



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

DB 79377

# THÈSE

préparée au

LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX

ENIM - UNIVERSITÉ DE METZ

par

Eric SCACCIATELLA

en vue de l'obtention du grade de Docteur ès Sciences spécialisé en

GÉNIE PHYSIQUE ET MÉCANIQUE

---

INTÉGRATION D'UN MODÈLE DE COMPORTEMENT  
ELASTOPLASTIQUE À TRANSITION D'ÉCHELLE  
DANS UN CODE DE CALCUL DE STRUCTURES  
PAR ÉLÉMENTS FINIS

---

commission d'examen :

M. POTIER-FERRY  
C. TEODOSIU  
S. HEURTAULT  
F. MOUSSY  
J.M. DETRAUX  
P. LIPINSKI  
M. BERVEILLER

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Directeur de thèse

| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>- METZ |            |
|--------------------------------------|------------|
| N° inv.                              | 19940305   |
| Cote                                 | S/M3 94/10 |
| Loc                                  | Magasin    |

## TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| INTRODUCTION.....  | 4  |
| I - MODÉLISATION DU COMPORTEMENT<br>ÉLASTOPLASTIQUE DES MÉTAUX PAR LA MÉTHODE<br>AUTO-COHÉRENTE..... | 7  |
| I.1- Modélisation du comportement mécanique du monocristal.....                                      | 8  |
| I.1.1 - Formalisme.....  | 9  |
| I.1.2 - Mécanisme du glissement cristallographique.....  | 10 |
| I.1.3 - Critère de glissement.....   | 10 |
| I.1.4 - Évolution de la cission critique : loi d'écrouissage.....                                    | 11 |
| I.1.5 - Évolution de la cission réduite.....   | 12 |
| I.1.6 - Détermination des vitesses de glissement<br>sur les systèmes actifs.....                     | 14 |
| I.1.7 - Expression du module local instantané.....   | 15 |
| I.1.8 - Recherche de la combinaison de systèmes actifs.....  | 16 |
| I.1.9 - Procédure incrémentale.....  | 18 |
| I.1.10 - Actualisation de l'état de contrainte.....  | 21 |
| I.1.11 - Actualisation de l'orientation du réseau cristallin.....                                    | 23 |
| I.2 - Relations de transition d'échelle.....   | 25 |
| I.2.1 - Localisation.....  | 25 |
| I.2.2 - Approximation auto-cohérente de l'équation intégrale.....                                    | 27 |
| I.2.3 - Tenseur de localisation.....   | 29 |
| I.2.4 - Homogénéisation.....   | 30 |
| I.3. - Conclusions.....  | 32 |

|  |    |
|--|----|
| II - MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUE<br>DANS UN CODE DE SIMULATION DE L'EMBOUTISSAGE..... | 34 |
| II.1 - Formulation de base.....  | 36 |
| II.1.1 - Généralités et rappels.....   | 36 |
| II.1.2 - Équation d'équilibre.....   | 37 |
| II.1.3 - Principe des puissances virtuelles.....   | 38 |
| II.1.3.1 - <i>Forme incrémentale</i> .....   | 38 |
| II.1.3.2 - <i>Relation constitutive incrémentale</i> .....   | 39 |
| II.1.4 - Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis.....                                | 41 |
| II.1.5 - Algorithme de résolution de Newton-Raphson .....  | 42 |
| II.1.6 - Calcul des composantes de la matrice<br>de rigidité tangente $[K^T]$ .....                    | 43 |
| II.2 - Couplage avec la méthode Auto-cohérente.....  | 44 |
| II.2.1 - Matérialisation du point de Gauss.....  | 44 |
| II.2.2 - Relation entre les modules élastoplastique M et $L^{sc}$ .....                                | 46 |
| II.2.3 - Choix du module de comportement homogène<br>de référence $L^o$ .....                          | 47 |
| II.2.4 - Approche numérique du tenseur de localisation $A^I$ .....                                     | 49 |
| III - APPLICATIONS.....  | 52 |
| III.1 - Données communes aux essais.....   | 53 |
| III.2 - Poutre encastree en flexion.....   | 55 |
| III.2.1 - Données spécifiques au calcul avec le modèle<br>auto-cohérent.....                           | 55 |
| III.2.2 - Données spécifiques au calcul avec un modèle<br>phénoménologique.....                        | 56 |
| III.2.3 - Analyse des résultats.....   | 57 |
| III.3 - Éprouvettes entaillées soumises à un essai de flexion 3 points.....                            | 65 |
| III.3.1 - Caractérisation de la microstructure des éprouvettes<br>entaillées.....                      | 66 |
| III.3.2 - Protocole d'essai.....   | 74 |
| III.3.3 - Résultats.....   | 75 |

|  |                |
|--|----------------|
| <b>IV - CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>  | <b>81</b>      |
| IV.1 - Remarques sur le choix des hypothèses de la formulation<br>mécanique.....                                 | 83             |
| IV.2 - Discussion sur l'optimisation du temps de calcul.....   | 86             |
| V.2.1 - Choix du module de comportement du milieu homogène de<br>référence ( $L^0$ ) .....                       | 86             |
| IV.2.2- Optimisation du nombre de grains.....  | 87             |
| IV.2.3 - Optimisation de la recherche des systèmes<br>de glissement actifs.....                                  | 91             |
| IV.3 - Conclusions.....  | 95             |
| <br><b>Annexe 1 : RAPPELS CONCERNANT LES DERIVEES<br/>CONVECTIVES.....</b>                                       | <br><b>97</b>  |
| Dérivée convective d'un vecteur.....   | 97             |
| Dérivée convective d'un tenseur d'ordre 2.....   | 98             |
| <br><b>Annexe 2 : ORGANISATION GÉNÉRALE DU CODE SIMEM3 ET<br/>IMPLANTATION DE LA METHODE AUTO-COHERENTE.....</b> | <br><b>99</b>  |
| <br><b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>  | <br><b>107</b> |

## INTRODUCTION

L'emboutissage compte parmi les plus anciens procédés de mise en forme par déformation plastique, pourtant sa maîtrise reste difficile et constamment remise en question par l'utilisation de matériaux "nouveaux". Citons pour exemple, l'emploi de tôles à faible épaisseur (inférieure à 1 mm) et à haute limite d'élasticité (HLE) pour la fabrication des éléments de carrosserie automobile. Ce choix qui trouve un compromis entre la légèreté et la résistance mécanique, complique la conception de l'outillage. En effet, celui-ci doit garantir la qualité géométrique de l'embouti afin de répondre aux exigences des lignes d'assemblage automatisées. Pour le concepteur cela signifie de prévoir le phénomène de retour élastique survenant après extraction du poinçon. Or ce phénomène se révèle très différent de celui observé jusqu'à présent avec les tôles usuelles en acier doux.

Pour faire face à ces problèmes d'adaptation et pour répondre aux exigences de la compétitivité (délais, qualité, ...) des systèmes d'aide à la conception se sont rapidement développés. L'idée générale est d'intégrer les codes de simulation des procédés de fabrication dans un environnement C.A.O pour permettre au concepteur de contrôler la faisabilité de la pièce dessinée et les caractéristiques mécaniques qu'elle a acquises au cours de sa transformation.

Pour être efficaces, les codes de calculs doivent prendre en compte de nombreux paramètres et surtout modéliser correctement leurs interactions. Dans le cas de l'emboutissage ce sont les frottements, la lubrification, la forme des outils, la pression de serre-flan, les caractéristiques des matériaux, etc..... La complexité du problème explique que de tels outils de simulation soient encore au stade de développement et pour le moment seuls des outils simplifiés sont utilisables par les bureaux d'études.

D'un point de vue numérique, la modélisation de l'emboutissage des tôles minces est rendu particulièrement difficile par le caractère non linéaire des grandes transformations et par les trajets complexes imposés à la matière. Dans ce contexte le problème global est généralement résolu par la Méthode des Éléments Finis (M.E.F.) à laquelle s'ajoutent les différent modèles de contact,

de frottement et de comportement des matériaux. C'est essentiellement ce dernier aspect concernant les matériaux qui sera traité dans la présente étude.

En ce qui concerne la mise en forme des métaux, il existe principalement deux grandes classes de modèles de comportement :

- les modèles rigide(visco)plastiques
- les modèles élasto(visco)plastiques

Les premiers permettent de simplifier considérablement le problème. Ils s'appliquent en particulier au cas de la mise en forme à chaud, pour laquelle le comportement élastique peut être négligé. Par contre des modèles élastoplastiques trouvent leur intérêt dans le cas de la mise en forme à froid. Ils permettent alors de quantifier le retour élastique et d'évaluer les contraintes résiduelles qui en découlent. La connaissance de celles-ci est indispensable, par exemple, pour analyser la tenue en service du produit.

Ces dernières années, des progrès notables ont été réalisés dans le domaine de la plasticité, grâce au développement de méthodes prenant en considération les phénomènes microstructuraux responsables de la déformation et du développement de l'anisotropie. L'observation des mécanismes physiques de la déformation a conduit à l'élaboration de modèles visant à déduire le comportement macroscopique à partir d'une description de la microstructure. C'est le cas des modèles polycristallins qui réalisent un lien entre le comportement du polycristal et celui des monocristaux qui le composent. Ces modèles ont incontestablement, de part leur origine, une capacité d'approche des phénomènes réels plus grande que les modèles de nature phénoménologique qui procèdent de l'expérimentation macroscopique. Ces derniers nécessitent dans le cas de la simulation d'une opération complexe d'emboutissage, d'effectuer un nombre important d'essais d'identification de paramètres, sans pour autant être capable de prévoir l'évolution de l'anisotropie au cours de la déformation du matériau.

Suite à ce constat nous proposons, pour simuler l'emboutissage, d'associer à un code de simulation par éléments finis une approche polycristalline du comportement élastoplastique des métaux. Dans un même ordre d'idées, Mathur & Dawson [39] [40] ont utilisé une extension du modèle de Taylor (Honneff & Mecking [18], Kocks *et al.* [20] [21]) dans un code de calcul par Éléments Finis pour simuler le laminage à chaud. Dans notre cas nous optons plutôt pour le modèle que Berveiller *et al.* [27][30] ont développé dernièrement sur la base du

schéma auto-cohérent proposé par Kröner [6] (Self-consistent method) et modifié par Berveiller & Zaoui [28]. Ce choix est justifié par les remarques suivantes : tout d'abord, par comparaison aux modèles de Taylor ou Lin qui surestiment les contraintes internes dans le matériau par des hypothèses de déformations locales uniformes — c.à.d. égales, dans tous les grains, à la déformation macroscopique — le modèle autocohérent apporte une solution bien meilleure en permettant une accommodation élastoplastique des déformations entre le grain et son milieu environnant. D'autre part des améliorations du modèle peuvent encore être apportées à mesure que notre compréhension des phénomènes physiques progresse. Dans ce sens Muller *et al* [34] s'attachent à représenter les hétérogénéités intragranulaires (mise en évidence de l'existence des contraintes d'ordre III) par l'intermédiaire d'un formalisme d'érouissage non local, ceci en vue d'introduire, dans le modèle auto-cohérent actuel, des effets microstructuraux supplémentaires comme par exemple la taille du grain et la formation de cellules de dislocations.

Notre travail est présenté en trois parties. Dans un premier temps, la démarche conduisant à l'approche autocohérente est rappelée. Cette partie reprend pour l'essentiel les travaux engagés par Berveiller et Lipinski [30][33] en mettant l'accent sur l'aspect numérique des grandes déformations. La deuxième partie présente la formulation mécanique Eléments Finis qui a été retenue pour effectuer notre étude. Celle-ci a été établie par Massoni *et al* [40]. Elle constitue en quelque sorte la trame du logiciel SIMEM3 développé par RENAULT pour simuler la mise en forme des éléments de carrosserie. Par suite, une méthodologie est proposée pour implanter le modèle de comportement auto-cohérent dans cette formulation E.F.. La méthode présentée reste néanmoins générale et peut être extrapolée à tout autre code de calcul de structures élastoplastiques par la M.E.F. dans la mesure où celui-ci utilise une méthode de type prédiction-correction pour résoudre le système d'équations non linéaires. D'ailleurs, pour illustrer nos propos, nous utiliserons un code de calcul traitant uniquement les problèmes bidimensionnels dans le cadre des hypothèses de petites déformations et des contraintes planes. Celui-ci a l'avantage sur le logiciel SIMEM3 d'être plus facile à mettre en oeuvre. Il permet néanmoins de montrer les avantages ainsi que les possibilités d'une telle approche. Dans le dernier chapitre des exemples tests effectués avec ce code E.F. 2D sont présentés pour démontrer principalement la faisabilité du couplage et pour donner un aperçu des informations inédites qu'il est possible d'obtenir — dans le cadre d'un calcul de structures — sur l'état de la microstructure du matériau (textures cristallographiques, énergie bloquée).



## Chapitre I:

# MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUE DES MÉTAUX PAR LA MÉTHODE AUTO-COHÉRENTE

Le comportement mécanique d'un matériau polycristallin est lié à l'état de sa microstructure. Cet état dépend initialement du procédé d'élaboration (moulage, forgeage, ...), puis il évolue au cours de la transformation du produit. Par exemple lors d'une opération de laminage, les monocristaux (ou grains) s'orientent de manière à s'accommoder à la déformation imposée et forment ce qui est appelé une texture cristallographique. Cette organisation des grains est pour une grande part responsable du comportement anisotrope de la tôle laminée. D'autre part l'incompatibilité des déformations entre les grains est source de contraintes internes. Celles-ci ont pour effet, suivant l'orientation cristallographique du grain, d'être plus ou moins favorables à la déformation plastique.

Sachs [1] puis Taylor [2] sont les premiers à avoir tenté de déduire le comportement des polycristaux métalliques à partir du comportement des monocristaux constitutifs, mais les hypothèses faites pour simplifier les problèmes relatifs au changement d'échelles et aux interactions entre grains ont conduit respectivement à sous-estimer et surestimer les contraintes internes . Pour tenter d'éliminer ces imprécisions, Kröner [6] s'est inspiré des travaux d'Eshelby [5] concernant la résolution du problème de l'inclusion ellipsoïdale déformée plastiquement dans une matrice homogène et infinie. Il marque ainsi le début de la modélisation dite "auto-cohérente". Mais là encore, même si le modèle de Kröner apporte un début de réponse au problème des interactions, le problème des contraintes internes n'est que partiellement résolu puisque l'accommodation des déformations entre la matrice et l'inclusion est essentiellement élastique. Plusieurs auteurs comme Hill [7], Hutchinson [11], ou Zaoui [8] ont donc repris le modèle en considérant pour la matrice un comportement élastoplastique. Depuis Iwakuma & Nemat-Nasser [26] puis, plus

récemment, Berveiller & Lipinski [30] ont développé de façon plus générale l'approche auto-cohérente pour déterminer les propriétés élastoplastiques des polycristaux métalliques dans le cadre des grandes transformations. Nous allons rappeler les grandes lignes de leurs travaux en procédant en trois étapes. Nous posons tout d'abord les relations constitutives du monocristal dans le cas des grandes transformations élastoplastiques. Dans ce domaine les développements ont été notamment effectués par Mandel [12], Hill [8], Hill & Rice [16], Zarka [17], etc.... La modélisation se base sur une description phénoménologique du mouvement des dislocations qui est le mécanisme de déformation prédominant dans le cas qui nous intéresse ici, c.à.d. la déformation à froid. Nous posons ensuite les relations de passage entre l'échelle du polycristal (macro) et l'échelle du grain (micro). C'est l'étape de localisation. Elle constitue la base du modèle en proposant une solution appropriée de l'équation cinématique intégrale qui relie le gradient des vitesses locales aux gradients de la vitesse macroscopique imposée. Du même coup il est possible de décrire l'évolution des variables relatives à la microstructure (rotation des réseaux cristallins, actualisation des contraintes, ...). Nous terminons cette description avec l'étape dite "d'homogénéisation" qui consiste à exprimer le comportement effectif global à partir d'une moyenne sur l'ensemble des variables micromécaniques. Parallèlement à ces rappels nous apportons des précisions concernant l'aspect numérique de la méthode.

## **I.1- Modélisation du comportement mécanique du monocristal**

### **I.1.1- Formalisme**

Dans les théories élastoplastiques le comportement du matériau est supposé indépendant de la vitesse de chargement. Dès lors, même si le caractère non linéaire de la plasticité impose une écriture des relations constitutives sous forme de vitesses — vitesses des contraintes en fonction des vitesses de déformation — la variable  $t$  généralement utilisée pour indiquer le temps physique sera utilisée ici pour repérer les états successifs du matériau au cours du chargement. Par conséquent, la notion de dérivée par rapport au temps d'une variable correspondra à une variation de celle-ci entre deux événements successifs infiniment rapprochés. Nous utiliserons l'opérateur différentiel noté  $\delta_t$  tel que pour une variable  $a$  quelconque nous ayons:

$$\delta_t a = a(t + \Delta t) - a(t) \quad \text{avec} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Ceci étant précisé, il convient, pour la suite, de faire un choix sur les variables à utiliser pour établir la relation constitutive du monocristal. Dans ses travaux, Hill [15] suggère de relier le tenseur taux de la contrainte de Bousinesq  $\delta_t \mathbf{n}$  (également appelée contrainte nominale) au gradient de la "vitesse"  $\mathbf{g}$ . Ce choix est justifié par le fait qu'il simplifie les opérations de transition d'échelle (passage micro  $\leftrightarrow$  macro). Par exemple, le tenseur taux de la contrainte nominale macroscopique  $\delta_t \mathbf{N}$  et le gradient de la vitesse macroscopique  $\mathbf{G}$  s'obtiennent, à partir des grandeurs microscopiques correspondantes, par les relations suivantes :

$$\delta_t \mathbf{N} = \frac{1}{V} \int_V \delta_t \mathbf{n} \, dv \quad (\text{I.1})$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{g} \, dv \quad (\text{I.2})$$

$V$  est ici le volume représentatif d'un élément de matière polycristallin. Nous profitons de ces relations pour préciser une règle de notation. Nous désignerons souvent une quantité définie à l'échelle microscopique par un caractère minuscule ( $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{v}$ , ...) et la quantité macroscopique correspondante par le caractère majuscule correspondant ( $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{V}$ , ...).

La forme qui convient donc ici pour écrire la loi de comportement du monocristal est la suivante :

$$\delta_t \mathbf{n} = \mathbf{l} : \mathbf{g} \quad (\text{I.3})$$

où  $\mathbf{l}$  est un tenseur d'ordre 4 définissant le comportement élastoplastique local. Son expression est établie d'une part à partir de la loi de comportement élastique et d'autre part à partir de la modélisation du glissement cristallographique. Ce mécanisme de plasticité qui est régi par la loi de Schmid et Boas, est prépondérant dans le cas de la déformation à basse température et donc particulièrement adapté pour simuler l'emboutissage des tôles.

### I.1.2 - Mécanisme du glissement cristallographique

D'après la loi de Schmid, le glissement sur un plan cristallin peut se produire lorsque la cission résolue  $\tau_{re}$ , sur ce plan et suivant une direction particulière, atteint une valeur critique  $\tau_{cr}$ . Autrement dit, si  $n^r$  est le vecteur normal unitaire au plan de glissement,  $m^r$  le vecteur directeur du glissement et  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy dans le monocristal, alors le critère de Schmid s'écrit :

$$m^r \cdot \sigma \cdot n^r = \tau_{cr}^r \quad (I.4)$$

Les observations qui ont été faites sur les monocristaux, ont montré que, sous l'action des sollicitations extérieures, le mouvement des dislocations du réseau cristallin entraîne le glissement relatif de la matière sur les plans et suivant les directions denses du réseau. Ainsi pour un matériau cubique à face centré (CFC), tel que le cuivre ou l'aluminium, il existe 24 systèmes de glissement constitués par l'ensemble des plans  $\{111\}$  et les directions  $\langle 110 \rangle$  (nous distinguons 2 sens de glissement par direction). En ce qui concerne les matériaux à structure cubique centrée (CC), tels que les aciers, les glissements sont identifiés suivant les directions  $\langle 111 \rangle$ , par contre les plans sont plus difficiles à recenser. Nous adoptons ici l'hypothèse de glissement mixte exprimée par Franciosi *et al* [23] qui dit que le glissement peut se produire uniquement sur les plans  $\{110\}$  et  $\{112\}$ . On compte alors 48 systèmes de glissement possibles.

### I.1.3 - Critère de glissement

Comme en plasticité phénoménologique, la vérification du critère de plasticité (ici le critère de Schmid) ne suffit pas à conclure sur l'écoulement plastique. Dans le cadre présenté ici, en occurrence du glissement multiple et homogène, tout système vérifiant la relation (I.4) est dit "potentiellement actifs". Pour qu'un tel système devienne réellement actif, l'évolution de la contrainte résolue  $\delta_t \tau_{re}$  doit être identique à l'évolution de la contrainte critique  $\delta_t \tau_{cr}$ , c'est-à-dire :

$$\delta_t \tau_{re}^r = \delta_t \tau_{cr}^r \quad (I.5)$$

Cette relation peut être assimilée, en plasticité classique, à la règle de consistance.

Parmi l'ensemble des systèmes de glissement potentiellement actifs à un instant figé c.à.d. l'ensemble des systèmes vérifiant l'équation (I.4), une seule combinaison  $C$  de systèmes, est supposée responsable de la déformation inélastique actuelle du monocristal. La recherche de cette combinaison, comme dans le cadre des modélisations de type Taylor, est particulièrement consommatrice en temps de calcul. Cependant une différence capitale existe entre les deux approches. En effet le modèle de Taylor, ou ses dérivées, exige l'activation permanente de cinq systèmes de glissement. Ceci à pour effet d'entraîner par moment l'existence de solutions multiples ("ambiguïté plastique"). Au contraire, l'approche élastoplastique cinématique autorise un nombre variable de systèmes actifs allant de 1 à la totalité des systèmes potentiellement actifs. Ce qui conduit d'après Hill [8] à une solution unique du problème (voir également à ce sujet Lipinski [33]). La méthode de recherche de la combinaison  $C$  est traitée en détail au § I.1.8.

#### I.1.4 - Évolution de la cission critique : loi d'érouissage

La vitesse de la cission critique relative à un système dépend des vitesses de glissement  $\delta_t \gamma$  de tous les systèmes actuellement actifs :

$$\delta_t \tau_{cr}^r = \sum_{s=1}^{N.S.A} H^{rs} \delta_t \gamma^s \quad (1) \quad (I.6)$$

On définit ainsi la loi d'érouissage du matériau en considérant les vitesses de glissement comme seules variables d'érouissage. La relation (I.6) est en fait une interprétation phénoménologique du mouvement des dislocations et de leurs interactions.

La forme et la variation de la matrice d'érouissage  $H^{rs}$  constituent un champ de recherche important. Elle a été étudiée notamment par Kocks [9], Jackson & Basinski [25] ou encore Franciosi *et al* [23] à partir d'essais d'érouissage latent qui consiste à activer successivement et individuellement

---

(1) N.S.A: Nombre de Systèmes Actifs

deux systèmes afin d'apprécier les effets du glissement de l'un sur l'autre. Pour ce qui concerne notre étude, nous nous limiterons, pour le moment, à l'utilisation de la matrice d'écrouissage définie par Franciosi *et al* [23] qui supposent que celle-ci reste constante au cours de la déformation et dépend uniquement de deux termes  $H_s$  et  $H_w$  décrivant respectivement les interactions fortes (*strong*) entre des systèmes de glissement non coplanaires et les interactions faibles (*weak*) entre des systèmes colinéaires et/ou coplanaires.

Remarquons que les termes diagonaux de la matrice  $H^{rs}$  traduisent le fait que le glissement sur un système écrouit ce même système ( $\tau_{cr}$  augmente). Alors que les autres termes de cette matrice décrivent le phénomène suivant : le glissement sur un système  $s$  actif peut écrouir le système  $r$  même si ce dernier est inactif. On parle alors d'écrouissage latent.

### I.1.5 - Évolution de la cission réduite

La dérivée par rapport au temps de la cission réduite (I.4) est un invariant scalaire et donc indépendante du référentiel. De plus, en remarquant dans le cas des métaux, que le taux de déformation du réseau cristallin est négligeable par rapport à son taux de rotation, on obtient :

$$\delta_t \tau_{re}^r = \mathbf{m}^r \cdot \delta \sigma_{Ja} \cdot \mathbf{n}^r \quad (I.7)$$

$\delta_{Ja} \sigma$  désigne la dérivée objective de Jauman, du tenseur des contraintes de Cauchy, corotationnel au réseau cristallin

$$\delta_{Ja} \sigma = \delta_t \sigma - \mathbf{w}^e \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{w}^e \quad (I.8)$$

$\mathbf{w}^e$  représente la vitesse de rotation du réseau cristallin que nous assimilons également à la vitesse de rotation élastique du monocristal. Nous pouvons l'exprimer grâce à la décomposition additive du gradient de la vitesse  $\mathbf{g}$  en partie symétrique et antisymétrique puis en partie élastique et plastique :

$$\mathbf{g} = \mathbf{d} + \mathbf{w} = (\mathbf{d}^e + \mathbf{w}^e) + (\mathbf{d}^p + \mathbf{w}^p) \quad (I.9)$$

$\mathbf{d}$  représente le tenseur taux de déformation qui décrit la vitesse de déformation totale dans le monocristal.

Dans le cadre défini par les hypothèses citées ci-dessus, les parties  $d^P$  et  $w^P$ , décrivant respectivement les vitesses de déformation plastique et de rotation plastique, peuvent être exprimées en fonction des vitesses de glissement  $\delta_t \gamma^r$ :

$$d^P = \sum_{r=1}^{N.S.A} \{S^r\} \delta_t \gamma^r \quad \forall r \in C \quad (I.10)$$

$$w^P = \sum_{r=1}^{N.S.A} \}S^r\{ \delta_t \gamma^r \quad \forall r \in C \quad (I.11)$$

où " $\{ \}$ " et " $\} \{$ " désignent respectivement la partie symétrique et antisymétrique de l'expression concernée,  $S^r$  représente le facteur de Schmid du système de glissement considéré. Il est défini simplement par :

$$S^r = m^r \otimes n^r$$

où le symbole  $\otimes$  désigne le produit dyadique sur les vecteurs unitaires  $m^r$  et  $n^r$  pour l'état déformé.

Pour préciser l'expression de la cission résolue (I.7), il est nécessaire de déterminer  $w^e$  en appliquant la relation suivante:

$$w^e = w - w^P = \}A:G\{ - \sum_{r=1}^{N.S.A} \}S^r\{ \delta_t \gamma^r \quad (I.12)$$

où  $A$  désigne un tenseur d'ordre 4, appelé tenseur de localisation. Son expression est explicitée plus loin. Pour le moment nous précisons seulement sa définition. Il relie le gradient de la vitesse local  $g$  au gradient macroscopique imposé  $G$  :

$$g = A:G \quad (I.13)$$

La relation (I.13), telle qu'elle est écrite ici, masque la complexité du problème de la localisation. En fait, le tenseur  $A$  se déduit de la résolution d'une équation intégrale faisant intervenir les conditions aux limites, les relations de comportement local ainsi que les équations d'équilibre du milieu microhétérogène et macrohomogène. La détermination de ce tenseur constitue le point central de l'approche auto-cohérente.

### I.1.6 - Détermination des vitesses de glissement sur les systèmes actifs

En supposant que le tenseur de localisation  $A$  est connu, le problème de la détermination du comportement du monocristal est résolu par la connaissance des vitesses de glissement  $\delta_t \gamma^r$ . Pour les déterminer il convient d'introduire la loi de comportement élastique dans la relation de consistance (I.5) que nous réécrivons sous la forme suivante :

$$S^r \delta_{Ja} \sigma = \sum_{s=1}^{N.S.A} H^{rs} \delta_t \gamma^s \quad \forall r \in C \quad (I.14)$$

Mandel [12] a montré, dans une étude concernant la définition de la vitesse élastique et sa relation avec la vitesse de la contrainte que la loi de comportement élastique — dans le cas particulier du monocristal pour lequel la vitesse élastique  $v^e$  est définie comme étant celle du réseau atomique — pouvait s'écrire sous la forme suivante :

$$\delta_{obj} \sigma = c : d^e \quad (I.15)$$

avec

$$\delta_{obj} \sigma = \delta_t \sigma - g^e \cdot \sigma - \sigma^t \cdot g^e + \sigma \operatorname{tr}(g^e) \quad (I.16)$$

$\delta_{obj} \sigma$  désigne une dérivée objective du tenseur des contraintes de Cauchy et  $c$  le tenseur des constantes élastiques.

Or en supposant, comme nous l'avons fait précédemment, que le taux de déformation du réseau est négligeable devant le taux de rotation, la relation (I.16) se réduit à :

$$\delta_{obj} \sigma = \delta_t \sigma - w^e \cdot \sigma + \sigma \cdot w^e \quad (I.17)$$

On reconnaît, alors, la dérivée objective de Jauman (I.8) utilisée dans la définition de la vitesse de la cission résolue (I.7). Ainsi, en substituant (I.17) et (I.15) dans (I.14) et en exprimant  $d^e$  de la façon suivante :

$$d^e = d - d^p = d - \sum_{r=1}^{N.S.A} \{ S^r \} \delta_t \gamma^r \quad (I.18)$$



la règle d'écoulement plastique [(I.5),(I.14)] prend la forme ci-dessous :

$$\mathbf{S}^r (\mathbf{c} : \mathbf{d} - \mathbf{c} : \sum_{s=1}^{\text{N.S.A}} \{\mathbf{S}^r\} \delta_t \gamma^r) = \sum_{s=1}^{\text{N.S.A}} \mathbf{H}^{rs} \delta_t \gamma^s \quad (\text{I.19})$$

De cette expression, il apparaît alors :

$$\delta_t \gamma^r = \sum_{s=1}^{\text{N.S.A}} \mathcal{H}^{rs} \mathbf{S}^s : (\mathbf{c} : \mathbf{d}) \quad (\text{I.20})$$

avec

$$\mathcal{H}^{rs} = (\mathbf{H}^{rs} + \mathbf{S}^r : \mathbf{c} : \mathbf{S}^s)^{-1} \quad (\text{I.21})$$

### I.1.7 - Expression du module local instantané

La connaissance des vitesses de glissement sur les systèmes actifs permet de préciser l'expression de la loi de comportement élastoplastique (I.3). Lipinski et Berveiller [30] suggèrent pour cela d'écrire, par exemple, la relation entre la vitesse de la contrainte nominale et la vitesse de la contrainte de Cauchy :

$$\delta_t \mathbf{n} = \delta_t \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{d}) \quad (\text{I.22})$$

Il convient ensuite d'exprimer  $\delta_t \boldsymbol{\sigma}$  en utilisant les relations (I.15) et (I.8) :

$$\delta_t \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \mathbf{d}^e + \mathbf{w}^e \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w}^e \quad (\text{I.23})$$

On introduit alors l'expression (I.23) dans (I.22) en faisant apparaître les termes plastiques ( $\mathbf{d}^P$  et  $\mathbf{w}^P$ ) grâce à (I.9). Ces derniers sont ensuite remplacés par leurs expressions respectives (I.10) et (I.11) pour obtenir finalement :

$$\delta_t \mathbf{n} = \mathbf{c} : \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr}(\mathbf{d}) - \sum_{r=1}^{\text{N.S.A}} \sum_{s=1}^{\text{N.S.A}} (\mathbf{c} : \{\mathbf{S}^r\} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \{\mathbf{S}^r\} + \{\mathbf{S}^r\} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathcal{H}^{rs} \mathbf{S}^s : \mathbf{c} : \mathbf{d} \quad (\text{I.24})$$

Il suffit ensuite de factoriser  $\mathbf{g}$  dans l'expression précédente pour faire apparaître la forme  $\delta_t \mathbf{n} = \mathbf{l} : \mathbf{g}$ . Le module élastoplastique instantané s'écrit alors en adoptant l'écriture indicielle :

$$l_{ijkl} = c_{ijkl} - \frac{1}{2}(\delta_{ik} \sigma_{lj} + \delta_{il} \sigma_{kj}) + \frac{1}{2}(\delta_{jl} \sigma_{ki} - \delta_{jk} \sigma_{li}) + \delta_{kl} \sigma_{ij} - \sum_{r=1}^{N.S.A} \sum_{s=1}^{N.S.A} (c_{ijmn} \{S^r\}_{nm} - \sigma_{im}) S^r \{m_j + \} S^r \{i_m \sigma_{mj}\} \mathcal{H}^{rs} S_{pq}^s c_{qpkl} \quad (I.25)$$

Dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire de l'emboutissage des tôles en acier ou en alliage d'aluminium, les termes avec les contraintes sont faibles en comparaison avec les termes dans lesquels apparaissent les modules élastiques. Il est donc raisonnable de réduire l'expression (I.25) à :

$$l_{ijkl} = c_{ijkl} - \sum_{r=1}^{N.S.A} \sum_{s=1}^{N.S.A} (c_{ijmn} \{S^r\}_{nm}) \mathcal{H}^{rs} S_{pq}^s c_{qpkl} \quad (I.26)$$

Avec cette hypothèse on montre également que :

$$\delta_t \mathbf{n} \approx \delta_{Ja} \boldsymbol{\sigma} \quad (I.27)$$

et la relation constitutive (I.3) peut alors s'écrire :

$$\delta_{Ja} \boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{l} : \mathbf{d} \quad (I.28)$$

### I.1.8 - Recherche de la combinaison de systèmes actifs

La déformation plastique actuelle du monocristal résulte, nous l'avons vu, du glissement instantané sur un ou plusieurs plans cristallographiques. Pour résumer, au moins deux conditions doivent être satisfaites pour activer le glissement. Ces conditions se traduisent par :

- l'équation (I.4) qui définit les systèmes "potentiellement actifs".

- l'équation (I.5) ou (I.14) qui définit parmi les systèmes potentiellement actifs ceux qui le sont réellement. Ces derniers forment ce que nous appelons la combinaison  $C$  de systèmes actifs.

En fait, dans la pratique, la relation (I.14) est utilisée uniquement pour déterminer les vitesses de glissement pour une combinaison de systèmes choisis arbitrairement et qui est supposée correspondre à la solution. Il existe ensuite

deux procédures pour reconnaître si cette combinaison  $C$  est effectivement responsable de la déformation plastique actuelle du monocristal :

- Dans un premier temps, il faut vérifier qu'aucune des vitesses de glissement, calculées pour les systèmes constituant la combinaison  $C$ , ne soient négative. Dans le cas contraire la combinaison est rejetée. En effet dans la mesure ou nous distinguons les deux sens d'une direction de glissement par deux systèmes différents (par exemple un matériau CFC est caractérisé par 2x12 systèmes), la solution  $\delta_t \gamma^r < 0$  n'a pas de signification physique.

- Dans un deuxième temps, il faut s'assurer que la combinaison  $C$  minimise l'énergie de déformation. A ce sujet Lipinski [33] démontre l'unicité de la solution et montre par la même occasion que le problème se résume à la minimisation de la forme quadratique suivante :

$$\sum_{r=1}^{N.S.A} \sum_{s=1}^{N.S.A} \delta_t \gamma^r \mathcal{H}^{rs-1} \delta_t \gamma^s \quad \forall r, s \in C \quad (I.29)$$

L'algorithme ci-dessous (voir également l'organigramme A2.6 de l'annexe 2) indique dans quel ordre les opérations doivent être effectuées pour trouver cette combinaison :

- 1) Rechercher les systèmes potentiellement actifs (relation (I.4))
- 2) Choisir parmi ces systèmes, une combinaison  $C$  supposée correspondre à la solution. Pour un nombre NSPA<sup>(1)</sup> de systèmes potentiellement actifs le nombre de combinaison  $N_C$  possibles est donné par :

$$N_C = C_{NSPA}^0 + C_{NSPA}^1 + C_{NSPA}^2 + \dots + C_{NSPA}^i + \dots + C_{NSPA}^{NSPA}$$

$C_{NSPA}^0$  correspond à la solution purement élastique. Pour donner un ordre d'idée, si NSPA=6 (c'est le maximum généralement constaté dans le cas d'un matériau CFC), le nombre de combinaisons possibles est de 64.

---

(1) NSPA: Nombre de Systèmes Potentiellement Actifs

- 3) Déterminer, pour la combinaison choisie, le module de comportement élastoplastique  $I$  (relation (I.26)).
- 4) Déterminer le tenseur de localisation  $A$  (§ I.2.3)
- 5) Calculer le gradient des vitesses  $g$  (relation (I.13)) et en déduire le tenseur taux de déformation  $d$
- 6) Déterminer les vitesses de glissement (relation (I.20)). La combinaison est rejetée si une de ces vitesses est négative. Dans ce cas on recommence à partir du point 2)
- 7) Calculer la forme quadratique (I.29) et stocker sa valeur.

Ces opérations sont effectuées pour toutes les combinaisons possibles. Finalement la combinaison retenue est celle qui minimise la forme (I.29). Pour cette combinaison tous les calculs effectués dans les points allant de 3) jusqu'à 7) sont validés.

### I.1.9 - Procédure incrémentale

Les méthodes numériques mises en oeuvre pour effectuer le calcul numérique des structures élastoplastiques consistent, dans la plupart des cas, à un traitement pas à pas du problème en suivant le trajet de chargement.

