , \quad L_2(M) = \int_0^{\tau} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}}. \tag{2.35}$$

Proof of Lemma 2.2 : First, since when m increases the graph of F goes down one has

$$R_1(m) \quad \text{is increasing with} \quad m \quad , \quad R_2(m) \quad \text{is decreasing with} \quad m. \tag{2.36}$$

So, if $m > m'$ one has

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m'^2}}$$

and integrating

$$L_2(m) = \int_0^{R_2(m)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}} < \int_0^{R_2(m)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m'^2}}$$

$$< \int_0^{R_2(m')} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m'^2}} = L_2(m'). \tag{2.37}$$

Thus, L_2 is decreasing. On the other hand

$$R_2(m) \geq \tau \tag{2.38}$$

so that

$$L_2(m) \geq \int_0^\tau \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}}. \tag{2.39}$$

Letting $m \to 0$ one obtains

$$\lim_{m\to 0} L_2(m) = +\infty \tag{2.40}$$

since

$$\int_0 \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1}}}$$

diverges ($\frac{p+1}{2} > 1$). This concludes the proof of the lemma 2.2.

Next we turn to the study of L_1. We have

Lemma 2.3 : When $m \to 0$

$$R_1(m) \sim m^{\frac{1}{q}} \quad , \quad L_1(m) \sim m^{1-\frac{1}{q}}. \tag{2.41}$$

In particular

$$\lim_{m\to 0} L_1(m) = +\infty \tag{2.42}$$

Proof of Lemma 2.3 : First, note that when $m \to 0$ any limit value of $R_1(m)$ must satisfy

$$u^{2q} - \frac{2a}{p+1}u^{p+1} = 0 \tag{2.43}$$

so that

$$u = 0 \qquad \text{or} \qquad u = (\frac{p+1}{2a})^{p+1-2q}. \tag{2.44}$$

Since $\frac{p+1}{2a} > \frac{q}{a}$

$$(\frac{p+1}{2a})^{p+1-2q} > (\frac{q}{a})^{p+1-2q} = \tau > R_1(m)$$

and the only possible limit value for $R_1(m)$ is 0 so that

$$\lim_{m\to 0} R_1(m) = 0. \tag{2.45}$$

Going back to (2.25) we have

$$R_1(m)^{2q} - \frac{2a}{p+1}R_1(m)^{p+1} - m^2 = 0$$

or

$$R_1(m)^{2q}\{1-\frac{2a}{p+1}R_1(m)^{p+1-2q}\}=m^2. \tag{2.46}$$

Since, $\lim_{m\to 0}R_1(m)=0$ we deduce that when $m\to 0$

$$R_1(m)^{2q}\sim m^2 \tag{2.47}$$

and thus

$$R_1(m)\sim m^{\frac{1}{q}}. \tag{2.48}$$

Going back to the definition (2.34) we have

$$L_1(m)=\int_0^{R_1(m)}\frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1}+m^2}}. \tag{2.49}$$

Changing of variable -i.e. setting

$$u=(\frac{2a}{p+1})^{\frac{1}{p+1}}m^{-\frac{2}{p+1}}s=Cm^{\frac{-2}{p+1}}s \tag{2.50}$$

we obtain

$$L_1(m)=\frac{1}{Cm^{1-\frac{2}{p+1}}}\int_0^{Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_1(m)}\frac{du}{\sqrt{u^{p+1}+1}}$$

$$=\frac{R_1(m)}{m}\frac{1}{Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_1(m)}\int_0^{Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_1(m)}\frac{du}{\sqrt{u^{p+1}+1}}. \tag{2.51}$$

Since when $m\to 0$

$$Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_1(m)\sim Cm^{\frac{1}{q}-\frac{2}{p+1}}\to 0 \tag{2.52}$$

we obtain

$$L_1(m)\sim\frac{R_1(m)}{m}\sim m^{\frac{1}{q}-1} \tag{2.53}$$

which concludes the proof of the lemma 2.3.

Let us show

Lemma 2.4 : Let us denote by $L_i'(m)$ the derivative of L_i with respect to m. Then one has

$$(1-\frac{2}{p+1})L_i(m)+mL_i'(m)=(1-\frac{2q}{p+1})\{\frac{1}{qR_i^{q-1}-aR_i^{p-q}}\},\quad i=1,2. \tag{2.54}$$

Moreover,

$$\lim_{m\to M}L_1'(m)=+\infty\quad,\quad\lim_{m\to M}L_2'(m)=-\infty \tag{2.55}$$

Proof of Lemma 2.4 : Going back to (2.51) one has

$$Cm^{1-\frac{2}{p+1}}L_i(m) = \int_0^{Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_i(m)} \frac{du}{\sqrt{u^{p+1}+1}}. \tag{2.56}$$

