AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Vb81653

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Yves GILLET

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : MÉCANIQUE
OPTION :MATÉRIAU ET STRUCTURES

DIMENSIONNEMENT D'ÉLÉMENTS SIMPLES EN ALLIAGE À MÉMOIRE DE FORME

Soutenue le 15 Juillet 1994 devant le Jury composé de:

C. LEXCELLENT	Président du Jury.
M. BERVEILLER	Directeur de Thèse.
E. PATOOR	Directeur de Thèse.
D. FAVIER	Rapporteur.
J. OUDIN	Rapporteur.
L. BUFFARD	
F. TROCHU	

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 1994153 S
Cote S/M3 94/51
Loc Magasin

Table des matières:

Introduction générale.....1

Chapitre 1: Présentation des alliages à mémoire de forme.....5

1.1. Introduction:.....7

1.2. Les différentes classes de comportement:.....10

1.2.1. Superélasticité:.....10

1.2.2. L'effet mémoire simple sens:.....12

1.2.2.1. Première séquence de chargement:.....13

1.2.2.2. Seconde séquence de chargement:.....15

1.2.3. L'effet mémoire double sens.....17

1.2.4. Effet caoutchoutique:.....18

1.2.5. Amortissement:.....19

1.3. Caractérisation des AMF:.....19

1.3.1. Essais mécaniques:.....20

1.3.1.1. Détermination des contraintes seuils en superélasticité:.....20

1.3.2. Détermination des températures de transformation:.....22

1.3.2.1. Mesure de résistivité:.....22

1.3.2.2. Calorimétrie différentielle à balayage:.....22

1.3.2.3. Essais mécaniques:.....23

1.4. Les différentes classes d'alliages à mémoire de forme:.....24

1.5. Traitements thermiques:.....26

1.6. Applications industrielles des AMF:.....27

1.6.1. Retour libre (free recovery):.....27

1.6.2. Production d'efforts (constrained recovery):.....28

1.6.3. Production de travail:.....29

1.6.4. Superélasticité et pseudoélasticité: 29
1.7. Conclusion: 29
Références bibliographiques: 31

Chapitre 2: Modèles de comportement....33
2.1. Introduction: 35
2.2. R-Modèle: 36
2.2.1. Conclusion: 39
2.3. Modèle d'élastohystérésis: 39
2.3.1. Etude du cisaillement pur: 40
2.3.1.1. Contribution réversible: 40
2.3.1.2. Contribution d'hystérésis pure: 41
2.3.2. Extension au cas non isotherme: 42
2.3.3. Mémoire discrète: 42
2.3.4. Extension au cas tridimensionnel: 42
2.3.5. Conclusion: 43
2.4. Modélisation du comportement utilisée dans cette étude: 43
2.4.1. Critère tenant compte de la dissymétrie traction-compression: 44
2.4.1.1. Identification du critère: 46
2.4.1.2. Détermination de la Loi de Comportement associée: 50
2.4.2. Cas de la décharge: 53
2.4.2.1. Identification du critère: 53
2.4.2.2. Détermination du paramètre d'écrouissage: 57
2.4.2.3. Détermination de la Loi de Comportement associée: 58
2.4.3. Résumé: 59

2.4.4. Mise en oeuvre de la loi de comportement en calcul de structures: 61
Conclusion: 65
Références bibliographiques: 66

Chapitre 3: Modèles en calcul de structures 69
3.1. Introduction: 71
3.2. Superélasticité: 71
3.2.1. Calcul de ressort par le modèle de Tobushi et Tanaka: 71
3.2.1.1. Loi de comportement: 71
3.2.1.2. Calcul de structure: 73
3.2.1.3. Résultats expérimentaux: 75
3.2.1.4. Conclusions: 76
3.2.2. Calcul de poutre en flexion par le modèle d'Atanackovi et al.: 76
3.2.2.1. Loi de comportement: 77
3.2.2.2. Calcul de structure: 78
3.2.2.2.1. Cas de la charge: 78
3.2.2.2.2. Cas de la décharge: 80
3.2.2.3. Conclusion: 81
3.3. Effet mémoire: 82
3.3.1. Calcul de ressort par la méthode de T. Waram [C3.4]: 82
3.3.1.1. Conclusion: 84
3.4. Modèle de calcul de structures utilisé dans la suite des travaux: Méthode de BRESSE [C3.5]. 85
3.4.1. Mouvement relatif entre deux sections : 86
3.4.2. Composition du mouvement pour une infinité de sections: 87

3.4.3. Formules de Bresse:.....87
3.4.4. Relations avec le torseur des efforts intérieurs :.....89
3.5. Conclusion:.....89
Références bibliographiques:.....90

Chapitre 4: Résultats expérimentaux.....91
4.1 Introduction:.....93
4.2 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Zn-Al-Ni :.....93
4.2.1 Traitement thermique:.....94
4.2.2 Les échantillons :.....94
4.2.2.1 Températures de transformation :.....94
4.2.2.2 Caractéristiques mécaniques de l'alliage :.....95
4.3 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Al-Be:.....98
4.3.1 Traitement thermique:.....99
4.3.2 Les échantillons:.....99
4.3.2.1 Températures de transformation:.....99
4.3.2.2 Caractéristiques mécaniques de l'alliage:.....99
4.3.3 Montage de flexion:.....100
4.3.4 Essais en température:.....101
4.3.5 Histoire des éprouvettes:.....101
4.3.5.1 Eprouvette A et B:.....102
4.3.5.2 Eprouvette C:.....102
4.3.6 Essais de traction:.....102
4.3.6.1 Eprouvette A:.....102
4.3.6.2 Eprouvette B:.....103
4.3.6.3 Eprouvette C:.....103
4.3.7 Essais de flexion:.....107
4.3.7.1 Eprouvette A:.....107

4.3.7.2 Eprouvette B: 108
4.3.7.3 Eprouvette C: 110
4.4 Conclusion: 114

Chapitre 5: Torsion des AMF 117
5.1. Introduction: 121
5.2. Barreau cylindrique en torsion pure: 121
5.2.1. Description des déplacements: 122
5.2.1.1. Torsion libre de Saint-Venant:[C5.2]: 122
5.2.1.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli: 123
5.2.2. Déformations en un point de la section: 123
5.2.2.1. Déformations seuils et angles seuils de transformation: 124
5.2.2.2. Définition des zones transformées: 125
5.2.2.2.1. Définition du rayon Ra : 126
5.2.2.2.2. Définition du rayon Rm : 127
5.2.3. Expression des contraintes: 127
5.2.3.1. Contrainte de torsion dans le domaine monophasé: 127
5.2.3.2. Contrainte seuil de transformation: 128
5.2.3.3. Contrainte de torsion lorsque la transformation progresse: 128
5.2.3.4. Contrainte seuil de fin de transformation: 129
5.2.3.5. Contrainte de torsion en présence d'une zone complètement transformée: 130
5.2.4. Moment de torsion : 130
5.2.4.1. Matériau monophasé: 130

5.2.4.2. Moment de torsion seuil et force seuil de début de transformation 131
5.2.4.3. Barreau en cours de transformation: 131
5.2.5. Transformation d'un barreau cylindrique: 133
5.2.6. Décharge du barreau cylindrique: 134
5.2.6.1. Problèmes supplémentaires engendrés par la décharge : 135
5.2.6.2. Déformations seuils et angles seuils de transformation inverse : 136
5.2.6.3. Définition des zones en décharge : 138
5.2.6.3.1. Rayon où la transformation inverse débutera en premier lieu 138
5.2.6.3.2. Définition de R_d : 140
5.2.6.3.3. Définition de R_a': 141
5.2.6.4. Module de cisaillement en transformation inverse : 141
5.2.7. Expression des contraintes: 143
5.2.7.1. Contrainte de torsion lorsque la transformation inverse progresse: 143
5.2.7.2. Contrainte de torsion dans l'austénite seule: 144
5.3. Application au calcul de ressorts hélicoïdaux: 144
5.3.1. Application de la méthode de Bresse : 146
5.3.2. Résolution directe: 148
5.3.2.1. Phase austénitique : 148
5.3.2.2. Matériau en cours de transformation : 149
5.3.2.3. Matériau présentant une zone purement martensitique : 149
5.3.2.4. Discussion : 150
5.3.3. Formulation incrémentale: 152

5.3.3.1. Cas du matériau purement austénitique :.....153
5.3.3.2. Matériau en cours de transformation : 153
5.3.3.3. Matériau présentant une zone purement martensitique: 154
5.3.3.4. Algorithme de résolution: 154
5.4. Evaluation de la fraction volumique de martensite transformée: 156
5.5. Conclusion: 160
Références bibliographiques: 161

Chapitre 6: Flexion des AMF.....163
6.1. Introduction: 166
6.2. Poutre prismatique en flexion pure: 167
6.2.1. Description des déplacements : 168
6.2.2. Déformation en un point de la section : 169
6.2.3. Cas du matériau non transformé : 169
6.2.3.1. Relation entre le gradient de déplacement et la rotation des sections droites: 169
6.2.3.2. Déformation et contrainte: 170
6.2.3.3. Moment de flexion : 170
6.2.4. Déformations de transformation: 171
6.2.4.1. Déformation seuil de début de transformation en traction : 172
6.2.4.2. Déformation seuil de début de transformation en compression : 173
6.2.4.3. Déformations seuils de fin de transformation : 173
6.2.5. Définition des zones transformées : 174
6.2.5.1. Fibres tendues: 174
6.2.5.2. Fibres comprimées: 175

6.2.6. Cas du matériau en cours de transformation : 175
6.2.6.1. Transformation sur une partie des fibres en traction: 176
6.2.6.2. Transformation sur une partie des fibres en traction et en compression:..... 177
6.2.7. Transformation inverse: 178
6.2.7.1. Définition des zones transformées : 178
6.2.7.2. Module de transformation inverse : 179
6.2.7.3. Moment de flexion : 181
6.3. Extension au cas de la flexion simple:..... 181
6.4. Conclusion: 183
Références bibliographiques:..... 184

Chapitre 7: Comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques..... 185
7.1. Introduction:..... 187
7.2. Alliage de Cu-Zn-Al-Ni:..... 187
7.2.1. Identification des températures de transformation:..... 187
7.2.2. Identification des paramètres de la loi de comportement:..... 188
7.2.3. Comparaison des résultats obtenus sur un ressort hélicoïdal:..... 190
7.2.4. Discussion des résultats: 193
7.3. Alliage de Cu-Al-Be:..... 194
7.3.1. Identification des températures de transformation:..... 194
7.3.2. Identification des paramètres de la loi de comportement:..... 194
7.3.3. Comparaison des résultats pour la flexion: 196

7.3.4. Discussion: 201
7.4. Conclusion: 202
Références bibliographiques: 203

Chapitre 8: Superthermoélasticité....205
8.1. Introduction: 207
8.2. Loi de comportement: 207
8.3. Application à la traction uniaxiale: 209
8.3.1. Trajet thermomécanique à contrainte constante: 210
8.3.2. Trajet thermomécanique à déformation constante: 212
8.3.3. Un exemple de trajet thermomécanique complexe: 214
8.4. Application des résultats précédents au calcul de structures: 215
8.4.1. Application à une structure: exemple du ressort hélicoïdal. 216
8.4.1.1. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à une force constante: 217
8.4.1.2. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à un déplacement imposé: 218
8.4.1.3. Trajet thermomécanique combiné: 219
8.5. Conclusion: 219
Références bibliographiques: 221

Conclusion générale....223

Annexes.....225

A.1. Annexe 1: Influence de la déformation maximale de transformation. 227

A.2. Annexe 2: Approximation bilinéaire de la réponse en torsion d'un fil de section circulaire en cours de transformation.....229

A.2.1 Force seuil de début de transformation :.....230

A.3. Annexe 3: Dimensionnement d'un ressort superélastique par une approche énergétique:.....231

A.3.1 Définition de l'énergie complémentaire W*:.....231

A.3.2 Application du théorème de Castigliano:.....232

A.3.2.1 Cas du matériau pas ou très peu transformé:.....233

A.3.2.2 Définition d'un déplacement seuil de début de transformation :.....233

A.3.2.3 Cas du matériau en cours de transformation:.....233

A.3.2.4 Conclusion:.....234

A.4. Annexe 4: Détermination du comportement en torsion en présence d'une zone complètement transformée. 236

A.5. Annexe 5: Détermination de l'expression de Ra' en utilisant le code de calcul formel MAPLE.....239

A.6. Annexe 6: Evaluation du décalage de la fibre neutre en flexion. 240

A.7. Annexe 7: Coefficient de section réduite pour les AMF. 243

A.8. Annexe 8: Problème en grands déplacements.....247

A.9. Annexe 9: Évaluation de la contribution due à la flexion dans un ressort hélicoïdal de traction.....249

Liste des symboles utilisés:

Contraintes:

σ_{ij}: composante du tenseur des contraintes de Cauchy agissant sur la facette de normale i dans la direction j.

I_1, I_2, I_3: invariants du tenseur des contraintes.

s_{ij}: composante du déviateur du tenseur des contraintes de Cauchy agissant sur la facette de normale i dans la direction j.

J_2, J_3: invariants du déviateur des contraintes.

$\sigma_0(T)$: contrainte critique de début de transformation en traction.

$\sigma_1(T)$: contrainte critique de début de transformation en compression.

σ_s: voir $\sigma_0(T)$.

σ_f: contrainte critique de fin de transformation en traction.

τ_s: contrainte critique de début de transformation en cisaillement.

τ_f: contrainte critique de fin de transformation en cisaillement.

Déformations:

ε_{ij}: composante du tenseur des déformations totales.

$\varepsilon_{ij}^{él}$: composante du tenseur des déformations élastiques.

ε_{ij}^{th}: composante du tenseur des déformations dues à la dilatation thermique.

ε_{ij}^{pt}: composante du tenseur des déformations de transformation.

ε^{pt}: déformation de transformation équivalente.

ε_{am}: déformation maximale de transformation.

ε_s $\{\gamma_s\}$: déformation de début de transformation en traction {en cisaillement}.

ε_f $\{\gamma_f\}$: déformation de fin de transformation en traction {en cisaillement}.

ε_{am}^{A}: déformation maximale apparente de transformation.

ε^{*} $\{\gamma^{*}\}$: déformation maximale atteinte à la charge en traction {en cisaillement}.

$\varepsilon^d\{\gamma^d\}$: déformation de début de transformation inverse à la décharge en traction {en cisaillement}.

Rigidités:

E: module d'élasticité longitudinal.

μ_a: module de cisaillement élastique.

K_0 $\{K_1\}$: module de transformation en traction {en compression}.

E' {E"}: module apparent de transformation en traction {en compression}.

μ': module apparent de transformation en cisaillement.

Températures:

T: température d'utilisation.

M_s: température de début de transformation austénite→martensite à contrainte nulle.

M_f: température de fin de transformation austénite→martensite à contrainte nulle.

A_s: température de début de transformation martensite→austénite à contrainte nulle.

A_f: température de fin de transformation martensite→austénite à contrainte nulle.

α: coefficient de dilatation thermique.

$\mathcal{B}_0$ $(\mathcal{B}_1)$: coefficient de proportionalité entre le contrainte seuil de traction (de compression) et la température.

Opérateurs mathématiques:

δ_{ij}: symbole de Kroneker.

$\in_{ijk}$: opérateur permutation.

Introduction générale:

Les propriétés d'effet mémoire ont été observées pour la première fois dans les métaux il y a maintenant plus de cinquante ans. Il a néanmoins fallu attendre le début des années 60 pour qu'une forte activité de recherche se développe autour de ce sujet. Actuellement de nombreuses conférences sur le domaine ont lieu régulièrement (ICOMAT, ESOMAT, SMST, IA-SMA). La première application industrielle des Alliages à Mémoire de Forme (AMF) a vu le jour en 1969 dans les locaux de la société américaine RAYCHEM. Depuis, même si le nombre des brevets déposés dans le domaine des AMF est impressionnant et malgré le succès rencontré par de nombreux prototypes, le succès commercial des AMF se laisse désirer. Les principaux obstacles à ce succès sont le temps de mise au point des systèmes mettant en oeuvre des AMF, ainsi que la fiabilité de ces systèmes.

Ce manque de fiabilité peut bien sûr être imputé en partie à des aspects métallurgiques (résistance au vieillissement). Cependant, de nouvelles nuances qui tendent à faire reculer ces problèmes sont sans cesse développées. De plus, il ne faut pas négliger les aspects mécaniques du problème. En effet, le dépassement des contraintes admissibles a un résultat néfaste pour la durée de vie des applications. Il est donc important de développer des outils de conception permettant d'optimiser le dimensionnement des éléments en alliages à mémoire de forme. Pourtant, il existe peu de travaux dans ce domaine, alors même qu'une part importante des études expérimentales est effectuée sur des structures (éducation de lames en flexion ou de ressorts).

Le développement de tels outils est l'objectif de ce travail. Deux étapes essentielles sont à distinguer, la loi de comportement et le calcul de structures. Cette étude est focalisé sur ce dernier point. Pour le réaliser, on peut avoir

recours d'une part à une formulation de type "Eléments Finis", d'autre part à une approche plus classique telle que la Résistance des Matériaux. Bien que les Eléments finis semblent à priori plus performants, notre choix s'est porté sur l'approche par la Résistance des Matériaux car dans la majorité des cas, les applications potentielles relèvent de géométries simples (bagues, ressorts, lames en flexion) et de chargements mécaniques simples. Enfin, ce type d'approche ne nécessite pas de systèmes informatiques importants. Or, ceci est un avantage, car l'industrie des AMF est essentiellement constituée de PME, et celles-ci ne possèdent pas de gros systèmes de calcul.

Dans le premier chapitre, les principales propriétés des alliages à mémoires de forme et de la transformation martensitique sont décrites sous un aspect que nous avons volontairement choisi macroscopique. Les applications y sont classifiées en fonction des propriétés qu'elles mettent en oeuvre.

Le second chapitre traite des modélisations phénoménologiques du comportement des AMF. Deux modèles de comportement issus de la littérature y sont décrits. En outre, une approche directement inspirée des travaux sur la plasticité est développée dans cette section. Celle-ci est en continuité directe avec les travaux déjà développés au sein du laboratoire sur le comportement de ces matériaux.

Le calcul de structures est abordé au chapitre suivant. Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons l'état de l'art au départ de cette thèse. Nous y décrivons des modèles qui peuvent être considérés comme les premiers travaux ayant trait au calcul de structures en AMF. A la suite, nous présentons la ligne directrice adoptée dans cette étude.

Le quatrième chapitre décrit les aspects expérimentaux de cette étude. Nous y exposons les résultats expérimentaux obtenus sur deux alliages à base de Cuivre. Le choix de ces deux alliages est motivé par leur utilisation dans deux dispositifs industriels. Les résultats ainsi obtenus pour différents types de chargements sont ensuite utilisés pour caractériser le comportement des matériaux (traction uniaxiale et calorimétrie) et pour valider le modèle en calcul de structures.

Dans les chapitres 5 et 6, on étudie la réponse de deux poutres de géométries simples soumises à des chargements simples. Le chapitre 5 aborde le cas d'une sollicitation en torsion pure. La flexion pure est étudiée dans le chapitre 6.

Nous comparons, dans le septième chapitre, les résultats obtenus par les modèles développés dans les chapitres 5 et 6 avec ceux obtenus au chapitre 4.

Le huitième, et dernier, chapitre concerne les chargements thermomécaniques pour lesquels la température n'est plus constante. Dans cette présentation, nous proposons une approche simplifiée du problème.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

Table des matières:

1.1. Introduction: 7
1.2. Les différentes classes de comportement: 10
1.2.1. Superélasticité: 10
1.2.2. L'effet mémoire simple sens: 12
1.2.2.1. Première séquence de chargement: 13
1.2.2.2. Seconde séquence de chargement: 15
1.2.3. L'effet mémoire double sens 17
1.2.4. Effet caoutchoutique: 18
1.2.5. Amortissement: 19
1.3. Caractérisation des AMF: 19
1.3.1. Essais mécaniques: 20
1.3.1.1. Détermination des contraintes seuils en superélasticité: 20
1.3.2. Détermination des températures de transformation: 22
1.3.2.1. Mesure de résistivité: 22
1.3.2.2. Calorimétrie différentielle à balayage: 22
1.3.2.3. Essais mécaniques: 23
1.4. Les différentes classes d'alliages à mémoire de forme: 24
1.5. Traitements thermiques: 26
1.6. Applications industrielles des AMF: 27
1.6.1. Retour libre (free recovery): 27
1.6.2. Production d'efforts (constrained recovery): 28
1.6.3. Production de travail: 29
1.6.4. Superélasticité et pseudoélasticité: 29
1.7. Conclusion: 29
Références bibliographiques: 31

1.1.Introduction:

L'appellation *alliage à mémoire de forme* ne correspond qu'à l'un des aspects du comportement complexe de ces matériaux. Le phénomène qui confère aux AMF leurs propriétés si particulières est une transformation de phase à l'état solide, la transformation martensitique. Il s'agit d'une transformation thermoélastique réversible entre une phase mère appelée Austénite, stable à haute température, et une phase appelée Martensite stable à basse température [C1.1]. Ce type de transformation est également appelée transformation par cisaillement, la déformation de transformation étant composée d'une dilatation volumique (faible dans le cas des AMF) et d'une forte composante déviatorique. Cette transformation de phase peut être produite de différentes manières: soit par abaissement de la température, soit par élévation de la contrainte appliquée, ou encore par une combinaison de ces deux modes de chargement. Pour les métaux usuels, l'influence d'une variation de température de quelques degrés produit peu d'effet sur le comportement mécanique du matériau. Dans le cas qui nous intéresse, une telle variation de température est susceptible de modifier de façon spectaculaire le comportement de l'alliage. On caractérise cette transformation par des températures de transformation fonction de l'alliage étudié (composition, traitement thermomécanique subi...). Ces températures sont au nombre de quatre : M_s, M_f, A_s, et A_f [C1.2]. M_s est la température de début de transformation martensitique (Martensit start), et M_f la température de fin de transformation martensitique (Martensit finish). Par ailleurs la transformation Austénite→Martensite ne se produit pas aux mêmes températures que la transformation Martensite→Austénite. Il est donc nécessaire de définir également A_s, température de début de transformation inverse (Austenit start), ainsi que A_f, température de fin de transformation inverse (Austenit finish). Nous verrons plus tard comment déterminer ces différentes caractéristiques.

Il a été montré que ces températures dépendent de la contrainte appliquée au matériau [C1.3]. La relation entre ces deux grandeurs peut être assimilée à une relation linéaire [C1.4]. Les figures I.1 et I.2 présentent schématiquement les domaines de stabilité des deux phases, la première pour une transformation Austénite→Martensite, la seconde pour une transformation inverse.

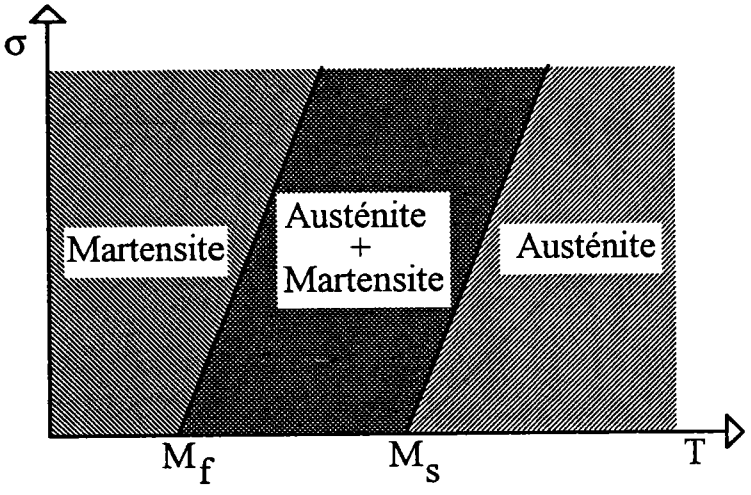


Fig. I.1 : Domaines de stabilité des phases pour une transformation A→M.

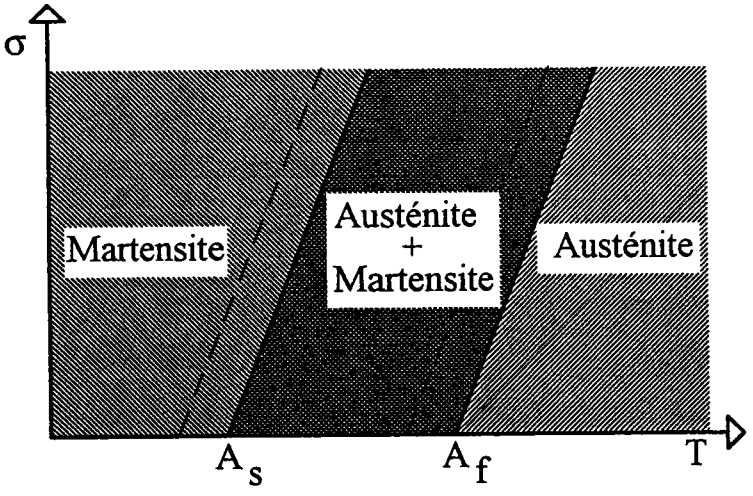
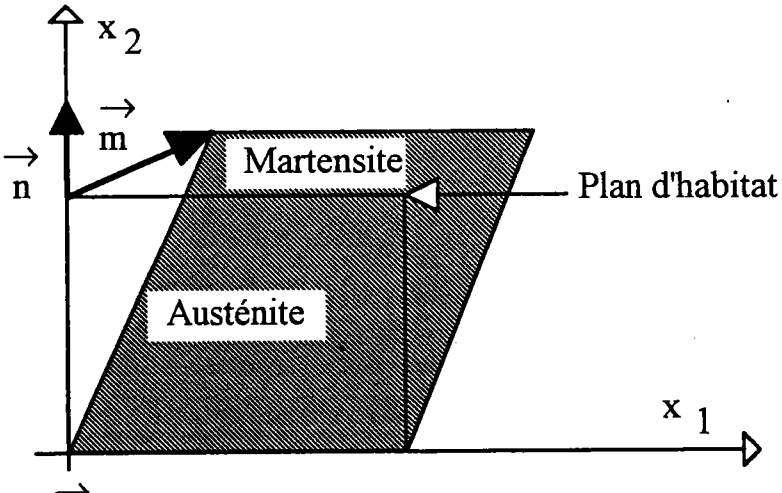


Fig. I.2 : Domaines de stabilité des phases pour une transformation M→A.

On peut donc imaginer différents trajets de chargement thermomécaniques pouvant conduire à la formation de martensite à partir de l'austénite.

Lors de la transformation, la martensite apparaît sous forme de plaquettes qui se propagent dans l'austénite. Ces plaquettes sont caractérisées par leur plan d'accolement avec l'austénite. Ce plan également appelé plan d'habitat reste invariant au cours de la transformation. Le plan d'habitat et la direction de cisaillement sont des caractéristiques de la transformation (voir fig. I.3). L'ensemble des plaquettes ayant même plan d'habitat et même direction de cisaillement est appelé variante de martensite [C1.4]. Lorsque ces variantes tendent à s'accommoder entre elles de façon à compenser leurs déformations respectives, on parle de variantes auto-accommodantes (fig. I.4).



$\vec{m}$: direction de transformation (cisaillement)

$\vec{n}$: normale au plan d'habitat.

Fig I.3: Plan d'habitat et direction de transformation.

Fig. I. 4: Groupes de variantes auto-accommodantes [C1.5].

1.2.Les différentes classes de comportement:

En fonction du trajet de chargement et des traitements thermomécaniques subis, on distingue cinq classes de comportement [C1.5].

1.2.1. Superélasticité:

La superélasticité consiste à produire de la martensite, à partir de l'austénite, sous des conditions isothermes (T=cste) à l'aide d'une contrainte extérieure. Dans ce cas la martensite produite est orientée par la contrainte appliquée à l'échantillon. Selon le type de sollicitation imposée, la transformation en martensite est complète ou non. Si elle ne l'est pas, des zones non transformées (austénite), en cours de transformation, ou complètement transformées (martensite) coexistent dans l'échantillon.

Si la température se situe au-dessus de A_f (fig. I.5), la transformation inverse en austénite sera complète (fig. I.6).

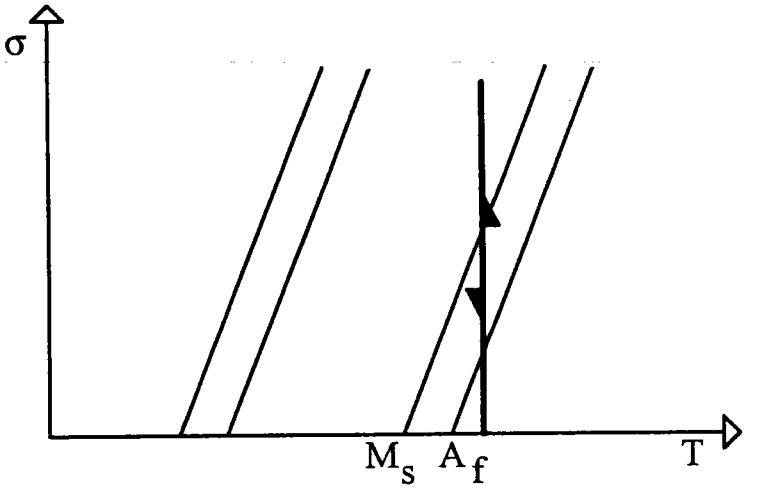


Fig. I.5 : Schéma de principe de la superélasticité dans l'espace contrainte-température.

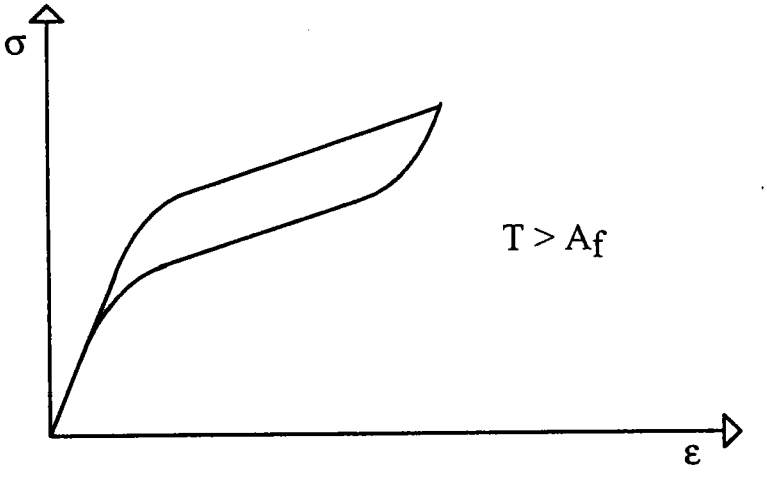


Fig. I.6 : Schéma de principe de la superélasticité dans l'espace contrainte-déformation.

Mais si la température se situe entre M_s et A_f (fig. I.7), on obtiendra lors de la décharge du matériau une déformation apparemment plastique due à la présence de martensite résiduelle dans le matériau (fig. I.8).

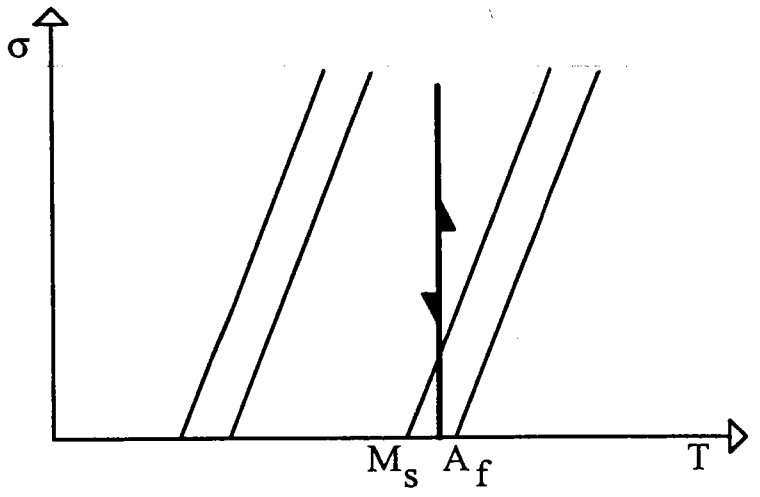


Fig. I.7 : Schéma de principe de la superélasticité dans l'espace contrainte-température.

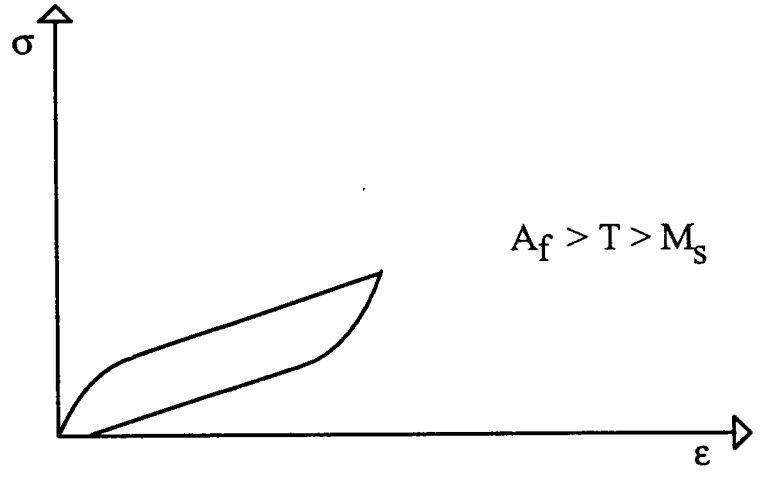


Fig. I.8 : Schéma de principe de la superélasticité dans l'espace contrainte-déformation.

1.2.2. L'effet mémoire simple sens:

L'effet mémoire simple sens résulte de l'application à un échantillon, à l'origine à l'état austénitique, d'une séquence de chargement thermomécanique. Deux séquences sont ici présentées à titre d'exemples.

1.2.2.1. Première séquence de chargement:

En l'absence de contrainte extérieure appliquée à l'échantillon, on refroidit celui-ci en dessous de M_f à partir d'une température initiale supérieure à A_f (fig. I.9). L'échantillon se trouve alors à l'état martensitique. Aucune déformation macroscopique n'est remarquée. La martensite formée thermiquement en l'absence de contrainte appliquée se compose essentiellement de plaquettes auto-accommodantes (fig. I.10).

On applique ensuite à cet échantillon une contrainte macroscopique. Il en résulte alors une déformation qui a toute l'apparence d'une déformation plastique. Cette déformation ne disparaît pas après relâchement de la contrainte.

Le réchauffage de l'échantillon au-dessus de la température A_f produit le retour de cet échantillon à sa forme initiale (fig. I.11).

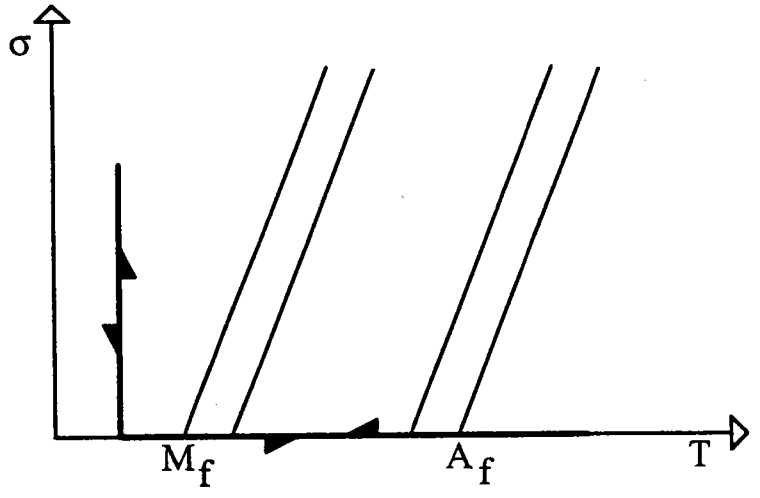


Fig. I.9 : Représentation schématique de la première séquence de chargement dans l'espace contrainte-température.

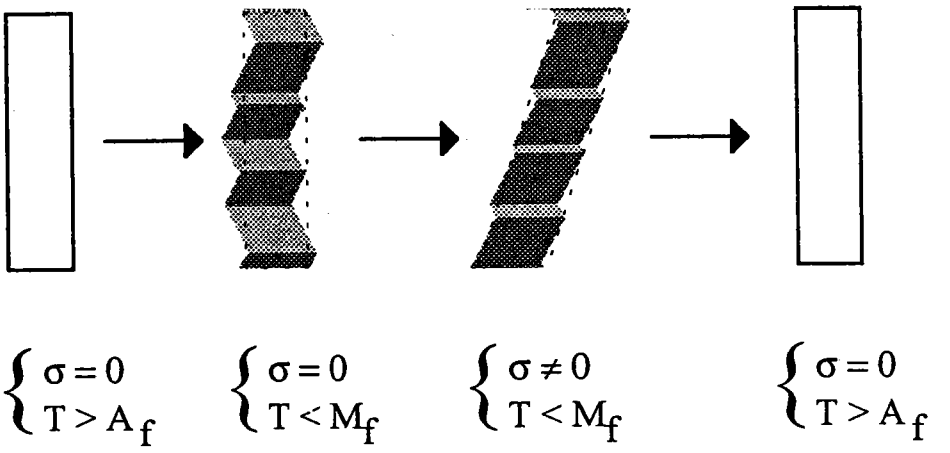


Fig I.10 : Aspects microstructuraux relatifs à la première séquence de chargement.

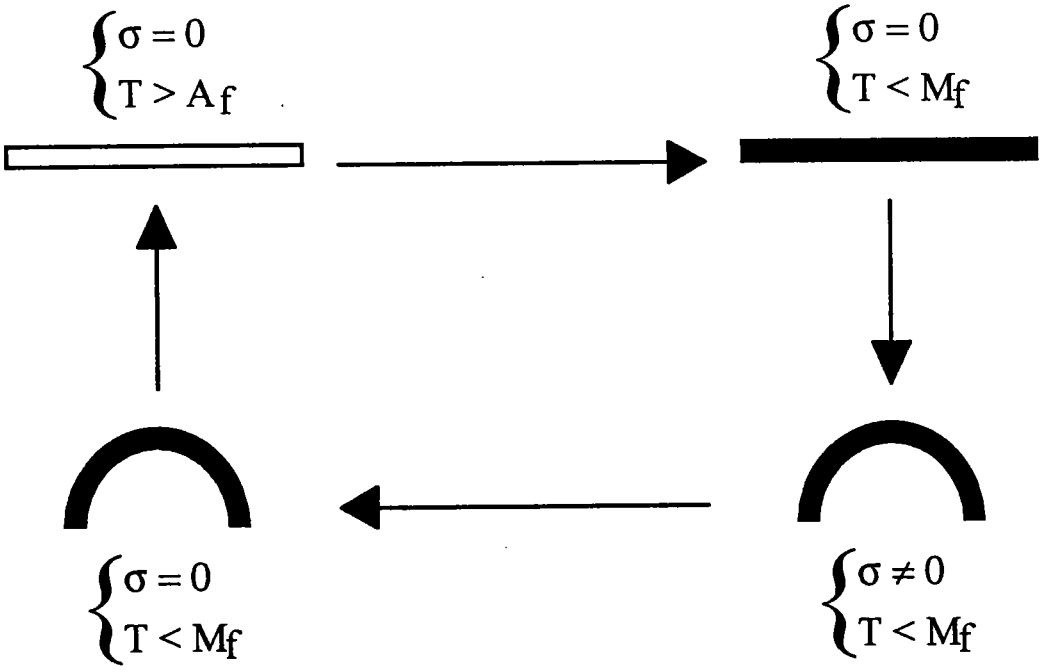


Fig. I.11 : Effet mémoire simple sens. Représentation simplifiée. Première séquence de chargement.

1.2.2.2. Seconde séquence de chargement:

On applique cette fois une contrainte extérieure à l'échantillon à l'état austénitique ($T>A_f$) (fig. I.12). Il s'ensuit une déformation élastique de l'échantillon due à cette contrainte. On refroidit comme précédemment en dessous de M_f. L'échantillon se trouve alors à l'état martensitique. Cette fois, une déformation macroscopique apparaît.

On relâche la contrainte appliquée. Il en résulte alors une déformation qui a toute l'apparence d'une déformation plastique (voir fig. I.14)[C1.4].

Le réchauffage de l'échantillon au-dessus de la température A_f produit le retour de cet échantillon à sa forme initiale (fig. I.13).

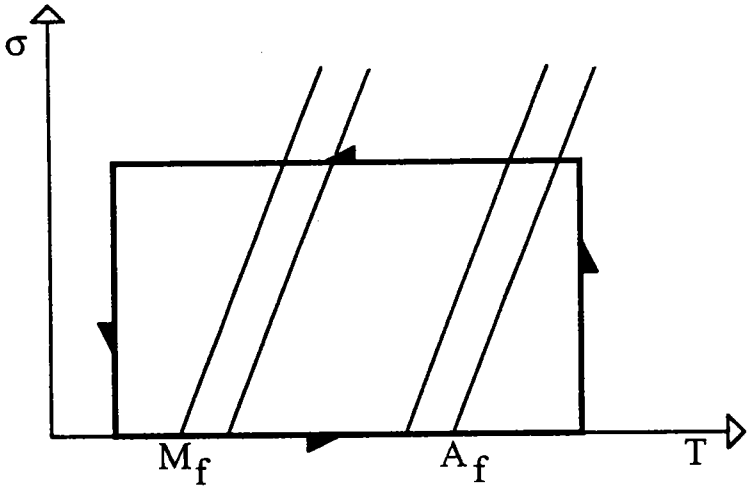
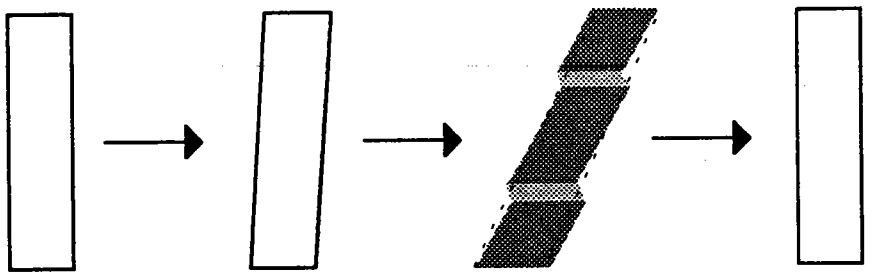


Fig I.12 : Représentation schématique de la seconde séquence de chargement dans l'espace contrainte-température.



$\begin{cases}\sigma = 0 \\ T > A_f\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma \neq 0 \\ T < M_f\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma \neq 0 \\ T < M_f\end{cases}$ $\begin{cases}\sigma = 0 \\ T > A_f\end{cases}$

Fig I.13: Aspects microstructuraux relatifs à la seconde séquence de chargement.

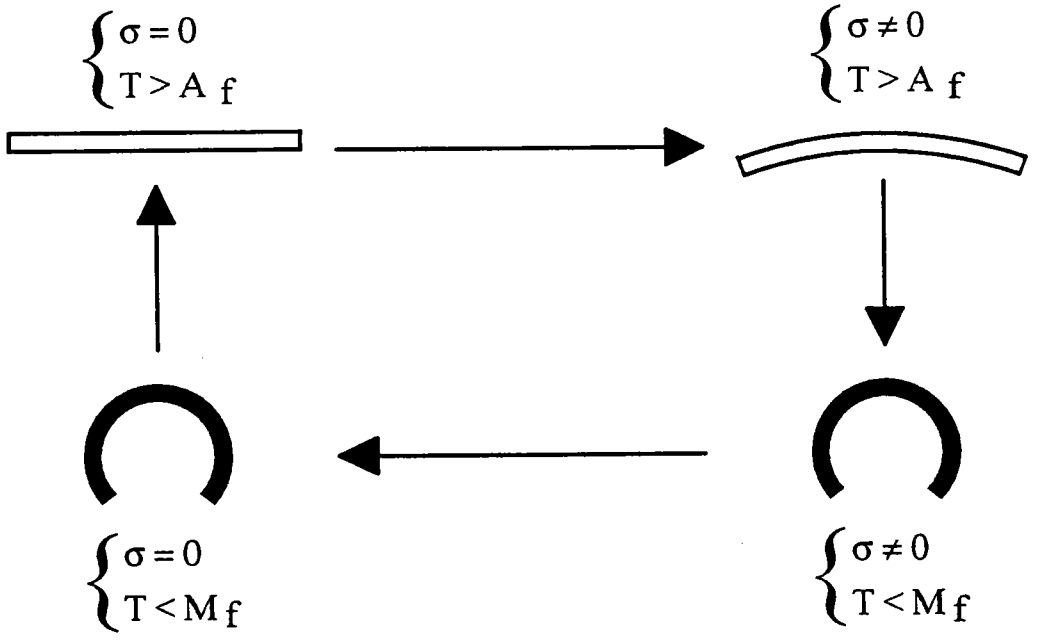


Fig. I.14 : Effet mémoire simple sens. Représentation simplifiée. Seconde séquence de chargement.

Remarque :

Les résultats produits par les deux séquences décrites ci-dessus sont différents en terme de déformation. En effet, dans le premier cas, en appliquant la contrainte pour $T<M_f$, on déforme la martensite par réorientation des variantes. Alors que dans le second cas, on forme directement à l'aide de la contrainte des variantes

bien orientées. Pour le même échantillon soumis à la même contrainte, on obtient alors une déformation plus importante en utilisant la seconde séquence de chargement.

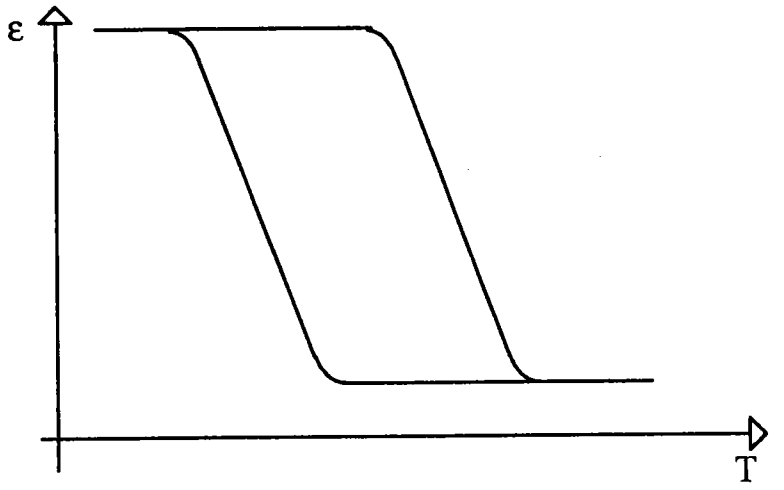


Fig I.15: Représentation schématique de l'effet mémoire dans l'espace déformation température.

1.2.3. L'effet mémoire double sens.

Ce comportement particulier est obtenu après un traitement dit d'*éducation* [C1.6][C1.7][C1.8]. Le matériau mémorise alors deux formes, l'une dans l'état austénitique, l'autre dans l'état martensitique (fig. I.16). Il existe plusieurs types de traitements d'éducation. Certains de ces traitements consistent en la répétition pendant un certain nombre de cycles (N<50) des séquences présentées dans les paragraphes précédents (seules ou de manière combinée).

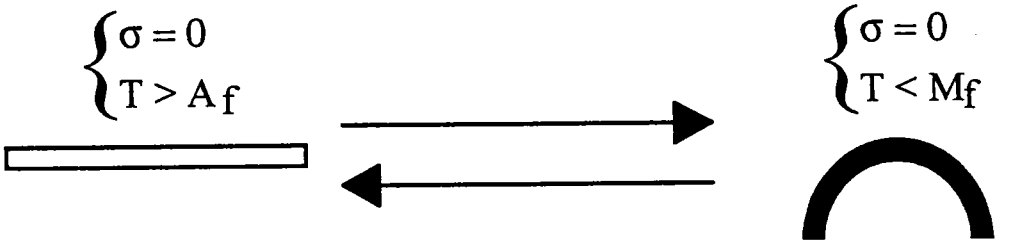


Fig. I.16 : Effet mémoire double sens. Représentation simplifiée.

1.2.4. Effet caoutchoutique:

L'application d'une contrainte sur un échantillon à l'état martensitique ($T=cste<M_f$) permet de mettre en évidence cet effet (fig. I.17). La courbe obtenue dans l'espace contrainte-déformation (voir fig. I.18) n'est pas sans rappeler la courbe de superélasticité pour T compris entre M_s et A_f (fig. I.8). Cependant il ne s'agit pas là d'une transformation de phase, mais d'un effet associé au mouvement réversible des interfaces entre variantes de martensite.

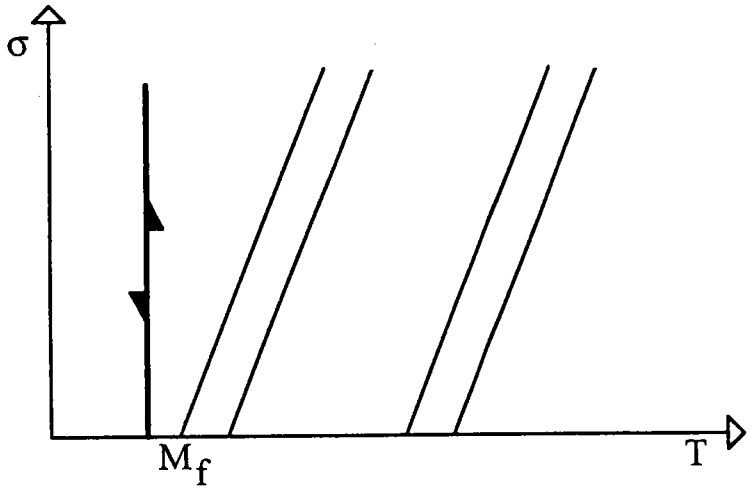


Fig. I.17 : Schéma de principe dans l'espace contrainte-température.

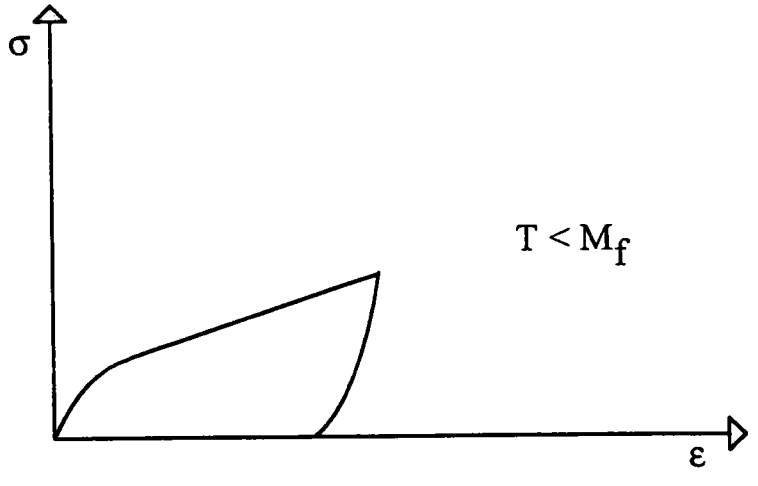


Fig. I.18: Représentation schématique dans l'espace contrainte-déformation.

Remarque :

Il arrive que, pour certains alliages, la réponse obtenue pour ce type d'essai soit comparable à celle obtenue en superélasticité pour $T>A_f$. On parle alors d'alliage *pseudoélastique* ou *ferroélastique* [C1.9].

1.2.5. Amortissement:

L'amortissement mécanique, aussi appelé frottement interne, est le résultat d'une transformation irréversible d'énergie mécanique en énergie thermique dissipée. Dans le cas des AMF, on distingue trois domaines dans lesquels le frottement intérieur prend des valeurs très différentes:

- domaine basse température : Le matériau est dans ce cas à l'état martensitique. On note un frottement intérieur élevé qui est associé au mouvement réversible des interfaces entre variantes de martensite.
- domaine haute température : Le matériau est en phase austénitique. Le frottement intérieur dans ce domaine est faible.
- domaine correspondant à la transformation martensitique: On retrouve dans ce domaine le maximum du frottement intérieur

L'utilisation des AMF pour résoudre des problèmes d'amortissement mécanique présente plusieurs avantages. Les AMF présentent à la fois un frottement intérieur élevé (comparable à celui de certains polymères) et une rigidité importante (comparable à celle des métaux).

1.3.Caractérisation des AMF:

Comme cela a été précisé précédemment, le comportement mécanique des AMF dépend fortement de la température à laquelle ils sont sollicités. La caractérisation de ces matériaux, en plus des tests classiques, doit alors être complétée par d'autres essais. Nous nous bornerons dans ce travail à une

description macroscopique du comportement. Les aspects microstructuraux ne seront pas abordés, seuls les essais de type macroscopiques sont donc décrits.

1.3.1. Essais mécaniques:

Les essais de traction sont utilisés de façon classique pour caractériser le comportement mécanique des matériaux. Dans le cas particulier des AMF, l'essai de traction peut en plus mettre en évidence le changement de phase puisque l'apparition de martensite peut être induite par une contrainte. Il est intéressant de compléter la machine de traction classique en lui adjoignant une enceinte thermique qui permettra de faire des essais à différentes températures. Si de plus la machine de traction peut travailler sous des modes différents, il sera possible de mettre en évidence expérimentalement les deux modes de formation de la martensite:

- essai à vitesse de déformation et température constante
  → superélasticité.
- essai à contrainte constante et température variable
  → effet mémoire.

Cependant, il a été mis en évidence récemment [C1.10] que l'essai de traction seul ne suffit pas à décrire complètement le comportement de ce type de matériau. En effet, le comportement des AMF présente des différences non négligeables selon qu'il est testé en traction ou en compression. Des essais de compressions doivent donc aussi être réalisés.

1.3.1.1. Détermination des contraintes seuils en superélasticité:

Il est nécessaire ici de définir comment nous allons déterminer les valeurs de contraintes seuils car il existe plusieurs manières de faire. Les principales sont décrites ci-dessous.

- Perte de linéarité: la contrainte seuil est alors définie à l'endroit ou la courbe change de pente.
- Intersection des tangentes: la contraintes seuil est le point d'intersection entre deux tangentes de la courbe considérée.
- Contrainte à 0,2% de déformation [C1.2]: à partir d'une déformation de 0,2%, on reporte une droite parallèle à la pente élastique de la courbe. On prolonge cette droite jusqu'à couper la courbe en un point qui définit la contrainte seuil. Ceci n'est valable que pour déterminer la contrainte seuil de début de transformation.

Ces différents modes d'obtention sont résumés en figure I.19, en prenant l'exemple de la contrainte seuil de début de transformation.

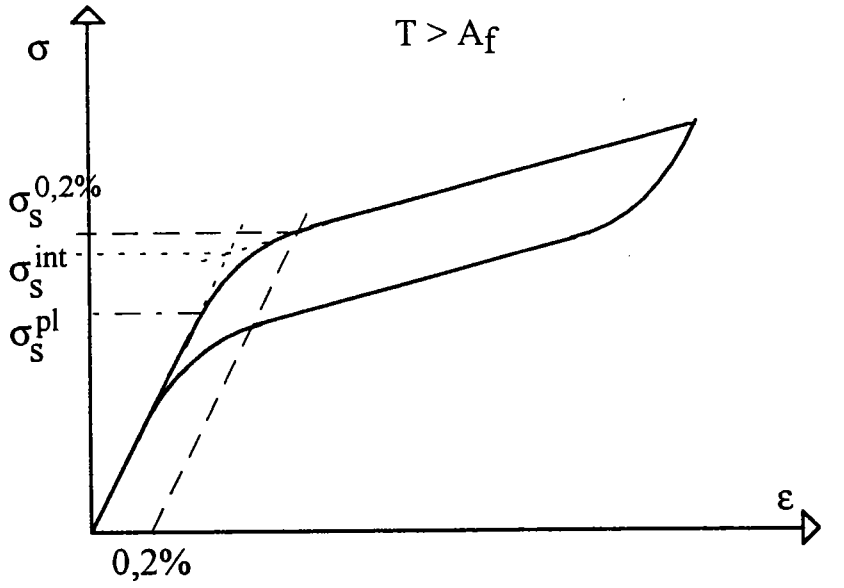


Fig I.19 : Représentation schématique des différentes façons de déterminer les contraintes seuils. Exemple de la contrainte seuil de début de transformation

Nous utiliserons dans la suite de cette étude la seconde solution, qui consiste à considérer le point d'intersection des différentes pentes.

1.3.2. Détermination des températures de transformation:

Afin de déterminer ces températures, on peut avoir recours à plusieurs techniques. Les principaux moyens de détermination de ces températures sont évoqués ci-dessous.

1.3.2.1. Mesure de résistivité:

Dans certains cas d'alliages métalliques, la variation de résistivité électrique d'un échantillon durant la transformation est une des grandeurs physiques mesurable reflétant le changement de phase de la structure. Le but est alors de déterminer les températures de transformation de l'alliage par mesure de la variation de résistance électrique.

1.3.2.2. Calorimétrie différentielle à balayage:

La calorimétrie différentielle à balayage (DSC) consiste à mesurer la quantité de chaleur dégagée lors d'une réaction exothermique ou absorbée lors d'une transformation inverse. Lors du refroidissement ou du chauffage de l'échantillon à tester, la quantité de chaleur dissipée ou absorbée est comparée à celle d'un échantillon ne présentant pas de transformation. Les courbes ainsi obtenues permettent de déterminer directement les températures de transformation (voir fig.. I.20).

C'est ce moyen que nous utiliserons pour déterminer les températures de transformation quand cela sera possible, le laboratoire étant équipé d'un calorimètre.

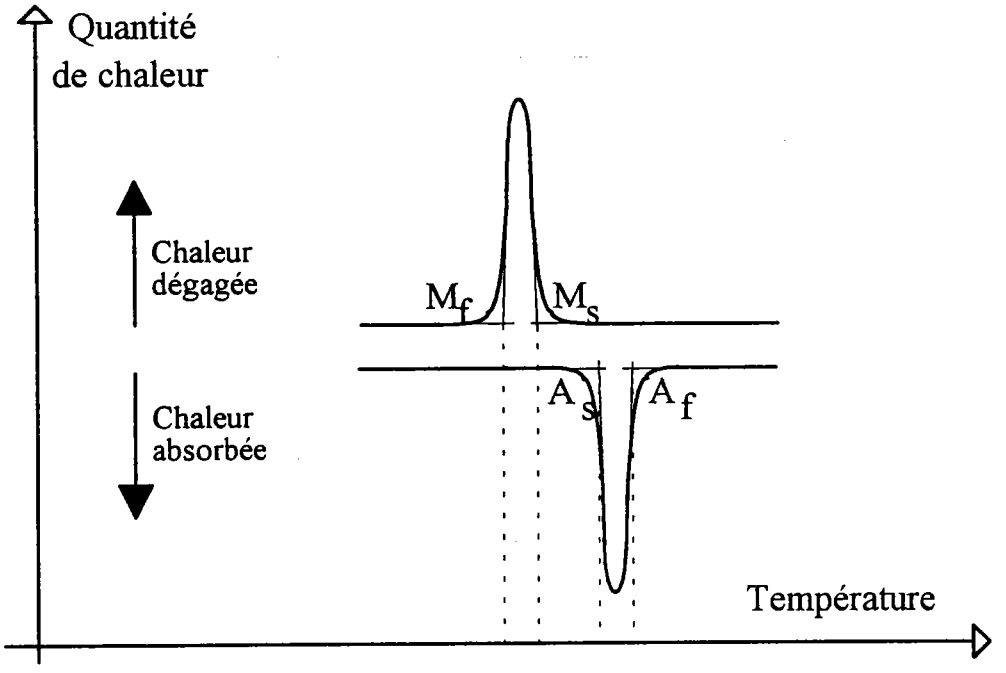


Fig. I.20: Représentation schématique d'une courbe de calorimétrie.

1.3.2.3. Essais mécaniques:

Il est de plus possible de déterminer ces températures en utilisant les résultats obtenus à partir des essais mécaniques. En effet, il a été montré que, dans l'espace contrainte-température, les contraintes critiques de transformation sont reliées aux températures de transformation par une loi linéaire.

La détermination complète est donc possible en effectuant des cycles de refroidissement à contrainte constante pour différentes valeurs de contrainte appliquée.

En outre, une détermination partielle (M_s et A_f) ou totale de ces températures est envisageable en effectuant des essais en superélasticité à différentes températures pour les mêmes raisons. La détermination totale de ces données implique bien sûr que l'on puisse réaliser une transformation complète de l'échantillon testé sous contrainte.

1.4.Les différentes classes d'alliages à mémoire de forme:

Un certain nombre de matériaux présente les caractéristiques similaires à celles évoquées ci-dessus. Nous ferons abstraction dans cette étude des polymères et des céramiques à mémoire pour ne nous intéresser qu'au cas des alliages métalliques.

Dans ce domaine, nombre d'alliages présentent un effet mémoire. Le tableau non exhaustif donné en figure I.21 [C1.11] présente un certain nombre d'entre eux. Il est à noter que seul les constituants principaux y sont présentés.

Dans la pratique, seul un très petit nombre de ces alliages est utilisé industriellement. Les principaux sont :

- Le Nickel-Titane (Ni-Ti) et ses dérivés.
- Le Cuivre-Zinc-Aluminium (Cu-Zn-Al).
- Le Cuivre-Aluminium-Nickel (Cu-Al-Ni).

Un résumé des caractéristiques des ces alliages est donné en figure I.22 [C1.12].

Les autres alliages restent pour l'instant à l'étude ou demeureront à tout jamais des curiosités de laboratoire (alliages à base de métaux "précieux").

On peut cependant ajouter que les recherches concernant l'élaboration de nouveau alliages continue. La tendance est actuellement orientée, d'une part, vers le développement d'alliages pouvant être utilisés à hautes températures (aux alentours de 200-600°C). On peut citer à cet effet le Ni-Ti-Hf [C1.13] et le Ni-Al [C1.14] dont les performances sont pour l'instant assez peu connues. D'autre part on tend à une amélioration des alliages de type cuivreux avec par exemple le Cu-Al-Be [C1.15].

Alliages à base de fer	
	Fe-Pt
	Fe-Mn-Si
Alliages à base de cuivre	
	Cu-Zn
	Cu-Al-Ni
	Cu-Zn-Al
	Cu-Zn-Sn
	Cu-Zn-Si
	Cu-Zn-Ga
	Cu-Al-Be
Alliages à base de nickel	
	Ni-Ti
	Ni-Al
Alliages à base de titane	
	Ti-Nb
	Ti-Pd-Ni
Alliages à base de métaux "précieux"	
	Au-Cd
	Au-Cu-Zn
	Ag-Cd
Divers	
	In-Ti
	U-Nb

Fig. I.21: Quelques alliages présentant un effet mémoire de forme [C1.11]

	Ni-Ti	Cu-Al-Ni	Cu-Zn-Al
Densité (Kg/m^3)	6500	7200	7800
Résistivité (10^{-6} W m)	A 1,0 M 0,8	0,1 0,14	0,07 0,12
Chaleur spécifique (J/Kg°C)	470-620	400-480	390
Chaleur de Transf. (J/Kg)	25000	8000	8000
Module d'Young (GPa)	70-98	80-100	70-100
Limite élastique (MPa)	M 200-800 A 150-300	150-300	150-300
Températures de transf. (°C)	-200 / +100	-200 / +170	-200 / +120
Hystérésis (°C)	20-30	20-30	10-20
Temp. max. pendant 1h. (°C)	400	300	160
Amortissement (SDC %)	15	10	30
Déformation superélastique (%)	$10^{(*)}$ 4	$10^{(*)}$ 2	$10^{(*)}$ 2

$^{(*)}$ monocristal ou forte texturation.

Fig. I.22: Caractéristiques des principaux AMF utilisés dans l'industrie (A=Austénite, M=Martensite) [C1.12].

1.5.Traitements thermiques:

En général, il est nécessaire d'effectuer au préalable un traitement thermique pour obtenir un effet mémoire de bonne qualité. Dans les alliages à base de cuivre, un tel traitement est indispensable car l'austénite est une phase à l'état métastable dans le domaine de température d'existence de la transformation martensitique. En effet, à l'équilibre, ces alliages possèdent une structure biphasée $\alpha+\beta$. Seule l'austénite β se transforme en martensite, la phase α est une phase

ductile. Cette ductilité peut être mise à profit dans les processus de formage à froid de ces matériaux [C1.11].

Dans le cas des alliages à base cuivre, on peut décomposer les traitements classiques en plusieurs étapes [C1.16]:

- la bétatisation : c'est un maintien à haute température qui a pour but d'obtenir une homogénéisation de la phase β (phase haute température). Le choix de la température de maintien est intimement lié au diagramme de phase de l'alliage traité. Le temps de maintien dépend de la taille de l'échantillon.
- la trempe : la trempe est destinée à retenir l'austénite dans un état métastable. Elle doit toujours s'effectuer à une température supérieure à A_f.
- le revenu : Il s'agit d'un maintien de l'alliage à une température nettement inférieure à la température de bétatisation pendant un certain temps. Il permet principalement d'éliminer la sursaturation de lacunes causée par la trempe. Il doit impérativement s'effectuer dans la phase austénitique.

1.6.Applications industrielles des AMF:

L'objectif de ce travail étant de fournir des codes de calcul de structures pour aider à dimensionner des applications industrielles, il nous a paru intéressant de passer en revue les différents domaines d'application. Dans ce paragraphe, nous reprenons la classification utilisée dans [C1.11]. Les applications y sont divisées en quatre grands thèmes qui sont décrits ci-dessous.

1.6.1. Retour libre (free recovery):

Dans les applications qui appartiennent à ce groupe, le seul but est de produire un mouvement. On peut par exemple imaginer un fil refroidi jusqu'à un état

martensitique. Une fois dans cet état, on déforme le fil qui par seul réchauffement retrouve sa forme initiale.

On peut citer dans ce domaine, l'hypothétique antenne spatiale [C1.17] dont beaucoup ont entendu parler sans jamais la voir fonctionner. Plus sérieusement, un certain nombre d'applications médicales fonctionnent sur ce principe. Notamment, un certain nombre d'instruments ont été développés en chirurgie endoscopique. Ces instruments devant avoir une forme spécifique pour l'intervention. On leur donne ainsi une forme à haute température, ils sont ensuite refroidis et introduit dans le corps humain. Il retrouve alors leur forme initiale et sont prêts pour l'opération [C1.18].

1.6.2. Production d'efforts (constrained recovery):

L'effet mémoire est ici utilisé pour produire une contrainte mécanique. Cela est possible en empêchant l'élément en AMF, préalablement refroidi et déformé en martensite, de revenir à sa forme initiale. L'exemple type dans ce domaine est donné par les bagues de couplage de tubes. Développées par la firme Raychem, elles constituent la première application industrielle des AMF. C'est aussi une des très rares applications mécaniques, tous domaines confondus, qui possède une fiabilité proche de 100%.

Outre les bagues et autres anneaux, on peut intégrer à cette partie tous les systèmes de connexion tels, par exemple, les connecteurs électriques (du type connecteurs à insertion nulle de la société Souriau). Des applications beaucoup plus marginales pour l'instant existent aussi dans le domaine biomédical. Particulièrement utilisées dans les cas d'ostéosynthèse ou dans la correction des malformations osseuses, elles consistent pour la plupart en des agrafes ou des broches destinées à réunir les fragments osseux. Si des expériences animales ont toujours lieu dans ce secteur d'activité, certaines nations n'ont pas hésité à les utiliser sur l'homme, avec beaucoup de succès semble-t-il.

1.6.3. Production de travail:

Dans ce cas le matériau doit produire un déplacement sous l'action d'une contrainte. On peut prendre l'exemple d'un ressort qui déplace une charge, le déplacement étant induit par un changement de température.
Ce domaine est l'un des plus vastes champs d'application des AMF en terme de produits. Sont concernés, tous les capteurs-actionneurs qu'ils soient activés électriquement ou thermiquement. Les organes utilisés sont très souvent des ressorts hélicoïdaux et plus rarement des lames en flexion. Ces éléments travaillent dans la plupart des cas avec des contre-ressorts et quelquefois sous des charges fixes.

1.6.4. Superélasticité et pseudoélasticité:

C'est ici la propriété de grandes déformations possibles sous des conditions isothermes qui est utilisée.
On trouve dans ce secteur les applications grand public des AMF. Les montures de lunettes superélastiques se rangent dans cette catégorie, ou encore les armatures de soutiens-gorge développées au Japon. Une fois encore, on trouve des applications dans le domaine médical. Les arches dentaires sont généralement rangées dans les applications en superélasticité même si cela est quelque peu surprenant. Cette propriété des AMF est encore utilisée dans le cadre de l'instrumentation médicale que ce soit pour la chirurgie interne (cathéters)[C1.19] ou externe (écarteurs).

