



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse présentée à l'UNIVERSITE DE METZ
pour l'obtention du
doctorat de l'Université de Metz
Spécialité Mathématiques

par Mr Mohamed Ali HAMMAMI.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE SCIENCES ET TECHNIQUES - METZ -	
N° Inv.	1994126S
Cote	S/M3 94/42
Loc.	Magasin
Cat	

Titre de la thèse :

**Stabilisation Globale par Retour d'Etat
de Certains Systèmes non Linéaires**

Soutenue le 09 décembre 1994 devant le jury composé de :

J.P. GAUTHIER, Professeur à l'INSA de Rouen.
H. HAMMOURI, professeur à l'université Claude Bernard de LyonI.
B.KLARES, professeur à l'université de Metz.
A. ROUX, professeur à l'université de Metz.
G. SALLET, professeur à l'université de Metz.
E.RICHARD, maître de conférence à l'université de NancyI.

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction du professeur G.Sallet. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères.

Je remercie vivement Messieurs les professeurs J.P.Gauthier et H. Hammouri, qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également Messieurs B.Klares, A.Roux et E.Richard, pour avoir bien voulu faire partie de ce jury.

La préparation de cette thèse a été faite au sein du projet CONGE de l'INRIA. A ce titre, je tiens à remercier tous ses membres.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

0	Introduction	3
1	Rappels et généralités	5
1.1	Notions de stabilité	5
1.1.1	Définitions	5
1.1.2	Fonctions de Liapounov	6
1.1.3	Principe d'invariance de LaSalle	7
1.2	Stabilisation	8
1.2.1	Conditions nécessaires	8
1.3	Quelques résultats classiques de stabilisation	10
1.3.1	Théorème de Jurdjevic-Quinn	10
1.3.2	Fonctions de Liapounov "contrôlées"	10
1.4	Stabilisation par retour d'état estimé par un observateur	12
1.4.1	Résultats récents	13
2	Stabilisation globale des systèmes non linéaires en cascade	15
2.1	Introduction	15
2.2	Systèmes partiellement linéaires	17
2.3	Conditions suffisantes	21
2.3.1	Stabilisation par retour dynamique de sortie	28
3	Stabilisation au moyen d'un observateur	29
3.1	Introduction	29
3.2	Conception de l'observateur	30
3.3	Stabilisation à travers l'observateur	35
3.3.1	Stabilisation exponentielle	35
3.3.2	Stabilisation asymptotique	37
3.4	Remarques et généralisation	39

4	Stabilisabilité des champs de vecteurs polynomiaux homogènes	43
4.1	Introduction	43
4.2	Stabilisabilité	44
4.2.1	Cas où P est homogène de degré 3	44
4.2.2	Cas où P est homogène de degré $2k+1$	52
	Bibliographie	53

0

Introduction

Dans cette thèse on étudie quelques problèmes de stabilisation par retour d'état pour certains systèmes non linéaires.

On considère des systèmes en temps continu décrits par des équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (0.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$. $x(t)$ représente l'état du système à l'instant t , u et y désignent respectivement le contrôle et la sortie du système, et F est un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^n$, qu'on supposera complet. On suppose de plus que l'origine est un point d'équilibre de (0.1).

Les problèmes auxquels on s'intéresse sont les suivants :

- Trouver un feedback $u = u(x)$ tel que, l'origine soit un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(x(t)))$$

- Trouver un tel feedback $u(x)$ stabilisant, ainsi qu'un observateur produisant une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$, tel que le système bouclé par $u(\hat{x})$,

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(\hat{x}(t)))$$

soit globalement asymptotiquement stable à l'origine.

Le premier chapitre est consacré à des rappels de définitions et résultats classiques concernant la stabilisation pour les systèmes contrôlés.

Dans le second chapitre on s'intéresse aux systèmes non linéaires composés

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (0.2)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$ et f, g sont des champs de vecteurs de classe C^∞ tel que $f(0, 0) = 0$ et $g(0, 0) = 0$. On donne des conditions suffisantes pour stabiliser globalement des systèmes non linéaires de la forme (0.2). On considère en particulier une classe de systèmes partiellement linéaires pour lesquels un feedback presque régulier stabilisant est explicitement donné.

Dans le troisième chapitre on considère les systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (0.3)$$

où A, B et C sont des matrices constantes respectivement $n \times n$, $n \times q$ et $p \times n$ et

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

un champ lipschitzien tel que $f(0, 0) = 0$.

On montre que, sous des conditions sur la partie non linéaire de (0.3), on peut stabiliser ces systèmes au moyen d'un observateur. On donne en particulier une généralisation d'un résultat de [47].

Le dernier chapitre consiste à étudier la stabilisabilité des systèmes non linéaires dans le plan de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x) + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (0.4)$$

où P est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair, et B une matrice carrée à valeur dans $\mathbb{R}$. Des conditions nécessaires et suffisantes pour stabiliser globalement (0.4) sont données. (L'essentiel des résultats de ce chapitre est contenu dans ([26] et [29]).

1

Rappels et généralités

1.1 Notions de stabilité

1.1.1 Définitions

On considère le système autonome défini par

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, F(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

On désigne par $F_t(x)$ la solution de (1.1) issue du point x à l'instant $t = 0$, i.e.,

$$\left. \frac{dF_t(x)}{dt} \right|_{t=0} = F(x) \text{ et } F_0(x) = x.$$

Définition 1 On dira que x_0 est un point d'équilibre stable pour (1.1) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall t \geq 0, \|F_t(x) - x_0\| < \varepsilon$$

Définition 2 On dit que x_0 est attractif pour le système (1.1), s'il existe un voisinage U de x_0 tel que, $\forall x \in U$, $F_t(x)$ existe pour tout $t \geq 0$ et

$$\forall x \in U, \lim_{t \rightarrow +\infty} F_t(x) = x_0.$$

Si $U = \mathbb{R}^n$, x_0 est dit globalement attractif.

Définition 3 On dit que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, (resp. globalement asymptotiquement stable), s'il est stable et attractif, (resp. stable et globalement attractif).

Fonction de classe $\mathcal{KL}$

Définition 4 Une fonction $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est de classe $\mathcal{K}$ si elle est définie, continue et strictement croissante vérifiant $\gamma(0) = 0$.

Définition 5 Une fonction $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est de classe $\mathcal{KL}$ si pour tout t fixé l'application $\beta(., t)$ est de classe $\mathcal{K}$ et pour tout s fixé, l'application $\beta(s, .)$ décroît vers zéro lorsque t croît vers $+\infty$.

Théorème 1 Si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (1.1) alors il existe une fonction $\beta(s, t)$ de classe $\mathcal{KL}$, tel que pour tout état initial x appartenant à un voisinage de x_0 , la solution existe pour tout $t \geq 0$ et satisfait l'estimation suivante

$$\|F_t(x) - x_0\| \leq \beta(\|x - x_0\|, t). \quad (1.2)$$

En remplaçant l'estimation (1.2) par une estimation de type exponentiel, on obtient :

Définition 6 Si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour (1.1) et s'il existe deux constantes positives k et λ tel que l'on ait

$$\|F_t(x) - x_0\| \leq k \|x - x_0\| e^{-\lambda t} \quad (1.3)$$

pour tout x appartenant à un voisinage de x_0 et tout $t > 0$, alors on dira que (1.1) est exponentiellement stable en x_0 .

L'utilisation de ces définitions permet rarement de montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable. On doit en effet pour cela résoudre explicitement le système différentiel (1.1), ce qui est en général difficile voir impossible. En fait, on utilise plutôt les théorèmes suivants dûs à Liapounov (voir [24]).

1.1.2 Fonctions de Liapounov

Définition 7 Une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur un voisinage U de x_0 et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :

(i) $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$,

(ii) $\dot{V}(x) = F.V(x) \leq 0, \forall x \in U$, où $F.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(F_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x) | F(x) \rangle$,

est appelée fonction de Liapounov large pour (1.1) en x_0 .

Si de plus la fonction V est telle que

$$(iii) \quad \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in U - \{x_0\}$$

alors V est appelée fonction de Liapounov stricte pour (1.1) en x_0 .

Théorème 2 *Si (1.1) admet une fonction de Liapounov large, (resp. stricte) en x_0 , alors x_0 est un point d'équilibre stable, (resp. asymptotiquement stable) pour (1.1).*

Théorème 3 (version globale)

S'il existe $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive et propre (c'est-à-dire l'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^+$ est un compact de $\mathbb{R}^n$) telle que

$$F.V(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}, \quad F.V(x_0) = 0$$

alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

On a aussi le théorème inverse suivant (Massera [37], Kurzweil [34]).

Théorème 4 *Si F est continu et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.1) admet une fonction de Liapounov stricte qui est de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .*

On a plus d'information sur la fonction de Liapounov dans le cas où F est un champ de vecteurs continu et homogène de degré p .

Définition 8 *On dit qu'un champ de vecteurs F est homogène de degré p si pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a*

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x)$$

Théorème 5 *Si F est continue, homogène de degré p et si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable alors (1.1) admet une fonction de Liapounov stricte qui est homogène et de classe C^∞ dans un voisinage de x_0 .*

1.1.3 Principe d'invariance de LaSalle

Les théorèmes précédents prouvent que, pour montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Liapounov stricte. Il n'y a cependant pas de méthodes constructives qui permettent de trouver de telles fonctions. Par contre, il est plus facile, en général, de trouver une fonction de Liapounov large V . Dans ce cas, pour déduire la stabilité asymptotique, on utilise le résultat suivant dû à LaSalle [35].

Théorème 6 *Soit V une fonction de Liapounov large de classe C^1 , pour (1.1) en zéro, alors toutes les trajectoires bornées pour $t \geq 0$ tendent vers Ω , le plus grand ensemble invariant par F et contenu dans*

$$E = \{x \in M / F.V(x) = 0\}.$$

Si en plus V est propre ($\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$) alors toutes les trajectoires sont bornées pour $t \geq 0$ et donc toutes les trajectoires tendent vers Ω . Pour montrer que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable, il suffit donc de montrer que $\Omega = \{0\}$.

Dans la suite, on prendra $x_0 = 0$ l'origine de $\mathbb{R}^n$.

1.2 Stabilisation

Revenons au système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 9 *On dira que (1.4) est stabilisable s'il existe un feedback $u = u(x)$, au moins continu, tel que le système bouclé*

$$\dot{x} = F(x, u(x))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

1.2.1 Conditions nécessaires

Première approximation Il s'agit d'associer au système (1.4) un système plus simple dont l'étude permet d'avoir des renseignements sur le système initial. La méthode classique, lorsque $F(0, 0) = 0$, est de considérer le linéarisé à l'origine, c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ A = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial F}{\partial u}(0, 0) \end{cases} \quad (1.5)$$

On sait alors que si (1.5) est stabilisable, (1.4) l'est aussi et avec le même feedback. Mais, cette méthode ne permet de conclure que localement.

Le théorème suivant dû à Brockett [8] donne des conditions nécessaires de stabilisation.

Théorème 7 *Si le système (1.4) admet un feedback stabilisant de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors :*

(1) *Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.*

(2) *Il existe un voisinage V de $(0, 0)$ tel que pour tout $\xi \in V$, il existe un contrôle $u_\xi(\cdot)$ défini sur $[0, +\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = F(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.*

(3) *L'application*

$$\begin{aligned} \gamma : U \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) &\longmapsto F(x, u) \end{aligned}$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Par la suite, nous utiliserons la terminologie suivante

Définition 10 *Un système*

$$\dot{x} = F(x, u)$$

vérifiant la condition (2) du théorème de Brockett sera dit stabilisable en boucle ouverte ou encore asymptotiquement contrôlable à l'origine.

Remarque. La condition (2) est évidemment une condition nécessaire de stabilisabilité quelle que soit la régularité qu'on exige du feedback. Par contre, la condition (1) n'est pas nécessaire si on se contente d'un feedback continu comme le montre l'exemple suivant (Kawski [32]) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3 \end{cases}$$

qui est stabilisable avec

$$u(x) = -x_1 + x_2 + \frac{4}{3}x_2^{\frac{1}{3}} - x_1^3.$$

1.3 Quelques résultats classiques de stabilisation

1.3.1 Théorème de Jurdjevic-Quinn

Un des premiers résultats significatifs est dû à Jurdjevic et Quinn [30], qui ont utilisé le principe d'invariance de LaSalle pour donner une condition suffisante de stabilisabilité pour les systèmes affines en contrôles dont la dérive est linéaire dissipative, de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) + uY(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.6)$$

où $X(x) = Ax$ avec A une matrice $n \times n$ avec n valeurs propres imaginaires distinctes.

On note

$$ad_X^0 Y = Y$$

et

$$ad_X^k Y = [X, ad_X^{k-1} Y] \text{ pour } k > 0.$$

Théorème 8 (Jurdjevic-Quinn)

Si (1.6) vérifie

$$Span \{ ad^k XY(x), k \in \mathbb{N} \} = \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

alors il est G.A.S avec

$$u = -\langle x, Y(x) \rangle$$

Ce résultat a été ensuite généralisé à des systèmes affines quelconques par plusieurs auteurs, notamment dans [21] et [38].

1.3.2 Fonctions de Liapounov "contrôlées"

Etant donné un système

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.7)$$

et $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie positive et propre, on dira que V est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système (1.7) si

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), F(x, u) \rangle < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

On peut remarquer que si (1.7) admet un feedback stabilisant continu alors, d'après le théorème inverse de Liapounov ([37], [34]), le système (1.7) admet une fonction de Liapounov stricte de classe C^∞ et donc (1.7) admet une fonction de Liapounov contrôlée.

Arstein [3] a étudié les systèmes affines en contrôles du type

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + ug(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.8)$$

et a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que (1.8) soit stabilisable par un feedback régulier sauf éventuellement en l'origine. Sontag [44] a démontré que si un système affine en contrôles admet une fonction de Liapounov contrôlée, alors il est stabilisable avec un feedback C^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$; en plus, il a donné une formule explicite du feedback stabilisant. On rappelle ici le résultat de Sontag pour un système mono-entrée.

Supposons qu'il existe $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^∞ , définie positive et propre tel que :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ou, en d'autres termes

$$\langle \nabla V(x), g(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$$

Posons

$$a(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \quad \text{et} \quad b(x) = \langle \nabla V(x), g(x) \rangle$$

alors

$$u(x) = \begin{cases} \frac{-a(x) - \sqrt{a^2(x) + b^4(x)}}{b(x)} & \text{si } b(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } b(x) = 0 \end{cases}$$

stabilise (1.8). En outre, u sera continue si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que,

$$x \in B(0, \delta) - \{0\} \Rightarrow \exists u \in \mathbb{R} : \|u\| < \varepsilon \text{ et } \langle \nabla V(x), f(x) + ug(x) \rangle < 0.$$

1.4 Stabilisation par retour d'état estimé par un observateur

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, et $y \in \mathbb{R}^p$.

Dans la quasi totalité des systèmes concrets, on a rarement accès à l'état $x(t)$ du système, mais plutôt à une approximation $\hat{x}$ estimée par un observateur. En supposant qu'il existe un feedback stabilisant $u(x)$, une question naturelle est alors de savoir si le système bouclé par le feedback estimé $u(\hat{x})$ reste asymptotiquement stable à l'origine.

Observateur exponentiel de l'état :

Définition 11 *Un observateur exponentiel de (1.9) est un système décrit par une équation de la forme*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = G(\hat{x}, u, y) \\ \hat{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.10)$$

tel que, si u et y sont respectivement l'entrée et la sortie du système (1.9), l'évolution de $\hat{x}$ vérifie, pour toute entrée admissible u , toutes conditions initiales $\hat{x}(0)$ et $x(0)$ et tout $t \geq 0$:

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \beta \|\hat{x}(0) - x(0)\| \exp -\alpha(t - t_0), \quad (1.11)$$

$\beta > 0$ et $\alpha > 0$ étant deux nombres convenables. Pour des raisons évidentes, il est important que les nombres β et α soient indépendants de l'entrée u .

