



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

vb 78535)

THÈSE PRÉSENTÉE A L' UNIVERSITÉ DE METZ
pour l'obtention du
DOCTORAT DE L' UNIVERSITÉ DE METZ
en Mathématiques.

Option : Mathématiques appliquées.
Spécialité : Calcul des variations.
Par Mr : **Mahmoud BOUSSELSAL.**

Titre de la thèse :

**ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES DE CALCUL DES
VARIATIONS LIÉS A LA MÉCANIQUE.**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19930265
Cote	S/M3 93/9
Loc	Magasin

Soutenue publiquement le 11 Juin 1993.

Devant le jury composé de :

MM.

- | | |
|---------------------|--|
| J. BEMELMANS | Professeur à la R.W.T.H. d'Aachen (Allemagne). |
| B. BRIGHI | Maître de Conférences à l'université de Metz. |
| M. CHIPOT | Professeur à l'université de Metz. Directeur de thèse. |
| O. KAVIAN | Professeur à l'université de Nancy I. Rapporteur. |
| A. RAOULT | Professeur à l' I.M.A.G., Grenoble. Rapporteur. |
| I. SHAFRIR | Professeur à l'université de Metz. |

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Chipot qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance. Sa grande disponibilité et sa grande gentillesse m'ont beaucoup touché.

Je voudrais remercier O. Kavian et A. Raoult qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie I. Shafrir et J. Bemelmans qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Je remercie B. Brighi d'avoir bien voulu être membre de jury de cette thèse et pour les fructueuses discussions que nous avons pu avoir.

C'est également avec plaisir que je remercie le département de Mathématiques et d'informatique de l'université de Metz et tout ses membres qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

Enfin, je ne saurais oublier dans mes remerciements tout ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loin et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Les recherches faisant l'objet de cette thèse ont pu être réalisées grâce à une bourse Franco-Algérienne.

*A mes Parents,
à ma femme pour sa compréhension,
à mes enfants Azzeddine et Saleh-eddine
et à mes frères et soeurs.*

TABLES DES MATIERES

Notations	1
Introduction	3
Partie I :	5
Sur la rang 1 convexité de la fonction de densité d'énergie des matériaux de Saint-Venant-Kirchhoff.	
1.Introduction	6
2.Condition de Legendre - Hadamard	8
3.Domaine de rang -1-convexité.	12
4.Caractérisation du domaine en dimension 2	19
5.Références	24
Partie II :	25
Relaxation de quelques fonctionnelles en calcul des variations.	
I- Relaxation de fonctionnelles du type énergie de Saint Venant-Kirchhoff.	
1. Introduction.	26
2. Rappels et définitions.	27
3. Relaxation de fonctionnelles du type :	
$W(F) = \beta(F ^2 - \alpha)^2 + \varphi(\det F)$	30
4. Relaxation de fonctionnelles du type :	
$W(F) = \text{énergie de Saint-Venant Kirchhoff} + \varphi(\det F)$	36
5. Le minimum de l'énergie de Saint-Venant Kirchhoff dans le cas linéaire.	38

II- Quelques exemples de fonctionnelles relaxées.

1. Relaxation de fonctionnelles du type :

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\operatorname{adj}_n F) \dots\dots\dots 40$$

2. Relaxation de fonctionnelles du type :

$$W(F) = \varphi(F_1, \dots, F_{n-1}) + h(\det F) \dots\dots\dots 45$$

3. Références 48

Partie III : 50

Estimation d'énergie pour un problème variationnel non convexe avec contraintes.

1. Introduction 51

2. Estimation d'énergie 54

3. Analyse des oscillations et mesure de Young. 59

4. Non existence de minimum pour une fonctionnelle invariante par rotation. 64

5. Références 67

NOTATIONS

Dans toute la suite, les notations utilisées sont, dans la plupart des cas, définies dans le texte. Néanmoins, quelques notations ou définitions “standards” ont été volontairement omises. Nous les rappelons ci-dessous.

– Pour $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, on note

$\partial\Omega$ la frontière de Ω ,

$|\Omega|$ la mesure (de Lebesgue) de Ω ,

et on dit que Ω est un domaine de $\mathbf{R}^n$, si Ω est un ouvert 1-régulier de $\mathbf{R}^n$ (cf. [R.T.] def. 1.3-1 p. 22).

– Pour Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$, on note

(1) $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ l’espace (de Sobolev) des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^m$ telle que u et sa dérivée (au sens des distributions) $\nabla u : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^{m \times n}$ soient mesurables au sens de Lebesgue et essentiellement bornées sur Ω ;

(2) $W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ l’ensemble des fonctions $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ telles que $u = 0$ sur $\partial\Omega$;

(3) $W^{1,\infty}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R})$ et $W_0^{1,\infty}(\Omega) = W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R})$.

(Cf. [G.T.] et [B.M.]).

– Une triangulation d’un domaine borné et polygonal $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, est une décomposition finie du type

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K$$

telle que

(i) chaque élément $K \in \mathcal{T}$ est un polyèdre de $\mathbf{R}^n$ d’intérieur non vide;

(ii) les intérieurs de deux polyèdres de $\mathcal{T}$ sont disjoints;

(iii) toute face d’un polyèdre de $\mathcal{T}$ est soit face d’un autre polyèdre de $\mathcal{T}$, soit une partie de $\partial\Omega$.

(Cf. [R.T.]).

– Pour n et m deux entiers naturels, on note

$\mathbf{R}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices réelles à m lignes et n colonnes;

$\mathbf{M}^n = \mathbf{R}^{n \times n}$;

$\mathbf{GL}(\mathbf{R}^n)$ le sous-ensemble de $\mathbf{M}^n$ constitué des matrices inversibles;

$\mathbf{SO}_n$ le groupe des matrices orthogonales de $\det 1$.

– Pour une matrice $\beta \in \mathbf{R}^{m \times n}$, on note β^T la matrice transposée de β et par $\text{adj } \beta$ sa matrice des cofacteurs.

– Pour une matrice $\alpha \in \mathbf{M}^n$, on note $\text{Tr}(\alpha)$ sa trace et $\det(\alpha)$ son déterminant.

– Pour $\mathcal{A} \subset \mathbf{R}^{m \times n}$, $\text{Co}\mathcal{A}$ désigne l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$.

– Pour une fonction D , on note par D^+ sa partie positive.

– Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$, $d(A, B)$ est la distance de A à B , i.e.

$$d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} |a - b|$$

en particulier, si $x \in \mathbf{R}^n$, on note $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

INTRODUCTION

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la fonction de densité d'énergie du matériau de Saint Venant- Kirchhoff, ie,

$$W(F) = \frac{\lambda}{2}(Tr E)^2 + \mu Tr(E)^2 \quad (0.1)$$

$$E = \frac{(F^T F - I)}{2} ; F \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Nous nous sommes en particulier intéressés à caractériser le domaine de rang 1 convexité de W .

On donne des conditions nécessaires et suffisantes sur la variable $F \in M^n$ ou sur les valeurs singulières $v_i(F)$ pour que la fonction de densité d'énergie du matériau de Saint Venant- Kirchhoff soit rang 1 convexe.

Cette partie généralise les résultats obtenus par [Ra.], qui montrent la non- polyconvexité de l'énergie de Saint Venant - Kirchhoff.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés dans un premier temps à la relaxation de quelques fonctionnelles du type :

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\det F) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^* \quad (0.2)$$

$\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe et $|\cdot|$ désigne la norme associée à un produit scalaire défini dans M^n .

On calcule notamment l'enveloppe quasiconvexe QW de W où

$$QW(F) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^n)} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} W(F + \nabla \varphi(x)) dx. \quad (0.3)$$

et on montre que

$$QW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(\det F) & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases} \quad (0.4)$$

Par ailleurs, on montre également que la fonction de densité d'énergie d'un matériau de Saint Venant- Kirchhoff auquel on ajoute $\varphi(\det F)$ i.e :

$$W(F) = \frac{\lambda}{2}(Tr E)^2 + \mu Tr(E)^2 + \varphi(\det F) \quad (0.5)$$

$E = \frac{(F^T F - I)}{2}$ peut s'écrire en dimension deux sous la forme (0.2) précédente et sous l'hypothèse : $\varphi'' \geq \mu$ on en déduit QW . Dans le cas où $\varphi \equiv 0$ dans (0.5), on détermine un domaine sur lequel $QW = W$.

Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la relaxation de quelques fonctionnelles du type:

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\text{adj}_n F) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*; F \in \mathbf{R}^{(n+1) \times n} \quad (0.6)$$

et $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe.

On montre que

$$QW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(\text{adj}_n F) & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases} \quad (0.7)$$

On étudie également le cas :

$$W(F) = g(F_1, \dots, F_n) + \varphi(\det F)$$

avec g convexe et on montre que

$$QW(F) = g(F_1, \dots, F_n) + C\varphi(\det F) \quad (0.8)$$

où $C\varphi$ désigne l'enveloppe convexe de φ .

De tels problèmes ont été considérés d'abord par Dacorogna [11], [16] dans le cas particulier où $\varphi \equiv 0$ et $|\cdot|$ désigne la norme Euclidienne des matrices dans (0.2) et (0.6). Ensuite Firoozye [17] a développé le cas quasi-affine i.e le cas où $\varphi(\det F) = a \det F + b$ en introduisant une mesure de Young et moyennant une méthode de translation.

En résumé : Cette partie consiste alors à calculer explicitement l'enveloppe quasiconvexe de certaines fonctionnelles vectorielles (cf. [4], [5], [6]).

Dans la troisième partie, on étend les résultats obtenus par [C.L.], [C.] à des problèmes avec contraintes.

En considérant le problème de l'obstacle, on montre moyennant des hypothèses supplémentaires que le problème étudié conduit à des résultats analogues.

Enfin, pour une fonctionnelle invariante par rotation, on montre que le minimum de la densité d'énergie n'est pas atteint.

PARTIE I

SUR LA RANG-1- CONVEXITÉ DE LA FONCTION DE DENSITÉ D'ÉNERGIE D' UN MATÉRIAU DE SAINT VENANT-KIRCHHOFF.

ON THE RANK-ONE-CONVEXITY DOMAIN OF THE SAINT VENANT-KIRCHHOFF STORED ENERGY FUNCTION

Bernard BRIGHI and Mahmoud BOUSSELSAL [†]

Abstract : The goal of this paper is to give a characterization of the rank-one-convexity domain of the Saint Venant-Kirchhoff stored energy function.

Key words : Saint Venant-Kirchhoff material, stored energy function, rank-one-convexity.

Mathematics subject classifications : 26B25, 73C50, 73C99.

1. Introduction

For a homogeneous, isotropic, elastic material, whose reference configuration is a natural state, one can show that the response function associated to the second Piola-Kirchhoff stress tensor is of the form

$$\Sigma(F) = \lambda(\text{tr}E)I + 2\mu E + o(E) \quad (1.1)$$

for a matrix $F \in \mathbb{M}_+^3$ neighbouring of the identity matrix $I \in \mathbb{M}^3$ and where

$$E = E(F) = \frac{1}{2}(F^T F - I). \quad (1.2)$$

For $n \in \mathbb{N}^*$, we denote by $\mathbb{M}^n$ the set of all $n \times n$ real matrices and by $\mathbb{M}_+^n$ the subset of $\mathbb{M}^n$ of the matrices A verifying $\det A > 0$. For $A \in \mathbb{M}^n$, A^T is the transpose of the matrix A and $\text{tr}A$ the trace of A .

The **positive** constants λ and μ are called the **Lamé constants** of the material under consideration (see [Ci.₁] or [Ci.₂] for a complete point of view about these notions).

[†] Université de Metz, U.F.R. "M.I.M." Département de Mathématiques et Informatique, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01 (FRANCE)

Now, we call **Saint Venant-Kirchhoff** material, a homogeneous, isotropic, elastic material, whose response function $\hat{\Sigma}$ associated to the second Piola-Kirchhoff stress tensor is defined by (1.1) where we have neglected the term $o(E)$, that is to say such that

$$\forall F \in \mathbb{M}_+^3, \quad \hat{\Sigma}(F) = \lambda(\text{tr} E)I + 2\mu E$$

One can prove that such a material is a hyperelastic material and that its stored energy function $\hat{W} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$\hat{W}(F) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr} E)^2 + \mu \text{tr}(E^2) \quad (1.3)$$

(see [Ci.₁] Th. 4.4-3, p. 155 or [Ci.₂] Th. 1.4-7, p. 76).

“... Since Saint Venant-Kirchhoff materials are the simplest among the nonlinear models (in the sense that they are the simplest that are compatible with (1.1)), they are quite popular in actual computations ... but the relative simplicity of their practical implementation is more than compensated by various shortcomings.

... their associated stored energy function is not polyconvex...” (P.G. Ciarlet - 1988).

See [B.], [Ci.₁], [Ci.₂] or [D.] for details about polyconvexity, and [Ra.] for the non-polyconvexity of the stored energy function of a Saint Venant-Kirchhoff material.

On the other hand, if $W : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is the stored energy function associated to some hyperelastic material, it is suitable for physical reasons, that one has

$$\lim_{\det F \rightarrow 0^+} W(F) = +\infty \quad (1.4)$$

(see [Ci.₁] or [Ci.₂]). In this case, it is usual to extend W to a continuous function defined of $\mathbb{M}^3$ into $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ by

$$W(F) = +\infty \quad \text{if} \quad \det F \leq 0.$$

The Saint Venant-Kirchhoff stored energy function does not satisfy (1.4) and thus we can not obtain an extension as above.

“... At their best, Saint Venant-Kirchhoff materials can be only expected to be useful in a narrow range of ‘small’ strains E , as indeed they should be from their very definition ; this is why such materials are often referred to as ‘large displacement-small strain’ models. In spite of these various inadequacies, Saint Venant-Kirchhoff materials can be nevertheless expected to perform better than the linearized models that are so often used...” (P.G. Ciarlet - 1988).

It turns out that we can consider the equality (1.3) as a definition of $\hat{W}$ which is not only valid on a neighbourhood of I , but on $\mathbb{M}_+^3$ and even on the whole set $\mathbb{M}^3$.

As we have said above, the function $\hat{W}$ is not polyconvex on $\mathbb{M}_+^3$; in fact, we know more since the Saint Venant-Kirchhoff stored energy function is not rank-one-convex on

$\mathbb{M}_+^3$ (see [A.] or [Br.]). In this paper, we are interested in the **rank-one convexity domain** of $\hat{W}$, in other terms in the greatest subset of $\mathbb{M}^n$ on which $\hat{W}$ is rank-one-convex, and we are going to characterize exactly this domain.

So, from now on, we will denote by $\hat{W}$ the function defined on $\mathbb{M}^n$ (with $n \geq 2$) by the equality (1.3).

2. The “Legendre-Hadamard” condition for $\hat{W}$

First, let us recall the definition of rank-one-convexity on a subset U of $\mathbb{M}^n$. A function $W : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is said **rank-1-convex on U** if

$$\forall F, G \in U \quad \text{such that} \quad [F, G] \subset U \quad \text{and} \quad \text{rank}(F - G) = 1$$

one has

$$\forall \lambda \in [0, 1], \quad W(\lambda F + (1 - \lambda)G) \leq \lambda W(F) + (1 - \lambda)W(G).$$

It is well known that, if W is twice continuously differentiable, then W is rank-1-convex on U if and only if one has

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}^n} \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 W(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \geq 0, \quad \forall F \in U. \quad (2.1)$$

(Legendre-Hadamard condition on U)

(see [B.] Th. 3.3, p. 352).

Now, let us introduce some notation ; for $F, G \in \mathbb{M}^n$ we set $F : G = \text{tr}(F^T G)$ the matrix inner product in $\mathbb{M}^n$ and $|F| = (F : F)^{\frac{1}{2}}$ the corresponding norm.