1.7.Conclusion:

La plupart des éléments en AMF utilisés dans les applications industrielles sont de géométrie simple. Il s'agit dans la majorité des cas de bagues, de ressorts ou de lames. Malgré cela, la conception et la mise au point de tels organes pose encore

beaucoup de problèmes du fait du comportement pour le moins complexe du matériau. Pour des problèmes de durée de vie en fatigue, ces éléments doivent être conçus pour fonctionner sous des contraintes faibles et des déformations de transformation faibles. Si l'un des points de la structure est sollicité au-delà des limites admissibles de contrainte ou de déformation, la durée de vie de l'organe mécanique concerné s'en trouvera considérablement diminuée. Toute la difficulté réside dans l'établissement de relations entre la réponse macroscopique, du type force-déplacement de la structure, et la réponse locale, de type contrainte-déformation aux différents points de la structure considérée. Le manque de modèles en calculs de structures conduit généralement à surdimensionner les éléments ou à pratiquer systématiquement des essais sur tous les éléments fabriqués. De la première solution découle une perte d'efficacité des systèmes (inertie thermique, ...). La seconde quant à elle se révèle très coûteuse en temps et impose des immobilisations de stock importantes. Le point de convergence de ces deux solutions est le surcoût qu'elles entraînent sur le produit. Les solutions intermédiaires actuellement utilisées consistent en l'emploi de banques de données, réalisées à partir des essais déjà réalisés, ou encore à établir des relations empiriques.

Ce travail propose une troisième voie fondée sur l'utilisation des méthodes de calcul établies en mécanique des solides et en calcul de structure. Une telle méthode permet de s'affranchir des inconvénients évoqués ci-dessus. Pour satisfaire les exigences industrielles, ce modèle doit de plus être rapide et d'un usage simple.

Références bibliographiques:

[C1.1] DELAEY L., KRISHNAN R.V., TAS H., VARLIMONT H., "Thermoelasticity, pseudoelasticity, and the memory effect associated with martensitic transformations", Journal of Material Sciences, Vol. 9, 1974.

[C1.2] Norme française NF A51-080 pour les alliages à mémoire de forme, Vocabulaire et mesures, Avril 91, ISSN 0335-3931.

[C1.3] PATEL J. R., COHEN M., " Criterion for the action of applied stress in the martensitic transformation", Actal Metall., 1953, Vol. 1, p.531.

[C1.4] PATOOR E., EBERHARDT A., BERVEILLER M., "Potentiel pseudoélastique et plasticité de transformation martensitique dans les mono et polycristaux métalliques", Acta metall, vol. 35, No. 11

[C1.5] PATOOR E., BERVEILLER M., "Les alliages à mémoire de forme", Ed. Hermès, 1990.

[C1.6] GUENIN G., "Les traitements thermomécaniques d'éducation et l'effet mémoire double sens.", Cours européen COMET II, La Ciotat, 1991.

[C1.7] CONTARDO L., "Etude des traitements d'éducation, de la stabilité et de l'origine de l'effet mémoire de forme double sens dans un alliage CuZnAl", Thèse de Docteur Ingénieur, INSA de Lyon, 1988.

[C1.8] STALMANS J., VAN HUMBEECK J., DELAEY L. "Thermo-mechanical cycling, two way memory and concomittant effects in Cu-Zn-Al alloys", Acta Metal, Vol 40, No 3.

[C1.9] LIEBERMAN D.S., SCHMERLING M.A., KARZ R.S., "Ferro-elastic "memory" and mechanical properties in Gold-Cadnium", publié dans "Shape memory effects in alloys", New York, 1975.

[C1.10] VACHER P., "Étude du comportement pseudoélastique d'alliages à mémoire de forme Cu-Zn-Al polycristallins", Thèse. de doctorat N°215, Université de Franche-Comté, Besançon, 1991.

[C1.11] DUERIG T.W., MELTON K.N., STÖCKEL D., WAYMAN C.M., "Engineering aspect of shape memory alloys", 1991

[C1.12] PATOOR E., BERVEILLER M., "Technologie des alliages à mémoire de forme", Ed. Hermès, 1994, p.229.

[C1.13] WU K.H., TSENG H.K., PU Z.J., "Shape memory effect of the innovative Ni-Ti-Hf high temperature shape memory alloy", Actes du congrès SMST '94, Californie, 1994, à paraitre.

[C1.14] YANG J.H., WAYMAN C.M.,"Assesment of Ni-Al as high temperature shape memory alloy", Actes du congrès SMST '94, Californie, 1994, à paraitre.

[C1.15] BELKAHLA S., "Élaboration et caractérisation de nouveaux alliages à mémoire de forme basse température type Cu Al Be", Thèse de Docteur Ingénieur N°90, INSA de Lyon, 1990.

[C1.16] L.BUFFARD, P. CHARBONNIER, C ROUCAU et J. JAUD, "Characterisation of the state of a CuZnAl industrial shape memory alloy", European Symposium of martensitic transformation and shape memory properties, Septembre 1991, AUSSOIS, FRANCE.

[C1.17] McDONALD SCHETKY L., "Des alliages qui conservent la mémoire des formes", Pour la science, No 27, 1980, p.96.

[C1.18] DUERIG T.W., MELTON K.N., STÖCKEL D., WAYMAN C.M., "Engineering aspect of shape memory alloys", 1991, p.477.

[C1.19] MORAN S., "Flexible instruments in minimal access surgery", Actes du congrès SMST '94, à paraitre.

CHAPITRE 2

MODÈLES DE COMPORTEMENT

Table des matières:

2.1. Introduction: 35
2.2. R-Modèle: 36
2.2.1. Conclusion: 39
2.3. Modèle d'élastohystérésis: 39
2.3.1. Etude du cisaillement pur: 40
2.3.1.1. Contribution réversible: 40
2.3.1.2. Contribution d'hystérésis pure: 41
2.3.2. Extension au cas non isotherme: 42
2.3.3. Mémoire discrète: 42
2.3.4. Extension au cas tridimensionnel: 42
2.3.5. Conclusion: 43
2.4. Modélisation du comportement utilisée dans cette étude: 43
2.4.1. Critère tenant compte de la dissymétrie traction-compression: 44
2.4.1.1. Identification du critère: 46
2.4.1.2. Détermination de la Loi de Comportement associée: 50
2.4.2. Cas de la décharge: 53
2.4.2.1. Identification du critère: 53
2.4.2.2. Détermination du paramètre d'écrouissage: 57
2.4.2.3. Détermination de la Loi de Comportement associée: 58
2.4.3. Résumé: 59
2.4.4. Mise en oeuvre de la loi de comportement en calcul de structures: 61
Conclusion: 65
Références bibliographiques: 66

2.1.Introduction:

La détermination de loi de comportement est une étape essentielle dans la modélisation de la réponse d'un matériau à une sollicitation donnée. L'identification des paramètres du matériau permettant cette modélisation est généralement effectuée à partir d'essais particuliers pour lesquels l'état de contrainte dans le matériau est uniforme (traction, compression, cisaillement pur). Ceci permet d'éliminer les effets de structures (forme et dimensions de l'éprouvette). La modélisation du comportement des AMF a focalisé l'attention de nombreux chercheurs depuis le début des années 80.

On distingue deux grandes classes d'approche. La première, et la plus répandue, est l'approche phénoménologique [C2.1][C2.2][C2.3]. La seconde a trait à la micromécanique avec des modèles micro-macro [C2.4][C2.5]. Si cette dernière a un caractère plus physique que la précédente, elle est pour l'heure difficile à mettre en oeuvre dans le cadre de codes de calculs de structures. C'est pourquoi, dans la suite de cette étude, seuls des modèles analytiques seront décrits.

Nous avons choisi de débuter ce chapitre par la présentation de deux modèles phénoménologiques performants. Le premier découle de la thermodynamique des processus irréversibles. Quant au second, il constitue une approche originale du comportement de ces matériaux sous la forme d'un principe de superposition.

Cependant, la non prise en compte dans ces modèles de certains phénomènes observés expérimentalement (dissymétrie en traction-compression) nous a conduit à définir un autre type de modèle de comportement. L'approche utilisée est du type plasticité associée découlant de l'utilisation d'un critère de transformation non symétrique.

2.2.R-Modèle:

Ce modèle, basé sur la thermodynamique des processus irréversibles, a été développé par Raniecki, Lexcellent et al. [C2.6]. C'est un modèle phénoménologique macroscopique. L'avancement de la transformation est gouverné par des forces thermodynamiques généralisées. Ce modèle est établi pour décrire le comportement superélastique des AMF.

L'énergie spécifique d'un système biphasé est écrite sous la forme suivante :

$$\Phi = (1-z)\,\Phi^{(1)} + z\,\Phi^{(2)} + \Delta\Phi \qquad (2.1)$$

Dans laquelle

z est la fraction massique de martensite formée.

$\Phi(\alpha)$ est l'énergie libre spécifique de la phase α, avec :

$\alpha=1 \rightarrow$ phase austénitique.

$\alpha=2 \rightarrow$ phase martensitique.

Le terme $\Delta\Phi$ est l'énergie de configuration qui représente l'hystérésis.

Notons que cette écriture est commune à différents modèles dont celui développé par I. Müller [C2.7]. La différence entre ces différents modèles réside dans l'expression du terme d'énergie de configuration $\Delta\Phi$.

Pour Müller, ce terme s'écrit :

$$\Delta\Phi = A\,z\,(1-z) \qquad \text{avec } A = \text{cste} \qquad (2.2)$$

Alors que dans ce modèle le terme d'énergie de configuration est choisis de la forme :

$$\Delta\Phi = \Phi^{it}(T)\,z\,(1-z) \qquad (2.3)$$

avec

$$\Phi^{it}(T) = \bar{u}_0 - T\,\bar{s}_0 \tag{2.4}$$

où $\bar{u}_0$ désigne l'énergie interne et $\bar{s}_0$ l'entropie de cohésion entre les deux phases. Ces différents modèles conduisent tous à:

$$\Delta\Phi\begin{Bmatrix} z=0 \\ z=1 \end{Bmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

L'énergie libre de chaque phase s'écrit :

$$\Phi(\alpha) = u_0^*(\alpha) - T.s_0^*(\alpha) + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} - \underset{\sim}{\varepsilon}_f^{(\alpha)})\underline{\underline{L}}\,(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} - \underset{\sim}{\varepsilon}_f^{(\alpha)}) - (T-T_0)\;\underset{\sim}{\alpha}_0\,\underline{\underline{L}}\,(\underset{\sim}{\varepsilon}^{(\alpha)} - \underset{\sim}{\varepsilon}_f^{(\alpha)})$$
$$+c_{v(}(T-T_0) - T\ln(T/T_0)) \tag{2.6}$$

avec les hypothèses suivantes:
Les deux phases ont la même masse volumique ρ, le même tenseur des constantes élastiques $\underline{\underline{L}}$, le même tenseur des coefficients de dilatation thermique $\underset{\sim}{\alpha}_0$, et la même chaleur spécifique à volume constant c_v.

et où:

$u_0^*(\alpha)$ l'énergie interne de la phase α à contrainte extérieure nulle pour une température de référence T_0.

$s_0^*(\alpha)$ l'entropie de la phase α dans les mêmes conditions.

En guise d'équilibre thermodynamique, la notion d'équilibre contraint de Kestin et Rice [C2.8] est adoptée. De plus, il est supposé que les contraintes agissant dans les deux phases sont identiques et égales à la contrainte extérieure appliquée (hypothèses également adoptées par Müller et Xu [C2.9]).

L'expression de l'énergie libre à l'état d'équilibre contraint devient alors :

$$\Phi^c(\underset{\sim}{\varepsilon},z,T) = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{\varepsilon}-\underset{\sim}{\varepsilon}^{pe}(z,\underset{\sim}{\kappa}))\underset{\sim}{L}(\underset{\sim}{\varepsilon}-\underset{\sim}{\varepsilon}^{pe}(z,\underset{\sim}{\kappa})) - (T-T_0)\ \underset{\sim}{\alpha_0}\ \underset{\sim}{L}\ (\underset{\sim}{\varepsilon}-\underset{\sim}{\varepsilon}^{pe}(z,\underset{\sim}{\kappa}))$$
$$+ c_v((T-T_0) - T\ln(T/T_0)) + \Phi^*(z,T) \qquad (2.7)$$

avec

$$\Phi^*(z,T) = u_0^{*(1)} - T.s_0^{*(1)} - z\,\pi\,{}^f_0(T) + \Delta\Phi \qquad (2.8)$$

où $\pi\,{}^f_0(T)$ représente la force motrice pour une transformation de phase induite par la température à contrainte nulle.

$\underset{\sim}{\varepsilon}^{pe}$ désigne le tenseur de déformation superélastique. Il est défini par:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^{pe} = z\,\underset{\sim}{\kappa} \qquad (2.9)$$

En considérant une transformation totalement isotrope, on peut écrire:

$$\underset{\sim}{\kappa} = \frac{\underset{\sim}{\bar{\varepsilon}}}{\varepsilon}\eta \qquad (2.10)$$

avec η, la déformation superélastique obtenue pour la transformation complète.

La donnée du potentiel Φ^c permet de définir les équations d'état qui régissent le comportement. L'entropie spécifique est obtenue par :

$$s(\underset{\sim}{\varepsilon},T,z) = -\frac{\partial\Phi^c}{\partial T} \qquad (2.11)$$

La force motrice de la transformation de phase est quant à elle obtenue par :

$$\pi^f(\underset{\sim}{\varepsilon},T,z) = -\frac{\partial\Phi^c}{\partial z} \qquad (2.12)$$

Il est nécessaire à ce stade d'introduire les équations cinétiques de changement de phase. Deux fonctions sont alors choisies :

$$\psi^{(1)} = \pi^f - k^{(1)}\,z \qquad (2.13)$$

$$\psi^{(2)} = -\pi^f + k^{(2)}\,z \qquad (2.14)$$

La transformation ne peut alors progresser ($dz>0$) que si $\psi^{(1)}$=constante ou régresser ($dz<0$) que si $\psi^{(2)}$=constante.

Les fonctions $k^{(1)}(z)$ et $k^{(2)}(z)$ sont choisies sous une forme exponentielle de façon à y inclure la relation empirique de Koistinen et Marburger qui décrit la cinétique de transformation dans les aciers [C2.10]. Leur forme est la suivante :

$$k^{(1)}(z) = -(A_1 + B_1 z)\ln(1-z) + C_1 z \qquad (2.15)$$

$$k^{(2)}(z) = (A_2 - B_2 (1-z))\ln(z) - C_2 z \qquad (2.16)$$

où A_α, B_α, et C_α sont des constantes positives. Ces paramètres, nécessaires à la mise en oeuvre du modèle, sont obtenus par ajustement des courbes expérimentales.

2.2.1. Conclusion:

Les principales limitations de ce modèle résident dans l'introduction à priori de la cinétique de transformation. Il est de plus nécessaire d'imposer une forme macroscopique pour la déformation de transformation dans laquelle intervient une variable délicate à identifier ($\underset{\sim}{\kappa}$) [C2.6]. La dissymétrie en traction-compression n'est pas prise en compte. Le modèle ne permet pas, dans l'état actuel, de décrire par exemple les essais de traction-torsion réalisés par les auteurs, cela les conduit à envisager l'introduction de variables supplémentaires [C2.11].

2.3. Modèle d'élastohystérésis:

Ce modèle phénoménologique, développé par FAVIER et al., décrit le comportement des alliages à mémoire sous la forme de la somme de deux contributions (voir fig. II.1). La première, dite réversible, est la contribution majeure au phénomène de transformation martensitique sous contrainte à partir de l'état austénitique. La seconde est dite d'hystérésis pure. C'est elle qui forme la contribution la plus importante dans le cas d'une déformation isotherme de la

martensite. Pour plus de simplicité, nous ne nous intéressons, dans un premier temps, à une sollicitation uniaxiale et isotherme de cisaillement.

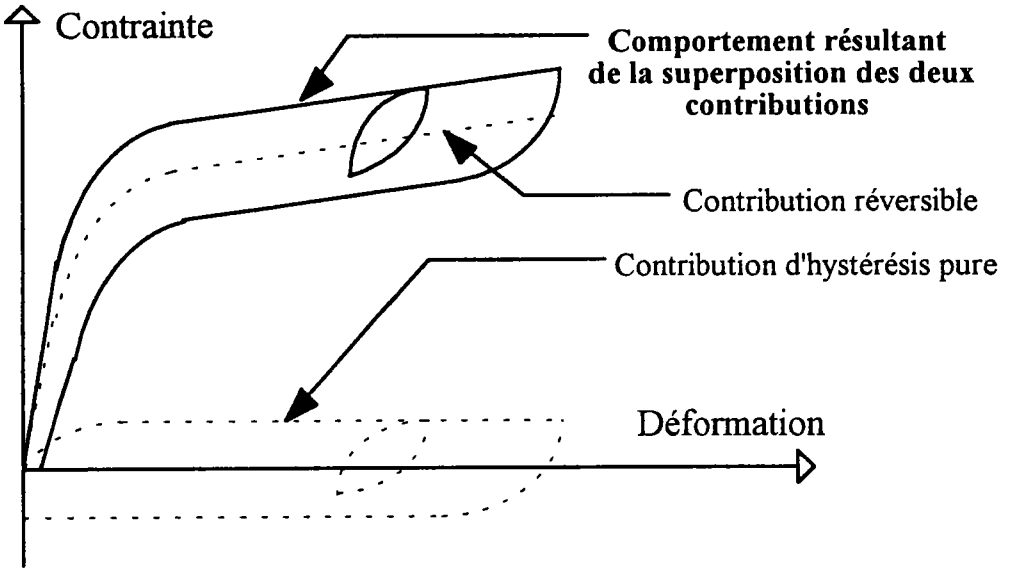


Fig II.1: Représentation schématique du comportement obtenu à l'aide du modèle d'élastohytérésis.

2.3.1. Etude du cisaillement pur:

Dans le cas du cisaillement pur, un incrément de contrainte totale $d\tau$ s'écrit sous la forme :

$$d\tau = d\tau_{rev} + d\tau_{hys} \tag{2.17}$$

avec:

$d\tau_{rev}$ la contribution réversible de la contrainte.

$d\tau_{hys}$ la contribution d'hystérésis pure.

2.3.1.1. Contribution réversible:

Pour un chargement isotherme, la contrainte réversible de cisaillement est uniquement fonction de la déformation de cisaillement. Une loi simple, qui respecte l'allure des courbes observées expérimentalement (voir fig. II.2), est alors choisie pour relier ces deux quantités. Sa forme différentielle dérive d'un potentiel élastique.

$$\tau_{rev} = S_{0rev} \tanh\left(\frac{\mu_{0rev}\,\gamma}{S_{0rev}}\right) + \mu_{\infty rev}\,\gamma \qquad (2.18)$$

dans laquelle

S_{0rev} représente une contrainte critique

μ_{0rev} représente la pente de la courbe à l'origine

$\mu_{\infty rev}$ représente la pente de la courbe à l'infini.

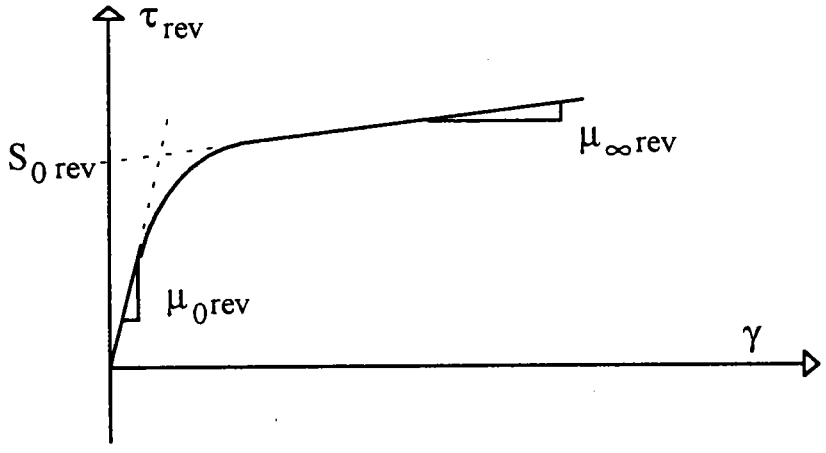


Fig. II.2: Représentation schématique de l'évolution de la contrainte de cisaillement réversible

2.3.1.2. Contribution d'hystérésis pure:

La contribution d'hystérésis pure dépend de l'état actuel et de l'histoire thermomécanique du matériau. Cette contribution peut être représentée, dans le cas monodimensionnel, par la combinaison en modèles séries ou parallèles de ressorts et de patins [C2.12].

La contrainte d'hystérésis pure peut être exprimée, pour une courbe de première charge, de façon

$$\tau_{hys} = S_{0hys} \tanh\left(\frac{\mu_{0hys}\,\gamma}{S_{0hys}}\right) \qquad (2.19)$$

avec

S_{0hys} une limite de plasticité

μ_{0hys} la pente de la courbe à l'origine

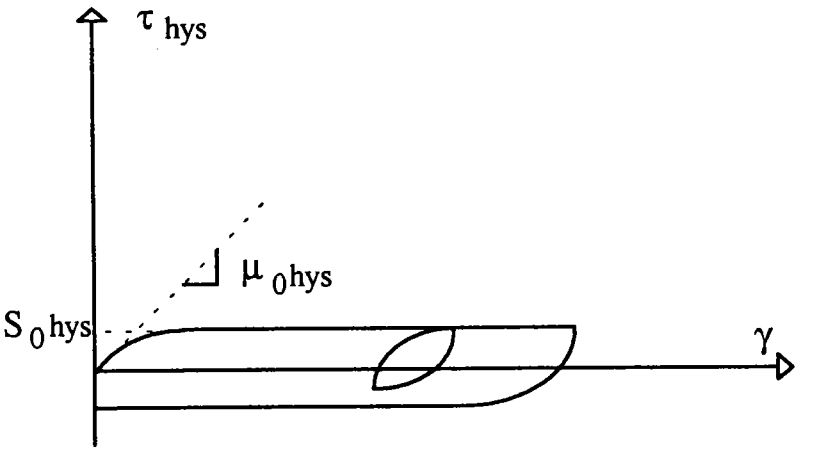


Fig. II.3: Représentation schématique de l'évolution de la contrainte de cisaillement d'hystérésis pure.

2.3.2. Extension au cas non isotherme:

Dans le cas de la contribution réversible, le passage s'effectue en définissant le potentiel élastique en fonction de la déformation et de la température. Par contre, dans le cas de la contribution d'hystérésis pure, cette extension ne peut pas être effectuée. En effet, il n'existe pas de modèle de patin dont les propriétés dépendent de la température. Une méthode de projection est donc utilisée dans ce cas [C2.12].

2.3.3. Mémoire discrète:

La prise en compte des décharges ou recharges partielles est effectuée dans ce modèle au travers du concept de mémoire discrète. Dans ce cas, on considère que le point de passage de la charge à la décharge (ou inversement) constitue un événement mémorable pour le matériau.

2.3.4. Extension au cas tridimensionnel:

Dans le cas du modèle généralisé au cas tridimensionnel, un incrément de contrainte s'écrit:

$$d\sigma = d\sigma_{rev} + d\sigma_{hys} \tag{2.20}$$

La contribution réversible est représentée par une contrainte hyperélastique.
La généralisation de la contribution d'hystérésis pure est réalisée en supposant que cette contribution est entièrement déviatoire et que le matériau est isotrope. Un critère de Von Mises est utilisé comme seuil de plasticité dans le cas de la superélasticité. Pour un matériau complètement martensitique, le critère de Tresca semble plus approprié.[C2.13][C2.14].

2.3.5. Conclusion:

Ce modèle décrit le comportement superélastique du matériau. Il s'applique également au comportement en phase martensitique. Cependant, le caractère symétrique du critère de transformation en superélasticité ne permet pas de prendre en compte la différence de comportement entre la traction et la compression. Or ce point est important en calcul de structure pour décrire par exemple la flexion.

2.4. Modélisation du comportement utilisée dans cette étude:

Dans cette section, nous présentons le modèle de comportement utilisé dans cette étude. Ce modèle est directement dérivé des travaux précédemment développés au laboratoire [C2.15], [C2.16]. Pour décrire la décharge, nous introduisons le concept de la "pente d'instabilité" défini par Müller [C2.7]. Les trajets de boucles internes sont modélisés en utilisant la notion de "points de retour" [C2.17], cette notion peut être rapprochée de celle de "mémoire discrète" utilisée par Favier [C2.12].

Avant d'aller plus avant, il est nécessaire de définir les hypothèses de base du modèle. Les deux phases, Austénite et Martensite, sont supposées posséder les mêmes constantes élastiques et les mêmes coefficients de dilatation. En outre, on considère que la température est homogène dans le matériau et égale à la

température de l'essai. L'influence de la chaleur latente de transformation [C2.18] est négligée. De plus, on suppose que la déformation plastique classique est négligeable. Enfin, le modèle ne prend pas en compte l'évolution du matériau au cours du temps, cette étude considère le domaine où le comportement des AMF est reproductible.

2.4.1. Critère tenant compte de la dissymétrie traction-compression:

Pour obtenir une description analytique du comportement tridimensionnel des Alliages à Mémoire de Forme, nous choisissons de définir un critère macroscopique de transformation. On obtient ainsi une fonction de charge analogue à celle utilisée pour décrire la plasticité des métaux. Cette fonction dépend de la contrainte σ, et de variables internes notées V_k. Pour tenir compte du comportement particulier des AMF, cette fonction doit de plus dépendre de la température, T:

$$F(\sigma, V_k, T) = 0 \tag{2.21}$$

En admettant que la règle de normalité reste valable en plasticité de transformation [C2.15], il vient:

$$dE = \frac{\partial F}{\partial \Sigma} d\lambda \tag{2.22}$$

où $d\lambda$ est analogue au multiplicateur plastique. Cette approche permet de définir la loi de comportement analytique associée à une fonction critère. Une telle fonction se définit à partir d'hypothèses et de constatations phénoménologiques sur le comportement. On supposera, tout d'abord, comme en plasticité [C2.19] que le matériau est isotrope. Le tenseur des contraintes peut donc être remplacé par ses invariants I_1, I_2, I_3 dans le critère (2.21). La transformation martensitique dans les AMF s'accompagnant d'une très faible variation volumique, une étude micromécanique [C2.16] a montré que celle-ci joue un rôle négligeable dans le

comportement, seule la partie déviatorique intervient. On exprimera donc le critère sous la forme d'une fonction des second et troisième invariants du déviateur des contraintes.

Par analogie avec la description du comportement plastique, on choisit comme variable interne la déformation de transformation équivalente ε^{pt}, qui est une quantité plus facile à identifier expérimentalement que la fraction volumique de martensite.

$$F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) = 0 \tag{2.23}$$

De récents travaux [C2.20][C2.21][C2.22] ont montré qu'il existe une dissymétrie entre le comportement des AMF en traction et en compression. La description du comportement à partir d'un critère symétrique de type Von Mises, par exemple, n'est donc pas suffisante. Une approche micromécanique a permis d'établir un critère phénoménologique à écrouissage isotrope tenant compte de cette dissymétrie (fig. II.4)[C2.16].

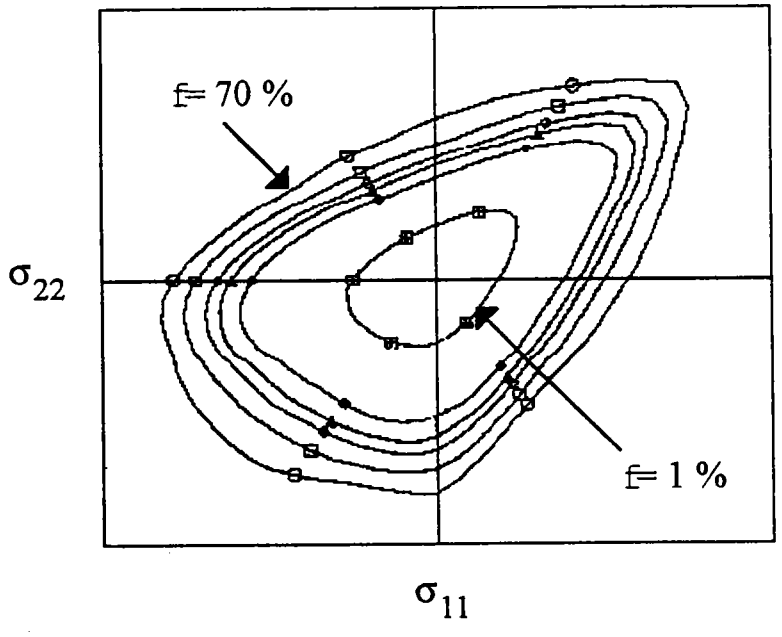


Fig. II.4: Surfaces de transformation pour différentes valeurs de fraction totale de martensite, notée f. D'après [C2.16]

Pour ce faire, la contrainte σ est représentée par J_2 et J_3, respectivement le second et le troisième invariant du déviateur du tenseur des contraintes.

$$F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) = J_2\left(1+\frac{\bar{b}\,J_3}{J_2^{3/2}}\right) - K^2(\varepsilon^{pt},T) = 0 \qquad (2.24)$$

Il est à noter que si le coefficient b est nul, on retrouve le critère de type Von Mises. Après identification de ce critère, nous déterminerons sa loi de comportement associée.

2.4.1.1. Identification du critère:

Il est nécessaire d'effectuer deux essais mécaniques afin de déterminer les différents paramètres. On effectue donc un essai de compression ainsi qu'un essai de traction. Le comportement obtenu lors de ces essais peut être représenté à l'aide d'une approximation parabolique.

Pour la traction, on a :

$$\sigma_t = \sigma_0 + K_0.(\varepsilon^{pt})^{n0} \qquad (2.25)$$

la contrainte σ_0 est une fonction de la température donnée par (voir fig. II.5)

$$\sigma_0(T) = \mathscr{B}_0.(T\text{-}M_S) \qquad (2.26)$$

Et dans le cas de la compression, on écrit:

$$\sigma_c = \sigma_1 + K_1.(\varepsilon^{pt})^{n1} \qquad (2.27)$$

avec

$$\sigma_1(T) = \mathscr{B}_1.(T\text{-}M_S) \qquad (2.28)$$

où

K_0, K_1, n_0, et n_1 sont des coefficients déterminés par identification aux courbes de traction et de compression.

$\mathcal{B}_0$ est le coefficient de proportionnalité entre contrainte et température dans le cas de la traction et $\mathcal{B}_1$, ce même coefficient pour la compression (voir fig. II.5)

Ces coefficients sont des constantes qui dépendent du matériau utilisé.

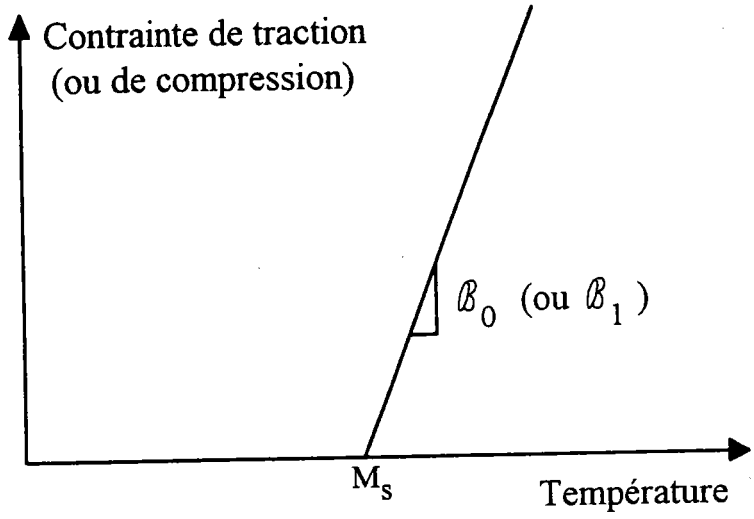


Fig. II.5 : Représentation schématique dans l'espace contrainte-température.

Un exemple illustrant ce type d'approximation est donné ci-dessous à partir de résultats expérimentaux obtenus par VACHER P. [C2.23] sur un alliage de Cu Zn Al testé en traction et en compression. Les paramètres nécessaires sont présentés dans le tableau suivant(fig. II.6). La figure II.7 montre la comparaison entre les courbes expérimentales, auxquelles ont été enlevées la partie élastique, et les résultats obtenus par lissage à l'aide d'une fonction parabolique.

	Traction		Compression	
$n_0=n_1$	σ_0 (MPa)	K_0 (MPa)	σ_1 (MPa)	K_1 (MPa)
0,33	28	76	44	90

Fig. II.6: Paramètres identifiés sur les courbes de traction et de compression.

A l'exception du tout premier stade de la transformation, les résultats obtenus sont corrects (voir fig. 2.7). Une limitation de cette approche est cependant à souligner: la loi utilisée ne permet pas de prendre en compte le durcissement de la courbe dû à l'apparition de la martensite élastique. Cependant ce cas a très peu d'application dans la réalité car on se situe dans un domaine de contraintes et de déformations élevées.

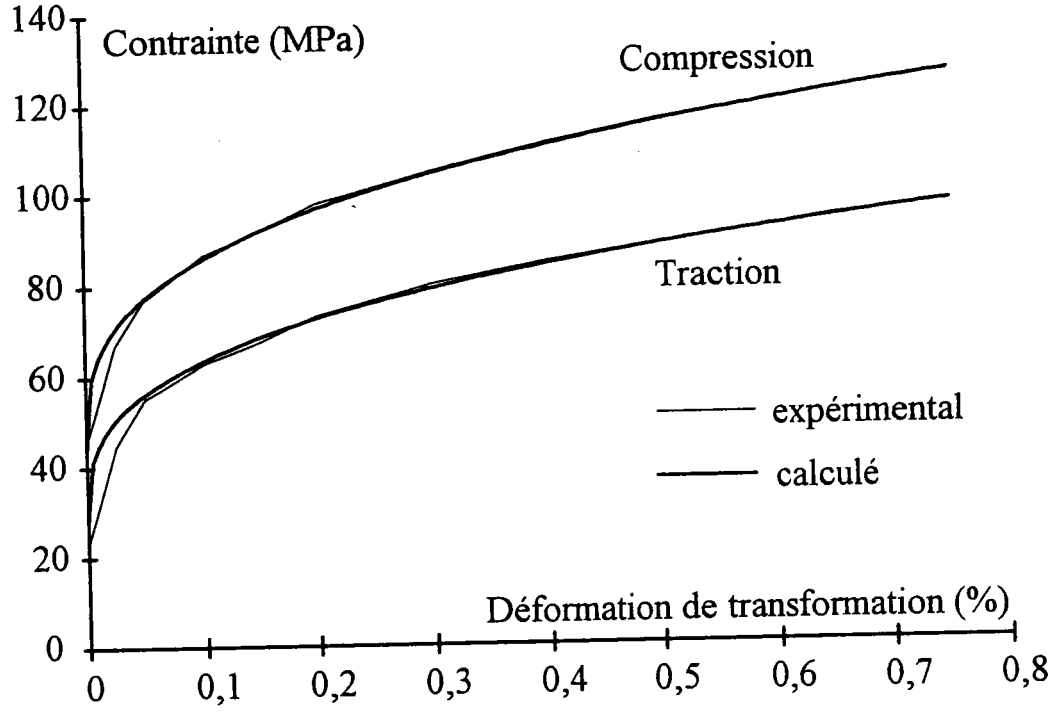


Fig. II.7: Approximation de la loi de comportement par la loi puissance. Comparaison avec des résultats expérimentaux réalisés par VACHER.

Nous allons identifier les paramètres b et K en fonction des constantes énumérées précédemment. Dans le cas de la traction ou de la compression, le tenseur des contraintes et son déviateur sont de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \sigma \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \qquad (2.29)$$

D'où on obtient J_2, et J_3, les invariants du déviateur des contraintes :

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}\ s_{ij} = \frac{1}{3}\sigma^2 \qquad \text{et} \qquad J_3 = \text{dét}(s) = \frac{2}{27}\sigma^3 \tag{2.30}$$

On doit alors vérifier l'équation (2.24) pour la traction, ainsi que pour la compression. On aboutit donc à un système de deux équations à deux inconnues. Les inconnues à déterminer sont le coefficient b et la fonction K:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\sigma_t{}^2\left(1+\frac{b\left(\frac{2}{27}\sigma_t{}^3\right)}{\left(\frac{1}{3}\sigma_t{}^2\right)^{3/2}}\right) - K^2(\varepsilon^{pt},T) = 0 \\ \frac{1}{3}\sigma_c{}^2\left(1+\frac{b\left(\frac{2}{27}\sigma_c{}^3\right)}{\left(\frac{1}{3}\sigma_c{}^2\right)^{3/2}}\right) - K^2(\varepsilon^{pt},T) = 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

On aboutit finalement à:

$$b = \frac{\sqrt{27}}{2}\,\frac{\sigma_c{}^2 - \sigma_t{}^2}{\sigma_c{}^2 + \sigma_t{}^2} \tag{2.32}$$

Le coefficient b étant choisi indépendant de ε^{pt} et T, on peut considérer $\begin{cases}\sigma_t = \sigma_0 \\ \sigma_c = \sigma_1\end{cases}$

Soit :

$$b = \frac{\sqrt{27}}{2}\,\frac{\sigma_1{}^2 - \sigma_0{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_0{}^2} \tag{2.33}$$

En identifiant $K(\varepsilon^{pt},T)$ pour un essai de traction uniaxiale, il vient:

$$K(\varepsilon^{pt},T) = \frac{\mathscr{B}_0.(T\text{-}M_S) + K_0.(\varepsilon^{pt})^{n0}}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{2\,b}{\sqrt{27}}} \tag{2.34}$$

Le critère est donc exprimé par :

$$F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) = J_2\left(1+\frac{b\,J_3}{J_2^{3/2}}\right)-\frac{\mathscr{B}_0.(T-M_S)+K_0.(\varepsilon^{pt})^{n0}}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{2\,b}{\sqrt{27}}}=0 \qquad (2.35)$$

Ce critère prend en compte la dissymétrie du comportement. Il est conforme aux résultats obtenus par le modèle micromécanique (voir fig. II.8).

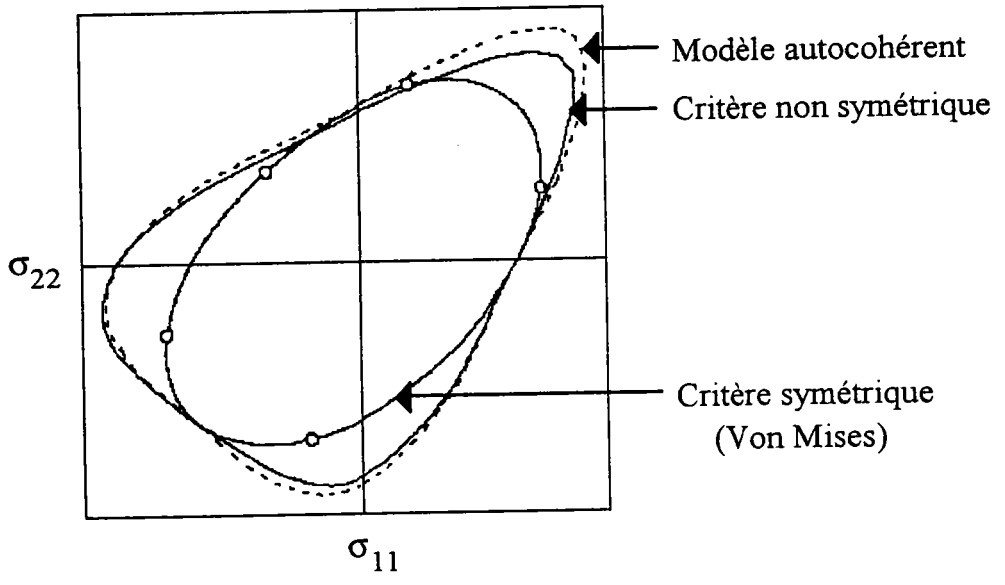


Fig. II.8: Comparaison entre les surfaces de charge déterminées par le critère symétrique de Von Mises, le critère non symétrique, et par l'approche autocohérente (d'après [C2.16]).

2.4.1.2. Détermination de la Loi de Comportement associée:

La seconde étape à accomplir est de déterminer la loi de comportement associée au critère de transformation. On se place ici dans le cadre de la plasticité associée en conservant l'hypothèse des petites déformations. Un incrément de déformation, noté $d\varepsilon_{ij}$, est donc la somme des déformations d'origines élastiques, thermiques et de transformation :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{th} + d\varepsilon_{ij}^{pt} \qquad (2.36)$$

En appliquant la règle de normalité, on obtient pour l'incrément de déformation de transformation :

$$d\varepsilon_{ij}^{pt} = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.37}$$

L'incrément de déformation total devient donc :

$$\underbrace{d\varepsilon_{ij}}_{\text{total}} = \underbrace{D_{ijkl}\, d\sigma_{kl}}_{\text{élastique}} + \underbrace{\alpha\, \delta_{ij}\, dT}_{\text{thermique}} + \underbrace{d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}_{\text{transformation}} \tag{2.38}$$

Il reste à déterminer $d\lambda$. On applique pour cela à la fonction F la règle de cohérence :

$$dF = 0 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\, d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^{pt}}\, d\varepsilon^{pt} + \frac{\partial F}{\partial T}\, dT \tag{2.39}$$

La déformation de transformation équivalente se définit comme:

$$d\varepsilon^{pt} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot d\varepsilon_{ij}^{pt} \cdot d\varepsilon_{ij}^{pt}} \tag{2.40}$$

En utilisant la règle de normalité (2.37), on peut exprimer (2.40) sous la forme suivante :

$$d\varepsilon^{pt} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \cdot d\lambda \tag{2.41}$$

Il faut alors calculer les différents termes de (2.39) et (2.41) :

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^{pt}} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}} = -2\, K\, \frac{n.K_0}{\sqrt{3}}\, \varepsilon^{pt(n-1)} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial T} = -2\, K\, \frac{\mathscr{B}_0}{\sqrt{3}} \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}\left(1 + \frac{b\, J_3}{J_2^{3/2}}\right) + J_2 \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\left(1 + \frac{b\, J_3}{J_2^{3/2}}\right) \tag{2.44}$$

(2.44) devient:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{b}{J_2^{3/2}}\left(J_3 . \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} - 2 . J_2 . \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}}\right) \tag{2.45}$$

avec $$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{2.46}$$

et $$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2}\left(\in_{ikn} \in_{jln} s_{kl}\, s_{mn} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \in_{prt} \in_{psu} s_{rs}\, s_{tu}\right) \tag{2.47}$$

où apparaît l'opérateur permutation dont les valeurs possibles sont:

$$\begin{cases} \in_{ijk} = 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux} \\ \in_{ijk} = 1 & \text{si ijk forme une permutation directe} \\ \in_{ijk} = -1 & \text{si ijk forme une permutation non directe} \end{cases}$$

A partir de la règle de cohérence (2.39), on peut déterminer l'expression du multiplicateur $d\lambda$. On obtient:

$$d\lambda = \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - 2K \frac{\partial K}{\partial T} dT}{2K \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}} \right) \tag{2.48}$$

La loi de comportement associée qui relie un incrément de déformation de transformation aux incréments de contraintes et de température est définie à partir de la relation (2.37). On a alors :

$$d\varepsilon_{ij}^{pt} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - 2K \frac{\partial K}{\partial T} dT}{2.K . \frac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}} \right) \tag{2.49}$$

La connaissance des paramètres b, n, et K permet de déterminer la valeur des déformations dans les trois directions de l'espace. Il reste maintenant à modéliser la décharge du matériau.

2.4.2. Cas de la décharge:

En ce qui concerne la décharge, nous utilisons le même type d'approche que précédemment en introduisant une variable interne supplémentaire. Cette variable, notée X, est un paramètre d'écrouissage cinématique. Le critère de transformation inverse devient:

$$F_d(J_2',J_3',\varepsilon^{pt},X,T) = J_2'\left(1+\frac{b\,J_3'}{J_2'^{3/2}}\right) - K^2(\varepsilon^{pt},T) = 0 \qquad (2.50)$$

$$\text{avec}\quad J_2' = \frac{1}{3}(\sigma - X)^2 \quad \text{et} \quad J_3' = \frac{2}{27}(\sigma - X)^3 \qquad (2.51)$$

2.4.2.1. Identification du critère:

Le comportement pour la traction est toujours identifié sous la forme d'une loi puissance faisant intervenir des termes supplémentaires par rapport à la charge.

On a :

$$\sigma_t = \sigma_{ft} + K_0\,(\varepsilon^{pt})^{n0} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}(\sigma_0 - \sigma_{ft})\left(1-\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_{am}}\right) \qquad (2.52)$$

avec:

ε^*: la déformation maximale atteinte à la charge.

ε_{am}: la déformation maximale de transformation qui est un paramètre à identifier.

$\sigma_{ft}(T)$: la contrainte de fin de transformation inverse en traction qui est définie par

$$\sigma_{ft}(T) = \mathscr{B}_0\,(T - A_f) \qquad (2.53)$$

(2.52) peut donc s'écrire:

$$\sigma_t = \sigma_0 + K_0 (\varepsilon^{pt})^{n0} + (\sigma_0 - \sigma_{ft}) \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \left(1 - \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_{am}} \right) - 1 \right] \qquad (2.54)$$

Les coefficients K0, K1, n_0, et n_1 sont identiques pour la charge et la décharge. Le lissage de courbes expérimentales en traction par la fonction (2.54) est réalisé sur un alliage de Cu Al Be. Les résultats sont présentés pour quatre températures différentes. Les paramètres utilisés pour ce lissage sont donnés dans les tableaux fig. II.9 et II.10. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures II.11 à II.14.

K_0 (MPa)	n_0	ε_{am} estimé (%)	$\sigma_{ft} - \sigma_0$ (MPa)
330	0,34	3,5	70

Fig. II.9: Paramètres communs à tous les essais.

T (°C)	σ_0 (MPa)	ε^*(%)
-20,5	98	1,325
-3,1	142	1,26
8,2	173	1,23
19,3	200	0,365
		0,76
		1,19

Fig II.10: Paramètres propres à chaque essai.

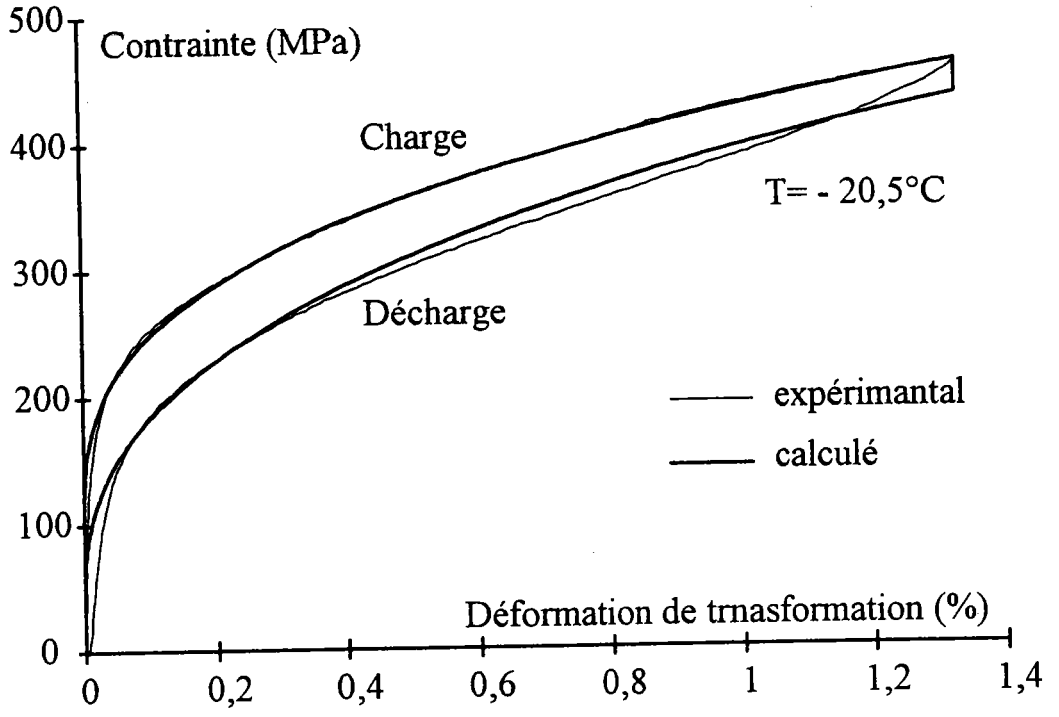


Fig. II.11: Essai de traction à -20,5°C sur un alliage de Cu Al Be. Comparaison entre résultats théoriques et données expérimentales.

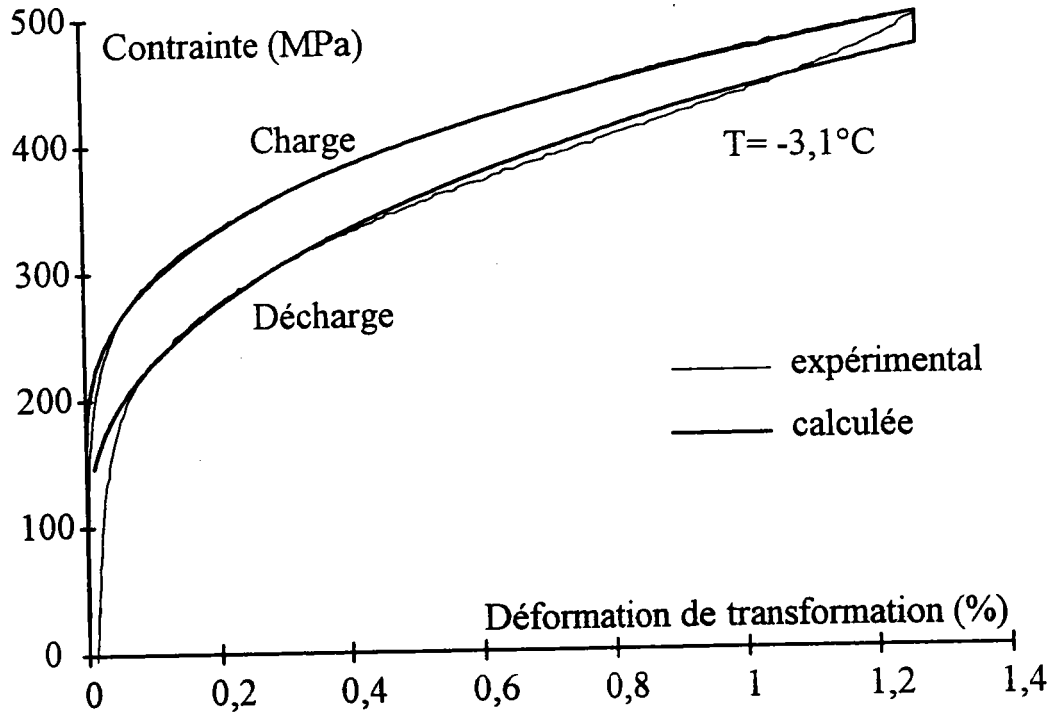


Fig. II.12: Essai de traction à -3,1°C sur le même alliage de Cu Al Be. Comparaison entre résultats théoriques et données expérimentales.

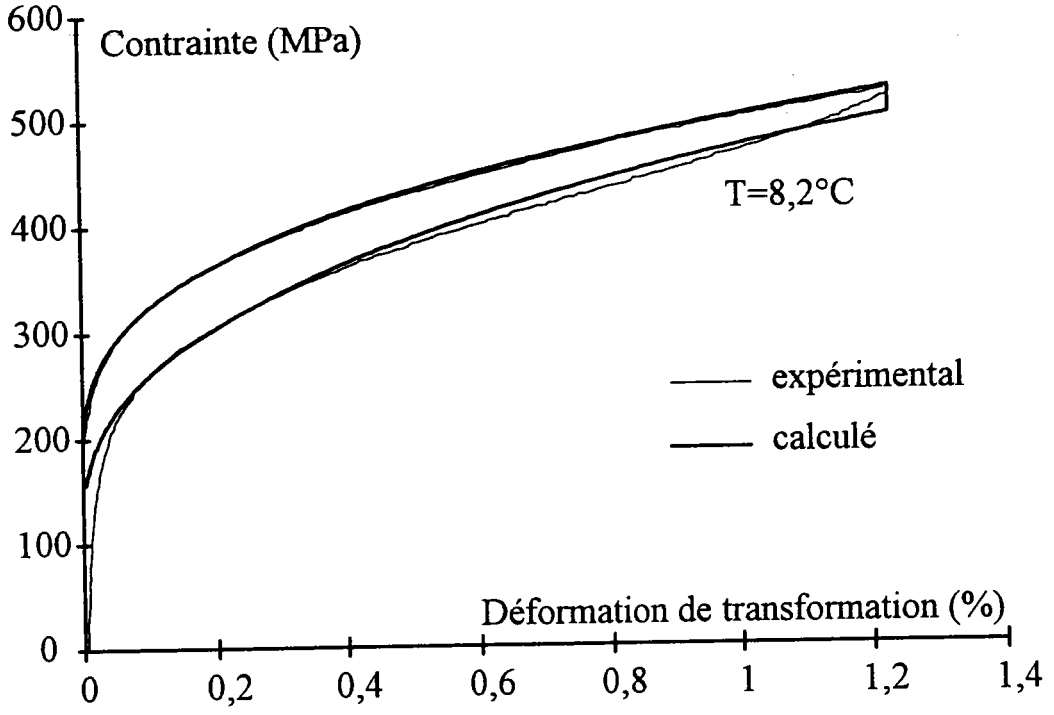


Fig. II.13: Essai de traction à 8,2°C sur le même alliage.

Comparaison entre résultats théoriques et données expérimentales.

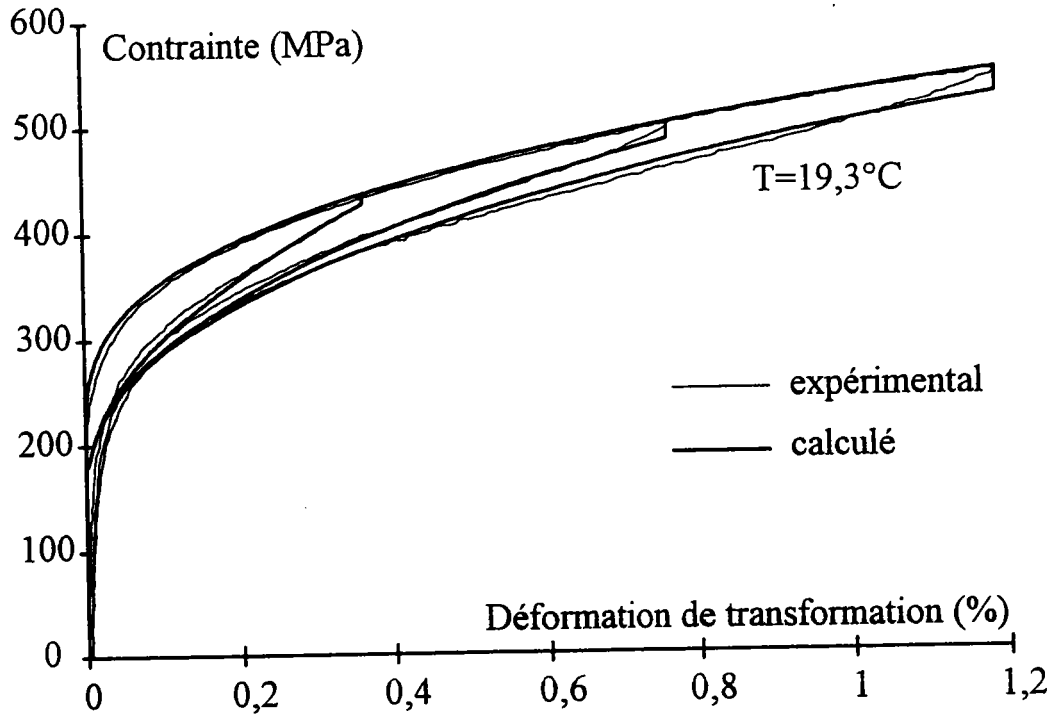


Fig II.14 :Essai de traction, charges et décharges à 19,3°C.

Même alliage.

Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux.

2.4.2.2. Détermination du paramètre d'écrouissage:

On doit vérifier la relation (2.50). On aboutit alors à l'équation suivante:

$$\frac{1}{3}(\sigma-X)^2\left(1+\frac{b\left(\frac{2}{27}(\sigma-X)^3\right)}{\left(\frac{1}{3}(\sigma-X)^2\right)^{3/2}}\right)-K^2(\varepsilon^{pt},T)=0 \qquad (2.55)$$

d'où l'on déduit

$$\sigma=\frac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{1+\frac{2\,b}{\sqrt{27}}}}+X \qquad (2.56)$$

Au point où commence la décharge ($\varepsilon=\varepsilon^*$), on doit avoir la même valeur de contrainte. En utilisant (2.25), (2.33), (2.34) et (2.52), on aboutit au système suivant:

$$\begin{cases} \sigma=\sigma_0+K_0.(\varepsilon^{pt})^{n0}=\dfrac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{1+\dfrac{2\,b}{\sqrt{27}}}} \\ \sigma=\sigma_0+K_0\,(\varepsilon^{pt})^{n0}+(\sigma_0-\sigma_{ft})\left[\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^*}\left(1-\dfrac{\varepsilon^*}{\varepsilon_{am}}\right)-1\right]=\dfrac{\sqrt{3}\,K}{\sqrt{1+\dfrac{2\,b}{\sqrt{27}}}}+X \end{cases} \qquad (2.57)$$

La résolution de (2.57) permet alors de déterminer X:

$$X=(\sigma_0-\sigma_{ft})\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}\left(1-\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_{am}}\right)-1\right] \qquad (2.58)$$

On déduit à partir de (2.58) l'expression tensorielle de X sous la forme:

$$X_{ij}= (\sigma_{0_{ij}}-\sigma_{f_{ij}})\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}\left(1-\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_{am}}\right)-1\right] \tag{2.59}$$

Les équations (2.33), (2.34) et (2.59) définissent le critère de transformation inverse. On utilise cette fonction critère comme fonction de charge pour déterminer la loi de comportement associée.

2.4.2.3. Détermination de la Loi de Comportement associée:

En utilisant le même formalisme que dans le cas de la charge, la règle de cohérence s'écrit:

$$dF_d = 0 = \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{ij}}\, d\sigma_{ij} + \frac{\partial F_d}{\partial X_{ij}}\, dX_{ij} + \frac{\partial F_d}{\partial \varepsilon^{pt}}\, d\varepsilon^{pt} + \frac{\partial F_d}{\partial T}\, dT \tag{2.60}$$

avec:

$$dX_{ij}= (\sigma_{0_{ij}}-\sigma_{f_{ij}})\left(\frac{1}{\varepsilon^*}-\frac{1}{\varepsilon_{am}}\right)d\varepsilon \tag{2.61}$$

Il nous reste maintenant à calculer les termes $\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{ij}}$ et $\frac{\partial F_d}{\partial X_{ij}}$.

$$\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F_d}{\partial s'_{ij}}\frac{\partial s'_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F_d}{\partial s'_{ij}}\left(1-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{2.62}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial F_d}{\partial s'_{ij}}\frac{\partial s'_{ij}}{\partial X_{ij}} = -\frac{\partial F_d}{\partial s'_{ij}}\left(1-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \tag{2.63}$$

où s'_{ij} est le déviateur des contraintes résultant de la superposition de σ, le champ appliqué, et de X, le paramètre d'écrouissage cinématique.

Les autres termes s'obtiennent de la même façon que dans le cas de la charge.

On peut alors déterminer l'expression du multiplicateur $d\lambda$. On obtient:

$$d\lambda = -\left(\frac{\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{kl}} . d\sigma_{kl} + \frac{\partial F_d}{\partial T} . dT}{\frac{\partial F_d}{\partial \varepsilon^{pt}} + \frac{\partial F_d}{\partial X_{ij}} (\sigma_{0_{ij}} - \sigma_{f_{ij}}) \left(\frac{1}{\varepsilon^*} - \frac{1}{\varepsilon_{am}} \right) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}} \right) \quad (2.64)$$

En appliquant la règle de normalité, on en déduit pour l'incrément de déformation de transformation inverse:

$$d\varepsilon_{ij}^{pt} = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{kl}} . d\sigma_{kl} + \frac{\partial F_d}{\partial T} . dT}{\frac{\partial F_d}{\partial \varepsilon^{pt}} + \frac{\partial F_d}{\partial X_{ij}} (\sigma_{0_{ij}} - \sigma_{f_{ij}}) \left(\frac{1}{\varepsilon^*} - \frac{1}{\varepsilon_{am}} \right) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}} \right) \quad (2.65)$$

Nous possédons dès lors tous les paramètres nécessaires pour décrire le comportement tridimensionnel des AMF, et ceci aussi bien pour la charge que pour la décharge.

2.4.3. Résumé:

Le schéma (fig. II.15) et le tableau (fig.II.16) ci-après résument les résultats obtenus pour la loi de comportement.

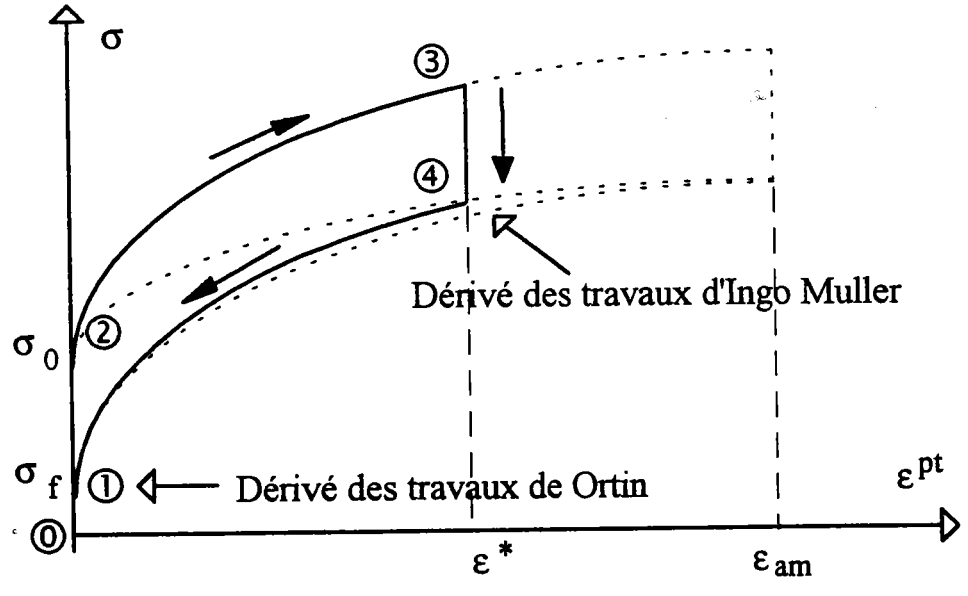


Fig. II.15: Diagramme de principe représentant la loi de comportement.

Critère de charge : $F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) = 0$

Critère de décharge : $F_d(J_2',J_3',\varepsilon^{pt},X,T) = 0$

	F	$\dot{F}$	F_d	$\dot{F}_d$	
⓪①	<0		<0		élastique.
en ①	<0		=0	≠ 0	élastique.
①②	<0		>0		élastique.
②③	**=0**	**=0**	>0		⇒ **$d\varepsilon^{pt}>0$**
en ③	**=0**	**<0**			⇒ **$d\varepsilon^{pt}=0$**
③④	<0		>0		élastique.
④①	<0		**=0**	**=0**	⇒ **$d\varepsilon^{pt}<0$**

Fig. II.16: Valeur des critères au cours de la charge et de la décharge en prenant comme base le schéma précédent.

Ce modèle nécessite sept paramètres pour décrire le comportement superélastique du matériau:

→ M_s, la température de début de transformation martensitique.

→ Af, la température de fin de transformation austénitique.

→ K_0 et n_0, les coefficients de l'approximation parabolique du comportement en traction.

→ ε_{am}, la déformation maximale de transformation en traction (paramètre estimé).

→ $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}_1$, coefficients de dépendance entre la température et la contrainte respectivement de traction et de compression.

Parmi ces paramètres, seul ε_{am} n'est pas accessible par l'expérimentation.

Cette formulation permet de décrire n'importe quel chargement radial dans l'espace des contraintes (y compris des chargements non monotones par généralisation du critère).

2.4.4. Mise en oeuvre de la loi de comportement en calcul de structures:

L'utilisation de la loi de comportement, développée aux paragraphes précédents, impose d'employer une formulation incrémentale. Un tel formalisme imposé par le choix de la loi de comportement conduit à masquer les effets propres au calcul de structure. Pour mettre plus clairement en évidence ces aspects, on choisit de simplifier la loi de comportement en l'utilisant sous forme bilinéaire (on pose n_0=1 dans la relation (2.25)). Une relation reliant directement les contraintes actuelles aux déformations actuelles est alors obtenue. Cette simplification conduit à négliger le premier stade fortement non linéaire de la transformation.

Le comportement du matériau sera désormais pris en compte à partir de l'identification de trois paramètres. Les deux premiers sont issus d'un essai de traction (voir fig. II.17): K_0, la pente de transformation et $\sigma_0(T)$, la contrainte seuil de transformation. Le troisième est issu de la compression: $\sigma_1(T)$, la contrainte seuil pour ce type d'essai.

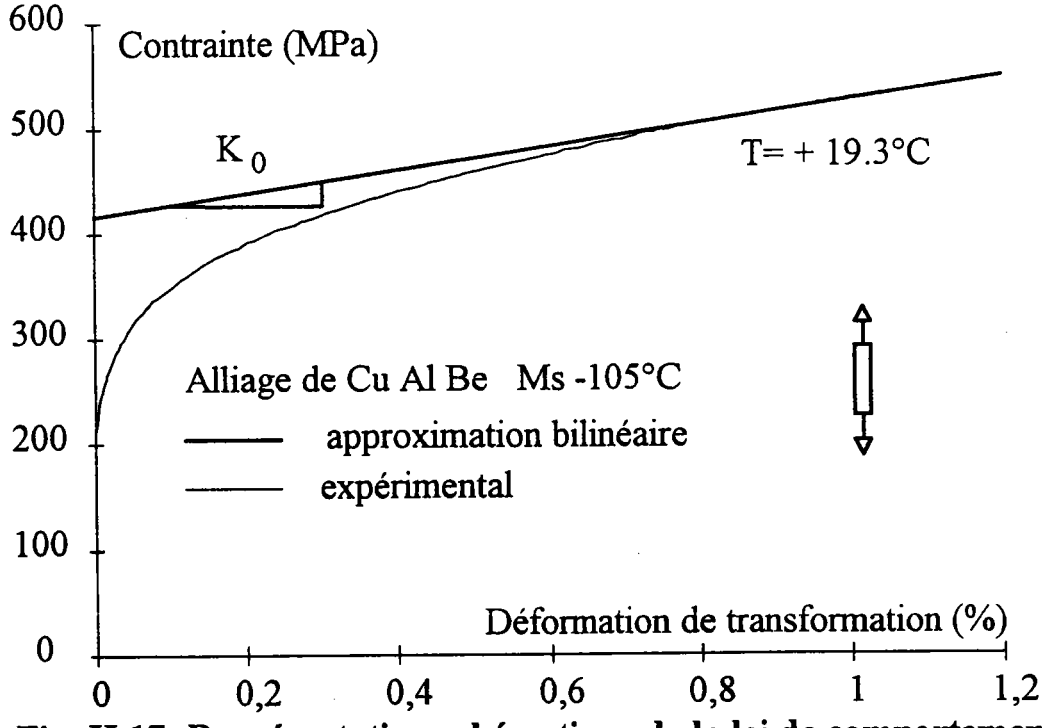


Fig. II.17: Représentation schématique de la loi de comportement sous forme bilinéaire.

L'utilisation telle quelle d'une description du comportement du matériau distinguant dans la déformation totale la partie élastique de celle de transformation est théoriquement possible. Cependant, elle conduit à un formalisme lourd qui une fois encore masquera les difficultés propres au calcul de structures. Ce formalisme peut être simplifié par la définition d'un module apparent de transformation reliant la contrainte à la déformation totale. Il faut donc établir une relation entre les paramètres réels de la transformation et les paramètres apparents. Dans l'exemple suivant, ces relations sont établies dans le cas de la traction uniaxiale (voir fig. II.18). Il est également nécessaire de définir une déformation maximale apparente de transformation notée ε_{am}^{A}.

