REMERCIEMENTS

Je suis trés reconnaissant envers monsieur le professeur A. ROUX qui a accepté de diriger ce travail jusqu'à son terme, je le remercie beaucoup. Mes remerciements vont aussi à messieurs les professeurs E. SALHI de l'univercité de Sfax, S. Ekong de l'univercité Claude Bernard à Lyon d'avoir accepté de faire un rapport sur la présente thèse. Je remercie les professeurs G. Rhin à l'univercité de Metz, M. Ben Abdallah à l'univercité Claude Bernard d'avoir accépté d'étre membres du jury.

PLAN GENERAL

PREMIERE PARTIE

DEUXIEME PARTIE

TROISIEME PARTIE

INTRODUCTION

Dans ce travail, on se propose d'étudier le groupe $G = \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ des difféomorphismes du cercle qui conservent l'orientation. On a mené cette étude dans deux directions :

1) La première partie consiste à redémontrer que G est une variété de Fréchet. Pour ceci on a repris dans les chapitres I et II les notions de calcul différentiel et intégral appropriées aux espaces de Fréchet.

2) La deuxième partie consiste en un début d'étude du groupe de l' homologie de G à coefficients dans l'espace $\Omega^\infty(S^1)$ des formes différentielles de classe C^∞ sur le cercle S^1.

Dans le chapitre I, après avoir rappelé les propriétés de l'intégrale d'une fonction f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans F où F est un espace de Fréchet, on redéfinit la notion de dérivée d'une fonction $f : E \to F$, où E et F sont deux espaces de Fréchet.

Dans le calcul différentiel classique, on a les deux théorèmes suivants :

a) Si G et H sont deux espaces de Banach, une courbe $c : \mathbb{R} \to G$ est de classe C^∞ si et seulement si quel que soit $f \in E'$ (dual de E) on a $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Une application $g : G \to H$ est de classe C^∞ si et seulement si pour toute C^∞ - courbe c de $\mathbb{R}$ à valeurs dans G, on a $g \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les deux résultats précédents ne sont pas valables si on remplace la C^∞-différentiabilité par la C^k- différentiabilité.

On rappelle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lip^k- différentiable si f est de classe C^k et $D^k f$ est localement lipschitzienne. On dit que f est lip^∞- différentiable si pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est lip^k-différentiable. Avec cette nouvelle notion, on retrouve des résultats analogues à ceux précé- dement énoncés :

a') Si E et F sont deux espaces vectoriels topologiques quelconques, $c : \mathbb{R} \to E$ est une lip^k - courbe si et seulement si pour tout $l \in E'$, $l \circ c \in \mathrm{lip}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b') $g : E \to F$ est lip^k - différentiable si et seulement si pour tout lip^k - courbe $c : \mathbb{R} \to E$, on a $g \circ c : \mathbb{R} \to F$ est une lip^k - courbe de F.

Dans le présent travail, on se restreint au cas de la lip^∞-différentiabilité (appelée C^∞-différentiabilité).

En appendice, on esquisse la théorie des espaces convenables comme le cadre approprié pour la différentiabilité. On montre que $f : U\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est C^∞- différentiable si et seulement si le quotient différentiel [7] est borné. Ce résultat prouve en fait que la lip^∞-différentiabilité ou C^∞-différentiable ne dépend que de la bornologie associée à la topologie.

Pour une bornologie vectorielle sur un espace vectoriel E, une suite $(x_n)_n$ de E est convergente vers x au sens de la topologie de Mackey (ou M-convergente) s'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ telle que l'ensemble

$$\{\ \lambda_n (x_n - x),\ n \in \mathbb{N}\ \}$$

soit borné. Un ensemble $A \subset E$ est fermé au sens de Mackey si toute suite M-convergente de A a une limite au sens de Mackey dans A. Les ensembles fermés forment une topologie dite de Mackey. Les espaces complets (ou M-complets) pour cette topologie sont appelés les espaces convenables [7] (Les espaces de Fréchet sont des espaces convenables). Pour ces espaces, on a le théorème suivant

Soient E et F deux espaces convenables. L'opérateur différentiel

$$D : C^\infty(E, F) \to C^\infty(E, \mathcal{L}(E, F))$$

défini par

$$Df(x).v = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x + \lambda v) - f(x)}{\lambda}$$

existe et est linéaire et borné (C^∞) ; de plus, pour f, g dans $C^\infty(E, F)$, on a

$$D(f \circ g)(x).v = Df(g(x))\, Dg(x).v.$$

On prendra cette définition pour le calcul différentiel sur les espaces de Fréchet.

Dans le chapitre II, on redémontre que $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ est une variété de Fréchet. De façon précise, on construit un ouvert V de TS^1 (le fibré tangent à S^1) et un ouvert W de la diagonale $\Delta = \{ (x, x) \in S^1 \times S^1 \}$ qui sont C^∞-difféomorphes, et à partir desquels on construit deux autres ouverts :

$$W_f = \{\ g \in C^\infty(S^1, S^1)\ /\ \forall\, \theta \in S^1,\ (f(\theta), g(\theta)) \in W\ \}$$

et

$$V_f = \{\ s \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})\ /\ \pi \circ s = f \text{ et } \forall\, \theta \in S^1,\ (\theta, s(\theta)) \in V\ \}$$

qui sont C^∞- difféomorphes. On construit alors explicitement un atlas de $C^\infty(S^1, S^1)$. En particulier $C^\infty(S^1, S^1)$ est donc localement difféomorphe à $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ qui est un espace de Fréchet. Les ensembles $\mathrm{Diff}^{\infty}(S^1)$ et $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ étant des ouverts de $C^{\infty}(S^1, S^1)$, on en déduit que ce sont des variétés de Fréchet et en fait des groupes de Lie c'est à dire l'applications de $\mathrm{Diff}^{\infty}(S^1) \times \mathrm{Diff}^{\infty}(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(S^1)$ qui à $(f, g) \to fog^{-1}$ est C^{∞}-différentiable.

Dans le chapitre III, on reprend des résultats de [3] où Haefliger et Li-Bange ont étudié le premier groupe d'homologie $H_0(G, \Omega)$ du groupe $G = \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ à coefficients dans le G-module $\Omega = \Omega^{\infty}(S^1)$ des formes différentielles sur S^1.

$H_0(G,\Omega)$ est évidemment égal à $\Omega / G(\Omega)$ où $G(\Omega)$ est le sous espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $g^*\omega - \omega$, $\omega \in \Omega$. Dans ce calcul, la difficulté provient du fait que $G(\Omega)$ n'est en général pas fermé. En effet, au départ, on cherche des conditions sur f dans $C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ pour que df ppartienne à l'adhérence de $G(\Omega)$. Pour cela, il suffit que tout courant G-invariant T soit nul sur df : $\langle T, df \rangle = 0$. Si cette condition est vérifiée il existe une suite α_n de $G(\Omega)$ telle que pour $n \to \infty$, on a $\lim \alpha_n = df$. On est amené alors à déterminer les courants G-invariants qui sont isomorphes à l'ensemble des fonctions harmoniques à croissance lente sur la boule unité $\mathbf{B} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \}$. Les différentielles des fonctions harmoniques à croissance lente sur $\mathbf{B}$ sont isomorphes à l'ensemble des 0-courants (ou distributions) sur S^1 nuls sur les fonctions constantes. On montre que ces 0-courants sont des primitives de courants sur le cercle S^1. Si on suppose que G est un groupe fuschien (3.5.2.) engendré par un nombre fini de générateurs $\{g_1,..., g_k\}$, l'espace des distributions G-invariantes $\mathscr{D}(S^1)$ nulles sur les constantes est isomorphe à l'espace des formes harmoniques sur $\mathbf{B}/G$ (qui est une surface de Riemann) ayant au plus un pôle d'ordre un en k points $\{x_1, ... x_k\}$. De plus, l'ensemble des courants G-invariants sur S^1 est isomorphe à l'espace vectoriel des fonctions harmoniques sur $\mathbf{B}/G$ dont les différentielles possèdent au plus un pôle d'ordre un aux points $x_1, .., x_k$. Sa dimension est égale à $\max(1, k)$ et celle de $D(S^1)$ est égale à $\max(2g, 2g + 2k - 2)$ où g désigne le nombre d'anses de la surface de Riemann.

A la fin de ce chapitre, on a donné un exemple où $G(\Omega)$ n'est pas fermé donc $H_0(G, \Omega)$ n'est pas séparé et si on suppose que G est engendré par un élément hyperbolique ayant deux points l'un répulsif et l'autre attractif, les deux espaces $G(\Omega)$ et $G(C^{\infty}(S^1, \mathbb{R}))$ sont fermés, dans ce cas le calcul de H_0 devient possible.

Dans le reste des chapitres, on se propose d'étudier le groupe d'homologie $H_1(G, \Omega)$ de $G = \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ à coefficients dans $\Omega = \Omega^{\infty}(S^1)$. On a

$$H_1(G,\Omega) = \{ \sum_{1\le i\le n} \omega_i \otimes g_i \,, \omega_i \in \Omega \,, g_i \in G \;/\; \sum_{1\le i\le n} g_i^* \omega_i - \omega_i = 0 \}.$$

L'idée de départ est la même que celle de [3] ; on cherche $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que df appartienne à $H_1(G, \Omega)$.

On remarque que pour étudier le $H_1(G, \Omega)$ il faut étudier les équations de la forme $g^* \omega - \omega$ qui s'obtiennent par dérivation d'une équation de la forme $\varphi = \psi \circ g - \psi$, où ψ appartient à $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et g appartient à $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$.

Dans le chapitre IV, on introduit les notions nécessaires à l'étude de l'équation en ψ précédement citée. On rappelle que, R_p étant la translation par p ($\in \mathbb{Z}$) de $\mathbb{R}$ et le groupe $D^\infty(S^1) = \{ f \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}) \;/\; f\text{-}\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{Z}$-périodique $\}$,

$$\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1) = D^\infty(S^1) \,/\, \{ R_p \,, p \in \mathbb{Z} \}.$$

On étudie le nombre de rotations $\rho : D^\infty(S^1) \to \mathbb{R}$. ρ qui est un invariant de conjuguaison et on redémontre que ρ est continue. La fin du chapitre est consacrée à l'étude de la C^n-conjugaison à des rotations (un difféomorphisme f de $\mathbb{R}$ est C^n-conjugué à R_a si g est de classe C^n et $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$). Par passage au quotient on obtient des définitions analogues dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ (modulo $\mathbb{Z}$). Le théorème d'Herman nous donne des conditions nécessaires et suffisantes sur la C^1-conjugaison puis sur la C^n - conjuguaison. Avec l'étude précédente, on est donc en mesure d'étudier l'équation en ψ précédement citée.

Dans le chapitre V, pour $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ telles que $\rho(g)$ appartienne à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, on montre l'équation en $\psi \in C^\infty(S, \mathbb{R})$, $\varphi = \psi \circ g - \psi$ admet une solution, cette solution est unique à une constante près (d'après le théorème de Denjoy). Pour $g = R_{p/q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a alors

PROPOSITION

Pour $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, p et q premiers entre eux et $\int_{S^1} \varphi = 0$, l' équation en ψ :

$$\varphi = \psi \circ R_{p/q} - \psi$$

admet des solutions si et seulement si les transformées de Fourier d' ordre k= nq sont nulles. On démontre alors que ψ peut être choisie de classe C^∞ et que si g est C^n-

conjuguée à une rotation $R_{p/q}$, l'équation en ψ admet, sous les mêmes conditions, une solution ψ de classe C^∞. La résolution de l'équation pour R_α avec α irrationnelle n'est pas toujours possible. Il faut imposer d'autres conditions sur α. En particulier, α doit être diophantien. Pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, le fait d'être doiphantien est vrai presque partout.

PROPOSITION

Soit $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et f est C^0-conjuguée à R_α avec α diophantien, si $\int_{S^1} \varphi o g^{-1} = 0$ (g est l'élément conjugué de f) il existe ψ unique solution de l'équation $\varphi = \psi o f - \psi$. La différentiabilité de la solution ψ est donnée par le

THEOREME

Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente, il existe ψ unique, à une constante près, de classe C^∞ qui est solution de l'équation $\varphi = \psi o f - \psi$. Si $f = R_\alpha$ la conclusion est la même.

Dans le chapitre VI, on appelle que $\mathbb{R}G$ étant l'algebre du groupe G, on a la suite exacte $0 \to IG \to \mathbb{R}G \to \mathbb{R} \to 0$, qui est une représentation projective de $\mathbb{R}$, donc

$$H_1(G, \Omega) = \mathrm{Tor}_1^G(G, \Omega) = \mathrm{Ker}\{ i^* : \Omega \otimes_G IG \to \Omega \otimes_G \mathbb{R}G \approx \Omega\},$$

où $i^*(\omega \otimes (g - I)) = g^* \omega - \omega$.

Donc, on a

$$H_1(G, \Omega) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \, \omega_k \otimes (g\text{-}I) \;/\; \sum_{k=1}^{n} a_k (g^* \omega - \omega) = 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ g_k \in G,\ \omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

La relation $\sum_{1 \le k \le n} a_k (g^* \omega - \omega) = o$ provient d'une relation de la forme

$$\sum_{1 \le k \le n} a_k (\psi_K o g_k - \psi_k) = K \in \mathbb{R},\ a_k \in \mathbb{R}, g_k \in G \text{ et } \psi_k \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}).$$

Ainsi, on retrouve l'équation déja étudiée dans le chapitre V. Ceci entraine le

THEOREME

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$. Il existe $f_n \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et $\psi_n \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} D\psi_k \otimes (f_k - I) \in H_1(G, \ \Omega).$$

Dans le chapitre VII, on a étudié le groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{R})$ où $\mathbb{R}$ est considéré comme un G- module trivial. $H_2(G, \mathbb{R})$ est évidement isomorphe à $H_1(G, IG)$. Ceci permet d' avoir une caractérisation des éléments de $H_2(G, \mathbb{R})$ sous la forme

$$H_2(G, \mathbb{R}) = \{ \sum_{g,h \in G} \lambda_{(g,h)} (g-I) \otimes_G (h-I) \ , \lambda_{(g,h)} = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } (g,h) \in G^2$$

$$\text{telle que } \sum_{g,h \in G} \lambda_{(g,h)} \Big[(g-I)oh^{-1} - (g-I) \Big] = 0 \ \}.$$

Si on remplace g par son relêvement g dans $D^\infty(S^1)$, comme $g - I \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, on se ramène à l'étude de l'équation du chapitre V. Ainsi on a le

THEOREME

Soient f_1, f_2, .., f_{n-1} dans $Diff_+^\infty(S^1)$ et $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1}$ dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$. Il existe f_{n-1}, f_n dans $Diff_+^\infty(S^1)$ et ψ_{n-1}, ψ_n dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telles que

$$\sum_{1=0}^{n} \psi_i \circ f_i - \psi_i = 0.$$

En particulier

COROLLAIRE

Soient $f_1, f_2, .,f_{n-1}, f_n = R_\alpha$ dans $Diff_+^\infty(S^1)$ avec f_{n-1} ergodique et α diophantien. Il existe $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}, \varphi_n$ dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telles que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ f_i - \varphi_i = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} (f_i - I) \otimes (h_i - I) \in H_2(G, \mathbb{R}) \text{ et } I + \varphi_i = h_i \in D^\infty(S^1)$$

où h_i est le relêvement de h_i.

Dans le chapitre VIII, on énonce les conditions pour qu'un élément de $\Omega \otimes_G IG$ soit nul. On montre que la forme différentielle $\omega(z) = dz / i2\pi z$, pour z dans $\{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \approx S^1$, s'identifie à dt et on montre que pour α diophantien $dt \otimes (R_\alpha - I)$ est un élément non nul de $H_1(G, \Omega)$. De plus, on montre que l'élément $(R_k - I) \otimes (R_\alpha - I)$, où α est diophontien et $k \in \mathbb{R}$ est non nul dans $H_2(G, \mathbb{R})$.

***

PREMIERE PARTIE.

INTRODUCTION.

Dans cette partie, on redémontre que le groupe $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ des difféomorphismes du cercle qui conservent l'orientation est une variété de Fréchet et est un groupe de Lie non analytique.

Dans le chapitre I, on rappelle quelques notions de calcul différentiel et intégral sur les espaces de Fréchet.

Dans le chapitre II, on redémontre que l'espace $C^{\infty}(S^1, S^1)$ des applications de classe C^{∞}, de S^1 dans S^1 est une variété de Fréchet, on démontre ce dernier résultat par une méthode médiane entre celles de [27] et de [24]. Elle consiste à construire un atlas formé d'ouverts difféomorphes de $C^{\infty}(S^1, S^1)$ et de $C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$. Les démonstrations proposées dans cette partie paraissent plus simples que celles de [24] et [27].

Pour conclure, le groupe $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ étant un ouvert de $C^{\infty}(S^1, S^1)$, tous les résultats de différentiabilité démontrés dans le chapitre II s'appliquent à ce groupe.

***

CHAPITRE I

CALCUL DIFFERENTIEL DANS LES ESPACES DE FRECHET

1.1. RAPPELS.

On appelle espace de Fréchet un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique complet F dont la topologie est définie par une suite de semi - normes $(q_n : x \rightarrow \| x \|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c'est à dire un espace de Fréchet au sens classique qui est de plus localement convexe.

Soient $(F, (q_n)_{n\in \mathbb{N}})$ un espace de Fréchet et I un espace compact, l'espace $C(I, F)$ des applications continues de I dans F muni de la topologie de la convergence uniforme est un espace de Fréchet (défini par la suite de semi-normes $\gamma \rightarrow \| \gamma \|_n = \mathrm{Sup}_{s \in I} \| \gamma(s) \|_n$, $n \in \mathbb{N}$).

Pour $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, un chemin $\gamma : I \rightarrow F$ de I dans F est affine par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma_\gamma = (a = s_0 < \ldots < s_m = b)$ de I telle que γ soit affine sur chaque intervalle $[s_{k-1}, s_k]$, $1 \leq k \leq m$. On dit que σ_γ trivialise γ).

L'espace $\mathscr{A}(I, F)$ des chemins affines par morceaux de I dans F est un espace vectoriel dense de l'espace de Fréchet $C(I, F)$ des chemins continus de I dans F.

1.2. INTEGRALE (DE RIEMANN) DANS C(I, F).

L'ensemble $\mathscr{S}(I)$ des subdivisions de $I = [a,b]$ ordonné par inclusion est filtrant croissant. Pour $\gamma \in C(I, F)$ (où F est un espace de Fréchet et $\sigma = (a = s_0 < \ldots < s_m = b)$ dans $\mathscr{S}(I)$ soit

$$\sigma(\gamma) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} (\gamma(s_k) + \gamma(s_{k-1}))(s_k - s_{k-1}) \in F.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\| \sigma(\gamma) \|_n \leq \| \gamma \|_n \, L(I)$ (où $L(I) = b-a$).

Si $\gamma \in \mathscr{A}(I, F)$, pour tout $\sigma \supset \sigma_\gamma$ trivialisant γ, sa $\sigma(\gamma) = \sigma_\gamma(\gamma)$ noté $\int_I \gamma = \int_a^b \gamma$.

Alors $\int_I : \gamma \rightarrow \int_I \gamma$ est une application linéaire continue de $\mathscr{A}(I, F)$ dans F qui par densité se prolonge en une application linéaire continue de $C(I, F)$ dans F encore notée $\int_I : \gamma \rightarrow \int_I \gamma$ et applée l' intégrale (de Riemann) de γ. En fait, on a

$$\int_a^b \gamma = \int_I \gamma = \lim_{\sigma \in \mathscr{S}(I)} \sigma(\gamma).$$

De plus, pour $a \leq b \leq c$, on a

$$\int_a^c \nu = \int_a^b \nu + \int_b^c \nu.$$

1.3. DÉRIVÉE DANS UN ESPACE DE FRÉCHET.

1.3.1. DÉRIVÉE D 'UN CHEMIN .

Soit le chemin $\gamma : t \to \gamma(t)$ de $I = [a, b]$ dans F. On dit que γ est dérivable en $t \in I$ s'il existe

$$\lim_{s \to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} = \gamma'(t) \in F.$$

γ est continument dérivable si $\gamma' : t \to \gamma'(t)$ est continue de I dans F et on a alors

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t)\, dt .$$

1.3.2. DÉFINITION .

Soient F et G deux espaces de Fréchet et U un ouvert de F. Une application X de U dans G admet une dérivée en $f \in U$ dans la direction de $u \in F$, s' il existe

$$DX(f).u = \lim_{t \to 0} \frac{X(f + tu) - X(f)}{t} \in G.$$

Une application $X : U \to G$ est de classe C^1 si $DX(f).u$ existe pour tout $(f, u) \in U \times F$ et si $DX \dashv (u, f) \to DX(f).u$ est continue de $U \times F$ dans G.