Next, if $a, b \in \mathbb{R}^n$ let us denote by $a \otimes b$ the $n \times n$ matrix defined by

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j.$$

Therefore, if the vectors a and b are column matrices one has

$$a \otimes b = ab^T \quad (2.2)$$

and the euclidean inner product in $\mathbb{R}^n$ (respectively the euclidean norm in $\mathbb{R}^n$) can be written

$$a \cdot b = a^T b \quad (\text{respectively} \quad |a| = (a^T a)^{\frac{1}{2}}). \quad (2.3)$$

Using (2.2) et (2.3) it is easy to verify that, for $F \in \mathbb{M}^n$ and $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$, the following identities hold :

$$(a \otimes b)^T = b \otimes a \quad (2.4)$$

$$F(a \otimes b) = (Fa) \otimes b \quad (2.5)$$

$$(a \otimes b)F = a \otimes (F^T b) \quad (2.6)$$

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = (b.c)(a \otimes d) \quad (2.7)$$

$$\text{tr}(a \otimes b) = a.b \quad (2.8)$$

$$F : (a \otimes b) = Fb.a = F^T a.b \quad (2.9)$$

$$(a \otimes b) : (c \otimes d) = (a.c)(b.d) \quad (2.10)$$

$$|a \otimes b|^2 = |a|^2 |b|^2 \quad (2.11)$$

Since it is clear that the Saint Venant-Kirchhoff stored energy function $\hat{W}$ is indefinitely differentiable we can compute $\frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}$ and use the criterion (2.1) to study the rank-1-convexity of $\hat{W}$. We have the following result :

Lemma 2.1 : *For $F \in \mathbb{M}^n$ and $a, b \in \mathbb{R}^n$ one has*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l &= \left(\frac{\lambda}{2} (|F|^2 - n) |b|^2 + \mu (|Fb|^2 - |b|^2) \right) |a|^2 \\ &\quad + (\lambda + \mu) (F^T a.b)^2 + \mu |F^T a|^2 |b|^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Proof : Let us consider $F \in \mathbb{M}^n$ and $a, b \in \mathbb{R}^n$. First, since $E = E^T$ (where E is defined by (1.2)), we can write

$$\hat{W}(F) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} E)^2 + \mu |E|^2.$$

Next, for a matrix $H \in \mathbb{M}^n$ the quantity

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} H_{ij} H_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varphi_F(H)$$

is the second-order term of the Taylor expansion in H of $\hat{W}(F + H)$.

We have

$$E(F + H) = \frac{1}{2} (F^T F - I + F^T H + H^T F + H^T H) \quad (2.13)$$

thus

$$\text{tr}(E(F + H)) = \frac{1}{2} (|F|^2 - n + 2F : H + |H|^2)$$

then the second-order term in H of $(\text{tr}(E(F + H)))^2$ is

$$\frac{1}{4} \left((2F : H)^2 + 2(|F|^2 - n)|H|^2 \right).$$

On the other hand, by using (2.13) and the equality $|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2A : B$ we see that the second-order term in H of $|E(F + H)|^2$ is

$$\frac{1}{4} \left(|F^T H + H^T F|^2 + 2(F^T F - I) : H^T H \right)$$

therefore we deduce that for any matrix $H \in \mathbb{M}^n$, one has

$$\begin{aligned} \varphi_F(H) &= \frac{\lambda}{2} \left(2(F : H)^2 + (|F|^2 - n)|H|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \left(|F^T H + H^T F|^2 + 2(F^T F - I) : H^T H \right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Now, for $a, b \in \mathbb{R}^n$ and $H = a \otimes b$, (2.14) can be written

$$\begin{aligned} \varphi_F(a \otimes b) &= \frac{\lambda}{2} \left(2(F : (a \otimes b))^2 + (|F|^2 - n)|a \otimes b|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \left(|F^T(a \otimes b) + (a \otimes b)^T F|^2 + 2(F^T F - I) : (a \otimes b)^T(a \otimes b) \right) \end{aligned}$$

which becomes, by using the equalities (2.4)-(2.11)

$$\begin{aligned} \varphi_F(a \otimes b) &= \frac{\lambda}{2} \left(2(F^T a \cdot b)^2 + (|F|^2 - n)|a|^2|b|^2 \right) \\ &\quad + \frac{\mu}{2} \left(|(F^T a) \otimes b + b \otimes (F^T a)|^2 + 2(F^T F - I) : |a|^2(b \otimes b) \right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

But, one has

$$\begin{aligned} |(F^T a) \otimes b + b \otimes (F^T a)|^2 &= |(F^T a) \otimes b|^2 + |b \otimes (F^T a)|^2 + 2((F^T a) \otimes b) : (b \otimes (F^T a)) \\ &= 2|F^T a|^2|b|^2 + 2(F^T a \cdot b)^2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (F^T F - I) : |a|^2(b \otimes b) &= |a|^2(F^T F : (b \otimes b) - I : (b \otimes b)) \\ &= |a|^2(|Fb|^2 - |b|^2) \end{aligned}$$

in such way that (2.15) gives

$$\begin{aligned}\varphi_F(a \otimes b) &= \left(\frac{\lambda}{2}(|F|^2 - n)|b|^2 + \mu(|Fb|^2 - |b|^2) \right) |a|^2 \\ &\quad + (\lambda + \mu)(F^T a \cdot b)^2 + \mu|F^T a|^2 |b|^2.\end{aligned}$$

The proof is now complete. $\square$

Before to go on, let us recall what are the singular values of a matrix. Let $F \in \mathbb{M}^n$; if we denote by $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ the eigenvalues of the symmetric matrix $F^T F$, one has $\forall i = 1, \dots, n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ and the n nonnegative numbers $v_i = \sqrt{\alpha_i}$ are called the **singular values** of F . Then, for some orthogonal matrices Q_1 and Q_2 , we have

$$F = Q_1 \begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{pmatrix} Q_2. \quad (2.16)$$

Next, we set $\mathcal{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$.

Proposition 2.1 : *Let $F \in \mathbb{M}^n$ and $v_1, \dots, v_n$ the singular values of F . Then*

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}^n} \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \geq 0 \iff \inf_{a, b \in \mathcal{S}^{n-1}} f_{v_1, \dots, v_n}(a, b) \geq 0 \quad (2.17)$$

where $f_{v_1, \dots, v_n}(a, b)$ is given by

$$\begin{aligned}f_{v_1, \dots, v_n}(a, b) &= \frac{\lambda}{2}(v_1^2 + \dots + v_n^2) + \mu(v_1^2(a_1^2 + b_1^2) + \dots + v_n^2(a_n^2 + b_n^2)) \\ &\quad + (\lambda + \mu)(v_1 a_1 b_1 + \dots + v_n a_n b_n)^2 - \left(\frac{n\lambda}{2} + \mu\right).\end{aligned}$$

Proof : Since the functions

$$a \longmapsto \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \quad \text{and} \quad b \longmapsto \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l$$

are homogeneous polynomials of degree 2, we can write

$$\begin{aligned}&\inf_{a, b \in \mathbb{R}^n} \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \geq 0 \\ &\iff \inf_{a, b \in \mathcal{S}^{n-1}} \sum_{i, j, k, l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \geq 0 \\ &\iff \inf_{a, b \in \mathcal{S}^{n-1}} \left[\frac{\lambda}{2}(|F|^2 - n) + \mu(|F^T a|^2 + |Fb|^2 - 1) + (\lambda + \mu)(F^T a \cdot b)^2 \right] \geq 0 \quad (2.18)\end{aligned}$$

by using, for $a, b \in \mathcal{S}^{n-1}$, the identity (2.12) of the previous lemma.

Now, if we use (2.16) and denote by V the matrix $\begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{pmatrix}$, we get

$$\begin{aligned}
(2.18) &\iff \inf_{a,b \in \mathcal{S}^{n-1}} \left[\frac{\lambda}{2} (|Q_1 V Q_2|^2 - n) + \mu (|Q_2^T V Q_1^T a|^2 + |Q_1 V Q_2 b|^2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + (\lambda + \mu) (Q_2^T V Q_1^T a \cdot b)^2 \right] \geq 0 \\
&\iff \inf_{a,b \in \mathcal{S}^{n-1}} \left[\frac{\lambda}{2} (|V|^2 - n) + \mu (|V(Q_1^T a)|^2 + |V(Q_2 b)|^2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + (\lambda + \mu) (V(Q_1^T a) \cdot (Q_2 b))^2 \right] \geq 0 \\
&\iff \inf_{a,b \in \mathcal{S}^{n-1}} \left[\frac{\lambda}{2} (|V|^2 - n) + \mu (|Va|^2 + |Vb|^2 - 1) + (\lambda + \mu) (Va \cdot b)^2 \right] \geq 0 \\
&\iff \inf_{a,b \in \mathcal{S}^{n-1}} f_{v_1, \dots, v_n}(a, b) \geq 0.
\end{aligned}$$

So, we have (2.17). □

Now, we are able to obtain some results about the rank-1-convexity domain of $\hat{W}$.

3. The rank-one convexity domain of $\hat{W}$

Let us denote by $\hat{\mathcal{D}}$ the rank-1-convexity domain of $\hat{W}$. The Legendre-Hadamard condition (2.1) implies that

$$\hat{\mathcal{D}} = \{F \in \mathbb{M}^n ; \inf_{a,b \in \mathbb{R}^n} \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 \hat{W}(F)}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}} a_i b_j a_k b_l \geq 0\}$$

which can be written, by using proposition 2.1

$$\hat{\mathcal{D}} = \{F \in \mathbb{M}^n ; \inf_{a,b \in \mathcal{S}^{n-1}} f_{v_1, \dots, v_n}(a, b) \geq 0\} \quad (3.1)$$

where $v_1, \dots, v_n$ are the singular values of F .

For a matrix $F \in \mathbb{M}^n$ we would like to obtain necessary and sufficient conditions, in terms of its singular values, in order to have $F \in \hat{\mathfrak{D}}$.

Our main result will rely on the following lemma :

Lemma 3.1 : *Let $v_1, \dots, v_n$ be some real numbers such that $0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n$, and g be the function defined on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ by*

$$g(a, b) = \mu(v_1^2(a_1^2 + b_1^2) + \dots + v_n^2(a_n^2 + b_n^2)) + (\lambda + \mu)(v_1 a_1 b_1 + \dots + v_n a_n b_n)^2.$$

Next, let us denote by K the following set

$$K = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq i < j \leq n \text{ and } (\lambda + 2\mu)v_i \geq \mu v_j \right\}.$$

If $\mathcal{I}_g = \inf_{x, y \in \mathcal{S}^{n-1}} g(x, y)$ then

$$\mathcal{I}_g = \begin{cases} (\lambda + 3\mu)v_1^2 & \text{if } (1, 2) \notin K \\ \min_{(i, j) \in K} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(-\mu v_i^2 + 2(\lambda + 2\mu)v_i v_j - \mu v_j^2 \right) & \text{if } (1, 2) \in K. \end{cases}$$

Proof : First of all, let us denote by $e^1, \dots, e^n$ the canonical basis of $\mathbb{R}^n$, and recall that the constantes λ, μ are positive.

If $v_1 = 0$, then $g(e^1, e^1) = 0$ and since $g \geq 0$, we get $\mathcal{I}_g = 0$, in such way that the lemma is proved in this case.

So, from now on, we will assume $v_1 > 0$, and we will denote by $I_1, \dots, I_p$ the subsets of $\{1, \dots, n\}$ defined by $I_1 \cup \dots \cup I_p = \{1, \dots, n\}$ and

$$\begin{cases} i, j \in I_k \implies v_i = v_j \\ i \in I_k, j \in I_l \text{ and } k < l \implies v_i < v_j. \end{cases}$$

Since $\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}$ is a compact set,

$$\mathcal{I}_g = g(a, b) \tag{3.2}$$

for some $(a, b) \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}$.

Now, let us divide the rest of the proof in two steps.

Step 1 : Here we are going to give necessary conditions in order to have (3.2). So, let $(a, b) \in \mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}^{n-1}$ satisfying (3.2) ; then, there exist Lagrange multipliers α and β such that $\forall i = 1, \dots, n$ one has

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left(g(a, b) + \alpha(|a|^2 - 1) + \beta(|b|^2 - 1) \right) = \frac{\partial}{\partial b_i} \left(g(a, b) + \alpha(|a|^2 - 1) + \beta(|b|^2 - 1) \right) = 0.$$

Therefore, $\forall i = 1, \dots, n$ one has

$$\mu v_i^2 a_i + (\lambda + \mu) c v_i b_i + \alpha a_i = 0 \quad (3.3_i)$$

and

$$\mu v_i^2 b_i + (\lambda + \mu) c v_i a_i + \beta b_i = 0 \quad (3.4_i)$$

where we have set $c = \sum_{j=1}^n v_j a_j b_j$.

Now, multiplying (3.3_i) by $\frac{b_i}{v_i}$ and adding for $i = 1, \dots, n$ we get

$$(\lambda + 2\mu)c + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{v_i} = 0. \quad (3.5)$$

From (3.4_i) we obtain, by the same way

$$(\lambda + 2\mu)c + \beta \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{v_i} = 0. \quad (3.6)$$

So, (3.5) and (3.6) imply that

$$(\alpha - \beta) \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{v_i} = 0.$$

– In a first case, let us assume that one has $\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{v_i} = 0$; then by (3.5), $c = 0$. Therefore, (3.3_i) and (3.4_i) can be written

$$(\mu v_i^2 + \alpha) a_i = 0 \quad \text{and} \quad (\mu v_i^2 + \beta) b_i = 0$$

and thus, since this equalities are valid for all $i = 1, \dots, n$, and that α (respectively β) does not depend on i , we get necessarily

$$a = \sum_{i \in I_k} a_i e^i \quad \text{and} \quad b = \sum_{i \in I_l} b_i e^i.$$

Consequently, since $c = 0$ and $a, b \in \mathcal{S}^{n-1}$, we easily deduce

$$g(a, b) = \mu(v_i^2 + v_j^2) \quad \text{for some } i, j. \quad (3.7)$$

– Now, let us assume that $\alpha = \beta$; then we can suppose $c \neq 0$ (indeed, if $c = 0$, then thanks to (3.3_i), we obtain $\alpha \neq 0$ and by (3.5), $\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{v_i} = 0$ which brought us back to the previous case). Next, if we multiply (3.3_i) by b_i and (3.4_i) by a_i , we get by subtraction

$$(\lambda + \mu) c v_i (b_i^2 - a_i^2) = 0 \quad \text{implying that} \quad b_i^2 = a_i^2 \quad \forall i. \quad (3.8)$$

Let $i \in \{1, \dots, n\}$; using (3.8), one has, either

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_i = b_i = 0 & \\ \text{or} & \\ a_i = b_i \neq 0 & \text{and thus } c = -\frac{\alpha + \mu v_i^2}{(\lambda + \mu)v_i} \text{ by (3.3}_i\text{)} \\ \text{or} & \\ a_i = -b_i \neq 0 & \text{and thus } c = \frac{\alpha + \mu v_i^2}{(\lambda + \mu)v_i} \text{ by (3.3}_i\text{)}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Let us remark that the equality

$$\frac{\alpha + \mu v_i^2}{(\lambda + \mu)v_i} = \frac{\alpha + \mu v_j^2}{(\lambda + \mu)v_j}$$

implies $(v_j - v_i)(\alpha - \mu v_i v_j) = 0$ and $v_i = v_j$ (since, if we multiply (3.3_i) by a_i , and add for $i = 1, \dots, n$, we get $\mu \sum_{i=1}^n v_i^2 a_i^2 + (\lambda + \mu)c^2 + \alpha = 0$ and $\alpha \leq 0$).

Consequently, if we denote by A and B the following subset of $\{1, \dots, n\}$

$$A = \{i ; a_i = b_i \neq 0\} \quad \text{and} \quad B = \{i ; a_i = -b_i \neq 0\}$$

we get for some $k, l \in \{1, \dots, p\}$

$$A \subset I_k \quad \text{and} \quad B \subset I_l.$$

$$\rightarrow \text{If } A = \emptyset \text{ then } g(a, b) = (\lambda + 3\mu)v_j^2 \text{ for } j \in I_l. \quad (3.10)$$

$$\rightarrow \text{If } B = \emptyset \text{ then } g(a, b) = (\lambda + 3\mu)v_i^2 \text{ for } j \in I_k. \quad (3.11)$$

$\rightarrow$ If $A \neq \emptyset$ and $B \neq \emptyset$ then $k \neq l$ (indeed, if $k = l$, then (3.9) implies $c = 0$, but we have supposed the opposite). So, a and b are of the form

$$a = \sum_{i \in I_k} a_i e^i + \sum_{i \in I_l} a_i e^i \quad \text{and} \quad b = \sum_{i \in I_k} a_i e^i - \sum_{i \in I_l} a_i e^i \quad (3.12)$$

and thus, if $i \in I_k$ and $j \in I_l$, we have $i \neq j$ and

$$g(a, b) = 2\mu(v_i^2 x^2 + v_j^2 y^2) + (\lambda + \mu)c^2 \quad (3.13)$$

where $x^2 = \sum_{s \in I_k} a_s^2$ and $y^2 = \sum_{s \in I_l} a_s^2$.