Dans le cadre de la loi de comportement développée précédemment, nous pouvons écrire:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_s + \varepsilon^{él} + \varepsilon_{am} \tag{2.66}$$

avec :

ε_f: la déformation de fin de transformation apparente.

ε_s: la déformation de début de transformation apparente.

$\varepsilon^{él}$: la déformation élastique pendant la transformation.

ε_{am}: la déformation maximale de transformation.

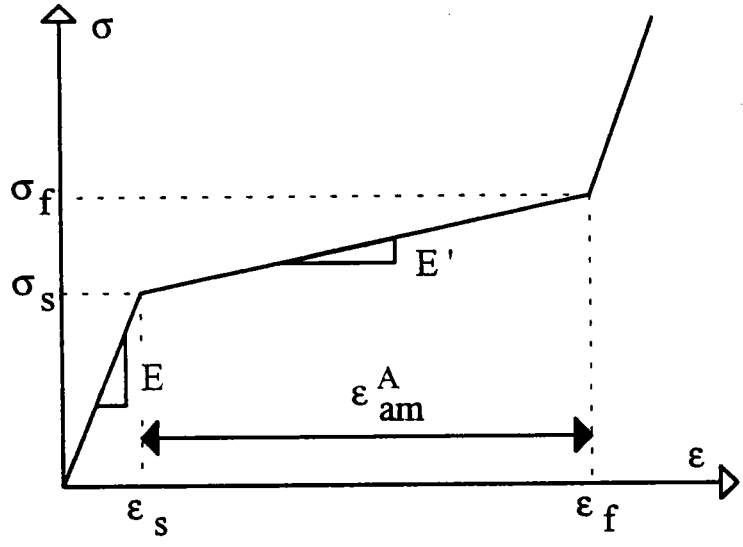


Fig. II.18: Graphe schématique d'une courbe de traction à la charge.

Il nous reste à exprimer ces différentes quantités en fonction de la contrainte:

$$\varepsilon^{\text{él}} = \frac{\sigma_f - \sigma_s}{E} \tag{2.67}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E} \tag{2.68}$$

$$\varepsilon_{am} = \frac{\sigma_f - \sigma_s}{K_0} \tag{2.69}$$

L'expression (2.66) devient alors, en combinant (2.67) et (2.69):

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_s}{E} + \varepsilon_{am} + \varepsilon_{am}\,\frac{K_0}{E} \tag{2.70}$$

soit encore:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_s}{E} + \varepsilon_{am}\left(1+\frac{K_0}{E}\right) \tag{2.71}$$

Calculons à présent la valeur de la pente de transformation apparente, notée E'. Cette pente est donnée par (voir fig. II.18):

$$\sigma_f - \sigma_s = E'\,(\varepsilon_f - \varepsilon_s) \tag{2.72}$$

or en utilisant (2.71) et (2.69), on a:

$$\varepsilon_f - \varepsilon_s = \frac{\sigma_f - \sigma_s}{K_0}\left(1+\frac{K_0}{E}\right) \tag{2.73}$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient la valeur de la pente de transformation apparente E' en fonction du module de transformation K_0 et du module élastique E du matériau:

$$E' = \frac{E\,K_0}{E + K_0} \tag{2.74}$$

En exprimant la déformation de transformation totale apparente, notée ε_{am}^{A} comme:

$$\varepsilon_{am}^{A} = \frac{\sigma_f - \sigma_s}{E'} = \varepsilon_f - \varepsilon_s \tag{2.75}$$

on déduit:

$$\varepsilon_{am}^{A} = \varepsilon_{am}\left(1 + \frac{K_0}{E}\right) \tag{2.76}$$

Il est possible de définir de la même façon un module apparent de transformation, noté μ', ainsi qu'une déformation de transformation totale apparente, notée γ_{am}^{A}, pour le cisaillement. On obtient alors les expressions suivantes pour ces deux quantités:

$$\mu' = \frac{\mu_a K_0}{3\mu_a + K_0} \tag{2.77}$$

$$\gamma_{am}^{A} = \gamma_{am}\left(1 + \frac{K_0}{3\mu_a}\right) \tag{2.78}$$

avec μ_a le module élastique de cisaillement défini de façon classique à partir du module d'Young, E, et du coefficient de Poisson, ν:

$$\mu_a = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.79}$$

Dans le cadre du calcul de structures, ce sont les paramètres apparents de la transformation qui seront utilisés.

Conclusion:

A partir des lois de comportement phénoménologiques décrites dans ce chapitre, il est maintenant possible d'effectuer des calculs de structures en appliquant ces lois à la description d'un chargement mécanique non homogène.
La démarche générale adoptée dans ce travail pour résoudre ce type de problème est présentée dans le chapitre suivant. Afin de focaliser toute l'attention sur les effets de structures, on utilise dans cette étude la loi de comportement donnée sous forme bilinéaire au paragraphe 2.4.4.

Références bibliographiques:

[C2.1] BERTRAM A., "Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys", Nuclear Engineering and Design 74, 1983, p. 173.

[C2.2] CORY J.S., McNICHOLS J.L., "Nonequilibrium thermostatics" J. Appl. Phys., Vol. 58, 1985, p. 3282.

[C2.3] BONDARYEV E.N., WAYMAN C.M., "Some Stress-Strain-Temperature relationships for Shape Memory Alloys", Metall. Transactions A, Vol 19A, 1988, p. 2407.

[C2.4] PATOOR E., EBERHARDT A., BERVEILLER M., "Micromechanical modelling of superelasticity in Shape Memory Alloys.", Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1993, p.296

[C2.5] SUN Q.P., HWANG H.C., YU S.W., "Micromechanics modelling for the constitutive behavior of polycristalline shape memory alloys" J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, 1993, p. 1.

[C2.6] RANIECKI B., LEXCELLENT C., TANAKA K., "Thermodynamic model of pseudoelastic behavior of shape memory alloys", Arch. Mech., 1992, Vol. 3.

[C2.7] MULLER I., "On the size of the hysteresis in pseudoelasticity", Cont. Mech. Thermodyn.1,1989, p. 125.

[C2.8] KESTIN J., RICE J.R., "Paradoxes in the applications of thermodynamics in strained solids", dans "Critical review of thermodynamics", 1970, p. 275.

[C2.9] MULLER I., XU H., "On the pseudoelastic hysteresis", Acta Metal. Mater., 1991, Vol. 39, No. 3, p.263.

[C2.10] KOISTINEN D.P., MARBURGER R.G., "A general equation describing the extent of the austenite-martensite transformation in pure Iron-Crabon alloys and Plain Carbon steels", Acta Metall 7, 1959, p. 59.

[C2.11] ROGUEDA-BERRIET C., "Modélisation thermodynamique du comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme" Thèse de doctorat N° 336, Université de Franche-Comté, Besançon, 1993.

[C2.12] MANACH P.-Y., "Étude du comportement thermomécanique d'alliages à mémoire de forme", Thèse de doctorat , Institut national polytechnique de Grenoble, Grenoble, 1993.

[C2.13] MANACH P.Y., FAVIER D., "Experimental study for the identification of a tensorial scheme for shape memory alloys", J. de Phys. IV, Colloque C4, Vol. 1, Aussois, 1991, p. C4-415.

[C2.14] MANACH P.Y., FAVIER D., "Comparison of homogeneous shear and tensile tests on a Ni-Ti shape memory alloy.", Proc. of ICOMAT 92, Monterey (California, USA), 1993, p. 941.

[C2. 15] PATOOR E., "Contribution à l'étude de la plasticité de transformation dans les mono et polycristaux métalliques", Thèse Docteur Ingénieur, Université de Metz, 1986.

[C2.16] EL AMRANI ZIRIFI M., "Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques", Thèse de doctorat, Université de Metz, 1994.

[C2.17] ORTÍN J., "Partial hysteresis cycles in shape memory alloys: experiment and modelling", J. de Phys. IV, Colloque C4, Aussois, 1991, C4-64.

[C2.18] CHRYSOCHOOS A., PHAM H., MAISONNEUVE O., "Une amalyse expérimentale du comportement d'un alliage à mémoire de forme du type Cu-Zn-Al", C.R. Acad. Sci. PARIS, 1993, t. 316, série II, p. 1031.

[C2.19] J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, Mécanique des matériaux solides, CH. 5, Plasticité, Edition Dunod, 1985.

[C2.20] DUERIG T.W., MELTON K.N., STÖCKEL D., WAYMAN C.M., "Engineering aspect of shape memory alloys", 1991.

[C2.21] ROUMAGNAC P., "Étude du comportement en phase martensitique et de l'effet mémoire simple d'alliages à mémoire de forme Ni Ti en fonction du mode de sollicitation", Thèse de doctorat N° D599, UTC, Compiègne, 1993.

[C2.22] VACHER P., "Étude du comportement pseudoélastique d'alliages à mémoire de forme Cu-Zn-Al polycristallins", Thèse. de doctorat N°215, Université de Franche-Comté, Besançon, 1991.

CHAPITRE 3

MODÈLES EN CALCUL DE STRUCTURES

Table des matières:

3.1. Introduction: 71
3.2. Superélasticité: 71
3.2.1. Calcul de ressort par le modèle de Tobushi et Tanaka: 71
3.2.1.1. Loi de comportement: 71
3.2.1.2. Calcul de structure: 73
3.2.1.3. Résultats expérimentaux: 75
3.2.1.4. Conclusions: 76
3.2.2. Calcul de poutre en flexion par le modèle d'Atanackovi et al.: 76
3.2.2.1. Loi de comportement: 77
3.2.2.2. Calcul de structure: 78
3.2.2.2.1. Cas de la charge: 78
3.2.2.2.2. Cas de la décharge: 80
3.2.2.3. Conclusion: 81
3.3. Effet mémoire: 82
3.3.1. Calcul de ressort par la méthode de T. Waram [C3.4]: 82
3.3.1.1. Conclusion: 84
3.4. Modèle de calcul de structures utilisé dans la suite des travaux: Méthode de BRESSE [C3.5]. 85
3.4.1. Mouvement relatif entre deux sections : 86
3.4.2. Composition du mouvement pour une infinité de sections: 87
3.4.3. Formules de Bresse: 87
3.4.4. Relations avec le torseur des efforts intérieurs : 89
3.5. Conclusion: 89
Références bibliographiques: 90

3.1. Introduction:

S'il est vrai que la détermination de la loi de comportement est une étape importante dans l'étude d'un matériau, celle-ci ne suffit pas pour décrire la réponse des structures. En effet, dans la majorité des cas, les déformations et les contraintes ne sont pas réparties de manière uniforme dans ces structures. La fin des années 80 a vu s'accroître le nombre des travaux dans le domaine du calcul de structures en AMF. Cette motivation nouvelle pour ce domaine s'explique par les besoins ressentis au niveau des industriels. Les bureaux d'études ne possèdent pas d'outils adéquats pour dimensionner des éléments mécaniques constitués de ces matériaux et sont souvent encore réduits à utiliser le calcul élastique comme approximation.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons l'état de l'art au départ de cette thèse. Nous y décrivons des modèles qui peuvent être considérés comme les premiers travaux ayant trait au calcul de structures en AMF. A la suite, nous présentons la ligne directrice adoptée dans cette étude.

3.2. Superélasticité:

3.2.1. Calcul de ressort par le modèle de Tobushi et Tanaka:

Dans ce cas, on cherche à connaître la réponse d'un ressort hélicoïdal en alliage à mémoire travaillant en superélasticité.

Le ressort considéré est supposé uniquement soumis à un moment de torsion. Les seules contraintes présentes dans la section sont alors des contraintes de cisaillement.

3.2.1.1. Loi de comportement:

La relation entre la contrainte et la déformation de cisaillement est déterminée à partir des équations simplifiées du modèle de comportement mis en place par Tanaka et al. [C3.1]. Cette loi de comportement est développée sur les bases de

la thermodynamique. La formulation développée dans le R-modèle (chapitre 2) contient ce modèle. La relation entre contrainte (τ), déformation (γ) et température (T) est de la forme :

$$\dot{\tau} = G\,\dot{\gamma} + \theta\,\dot{T} + \Omega\,\dot{\xi} \tag{3.1}$$

où

G est le module d'élasticité en cisaillement .

θ est le coefficient de dilatation linéique.

Ω/G est la déformation de transformation.

ξ est la fraction volumique de phase induite (martensite) et dépend de la contrainte τ et de la température T: $\xi = \Xi(\tau,T)$

Les hypothèses suivantes aboutissent à une loi simplifiée :

- θ est considéré égal à zéro.
- La valeur de Ω n'est pas nécessaire car γ reste inférieure à Ω/G.
- La transformation et la transformation inverse ont lieu à contrainte constante.

Il est nécessaire dans ce modèle d'introduire une cinétique de la transformation qui relie la fraction volumique à la température et à la contrainte . Cette cinétique est représentée par deux fonctions, l'une pour la charge, l'autre pour la décharge.

Pour la charge, on a:

$$\xi = 1 - \exp(b_A c_M (M_s - T) + b_M \tau) \tag{3.2}$$

Et pour la décharge:

$$\xi = 1 - \exp(b_A c_A (A_s - T) + b_A \tau) \tag{3.3}$$

Dans lesquelles b_A, b_M, c_A, c_M sont des constantes du matériau utilisé.

Les contraintes seuils de début de transformation et de fin de transformation sont définies en fonction de la température à l'aide des mêmes constantes (voir figure III.1).

Pour la charge, l'expression de la contrainte est :

$$\tau = c_M (T - M_s) = \tau_M \tag{3.4}$$

Et pour la décharge, elle devient :

$$\tau = c_A (T - A_s) = \tau_A \tag{3.5}$$

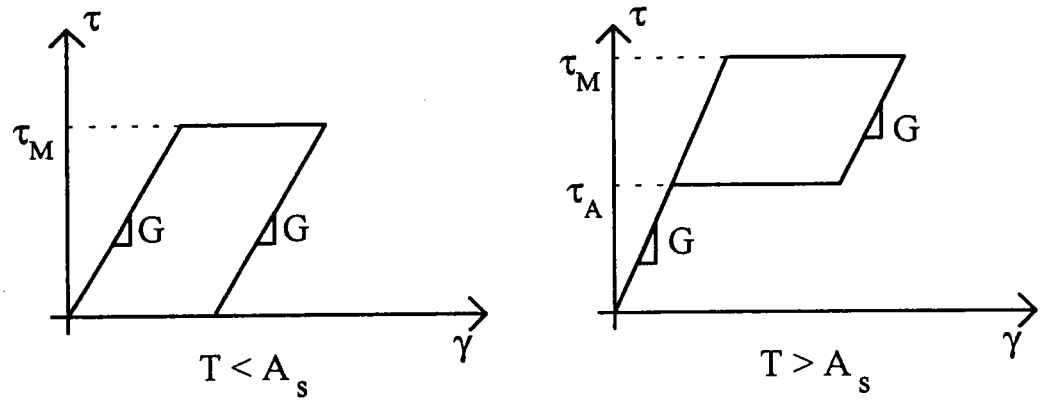


Fig. III.1 :Représentation schématique de la courbe contrainte-déformation à température constante selon Tobushi et al.

3.2.1.2. Calcul de structure:

La seule déformation non nulle à l'intérieur de la section est due à la contrainte de cisaillement. Cette déformation est supposée uniquement dépendante du rayon r où l'on se trouve. Elle est exprimée par :

$$\gamma = \theta \; r \tag{3.6}$$

où θ est l'angle de torsion unitaire.

La transformation et la transformation inverse se produisent toute les deux sur la fibre externe (r=a):

$$\gamma_{max} = a \, \theta \tag{3.7}$$

Lorsque la transformation progresse, la valeur de la déformation à la limite des zones transformées et en cours de transformation est :

$$\gamma_b = r_b \, \theta = \frac{k}{G} \tag{3.8}$$

avec r_b : rayon limite entre la zone transformée et la zone en cours de transformation.

$$k = \begin{cases} \tau_M & \rightarrow \quad \text{transformation} \\ \tau_A & \rightarrow \quad \text{transformation inverse} \end{cases}$$

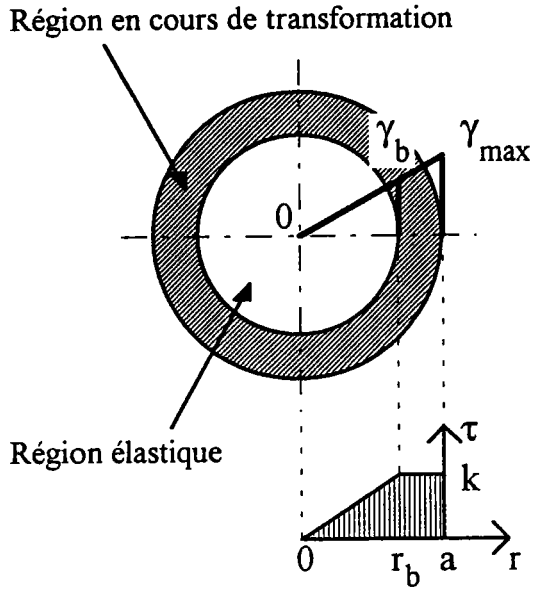


Fig III.2 : Répartition des déformations et des contraintes dans une section selon Tobushi et al.

Le déplacement δ du ressort est obtenu par l'intégration le long des spires. En utilisant (3.8), on peut écrire son expression sous la forme suivante:

$$\delta = \frac{N\pi k D^2}{2 G r_b} \tag{3.9}$$

où N représente le nombre de spires actives du ressort.

Ce qui nous permet de déduire la valeur de r_b :

$$r_b = \frac{N\pi k D^2}{2 G \delta} \tag{3.10}$$

En utilisant les relations précédemment déterminées, on en déduit le déplacement du ressort en fonction de l'effort appliqué P. Lorsque le matériau n'est pas

transformé, on retrouve l'expression classique issue de la Résistance des Matériaux:

$$P = \frac{G\,\delta\,d^4}{8\,N\,D^3} \tag{3.11}$$

Lorsque la transformation progresse, cette relation devient:

$$P = \frac{k\,\pi\,d^3}{6\,D}\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{N\,k\,\pi\,D^2}{G\,\delta\,d}\right)^3\right) \tag{3.12}$$

3.2.1.3. Résultats expérimentaux:

Ce modèle a été comparé avec succès à des résultats expérimentaux obtenus sur des ressorts de Nickel-Titane [C3.2]. Un exemple de ces résultats est présenté en figure II.3.

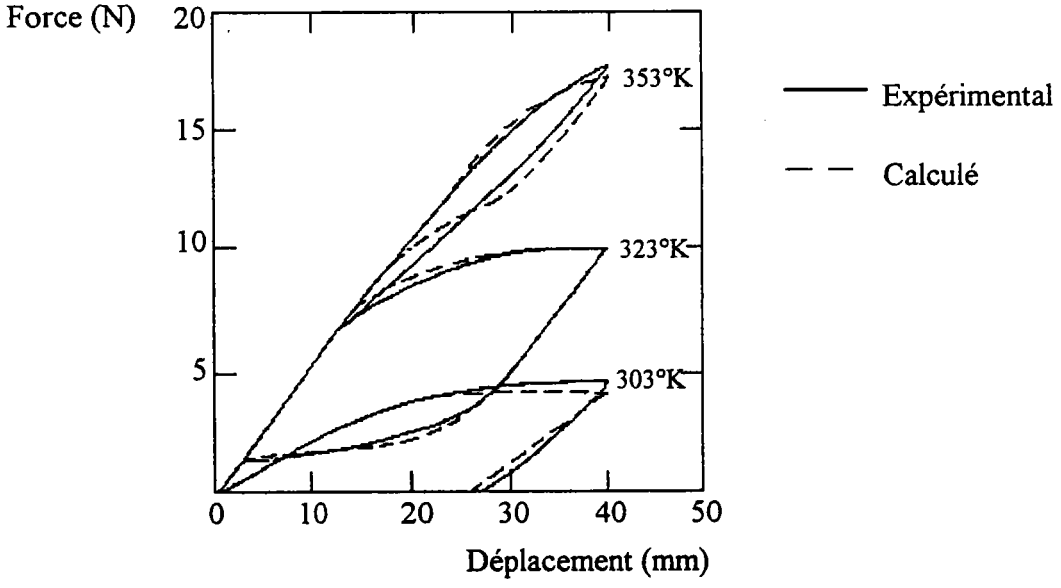


Fig II.3: Comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques obtenus par Tanaka et al.

3.2.1.4. Conclusions:

Tobushi et al. proposent ici un modèle très simple permettant d'obtenir la réponse superélastique d'un ressort en AMF. Il existe une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux obtenus et la réponse calculée. L'hypothèse consistant à considérer que la déformation γ est inférieure à la déformation maximale de transformation implique qu'aucune zone ne sera complètement transformée en martensite. Cette hypothèse, vérifiée dans les cas pratiques, évite de déterminer une variable difficile à évaluer. Cependant, il existe une limitation assez importante à ce modèle. En effet, la loi de comportement étant sous une forme monodimensionnelle, les auteurs ont recours aux courbes expérimentales pour déterminer les données nécessaires au calcul. De plus, si ce modèle est aisément applicable à des alliages de type Ni-Ti qui présentent un comportement "à plateau", son application à des ressorts en alliage à base Cuivre apparaît plus délicate.

3.2.2. Calcul de poutre en flexion par le modèle d'Atanackovič et al.:

Ce modèle est développé dans le cadre de la flexion pure (moment fléchissant considéré constant) d'une poutre de section rectangulaire (voir figure III.4)[C3.3]. Le but de ces travaux est de déterminer la relation entre le moment de flexion M appliqué et l'angle Φ qui caractérise la rotation d'une section droite de la poutre. L'étude est limitée aux chargements isothermes pour les températures supérieures à A_f (domaine superélastique).

La largeur de la section est notée b, sa hauteur H. r_0 désigne le rayon de courbure de la poutre après déformation.

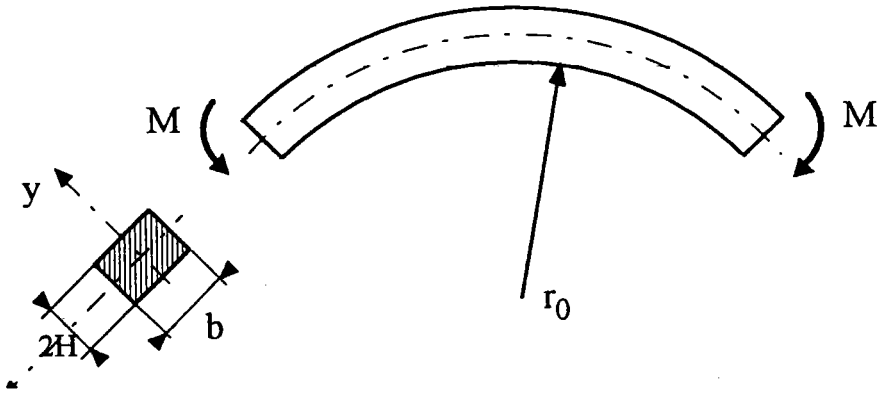


Fig III.4 : Géométrie de la poutre étudiée et chargement appliqué.

3.2.2.1. Loi de comportement:

La loi de comportement utilisée pour cette étude est purement phénoménologique. Elle est de plus unidimensionnelle et ne concerne que la traction et la compression qui sont supposées symétriques (voir figure III.5).

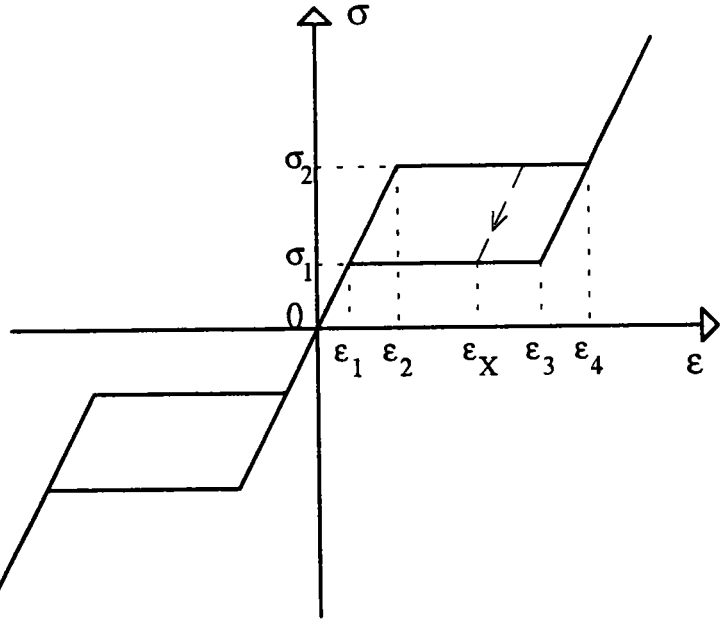


Fig. III.5 : Représentation schématique de la loi de comportement utilisée.

Le module d'élasticité de l'austénite, noté E_1, est supposé égal au module d'élasticité de la martensite, noté E_2. La transformation A→M et la transformation inverse M→A ont lieu à contrainte constante.

La transformation débute lorsque le point (σ_2,ε_2) est atteint. Elle finit au point (σ_2,ε_4). Si ce point est dépassé lors du chargement, alors le début de transformation inverse à la décharge aura lieu en (σ_1,ε_3). Si la décharge intervient avant (σ_2,ε_4), elle se fera suivant une ligne de pente E (voir figure III.5). La fin de transformation inverse a lieu au point (σ_1,ε_1).

3.2.2.2. Calcul de structure:

Comme dans le cas des matériaux classiques, on considère qu'une section droite avant déformation reste droite après déformation (Hypothèse de Navier-Bernoulli). De plus, l'expression classique issue de la théorie des poutres est conservée pour la déformation ε située à une distance y de l'axe neutre:

$$\varepsilon = \frac{1}{r_0} y = \Phi\, y \tag{3.13}$$

où Φ est la courbure de la poutre.

A partir des données de ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, des courbures "seuils" sont définies:

$$\Phi_i = \frac{2}{H}\varepsilon_i \quad \text{avec } i=1, 2, 3, 4 \tag{3.14}$$

3.2.2.2.1. Cas de la charge:

La position des zones transformées pour la charge est donnée par:

$$y_e = \frac{H}{2}\frac{\Phi_2}{\Phi} \tag{3.15}$$

$$\bar{y} = \frac{H}{2}\frac{\Phi_4}{\Phi} \tag{3.16}$$

avec

y_e la limite entre la zone purement austénitique et la zone en cours de transformation.

$\bar{y}$ la limite entre la zone en cours de transformation et la zone complètement transformée.

Les contraintes agissant dans une section peuvent facilement être calculées à partir des relations précédentes. La répartition dans une section de ces contraintes est donnée de façon schématique en figure III.6 pour différentes valeurs de Φ.

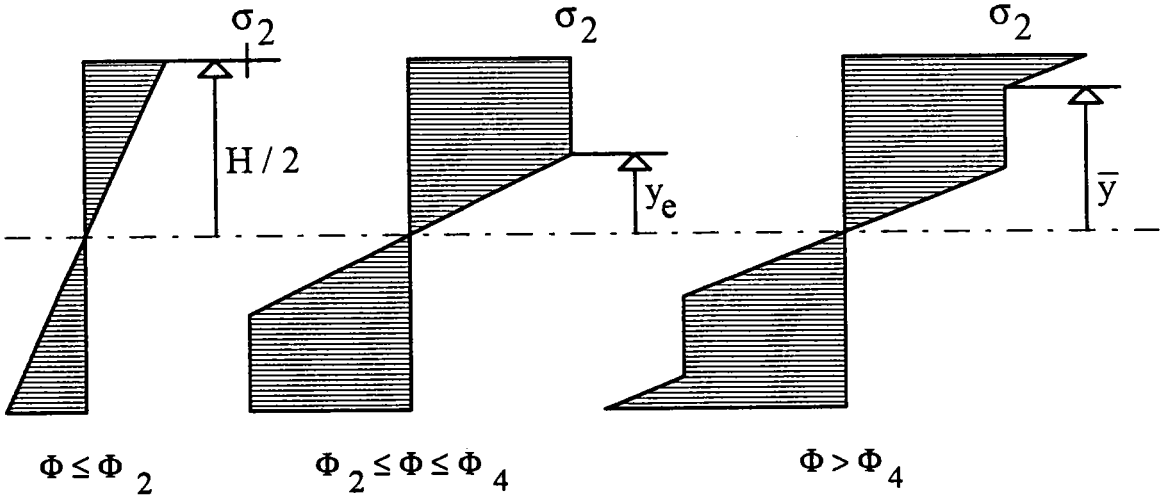


Fig. III.6 : Répartition des contraintes dans une section droite de la poutre.

La relation entre le moment de flexion M et la courbure Φ est alors obtenue par la relation classique:

$$M = \int_A \sigma\, y\, dA \tag{3.17}$$

où A est l'aire de la section droite considérée.

On obtient alors pour chacun des domaines considérés une expression liant le moment fléchissant M à la courbure Φ. Le moment en phase de chargement est noté $\bar{M}$:

$$\bar{M} = \begin{cases} E_1 \Phi I & \text{pour } 0 \le \Phi \le \Phi_2 \\ E_1 I \left\{ \Phi \left(\frac{\Phi_2}{\Phi} \right)^3 + \frac{3}{2} \Phi_2 \left[1 - \left(\frac{\Phi_2}{\Phi} \right)^2 \right] \right\} & \text{pour } \Phi_2 < \Phi \le \Phi_4 \\ \Phi I \left\{ E_1 \left(\frac{\Phi_2}{\Phi} \right)^3 + E_2 \left[1 - \left(\frac{\Phi_4}{\Phi} \right)^3 \right] \right\} + \frac{3}{2} E_1 I \Phi_2 \left(\frac{\Phi_4^2 - \Phi_2^2}{\Phi^2} \right) & \\ + \frac{3}{2} I \left[1 - \left(\frac{\Phi_4}{\Phi} \right)^2 \right] (E_1 \Phi_2 - E_2 \Phi_4) & \text{pour } \Phi > \Phi_4 \end{cases} \tag{3.18}$$

où I est le moment quadratique de la section en flexion.

3.2.2.2.2. Cas de la décharge:

En menant une analyse similaire, on peut déterminer le même type de relation pour la décharge. On doit cependant repérer la valeur maximale de Φ atteinte à la charge qui est notée Φ_i. Les relations donnant le moment de flexion en fonction de la courbure seront différentes selon que la décharge se produit à partir d'une courbure inférieure ou supérieure à Φ_4 Ces relations sont notées $\hat{M}$.

Pour $\Phi_i \le \Phi_4$, les expressions obtenues sont les suivantes:

$$\hat{M} = \begin{cases} E_1 I \left\{ \Phi - \Phi_i \left(1 - \frac{\Phi_2}{\Phi_i} \right)^3 + \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{\Phi_2}{\Phi_i} \right)^2 \right] \right\} & \text{pour } \Phi_i - \Phi_2 + \Phi_1 < \Phi \le \Phi_i \le \Phi_4 \\ E_1 I \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{(\Phi_2 - \Phi_1)^3}{(\Phi_i - \Phi)^2} \right) + \frac{3}{2} \Phi_1 - \frac{1}{2} \frac{\Phi_2^3}{\Phi_i^2} \right\} & \text{pour } \Phi_i \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \le \Phi \le \Phi_i - \Phi_2 + \Phi_1 \\ E_1 I \left\{ \frac{3}{2} \Phi_1 - \frac{1}{2} \frac{\Phi_1^3}{\Phi^2} \right\} & \text{pour } \Phi_1 \le \Phi \le \Phi_i \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \\ E_1 I \Phi & \text{pour } 0 \le \Phi \le \Phi_1 \end{cases} \tag{3.19}$$

Par contre lorsque la décharge débute pour une courbure supérieure à $\Phi 4$, elles deviennent :

- pour $\Phi > \Phi_4$:

$$\hat{M} = \Phi\, I \left\{ E_1 \left(\frac{\Phi_2}{\Phi}\right)^3 + E_2 \left[1 - \left(\frac{\Phi_4}{\Phi}\right)^3\right]\right\} + \frac{3}{2} E_1\, I\, \Phi_2 \left(\frac{\Phi_4^2 - \Phi_2^2}{\Phi^2}\right) + \frac{3}{2}\, I \left[1 - \left(\frac{\Phi_4}{\Phi}\right)^2\right](E_1\Phi_2 - E_2\Phi_4) \qquad (3.20)$$

où l'on reconnaît la dernière équation de (3.18).

- pour $\Phi \leq \Phi_4$:

On retrouve les relations (3.19) dans lesquelles il suffit de remplacer Φ_i par Φ_4.

3.2.2.3. Conclusion:

Cette étude constitue une bonne base de travail pour les études de flexion de poutre en superélasticité. Une loi de comportement, un chargement extérieur, ainsi qu'une géométrie très simple y sont choisis. Malgré cela, la réponse obtenue en terme de structure est très complexe.

Cependant, comme dans le cas du modèle précédent, ce schéma ne peut être appliqué qu'à des alliages présentant un comportement de type "plateau". De plus, la dissymétrie entre traction et compression n'est pas prise en compte ce qui peut poser des problèmes non négligeables, même dans le cas du comportement déjà cité.

L'approche développée dans ce travail de thèse reprend et développe en grande partie les idées de base de ces travaux précurseurs.

3.3. Effet mémoire:

3.3.1. Calcul de ressort par la méthode de T. Waram [C3.4]:

Le cas de ce modèle diffère des précédents par plusieurs aspects. D'une part on s'intéresse ici à l'aspect "réponse en température" d'une structure de type ressort hélicoïdal. D'autre part, on cherche ici directement les dimensions à donner à la structure en fonction de différents paramètres, et non pas, la réponse d'une structure de géométrie donnée sous une action extérieure. Ce modèle est par contre, lui aussi, du type phénoménologique.

Dans le cadre de l'effet mémoire assisté (par la force appliquée), on passe d'une température "haute" à une température "basse". On veut donc déterminer la géométrie du ressort soumis à un chargement mécanique extérieur qui respecte un déplacement δ_s, imposé, lors du passage de l'une à l'autre de ces températures.

Il est postulé dans ce modèle que le déplacement δ, en fonction de la charge appliquée P, est linéaire à haute et basse température (voir fig. III.6). Il est donc possible d'écrire, pour chacune de ces deux températures, la relation classique:

$$P = K\,\delta \tag{3.21}$$

où K est la raideur du ressort.

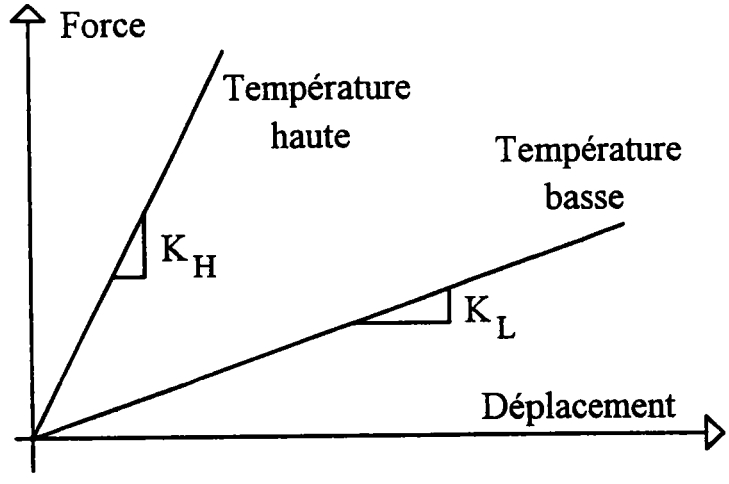


Fig. III.6: Déplacement en fonction de la force à haute et basse température.

On considère que le ressort travaille uniquement en torsion. Les relations établies pour les ressorts en matériaux à comportement élastique linéaire sont alors utilisables. Il est possible d'exprimer la valeur d'une contrainte maximale τ_c admissible à haute température par:

$$\tau_c = \tau\, W = \frac{8\, W\, P\, c}{\pi\, d^2} \tag{3.22}$$

avec

c: l'index du ressort (que l'on choisit), égal au rapport du diamètre moyen d'enroulement D sur le diamètre de spire d:

$$c = \frac{D}{d} \tag{3.23}$$

W: le facteur de correction de la contrainte de cisaillement. Ici, c'est le facteur de Wahl qui est utilisé.

$$W = \frac{4c - 1}{4c - 4} + \frac{0{,}615}{c} \tag{3.24}$$

De (3.22), on déduit facilement le diamètre d du fil à utiliser pour construire le ressort, et connaissant son index, le diamètre moyen d'enroulement:

$$d = \sqrt{\frac{8\, W\, P\, c}{\pi\, \tau_c}} \tag{3.25}$$

$$D = c\, d \tag{3.26}$$

Il reste maintenant à déterminer le nombre de spires utiles, n, de ce ressort. A partir de l'expression de la déformation maximale de cisaillement γ dans une spire, en fonction de la contrainte corrigée τ_c correspondante, il vient pour un ressort en matériau classique:

$$\gamma = \frac{\tau_c}{G} = \frac{\delta\, d}{n\, \pi\, D^2} \tag{3.27}$$

où G est le module de cisaillement.

n est alors obtenu à partir de (3.27):

$$n = \frac{\delta\, d}{\gamma\, \pi\, D^2} \tag{3.28}$$

Le même type de relation est utilisé dans le cas des AMF, en tenant compte de la différence entre les déplacements et les déformations entre haute et basse température:

$$n = \frac{(\delta_L - \delta_H)\, d}{(\gamma_L - \gamma_H)\, \pi\, D^2} = \frac{\delta_s\, d}{(\gamma_L - \gamma_H)\, \pi\, D^2} \tag{3.29}$$

avec

γ_H: la déformation à haute température que l'on peut calculer à partir de (3.27) en fonction du module de cisaillement à haute température G_H.

γ_L: la déformation à basse température que l'on impose.

δ_s: le déplacement voulu entre haute et basse température.

A partir de ces différentes relations et de (3.21), les rigidités du ressort à haute et basse température peuvent être définies:

$$K_H = \frac{G_H\, d^4}{8\, n\, D^3} \tag{3.30}$$

$$K_L = \frac{G_L\, d^4}{8\, n\, D^3} \tag{3.31}$$

avec G_L le module de cisaillement à basse température.

3.3.1.1. Conclusion:

Avec un nombre de paramètres limités, ce modèle très simple permet de déterminer complètement la géométrie d'un ressort hélicoïdal. Il faut cependant

prendre la précaution d'utiliser des ressorts dont les spires sont jointives soit à chaud, soit à froid. Il est néanmoins particulièrement intéressant pour les bureaux d'études.

Cependant, il faut réaliser une transformation complète du matériau pour pouvoir utiliser ce modèle. Les températures haute et basse doivent alors être bien définies et atteintes pour chaque cycle auquel sera soumise la structure.

3.4. Modèle de calcul de structures utilisé dans la suite des travaux: Méthode de BRESSE [C3.5].

L'objectif de ce travail est de fournir un modèle simple directement applicable dans un bureau d'étude. Une constatation s'impose: dans la majeure partie des applications industrielles, la géométrie de l'élément en AMF ainsi que les sollicitations mécaniques imposées restent simples (traction-compression, flexion, torsion). Une approche de type Résistance des Matériaux (RDM) est donc totalement adaptée à cet objectif. Ce travail développe les idées de bases, introduites par Tobushi [C3.2] et par Achenbach [C3.3], en utilisant une formulation tridimensionnelle de la loi de comportement et envisage des cas de chargements plus complexes (y compris des trajets thermomécaniques). La formulation adoptée pour la loi de comportement du matériau donne théoriquement accès à toutes les composantes du déplacement généralisé de la structure. Deux approches RDM permettent d'atteindre cet objectif: d'une part, les méthodes énergétiques fondées sur l'utilisation du théorème de Castigliano, d'autre part, l'utilisation de la méthode des intégrales de Bresse. Notre choix porte sur cette dernière méthode compte tenu de sa grande simplicité de résolution numérique (calcul intégral et non dérivation) et de sa souplesse d'utilisation (pas d'introduction de force fictive).

Dans la suite de cette section, une description de la méthode des intégrales de Bresse est donnée dans un cas général.

3.4.1. Mouvement relatif entre deux sections :

Considérons tout d'abord deux sections S_0 et S_1 infiniment voisines l'une de l'autre et séparées par une distance ds égale à G_0G_1 (voir fig. III.7). Ces deux sections sont à l'origine définie par une normale n, et leurs plans sont contenus dans le plan Π défini par les axes t et e. Le mouvement de la section S_0 relativement à la section S_1 peut toujours se réduire à une translation G_1G_1' du centre d'élasticité, et une rotation autour d'un axe passant par G_1[C3.5].

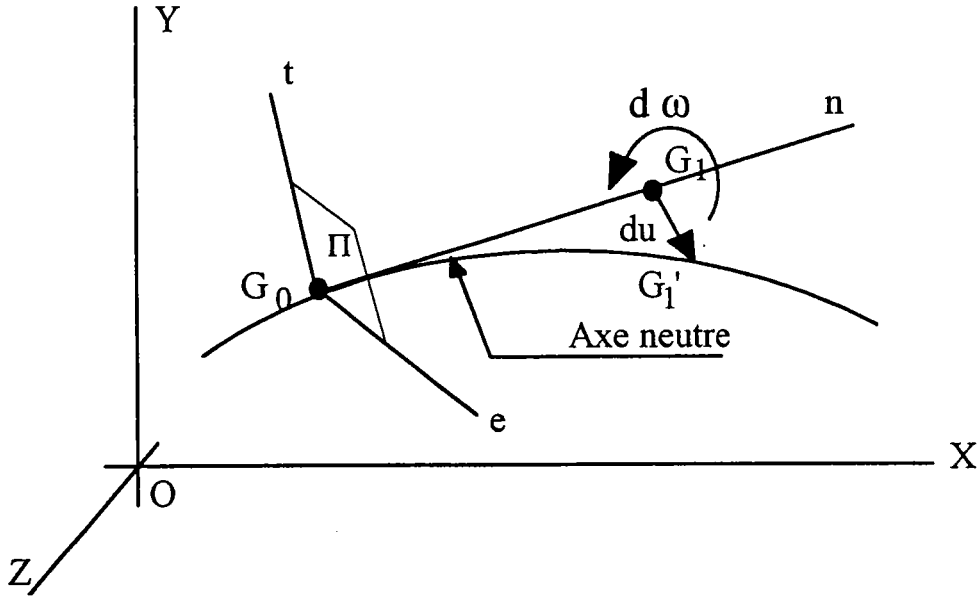


Fig III.7: Mouvement relatif entre deux sections

Chacun des mouvements, défini ci-dessus, peut à son tour être décomposé. La translation G_1G_1' se décompose en trois translations respectivement suivant les trois axes n, t et e:

$$\vec{du} = (u1\ \vec{n} + u2\ \vec{t} + u3\ \vec{e})\ ds \qquad (3.32)$$

La rotation autour de G se décompose quant à elle en trois rotations élémentaires autour de ces trois mêmes axes :

$$\vec{d\omega} = (\psi\ \vec{n} + \theta\ \vec{t} + \varphi\ \vec{e})\ ds \qquad (3.33)$$

3.4.2. Composition du mouvement pour une infinité de sections:

Considérons maintenant une poutre dont la fibre moyenne est G_0G_n. Les sections transversales successives S_0, S_1, S_2,... S_n de cette poutre sont définies par des plans normaux très voisins (voir fig.III.8). Supposons maintenant que l'on connaisse le mouvement absolu d'une section S_i. Le mouvement relatif entre deux sections S_i et S_{i+1} peut être déterminé en utilisant les relations données au paragraphe précédent. De là, on peut déterminer le mouvement absolu de la section S_{i+1} qui est la composition du mouvement absolu de la section S_i et du mouvement relatif entre ces deux sections. De proche en proche, on peut ainsi déterminer le mouvement de chaque point de la poutre situé entre S_0 et S_n.

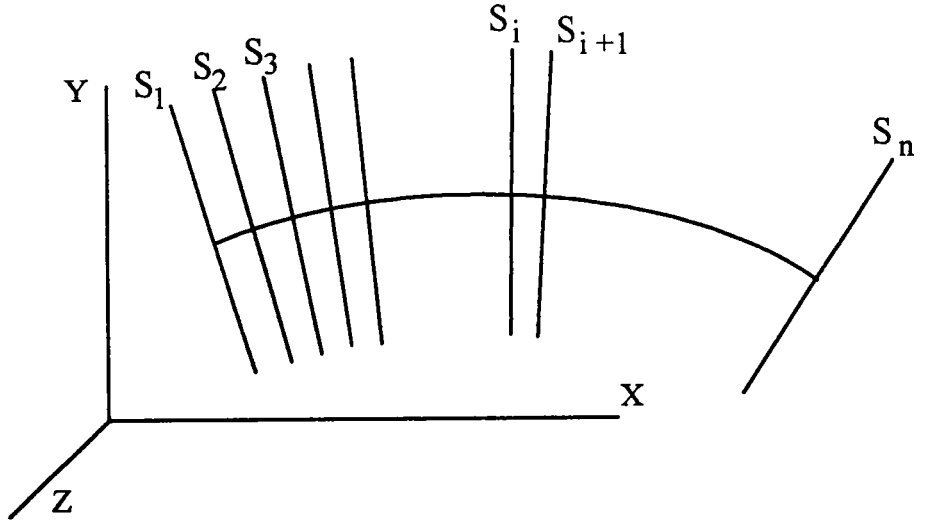


FIG III.8 : Description de la poutre par ses sections droites.

3.4.3. Formules de Bresse:

En supposant connu le déplacement d'un point A, c'est à dire la rotation

$\vec{\omega}_A$ et la translation $\vec{U}_A$ dans le repère de base R_0, on peut déterminer le mouvement de n'importe quel point B situé sur la fibre neutre.

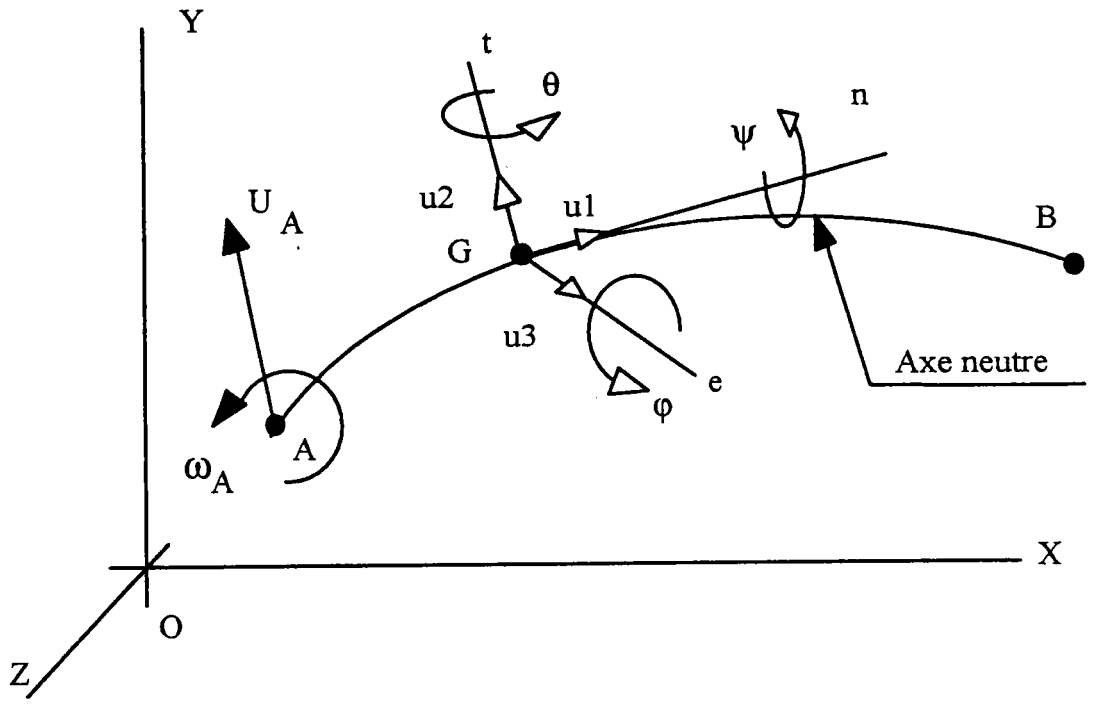


Fig III.9: Description du mouvement .

Le déplacement du point B (voir fig III.9) est fonction du déplacement et de la rotation en A et de la contribution des déplacements et rotations élémentaires entre A et B :

$$\vec{U}_B=\vec{U}_A+\vec{\omega}_A\wedge\vec{AB}+\int_{\cap AB}(u1\ \vec{n}+u2\ \vec{t}+u3\ \vec{e})\,ds\ \int_{\cap AB}(\psi\ \vec{n}+\theta\ \vec{t}+\varphi\ \vec{e})\wedge\vec{GB}\,ds \qquad (3.34)$$

La rotation du point B est fonction de la rotation en A et de la contribution des rotations élémentaires entre A et B :

$$\vec{\omega}_B=\vec{\omega}_A+\int_{\cap AB}(\psi\ \vec{n}+\theta\ \vec{t}+\varphi\ \vec{e})\,ds \qquad (3.35)$$

En projetant ces équations dans le repère de base $R_0(O,X,Y,Z)$, on obtient six équations.

3.4.4. Relations avec le torseur des efforts intérieurs :

Les rotations et mouvements relatifs sont liés à la traction-compression, au cisaillement, à la flexion et à la torsion. Ils peuvent être reliés au torseur, représentant les efforts intérieurs, défini par l'effort normal N, l'effort tranchant T, le moment fléchissant M_f et le moment de torsion M_t. Leurs expressions sont de la forme (d'après[C3.5]):

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{N}{\int_S E\, dS} & u_2 = \dfrac{T_2}{\int_S G\, dS} & u_3 = \dfrac{T_3}{\int_S G\, dS} \\ \psi = \dfrac{M_t}{\int_S G\, \rho^2\, dS} & \theta = \dfrac{M_{f2}}{\int_S E\, z^2\, dS} & \varphi = \dfrac{M_{f3}}{\int_S E\, y^2\, dS} \end{cases} \tag{3.36}$$

Les déplacements et rotations unitaires sont alors parfaitement définis à partir des efforts extérieurs, de la géométrie de l'élément et des caractéristiques du matériau utilisé.

3.5. Conclusion:

Il existe pour le moment peu de travaux concernant la modélisation des structures en AMF. Une grande majorité des applications AMF peuvent être représentées à partir des hypothèses classiques de type poutre (ressort, lame en flexion, ...). Nous choisissons de situer notre étude dans ce cadre. La réponse des structures à un chargement thermomécanique est alors obtenue en utilisant la formulation des intégrales de Bresse. Le choix de cette méthode a été guidé par le fait que cette approche tridimensionnelle est facilement adaptable d'un point de vue numérique. De plus, formulée de façon incrémentale, elle permet de tenir compte des grands déplacements.

Références bibliographiques:

[C3.1] TANAKA K., KOBAYASHI S., SATO Y., "Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys", Int.Journal of Plasticity, 1986, Vol. 2, p.59.

[C3.2] TOBUSHI H. et TANAKA K., "Deformation of a Shape Memory Alloy Helical Spring.", JSME Int. Journal, 1991, Series 1, Vol. 34, No. 1, p. 83.

[C3.3] ATANACKOVIĆ T, ACHENBACH M.,"Moment-curvature relations for a pseudoelastic beam", Continuum Mech. Thermodyn., 1989, p.73.

[C3.4] WARAM T., "Design Principles for Ni-Ti Actuators", dans Engineering Aspects of Shape Memory Alloys, 1990, p. 234.

[C3.5] BRESSE J.M., "Cours de mécanique appliquée - Première partie: Résistance des matériaux et stabilité des constructions", Paris, 1880.

CHAPITRE 4

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Table des matières:

4.1 Introduction: 93
4.2 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Zn-Al-Ni : 93
4.2.1 Traitement thermique: 94
4.2.2 Les échantillons : 94
4.2.2.1 Températures de transformation : 94
4.2.2.2 Caractéristiques mécaniques de l'alliage : 95
4.3 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Al-Be: 98
4.3.1 Traitement thermique: 99
4.3.2 Les échantillons: 99
4.3.2.1 Températures de transformation: 99
4.3.2.2 Caractéristiques mécaniques de l'alliage: 99
4.3.3 Montage de flexion: 100
4.3.4 Essais en température: 101
4.3.5 Histoire des éprouvettes: 101
4.3.5.1 Eprouvette A et B: 102
4.3.5.2 Eprouvette C: 102
4.3.6 Essais de traction: 102
4.3.6.1 Eprouvette A: 102
4.3.6.2 Eprouvette B: 103
4.3.6.3 Eprouvette C: 103
4.3.7 Essais de flexion: 107
4.3.7.1 Eprouvette A: 107
4.3.7.2 Eprouvette B: 108
4.3.7.3 Eprouvette C: 110
4.4 Conclusion: 114

4.1 Introduction:

Nous décrivons ici les résultats expérimentaux obtenus sur deux alliages à base Cuivre. Le premier alliage, un Cu-Zn-Al-Ni, est utilisé sous forme de ressort dans le thermomarqueur de la société IMAGO. Nous disposons de cet alliage sous forme de fil et sous forme de ressort. On réalise des essais de traction sur ces deux géométries d'éprouvettes. Le second matériau est un Cu-Al-Be, alliage utilisé dans les compteurs de cycle de la friteuse SEB. Il est disponible sous forme de lames sur lesquelles des essais de traction et de flexion sont effectués. Dans ce cas, les différents essais peuvent être réalisés sur la même éprouvette. Trois éprouvettes sont ainsi testées, les deux premières servant à déterminer les conditions optimales d'essai en flexion (déflexion maximale sans glissement aux appuis, absence de déformation résiduelle).

Pour chacun des matériaux testés, les essais peuvent être décomposés en deux parties. La première partie concerne l'identification des paramètres du matériau (traction, calorimétrie). La seconde partie nous permet de disposer de résultats qui vont permettre de confronter les modèles de calculs de structures avec la réponse de structures réelles faites du même matériau (ressort, poutres en flexion). Il est à noter que les éprouvettes servant à l'identification des paramètres et les structures ont subi le même traitement thermique.

4.2 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Zn-Al-Ni :

L'alliage utilisé est un alliage de type commercial (Cu-26,2% Zn-3,7% Al 1,1% Ni, pourcentages en poids) élaboré par la compagnie TREFIMETAUX.. Les différents échantillons utilisés pour les essais sont à l'origine sous forme de fil (∅ 0,8 mm). Ils proviennent tous de la même bobine. Le ressort utilisé est fabriqué par la société IMAGO.

4.2.1 **Traitement thermique:**

Les différents échantillons ont subi ensemble un traitement thermique de type industriel [C4.1]. Ce traitement se décompose en trois étapes successives qui sont :

- Une bétatisation à 843°C pendant 15 minutes.
- Une trempe à l'eau à température ambiante.
- Une stabilisation à 100°C pendant une heure.

4.2.2 **Les échantillons :**

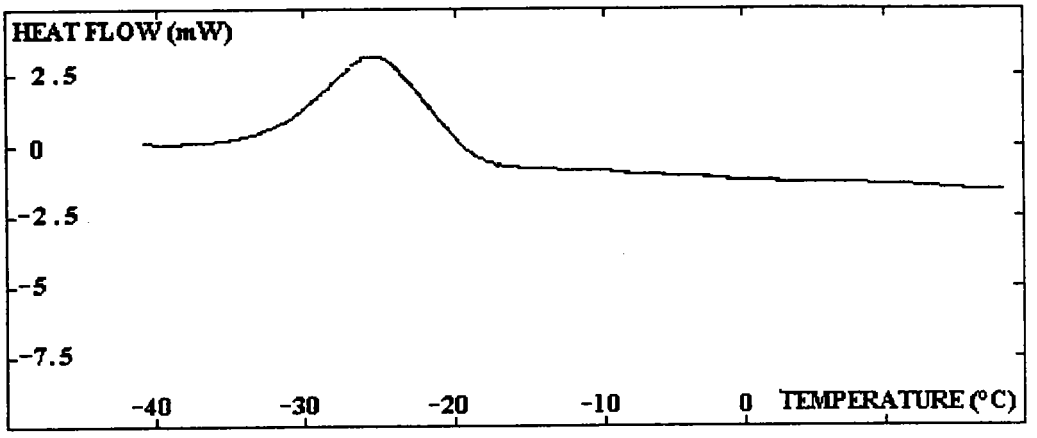
Afin d'obtenir les caractéristiques nécessaires au calcul, nous possédons deux types d'échantillons différents :

- une éprouvette de calorimétrie.
- une éprouvette de traction.

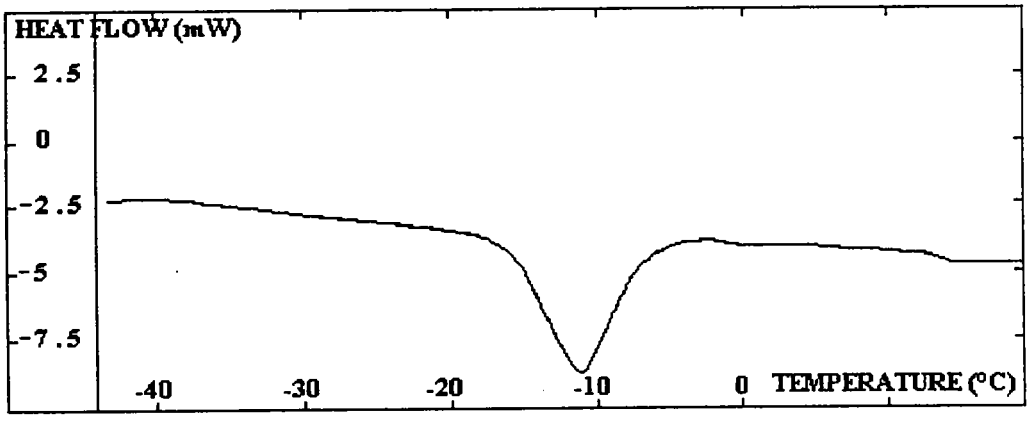
Nous possédons de plus un ressort de type thermomarqueur de la société IMAGO, dont la réponse sera à comparer avec les résultats théoriques.

4.2.2.1 **Températures de transformation :**

Les températures de transformation de l'alliage ont été obtenues par calorimétrie différentielle à balayage (voir figure IV.1). Le calorimètre utilisé est du type SETARAM DSC 111G. La plage de température accessible va de −123°C à +827°C.



Refroidissement



Chauffage

Fig. IV.1: Courbes de calorimétrie de l'alliage de Cu Zn Al Ni.

4.2.2.2 Caractéristiques mécaniques de l'alliage :

Afin de pouvoir effectuer des calculs sur le ressort, il est nécessaire de pouvoir déterminer la valeur du module de cisaillement de l'austénite, ainsi que celui du matériau en cours de transformation. Ces deux quantités sont déterminées à l'aide de la loi de comportement et des valeurs des modules d'élasticité et de transformation obtenus à partir d'une courbe de traction sur le fil (voir fig IV.2). La vitesse de l'essai est de 1 mm/mn. Cet essai, ainsi que les suivants, sont

réalisés à température ambiante sur une machine de traction ZWICK 1484 pilotée par un micro-ordinateur de type PC.

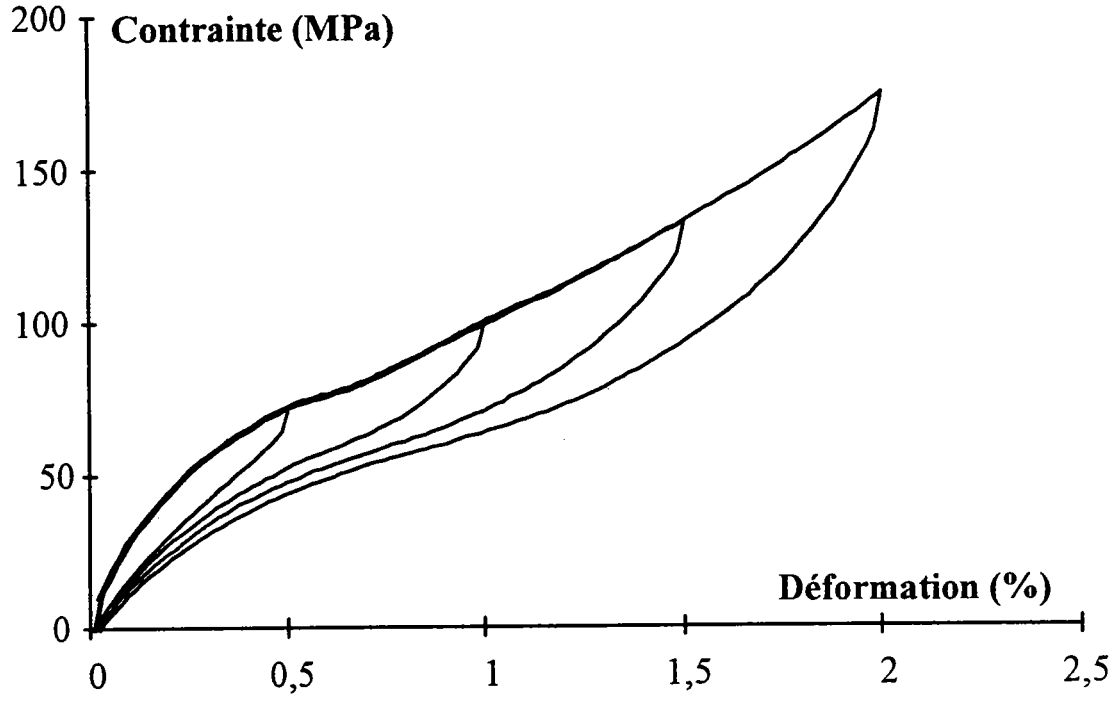


Fig. IV.2: Courbe de traction à température ambiante utilisée pour l'identification des paramètres.

Les ressorts, fournis par la société IMAGO, sont conçus pour fonctionner dans le thermomarqueur. Ils sont du type ressort de compression. Ces ressorts étant de petites dimensions, il aurait fallu pour les tester dans leur configuration de départ, construire un montage expérimental spécifique. Plutôt que de recourir à cette solution, nous avons préféré modifier le ressort lui-même. Les deux spires extrêmes du ressort ont donc été transformées en crochets afin d'obtenir un ressort du type traction. Cette manipulation a bien sûr été faite avant traitement thermique. Les caractéristiques géométriques du ressort ainsi obtenu sont présentées en fig. IV.3.

Diamètre moyen d'enroulement	3,4 mm
Diamètre de spire	0,8 mm
Nombre de spires utiles	6
Pas du ressort	2,5 mm
Angle d'inclinaison hélice initial	13,86 °
Longueur utile développée du ressort	39 mm

Fig. IV.3: Données géométriques du ressort.

Le ressort est placé sur deux crochets en acier (type corde à piano) qui sont montés dans les mors de la machine de traction (voir fig. IV.4). Ce type de montage a l'avantage de permettre au ressort de s'auto-centrer pendant l'essai. Le déplacement du ressort est enregistré par le capteur de traverse de la machine de traction. La courbe force-déplacement du ressort obtenue est présentée en figure IV.5 pour des décharges effectuées à différentes valeurs de déplacement.

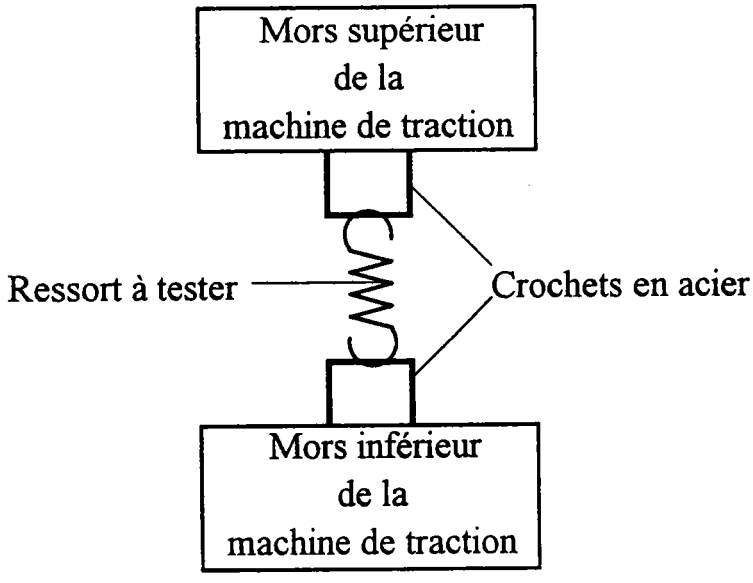


Fig. IV.4: Situation du ressort dans la machine d'essai.

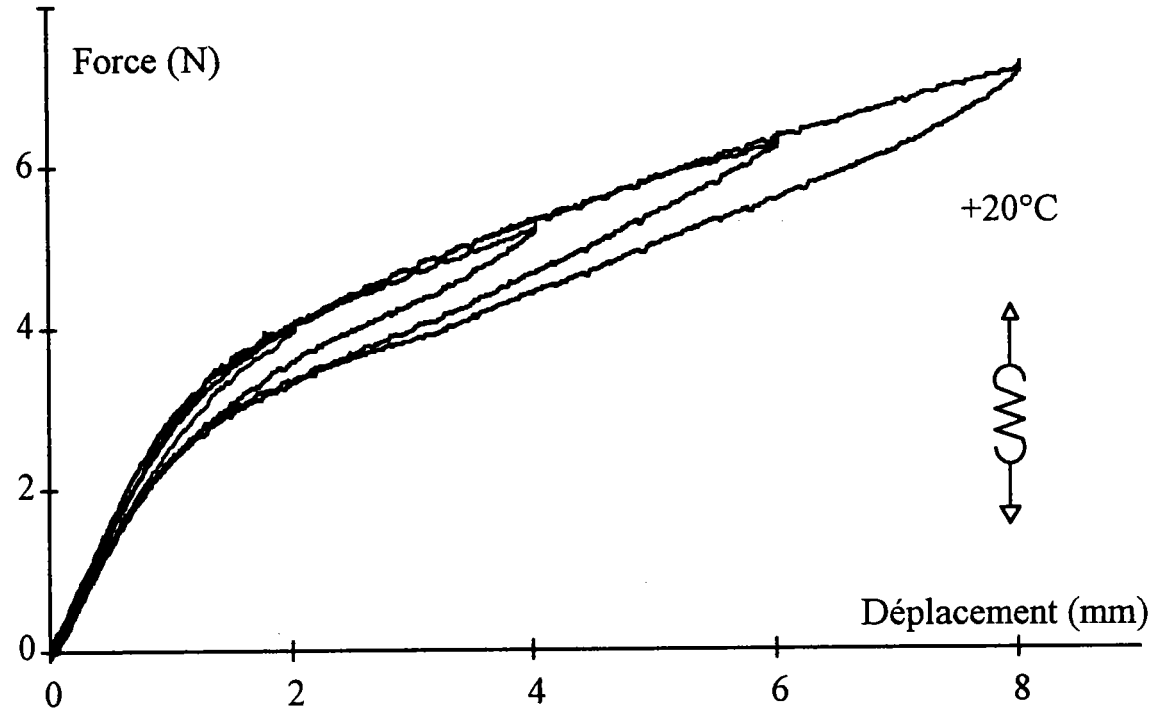


Fig. IV.6: Courbe force-déplacement du ressort.

4.3 Expériences réalisées sur un alliage de Cu-Al-Be:

L'alliage utilisé est élaboré par la société TREFIMETAUX. Sa composition est la suivante : Cu Al-11,4 % Be-0,6 %. Les pourcentages sont donnés en poids. Les différents échantillons utilisés pour les essais sont tous issus de la même bobine. La section est rectangulaire (voir fig.IV.7).

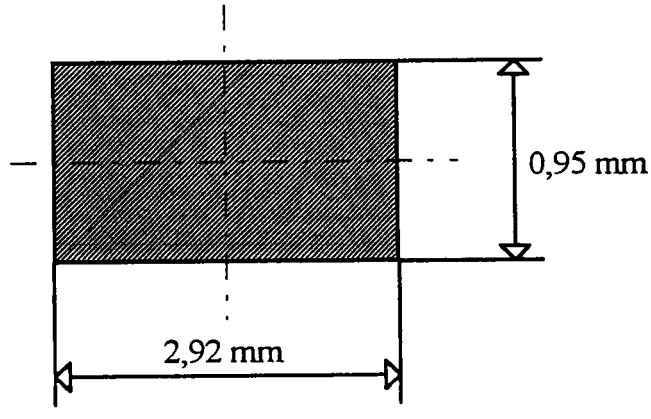


Fig. IV.7 : Section des éprouvettes utilisées.

