AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ DE METZ

THÈSE

présentée par

Valérie FLAMMANG

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

Sujet : Mesures de polynômes
Application au diamètre transfini entier

Soutenue le 28 novembre 1994

Devant le jury composé de :

Monsieur **M.WALDSCHMIDT**	(Université Pierre et Marie Curie)	Président
Monsieur **F.AMOROSO**	(Université de Pise)	Rapporteur
Monsieur **M.LANGEVIN**	(Université de Lille 1)	Rapporteur
Monsieur **M.MIGNOTTE**	(Université Louis Pasteur)	Examinateur
Monsieur **G.RHIN**	(Université de Metz)	Directeur de thèse
Monsieur **C.J.SMYTH**	(Université d'Edimbourg)	Examinateur

VB 81620

UNIVERSITÉ DE METZ

THÈSE

présentée par

Valérie FLAMMANG

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

Sujet : Mesures de polynômes
Application au diamètre transfini entier

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ

N° inv.	19941715
Cote	S/M3 94/57
Loc	Magasin

Soutenue le 28 novembre 1994

Devant le jury composé de :

Monsieur **M.WALDSCHMIDT**	(Université Pierre et Marie Curie)	Président
Monsieur **F.AMOROSO**	(Université de Pise)	Rapporteur
Monsieur **M.LANGEVIN**	(Université de Lille 1)	Rapporteur
Monsieur **M.MIGNOTTE**	(Université Louis Pasteur)	Examinateur
Monsieur **G.RHIN**	(Université de Metz)	Directeur de thèse
Monsieur **C.J.SMYTH**	(Université d'Edimbourg)	Examinateur

La science des Nombres, en obligeant l'Homme
à raisonner sur des vérités
qui ne sont ni visibles ni palpables,
a la vertu d'élever l'Âme.

PLATON

A ANNE et JEAN

Remerciements.

Qu'il me soit permis ici d'exprimer toute ma gratitude à Georges Rhin pour avoir accepté de guider mes premiers pas dans la recherche et m'avoir toujours soutenue et encouragée.
Sa gentillesse et sa disponibilité m'ont été une aide très précieuse.
Je souhaite vivement pouvoir encore travailler avec lui.

Mes chaleureux remerciements vont à Messieurs Francesco Amoroso et Michel Langevin qui ont bien voulu être rapporteurs.

Je suis reconnaissante à Christopher Smyth de l'intérêt porté à mon travail. Nos nombreuses conversations m'apportent toujours énormément. Je suis très heureuse qu'il fasse partie de mon jury.

Je remercie Messieurs Maurice Mignotte et Michel Waldschmidt qui ont accepté d'être membres du jury.

Je remercie Françoise et Hedi pour leurs encouragements et surtout leur amitié.

Un merci particulier à Monsieur Daniel Grosjean.

Un grand merci, enfin, à mes parents qui ont vailllamment supporté les états d'âme de l'apprenti–chercheur...

SOMMAIRE.

INTRODUCTION.

Soit $P = a_0x^d+...+a_d = a_0(x-\alpha_1)...(x-\alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geq 1$. On appelle mesure de Mahler de P la quantité

$$M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|).$$

Par le théorème de Kronecker, on sait que lorsque P est irréductible, $M(P) = 1$ si et seulement si P est cyclotomique. Ce résultat suscite la question suivante :

$$\text{a-t-on} \qquad \inf_{\substack{P \text{ irréductible} \\ P \text{ non cyclotomique}}} \qquad M(P) > 1?$$

C'est le classique problème de Lehmer, ouvert maintenant depuis plus d'un demi siècle.

Schinzel, en 1972, a apporté une réponse partielle à ce problème. En se restreignant à l'ensemble des polynômes P à coefficients entiers, de degré d, différents de x, $x-1$ et totalement positifs (dont tous les conjugués sont réels positifs), il a montré que :

$$M(P) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d.$$

Dans ce travail, nous nous proposons de déterminer explicitement pour certaines familles de polynômes les éléments de petite mesure. Considérons un ensemble de polynômes P unitaires à coefficients complexes dont les zéros appartiennent à un domaine D contenu dans le plan complexe et g une fonction de D dans $\mathbb{R}^+$. La *mesure* d'un polynôme P de cet ensemble sera pour nous la quantité :

$$\mathcal{M}(P) = \prod_{P(\alpha)=0} g(\alpha).$$

Nous nous intéressons principalement à trois mesures sur les polynômes unitaires à coefficients entiers totalement positifs :

- la mesure de Mahler où $g(x) = \max(1, |x|)$

• la longueur où $g(x) = |x| + 1$

• la mesure notée $R_{q,s}$ où $g(x) = q + sx$, $(q, s \in \mathbb{N}^*)$.
Nous verrons comment cette dernière mesure est directement liée à la majoration du diamètre transfini entier d'un intervalle $I = [\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ avec $|ps - qr| = 1$.
Pour minorer l'expression $\prod_{P(\alpha)=0} g(\alpha)$, nous serons amenés à utiliser une technique de fonctions auxiliaires introduite par C.J.Smyth. Nous choisirons dans chacun des cas un nombre fini de polynômes à coefficients entiers R_j, $1 \leq j \leq n$ et nous chercherons des exposants réels positifs c_j, $1 \leq j \leq n$ rendant l'expression $\min_{x \in D} \frac{g(x)}{\prod_{j=1}^{n} |R_j(x)|^{c_j}}$ maximale. On linéarise le problème par rapport aux c_j en étudiant la fonction $f(x) = \log g(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j \log |R_j(x)|$. En général, on n'obtient pas de solution exacte du problème d'optimisation considéré. Une méthode de *programmation linéaire semi-infinie* en fournit une approximation numérique qui permet d'aboutir à un résultat. Cependant, nous rencontrerons quelques exemples de solutions exactes que nous appellerons *fonctions auxiliaires exactes.*

Dans le premier chapitre, nous rappelons d'abord la notion de mesure de polynômes puis nous décrivons le principe des fonctions auxiliaires. Ce principe a été utilisé par C.J.Smyth pour déterminer les quatre premiers points du spectre de la mesure de Mahler absolue. Des améliorations dans la programmation linéaire semi-infinie nous permettent alors d'exhiber deux nouveaux points résolvant ainsi une conjecture de C.J.Smyth.
Le second chapitre est consacré à la longueur. Nous nous proposons d'établir des résultats analogues à ceux obtenus sur la mesure de Mahler. Ainsi, nous déterminons les cinq premiers points du spectre de la longueur absolue. Ensuite, nous comparons la mesure de Mahler et la longueur de polynômes à coefficients entiers appartenant à certaines familles .

Des résultats généraux sur le diamètre transfini entier sont présentés au début du troisième chapitre. Notre objectif est d'améliorer les encadrements connus du diamètre transfini entier d'intervalles dont les bornes sont deux éléments consécutifs d'une suite de Farey . Nous verrons comment la majoration du diamètre transfini entier de tels intervalles dépend de la minoration de certaines mesures de polynômes. Les techniques mises en oeuvre dans les chapitres précédents permettent d'obtenir de meilleures majorations sauf dans le cas de petits intervalles proches de 0. La minoration du diamètre transfini entier repose sur un lemme de Chudnovsky auquel on applique une construction polynômiale de C.J.Smyth. Les résultats améliorent les minorations antérieures.
L'étude du spectre d'une mesure conduit tout naturellement à la recherche de polynômes "petits" pour cette mesure. Dans le quatrième chapitre, nous développons une méthode générale pour trouver effectivement tous ces polynômes et nous illustrons le procédé en l'appliquant à la longueur et à la mesure de Zhang–Zagier que nous définissons par $Z(P) = M(P(z))M(P(1-z))$ pour P à coefficients complexes .

Nous donnons en annexe : l'exécution en PASCAL d'un programme d'optimisation ainsi que sa vérification en calcul formel ; une liste de polynômes et de leurs exposants pour la majoration du diamètre transfini entier ; un exemple d'utilisation de la méthode du dernier chapitre pour le problème de Zhang–Zagier ; une liste de polynômes dont la mesure de Zhang–Zagier est petite ; une liste de polynômes totalement positifs de petite longueur. En appliquant aux polynômes de cette liste la transformation T (définie dans le premier chapitre), nous produisons d'autres polynômes irréductibles totalement positifs dont la longueur est petite. Enfin, la dernière annexe montre que l'on peut obtenir des polynômes totalement positifs de petite longueur à partir de polynômes totalement positifs de "mauvaise" longueur en utilisant la transformation T. Ces deux dernières annexes mettent en évidence l'importance de la transformation T.

CHAPITRE 1

Spectre de la mesure de Mahler absolue des entiers algébriques totalement positifs.

Il doit avoir fallu plusieurs siècles
pour découvrir qu'un couple de faisans ou
une paire de jours étaient des exemples
du nombre deux.
B.Russell

Après avoir défini la notion de **mesure** sur une famille de polynômes, nous commençons ce chapitre par une partie numérique qui décrit le principe des **fonctions auxiliaires** que nous utiliserons dans la suite.
Le second paragraphe est consacré à la **mesure de Mahler** dont nous présentons quelques propriétés.
Ces deux parties nous permettent alors de donner un premier exemple d'utilisation des fonctions auxiliaires. Nous nous intéressons à l'ensemble $\mathcal{L}$ des valeurs prises par $M(\alpha)^{\frac{1}{deg(\alpha)}}$ où $M(\alpha)$ désigne la mesure de Mahler de l'entier algébrique α que nous supposons différent de 0 et de 1, et **totalement positif** (i.e dont tous les conjugués sont réels positifs.).
Nous rappelons un résultat de Schinzel qui fournit le plus petit point de $\mathcal{L}$: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par ailleurs, C.J.Smyth a établi l'existence d'un nombre l tel que $\mathcal{L}$ soit dense dans $(l,+\infty)$. l est le plus petit point d'accumulation connu. Afin d'étudier la structure de $\mathcal{L}$ dans l'intervalle $I=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},l\right)$, Smyth, en 1981, a déterminé les quatre plus petits éléments de $\mathcal{L}$ en utilisant la technique des fonctions auxiliaires décrite ci–après.
Nous trouvons les deux points suivants de l'intervalle I dont l'un avait été conjecturé par Smyth.

1 Mesure sur une famille de polynômes.

Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ la famille des polynômes de $\mathbb{C}[x]$ vérifiant :

$$P(z) = 0 \Rightarrow z \in D.$$

Ces familles peuvent être, par exemple, les polynômes totalement positifs (dont tous les zéros sont réels positifs), les polynômes totalement réels (dont tous les zéros sont réels) ou les polynômes ayant tous leurs zéros dans un secteur du plan complexe.

Définition 1.1 *Soit $\mathcal{M}$ une application de $\mathbb{C}[x]$ dans $\mathbb{R}^+$.*
$\mathcal{M}$ est une mesure sur $\mathcal{F}$ si pour tout entier $d \geq 0$ et tout réel $c > 0$, l'ensemble des polynômes $P \in \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{M}(P) \leq c$, $deg(P) = d$ et $P \in \mathbb{Z}[x]$ est **fini**.

Exemples de mesures (liées au domaine D).
Soit $P = a_0x^d + ... + a_d = a_0(x - \alpha_1)...(x - \alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, un polynôme à coefficients complexes.
$|a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$ et $|a_0| \prod_{i=1}^{d}(1 + |\alpha_i|)$ sont des mesures sur les totalement positifs et les totalement réels.
$|a_0| \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ est une mesure sur les totalement positifs mais pas sur les totalement réels.

Remarque.
Si $\mathcal{M}$ est une mesure supérieure ou égale à 1 alors $\log \mathcal{M}$ en est une également.

2 Les fonctions auxiliaires.

2.1 Principe.

Soit D un domaine contenu dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous nous placerons toujours dans ce cas mais on peut envisager un domaine D plus général contenu dans $\mathbb{R}^n$.
Soit g une fonction définie, continue et dérivable sur un ouvert dense dans D. On suppose de plus g positive sur D. Nous considérons dans la suite des mesures $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{M}(P) = \prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i)$ où P est un polynôme unitaire à coefficients entiers ayant tous ses zéros $\alpha_1, ..., \alpha_d$ dans D.
On désire de façon générale minorer l'expression :

$$\prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i)$$

Soit $c = (c_j)_{1 \leq j \leq n}$ où les c_j sont des réels positifs non nuls. On choisit des polynômes à coefficients entiers R_j, $1 \leq j \leq n$, qui dépendent de la fonction g considérée comme on le verra dans les applications.
Enfin, soit h la fonction définie pour $x \in D$ tel que $R_j(x) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, par :

$$h(x, c) = \frac{g(x)}{\prod_{j=1}^{n} |R_j(x)|^{c_j}}.$$

Soit $e^{m(c)} = \inf_{x \in D} h(x, c)$.
Si les R_j ne s'annulent pas en α_i pour $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq n$, on a :

$$\frac{g(\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{n} |R_j(\alpha_i)|^{c_j}} \geq e^{m(c)} \quad i = 1, .., d$$

et en effectuant le produit pour i=1,..,d

$$\prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i) \geq e^{m(c)d} . \prod_{j=1}^{n} (\prod_{i=1}^{d} |R_j(\alpha_i)|^{c_j})$$

or pour $j = 1, .., n$, $\prod_{i=1}^{d} |R_j(\alpha_i)|$ est un entier non nul donc supérieur ou égal à 1.
Par conséquent

$$\prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i) \geq e^{m(c)d}.$$

Il s'agit ensuite de déterminer le nombre m solution du problème d'optimisation suivant:

$$e^m = \max_c e^{m(c)} = \max_{(c_j)} \min_{x \in D} h(x, c).$$

Afin de rendre ce problème linéaire par rapport aux c_j, $1 \leq j \leq n$, on étudie :

$$f(x, c) = \log h(x, c) = \log g(x) - \sum_{j=1}^{n} c_j \log |R_j(x)|.$$

$\min_{x \in D} f(x, c)$ est une fonction continue des $c_j > 0$. Supposons que $\sum_{j=1}^{n} a_j c_j \leq a_0$ avec $a_j > 0$ pour $0 \leq j \leq n$. c appartient alors à un compact. Or toute fonction à valeurs réelles continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes d'où l'existence d'une solution au problème ci–dessus. En général, on ne peut pas calculer m ; on en obtient une approximation numérique qui permet tout de même d'aboutir à un résultat. Cependant, nous verrons dans les chapitres suivants quelques exceptions où les c_j et m sont explicites. La fonction auxiliaire qui permet de les trouver sera dite *fonction auxiliaire exacte.*
Si D est un domaine fini, c'est un problème de programmation linéaire classique. Or dans les cas qui nous intéressent, D est infini.
Une méthode de programmation linéaire semi–infinie permet alors

de donner une valeur numérique approximative des c_j dont on pense qu'ils sont proches des meilleurs possibles. On a donc aussi une approximation de m qu'on notera m_a.

• Première étape.

On choisit d'abord un ensemble fini X_0 de points appartenant à D. Puis on résout le problème de programmation linéaire standard suivant :

$$\max_{(c_j)} \min_{x \in X_0} f(x,c)$$

sachant que :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j c_j \leq a_0.$$

On obtient par la méthode du simplexe une famille particulière $c^0 = (c_j^0)$ et $m_0 = \min_{x \in X_0} f(x, c^0)$.
Ensuite, on calcule $m'_0 = \min_{x \in D} f(x, c^0)$ et l'on a : $m'_0 \leq m \leq m_0$.

•Seconde étape .

Il faut augmenter l'ensemble des points de D sur lesquels la fonction est contrôlée. Il y a deux façons habituelles de procéder.

a) Supposons que la fonction $f(x, c^0)$ atteigne son maximum au point $t \in D$.
L'algorithme d'échange de Remez consisterait à remplacer l'un des points de l'ensemble de départ X_0 par le point t (des conditions précises permettent de savoir quel point écarter ; voir [2]).
Ensuite, on répète la procédure de l'étape initiale sur ce nouvel ensemble X_0.
Une première méthode, inspirée de l'algorithme de Remez, consiste à ajouter à X_0 le point t (sans retrancher d'autre point). Mais cette méthode a l'inconvénient de converger lentement.

b) La seconde méthode ajoute systématiquement tous les maxima locaux. C'est cette méthode que nous employons sauf pour le théorème 4.3, où nous utilisons une procédure intermédiaire. On recommence alors le procédé décrit dans la première étape sur l'ensemble fini X_1 réunion de X_0 et des maxima locaux de $f(x, c^0)$. On trouve, en général, m_1 et m'_1 vérifiant :

$$m'_0 \leq m'_1 \leq m \leq m_1 \leq m_0.$$

•Etapes suivantes.

L'opération ainsi répétée fournit deux suites (m_i) et (m'_i) telles que

$$m'_0 \leq .. \leq m'_i \leq m \leq m_i \leq .. \leq m_0$$

On s'arrête dès qu'il y a assez bonne convergence, quand par exemple, $m_i - m'_i < 10^{-6}$. Supposons que p itérations suffisent alors on prend $m_a = m_p$.

Remarque .
Le nombre des polynômes, le degré et la taille des coefficients engendrent divers problèmes numériques qui ont des conséquences sur la précision des calculs. Par exemple, cela se produit :
- quand on ajoute des points dans la programmation linéaire
- quand on évalue la fonction f en un point ; ce qu'on fait en général par l'algorithme de Horner
- dans la recherche des extrema ; en effet, on doit calculer les zéros de la dérivée de f. Or, si l'on utilise un programme de recherche de zéros basé sur l'algorithme de Newton, il faut calculer la valeur d'un polynôme dont le degré est au moins égal à la somme des degrés des R_j. On remplace alors la recherche directe des extrema par l'algorithme du simplexe introduit par J.A.Nelder et R.Mead [21], dont on peut trouver une version en Pascal, appelée AMOEBA dans [23]. Cet algorithme donne le minimum d'une fonction sans passer par sa dérivée, ce qui réduit le risque d'erreurs de calcul.

2.2 Exemples.

Nous établissons un résultat déjà obtenu indépendamment par G.Höhn et N-P.Skoruppa [17].Ils redémontrent un théorème de Schinzel [28]. La proposition 2.5 du second chapitre en est une généralisation.

Théorème 2.1 *Pour tout entier algébrique totalement positif α différent de 0 et de 1, on a :*

$$M(\alpha) \geq |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|^{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}.|N_{K/\mathbb{Q}}(1-\alpha)|^{\frac{1}{\sqrt{5}}}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d$$

où $d = deg(\alpha)$ et $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Démonstration.

Considérons la fonction auxiliaire définie pour $z > 0$ et $z \neq 1$ par :

$$A(z) = -\log(\max(1,|z|)) + r\log|z| + \frac{1-2r}{2}\log|1-z|^2$$

où $0 < r < \frac{1}{2}$ et notons $a = \max_{0 \leq z \leq 1} A(z)$.
En utilisant le fait que $A(z) = A\left(\frac{1}{z}\right)$, on restreint l'étude de A à l'intervalle $]0,1[$.
Soit P le polynôme minimal de α, de racines $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_d$.
Alors

$$\sum_{i=1}^{d} A(\alpha_i) \leq ad$$

ce qui conduit à :

$$M(\alpha) \geq e^{-ad}.|N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|^r.|N_{K/\mathbb{Q}}(1-\alpha)|^{1-2r}.$$

On cherche donc r pour que a soit le plus petit possible.
On a

$$A'(z) = \frac{r}{z} - \frac{1-2r}{1-z}$$

Par conséquent,

$$a = \min_{0<r<\frac{1}{2}} (r\log r + (1-2r)\log(1-2r) - (1-r)\log(1-r))$$

$$a = \min_{0<r<\frac{1}{2}} h(r)$$

Une étude rapide montre que la fonction h définie sur $]0, \frac{1}{2}[$ atteint son minimum en r_0 tel que $\frac{r_0(1-r_0)}{(1-2r_0)^2} = 1$, i.e

$$r_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

On obtient ainsi

$$a = \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

et

$$e^{-a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dans [32] , $\log g(x)$ est égal à x^p pour des résultats sur la moyenne d'un entier algébrique totalement positif.
En choisissant $\log g(x)$ égal à x, C.J.Smyth améliore un résultat de C.L.Siegel [29] sur la minoration de la trace des entiers algébriques totalement positifs.

Théorème 2.2 *(Smyth [33])*
Si α est un entier algébrique totalement positif alors

$$Tr(\alpha) > 1,771933 deg(\alpha)$$

sauf si le polynôme minimal de α est $x-1$, x^2-3x+1, x^3-5x^2+6x-1, $x^4-7x^3+13x^2-7x+1$ ou $x^4-7x^3+14x^2-8x+1$.

Par ailleurs, G.Rhin a considéré une fonction auxiliaire à deux variables sur $D = \{x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1, x \neq y\}$:

$$\log g(x,y) = \log_+(x) + \log_+(y) - c_1 \log|x-y| - c_2 \log(xy) - c_3 \log|(x-1)(y-1)|$$

($\log_+(x) = \log(\max(1,|x|))$ afin de minorer la mesure de Mahler d'un polynôme totalement positif en fonction de son discriminant.

Il obtient :

Théorème 2.3 *(Rhin [24])*
Soit P un polynôme quadratfrei de $\mathbb{Z}[x]$ unitaire , non divisible par x et $x-1$, de degré $d \geq 2$ et dont toutes les racines sont réelles positives.
Alors, quel que soit le réel θ vérifiant $0 \leq \theta \leq \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, on a :

$$M(P) \geq |disc(P)|^{\frac{\theta}{2(d-1)}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 5^{\frac{-\theta}{2}} \right)^{\frac{d}{2}} .$$

D'autres exemples seront évoqués plus loin dans ce chapitre ainsi que dans les deux chapitres suivants.

Remarque.
Dans le cas particulier où $D = \mathbb{R}^{+*}$ et si la fonction auxiliaire f se compose de x, $x-1$, et de polynômes réciproques Q (i.e $Q(z) = z^{deg(Q)} Q\left(\dfrac{1}{z}\right)$), il est possible de réduire le domaine d'étude de f.
En effet, la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(\frac{1}{x})]$ donne une constante supérieure ou égale à celle de f.
Or, g satisfait à $g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ donc il suffit de contrôler g sur $[0,1]$.
Par conséquent, dans ce cas, sans perte de généralité, nous pouvons nous restreindre aux fonctions f vérifiant la condition :

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (*)$$

et les étudier sur l'intervalle $]0,1[$.

3 La mesure de Mahler.

Soit $P = a_0 x^d + ... + a_d = a_0(x-\alpha_1)...(x-\alpha_d)$, $a_0 a_d \neq 0$, un polynôme à coefficients complexes de degré $d \geq 1$.

La *mesure de Mahler* de P se définit par $M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$.
La *mesure de Mahler* d'un nombre algébrique α non nul est égale à la mesure de Mahler de son polynôme minimal P dans $\mathbb{Z}[x]$.
Une autre manière de définir la mesure de Mahler est la suivante :

$$M(P) = \exp\left(\int_0^1 \log|P(e^{2i\pi t})|dt\right).$$

On montre que ces deux définitions sont équivalentes à l'aide de la formule de Jensen.

Théorème 3.1 *(Kronecker)*
Soit α un nombre algébrique non nul.

$M(\alpha) = 1$ *si et seulement si α est une racine de l'unité.*

Le théorème de Kronecker suggère la question :

$$\text{a-t-on} \quad \inf_{\alpha \text{ non racine de } 1} M(\alpha) > 1?$$

C'est le " problème de Lehmer" non résolu à ce jour dont une autre formulation est :
existe-t-il une constante absolue $\epsilon_0 > 0$ telle que si P irréductible à coefficients entiers vérifie $M(P) < 1 + \epsilon_0$ alors P est cyclotomique?
Boyd ([5] et [6]) a déterminé tous les polynômes de mesure de Mahler minimale pour un degré d fixé, $2 \leq d \leq 20$. Cette recherche ne lui a pas apporté de meilleur polynôme que celui trouvé par Lehmer lui-même :

$$P = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1$$

et

$$M(P) = 1,176280...$$

Cas particuliers.
Un *nombre de Pisot* est un entier algébrique réel $\theta > 1$ dont tous les autres conjugués ont un module < 1. On note S l'ensemble des

nombres de Pisot.
Un *nombre de Salem* est un entier algébrique réel $\tau > 1$ dont les autres conjugués ont un module ≤ 1 et l'un au moins des conjugués est de module 1. On note T l'ensemble des nombres de Salem.
On a :

$$\text{si } \alpha \in S \cup T \text{ alors } M(\alpha) = \alpha.$$

Nous commençons par rappeler quelques résultats généraux.
D'abord, un théorème de Smyth de 1971 :

Théorème 3.2 *([34])*
Si α entier algébrique non nul n'est pas racine d'un polynôme réciproque (i.e $\frac{1}{\alpha}$ n'est pas conjugué de α) alors

$$M(\alpha) \geq \theta_0$$

où $\theta_0 \approx 1,324717...$ désigne la racine réelle de $\theta^3 - \theta - 1 = 0$.
θ_0 est le plus petit nombre de Pisot.

Le problème de Lehmer se trouve donc lié à l'existence du plus petit nombre de Salem.

Nous poursuivons par un théorème de Louboutin (1984) qui améliore des travaux antérieurs de Dobrowolski (1979) et Cantor–Stauss (1982)

Théorème 3.3 *(Louboutin [20])*
Soit α un entier algébrique non nul, non racine de l'unité. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $D(\epsilon) > 0$ telle que pour tout $d \geq D(\epsilon)$

$$M(\alpha) > 1 + (\frac{9}{4} - \epsilon).\left(\frac{\log\log d}{\log d}\right)^3$$

Notons que cette minoration fait intervenir le degré de α.

Terminons par un résultat important de Langevin [19], dont la preuve fait appel à la notion de diamètre transfini qui sera détaillée dans le troisième chapitre :

Théorème 3.4 *Soit* $0 \leq \theta < \pi$ *et* S_θ *le secteur du plan complexe tel que* $|arg(z)| < \theta$. *Alors il existe une constante* $c(\theta) > 1$ *telle que pour tous les polynômes P à coefficients entiers, irréductibles, non cyclotomiques, ayant toutes leurs racines dans* S_θ, *on a :*

$$M(P) \geq c(\theta)^{deg(P)}$$

Soulignons que le résultat initial de Langevin porte sur un domaine plus général que S_θ. En effet, il considère un voisinage V d'un point du cercle unité et des polynômes à coefficients entiers ,irréductibles, non cyclotomiques, sans zéro dans V.

Nous rappelons la démonstration du théorème car elle donne une idée de la façon dont on procède dans la pratique pour trouver la constante $c(\theta)$.

Démonstration.

Soient A et B deux points du cercle unité symétriques par rapport à l'axe réel, non situés en -1.
Soit θ l'angle que fait la droite OA avec la demi droite réelle positive.
Considérons le domaine D du disque unité limité par les rayons OA et OB et l'arc $\widehat{AB}$.
Pour z tel que $|z| = 1$, posons $x = 2 - z - \dfrac{1}{z}$. Ceci transforme l'arc $\widehat{AB}$ en un segment $I_\theta = [0, 2 - 2\cos\theta]$ strictement inclus dans l'intervalle [0,4].
Par conséquent, si $t(I)$ désigne le diamètre transfini de l'intervalle I

$$t(I_\theta) < t([0,4]) = 1$$

et d'après le théorème d'Okada (voir chapitre 3 page 52), il existe un polynôme $R_1 \in \mathbb{Z}[x]$, unitaire et de degré n_1 tel que :

$$\max_{x \in I_\theta} |R_1(x)| < 1$$

Posons $R(z) = z^{n_1}.R_1(2 - z - \frac{1}{z})$. R est réciproque et on a $\max\limits_{z \in \widehat{AB}} |R(z)| < 1$.