1.3.3. THEOREME

Soient F, G deux espaces de Fréchet et U un ouvert convexe de F. Si $X : U \to G$ est de classe C^1, pour tout $f \in U$ et $h \in F$ tels que $[f, f+h] \subseteq U$, on a

$$X(f + h) - X(f) = \int_0^1 DX(f + th) . h\, dt .$$

PREUVE.

Soit $\gamma : t \to \gamma(t) = X(f + th)$ de $[0, 1]$ dans G. Le chemin γ st continument dérivable et

$$\gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt.$$

Or $\gamma'(t) = DX(f+th).h$ et $\gamma(1)-\gamma(0) = X(f+h) - X(f)$ donc

$$X(f+h) - X(f) = \int_0^1 DX(f+th).h\,dt.$$

1.3.4. THEOREME

Soient F, G deux espaces de Fréchet et U un ouvert convexe de F. Si l'application $X : U \to G$ est de classe C^1, alors l'application $DX : U \times F \to G$ est linéaire en F.

PREUVE.

Pour $(f, h_1, h_2) \in U \times F^2$, on a

$$DX(f).(h_1+h_2) = \lim_{t\to 0} \frac{X(f+t(h_1+h_2)) - X(f)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{X(f+t(h_1+h_2)) - X(f+th_1)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{X(f+th_1) - X(f)}{t}.$$

Or on a

$$X(f+th_1+th_2) - X(f+th_1) = \int_0^1 DX(f+th_1+uth_2).th_2.du$$

et

$$X(f+th_1) - X(f) = \int_0^1 DX(f+uth_1).\ th_1.\ du, \quad \text{d'où}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{X(f+t(h_1+h_2)) - X(f)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 DX(f+th_1+uth_2).\,h_2.du + \lim_{t\to 0} \int_0^1 DX(f+uth_1).\,h_1.du.$$

Par passage à la limite dans le second membre, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{X(f+t(h_1+h_2)) - X(f)}{t} = DX(f).h_1 + DX(f).h_2.$$

1.3.5. THEOREME

Soient F, G deux espaces de Fréchet et U un ouvert convexe de F. Pour une application continue $X : U \to G$, il y a équivalence entre

1) $X : U \to G$ est de classe C^1.

2) Il existe une application continue $L : U \times U \times F \to G$ linéaire en F telle que

$$X(f_1) - X(f_2) = L(f_1, f_2).(f_1 - f_2), \text{ pour tout } f_1, f_2 \in U.$$

PREUVE.

Si X est de classe C^1, l'application

$$L : (f_1, f_2, h) \to \int_0^1 DX(f_2 + t(f_1 - f_2)).h\, dt,$$

répond bien aux conditions du théorème.

Réciproquement, si $L : U \times U \times F \to G$ vérifie 2) alors pour $[f, f+h] \subset U$, on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{X(f+th) - X(f)}{t} = \lim_{t \to 0} L(f, f+th).h = L(f, f).h,$$

et comme L est continue, X est de classe C^1.

1.4. LES DERIVEES PARTIELLES.

1.4.1. DEFINITION .

Soient F, G, H des espaces de Fréchet et U, V des ouverts de F et G respectivement. Une application $X : U \times V \to G$ admet des dérivées partielles continues si les applications

$$D_F X : (f, g, h) \to \lim_{t \to 0} \frac{X(f+th, g) - X(f, g)}{t} \quad \text{de } U \times V \times F \text{ dans } H$$

$$\text{et } D_G X : (f, g, k) \to \lim_{t \to 0} \frac{X(f, g+tk) - X(f, g)}{t} \quad \text{de } U \times V \times G \text{ dans } H$$

sont définies et continues, elles sont linéaires en h et k.

1.4.2. THEOREME.

Soient F, G, H des espaces de Fréchet et U, V deux ouverts respectifs de F et G. Une application $X : U \times V \to H$ admet une dérivée partielle continue par rapport à F si et seulement si il existe une application continue $L : (f_0, f_1, g, h) \to L(f_0, f_1, g).h$ de

$U \times U \times V \times F$ dans H linéaire en h telle que

$$X(f_1, g) - X(f_0, g) = L(f_0, f_1, g).(f_1 - f_0).$$

La preuve est Analogue à celle de 1.3.5.

1.4.3. COROLLAIRE .

Soient F, G et H des espaces de Fréchet et U, V deux ouverts respectifs de F et G. Pour une application $X : U \times V \to H$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1) X a des dérivées partielles continues sur $U \times V$.
2) X est continue de classe C^1.

PREUVE.

1) $\Rightarrow$ 2) est trivial.

Réciproquement si X a des dérivées partielles continues, par le théorème précédent on a

$$X(f+th, g+tk) - X(f, g+tk) = L_F(f+th, f, g+tk).th$$

$$\text{et } X(f, g+tk) - X(f, g) = L_G(f, g+tk, g).tk.$$

$$\text{D'où } \lim_{t \to 0} \frac{X(f+th, g+tk) - X(f, g)}{t} = D_F X(f, g).h + D_G X(f, g).k.$$

Comme $D_F X$ et $D_G X$ sont continues donc il en est de même DX.

1.4.4. REMARQUE .

Soient F, G, H des espaces de Fréchet et U un ouvert de F. Pour une application X de $U \times G$ dans H, si X est continue, de classe C^1 en f et linéaire en g alors X est de classe C^1 sur $U \times G$ et $DX(f, g).(h, k) = D_F X(f, g).h + X(f, k)$.

1.5. DERIVEE D'ORDRE $n \geq 1$.

1.5.1. DEFINITION .

Soient F, G des espaces de Fréchet, U un ouvert de F et une application X de U dans G. On dit que X est de classe C^2 si DX de $U \times F$ dans G est de classe C^1.

1.5.2. REMARQUE .

Si DX est de classe C^1, par la remarque ci dessus on a

$$D^2 X(f).(h, k) = \lim_{t \to 0} \frac{DX(f+tk).h - DX(f).h}{t}.$$

1.5.3. THEOREME.

Soient F, G des espaces de Fréchet et U un ouvert de F. Si $X : U \to G$ est de classe C^2 alors pour tout $f \in U$, $D^2X(f) : (h, k) \to D^2X(f).(h, k)$ est une application bilinéaire symétrique, continue de $F\times F$ dans G.

PREUVE.

$$D^2 X(f).(h_1 + h_2, k) = \lim_{t\to 0} \frac{DX(f+tk).(h_1+h_2) - DX(f).(h_1+h_2)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{DX(f+tk).h_1 + DX(f+tk).h_2 - DX(f).h_1 - Dx(f).h_2}{t}$$

$$= D^2X(f).(h_1, k) + D^2X(f).(h_2, k).$$

D^2X est linéaire par rapport à h et DX est de classe C^1, d'après le théorème 1.3.3, D^2X est linéaire par rapport à k. Elle est donc bilinéaire. De plus $DX : U \times F \to G$ est de classe C^1 par rapport à la première variable $f \in U$ et linéaire par rapport $h \in F$ elle est donc de classe C^1 sur $U\times F$. La symètrie se démontre à partir du théorème suivant.

1.5.4. THEOREME .

Soient F, G deux espaces de Fréchet et U un ouvert convexe de F. Pour une application $X : U\to G$ de classe C^2, $(f, h, k) \in U\times F\times F$, on a

$$D^2 X(f).(h, k) = \lim_{(t,u)\to(0,0)} \frac{X(f+th+uk) - X(f+th) - X(f+uk) + X(f)}{tu}.$$

PREUVE.

D'aprés le théorème 1.3.2., on a

$$\frac{X(f+th) - X(f)}{t} = \int_0^1 DX(f+\theta th).h\, d\theta, \qquad (*)$$

$$\frac{X(f+th+uk) - X(f+uk)}{t} = \int_0^1 DX(f+\eta th+uk).h\, d\eta. \qquad (**)$$

En appliquant le même théorème à l'application DX, on obtient l 'égalité suivante ce qui achève la démonstration du théorème.

$$\frac{DX(f+uk+\theta th).h - DX(f+\theta th).h}{u} = \int_0^1 D^2 X(f+\theta th+\alpha uk).(h,\ k).d\alpha.$$

Si on fait tendre t et u vers zero, on a

$$\lim_{(t,u)\to(0,0)} \frac{X(f+th+uk) - X(f+th) - X(f+uk) + X(f)}{ut} =$$

$$\int_0^1 [\int_0^1 D^2 X(f+\theta th+\alpha uk).(h,k).d\alpha]\, d\theta.$$

Pour u et t tendant vers zero, le second membre est égal à $D^2X(f).(h,k)$, d'après le lemme suivant

1.5.5. LEMME.

Soient E un espace topologique et F un espace de Fréchet. Si $X : E \times [0,1] \to F$ est continue alors l'application $g : E \to F$ définie par

$$g(x) = \int_0^1 X(x,\ t).\, dt$$

est continue.

On définit par récurrence la différentiabilité d'ordre supérieure.

* * *

APPENDICE

Calcul Differentiel sur les espaces convenables

1. NOTATIONS.

E est un espace vectoriel topologique localement convexe et E' son dual topologique. $C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^{∞}.

2. BORNOLOGIE .

2.1. DEFINITION.

Soit E un ensemble, on dit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une bornologie et que $(E, \mathcal{B})$ est un espace bornologique si on a :

i) $\forall x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{B}$,

ii) $A \in \mathcal{B}$ et $B \subset A$ alors $B \in \mathcal{B}$,

iii) $A \in \mathcal{B}$ et $B \in \mathcal{B}$ alors $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés " bornés ".

Dans toute la suite, $\mathbb{R}$ est muni de la bornologie formée des ensembles relativement compacts .

Soient $(E_j, \mathcal{B}_j)$, $j \in J$, des espaces bornologiques, $B \subset E = \prod_{j \in J} E_j$ est un borné de E si $pr_j(B)$ est un borné de E_j, où pr_j est la projection canonique sur E_j.

Lorsque E est un espace vectoriel, on dit que $\mathcal{B}$ est une bornologie vectorielle si les applications d'addition $(x, y) \to x + y$ de $E \times E$ dans E et de multiplication par les scalaires $(\lambda, x) \to \lambda.x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E sont bornologiques (c'est à dire transforment un borné en un borné). On dit que $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe si l'enveloppe convexe de tout borné est un borné.

Lorsque E est un espace topologique localement convexe, B est un borné de E s'il est absorbé par tout voisinage de zéro de E (pour tout U voisinage de zéro dans E, il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que $B \subset \lambda U$). L'ensemble des bornés de E est une bornologie appelée bornologie de Von - Neuman.

2.2. LEMME [23], 2.1.3.

Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ est une bornologie vectorielle si et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes :

i) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B + B \in \mathcal{B}$,

ii) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup_{|t| \leq 1}(t.B) \in \mathcal{B}$.

2.3. LEMME [23], 2.1.4.

E et $\mathcal{B}$ sont comme dans le lemme 1.3., $\mathcal{B}$ est une bornologie convexe si et seulement si pour tout $B \in \mathfrak{B}$ alors $< B > \in \mathfrak{B}$ où $< B >$ est l'enveloppe convexe de B.

3. QUOTIENT DIFFERENTIEL [23], 1.3.

Le quotient différentiel permet de montrer que la différentiabilité d'une fonction dépend en fait des ensembles bornés de la topologie.

3.1. DEFINITION.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $D^{<k>}=\{(t_0, ..t_i, t_j..., t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} / t_i \neq t_j$ pour $i \neq j\}$. On appelle quotient différentiel d'ordre k, l'application $\delta^k f : D^{<k>} \to \mathbb{R}$ définie par récurrence comme suit :

$$\delta^0 f = f,$$

$$\delta^1 f(t_0, t_1) = \frac{f(t_0) - f(t_1)}{t_0 - t_1},$$

$$\delta^2 f(t_0, t_1, t_2) = \frac{2}{t_0 - t_2}\left(\delta^1 f(t_0, t_1) - \delta^1 f(t_1, t_2)\right)$$

....

$$\delta^k f = \frac{k}{t_0 - t_k}\left[\delta^{k-1} f(t_0, \dots, t_{k-1}) - \delta^{k-1} f(t_1, \dots, t_k)\right].$$

On donnera une expression explicite de $\delta^k f$ dans la proposition suivante

3.2. PROPOSITION [23], 1.3.2.

$$\delta^k f(t_0, \dots, t_k) = k! \sum_{i=0}^{k} \beta_i \,.\, f(t_i),$$

où les $\beta_i = \prod_{0 \le r \le k,\, r \neq i} (t_i - t_j)^{-1}$ sont indépendants de f.

Le théorème suivant montre que la différentiabilité d'une fonction ne dépend que de la bornologie associée à la toplogie. On énonce ce théorème dans le cas des fonctions C^∞-différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en fait, tous les résultats, les calculs et les démonstrations qui suivent ramènent à la différentiabilité de fonctions numériques à valeurs réelles.

3.3. THEOREME [23], 1.3.28.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est de classe C^∞.

ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^k f : U^{<k>} \to \mathbb{R}$ est bornologique. La bornologie de $U^{<k>}$ est celle induite par la bornologie de $\mathbb{R}^{k+1}$.

4. LA C^∞-TOPOLOGIE (DANS LES SUITES) .

4.1. DEFINITION.
a) Soient E un espace bornologique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que la suite $(x_n)_n$ est Mackey - convergente vers x dans E, s'il existe une suite $(t_n)_n$ de $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty$$

et le sous ensemble

$$\{ t_n (x_n - x), \ n \in \mathbb{N} \}$$

est borné. On note

$$x = \text{M-}\lim_{n \to +\infty} x_n \quad \text{où } x_n \text{ est M- convergente vers } x.$$

b) On dit que la suite $(x_n)_n$ est une M-suite de Cauchy s' il existe $t_{n,m}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n,m \to +\infty} t_{n,m} = +\infty$$

et le sous-ensemble

$$\{ t_{n,m} (x_n - x_m) ; n, m \in \mathbb{N} \}$$

est borné.

4.2. TOPOLOGIE SUR LES ESPACES BORNOLOGIQUES .
Soit E un espace bornologique et F un sous- ensemble de E. On dit que F est un M-fermé de E si la limite de toute suite M-convergente $(x_n)_n$ de F est dans F. Les complémentaires des M-fermés sont appelés les M-ouverts.
Dans un espace bornologique E, les M-ouverts forment une topologie appelée la Mackey-topologie ou C^∞-topologie.

4.3. DEFINITION .
On dit que $c : \mathbb{R} \to E$ est une C^∞-courbe si pour toute forme f de E', le composé $f \circ c$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ L'ensemble des C^∞- courbes de $\mathbb{R}$ dans E.

4.5. REMARQUE.

D'après le théorème (3.3), $c : \mathbb{R} \to E$ est une C^∞- courbe si et seulement si pour tout j dans $\mathbb{N}$, le quotient différentiel $\delta^j c : \mathbb{R}^{<j>} \to E$ est bornologique. La bornologie de E est celle définie par les formes linéaires : B est un borné de E si pour tout $f \in E'$, $f(B)$ est borné.

4.6. PROPOSITION [23], 2.3.7.
La topologie finale induite sur E par les C^∞- courbes est la Mackey topologie.

4.7. COROLLAIRE .
i) la topologie finale induite sur E par les suites M - convergentes est la Mackey-topologie .
ii) Si B est un convexe disqué borné, la topologie finale induite par les injections canoniques $i : E_B \to E$ est la Mackey-topologie (E_B désigne le sous-espace engendré par B).

5. LES ESPACES CONVENABLES.

Le calcul différentiel et intégral dont on va parler par la suite fait appel à un calcul de limite, à la séparation et la complétude des espaces dans lesquels on fait ce calcul. les espaces convenables répondent à tous ces besoins.

5.1. DEFINITION .
Soit E un espace bornologique convexe, on dit que E est M-complet si toute M-suite de Cauchy de E est M- convergente.

5.2. DEFINITION.
Soit E un espace bornologique convexe, on dit que E est un espace convenable si E est M-complet (i.e. complet pour la C^∞- topologie).

5.3. DEFINITION.
Soit E un espace convenable et $c : \mathbb{R} \to E$ une courbe. On dit que qu'un point $c'(t)$ de E est la dérivée (faible) de c au point $t \in \mathbb{R}$, si pour tout $f \in E'$, on a

$$(f \circ c)'(t) = f(c'(t)).$$

On dit que $\int_{s \leq \tau \leq t} c(\tau)\, d\tau \in E$ est une intégrale (faible) de c, si pour toute f de E', on a

$$\int_s^t (f \circ c)(\tau)\, d\tau = f\left(\int_s^t c(\tau)\, d\tau\right).$$

5.4. THEOREME [23], 2.6.2.
Soit E un espace bornologique convexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) E est M-complet.
2) Si B est un convexe disqué, fermé et borné alors E_B est un espace de Banach.
3) Pour toute C^∞- courbe $c : \mathbb{R} \to E$ l'intégrale (faible) sur [o, 1] existe.
4) Pour toute C^∞- courbe $c : \mathbb{R} \to E$ la dérivée (faible) $c'(o)$ existe.
5) Si $\{ x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans E, pour toute suite $(t_n)_n$ de $\mathbb{R}$ telle que $\sum | t_n | < +\infty$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} (t_n x_n)$ converge faiblement.

5.5. COMPLETE D'UN ESPACE BORNOLOGIQUE .

5.5.1. LEMME .
Soit J un ensemble quelconque, l'espace $\prod_{j \in J}\mathbb{R}$ est un espace convenable. Les bornés de cet espace sont définis comme suit :

$B \subset \prod_{j \in J} \mathbb{R}$ est borné si pour toute projection $pr_j : \prod_{j \in J} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $pr_j(B)$ est borné dans $\mathbb{R}$.

5.5.2. PROPOSITION .
Soit E un espace bornologique convexe. Il existe un espace convenable $\mathcal{E}$ unique tel que pour tout espace convenable F et tout $f : E \to F$ bornologique, il existe $g : F \to \mathcal{E}$ unique rendant le diagramme ci-dessous commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow i & & \downarrow g \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{Id} & \mathcal{E} \end{array}$$

d'après le lemme précédent, on peut évidement donner une forme explicite de $\mathcal{E}$ et de i ; en effet, on définit i par

$$i : E \to \prod_{E'} \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad i(x) = (l(x))_{l \in E'}$$

et soit $\mathcal{E}$ l'adhérance de i (E).

5.6. PROPRIETES DES ESPACES CONVENABLES.

5.6.1. DEFINITION.
Soit E et F deux e.l.c., on dit que $f : E \to F$ est de classe C^∞ si pour toute C^∞- courbe de E, $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, F)$.

5.6.2. REMARQUES.
a) Dans le cas où les espaces E et F sont de dimension finie, la définition précédente coïncide avec les définitions usuelles.

b) On démontre que les fonctions constantes sont de classe C^∞, les applications linéaires bornées sont de classe C^∞.
On est ramené maintenant à définir une bornologie sur les espaces fonctionnelles c'est ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

5.6.3. BORNOLOGIE DE $C^\infty(E, F)$.

a) $B \subset C^\infty(\mathbb{R}, E)$ est un borné si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $B(K)$ est borné de E. On vérifie que l'ensemble des bornés de $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ est une bornologie.

b) $B' \subset C^\infty(E, F)$ est un borné si $c^*(B')$ est un borné de $C^\infty(\mathbb{R}, F)$, où c^* est l'application de $C^\infty(E, F)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}, E)$ définie par $c^*(f) = f o c$. Les bornés de $C^\infty(E, F)$ forment une bornologie.

5.7. THEOREME .
Soient E, F et G trois espaces convenables. On a les résultats suivants :

a) $C^\infty(E, F)$ est convenables.

b) $\mathcal{L}(E, F) = \{ f : E \to F$ linéaire et bornée $\}$ est convenable.

c) $C^\infty(E \times F, G) \approx C^\infty(E, C^\infty(F, G))$.

5.8. COROLLAIRE .
Soient E, F et G trois espaces convenables les applications sont de classe C^∞.

a) $ev : C^\infty(E,F) \times E \to F$, $ev(f, x) = f(x)$.

b) $ins : E \to C^\infty(F, E \times F)$, $ins(x)(y) = (x, y)$.

c) $\psi : C^\infty(E, C^\infty(F, G)) \to C^\infty(E \times F, G)$, $\psi(f)(x, y) = f(x, y)$.