Stabilisation à travers l'observateur :

Le problème de la stabilisation de (1.9) par retour d'état estimé par un observateur, dépend de trois facteurs : l'existence d'un feedback $u = u(x)$ stabilisant, l'existence d'un observateur de la forme (1.10) qui produit l'estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$, et le fait que le système

$$\dot{x} = F(x, u(\hat{x}))$$

soit asymptotiquement stable.

1.4.1 Résultats récents

Dans le cas des systèmes bilinéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(Bx + b) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1.12)$$

qui sont observables pour toute entrée et à dérive dissipative, i.e, $x^T Ax \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Gauthier-Kupka [22] utilisent un observateur de la forme

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u(B\hat{x} + b) + S^{-1}C^T(y - C\hat{x}) \\ \dot{S}_t = -\theta S_t - (A + uB)^T S_t - S_t(A + uB) + C^T C \end{cases} \quad (1.13)$$

où $\theta > 0$ et $S_t \in S^+$ le cône des matrices définies positives symétriques sur $\mathbb{R}^n$.

C'est une version un peu dégénérée de l'observateur optimal de Kalman [31], qui correspond à mettre du bruit uniquement sur la sortie, auquel cas il faut ajouter un facteur d'oubli exponentiel. Notons que, si (1.12) est observable pour toute entrée, (1.13) est un observateur exponentiel pour (1.12) qui converge pour toute entrée bornée (voir [7]). En utilisant des feedbacks de type Jurdjevic-Quinn (théorème 8), Gauthier et Kupka donnent un résultat de stabilisation à travers l'observateur (1.13).

Soit

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n / x^T Ax = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n / x^T (Bx + b) = 0\}$$

Supposons que (1.12) satisfait la ad-condition sur $W - \{0\}$ i.e,

$$\text{span} \{Ax, \text{ad}_{Ax}^0(Bx + b), \dots, \text{ad}_{Ax}^k(Bx + b), \dots\} = \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in W - \{0\}.$$

Pour tout $r > 0$, soit u_r le feedback donné par $u_r(x) = -rx^T(Bx + b)$, et, pour $u_0 > 0$, u_{r,u_0} le feedback borné défini par $u_{r,u_0}(x) = \text{sgn}(u_r(x)) \inf(u_0, |u_r(x)|)$. Alors u_r et u_{r,u_0} sont deux lois de commandes stabilisantes pour le système bilinéaire (1.12). De plus, on a :

Théorème 9 (Gauthier-Kupka) : *Pour θ assez grand, le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u_{r,u_0}(\hat{x})(B\hat{x} + b) - S^{-1}C^T C \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = (A + u_{r,u_0}(\hat{x})B)\varepsilon - S^{-1}C^T C \varepsilon \\ \dot{S} = -\theta S - (A + u_{r,u_0}(\hat{x})B)^T S - S(A + u_{r,u_0}(\hat{x})B) + C^T C \end{cases}$$

où $\varepsilon = \hat{x} - x$, est globalement asymptotiquement stable, i.e. le système bilinéaire (1.12) contrôlé par le feedback $u_{r,u_0}(\hat{x})$, avec estimation de l'état donnée par l'observateur (1.13), est G.A.S.

Chabour-Hammouri [14] utilisent l'approche de Liapounov pour stabiliser des systèmes bilinéaires homogènes, à dérive non nécessairement dissipative, à travers un observateur de la forme (1.13).

(H) Il existe un feedback borné $u(x)$ et une fonction de Liapounov $V(x) > 0, x \neq 0$ $V(0) = 0$ tel que,

$$\nabla V(x)(Ax + u(x)Bx) < 0, \forall x \neq 0$$

et

$$\|\nabla V(x)\| \leq \alpha(1 + V(x)), \quad \alpha > 0. \quad (1.14)$$

Sous cette hypothèse, on considère le système (1.12) contrôlé par le feedback $u(\hat{x})$ avec l'estimation $\hat{x}$ donnée par (1.13). On a alors

Théorème 10 (Chabour-Hammouri) : *Si le système bilinéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ y = Cx \end{cases}$$

est observable pour toute entrée et vérifie l'hypothèse (H) alors, pour θ assez grand, le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + u(\hat{x})B\hat{x} - S^{-1}C^T C \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} = (A + u(\hat{x})B)\varepsilon - S^{-1}C^T C \varepsilon \\ \dot{S} = -\theta S - (A + u(\hat{x})B)^T S - S(A + u(\hat{x})B) + C^T C \end{cases}$$

où $\varepsilon = \hat{x} - x$, est globalement asymptotiquement stable.

Notons que la condition (1.14) est satisfaite si le système bilinéaire est stabilisable par feedback homogène de degré zéro. En effet, si $u(x)$ est un feedback stabilisant, homogène de degré zéro, alors l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax + u(x)Bx$$

est homogène de degré un. On en déduit, en vertu du théorème 5, qu'il existe une fonction de Liapounov stricte V homogène ainsi que ses dérivées partielles. Il s'ensuit que la condition (1.14) est vérifiée.

Pour les systèmes bilinéaires plans stabilisables, Chabour-Sallet-Vivalda [13] donnent des feedbacks homogènes de degré zéro, C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Il en résulte que, pour ces systèmes, la condition (1.14) est réalisée.

2

Stabilisation globale des systèmes non linéaires en cascade

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de stabilisation globale de certains systèmes non linéaires dits en cascade de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $u \in \mathbb{R}^p$. Les fonctions f et g sont supposées de classe C^∞ vérifiant $f(0, 0) = 0$ et $g(0, 0) = 0$.

Pour cette classe de systèmes, il est bien connu que si l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad (2.2)$$

est localement asymptotiquement stable et si le système

$$\dot{y} = g(y, u) \quad (2.3)$$

est localement stabilisable par un feedback $u(y)$, alors le système composé (2.1) est localement stabilisable par ce même feedback (Vidyasagar [48]).

Notons d'autre part que ce résultat local n'a pas d'analogue global : la stabilisation globale de (2.1) ne se déduit pas nécessairement de celle de (2.2) et de la *G.A.S* de (2.3). A titre de contre exemple, considérons le système plan suivant (voir [41]) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2 y^2 - 1) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (2.4)$$

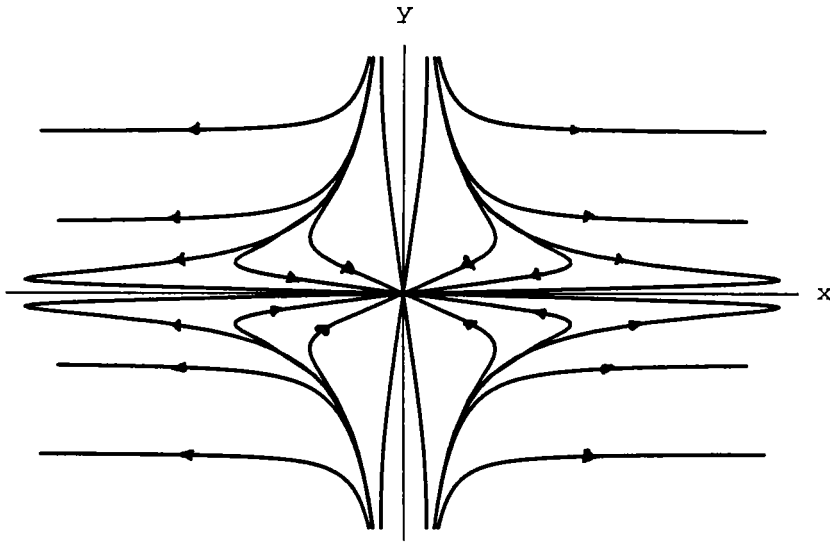
qui est localement (mais non globalement) stabilisable par le feedback

$$u(y) = -y$$

alors que les deux sous-systèmes associés sont *G.A.S.* On peut, en effet, vérifier que l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 y^2 = 1\}$$

est invariant pour le système bouclé, ce qui exclut la stabilité asymptotique globale de ce dernier.



En fait, la stabilisation globale de (2.1), (voir [41], [42], [45], [46]), ne se déduit de celle de (2.2) et de la *G.A.S.* de (2.3) qu'au prix de conditions supplémentaires. Rappelons, en particulier, un théorème dû à Seibert-Suarez [41], que nous utiliserons par la suite.

Théorème 11 : *On suppose que*

- *le système (2.2) est G.A.S.*
- *le système (2.3) est globalement stabilisable par un feedback $u(y)$.*
- *toutes les orbites du système bouclé*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y, u(y)) \end{cases}$$

sont bornées pour $t > 0$.

Alors le système (2.1) est globalement stabilisable par le feedback $u(y)$.

La difficulté mentionnée plus haut subsiste même pour les systèmes partiellement linéaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = Ay + Bu \end{cases} \quad (2.5)$$

où A et B sont des matrices de dimensions convenables, (il suffit de prendre l'exemple du système (2.4)). Le rôle important joué dans la littérature par cette classe de systèmes est dû aux résultats des années 80 sur la linéarisation partielle par feedback (voir [9], [10], [28], [36]) permettant sous certaines conditions de transformer un système non linéaire en un système en cascade de la forme (2.5). Des résultats significatifs sur la stabilisation globale des systèmes partiellement linéaires ont été obtenus, notamment dans ([11], [33], [39]).

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans un premier temps, on donne pour les systèmes partiellement linéaires des conditions suffisantes de stabilisation par un feedback obtenu, comme dans [44], grâce à une fonction de Liapounov contrôlée. Une classe de systèmes partiellement linéaires satisfaisant ces conditions est ensuite explicitée.

Utilisant le théorème 11, on donne, dans un deuxième temps, des conditions suffisantes de stabilisation globale pour les systèmes non linéaires en cascade de la forme (2.1).

2.2 Systèmes partiellement linéaires

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m \\ \dot{y} = Ay + Bu, & u \in \mathbb{R}^p \\ \tilde{y} = Cy, & \tilde{y} \in \mathbb{R}^q \end{cases} \quad (2.6)$$

où A ($m \times m$), B ($m \times p$) et C ($q \times m$) sont des matrices constantes et f est une fonction de classe C^∞ de la forme

$$f(x, y) = f(x, 0) + \varphi(x, y)Cy.$$

$\varphi(x, y)$ étant une matrice ($n \times q$) de classe C^∞ . Sans perte de généralité, on peut supposer que les matrices B et C sont de rang maximum, et que $q \leq p$.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le système (2.6) vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) suivantes.

(H_1) Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

est globalement asymptotiquement stable et une fonction de Liapounov V associée, vérifiant

$$V(x) > 0, x \neq 0; V(0) = 0$$

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ lorsque } \|x\| \rightarrow \infty$$

et

$$\nabla V(x)f(x, 0) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

est connue.

(H_2) Il existe une matrice $K(p, m)$ et une matrice $P(m, m)$ symétrique définie positive tel que

$$P(A + BK) + {}^t(A + BK)P = -Q < 0 \quad (2.7)$$

et

$$\text{Ker } {}^tBP \subset \text{Ker } C \quad (2.8)$$

Sous ces hypothèses on a

Théorème 12 *Supposons que (H_1) et (H_2) soient réalisées, alors il existe une fonction régulière $v(x, y)$ tel que la commande*

$$u(x, y) = Ky + v(x, y)$$

rende le point d'équilibre $(x, y) = (0, 0)$ du système (2.6) globalement asymptotiquement stable.

Démonstration : On prend la commande u sous la forme

$$u = Ky + v$$

où v est un nouveau contrôle, et, tenant compte de (H_1) et de (2.7), on considère la fonction de Liapounov

$$W(x, y) = V(x) + {}^t_yPy$$

La dérivée de W le long des trajectoires du système bouclé est donnée par

$$\dot{W}(x, y) = \nabla V(x)[f(x, 0) + \varphi(x, y)Cy] - ({}^t_yQy - 2{}^t_yPBv)$$

Notons

$$a(x, y) = \nabla V(x)f(x, 0) - {}^t y Q y + \nabla V(x)\varphi(x, y)C y$$

et

$$b(y) = 2 {}^t y P B$$

Suivant (2.8), on a pour tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$${}^t B P y = 0 \Rightarrow C y = 0$$

Il s'ensuit, d'après (H_1) et (H_2) que

$$b(y) = 0 \Rightarrow a(x, y) < 0$$

ce qui équivaut à dire que W est une fonction de Liapounov contrôlée pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y)C y \\ \dot{y} = (A + B K)y + B v \end{cases} \quad (2.9)$$

Posons alors

$$\begin{aligned} b_i(y) &= 2 {}^t y P B_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, p \\ b(y) &= (b_1(y), \dots, b_p(y)) \end{aligned}$$

et

$$\beta(y) = \|b(y)\|^2$$

D'après [44], il vient alors que le feedback de classe C^∞ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, défini par

$$v(x, y) = {}^t(v_1(x, y), \dots, v_p(x, y))$$

où

$$v_i(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0) \\ \sigma_i(x, y) & \end{cases}$$

et

$$\sigma_i(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = 0 \text{ et } a < 0 \\ -b_i \frac{a + \sqrt{a^2 + \beta^4}}{\beta} & \text{sinon.} \end{cases}$$

stabilise globalement le système (2.9), ce qui achève la démonstration.

Terminons ce paragraphe en donnant des conditions sur le sous-système linéaire

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu \\ \tilde{y} = Cy \end{cases} \quad (2.10)$$

induisant l'hypothèse (H_2) .

Proposition 1 *Si le système linéaire (2.10) est stabilisable, ses zéros dynamiques sont asymptotiquement stables et si la matrice CB est de rang plein, alors il existe des matrices K et P qui vérifient (H_2) .*

Démonstration C étant de rang maximum, il existe un changement de base dans $\mathbb{R}^m$ permettant d'écrire (2.10) sous la forme ([40]) :

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = A_0 y_0 + A_1 y_1 \\ \dot{y}_1 = D_0 y_0 + D_1 y_1 + CBu \\ \tilde{y} = y_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

où $y_0 \in \mathbb{R}^{m-q}$ et $y_1 \in \mathbb{R}^q$.

Posons

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ D_0 & D_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ CB \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = (0, I).$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe K et P tel que

$$P(\tilde{A} + \tilde{B}K) + {}^t(\tilde{A} + \tilde{B}K)P = -Q < 0$$

et

$$Ker {}^t\tilde{B}P \subset Ker \tilde{C}$$

CB étant de rang maximum, soit

$$R = {}^t(CB)[(CB){}^t(CB)]^{-1}$$

la matrice pseudo-inverse à droite de CB , de sorte que

$$CB.R = I_q$$

Par ailleurs, les zéros dynamiques de (2.11) étant solutions de ([27]) :

$$\dot{y}_0 = A_0 y_0$$

il existe une matrice P_0 symétrique définie positive, telle que

$$P_0 A_0 + {}^t A_0 P_0 = -I$$

Pour

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0$$

et

$$K = (-R(D_0 + {}^t A_1 P_0), -R(D_1 + \frac{1}{2}I))$$

On a alors

$$P(\tilde{A} + \tilde{B}K) + {}^t(\tilde{A} + \tilde{B}K)P = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} < 0$$

et, pour tous $y_0 \in \mathbb{R}^{m-q}$ et $y_1 \in \mathbb{R}^q$,

$${}^t \tilde{B}P \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = {}^t(CB)y_1 \quad \text{et} \quad \tilde{C} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1$$

Comme CB est de rang maximum, ceci montre que

$$Ker {}^t \tilde{B}P \subset Ker \tilde{C}$$

et achève la démonstration.

2.3 Conditions suffisantes

Considérons le système non linéaire en cascade de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (2.12)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$ et f, g sont des champs de vecteurs de classes C^∞ tel que $f(0, 0) = 0$ et $g(0, 0) = 0$.