Il existe clairement un entier naturel n_2 tel que :

$$\max_{z \in \widehat{AB} \cup OA} |z^{n_2}.R(z)| = a < 1$$

Le polynôme $A(z) = z^{n_2}.R(z)$ est unitaire à coefficients entiers et vérifie

$$\max_{z \in D} |A(z)| < a$$

d'après le principe du maximum.
Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[x]$ ayant toutes ses racines α_i dans le secteur S_θ. On suppose de plus que P n'est pas cyclotomique et ne divise pas A (ceci n'élimine qu'un nombre fini de polynômes). Comme P ne divise pas A, la valeur absolue du résultant de P et de A est un entier non nul donc supérieur ou égal à 1. On a donc :

$$1 \leq |\text{résultant}(P, A)| \leq |cd(P)|^{deg(A)}. \prod_{i=1}^{deg(P)} |A(\alpha_i)|$$

où cd(P) désigne le coefficient dominant de P.

- Si $|\alpha_i| \leq 1$ alors $\alpha_i \in D$ et $|A(\alpha_i)| \leq a$.

- Si $|\alpha_i| > 1$ alors $\frac{1}{\alpha_i} \in D$ et

$$\begin{aligned} |A(\alpha_i)| &= |\alpha_i^{n_2}.R(\alpha_i)| \\ &= |\alpha_i^{n_2}\alpha_i^{2n_1}R(\frac{1}{\alpha_i})| \text{ car R est réciproque} \\ &= |\alpha_i^{2n_2}\alpha_i^{2n_1}A(\frac{1}{\alpha_i})| \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$|A(\alpha_i)| \leq a.|\alpha_i^{2(n_1+n_2)}|$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède

$$1 \leq |cd(P)|^{2n_1+n_2}.a^{deg(P)}. \prod_{|\alpha_i|>1} |\alpha_i|^{2(n_1+n_2)}$$

et finalement

$$1 < \left[\left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2(n_1+n_2)}} \right]^{deg(P)} \leq M(P)$$

et donc

$$c(\theta) = \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{1}{2(n_1+n_2)}}$$

Remarques.
a) En fait, dans la pratique, si l'on veut déterminer explicitement la constante $c(\theta)$ pour un secteur S_θ donné, on choisit une fonction auxiliaire du type :

$$A(z) = z^{n_0} R_1(z)^{n_1} ... R_k(z)^{n_k}$$

où

pour j=1,...,k, $P_j \in \mathbb{Z}[z]$, n_j entier et $2n_0 + \sum_{j=1}^{k} n_j deg(R_j) = n$

On pose alors $B(z) = |A(z)|^{\frac{1}{n}}$ et on substitue à la fonction auxiliaire polynômiale $A(z)$ de Langevin la forme linéaire :

$$\log |B(z)| = \alpha_0 \log |z| + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \log |R_j(z)|$$

avec, cette fois,

$$\alpha_j \in \mathbb{R} \text{ et } 2\alpha_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j deg(R_j) = 1$$

On cherche alors les exposants réels $\alpha_0, ..., \alpha_k$ les meilleurs possibles c'est-à-dire tels que $\max_{z \in S_\theta} \log |B(z)| = b$ soit le plus petit possible.

On aura alors d'après Langevin, $M(P) \geq e^{-bdeg(P)}$.

b) C'est en procédant ainsi que G.Rhin et C.J.Smyth [27] sont parvenus à calculer de façon explicite la constante $c(\theta)$ optimale pour neuf intervalles de $[0, \pi[$. Ils ont choisi $D = [0, 1] \times [2 - 2\cos\theta]$ et $\log g(x) = \log_+(x) = \log(\max(1, |x|)$. Ils ont conjecturé que la fonction $c(\theta)$ est une fonction en escalier sur $[0, \pi[$, non croissante et n'ayant dans chaque intervalle fermé de $[0, \pi[$ qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Dans toute la suite de ce chapitre, on considère le cas $\theta = 0$: celui des entiers algébriques totalement positifs.

4 Le spectre de la mesure de Mahler absolue.

C.J.Smyth a étudié l'ensemble $\mathcal{L}$ des quantités $\Omega(\alpha) = M(\alpha)^{\frac{1}{deg(\alpha)}}$, où α est un entier algébrique totalement positif, différent de 0 et de 1. $\Omega(\alpha)$ désigne la *mesure de Mahler absolue* de α.

Remarque.
Techniquement, Smyth [31] a travaillé sur les entiers algébriques totalement positifs mais ses résultats sont aisément transposables aux totalement réels (i.e dont tous les conjugués sont réels) : en effet, si α est totalement réel alors α^2 est totalement positif et $\Omega(\alpha^2) = \Omega(\alpha)^2$. Il obtient donc des résultats sur le spectre de la mesure des totalement réels et des totalement positifs. Une reformulation du théorème de A. Schinzel [28] (1972) dans un cas particulier montre que :

Théorème 4.1 *Pour tout α entier algébrique totalement positif, $\alpha \neq 0, 1$,*

$$\Omega(\alpha) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et il y a égalité si et seulement si α est racine de $x^2 - 3x + 1$.

Ceci signifie que $\mathcal{L}$ admet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme plus petit élément .
Nous avons déjà donné une démonstration du résultat précédent dans le paragraphe **2.2**. Nous en présentons une seconde.

Nous utiliserons

Lemme 4.2 *Pour* $0 < y_i < 1$, $1 \leq i \leq n$,

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - y_i) \leq [1 - (\prod_{i=1}^{n} y_i)^{\frac{1}{n}}]^n$$

Il y a égalité si et seulement si $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$.

On pose $y = e^x$ et l'inégalité vient de la concavité de la fonction $\log(1 - e^{-x})$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ et d le degré de α. α est entier sur $\mathbb{Z}$ donc aussi $1 - \alpha$. Comme $\alpha \neq 1$, la norme de K sur $\mathbb{Q}$ de $1 - \alpha$ est un entier non nul.
Par suite,

$$1 \leq |N_{K/\mathbb{Q}}(1 - \alpha)| = \prod_{\alpha_i > 1} |1 - \alpha_i| . \prod_{\alpha_i < 1} |1 - \alpha_i|$$

$$1 \leq \prod_{\alpha_i > 1} \alpha_i . \prod_{\alpha_i > 1} (1 - \frac{1}{\alpha_i}) . \prod_{\alpha_i < 1} (1 - \alpha_i)$$

donc d'après le lemme 4.2,

$$1 \leq M(\alpha). \left[1 - \left(\prod_{\alpha_i > 1} \frac{1}{\alpha_i} . \prod_{\alpha_i < 1} \alpha_i\right)^{\frac{1}{d}}\right]^d$$

Or,

$$N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \prod_{\alpha_i < 1} \alpha_i . \prod_{\alpha_i > 1} \alpha_i = \left(\prod_{\alpha_i < 1} \alpha_i\right) .M(\alpha)$$

donc

$$1 \leq M(\alpha) \left[1 - \left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)}{M(\alpha)^2}\right)^{\frac{1}{d}}\right]^d$$

$$1 \leq M(\alpha)^{\frac{1}{d}} - \left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)}{M(\alpha)}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Comme $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \geq 1$, on a

$$1 \leq M(\alpha)^{\frac{1}{d}} - \left(\frac{1}{M(\alpha)}\right)^{\frac{1}{d}}$$

et finalement, on obtient

$$M(\alpha)^{\frac{2}{d}} - M(\alpha)^{\frac{1}{d}} - 1 \geq 0$$

ce qui implique

$$M(\alpha)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'après le lemme 4.2, l'égalité se produit quand tous les $\alpha_i < 1$ sont égaux et tous les $\alpha_i > 1$ sont égaux ce qui signifie : α quadratique et $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = 1$. α est donc racine de $x^2 - bx + 1 = 0$. $b = 3$ convient et est le plus petit possible et

$$\Omega\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

•Rappels sur une famille d'entiers algébriques.

C.J.Smyth [30] a introduit une transformation H qui joue un rôle essentiel dans ses travaux sur la mesure de Mahler des entiers algébriques totalement réels :

$$Hx = x - \frac{1}{x}$$

à l'aide de laquelle il construit une suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$ en posant

$$\begin{cases} \beta_0 & = 1 \\ \beta_{n+1} > 0 \text{ et } H\beta_{n+1} = \beta_n \end{cases}$$

β_n est un entier algébrique totalement réel de degré égal à 2^n.

Les β_n^2 forment alors une suite de nombres vérifiant

$$\begin{cases} \beta_0^2 = 1 \\ \beta_n^2 = \beta_{n+1}^2 + \beta_{n+1}^{-2} - 2 \end{cases}$$

β_n^2 est un entier algébrique totalement positif de degré égal à 2^n.

Donnons quelques propriétés des polynômes minimaux des β_n^2.
Considérons la transformation T : à un polynôme P totalement positif de degré d, on associe le polynôme $T(P)$ réciproque, de degré $2d$ et également totalement positif défini par :

$$T(P)(x) = x^d.P(x + \frac{1}{x} - 2).$$

T se déduit bien évidemment de la transformation H.
On appelle n^{ieme} *descendant* d'un polynôme P le polynôme noté $T^n(P)$ défini par

$$T^n(P)(x) = x^{deg(T^{n-1}(P))}.T^{n-1}(P)(x + \frac{1}{x} - 2).$$

Le polynôme minimal P_n de β_n^2 est le n^{ieme} descendant de $P_0(x) = x - 1$. On a donc

a) P_n est réciproque pour $n \geq 1$
b) $deg(P_n) = 2^n$
c) Toutes les racines des P_n sont dans $]0, +\infty[$
d) Pour $n \neq m$, P_n et P_m n'ont pas de racine commune
e)

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{2^n}(x-\beta_{n,i}^2) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(x-\beta_{n,i}^2)(x-\beta_{n,i}^{-2}) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(x^2-(\beta_{n-1,i}^2+2)x+1)$$

C.J.Smyth montre que la suite $\Omega(\beta_n^2)$ d'éléments de $\mathcal{L}$ admet un point d'accumulation $l = 1,727305...$ et que $\mathcal{L}$ est dense dans (l, ∞).

Les quatre plus petits éléments de $\mathcal{L}$ déterminés par Smyth dans $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, l\right)$ sont :

$$\begin{array}{llll} \Omega(\beta_1^2) = & 1,618033... & \Omega(\beta_2^2) = & 1,685389... \\ \Omega(\beta_3^2) = & 1,710197... & \Omega(\alpha_7^2) = & 1,715534... \end{array}$$

où on note $\alpha_n = 2\cos(\dfrac{2\pi}{n})$.

Il avait conjecturé [31] que le point suivant était $\Omega(\alpha_{60}^2)$.

On pourrait espérer que les $\Omega(\alpha_n^2)$ fournissent de petits éléments de $\mathcal{L}$. Cependant $\lim\limits_{n\to+\infty} \Omega(\alpha_n^2) = 1,9081 > l$. De plus, comme l'a souligné Smyth, les $\Omega(\alpha_n^2)$ qu'on rencontre dans $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, l\right)$ sont soit de la forme $\Omega(\beta_m^2)$, soit de la forme $\Omega(\beta'^2)$ où β' est un point fixe d'un itéré de H : par exemple, $H^3\alpha_7 = -\alpha_7$ et $H^4\alpha_{60} = \alpha_{60}$.

Nous établissons :

Théorème 4.3 *[14]*
Tous les polynômes P de degré d, à coefficients entiers, unitaires, totalement positifs vérifient :

$$\Omega(P) \geq 1,720678. \prod_{j=0}^{10} |\textit{résultant}(P, R_j)|^{\frac{c_j}{d}}.$$

En particulier, si P n'est pas divisible par les facteurs irréductibles des R_j, $0 \leq j \leq 10$, on a :

$$\Omega(P) \geq 1,720678.$$

Ici,

$R_0(x) = x - 1$
$R_1(x) = x^2 - 3x + 1$
$R_2(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$
$R_3(x) = x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1$
$R_4(x) = x^{16} - 31x^{15} + 413x^{14} - 3141x^{13} + 15261x^{12} - 50187x^{11} + 115410x^{10}$
$-189036x^9 + 222621x^8 - 189036x^7 + 115410x^6 - 50187x^5 + 15261x^4 - 3141x^3$
$+413x^2 - 31x + 1$
$R_5(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x + 1$
$R_6(x) = x$
$R_7 = (x^3 - 5x^2 + 6x - 1).(x^3 - 6x^2 + 5x - 1)$
$R_8 = x^6 - 12x^5 + 44x^4 - 67x^3 + 44x^2 - 12x + 1$
$R_9 = (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1).(x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1)$
$R_{10} = x^8 - 16x^7 + 90x^6 - 239x^5 + 329x^4 - 239x^3 + 90x^2 - 16x + 1$

et

$$\begin{array}{rlrl} c_0 = & 0,32434053 & c_1 = & 0,04465951 \\ c_2 = & 0,01656320 & c_3 = & 0,00544682 \\ c_4 = & 0,00233752 & c_5 = & 0,00081015 \\ c_6 = & 0,20293388 & c_7 = & 0,00275460 \\ c_8 = & 0,00073091 & c_9 = & 0,00086279 \\ c_{10} = & 0,00030659 & & \end{array}$$

Remarquons que α_7^2 et α_7^{-2} sont racines de R_7 et α_{60}^2 et α_{60}^{-2} sont racines de R_9.

Corollaire 4.4 *Les six premiers éléments de $\mathcal{L}$ sont :*

$$\Omega(\beta_1^2),\ \Omega(\beta_2^2),\ \Omega(\beta_3^2),\ \Omega(\alpha_7^2),\ \Omega(\alpha_{60}^2),\ \Omega(\beta_4^2).$$

Ce sont les seuls points de $\mathcal{L}$ dans l'intervalle $[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 1,720678]$.

Rappelons que $\mathcal{L}$ est dense dans $(l, +\infty)$ où $l = 1,727305....$

La démonstration suit celle de C.J.Smyth pour trouver les quatre premiers éléments de $\mathcal{L}$. On applique la méthode des fonctions auxiliaires présentée dans la première section en prenant le domaine

D égal à $\mathbb{R}^{+*}$ et $\log g(x) = \log_+(x)$. Les progrès réalisés sont dus tout d'abord au choix des polynômes dans la fonction auxiliaire puis à trois améliorations numériques dans la programmation linéaire semi-infinie.

4.1 La fonction auxiliaire.

Les R_j, $j = 0, ..., 5$ appartiennent à deux familles particulières de polynômes. La première se compose des descendants de $P_0 = x - 1$. On notera $P_j = T^j(P_0)$.
$R_j = P_j$ pour $0 \leq j \leq 3$ avaient déjà été utilisés par Smyth. Nous ajoutons $R_4 = P_4$ de degré 16.

Notons $G = H^2$ la transformation définie pour $x > 0$ par :

$$Gx = x + \frac{1}{x} - 2.$$

Le point fixe de G est racine du polynôme $Q_0' = 1 - 2x$ dont le polynôme réciproque est $Q_0 = x - 2$. La seconde famille est constituée des polynômes descendants de Q_0. On notera $Q_j = T^j(Q_0)$. Nous avons besoin de $R_5 = Q_2 = x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x + 1$.
Bien que cette nouvelle famille n'intervienne que par un seul de ses polynômes, celui-ci est indispensable à l'obtention du résultat.

Nous avons vu que α_7 est un point fixe d'un itéré de H et α_7 est racine de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ dont le premier descendant est R_7.
Le polynôme réciproque de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ est $x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ dont le premier descendant est R_8.

De même, α_{60} est un point fixe d'un itéré de H et α_{60} est racine de $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1$ dont le premier descendant est R_9.
Le polynôme réciproque de $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1$ est $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1$ dont le premier descendant est R_{10}.
Tout ce qui précède met en valeur les notions de polynômes descendants ou descendants de réciproques de polynômes dont les zéros sont des carrés de points fixes de H.

Pour $x > 0$ tel que $R_j(x) \neq 0$, $0 \leq j \leq 9$, la fonction auxiliaire $f(x,c)$ s'écrit :

$$f(x,c) = \log_+(x) - \sum_{j=0}^{9} c_j \log|R_j(x)|.$$

Comme elle contient x, $x-1$ et des polynômes réciproques, nous pouvons imposer $f(x) = f(1/x)$ $(*)$ et restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0,1[$.
La condition $(*)$ devient :

$$2c_6 + \sum_{j=0, j\neq 6}^{9} c_j.deg(R_j) = 1$$

4.2 Améliorations numériques.

Nous avons vu que la programmation linéaire semi–infinie est une méthode itérative.
A chaque étape, il faut :

a) déterminer $\min_{x>0} f(x,c)$ pour une famille particulière de coefficients $c = (c_j)$.

b) augmenter l'ensemble des points sur lesquels la fonction est contrôlée.

c) évaluer $\log|P_j(x_i)|$ aux points de contrôle x_i.

Pour **a)**, nous utilisons l'algorithme de calcul AMOEBA qui diminue le risque d'erreurs de calcul car ici le numérateur de la dérivée a un degré élevé : 63.
Pour **b)**, nous choisissons une méthode intermédiaire à celles présentées précédemment et qui consiste à ajouter les points où f est susceptible d'avoir de petites valeurs. Ceci permet d'éviter la saturation et assure une convergence rapide. Par exemple, à la i^e itération , pour une famille particulière de coefficients c, nous décidons d'écarter les points $y > 0$ ne vérifiant pas :

$$f(y,c) < \min_{x>0} f(x,c) + \epsilon.$$

c) Calcul de $f(x_0)$, $x_0 \in D$.
Considérons un polynôme P_j déduit d'un polynôme initial P_0.
Habituellement, on calcule $P_j(x_0)$ par l'algorithme de Horner.
Ici, pour évaluer $\log |P_j(x_0)|$, nous allons profiter de la définition de P_j.

Par récurrence, on montre aisément que :

$$\log |P_j(x_0)| = \sum_{k=1}^{j} \log |x_{j-k}| + \log |x_j - 1|$$

avec

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{x_k} - 2.$$

Ce procédé est facile à utiliser et permet de limiter les erreurs de calcul quand le degré des polynômes et la taille des coefficients deviennent élevés.

Dans la programmation linéaire semi–infinie, après 15 itérations, on aboutit à :

$$1,72067858 \leq e^m \leq 1,720679$$

Cependant, l'exactitude des calculs n'est pas garantie, particulièrement pour les zéros de f' dont le numérateur a un degré 63. Ils ont été vérifiés par le système de calcul formel PARI [22] avec une grande précision et finalement, on trouve la constante 1,720678 annoncée dans le théorème.

Conclusion.
Tous ces résultats paraissent indiquer que les éléments de $\mathcal{L}$ dans l'intervalle $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ l\right)$ ne sont que de deux formes : mesures absolues des β_n^2 ou mesures absolues des carrés des points fixes des itérés de la transformation H. Cependant, le polynôme $x^{10} - 19x^9 + 143x^8 - 557x^7 + 1231x^6 - 1599x^5 + 1231x^4 - 557x^3 + 143x^2 - 19x + 1$ (voir Annexe 7) de mesure de Mahler absolue $1,726076$ ne semble pas être de l'une de ces deux formes.

CHAPITRE 2

Sur la longueur des entiers algébriques totalement positifs.

"13 bis, est-ce un nombre pair ou impair ?"
R. Queneau

Soit $P(x) = a_0x^d + ... + a_d = a_0(x-\alpha_1)...(x-\alpha_d)$, $a_0 \neq 0$, $P \neq x$, un polynôme à coefficients complexes.
Langevin a distingué trois grandes familles de mesures de polynômes qui sont pour $p > 0$:

$$M_p(P) = (\int_0^1 |P(e^{2i\pi t})|^p dt)^{\frac{1}{p}}$$

$$L_p(P) = (\sum_{i=0}^{d} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$R_p(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} (1 + |\alpha_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Certains cas particuliers de ces mesures sont bien connus. En effet,

- $M_0(P) = \lim_{p\to 0} M_p(P) = exp\left(\int_0^1 \log|P(e^{2i\pi t})|dt\right)$ et nous reconnaissons la mesure de Mahler de P.
- D'autre part, $L_1(P) = L(P)$ est la **longueur** usuelle de P c'est-à-dire la somme des valeurs absolues des coefficients de P.

Remarques.
a) Ces différentes mesures sont inchangées si l'on remplace P par son polynôme réciproque P^* défini par :$P^*(x) = x^{deg(P)}P\left(\frac{1}{x}\right)$.
b) On a toujours $L_1(P) \leq R_1(P)$.

Nous nous proposons tout d'abord d'établir des résultats analogues à ceux obtenus sur la mesure de Mahler dans le précédent chapitre en examinant cette fois l'ensemble $\mathcal{R} = \{R_1(\alpha)^{\frac{1}{deg(\alpha)}}$ où α est un entier algébrique différent de 0 et de 1, **totalement positif** $\}$. Notre démarche suit celle de Smyth. $\sqrt{5}$ est le plus petit point de $\mathcal{R}$. Nous montrons qu'il existe un nombre l' tel que $\mathcal{R}$ soit dense dans $(l', +\infty)$. Enfin, nous déterminons les cinq premiers points de $\mathcal{R}$ dans $(\sqrt{5}, l')$.

Nous ferons ensuite la comparaison de la mesure de Mahler et de la longueur d'un polynôme P à coefficients entiers dans trois cas particuliers :

- P est sans racines réelles.
- P est totalement positif (i.e toutes ses racines sont réelles positives).
- P est totalement réel (i.e toutes ses racines sont réelles).

1 Le spectre de la longueur absolue.

Si P est le polynôme minimal d'un entier algébrique totalement positif, alors $R_1(P)$ coïncide avec $L_1(P)$, la longueur habituelle de P.
On convient d'appeler *longueur* de α, où α est un entier algébrique totalement positif, la longueur de son polynôme minimal dans $\mathbb{Z}[x]$.
$R(\alpha) = R_1(\alpha)^{\frac{1}{deg(\alpha)}}$ désignera la *longueur absolue* de α et $\mathcal{R}$ l'ensemble des quantités $R(\alpha)$, α comme ci-dessus.
Une autre formulation du théorème de Kronecker s'énonce ainsi :

Théorème 1.1 *Soit α est un entier algébrique.*

$R(\alpha) = 2$ si et seulement si α est une racine de l'unité.

Démonstration.
Pout tout nombre algébrique α dont le polynôme minimal est $P = a_0x^d + ... + a_d = a_0(x - \alpha_1)...(x - \alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, on a :

$$R_1(\alpha)^2 = |a_0a_d| \prod_{i=1}^{d} \left(2 + |\alpha_i| + \frac{1}{|\alpha_i|}\right) \tag{1}$$

donc pour α entier , $R_1(\alpha) = 2^d$ entraîne que : $2 + |\alpha_i| + \dfrac{1}{|\alpha_i|} = 4$ pour i=1,..,d ; c'est à dire $|\alpha_i| = 1$ pour i=1,..,d.
Du théorème de Kronecker, on déduit que α est une racine de 1.

L'égalité (1) sous la forme $R_1(\alpha)^2 = |a_0 a_d| \prod_{i=1}^{d} \left(4 + (\sqrt{\alpha}_i - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}_i})^2\right)$

et l'inégalité $\left(\prod_{i=1}^{d}(u_i + v_i)\right)^{\frac{1}{d}} \geq (\prod_{i=1}^{d} u_i)^{\frac{1}{d}} + (\prod_{i=1}^{d} v_i)^{\frac{1}{d}}$ $(u_i, v_i \geq 0)$, permettent aisément d'obtenir le résultat suivant qui donne le premier point de $\mathcal{R}$:

Théorème 1.2 *Soit α est un entier algébrique totalement positif, différent de 0 et de 1.*
Alors $R(\alpha) \geq \sqrt{5}$ avec égalité si et seulement si α est racine de $x^2 - 3x + 1$.

Considérons la suite des (β_n^2) définie par C.J.Smyth.
On a :

Lemme 1.3

$$R(\beta_n^2) = \prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda_i)^{\frac{1}{2^i}}$$

avec

$$\lambda_0 = 1 \ \textit{et} \ \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2}$$

Ce lemme découle du résultat plus général suivant :

Lemme 1.4 *Soit λ_0 un réel positif et posons $\beta_n^2 = \gamma_n$. Alors si $(\gamma_{n,i})_{1 \leq i \leq 2^n}$ désignent les conjugués de γ_n, on a :*

$$\prod_{i=1}^{2^n}(1 + \lambda_0 \gamma_{n,i}) = (\prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda_i)^{\frac{1}{2^i}})^{2^n}$$

$$\textit{où} \quad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2} \ \textit{pour} \ i \geq 0.$$

Démonstration.

Procédons par récurrence sur n.

$$A_{n+1} = \prod_{i=1}^{2^{n+1}} (1 + \lambda_0\gamma_{n+1,i}) = \prod_{i=1}^{2^n}(1 + \lambda_0\gamma_{n+1,i})(1 + \lambda_0\gamma_{n+1,i}^{-1})$$

$$A_{n+1} = \prod_{i=1}^{2^n}(1 + \lambda_0(\gamma_{n+1,i} + \gamma_{n+1,i}^{-1}) + \lambda_0^2)$$

$$A_{n+1} = \prod_{i=1}^{2^n}(1 + \lambda_0^2 + \lambda_0(\gamma_{n,i} + 2))$$

$$A_{n+1} = \prod_{i=1}^{2^n}((1 + \lambda_0)^2 + \lambda_0\gamma_{n,i})$$

$$A_{n+1} = (1 + \lambda_0)^{2^{n+1}} \prod_{i=1}^{2^n}(1 + \lambda_0'\gamma_{n,i}) \quad \text{où } \lambda_0' = \frac{\lambda_0}{(1 + \lambda_0)^2}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence sur n avec λ_0'

$$A_{n+1} = (1 + \lambda_0)^{2^{n+1}} (\prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda_i')^{\frac{1}{2^i}})^{2^n} \quad \text{où } \lambda_{i+1}' = \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2}$$

$$A_{n+1} = (1 + \lambda_0)^{2^{n+1}} (\prod_{j=1}^{n+1}(1 + \lambda_{j-1}')^{\frac{1}{2^{j-1}}})^{2^n} \text{ en posant } i = j - 1$$

$$A_{n+1} = [(1 + \lambda_0) \prod_{j=1}^{n+1}(1 + \lambda_j)^{\frac{1}{2^j}}]^{2^{n+1}} \quad \text{car } \lambda_j = \lambda_{j-1}'$$

$$A_{n+1} = [\prod_{j=0}^{n+1}(1 + \lambda_j)^{\frac{1}{2^j}}]^{2^{n+1}}$$

Ceci achève la preuve du lemme.

Par ailleurs, comme $\log(x + 1) \leq x$ quel que soit $x \geq 0$, pour tout n, on a :

$$\log R(\beta_n^2) \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{2^i}.$$

Or, la série $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{2^i}\right)_{n\geq 0}$ converge car pour tout $i \leq 0$, $0 < \lambda_i \leq 1$.

Par conséquent, la suite $(R(\beta_n^2))_{n\geq 0}$ converge et sa limite vaut $l' = 2,376841....$ Comme pour la mesure de Mahler absolue, l' donne une majoration du premier point d'accumulation de $\mathcal{R}$.