4.3.1 **Traitement thermique:**

L'alliage est élaboré par filage à chaud. Il est trempé en sortie de filière. Cet alliage n'a subi aucun traitement thermique et sera donc utilisé brut d'élaboration dans les essais suivants.

4.3.2 **Les échantillons:**

Afin d'obtenir les caractéristiques nécessaires au calcul, trois éprouvettes ont été prélevées. Elles serviront toutes trois aux essais mécaniques, à savoir, traction et flexion. Aucune éprouvette de calorimétrie n'a été sélectionnée car les températures de transformation théoriques annoncées par le fabricant excèdent largement les capacités du calorimètre. Il faudra donc les estimer par un autre moyen.

4.3.2.1 **Températures de transformation:**

Une estimation des températures de transformation sera réalisée à partir des courbes de traction en repérant les contraintes de début de transformation et de fin de transformation inverse. Ces contraintes mesurées à différentes températures permettront de plus de déterminer la valeur de la pente $d\sigma/dT$. Nous ne pourrons de cette manière obtenir que des valeurs pour M_s et A_f.

4.3.2.2 **Caractéristiques mécaniques de l'alliage:**

Afin de pouvoir effectuer des calculs par la suite, il est nécessaire de déterminer plusieurs paramètres. Les modules d'élasticité, et de transformation en traction seront mesurés sur les courbes expérimentales. La différence de comportement en traction et compression impose de plus que l'on réalise des tests de compression. Plutôt que d'effectuer ceux-ci, qui sont très délicats à réaliser, nous utiliserons les résultats de l'approche autocohérente développée par Patoor et al. pour simuler cette courbe.

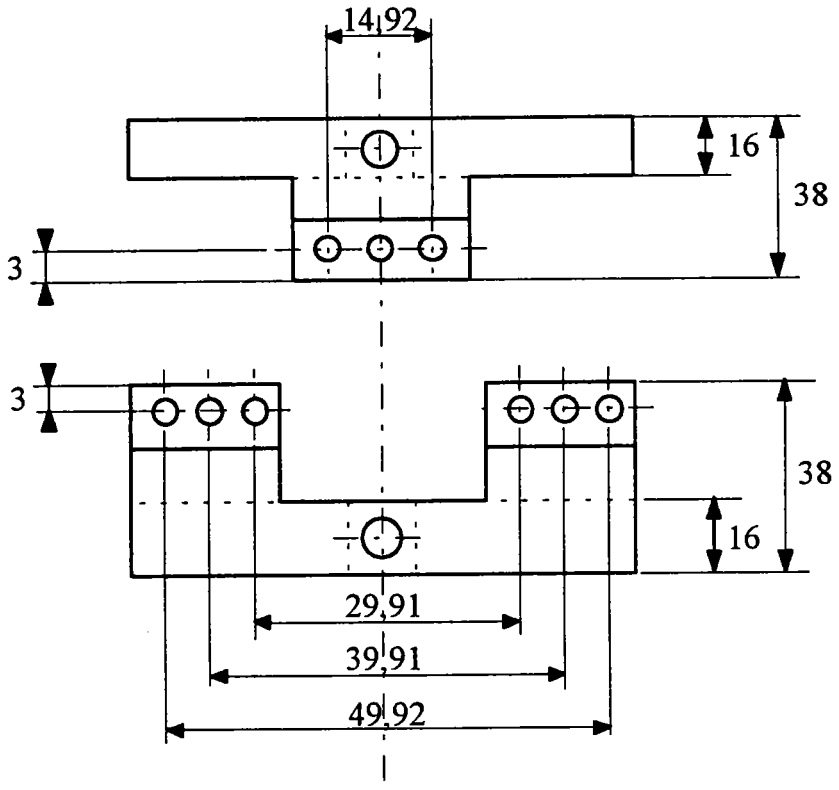
Les essais sont réalisés sur une machine de traction ZWICK 1484, d'une capacité maximale de 200.000 N, couplée à un micro ordinateur de type PC qui recueille

les différentes données mesurées. Ces tests ont lieu à des températures différentes, et dans le cas de la flexion, avec des géométries de chargement différentes. En traction, on utilise comme capteur de déplacement un extensomètre analogique de type SANDNEK MESSTECHNIK. En flexion, c'est le capteur de traverse de la machine de traction qui joue ce rôle. Chaque type d'essai est mené jusqu'à "stabilisation" des cycles imposés, c'est à dire jusqu'à ce qu'ils soient reproductibles. Les premiers cycles ne sont pas exploités dans le cadre de cette étude.

4.3.3 **Montage de flexion:**

Dans le but de réaliser des expériences de flexion, un montage de conception simple a été réalisé au laboratoire. Il permet de réaliser des essais 3 et 4 points en variant la position des plots dans les logements qui leur sont destinés (voir fig. IV.8). Il est constitué de deux éléments principaux qui se montent à la place des mors conventionnels de la machine de traction. L'éprouvette repose sur des plots qui traversent le montage.

L'usinage de ce montage a été particulièrement soigné. Par exemple, les surfaces fonctionnelles du montage ont été réalisées dans la même phase afin d'obtenir des alignements de bonne qualité. Le matériau choisi pour le montage est le bronze afin de réduire les effets du frottement aux appuis (un montage précédent en aluminium n'avait pas donné satisfaction). Les piges constituant les appuis sont en acier type corde à piano. Elles sont d'un diamètre plus petit que le diamètre des logements. De plus, elles sont rodées et lubrifiées à l'huile, une fois encore, pour limiter le frottement.



Diamètres de passage des piges : 1mm

Fig; IV. 8: Montage de flexion polyvalent.

4.3.4 Essais en température:

Pour les essais réalisés à des températures différentes, une enceinte climatique, de marque SERVATHIN est utilisée. Cette enceinte entoure complètement le montage (traction et flexion). Le refroidissement ou le chauffage est assuré par de l'air. L'enceinte est auto-régulée, mais le mode de chauffage-refroidissement impose de long temps d'attente pour que la température se stabilise. Le capteur de température est toujours fixé sur l'échantillon. Pour les tests de flexion, il est maintenu en contact sur la partie non utile de l'éprouvette.

4.3.5 Histoire des éprouvettes:

Nous avons donc sélectionné trois éprouvettes, notées A,B, et C. Les deux premières sont destinées à tester le montage de flexion. Chaque essai consiste en une suite de boucles croissantes (dont le nombre est variable). Le pilotage de ces

différents essais est toujours fait en **déplacement**. Le déplacement pris en compte est celui situé sous les points d'application des charges dans le cas de la flexion.

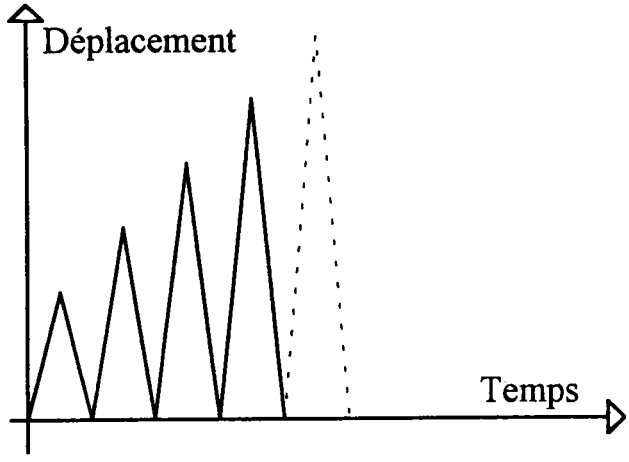


Fig. IV.9: Représentation schématique d'un essai

4.3.5.1 Eprouvette A et B:

Les éprouvettes subissent tout d'abord des essais de flexion 3 et 4 points. Elles sont ensuite soumises à des tests de traction. Tous les essais effectués sur ces deux échantillons ont lieu à température ambiante.

4.3.5.2 Eprouvette C:

Les essais subis par cette éprouvette sont dans l'ordre :

- des essais de traction à température ambiante.
- des essais de flexion à température ambiante.
- des essais de flexion à différentes températures.
- des essais de traction à différentes températures.

4.3.6 Essais de traction:

4.3.6.1 Eprouvette A:

Comme dans la première partie, cet échantillon a servi calibrer les essais. Les résultats, même s'ils sont proches de ceux obtenus pour les essais suivants, peuvent prêter à discussion. En effet, l'éprouvette a subi une déformation

permanente à la suite d'un test de flexion (fig. IV.18) ce qui a posé des problèmes dans ces essais. Ces courbes ne seront donc pas exploitées.

4.3.6.2 **Eprouvette B:**

Cet échantillon a subi huit essais à température ambiante. Chaque essai consiste en trois boucles croissantes allant de 1 à 2 pourcent de déformation par pas de 0,5%.

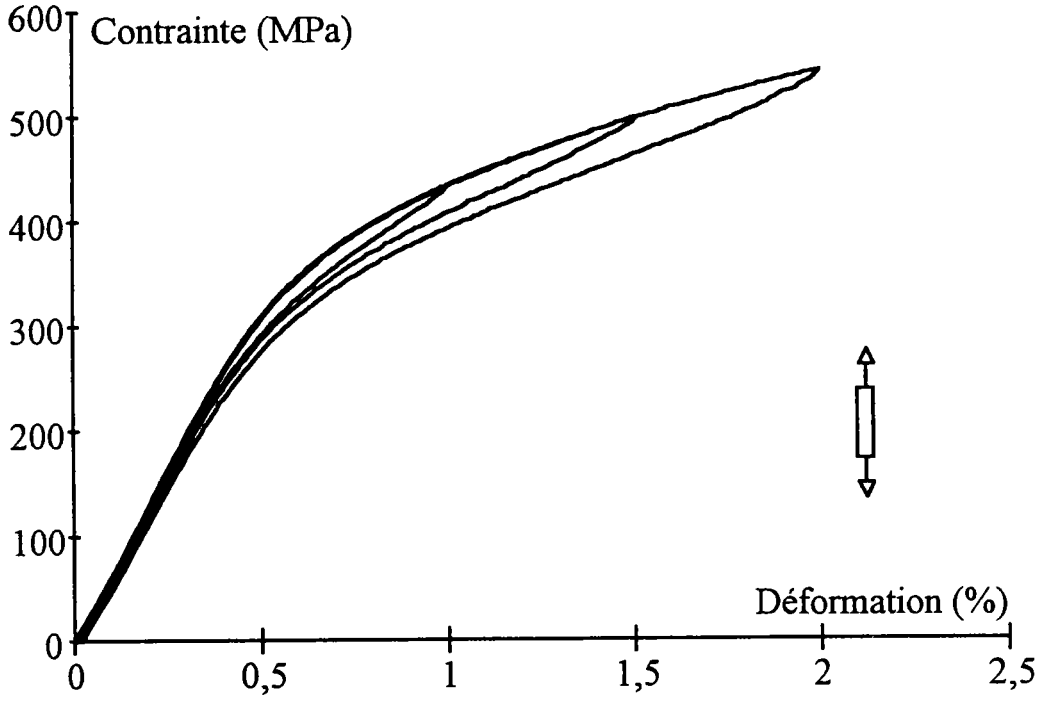


Fig. IV.10: Essai de traction à l'ambiante pour l'éprouvette B.

4.3.6.3 **Eprouvette C:**

Sept essais, du même type que ceux décrits ci-dessus, ont été réalisés à température ambiante avant les essais de flexion. Une des courbes obtenue est donnée en figure IV.11. Après la flexion, l'échantillon a aussi été testé à différentes températures (fig. suivantes).

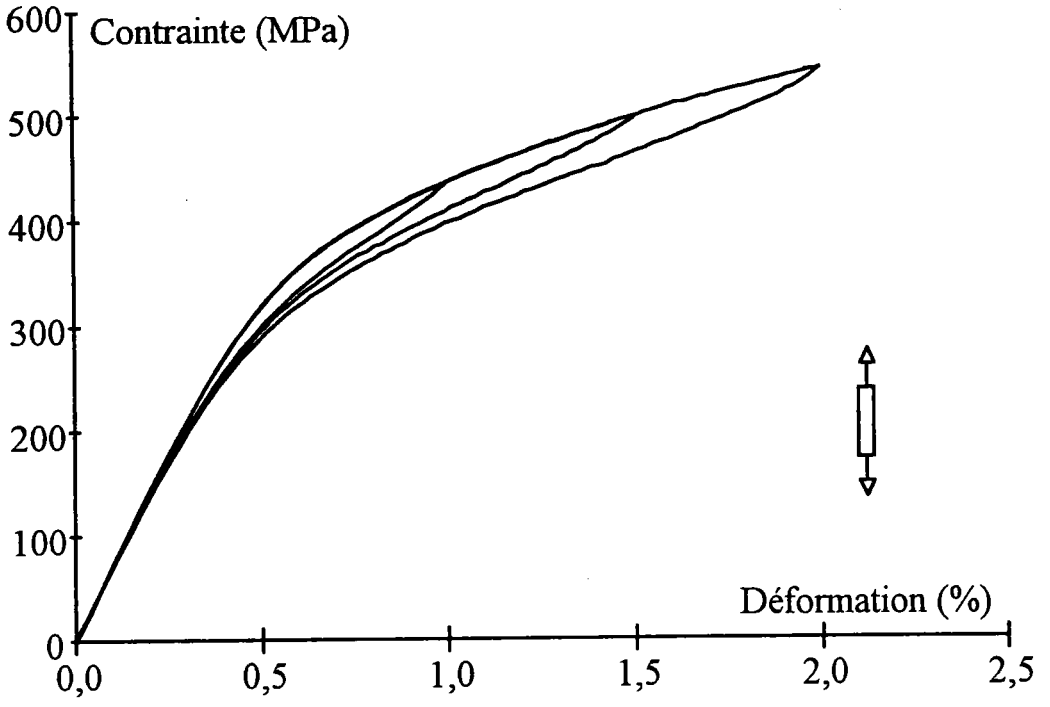


Fig. IV.11: Essai de traction à l'ambiante réalisé avant les essais de flexion.

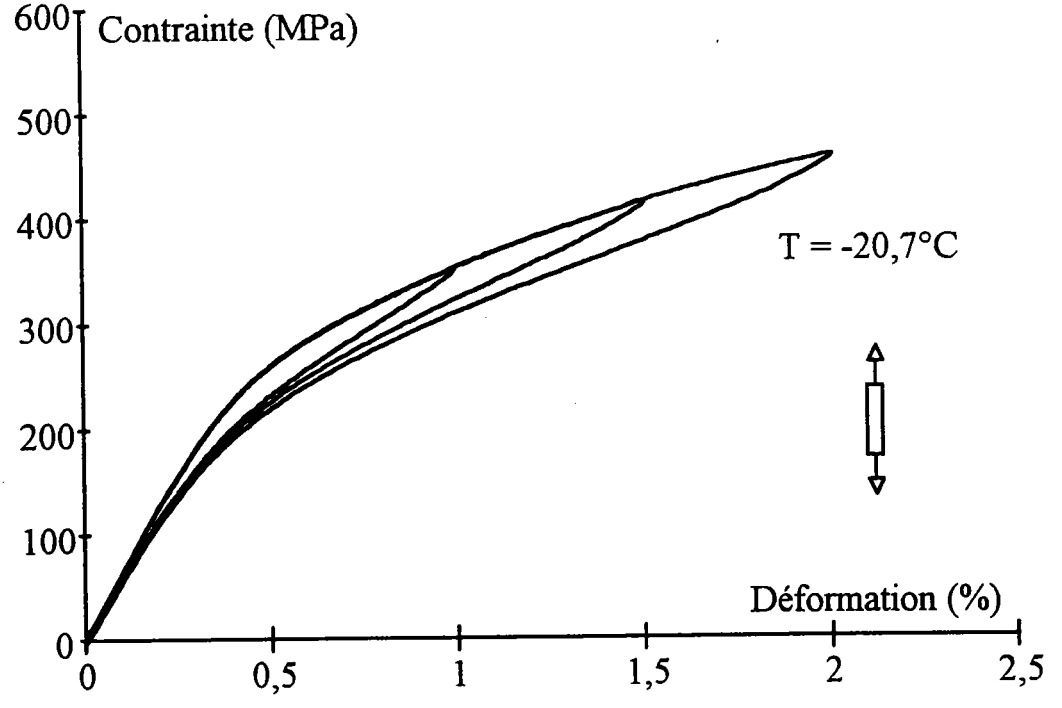


Fig. IV.12: Essai de traction à une température de -20,7°C. Réalisé après la flexion.

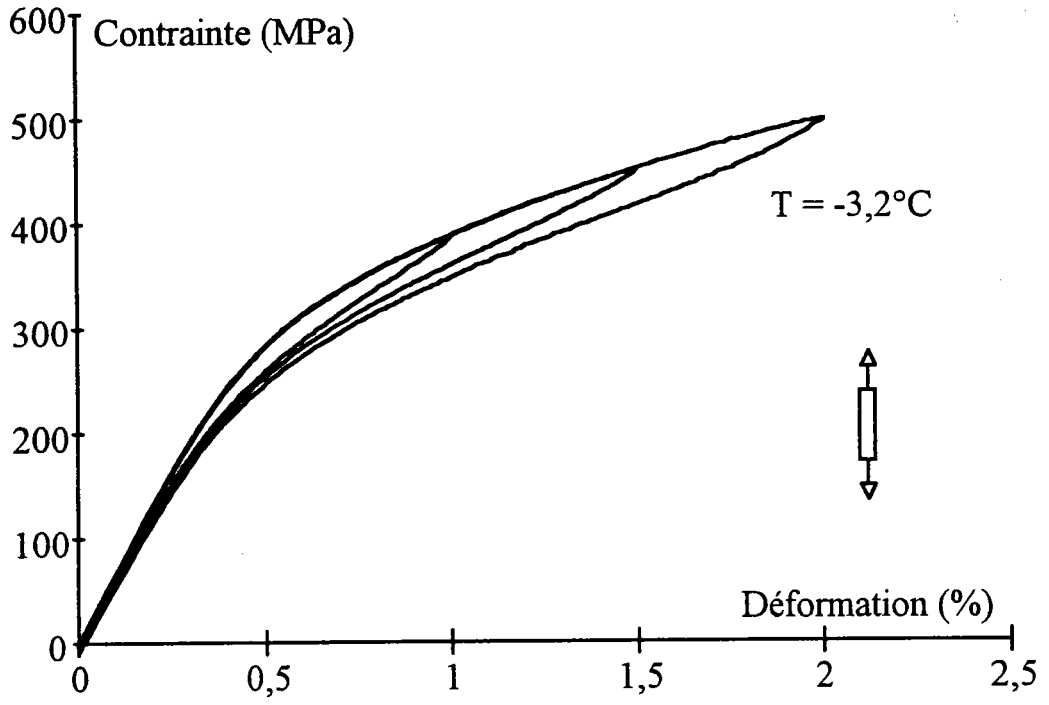


Fig. IV.13: Essai de traction à une température de -3,2°C. Réalisé après la flexion.

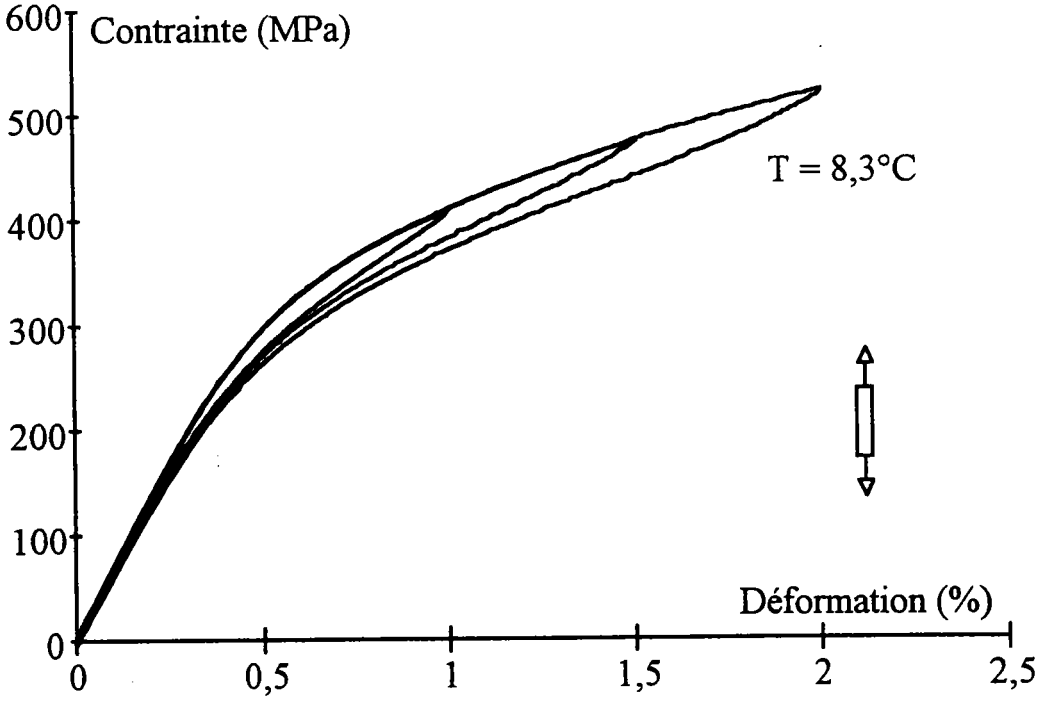


Fig IV.14: Essai de traction à une température de 8,3°C. Réalisé après la flexion.

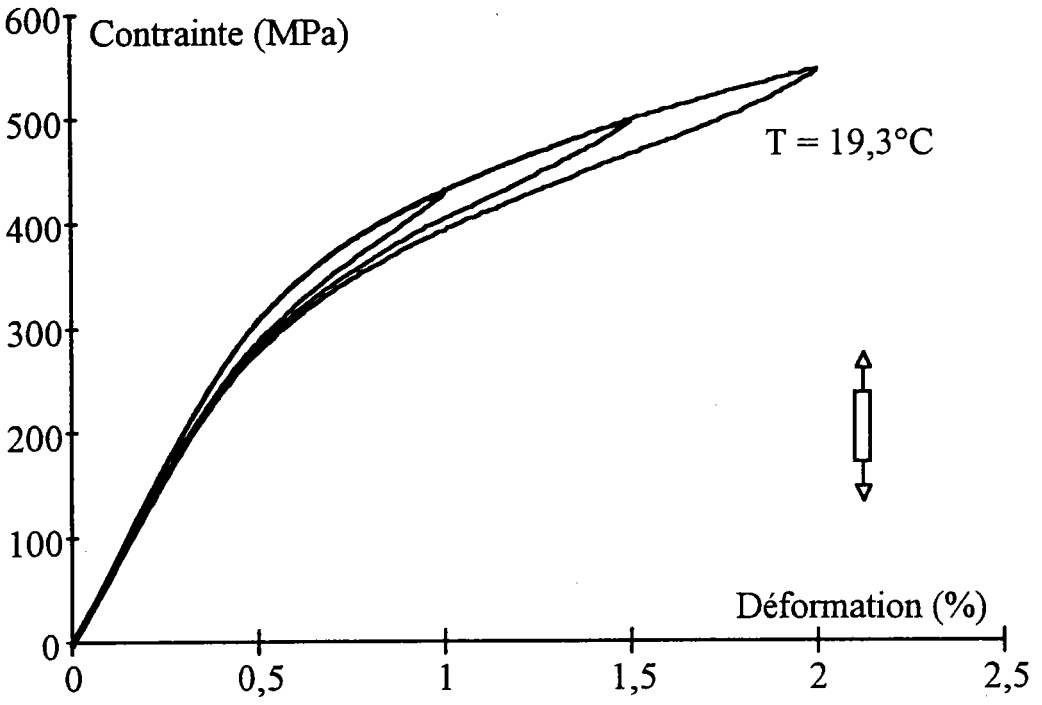


Fig IV.15: Essai de traction à une température de 19,3°C. Réalisé après la flexion.

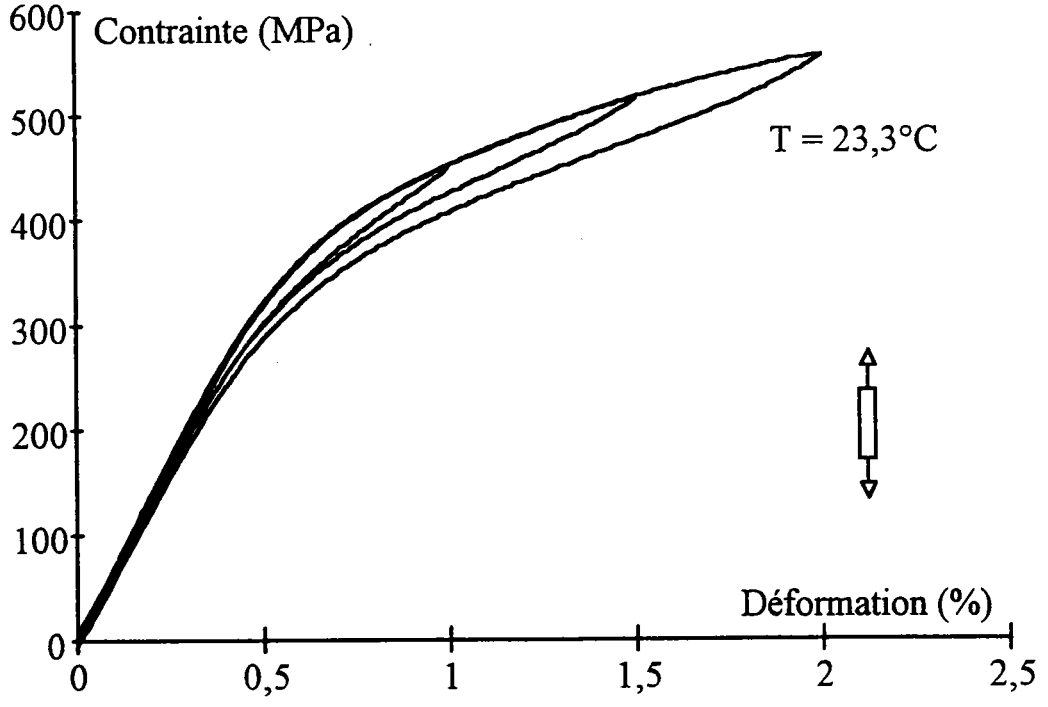


Fig IV.16: Essai de traction à une température de 23,3°C. Réalisé après la flexion.

4.3.7 **Essais de flexion:**

4.3.7.1 **Eprouvette A:**

Les conditions et le nombre d'essais subis par cette éprouvette sont donnés dans le tableau figure IV.17. Cette série a permis de vérifier que le lubrifiant le plus adéquat à utiliser est l'huile. D'autres part, elle a servi à déterminer, pour les différentes configurations du montage, les conditions de déplacement maximales admissibles. En effet, dans certaines conditions, les données obtenues ne correspondent plus du tout aux quantités que l'on désire mesurer. A titre d'exemple, la figure IV.18 montre les différents problèmes que l'on peut rencontrer. Cette courbe correspond au second type d'essai flexion 4 points.

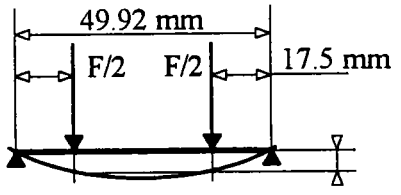
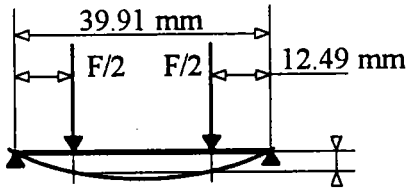
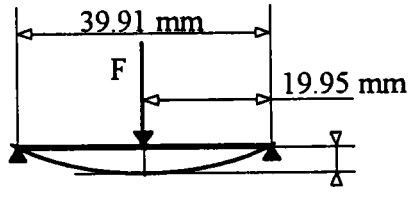
Configuration essai	T (°C)	Nb. essais	Ordre
	23	6	1ère série
	23	1	2ème série
	23	3	3ème série

Fig IV.17 : Configuration des essais pour l'éprouvette A.

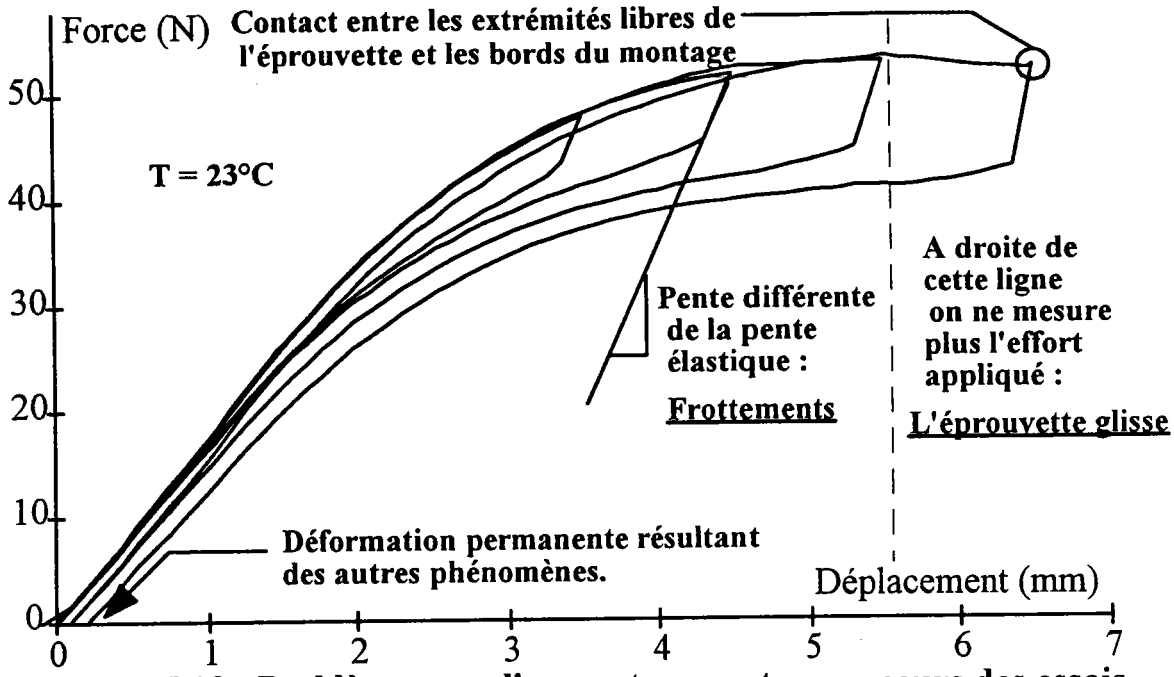


Fig. IV.18 : Problèmes que l'on peut rencontrer au cours des essais.

4.3.7.2 Eprouvette B:

Les conditions et le nombre d'essais subis par cette éprouvette sont donnés dans le tableau figure IV.19. Dans ce cas, les essais de mise au point ont été poursuivis. On a aussi vérifié que l'on pouvait augmenter la vitesse des essais sans perturber la reproductibilité des cycles. Les essais, réalisés à des vitesses de 2mm/mn et 5mm/mn, présentent des courbes force-déplacement pratiquement confondues. Les courbes force-déplacement obtenues pour les deux essais décrits ci-dessous sont donnés en figure IV.20 et IV.21, pour une vitesse de 2mm/mn.

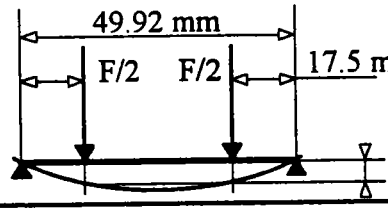
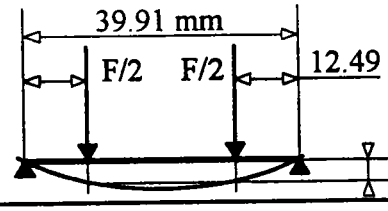
Configuration essai	T (°C)	Nb. essais	Ordre
	23	6	1ère série
	23	3	2ème série

Fig. IV.19 : Configuration des essais pour l'éprouvette B.

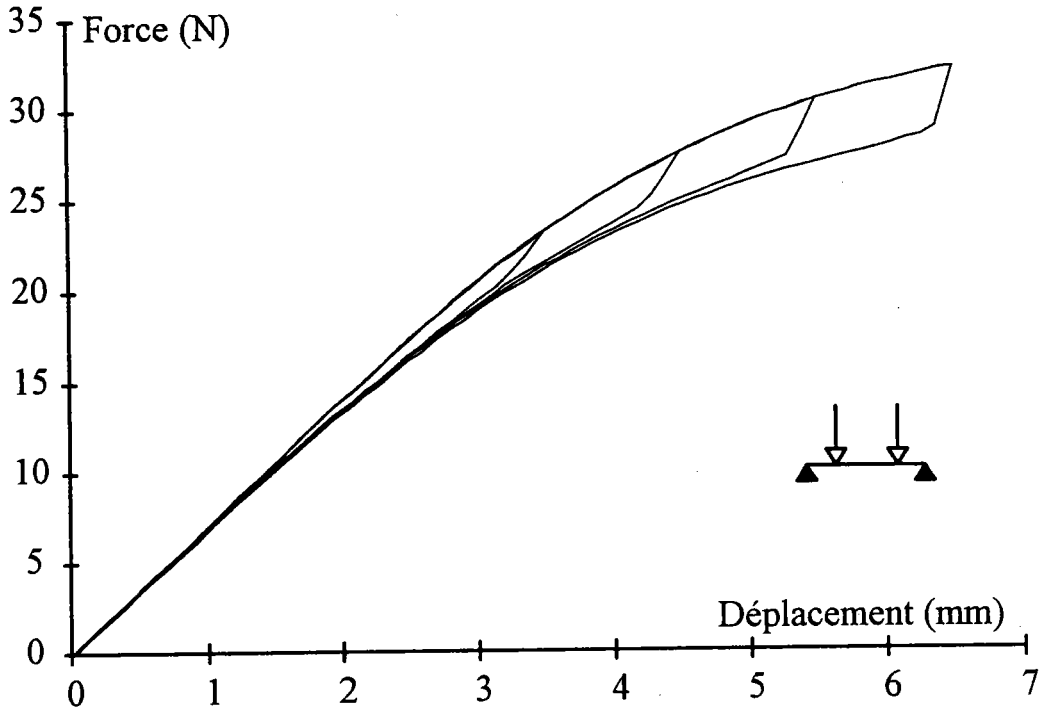


Fig IV.20: Essai de flexion 4 points du premier type sur l'éprouvette B.

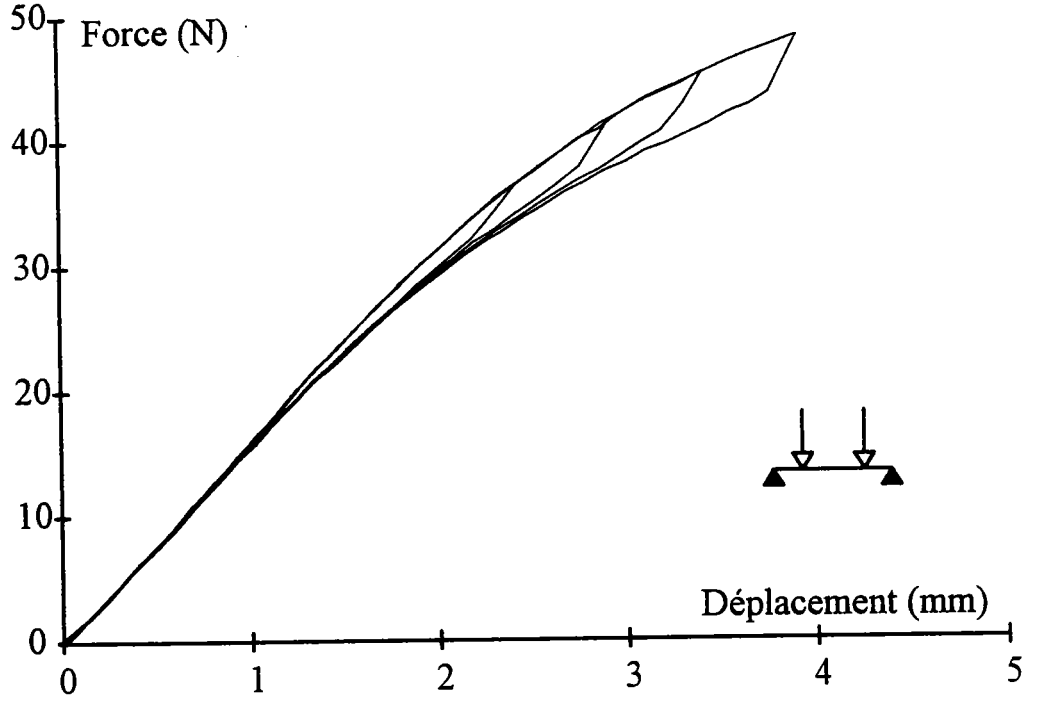


Fig. IV.21: Essai de flexion 4 points du second type réalisé sur l'éprouvette B.

4.3.7.3 **Eprouvette C:**

Cette éprouvette a subi des essais de flexion dans plusieurs configurations possibles du montage (fig. IV.22). C'est en outre la seule éprouvettes qui ait été testée à plusieurs températures. Un seul type de chargement a été utilisé dans ce cas. Au cours des tests, il a pu être vérifié à plusieurs reprises que la vitesse ne jouait pas sur la reproductibilité des cycles, du moins dans les plages étudiées.

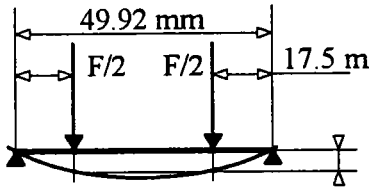
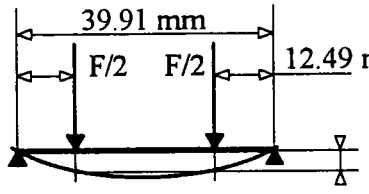
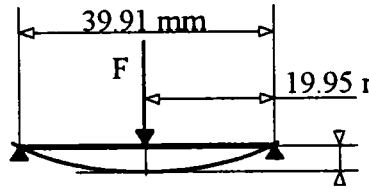
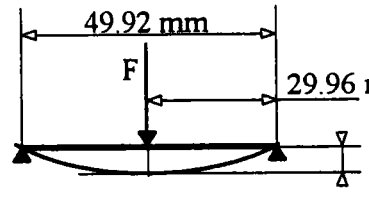
Configuration essai	T (°C)	Nb. essais	Ordre
	23	9	1ère
	-20	6	5ème
	-7	3	6ème
	0	3	7ème
	23	3	2ème série
	23	4	3ème série
	23	3	3ème série

Fig IV.22: Configuration des essais pour l'éprouvette C.

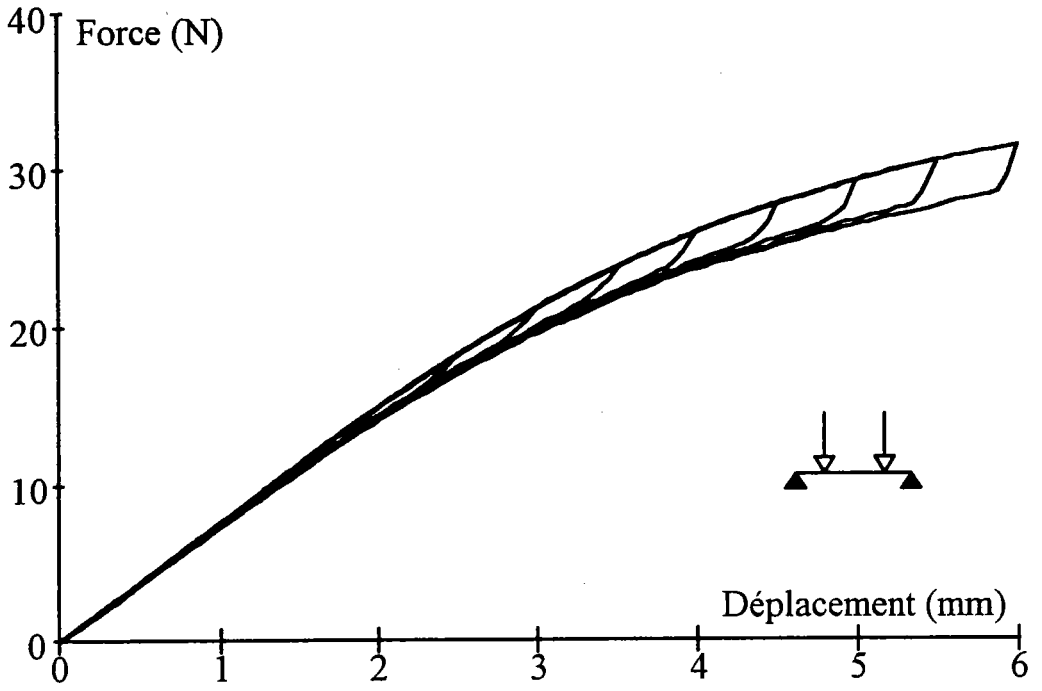


Fig IV.23 : Essai de flexion 4 points à température ambiante.

Flexion 4 points du premier type.

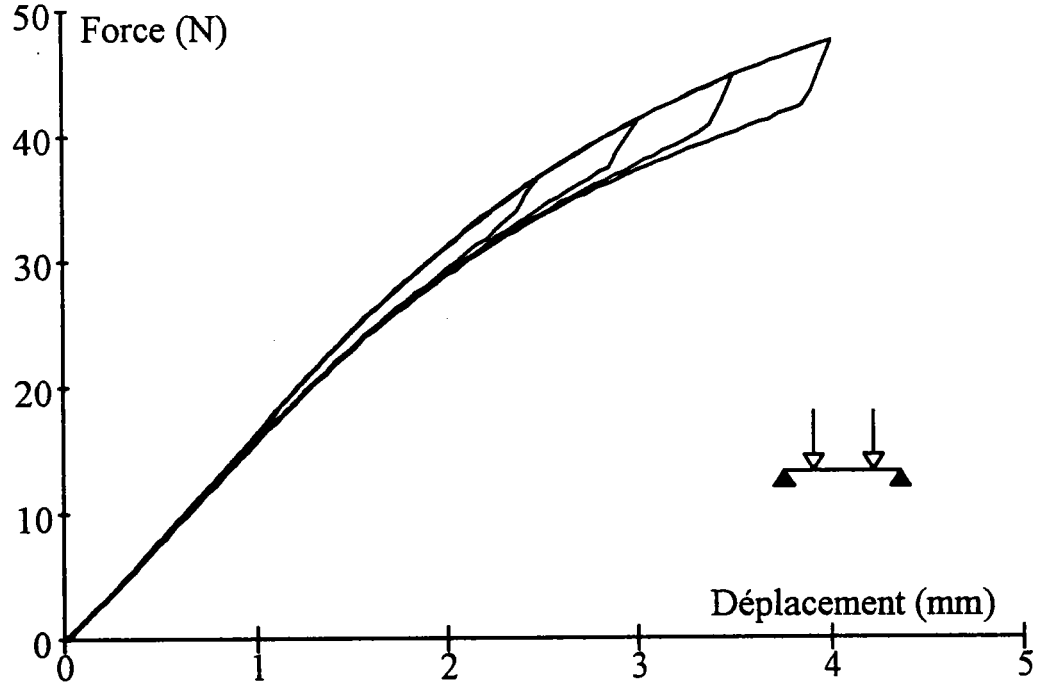


Fig. IV.24 : Essai de flexion 4 points à température ambiante.

Flexion 4 points du second type.

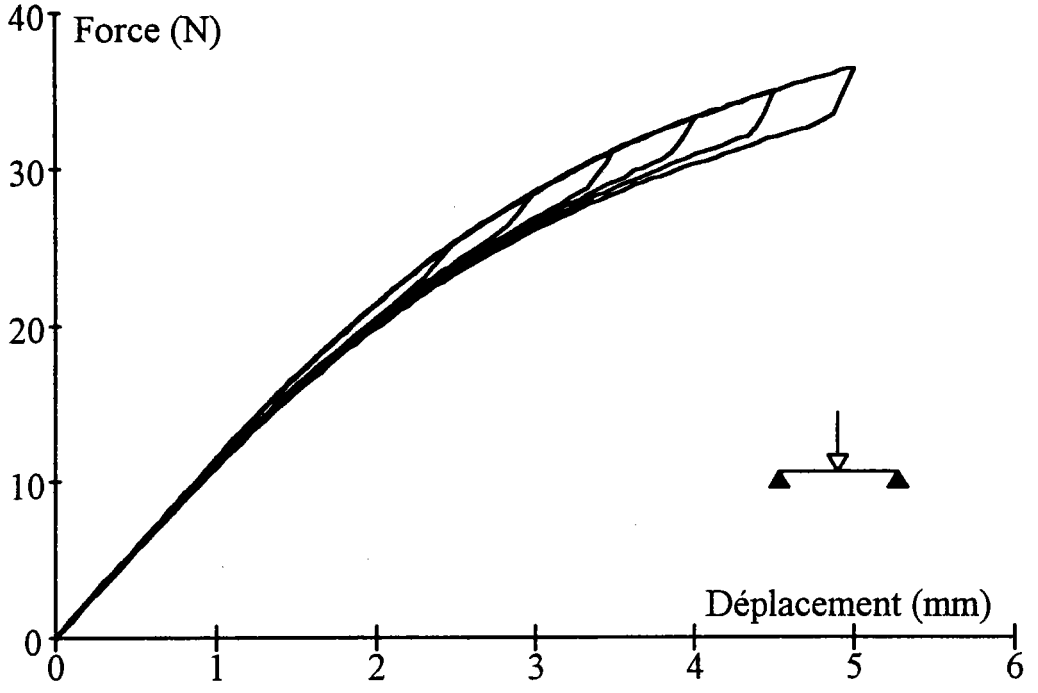


Fig. IV.25 : Essai de flexion 3 points à température ambiante.

Flexion 3 points du premier type.

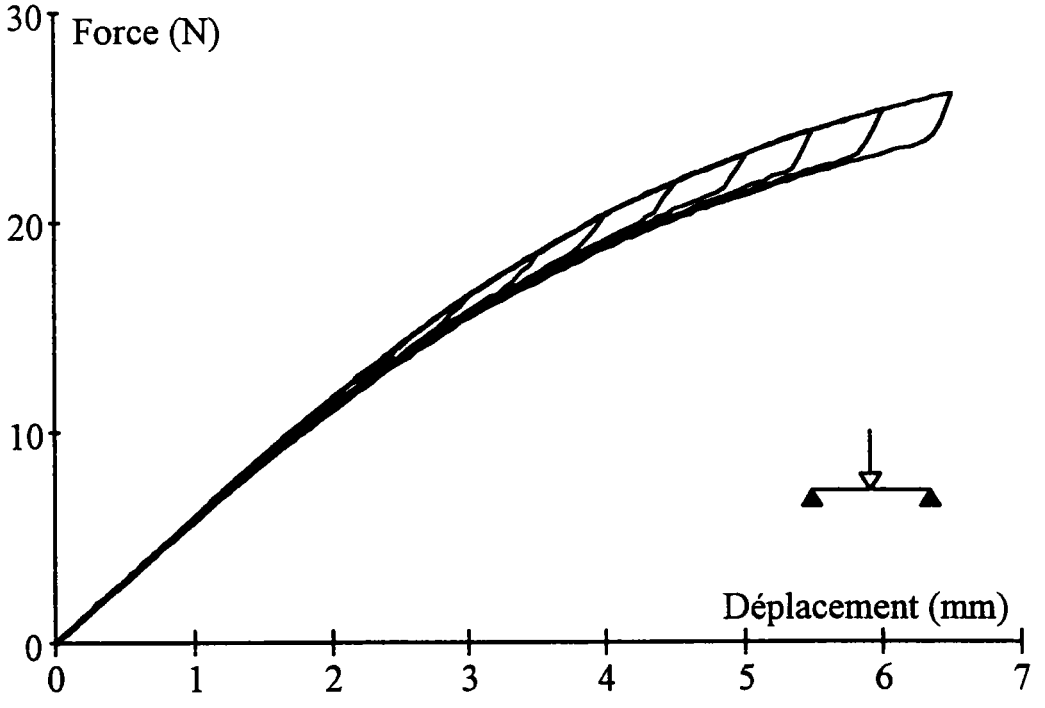


Fig IV.26 : Essai de flexion 3 points à température ambiante.

Flexion 3 points du second type

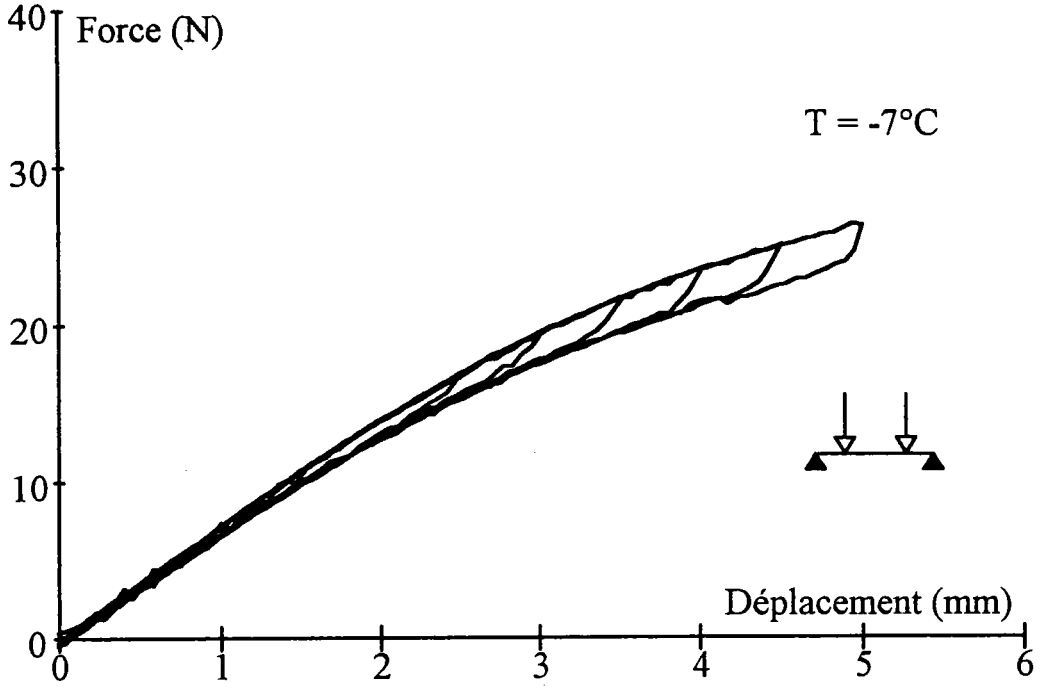


Fig. IV.27 : Essai de flexion 4 points à -7°C.

Flexion 4 points du premier type.

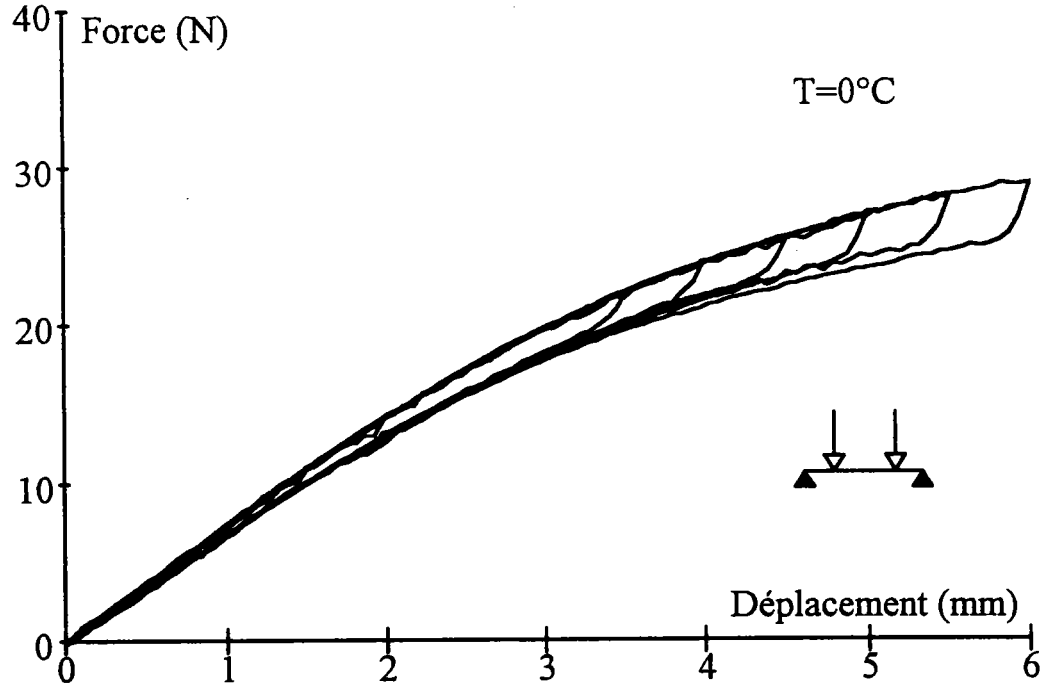


Fig. IV.28 : Essai de flexion 4 points à 0°C.

Flexion 4 points du premier type.

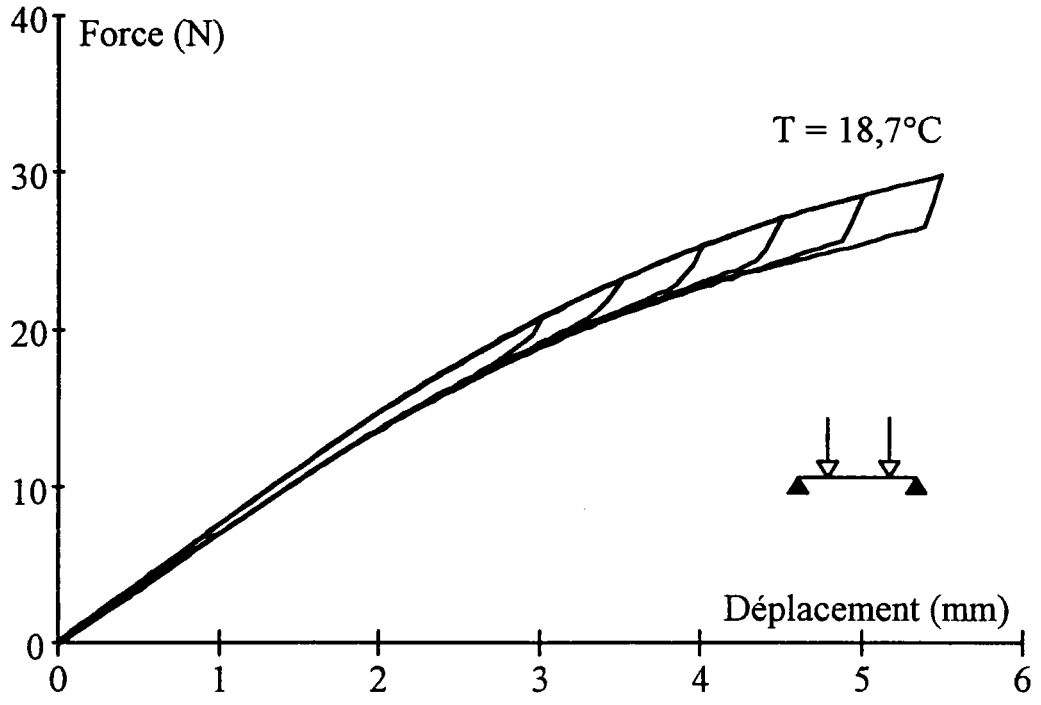


Fig. IV.29 : Essai de flexion 4 points à 18,7°C.

Flexion 4 points du premier type.

4.4 Conclusion:

Nous avons décrit dans cette section des essais expérimentaux réalisés sur deux types d'alliages à mémoire à base de Cuivre. Les résultats obtenus sont conformes aux résultats classiquement obtenus sur ces matériaux. On retrouve en comportement non linéaire à seuil fortement dépendant de la température avec formation de boucles internes lors de la décharge. On vérifie que le mode de chargement possède une grande importance sur la réponse obtenue. Les résultats obtenus nous seront utiles dans la suite de l'étude. Ceux-ci peuvent être classés dans deux catégories distinctes.

On distingue d'une part les essais qui vont nous permettre de déterminer les caractéristiques nécessaires de comportement du matériau (traction, calorimétrie). D'autres part, les résultats obtenus sur des structures réelles (lames en flexion,

ressort) qui seront confrontés aux résultats théoriques obtenus par le modèle proposé pour le calcul de structures simples en AMF.

Références bibliographiques:

[C4.1] L.BUFFARD, P. CHARBONNIER, C ROUCAU et J. JAUD,
"Characterisation of the state of a CuZnAl industrial shape memory alloy", European Symposium of martensitic transformation and shape memory properties, Septembre 1991, AUSSOIS, FRANCE.

CHAPITRE 5

TORSION DES AMF

Table des matières:

5.1. Introduction: 121
5.2. Barreau cylindrique en torsion pure: 121
5.2.1. Description des déplacements: 122
5.2.1.1. Torsion libre de Saint-Venant:[C5.2]: 122
5.2.1.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli: 123
5.2.2. Déformations en un point de la section: 123
5.2.2.1. Déformations seuils et angles seuils de transformation: 124
5.2.2.2. Définition des zones transformées: 125
5.2.2.2.1. Définition du rayon Ra : 126
5.2.2.2.2. Définition du rayon Rm : 127
5.2.3. Expression des contraintes: 127
5.2.3.1. Contrainte de torsion dans le domaine monophasé: 127
5.2.3.2. Contrainte seuil de transformation: 128
5.2.3.3. Contrainte de torsion lorsque la transformation progresse: 128
5.2.3.4. Contrainte seuil de fin de transformation: 129
5.2.3.5. Contrainte de torsion en présence d'une zone complètement transformée: 130
5.2.4. Moment de torsion : 130
5.2.4.1. Matériau monophasé: 130
5.2.4.2. Moment de torsion seuil et force seuil de début de transformation 131
5.2.4.3. Barreau en cours de transformation: 131
5.2.5. Transformation d'un barreau cylindrique: 133
5.2.6. Décharge du barreau cylindrique: 134

5.2.6.1. Problèmes supplémentaires engendrés par la décharge : 135
5.2.6.2. Déformations seuils et angles seuils de transformation inverse : 136
5.2.6.3. Définition des zones en décharge : 138
5.2.6.3.1. Rayon où la transformation inverse débutera en premier lieu 138
5.2.6.3.2. Définition de R_d : 140
5.2.6.3.3. Définition de R_a': 141
5.2.6.4. Module de cisaillement en transformation inverse : 141
5.2.7. Expression des contraintes: 143
5.2.7.1. Contrainte de torsion lorsque la transformation inverse progresse: 143
5.2.7.2. Contrainte de torsion dans l'austénite seule: 144
5.3. Application au calcul de ressorts hélicoïdaux: 144
5.3.1. Application de la méthode de Bresse : 146
5.3.2. Résolution directe: 148
5.3.2.1. Phase austénitique : 148
5.3.2.2. Matériau en cours de transformation : 149
5.3.2.3. Matériau présentant une zone purement martensitique : 149
5.3.2.4. Discussion : 150
5.3.3. Formulation incrémentale: 152
5.3.3.1. Cas du matériau purement austénitique : 153
5.3.3.2. Matériau en cours de transformation : 153
5.3.3.3. Matériau présentant une zone purement martensitique: 154
5.3.3.4. Algorithme de résolution: 154

5.4. Evaluation de la fraction volumique de martensite transformée: 156
5.5. Conclusion: 160
Références bibliographiques: 161

5.1. Introduction:

Nous avons choisi de débuter l'étude du comportement des structures en AMF par un cas simple: la torsion pure d'un barreau cylindrique. En effet, dans ce cas, la géométrie de la structure est simple et le chargement extérieur appliqué est uniforme. Chaque point de la structure est alors uniquement soumis à du cisaillement.

Moyennant quelques hypothèses, les relations établies pour ce cas simple peuvent être appliquées au cas d'une structure plus complexe, très fréquemment utilisée dans les applications utilisant des AMF: le ressort hélicoïdal.

5.2. Barreau cylindrique en torsion pure:

Nous allons étudier en premier lieu une poutre droite de section circulaire sollicitée en torsion pure. Sa géométrie est définie par le rayon de sa section droite R et par sa longueur L. Le rayon R est considéré constant sur toute la longueur de la poutre. La poutre est située dans un repère cartésien (O,x,y,z) qui est le repère principal d'inertie. Chaque section droite de la poutre est soumise au même couple de torsion noté M_t autour de l'axe principal d'inertie x (voir fig.V.1).

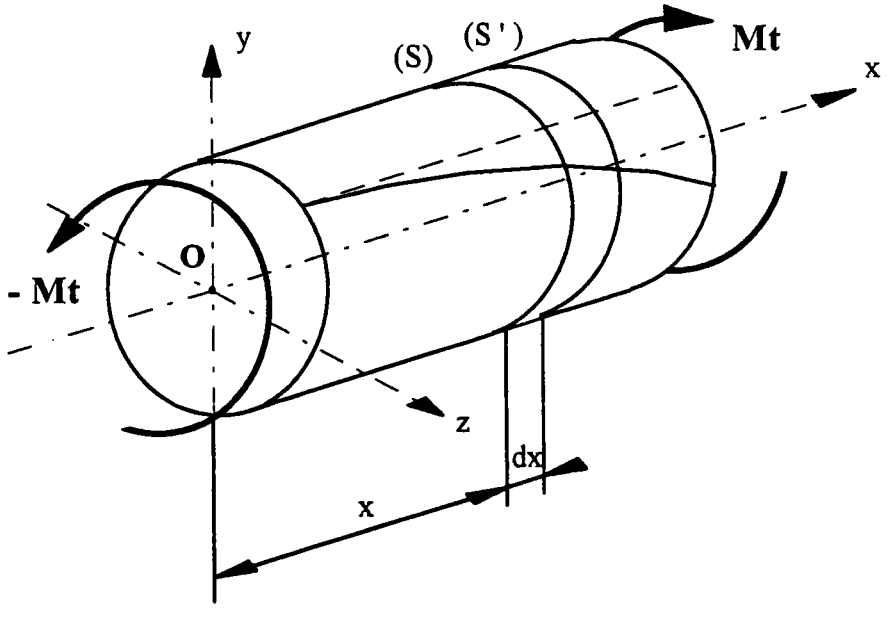


fig. V.1: poutre circulaire en torsion pure.

Après application de ce couple, une section (S') de la poutre aura tourné d'un angle dθ par rapport à une section (S) distante de la précédente de dx (fig. V.2).

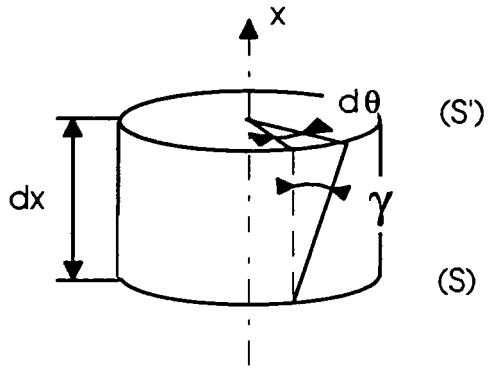


Fig. V.2 : Rotation d'un angle dθ d'une section S' distante de dx par rapport à une section S.

On définit ψ, l'angle de torsion unitaire. Cette quantité est une constante pour la torsion pure [C5.1]:

$$\psi = \frac{d\theta}{dx} = \text{constante} \tag{5.1}$$

L'angle de rotation θ varie donc linéairement par rapport à l'abscisse x. Une seule des génératrices, initialement parallèles à l'axe x, demeure rectiligne et perce le plan de toute section droite au **centre de torsion**, noté C de coordonnées (x, y_C, z_C) dans le repère des axes principaux d'inertie.

5.2.1. Description des déplacements:

5.2.1.1. Torsion libre de Saint-Venant:[C5.2]:

Compte tenu de la relation (5.1), on décrit la torsion pure d'un barreau circulaire en choisissant un champ de déplacement cinématiquement admissible sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u_X = \psi\ \Phi(y,z) \\ u_Y = -(z - zc)\ \theta \\ u_Z = (y - yc)\ \theta \end{cases} \tag{5.2}$$

où la **fonction de gauchissement** $\Phi(y,z)$ est indépendante de l'abscisse x conformément à l'hypothèse de torsion libre de Saint-Venant.

5.2.1.2. Hypothèse de Navier-Bernoulli:

Dans le cas des poutres cylindriques, on suppose que les sections droites de la poutre après déformation restent droites et perpendiculaires à l'axe du repère principal d'inertie. La prise en compte de l'hypothèse de Navier-Bernoulli a deux conséquences. Premièrement, le déplacement u_X s'annule, ce qui entraîne la disparition de la fonction de gauchissement $\Phi(y,z)$ qui devient nulle elle aussi. Deuxièmement, le centre de torsion C se confond avec le centre d'inertie G de la section droite considérée. Avec cette hypothèse, l'expression du champ de déplacement devient donc :

$$\begin{cases} u_X = 0 \\ u_Y = -z\ \theta \\ u_Z = y\ \theta \end{cases} \tag{5.3}$$

5.2.2. Déformations en un point de la section:

Le choix du champ de déplacement (5.3) entraîne qu'en un point P du matériau de coordonnées (x,y,z), les seules déformations non nulles s'écrivent :

$$\gamma_{xy} = -\psi\ z \tag{5.4}$$

$$\gamma_{xz} = \psi\ y \tag{5.5}$$

En exprimant ce résultat en coordonnées cylindriques, la déformation d'un point situé à une distance ρ de l'axe d'inertie de la section s'écrit

$$\gamma(\rho) = \psi\, \rho \qquad (5.6)$$

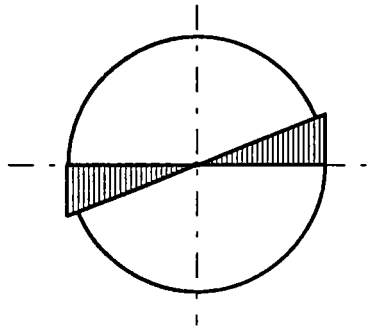


Figure V.3 : Répartition des déformations dans une section droite.

Cette description cinématique forme la base de l'étude des poutres circulaires en torsion pure. Le comportement du matériau en cisaillement détermine alors la réponse du barreau circulaire en torsion. Dans le cas des AMF, il faut poursuivre cette étude en considérant que le matériau possède un comportement inélastique à seuil, fortement dépendant de la température et que ce comportement présente une hystérésis à la décharge.

5.2.2.1. Déformations seuils et angles seuils de transformation:

Pour caractériser le comportement des AMF en cisaillement, deux déformations seuils sont à distinguer: γ_S qui définit la limite entre le comportement élastique de l'austénite et la plasticité de transformation associée à la formation sous contrainte de la Martensite; γ_f, la déformation de fin de transformation au-delà de laquelle le matériau, maintenant totalement martensitique, est à nouveau élastique.

Le comportement à seuil des AMF impose de définir un angle seuil de début de transformation ψ_S. L'écriture des déformations sous la forme (5.6) permet de relier la déformation seuil de début de transformation γ_S à cet angle seuil de transformation ψ_S. On définit de la même façon un angle seuil ψ_f associé à la déformation γ_f. Les déformations (5.6) étant proportionnelles au rayon, elles sont

maximales sur le contour extérieur de rayon R. C'est donc sur le contour extérieur que les déformations γ_s et γ_f seront atteintes en premier. Leurs expressions sont alors de la forme [C5.3]:

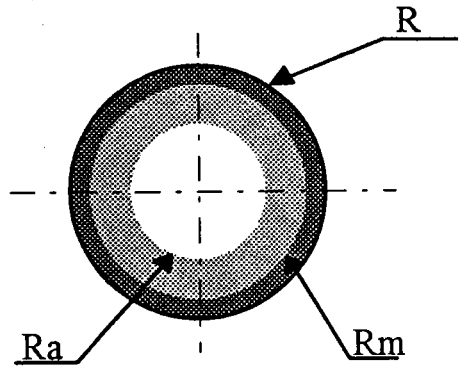
$$\gamma_s = \psi_s \, R \tag{5.7}$$

$$\gamma_f = \psi_f \, R \tag{5.8}$$

Pour un matériau superélastique, ces différentes quantités dépendent de la température et de la nature de l'alliage utilisé. Dans ce chapitre dévolu à l'étude de la torsion superélastique, la température est supposée rester constante au cours des cycles charge-décharge.

