



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ

pour l'obtention du

doctorat de l'Université de Metz

en Mathématiques

mention : Mathématiques appliquées,
par Mr **Rachid OUTBIB**.

Titre de la thèse :

SUR LA STABILISATION GLOBALE DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES

PAR RETOUR D'ÉTAT RÉGULIER

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420473 2

03 80437

S/M3
94/4

Table des matières

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940115
Cote	S/M3 94/4
Loc	Mayaneu

1	Introduction	3
2	Notations et formulation du problème	5
2.1	Notations	5
2.2	Formulation du problème	6
3	Généralités	7
3.1	Notions de stabilité	7
3.1.1	Définitions	7
3.1.2	Fonctions de Liapounov	8
3.1.3	Principe d'invariance de Lasalle	10
3.2	Stabilisation	10
3.2.1	Les conditions nécessaires de Brockett	11
3.2.2	La théorie de Artstein-Sontag	12
3.2.3	Stabilisation semi-globale	13
3.2.4	Un exemple	13
4	Stabilisation des systèmes non linéaires par la méthode de Jurdjevic-Quinn	15
4.1	Introduction	15
4.2	Les systèmes analytiques	18
4.2.1	Résultat principal	18
4.2.2	Exemples d'applications	24
4.3	Cas des systèmes C^∞ (non analytiques)	26
4.4	Applications théoriques	30
4.4.1	Stabilisation des systèmes en cascades	30
4.4.2	En présence d'une famille d'intégrales premières	38
4.5	Remarques de conclusion	42
4.5.1	Stabilisation par feedback borné	42
4.5.2	Stabilisation des systèmes non affines en contrôles	43
4.5.3	Stabilisation des systèmes de classe C^k	44

5	Principe de réduction pour la stabilisation des systèmes	45
5.1	Introduction	45
5.2	Trois réponses	47
5.3	Les systèmes plans d'Hermes.	58
5.3.1	$k \leq m$	58
5.3.2	$k > m$	59
6	Stabilisation des équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide	65
6.1	Introduction	65
6.2	Stabilisation par deux contrôles	68
6.3	Stabilisation par un seul contrôle	70
6.3.1	Cas d'un corps non symétrique	70
6.3.2	En présence d'une symétrie	72
6.4	Stabilisation d'un corps rigide autour de l'axe intermédiaire	74
6.5	conclusion	77
	Bibliographie	79

1

Introduction

Cette thèse regroupe certains résultats sur la stabilisation par retour d'état régulier, des systèmes non linéaires.

Actuellement, dans la littérature, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation globale des systèmes non linéaires, sauf pour des cas particuliers, les systèmes linéaires par exemple.

Il est à noter que les résultats de stabilisation obtenus dans cette thèse sont globaux et les feedbacks proposés sont réguliers (i.e analytiques ou C^∞)

Dans le cas où le système n'est pas stabilisable par un feedback de classe C^1 , principalement quand il ne vérifie pas les conditions de Brockett, différents auteurs ont cherché à stabiliser par des feedbacks moins réguliers. Par exemple, pour certains systèmes plans non stabilisable par feedback C^1 , Kawski propose une stabilisation par des feedbacks dont la régularité est Hölderienne (donc entre continu et C^1). Il y a aussi la technique de Artstein-Sontag qui permet une stabilisation par feedback presque analytique (i.e analytique sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, continu à l'origine)

Ici, l'intérêt est de donner des feedbacks très réguliers y compris à l'origine.

Si le système est stabilisable au moins par un feedback de classe C^1 , alors on cherche des feedbacks réguliers sinon on considère un système dit "augmenté" . C'est à dire dont on augmente l'espace d'état, ce qui revient à considérer des feedbacks dynamiques, ou encore dans le langage de l'automatique à ajouter des intégrateurs .

Ce travail est composé de trois parties.

Dans la première partie on va s'intéresser à la stabilisation par la méthode de Jurdjevic-Quinn. Le but est de proposer une forme simple et générale de cette technique. Une série d'exemples pratiques et théoriques sera traitée.

Le deuxième volet de ce travail concerne la stabilisation par feedback dynamique : si on considère le système défini sur $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.1)$$

stabilisable par feedback régulier à l'origine,

le problème est de déterminer des fonctions $g : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^+$ telles que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x, y) \cdot f(x, g(x, y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (1.2)$$

est stabilisable.

L'objectif est de donner certaines réponses à ce problème.

La troisième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilisation des équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide.

L'essentiel de ce travail a fait l'objet d'une série de publications.

2

Notations et formulation du problème

2.1 Notations

Ici, nous rappelons quelques notations "standards" qui vont être utilisées tout le long de ce travail.

$\langle, \rangle$ et $\| \cdot \|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Si f est une fonction scalaire différentiable, ∇f représente le gradient de f .

S'il y a risque de confusion, on utilisera plutôt les notations $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^n}$, $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$ et $\nabla_{\mathbb{R}^n}$.

Pour un champ de vecteurs X défini sur $\mathbb{R}^n$, on note

- $X_t(x_0)$ la solution du système différentiel $\dot{x} = X(x)$ avec $X_0(x_0) = 0$.
- $\frac{\partial X}{\partial x}$ la matrice jacobienne de X .
- Si f est fonction scalaire différentiable, $X.f$ désigne l'action du champ de vecteurs X , considéré comme un opérateur différentiel, sur f .

$$X.f(x) = \left. \frac{d}{dt} f(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla f(x), X(x) \rangle$$

et par récurrence on définit $X^k.f = X(X^{k-1}.f)$ pour $k > 1$.

- Pour un champ de vecteurs Y sur $\mathbb{R}^n$, $[X, Y]$ représente le crochet de Lie à savoir $[X, Y] = \frac{\partial Y}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y$. et par récurrence on définit

$$ad_X^0 Y = Y$$

et

$$ad_X^k Y = [X, ad_X^{k-1} Y] \text{ pour } k > 0$$

$\mathcal{M}_{n \times m}$ désigne l'ensemble des matrices n lignes et m colonnes

Si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$

- $A^\top$ (élément de $\mathcal{M}_{m \times n}$) représente la matrice transposée.
- si $n = m$, $\det A$ est le déterminant de la matrice A

Si $\tau_1, \dots, \tau_q$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n . Alors

- $\text{Span}\{\tau_1, \dots, \tau_q\}$ désigne le sous espace vectoriel engendré par cette famille.
- si $n=q$, on notera $\det(\tau_1, \dots, \tau_n)$, le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\tau_1, \dots, \tau_n$.

On utilisera $\dim$, pour désigner la dimension d'un espace vectoriel.

Pour F un sous espace de E , espace vectoriel, $F^\perp$ représente l'espace orthogonal à F dans E .

2.2 Formulation du problème

Soit un système dont l'évolution peut être décrite par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) \\ x \in M, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (2.1)$$

où M est une variété différentiable connexe appelée espace d'état et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ espace des contrôles, $x(t)$ représente l'état du système à l'instant t et X est un champ de vecteurs défini sur M . Dans cette thèse, M sera l'espace $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Le problème auquel on s'intéresse est le suivant : étant donné $x_0 \in M$, trouver un feedback $u = u(x)$ tel que le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(x(t))) \quad (2.2)$$

admette x_0 comme point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

3

Généralités

3.1 Notions de stabilité

Pour la clarté de l'exposé, nous allons d'abord rappeler des notions classiques de stabilité pour les systèmes autonomes.

3.1.1 Définitions

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) \\ x \in M, X(x_0) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Définition 1 (*Stabilité*)

Le point d'équilibre x_0 est dit stable (au sens de Liapounov) si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|X_t(x) - x_0\| < \epsilon$$

Définition 2 (*Attractivité*)

on dira que x_0 est attractif si $\forall x \in U$ un voisinage de x_0 , $X_t(x)$ existe pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$.

x_0 est globalement attractif si $\forall x \in M, \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(x) = x_0$.

Définition 3 (*Stabilité asymptotique*)

x_0 est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

x_0 est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Définition 4 (*Stabilité exponentielle*)

Le point d'équilibre x_0 est dit *exponentiellement stable* si il est possible de trouver une estimation de la forme:

$$\|X_t(x) - x_0\| \leq b \|x - x_0\| e^{-at} \quad a > 0, b > 0$$

pour tout x appartenant à U un voisinage de x_0 et tout $t > 0$.

Définition 5 (*L'ensemble ω -limite*)

Un point $q \in M$ est dit *point ω -limite* pour la trajectoire $X_t(x_1)$, s'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $t_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ telle que $(X_{t_n}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers q .

On remarque que pour montrer qu'un point d'équilibre admette une des propriétés ci-dessus, en utilisant les définitions, on doit résoudre explicitement le système différentiel (3.1), ce qui est, en général très difficile. En fait, on utilise plutôt les théorèmes suivants dûs à Liapounov ([21]).

3.1.2 Fonctions de Liapounov

Théorème 3.1 *S'il existe une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un voisinage U de x_0 et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :*

$$(a) \quad V(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq x_0$$

$$\nabla V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0,$$

$$(b) \quad \dot{V}(x) = X.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$$

alors x_0 est un point d'équilibre stable pour (3.1). Si de plus la fonction V est telle que

$$(c) \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{x_0\}$$

alors x_0 est asymptotiquement stable.

Définition 6 (*Fonction de Liapounov*)

Une fonction V qui satisfait (a) est appelée *fonction de Liapounov* pour (3.1) en x_0 . V sera dite *fonction large* (ou *faible*) de Liapounov si elle vérifie en plus (b). Si (c) est vérifié alors V est appelée *fonction de Liapounov stricte* pour (3.1) en x_0 .

Théorème 3.2 (version globale) *S'il existe $V : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive et propre (c'est-à-dire l'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^+$ est un compact de M) telle que*

$$X.V(x) < 0 \quad \forall x \in M - \{x_0\}, \quad X.V(x_0) = 0$$

alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable (G.A.S).

On a aussi le théorème inverse suivant (Zubov [21], Massera [34], Kurzweil [30]).

Théorème 3.3 (Théorème inverse)

Si X est continu et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (3.1) admet une fonction de Liapounov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .

Par analogie au théorème précédent, on peut penser que si x_0 est un point d'équilibre stable, le système (3.1) admet une fonction de Liapounov large. Mais, comme le montre l'exemple suivant, x_0 peut être un point d'équilibre stable sans que le système (3.1) ne possède une fonction de Liapounov large.

Exemple 1 *Considérons le système défini sur $\mathbb{R}$ suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

on suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante d'éléments positifs telle que :

- . $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$
- . $f(x_n) = f(-x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- . $f(0) = 0$ et $f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}^n - \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$

Un raisonnement simple montre que le système (3.2) est stable. Et si V est une fonction définie positive, alors au voisinage de l'origine il existe x_1 tel que la dérivée de V par rapport au temps en x_1 , est strictement positive.

Un exemple de fonction f qui vérifie les conditions ci-dessus est le suivant:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin^2(1/x^2) \quad \forall x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Le théorème 3.1 prouve que pour montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Liapounov stricte mais il n'y a pas de méthodes constructives qui permettent de trouver de telles fonctions. En général il est plus facile de trouver une fonction de Liapounov large V . Dans ce cas, pour déduire la stabilité asymptotique, on utilise le résultat suivant, dû à Lasalle.

3.1.3 Principe d'invariance de Lasalle

Il est à noter que le résultat suivant est essentiel et sera utilisé souvent tout le long de ce travail.

Théorème 3.4 (Principe d'invariance de LaSalle [31]) *Soit V une fonction de Liapounov large, de classe C^1 , pour (3.1) en x_0 . Alors toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers M , le plus grand ensemble invariant par X et contenu dans*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / X.V(x) = 0\}.$$

Si en plus V est propre ($\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$) alors toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$ et donc toutes les trajectoires tendent vers M .

Finalement, Pour montrer que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, il suffit de montrer que $M = \{x_0\}$.

Dans la suite, l'ensemble M sera appelé l'ensemble de Lasalle.

Si X, V sont analytiques alors l'ensemble de Lasalle peut être calculé explicitement. En effet, on peut montrer que M est donnée par

$$M = \{x \in M / X^k V(x) = 0, k \in \mathbb{N}\}$$

Maintenant, si X ou V n'est pas analytique, on ne dispose pas de méthodes pour déterminer cet ensemble.

Dans la suite de ce travail, on prendra $x_0 = 0$ l'origine de $\mathbb{R}^n$.

3.2 Stabilisation

Considérons le système contrôlé suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in U, u \in \mathcal{U} \end{cases} \quad (3.4)$$

où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et $X : U \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 (resp. C^∞ , C^ω) tel que $X(0, 0) = 0$, $u = (u_1, \dots, u_m)^\top$ représente le contrôle.

Pour désigner u on utilisera aussi le vocabulaire: feedback ou loi de commande.

Le système (3.4) sera dit affine en le contrôle si

$$X(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i$$

où f est un champ de vecteurs appelée la dérive et $g_i (i = 1, \dots, m)$ les champs contrôlés.

Définition 7 (*Stabilisation*)

On dira que (3.4) est stabilisable s'il existe un feedback $u = u(x)$, au moins continu, tel que le système bouclé :

$$\dot{x} = X(x, u(x))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

Dans ce paragraphe nous allons rappeler les principaux résultats de stabilisation essentiellement ceux qu'on utilisera par la suite.

3.2.1 Les conditions nécessaires de Brockett

Le théorème suivant dû à Brockett ([10]) donne des conditions nécessaires de stabilisation.

Théorème 3.5 (*Les conditions de Brockett*)

Si le système (3.4) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors :

- (i) Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.
- (ii) Il existe un voisinage N de $(0, 0)$ tel que pour tout $\xi \in N$, il existe un contrôle $u_\xi(\cdot)$ défini sur $[0, +\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

(iii) L'application

$$\begin{aligned} \gamma : U \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto X(x, u) \end{aligned}$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

1. La condition (i) n'est pas nécessaire si on se contente d'un feedback continu comme le montre l'exemple suivant (Kawski [27]) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 = u \\ x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

qui est stabilisable avec

$$u(x) = -x_2 + x_1 + \frac{4}{3}x_1^{\frac{1}{3}} - x_2^3.$$

2. La condition (ii) est une condition nécessaire de stabilisabilité, si la régularité exigée est au moins de classe C^1 .

3. La condition (iii) est également une condition nécessaire à l'existence d'un feedback stabilisateur continu.

4. Les conditions de Brockett ne sont pas suffisantes pour l'existence d'un feedback stabilisateur même si la régularité exigée est seulement la continuité.

3.2.2 La théorie de Artstein-Sontag

Etant donné un système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (3.5)$$

et $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie positive et propre, on dira que V est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système (3.5) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), X(x, u) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

On peut remarquer que si (3.5) admet un feedback stabilisateur continu alors, d'après le théorème inverse ([21],[34], [30]), (3.5) admet une fonction de Liapounov stricte de classe C^∞ et donc (3.5) admet une fonction de Liapounov contrôlée.

Dans ([47]), Sontag a démontré que si un système affine en contrôles admet une fonction de Liapounov contrôlée, alors il est stabilisable avec un feedback analytique sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; en plus, il a donné une formule explicite du feedback stabilisateur. On rappelle son résultat pour un système mono-entrée. Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.6)$$

Supposons qu'il existe $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ analytique, définie positive et propre telle que :

$$\langle \nabla V(x), g(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$$

Posons

$$a(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad \text{et} \quad b(x) = \langle \nabla V(x), g(x) \rangle$$

alors

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-a(x) - \sqrt{a^2(x) + b^4(x)}}{b(x)} & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0 \end{cases}$$

stabilise (3.6).