1.1 Second point de $\mathcal{R}$: exemple d'une fonction auxiliaire exacte.

Nous allons établir :

Théorème 1.5 *([13])*
Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[x]$, de degré d et totalement positif.
Alors, on a :

$R(P) \geq$
$29^{\frac{1}{4}}|P(0)|^{\frac{c_1}{d}}|P(1)|^{\frac{c_2}{d}}|P\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)P\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)|^{\frac{c_3}{d}}|P(2+\sqrt{3})P(2-\sqrt{3})|^{\frac{c_4}{d}}.$

avec

$$c_4 = [\log(\frac{5\sqrt{5}+11}{2})]^{-1}[\frac{7}{58}\log(\frac{\sqrt{5}+3}{2}) - \frac{1}{4}\log(\frac{11\sqrt{5}+63}{58})] = 0,005436011...$$

$$c_1 = \frac{10}{29} + 2c_4 = 0,355699608...$$

$$c_2 = \frac{5}{29} - 2c_4 = 0,161541772...$$

$$c_3 = \frac{2}{29} - 2c_4 = 0,058093496...$$

En particulier, si $P \neq x, x-1, x^2-3x+1, x^2-4x+1$ alors $R(P) \geq 29^{\frac{1}{4}}$ et il y a égalité si et seulement si

$$P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1.$$

Corollaire 1.6 *Le second point du spectre est $29^{\frac{1}{4}} = R(\beta_2^2)$.*

Démonstration du théorème.

Soit $f(x) = \log(x+1) - c_1 \log(x) - c_2 \log|x-1| - c_3 \log|x^2-3x+1|$ $-c_4 \log|x^2-4x+1|$.
La remarque du paragraphe 2 du premier chapitre permet d'étudier f sur $]0,1[$ seulement.
La condition $(*)$ s'écrit :

$$2\ c_1 + c_2 + 2\ c_3 + 2\ c_4 = 1 \tag{2}$$

Par ailleurs,

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+1) - c_1\log(x) - \frac{c_2}{2}\log(x^2-2x+1)$$
$$-c_3\log|x^2-3x+1| - c_4\log|x^2-4x+1|$$

c'est-à-dire :

$$f(x) = (\frac{1}{2} - c_1 - \frac{c_2}{2} - c_3 - c_4)\log(x) + \frac{1}{2}\log(x + \frac{1}{x} + 2)$$
$$-\frac{c_2}{2}\log|x+\frac{1}{x}-2| - c_3\log|x+\frac{1}{x}-3| - c_4\log|x+\frac{1}{x}-4|$$

Grâce à (2), nous pouvons effectuer le changement de variable qui à $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\}$ associe $y = x + \frac{1}{x} - 2 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
$f(x)$ devient :

$$g(y) = \frac{1}{2}\log(y+4) - \frac{c_2}{2}\log(y) - c_3\log|y-1| - c_4\log|y-2|.$$

Cette transformation présente l'avantage de diminuer le nombre d'inconnues.
On cherche c_i, $i = 2,3,4$, pour que :

$$\begin{cases} g\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{4}\log 29 \\ \\ g \text{ atteigne son minimum en } \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Pour réaliser la seconde condition, on impose que :

$$g'\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Finalement, on obtient les c_i annoncés dans le théorème.
Le troisième point y_0 annulant la dérivée de g vaut :

$$y_0 = \frac{4c_2 + 10c_3 + 12c_4}{1 - c_2 - 2c_3 - 2c_4}$$

Or, $g(y_0) \approx 0,853... > \frac{1}{4}\log(29)$. Ceci finit la preuve.

1.2 Les autres points de R.

Si l'on pouvait continuer ce procédé, il conduirait en principe à la détermination des points successifs du spectre. Or, les polynômes nécessaires ne se limitent pas à ceux correspondant aux plus petits points du spectre, comme on peut le constater dans le cas précédent où intervient $x^2 - 4x + 1$. Et nous n'avons pas trouvé le choix des polynômes permettant d'obtenir les points suivants.
Par conséquent, nous avons employé des méthodes numériques pour établir :

Théorème 1.7 *[13]*
Tous les polynômes P à coefficients entiers , unitaires, totalement positifs et non divisibles par x et par les facteurs irréductibles des R_i, $0 \leq i \leq 6$ vérifient :

$$R(P) \geq 2,36110146 \prod_{i=0}^{6} |\ \text{rés}(P, R_i)|^{\frac{c_i}{d}}$$

avec

$$\begin{array}{ll} c_0 = 0,31784909 & c_1 = 0,11621266 \\ c_2 = 0,03824028 & c_3 = 0,01501114 \\ c_4 = 0,00575228 & c_5 = 0,00624420 \\ c_6 = 0,00321129 & \end{array}$$

et

$R_0(x) = x$
$R_1(x) = x - 1$
$R_2(x) = x^2 - 3x + 1$
$R_3(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$
$R_4(x) = x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1$
$R_5(x) = (x^3 - 5x^2 + 6x - 1)(x^3 - 6x^2 + 5x - 1)$
$R_6(x) = (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1)(x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1)$

En particulier,

$$R(P) > 2,36110146.$$

Corollaire 1.8 *Les points de $\mathcal{R}$ dans*]2 , 2,36110146] sont :

$$\begin{array}{ccccccc}
R(\beta_1^2) & = & 5^{\frac{1}{2}} & = & 2,236067... & & \\
R(\beta_2^2) & = & 29^{\frac{1}{4}} & = & 2,320595... & & \\
R(\alpha_7^2) & = & R(\alpha_7^{-2}) & = & 2,351334... & = & 13^{\frac{1}{3}} \\
R(\beta_3^2) & = & 941^{\frac{1}{8}} & = & 2,353416... & & \\
R(\alpha_{60}^2) & = & R(\alpha_{60}^{-2}) & = & 2,359611... & = & 31^{\frac{1}{4}}
\end{array}$$

Démonstration du théorème.

La fonction auxiliaire qui intervient ici est de la forme : pour $x > 0$

$$f(x,c) = \log(1+x) - \sum_{i=0}^{7} c_j \log |R_j(x)|$$

avec les c_j réels positifs, $R_7(x) = x^2 - 4x + 1$ et $c_7 = 0,00119514$.

Compte tenu de la remarque à la fin du second paragraphe, on contrôle f sur $]0,1[$.
La condition $(*)$ s'écrit :

$$2\ c_0 + \sum_{i=1}^{7} c_j deg(R_j) = 1$$

Pour assurer une meilleure convergence de la programmation linéaire semi-infinie, il convient de réduire le nombre de polynômes dans $f(x,c)$. En utilisant la transformation $y = x + \frac{1}{x} - 2$, $f(x,c)$ devient :

$$h(y,c) = \frac{1}{2}\log(4+y) - \frac{1}{2}c_1 \log y - c_2 \log|y-1| - c_3 \log|y^2-3y+1|$$
$$-c_4 \log|y^4-7y^3+13y^2-7y+1| - c_5 \log|y^3-5y^2+6y-1|$$
$$-c_6 \log|y^4-7y^3+14y^2-8y+1| - c_7 \log|y-2|$$

Pour démontrer le théorème 1.7, on raisonne maintenant sur la fonction auxiliaire h.
On applique le principe des fonctions auxiliaires en prenant $D = \mathbb{R}^{+*}$ et $\log g(x) = \frac{1}{2}\log(4+x)$.
Après 12 itérations, on aboutit aux c_i annoncés
et

$$e^m = 2.3611014748792572$$

Cependant, la méthode utilisée ne garantit pas l'exactitude des calculs, particulièrement pour les racines de la dérivée de h dont le numérateur est un polynôme de degré 16.
A l'aide de Maple (commande "realroot"), on parvient à exhiber 16 intervalles à bornes rationnelles I_i, $i = 1,..,16$, de longueur $\leq 10^{-12}$, contenant chacun exactement une racine de h'.
On a alors :

$$\min_{y>0} h(y,a) = \min_{i=1,..,16} \min_{y\in I_i} h(y,a)$$

On obtient finalement :

$$\min_{y>0} h(y,a) \geq 2,36110146$$

grâce au lemme suivant :

Lemme 1.9 *(C.J.Smyth [31])*
Soit h une fonction deux fois différentiable sur un intervalle I telle que $h'' > 0$ sur I.
Soit $\theta \in I$ et supposons que l'intervalle $h(\theta) - \frac{1}{2}(h'(\theta))^2/h''(I)$ appartienne à $[a, b]$.
Alors

$$\min_{y \in I} h(y) \geq a$$

On notera que $R(x^2 - 4x + 1) = \sqrt{6} > 2,36110146$; ce qui explique qu'il n'est pas nécessaire d'écarter ce polynôme.

Cela termine la démonstration du théorème 1.7.

Nous nous occupons maintenant de la densité.

Théorème 1.10 *$\mathcal{R}$ est dense dans $[l', +\infty[$ où $l' = \lim_{n \to +\infty} R(\beta_n^2)$.*

Démonstration.

Reprenons une définition et une notation de Smyth.
Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et α un entier algébrique de degré d, totalement réel, de conjugués $\alpha = \alpha_1, .., \alpha_d$, alors on pose

$$M_g(\alpha) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} g(|\alpha_i|).$$

Si $\lim_{n \to +\infty} M_g(\beta_n)$ (respectivement $\lim_{n \to +\infty} M_g(2\cos(\frac{2\pi}{n}))$) existe, elle sera notée $a(g)$ (respectivement $c(g)$).
Posons $\mathcal{M}(g) = \{M_g(\alpha)$; α entier algébrique totalement réel $\}$.
Ici, un choix convenable pour g est :
$g : x \mapsto \log(1 + x^2)$ car alors $M_g(\alpha) = \log R(\alpha^2)$.
La preuve s'effectue en deux parties.
La première étape consiste à démontrer que $\mathcal{M}(g)$ est dense dans $(a(g), +\infty)$ et se base sur le théorème suivant :

Théorème 1.11 *(C.J.Smyth [32] théorème 3)*
Soit $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction croissante, nulle sur* $[0,1]$ *telle que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x+1)}{g(x)} = 1$$

et
les valeurs de $\log_2 g(2k+1)$ *mod 1* ($k \in \mathbb{N}$) *sont partout denses dans* $[0,1]$.

Alors la limite $a(g)$ *existe et* $\mathcal{M}(g) = \{M_g(\alpha)$; α *entier algébrique totalement réel* $\}$ *est dense dans* $(a(g), \infty)$.

On remplace g par g^* qui vérifiera les conditions du théorème 1.11

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) + g(\frac{1}{x}) \text{ si } x > 1 \\ \\ 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Comme $\beta_{n,i}^{-1}$ ou $-\beta_{n,i}^{-1}$ est un conjugué de $\beta_{n,i}$, on a :

$$\begin{aligned} M_g(\beta_n) &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} g(\beta_{n,i}^2) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^{n-1}} [g(\beta_{n,i}^2) + g(\frac{1}{\beta_{n,i}^2})] \\ &= M_{g^*}(\beta_n). \end{aligned}$$

Donc l'existence de $a(g^*)$ entraîne celle de $a(g)$ et $a(g^*) = a(g)$.

Pour pouvoir appliquer le théorème 1.11 à la fonction g^*, il suffit d'étudier la densité de l'ensemble $\mathcal{F} = \{\log_2 g^*(2k+1) \; mod \; 1 \; ; \; k \in \mathbb{N}^*\}$.
En effet, la première hypothèse est immédiatement vérifiée.
Soit $t \in [0,1]$ et $\epsilon > 0$; existe-t-il $f \in \mathcal{F}$ tel que $|f - t| < \epsilon$?

Cela revient à chercher n et k vérifiant

$$|\log_2 g^*(2k+1) - t - n| < \epsilon$$

i.e,

$$|\log_2 g^*(2k+1) - t' - n\ \log 2| < \epsilon' \tag{3}$$

L'uniforme continuité de la fonction logarithme sur $[1; +\infty[$ entraîne:
$\forall \epsilon' > 0\ \exists \eta(\epsilon') > 0$ tel que $\forall x, y > 0 |x-y| < \eta(\epsilon') \implies |\log x - \log y| < \epsilon'$
On prend n tel que $2^{-n} < \eta(\epsilon')$ et il suffit de trouver k tel que :

$$|g^*(2k+1) - 2^n e^{t'}| < \eta(\epsilon')$$

or la dérivée de g^* est majorée par $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2+\sqrt{5}}} < 1$ et d'autre part, il est possible de choisir k tel que

$$|(2k+1) - (g^*)^{-1}(2^n\, e^{t'})| \leq 1$$

par conséquent, le théorème des accroissements finis pour g^* sur $]1, +\infty[$ donne

$$|g^*(2k+1) - 2^n e^{t'}| \leq 1$$

d'où :

$$\left|\frac{g^*(2k+1)}{2^n} - e^{t'}\right| \leq 2^{-n} < \eta(\epsilon')$$

et donc (3).
Par application du théorème 3 à g^*, on obtient l'existence de $a(g^*)$ et la densité de $\mathcal{M}(g)$ sur $(a(g^*), \infty) = (a(g), \infty)$.

La densité de $\mathcal{M}(g)$ sur $(c(g), \infty)$ se déduit de :

Théorème 1.12 *(C.J.Smyth [32] théorème 4)*
Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ et qui satisfait la condition de Lipschitz

$$|g(x) - g(y)| < B(\lambda)|x-y|$$

pour $x, y \in [0, \lambda]$, pour tout $\lambda > 0$.
Alors $\mathcal{M}(g)$ est dense dans $(c(g), \infty)$, où

$$c(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(2\cos\theta)d\theta$$

En effet pour $g(x) = \log(1+x^2)$ et $\lambda > 0$, $B(\lambda) = 2\lambda$ convient.

En conclusion, $\mathcal{M}(g)$ est dense dans $(log(l'), +\infty)$ où $log(l') = min(a(g), c(g))$. Ceci signifie que $\mathcal{R}$ est dense dans $(l', +\infty)$. Ceci achève la preuve du théorème 1.10.

2 Comparaison de deux mesures de polynômes.

2.1 Cas d'un polynôme à coefficients réels n'ayant aucune racine dans $\mathbb{R}$.

Nous montrons :

Théorème 2.1 *[16]*
Tout polynôme $P = a_0x^d + ... + a_d$, $a_0a_d \neq 0$, à coefficients réels de degré $d \geq 4$, sans racine réelle vérifie :

$$L(P) \leq 2^{d-2}M(P).\frac{\left(1+\sqrt{\frac{|a_0|}{M(P)}}\right)^2}{2}.\frac{\left(1+\sqrt{\frac{|a_d|}{M(P)}}\right)^2}{2}$$

Dans le cas où P n'a pas de racines sur le cercle unité, ce résultat améliore l'inégalité suivante :

Proposition 2.2 *(Boyd [5])*
Pour $P \in \mathbb{C}[x]$,

$$L(P) \leq 2^{d-2}M(P)\left(1+\frac{|a_0|}{M(P)}\right)\left(1+\frac{|a_d|}{M(P)}\right)$$

En effet, il suffit de voir que, pour $x > 0$, $(1+\sqrt{x})^2 \leq 2(1+x)$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Démonstration.

Soit $P = a_0x^d + ... + a_d = a_0(x-\alpha_1)...(x-\alpha_d) \in \mathbb{Z}[x]$, $a_0a_d \neq 0$, de degré $d \geq 4$, n'ayant aucune racine réelle.

Soit $2d_1$ (respectivement $2d_2$ et $2d_3$) le nombre de racines de P de module 1 (respectivement de module > 1 et de module < 1). On a

$2(d_1 + d_2 + d_3) = d$.
On numérote les racines de sorte que $\alpha_{d_i+j} = \overline{\alpha_j}$, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq 3$.
On a :
$L(P) \leq |a_0| \prod_{i=1}^{d_1}(1+|\alpha_i|)^2 . \prod_{i=1}^{d_2}(1+|\alpha_i|)^2 . \prod_{i=1}^{d_3}(1+|\alpha_i|)^2$.

Nous utilisons ici un lemme intermédiaire qui s'obtient facilement par récurrence.

Lemme 2.3 *Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres réels tous supérieurs ou égaux à 1 ou tous inférieurs ou égaux à 1.*
Alors

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} x_i)$$

Par conséquent, $L(P) \leq 2^{2d_1+2d_2-2+2d_3-2}|a_0| \left[(1+\prod_{i=1}^{d_2}|\alpha_i|)(1+\prod_{i=1}^{d_3}|\alpha_i|)\right]^2$

c'est à dire $L(P) \leq 2^{d-4}|a_0| \left(1+\sqrt{\frac{M(P)}{|a_0|}}\right)^2 . \left(1+\sqrt{\frac{|a_d|}{M(P)}}\right)^2$

car $|a_d| = M(P).\prod_{i=1}^{d_3}|\alpha_i|^2$.

2.2 Cas d'un polynôme à coefficients entiers, totalement positif.

Nous obtenons :

Théorème 2.4 *[16]*
Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire , totalement positif et non divisible par x et $x-1$ et soit $P_0(x) = x^2 - 3x + 1$ de degré $d_0 = 2$.
Alors

$$(M(P_0))^{\frac{d}{d_0}} . \left(\frac{L(P)}{L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{\frac{5-\sqrt{5}}{4}} \leq M(P) \leq (M(P_0))^{\frac{d}{d_0}} . \left(\frac{L(P)}{L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{\sqrt{5}}$$

et il y a égalité si et seulement si P est une puissance de P_0.

L'exemple suivant illustre l'amélioration apportée à l'inégalité bien connue

$$\frac{1}{2^d}L(P) \leq M(P) \leq L(P) \quad (1).$$

Soit $P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$. Par (1), on obtient $1,81 \leq M(P) = 8,068... \leq 29$ alors que par le théorème 2.4, on a $7,59 \leq M(P) \leq 9,56$.

Démonstration.

Elle découle de deux propositions plus générales présentées maintenant.

Proposition 2.5 *Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$.*
Alors pour tout c_0, $0 \leq c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$, on a :

$$M(P) \geq \left(\frac{L(P)}{L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{c_0} .(M(P_0))^{\frac{d}{d_0}}.|P(0)|^{c_1}.|P(1)|^{c_2}$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ ne dépendent que de c_0.

Proposition 2.6 *Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$.*
Alors pour tout c_0', $0 \leq c_0' \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a :

$$L(P) \geq \left(\frac{M(P)}{M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{c_0'} .L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}.|P(0)|^{c_1'}.|P(1)|^{c_2'}$$

où $c_1' \geq 0$ et $c_2' \geq 0$ ne dépendent que de c_0'.

Remarques.
a) Si P n'est pas divisible par x et $x-1$ alors $|P(0)|$ et $|P(1)|$ sont des entiers non nuls
donc

$$M(P) \geq \left(\frac{L(P)}{L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{c_0} .M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}$$

et

$$L(P) \geq \left(\frac{M(P)}{M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}} \right)^{c_0'} .L(P_0)^{\frac{d}{d_0}}.$$

b) Pour $c_0 = 0$, on retrouve un résultat de Höhn et Skoruppa [17] qui redémontrent le résultat de Schinzel mentionné dans le paragraphe 2 du précédent chapitre.
c) Pour $c_0' = 0$, ceci montre que la longueur d'un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$, unitaire et totalement positif est toujours supérieure ou égale à $5^{\frac{d}{2}}$ (résultat déjà démontré dans la troisième partie).

Démonstration de la proposition 2.5.

•Principe de la preuve.
Soient c_i, $0 \leq i \leq 2$ des réels positifs.
Soit $f(x) = \log_+(x) - (c_0 \log(x+1) + c_1 \log(x) + c_2 \log|x-1|)$ la fonction définie pour $x > 0 et\ x \neq 1$. Soit $m = \min_{x>0} f(x)$.
Tout polynôme P satisfaisant les conditions du théorème et de racines $(\alpha_i)_{(1 \leq i \leq d)}$ vérifie donc :

$$\log_+(\alpha_i) \geq c_0 \log(\alpha_i + 1) + c_1 \log(\alpha_i) + c_2 \log|\alpha_i - 1| + m \quad 1 \leq i \leq d$$

et en sommant sur i, il vient

$$\log_+(\prod_{i=1}^{d} \alpha_i) \geq c_0 \log(\prod_{i=1}^{d}(\alpha_i+1)) + c_1 \log(\prod_{i=1}^{d}(\alpha_i)) + c_2 \log(\prod_{i=1}^{d}|\alpha_i-1|) + dm$$

ce qui donne

$$M(P) \geq L(P)^{c_0}.|P(0)|^{c_1}.|P(1)|^{c_2}.e^{md}$$

•Détermination explicite de m, c_0, c_1, c_2.
Pour cela, nous imposons deux conditions à la fonction f :
1) $f(x) = f(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$
2) f atteint son minimum en $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

La première condition permet de restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0,1[$ et fournit une relation entre les c_i : $c_0 + 2c_1 + c_2 = 1 \quad (4)$.
Sur $]0,1[$, f s'écrit : $f(x) = -(c_0 \log(x+1) + c_1 \log(x) + c_2 \log|x-1|)$.
Le numérateur de la dérivée de f, noté $numf'$, vaut en utilisant (4) :

$$numf'(x) = -(1-c_1)x^2 - (1-2c_0-2c_1)x + c_1$$

La seconde condition impose $f'\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$.

Il en résulte $c_1 = \frac{1}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 2c_0\right)$.

Puis, en reportant cette valeur de c_1 dans (4), on obtient
$c_2 = \frac{\sqrt{5}-c_0}{5}$. $c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ entraîne $c_1 \geq 0$ et $c_2 > 0$.

Vérifions que $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ est bien un minimum pour f.

$$numf' = -\frac{1}{5}.\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).\left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} + 2c_0\right)x + \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 2c_0\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Or, $\frac{5+\sqrt{5}}{2} + 2c_0 > 0$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{2} - 2c_0\frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq 0$ car $c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.
Par conséquent, f' admet une unique racine comprise entre 0 et 1 et f y atteint son minimum.

Il reste à calculer m

$$m = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_0 \log\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Ceci termine la démonstration de 2.5.

Démonstration de la proposition 2.6.

Elle est analogue à celle du lemme précédent.
On utilise cette fois la fonction
$g(x) = \log(x+1) - (c_0' \log_+(x) + c_1' \log(x) + c_2' \log|x-1|)$.
Les deux conditions imposées restent identiques.

On en déduit : $c'_1 = \dfrac{2}{5} - \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}c'_0$, $c'_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}c'_0}{5}$.
$c'_0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ implique $c'_1 > 0$ et $c'_2 \geq 0$.

On vérifie que g atteint bien son minimum en $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ et

$$g\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) = \log(\sqrt{5}) + c'_0 \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Ceci prouve l'inégalité du second lemme.

Fin de la démonstration.

On à établi que si $P \in \mathbb{Z}[x]$ est de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$,
alors pour tous c_0 et c'_0, $0 \leq c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$, $0 \leq c'_0 \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{c_0}}_{(a)} \leq M(P) \leq \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{1}{c'_0}}}_{(b)}.$$

Comme $\dfrac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}} \geq 1$ d'après la remarque c), l'expression (a) est la plus grande possible pour $c_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ et l'expression (b) est la plus petite possible pour $c'_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Finalement, on aboutit à l'inégalité du théorème 2.4.

2.3 Cas d'un polynôme totalement réel.

Nous montrons :

Théorème 2.7 *[16]*
Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel et non divisible par x, $x-1$ et $x+1$. Soit $P_0 = x^2 - x - 1$ de degré $d_0 = 2$. Alors

$$M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}.\left(\frac{R_1(P)}{R_1(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \leq M(P) \leq M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}.\left(\frac{R_1(P)}{R_1(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{\sqrt{5}+2}$$

et il y a égalité si et seulement si P est une puissance de P_0.

Par exemple, soit $P = x^4 - 4x^2 + 2$. Par (1), on obtient $0,43 \leq M(P) = 3,41... \leq 7$ alors que par le théorème 2.7, on a $1,16 \leq M(P) \leq 4,03$.

Démonstration.

Le principe en est le même que pour le théorème 2.4. Aussi nous n'en donnerons que les différentes étapes.
L'inégalité souhaitée est issue de deux inégalités plus générales énoncées dans les propositions suivantes :

Proposition 2.8 *Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel et non divisible par x, $x-1$ et $x+1$.*
Alors pour tout c_0, $0 \leq c_0 \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a :

$$M(P) \geq \left(\frac{R_1(P)}{R_1(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{c_0} .M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}.|P(0)|^{c_1}.|P(1).P(-1)|^{c_2}$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ ne dépendent que de c_0.

Proposition 2.9 *Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel et non divisible par x, $x-1$ et $x+1$.*
Alors pour tout c'_0, $0 \leq c'_0 \leq \sqrt{5}-2$, on a :

$$R_1(P) \geq \left(\frac{M(P)}{M(P_0)^{\frac{d}{d_0}}}\right)^{c'_0} . R_1(P_0)^{\frac{d}{d_0}} . |P(0)|^{c'_1} . |P(1).P(-1)|^{c'_2}$$

où $c'_1 \geq 0$ et $c'_2 \geq 0$ ne dépendent que de c'_0.

Les fonctions f et g qui interviennent dans les preuves de ces lemmes sont
$f(x) = \log_+ |x| - (c_0 \log(1+|x|) + c_1 \log |x| + c_2 \log |x^2-1|)$
$g(x) = \log(1+|x|) - (c'_0 \log_+ |x| + c'_1 \log |x| + c'_2 \log |x^2-1|)$
Afin de déterminer c_i et c'_i pour $i = 1, 2$, nous imposons les conditions suivantes :
1) $f(x) = f(\frac{1}{x})$ et $g(x) = g(\frac{1}{x})$
2) f et g atteignent leur minimum en $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

En remarquant d'une part que $f(x) = f(-x)$ et $g(x) = g(-x)$, on peut restreindre l'étude des fonctions à $x > 0$.
D'autre part, la première condition réduit le domaine à l'intervalle $]0,1[$ et relie les constantes entre elles par $c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 1$ et $c'_0 + 2c'_1 + 2c'_2 = 1$.
La seconde condition entraîne que les dérivées des deux fonctions s'annulent en $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ce qui conduit à :
$c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{\sqrt{5}c_0}{5}$, $c_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} - c_0\frac{5-2\sqrt{5}}{10}$,
$c'_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} - c'_0\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ et $c'_2 = \frac{5-2\sqrt{5}}{10} - c'_0\frac{\sqrt{5}}{10}$.
$c_0 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ implique $c_1 \geq 0$ et $c_2 > 0$.
$c'_0 \leq \sqrt{5}-2$ entraîne $c'_1 \geq 0$ et $c'_2 > 0$.
On vérifie aisément que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est le seul point de $]0,1[$ où les dérivées sont nulles.
Enfin, pour aboutir aux inégalités souhaitées, il reste à évaluer

f et g en $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$:

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{1-3c_0}{2}\right)$$

et

$$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\left(\frac{3-c_0}{2}\right)$$

Il suffit pour arriver à l'inégalité annoncée dans le théorème 2.7 de combiner comme précécemment les résultats de ces deux propositions.

CHAPITRE 3

Diamètre transfini entier d'un intervalle à extrémités rationnelles.

Le parfait mathématicien
est toujours un peu poète.
Weierstraß

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter les définitions et les propriétés du **diamètre transfini** et du **diamètre transfini entier** d'une partie compacte du plan complexe. Nous verrons qu'en général la valeur exacte du diamètre transfini entier n'est pas connue. Nous nous proposons de donner des encadrements qui améliorent les résultats connus.
Le diamètre transfini entier de $[0,1]$ a été beaucoup étudié, car on pensait pouvoir en tirer une preuve directe du théorème des Nombres Premiers [12]. Pour estimer ce diamètre, on se sert de la propriété suivante : $t_{\mathbb{Z}}[0,1] = t_{\mathbb{Z}}[0,\frac{1}{4}]^{\frac{1}{2}}$.
Concernant la minoration (traitée dans le second paragraphe), par des méthodes reposant soit sur une transformation des polynômes cyclotomiques, soit sur une transformation rationnelle de l'intervalle $[0,\frac{1}{4}]$, Aparicio [4] démontre successivement que :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \geq 0,414213$$

et

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \geq 0,420763$$

Amoroso [1] combine l'inégalité de Liouville et la théorie des polynômes orthogonaux pour minorer le diamètre transfini entier d'un intervalle réel. En particulier, il obtient : $t_{\mathbb{Z}}[0,1] \geq 0,415678$.
Nous nous proposons de minorer le diamètre transfini entier d'intervalles $I = [\frac{p}{q},\frac{r}{s}]$. Ces résultats améliorent ceux d'Amoroso pour tous les intervalles satisfaisant $|ps - qr| = 1$. Pour $[0,1]$, nous retrouvons la valeur d'Aparicio.

