



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

(n° DB 7832.)

S/Mj
93/6
3^{ecy}

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTION
UNIVERSITÉ DE METZ

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv.	19930175
Cote	S/Mj 93/6
Loc	Mapas

THESE

Présentée à l'UNIVERSITÉ de METZ par:

Lahcen AZRAR

Pour l'obtention du grade de:

**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ
en SCIENCES**

**Spécialité: MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Option : MÉCANIQUE**

**ÉTUDE DU COMPORTEMENT POST-CRITIQUE
DES COQUES CYLINDRIQUES PAR
UNE MÉTHODE ASYMPTOTIQUE-NUMÉRIQUE**

Soutenue publiquement le 22 février 1993 devant le jury composé de:

C. BREZINSKI
B. COCHELIN
G. DHATT
F. MIGNOT
M. POTIER-FERRY
G. RHIN

Université de Lille
Université de Metz
Université de Compiègne
Université de Paris-Sud
Université de Metz
Université de Metz

Président
Examineur
Rapporteur
Rapporteur
Directeur
Examineur

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux U.R.A. CNRS 1215 I.S.G.M.P.
Ile du saulcy, 57045 METZ Cedex 01

AVANT PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux à l'Université de Metz, sous la direction du professeur Michel POTIER-FERRY.

Je suis heureux de pouvoir remercier ici toutes les personnes qui ont permis que cette thèse aboutisse.

Je voudrais tout d'abord exprimer ma respectueuse reconnaissance à Michel POTIER-FERRY. En effet, l'attention, le soutien et surtout la confiance qu'il m'a toujours témoignée, ont été pour moi le stimulant nécessaire à l'achèvement de ce travail. Son opiniâtreté et son éclectisme sont pour moi un exemple.

Je voudrais ensuite exprimer ma profonde gratitude à Monsieur G. DHATT et à Monsieur F. MIGNOT pour avoir accepté de prendre sur leur temps afin d'assumer la charge de rapporteur. J'en suis particulièrement honoré.

Je remercie également les jurys, Monsieur C. BREZINSKI, Monsieur G. RHIN et Monsieur B. COCHELIN dont la présence est pour moi un honneur. La sympathie et la disponibilité de Monsieur RHIN m'ont beaucoup touché.

Je remercie tout particulièrement Monsieur B. COCHELIN et Monsieur N. DAMIL pour leur collaboration sur le plan numérique. La rigueur et le brio du travail effectué ensemble ont largement contribué à l'élaboration de cette étude.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du groupe de calcul de structures et aux amis du L.P.M.M.

Je remercie spécialement mes amis les plus intimes à qui je dois énormément. Leur sincère amitié et leur soutien ont été pour moi une source d'énergie.

Enfin je remercie Madame M. MARCELET secrétaire du L.P.M.M. et Mademoiselle Y. ZOUBIR pour leur gentillesse et leur souriant accueil.

PLAN DE LA THESE

INTRODUCTION

CHAPITRE I: GENERALITES ET STABILITE ELASTIQUE

- I-1 MODELISATION DES COQUES CYLINDRIQUES
 - I-1-0 Introduction
 - I-1-1 Variables d'espace Lagrangiennes
 - I-1-2 Différents modèles de coques
 - I-1-3 Modèles de Koiter et de Donnell
 - I-1-4 Cadre fonctionnel
 - I-1-5 Contraintes généralisées
 - I-1-6 Energie potentielle
 - I-1-7 Conclusion
- I-2 THEORIE GENERALE DE LA STABILITE ELASTIQUE
 - I-2-1 Notions de bifurcation
 - I-2-2 Critères de stabilité
 - I-2-3 Bifurcation stable et bifurcation instable
 - I-2-3-1 Exemple mathématique
 - I-2-3-2 Modèle mécanique simple
 - I-2-3-3 Coque cylindrique
 - I-2-3-3-1 Flambage de la coque cylindrique
 - I-2-3-3-2 Post-flambage
 - I-2-4 Conclusion

CHAPITRE II

FORMULATION EN OPERATEURS ET BIFURCATION SIMPLE

- II-0 ORIENTATION
- II-1 ANALYSE DES POINTS DE BIFURCATION ET JUSTIFICATIONS MATHEMATIQUES POUR LES COQUES DE DONNELL
 - II-1-0 Introduction
 - II-1-1 Ellipticité de l'énergie de déformation
 - II-1-2 Formulation opérationnelle de l'équation d'équilibre
 - II-1-3 Réduction de Lyapunov-Schmidt
 - II-1-4 Branches bifurquées
 - II-1-5 Conclusion

- II-2 EXPLICITATION A LA POUTRE D'EULER ELASTIQUE
 - II-2-0 Introduction
 - II-2-1 Formulation du problème
 - II-2-2 Réduction de Lyapunov-Schmidt
 - II-2-3 Développement asymptotique et numérique
 - II-2-4 Conclusion

CHAPITRE III

DEVELOPPEMENT DE LA METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE ET APPLICATION AUX COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES

- III-0 ORIENTATION
- III-1 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE
 - III-1-0 Introduction
 - III-1-1 Formulation en opérateurs de l'équation d'équilibre
 - III-1-2 Développement asymptotique
 - III-1-2-a Réduction de Lyapunov-Schmidt et développement asymptotique
 - III-1-2-b Passage du problème non-linéaire aux problèmes linéaires
 - III-1-2-c Passage du problème mixte au problème en déplacement
 - III-1-2-d Relaxation du problème en déplacement
 - III-1-3 Tableau de synthèse
- III-2 FORMULATION OPERATIONNELLE UNIDIMENSIONNELLE
 - III-2-0 Introduction
 - III-2-1 Décomposition en séries de Fourier
 - III-2-2 Décomposition harmonique de $V(p)$
 - III-2-3 Passage de 2D à 1D
 - III-2-4 Réalisation numérique
 - III-2-5 Conclusion
- III-3 APPLICATION AU FLAMBAGE ET POST-FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES
 - III-3-1 Etude du flambage du cylindre
 - III-3-1-a Réalisation numérique
 - III-3-1-b Flambage du cylindre
 - III-3-2 Etude du post-flambage du cylindre sous pression externe
 - III-3-2-a Réalisation numérique
 - III-3-2-b Branches bifurquées
 - III-3-3 Conclusion

III-4 PRISE EN COMPTE DU PREFLAMMAGE

III-4-0 Introduction

III-4-1 Problème de préflamme

III-4-2 Flamme et post-flamme avec préflamme

III-4-2-a Flamme du cylindre sous pression ou compression avec préflamme

III-4-2-b Post-flamme du cylindre sous pression avec préflamme

III-4-3 Conclusion

III-5 CONCLUSION

CHAPITRE IV

AMELIORATION DE LA CONVERGENCE

IV-0 INTRODUCTION

IV-1 PROCEDURE DE REORGANISATION

IV-1-a Réorganisation de la représentation de $U(a)$

IV-1-b Réorganisation de la représentation de $\lambda(a)$

IV-2 ADAPTATION AUX COQUES DE REVOLUTION

IV-3 APPLICATIONS

IV-3-a Cas des plaques

IV-3-b Cas des coques cylindriques

IV-4 CONCLUSION

CHAPITRE V

POST-FLAMMAGE DES COQUES CYLINDRIQUES AVEC IMPERFECTIONS GEOMETRIQUES

V-0 ORIENTATION

V-1 DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

V-1-0 Introduction

V-1-1 Equations opérationnelles

V-1-1-a Formulation générale

V-1-1-b Formulation sans préflamme et sans contraintes résiduelles

V-1-1-c Relations de récurrence

V-1-2 Passage de 2D à 1D

V-1-2-a Développement des ordres supérieurs

V-1-2-b Relation de récurrence 1D

V-2 RESULTATS NUMERIQUES

V-2-0 Introduction

V-2-1 Charge limite de flambage

V-2-2 Comportement post-critique en présence des imperfections

V-2-2-a Convergence vers la branche solution

V-2-2-b Chargement maximal en fonction de l'amplitude des
imperfections

V-3 CONCLUSION

VI CONCLUSION

ANNEXE A

ANNEXE B

BIBLIOGRAPHIE

NOTATIONS PRINCIPALES

$\Gamma_{\alpha\beta}$: Tenseur de déformation

Γ^L, Γ^{NL} : Partie linéaire et partie non-linéaire de Γ

$K_{\alpha\beta}$: Tenseur de changement de courbure

$N_{\alpha\beta}$: Contrainte résultante

H-R-M : Fonctionnelle d' Hellinger-Reissner modifiée

λ : Paramètre de charge

λ_c : Charge critique

L, L' : Opérateurs linéaires

Q : Opérateur quadratique

u_1, u_2, w : Déplacement respectivement axial, circonférentiel et radial

$U = (u_1, u_2, w, N_{11}, N_{22}, N_{12})$: Vecteur mixte (déplacements et contraintes) dit vecteur généralisé

$V(1)$: Mode de flambage

$V(p)$: Coefficients vectoriels de la série décomposant U

$t(p)$: Coefficients scalaires de la série décomposant λ

$[K_e + \lambda_c K_g]$: Matrice de rigidité tangente

$F(p)$: vecteur second membre

$V(p-j,j)$: Composante $(p-2j)$ des harmoniques décomposants $V(p)$

$\mathcal{L}_k, \mathcal{L}'_k$: Opérateurs linéaires 1D associés à l'harmonique k

$\mathcal{Q}_{k,k'}$: Opérateur quadratique 1D associé à l'harmonique $k + k'$

$v(p-j,j)$: Composante $(p-2j)$ 1D des harmoniques décomposants $V(p)$

$n(p-j,j)$: Composante $(p-2j)$ 1D des harmoniques décomposants $N(p)$

$[k_e(p-2j) + \lambda_c k_g(p-2j)]$: Matrice de rigidité tangente 1D associée à l'harmonique $(p-2j)$

----- Prise en compte des imperfections -----

a_0 : Amplitude des défauts

V^* : forme des défauts

$V(p-3r,3r)$: Coefficients vectoriels de la série décomposant U

$C(p-3r,3r)$: Coefficients scalaires de la série décomposant λ

$V(p-3r,p-2r-j,j,3r)$: Composante $(p-2r-2j)$ 1D des harmoniques décomposants $V(p-3r,3r)$

$\ll ; \gg, < ; >$ produit scalaire 2D et 1D

INTRODUCTION

L'analyse du phénomène de stabilité des structures minces a mobilisé un grand nombre de chercheurs ces dernières décennies. Cela est dû, d'une part à la forte utilisation de ces structures dans les domaines nucléaires, aéronautiques, aérospatiaux et constructions civiles et d'autre part aux développements accrus des procédures numériques pour de telles structures.