L'application d'un incrément de charge entraîne le passage d'une configuration  $[t]$  à une configuration  $[t+\Delta t]$ . Une procédure incrémentale de type Lagrangienne réactualisée peut être alors adoptée pour résoudre le problème : toutes les variables sont évaluées par rapport à l'état du matériau à l'étape  $(t)$  et sont ensuite actualisées par transport sur la configuration  $[t+\Delta t]$ . Cette dernière servira de référence pour l'incrément suivant et ainsi de suite jusqu'à ce que la charge soit appliquée dans sa totalité. L'intérêt d'utiliser cette procédure pour le traitement des grandes transformations réside dans le fait que les différents tenseurs des contraintes (Cauchy, Piola Kirchhoff, nominal) se confondent dans la configuration du début d'incrément. Nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard.

En appliquant l'algorithme proposé au paragraphe précédent, on détermine tout d'abord la combinaison de systèmes actifs dans la configuration du début de l'incrément de charge. Cependant si celui est suffisamment grand, cette combinaison qui est valable à  $(t)$  ne le sera plus à  $(t+\Delta t)$ . Dans ce cas il sera nécessaire, pour préciser les calculs, de définir des configurations intermédiaires marquant un changement de systèmes actifs.

Nous connaissons pour cela, les lois d'évolutions des cissions critiques et des cissions réduites (relations (I.6) et (I.7)). Ce sont toutes deux des lois d'évolution linéaire du fait que la matrice d'écrouissage  $H$  et les facteur de Schmid  $S^r$  sont supposés constants. Ainsi il est possible d'évaluer le "temps"  $\delta t$ , pendant lequel une combinaison  $C$  reste valable. Il suffit pour cela d'effectuer l'opération suivante :

$$\delta t = \min \left( \frac{\tau_{cr(t)}^r - \tau_{re(t)}^r}{\delta_t \tau_{re(t \rightarrow t+\Delta t)}^r - \delta_t \tau_{cr(t \rightarrow t+\Delta t)}^r} \right) \quad (I.30)$$

$\forall r \in$  l'ensemble des systèmes non actifs à l'instant  $(t)$  considéré

Remarques :

La notation  $\delta_t a_{(t \rightarrow t+\Delta t)}$  représente l'évolution d'une variable  $a$ , entre les deux configurations  $[t]$  et  $[t+\Delta t]$ , due à l'application d'un incrément de charge macroscopique imposé. Alors que  $\delta_t a_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  représentera l'évolution de  $a$  entre deux configurations intermédiaires  $[t]$  et  $[t+\delta t]$ .

La figure ci-dessous schématise l'évolution des cissions pour un système de glissement devenant potentiellement actif entre  $[t]$  et  $[t+\Delta t]$ . On voit d'une part que  $\delta t$  est un scalaire sans dimension compris entre 0 et 1. La valeur 1 correspond à une combinaison qui reste valable durant la totalité de l'incrément de charge. D'autre part lorsqu'il existe une ou plusieurs configurations intermédiaires, le cumul des différents  $\delta t$  est égal à 1.

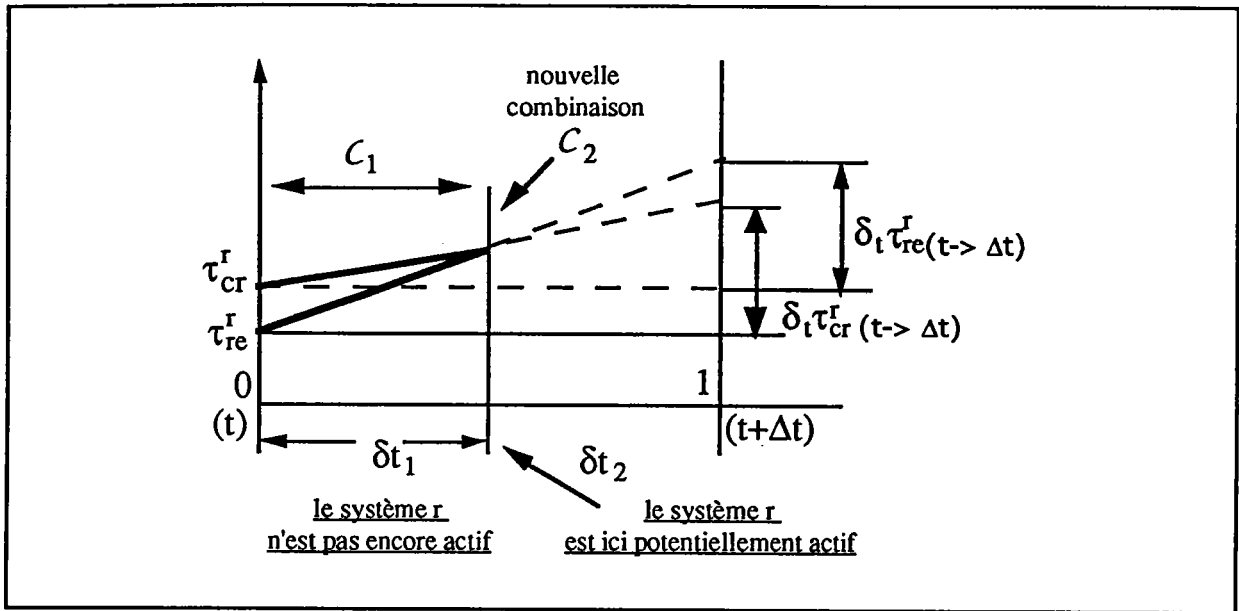


fig. I.1: "Durée" de validé d'une combinaison

L'estimation de  $\delta t$  permet de calculer le gradient de transformation entre deux configurations marquant le début et la fin de l'activation d'une combinaison. Ce gradient que nous désignerons par  $f_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  est nécessaire pour effectuer les opérations d'actualisation. Pour définir son expression, posons  $x_{(t)}$  et  $x_{(t+\delta t)}$  comme étant respectivement les vecteurs positions d'une particule dans les configurations  $[t]$  et  $[t+\delta t]$ . La définition du gradient de transformation s'écrit alors:

$$f_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \frac{\partial x_{(t+\delta t)}}{\partial x_{(t)}} \quad (I.31)$$

En introduisant dans cette définition le vecteur déplacement de la particule entre  $(t)$  et  $(t+\delta t)$  qui s'écrit:

$$u_{(t \rightarrow t+\delta t)} = x_{(t+\delta t)} - x_{(t)} \quad (I.32)$$

on obtient:

$$f_{(t \rightarrow t+\delta t)} = I + \frac{\partial u_{(t \rightarrow t+\delta t)}}{\partial x_{(t)}} \quad (I.33)$$

où  $I$  désigne ici le tenseur identité d'ordre 2.

$u_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  correspond également à l'approximation au premier ordre d'un développement en série de Taylor de la définition de la vitesse. Donc le gradient de transformation s'écrit aussi :

$$\mathbf{f}_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \mathbf{I} + \mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)} \quad (\text{I.34})$$

où  $\mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  représente la forme incrémentale du gradient des vitesses microscopiques. L'intérêt de la forme (I.34) réside dans le fait que  $\mathbf{f}_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  peut être relié à l'incrément de la charge macroscopique imposée. Il suffit d'appliquer la relation de localisation (I.13) pour obtenir :

$$\mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\Delta t)} = \mathbf{A} : \mathbf{G}_{(t \rightarrow t+\Delta t)}$$

et ensuite :

$$\mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\Delta t)} \cdot \delta t \quad (\text{I.35})$$

$\mathbf{G}_{(t \rightarrow t+\Delta t)}$  représente la forme incrémentale du gradient des vitesses macroscopiques ou, plus exactement, le champ des déplacements incrémentaux imposés à l'élément polycristallin. Sa définition s'obtient en procédant à la même démarche que celle proposée pour définir  $\mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  ((I.31) à (I.34)).

### I.1.10 - Actualisation de l'état de contrainte

Pour déterminer les systèmes qui deviennent actifs à l'instant  $(t+\delta t)$ , il est nécessaire d'actualiser les contraintes dans la nouvelle configuration de référence  $[t+\delta t]$ . Ces contraintes interviennent notamment dans la relation (I.4) qui permet de recenser les systèmes potentiellement actifs.

La relation constitutive du monocristal (I.3) reformulée sous sa forme incrémentale permet d'obtenir l'évolution de la contrainte nominale entre les configurations  $[t]$  et  $[t+\delta t]$  :

$$\delta_t \mathbf{n}_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \mathbf{l} : \mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)} \quad (\text{I.36})$$

Ce tenseur n'étant ni Lagrangien ni Eulerien (voir Sidoroff [43]), il est commode de le transporter dans la configuration de référence [t] au début de l'incrément par la relation suivante :

$$\delta_t \pi_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \delta_t \mathbf{n}_{(t \rightarrow t+\delta t)} - \sigma \cdot {}^t \mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\delta t)} \quad (\text{I.37})$$

$\delta_t \pi_{(t \rightarrow t+\delta t)}$  est le tenseur des incréments de contrainte de Piola-Kirchhoff 1. Ce tenseur étant Lagrangien, il est alors permis de le cumuler avec le tenseur des contraintes correspondantes déterminé à l'étape [t]:

$$\pi(t + \delta t) = \pi(t) + \delta_t \pi_{(t \rightarrow t+\delta t)} \quad (\text{I.38})$$

avec dans la configuration [t] de référence :

$$\pi(t) = \sigma(t).$$

Finalement on obtient le tenseur des contraintes de Cauchy en transportant l'expression (I.38) dans la nouvelle configuration [t+δt]:

$$\sigma(t + \delta t) = \frac{1}{\det(\mathbf{f}_{(t \rightarrow t+\delta t)})} \mathbf{f}_{(t \rightarrow t+\delta t)} \cdot (\sigma(t) + \delta_t \pi_{(t \rightarrow t+\delta t)}) \cdot {}^t \mathbf{f}_{(t \rightarrow t+\delta t)} \quad (\text{I.39})$$

Remarque :

La relation (I.37) est générale. Si on adopte la relation (I.28) au lieu de (I.36), il convient d'exprimer le tenseur des incréments de contrainte de piola-kirchhoff 1 en fonction de  $\delta_{Ja} \sigma$  en utilisant la relation de correspondance suivante :

$$\delta_t \pi_{(t \rightarrow t+\delta t)} = \delta_{Ja} \sigma_{(t \rightarrow t+\delta t)} - \mathbf{d} \cdot \sigma - \sigma \cdot {}^t \mathbf{d} + \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{d}) \quad (\text{I.40})$$



### I.1.11 - Actualisation de l'orientation du réseau cristallin

Les actualisations de l'état de contrainte et des cissions critiques ne sont pas suffisantes pour redéfinir l'état du monocristal à un instant donné. Celui-ci est également caractérisé par les trois angles d'Euler  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$  introduits par Bunge [13] pour repérer l'orientation des réseaux cristallins par rapport à un référentiel lié au laboratoire.

Au cours du chargement l'incompatibilité des déformations entre monocristaux entraîne la rotation des réseaux cristallins, ce qui à pour effet d'induire l'anisotropie du comportement du matériau. La prise en compte de l'évolution des orientations cristallographiques (texture cristallographique) constitue un des points remarquables des modèles polycristallins en permettant de suivre l'anisotropie du matériau lors de trajets de chargement complexe.

A partir de la décomposition du gradient des vitesses (relation (I.9)), il est possible de définir trois types de rotation : la rotation totale  $w$  qui décrit la rotation de la matière par rapport à un référentiel de laboratoire, la rotation plastique  $w^p$  qui décrit pour sa part la rotation du réseau par rapport à la matière et enfin la rotation élastique  $w^e$  que nous assimilons comme étant celle reliant un référentiel attaché au réseau cristallin à un référentiel de laboratoire. C'est cette dernière qui nous intéresse pour déterminer l'évolution de l'orientation du réseau entre deux configurations  $[t]$  et  $[t+\delta t]$ . Il suffit pour cela d'effectuer les opérations suivantes :

$$\delta_t \varphi_{1(t \rightarrow t+\delta t)} = \frac{\sin \varphi_2(t)}{\sin \phi(t)} w_{13(t \rightarrow t+\delta t)}^e - \frac{\sin \varphi_2(t)}{\sin \phi(t)} w_{23(t \rightarrow t+\delta t)}^e$$

$$\delta_t \phi_{(t \rightarrow t+\delta t)} = -\cos \varphi_2(t) w_{23(t \rightarrow t+\delta t)}^e + \sin \varphi_2(t) w_{13(t \rightarrow t+\delta t)}^e \quad (I.41)$$

$$\delta_t \varphi_{2(t \rightarrow t+\delta t)} = \cos \phi(t) \left( \frac{\cos \varphi_1(t)}{\sin \phi(t)} w_{13(t \rightarrow t+\delta t)}^e + \frac{\sin \varphi_1(t)}{\sin \phi(t)} w_{23(t \rightarrow t+\delta t)}^e \right) + w_{21(t \rightarrow t+\delta t)}^e$$

où  $w_{ij(t \rightarrow t+\delta t)}^e$  est obtenue à partir de la relation (I.12) réécrite ici sous sa forme incrémentale:

$$w_{ij(t \rightarrow t+\delta t)}^e = \left( \}A_{ijkl} G_{lk(t \rightarrow t+\Delta t)} \left\{ - \sum_{r=1}^{N.S.A} \}S_{ij(t)}^r \left\{ \delta_t \gamma_{(t \rightarrow t+\Delta t)}^r \right\} \right) \delta t \quad (I.42)$$

Précisons que dans cette expression la rotation du réseau pour le monocristal considéré est liée à la déformation de l'ensemble du milieu polycristallin par l'intermédiaire du tenseur de localisation **A**. Sa détermination fait l'objet des paragraphes suivants.

## I.2 - Relations de transition d'échelle

### I.2.1 - Localisation

Le problème qui se pose maintenant est de créer le lien entre le comportement global d'un élément de volume polycristallin et le comportement des monocristaux constitutifs. A l'échelle macroscopique le comportement se traduit comme à l'échelle microscopique par une relation constitutive de la forme :

$$\delta_t \mathbf{N} = \mathbf{L}^{\text{eff}} : \mathbf{G} \quad (\text{I.43})$$

où  $\mathbf{L}^{\text{eff}}$  représente le module effectif tangent du comportement élastoplastique. Il sera déterminé par "homogénéisation" du comportement local.

Nous avons déjà entrevu précédemment que le lien micro-macro se faisait par l'intermédiaire d'une relation de localisation de la forme  $\mathbf{g} = \mathbf{A} : \mathbf{G}$ . Nous allons préciser davantage la démarche qui a été faite pour aboutir à cette relation. Nous avons simplement précisé auparavant que le tenseur de localisation  $\mathbf{A}$  se déduisait de la résolution d'une équation intégrale reliant le gradient des vitesses locales aux conditions cinématiques imposées sur la frontière de l'élément de volume :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^0 - \int_V \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \delta \mathbf{l}(\mathbf{x}') : \mathbf{g}(\mathbf{x}') dV \quad (\text{I.44})$$

Cette équation qui a été formulée par Lipinski et Berveiller [30] est "valable, dans le cas des transformations finies, pour toute structure, y compris lorsque des hétérogénéités intragranulaires existent". Elle traduit à la fois :

- les équations d'équilibre locales pour un écoulement quasi-stationnaire et en négligeant les forces volumiques:

$$\text{div}(\delta_t \mathbf{n}(\mathbf{x})) = 0$$

$\mathbf{x}$  représente le vecteur position d'un point courant de l'élément de volume

- la loi de comportement locale déjà vue :

$$\delta_t \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}(\mathbf{x}) : \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

- et les actions extérieures qui sont formulées en vitesse imposée sur la surface de l'élément:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \text{à la frontière}$$

L'aboutissement à la forme (I.44) à fait l'objet de plusieurs publications (par exemple, [29][30][31]), elle ne sera donc pas reprise ici. Néanmoins nous élucidons les divers termes qui interviennent et qui sont utiles à la compréhension de la méthode auto-cohérente.

Tout d'abord le terme  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  provient de l'utilisation de la technique de Green. Il représente, plus précisément, la dérivée seconde du tenseur de Green  $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ . Ce dernier traduit l'effet qu'aurait une force volumique  $\delta_t \mathbf{f}(\mathbf{x})$  localisée dans une position  $\mathbf{x}$  sur la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}')$  d'une particule se trouvant à une position  $\mathbf{x}'$ . Autrement dit, en adoptant une écriture indicielle, nous avons :

$$v_i(\mathbf{x}') = \mathcal{G}_{im}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \delta_t f_m(\mathbf{x})$$

et on pose :

$$\Gamma_{ijmn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathcal{G}_{im,jn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$$

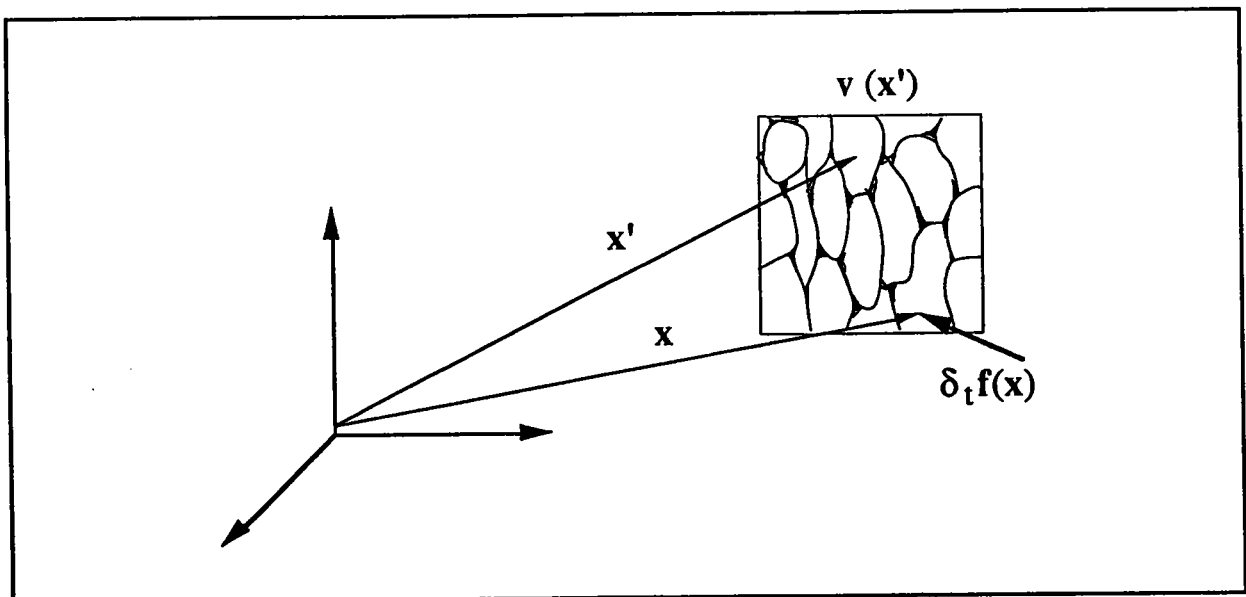


Fig. I.2 : illustration de la fonction de Green

Ce qu'il faut surtout retenir ici, c'est que l'intégration de  $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  sur le volume représente un terme d'interaction entre une particule de matière et son milieu englobant.

Le terme  $G^0$  apparaissant dans l'équation intégrale (I.44) provient, quant à lui, d'une décomposition du module tangent local  $l(\mathbf{x})$  en deux parties : une partie uniforme et arbitraire notée  $L^0$  et une partie déviatrice  $\delta l(\mathbf{x})$  telle que :

$$l(\mathbf{x}) = L^0 + \delta l(\mathbf{x}) \quad (\text{I.45})$$

$G^0$  représente alors le gradient de la vitesse dans un milieu homogène dit "de référence" ayant la même géométrie et les mêmes conditions aux limites que le milieu considéré et dont le comportement est traduit par la relation suivante :

$$\delta_t \mathbf{N} = L^0 : G^0 \quad (\text{I.46})$$

### I.2.2 - Approximation auto-cohérente de l'équation intégrale

L'équation intégrale cinématique (I.44) peut être approchée de manières diverses (Lin-Taylor, Born, modèle à trois phases). Dans ce travail nous appliquons la méthode auto-cohérente à un site. Celle-ci s'appuie sur plusieurs hypothèses. La première est de supposer que le comportement intragranulaire est homogène. De cette sorte le domaine formé par l'élément de volume polycristallin  $V$  peut être discrétisé en sous domaines (monocristaux) homogènes  $v^I$ . Nous pouvons donc écrire :

$$l(\mathbf{x}) = l^I = \text{cte} \quad \forall \mathbf{x} \in v^I \quad (\text{I.47})$$

et

$$g(\mathbf{x}) = g^I = \text{cte} \quad \forall \mathbf{x} \in v^I \quad (\text{I.48})$$

où  $v^I$  désigne le volume du grain repéré par l'étiquette  $I$ .

En conséquence des égalités précédentes nous pouvons évidemment écrire de la même façon :

$$\delta_t n(\mathbf{x}) = \delta_t n^I = \text{cte} \quad \forall \mathbf{x} \in v^I \quad (\text{I.49})$$

Ainsi l'équation intégrale (I.44) se réduit à un système d'équations linéaires dont le rang correspond au nombre de grains constituant l'élément de volume de matière. En notant  $\mathcal{N}$  ce nombre, l'intégrale (I.44) se transforme de la sorte :

$$\mathbf{g}^I = \mathbf{G}^0 - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{\mathcal{N}} \mathbf{T}^{IJ} : \delta \mathbf{l}^J : \mathbf{g}^J - \mathbf{T}^{II} : \delta \mathbf{l}^J : \mathbf{g}^J \quad (\text{I.50})$$

avec

$$\mathbf{T}^{IJ} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_J} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV dV' \quad (\text{I.51})$$

$\mathbf{T}^{IJ}$  est un tenseur d'ordre 4 qui décrit les interactions entre deux grains d'étiquettes respectives I et J. Une méthode de détermination de ce tenseur a été proposée par Fassi-Ferri [24] dans le cas d'inclusions ellipsoïdales se trouvant dans un milieu anisotrope. Le calcul est obtenu en partant de la transformée de Fourier du tenseur de Green. Ceci conduit à une expression finale de  $\mathbf{T}^{IJ}$  qui se présente sous la forme d'une intégrale complexe qui ne peut être résolue analytiquement que dans le cas d'inclusion sphérique dans un milieu isotrope. Lipinski [33] a donc développé un module numérique de résolution de  $\mathbf{T}^{IJ}$  basé sur la méthode d'intégration de Gauss. Les résultats qu'il a obtenus présentent une erreur inférieure à 0,05 % dans le cas d'inclusions sphériques et ne dépasse pas 1 % dans le cas d'inclusions ellipsoïdales.

La limitation du calcul de  $\mathbf{T}^{II}$  à des grains de forme ellipsoïdale constitue la deuxième hypothèse de la méthode auto-cohérente. Cette restriction trouve son origine dans les travaux d'Eshelby [5] concernant le problème de l'interaction entre un grain et une matrice homogène infinie. Kröner [10] s'est ensuite appuyé sur ces travaux pour établir le premier modèle auto-cohérent.

Le système (I.50) peut être encore simplifié par une approximation dite "à un site". Celle-ci consiste en un choix judicieux du tenseur  $\mathbf{L}^0$ . En effet celui-ci étant arbitraire, nous pouvons le choisir suffisamment proche du module tangent effectif actuel  $\mathbf{L}^{\text{eff}}$ , de sorte que l'effet des grains J sur le comportement d'un grain I ( $\neq J$ ) soit pratiquement pris en compte par le tenseur d'interaction  $\mathbf{T}^{II}$  qui, précisons le, dépend de  $\mathbf{L}^0$ . Concrètement ce choix permet de négliger dans l'expression (I.50) le terme  $\mathbf{T}^{IJ}$  devant le terme  $\mathbf{T}^{II}$  :

$$\sum_{I \neq J}^{\mathcal{N}} \mathbf{T}^{IJ} : \delta \mathbf{l}^J : \mathbf{g}^J \ll \mathbf{T}^{II} : \delta \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I \quad \text{pour } \mathbf{L}^o \approx \mathbf{L}^{\text{eff}}.$$

Le système d'équations (I.46) se découple alors et devient :

$$\mathbf{g}^I = \mathbf{G}^o - \mathbf{T}^{II} : \delta \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I \quad (\text{I.52})$$

Remarques :

L'originalité de cette forme réside dans le fait que les calculs sur un grain peuvent être traités indépendamment des autres grains. Un peu comme le calcul des structures par éléments finis où chaque élément est traité de façon indépendante puis une procédure d'assemblage permet une résolution globale du problème.

### I.2.3 - Tenseur de localisation

Afin de faire apparaître la relation de localisation recherchée, nous réécrivons (I.52) sous la forme équivalente suivante:

$$\mathbf{g}^I = \left( \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II} : \delta \mathbf{l}^I \right)^{-1} : \mathbf{G}^o \quad (\text{I.53})$$

et nous posons pour simplifier les écritures:

$$\mathbf{a}^I = \left( \mathbf{I} + \mathbf{T}^{II} : \delta \mathbf{l}^I \right)^{-1}. \quad (\text{I.54})$$

Nous obtenons alors le lien entre le gradient des vitesses macroscopiques  $\mathbf{G}$  et le gradient des vitesses dans le grain d'étiquette I en faisant intervenir la relation de moyenne (I.2) discuté au paragraphe I.1.1. Celle-ci s'écrit :

$$\mathbf{G} = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} \frac{v^I}{V} \mathbf{g}^I \equiv \mathbf{G} = \langle \mathbf{g}^I \rangle \quad (\text{I.55})$$

"< >" désigne la moyenne volumique sur l'ensemble des grains de l'expression considérée.

En introduisant (I.53) dans (I.55) on obtient :

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{a}^I : \mathbf{G}^o \rangle \quad (\text{I.56})$$

ou encore:

$$\mathbf{G}^o = \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} : \mathbf{G} \quad (\text{I.57})$$

Finalement en substituant cette dernière expression dans (I.53), nous obtenons la relation de localisation recherchée :

$$\mathbf{g}^I = \mathbf{a}^I : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} : \mathbf{G} \quad (\text{I.58})$$

L'expression du tenseur de localisation  $\mathbf{A}^I$  relatif au grain I apparaît donc comme :

$$\mathbf{A}^I = \mathbf{a}^I : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} \quad (\text{I.59})$$

#### I.2.4 - Homogénéisation

Réécrivons maintenant, de la même façon que pour (I.55), la relation de moyenne (I.1) liant les tenseurs taux des contraintes nominales microscopiques  $\delta_t \mathbf{n}^I$  au tenseur macroscopique correspondant  $\delta_t \mathbf{N}$  :

$$\delta_t \mathbf{N} = \langle \delta_t \mathbf{n}^I \rangle \quad (\text{I.60})$$

ainsi que la loi de comportement pour un grain I:

$$\delta_t \mathbf{n}^I = \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I \quad (\text{I.61})$$

Alors en introduisant (I.61) dans (I.60) et en remplaçant  $\mathbf{g}^I$  par son expression (I.58), on obtient :



$$\delta_t \mathbf{N} = \langle \mathbf{l}^I : \mathbf{a}^I \rangle : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} : \mathbf{G} \quad (\text{I.62})$$

Finalement en faisant l'analogie avec la relation de comportement global (I.43), on déduit directement la valeur approchée  $\mathbf{L}^{\text{sc}}$  <sup>(1)</sup> du module tangent effectif :

$$\mathbf{L}^{\text{sc}} = \langle \mathbf{l}^I : \mathbf{a}^I \rangle : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} \quad (\text{I.63})$$

Une autre expression équivalente à celle-ci peut être obtenue à partir de la relation (I.42), en remplaçant  $\mathbf{G}^o$  par son expression (I.57). :

$$\mathbf{L}^{\text{sc}} = \mathbf{L}^o : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} \quad (\text{I.64})$$

Cette expression du module de comportement macroscopique à l'avantage sur la précédente de nécessiter un nombre moindre d'opérations. De plus elle fait intervenir le terme  $\langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1}$  comme un terme correcteur sur le choix de  $\mathbf{L}^o$  ( $\neq \mathbf{L}^{\text{eff}}$ ). Dans une approche auto-cohérente tout à fait formelle qui consiste à choisir  $\mathbf{L}^o$  strictement égal à  $\mathbf{L}^{\text{eff}}$ , on démontre que ce terme correcteur est égal au tenseur identité et  $\mathbf{L}^{\text{sc}}$  correspond exactement à  $\mathbf{L}^{\text{eff}}$ .

Remarques :

Dans la pratique,  $\delta_t \mathbf{n}^I$  est remplacé par  $\delta_{J_a} \sigma^I$  (relation I.27). Ceci nous permet — par l'intermédiaire de la relation (I.60) — d'assimiler également  $\delta_t \mathbf{N}$  à la dérivée de Jauman du tenseur macroscopiques des contraintes de Cauchy  $\Sigma$ . Par conséquent la relation constitutive (I.43) doit être écrite plus exactement :

$$\delta_{J_a} \Sigma = \mathbf{L}^{\text{sc}} : \mathbf{D} \quad (\text{I.65})$$

---

(1) L'exposant <sup>sc</sup> signifie "self-consistent" approach

### I.3. - Conclusions

La détermination du tenseur de localisation  $A$  par la résolution de l'équation intégrale (I.44) permet de décrire le comportement de la structure interne du polycristal et de suivre son évolution quelque soit la complexité du trajet de chargement. Le point central de cette résolution réside dans le calcul des interactions entre grains.

Grâce aux hypothèses adoptées, à savoir principalement l'homogénéité intragranulaire, la solution auto-cohérente apparaît particulièrement remarquable du point de vue numérique car toute opération sur les monocristaux s'effectue de manière découplée. La méthode est de ce fait parfaitement appropriée aux programmations à architecture en parallèle. Un autre point remarquable concerne le faible nombre de paramètres ajustables qui sont nécessaires à la réalisation d'un calcul auto-cohérent. En effet, les données initiales à introduire dans le calcul sont les suivantes :

- les cissions critiques relatives aux systèmes de glissement ( $\tau_{cr}^0$ ),
- l'état de contrainte dans les grains ( $\sigma^I$ ),
- les deux termes  $H_s$  et  $H_w$  constituant la matrice d'écrouissage  $H$ ,
- l'orientation des réseaux cristallins,
- la forme des grains.

Par exemple, dans le cas d'un monocristal isotrope et recuit, les cissions critiques sont initialement identiques sur tous les systèmes, les contraintes intragranulaires sont généralement nulles et la forme du grain est supposée sphérique. Dans ce cas il n'y a que trois paramètres à identifier qui sont  $\tau_{cr}^0$ ,  $H_s$ ,  $H_w$ . En ce qui concerne les orientations cristallographiques, elles peuvent être déterminées par une analyse par diffraction  $X$  suivie d'un traitement numérique. Ce sont donc des données expérimentales. Cependant dans le cas particulier de l'isotropie initiale, le matériau ne présente pas d'orientations préférentielles de ses réseaux cristallins. Les orientations cristallographiques sont alors générées numériquement par une fonction aléatoire.

Certes, l'hypothèse d'uniformité intragranulaire limite la représentation des phénomènes liés précisément à l'hétérogénéité des grains induite par la déformation plastique. Le modèle, tel qu'il est présenté ici, se contente d'une représentation phénoménologique relativement moyenne du phénomène

d'empilement des dislocations. Celui-ci est en effet décrit au moyen de la matrice d'écroissage H (voir § I.1.4).

Néanmoins, dans le cas des matériaux CC et plus particulièrement dans le cas des matériaux CFC à forte énergie de faute d'empilement, les résultats obtenus sont en très bon accord avec les observations expérimentales [30], autant pour la prédiction des textures cristallographiques que pour la détermination des surfaces de plasticité mais aussi des contraintes résiduelles de second ordre (voir à ce sujet Krier [37]).

## Chapitre II :

### MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTOPLASTIQUE DANS UN CODE DE SIMULATION DE L'EMBOUITISSAGE

La modélisation du comportement du matériau ne suffit pas pour formuler un problème d'emboutissage dans son intégralité. Il est également nécessaire de prendre en compte des phénomènes tels que le frottement ou encore traiter le problème du contact évolutif entre les outils et la tôle.

Actuellement le code de calcul SIMEM3 développé par Renault compte parmi les rares codes ayant les capacités de simuler l'emboutissage de manière générale (avec par exemple, OPTRIS ou PAM-STAMP). C'est essentiellement pour cette raison qu'il a été choisi pour tenter d'y intégrer le modèle de comportement élastoplastique auto-cohérent présenté au chapitre I.

L'intérêt de ce couplage réside dans la possibilité de prendre en compte l'anisotropie de la tôle, de suivre son évolution, cela même quand les trajets de déformation sont complexes et d'obtenir des informations concernant l'état de la microstructure, notamment les textures cristallographiques en tout point de la tôle et à tout instant mais aussi les contraintes internes du second ordre (contraintes dans le grain).

La formulation de base du code SIMEM3 a été établie par Massoni *et al* [41] à partir d'une écriture du principe des puissances virtuelles avec une approximation mécanique de type membrane. Une des caractéristiques de la formulation est l'utilisation d'un système de coordonnées matérielles pour exprimer les grandeurs mécaniques (contraintes, déformations, ...). Ce choix de référentiel avait déjà été adopté par d'autres auteurs pour simuler des cas simples de mise en forme. Citons par exemple les travaux de Wang [44] ou encore Kitagawa *et al* [45].

Depuis la création du code SIMEM3, diverses améliorations ont été apportées, tant au niveau de son architecture qu'au niveau des approches qui sont utilisées pour la modélisation. Dans l'état actuel des développements, le code propose différentes options concernant :

- l'approche mécanique (membrane avec ou sans prise en compte des effets de flexion)

- le critère de plasticité (Von Mises, Hill orthotrope avec écrouissage isotrope et cinématique)
- la loi d'écrouissage (Swift, Hollomon, exponentielle)
- le frottement (Coulomb, Tresca)

Ces différentes approches ont été validées par une confrontation des résultats numériques avec les résultats expérimentaux d'emboutissage comme notamment l'essai Jovignot, sur matrice circulaire ou elliptique, lorsqu'on veut s'affranchir des phénomènes liés aux frottements, ou au contraire, l'essai avec poinçon hémisphérique ou tronconique.

Les résultats de ces essais [47], laissent apparaître certaines faiblesses en ce qui concerne la prévision des épaisseurs et des déformations cumulées en général. Ces faiblesses résultent, à priori, du choix de l'approche mécanique employée (membrane ou coque) mais aussi de la difficulté qu'ont les modèles phénoménologiques à suivre l'évolution du matériau dans les zones où la matière suit des trajets de déformation complexes et surtout leur incapacité à prendre en compte l'anisotropie induite sous sa forme la plus générale .

Nous commençons ce chapitre par des généralités concernant la description du milieu en rappelant quelques notions liés à l'utilisation des coordonnées matérielles. Nous reprenons ensuite la formulation de base du logiciel SIMEM3 en la généralisant au cas tridimensionnel. Nous pensons en effet qu'il est dommage de limiter le problème par une approche membrane ou coque mince alors que la loi de comportement auto-cohérente fournit dans tous les cas une réponse triaxiale. Ceci dit, dans la pratique, au moment de la programmation, nous avons adapté notre méthode aux restrictions imposées par les différents types d'éléments existant dans la bibliothèque du code de simulation (les contraintes existent uniquement dans le plan de la tôle). Nous abordons ensuite la modélisation numérique qui consiste à discrétiser le principe des puissances virtuelles en appliquant la méthode des éléments finis. Le système d'équations non linéaires ainsi généré est résolu par une méthode itérative de type prédiction-correction (Newton-Raphson). Il est question ensuite d'exprimer la matrice de rigidité tangente en fonction du module de comportement élastoplastique  $L^{sc}$  et créer ainsi le lien entre la formulation mécanique et l'approche auto-cohérente.