But, using (3.9), we can write

$$c = -\frac{\alpha + \mu v_i^2}{(\lambda + \mu)v_i} = \frac{\alpha + \mu v_j^2}{(\lambda + \mu)v_j}$$

which gives easily

$$\alpha = -\mu v_i v_j \quad \text{and} \quad c = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(v_j - v_i). \quad (3.14)$$

On the other hand, by definition of c and since $y^2 = 1 - x^2$, we have

$$c = v_i x^2 - v_j y^2 = (v_i + v_j)x^2 - v_j$$

implying that

$$x^2 = \frac{-\mu v_i + (\lambda + 2\mu)v_j}{(\lambda + \mu)(v_i + v_j)} \quad \text{and} \quad y^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)v_i - \mu v_j}{(\lambda + \mu)(v_i + v_j)}. \quad (3.15)$$

By using (3.13), (3.14) and (3.15) we get

$$g(a, b) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(-\mu v_i^2 + 2(\lambda + 2\mu)v_i v_j - \mu v_j^2 \right). \quad (3.16)$$

So, we have proved that, if $\mathcal{I}_g = g(a, b)$ then necessarily, $g(a, b)$ is given by (3.7), (3.10), (3.11) or (3.16).

Step 2 : Now, we can compute $\mathcal{I}_g$ according to the values of $\frac{v_1}{v_2}$.

First, let us denote by h the function

$$h(x, y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(-\mu x^2 + 2(\lambda + 2\mu)xy - \mu y^2 \right).$$

Now, let us remark that, if $K = \emptyset$, then (3.15) is not possible for $i \neq j$ and thus (3.12) does not hold. Consequently, thanks to (3.7), (3.10), (3.11) and (3.16) we get

$$\mathcal{I}_g = \begin{cases} \min \left[(\lambda + 3\mu)v_1^2 ; \mu(v_1^2 + v_2^2) \right] & \text{if } K = \emptyset \\ \min \left[(\lambda + 3\mu)v_1^2 ; \mu(v_1^2 + v_2^2) ; \min_{(i,j) \in K} h(v_i, v_j) \right] & \text{if } K \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.17)$$

– If $(1, 2) \in K$ then

$$\min_{(i,j) \in K} h(v_i, v_j) \leq h(v_1, v_2) \leq \min \left[(\lambda + 3\mu)v_1^2 ; \mu(v_1^2 + v_2^2) \right]$$

the last inequality arising from the following identities

$$\begin{cases} h(v_1, v_2) - \mu(v_1^2 + v_2^2) = -\frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}(v_1 - v_2)^2 \\ h(v_1, v_2) - (\lambda + 3\mu)v_1^2 = -\frac{1}{\lambda + \mu}(\mu v_1 - (\lambda + 2\mu)v_2)^2. \end{cases}$$

So, by using (3.17) we obtain

$$(1, 2) \in K \implies \mathcal{I}_g = \min_{(i,j) \in K} h(v_i, v_j).$$

– If $(1, 2) \notin K$ then

$$(\lambda + 3\mu)v_1^2 - \mu(v_1^2 + v_2^2) = (\lambda + 2\mu)v_1^2 - \mu v_2^2 < 0$$

(indeed, $\frac{v_1}{v_2} < \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} < 1$ and thus $\frac{v_1^2}{v_2^2} < \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}$ which implies that $(\lambda + 2\mu)v_1^2 < \mu v_2^2$).

Therefore, taking into account (3.17), we can write when $(1, 2) \notin K$

$$\mathcal{I}_g = \begin{cases} (\lambda + 3\mu)v_1^2 & \text{if } K = \emptyset \\ \min \left[(\lambda + 3\mu)v_1^2 ; \min_{(i,j) \in K} h(v_i, v_j) \right] & \text{if } K \neq \emptyset. \end{cases}$$

Finally, to conclude, it remains to show that

$$\forall (i, j) \in K, \quad h(v_i, v_j) - (\lambda + 3\mu)v_1^2 \geq 0 \quad (3.18)$$

holds when $K \neq \emptyset$ and $(1, 2) \notin K$.

Let $(i, j) \in K$; then

$$(\lambda + 2\mu)v_i - \mu v_j \geq 0. \quad (3.19)$$

Next, $(1, 2) \notin K$ and thus

$$(\lambda + 2\mu)v_1 \leq \mu v_2 \leq \mu v_j. \quad (3.20)$$

By using (3.19) and (3.20) we get

$$((\lambda + 2\mu)v_1 - \mu v_j)((\lambda + 2\mu)v_i - \mu v_j) \leq 0$$

that we can write

$$\mu^2 v_j^2 - \mu(\lambda + 2\mu)v_i v_j \leq -(\lambda + 2\mu)^2 v_1 v_i + \mu(\lambda + 2\mu)v_1 v_j.$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
h(v_i, v_j) - (\lambda + 3\mu)v_1^2 &= -\frac{1}{\lambda + \mu} \left(\mu^2 v_i^2 - 2\mu(\lambda + 2\mu)v_i v_j + \mu^2 v_j^2 + (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)v_1^2 \right) \\
&\geq -\frac{1}{\lambda + \mu} \left(\mu^2 v_i^2 - \mu(\lambda + 2\mu)v_i v_j + (\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)v_1^2 \right. \\
&\quad \left. - (\lambda + 2\mu)^2 v_1 v_i + \mu(\lambda + 2\mu)v_1 v_j \right) \\
&= -\frac{1}{\lambda + \mu} \left(\mu^2 v_i^2 - \mu(\lambda + 2\mu)v_i v_j + (\lambda + 2\mu)^2 v_1^2 - \mu^2 v_1^2 \right. \\
&\quad \left. - (\lambda + 2\mu)^2 v_1 v_i + \mu(\lambda + 2\mu)v_1 v_j \right) \\
&= -\frac{1}{\lambda + \mu} \left(\mu^2(v_i - v_1)(v_i + v_1) - \mu(\lambda + 2\mu)v_j(v_i - v_1) \right. \\
&\quad \left. - (\lambda + 2\mu)^2 v_1(v_i - v_1) \right) \\
&= \frac{v_i - v_1}{\lambda + \mu} \left(\mu(\lambda + 2\mu)v_j + (\lambda + 2\mu)^2 v_1 - \mu^2(v_i + v_1) \right) \\
&= \frac{v_i - v_1}{\lambda + \mu} \left((\lambda + 3\mu)(\lambda + \mu)v_1 + \mu(\lambda + 2\mu)v_j - \mu^2 v_i \right) \\
&\geq 0 \quad \text{since } v_j \geq v_i \text{ and } v_i \geq v_1.
\end{aligned}$$

So, (3.18) holds, and the proof is complete. $\square$

The following theorem gives the requested characterization of $\hat{\mathfrak{D}}$.

Theorem 3.1 : *Let $F \in \mathbb{M}^n$ and $v_1 \leq \dots \leq v_n$ be the singular values of F . Let us denote by $K(F)$ the following set*

$$K(F) = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq i < j \leq n \text{ and } (\lambda + 2\mu)v_i \geq \mu v_j \right\}.$$

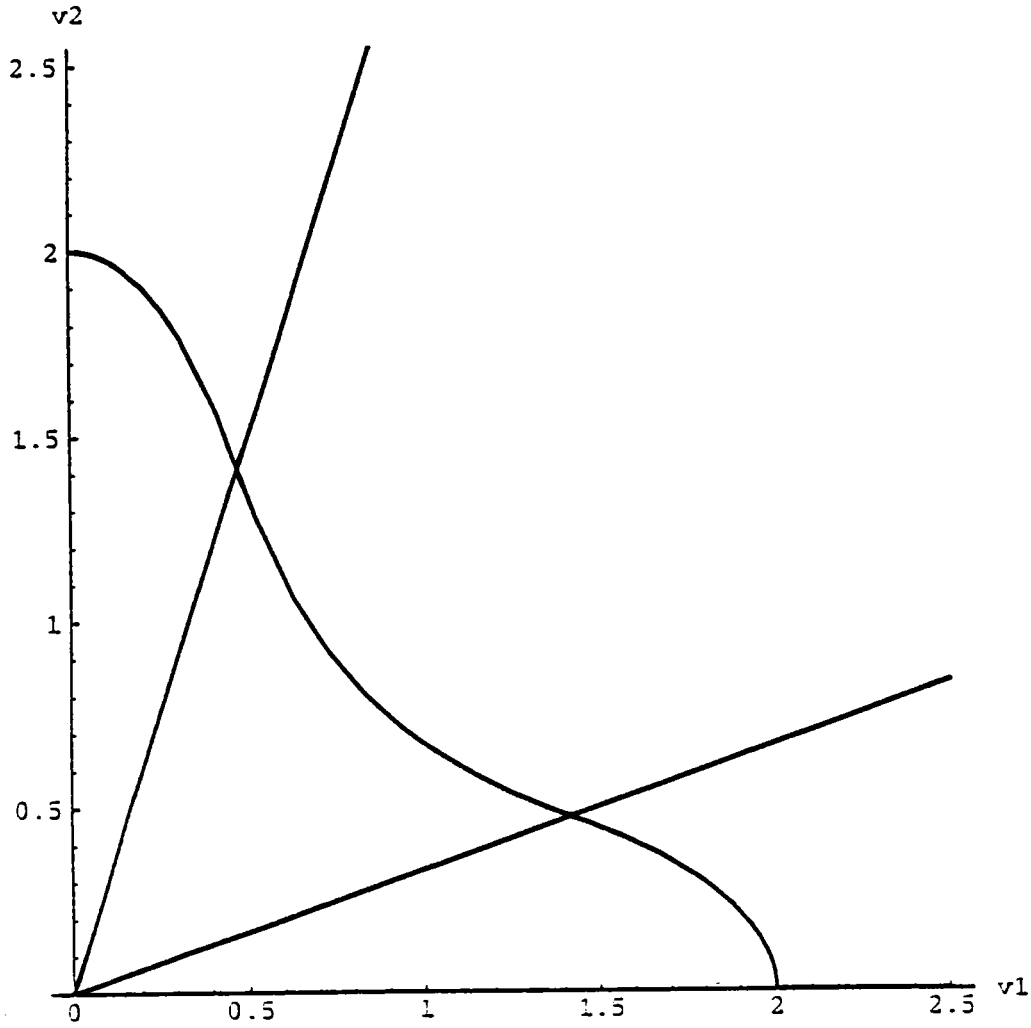
(i) *If $(1, 2) \notin K(F)$ then, $F \in \hat{\mathfrak{D}}$ if and only if*

$$(\lambda + 3\mu)v_1^2 \geq \left(\frac{n\lambda}{2} + \mu \right) - \frac{\lambda}{2}(v_1^2 + \dots + v_n^2)$$

(ii) *If $(1, 2) \in K(F)$ then, $F \in \hat{\mathfrak{D}}$ if and only if*

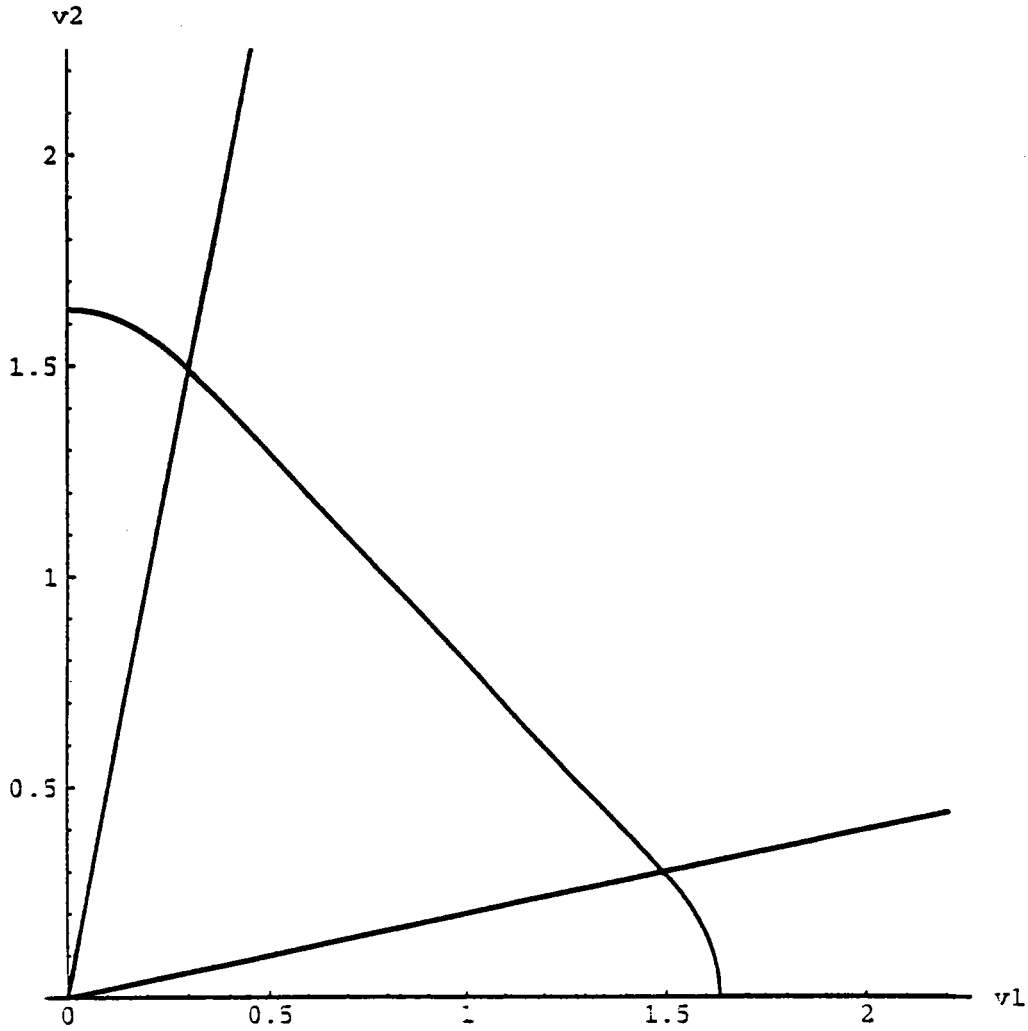
$$\min_{(i,j) \in K(F)} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(-\mu v_i^2 + 2(\lambda + 2\mu)v_i v_j - \mu v_j^2 \right) \geq \left(\frac{n\lambda}{2} + \mu \right) - \frac{\lambda}{2}(v_1^2 + \dots + v_n^2).$$