Hence differentiating with respect to m

$$C(1-\frac{2}{p+1})m^{-\frac{2}{p+1}}L_i(m) + Cm^{1-\frac{2}{p+1}}L_i'(m)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_i(m))^{p+1}+1}}(Cm^{-\frac{2}{p+1}}R_i(m))'$$

$$= \frac{m}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}R_i(m)^{p+1}+m^2}}C(-\frac{2}{p+1}m^{-1-\frac{2}{p+1}}R_i(m) + m^{-\frac{2}{p+1}}R_i'(m)). \tag{2.57}$$

Since

$$R_i(m)^{2q} = \frac{2a}{p+1}R_i(m)^{p+1} + m^2 \tag{2.58}$$

(2.57) reads after pulling out $Cm^{-\frac{2}{p+1}}$

$$(1-\frac{2}{p+1})L_i(m) + mL_i'(m) = \frac{m}{R_i(m)^q}\{R_i'(m) - \frac{2}{p+1}\frac{R_i(m)}{m}\}$$
$$= \{mR_i'(m)R_i(m)^{-q} - \frac{2}{p+1}R_i(m)^{1-q}\} \tag{2.59}$$

Derivating (2.58) we obtain

$$R_i'(m) = \frac{m}{qR_i(m)^{2q-1} - aR_i(m)^p} \tag{2.60}$$

so that

$$mR_i'(m) = \frac{m^2}{qR_i(m)^{2q-1} - aR_i(m)^p} = \frac{R_i(m)^{2q} - \frac{2a}{p+1}R_i(m)^{p+1}}{qR_i(m)^{2q-1} - aR_i(m)^p}. \tag{2.61}$$

Replacing into (2.59) we obtain (2.54). Now when $m \to \tau$ then $R_i(m) \to \tau$ where $qu^{q-1} - au^{p-1}$ vanishes. Since

$$R_1(m) < \tau < R_2(m)$$

we see passing to the limit in (2.54) that (2.55) holds.

Next we have :

Lemma 2.5 : On $(0, M)$ the function L_1 is decreasing until a value $0 < m_0 < M$ and then increasing until M.

Proof of Lemma 2.5 : Due to the lemmas 2.3, 2.4 it is enough to show that at a point where $L_1'(m) = 0$ then $L_1''(m) > 0$ so that m could only be a minimum. For that, differentiating (2.54) we obtain

$$(1 - \frac{2}{p+1})L_1'(m) + L_1'(m) + mL_1''(m) = (1 - \frac{2q}{p+1})\{\frac{1}{qR_1^{q-1} - aR_1^{p-q}}\}'.$$

$$= -(1 - \frac{2q}{p+1})\frac{1}{(qR_1^{q-1} - aR_1^{p-q})^2}\{q(q-1)R_1^{q-2} - a(p-q)R_1^{p-q-1}\}R_1' \tag{2.61}$$

It is clear from (2.57) that at a point where $L_1'(m) = 0$ one must have

$$R_1'(m) > 0$$

then (see (2.61)) at a point where $L_1'(m) = 0$ the sign of $L_1''(m)$ is given by the oposite sign of $\{q(q-1)R_1^{q-2} - a(p-q)R_1^{p-q-1}\}$ so that $L_1''(m) > 0$ if and only if

$$q(q-1)R_1^{q-2} - a(p-q)R_1^{p-q-1} < 0 \tag{2.62}$$

or

$$\frac{q(q-1)}{a(p-q)} < R_1^{p+1-2q}. \tag{2.63}$$

(Note that $q < p$ since $2q < p+1 < 2p$). Next, going back to (2.54), at a point where $L_1'(m) = 0$

$$(1 - \frac{2}{p+1})L_1(m) = (1 - \frac{2q}{p+1})\{\frac{1}{qR_1^{q-1} - aR_1^{p-q}}\}. \tag{2.64}$$

Clearly

$$L_1(m) = \int_0^{R_1(m)} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}s^{p+1} + m^2}} > R_1(m)\frac{ds}{\sqrt{\frac{2a}{p+1}R_1(m)^{p+1} + m^2}} = R_1(m)^{1-q}. \tag{2.65}$$