## II.1 - Formulation de base

### II.1.1 - Généralités et rappels

Considérons une tôle dans son état déformé. Le volume qu'elle occupe dans l'espace est noté  $\Omega$  et sa surface  $S$ . La position d'un point matériel  $P$  est définie par ses coordonnées  $\theta^i$  ( $i=1,2,3$ ) dans la configuration initiale non déformée. Lorsque la tôle se déforme, ces coordonnées constituent un système de coordonnées curvilignes (également appelées matérielles ou convectives). Le vecteur position  $X$  du point  $P$  peut être alors exprimé par rapport à une base orthonormée fixe  $\{O, \bar{e}_i\}$  en fonction des  $\theta^i$ :

$$\vec{X} = \vec{OP} = X_i(\theta^i)\bar{e}_i \quad (\text{II.1})$$

La base matérielle au point  $P$  se construit à partir des vecteurs de base qui sont obtenus par les relations suivantes :

$$\bar{e}_i = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \theta^i} \quad (\text{II.2})$$

Les composantes covariantes (indices en bas) du tenseur métrique relatives à la base matérielle  $\{P, \bar{e}_i\}$  sont définies par :

$$\epsilon_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \quad (\text{II.3})$$

et les composantes contravariantes (indices en haut) :

$$\epsilon^{ik} \epsilon_{kj} = \delta_j^i \quad \begin{cases} \delta_j^i = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_j^i = 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ces dernières permettent d'introduire les vecteurs de la base duale  $\{P, \bar{e}^i\}$  telle que :

$$\bar{e}^i = \epsilon^{ij} \bar{e}_j \quad (\text{II.5})$$

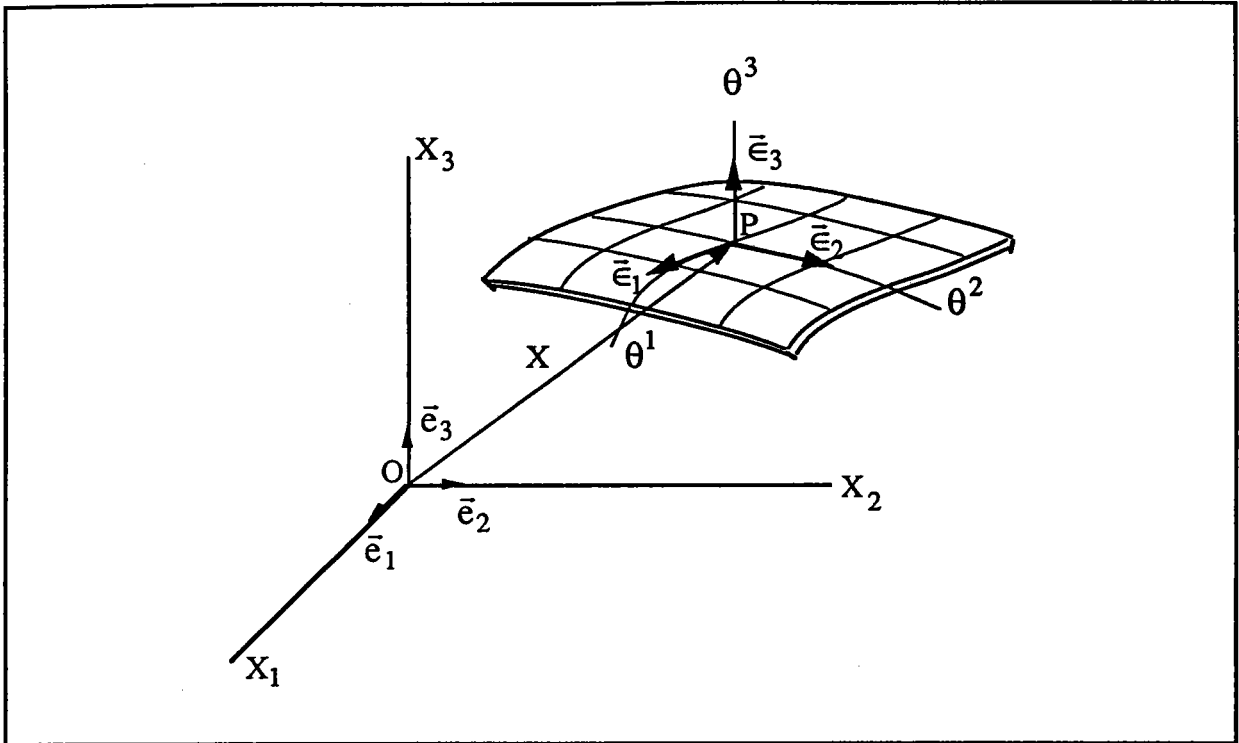


Fig. II.1 : coordonnées matérielles

### II.1.2 - Équation d'équilibre

Soit  $S_U$  la partie de la frontière du solide où les déplacements sont imposés et  $S_T$  la partie restante où les efforts extérieurs sont appliqués. En considérant le problème comme étant quasi-statique et en négligeant les forces volumiques, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\Sigma^{ij}|_j = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{II.6})$$

avec les conditions aux limites :

$$U^i = {}^d U^i \quad \text{sur } S_U \quad (\text{II.7})$$

$$\Sigma^{ij} n_j = {}^d T^i \quad \text{sur } S_T \quad (\text{II.8})$$

$\Sigma^{ij}$  sont les composantes contravariantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $\Sigma$  défini dans la configuration actuelle. L'opérateur  $|_j$  désigne la dérivation convective par rapport à la coordonnées  $\theta^j$  (voir en annexe pour plus de détail à

ce sujet).  ${}^dU$  est le vecteur des déplacements imposés, et  ${}^dT$  le vecteur des forces de surface donné sur  $S_T$ , de normale extérieure  $n$ .

### II.1.3 - Principe des puissances virtuelles

Une autre façon d'aborder le problème de l'équilibre et des conditions aux limites, est d'appliquer le principe des puissances virtuelles. Soit  $V^*$  une variation arbitraire du vecteur vitesse. En multipliant (II.6) par  $V_i^*$ , en intégrant par parties et en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$R = \int_{\Omega} \Sigma^{ij} V_j^* l_i d\Omega - \int_{S_T} T^i V_i^* dS = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\forall V^* \text{ cinématiquement admissible, c.à.d. } V_i^* = 0 \text{ sur } S_U$$

#### II.1.3.1 - *Forme incrémentale*

La simulation numérique des procédés de mise en forme par déformation plastique est traitée en incrémentant successivement la charge à appliquer (déplacement du poinçon, pression hydraulique, ...). Nous avons déjà vu, lors de l'actualisation des variables internes du monocristal (§ I.1.9), que l'application d'un incrément de charge entraînait le passage d'une configuration  $[t]$  à une configuration  $[t+\Delta t]$ . Il en est évidemment de même à cette échelle. On utilise donc de la même façon une procédure Lagrangienne réactualisée. En d'autres termes on suppose connus dans  $[t]$  tous les paramètres géométriques et mécaniques de la tôle supposée en équilibre et on cherche à actualiser ces derniers dans  $[t+\Delta t]$ . Dans cette nouvelle configuration, le principe des puissances virtuelles doit être vérifié. Celui-ci s'écrit :

$$R_{(t+\Delta t)} = \int_{\Omega_{(t+\Delta t)}} \Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij} V_j^* l_i d\Omega - \int_{S_{T(t+\Delta t)}} T_{(t+\Delta t)}^i V_i^* dS = 0 \quad (\text{II.10})$$

Il est important ici de remarquer qu'il est possible de réécrire les composantes  $\Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij}$  sous la forme suivante :

$$\Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij} = \Sigma_{(t)}^{ij} + \delta_t \Sigma_{(t \rightarrow t+\Delta t)}^{ij} \quad (\text{II.11})$$



Cette écriture qui fait intervenir l'accroissement des contraintes est rendue possible par l'utilisation d'un système de coordonnées convectives. En effet les termes  $\Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij}$  représentent d'une part, les composantes contravariantes par rapport à la base matérielle à l'instant  $(t+\Delta t)$  du tenseur des contraintes de Cauchy et d'autre part, les composantes contravariantes par rapport à la base matérielle de référence à l'instant  $(t)$  du deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\Pi$  :

$$\Sigma = \Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij} \bar{e}_{i(t+\Delta t)} \otimes \bar{e}_{j(t+\Delta t)} \quad (\text{II.12})$$

$$\Pi = \Sigma_{(t+\Delta t)}^{ij} \bar{e}_{i(t)} \otimes \bar{e}_{j(t)} \quad (\text{II.13})$$

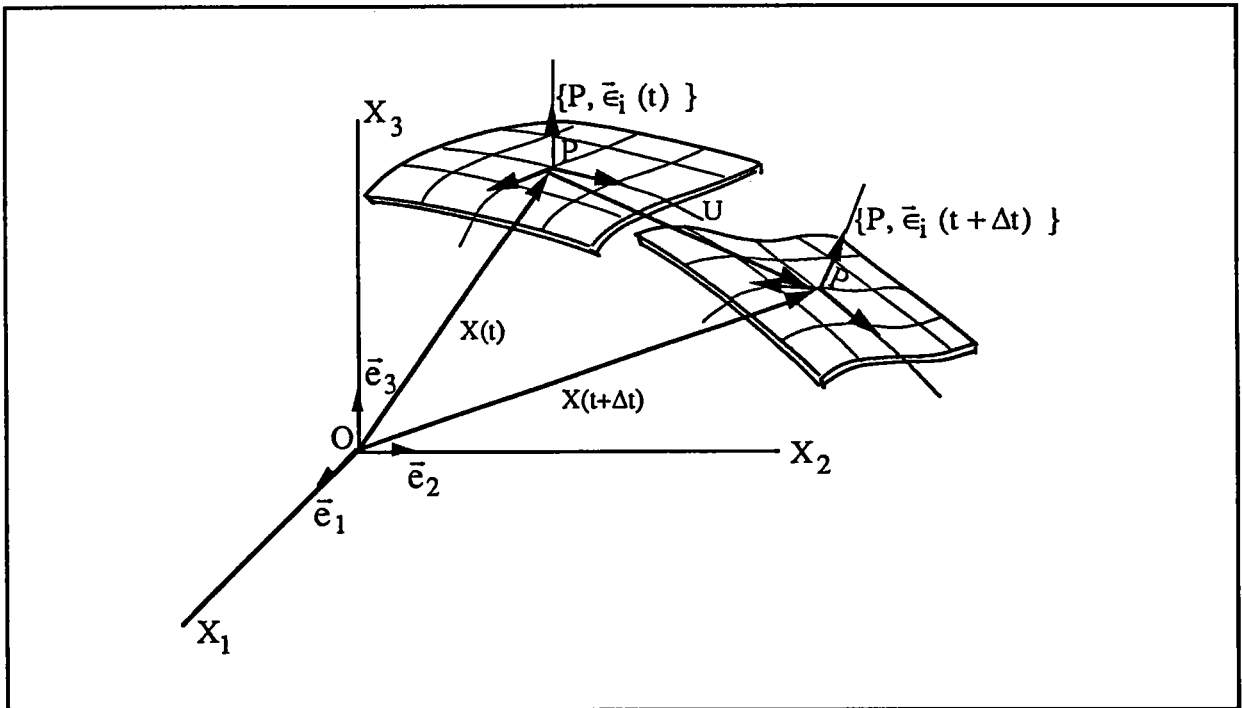


Fig. II.2 : Discrétisation du mouvement

### II.1.3.2 - Relation constitutive incrémentale

Pour résoudre l'équation (II.10) il est nécessaire d'évaluer les  $\delta_t \Sigma_{(t \rightarrow t+\Delta t)}^{ij}$  en introduisant la relation constitutive du matériau sous sa forme incrémentale. Celle-ci doit être obtenue à partir des dérivées objectives des contraintes et des déformations de telle sorte que la loi de comportement vérifie le principe

d'invariance matérielle. Un moyen direct d'obtenir cette relation est de dériver les tenseurs des contraintes et des déformations dans le repère matériel (Sidoroff [43]). On définit donc la dérivée convective contravariante du tenseur des contraintes de Cauchy par :

$$\delta^c \Sigma = \delta_t \Sigma^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad (\text{II.14})$$

et la dérivée convective covariante du tenseur  $\mathbf{A}$  des déformations d'Euler-Almansi par :

$$\delta_c \mathbf{A} = \mathbf{D} = D_{ij} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j \quad (\text{II.15})$$

$\delta_c \mathbf{A}$  pouvant s'identifier au tenseur taux des déformations  $\mathbf{D}$ , la relation constitutive s'écrit :

$$\delta^c \Sigma = \mathbf{M} : \mathbf{D} \equiv \delta_t \Sigma^{ij} = \tilde{M}^{ijkl} D_{lk} \quad (\text{II.16})$$

où  $\mathbf{M}$  désigne le module de comportement élastoplastique.  $\tilde{M}^{ijkl}$  sont ses composantes contravariantes par rapport à la base matérielle. Notons dès à présent, que le tenseur  $\mathbf{M}$  sera déterminé à partir du module tangent auto-cohérent  $\mathbf{L}^{sc}$  discuté au paragraphe I.2.4.

La forme incrémentale de la relation (II.16) peut être obtenue par une approximation au premier ordre de  $\delta^c \Sigma$  et de  $\mathbf{D}$ . On écrit alors :

$$\delta_t \Sigma_{(t \rightarrow t + \Delta t)}^{ij} = \tilde{M}^{ijkl} D_{lk} \quad (\text{II.17})$$

Dans le but de simplifier les écritures, les notations utilisées pour représenter les composantes de  $\mathbf{D}$  et de  $\mathbf{M}$  dans cette relation sont volontairement les mêmes que dans (II.16), cependant leur valeurs sont différentes du fait de l'approximation au premier ordre qui a été faite.

En remarquant que les composantes  $D_{lk}$  sont aussi les composantes par rapport à la base matérielle de référence du tenseur des incréments de déformation de Green-Lagrange. On montre (voir [42]) que :

$$D_{lk} = \frac{1}{2} (U_l \parallel_k + U_k \parallel_l + U^i \parallel_l U_i \parallel_k) \quad (\text{II.18})$$

où  $\parallel$  désigne une dérivation convective dans la base matérielle de référence et  $\mathbf{U}$  l'incrément de déplacement entre  $(t)$  et  $(t+\Delta t)$  défini tel que :

$$\mathbf{X}_{(t+\Delta t)} = \mathbf{X}_{(t)} + \mathbf{U} \quad (\text{II.19})$$

$$\mathbf{U} = U^i \bar{\mathbf{e}}_i = U_i \bar{\mathbf{e}}^i \quad (\text{II.20})$$

En portant la relation (II.17) dans l'équation (II.10), on obtient :

$$R(\mathbf{U})_{(t+\Delta t)} = \int_{\Omega_{(t+\Delta t)}} \left( \Sigma_{(t)}^{ij} + \tilde{M}^{ijkl} D_{lk} \right) V_j^* |_{,i} d\Omega - \int_{S_T(t+\Delta t)} T^i(t + \Delta t) V_i^* dS = 0 \quad (\text{II.21})$$

On voit ainsi par l'intermédiaire de (II.18), que le principe des puissances virtuelles est fonction uniquement du champ des déplacements incrémentaux.

#### II.1.4 - Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

La résolution de (II.21) est obtenue en discrétisant le volume de la tôle en éléments finis. Nous supposons pour cela l'utilisation d'éléments isoparamétriques quelconques aptes à subir de grands changements de formes. Ainsi dans chaque élément, la position des points matériels peut être évaluée par des fonctions d'interpolation  $\Psi_n$  définies aux noeuds du maillage et fonctions des coordonnées matérielles  $\theta^i$  :

$$\mathbf{X} = X_{in} \Psi_n(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \bar{\mathbf{e}}_i \quad (\text{II.22})$$

$X_{in}$  sont les composantes, par rapport à la base orthonormée fixe, du vecteur position du noeud  $n$  ( $n$  variant de 1 au nombre de noeuds de l'élément considéré).

La vitesse d'un point matériel peut être interpolée également à partir des vitesses aux noeuds de l'élément :

$$\mathbf{V} = V_{in} \Psi_n(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \bar{\mathbf{e}}_i \quad (\text{II.23})$$

et les dérivées convectives des vitesses approchées par :

$$V_i |_j = B_{jikn} V_{kn} \quad (\text{II.24})$$

avec

$$B_{jikn} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta^i} \bar{e}_k \cdot \bar{e}_j \quad (\text{II.25})$$

En substituant (II.23) et (II.24) dans l'équation (II.10) et en considérant le fait que  $V^*$  est arbitraire, on obtient l'approximation par éléments finis du principe des puissances virtuelles :

$$R(U) = \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \Sigma_{(t)}^{ij} + \tilde{M}^{ijkl} D_{lk} \right) B_{ijpn} d\Omega - \sum_e \int_{S_{Te}} T_{(t+\Delta t)}^p \Psi_n dS = 0 \quad (\text{II.26})$$

où  $e$  correspond à l'étiquette de l'élément (variant de 1 au nombre total d'éléments constituant le maillage de la tôle),  $\Omega_e$  et  $S_{Te}$  sont respectivement le volume et la surface de l'élément à l'instant  $(t+\Delta t)$ .

### II.1.5 - Algorithme de résolution de Newton-Raphson

Le système d'équations non-linéaire (II.26) est résolu par le schéma itératif de Newton-Raphson. Celui-ci consiste à corriger l'incrément de déplacement  $U$  entre  $(t)$  et  $(t+\Delta t)$  par pas successifs jusqu'à ce que  $R(U)$  soit inférieur à une tolérance fixée  $\epsilon$ . L'algorithme de résolution s'obtient de manière classique en développant  $R(U)$  en série de Taylor:

$$R(U^{it=i-1} + \Delta U^{it=i}) = R(U^{it=i-1}) + \frac{\partial R(U^{it=i-1})}{\partial U} \Delta U^{it=i} + \dots = 0 \quad (\text{II.27})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 on obtient l'égalité suivante:

$$-\frac{\partial R(U^{it=i-1})}{\partial U} \Delta U^{it=i} = R(U^{it=i-1}) \quad (\text{II.28})$$

$\Delta U^{it=i}$  correspond à l'estimation de correction de  $U$  à l'itération  $i$  :

$$U^{it=i} = U^{it=i-1} + \Delta U^i \quad (\text{II.30})$$

Cette solution doit vérifier :

$$R(U^{it=i}) \leq \varepsilon \quad (\text{II.31})$$

Dans le cas contraire on réitère à nouveau, ainsi de suite, jusqu'à obtenir la convergence de la solution.

Dans la pratique on introduit généralement la matrice de rigidité tangente  $[K^T]$  en posant:

$$K^T(U^{it=i-1}) = -\frac{\partial R(U^{it=i-1})}{\partial U} \quad (\text{II.29})$$

### II.1.6 - Calcul des composantes de la matrice de rigidité tangente $[K^T]$

Le problème central de la méthode de Newton-Raphson réside dans la détermination de la matrice de rigidité globale  $[K^T]$ . Dans la pratique le calcul est effectué au niveau de l'élément puis des techniques d'assemblage permettent de revenir à l'échelle de la structure :

$$[K^T] = \sum_e [K^{Te}]$$

$[K^{Te}]$  est appelé matrice de rigidité élémentaire. Comme on peut s'en douter, sa détermination n'est pas simple à effectuer. Massoni *et al* [41] ont néanmoins proposé une solution approchée en négligeant certains termes relatifs à la déformation du domaine d'intégration. Ils aboutissent à une expression des composantes de  $[K^{Te}]$  sous la forme d'une suite d'intégrales ( $K^{Te} = K^{Te1} + K^{Te2} + \dots + K^{Ten}$ ) faisant intervenir respectivement le comportement du matériau, les efforts de contact, etc.... Ils ont ensuite étudié l'influence de ces différents termes sur la convergence de la solution dans l'algorithme de Newton-Raphson. Il ne nous semble pas nécessaire ici de reprendre le développement du calcul de la matrice de rigidité élémentaire. Ce qui nous intéresse surtout, c'est le

terme intégral où intervient directement le module de comportement élastoplastique  $M$ . Celui ci se présente sous la forme suivante:

$$K_{qmpn}^{Tel} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \tilde{M}^{ijkl} (B_{lkqm} + B_{klqm}) B_{ijpn} d\Omega \quad (II.32)$$

La résolution de (II.32) (mais aussi  $K^{Te2, \dots}$  et  $K^{Ten}$ ) nécessite de faire appel à une méthode d'intégration numérique. On utilise ici, comme dans la plus part des codes de calcul par éléments finis, la méthode d'intégration de Gauss. Celle-ci permet d'approcher l'expression intégrale recherchée de la manière suivante:

$$K_{qmpn}^{Tel} = \int_{\Omega_{ref}} \tilde{K}(\xi)_{qmpn} d\Omega^{ref} \cong \sum_{i=1}^r p_i \tilde{K}(\xi_i)_{qmpn} \quad (II.33)$$

$\Omega_{ref}$  est le volume de l'élément de référence,  $\xi$  sont les coordonnées dans cet élément,  $\xi_i$  sont les coordonnées prédéfinies des  $r$  points d'intégrations (également appelés points de Gauss) et  $p_i$  sont les coefficients de pondération correspondants.

Grâce à l'utilisation de cette méthode il suffit, et c'est là tout son intérêt, de connaître les valeurs des différentes variables se trouvant dans (II.32) uniquement aux points de Gauss. Une de ces variables est, entre autre, le module de comportement élastoplastique  $M$ . Notons que le calcul de  $R(U)$  (équation (II.26)), qui permet de vérifier si la convergence est atteinte, s'effectue également au niveau élémentaire en appliquant la méthode de Gauss. On voit alors que le point de Gauss constitue le "point" de liaison entre la formulation mécanique et la loi de comportement du matériau.

## II.2 - Couplage avec la méthode Auto-cohérente

### II.2.1 - Matérialisation du point de Gauss

Pour permettre l'évaluation du comportement élastoplastique de la tôle par la méthode auto-cohérente, chaque point de Gauss du maillage E.F. est matérialisé par un élément de volume constitué d'un certain nombre de grains

monocristallins. Chacun d'eux, est donc caractérisé, conformément aux besoins de la méthode auto-cohérente, par :

- l'orientation du réseau atomique par rapport à un repère orthonormé fixe (angles d'Euler  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$ ).
- les cissions critiques relatifs aux systèmes de glissement
- l'état de contrainte
- leur forme (qui doit nécessairement être ellipsoïdale)

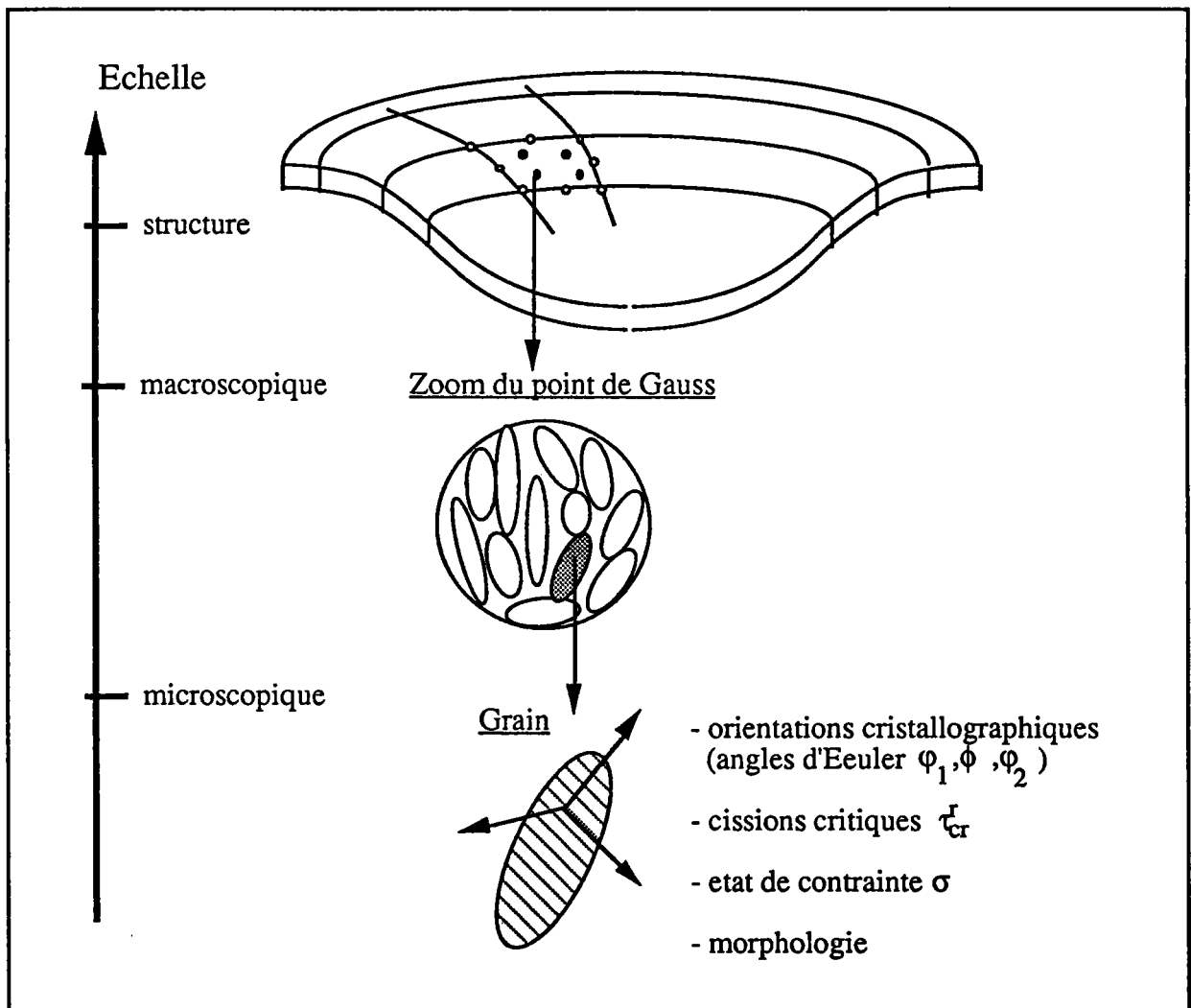


Fig. II.3: Matérialisation du point de Gauss

Précisons que cette représentation de la microstructure, ne permet évidemment pas de prendre en compte l'anisotropie liée à la distribution spatiale des grains.

Remarque :

- Lorsque nous souhaiterons modéliser un matériau initialement isotrope, nous choisirons des grains sphériques, une distribution des orientations cristallographiques aléatoire et des cissions critiques identiques dans tous les grains et sur tous les systèmes de glissement. Cependant dès qu'un chargement sera appliqué sur un tel agrégat de cristaux, des orientations préférentielles apparaîtront, les cissions critiques évolueront différemment, etc.... L'anisotropie sera donc induite par le chargement.

## II.2.2 - Relation entre les modules élastoplastique $M$ et $L^{sc}$

Au chapitre I nous avons établi que la comportement élastoplastique d'un élément de volume pouvait être approché par la relation suivante :

$$\delta_{Ja} \Sigma = L^{sc} : D \quad (II.34)$$

Or l'expression (II.33) de la matrice de rigidité élémentaire fait intervenir la relation de comportement sous la forme :

$$\delta^c \Sigma = M : D \quad (II.35)$$

Il nous faut donc trouver une relation entre les deux modules  $M$  et  $L^{sc}$ . Celle-ci est obtenue grâce aux relations de correspondance entre les différentes dérivées objectives des contraintes. On montre que ( Sidoroff [43]) :

$$\delta^c \Sigma = \delta_{Ja} \Sigma - D \cdot \Sigma - \Sigma \cdot D \quad (II.36)$$

Alors en portant (II.34) dans (II.36), en identifiant l'expression ainsi obtenue avec (II.35) et en adoptant une écriture indicielle, on aboutit finalement à la relation recherchée :

$$M_{ijkl} = L_{ijkl}^{sc} - \delta_{il} \Sigma_{kj} - \delta_{jk} \Sigma_{il} \quad (II.37)$$

$M_{ijkl}$  sont ici les composantes par rapport au repère orthonormée fixe du tenseur  $M$ .



On obtient les composantes  $\tilde{M}^{ijkl}$  en appliquant les règles classiques de changement de bases curvilignes :

$$\tilde{M}_{mnrs} = \frac{\partial X_i}{\partial \theta^m} \frac{\partial X_j}{\partial \theta^n} \frac{\partial X_k}{\partial \theta^r} \frac{\partial X_l}{\partial \theta^s} M_{ijkl} \quad (\text{II.38})$$

et

$$\tilde{M}^{ijkl} = \epsilon^{im} \epsilon^{jn} \epsilon^{kr} \epsilon^{ls} \tilde{M}_{mnrs} \quad (\text{II.39})$$

En substituant dans la relation (II.37)  $L_{ijkl}^{sc}$  par son expression (I.64), on fait apparaître clairement que le module tangent  $M$  dépend de la microstructure du matériau au point de Gauss :

$$M_{ijkl} = L_{ijmn}^o \langle a_{mnkl}^I \rangle^{-1} - \delta_{il} \Sigma_{kj} - \delta_{jk} \Sigma_{il} \quad (\text{II.40})$$

et en précisant encore :

$$M_{ijkl} = L_{ijmn}^o \left\langle \left( I_{mnkl} - T_{mnpq}^{II} \delta l_{pqkl}^I \right)^{-1} \right\rangle^{-1} - \delta_{il} \Sigma_{kj} - \delta_{jk} \Sigma_{il} \quad (\text{II.41})$$

### Choix du module de comportement homogène de référence $L^o$

Nous avons vu au chapitre I que l'approximation auto-cohérente repose principalement sur le choix de  $L^o$ . Celui-ci doit être le plus proche possible du module de comportement effectif. Dans le schéma incrémental et itératif de la méthode E.F. précédemment décrite, le choix apparaît évident. En effet, il est judicieux de choisir  $L^o$  égal au module de comportement  $L^{sc}$  calculé à l'incrément précédent :

$$L^o = L_{inc=i-1}^{sc} \quad (\text{II.42})$$

Si on s'intéresse au temps de calcul, ce choix présente cependant un inconvénient car il oblige à appliquer le chargement par petits pas. Pour quantifier l'influence de la taille des incréments sur la précision des résultats, nous avons simulé, par la méthode auto-cohérente, des essais de tractions sur un agrégat de 100 grains initialement isotrope (distribution aléatoire des orientations cristallographiques, grains sphériques, etc...). La figure (II.4)

visualise les courbes de réponse (contrainte - déformation plastique) obtenues pour cinq tailles différentes du pas d'incrément de la charge. Celles-ci sont exprimées en pourcentage de la limite d'élasticité initiale  $R_e$ . Cette dernière vaut pour le matériau simulé 280 MPa (alliage d'aluminium, structure CFC). Les résultats observés lors de ces essais confirment la nécessité de choisir une taille adéquate de l'incrément. Dans l'exemple présenté, on peut considérer que la convergence est atteinte pour un pas d'environ 1% de la limite d'élasticité. A 10% de déformation plastique équivalente, l'écart maximum observé entre les cinq courbes est de 40 MPa, ce qui représente environ 8% de la contrainte moyenne nécessaire pour atteindre une déformation plastique de 10%.

Cette écart qui croît avec la taille du pas d'incrément s'explique simplement. Nous avons déjà fait remarqué au chapitre I que le terme  $\langle a^I \rangle^{-1}$  joue un rôle de correcteur sur le choix de  $L^0 \neq L^{eff}$ , or ce terme en dépend lui même par l'intermédiaire du tenseur d'interaction  $T^{II}$  apparaissant dans la relation (I.64) ou (II.41). Cela signifie que  $\langle a^I \rangle^{-1}$  joue d'autant mieux son rôle de correcteur que  $L^0$  est proche de la solution !.

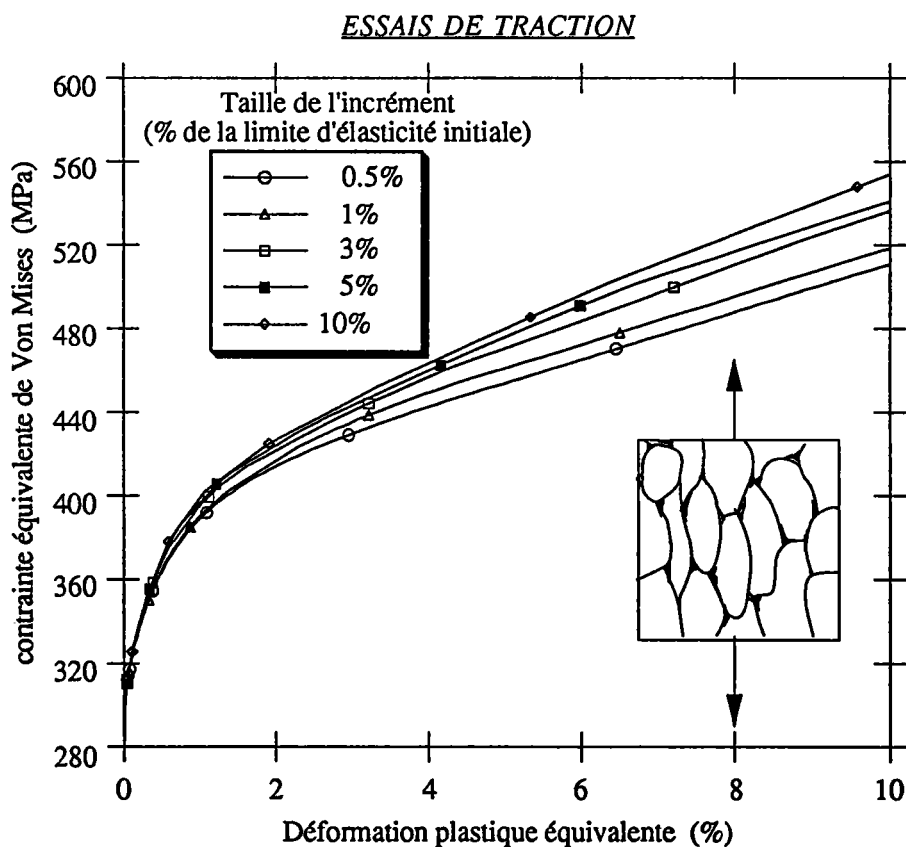


Fig. II.4 : Influence de la taille de l'incrément sur la courbe de réponse d'un essai de traction. (calcul effectués sur un agrégat isotrope de 100 grains)

## II.2.4 - Approche numérique du tenseur de localisation $\mathbf{A}^I$

Avant de pouvoir effectuer le calcul du module de comportement  $L^{sc}$  (ou  $M$ ), il est nécessaire de procéder à la détermination du comportement de chacun des grains qui constituent l'élément de volume au point de Gauss considéré. La première étape consiste donc à localiser  $\mathbf{G}_{(t \rightarrow t+\Delta t)}$  qui, nous le rappelons, représente la forme incrémentale du gradient des vitesses macroscopiques imposé au point de Gauss. Son expression se présente sous la forme suivante :

$$\mathbf{G}_{(t \rightarrow t+\Delta t)} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{X}_{(t)}} \quad (\text{II.43})$$

La discrétisation E.F de cette expression s'écrit alors :

$$G_{ij(t \rightarrow t+\Delta t)} = U_{in} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial X_{j(t)}} \quad (\text{II.44})$$

et on obtient le forme incrémentale du gradient des vitesses dans le grain en appliquant la relation de localisation (I.54) que nous réécrivons ici par commodité :

$$\mathbf{g}_{(t \rightarrow t+\Delta t)}^I = \mathbf{a}^I : \langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1} : \mathbf{G}_{(t \rightarrow t+\Delta t)} \quad (\text{II.45})$$

A ce niveau du calcul, cette relation présente une difficulté. En effet le terme  $\langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1}$  qui représente, nous l'avons vu, une moyenne sur l'ensemble des grains ne peut être connu qu'après avoir déterminé le comportement de chacun d'eux. Pour apprécier l'influence de ce terme dans la relation (II.45), nous proposons de simuler une série d'essais de traction sur le même agrégat que celui précédemment décrit. Dans un premier temps nous supposons que  $\langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1}$  est égal au tenseur identité  $\mathbf{I}$ , puis, dans un deuxième, temps nous le choisissons égal à celui calculé à l'incrément précédent. Nous comparons alors les courbes de réponse obtenues par ces deux approches pour une taille imposée du pas d'incrément. Nous faisons ensuite évoluer cette taille. Les figures de (II.5) à (II.7) visualisent les résultats de ces essais. Nous pouvons conclure que  $\langle \mathbf{a}^I \rangle^{-1}$ , dans la relation (II.45), n'a pratiquement aucun effet sur les courbes contraintes-

déformations. Il nous semble donc raisonnable d'en faire abstraction à ce niveau du calcul. Le gradient des vitesses dans le grain I s'écrit alors plus simplement :

$$\mathbf{g}_{(t \rightarrow t + \Delta t)}^I = \mathbf{a}^I : \mathbf{G}_{(t \rightarrow t + \Delta t)}$$

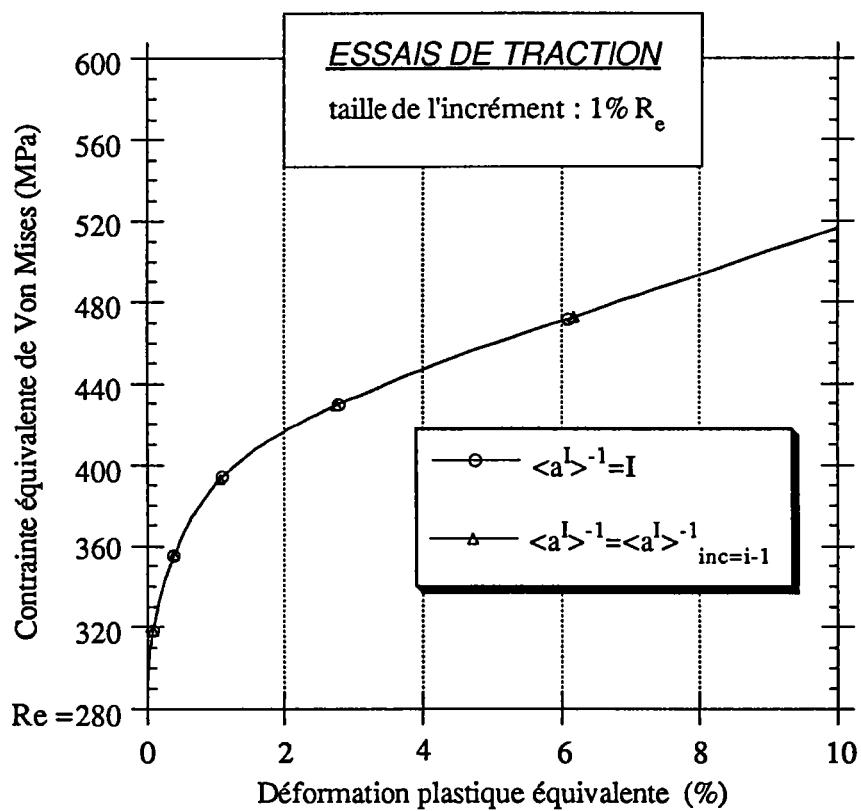


fig. II.5 : Influence de la localisation avec une taille de l'incrément de 1% de  $R_e$

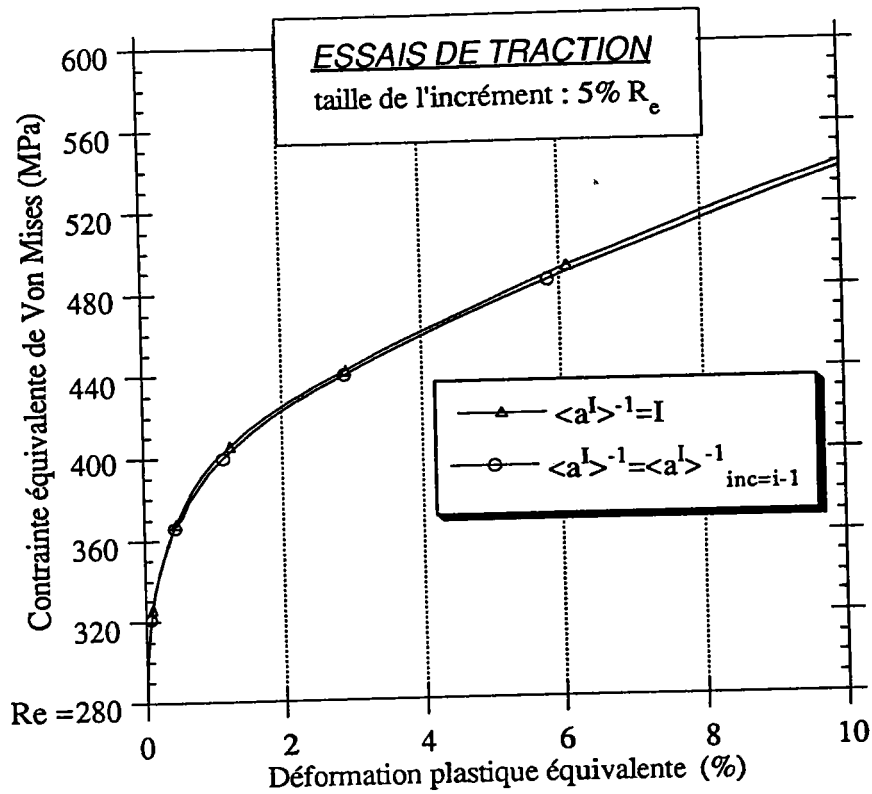


fig. II.6 : Influence de la localisation avec une taille de l'incrément de 5% de  $R_e$

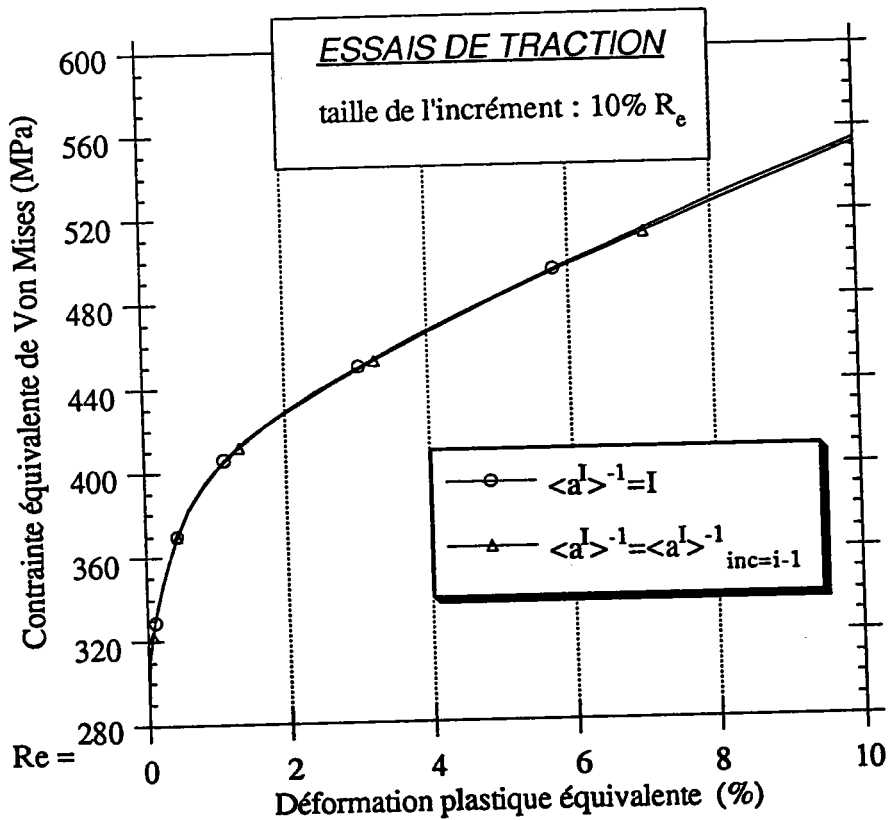


fig. II.7 : Influence de la localisation avec une taille de l'incrément de 10% de  $R_e$

## Chapitre III :

### APPLICATIONS

Le code SIMEM3 étant actuellement en cours de développement et de restructuration, nous ne sommes pas encore en mesure de proposer des applications concrètes d'emboutissage. Cependant, pour donner une idée des possibilités que l'on peut attendre de l'utilisation de l'approche auto-cohérente, nous avons également intégré celle-ci dans un code de calcul de structures bidimensionnelles qui a été développé au sein du LPMM. Ce code permet d'étudier le comportement élastoplastique de structures planes ou axisymétriques en petites déformations. Il propose, dans sa version d'origine, le choix de divers critères d'écoulement à écrouissage isotrope (Tresca, Von Mises, ...) et différentes lois d'écrouissage peuvent être utilisées. Ce code qui à l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre va nous permettre, au travers de deux exemples tests, de démontrer la validité du couplage de l'approche présentée avec la méthode des éléments finis, et en même temps de mettre en évidence les avantages mais aussi les inconvénients et les limites de ce schéma.