Figure 1 : $\frac{\lambda}{\mu} = 1$



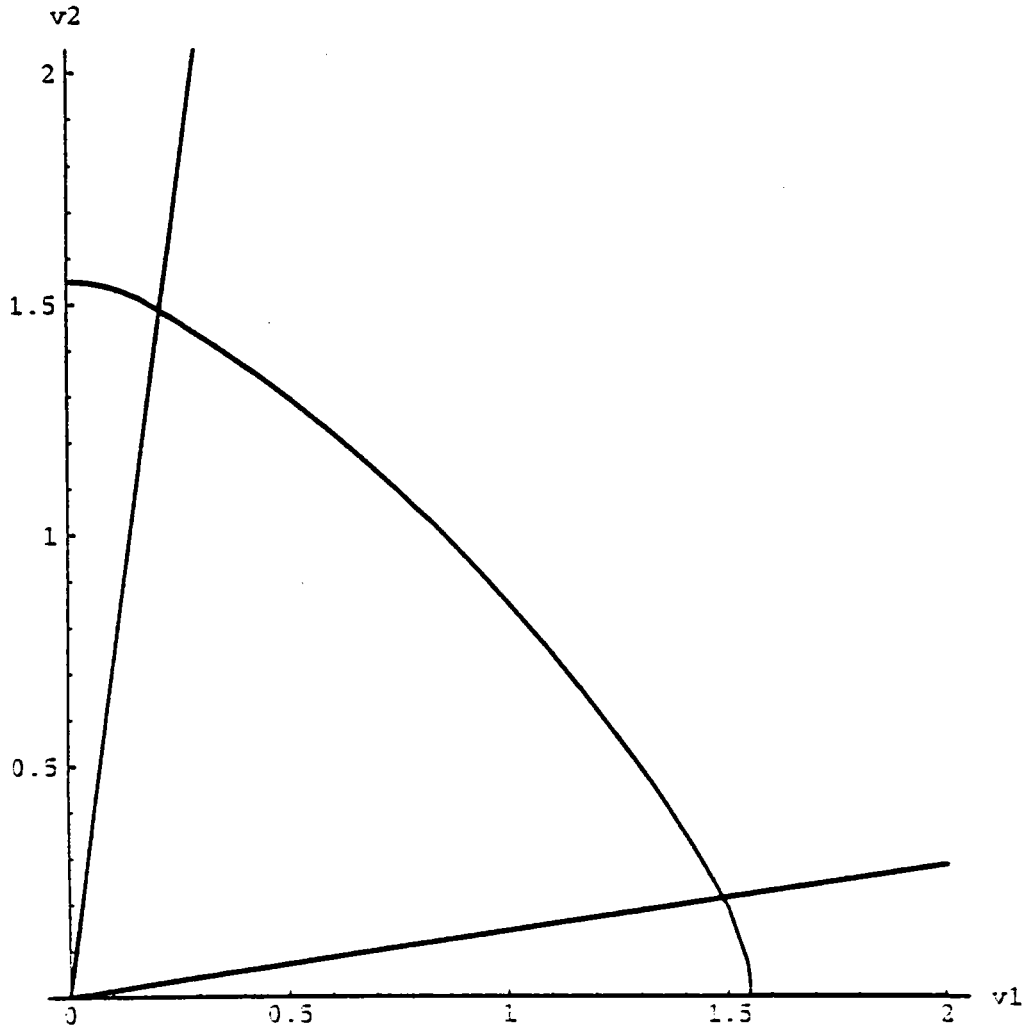
$$(v_1, v_2) \in \hat{\mathcal{V}} \iff \begin{cases} 9v_1^2 + v_2^2 \geq 4 & \text{when } 0 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{1}{3} \\ v_1 v_2 \geq \frac{2}{3} & \text{when } \frac{1}{3} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq 3 \\ v_1^2 + 9v_2^2 \geq 4 & \text{when } 3 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq +\infty. \end{cases}$$

Figure 2 : $\frac{\lambda}{\mu} = 3$



$$(v_1, v_2) \in \hat{\mathcal{V}} \iff \begin{cases} 15v_1^2 - 3v_2^2 \geq 8 & \text{when } 0 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{1}{5} \\ v_1 + v_2 \geq \frac{4}{\sqrt{5}} & \text{when } \frac{1}{5} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq 5 \\ 3v_1^2 - 15v_2^2 \geq 8 & \text{when } 5 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq +\infty. \end{cases}$$

Figure 3 : $\frac{\lambda}{\mu} = 5$



$$(v_1, v_2) \in \hat{\mathcal{V}} \iff \begin{cases} 21v_1^2 + 5v_2^2 \geq 12 & \text{when } 0 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq \frac{1}{7} \\ v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2 \geq \frac{18}{17} & \text{when } \frac{1}{7} \leq \frac{v_1}{v_2} \leq 7 \\ 5v_1^2 + 21v_2^2 \geq 12 & \text{when } 7 \leq \frac{v_1}{v_2} \leq +\infty. \end{cases}$$

Now, for $F \in \mathbb{M}^2$ and $v_1 \leq v_2$ its singular values, one has

$$v_1^2 + v_2^2 = |F|^2 \quad \text{and} \quad v_1 v_2 = \det F. \quad (4.1)$$

Moreover, if we denote by $\| \cdot \|$ the matrix norm defined on $\mathbb{M}^2$ by

$$\|F\|^2 = \sup_{|x|=1} |Fx|^2$$

where $| \cdot |$ denotes the euclidean norm (see (2.3)). It is well known that $\|F\| = v_2$ and thus

$$(\lambda + 2\mu)v_1 \geq \mu v_2 \iff (\lambda + 2\mu) \det F \geq \mu \|F\|^2$$

in such way that theorem 4.1 leads to :

Theorem 4.2 : *Let $F \in \mathbb{M}^2 \setminus \{0\}$.*

(i) *If $(\lambda + 2\mu) \det F \leq \mu \|F\|^2$, then $F \in \hat{\mathcal{D}}$ if and only if*

$$\frac{\lambda}{2} \|F\|^4 - (\lambda + \mu) \|F\|^2 + 3\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) (\det F)^2 \geq 0.$$

(ii) *If $(\lambda + 2\mu) \det F \geq \mu \|F\|^2$, then $F \in \hat{\mathcal{D}}$ if and only if*

$$\frac{\lambda - \mu}{2} |F|^2 + 2\mu \det F \geq \frac{(\lambda + \mu)^2}{\lambda + 2\mu}.$$

Proof : It is immediate since

$$v_1 = \frac{\det F}{\|F\|} \quad (\text{if } F \neq 0) \quad \text{and} \quad v_2 = \|F\|.$$

□

Remark 4.1 : This can be express also without using the norm $\| \cdot \|$; indeed (4.1) implies that v_1^2 and v_2^2 are the solutions of the following equations

$$X^2 - |F|^2 X + (\det F)^2 = 0$$

and thus

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left(|F|^2 \pm \sqrt{|F|^4 - 4(\det F)^2} \right).$$

Acknowledgements : The authors give their sincere thanks to M. Chipot, A. Iggidr and I. Shafrir from the University of Metz, for pertinent remarks about some parts of this paper.

REFERENCES

- [A.] J. J. Alibert : *Variétés splines en élasticité non linéaire*. Thesis, University of Toulouse (1990).
- [B.] J. M. Ball : *Convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Analysis. 63 (1977) p. 337-403.
- [Br.] B. Brighi, *Sur quelques problèmes de Calcul des Variations et l'approximation de leur fonctionnelle relaxée*. Thesis, University of Metz (1991).
- [Ci.₁] P. G. Ciarlet : *Mathematical Elasticity, Volume 1 : Three-dimensional elasticity*. North-Holland, (1988).
- [Ci.₂] P. G. Ciarlet : *Elasticité Tridimensionnelle*. Masson, Paris, (1986).
- [D.] B. Dacorogna : *Direct Methods in the Calculus of Variations*. Applied math. Sciences # 78, Springer Verlag (1989).
- [Ra.] A. Raoult : *Non-polyconvexity of the stored energy function of a Saint Venant-Kirchhoff material*. Aplikace Matematiky 6, (1986), p. 417-419.

PARTIE II

RELAXATION DE QUELQUES FONCTIONNELLES EN CALCUL DES VARIATIONS.

I- RELAXATION DE FONCTIONNELLES DU TYPE ENERGIE DE SAINT VENANT - KIRCHHOFF

1. INTRODUCTION

On considère le problème variationnel du type :

$$(P) \quad \text{Inf} \{ I_1(u) = \int_{\Omega} W(\nabla u(x)) dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, $W : \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$, $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ et ∇u désigne la matrice du gradient de u .

On associe au problème (P) un problème relaxé noté (QP)

$$(QP) \quad \text{Inf} \{ I_2(u) = \int_{\Omega} QW(\nabla u(x)) dx : u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

où

$$QW(F) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} W(F + \nabla \varphi(x)) dx. \quad (1.1)$$

La fonction QW est appelée l'enveloppe $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ quasiconvexe de W .

Le second membre de (1.1) est continu, indépendant du domaine Ω et quasiconvexe (W est dite quasi convexe si $QW = W$) (voir pour plus de détails Morrey [22], Dacorogna [11], [14], [16]).

Notre étude qui consiste à calculer explicitement l'enveloppe quasi-convexe QW de certaines fonctionnelles est motivée par le fait que la quasi-convexité de W est une condition nécessaire et suffisante pour que I_1 soit séquentiellement faible $\star$ semi continue inférieurement dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)$ (voir [21]). Cependant, cette condition est très difficile à vérifier dans la pratique.

En l'absence de la quasi convexité de W (convexité dans le cas scalaire $n = 1$ ou $m = 1$) le problème (P) peut ne pas admettre de solutions, ce qui conduit en général à étudier le problème relaxé (QP) . On a (cf. [11]) $\inf(P) = \inf(QP)$ et sous certaines conditions de coercivité cf. [14], le problème (QP) admet des solutions et l'on a $\min(QP) = \inf(P)$.

2. RAPPELS ET DEFINITIONS

Définitions 2.1 : (cf. [11], [14], [16])

1. On dit que $f : \mathbf{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ est rang 1 convexe si :

$$f(\lambda \xi + (1 - \lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1 - \lambda)f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$, ξ et η dans $\mathbf{R}^{m \times n}$ tels que $\text{rang}(\xi - \eta) \leq 1$.

2. Une fonction $f : \mathbf{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ Borelienne localement intégrable est dite quasiconvexe si :

$$\int_D f(\xi + \nabla \varphi(x)) dx \geq f(\xi) \text{mes}(D) \quad (2.1)$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^{m \times n}$, pour tout domaine borné $D \subset \mathbf{R}^n$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbf{R}^m)$ (i.e φ est Lipschitz et $\varphi = 0$ sur ∂D , $\text{mes}(D)$ designe la mesure de D).

3. On dit que f est polyconvexe si il existe

$$g : \mathbf{R}^{\tau(n,m)} \longrightarrow \mathbf{R}$$

convexe telle que $f(A) = g(T(A))$ où

$$T : \mathbf{R}^{n \times m} \longrightarrow \mathbf{R}^{\tau(n,m)}$$

est telle que :

$$T(A) = (A, \text{adj}_2 A, \dots, \text{adj}_{\inf(n,m)} A).$$

$\text{adj}_s A$ dénotant la matrice de tout les mineurs $s \times s$ de A , ($1 \leq s \leq \inf(n, m)$) et

$$\tau(n, m) = \sum_{s=1}^{\inf(n,m)} \sigma(s)$$

$$\text{avec } \sigma(s) = \binom{m}{s} \binom{n}{s} = \frac{m!n!}{(s!)^2(m-s)!(n-s)!}$$

Théorème 2.1 (cf. [11], [16])

Soit $f : \mathbf{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Alors

1. f convexe $\implies f$ polyconvexe $\implies f$ quasiconvexe $\implies f$ rang 1 convexe. (2.2)
2. Dans le cas scalaire, i.e $m = 1$ ou $n = 1$ toutes ces notions sont équivalentes.

□

Remarque 2.1

Les réciproques dans le Th. 2.1 sont fausses (voir sur ce sujet [11], [23]).

□

Définition 2.2 : (cf. [11], [16])

Soit $\lambda_\nu > 0$ et $\sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu = 1$. On dit que $(\lambda_\nu, A_\nu)_{1 \leq \nu \leq N}$ satisfont (H_N) si :

1. $N = 2$ alors $\text{rang } \{A_1 - A_2\} \leq 1$
2. $N > 2$: alors à une permutation près, $\text{rang } \{A_1 - A_2\} \leq 1$ et si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad B_1 = \frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \mu_i = \lambda_{i+1}, \quad B_i = A_{i+1} \end{array} \right.$$

pour $2 \leq i \leq N - 1$

Alors (μ_i, B_i) $1 \leq i \leq N - 1$ satisfont (H_{N-1}) à une permutation près. $\square$

On définit les enveloppes : convexe, polyconvexe, quasiconvexe et rang 1 convexe respectivement par :

$$\begin{aligned} Cf &= \sup \{ g \leq f, g \text{ convexe} \} \\ Pf &= \sup \{ g \leq f, g \text{ polyconvexe} \} \\ Qf &= \sup \{ g \leq f, g \text{ quasi convexe} \} \\ Rf &= \sup \{ g \leq f, g \text{ rang 1 convexe} \} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ces différentes enveloppes de f ont été caractérisées par Dacorogna cf. [16] :

Théorème 2.2 (cf. [16])

Soit $f : \mathbf{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que pour tout $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ $\alpha \leq f(A)$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

Alors :

$$Cf(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{nm+1} \lambda_i f(A_i) : \sum_{i=1}^{nm+1} \lambda_i A_i = A \right\}$$

$$Pf(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i f(A_i) : \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i T(A_i) = T(A) \right\}$$

$$Rf(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^I \lambda_i f(A_i) : \sum_{i=1}^I \lambda_i A_i = A \text{ et } (\lambda_i, A_i)_{1 \leq i \leq I} \text{ satisfont } (H_I) \right\}$$

De plus Cf , Pf et Qf sont localement Lipschitziennes . Enfin, si on suppose en outre que f est continue alors :

$$Qf(A) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{R}^m)} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(F + \nabla \varphi(x)) dx$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un domaine borné, Qf est également localement Lipschitzienne. $\square$

Remarque 2.2

De (2.2) et (2.3) on a

$$Cf \leq Pf \leq Qf \leq Rf \leq f. \quad (2.4)$$

□

Définition 2.3 :

Soit $f : \mathbf{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $1 \leq p \leq \infty$. Alors on dit que f vérifie la condition (C_p) si

1) Pour $p = \infty$

$$(C_\infty) \quad |f(A)| \leq \eta(|A|)$$

pour chaque $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ où η est une fonction continue, croissante.

2) $1 < p < \infty$

$$(C_p) \quad -\alpha(1 + |A|^q) \leq f(A) \leq \alpha(1 + |A|^p), \forall A \in \mathbf{R}^{m \times n}$$

où $\alpha \geq 0$, $1 \leq q < p$;

3) Si $p = 1$

$$(C_1) \quad |f(A)| \leq \alpha(1 + |A|)$$

pour chaque $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ où $\alpha \geq 0$.

□

Théorème 2.3 : (cf. [11])

Soit $f : \mathbf{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction quasiconvexe vérifiant la condition (C_p) , soit Ω un ouvert borné et

$$I(u, \Omega) = \int_{\Omega} f(\nabla(u(x))) dx$$

Alors I est faiblement semi continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ ($\star$ faiblement semi continue inférieurement si $p = \infty$) i.e.

$$\liminf_{u_\nu \rightharpoonup u} I(u_\nu, \Omega) \geq I(u, \Omega).$$

□

3. RELAXATION DE FONCTIONNELLES DU TYPE :

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\det F)$$

Dans toute la suite on note par $(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire dans $\mathbf{R}^{n \times n}$ et par $|\cdot|$ la norme associée.

Théorème 3.1 :

Soit $W : \mathbf{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe telle que

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\det F) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+^*$$

Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha. \\ \varphi(\det F) & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases} \quad (3.1)$$

Avant de procéder à la démonstration du Théorème, on donne quelques lemmes préparatoires :

Lemme 3.1

Soient $f : \mathbf{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$f(F) = \varphi(\det F)$$

Alors

$$f \text{ polyconvexe} \iff f \text{ quasiconvexe} \iff f \text{ rang 1 convexe} \iff \varphi \text{ convexe.} \quad (3.2)$$

Preuve

Voir Dacorogna [10], Th. 1.10, 1° partie , p. 133. □

Lemme 3.2

Soit $F \in \mathbf{R}^{n \times n} : 0 < |F|^2 < \alpha$, il existe B, C dans $\mathbf{R}^{n \times n}$, $\lambda \in (0, 1)$ tels que

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

$$\text{rang } \{B - C\} \leq 1$$

$$|B|^2 = |C|^2 = \alpha \quad (3.3)$$

$$\det F = \det C = \det B$$

Preuve

Si $\text{rang } F = 1$.

On choisit

$$B = -\sqrt{\alpha} \frac{F}{|F|}, \quad C = \sqrt{\alpha} \frac{F}{|F|}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{|F|}{\sqrt{\alpha}}\right) \text{ et on a le résultat désiré.}$$

Si $\text{rang } F \neq 1$.

On note par $F_j = (F_{ij})$ le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de F . Puisque $\text{rang } F \neq 1$ il existe un j_0 pour lequel $F_{j_0} \neq 0$.