On arrive enfin au théorème le plus important qui a motivé le choix de la définition de la dérivée sur les espaces de Fréchet qui sont des espaces convenables.

5.9. THEOREME .
Soient E et F deux espaces convenables. L'opérateur différentiel

$d : C^\infty(E, F) \to C^\infty(E, L(E, F))$,

$$df(x)v = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

existe, est linéaire et borné (C^∞); on a en plus $d(f o g)(x)v = df(g(x))dg(x)v$.

CHAPITRE II

DIFF$^{+\infty}$ (S^1) EST UNE VARIETE DE FRECHET.

2.1. NOTATIONS.

Soient

1) $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
2) $C^\infty(S^1, \mathbb{R}) = \{ f : S^1 \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty \}$ qui s'identifie à
3) $C_{\mathbb{Z}}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, $\mathbb{Z}$-périodique $\}$.
4) $\mathrm{Diff}^\infty(S^1) = \{ f : S^1 \to S^1$, f est un C^∞- Difféomorphisme $\}$.
5) $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ est la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$.

2.2. TOPOLOGIE SUR $C^\infty(S^1, S^1)$ ET $DIFF_+^\infty(S^1)$.

On munit $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de la topologie quotient de $\mathbb{R}$ qui est définie par la distance : pour $(x,y) \in S^2$, $\| x-y \| = \min_{p\in\mathbb{Z}} | x'-y'+p |$, où x' et y' sont des relèvements dans $\mathbb{R}$ de x et y.

On définit la topologie de $C^\infty(S^1, S^1)$ comme suit :

Pour $f \in C^r(S^1, S^1)$ et $r \in \mathbb{Z}$, soit f' un relèvement de f dans $C^r_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\text{pour } x \in \mathbb{R}, \quad f'(1+x) = f'(x) + m.$$

Si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x) - m$, f est unique à une constante entière près et est $\mathbb{Z}$- périodique. On définit la C^r - topologie par

$$\|f\|_{C^r} = |f|_0 + |Df|_0 + \ldots\ldots + |D^r f|_0 \quad \text{où} \quad |f|_0 = \mathrm{Sup}_{0\le x\le 1} |f(x)|.$$

$C^r_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de cette topologie est un espace de Banach. On munit $C^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la topologie limite projective des toplogie C^r. Soit d_∞ la métrique qui définit cette topologie. Pour f et g appartenant à $C^\infty(S^1,S^1)$, soit δ_∞ la métrique telle que $\delta_\infty(f, g) = d_\infty(f, g)$, δ_∞ définit la C^∞-topologie sur $C^\infty(S^1, S^1)$, pour cette topologie $\mathrm{Diff}^\infty(S^1, S^1)$ est ouvert dans $C^\infty(S^1, S^1)$ et comme $\mathrm{Diff}^\infty_+(S^1)$ est la composante connexe de $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ est donc un ouvert de $C^\infty(S^1, S^1)$.

Soit $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ le fibré tangent de S^1.

2.3. *DIFFEOMORPHISME LOCAL ENTRE TS^1 ET $S^1 \times S^1$*

2.3.1. PROPOSITION.

Soit $V = \{ (x, v) \in TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}, \ |v| < \varepsilon \}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe un voisinage W de $\Delta = \{ (x,x), \ x \in S^1 \}$ dans $S^1 \times S^1$ tel que V et W sont C^∞– difféomorphes.

PREUVE.
La métrique riemannienne de S^1, induit une application " exponontielle " notée

$$\exp : TS^1 \to S^1$$

où pour $\zeta = (x, v) \in S^1 \times \mathbb{R} = TS^1$, on pose $\exp(\zeta) = x + v$.
Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, exp est un C^∞-difféomorphisme de $V = \{ (x, v) \in S^1 \times \mathbb{R}, |v| < \varepsilon \}$ sur $\exp(V)$ qui est un ouvert de S^1. Alors l'application

$$e : \zeta = (x, v) \to (\pi(\zeta) = x, \exp(\zeta) = x + v)$$

de TS^1 dans $S^1 \times S^1$ induit un difféomorphisme de V sur $W = \exp(V)$ qui est un voisinage ouvert de la diagonale de $S^1 \times S^1$.

2.4. *SECTION AU DESSUS D'UNE APPLICATION DE $C^\infty(S^1, S^1)$.*

2.4.1. DEFINITION.

Soient $f \in C^\infty(S^1,S^1)$ et $\pi : TS^1 \to S^1$ la projection canonique, une section au dessus de f est une application $s : S^1 \to TS^1$, de classe C^∞, telle que : $\pi \circ s = f$.
Les sections au dessus de f s'identifient aux sections du fibré (f^*TS^1, p, S^1), où f^*TS^1 est le fibré image réciproque de (TS^1, π, S^1) par l'application f. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \xrightarrow{s'} & f^*TS^1 & \xrightarrow{f^*} & TS^1 \\
\downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow p & & \downarrow \pi \\
S^1 & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 .
\end{array}$$

2.4.2. REMARQUE.

Soit $s : S^1 \to S^1 \times \mathbb{R}$ une section au dessus de $f : S^1 \to S^1$. Pour $\theta \in S^1$, on a $s(\theta) = (f(\theta), \zeta(\theta)) \in S^1 \times \mathbb{R}$, où ζ est une application de S^1 dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie par la section s. Réciproquement, soit $\lambda : S^1 \to \mathbb{R}$, elle définit une section s par $s(\theta) = (f(\theta), \lambda(\theta))$ et $\pi \circ s = f$. Ainsi l'espace des sections au dessus de f peut s'identifier à l'espace de Fréchet des applications $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ qui est lui même isomorphe à l'espace des applications de classe C^∞, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$-périodiques.

2.5. OUVERTS C^∞-DIFFEOMORPHES DE $C^\infty(S^1, S^1)$ ET $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$.

Pour les ouverts V et W construits dans la proposition 2.3. et $f \in C^\infty(S^1, S^1)$, soient

$$W_f = \{ g \in C^\infty(S^1, S^1) \text{ telles que } (f(\theta), g(\theta)) \in W,\ \forall \theta \in S^1 \}.$$
$$V_f = \{ s \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}) \text{ telles que } \pi o s = f \text{ et } \forall \theta \in S^1,\ s(\theta) \in V \}.$$

2.5.1. PROPOSITION.

L'application $\Phi_f : g \to \Phi_f(g)$ de W_f dans V_f telle que $\Phi_f(g)(x) = g(x) - f(x)$ est un homéomorphisme et dont la réciproque Ψ_f est définie par

$\Psi_f(s)$ est le relèvement de $f + s$ dans W_f.

PREUVE.
On a évidemment

$$\Psi_f o \Phi_f = \text{Id sur } W_f \text{ et } \Phi_f o \Psi_f = \text{Id sur } V_f, \text{ d'autre part}$$
$$[\Phi_f(g) - \Phi_f(g')](x) = \Phi_f(g)(x) - \Phi_f(g')(x),$$
$$= g(x) - f(x) + f(x) - g'(x),\ \forall x \in S^1,$$
$$= g(x) - g'(x),\ \forall x \in S^1. \quad (*)$$

De même

$$[\Psi_f(s) - \Psi_f(s')](x) = s(x) - S'(x). \quad (**)$$

Des égalités (*) et (**), on en déduit la continuité de Ψ_f et Φ_f.

2.5.2. PROPOSITION.

Soit $(W'_f)_{f \in C^\infty(S^1, S^1)}$, un recouvrement ouvert de $C^\infty(S^1, S^1)$ obtenu en remplaçant W_f de 2.5. par $W'_f = \Psi(V'_f)$ où V'_f est un voisinage de la section nulle dans V_f, alors (W'_f, Φ_f) est un atlas de $C^\infty(S^1, S^1)$.

PREUVE.

On a démontré précédement que les Φ_f sont des homéomorphismes. Il reste à prouver que les applications de changement de cartes sont de classe C^∞ ; en effet, pour les deux cartes (W'_f, Φ_f) et (W'_g, Φ_g) telles que $W'_f \cap W'_g \neq \varnothing$ et $\Psi_f = (\Phi_f)^{-1}$.

$$\Phi_g \circ \Psi_f : \quad \Phi_f(W'_f \cap W'_g) \to \Phi_g(W'_f \cap W'_g)$$

est de classe C^1.

$$D(\Phi_g \circ \Psi_f)(h).k = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_g \circ \Psi_f(h + tk) - \Phi_g \circ \Psi_f(h)}{t} = k,$$

d'où la continuité de $D(\Phi_g \circ \Psi_f)$ en (h, k).

Par récurrence, on démontre que $\Phi_g \circ \Psi_f$ est de classe C^∞.

2.5.3. COROLLAIRE.

$C^\infty(S^1, S^1)$, $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$, $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ sont des variétés de Fréchet.

PREUVE.

En effet, $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$, $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ sont des ouverts de $C^\infty(S^1, S^1)$, qui sont donc des variétés de Fréchet pour la structure induite par $C^\infty(S^1, S^1)$.

2.5.4. PROPOSITION.

$\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$, $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ sont des groupes de Lie.

PREUVE.

$\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$, $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ sont des variétés d'après le corollaire précèdent, il reste à prouver que les applications $\Psi_1 : (f, g) \to f \circ g$ de $\mathrm{Diff}^\infty(S^1) \times \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ ans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ et $\Psi_2 : f \to f^{-1}$ de $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ sont de classe C^∞.

On va exprimer les deux applications Ψ_1, Ψ_2 dans des cartes locales. En effet, considérons W_f' et W_g' des cartes locales de f et g dans $C^\infty(S^1, S^1)$ et V_f, V_g les voisinages associés dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, Ψ_1 s'exprime comme suit

$$\begin{array}{ccccc} V_f \times V_g & \xrightarrow{\Psi_f \circ \Psi_g} & W_f \times W_g & \xrightarrow{\Psi_{f \circ g}} & V_{f \circ g} \\ (\zeta, \eta) & \to & (\Psi_f(\zeta), \Psi_g(\eta)) & \to & \theta(\zeta, \eta) \end{array}$$

où $W_f = \mathrm{Diff}^\infty(S^1) \cap W'_f$, $W_g = \mathrm{Diff}^\infty(S^1) \cap W'_g$ et V_f et V_g sont les ouverts correspondants dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et l'application $\theta : (\zeta, \eta) \to \theta(\zeta, \eta)$ de $V_f \times V_g$ dans

$V_{fo\,g}$ est définie par

$$\forall x \in S^1, \quad \theta(\zeta, \eta)(x) = f[g(x) + \eta(x)] + \zeta[g(x) + \eta(x)] - f \circ g(x)$$

est de classe C^1 : en effet, pour $x \in S^1$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\theta(\zeta + th, \eta) - \theta(\zeta, \eta)}{t}$$

existe pour tout h dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R}) \cap V_f$. Pour $x \in S^1$ et en remplaçant θ par son expression (1), cette limite est égale à

$$\lim_{t \to 0} \frac{\theta(\zeta + th, \eta)(x) - \theta(\zeta, \eta)(x)}{t} = h(g(x) + \eta(x)).$$

Ainsi $[D_\zeta\theta(\zeta, \eta).h](x) = h(g(x) + \eta(x))$. (*)
Etudions maintenant la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{\theta(\zeta, \eta + tk) - \theta(\zeta, \eta)}{t}.$$

Pour tout $x \in S^1$, elle s'écrit

$$\lim_{t \to 0} \left[\frac{f(g + tk + \eta)(x) - f(g + \eta)(x)}{t} + \frac{\zeta(g + \eta + tk)(x) - \zeta(g + \eta)(x)}{t} \right]$$

$$= [Df(\Psi_g(\eta).k](x) + [D\zeta(\Psi_g(\eta).k).k](x).$$

On conclut donc que cette limite est égale à

$$= Df \circ \Psi_g(\eta).k + D\zeta \circ \Psi_g(\eta).k. \qquad (**)$$

Ainsi, en rassemblant les deux limites (*) et (**) trouvées précédement, on obtient

$D_\zeta\, \theta(\zeta, \eta).h = h \circ \Psi_g(\eta)$ qui est linéaire par rapport à h
et $D_\eta\, \theta(\zeta, \eta).k = [Df \circ \Psi_g(\eta).k + D\zeta \circ \Psi_g(\eta).k$.

Il reste à prouver que ces dérivées partielles sont continues ; en effet,
a) $D_\zeta\theta$ ne dépend pas de ζ, elle est linéaire par rapport à h, égale à $h \circ \Psi_g$ en tant que fonction de η, elle est donc continue par rapport à (ζ, η). D'après la remarque 1.4.4., $D_\zeta\theta$ est continue en tant que fonction des trois variables (ζ, η, h).
b) $D_\eta\theta$ est linéaire par rapport à k ; comme précèdement, $Df \circ \Psi_g$ est continue en tant que fonction des trois variables (ζ, η, k). Il reste à voir que $D\zeta \circ \Psi_g(\eta)$ est continue en (ζ, η) ; en effet, cette application est linéaire par rapport à ζ et est continue par rapport à η, d'après la remarque 1.4.4. elle est continue en (ζ, η). Donc continue en tant que fonction des trois variables (ζ, η, k). D' aprés le corollaire 1.4.3., θ est de classe C^1. En raisonnant par récurrence sur ces dérivées partielles, on peut démontrer qu'elles sont de classe C^∞ et par suite on conclut donc que l'application $(f, g) \to f \circ g$ de $\mathrm{Diff}^\infty(S^1) \times \mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ est de classe C^∞. Il reste à démontrer que l'application $\varphi : f \to f^{-1}$ de $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ est de classe C^∞. En effet, exprimons cette applicatiopn par des cartes locales,

$$V_f \xrightarrow{\Psi_f} W_f \xrightarrow{\varphi} W_{f^{-1}} \xrightarrow{\Phi_{f^{-1}}} V_{f^{-1}}$$
$$\zeta \to \Phi_{f^{-1}} \circ \varphi \circ \Psi_f(\zeta)$$

Pour $|\zeta|$ assez petit φ est bien définie car $(f+\zeta)^{-1}$ appartient à $W_{f^{-1}}$. Il suffit de passer aux relèvements de $(f+\zeta)^{-1}$ et f^{-1} pour le vérifier. Pour démontrer maintenant que l'application φ est differentiable, il suffit de prouver que la limite suivante existe et est continue en tant que fonction des deux variables ζ et h. En effet, on a pour $h \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, comme

$$\Phi_{f^{-1}}(\zeta) \circ [\Psi_f(\zeta+th)]^{-1} = [\Psi_f(\zeta+th) \circ [\Psi_f(\zeta)]^{-1}]^{-1}$$

$$= (f+\zeta+th) \circ (f+\zeta)^{-1}$$

$$= I + th(f+\zeta)^{-1} = I + th[\Psi(\zeta)]^{-1}.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi_{f^{-1}}(\Psi_f(\zeta+th))^{-1} - \Phi_{f^{-1}}(\Psi_f(\zeta))^{-1}}{t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi_{f^{-1}} \circ (\Psi_f(\zeta))^{-1} \circ (I + th(\Psi_f(\zeta))^{-1} - \Phi_{f^{-1}}(\Psi_f(\zeta))^{-1}(I)}{t} .$$

Comme $\Phi_{f^{-1}}$ et $[\Psi_f(\zeta)]^{-1}$ sont de classe C^∞, leur composé est aussi de classe C^∞, il en de même pour l'application $I + th[\Psi_f(\zeta)]^{-1}$. La limite précédente est égale à

$$D(\Phi_{f^{-1}} \circ [\Psi_f(\zeta)]^{-1}).\ h(\Psi_f(\zeta))^{-1}.$$

On conclut que $\Phi_{f^{-1}} \circ \varphi \circ \Psi_f$ est de classe C^1. Comme la dérivée ne fait intervenir que les applications $\Phi_{f^{-1}}$, $[\Psi_f(\zeta)]^{-1}$ et h et leur dérivée, par un raisonnement par recurrence, on démontre que l'application φ est de classe C^∞.

2.5.5. REMARQUE.

$\mathrm{Diff}^\infty(S^1)$ est un groupe de Lie non analytique ([28]).

$\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ est un groupe simple (égal à son commutateur) ([24]), il est engendré par les difféomorphismes qui appartiennent à un groupe à un paramètre ([24]).

***

DEUXIEME PARTIE

CHAP. III : ETUDE DU GROUPE H_0 ($Diff_+^\infty$ (S^1), Ω^∞ (S^1))

3.1. Notations.

3.2. Définition d'un courant.

3.3. Transformée de Fourier d'un courant.

3.4. Fonction harmonique et Courant.

3.5. Courant invariant par un groupe Fuschien.

3.6. Fermeture de $G (\Omega^\infty (S^1)$ (étude d' un exemple).

3.7. Etude d' un cas particulier de $H_0 (G, \Omega^\infty (S^1)$.

1) Lemme de convergence sur un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) CNS sur l' existence de la solution de l' équation en ψ : $\varphi = \psi - \psi \circ g$.

3) CNS sur l' équation $\omega = \omega - g^* \omega$.

4) $G (C^\infty (S^1, \mathbb{R}))$ et $G (\Omega^\infty (S^1))$ sont fermés.

5) Conclusion.

INTRODUCTION.

Dans cette partie, on expose un résultat de Haefliger [3] sur le calcul du groupe d' homologie $H_0(G, \Omega)$ où G est un sous groupe de difféomorphismes du cercle et $\Omega = \Omega^\infty(S^1)$ l 'ensemble des formes différentielles sur S^1. On sait que H_0 est égal au quotient de Ω par $G(\Omega)$: l 'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $\{ g^*\omega - \omega, g \in G, \omega \in \Omega^\infty(S^1)$, où $g^*\omega = \omega \circ g.Dg - \omega \}$ cet espace n ' est pas toujours fermé, il en résulte une non séparabilité de $H_0(G, \Omega) = \Omega^\infty(S^1) / G(\Omega)$. Cette difficulté est toujours sans solution ce qui a ramené à imposer une condition sur le groupe G. En effet, on suppose qu' il est engendré par un seul élément hyperbolique g (c'est à dire g a exactement deux points fixes et $g(\mathbf{B}) = \mathbf{B}$). On démontre, dans ces conditions, que $G(\Omega)$ est un espace fermé et pour que f soit un élément non trivial de $H_0(G, C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, il suffit que pour toute distribution D sur S^1, G - invariante $< D \; f >$ est non nul. Le calcul et la caractérisation de ces distributions G - invariantes est exposé dans le théorème 3.5.6.. Un autre résultat sur le $H_0(G, \Omega^\infty(S^1))$ est dans le théorème 3.5.7. : une forme différentielle ω est non nulle dans $H_0(G, \Omega)$ si et seulement pour tout courant T sur S^1, G- invariant, la valeur de T au point ω est non nulle.

Si on impose à G la condition d'être un groupe Fuschien engendré par un nombre fini de générateurs, on démontre que les distributions (respectivement les 1 courants) G - invariantes sont en correspondance bijective avec les formes différentielles harmoniques à croissance lente admettant au plus un pôle d'ordre un en certains points de l' espace de Riemann **B** / G où **B** est le disque unité du plan complexe (respectivement les différentielles de fonctions harmoniques à croissance lente possédant au plus un pôle d' ordre un sur **B** / G). L' espace vectoriel des distributions G-invariantes et celui des courants G-invariants sont tous les deux de dimension finie.

CHAPITRE III

ETUDE DU GROUPE H_0 ($Diff_+^\infty$ (S^1), Ω^∞ (S^1))

3.1. NOTATIONS.

1) $S^1 = \{ z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \}$.
2) $\Omega^\infty(S^1) = \Omega$ l' ensemble des formes différentielles de classe C^∞, définies sur S^1 muni de la C^∞ - topologie.
3) G est un sous groupe du groupe $Diff_+^\infty(S^1)$ des difféomorphismes du cercle .
4) $G(\Omega) = \{ g^*\omega - \omega,\ g \in G,\ \omega \in \Omega \}$ l 'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $g^*\omega - \omega$, $\omega \in \Omega$ et $g \in G$, oû $g^*\omega - \omega = \omega \circ g\, .dg - \omega$.
5) $\mathcal{H}(S)$ est l'espace vectoriel des fonctions harmoniques définies sur S où S est une surface de Riemann.
6) $\mathcal{H}_d(S)$ est l'espace vectoriel des formes différentielles, harmoniques définies sur S où S est une surface de Riemann.
7) $\mathbf{B} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \}$.