En outre, u sera continue si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que

$$x \in B(0, \delta) - \{0\} \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R} : \|u\| < \epsilon \text{ et } \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0.$$

3.2.3 Stabilisation semi-globale

Le système (3.4) sera dit stabilisable semi-globalement s'il vérifie la propriété suivante: Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, il existe une loi de commande $u_K = u_K(x)$ régulière telle que :

- Le système bouclé est localement asymptotiquement stable.
- Le bassin d'attraction contient le compact K .

Des résultats significatifs, pour ce type de stabilisation, ont été proposés, essentiellement par Kokotovic-Sussmann (cf [50]).

Ce type de stabilisation est intéressant dans les applications pratiques. Malheureusement, la stabilisation semi-globale, comme le montre l'exemple suivant, n'implique pas la stabilisation globale.

3.2.4 Un exemple

Considérons le système défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x)(x^3 + u) \sin^2\left(\frac{u}{x}\right) \\ x, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.7)$$

où f est la fonction scalaire définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

Le système (3.7) vérifie la propriété suivante :

- Le système est stabilisable semi-globalement par un feedback linéaire.
- Il n'existe pas de feedback continu qui stabilise globalement le système (3.7).

Démonstration

Soient K un compact de $\mathbb{R}$ et n un entier tel que $K \subset [-n, n]$. Posons,

$$u_K(x) = -mx \quad (3.9)$$

avec m un entier qui vérifie $\sin m = 1$ et $m > n^2$.

On considère la fonction de Liapounov suivante : $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (3.7)(3.9) est donnée par

$$\dot{V}(x) = x^2 f(x)(x^2 - m)$$

Pour x dans $[-n, n]$ on a $x^2 - m < 0$ alors $\dot{V}(x)$ est strictement négative pour tout x dans K . Le système bouclé (3.7)(3.9) est alors localement asymptotiquement stable et le bassin d'attraction contient K .

le premier point de la propriété est ainsi démontré.

Maintenant, pour montrer qu'il n'existe pas de loi de commande continue qui rend le système bouclé globalement asymptotiquement stable, nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons qu'il existe un feedback continu, qui rend le système bouclé G.A.S.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $f(x) \sin^2\left(\frac{u(x)}{x}\right)$ est positive ou nulle. Comme le système bouclé est supposé G.A.S nous avons

$$x(x^3 + u(x)) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

En particulier, pour x positif strictement, on a $x^3 + u(x) < 0$ alors $\left|\frac{u(x)}{x}\right| > x^2$.

Finalement, il existe $x_0 > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{u(x_0)}{x_0} = k\pi$.

Donc, x_0 est un point singulier autre que l'origine. D'où une contradiction.

Ce qui termine la preuve.

4

Stabilisation des systèmes non linéaires par la méthode de Jurdjevic-Quinn

4.1 Introduction

Un des premiers et des plus importants résultats de stabilisation des systèmes non linéaires est celui établi par Jurdjevic-Quinn en 1978.

Ce résultat concerne le système affine en le contrôle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) + uY(x(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

où la dérive est dissipative.

A l'origine Jurdjevic et Quinn ont considéré le cas $X(x) = Ax$ où A est une matrice $n \times n$ antisymétrique et $Y(x)$ un champ de vecteurs analytique.

En utilisant le principe d'invariance de Lasalle, ils ont donné une condition suffisante de stabilisation du système (4.1) qui peut être énoncée de la façon suivante :

Théorème 4.1 (*Jurdjevic-Quinn [25]*)*Si*

$$\text{span}\{X(x), \text{ad}_X^k Y(x); k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

et ceci pour tout x de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ alors le feedback

$$u(x) = -\langle x, Y(x) \rangle \quad (4.3)$$

rende le système bouclé G.A.S

Par la suite, nous utiliserons le vocabulaire suivant:

Définition 7

- Le feedback défini par (4.3) sera appelé le contrôle de Jurdjevic-Quinn.
- Si la condition (4.2) est satisfaite, on dira que le système (4.1) vérifie la ad-condition.

Durant ces quinze dernières années plusieurs améliorations du résultat précédent ont été proposées. Ainsi, la même année, M.Slemrod a montré que pour prouver la stabilité asymptotique du système bouclé (4.1)(4.3), il suffit que la ad-condition soit vérifiée sur Ω , un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Et que sur $\Omega^\perp$, $\{0\}$ est le seul sous ensemble invariant par la dynamique libre ($u = 0$).

En 1981, J.P.Gauthier et G.Bornard ont généralisé le théorème 4.1 au cas où la dérive est un champ de vecteurs quelconque possédant une intégrale première qui soit une fonction de Liapounov.

En 1983, E.P.Ryan et N.J.Buckingham ont donné un exemple de système qui ne vérifie pas la ad-condition mais qui est stabilisable par le contrôle de Jurdjevic-Quinn.

Enfin, en 1988, K.K.Lee et A.Arapostathis ont remarqué que ce résultat est encore valable dans certains cas où la dérive est seulement dissipative.

Il y a aussi les articles Bacciotti[7], Byrnes-Isidori-Willems[15], Kalouptsidis-Tsinias[26], Tsinias [51], qui traitent de cette question.

Le but de la première partie de cette thèse est de proposer une forme simple et générale de ce résultat.

Dans un premier temps, nous allons énoncer le résultat dans le cas d'un système analytique, puis nous donnerons une version de ce théorème dans le cas des systèmes seulement C^∞ .

Une série d'exemples sera traitée. D'une part, pour illustrer l'optimalité de notre version de ce résultat et d'autre part pour montrer la différence entre le cas analytique et le cas C^∞ .

Comme application théorique, nous considérerons des systèmes en cascade, C'est à dire, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^\nu \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.4)$$

Dernièrement, un certain nombre d'articles (cf [13], [14],[11],[29],[45]) a été consacré à l'étude de la stabilisation du système (4.4) dans $\mathbb{R}^{\nu+n}$, quand le système défini sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.5)$$

appelé "zéro dynamique" est asymptotiquement stable.

En utilisant la méthode de Jurdjevic-Quinn, on proposera une condition suffisante pour la stabilisation du système (4.4) dans le cas où la zéro dynamique est seulement stable.

Dans le quatrième paragraphe, nous intéresserons au cas où le système (4.1) ne vérifie pas la ad-condition mais est tel que la dérive (i.e le champ de vecteur X) possède une famille d'intégrales premières. Nous nous proposons de donner une condition nécessaire et suffisante pour construire une fonction de Liapounov, à partir de cette famille, de sorte que le contrôle de Jurdjevic-Quinn rend le système bouclé globalement asymptotiquement stable.

4.2 Les systèmes analytiques

4.2.1 Résultat principal

On considère le système affine en le contrôle, défini sur $\mathbb{R}^n$, suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = X(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i Y^i(x(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.6)$$

où $X, Y^i (i = 1 \dots m)$ sont des champs de vecteurs analytiques. où $X(0) = 0$, et nous supposons en outre qu'il existe V une fonction de Liapounov analytique telle que $X.V \leq 0$ sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2 ([38]) *Le système bouclé, défini à partir de (4.6) avec la loi de commande*

$$u_i(x) = -Y^i V(x)$$

est globalement asymptotiquement stable si seulement si l'ensemble

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / X^{k+1}V(x) = X^k Y^i V(x) = 0; k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m\} \quad (4.7)$$

est réduit à $\{0\}$

Démonstration

Le champ de vecteurs du système bouclé est

$$Z = X - \sum_{i=1}^m (Y^i V) Y^i$$

Alors la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé est

$$\dot{V}(x) = Z.V(x) = X.V(x) - \sum_{i=1}^n (Y^i V)^2 \leq 0,$$

donc le système bouclé est stable à l'origine.

D'après le principe d'invariance de Lasalle, les solutions tendent vers M , le plus grand ensemble invariant par Z contenu dans

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$$

Si $X_t(\cdot)$ est le flot du champ de vecteurs X , alors $\forall x \in M \subset \Omega$ et $\forall t \geq 0$ on a $Z_t(x) = X_t(x)$.

Comme M est invariant, il vient

$$X.V[X_t(x)] = Y^i V[X_t(x)] = 0 \text{ pour } i = 1 \dots m \text{ et } x \in M \subset \Omega$$

Ce qui implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} X.V[X_t(x)] \right|_{t=0} = X^{k+1}V(x) = 0$$

et

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} Y^i V[X_t(x)] \right|_{t=0} = X^k Y^i V(x) = 0$$

Donc $x \in W$ en vertu de la condition (4.7) nous avons $M = \{0\}$. L'origine est alors attractive.

Ainsi, la condition (4.7) est suffisante.

Maintenant, nous allons montrer que cette condition est nécessaire.

Supposons qu'il existe $x_0 \neq 0$ et $x_0 \in W$.

Puisque $X, Y^i (i = 1 \dots m)$ sont analytiques, nous avons l'égalité suivante:

$$Y^i[X_t(x_0)] = \sum_{k=0}^{\infty} X^k Y^i V(x_0) \frac{t^k}{k!} \text{ pour } i = 1 \dots m$$

Comme $x_0 \in W$ alors

$$X^k Y^i V(x_0) = 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N} \text{ et } i = 1 \dots m$$

Ce qui implique que

$$Y^i[X_t(x_0)] = 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ et } i = 1 \dots m$$

Nous avons alors

$$Z_t(x_0) = X_t(x_0) \quad \forall t \geq 0 \tag{4.8}$$

Maintenant,

$$V[X_t(x_0)] = V[x_0] \quad \forall t \geq 0 \tag{4.9}$$

D'après (4.8) et (4.9) nous avons

$$V[Z_t(x_0)] = V(x_0) \quad \forall t \geq 0$$

Alors l'origine n'est pas globalement attractive.

d'où le théorème ■

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons de donner une forme duale à la condition (4.7) du théorème précédent. L'intérêt de ce résultat est de montrer qu'on peut augmenter la distribution proposée initialement par Jurdjevic-Quinn et Gauthier-Bornard à savoir

$$D = \{X, \text{ad}_X^k Y^i ; k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m\}$$

en une distribution D_1 plus riche, en champs de vecteurs, de sorte que la condition suffisante de la stabilité asymptotique du système bouclé

$$\dim D_1(x) = n$$

pour tout x de $\{x \in \mathbb{R}^n / X^k V(x) = 0; k \in \mathbb{N}\}$ devient aussi une condition nécessaire.

Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante:

Définition 8

Pour tout champ de vecteurs τ sur $\mathbb{R}^n$, on définit $Z^{pq}(\tau)$, où $p, q \in \{1, \dots, n\}$, par:

- Si $p < q$

$$Z^{pq}(\tau)(x) = \langle e_q, \tau(x) \rangle e_q - \langle e_p, \tau(x) \rangle e_p$$

- Si $p \geq q$

$$Z^{pq}(\tau)(x) = 0$$

où $e_i (i = 1 \dots n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous avons le lemme suivant:

Lemme 4.1 *Pour tout champ de vecteurs τ défini sur $\mathbb{R}^n$ on a : Si $\tau(x_0) \neq 0$ alors*

$$\text{Span}\{Z^{pq}(\tau)(x_0); 1 \leq p < q \leq n\} = \text{Span}\{\tau(x_0)\}^\perp \quad (4.10)$$

Démonstration

Puisque

$$\langle \tau(x_0), Z^{pq}(\tau)(x_0) \rangle = 0 \text{ pour } p, q \in \{1, \dots, n\},$$

pour prouver l'égalité (4.10), il suffit de montrer que

$$\dim \text{Span}\{Z^{pq}(\tau)(x_0); 1 \leq p < q \leq n\} = n - 1$$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\tau_{i_0}(x_0) \neq 0$. Alors, des calculs directs montrent que

$$\dim \text{Span}\{Z^{1i_0}(\tau)(x_0), \dots, Z^{(i_0-1)i_0}(\tau)(x_0), Z^{i_0(i_0+1)}(\tau)(x_0), \dots, Z^{i_0n}(\tau)(x_0)\} = n - 1$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Maintenant, nous allons démontrer le résultat suivant:

Proposition 4.1 *La condition (4.7) est vérifiée si et seulement si :*

$$\text{span}\{X(x), \text{ad}_X^k Y^i(x), \text{ad}_X^k Z^{pq}(\nabla V^\top)(x), i = 1 \dots m, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q \leq n\} = \mathbb{R}^n \quad (4.11)$$

pour tout x de $W_0 = \{x \in \mathbb{R}^n / X^k V(x) = 0, k \in \mathbb{N}\} - \{0\}$

Démonstration

Tout d'abord nous allons montrer l'égalité suivante :

$$\begin{cases} X^k Y^i V(x) = \text{ad}_X^k Y^i \cdot V(x) & \forall k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m \\ \forall x \in W_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour cela nous allons raisonner par récurrence.

Il est clair que pour $k = 0$ l'égalité (4.12) est vérifiée.

Supposons que l'égalité (4.12) est vérifiée pour un entier k et montrons qu'elle est encore satisfaite pour $k + 1$.

Par définition, nous avons

$$X^{k+1} Y^i V(x) = X(X^k Y^i V(x)) \text{ pour } i = 1 \dots m \quad (4.13)$$

Comme

$$X^k Y^i V(x) = \text{ad}_X^k Y^i V(x) \text{ pour } i = 1 \dots m$$

Il vient que

$$X^{k+1} Y^i V(x) = X \langle \text{ad}_X^k Y^i, \nabla V^\top \rangle \text{ pour } i = 1 \dots m$$

, ensuite

$$X^{k+1} Y^i V(x) = \left\langle \text{ad}_X^k Y^i(x), \frac{\partial \nabla V^\top}{\partial x} X(x) \right\rangle + \left\langle \nabla V^\top(x), \frac{\partial \text{ad}_X^k Y^i}{\partial x} X(x) \right\rangle \quad (4.14)$$

En utilisant le fait que les éléments de W_0 sont des extrema de la fonction $X.V$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial X.V}{\partial x}(x) = 0 \\ \forall x \in W_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

et donc

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^\top \nabla V^\top = - \left(\frac{\partial \nabla V}{\partial x}\right)^\top X(x) \quad (4.16)$$

pour tout x de W_0 .

D'après (4.14) et (4.16) nous avons

$$X^{k+1}Y^iV(x) = - \left\langle ad_X^k Y(x), \frac{\partial X(x)}{\partial x}^\top \nabla V^\top(x) \right\rangle + \left\langle \nabla V^\top(x), \frac{\partial ad_X^k Y(x)}{\partial x} X(x) \right\rangle$$

donc

$$X^{k+1}Y^iV(x) = \left\langle \frac{\partial ad_X^k Y(x)}{\partial x} X(x), \nabla V^\top(x) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X(x)}{\partial x} ad_X^k Y(x), \nabla V^\top(x) \right\rangle$$

Finalement,

$$\begin{cases} X^{k+1}Y^iV(x) = \langle [X, ad_X^k Y](x), \nabla V^\top(x) \rangle & \text{pour } i = 1 \dots m \\ \forall x \in W_0 \end{cases}$$

L'égalité (4.12) est ainsi démontrée.