Le premier exemple que nous présentons, traite le cas simple d'une poutre encastree soumise à un moment de flexion. Ce problème est résolu d'une part en utilisant le modèle auto-cohérent et d'autre part en utilisant un modèle phénoménologique. La comparaison des résultats permet de valider la méthode.

Le deuxième exemple consiste à simuler une flexion 3 points sur des éprouvettes entaillées. Celles-ci sont supposées prélevées selon des directions différentes dans une tôle de métal laminée. Ce problème a été construit de façon à montrer l'intérêt du couplage lorsque le matériau est initialement anisotrope et lorsque les trajets de déformation sont complexes.

Ces exemples permettront également de montrer les informations inédites ( dans le cas du calcul de structures) qu'il est possible d'obtenir grâce au modèle auto-cohérent, notamment la prédiction des textures cristallographiques en

différents points de la structure ainsi que les contraintes internes du second ordre. Nous attirons cependant l'attention sur le fait que ces exemples sont purement qualitatifs et n'ont pas la prétention de représenter strictement la réalité. Toutefois, des études effectuées ultérieurement [31] [32] [33] [36] sur des agrégats de monocristaux ont confirmé un bon accord entre les résultats numériques obtenus par l'approche auto-cohérente et ceux provenant de l'expérimentation. Nous ne voyons donc, à priori, pas de raisons qu'il en soit autrement dans l'application au calcul de structures. Ceci dit la confrontation des résultats numériques avec les résultats expérimentaux sera de toute façon inévitable dans l'avenir pour valider le code SIMEM3.

### III.1 - Données communes aux essais

Le matériau qui est utilisé dans les deux exemples qui suivent est supposé avoir une structure atomique de type CFC (cuivre, aluminium, etc...). Ce choix n'est pas arbitraire. Il permet en fait de limiter le temps de calcul. Comme nous l'avons vu au paragraphe I.1.2 il existe, pour ce type de structure, 24 systèmes de glissement possibles (plans (111) et directions  $\langle 110 \rangle$ ) au lieu de 48 pour un matériau à structure CC. La procédure de recherche des systèmes actifs s'effectue donc plus rapidement dans le cas d'un matériau CFC.

Le comportement élastique du monocristal est supposé isotrope. Il est donc caractérisé uniquement par le module de Lamé  $\mu$  et le rapport de Poisson  $\nu$ .

La matrice d'écroûissage discutée au paragraphe I.1.4 est construite à partir des deux termes  $H_W$  et  $H_S$ . Le premier qui décrit l'auto-écrouîssage est ici égal à  $\mu/250$ . Cette valeur correspond à la pente du stade II d'un essai de traction sur un monocristal. Le terme  $H_S$ , décrivant l'écrouîssage latent du monocristal, est lui proportionnel à  $H_W$ . Le rapport  $H_W/H_S$  définit le coefficient d'anisotropie. Rappelons que ces termes sont supposés rester constants au cours de la déformation.

Lorsque le comportement du matériau est supposé initialement isotrope, nous avons vu que la cission critique est choisie identique sur tous les systèmes de glissement et pour tous les grains. Dans ce cas particulier une seule valeur ( $\tau_{cr}^0$ ) sera suffisante pour caractériser la limite d'écoulement initiale.

Le tableau III.1 fournit un récapitulatif des données communes aux essais. Les valeurs qui sont proposées correspondent approximativement à un matériau tel que l'aluminium.

| Paramètres d'élasticité                 |                     |
|---|---------------------|
| Module de Lamé $\mu$                    | 30000 MPa           |
| Rapport de Poisson $\nu$                | 0,3                 |
| Paramètres de plasticité                |                     |
| Terme d'auto-écrouissage $H_w$          | $\mu/250 = 120$ MPa |
| Coefficient d'anisotropie $H_w/H_s$     | 3                   |
| Systèmes de glissement (CFC) (12x2)     | (111)<110>          |
| Cission critique initiale $\tau_{cr}^0$ | 140 MPa             |

*Tab . III.1 : Récapitulatif des données communes aux essais*



### III.2 - Poutre encastrée en flexion

Ce premier exemple consiste à déformer plastiquement une poutre encastrée à une de ses extrémités en lui appliquant un moment de flexion. Le comportement de la structure est analysé avec le code éléments finis 2D, d'une part, en utilisant le modèle auto-cohérent et, d'autre part, en adoptant un modèle phénoménologique.

La charge est appliquée de façon incrémentale avec des pas de 1% de la limite d'élasticité initiale (soit  $280 \times 0,01 = 2,8$  MPa) jusqu'à l'apparition d'une déformation plastique équivalente de 6% au niveau d'un des points de Gauss du maillage. ce dernier est constitué d'éléments quadratiques à 8 noeuds (Serendip). L'intégration des matrices de rigidité élémentaires s'effectue par 4 points de Gauss.

La géométrie de la poutre, le maillage et les conditions aux limites adoptées sont représentés sur la figure III.2.

#### III.2.1 - Données spécifiques au calcul avec le modèle auto-cohérent

En vue d'effectuer le calcul de la poutre avec le modèle auto-cohérent, un agrégat de 50 grains est associé à chaque point de Gauss du maillage. Chaque grain est caractérisé par :

- les 3 angles d'Euler ( $\varphi_1$ ,  $\phi$ ,  $\varphi_2$ ) définissant l'orientation du réseau atomique par rapport au repère fixe. Ceux-ci sont générés par une fonction aléatoire de manière à obtenir un agrégat suffisamment désordonné pour supposer que le matériau est initialement isotrope,

- des cissions critiques définies sur chaque système de glissement. Initialement celles-ci sont choisies identiques (voir la valeur de  $\tau_{cr}^0$  dans le tableau III.1),

- les contraintes internes initialisées à zéro,

- une forme qui est choisie sphérique et qui est supposée le rester au cours de la déformation.

Remarques :

Chaque point de Gauss du maillage éléments finis est représenté initialement par le même agrégat de grains. Ceci dit, au cours de la déformation, la microstructure au point de Gauss évolue différemment selon la position de celui-ci dans le maillage. Il est alors important de faire remarquer qu'une certaine place mémoire est allouée à chaque grain pour son identification. A titre indicatif, un grain tel qu'il est défini ci-dessus nécessite une place de 288 octets en mémoire. Dans le cas d'un maillage comprenant par exemple 1000 éléments, la place totale nécessaire pour mémoriser l'état de l'ensemble des grains s'élève à 57,6 Mo (=1000 elts x4 pts de Gauss x50 grains x 288 octets).

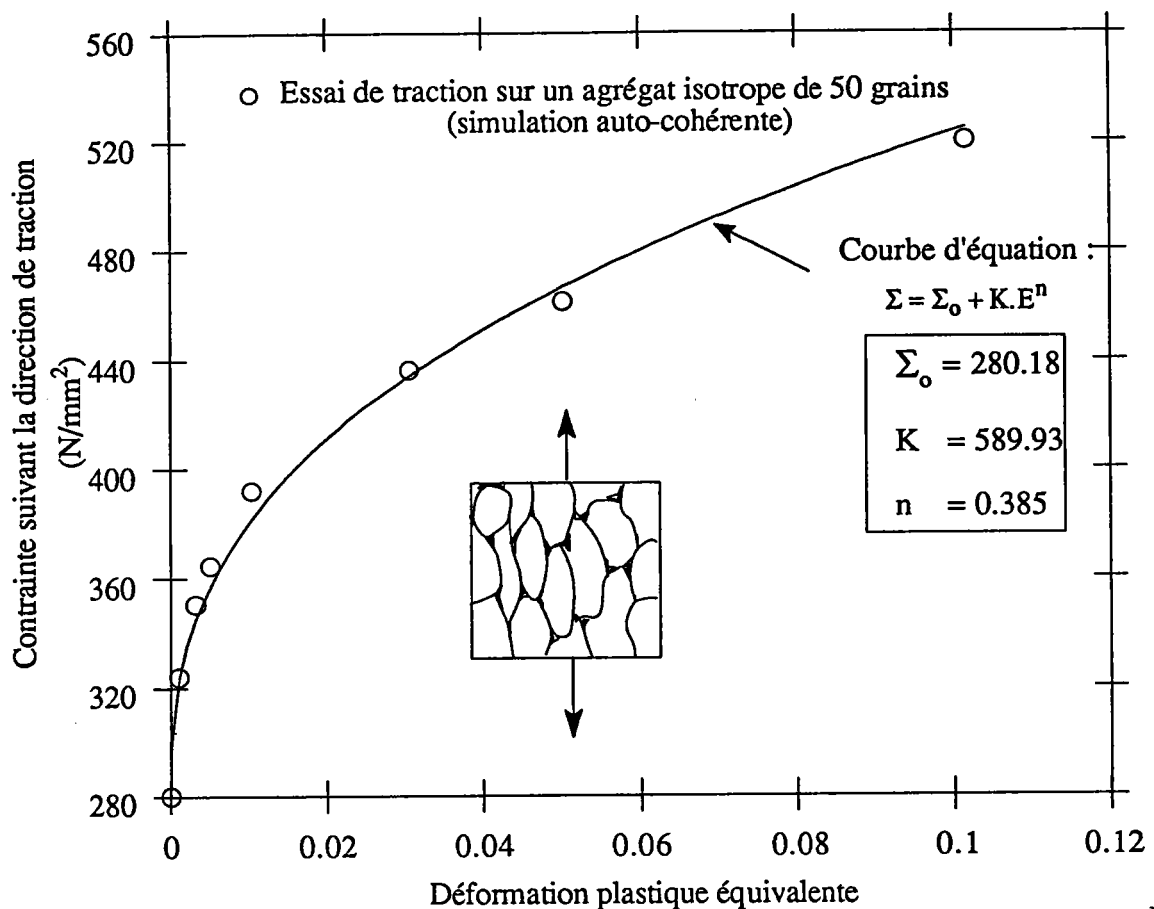
### III.2.2 - Données spécifiques au calcul avec un modèle phénoménologique

Le calcul par une approche phénoménologique est obtenu en appliquant le critère d'écoulement de Von Mises avec écrouissage isotrope. La loi d'écrouissage est définie par une fonction de la forme suivante :

$$\Sigma = \Sigma_0 + K.E^n$$

où E représente la déformation plastique cumulée dans la direction de traction .  
 $\Sigma_0$ , K et n sont des constantes dépendantes du matériau.

Pour caler le modèle de Von Mises au modèle auto-cohérent et pouvoir ainsi effectuer une comparaison, les trois paramètres  $\Sigma_0$ , K et n sont ajustés de manière à lisser au mieux la courbe de réponse obtenue par une simulation auto-cohérente d'un essai de traction. Cet essai est effectué sur l'agrégat de 50 grains utilisé pour caractériser la microstructure initiale de la poutre. La figure III.1 montre le lissage obtenu.



Fig

.III.1 : Ajustement des paramètres de la loi d'écroutissage  $\Sigma = \Sigma_0 + K.E^n$  sur la courbe contrainte-déformation d'un essai de traction uniaxial simulé par un calcul auto-cohérent sur un agrégat isotrope de 50 grains.

### III.2.3 - Analyse des résultats

La figure III.3 présente une comparaison des déformées obtenues par les deux modèles. Les résultats sont légèrement différents. Tout d'abord à cause de l'ajustement des paramètres de la loi d'écroutissage qui n'est pas parfait. D'autre part, contrairement au modèle de Von Mises, même si le matériau est supposé initialement isotrope, la modélisation auto-cohérente induit une anisotropie de comportement au cours de la déformation plastique. Certes cet effet est relativement faible pour le niveau de déformation atteint.

La figure III.4 propose, quand à elle, une comparaison des déformations plastiques équivalentes qui sont atteintes à la fin du chargement. Les résultats

sont présentés sous la forme d'iso-valeurs. On constate une similitude relativement bonne des résultats. La différence entre les deux modèles est de l'ordre de 2%.

La figures III.5 compare entre les deux modèles la distribution des contraintes équivalentes de Von Mises à la fin du chargement. Celles-ci sont quasiment identiques. La même constatation peut être faite pour la figure III.6 qui visualise les distributions des contraintes après déchargement (contraintes résiduelles d'ordre I).

Les résultats présentés jusqu' ici permettent uniquement de confirmer que le couplage de l'approche auto-cohérente avec un code de calcul de structures par éléments finis est réalisable. Cependant, il est également possible au travers de cet exemple de montrer l'avantage de la méthode en ce qui concerne les informations recueillies. Nous pouvons en effet obtenir des informations sur l'état de la microstructure en différents points de la poutre. La figure III.7 montre, par une représentation sur figures de pôle inverses (voir explication fig. III.8), l'évolution des orientations cristallographiques des grains à deux endroits particuliers. Sur la première image (fig. III.7a) cette évolution est visualisée pour les grains relatifs à un point de Gauss localisé sur une fibre tendue de la poutre. A l'inverse, la deuxième image (fig. III.7b) montre l'évolution des orientations cristallographiques pour un point de Gauss situé sur une fibre comprimée. On remarque alors que les deux textures — initialement identiques — évoluent différemment suivant le trajet de déformation que le point matériel a subi. Le matériau devient alors anisotrope.

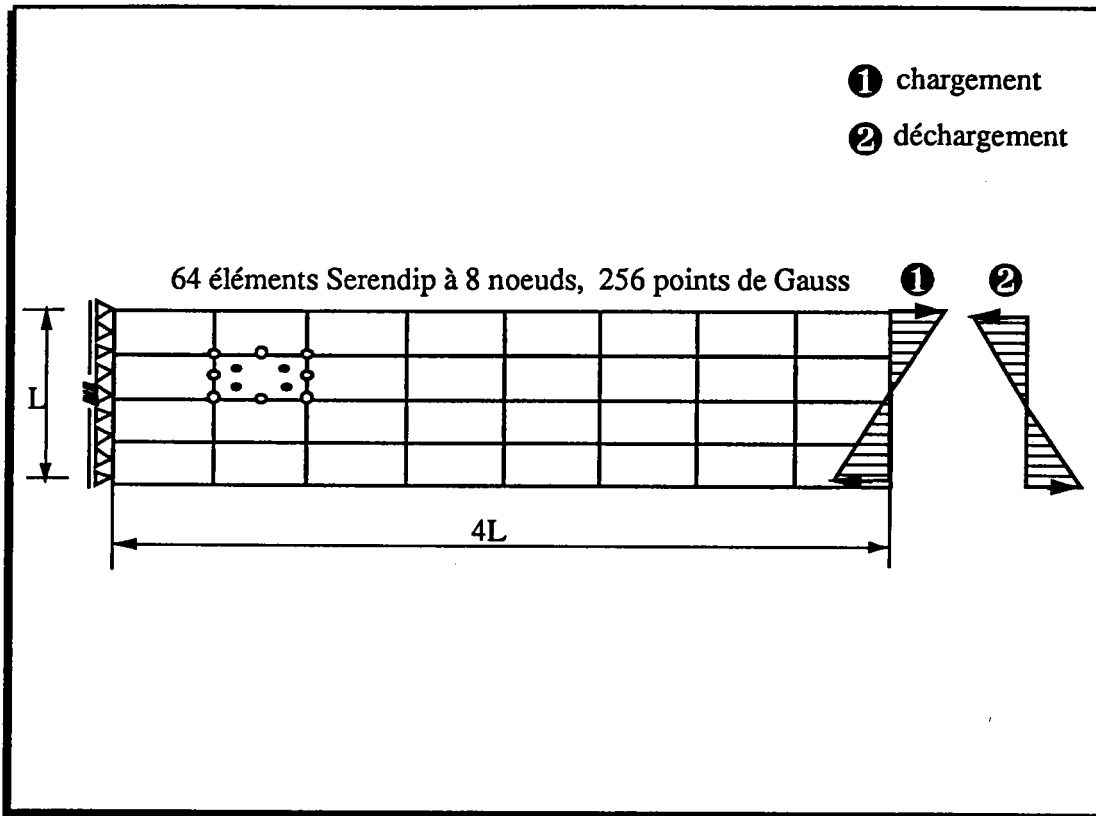


Fig III.2 : géométrie, maillage et conditions aux limites

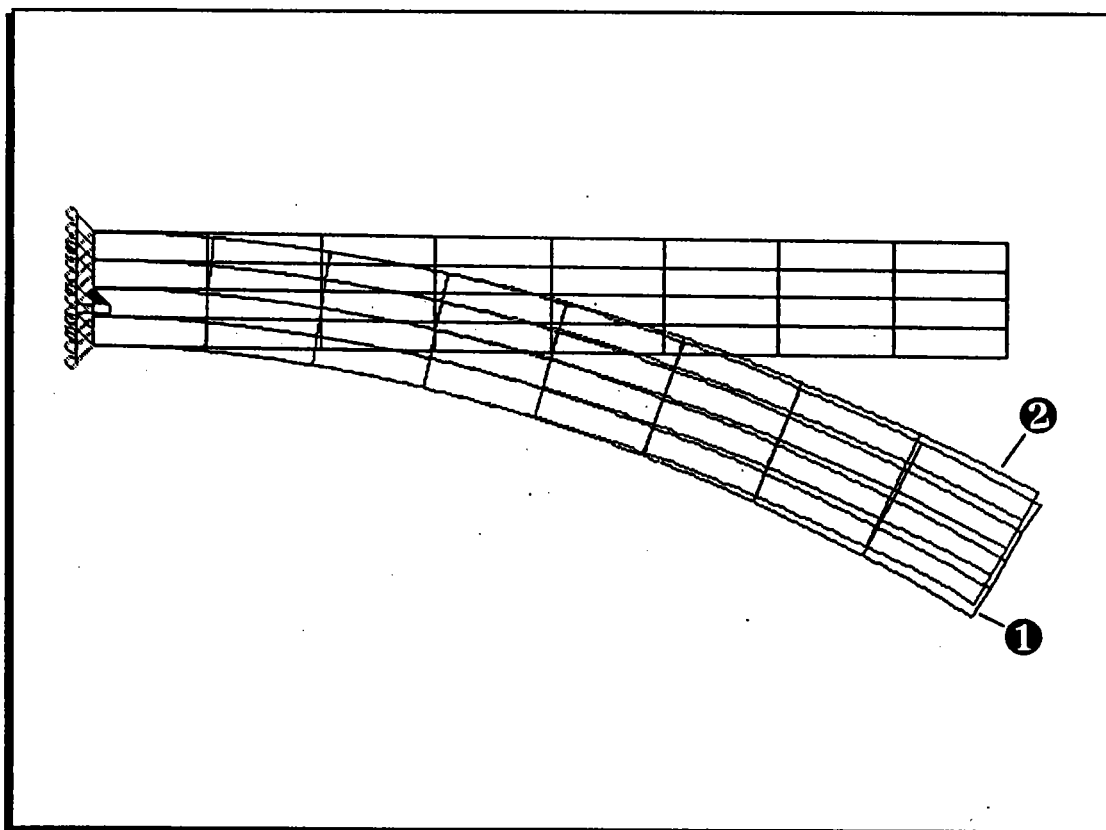


Fig. III.3 : Comparaison des déformées - 1 : modèle de Von Mises  
 - 2 : modèle auto-cohérent

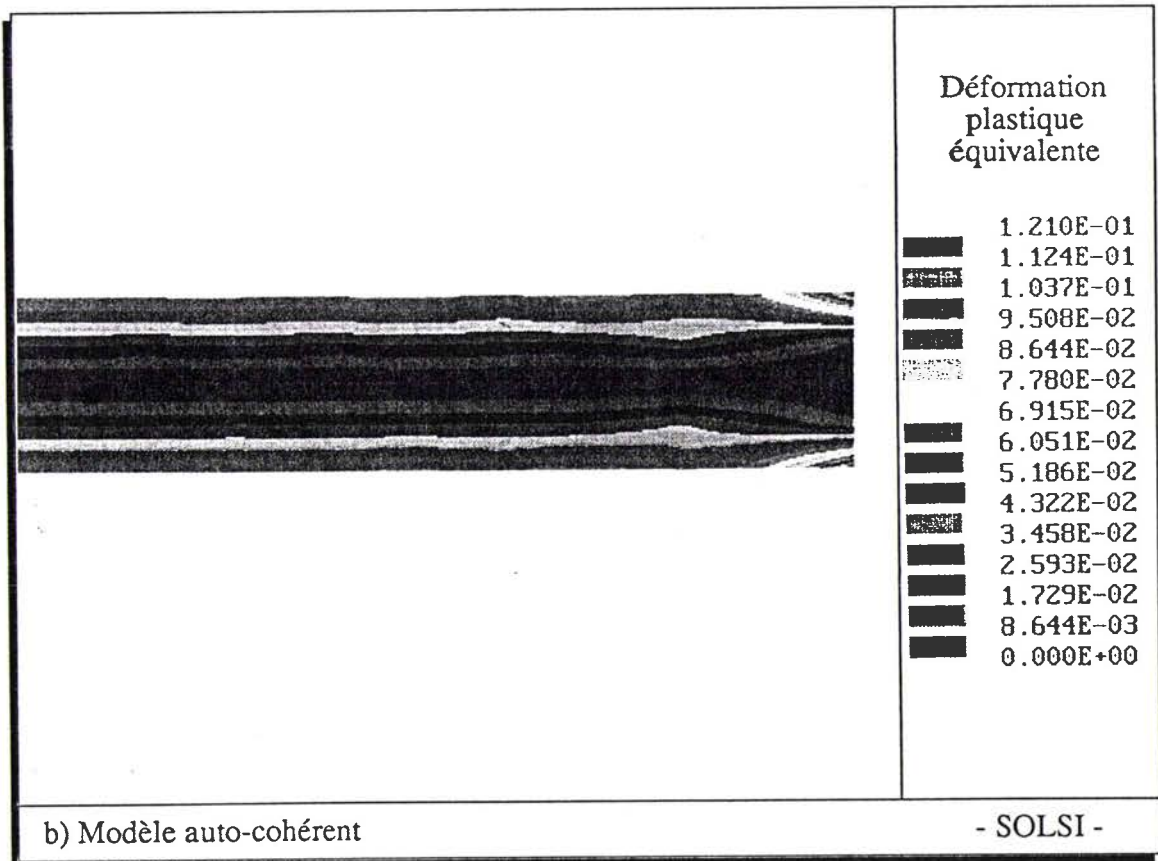
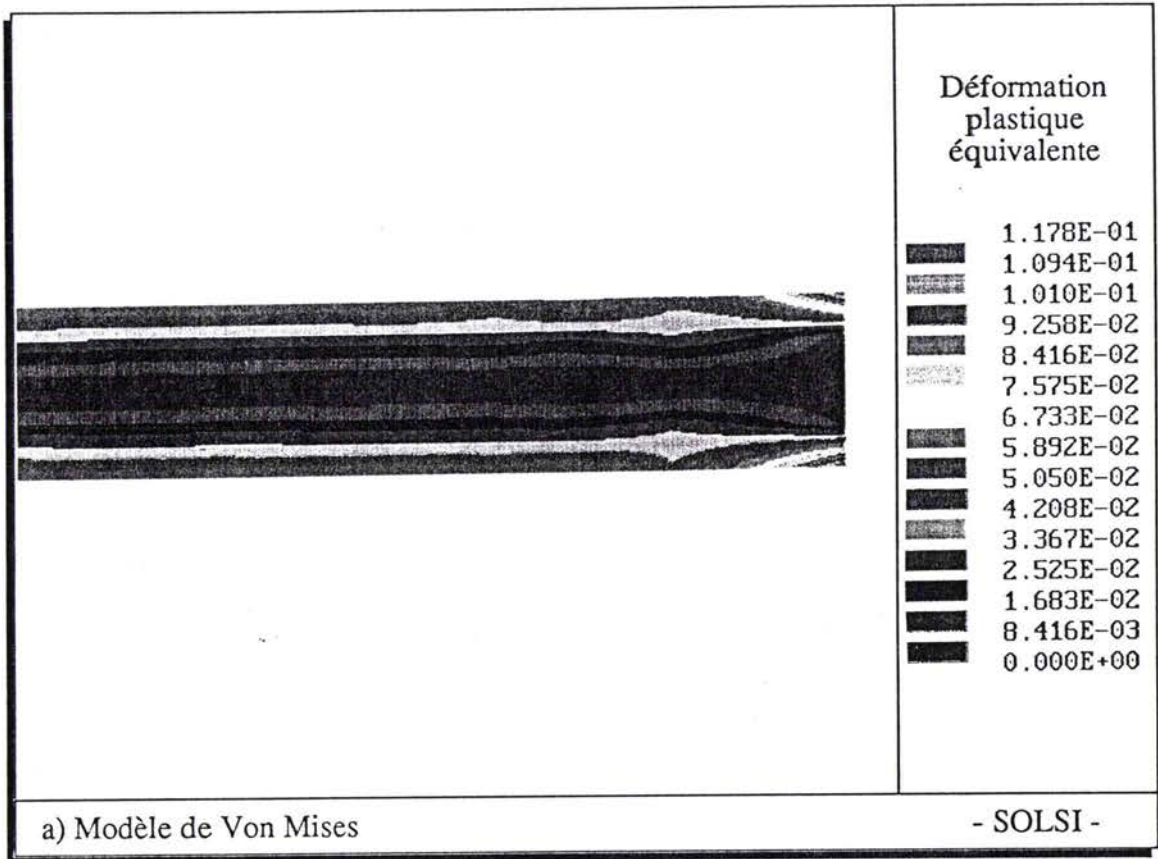


Fig. III.4 : Comparaison des déformations plastiques équivalentes

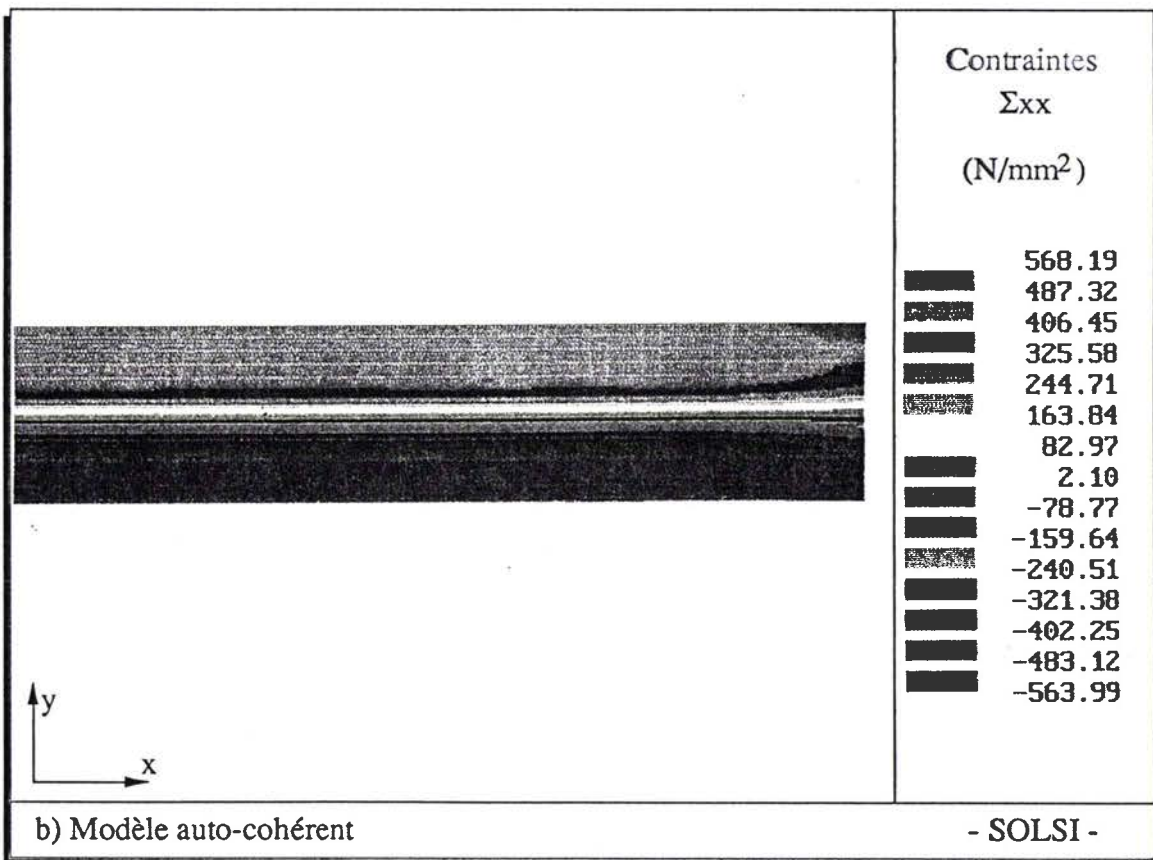
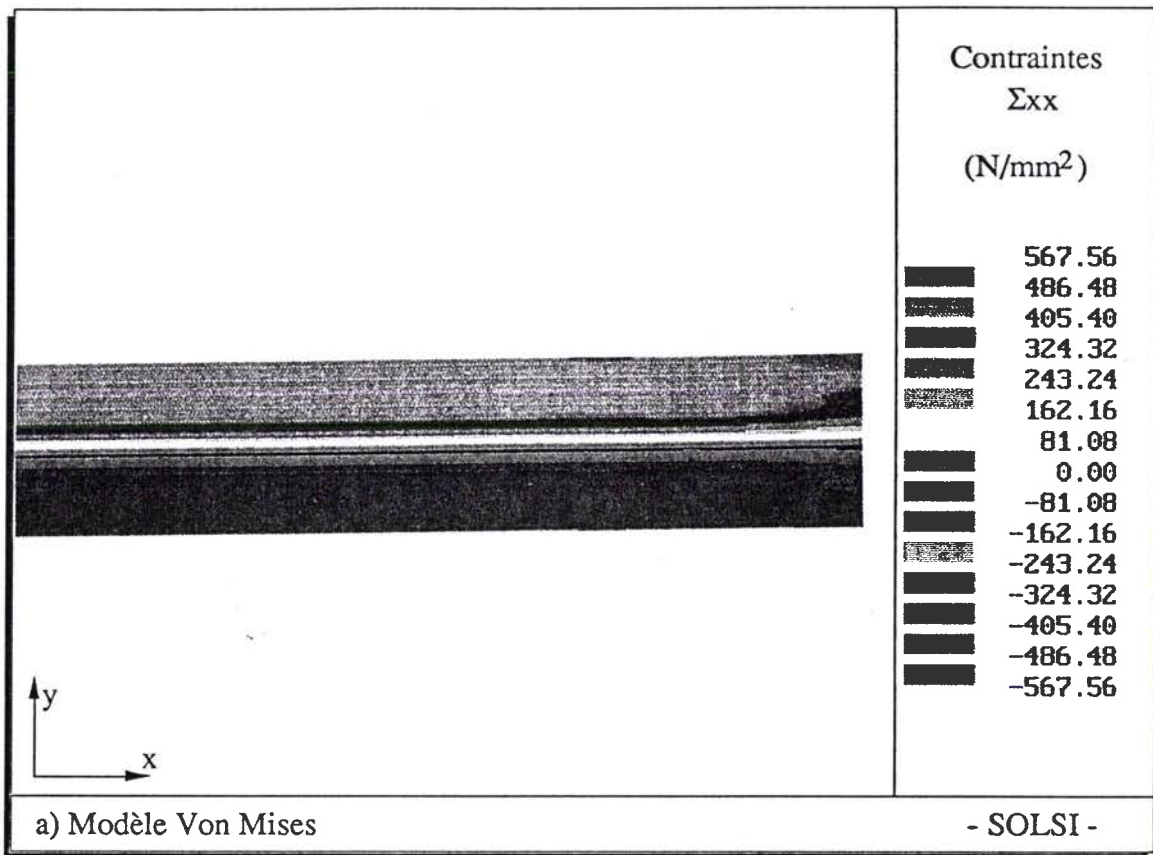


Fig. III.5 : Comparaison des distributions des contraintes ( $\Sigma_{xx}$ ) à la fin du chargement