Remarquons que, grâce à la régularité de f , il est toujours possible de décomposer $f(x, y)$ sous la forme

$$f(x, y) = f(x, 0) + \varphi(x, y)y \quad (2.13)$$

Un choix possible de φ est donné par

$$\varphi(x, y) = \int_0^1 Df_y(x, \lambda y) d\lambda$$

En effet, si on pose

$$\phi(\lambda) = f(x, \lambda y), \quad \lambda \in [0, 1]$$

On a

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(\lambda) d\lambda = \left(\int_0^1 Df_y(x, \lambda y) d\lambda \right) y$$

et donc

$$f(x, y) = f(x, 0) + \left(\int_0^1 Df_y(x, \lambda y) d\lambda \right) y$$

Supposons, dans un premier temps, que le système (2.12) vérifie les hypothèses suivantes

(H_1) Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

est globalement exponentiellement stable.

(H_2) Il existe une fonction scalaire décroissante

$$\Theta(\|y\|) \geq 0$$

bornée pour tout y borné, tel que la fonction φ donnée en (2.13) vérifie

$$\|\varphi(x, y)\| \leq \Theta(\|y\|)\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m. \quad (2.14)$$

(H_3) Il existe un feedback $u = u(y)$ tel que $y = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé

$$\dot{y} = g(y, u(y))$$

Alors, on a

Théorème 13 *Si les conditions (H_1) , (H_2) , (H_3) sont réalisées, alors $(x, y) = (0, 0)$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y) y \\ \dot{y} = g(y, u(y)) \end{cases} \quad (2.15)$$

Démonstration : Suivant (H_1) , (H_3) et le théorème 11, il suffit de montrer que la composante $x(t)$ de n'importe quelle trajectoire $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, du système (2.15) est bornée.

D'après l'hypothèse (H_3) et le théorème 1, il existe, d'une part, une fonction $\beta(r, s)$ de classe $\mathcal{KL}$, tel que la composante $y(t)$ de chaque trajectoire du système (2.15) vérifie

$$\|y(t)\| \leq \beta(\|y(0)\|, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.16)$$

D'autre part ([24]), il existe, d'après (H_1) , une fonction de Liapounov

$$V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0, \quad \text{tel que } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

et des constantes positives $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$

$$\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \alpha_2 \|x\|^2, \quad (2.17)$$

$$\|\nabla V(x)\| \leq \alpha_3 \|x\|, \quad (2.18)$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x, 0) \leq -\alpha_0 V(x). \quad (2.19)$$

La dérivée de V le long des trajectoires de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y(t)) y(t)$$

est alors donnée par

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x) f(x, 0) + \nabla V(x) \varphi(x, y(t)) y(t).$$

Tenant compte de (2.14), (2.16), (2.17), (2.18) et (2.19), on en déduit que

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq \left(-\alpha_0 + \frac{\alpha_3 \Theta(\beta(\|y(0)\|, t))}{\alpha_1} \beta(\|y(0)\|, t) \right) V \\ &\leq (-\alpha_0 + \mu \beta(\|y(0)\|, t)) V\end{aligned}$$

où

$$\mu = \frac{\alpha_3 \Theta(\beta(\|y(0)\|, 0))}{\alpha_1} > 0$$

Comme, $\beta \in \mathcal{KL}$, alors $\beta(\|y(0)\|, t)$ décroît vers zéro lorsque t croît. Il en résulte que

$$\exists T > 0, \forall t \geq T, \beta(\|y(0)\|, t) < \frac{\alpha_0}{2\mu}$$

Il s'ensuit que

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\frac{\alpha_0}{2} V(x(t)), \quad \forall t \geq T$$

et donc

$$V(x(t)) \leq k e^{-\frac{\alpha_0}{2} t}, \quad \forall t \geq T \quad (2.20)$$

où

$$k = V(x(T)) e^{\frac{\alpha_0}{2} T}$$

Finalement, $[0, T]$ étant un compact, l'inégalité (2.20) prouve que $x(t)$ est bornée pour tout $t \geq 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Exemple 1 : Considérons le système en cascade suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y)y \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (2.21)$$

où le sous-système $\dot{y} = g(y, u)$ de (2.21) vérifie l'hypothèse (H_3) , et

$$f(x, 0) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + \frac{1}{2} \sin x_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \sin y_1 & 0 \\ x_2 \cdot \sin y_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Dans ce cas, on vérifie que $\varphi(x, y)$ satisfait (2.14), et en utilisant la fonction de Liapounov $\tilde{V}(x) = \|x\|^2$, on montre que $x = 0$ est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable pour l'équation $\dot{x} = f(x, 0)$. Ainsi, les conditions (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées. On en déduit, par application du théorème 13, que $u(y)$ stabilise le système en cascade (2.21).

Notons que, si on suppose que le système

$$\dot{y} = g(y, u(y))$$

est globalement exponentiellement stable, alors l'estimation (2.16) est de la forme

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-a_1 t} \|y(0)\|, \quad \forall t \geq 0$$

où k_1, a_1 sont des constantes positives, et donc le système (2.15) est globalement exponentiellement stable.

On remplace à présent les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) respectivement par

(H'_1) Le point d'équilibre $x = 0$ de

$$\dot{x} = f(x, 0)$$

est globalement asymptotiquement stable, et il existe une fonction de Liapounov $V(x) > 0, x \neq 0, V(0) = 0$, tel que

$$\nabla V(x) f(x, 0) < 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (2.23)$$

et

$$\|\nabla V(x)\| \leq \alpha(1 + V(x)), \quad \text{avec } \alpha > 0. \quad (2.24)$$

(H'_2) Il existe une fonction scalaire décroissante

$$\Theta(\|y\|) \geq 0$$

bornée pour tout y borné, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et y dans $\mathbb{R}^m$

$$\|\varphi(x, y)\| \leq \Theta(\|y\|) \quad (2.25)$$

(H'_3) Il existe un feedback $u = u(y)$, qui rend le point d'équilibre du système

$$\dot{y} = g(y, u(y))$$

globalement exponentiellement stable.

On a alors, le théorème suivant

Théorème 14 *Sous les hypothèses (H'_1) , (H'_2) et (H'_3) , le système*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y) y \\ \dot{y} = g(y, u(y)) \end{cases} \quad (2.26)$$

est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration De même que dans le théorème précédent, montrons que la composante $x(t)$ de toute trajectoire $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ du système (2.26) est bornée. D'une part, en vertu de (H'_3) , on a une estimation de la forme

$$\|y(t)\| \leq k_1 e^{-a_1 t} \|y(0)\|, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.27)$$

où k_1 , a_1 sont des constantes positives. D'autre part, la dérivée de la fonction de Liapounov donnée dans (H'_1) le long des trajectoires de l'équation

$$\dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y(t)) y(t)$$

est donnée par

$$\dot{V}(x(t)) = \nabla V(x) f(x, 0) + \nabla V(x) \varphi(x, y(t)) y(t)$$

Il s'ensuit que

$$\dot{V}(x(t)) \leq \nabla V(x) f(x, 0) + \|\nabla V(x)\| \|\varphi(x, y(t))\| \|y(t)\|$$

Tenant compte de (2.23), (2.24), (2.25) et (2.27), on en déduit que

$$\dot{V}(x) \leq \nu e^{-a_1 t} (1 + V(x)) \quad (2.28)$$

où

$$\nu = \alpha k_1 \Theta(\|y(0)\|)$$

Il en résulte que, $\text{Log}(1 + V(x))$ est borné par une constante positive, ce qui montre que $x(t)$ est bornée.

Remarquons que dans l'hypothèse (H'_1) , toute fonction de Liapounov V homogène elle vérifie (2.24). Comme un exemple, considérons le système dans le plan suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - 4x_1^2 + 4x_1^2x_2 + 4x_2^2 - 4x_1^3 - 4x_1^4 - 4x_1^5 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 + 4x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1^3 \end{cases}$$

qui admet comme point d'équilibre $(x_1, x_2) = (0, 0)$ G.A.S avec une fonction de Liapounov V homogène $V(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ dont la dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\dot{V} = -2(2x_2 - 2x_1)^2 - 2(x_1^2 + x_1^3 - x_2^2)^2.$$

Notons aussi que, si dans (H'_1) , on remplace (2.23) par une estimation de la forme

$$\nabla V(x)f(x, 0) < -\eta V(x), \quad \eta > 0 \quad (2.29)$$

alors sous les hypothèses (H'_1) , (H'_2) et (H_3) , l'inégalité (2.28) devient

$$\dot{V}(x) \leq -\eta V(x) + \nu \beta(\|y(0)\|, t)(1 + V(x))$$

où $\nu = \alpha\Theta(\beta(\|y(0)\|, 0))$, ce qui permet là aussi d'affirmer que le système (2.26) est G.A.S.

Exemple 2 : Considérons le système (2.21) de l'exemple 1

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, 0) + \varphi(x, y)y \\ \dot{y} = g(y, u) \end{cases} \quad (2.30)$$

où le sous-système

$$\dot{y} = g(y, u)$$

de (2.30) vérifie l'hypothèse (H_3) , et (2.22) est remplacée par

$$\dot{x} = f(x, 0) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 3x_2 + \epsilon(x)x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - \epsilon(x)x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \cdot \sin y_1 & 0 \\ \cos x_1 \cdot \sin y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{-14x_1^2 + 14x_1x_2 + 21x_2^2}{2x_1^2 + 3x_2^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, l'équation différentielle $\dot{x} = f(x, 0)$ est G.A.S. En effet, soit la fonction de Liapounov

$$V(x) = 4x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2(-2x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2) + (-2x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)^2$$

Un calcul simple montre que, la dérivée de V le long des trajectoires du système est

$$\dot{V}(x) = -2V(x)$$

De plus, V vérifie (2.24) et (2.29) et $\varphi(x, y)$ satisfait la condition (2.25). Il en résulte donc, que $u(y)$ donné dans (H_3) est un feedback stabilisant pour le système en cascade (2.30).

2.3.1 Stabilisation par retour dynamique de sortie

On considère le système avec une sortie

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(y, u) \\ \tilde{y} = h(y) \end{cases} \quad (2.31)$$

où f se décompose sous la forme (2.13), et vérifie (H_1) , (H_3) , (*resp.* (H'_1) , (H'_3)). Si les états $y(t)$ du sous-système

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y, u) \\ \tilde{y} = h(y) \end{cases} \quad (2.32)$$

ne sont pas connus, on est amené alors, à construire un observateur produisant une estimation $\hat{y}(t)$. Plus précisément, supposons que le système (2.32) satisfait un principe de séparation au sens du paragraphe (1.4) du chapitre 1, i.e, qu'il existe un feedback $u = u(y)$ stabilisant et un observateur estimant l'état $y(t)$ tel que le système bouclé par $u(\hat{y})$,

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y, u(\hat{y})) \\ \tilde{y} = h(y) \end{cases}$$

soit globalement asymptotiquement, (*resp.* exponentiellement), stable. Ceci conduit alors à une estimation de la forme (2.16). En vertu du théorème 13, (*resp.* 14), le système (2.31) est donc stabilisable par le feedback estimé $u(\hat{y})$.

3

Stabilisation au moyen d'un observateur

3.1 Introduction

Etant donné un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$, et $y \in \mathbb{R}^p$, un observateur pour (3.1) est un système dynamique de la forme

$$\dot{\hat{x}} = G(\hat{x}, y, u) \quad (3.2)$$

qui produit une estimation $\hat{x}(t)$ de l'état $x(t)$ du système (3.1), basée sur des observations passées à tout instant. Le problème de la conception d'un observateur est de sélectionner la fonction $G(., ., .)$, donnée dans (3.2), de façon à achever la performance désirée pour l'observateur. Dans ce chapitre, on considère le problème de la recherche d'un observateur et d'un feedback stabilisant $u(x)$, tel que le système (3.1) en boucle fermé avec le compensateur

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= G(\hat{x}, y, u(\hat{x})) \\ u &= u(\hat{x}) \end{aligned}$$

soit globalement exponentiellement, ou asymptotiquement, stable.

Ce type de stabilisation pose conjointement le problème de convergence de l'erreur d'estimation (écart entre l'état réel et l'état estimé), et celui de la stabilité asymptotique du système bouclé avec le feedback estimé.

Contrairement aux systèmes linéaires, pour lesquels une théorie complète existe, le problème de la stabilisation globale au moyen d'un observateur est loin d'être totalement résolu pour les systèmes non linéaires.

Toute fois, des resultats locaux ont été enoncés, notamment dans [17] où les auteurs utilisent les techniques de Liapounov pour stabiliser localement des systèmes non linéaires par un retour d'état estimé.

Dans cette partie nous nous intéressons à la stabilisation globale à travers un observateur des systèmes de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.3)$$

où A , B et C sont des matrices constantes respectivement $n \times n$, $n \times q$ et $p \times n$ et

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est un champ qui est lipschitzien tel que $f(0, 0) = 0$.

On va montrer que, sous des conditions sur la partie non linéaire, le système peut être stabilisable exponentiellement, ou asymptotiquement, au moyen d'un observateur.

3.2 Conception de l'observateur

Pour réaliser un observateur exponentiel de l'état du système (3.3), il faudrait obtenir une estimation de la forme (1.11). Pour cela, on va considérer un observateur introduit par Gauthier-Hammouri-Othman [23] pour les systèmes affines en contrôles et observables pour toute entrée.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u) - S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ 0 = -\theta S - A^T S - SA + C^T C \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\theta > 0$ et $S = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t$ avec $S_t \in S^+$ le cône des matrices définies positives symétriques sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant

$$\dot{S}_t = -\theta S_t - A^T S_t - S_t A^T + C^T C$$

Les propriétés de la matrice S_t données dans [22] pour les systèmes bilinéaires, subsistent dans notre cas. En effet, la solution S_t est donnée par

$$S_t = e^{-\theta t} e^{-tA^T} S_0 e^{-tA} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} e^{-(t-s)A^T} C^T C e^{-(t-s)A} ds$$

où $S_0 \in S^+$ et e^{tA} est la matrice fondamentale de l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$.

On peut vérifier que

$$S_t \geq \int_{t-\alpha}^t e^{-\theta(t-s)} e^{-(t-s)A^T} C^T C e^{-(t-s)A} ds \quad \text{pour tout } \alpha > 0 \text{ pour } t > \alpha.$$

et donc

$$S_t \geq \int_{-\alpha}^0 e^{\theta\tau} e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A} d\tau \geq e^{-\theta\alpha} \int_{-\alpha}^0 e^{\tau A^T} C^T C e^{\tau A} d\tau$$

Si la paire (C, A) est observable, alors on peut affirmer qu'il existe une constante positive δ tel que

$$S_t \geq \delta I, \quad \forall t \geq 0$$

Il s'ensuit donc, que si $S = \lim_{t \rightarrow \infty} S_t$, alors $S \geq \delta I$.