D'une façon analogue, on peut montrer que

$$\begin{cases} X^{k+1}Z^{pq}(\nabla V^\top).V(x) = ad_X^k Z^{pq}(\nabla V^\top).V(x) \\ \forall x \in W_0 \end{cases}$$

et puisque

$$\langle Z^{pq}(\nabla V^\top)(x), \nabla V^\top(x) \rangle \equiv 0$$

alors, on a

$$\begin{cases} ad_X^k Z^{pq}(\nabla V^\top).V(x) = 0 \\ \forall x \in W_0 \end{cases}$$

Maintenant, nous allons montrer que si la condition (4.11) n'est pas vérifiée alors l'ensemble W , défini dans le théorème 4.2, contient un point x_0 autre que l'origine.

Supposons que la condition (4.11) n'est pas vérifiée. Alors, il existe $x_0 \in W_0$ autre que l'origine tel que

$$\dim \text{Span}\{X(x_0), ad_X^k Y^i(x_0), ad_X^k Z^{pq}(\nabla V^\top)(x_0), i = 1 \dots m, k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q \leq n\} = n-1$$

Puisque

$$\text{Span}\{Z^{pq}(\nabla V^\top)(x_0); 1 \leq p < q \leq n\} = \text{Span}\{\nabla V^\top(x_0)\}^\perp$$

Nous avons alors l'inclusion suivante:

$$\text{Span}\{X(x_0), ad_X^k Y^i(x_0), ad_X^k Z^{pq}(\nabla V^\top)(x_0); i = 1 \dots m, k \in \mathbb{N}\} \subset \text{Span}\{\nabla V^\top(x_0)\}^\perp$$

Finalement

$$\begin{cases} X.V(x_0) = 0 \\ ad_X^k Y^i.V(x_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } i = 1 \dots m \end{cases}$$

Ce qui implique que x_0 est dans W , défini dans le théorème 4.2.

La condition (4.11) est donc nécessaire.

Reste à prouver que cette condition est aussi suffisante.

Si (4.11) est vérifiée alors pour tout x_0 de W , $\nabla V^\top(x_0)$ est orthogonale à un espace vectoriel de dimension n . Donc $\nabla V^\top(x_0) = 0$ ce qui entraîne que $x_0 = 0$.

Il vient que l'ensemble W est réduit à $\{0\}$.

La proposition est ainsi démontrée. ■

4.2.2 Exemples d'applications

Les deux exemples suivants, que nous allons traiter, ont été proposés par des auteurs comme exemples de systèmes qui ne vérifient pas la ad-condition mais qui sont stabilisable par le contrôle de Jurdjevic-Quinn.

Ici, nous allons montrer qu'en augmentant la distribution proposée par Jurdjevic-Quinn et Gauthier-Bornard (c'est à dire en ajoutant les champs de vecteurs $Z^{pq}(\nabla V^\top)(x)$, $1 \leq p < q \leq n$ à la distribution initiale) nous obtenons une distribution de rang maximum en tout point de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Exemple 2 (Ryan-Buckingham [44])

On considère le système bilinéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compte tenu des notations de la proposition, on pose

$$X(x) = Ax \text{ et } Y(x) = Bx$$

A est une matrice antisymétrique, alors pour $V(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$ nous avons $X.V(x) \equiv 0$

Dans [44], il a été montré que

$$\text{Span}\{X(x), \text{ad}_X^k Y(x); k \in \mathbb{N}\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

donc pour $x \in \Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3(x_1^2 + x_2^2) = 0\}$, on a

$$\dim \text{span}\{X(x), \text{ad}_X^k Y(x), k \in \mathbb{N}\} < 3$$

Maintenant des calculs directs montrent que

$$\det(Z^{23}(\nabla V^\top)(x), Z^{13}(\nabla V^\top)(x), Y(x)) = x_3(x_2^2 - x_3^2),$$

$$\det(Z^{13}(\nabla V^\top)(x), \text{ad}_X^1 Y(x), \text{ad}_X^2 Y(x)) = -x_1(x_1^2 + x_2^2)$$

et

$$\det(Z^{23}(\nabla V^\top)(x), ad_X^1 Y(x), ad_X^2 Y(x)) = -x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

Finalement, pour tout x de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, nous avons

$$\text{Span}\{X(x), Y(x), ad_X^1 Y(x), ad_X^2 Y(x), Z^{13}(\nabla V^\top)(x), Z^{23}(\nabla V^\top)(x)\} = \mathbb{R}^3$$

L'hypothèse de la proposition est satisfaite, alors le système est stabilisable par le contrôle de Jurdjevic-Quinn. ■

Exemple 3 (Lee-Arapostahis [32])

On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + bu \\ x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.18)$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

En vertu des notations de la proposition on pose

$$X(x) = Ax, Y(x) = b \text{ et } V(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$$

Des calculs simples montrent que

$$\begin{aligned} D(x) &= \text{Span}\{X(x), ad_X^k Y(x); k \in \mathbb{N}\} \\ &= \text{Span}\{X(x), Y(x), ad_X^1 Y(x), ad_X^2 Y(x)\} \end{aligned}$$

alors $\dim D(x) < 3$ pour tout x de $\mathbb{R}^3$. Posons

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / X.V(x) = 0\}$$

donc

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = x_3\}$$

Des calculs directs montrent que

$$\det(X(x), Y(x), ad_X^2 Z^{23}(\nabla V^\top)(x)) = 8x_2^2$$

et

$$\det(Y(x), Z^{23}(\nabla V^\top)(x), Z^{13}(\nabla V^\top)(x)) = x_1^2$$

Finalement, si $x \in \Omega$ on a

$$\det(X(x), Y(x), Z^{13}(\nabla V^\top)(x), Z^{23}(\nabla V^\top)(x), ad_X^2 Z^{23}(\nabla V^\top)(x)) = \mathbb{R}^3$$

donc le système (4.18) vérifie la condition (4.11). ■

4.3 Cas des systèmes C^∞ (non analytiques)

Dans le cadre de la stabilisation des systèmes non linéaires par la méthode de Jurdjevic-Quinn, la différence fondamentale qui existe entre le cas des systèmes analytiques et le cas des systèmes moins réguliers, réside dans la détermination de l'ensemble de Lasalle. En effet, dans le cas analytique, l'ensemble de Lasalle peut être calculé explicitement, alors que si le système est moins régulier, on ne dispose pas de techniques pour déterminer cet ensemble.

Dans ce paragraphe, on considère le système (4.6) et on suppose que les champs de vecteurs $X, Y^i (i = 1 \dots m)$ sont de classe C^∞ . X possède une fonction de Liapounov V (au moins de classe C^∞) comme intégrale première.

Le résultat principale de ce paragraphe est le théorème suivant :

Théorème 4.3 ([41])

Le système bouclé, défini à partir de (4.6) avec le feedback $u_i(x) = -Y^i V(x)$ est globalement asymptotiquement stable si et seulement si

$$\mathcal{D}^* \cdot V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (4.19)$$

où $\mathcal{D}^* = \bigcup_{t \leq 0} (X_t)_*(D)$, $D = \{\text{ad}_X^k Y, k \in \mathbb{N}\}$ et $(X_t)_*$ désigne la différentielle de $X_t : x \rightarrow X_t(x)$

Démonstration

Tout d'abord, montrons que la condition (4.19) est suffisante.

La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé est donnée par

$$\dot{V}(x) = -[Y.V(x)]^2$$

D'après le principe d'invariance de Lasalle, toutes les trajectoires solutions du système bouclé tendent vers M le plus grand ensemble invariant de

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$$

par le champ de vecteurs

$$Z(x) = X(x) - (Y.V)Y(x)$$

Pour $x \in M$ et pour tout t , nous avons

$$Z_t(x) = X_t(x)$$

Puisque M est invariant alors

$$Y.V[X_t(x)] \equiv 0$$

Ce qui implique que

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} Y^i V[X_t(x)] \right|_{t=0} = 0 \quad (4.20)$$

Dans la démonstration de la proposition.4.1 nous avons prouvé que si x vérifie $X.V(x) \equiv 0$ alors

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} Y^i V[X_t(x)] \right|_{t=0} = ad_X^k Y^i V(x) \quad (4.21)$$

En utilisant (4.20) et (4.21) on obtient

$$ad_X^k Y^i V(x) = 0 \quad \forall x \in M, k \in \mathbb{N} \text{ et } i = 1 \dots m$$

Maintenant pour un champ de vecteurs τ de D est un réel $t \leq 0$ nous avons

$$(X_t)_* \tau.V(x) = \left. \frac{d}{du} (V \circ X_t \circ \tau_u \circ X_{-t}(x)) \right|_{u=0}$$

d'autre part V est une intégrale première de X alors $V \circ X_t \equiv V$.

Nous déduisons donc l'égalité suivante:

$$(X_t)_* \tau.V(x) = \left. \frac{d}{du} (V \circ \tau_u \circ X_{-t}(x)) \right|_{u=0} = \tau.V(X_t(x)) = 0$$

Par conséquent $D_* V(x) = 0$ ce qui implique que $x = 0$. L'ensemble M est réduit à l'origine. Alors La condition (4.19) est suffisante.

Maintenant, supposons que le système bouclé est G.A.S . Nous allons prouver que la condition (4.19) est vérifiée.

Supposons qu'il existe $x_0 \neq 0$ tel que $D_* V(x_0) = 0$.

D'après (4.20) on obtient

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} Y^i V[X_t(x)] \right|_{t=t_0} = (X_{t_0})_* [X, Y].V(x_0) = 0 \quad \forall t_0 \geq 0$$

Par conséquent, la fonction $t \rightarrow Y.V(X_t(x_0))$ est constant sur $[0, +\infty[$, nous avons alors

$$Y.V[X_t(x_0)] = Y.V(x_0) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Finalement,

$$V[Z_t(x_0)] = V[X_t(x_0)] = V(x_0)$$

Or le système bouclé est supposé G.A.S alors $x_0 = 0$. d'où une contradiction.

Ceci termine la démonstration du théorème ■

Exemple 4 *Considérons le système plan suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + uf(x_1) \end{cases} \quad (4.22)$$

où f est la fonction définie de la façon suivante :

$$f(x_1) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x_1^2}} & x_1 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.23)$$

La fonction V définie par $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ est une intégrale première pour le champ de vecteurs $X = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Le contrôle de Jurdjevic-Quinn est donné par

$$u(x) = -Y.V(x) = -x_2 f(x_1) \quad (4.24)$$

où $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$

Des calculs directs montrent que

$$(X_t)_* = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

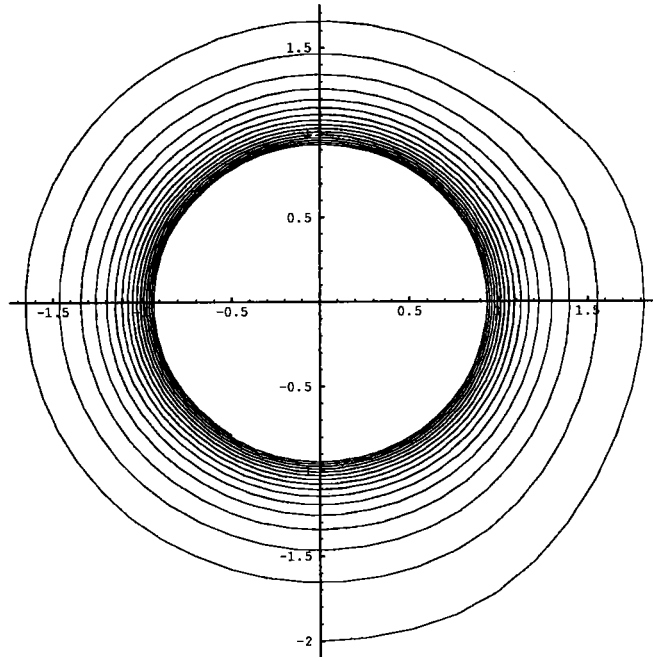
et

$$(X_t)_* Y.V(x) = (-x_1 \sin t + x_2 \cos t) f(x_1 \cos t + x_2 \sin t)$$

Il est clair que si $x \neq 0$, il est possible de trouver $t \leq 0$ tel que

$$(X_t)_* Y.V(x) \neq 0$$

finalemt, le système bouclé défini à partir de (4.22) avec le feedback (4.24) est G.A.S



Une idée du portrait de phase du système bouclé (4.22)(4.24) est donnée par la figure précédente. En considérant le graphique on peut penser que le portrait de phase contient un cycle limite. Ce phénomène est dû au fait que l'évaluation de la fonction f , pour des petites valeurs en machine, devient nulle dès que la variable x_1 est très petite.

Remarque 1 Des calculs simples montrent que l'ensemble W , défini dans le théorème 4.3 est donnée par

$$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \leq 0\}$$

donc, non réduit à l'origine.

4.4 Applications théoriques

4.4.1 Stabilisation des systèmes en cascades

Théorie des systèmes à phase minimale

Récemment, Byrnes et Isidori ont développé une nouvelle philosophie pour la stabilisation des systèmes non linéaires. Cette théorie est basée d'abord sur un changement de coordonnées de certains systèmes avec sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ y = h(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, uy \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.25)$$

pour les transformer sous la forme normale:

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \xi_1, \dots, \xi_\nu) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\nu-1} = \xi_\nu \\ \dot{\xi}_\nu = u \\ \text{où } \xi = (\xi_1, \dots, \xi_\nu)^\top \in \mathbb{R}^\nu \text{ et } z \in \mathbb{R}^{n-\nu} \end{cases} \quad (4.26)$$

ν représente le degré relatif.

Le système (4.26) est dit globalement à phase minimale, si en outre, le système suivant

$$\dot{z} = f(z, 0) \quad (4.27)$$

appelé "zéro dynamique", admet l'origine comme point critique globalement asymptotiquement stable.

Divers auteurs ont proposé en utilisant des arguments élémentaires à la Liapounov des contrôles stabilisants si le degré relatif est égal à un [13], [29], [48], [51].

En ce qui concerne les systèmes à phase minimale de degré relatif supérieur ou égal à deux, Byrnes et Isidori ont affirmé d'une part, que le système (4.26) peut être semi-globalement stabilisable (cf [14] théorème 4.2.4). D'autre part, que les systèmes exponentiellement à phase minimale (i.e la zéro dynamique est exponentiellement stable) ont la propriété suivante:

Pour un ensemble borné U de $\mathbb{R}^n$ on peut choisir un feedback qui rend le système stable pour les conditions initiales dans U et des petits entrées (cf [12] théorème 2.2).

Sussmann a montré que ces deux théorèmes étaient faux en exhibant deux contres exemples(cf [49])

Si on considère un système triangulaire

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y) \end{cases} \quad (4.28)$$

tels que les systèmes

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

et

$$\dot{y} = g(y)$$

admettant l'origine comme point critique G.A.S.

Localement, l'origine est asymptotiquement stable pour le système triangulaire. Il est clair que sans hypothèses supplémentaires, on ne peut pas conclure à la stabilité globale.

Pour ses exemples, Sussmann utilise une séparatrice qui limite le bassin d'attraction.

Extention à une forme générale

Kokotovic et Sussmann ont généralisé l'étude de la forme normale (4.26) à la forme générale:

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \xi_1, \dots, \xi_\nu) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bu \\ z \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^\nu \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.29)$$

A, B et C étant des matrices de dimensions convenables.

Quand le système (4.29) vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse $\mathcal{A}$

($\mathcal{A}_1$) la paire (A, B) est contrôlable.