Le paragraphe suivant est consacré à la majoration. Aparicio considérant sur $[0, \frac{1}{4}]$ le polynôme
$Q(x) = x^{11}(1-4x)^2(1-5x)^2(29x^2-11x+1)$ aboutit à :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \leq 0,429053$$

Amoroso [1], pour majorer le diamètre transfini d'un intervalle réel, utilise le théorème de Minkovski et il en déduit , par exemple : $t_{\mathbb{Z}}[0,1] \leq 0,424774$. Cependant, sa méthode n'est pas effective et elle ne fournit pas de polynôme explicite analogue à celui d'Aparicio. Nous examinons des intervalles $I = [\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ avec $|ps - qr| = 1$. Nous montrons que la majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ est liée à la minoration de certaines mesures de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ à racines réelles positives, minoration obtenue à l'aide des résultats du premier chapitre. Signalons que P.Borwein a été le premier à constater le lien entre diamètre transfini entier et entiers algébriques de petite longueur.
En particulier pour l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$, nous montrons qu'une transformation naturelle des polynômes du théorème (1.5) de [13] fournit une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[x]$ qui constituent les facteurs d'un polynôme de petite norme sur $[0, \frac{1}{4}]$. Ce polynôme donne donc une majoration de $t_{\mathbb{Z}}[0, \frac{1}{4}]$. (les premiers termes de la suite sont x, $4x-1$, $5x-1$ et $29x^2-11x+1$).
Les valeurs obtenues apportent de petites améliorations par rapport à celles proposées par Amoroso sauf pour les intervalles $[0, \frac{1}{k}]$ avec $k \geq 10$. Mais nous obtenons par notre méthode un polynôme *explicite* qui donne une majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$.
Le dernier paragraphe donne un tableau de résultats numériques. Nous y faisons figurer également les résultats d'Amoroso.

1 Définitions et propriétés.

Soit X une partie compacte du plan complexe et P un polynôme de $\mathbb{C}[x]$. On note $||P||_X = \max_{x \in X} |P(x)|$ et $deg(P)$ le degré de P.

Définition 1.1 *Le diamètre transfini de X est défini par :*

$$t(X) = \inf_{\substack{P\in\mathbb{C}[x] \\ deg(P)>0 \\ P \text{ unitaire}}} (||P||_X^{\frac{1}{deg(P)}})$$

Définition 1.2 *Le diamètre transfini entier de X est défini par :*

$$t_{\mathbb{Z}}(X) = \inf_{\substack{P\in\mathbb{Z}[x] \\ deg(P)>0}} (||P||_X^{\frac{1}{deg(P)}})$$

Clairement, on a :
a) Si X est fini alors $t(X) = 0$.
b) $t(X) \leq t_{\mathbb{Z}}(X)$.
c) Si X et Y sont des compacts de $\mathbb{C}$ tels que $X \subset Y$ alors $t_{\mathbb{Z}}(X) \leq t_{\mathbb{Z}}(Y)$.

1.1 Diamètre transfini et conséquences sur le diamètre transfini entier.

Nous donnons des propriétés du diamètre transfini d'où découlent des résultats intéressants sur le diamètre transfini entier.

Proposition 1.3 *Diamètre transfini d'une image réciproque [25].*
Soit X un compact de $\mathbb{C}$ et Q_1, Q_2 deux polynômes de $\mathbb{C}[x]$, Q_1 unitaire, $deg(Q_2) < deg(Q_1)$.
On note $R^{-1}(X) = \{x \in \mathbb{C} : R(x) = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} \in X\}$.
Alors

$$\inf_{x\in R^{-1}(X)} |Q_2(x)|.t(X) \leq t(R^{-1}(X))^{deg(Q_1)} \leq \sup_{x\in R^{-1}(X)} |Q_2(x)|.t(X).$$

Corollaire 1.4
1) $t([-2,2]) = 1$
2) Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ alors $t([a,b]) = \dfrac{b-a}{4}$.

Démonstration.

1) Posons $X = [-2,2]$.
Soient C le cercle de centre 0 et de rayon 1, $Q_1(x) = x^2 + 1$ et $Q_2(x) = x$. Les hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites et $R^{-1}([-2,2]) = C$.
Il s'ensuit l'inégalité

$$t([-2,2]) \leq t(C)^2 \leq t([-2,2])$$

qui entraîne que

$$t([-2,2]) = 1$$

car il est bien connu que $t(C) = 1$.

2) Posons $X = [a,b]$.
Soient $Q_1(x) = x^2 + \frac{4b}{a-b}$ et $Q_2(x) = \frac{4}{a-b}$. Les hypothèses de la proposition sont vérifiées et $R^{-1}([a,b]) = [-2,2]$.
Par conséquent,

$$\frac{4}{b-a}t([a,b]) \leq t([-2,2])^2 \leq \frac{4}{b-a}t([a,b])$$

et d'après 1),

$$t([a,b]) = \frac{b-a}{4}.$$

On peut déduire des travaux d'Okada et de Fekete et Szegö [11] les quatre lemmes suivants :

Lemme 1.5 *[25]*
Soit X un compact du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel tel que $t(X) < t$. Il existe une constante $k > 0$ et pour tout $n > 0$, un polynôme unitaire P_n de degré n, à coefficients réels tels que

$$||P_n||_X < kt^n$$

Lemme 1.6 *(Kakeya)*
Soit (P_n) une suite de polynômes unitaires à coefficients réels tels que $deg(P_n) = n$. Alors pour tout couple d'entiers (k,n), $0 \leq k \leq n$, il existe une combinaison linéaire

$$P_n + a_{1,n}P_{n-1} + \ldots + a_{k,n}P_{n-k}$$

telle que le polynôme obtenu soit à coefficients entiers.
De plus, on peut imposer aux $(a_{i,j})$ de vérifier l'une des conditions : $0 \leq a_{i,j} < 1$ ou $-\frac{1}{2} \leq a_{i,j} \leq \frac{1}{2}$.

Lemme 1.7 *Soit X un compact du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel tel que $t(X) \geq 1$.*
Alors

$$t(X) = t_{\mathbb{Z}}(X).$$

Lemme 1.8 *(Fekete-Szego [11])*
Soit X un compact du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel tel que $t(X) < 1$.
Alors il existe un polynôme U unitaire à coefficients entiers tel que

$$||U||_X < 1$$

Corollaire 1.9 *Soit X un compact du plan complexe symétrique par rapport à l'axe réel .*

$$\textit{Si } t(X) < 1 \textit{ alors } t_{\mathbb{Z}}(X) < 1.$$

Conséquences pour un intervalle réel I de longueur L
1) Si $L \geq 4$ alors $t_{\mathbb{Z}}(I) = t(I) = \dfrac{L}{4}$.
2) Par contre, quand $L < 4$, la valeur du diamètre transfini entier n'est pas connue. On peut seulement dire que $t_{\mathbb{Z}}(I) < 1$. Il est donc utile d'encadrer cette valeur ; c'est l'objet des paragraphes suivants dans le cas d'un intervalle à extrémités rationnelles.

1.2 Propriétés du diamètre transfini entier.

Proposition 1.10 *Diamètre transfini entier d'une image réciproque. Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers. Pour tout compact X du plan complexe, on a :*

$$\left(\frac{t_{\mathbb{Z}}(X)}{|cd(P)|}\right)^{\frac{1}{deg(P)}} \leq t_{\mathbb{Z}}(P^{-1}(X)) \leq t_{\mathbb{Z}}(X)^{\frac{1}{deg(P)}}$$

où $cd(P)$ désigne le coefficient dominant de P.

La démonstration est analogue à celle de la proposition **1.3**

Corollaire 1.11

1) $t_{\mathbb{Z}}([a,b]) = t_{\mathbb{Z}}([a+n,b+n]) \quad a,b \in \mathbb{R}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$

2) $(t_{\mathbb{Z}}([a,b]))^2 = t_{\mathbb{Z}}([ab,(\frac{a+b}{2})^2]) \quad a,b \in \mathbb{R}\ ;\ a+b \in \mathbb{Z}.$

Démonstration

Il suffit de choisir $P(x) = x+n$ pour le 1) et $P(x) = x(a+b-x)$ pour le 2).

Conséquences

1)

$$t_{\mathbb{Z}}([0,1]) = t_{\mathbb{Z}}([0,\frac{1}{4}])^{\frac{1}{2}}$$

2) Pour $a > 0$

$$t_{\mathbb{Z}}([-a,a]) = t_{\mathbb{Z}}([0,a^2])^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.12 *(Fekete [10])*
Soient a et b deux réels tels que $b-a \leq 4$.
Alors

$$\frac{b-a}{4} \leq t_{\mathbb{Z}}([a,b]) \leq \left(\frac{b-a}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le résultat suivant généralise un encadrement de $t_{\mathbb{Z}}([0,a])$ obtenu par G.Rhin [26].

Proposition 1.13 *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, alors*

$$\max(|a|,|b|) \geq t_{\mathbb{Z}}([a,b]) \geq \max\left(\frac{b-a}{1+4(b-a)}, \frac{b-a}{4}\right)$$

Démonstration.

On obtient la première inégalité par le polynôme $P(x) = x^n$.
Posons $X = [a,b]$.
$t_{\mathbb{Z}}([a,b]) \geq \frac{b-a}{4}$ vient de $t_{\mathbb{Z}}(X) \geq t(X)$.
Montrons maintenant que $t_{\mathbb{Z}}([a,b] \geq \frac{b-a}{1+4(b-a)}$.
Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients entiers telle que $\lim_{n\to+\infty} ||P_n||_X^{\frac{1}{deg(P_n)}} = t_{\mathbb{Z}}(X)$.
Pour $x \in]a,b]$, posons $y = \dfrac{1}{x-a}$ et définissons $Q_n \in \mathbb{Z}[y]$ par $Q_n(y) = y^{deg(P_n)} P_n(a + \dfrac{1}{y})$
On a alors

$$||P_n||_X = \max_{y \geq \frac{1}{b-a}} \left(\frac{|Q_n(y)|}{y^{deg(P_n)}}\right) \geq \max_{4+\frac{1}{b-a} \geq y \geq \frac{1}{b-a}} \left(\frac{|Q_n(y)|}{y^{deg(P_n)}}\right)$$

or

$$\max_{4+\frac{1}{b-a} \geq y \geq \frac{1}{b-a}} |Q_n(y)|^{\frac{1}{deg(Q_n)}} \geq t([\frac{1}{b-a}, 4 + \frac{1}{b-a}]) = 1$$

par conséquent,

$$||P_n||_X^{\frac{1}{deg(P_n)}} \geq \frac{1}{4 + \frac{1}{b-a}}$$

et ainsi,

$$t_{\mathbb{Z}}([a,b]) \geq \frac{b-a}{1+4(b-a)}.$$

Ce résultat fournit des améliorations à certaines minorations d'Amoroso.

$[a,b]$		*minoration*
$[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]$	$(0,14177085)$	$0,15625000$
$[\frac{1}{4},\frac{2}{5}]$	$(0,08036980)$	$0,09375000$
$[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$	$(0,08423303)$	$0,08695652$
$[\frac{1}{5},\frac{2}{5}]$	$(0,08284271)$	$0,11111111$

Tableau 1

Les résultats entre parenthèses sont ceux d'Amoroso [1].

2 Minoration du diamètre transfini entier de $I = [\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$.

L'outil essentiel des minorations d'Aparicio et des nôtres est le lemme suivant de Chudnovsky [9] :

Lemme 2.1 *Soit X un compact de $\mathbb{C}$; $(T_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant :*

a) *T_n et T_m n'ont pas de racines communes pour $n \neq m$*
b) *le coefficient dominant de T_n est a_n et son degré d_n*
c) *toutes les racines des polynômes T_n appartiennent à X*

alors

$$t_{\mathbb{Z}}(X) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{-\frac{1}{d_n}}$$

Démonstration.

Soit $(Q_l)_{l\geq 0}$ une suite de polynômes à coefficients entiers telle que

$$\lim_{l\to+\infty} ||Q_l||_X^{\frac{1}{deg(Q_l)}} = t_{\mathbb{Z}}(X).$$

Si T_n ne divise pas Q_l alors

$$1 \leq |\text{résultant}(T_n, Q_l)| = |cd(T_n)|^{deg(Q_l)} \prod_{T_n(\alpha_i)=0} |Q_l(\alpha_i)|$$

c'est–à–dire

$$1 \leq |cd(T_n)|^{deg(Q_l)} ||Q_l||_X^{d_n}$$

et donc

$$\frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{d_n}}} \leq ||Q_l||_X^{d_n}.$$

Toute suite de polynômes satisfaisant les hypothèses de ce lemme sur I fournit une minoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$. Le problème revient donc à construire une bonne famille de polynômes afin que la minoration soit la meilleure possible. Nous appliquons ce lemme à la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ introduite par C.J.Smyth (définie dans le premier chapitre). Nous constatons alors que cette suite transposée sur l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$ coïncide avec celle utilisée par Aparicio en 1979 qui donne la meilleure minoration connue de $t_{\mathbb{Z}}[0, 1]$.

2.1 Une première méthode d'Aparicio pour $I = [0, 1]$.

Pour avoir une suite convenable de polynômes, Aparicio, en 1978, procède par transformation des polynômes cyclotomiques. Ainsi, à partir des racines $x_k^{(n)}$, $0 \leq k \leq n-1$, (situées dans le plan complexe supérieur) du polynôme $x^{2n+1}+1$, il obtient des réels $\lambda_k^{(n)}$, $0 \leq k \leq n-1$, tels que :

$$0 < \frac{1}{\lambda_k^{(n)} + 6} \leq \frac{1}{4} \quad \text{en posant } \lambda_k^{(n)} = x_k^{(n)} + \overline{x_k}^{(n)}.$$

Il montre alors que les polynômes qui admettent comme racines les $\dfrac{1}{\lambda_k^{(n)}+6}$ vérifient les conditions du lemme de Chudnovsky.
Construction de ces polynômes.
Posons $f_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} + ... + x^2 - x + 1$ le polynôme dont les racines sont $x_k^{(n)}$ et $\overline{x_k}^{(n)}$, $0 \le k \le n-1$.
On a

$$\frac{f_{2n}(x)}{x^n} = \sum_{k=1}^{n}(x^k + \frac{1}{x^k}) + 1$$

Il nous faut ici un résultat intermédiaire :

Lemme 2.2 *Pour tout entier s,*

$$x^k + \frac{1}{x^k} = F_k(x + \frac{1}{x} + s)$$

où $F_k \in \mathbb{Z}[x]$ est unitaire et de degré k.

Une récurrence sur k donne le lemme.
$\dfrac{f_{2n}(x)}{x^n}$ s'écrit alors $G_{n,s}(x + \dfrac{1}{x} + s)$ avec $G_{n,s} \in \mathbb{Z}[x]$, unitaire et de degré n.
En particulier $G_{n,6}(x_k^{(n)} + \dfrac{1}{x_k^{(n)}} + 6) = 0$
donc $G_{n,6} = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, admet comme racines les $\lambda_k^{(n)} + 6$.
Par conséquent, son polynôme réciproque
$G^*_{n,6}(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + 1$ admet comme racines les $\dfrac{1}{\lambda_k^{(n)}+6}$.
La suite $(G^*_{n,6})$ convient et le coefficient dominant a_n de $G^*_{n,6}$ vaut :

$$|a_n| = \prod_{k=1}^{n-1} |\lambda_k^{(n)} + 6|.$$

Il reste à calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$.
Comme $|x_k^{(n)}| = 1$, on a

$$|\lambda_k^{(n)} + 6| = |(x_k^{(n)})^2 + 6x_k^{(n)} + 1|$$

x^2+6x+1 s'annule en $\alpha = -3-\sqrt{8}$ et $\dfrac{1}{\alpha} = -3+\sqrt{8}$.
Il en résulte

$$|a_n| = \prod_{k=1}^{n-1} |(x_k^{(n)} - \alpha)(x_k^{(n)} - \frac{1}{\alpha})| = |\alpha|.|f_{2n}(\frac{1}{\alpha})|$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} |f_{2n}(\frac{1}{\alpha})|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} |\frac{(\frac{1}{\alpha})^{2n+1}+1}{\frac{1}{\alpha}+1}|^{\frac{1}{n}} = 1$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} = |\alpha|$$

Finalement, par application du lemme de Chudnovsky on obtient :

$$t_{\mathbb{Z}}([0,\frac{1}{4}]) \geq \frac{1}{3+\sqrt{8}}$$

c'est-à-dire

$$t_{\mathbb{Z}}([0,1]) \geq (\frac{1}{3+\sqrt{8}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}-1.$$

2.2 Intervalles de la forme $I = [\frac{p}{q},\frac{r}{s}]$.

En utilisant le résultat de Chudnovsky, nous montrons :

Théorème 2.3 *[15]*
Soient p, r des entiers et q, s des entiers positifs non nuls.
Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ totalement positifs (i.e dont toutes les racines sont réelles positives) et telle que P_n et P_m n'ont pas de racine commune pour $n \neq m$.
Supposons que la suite $(s|P_n(\frac{-q}{s})|^{\frac{1}{deg(P_n)}})_{n\geq 0}$,
(respectivement la suite $(q|P_n(\frac{-s}{q})|^{\frac{1}{deg(P_n)}})_{n\geq 0}$)
admette un plus petit point d'accumulation $\alpha > 0$, (respectivement $\beta > 0$).
Alors

$$t_{\mathbb{Z}}([\frac{p}{q},\frac{r}{s}]) \geq \max(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta})$$

Remarque :
Si $I = [0,1]$, alors $s|P_n(\frac{-q}{s})|^{\frac{1}{deg(P_n)}}$ est égal à $|L(P_n)|^{\frac{1}{deg(P_n)}}$ où $L(P)$ désigne la longueur usuelle de P. Dans ce cas particulier, on obtient donc une relation entre le diamètre transfini entier de $[0,1]$ et la longueur des polynômes totalement positifs.

Démonstration.

La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ du théorème 2.3 permet de construire une suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant les hypothèses du lemme précédent sur I à l'aide de la transformation de $]0,+\infty[$ dans I qui à x associe $t = \dfrac{p+rx}{q+sx}$.

On a alors :

$$T_n(t) = (st-r)^{deg(P_n)}.P_n(\frac{p-tq}{st-r}).$$

Notons que $deg(T_n) = deg(P_n)$.
La limite de $\dfrac{T_n(t)}{t^{deg(P_n)}}$ quand t tend vers l'infini fournit le coefficient dominant a_n de T_n dont nous avons besoin pour appliquer le lemme. a_n vaut donc :

$$a_n = s^{deg(P_n)}.P_n(\frac{-q}{s})$$

On remarque que les intervalles $I = [\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ et $J = [1-\frac{r}{s}, 1-\frac{p}{q}]$ ont même diamètre transfini entier (utiliser la transformation $x \mapsto 1-x$). Donc le résultat reste vrai en échangeant s et q.

Il résulte du lemme de Chudnovsky la minoration annoncée de $t_{\mathbb{Z}}(I)$.

A l'aide d'une famille particulière de polynômes, nous obtenons :

Théorème 2.4 *[15]*

$$t_{\mathbb{Z}}([\frac{p}{q},\frac{r}{s}]) \geq (q+s)^{-1}\prod_{i=0}^{\infty}(1+\lambda_i)^{\frac{-1}{2^{i+1}}}$$

$$\textit{avec } \lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2} \textit{ et } \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2} \textit{ pour } i \geq 0.$$

Démonstration.

Nous avons besoin d'une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ satisfaisant les hypothèses du théorème 2.3 sur I.
Les polynômes minimaux P_n des $\beta_n^2 = \gamma_n$, introduits dans le premier chapitre, conviennent.
En effet, rappelons qu'ils vérifient :
a) $P_0(x) = x - 1$ et $P_n(x) = x^{deg(P_{n-1})}.P_{n-1}(x + \frac{1}{x} - 2)$
b) P_n est réciproque pour $n \geq 1$
c) $deg(P_n) = 2^n$
d) Toutes les racines des P_n sont dans $]0, +\infty[$
e) Pour $n \neq m$, P_n et P_m n'ont pas de racine commune
f)

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{2^n}(x-\gamma_{n,i}) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(x-\gamma_{n,i})(x-\gamma_{n,i}^{-1}) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(x^2-(\gamma_{n-1,i}+2)x+1)$$

Il nous faut évaluer le coefficient dominant $a_n = s^{deg(P_n)}.P_n(\frac{-q}{s})$.

$$|a_n| = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(q^2 + (\gamma_{n-1,i}+2)qs + s^2)$$

$$|a_n| = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}[(q+s)^2 + qs\gamma_{n-1,i}] = (q+s)^{2^n}\prod_{i=1}^{2^{n-1}}(1+\lambda_0\gamma_{n-1,i})$$

où

$$\lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2}$$

D'après le lemme **1.4** du second chapitre, $|a_n|$ vaut :

$$|a_n| = (q+s)^{2^n}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(1+\lambda_i)^{\frac{1}{2^i}}\right)^{2^{n-1}}$$

Finalement, d'après le lemme de Chudnovsky, on obtient :

$$t_{\mathbb{Z}}([\frac{p}{q},\frac{r}{s}]) \geq (q+s)^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n-1}(1+\lambda_i)^{\frac{1}{2^i}}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\text{avec } \lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2} \text{ et } \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2} \quad \text{pour } i \geq 0$$

Ceci achève la preuve du théorème 2.4.

Remarques.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$g(t) = \frac{t}{\lim_{n\to+\infty}|P_n(-t^2)|^{\frac{1}{deg(P_n)}}}$$

Le théorème 2.4 s'énonce aussi :

Corollaire 2.5

$$t_{\mathbb{Z}}([\frac{p}{q},\frac{r}{s}]) \geq \frac{1}{\sqrt{qs}}.g(\sqrt{\frac{q}{s}})$$

Proposition 2.6 *La fonction g a les propriétés suivantes :*

1) $g(t) = g(\frac{1}{t})$

2) $g(t+\frac{1}{t}) = (t+\frac{1}{t}).g(t)^2$.

Le 1) vient de la réciprocité des polynômes P_n ; le 2) de la définition récurrente des P_n.

b) Signalons que la minoration ne dépend que des dénominateurs des extrémités rationnelles de I (et plus particulièrement de $\lambda_0 = (\frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2)^{-1}$).

Ainsi, par cette méthode, les intervalles de la forme $[\frac{a}{q}, \frac{b}{s}]$ ont la même minoration que l'intervalle particulier $[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ où $|ps - qr| = 1$.
Ceci explique que les améliorations par rapport aux résultats d'Amoroso portent seulement sur les intervalles de Farey.
Exemple : nous obtenons $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{2}{5}])$, $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{3}{5}])$ et $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{4}{5}])$ supérieurs où égaux à $0,1060...$ alors qu' Amoroso trouve $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]) \geq 0,061...$, $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{3}{5}]) \geq 0,1160...$ et $t_{\mathbb{Z}}([\frac{1}{3}, \frac{4}{5}]) \geq 0,1647...$.

Il découle du théorème 2.4 le résultat suivant :

Corollaire 2.7

$$(inf(q,s))^{-1} \geq t_{\mathbb{Z}}([\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]) \geq (q+s)^{-1}(1 + \frac{1}{\frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2})^{-1}$$

En particulier, on a :

$$\frac{1}{s} \geq t_{\mathbb{Z}}([0, \frac{1}{s}]) \geq (1+s)^{-1}(1 - \frac{1}{s} + O(\frac{1}{s^2})) \quad \text{quand } s \to +\infty.$$

Démonstration.

L'inégalité de gauche s'obtient en considérant sur $[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ les polynômes $p - qx$ et $r - sx$.
Concernant l'inégalité de droite, une récurrence montre aisément que pour tout $i \geq 0$:

$$\lambda_i^{-1} \geq \frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2$$

Par le théorème 2.3, on obtient :

$$t_{\mathbb{Z}}(I) \geq (q+s)^{-1} \prod_{i=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{\frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2})^{\frac{-1}{2^{i+1}}}$$

c'est–à–dire

$$t_{\mathbb{Z}}(I) \geq (q+s)^{-1} (1 + \frac{1}{\frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2})^{-1}$$

La seconde minoration du corollaire est évidente en posant $q = 1$.

2.3 Comparaison avec la seconde méthode d'Aparicio pour $I = [0, 1]$.

En 1979, pour ses polynômes, Aparicio utilise une transformation rationnelle ϕ de $[0, \frac{1}{4}]$ dans lui-même : $\phi(t) = \dfrac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}$.
Il définit la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ par :

$$\begin{cases} Q_0 = 1 - 5t \\ Q_n = (1-3t)^{2^n}.Q_{n-1}(\phi(t)); \quad deg(Q_n) = 2^n \end{cases}$$

Les Q_n vérifient les hypothèses du lemme 2.1 sur $[0, \frac{1}{4}]$.

Nous montrons dans ce paragraphe que, pour l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$, la suite de polynômes donnée par Aparicio et la nôtre sont identiques.

Dans notre méthode, les T_n sur $[0, \frac{1}{4}]$ satisfont :

$$\begin{cases} T_0 = 1 - 5t \\ T_n = (1-4t)^{2^n}.P_n(\frac{t}{1-4t}); \quad deg(T_n) = 2^n \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour montrer l'égalité des suites.
Supposons donc que $T_n = Q_n$.

$$\begin{aligned}
Q_{n+1} &= (1-3t)^{2^{n+1}}.Q_n(\tfrac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}) \\
&= (1-3t)^{2^{n+1}}.T_n(\tfrac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= (1-5t)^{2^{n+1}}.P_n(\tfrac{t(1-4t)}{(1-5t)^2}) \quad \text{par définition de } T_n
\end{aligned}$$

Calculons d'autre part $P_{n+1}(\dfrac{t}{1-4t})$

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(\tfrac{t}{1-4t}) &= (\tfrac{t}{1-4t})^{2^n}.P_n(\tfrac{t}{1-4t} + (\tfrac{t}{1-4t})^{-1} - 2) \\
&= (\tfrac{t}{1-4t})^{2^n}.P_n(\tfrac{(1-5t)^2}{t(1-4t)}) \\
&= (\tfrac{1-5t}{1-4t})^{2^{n+1}}.P_n(\tfrac{t(1-4t)}{(1-5t)^2}) \quad \text{car } P_n \text{ est réciproque}
\end{aligned}$$

Revenons maintenant à Q_{n+1} :

$$Q_{n+1}(t) = (1-5t)^{2^{n+1}}.(\frac{1-4t}{1-5t})^{2^{n+1}}.P_{n+1}(\frac{t}{1-4t})$$

c'est-à-dire

$$Q_{n+1}(t) = T_{n+1}(t).$$

La suite de polynômes d'Aparicio et la nôtre sont donc bien identiques.

3 Majoration du diamètre transfini entier.

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas d'un intervalle $I = [\frac{p}{q}, \frac{r}{s}]$ vérifiant $|ps - qr| = 1$.

Proposition 3.1 *[15]*

Soient n et N des entiers positifs non nuls.
Soient $b = (b_j)_{1\leq j\leq n}$ des entiers strictement positifs et $(P_j)_{1\leq j\leq n}$, des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ tels que $\sum_{j=1}^{n} b_j deg(P_j) < N$.
Soit la fonction $h(x,b) = \dfrac{|q+sx|}{\prod_{j=1}^{n} \log |P_j(x)|^{\frac{b_j}{N}}}$ définie pour $x > 0$ et $P_j(x) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$ et telle que $\min_{x>0} h(x,b) = e^m > 0$.