Par ailleurs, pour θ assez grand, S_t est bornée et $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = S \in S^+$ est solution de

$$0 = -\theta S - A^T S - S A + C^T C$$

En effet, on a

$$\|S_t\| \leq e^{-\theta t} \|e^{-tA^T} \cdot \|S_0\| \cdot \|e^{-tA}\| + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|e^{-(t-s)A^T} \cdot \|C^T C\| \cdot \|e^{-(t-s)A}\| ds$$

Comme, $\|e^{-tA^T}\|$ et $\|e^{-tA}\|$ sont bornées par e^{Kt} où $K = \|A\|$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|S_t\| &\leq e^{-\theta t} \|S_0\| e^{2Kt} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} \|C^T C\| e^{2K(t-s)} ds \\ &\leq e^{-(\theta-2K)t} \left(\|S_0\| + \|C^T C\| \int_0^t e^{(\theta-2K)s} ds \right) \\ &\leq \|S_0\| + \|C^T C\| \int_0^t e^{(\theta-2K)s} ds, \quad \text{pour } \theta \geq 2K. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\|S_t\| \leq \|S_0\| + \frac{\|C^T C\|}{\theta - 2K}, \quad \text{pour } \theta \geq 2K.$$

Enfin, en posant $\Delta S(t) = S_t - S$, on a

$$\frac{d}{dt} \Delta S(t) = -\theta \Delta S(t) - A^T \Delta S(t) - \Delta S(t) A$$

La solution de cette équation est donnée par

$$\Delta S(t) = e^{-t\theta} e^{-tA^T} S_0 e^{-tA} + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} e^{-(t-s)A^T} e^{-(t-s)A} ds$$

et, tenant compte de ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta S(t)\| &\leq e^{-t\theta} e^{2Kt} \|S_0\| + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} e^{2K(t-s)} ds \\ &\leq e^{-(\theta-2K)t} \|S_0\| + e^{-(\theta-2K)t} \int_0^t e^{(\theta-2K)s} ds \end{aligned}$$

On peut également vérifier que

$$\|\Delta S(t)\| \leq e^{-(\theta-2K)t} \|S_0\| - \frac{e^{-(\theta-2K)t}}{\theta-2K} + \frac{1}{\theta-2K}$$

Il en résulte que, pour θ assez grand,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta S(t)\| = 0$$

Comme, S_t tend vers S lorsque t tend vers l'infinie, et puisque S_t est définie positive et bornée alors S est définie positive.

Supposons maintenant que, le système (3.3) vérifie les hypothèses suivantes

(H_1) Il existe une constante positive k , tel que

$$\|f(x, u) - f(z, u)\| \leq k \|x - z\|, \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^q$$

(H_2) La paire (C, A) est observable.

Proposition 2 Si (H_1) et (H_2) sont réalisées, et s'il existe θ tel que $k < \frac{\theta}{2} \frac{\lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S)}$, où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de la matrice S , alors (3.4) est un observateur pour le système (3.3).

Démonstration : Notons $e = \hat{x} - x$. L'équation de l'erreur est donnée par

$$\dot{e} = (A - S^{-1}C^T C)e + (f(\hat{x}, u) - f(x, u))$$

On considère la fonction de Liapounov $e^T S e$. Sa dérivée le long des trajectoires de l'équation de l'erreur est

$$\frac{d}{dt} e^T S e = 2 e^T S \dot{e} = 2 e^T S A e - e^T C^T C e + 2 e^T S (f(\hat{x}, u) - f(x, u))$$

D'autre part, comme la matrice S satisfait l'équation stationnaire donnée dans (3.4), on vérifie que

$$-\theta e^T S e = 2e^T S A e - e^T C^T C e$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt} e^T S e = -\theta e^T S e - (C e)^2 + 2e^T S (f(\hat{x}, u) - f(x, u))$$

d'où

$$\frac{d}{dt} e^T S e \leq -\theta e^T S e + 2\|e\| \cdot \|S\| \cdot \|f(\hat{x}, u) - f(x, u)\|$$

Par ailleurs, $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ vérifient

$$\lambda_{\min}(S) \|e\|^2 \leq e^T S e \text{ et } \|S\| \leq \lambda_{\max}(S),$$

Ainsi, tenant compte de (H_1) , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^T S e &\leq (-\theta \lambda_{\min}(S) + 2k \lambda_{\max}(S)) \|e\|^2 \\ &\leq -(\theta \lambda_{\min}(S) - 2k \lambda_{\max}(S)) \|e\|^2 \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe θ vérifiant $k < \frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)}$. Posons $l = \theta \lambda_{\min}(S) - 2k \lambda_{\max}(S)$, il est clair alors que

$$\frac{d}{dt} e^T S e \leq -l \|e\|^2, \quad l > 0 \quad (3.5)$$

Vu que $e^T S e$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, (3.4) nous donne une estimation de la forme (1.3). Ceci prouve que $e = 0$ est globalement exponentiellement stable pour l'équation de l'erreur.

On va présenter maintenant un exemple en dimension deux pour illustrer l'application de la proposition 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ où } 0 \leq b \leq c \text{ avec } c > 0$$

et

$$C = (1, 0)$$

Dans ce cas, la matrice S est donnée par

$$S = \begin{pmatrix} \frac{-\theta^2 + 2bc}{\theta(-\theta^2 + 4bc)} & \frac{c}{-\theta^2 + 4bc} \\ \frac{c}{-\theta^2 + 4bc} & \frac{-2c^2}{\theta(-\theta^2 + 4bc)} \end{pmatrix}$$

et on montre que

$$\frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)} = \frac{\theta}{2} \frac{\alpha(\theta, b, c) - \beta(\theta, b, c)^{1/2}}{\alpha(\theta, b, c) + \beta(\theta, b, c)^{1/2}}$$

où

$$\alpha(\theta, b, c) = \theta^2 + 2c^2 - 2bc$$

et

$$\beta(\theta, b, c) = \theta^4 + 4c^4 - 4bc\theta^2 + 8bc^3 + 4c^2b^2$$

Il est évident que, pour obtenir une classe de systèmes aussi large que possible, il faudrait déterminer le maximum sur θ de la fonction

$$\theta \mapsto \frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)}$$

Pour $\theta_0 \simeq 2.6 c$, la paire (C, A) est observable et la matrice S est définie positive. Dans ces conditions, lorsque $0 < b = c$, alors

$$\max_{\theta > 0} \left(\frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)} \right) = \frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)} \Big|_{\theta=\theta_0} \simeq 0.09 c$$

Notons $\mu_0 \simeq 2.6$ et $\eta = \frac{b}{c}$ alors, $\theta_0 = \mu_0 c$ et $0 \leq \eta \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{\theta_0 \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{\alpha(\mu_0, \eta, 1) - \gamma(\mu_0, \eta)^{1/2}}{\alpha(\mu_0, \eta, 1) + \gamma(\mu_0, \eta)^{1/2}}$$

où

$$\gamma(\mu_0, \eta) = \mu_0^4 + 4 - 4\eta\mu_0^2 + 8\eta + 4\eta^2$$

Cependant, on peut vérifier que la fonction

$$\eta \mapsto \frac{\theta_0 \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)}(\eta)$$

est décroissante pour $\eta \in [0, 1]$. Si on revient maintenant aux notations initiales, lorsque

$$0 \leq b \leq c \text{ avec } c > 0$$

il suffit que la constante de Lipschitz k donnée dans l'hypothèse (H_1) , telle que $k < 0.09c$, pour pouvoir construire un observateur de la forme (3.4) pour cette classe de systèmes dans le plan.

3.3 Stabilisation à travers l'observateur

En vue d'étudier la stabilisation du système (3.3) en utilisant l'observateur (3.4), on suppose l'existence d'un feedback stabilisant $u = u(x)$. L'observateur (3.4) fournit alors un feedback estimé $u(\hat{x})$, puisque l'état $\hat{x}(t)$ converge exponentiellement vers l'état $x(t)$. On envisage deux situations de stabilisation

3.3.1 Stabilisation exponentielle

Supposons que le système (3.3) vérifie (H_1) , (H_2) et l'hypothèse (H_3) suivante

(H_3) Il existe un feedback $u(x)$ qui rend le point d'équilibre du système (3.3) globalement exponentiellement stable.

Le théorème suivant montre que le système (3.3) opérant en boucle fermée avec le feedback $u(\hat{x})$ donné dans (H_3) et estimé par l'observateur (3.4), est globalement exponentiellement stable.

Théorème 15 Si (H_1) , (H_2) , (H_3) sont réalisées, et s'il existe θ tel que $k < \frac{\theta \lambda_{\min}(S)}{2 \lambda_{\max}(S)}$, alors le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{x}) + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - S^{-1}C^T C e \\ \dot{e} = (A - S^{-1}C^T C)e + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) \end{cases} \quad (3.6)$$

où $e = \hat{x} - x$, est globalement exponentiellement stable.

Démonstration : En vertu de (H_3) , il existe une fonction de Liapounov

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0, V(0) = 0$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

et des constantes positives a_1, a_2, a_3, a_4 , tel que $V(x)$ vérifie pour tout x dans $\mathbb{R}^n$

$$a_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq a_2 \|x\|^2 \quad (3.7)$$

$$\|\nabla V(x)\| \leq a_3 \|x\| \quad (3.8)$$

et

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) (Ax + Bu(x) + f(x, u(x))) \leq -a_4 V(x) \quad (3.9)$$

Ces propriétés proviennent de la stabilité exponentielle du système.

En tenant compte de (3.5), on peut considérer une fonction de Liapounov de la forme

$$W(\hat{x}, e) = \eta V(\hat{x}) + e^T S e \text{ avec } \eta > 0$$

et choisir η de façon que, la dérivée de $W(\hat{x}, e)$ le long des trajectoires du système (3.6) soit définie négative sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On a

$$\dot{W}(\hat{x}, e) = \eta \nabla V(\hat{x}) (A\hat{x} + Bu(\hat{x}) + f(\hat{x}, u(\hat{x}))) - \eta \nabla V(\hat{x}) (S^{-1}C^T C e) + \frac{d}{dt} e^T S e$$

Compte tenu de (3.5) et (3.9), on en déduit que

$$\dot{W}(\hat{x}, e) \leq -\eta a_4 V(\hat{x}) + \eta \|\nabla V(\hat{x})\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \|C^T C\| \cdot \|e\| - l \|e\|^2$$

ainsi, en utilisant (3.7) et (3.8), on aura

$$\dot{W}(\hat{x}, e) \leq -\eta a_4 a_1 \|\hat{x}\|^2 + \eta \mu a_3 \|\hat{x}\| \|e\| - l \|e\|^2$$

où $\mu = \|S^{-1}\| \cdot \|C^T C\|$.

Il s'ensuit que, pour

$$0 < \eta < \frac{4l a_4 a_1}{\mu^2 a_3^2}$$

$\dot{W}(\hat{x}, e)$ est définie négative sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. L'origine est donc un point d'équilibre globalement exponentiellement stable pour le système bouclé (3.6).

Exemple 1 : Le système plan suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2 + \frac{1}{3}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \dot{x}_2 = x_1 - u + \frac{1}{3}\sin x_1 \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

est de la forme (3.3) avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{1}{3}\sin x_1 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0)$$

On vérifie d'une part que f est Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $k < 0.54$, et que les conditions de la proposition 2 sont vérifiées (voir l'exemple du paragraphe précédent).

D'autre part, la loi de commande définie par

$$u(x_1, x_2) = 8x_1 + x_2$$

stabilise globalement et exponentiellement le système (3.10) en $0 \in \mathbb{R}^2$. En effet, soit $V(x_1, x_2)$ la fonction de Liapounov donnée par

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

Un calcul simple montre que la dérivée $\dot{V}(x_1, x_2)$ le long les trajectoires du système en boucle fermé par le feedback $u(x_1, x_2)$, vérifie

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\frac{11}{2}x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2^2$$

et donc $\dot{V}(x_1, x_2)$ est définie négative sur $\mathbb{R}^2$. Par application du théorème 15, on peut donc stabiliser le système (3.10) à travers un observateur de la forme (3.4).

3.3.2 Stabilisation asymptotique

Supposons maintenant que le système (3.3) vérifie les conditions (H_1) , (H_2) et l'hypothèse (H'_3) suivante

(H'_3) Il existe un feedback $u(x)$ et une fonction de Liapounov $V(x) > 0$, $x \neq 0$, $V(0) = 0$, tel que

$$\nabla V(x)(Ax + Bu(x) + f(x, u(x))) < 0, \forall x \neq 0$$

et

$$\|\nabla V(x)\| \leq \alpha(1 + V(x)), \quad \alpha > 0. \quad (3.11)$$

Théorème 16 Si (H_1) , (H_2) , (H'_3) sont réalisées, et s'il existe θ tel que $k < \frac{\theta}{2} \frac{\lambda_{\min}(S)}{\lambda_{\max}(S)}$, alors le système

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{x}) + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - S^{-1}C^TCe \\ \dot{e} = (A - S^{-1}C^TC)e + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) \end{cases}$$

est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration : Elle découle directement du théorème 14 et du lemme suivant, qui peut être considéré comme une extension du théorème 11.

Lemme 1 *On considère le système composé suivant*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, e) \\ \dot{e} = g(\hat{x}, e) \end{cases} \quad (3.12)$$

Supposons que l'équation

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, 0)$$

est globalement asymptotiquement stable, et que le sous-système

$$\dot{e} = g(\hat{x}, e)$$

est globalement asymptotiquement stable uniformément en $\hat{x}$. Si de plus toutes les orbites de (3.11) sont bornées pour $t > 0$, alors le système (3.11) est G.A.S.

Démonstration : Il est clair que le système (3.12) est localement asymptotiquement stable [48]. Il suffit donc, de montrer que les orbites de (3.12) tendent toutes vers l'origine lorsque t tend vers l'infini. Supposons que ceci n'est pas vrai pour une orbite $z(t) = (\hat{x}(t), e(t))$. Il existe alors un réel $\varepsilon > 0$ et une suite $t_n \rightarrow +\infty$, tel que

$$z(t_n) \notin B(0, \varepsilon) \quad \forall n \quad (3.13)$$

où $B(0, \varepsilon)$ désigne la boule centrée à l'origine et de rayon ε . $z(t)$ étant bornée, la suite $z(t_n)$ admet un point d'accumulation $z^* = (\hat{x}^*, e^*)$. Comme l'origine est stable, il existe $\delta > 0$, tel que n'importe quelle orbite démarant de $B(0, \delta)$ reste dans $B(0, \varepsilon)$. Par ailleurs, le sous-système

$$\dot{e} = g(\hat{x}, e)$$

étant globalement asymptotiquement stable uniformément en $\hat{x}$, on a

- d'une part, la composante $e(t)$ de $z(t)$ vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$$

ce qui entraîne que $e^* = 0$.

- d'autre part, il existe $T > 0$ tel que

$$z(T, z^*) \in B(0, \delta)$$

où $z(t, z^*)$, $t \geq 0$, désigne la trajectoire issue de z^* .

Le champ étant continu, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que

$$z(t_{n_0} + T) \in B(0, \delta)$$

donc, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n \geq t_{n_0} + T$ on a $z(t_n) \in B(0, \varepsilon)$ et ceci est en contradiction avec (3.13).

Remarque : Supposons que, en plus des hypothèses (H_1) et (H_2) , il existe un feedback stabilisant $u(x)$ homogène de degré un, tel que la partie non linéaire $f(x, u(x))$ du système bouclé soit homogène de degré un. Il s'ensuit que le champ $\dot{x} = Ax + Bu(x) + f(x, u(x))$ est homogène de degré un, et, en vertu du théorème 5, il existe une fonction de Liapounov stricte homogène $V(x)$ ainsi que ses dérivées partielles. La condition (3.11) se trouve alors satisfaite et par suite l'hypothèse (H'_3) est vérifiée.

3.4 Remarques et généralisation

Considérons un système mono-entrée – mono-sortie de la forme (3.3)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.14)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ et A, B, C sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (0, \dots, 0, 1)^T \text{ et } C = (1, 0, \dots, 0)$$

Supposons que la condition suivante soit vérifiée.

(H'_1) Il existe une constante positive k tel que pour $i = 1, 2, \dots, n$, on ait

$$|f_i(x, u) - f_i(z, u)| \leq k \|\pi_i(x - z)\|, \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathbb{R}$$

où π_i est la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^i$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Notons que, sous l'hypothèse (H'_1) la partie non linéaire $f(x, u)$ du système (3.14) est de forme triangulaire : chaque composante f_i de f dépend que de $x_1, \dots, x_i$ et de u .