On peut supposer sans restreindre la généralité que $F_2 \neq 0$. On pose alors

$$E = aG \text{ avec } G = (F_2, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad a \neq 0.$$

et on choisit

$$B = F - (1 - \lambda)E, \quad C = F + \lambda E.$$

Clairement, E est une matrice de rang 1 et donc, on a

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C, \quad \text{rang } \{B - C\} \leq 1$$

Puisque le déterminant d'une matrice est le même quand on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes on a :

$$\det B = \det C = \det F.$$

Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que

$$|B|^2 = |C|^2 = \alpha, \quad \lambda \in (0, 1) \quad (3.4)$$

Pour cela, on remarque que (3.4) équivaut à

$$|F|^2 - 2(1 - \lambda)(F, E) + (1 - \lambda)^2 |E|^2 = \alpha \quad (3.5)$$

$$|F|^2 + 2\lambda(F, E) + \lambda^2 |E|^2 = \alpha \quad (3.6)$$

donc (3.5) et (3.6) équivaut à

$$|F|^2 - 2(1 - \lambda)a.(F, G) + (1 - \lambda)^2 a^2 |G|^2 = \alpha \quad (3.7)$$

$$|F|^2 + 2\lambda a.(F, G) + \lambda^2 a^2 |G|^2 = \alpha \quad (3.8)$$

on pose alors $\Sigma = 2(F, G)$.

On aura donc terminé pourvu que l'on puisse trouver $\lambda \in (0, 1)$, a tels que (3.7) et (3.8) soient vérifiées.

On remarque que si λ et $\lambda - 1$ sont solutions de (3.8), alors (3.7) est automatiquement vérifiée. Ceci est le cas si

$$\lambda + \lambda - 1 = \frac{-a\Sigma}{a^2 |G|^2} \quad (3.9)$$

$\Leftrightarrow$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a\Sigma}{a^2 |G|^2} \right) \quad (3.10)$$

Dans ces conditions (3.7) et (3.8) sont vérifiées pourvu que

$$\lambda(\lambda - 1) = \frac{|F|^2 - \alpha}{a^2 |G|^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{a\Sigma}{a^2 |G|^2} \right)^2 + \frac{4(\alpha - |F|^2)}{a^2 |G|^2} = 1 \quad (3.11)$$

On suppose que l'on puisse trouver a solution de (3.11), alors de (3.11) on vérifie que

$$-1 \leq \frac{a\Sigma}{a^2 |G|^2} \leq 1$$

et donc $\lambda \in (0, 1)$. D'autre part évidemment l'on a (3.7), (3.8).

Il reste donc à prouver qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que l'égalité (3.11) ait lieu. Pour cela, On remarque que

Si $a \rightarrow 0$ le premier membre dans (3.11) tend vers $+\infty$.

Si $a \rightarrow +\infty$ le premier membre dans (3.11) tend vers 0.

Par continuité il prend donc pour une valeur de a la valeur 1. Par suite, on a le résultat désiré.

□

Théorème 3.2

On suppose que g est une fonction non négative telle que

$$g = 0 \text{ sur } |F|^2 = \alpha$$

$$g \text{ est convexe à l'extérieur de } B_\alpha = \{F : |F|^2 \leq \alpha\}$$

(On ne suppose pas que g ne dépende que de la norme).

Alors

$$Cg = Pg = Qg = Rg = \begin{cases} g \text{ à l'extérieur de } B_\alpha \\ 0 \text{ à l'intérieur de } B_\alpha \end{cases} \quad (3.12)$$

Preuve

Posons

$$\check{g} = \begin{cases} g \text{ à l'extérieur de } B_\alpha \\ 0 \text{ à l'intérieur de } B_\alpha. \end{cases}$$

$\check{g}$ est convexe. En effet : si $\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2 \in B_\alpha$ alors puisque $\check{g} \geq 0$ on a

$$0 = \check{g}(\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2) \leq \lambda \check{g}(F_1) + (1 - \lambda)\check{g}(F_2)$$

Maintenant, on dit que g est convexe à l'extérieur de B_α s'il existe une fonction convexe $\hat{g}$ de $R^{n \times n}$ telle que $\hat{g} = g$ à l'extérieur de B_α .

Donc, nécessairement par convexité de $\hat{g}$, $\hat{g} \leq 0$ sur B_α . Par suite, si

$$\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2 \notin B_\alpha$$

on a

$$\check{g}(\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2) = g(\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2)$$

et

$$\hat{g}(\lambda F_1 + (1 - \lambda)F_2) \leq \lambda \hat{g}(F_1) + (1 - \lambda)\hat{g}(F_2) \leq \lambda \check{g}(F_1) + (1 - \lambda)\check{g}(F_2).$$

Ce qui montre que $\check{g}$ est convexe; on a naturellement $\check{g} \leq g$.

Ensuite si h est une fonction convexe telle que $h \leq g$, par convexité on a $h \leq \check{g}$ et donc $Cg = \check{g}$.

En vertu des inégalités

$$Cg \leq Pg \leq Qg \leq Rg \leq g.$$

on a $Cg = Pg = Qg = Rg = g$ à l'extérieur de B_α . En plus puisque $g = 0$ on $|F|^2 = \alpha$, par le lemme 3.2 on a

$$0 = Cg \leq Rg \leq 0 \text{ sur } B_\alpha$$

et le résultat en résulte.

□

Preuve du Théorème 3.1

Soit $f(F) = \varphi(\det F)$, $\psi(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2$, alors $W(F) = \psi(F) + f(F)$. Du lemme 3.1 il resulte que f est polyconvexe. D'autre part ψ satisfait les hypothèses du Théorème 3.2 alors de (3.12) on deduit

$$C\psi(F) = P\psi(F) = Q\psi(F) = R\psi(F) = \begin{cases} \psi(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha. \\ 0 & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases}$$

Par ailleurs

$$\psi = W - f \geq C\psi. \quad (3.13)$$

Puisque f est polyconvexe, alors en combinant (2.2), (2.4) et (3.13) on obtient

$$PW(F) \geq (f + C\psi)(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha. \\ f(F) & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases} \quad (3.14)$$

De (2.4) et (3.14) on a donc en particulier :

$$PW(F) = RW(F) = W(F) \text{ si } |F|^2 \geq \alpha$$

et

$$(3.15)$$

$$f(F) \leq PW(F) \leq QW(F) \leq RW(F) \text{ si } |F|^2 < \alpha$$

alors, il suffit de montrer l'inégalité inverse i.e : $RW(F) \leq f(F)$ si $|F|^2 < \alpha$. Maintenant combinant (3.3), (3.15) et le fait que RW est rang un convexe, on obtient

$$RW(F) \leq \lambda W(B) + (1 - \lambda)W(C) \leq \varphi(\det F). \quad (3.16)$$

Donc le résultat désiré resulte de (3.15) et (3.16).

□

Corollaire 3.1

Soit g une fonction définie comme dans le Théorème 3.2. Soit g_0 une fonction convexe de $\mathbf{R}$. Soit g_1 une fonction convexe de $\mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ (p = le nombre de mineurs ≥ 2 ne contenant aucun élément de la premiere colonne.)

Soit g_2 une fonction convexe de $(\mathbf{R}^n)^{n-1}$. Alors les enveloppes quasiconvexes, polyconvexes, rang - 1 convexes de

$$W = g(F) + g_0(\det F) + g_1(M) + g_2(F_2^T, \dots, F_n^T)$$

sont toutes égales à :

$$Cg + g_0(\det F) + g_1(M) + g_2(F_2^T, \dots, F_n^T)$$

Preuve

Il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 3.1.

□

Corollaire 3.2

$$\text{Soit } W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(|\det F|)$$

où $\varphi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi(0) = \inf_{x \in \mathbf{R}_+} \varphi(x)$.

Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(|\det F|) & \text{si } |F|^2 < \alpha \end{cases}$$

Preuve

Il suffit d'appliquer le Th. 3.1 avec la fonction convexe $\xi(x) = \varphi(|x|)$.

□

4. RELAXATION DE FONCTIONNELLES DU TYPE :

$$W(F) = \text{Energie de Saint Venant - Kirchhoff} + \varphi(\det F).$$

Proposition 4.1

Soit $\hat{W}(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{Tr} E)^2 + \mu \text{Tr}(E)^2$; $E = \frac{F^T F - I}{2}$ et $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ($n = 2$ ou $n = 3$) où λ et μ sont les constantes de Lamé. Alors $\hat{W}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$i) \hat{W}(E) = W_1(F) = \frac{\lambda}{8}(|F|_2^2 - (3 + \frac{2\mu}{\lambda}))^2 + \frac{\mu}{4}(|F|_2^4 - 2|\text{adj} F|_2^2) - \frac{\mu}{4\lambda}(2\mu + 3\lambda) \text{ si } n = 3 \quad (4.1)$$

$$ii) \hat{W}(E) = W_1(F) = \frac{(\lambda + 2\mu)}{8}(|F|_2^2 - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu})^2 - \frac{\mu}{2}(\det F)^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} \text{ si } n = 2 \quad (4.2)$$

où $|\cdot|_2$ désigne la norme Euclidienne des matrices.

Preuve :

$$\text{Puisque } \text{Tr} E = \frac{\text{Tr} C - n}{2} \text{ et } C = F^T F, \text{ alors}$$

$$\frac{\lambda}{2}(\text{Tr} E)^2 = \frac{\lambda}{8}[(\text{Tr} C)^2 - 2n \text{Tr} C + n^2]$$

Par ailleurs,

$$\text{Tr} C^2 = (\text{Tr} C)^2 - 2 \text{Tr} \text{adj} C \quad \text{pour } n = 3.$$

donc

$$\mu \text{Tr} E^2 = \frac{\mu}{4}[(\text{Tr} C)^2 - 2 \text{Tr} \text{adj} C - 2 \text{Tr} C + n]$$

par suite

$$\hat{W}(F) = \tilde{W}(C) = \frac{\lambda}{8}[(\text{Tr} C)^2 - 2n \text{Tr} C + n^2] + \frac{\mu}{4}[(\text{Tr} C)^2 - 2 \text{Tr} \text{adj} C - 2 \text{Tr} C + n] \quad (4.2)$$

d'autre part, on a

$$\text{Tr} C = \text{Tr} F^T F = |F|_2^2 \quad (4.3)$$

$$\text{Tr} \text{adj} C = |\text{adj} F|_2^2 \quad (4.4)$$

D'où en combinant (4.2), (4.3) et (4.4) on a :

$$W_1(F) = \frac{\lambda}{8}(|F|_2^4 - 6|F|_2^2 + 9) + (\frac{\mu}{4}|F|_2^4 - 2|F|_2^2 + 3) - \frac{\mu}{2}|\text{adj} F|_2^2$$

Par un calcul simple on obtient la forme désirée (4.1).

ii) la deuxième expression résulte du fait que $TrC^2 = (TrC)^2 - 2\det C$ pour $n = 2$.

□

Théorème 4.1

Soit $W(F) = \frac{\lambda}{2}(TrE)^2 + \mu Tr(E)^2 + \varphi(\det F)$ où λ et μ sont les constantes de Lamé supposées positives; $E = \frac{F^T F - I}{2}$ et $F \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$. On suppose φ deux fois dérivables vérifiant $\varphi'' \geq \mu$.

Alors

$$QW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|_2^2 \geq 2\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right) \\ -\frac{\mu}{2}(\det F)^2 + \varphi(\det F) + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)} & \text{si } |F|_2^2 < 2\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\right) \end{cases}$$

Preuve :

Dû à la proposition 4.1, la fonction de densité d'énergie d'un matériau de Saint Venant Kirchhoff peut s'écrire sous la forme :

$$W_1(F) = \frac{(\lambda + 2\mu)}{8}(|F|_2^2 - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu})^2 - \frac{\mu}{2}(\det F)^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}$$

et donc

$$W(F) = W_1(F) + \varphi(\det F)$$

Posons

$$\psi(t) = -\frac{\mu}{2}t^2 + \varphi(t) + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{2(\lambda + 2\mu)}$$

Clairement ψ est convexe. Si nous posons $\beta = \frac{\lambda + 2\mu}{8}$, $\alpha = 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$ on obtient

$$W(F) = \beta(|F|_2^2 - \alpha)^2 + \psi(\det F)$$

avec ψ convexe; alors du théorème (3.1) on en déduit le résultat désiré.

□

5. LE MINIMUM DE L'ENERGIE DE SAINT VENANT-KIRCHHOFF DANS LE CAS LINEAIRE.

Dans cette section on considère $\varphi \equiv 0$ dans (0.5) et on determine un domaine sur lequel $QW(F) = W(F)$, pour F dans $\mathbf{R}^{n \times n}$ ($n = 2$ ou $n = 3$).

Théorème 5.1

Soit W_1 la fonction de densité d'énergie du matériau de Saint Venant - Kirchhoff i.e

$$W_1(F) = \frac{\lambda}{2}(\text{Tr} E)^2 + \mu \text{Tr}(E)^2$$

Alors on a

$$CW_1(F) = PW_1(F) = QW_1(F) = RW_1(F) = W_1(F) \text{ si } |F|_2^2 \geq n + 2\frac{\mu}{\lambda}.$$

Preuve

En utilisant la proposition (4.1), il suffit de démontrer le théorème pour $n = 3$ (le cas où $n = 2$ est analogue). La fonction de densité d'énergie de Saint Venant Kirchhoff peut s'écrire sous la forme :

$$W_1(F) = \frac{\lambda}{8}(|F|_2^2 - (3 + \frac{2\mu}{\lambda}))^2 + \frac{\mu}{4}(|F|_2^4 - 2|\text{adj} F|_2^2) - \frac{\mu}{4\lambda}(2\mu + 3\lambda)$$

Par ailleurs

$$L(F) = \frac{\mu}{4}(|F|_2^4 - 2|\text{adj} F|_2^2) - \frac{\mu}{4\lambda}(2\mu + 3\lambda).$$

est une fonction convexe. En effet, soit (v_1, v_2, v_3) les valeurs propre de $(FF^T)^{\frac{1}{2}}$ alors $L(F)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} L(F) &= \psi(v_1, v_2, v_3) = \frac{\mu}{4}[(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2 - 2(v_1^2 v_2^2 + v_2^2 v_3^2 + v_3^2 v_1^2)] - \frac{\mu}{4\lambda}(2\mu + 3\lambda) \\ &= \frac{\mu}{4}(v_1^4 + v_2^4 + v_3^4) - \frac{\mu}{4\lambda}(2\mu + 3\lambda) \end{aligned}$$

avec ψ symétrique, convexe, et non décroissante par rapport à chaque variable v_i .

D'où la convexité de L (cf. [2]). Par conséquent le résultat désiré résulte de (2.3) et (3.7).

□

Certains résultats développés par Firoozye [17] peuvent être obtenus à partir du théorème 3.2 et de la remarque suivante :

Remarque 5.1

Soit

$$W(F) = f(F) + a \det F + b \text{ où } f : \mathbf{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbf{R} ; \quad a, b \in \mathbf{R}$$

alors

$$QW(F) = Qf(F) + a \det F + b.$$

En effet, on pose

$$g(F) = a \det F + b.$$

$$Qf(F) = Q(W - g)(F)$$

$$= \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbf{R}^n)} \left[\frac{1}{|D|} \int_D W(F + \nabla \varphi(x)) dx - g\left(\frac{1}{|D|} \int_D (F + \nabla \varphi(x)) dx\right) \right]$$

$$= \inf_{\varphi \in W_0^{1,\infty}(D;\mathbf{R}^n)} \frac{1}{|D|} \int_D W(F + \nabla \varphi(x)) dx - g(F)$$

$$= QW(F) - g(F)$$

d'où le résultat désiré.

□

II- QUELQUES EXEMPLES DE FONCTIONNELLES RELAXEES.

1. RELAXATION DE FONCTIONNELLES DU TYPE :

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\text{adj}_n F)$$

Théorème 1.1

Soit

$$W : \mathbf{R}^{(n+1) \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$$

Soit $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe telle que

$$W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(\text{adj}_n F)$$

Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(\text{adj}_n F) & \text{si } |F|^2 < \alpha \end{cases}$$

où

$$\text{adj}_n F = (\det \hat{F}^1, -\det \hat{F}^2, \dots, (-1)^{n+2} \det \hat{F}^{n+1})$$

et $\hat{F}^k$ est la matrice déduite de F en supprimant la $k^{\text{ème}}$ ligne.

Avant de procéder à la démonstration on a besoin d'introduire les lemmes suivants :

Lemme 1.1

Soit $f : \mathbf{R}^{(n+1) \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$ et $\varphi : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$f(F) = \varphi(\text{adj}_n F)$$

alors

$$f \text{ polyconvexe} \iff f \text{ quasiconvexe} \iff f \text{ rank one convexe} \iff \varphi \text{ convexe. (1.1)}$$

Preuve

Voir Dacorogna [10], Th. 1.10, 1° partie, p. 133.