Alors il existe un polynôme P dans $\mathbb{Z}[x]$ de degré N tel que :

$$||P||_I^{\frac{1}{N}} \leq e^{-m}.$$

Par conséquent, $t_{\mathbb{Z}}(I) \leq e^{-m}$.

Démonstration.

On a $e^m \leq \dfrac{|q+sx|}{\prod_{j=1}^{n} \log |P_j(x)|^{\frac{b_j}{N}}}$ pour $x > 0$ et $P_j(x) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$

Il en résulte $\prod_{j=1}^{n} |P_j(x)|^{b_j} \leq e^{-mN}|q+sx|^N$ pour $x > 0$ (1)

Posons $P^*(x) = \prod_{j=1}^{n} |P_j(x)|^{b_j}$; $deg(P^*) \leq N$.

(1) devient $|P^*(x)| \leq e^{-Nm}|q+sx|^N$ pour $x > 0$.

On effectue maintenant un changement de variable pour se ramener dans I.

Si $x > 0$ alors $t = \dfrac{p+rx}{q+sx} \in I$.

Enfin définissons $P(t) = P^*(\frac{p-tq}{st-r})(st-r)^N$.

On a $deg(P) = deg(P^*) + (N - deg(P^*)) = N$.

(1) donne alors :

$|P(t)| \leq e^{-Nm}|q + s\frac{p-qt}{st-r}|^N |st-r|^N$ pour $t \in I$

c'est à dire $|P(t)| \leq e^{-Nm}$ puisque $|ps - qr| = 1$

donc

$$\max_{t\in I} |P(t)|^{\frac{1}{deg(P)}} \leq e^{-m}$$

P est explicite et $t_{\mathbb{Z}}(I) \leq e^{-m}$.

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme unitaire à racines réelles positives α_i, $1 \leq i \leq d$. La quantité $\prod_{i=1}^{d}(q + s\alpha_i) = R_{q,s}(P)$ définit une mesure de P. La proposition précédente montre que la majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ dépend de la minoration de la mesure $R_{q,s}$.
Nous exploitons le principe des fonctions auxiliaires développé dans le premier chapitre pour déterminer m . Nous choisissons le domaine D égal à $\mathbb{R}^{+*}$ et $\log g(x) = \log(q + sx)$.

Détaillons l'exemple $I = [0, 1]$.
La fonction auxiliaire qui intervient est de la forme :

$f(x) = \log(x+1) - c_0 \log(x) - c_1 \log|x-1| - \sum_{j=2}^{7} c_j \log|R_j(x)|$.

$R_2 = x^2 - 3x + 1$
$R_3 = (x^3 - 5x^2 + 6x - 1)(x^3 - 6x^2 + 5x - 1)$
$R_4 = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$
$R_5 = (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1)(x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1)$
$R_6 = x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1$
$R_7 = x^2 - 4x + 1$

De la programmation linéaire semi–infinie, on déduit
$\log(m) = 2,3611014$
et

$$t_{\mathbb{Z}}([0,1]) \leq e^{-m} = 0,42353115$$

Remarque :
Comme $t_{\mathbb{Z}}[0,1] = t_{\mathbb{Z}}[0,\frac{1}{4}]^{\frac{1}{2}}$, on aurait pu étudier une fonction auxiliaire sur $[0,\frac{1}{4}]$. Elle serait composée des transformés des R_j par $x = \dfrac{t}{1-4t}$, soit respectivement
$T_0 = t$
$T_1 = 5t - 1$
$T_2 = 29t^2 - 11t + 1$
$T_3 = 30589t^6 - 34083t^5 + 15613t^4 - 3759t^3 + 501t^2 - 35t + 1$
$T_4 = 941t^4 - 703t^3 + 193t^2 - 23t + 1$
$T_5 = 981181t^8 - 1456351t^7 + 936448t^6 - 340465t^5 + 76491t^4 - 10865t^3 + 952t^2 - 47t + 1$
$T_6 = 969581t^8 - 1441511t^7 + 928579t^6 - 338252t^5 + 76143t^4 - 10836t^3 + 951t^2 - 47t + 1$
$T_7 = 33t^2 - 12t + 1$
$U_0 = 1 - 4t$
Les trois premiers polynômes apparaissent comme facteurs du polynôme cité dans l'introduction et étudié par Aparicio pour $[0,\frac{1}{4}]$.

4 Résultats numériques.

I		*minoration*	*majoration*	
$[0, \frac{1}{2}]$	$(0,27334798)$	$0,28464223$	$0,28786121$	$(0,29069307)$
$[0, \frac{1}{3}]$	$(0,21095904)$	$0,21767399$	$0,22077192$	$(0,22210898)$
$[0, \frac{1}{4}]$	$(0,17278874)$	$0,17701068$	$0,17937863$	$(0,18043337)$
$[0, \frac{1}{5}]$	$(0,14665213)$	$0,14947069$	$0,15199329$	$(0,15220315)$
$[0, \frac{1}{6}]$	$(0,12752602)$	$0,12950020$	$0,13170886$	$(0,13173675)$
$[0, \frac{1}{10}]$	$(0,08408791)$	$0,08473875$	$0,08605165$	$(0,08592011)$
$[0, \frac{1}{12}]$	$(0,07190912)$	$0,07233143$	$0,07369445$	$(0,07324779)$
$[0, \frac{1}{15}]$	$(0,05909715)$	$0,05934001$	$0,06034833$	$(0,06000011)$
$[0, \frac{1}{20}]$	$(0,04558513)$	$0,04569987$	$0,04620411$	$(0,04612155)$
$[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$	$(0,11954914)$	$0,16917092$	$0,17072255$	$(0,17181856)$
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$	$(0,06153947)$	$0,10604672$	$0,10768567$	$(0,10832409)$
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$	$(0,07255604)$	$0,12052665$	$0,12196998$	$(0,12313371)$
$[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]$	$(0,08230163)$	$0,12321607$	$0,12546057$	$(0,12578497)$
$[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$	$(0,05014593)$	$0,09364456$	$0,09490391$	$(0,09567263)$

Tableau 2

Les résultats entre parenthèses sont ceux d'Amoroso [1].

CHAPITRE 4

Détermination effective d'ensembles de polynômes de petite mesure.

On trouve ce qu'on peut,
non ce qu'on veut.
E.Maillet

1 Introduction.

Soit D un domaine contenu dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $\mathcal{F}$ un ensemble de polynômes défini comme dans le premier chapitre et $\mathcal{M}$ une mesure sur $\mathcal{F}$.
Nous nous proposons de présenter une méthode permettant de déterminer explicitement les polynômes $P \in \mathbb{Z}[x]$, unitaires, de racines $\alpha_1, ..., \alpha_d$ appartenant à D, de degré d fixé, vérifiant :

$$\mathcal{M}(P) = \prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i) < \gamma^d \text{ où } \gamma \text{ est un réel positif fixé.}$$

Nous en donnerons deux applications.

Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Pour chaque choix de a, on veut trouver une bonne majoration de $|P(a)|$ en fonction de $\mathcal{M}(P)$ et de d, à partir de laquelle on déduira une inégalité sur les coefficients de P. Pour cela, nous établissons

Proposition 1.1 *Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$. Alors il existe des constantes effectives $m > 0$ et $c_0 > 0$ telles que :*

$$|P(a)| \leq (\mathcal{M}(P)e^{-md})^{\frac{1}{c_0}}.$$

Démonstration.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.
Soient $c = (c_j)_{0\leq j\leq n}$ où les c_j sont des réels positifs et R_j, $1 \leq j \leq n$, des polynômes à coefficients entiers qui dépendront de la fonction g (on peut choisir $n = 0$) et tels que $c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j deg(R_j) \leq 1$.
Enfin, soit h la fonction définie pour $x \in D$, $x \neq a$ et $R_j(x) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, par :

$$h(x,c) = \frac{g(x)}{|x-a|^{c_0}.\prod_{j=1}^{n}|R_j(x)|^{c_j}}$$

Posons $e^{m(c)} = \inf_{x\in D} h(x,c)$.
On impose la condition suivante :
Il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que :

$$\frac{g(x)}{|x-a|^{\epsilon}} \geq 1 \text{ pour } x \in D \text{ et } x \neq a \qquad (*)$$

Cette condition garantit lexistence de c avec $c_0 > 0$ et $m(c) \geq 0$.
Si pour $1 \leq i \leq d$, $\alpha_i \neq a$ et si les R_j ne s'annulent pas en α_i , $1 \leq j \leq n$, on a :

$$\frac{g(\alpha_i)}{|\alpha_i - a|^{c_0}.\prod_{j=1}^{n}|R_j(\alpha_i)|^{c_j}} \geq e^{m(c)} \qquad i = 1,..,d$$

et en effectuant le produit pour i=1,..,d

$$\prod_{i=1}^{d} g(\alpha_i) \geq e^{m(c)d}.\prod_{i=1}^{d}|\alpha_i - a|^{c_0}.\prod_{j=1}^{n}(\prod_{i=1}^{d}|R_j(\alpha_i)|^{c_j})$$

or pour $j = 1,..,n$, $\prod_{i=1}^{d}|R_j(\alpha_i)|$ est un entier non nul donc supérieur ou égal à 1.
Par conséquent,

$$|P(a)| \leq (\mathcal{M}(P)e^{-m(c)d})^{\frac{1}{c_0}}.$$

Mais on veut que la majoration soit la meilleure possible donc il faut minimiser $(\mathcal{M}(P)e^{-m(c)d})^{\frac{1}{c_0}}$ ce qui revient à minimiser $\frac{1}{c_0}(\log \mathcal{M}(P) - dm(c))$. Or, ceci n'est pas un problème linéaire en c. Remarquons que si $|P(a)| \geq B^d$ pour un certain B positif fixé alors c étant fixé, on a :

$$\mathcal{M}(P) \geq (e^{m(c)}B^{c_0})^d.$$

Par conséquent, il s'agit maintenant de maximiser l'expression $m(c) + c_0 \log B$, ce qui est un problème linéaire en c.
Nous décrivons un algorithme qui permet de trouver c et $m = \max_c m(c)$ de sorte que la borne de la proposition 1.1 soit optimale en fonction de γ (et du choix des polynômes $(R_j)_{1\leq j\leq n}$).
On commence par choisir $B_1 = 1$ car $|P(a)| \geq 1$. Par la technique des fonctions auxiliaires décrite dans le premier chapitre, on détermine $c(B_1)$ tel que $m(c(B_1)) + c(B_1)_0 \log B_1 = m_1$ soit maximal. On note $\gamma_1 = e^{m_1}B_1^{c(B_1)_0}$.
Si $\gamma_1 \geq \gamma$, $m = m_1$ et $c = c(B_1)$ conviennent.
Sinon, on répète le procédé en prenant $B_s = s^{\frac{1}{d}}$, s entier supérieur ou égal à 2 et on s'arrête dès que :

$$\gamma_s \geq \gamma > \gamma_{s-1}.$$

On choisira alors $c = c(s^{\frac{1}{d}})$.

Exemple.

Considérons le cas où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des polynômes totalement positifs et $\mathcal{M}$ la longueur. On obtient ainsi un corollaire du théorème 1.7 du second chapitre :

Proposition 1.2 *Si P est un polynôme de $\mathbb{Z}[x]$, unitaire, irréductible et totalement positif alors*

$$|P(0)| \leq \left(\frac{L(P)}{2,3611014^d}\right)^{\frac{1}{0,31784899}}.$$

En particulier, si $d \leq 33$ et $L(P) \leq 2,3769^d$, on a $|P(0)| = 1$. (Rappelons que $2,376841$ est le plus petit point d'accumulation connu du spectre de la longueur absolue.)

2 Le problème de Zhang–Zagier.

Pour α nombre algébrique, posons

$$H(\alpha) = \log \Omega(\alpha).$$

Rappelons que $\Omega(\alpha) = M(\alpha)^{\frac{1}{deg(\alpha)}}$ désigne la mesure de Mahler absolue de α introduite dans le premier chapitre.

Zhang [36], en 1992, a établi l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$H(\alpha) + H(1-\alpha) \geq C$$

pour tout nombre algébrique α à l'exception de $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

En 1993, Zagier [35] a rendu effectif ce résultat en montrant :

Théorème 2.1 *Pour tout nombre algébrique α différent de $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, on a :*

$$H(\alpha) + H(1-\alpha) \geq \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

avec égalité si et seulement si α ou $1-\alpha$ est une racine primitive 10^{ieme} de l'unité.

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant où l'on retrouve la notion de fonction auxiliaire exacte :

Lemme 2.2 *Pour $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$\log \max(1, |z|) + \log \max(1, |1-z|) \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \log |z^2 - z| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log |z^2 - z + 1|$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

avec égalité si et seulement si z ou $1-z$ est égal à $e^{\frac{\pm \pi i}{5}}$ ou $e^{\frac{\pm 3\pi i}{5}}$

Démonstration.
Notons $f(z)$ la différence entre le membre de droite et le membre

de gauche de l'inégalité proposée. Clairement, $f(z) \to -\infty$ quand z tend soit vers l'infinité soit vers l'un des points $0, 1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. D'autre part, f est continue partout ailleurs donc atteint son maximum en un ou plusieurs points finis. Comme f est harmonique en dehors des deux cercles $|z| = 1$ et $|1 - z| = 1$, le principe du maximum implique que les maxima sont atteints seulement sur ces cercles. L'inégalité souhaitée étant invariante par les transformations $z \mapsto 1 - z$ et $z \mapsto \bar{z}$, on peut supposer $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Posons $S = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.
Distinguons deux cas.
Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (i.e $0 \leq S \leq 1$), alors $|1 - e^{i\theta}| \leq 1$ et

$$f(e^{i\theta}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} \log(S) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log(1 - S) + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

En dérivant par rapport à S, on voit que l'unique maximum sur l'intervalle [0,1] est atteint en $S = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (i.e $\theta = \frac{\pi}{5}$) où f s'annule.
Si $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ (i.e $1 \leq S \leq 4$), alors $|1 - e^{i\theta}| \geq 1$ et

$$f(e^{i\theta}) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} \log(S) + \frac{1}{2\sqrt{5}} \log(S - 1) + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

L'unique maximum sur l'intervalle [1,4] vaut 0 au point $S = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ (i.e $\theta = \frac{3\pi}{5}$).

Définition 2.3 *Soit P un polynôme à coefficients complexes. On définit la mesure de Zhang–Zagier de P par :*

$$Z(P) = M(P(z))M(P(1 - z)).$$

On notera la mesure absolue de Zhang–Zagier par :

$$\zeta(P) = (Z(P))^{\frac{1}{deg(P)}}.$$

Remarque.
A partir de P défini comme ci-dessus, de degré d, on construit un polynôme Q_P à coefficients entiers, de degré $2d$ en z, en posant :

$$Q_P(z) = P(z)P(1-z).$$

On a alors

$$\zeta(P) = \zeta(Q_P).$$

Comme Q_P est invariant par la transformation $z \mapsto 1-z$, Q_P s'écrit en fonction de $w = z^2 - z$ et le degré de Q_P en w vaut $d = deg(P)$. On notera $Q_P(w) = w^d + b_1 w^{d-1} + ... + b_d$.
Par conséquent, sans perte de généralité, on peut se restreindre à la recherche de polynômes de la forme Q_P.

Le résultat de Zagier suggère l'idée d'examiner l'ensemble $\mathcal{Z}$ des valeurs prises par $\zeta(P)$. Grâce au théorème 2.1, nous connaissons déjà les deux premiers points du spectre de $\mathcal{Z}$:

$$\zeta(z^2 - z) = 1 \text{ et } \zeta(\phi_{10}(z)\phi_{10}(1-z)) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

où $\phi_{10}(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$.

Dans la suite, on se limite à la recherche de P à coefficients entiers, unitaire, irréductible , de racines $\alpha_1, ..., \alpha_d$, de degré d fixé et vérifiant $\zeta(P) < 1,31$.

• Première étape.

Selon le principe décrit dans l'introduction, la première étape consiste à trouver des inégalités sur $Q_P(a)$ quand $a \in \mathbb{Z}$ tel que $Q_P(a) \neq 0$. D'après la proposition 1.1, on sait que :

$$|Q_P(a)| \leq (\zeta(P)e^{-m})^{\frac{d}{c_0}}.$$

Expliquons comment on trouve m et c_0.
Pour $1 \leq k \leq n$, soient $c_k \in \mathbb{R}^{+*}$ et $P_k \in \mathbb{Z}[z]$. Considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$f(z,c) = \log_+ |z^2 - z| - c_0 \log |z^2 - z - a| - \sum_{k=1}^{n} c_k \log |P_k(z)P_k(1-z)|$$

définie pour $z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ tel que $z^2 - z - a \neq 0$ et $P_k(z)P_k(1-z) \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n$.
Remarquons que f peut s'exprimer en fonction de $w = z^2 - z$ par :

$$h(w) = \log_+ |w| - c_0 \log |w - a| - \sum_{k=1}^{n} c_k \log |Q_k(w)|$$

où $Q_k \in \mathbb{Z}[w]$.
$m(c)$ est défini par $m(c) = \min_{z\in\mathbb{C}} f(z,c)$. Comme dans la démonstration du lemme 2.2, il suffit d'étudier f sur $|z| = 1$. f s'écrit :

$$f(z,c) = \frac{1}{2}\log_+ |z + \frac{1}{z} - 2| - \frac{c_0}{2}\log(|z^2 - z - a|.|\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - a|)$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{2} \log |P_k(z)P_k(\frac{1}{z})P_k(1-z)P_k(1-\frac{1}{z})|.$$

car sur $|z| = 1$, $|P(z)|^2 = P(z).P(\frac{1}{z})$.
Enfin, posons $x = 2 - z - \frac{1}{z} > 0$. f devient :

$$g(x,c) = \frac{1}{2}\log_+(x) - \frac{c_0}{2}\log |-ax^2 + (3a+1)x + a^2| - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{2} \log |Q_k(x)|.$$

Par conséquent, $m(c) = \min_{0<x<4} g(x,c)$ et il reste à résoudre le problème d'optimisation introduit dans le premier paragraphe.

On peut également choisir a algébrique en remplaçant dans la fonction auxiliaire h le terme en $w - a$ par le polynôme minimal de a dans $\mathbb{Z}[w]$. Nous avons utilisé $a = -\frac{1}{2}$ ou a complexe quadratique. Ce dernier cas présente l'avantage de fournir deux inégalités sur les coefficients de Q_P.

Donnons un exemple : choisissons $a = i$ et $\gamma = 1,31$.
La fonction auxiliaire est de la forme :

$$h(w) = \log_+(w) - c_1 \log|w| - c_2 \log|w+1| - c_3 \log|w^2+1|.$$

Comme décrit précédemment, par la programmation linéaire semi–infinie, on obtient :

$$\begin{cases} m = 1,04523 \\ c_1 = 0,00766 \\ c_2 = 0,15933 \\ c_3 = 0,30486 \end{cases}$$

On a donc

$$\log_+(w) \geq c_1 \log|w| + c_2 \log|w+1| + c_3 \log|w^2+1| + m.$$

ce qui implique

$$M(Q_P) \geq e^{md}.|Q_P(0)|^{c_1}.|Q_P(-1)|^{c_2}.|Q_P(i)|^{4c_3}$$

c'est–à–dire

$$\gamma > e^m.|Q_P(i)|^{\frac{4c_3}{d}}$$

puisque $|Q_P(0)|$ et $|Q_P(-1)|$ sont des entiers non nuls.
Donc,

$$|Q_P(i)|^2 < (\gamma.e^{-m})^{\frac{d}{2c_3}}$$

ce qui donne deux inégalités sur les coefficients de Q_P.

• Seconde étape.

Pour chaque choix de a, l'inégalité $|Q_P(a)| \leq B^d$ se transforme en une ou plusieurs inégalités sur une forme linéaire en $b_1, ..., b_d$ du type :

$$|l(b_1, ..., b_d) + constante| \leq B^d$$

Par exemple, $|Q_P(1)| \leq B^d$ entraîne $|v_1| \leq B^d$ en posant $v_1 = 1 + b_1 + ... + b_d$.

Nous utilisons par exemple pour le degré 18 : $a = 0, 1, -1, -\frac{1}{2}, i, \frac{i-1}{2}, j$.
On en déduit d formes linéaires en $b_1, ..., b_d$, notées $v_1, ..., v_d$ qui vérifient des inégalités. Nous représentons les v_k, $1 \leq k \leq d$, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_d \end{pmatrix} + N$$

où M et N sont des matrices à coefficients entiers.
On a alors

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_d \end{pmatrix} = M^{-1} \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_d \end{pmatrix} - N \right)$$

Mais la matrice M^{-1} n'étant pas à coefficients entiers, les v_k, $1 \leq k \leq d$, doivent vérifier des relations de congruences. On désire définir de nouvelles variables entières $u_1, ..., u_d$ à partir desquelles seront déterminés $b_1, ..., b_d$ sous la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_d \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_d \end{pmatrix} + R$$

avec cette fois Q et R matrices à coefficients entiers.
Les u_k, $1 \leq k \leq d$, satisfont de nouvelles inégalités linéaires déduites de celles vérifiées par les v_k, $1 \leq k \leq d$. Mais on veut que ces inégalités soient de la forme, pour $1 \leq k \leq d$:

$$|l_k(u_1, ..., u_d) + e_k| \leq f_k$$

où la matrice des formes linéaires l_k sera triangulaire. Aussi, on prend soin d'ordonner les équations de congruences pour aboutir à un système triangulaire en $u_1, ..., u_d$ comme ci –dessus.
Pour affiner la recherche des Q_P, nous appliquons aux polynômes trouvés plusieurs pas de la méthode de Graeffe (détaillée dans [7]). Rappelons-la brièvement.

Soit P un polynôme de degré d.
Posons
$$\begin{cases} P_1(x) = P(\sqrt{x})P(-\sqrt{x}) \\ \\ P_k(x) = P_{k-1}(\sqrt{x})P_{k-1}(-\sqrt{x}) \end{cases}$$
Le calcul de P_k s'effectue plus aisément grâce à la formule
$$P_k(x) = R^2(x) - xS^2(x),$$
R et S définis par
$$P_{k-1}(x) = R(x^2) + xS(x^2).$$
Le polynôme P_k vérifie :
$$\begin{cases} deg(P_k) = deg(P) \\ \\ P_k \text{ est à coefficients entiers} \\ \\ \text{ses racines sont les racines de } P \text{ élevées à la puissance } 2^k \\ \\ M(P_k) = M(P)^{2^k} \end{cases}$$
De l'inégalité connue $\dfrac{L(P_k)}{2^d} \leq M(P_k) \leq L(P_k)$, on déduit
$$\frac{L(P_k)^{\frac{1}{2^k}}}{2^{\frac{d}{2^k}}} \leq M(P) \leq L(P_k)^{\frac{1}{2^k}}.$$
Dans notre cas, pour Q_P, on a :
$$\frac{L(Q_{P,k}))^{\frac{1}{2^k}}}{2^{\frac{d}{2^k}}} \leq M(Q_P)$$
or $M(Q_P(z)) = M(Q_P(1-z))$ d'où
$$\frac{L(Q_{P,k}))^{\frac{1}{2^{k-1}}}}{2^{\frac{d}{2^{k-1}}}} \leq M(Q_P(z))M(Q_P(1-z)) = \zeta(Q_P)^d.$$
Par conséquent, la condition $\zeta(Q_P) < \gamma$ implique
$$\frac{L(Q_{P,k}))^{\frac{1}{2^{k-1}d}}}{2^{\frac{1}{2^{k-1}}}} \leq \gamma.$$

3 Polynômes totalement positifs de petite longueur.

On applique cette fois la méthode développée dans le premier paragraphe pour déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Z}[x]$, unitaires, irréductibles, totalement positifs et de degré d fixé tels que $L(P)$ soit petit.
La motivation de cette recherche est de trouver de bons polynômes pour le spectre de la longueur absolue. Ainsi, nous nous limitons aux polynômes tels que $L(P) \leq (2,3769)^d$ puisque $2,376841...$ est le plus petit point d'accumulation connu.

• Première étape.

On sait, d'après la proposition 1.1, que pour $a \in \mathbb{Z}$ tel que $P(a) \neq 0$, il existe m et c_0 tels que :

$$|P(a)| \leq (L(P)e^{-md})^{\frac{1}{c_0}}.$$

La fonction auxiliaire est ici de la forme, pour $x > 0$:

$$f(x,c) = \log(x+1) - c_0 \log|x-a| - \sum_{j=1}^{n} c_j \log|P_j(x)|.$$

Pour $d = 3,4,5,6,7$, nous avons utilisé $a = 0,1,-1,2,-2$.

• Seconde étape.

Soit $P = x^d - b_1x^{d-1} + ...(-1)^d b_d = \prod_{i=1}^{d}(x-\alpha_i)$ où pour $1 \leq i \leq d$, $b_i \in \mathbb{N}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}^{+*}$. L'objectif est d'encadrer les b_i le mieux possible. Rappelons que $|P(0)| = 1$. L'inégalité arithmético-géométrique permet alors de minorer chaque b_k. En effet, pour $1 \leq k \leq d$,

$$1 = (\prod_{i=1}^{d} \alpha_i)^{d-1} = (\prod_{\substack{\alpha_{i_j} \neq \alpha_{i_l} \\ 1 \leq i_j \neq i_l \leq k}} (\alpha_{i_1}...\alpha_{i_k}))^{\frac{1}{C}} \leq \frac{1}{C} b_k$$

où C désigne $\begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix}$

et donc

$$\binom{d}{k} \leq b_k.$$

En combinant les différentes inégalités de la première étape, on parvient à majorer chaque b_k indépendamment des autres. Mais ces encadrements sont souvent trop larges, ce qui rend ingérable le nombre de polynômes trouvés. On se ramène à un système triangulaire d'inégalités en $b_1, ..., b_d$ comme dans le précédent paragraphe.

- **Troisième étape.**

Enfin, la règle de Sturm permet déliminer les polynômes dont les zéros ne sont pas tous réels positifs.

Finalement, nous obtenons une liste de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$, unitaires, irréductibles, totalement positifs, de petite longueur et de degré $d \leq 7$.

Remarque.
En appliquant à ces polynômes P la transformation T définie dans le premier chapitre par :

$$T(P)(x) = x^d.P(x + \frac{1}{x} - 2),$$

nous obtenons des polynômes $T(P)$ à coefficients entiers, unitaires, totalement positifs et de degré $2d$. Nous ne conservons que les $T(P)$ irréductibles et de petite longueur. On trouve ces polynômes dans l'annexe 6.

References

[1] F.Amoroso. Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel. Annales de l'Institut Fourier, tome 40, fascicule 4, 1990 : p 885–911.

[2] E.J.Anderson and P.Nash. Linear programming in infinite–dimensional spaces.
Wiley–Interscience Publication.

[3] E.Aparicio. Metodos para el calculo approximado de la desviacion diopantea uniforme minima a cero en un segmento.
Revista Matematica Hispano–Americana, 4 Serie, t.XXXVIII, $n^o 6$, 1978: p 259–270.

[4] E.Aparicio. New bounds for the uniform Diophantine deviation from zero in $[0,1]$ and $[0,\frac{1}{4}]$.
Proceedings of the sixth conference of Portuguese ad Spanish mathematicians, Part I, Santander 1979 : p 289–291.

[5] D.W.Boyd. Reciprocal polynomials having small measure.
Math.Comp ,volume 35, 1980 : p 1361–1377.