Dans les différentes constructions, ces structures sont composées de poutres, plaques et coques. Soumises à des sollicitations extérieures, ces structures perdent leur stabilité. L'un des pionniers à ouvrir la voie de l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques fut Euler. Les résultats analytiques obtenus par l'analyse linéaire se rapprochent des résultats expérimentaux pour les poutres et les plaques mais pas pour les coques.

Koiter, dans sa thèse [K5], présente une théorie générale sur l'analyse du comportement critique et post-critique des structures élastiques. La prise en compte des imperfections lui a permis d'expliquer la discordance entre les résultats expérimentaux et théoriques. Différents auteurs ont repris le concept de Koiter pour différentes structures [B14-15-16], [P5-6]. Nous rappelons brièvement les idées de ces théories connues en mécanique des structures sous le nom de la théorie du flambage et post-flambage et en mathématiques sous le nom de la théorie de la bifurcation.

L'équilibre d'une structure élastique sous chargements conservatifs est déterminé par l'énergie potentielle $P[U, \lambda]$ qui est une fonctionnelle non-linéaire dépendant du déplacement U et d'un paramètre scalaire λ mesurant les forces extérieures. L'équilibre est solution de l'équation variationnelle suivante:

$\delta P[U, \lambda] = \langle P'[U, \lambda], \delta U \rangle = 0$ pour tout δU admissible
 où P' représente la dérivée de Fréchet par rapport à U .
 En supposant que $U = 0$ est une solution fondamentale de cette équation, les points de bifurcation sont caractérisés par l'existence d'un U non nul et admissible vérifiant:

$$\langle P''[0, \lambda_c]U, \delta U \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \delta U \text{ admissible}$$

Le vecteur $\mathbf{U}$, appelé mode de flambage, est un élément du noyau $\mathbf{N}$ de l'opérateur $P''[0, \lambda_c]$. La méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt permet de réduire le problème de bifurcation à un problème équivalent sur l'espace $\mathbf{N}$, qu'on suppose de dimension un pour l'étude de la bifurcation simple. Les autres solutions, dites solutions bifurquées, peuvent être déterminées par un développement asymptotique selon la méthode de Poincaré-Lindstedt :

$$\begin{cases} U = a\mathbf{U} + O(a^2) \\ \lambda - \lambda_c = a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots \end{cases}$$

où a est la projection de la solution sur le mode $\mathbf{U}$. Les coefficients numériques λ_1 et λ_2 , se calculent à partir de l'énergie et du mode.

En se limitant à la bifurcation symétrique ($\lambda_1=0$) on obtient les branches bifurquées qui ont l'allure suivante:

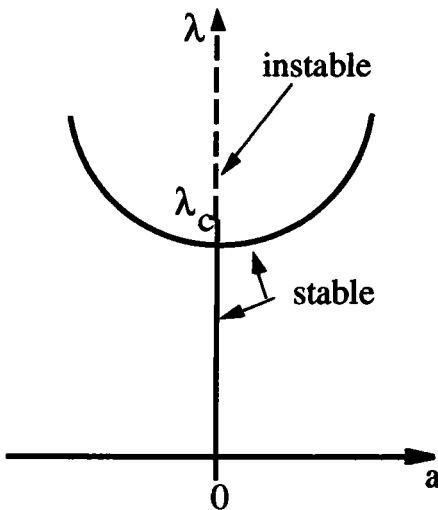


Fig. a $\lambda_2 > 0$

Bifurcation symétrique stable

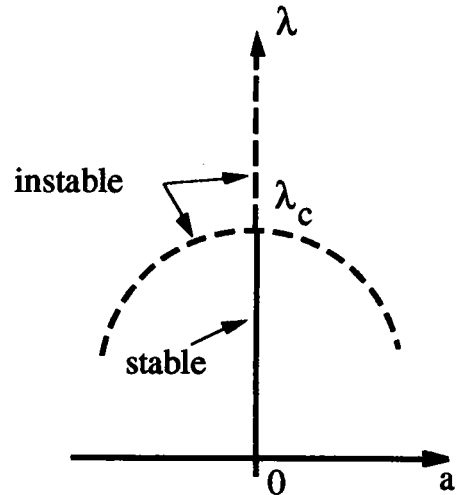


Fig. b $\lambda_2 < 0$

Bifurcation symétrique instable

La figure a représentant la bifurcation symétrique stable est rencontrée dans le cas des plaques. La figure b représentant la bifurcation symétrique instable est rencontrée dans le cas des coques. Dans ce dernier cas, on a un flambage avec chute de rigidité de la structure. L'étude du comportement post-critique des plaques et coques par l'analyse non-linéaire montre une différence qualitative entre le comportement de ces deux structures. La

bifurcation instable obtenue dans le cas des coques induit une forte sensibilité de ces structures aux imperfections. D'après la littérature mécanique, ce sont les imperfections géométriques, c'est à dire les défauts de forme de la structure, qui jouent le rôle le plus important dans la prévision du flambage [W1].

La théorie de la bifurcation perturbée permet la prise en compte de imperfections et conduit à des branches de solutions sous la forme:

$$\begin{cases} U = a\mathbf{U} + O(a^2) \\ \lambda - \lambda_c = a^2\lambda_2 + \frac{a_0}{a} + \dots \end{cases}$$

où a_0 représente l'amplitude des imperfections.

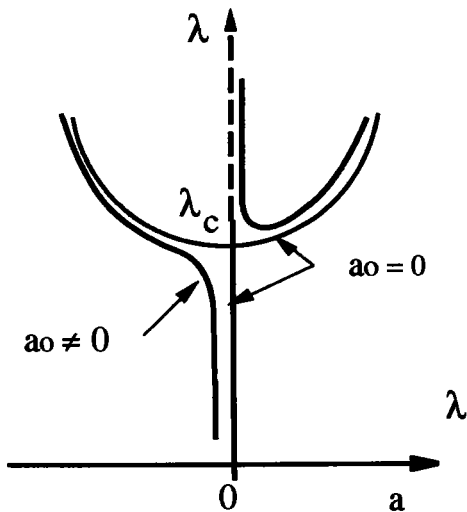


Fig. c $\lambda_2 > 0$

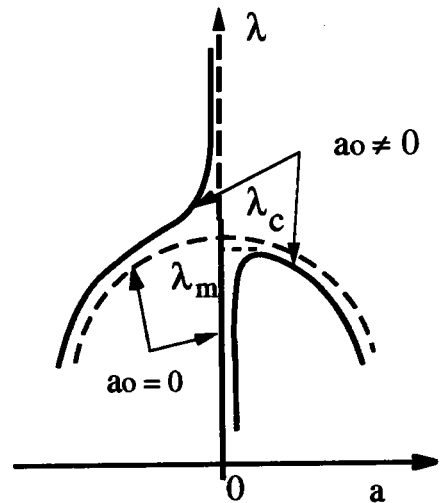


Fig. d $\lambda_2 < 0$

Le comportement dans le cas des plaques, Fig. c, n'est pas vraiment modifié. Mais dans le cas des coques, Fig. d, il y a flambage pour des valeurs de λ inférieures à λ_c . Dans la pratique, la réduction de la charge de flambage est souvent très importante pour des imperfections relativement petites [W1].

Les raisons principales de l'étude du comportement du post-flambage sont de mieux estimer la charge de flambage, surtout en présence des imperfections et de déterminer le chargement sécuritaire que peuvent supporter ces structures. Un grand nombre d'auteurs ont développé des méthodes de résolution de ces problèmes qui sont généralement des méthodes itératives ou asymptotiques.

Les méthodes itératives numériques de type Newton-Raphson permettent de déterminer point par point la courbe charge-déplacement [C2-3], [R4]. Bien qu'on les trouve dans la plupart des codes de calculs des structures, elles nécessitent un "grand" temps de calcul CPU et sont difficiles à piloter automatiquement. L'avantage des méthodes asymptotiques de type Lyapunov-Schmidt est qu'elles permettent de déterminer analytiquement les branches bifurquées [K5], [B15-16], [Y3]. Comme les développements asymptotiques proposés par ces auteurs ne sont pas faciles à manipuler, ils se restreignent aux ordres bas. Cela réduit la zone de validité des solutions obtenues.

Notre but est d'étudier le comportement post-critique de ces structures non pas au voisinage très proche du point critique mais aussi loin que possible. Pour cela, une méthode asymptotique - numérique décrite par Damil et Potier-Ferry [D1] est présentée. Son application aux plaques a été faite par Cochelin et Damil [A12-13]

Ce travail s'inscrit dans l'étude du comportement post-critique des coques cylindriques avec ou sans imperfections. Pour cela nous présentons une adaptation de cette méthode asymptotique-numérique aux coques de révolution.

Ce document est composé de cinq chapitres. Le premier fait l'objet d'une étude bibliographique dans laquelle sont rappelées brièvement la modélisation des coques cylindriques et les généralités de la stabilité élastique. Cette modélisation est décrite dans le cas de petites déformations et rotations modérées. La stabilité élastique est introduite par des exemples simples de bifurcation à un paramètre. Ainsi les notions de bifurcation et l'influence des imperfections sont présentées.

Le deuxième chapitre présente une formulation en opérateurs de l'équation d'équilibre. Cette formulation permet d'utiliser les résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts. La branche bifurquée décrivant le comportement post-critique est alors présentée par une série entière au voisinage du point critique.

Dans le troisième chapitre est présentée une méthode asymptotique-numérique. En se basant sur la formulation mixte de l'équation d'équilibre, on introduit une formulation en opérateurs maniable pour les développements asymptotiques. On décrit les différentes étapes de la méthode asymptotique numérique

permettant de ramener la résolution du problème non-linéaire d'équilibre à celle de problèmes linéaires nécessitant une seule inversion de matrice.