Dans [47], on montre que :

- D'une part, le système (3.14) est G.E.S par un feedback linéaire. la démonstration repose sur l'existence d'une fonction de Liapounov quadratique $V(x)$ et d'un feedback linéaire $u(x)$ tel que la dérivée de V le long des trajectoires du système bouclé vérifie

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) (Ax + Bu(x) + f(x, u(x))) \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0. \quad (3.15)$$

- D'autre part, si de plus f est continuellement différentiable et les dérivées partielles sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, le système (3.14) est stabilisable à travers un observateur.

On montre ici que, sous l'hypothèse (H'_1) , on peut construire un observateur du type (3.4) sans supposer comme dans [47], que la fonction f est continuellement différentiable, et que le système (3.12) est globalement exponentiellement stabilisable par un feedback linéaire estimé par cet observateur.

Soit le système défini par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u) - S^{-1}C^T(C\hat{x} - y) \\ 0 = -\theta S - A^T S - SA + C^T C \end{cases} \quad (3.16)$$

Proposition 3 *Si (H'_1) est vérifiée, alors pour θ assez grand, le système (3.16) est un observateur exponentiel pour (3.14).*

Démonstration : Par observabilité de la paire (C, A) , il existe une constante positive δ tel que $S \geq \delta I$. Par ailleurs, comme dans la démonstration de la proposition 2, en posant $e = \hat{x} - x$, on a

$$\frac{d}{dt} e^T S e = -\theta e^T S e - (\tilde{C}e)^2 + 2e^T S (f(\hat{x}, u) - f(x, u))$$

Notons $\|x\|_S = \langle x, Sx \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On peut alors vérifier que

$$\frac{d}{dt} e^T S e = 2\|e\|_S \frac{d}{dt} \|e\|_S \leq -\theta \|e\|_S^2 + 2e^T S (f(\hat{x}, u) - f(x, u))$$

et, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\frac{d}{dt} \|e\|_S \leq -\frac{\theta}{2} \|e\|_S + \|f(\hat{x}, u) - f(x, u)\|_S$$

soit,

$$\frac{d}{dt} \|e\|_S \leq -\frac{\theta}{2} \|e\|_S + \left(\sum_{i,j} S_{i,j} (f_i(\hat{x}, u) - f_i(x, u)) \cdot (f_j(\hat{x}, u) - f_j(x, u)) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tenant compte de (H'_1) , l'inégalité précédente entraîne que

$$\frac{d}{dt} \|e\|_S \leq -\frac{\theta}{2} \|e\|_S + k^2 \left(\sum_{i,j} |S_{i,j}| \|\pi_i e\| \cdot \|\pi_j e\| \right)^{\frac{1}{2}}$$

En utilisant une argumentation similaire à celle développée dans [23] (théorème 3), on peut vérifier qu'il existe une constante positive c , indépendante de θ , tel que

$$\left(\sum_{i,j} |S_{i,j}| \|\pi_i e\| \cdot \|\pi_j e\| \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|e\|_S$$

Il s'ensuit que, pour θ suffisamment grand,

$$\frac{d}{dt}\|e\|_S \leq -\beta\|e\|_S, \quad \beta > 0$$

Comme $S \geq \delta I$, on obtient une estimation de la forme

$$\|e(t)\| \leq \tilde{\lambda}_1 e^{-\tilde{\lambda}_2 t}$$

où $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$ sont des constantes positive. Ceci prouve que le système (3.16) est un observateur exponentiel pour le système (3.14) et achève la démonstration.

L'hypothèse (H'_1) étant vérifiée, soit à présent un feedback linéaire $u(x)$ stabilisant globalement et exponentiellement le système (3.14) et une fonction de Liapounov $V(x)$ vérifiant (3.15). On considère alors le système (3.14) contrôlé par le feedback $u = u(\hat{x})$ et estimé par l'observateur (3.16). Par une argumentation similaire à celle utilisée pour établir le théorème 15, on obtient le théorème suivant :

Théorème 17 *Si l'hypothèse (H'_1) est réalisée alors, pour θ assez grand, le système*

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(\hat{x}) + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - S^{-1}C^T C e \\ \dot{e} = (A - S^{-1}C^T C)e + f(\hat{x}, u(\hat{x})) - f(\hat{x} - e, u(\hat{x})) \end{cases} \quad (3.17)$$

est globalement exponentiellement stable.

Exemple 2 : Le système en dimension deux donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{6} \sin |x_1| e^{-u^2} \\ \dot{x}_2 = u + \frac{1}{6} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

est de la forme (3.14) et satisfait (H'_1) . De plus, le feedback linéaire

$$u(x_1, x_2) = -2x_1 - 7x_2$$

stabilise globalement et exponentiellement le système (3.18), en effet, on peut vérifier que la dérivée de la fonction de Liapounov V donnée par

$$V(x_1, x_2) = 8x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$$

le long des trajectoires du système en boucle fermé vérifie

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -\frac{1}{3}(x_1^2 + 34x_2^2)$$

Ainsi, en vertu du théorème 17, on peut stabiliser (3.18) au moyen d'un observateur de la forme (3.16). Notons que, $f(x, u) = \frac{1}{6}(\sin |x_1| e^{-u^2}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos u)^T$ n'est pas différentiable en $x = (0, 0)$, ce qui montre que le système (3.18) ne vérifie pas les conditions de [47]. Le théorème 17 apparaît donc comme une généralisation du résultat de [47].

Remarques :

1. Les théorèmes 16 et 17 permettent de considérer le problème de la stabilisation par feedback estimé pour des systèmes affines en contrôles, uniformément observables pour toute entrée et globalement transformables en la forme canonique (3.14) avec f triangulaire (voir [23]).
2. Notons que, l'hypothèse (H'_1) utilisée dans le cas mono-entrée – mono-sortie est plus forte que l'hypothèse (H_1) utilisée dans le cas multi-entrée – multi-sortie.

4

Stabilisabilité des champs de vecteurs polynomiaux homogènes

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la stabilisation des systèmes non linéaires dans $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x) + uBx \\ x \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R}, \quad B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteurs polynomial homogène de degré impair (i.e les deux composantes du champ sont polynomiales homogènes de même degré $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$) et B est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas linéaire, il est bien connu que l'on peut trouver une commande stabilisatrice si et seulement si les modes instables du système sont contrôlables, mais en revanche, il n'existe pas de méthodes générales pour les systèmes non linéaires.

Dans ce dernier cas, s'il n'est pas possible, en général, d'avoir des résultats globaux, on obtient classiquement des conditions suffisantes de stabilisation locale par un feedback régulier en considérant le système linéarisé autour d'un point d'équilibre ([1], [4]).

Les systèmes non linéaires affines en les contrôles de la forme

$$\dot{x} = f(x) + ug(x)$$

ont été étudiés dans le cas où le champ contrôlé g vérifie $g(0) \neq 0$, ([6], [32], [16]).

Les systèmes polynomiaux homogènes sont des systèmes du type (4.1) pour lesquels les champs soumis au contrôle s'annulent à l'origine ($g(0) = 0$) si bien que le système

linéarisé, calculé au voisinage de l'origine, devient indépendant du contrôle. Ces systèmes n'ont jamais été étudiés systématiquement et il n'existe à leur sujet que peu de résultats de stabilisation.

Le but est de proposer des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un feedback stabilisant pour de tels systèmes et dans le cas où la stabilisation est possible.

4.2 Stabilisabilité

Dans ce travail on va donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces systèmes soient globalement asymptotiquement stabilisables (G.A.S) par des feedbacks presque réguliers (i.e. $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$) et de construire explicitement les feedbacks stabilisants. On montre ainsi que le système (4.1) est (G.A.S) si et seulement si il est asymptotiquement stabilisable en boucle ouverte.

Dans un premier lieu, on va étudier la stabilisabilité de ces systèmes dans le cas où $k = 1$.

4.2.1 Cas où P est homogène de degré 3

Considérons le système (4.1) où $x = (x_1, x_2)$,

$$P(x) = (P_1(x), P_2(x))^T,$$

$$B = (b_1(x), b_2(x))^T$$

avec

$$b_1(x_1, x_2) = b_{11}x_1 + b_{12}x_2$$

et

$$b_2(x_1, x_2) = b_{21}x_1 + b_{22}x_2.$$

Notre méthode est de pouvoir chercher une matrice constante A (2×2),

$$Ax = (a_1(x), a_2(x))^T$$

et un feedback $u = u(x)$ homogène de degré deux, tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) & b_1(x_1, x_2) \\ P_2(x_1, x_2) & b_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = Q(x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2) \\ a_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où Q_1 est une forme quadratique définie positive. On veut, par changement de feedback

$$u = u(x_1, x_2) + \tilde{u}$$

mettre le système (4.1) sous la forme

$$\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}Bx \quad (4.3)$$

parceque, on a le resultat suivant

Théorème 18 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le système $\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}Bx$ est globalement asymptotiquement stabilisable.*
- (2) *Le système bilinéaire plan $\dot{x} = Ax + uBx$ est globalement asymptotiquement stabilisable.*

Démonstration : (1) $\Rightarrow$ (2) : D'après [29], si le système

$$\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}Bx$$

est globalement asymptotiquement stabilisable alors, il existe un feedback quadratique $\tilde{u}(x)$ tel que le système suivant

$$\dot{x} = Q(x)Ax + \tilde{u}(x)Bx \quad (4.4)$$

est globalement asymptotiquement stable. En vertu du théorème 1, il existe une fonction de Liapounov stricte V pour le système (4.4). Soit

$$u(x) = \frac{\tilde{u}(x)}{Q(x)},$$

$\tilde{u}(x)$ et $Q(x)$ étant deux formes quadratiques. Il s'ensuit que le champ de vecteurs $Ax + u(x)Bx$ est continu sur R^2 , et donc V est aussi une fonction de Liapounov stricte pour le système $\dot{x} = Ax + u(x)Bx$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Réciproquement, si le système bilinéaire plan

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

est globalement asymptotiquement stabilisable, alors il existe un feedback $u = u(x)$ qui rend le système

$$\dot{x} = Ax + u(x)Bx$$

globalement asymptotiquement stable. Comme $Q(x)$ est une forme quadratique définie positive alors, il est facile de voir que le système

$$\dot{x} = Q(x) (Ax + u(x)Bx)$$

est G.A.S, le théorème est ainsi démontré.

Cependant, la stabilisabilité du système (4.1) peut être déduite grâce à la classification des systèmes bilinéaires plan, donnée par Chabour, Sallet et Vivalda [13], où pour les systèmes bilinéaires plan stabilisables, des feedbacks $C^\infty \setminus \{0\}$ homogènes de degré zéro sont donnés.

Maintenant, pour transformer (4.1) en (4.3), on doit considérer la fonction

$$F(x) = \det(P(x), Bx)$$

Il se trouve que, si $F(x)$ admet dans sa décomposition, un facteur quadratique définie positive $Q(x)$, alors en utilisant des changements de feedbacks et de coordonnées, la transformation est possible.

En effet, remarquons tout d'abord que

$$F(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ P_2(x_1, x_2) & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$= (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)P_1(x_1, x_2) - (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)P_2(x_1, x_2) \quad (4.5)$$

est un polynôme homogène de degré 4. Donc, F est le produit de deux formes quadratiques définies, où une forme quadratique définie et deux formes linéaires, où bien F est le produit de quatre formes linéaire. En utilisant les formes canoniques obtenus par [15], on peut mettre F sous l'une des trois décompositions possibles. Soit la fonction

$$\psi(x_1, x_2) = a_0x_1^4 + 4a_1x_1^3x_2 + 6a_2x_1^2x_2^2 + 4a_3x_1x_2^3 + a_4x_2^4 \quad (4.6)$$

Notons

$$i_\psi = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

$$j_\psi = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 - a_2^3$$

$$D_\psi = i_\psi^2 - 27j_\psi^2$$

et

$$H_\psi = \frac{1}{3^2 4^2} \begin{vmatrix} \psi_{xx} & \psi_{xy} \\ \psi_{xy} & \psi_{yy} \end{vmatrix}$$

où ψ_{xx} , ψ_{xy} et ψ_{yy} désignent les dérivées partielles de second ordre de la fonction ψ .

En vertu du théorème (2.6) de Cima et Llibre [15], pour une telle fonction de la forme (4.6), il existe $\sigma \in GL(2, \mathbb{R})$ qui transforme ψ en une et une seule forme canonique suivantes :

$$I. \psi(x_1, x_2) = x_1^4 + 6\mu x_1^2 x_2^2 + x_2^4, \mu < -\frac{1}{3} \text{ avec } D_\psi > 0, H_\psi < 0 \text{ et } 12H_\psi^2 - i_\psi \psi^2 > 0.$$

$$II. \psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1^4 + 6\mu x_1^2 x_2^2 + x_2^4), |\alpha| = 1, \mu > -\frac{1}{3}, \mu \neq \frac{1}{3} \text{ avec } D_\psi > 0, \alpha\psi > 0 \text{ et } H_\psi > 0 \text{ ou } 12H_\psi^2 - i_\psi \psi^2 < 0.$$

$$III. \psi(x_1, x_2) = x_1^4 + 6\mu x_1^2 x_2^2 - x_2^4 \text{ avec } D_\psi < 0.$$

$$IV. \psi(x_1, x_2) = \alpha x_2^2(6x_1^2 + x_2^2), |\alpha| = 1 \text{ avec } D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0 \text{ et } 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi \psi > 0.$$

$$V. \psi(x_1, x_2) = \alpha x_2^2(6x_1^2 - x_2^2), |\alpha| = 1 \text{ avec } D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0 \text{ et } 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi \psi < 0.$$

$$VI. \psi(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2)^2, |\alpha| = 1 \text{ avec } D_\psi = 0, \alpha j_\psi > 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi \psi = 0 \text{ et } H_\psi > 0.$$

$$VII. \psi(x_1, x_2) = 6\alpha x_1^2 x_2^2, |\alpha| = 1 \text{ avec } D_\psi = 0, \alpha j_\psi < 0, 2i_\psi H_\psi - 3j_\psi \psi = 0 \text{ et } H_\psi < 0.$$

$$VIII. \psi(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2, \text{ avec } D_\psi = 0, j_\psi = 0 \text{ et } i_\psi = 0, H_\psi \neq 0.$$

$$IX. \psi(x_1, x_2) = \alpha x_1^4, |\alpha| = 1 \text{ avec } D_\psi = 0, j_\psi = 0, i_\psi = 0, H_\psi = 0 \text{ et } \alpha\psi > 0.$$

$$X. \psi(x_1, x_2) = 0.$$

a) Supposons que

$$F(x_1, x_2) = Q_1(x_1, x_2).Q_2(x_1, x_2)$$

où Q_1 , Q_2 sont deux formes quadratiques définies. Sans perte de généralité, on peut supposer que Q_1 est définie positive.

Proposition 4 *Il existe une matrice constante A et un changement de feedback*

$$u = u(x_1, x_2) + \tilde{u}$$

où $u(x_1, x_2)$ est homogène de degré deux, qui transforme le système (4.1) en (4.3).



Démonstration : Comme F est définie, alors d'après (4.2) on a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = Q_1(x_1, x_2) \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) & b_1(x_1, x_2) \\ P_2(x_1, x_2) & b_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2) \\ a_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = \frac{Q_1(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} \begin{pmatrix} b_2(x_1, x_2) & -b_1(x_1, x_2) \\ -P_2(x_1, x_2) & P_1(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2) \\ a_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Tenant compte de la forme de F , on aura

$$Q_2(x_1, x_2) = a_1(x_1, x_2)b_2(x_1, x_2) - a_2(x_1, x_2)b_1(x_1, x_2) \quad (4.7)$$

et

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{Q_2(x_1, x_2)} (-a_1(x_1, x_2)P_2(x_1, x_2) + a_2(x_1, x_2)P_1(x_1, x_2)) \quad (4.8)$$

Il est clair qu'on peut écrire (4.7) comme suit

$$x^T \begin{pmatrix} b_{21} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{12} \end{pmatrix} Ax = Q_2(x)$$

Etant donnée que $Q_2(x)$ est une forme quadratique définie, alors il existe une matrice définie $\tilde{Q}_2$, telque

$$Q_2(x) = x^T \tilde{Q}_2 x$$

Donc, puisque $\det B \neq 0$, parceque F est définie, il s'ensuit qu'un choix de A , qui est une solution de l'équation précédente, est

$$A = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} -b_{12} & b_{11} \\ -b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \tilde{Q}_2$$

D'autre part on peut vérifier que $u(x_1, x_2)$ donné dans (4.8) est homogène de degré deux.

b) Si $F(x_1, x_2) = Q_1(x_1, x_2)(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)(\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ et $Q_1(x_1, x_2) = \mu x_1^2 + \nu x_1 x_2 + \xi x_2^2$, telque $\nu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\xi > 0$, vérifiant $\nu^2 - 4\xi\mu > 0$.