[6] D.W.Boyd. Supplement to reciprocal polynomials having small measure II.
Math.Comp ,volume 53, 1989 : p S1–S5.

[7] L.Cerlienco M.Mignotte F.Piras. Computing the measure of a polynomial.
J. of Symb. Comp., tome 4, 1987 : p 21–34.

[8] E.W.Cheney. Introduction to approximation theory.
McGraw-Hill, New York , 1966 .

[9] G.V.Chudnovsky. Number Theoretic Applications of Polynomials with Rational Coefficients Defined by Extremality Conditions.
Arithmetic and Geometry, Vol.I, ed M.Artin and J.Tate, Birkhaüser.Progress in Math. 35, 1983 : p 61–105.

[10] M.Fekete. Über die Verteilung der Wurzelen bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.
Math.Zeit., volume 17, 1923 : p 228–249.

[11] M.Fekete G.Szego. On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set.
Math.Zeit., volume 63, 1955 : p 158–172.

[12] O.Ferguson. Approximation by polynomials with integral coefficients.
AMS, Providence, 1980.

[13] V.Flammang. Sur la longueur des entiers algébriques totalement positifs.
A paraître dans Journal of Number Theory .

[14] V.Flammang. Two new points in the spectrum of the absolute Mahler measure of totally positive algebraic integers.
A paraître dans Mathematics of Computation.

[15] V.Flammang. Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle à extrémités rationnelles.
A paraître dans les Annales de l'Institut Fourier.

[16] V.Flammang. Comparaison de deux mesures de polynômes.
A paraître dans le Bulletin Canadien de Mathématiques.

[17] G.Höhn N-P.Skoruppa. Un résultat de Schinzel.
Journal de théorie des nombres de Bordeaux,volume 5,fascicule 1, 1993 : p 185.

[18] M.Langevin. Mesures des polynômes et des nombres algébriques.
Journées de Limoges, 1980 .

[19] M. Langevin. Méthode de Fekete–Szegö et problème de Lehmer.
C.R.Acad.Sc.Paris, tome 301, série I,n^o10, 1985 : p 463–466.

[20] R.Louboutin. Sur la mesure de Mahler d'un nombre algébrique.
Comptes rendus, volume 296, série I, 1983 : p 707–708.

[21] J.A.Nelder and R.Mead, Computer Journal, volume 7, 1965 : p 308.

[22] C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen and M. Olivier. PARI CALCULATOR Version 1.35.07

[23] W.H.Press, B.P.Flannery, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterling. Numerical Recipes.
The art of scientific computing, Cambridge University Press, 1986.

[24] G.Rhin. Généralisation d'un théorème de A.Schinzel.
A paraître dans Acta Arithmetica.

[25] G.Rhin. Cours de DEA de Théorie Des Nombres.
Université de Nancy 1, 1992–93.

[26] G.Rhin. Diamètre transfini et mesures d'irrationalité des logarithmes.
Notes de conférences données à l'Université de Pise en mars 1989.

[27] G.Rhin and C.Smyth. On the Mahler measure of polynomials having all zeros in a sector.
A paraître dans Mathematics of Computation.

[28] A.Schinzel. On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number.
Acta Arith , tome 24 ,1973 : p 385–399.

[29] C.L.Siegel. The trace of totally positive and real algebraic integers.
Ann.Math., volume 46, 1945 : p 302–312.

[30] C.J.Smyth. On the measure of totally real algebraic integers I.
J.Austral.Math.Soc. (Ser.A), tome 30, 1980 : p 137–149.

[31] C.J.Smyth. On the measure of totally real algebraic integers II.
Math.Comp.,tome 37, 1981 : p 205–208.

[32] C.J.Smyth. The mean values of totally real algebraic integers.
Math.Comp., tome 42, 1984 : p 663–681.

[33] C.J.Smyth. Totally positive algebraic integers of small trace.
Annales de l'Institut Fourier, tome 33, fascicule 3, 1984 : p 1–28.

[34] C.J.Smyth. On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer.
Bull.London Math Soc, volume 3, 1971 : p 169–175.

[35] D.Zagier. Algebraic numbers close to both 0 and 1.
Math.Comp., tome 61, 1993 : p 485–491.

[36] S.Zhang. Positive line bundles on arithmetic surfaces.
Preprint, Princeton, 1992.

ANNEXE 1

EXECUTION DU PROGRAMME EN PASCAL POUR LE THEOREME 1.7 DU CHAPITRE 2.

coefficients

polynome 1	0	1			
polynome 2	-1	6	-5	1	
polynome 3	1	-8	14	-7	1
polynome 4	-1	1			
polynome 5	1	-3	1		
polynome 6	1	-7	13	-7	1
polynome 7	-2	1			

****

PAS ZERO (les exposants ont été fixés)

poLynome 1	exposant 0.01000000
poLynome 2	exposant 0.01000000
poLynome 3	exposant 0.01000000
poLynome 4	exposant 0.00100000
poLynome 5	exposant 0.00150000
poLynome 6	exposant 0.00010000
poLynome 7	exposant 0.00100000

	racines sur]0,1[de la dérivée	vaLeur de La fonction
1:	0.024227896479	2.0468459548262922
2:	0.183655682393	2.1270530374790299
3:	0.227416446996	2.1139639661827519
4:	0.266055446873	2.1092207752192656
5:	0.391059646556	2.1266181811889141
6:	0.544516286024	2.1568537203487950
7:	0.715524113342	2.1974826531020125
8:	1.005884042695	2.2429365515908043
9:	1.611736519554	2.3809811151217920
10:	1.700000003023	2.3885380343225568
11:	2.055000001312	2.4574007677841166
12:	2.280156952163	2.5042069990953366
13:	2.300000008063	2.5046308274552456
14:	3.329706701893	2.6743327245935708
15:	4.067647538138	2.7709426407750205
16:	4.130000004720	2.7725640949521249

minoration de la longueur absolue= 2.0468459548262922

****

PREMIER PAS

nbre de points de controle pour la programmation linéaire : 17
objectif= 2.3647643627498242

poLynome 1	exposant 0.10999086
poLynome 2	exposant 0.01567505
poLynome 3	exposant 0.01269037
poLynome 4	exposant 0.07185041
poLynome 5	exposant 0.03403471
poLynome 6	exposant 0.00885497
poLynome 7	exposant 0.00000000

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.110414077568	2.3593199678499566
2:	0.183115282053	2.4126672627958701
3:	0.218178232567	2.4035647182533591
4:	0.287851193251	2.3650408255299161
5:	0.491259292302	2.3612794137105579
6:	0.590938632360	2.3640813045527793
7:	0.731804821822	2.3697903985052699
8:	1.387069361240	2.3562501499741514
9:	1.699999990120	2.3569767356882207
10:	1.967686244420	2.3572637145308465
11:	2.055000001312	2.3615388197628769
12:	2.299999993805	2.3842643181006424
13:	3.009706254349	2.3792673451649023
14:	3.631621027888	2.3646069445555338
15:	4.129999997042	2.3703849466303121
16:	5.270150146484	2.3394449140113068

minoration= 2.3394449140113068

****

DEUXIEME PAS

nbre de points de controle: 18
objectif= 2.3641630503166598

poLynome 1	exposant 0.11267903
poLynome 2	exposant 0.01141240
poLynome 3	exposant 0.00683841
poLynome 4	exposant 0.08259842
poLynome 5	exposant 0.03542279
poLynome 6	exposant 0.00826771
poLynome 7	exposant 0.00000000

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonctio
1:	0.123337632554	2.3529397163351131
2:	0.181197562663	2.3829000894866856
3:	0.215790432921	2.3839950771268586
4:	0.277940124765	2.3598420892628637
5:	0.493708013749	2.3640948658010994
6:	0.596993854788	2.3640334153790331
7:	0.702670611973	2.3740395104746699
8:	1.428780256003	2.3651109089689977
9:	1.699999990120	2.3578534057584197
10:	1.987149832589	2.3556021598900108
11:	2.055000005247	2.3575951682450666
12:	2.280740571217	2.3770946249648170
13:	3.044517795305	2.3792022206660023
14:	3.643842076482	2.3639416799556105
15:	4.129999952669	2.3715750221688610
16:	4.967440359933	2.3621703790703017

minoration= 2.3529397163351131

****

TROISIEME PAS

nbre de points de controle : 19

objectif= 2.3628164818693607

poLynome 1	exposant 0.11659724
poLynome 2	exposant 0.01208560
poLynome 3	exposant 0.00779711
poLynome 4	exposant 0.08015033
poLynome 5	exposant 0.03135155
poLynome 6	exposant 0.00856760
poLynome 7	exposant 0.00043747

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.124471383528	2.3628054869391037
2:	0.181906399473	2.3933601608244778
3:	0.216507601912	2.3913004815340477
4:	0.285377459391	2.3606555736155135
5:	0.489585339534	2.3605422296342476
6:	0.595320053467	2.3625923551295469
7:	0.707572520939	2.3724724284559840
8:	1.421976831637	2.3625049981331739
9:	1.699999990120	2.3562577361230563
10:	2.020146309989	2.3548278288402195
11:	2.055000005247	2.3557311899909870
12:	2.296485598305	2.3725307170816643
13:	3.020572475387	2.3738940594171531
14:	3.623754037093	2.3627523918870837
15:	4.129999988167	2.3720468021860020
16:	4.986852765765	2.3610693810761113

minoration= 2.3548278288402195

****

QUATRIEME PAS

nbre de points de controle : 20
objectif= 2.3622685557949468

poLynome 1	exposant 0.11613585
poLynome 2	exposant 0.01179442
poLynome 3	exposant 0.00792219
poLynome 4	exposant 0.07509658
poLynome 5	exposant 0.02969316
poLynome 6	exposant 0.01123578
poLynome 7	exposant 0.00203896

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.122779802952	2.3622659040552744
2:	0.181748490283	2.3950890757651622
3:	0.214494968703	2.3969176575817257
4:	0.290609944272	2.3610766231101239
5:	0.483030909608	2.3605558060942564
6:	0.603221380294	2.3622682015776408
7:	0.713801661575	2.3672693209667933
8:	1.409908737491	2.3575845823112561
9:	1.693484447340	2.3580162708154946
10:	1.958152553013	2.3618150616193723
11:	2.055000335817	2.3608175858745598

12:	2.299999975220	2.3721380763088302
13:	3.015552215211	2.3708766766936646
14:	3.602577483254	2.3622684393265055
15:	4.129999242707	2.3754560194302010
16:	5.083373413086	2.3615100147476363

minoration= 2.3575845823112561

****

CINQUIEME PAS

nbre de points de controle : 21
objectif= 2.3621782761061834

poLynome 1	exposant 0.11730343
poLynome 2	exposant 0.01125552
poLynome 3	exposant 0.00801853
poLynome 4	exposant 0.08022580
poLynome 5	exposant 0.03221924
poLynome 6	exposant 0.00787901
poLynome 7	exposant 0.00211997

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.125629256863	2.3621332461659633
2:	0.182536281688	2.3907848197341409
3:	0.216706585216	2.3873099216139460
4:	0.282919858578	2.3594626648412782
5:	0.491903990327	2.3599034021638543
6:	0.593030884012	2.3618042857794922
7:	0.707837967273	2.3725828132724298
8:	1.425470481987	2.3619969368890489
9:	1.699999990120	2.3564461806967605
10:	1.942031947545	2.3596554460355611
11:	2.055000020989	2.3613840008444500
12:	2.299086509307	2.3763182528973486
13:	3.034609387063	2.3742268176017980
14:	3.620340059955	2.3621332279941652
15:	4.129999988167	2.3709530788496675
16:	4.966589617048	2.3601853117297690

minoration= 2.3564461806967605

****

SIXIEME PAS

nbre de points de controle : 22
objectif= 2.3615764211082748

poLynome 1	exposant 0.11581000
poLynome 2	exposant 0.01301681
poLynome 3	exposant 0.00675980
poLynome 4	exposant 0.07642314
poLynome 5	exposant 0.02871196
poLynome 6	exposant 0.01187068
poLynome 7	exposant 0.00190170

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.122831062970	2.3615742719267804
2:	0.180362398501	2.3945967705321437
3:	0.214507405160	2.3996169885249879
4:	0.292712618053	2.3610363527188808
5:	0.481057228811	2.3601855905993032
6:	0.606638724658	2.3615206811195825
7:	0.708327568289	2.3664581365545993
8:	1.405166663609	2.3615597523562162
9:	1.699028737492	2.3615755598935810
10:	2.054999975818	2.3597112442135064
11:	2.063532449754	2.3596545536302381
12:	2.299999900880	2.3688716236173165
13:	3.001019883123	2.3706910423152505
14:	3.625287852908	2.3615027222363284
15:	4.112673140213	2.3735906440415710
16:	5.091030099051	2.3608764363679482

minoration= 2.3596545536302381

****

SEPTIEME PAS

nbre de points de controle : 24
objectif= 2.3614366572256759

poLynome 1	exposant 0.11608074
poLynome 2	exposant 0.01268942
poLynome 3	exposant 0.00692947
poLynome 4	exposant 0.07657873
poLynome 5	exposant 0.02899529
poLynome 6	exposant 0.01152095
poLynome 7	exposant 0.00243541

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.123217020748	2.3614365830591422
2:	0.180650144136	2.3938652811821892
3:	0.214595496727	2.3979632235651031
4:	0.291825300473	2.3605718139164169
5:	0.481871584212	2.3599262150842360
6:	0.605387476121	2.3614122532372534
7:	0.708598913430	2.3667898741860105
8:	1.406850583722	2.3614299007137011
9:	1.697834893992	2.3614325152888454
10:	1.958325892857	2.3638338714880094
11:	2.067121666653	2.3614262913970847
12:	2.299999900880	2.3702866121755611
13:	3.006073171326	2.3708709062094245
14:	3.622912912291	2.3613773447720655
15:	4.117422880798	2.3733268548466570
16:	5.081981288365	2.3606657180549930

minoration= 2.3599262150842360

****

HUITIEME PAS

nbre de points de controle : 25
objectif= 2.3611736068882890

poLynome 1	exposant 0.11610323
poLynome 2	exposant 0.01264238
poLynome 3	exposant 0.00650206
poLynome 4	exposant 0.07639762
poLynome 5	exposant 0.03017025
poLynome 6	exposant 0.01143685
poLynome 7	exposant 0.00236180

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.123729620923	2.3611723442248716
2:	0.180313271197	2.3927306224951297
3:	0.214494968703	2.3977669445481832
4:	0.290190485053	2.3618511348424397
5:	0.483771746813	2.3611578266770157
6:	0.606987433267	2.3611087101534139
7:	0.707307074605	2.3660403427218131
8:	1.406889294529	2.3611669096217133
9:	1.697915832534	2.3611697807469549
10:	1.958734479632	2.3635126361834015
11:	2.066745551109	2.3611654855849498
12:	2.295990790846	2.3707123510163121
13:	3.012216384437	2.3720128202816494
14:	3.632016851324	2.3610547813655092
15:	4.113085107509	2.3722550094996921
16:	5.075098005022	2.3603466195286365

minoration= 2.3603466195286365

****

NEUVIEME PAS

nbre de points de controle : 26
objectif= 2.3611408006030375

poLynome 1	exposant 0.11627032
poLynome 2	exposant 0.01247531
poLynome 3	exposant 0.00637575
poLynome 4	exposant 0.07650777
poLynome 5	exposant 0.03003488
poLynome 6	exposant 0.01150870
poLynome 7	exposant 0.00241888

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.124157792833	2.3611351334655722
2:	0.180269407533	2.3920628643164211
3:	0.214351949454	2.3973803241977658
4:	0.290238884193	2.3616652227209992
5:	0.483308016654	2.3611295427596174
6:	0.607389473781	2.3610628864690462
7:	0.706723092671	2.3659695579691384

8:	1.407895775517	2.3611378251319579
9:	1.697005273933	2.3611328219441979
10:	1.958585902623	2.3636390627738279
11:	2.068325236391	2.3611227414160452
12:	2.295432546534	2.3703861806070511
13:	3.012744832876	2.3717379778451120
14:	3.630136690002	2.3610373120069145
15:	4.109886302625	2.3725021752793748
16:	5.069684186663	2.3611400720829037

minoration= 2.3610373120069145

****

DIXIEME PAS

nbre de points de controle: 28
objectif= 2.3611064907163204

poLynome 1	exposant 0.11621039
poLynome 2	exposant 0.01248900
poLynome 3	exposant 0.00642599
poLynome 4	exposant 0.07648345
poLynome 5	exposant 0.03001569
poLynome 6	exposant 0.01150442
poLynome 7	exposant 0.00238678

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.124049242208	2.3611023162593522
2:	0.180304498464	2.3921891453516021
3:	0.214370604139	2.3974097064821010
4:	0.290276527970	2.3616289266994854
5:	0.483443742555	2.3610956777481269
6:	0.607233580520	2.3611063905268753
7:	0.706935449738	2.3660286798050481
8:	1.407798998498	2.3611032431093219
9:	1.697409966644	2.3610990408445137
10:	1.958808768136	2.3635564649527491
11:	2.067723451522	2.3610928279858186
12:	2.295813167656	2.3704367324334816
13:	3.012480608656	2.3717541045732589
14:	3.629641910707	2.3611064537383545
15:	4.110710237217	2.3725966978067394
16:	5.070766950335	2.3611060404292903

minoration= 2.3610928279858186

****

ONZIEME PAS

nbre de points de controle : 36
objectif= 2.3611014858665022

poLynome 1	exposant 0.11621269
poLynome 2	exposant 0.01248838
poLynome 3	exposant 0.00642260

poLynome 4	exposant 0.07648063
poLynome 5	exposant 0.03002236
poLynome 6	exposant 0.01150450
poLynome 7	exposant 0.00239028

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.124061303388	2.3611014870392872
2:	0.180299234824	2.3921800468074409
3:	0.214368531396	2.3974082826536892
4:	0.290265772605	2.3616358089092880
5:	0.483455053046	2.3611014850493879
6:	0.607249990337	2.3611014856535776
7:	0.706947247353	2.3660198406344952
8:	1.407779643095	2.3611014862264890
9:	1.697086212475	2.3611013855185381
10:	1.958771623884	2.3635679535330926
11:	2.067766436155	2.3611014857101573
12:	2.295775105544	2.3704415796629049
13:	3.012480608656	2.3717593253437264
14:	3.629691388636	2.3611014859391609
15:	4.110637537106	2.3725868649659402
16:	5.070766950335	2.3611014858665022

minoration= 2.3611013855185381

****

DOUZIEME PAS

nbre de points de controle : 44
objectif= 2.3611014748792572

poLynome 1	exposant 0.11621266
poLynome 2	exposant 0.01248841
poLynome 3	exposant 0.00642259
poLynome 4	exposant 0.07648057
poLynome 5	exposant 0.03002229
poLynome 6	exposant 0.01150457
poLynome 7	exposant 0.00239028

	racines sur]0,1[	vaLeur de La fonction
1:	0.124061303388	2.3611014760641880
2:	0.180299234824	2.3921801199097453
3:	0.214368531396	2.3974084805904614
4:	0.290265772605	2.3616358185577349
5:	0.483455053046	2.3611014748792572
6:	0.607249990337	2.3611014748792572
7:	0.706947247353	2.3660197511434941
8:	1.407779643095	2.3611014752294169
9:	1.697086212475	2.3611014748792572
10:	1.958771623884	2.3635680137604019
11:	2.067766436155	2.3611014748792572
12:	2.295775105544	2.3704414721156225
13:	3.012480608656	2.3717592565382724
14:	3.629691388636	2.3611014749521038
15:	4.110637537106	2.3725869057458380
16:	5.070766950335	2.3611014748792572

minoration= 2.3611014748792572

ANNEXE 2

VERIFICATION EN CALCUL FORMEL DES CALCULS DU CHAPITRE 2

Racines de la dérivée de la fonction

$$h(y) = \log(y+4) - \sum_{i=1}^{7} b_i \log|p_i(y)| \text{ pour } y > 0.$$

avec

$$\begin{array}{ll}
p_0 = y+4 & b_0 = 1 \\
p_1 = y & b_1 = 0.11621266 \\
p_2 = y^3 - 5y^2 + 6y - 1 & b_2 = 0.01248841 \\
p_3 = y^4 - 7y^3 + 14y^2 - 8y + 1 & b_3 = 0.00642259 \\
p_4 = y - 1 & b_4 = 0.07648057 \\
p_5 = y^2 - 3y + 1 & b_5 = 0.03002229 \\
p_6 = y^4 - 7y^3 + 13y^2 - 7y + 1 & b_6 = 0.01150457 \\
p_7 = y - 2 & b_7 = 0.00239028
\end{array}$$

Le numérateur de la dérivée de h vaut :

$$q = b_0p_0'p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7 - b_1p_0p_1'p_2p_3p_4p_5p_6p_7 - b_2p_0p_1p_2'p_3p_4p_5p_6p_7$$
$$-b_3p_0p_1p_2p_3'p_4p_5p_6p_7 - b_4p_0p_1p_2p_3p_4'p_5p_6p_7 - b_5p_0p_1p_2p_3p_4p_5'p_6p_7$$
$$-b_6p_0p_1p_2p_3p_4p_5p_6'p_7 - b_7p_0p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7'$$

A l'aide de Maple (commande "realroot"), on exhibe 16 intervalles contenant chacun exactement une racine de h' :

$$[\frac{8524610339}{68719476736}, \frac{136393765425}{1099511627776}], [\frac{24780614655}{137438953472}, \frac{198244917241}{1099511627776}]$$
$$[\frac{235699224675}{1099511627776}, \frac{58924806169}{274877906944}], [\frac{159578510289}{549755813888}, \frac{319157020579}{1099511627776}]$$
$$[\frac{265783557135}{549755813888}, \frac{531567114271}{1099511627776}], [\frac{667671445197}{1099511627776}, \frac{333835722599}{549755813888}]$$
$$[\frac{777271318439}{1099511627776}, \frac{97158914805}{137438953472}], [\frac{1547895618963}{1099511627776}, \frac{386973904741}{274877906944}]$$
$$[\frac{466484607999}{274877906944}, \frac{1865938431997}{1099511627776}], [\frac{1076887576231}{549755813888}, \frac{2153775152463}{1099511627776}]$$

$$[\frac{2273406305271}{1099511627776}, \frac{284175788159}{137438953472}], [\frac{1262136079503}{549755813888}, \frac{2524272159007}{1099511627776}]$$
$$[\frac{3312327021575}{1099511627776}, \frac{414040877697}{137438953472}], [\frac{997714192133}{274877906944}, \frac{3990856768533}{1099511627776}]$$
$$[\frac{2259834360055}{549755813888}, \frac{4519668720111}{1099511627776}], [\frac{1393858122795}{274877906944}, \frac{5575432491181}{1099511627776}]$$

On obtient finalement :

$$\min_{y>0} h(y) \geq 2.3611014654936191392371215 02.$$

ANNEXE 3

POLYNOMES ET EXPOSANTS UTILISES POUR LA MAJORATION DU DIAMETRE TRANSFINI ENTIER.

Nous utiliserons les polynômes suivants que nous donnons sur $]0, +\infty[$ par souci de clarté :
$q_1 = x;$
$q_2 = x - 1;$
$q_3 = x^2 - 3x + 1;$
$q_4 = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1;$
$q_5 = x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1;$
$q_6 = x - 2;$
$q_7 = x^2 - 4x + 1;$ $q_8 = x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x + 1;$
$q_9 = x^8 - 16x^7 + 91x^6 - 244x^5 + 337x^4 - 244x^3 + 91x^2 - 16x + 1.$
$q_{10} = x^{16} - 32x^{15} + 435x^{14} - 3352x^{13} + 16427x^{12} - 54324x^{11} + 125356x^{10} - 205712x^9 + 242403x^8 - 205712x^7 + 125356x^6 - 54324x^5 + 16427x^4 - 3352x^3 + 435x^2 - 32x + 1;$
$q_{11} = x^3 - 5x^2 + 6x - 1;$
$q_{12} = x^3 - 6x^2 + 5x - 1;$
$q_{13} = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1;$
$q_{14} = x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1;$
$q_{15} = x^6 - 11x^5 + 41x^4 - 63x^3 + 41x^2 - 11x + 1;$
$q_{16} = x^8 - 15x^7 + 84x^6 - 225x^5 + 311x^4 - 225x^3 + 84x^2 - 15x + 1;$
$q_{17} = x^6 - 12x^5 + 44x^4 - 67x^3 + 44x^2 - 12x + 1;$
$q_{18} == x^8 - 16x^7 + 90x^6 - 239x^5 + 329x^4 - 239x^3 + 90x^2 - 16x + 1;$

Intervalle	**Polynômes**	**Exposants**
$[0, \frac{1}{2}]$	q_1	$c_1 = 0,48338493$
	q_2	$c_2 = 0,10594217$
	q_3	$c_3 = 0,04256316$
	q_4	$c_4 = 0,01444366$
	q_5	$c_5 = 0,00303665$
	q_{10}	$c_{10} = 0,00017926$
	q_{12}	$c_{12} = 0,00886819$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00292343$
$[0, \frac{1}{3}]$	q_1	$c_1 = 0,5670744$
	q_2	$c_2 = 0,08331792$
	q_3	$c_3 = 0,02761481$
	q_4	$c_4 = 0,01425224$
	q_5	$c_5 = 0,00384644$
	q_{12}	$c_{12} = 0,01427487$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00532710$

$[0, \frac{1}{5}]$	q_1	$c_1 = 0,67508964$
	q_2	$c_2 = 0,05808450$
	q_3	$c_3 = 0,01668214$
	q_4	$c_4 = 0,00874972$
	q_5	$c_5 = 0,00190303$
	q_{12}	$c_{12} = 0,01655356$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00701595$
	q_{17}	$c_{17} = 0,00142731$
	q_{18}	$c_{18} = 0,00094020$
$[0, \frac{1}{6}]$	q_1	$c_1 = 0,70916853$
	q_2	$c_2 = 0,05026687$
	q_3	$c_3 = 0,01409470$
	q_4	$c_4 = 0,00848611$
	q_5	$c_5 = 0,00140945$
	q_{12}	$c_{12} = 0,01677051$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00729181$
	q_{17}	$c_{17} = 0,00150446$
	q_{18}	$c_{18} = 0,00040359$
$[0, \frac{1}{10}]$	q_1	$c_1 = 0,79642586$
	q_2	$c_2 = 0,03270471$
	q_3	$c_3 = 0,00856983$
	q_4	$c_4 = 0,00572115$
	q_5	$c_5 = 0,00045969$
	q_{12}	$c_{12} = 0,01465779$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00666956$
	q_{17}	$c_{17} = 0,00170126$
$[0, \frac{1}{12}]$	q_1	$c_1 = 0,83446095$
	q_2	$c_2 = 0,03126779$
	q_3	$c_3 = 0,01261633$
	q_4	$c_4 = 0,00043057$
	q_5	$c_5 = 0,00217162$
	q_{12}	$c_{12} = 0,00889793$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00278862$

$[0, \frac{1}{15}]$	q_1	$c_1 = 0,86433126$
	q_2	$c_2 = 0,02607403$
	q_3	$c_3 = 0,01129660$
	q_4	$c_4 = 0,00029213$
	q_{10}	$c_{10} = 0,00164414$
	q_{12}	$c_{12} = 0,00697223$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00133136$
$[0, \frac{1}{20}]$	q_1	$c_1 = 0,88247070$
	q_2	$c_2 = 0,01809650$
	q_3	$c_3 = 0,005038957$
	q_4	$c_4 = 0,00374429$
	q_5	$c_5 = 0,00043231$
	q_{12}	$c_{12} = 0,00909448$
	q_{14}	$c_{14} = 0,00500928$
$[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$	q_1	$c_1 = 0,24968390$
	q_2	$c_2 = 0,11780320$
	q_3	$c_3 = 0,03991302$
	q_4	$c_4 = 0,01452753$
	q_5	$c_5 = 0,00496981$
	q_6	$c_6 = 0,00250449$
	q_7	$c_7 = 0,00251002$
	q_{11}	$c_{11} = 0,00629510$
	q_{12}	$c_{12} = 0,00242785$
	q_{13}	$c_{13} = 0,00121269$
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$	q_1	$c_1 = 0,44681315$
	q_2	$c_2 = 0,11174851$
	q_3	$c_3 = 0,03902039$
	q_4	$c_4 = 0,01219496$
	q_5	$c_5 = 0,00578522$
	q_8	$c_8 = 0,00091250$
	q_9	$c_9 = 0,00038806$
	q_{10}	$c_{10} = 0,00025345$
	q_{15}	$c_{15} = 0,00287499$
	q_{16}	$c_{16} = 0,00131785$

$[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$	q_1	$c_1 = 0,27210863$
	q_2	$c_2 = 0,12058713$
	q_3	$c_3 = 0,04074475$
	q_4	$c_4 = 0,01304025$
	q_5	$c_5 = 0,00377440$
	q_6	$c_6 = 0,00453351$
	q_7	$c_7 = 0,00286315$
	q_8	$c_8 = 0,00115298$
	q_{15}	$c_{15} = 0,00489431$
	q_{16}	$c_{16} = 0,00114152$
$[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]$	q_1	$c_1 = 0,18085238$
	q_2	$c_2 = 0,10425872$
	q_3	$c_3 = 0,03415194$
	q_4	$c_4 = 0,00695300$
	q_5	$c_5 = 0,00260149$
	q_6	$c_6 = 0,01115492$
	q_7	$c_7 = 0,00274602$
	q_8	$c_8 = 0,00175859$
	q_{15}	$c_{15} = 0,00386288$
	q_{16}	$c_{16} = 0,00004502$
$[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$	q_1	$c_1 = 0,28137387$
	q_2	$c_2 = 0,12101489$
	q_3	$c_3 = 0,04229396$
	q_4	$c_4 = 0,01265291$
	q_5	$c_5 = 0,00364489$
	q_6	$c_6 = 0,00257934$
	q_7	$c_7 = 0,00314759$
	q_{15}	$c_{15} = 0,00517082$
	q_{16}	$c_{16} = 0,00286478$

ANNEXE 4

EXEMPLE D'UTILISATION DE LA METHODE DU DERNIER CHAPITRE POUR LE PROBLEME DE ZAGIER.