3.2. DEFINITION D'UN COURANT.

3.2.1. DEFINITION.

Un courant T est une forme linéaire (complexe ou réelle) continue sur Ω pour une C^k - topologie, $k \in \mathbb{N}^*$, i.e. il existe $a > 0, k \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ |T(\omega)| = |< T, \omega >| \leq a \|\omega\|_k,$$

où $\|.\|_k$ est la norme pour la C^k-topologie (voir chap II). On dit que le courant T est G- invariant si $T = 0$ sur $G(\Omega)$, c'est à dire

$$\forall\, g \in G,\ \forall\, \omega \in \Omega,\ T(\omega) = T(g^*\omega),$$
$$\Leftrightarrow$$
$$< T, \omega > = < T, g^*\omega >.$$

Soit $\mathcal{C}(S^1)$ l ' espace vectoriel des courants sur S^1.

3.2.2. THEOREME.

Soit $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$. Si pour tout $T \in \mathcal{C}(S^1)$, on a $< T, df > = 0$, alors il existe une suite α_n de $G(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = df \quad \text{pour la } C^\infty \text{- topologie.}$$

PREUVE.

Soit $f \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ telle que df n'appartienne pas à l'adhérence de $G(\Omega)$. Alors sur le sous espace vectoriel $G(\Omega) \oplus \mathbb{R}.df$ de $\Omega^{\infty}(S^1)$, $g^*\omega - \omega + \lambda df \to \lambda$ est une forme linéaire T G-invariante et est continue. En effet, l'application T' qui à $\lambda df \to \lambda$ est un isomorphisme ([8], prop 2, corollaire 1). Soit V_λ un intervalle ouvert contenant λ, le sous-ensemble $G(\Omega) \oplus T^{-1}(V_\lambda) = T^{-1}(V_\lambda)$ est un ouvert de $G(\Omega) \oplus \mathbb{R}df$, donc T est continue. Par le théorème de Hahn-Banach, T se prolonge en une forme linéaire continue sur Ω, telle que $< T, df > = 1 \neq 0$. Il y a donc absurdité.

3.3. LA TRANSFORMEE DE FOURIER D ' UN COURANT.

On définit les coefficients de Fourier d'un courant T par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(T) = < T, e^{-in\theta} d\theta >.$$

On dit que la suite de nombres complexes $(c_n)_n$ est à croissance lente s'il existe k dans $\mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$|c_n| \leq a|n|^k, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

3.3.1. PROPOSITION.

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, une suite complexe à croissance lente, alors la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\theta} d\theta$$

converge vers un courant $T \in \mathcal{C}(S^1)$ dont les coefficients de Fourier $c_n(T)$ coïncident avec les c_n, pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, < T, e^{-in\theta} d\theta > = c_n(T) = c_n.$$

Preuve.

Soit $f \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$, considérons la suite

$$S_N(f) = \sum_{-N}^{+N} C_n \hat{f}(n) \text{ où } \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

La suite $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente car si $f \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} |n|^k \hat{f}(n) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc il existe $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{-N}^{+N} c_n \hat{f}(n)$ et $f \to \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{-N}^{+N} c_n \hat{f}(n)$ est une distribution sur $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$.

Posons maintenant

$$D(f) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N}^{+N} c_n \hat{f}(-n),$$

on définit le courant $T \in \mathrm{T}(S^1)$ par

$$\forall f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}),\ \langle T,\ f(\theta)\, d\theta \rangle = -\langle D,\ f \rangle.$$

La transformée de Fourier de D a pour coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \langle D, e^{-in\theta}) = \langle T,\ e^{-in\theta} d\theta \rangle = c_n(T).$$

3.4. FONCTION HARMONIQUE ET COURANT.

3.4.1. PROPOSITION.

Si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes à croissance lente, alors la série

$$\overline{T}(z) = c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n(T) z^n + \sum_{1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

est une fonction harmonique sur $\mathbf{B} = \{ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \}$.

PREUVE.

On a évidement pour $z = x + iy$

$$\frac{d^2}{dx^2}(x+iy)^n + \frac{d^2}{dy^2}(x+iy)^n = n(n-1)(x+iy)^{n-2} - n(n-1)(x+iy)^{n-2} = 0.$$

Un calcul analogue avec $z = x - iy$, nous conduit au même résultat.
Démontrons d'abord que la série

$$\overline{T}(z) = c_0 + \sum_{1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

est bien définie. En effet, pour $z = r e^{i\theta}$, si on suppose que $|c_n| \le a|n|^k$, on a

$$|\overline{T}(z)| \leq |c_0| + \sum_{1}^{+\infty} |c_n| r^n + \sum_{1}^{+\infty} |c_{-n}| r^n \leq |c_0| + 2a \sum_{1}^{+\infty} |n|^k r^n, \ k \in \mathbb{N}^*, \ k \text{ fixé.}$$

Comme la série de terme général $|n|^k r^n$ est uniformément convergente pour $|z| \leq r < 1$, on en déduit que les séries de termes généraux respectifs $|c_n| r^n$ et $|c_{-n}| r^n$ sont convergentes. Comme $(x + i y)^n$ et $(x - i y)^n$ sont harmoniques, on conclut donc que $\overline{T}(z)$ existe et est continue sur **B**.

3.4.2. DEFINITION.

Une fonction f définie sur **B** est dite à croissance lente, s' il existe $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall z \in \mathbf{B}, \quad |f(z)| \leq \frac{a}{(1 - |z|)^k}.$$

3.4.3. PROPOSITION.

L'application $\mathcal{F} : T \to \overline{T}(z)$ de $\mathcal{C}(S^1)$ dans $\mathcal{H}_d(\mathbf{B})$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}(S^1)$ sur le sous espace vectoriel des fonctions harmoniques sur **B** à croissance lente.

PREUVE.

$T \in \mathcal{C}(S^1)$ est le courant défini par les c_n qui sont à croissance lente, d' après la proposition 3.4.1., $\mathcal{F}(T)$ est harmonique. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est bijective. En effet,

$$\overline{T}(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n.$$

Comme les c_n sont à croissance lente, ils définissent un courant $T \in \mathcal{C}(S^1)$ unique. Il reste à vérifier que $\mathcal{F}(T)$ est une fonction harmonique à croissance lente, i.e.

$$\exists\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 1,\ \exists\, a \in \mathbb{R}_+^* \text{ tels que } |\mathcal{F}(T)| = |\overline{T}(z)| < \frac{a}{(1 - |z|)^k}.$$

Comme les c_n sont à croissance lente, il existe $a_1 > 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 \in \mathbb{N}^*$, tels que

$$|c_n| < a_1 |n|^{k_1} \text{ et } |\mathcal{F}(T)| = |\overline{T}(z)| \leq |c_0| + 2a_1 . \sum_{1}^{+\infty} n^{k_1} r^n.$$

La série de terme général $n^{k_1} r^n$ est convergente pour $r < 1$. Il existe donc un entier naturel n_0 et b tels que

$$| \sum_{n_0}^{+\infty} n^{k_1} r^n | \leq b.$$

Ainsi

$$| \mathcal{F}(T) | = | \overline{T}(z) | < | c_0 | + \sum_{1}^{\infty} n^k r^n + b \leq p(r),$$

où $p(r)$ est un polynôme de degré égal à n_0-1 et son plus grand coefficient est $|n_0|^k$ ($k = k_1$), $\mathcal{F}(T)$ est donc une fonction harmonique à croissance lente.

$$| p(r) | \leq n_0^k (1 + ...+ r^{n_0 - 1}) \leq n_0^k . \frac{1 - r^{n_0}}{1 - r} \leq \frac{b}{1 - r}.$$

Réciproquement, soit $h(z)$ une fonction harmonique à croissance lente et montrons que les coefficients c_n sont à croissance lente. En effet,

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } | h(z) | < \frac{a}{(1 - r)^k}, \quad (*)$$

si on pose $z = r e^{i\theta}$ alors $| h(z) | = | h(r e^{i\theta}) | = | \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

Comme on sait que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r e^{i\theta}) . e^{-in\theta}}{r^{|n|}} d\theta, \quad (**)$$

d'après (*) et (**), on a $| c_n | \leq \dfrac{a}{(1 - r)^k r^{|n|}}$.

On en déduit que $| c_n | \leq b | n |^k$, avec $b \geq a \left(\frac{|n|}{|n| - 1} \right)^{|n|} |n|^k$.

Le choix de b a bien un sens car la suite qui le minore est convergente, on conclut donc que les c_n sont à croissance lente, ce qui achève la démonstration.

3.4.4. REMARQUE.

On se servira du noyau de Poisson pour faire un calcul explicite de $\mathcal{F}(T)$; pour cela soit $T \in \mathcal{C}(S^1)$, pour $0 \leq r < 1$ et $(c_n(T))_{n \in \mathbb{Z}}$ les coefficients de Fourier associés, on a pour $z = re^{i\alpha}$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} e^{in\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} < T, \; e^{-in\theta} d\theta > r^{|n|} e^{in\alpha}$

$$= < T, \; \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in(\alpha-\theta)} d\theta >$$

$$= < T, P_r(\alpha - \theta)\, d\theta >,$$ où P_r est le noyau de Poisson.

$$= < T, \; \text{Réel}\, \frac{1 + r e^{i(\alpha-\theta)}}{1 - r e^{i(\alpha-\theta)}} d\theta > \; = \; < T, \; \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta > \; = h(z).$$

3.4.5. THEOREME.

L' espace vectoriel $\mathscr{D}(S^1)$ des distributions D sur S^1 telles que $< D, 1 > = 0$, est isomorphe à l'espace vectoriel des différentielles des fonctions harmoniques sur **B**, à croissance lente. Une distribution est appelée 0-courant.

PREUVE.

Si df est la différentielle d'une fonction harmonique f sur **B**, à croissance lente, d 'après la proposition 3.4.3., il existe un courant T sur S^1 tel que $\mathscr{F}(T) = f$. Considérons main- tenant la distribution D définie par

$$\forall f \in \mathbb{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}), \; < S, \; df > = - < D, f >,$$

D est bien définie et $< D, 1 > = 0$. Réciproquement, soit D une distribution sur S^1 telle que $< D, 1 > = 0$ et soit le courant T défini par

$$\forall f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}), \quad < T, df > = - < D, f >.$$

D ' après la proposition 3.4.3., il existe une fonction harmonique h telle que $\mathscr{F}(T)$ soit égale à h et h est à croissance lente. La différentielle dh répond bien à la question. Il reste à voir que h ne dépend pas du choix d'une primitive T de D ; en effet, posons

$$h(z) = \sum_{0}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{1}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n, \quad |z| < 1,$$

comme les c_n sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; C_n = < T, e^{-in\theta} d\theta > = - < D, e^{-in\theta} >,$$

on en conclut que dh (z) ne dépend pas de T et dh(z) est unique.

3.5. COURANT INVARIANT PAR UN GROUPE FUSCHIEN.

3.5.1. DEFINITION.

Une transformation de Mobius du plan complexe est une transformation obtenue par la composée :

1) de translation : $z \to z + a, \ a \in \mathbb{C}$,

2) de similitude : $z \to a z, \ a \in \mathbb{C}^*$,

3) d' inversion : $z \to 1 / z$.

3.5.2. DEFINITION.

Un sous groupe G de transformations de Mobius est un groupe fuschien si

1) G laisse invariant $\mathbf{B} = \{ z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1 \}$,

2) $\forall$ K compact de **B**, l'ensemble $\{ g \in G, g(K) \cap K \neq \emptyset \}$ est fini,

3) G est discret.

3.5.3. REMARQUE.

Dans toute la suite, le groupe G est supposé un groupe fuschien engendré par un nombre fini d'applications conformes du disque unité **B** de la forme

$$z \to g(z) = e^{i\alpha} \frac{z - a}{\bar{a} z - 1}, \quad |a| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{de } \mathbf{B} \text{ dans } \mathbf{B}.$$

3.5.4. THEOREME, [5] p.118.

Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ (i.e U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$) et soit G un groupe de transformations de Mobius qui laisse invariant U et opère proprement sur U. Si pour tout compact K de U l'ensemble $\{ g \in G, \ g(K) \cap K \neq \emptyset \}$ est fini, alors U / G est une surface de Riemann.

3.5.5. REMARQUE.

1) Si G est un groupe fuschien, engendré par un nombre fini de générateurs et possédant au moins deux élèments, d'ordre infini, n 'ayant pas en commun de points fixes, alors d'après les théorèmes : 10.1.2., 9.4.2. et 9.2.4. de [5], il existe une surface compacte S et k points $x_1, x_2, .., x_k$ de cette surface tels que **B**/ G soit homéomorphe à $S \setminus \{ x_1, x_2, .., x_k \}$. Dans toute la suite, on prendra $S \setminus \{ x_1, x_2, ..., x_k \}$ au lieu de **B**/G et soit g le nombre d'anses de cette surface.

3.5.6. THEOREME.

L'espace des distributions sur S^1 (ou 0-courants) G- invariantes, nulles sur les constantes est isomorphe à l'espace vectoriel des 1- formes harmoniques sur S ayant au plus un pôle d 'ordre un aux points $x_1, ..., x_k$.

PREUVE

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin du théorème 3.4.5. et de résultats préliminaires dont on indique les références de démonstration.

1) L'application projection qui à $z \to p(z)$ de **B** dans **B**/G est une application holomorphe, D'après [4], 4c, page. 121.

2) L'application " p " induit un isomorphisme $p_* : f \to p_*(f) = f \circ p$ de $\mathcal{H}(\mathbf{B}/G)$ dans $\mathcal{H}(\mathbf{B})$.

3) L'application p induit un autre isomorphisme $p^*: \omega \to p^*\omega = (\omega \circ p).dp$ de $\mathcal{H}_d(\mathbf{B}/G)$ dans $\mathcal{H}_d(\mathbf{B})$.

4) Soit Δ_i un disque ouvert centré en x_i, $i \in \{1,\dots,k\}$, Δ_i est isométrique à la surface de Riemann H/Γ (voir [1] ex 6 - 2, page 122) où $H = \{ z = x + i\,y, y > c > 0 \}$ et Γ est le groupe engendré par la translation $t : z \to t(z) = z + 2\pi$.

5) L' application $z \to e^{iz} = \beta$ de H/Γ dans une carte locale au voisinage de x_i est un homéomorphisme.

6) Caractérisation des formes harmoniques à croissance lente.

Soit ω une forme dans $\mathcal{H}_d(\mathbf{B})$, on supposer que ω est Γ- invariante et que H est muni de la distance hyperbolique

$$\text{si } z = x + i\,y \in H, \quad ds = dz/y.$$

Au voisinage de x_i et par changement de carte $\omega(z), z \in H$, est de la forme

$$\omega(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz}$$

et ω est à croissance lente si et seulement si

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^{*+}, \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tels que } |c_n e^{inz}| \leq a\,y^k.$$

Si on pose $z = x + i\,y$, cela revient à dire que

$$|c_n e^{-y} e^{ix}|\,|dz| = |c_n e^{-ny}\, y| \leq a\,y^k, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$|c_n e^{-ny}| \leq a\,y^{k-1},$$

soit encore

$$c_n \equiv 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_- = \{ n \in \mathbb{Z} \,/\, n < 0 \}.$$

Ainsi, une forme differentielle harmonique ω invariante par Γ est à croissance lente si et seulement si

$$\omega(z) = \sum_{0}^{+\infty} c_n e^{inz}\, dz + \sum_{0}^{+\infty} \overline{c'_n}\; e^{-in\bar{z}}\, d\bar{z}.$$

comme, $d\beta = i\,dz\,\beta$, on a $dz = -i\,d\beta/\beta$; $\omega(z)$ est donc de la forme

$$\omega(z) = -i \sum_{0}^{+\infty} c_n \beta^n \frac{d\beta}{\beta} + (-i) \sum_{0}^{+\infty} \overline{c'_n}\, \overline{\beta}^n \frac{d\overline{\beta}}{\overline{\beta}}.$$

Selon que c_0 est nul ou non, $\omega(z)$ admet au plus un pôle d'ordre un au point $\beta = 0$. La forme differentielle $\alpha \in \mathcal{H}_d(\mathbf{B}/G)$ elle que $\omega = p^*\alpha$ admet au plus un pôle d'ordre un aux points x_i, $i \in \{1,...., k\}$.

Démonstration du théorème 3.5.6..

Soit D une distribution sur S^1 (ou 0 - courant) et soit T le 1- courant associé sur S^1. D'après le théorème 3.4.5., à T on fait correspondre la différentielle d'une fonction harmonique sur **B** à croissance lente, notée df. D' après le résultat 5), Il existe une forme différentielle $\rho \in \mathcal{H}_d(\mathbf{B}/G)$ telle que $f = p^*\rho$; ρ est une forme différentielle ayant au plus un pôle d'ordre un aux points x_i, $1 \leq i \leq k$. La forme différentielle ρ est unique car p^* est un isomorphisme donc f est unique.

Réciproquement, soit ρ une forme différentielle sur $\mathbf{B}/G$ ayant au plus un pôle d'ordre un aux points x_i, $i \in \{1,.., k\}$; d'après le résultat 5) précédent, il existe une forme différentielle ω sur **B** telle que $\omega = p^*\rho$ et ω est à croissance lente. D'aprés le théorème 3.4.5., il existe un 0 - courant D sur S^1 unique tel que $< D, 1 > = 0$.

3.5.7. THEOREME.

La dimension de l'espace vectoriel des 0 - courants, sur S^1, qui sont G -invariants et nuls sur les constantes est égale à $\max(2g, 2g + 2k - 2)$.

PREUVE.

Pour démontrer le théorème, on a besoin du lemme suivant.

3.5.8. LEMME [1] p. 251

Si S est une surface de Riemann compacte à g anses, l'espace vectoriel des **C**-formes différentielles harmoniques sur S est de dimension 2 g.

Retour à la démonstration du théorème, pour cela on va envisager deux cas :

1) cas où $k = 0$.

D'après le lemme précédent, les formes différentielles sur $\mathbf{B}/G$ sont régulières et la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces formes est égale à 2 g. C'est aussi la dimension de l'espace vectoriel des 0 - courants sur S^1, ceci d'après le théorème 3.4.6.

2) Cas où $k \geq 1$.

D'après le théorème de Riemann - Roch : [2], 27C page 326 ou [1], 10 - 5) p 264 et 10-11] p 267, la dimension de l'espace vectoriel des formes différentielles sur $\mathbf{B}/G$ ayant au plus des pôles d'ordre un est égale à $2g + 2k - 2$. On conclut donc que l'espace vectoriel des distributions (0 - courants) a pour dimension $\max(2g, 2g + 2k - 2)$.

3.5.9. THEOREME.

L'espace vectoriel des courants sur S^1 est isomorphe à l' espace vectoriel des fonctions harmoniques sur **B** / G dont les différentielles admettant au plus un pôle d'ordre un aux points x_i, $1 \leq i \leq k$, sa dimension est égale à max (1, k).

PREUVE.
Soit T un courant sur S^1, d'après la proposition 3.4.3., on peut lui associer une fonction harmonique " ϕ " sur **B**, à croissance lente et cette correspondance est un isomorphisme. La différentielle " $d\phi$ " de " ϕ " est une forme harmonique sur **B** à croissance lente. Comme p^* est un isomorphisme, il existe une forme différentielle $d\psi$ sur **B** / G, ayant au plus un pôle d'ordre un aux points x_i $1 \leq i \leq k$. La réciproque se démontre facilement en remontant la démonstration précédente. La dimension de cet espace dépend de la valeur de k; en effet,
- Si k = 0, d ' après [1], TH 10- 16) p 271, dim = 1.
- Si k = 1, d ' après [1], TH 10 - 16) p 271 et p 272, dim = 2.
- Si $k \geq 2$, d' après [3], dim = k.

On conclut donc que la dimension de l'espace vectoriel des courants est égale à max (1,k).

3.6. FERMETURE DE G (Ω^∞ (S^1)) : ETUDE D'UN EXEMPLE.

On sait que $H_0(G, \Omega)$ est égal à l'espace Ω quotienté par $G(\Omega)$. On munit $H_0 (G, \Omega)$ de la topologie quotient qui n 'est pas nécessairement séparée car $G(\Omega)$ n' est pas en général fermé dans Ω comme le montre l' exemple suivant.