Proposition 5 *Il existe un changement de feedbacks tel que, dans une base convenable, le système (4.1) peut être écrit comme (4.3).*

Démonstration : On distingue deux cas

cas 1 : $\det B \neq 0$.

Dans ce cas les deux vecteurs lignes b_1 et b_2 sont indépendants.

Notons

$$L_1(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2$$

et

$$L_2(x_1, x_2) = \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2$$

Il en résulte que,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)P_1(x_1, x_2) - (b_{11}x_1 + b_{12}x_2)P_2(x_1, x_2) \\ &= Q_1(x_1, x_2).L_1(x_1, x_2).L_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Comme $\det B \neq 0$, par changements de coordonnées, on peut supposer que $b_{11} \neq 0$. Considérons la division Euclidienne sur $\mathbb{R}[(x_1, x_2)]$ de P_1 par b_1 , et du produit $L_2.Q_1$ par b_1 . Alors, il existe des formes quadratiques q_1, q_2 et des constantes l_1, l_2 , telque

$$P_1(x_1, x_2) = q_1(x_1, x_2)b_1(x_1, x_2) + l_1x_2^3$$

et

$$L_2(x_1, x_2)Q_1(x_1, x_2) = q_2(x_1, x_2)b_1(x_1, x_2) + l_2x_2^3$$

Le terme x_2^3 apparait dans les décompositions précédentes, parceque b_{11} est supposé différent de zéro.

Si $l_1 \neq 0$, alors les deux polynomes P_1 et b_1 sont premiers entre eux et donc b_1 et F le sont aussi. Comme $L_2.Q_1$ divise F , il s'ensuit que $L_2.Q_1$ et b_1 sont premiers entre eux, et donc $l_2 \neq 0$.

Ainsi,

$$P_1 = \frac{l_1}{l_2}(L_2.Q_1 - q_2b_1) + q_1b_1$$

Considérons maintenant, le changement dans l'espace des contrôles suivant

$$u \mapsto \frac{l_1}{l_2}q_2(x_1, x_2) - q_1(x_1, x_2) + u$$

le système (4.1) devient alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{l_1}{l_2} L_2(x_1, x_2) \cdot Q_1(x_1, x_2) + u b_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u b_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (4.9)$$

où

$$\tilde{P}_2 = P_2 + \left(\frac{l_1}{l_2} q_2 - q_1\right) b_2$$

Comme F est invariant par changement de feedbacks, alors $L_2 \cdot Q_1$ divise $\tilde{P}_2$. On en déduit qu'il existe une constante k tel que

$$\tilde{P}_2(x_1, x_2) = k L_2(x_1, x_2) \cdot Q_1(x_1, x_2)$$

et donc, on obtient

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = Q_1(x_1, x_2) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{l_2} \alpha_2 & \frac{l_1}{l_2} \beta_2 \\ k \alpha_2 & k \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Si $l_1 = 0$, alors le système (4.9) peut s'écrire, après un changement de feedback de la forme

$$u = q_1(x_1, x_2) + \tilde{u}$$

sous la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = Q_1(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 \\ L_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \tilde{u} \begin{pmatrix} b_1(x_1, x_2) \\ b_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

cas 2 : $\det B = 0$.

Soit

$$P(x, t) = t_1 x_1^3 + t_2 x_1^2 x_2 + t_3 x_1 x_2^2 + t_4 x_2^3, \quad t_i \in \mathbb{R}.$$

Dans une base convenable, base de Jordan, la matrice B peut être mise sous l'une des deux formes suivantes

2.1) $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Posons

$$P_1(x_1, x_2) = P(x, s)$$

et

$$P_2(x_1, x_2) = P(x, r).$$

On peut vérifier que

$$F(x_1, x_2) = -\lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2)$$

Tenant compte de la forme de F , on peut choisir $\alpha_1 = -\lambda_1$ et $\beta_1 = 0$. Alors, par le changement de feedback suivant

$$u = -(s'_2 x_1^2 + s'_3 x_1 x_2 + s'_4 x_2^2) + \frac{s'_1 \nu}{\mu} x_1^2 + \frac{s'_1 \xi}{\mu} x_1 x_2 + \tilde{u}$$

on a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = Q_1(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & \frac{s_4}{\xi} \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \tilde{u} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2.2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dans cette base, on pose $P_1 = P(x, s')$ et $P_2 = P(x, r')$, par suite en utilisant la même idée que celle dans le cas précédent, le changement de feedback suivant

$$u = -(s'_2 x_1^2 + s'_3 x_1 x_2 + s'_4 x_2^2) + \frac{s'_1 \nu}{\mu} x_1^2 + \frac{s'_1 \xi}{\mu} x_1 x_2 + \tilde{u}$$

permet de transformer le système (4.1) en

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = Q_1(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{s'_1}{\mu} & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \tilde{u} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Maintenant si on suppose que $F(x)$ prend la forme d'un produit de quatre facteurs linéaires, il n'est pas possible de transformer le système (4.1) en la forme voulu. Parceque, si on avait une telle transformation, alors nécessairement $Q(x)$ divise $F(x)$, ce qui n'est pas le cas.

Exemple : Soit le système dans $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 - 5x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + 9x_2^3 + u x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3 - u x_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Un calcul simple donne

$$F(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2)(x_1 - 3x_2)(x_1 + x_2)$$

Ici,

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2$$

Si on considère le changement de feedback

$$u = 2x_1^2 + 5x_1x_2 + 4x_2^2 + \tilde{u}$$

alors, le système (4.10) devient

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 - x_1x_2 + 3x_2^2)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \tilde{u}B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En vertu de [13], le feedback homogène de degré zéro suivant

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \frac{-12x_1^2}{3x_1^2 + x_2^2}$$

stabilise le système bilinéaire

$$\dot{x} = Ax + \tilde{u}Bx, \text{ où } x = (x_1, x_2).$$

On en déduit alors, que le feedback homogène de degré deux

$$u(x_1, x_2) = \frac{-12x_1^4 + 12x_1^3x_2 - 36x_1^2x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}$$

stabilise (4.10).

4.2.2 Cas où P est homogène de degré 2k+1

Dans ce paragraphe, constitué d'un article paru dans les actes du 2^{ème} IEEE Mediterranean Symposium on new Directions in Control & Automation, on considère le système (4.1) avec P homogène de degré $2k + 1$. On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit stabilisable. Des feedbacks polynomiaux homogènes de degré $2k$ sont aussi donnés explicitement.

On the Stabilization of Homogeneous Affine Systems

Abstract This paper gives necessary and sufficient conditions for the asymptotic stabilization of a class of homogeneous polynomial systems. Local stabilization results are obtained for other systems.

Keywords Stabilization, feedback, nonlinear systems, homogeneous polynomials of odd degree.

1 Introduction

This paper is a contribution to the study of the stabilization of nonlinear systems

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, u).$$

The problem is to find feedback laws $x \mapsto u(x)$ which make the closed-loop system:

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

asymptotically stable (locally or globally) about the origin. If such a feedback exists, we will say that system (1) is asymptotically stabilizable (locally or globally). If there exists control law u such that $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ($x(t)$ denoting the solution of $\dot{x} = f(x, u(\cdot))$, $x(0) = x_0$) for all x_0 , we will say that system (1) is asymptotically controllable to the origin. Obviously, to be asymptotically controllable to the origin is a necessary condition for the asymptotic stabilizability.

The results of this article concern systems of the form:

$$(2) \quad \dot{x}(t) = P(x(t)) + uB(x(t))$$

whose states evolve on $\mathbb{R}^2$, control in $\mathbb{R}$ and where $P(x) = (P_1(x), P_2(x))^T$ (the notation M^T stands for the transpose matrix of M); P_1 and P_2 being homogeneous polynomials of the same odd degree and B being a 2×2 matrix. When the degree of homogeneity of P is one, we deal with *bilinear systems*. This kind of systems has been first addressed by Bacciotti and Boieri ([1], [2]), further R. Chabour, G. Sallet J.-C. Vivalda [3] and give a complete classification of these systems in the plane from the point of view of the asymptotic stabilization.

In this paper, we give necessary and sufficient conditions, algebraically computable, for the global asymptotic stabilization of (2) when the degree of P is at least three. It turns out that the stabilizability is equivalent to the asymptotic controllability to the origin. If (2) is not globally stabilizable an invariant domain is given. Moreover, for stabilizable homogeneous systems of the form (2) a smooth homogeneous of degree $2k$ feedback u is given. Furthermore, as an application of this study, we give a result on the local stabilization of nonlinear systems affine. $\dot{x} = f(x) + ug(x)$.

2 Classification and stabilization of planar homogeneous system of odd degree

Consider the system (2) which can be written:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) \\ P_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

where P_1 and P_2 are homogeneous polynomials of odd degree $(2k+1)$.

In the sequel, we denote by $\langle \cdot | \cdot \rangle$, the scalar product in $\mathbb{R}^2$ and the notation G.A.S. means *globally asymptotically stabilizable*. The following theorem, whose proof can be found in Hahn [4], is crucial for the study of the stabilizability of system (2).

Theorem 1 *Consider the homogeneous system of odd degree $2k+1$:*

$$(H) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= H_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= H_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

(i.e. H_1 and H_2 are homogeneous polynomials of the same odd degree $2k+1$). The function $\mathcal{F}$ defined by

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 H_1(x_1, x_2) - x_1 H_2(x_1, x_2)$$

will be called the characteristic function of system (H).

Suppose that $\mathcal{F}$ can be factorized under the form:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^p (t_1^i x_1 + t_2^i x_2) \prod_{j=1}^q Q_j(x_1, x_2)$$

where the Q_i 's are definite quadratic forms, then the above system is globally asymptotically stabilizable if and only if

$$\langle (H_1(t_2^i, -t_1^i), H_2(t_2^i, -t_1^i))^T | (t_2^i, -t_1^i)^T \rangle < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

In the following sections, we will see that system (2) is asymptotically stabilizable iff it is asymptotically stabilizable by means of an homogeneous polynomial feedback of degree $2k$. Our strategy will be the following: in order to prove that a given (homogeneous polynomial) feedback $x \mapsto u(x)$ asymptotically stabilizes system (2), we will consider the closed-loop system $\dot{x} = X(x)$ ($X_1(x) = P_1(x) + u(x)(B_{11}x_1 + B_{12}x_2)$, $X_2(x) = P_2(x) + u(x)(B_{21}x_1 + B_{22}x_2)$) and we will prove that the characteristic function of this system satisfy the hypothesis of Theorem 1.

2.1 Case where B is diagonalizable

In this section, we discard the very trivial case where $B \equiv 0$; in a suitable basis of $\mathbb{R}^2$, matrix B can be written

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

we deal with the following situations for matrix B .

2.1.1 Case where $\det B > 0$

In this case, we have the following theorem.

Theorem 2 *If B is diagonalizable and $\det B = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, set $\epsilon = 1$ when $\lambda_1 > 0$, $\epsilon = -1$ otherwise, then if the positive constant δ is large enough, the following feedback*

$$u(x_1, x_2) = -\epsilon \delta (x_1^2 + x_2^2)^k$$

stabilizes system (2).

Proof Consider the positive definite function

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(|\lambda_2| x_1^2 + |\lambda_1| x_2^2)$$

the computation of $\dot{V}$, the derivative of V along the trajectories of the vector field $P(x) + u(x)B(x)$, gives

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= |\lambda_2| x_1 P_1(x_1, x_2) + |\lambda_1| x_2 P_2(x_1, x_2) - \delta \lambda_1 \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2)^k \\ &= (x_1^2 + x_2^2)^k \cdot \left[-\lambda_1 \lambda_2 \delta (x_1^2 + x_2^2) + \frac{|\lambda_2| x_1 P_1 + |\lambda_1| x_2 P_2}{(x_1^2 + x_2^2)^k} \right]\end{aligned}$$

so it is clear that for δ positive large enough one has $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ for all $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ because the function $x \mapsto \frac{|\lambda_2| x_1 P_1 + |\lambda_1| x_2 P_2}{(x_1^2 + x_2^2)^k}$ is homogeneous of degree zero and bounded on $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
■

2.1.2 Case where $\det B < 0$

We can suppose that system (2) can be written as

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= P_1(x_1, x_2) + u \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= P_2(x_1, x_2) + u \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

with $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 < 0$. We will consider the following real function:

$$F(x_1, x_2) = -\det \begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) & \lambda_1 x_1 \\ P_2(x_1, x_2) & \lambda_2 x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)$$

$F(x_1, x_2)$ is an homogeneous polynomial of even degree $2k + 2$ and we have the following result.

Theorem 3 *If the function F does not satisfy one of the following conditions*

- i. *there exists $c > 0$ such that $F(1, c) < 0$,*
- ii. *there exists $d < 0$ such that $F(1, d) > 0$,*

then system (3) is not asymptotically controllable to the origin.

Proof First, we suppose that condition i. is not satisfied, then $F(1, \xi) \geq 0$ for all $\xi > 0$. Consider the function defined in the first quadrant by

$$H_1(x_1, x_2) = x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1}$$

Take for u any control, the computation of $\dot{H}_1$, the derivative of H_1 along the trajectories of system (3) gives:

$$\begin{aligned}\dot{H}_1(x_1, x_2) &= x_1^{-\lambda_2-1} x_2^{\lambda_1-1} (\lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)) \\ &= x_1^{-\lambda_2-1} x_2^{\lambda_1-1} F(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Since $F(x_1, x_2)$ is an homogeneous function of degree $2k+2$, we have $F(x_1, x_2) = x_1^{2k+2} F(1, x_2/x_1) \geq 0$ for $x_2 > 0$ and $x_1 > 0$; it follows from above that $F(x_1, x_2)$ takes only nonnegative values when x_1 and x_2 are both positive. The consequence is that the regions of the form $R_c = \{(x_1, x_2) / x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^{-\lambda_2} x_2^{\lambda_1} > c\}$ ($c > 0$) are positively invariant for the differential equation $\dot{x} = P(x) + uB(x)$ so system (3) is not asymptotically controllable to the origin.

In the case where condition ii. is not satisfied (i.e., $F(1, \xi) \leq 0$ for all $\xi < 0$), we consider the function defined in the second quadrant by:

$$H_2(x_1, x_2) = x_1^{-\lambda_2} (-x_2)^{\lambda_1}$$

a simple computation gives

$$\begin{aligned}\dot{H}_2(x_1, x_2) &= -x_1^{-\lambda_2-1} (-x_2)^{\lambda_1-1} (\lambda_1 x_1 P_2(x_1, x_2) - \lambda_2 x_2 P_1(x_1, x_2)) \\ &= -x_1^{-\lambda_2-1} (-x_2)^{\lambda_1-1} F(x_1, x_2),\end{aligned}$$

using the same argument as in the first case, one can deduce that ii. is necessary for the asymptotic controllability to the origin. ■

Theorem 4 *Suppose that conditions i. and ii. hold, then there exists a homogeneous feedback law of degree $2k$ which stabilizes system (3).*

Proof We can suppose that system (3) can be written under the form:

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u\lambda_2 x_2 \end{cases}$$

where $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ and $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ are homogeneous of degree $2k$ ($k \geq 1$). We will prove that we can find a feedback such that the conditions of application of Theorem 1 are met for the closed-loop system (4). We will distinguish five cases.