On choisit de présenter le cas $d = 16$.
On a :

$$\begin{pmatrix} v_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{pmatrix} + N$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 16 & -8 & 0 & 4 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -8 & 4 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$M' \;=\; M^{-1}\left(\begin{pmatrix} v_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_1 \end{pmatrix} - N\right) =$$

$$\begin{pmatrix}
2v_8 + 1 \\
8v_8 - v_7 + \frac{3}{10}v_6 - \frac{1}{10}v_5 + \frac{1}{2}v_4 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{3}{10}v_2 - \frac{1}{10}v_1 + 4 \\
18v_8 - 3v_7 + \frac{13}{10}v_6 - \frac{1}{10}v_5 + 2v_4 - v_3 - \frac{4}{5}v_2 - \frac{3}{5}v_1 + \frac{19}{2} \\
26v_8 - 6v_7 + \frac{14}{5}v_6 + \frac{2}{5}v_5 + 4v_4 + -v_3 - \frac{13}{10}v_2 - \frac{11}{10}v_1 + \frac{29}{2} \\
28v_8 - 7v_7 + \frac{7}{2}v_6 + \frac{3}{2}v_5 + 5v_4 - \frac{3}{2}v_2 - \frac{3}{2}v_1 + 17 \\
22v_8 - 7v_7 + \frac{27}{10}v_6 + \frac{21}{10}v_5 + \frac{9}{2}v_4 + \frac{1}{2}v_3 - \frac{6}{5}v_2 - \frac{7}{5}v_1 + \frac{29}{2} \\
12v_8 - 4v_7 + \frac{6}{5}v_6 + \frac{8}{5}v_5 + 3v_4 + v_3 - \frac{7}{10}v_2 - \frac{9}{10}v_1 + \frac{19}{2} \\
4v_8 - 2v_7 + \frac{1}{5}v_6 + \frac{3}{5}v_5 + v_4 + v_3 - \frac{1}{5}v_2 - \frac{2}{5}v_1 + 4
\end{pmatrix}$$

Or M' doit être à coefficients entiers. En particulier, 5 fois la quatrième ligne appartient à $\mathbb{Z}$. On en déduit l'existence de $u_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $v_2 = v_1 + 1 + 2u_2$. M' devient :

$$M' = \begin{pmatrix} 2v_8+1 \\ 8v_8 - v_7 + \frac{3}{10}v_6 - \frac{1}{10}v_5 + \frac{1}{2}v_4 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}u_2 + \frac{37}{10} \\ 18v_8 - 3v_7 + \frac{13}{10}v_6 - \frac{1}{10}v_5 + 2v_4 - v_3 - \frac{7}{5}v_1 - \frac{8}{5}u_2 + \frac{87}{10} \\ 26v_8 - 6v_7 + \frac{14}{5}v_6 + \frac{2}{5}v_5 + 4v_4 - v_3 - \frac{12}{5}v_1 - \frac{13}{5}u_2 + \frac{66}{5} \\ 28v_8 - 7v_7 + \frac{7}{2}v_6 + \frac{3}{2}v_5 + 5v_4 - 3v_1 - 3u_2 + \frac{31}{2} \\ 22v_8 - 7v_7 + \frac{27}{10}v_6 + \frac{21}{10}v_5 + \frac{9}{2}v_4 + \frac{1}{2}v_3 - \frac{13}{5}v_1 - \frac{12}{5}u_2 + \frac{133}{10} \\ 12v_8 - 4v_7 + \frac{6}{5}v_6 + \frac{8}{5}v_5 + 3v_4 + v_3 - \frac{8}{5}v_1 - \frac{7}{5}u_2 + \frac{44}{5} \\ 4v_8 - 2v_7 + \frac{1}{5}v_6 + \frac{3}{5}v_5 + v_4 + v_3 - \frac{3}{5}v_1 - \frac{2}{5}u_2 + \frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

La cinquième ligne appartient à $\mathbb{Z}$, donc il existe $u_6 \in \mathbb{Z}$ tel que $v_6 = v_5 + 1 + 2u_6$. Par conséquent,

$$M' = \begin{pmatrix} 2v_8+1 \\ 8v_8 - v_7 + \frac{1}{5}v_5 + \frac{1}{2}v_4 - \frac{1}{2}v_3 - \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}u_2 + \frac{3}{5}u_6 + 4 \\ 18v_8 - 3v_7 + \frac{6}{5}v_5 + 2v_4 - v_3 - \frac{7}{5}v_1 - \frac{8}{5}u_2 + \frac{13}{5u_6} + 10 \\ 26v_8 - 6v_7 + \frac{16}{5}v_5 + \frac{4}{v4} - v_3 - \frac{12}{5}v_1 - \frac{13}{5}u_2 + \frac{28}{5}u_6 + 16 \\ 28v_8 - 7v_7 + 5v_5 + 5v_4 - 3v_1 - 3u_2 + 7u_6 + 19 \\ 22v_8 - 7v_7 + \frac{24}{5}v_5 + \frac{9}{2}v_4 + \frac{1}{2}v_3 - \frac{13}{5}v_1 - \frac{12}{5}u_2 + \frac{27}{5}u_6 + 16 \\ 12v_8 - 4v_7 + \frac{14}{5}v_5 + 3v_4 + v_3 - \frac{8}{5}v_1 - \frac{7}{5}u_2 + \frac{12}{5}u_6 + 10 \\ 4v_8 - 2v_7 + \frac{4}{5}v_5 + v_4 + v_3 - \frac{3}{5}v_1 - \frac{2}{5}u_2 + \frac{2}{5}u_6 + 4 \end{pmatrix}$$

La seconde ligne appartient à $\mathbb{Z}$ donc il existe $u_4 \in \mathbb{Z}$ tel que $v_4 = v_3 + 2u_4$. Alors

$$M' = \begin{pmatrix} 2v_8+1 \\ 8v_8 - v_7 + \frac{1}{5}v_5 - \frac{2}{5}v_1 - \frac{3}{5}u_2 + \frac{3}{5}u_6 + u_4 + 4 \\ 18v_8 - 3v_7 + \frac{6}{5}v_5 + v_3 - \frac{7}{5}v_1 - \frac{8}{5}u_2 + \frac{13}{5}u_6 + 4u_4 + 10 \\ 26v_8 - 6v_7 + \frac{16}{5}v_5 + 3v_3 + -\frac{12}{5}v_1 - \frac{13}{5}u_2 + \frac{28}{5}u_6 + 8u_4 + 16 \\ 28v_8 - 7v_7 + 5v_5 + 5v_3 - 3v_1 - 3u_2 + 7u_6 + 10u_4 + 19 \\ 22v_8 - 7v_7 + \frac{24}{5}v_5 + 5v_3 + -\frac{13}{5}v_1 - \frac{12}{5}u_2 + \frac{27}{5}u_6 + 9u_4 + 16 \\ 12v_8 - 4v_7 + \frac{14}{5}v_5 + 4v_3 + -\frac{8}{5}v_1 - \frac{7}{5}u_2 + \frac{12}{5}u_6 + 6u_4 + 10 \\ 4v_8 - 2v_7 + \frac{4}{5}v_5 + 2v_3 - \frac{3}{5}v_1 - \frac{2}{5}u_2 + \frac{2}{5}u_6 + 2u_4 + 4 \end{pmatrix}$$

A nouveau, la seconde ligne appartient à $\mathbb{Z}$ donc il existe $u_5 \in \mathbb{Z}$ tel que $v_5 = 2v_1 + 3u_2 + 2u_6 + 5u_5$. Et finalement,

$$M' = \begin{pmatrix} 2v_8+1 \\ 8v_8 - v_7 + u_6 + u_5 + u_4 + 4 \\ 18v_8 - 3v_7 + v_3 + v_1 + 2u_2 + 5u_6 + 4u_4 + 6u_5 + 10 \\ 26v_8 - 6v_7 + 3v_3 + 4v_1 + 7u_2 + 12u_6 + 8u_4 + 16u_5 + 16 \\ 28v_8 - 7v_7 + 5v_5 + 5v_3 - 3v_1 - 3u_2 + 7u_6 + 10u_4 + 19 \\ 22v_8 - 7v_7 + 5v_3 + 7v_1 + 12u_2 + 15u_6 + 9u_4 + 24u_5 + 16 \\ 12v_8 - 4v_7 + 4v_3 + 4v_1 + 7u_2 + 8u_6 + 6u_4 + 14u_5 + 10 \\ 4v_8 - 2v_7 + 2v_3 + v_1 + 2u_2 + 2u_6 + 2u_4 + 4u_5 + 4 \end{pmatrix}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned}
b_8 &= 2v_8 + 1 \\
b_7 &= 8v_8 - v_7 + u_6 + u_4 + u_5 + 4 \\
b_6 &= 18v_8 - 3v_7 + v_3 + v_1 + 2u_2 + 5u_6 + 4u_4 + 6u_5 + 10 \\
b_5 &= 26v_8 - 6v_7 + 3v_3 + 4v_1 + 7u_2 + 12u_6 + 8u_4 + 16u_5 + 16 \\
b_4 &= 28v_8 - 7v_7 + 5v_3 + 7v_1 + 12u_2 + 17u_6 + 10u_4 + 25u_5 + 19 \\
b_3 &= 22v_8 - 7v_7 + 5v_3 + 7v_1 + 12u_2 + 15u_6 + 9u_4 + 24u_5 + 16 \\
b_2 &= 12v_8 - 4v_7 + 4v_3 + 4v_1 + 7u_2 + 8u_6 + 6u_4 + 14u_5 + 10 \\
b_1 &= 4v_8 - 2v_7 + 2v_3 + v_1 + 2u_2 + 2u_6 + 2u_4 + 4u_5 + 4.
\end{aligned}$$

ANNEXE 5

LISTE DE TOUS LES POLYNOMES DE ZAGIER UNITAIRES IRREDUCTIBLES EN $w = z^2 - z$ ET TELS QUE $\zeta(P) = (M(P(z))M(P(1-z)))^{\frac{1}{deg(P)}} < 1,310$ ET $6 \leq deg(P) \leq 18$.

$deg(P)$	$\zeta(P)$	coefficients de Q_P							
6	1,30303332	1	−1	−2	−1				
8	1,27201964	1	2	4	3	1			
	1,30612136	1	1	2	2	1			
	1,30744782	1	0	1	2	1			
	1,30855601	1	1	3	3	1			
10	1,29554667	1	1	−1	−4	−3	−1		
	1,30729354	1	1	0	−3	−3	−1		
	1,30797444	1	1	1	−1	−2	−1		
	1,30824057	1	2	2	−1	−2	−1		
12	1,29419803	1	3	6	8	8	4	1	
	1,30014417	1	2	5	8	8	4	1	
	1,30061777	1	1	3	6	7	4	1	
	1,30176505	1	2	4	7	8	4	1	
	1,30338103	1	2	3	3	4	3	1	
	1,30482344	1	2	4	6	7	4	1	
	1,30502529	1	1	2	5	7	4	1	
	1,30545878	1	0	1	5	7	4	1	
	1,30572058	1	1	1	2	4	3	1	
	1,30730252	1	0	0	2	4	3	1	
	1,30836551	1	2	5	6	5	3	1	
	1,30933015	1	1	0	−5	−7	−4	−1	
	1,30942512	1	1	0	1	4	3	1	
14	1,29736878	1	1	2	0	−5	−7	−4	−1
	1,30153344	1	0	0	−1	−5	−7	−4	−1
	1,30350967	1	3	4	0	−6	−8	−4	−1
	1,30367956	1	−1	0	2	−2	−6	−4	−1
	1,30397330	1	1	2	5	10	10	5	1
	1,30451514	1	1	0	−4	−8	−8	−4	−1
	1,30518810	1	2	2	−2	−7	−8	−4	−1
	1,30989113	1	2	2	−3	−8	−8	−4	−1
	1,30990084	1	1	2	1	−4	−7	−4	−1

16	1,29193978	1	2	4	7	13	16	12	5	1	
	1,29359769	1	1	−1	−3	3	11	11	5	1	
	1,29421840	1	2	6	10	14	16	12	5	1	
	1,29433152	1	0	−1	0	6	12	11	5	1	
	1,29475373	1	1	0	1	9	15	12	5	1	
	1,29499605	1	1	−1	0	9	15	12	5	1	
	1,29509479	1	3	7	13	20	20	13	5	1	
	1,29532004	1	3	8	14	20	20	13	5	1	
	1,29591473	1	1	1	1	6	12	11	5	1	
	1,29696711	1	0	−2	−3	3	11	11	5	1	
	1,29735423	1	2	5	9	14	16	12	5	1	
	1,29743116	1	3	8	16	26	27	17	6	1	
	1,29788913	1	1	1	3	10	15	12	5	1	
	1,29811603	1	2	4	8	16	19	13	5	1	
	1,29839277	1	1	2	4	10	15	12	5	1	
	1,29859013	1	2	4	6	11	15	12	5	1	
	1,29901300	1	1	2	3	7	12	11	5	1	
	1,29965773	1	3	7	12	18	19	13	5	1	
	1,29967923	1	0	−4	−5	5	14	12	5	1	
	1,29973316	1	1	0	0	7	14	12	5	1	
	1,29980365	1	1	0	2	10	15	12	5	1	
18	1,29033496	1	3	4	−3	−18	−32	−31	−18	−6	−1
	1,29293187	1	2	2	−1	−9	−22	−26	−17	−6	−1
	1,29402488	1	2	3	2	0	−6	−12	−11	−5	−1
	1,29555600	1	3	7	9	7	−2	−11	−11	−5	−1
	1,29652783	1	2	2	−4	−15	−26	−27	−17	−6	−1
	1,29653366	1	1	0	0	−3	−15	−22	−16	−6	−1
	1,29665464	1	2	3	−1	−12	−25	−27	−17	−6	−1
	1,29701775	1	2	2	−2	−12	−25	−27	−17	−6	−1
	1,29734140	1	3	5	2	−8	−22	−26	−17	−6	−1
	1,29797390	1	2	2	−2	−9	−19	−23	−16	−6	−1
	1,29800129	1	2	3	0	−9	−22	−26	−17	−6	−1
	1,29865039	1	1	1	1	−3	−15	−22	−16	−6	−1

ANNEXE 6

LISTE DE TOUS LES POLYNOMES UNITAIRES IRREDUCTIBLES TOTALEMENT POSITIFS TELS QUE $R(P) = (L(P))^{\frac{1}{deg(P)}} < 2,3769$ ET $3 \leq deg(P) \leq 7$.

LISTE DE POLYNOMES UNITAIRES IRREDUCTIBLES TOTALEMENT POSITIFS OBTENUS A PARTIR DE LA LISTE PRECEDENTE PAR LA TRANSFORMATION T.

$deg(P)$	$R(P)$	coefficients de P							
3	2,35133468	1	−5	6	−1				
	2,35133468	1	−6	5	−1				
4	2,32059578	1	−7	13	−7	1			
	2,35961106	1	−7	14	−8	1			
	2,35961106	1	−8	14	−7	1			
6	2,37397152	1	11	42	67	45	12	1	
	2,37397152	1	12	45	67	42	11	1	
7	2,37241947	1	13	61	131	136	66	14	1
	2,37241947	1	14	66	136	131	61	13	1
	2,37561145	1	13	61	132	138	67	14	1
	2,37561145	1	14	67	138	132	61	13	1

Polynômes unitaires irréductibles totalement positifs réciproques obtenus à partir de la liste précédente par la transformation $T(P)(x) = x^{deg(P)}P(x + \frac{1}{x} - 2)$ et tels que $R(T(P)) < 2,3769$, $12 \leq deg(T(P)) \leq 28$.

Descendants de $P_1 = x^6 - 11x^5 + 42x^4 - 67x^3 + 45x^2 - 12x + 1$.

$T(P_1)(x) = x^{12} + 1 - 23(x^{11} + x) + 218(x^{10} + x^2) - 1118(x^9 + x^3) + 3438(x^8 + x^4) - 6651(x^7 + x^5) + 8271x^6$
et

$$R(T(P_1)) = 2.36851917$$

$T^2(P_1)(x) = x^{24} + 1 - 47(x^{23} + x) + 1000(x^{22} + x^2) - 12815(x^{21} + x^3) + 111028(x^{20} + x^4) - 691982(x^{19} + x^5) + 3222721(x^{18} + x^6) - 11499579(x^{17} + x^7) + 31980645(x^{16} + x^8) - 70138498(x^{15} + x^9) + 122284869(x^{14} + x^{10}) - 170366934(x^{13} + x^{11}) + 190219183x^{12}$
et

$$R(T^2(P_1)) = 2.37243919$$

Descendants de $P_2 = x^7 - 13x^6 + 61x^5 - 131x^4 + 136x^3 - 66x^2 + 14x - 1$.

$T(P_2)(x) = x^{14} + 1 - 27(x^{13} + x) + 30(x^{12} + x^2) - 1963(x^{11} + x^3) + 7790(x^{10} + x^4) - 20307(x^9 + x^5) + 35763(x^8 + x^6) - 43131x^7$
et

$$R(T(P_2)) = 2.36909353$$

$T^2(P_2(x)) = x^{28} + 1 - 55(x^{27} + x) + 1388(x^{26} + x^2) - 21406(x^{25} + x^3) + 226659(x^{24} + x^4) - 1754882(x^{23} + x^5) + 10330017(x^{22} + x^6) - 47453737(x^{21} + x^7) + 173262134(x^{20} + x^8) - 509470920(x^{19} + x^9) + 1218079238(x^{18} + x^{10}) - 2384403588(x^{17} + x^{11}) + 3840194748(x^{16} + x^{12}) - 5105087439(x^{15} + x^{13}) + 5612195685x^{14}$
et

$$R(T^2(P_2)) = 2.37288714$$

Descendants de $P_3 = x^7 - 13x^6 + 61x^5 - 132x^4 + 138x^3 - 67x^2 + 14x - 1$.

$T(P_3)(x) = x^{14} + 1 - 27(x^{13} + x) + 308(x^{12} + x^2) - 1964(x^{11} + x^3) + 7800(x^{10} + x^4) - 203487(x^9 + x^5) + 35853(x^8 + x^6) - 43247x^7$
et

$$R(T(P_3)) = 2.36947892$$

$T^2(P_3)(x) = x^{28} + 1 - 55(x^{27} + x) + 1388(x^{26} + x^2) - 21407(x^{25} + x^3) + 226691(x^{24} + x^4) - 1755354(x^{23} + x^5) + 10334285(x^{22} + x^6) - 47480281(x^{21} + x^7) + 173382888(x^{20} + x^8) - 509888110(x^{19} + x^9) + 1219201054(x^{18} + x^{10}) - 2386790644(x^{17} + x^{11}) + 3844259360(x^{16} + x^{12}) - 5110666176(x^{15} + x^{13}) + 5618392721x^{14}$
et

$$R(T^2(P_3)) = 2.37297565$$

ANNEXE 7

EXEMPLES DE POLYNOMES UNITAIRES IRREDUCTIBLES DE LONGUEUR ABSOLUE $< 2,3769$ OBTENUS PAR LA TRANSFORMATION T A PARTIR DE POLYNOMES DE LONGUEUR ABSOLUE $> 2,3769$.

Les polynômes Q_i, $1 \leq i \leq 32$, proviennent d'une table de polynômes établie par C.J.Smyth dans [32].
Nous nous sommes limités aux descendants de degré ≤ 28.

Descendants de $Q_1 = x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 29x^2 + 11x - 1$, $R(Q_1) = 2,38395550$.

$T(Q_1)(x) = x^{10} - 19x^9 + 143x^8 - 557x^7 + 1231x^6 - 1599x^5 + 1231x^4 - 557x^3 + 143x^2 - 19x + 1$
et

$$R(T(Q_1)) = 2.36616030$$

$T^2(Q_1)(x) = x^{20} - 39x^{19} + 675x^{18} - 6892x^{17} + 46538x^{16} - 220782x^{15} + 763027x^{14} - 1965597x^{13} + 3830062x^{12} - 5696577x^{11} + 6499169x^{10} - 5696577x^9 + 3830062x^8 - 1965597x^7 + 763027x^6 - 220782x^5 + 46538x^4 - 6892x^3 + 675x^2 - 39x + 1$
et

$$R(T^2(Q_1)) = 2.37113641$$

Descendants de $Q_2 = x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 31x^2 + 12x - 1$, $R(Q_2) = 2,40822468$.

$T(Q_2)(x) = x^{10} - 19x^9 + 144x^8 - 565x^7 + 1255x^6 - 1633x^5 + 1255x^4 - 565x^3 + 144x^2 - 19x + 1$
et

$$R(T(Q_2)) = 2.37042684$$

$T^2(Q_2)(x) = x^{20} - 39x^{19} + 676x^{18} - 6916x^{17} + 46794x^{16} - 222392x^{15} + 769707x^{14} - 1984983x^{13} + 3870767x^{12} - 5759657x^{11} + 6572085x^{10} - 5759657x^9 + 3870767x^8 - 1984983x^7 + 769707x^6 - 222392x^5 + 46794x^4 - 6916x^3 + 676x^2 - 39x + 1$
et

$$R(T^2(Q_2)) = 2.37239377$$

Descendants de $Q_3 = x^5 - 9x^4 + 27x^3 - 32x^2 + 13x - 1$, $R(Q_3) = 2,42000140$.

$T(Q_3)(x) = x^{10} - 19x^9 + 144x^8 - 566x^7 + 1260x^6 - 1641x^5 + 1260x^4 - 566x^3 + 144x^2 - 19x + 1$
et

$$R(T(Q_3)) = 2.37127192$$

$T^2(Q_3)(x) = x^{20} - 39x^{19} + 676x^{18} - 6917x^{17} + 46813x^{16} - 222551x^{15} + 770486x^{14} - 1987485x^{13} + 3876350x^{12} - 5768595x^{11} + 6582523x^{10} - 5768595x^9 + 3876350x^8 -$

$1987485x^7 + 770486x^6 - 222551x^5 + 46813x^4 - 6917x^3 + 676x^2 - 39x + 1$
et

$$R(T^2(Q_3)) = 2.37256621$$

Descendants de $Q_4 = x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 35x^2 + 15x - 1$, $R(Q_4) = 2,45401945$.

$T(Q_4)(x) = x^{10} - 19x^9 + 145x^8 - 575x^7 + 1289x^6 - 1683x^5 + 1289x^4 - 575x^3 + 145x^2 - 19x + 1$
et

$$R(T(Q_4)) = 2.37628624$$

$T^2(Q_4)(x) = x^{20} - 39x^{19} + 677x^{18} - 6942x^{17} + 47088x^{16} - 224320x^{15} + 777945x^{14} - 2009373x^{13} + 3922638x^{12} - 5840613x^{11} + 6665877x^{10} - 5840613x^9 + 3922638x^8 - 2009373x^7 + 777945x^6 - 224320x^5 + 47088x^4 - 6942x^3 + 677x^2 - 39x + 1$
et

$$R(T^2(Q_4)) = 2.37397984$$

Descendants de $Q_5 = x^6 - 11x^5 + 42x^4 - 68x^3 + 46x^2 - 12x + 1, R(Q_5) = 2,37837188$.

$T(Q_5)(x) = x^{12} - 23x^{11} + 218x^{10} - 1119x^9 + 3445x^8 - 6670x^7 + 8297x^6 - 6670x^5 + 3445x^4 - 1119x^3 + 218x^2 - 23x + 1$
et

$$R(T(Q_5)) = 2.36902518$$

$T^2(Q_5)(x) = x^{24} - 47x^{23} + 1000x^{22} - 12816x^{21} + 111053x^{20} - 692266x^{19} + 3224669x^{18} - 11508619x^{17} + 32010782x^{16} - 70213289x^{15} + 122426139x^{14} - 170572818x^{13} + 190452423x^{12} - 170572818x^{11} + 122426139x^{10} - 70213289x^9 + 32010782x^8 - 11508619x^7 + 3224669x^6 - 692266x^5 + 111053x^4 - 12816x^3 + 1000x^2 - 47x + 1$
et

$$R(T^2(Q_5)) = 2.37255257$$

Descendants de $Q_6 = x^6 - 11x^5 + 42x^4 - 68x^3 + 47x^2 - 13x + 1$, $R(Q_7) = 2,38273191$.

$T(Q_6) = x^{12} - 23x^{11} + 218x^{10} - 1119x^9 + 3446x^8 - 6675x^7 + 8305x^6 - 6675x^5 + 3446x^4 - 1119x^3 + 218x^2 - 23x + 1$
et

$$R(T(Q_6)) = 2.36915149$$

$T^2(Q_6) = x^{24} - 47x^{23} + 1000x^{22} - 12816x^{21} + 111054x^{20} - 692287x^{19} + 3224867x^{18} - 11509735x^{17} + 32015001x^{16} - 70224655x^{15} + 122448745x^{14} - 170606715x^{13} + 190491175x^{12} - 170606715x^{11} + 122448745x^{10} - 70224655x^{9} + 32015001x^{8} - 11509735x^{7} + 3224867x^{6} - 692287x^{5} + 111054x^{4} - 12816x^{3} + 1000x^{2} - 47x + 1$
et

$$R(T^2(Q_6)) = 2.37257069$$

Descendants de $Q_7 = x^6 - 11x^5 + 43x^4 - 72x^3 + 50x^2 - 13x + 1$, $R(Q_7) = 2,39978441$.