□

Lemme 1.2

Soit $F \in \mathbf{R}^{(n+1) \times n} : |F|^2 < \alpha$, il existe B, C dans $\mathbf{R}^{(n+1) \times n}$, $\lambda \in (0, 1)$ tels que

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

$$\text{rang } \{B - C\} \leq 1$$

$$|B|^2 = |C|^2 = \alpha \quad (1.2)$$

$$\text{adj}_n F = \text{adj}_n C = \text{adj}_n B$$

Preuve

On note $F_i = (F_{ij})$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de F

I- Si $F = 0$.

On pose $E = \mu \otimes \beta$ où $\mu \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\beta \in \mathbf{R}^n$ et $|E|^2 = \alpha$.

On prend

$$B = E, C = -E, \lambda = 1/2.$$

II - Si $0 < |F|^2 < \alpha$.

Il existe une ligne - par exemple F_1 - qui est non nulle.

On pose

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ aF_1 \\ bF_1 \end{pmatrix} = a. \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ F_1 \end{pmatrix} \equiv a.G + b.H \in \mathbf{R}^{(n+1) \times n}$$

Il est clair que E est de rang 1.

On pose alors

$$B = F - (1 - \lambda)E ; C = F + \lambda E$$

Il est clair que

$$\text{rang } \{B - C\} = \text{rang } E = 1$$

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

d' autre part

$$B = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n - (1 - \lambda)aF_1 \\ F_{n+1} - (1 - \lambda)bF_1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n + \lambda aF_1 \\ F_{n+1} + \lambda bF_1 \end{pmatrix}$$

D' où tous les mineurs obtenus en supprimant une ligne autre que F_1 sont égaux aux mineurs correspondant dans F . On aura donc

$$\text{adj}_n F = \text{adj}_n B = \text{adj}_n C$$

pourvu que

$$\det \begin{pmatrix} F_2 \\ \vdots \\ F_n - (1 - \lambda)aF_1 \\ F_{n+1} - (1 - \lambda)bF_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_2 \\ \vdots \\ F_n + \lambda aF_1 \\ F_{n+1} + \lambda bF_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Soit encore en utilisant la linéarité du déterminant pourvu que

$$a \det \hat{F}^n - b \det \hat{F}^{n+1} = 0. \quad (1.3)$$

D' autre part on vérifie aisément que

$$|B|^2 = \alpha \quad , \quad |C|^2 = \alpha$$

équivalent à

$$|F|^2 - 2(1 - \lambda)[a.(F, G) + b.(F, H)] + (1 - \lambda)^2[a^2|G|^2 + 2a.b(G, H) + b^2.|H|^2] = \alpha \quad (1.4)$$

$$|F|^2 + 2\lambda[a.(F, G) + b.(F, H)] + \lambda^2[a^2|G|^2 + b^2|H|^2 + 2a.b(G, H)] = \alpha. \quad (1.5)$$

On aura donc terminé pourvu que l'on puisse trouver $\lambda \in (0, 1)$, a , b tels que (1.3), (1.4) et (1.5) soient vérifiées.

On remarque que si λ et $\lambda - 1$ sont solutions de (1.5) alors (1.4) est automatiquement vérifiée - Ceci est le cas si

$$\lambda + \lambda - 1 = \frac{-2[a.(F, G) + b.(F, H)]}{a^2|G|^2 + 2a.b(G, H) + b^2|H|^2} \quad (1.6)$$

$$(1.6) \iff \lambda = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2[a.(F, G) + b.(F, H)]}{a^2|G|^2 + 2ab(G, H) + b^2|H|^2} \right\} \quad (1.7)$$

Dans ces conditions (1.4) et (1.5) sont vérifiées pourvu que

$$\lambda(\lambda - 1) = \frac{|F|^2 - \alpha}{a^2|G|^2 + 2a.b.(G, H) + b^2|H|^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2[a.(F, G) + b.(F, H)]}{a^2|G|^2 + 2a.b.(G, H) + b^2|H|^2} \right)^2 + 4 \frac{\alpha - |F|^2}{a^2|G|^2 + 2a.b.(G, H) + b^2|H|^2} = 1. \quad (1.8)$$

Supposons que l'on puisse trouver a, b solution de (1.8) alors de (1.8) on vérifie que

$$-1 \leq \frac{2[a.(F, G) + b.(F, H)]}{a^2|G|^2 + 2a.b.(G, H) + b^2|H|^2} \leq 1$$

et donc $\lambda \in (0, 1)$ - D'autre part évidemment l'on a (1.4) et (1.5). Le tout est donc de trouver a, b vérifiant (1.3) et (1.8).

Supposons $\det \hat{F}^n \neq 0$ on a alors $a = \delta b$ pour une certaine constante δ . Il en résulte que (1.8) devient

$$\left(\frac{2b[\delta(F, G) + (F, H)]}{b^2[\delta^2|G|^2 + 2\delta(G, H) + |H|^2]} \right)^2 + 4 \frac{\alpha - |F|^2}{b^2[\delta^2|G|^2 + 2\delta(G, H) + |H|^2]} = 1 \quad (1.9)$$

Si $b \rightarrow 0$ le membre de gauche dans (1.9) tend vers $+\infty$.

Si $b \rightarrow +\infty$ le membre de gauche dans (1.9) tend vers 0.

Par continuité il prend donc pour une valeur de b la valeur 1. On raisonne de même en échangeant les rôles de a et b si $\det \hat{F}^{n+1} \neq 0$.

Si

$$\det \hat{F}^{n+1} = \det \hat{F}^n = 0$$

alors (1.3) est automatiquement satisfaite et l'on conclut comme précédemment en prenant par exemple $a = b$.

□

Preuve du Théorème 1.1

En vertu des lemmes 1.1, 1.2 et du Théorème 3.2; il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 3.1.

□

Corollaire 3.1

Soit $W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(|adj_n F|)$

où $\varphi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe telle que $\varphi(0) = \inf_{x \in \mathbf{R}_+} \varphi(x)$. Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(|adj_n F|) & \text{si } |F|^2 < \alpha \end{cases}$$

Preuve

Il suffit d'appliquer le Théorème 1.1 avec la fonction convexe $\xi(x) = \varphi(|x|)$.

□

Corollaire 3.2

Soit $W(F) = \beta(|F|^2 - \alpha)^2 + \varphi(adj_n F) + g(F_1, \dots, F_{(n-1)})$

où φ et g sont deux fonctions convexes définies dans $\mathbf{R}^{n+1}$ respectivement dans $(\mathbf{R}^n)^{n-1}$. Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = \begin{cases} W(F) & \text{si } |F|^2 \geq \alpha \\ \varphi(adj_n F) + g(F_1, \dots, F_{(n-1)}) & \text{si } |F|^2 < \alpha. \end{cases}$$

Preuve

La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.1 .

□

2. RELAXATION DE FONCTIONNELLES DU TYPE

$$W(F) = \varphi(F_1, \dots, F_{n-1}) + h(\det F)$$

Dans ce chapitre on étudie d'autres exemples dépendant du déterminant.

Théorème 2.1

Soit

$$g : (\mathbf{R}^n)^{(n-1)} \longrightarrow \mathbf{R}$$

une fonction convexe telle que

$$W(F) = g(F_1, \dots, F_{n-1}) + h(\det F)$$

où $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction vérifiant $Ch(0) = h(0)$, $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ et F_j $1 \leq j \leq n-1$ désigne les vecteurs colonnes de F .

Alors

$$PW(F) = QW(F) = RW(F) = g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F).$$

Pour démontrer le Théorème on a besoin d'introduire le lemme suivant :

Lemme 2.1

Soient $\beta, \gamma \in \mathbf{R}, \lambda \in [0, 1], F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tels que $\det F = \lambda\beta + (1 - \lambda)\gamma \neq 0$. Alors il existe $B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tels que

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

$$\text{rang } \{B - C\} \leq 1$$

$$\det B = \beta, \det C = \gamma \tag{2.1}$$

$$(B_1, \dots, B_{n-1}) = (C_1, \dots, C_{n-1}) = (F_1, \dots, F_{n-1}).$$

Preuve :

Remarquons que si $\det F \neq 0$, on peut supposer sans perdre la généralité que le cofacteur de F_{nn} est différent de 0.

On note dans tout ce qui suit le cofacteur de F_{nn} par $\text{Cof } F_{nn}$.

On choisit

$$B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

telles que

$$B_{ij} = C_{ij} = F_{ij} \text{ sauf si } i = j = n.$$

on pose

$$B_{nn} = F_{nn} - \frac{(1 - \lambda)(\gamma - \beta)}{\text{Cof } F_{nn}}$$

et

$$C_{nn} = F_{nn} - \frac{\lambda(\gamma - \beta)}{\text{Cof } F_{nn}}$$

Alors en développant le déterminant de B et C par rapport à la dernière colonne, il est facile de voir que les quatre conditions sont satisfaites.

□

Preuve du Théorème 2.1

Il est clair que

$$g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F) \leq PW(F) \leq QW(F) \leq RW(F) \quad (2.2)$$

alors il reste à montrer que

$$RW(F) \leq g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F).$$

On a deux cas :

1° cas :

Si $\text{rang de } F \neq n$, ie, $\det F = 0$.

Pour toute matrice $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ il existe $B, C \in \mathbf{R}^{n \times n}$ telle que

$$(F_1, \dots, F_{n-1}) = (B_1, \dots, B_{n-1}) = (C_1, \dots, C_{n-1})$$

$$\lambda \in (0, 1)$$

$$F = \lambda B + (1 - \lambda)C, \quad \text{rang } \{B - C\} \leq 1$$

et

$$\det B = \det C = \det F.$$

En effet :

Il suffit de choisir $B = F - (1 - \lambda)E$, $C = F + \lambda E$ où $E = (E_{ij})$ tel que $E_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n - 1$ et $E_n = F_1$. Maintenant en utilisant la rang 1 convexité de RW et la relation (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} RW(F) &\leq \lambda W(B) + (1 - \lambda)W(C) \\ &= \lambda g(B_1, \dots, B_{n-1}) + \lambda h(\det B) + (1 - \lambda)g(C_1, \dots, C_{n-1}) + (1 - \lambda)h(\det C) \\ &= g(F_1, \dots, F_{n-1}) + h(0) = g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(0) \\ &= g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F). \end{aligned}$$

2° cas :

Si rang $F = n$ ie. $\det F \neq 0$ alors de (2.2) il suffit de montrer que

$$RW(F) \leq g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F)$$

On sait (cf. [15]) que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ telles que

$$\lambda h(\alpha_1) + (1 - \lambda)h(\alpha_2) \leq Ch(\det F) + \epsilon$$

et

$$\lambda \alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2 = \det F.$$

par suite en utilisant (2.1) et la rang - un convexité de RW on obtient

$$\begin{aligned} RW(F) &\leq \lambda W(B) + (1 - \lambda)W(C) \\ &= g(F_1, \dots, F_{n-1}) + \lambda h(\alpha_1) + (1 - \lambda)h(\alpha_2) \leq g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F) + \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$. D'où

$$RW(F) \leq g(F_1, \dots, F_{n-1}) + Ch(\det F)$$

et on a le résultat désiré.

□

REFERENCES

- [1] J. Alibert, B. Dacorogna : An example of a quasiconvexity function not polyconvex in dimension two. (To appear).
- [2] J.M. Ball : Convexity Conditions and existence theorems in nonlinear elasticity Arch. Rat. Mech. Anal. 64, (1977) p. 337 - 403.
- [3] J. M. Ball and F. Murat : $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals . J. Funct. Anal. 58, (1984) p. 225 -253.
- [4] M. Bousselsal and M. Chipot : Relaxation of some functionals in the calculus of variations. (To appear).
- [5] M. Bousselsal : Relaxation de quelques fonctionnelles d'énergie en dimension deux. XXIV ème Congrès National d' Analyse Numérique. Vittel, Mai, 1992.
- [6] M. Bousselsal et M. Chipot : Quelques exemples de fonctionnelles relaxees en calcul des variations. XXV ème Congrès National d' Analyse Numérique. Giens, Mai, 1993.
- [7] B. Brighi and M. Bousselsal : On the rank one convexity domain of the Saint Venant - Kirchhoff stored energy function. (To appear).
- [8] B. Brighi : Sur quelques problèmes de calcul de variations et l'approximation de leur fonctionnelle relaxée -Thèse université de Metz - 1991.
- [9] M. Chipot : Hyperelasticity for crystal. European J. of Appl. Math, 1, 1990, p. 113-129.
- [10] P.G. Ciarlet : Elasticité tridimensionnelle - Masson - 1986.
- [11] B. Dacorogna : Direct methods in the calculus of variations Springer Verlag, (1989).
- [12] B. Dacorogna, J. Douchet, W. Gangbo and J. Rappaz : Some examples for rank one functions in dimension two. Proc. of Royal soc. of Edinburgh 114 A (1990), 135 - 150.
- [13] B. Dacorogna : A relaxation theorem and its applications to equilibrium of gases. Arch. Rat. Mech. Anal. 77, (1981). p. 359 - 386.
- [14] B. Dacorogna : Quasiconvexity and relaxation of non convex variational problem.

J. Funct. Anal. 46, (1982) 102 - 118.

[15] B. Dacorogna : Weak Continuity and weak lower semicontinuity of non linear Functionals. Lecture Notes in Math, Vol 922, Springer, Berlin, 1982.

[16] B. Dacorogna : Remarques sur les notions de polyconvexité, quasiconvexité et convexité de rang 1, J.Math pures Appl. 64, 1985, p. 403 - 438.

[17] N. Firoozye : Optimal translations and relaxations of some multiwell energies, Ph.D. thesis, New -York University, 1990.

[18] W. Gangbo : On the continuity of the quasiconvex envelope with respect to growth condition. (To appear).

[19] R.V. Kohn : The relaxation of a double - well energy. (To appear).

[20] R.V. Kohn and S. Strang : Optimal Design and relaxation of variational problems I,II and III C. P. A. M. 39, (1986) 113-137, 139-182, 353-377.

[21] C.B. Morrey : Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals. Pacific J. Math 2 (1952) 25-53.

[22] C.B. Morrey : Multiple integrals in the calculus of variations, Springer (1966).

[23] V. Sverak : Rank - one convexity does not imply quasiconvexity. (To appear).

[24] V. Sverak : Examples of rank one convex functions Proceedings of the Royal society of Edinburgh, 114A, 237-242, 1990.

[25] V. Sverak : Quasiconvexity functions with subquadratic growth. Proc. R. Soc. Lond. A (1991) 433, 723-725.

PARTIE III

**ESTIMATION D'ENERGIE POUR UN PROBLEME VARIATIONNEL
NON CONVEXE AVEC CONTRAINTE ET CONDITION AU BORD
NON HOMOGENE.**

1. INTRODUCTION

Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, de frontière Γ . Pour simplifier, nous le supposons polygonal. Soient $w_i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, ($k \geq 2$) et $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que

$$\varphi(w_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad (1.1)$$

$$\varphi(w) > 0 \quad \forall w \neq w_i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.2)$$

De telles fonctions interviennent souvent en physique, et plus particulièrement en mécanique des milieux continus. Par exemple, φ peut être une densité d'énergie qui s'annule aux puits w_i (Voir pour plus de détails [B.J.1], [B.J.2], [Er.], [F.1], [F.2], [J.1], [J.2], [J.K.], [K.], [Ko.].)

Soient $A(x)$, $\beta(x)$ deux fonctions Lipschitziennes i.e. telles que

$$A, \beta \in W^{1,\infty}(\Omega) \quad (1.3)$$

On note par $K_{A,\beta}(\Omega)$ l'ensemble défini par

$$K_{A,\beta}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid v(x) = A(x) \text{ sur } \Gamma, v(x) \geq \beta(x) \text{ dans } \Omega\}. \quad (1.4)$$

où

$$\beta(x) \leq A(x) \quad \text{sur } \Gamma. \quad (1.5)$$

Le problème auquel on s'intéresse est :

$$\inf_{v \in K_{A,\beta}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx. \quad (1.6)$$

Plus précisément, nous étudions le cas

$$\nabla A(x) \in Co(w_i), \quad (1.7)$$

et on suppose qu'il existe

$$D \in W^{1,\infty}(\Omega), D(x) \leq A(x) \text{ sur } \Gamma, D(x) \geq \beta(x) \text{ dans } \Omega \text{ t.q. } \nabla D \in riCo(w_i) \text{ p.p.} \Omega. \quad (1.8)$$

(Si on suppose que $\nabla \beta(x) \in Co(w_i)$ p.p. $x \in \Omega$ on peut choisir $D = \beta$)

(ri désigne l'intérieur relatif et Co désigne l'enveloppe convexe.)