En se basant sur la symétrie de révolution, on ramène l'étude de la coque à celle de sa génératrice. La résolution des problèmes linéaires bidimensionnels se réduit à un modèle monodimensionnel. On établit alors un code de calcul d'éléments finis 1D permettant de déterminer le post-flambage initial des coques de révolution.

Une variante de cette méthode asymptotique permet la prise en compte d'un préflambage non-linéaire. Ainsi le préflambage, le flambage et le post-flambage initial des cylindres parfaits sous pression sont déterminés.

L'aspect asymptotique de cette méthode induit une zone de validité des résultats prédits. Cela correspond au rayon de convergence des séries asymptotiques.

Le chapitre quatre fera l'objet de l'amélioration de la convergence. Après une réorganisation des séries entières obtenues, on les remplace par des fractions rationnelles appelées approximants de PADE. Cette réorganisation peu coûteuse en temps CPU permet souvent d'augmenter considérablement la zone de convergence.

Comme les imperfections sont pratiquement inévitables, il est d'un grand intérêt de clarifier leur influence sur le chargement critique et sur le comportement post-critique.

Le chapitre cinq fera l'objet de la prise en considération des imperfections géométriques de forme modale. En se basant sur la procédure décrite par Damil et Potier-Ferry pour la poutre sur fondation élastique [D1], nous décrivons un concept de résolution adapté aux coques de révolutions. La décomposition en harmoniques permettant la réduction du temps de calcul alourdit davantage les développements asymptotiques. L'utilisation des systèmes de calcul formel facilite cette tâche et nous a permis d'établir les relations de récurrence 1D. En résolvant ces problèmes on obtient les relations analytiques de la charge et du déplacement en fonction de l'amplitude des imperfections. Ainsi les relations de réduction de la charge critique et les branches de solutions sont données pour différentes amplitudes des imperfections.

CHAPITRE I

GENERALITES ET STABILITE ELASTIQUE

I-1 MODELISATION DES COQUES CYLINDRIQUES

I-1-0 Introduction

I-1-1 Variables d'espace Lagrangiennes

I-1-2 Différents modèles de coques

I-1-3 Modèles de Koiter et de Donnell

I-1-3-a Modèle de Koiter

I-1-3-b Modèle de Donnell

I-1-4 Cadre fonctionnel

I-1-4-a Espace des déplacements admissibles

I-1-4-b Cadre fonctionnel des coques cylindriques de Donnell

I-1-5 Contraintes généralisées

I-1-6 Energie potentielle

I-1-7 Conclusion

I-2 THEORIE GENERALE DE LA STABILITE ELASTIQUE

I-2-1 Notions de bifurcation

I-2-2 Critères de stabilité

I-2-3 Bifurcation stable et bifurcation instable

I-2-3-1 Exemple mathématique

I-2-3-1-a Bifurcation parfaite

I-2-3-1-b Bifurcation perturbée

I-2-3-2 Modèle mécanique simple

I-2-3-2-a Modèle parfait

I-2-3-2-b Influence des imperfections

I-2-3-3 Coque cylindrique

I-2-3-3-1 Flambage de la coque cylindrique

I-2-3-3-1-a Influence des conditions aux limites

I-2-3-3-1-b Influence de la déformation du préflambage

I-2-3-3-1-c Influence des imperfections

I-2-3-3-2 Post-flambage

I-2-4 Conclusion

I - 1 MODELISATION DES COQUES CYLINDRIQUES

I-1-0 INTRODUCTION

Dans ce paragraphe nous décrivons la modélisation des coques cylindriques élastiques dans le cas de petites déformations et rotations modérées. Cette modélisation est essentiellement obtenue en considérant la coque comme un milieu continu tridimensionnel d'épaisseur constante et "petite" - coque mince -. Moyennant quoi, on peut raisonnablement supposer que l'état des contraintes est plan et que la distribution des contraintes parallèles à la surface moyenne de la coque est linéaire. Cela permet de ramener l'étude de la coque à celle de sa surface moyenne sur laquelle plusieurs auteurs ont développé leurs modèles. On rappelle les modèles, bien connus, de Koiter et de Donnell et on donne un cadre fonctionnel au modèle de Donnell qu'on utilisera ultérieurement.

I-1-1 VARIABLES D'ESPACE LAGRANGIENNES

Soit E^3 l'espace affine euclidien usuel rapporté à un repère fixe $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, orthonormé. Soit $\Omega =]y_1, y_2[\times]-H, H[$, un ouvert borné du plan E^2 avec $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 2\pi$ et $0 < H$. La surface moyenne $\bar{S}$ de la portion de la coque cylindrique Fig.I-1 est l'image dans E^3 de l'adhérence $\bar{\Omega}$ par une carte Φ .

$$\begin{aligned} \Phi : \bar{\Omega} \subset E^2 &\longrightarrow E^3 & (I-1 \ 1) \\ (x, y) &\longrightarrow R \cos y \vec{e}_1 + R \sin y \vec{e}_2 + x \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Les paramètres (x, y) forment un système de coordonnées curvilignes de la surface $\bar{S}$. Comme d'habitude, la base naturelle est définie par :

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{Bmatrix} -R \sin y \\ R \cos y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (I-1 \ 2)$$

Ces deux vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ définissent le plan tangent à la surface $\bar{S}$ au point $\Phi(x, y)$. On introduit ensuite le vecteur normal $\vec{a}_3$:

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \begin{cases} -\cos y \\ -\sin y \\ 0 \end{cases} \quad (\text{I-1 } 3)$$

$|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans E^3 muni du produit scalaire habituel.

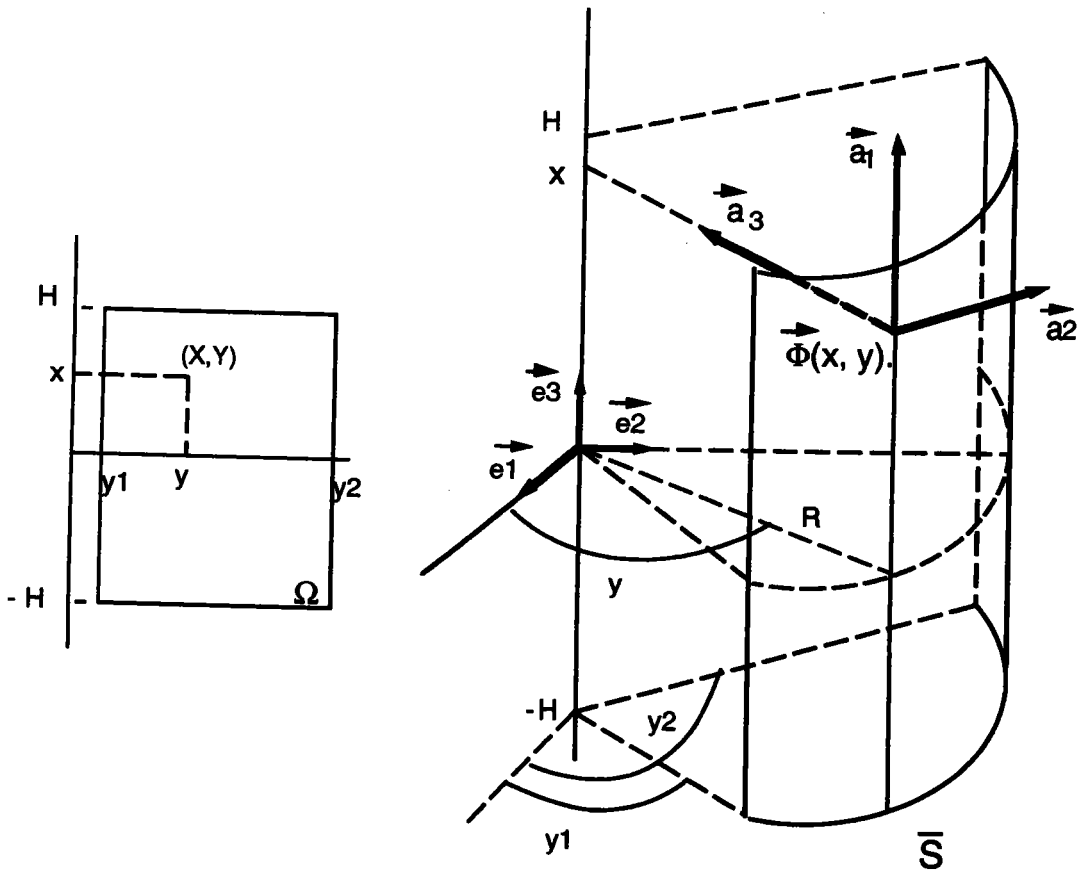


Figure I-1 : Définition de la surface moyenne de la coque.

Le point $\Phi(x, y)$ et les trois vecteurs $\vec{a}_i$ définissent alors un repère local de la surface. Outre les deux coordonnées curvilignes x et y qui nous ont permis de définir la surface moyenne, nous introduisons une troisième coordonnée curviligne z , qui est la cote mesurée sur la normale $\vec{a}_3$ à la surface $\bar{S}$ au point $\Phi(x, y)$.

L'épaisseur de la coque étant définie par une application

$$e : (x, y) \in \bar{\Omega} \longrightarrow \{e \in \mathbf{R}, \quad e > 0\}$$

e est supposée dans la suite "très petite" - coques minces - et constante. La coque C est alors le sous-ensemble fermé de E^3 définie par:

$$C = \left\{ M \in E^3, \vec{OM} = \Phi(x, y) + z \vec{a}_3, (x, y) \in \bar{\Omega}, \right. \\ \left. - e(x, y) \leq z \leq e(x, y) \right\} \quad (I-14)$$

C est la configuration de la coque avant déformation. Sous la distribution des forces appliquées et les conditions aux limites, la coque se déforme et prend une nouvelle configuration, appelée configuration déformée. Connaissant les constantes physiques caractérisant le matériau composant la coque, les forces appliquées et les conditions aux limites, on peut déterminer les déplacements des points de C. On peut alors en déduire les déformations et les contraintes en tout point de la coque déformée. Cette démarche utilise la modélisation de l'élasticité tridimensionnelle.