3.6.1. EXEMPLE.

Supposons que G est le groupe engendré par la rotation $R_\theta(x) = x + \theta$, on suppose θ irrationnelle. D' après [7], l ' adhérence de $G(\Omega)$ est de codimension 1. Comme la mesure de Lebesgue est G - invariante et est nulle sur l ' adhérence de $G(\Omega)$, les 0 - courants et les courants sur S^1 sont des multiples de cette mesure. L'espace vectoriel des 0- courants et celui des courants ont chacun sa dimension égale à 1. Ils sont donc isomorphes à $\mathbb{C}$.

$$f \in C^\infty (S^1, \mathbf{C}) \text{ telle que } \int_0^{2\pi} f = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} df = 0.$$

D'après le théorème de Hahn - Banach et le théorème 3.2.2., il existe une suite α_n dans $G(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = f, \quad \text{pour la } C^\infty \text{- topologie.}$$

Supposons maintenant que θ vérifie une condition diophantienne

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}_+^{*\,2} \text{ tel que } \forall\,(m,n)\in \mathbb{N}^{*\,2},\ |\,m\theta+n\,| \geq \frac{a}{(1+m^2)^{\beta}},$$

(Si θ ne vérifie pas cette condition, on dit que θ est un nombre de Liouville). On démontre qu'il existe $g \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$f = g \circ R_\theta - g.$$

(Ce résultat sera démontré dans la dernière partie).
Si θ est un nombre de Liouville, g n'existe pas toujours (voir thèse de Hermann sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle). $H_0(G, C^{\infty}(S^1, \mathbb{R}))$ n'est pas nécessairement séparé. Un raisonnement analogue sur Ω conduit à la non séparabilité de $H_0(G, \Omega)$.

3.7. ETUDE D' UN CAS PARTICULIER DE $H_0(G, \Omega)$.

Dans toute la suite, on suppose que G est engendré par un difféomorphisme g qui est hyperbolique, admettant deux points fixes x_+ et x_-, l'un est attractif, l'autre est répulsif.

3.7.1. LEMME

Soit U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant zéro, et $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ nulle en 0. Pour
$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $0<\lambda<1$, la fonction définie pour tout $x \in U$ par

$$\sum_{0}^{+\infty} f(\lambda^n x) \text{ est de classe } C^{\infty}.$$

PREUVE.
Soit K un compact, $K \subset U$ et $0 \in K$, d'après le théorème des accroissements finis on a

$$|\,f(\lambda^n x)\,| = \lambda^n\,|\,x\,|\,|\,Df(\lambda^n x)\,| \leq \lambda^n\,|\,x\,|.\ \mathrm{Sup}_K\,|\,Df\,| \leq a\,\lambda^n,\ a \in \mathbb{R}_+^*.$$

Du dernier terme de cette inégalité, on en déduit que la série $\sum_{0}^{+\infty} f(\lambda^n x)$ est uniformément convergente et que sa limite est dérivable. Par un raisonnement par récurrence, on démontre que cette fonction est de classe C^{∞}.

3.7.2. PROPOSITION

On suppose que $|Dg(x_+)| = \lambda > 1$ et $|Dg(x_-)| = \mu < 1$. Soit $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\exists\, \psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ tel que $\varphi = \psi - \psi \circ g$ et $\psi(x_+) = \psi(x_-)$.

2) $\varphi(x_+) = \varphi(x_-) = 0$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) = 0, \quad \forall x \in S^1$.

On peut même donner la forme explicite de ψ :

$$\psi(\xi) = \sum_{0}^{+\infty} \varphi(g^n(x)).$$

PREUVE.

Supposons que $\varphi = \psi - \psi \circ g$, comme x_+ et x_- sont des points fixes pour le difféomorphisme g, on a bien $\varphi(x_+) = \varphi(x_-) = 0$. Il reste à prouver que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) = 0.$$

En effet, comme $\varphi = \psi - \psi \circ g$, on a donc $\varphi \circ g^n = \psi \circ g^n - \psi \circ g^{n+1}$. Si on remplace cette égalité dans la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) \qquad (*)$$

on obtient l'égalité suivante

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) = \sum_{0}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) + \sum_{1}^{+\infty} \varphi(g^{-n}(x)).$$

Cette décomposition a bien un sens. En effet,
pour $n \to +\infty$ et pour tout $x \in S^1$, $g^n(x)$ tend vers $g(x_+)$ et $g^{-n}(x)$ tend vers $g(x_-)$. Montrons que cette convergence a lieu pour la C^∞-topologie. Pour cela, considèrons un chemin

$$\gamma : [0, 1] \to S^1.$$

Soit $t_1 \in [0, 1]$ tel que $\gamma(t_1) = x_+$ et calculons le développement limité de la fonction $\Phi : t \to \Phi(t) = \varphi \circ g^n \circ \gamma(t)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\Phi(t) - \Phi(t_1) = (t - t_1).D\varphi(g^n \circ \gamma).Dg^n(\gamma).D\gamma(t_1) + o(|t - t_1|).$$

On sait par hypothèse que

$$| \, Dg^n \circ \gamma(t_1) \, | \leq \lambda^n,$$

si on choisit $o(|t - t_1|) < 1/n^2$, on obtient la majoration suivante

$$| \, \varphi \circ g^n \circ \gamma(t) \, | \leq \lambda^n + 1/n^2.$$

Le second membre est le terme général d'une série convergente, d' après le lemme précédent, la série de terme général $\varphi \circ g^n \circ \gamma(t)$ est convergente pour la C^∞-topologie, ce qui prouve que la série suivante

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(g^n(x)) \text{ est convergente pour la } C^\infty\text{-topologie.}$$

La démonstration est analogue pour la deuxième série.

Il reste à prouver que $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n(x)) = 0$. En effet, considérons les suites U_N et V_N définies par

$$U_N = \sum_0^N \varphi(g^n) \text{ et } V_N = \sum_{-N}^{-1} \varphi(g^n).$$

On démontre facilement que $U_N = \psi - \psi \circ g^{N+1}$ et $V_N = \psi \circ g^{-N} - \psi$, en additionnant U_N et V_N, on obtient

$$U_N + V_N = \sum_{-N}^{+N} \varphi(g^n) = \psi \circ g^{-N} - \psi \circ g^{N+1}, \text{ et}$$

$$\lim_{N \to +\infty} (U_N + V_N) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(g^n) = \lim_{N \to +\infty} (\psi \circ g^{-N} - \psi \circ g^{N+1}) = \psi(x_+) - \psi(x_-) = 0.$$

Réciproquement, supposons que $\varphi(x_+) = \varphi(x_-) = 0$ et $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi \circ g^n = 0$ et montrons qu'il existe $\psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que $\varphi = \psi - \psi \circ g$. En effet, si on pose

$$\forall x \in S^1, \quad \psi(x) = \sum_0^{+\infty} \varphi \circ g^n(x),$$

alors ψ répond bien à la question car cette série est C^∞– convergente d'après ce qui précède ; on vérifie que ψ est solution. En effet,

on a bien $\psi(x_+) = \psi(x_-) = 0$ et $\psi - \psi o \gamma = \sum_0^{+\infty} \varphi \circ g^n - \sum_1^{+\infty} \varphi \circ g^n = \varphi$.

3.7.3. PROPOSITION.

Soit g un difféomorphisme de S^1 qui vérifie les mêmes hypothèses que celles de la proposition précédente et soit $\omega \in \Omega$, les deux propriètés suivantes sont équivalentes :

1) $\exists\, \alpha \in \Omega(S^1)$ / $\alpha(x_+) = \alpha(x_-)$ et $\omega = \alpha - g^* \omega$,

2) $\omega(x_+) = \omega(x_-) = 0$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} g^{*\,n}\, \omega = 0$.

PREUVE.

Une décomposition analogue à la précédente montre que

$$\sum_{-N}^{+N} g^{*\,n}\,\omega = g^{*\,-N}\,\omega - g^{*\,N+1}\omega = \omega \circ g^{-N}.Dg^{-N} - \omega \circ g^{N+1}.Dg^{N+1}$$

et

pour $x \in S^1$, $\lim_{N \to +\infty} g^{-N}(x) = x_+$ et $\lim_{N \to +\infty} g^{N+1}(x) = x_-$ donc $\sum_{-\infty}^{+\infty} g^{*\,n}\,\omega = 0$

et $\omega(x_+) = \omega(x_-) = 0$.

Réciproquement, supposons que $\omega(x_+) = \omega(x_-) = 0$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g^{*\,n}\,\omega = 0$. Posons $\alpha = \sum_0^{+\infty} g^{*\,n}\,\omega$, cette série est convergente car $\| g^{*\,n}\,\omega \| \leq \lambda^n \|\omega\|$. On vérifie aisément que $\alpha(x_+) = \alpha(x_-)$ et $\omega = \alpha - g^*\omega$.

3.7.4. COROLLAIRE.

1) $G(C^\infty(S^1, \mathbb{R}))$ est fermé dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$.

2) $G(\Omega)$ est fermé dans $\Omega^\infty(S^1)$.

PREUVE.

Considérons une suite φ_n dans $G(C^\infty(S^1, \mathbb{R}))$ convergente vers φ pour la C^∞-topologie, comme on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_m(x_+) = \varphi_m(x_-) = 0$$

on a encore

$$\varphi(x_+) = \varphi(x_-) = 0,$$

de plus, on a

$$\lim_{m \to +\infty} \varphi_m \circ g = \varphi \circ g \quad \text{pour la } C^\infty\text{- topologie,}$$

on a donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi \circ g^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{m \to +\infty} \varphi_m \right) \circ g^n = \lim_{m \to +\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m \circ g^n \right] = 0.$$

D' après la proposition 3.7.2., il existe $\psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que $\psi(x_+) = \psi(x_-)$ et $\varphi = \psi - \psi \circ g$, $G(C^\infty(S^1, \mathbb{R}))$ est donc fermé. La fermeture de $G(\Omega)$ se démontre de la même façon.

3.7.5. CONCLUSION.

En général, il est difficile d'expliciter le groupe d'homologie $H_0(G, \Omega)$ où G est le groupe des difféomorphismes du cercle qui conservent l'orientation et Ω l'ensemble des formes différentielles sur S^1. Cependant pour qu'une forme différentielle ω définisse un élément non nul de $H_0(G, \Omega)$, il suffit par exemple que l' intégrale sur S^1 de ω soit non nulle. Les formes différentielles sur S^1 qui ne sont pas exactes définissent des éléments non nuls de $H_0(G, \Omega)$.

***

TROISIEME PARTIE

INTRODUCTION

Les notations sont celles utilisées antérieurement. Dans cette partie, on étudie le premier le groupe d'homologie à coefficients dans $\Omega^\infty(S^1)$ et le deuxième groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{R})$ de G à coefficients dans le module trivial $\mathbb{R}$. On démontre que

$$H_1(G,\Omega) = \{ \sum_{k=1}^{n} a_k.\omega_k \otimes (g_k - I) \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} a_k.(g^*\omega - \omega) = 0 \},$$

et

$$H_2(G, \mathbb{R}) = \{ \sum_{(g,h)\in G} \lambda_{(g,h)} (g - I) \otimes_G (h - I) , \lambda_{(g,h)} = 0 \text{ sauf pour un nombre}$$

fini $(g,h) \in G^2$ tel que $\sum_{(g,h)\in G} \lambda_{(g,h)} [h^*(g-I) - (g-I)] = 0\}$.

L'étude de ces deux groupes est liée à la résolution de l'équation en ψ :

$\varphi = \psi \circ g - \psi$ où $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ sont données.

Dans le chapitre IV, on définit le nombre de rotations d'un difféomorphisme de S^1 puis son ergocité, sa conjugaison à une rotation et les nombres diophantiens. Toutes ces notions sont nécessaires pour discuter et prouver l'existence d'une solution ψ. On énonce quelques théorèmes fondamentaux liés à ces définitions sur la conjuguaison des difféomorphismes et sur la différentiabilité des difféomorphismes de conjuguaison.

Dans le chapitre V, on étudie l'équation en ψ : $\varphi = \psi \circ f - \psi$, en particulier l'existence de solutions ψ et les conditions d'unicité et de différentiabilité de ces solutions.

Dans le chapitre VI, en utilisant les résultats des chapitres IV et V, on explicite les éléments du groupe $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$ et on donne une méthode de construction de ces éléments.

Dans le chapitre VII, on étudie le groupe d' homologie $H_2(G, \mathbb{R})$ isomorphe au groupe $H_1(G, IG)$ et on donne une méthode de construction de certains éléments de ce groupe.

Le chapitre VIII est consacré essentiellement à la démonstration de la non trivialité des deux groupes $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$ et $H_2(G, \mathbb{R})$.

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION ET CONJUGUAISON DES ELEMENTS DE $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$

4.1. NOTATIONS.

$S^1 = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$.

$D^k(S^1) = \{ f \in \mathrm{Diff}^k(\mathbb{R}) \text{ tel que } f - I_{\mathbb{R}} \text{ est } \mathbb{Z}\text{-périodique} \}$.

Dans toute la suite, les élèments de $D^k(S^1)$ seront écrits en caractères cursifs.

4.2. TOPOLOGIE SUR $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$.

4.2.1. DEFINITION.

On appelle C^k-topologie, la topologie définie sur $C^k(S^1, \mathbb{R})$ associée à la métrique d_k définie par

$$\varphi \in C^k(S^1, \mathbb{R}), \ |\varphi|_0 = \max_{S^1} |\varphi|,$$

$$|\varphi|_{C^k} = |\varphi|_0 + |D\varphi|_0 + |D^2\varphi|_0 + \dots\dots\dots + |D^k\varphi|_0,$$

$(\varphi, \psi) \in (C^k(S^1, \mathbb{R}))^2$, $d_k(\varphi, \psi) = |\varphi - \psi|_{C^k}$.

On munit $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ de la topologie limite projective des topologies C^k, $k \in \mathbb{N}$.

4.2.2. REMARQUE.

Les éléments de $C_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'identifient à ceux de $C^k(S^1, \mathbb{R})$ pour la C^k-topologie, pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

4.3. TRANSLATION DANS $\mathbb{R}$

4.3.1. DEFINITION.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, On appelle translation de $\mathbb{R}$ l' application $R_\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R_\alpha(x) = x + \alpha.$$

4.3.2. REMARQUE.

L'ensemble $\{ R_\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \}$ est inclus dans $D^k(S^1)$, $\forall k \in \overline{\mathbb{N}}$

4.3.3. LEMME.

L'ensemble $\{ R_p, \ p \in \mathbb{Z} \}$ est le centralisateur du groupe $D^k(S^1)$, $\forall k \in \overline{\mathbb{N}}$.

PREUVE.

Considérons $f \in D^k(S^1)$, il existe $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$-périodique, telle que $f = I + \varphi$. Supposons, en outre, que f soit un élément du centralisateur de $D^k(S^1)$. f doit commuter avec tous les R_α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ceci se traduit par

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ (I+\varphi) \circ R_\alpha(x) = R_\alpha \circ (I+\varphi)(x),$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \alpha + \varphi \circ R_\alpha(x) = x + \varphi(x) + \alpha,$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi \circ R_\alpha(x) = \varphi(x),$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi \circ R_\alpha = \varphi.$$

On en déduit que pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $\varphi \circ R_{n\alpha+m} = \varphi$. Comme $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'ensemble $\{ na + m, (n, m) \in \mathbb{Z}^2 \}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on conclut que $\varphi = c^{\underline{te}}$ et $f = I + c = R_c$. Pour prouver que $c \in \mathbb{Z}$, il suffit de commuter R_c avec l' application $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définie par $h(x) = x + (1/2\pi) \sin 2\pi x$. On aboutit ainsi à l' égalité suivante

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \sin 2\pi(x + c) = \sin 2\pi x \quad \Rightarrow \quad c = p \in \mathbb{Z} \text{ et } R_c = R_p.$$

Donc le centralisateur de $D^k(S^1)$ est $\{ R_p, p \in \mathbb{Z} \}$.

4.3.4. DEFINITION.

On définit le groupe $\mathrm{Diff}_+^k(S^1)$, $k \in \mathbb{N}$, par

$$\mathrm{Diff}_+^k(S^1) = D^k(S^1) \,/\, \{ R_p,\ p \in \mathbb{Z} \}.$$

4.3.5. REMARQUE.

$D^k(S^1)$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_+^k(S^1)$. Si $f \in D^k(S^1)$, on note par f l'élément correspondant dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$, par R_α celui de R_α.

4.4. NOMBRE DE ROTATIONS.

4.4.1. PROPOSITION.

Si f appartient à $D^k(S^1)$, $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f^n - I)/n$ converge uniformément vers une fonction constante notée $\rho(f)$.

PREUVE.

Pour $f \in D^k(S^1)$, il existe, par définition, $\varphi \in C_{\mathbb{Z}}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f = I + \varphi$, posons $\psi_n = f^n - I$, $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{Z}$-périodique. Ainsi pour étudier la convergence de $(f^n - I)/n$

il suffit de l'étudier sur $[0, 1[$. Pour cela, soit x_1, x_2 dans $[0, 1[$ tels que $x_1 < x_2 < x_1 + 1$. Comme f est croissante, f^n est aussi croissante, on a donc

$$f^n(x_1) < f^n(x_2) < f^n(x_1) + 1,$$

d'où
$$0 < f^n(x_2) - f^n(x_1) < 1,$$

posons
$$E_n = E(\psi_n(0)), \text{ on a } E_n \leq \psi_n(0) \leq E_n + 1$$

il en résulte que pour tout x dans $[0, 1[$,

$$|\psi_n(x) - E_n| \leq |\psi_n(x) - \psi_n(0)| + |\psi_n(0) + E_n| < 2,$$

ainsi on a

$$\psi_n(x)/n = (f^n(x) - x)/n \in [(E_n - 2)/n, (E_n + 2)/n[,$$

or
$$\psi_{np}(x) = f^{np}(x) - I, \text{ pour tout } p \text{ dans } \mathbb{N},$$
$$= f^n(f^{n(p-1)})(x) = f^{n(p-1)}(x) + \psi_n(f^{n(p-1)})(x), \text{ car } \psi_n + I = f^n.$$

Comme

$$f^{n(p-1)}(x) = f^n(f^{n(p-2)}) = f^{n(p-2)}(x) + \psi_n(f^{n(p-2)})(x),$$

Par un raisonnement par récurrence, on montre que
$$\psi_{np}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \psi_n(f^{ni}(x)).$$

En divisant les deux membres par np, on a

$$\frac{\psi_{np}(x)}{np} = \frac{1}{np} \sum_{i=0}^{p-1} \psi_n(f^{ni}(x)),$$
$$= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\psi_n(f^{ni}(x))}{n}.$$

D'où, $\psi_{np}(x)/np \in [(E_n - 2)/n, (E_n + 2)/n]$.
Les entiers n et p jouant un rôle symétrique, on démontre de même que

$$\psi_{np}(x)/np \in [(E_p - 2)/p, (E_p - 2)/p],$$

donc tous les intervalles I_n qui sont de la forme $[(E_n - 2)/n, (E_n + 2)/n]$ se recoupent deux à deux. Pour $n \to +\infty$, le diamètre $\delta(I_n)$ de I_n tend vers zéro, $\mathbb{R}$ est complet il existe un seul point commun à tous les I_n, c'est donc le nombre $\rho(f)$ de rotations de f.

4.4.2. DEFINITION.

Soit $f \in D^k(S^1)$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, on appelle nombre de rotations de f (noté $\rho(f)$), la limite pour la convergence uniforme de la suite $(f^n - I)/n$, pour $n \to +\infty$.
Il est facile de voir que $\rho(f \circ R_p) = p + \rho(f)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. $\rho(f)$ est ainsi défini mudulo $\mathbb{Z}$.

4.4.3. COROLLAIRE.

L'application $\rho : D^k(S^1) \to \mathbf{R}$ qui à $f \to \rho(f)$ est continue.

PREUVE.
Les applications $(f^n - I)/n$ sont continues, elles convergent uniformément vers $\rho(f)$ donc ρ est continue.

4.4.4. DEFIITION.

Soient $f \in D^k(S^1)$ et f l'élément correspondant dans $\mathrm{Diff}_+^k(S^1)$. On dit que f est ergodique si l'ensemble $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ est partout dense dans S^1, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

4.4.5. DEFINITION.

i) Soit $f \in D^k(S^1)$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$, on dit que f est C^n-conjugué à R_α dans $D^k(S^1)$, où $0 \leq n \leq k$, s'il existe $g \in D^n(S^1)$ telle que

$$f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \quad (\rho(f) = \alpha).$$

ii) $f \in \mathrm{Diff}_+^k(S^1)$ est C^n-conjugué à $R_{\alpha'}$, $0 \leq n \leq k$, dans $\mathrm{Diff}_+^n(S^1)$ s'il existe un élément $g \in \mathrm{Diff}_+^n(S^1)$ telle que

$$f = g^{-1} \circ R_{\alpha'} \circ g, \ R_{\alpha'} \text{ est une rotation de } S^1.$$

On montrera un peu plus loin que les définitions i) et ii) sont équivalentes.