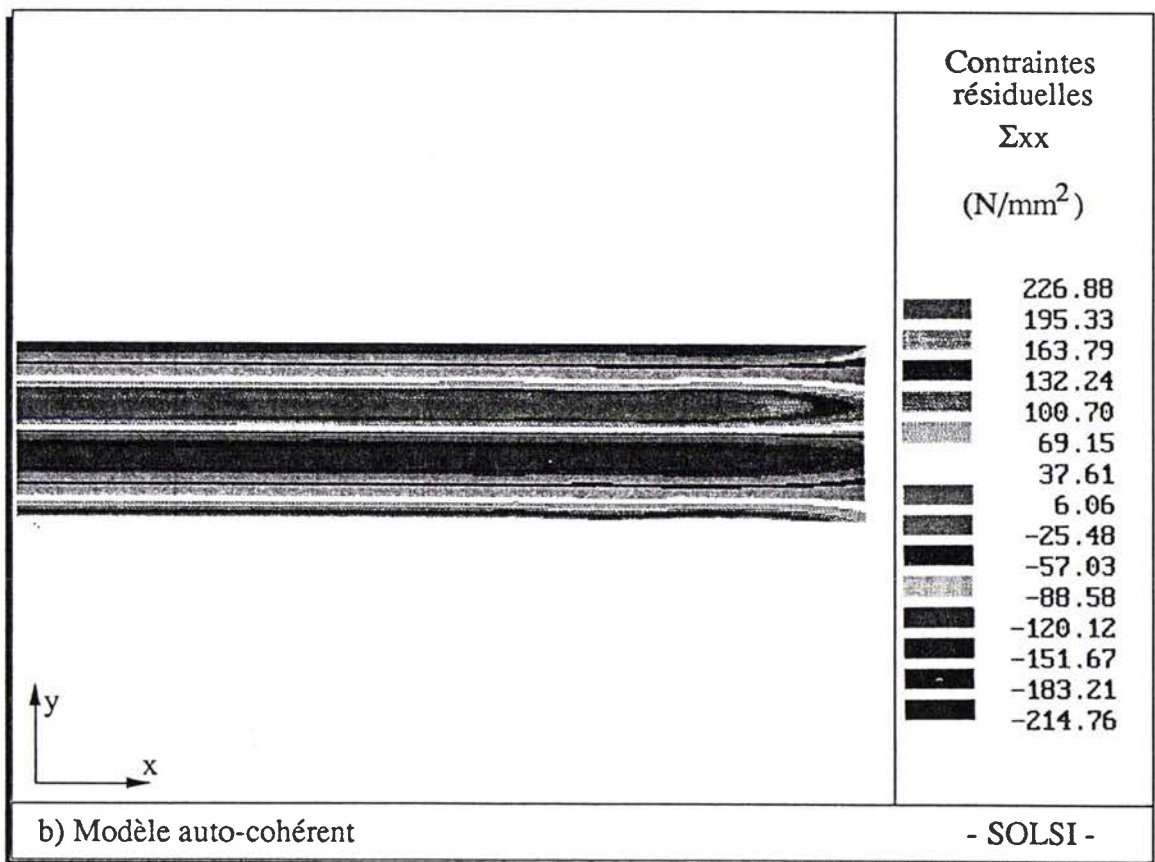
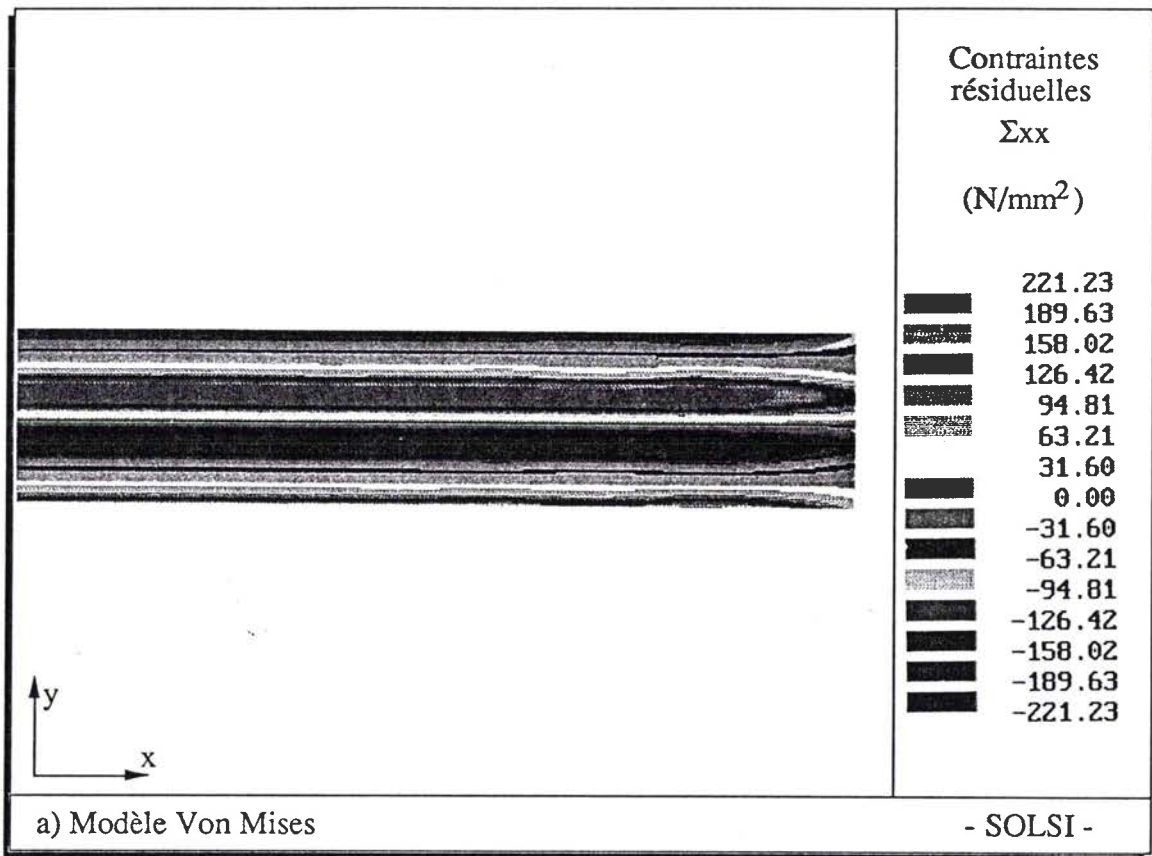
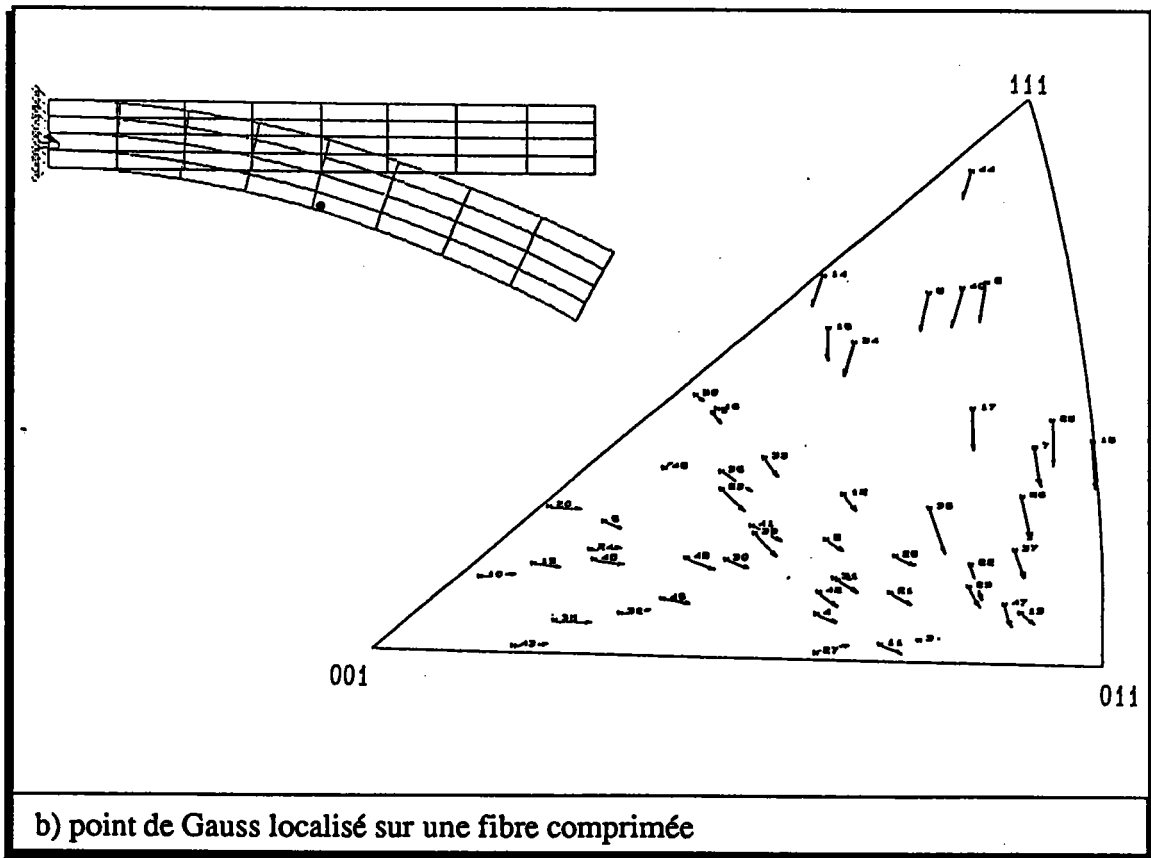
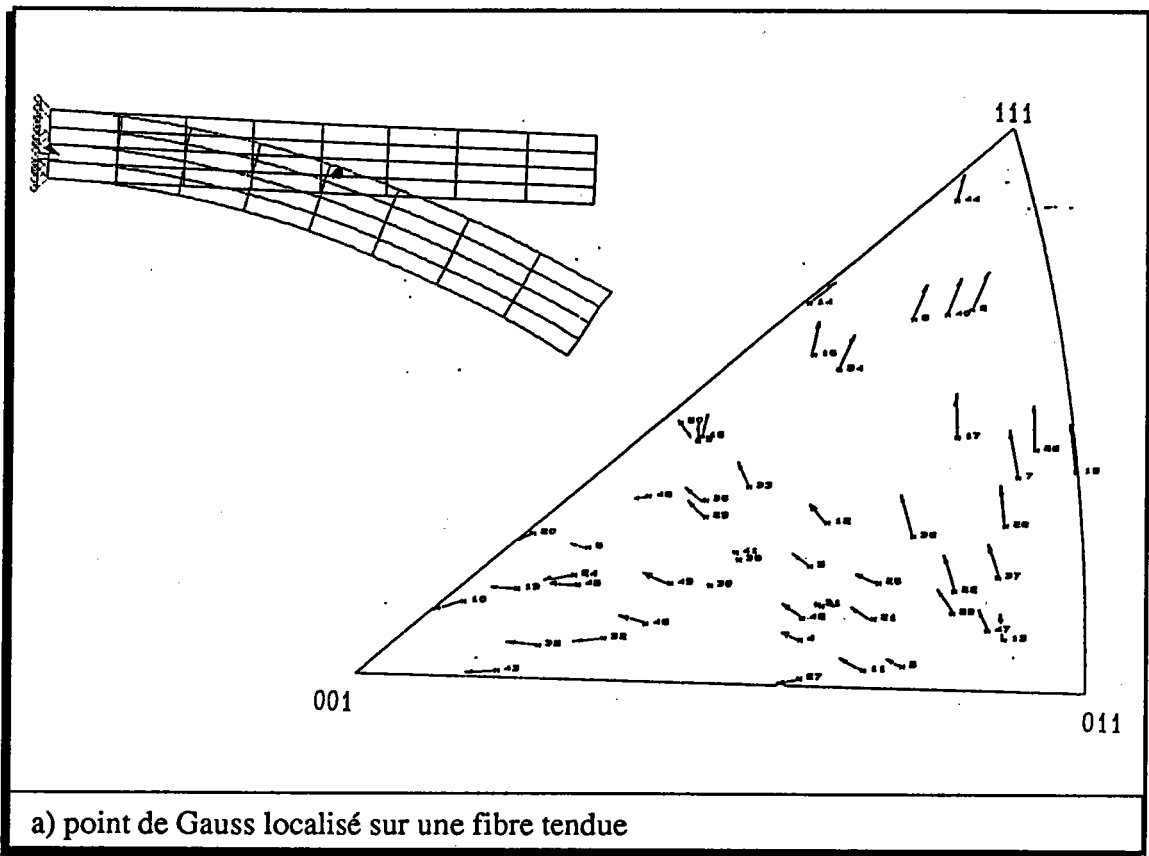


Fig. III.6 : Comparaison des distributions des contraintes résiduelles d'ordre I ( $\Sigma_{xx}$ ) après déchargement.





*Fig. III.7: Comparaison de l'évolution des textures cristallographiques suivant la position du point de Gauss dans le maillage.*

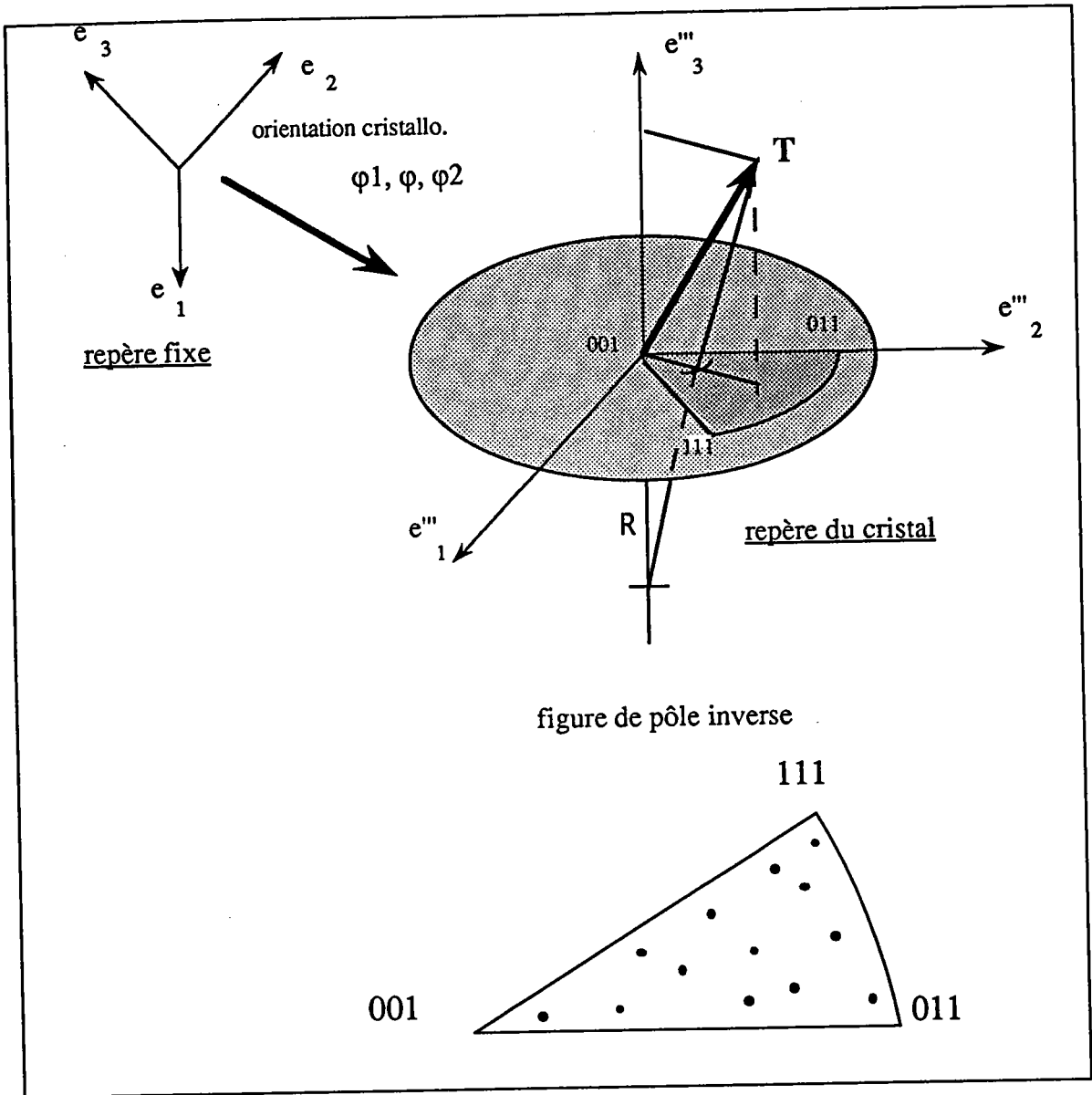


Fig. III.8: Obtention d'une figure de pôle inverse.

Un point sur la figure de pôle inverse représente la projection stéréographique dans le repère du cristal d'un vecteur unitaire  $T$ .

### III.3 - Éprouvettes entaillées soumises à un essai de flexion 3 points

Les tôles laminées qui sont utilisées pour l'élaboration de produits emboutis possèdent généralement une structure interne orientée dont la conséquence sur le plan macroscopique est une anisotropie des propriétés mécaniques. Les modèles phénoménologiques actuellement employés dans les codes de calcul résolvent ce problème en supposant l'existence de certaines symétries (matériaux orthotropes). Or, si cette hypothèse est vérifiée à l'état initial de la tôle, lorsque celle-ci subit des déformations complexes et irréversibles, une anisotropie induite se superpose à l'anisotropie initiale et par conséquent, les symétries sont détruites. À notre connaissance, aucun code de simulation d'emboutissage n'est capable, actuellement, de traiter un problème en prenant en compte l'anisotropie sous sa forme la plus générale.

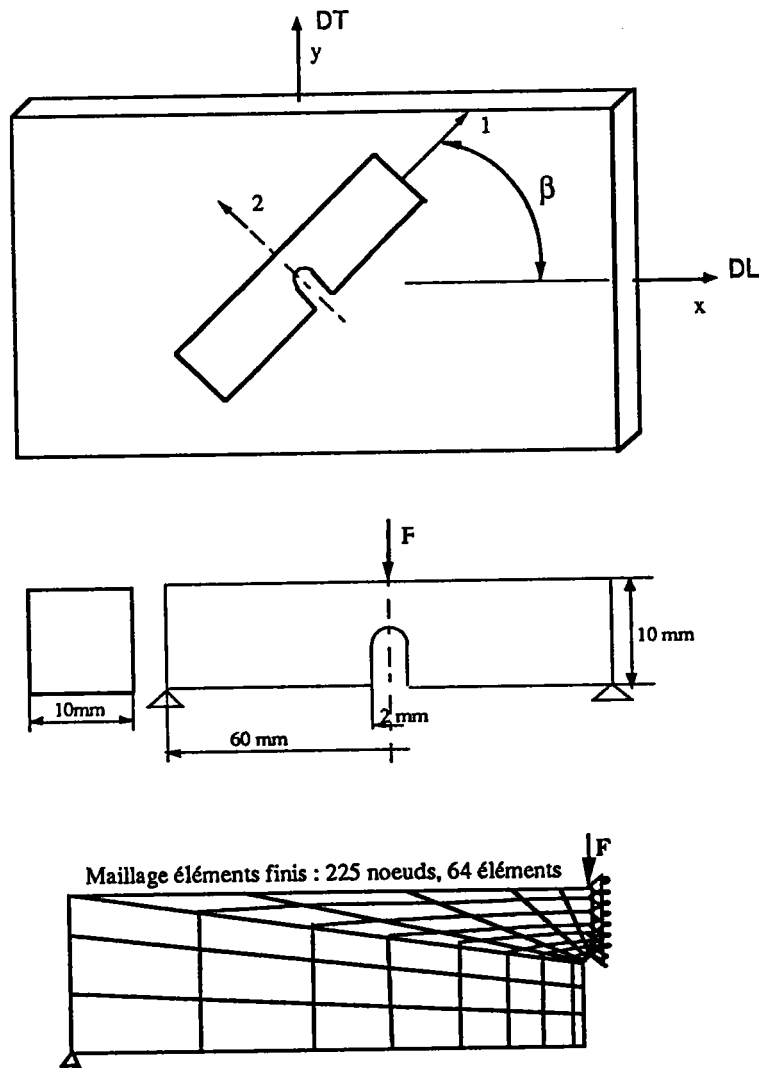


Fig. III.9 : Éprouvettes entaillées prélevées dans une tôle laminée - maillage

L'exemple que nous présentons a donc pour objectif de montrer les possibilités du modèle auto-cohérent dans ce domaine. L'essai consiste à simuler — par un calcul E.F 2D "auto-cohérent" — la flexion 3 points de deux éprouvettes entaillées qui sont supposées avoir été prélevées chacune dans une tôle laminée suivant une direction particulière : respectivement  $0^\circ$  et  $45^\circ$  par rapport à la direction de laminage DL (fig. III.9). Nous construisons ainsi un problème où intervient une variation du trajet de chargement et où localement, à la pointe de l'entaille, un champ de déformation complexe se développe.

### III.3.1 - Caractérisation de la microstructure des éprouvettes entaillées

Le problème qui apparaît en premier lieu, est de déterminer la distribution des orientations cristallographiques caractérisant la tôle laminée, dans laquelle les éprouvettes sont supposées être prélevées. Contrairement à un matériau isotrope tel que nous l'avons vu précédemment, cette distribution n'est pas aléatoire. La détermination de la texture cristallographique initiale peut se faire de deux façons différentes. La première consiste à caractériser le matériau à partir de données expérimentales. Il est en effet possible, en procédant à une analyse par diffraction X sur un échantillon de tôle laminée, d'obtenir des figures de pôles  $\{hkl\}$  expérimentales. Celles-ci représentent les projections stéréographiques, sur le plan de l'échantillon, de la distribution de densité des pôles  $\{hkl\}$  dans toutes les directions de l'échantillon (voir exemple fig. III.10<sub>a</sub>). A partir de ces figures, on détermine ensuite une fonction de distribution des orientations cristallographiques (F.D.O.C.). Cette fonction peut être considérée comme la fraction volumique de cristaux, par rapport au volume total de l'échantillon, possédant l'orientation  $(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$  à un écart angulaire près. La F.D.O.C. fournit un nombre important d'orientations différentes. Il est donc nécessaire, pour des raisons évidentes de temps de calcul, d'en sélectionner un nombre restreint. Diverses méthodes ont été développées dans ce sens. On peut citer entre autre les travaux de Francois. [38]. Ceux-ci ont été notamment utilisés par Reubrez [36] pour sélectionner un certain nombre d'orientations représentatives de textures de laminage expérimentales. Son expérience laisse penser qu'un nombre de 1000 orientations semble être un minimum pour caractériser le matériau en vue d'un calcul auto-cohérent tel que nous le pratiquons ici (fig. III.10<sub>b</sub>). Or si ce nombre est tout à fait acceptable pour effectuer un calcul sur un élément de volume polycristallin, il est encore excessif pour modéliser le comportement d'une structure par la M.E.F. A titre indicatif la simulation d'un essai de traction sur un agrégat de 1000 grains

jusqu'à 10% de déformation plastique dure environ 6 heures sur une station Apollo DN4500 dont la capacité est de l'ordre de 3 MIPS (le même calcul sur une station HP 730 à 70 MIPS dure 15 minutes).

En ce qui concerne notre exemple, il ne s'agit pas de faire une comparaison avec un problème réel, nous proposons donc une autre méthode essentiellement numérique. Celle-ci consiste à construire un agrégat isotrope de 100 grains sphériques (dont les caractéristiques sont celles données dans le tableau III.1) et de lui soumettre, à travers un calcul auto-cohérent, un chargement assimilable à du laminage. Le nouvel agrégat (anisotrope) ainsi généré est alors utilisé pour matérialiser les points de Gauss du maillage des éprouvettes entaillées. Il suffit ensuite simplement de tourner l'agrégat, par l'intermédiaire des angles d'Euler, selon que l'éprouvette est prélevée à 0° ou à 45° par rapport à la direction DL.

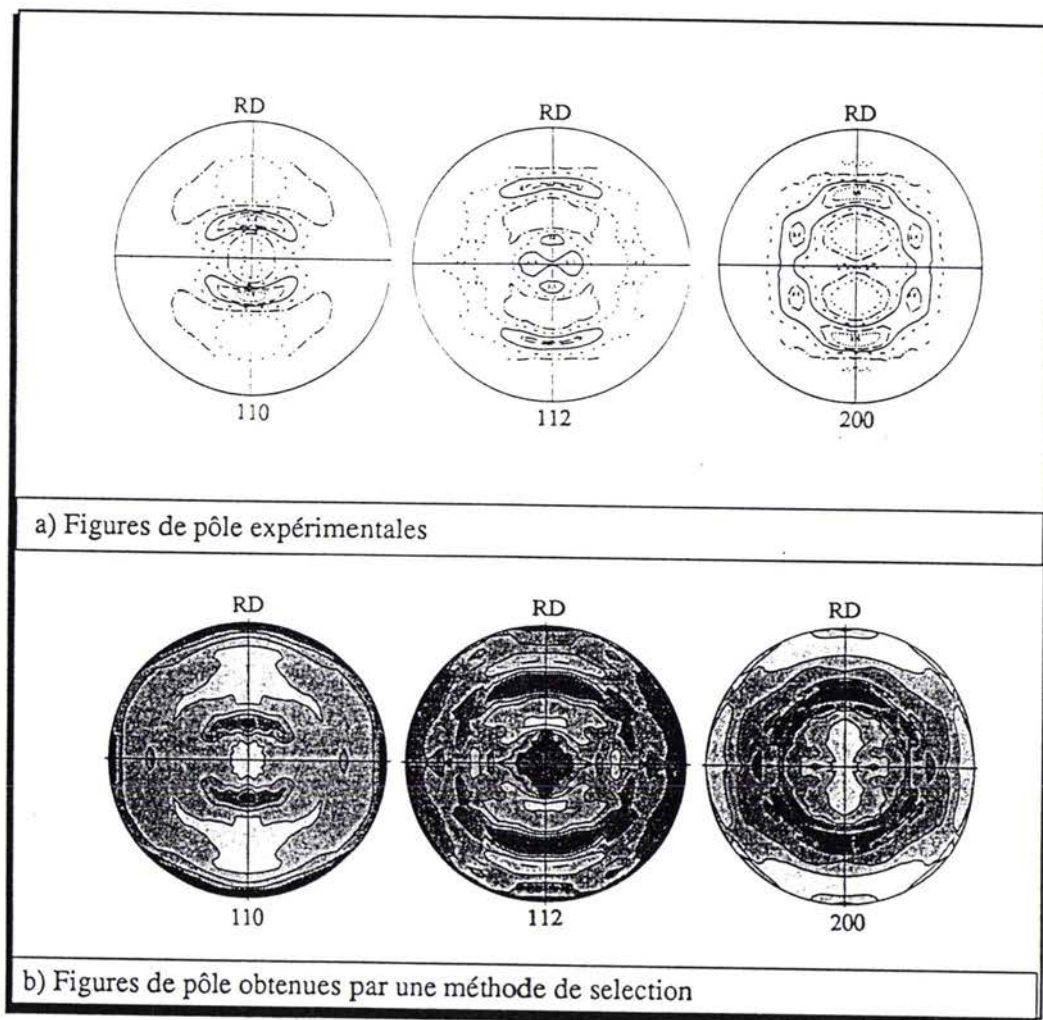


Fig. III.10 : - a) figures de pôle expérimentales d'une tôle d'acier laminée.  
- b) figures de pôle obtenue en sélectionnant 1000 orientations représentatives (d'après Reubrez [35])

Le chargement qui est appliqué à l'agrégat isotrope correspond à un état de déformation macroscopique de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} E_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} = -E_{xx} \end{bmatrix}$$

$E_{xx}$  et  $E_{zz}$  désignent respectivement les déformations dans la direction DL et dans la direction normale au plan de la tôle (DN).

Cette sollicitation est appliquée par incréments successifs jusqu'à atteindre une déformation plastique équivalente de 100%. Les figures III.11<sub>a</sub> et III.11<sub>b</sub> montrent respectivement les figures de pôles {110} représentatives des textures de l'agrégat avant et après déformation. On remarque que la répartition des orientations cristallographiques qui était initialement aléatoire a sensiblement évolué.

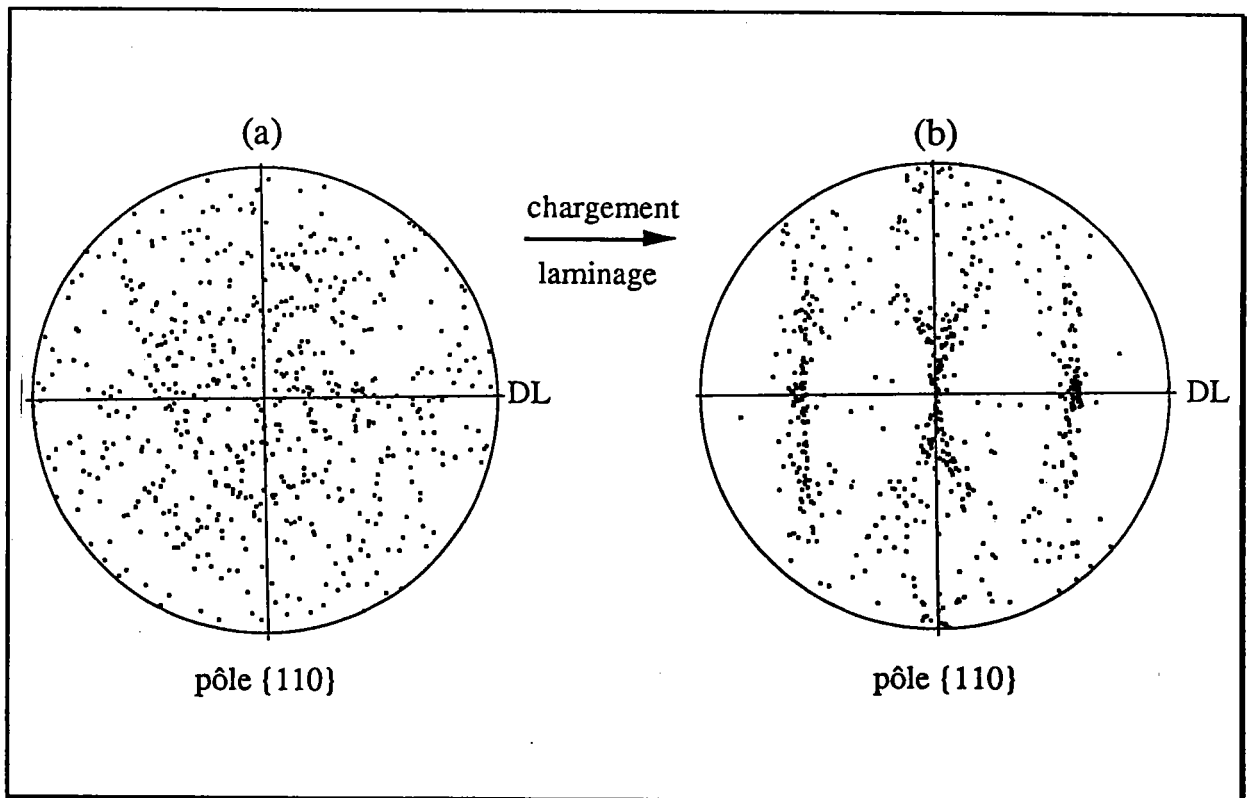


Fig. III.11 : Évolution de la texture cristallographique au cours d'un chargement de laminage (simulation auto-cohérente avec un agrégat de 100 grains initialement isotrope).

- a) texture initiale

- b) texture obtenue après une déformation plastique équivalente de 100%.

A cette évolution il faut également ajouter celle des cissions critiques qui deviennent, après déformation, différentes pour chaque système de glissement. De plus, il subsiste dans chaque grain, après relâchement de l'effort, des contraintes résiduelles appelées contraintes d'ordre II qui proviennent des incompatibilités des déformations inter-granulaires. Ce champ de contraintes vérifie évidemment les équations d'équilibre dans le volume de l'agrégat. De telle sorte, nous avons, lorsqu'il n'y a plus d'effort appliqué :

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} = 0$$

Pour montrer l'effet de ces contraintes résiduelles sur le comportement futur du matériau nous avons effectuée des simulations d'essais de traction suivant trois directions différentes ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport à DL) sur l'agrégat isotrope ainsi que sur l'agrégat obtenu après déformation. Les trois courbes de réponses obtenues pour l'agrégat isotrope (fig. III.12<sub>a</sub>) sont, comme attendu, identiques, alors que pour l'agrégat anisotrope ces trois courbes sont sensiblement différentes (fig. III.12<sub>b</sub>) du fait de la texture cristallographique mais surtout du fait de l'existence de contraintes inter-granulaires résiduelles qui font évoluer la limite d'écoulement plastique différemment selon la direction de sollicitation.

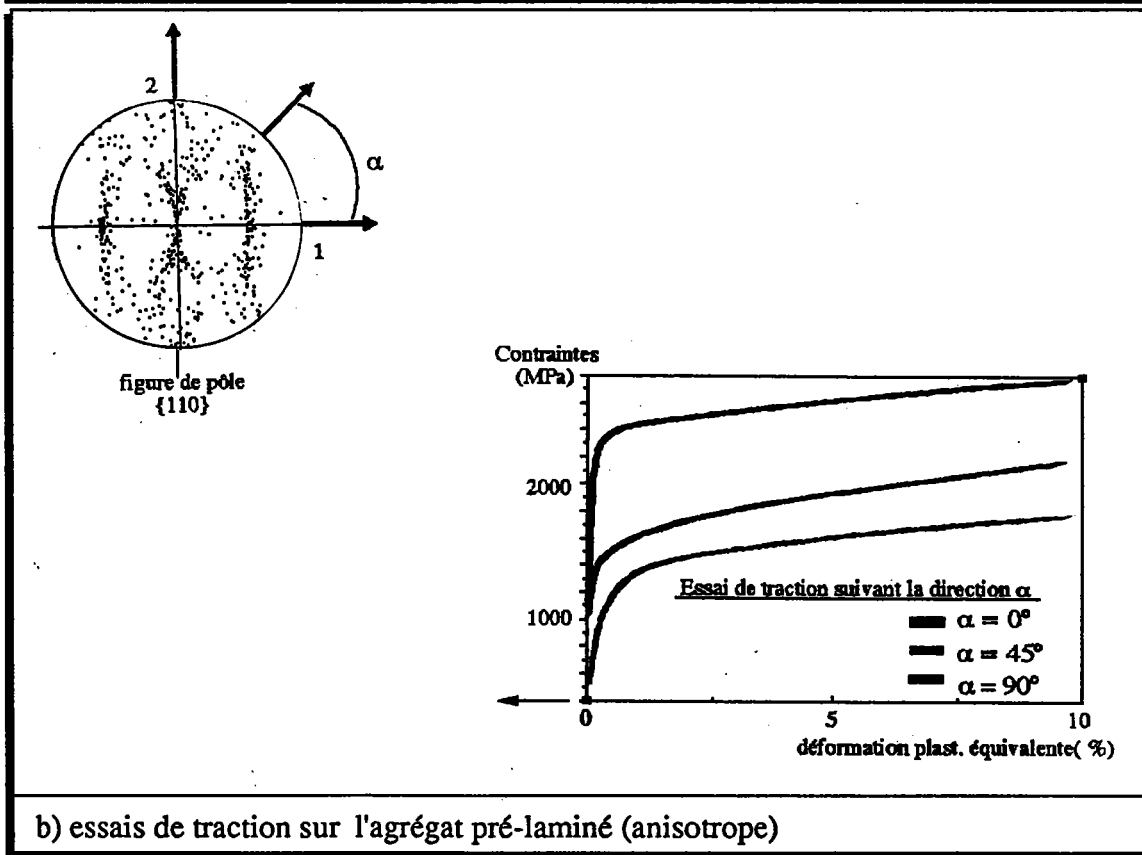
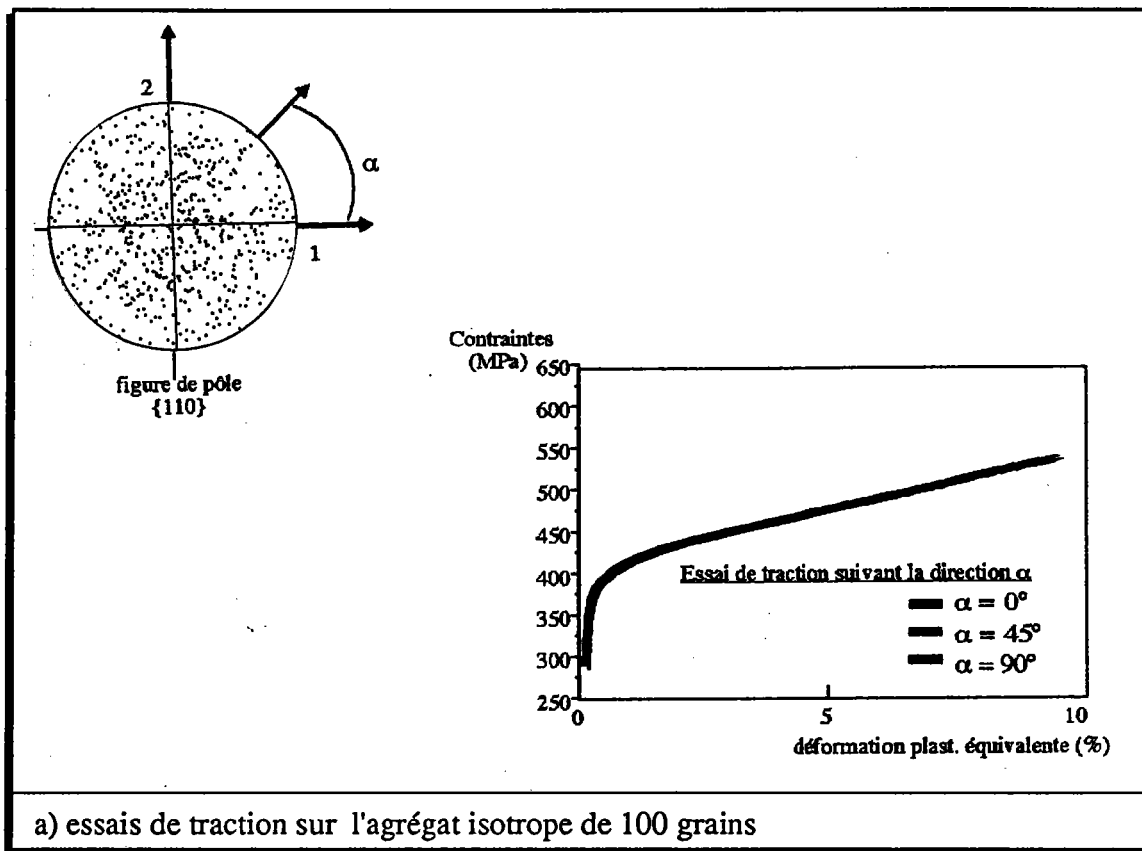


Fig. III.12 : Simulation d'essais de traction suivant trois directions différentes sur deux agrégats de 100 grains - a) agrégat isotrope - b) agrégat anisotrope



Remarque importante :

Dans la réalité, les courbes de tractions d'une tôle laminée ne présente pas une différence aussi prononcée que sur la fig. III.12<sub>b</sub>. Cela est dû en partie aux divers opérations (tels que les traitements thermiques) qui sont effectuées pour éliminer partiellement les contraintes résiduelles. Or, les essais numériques de traction qui sont présentés sur cette figure sont effectués sur l'agrégat, à son état de fin de déchargement, en ayant conservé les contraintes résiduelles subsistant dans chaque grain et le niveau atteint par les cissions critiques. Nous avons procédé de la sorte afin d'accentuer les phénomènes. Alors, lorsque nous parlons d'éprouvettes entaillées prélevée dans une tôle laminée et soumises à un essai de flexion trois points, il faut comprendre qu'il s'agit, en fait, d'un chargement de type laminage suivi directement d'un autre chargement qui résulte d'une flexion imposée à la structure. Il ne faudra donc pas être étonné des niveaux de contraintes atteints qui, dans la réalité, engendreraient l'endommagement inévitable du matériau.