I-1-2 DIFFERENTS MODELES DE COQUES

Les théories de coques proposées par Love, Kirchhoff ou Koiter reposent sur une démarche fondamentalement différente de la modélisation tridimensionnelle. Ces auteurs déduisent de la connaissance du champ du déplacement de la surface moyenne de la coque une approximation satisfaisante de diverses caractéristiques de la coque déformée. L'intérêt du passage d'une théorie tridimensionnelle à une théorie bidimensionnelle est évident, ne serait-ce que du seul point de vue de la résolution numérique. Ces théories approchées reposent sur un certain nombre d'hypothèses. Le choix et la justification de ces hypothèses ont été démontrés par Koiter [K6-8]. Cet auteur montre en particulier que l'évaluation du tenseur des déformations de la coque déformée se ramène en première approximation à l'évaluation des deux tenseurs de surface suivants :

i) Le tenseur de déformation de la surface moyenne:

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta} \right) \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (I-15-a)$$

ii) Le tenseur de changement de courbure:

$$K_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (I-15-b)$$

Les quantités $a_{\alpha\beta}$ (resp. $\bar{a}_{\alpha\beta}$), $b_{\alpha\beta}$ (resp. $\bar{b}_{\alpha\beta}$) désignent respectivement la première et la seconde forme fondamentale de la surface moyenne $\bar{S}$ avant déformation (resp. après déformation).

Les expressions de $\Gamma_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ contiennent des termes linéaires et des termes non-linéaires associés au champ de déplacement. Il est nécessaire dans l'analyse de la stabilité élastique, de retenir les termes non-linéaires dans l'expression de $\Gamma_{\alpha\beta}$. En ce qui concerne les termes non-linéaires dans l'expression de $K_{\alpha\beta}$, il est à noter qu'ils sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$ fois la contribution non-linéaire des déformations de membrane, où R est le plus petit des rayons principaux de la coque [K6].

Les différentes théories existantes des coques diffèrent entre elles essentiellement par l'usage qu'elles font des hypothèses de Kirchhoff-Love et par le degré de minceur qu'elles considèrent. Le premier modèle complet des coques élastiques minces déduit des hypothèses de Kirchhoff a été introduit par Love 1888 [L1]. Plusieurs tentatives de simplification de ce modèle ont mené à différentes versions du modèle original. En 1933, Donnell a introduit un modèle simple donnant des résultats acceptables en accord avec les expériences. Vu sa simplicité, ce modèle devient le plus largement utilisé. Toutefois, il donne de mauvais résultats pour les coques ayant une grande longueur d'onde du déplacement circonférentiel. Pour de telles coques un modèle plus complexe introduit par Flügge [F3] est souvent utilisé. En 1968, un modèle plus général et adapté à différentes coques a été introduit par Koiter [K 6-7].

I-1-3 MODELES DE KOITER ET DE DONNELL

On va décrire brièvement les deux modèles de coques les plus répandus, de Koiter et de Donnell pour une coque cylindrique.

On considère un cylindre droit de rayon R de longueur L et d'épaisseur h . On note par u , v et w les champs de déplacement respectivement axial, circonférentiel et radial. On va expliciter les deux tenseurs de la surface moyenne $\Gamma_{\alpha\beta}$ et de changement de courbure $K_{\alpha\beta}$ suivant les deux modèles de Koiter et de Donnell

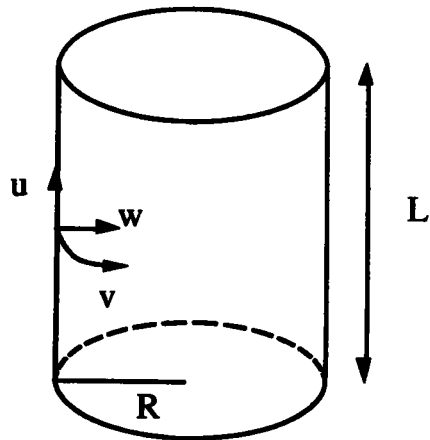


Fig. I-2

I-1-3-a MODELE DE KOITER-SANDERS

Dans la théorie non-linéaire des coques minces, le modèle de Koiter et Sanders est le modèle le plus général et le plus complet en petites déformations [K6-7], [S2], [N3]. Ce modèle est adapté pour les coques profondes et aussi surbaissées, "shallow and non-shallow shells". On explicite ici les tenseurs de déformation et de courbure, donnés par ce modèle pour une coque cylindrique avec petites déformations et rotations modérées.

Tenseur de déformation $\Gamma_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} (v_{,x} - u_{,y})^2 \\ \Gamma_{yy} &= v_{,y} - \frac{1}{R} w + \frac{1}{2} (w_{,y} + \frac{1}{R} v)^2 + \frac{1}{8} (u_{,y} - v_{,x})^2 \\ \Gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} (w_{,y} + \frac{1}{R} v)\end{aligned}\quad (I-1\ 6-a)$$

Tenseur de courbure $K_{\alpha\beta}$:

$$\begin{cases} K_{xx} = - w_{,xx} \\ K_{yy} = - [w_{,yy} + \frac{1}{R} v_{,y}] \\ K_{xy} = -2 [w_{,xy} + \frac{1}{4R} (3v_{,x} - u_{,y})] \end{cases}\quad (I-1\ 6-b)$$

I-1-3-b. MODELE DE DONNELL

Le modèle des coques de Koiter est un modèle complet et général. Mais vu la complexité analytique de ses équations, les utilisateurs lui préfèrent un modèle relativement plus simple donnant les mêmes résultats surtout pour les coques surbaissées (shallow shells). Ce modèle a été établi par Donnell [D7] et en même temps par Mushtari et Vlasov [N3]. En raison de sa simplicité et de sa précision, ce modèle est le plus largement utilisé pour les études analytiques du flambage et du post-flambage des coques. On donne les tenseurs de déformation $\Gamma_{\alpha\beta}$ et de courbure $K_{\alpha\beta}$ sous les mêmes hypothèses que précédemment.

Tenseur de déformation $\Gamma_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} \Gamma_{xx} = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \\ \Gamma_{yy} = v_{,y} - \frac{1}{R} w + \frac{1}{2} w_{,y}^2 \\ \Gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{cases} \quad (\text{I-1 7-a})$$

Tenseur de courbure $K_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} K_{xx} = -w_{,xx} \\ K_{yy} = -w_{,yy} \\ K_{xy} = -2w_{,xy} \end{cases} \quad (\text{I-1 7-b})$$

I-1-4 CADRE FONCTIONNEL

On rappelle ici quelques notions élémentaires sur les espaces de Sobolev qui seront utiles pour définir les tenseurs $\Gamma_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ ainsi que pour la suite [A3], [D3], [N2].

I-1-4-a ESPACES DES DEPLACEMENTS ADMISSIBLES

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de puissance p ième intégrale sur Ω . On note $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ où $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Soit T une distribution, on désigne par $D^\alpha T$ la dérivée d'ordre α de T au sens des distributions. On définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par:

$$H^m(\Omega) = \left\{ U \in L^2(\Omega), D^\alpha U \in L^2(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m \right\} \quad (\text{I-1 8-a})$$

qu'on munit du produit scalaire suivant:

$$\langle U, V \rangle_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha U \cdot D^\alpha V \, d\Omega \quad (\text{I-1 8-b})$$

Muni de ce produit scalaire $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On rappelle aussi les inclusions avec injections continues suivantes:

$$H^m(\Omega) \subset H^{m-1}(\Omega) \dots \subset H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$$

On définit aussi l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, par :

Pour $m \in \mathbb{N}$ $1 \leq p < \infty$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ U \in L^p(\Omega), D^\alpha U \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m \} \quad (\text{I-1 } 9)$$

On note que pour $p = 2$ on a : $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Dans le cadre de Donnell, pour que les tenseurs de déformation $\Gamma_{\alpha\beta}$ et de courbure $K_{\alpha\beta}$ soient bien définis, on prend l'espace fonctionnel $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$. On définit l'espace des déplacements admissibles V par:

$$V = \{ U \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \text{ tel que } U \text{ vérifie les conditions aux limites cinématiques} \} \quad (\text{I-1 } 10\text{-a})$$

On munit l'espace V du produit scalaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Soient } U^1, U^2 \in V \quad U^1 &= (u^1, v^1, w^1) \\ U^2 &= (u^2, v^2, w^2) \end{aligned} \quad (\text{I-1 } 10\text{-b})$$

$$\langle U^1, U^2 \rangle_V = \langle u^1, u^2 \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle v^1, v^2 \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle w^1, w^2 \rangle_{H^2(\Omega)}$$

La norme associée est: $\|U\| = [\langle U, U \rangle]^{1/2}$

Muni de ce produit scalaire, l'espace des déplacements admissibles V est un espace de Hilbert.

I-1-4-b. CADRE FONCTIONNEL POUR LES COQUES CYLINDRIQUES DE DONNELL

Le modèle de Donnell, bien que simple, paraît répondre aux besoins des ingénieurs pour les calculs effectifs. C'est ainsi qu'il est souvent utilisé pour la résolution numérique des problèmes non-linéaires de coques. Dans les chapitres suivants, on se restreint à ce modèle pour l'étude du post-flambage de la coque cylindrique. On montre ici que les tenseurs de déformation $\Gamma_{\alpha\beta}$ et de courbure $K_{\alpha\beta}$ sont bien définis sur l'espace de Hilbert V .