($\mathcal{A}_2$) f est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\nu$ dans $\mathbb{R}^n$ admettant la décomposition suivante:

$$\begin{cases} f(x, \xi) = f(x, 0) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x, \xi) \\ y = C\xi \end{cases} \quad (4.30)$$

où f_0 est une fonction qui vérifie $\dot{x} = f_0(x, \xi)$ est G.A.S à l'origine uniformement en ξ .

($\mathcal{A}_3$) Il existe deux matrices réelles symétriques $P > 0, Q \geq 0$ et une matrice H telle

que:

$$\begin{cases} \tilde{A}^\top P + P \tilde{A} = -Q \\ PB = C^\top \text{ où } \tilde{A} = A + BH \end{cases} \quad (4.31)$$

Le résultat principal de [29] est que le système (4.29) est stabilisable globalement. Le principe de la démonstration est de se ramener à l'application du principe d'invariance de Lasalle.

Résultat principal

Dans ce sous paragraphe, on va montrer que l'on peut utiliser la méthode de Jurdjevic-Quinn pour améliorer le résultat obtenu par Kokotovic-Sussmann. (résumé dans le sous paragraphe précédent).

Tout d'abord, on va énoncer une proposition qui concerne le système:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y^i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.32)$$

Quand l'hypothèse suivante est vérifiée:

Hypothèse B

Il existent $k = (k_1, \dots, k_m)^\top$ une fonction C^∞ définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et V une fonction de Liapounov telle que

$$Z.V(x) \leq 0 \text{ avec } Z = X + \sum_{i=1}^m k_i Y^i \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Puis, on utilisera ce résultat pour améliorer le théorème 2.1 de [29].

Proposition 4.2 ([36]) *Le système bouclé défini à partir de (4.32) avec le contrôle*

$$u_i = k_i(x) - Y^i V(x)$$

est G.A.S si l'ensemble

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / Z^{k+1} V(x) = Z^k Y^i V(x) = 0; k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m\}$$

est réduit à l'origine.

Démonstration

Le raisonnement est assez simple. Il suffit d'écrire

$$u_i(x) = k_i(x) + v_i(x)$$

où $v = (v_1, \dots, v_m)^\top$ représente le nouveau feedback.

Le système (4.32) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Z(x) + \sum_{i=1}^m v_i Y^i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, v = (v_1, \dots, v_m)^\top \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.33)$$

Puis d'utiliser le théorème 4.2. ■

Maintenant, on suppose que le système (4.29) vérifie l'hypothèse $(\mathcal{A})'$ suivante:

Hypothèse $\mathcal{A}'$

$(\mathcal{A})'$ et $(\mathcal{A}_3)$ sont vérifiées.

où $(\mathcal{A}_2)'$ est l'hypothèse $(\mathcal{A}_2)$ modifiée de la façon suivante:

$(\mathcal{A}_2)'$ Il existe V une fonction de Liapounov qui vérifie :

$$. f_0(0, \xi) = 0$$

$$. \langle f_0(x, \xi), \nabla V^\top(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ uniformément en } \xi$$

la condition $(\mathcal{A}_1)$ ne figure pas dans l'hypothèse $(\mathcal{A})'$, car la contrôlabilité de la paire (A, B) n'est pas nécessaire pour la stabilisation du système (4.29)

On note $X, Y^i (i = 1 \dots m)$ les champs de vecteurs définis par :

$$X(x, \xi) = \begin{pmatrix} f(x, \xi) \\ A\xi - Bk(x, \xi) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}^n} \\ b_i \end{pmatrix} \quad \text{pour } i = 1 \dots m$$

où les b_i représentent les colonnes de la matrice B et $k = (k_1, \dots, k_m)^\top$ la fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ par

$$k_i(x, \xi) = -\frac{1}{2} \langle f_i(x, \xi), \nabla V^\top(x) \rangle \quad \text{pour } i = 1 \dots m$$

Considérons la fonction de Liapounov

$$V_1(x, \xi) = V(x) + \xi^\top P \xi$$

Des calculs directs montrent que la dérivée de V_1 le long des trajectoires du système défini par le champ de vecteurs X est donnée par

$$\dot{V}_1(x, \xi) = \langle f_0(x, \xi), \nabla V^\top(x) \rangle - \langle \xi, Q\xi \rangle \leq 0$$

donc le système vérifie l'hypothèse B.

On déduit alors le résultat suivant :

Théorème 4.4 ([36]) *Le système bouclé défini à partir de (4.29) avec le contrôle*

$$u_i(x, \xi) = -\frac{1}{2} \langle f_i(x, \xi), \nabla V^\top(x) \rangle - \langle P\xi, b_i \rangle$$

est stabilisable si l'ensemble

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / X^{k+1}V(x) = X^k Y^i V(x) = 0; k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m\}$$

est réduit à $\{0\}$

Remarque 2 *Le résultat précédent peut être généralisé au cas où la partie linéaire du système en cascade (4.29) est remplacée par une partie non linéaire :*

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \xi_1, \dots, \xi_\nu) \\ \dot{\xi} = m(\xi) + G(\xi)u \\ z \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^\nu \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.34)$$

En effet, dans [35] une condition suffisante, pour la stabilisation du système (4.34) a été proposée quand la zéro dynamique est asymptotiquement stable. Puis dans [37] quand la zéro dynamique est seulement stable.

Exemples

L'exemple suivant est une application directe de la proposition.4.2

Exemple 5 ([23]) *Considérons le système proposé par Crouch et Ivring dans [23]*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_3^3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad (4.35)$$

Byrnes et Isidori ont déjà proposé un feedback stabilisant mais leur feedback

$$u(x) = -x_3 - x_3^2 - (-x_1 + x_2^3 + x_1x_2^4 + x_1x_3^3 - x_1x_3 + x_1^2)e^{x_1x_2}$$

n'est pas polynômiale

Ici, nous nous proposons de stabiliser le système (4.35) par un feedback algébrique.

Compte tenu des notations de la proposition.4.2, on pose

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4 + \frac{1}{4}x_3^4$$

et

$$k(x) = x_2^3 \quad , \quad Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$Z(x) = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_2^3 \\ -x_2^3 \end{pmatrix}$$

Des calculs simples montrent que $Z.V(x) \equiv 0$ et les quatre relations suivantes

$$\begin{cases} Y.V(x) = -(x_1 + x_3 - x_3^3) = 0 \\ Z.V(x) = -3x_2^3x_3^2 \\ Z^3Y.V(x) = -3x_2(2x_2^8 - 27x_2^4x_3^4 + 6x_3^8) = 0 \\ Z^4Y.V(x) = -9x_3^3(42x_2^8 - 61x_2^4x_3^4 + 2x_3^8) = 0 \end{cases}$$

impliquent que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Alors le système (4.35) est stabilisable avec le feedback

$$u(x) = -x_2^3 - (x_1 + x_3 + x_3^3)$$

■

En fait, on peut montrer que d'une façon générale, le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^a \\ \dot{x}_2 = x_3^b \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad a \text{ et } b \text{ des entiers impairs} \quad (4.36)$$

est stabilisable par le feedback

$$u(x) = -x_2^a - (x_1 + x_3 + x_3^b)$$

Il suffit de prendre

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + \frac{1}{a+1}x_2^{a+1} + \frac{1}{b+1}x_3^{b+1}$$

Comme fonction de Liapounov large pour le système bouclé puis d'appliquer le principe d'invariance de Lasalle pour déduire la stabilité asymptotique.

(Pour les détails des calculs voir [36]).

Exemple 6 Soit le système défini sur $\mathbb{R}^3$ suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1^3((x-1)^2 + \xi_1 + \xi_2) \\ \dot{\xi}_1 = \alpha \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = u, \alpha > 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Inspiré de l'exemple traité par Kokotovic-Sussmann dans [29], le système (4.37) présente la particularité que l'équation $\dot{x} = -x^3(x-1)^2$ possède un autre point critique que l'origine. Contrairement à l'exemple de [29] la zéro dynamique est stable et non G.A.S.

Compte tenu des notations du théorème 4.2, on pose

$$V(x, \xi) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2$$

$$k(x, \xi) = x^4 - 2\alpha\xi_2, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$Z(x, \xi) = \begin{pmatrix} -x_1^3((x-1)^2 + \xi_1 + \xi_2) \\ \alpha\xi_2 \\ x^4 - 2\alpha\xi_2 \end{pmatrix}$$

Des calculs simples montrent que

$$\begin{cases} Z.V(x, \xi) = -x^4(x-1)^2 - \alpha\xi_2^2 \leq 0 \\ \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Maintenant, si (x, ξ) est un élément de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie

$$Z.V(x, \xi) = Y.V(x, \xi) = ZY.V(x, \xi) = 0$$

alors il est solution du système

$$\begin{cases} x^4(x-1)^2 + \alpha\xi_2^2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ x^4 - \alpha\xi_2 = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Seule l'origine vérifie le système (4.38), donc l'ensemble W défini dans le théorème 4.4 est réduit à l'origine.

Le système bouclé défini à partir de (4.37) avec le contrôle

$$u(x, \xi) = x^4 - 2\alpha\xi_2 - \xi_1 - \xi_2$$

est alors G.A.S

■

4.4.2 En présence d'une famille d'intégrales premières

Dans ce sous-paragraphe on considère le système affine en les contrôles

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y^i(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.39)$$

Et on suppose que la dérive possède une famille $\mathcal{F} = \{V_i \mid i = 1 \dots l\}$ d'intégrales premières (i.e $X.V_i \equiv 0$ pour $i = 1 \dots l$) analytiques qui vérifient:

$$\sum_{i=1}^l V_i^2(x) \text{ est une fonction de Liapounov} \quad (4.40)$$

L'idée principale est de construire une fonction de Liapounov à partir de la famille $\mathcal{F}$ de sorte que le contrôle de Jurdjevic-Quinn stabilise le système (4.39). Alors la condition (4.40) est une condition nécessaire. (voir par exemple [43]).

Dans la suite nous utiliserons $W(x)$ et $J(x)$ pour désigner respectivement la fonction

$$\begin{cases} W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l \\ x \rightarrow (V_1(x), \dots, V_l(x)) \end{cases}$$

et

$$J(x) = \left\{ \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right\}_{\substack{i=1 \dots l \\ k=1 \dots n}}$$

sa matrice jacobienne.

On notera aussi $\mathcal{A}_l$ et D_1 respectivement

$$\mathcal{A}_l = \{F : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ une fonction de Liapounov de classe } C^\infty \text{ sur } K_1 \times \dots \times K_l\}$$

où

$$K_i = [\alpha_i, \beta_i] \text{ avec } \begin{cases} \alpha_i = \inf V_i(x) \\ \beta_i = \sup V_i(x) \end{cases}$$

et

$$D_1 = \text{Span}\{\tau_0, \tau_k^i; k \in \mathbb{N}, i = 1 \dots m\}$$

avec

$$\tau_0(x) = J(x)X(x)$$

et

$$\begin{cases} \tau_k^i(x) = J(x)ad_X^{k-1}Y^i & k \geq 1 \\ i = 1 \dots m \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que pour tout F élément de $\mathcal{A}_l$, la fonction $V(x) = F(W(x))$ est une fonction de Liapounov.

Proposition 4.3 *Supposons qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{A}_l$ telle que:*

$$\begin{cases} \dim \text{Span} \{ \tau_0(x), \tau_k^i(x), Z^{pq}(\nabla_{\mathbf{R}^l} F^\top)(V(x)); k \in \mathbb{N}, 1 \leq p < q \leq l, i = 1 \dots m \} = l \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.41)$$

alors le système bouclé défini à partir de (4.39) avec la loi de commande

$$u(x) = -Y.F(W(x)) = -\langle Y(x), \nabla_{\mathbf{R}^n}(F \circ W)(x) \rangle$$

est G.A.S.

Démonstration

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$X^k Y.F(W)(x_0) = ad_X^k Y.F(W(x_0)) = 0$$

Comme

$$\nabla_{\mathbf{R}^n}(F \circ W)(x_0) = J^\top(x_0) \nabla_{\mathbf{R}^l} F(W(x_0))$$

Il vient que

$$\begin{aligned} ad_X^k Y.F(W(x_0)) &= \langle \nabla_{\mathbf{R}^n}(F \circ W)(x_0), ad_X^k Y(x_0) \rangle_{\mathbf{R}^n} \\ &= \langle \nabla_{\mathbf{R}^l} F(V), J(x_0) ad_X^k Y(x_0) \rangle_{\mathbf{R}^l} \end{aligned}$$

Alors

$$X^k Y.F(W)(x_0) = \langle \nabla_{\mathbf{R}^l} F(V), \tau_k^i(x_0) \rangle_{\mathbf{R}^l}$$

En vertu de la condition (4.41), $\nabla_{\mathbf{R}^l} F(V(x_0))$ est orthogonal à un espace de dimension l alors $x_0 = 0$.

D'où la proposition. ■

Exemple 7 Considérons le système défini sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = yAx + bu \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (4.42)$$

$b, x \in \mathbb{R}^{2n}$; $y, u \in \mathbb{R}$; A est une matrice antisymétrique.
 $\det A$ est non nul et la paire (A, B) est contrôlable.

On pose

$$X = \begin{pmatrix} yAx \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} V_1 = \frac{1}{2} \|x\|^2 \\ V_2 = y \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que V_1 et V_2 sont deux intégrales premières pour le champ de vecteurs X et que la fonction scalaire $V = V_1^2 + V_2^2$ est définie, positive et propre.

Nous avons

$$[X, Y] = - \begin{pmatrix} yAb + Ax \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$ad_X^k Y = (-1)^k y^k \begin{pmatrix} A^k b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout entier } k \geq 2$$

Comme

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} x^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$\iota_1 = J(x, y)Y = \begin{pmatrix} \langle b, x \rangle \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\iota_{k+1}(x, y) = J(x, y) ad_X^k Y = (-1)^k y^k \begin{pmatrix} \langle A^k b, x \rangle \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } k \geq 1$$

donc

$$\det(\iota_1(x, y), \iota_{k+1}(x, y)) = (-1)^k y^k \langle A^k b, x \rangle \quad \text{pour } k \geq 1$$

Ainsi, si $V_1 V_2 = \frac{1}{2} y \|x\|^2 \neq 0$ alors

$$Span\{\tau_1(x, y), \tau_{k+1}(x, y); k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^2$$

Maintenant, supposons que $V_1 V_2 = 0$.

Si F est un élément de $\mathcal{A}_2$ tel que

$$\begin{cases} \det(\tau_1(x, y), Z^{12}(\nabla_{\mathbf{R}^t} F^\top)) \neq 0 \\ (V_1, V_2) \neq (0, 0) \text{ et } V_1 V_2 = 0 \end{cases}$$

alors

$$\text{Span}\{\tau_1(x, y), Z^{12}(\nabla_{\mathbf{R}^t} F^\top)(V)\} = \mathbb{R}^2$$

finalement, on est ramené à trouver F de $\mathcal{A}_2$ tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial V_2}(0, V_2) = 0 & \text{si } V_2 \neq 0 \\ < b, x > \frac{\partial F}{\partial V_1}(V_1, 0) + \frac{\partial F}{\partial V_2}(V_1, 0) \neq 0 & \text{si } V_1 \neq 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial V_2}(0, V_2) = 0 & \text{si } V_2 \neq 0 \\ 2\|b\|^2 V_1 \left[\frac{\partial F}{\partial V_1}(V_1, 0) \right]^2 < \frac{\partial F^2}{\partial V_2}(V_1, 0) & \text{si } V_1 \neq 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Si on prend par exemple

$$F(V_1, V_2) = \frac{1}{2} V_2^2 + \frac{1}{2} e^{2V_2} \left(\frac{1}{\|b\|^2} V_1 + V_2 \right)^2$$

Il est facile de vérifier que la condition (4.43) est satisfaite.