4.4.6. REMARQUES.

i) Si $R_{\alpha'}$ est l 'élément de $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ correpondant à R_α dans $D^{\infty}(S^1)$ alors $\alpha' = \alpha$, modulo $\mathbb{Z}$.

ii) La classe de $(fog) = f \circ g$.

iii) Si $f = g$ dans $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1) \Rightarrow \rho(f) = \rho(g)$, modulo $\mathbb{Z}$, où f et g sont les éléments correspondants à f et g dans $D(S^1)$.

PREUVE

i) La classe de $(R_\alpha) = \{ R_a \,o\, R_p,\ p \in \mathbb{Z} \} = \{ R_{\alpha+p}, p \in \mathbb{Z} \} = R_{\alpha'}$ où $\alpha' \equiv \alpha$, modulo $\mathbb{Z}$.

ii) $fog = \{ f \,o\, g \,o\, R_p,\ p \in \mathbb{Z} \} = \{ f \,o\, R_q \,o\, g \,o\, R_{p-q},\ (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \} = f \circ g$.

iii) $f = g \Leftrightarrow f = g \,o\, R_p,\ p \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f = g + p \Rightarrow \rho(f) = \rho(g) + p$, on en déduit que $\rho(f) = \rho(g)$, modulo $\mathbb{Z}$.

4.5. CONJUGAISON DES DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{R}$ ET DE S^1.

4.5.1. PROPOSITION.

Si $f \in D^k(S^1)$ est C^n - conjugué à R_a, $0 \leq n \leq k$, dans $D^n(S^1)$ alors f est C^n - conjugué à R_α dans $\mathrm{Diff}_+^n(S^1)$ c'est à dire si $f = g^{-1} \,o\, R_\alpha \,o\, g$ alors $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$, où $g \in \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ est l'élément correspond à g dans $D(S^1)$.

PREUVE.

Ceci découle de la remarque 1.4.6., ii) et du fait que classe $(g^{-1}) = g^{-1}$.

4.5.2. THEOREME (Herman [9]).

Pour $f \in D^1(S^1)$, il y a équivalence entre

a) f est C^1 - conjugué à R_α

b) $H_1(f) = \mathrm{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} | Df^n |_0$ et $\rho(f) = \alpha$.

PREUVE.

a) $\Rightarrow$ b).

Supposons que $g \in D^k(S^1)$ soit l'élément qui conjugue f à R_a. C'est à dire

que l'on a $f = g^{-1} o R_a o g$. L 'application : t $\mapsto \psi_g(t) = D(g^{-1} o R_t o g)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est périodique de période 1. En effet,
$D(g^{-1} o R_{t+p} o g) = D g^{-1}(g+t+p).Dg = Dg^{-1}(t+g).Dg = D(g^{-1} o R_t o g)$, ψ_g est continue car l'application : t $\mapsto g^{-1} o R_t o g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1.
$f^n = g^{-1} o R_{nt} o g$ et $Df^n = D(g^{-1} o R_{nt} o g) = D(g^{-1} o R_{nt} o g) = D(g^{-1} o R_{nt'} o g)$, où nt'≡ nt, modulo $\mathbb{Z}$. Comme nt' $\in$ [0, 1], l 'adhérence de l'ensemble

$$\{ D(g^{-1} o R_{nt'} o g), n \in \mathbb{Z} \}$$

est compacte, donc $\mathrm{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} | Df^n | < +\infty$. Il est facile de voir que $\rho(f) = \alpha$.

b) ⇒ a).

Supposons que $H_1(f) = \mathrm{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} | Df^n | < +\infty$ et $\rho(f) = \alpha$, montrons qu 'il existe un élément $g \in D^1(S^1)$ telle que $f = g^{-1} o R_\alpha o g$. En effet,
si $\rho(f) = p / q \in \mathbb{Q}$, D'après [1] ch. II, paragraphe 6, il suffit de prouver que $f^q = R_p$. On va raisonner par l ' absurde. En effet,
supposons que $f^q \neq R_p$. Il existe un intervalle $I = [x_1, x_2]$, $x_1 \neq x_2$ et $\forall x \in I$, on a les deux relations suivantes :

$$f^q(x) - x - p \neq 0,$$
$$f^q(x) - R_p(x) = 0 \quad \text{pour } x = x_1 \text{ ou } x = x_2.$$

La famille $\{ f^n, n \in \mathbb{Z} \}$ est relativement compacte sur I, elle est donc uniformément équicontinue (en fait il existe une sous suite uniformément équicontinue), de même pour la famille $\{ f^{nq} - np, n \in \}$. Si $(f^q - p)(x) - x < 0 \Leftrightarrow (f^q - p)(x) < x$, d'aprés l'uniforme équicontinuité et le fait que $f^{nq} - np = (f^q - p)^n$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} (f^{nq} - np)(x) = x_1$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (f^{nq} - np)(x_2) = x_2.$$

La limite simple n 'étant pas continue donc la suite $(f^{nq} - np)$ n'est pas équicontinue, d'où l'absurdité. L'autre cas où $(f^q - p)(x) > x$ conduit à la même absurdité. On conclut que $f^q = R_p$ et d'après [9], ch II-6, il existe g dans $D^o(S^1)$ telle que $f = g^{-1} o R_\alpha o g$. Si on choisit

$$g = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left(f^i - i\frac{p}{q} \right),$$

on voit que $Dg = \sum_{0 \leq i \leq q} Df^i / q > 0$ donc $g \in D^1(S^1)$ et $f = g^{-1} o R_{p/q} o g$.
Si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, posons $K = \mathrm{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} |Df^n|_0$, on a la relation

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ 1/K \leq Df^n \leq K \quad \text{car} \quad Df^{-n}(f^n) = 1/Df^n.$$

On en tire que $\mathrm{Sup}_{n \in \mathbb{Z}} |\mathrm{Log} Df^n|_0$. Comme on a

$$\mathrm{Log}\, Df^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{Log}\, Df) \circ f^i ,$$

d'après [1] et [11], f est ergodique sur S^1 et il existe $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\mathrm{Log}\, Df = \varphi \circ f - \varphi \quad (*).$$

Pour tout c dans $\mathbb{R}$, $\varphi + c$ est aussi solution de l'équation (*), on peut donc choisir $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^1 e^{\varphi(x)+c}\, dx \quad \text{et posons } h(x) = \int_0^x e^{\varphi(x)+c}\, dx.$$

On vérifie que $h \in D^1(S^1)$, $Dh\, o f . Df = Dh$, $h o f = R_\alpha o h$ et f est C^1-conjugué à R_α.

4.6. DIFFERENTIABILITE DES DIFFEOMORPHISMES DE COJUGAISON.

Pour $f \in D^k(S^1)$, soit $H_n(f) = \mathrm{Sup}_{p \in \mathbb{Z}} |Df^p|_{C^n}$ (4.2.1.).

4.6.1.THEOREME [1]

Si $f \in D^k(S^1)$, $k \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \leq k$, $\rho(f) = \alpha$, pour que f soit C^n - conjugué à R_α il suffit que $H_n(f) < +\infty$.

PREUVE

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, voir démonstration dans [9].

Nous démontrerons seulement le cas où $\rho(f) = p/q$. En effet, considérerons l'application $S_q(f)$ définie par

$$S_q(f) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i \frac{p}{q}).$$

Montrons que $\forall\ n \leq k$, $S_q(f) \in D^n(S^1)$, en effet,

$f = I + \psi \Rightarrow f^2 = I + \psi + \psi o f$, on démontre par un raisonnement par récurrence que

$$g = \frac{1}{q}\left[I + \sum_{i=1}^{q-1} (I + \sum_{j=0}^{i-1} \psi\, o f^{j} \right] - \frac{p(q-1)}{2},$$

$$f^{i} = I + \sum_{j=1}^{i-1} \psi\, o f^{j}.$$

Si on pose

$$g = S_q(f) = \frac{1}{q}\,(\sum_{i=0}^{q-1} (f^{i} - i\frac{p}{q})) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f^{i} - \frac{p(q-1)}{2},$$

$$= I + \Psi_q, \text{ où } \Psi_q = \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=0}^{i-1} \psi\, o f^{j} - \frac{p(q-1)}{2}.$$

On remarque que, $\forall\, n \leq k$, $g \in D^n(S^1)$. Il reste à démontrer que $g o f = f o g$. En effet,

$$g\, o f = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^{i+1} - i\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^{i} - i\frac{p}{q}) + \frac{1}{q}\,(f^{q} - I),$$

d'aprés [1] ch. II, paragraphe 6, $f^q = R_p$ donc $I - f^q = p$, par conséquent

$$g o f = g + p/q = R_{p/q} \circ g \quad \text{et} \quad f = g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g.$$

***

CHAPITRE V

ETUDE DE L' EQUATION : $\varphi = \psi \circ f - \psi$.

On se donne $f \in D^k(S^1)$, $\varphi \in C^k(S^1, \mathbb{R})$, soit f l' élèment correspondant de f dans $\mathrm{Diff}_+^k(S^1)$. On se propose de chercher $\psi \in C^k(S^1)$, $k \geq 0$, telle que

$$\varphi = \psi \circ f - \psi.$$

5.1. THEOREME (Denjoy [17] page 81).

Soit $f \in D^k(S^1$, $k \geq 2$, si $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors f est ergodique, c'est à dire $\forall\ x \in S^1$ l' ensemble $O(x) = \{ f^n(x),\ n \in \mathbb{Z} \}$ est partout dense dans S^1.

5.2. ETUDE DE L'UNICITE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION.

5.2.1. PROPOSITION.

Soit $f \in \mathrm{Diff}_+^k(S^1)$, $k \geq 2$, si $\rho(f) = \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et si l' quation $\varphi = \psi\, 0\, f - \psi$ admet une solution $\psi \in C^k(S^1,\mathbb{R})$, alors cette solution est unique à une constante prés.

PREUVE.

Supposons qu' il existe deux solutions ψ_1 et ψ_2. On a la relation

$$(\psi_1 - \psi_2) \circ f^n = \psi_1 - \psi_2.$$

Par un raisonnement par recurrence, on montre que

$$\forall\ n \in \mathbb{Z},\ (\psi_1 - \psi_2) \circ f^n = \psi_1 - \psi_2.$$

Comme f est de classe C^2 et $\rho(f) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})\setminus(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 'après le théorème 2.1.,$\{f^n(x),\ n \in \mathbb{Z},\ x \in S^1\}$ est dense dans S^1, $\psi_1 - \psi_2$ est continue et constante sur un ensemble partout dense, donc $\psi_1 - \psi_2 = C^{te}$ sur S^1.

5.3. C.N.S. SUR L' EXISTENCE DE LA SOLUTION ψ.

5.3.1. PROPOSITION.

Soit $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, $p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$ et $\int_{S^1} \varphi = 0$, l'équation en ψ :

$$\varphi = \psi \circ R_{p/q} - \psi$$

admet des solutions si et seulement si pour tout k dans $q\mathbb{Z}$, $\hat{\varphi}(k) = 0$, où les $\hat{\varphi}(k)$

sont les coefficients de Fourier de φ d'ordre k.

PREUVE.

Si ψ existe, on a l'égalité suivante

$$\sum_{k\in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(k)\, e^{-i2\pi k\left(x+\frac{p}{q}\right)} - \sum_{k\in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(k)\, e^{-i2\pi kx} = \sum_{k\in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)\, e^{-i2\pi kx}.$$

Soit alors

$$\sum_{k\in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(k)\left(e^{-i2\pi k\frac{p}{q}} - 1\right) e^{-i2\pi kx} = \sum_{k\in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(k)\, e^{-i2\pi kx},$$

en identifiant, pour tout k entier relatif, on obtient

$$\hat{\psi}(k)\left(e^{-i2\pi k\frac{p}{q}} - 1\right) = \hat{\varphi}(k).$$

Comme on a $\forall\ k \in q\mathbb{Z}$, $(e^{-i2\pi kp/q} - 1) = 0$ ceci implique $\hat{\varphi}(k) = 0$, d'où la nécessité de la condition.

La condition est suffisante. Soit $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ elle que $\hat{\varphi}(k) = 0$ pour $k = nq$, $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application ψ définie par

$$\psi(x) = \sum_{k\in \mathbb{Z},\ k\neq nq} \frac{\hat{\varphi}(k)}{1 - e^{-i2\pi k\frac{p}{q}}}\, e^{-i2\pi kx},$$

D'où ψ est solution de l'équation $\varphi = \psi \circ R_{p/q} - \psi$ ($R_{p/q}$ est une rotation de S^1). Montrons que cette écriture a un sens. En effet, il suffit de prouver que la série définissant ψ est convergente. Comme on a

$$\frac{|\hat{\varphi}(k)|}{\left|1 - e^{-i2\pi k\frac{p}{q}}\right|} \leq \frac{|\hat{\varphi}(k)|}{\left|2\sin k\pi \frac{p}{q}\right|},\quad k \neq nq,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Posons $\| k p/q \| = \mathrm{Inf}_{m\in \mathbb{Z}} | k p/q + m_0 |$ il est non nul car $k \neq nq$. Soit m_0 tel que

$$\| k\,p/q \| - m_0 = k\,p/q,$$

on a $|\sin \pi k\,p/q| = |\sin \pi \| k\,p/q \| \cos m_0\pi - \sin m_0\pi \cos \| k\,p/q \|| = |\sin \pi \| k\,p/q \||$.
Pour $k \in \mathbb{Z}, k \neq nq, n \in \mathbb{N}$, le réel $\| k\,p/q \|$ prend les valeurs $\{ 1/q, 2/q, 3/q, .., q-1/q \}$.
Ainsi $\sin \| k\,p/q \|$ prend un nombre fini de valeurs toutes non nulles. Si on considère $A = \mathrm{Inf}_{1 \le k \le q-1} \sin \pi \| k\,p/q \|$, on a

$$\frac{|\hat{\varphi}(k)|}{|2 \sin \pi \| k \frac{p}{q} \| |} < \frac{1}{A} |\hat{\varphi}(k)|.$$

Le second membre est le terme d' une série convergente, donc la série qui définit ψ est convergente et ψ existe, ce qui achève la démonstration.

5.3.2. COROLLAIRE.

Soient $\varphi \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$, $p/q \in \mathbb{Q}$, $\int_{S^1} \varphi = 0$ et $\hat{\varphi}(k) = 0$ pour tout k dans $q\mathbb{Z}$. Il existe $\psi \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$, solution de l'équation $\varphi = \psi \circ R_{p/q} - \psi$.

PREUVE.

Soit

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq q\mathbb{Z}} \frac{\hat{\varphi}(k)}{(1 - e^{-i2\pi kp/q})} e^{-i2\pi kx}.$$

Pour tout entier naturel n, $|k^n \hat{\varphi}(k)| / |1 - e^{-i2\pi kp/q}|$ est le terme général d' une série convergente ce qui prouve que l'application ψ définie par

$$\psi_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq q\mathbb{Z}} \frac{k^n \hat{\varphi}(k)}{(1 - e^{-i2\pi kp/q})} e^{-i2\pi kx}$$

est normalement convergente. Or $\psi_1 = D^n \psi$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi \in C^n(S^1, \mathbb{R})$ donc $\psi \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$.

5.3.3. COROLLAIRE.

Soient $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, $f \in \mathrm{Diff}_+^k(S^1)$ et $f = g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g$, $\int_{S^1} \varphi \circ g^{-1} = 0$ alors l'équation $\varphi = \psi \circ f - \psi$ admet des solutions $\psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ si et seulement les coefficients de Fourier, d'ordre k, de $\varphi \circ g^{-1}$ sont nuls pour tout k dans $q\mathbb{Z}$.

PREUVE.

La condition est nécessaire. En effet, supposons qu 'il existe $\psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$\varphi = \psi \circ f - \psi,$$

ce qui est équivalent à

$$\varphi = \psi \circ g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g - \psi,$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\varphi \circ g^{-1} = \psi \circ g^{-1} \circ R_{p/q} - \psi \circ g^{-1}.$$

D 'après la proposition 2.3.1., pour tout $k \in q\mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier d' ordre k, de $\varphi \circ g^{-1}$, sont nuls.

La condition est suffisante. En effet, supposons que, pour tout $k \in q\mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier, d'ordre k, sont nuls. D'après la proposition 2.3.1., il existe ψ_1 appartenant à $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$\varphi \circ g^{-1} = \psi_1 \circ R_{p/q} - \psi_1,$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi \circ g^{-1} = \psi_1 \circ g \circ f \circ g^{-1} - \psi_1,$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = \psi_1 \circ g \circ f - \psi_1 \circ g,$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = \psi \circ f - \psi \quad \text{où} \quad \psi = \psi_1 \circ g,$$

Comme $\psi_1 \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et g peut être choisie dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ alors $\psi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$.

5.4. NOMBRE DE ROTATIONS DIOPHANTIEN.

5.4.1. DEFINITION.

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfait à une condition diophantienne s' il existe $\varepsilon > 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$\forall\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \left| \alpha - p/q \right| \geq C / q^{2+\varepsilon}$ (on peut choisir $C = 1$).

5.4.2. REMARQUE. [13], p.169, th.198.

Le complémentaire dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des $\alpha \in$ qui satisfont à une condition diophantienne est de mesure de Lebesgue, sur $\mathbb{R}$, nulle.

5.4.3. PROPOSITION.

Si $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec α diophantien, soit $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que $\int_{S^1} \varphi \circ g^{-1} = 0$, l'équation $\varphi = \psi \circ f - \psi$ admet une solution ψ, unique à une constante prés. ψ est définie sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La démonstration de cette proposition nécessite quelques résultats qui seront · énoncés dans les deux lemmes qui vont suivre.

5.4.4. LEMME.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe K dans $\mathbb{R}^{*+}$ tel que pour tout (p,q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on a

$$\left| 1 - e^{-i2\pi p\alpha} \right| \leq K \| p\alpha \| \quad \text{où} \quad \| p\alpha \| = \mathrm{Inf}_{(p,q)} \left| p\alpha + q \right|.$$

PREUVE.

$$\left| 1 - e^{-i2\pi p\alpha} \right| = \left| (\cos 2\pi p\alpha - 1) + i(\sin 2\pi p\alpha \right| = \left| 2\sin \pi p\alpha \right|.$$

Soit $q \in \mathbb{Z}$ tel que $\| p\alpha \| = p\alpha - q \Rightarrow p\alpha = \| p\alpha \| + q$, ainsi

$$\left| 2 \sin \pi p \alpha \right| = \left| 2 \sin (\pi \| p\alpha \| + \pi p) \right| = \left| 2 \sin \pi \| p \alpha \| \right|,$$

comme on sait que

$$\forall\, \theta \in [0, \pi/2],\ 2\theta/\pi \leq \left| \sin \theta \right| \leq \pi\theta,$$

en prenant $\theta = \pi \| p\alpha \|$, on a donc

$$4 \| p\alpha \| \leq \left| 2 \sin \pi \| p\alpha \| \right| \leq 2\pi^2 \| p\alpha \|,$$

d' où si on choisit $K \geq 2\pi^2$, on a bien

$$\left| 1 - e^{-i2\pi p\alpha} \right| \leq K \| p\alpha \|.$$

5.4.5. LEMME.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ si α est diophantien alors $\forall \varepsilon' > \varepsilon$ (ε est comme dans 2.4.1., la série de terme général $U_n = 1/n^{1+\varepsilon'} \| n\alpha \|$ est convergente.

PREUVE.

Supposons $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (la démonstration est la même pour $\alpha \in \mathbb{R}^-$). Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$\| p\alpha \| = | p\alpha - q | = p \, | \alpha - q/p | \geq 1/p^{1+\varepsilon}.$$

Or, $\big| \, \| p_1 \alpha \| - \| p_2 \alpha \| \, \big| = | p_1\alpha - q_1 - p_2\alpha + q_2 |,$

$$= | p_1 - p_2 | \, | \alpha - (q_1 - q_2) / (p_1 - p_2) |,$$

$$\geq 1 / (| p_1 - p_2 | ^{1+\varepsilon}.$$

Si p_1, $p_2, p \leq n$ on a $\| p\alpha \| \geq 1 / n^{1+\varepsilon}$ et $\big| \, \| p_1\alpha \| - \| p_2 \alpha \| \, \big| \geq 1 / (2n)^{1+\varepsilon}$.