On note par Γ^L et Γ^{NL} la partie linéaire et non-linéaire du tenseur de déformation Γ , $\Gamma = \Gamma^L + \Gamma^{NL}$.

$$\begin{aligned} \Gamma^L: V \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) &\longrightarrow [L^2(\Omega)]^3 \\ (u, v, w) &\longrightarrow \begin{cases} u_{,x} \\ v_{,y} - \frac{w}{R} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{I-1 } 11)$$

En munissant V de la norme prédéfinie et $[L^2(\Omega)]^3$ de sa norme produit, il est clair que Γ^L définit une application continue. La partie non-linéaire Γ^{NL} est donnée par :

$$\Gamma^{NL} : V \times V \subset [H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)]^2 \longrightarrow [L^2(\Omega)]^3 \quad (I-1 \ 12)$$

$$(u^1, v^1, w^1); (u^2, v^2, w^2) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} w_{,x}^1 w_{,x}^2 \\ \frac{1}{2} w_{,y}^1 w_{,y}^2 \\ \frac{1}{2} [w_{,x}^1 w_{,y}^2 + w_{,y}^1 w_{,x}^2] \end{cases}$$

Comme l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $W^{1,4}(\Omega)$ est continue, [D3],[A3], [N2] , l'application Γ^{NL} ainsi définie est continue.

L'opérateur de changement de courbure K est défini par :

$$K : V \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \longrightarrow [L^2(\Omega)]^3$$

$$(u, v, w) \longrightarrow \begin{cases} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{cases} \quad (I-1 \ 13)$$

est aussi une application continue.

Ainsi les tenseurs de déformation et de changement de courbure Γ^L , Γ^{NL} et K nécessaires pour la modélisation des coques de Donnell sont bien définis sur l'espace V .

I-1-5 CONTRAINTES GENERALISEES

Les conditions d'équilibre consistent à remplacer les contraintes agissantes sur l'épaisseur de la coque par des efforts équivalents appliqués sur les lignes de la surface moyenne. Ces efforts connus sous les noms de contraintes résultantes et de moments fléchissants généralisés sont, normalement obtenus par intégration sur l'épaisseur " h " de la coque. $\{\sigma\}$ étant le tenseur des contraintes bidimensionnelles, on obtient les résultantes généralisées $\{N\}$ et $\{M\}$ [J1] par:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \{\sigma\} & 0 \\ 0 & \{\sigma\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \quad (I-1 \ 14)$$

On suppose que le matériau est élastique linéaire et que la coque est symétrique par rapport au feuillet moyen. On obtient alors sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \{N\} &= [C_m] \cdot \{\Gamma\} \\ \{M\} &= [C_b] \cdot \{K\} \end{cases} \quad (I-15)$$

où C_m et C_b sont respectivement les matrices de comportement de membrane et de flexion.

L'étude du cas où il y a un couplage entre la membrane et la flexion ne cause pas de problème particulier, mais pour la clarté, on se restreint dans cette étude au cas isotrope.

I-1-6 ENERGIE POTENTIELLE

L'équilibre d'une structure élastique soumise à un chargement conservatif est déterminé à partir de l'énergie potentielle P . P est une fonctionnelle dépendant du déplacement généralisé U et d'un paramètre scalaire λ mesurant les forces extérieures:

$$P[\lambda, U] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [N_{\alpha\beta} \cdot \Gamma_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \cdot K_{\alpha\beta}] d\Omega - P_d(\lambda, U) \quad (I-16)$$

où P_d représente l'énergie des efforts donnés. En remplaçant $N_{\alpha\beta}$ et $M_{\alpha\beta}$ par leurs valeurs (I-15) on obtient :

$$\begin{aligned} P[\lambda, U] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [({}^t\Gamma^L + {}^t\Gamma^{NL}) : C_m : (\Gamma^L + \Gamma^{NL}) + {}^tK : C_b : K] d\Omega - P_d(\lambda, U) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [{}^t\Gamma^L : C_m : \Gamma^L + {}^tK : C_b : K] d\Omega - P_d(\lambda, U) \\ &\quad + \int_{\Omega} {}^t\Gamma^L : C_m : \Gamma^{NL} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t\Gamma^{NL} : C_m : \Gamma^{NL} d\Omega \end{aligned} \quad (I-17)$$

$P[\lambda, U]$ est alors une fonctionnelle de non-linéarité d'ordre 4 en déplacement U . En décomposant $P[\lambda, U]$ à différents ordres de non-linéarité - notations de Koiter - on obtient:

$$P[\lambda, U] = P_1[\lambda, U] + P_2[\lambda, U] + P_3[\lambda, U] + P_4[\lambda, U] \quad (\text{I-1 } 18)$$

où:

$$P_1[\lambda, U] = P_d(\lambda, U) = + \lambda f(U)$$

et f est une forme linéaire en déplacement.

$$\begin{aligned} P_2[\lambda, U] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [{}^t\Gamma^L : C_m : \Gamma^L + {}^tK : C_b : K] d\Omega \\ &= \frac{1}{2} a(U, U) \end{aligned}$$

où " a " est une forme bilinéaire symétrique (C_b et C_m sont des matrices symétriques).

$$P_3[\lambda, U] = \int_{\Omega} {}^t\Gamma^L : C_m : \Gamma^{NL} d\Omega$$

$$P_4[\lambda, U] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t\Gamma^{NL} : C_m : \Gamma^{NL} d\Omega$$

P_3 et P_4 sont des fonctionnelles homogènes d'ordre 3 et 4, respectivement.

Finalement, l'énergie potentielle se met sous la forme :

$$P[\lambda, U] = \frac{1}{2} a(U, U) - \lambda f(U) + P_3[\lambda, U] + P_4[\lambda, U] \quad (\text{I-1 } 19)$$

Pour étudier le comportement critique et post-critique de la coque cylindrique, on se basera sur cette énergie potentielle totale.

I-1-7 CONCLUSION

Après avoir déterminé la modélisation de la coque cylindrique en se ramenant à sa surface moyenne, on a choisi le modèle de coques de Donnell pour son efficacité et sa simplicité analytique. On a donné un cadre fonctionnel à ce modèle permettant d'étudier la stabilité de la structure cylindrique. L'étude détaillée de la stabilité de la coque sous chargement conservatif fera l'objet des paragraphes ultérieurs.

I - 2 THEORIE GENERALE DE LA STABILITE ELASTIQUE

I-2-1 NOTIONS DE BIFURCATION

Les phénomènes de bifurcation sont maintenant très fréquents dans plusieurs applications mathématiques, physiques et mécaniques. Typiquement, la théorie linéarisée de ces phénomènes mène à des problèmes de valeurs propres qui sont des cas particuliers de problèmes de bifurcation à un paramètre. Le problème de flambage en est un exemple typique en mécanique. Le modèle général de ce problème se met sous la forme suivante:

Soient V et W deux espaces de Banach, et F un opérateur non-linéaire :

$$\begin{array}{ccc} F: & \mathbf{R} \times V & \longrightarrow W \\ & (\lambda, U) & \longrightarrow F(\lambda, U) \end{array} \quad (\text{I-2 1-a})$$

On cherche à résoudre le problème suivant:

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbf{R} \text{ et } U \in V \text{ tel que } F(\lambda, U) = 0 \quad (\text{I-2 1-b})$$

Cette équation peut définir des opérateurs implicites $U = U(\lambda)$ qui sont des solutions de $F(\lambda, U(\lambda)) = 0$. On sait bien que la recherche des fonctions implicites est un problème compliqué, même dans le cas où $V = W = \mathbf{R}$. Pour cette raison, on se borne généralement à envisager le problème local correspondant. Le théorème des fonctions implicites est alors ici d'une grande utilité.

De nombreuses études concernent la résolution de ce problème de bifurcation. Nous ne pourrions en dresser ici la liste exhaustive. On trouve un exposé général de cette théorie dans l'ouvrage de Iooss et Joseph [I1] concernant les problèmes statiques et dynamiques. Pour un exposé un peu plus théorique on note l'ouvrage de Rabier [R2], et pour quelques applications numériques celui de Crouzeix et Rappaz [C4]. D'autres articles comme [K2], [K3], [S3], [K4] et [R1] traitent les problèmes de bifurcation perturbée. Pour des exposés plus mécaniques on cite [K5-6], [B16], [A4] et la thèse de M. Potier-Ferry [P5] qui est un excellent document.

Notre but dans ce paragraphe est d'introduire, de manière simple, la notion de bifurcation et l'influence des imperfections par des exemples classiques.

I-2-2 CRITERES DE STABILITE

Pour la plupart des problèmes de l'ingénieur, la stabilité de l'équilibre d'une structure élastique sous chargement conservatif est analysée par les critères de l'énergie. L'avantage considérable de l'usage de ces critères réside dans leur caractère purement statique. Bien que la stabilité soit une notion dynamique, l'approche énergétique associée à une discrétisation numérique réduit généralement le problème à l'analyse spectrale de l'opérateur de l'élasticité linéarisée au voisinage de la configuration dont on étudie la stabilité. On ne considérera que les systèmes conservatifs, ce qui est suffisant pour la plupart des applications. Les états d'équilibre sont alors les points stationnaires de l'énergie potentielle totale P .

$$\delta P = P'(U) \cdot \delta U = 0 \quad \forall \delta U \text{ déplacement admissible}$$

Le critère de stabilité le plus naturel d'un équilibre est le principe du minimum de l'énergie potentielle qui affirme qu'un état d'équilibre U_0 est stable s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tq } 0 < \|U - U_0\| \leq \varepsilon \Rightarrow P[U] > P[U_0] \quad (\text{I-2 2})$$

Mais ce critère n'est pas très commode car il implique des notions topologiques. C'est pourquoi le critère pratique de stabilité est le critère de seconde variation:

$$\delta^2 P = \frac{1}{2} D_U^2 P[U_0] (\delta U)^2 > 0 \quad \forall \delta U \neq 0 \Rightarrow U_0 \text{ stable} \quad (\text{I-2 3})$$

Donc la stabilité de l'état d'équilibre U_0 est déterminée par le signe de la seconde variation $D_U^2 P[U]$.

I-2-3 NOTIONS DE BIFURCATION

L'équilibre d'une structure élastique soumise à un chargement conservatif est déterminé à partir de l'énergie potentielle P . Tout état d'équilibre de la structure doit être solution de l'équation variationnelle suivante:

$$\delta P[\lambda, U] = P'[\lambda, U] \delta U = 0 \quad \text{pour tout } \delta U \text{ variation admissible.}$$

P' : désigne la dérivée de Fréchet de la fonctionnelle P . Cette équation variationnelle permettra de déterminer les branches de solutions - lorsqu'elles existent - ainsi que leur stabilité. Avant de traiter des problèmes mécaniques concrets, on va introduire les notions de bifurcation par un exemple mathématique simple.