Pour cela, on considère une triangulation régulière $\mathcal{T}_h$: $h > 0$ de Ω (voir [R.T], [G.L.T.]) i.e. vérifiant :

$$\forall h > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{T}_h, K \text{ est un } n\text{-simplexe,} \\ \max_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K) = h, \\ \exists \nu > 0 \text{ tel que } \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\rho_K} \leq \nu, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

où h_K est le diamètre de K et ρ_K est la rondeur de K , c'est-à-dire ρ_K est le diamètre de la plus grande sphere (cercles lorsque $n = 2$) contenue dans K . Si $P_1(K)$ désigne l'espace des polynômes de degré ≤ 1 sur K , on note

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue}, v|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.10)$$

$$\Sigma_h = \{p \in \bar{\Omega}; p \text{ est un sommet de } K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.11)$$

$$\Sigma_h^0 = \{p \in \Sigma_h, p \notin \Gamma\} \quad (1.12)$$

et

$$K_h = \{v \in V_h; \beta(p) \leq v_h(p) \quad \forall p \in \Sigma_h^0, v_h(p) = A(p) \quad \forall p \in \Sigma_h \cap \Gamma\}. \quad (1.13)$$

On note également Π_h l'opérateur d'interpolation défini par :

$$\Pi_h : W^{1, \infty}(\Omega) \longrightarrow V_h$$

tel que

$$\forall v \in W^{1, \infty}(\Omega), \quad \forall p \in \Sigma_h, \quad \text{on a } (\Pi_h v)(p) = v(p) \quad (1.14)$$

$K_{A,\beta}(\Omega)$ est un ensemble convexe, fermé et non vide de $W^{1,\infty}(\Omega)$, en effet il suffit de remarquer que la fonction $G(x) = A(x) \vee D(x)$ appartient à $K_{A,\beta}(\Omega)$ où ($\vee$ désigne le supremum). On vérifie aisément que K_h est non vide (car $\Pi_h G \in K_h$).

Notre but est d'obtenir une estimation de l'infimum

$$E_h = \inf_{v_h \in K_h} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v_h(x)) dx \quad (1.15)$$

en terme de la taille h du maillage.

De tels problèmes ont été considérés d'abord par C. Collins, D. Kinderlehrer et M. Luskin en dimension-un (voir [C.K.L.], [C.L.1] - [C.L.4], [Co.]). En dimension supérieure,

les estimations ont été obtenues par M. Chipot et C. Collins dans les cas où ∇A est une constante (voir [C.1], [C.2], [C.C.]), et par M. Chipot , C. Collins et D .Kinderleher dans le cas vectoriel (voir [C.C.K.]) puis par [C.3], [C.L] si ∇A est non constant. Dans ce travail on étend les résultats obtenus précédemment à des problèmes avec contraintes.

Signalons d'abord que l'on peut toujours supposer sans perdre de generalité que

$$0 \in ri(Co(w_i)) \quad (1.16)$$

où $ri(Co(w_i))$ désigne l'intérieur relatif de $Co(w_i)$ -i.e. l'intérieur de $(Co(w_i))$ dans le sous-espace engendré par les vecteurs: $w_i - w_1$. En effet, soit $w \in ri(Cow_i)$, moyennant une translation de la forme:

$$v = u + w \cdot x \quad (1.17)$$

où $w \cdot x$ désigne le produit scalaire de w et x . On est conduit à minimiser

$$\int_{\Omega} \varphi(w + \nabla u(x)) dx \quad (1.18)$$

sur un certain espace. Donc, si on pose

$$\tilde{\varphi}(w) = \varphi(w + \xi) \quad (1.19)$$

on a à traiter le même problème avec les puits $w_i - w$ qui vérifient

$$0 \in ri(Co(w_i - w)) \quad , \quad \nabla \tilde{A}(x) \in Co(w_i - w), \quad \nabla \tilde{\beta}(x) \in Co(w_i - w) \text{ a.e. } x \in \Omega. \quad (1.20)$$

Donc, dans la suite, nous supposons toujours que (1.16) est satisfaite. Notons en plus que si W désigne l'espace engendré par w_i on peut toujours trouver $(p + 1)$ vecteurs w_i tels que

$$0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i w_i \quad , \quad \alpha_i \in (0, 1). \quad (1.21)$$

où les coefficients α_i sont uniquement déterminés par le choix des w_i .

On note dans toute la suite par G la fonction définie par :

$$G(x) = A(x) + (D - A)^+(x) = A(x) \vee D(x). \quad (1.22)$$

2. ESTIMATION D'ENERGIE.

Théorème 2.1 :

On suppose que Ω est convexe et que φ est une fonction bornée sur les ensembles bornés de $\mathbf{R}^n$ qui vérifient (1.1) et (1.2). Sous les hypothèses (1.7) et (1.8) et s'il existe un compact

K contenu dans $ri(Co(w_i))$ tel que

$$\nabla G \in K \quad \text{p.p. } x \in \Omega, \quad (2.1)$$

alors, il existe une constante C , indépendante de $h \in (0, 1)$, tel que

$$E_h \equiv \inf_{v_h \in K_h} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v_h(x)) dx \leq Ch^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

Théorème 2.2 :

On suppose que φ est une fonction continue, telle que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = +\infty$. Alors, il existe $u_h \in K_h$ telle que

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h(x)) dx = \inf_{v_h \in K_h} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v_h(x)) dx \quad (2.3)$$

Preuve :

Soit $v_h \in K_h$; v_h est complètement déterminée par ses valeurs aux noeuds de la triangulation.

On note X le vecteur des valeurs de v_h aux noeuds de Σ_h^0 , i.e.

$$X = (v_h(n_1), \dots, v_h(n_p)) \text{ avec } \beta(n_i) \leq v_h(n_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx$$

est une fonction continue en X , qu'on minimise sur un convexe, fermé, non borné K où

$$K = \{ X \in \mathbf{R}^p : \beta_i = \beta(n_i) \leq X_i \quad i = 1, \dots, m \}.$$

Si $\lim_{|X| \rightarrow +\infty} F(X) = +\infty$. Le résultat découle par un argument de compacité. En effet, si $|X| \rightarrow +\infty$, alors, une au moins des ses composantes qu'on note $X_j = v_h(n_j)$ tend vers $+\infty$. Puisque $v_h(x) = (\Pi_h A)(x)$ sur le bord et que n_j est un sommet de certain simplexe K , on a

$$\frac{v_h(n_j) - (\Pi_h A)(x)}{\text{dist}(n_j, \Gamma)} \leq |\nabla v_h| \rightarrow +\infty \quad (2.4)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_{\Omega} \varphi(\nabla v_h(x)) dx \geq \int_K \varphi(\nabla v_h(x)) dx \\ &\geq |K| \varphi(\nabla v_h|_K) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

d'où l'existence du minimum et par suite on a le résultat désiré. $\square$

Afin de prouver le Théorème 2.1, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 2.1 :

Supposons que $A, D \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifient (1.7) et (1.8). Alors, si le segment $[x, x']$ est contenu dans Ω on a :

$$\wedge_i w_i \cdot x - x' \leq G(x) - G(x') \leq \vee_i w_i \cdot x - x' \quad (2.5)$$

(On désigne par $\wedge$ l'infimum et par $\vee$ le supremum).

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires après régularisation (voir [C.L.])

Remarque 2.2 :

Une conséquence immédiate du Lemme 2.1 est que

$$G(x) - G(x') = 0$$

sur chaque segment $[x, x']$ tel que $x - x' \in W^\perp$, où $W^\perp$ désigne l'espace orthogonal de W , qui est réduit à zéro lorsque les w_i engendrent tout l'espace.

Maintenant, nous désignons par $v_1, v_2, \dots, v_p$ une base de W et par x_z les points du réseau de taille h^α , ($\alpha \in (0, 1)$ sera choisi plus loin) généré par les v_i i.e. pour $z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{Z}^p$ quelconque on pose,

$$x_z = \sum_{i=1}^p z_i h^\alpha v_i. \quad (2.6)$$

Puis, on définit la fonction Λ par

$$\Lambda(x) = \wedge_{\{z|x_z \in \Omega\}} \{G(x_z) + \vee_i w_i \cdot (x - x_z)\}. \quad (2.7)$$

Signalons que Λ est constante dans la direction $W^\perp$, (voir Remarque 2.2), et nous la considérons comme une fonction de $x \in W$ aussi bien qu'une fonction de $x \in \mathbf{R}^n$. Par définition une cellule unitaire du réseau engendré par $h^\alpha v_i$ est un ensemble du type

$$x_z + \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i h^\alpha v_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \right\}$$

où x_z est défini par (2.6). Ensuite, d'après l'hypothèse (2.1) on a pour un certain $\lambda \in (0, 1)$

$$\nabla \frac{G}{\lambda} \in Co(w_i). \quad (2.8)$$

En vertu de Lemme 2.1, on déduit

$$G(x) - G(y) \leq \lambda \vee_i w_i \cdot (x - y) \quad (2.9)$$

pour tout segment $[x, y]$ contenu dans Ω . Ainsi, nous avons :

Lemma 2.2 : (cf. [C.L.], [C.3])

Supposons que Ω soit convexe. Sous les hypothèses précédentes, si $\mathcal{C}$ désigne une cellule unitaire engendrée par les $h^\alpha v_i$, alors, il existe une constante C indépendante de $\mathcal{C}$ et λ , $h \in (0, 1)$, telle que pour tout $x \in \mathcal{C}$, le nombre de z pour lequel on doit prendre l'infimum dans (2.7) est uniformément borné par

$$\frac{C}{(1 - \lambda)^p} \quad (2.10)$$

i.e. $\Lambda(x) = \wedge_{\{z \mid x_z \in \Omega\}} \{G(x_z) + \vee_i w_i \cdot (x - x_z)\} = \wedge_{z_i} \{G(x_z) + \vee_i w_i \cdot (x - x_z)\}$ où le nombre de z_i est borné par (2.10).

Ensuite on a :

Lemma 2.3 :

Supposons Ω convexe. Sous les hypothèses précédentes, on a

$$G(x) \leq \Lambda(x) \leq G(x) + C.h^\alpha. \quad (2.11)$$

Démonstration :

Puisque Ω est convexe on obtient en utilisant le Lemme 2.1

$$G(x) \leq G(x_z) + \vee_i w_i \cdot x - x_z \quad \forall x_z \in \Omega$$

qui donne

$$G(x) \leq \Lambda(x).$$

Ensuite, pour $x \in \Omega$, notons par x_z le point le plus proche de x parmi tous les points x_z considérés précédemment. Alors, on a

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &\leq G(x_z) + \nabla_i w_i \cdot x - x_z \\ &\leq G(x) + G(x_z) - G(x) + \nabla_i w_i \cdot x - x_z \\ &\leq G(x) + C.h^\alpha.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Démonstration du Théorème 2.1 :

Ayant défini $\Lambda(x)$ comme précédemment remarquons que cette fonction n'est pas nécessairement égale à $A(x)$ sur Γ , donc, son interpolé en général n'appartient pas à K_h . Pour remédier cette situation, on pose

$$\begin{aligned}u_h &= \Lambda(x) \wedge (G(x) + \text{dist}(x, \Gamma)). \\ &= [\Lambda(x) \wedge (A(x) + (D - A)^+ + \text{dist}(x, \Gamma))].\end{aligned}$$

Alors on peut vérifier facilement que $u_h = A(x)$ sur Γ et $u_h \geq \beta$ p.p. dans Ω , d'où $u_h \in K_{A,\beta}(\Omega)$. On définit

$$\hat{u}_h = \text{l'interpolé de } u_h \text{ sur } \mathcal{T}_h,$$

ainsi, on a $\hat{u}_h \in K_h$. Maintenant, on va estimer

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx$$

Remarquons que lorsque

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha$$

où C est la constante de (2.11), on a

$$\Lambda(x) \leq G(x) + \text{dist}(x, \Gamma)$$

et donc

$$u_h(x) = \Lambda(x).$$

Autrement dit, lorsque $\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h$ on a

$$\hat{u}_h = \text{l'interpolé de } \Lambda(x)$$

En posant

$$I_1 = \{x \mid \text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha + h\},$$

on obtient, (voir [C. L.]).

$$\int_{I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C|I_1|.$$

où $|I_1|$ désigne la mesure de I_1 , puisque l'infimum dans (2.7) est pris sur un nombre fini de fonctions, alors (voir [C.L.] pour plus de détail) on a $|I_1| \leq C(h^\alpha)^{p-1}.h.N$ où N est le nombre de cellules de taille h^α inclusent dans $P_W(\Omega)$ où P_W désigne la projection de Ω dans W . Comme $N.h^\alpha \leq C$ alors $|I_1| \leq C(h^{1-\alpha})$ et par suite, on a

$$\int_{I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq Ch^{1-\alpha}. \quad (2.12)$$

Par ailleurs, puisque le gradient de $\hat{u}_h$ reste borné uniformément sur $I \setminus I_1$, on a

$$\int_{I \setminus I_1} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq Ch^\alpha. \quad (2.13)$$

On obtient finalement

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla \hat{u}_h(x)) dx \leq C(h^{1-\alpha} + h^\alpha). \quad (2.14)$$

Dans (2.14), l'estimation est optimal lorsque $\alpha = 1 - \alpha$ i.e. quand $\alpha = \frac{1}{2}$. D'où le résultat désiré. $\square$

3. ANALYSE DES OSCILLATIONS - MESURE DE YOUNG.

Théorème 3.1

On suppose que φ est bornée sur les sous ensembles bornés de $\mathbf{R}^n$. Si de plus φ admet au plus n puits, alors

$$\inf_{v \in K_{A,\beta}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx = 0 \quad (3.1)$$

et l'infimum ne peut être atteint.

Preuve :

Soit

$$u_h = \Lambda(x) \wedge (G(x) + \text{dist}(x, \Gamma)).$$

Clairement, $u_h \in K_{A,\beta}(\Omega)$. Lorsque

$$\text{dist}(x, \Gamma) \geq Ch^\alpha$$

où C est la constante de (2.11) on a $u_h = \Lambda(x)$ alors $\nabla u_h(x) = \nabla \Lambda(x) = w_i$. Donc si on note par Γ_h l'ensemble

$$\Gamma_h = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma) \leq Ch\},$$

alors

$$\int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h(x)) dx \leq \int_{\Gamma_h} \varphi(\nabla u_h(x)) dx \leq C' h^\alpha$$

et donc

$$\inf_{v \in K_{A,\beta}(\Omega)} \int_{\Omega} \varphi(\nabla v(x)) dx = 0.$$

On suppose que

$$\nabla A(x) \neq w_i \text{ sur un sous ensemble de mesure positive.} \quad (3.2)$$

Soit

$$u \in K_{A,\beta}(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Omega} \varphi(\nabla u(x)) dx = 0.$$

Alors

$$\nabla u(x) = w_i \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Par ailleurs on a

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) w_i \text{ alors } \sum_{i=1}^k \alpha_i(w_i - \nabla A) = 0$$

ce qui veut dire que les

$$w_i - \nabla A \quad i = 1, \dots, k$$

sont linéairement dépendants, par suite, il existe un vecteur unitaire orthogonal à $\nabla u - \nabla A$ et on a

$$\nu \perp (\nabla u - \nabla A)$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(A - u) = 0$$

$A - u$ est constante dans la direction ν et comme $A - u = 0$ sur Γ alors on a

$$u = A$$

ce qui est en contradiction avec (3.2) d'où le résultat. □

En l'absence de minimizer, il est utile d'étudier les suites minimisantes afin de voir s'ils possèdent une caractéristique en commun. Cela peut être fait moyennant une mesure de Young.

Dans ce paragraphe, nous supposons que

$$w_i - w_1 \quad i = 2, \dots, k \text{ sont linéairement indépendants} \quad (3.3)$$

Comme on a vu précédemment, sous les hypothèses (3.2) et (3.3) le problème (1.6) ne possède aucun minimum.