Considérons les intervalles I_k définis par

$$I_k = [\, k / (2n)^{1+\varepsilon}, (k+1) / (2n)^{1+\varepsilon} \,], \; 0 \leq k \leq n-1.$$

Chaque intervalle I_k contient au plus un élément $\| p\alpha \|$ pour $0 \leq p \leq n$. Ainsi pour $1 \leq k \leq n-1$ on a $\| p\alpha \| \geq k / (2n)^{1+\varepsilon}$. Ceci nous permet d' avoir la majoration suivante

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\| p\alpha \|} \leq (2n)^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 2^{1+\varepsilon} n^{1+\varepsilon} \log n \leq K n^{1+\varepsilon} \log n.$$

Considérons maintenant la somme partielle $\sum_{1 \leq p \leq n} 1 / p^{1+\varepsilon'} \| p\alpha \|$,

pour $p = 1$ on a $1 / \| \alpha \| = S_1$,

$p = 2$ „ $1 / 2^{1+\varepsilon'} \| 2\alpha \| = 1 / 2^{1+\varepsilon'} (S_2 - S_1)$,

....

$p = n-1$ „ $1 / n^{1+\varepsilon'} \| (n-1) \alpha \| = 1 / (n-1)^{1+\varepsilon'} (S_{n-1} - S_{n-2})$,

$p = n$ „ $1 / n^{1+\varepsilon'} \| n\alpha \| = 1 / n^{1+\varepsilon'} (S_n - S_{n-1})$.

En additionnant les premiers membres entre eux et les seconds membres entre eux, on obtient

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\| p\alpha \|} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon'}} - \frac{1}{(p+1)^{1+\varepsilon'}} \right) S_p + \frac{1}{n^{1+\varepsilon'}} S_n.$$

On sait que $\lim_{n\to\infty} (1/n^{1+\varepsilon'})\, S_n = 0$ car $S_n \leq K\, n^{1+\varepsilon} \log n$, comme

$$(1/p^{1+\varepsilon'}) - (1/(p+1)^{1+\varepsilon'}) \approx 1/p^{2+\varepsilon'},$$

et

$$(1/p^{2+\varepsilon'})\, S_p \leq (K/p^{2+\varepsilon'}) \,.\, p^{1+\varepsilon} \log p \leq [\, K/(p^{1+\varepsilon'-\varepsilon})\,] \log p \leq K/p^{1+(\varepsilon'-\varepsilon)/2}.$$

C' est le terme général d' une série convergente et par conséquent la série de terme général $U_n = 1/n^{1+\varepsilon'} \| n\alpha \|$ est donc convergente.

5.4.6. LEMME.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, α diophantien et $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telle que $\int_{S^1} \varphi = 0$, alors l'équation $\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi$ admet une solution ψ, unique à une constante prés.

PREUVE.

On cherche les conditions d 'existence de ψ. En utilisant les transformées de Fourier, l 'équation $\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi$ se traduit par

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(p)\, e^{-i2\pi px} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \hat{\psi}(p)\,(e^{-i2\pi p\alpha} - 1)\; e^{-i2\pi x}.$$

où $\hat{\varphi}(p)$ et $\hat{\psi}(p)$ sont les transformées de Fourier respectives de φ et ψ . La transformée de Fourier de ψ est définie par

$$\psi(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{\varphi}(p)}{(e^{-i2\pi p\alpha} - 1)}\, e^{-i2\pi px}.$$

Pour démontrer que ψ existe, il suffit de prouver que la série définissant ψ est convergente.

En effet, considérons la suite $V_p = \dfrac{\hat{\varphi}(p)}{(e^{-i2\pi p\alpha} - 1)}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$. Nous avons donc

$$| V_p | \leq A \frac{|\hat{\varphi}(p)|}{\| p\alpha \|},$$

ceci est vrai d'après le lemme 5.4.5., $A > 0$. Comme φ est de classe C^∞, donc à partir d' un certain rang p_0, on a

$$\forall p \in \mathbb{Z},\ p \geq p_o,\ |\hat{\varphi}(p)| \leq B.\frac{1}{|p|^k},\quad k \in \mathbb{N},$$

on en déduit donc que

$$|V_p| < A.B / |p|^k \| p\alpha \|.$$

Soit $k_o \in \mathbb{N}$ tel que $k_o > 1+\varepsilon'$ où $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ (ε provient de $|\alpha - p/q| \geq 1/q^{2+\varepsilon}$). On obtient la majoration suivante

$$|V_p| < 1/|p|^k \| p\alpha \| < 1/|p|^{1+\varepsilon'} \| p\alpha \|.$$

D'après le lemme 5.4.5., la série de terme général V_p est convergente. Donc ψ existe et est solution de l'équation $\varphi = \psi \circ R_\alpha - \psi$. $\psi + c$ est aussi solution de l'équation, l'unicité de ψ provient du fait que R_α est ergodique.

Retour à la proposition 5.4.3.

Si $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ avec α diophantien ($\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0, \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, |\alpha - p/q| > 1/q^{2+\varepsilon}$).
L'équation

$$\varphi = \psi \circ f - \psi = \psi \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g - \psi,$$

$$\Leftrightarrow \varphi \circ g^{-1} = \psi \circ g^{-1} \circ R_\alpha - \psi \circ g^{-1},$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 = \psi_1 \circ R_\alpha - \psi, \quad \text{avec } \varphi_1 = \varphi \circ g^{-1} \text{ et } \psi_1 = \psi \circ g^{-1}.$$

Comme f est C^∞- conjuguée à R_α, on peut choisir $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ ainsi φ_1 est dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, d'après le lemme 2.4.6., ψ_1 existe donc ψ existe. L'unicité de ψ se déduit de celle de ψ_1, ce qui achève la démonstration.

5.5. ETUDE DE LA DIFFERENTIABILITE DE LA SOLUTION DE ψ.

5.5.1. THEOREME.

Soit $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$, où α est diophantien et $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$. Pour tout $\varphi \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ avec $\int_{S^1} \varphi \circ g^{-1} = 0$ il existe $\psi : S^1 \mapsto \mathbb{R}$, de classe C^∞, unique à une constante près telle que $\varphi = \psi \circ f - \psi$, ψ.

PREUVE.
Unicité, supposons qu' il existe deux solutions ψ_1 et ψ_2 de l'équation $\varphi = \psi \circ f - \psi$. on a l'égalité suivante

$$\varphi = \psi_1 \circ f - \psi_1 = \psi_2 \circ f - \psi_2$$
$$\Leftrightarrow (\psi_1 - \psi_2) \circ f = \psi_1 - \psi_2.$$

D'où, $(\psi_1 - \psi_2) \circ f^n = \psi_1 - \psi_2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème de Denjoy 4.5.2, f est ergodique, car $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Donc L'ensemble $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans S^1. Ceci implique que $\psi_1 - \psi_2 = C^{te}$ sur S^1, donc ψ est unique à une constante près.
Existence. Par un théorème vu précédement, on peut choisir g de la même classe de différentiabilité que f telle que $f = g^{-1} \circ R_\alpha \circ g$ et l'équation $\varphi = \psi \circ f - \psi$ se traduit par

$$\varphi = \psi \circ g^{-1} \circ R_\alpha \circ g - \psi,$$

$$\Leftrightarrow \varphi \circ g^{-1} = \psi \circ g^{-1} \circ R_\alpha - \psi \circ g^{-1},$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 = \psi_1 \circ R_\alpha - \psi_1 \ \text{ avec } \ \varphi_1 = \varphi \circ g^{-1} \ \text{ et } \ \psi_1 = \psi \circ g^{-1}.$$

D'après le lemme du paragraphe précédent, ψ_1 existe donc ψ existe. α étant diophantien. $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \mid \alpha - p/q \mid > 1 / q^{2+\varepsilon}$. Montrons que ψ_1 est au moins de classe C^1. En effet, on a

$$\psi_1(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\varphi}(p)}{(e^{-i2\pi p\alpha} - 1)} e^{-i2\pi px}.$$

Comme $\varphi_1 = \varphi \circ g^{-1}$, φ et g sont de classe C^∞ donc φ_1 est de classe C^∞. Par conséquent

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ |\hat{\varphi}_1(p)| = o\left(\frac{1}{p^n}\right),$$

$$\frac{|\hat{\varphi}_1(p)|}{|1-e^{-i2\pi p\alpha}|} \leq \frac{K}{p^n \| p\alpha \|}, \qquad K>0$$

et

$$\frac{|p\hat{\varphi}_1(p)|}{|1-e^{-i2\pi p\alpha}|} \leq \frac{K}{p^n \| p\alpha \|}.$$

Les séries de termes généraux respectifs :

$$U_p = \frac{K}{p^n \| p\alpha \|} \leq \frac{K}{p^{2+\varepsilon'} \| p\alpha \|},$$

$$V_p = \frac{K}{p^{n-1} \| p\alpha \|} \leq \frac{K}{p^{1+\varepsilon'} \| p\alpha \|}.$$

Il en résulte que les séries suivantes sont normalement convergentes :

$$\psi_1(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{\varphi}_1(p)}{(1-e^{-i2\pi p\alpha})} e^{-i2\pi px}$$

et

$$\psi_2(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi p\hat{\varphi}_1(p)}{(1-e^{-i2\pi p\alpha})} e^{-i2\pi px}.$$

On en déduit que $\psi_2 = D\psi_1$ et $\psi_1 \in C^n(S^1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ Donc $\psi_1 \in C^\infty(S^1)$, il en est de même pour ψ car $\psi = \psi_1 \circ g$ et g peut être choisi dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$.

***

CHAPITRE VI

CARACTERISATION DES ELEMENTS DE $H_1(G,\Omega)$

6.1. NOTATIONS.

Dans toute la suite $G = \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$.

$\Lambda = \{\lambda : G \to \mathbb{R},\ \forall g \in G, \lambda(g) = 0$ sauf pour un nombre fini de $g\}$. Dans toute la suite $\lambda(g)$ sera noté λ_g.

Soit $\mathbb{R}G = \{\sum_{g\in G} \lambda_g.g,\ \lambda \in \Lambda\}$ l'algebre unitaire du groupe G, où l'addition et la multiplication sont données par

$$\sum_{g\in G} \lambda_g^1\, g + \sum_{g\in G} \lambda_g^2\, g = \sum_{g\in G} (\lambda_g^1 + \lambda_g^2)\, g$$

et

$$\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g .g\Big).\Big(\sum_{h\in G} \lambda_h. h\Big) = \sum_{g,h\in G} (\lambda_g . \lambda_h).gh\ ).$$

Dans toute la suite, un module sur $\mathbb{R}G$, sera appelé un G-module. Pour $g \in G$ et $\omega \in \Omega$, soit $g^*(\omega) = \omega \circ g$. Alors $g^* : \omega \to \omega \circ g$ est un automorphisme de Ω et l'application qui à $g \to g^*$ définit sur Ω une structure de G-module à droite.

6.2. RAPPEL.

En identifiant l'ensemble des réels aux formes différentielles constantes l'action de G sur $\mathbb{R}$ est triviale et $\mathbb{R}$ sera considéré comme un G-module trivial. Soit θ l'application de $\mathbb{R}G$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\theta : \sum_{g\in G} \lambda_g\, g \to \theta\Big(\sum_{g\in G} \lambda_g\, g\Big) = \sum_{g\in G} \lambda_g .$$

le noyau de θ est $IG = \left\{ \sum_{g\in G} \lambda_g\, g \ \Big/ \sum_{g\in G} \lambda_g = 0 \right\}$ qui est un idéal de $\mathbb{R}G$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de base $\{g - I,\ g \in G\}$. Donc

$\mathrm{Ker}\theta = IG = \{\sum_{g\in G} \lambda_g (g-1), \lambda_g \in \mathbb{R}\}$ et $IG \to \mathbb{R}G \to \mathbb{R} \to 0$ (*) est une suite exacte de G- modules.

6.2.1. REMARQUE.

$\mathbb{R}G$ étant un G-module projectif, la suite (*) est une résolution projective de $\mathbb{R}$. D'où,

$$\mathrm{Tor}_1{}^G(\Omega, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\{ i_* : \Omega \otimes_G IG \to \Omega \otimes_G \mathbb{R}G \approx \Omega \},$$

où $i^*[\omega \otimes (g-1)] = g^*\omega - \omega$. IG et $\mathbb{R}G$ sont considérés des G-modules à gauche et Ω un G-module à droite. Dans ce cas, le produit tensoriel est donc bien défnit.

6.2.2. PROPOSITION .

$\mathrm{Tor}_1{}^G(\Omega, \mathbb{R})$ est appelé le premier groupe d'homologie de G à coefficients dans le G-module $\Omega = \Omega^\infty(S^1)$, noté $H_1(G, \Omega) = H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$ et on a

$$H_1(G, \Omega) = \{ \sum_{k=1}^{n} a_k.\omega_k \otimes (g_k - I) \text{ tel que } \sum_{k=1}^{n} a_k.(g^*\omega - \omega) = 0 \},$$

où $a_k \in \mathbb{R}$, $g_k \in G$, $\omega_k \in \Omega^\infty(S^1)$ et $n \in \mathbb{N}$.

6.2.3. REMARQUE.

Si on identifie l'ensemble $\Omega^\infty(S^1)$ à $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, on a

$$H_1(G, \Omega^\infty(S^1)) = \{ \sum_{k=1}^{n} a_k[\omega_k \otimes (g_k - I)] = \sum_{k=1}^{n} a_k[\varphi_k \otimes (g - I)] \,/\, \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k \circ g.Dg - \varphi_k) = 0\}$$

où $a_k \in \mathbb{R}$, $g_k \in G$, $\varphi_k \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$.

6.3. CARACTERISATION DES ELEMENTS DE $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$.

6.3.1. METHODE DE CALCUL D' ELEMETS DE $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$.

On se donne $g_1, g_2, ..g_n$ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et on cherche $\psi_1, \psi_2, .., \psi_n$ dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ telles que

$$\sum_{j=0}^{n} (\psi_j \circ g_j - \psi_j) = k \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

D'où, par dérivation, on a

$$\sum_{j=1}^{n} D\psi_j \circ g_j \,.\, Dg_j - D\psi_j = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} D\psi_j \otimes (g_j - I) \in H_1(G, \Omega^{\infty}(S^1)).$$

Réciproquement, soit $\omega(\theta) = \psi \circ g(\theta) \,.dg(\theta) - \psi(\theta)\, d\theta$ un élément de $G(\Omega)$, où ψ est une application de S^1 dans $\mathbb{R}$ et $g \in \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$. Soit φ une primitive de ψ. Localement on a $F(\theta) = \varphi \circ g(\theta) - \varphi(\theta)$ et $dF = \omega$.

6.3.2. THEOREME.

Soient $f_1, f_2, .., f_{n-1}$ appartenant à $\mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ et $\psi_1, \psi_2, .., \psi_{n-1}$ dans $C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ il existe $f_n \in \mathrm{Diff}_+^{\infty}(S^1)$ et $\psi_n \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ telles que

$$\sum_{j=1}^{n} (D\psi_j \otimes (f_j - I) \in H_1(G, \Omega^{\infty}(S^1)).$$

PREUVE.

Soit l'application $F \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ définie par

$$F = \sum_{j=1}^{n} (\psi_j \circ f_j - \psi_j) \text{ où les } \psi_j \text{ sont arbitrairement choisies dans } C^{\infty}(S^1, \mathbb{R}).$$

Posons $F_1 = F - k$ où $k = \int_{S^1} F(x)\, dx$. Nous avons évidemment $\int_{S^1} F_1(x)\, dx = 0$. D'aprés la proposition 2.8.3. et si on choisit $f_n = R_\alpha$ où α est un nombre diophantien, il existe $\psi_n \in C^{\infty}(S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$F_1 = \psi_n \circ R_\alpha - \psi_n .$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\psi_j \circ f_j - \psi_j) + \psi_n \circ R_\alpha - \psi_n = k .$$

En dérivant tous les termes de cette égalité, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} (D\psi_j \circ f_j \,.\, Df_j - D\psi_j) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (D\psi_j \otimes (f_j - I)) \in H_1(G, \Omega^{\infty}(S^1)).$$

α est diophantien et f_n est conjuguée à R_α. Dans ce cas, on choisit $k = \int F_1 o\, g^{-1}\, dx$, et on résoud l' équation en ψ_n

$$F_1 = \psi_n \, o \, f_n - \psi_n,$$

d ' après la proposition 5.4.3., ψ_n existe. On en déduit que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\psi_j \, o \, f_j - \psi_j \right) + \psi_n \, o \, f_n - \psi_n = k.$$

Par dérivation, on obtient un élément de $H_1(G, \Omega)$ de la forme

$$\sum_{j=1}^{n-1} (D\psi_j \otimes (f_j - I)) + D\psi_n \otimes (f_n - I).$$

Une difficulté subsiste néanmoins quant à la comparaison des deux éléments précédement calculés.

***

CHAPITRE VII

CARACTERISATION DES ELEMENTS DE $H_2(G, \mathbb{R})$.

7.1. RAPPEL ET NOTATION.

On considère comme un G-module trivial. On rappelle que

$$IG = \{ \sum_{g\in G} \lambda_g (g - I) \text{ où } \lambda_g = 0 \text{ pour un nombre fini de } g \text{ et } \sum_{g\in G} \lambda_g = 0 ,\ \lambda_g \in \mathbb{R} \}.$$

IG est un G-module à droite ou à gauche selon qu'on multiplie à droite par h^{-1} ou h. Soit alors

$$h^*(g - I) = g \circ h^{-1} - h^{-1}$$

est l'action induite par G à gauche sur IG et

$$h * (g - I) = g \circ h - h$$

est l'action induite par G à droite.
Comme $\mathbb{R}G$ est un G-module projectif, on a $H_n(G, \mathbb{R}G) = 0$ pour $n > o$ et $H_0(G, \mathbb{R}G)$ est identique à $\mathbb{R}$.

7.2. CARACTERISATION DES ELEMENTS DE $H_2(\mathit{Diff}_+^\infty(S^1), \mathbb{R})$.

7.2.1. RAPPEL.

Le deuxième groupe d'homologie de $G = \mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est isomorphe au premier groupe d'homologie du groupe G à coefficients dans le G-module IG i.e. $H_2(G, \mathbb{R}) \approx H_1(G, IG)$.

PREUVE.
Si on applique le foncteur $H_*(G, .)$ à la suite G-exacte

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbb{R}G \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \to 0$$

où

$$\varphi(\sum_{g\in G} \lambda_g (g - I) = \sum_{g\in G} \lambda_g .$$

On obtient la longue suite exacte d'homologie.

$.. \to H_2(G, \mathbb{R}G) \to H_2(G, \mathbb{R}) \to H_1(G, IG) \to H_1(G, \mathbb{R}G) \to H_1(G, \mathbb{R}) \to H_0(G, IG)$
$\to H_0(G, \mathbb{R}G) \to H_0(G, \mathbb{R}) \to 0.$

$\mathbb{R}G$ étant projectif, on a $H_n(G, \mathbb{R}G) = 0$ pour $n \geq 1$, d'où l' isomorphisme entre $H_2(G, \mathbb{R}G)$ et $H_1(G, IG)$.

7.3. CALCUL DES ELEMENTS DE $H_2(G, \mathbb{R})$.

7.3.1. PROPOSITION.

$H_1(G, IG) = \operatorname{Ker}\{ i_* : IG \otimes_G IG \to IG \}$, où i_* est donnée par

$i_*[(g-I) \otimes (h-I)] = h^*(g-I) - (g-I) = g \circ h^{-1} - h^{-1} - (g-I)$, d'où

$$H_1(G, IG) = \{ \sum_{j=1}^{n} (g_j - I) \otimes (h_j - I) \;/\; \sum_{j=1}^{n} [\, h_j^* (g_j - I) - (g_j] - I) = 0 \}.$$

PREUVE.

A la G-suite exacte

$$0 \to IG \to \mathbb{R}G \to \mathbb{R} \to 0,$$

si on applique le foncteur $... \otimes_G IG$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^G(IG, IG) \to IG \otimes_G IG \to \mathbb{R}G \otimes_G IG \to \mathbb{R}G \otimes_G IG \to 0.$$

Donc on a $H_1(G, IG) = \operatorname{Ker}\{ i_* : IG \otimes_G IG \to IG \}$.