I-2-3-1 EXEMPLE MATHEMATIQUE

On va introduire les notions de bifurcation et de stabilité pour une fonction à paramètres scalaires. Par cet exemple on verra l'utilité primordiale du théorème des fonctions implicites qui nous servira constamment par la suite.

I-2-3-1-a Bifurcation parfaite

Soit $F(\lambda, a)$ une fonction d'un paramètre scalaire λ (λ représentera dans la suite le paramètre de charge) et d'une inconnue a . On cherche à déterminer les branches de solutions de l'équation $F'(\lambda, a) = 0$. On suppose que F est suffisamment régulière et qu'il existe (λ_0, a_0) tel que :

$$F'(\lambda_0, a_0) = 0 \quad (\text{I-2 4})$$

où ' désigne la dérivation par rapport à a .

Si $F''(\lambda_0, a_0) \neq 0$ alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe pour (λ, a) voisins de (λ_0, a_0) , une seule branche de solutions qui est donnée en première approximation par :

$$a(\lambda) = a_0 - (\lambda - \lambda_0) \frac{\partial F'}{\partial \lambda}(\lambda_0, a_0) / F''(\lambda_0, a_0) + O(\lambda^2) \quad (\text{I-2 5})$$

Une telle solution (λ_0, a_0) est dite *solution régulière*. Une solution telle que $F''(\lambda_0, a_0)$ soit nulle, est dite *singulière*.

Supposons qu'il existe une solution fondamentale $a_1(\lambda)$ que l'on ramènera à $a_1(\lambda) = 0$ par un changement de variable et de fonction. On suppose donc :

$$F'(\lambda, 0) = 0 \quad (\text{I-2 6})$$

D'après le critère de l'énergie, la stabilité de l'état d'équilibre $(\lambda, 0)$ est déterminée par le signe de $F''(\lambda, 0)$. Si la stabilité change pour $\lambda = \lambda_c$ on aura:

$$F''(\lambda_c, 0) = 0 \quad (\text{I-2 } 7)$$

On a vu que c'est une condition nécessaire pour que la branche de solution $(\lambda, 0)$ rencontre une autre branche $(\lambda, a(\lambda))$ au point $(\lambda_c, 0)$ qui est alors appelé *point de bifurcation*. On suppose de plus que:

$$\frac{\partial F''}{\partial \lambda}(\lambda_c, 0) < 0 \quad (\text{I-2 } 8)$$

Une fonction F vérifiant (I-2 6,7,8) peut se mettre sous la forme:

$$F(\lambda, a) = C_k \frac{a^{k+2}}{k+2} - (\lambda - \lambda_c) \frac{a^2}{2} + o(a^{k+3} + (\lambda - \lambda_c) a^3 + (\lambda - \lambda_c)^2 a^2) \quad (\text{I-2 } 9)$$

où k est un entier au moins égal à 1. L'équation donnant les équilibres est :

$$F'(\lambda, a) = C_k a^{k+1} - (\lambda - \lambda_c) a + o(a^{k+2} + (\lambda - \lambda_c) a^2 + (\lambda - \lambda_c)^2 a) = 0$$

$a = 0$ est évidemment solution.

Pour déterminer les autres, on pose :

$$\begin{aligned} G(\lambda, a) &= \frac{F'(\lambda, a)}{a} \\ &= C_k a^k - (\lambda - \lambda_c) + o(a^{k+1} + (\lambda - \lambda_c) a + (\lambda - \lambda_c)^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } G(\lambda_c, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda_c, 0) = -1 \quad (\text{I-2 } 10)$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on a donc une unique branche de solutions non nulles, appelée *branche bifurquée*, et qui peut être représentée sous la forme :

$$\lambda(a) - \lambda_c = C_k a^k + C_{k+1} a^{k+1} + \dots \quad (\text{I-2 } 11)$$

En remplaçant $\lambda(a)$ par sa valeur dans $F''(\lambda, a)$ on obtient :

$$F''(\lambda, a) = k C_k a^k + o(a^{k+1})$$

Donc $F''(\lambda(a), a)$ est positive lorsque $(\lambda(a) - \lambda_c)$ est positif. La solution bifurquée est stable lorsque la solution fondamentale est instable et vice-versa : c'est ce qu'on appelle *le principe d'échange de stabilité* [P5]. Suivant les valeurs de k et de C_k on obtient alors les courbes classiques de solution dans le plan (a, λ) .

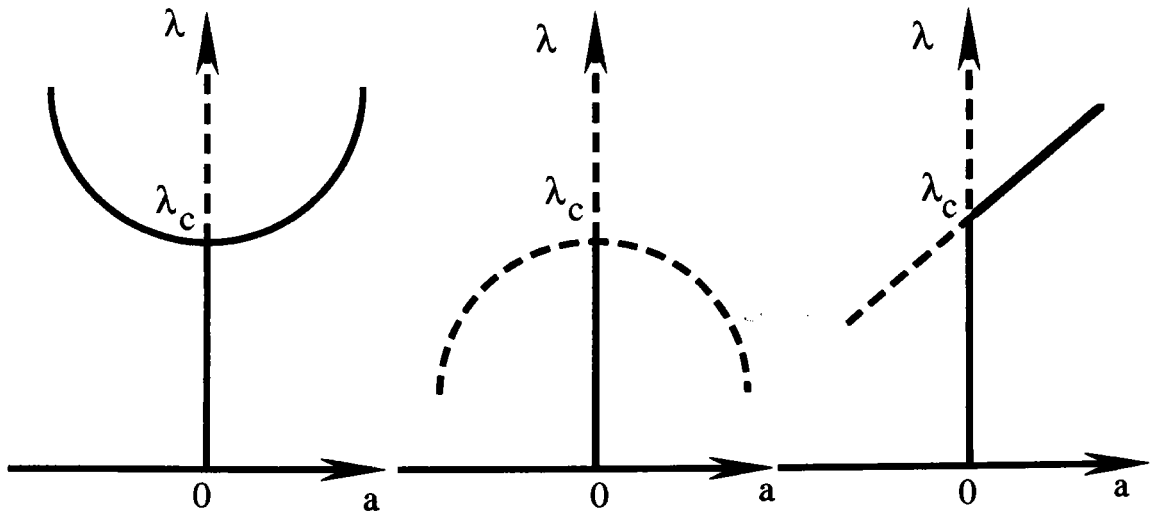
a) k pair, $C_k > 0$ b) k pair, $C_k < 0$ c) k impair

Fig. I-3 — solutions stables, --- solutions instables

Dans le cas de la figure I-3-a on dit qu'on a une *bifurcation sur-critique*. Lorsque λ augmente, il y a une transition régulière de la solution fondamentale à la solution bifurquée, on dit aussi qu'on a une *bifurcation symétrique stable*. On retrouve cette sorte de bifurcation par exemple, dans le cas de la plaque chargée dans son plan.

La figure I-3-b représente une *bifurcation sous-critique*. Lorsque λ atteint la valeur λ_c , il n'y a qu'une solution instable et le système ne peut rester en équilibre. On a une *bifurcation symétrique instable*. On retrouve cette sorte de bifurcation dans le cas des coques cylindriques sous pression ou compression axiale. Enfin la figure I-3-c représente une *bifurcation trans-critique* ou *bifurcation asymétrique*. Il semble qu'il puisse y avoir aussi une transition régulière, mais ce n'est pas une situation très sûre [P5].

I-2-3-1-b Bifurcation perturbée

Les solutions singulières sont fréquentes dans les problèmes de mécanique des structures. Un moyen de les étudier est d'introduire une légère perturbation dans ces problèmes. Dans les cas parfaits précédents (fig. I-3-a-b-c) il n'y a aucun moyen de décider d'avoir une bifurcation à droite ($a > 0$) ou à gauche ($a < 0$). Le fait d'introduire une légère imperfection permettra de guider le sens de la bifurcation.

Pour tenir compte des imperfections dans ce cas simple, on introduit le paramètre a_0 mesurant l'amplitude des imperfections [P5]. On pose:

$$F(\lambda, a, a_0) = C_k \frac{a^{k+2}}{k+2} - (\lambda - \lambda_c) \frac{a^2}{2} + a a_0 + a o(a^{k+2} + (\lambda - \lambda_c) a^2 + (\lambda - \lambda_c)^2 a + a a_0 + (\lambda - \lambda_c) a_0 + a_0^2) \quad (I-2 \ 12)$$

La nouvelle équation donnant les équilibres est :

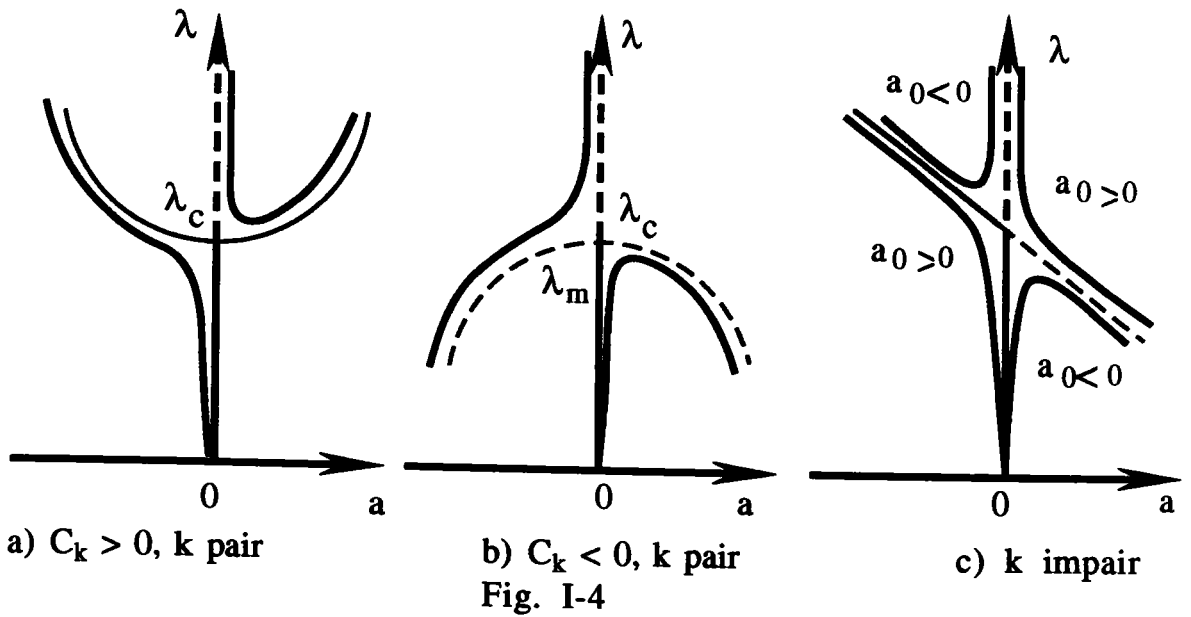
$$F'(\lambda, a, a_0) = C_k a^{k+1} - (\lambda - \lambda_c) a + a_0 + o(a^{k+2} + (\lambda - \lambda_c) a^2 + (\lambda - \lambda_c)^2 a + a a_0 + (\lambda - \lambda_c) a_0 + a_0^2) = 0$$