Case 1 $ab < 0$ In this case we will prove that the following feedback law

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \frac{2b}{c}x_1^{2k} - \frac{b}{c^2}x_1^{2k-1}x_2 + ac^2x_1x_2^{2k-1} - 2cax_2^{2k} \right)$$

stabilizes system (4) (c is chosen in such a manner that $c > 0$ and $F(1, c) < 0$). Indeed, if we consider the closed loop system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 &= X_1(x) \\ \dot{x}_2 &= bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 &= X_2(x) \end{cases}$$

and the function

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2) &= x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2) \\ &= x_1 x_2 \left(\tilde{P}_1(x_1, x_2) - \tilde{P}_2(x_1, x_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)u(x_1, x_2) \right) + ax_2^{2k+2} - bx_1^{2k+2} \end{aligned}$$

one can verify that

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (cx_1 - x_2)^2 \left(-\frac{b}{c^2}x_1^{2k} + ax_2^{2k} \right).$$

Since $\mathcal{F}(1, c) = 0$, there exists ν such that $(X_1(1, c), X_2(1, c))^T = \nu(1, c)^T$ and using the fact that

$$\begin{aligned} F(1, c) &= -\det \begin{pmatrix} P_1(1, c) & \lambda_1 \\ P_2(1, c) & \lambda_2 c \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} X_1(1, c) & \lambda_1 \\ X_2(1, c) & \lambda_2 c \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} \nu & \lambda_1 \\ \nu c & \lambda_2 c \end{pmatrix} = \nu c(\lambda_1 - \lambda_2) < 0, \end{aligned}$$

we can deduce that $\nu = F(1, c)/c(\lambda_1 - \lambda_2) < 0$ and

$$\langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T \mid (1, c)^T \rangle = \nu(1 + c^2) < 0$$

Consequently, the proof follows from theorem 1.

Case 2 $ab > 0$ In this case, we consider the feedback law:

$$u(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \frac{(d+c)}{dc}bx_1^{2k} - \frac{b}{dc}x_1^{2k-1}x_2 + adc x_1 x_2^{2k-1} - a(d+c)x_2^{2k} \right),$$

it is easy to verify that, for the closed loop system, function $\mathcal{F}$ is given by

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2) = (cx_1 - x_2)(dx_1 - x_2)\left(-\frac{b}{dc}x_1^{2k} + ax_2^{2k}\right)$$

Since $F(1, c) < 0$ and $F(1, d) > 0$, by using the same argument as above one can deduce that

$$\langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T \mid (1, c)^T \rangle = \frac{F(1, c)(1 + c^2)}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

and

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T \mid (1, d)^T \rangle = \frac{F(1, d)(1 + d^2)}{d(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

therefore system (4) is G.A.S. about the origin.

Case 3 $a = 0$ and $b \neq 0$ In this case we deal with the following situations:

• **$b < 0$** In this case we will prove that if δ is chosen positive and large enough, the feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + \frac{b}{d}x_1^{2k} - \delta b x_1 x_2^{2k-1} + \delta \frac{b}{d}x_2^{2k} \right)$$

stabilizes system (4). Indeed, if we consider the closed loop system (4)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = b x_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

and the real function $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$, one can verify that

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -\frac{b}{d}x_1(dx_1 - x_2)(x_1^{2k} + \delta x_2^{2k}).$$

Now, the same computation as above shows that

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T \mid (1, d)^T \rangle = \frac{F(1, d)}{d(\lambda_1 - \lambda_2)}(1 + d^2) < 0.$$

on the other hand, we have

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(0, 1) - \lambda_2 \tilde{P}_1(0, 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta \frac{b\lambda_2}{d(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

so for δ positive and large enough, we have

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle < 0$$

and the proof follows from theorem 1.

• **$b > 0$** Using similar arguments as above one can prove that for δ positive large enough the feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + \frac{b}{c}x_1^{2k} - \delta b x_1 x_2^{2k-1} + \delta \frac{b}{c}x_2^{2k} \right)$$

stabilizes system (4).

Case 4 $a \neq 0$ and $b = 0$ In this case, if we redefine x_1 as x_2 and x_2 as x_1 and if we make the change in the input space: $u \mapsto -u$, system (4) becomes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_2(x_2, x_1) + u(-\lambda_2)x_1 \\ \dot{x}_2 = a x_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_1(x_2, x_1) + u(-\lambda_1)x_2 \end{cases}$$

The problem is therefore reduced to case 3.

Case 5 $a = 0$ and $b = 0$ Finally, we will prove that for δ large enough, the following feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + \delta(cx_1 - x_2)^{2k-1}(dx_1 - x_2) \right)$$

stabilizes system (4).

Indeed, if we consider the closed loop system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) \lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + u(x_1, x_2) \lambda_2 x_2 = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

and the real function $\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2 X_1(x_1, x_2) - x_1 X_2(x_1, x_2)$ one can verify that

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = \delta x_1 x_2 (cx_1 - x_2)^{2k-1} (dx_1 - x_2).$$

It is easy to see that

$$\langle (X_1(1, d), X_2(1, d))^T \mid (1, d)^T \rangle < 0 \text{ and } \langle (X_1(1, c), X_2(1, c))^T \mid (1, c)^T \rangle < 0.$$

Now for δ positive and large enough the following holds

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(0, 1) - \lambda_2 \tilde{P}_1(0, 1)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta \frac{\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

and

$$\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T \mid (1, 0)^T \rangle = \frac{\lambda_1 \tilde{P}_2(1, 0) - \lambda_2 \tilde{P}_1(1, 0)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \delta c^{2k-1} d \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} < 0$$

■

2.1.3 case where $\det B = 0$

Without loss of generality, we can assume that $\lambda_1 \neq 0$: as a matter of fact, one of the two eigenvalues of B is nonzero, if we have $\lambda_1 = 0$, by redefining x_1 as x_2 and x_2 as x_1 and by renaming the eigenvalues of B , we can assume that $\lambda_1 \neq 0$; system (2) can then be written:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + a x_2^{2k+1} + u \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = b x_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

The following result is obvious.

Theorem 5 *If $a = 0$, system (5) is G.A.S. if and only if $\tilde{P}_2(0, 1) < 0$.*

Proof When $a = 0$ the straight line of equation $x_1 = 0$ is invariant for the differential equation

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + u \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = b x_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

and on this line, equation (6) reduces to:

$$\dot{x}_2 = x_2^{2k+1} \tilde{P}_2(0, 1).$$

Consequently, if $\tilde{P}_2(0, 1) \geq 0$ we have $x_2(t) = x_2(0)$ or $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = +\infty$ (for any control u) and system (5) is not asymptotically controllable to the origin.

If if $\tilde{P}_2(0, 1) < 0$ and if $b \neq 0$ the feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2))$$

stabilizes system (5). Indeed a simple computation gives

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = -bx_1^{2k+2}$$

and

$$\langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle = \tilde{P}_2(0, 1) < 0$$

In the case where $b = 0$, consider the following feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1}(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + \delta \tilde{P}_2(1, 0)x_1^{2k}),$$

u stabilises system (5) because

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (\delta \tilde{P}_2(1, 0))x_1^{2k+1}x_2$$

and

$$\begin{aligned} \langle (X_1(0, 1), X_2(0, 1))^T \mid (0, 1)^T \rangle &= \tilde{P}_2(0, 1) < 0 \\ \langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T \mid (1, 0)^T \rangle &= \delta + \tilde{P}_2(1, 0), \end{aligned}$$

the last expression will be negative if we take $\delta = -1 - \tilde{P}_2(1, 0)$. ■

Suppose now that $a \neq 0$ without loss of generality, we can assume that $a > 0$ because if we have $a < 0$ we redefine x_1 as $-x_1$ and system (5) becomes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(-x_1, x_2) - ax_2^{2k+1} + u\lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = -bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(-x_1, x_2) \end{cases}$$

Theorem 6 *Suppose that $a > 0$ then system (5) is G.A.S. if and only if the following holds:*

there exists $c > 0$ such that $bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) < 0$.

Proof Suppose that the hypothesis of the theorem is not satisfied:

$$\forall c > 0 \quad bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) \geq 0$$

and consider the region of the plane $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\}$. Along the boundary of $\mathcal{R}$, the vector field $P + uB$ points inwards $\mathcal{R}$ (whatever the control u) so system (5) is not asymptotically controllable to the origin.

Conversely assume now that there exists $c > 0$ such that $bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) < 0$.

If $b > 0$, we take the feedback law:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x) - \tilde{P}_1(x) + b(c + d)x_1^{2k} + \frac{a}{cd}x_1x_2^{2k-1} - bcdx_1^{2k-1}x_2 - \frac{a(c + d)}{cd}x_2^{2k} \right)$$

where d is a negative parameter to be choosen. For the closed loop system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ax_2^{2k+1} + u(x_1, x_2)\lambda_1 x_1 = X_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = bx_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

we can verify that

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - cx_2)(x_1 - dx_2) \left(-bx_1^{2k} + \frac{a}{cd}x_2^{2k} \right)$$

Recall that since $\mathcal{F}(c, 1) = 0$ we have $(X_1(c, 1), X_2(c, 1)) = \nu(c, 1)$ and using the fact that $\nu = X_2(c, 1) = bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1) < 0$ it follows that

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T \mid (c, 1)^T \rangle = \nu(1 + c^2) < 0,$$

using the same arguments we get

$$\langle (X_1(d, 1), X_2(d, 1))^T \mid (d, 1)^T \rangle = (bd^{2k+1} + \tilde{P}_2(d, 1))(1 + d^2).$$

Now $Q(y) = by^{2k+1} + \tilde{P}_2(y, 1)$ is a polynomial of degree $2k + 1$ whose leading coefficient is $b > 0$, so there exists $y < 0$ such that $Q(y) < 0$. If d is choosen such that $Q(d) < 0$ we have then

$$\langle (X_1(d, 1), X_2(d, 1))^T \mid (d, 1)^T \rangle < 0.$$

If $b < 0$, consider the feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) + 2cbx_1^{2k} + \frac{a}{c^2}x_1x_2^{2k-1} - bc^2x_1^{2k-1}x_2 - 2\frac{a}{c}x_2^{2k} \right).$$

We get

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - cx_2)^2 \left(-bx_1^{2k} + \frac{a}{c^2}x_2^{2k} \right)$$

and it is easy to see that

$$\langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T \mid (c, 1)^T \rangle = (bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1))(1 + c^2) < 0.$$

Consequently, from theorem 1, we can conclude that the closed-loop system (5) is G.A.S.

If $b = 0$, consider the following feedback law

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\lambda_1} \left(\tilde{P}_2(x_1, x_2) - \tilde{P}_1(x_1, x_2) - \delta x_1^{2k} + \delta c x_1^{2k-1} x_2 - \frac{a}{c} x_2^{2k} \right)$$

where δ is a positive constant. We get

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = x_2(x_1 - cx_2) \left(-\delta x_1^{2k} - \frac{a}{c} x_2^{2k} \right)$$

and

$$\begin{aligned} \langle (X_1(c, 1), X_2(c, 1))^T \mid (c, 1)^T \rangle &= (bc^{2k+1} + \tilde{P}_2(c, 1))(1 + c^2) < 0 \\ \langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T \mid (1, 0)^T \rangle &= \tilde{P}_2(0, 1) - \delta. \end{aligned}$$

It follows that for δ positive large enough one has: $\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T \mid (1, 0)^T \rangle < 0$. ■

2.2 Case where the eigenvalues of B are real without B being diagonalizable

In a suitable basis of $\mathbb{R}^2$, matrix B can be written

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Theorem 7 *If $\text{Tr}(B) \neq 0$ then for δ positive and large enough the following feedback*

$$u(x_1, x_2) = -\lambda\delta(x_1^{2k} + x_2^{2k})$$

stabilizes system (2).

Proof Consider the positive definite function

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\lambda^2 x_1^2 + x_2^2).$$

The derivative of V along the trajectories of the closed-loop system is equal to:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \lambda^2 x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x) - \delta \lambda^2 (x_1^{2k} + x_2^{2k})(\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2) \\ &= \left[\frac{\lambda^2 x_1 P_1(x) + x_2 P_2(x)}{x_1^{2k} + x_2^{2k}} - \delta \lambda^2 (\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2) \right] (x_1^{2k} + x_2^{2k}) \end{aligned}$$

The function $x \mapsto \frac{\lambda^2 x_1 P_1 + x_2 P_2}{x_1^{2k} + x_2^{2k}}$ is homogeneous of degree 2 while the function $x \mapsto \lambda^2(\lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + x_2^2)$ is positive definite, so if the constant δ is chosen positive and large enough, $\dot{V}$ is negative definite. ■

In the case where $\text{Tr}(B) = 2\lambda = 0$ system (2) can be written as

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= P_1(x_1, x_2) + u x_2 \\ \dot{x}_2 &= P_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

First, we state the following (negative) result:

Theorem 8 *If for all $\xi \in \mathbb{R}$ one has $P_2(\xi, 1) \geq 0$, then system (7) is not asymptotically controllable to the origin.*

Proof For the proof it suffices to remark that if $P_2(\xi, 1) \geq 0$ for all $\xi \in \mathbb{R}$ then along the boundary of the region of the plane $\mathcal{R} = \{(x_1, x_2) / x_2 \geq 1\}$, the vector field $P + uB$ points inwards $\mathcal{R}$. ■

In the sequel, we will assume that there exists $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that $P_2(\xi_0, 1) < 0$. We remark also that polynomials P_1 and P_2 can be written

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2) &= x_2 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + a x_1^{2k+1} \\ P_2(x_1, x_2) &= x_2^2 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + b x_1^{2k+1} + c x_1^{2k} x_2 \end{aligned}$$

where $\tilde{P}_1$ is an homogeneous polynomial of degree $2k$ and $\tilde{P}_2$ is an homogeneous polynomial of degree $2k - 1$. Under this hypothesis we deal with the following discussion.

2.2.1 Case where $a = 0$

In this case we discard the trivial case where $b = 0$ (if $b = 0$, the line of equation $x_2 = 0$ is entirely constituted by singular points).

Theorem 9 *If there exists $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that $P_2(\xi_0, 1) < 0$, then system (7) is G.A.S.*

Proof Set $\delta_1 = c + 2b\xi_0$ and choose δ_2 such that $\delta_1^2 - 4b\delta_2 < 0$, then the function

$$g(x_1, x_2) = -b x_1^{2k} - \delta_1 x_1^{2k-1} x_2 - \delta_2 x_1^{2k-2} x_2^2 - b x_2^{2k}$$

is definite. So if we consider the feedback law

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -\tilde{P}_1(x_1, x_2) + x_1 \tilde{P}_2(x_1, x_2) + (2\delta_1 \xi_0 - \delta_2 - b\xi_0^2) x_1^{2k} + (2\delta_1 \xi_0 - \delta_1 \xi_0^2) x_1^{2k-1} x_2 \\ &\quad - \delta_2 \xi_0^2 x_1^{2k-2} x_2^2 - b x_1^2 x_2^{2k-2} + 2b\xi_0 x_1 x_2^{2k-1}, \end{aligned}$$

one can verify that

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (x_1 - \xi_0 x_2)^2 g(x_1, x_2)$$

a simple computation gives

$$\langle (X_1(\xi_0, 1), X_2(\xi_0, 1))^T | (\xi_0, 1)^T \rangle = P_2(\xi_0, 1)(1 + \xi_0^2) < 0$$

■

2.2.2 Case where $a \neq 0$

System (7) can be written:

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1^{2k+1} + x_2 \tilde{P}_1(x_1, x_2) + ux_2 \\ \dot{x}_2 &= bx_1^{2k+1} + x_2 (cx_1^{2k} + x_2 \tilde{P}_2(x_1, x_2)) \end{cases}$$

and we deal with the following situations:

• $b \neq 0$ after a change in input space of the form $u \rightarrow -\tilde{P}_1 + \frac{a}{b} (cx_1^{2k} + x_2 \tilde{P}_2) + u$ and if we redefine x_1 as $x_1 - \frac{a}{b}x_2$, this system becomes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ux_2 \\ \dot{x}_2 &= P_2(x_1 + \frac{a}{b}x_2, x_2). \end{cases}$$

The problem is therefore reduced to case where $a=0$.