5.2.2.2. Définition des zones transformées:

Pour une section donnée, la répartition des déformations définie à la figure V.3 et l'existence, pour les AMF, de déformations seuils, γ_s et γ_f entraînent la coexistence dans une section donnée de zones transformées et non transformées. Cette cohabitation conduit à distinguer dans la poutre des domaines possédant des comportements différents. La symétrie de révolution du problème étudié implique que ces différentes zones sont circulaires concentriques, délimitées par des rayons notés R_a et R_m (voir fig. V.4). Le premier de ces rayons délimite la zone monophasée austénitique (ρ inférieur à R_a) et le mélange Austénite + Martensite (ρ supérieur à R_a). Le second quant à lui marque la transition entre le domaine biphasé Austénite + Martensite (ρ supérieur à R_a et inférieur à R_m) et la zone totalement transformée en martensite (ρ supérieur à R_m). Ces deux rayons se définissent à partir des relations précédentes (5.7) et (5.8).



☐	Austénite	(Comportement élastique)
▒	Austénite + Martensite	(Plasticité de transformation)
■	Martensite	(Comportement élastique)

Fig. V.3 : Définition des différents domaines de comportement pour un barreau circulaire en torsion pure.

5.2.2.2.1. Définition du rayon Ra :

Ce rayon délimite le domaine à comportement élastique de l'austénite pure de celui du mélange biphasé siège de la plasticité de transformation. Les points situés sur ce rayon sont soumis à une déformation égale à la déformation de transformation γ_s. Lorsque la déformation atteint la déformation seuil γ_s sur le rayon extérieur R, la totalité du matériau est encore en austénite (équation 5.7). Les rayons R_a et R sont donc pour le moment confondus. Quand ψ augmente, R_a et γ_s sont liés par l'équation 5.6. En utilisant également la relation 5.7, on obtient

$$\gamma_S = \psi_S \, R = \psi \, R_a \tag{5.9}$$

D'après cette relation, on définit le rayon R_a comme:

$$R_a = \frac{\psi_s}{\psi} R \tag{5.10}$$

La géométrie des sections impose les conditions suivantes: R_a doit être strictement positif et inférieur ou égal à R (ψ supérieur à ψ_s).

5.2.2.2.2. Définition du rayon Rm :

On définit de la même façon la valeur du rayon R_m, à partir de l'expression de la déformation seuil de fin de transformation γ_f.

$$R_m = \frac{\psi_f}{\psi} R \tag{5.11}$$

avec les conditions géométriques suivantes : R_m doit être strictement positif et au maximum égal à R. De plus, R_m doit rester supérieur à R_a.

5.2.3. Expression des contraintes:

Les seules contraintes non nulles sont ici les contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz}. Dues à la symétrie du problème, les contraintes sont exprimées en coordonnées cylindriques. La seule contrainte non nulle est alors la contrainte de cisaillement τ. L'expression de $\tau(\rho)$ dépend du domaine considéré.

5.2.3.1. Contrainte de torsion dans le domaine monophasé:

Quand l'angle ψ est inférieur à l'angle de transformation seuil ψ_s, la déformation est partout inférieure au seuil de transformation. Le matériau est constitué uniquement d'Austénite. Son comportement est donc celui d'un matériau élastique linéaire classique de module de cisaillement μ_a. La contrainte s'exprime alors sous la forme usuelle:

$$\tau(\rho) = \mu_a \ \gamma(\rho) = \mu_a \psi \ \rho \qquad \forall \rho \in [0,R] \tag{5.12}$$

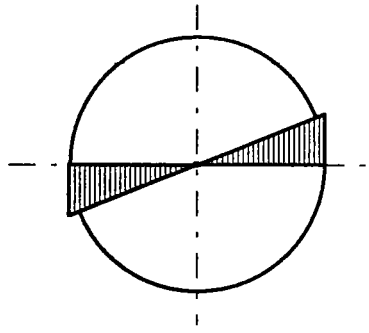


Fig. V.5 : Répartition de la contrainte dans une section.

5.2.3.2. Contrainte seuil de transformation:

Pour ψ égal à ψ_S, le matériau commence à se transformer. La contrainte seuil de transformation est définie par l'intermédiaire du critère établi au chapitre 2. Ce critère de transformation dépend de la température T à laquelle est utilisé le matériau, de la température de transformation M_S du matériau, et du coefficient de proportionnalité $\mathscr{B} = \frac{\mathscr{B}_0}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{2\,b}{\sqrt{27}}}$:

$$\tau_S = \mathscr{B}\,(T - M_S) \tag{5.13}$$

Cette contrainte seuil τ_s peut aisément être reliée à la déformation seuil de transformation γ_S. En effet, la continuité des contraintes et des déformations dans la section implique qu'elle peut s'exprimer également à partir de la loi de Hooke :

$$\tau_S = \mu_a\ \gamma_S = \mu_a\ \psi_S\ R \tag{5.14}$$

Les points situés sur le rayon R_a sont soumis à τ_S.

5.2.3.3. Contrainte de torsion lorsque la transformation progresse:

Quand ψ est supérieur à ψ_S, la contrainte seuil de transformation est atteinte puis dépassée sur la périphérie de la section, et une zone transformée délimitée par R_a apparaît. Pour ρ inférieur à R_a, la contrainte de cisaillement reste inférieure à la contrainte seuil de transformation et le matériau conserve un

comportement élastique. Pour ρ supérieur à R_a, le changement de phase A→M détermine le comportement du matériau. Ce comportement est décrit en utilisant un module apparent de transformation en cisaillement noté μ' (voir chapitre 2, relation 2.77). On obtient donc les expressions suivantes:

$$\rho \leq Ra : \qquad \tau(\rho) = \mu_a \ \gamma(\rho) = \mu_a \ \psi \ \rho \tag{5.15}$$

$$Ra < \rho \leq R : \qquad \tau(\rho) = \tau_s + \mu' \ (\ \psi \ \rho - \psi_s \ R) \tag{5.16}$$

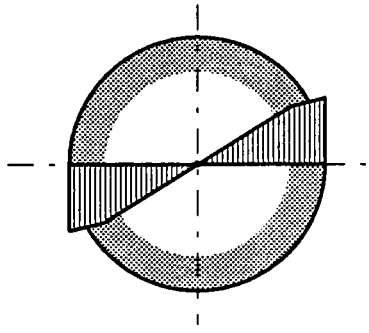


Fig. V.6 : Répartition de la contrainte dans une section.

Le comportement bilinéaire simplifié adopté au paragraphe 2.4.4 permet de donner une expression directe pour τ(ρ).

5.2.3.4. Contrainte seuil de fin de transformation:

Comme dans le cas précédent, la contrainte de fin de transformation est d'abord atteinte sur le rayon R. Avec le formalisme adopté au paragraphe 2.4.4., cette contrainte notée τ_f est définie par :

$$\tau_f = \tau_s + \mu' \ \gamma_{am}^{A} \tag{5.17}$$

cette expression pouvant être réécrite de la manière suivante :

$$\tau_f = \tau_s + \mu' \ (\psi_f \ R - \psi_s \ R) \tag{5.18}$$

où γ_{am}^{A} est la déformation maximale apparente de transformation en cisaillement. Cette valeur dépend du matériau utilisé. Dans le cas des alliages à base cuivre, il n'est pas possible de déterminer expérimentalement cette déformation. En effet, la rupture se produit généralement avant la fin de la transformation. Une explication de ce phénomène a été donnée par Patoor et al. [C5.4]. Le paramètre γ_{am}^{A} devra donc être **estimé** en ce qui concerne les calculs de structures.

5.2.3.5. Contrainte de torsion en présence d'une zone complètement transformée:

Ce cas est abandonné car il offre peu d'intérêt dans les applications industrielles (voir remarque précédente). En effet, les contraintes et les déformations atteintes sont telles que la durée de vie du matériau s'en trouve considérablement diminuée. De plus, dans ces plages de déformation, des déformations plastiques se produisent dans le matériau. Néanmoins, il a paru intéressant de développer ce cas en annexe (annexe N°4).

5.2.4. Moment de torsion :

L'expression du moment de torsion se déduit des contraintes par intégration sur la section droite S:

$$M_t = \int_{(S)} \tau(\rho)\ \rho\ dS = 2\pi \int_{\rho} \tau(\rho)\ \rho^2\ d\rho \qquad (5.19)$$

Pour déterminer cette intégrale, il faut tenir compte des différents domaines de comportement présents dans le matériau.

5.2.4.1. Matériau monophasé:

Pour $\psi<\psi_s$, le matériau ayant un comportement élastique linéaire, le moment de torsion s'écrit de façon usuelle:

$$M_t = \frac{S R^2 \mu_a \psi}{2} \tag{5.20}$$

Où l'on reconnaît une des relations classiques de la Résistance des Matériaux.

5.2.4.2. Moment de torsion seuil et force seuil de début de transformation

Nous pouvons définir un moment de torsion seuil à partir duquel le barreau va commencer à se transformer. Ce moment de torsion seuil, noté M_{ts}, est atteint lorsque ψ atteind ψ_s. Il suffit donc pour obtenir son expression de remplacer ψ par ψ_s dans (5.20) :

$$M_{ts} = \frac{S R^2 \mu_a \psi_s}{2} \tag{5.21}$$

On peut aisément adjoindre à ce moment de torsion seuil, une notion de force seuil, notée P_s, caractérisant le début de transformation dont la valeur sera ici :

$$P_s = \frac{M_{ts}}{R} = \frac{S R \mu_a \psi_s}{2} \tag{5.22}$$

Ces valeurs définissent la fin du domaine de comportement élastique de la structure.

5.2.4.3. Barreau en cours de transformation:

Pour $\psi > \psi_s$, on est amené à distinguer deux zones de comportements différents dans chaque section: Le domaine élastique (noté S_a) pour ρ inférieur à R_a, et le domaine en cours de transformation (noté S_{am}) pour ρ supérieur à R_a. On obtient alors:

$$M_t = \int_{(S_a)} \tau(\rho)\ \rho\ ds + \int_{(S_{am})} \tau(\rho)\ \rho\ ds \tag{5.23}$$

soit en exprimant les contraintes dans les différentes zones à partir de (5.15) et (5.15):

$$M_t = 2\pi \left(\int_0^{R_a} \mu_a \psi \rho^3 \, d\rho + \int_{R_a}^{R} (\tau_s + \mu' (\psi \rho - \psi_s R)) \rho^2 \, d\rho \right) \tag{5.24}$$

que l'on peut écrire différemment en remplaçant τ_s par son expression (5.14) en fonction de ψ_s :

$$M_t = 2\pi \left(\int_0^{R_a} \mu_a \psi \rho^3 \, d\rho + \int_{R_a}^{R} ((\mu_a - \mu') \psi_s R + \mu' \psi \rho) \rho^2 \, d\rho \right) \tag{5.25}$$

Ceci nous donne après intégration :

$$M_t = \frac{\pi R_a^4 \mu_a \psi}{2} + \frac{2\pi (\mu_a - \mu') \psi_s R (R^3 - R_a^3)}{3} + \frac{\pi (R^4 - R_a^4) \mu' \psi}{2} \tag{5.26}$$

En remplaçant R_a par (5.10) dans l'équation précédente, il vient après simplification :

$$M_t = \frac{S R^2 \mu_a \psi_s}{2} \left[\frac{\mu'}{\mu_a} \left(\frac{\psi}{\psi_s} - \frac{\psi^3}{\psi_s^3} \right) + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_a} - \frac{\psi_s^3}{\psi^3} + \frac{\mu'}{\mu_a} \frac{\psi_s^3}{\psi^3} \right) + \frac{\psi_s^3}{\psi^3} \right] \tag{5.27}$$

où $$\psi_s = \frac{\tau_s}{R \mu_a} = \frac{\mathscr{B} (T - M_s)}{R \mu_a} \tag{5.28}$$

Cette relation qui relie M_t à ψ et à T dépend:

- du matériau utilisé: μ_a, μ', M_s et $\mathscr{B}$.
- de la géométrie de la structure: R, S.

On reconnaît, dans le premier terme de (5.27), le moment de torsion seuil M_{ts}.

5.2.5. Transformation d'un barreau cylindrique:

Bien que le comportement du matériau ait été extrêmement simplifié et que la géométrie et la sollicitation soient simples, la réponse obtenue pour le barreau en torsion est complexe. Cette complexité est un effet de structure. La figure V.7 montre l'évolution du moment de torsion en fonction de l'angle de torsion unitaire ψ déterminée à l'aide de la relation (5.27).

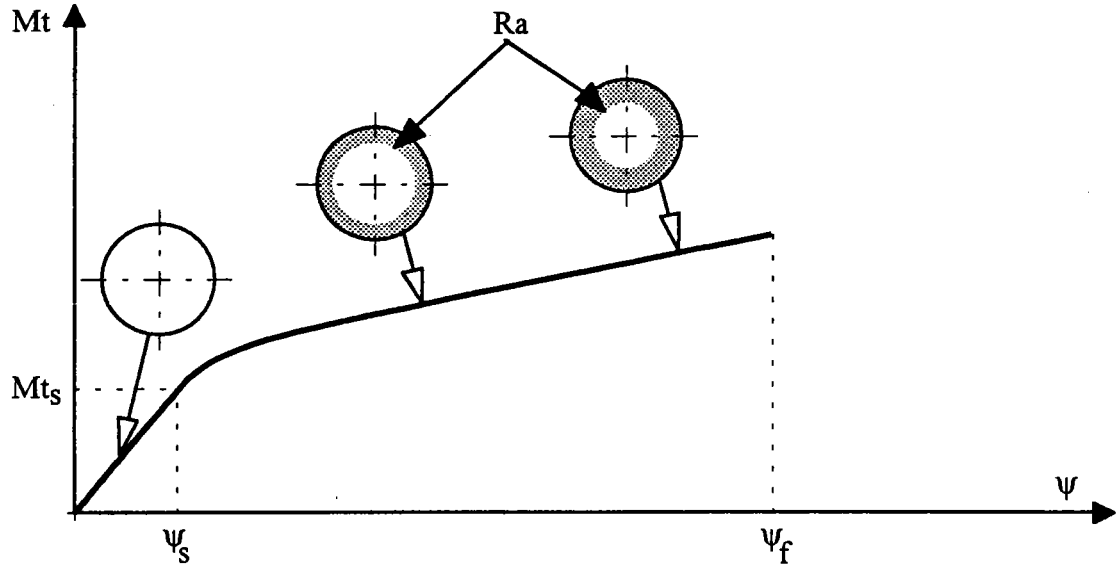


Fig. V.7 : Evolution de l'angle de torsion unitaire ψ en fonction du moment de torsion M_t.

On remarque que cette courbe possède une asymptote oblique. Il est donc possible de linéariser la relation (5.27) en négligeant $\frac{\psi_s^3}{\psi^3}$ devant $\frac{\psi}{\psi_s}$ (voir annexe 2). Une telle formulation linéaire permet d'établir facilement la réponse du barreau par une méthode énergétique de type Castigliano (voir annexe 3). On remarque également que cette simplification conduit à définir un seuil apparent de transformation, noté M_t' (voir fig. V.8). Ce moment apparent est supérieur au seuil réel.

$$M_t' = \frac{4}{3} . M_{ts} \qquad (5.29)$$

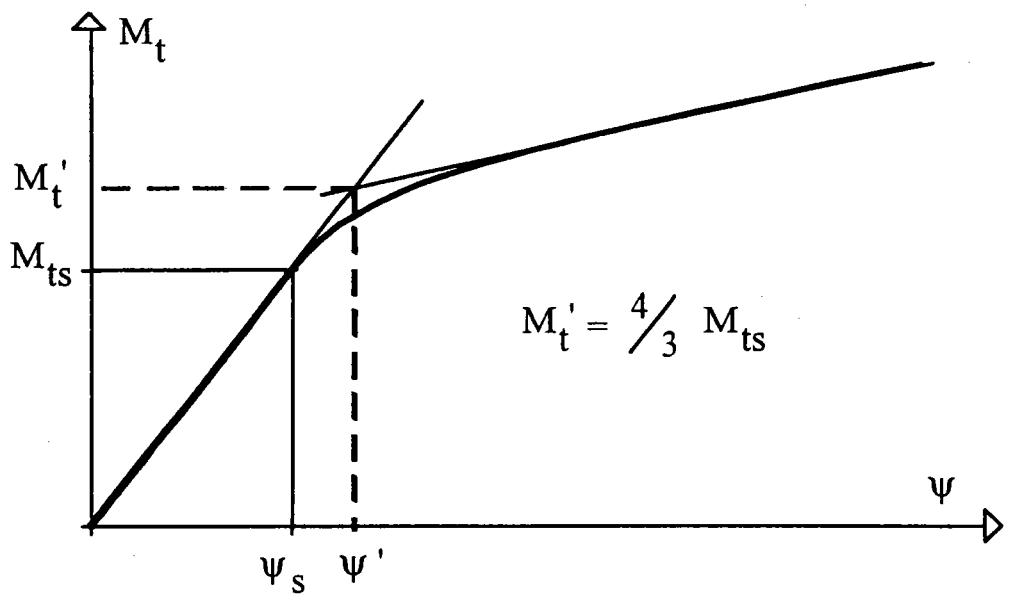


Fig. V.8: Moment de torsion seuil et moment apparent de torsion seuil.

On remarque que le seuil de transformation de la structure se situe au niveau de la perte de linéarité de la courbe, alors que le seuil apparent se détermine par intersection des tangentes.

5.2.6. Décharge du barreau cylindrique:

Comme nous l'avons vu précédemment au chapitre 1, les AMF possèdent un comportement hystérétique en superélasticité (aussi bien d'ailleurs qu'en superthermoélasticité). Il faut donc réaliser une étude distincte pour la charge et la décharge.

En superélasticité, il faut atteindre des déformations très importantes pour qu'une zone complètement martensitique apparaisse. Solliciter un élément mécanique dans de telles conditions est irréaliste. C'est pourquoi, dans la suite de ces travaux, nous allons considérer que la décharge du matériau intervient toujours avant que la transformation soit complète sur la fibre externe. La distribution des déformations le long d'un rayon de la section, et le fait que γ_{am}^{A} ne

soit jamais atteinte, nous apporte une difficulté supplémentaire car le matériau est toujours sollicité par des chargements de type boucle interne [C5.5].

5.2.6.1. Problèmes supplémentaires engendrés par la décharge :

Le comportement du matériau à la décharge dépend de la déformation de transformation atteinte à la charge (Voir le chapitre 2). Compte tenu de la répartition inhomogène des déformations, nous obtenons pour chaque valeur de rayon dans la section une déformation de début de transformation inverse γ_d différente. De la même façon, le module de transformation inverse en cisaillement dépend aussi du rayon considéré.

Un schéma explicatif du phénomène est donné ci-dessous à titre d'exemple (fig. V.9), pour ψ constant (à un instant t) et deux rayons ρ_1 et ρ_2 tels que $\rho_1 < \rho_2$. La description de la torsion d'un barreau cylindrique, donnée dans les paragraphes précédents, établit que les déformations maximales, notées γ^*, atteintes au chargement, pour un ψ donné, sont différentes en ρ_1 et ρ_2 (avec $\gamma^*(\rho_1)<\gamma^*(\rho_2)$). Dans le cadre du modèle de comportement établi au chapitre 2, il vient que les déformations seuils de décharge γ^d seront également différentes en ces points ($\gamma^d(\rho_1) < \gamma^d(\rho_2)$). Il en est de même pour les modules apparents de transformation inverse. Le comportement de la structure est par conséquent plus complexe à la décharge qu'à la charge.

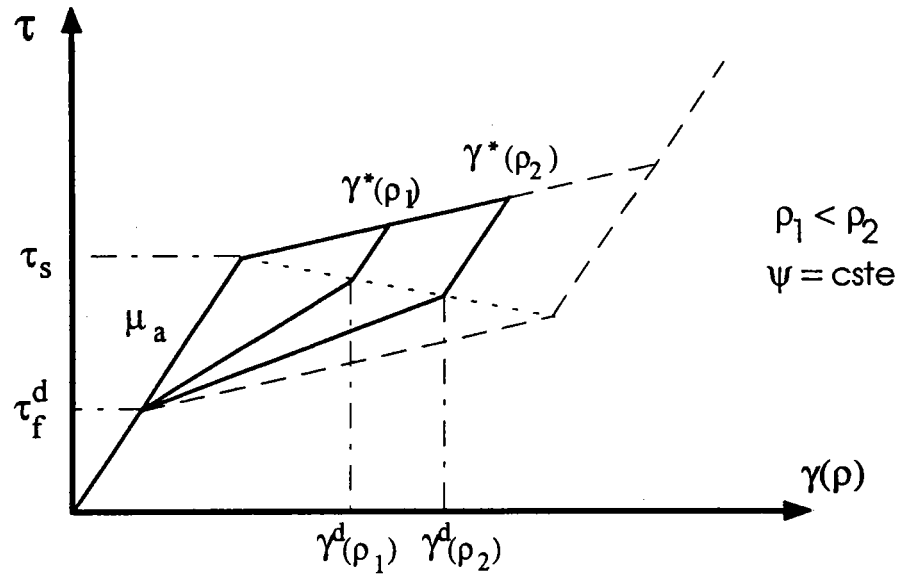


Fig. V.9 : Décharge à ψ constant pour deux rayons différents ρ_1 et ρ_2.

5.2.6.2. Déformations seuils et angles seuils de transformation inverse :

La déformation de début de transformation inverse, notée $\gamma_d(\rho)$, dépend de la déformation de transformation $\gamma^*(\rho)$ atteinte sur le rayon ρ. A partir de cette déformation, le matériau subit tout d'abord une décharge élastique, notée $\gamma_e(\rho)$. La déformation seuil de décharge se définit comme :

$$\gamma_d(\rho) = \gamma^*(\rho) - \gamma_e(\rho) \tag{5.30}$$

Il reste alors à exprimer la déformation élastique de décharge $\gamma^e(\rho)$ sachant que :

$$\gamma_e(\rho) = \frac{\tau_{max}(\rho) - \tau'_d(\rho)}{\mu_a} \tag{5.31}$$

où $\tau'_d(\rho)$ désigne la contrainte de début de transformation inverse. Cette contrainte se situe sur le segment $\tau_s\tau_d$ (voir fig. V.10). Son expression est donnée par:

$$\tau'_d(\rho) = \tau_{max}(\rho) - \frac{\tau_{max}(\rho) - \tau_s}{\mu' \gamma^A_{am}} \Delta\tau \tag{5.32}$$

avec

$$\Delta\tau = \tau_f - \tau_d = \tau_s - \tau^f_d \tag{5.33}$$

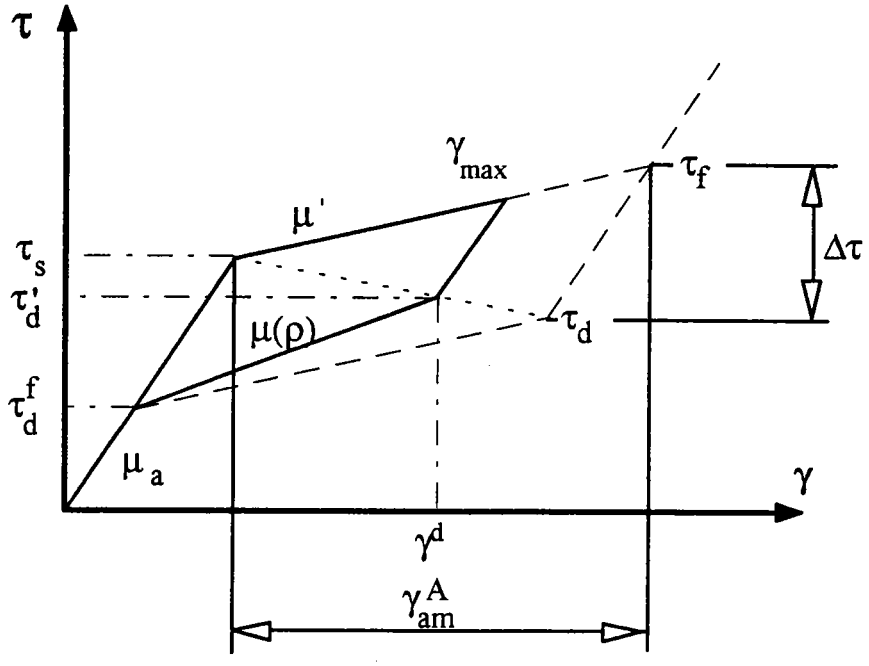


Fig V.10 : Trajet contrainte-déformation lors de la décharge.

En remplaçant dans la relation (5.31), on obtient :

$$\gamma_e(\rho) = \frac{(\tau^*(\rho) - \tau_s)\,\Delta\tau}{\mu_a\,\mu'\,\gamma^A_{am}} \tag{5.34}$$

Nous pouvons alors déterminer la valeur de la déformation seuil de début de transformation inverse, en utilisant la relation précédente :

$$\gamma_d(\rho) = \gamma^*(\rho) - \frac{(\tau^*(\rho) - \tau_s)\,\Delta\tau}{\mu_a\,\mu'\,\gamma^A_{am}} \tag{5.35}$$

La forme bilinéaire adoptée pour la loi de comportement permet d'autre part d'exprimer la contrainte maximale atteinte à la charge de la manière suivante :

$$\tau^*(\rho) = \tau_s + \mu'\,(\gamma^*(\rho) - \gamma_s) \tag{5.36}$$

Ceci permet d'obtenir finalement l'expression de la déformation $\gamma^d(\rho)$ sous la forme :

$$\gamma_d(\rho) = \gamma^*(\rho)\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A}\right) + \gamma_s \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A} \tag{5.37}$$

On définit l'angle de torsion unitaire seuil de transformation inverse, noté ψ_d, à partir de la relation cinématique suivante:

$$\gamma_d(\rho) = \psi_d \cdot \rho \tag{5.38}$$

On obtient alors :

$$\psi_d = \psi^*\left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A}\right) + \gamma_s \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A} \frac{1}{\rho} \tag{5.39}$$

On constate que, si à la charge les valeurs des angles seuils étaient des constantes, dans le cas de la décharge, **l'angle seuil de transformation inverse dépend du rayon ρ considéré**:

$$\psi_d = \psi_d(\rho) \tag{5.40}$$

Il faut donc déterminer le rayon où la transformation inverse va débuter.

5.2.6.3. Définition des zones en décharge :

5.2.6.3.1. Rayon où la transformation inverse débutera en premier lieu

Compte tenu des hypothèses que nous avons faites pour la torsion d'un barreau cylindrique, la zone en cours de transformation est délimitée par les rayons R_a et R. Nous allons donc déterminer la valeur de $\psi_d(\rho)$ pour ces rayons extrêmes.

Quand ρ = R, la propriété suivante est vérifiée: $\gamma_s = \psi_s$ R (5.8), il vient pour (5.39):

$$\psi_d(R) = \psi^* - \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A}(\psi^* - \psi_s) < \psi^* \qquad (5.41)$$

Quand $\rho = Ra$, (5.8) s'exprime comme $\gamma_s = \psi^* . R_a$, donc:

$$\psi_d(R_a) = \psi^* \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A}\right) + \psi^* \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A} = \psi^* \qquad (5.42)$$

La transformation inverse commence donc d'abord sur le rayon R_a. Cela signifie que la zone en transformation inverse se propagera du coeur du matériau vers l'extérieur. Cette solution parait logique si l'on considère que dans ce cas la martensite, formée la dernière, disparaîtra bien la première, comme cela est observé expérimentalement.

Comme dans le cas de la charge, la coexistence dans une section donnée de zones transformées et non transformées conduit à définir pour le matériau des domaines de comportement différents. Dans le cas de la décharge, si l'on se réfère à la figure V.9, trois zones circulaires concentriques sont à distinguer (par symétrie). Elles sont délimitées par les rayons R_a' et R_d (voir fig. V.11). Le premier de ces rayons constitue la limite entre la zone monophasée austénitique (ρ inférieur à R_a') et le mélange Austénite + Martensite en transformation inverse (ρ supérieur à R_a'). Le second quant à lui délimite, à l'intérieur du domaine biphasé Austénite + Martensite, la zone en transformation inverse (ρ supérieur à R_a' et inférieur à R_d) et la zone en décharge élastique (ρ supérieur à R_d et inférieur à R). Ces deux rayons, qui vont se propager de l'intérieur du matériau vers la fibre externe, ont la même valeur initiale R_a.

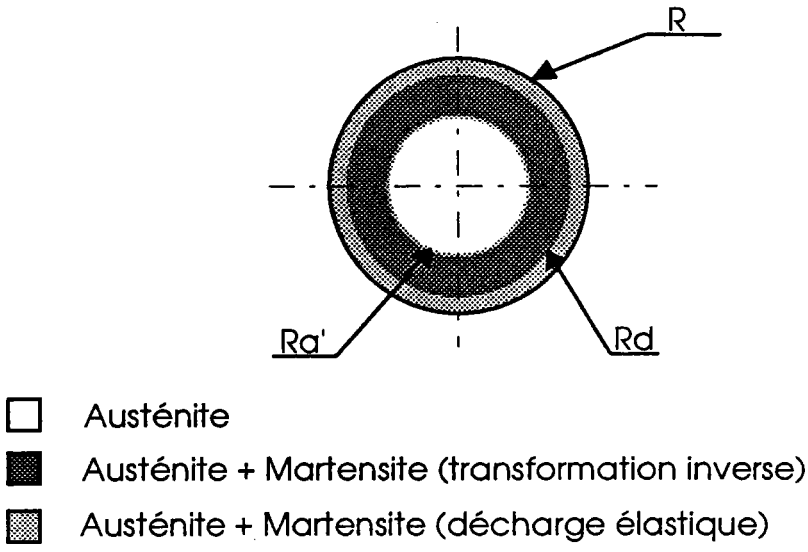


Figure V.11 : Zones en présence au cours de la décharge

5.2.6.3.2. Définition de R_d :

En utilisant une relation analogue à celles qui ont servi à déterminer la valeur des rayons R_a et R_m, on écrit :

$$\gamma_d(\rho) = \psi_d \,.\, \rho = \psi \,.\, R_d \tag{5.43}$$

On peut alors écrire, en se référant à la relation (5.39):

$$\psi \,.\, R_d = \psi^* .\, R_d \,.\, \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A} \right) + \gamma_s \frac{\Delta\tau}{\mu_a \gamma_{am}^A} \tag{5.44}$$

D'où l'on obtient :

$$R_d = \frac{\gamma_s . \Delta\tau}{(\psi - \psi^*)\mu_a . \gamma_{am}^A + \psi^* . \Delta\tau} \tag{5.45}$$

qui devient en utilisant (5.9) :

$$R_d = \frac{\psi_s . \Delta\tau}{(\psi - \psi^*)\mu_a . \gamma_{am}^A + \psi^* . \Delta\tau} \,.\, R \tag{5.46}$$

Lorsque $\psi = \psi^*$, le rayon R_d doit être confondu avec R_a. Si l'on remplace ψ par ψ^* dans l'expression précédente, on vérifie bien cette condition.

5.2.6.3.3. Définition de R_a':

L'expression du rayon R_a' qui délimite la zone de début de transformation inverse est définie quant à elle à partir de l'expression de la contrainte de fin de décharge. En effet lorsque cette contrainte est atteinte sur la fibre externe, la structure est entièrement retransformée en Austénite, et dans ce cas $R_a' = R$. On a donc :

$$\begin{cases} \tau_d^f = \tau_{max} - \tau_d' - \mu_r(R)(\gamma_d - \gamma) \\ \tau_d^f = \tau_s - \Delta\tau \end{cases} \tag{5.47}$$

Où $\mu_r(R)$ désigne le module apparent de cisaillement pour la transformation inverse sur le rayon R.

On obtient alors en développant ces deux expressions la relation suivante, à partir de laquelle on peut calculer R_a':

$$\mu_a\,\psi_s\,R - \Delta\tau = \frac{\psi_{max}\,R_a' - \psi_s\,R}{\mu'\,\gamma_m}\,\Delta\tau\left(1 + \frac{\mu_r}{\mu_a}\right) - \mu_r(R)\,(\psi_{max} - \psi)\,R_a' \tag{5.48}$$

Pour résoudre cette équation, il est nécessaire de connaître l'expression de $\mu_r(R)$. Ceci est réalisé au paragraphe suivant.

5.2.6.4. Module de cisaillement en transformation inverse :

Comme nous l'avons fait remarquer au début de la présentation du phénomène de décharge en torsion, le module de cisaillement en transformation inverse dépend lui aussi du rayon que l'on considère.

Dans l'approximation bilinéaire du comportement adoptée dans cette étude, le module de transformation inverse, noté $\mu_r(\rho)$, se définit comme :

$$\mu_r(\rho) = \frac{\tau'_d - \tau^f_d}{\gamma_d - \gamma^f_d} \tag{5.49}$$

En utilisant les relations (5.32), (5.33), et sachant que :

$$\gamma^f_d = \frac{\tau^f_d}{\mu_a} = \frac{\tau_s - \Delta\tau}{\mu_a} = \gamma_s - \frac{\Delta\tau}{\mu_a} \tag{5.50}$$

On obtient alors :

$$\mu_r(\rho) = \mu_a \cdot \frac{(\psi^*.\rho - \psi_s.R).(\mu'.\gamma^A_{am} - \Delta\tau) + \Delta\tau.\gamma^A_{am}}{(\psi^*.\rho - \psi_s.R).(\mu_a.\gamma^A_{am} - \Delta\tau) + \Delta\tau.\gamma^A_{am}} \tag{5.51}$$

On peut vérifier que cette relation est cohérente avec les deux cas extrêmes, à savoir :

→ $\psi^* = \psi_s$: dans ce cas, la charge et la décharge de la structure s'opèrent complètement dans le domaine élastique de l'austénite, on a $R_a = R = \rho$, on obtient alors :

$$\mu_r = \mu_a$$

On conserve bien le comportement de l'austénite.

→ $\psi^* = \psi_f$: sur la fibre externe on a $R_m = R$, pour $\rho = R_m$, on obtient :

$$\mu_r = \mu'$$

On détermine bien la valeur caractérisant un cycle complet charge-décharge, et non une boucle interne.

L'expression (5.51) de $\mu_r(\rho)$ permet maintenant de résoudre la relation (5.48) définissant le rayon R_a'. L'introduction de (5.51) dans la relation (5.48) conduit à une équation du second degré. Du fait de la complexité des coefficients de cette équation, les racines de celle-ci ont été calculées à l'aide du code de calcul formel MAPLE (voir annexe 5). Les solutions de l'équation, ainsi déterminées, sont :

$$R_a' = \frac{(\mu'.\Delta\gamma - \Delta\tau).\psi_s.R - \Delta\tau.\Delta\gamma}{(\mu'.\Delta\gamma - \Delta\tau).\psi_{max}} \quad (5.52)$$

$$R_a' = \frac{\mu_a.\psi_s.R - \Delta\tau}{\mu_a.\psi} \quad (5.53)$$

On voit immédiatement que la solution donnée en (5.52) est une constante. Si l'on conserve cette solution, cela signifie que la transformation inverse n'a pas lieu. Cette valeur est donc à rejeter.

L'expression du rayon R_a' est donc donnée par l'expression (5.53). Celle-ci peut être réécrite de la façon suivante :

$$R_a' = \frac{\psi_s.R}{\psi} - \frac{\Delta\tau}{\mu_a.\psi} \quad (5.54)$$

Avec les restrictions géométriques suivantes : R_a' doit être supérieur ou égal à R_a, car la transformation Austénite-Martensite ne doit plus progresser à la décharge. et, R_a' doit être inférieur ou égal à R, ceci étant imposé par la géométrie de la poutre.

5.2.7. Expression des contraintes:

De la même manière que pour la transformation directe Austénite→Martensite, on peut donner à la décharge l'expression des contraintes de cisaillement pour un rayon ρ quelconque de la section.

5.2.7.1. Contrainte de torsion lorsque la transformation inverse progresse:

Si la contrainte seuil de début de transformation τ_s a été dépassée à la charge, il convient de différencier trois zones lors de la décharge. La première est comprise entre R_d et R. Elle est constituée d'un mélange Austénite-Martensite qui se décharge élastiquement. La seconde zone, comprise entre R_a' et R_d, est de même nature que la précédente mais présente une transformation inverse. La

troisième zone est le coeur austénitique, situé en dessous de R_a'. Cette zone a un comportement élastique.

$R_d<\rho \leq R$:

$$\tau(\rho)=\tau_{max}(\rho) - \mu_a.(\gamma_{max}(\rho) - \gamma(\rho)) \quad (5.55)$$

$R_a' < \rho \leq R_d$:

$$\tau(\rho)=\tau_{max}(\rho)-\mu_a.(\gamma_{max}(\rho)-\gamma_d(\rho))-\mu_r.(\gamma_d(\rho)-\gamma(\rho)) \quad (5.56)$$

$\rho \leq R_a'$:

$$\tau(\rho)=\tau_{max}(\rho)-\mu_a.(\gamma_{max}(\rho)-\gamma_d(\rho))-\mu_r.(\gamma_d(\rho)-\gamma^f_d(\rho))-\mu_a.(\gamma^f_d(\rho)-\gamma(\rho)) \quad (5.57)$$

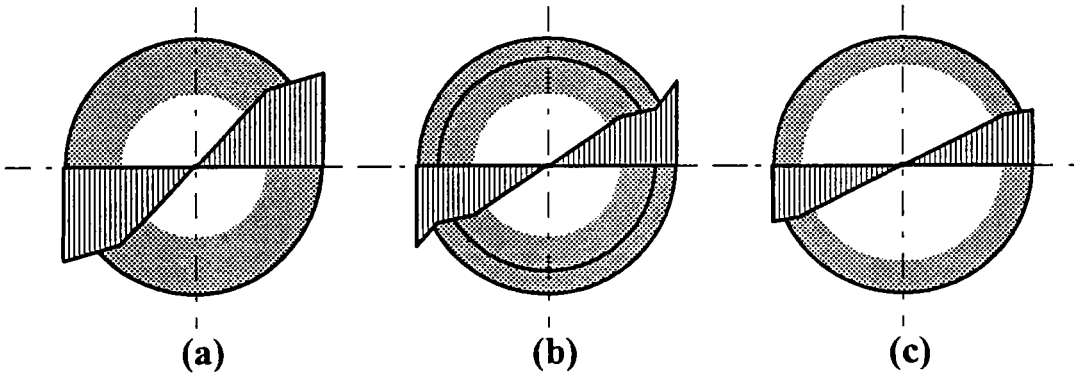


Fig. V.12 : Répartition de la contrainte dans une section.

5.2.7.2. Contrainte de torsion dans l'austénite seule:

Par contre, si la contrainte seuil de début de transformation τ_s n'a pas été dépassée à la charge, il n'y a donc pas de zone transformée. L'expression de la contrainte est donc donnée par la relation classique pour un matériau élastique linéaire et homogène.

5.3. Application au calcul de ressorts hélicoïdaux:

Les équations précédemment développées pour la torsion tiennent compte du matériau utilisé, du chargement thermomécanique et de la géométrie de la

barre étudiée. Ces résultats sont appliqués au dimensionnement des ressorts superélastiques. On suppose que les sections du ressort sont sollicitées uniquement en torsion. Afin d'étudier le ressort hélicoïdal, il est nécessaire de tenir compte de sa géométrie propre.

On considère le problème suivant : un ressort constitué d'un fil rond est sollicité par une force P, en l'occurrence de compression, située sur l'axe du ressort (fig. V.13). Si ce ressort est coupé fictivement par une section plane quelconque perpendiculaire à la tangente à l'hélice, le tronçon ainsi isolé, est en équilibre sous l'action de la charge P et des forces dues aux contraintes développées dans la section coupée de centre de gravité G. L'équilibre du tronçon montre immédiatement que les forces intérieures dues aux contraintes admettent une résultante générale, égale à P et de sens contraire, et un couple M dont l'axe est perpendiculaire au plan défini par G et la ligne d'action de P et dont le moment est égal à P.R (R étant le rayon moyen d'enroulement du ressort).

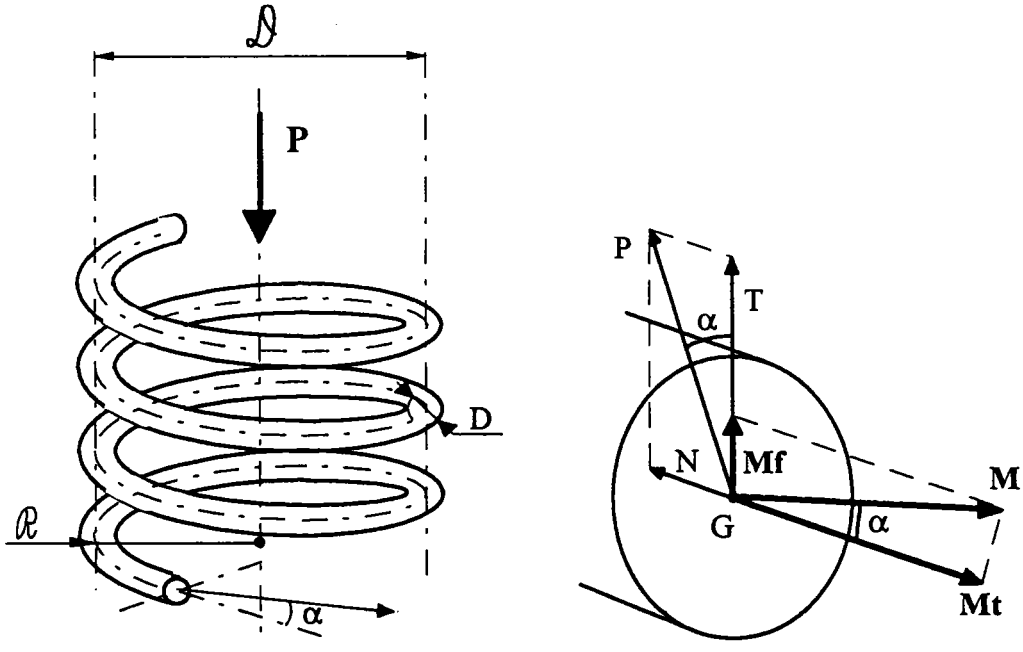


Fig. V.13 : Représentation du ressort hélicoïdal.

Ces deux quantités peuvent se décomposer par projection. La résultante générale peut être exprimée en fonction d'un effort normal N et d'un effort

tranchant T. Le moment résultant quant à lui se décompose en un moment de torsion Mt et un moment fléchissant Mf. Si l'on note α l'angle d'inclinaison de l'hélice du ressort, les expressions précédentes peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N &= P \,.\, \cos(\alpha) & M_t &= P\mathscr{R}\cos(\alpha) \\ T &= P \,.\, \sin(\alpha) & M_f &= P\mathscr{R}.\sin(\alpha) \end{aligned} \qquad (5.58)$$

Les approximations usuelles utilisées en mécanique accordent une prépondérance marquée au moment de torsion M_t par rapport aux autres quantités présentes [C5.6]. La raison en est due, entre autres, à la petitesse de l'angle α, ce qui implique que N et M_f sont proches de zéro, et au fait que les contraintes de cisaillement engendrées par l'effort tranchant T sont faibles devant celles engendrées par le moment de torsion M_t.

Dans le domaine superélastique, les ressorts en alliages à mémoire ne présentent pas de grandes différences avec les ressorts classiques du point de vue de la géométrie (α reste faible les déplacements petits). L'hypothèse précédente est donc considérée comme valide. L'étude du ressort hélicoïdal peut alors être ramenée à l'étude d'un barreau de section circulaire soumis à un couple de torsion pure M_t. La géométrie spécifique du ressort est, quant à elle, prise en compte à la fin des calculs. Différentes approches sont possibles en calcul de structures:

- Approche de type énergétique (Castigliano): voir annexe 3.
- Approche par la méthode de Bresse.

5.3.1. Application de la méthode de Bresse :

Une approche de type Castigliano a permis dans un premier temps d'obtenir une relation force-déplacement pour un ressort superélastique en AMF .

Cette relation, valable en première approximation, n'a cependant pu être obtenue qu'au prix d'une linéarisation de la réponse en torsion. Ceci entraîne une perte d'information au niveau de la réponse du matériau notamment pour les premiers stades de la transformation. De plus d'un point de vue numérique, cette méthode qui requiert une dérivation est délicate à mettre en place.

Une formulation de ce problème à partir des équations proposées par Bresse [C5.7] a donc été envisagée. La méthode de Bresse offre plusieurs avantages par rapport à la précédente : les déplacements de la structure sont directement exprimés sous une forme tridimensionnelle et les rotations des sections droites sont directement calculables. De plus, cette méthode est écrite dans le cas général de poutres courbes. En outre, la formulation étant faite sous forme d'intégrales, ce modèle s'adapte parfaitement au calcul numérique.

Dans le cas de la torsion pure, compte tenu des hypothèses que nous avons faites précédemment, ces intégrales s'écrivent :

- pour les déplacements de la section droite S_1 d'abscisse curviligne s+ds par rapport à la section droite S d'abscisse curviligne s :

$$\vec{u_1} = \vec{u_0} + \vec{\omega_0} \wedge \overrightarrow{G_0G_1} + \int_{s_0}^{s_1} \psi \, . \, \vec{e} \wedge \overrightarrow{G_0G_1} . ds \qquad (5.59)$$

- pour les rotations de la section S_1 :

$$\vec{\omega_1} = \vec{\omega_0} + \int_{s_0}^{s_1} \psi \, . \, \vec{e} . ds \qquad (5.60)$$

Compte tenu des relations liant ψ et M_t, on peut calculer la valeur de ψ en fonction du couple de torsion M_t appliqué au ressort. On obtient ainsi une expression du déplacement du ressort ne dépendant que de ses caractéristiques géométriques et de l'angle de torsion unitaire ψ :

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} n.p.\mathscr{D}.\psi \\ n.p.\frac{\mathscr{D}}{2}.\psi \\ n.\pi.\frac{\mathscr{D}^2}{2}.\psi \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \begin{Bmatrix} -(n-1).\mathscr{D}.\psi \\ 0 \\ (n-1).p.\psi \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \tag{5.61}$$

5.3.2. Résolution directe:

Nous ne nous intéresserons ici qu'à l'enfoncement du ressort suivant son axe sous l'action du chargement extérieur P. L'expression de ce déplacement est donnée par :

$$f = n.\pi.\frac{\mathscr{D}^2}{2}.\psi \tag{5.62}$$

Il convient donc, pour déterminer ce déplacement, de calculer en premier lieu la valeur de l'angle de torsion unitaire ψ. Nous devrons, pour ce faire, tenir compte des différents cas précédemment énumérés, à savoir :

- un matériau non transformé.
- un matériau présentant un noyau austénitique et une zone en cours de transformation.
- un matériau présentant trois zones de comportements différents; l'une austénitique, l'une en transformation, et enfin la dernière, purement martensitique.

Ces différents états seront pris en compte en utilisant les relations (5.20), (5.27) et (A.46) reliant le moment de torsion M_t à l'angle ψ .

5.3.2.1. Phase austénitique :

Dans ce cas, $\psi<\psi_s$, et le matériau a un comportement élastique linéaire, et l'on retrouve la relation classique :

$$\psi = \frac{2.M_t}{\mu_a.\pi.R^4} \tag{5.63}$$

5.3.2.2. Matériau en cours de transformation :

La complexité de la relation liant l'angle de torsion unitaire ψ et le moment de torsion M_t ne permet pas de déterminer directement la quantité recherchée. On aboutit à une équation de quatrième degré:

$$A\,\psi^4 + B\,\psi^3 + C = 0 \tag{5.64}$$

dont les coefficients dépendent du chargement extérieur, de la température et des caractéristiques du matériau :

$$A = \frac{\mu' R^2}{2}$$

$$B = \frac{M_t}{\pi .R^2} + \frac{2}{3}(\mu_a - \mu').\psi_s.R^2 \tag{5.65}$$

$$C = \frac{\psi_s^4.R^2}{6}(\mu_a - \mu')$$

La racine de cette équation doit se trouver dans l'intervalle défini par ψ_s et ψ_f.

5.3.2.3. Matériau présentant une zone purement martensitique :

On aboutit à une équation du même type que la précédente, mais avec des coefficients différents :

$$A = \frac{\mu_a R^2}{2}$$

$$B = \frac{M_t}{\pi . R^2} - \frac{2}{3}(\mu_a - \mu').(\psi_f - \psi_s).R^2 \qquad (5.66)$$

$$C = \frac{R^2}{6}(\mu_a - \mu')(\psi_f^4 - \psi_s^4)$$

Dans ce cas, la racine de l'équation doit être supérieure à ψ_f.

5.3.2.4. Discussion :

Lorsque le matériau n'est pas transformé, la réponse est unique, et la seule précaution à prendre est de vérifier que cette réponse est bien inférieure à ψ_s.

Par contre, les cas suivants posent des problèmes numériques, puisqu'on a le choix entre plusieurs racines possibles. Il faut donc veiller à utiliser une méthode de résolution numérique de l'équation qui donne toute les garanties de sécurité. A cet égard, c'est la méthode de la dichotomie [C5.8] qui donne le plus de satisfaction dans ce domaine puisque l'on impose l'intervalle dans lequel doit se trouver la racine. Cette méthode possède malheureusement un inconvénient majeur qui est sa lenteur d'exécution. Ce schéma de résolution décrit en figure V.14 risque alors de se révéler gourmand en temps de calcul surtout si l'on désire obtenir toute la courbe de réponse du ressort. Une autre méthode de résolution du problème est donc adoptée. Cette approche, de type incrémentale, est décrite au paragraphe suivant.

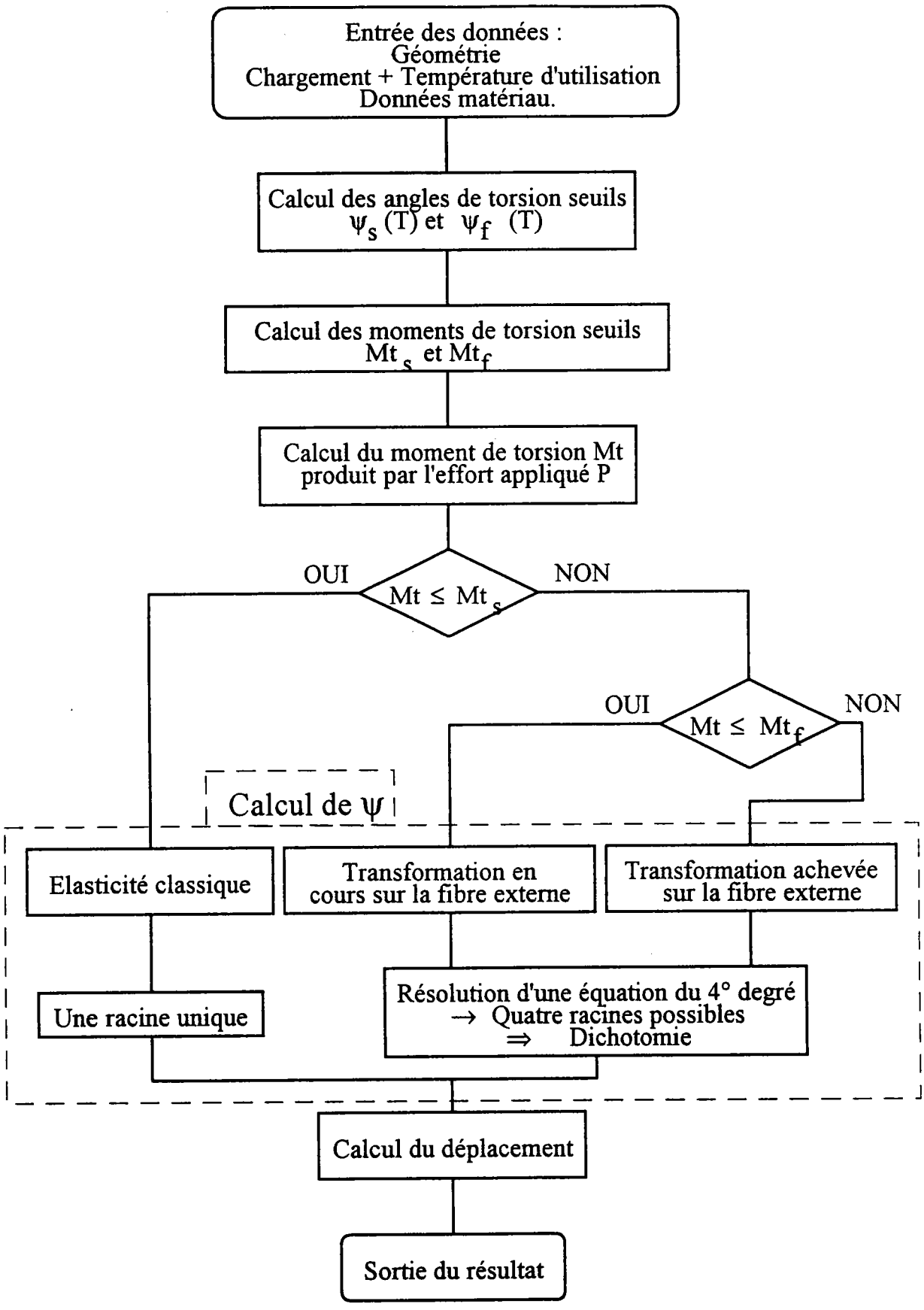


Fig. V.14: Schéma de résolution pour l'obtention d'un couple (M_t,ψ) en cours de chargement.

5.3.3. Formulation incrémentale:

Dans cette section, on va reconsidérer le problème d'un point de vue incrémental. A un rayon ρ donné, un incrément de contrainte $\Delta\tau(\rho)$ est relié à l'incrément de déformation $\Delta\gamma(\rho)$ par :

$$\Delta\tau(\rho) = \mu(\rho) \,.\, \Delta\gamma(\rho) \tag{5.67}$$

avec : $\mu(\rho) = \mu_a$ dans la partie austénitique du matériau ($\rho \leq Ra$).

$\mu(\rho) = \mu'$ dans la partie en cours de transformation ($Ra < \rho \leq Rm$).

$\mu(\rho) = \mu_a$ dans la partie martensitique ($Rm < \rho \leq R$).

or l'incrément de déformation $\Delta\gamma(\rho)$ peut être exprimé en fonction d'un incrément d'angle $\Delta\psi$ et du rayon ρ par :

$$\Delta\gamma(\rho) = \Delta\psi \,.\, \rho \tag{5.68}$$

Or l'incrément de moment de torsion ΔM_t dépend de l'incrément de charge appliqué ΔP, et il est aussi relié à la contrainte $\Delta\tau(\rho)$ par la relation classique donnant le moment de torsion en fonction de la contrainte (5.19). Une expression d'un incrément du couple de torsion ΔM_t sous la forme suivante peut donc être établie :

$$\Delta M_t = \int_{(S)} \Delta\tau(\rho) \,.\, \rho \,.\, ds = \Delta P . \frac{\mathscr{D}}{2} \tag{5.69}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\Delta M_t = \int_{(S)} \mu(\rho) \,.\, \Delta\psi \,.\, \rho^2 \,.\, ds = \Delta P . \frac{\mathscr{D}}{2} \tag{5.70}$$

En considérant les différentes étapes du chargement, on peut déterminer la valeur d'un incrément d'angle $\Delta\psi$ dans chacune de celle-ci. On peut déterminer l'angle de torsion unitaire total ψ en sommant les différents $\Delta\psi$. Ceci permet

d'évaluer la valeur des zones transformées (R_m) ou en cours de transformation (R_a) à chaque pas de calcul à l'aide des formules (5.10) et (5.11).

En exprimant l'enfoncement sous une forme elle aussi incrémentale par :

$$\Delta f = n.\pi.\frac{\mathscr{D}2}{2}.\Delta\psi \tag{5.71}$$

nous pouvons aisément déterminer pas par pas la courbe de déplacement du ressort en fonction de l'effort appliqué.

5.3.3.1. Cas du matériau purement austénitique :

Aucune zone dans ce cas n'est transformée, on a $R_a = R_m = 0$. La réponse est élastique:

$$\Delta\psi = \frac{2.\Delta M_t}{\pi.\mu_a.R^4} \tag{5.72}$$

5.3.3.2. Matériau en cours de transformation :

Il faut ici considérer deux zones, ce qui se traduit de la façon suivante pour le calcul de ΔMt :

$$\Delta M_t = 2.\pi.\left(\int_0^{R_a} \mu_a\,.\,\Delta\psi\,.\,\rho^3.\,d\rho + \int_{R_a}^{R} \mu'\,.\,\Delta\psi\,.\,\rho^3\,.\,d\rho\right) \tag{5.73}$$

ce qui donne :

$$\Delta\psi = \frac{2.\Delta M_t}{\pi.(\mu_a.R_a^4 + \mu'.(R^4 - R_a^4))} \tag{5.74}$$

Cette relation est importante. Elle fournit la réponse de la structure en cours de transformation.

5.3.3.3. Matériau présentant une zone purement martensitique:

Trois zones sont alors à considérer, délimitées par les rayons Ra, Rm, et R. L'incrément de moment de torsion devient :

$$\Delta M_t = 2.\pi.\left(\int_0^{R_a} \mu_a \,.\, \Delta\psi \,.\, \rho^3 .\, d\rho + \int_{R_a}^{R_m} \mu' \,.\, \Delta\psi \,.\, \rho^3 \,.\, d\rho + \int_{R_m}^{R} \mu_a \,.\, \Delta\psi \,.\, \rho^3 \,.\, d\rho\right) \tag{5.75}$$

La relation suivante est alors obtenue pour $\Delta\psi$:

$$\Delta\psi = \frac{2.\Delta M_t}{\pi.(\mu_a.R_a^4 + \mu'.(R_m^4 - R_a^4) + \mu_a.(R^4 - R_m^4))} \tag{5.76}$$

Cette relation qui décrit la réponse d'une structure présentant une zone purement martensitique a peu d'intérêt pratique.

5.3.3.4. Algorithme de résolution:

La résolution du problème sous forme incrémentale est résumée dans l'organigramme donné en figure V.15.

Cette méthode couplée à des moyens de calcul informatique permet de suivre non seulement l'évolution du déplacement en fonction de l'effort appliqué, mais aussi de connaître les états de contrainte, de déformation, ainsi que l'étendue des zones transformées dans le matériau. Cette approche permet aussi d'estimer la fraction volumique de martensite formée sous contrainte dans le ressort.

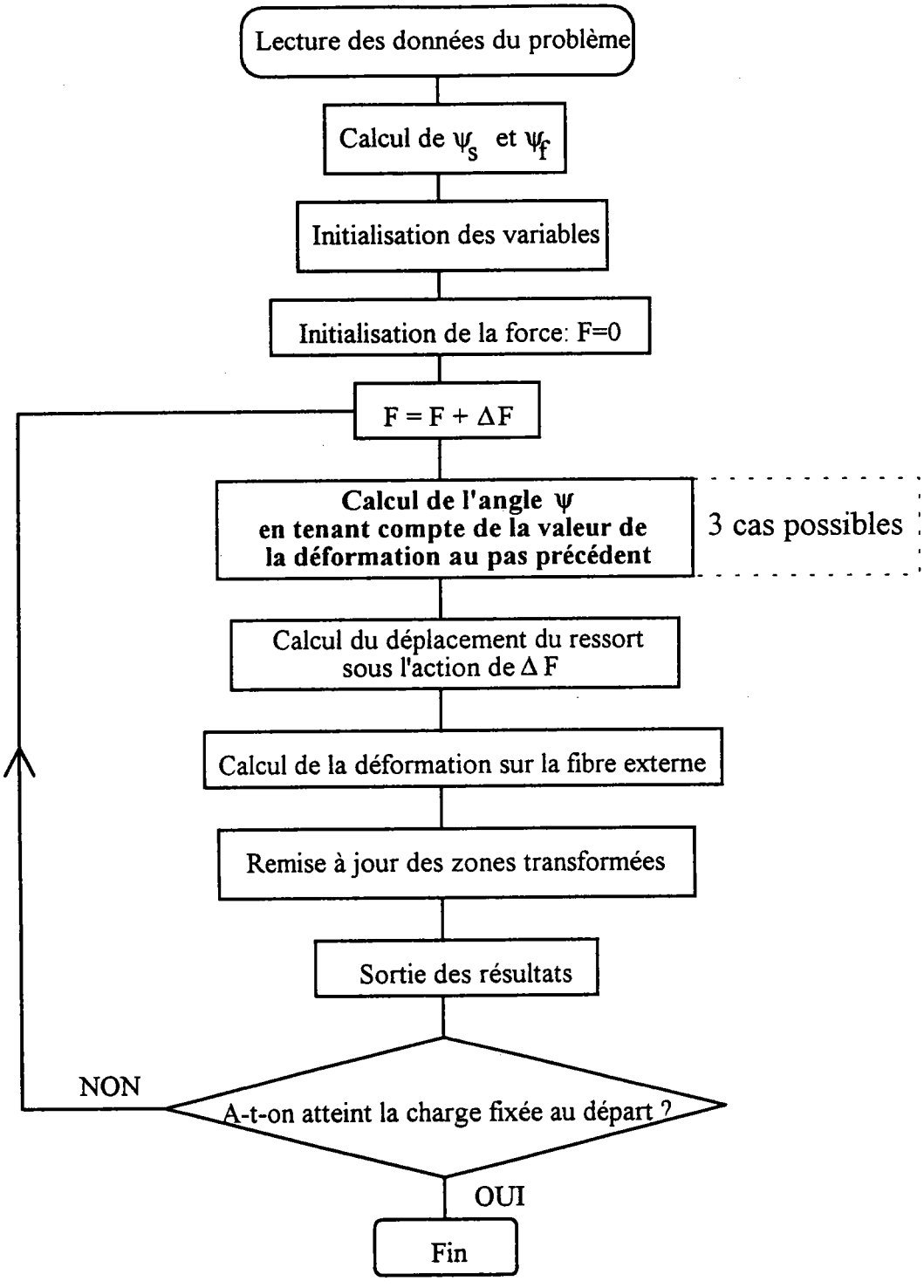


Fig. V.15: Schéma de résolution pour l'obtention de la réponse d'un ressort superélastique en cours de chargement.

Seules les étapes importantes sont présentées.

5.4. Evaluation de la fraction volumique de martensite transformée:

Comme nous l'avons vu, ces modèles de calculs offrent à tout instant des informations sur l'état de déformation locale dans la matière, ainsi que sur les zones transformées ou en cours de transformation (voir fig. V.16 et fig. V.17).

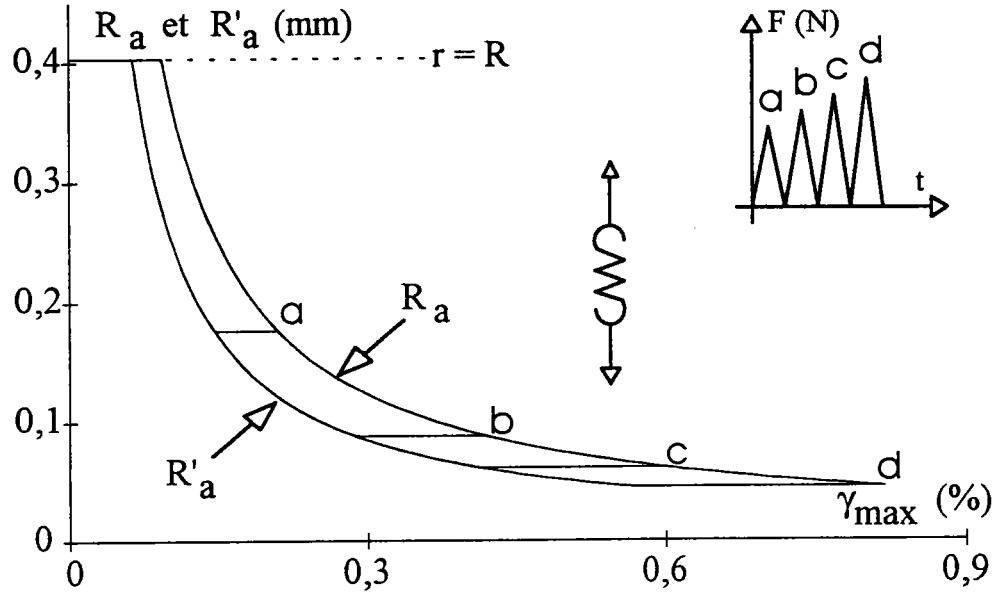


Fig. V.16: Evolution théorique de la zone transformée au cours de la charge et de la décharge pour un ressort hélicoïdal.

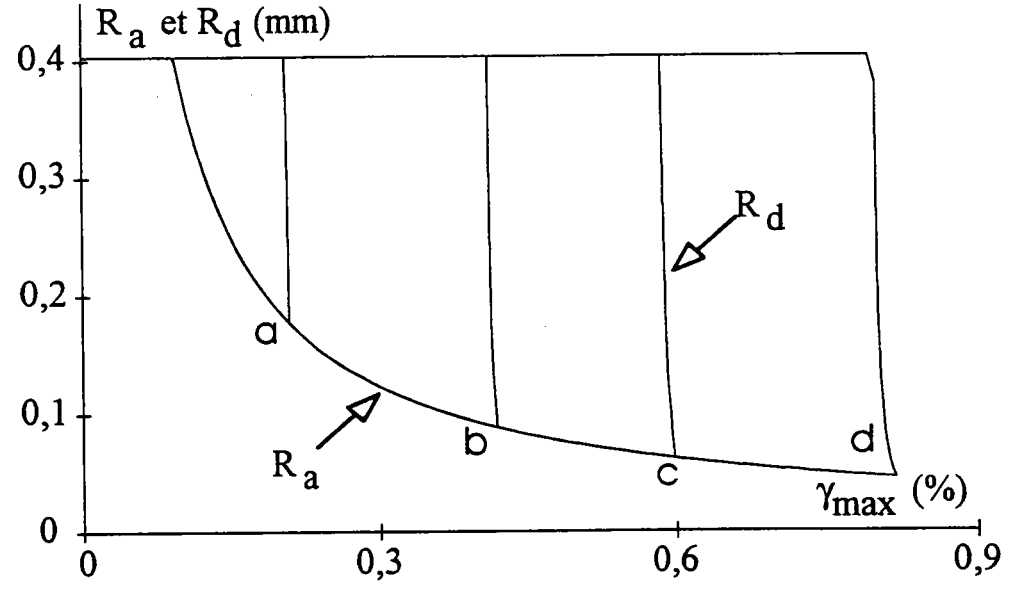


Fig. V.17: Evolution de la zone en décharge élastique (R_d) pour le même ressort hélicoïdal.

La connaissance des rayons R_a et R_m permet à l'aide d'un modèle simple d'évaluer la fraction volumique de martensite f_m formée sous contrainte dans le matériau.

Pour une section droite donnée, on considère les zones délimitées par les trois rayons R_a, R_m, R. On est alors amené à considérer trois cas :

→ Lorsque $\rho \leq R_a$: Le matériau est complètement austénitique. La fraction volumique de martensite est alors nulle ($f_m = 0$).

→ Lorsque $R_m \leq \rho \leq R$: Le matériau est alors complètement martensitique. La fraction volumique de martensite est donc égale à 1 ($f_m = 1$).

→ Lorsque $R_a < \rho < R_m$: Le matériau est en cours de transformation. Il est alors raisonnable de penser, en ce qui concerne ce cas, que plus on va s'éloigner de R_a et donc se rapprocher de R_m, plus la fraction volumique de martensite va augmenter dans le mélange. Nous avons choisi de considérer une répartition linéaire entre R_a et R_m afin d'estimer cette fraction volumique f_m.

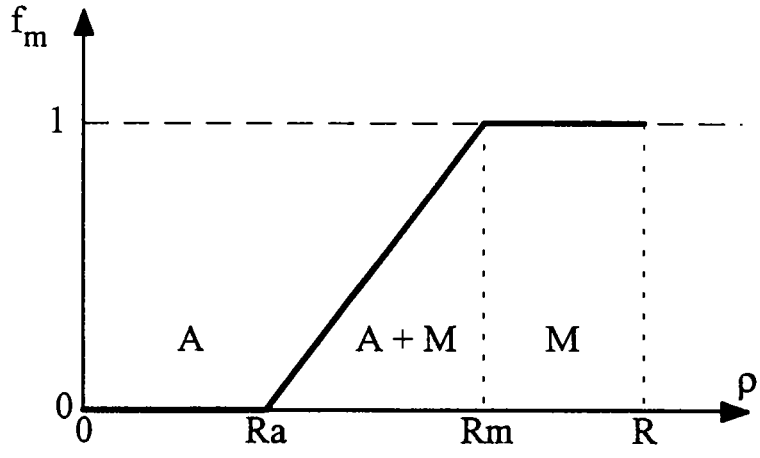


FIG V.18 : Représentation schématique de la fraction volumique de martensite formée en fonction du rayon où l'on se trouve.