Remarque 3 La fonction scalaire $V(x, y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + y^2)$ est une fonction faible de Liapounov pour le champ de vecteurs $X(x, y) = \begin{pmatrix} yAx \\ 0 \end{pmatrix}$, mais le système bouclé défini à partir de (4.42) avec la loi de commande

$$u(x, y) = -Y.V(x, y) = -(< b, x > + y)$$

n'est pas G.A.S.

La raison est que $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n+1} / y = 0 \text{ et } < b, x > = 0\}$ est un ensemble de points singuliers autres que l'origine.

D'où l'importance du choix de l'intégrale première, quand le système ne vérifie pas la ad-condition.

4.5 Remarques de conclusion

4.5.1 Stabilisation par feedback borné

Si le système (4.1) est stabilisable par la méthode de Jurdjevic-Quinn alors une modification simple du contrôle permet une stabilisation par un feedback borné.

En effet, s'il existe $V(x)$ de Liapounov telle que $X.V(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ et que le contrôle

$$u(x) = -Y.V(x) \quad (4.44)$$

stabilise le système (4.1) alors pour obtenir un feedback borné il suffit de prendre par exemple

$$u_\epsilon(x) = -\epsilon \frac{Y.V(x)}{1 + Y.V(x)^2} \quad \epsilon > 0 \quad (4.45)$$

L'argument est le suivant : La dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé défini à partir de (4.1) avec le contrôle (4.45) est donnée par

$$\dot{V}(x) = -X.V(x) - \epsilon \frac{Y.V(x)^2}{1 + Y.V(x)^2} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

alors le système bouclé est stable.

Si on pose

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$$

alors

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / X.V(x) = 0 \text{ et } Y.V(x) = 0\}$$

donc l'ensemble de Lasalle du système bouclé (4.1) (4.45) coïncide avec celui du système défini à partir de (4.1) avec le feedback (4.44).

Finalement le système bouclé (4.1) (4.45) est G.A.S

4.5.2 Stabilisation des systèmes non affines en contrôles

La méthode de Jurdjevic-Quinn peut être généralisée à certains systèmes non affines en contrôles.

Considérons le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4.46)$$

et supposons qu'il existe V une fonction de Liapounov telle que

$$X_1.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $X_1(x) = X(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

et que

$$Y(x, u) = X(x, u) - X(x, 0)$$

est un champ de vecteurs homogène de degré impair, respectivement à la dilatation de rapport $r = (r_1, \dots, r_m)$, par rapport au contrôles. C'est à dire

$$\begin{cases} Y(x, \lambda^{r_1} u_1, \dots, \lambda^{r_m} u_m) = \lambda^{2k+1} Y(x, u) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Posons

$$u_i(x) = -v_i(x) \langle Y(x, v(x)), \nabla V^\top(x) \rangle^{r_i} \text{ pour } i = 1 \dots m \quad (4.47)$$

où $v(x) = (v_1, \dots, v_m)$ est une fonction qui sera définie plus tard.

Des calculs directs montrent que la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé défini à partir de (4.46) avec le feedback (4.47) est donnée par

$$\dot{V}(x) = X_1.V(x) - \langle Y(x, v(x)), \nabla V^\top(x) \rangle^{2(k+1)} \leq 0$$

Le système bouclé est stable.

Maintenant, s'il existe $v(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que l'ensemble

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / X_1^{k+1}.V(x) = X_1^k.Y_1.V(x) = 0\}$$

où $Y_1(x) = Y(x, v(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

est réduit à $\{0\}$

alors le système bouclé (4.46)(4.47) est G.A.S.

4.5.3 Stabilisation des systèmes de classe C^k

On considère le système (4.6) et on suppose que X est un champ de vecteurs de classe C^{k_1} , $Y^i (i = 1 \dots m)$ des champs de vecteurs de classe C^{k_2} . V est une fonction de Liapounov au moins de classe C^2 telle que $X.V \leq 0$.

Dans la suite k désigne le plus grand entier tel que $ad_X^k Y(x)$ est au moins continu en x .

Un raisonnement analogue au cas analytique montre que si l'ensemble

$$W_k = \{x \in \mathbb{R}^n / X^p.V(x) = ad_X^l Y.V(x) = 0; 1 \leq p \leq k_2, 1 \leq l \leq k, i = 1 \dots m\} \quad (4.48)$$

est réduit à l'origine.

Alors la loi de commande $u(x) = -Y.V(x)$ stabilise le système (4.6).

Donc, le système (4.6) est stabilisable par un feedback au moins de classe C^1 .

Il est à noter que la condition (4.48) n'est pas nécessaire pour la stabilité asymptotique du système bouclé. En effet, l'ensemble de Lasalle peut être inclu strictement dans W_k .

5

Principe de réduction pour la stabilisation des systèmes

5.1 Introduction

Dans la deuxième partie de cette thèse nous nous intéressons au problème suivant : considérons le système sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.1)$$

et supposons que (5.1) est stabilisable globalement par $\bar{u}(x)$ un feedback régulier.

Le problème est de déterminer une classe de fonctions $g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $h : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ pour lesquelles le système "augmenté" défini par:

$$\begin{cases} \dot{x} = h(x, y) \cdot f(x, g(x, y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.2)$$

est stabilisable par un contrôle régulier.

Notre but est de donner certaines réponses à ce problème.

Quand les fonctions h, g vérifient $h(x, y) \equiv 1$ et $g(x, y) = y$ on retrouve le lemme classique des intégrateurs (cf [13],[17],[28],[29],[48],[51],[53]) à savoir : Si le système (5.1) est stabilisable globalement par un feedback de classe C^∞ alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.3)$$

est aussi stabilisable globalement par feedback de classe C^∞ .

Des réponses à notre problème seront données sous forme de conditions suffisantes pour lesquelles le système

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.4)$$

est stabilisable globalement.

Plus précisément, nous allons essayer de réécrire $F(x, y) = h(x, y)f(x, g(x, y))$ pour certaines fonctions f, g et h . Puis, nous déduisons la stabilisabilité de (5.4) à partir de celle du système réduit $\dot{x} = f(x, u)$.

Il est à noter que le système réduit est différent de celui obtenu par le lemme classique des intégrateurs (i.e $\dot{x} = F(x, u)$). En fait, C'est une généralisation de ce procédé.

Pour illustrer l'apport de notre technique, nous allons considérer deux exemples de la littérature.

Le premier exemple est le système donné par Coron-Pralay dans [16]. C'est un exemple de système $\dot{x} = F(x, u)$ non stabilisable par feedback continu. En utilisant notre méthode, nous prouverons que le système avec intégrateur est stabilisable par feedback polynômiale. Ainsi, nous améliorons le résultat de Coron-Praly qui proposent, pour le système avec intégrateur, un feedback seulement presque analytique (i.e analytique sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ continu à l'origine).

Le second exemple, sera la classe de systèmes plans étudiée par Hermes dans [22]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^k + cx^n y^m \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.5)$$

En considérant d'autres réductions possibles, nous proposerons des feedbacks polynômaux stabilisants.

Nous rappelons que Hermes a obtenu seulement des feedbacks C^1 .

5.2 Trois réponses

Dans ce paragraphe nous allons proposer trois résultats.

Théorème 5.1 ([39]) *Supposons que le système $\dot{x} = f(x, u)$ est stabilisable par $\bar{u}(x)$ une loi de commande régulière. Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que :*

1.
$$g(x, y) = \bar{u}(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \quad (5.6)$$

2. $\Phi(x, y)$ est une fonction scalaire positive, $\Phi(0, y) = 0$ définie positive en y ,
 $y \mapsto \Phi(x, y)$ est propre pour tout x ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ implique } y = 0.$$

3. Il existe une fonction $k(x, y)$ de classe C^∞ pour laquelle

$$\beta(x, y) = \langle f(x, \bar{u}(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \rangle + \langle k(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \rangle \leq 0 \quad (5.7)$$

Alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, g(x, y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.8)$$

est stabilisable par une loi de commande de classe C^∞ .

Démonstration

Puisque le système $\dot{x} = f(x, u)$ est asymptotiquement stable, alors il existe V une fonction de Liapounov de classe C^∞ telle que

$$\langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) \rangle < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Nous avons l'égalité suivante:

$$f(x, g(x, y)) = f(x, \bar{u}(x)) + G(x, y)(g(x, y) - \bar{u}(x))$$

où $G(x, y)$ est l'application définie par

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, tg(x, y) + (1-t)\bar{u}(x)) dt$$

Posons,

$$W(x, y) = V(x) + \Phi(x, y)$$

D'après l'hypothèse 2) du théorème, il facile de vérifier que W est une fonction de Liapounov.

La dérivée de W le long des trajectoires du système (5.8) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y) &= \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) \rangle + \left\langle G(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \nabla V(x) \right\rangle \\ &+ \left\langle f(x, \bar{u}(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right\rangle + \left\langle G(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right\rangle \\ &+ \left\langle u, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\rangle. \end{aligned}$$

Maintenant, si on choisit la loi de commande suivante:

$$u(x, y) = -G^T(x, y) \left[\nabla V(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right] + k(x, y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y),$$

et en utilisant les notations du théorème, on obtient

$$\dot{W}(x, y) = \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) \rangle + \beta(x, y) - \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\|^2 \leq 0.$$

Compte tenu des hypothèses du théorème, cette quantité est définie, négative.

Le système bouclé est alors globalement asymptotiquement stable.

le théorème est ainsi démontré. ■

Exemple 8 (*Coron-Praly [16]*)

Soit $F : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$F(x_1, x_2, y) = - \left[\left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^3 - C^2 \left(y^3 + x_2^3 - \|x_1\|^2 y \right)^2 \right] x.$$

où C est une constante réelle.

Il est montré dans [16] que pour C suffisamment grande, le système avec intégrateur :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.9)$$

est stabilisable par feedback presque analytique, alors que le système $\dot{x} = F(x, u)$ n'est pas stabilisable par un feedback continu.

Maintenant, écrivons le système (5.9) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, g(x, y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (??)$$

avec

$$g(x, y) = y^3 - \|x_1\|^2 y + x_2^3$$

et

$$f(x, z) = - \left[\left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^3 - C^2 z^2 \right] x$$

D'après le théorème précédent, le système réduit devient

$$\dot{x} = - \left[\left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^3 - C^2 u^2 \right] x$$

Posons, $\bar{u}(x) = 0$, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.

Φ et k les deux fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{2} \|x_1\|^2 + x_2^3 y + \left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^2$$

et

$$k(x, y) = - \left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^3 y$$

Compte tenu des notations du théorème, nous avons

$$g(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)$$

et

$$\beta(x, y) = -4 \left(\|x_1\|^2 + x_2^2 \right)^3 \Phi(x, y),$$

Toutes les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites, alors la fonction:

$$u(x_1, x_2, y) = -C^2 \left(5\|x\|^2 - y^2\|x_1\|^2 + 3yx_2^2 \right) - (\|x\|^3 - \|x_1\|^2)y - y^3 - x_2^3$$

est une loi de commande stabilisante pour le système (5.9) .

■

Théorème 5.2 ([39]) *Supposons que le système $\dot{x} = f(x, u)$ est stabilisable par $\bar{u}(x)$ une loi de commande C^∞ , avec $V(x)$ une fonction de Liapounov stricte pour le système bouclé.*

Alors, pour toute fonction $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui satisfait

1. $g(y) = 0$ est équivalent à $y = 0$, et
2. $\text{Det}[Jg(y)]$ le jacobien de g est une fonction définie positive.
3. Si on note $A(y)$ la matrice des cofacteurs de $Jg(y)$ alors, si la quantité :

$$A^T(0) \left[\int_0^1 \frac{\partial f^T}{\partial u}(x, t\bar{u}(x)) dt \cdot (-\nabla V(x) - J\bar{u}(x) \cdot \bar{u}(x)) + J\bar{u}(x)^T \cdot f(x, \bar{u}(x)) \right]$$

est égale à 0 on a $x = 0$,

Alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{Det}[Jg(y)]f(x, g(y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.10)$$

est stabilisable par un feedback C^∞ .

Démonstration

Soient

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \|g(y) - \bar{u}(x)\|^2$$

et

$$W(x, y) = V(x) + \Phi(x, y)$$

Nous avons la relation suivante:

$$\begin{aligned} \text{Det}[Jg(y)]f(x, g(y)) &= \text{Det}[Jg(y)]f(x, \bar{u}(x)) \\ &+ G(x, y) \cdot [\text{Det}[Jg(y)](g(y) - \bar{u}(x))] \end{aligned}$$

où G admet la même expression que dans la démonstration du théorème précédent.

A est la matrice des cofacteurs de $J(g)$ alors

$$A(y) \cdot Jg(y) = \text{Det}[Jg(y)] Id_{\mathbb{R}^m}.$$

Compte tenu de cette égalité, la relation (5.11) devient

$$\begin{aligned} \text{Det}[Jg(y)]f(x, g(y)) &= \text{Det}[Jg(y)]f(x, \bar{u}(x)) + G(x, y) \cdot A(y) \cdot Jg(y) \cdot (g(y) - \bar{u}(x)) \\ &= \text{Det}[Jg(y)]f(x, \bar{u}(x)) + G(x, y) \cdot A(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nous avons aussi

$$Det[Jg(y)] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = -J\bar{u}(x) \cdot A(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \quad (5.12)$$

Maintenant, la dérivée de W le long des trajectoires du système (5.10) est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, y) &= Det[Jg(y)] \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) \rangle + \left\langle G(x, y) \cdot A(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \nabla V(x) \right\rangle \\ &+ Det[Jg(y)] \left\langle f(x, \bar{u}(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right\rangle \\ &+ \left\langle G(x, y) \cdot A(y) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \right\rangle + \left\langle u, \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\rangle \end{aligned}$$

En vertu des relations (5.12) (5.11), si on pose

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) - A^T(y) \cdot G^T(x, y) \nabla V(x) + A^T(y) \cdot J\bar{u}(x)^T \cdot f(x, \bar{u}(x)) \\ &- A^T(y) \cdot G^T(x, y) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \end{aligned} \quad (5.13)$$

alors, on obtient

$$\dot{W}(x, y) = Det[Jg(y)] \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) \rangle - \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\|^2 \leq 0.$$

Le système bouclé est stable.

Pour prouver la stabilité asymptotique, on va utiliser le principe d'invariance de Lasalle.

Posons,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / \dot{W}(x, y) = 0\}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / det(Jg(y)) < f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x) > = 0\} \\ &\cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

Il s'agit de prouver que le plus grand ensemble invariant de Ω est réduit à l'origine.

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une solution complète du système bouclé (5.10)(5.13) vérifiant

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$$

Supposons qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $y(t_0) \neq 0$, alors $Det[Jg(y(t_0))] \neq 0$.

Par conséquent

$$\langle f(x(t_0), \bar{u}(x(t_0))), \nabla V(x(t_0)) \rangle = 0$$

et donc $x(t_0) = 0$.

or $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, y(t_0)) = 0$ alors $y(t_0) = 0$. D'où une contradiction.