7.3.2. COROLLAIRE.

$H_2(G, \mathbb{R}) = \{ \sum_{(g,h) \in G} \lambda_{(g,h)} (g - I) \otimes_G (h - I)$, $\lambda_{(g,h)} = 0$ sauf pour un nombre fini $(g, h) \in G^2$

$$\sum_{(g,h) \in G} \lambda_{(g,h)} [\, h^*(g-I) - (g-I) \,] = 0 \}.$$

7.3.3. REMARQUE.

Soit $g \in D^\infty(S^1)$ le relèvement de g, à $\mathbb{R}$, au dessus de S^1, il existe donc $\psi \in C^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $g - I = \psi$. La résolution de l 'équation

$$\sum_{g,h \in G} \lambda_{(g,h)} \cdot [\, h^*(g-I) - (g-I) \,] = 0,$$

est équivalente à la résolution de l'équation

$$\sum_{h \in G} \lambda_h . [h^* . \psi - \psi) = 0, \quad \text{où } \psi \text{ est à déterminer.}$$

7.3.4. COROLLAIRE.

$H_2 (G, \mathbb{R}) = \{ \sum_{h \in G} \lambda_h . \psi_h \otimes (h - I),\ \lambda_h = 0$ sauf pour un nombre fini de h et tel que $\sum_{h \in G} \lambda_h . (h^* . \psi_h - \psi_h) = 0$, avec $I + \psi_h \in D^\infty (S^1) \}$.

PREUVE.

Soit $g = I + \psi_h$, si on remplace ψ_h par $(g - I)$ puis g par g son élément correspondant dans $Diff_+^\infty (S^1)$, on obtient les mêmes relations du corollaire 4.3.2.

7.3.5. PROPOSITION.

Soient $\psi_i \in C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et $g_i \in Diff_+^\infty(S^1), 1 \leq i \leq n$, telles que $\sum_{1 \leq i \leq n} (\psi_i \circ g_i - \psi_i)$ soit nul. Alors il existe

$$\varphi_{\psi_i} = \varphi_i \in C_{\mathbb{Z}}^\infty (\mathbb{R} , \mathbb{R}), \text{ tel que } I + \varphi_i \in D^\infty (S^1) \text{ et } \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ g_i - \varphi_i) = 0.$$

PREUVE.

Soit $M = \operatorname{Sup}_{1 \leq i \leq n} | D\psi_i |$

Si $M = 0$, les ψ_i sont constantes et on peut choisir $\varphi_i = \psi_i$.

Si $M > 0$, on divise l'égalité par 2M, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} ((\frac{1}{2M} \psi_i) \circ g_i - (\frac{1}{2M} \psi_i)) = 0.$$

Si on pose $\varphi_i = (1 / 2M) \psi_i$, on a bien la relation demandée, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ g_i - \varphi_i) = 0$$

où $\varphi_i \in C_{\mathbb{Z}}^\infty (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\psi_i \in C_{\mathbb{Z}}^\infty (\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour montrer que $I + \varphi_i \in D^\infty (S^1)$ il suffit de dériver $(I + \varphi_i)$, en effet,

$$D(I+\varphi_i) = 1 + (1/2M)D\psi_i$$

et comme $|(1/2M)D\psi_i| \leq 1$, on a

$D(I+\varphi_i) > 0$ ce qui implique que $I+\varphi_i \in D^\infty(S^1)$.

7.3.6. REMARQUE

D'après le corollaire 4.3.4., on remarque que le calcul des éléments de $H_2(G, \mathbb{R})$ se ramène à l'étude des sommes de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = 0.$$

7.3.7. THEOREME.

Soient $\{f_1, f_2,..., f_{n-2}\}$ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et $\{\psi_1, \psi_2,..., \psi_{n-2}\}$ dans $C^\infty(S^1,\mathbb{R})$. Il existe f_{n-1}, f_n dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ et ψ_{n-1} et ψ_n dans $C^\infty(S^1,\mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = 0.$$

PREUVE.

Posons $F = \sum_{i=1}^{n-2} (\psi_i \circ f_i - \psi_i)$.

Si $F = 0$, on prend $\psi_{n-1} = \psi_n = 0$ et les conditions du théorème sont bien verifiées.
Si $F \neq 0$, soient $k = \int_{S^1} F(x)\,dx$ et α dans $\mathbb{R}$ diophantien, si k est nul, d'après la proposition 2.4.6. il existe φ_{n-1} dans $C^\infty(S^1,\mathbb{R})$ telle que

$$F = \varphi_{n-1} \circ R_\alpha - \varphi_{n-1}.$$

D'où

$$F = \sum_{i=1}^{n-2} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = \varphi_{n-1} \circ R_\alpha - \varphi_{n-1}.$$

Si on prend $\psi_{n-1} = -\varphi_{n-1}$, $f_{n-1} = R_\alpha$, $\psi_n = 0$ et f_n arbitraire, on a bien l'égalité souhaitée, soit

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = 0.$$

Supposons que $k > 0$ (le cas où $k < 0$ est identique) et posons $F_1 = F - k$, on remarque déjà que $\int_{S^1} F_1(x)\, dx = 0$. D' après la proposition 5.4.6., il existe φ_{n-1} appartent à $C^\infty(S^1,\mathbb{R})$ telle que $F_1 = \varphi_{n-1} \circ R_\alpha - \varphi_{n-1}$. On en déduit l'égalité suivante

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = K \quad \text{où} \quad \psi_{n-1} = - \varphi_{n-1} \text{ et } f_{n-1} = R_\alpha .$$

Soient φ dans $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ et g érgodique dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(S^1)$ telle que $\int_{S^1}(\varphi \circ g - \varphi) = k$. φ et g existent toujours car l' adhérence de l' ensemble $\{ \varphi \circ g - \varphi, \varphi \in C^\infty (S^1) \}$ est un hyperplan de $C^\infty (S^1,\mathbb{R})$. D'après la proposition 4.9.6. et comme $\int_{S^1}(\varphi \circ g - \varphi - k) = 0$, il existe ψ dans $C^\infty (S^1, \mathbb{R})$ telle que $\varphi \circ g - \varphi + \psi \circ R_\alpha - \psi = k$. Ceci implique que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) + (-\varphi) \circ g - (-\varphi) + (- \psi) \circ R_\alpha - (- \psi) = 0.$$

Donc si on pose
$\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$,.., $\varphi_{n-2} = \psi_{n-2}$, $\varphi_{n-1} = \psi_{n-1} - \psi$, $\varphi_n = -\varphi$, $f_{n-1} = R_\alpha$, $f_n = g$, on a bien le résultat souhaité

$$\sum_{i=0}^{n} (\varphi_i \circ f_i - \varphi_i) = 0.$$

7.3.8. COROLLAIRE.

Soient $f_1, f_2,., f_{n-1}, f_n$ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty (S^1)$ où f_{n-1} est ergodique et $f_n = R_\alpha$ avec α diophantien, il existe $\varphi_1, \varphi_2,.., \varphi_{n-1}, \varphi_n$ dans $C^\infty (S^1, \mathbb{R})$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ f_i - \varphi_i), \quad \sum_{i=1}^{n} (f_i - I) \otimes (h_i - I) \in H_2 (G, \mathbb{R}) \text{ et } I + \varphi_i = h_i \in D^\infty (S^1),$$

où h_i est le relèvement de h_i.

PREUVE.

D'après le théorème 5.3.7., si on prend arbitrairement $\psi_1, \psi_2,.., \psi_{n-2}$ on peut construire ψ_{n-1}, ψ_n telles que

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i \circ f_i - \psi_i) = 0.$$

Soit $M = \mathrm{Sup}_{1 \le i \le n} | \psi_i |$ si on divise l' égalité précédente par M, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{M} \psi_i) \circ f_i - (\frac{1}{M} \psi_i) = 0.$$

On pose, Alors, $\varphi_i = (1 / M).\psi_i$, $1 \le i \le n$, on vérifie aisément que $h_i = I + \varphi_i$ appartient à $D^\infty (S^1)$ pour tout i dans $\{ 1,.., n \}$. Par conséquent, si on remplace φ_i par $h_i - I$ et h_i par h_i on a

$$\sum_{i=1}^{n} (h_i - I) \circ f_i - (h_i - I) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (f_i - I) \otimes (h_i - I) \in H_2 (G , \mathbb{R}).$$

***

CHAPITRE VIII

NON TRIVIALITE DE $H_1(G, \Omega)$ ET $H_2(G, \mathbb{R})$

Dans ce dernier chapitre, on montre la non trivialité des groupes d' homologie $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$ et $H_2(G, \mathbb{R})$, en construisant des éléments non nuls dans ces deux groupes.

8.1. RAPPELS.

On a

$$H_1(G, \Omega^\infty(S^1)) = \{ \sum_{k=1}^{n} \omega_k \otimes (g_k - I) \ / \ \sum_{k=1}^{n} (g_k^* \omega_k - \omega_k) = 0, \ \ g_k \in G, \ \ \omega_k \in \Omega^\infty(S^1) \}.$$

Les éléments $\{ e_g = I \otimes g, g \in G\}$ forment la base canonique du G -module $\mathbb{R}G \otimes_G \mathbb{R}G$ qui est lui même isomorphe à $\mathbb{R}G^{(G)}$ L' application $\psi : e_g \longrightarrow \psi(e_g) = g - I$ de $\mathbb{R}G \otimes_G \mathbb{R}G$ dans IG est l 'unique $\mathbb{R}$G-morphisme défini par $\psi(a_g \otimes g) = \psi(a_g.I \otimes g) = a_g(g - I)$, [14] et [15]. ψ est surjective. Dans toute la suite $\Omega^\infty(S^1)$ sera muni de sa structure de G - module à droite. Soit

$$\omega : s \longrightarrow \omega(s) = f(s)\, ds \ \text{ de } S^1 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R} \ \text{ et } \ g \in G, \text{ on a}$$
$$g^* \omega = f \circ g(s) . dg(s).$$

8.2. CONDITION DE NULLITE D'UN ELEMENT DE $\Omega^\infty(S^1) \otimes_G IG$

8.2.1. PROPOSITION.

Dans le G- module $\Omega^\infty(S^1) \otimes_G$ IG, l 'élément $\sum_{1 \le k \le n} \omega_k \otimes (g_k - I)$ est nul si et seulement s 'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans $\Omega^\infty(S^1)$, $a_{kj} \in \mathbb{R}G$, $1 \le k \le n$, $1 \le j \le m$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k_j} (g_k - I) = 0, \quad \forall j \in \{ 1, 2, \ldots, m \}$$

et

$$\omega_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_j . a_{k_j}, \quad \forall k \in \{ 1, 2, \ldots\ldots, n \}.$$

PREUVE.

Le G - morphisme $\psi : \mathbb{R}G \otimes_G \mathbb{R}G \longrightarrow$ IG défini ci -dessus est évidement surjectif d'où la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} \psi \to \mathbb{R}G \otimes_G \mathbb{R}G \to IG \to 0.$$

Si on tensorise à gauche par $\Omega^{\infty}(S^1)$ au dessus de $\mathbb{R}G$, on obtient encore une suite exacte à droite

$$..\to \Omega^{\infty}(S^1)\otimes \mathrm{Ker}\psi \xrightarrow{I\otimes i} \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G (\mathbb{R}G\otimes_G \mathbb{R}G) \xrightarrow{I\otimes\psi} \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G IG \to 0.$$

Comme $\Omega^{\infty}(S^1)$ est un G - module on a $\Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G\mathbb{R}G \approx \Omega^{\infty}(S^1)$.
On a la suite exacte

$$\to\Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G \mathrm{Ker}\psi \xrightarrow{I\otimes i} \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G \mathbb{R}G \xrightarrow{I\otimes\psi} \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G IG \to 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$\cdots\to\Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G \mathrm{Ker}\psi \xrightarrow{I\otimes i} \Omega^{\infty}(S^1)^G \xrightarrow{I\otimes\psi} \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G IG \to 0.$$

Un élément $\omega = (\omega_g)_{g\in G} \in \Omega^{\infty}(S^1)^{(G)} = \Omega^{\infty}(S^1)\otimes_G \mathbb{R}G$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{g\in G} \omega_g \otimes e_g ,$$

car la famille $\{ e_g = I\otimes g, g\in G\}$ est une base canonique du G-module $\mathbb{R}G \otimes_G \mathbb{R}G$.
Pour qu'un élément $\sum_{g\in G} \omega_g \otimes (g - I) \in \Omega^{\infty}(S^1)^{(G)}$ soit nul il faut et il suffit que cet élément appartienne à $\mathrm{Ker}(I\otimes\psi)$, ainsi on a l'équivalence suivante

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \otimes (g_k - I) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega_k\otimes e_{g_k} \in \mathrm{Ker}(I\otimes\psi),$$

Ceci est vrai d ' après l ' exactitude à droite de la suite ci - dessus, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \otimes (g_k - I) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k\otimes e_{g_k} \in \mathrm{Im}(I\otimes i),$$

d ' où

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k\otimes e_{g_k} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\otimes i(\beta_j) \ , \ \alpha_j \in \Omega^{\infty}(S^1) , \ i(\beta_j) \in \mathrm{Ker}\psi,$$

et

$$i(\beta_j) = \sum_{g\in G} a_g^j\, e_g \text{ , on a donc } \sum_{k=1}^{n} \omega_k \otimes e_{g_k} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(\sum_{g\in G} a_g^j\, e_g \Big),$$

où les a_g^j sont nuls sauf pour un nombre fini de $g \in G$.
Si on identifie les deux égalités ci - dessus, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \otimes e_{g_k} = \sum_{g\in G} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, a_g^j \Big) \otimes e_g = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, a_k^j \Big) \otimes e_{g_k}$$

et par suite

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, a_k^j \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^j\, (g_k - I) = 0.$$

8.3. NON TRIVIALITE DE $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$

8.3.1. LEMME.

Soit α un nombre ergodique, s'il existe $\psi : S^1 \to \mathbb{R}$, continue, telle que $\psi \circ R_\alpha - \psi = 0$, alors ψ est constante.

PREUVE.
Si $\psi \circ R_\alpha = \psi$ alors $\psi \circ R_{n\alpha} = \psi$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, comme $\{ n\alpha,\ n \in \mathbb{Z} \}$ est dense dans S^1 et ψ est continue donc ψ est constante.

8.3.2. THEOREME.

Le premier groupe d'homologie de G à coefficients dans $\Omega^\infty(S^1)$ est non trivial.
Soit $H_1(G, \Omega^\infty(S^1)) \neq \{0\}$.

PREUVE.
Si on identifie S^1 à $\{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1 \}$.

Soit $\omega(z) = \dfrac{dz}{i2\pi z} = \dfrac{1}{2\pi}\Big[\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} - i\, \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} \Big] = \dfrac{1}{2\pi}(\omega_1 - i\,\omega_2)$

la forme $\omega = (1/2\pi).\omega_1$ n'est pas exacte et par un calcul simple, on a $\int_{S^1} \omega$ non nul. Par le changement de cartes $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $\omega(z) = dt$. Soit R_α une rotation de S^1 où α est ergodique. L'élément $dt \otimes (R_\alpha - I)$ appartient à $H_1(G, \Omega^\infty(S^1))$ et il est non nul. En effet,

$\omega = dt = 1.dt$ et $\omega \circ R_\alpha . dR_\alpha = 1. R_\alpha .dR_\alpha = dt$ d' où $R_\alpha^* \, dt - dt = dt - dt = 0$ et par définition de $H_1 (G, \Omega^\infty (S^1))$ (voir 5.1)), $dt \otimes (R_\alpha - I) \in H_1 (G, \Omega^\infty(S^1))$. De plus si $dt \otimes (R_\alpha - I) = 0$, d' après la proposition 8.2., il existe $a_1, a_2,\dots, a_m$ dans $\mathbb{R}G$ tels que

$$(*) \qquad a_j . (R_\alpha - I) = 0, \forall \ j \in \{ 1, 2,\dots, m\}$$

et il existe $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_m$ dans $\Omega^\infty (S^1)$ telles que

$$dt = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j . a_j .$$

Alors si on pose $a_j = \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^j . g_i$, la relation (*) s'écrit

$$(\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^j .g_i) \circ R_\alpha - (\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^j . g_i) = 0.$$

D ' après le lemme 6.3.1, $a_j = \beta_j = \mathrm{Cte} = R_{\beta_j} - I$, $\forall j \in \{ 1, 2, \dots, m \}$ et la relation

$dt = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j .a_j$ se traduit par $dt = \sum_{j=1}^{m} (R_{\beta_j}^* \alpha_j - \alpha_j) = 0,$

Si on intègre les deux membres sur [0, 1], on obtient

$$0 \neq 1 = \int_0^1 dt = \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 (R_{\beta_j}^* . \alpha_j - \alpha_j) = 0,$$

d'où la contradiction, donc $dt \otimes (R_\alpha - I)$ est non nul et appartient $H_1 (G, \Omega^\infty (S^1))$.

8.4. NON TRIVIALITE DE $H_2 (G, \mathbb{R})$

8.4.1. THEOREME.

$\mathbb{R}$ étant considéré comme un G-module trivial où $G = \mathrm{Diff}_+^\infty (S^1)$ alors le deuxième groupe d'homologie $H_2(G, \mathbb{R})$ de G à coefficients dans $\mathbb{R}$ est non nul.

PREUVE.

D'après la proposition 7.3.1., l'élément $(R_k - I) \otimes (R_\alpha - I) \in H_2(G, \mathbb{R})$ avec $k \neq 0$ et α ergodique. En effet,

$$(R_k - I).R_\alpha - (R_k - I) = R_{k+\alpha} - R_\alpha - R_k + I = 0.$$

D'après la proposition 5.2. et en remplaçant $\Omega^\infty(S^1)$ par IG, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans $\mathbb{R}G$ et $(g_1 - I), (g_2 - I), \ldots, (g_m - I)$ dans IG tels que

$$a_j.(R_\alpha - I) = 0 \quad (*) \quad \text{et} \quad R_k - I = \sum_{j=1}^{m} (g_j - I).a_j, \quad (**)$$

comme dans 6.4, les a_j sont de la forme $R_{\beta_j} - I$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et la relation (**) se traduit par

$$R_k - I = \sum_{j=1}^{m} (g_j - I).(R_{\beta_j} - I) = \sum_{j=1}^{m} (g_j \circ R_{\beta_j} - R_{\beta_j} - g_j + I) = \sum_{j=1}^{m} [(g_j - I) \circ R_{\beta_j} - (g_j - I)].$$

En intégrant les applications $\varphi_j = g_j - I$ sur $I = [0, 1]$, d'après 4.3.4. on obtient une contradiction et par suite $(R_k - I) \otimes (R_\alpha - I) \neq 0$& est dans $H_2(G, \mathbb{R})$.

***

REFERENCES

[1] Georges Springer, Introduction to Riemann surfaces.

[2] Ahlffors et Sario, Riemann surfaces, 1960.

[3] Haefliger and Li - Bange, Currents on a circle invariant by a Fuschian group.

[4] A. Haefliger, Some remarks on foliations with minimal leaves.

[5] Alan F. Beardon, The geometry of discrete groups.

[6] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Herman.

[7] H.Furstemberg, Strict ergocity and transformation of the torus, 19/ 1 / 1961.

[8] N. Bourbaki, EVT, chapitre I à V, édition Masson.

[9] M. Herman, Sur la conjuguaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations

[10] P. J. Hilton, U. Stambach, A course in homological algebra

[11] Haefliger, Current on a circle invariant by a fuchsian group

[12] Kenneth S. Brown, Cohomology of groups

[13] J.W.S. Cassels, An introduction to diophantine approximation

[14] J. Combes, Suites et séries

[15] R.E. Edwards, Fourier series a modern introduction, vol 1 et 2

[16] Joseph J. Rotmann, An introduction to homological algebra

[17] G. Hector / U. Hirsch, Introduction to the geometry of foliatons, part A

[18] G. H. Hardy & E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers

[19] M. Bergern & BGostiau, Géométrie différentielle:variétés, courbes et surfaces

[20] D. V. Anosov,On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle

[21] Bourbaki, Elèments de mathématiques, algèbre, ch. I.

[22] Bourbaki, Elèments de mathématiques, algèbre commutative, ch. II.

[23] A. Frölicher et A. Kriegl, linear spaces and differentiation theory, 1988.

[24] Michael R. Herman, sur le groupe des difféomorphismes du tore; Ann. inst. Fourier, Grenoble, 23, 2 (1973) 75 - 86.

[25] F. Sergaert, Un théorème des fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications; Ann. sc. éco. Norm. sup. 4eme série, T 5 1972 p599 à 660.

[26] J. Milnor, Remarks on infinite dimensional Lie groups, Princeton, NJ 08540.

[27] Richaed S. Hamilton, The inverse fonction theorem of Nash and Maser, A.M.S., vol7, N°1, july 1982.

[28] A. Pressley & G. Segal, Loop Groups, Oxford science publications.