So at a point where $L_1'(m) = 0$

$$(1 - \frac{2}{p+1})R_1(m)^{1-q} < (1 - \frac{2q}{p+1})\{\frac{1}{qR_1^{q-1} - aR_1^{p-q}}\}$$

which reads also

$$(1 - \frac{2}{p+1})\{q - aR_1^{p+1-2q}\} < (1 - \frac{2q}{p+1})$$

or

$$\frac{p-1}{p+1}\{q - aR_1^{p+1-2q}\} < \frac{p+1-2q}{p+1}$$

$$\iff \quad \{q - aR_1^{p+1-2q}\} < \frac{p+1-2q}{p-1}$$

$$\iff \qquad q - \frac{p+1-2q}{p-1} < aR_1^{p+1-2q}. \tag{2.66}$$

So we will be done thanks to (2.63) if

$$\frac{q(q-1)}{(p-q)} < q - \frac{p+1-2q}{p-1}$$

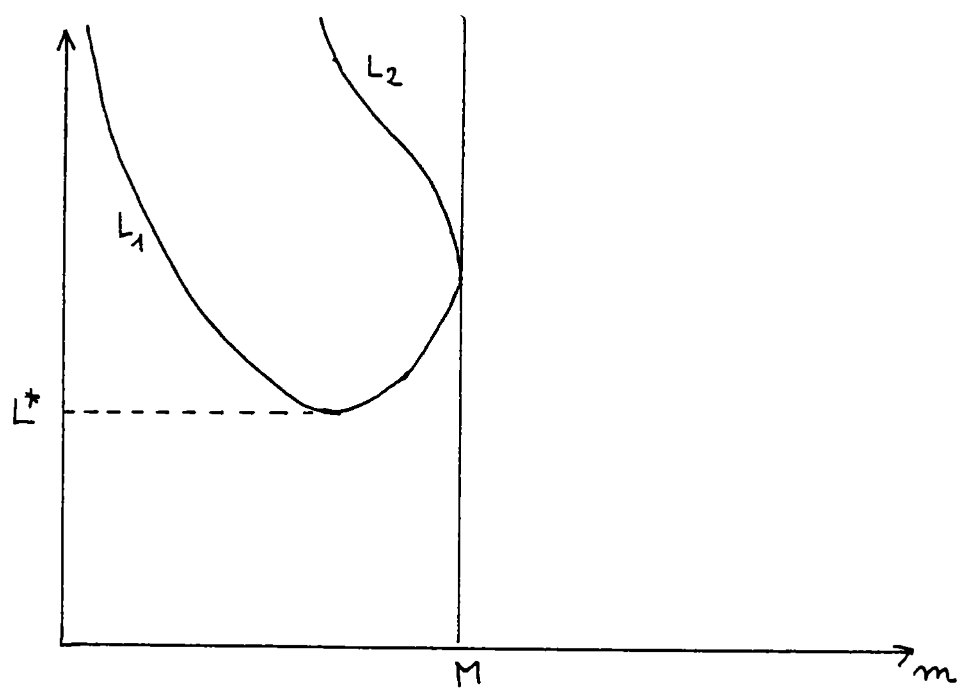
or equivalently

$$\frac{p+1-2q}{p-1} < q - \frac{q(q-1)}{(p-q)} = q\{1 - \frac{(q-1)}{(p-q)}\} = q\{\frac{(p+1-2q)}{(p-q)}\}.$$

This will be true if

$$\frac{1}{p-1} < \frac{q}{(p-q)}$$

which is true since $q > 1$. Combining the information of the different Lemmas we see that the curves L_1 and L_2 look as below



Then, clearly for

$$L < L^* = \inf_{(0,M)} L_1$$

the problem (2.1) has no solution. For

$$L = L^* = \inf_{(0,M)} L_1$$

it has a unique solution and for

$$L > L^* = \inf_{(0,M)} L_1$$

it has exactly two solutions.

3. The higher dimensional case

In the case where $2q = p+1$, we have a similar result to the one dimensional case :

Theorem 3.1 : Assume that $2q = p+1$. Then, if a is large enough, the problem (1.1) cannot have a nontrivial solution.

Proof : Let us denote by ν a smooth vector field such that

$$\nu = n \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \quad , \quad |\nu| \leq 1. \tag{3.1}$$

Multiplying the first equation of (1.1) by u and integrating over Ω we get

$$\begin{aligned} a\int_\Omega u^{p+1}\, dx &= \int_\Omega \Delta u u\, dx = \int_\Omega \nabla\cdot(\nabla u u)\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} u\, d\sigma(x) - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &= \int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x) - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$d\sigma(x)$ denotes the superficial measure on Γ.

Hence

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + a\int_\Omega u^{p+1}\, dx = \int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x). \tag{3.3}$$

Next, remark that

$$\int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x) = \int_\Omega \nabla\cdot(u^{q+1}\nu)\, dx = (q+1)\int_\Omega u^q \nabla u.\nu\, dx + \int_\Omega u^{q+1}\nabla\cdot\nu\, dx. \tag{3.4}$$

Hence,

$$\int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x) \leq (q+1)\int_\Omega u^q|\nabla u|\, dx + C\int_\Omega u^{q+1}\, dx \tag{3.5}$$

where C denotes the norm $L^\infty(\Omega)$-norm of $\nabla\cdot\nu$, i.e $C = |\nabla\cdot\nu|_\infty$.