Maintenant, supposons que $y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Puisque $\frac{d}{dt}y(t) = u(x(t), y(t))$, pour que la courbe $\gamma(t)$ reste dans l'ensemble Ω il faut que

$$u(x(t), 0) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Mais,

$$u(x, 0) = A^T(0) \cdot \left[\int_0^1 \frac{\partial f^T}{\partial u}(x, t\bar{u}(x)) dt \cdot (-\nabla V(x) - J\bar{u}(x) \cdot \bar{u}(x)) + J\bar{u}(x)^T \cdot f(x, \bar{u}(x)) \right]$$

qui, par hypothèse, s'annule seulement à l'origine.

alors $x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Finalement, le plus grand ensemble invariant est réduit à l'origine.

le théorème est ainsi démontré. ■

Exemple 9 ([39])

Soit le système défini sur $\mathbb{R}^2$ suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y^2(x + y^3) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.14)$$

Posons,

$$g(y) = y^3, \quad f(x, u) = x + u,$$

D'après les notations du théorème précédent, nous avons $A(y) = G(x, y) = Id_{\mathbb{R}}$.

Et si on prend

$$\bar{u}(x) = -2x, \quad \text{et } V(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

la condition 3) du théorème devient $4x = 0$.

Le système est alors stabilisable pour la loi de commande

$$u(x, y) = -(y^3 + 2x)(3y^2 + 2)$$

■

Remarque 4 Si on considère la réduction par le lemme classique des intégrateurs, du système (5.14), on obtient

$$\dot{x} = 3u^2(x + u^3)$$

Il est clair que le système n'est pas stabilisable par feedback de classe C^1 .

Le système (5.14) représente un exemple simple de système non stabilisable par feedback de classe C^1 mais qui peut être stabilisable par feedback dynamique polynômiale.

Cet exemple montre aussi que l'équivalence entre la stabilisabilité du système $\dot{x} = f(x, u)$ et celle du système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \\ x, y \text{ et } u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.15)$$

par un feedback continu, démontrée dans [18], ne peut pas se généraliser à la stabilisation par feedback de classe C^1 .

Théorème 5.3 ([39]) *Supposons que le système $\dot{x} = f(x, u)$ est stabilisable par $\bar{u}(x)$, avec $V(x)$ une fonction stricte de Liapounov pour le système bouclé.*

Alors, pour toutes fonctions $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ telles que les propriétés suivantes sont satisfaites:

1. $g(y) = 0$ est équivalent à $y = 0$, h est définie, positive, et
- 2.

$$h(y)(g(y) - \bar{u}(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y), \quad (5.16)$$

pour une fonction Φ qui vérifie les propriétés du théorème.5.1, et

3. *Il existe $k(x, y)$ une fonction de classe C^∞ , avec $k(x, 0) = 0$ telle que la quantité:*

$$\beta(x, y) = h(y)\langle f(x, \bar{u}(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \rangle + \langle k(x, y), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \rangle \leq 0, \quad (5.17)$$

et

4. $\int_0^1 \frac{\partial f^T}{\partial u}(x, t\bar{u}(x))dt \left[\nabla V(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0, y) \right] = 0$ implique $x = 0$

Alors, le système

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y)f(x, g(y)) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.18)$$

est stabilisable par une loi de commande de classe C^∞ .

Démonstration

Comme pour la démonstration du théorème.5.1, on considère la fonction de Liapounov

$$W(x) = V(x) + \Phi(x, y)$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} h(y)f(x, y) &= h(y) + G(x, y)h(y)(g(y) - \bar{u}(x)) \\ &= h(y)f(x, \bar{u}(x)) + G(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

et en choisissant

$$u(x, y) = -G^T(x, y)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) - G^T(x, y)\nabla V(x) + k(x, y) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y). \quad (5.19)$$

la dérivée de W le long des trajectoires du système bouclé (5.18)(5.19) est alors

$$\dot{W}(x, y) = h(y) \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V^\top(x) \rangle - \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\|^2 + \beta(x, y).$$

compte tenu des hypothèses, cette quantité est négative ou nulle.

Pour montrer la stabilité asymptotique, nous allons utiliser le principe d'invariance de Lasalle.

Posons,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / \dot{W}(x, y) = 0\}$$

Alors

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} / h(y) \langle f(x, \bar{u}(x)), \nabla V(x)^\top \rangle = 0\} \\ &\cap \{(x, y) / \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0\} \end{aligned}$$

Il s'agit de prouver que M le plus grand ensemble invariant de Ω est réduit à l'origine.

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une solution complète du système bouclé (5.18)(5.18) vérifiant

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0.$$

Supposons qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $y(t_0) \neq 0$, alors $h(y(t_0)) \neq 0$.

Par conséquent

$$\langle f(x(t_0), \bar{u}(x(t_0))), \nabla V^\top(x(t_0)) \rangle = 0$$

et donc $x(t_0) = 0$.

or $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, y(t_0)) = 0$ alors $y(t_0) = 0$. D'où une contradiction.

Finalement, si $\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$, alors $y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Maintenant, $\frac{d}{dt}y(t) = u(x(t), y(t))$, comme $\gamma(t) \in \Omega \quad \forall t \geq 0$ alors

$$u(x, 0) = -G^T(x) \left[\nabla V(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, 0) \right] = 0$$

Par hypothèse, cette quantité ne s'annule qu'à l'origine. Donc $x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Alors M est réduit à l'origine.

d'où le théorème. ■

Remarque 5 Dans les théorèmes énoncés ci-dessus nous avons supposé la connaissance de V une fonction de Liapounov stricte pour le système réduit.

Tous les arguments précédents peuvent s'étendre à la situation où V est seulement une fonction faible de Liapounov. L'argument est le suivant:

Supposons que le système analytique $\dot{x} = f(x, \bar{u}(x))$ est asymptotiquement stable par application du principe d'invariance de Lasalle, avec $V(x)$ une fonction de Liapounov faible pour le système bouclé. Ceci est équivalent à

$$\{x \in \mathbb{R}^n | X^k V(x) = 0; k \in \mathbb{N}^*\} = \{0\}.$$

où X désigne le champ de vecteurs du système bouclé (i.e $X(x) = f(x, \bar{u}(x))$)

Avec ce résultat il est clair que les démonstrations des théorèmes restent inchangées, et les mêmes feedbacks stabilisent les systèmes.

Remarque 6 Il est à noter que les feedbacks obtenus sont de classe C^∞ . Si on affaiblit la condition du théorème par la condition

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0 \right) \implies \langle f(x, \bar{u}(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \rangle \leq 0$$

On obtient alors des feedbacks presque analytiques. L'argument est le suivant:

la condition 3) est une condition nécessaire pour l'existence de $k(x, y)$. La condition est suffisante pour l'existence de d'un feedback presque analytique.

L'argument est analogue à celui utilisé par Sontag pour prouver le théorème d'Artstein [2]:

Soit φ la fonction définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} & \text{if } \beta > 0 \\ 0 & \text{if } \beta = 0 \end{cases}$$

alors

$$k(x, y) = -\varphi \left(f(x, \bar{u}(x)), \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \right\|^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)$$

satisfait la condition 3). Le résultat correspondant pour la condition 2) du théorème.5.2 est obtenu par des calculs similaires que nous ne développerons pas ici.

5.3 Les systèmes plans d'Hermes.

Récemment, dans un papier intéressant [22], Hermes a considéré les systèmes plans suivants:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^k + cx^n y^m \\ \dot{y} = u & c \neq 0 \\ k, n \text{ et } m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.20)$$

et en supposant que les entiers k, m, n vérifient

- (i) k est impair
- (ii) $\frac{n(k+1)}{2} \geq k - m \geq n \geq 1$

Il a prouvé l'existence d'une loi de commande de classe C^1 qui rend le système bouclé globalement asymptotiquement stable .

Comme application de nos résultats, nous allons montrer que le système(5.20) peut être stabilisable par des feedbacks analytiques si :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \text{ est impair} \\ k \leq m \text{ ou} \\ k > m, m \text{ impair ou} \\ k > m \text{ et } n \geq 2 \text{ ou} \\ k > m \text{ et } n = 1 \text{ et } 2m + 1 \geq k \end{array} \right.$$

Autrement dit, quand $k < m$ ou ($k > m$ et $n = 2$) on peut affaiblir la condition (ii) d'Hermes. Nos conditions sont plus larges, en plus nos feedbacks sont analytiques et données explicitement.

Pour prouver ce résultat nous allons distinguer deux cas:

5.3.1 $k \leq m$.

On considère la fonction de Liapounov

$$V(x, y) = \frac{1}{k+1} y^{k+1} + \frac{1}{2} x^2$$

des calculs directs montrent que la loi de commande

$$u(x, y) = -x(1 + cy^{m-k}x^n) - y^k,$$

rende le système bouclé globalement asymptotiquement stable.

5.3.2 $k > m$

Dans ce cas nous réécrivons le système (5.20) sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^m(y^p + cx^n) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.21)$$

avec $p = k - m$ un entier positif.

m est impair

La stabilisabilité peut être déduite par le lemme classique des intégrateurs: En effet, le système $\dot{x} = u^m(u^{k-m} + cx^n)$ est stabilisable par la loi de commande

$$u(x) = \alpha \frac{x^{n+1}}{(x^2 + 1)^{n+1}}$$

avec α une constante telle que $\alpha c < 0$ et $\left| \frac{\alpha^{k-m}}{c} \right| = 1$.

m est pair, avec $n \geq 2$

La stabilisabilité du système (5.20) sera déduite par le théorème 5.3.

Dans le théorème (5.3) apparaît une fonction ϕ avec certaines propriétés. Pour obtenir une telle fonction nous avons besoin du lemme suivante:

Lemme 5.1 *Soit Q un polynôme en x et y . Alors pour tout entier p pair strictement supérieur à q_1 (le degré de Q en y), ils existent deux entiers a et b pour lesquels la quantité*

$$\Phi(x, y) = y^p + x^2(ax^q + Q(x, y) + b)$$

*avec $q = q_1 * (q_2 + 2)$ où q_2 est le degré de Q en x*

est définie, positive et propre.

Démonstration (voir appendice)

En vertu du résultat précédent, on sait qu'ils existent a, b et d , trois entiers suffisamment grands pour lesquels

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{m+p+1} y^{m+p+1} + \frac{1}{m+1} cx^n y^{m+1} \\ &+ \frac{1}{m+1} x^3 y^{m+1} + ax^2 + bx^{m+2}n + dx^{3(m+2)} \end{aligned}$$

est définie, positive.

Compte tenu des notations du théorème.5.3, on pose

$$g(x, y) = y^p, \quad h(y) = y^m \text{ et } f(x, u) = u + cx^n,$$

la loi de commande

$$\bar{u}(x) = -cx^n - x^3$$

stabilise le système réduit et nous avons

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = y^m(y^p + cx^n + x^3)$$

Les conditions 1) 2) du théorème.5.2 sont satisfaites.

Si on définit

$$k(x, y) = -x^2 y^{m+1}$$

alors, on obtient

$$\begin{aligned} \beta(x, y) = & -x^2 y^m \left[y^{m+p+1} + c \left(1 - \frac{n}{m+1} \right) x^n y^{m+1} + \left(1 + \frac{3}{m+1} \right) x^3 y^{m+1} \right. \\ & \left. + 2ax^2 + (m+2)nbx^{(m+2)n} + 3(m+2)dx^{3(m+2)} \right] \end{aligned}$$

Pour a, b, d choisis suffisamment grands cette quantité est négative.

Ainsi, la condition 3) du théorème.5.3 est satisfaite.

La relation 4) est simplement

$$(x + 2ax + (m+2)nbx^{(m+2)n-1} + 3(m+2)x^{3(m+2)-1} = 0) \Rightarrow x = 0$$

Toutes les conditions du théorème.5.3 sont satisfaites. Alors, Le système est stabilisable par un feedback polynômiale.

m pair , n=1, et 2m+1 ≥ k

En utilisant le théorème 5.2, nous allons prouver la stabilisation du système (5.20).

Le système peut être réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{m-p+1} y^{p-1} (y^p + cx) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.22)$$

Tout d'abord, nous allons prouver que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{p-1}(y^p + cx) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.23)$$

est stabilisable.

Compte tenu des notations du théorème.5.2, on pose

$$g(y) = y^p, \quad A(y) = Id_{\mathbb{R}}, \quad f(x, u) = u + cx$$

et

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = -cx - x^3 \text{ si } c > 0 \\ \bar{u}(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

la relation 3/ du théorème.5.2, avec $V(x) = \frac{1}{2}x^2$, devient

$$\begin{cases} (-x(1 + c^2 + 3cx^2) = 0) \Rightarrow x = 0, \text{ pour } c > 0 \\ x = 0 \Rightarrow x = 0! \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'après le théorème.5.2, le système(5.23) est stabilisable par un feedback polynômiale.

Pour la suite de la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme 5.2 *Supposons que le système*

$$\dot{x} = X(x) + uY(x) \quad (5.24)$$

est stabilisable par $\bar{u}(x)$ un feedback de classe C^∞ .

Alors, pour toute fonction scalaire $f(x) \geq 0$ telle que:

$$f(x) = 0 \text{ implique } X(x) = 0$$

le système

$$\dot{x} = f(x)X(x) + uY(x) \quad (5.25)$$

est stabilisable par un feedback de classe C^∞ .

Démonstration

En vertu du théorème inverse, il existe V de classe C^∞ telle que:

$$\dot{V}_{(5.24)}(x) = \left\langle X(x), \frac{\partial \nabla V^\top}{\partial x}(x) \right\rangle + \bar{u}(x) \left\langle Y(x), \frac{\partial \nabla V^\top}{\partial x}(x) \right\rangle < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (5.26)$$

En particulier,

$$\text{si } X(x) = 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ alors } \langle Y(x), \nabla V^\top(x) \rangle < 0 \quad (5.27)$$

Maintenant, considérons le feedback suivant :

$$u(x) = f(x)\bar{u}(x) - \langle Y(x), \nabla V^\top(x) \rangle \quad (5.28)$$

Alors, $\dot{V}_{(5.25)}$ la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (5.25)(5.28) est donnée par :

$$\dot{V}_{(5.25)}(x) = f(x)\dot{V}_{(5.24)}(x) - \langle Y(x), \nabla V(x) \rangle^2(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (5.29)$$

En fait, $\dot{V}_{(5.25)}$ est une fonction définie négative.

En effet, si on note Ω l'ensemble défini par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}_{(5.25)} = 0\}$$

alors

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \langle Y(x), \nabla V^\top(x) \rangle = 0\}$$

donc

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n / X(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \langle Y(x), \nabla V(x)^\top \rangle = 0\}$$

et grâce à (5.27) on a

$$\{x \in \mathbb{R}^n / X(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / \langle Y(x), \nabla V^\top(x) \rangle = 0\} = \{0\}$$

Le lemme est ainsi démontré. ■

Remarque 7 En général la réciproque est fausse. Par exemple, considérons la situation suivante:

$$\begin{cases} X(x) = Ax, Y(x) = \|x\|^{2n} Bx \text{ et } f(x) = \|x\|^{2n} \\ \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Supposons que la paire (A, B) est contrôlable et que A possède des valeurs propres à partie réelle strictement positive.