L'expression de la fraction volumique en fonction du rayon ρ, avec $R_a < \rho < R_m$, est alors donnée par :

$$f_m(\rho) = \frac{\gamma - \gamma_s}{\gamma_f - \gamma_s} = \frac{\gamma - \gamma_s}{\gamma_{am}} \tag{5.77}$$

Cette hypothèse nous permet de calculer alors la fraction volumique de martensite contenue dans le ressort par :

$$f_m = \frac{V_m}{V} \tag{5.78}$$

où V_m est le volume de martensite dans le ressort, et V le volume total du ressort. Chaque section du ressort se transformant de la même quantité (puisque Mt est constant), cette relation peut être simplifiée :

$$f_m = \frac{S_m}{S} \tag{5.79}$$

La valeur de S_m est alors obtenue de la façon suivante :

$$S_m = \int_{Ra}^{Rm} f(\rho).dS + \pi.(R^2 - R_m^2) \tag{5.80}$$

$$S_m = \frac{2\pi}{\gamma_{am}} \left(\int_{Ra}^{Rm} \psi\, \rho^2\, d\rho - \int_{Ra}^{Rm} \gamma_s\, \rho\, d\rho \right) + \pi.(R^2 - R_m^2) \tag{5.81}$$

On obtient finalement :

$$S_m = \pi \left(\frac{2\psi}{3\,\gamma_{am}} \left(R_m^3 - R_a^3 \right) - \frac{\gamma_s}{\gamma_{am}} \left(R_m^2 - R_a^2 \right) + (R^2 - R_m^2) \right) \tag{5.82}$$

Dans la section, la fraction volumique de martensite orientée prend donc la valeur suivante d'après (5.79):

$$f_m = \frac{2\psi}{3\,\gamma_{am}} \frac{(R_m^3 - R_a^3)}{R^2} - \frac{\gamma_s}{\gamma_{am}} \frac{(R_m^2 - R_a^2)}{R^2} + \left(1 - \frac{R_m^2}{R^2} \right) \tag{5.83}$$

On peut facilement vérifier que cette approximation de la fraction volumique de martensite transformée est en bon accord avec les conditions extrêmes, c'est à dire :

- un matériau non transformé : on a dans ce cas $R_a = R_m = R$

  $\rightarrow$ on obtient $f_m = 0$

- un matériau complètement transformé : on a alors $R_a = R_m = 0$

  $\rightarrow$ on obtient $f_m = 1$

La figure V.19 suivante présente l'évolution de la fraction volumique de martensite obtenue dans le cas du ressort dont l'évolution des zones transformées a été présentée précédemment (fig. V.16 et fig. V.17).

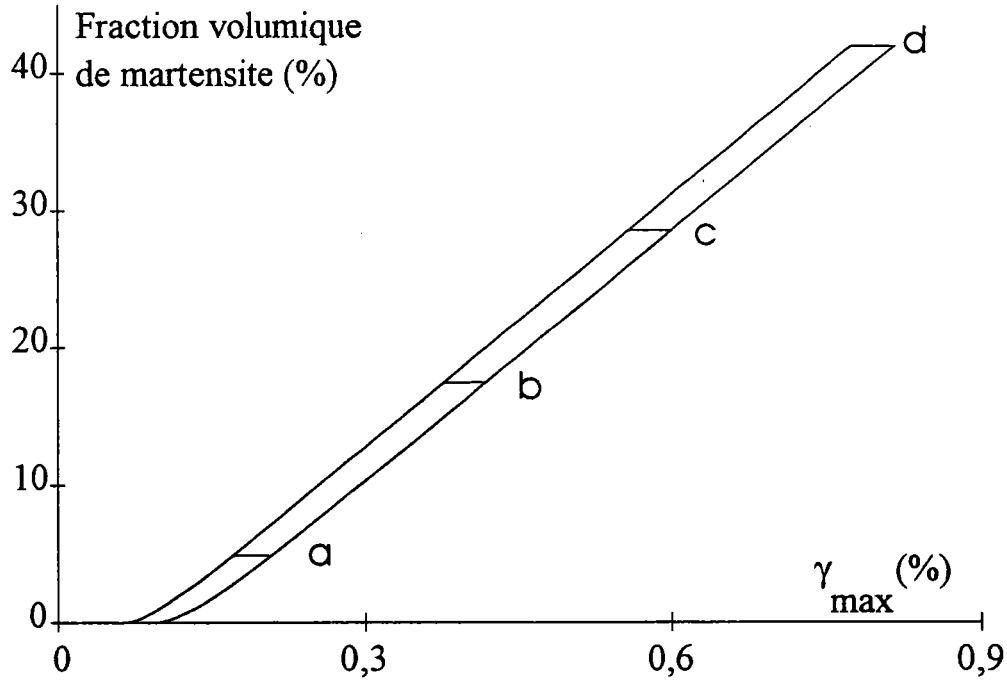


Fig V.19: Evolution théorique de la fraction volumique de martensite en fonction de la déformation maximale de cisaillement pour un ressort hélicoïdal.

5.5. Conclusion:

Dans ce chapitre, la réponse d'une structure, de type barreau cylindrique, soumise à de la torsion pure a été étudiée. La loi de comportement y a été utilisée sous une forme bilinéaire, donc simplifiée par rapport au comportement réel du matériau. Cependant malgré cette simplification du problème, la réponse obtenue est complexe. Ceci est du aux effets de structures qui sont mis en évidence dans cette étude.

Le modèle a été étendu au cas du ressort hélicoïdal moyennant l'hypothèse classique considérant que la torsion est prépondérante par rapport aux autres effets dans ces structures. Dans ce cas, une réponse approchée peut être obtenu pour le ressort en cours de chargement sous la forme de lois simples (voir annexes).

Une modélisation simple qui doit permettre d'évaluer la fraction volumique de martensite orientée par la contrainte dans ces structures a été mise en place.

Références bibliographiques:

[C5.1] KERGUIGNAS M., CAIGNAERT G., "Résistance des matériaux", Edition Dunod Université, 4e Edition, 1977.

[C5.2] BATOZ J.-L., DHATT G., "Modélisation des structures par éléments finis", Vol. 2, 1990.

[C5.3] PATOOR E., BERVEILLER M., "Les alliages à mémoire de forme", Editions Hermès, 1990.

[C5.4] PATOOR E., EBERHARDT A., BERVEILLER M., "Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys", Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1993, p.296

[C5.5] VAN HUMBEECK J., AERNOUDT E., DELAEY L., LU LI, VERGUTS H., ORTÍN J., "Hysteretic transformation behavior of SMA", Rev. Phys. Appl. 23, 1988, p. 557.

CHAPITRE 6

FLEXION DES AMF

Table des matières:

6.1. Introduction: 166
6.2. Poutre prismatique en flexion pure: 167
6.2.1. Description des déplacements : 168
6.2.2. Déformation en un point de la section : 169
6.2.3. Cas du matériau non transformé : 169
6.2.3.1. Relation entre le gradient de déplacement et la rotation des sections droites: 169
6.2.3.2. Déformation et contrainte: 170
6.2.3.3. Moment de flexion : 170
6.2.4. Déformations de transformation: 171
6.2.4.1. Déformation seuil de début de transformation en traction : 172
6.2.4.2. Déformation seuil de début de transformation en compression : 173
6.2.4.3. Déformations seuils de fin de transformation : 173
6.2.5. Définition des zones transformées : 174
6.2.5.1. Fibres tendues: 174
6.2.5.2. Fibres comprimées: 175
6.2.6. Cas du matériau en cours de transformation : 175
6.2.6.1. Transformation sur une partie des fibres en traction: 176
6.2.6.2. Transformation sur une partie des fibres en traction et en compression: 177
6.2.7. Transformation inverse: 178
6.2.7.1. Définition des zones transformées : 178
6.2.7.2. Module de transformation inverse : 179
6.2.7.3. Moment de flexion : 181
6.3. Extension au cas de la flexion simple: 181

6.4. Conclusion: 183

Références bibliographiques: 184

6.1. Introduction:

De nombreux dispositifs contenant des AMF sollicite ce matériau en flexion [C6.1]. Il est donc important de pouvoir modéliser ce type de sollicitation. Cependant, par rapport à la torsion pure, des difficultés supplémentaires sont à prendre en compte.

La première est directement liée au comportement même du matériau. En effet, dans les AMF, la transformation martensitique produit une dissymétrie entre traction et compression. Les contraintes seuils de transformation, ainsi que les modules de transformation du matériau ne sont pas identiques suivant que le matériau est tendu ou comprimé. La boucle d'hystérésis est également plus importante en compression qu'en traction. La transformation des sections en martensite s'opérera donc de façon différente suivant que la fibre considérée est tendue ou comprimée.

La seconde difficulté est liée, elle, au mode de sollicitation. En effet, dans le cas général, le moment de flexion dépend de l'abscisse de la section considérée compte tenu du type de chargement (forces ponctuelles, charges réparties, ...) et des conditions aux limites sur les appuis (appuis simples, encastrement). Chaque section est donc susceptible de se transformer différemment de sa voisine en fonction du moment de flexion qui y est exercé.

Il existe encore une dernière différence avec les calculs de torsion. En effet, dans le cas général, la poutre en flexion peut subir des variations importantes dans sa géométrie. Ces variations ne sont habituellement pas prise en compte car la Résistance des Matériaux classique se situe dans le cadre des petits déplacements. Or, dans le cas des AMF, les poutres peuvent subir de grands déplacements.

La première de ces difficultés liée au comportement du matériau a déjà été levée au chapitre 2, où nous avons défini une loi de comportement non

symétrique. Les deux autres, liées calcul de structures, sont résolues de la façon suivante:

→ Chaque section pouvant se transformer différemment de sa voisine, la poutre est discrétisée sur sa longueur en différents tronçons.

→ Pour remédier au problème de grand déplacement, la configuration de la poutre déformée est réactualisée après chaque pas de calculs afin d'obtenir une réponse plus "réelle" que celle issue des relations usuelles de la résistance des matériaux.

Ces difficultés étant prises en compte, une démarche similaire à celle appliquée dans le cas de la torsion est réalisée à l'aide du même type de formulation incrémentale appliquée aux intégrales de Bresse qui a été décrite dans le chapitre précédent.

6.2. Poutre prismatique en flexion pure:

Nous allons maintenant étudier une poutre droite de section rectangulaire sollicitée en flexion pure. La géométrie de cette poutre est définie par les dimensions de sa section droite constante S, de largeur 2.a et de hauteur 2.b, ainsi que par sa longueur L. Cette poutre est située dans un repère cartésien d'axes x,y,z qui sont aussi les axes principaux d'inertie de la section. Chaque section droite de la poutre est soumise au même couple de flexion noté M_f autour de l'axe z (voir fig. VI.1).

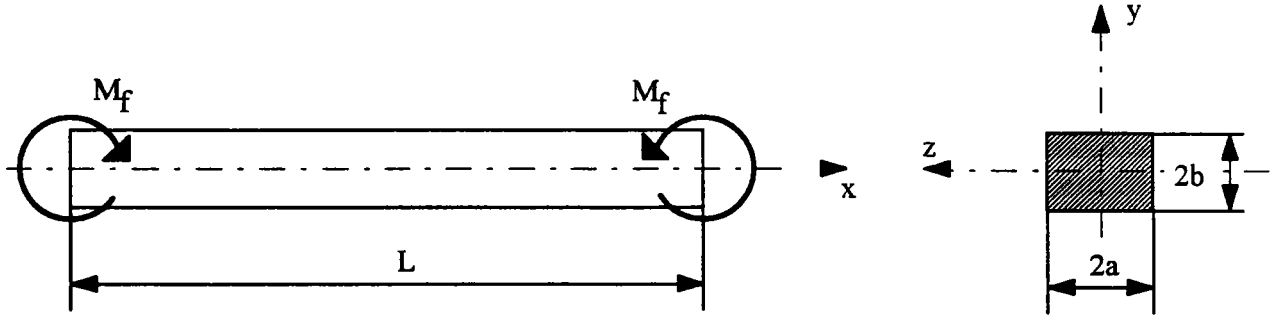


Fig. VI.1 : Poutre en flexion pure.

6.2.1. Description des déplacements :

On se place dans le cadre de l'hypothèse des poutres d'Euler-Navier-Bernoulli, et l'on considère de ce fait que les déformations de cisaillement restent négligeables. Dans le cas général, le champ de déplacement cinématiquement admissible lié à ce modèle est de la forme [C6.2]:

$$\begin{cases} u_x = u(x) - y\dfrac{dv}{dx} \\ v_y = v(x) \\ w_z = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Le terme $\dfrac{dv}{dx}$ représentant la rotation de la section droite que l'on notera désormais $\theta_z(x)$ (voir fig.VI.2), d'où:

$$u_x = u(x) - y\,\theta_z(x) \tag{6.2}$$

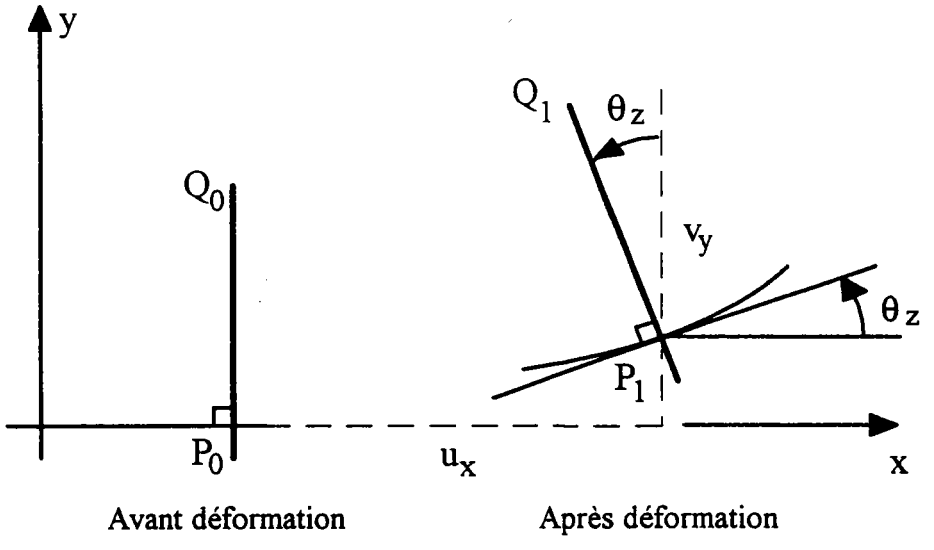


Fig VI.2 : Rotation d'une section. Modèle de Navier-Bernoulli. Définition des paramètres cinématiques.

6.2.2. Déformation en un point de la section :

Le champ de déplacement défini ci-dessus entraîne que pour une section, la seule déformation non nulle en un point P du matériau est:

$$\varepsilon_{xx}(x,y)=\frac{du}{dx}-y\ \frac{d\theta}{dx}=\varepsilon \tag{6.3}$$

soit encore :

$$\varepsilon_{xx}(x,y)=u_{,x}-y\ \varphi(x)=\varepsilon \tag{6.4}$$

où le terme $\varphi(x)$ représente la rotation relative entre deux sections planes distantes de dx.

6.2.3. Cas du matériau non transformé :

6.2.3.1. Relation entre le gradient de déplacement et la rotation des sections droites:

Dans le cas de la flexion pure, l'effort normal, noté $N_x(x)$, est nul. On doit donc avoir :

$$N_x(x)=\int_S \sigma_{xx}\,dS=0 \tag{6.5}$$

soit en remplaçant la contrainte par son expression :

$$N_x(x)=\int_S E\ (u_{,x}-y\ \varphi(x))\,dS=0 \tag{6.6}$$

où E est le module d'élasticité du matériau. De cette relation, il vient:

$$u_{,x}=\varphi(x)\ \frac{\int_S E\,y\,dS}{\int_S E\,dS} \tag{6.7}$$

Cette relation relie le gradient du déplacement à la rotation relative des sections droites les unes par rapport aux autres par l'intermédiaire du rapport du moment statique sur une rigidité équivalente <E S> [C6.4]. Dans le cas de l'élasticité

linéaire d'un matériau homogène, le gradient de déplacement est nul car le moment statique est égal à zéro. On conserve néanmoins la forme (6.7) car cette relation nous sera utile dans l'étude des sections inhomogènes (zone élastique + zone en transformation).

6.2.3.2. Déformation et contrainte:

On déduit l'expression de la déformation à partir de la relation (6.4) sous la forme::

$$\varepsilon(x,y) = \varphi(x) \left(\frac{\int_S E\, y\, dS}{\int_S E\, dS} - y \right) \tag{6.8}$$

La contrainte s'obtient ensuite facilement en utilisant la loi de Hooke.

6.2.3.3. Moment de flexion :

L'expression du moment de flexion se déduit des contraintes par intégration sur le domaine de la section droite S :

$$M_f = \int_S \sigma_{xx}(y)\ y\ dS \tag{6.9}$$

En remplaçant la contrainte par son expression:

$$M_f = E \left(u_{,x} \int_S y\, dS - \varphi(x) \int_S y^2\, dS \right) \tag{6.10}$$

ou encore:

$$M_f = \left(\varphi(x) \frac{\int_S E\, y\, dS}{\int_S E\, dS} \int_S E\, y\, dS - \varphi(x) \int_S E\, y^2\, dS \right) \tag{6.11}$$

Dans le premier terme de la relation (6.11), on reconnaît l'expression du moment statique. Ce terme étant nul, dans le cas du matériau ayant un comportement totalement élastique linéaire, il vient après simplification:

$$M_f = 2\,a \int_{-b}^{b} E\,\varphi\,y^2\,dy \qquad (6.12)$$

Soit après intégration:

$$M_f = \frac{4\,E\,\varphi\,ab^3}{3} = \frac{4\,E\,\varphi\,S\,b^2}{3} \qquad (6.13)$$

Où l'on reconnaît la relation usuelle de la Résistance des Matériaux.

6.2.4. Déformations de transformation:

Comme dans le cas de la torsion, on peut définir des déformations seuils de transformation à partir de la formulation précédente. Mais, comme nous l'avons déjà souligné, dans le cas de la flexion, la transformation de la section ne se fera pas symétriquement. Les micrographies suivantes (fig. VI.3 et fig. VI.4), réalisées sur un monocristal de Cu-Al-Be (M_s = –20°C) par A. HAUTCOEUR, mettent en évidence cette dissymétrie.

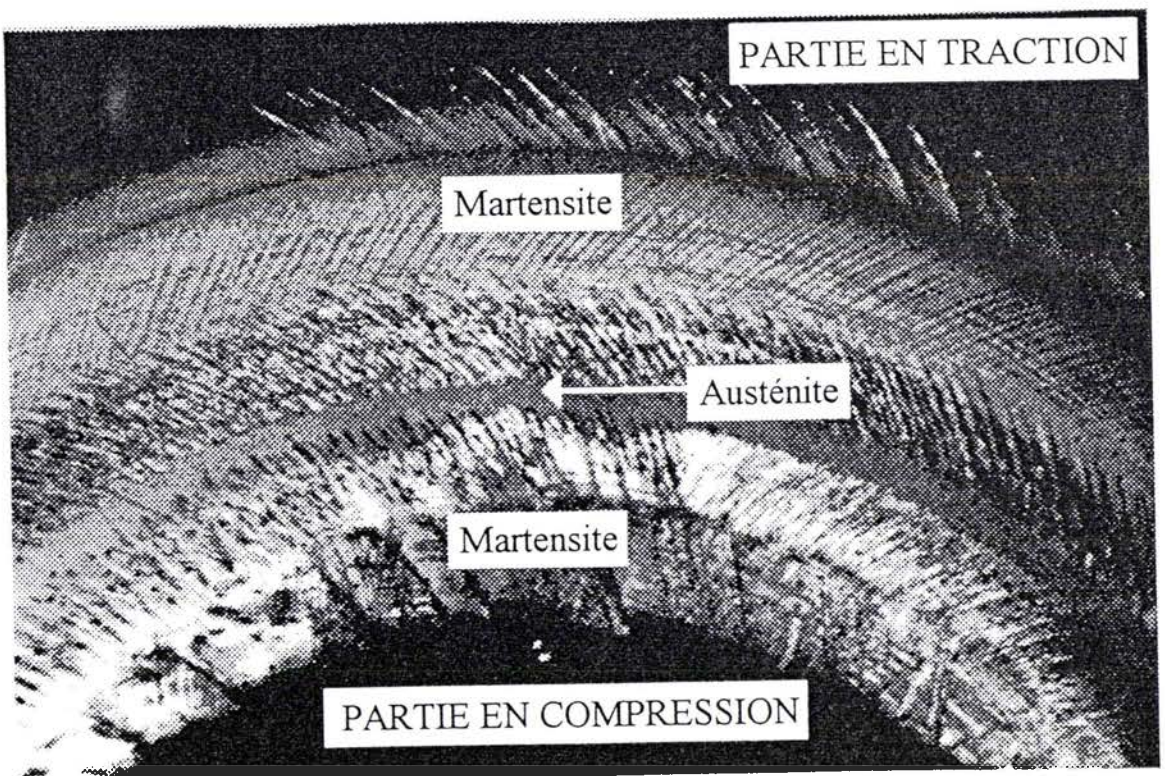


FIG. VI.3: Micrographie d'un alliage de Cu-Al-Be (M_s = –20°C) en flexion à température ambiante.(Photo A. HAUTCOEUR, LPMM).

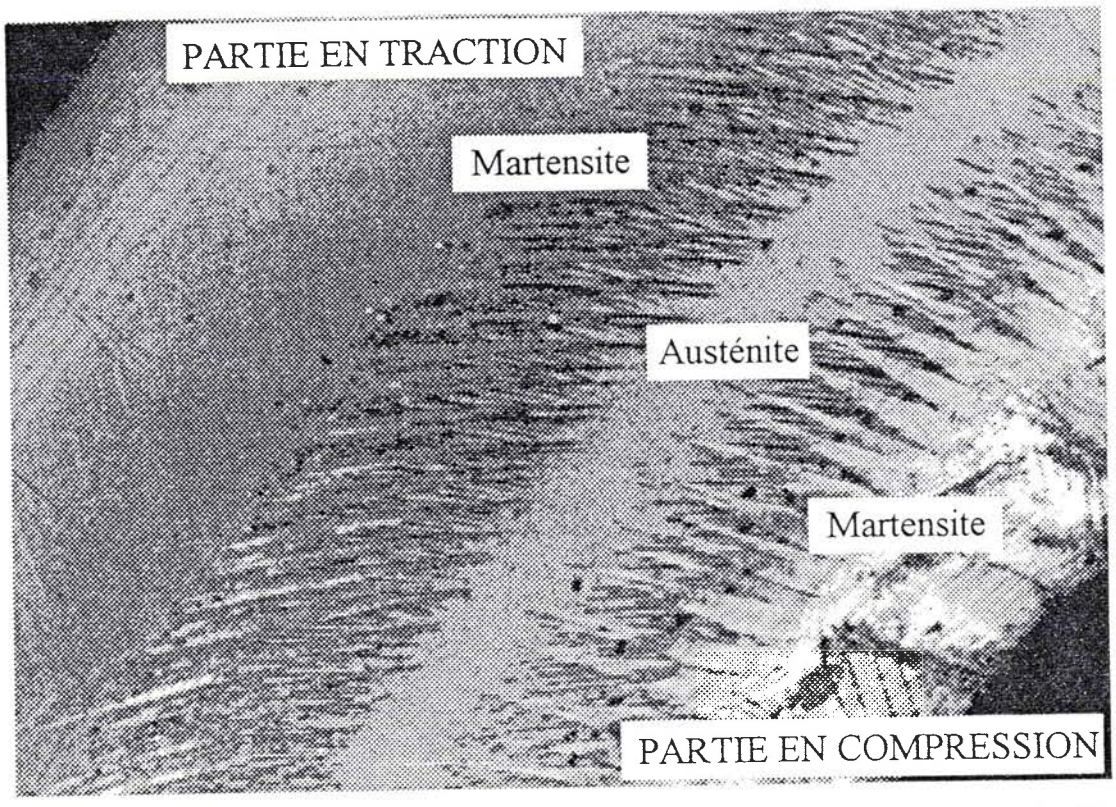


FIG. VI.4: Micrographie d'un alliage de Cu-Al-Be en flexion (Détail). (Photo A. HAUTCOEUR, LPMM).

Il faut maintenant considérer deux déformations seuils de début de transformation. La première est liée aux fibres en traction, la seconde aux fibres en compression. Il en est de même pour la fin de transformation pour laquelle nous obtenons aussi deux déformations seuils de fin de transformation.

Aux fins de simplification des écritures, les différentes quantités, exprimées ci-après, le seront en tenant compte de la géométrie et du chargement représentés en figure VI.1. Les valeurs et les signes de ces quantités seront donc en conformité avec ce problème. A titre d'exemple, l'angle $\varphi(x)$ est considéré positif dans ce cas.

6.2.4.1. Déformation seuil de début de transformation en traction :

Cette déformation est définie pour un matériau totalement élastique. Les déformations sont proportionnelles à y; la relation (6.8) s'écrit :

$$\varepsilon(x,y) = \varphi(x)\ (-y) \tag{6.14}$$

Les déformations sont alors maximales sur les fibres externes ($y = \pm b$). C'est donc sur ces fibres que la transformation débute en premier lieu. De plus le seuil de transformation pour la traction étant inférieur à celui de compression, c'est d'abord sur les fibres sollicitées en traction que la transformation apparaît. Avec la convention de signe adoptée (fig.VI.1), la déformation seuil de début de transformation a pour expression :

$$\varepsilon_s^T = \varphi_s^T\ (+b) \tag{6.15}$$

6.2.4.2. Déformation seuil de début de transformation en compression :

Bien que la transformation ait déjà débuté sur la partie sollicitée en traction, nous faisons l'hypothèse que la relation (6.14) est conservée. Cela revient à supposer qu'il ne se produit aucun décalage de la fibre neutre de la poutre. Un calcul à posteriori de ce décalage est effectué afin de vérifier que cette hypothèse n'est pas trop forte (voir annexe 6). On définit donc la déformation seuil de début de transformation sur la partie de la poutre en compression ($0 \leq y \leq b$) de la même façon que dans le cas de la traction. Celle-ci s'écrit

$$\varepsilon_s^C = \varphi_s^C\ (-b) \tag{6.16}$$

6.2.4.3. Déformations seuils de fin de transformation :

Nous avons déjà souligné le peu d'intérêt pratique que présente la formation d'une zone complètement martensitique en superélasticité. En effet, comme en torsion, les valeurs de déformation atteintes dans le matériau entraînent des problèmes de vieillissement prématuré ainsi que de la plasticité. La suite de ces travaux sera donc uniquement consacrée à des poutres ne présentant pas de zone purement martensitique.

6.2.5. Définition des zones transformées :

Lorsque la transformation a débuté, des zones ayant des comportements différents coexistent dans le matériau. Due à la symétrie dans la géométrie du problème traité, nous considérons qu'en flexion les zones ainsi créées se répartissent uniformément dans la largeur de la poutre. Ainsi, pour un matériau en cours de transformation, aussi bien dans la partie tendue que dans la partie comprimée, les différentes zones ne sont définies que par la donnée d'une ordonnée suffit à définir l'étendue de ces différentes zones.

Celle-ci est notée y_a^T en ce qui concerne la partie de la poutre sollicitée en traction et y_a^C en ce qui concerne la partie de la poutre soumise à de la compression (voir fig. VI.5).

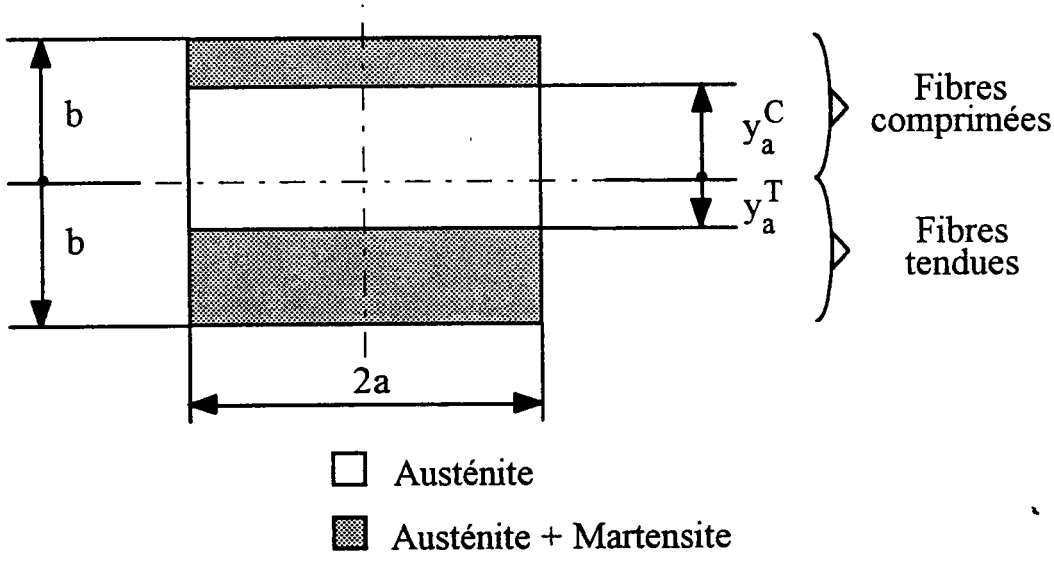


Fig. VI.5 : Zones transformées en flexion.

6.2.5.1. Fibres tendues:

Lorsque la déformation atteint la déformation seuil sur la fibre externe située en y = –b, aucune zone n'est encore transformée. Les ordonnées y_a^T et b sont donc pour le moment confondus. La déformation seuil de traction peut alors être décrite par :

$$\varepsilon_s^T = \varphi_s^T \,.\, (+b) = \varphi \,.\, (+ y_a^T) \qquad (6.17)$$

L'angle de flexion φ étant lié à l'application du couple de flexion M_f. D'après la relation précédente, on peut donc définir la valeur de y_a^T comme étant :

$$y_a^T = \frac{\varphi_s^T}{\varphi} \,.\, (+b) \qquad (6.18)$$

La géométrie des sections impose les conditions suivantes: y_a^T doit être inférieur ou égal à b.

6.2.5.2. Fibres comprimées:

On définit de la même façon définir la valeur de l'ordonnée y_a^C, à partir de l'expression de la déformation seuil de début de transformation en compression ε_s^C.

$$y_a^C = \frac{\varphi_s^C}{\varphi} \,.\, (+b) \qquad (6.19)$$

avec les conditions géométrique suivantes : y_a^C doit être inférieur ou égal à b. De plus, y_a^C doit rester inférieur à y_a^T puisque le seuil de transformation étant plus bas en traction , c'est cette zone qui apparaît la première et se propage donc le plus rapidement.

6.2.6. Cas du matériau en cours de transformation :

Lorsque le matériau se transforme, il est possible de faire le même type d'analyse que celle développée au paragraphe 5.3.2 du chapitre précédent. Il est cependant plus pratique dans ce cas d'utiliser directement une formulation incrémentale. On relie ainsi un incrément de rotation relative entre deux sections, notée $\Delta\varphi(x)$, à un incrément de moment fléchissant ΔM_f . Le choix de la

formulation incrémentale permet également d'utiliser la relation (6.11) caractérisant le décalage de l'axe neutre. Cette relation s'écrit alors:

$$\Delta M_f = \Delta\varphi(x)\left(\frac{\left(\int_S E(y)\, y\, dS\right)^2 - \int_S E(y)\, y^2\, dS \int_S E(y)\, dS}{\int_S E(y)\, dS}\right) \quad (6.20)$$

Le module E y est remplacé par E(y) qui est le module apparent de la zone considérée définie par y (voir fig. VI.6).

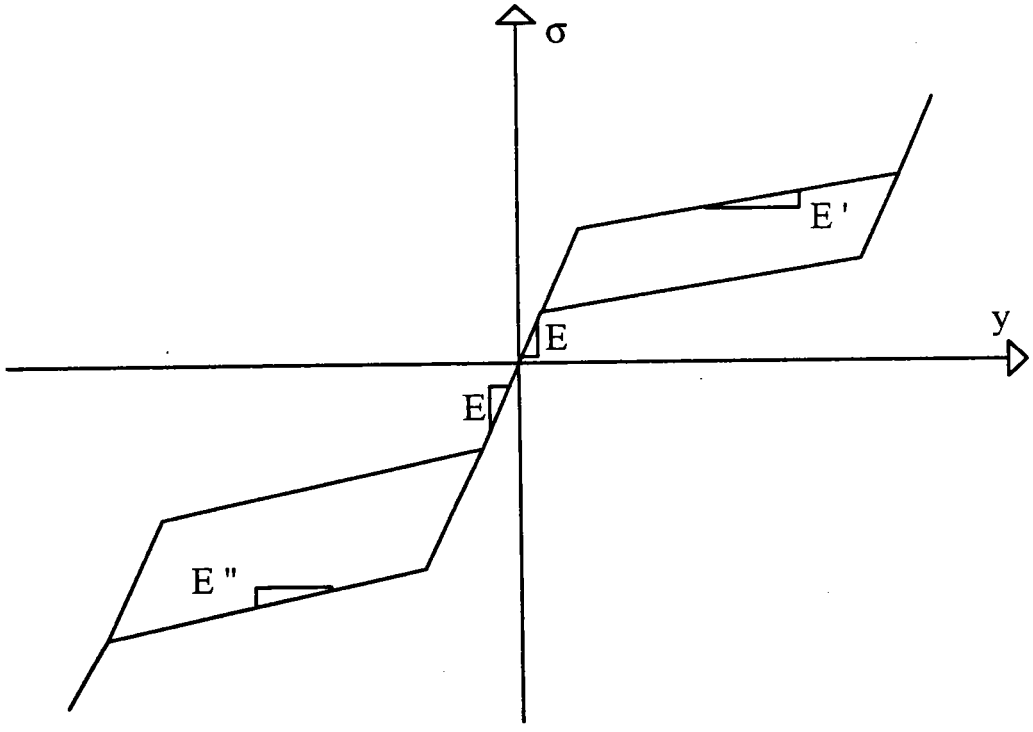


Fig. VI.6: Valeur des modules apparents en fonction de y.

6.2.6.1. Transformation sur une partie des fibres en traction:

Pour déterminer la relation qui existe entre ΔMf et $\Delta\varphi(x)$, il convient de calculer les différentes intégrales composant (6.20). La seule zone transformée, de module apparent E', est alors comprise entre $y = -b$ et $y = -y_a^T$ ($y_a^C = b$ sur la figure VI.5). Les expressions des intégrales sont:

$$\int_S E(y)\, y^2\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} y^2\, dy + E \int_{-y_a^T}^{b} y^2\, dy \right) \quad (6.21)$$

$$\int_S E(y)\, y^2\, dS = \frac{2}{3}.a.(E'.(-(y_a^T)^3 + b^3) + E.(b^3 + (y_a^T)^3)) \quad (6.22)$$

$$\int_S E(y)\, y\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} y\, dy + E \int_{-y_a^T}^{b} y\, dy \right) \quad (6.23)$$

$$\int_S E(y)\, y\, dS = a\,(E'\,((y_a^T)^2 - b^2) + E\,(b^2 - (y_a^T)^2)) \quad (6.24)$$

$$\int_S E(y)\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} dy + E \int_{-y_a^T}^{b} dy \right) \quad (6.25)$$

$$\int_S E(y)\, y\, dS = 2.a.(E'.(b - y_a^T) + E.(b + y_a^T)) \quad (6.26)$$

On obtient alors la relation suivante qui lie les deux incréments:

$$\Delta Mf = \Delta\varphi(x)\left(\frac{(a.\,(E-E').(b^2 - (y_a^T)^2))^2}{2.a.(E'.(b - y_a^T) + E.(b + y_a^T))} - \frac{2}{3}.a.(E'.(-(y_a^T)^3 + b^3) + E.((y_a^T)^3 + b^3)) \right) \quad (6.27)$$

Cette relation définit le comportement de la structure entre φ_s^T et φ_s^C.

6.2.6.2. Transformation sur une partie des fibres en traction et en compression:

Pour $\varphi > \varphi_s^C$, trois zones coexistent dans le matériau (fig. VI.5). Les deux zones précédentes à laquelle vient s'ajouter une zone, de module apparent de transformation E" (compression), comprise entre $y = +y_a^C$ et $y = b$. Les intégrales à calculer sont maintenant de la forme:

$$\int_S E(y)\, y^2\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} y^2\, dy + E \int_{-y_a^T}^{y_a^C} y^2\, dy + E'' \int_{y_a^C}^{b} y^2\, dy \right) \quad (6.28)$$

$$\int_S E(y)\, y^2\, dS = \frac{2}{3}\, a\,(E'\,(-(y_a^T)^3 + b^3) + E(\,(y_a^T)^3 + (y_a^C)^3) + E''\,(b^3 - (y_a^C)^3)) \quad (6.29)$$

$$\int_S E(y)\, y\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} y\, dy + E \int_{-y_a^T}^{y_a^C} y\, dy + E'' \int_{y_a^C}^{b} y\, dy \right) \tag{6.30}$$

$$\int_S E(y)\, y\, dS = a\,(E'\,((y_a^T)^2 - b^2) + E(\,(y_a^C)^2 - (y_a^T)^2) + E''\,(b^2 - (y_a^C)^2)) \tag{6.31}$$

$$\int_S E(y)\, dS = 2a\left(E' \int_{-b}^{-y_a^T} dy + E \int_{-y_a^T}^{y_a^C} dy + E'' \int_{y_a^C}^{b} dy \right) \tag{6.32}$$

$$\int_S E(y)\, dS = 2a\,(E'\,(-(y_a^T) + b) + E(\,(y_a^C) + (y_a^T)) + E''\,(b - (y_a^C))) \tag{6.33}$$

On obtient alors la relation (6.34) qui lie les deux incréments ΔMf et $\Delta\varphi(x)$:

$$\Delta Mf = \Delta\varphi(x) \left[\frac{(a\,(E'\,((y_a^T)^2 - b^2) + E(\,(y_a^C)^2 - (y_a^T)^2) + E''\,(b^2 - (y_a^C)^2)))^2}{2a\,(E'\,(-(y_a^T) + b) + E(\,(y_a^C) + (y_a^T)) + E''\,(b - (y_a^C)))} - \frac{2}{3}\,a\,(E'\,(-(y_a^T)^3 + b^3) + E(\,(y_a^C)^3 + (y_a^T)^3) + E''\,(b^3 - (y_a^C)^3)) \right] \tag{6.34}$$

C'est cette dernière relation qui décrit le comportement de la poutre lorsque la transformation progresse.

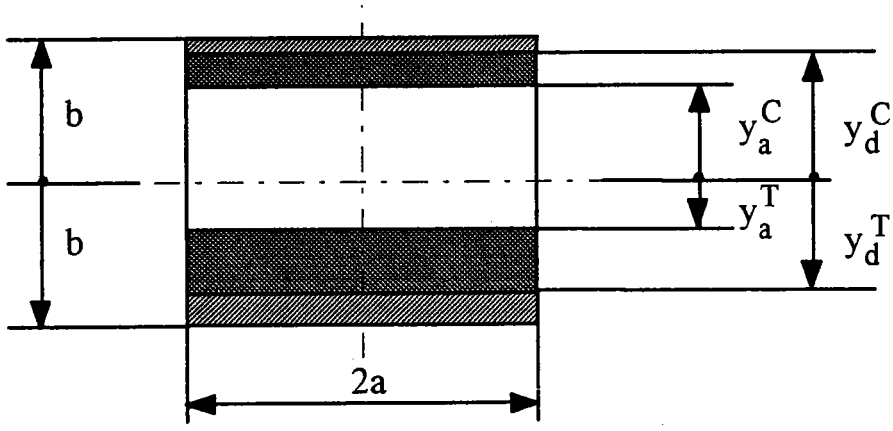
6.2.7. Transformation inverse:

Comme cela a déjà été signalé, les AMF possèdent un comportement hystérétique en superélasticité (aussi bien d'ailleurs qu'en superthermoélasticité). Il faut donc distinguer la charge de la décharge. Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous allons considérer que la décharge du matériau intervient avant que la transformation ne soit complète sur la fibre externe.

6.2.7.1. Définition des zones transformées :

Lors de la décharge de la poutre, chaque partie du matériau préalablement transformée se subdivise en deux nouvelles zones. La première de ces zones correspond à la décharge élastique du mélange austénite+martensite, la seconde

au matériau en cours de transformation inverse. Dans le cas de la flexion, il faut de plus distinguer la partie de la section sollicitée en traction de celle sollicitée en compression (voir fig. VI.7). Des calculs similaires à ceux effectués en torsion aboutissent à la définition de quatre quantités qui correspondent aux limites entre les cinq zones qui coexistent dans le matériau.



☐ Austénite

▒ Austénite + Martensite (décharge élastique)

■ Austénite + Martensite (transformation inverse)

Fig. VI.7: Zones présentes au cours de la décharge.

Pour la zone sollicitée en traction, on obtient:

$$y_a^T = \frac{b\,\varphi_s^T}{\varphi} - \frac{\Delta\sigma^T}{E\,\varphi} \qquad \text{et} \qquad y_d^T = \frac{\varepsilon_s^T\,\Delta\sigma^T}{(\varphi-\varphi^*)E\,\varepsilon_{am}^A + \varphi^*.\Delta\sigma^T} \qquad (6.35)$$

Pour la zone sollicitée en compression, les relations obtenues sont les suivantes:

$$y_a^C = \frac{b\,\varphi_s^C}{\varphi} - \frac{\Delta\sigma^C}{E\,\varphi} \qquad \text{et} \qquad y_d^C = \frac{\varepsilon_s^C\,\Delta\sigma^C}{(\varphi-\varphi^*)E\,\varepsilon_{am}^A + \varphi^*.\Delta\sigma^C} \qquad (6.36)$$

6.2.7.2. Module de transformation inverse :

Comme cela avait déjà été souligné dans le chapitre précédent, le comportement du matériau à la décharge, en un point donné, dépend de la déformation de transformation atteinte lors de la charge en ce même point (voir fig. VI.8).

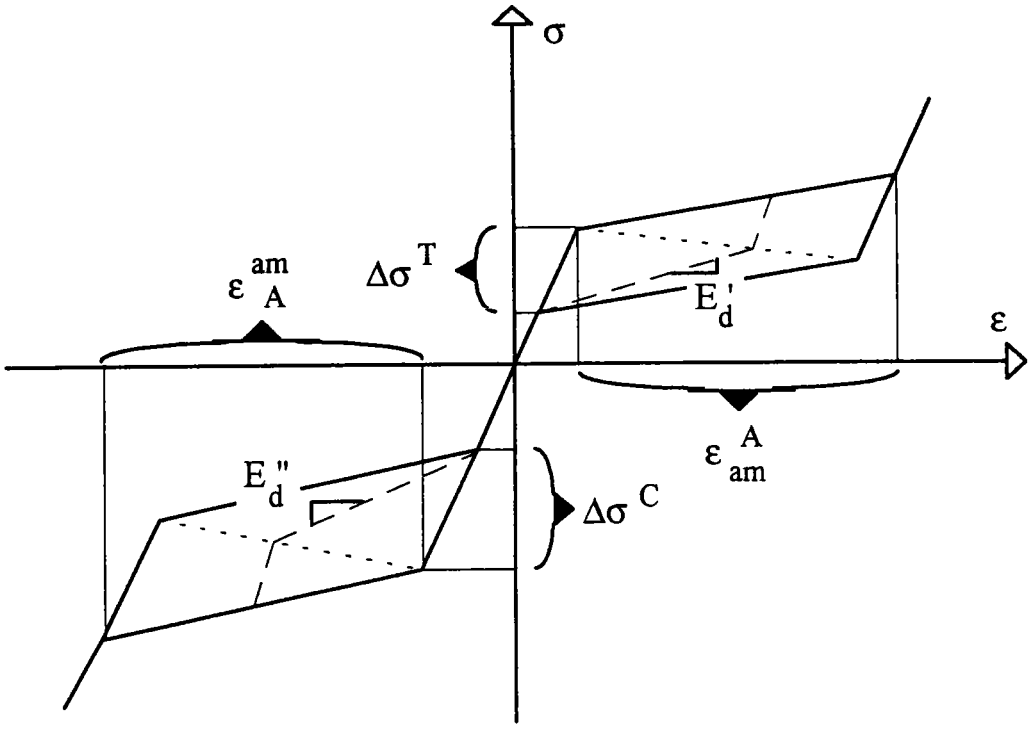


Fig. VI.8: Modules de transformation inverse en décharge pour la même valeur absolue de déformation atteinte à la charge.

La répartition inhomogène des déformations implique que la déformation de début de transformation inverse sera différente en chaque point d'ordonnée y de la section. La géométrie particulière du problème traité entraîne, pour des raisons de symétrie, que les points de même ordonnée possèderont la même déformation critique de décharge. Le même schéma de calcul que dans le cas de la torsion est utilisé en flexion pour obtenir les expressions des modules de transformation inverse. Ces modules dépendent eux aussi du point considéré dans la section. Il faut encore considérer à ce niveau la différence entre les fibres sollicitées en traction et celles sollicitées en compression. On obtient alors deux relations pour le module de transformation inverse. Le premier, en liaison avec la partie en traction, est noté E_d', le second, valable en compression, est noté E_d''. Leurs expressions sont:

$$E'_d = E\,\frac{(\varphi^* y - \varphi_s^T b)(E' \varepsilon_{am}^A - \Delta\sigma^T) + \Delta\sigma^T \varepsilon_{am}^A}{(\varphi^* y - \varphi_s^T b)(E \varepsilon_{am}^A - \Delta\sigma^T) + \Delta\sigma^T \varepsilon_{am}^A} \qquad (6.37)$$

$$E''_d = E\,\frac{(\varphi^* y - \varphi_s^C b)(E'' \varepsilon_{am}^A - \Delta\sigma^C) + \Delta\sigma^C \varepsilon_{am}^A}{(\varphi^* y - \varphi_s^C b)(E \varepsilon_{am}^A - \Delta\sigma^C) + \Delta\sigma^C \varepsilon_{am}^A} \qquad (6.38)$$

La détermination de ces données, ainsi que celles définies au paragraphe précédent, vont nous permettre de calculer la réponse de la structure dans le cas de la décharge.

6.2.7.3. Moment de flexion :

La relation liant l'incrément de moment fléchissant ΔM_f à l'incrément de rotation relative $\Delta\varphi$ est obtenue en utilisant la relation (6.20). Une difficulté supplémentaire surgit car dans le cas des zones en transformation inverse le module dépend lui aussi de l'ordonnée y. Cette difficulté est levée par l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique de type Simpson [C6.3]. Nous possédons alors tous les paramètres nécessaires pour calculer la réponse d'une poutre en AMF sollicitée en flexion pure.

6.3. Extension au cas de la flexion simple:

Dans le paragraphe précédent, la réponse d'une poutre soumise à un moment de flexion constant a été déterminée. Dans le cas le plus général, le moment de flexion n'est pas constant mais dépend de l'abscisse de la section considérée. Il suffit pour résoudre cette difficulté de discrétiser la poutre en tronçons sur sa longueur. La valeur de l'incrément $\Delta M_f(x)$, déterminé de façon classique à partir des équations d'équilibre du problème, peut alors être relié à un incrément d'angle $\Delta\varphi(x)$ par la relation (6.11) modifiée pour tenir compte de l'abscisse de la section:

$$\Delta M_f(x) = \Delta\varphi(x) \left(\frac{\left(\int_S E(y)\, y\, dS\right)^2 - \int_S E(y)\, y^2\, dS \int_S E(y)\, dS}{\int_S E(y)\, dS} \right) \quad (6.39)$$

De plus, la flexion simple est caractérisée par la présence d'un effort tranchant non nul. Dans le cas des matériaux à comportement linéaire élastique, la contribution de cet effort tranchant à la réponse de la structure est considérée comme négligeable. Dans le cas de structures type composite sandwich, cette contribution est non négligeable par rapport à celle du moment fléchissant du fait de l'importance des contraintes de cisaillement. Dans le cas du matériau en cours de transformation (ou transformation inverse), la géométrie des sections présente des similitudes avec celle d'un composite sandwich (alternance zone transformée-zone élastique). Afin de quantifier l'effet de l'effort tranchant dans les AMF, le calcul du coefficient de section réduite (voir annexe 7) a été réalisé en utilisant le même formalisme que celui utilisé pour les composites [C6.4]. Ce coefficient dépend bien sûr de l'abscisse et de la géométrie de la section considérée, ainsi que du comportement des phases en présence. On établit de cette façon que dans la majorité des cas, la valeur de ce coefficient dans les AMF est analogue à celle déterminée pour un matériau à comportement élastique homogène linéaire. On peut donc aux vues de ces résultats conserver l'hypothèse que la contribution de l'effort tranchant est négligeable devant celle du moment fléchissant. Le déplacement de la structure est alors calculé grâce à la formulation incrémentale des intégrales de Bresse, en ne tenant compte que du moment fléchissant. Afin de tenir compte des grands déplacements, le calcul est mené de la façon suivante:

→ On applique à la poutre un incrément de chargement.

→ Le déplacement de chaque point de la structure est alors calculé.

→ La géométrie de la poutre est ensuite réactualisée à l'aide de ces déplacements.

→ La poutre déformée est prête à recevoir un nouvel incrément de

chargement.

On peut ainsi connaître l'allure de la poutre à chaque pas de calcul.

Pour tester les performances de la méthode utilisée, des résultats obtenus sur une poutre élastique en grand déplacement à partir de la formulation par les intégrales de Bresse sont comparés, avec succès, à ceux obtenus par un code d'éléments finis industriel (voir annexe 8).

6.4. Conclusion:

Malgré une extrême simplification du problème, les équations qui décrivent le comportement d'une poutre AMF en flexion sont très complexes. Nous avons en effet choisi comme exemple un problème simple, du point de vue de la géométrie et du chargement extérieur. La loi de comportement a été utilisée sous une forme simplifiée (forme bilinéaire). On aboutit cependant à un jeu d'équations non trivial pour décrire la réponse de la structure.

Il est à noter que dans le cas où le chargement extérieur mis en oeuvre comporte plusieurs points d'application, il est alors indispensable de préciser la chronologie d'application des différents efforts à la charge et à la décharge.

Références bibliographiques:

[C6.1] GAUDEZ P., "Un alliage à mémoire de forme dans un appareil électroménager", Le progrès technique, 1992.

[C6.2] BATOZ J.-L. et DHATT G., "Modélisation des structures par éléments finis", Editions HERMES, 1990,Volume 2, page 77.

[C6.3] VAISSIERE J.C. et NOUGIER J.P., "Programmes et exercices sur les méthodes numériques", Editions MASSON, 1991.

[C6.4] GAY D., "Matériaux composites", Editions HERMES, 1989.

CHAPITRE 7

COMPARAISON ENTRE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET THÉORIQUES

Table des matières:

7.1. Introduction: 187
7.2. Alliage de Cu-Zn-Al-Ni: 187
7.2.1. Identification des températures de transformation: 187
7.2.2. Identification des paramètres de la loi de comportement: 188
7.2.3. Comparaison des résultats obtenus sur un ressort hélicoïdal: 190
7.2.4. Discussion des résultats: 193
7.3. Alliage de Cu-Al-Be: 194
7.3.1. Identification des températures de transformation: 194
7.3.2. Identification des paramètres de la loi de comportement: 194
7.3.3. Comparaison des résultats pour la flexion: 196
7.3.4. Discussion: 201
7.4. Conclusion: 202
Références bibliographiques: 203

7.1. Introduction:

Dans cette section, nous allons confronter les résultats théoriques, obtenus à partir des modèles en calcul de structures établis dans les chapitres 5 et 6, avec des résultats expérimentaux obtenus sur des structures AMF réelles. Préalablement à toute détermination, il est nécessaire d'identifier un certain nombre de paramètres qui vont servir de données aux codes de calculs permettant de déterminer la réponse théorique des structures étudiées.

Les différents paramètres nécessaires au calcul sont:

→ les données propres au matériau: dans ce but, la loi de comportement est prise sous sa forme simplifiée bilinéaire décrite au paragraphe 2.4.4.

→ les données géométriques des structures (ligne moyenne, section droite, appuis, configuration du chargement).

Les résultats expérimentaux pris en compte sont ceux décrits au chapitre 4.

7.2. Alliage de Cu-Zn-Al-Ni:

Les résultats comparés dans cette section concernent une sollicitation de type torsion. La structure étudiée est un ressort hélicoïdal.

7.2.1. Identification des températures de transformation:

L'identification des températures de transformation du matériau est réalisée en calorimétrie différentielle à balayage. On détermine ainsi la valeur de chacune de ces températures M_s, M_f, A_s, et A_f pour une contrainte extérieure appliquée nulle (σ=0). La courbe de calorimétrie obtenue est présentée en figure VII.1.

Les températures de transformation obtenues sont :

$$\begin{cases} M_s = -18°C \\ M_f = -33°C \\ A_s = -15°C \\ A_f = -6°C \end{cases}$$

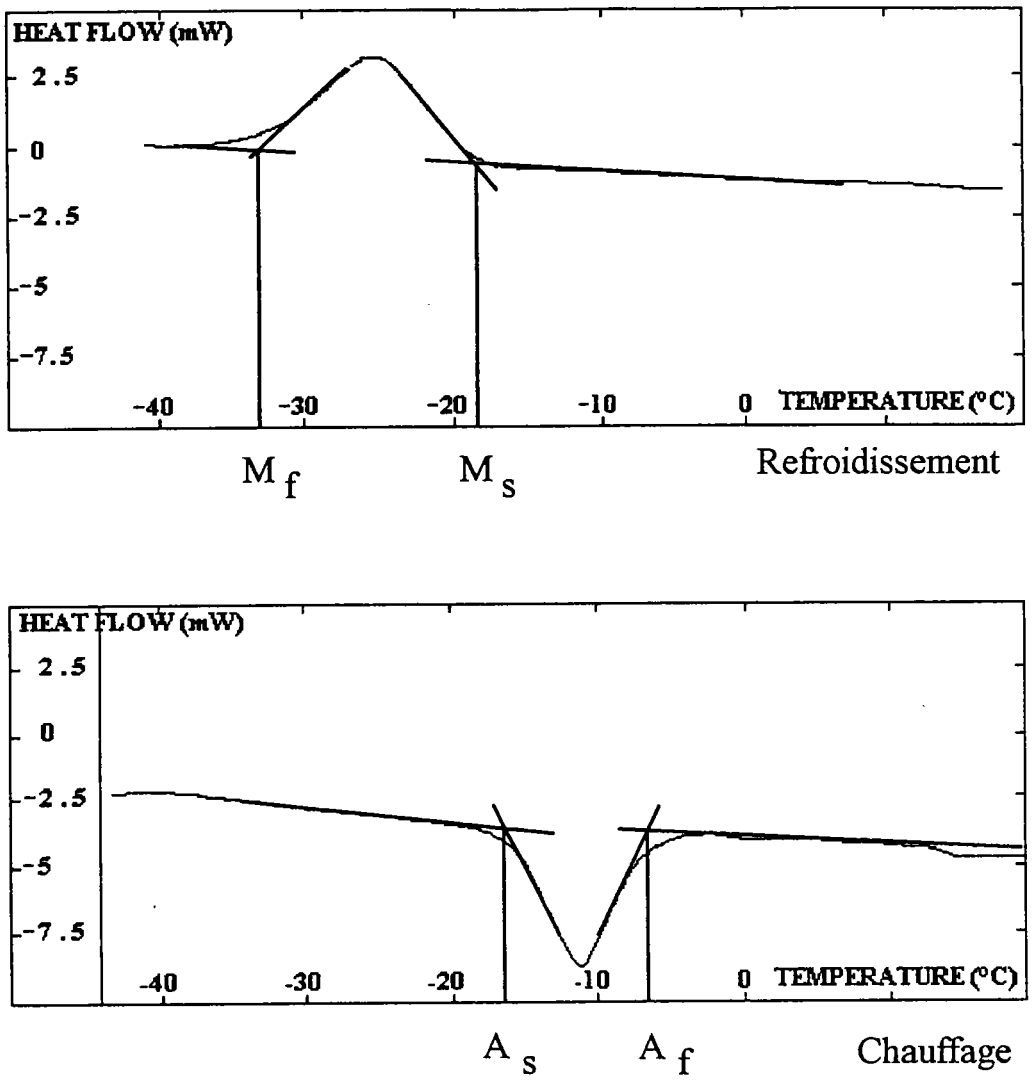


Fig VII.1 : Calorimétrie de l'alliage Cu Zn Al Ni.
Identification des températures de transformation.

7.2.2. Identification des paramètres de la loi de comportement:

Sur la courbe de traction, présentée en figure VII.2, on identifie la valeur du module d'Young (E) et du module apparent de transformation (E'). A partir de la contrainte seuil σ_s obtenue et de la température M_s, on identifie aussi la valeur de la pente $d\sigma/dT$ (B_0).

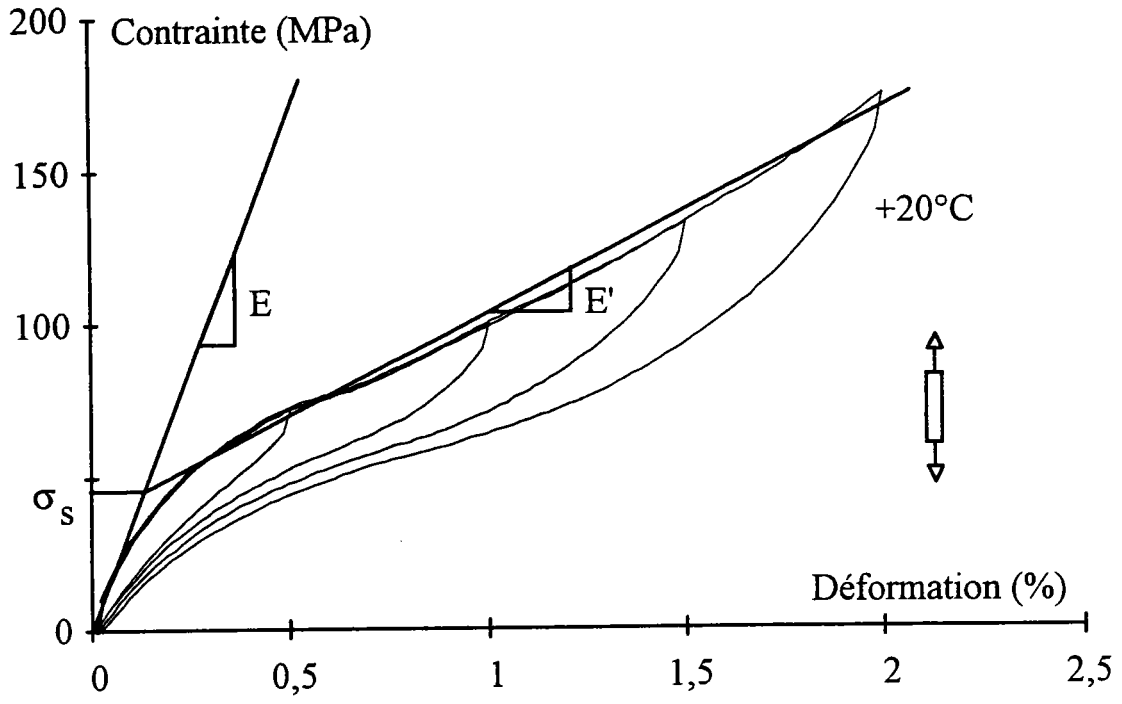


Fig. VII.2: Courbe de traction à l'ambiante de l'alliage Cu-Zn-Al-Ni. Identification des paramètres.

Les valeurs obtenues sont :

- Module d'Young E = 34 GPa (fig.VII.2).
- Module apparent de transformation E' = 6,7 GPa (fig.VII.2).
- Contrainte seuil de début de transformation σ_s = 45,6 MPa

$\rightarrow B_0$ = 1,2 MPa/°C.

Les paramètres du matériau et les données géométriques nécessaires à la modélisation du problème sont présentés dans les tableaux ci-dessous. Le module apparent de cisaillement en transformation est obtenu à partir de la loi de comportement. De plus, la déformation maximale apparente de transformation est estimée.

Matériau utilisé	Cu Zn Al Ni
Température M_S	-18 ° C
Température A_f	- 6 ° C
Module d'élasticité	34 GPa
Module apparent de transformation	6,7 GPa
Module de cisaillement élastique	13,5 GPa
Module de cisaillement de transformation	2,6 GPa
Déformation maximale de transformation en cisaillement	3 %
Coefficient de proportionnalité B_0	1,2 MPa/°C

Fig. VII.3: Paramètres matériaux déduits des essais de traction et de calorimétrie différentielle.

Diamètre moyen d'enroulement	3,4 mm
Diamètre de spire	0,8 mm
Nombre de spires	6
Pas du ressort	2,5 mm
Angle d'inclinaison hélice initial	13,86 °

Fig. VII.4: Données géométriques du ressort.

7.2.3. Comparaison des résultats obtenus sur un ressort hélicoïdal:

A partir des données contenues dans les tableaux précédents (fig. VII.3 et fig. VII.4), le modèle de calcul établi au chapitre 5 (voir annexe 9), pour dimensionner les ressorts superélastiques, fournit les résultats présentés en fig. VII.5. La courbe théorique ainsi obtenue est comparée aux résultats expérimentaux. Pour plus de clarté, les différentes boucles seront présentées séparément. Sur les figures suivantes (figs VII.6 à VII.9), les résultats théoriques et expérimentaux sont superposés.

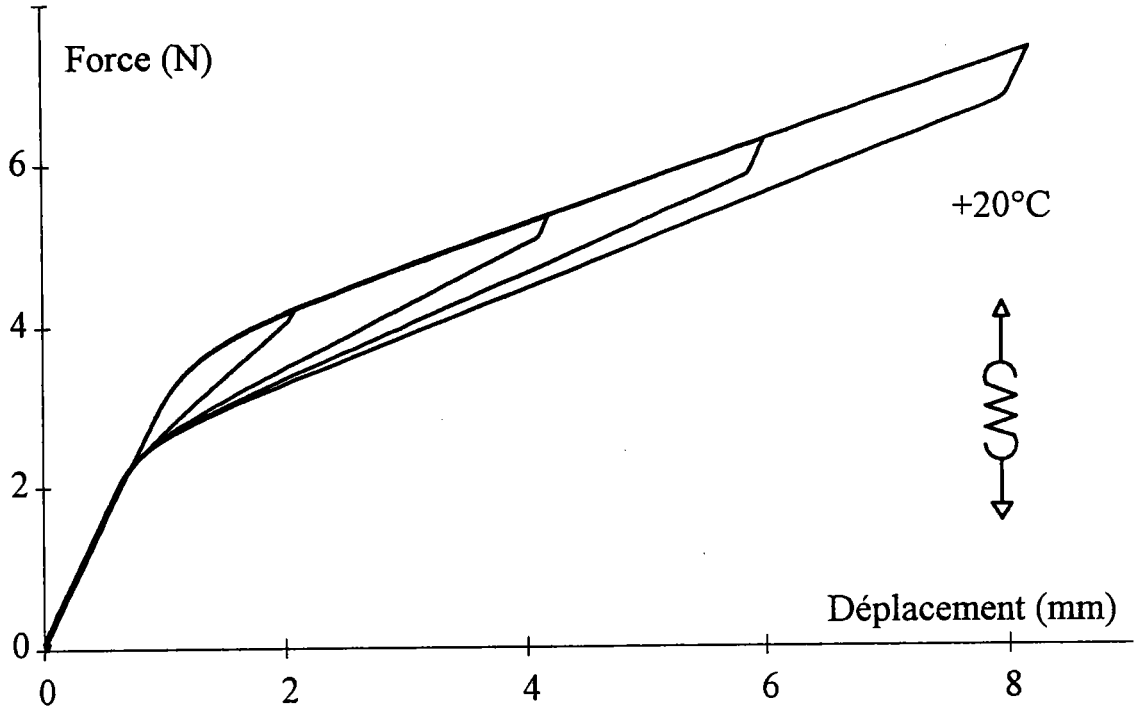


Fig. VII.5: Courbe force-déplacement théorique du ressort.

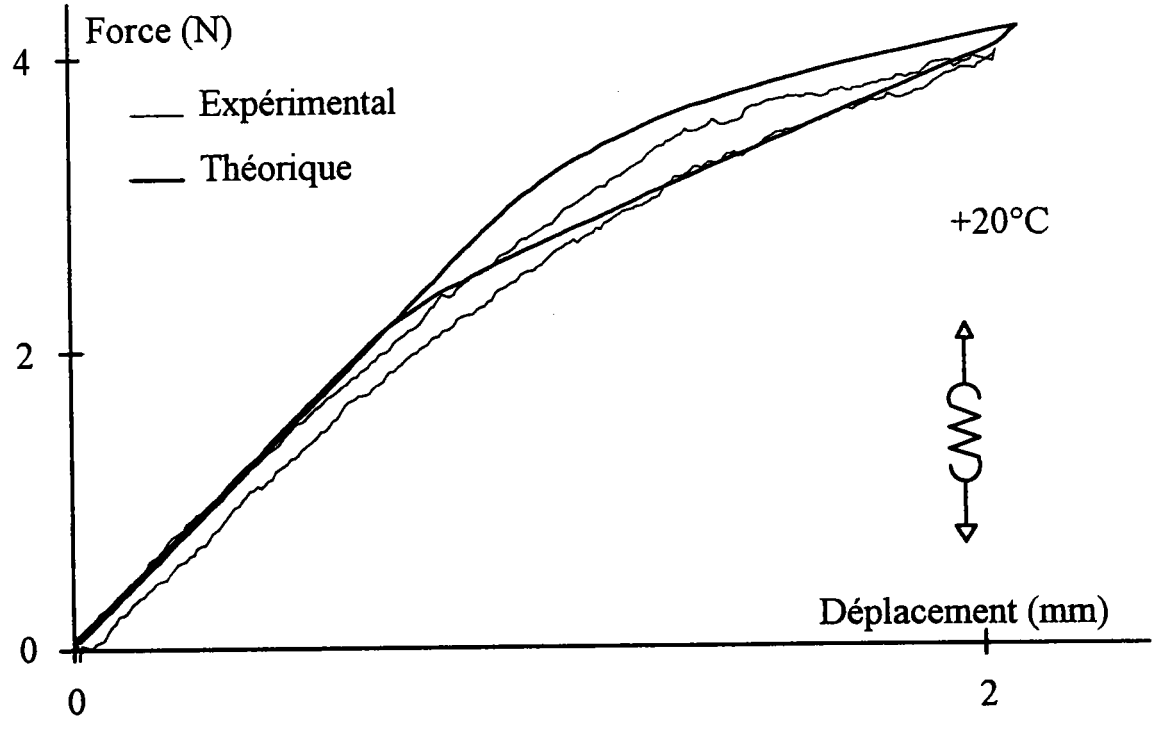


Fig. VII.6: Courbe force-déplacement théorique du ressort.

1ère boucle.

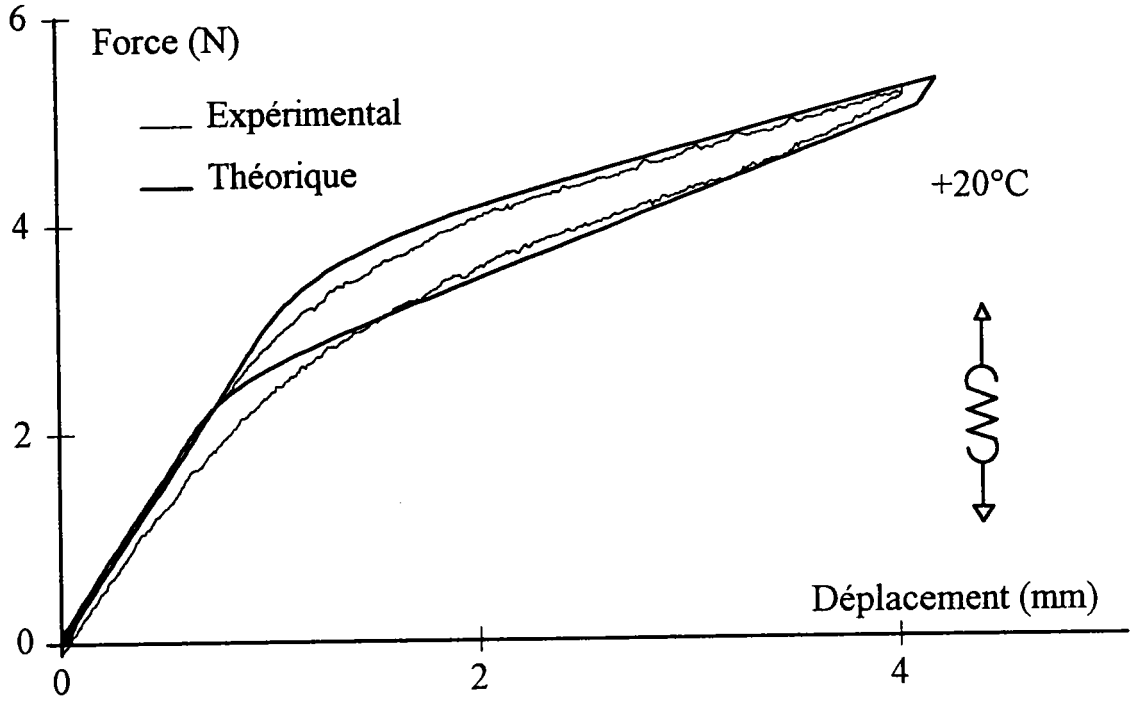


Fig. VII.7: Courbe force-déplacement théorique du ressort.