### *Représentation graphique des contraintes inter-granulaires*

Avant d'aborder le calcul par E.F. des éprouvettes en flexion, il apparaît intéressant, vue l'importance des contraintes d'ordre II dans le comportement du matériau, de chercher un moyen de les représenter dans le cadre de l'analyse de structures.

Lorsque nous effectuons une simulation par l'intermédiaire du modèle auto-cohérent, les contraintes inter-granulaires sont stockées dans une place mémoire allouée à l'identification du grain. Il est donc tout à fait possible de les visualiser. Il serait par exemple envisageable, par l'intermédiaire d'une figure de pôle, d'associer à chaque point (représentant une orientation cristallographique) une couleur indiquant la valeur d'une composante du tenseur des contraintes ou encore plus globalement la valeur d'une contrainte équivalente. Il serait également possible, pour citer un autre exemple, de suivre le développement de ces contraintes sous forme de diagrammes contrainte-déformation.

Le problème est que ces représentations ne s'accommodent pas très bien à l'application au calcul de structures où il est habituel de représenter l'état du matériau sur la géométrie de la structure elle-même. La difficulté ici, réside dans

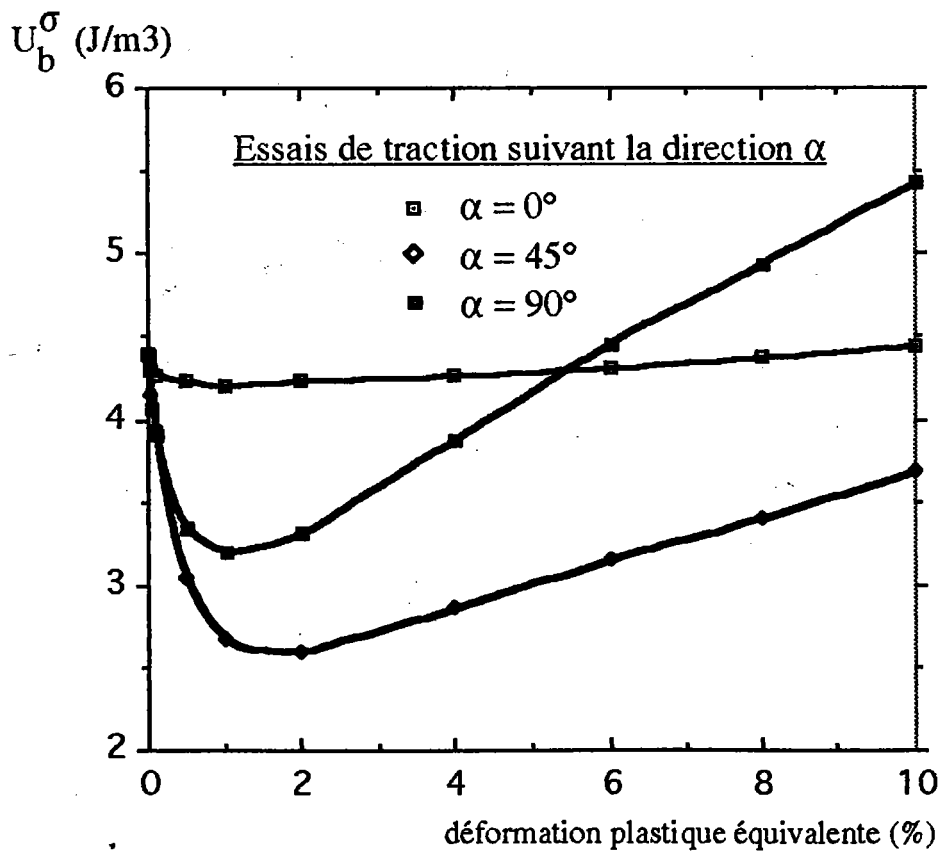
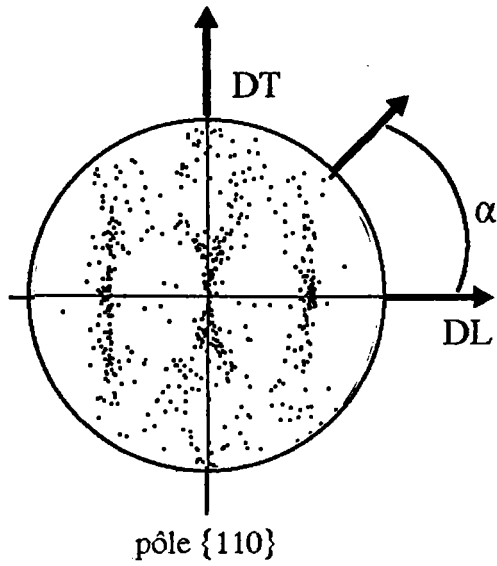
le fait que les contraintes inter-granulaires sont des variables microscopiques et par conséquent à une échelle différente de celle de la structure. Une solution consiste alors à remonter l'information à l'échelle macroscopique. Cette procédure peut s'effectuer par l'intermédiaire d'un calcul d'énergie bloquée. En effet, lorsqu'on établit le bilan énergétique du processus de déformation plastique, on constate que seule une partie du travail de déformation est dissipée. L'autre partie est conservée au sein du matériau sous forme notamment de contraintes internes d'ordre II. Cette partie de l'énergie bloquée s'écrit pour un agrégat de  $\mathcal{N}$  grains de la façon suivante :

$$U_b^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} \frac{v^I}{V} \sigma_{ij}^I e_{ij}^{el^I}$$

où  $e_{ij}^{el^I}$  représente ici les composantes du tenseur des déformations élastiques d'Euler-Almansi.

$U_b^\sigma$  apparaît bien comme une variable macroscopique, fournissant une information globale sur l'état des contraintes résiduelles qui subsiste dans un agrégat polycristallin. Dans une analyse de structure par Éléments Finis  $U_b^\sigma$  sera déterminée pour chaque point de Gauss du maillage et pourra donc être traitée de la même manière que les variables macroscopiques habituelles (contraintes et déformations macroscopiques, températures, etc...).

La figure III.13 nous montre, pour exemple, l'évolution de l'énergie bloquée pour les trois essais de traction (0°, 45° et 90° par rapport à DL) effectués sur l'agrégat de 100 grains pré-laminé. Lorsque l'effort de traction est appliqué suivant la direction de laminage (DL), l'énergie reste constante au cours de la simulation. A l'inverse dans les autres directions (45° et 90°) l'énergie est dans un premier temps restituée (elle aide plus ou moins la déformation à ce faire) puis augmente progressivement. Les courbes obtenues confirment qu'il est plus facile de déformer l'agrégat par un essai de traction à 45° par rapport à DL ( ce que montrait déjà la fig. III.12<sub>b</sub>).



*Fig. III.13 : Évolution de l'énergie bloquée  $U_b^\sigma$   
 - essais de traction sur un agrégat de 100 grains pré laminée.*

### III.3.2 - Protocole d'essai

La microstructure initiale des éprouvettes étant déterminée, celle-ci est dupliquée sur les 256 points de Gauss de maillage (64 éléments à 8 noeuds et 4 points d'intégration). Il faut donc suivre l'évolution de 25600 grains pour étudier le comportement macroscopique de l'éprouvette entaillée telle qu'elle est définie sur la figure III.9.

Le chargement qui est imposé aux éprouvettes correspond à une force concentrée, appliquée de façon incrémentale jusqu'à obtenir une flèche maximale de 2 mm (voir fig. III.15), puis la charge est complètement relâchée. L'effort nécessaire à atteindre ce déplacement est différent selon que l'éprouvette a été prélevée à  $0^\circ$  ou à  $45^\circ$ . Son intensité est respectivement de 5640 MPa et 5200 MPa soit une différence d'environ 8% (voir fig. III.14).

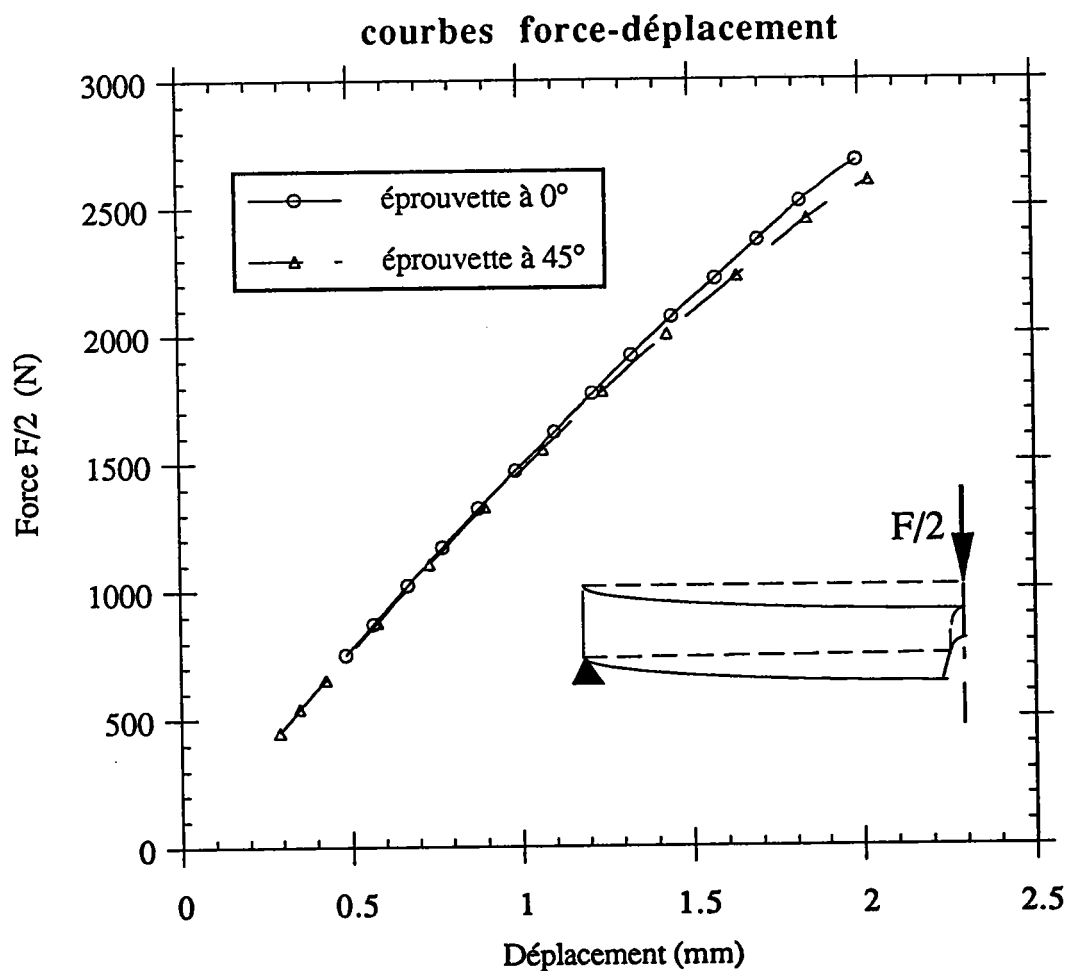


Fig. III.14 : Courbes force-déplacement en fonction de la direction de prélèvement de l'éprouvette entaillée

### III.3.3 - Résultats

La figure III.16 visualise les déformées des deux éprouvettes après déchargement. On observe une différence relativement faible de l'ordre de 12%. L'éprouvette à  $0^\circ$  présente un retour élastique plus important.

Les figures III.17<sub>a</sub> et III.17<sub>b</sub> présentent, quant à elles, la distribution des déformations plastiques équivalentes sous formes d'iso-valeurs. Comme il était possible de le prévoir à partir des résultats précédents, la déformation de l'éprouvette prélevée à  $45^\circ$  par rapport à DL est plus importante. On observe, en plus, que le maximum de la déformation est localisé différemment selon la direction de prélèvement.

Les distributions des contraintes équivalentes de Von Mises sont présentées, tout d'abord, à la fin du chargement (fig. III.18<sub>a</sub> et fig. III.18<sub>b</sub>), puis, après relâchement complet de l'effort de flexion (fig. III.19<sub>a</sub> et fig. III.19<sub>b</sub>). Dans le premier cas le niveau de contrainte, à la pointe de l'entaille, est supérieur dans l'éprouvette à  $0^\circ$ . Au contraire, lorsque l'effort est relâché, les contraintes résiduelles (contraintes d'ordre 1) sont supérieures dans l'éprouvette prélevée à  $45^\circ$ .

Les figures III.20<sub>a</sub> et III.20<sub>b</sub> donnent, à titre indicatif, l'énergie bloquée — telle que nous l'avons présentée précédemment — dans les deux éprouvettes après relâchement de la charge. On peut remarquer, en ce qui concerne la forme des distributions, une similitude avec les contraintes résiduelles d'ordre 1.

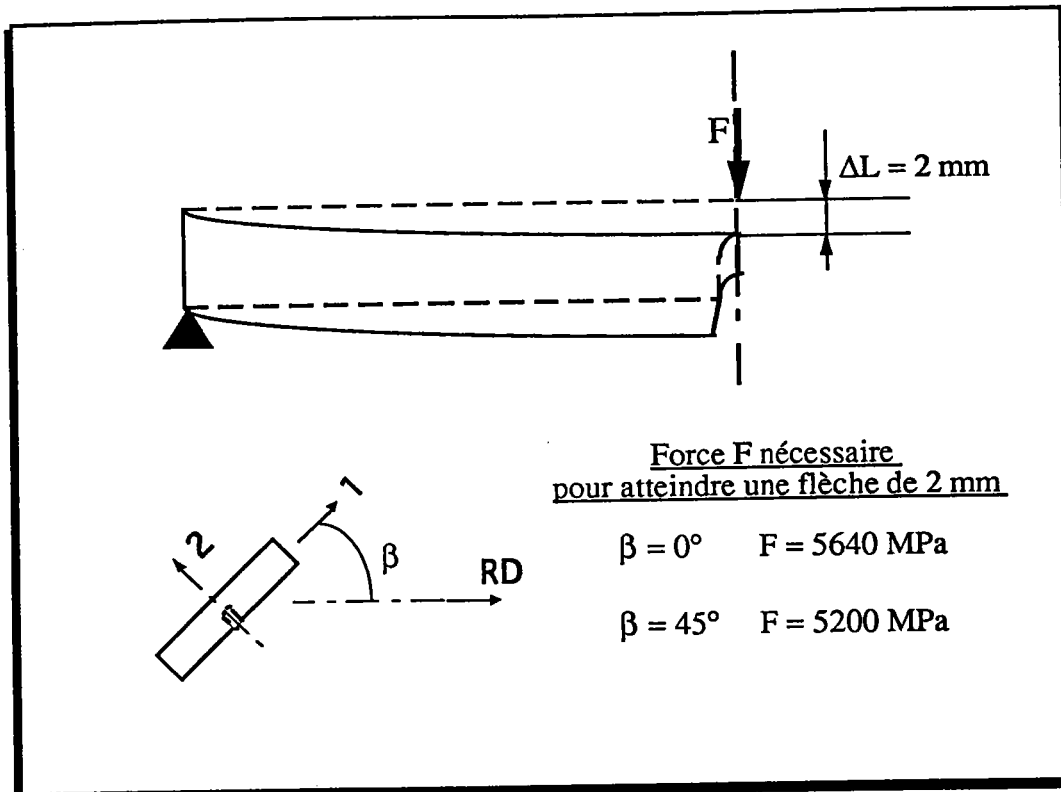


Fig. III.15: effort à appliquer pour obtenir une flèche de 2 mm en fonction de la direction de prélèvement de l'éprouvette

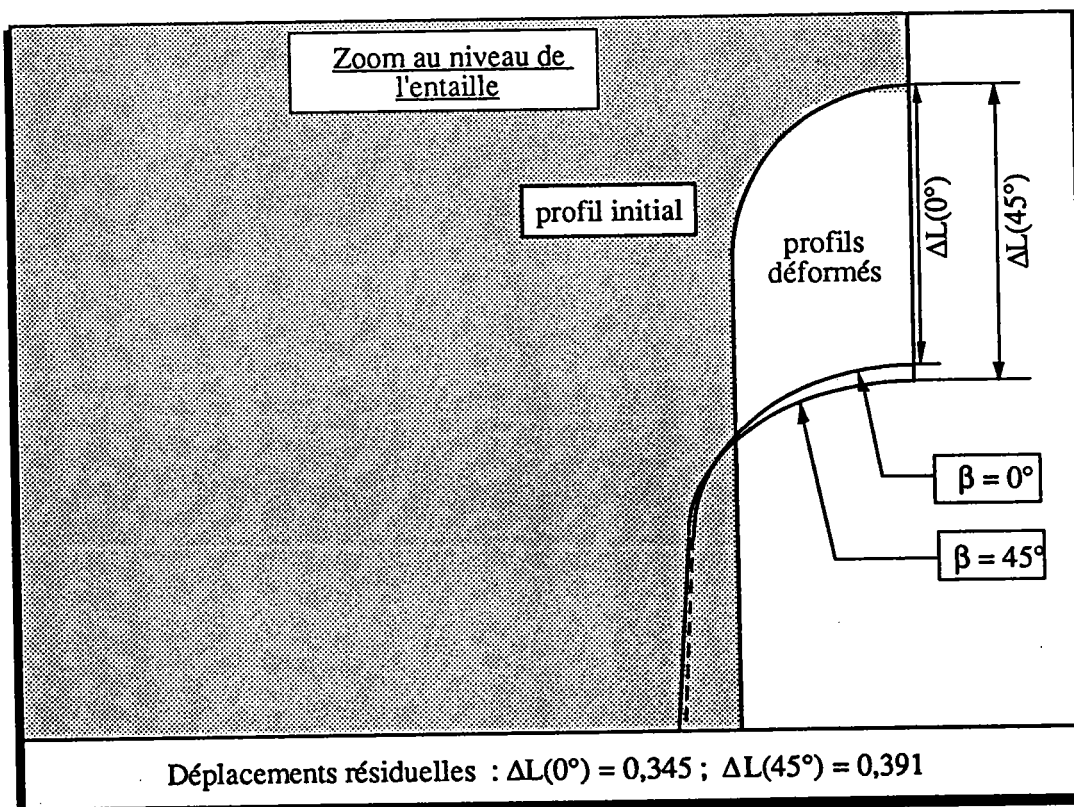


Fig. III.16: Flèche résiduelle après déchargement en fonction de la direction de prélèvement de l'éprouvette

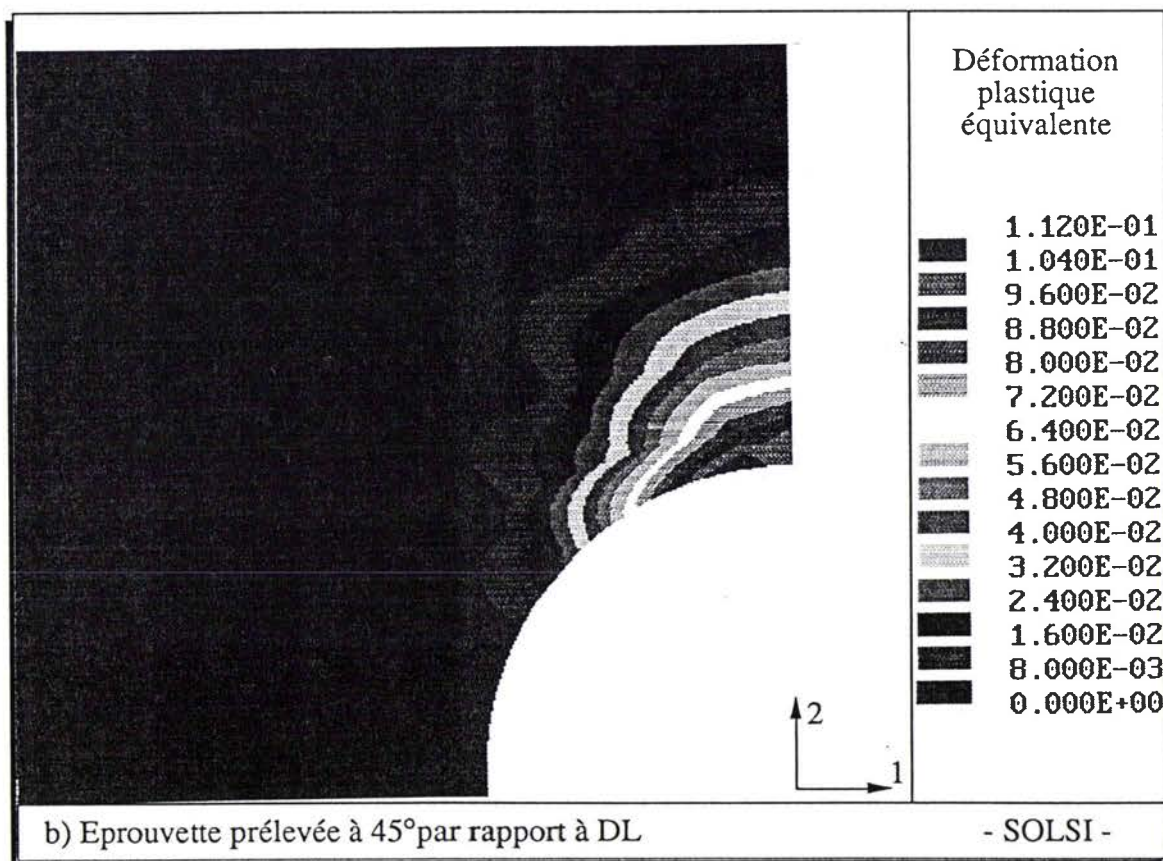
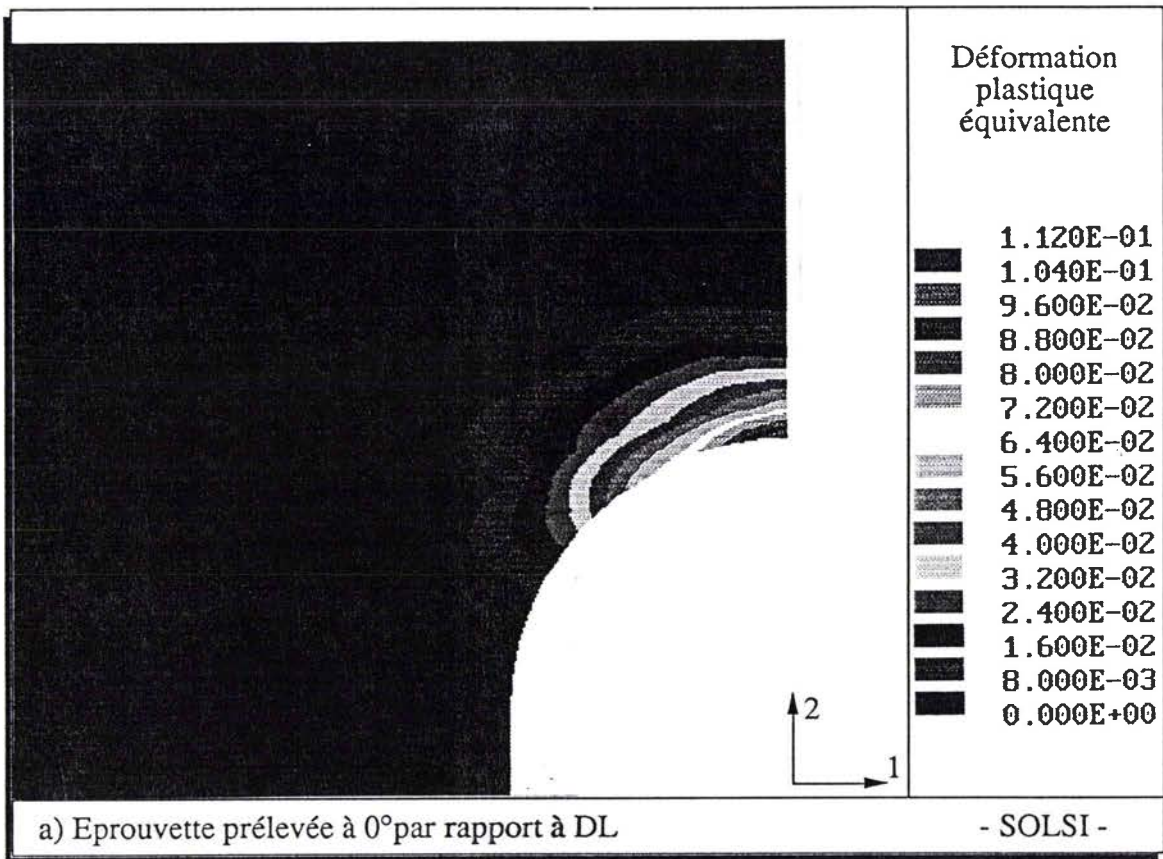


Fig. III.17: Comparaison des déformations plastiques équivalentes dans les deux éprouvettes  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$

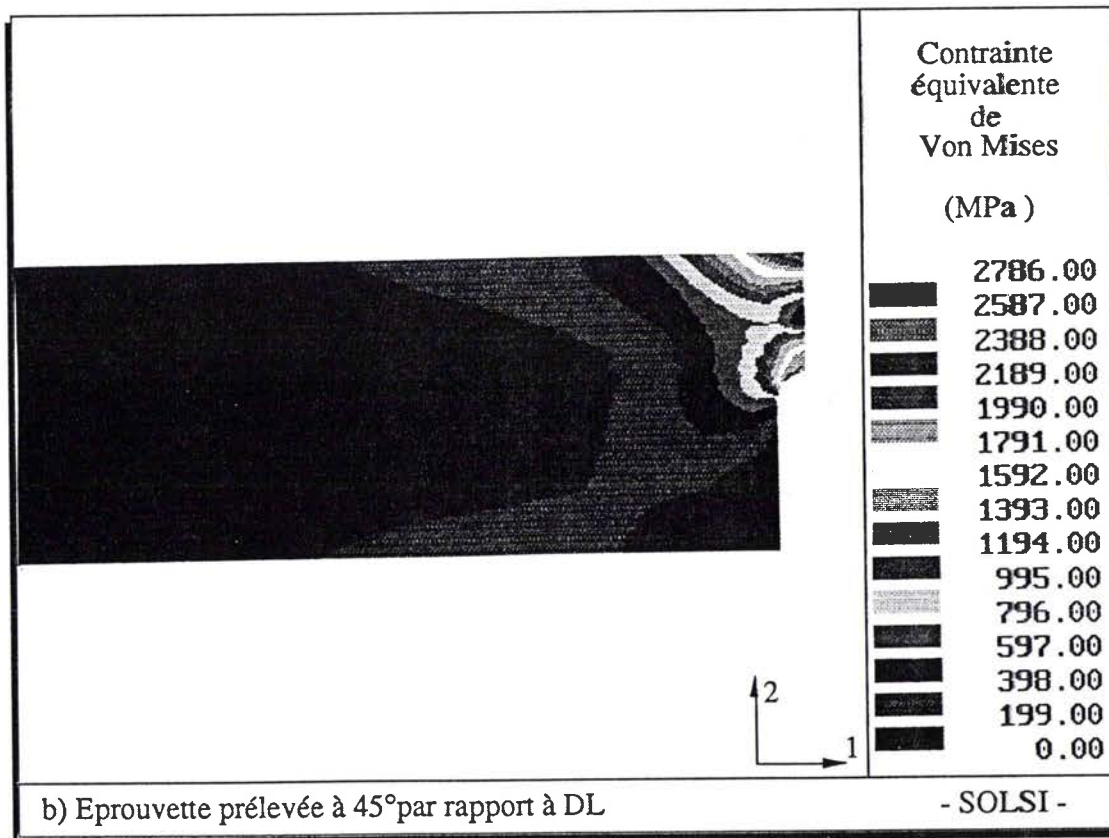
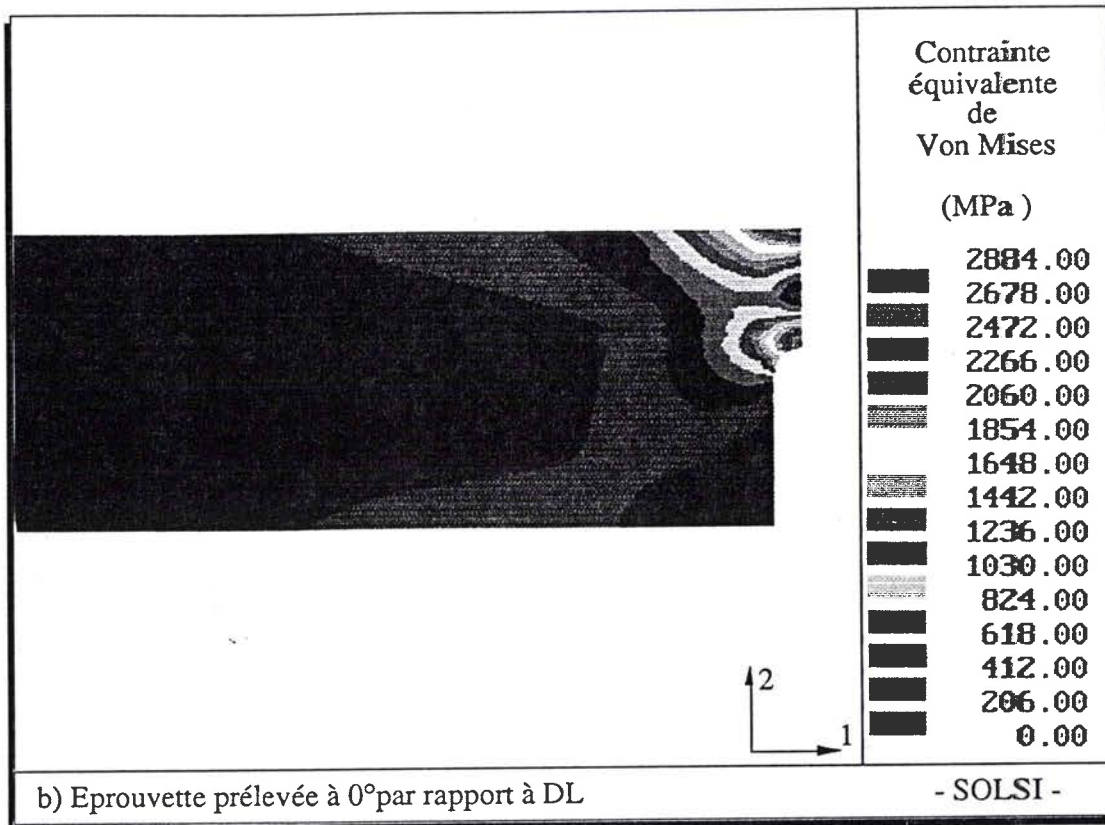


Fig. III.18: Comparaison, en fin de chargement, de la distribution des contraintes équivalentes de Von Mises dans les deux éprouvettes  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$



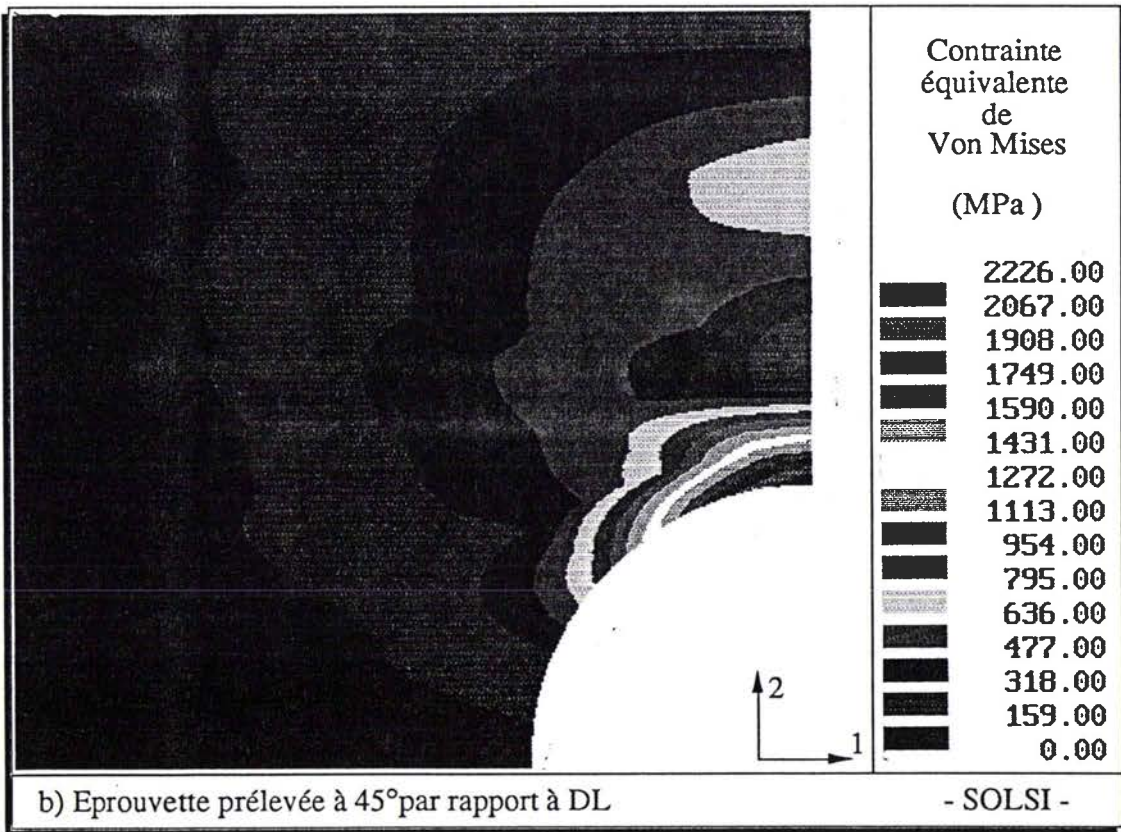
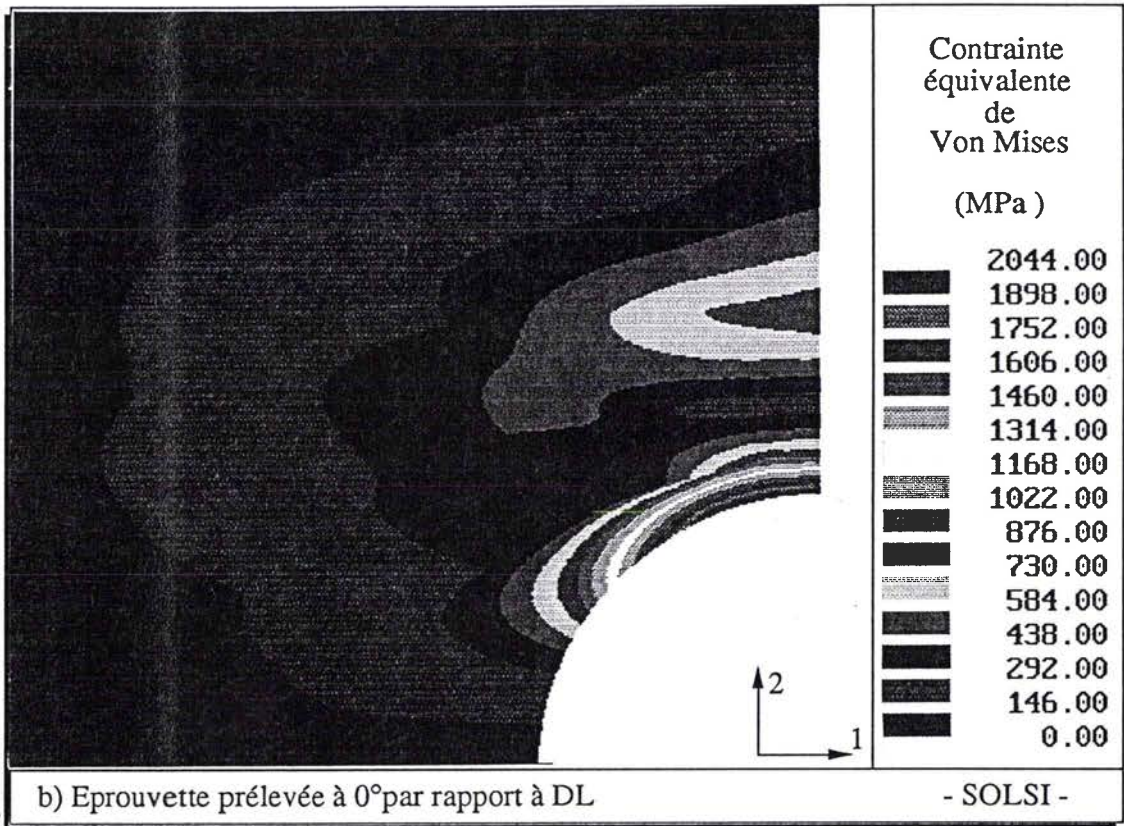