Using the Young Inequality

$$ab \leq \frac{\epsilon^2}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}b^2 \tag{3.6}$$

we obtain

$$\int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x) \leq \frac{(q+1)\epsilon^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \frac{q+1}{2\epsilon^2}\int_\Omega u^{2q}\, dx$$

$$+\frac{C\epsilon^2}{2}\int_\Omega u^2\, dx + \frac{C}{2\epsilon^2}\int_\Omega u^{2q}\, dx. \tag{3.7}$$

Due to the Poincaré Inequality one has for some constant K

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq K\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$$

so that we derive

$$\int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x) \leq \frac{\epsilon^2}{2}\{\frac{(q+1)}{2} + CK\}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \{\frac{q+1}{2\epsilon^2} + \frac{C}{2\epsilon^2}\}\int_\Omega u^{p+1}\, dx \tag{3.8}$$

since $2q = p+1$. Combining this with (3.3) and selecting ϵ such that

$$\frac{\epsilon^2}{2}\{\frac{(q+1)}{2} + CK\} = 1$$

we obtain for some constant C

$$a\int_\Omega u^{p+1}\, dx \leq C\int_\Omega u^{p+1}\, dx$$

hence a contradiction when a is large enough, $u \not\equiv 0$.

In the case where $2q < p+1$, then, as in the one dimensional case we can show that the problem (1.1) can fail to have a solution when the size of Ω is too small.

More precisely let us show :

Theorem 3.2 : Assume that $2q < p+1$ and $p \leq \frac{n+2}{n-2}$ when $n > 3$. Then, if the size of Ω is small enough the problem (1.1) cannot have a nontrivial solution.

Proof : Consider for instance for $\epsilon \in (0,1]$

$$\Omega_\epsilon = (-1,1)^{n-1} \times (0,\epsilon) \quad , \quad \Gamma_1 = (-1,1)^{n-1} \times \{0\} \tag{3.9}$$

and denote by $u = u_\epsilon$ the solution to (1.1) corresponding to $\Omega = \Omega_\epsilon$. Recall that by (3.2) one has

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + a\int_\Omega u^{p+1}\, dx = \int_{\Gamma_1} u^{q+1}\, d\sigma(x). \tag{3.10}$$

Next, remark that due to the Young Inequality

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} u^{q+1}\ d\sigma(x) &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_n} u^{q+1}\ dx \\
&= (q+1)\int_\Omega u^q \frac{\partial u}{\partial x_n}\ dx \\
&\le (q+1)\{\frac{\delta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + \frac{1}{2\delta^2}\int_\Omega u^{2q}\ dx\} \\
&\le (q+1)\{\frac{\delta^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + \frac{1}{2\delta^2}(\int_\Omega u^{p+1}\ dx)^{\frac{2q}{p+1}}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}}\}. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Combining with (3.10) and selecting

$$(q+1)\frac{\delta^2}{2} = \frac{1}{2}$$

we obtain for some constant C

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx + a\int_\Omega u^{p+1}\ dx \le C(\int_\Omega u^{p+1}\ dx)^{\frac{2q}{p+1}}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}}. \quad (3.12)$$

Thus, if we denote by $|u|_{p+1}$ the usual $L^{p+1}(\Omega)$-norm we get for some constants

$$|u|_{p+1}^{p+1} \le C|\Omega|, \quad (3.13)$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \le C|u|_{p+1}^{2q}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}}. \quad (3.14)$$

Next, from the Sobolev embedding Theorem we know that there exists a constant C such that

$$|v|_{p+1}^2 \le C\int_{\Omega_1} |\nabla v|^2\ dx \quad (3.15)$$

for any $v \in H^1(\Omega_1)$ vanishing on $\partial\Omega_1\backslash\Gamma_1$. So, extending $u = u_\epsilon$ by 0 outside of $\Omega = \Omega_\epsilon$ we derive

$$|u|_{p+1}^2 \le C\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx \quad (3.16)$$

Combining (3.14) and (3.16) we obtain

$$|u|_{p+1}^2 \le C|u|_{p+1}^{2q}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}} \quad (3.17)$$

and if $u \neq 0$

$$1 \le C|u|_{p+1}^{2q-2}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}}.$$

Hence by (3.13)

$$1 \le C|\Omega|^{\frac{2(q-1)}{p+1}}|\Omega|^{1-\frac{2q}{p+1}} = C|\Omega|^{1-\frac{2}{p+1}} \quad (3.18)$$

and a contradiction when $|\Omega| = |\Omega_\epsilon|$ is small enough.

REFERENCES

[C.F.Q.] M. Chipot, M. Fila and P. Quittner : Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions.

Acta Math. Univ. Comenianae, Vol LX, 1, (1991), p. 35-103.

[G.T.] D. Gilbarg, N. S. Trudinger : **Elliptic partial differential equations of second order.** Springer Verlag, (1985).