2ème boucle.

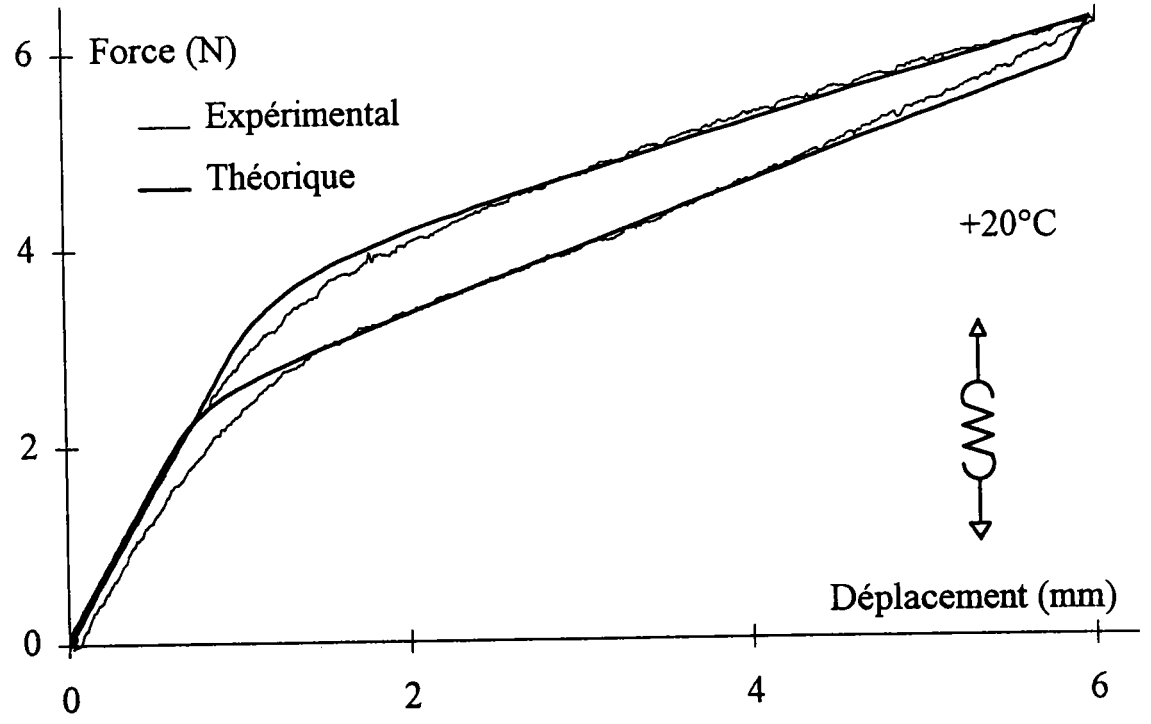


Fig. VII.8: Courbe force-déplacement théorique du ressort.

3ème boucle.

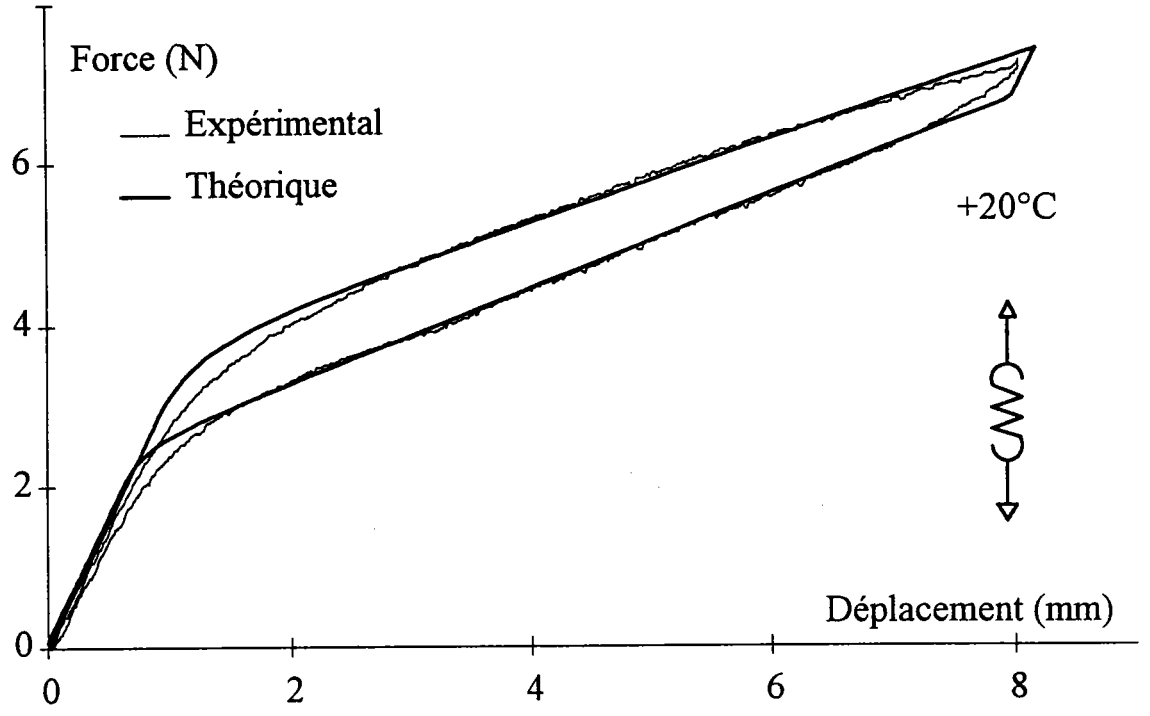


Fig. VII.9: Courbe force-déplacement théorique du ressort.

4ème boucle.

7.2.4. Discussion des résultats:

Comme on peut le remarquer, les résultats obtenus par le code de calcul sont en bon accord avec l'expérience, malgré la modélisation simple adoptée pour la loi de comportement. La principale perte d'information se situe en début de transformation. Ceci est tout à fait logique, puisque c'est aussi au niveau du début de transformation que l'hypothèse bilinéaire nous fait perdre des informations sur la loi de comportement. Des résultats similaires avaient déjà été obtenus avec un autre alliage [C7.1].

Une autre remarque peut être faite au niveau du début de la décharge où plus le déplacement est grand et plus cette partie du cycle est anguleuse. Ceci tient encore une fois au fait du modèle de la loi de comportement utilisé. On peut

d'ailleurs sans aucun doute le rapprocher de la conclusion précédente, puisqu'il s'agit en fait du même type de phénomène.

7.3. Alliage de Cu-Al-Be:

Les résultats comparés dans cette section concernent des structures de type lames en flexion.

7.3.1. Identification des températures de transformation:

Les températures de transformations nous sont fournies par la société TREFIMETAUX qui a élaboré cet alliage. Ces températures ont été obtenues par résistivité. Les résultats obtenus sont les suivants:

$$\begin{cases} M_s = -105°C \\ M_f = -115°C \\ A_s = -98°C \\ A_f = -90°C \end{cases}$$

Les moyens de caractérisation propre au laboratoire ne permettent pas de déterminer des températures aussi basses.

7.3.2. Identification des paramètres de la loi de comportement:

De la même façon que précédemment, nous identifions différents paramètres à partir des courbes de traction. Les essais de type flexion auxquels nous allons comparer nos résultats impliquent que l'on puisse déterminer les paramètres de comportement en compression du matériau. Les éprouvettes n'ayant pu être testées dans ces conditions du fait de leur géométrie, les résultats issus de la micormécanique vont nous permettre de quantifier la valeur de ces paramètres.

La figure VII.10 illustre la détermination des différents paramètres du matériau en traction. Le tableau (fig. VII.11) donne un résumé des différents paramètres

nécessaires au calcul. De la même manière que précédemment, la déformation maximale apparente de transformation a été estimée.

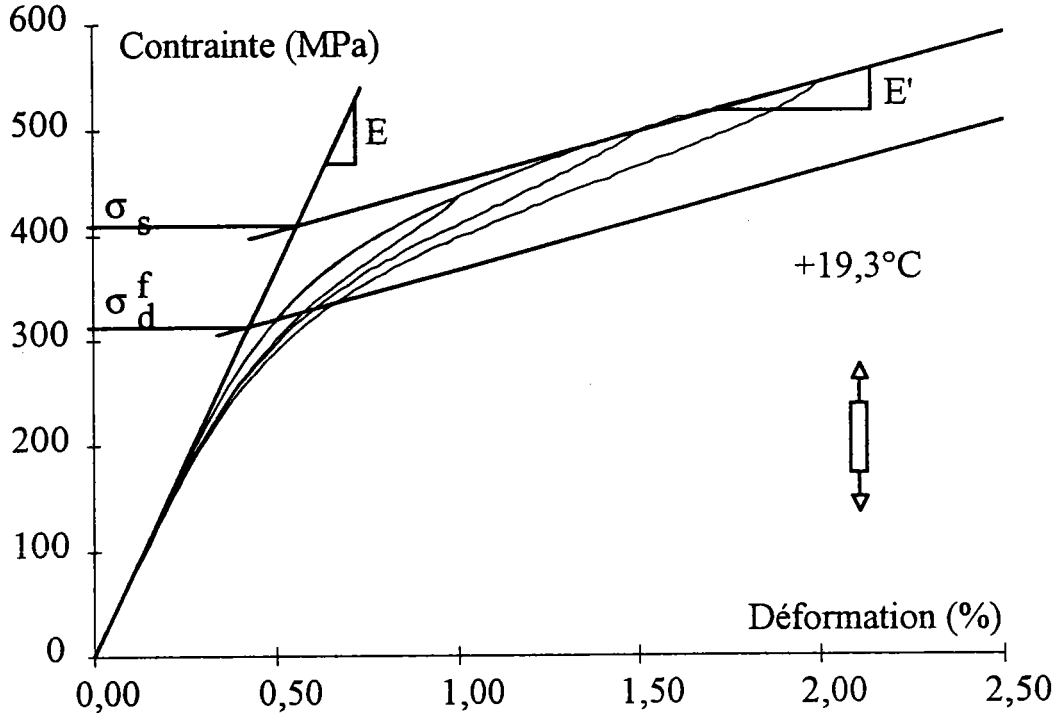


Fig. VII.10: Essai de traction à 19,3°C

Identification des paramètres.

Matériau utilisé	Cu Al Be
Température M_S	-105 ° C
Température A_f	- 90 ° C
Module d'élasticité	73,2 GPa
Module apparent de transformation (traction)	9,4 GPa
Module de transformation (traction)	10,8 GPa
Module apparent de transformation (compression)	13,2 GPa
Déformation maximale de transformation	3,5 %
Coefficient de proportionnalité B_0 (traction)	2,8 MPa/°C
Coefficient de proportionnalité B_1 (compression)	3,9 MPa/°C

Fig. VII.11: Paramètres matériaux.

7.3.3. Comparaison des résultats pour la flexion:

Nous allons maintenant comparer les courbes force-déplacement obtenues d'une part expérimentalement et d'autre part à l'aide du code de calcul en flexion. Dans le tableau ci-dessous (fig. VII.12) sont résumés les paramètres géométriques, les différents types de chargement appliqués aux éprouvettes, ainsi que le numéro des figures qui leur correspondent.

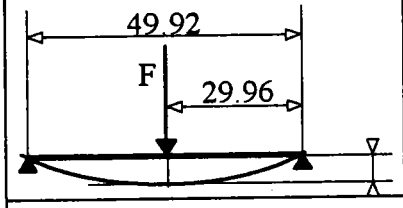
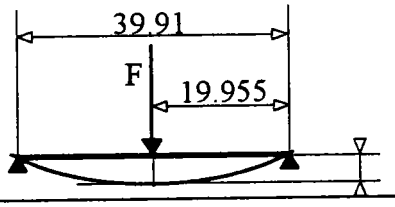
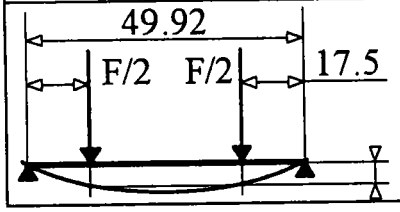
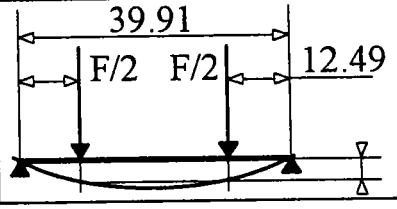
Flexion 3 points			
	Fig. VII.13		Fig. VII.14
Flexion 4 points			
	Fig. VII.15 à Fig. VII.17		Fig. VII.18 à Fig. VII.21

Fig. VII.12: Tableau résumé des essais de flexion

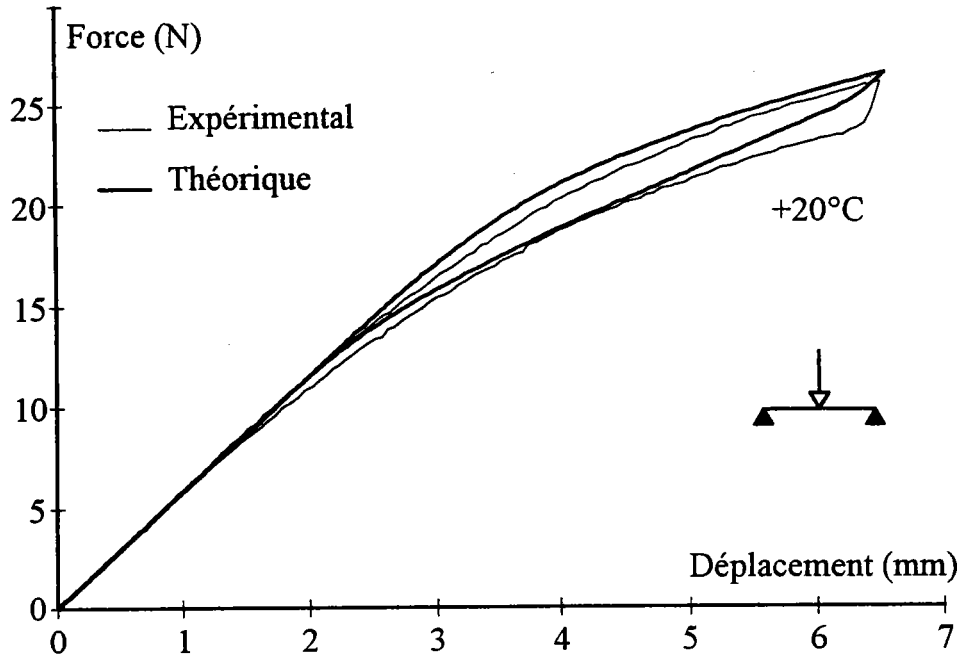


Fig. VII.13: Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux en flexion 3 points.

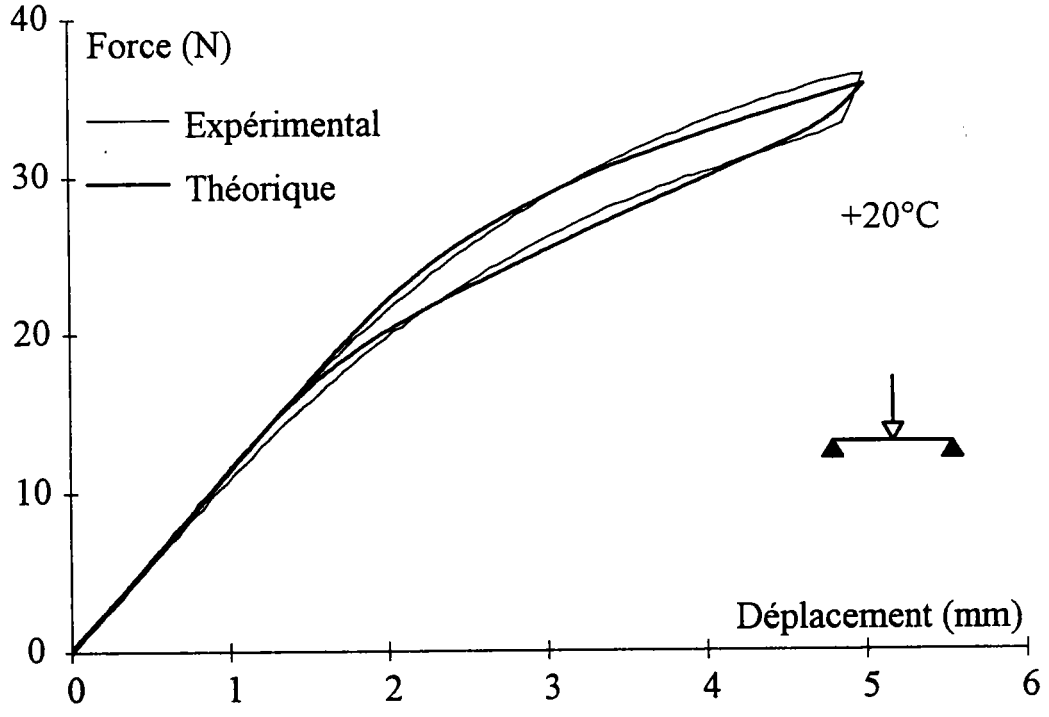


Fig. VII.14: Essai de flexion 3 points, à température l'ambiante, avec une autre géométrie de chargement.

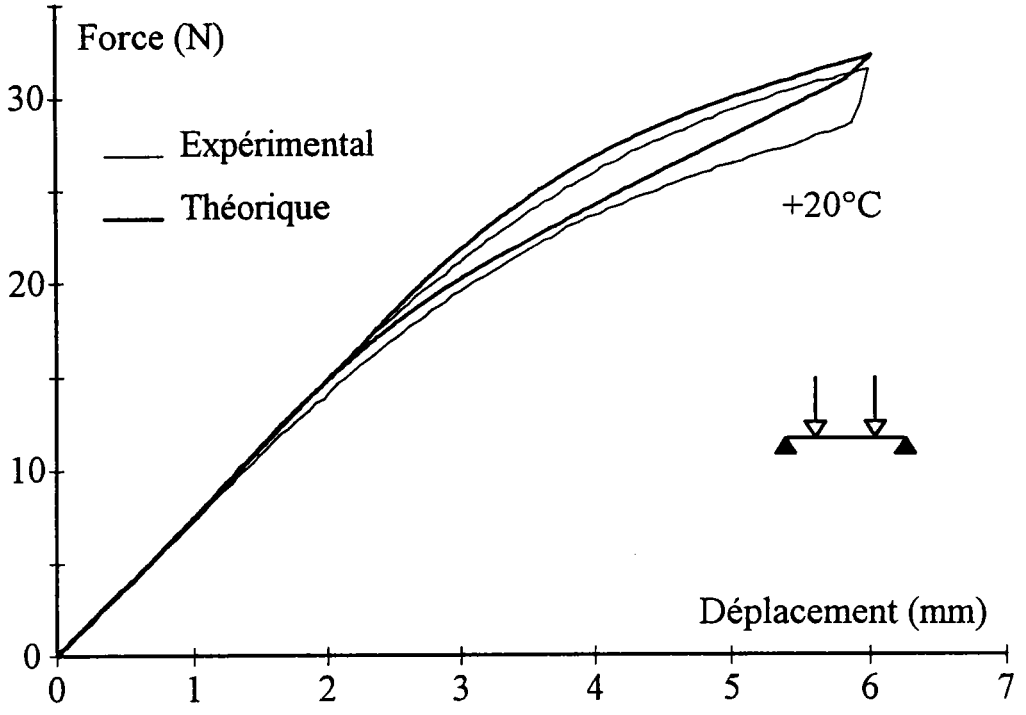


Fig VII.15: Comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux en flexion 4 points à température ambiante

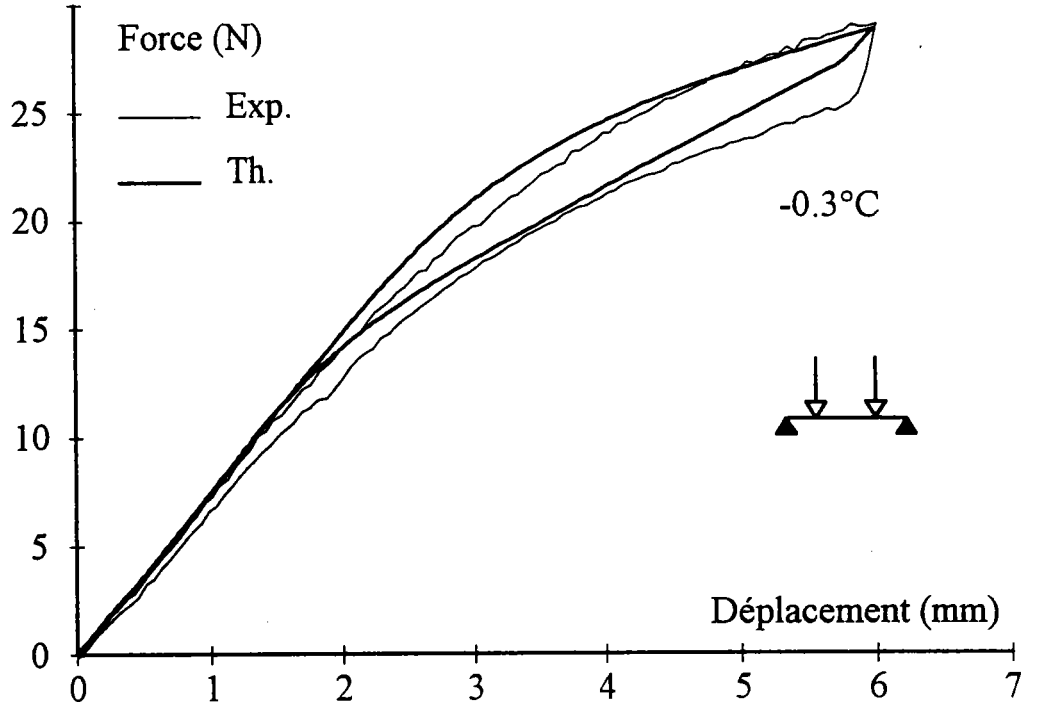


Fig VII.16: Même essai à une température de -0,3°C

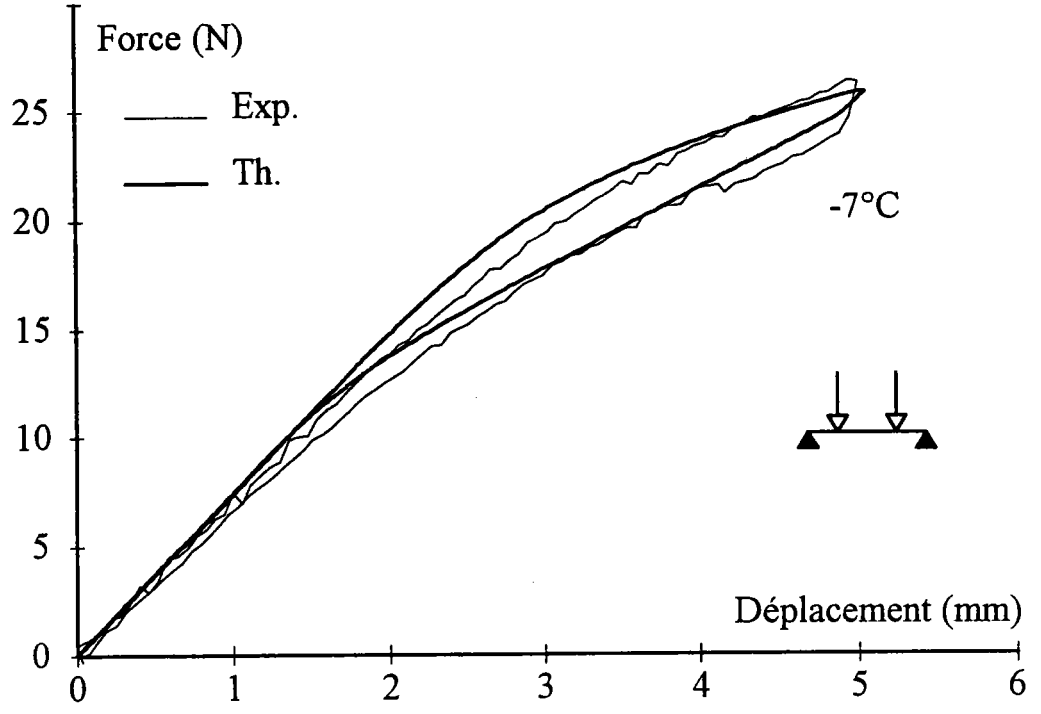


Fig VII.17: Même essai de flexion 4 points à une température de -7°C.

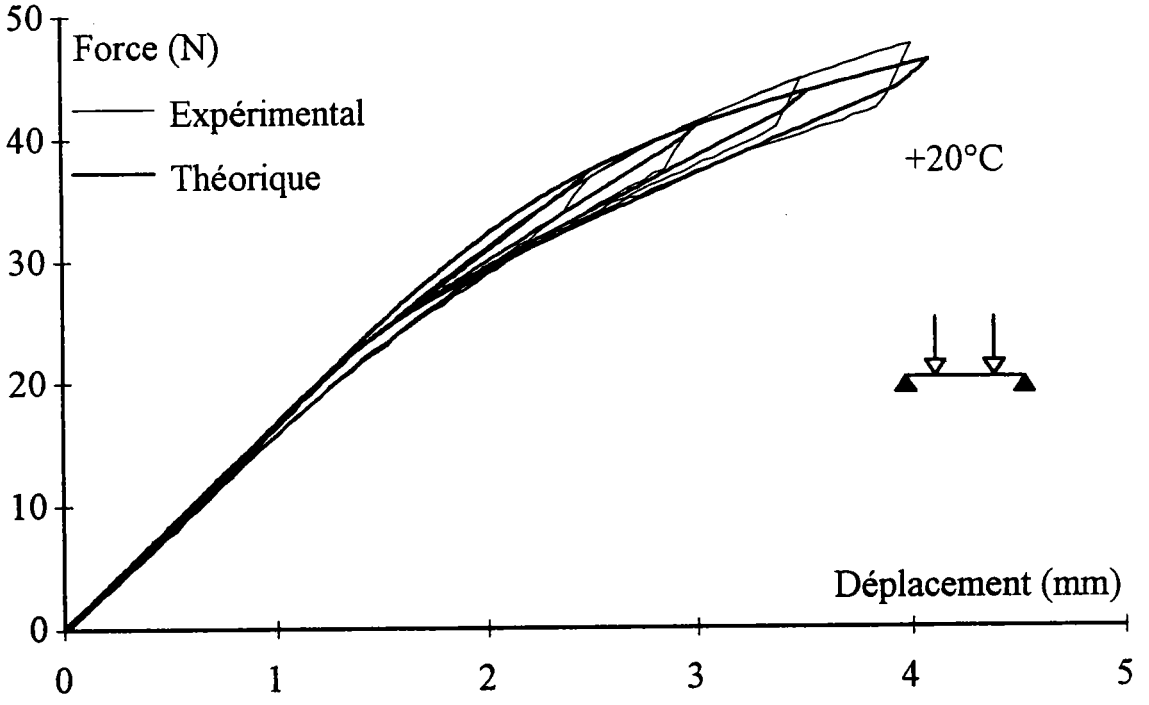


Fig VII.18: Flexion 4 points avec d'autres conditions de chargement, à température ambiante.

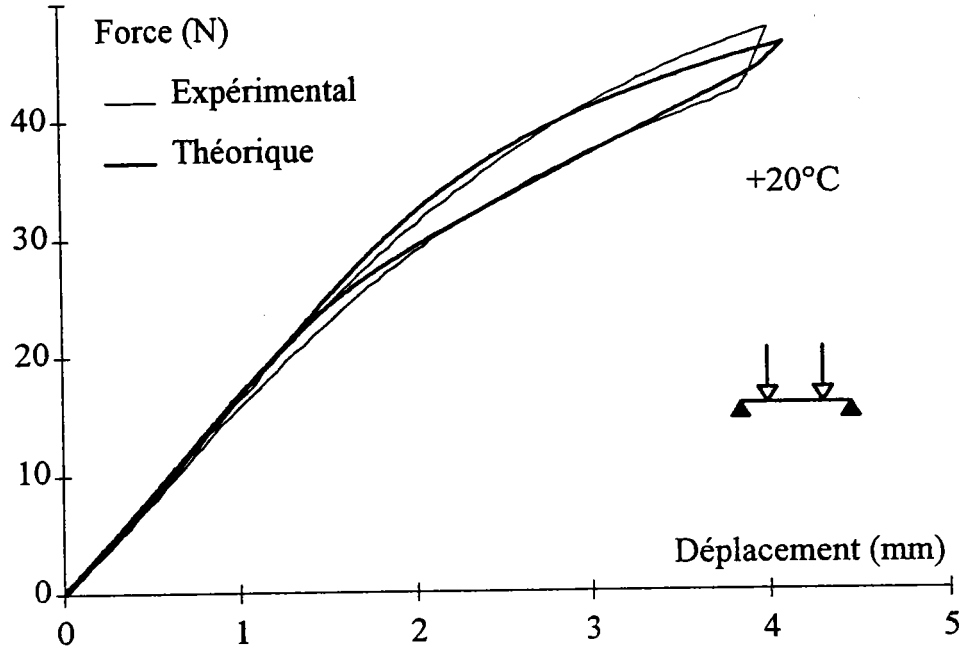


Fig. VII.19: Même essai, détail des boucles internes.

Boucle extérieure.

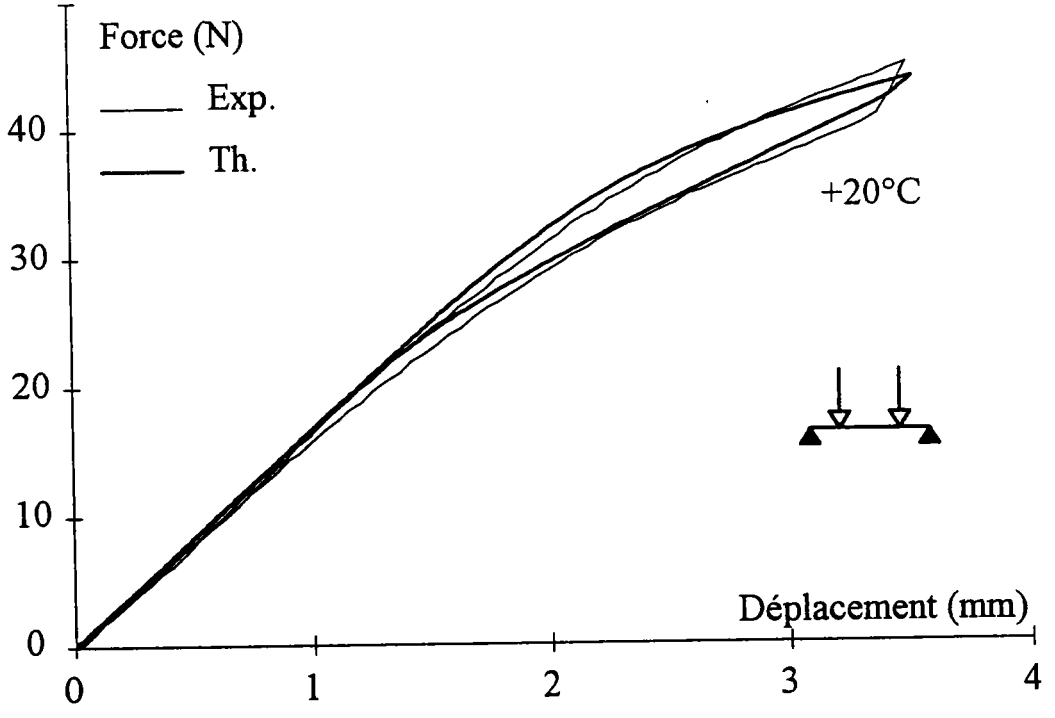


Fig. VII.20: Même essai, seconde boucle.

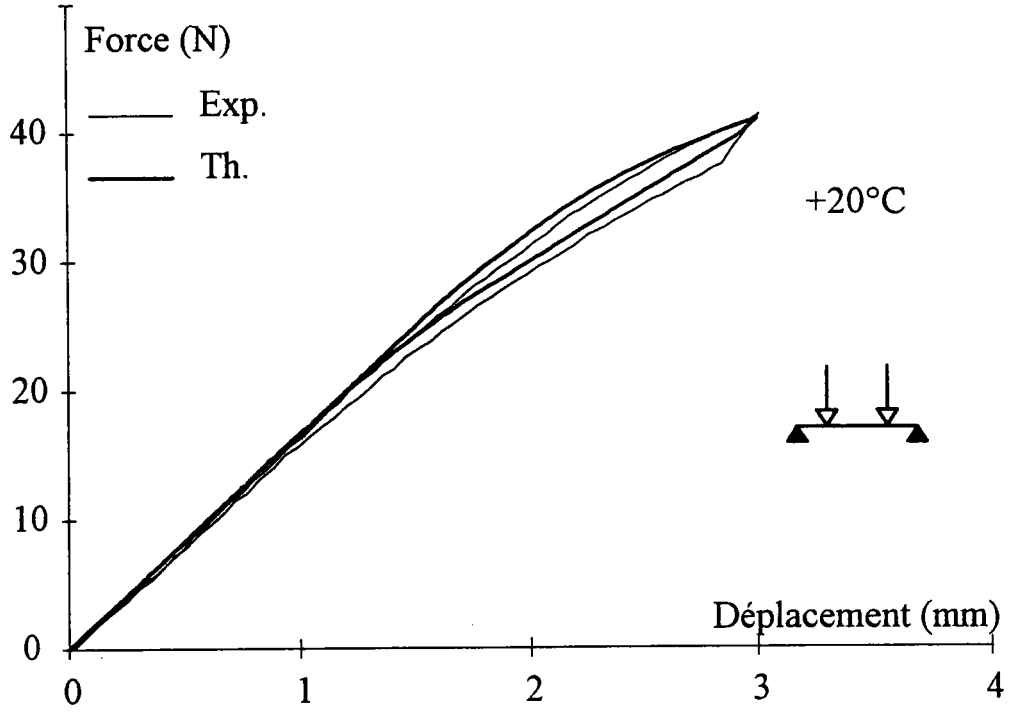


Fig. VII.21: Idem, troisième boucle.

Même essai

7.3.4. Discussion:

On remarque que les hystérésis sont plus importantes sur les courbes expérimentales que sur les courbes théoriques. Ce phénomène est dû à des frottements sur les appuis qui n'ont pas pu être éliminés. Le modèle de calcul qui se situe dans les strictes hypothèses de la Résistance des Matériaux (appuis parfaits, pas de variation de la direction des réactions au cours du chargement) ne prend pas en compte ces aspects. Néanmoins, les résultats obtenus sont en assez bon accord avec l'expérience. Le modèle développé dans cette étude prend bien en compte les différents paramètres du chargement (température, boucles internes, mode de chargements). On peut remarquer ici que l'effet dû à la perte d'information sur les courbes de traction en début de transformation est moins visible. Dans le cas du ressort, chaque section présentait le même état de déformation, tout était donc identique d'une section à l'autre. En flexion, cet état de déformation peut varier d'une section à l'autre: la perte d'information est diluée grâce à un effet de structure.

7.4. Conclusion:

Les réponses obtenues par le modèle théorique sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour les deux types de sollicitations (torsion et flexion). Le modèle prend bien en compte les différents aspects particuliers au matériau (température [C7.1], hystérésis, boucles internes [C7.2], [C7.3], [C7.4]), et ceci malgré toutes les hypothèses simplificatrices utilisées (loi de comportement sous forme bilinéaire, hypothèses de base de la RDM). Utiliser la loi de comportement complète, telle qu'elle a été décrite au chapitre 2, doit cependant permettre d'améliorer encore la réponse des structures, en particulier dans les tout premiers stades de la transformation.

Références bibliographiques:

[C7.1] GILLET Y., PATOOR E., BERVEILLER M., "Elements of structure calculation for shape memory device", J. de Phys., 1991, Coll. C4-151.

[C7.2] GILLET Y., PATOOR E., BERVEILLER M., "Mechanical engineering for shape memory alloys", ICOMAT 92, Monterey (USA), 1992, p. .

[C7.3] GILLET Y., PATOOR E., BERVEILLER M.," Sollicitation non homogène de poutre superélastique avec hystérésis", actes du 11ème Congrès français de Mécanique, Lille, 1993, vol. 4, p. 153.

[C7.4] GILLET Y., PATOOR E., BERVEILLER M., "Beam theory applied to shape memory alloys", actes de SMST '94, Monterey, 1994, à paraître.

CHAPITRE 8

SUPERTHERMO-ÉLASTICITÉ

Table des matières:

8.1. Introduction:.....207
8.2. Loi de comportement:.....207
8.3. Application à la traction uniaxiale:.....209
8.3.1. Trajet thermomécanique à contrainte constante:.....210
8.3.2. Trajet thermomécanique à déformation constante:.....212
8.3.3. Un exemple de trajet thermomécanique complexe:.....214
8.4. Application des résultats précédents au calcul de structures:.....215
8.4.1. Application à une structure: exemple du ressort hélicoïdal.....216
8.4.1.1. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à une force constante:.....217
8.4.1.2. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à un déplacement imposé:.....218
8.4.1.3. Trajet thermomécanique combiné:.....219
8.5. Conclusion:.....219
Références bibliographiques:.....221

8.1. Introduction:

Dans ce chapitre, nous abordons l'aspect des chargements thermomécaniques pour lesquels la température n'est plus constante. Dans cette présentation, nous proposons une approche simplifiée du problème. A cet égard, nous sommes amené à préciser un certain nombre d'hypothèses. Nous décrivons des cycles de chargement thermomécaniques tels que le matériau est refroidi à partir d'un état complètement austénitique, et nous imposons que le matériau retrouve cet état au chauffage. En outre, les mécanismes de réorientation des plaquettes de martensite n'étant pas pris en compte dans la loi de comportement, les chargements étudiés se font à contrainte non nulle et pour un chargement radial. De plus, dans cette première approche, on néglige la dissipation (donc pas d'hystérésis). Enfin, nous supposons qu'en dessous de $M_s(0)$ la martensite n'est plus orientée par la contrainte, donc qu'elle ne produit plus de déformation macroscopique. Cette dernière hypothèse revient à considérer, qu'en dessous de $M_s(0)$, la martensite formée est une martensite thermique autoaccommodante [C8.1], [C8.2].

Les différentes hypothèses énoncées ci-dessus aboutissent aux considérations suivantes pour les températures de transformation:

$$\begin{cases} M_s(\sigma)=A_f(\sigma) \\ A_s(\sigma)=M_f(\sigma)\geq M_s(0) \\ A_s(0) = M_s(0) \end{cases}$$

8.2. Loi de comportement:

La loi de comportement définie au chapitre 2 permet de tenir compte des effets inhérents à l'action de la température.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{th} + d\varepsilon_{ij}^{pt} \qquad (8.1)$$

L'expression des différents termes de cette relation ont été déterminés au chapitre 2. L'incrément de déformation $d\varepsilon_{ij}$ s'écrit alors:

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\ d\sigma_{kl} + \alpha\,\delta_{ij}\,dT + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}d\sigma_{kl} - 2K\dfrac{\partial K}{\partial T}dT}{2K\dfrac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}}\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}}\right) \tag{8.2}$$

où $F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T)$ est le critère de transformation défini au chapitre 2.
En modifiant l'expression (8.2) précédente de façon à regrouper les effets dus aux contraintes et ceux dus à la température, nous obtenons:

$$d\varepsilon_{ij} = \left[D_{ijkl} + \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}{2K\dfrac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}}\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}}\right)\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}\right]d\sigma_{kl} + \left[\alpha\,\delta_{ij} - 2K\left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}{2K\dfrac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}}\sqrt{\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}}\right)\frac{\partial K}{\partial T}\right]dT \tag{8.3}$$

La relation (8.3) peut alors être réécrite sous la forme simplifiée suivante:

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\,d\sigma_{kl} + B_{ij}\,dT \tag{8.4}$$

où A_{ijkl} a la dimension d'un tenseur de souplesse et B_{ij} le tenseur d'influence de la température.

Deux cas sont alors à distinguer:

→ $F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) \neq 0$: le matériau ne se transforme pas, seules l'élasticité du matériau et la dilatation thermique sont à prendre en compte. On a:

$$A_{ijkl}=D_{ijkl} \qquad \text{et} \qquad B_{ij} = \alpha\,\delta_{ij} \tag{8.5}$$

→ $F(J_2,J_3,\varepsilon^{pt},T) = 0$: le matériau se transforme, aux composantes

précédentes s'ajoutent les effets dus à la transformation martensitique.

A partir de cette expression de la loi de comportement, nous pouvons décrire différents trajets de chargements thermomécaniques simples usités dans les applications industrielles des AMF. Dans la suite de cette étude, on conserve ici la loi de comportement sous sa forme bilinéaire défini au paragraphe 2.4.4.1.
Dans les paragraphes suivants, ces différentes hypothèses sont appliquées au cas de la traction uniaxiale et pour différents trajets de chargement thermomécaniques simples.

8.3. Application à la traction uniaxiale:

On considère une éprouvette prismatique dans un repère cartésien défini par trois axes (1,2,3) qui sont aussi les axes principaux d'inertie de la section de l'échantillon. On applique à cette éprouvette une contrainte de traction σ_{11} dans la direction 1 (voir fig. VIII.1) à une température T supérieure à A_f (matériau complètement austénitique). On choisit σ_{11} de façon à rester dans le domaine élastique de l'austénite ($\sigma_{11} < \sigma_s(T)$)

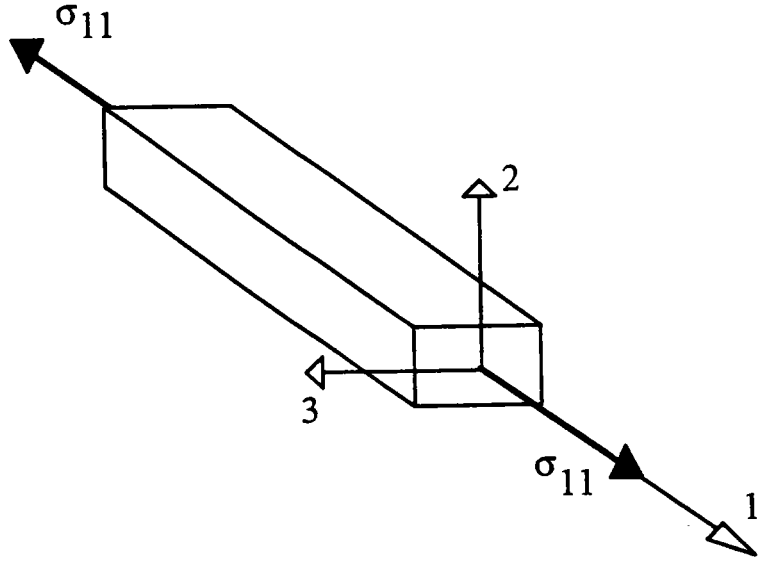


Fig. VIII.1: Configuration de l'essai

Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'aux variations des différents paramètres du chargement thermomécanique dans la direction 1.

8.3.1. Trajet thermomécanique à contrainte constante:

La contrainte appliquée produit uniquement une déformation élastique de l'austénite (voir fig. VIII.2). La température est ensuite abaissée.

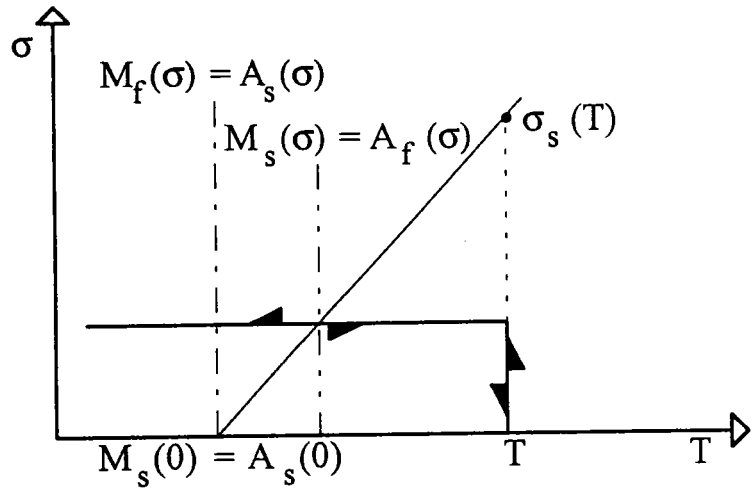


Fig. VIII.2: Représentation schématique du refroidissement sous contrainte dans l'espace contrainte-température.

La contrainte appliquée reste constante, la variation de la contrainte $d\sigma$ est donc nulle. La relation (8.4) devient:

$$d\varepsilon_{ij} = B_{ij}\, dT \tag{8.6}$$

Au refroidissement ($dT<0$), la déformation, notée ε_{11}, dans la direction de la contrainte appliquée s'écrit:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \int_{M_s(\sigma)}^{M_f(\sigma)} B_{11}\, dT & \text{si } M_f(\sigma) > M_s(0) \\ \varepsilon_{11} = \int_{M_s(\sigma)}^{M_s(0)} B_{11}\, dT & \text{si } M_f(\sigma) < M_s(0) \end{cases} \tag{8.7}$$

On peut montrer en calculant B_{11} que ce terme est de la forme:

$$B_{11} = \begin{cases} \alpha\, dT & \text{pour } T \geq M_s(\sigma) \\ (\alpha - C_1)\, dT & \text{pour } M_s(0) \leq T < M_s(\sigma) \end{cases} \tag{8.8}$$

avec

$$C_1 = -2K \left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}{2K \dfrac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}} \sqrt{\dfrac{2}{3} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}}} \dfrac{\partial K}{\partial T} \right) \tag{8.9}$$

Dans le cas de la traction uniaxiale, on a:

$$\frac{\partial K}{\partial T} = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varepsilon^{pt}} = \frac{K_0}{\sqrt{3}} \tag{8.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{11} \left(\frac{2}{3} + 3^{(3/2)}\, b\, \frac{8}{81} \right) \tag{8.12}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}}} = \sigma_{11} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{8}{3} b^2 + \frac{16\, b\, 3^{(3/2)}}{729}} \tag{8.13}$$

D'où l'on obtient finalement:

$$C_1 = \frac{-B_0 \left(\dfrac{2}{3} + 3^{(3/2)}\, b\, \dfrac{8}{81} \right)}{K_0 \sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{3} b^2 + \dfrac{16\, b\, 3^{(3/2)}}{729}}} \tag{8.14}$$

Si pour deux températures différentes, notées T_1 et T_2 ($T_2 > T_1$), on représente schématiquement les relations obtenues, on obtient un schéma du type de celui décrit en fig. VIII.3.

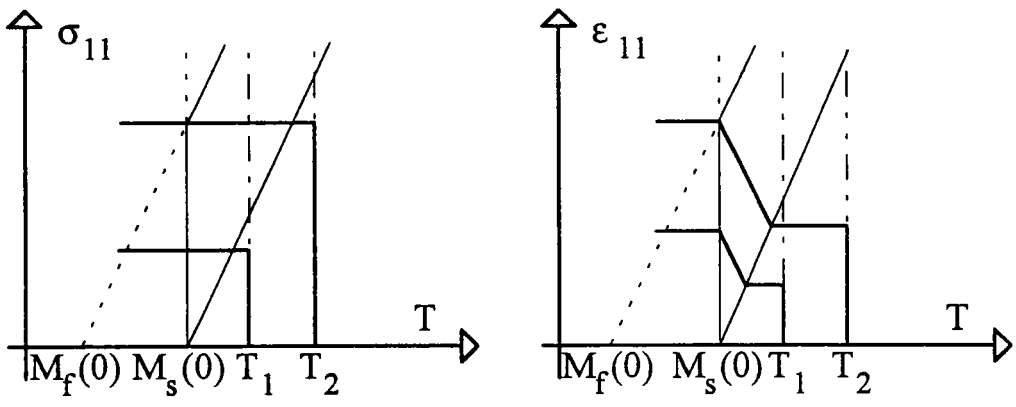


Fig. VIII.3: Représentation schématique du refroidissement sous contrainte constante de l'éprouvette. (On a considéré ici $\alpha = 0$)

Les résultats obtenus montre un accord qualitatif avec les observations expérimentales: la déformation maximale obtenue au refroidissement dépend de la contrainte appliquée.

Compte tenu des hypothèses précédemment énoncées, la déformation obtenue au réchauffage sera la même que celle obtenue au refroidissement pour des valeurs identiques de contrainte et de température.

8.3.2. Trajet thermomécanique à déformation constante:

Nous considérons maintenant un trajet thermomécanique pour lequel la déformation totale de l'éprouvette est maintenue constante. Dans ce cas, la relation (8.4) s'écrit:

$$d\varepsilon_{ij} = 0 = A_{ijkl}\, d\sigma_{kl} + B_{ij}\, dT \qquad (8.15)$$

Nous envisageons ici le cas d'une éprouvette dont la déformation dans la direction 1 est bloquée ($d\varepsilon_{11}=0$), mais libre de se déformer latéralement ($d\varepsilon_{22}\neq 0$ et $d\varepsilon_{33}\neq 0$). Les relations déduites de (8.15) sont alors les suivantes:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{11} = A_{1111}\, d\sigma_{11} + A_{1122}\, d\sigma_{22} + A_{1133}\, d\sigma_{33} + B_{11}\, dT = 0 \\ d\varepsilon_{22} = A_{2211}\, d\sigma_{11} + A_{2222}\, d\sigma_{22} + A_{2233} d\sigma_{33} + B_{22}\, dT \neq 0 \\ d\varepsilon_{33} = A_{3311} d\sigma_{11} + A_{3322}\, d\sigma_{22} + A_{3333}\, d\sigma_{33} + B_{33}\, dT \neq 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

On impose de plus $d\sigma_{22}=d\sigma_{33}=0$, d'où l'on en déduit:

$$d\sigma_{11} = \frac{-B_{11}}{A_{1111}} dT \quad (8.17)$$

avec $dT<0$.

On peut de même à partir de (8.16) déterminer l'évolution des déformations suivant les directions 2 et 3.

La valeur de σ_{11} est obtenue comme précédemment en intégrant entre $M_s(\sigma)$ et $M_f(\sigma)$:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\int_{M_s(\sigma)}^{M_f(\sigma)} \frac{B_{11}}{A_{1111}} dT & \text{si } M_f(\sigma) > M_s(0) \\ \sigma_{11} = -\int_{M_s(\sigma)}^{M_s(0)} \frac{B_{11}}{A_{1111}} dT & \text{si } M_f(\sigma) < M_s(0) \end{cases} \quad (8.18)$$

Pour une même température, notée T_3, on applique à l'éprouvette deux contraintes différentes inférieures à $\sigma_s(T_3)$. Un schéma du type de celui décrit en fig. VIII.4 est alors obtenu pour le refroidissement à déformation constante de l'éprouvette.

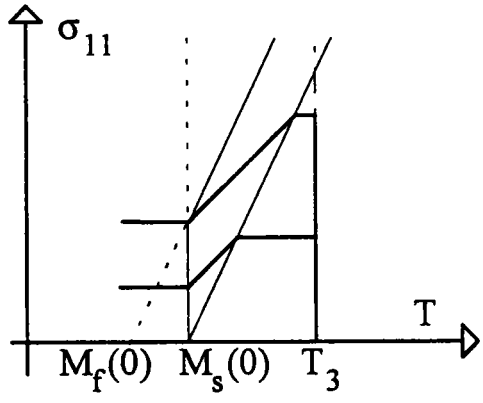


Fig. VIII.4: Représentation schématique du refroidissement sous déformation imposée de l'éprouvette (On a considéré ici $\alpha = 0$).

On observe une baisse de la contrainte appliquée. Ceci est logique, car au cours du refroidissement, la transformation martensitique accommode la déformation élastique imposée en phase haute température.

La dissipation n'étant pas prise en compte dans cette approche, la contrainte observée au réchauffage est identique à celle observée au refroidissement pour des conditions de température et de déformation identique.

8.3.3. Un exemple de trajet thermomécanique complexe:

Les propriétés d'effet mémoire sont souvent utilisées pour produire une contrainte mécanique. Un élément en AMF, préalablement refroidi et déformé en martensite, est maintenu déformé au réchauffage. Il s'ensuit une augmentation de la contrainte dans cet élément. On peut imaginer que ce cycle se compose d'un refroidissement à contrainte constante, qui produit la déformation de l'élément, et d'un réchauffage à déformation imposée, qui produit la contrainte. Ces deux étapes ont été décrites dans les paragraphes précédents. Pour décrire ce trajet, nous allons donc les appliquer successivement (fig. VIII.5). Une contrainte de traction, notée σ_{11}, est appliquée à l'éprouvette à une température T_0 telle que $\sigma_{11}<\sigma_s(T_0)$. On refroidit ensuite cette éprouvette jusqu'à $M_f(\sigma)$. On maintient alors constante la déformation, obtenue dans la direction 1, et l'on réchauffe l'échantillon. La contrainte augmente dans le matériau.

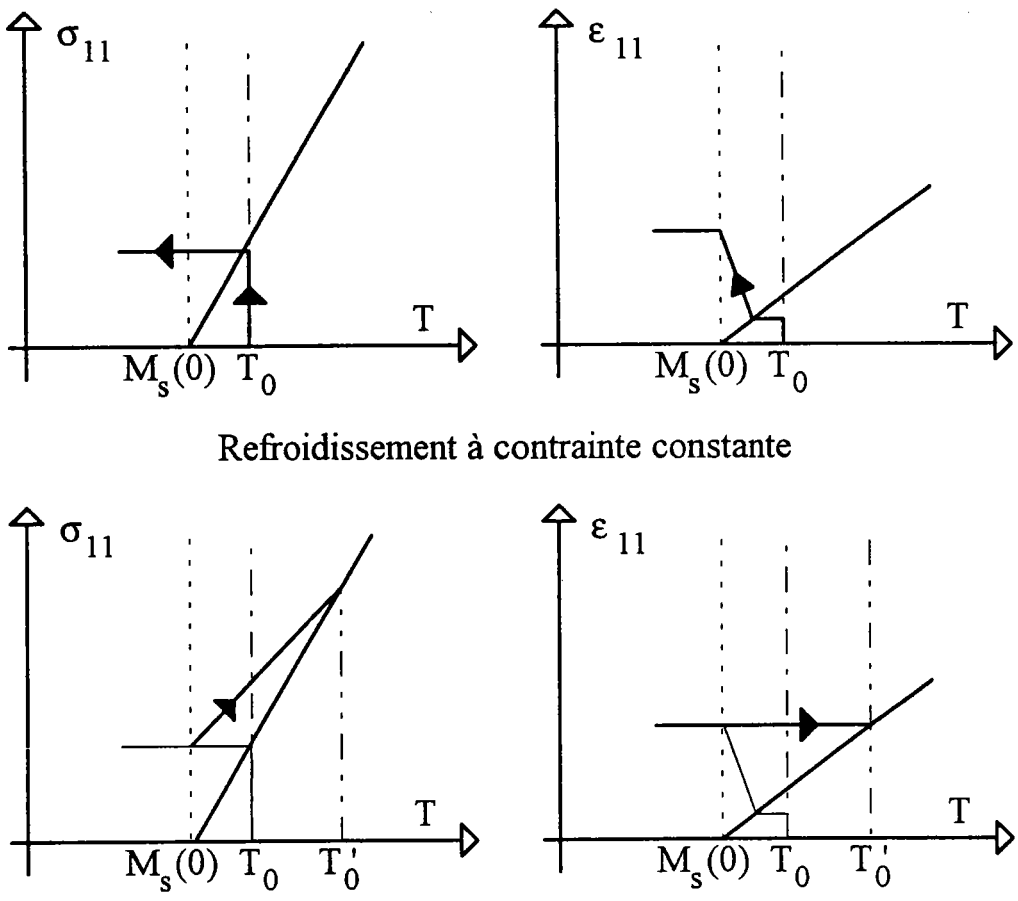


Fig. VIII.5: Représentation schématique d'un cycle thermomécanique conduisant à une production de travail macroscopique.

La contrainte développée, lors du réchauffage, est supérieure à celle mise en oeuvre initialement pour déformer l'élément. Ce résultat expérimental est retrouvé par le modèle. On s'aperçoit alors qu'il faut réchauffer l'échantillon à une température, notée T_0', supérieure à celle de l'état initial, notée T_0, pour retrouver un matériau complètement austénitique.

8.4. Application des résultats précédents au calcul de structures:

Les résultats précédents peuvent être appliqués au calcul de structures plus complexes qu'une éprouvette de traction. Il faudra alors prendre en compte la géométrie particulière de l'élément ainsi que le chargement qui lui est appliqué.

Les relations obtenues, dans ce cas, sont du même type que celles décrites dans les chapitres 5 et 6. La différence majeure réside dans le fait que cette fois les différents seuils de transformation varient avec la température tout au long du chargement.

8.4.1. Application à une structure: exemple du ressort hélicoïdal.

On considère un ressort soumis successivement au trois trajets thermomécaniques décrits dans les paragraphes 8.3.1 à 8.3.3. Les caractéristiques du matériau utilisé et celles de la structure sont données dans les tableaux (fig. VIII.6 et fig VIII.7) ci-dessous.

Température M_S	-18 ° C
Température A_f	0 ° C
Module de cisaillement élastique	13,5 GPa
Module de cisaillement de transformation	2,2 GPa
Déformation maximale de transformation en cisaillement	4 %
Coefficient de proportionnalité B	2 MPa/°C

Fig. VIII.6: Paramètres matériau.

Diamètre moyen d'enroulement	20 mm
Diamètre de spire	2 mm
Nombre de spires	6
Pas du ressort	2 mm

Fig. VIII.7: Données géométriques du ressort.

8.4.1.1. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à une force constante:

Une force constante, inférieure à la force seuil de transformation, est appliquée à un ressort. Cette force est maintenue constante alors que le ressort est refroidi en dessous de $M_s(0)$. La figure VIII.8 décrit l'évolution du déplacement calculé pour ce ressort en fonction de la température pour deux efforts appliqués différents.

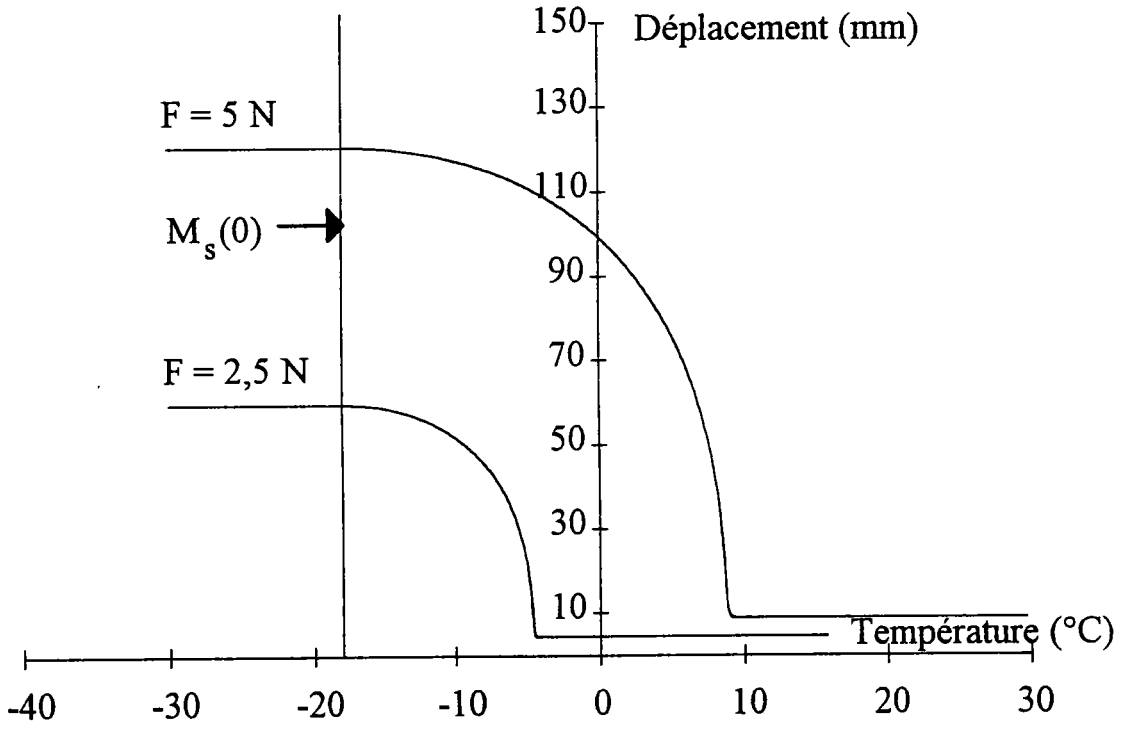


Fig. VIII.8: Elongation d'un ressort hélicoïdal à mémoire de forme soumis à une force constante.

Le déplacement maximal obtenu au refroidissement dépend de la force appliquée ce qui est en accord qualitatif avec les observations expérimentales. La réponse est plus complexe que dans le cas de l'éprouvette en traction, ceci est dû aux effets de structures. On observe aussi que c'est le début de la transformation qui crée proportionnellement le plus de déplacement alors qu'on tend à une saturation en fin de cycle.

8.4.1.2. Refroidissement d'un ressort hélicoïdal soumis à un déplacement imposé:

On impose au ressort un déplacement constant. A haute température, le ressort est complètement austénitique. Il est alors refroidi en dessous de $M_s(0)$. L'évolution, en fonction de la température, de l'effort nécessaire pour maintenir le déplacement est donné en figure VIII.9

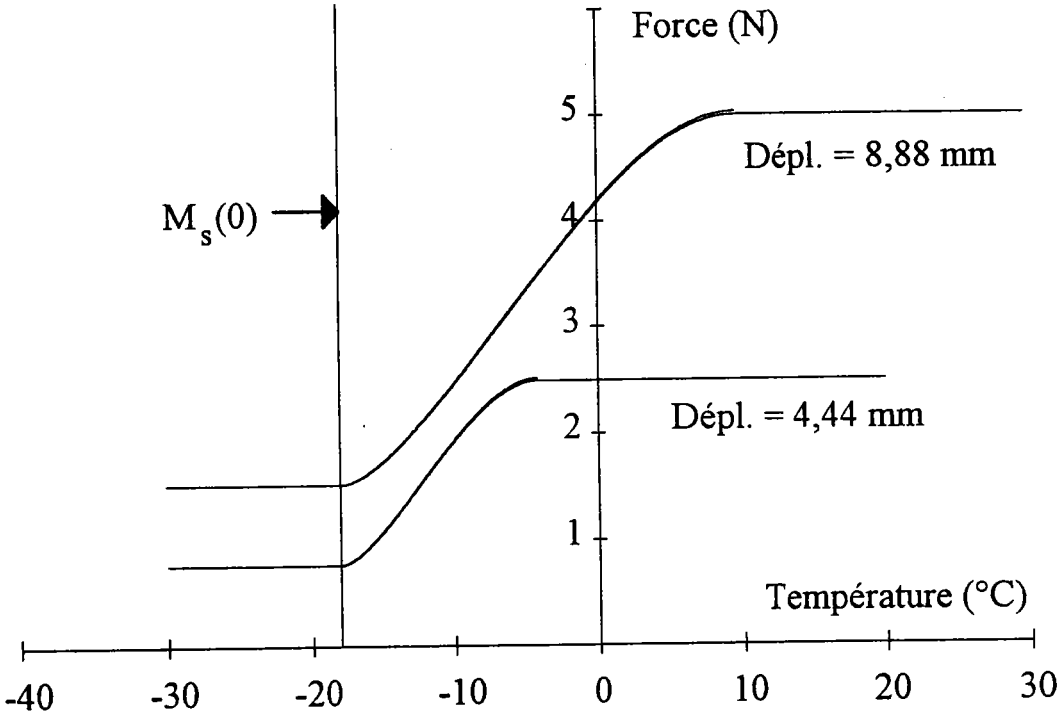


Fig. VIII.9: Force développée par un ressort hélicoïdal à mémoire de forme soumis à un déplacement imposé.

On observe une baisse de la force nécessaire pour maintenir le déplacement. Comme dans le cas précédent la réponse du ressort est plus complexe que celle de l'éprouvette de traction en raison d'effets de structure.

8.4.1.3. Trajet thermomécanique combiné:

Le ressort est refroidi sous charge constante à partir de l'austénite. Le déplacement ainsi obtenu est maintenu constant lors du chauffage. L'évolution de l'effort en fonction de la température est présentée en figure VIII.10

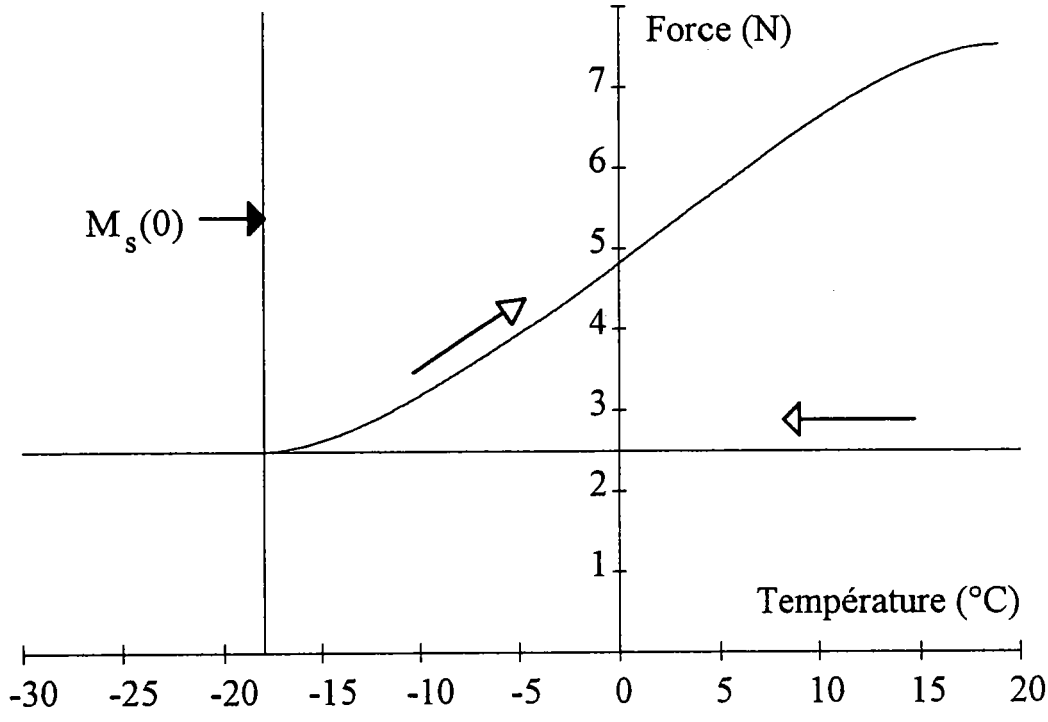


Fig. VIII.10: Trajet combiné pour un ressort en alliage à mémoire de forme Refroidissement sous une charge constante puis réchauffage à déplacement imposé.

Le ressort, en tentant de retrouver sa forme initiale, développe un effort. Ce résultat expérimental est retrouvé par le modèle. Ce type de chargement complexe est utilisé dans les applications des AMF [C8.3].

8.5. Conclusion:

Dans cette section, faute de résultats expérimentaux, nous présentons uniquement des résultats numériques. Les premiers résultats obtenus dans ce chapitre sont intéressants. D'un point de vue qualitatif, on retrouve les phénomènes observés expérimentalement. Il est cependant nécessaire d'apporter

des améliorations à ce modèle. Tout d'abord, la loi de comportement développée au chapitre 2 ne tient pas compte des phénomènes de réorientation des plaquettes en phase martensitique, ni de l'hytérésis dû à la température. Enfin, C. ROGUEDA [C8.4] a montré que l'utilisation d'une loi superélastique pour simuler le refroidissement des AMF n'est pas réaliste (fig. VIII.11). En effet, les modèles en superélasticité tiennent compte de la température $M_s(0)$ qui n'est pas la température de fin de transformation.