Fig. III.19: Comparaison, après déchargement, de la distribution des contraintes équivalentes de Von Mises dans les deux éprouvettes  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$

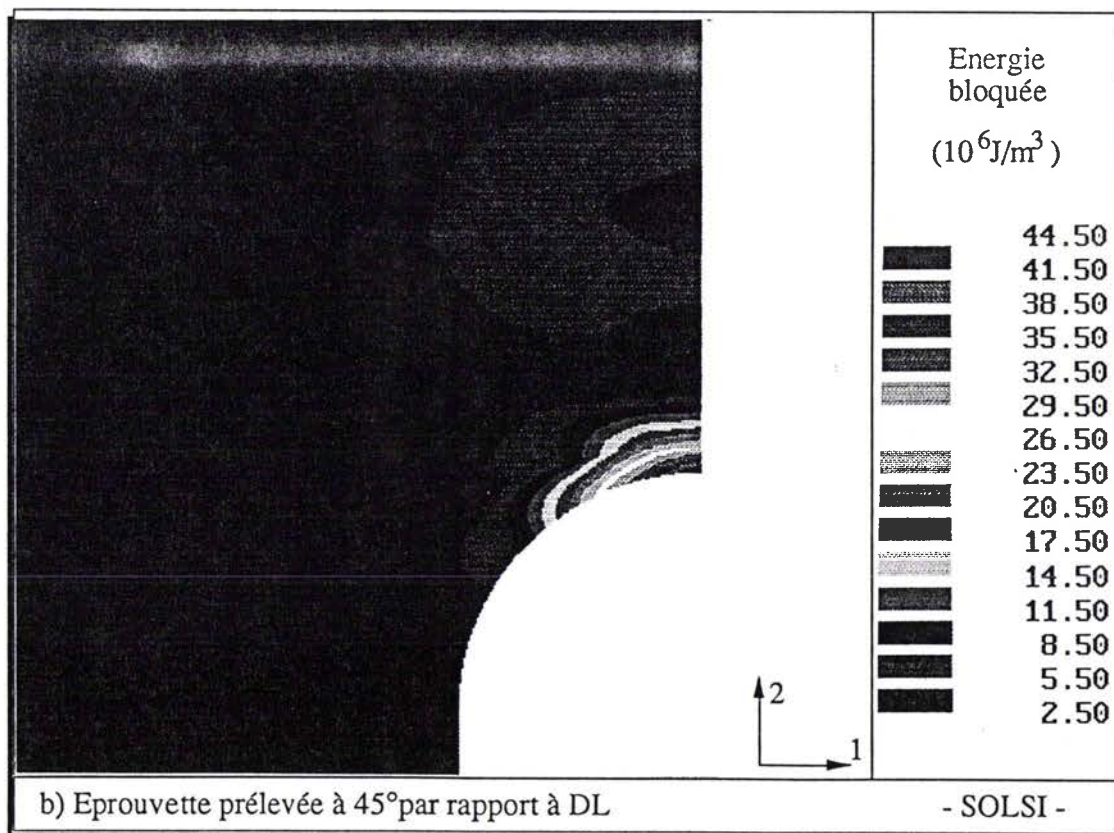
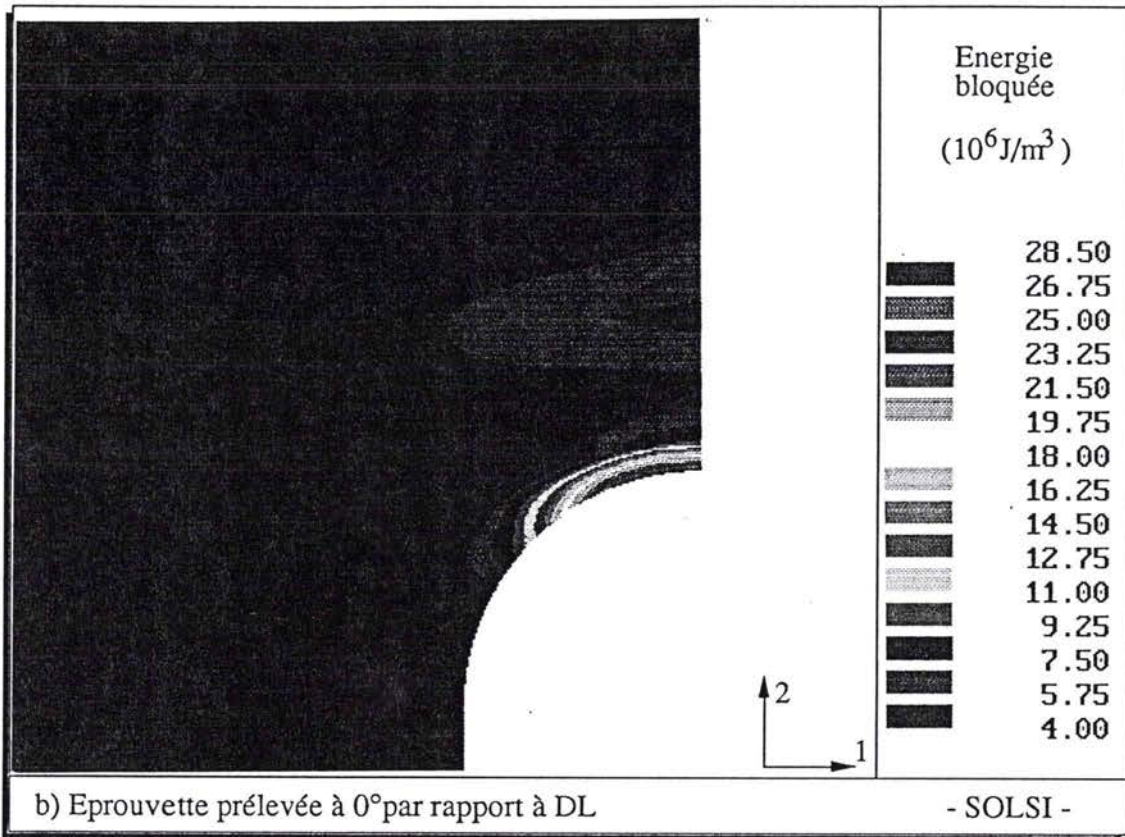


Fig. III.20: Comparaison de l'énergie bloquée  $U_b^\sigma$   
dans les deux éprouvettes  $\beta = 0^\circ$  et  $\beta = 45^\circ$

## Chapitre IV :

### CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce travail nous avons montré une autre façon d'aborder la modélisation du comportement élastoplastique des métaux dans les codes de calcul de structures utilisant la méthode des éléments finis.

L'originalité de la démarche proposée provient tout d'abord du caractère déductif du modèle. En effet, nous avons vu, au cours du premier chapitre, que la réponse du matériau microhétérogène, soumis à un chargement mécanique, se déduit de la connaissance de l'état de sa microstructure initiale. L'évolution de celle-ci est ensuite déterminée automatiquement par le calcul.

D'autre part, la description phénoménologique de l'écoulement plastique est repoussée à l'échelle du monocristal. Elle est de ce fait plus élémentaire que dans les modèles procédant de l'expérimentation macroscopique. En effet, les seuls paramètres à ajuster concernent le mécanisme du glissement cristallographique, c'est-à-dire, plus précisément, les seuils de glissement ( $\tau_{cr}^0$ ) et les termes définissant la matrice d'écrouissage ( $H_w$  et  $H_s$ ).

La particularité du modèle auto-cohérent, par rapport aux autres modèles polycristallins, réside dans la manière de traiter le problème des transitions d'échelle. Le fait de prendre en compte les interactions des grains avec un milieu homogène, dont le comportement est élastoplastique, conduit à une évaluation des contraintes internes de second ordre relativement correcte. Or, celles-ci sont à la base de l'évolution de la microstructure. En effet, nous avons vu que leur projection sur les systèmes de glissement permet de vérifier si le seuil d'écoulement est atteint (relation I.14). Dans ce cas précis, le glissement cristallographique entraîne alors la déformation du grain, puis, les

incompatibilité des déformations entre monocristaux — ou plus exactement entre le grain considéré et le milieu homogène environnant — conduit à la rotation des réseaux atomiques (anisotropie du matériau) et à la redistribution des contraintes internes. Le processus de déformation est donc ainsi bouclé.

Si le modèle en lui même est effectivement performant, la question est alors de savoir ce qu'il en est de son utilisation pour l'analyse des structures ? ou en d'autres termes, qu'elles sont ses possibilités d'applications industrielles ? Dans cette étude, nous nous sommes attachés à répondre à cette question en proposant, dans un premier temps, une méthodologie d'implantation du modèle auto-cohérent dans une formulation par éléments finis. Nous avons choisi plus particulièrement le cadre de l'emboutissage des tôles pour les raisons suivantes : tout d'abord, les hypothèses qui sont faites pour décrire le monocristal sont mieux adapté à ce procédé de mise en forme. Par exemple, le mécanisme du glissement multiple homogène, suivant la loi de Schmid, est surtout vérifié dans le cas de la déformation à froid. D'autre part, l'emboutissage génère des trajets de déformation complexes et une anisotropie induite non négligeable. C'est donc un domaine où le modèle à transition d'échelle trouve tout à fait son intérêt par rapport aux modèles phénoménologiques usuels.

La méthodologie de ce couplage étant établie, nous avons ensuite cherché à montrer sa faisabilité. Cependant, la mise au point du code de simulation SIMEM3 nécessitant un travail collectif de longue haleine, nous avons en parallèle implanter le modèle de comportement élastoplastique en question dans un code de calcul de structures bi-dimensionnelles. Malgré l'éloignement par rapport aux problèmes de mise en forme et la simplicité des calculs effectués avec ce code, les possibilités de la méthode ont cependant été montrées. Nous avons, en particulier, mis l'accent sur les informations inédites pouvant être restituées à l'utilisateur qui de ce fait possède des moyens supplémentaires d'optimisation du matériau. Par exemple, il peut envisager de rechercher la texture initiale que doit posséder une tôle pour que sa mise en forme soit facilitée.

Outre de montrer les avantages, le travail que nous avons entrepris sur le code bi-dimensionnel a permis également de recenser un certain nombre de problèmes. Le but de ce dernier chapitre est donc d'en faire leur énumération et de discuter les améliorations éventuelles qui pourront être apporté par la suite.

#### IV.1 - Remarques sur le choix des hypothèses de la formulation mécanique.

Le premier problème que nous avons rencontré est lié au couplage du modèle auto-cohérent avec une formulation mécanique basée sur l'hypothèse des contraintes planes. C'est bien sûr le cas pour notre code bi-dimensionnel mais c'est également vrai pour le code SIMEM3 dont la formulation mécanique est de type membrane. En effet, dans ce cas les contraintes normales au plan moyen de la tôle sont inexistantes.

Dans ce contexte la loi de comportement (II.17) se simplifie et s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \delta_t \Sigma^{11} \\ \delta_t \Sigma^{22} \\ \delta_t \Sigma^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} & M^{13} \\ M^{21} & M^{22} & M^{23} \\ M^{31} & M^{32} & M^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ 2D_{12} \end{Bmatrix}$$

avec

$$\delta_t \Sigma^{i3} = 0 \quad i=1,3$$

On remarque alors que le taux de déformation  $D_{33}$  n'intervient pas dans la détermination du comportement. En fait, dans le code SIMEM3,  $D_{33}$  est utilisée uniquement pour évaluer la variation de l'épaisseur  $h$  de la tôle à la fin de chaque incrément (c.à.d à l'équilibre) :

$$h_{(t+\Delta t)} = h_{(t)} (1 + D^{33})$$

Dans une formulation membrane, l'incrément de déplacement  $U$  d'un point matériel dépend en fait uniquement des coordonnées convectives dans le plan moyen de la tôle ( $U = U(\theta^1, \theta^2)$ ). Il advient alors que  $D_{33}$  ne peut être évalué directement à partir de la relation (II.18) remplacée ici par commodité :

$$D_{ik} = \frac{1}{2} (U_i ||_k + U_k ||_i + U^i ||_l U_l ||_k) \quad (\text{II.18})$$

En effet, dans le cas d'une modélisation membrane les indices  $k$  et  $l$  varient seulement de 1 à 2.

Dans SIMEM3 la composante du tenseur taux de déformation est alors estimée en négligeant la partie élastique de la déformation devant la partie plastique, et en posant ensuite la condition de conservation du volume :

$$D_{ij} \approx D_{ij}^p$$

$$\text{tr}(D) = 0 \Rightarrow D^{33} = -(\epsilon^{11} D_{11} + \epsilon^{12} D_{12} + \epsilon^{22} D_{22})$$

Le problème avec le modèle à transition d'échelle est que le comportement du grain est déterminé par une modélisation tridimensionnelle. Il en est évidemment de même du comportement macroscopique des polycristaux localisé aux points de Gauss. De ce fait nous sommes contraint à imposer, au début de chaque incrément de charge, un état de déformation triaxial de la forme suivante :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}_{/(P, \bar{e}^i)}$$

où les  $D_{ij}$ , pour  $i$  et  $j$  variant de 1 à 2, sont déterminés à partir de la relation (II.18). En ce qui concerne la composante  $D_{33}$ , elle doit être déterminée de manière à obtenir une réponse au point de Gauss effectivement plane c.à.d.  $\Sigma_{i3}=0$ . Or si nous adoptons l'évaluation, tel qu'elle est proposée dans le code SIMEM3, on remarque au début de la mise en forme, lorsque la déformation plastique avoisine la déformation élastique, que la réponse macroscopique du matériau au point d'intégration ne correspond pas à un état de contraintes planes. Ce déséquilibre, entre le comportement du matériau et l'incrément de déplacement imposé, a pour effet d'entraîner la divergence de l'algorithme de résolution des équations d'équilibre.

Pour remédier à ce problème, nous évaluons la composante  $D_{33}$  à partir de la relation constitutive (II.17). Sachant que la composante  $\delta_t \Sigma^{33}$  doit être nulle, nous avons :

$$\delta_t \Sigma^{33} = \tilde{M}^{33kl} D_{lk} = 0$$

d'où

$$D^{33} = (\tilde{M}^{3311}D_{11} + \tilde{M}^{3322}D_{22} + \tilde{M}^{3312}D_{12}) / \tilde{M}^{3333}$$

Cependant, il est clair que pour l'incrément considéré le module de comportement élastoplastique  $M$ , dont les composantes apparaissent dans la relation ci-dessus, n'est pas connu en début d'incrément. Une solution consiste à utiliser le module  $M$  calculé au pas précédent. Deux cas se présentent alors selon les résultats du calcul auto-cohérent :

1) les inéquations suivantes sont vérifiées :

$$\|\delta_t \Sigma^{i3}\| \leq \lambda, \text{ où } \lambda \approx 0 \text{ représente un critère de convergence}$$

Dans ce cas nous admettons que la composante  $D_{33}$  est suffisamment bien évaluée et le calcul est donc validé.

2) les inéquations précédentes ne sont pas vérifiées. Dans ce cas le calcul n'est pas validé et on réévalue  $D_{33}$  en utilisant cette fois-ci le module de comportement  $M$  déterminé à partir du calcul qui vient d'être effectué. On itère ainsi jusqu'à ce que la convergence soit atteinte ( $\|\delta_t \Sigma^{i3}\| \leq \lambda$ ). Dans la pratique, il faut compter, au maximum, trois itérations pour converger. Puis, lorsque la partie plastique de la déformation devient plus importante, la convergence s'obtient du premier coup en utilisant l'évaluation de  $D_{33}$  initialement proposée dans le code SIMEM3.

Remarque :

Suite à cette constatation, il apparaît que le modèle auto-cohérent ne s'adapte pas particulièrement bien à des éléments de membrane ou de coque. Car, si à l'origine l'emploi de ce type d'éléments à pour but d'alléger les formulations et de diminuer le temps de résolution, ici c'est tout le contraire qui se produit. Nous pensons donc que l'utilisation d'éléments volumiques permettrait de simplifier considérablement le couplage. Autant du point de vue de la résolution numérique que du point de vue de la programmation. En outre, nous pensons que globalement la modélisation serait meilleure et en particulier le calcul de la variation de l'épaisseur de la tôle plus réaliste.

## **IV.2 - Discussion sur l'optimisation du temps de calcul**

S'il est important de souligner ce problème, il ne présente pas une difficulté pouvant mettre en doute la possibilité d'utiliser un tel code dans un contexte industriel. Le problème majeur, auquel nous sommes confrontés dans l'état actuel des développements, se situe surtout au niveau du temps d'exécution des simulations. Celui-ci est, comme on peut facilement l'imaginer, particulièrement excessif. Pour donner un ordre d'idée, le calcul sur l'éprouvette entaillée qui comprend 256 points de Gauss matérialisés chacun par 100 grains, dure plus de 24 heures sur une station Apollo DN4500. Ceci pour atteindre une déformation plastique locale de 6% !

Nous proposons donc de passer en revue les différentes causes qui sont à l'origine de ce temps prohibitif en discutant les possibilités d'amélioration. Remarquons, avant toute chose, que nous ne mesurons pas, comme il est d'usage, la taille d'un problème de structure par son nombre de degrés de liberté, mais, par son nombre de point de Gauss. Ceci est tout à fait significatif du temps que représente la détermination de la loi de comportement par rapport au temps de la résolution des équation d'équilibre.

### **IV.2.1 - Choix du module de comportement du milieu homogène de référence ( $L^0$ )**

Nous avons vu, au cours du chapitre I, que la validité numérique de la méthode auto-cohérente dépend principalement du choix du module de comportement du milieu homogène de référence ( $L^0$ ). Celui-ci doit être le plus proche possible du module effectif actuel. Par la suite, nous avons vu ( chapitre II), que la solution qui apparaît la plus immédiate est de choisir  $L^0$  égal au module  $L^{sc}$  calculé durant l'incrément de charge précédent (II.42). Cependant, ce choix impose une progression avec des pas relativement petits, ce qui a donc pour conséquence d'augmenter le temps de calcul. La seule solution pour effectuer des pas de calcul plus importants est de prédire le module  $L^0$  autrement que d'utiliser directement la solution de l'itération ou l'incrément précédent. Or, jusqu'à présent, les quelques tentatives que nous avons faites dans ce sens ont toutes conduit soit à la divergence de l'algorithme de Newton Raphson, soit à augmenter la lourdeur des calculs. Donc, à priori, nous ne voyons pas, ici, la possibilité de réduire le coût des simulations.



## IV.2.2- Optimisation du nombre de grains

Un autre moyen plus directe de diminuer le temps de calcul est de réduire le nombre de grains. Or, si on cherche à caractériser la texture cristallographique initiale du matériau à partir de mesures expérimentales, alors, la diminution du nombre de grains n'est pas souhaitable. En effet, les travaux effectués par Reubrez *et al* [36] ont montrer qu'au minimum 1000 grains sont nécessaires pour obtenir des résultats probant. Donc, à priori, il est également impossible dans ce cas de réduire le temps de calcul. Cependant, lorsque le matériau considéré est initialement isotrope, il n'est pas nécessaire de se baser sur les mesures expérimentales. En effet, un matériau est isotrope lorsque le désordre cristallographique est important. Il est alors possible de caractériser numériquement sa texture initiale, en générant les orientations (angles d'Euler  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$ ) de façon aléatoire. Le problème est que la probabilité d'obtenir un agrégat désordonné décroît avec le nombre d'orientations. Nous avons donc entrepris de rechercher parmi plusieurs jeux de  $\mathcal{N}$  orientations aléatoires, ceux qui engendrent les agrégats les plus isotropes. Pour cela, nous simulons, sur chacun des agrégats ainsi constitués, un essai de traction dans trois directions différentes. Par exemple Ox, Oy et Oz. Nous relevons ensuite, le niveau de contrainte, dans chaque direction de traction, lorsque la déformation plastique a atteint 10%. Nous comparons alors les écarts de contraintes. Plus l'écart entre les trois essais de traction est faible, plus nous pouvons admettre que le comportement du matériau se rapproche de l'isotropie. En fait, pour plus de rigueur, il faudrait évidemment effectuer des essais dans bien d'autres directions.

Chacun des tableaux (IV.1), (IV.2) et (IV.3) présente les résultats de ces essais pour 9 jeux différents de  $\mathcal{N}$  orientations aléatoires. Respectivement  $\mathcal{N}=100$ ,  $\mathcal{N}=50$  et  $\mathcal{N}=25$ . L'observation de ces résultats montre, d'une part, que pour un même nombre de grains, les écarts de contrainte dans les trois directions de traction, sont différents selon la génération aléatoire. Par exemple, pour un agrégat de 100 grains les écarts varient du simple au triple (voir tableau (IV.1) lignes r=3 et r=6). D'autre part, comme attendu, l'isotropie est en moyenne mieux approchée avec 100 grains. Cependant, il est important de remarquer qu'il est possible d'obtenir de bon résultats, tout au moins en ce qui concerne les écarts de contraintes, pour un agrégat de 50 ou même 25 orientations aléatoires (tab. (IV.2), r=4 et tab. (IV.3), r=8).

Les figures (IV.1), (IV.2) et (IV.3). représentent les courbes de réponse des trois agrégats apparaissant les plus isotropes. Ces agrégats de 100, 50 et 25 grains sont repérés dans les tableaux respectifs par un astérisque (\*). Apparemment, d'après ces courbes, il n'y a pas d'objection à modéliser un matériau isotrope avec 50 ou 25 grains. Toutefois, la validité de ces propos reste à vérifier dans le cas de chargements non monotones et lorsque l'anisotropie induite par la déformation devient significative. Dans ce cas, un faible nombre de grains risque de fausser de façon plus prononcée les résultats. En effet, le comportement macroscopique s'obtient, nous l'avons vu, par homogénéisation du comportement des monocristaux. De ce fait, il est possible que l'influence, sur le comportement macroscopique, des grains ayant une orientation préférentielle, soit plus importante (ou plus faible) que dans le cas d'un nombre de grains élevé.

| <i>Tableau IV.1</i> 100 grains |               |               |               |            |
|--------------------------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| random(r)                      | traction Ox   | traction Oy   | traction Oz   | écart maxi |
|                                | $\Sigma_{xx}$ | $\Sigma_{yy}$ | $\Sigma_{zz}$ | N/mm2      |
| r=1                            | 526           | 545           | 515           | 47         |
| r=2                            | 532           | 554           | 521           | 33         |
| r=3 *                          | 555 *         | 563 *         | 545 *         | 18 *       |
| r=4                            | 554           | 569           | 540           | 29         |
| r=5                            | 562           | 565           | 538           | 27         |
| r=6                            | 536           | 599           | 536           | 63         |
| r=7                            | 560           | 553           | 520           | 40         |
| r=8                            | 555           | 568           | 537           | 31         |
| r=9                            | 562           | 547           | 532           | 30         |
| moyenne                        | 549           | 562           | 531           | 35         |

| <i>Tableau IV.2</i> 50 grains |               |               |               |            |
|-------------------------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| random(r)                     | traction Ox   | traction Oy   | traction Oz   | écart maxi |
|                               | $\Sigma_{xx}$ | $\Sigma_{yy}$ | $\Sigma_{zz}$ | N/mm2      |
| r=1                           | 560           | 528           | 495           | 65         |
| r=2                           | 524           | 547           | 534           | 23         |
| r=3                           | 528           | 565           | 526           | 42         |
| r=4 *                         | 541 *         | 560 *         | 547 *         | 19 *       |
| r=5                           | 574           | 571           | 536           | 35         |
| r=6                           | 509           | 575           | 533           | 66         |
| r=7                           | 580           | 562           | 531           | 49         |
| r=8                           | 561           | 551           | 538           | 23         |
| r=9                           | 565           | 549           | 537           | 28         |
| moyenne                       | 560           | 556           | 530           | 39         |

| <i>Tableau IV.3</i> 25 grains |               |               |               |            |
|-------------------------------|---------------|---------------|---------------|------------|
| random(r)                     | traction Ox   | traction Oy   | traction Oz   | écart maxi |
|                               | $\Sigma_{xx}$ | $\Sigma_{yy}$ | $\Sigma_{zz}$ | N/mm2      |
| r=1                           | 546           | 518           | 479           | 67         |
| r=2                           | 546           | 548           | 490           | 58         |
| r=3                           | 551           | 561           | 496           | 65         |
| r=4                           | 656           | 582           | 548           | 34         |
| r=5                           | 604           | 566           | 544           | 60         |
| r=6                           | 499           | 555           | 594           | 61         |
| r=7                           | 602           | 584           | 574           | 110        |
| r=8 *                         | 555 *         | 559 *         | 544 *         | 25 *       |
| r=9                           | 588           | 555           | 537           | 51         |
| moyenne                       | 562           | 570           | 523           | 59         |

ESSAIS DE TRACTION SUR UN AGREGAT DE 100 GRAINS  
(orientations cristallographiques aléatoires ( $r=3$ ))

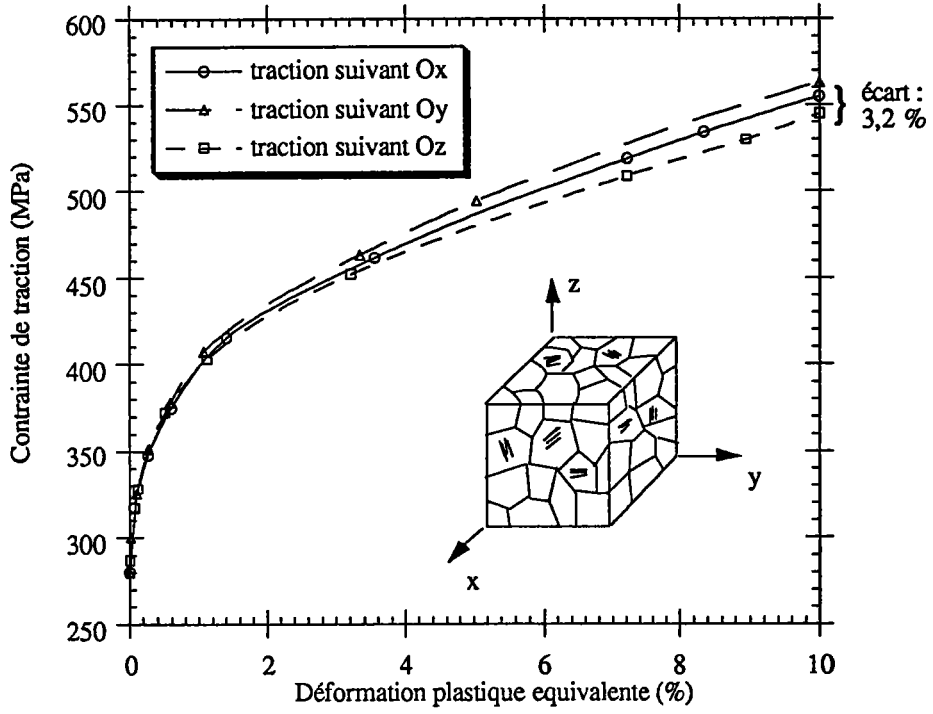


Fig. IV.1

ESSAIS DE TRACTION SUR UN AGREGAT DE 50 GRAINS  
(orientations cristallographiques aléatoires ( $r=4$ ))

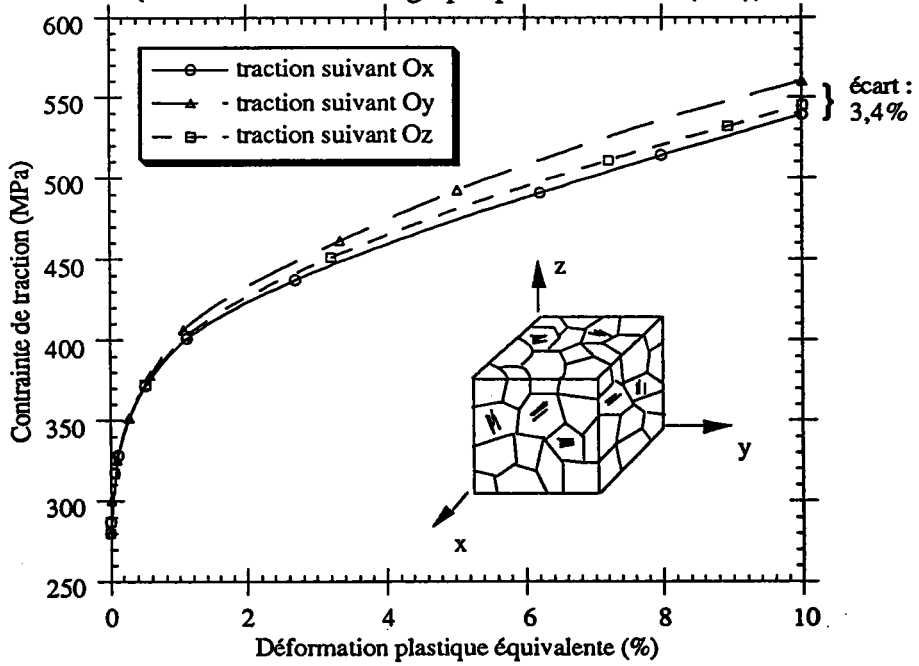


Fig. IV.2

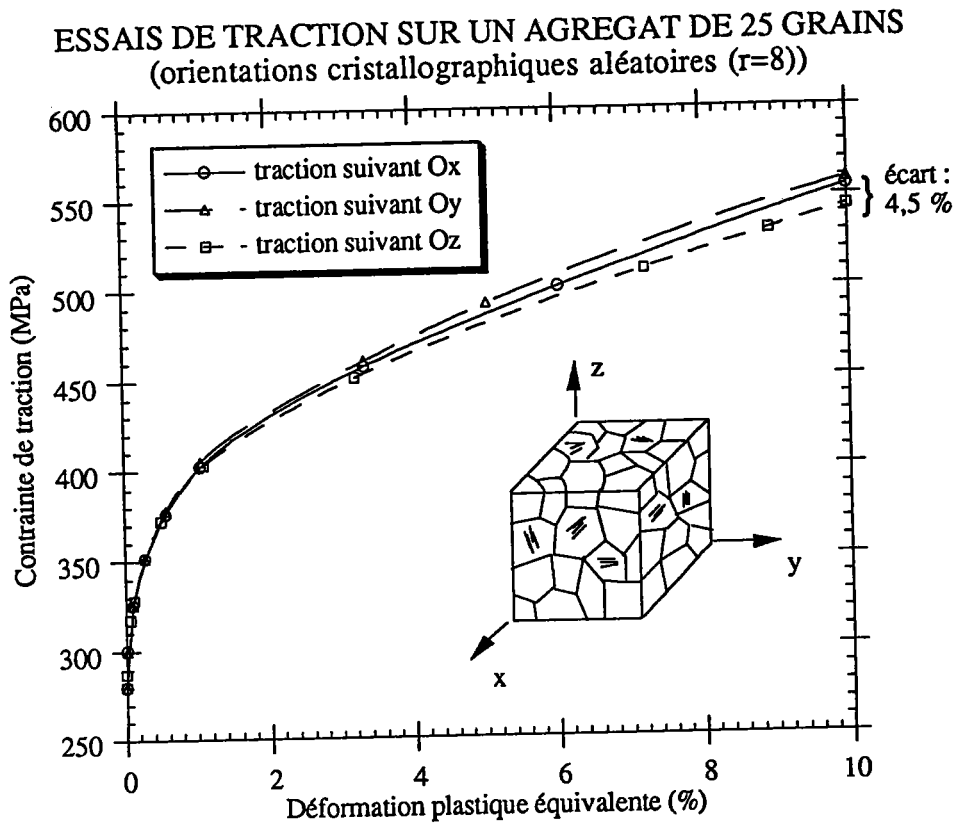


Fig. IV.3

Fig. IV.1, IV.2, IV.3 :

*Minimisation du nombre d'orientations cristallographiques dans le cas d'une modélisation d'un matériau initialement isotrope — Comparaison des courbes de traction pour différentes directions de sollicitation et pour différents choix du nombre de grains .*

### IV.2.3 - Optimisation de la recherche des systèmes de glissement actifs

Si le nombre de grains a une contribution importante dans le temps de calcul, le problème peut être partiellement résolu en utilisant des machines possédant plusieurs processeurs disposés en parallèle. En effet, grâce aux hypothèses adoptées pour résoudre l'équation intégrale cinématique (voir § I.2.2), les calculs sur le grain s'effectuent indépendamment des autres grains. De ce fait le comportement de chaque monocristal peut être traité en parallèle. Nous pensons donc que le problème est d'essayer, plutôt, de réduire le temps de calcul nécessaire à la détermination du comportement microscopique.

Le comportement actuel du grain dépend des systèmes de glissement qui sont actifs. La détermination de ces systèmes, parmi l'ensemble des systèmes de glissement potentiellement actifs, est basée sur la minimisation de l'énergie de déformation. Nous rappelons qu'elle se traduit par la l'expression suivante (I.29):

$$\min \left( \sum_{r=1}^{\text{N.S.A}} \sum_{s=1}^{\text{N.S.A}} \delta_t \gamma^r \mathcal{H}^{rs-1} \delta_t \gamma^s \right)$$

Or, dans la version actuelle du code, la recherche de cette solution s'effectue de façon systématique, c'est-à-dire, en construisant et en comparant toutes les solutions possibles (voir organigramme A2.6). Par conséquent, de nombreux calculs sont à effectuer avant d'aboutir à la solution ( $2^{\text{N.S.P.A}}$  combinaisons possibles).

Pour rechercher les systèmes actifs de façon plus directe, il est envisageable d'utiliser un algorithme d'optimisation avec contraintes. En effet, le problème de la recherche des systèmes actifs peut être présenté de la manière suivante . Soit  $f(\{\delta_t \gamma\})$  la fonction quadratique définie ci-dessous :

$$f(\{\delta_t \gamma\}) = \frac{1}{2} {}^t \{\delta_t \gamma\} [\mathcal{H}]^{-1} \{\delta_t \gamma\} \quad (\text{IV.1})$$

avec  ${}^t \{\delta_t \gamma\} = \{\delta_t \gamma^1, \delta_t \gamma^2, \dots, \delta_t \gamma^{\text{N.S.P.A}}\}$  représente le vecteur ligne des vitesses de glissement sur tous les systèmes potentiellement actifs, et  $[\mathcal{H}]$  la matrice d'écrouissage correspondant à ces systèmes.

La solution du problème est alors donnée par le vecteur  $\{\delta_t \gamma\}$  qui minimise la fonction  $f(\{\delta_t \gamma\})$  tout en vérifiant les contraintes qui lui sont imposées. Ces contraintes ont été discutées au § I.1.8 Ce sont des conditions unilatérales qui peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\{\varphi(\delta_t \gamma)\} = -\{\delta_t \gamma\} \leq 0 \quad (\text{IV.2})$$

Autrement dit, toutes les composantes du vecteur  $\{\delta_t \gamma\}$  doivent être positives ou nulles.

Pour résoudre ce problème nous introduisons le Lagrangien généralisé  $W$  tel que :

$$W(\{\delta_i \gamma\}, \{\lambda\}) = f(\{\delta_i \gamma\}) + \{ \lambda \} \{ \varphi \} = \frac{1}{2} \{ \delta_i \gamma \} [\mathcal{H}] \{ \delta_i \gamma \} + \{ \lambda \} \{ \varphi \} \quad (IV.3)$$

avec  $\{ \lambda \} = \{ \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{N.S.P.A} \}$  représentant le vecteur ligne des multiplicateurs de Kuhn-Tucker. Dans le cas analysé ici,  $W$  est donc fonction de  $2 * N.S.P.A$  variables définissant les composantes des deux vecteurs  $\{ \delta_i \gamma \}$  et  $\{ \lambda \}$ .