$T(Q_7) = x^{12} - 23x^{11} + 219x^{10} - 1131x^{9} + 3501x^{8} - 6803x^{7} + 8473x^{6} - 6803x^{5} + 3501x^{4} - 1131x^{3} + 219x^{2} - 23x + 1$
et

$$R(T(Q_7)) = 2.37265858$$

$T^2(Q_7) = x^{24} - 47x^{23} + 1001x^{22} - 12848x^{21} + 111515x^{20} - 696271x^{19} + 3248064x^{18} - 11606551x^{17} + 32315692x^{16} - 70936483x^{15} + 123753432x^{14} - 172476555x^{13} + 192598101x^{12} - 172476555x^{11} + 123753432x^{10} - 70936483x^{9} + 32315692x^{8} - 11606551x^{7} + 3248064x^{6} - 696271x^{5} + 111515x^{4} - 12848x^{3} + 1001x^{2} - 47x + 1$
et

$$R(T^2(Q_7)) = 2.37361338$$

Descendants de $Q_8 = x^6 - 11x^5 + 43x^4 - 72x^3 + 51x^2 - 14x + 1$, $R(Q_8) = 2,40395436$.

$T(Q_8) = x^{12} - 23x^{11} + 219x^{10} - 1131x^{9} + 3502x^{8} - 6808x^{7} + 8481x^{6} - 6808x^{5} + 3502x^{4} - 1131x^{3} + 219x^{2} - 23x + 1$
et

$$R(T(Q_8)) = 2.37278278$$

$T^2(Q_8) = x^{24} - 47x^{23} + 1001x^{22} - 12848x^{21} + 111516x^{20} - 696292x^{19} + 3248262x^{18} - 11607667x^{17} + 32319911x^{16} - 70947849x^{15} + 123776038x^{14} - 172510452x^{13} + 192636853x^{12} - 172510452x^{11} + 123776038x^{10} - 70947849x^{9} + 32319911x^{8} - 11607667x^{7} + 3248262x^{6} - 696292x^{5} + 111516x^{4} - 12848x^{3} + 1001x^{2} - 47x + 1$
et

$$R(T^2(Q_8)) = 2.37363132$$

Descendants de $Q_9 = x^6 - 11x^5 + 43x^4 - 73x^3 + 53x^2 - 15x + 1$, $R(Q_9) = 2,41422382$.

$T(Q_9) = x^{12} - 23x^{11} + 219x^{10} - 1132x^9 + 3510x^8 - 6832x^7 + 8515x^6 - 6832x^5 + 3510x^4 - 1132x^3 + 219x^2 - 23x + 1$
et
$$R(T(Q_9)) = 2.37340273$$

$T^2(Q_9) = x^{24} - 47x^{23} + 1001x^{22} - 12849x^{21} + 111542x^{20} - 696597x^{19} + 3250408x^{18} - 11617823x^{17} + 32354267x^{16} - 71034006x^{15} + 123939914x^{14} - 172750233x^{13} + 192908845x^{12} - 172750233x^{11} + 123939914x^{10} - 71034006x^9 + 32354267x^8 - 11617823x^7 + 3250408x^6 - 696597x^5 + 111542x^4 - 12849x^3 + 1001x^2 - 47x + 1$
et
$$R(T^2(Q_9)) = 2.37376131$$

Descendants de $Q_{10} = x^7 - 13x^6 + 61x^5 - 133x^4 + 142x^3 - 71x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{10}) = 2,38348066$.

$T(Q_{10}) = x^{14} - 27x^{13} + 308x^{12} - 1965x^{11} + 7812x^{10} - 20404x^9 + 35986x^8 - 43423x^7 + 35986x^6 - 20404x^5 + 7812x^4 - 1965x^3 + 308x^2 - 27x + 1$
et
$$R(T(Q_{10})) = 2.37003630$$

$T^2(Q_{10}) = x^{28} - 55x^{27} + 1388x^{26} - 21408x^{25} + 226725x^{24} - 1755881x^{23} + 10339246x^{22} - 47512148x^{21} + 173531615x^{20} - 510412279x^{19} + 1220632000x^{18} - 2389869235x^{17} + 3849540877x^{16} - 5117946621x^{15} + 5626491551x^{14} - 5117946621x^{13} + 3849540877x^{12} - 2389869235x^{11} + 1220632000x^{10} - 510412279x^9 + 173531615x^8 - 47512148x^7 + 10339246x^6 - 1755881x^5 + 226725x^4 - 21408x^3 + 1388x^2 - 55x + 1$
et
$$R(T^2(Q_{10})) = 2.37309040$$

Descendants de $Q_{11} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 135x^4 + 140x^3 - 67x^2 + 14x - 1$, $R(Q_{11}) = 2,38035169$.

$T(Q_{11}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1977x^{11} + 7871x^{10} - 20564x^9 + 36261x^8 - 43749x^7 + 36261x^6 - 20564x^5 + 7871x^4 - 1977x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et
$$R(T(Q_{11})) = 2.37131755$$

$T^2(Q_{11}) = x^{28} - 55x^{27} + 1389x^{26} - 21444x^{25} + 227324x^{24} - 1762017x^{23} + 10382717x^{22} - 47738898x^{21} + 174436473x^{20} - 513245201x^{19} + 1227710692x^{18} - 2404153609x^{17} +$

$3873007145x^{16}-5149493303x^{15}+5661297573x^{14}-5149493303x^{13}+3873007145x^{12}-2404153609x^{11}+1227710692x^{10}-513245201x^{9}+174436473x^{8}-47738898x^{7}+10382717x^{6}-1762017x^{5}+227324x^{4}-21444x^{3}+1389x^{2}-55x+1$
et

$$R(T^2(Q_{11})) = 2.37360259$$

Descendants de $Q_{12} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 136x^4 + 142x^3 - 68x^2 + 14x - 1$, $R(Q_{12}) = 2,38348066$.

$T(Q_{12}) = x^{14}-27x^{13}+309x^{12}-1978x^{11}+7881x^{10}-20605x^{9}+36351x^{8}-43865x^{7}+36351x^{6}-20605x^{5}+7881x^{4}-1978x^{3}+309x^{2}-27x+1$
et

$$R(T(Q_{12})) = 2.37169828$$

$T^2(Q_{12}) = x^{28}-55x^{27}+1389x^{26}-21445x^{25}+227356x^{24}-1762489x^{23}+10386985x^{22}-47765442x^{21}+174557227x^{20}-513662391x^{19}+1228832508x^{18}-2406540665x^{17}+3877071757x^{16}-5155072040x^{15}+5667494609x^{14}-5155072040x^{13}+3877071757x^{12}-2406540665x^{11}+1228832508x^{10}-513662391x^{9}+174557227x^{8}-47765442x^{7}+10386985x^{6}-1762489x^{5}+227356x^{4}-21445x^{3}+1389x^{2}-55x+1$
et

$$R(T^2(Q_{12})) = 2.37369038$$

Descendants de $Q_{13} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 136x^4 + 144x^3 - 71x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{13}) = 2,38812841$.

$T(Q_{13}) = x^{14}-27x^{13}+309x^{12}-1978x^{11}+7883x^{10}-20620x^{9}+36394x^{8}-43925x^{7}+36394x^{6}-20620x^{5}+7883x^{4}-1978x^{3}+309x^{2}-27x+1$
et

$$R(T(Q_{13})) = 2.37186934$$

$T^2(Q_{13}) = x^{28}-55x^{27}+1389x^{26}-21445x^{25}+227358x^{24}-1762544x^{23}+10387678x^{22}-47770765x^{21}+174585200x^{20}-513769370x^{19}+1229141638x^{18}-2407232200x^{17}+3878288662x^{16}-5156773748x^{15}+5669396403x^{14}-5156773748x^{13}+3878288662x^{12}-2407232200x^{11}+1229141638x^{10}-513769370x^{9}+174585200x^{8}-47770765x^{7}+10387678x^{6}-1762544x^{5}+227358x^{4}-21445x^{3}+1389x^{2}-55x+1$
et

$$R(T^2(Q_{13})) = 2.37371652$$

Descendants de $Q_{14} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 137x^4 + 146x^3 - 72x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{14}) = 2,39119701$.

$T(Q_{14}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1979x^{11} + 7893x^{10} - 20661x^9 + 36484x^8 - 44041x^7 + 36484x^6 - 20661x^5 + 7893x^4 - 1979x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{14})) = 2.37224892$$

$T^2(Q_{14}) = x^{28} - 55x^{27} + 1389x^{26} - 21446x^{25} + 227390x^{24} - 1763016x^{23} + 10391946x^{22} - 47797309x^{21} + 174705954x^{20} - 514186560x^{19} + 1230263454x^{18} - 2409619256x^{17} + 3882353274x^{16} - 5162352485x^{15} + 5675593439x^{14} - 5162352485x^{13} + 3882353274x^{12} - 2409619256x^{11} + 1230263454x^{10} - 514186560x^9 + 174705954x^8 - 47797309x^7 + 10391946x^6 - 1763016x^5 + 227390x^4 - 21446x^3 + 1389x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{14})) = 2.37380420$$

Descendants de $Q_{15} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 137x^4 + 147x^3 - 73x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{15}) = 2,39272250$.

$T(Q_{15}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1979x^{11} + 7894x^{10} - 20668x^9 + 36503x^8 - 44067x^7 + 36503x^6 - 20668x^5 + 7894x^4 - 1979x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{15})) = 2.37232474$$

$T^2(Q_{15}) = x^{28} - 55x^{27} + 1389x^{26} - 21446x^{25} + 227391x^{24} - 1763043x^{23} + 10392281x^{22} - 47799850x^{21} + 174719174x^{20} - 514236725x^{19} + 1230407559x^{18} - 2409940245x^{17} + 3882916489x^{16} - 5163138763x^{15} + 5676471687x^{14} - 5163138763x^{13} + 3882916489x^{12} - 2409940245x^{11} + 1230407559x^{10} - 514236725x^9 + 174719174x^8 - 47799850x^7 + 10392281x^6 - 1763043x^5 + 227391x^4 - 21446x^3 + 1389x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{15})) = 2.37381629$$

Descendants de $Q_{16} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 138x^4 + 149x^3 - 74x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{16}) = 2,39575608$.

$T(Q_{16}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1980x^{11} + 7904x^{10} - 20709x^9 + 36593x^8 - 44183x^7 + 36593x^6 - 20709x^5 + 7904x^4 - 1980x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{16})) = 2.37270337$$

$T^2(Q_{16}) = x^{28}-55x^{27}+1389x^{26}-21447x^{25}+227423x^{24}-1763515x^{23}+10396549x^{22}-47826394x^{21} + 174839928x^{20} - 514653915x^{19} + 1231529375x^{18} - 2412327301x^{17} + 3886981101x^{16}-5168717500x^{15}+5682668723x^{14}-5168717500x^{13}+3886981101x^{12}-2412327301x^{11}+1231529375x^{10}-514653915x^{9}+174839928x^{8}-47826394x^{7}+10396549x^{6}-1763515x^{5} + 227423x^{4} - 21447x^{3} + 1389x^{2} - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{16})) = 2.37390387$$

Descendants de $Q_{17} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 138x^4 + 150x^3 - 76x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{17}) = 2,39876679$.

$T(Q_{17}) = x^{14}-27x^{13}+309x^{12}-1980x^{11}+7905x^{10}-20717x^{9}+36617x^{8}-44217x^{7}+36617x^{6} - 20717x^{5} + 7905x^{4} - 1980x^{3} + 309x^{2} - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{17})) = 2.37279791$$

$T^2(Q_{17}) = x^{28}-55x^{27}+1389x^{26}-21447x^{25}+227424x^{24}-1763543x^{23}+10396907x^{22}-47829176x^{21} + 174854681x^{20} - 514710729x^{19} + 1231694400x^{18} - 2412697847x^{17} + 3887634791x^{16}-5169632930x^{15}+5683692269x^{14}-5169632930x^{13}+3887634791x^{12}-2412697847x^{11}+1231694400x^{10}-514710729x^{9}+174854681x^{8}-47829176x^{7}+10396907x^{6}-1763543x^{5} + 227424x^{4} - 21447x^{3} + 1389x^{2} - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{17})) = 2.37391787$$

Descendants de $Q_{18} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 138x^4 + 151x^3 - 78x^2 + 17x - 1$, $R(Q_{18}) = 2,40175500$.

$T(Q_{18}) = x^{14}-27x^{13}+309x^{12}-1980x^{11}+7906x^{10}-20725x^{9}+36641x^{8}-44251x^{7}+36641x^{6} - 20725x^{5} + 7906x^{4} - 1980x^{3} + 309x^{2} - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{18})) = 2.37289240$$

$T^2(Q_{18}) = x^{28}-55x^{27}+1389x^{26}-21447x^{25}+227425x^{24}-1763571x^{23}+10397265x^{22}-47831958x^{21} + 174869434x^{20} - 514767543x^{19} + 1231859425x^{18} - 2413068393x^{17} + 3888288481x^{16}-5170548360x^{15}+5684715815x^{14}-5170548360x^{13}+3888288481x^{12}-2413068393x^{11}+1231859425x^{10}-514767543x^{9}+174869434x^{8}-47831958x^{7}+10397265x^{6}-1763571x^{5} + 227425x^{4} - 21447x^{3} + 1389x^{2} - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{18})) = 2.37393188$$

Descendants de $Q_{19} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 139x^4 + 153x^3 - 78x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{19}) = 2,40324077$.

$T(Q_{19}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1981x^{11} + 7916x^{10} - 20765x^9 + 36726x^8 - 44359x^7 + 36726x^6 - 20765x^5 + 7916x^4 - 1981x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{19})) = 2.37325100$$

$T^2(Q_{19}) = x^{28} - 55x^{27} + 1389x^{26} - 21448x^{25} + 227457x^{24} - 1764042x^{23} + 10401510x^{22} - 47858261x^{21} + 174988655x^{20} - 515178084x^{19} + 1232960321x^{18} - 2415405892x^{17} + 3892262618x^{16} - 5175997945x^{15} + 5690767553x^{14} - 5175997945x^{13} + 3892262618x^{12} - 2415405892x^{11} + 1232960321x^{10} - 515178084x^9 + 174988655x^8 - 47858261x^7 + 10401510x^6 - 1764042x^5 + 227457x^4 - 21448x^3 + 1389x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{19})) = 2.37401741$$

Descendants de $Q_{20} = x^7 - 13x^6 + 62x^5 - 139x^4 + 154x^3 - 80x^2 + 17x - 1$, $R(Q_{20}) = 2,40619590$.

$T(Q_{20}) = x^{14} - 27x^{13} + 309x^{12} - 1981x^{11} + 7917x^{10} - 20773x^9 + 36750x^8 - 44393x^7 + 36750x^6 - 20773x^5 + 7917x^4 - 1981x^3 + 309x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{20})) = 2.37334525$$

$T^2(Q_{20}) = x^{28} - 55x^{27} + 1389x^{26} - 21448x^{25} + 227458x^{24} - 1764070x^{23} + 10401868x^{22} - 47861043x^{21} + 175003408x^{20} - 515234898x^{19} + 1233125346x^{18} - 2415776438x^{17} + 3892916308x^{16} - 5176913375x^{15} + 5691791099x^{14} - 5176913375x^{13} + 3892916308x^{12} - 2415776438x^{11} + 1233125346x^{10} - 515234898x^9 + 175003408x^8 - 47861043x^7 + 10401868x^6 - 1764070x^5 + 227458x^4 - 21448x^3 + 1389x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{20})) = 2.37403140$$

Descendants de $Q_{21} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 142x^4 + 153x^3 - 75x^2 + 15x - 1$, $R(Q_{21}) = 2,40324077$.

$T(Q_{21}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1994x^{11} + 7985x^{10} - 20966x^9 + 37091x^8 - 44801x^7 + 37091x^6 - 20966x^5 + 7985x^4 - 1994x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{21})) = 2.37488409$$

$T^2(Q_{21}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21485x^{25} + 228088x^{24} - 1770650x^{23} + 10449249x^{22} - 48111555x^{21} + 176014267x^{20} - 518428196x^{19} + 1241160829x^{18} - 2432077322x^{17} + 3919793498x^{16} - 5213123364x^{15} + 5731770611x^{14} - 5213123364x^{13} + 3919793498x^{12} - 2432077322x^{11} + 1241160829x^{10} - 518428196x^9 + 176014267x^8 - 48111555x^7 + 10449249x^6 - 1770650x^5 + 228088x^4 - 21485x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{21})) = 2.37461113$$

Descendants de $Q_{22} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 142x^4 + 154x^3 - 77x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{22}) = 2,40619590$.

$T(Q_{22}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1994x^{11} + 7986x^{10} - 20974x^9 + 37115x^8 - 44835x^7 + 37115x^6 - 20974x^5 + 7986x^4 - 1994x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{22})) = 2.37497750$$

$T^2(Q_{22}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21485x^{25} + 228089x^{24} - 1770678x^{23} + 10449607x^{22} - 48114337x^{21} + 176029020x^{20} - 518485010x^{19} + 1241325854x^{18} - 2432447868x^{17} + 3920447188x^{16} - 5214038794x^{15} + 5732794157x^{14} - 5214038794x^{13} + 3920447188x^{12} - 2432447868x^{11} + 1241325854x^{10} - 518485010x^9 + 176029020x^8 - 48114337x^7 + 10449607x^6 - 1770678x^5 + 228089x^4 - 21485x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{22})) = 2.37462502$$

Descendants de $Q_{23} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 157x^3 - 78x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{23}) = 2,40985945$.

$T(Q_{23}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1995x^{11} + 7997x^{10} - 21021x^9 + 37220x^8 - 44971x^7 + 37220x^6 - 21021x^5 + 7997x^4 - 1995x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{23})) = 2.37541032$$

$T^2(Q_{23}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21486x^{25} + 228122x^{24} - 1771176x^{23} + 10454188x^{22} - 48143199x^{21} + 176161610x^{20} - 518946470x^{19} + 1242573469x^{18} - 2435112946x^{17} + 3924997047x^{16} - 5220292895x^{15} + 5739744801x^{14} - 5220292895x^{13} + 3924997047x^{12} - 2435112946x^{11} + 1242573469x^{10} - 518946470x^9 + 176161610x^8 - 48143199x^7 + 10454188x^6 - 1771176x^5 + 228122x^4 - 21486x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{23})) = 2.37472211$$

Descendants de $Q_{24} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 157x^3 - 79x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{24}) = 2,41058816$.

$T(Q_{24}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1995x^{11} + 7997x^{10} - 21022x^9 + 37224x^8 - 44977x^7 + 37224x^6 - 21022x^5 + 7997x^4 - 1995x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et
$$R(T(Q_{24})) = 2.37542522$$

$T^2(Q_{24}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21486x^{25} + 228122x^{24} - 1771177x^{23} + 10454210x^{22} - 48143422x^{21} + 176162994x^{20} - 518952365x^{19} + 1242591775x^{18} - 2435155913x^{17} + 3925075015x^{16} - 5220403809x^{15} + 5739869441x^{14} - 5220403809x^{13} + 3925075015x^{12} - 2435155913x^{11} + 1242591775x^{10} - 518952365x^9 + 176162994x^8 - 48143422x^7 + 10454210x^6 - 1771177x^5 + 228122x^4 - 21486x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et
$$R(T^2(Q_{24})) = 2.37472376$$

Descendants de $Q_{25} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 158x^3 - 80x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{25}) = 2,41204164$.

$T(Q_{25}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1995x^{11} + 7998x^{10} - 21029x^9 + 37243x^8 - 45003x^7 + 37243x^6 - 21029x^5 + 7998x^4 - 1995x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et
$$R(T(Q_{25})) = 2.3754997$$

$T^2(Q_{25}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21486x^{25} + 228123x^{24} - 1771204x^{23} + 10454545x^{22} - 48145963x^{21} + 176176214x^{20} - 519002530x^{19} + 1242735880x^{18} - 2435476902x^{17} + 3925638230x^{16} - 5221190087x^{15} + 5740747689x^{14} - 5221190087x^{13} + 3925638230x^{12} - 2435476902x^{11} + 1242735880x^{10} - 519002530x^9 + 176176214x^8 - 48145963x^7 + 10454545x^6 - 1771204x^5 + 228123x^4 - 21486x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et
$$R(T^2(Q_{25})) = 2.37473572$$

Descendants de $Q_{26} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 158x^3 - 81x^2 + 17x - 1$, $R(Q_{26}) = 2,41348988$.

$T(Q_{26}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1995x^{11} + 7998x^{10} - 21030x^9 + 37248x^8 - 45011x^7 + 37248x^6 - 21030x^5 + 7998x^4 - 1995x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et
$$R(T(Q_{26})) = 2.37551836$$

$T^2(Q_{26}) = x^{28}-55x^{27}+1390x^{26}-21486x^{25}+228123x^{24}-1771205x^{23}+10454568x^{22}-48146204x^{21} + 176177747x^{20} - 519009179x^{19} + 1242756800x^{18} - 2435526459x^{17} + 3925728705x^{16}-5221319239x^{15}+5740892987x^{14}-5221319239x^{13}+3925728705x^{12}-2435526459x^{11}+1242756800x^{10}-519009179x^9+176177747x^8-48146204x^7+10454568x^6-1771205x^5 + 228123x^4 - 21486x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{26})) = 2.37473764$$

Descendants de $Q_{27} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 143x^4 + 159x^3 - 82x^2 + 17x - 1$, $R(Q_{27}) = 2,41493292$.

$T(Q_{27}) = x^{14}-27x^{13}+310x^{12}-1995x^{11}+7999x^{10}-21037x^9+37267x^8-45037x^7+37267x^6 - 21037x^5 + 7999x^4 - 1995x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{27})) = 2.37559284$$

$T^2(Q_{27}) = x^{28}-55x^{27}+1390x^{26}-21486x^{25}+228124x^{24}-1771232x^{23}+10454903x^{22}-48148745x^{21} + 176190967x^{20} - 519059344x^{19} + 1242900905x^{18} - 2435847448x^{17} + 3926291920x^{16}-5222105517x^{15}+5741771235x^{14}-5222105517x^{13}+3926291920x^{12}-2435847448x^{11}+1242900905x^{10}-519059344x^9+176190967x^8-48148745x^7+10454903x^6-1771232x^5 + 228124x^4 - 21486x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{27})) = 2.37474960$$

Descendants de $Q_{28} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 144x^4 + 160x^3 - 80x^2 + 16x - 1$, $R(Q_{28}) = 2,41421205$.

$T(Q_{28}) = x^{14}-27x^{13}+310x^{12}-1996x^{11}+8008x^{10}-21069x^9+37329x^8-45113x^7+37329x^6 - 21069x^5 + 8008x^4 - 1996x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{28})) = 2.37585698$$

$T^2(Q_{28}) = x^{28}-55x^{27}+1390x^{26}-21487x^{25}+228155x^{24}-1771675x^{23}+10458791x^{22}-48172284x^{21} + 176295584x^{20} - 519413825x^{19} + 1243839390x^{18} - 2437820991x^{17} + 3929624874x^{16}-5226657910x^{15}+5746820085x^{14}-5226657910x^{13}+3929624874x^{12}-2437820991x^{11}+1243839390x^{10}-519413825x^9+176295584x^8-48172284x^7+10458791x^6-1771675x^5 + 228155x^4 - 21487x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{28})) = 2.37482074$$

Descendants de $Q_{29} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 144x^4 + 161x^3 - 83x^2 + 17x - 1$, $R(Q_{29}) = 2,41780359$.

$T(Q_{29}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1996x^{11} + 8009x^{10} - 21078x^9 + 37357x^8 - 45153x^7 + 37357x^6 - 21078x^5 + 8009x^4 - 1996x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{29})) = 2.37596476$$

$T^2(Q_{29}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21487x^{25} + 228156x^{24} - 1771704x^{23} + 10459171x^{22} - 48175289x^{21} + 176311721x^{20} - 519476534x^{19} + 1244022721x^{18} - 2438234504x^{17} + 3930356532x^{16} - 5227684254x^{15} + 5747968271x^{14} - 5227684254x^{13} + 3930356532x^{12} - 2438234504x^{11} + 1244022721x^{10} - 519476534x^9 + 176311721x^8 - 48175289x^7 + 10459171x^6 - 1771704x^5 + 228156x^4 - 21487x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{29})) = 2.37483625$$

Descendants de $Q_{30} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 144x^4 + 162x^3 - 85x^2 + 18x - 1$, $R(Q_{30}) = 2,42065395$.

$T(Q_{30}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1996x^{11} + 8010x^{10} - 21086x^9 + 37381x^8 - 45187x^7 + 37381x^6 - 21086x^5 + 8010x^4 - 1996x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{30})) = 2.37605762$$

$T^2(Q_{30}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21487x^{25} + 228157x^{24} - 1771732x^{23} + 10459529x^{22} - 48178071x^{21} + 176326474x^{20} - 519533348x^{19} + 1244187746x^{18} - 2438605050x^{17} + 3931010222x^{16} - 5228599684x^{15} + 5748991817x^{14} - 5228599684x^{13} + 3931010222x^{12} - 2438605050x^{11} + 1244187746x^{10} - 519533348x^9 + 176326474x^8 - 48178071x^7 + 10459529x^6 - 1771732x^5 + 228157x^4 - 21487x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{30})) = 2.37485011$$

Descendants de $Q_{31} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 144x^4 + 163x^3 - 87x^2 + 19x - 1$, $R(Q_{31}) = 2,42348431$.

$T(Q_{31}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1996x^{11} + 8011x^{10} - 21094x^9 + 37405x^8 - 45221x^7 + 37405x^6 - 21094x^5 + 8011x^4 - 1996x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{31})) = 2.37615044$$

$T^2(Q_{31}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21487x^{25} + 228158x^{24} - 1771760x^{23} + 10459887x^{22} - 48180853x^{21} + 176341227x^{20} - 519590162x^{19} + 1244352771x^{18} - 2438975596x^{17} + 3931663912x^{16} - 5229515114x^{15} + 5750015363x^{14} - 5229515114x^{13} + 3931663912x^{12} - 2438975596x^{11} + 1244352771x^{10} - 519590162x^9 + 176341227x^8 - 48180853x^7 + 10459887x^6 - 1771760x^5 + 228158x^4 - 21487x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$
et

$$R(T^2(Q_{31})) = 2.37486396$$

Descendants de $Q_{32} = x^7 - 13x^6 + 63x^5 - 145x^4 + 165x^3 - 87x^2 + 18x - 1$, $R(Q_{31}) = 2,42489209$.

$T(Q_{32}) = x^{14} - 27x^{13} + 310x^{12} - 1997x^{11} + 8021x^{10} - 21134x^9 + 37490x^8 - 45329x^7 + 37490x^6 - 21134x^5 + 8021x^4 - 1997x^3 + 310x^2 - 27x + 1$
et

$$R(T(Q_{32})) = 2.37650271$$

$T^2(Q_{32}) = x^{28} - 55x^{27} + 1390x^{26} - 21488x^{25} + 228190x^{24} - 1772231x^{23} + 10464132x^{22} - 48207156x^{21} + 176460448x^{20} - 520000703x^{19} + 1245453667x^{18} - 2441313095x^{17} + 3935638049x^{16} - 5234964699x^{15} + 5756067101x^{14} - 5234964699x^{13} + 3935638049x^{12} - 2441313095x^{11} + 1245453667x^{10} - 520000703x^9 + 176460448x^8 - 48207156x^7 + 10464132x^6 - 1772231x^5 + 228190x^4 - 21488x^3 + 1390x^2 - 55x + 1$ et

$$R(T(Q_{32})) = 2.37494860$$