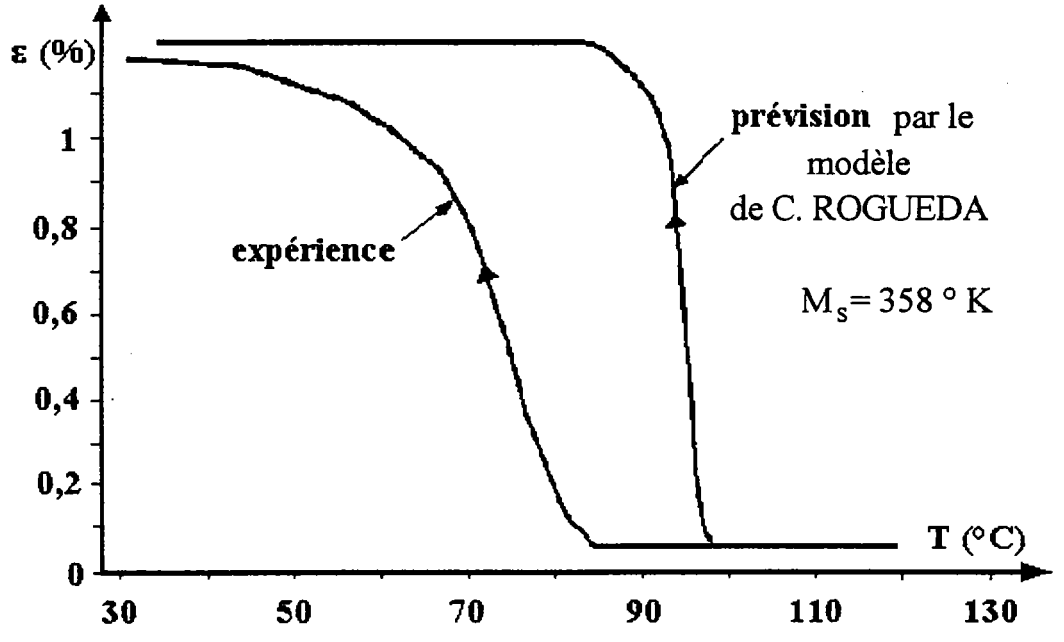


Fig. VIII.11: Refroidissement sous contrainte constante d'une lame en flexion d'après [C8.4] (M_s 85°C).

Références bibliographiques:

[C8.1] PATOOR E., BERVEILLER M., "Les alliages à mémoire de forme", Ed. Hermès, 1990.

[C8.2] LECLERCQ S., BOURBON G., LEXCELLENT C., "Modèle unifié du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme", Première Journée Transformation martensitique-Alliages à mémoire de forme", GEMPPM INSA LYON, Lyon, 8 avril 1994.

[C8.3] WEYNANT E., BARREAU G., "Nouvelles applications industrielles d'alliages à mémoire de forme", Revue Trait. Therm., 1990, N°234, p. 57.

[C8.4] ROGUEDA-BERRIET C., "Modélisation thermodynamique du comportement pseudoélastique des alliages à mémoire de forme" Thèse de doctorat N° 336, Université de Franche-Comté, Besançon, 1993.

Conclusion générale:

Dans le cas de la superélasticité, la comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques est en bon accord. Le modèle de calcul développé dans cette étude rend bien compte du comportement typique de ces matériaux, à savoir, la forte dépendance avec la température, la non linéarité de comportement du matériau, et l'hystérésis lors de la décharge en boucle interne ou non. Il est de plus montré que l'effet de la géométrie de la structure est important et doit être pris en compte. Les résultats obtenus en superélasticité sont d'autant plus intéressant qu'on assiste à un regain d'attention pour cet aspect du comportement des AMF. Au niveau notamment des applications biomédicales où des instruments (endoscopes), dits de chirurgie à accès minimal, utilisant cette propriété sont en cours de développement. Les logiciels développés au cours de ce travail sont de plus d'un accès simple pour un utilisateur potentiel (peu de variables), et de surcroît, rapides (7 minutes sur un PC type 80386 pour la réponse en charge-décharge d'une poutre en flexion, 2 minutes pour un ressort). Afin de vérifier la validité de la formulation incrémentale des intégrales de Bresse, une comparaison a été effectuée entre des résultats obtenus par notre code de calcul en flexion et par le code d'éléments finis ABAQUS. Le comportement du matériau était dans ce cas purement élastique linéaire, mais le problème traité était fortement non linéaire en déplacement. Le résultat obtenu est au-delà des espérances de Monsieur Bresse qui écrivait, en 1880, dans son ouvrage: " Ces formules sont d'un usage à peu près nul". Cent dix ans après, ces formules trouvent une application dans un domaine innovant. L'objectif fixé au départ de ce travail semble donc être atteint dans ce domaine.

Dans le cas de la superthermoélasticité, les premiers résultats obtenus sont intéressants d'un point de vue qualitatif. De nombreuses améliorations sont

cependant à apporter à ce modèle, et ce pour plusieurs raisons. Premièrement, la modélisation de l'élément en AMF seule ne suffit pas. Il faut tenir compte de l'ensemble du dispositif dans lequel est inclus cet élément (déformation élastique et thermique). D'autre part, la loi de comportement développée au chapitre 2 ne tient pas compte des phénomènes de réorientation des plaquettes en phase martensitique. Enfin, il a été montré que l'utilisation d'une loi superélastique pour simuler le refroidissement des AMF n'est pas suffisante.

Ces travaux ont mis en lumière un certain nombre de points à éclaircir. Notamment au niveau du comportement du matériau, des progrès restent encore à faire. En effet, notre loi de comportement ne tient pas compte de ce qui se passe en dessous de la température M_S, et elle ne permet pas de décrire des chargements non radiaux. La mise au point d'une telle loi prenant en compte ces aspects nous permettrait sans doute de traiter le cas des chargements thermomécaniques complexes. Cela permettrait également d'aborder l'étude de structures possédant une géométrie plus élaborée que de simples poutres. Dans le cadre du calcul de structure, il nous faudra alors sûrement abandonner (à regret) la formulation par les intégrales de Bresse pour s'orienter vers une formulation aux éléments finis. Mais ceci est une autre histoire...

ANNEXES

Table des matières:

A.1. Annexe 1: Influence de la déformation maximale de transformation. 227

A.2. Annexe 2: Approximation bilinéaire de la réponse en torsion d'un fil de section circulaire en cours de transformation.....229

A.2.1 Force seuil de début de transformation : 230

A.3. Annexe 3: Dimensionnement d'un ressort superélastique par une approche énergétique:.....231

A.3.1 Définition de l'énergie complémentaire W*: 231

A.3.2 Application du théorème de Castigliano: 232

A.3.2.1 Cas du matériau pas ou très peu transformé:.....233

A.3.2.2 Définition d'un déplacement seuil de début de transformation : 233

A.3.2.3 Cas du matériau en cours de transformation: 233

A.3.2.4 Conclusion:.....234

A.4. Annexe 4: Détermination du comportement en torsion en présence d'une zone complètement transformée. 236

A.5. Annexe 5: Détermination de l'expression de Ra' en utilisant le code de calcul formel MAPLE.....239

A.6. Annexe 6: Evaluation du décalage de la fibre neutre en flexion. 240

A.7. Annexe 7: Coefficient de section réduite pour les AMF. 243

A.8. Annexe 8: Problème en grands déplacements.....247

A.9. Annexe 9: Évaluation de la contribution due à la flexion dans un ressort hélicoïdal de traction.....249

A.1. Annexe 1: Influence de la déformation maximale de transformation.

Les courbes suivantes (fig. A1.1 et fig. A1.2) montrent l'influence de la valeur de la déformation maximale apparente de transformation γ_{am}^{A} sur la réponse d'une structure dans le cas d'une sollicitation de torsion pure. La figure A1.1 présente l'évolution du moment de torsion M_t en fonction de l'angle de torsion unitaire ψ pour des chargements avec différentes valeurs de γ_{am}^{A}. La figure A1.2 présente le même type d'évolution mais dans le cas de la décharge de la structure.

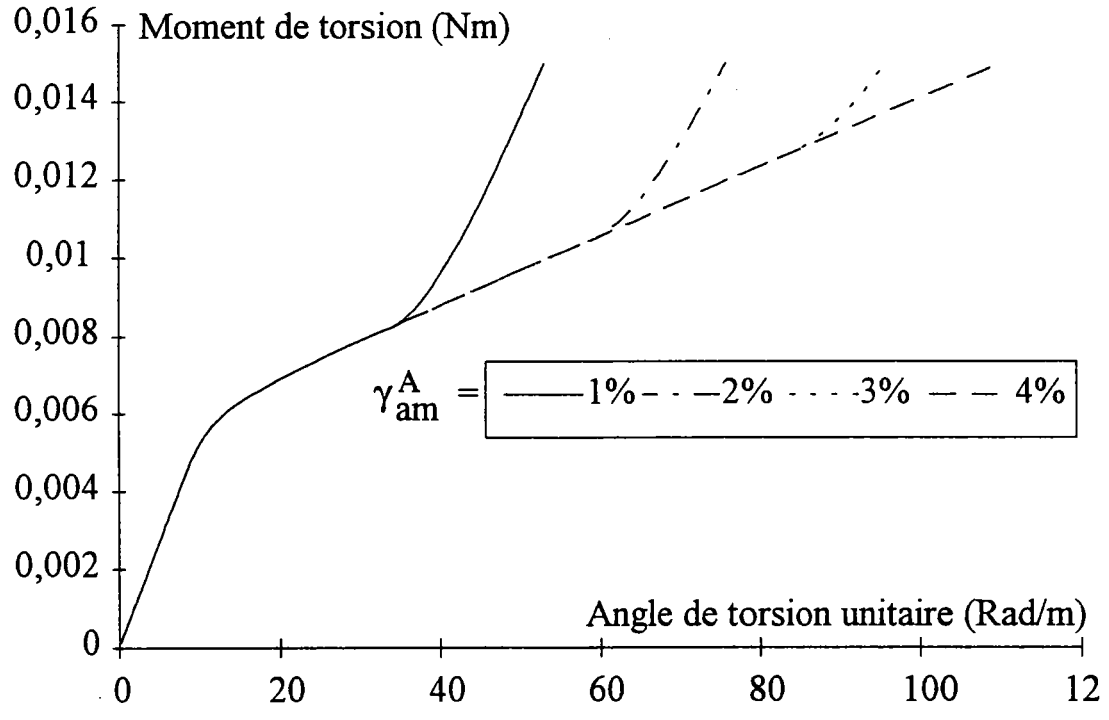


Fig. A1.1 :Influence de la déformation maximale de transformation en cisaillement sur l'allure du moment de torsion. Phase de charge

La valeur de la déformation maximale apparente de transformation influence, comme on peut s'en douter, l'apparition dans la structure d'une zone purement martensitique. Cette apparition se traduit par le durcissement observé sur les courbes où γ_{am}^{A} prend des valeurs de 1 à 3 %.

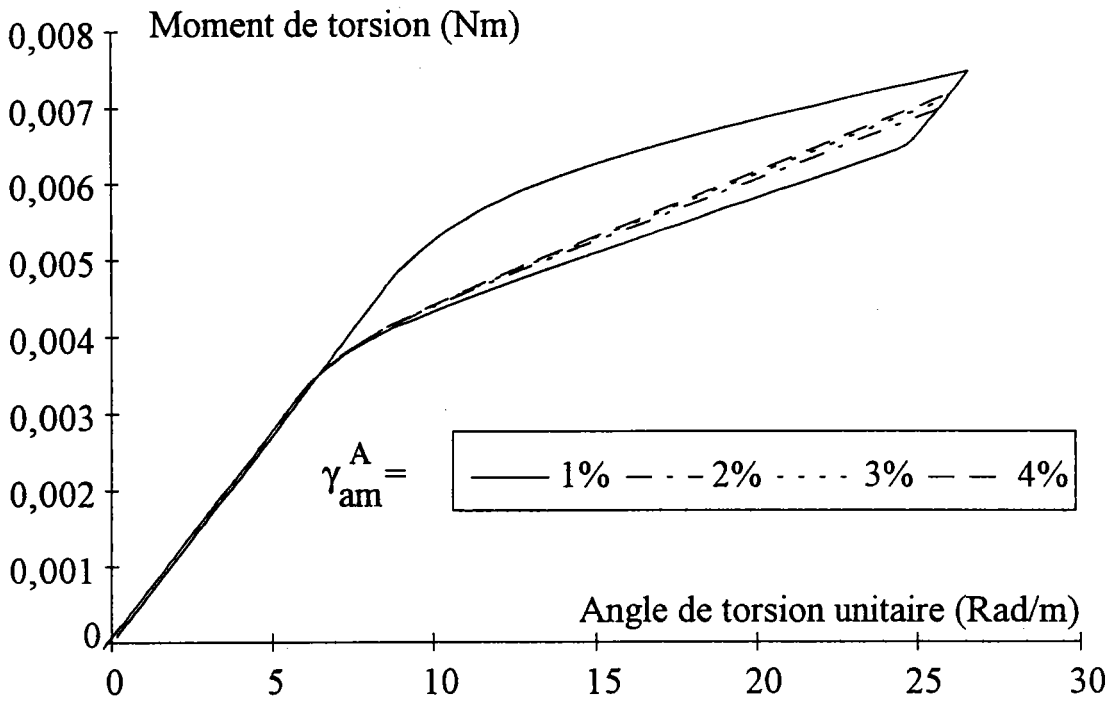


Fig. A1.2 : Influence de la déformation maximale de transformation en cisaillement. Phase de décharge.

La valeur de γ_{am}^{A} influence de façon significative la réponse de la structure lorsque le chargement appliqué produit une déformation proche de la valeur de la déformation de fin de transformation. En effet, on se rapproche alors du cycle complet charge-décharge. Si au contraire la déformation engendrée par le chargement a une valeur assez éloignée de la déformation de fin de trnasformation, la surestimation de γ_{am}^{A} a peu d'effet sur la réponse de la structure en décharge.

A.2. Annexe 2: Approximation bilinéaire de la réponse en torsion d'un fil de section circulaire en cours de transformation.

Bien que le comportement du matériau ait été extrêmement simplifié et que la sollicitation soit simple, la réponse d'un fil en torsion déterminée au paragraphe 5.2.5. est complexe. Cette complexité provient d'un effet de structure. Pour mieux mettre en évidence l'importance de cet effet de structure, nous allons simplifier la relation (5.27) en la mettant sous forme bilinéaire. Cette relation peut être simplifiée si l'on considère que $\frac{\psi_s^3}{\psi^3}$ est négligeable devant $\frac{\psi}{\psi_s}$. La relation liant M_t à ψ s'écrit alors :

$$M_t = M_{ts} \cdot \left[\frac{\mu'}{\mu_a}\frac{\psi}{\psi_s} + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\mu'}{\mu_a}\right)\right] \qquad \text{(a2.1)}$$

Il est possible dans ce cas de définir un angle seuil apparent de torsion, noté ψ', en écrivant:

$$M_t = M_{ts} \cdot \frac{\psi'}{\psi_s} = M_{ts} \cdot \left[\frac{\mu'}{\mu_a}\frac{\psi'}{\psi_s} + \frac{4}{3}\frac{\mu_a - \mu'}{\mu_a}\right] \qquad \text{(a2.2)}$$

d'où l'on tire $\psi' = \frac{4}{3} \cdot \psi_s$

Un moment de torsion seuil apparent, noté Mt', est alors obtenu en remplaçant ψ dans l'équation (a2.2). M_t' s'écrit alors :

$$M_t' = \frac{4}{3} \cdot M_{ts} \qquad \text{(a2.3)}$$

La nouvelle écriture du moment de torsion sous une forme bilinéaire est donc en fonction des hypothèses précédentes :

$$M_t = \frac{S.R^2.\mu_a.\psi}{2} \qquad \text{quand } \psi < \psi' \qquad \text{(a2.4)}$$

$$M_t = M_t' \left[\frac{3}{4}\frac{\mu'}{\mu_a}\frac{\psi}{\psi_s} + \frac{\mu_a - \mu'}{\mu_a}\right] \qquad \text{quand } \psi > \psi' \qquad \text{(a2.5)}$$

Cette relation simplifiée donne, avec une bonne approximation, la valeur du moment de torsion dans une barre cylindrique superélastique en cours de transformation. Entre M_{ts} et M_t', seule une faible partie de la section est concernée par la transformation. L'essentiel du comportement reste alors dominé par le caractère élastique du centre de la pièce. Quand M_t augmente, la zone en transformation sous contrainte s'accroît et la plasticité de transformation devient prépondérante dans la structure. Un type de résultat analogue est établi depuis fort longtemps pour les structures élastoplastiques [✍2.1].

A.2.1 Force seuil de début de transformation :

A partir des relations (5.22) et (a2.3), on peut déduire une force seuil apparente de début de transformation notée P'. En effet en combinant ces deux relations, on obtient après simplification:

$$P' = \frac{4}{3}.P_S \qquad \text{(a2.6)}$$

on obtient donc P' qui est la force seuil apparente de début de transformation.

[✍2.1] SAWCZUK A., "Mechanics and plasticity of structures", Ellis Horwood Series in Mechanical Engineering, 1989.

A.3. Annexe 3: Dimensionnement d'un ressort superélastique par une approche énergétique:

Cette approche est basée sur le théorème de Castigliano [✍3.1] et sur une formulation de l'énergie complémentaire W* associée au comportement des alliages étudiés [✍3.2]

Le déplacement, noté f, du ressort est égal, conformément au théorème précédemment cité, à la dérivée partielle de l'énergie complémentaire W* par rapport à l'effort appliqué P. Par convention, le déplacement du ressort s'effectue suivant la direction de la charge appliquée et dans le même sens que celle-ci.

A.3.1 Définition de l'énergie complémentaire W*:

Le comportement non linéaire des AMF impose par ailleurs de définir l'énergie complémentaire W* sous une forme variationnelle. L'expression de cette variation d'énergie, notée δW^*, par unité de volume est de la forme :

$$\frac{d\delta W^*}{dV} = \varepsilon_{ij} \cdot \delta\sigma_{ij} \qquad (a3.1)$$

en utilisant la convention de sommation sur les indices i et j pour les déformations ε et les contraintes σ.

D'après les hypothèses adoptées au chapitre V, le ressort est sollicité uniquement en torsion pure. La relation (a3.1) devient :

$$\frac{d\delta W^*}{dV} = \psi \cdot \rho \cdot \delta\tau(\rho) \qquad (a3.2)$$

La variation de l'énergie complémentaire δW^* s'écrit donc :

$$\delta W^* = \int_V \psi \cdot \rho \cdot \delta\tau(\rho) \cdot dV \qquad (a3.3)$$

D'après nos hypothèses de départ, l'angle d'hélice α est supposé négligeable, le volume V du ressort peut être approximé par:

$$V = 2 \,.\, n \,.\, \pi \,.\mathscr{R} \,.\, S \tag{a3.4}$$

La nouvelle formulation de δW^* devient donc:

$$\delta W^* = 2 \,.\, n \,.\, \pi \,.\mathscr{R} \,.\, \int_S \psi \,.\, \rho \,.\, \delta\tau(\rho) \,.\, dS \tag{a3.5}$$

L'angle de torsion ψ étant constant, il peut être sorti de l'intégrale:

$$\delta W^* = 2 \,.\, n \,.\, \pi \,.\mathscr{R} \,.\, \psi \,.\int_S \rho \,.\, \delta\tau(\rho) \,.\, dS \tag{a3.6}$$

Dans cette relation, le terme intégral représente la variation du moment de torsion que l'on note δM_t. L'expression finale de la variation de l'énergie complémentaire δW^* est ainsi obtenue:

$$\delta W^* = 2 \; n \; \pi \mathscr{R} \; \psi \; \delta M_t = n \; \pi \mathscr{D} \; \psi \; \delta M_t \tag{a3.7}$$

A.3.2 Application du théorème de Castigliano:

L'application du théorème de Castigliano détermine la variation δf du déplacement dans la direction de la charge P:

$$\delta f = \frac{\partial \delta W^*}{\partial P} = n \,.\, \pi \,.\mathscr{D} \,.\left[\psi \,\frac{\partial \delta M_t}{\partial P} + \delta M_t \,\frac{\partial \psi}{\partial P}\right] \tag{a3.8}$$

Cette relation conduit à une expression très simple en utilisant la formulation linéarisée du moment de torsion associé, définie dans l'annexe 2. Deux cas sont alors à considérer.

A.3.2.1 Cas du matériau pas ou très peu transformé:

Quand M_t est inférieur à M_t', le matériau présente un comportement élastique linéaire de module μ_a. On a donc:

$$f = \frac{P \,.\, n \,.\, \mathscr{D}^3}{2 \,.\, \mu_a \,.\, R^4} \qquad \text{(a3.9)}$$

on retrouve la relation classique issue de la Résistance des Matériaux [✍3.1].

A.3.2.2 Définition d'un déplacement seuil de début de transformation :

Quand M_t est égal à M_t', il est possible de définir un déplacement seuil de transformation, noté f'. Ce déplacement seuil est atteint lorsque la force appliquée devient égale à la force seuil apparente de début de transformation P'. Son expression est donnée par :

$$f' = \frac{P' \,.\, n \,.\, \mathscr{D}^3}{2 \,.\, \mu_a \,.\, R^4} \qquad \text{(a3.10)}$$

A.3.2.3 Cas du matériau en cours de transformation:

Pour M_t supérieur à M_t', la transformation dans le matériau devient significative, la relation élastique précédente n'est plus satisfaite. La forme variationnelle, δM_t, valable pour le moment de torsion est déduite de (a2.5):

$$\delta M_t = M_t' \cdot \left[\frac{3}{4} \frac{\mu'}{\mu_a} \frac{\delta\psi}{\psi_s} + \frac{\mu_a - \mu'}{\mu_a} \right] = \frac{\mathscr{D} \,.\, \delta P}{2} \qquad \text{(a3.11)}$$

En inversant cette relation, on obtient l'expression donnant l'angle de torsion $\delta\psi$:

$$\delta\psi = \psi_s \left(\frac{\delta P}{P_s} \frac{\mu_a}{\mu'} - \frac{4}{3} \frac{\mu_a - \mu'}{\mu'} \right) \qquad \text{(a3.12)}$$

En calculant les différents termes de (a3.8), il vient :

$$\psi \frac{\partial \delta Mt}{\partial P} = 0 \qquad (a3.13)$$

$$\delta M_t \frac{\partial \psi}{\partial P} = \frac{\mathscr{D}}{2} \psi_s \frac{\delta P}{P_s} \frac{\mu_a}{\mu'} \qquad (a3.14)$$

on peut alors en déduire la valeur de la variation de déplacement δf qui est :

$$\delta f = n \cdot \pi \cdot \frac{\mathscr{D}^2}{2} \cdot \psi_s \cdot \frac{\delta P}{P_s} \cdot \frac{\mu_a}{\mu'} = f_s \cdot \frac{\delta P}{P_s} \cdot \frac{\mu_a}{\mu'} \qquad (a3.15)$$

L'expression de la flèche totale du ressort est de la forme :

$$f = f_s + \delta f \qquad (a3.16)$$

soit :

$$f = f_s + f_s \cdot \frac{\delta P}{P_s} \cdot \frac{\mu_a}{\mu'} \qquad (a3.17)$$

que l'on peut aussi exprimer de la façon suivante :

$$f = f_s \cdot \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_a}{\mu'} \left(\frac{3}{4} \frac{P}{P_s} - 1\right)\right] \qquad (a3.18)$$

A.3.2.4 Conclusion:

La réponse en déplacement d'un ressort calculée par cette méthode dérivée de la méthode classique de Castigliano utilisée en Résistance des Matériaux peut être résumée de la façon suivante :

$$\text{quand } P \leq P' = \frac{4}{3} P_s \quad \rightarrow \quad f = \frac{P \cdot n \cdot \mathscr{D}^3}{2 \cdot \mu_a \cdot R^4} \qquad (a3.19)$$

$$\text{quand } P > P' = \frac{4}{3} P_s \qquad \rightarrow \qquad f = f' \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_a}{\mu'} \left(\frac{3}{4} \frac{P}{P_s} - 1 \right) \right] \tag{a3.20}$$

$$\text{avec} \quad P_s = \frac{S . R^2 . \mu_a . \psi_s}{2 . \mathscr{R}} \tag{a3.21}$$

$$\text{et} \qquad f' = \frac{2}{3} . \frac{P_s . n . \mathscr{D}^3}{\mu_a . R^4} \tag{a3.22}$$

On aboutit donc à des relations simples d'usage aisé, et qui donne en première approximation la réponse superélastique d'un ressort en alliage à mémoire de forme [✍3.3].

[✍3.1] KERGUIGNAS M., CAIGNAERT G., "Résistance des matériaux", Edition Dunod Université, 4e édition, 1977.

[✍3.2] COURBON J., "Eléments d'élasticité non linéaire", Techniques de l'Ingénieur, Généralités **, A306-12.

[✍3.3] GILLET Y., PATOOR E., BERVEILLER M., "Elements of structure calculation for shape memory device", J. de Phys., 1991, Coll. C4-151.

A.4. Annexe 4: Détermination du comportement en torsion en présence d'une zone complètement transformée.

Les relations établies dans cette section vont nous permettre de déterminer la réponse en torsion pure de la structure dans le cas où il existe une zone totalement transformée.

Il nous faut donc considérer trois zones:

→ S_a: une zone complètement austénitique possédant un comportement élastique de module de cisaillement μ_a ($\rho \leq R_a$).

→ S_{am}: la zone en cours de transformation, et qui a pour module de transformation en cisaillement μ' ($R_a < \rho \leq R_m$).

→ S_m :la zone complètement transformée en Martensite. On note μ_m le module de cisaillement de ce domaine situé ($R_m < \rho \leq R_m$).

L'expression de la contrainte dans les différentes zones peut être résumée de la façon suivante:

$$\rho \leq R_a : \quad \tau(\rho) = \mu_a.\gamma(\rho) = \mu_a.\psi.\rho \tag{a4.1}$$

$$R_a < \rho \leq R_m : \quad \tau(\rho) = \tau_s + \mu'.(\psi.\rho - \psi_s.R) \tag{a4.2}$$

$$R_m < \rho \leq R : \quad \tau(\rho) = \tau_s + \mu'.(\psi_f.R - \psi_s.R) + \mu_m.(\psi.\rho - \psi_f.R) \tag{a4.3}$$

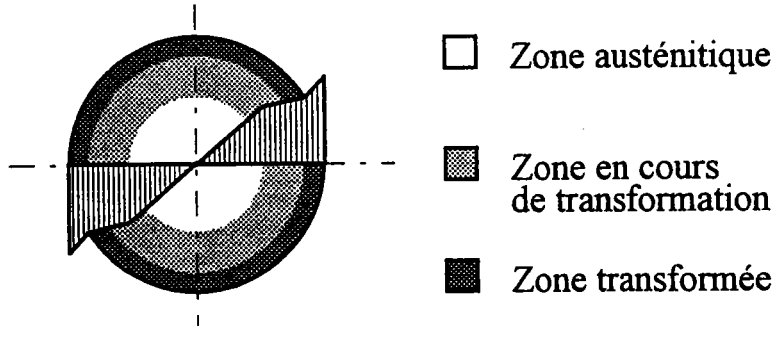


Fig. A4.1 : Répartition de la contrainte dans une section.

Remarque : Les valeurs des modules de cisaillement μ_a et μ_m étant peu différentes, ceux-ci seront confondus et noté μ_a.

Le moment de torsion s'exprime alors comme:

$$M_t = \int_{(S_a)} \tau(\rho)\ \rho\ ds + \int_{(S_{am})} \tau(\rho)\ \rho\ ds + \int_{(S_m)} \tau(\rho)\ \rho\ ds \qquad (a4.4)$$

soit en utilisant les lois de comportement associées aux différentes zones :

$$M_t = 2\pi \left(\int_0^{R_a} \mu_a \psi \rho^3\, d\rho + \int_{R_a}^{R_m} (\tau_s + \mu' (\psi \rho - \psi_s R))\, \rho^2\, d\rho \ \right\} + \int_{R_m}^{R} (\tau_s + \mu' \gamma_{am} + \mu_a (\psi \rho - \psi_f R))\, \rho^2\, d\rho \Big) \qquad (a4.5)$$

que l'on peut écrire différemment en remplaçant τ_s par (5.14):

$$M_t = 2\pi \left(\int_0^{R_a} \mu_a \psi\ \rho^3\, d\rho + \int_{R_a}^{R_m} ((\mu_a - \mu')\, \psi_s\ R + \mu'\ \psi\ \rho)\, \rho^2\ d\rho + \int_{R_m}^{R} (\ (\mu' - \mu_a)\, \gamma_{am} + \mu_a \psi\ \rho\ )\ \rho^2\ d\rho \right) \qquad (a4.6)$$

Ceci nous donne après intégration :

$$M_t = \frac{\pi R_a^4\ \mu_a \psi}{2} + \frac{2\pi (\mu_a - \mu')\, \psi_s\ R\ (R_m^3 - R_a^3)}{3}$$

$$+ \frac{\pi (R_m^4 - R_a^4)\, \mu' \psi}{2} - \frac{2\pi (\mu_a - \mu')\, \gamma_{am}\ (R^3 - R_m^3)}{3}$$

$$+ \frac{\pi (R^4 - R_m^4)\, \mu_a \psi}{2} \qquad (a4.7)$$

De même, en exprimant R_a et R_m, en fonction de (5.10) et (5.11), on obtient:

$$M_t = \frac{\pi\left(\frac{\psi_s}{\psi} R\right)^4 \mu_a \psi}{2} + \frac{2\pi(\mu_a - \mu')\psi_s R\left[\left(\frac{\psi_f}{\psi} R\right)^3 - \left(\frac{\psi_s}{\psi} R\right)^3\right]}{3}$$

$$+ \frac{\pi\left[\left(\frac{\psi_f}{\psi} R\right)^4 - \left(\frac{\psi_s}{\psi} R\right)^4\right]\mu' \psi}{2} - \frac{2\pi(\mu_a - \mu')\gamma_{am}\left[R^3 - \left(\frac{\psi_f}{\psi} R\right)^3\right]}{3}$$

$$+ \frac{\pi\left[R^4 - \left(\frac{\psi_f}{\psi} R\right)^4\right]\mu_a \psi}{2} \qquad \text{(a4.8)}$$

Cette étape du chargement pour la structure n'est pas prise en considération dans ce travail car elle offre peu d'intérêt dans les applications industrielles. En effet, les contraintes et les déformations atteintes sont telles que la durée de vie du matériau s'en trouve considérablement diminuée.

A.5. Annexe 5: Détermination de l'expression de Ra' en utilisant le code de calcul formel MAPLE.

```
**************************
  RELATIONS DE DEPART
**************************

R1 := (PSIMAX*R - PSISC*RS) * (GAM*DIFEPS - DIFTO) ;
R2 := (PSIMAX*R - PSISC*RS) * (GA*DIFEPS - DIFTO) ;
R3 := DIFTO*DIFEPS ;
GR := GA*(R1 + R3) / (R2 + R3) ;
P1 := GR*( (PSIMAX-PSI)*R - (PSIMAX*R-PSISC*RS) * DIFTO/(DIFEPS*GA) ) ;
P2 := (DIFTO / DIFEPS) * (PSIMAX*R-PSISC*RS) ;
P3 := GAM*(PSIMAX*R - PSISC*RS) ;
POLY :=P1 + P2 -P3 - DIFTO ;

*******************************
  RESOLUTION DE L'EQUATION
*******************************
s := solve(POLY=0, R) ;
A1 := s[1] ;
A2 := s[2] ;

************************************************
  CREATION DU CODE FORTRAN CORRESPONDANT
************************************************
fortran(A1,optimized) ;
fortran(A2,optimized) ;


**************
  RESULTATS
**************
> simplify(A1);

        PSISC RS GAM DIFEPS - PSISC RS DIFTO - DIFTO DIFEPS
        ---------------------------------------------------
                PSIMAX (GAM DIFEPS - DIFTO)

> simplify(A2);

                    PSISC RS GA - DIFTO
                    -------------------
                        GA PSI
```

A.6. Annexe 6: Evaluation du décalage de la fibre neutre en flexion.

Le décalage de la fibre neutre en flexion peut être quantifié à partir de la relation (6.7). La valeur de ce décalage, noté j, est:

$$j = \frac{\int_S E\, y\, dS}{\int_S E\, dS} \qquad (a6.1)$$

En exprimant cette relation en fonction de la géométrie décrite en fig. A6.1, on obtient:

$$j = \frac{(b^2 - (y_a^T)^2)\,(E'-E)}{E\,(b + y_a^T) + E'\,(b - y_a^T)} \qquad (a6.2)$$

Cette expression nous permet d'estimer le décalage de la fibre neutre pour une poutre en flexion dont une partie des fibres tendues se transforme.

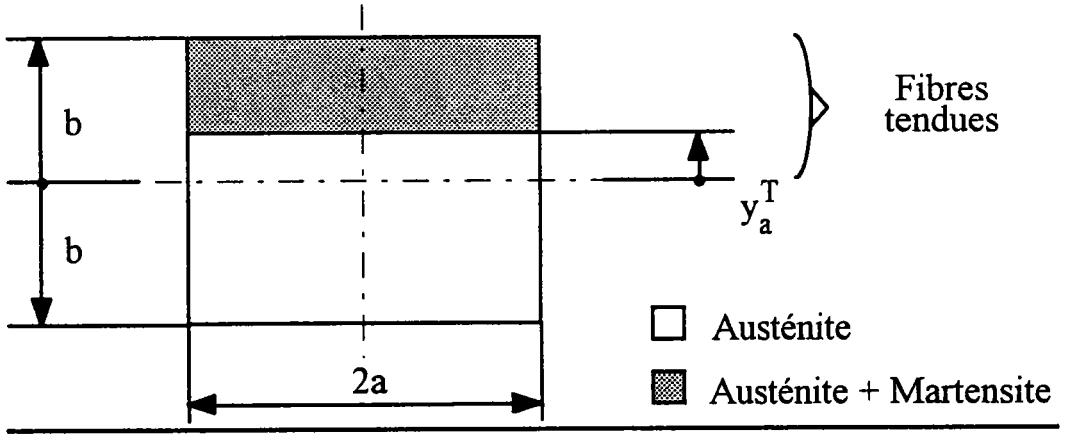


Fig. A6.1: Poutre sollicitée en flexion. Transformation sur une partie des fibres en traction.

La figure A6.2 donne l'évolution de j pour deux types de matériaux différents, l'un présentant un comportement de type "plateau" (E' = 1 MPa), l'autre un alliage du même type que celui étudié au chapitre 4.

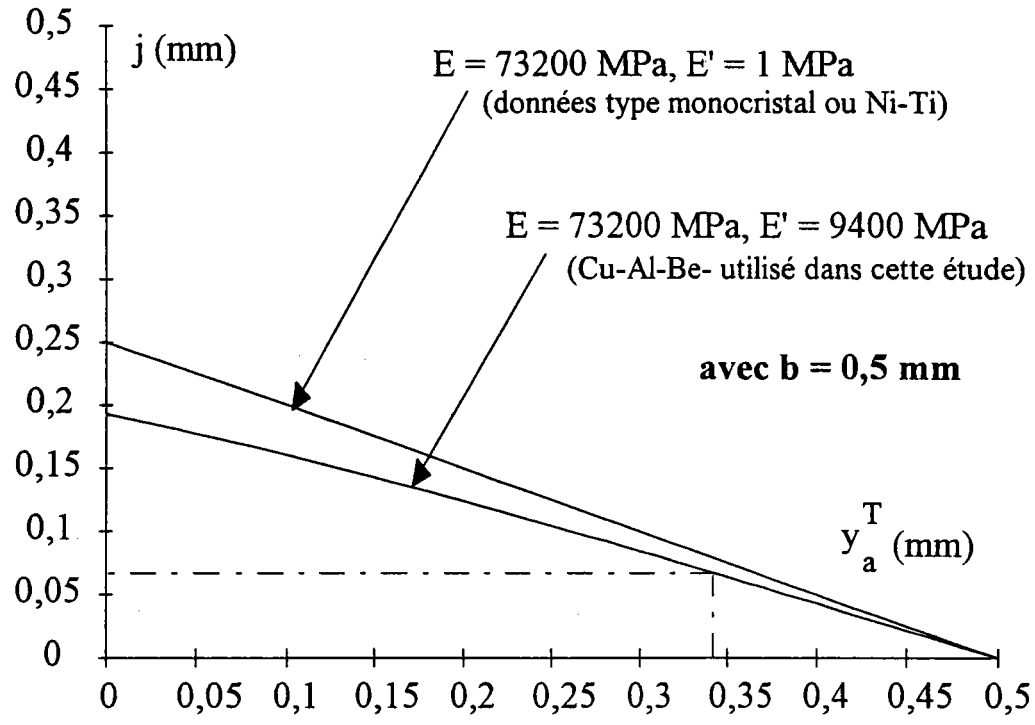


Fig. A6.2: Evolution de j pour deux types d'AMF.

Le décalage devient très important pour le matériau au fur et à mesure que y_a^T progresse vers le centre de la section. Il est cependant peu vraisemblable que l'on atteigne de telles valeurs.

A titre d'exemple, nous déterminons le décalage maximal de la fibre dans le cadre d'un des exemples traité au chapitre 7. Les figures suivantes concernent l'essai de flexion 4 points décrit en figure A6.3. La force appliquée est de F/2 = 16,15N. La température de l'essai est de +20°C. La courbe force-déplacement est donnée en figure VII.21.

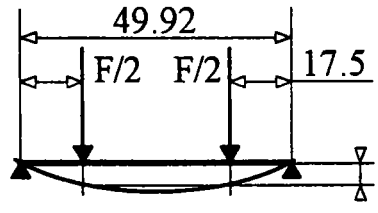


Fig. VII.3: Configuration de l'essai étudié.

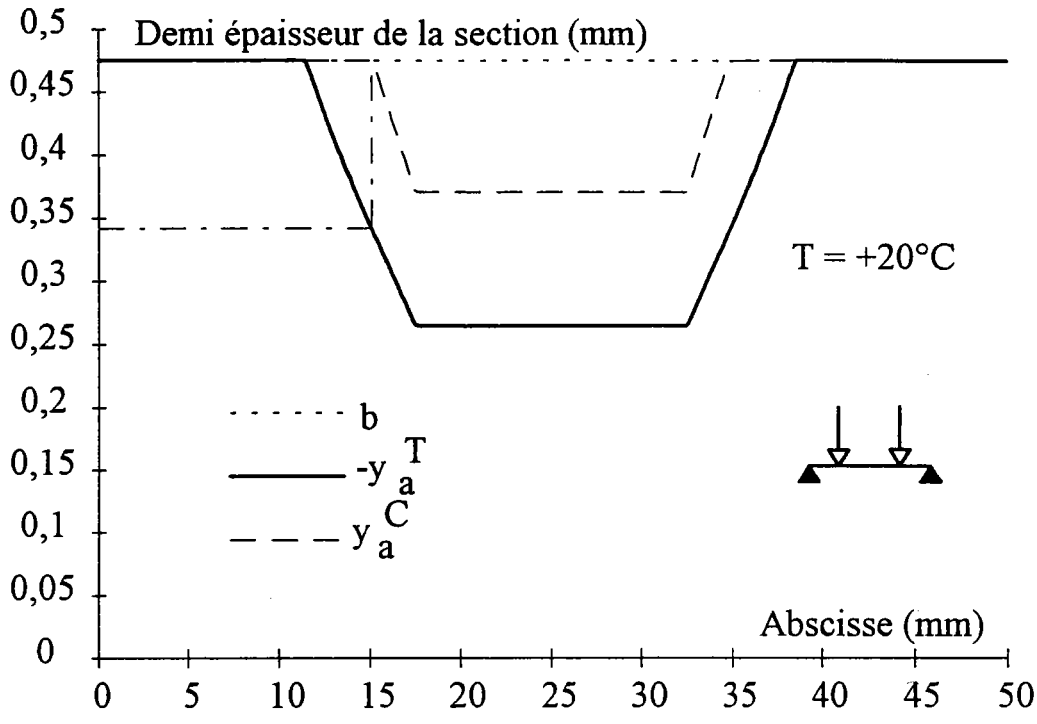


Fig. A6.4: Zones de matériau transformées en fonction de la section considérée pour F/2 = 16,15N. On note la dissymétrie entre traction et compression.

La valeur maximale de y_a^T déterminée sur la figure A6.4 (trait mixte) est 0,34 mm. En reportant cette valeur sur la figure A6.2, on obtient une valeur de j égale à 0,066 mm, soit une variation de 6,6 % par rapport à la hauteur totale de la section.

A.7. Annexe 7: Coefficient de section réduite pour les AMF.

Le coefficient de section réduite, noté k, est un facteur correctif des contraintes tangentielles. Il agit dans la réponse d'une structure comme un multiplicateur des effets de l'effort tranchant. Ce coefficient a généralement peu d'influence dans le cas des matériaux dits classiques. Il dépend fortement de la section utilisée.

Dans le cas des matériaux composites, D. GAY [☞7.1] a proposé un schéma de calcul de ce coefficient pour les composites sandwich. C'est ce type de schéma que nous avons utilisé pour déterminer l'allure de k pour les AMF. Ce type d'approche a été appliqué au cas de la section rectangulaire en cours de transformation (fig. A7.1). La transformation est supposée symétrique pour le calcul.

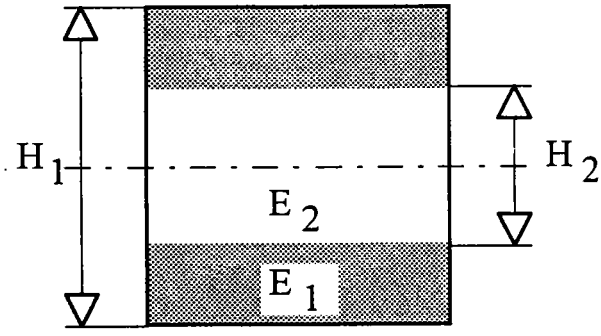


Fig. A7.1: Allure de la section considérée.

La relation adimensionnelle obtenue pour k est la suivante:

$$k = \frac{3\,(h\,(1-\nu e)+\nu e)}{20\,(h^6\,(e-1)^2+2h^3\,(e-e^2)+e^2)} \quad \times$$

$$\left[h^5\left(8-20e+15e^2-3\frac{e}{\nu}\right)+h^3\left(20e-30e^2+10\frac{e}{\nu}\right)+15h\left(e^2-\frac{e}{\nu}\right)+8\frac{e}{\nu}\right] \qquad (a7.1)$$

avec:

$e = \frac{E_1}{E_2}$: le rapport des modules de chaque phase. Dans le cas des AMF, on a $E_1 = E'$ et $E_2 = E$.

$\nu = \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}$: le rapport dépendant des coefficients de Poisson de chaque zone.. La partie en cours de transformation présente peu de dilatation volumique, on utilise donc l'hypothèse de matériau incompressible (ν_1=0,5). Pour ν_2, on garde 0,33.

$h = \frac{H_2}{H_1}$: le rapport des hauteurs de matériau ayant des comportements différents

La figure A7.2 donne l'allure de k pour différents rapports de hauteur h et différents rapports de modules e.

Les rapports de h proches de 1 représentent une section peu transformée. Les valeurs très faibles de rapport h ont peu de chance d'être atteintes. En effet, des zones totalement transformées en martensite apparaîtront bien avant.

Les rapports de e très faibles sont assimilables aux rapports de modules dans des alliages présentant des comportements de type "plateau" (par exemple les Ni-Ti).

Les valeurs de k augmentent brusquement pour des valeurs e très faibles et pour des rapports h qui conduisent à considérer une section en cours de transformation à plus de 80% (voir fig. A7.3). Ces cas étant extrêmes, on peut considérer que dans la majeure partie des problèmes étudiés, l'influence du coefficient de section réduite, et par la même de l'effort tranchant, demeurent négligeables.

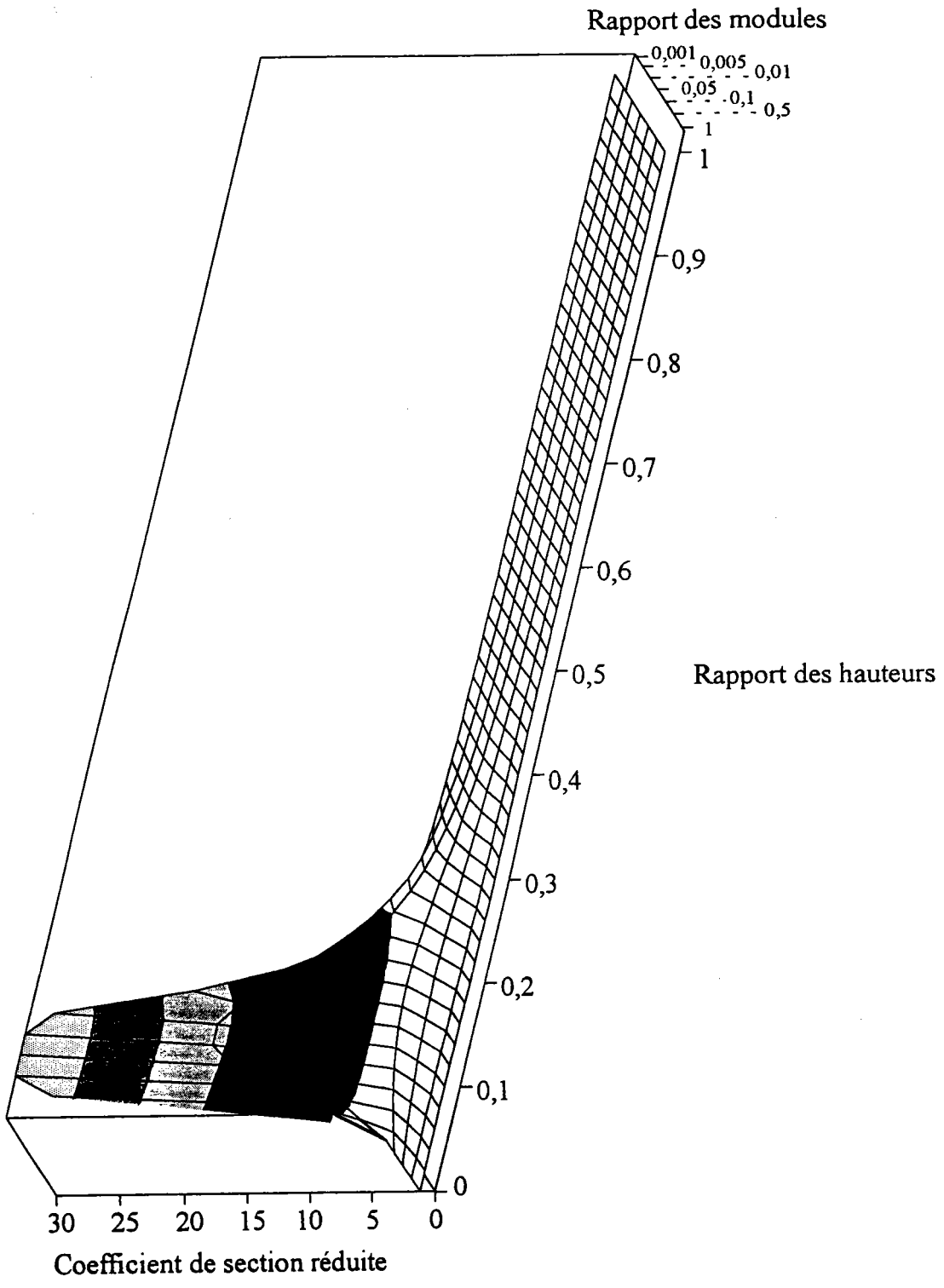


Fig. A7.2 : Evolution du coefficient de section réduite pour les AMF

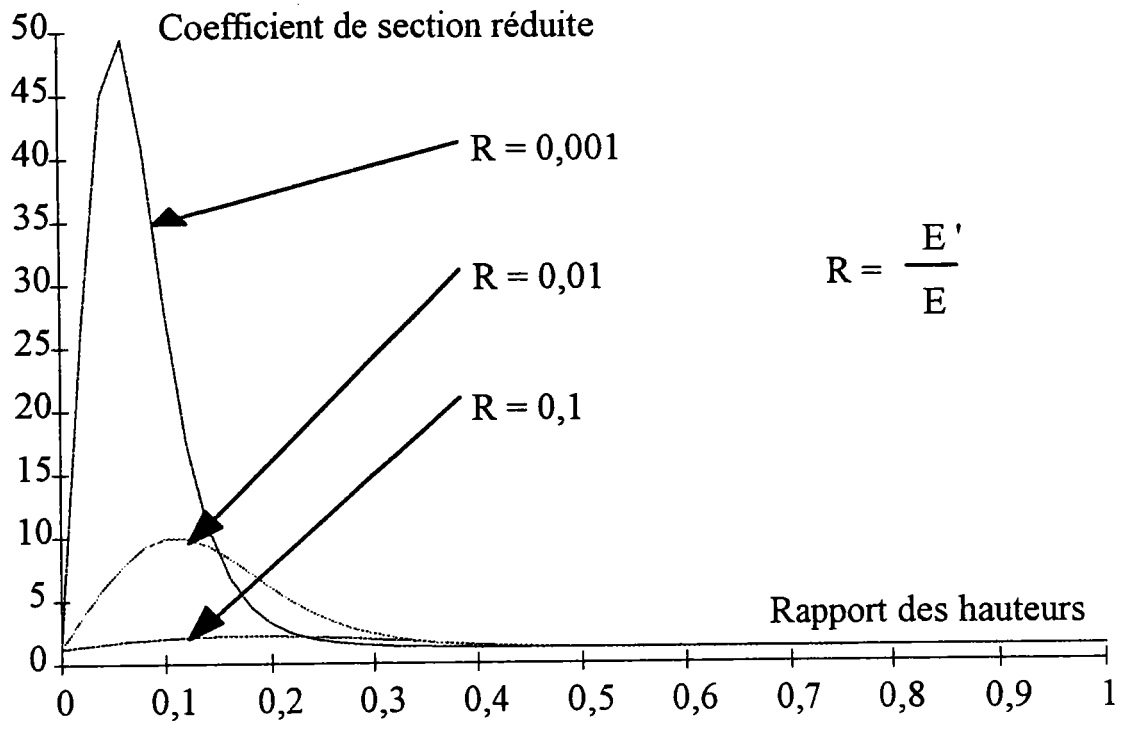


Fig. A7.3 : Evolution du coefficient de section réduite pour les AMF. Influence du rapport des modules d'élasticité.

Remarque:

Il est à noter que si l'on veut néanmoins tenir compte de l'effet de l'effort tranchant dans les calculs, il faudra calculer le coefficient de section réduite dans chaque section. En effet, dans le cas général de la flexion plane, chaque section est susceptible de se transformer différemment de sa voisine.

[✍7.1] GAY D., "Matériaux composites", Editions Hermès, 1989.

A.8. Annexe 8: Problème en grands déplacements.

Pour tester les performances de la méthode utilisée dans cette étude, des résultats obtenus sur une poutre élastique en grand déplacement à partir de la formulation par les intégrales de Bresse sont comparés à ceux obtenus par le code d'éléments finis industriel ABAQUS. La géométrie et le chargement du problème étudié sont décrits en figure A8.1. Le module d'Young du matériau est de 20000 MPa. On désire obtenir un déplacement vertical de 80 mm de l'extrême libre.

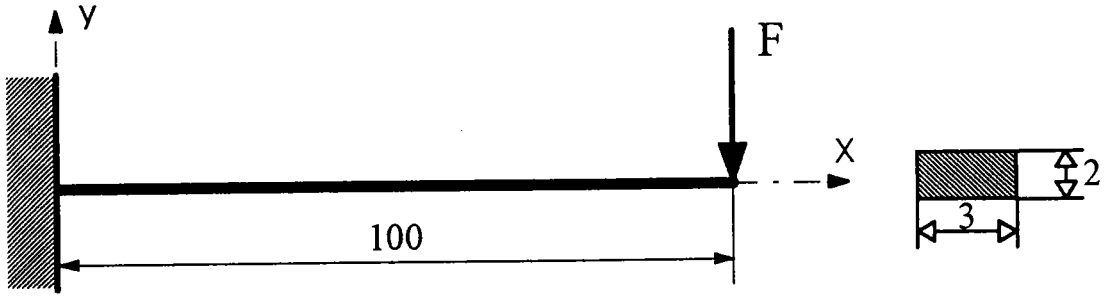


Fig. A8.1: Problème utilisé pour comparer les résultats.

La poutre est discrétisée à l'aide de 101 éléments du type B23 (éléments poutre à deux noeuds) dans le cas du calcul par éléments finis. Le même nombre d'incréments a été utilisé pour la discrétisation de la poutre en ce qui concerne l'approche par les intégrales de Bresse.

La figure A8.2 présente l'évolution de la force appliquée en fonction du déplacement maximal de la poutre pour les deux méthodes. La figure A8.3 présente, quant à elle, l'évolution de la géométrie de la poutre au cours du chargement. Pour plus de clarté, seule la trace de la section où se situe le point d'application de la force est représentée.

On admet généralement qu'un problème est non linéaire géométrique lorsque le déplacement est 10 fois supérieur à la hauteur de la section de la poutre. Si l'on conserve cette hypothèse, les intégrales de Bresse utilisées dans cette étude, sont capables de traiter des problème de ce type.

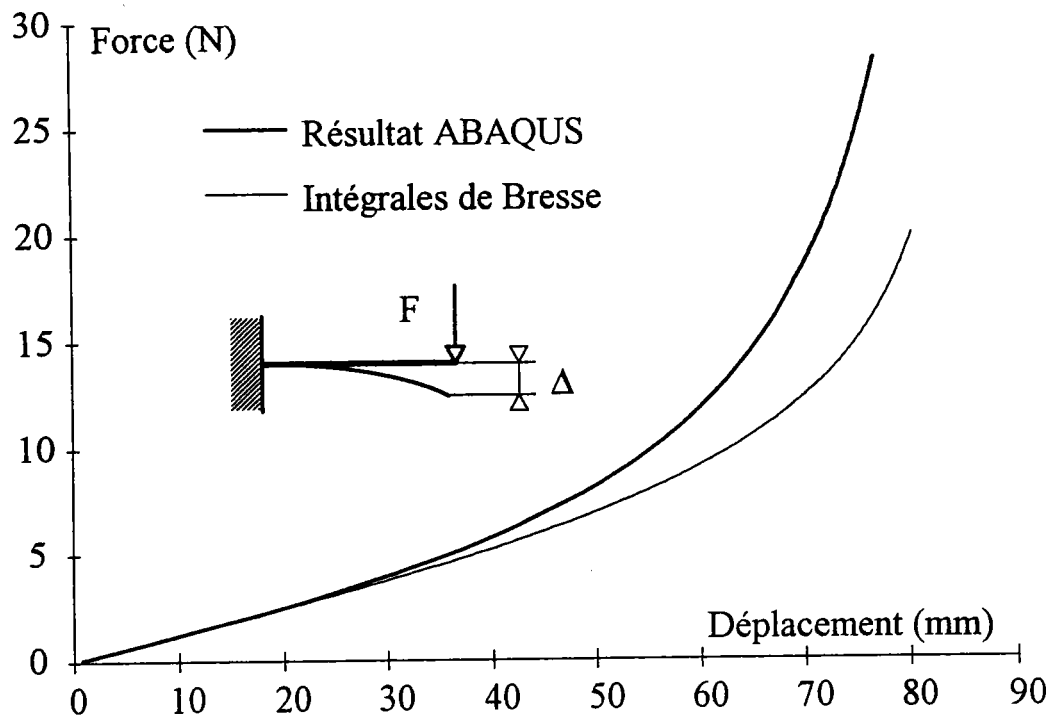


Fig. A8.2: Evolution de la force appliquée en fonction du déplacement maximal de la poutre.

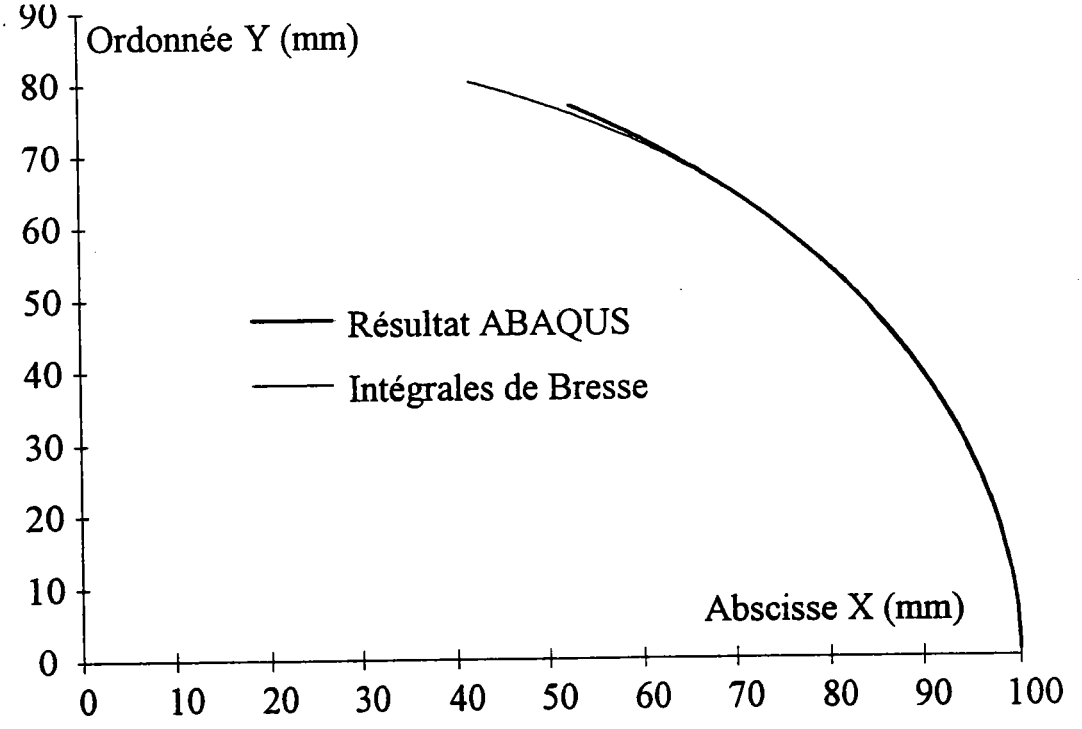


Fig A8.3: Evolution de la géométrie de la poutre au cours du chargement
Trace de la dernière section.

A.9. Annexe 9: Évaluation de la contribution due à la flexion dans un ressort hélicoïdal de traction.

Le cas pratique étudié au chapitre 7 est à la limite des hypothèses concernant l'angle d'enroulement α. Nous allons donc estimer l'influence de la flexion dans un ressort hélicoïdal de traction. Pour ce faire, un modèle simplifié est utilisé dans lequel nous faisons l'hypothèse d'une transformation symétrique en traction et compression (critère de Von Mises). La surface de transformation qui se propage dans la section circulaire (de rayon R) a alors la forme d'une ellipse de petit rayon a et de grand rayon b. On va de plus considérer le cas où la transformation est bien avancée, l'ellipse est alors incluse dans la section ($b \leq R$) (voir fig. A9.1).

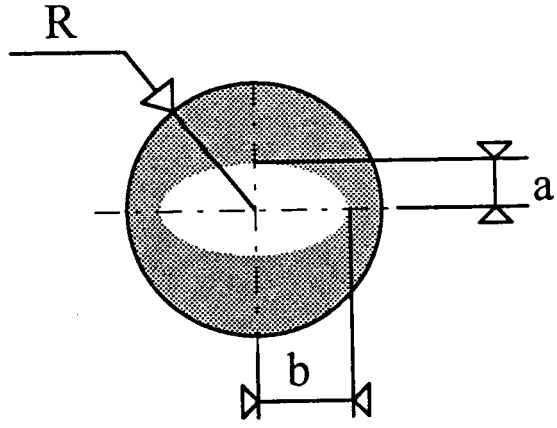


Fig. A9.1: Allure de la surface de transformation se propageant dans la section du ressort.

La flèche du ressort s'exprime sous la forme:

$$f = \underbrace{\frac{P L D^2}{4} \frac{\cos^2 \alpha}{G I_0}}_{\text{terme dû au moment de torsion}} + \underbrace{\frac{P L D^2}{4} \frac{\sin^2 \alpha}{E I_z}}_{\text{terme dû au moment de flexion}} \qquad (a9.1)$$

Une extension pour les AMF peut être alors écrite de la façon suivante:

$$f = \frac{P\,L\,D^2}{4}\left(\frac{\cos^2\alpha}{<G\,I_0>} + \frac{\sin^2\alpha}{<E\,I_z>}\right) \qquad (a9.2)$$

Où $<G\,I_0>$ et $<E\,I_z>$ sont les rigidités équivalentes, respectivement, de torsion et de flexion. Le rapport des deux contributions est donné par:

$$\frac{f_{Mf}}{f_{Mt}} = \frac{<G\,I_0>}{<E\,I_z>}\,\tan^2\alpha \qquad (a9.3)$$

Une étude paramétrique de ce rapport est alors effectuée en posant:

$$b = \kappa\,R \qquad \text{et} \qquad a = \beta\,b \qquad (a9.4)$$

On obtient:

$$\frac{f_{Mf}}{f_{Mt}} = \frac{G(k^4b^3 + k^4b) + G'\,(2 - (k^4b^3 + k^4b))}{E(k^4b^3) + E'\,(1 - k^4b^3)}\,\tan^2\alpha \qquad (a9.5)$$

Tant que la flèche due à la flexion est inférieure ou égale à 10 % de celle due à la torsion, il est raisonnable de négliger cette contribution. Ceci constitue un critère qui définissant l'angle α_{max} à partir duquel il convient de prendre en compte les effets de la flexion. La figure A.2 montre l'évolution de l'angle α_{max} en fonction des paramètres κ et β pour un rapport (a9.3) égal à 0,1. A titre de comparaison, la valeur de l'angle maximal $\alpha_{él}$ défini dans les mêmes conditions pour l'élasticité linéaire homogène est donné. On remarque que l'angle α_{max} devient très rapidement supérieur à $\alpha_{él}$. La courbe obtenue pour le ressort utilisé dans cette étude (β=1) est elle aussi portée sur cette figure.

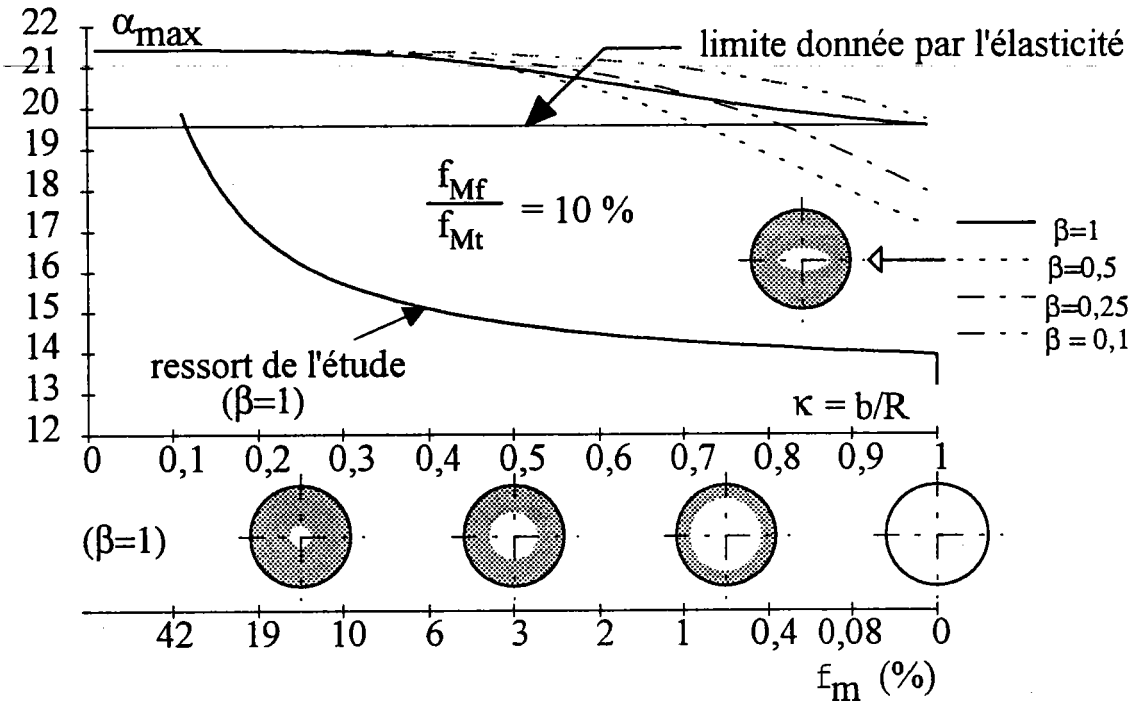


Fig. A9.2: Évolution de l'angle α en fonction de la variation des coefficients κ et β pour un rapport de flèches de 0,1.

On peut en conclure que l'erreur, commise sur le calcul du déplacement du ressort développé au chapitre 5, reste inférieure à 10 % malgré les valeurs élevées obtenues pour l'angle α. Il en résulte que les hypothèses sur l'angle d'enroulement émises dans ce chapitre restent valables pour l'étude du ressort effectuée au chapitre 7.

Résumé:

Les propriétés d'effets mémoire dans les métaux ont été observées pour la première fois il maintenant plus de cinquante ans. Les métaux présentant ces caractéristiques (superélasticité, effet mém simple ou double,...) sont appelés Alliages à Mémoire de Forme (AMF). Malgré les potentialités d'applicati de ces alliages et le grand nombre de brevets déposés à ce jour, les succès industriels et commerciaux rest peu nombreux. Ceci s'explique en grande partie par le fait qu'il n'existe pas d'outils de conception permett de dimensionner correctement des éléments en AMF. De nombreux travaux ont été menés afin de décrire comportement des AMF, mais bien peu considèrent le cas des structures où la répartition des contraintes es plus souvent non homogène.

Dans ce travail, des calculs de structures en AMF sont réalisés. Le premier point abordé est modélisation du comportement de ces alliages. Ce comportement inélastique dépend fortement de température et présente une hystérésis. La non symétrie observée expérimentalement entre le comportement traction et en compression est prise en compte par l'intermédiaire d'un critère de transformation r symétrique. A partir de ce critère, une loi d'écoulement est obtenue afin de modéliser le comportement AMF. Un paramètre d'écrouissage cinématique est introduit pour prendre en compte les effets de l'hystéré Les calculs de structures sont effectués dans le cadre de la théorie des poutres. La réponse des structures obtenue à l'aide d'une formulation incrémentale des intégrales de Bresse dans laquelle on tient compte de coexistence de zones élastiques et transformées durant les processus de charge et de décharge. Les résult obtenus par ce biais sont comparés avec succès à des résultats expérimentaux obtenus sur des ressorts et poutres superélastiques en alliage à base de cuivre. Les paramètres nécessaires au calcul sont déterminés partir de résultats expérimentaux issus d'essais de traction et de calorimétrie différentielle. Une extension a cas des chargements superthermoélastiques est également présentée dans cette étude.

Abstract:

Shape memory properties were first observed in metals more than fifty years ago. The met exhibiting these properties (superelasticity, one and two way memory effects, ...) are called Shape Memo Alloys (SMA). Despite the potentiality of these alloys and the amount of patents, successful industrial a commercial applications remain exceptions. This can be explained by the lack of design tools able to dimensi correctly SMA elements. Even if a lot of study were conducted to describe the behavior of SMA, very few wo have been done considering these alloys as mechanical elements where the stress distribution is, in many cas inhomogeneous.

In this work, structure calculations are performed with these materials. At first a modeling of t behavior of SMA is developed. This inelastic behavior depends strongly on the temperature and exhibits hysteresis. The non symmetry between tensile and compressive tests observed experimentally is also taken in account through the definition of a non symmetric transformation criterion. From this criterion, an associat flow rule is obtained to describe the SMA behavior. Hysteretic effects are accounted introducing a kinematic hardening parameter. Considering the geometry of the most common elements made of SMA, structu calculation is performed into the framework of beam theory. To determine the response of SMA structures, a incremental formulation of Bresse integrals is used taking account of the coexistence of transforming zones an elastic ones during the loading and the unloading process. The results obtained by this way are successfull compared with experimental ones performed on superelastic springs and beams made of copper based SM Material parameters required for the computation are experimentally determined using tensile test an calorimetric measurements. An extension to thermomechanical loading also presented in this study.