D'après le théorème de Kuhn-Tucker, le vecteur  $\{ \delta_i \gamma \}_o$  est la solution du problème, si et seulement si, il existe un vecteur  $\{ \lambda \}_o$  tel que :

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \{ \delta_i \gamma \}} \right)_{\{ \delta_i \gamma \}_o, \{ \lambda \}_o} = 0$$

et

$$\left( \frac{\partial W}{\partial \{ \lambda \}} \right)_{\{ \delta_i \gamma \}_o, \{ \lambda \}_o} \leq 0$$

avec

$$\{ \lambda \}_o \left( \frac{\partial W}{\partial \{ \lambda \}} \right)_{\{ \delta_i \gamma \}_o, \{ \lambda \}_o} = 0 \quad \text{pour } \{ \lambda \}_o \geq 0$$

En appliquant ce théorème à notre cas, nous obtenons :

$$\frac{\partial W}{\partial \{ \delta_i \gamma \}} = [\mathcal{H}] \{ \delta_i \gamma \}_o - \{ \lambda \}_o = 0 \quad (IV.4)$$

et

$$\frac{\partial W}{\partial \{ \lambda \}} = \{ \varphi \} = -\{ \delta_i \gamma \} \leq 0 \quad (IV.5)$$

avec

$$-\{ \lambda \}_o \{ \delta_i \gamma \}_o = 0 \quad \text{pour } \{ \lambda \}_o \geq 0 \quad (IV.6)$$

De nombreux algorithmes de descente (recherche d'un minimum) sont disponibles pour atteindre la solution. Il s'agit en fait de construire une suite de

tableaux  $\{\delta_t \gamma\}^0, \{\delta_t \gamma\}^1, \dots, \{\delta_t \gamma\}^i, \{\delta_t \gamma\}^{i+1}, \dots$  tels que chacun d'eux soit meilleur que le précédent. Dans le cas de recherche d'un minimum, cela se traduit par  $f(\{\delta_t \gamma\}^{i+1}) < f(\{\delta_t \gamma\}^i)$ . Nous discutons ici très brièvement l'algorithme de UZAWA.

Soit une solution initiale  $\{\delta_t \gamma\}^i$ . Par exemple, la solution de l'itération précédente. L'expression (IV.4) permet alors de déterminer le vecteur  $\{\lambda\}^i$ . Si ce vecteur est positif, alors  $\{\delta_t \gamma\}^i$  et  $\{\lambda\}^i$  correspondent à la solution du problème. Dans le cas contraire, nous déterminons  $\{\delta_t \gamma\}^{i+1}$  tel que:

$$\{\delta_t \gamma\}^{i+1} = \text{pos}([\mathcal{H}]\{\lambda\}^i) \quad (\text{IV.7})$$

où  $\text{pos}(x)$  désigne la partie positive de l'expression concernée. C'est-à-dire ici :

$$\text{pos}([\mathcal{H}]\{\lambda\}^i) = \begin{cases} [\mathcal{H}]\{\lambda\}^i & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ces étapes sont répétées ainsi de suite jusqu'à convergence. En général, pour un vecteur  $\{\delta_t \gamma\}$  dont le rang est inférieur à 10 le nombre d'itérations est inférieur à 6. De ce fait l'utilisation de cette approche est intéressante lorsque le nombre de systèmes potentiellement actifs en présence est supérieur ou égal à 3. En effet, dans ce cas nous avons vu (§ I.1.8) que le nombre de combinaisons à tester lors d'une recherche systématique est :

$$N_c = 2^{\text{N.S.P.A}} = 2^3 = 8$$

Le nombre moyen de systèmes potentiellement actifs, pour un matériau de type CFC ou de type CC, étant de l'ordre de 5, l'application de cette méthode devrait diminuer le temps de calcul du comportement du grain d'un facteur non négligeable. Donc, à suivre ...



### IV.3 - Conclusions

Malgré les améliorations proposées et les progrès notables de l'informatique, la méthode reste, pour l'heure, relativement coûteuse. De plus, l'inconvénient est que son utilisation rend dérisoires ou même inutilisables la plupart des travaux engagés visant à améliorer la rapidité de la M.E.F. (méthode des grands incréments de temps, méthodes de résolution du système des équations d'équilibre, etc...). Nous pensons donc que l'utilisation systématique de cette démarche est, pour le moment, compromise.

Par contre, la voie de développement qui semble la plus envisageable, dans l'état actuel, est de mixer les deux approches, phénoménologique et à transition d'échelle, dans un même code de calcul. En effet, dans la pratique, tous les points d'une structure ne subissent pas des déformations complexes et, dans ce cas, les approches phénoménologiques donnent généralement des résultats correctes. Par contre, à certains endroits de la géométrie l'utilisation d'une approche polycristalline peut être souhaitable, soit pour obtenir une précision de calcul plus importante, soit pour recueillir des informations spécifiques telles que, par exemple, les textures cristallographiques. On consomme ainsi du temps de calcul là où on en a réellement besoin. L'architecture du code SIMEM3 a été pensée à cet effet : chaque élément possède une étiquette qui l'associe à une loi de comportement répertoriée dans la bibliothèque du code (Von Mises isotrope, Hill orthotrope, auto-cohérent, etc...). Ainsi le comportement de la structure peut être approché différemment, selon la position de l'élément dans le maillage (remarquons, d'ailleurs, que la plus part des codes de calculs du commerce possède cette capacité, puisqu'ils permettent souvent de combiner différents matériaux). Évidemment, cette démarche suppose que l'utilisateur ait déjà une bonne idée du phénomène à étudier, afin de choisir judicieusement l'emplacement de ces éléments "auto-cohérents". Toutefois, pour faciliter son choix, l'utilisateur peut toujours avoir recours, au préalable, à un calcul purement phénoménologique. Il peut, ainsi, repérer les zones les plus critiques de la structure qui seront ensuite traitées par un calcul auto-cohérent. En plus de la possibilité qui vient être citée, le code de simulation SIMEM3 permet, également, de faire varier le nombre de grains par point de Gauss. Comme précédemment, chaque élément possède une étiquette à laquelle est associée un jeu de  $\mathcal{N}$  orientations cristallographiques. On peut, de cette manière, doser plus ou moins le temps CPU dans les zones particulières du maillage.

Le chapitre qui vient d'être exposé, montre que le travail qui reste à effectuer est considérable. En dehors de l'amélioration du modèle lui-même (voir entre autres [32] et [33]), nous voyons qu'il y a toute une infrastructure à mettre en place afin de faciliter l'utilisation d'un tel code. Cela suppose d'une part, l'adaptation aux pré et post-processeurs déjà existant et d'autre part, la création de modules supplémentaires, tout d'abord, pour la saisie des données (jeux d'orientations cristallographiques, paramètres relatifs aux matériaux, options d'exécutions, etc...) et, ensuite, pour l'exploitation des résultats spécifiques au modèle auto-cohérent (tracée des figures de pôles, visualisation des contraintes d'ordre 2, etc...).

## Annexe 1 :

### RAPPELS CONCERNANT LES DERIVEES CONVECTIVES

#### Dérivée convective d'un vecteur

On définit la dérivée convective, de la composante contravariante  $V^i$  d'un vecteur  $V$  dans la base matérielle  $\{P, \bar{\epsilon}_i\}$ , comme étant la composante suivant  $\bar{\epsilon}_i$  de la dérivée partielle de  $V$  par rapport à la coordonnée  $\theta^i$ . Autrement dit :

$$V^i|_j = \frac{\partial V}{\partial \theta^j} \cdot \bar{\epsilon}_i \quad (\text{A1.1})$$

En détaillant le terme  $\frac{\partial V}{\partial \theta^i}$  on obtient:

$$V^i|_j = \frac{\partial V^i}{\partial \theta^j} + V^k \Gamma_{kj}^i \quad (\text{A1.2})$$

où  $\Gamma_{kj}^i$  sont les symboles de Christoffel désignant les composantes des vecteurs  $\frac{\partial \bar{\epsilon}_k}{\partial \theta^j}$  dans la base  $\{P, \bar{\epsilon}_i\}$ .

Il est possible d'obtenir directement la dérivée convective de la composante covariante de  $V$ , en appliquant la relation suivante:

$$V_i|_j = V^k|_j \epsilon_{ki} \quad (\text{A1.3})$$

## Dérivée convective d'un tenseur d'ordre 2

Soit un tenseur  $T$  exprimé en fonction de ses composantes contravariantes ou covariantes:

$$T = T^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = T_{ij} \bar{e}^i \otimes \bar{e}^j$$

la dérivée convective  $T^{ij}|_k$  des composantes contravariantes de  $T$  sont définies de telle sorte que :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta^k} = T^{ij}|_k \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad (\text{A1.4})$$

En développant l'expression de la dérivée partielle de  $T$  et en identifiant au second membre de (A1.4) on obtient :

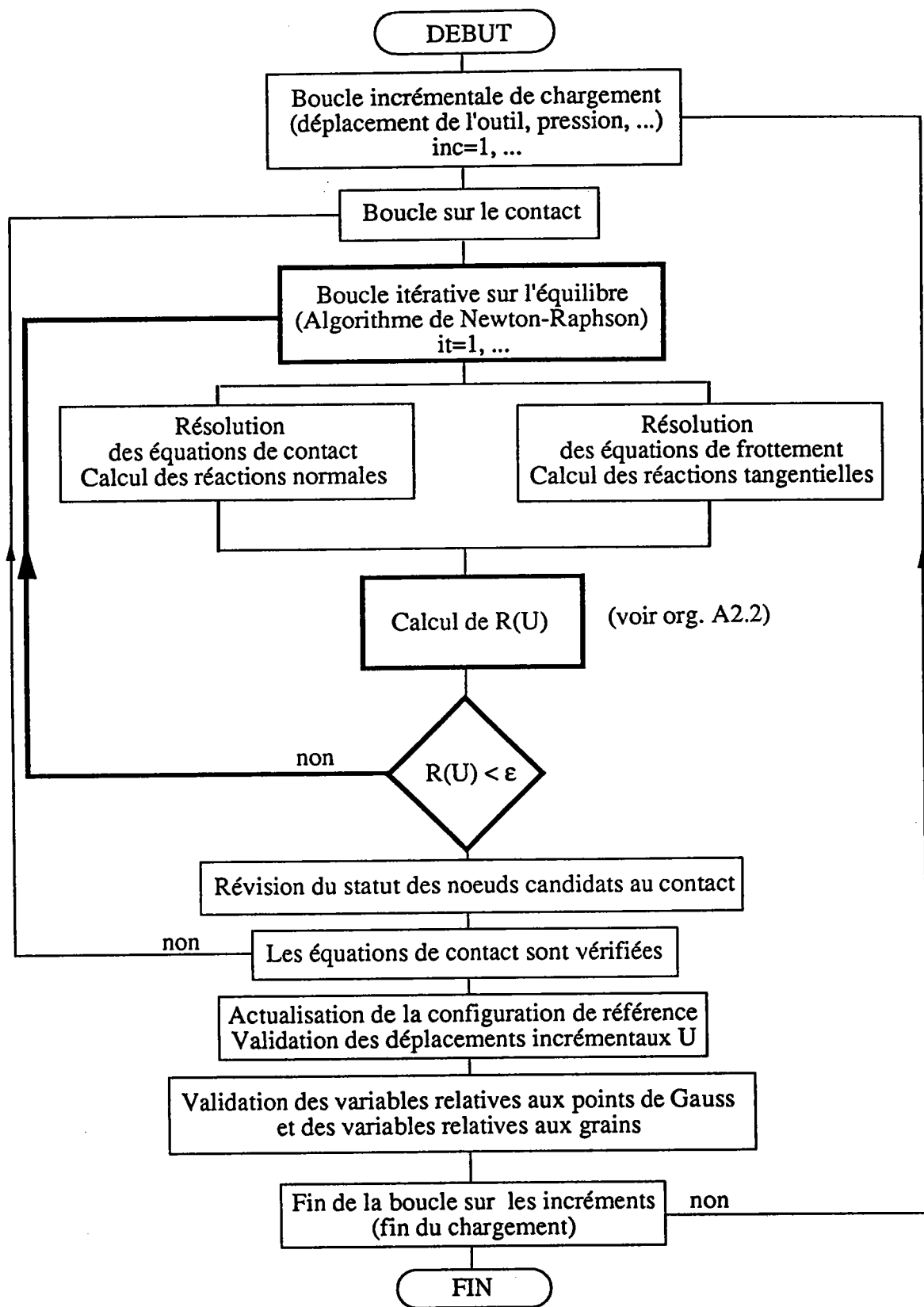
$$T^{ij}|_k = \frac{\partial T^{ij}}{\partial \theta^k} + T^{lj} \Gamma_{lk}^i + T^{il} \Gamma_{lk}^j \quad (\text{A1.5})$$

La dérivée convective des composantes covariantes s'obtient ensuite grâce à la relation suivante :

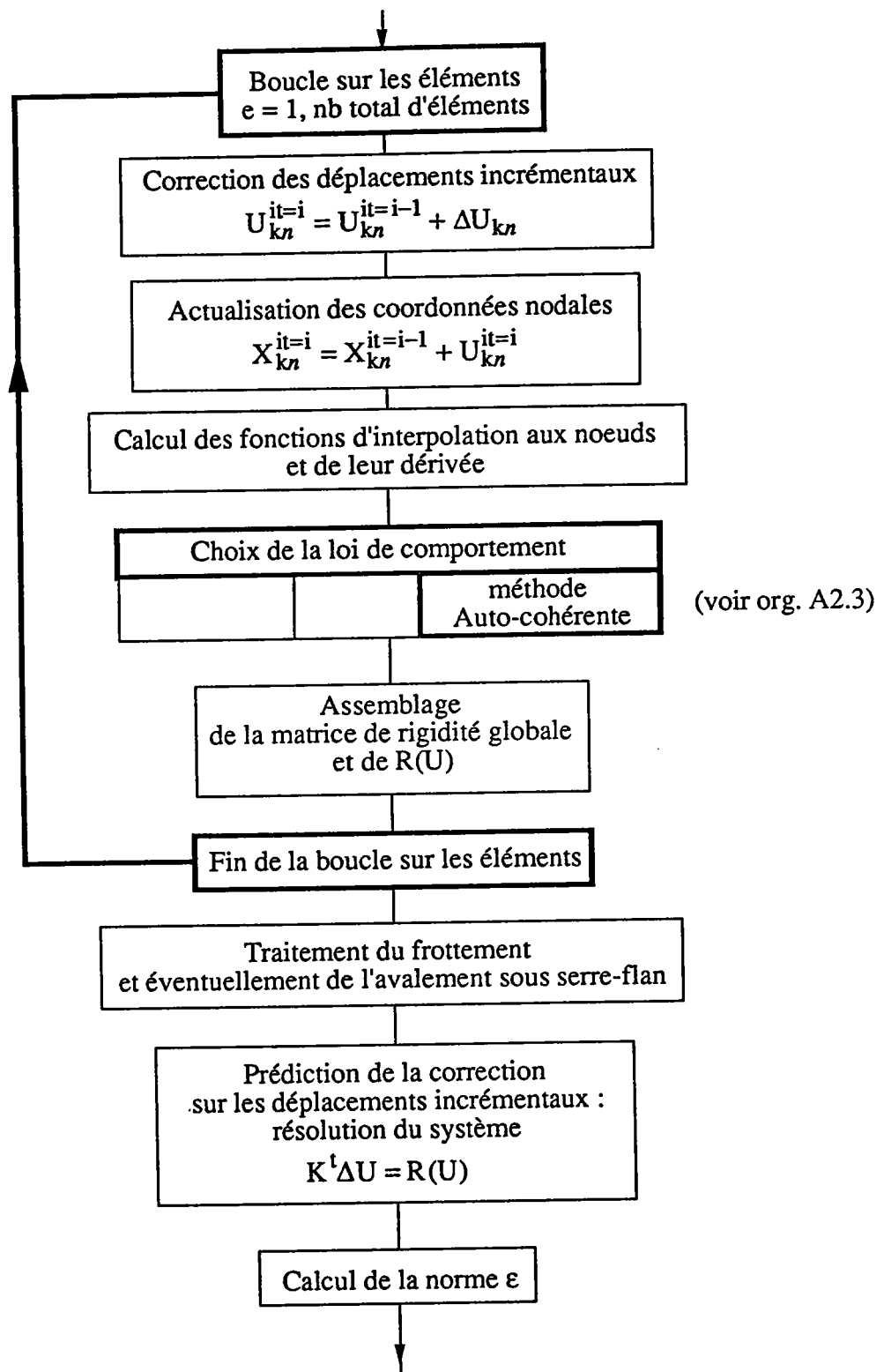
$$T_{ij}|_k = T^{mn}|_k \epsilon_{mi} \epsilon_{nj} \quad (\text{A1.6})$$

Annexe 2 :

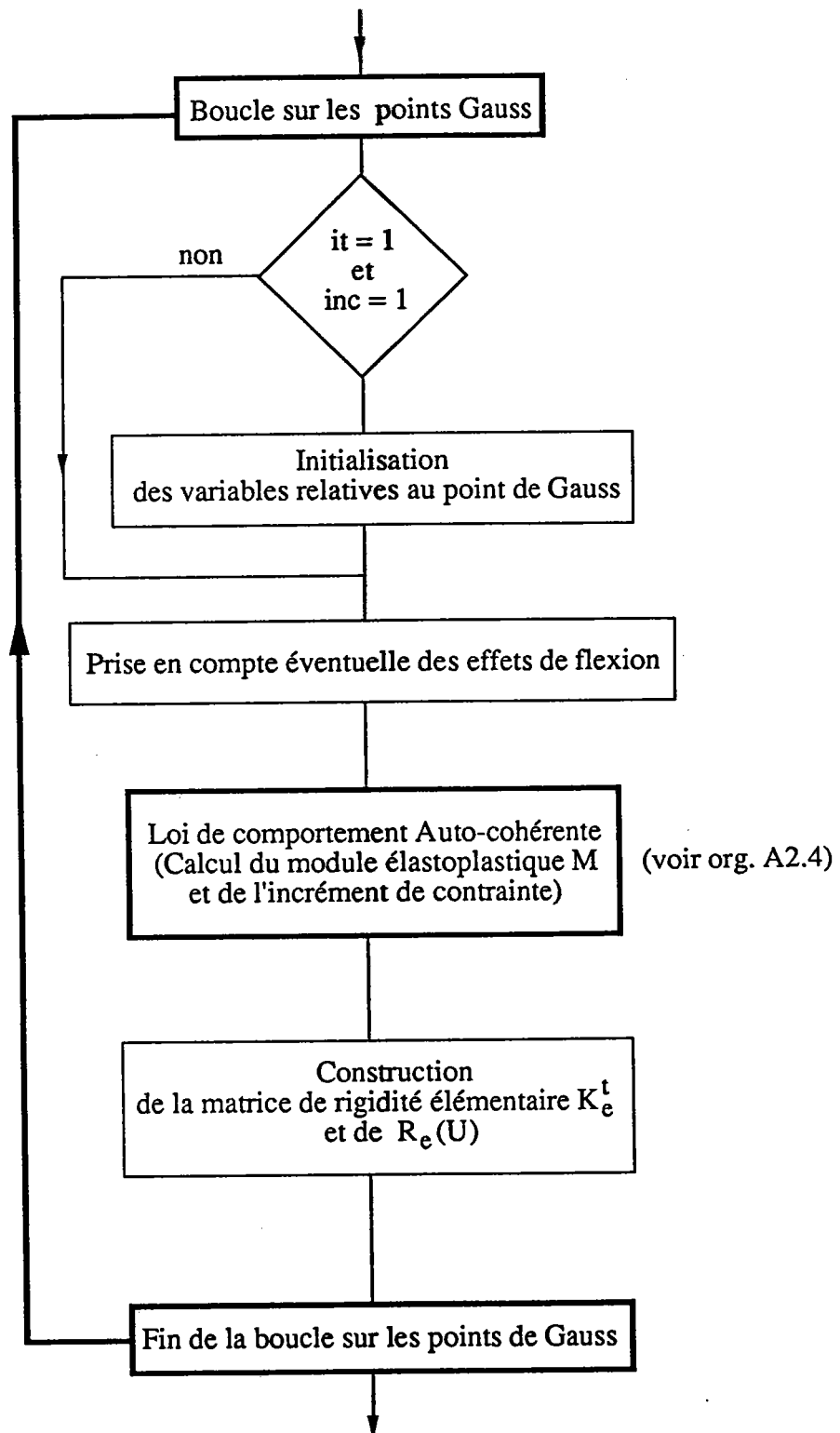
**ORGANISATION GÉNÉRALE DU CODE SIMEM3  
ET IMPLANTATION DE LA METHODE AUTO-COHERENTE**



Org. A2.1: Organisation générale du code SIMEM3

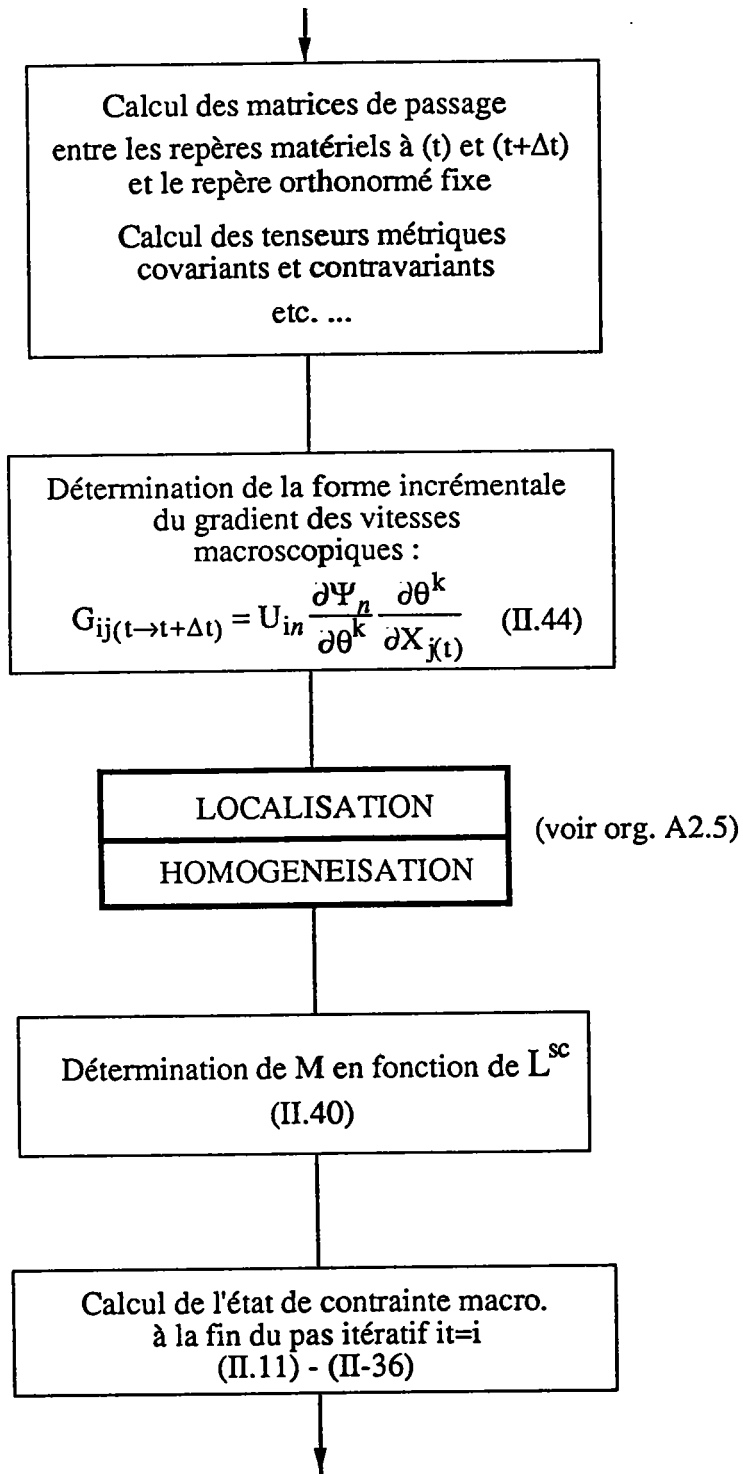


Org. A2.2 : Boucle sur les équations d'équilibres

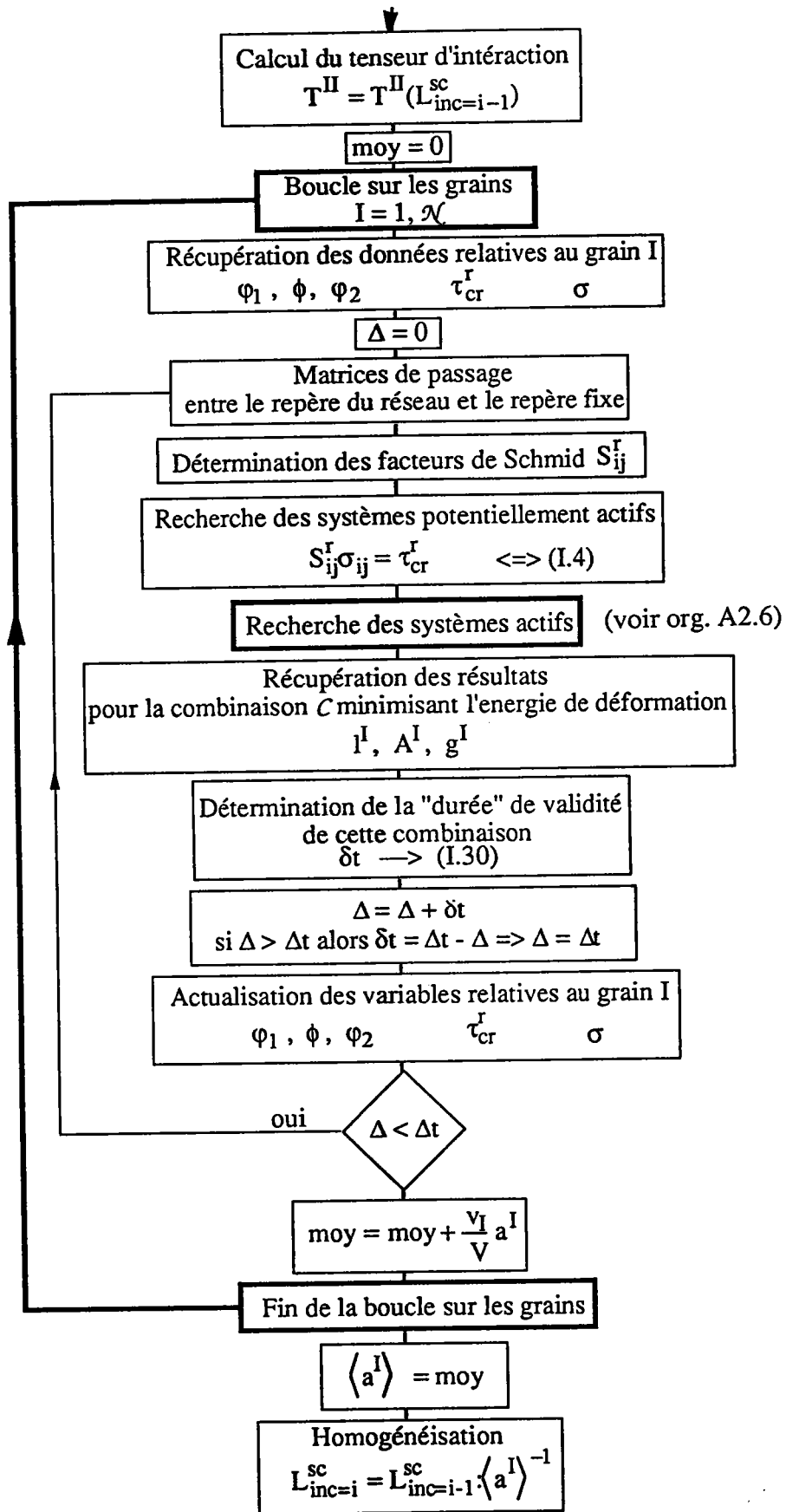


Org. A2.3 : Boucle sur les éléments

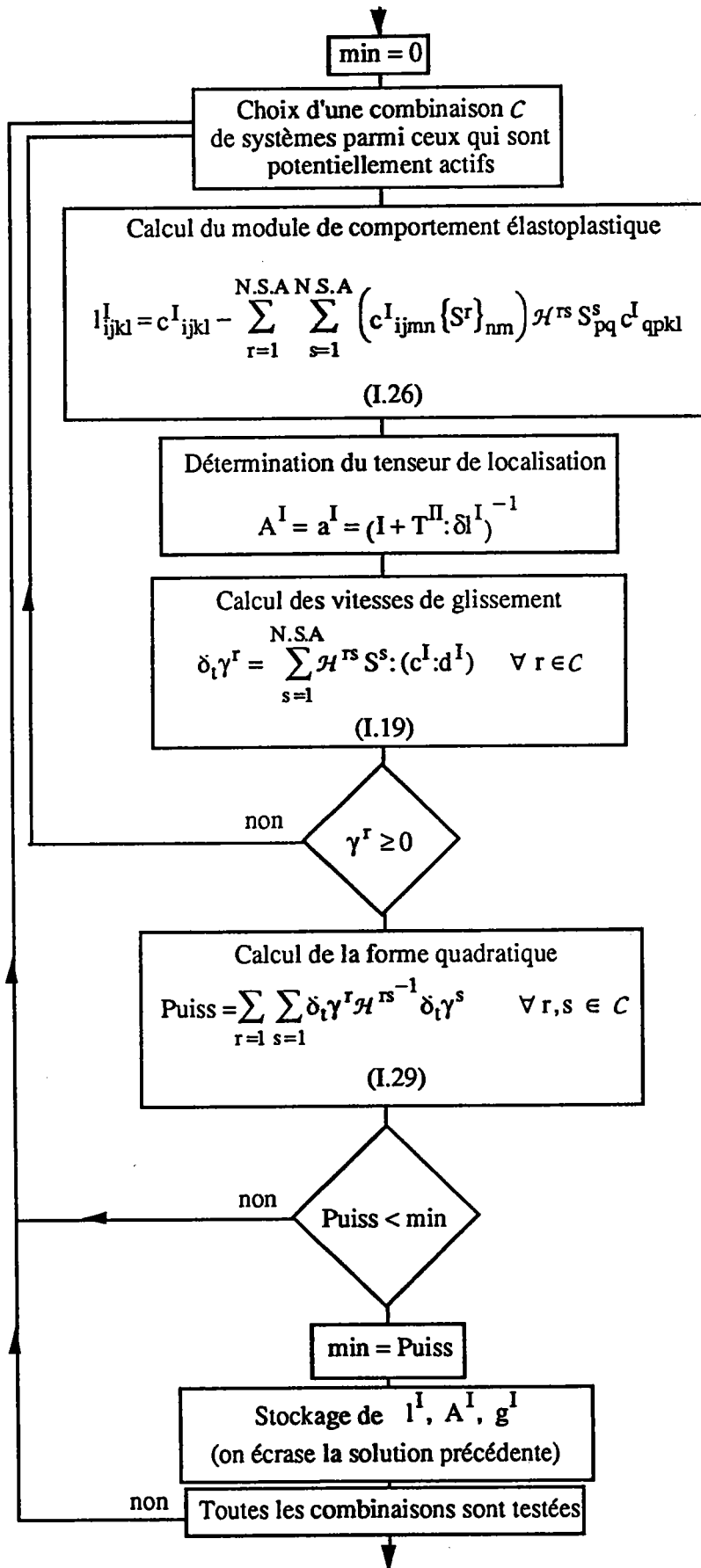




Org. 4 : Boucle sur les points de Gauss



Org. A2.5 : Procédure "Auto-cohérente"



Org. A2.6 : Procédure de recherche des systèmes actifs

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Sachs, G., *Zeit. der V.D.I.*, 72, (1928), 739-747.
- [2] Taylor, G.I., Elam, C.F., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A102, (1923), 643-667.
- [3] Taylor, G.I., Elam, C.F., *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A108, (1925), 28-51.
- [4] Taylor, G.I., *J. Inst. Metals*, 62, (1938), 307-315.
- [5] Eshelby, J.D., *Proc. Roy. Soc.*, A241, (1957), 376.
- [6] Kröner, E., *Acta Metall.*, 9, (1961), 155-165.
- [7] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 13, (1965), 213-222.
- [8] Hill, R., *J. Mech. Phys. Solids*, 14, (1966), 95-102
- [9] Kocks U. F., Brown T. J., *Acta Metall.*, 14, (1966), 87.
- [10] Kröner, E., *J. Mech. Phys. Solids*, 25, (1977), 137-155.
- [11] Hutchinson, J.W., *Proc. Roy. Soc.*, A319, (1970), 247-258.
- [12] Mandel, J., *Cours CISM 97*, Udine, Springer, New York, (1971).
- [13] Bunge, H.J., *Kristall und Technik*, 6, (1971), 677-728.
- [14] Zaoui, A., *Thèse d'Etat*, Paris, (1972).
- [15] Hill, R., *Proc. R. Soc. Lond.*, A326, (1972), 131-147.
- [16] Hill, R., Rice, J.R., *J. Mech. Phys. Solids*, 20, (1972), 401-413.
- [17] Zarka, J. *Méca.*, 12, (1973), 275-318.
- [18] Honeff, H. et Mecking, H., *Proc. of Icotom V*, Springer, Berlin, (1978), 265.
- [19] Mandel, J., *Int. J. Solids*, 17, (1981), 873-878
- [20] Kocks, U.F. et Canova, G.R., *Risø Nat. Lab.*, Roskilde, Denmark, (1981), 35.
- [21] Canova, G.R, Kocks, U.F et Jonas, J.J., *Acta Metall.*, 32, (1984), 211
- [22] Franciosi, P., *Proc. 8<sup>th</sup> Risø Symposium of Denmark*, (1984), 83-89.
- [23] Franciosi, P., Berveiller, M., Zaoui, A. *J. Mech Theor. Appl.*, 4, (1985), 201-219.
- [24] Fassi-Fehri, O., *Thèse, Faculté des Sciences de Metz*, (1985):
- [25] Jackson, P. J., Basinski, Z. S., *Can. J. Phys.*, 45, (1987), 707.

- [26] Iwakuma, T., Nemat-Nasser, S., Proc. R. Soc. Lond., A394, (1984), 87-119.
- [27] Berveiller, M., Thèse d'état, Paris Nord, (1978).
- [28] Berveiller, M., Zaoui, A., J. Eng. Mat. Tech., 106, (1984), 295 -.
- [29] Lipinski, P., Berveiller, M., Corvasce, F., Arch. Mech., 40, (1988), 725-740.
- [30] Lipinski, P., Berveiller, M., Int. J. Plasticity, 5, (1989), 149-172.
- [31] Lipinski, P., Krier, J., Berveiller, M., Revue Phys. Appl., 25, (1990), 361.
- [32] Lipinski, P., Naddari, A., Berveiller, M., Int. J. Solids Structures, 29, (1991), 1873.
- [33] Lipinski, P., "Modélisation du comportement des métaux en transformation finies à partir des méthodes de transition d'échelles", Thèse d'Habilitation, Faculté des Sciences de Metz, (1993).
- [34] Muller, D., Lemoine, X., and Berveiller, M., Int. Conf. Mecamat 93, Moret-Sur-Loing, (1993), 128-139
- [35] Berveiller, M., Muller, D. and Kratochvil, J., Int. J. of Plasticity, 9, (1993), 633-652.
- [36] Reubrez, E., Lipinski, P., Berveiller, M., Proc. of the 13th. Risø inter. Symp. on Materials Science, (1992), 403-408.
- [37] Krier, J., Thèse de Doctorat, Metz, (1992)
- [38] Francois, M., Thèse de Doctorat, ENSAM, (1991)
- [39] Mathur, K.K., Dawson, R. P., Kocks, U. F., Mech. of Mat., 10, (1990), 183-202.
- [40] Mathur, K.K., Dawson, R. P., J. of Eng. Mat. and Tech., 112, (1990), 292-297.
- [41] Massoni, E., Bellet, M., Abouaf, M., Chenot, J.L., "Numerical Methods for non-linear problems", Pineridge Press, 3, (1986), 480-493.
- [42] Massoni, E., Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, (1987).
- [43] Sidoroff, F., "Cours sur les grandes déformations, Rapport GRECO G.D.E n° 52, (1982).
- [44] Wang, N. M., "Numerical analysis of forming process", Pineridge Press, (1984), 117.
- [45] Kitagawa, H., Seguchi, Y. and Tomita, Y., Ing. Archiv., 41, (1972), 213-224

- [46] Kitagawa, H., Tomita, Y., Proc. 21st Japan National Congress for Applied Mechanics, (1971), 243-255
- [47] Detraux, J.M., Horkay, F., Jameux, J.M., Marchand, J.L., Ronde Oustau, F., De Baynast, C., Groupe de travail P.S.A-RENAULT-SOLLAC, contrat CECA rapport final, (1990).
- [48] Silva, C., mémoire de DEA, "Validation des lois de comportement et étude de la flexion approchée sur un élément de membrane", Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1992).
- [49] Scacciatella, E., Lipinski, P., Berveiller, Detraux, J.M., Horkay, F.,M., Proc. of the 13th. Risø inter. Symp. on Materials Science, (1992),431-437.

ouvrages généraux

"Physique et mécanique de la mise en forme", Ecole d'été d'Oléron, dirigé par Moussy, F., Franciosi, P., Presses du CNRS IRSID, Paris, (1990)

Dhatt, G., Touzot, G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", Les Presses de l'Université, Maloine S.A Editeur, Paris, (1981)

François, D., Pineau, A., Zaoui, A., "Comportement mécanique des matériaux", Hermès, Paris, (1991)