Rappelons que

$$\nabla A(x) \in Co(w_i) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad (3.4)$$

ainsi, il existe $\alpha_i(x)$ tel que $\alpha_i \in [0, 1]$ et

$$\nabla A(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) w_i \quad , \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) = 1. \quad (3.5)$$

De plus, on sait que α_i est unique grâce au (3.3). en fait, $\alpha_i(x)$ est mesurable (voir [C.L.]) On rappelle un Théorème qui est bien connu (voir par exemple [T.], [B.], [D.], [Ev.]) :

Lemme 3.1

Soit $u_h \in W^{1,\infty}(\Omega)$ une suite telle que $|u_h|_\infty, \|\nabla u_h\|_\infty \leq C$ (où $|\cdot|_\infty$ désigne la norme usuelle dans $L^\infty(\Omega)$ et $|\nabla u_h|$ la norme Euclidienne de ∇u_h).

Alors u_h détermine une mesure de Young. Plus précisément, il existe une sous-suite, notée encore u_h et une mesure de probabilité ν_x sur $\mathbf{R}^n$ telle que pour toute fonction de Carathéodory bornée $F(x, \xi)$ on ait :

$$\lim_h \int_{\Omega} F(x, \nabla u_h(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^n} F(x, \lambda) d\nu_x(\lambda) dx. \quad (3.6)$$

Théorème 3.1

Supposons que

- i) (3.2), (3.3), (3.4) et (3.5) sont satisfaites.
- ii) Si u_h est une suite minimisante du problème (1.6) telle que

$$|u_h|_{\infty}, |\nabla u_h|_{\infty} \leq C. \quad (3.7)$$

Alors, ∇u_h détermine une mesure de Young unique donnée par

$$\nu_x = \sum_{i=1}^k \alpha_i(x) \delta_{w_i} \quad (3.8)$$

où δ_{w_i} désigne la masse de Dirac au point w_i et α_i sont les coefficients dans (3.5) .

Démonstration

Grâce à (3.7), il existe une sous-suite notée encore u_h , telle que

$$\begin{aligned} u_h &\rightarrow u && \text{uniformément} \\ \nabla u_h &\rightharpoonup \nabla u && \text{dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } * \end{aligned} \quad (3.9)$$

pour un certain $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Soit ν_x la mesure de Young associée à u_h . D'après le Lemme 3.1, il existe une sous suite notée encore u_h telle que

$$\lim_h \int_{\Omega} \varphi(\nabla u_h(x)) dx = \int_{\Omega} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) dx = 0.$$

Ainsi on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \varphi(\lambda) d\nu_x(\lambda) = 0 \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

De sorte que ν_x est supportée seulement sur les puits w_i ; donc, on a

$$\nu_x = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) \delta_{w_i} \quad (3.10)$$

pour certaines fonctions mesurables β_i .

On a supposé que $w_i - w_1$ $i = 1, \dots, k$ engendrent un sous espace noté $L_1 \subset \mathbf{R}^n$, par ailleurs on a $0 \in C_0(w_i)$; donc il est clair que le sous espace L_1 coïncide avec le sous espace L engendré par w_i $i = 1, \dots, k$ et on a $\dim L < n$.

Maintenant, soit ν un vecteur unitaire orthogonal à L . En posant

$$F(x, \lambda) = |\{\lambda - \nabla A(x)\} \cdot \nu|$$

où $a.b$ désigne le produit de a et b . Puis, en utilisant (3.6), on obtient

$$\int_{\Omega} |\{\nabla u_h(x) - \nabla A(x)\} \cdot \nu| dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_{R^n} |\{\lambda - \nabla A(x)\} \cdot \nu| d\nu_x(\lambda) dx = 0$$

(car $\nu_x = \sum \beta_i(x) \delta_{w_i}$). C'est-à-dire que

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \{u_h(x) - A(x)\} \right| dx \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

Par l'inégalité de Poincaré

$$\int_{\Omega} |u_h - A| dx \leq C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \{u_h(x) - A(x)\} \right| dx$$

on obtient,

$$u_h \rightarrow A \quad \text{dans } L^1(\Omega).$$

D'après l'unicité de la limite; on a en tenant compte de (3.9),

$$u_h \rightarrow A \quad \text{uniformément}$$

enfin, on retrouve

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla A \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *$$

Soit B une boule quelconque contenue dans Ω . On applique le lemme (3.1) avec

$$F(x, \xi) = \chi_B(x) \cdot \xi$$

où χ_B désigne la fonction caractéristique de l'ensemble B .

Donc on a

$$\begin{aligned} \int_B \nabla u_h(x) dx &\rightarrow \int_B \int_{R^n} \lambda d\nu_x(\lambda) dx \\ &= \sum_{i=1}^k \int_B \beta_i(x) w_i dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

D'autre part,

$$\int_B \nabla u_h(x) dx \rightarrow \int_B \nabla A(x) dx \quad (3.13)$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_B \nabla u_h(x) dx &\rightarrow \int_B \nabla A(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^k \int_B \alpha_i(x) w_i dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En comparant (3.12) et (3.14), on obtient

$$\sum_{i=1}^k \int_B \beta_i(x) w_i dx = \sum_{i=1}^k \int_B \alpha_i(x) w_i dx. \quad (3.15)$$

De l'unicité des coordonnées barycentriques on a

$$\int_B \beta_i(x) dx = \int_B \alpha_i(x) dx \quad \forall \quad i = 1, \dots, k.$$

En divisant par $|B|$ et en vertu du théorème de différentiation de Lebesgue, on a

$$\beta_i(x) = \alpha_i(x) \text{ p.p. } x \in \Omega$$

d'où l'unicité de la mesure de Young et le résultat.

□

4. NON EXISTENCE D'UN MINIMIZER REGULIER POUR UNE FONCTIONNELLE INVARIANTE PAR ROTATION.

Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^n$. On désigne par $\mathbf{R}^{n \times n}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et l'on pose :

$$W_A^{1,\infty}(\Omega) = \{v \in W^{1,\infty}(\Omega) \mid v = A \cdot x \text{ sur } \partial\Omega\}$$

On s'intéresse au problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in W_A^{1,\infty}(\Omega) \text{ tel que :} \\ u \text{ minimise l'énergie } \int_{\Omega} W(\nabla v(x)) dx \end{cases}$$

On suppose que $W : \mathbf{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbf{R}$, vérifiant :

$$W \geq 0 \text{ et } W \text{ est continue} \quad (4.1)$$

$$W(QF) = W(F) \quad \forall Q \in SO_n, \quad \forall F \in M^n \quad (4.2)$$

$$\text{il existe } k, (k \geq 2) \text{ matrices } \omega_1, \dots, \omega_k \text{ telles que } W(\omega_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (4.3)$$

$$\omega_i, \quad i = 1, \dots, k \text{ sont inversibles} \quad (4.4)$$

$$\forall i \neq j, \quad \omega_i - \omega_j \text{ est rang - 1} \quad (4.5)$$

$$W(\omega) > 0 \quad \forall \omega \notin \{Q\omega_i \mid Q \in SO_n\} \quad i = 1, \dots, k \quad (4.6)$$

$$A = \sum_{i=1}^k \alpha_i \omega_i, \quad \alpha_i \in (0, 1), \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \quad (4.7)$$

Maintenant, on considère une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω en K simplexes et on choisit les espaces d'élément finis :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) : v_h|_K \in P_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h^A = \{v_h \in V_h : v_h = A \cdot x \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (4.8)$$

Théorème 4.1

Sous les hypothèses précédentes; il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , telle que :

$$\inf_{v_h \in V_h^A} \int_{\Omega} W(\nabla v_h(x)) dx \leq C h^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

Démonstration :

C' est une conséquence directe des Théorèmes 2.1 et 2.3 dans [C.C.K].

Théorème 4.2

Sous les hypothèses (4.1) à (4.7) et si $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} W(\xi) = +\infty$
il existe $u_h \in V_h^A$ telle que

$$\inf_{v_h \in V_h^A} \int_{\Omega} W(\nabla v_h(x)) dx = \int_{\Omega} W(\nabla u_h(x)) dx$$

Démonstration

Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 2 dans [C.2].

□

Une question d'importance est de savoir s' il existe $v \in W_A^{1,\infty}(\Omega)$ solution de P .

Il est clair que (4.9) entraine que

$$\inf_{v \in W_A^{1,\infty}} \int_{\Omega} W(\nabla v(x)) dx = 0$$

et par suite si $v(x) = Q\omega_i \cdot x$ avec $A = Q\omega_i$; v réalise l'infimum de (P) lequel est égale à 0.

Supposons donc

$$A \neq Q\omega_i \quad \forall i \quad (4.10)$$

Théorème 4.3

Supposons que W vérifie (4.1) à (4.7). Soit Ω_1 un ouvert connexe inclu dans Ω et tel que :

$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ ne soit pas entièrement contenu dans un hyperplan de $\mathbf{R}^n$. (4.11)

Alors, il n'existe pas d' éléments $u \in W_A^{1,\infty}(\Omega)$ réalisant l'infimum et qui soit de classe C^1 sur $\overline{\Omega_1}$.

Démonstration : (cf. [B.C.3])

Supposons que l'on ait :

$$\int_{\Omega} W(\nabla u_h(x)) dx = 0 \text{ où } u \in W_A^{1,\infty}(\Omega)$$

avec u est de classe C^1 sur $\overline{\Omega_1}$.

Alors

$$\nabla u(x) = Q(x)\omega_i \text{ p.p. dans } \Omega \text{ avec } Q(x) \in SO_n.$$

Il en résulte, si T désigne l'opérateur transposé que :

$$\nabla u(x)^T \cdot \nabla u(x) = \omega_i^T \omega_i \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On a donc

$$\nabla u(x)^T \cdot \nabla u(x) = \omega_i^T \omega_i \text{ p.p. dans } \Omega \quad \forall x \in \Omega_1.$$

D'où

$$(\nabla u(x) \omega_i^{-1})^T \cdot (\nabla u(x) \omega_i^{-1}) = I_n$$

et donc

$$(\nabla u(x) \omega_i^{-1}) \in SO_n \quad \forall x \in \Omega_1$$

ainsi, il existe cf. [Ci.1] $Q \in SO_n$ telle que

$$\nabla u(x) = Q \omega_i \quad \forall x \in \Omega_1$$

D'où $u(x) = Q \omega_i \cdot x + C \quad \forall x \in \Omega_1$ où C est une constante de $\mathbf{R}^n$.

Les applications affines A et u doivent coïncider sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$, donc d'après (4.11) en particulier en $(n+1)$ points non coplanaires. On a donc nécessairement $C = 0$ d'où $u = Q \omega_i \cdot x$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (4.10).

□

REFERENCES

- [B.] J. M. Ball : A version of the fundamental theorem for Young measures. In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, (1989), p. 207-215.
- [B.J.₁] J. M. Ball and R. D. James : Fine phase mixtures as minimizers of energy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 100, (1987), p. 13-52.
- [B.J.₂] J. M. Ball and R. D. James : Proposed experimental tests of a theory of fine microstructures. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* (to appear).
- [B.M.] J. M. Ball and F. Murat : $W^{1,p}$ quasiconvexity and variational problems for multiple integrals. *J. Funct. Anal.*, 58, (1984), p. 255-253.
- [Br.] B. Brighi : *Sur quelques problèmes de Calcul des Variations et l'approximation de leur fonctionnelle relaxée*. These, Université de Metz (1991).
- [B.C.₁] B. Brighi and M. Chipot : Approximation in nonconvex problems. Proceedings of the First European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Pont-à-Mousson, June 1991. (To appear).
- [B.C.₂] B. Brighi and M. Chipot : Approximated convex envelope of a function. (To appear).
- [B.C.₃] B. Brighi and M. Chipot : Densité d'énergie et matériaux cristallins .An. Fac. Sc. Toulouse.
- [C.₁] M. Chipot : Hyperelasticity for crystals. *European Journ. of Appl. Math.*, 1, (1990), p. 113-129.
- [C.₂] M. Chipot : Numerical analysis of oscillations in nonconvex problems. *Numerische Mathematik*, 59, (1991), p. 747-767.
- [C.₃] M. Chipot : Energy estimates for variational problems with potential wells and nonhomogeneous boundary conditions. (To appear).
- [C.C.] M. Chipot and C. Collins : Numerical approximation in variational problems with potential wells. *SIAM J. of Numerical Analysis*, 29, 4, (1992), p. 1002-1019.
- [C.C.K.] M. Chipot, C. Collins and D. Kinderlehrer : Numerical analysis of oscillations in multiple well problems. (To appear).
- [C.L.] M. Chipot and W. Li : Variational problems with potential wells and nonhomogeneous boundary conditions. (To appear).
- [C.K.] M. Chipot and D. Kinderlehrer : Equilibrium configurations of crystals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 103, (1988), p. 237-277.
- [C.M.] M. Chipot and S. Müller : Sharp energy estimates to finite element approximation for nonconvex problems (to appear)

[Co.] C. Collins : Thesis, University of Minnesota, 1990.

[C.K.L.] C. Collins, D. Kinderlehrer and M. Luskin : Numerical approximation of the solution of a variational problem with a double well potential. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28, (1991), p. 321-332.

[C.L.₁] C. Collins and M. Luskin : The computation of the austenitic-martensitic phase transition. In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989), p. 34-50.

[C.L.₂] C. Collins and M. Luskin : Computational results for phase transitions in shape memory materials. In *Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues*, C. Rogers, ed. Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, (1989), p. 198-215.

[C.L.₃] C. Collins and M. Luskin : Numerical modeling of the microstructure of crystals with symmetry-related variants. In *Proceedings of the ARO US-Japan Workshop on Smart Intelligent Materials*, Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, (to appear).

[C.L.₄] C. Collins and M. Luskin : Optimal order error estimates for the finite element approximation of the solution of a nonconvex variational problem. Preprint, (1990).

[D.] B. Dacorogna : *Weak continuity and weak lower semicontinuity of nonlinear functionals*. Springer Lecture Notes # 922, (1982).

[Er.] J. L. Ericksen : Some constrained elastic crystals. In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 119-137.

[Ev.] L. C. Evans : *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*. A.M.S. Regional Conference Series in Mathematics # 74, (1989).

[F.₁] I. Fonseca : Variational methods for elastic crystals. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 97, (1985), p. 189-220.

[F.₂] I. Fonseca : The lower quasiconvex envelope of the stored energy function for an elastic crystal. *J. Math. Pures et Appl.*, 67, (1988), p. 175-195.

[G.L.T.] R. Glowinski, J.L. Lions, R. Trémoлиères : *Numerical analysis of variational inequalities*. North-Holland.

[G.T.] D. Gilbarg and N.S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer Verlag, (1985).

[J.₁] R. James : Basic principles for the improvement of shape-memory and related materials. In *Smart Materials, Structures, and Mathematical Issues*, C. Rogers, ed., Technomic Publishing Co. Lancaster, PA, (1989).

[J.₂] R. D. James : Microstructure and weak convergence. In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball, ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 175-196.

[J. K.] R. D. James and D. Kinderlehrer : Theory of diffusionless phase transitions. In *Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions*, Lecture Notes in Physics # 344, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989), p. 51-84

[K.] D. Kinderlehrer : Remarks about equilibrium configurations of crystals. In *Material Instabilities in Continuum Mechanics and Related Problems*, J. M. Ball ed., Oxford University Press, Oxford, (1987), p. 217-242.

[K. P.₁] D. Kinderlehrer and P. Pedregal : Characterizations of Young measures generated by gradients. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 115, (1991), p. 329-365.

[K. P.₂] D. Kinderlehrer and P. Pedregal : Weak convergence of integrands and the Young measure representation. *SIAM J. Math. Anal.*, 23, 1, (1992), p. 1-19.

[Ko.] R. Kohn : The relationship between linear and nonlinear variational models of coherent phase transitions. In *Proceedings of the Seventh Army Conference on Applied Mathematics and Computing*, West Point, June 1989.

[L.] W. Li : Thèse, Université de Metz. A paraître.

[P.] P. Pedregal : Thesis, University of Minnesota, 1989.

[R.T.] P.A. Raviart and J.M. Thomas : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, (1988).

[T.] L. Tartar : Compensated compactness and application to partial differential equations In *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symp IV*, R.J. Knops ed., Pitman, (1979), 136-212.