En négligeant le dernier terme, on obtient une équation approchée:

$$- a(\lambda - \lambda_c) + C_k a^{k+1} + a_0 = 0$$

$$\text{d'où:} \quad \lambda - \lambda_c = C_k a^k + \frac{a_0}{a} \quad (I-2 \ 13)$$

En prenant $a_0 > 0$, suivant les valeurs de C_k et de k on obtient les figures suivantes :



On constate alors que lorsqu'il y a une bifurcation sur-critique (a) le comportement n'est pas vraiment modifié: on dit que le système est *insensible aux imperfections*. Mais dans les deux autres cas (b) et (c, $a_0 < 0$), il y a flambage pour une valeur du chargement λ inférieure à la charge critique théorique λ_c . Le système est alors sensible aux imperfections.

En tenant compte des termes d'ordre supérieur, on peut obtenir une courbe ayant la forme suivante qui montre bien l'évolution du système perturbé (Fig. 4-b ou c, $a_0 < 0$).

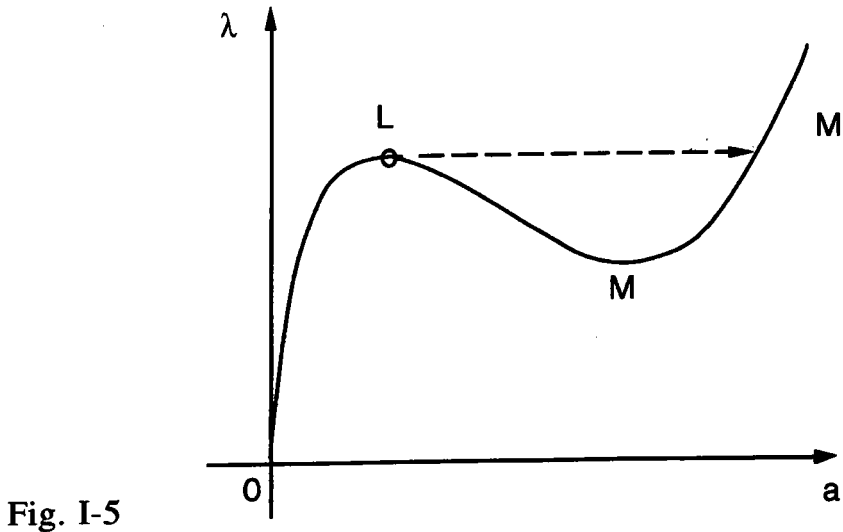


Fig. I-5

Le point limite L correspond au maximum λ_m de la courbe charge-déplacement représentant le chemin d'équilibre initial. Pour des valeurs de λ légèrement supérieures à λ_m , le flambage se produit par amplification des déplacements fondamentaux accompagnés, en général, d'un effet dynamique. L'état d'équilibre "saute" alors de L en M'. Ce phénomène de flambage est le "phénomène de claquage" ou pour les Anglo-Saxons "Snap-through effect". Ce phénomène se produit pour la valeur λ inférieure à la charge critique théorique.

On remarque également qu'il n'y a pas de bifurcation lorsque $a_0 \neq 0$, mais la solution perd sa stabilité au point limite L. Pour se rendre compte de cette perte de stabilité, on peut faire une perturbation à deux paramètres [P5].

I-2-3-2 MODELE MECANIQUE SIMPLE

De nombreux exposés sur la théorie du post-flambage utilisent l'exemple élémentaire suivant pour introduire les concepts de base de la bifurcation [B16], [P6], [D2]. On l'utilise ici comme une application de l'exemple précédent.

I-2-3-2-a Modèle parfait

Soit une barre rigide verticale de longueur L dont l'extrémité supérieure est soumise à une force de module λ constant et dont la direction reste verticale (charge conservative). A l'autre extrémité un ressort élastique exerce un moment de rappel $f(a)$:

$$f(a) = K_1 a + K_2 a^2 + K_3 a^3 + K_4 a^4 + \dots \text{ avec } K_1 > 0 \quad (\text{I-2 } 14)$$

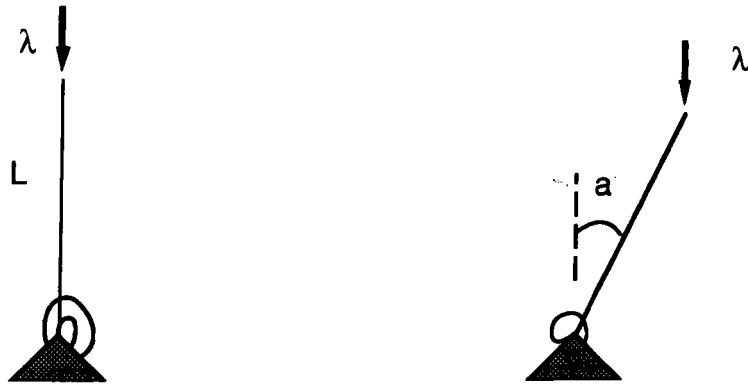


Fig. I-6

Si I désigne le moment d'inertie, l'équation du mouvement de la barre s'écrit sous la forme:

$$I \frac{d^2 a}{dt^2} + f(a) - \lambda L \sin a = 0 \quad (\text{I-2 } 15)$$

Les états d'équilibre statique sont alors solutions de :

$$f(a) = \lambda L \sin a$$

Suivant les notations précédentes, on pose :

$$F'(\lambda, a) = f(a) - \lambda L \sin a = 0 \quad (\text{I-2 } 16)$$

$a = 0$ est la solution fondamentale de $F'(\lambda, a) = 0$

$$F''(\lambda, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{K_1}{L} = \lambda_c \quad \text{charge critique}$$

$$\text{et } \frac{\partial F''}{\partial \lambda}(\lambda_c, 0) = -L < 0$$

Le développement de Taylor de $F'(\lambda, a)$ au voisinage de $(\lambda_c, 0)$ entraîne que :

$$F'(\lambda, a) = L(-(\lambda - \lambda_c) a + C_1 a^2 + C_2 a^3) + o(a^4 + (\lambda - \lambda_c) a^3) = 0$$

$$\text{avec } C_1 = \frac{K_2}{L}, \quad C_2 = \frac{K_3}{L} + \frac{\lambda_c}{6}$$

La branche bifurquée est alors donnée par :

$$\lambda = \lambda_c + C_1 a + C_2 a^2 + \dots$$

On retrouve les différentes figures de bifurcation précédentes.

Si $C_1 \neq 0$ ($k = 1$) on a une bifurcation asymétrique .

Si $C_1 = 0$ ($k = 2$) on retrouve la bifurcation symétrique qui est stable ou instable suivant le signe de C_2 .

I-2-3-2-b Influence des imperfections



Fig. I-7 a) structure à l'état initial b) structure à l'état déformé

On suppose maintenant que la barre a une déformation initiale d'angle a_0 suffisamment petite Fig. 7-a. Les états d'équilibre statique sont alors solutions de :

$$F'(\lambda, a, a_0) = f(a) - \lambda L \sin(a + a_0) = 0$$

Au voisinage de $(\lambda_c, 0, 0)$ on obtient comme précédemment

$$-(\lambda - \lambda_c) a + C_1 a^2 + C_2 a^3 - \lambda_c a_0 + \text{t.o.s.} = 0 \quad (\text{I-2 17})$$

$$\text{où} \quad \text{t.o.s.} = o(a^4 + a^3 + (\lambda - \lambda_c) a^2 + a_0 a + a_0 (\lambda - \lambda_c))$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur et selon que l'on a une bifurcation symétrique ($C_1 = 0$) ou asymétrique ($C_1 \neq 0$), on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + C_2 a^2 - \lambda_c \frac{a_0}{a} & (\text{cas symétrique}) \\ \lambda = \lambda_c + C_1 a - \lambda_c \frac{a_0}{a} & (\text{cas asymétrique}) \end{cases} \quad (\text{I-2 18})$$

On retrouve les mêmes courbes que (Fig. I-4-a, b, c). Parmi ces cas de figures, on retient ceux où l'on a une sensibilité aux imperfections.