Comme la paire (A, B) est supposée contrôlable alors, le système

$$\dot{x} = X(x)f(x) + uY(x)$$

$$= \|x\|^{2n} [Ax + Bu]$$

est stabilisable par un feedback linéaire. Alors que le système

$$\dot{x} = X(x) + uY(x)$$

$$= Ax + \|x\|^{2n} Bu$$

est non stabilisable par un feedback de classe C^1 , puisque le système linéarisé, calculé au voisinage de l'origine:

$$\dot{x} = Ax$$

est instable. ■

En appliquant le lemme précédent à un cas particulier on obtient la corollaire suivant:

Corollaire 5.1 Si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.30)$$

avec $f(x, 0) = 0$, est stabilisable par un feedback de classe C^∞ , alors le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y^{2n} f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (5.31)$$

est stabilisable pour tout entier n .

En vertu de ce corollaire, le système (5.20) est stabilisable pour $p > 1$, puisque $f(x, 0) \equiv 0$.

Quand $p = 1$, on procède directement:

$$\begin{cases} \dot{x} = y^m(y + cx) \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

est stabilisable pour la loi de commande

$$u(x, y) = -y^m(cy + 2c^2x) - (y + cx)$$

avec

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + cxy + c^2x^2$$

comme fonction de Liapounov.

Ce qui termine la démonstration .

6

Stabilisation des équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide

6.1 Introduction

La troisième partie de ce travail est consacrée à la stabilisation des équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide.

Tout d'abord, nous allons rappeler les équations de la vitesse angulaire d'un corps rigide.

Soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ la vitesse mesurée dans un repère mobile lié au corps rigide et $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ les moments d'inertie principaux. Alors, les équations d'Euler pour un corps rigide sont données par

$$\begin{cases} I\dot{x} = S(x)Ix + Bu \\ x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^3 \text{ et } B = (B_{ij})_{\substack{i=1\dots 3 \\ j=1\dots 3}} \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{où } I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$$

et

$$S(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

si on pose,

$$J_1 = (I_2 - I_3)/I_1, J_2 = (I_3 - I_1)/I_2, J_3 = (I_1 - I_2)/I_3 \text{ et } B := I^{-1}B$$

alors le système (6.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = I^{-1}S(x)Ix + Bu \\ x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (6.2)$$

Sans perte de généralité, nous allons supposer que le corps rigide n'est pas sphérique et que la condition suivante est vérifiée:

$$J_i^2 + \sum_{j=1}^3 B_{ij} \neq 0 \quad \text{pour } i = 1 \dots 3$$

La condition ci-dessus permet d'éviter des cas non stabilisables évidents.

Le problème de stabilisation des équations de la vitesse angulaire a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Aeyels et Szafranski ont établi que si le corps rigide est non symétrique, alors le système (6.2) peut être stabilisable par un feedback linéaire s'il vérifie la condition suivante:

Condition d'Aeyels-Szafranski

La matrice B contient au moins un élément non nul sur chaque ligne.

(i.e $\sum_{j=1}^3 B_{ij}^2 \neq 0$ pour $i = 1 \dots 3$)

Dans le cas où le corps rigide possède une symétrie, Sussmann et Sontag ont prouvé l'existence d'un feedback régulier, qui rend le système globalement asymptotiquement stable. La démonstration est claire malheureusement le contrôle n'est pas donné explicitement.

Un premier objectif de cette partie de la thèse est de montrer que les deux cas relèvent de la technique de Jurdjevic-Quinn. Ainsi, en choisissant une fonction de Liapounov convenable, nous allons donner un feedback polynomial qui permet de stabiliser le système (6.1) dans le cas d'un corps rigide symétrique.

Un autre problème important, à en juger par le nombre d'articles publiés sur la question (cf [9] [5] [3] et leurs références), est l'étude de la stabilisation d'un corps rigide au voisinage de l'axe intermédiaire:

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = J_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = J_2 x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = J_3 x_1 x_2 + u \end{cases} \quad (6.3)$$

Il s'agit de trouver un feedback régulier qui rend le système bouclé stable au voisinage du point $(0, M, 0)$.

En utilisant la méthode de l'énergie-Casimir, Bloch et Marsden ont prouvé que pour la loi de commande

$$u(x) = -K \frac{I_1 I_2}{I_3} x_1 x_3$$

le système bouclé est stable au voisinage du point $(0, M, 0)$.

Ici, on se propose de faire une analyse plus fine : en plus de la stabilité, on va s'intéresser au problème d'attractivité, sur le cylindre d'équation $(-J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 = \sqrt{| \frac{M}{J_2} |})$, du point $(0, M, 0)$.

Le reste de cette partie de la thèse est organisé de la façon suivante :

Dans le deuxième paragraphe, nous allons montrer que si la dimension de B est égale à deux, alors le système est stabilisable par un feedback linéaire. Ainsi, nous généraliserons le résultat établi dans [1].

Dans le troisième paragraphe, nous montrerons que si la dimension de B est égale à un et sauf pour un cas critique, le système (6.2) est stabilisable par la méthode de Jurdjevic-Quinn développée dans la première partie de ce travail.

Le quatrième paragraphe traite de la stabilisation d'un corps rigide au voisinage de son axe intermédiaire.

6.2 Stabilisation par deux contrôles

Dans ce paragraphe nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.1 *Si la dimension de B est égale à deux alors le système (6.2) est stabilisable par un feedback linéaire.*

Démonstration

Sans perte de généralité, nous réécrivons le système sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = J_1 x_2 x_3 + \gamma u + \delta v \\ \dot{x}_2 = J_2 x_1 x_3 + u \\ \dot{x}_3 = J_3 x_1 x_2 + v \\ \text{avec } J_1 J_2 < 0, J_3 \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma, \delta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.4)$$

Si la quantité $\gamma^2 + \delta^2$ est non nulle, alors le système vérifie la condition d'Aeyles-Szafranski, donc stabilisable par un feedback linéaire. Dans la suite de la démonstration, nous supposons que $\gamma^2 + \delta^2 = 0$.

Considérons le feedback proposé dans [1]:

$$\begin{cases} u = ax_2 \\ v = bx_1 + cx_3 \\ a, c \in \mathbb{R}_- \text{ et } b \in \mathbb{R}^* \end{cases} \quad (6.5)$$

et posons

$$V(x) = \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{J_2}{J_1} x_1^2 + x_2^2 \right)^2 + \frac{\beta}{3} \left(-\frac{J_2}{J_1} x_1^2 + x_2^2 \right)^3 + \frac{1}{2} H^2(x)$$

où $H(x) = -J_3 x_2^2 + J_2 x_3^2 - 2bx_3$

α, β deux réels strictement positifs qui seront définis plus tard.

Il est clair que la fonction V est définie, positive et propre.

Des calculs directs montrent que la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (6.4)(6.5) est donnée par

$$\dot{V} = 2cH^2 + 2(J_3 x_2^2(c - b) + bx_2(2c - b))H + a(\alpha x_2^2 + \beta x_2^6) - \beta \frac{J_1}{J_2} x_2^2(2x_1^2 x_2^2 - \frac{J_1}{J_2} x_1^4)$$

Comme

$$-\beta \frac{J_1}{J_2} x_2^2(2x_1^2 x_2^2 - \frac{J_1}{J_2} x_1^4) \leq 0$$

Pour prouver la stabilité du système bouclé (6.4)(6.5) , il suffit de montrer que

$$P(H) = cH^2 + (J_3x_2(c - b) + bx_2(2c - b))H + \frac{a}{2}(\alpha x_2^2 + \beta x_2^6) \leq 0$$

En effet, la quantité $P(H)$ peut être considérée comme un polynôme de second degré en H . Le discriminant, calculé en fonction de x_2 , est donné par

$$\Delta(x_2) = x_2^2[(x_2(c - b) + b(2c - a))^2 - 2ac(\alpha + \beta x_2^4)]$$

Si α et β sont choisis suffisamment grands, $\Delta(x_2)$ est négative.

Le système bouclé (6.4)(6.5) est stable.

Pour montrer la stabilité asymptotique, nous allons utiliser le principe d'invariance de Lasalle.

Soit Ω l'ensemble défini par

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / \dot{V}(x) = 0\}$$

alors

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_2 = x_3 = 0\}$$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ une solution complète du système bouclé (6.4)(6.5) sur laquelle V est constante.

Puisque $\frac{d}{dt}\gamma_3(t) = b\gamma_1(t)$ et $\gamma(t) \in \Omega \forall t \geq 0$ alors $\gamma_1(t) = 0$ pour $t \geq 0$.

Finalement, $\gamma(t) \equiv 0$

Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

6.3 Stabilisation par un seul contrôle

6.3.1 Cas d'un corps non symétrique

Un corps rigide non symétrique est caractérisé par la condition suivante

$$I_1 > I_2 > I_3 > 0 \quad (6.6)$$

Alors

$$J_1 > 0, J_3 > 0 \text{ et } J_2 < 0$$

Nous supposons que le système (6.2) vérifie la condition d'Ayeles-Szafranski (i.e $b_1 b_2 b_3 \neq 0$)

Le but de ce sous paragraphe est de prouver la proposition suivante:

Proposition 6.2 *Pour $V(x) = \frac{1}{2}(I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2)$ le système est de type Jurdjevic-Quinn, donc stabilisable avec*

$$u(x) = -\langle Y(x), \nabla V^\top(x) \rangle = \sum_{i=1}^3 b_i x_i$$

où $Y(x) = (b_1/I_1, b_2/I_2, b_3/I_3)^\top$

Démonstration

Il est bien connu que l'énergie cinétique est une intégrale première pour la dérive.

Nous allons prouver l'égalité suivante :

$$\{x \in \mathbb{R}^3 / YV(x) = XYV(x) = X^2YV(x) = 0\} = \{0\}$$

où $X(x) = (J_1 x_2 x_3, J_2 x_1 x_3, J_3 x_1 x_2)^\top$

Nous avons les trois relations :

$$Y.V(x) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \quad (6.7)$$

$$XYV(x) = J_1 b_1 x_2 x_3 + J_2 b_2 x_1 x_3 + J_3 b_3 x_1 x_2 \quad (6.8)$$

$$X^2YV(x) = b_1 J_1 (J_2 x_3^2 + J_3 x_2^2) + b_2 J_2 (J_1 x_3^2 + J_3 x_1^2) + b_3 J_3 (J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2) \quad (6.9)$$

Il suffit de prouver que ces relations impliquent que l'une des coordonnées est nulle : Puisque, si c'est le cas, (6.8) montre qu'une deuxième est nulle, et d'après (6.7) la troisième est aussi nulle.

Maintenant, les trois vecteurs

$$x = (x_1, x_2, x_3)^\top, v = (J_1 x_2 x_3, J_2 x_1 x_3, J_3 x_1 x_2)^\top$$

$$w = (J_1 J_2 x_1 x_3^2 + J_1 J_3 x_1 x_2^2, J_2 J_3 x_1 x_2^2 + J_1 J_2 x_2 x_3^2, J_1 J_3 x_3 x_2^2 + J_2 J_3 x_3 x_1^2)^\top$$

sont orthogonaux à $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$.

Par conséquent, leur déterminant est nul. Donc, nous avons la relation suivante:

$$\text{Det}(x, v, w) = (J_1 x_2^2 - J_2 x_1^2)(J_2 x_3^2 - J_3 x_2^2)(J_3 x_1^2 - J_1 x_3^2)$$

Ce qui implique qu'au moins un des facteurs est nul.

En vertu de (6.6), si l'un des deux premiers facteurs est nul alors

$$x_1 = x_2 = 0 \text{ ou } x_2 = x_3 = 0$$

Maintenant, si $J_3 x_1^2 = J_1 x_3^2$ alors la relation (6.8) multipliée par x_1 devient

$$x_3[J_1 x_2(b_1 x_1 + b_3 x_3) + J_2 b_2 x_1^2] = 0$$

et d'après (6.7) nous obtenons

$$b_2 x_3(J_1 x_2^2 - J_2 x_1^2) = 0$$

donc, $x_3 = 0$ ou $x_1 = x_2 = 0$.

Finalement, nous avons prouvé que dans tous les cas au moins une coordonnée est nulle.

La proposition est ainsi démontrée. ■

6.3.2 En présence d'une symétrie

Il est à noter que ce cas est important puisqu'il concerne en particulier le cas d'un satellite.

Supposons par exemple que $I_1 = I_2 \neq I_3$. Le système (6.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = b_3 u \end{cases} \quad (6.10)$$

sans aucune perte de généralité, nous supposons que le vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ vérifie $b_3 \neq 0$ et $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.3 Pour $V(x) = \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}P(x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3)^2$

où P est le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + \frac{b^2}{2a}$ avec $a = 2(b_1^2 + b_2^2)$ et $b = b_3^2$

Le système (6.10) est du type Jurdjevic-Quinn, stabilisable par le feedback polynomial

$$\begin{aligned} u(x) &= -\langle b, \nabla V^\top(x) \rangle \\ &= -P(x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3)[2b_1x_1 + 2b_2x_2 + b_3] \\ &\quad - b_3 \left(x_3 + \frac{1}{2}P'(x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3)^2 \right) \end{aligned}$$

Démonstration

Nous avons $P(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a^2} \right)$. Alors $P(x_3) > 0$ et V est définie, positive et propre.

Des calculs directs montrent que V est une intégrale première pour la dérive.

Pour prouver que le système est du type Jurdjevic-Quinn, il suffit de prouver que l'ensemble défini par

$$\{x \in \mathbb{R}^3 / YV(x) = XYV(x) = X^2YV(x) = 0\}$$

où $X(x) = (ax_2x_3, ax_1x_3, 0)^\top$ et $Y(x) = (b_1, b_2, b_3)^\top$

est égal à $\{0\}$

Nous avons les trois relations:

$$\begin{aligned} YV(x) &= b_3x_3 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3)(b_3(x_1^2 + x_2^2)P'(x_3) \\ &\quad + 4(b_1x_1 + b_2x_2))P(x_3) + 2b_3P(x_3) + b_3P'(x_3)) = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$XYV(x) = -2\alpha(b_2x_1)x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3)P(x_3) = 0 \quad (6.12)$$

$$X^2YV(x) = -2\alpha^2(b_1x_1 + b_2x_2)x_3^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3)P(x_3) = 0 \quad (6.13)$$

Tout d'abord, nous allons montrer que ces trois relations entraînent $x_3 = 0$.

Supposons que $x_3 \neq 0$. Puisque $P(x_3) > 0$ et en vertu de (6.12)(6.13) nous avons

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 0$$

ou

$$\begin{cases} b_2x_1 - b_1x_2 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

La première relation et (6.11) impliquent que $x_3 = 0$. D'où une contradiction.

La seconde relation entraîne $x_1 = x_2 = 0$ et d'après (6.11) nous obtenons

$$\frac{1}{2}b_3x_3(2P(x_3) + P'(x_3) + 2) = 0$$

or

$$2P(x_3) + P'(x_3) + 2 = 4a \left(\left(x_3 + \frac{3b}{8a} + \frac{23b^2 + 32a}{64a^2} \right) \right) > 0$$

Alors $x_3 = 0$. d'où une contradiction.

Puisque nous avons $x_3 = 0$, la relation (6.11) devient

$$\frac{1}{2} \left[b_3P'(0)(x_1^2 + x_2^2) + (b_1x_1 + b_2x_2)P(0) + 2b_3P(0) \right] = 0$$

L'expression entre crochets peut être réécrite comme

$$bb_3 \left[\left(x_1 + \frac{4ab_1}{bb_3} \right)^2 + \left(x_2 + \frac{4ab_2}{bb_3} \right)^2 + \frac{4}{b_1^2 + b_2^2} \right]$$

Il est clair que cette quantité est non nulle. Alors, nous avons $x_1 = x_2 = 0$.

Ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Remarque 8 Le système (6.10) n'est pas stabilisable par une loi de commande linéaire. En effet, si $u(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $(ax_1 + bx_2 = 0$ et $x_3 = 0)$ est un ensemble de points singuliers autres que l'origine.

6.4 Stabilisation d'un corps rigide autour de l'axe intermédiaire

Proposition 6.4 ([42]) *Le système bouclé suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = J_1 x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = J_2 x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 - J_2 x_1 (-J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2) \end{cases} \quad (6.15)$$

défini à partir de (6.3) avec le feedback

$$u(x) = -J_3 x_1 x_2 - x_3 - J_2 x_1 (-J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2)$$

est stable.

Démonstration

Considérons la fonction de Liapounov définie par :

$$V(x) = \frac{1}{2} \left(x_3^2 + (-J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2) \left(-J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2 + x_2 + \frac{1}{J_1} \right) \right)$$

Il est clair que la fonction V est définie, positive et propre.

Si on calcule $\dot{V}$, la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé (6.15), on obtient :

$$\dot{V}(x) = -x_3^2 \leq 0$$

Le système est stable .

d'où la proposition. ■

En vertu du principe d'invariance de Lasalle, Les trajectoires du système (6.15) tendent vers le plus grand ensemble invariant contenu dans

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 / \dot{V}(x) = x_3^2 = 0\}$$

Maintenant, sur le plan d'équation $x_3 = 0$, le champ de vecteurs qui définit le système (6.15) devient:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -J_2 x_1 (-J_2 x_1^2 + J_1 x_2^2) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Finalement, le plus grand ensemble invariant contenu dans Ω est constitué de la droite $D = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_2 = x_3 = 0\}$.

Comme les trajectoires du système bouclé (6.20) évoluent sur les cylindres d'équation $-J_2x_1^2 + J_1x_2^2 = c$ (la fonction scalaire $x \rightarrow -J_2x_1^2 + J_1x_2^2$ est une intégrale première du système (6.20)), alors les trajectoires tendent vers l'ensemble $S = \{A_c, B_c\}$.

où A_c et B_c sont les points de coordonnées $(0, \sqrt{\frac{c}{J_1}}, 0)$ et $(0, -\sqrt{\frac{c}{J_1}}, 0)$.

Plus précisément, nous avons :

Proposition 6.5 ([42]) *Pour le système bouclé restreint au cylindre d'équation $-J_2x_1^2 + J_1x_2^2 = c$ ($c > 0$) nous avons la description suivante:*

- le point A_c est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable.
- Il y a deux trajectoires dont l'ensemble ω -limite est constitué du point B_c .
- l'ensemble ω -limite des points qui ne sont pas sur ces deux trajectoires est égal au points A_c

Démonstration

Les équations du système (6.15) restreint au cylindre sont :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \sqrt{-J_1J_2}x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + r^3\sqrt{-J_1J_2}\cos\theta \end{cases} \quad (6.17)$$

La matrice du système linéarisé, calculée au voisinage de A_c est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{J_1J_2} \\ -r^3\sqrt{J_1J_2} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Le déterminant de cette matrice est positif et sa trace est négative alors le système linéarisé est asymptotiquement stable.

Le premier point de la proposition est ainsi démontré.

Au voisinage de B_c , la matrice du système linéarisé est:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{J_1J_2} \\ r^3\sqrt{J_1J_2} & -1 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Le déterminant et la trace sont négatifs. Localement, Le point B_c , est un point selle.

le deuxième point de la proposition est ainsi démontré.

Dans la suite de cette démonstration, nous allons utiliser les notations suivantes : X est le champ de vecteurs pour le système (6.15), et d désignera la distance entre deux points du cylindre.

Soit M un point autre que B_c , si nous avons

$$\exists \epsilon > 0 / \forall T : d(X_T(M), B_c) > \epsilon \quad (6.20)$$

alors M est sur l'une des deux trajectoires admettant B_c comme ensemble ω -limite.

Si la condition (6.20) n'est pas vérifiée, alors

$$\forall \epsilon > 0 / \exists T : d(X_T(M), B_c) > \epsilon \quad (6.21)$$

et si ϵ est choisi suffisamment petit, $X_T(M)$ est dans le bassin d'attraction de A_c .

Finalement, l'ensemble ω -limite de M est A_c .

Ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

6.5 conclusion

Dans le cadre de la stabilisation globale des équations de la vitesse angulaire d'un coprs rigide non sphérique on arrive à la conclusion suivante:

Si la dimension de B est égale à deux alors le système est stabilisable par un feedback linéaire.

Si la dimension est égale à un et le corps est symétrique, alors le système n'est pas stabilisable par feedback linéaire mais il existe un feedback polynômiale qui stabilise le système.

Dans le cas où le coprs rigide ne possède aucune symétrie et le système vérifie la condition d'Ayeles-Sfranski, le système est stabilisable par un feedback linéaire.

Reste le cas où le coprs rigide n'est pas symétrique, et le système ne vérifie pas la condition d'Ayeles-Sfranski. Ce qu'on peut dire actuellement c'est qu'ils existent des cas non stabilisables. Considérons par exemple la situation suivante ;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - u \end{cases} \quad (6.22)$$

(i.e $J_1 = -J_2 = J_3 = 1$ et $b_1 = -b_3 = 1$, $b_2 = 0$)

En effet, si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ est une solution du système (6.22) avec

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = -\gamma_3(0) = c \neq 0 \\ \gamma_2(0) = d > 0 \end{cases}$$

Comme

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1(t) + \gamma_3(t)) = \gamma_2(t)(\gamma_1(t) + \gamma_3(t))$$

il vient que

$$\gamma_1(t) + \gamma_3(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Maintenant,

$$\frac{d}{dt}\gamma_2(t) = \gamma_1^2(t)$$

alors $\gamma_2(t) \neq 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Finalement, le système n'est pas stabilisable même en boucle ouverte.

Bibliographie

- [1] V. Andriano. Global feedback stabilization of the angular velocity of a symmetric rigid body. *Systems & Control Letters*, (20):361-364, (1993).
- [2] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal. TMA*, (7):1163–1173, (1983).
- [3] D. Aeyels. Stabilization by smooth feedback of the angular velocity of rigid body *Systems & Control Letters*, (5):59-63, (1985).
- [4] D. Aeyels. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control *Systems & Control Letters*, (5):289-294, (1985).
- [5] D. Aeyels. On stabilization by means of the Energy Casimir method. *Systems & Control Letters*, (18):325-328, (1992).
- [6] D. Aeyels and M. Szafranski. Comments on stabilizability of the angular velocity of a rigid body. *Systems & Control Letters* (10) 35-39, (1988)
- [7] A. Bacciotti. Local stabilizability problem for nonlinear systems. *IMA Journal of Mathematical control & Informations* (1988) 5 27-39
- [8] A.M.Bloch and J.E. Marsden. Stabilisation of rigid body dynamics by the Energy-Casimir. *Systems & Control Letters*, (14):341-346, (1990).
- [9] A.M.Bloch et al Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques *Automatica*, Vol 28, n° 4 pp 745-756, 1992
- [10] R.W. Brockett. *Differential Geometric Control Theory*, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181–191. Brockett, Milmann, Sussmann, 1983.
- [11] C. Byrnes and A. Isidori. Afrequency domain philosophy for nonlinear systems with applications to stabilization and adaptative control. In *Procc.24 IEEE Conf Decision Contr.*(1984) 1569-1537

- [12] C. Byrnes and A. Isidori. Global feedback stabilization of nonlinear minimale systems In Procc.25 IEEE Conf Decision Contr.(1985) 1031-1037
- [13] C. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, (12):437–442, (1989).
- [14] C. Byrnes and A. Isidori. Feedback stabilisation about attractions and the problem of asymptotic disturbanc rejection. In Procc.27 IEEE Conf Decision Contr.(1988) 32-36
- [15] C.I. Byrnes ,A. Isidori,J.C.Willems Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems *IEEE transaction on control*,vol as,36 no.11,(1228-1240) November 1991.
- [16] J.M. Coron and L. Praly. Adding an integrator for the stabilization problem. *Systems & Control Letters*, (17):89–104, (1991).
- [17] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. Asymptotic stabilization of two-dimensional real analytic systems. *Systems & Control Letters*, (12):205–211, (1989).
- [18] W.P. Dayawansa, C.F. Martin, and G. Knowles. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems. *SIAM J. Control and Optimization*, (28):1321–1349, (1990).
- [19] J.P. Gauthier. Structure des systèmes Non linéaires. (Editions du CNRS,Paris,1981) 255-263
- [20] J.P. Gauthier and G. Bornard. *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, chapter Stabilisation des systèmes non linéaires, pages 307–324. Editions du CNRS, 1981.
- [21] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer Verlag, (1967).
- [22] H. Hermes. Asymptotic stabilization of planar systems. *Systems & Control Letters*, (17):437-443, (1991).
- [23] P.E. Crouch and M. Ivring On sufficient conditions for local asymptotic stability of nonlinear systems whose linearisation is uncontrollable. Control Theory Centre Report 119 (1983)-University of Warwick
- [24] A. Isidori Nonlinear Control Systems, Springer-Verlag 1989
- [25] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, (28):381–389, (1978).

- [26] N. Kalouptsidis and J. Tsinias Stability improvement of nonlinear systems by feedback *IEEE transaction on control*, vol 29 364-367
- [27] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, (12):169–175, (1990).
- [28] D.E. Koditscheck. Adaptive techniques for mechanical systems. In *Fifth Yale workshop on adaptive systems*, pages 259–265. Yale University, New Haven, CT, 1987.
- [29] P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, (13):125–133, (1989).
- [30] J. Kurzweil. On the inversion of liapunov's second theorem on stability of motion. *AMS Translations*, 24:19–77, (1963).
- [31] J. Lasalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, (1961).
- [32] K.K. Lee and A. Araposthathis Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear system *Systems & Control Letters*, (10):(1988)41-44.
- [33] R. Lozano, B. Brogliato and I.D. Landau Passivity and global stabilization of cascaded nonlinear systems *IEEE transaction on control*, vol 37 no.9, august 1992.
- [34] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, (64):182–206, (1956).
- [35] R. Ortega Passivity properties for stabilization of cascaded nonlinear systems *Automatica* Vol 2 n° 2 pp 423-424 (1991)
- [36] R. Outbib Stabilisation d'une classe de systèmes affines en contrôles, Proceedings of l'European control conference, Grenoble 1991 (480-484)
- [37] R. Outbib Conditions suffisante pour la stabilisation globale des systèmes en cascade. Rapport INRIA n° 1455 Programme 5 Traitement du signal, Automatique et Productique.
- [38] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, (18):93–98, (1992).
- [39] R. Outbib and G. Sallet. Reduction principale for stabilisation of systems. à paritre dans à *Systems & Control Letters*

- [40] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of nonlinear system in presence of first integrals family of the drift by Jurdjevic-Quinn method's, Proceedings of l'European control conference, Groningen 1993 (37-40)
- [41] R. Outbib and J.C.Vivalda. Stabilization of rigid body about the middle axis Proceedings of IEEE Mediterranean symposium, Crète 1993
- [42] R. Outbib and J.C.Vivalda. The Jurdjevic-Quinn's theorem for smooth (nonanalytic) systems. soumis
- [43] N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy. Stability theory by Lyapounov direct methods, volume 22 of Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, 1984
- [44] E.P. Ryan and N.J. Buckingham. On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear System. *IEEE transaction on control*, vol 28, no.8, august 1983.
- [45] A. Saberi, P.V. Kokotovic, and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composed systems. *SIAM J. Control and Optimisation*, (28):1491-1503, (1990).
- [46] M. Slemrod. Stabilisation of bilinear control systems with applications to non conservative problems in elasticity. *SIAM J. Control and Optimisation*, (16):863-864, (1978)
- [47] E.D. Sontag. A universal construction of arstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, (13):117-123, (1989).
- [48] E.D. Sontag and H.J. Sussmann. Further comments on the stabilizability of the angular velocity of the rigid body. *Systems & Control Letters*, (12):213-217, (1988).
- [49] H.J. Sussmann. Limitations on the stabilizability of globally minimum phase systems *IEEE transaction on control*, vol 35, no.1, 1990.
- [50] H.J. Sussmann P.V. Kokotovic The peaking phenomenon and global stabilization of nonlinear systems *IEEE transaction on control*, vol 36, no.4, 424-440 (1991).
- [51] J. Tsinias. Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilizability. *Mathematics of control, Signals and systems* 2, 343-357(1989)
- [52] J. Tsinias. A theorem on global stabilization. *Systems & Control Letters*, (17):357-362, (1991).
- [53] J. Tsinias. A local stabilisation theorem for interconnected systems. *Systems & Control Letters* (18) 429-434 (1992)

Appendice

Démonstration du lemme.5.1

Tout d'abord, nous allons montrer que si $|x| \leq 1$ ou $|y| \leq 1$ alors pour b suffisamment grand Φ est positive.

Pour cela on distingue deux cas:

- $|y| \leq 1$ Il est facile de voir que pour b suffisamment grand on a

$$ax^q + Q(x, y) + b > 0 \quad \text{pour tout } x$$

- $|x| \leq 1$

La quantité Φ peut être réécrite sous la forme suivante

$$\Phi(x, y) = y^p + \sum_{i=1}^{p-1} P_i(x)y^i$$

où $P_i (i = 1 \dots p-1)$ représentent des polynômes en x .

Comme $|x| \leq 1$ alors pour $i = 1 \dots p-1$, P_i est borné. Il existe alors R tel que si $|y| \geq R$ on a $\Phi(x, y) > 0$. Maintenant si $|y| \leq R$, il suffit de choisir b de sorte que

$$b > \sup_{|x| \leq 1, |y| \leq 1} Q(x, y)$$

Dans la suite de la démonstration nous allons supposer que $|x| \geq 1$ et $|y| \geq 1$. Posons

$$\Phi_{ij}(x, y) = \frac{1}{n}y^p + \alpha_{ij}x^{i+2}y^j + \beta_{ij}x^{q+2}$$

où α_{ij} sont les coefficients du polynôme Q , $n = \text{card}\{(i, j)\}$ et $\beta_{ij} = |M\alpha_{ij}|^{\frac{p}{p-j}}$

En un premier temps, nous allons prouver que α_{ij} est positive. Pour cela nous allons distinguer deux cas:

- $|y|^{p-j} > n\alpha_{ij}|x|^{i+2}$

$$\Phi_{ij}(x, y) = \frac{1}{n}y^j \left[y^{p-j} + n\alpha_{ij}x^{i+2} \right] + \beta_{ij}x^q$$

Comme $y^{p-j} + n\alpha_{ij}x^{i+2}$ et y^j sont du même signe alors $\Phi_{ij}(x, y) > 0$.

- $|y|^{p-j} \leq n\alpha_{ij}|x|^{i+2}$ Des calculs directs montrent que dans ce cas nous avons

l'inégalité suivante:

$$n\alpha_{ij}|y^j x^{i+2}| \leq \beta_{ij}|x|^q$$

alors $\Phi_{ij}(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Maintenant,

$$\Phi(x, y) = \sum \Phi_{ij}(x, y) + bx^2 \quad \text{avec} \quad a = \sum \beta_{ij}$$

donc $\Phi(x, y)$ est définie, positive.

Le lemme est ainsi démontré

■