• $b = 0$ using the fact that the straight line of equation $x_2 = 0$ is invariant, it follows that, if $a \geq 0$, system (8) is not asymptotically controllable to the origin.

Theorem 10 *If $a < 0$ and if there exists $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that $P_2(\xi_0, 1) < 0$ then system (8) is G.A.S. by means of n homogeneous feedback of degree $2k$.*

Proof Consider the following feedback

$$u(x_1, x_2) = -\tilde{P}_1(x_1, x_2) + x_1 \tilde{P}_2(x_1, x_2) - (a - c)\xi_0 x_1^{2k} + (a - c)x_1 x_2^{2k-1} - (a - c)\xi_0 x_2^{2k},$$

we have:

$$\mathcal{F}(x_1, x_2) = (a - c)x_2(x_1 - \xi_0 x_2)(x_1^{2k} + x_2^{2k})$$

and $\langle (X_1(1, 0), X_2(1, 0))^T | (1, 0) \rangle = a < 0$, $\langle (X_1(\xi_0, 1), X_2(\xi_0, 1))^T | (\xi_0, 1) \rangle = (1 + \xi_0^2)P_2(\xi_0, 1) < 0$.

■

2.3 Case where B has no real eigenvalues

In a suitable basis of $\mathbb{R}^2$, matrice B can be written as

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

First we will prove the following result.

Theorem 11 *If B has no real eigenvalues and if $\text{Tr}(B) \neq 0$ then for δ positive and large enough the following feedback*

$$u(x_1, x_2) = -\alpha\delta(x_1^2 + x_2^2)^k$$

stabilizes system (2).

Proof For the proof it suffices to compute the derivative of the positive definite function $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ along the trajectories of the closed loop system. We obtain:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 P_1(x_1, x_2) + x_2 P_2(x_1, x_2) - \delta\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)^{k+1}$$

which is negative definite if δ is positive and large enough. ■

Suppose now that $\text{Tr}B = 0$, the system (2) can be written:

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= P_1(x_1, x_2) + u\beta x_2 \\ \dot{x}_2 &= P_2(x_1, x_2) - u\beta x_1 \end{cases}.$$

Define the real function F by:

$$F(x_1, x_2) = x_1 P_1(x_1, x_2) + x_2 P_2(x_1, x_2)$$

then the following holds.

Theorem 12 *System(9) is stabilizable and only if: there exist $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ such that $F(c, d) < 0$.*

Proof Suppose that the condition of the theorem is not met and consider the positive definite function $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/2$. The computation of the derivate of V along the trajectories of the open (or closed) loop system (9)) gives

$$\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) = F(x_1(t), x_2(t)) \geq 0$$

this proves that system (9) is not asymptotically controllable to the origin.

Conversely suppose now that there exist $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ such that $F(c, d) < 0$ and consider the homogeneous polynomial of degree $2k + 2$: $\mathcal{G}(x_1, x_2) = x_2 P_1(x_1, x_2) - x_1 P_2(x_1, x_2)$. Using the euclidean division of $\mathcal{G}$ by $x_1^2 + x_2^2$, we can write:

$$\mathcal{G}(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) (x_1^2 + x_2^2) + ax_1 x_2^{2k+1} + bx_2^{2k+2}$$

where Q is an homogeous polynomial of degree $2k$ and a and b are some constants.

Consider now the following feedback law:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta} \left(-Q(x_1, x_2) + \delta(dx_1 - cx_2)^2 (x_1^2 + x_2^2)^{k-1} + \delta_1 x_1 x_2^{2k-1} + \delta_2 x_2^{2k} \right)$$

where δ_1 and δ_2 are the solutions of:

$$\begin{cases} \delta_1 c^3 + \delta_2 c^2 d + (a + \delta_1)cd^2 + (b + \delta_2)d^3 &= 0 \\ 3\delta_1 c^2 + 2\delta_2 cd + (a + \delta_1)d^2 &= 0, \end{cases}$$

namely

$$\delta_1 = \frac{d^2(ac^2 + 2bcd - ad^2)}{(c^2 + d^2)^2} \quad \delta_2 = -\frac{d(2ac^3 + 3bc^2d + bd^3)}{(c^2 + d^2)^2}.$$

Thanks to this choice of δ_1 and δ_2 , polynomial $\mathcal{F}$ can be factorized and we have:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, x_2) &= (dx_1 - cx_2)^2 \left(\delta(x_1^2 + x_2^2)^k + \frac{\delta_1}{d^2} x_1 x_2^{2k-1} + \frac{b + \delta_2}{c^2} x_2^{2k} \right) \\ &= (dx_1 - cx_2)^2 \Psi(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Clearly, if δ is positive and large enough $\Psi(x)$ is positive definite and we have:

$$\langle (X_1(c, d), X_2(c, d))^T | (c, d)^T \rangle = F(c, d) < 0$$

■

3 Local stabilization of non linear systems

In this section, we consider a single input, nonlinear system defined on a neighborhood U of the origin of $\mathbb{R}^n$:

$$(10) \quad \dot{x} = f(x) + ug(x)$$

We suppose that f and g are functions such that $f(0) = g(0) = 0$

Definition 1 A function p is said positively homogeneous of degree $m \geq 0$, if for any vector x and any real positive λ one has:

$$p(\lambda x) = \lambda^m p(x)$$

In system (10), assume that, $Df_0 \equiv 0$ and $D^i f_0 \equiv 0$ for all $i \in \{1, \dots, 2k\}$ then, since $f(0) = g(0) = 0$, one can write

$$f(x) = D^{2k+1} f_0 x^{2k+1} + f_1(x)$$

and

$$g(x) = Dg_0 x + g_1(x)$$

where

$$\|f_1(x)\| \leq M_1 \|x\|^{2k+1} \quad \text{and} \quad \|g_1(x)\| \leq M_2 \|x\| \quad \forall x \in U' \subset U$$

Denoting $D^{2k+1} f_0$ by P and Dg_0 by B , consider the system:

$$(11) \quad \dot{x} = P(x) + uBx$$

We will call System (11) will be called the approximating system of system (10).

Theorem 13 If the approximating system (11) is stabilizable by means of positively homogeneous feedback of degree $2k$, then the nonlinear system (10) is locally stabilizable.

Proof Let $u = u(x)$ be a positively homogeneous stabilizing feedback of degree $2k$ for the approximating system (11). Set $\varphi(x) = P(x) + u(x)Bx$ and $\phi(x) = f_1(x) + u(x)g_1(x)$. Since u is C^1 on $U' \setminus \{0\}$, it can be seen that φ and ϕ are locally Lipschitz. Besides, one has

$$|u(x)| \leq M_0 \|x\|^{2k}$$

Furthermore, one can verify that φ is positively homogeneous of degree $2k+1$ and ϕ satisfies

$$\|\phi(x)\| \leq (M_1 + M_0 M_2) \|x\|^{2k+1}, \quad \forall x \in U'$$

$$\|\phi(x)\| \leq M \|x\|^{2k+1}, \quad \forall x \in U'$$

Where $M = M_1 + M_0 M_2$. Then it follows from the theorem 24 of Massera [5], that the solution $x = 0$ of the equation $\dot{x} = \varphi(x) + \phi(x)$ is asymptotically stable. Hence, system (10) is locally asymptotically stable. ■

References

- [1] A. Bacciotti - P. Boieri. Linear stabilizability of planar nonlinear systems. *Mathematics of control signals and systems* - Vol. 3 (pp. 183-193) — 1990.
- [2] A. Bacciotti and P. Boieri. A characterization of single input planar bilinear systems which admit a smooth stabilizer. *Syst & cont. Lett*, 16, 139-143 (1991).
- [3] R. Chabour, G. Sallet, and J.C. Vivalda. Stabilization of nonlinear two dimensional systems : a bilinear approach. *Math. Cont. Sign. Syst*, 224-246 (199) 6.
- [4] W. Hahn. Stability of Motion. *Springer Verlag*, (1967).
- [5] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, (64):182-206, (1956).

Bibliographie

- [1] H.Abed and J.H.Fu. Local feedback stabilization and bifurcation control, Hopf bifurcation. *Syst & cont. Lett*, vol 7. 11-17 (1985).
- [2] A. Andreini, A. Bacciotti, and G. Stefani. Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree. *Systems & Control Letters*, (10):251-256, (1988).
- [3] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications* - Vol 7 (pp. 1163-1173) — 1983
- [4] A. Bacciotti - P. Boieri. Linear stabilizability of planar nonlinear systems. *Mathematics of control signals and systems* - Vol. 3 (pp. 183-193) — 1990.
- [5] A.Bacciotti and P.Boieri. A characterization of single input planar bilinear systems which admit a smooth stabilizer. *Syst & cont. Lett*, 16, 139-143 (1991).
- [6] W. Boothby - R. Marino. Feedback stabilization of planar nonlinear systems. *Systems & Control Letters* - Vol. 12 (pp. 87-92) — 1989
- [7] G. Bornard, N. Couenne and F. Celle. Regularly persistent observers for bilinear systems, in *J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori and D. Leborgne eds., Trends in Nonlinear Control Theory, Lect. Notes in Contr. and Inf. Sciences*, 122 Springer-Verlag (1989), 130-140.
- [8] R.W. Brockett. Differential geometric control theory, chapter Asymptotic stability and feedback stabilization, pages 181-191. *Brockett, Milmann, Sussmann*, 1983.
- [9] C. Byrnes and A. Isidori. A frequency domain philosophy for nonlinear systems with application to stabilization and to adaptive control. *Proc 23rd IEEE Conf.Dec.Cont, Washington, D.C* 1984, 1569-1573.
- [10] C. Byrnes and A. Isidori. Local stabilization of minimum phase nonlinear systems. *Syst & cont. Lett*, 10 (1988), 9-17.
- [11] C. Byrnes and A. Isidori. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, (12):437-442, (1989).

- [12] R. Chabour and J.C. Vivalda. Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan par une commande non régulière. *European Control Conference*, pages 485–487. Hermes, July 1991.
- [13] R. Chabour, G. Sallet, and J.C. Vivalda. Stabilization of nonlinear two dimensional systems : a bilinear approach. *Math.Cont.Sign.Syst*, 224–246 (199) 6.
- [14] R. Chabour and H. Hammouri. Stabilization of planar bilinear systems using an observer configuration. *Appl. Math. Lett.* 6 (1993), 7-10.
- [15] A.Cima and J.Llibre. Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (14).420–448, (1990).
- [16] W.P.Dayawansa, C.F.Martin and G.Knowles. Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems. *SIAM J. Control and Optimization*, (28) pp.1321-1349, (1990)
- [17] C.Delpaut, G.Bastin and M.Gervers. Stabilization of nonlinear systems by means of state estimate feedback. *Proc 28th IEEE Conf.Dec.Cont, Tampa, Florida* , 1042-1046 (1989).
- [18] A.Ferfera and M.A.Hammami. Growth conditions for global stabilization of cascade nonlinear systems. Soumis.
- [19] A.Ferfera and M.A.Hammami. Stabilisation globale des systèmes non linéaires en cascade. Soumis.
- [20] J.P.Gauthier. Structure des systèmes non linéaires. *Editions du CNRS*.
- [21] J.P.Gauthier, G.Bornard. Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal, *chapitre Stabilisation des systèmes non linéaires*, pages 307-324. Editions du CNRS, 1981.
- [22] J.P. Gauthier - Y. Kupka. A separation principle for bilinear systems with dissipative drift. *IEEE Trans. Automat. Cont. AC*, vol 37, 12 (1992), 1970-1974.
- [23] J.P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman. A simple observer for nonlinear systems, application to bioreactors. *IEEE trans.aut.cont. AC*, vol 37, 6 (1992), 875-880.
- [24] W. Hahn. Stability of Motion. *Springer Verlag*, (1967).
- [25] M.A.Hammami. Stabilization of a class of nonlinear systems using an observer design. *Proc of the 32nd IEEE Conf.Dec.Cont. San Antonio, Texas*. December (1993). Vol 3, 1954-1959.

- [26] M.A.Hammami and H.Jerbi. On the stabilisation of homogeneous cubic vector fields in the plane. *Applied Mathematics Letters*. Vol.7, No.4, pp.95–99, (1994).
- [27] A.Isidori. Nonlinear control systems. *Springer-Verlag*.
- [28] A.Isidori and H.Moog. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros. *Modeling and Adaptive Control, C.I.Byrnes and A.Kurzanski*, vol 105, Springer-verlag Berlin, newyork (1986).
- [29] H.Jerbi. M.A.Hammami and J.C.Vivalda. On the Stabilization of Homogeneous Affine Systems. *2nd IEEE Mediterranean Symposium on new Directions in Control & Automation*. June 1994 Chania, Crete, pp.319–326.
- [30] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, (28):381–389, (1978).
- [31] R.E.Kalman and R.S.Bycy. New results in linear filtering and prediction theory. *Trans ASME ser D.J.Basic Eng* , 83 (1961) 95–108.
- [32] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, (12):169–175, (1990).
- [33] P.V.Kokotovic and H.J.Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, *Syst & Cont. Lett*, 13, 125–133 (1989).
- [34] J. Kurzweil. On the inversion of Liapunov's second theorem on stability of motion. *AMS Translations*, 24:19–77, (1963).
- [35] J. Lasalle and S. Lefschetz. Stability by Liapunov's direct method with applications. *Academic Press, New-York*, (1961).
- [36] R.Marino. High-gain feedback in non-linear control systems. *Int.J.Cont* 42 (1985) 1369–1385.
- [37] J.L. Massera. Contribution to stability theory. *Annals of Mathematics*, (64):182–206, (1956).
- [38] R.Outbib and G.Sallet. Stabilizability of angular velocity of a rigid body revisited. *Syst & Cont. Lett*. 18 (1992), 93–98.
- [39] A. Saberi, P.V. Kokotovic and H.J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Contr. Optimiz.* 28 (1990), 1491–1503.
- [40] P.Sannuti. Direct singular perturbation analysis of high-gain and cheap control problems. *Automatica* 19 (1983) 41–51.

- [41] P. Seibert and R. Suarez. Global stabilization of nonlinear cascade systems. *Syst & cont.Lett.* 14 (1990) 347-352.
- [42] P. Seibert and R. Suarez. Global stabilization of a certain class of nonlinear systems, *Syst & Contr. Lett.* 16 (1991), 17-23.
- [43] E.D.Sontag. Deterministic finite dimensional systems. *Mathematical control theory.*
- [44] E.D. Sontag. A universal construction of Arstein's Theorem on nonlinear stabilization, *Systems and Control Lettres* - Vol. 13 (pp. 117-123) —1989.
- [45] E.D. Sontag. Remarks on stabilization and input-to-state stability. *the 28th Conf.Dec.Cont* Tampa, Florida (1989) 1975-1980.
- [46] E.D.Sontag. Further facts about input to state stabilization. *IEEE trans.aut.cont* 4 vol 35 (1990) 473-476.
- [47] J. Tsinias. A theorem on global stabilization, *Syst & Contr. Lett.* 17 (1991), 357-362.
- [48] M.Vidyasagar. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions : stability and stabilizability. *IEEE trans.aut.cont* 25 (1980) 773-779.