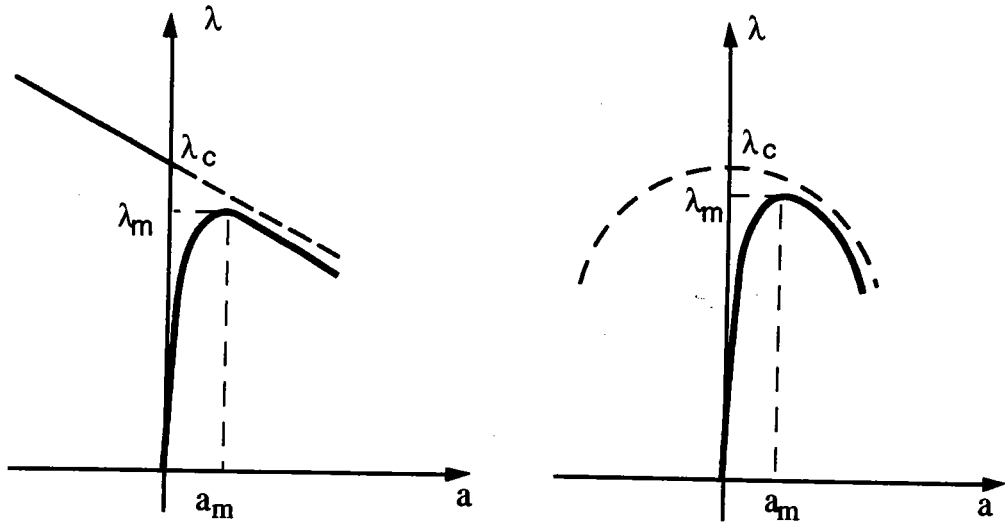


Fig. I-8

Dans ces cas on obtient le flambage par point limite, qui apparaît quand le chargement λ atteint la charge maximale λ_m . Ce point limite est caractérisé par $\frac{d\lambda}{da} = 0$ d'où :

$$\begin{cases} 3 C_2 a_m^2 - (\lambda_m - \lambda_c) = 0 \\ 2 C_1 a_m - (\lambda_m - \lambda_c) = 0 \end{cases} \quad (\text{I-2 19})$$

On déduit que la réduction de la charge critique $(\lambda_c - \lambda_m)$ est donnée par :

$$\lambda_c - \lambda_m = 3 \left(\lambda_c \frac{a_0}{2} \right)^{2/3} |C_2|^{1/3} \quad (\text{cas symétrique}) \quad (\text{I-2 20})$$

$$\lambda_c - \lambda_m = 2 (-\lambda_c a_0 C_1)^{1/2} \quad (\text{cas asymétrique})$$

Cette première approximation de réduction de la charge critique montre que la prise en compte des imperfections est primordiale pour l'étude du comportement critique et post-critique de ces structures sensibles.

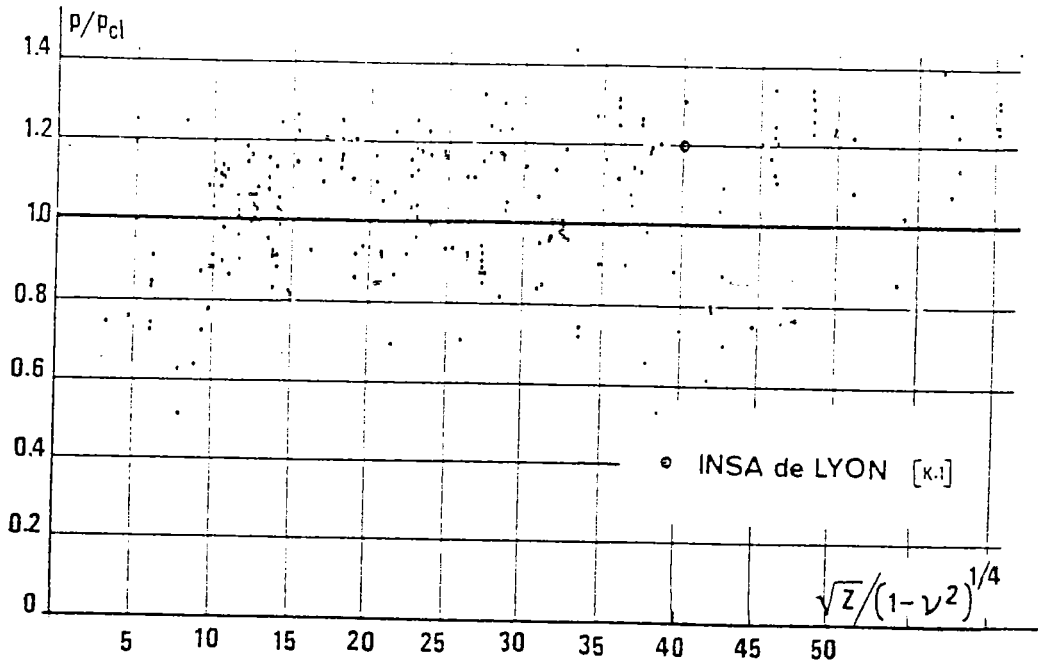
I-2-3-3 COQUES CYLINDRIQUES

L'utilisation importante des coques cylindriques dans les industries civiles et militaires a poussé de nombreux chercheurs à étudier les phénomènes de flambage et post-flambage de ces coques. Bien qu'il s'agisse là d'une forme géométrique parmi les plus simples, la compréhension et les solutions théoriques de ces phénomènes restent encore à être élucidées davantage. Sachant que les équations de base ont été introduites depuis plusieurs décennies, l'analyse de ce phénomène a pris un grand élan avec les techniques de calcul modernes et particulièrement grâce à l'évolution des calculateurs.

I-2-3-3-1 FLAMBAGE DE COQUES CYLINDRIQUES

L'équilibre d'une coque est régi par deux phénomènes: l'effet de flexion et l'effet de membrane. En général cet équilibre est piloté par l'effet de membrane et par conséquent par la rigidité de la surface moyenne qui elle même dépend de la courbure. Ceci fait dire qu'une coque résiste essentiellement par sa forme. C'est ce qu'on appelle "l'effet de voûte" en génie civil. Cependant, il apparait souvent des flexions locales, notamment au voisinage des bords ou variations brusques de géométrie. La théorie de membrane est généralement utilisée pour les coques à géométrie complexe. Pour les coques cylindriques, la simplicité géométrique permet la prise en compte de la flexion. Ce couplage membrane-flexion est nécessaire pour de nombreuses applications et en particulier pour l'étude du comportement critique et post-critique.

De nombreux travaux ont été réalisés tant dans le domaine expérimental que théorique. Les écarts entre les prédictions analytiques classiques et les résultats expérimentaux ainsi que la dispersion de ces résultats expérimentaux sont énormes. La figure fig.9 [W1], [K1], [D4], montre cet écart dans le cas d'une coque cylindrique sous pression externe. Cet écart et cette dispersion sont plus aigus dans le cas d'une compression axiale [W1], [K1].



P: pression externe, $Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1-\nu^2}$

Fig. I-9 Solutions théoriques classiques (—) et résultats expérimentaux (o).

Les principaux facteurs influant ces écarts, [W1], [D4], sont: les conditions aux limites, les déformations de préflambage et surtout les imperfections initiales.

I-2-3-3-1-a Influence des conditions aux limites

Pour l'influence des conditions aux limites sur la charge de flambage, la plupart des auteurs ont étudié les huit C. L. suivantes définissant l'encastrement ou l'articulation du bord de la coque.

C1 $w = w_{,x} = u = v = 0$	S1 $w = w_{,xx} = u = v = 0$
C2 $w = w_{,x} = u = N_{xy} = 0$	S2 $w = w_{,xx} = u = N_{xy} = 0$
C3 $w = w_{,x} = v = N_x = 0$	S3 $w = w_{,xx} = v = N_x = 0$
C4 $w = w_{,x} = N_x = N_{xy} = 0$	S4 $w = w_{,xx} = N_x = N_{xy} = 0$

La figure fig. I-10 due à Yamaki [Y3], montre, d'une part, que ces C. L. se divisent en deux familles, l'une relative à la condition axiale $u = 0$ (C₁, C₂, S₁, S₂) et l'autre à la condition $N_x = 0$ (C₃, C₄, S₃, S₄) et d'autre part, l'influence de ces C. L. pour des petits paramètres géométriques de Batdorf Z ($Z < 100$). On trouve des résultats numériques concernant cette influence dans [A6], [F1], [Y2], [S8-9]. et une discussion bien détaillée dans la thèse de Abdelmoula [A1].

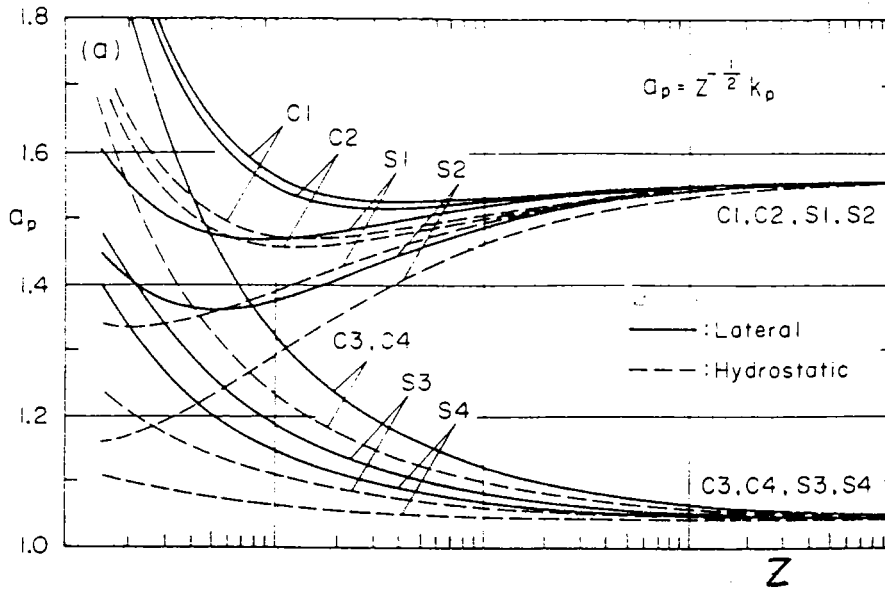


Fig. I-10 Variation du paramètre de charge K_p en fonction de Z pour différentes conditions aux limites. $K_p = P \frac{RL^2}{\pi^2 D}$ $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

I-2-3-3-1-b Influence de la déformation du préflambage

Il est usuel de supposer que l'état fondamental précritique est axisymétrique et que les contraintes dans la phase précritique sont identifiées par un état de membrane. Ceci simplifie considérablement la résolution du problème de flambage. Cette hypothèse reste valable pour des cylindres relativement longs mais mène à des résultats erronés pour des cylindres courts où apparaissent des déformations de flexion dues aux rotations aux bords Fig. I-11. La déformée de préflambage peut donc être considérée comme une imperfection initiale axisymétrique. Les coefficients des équations de la stabilité deviennent alors variables et la détermination précise du point de bifurcation devient plus délicate.

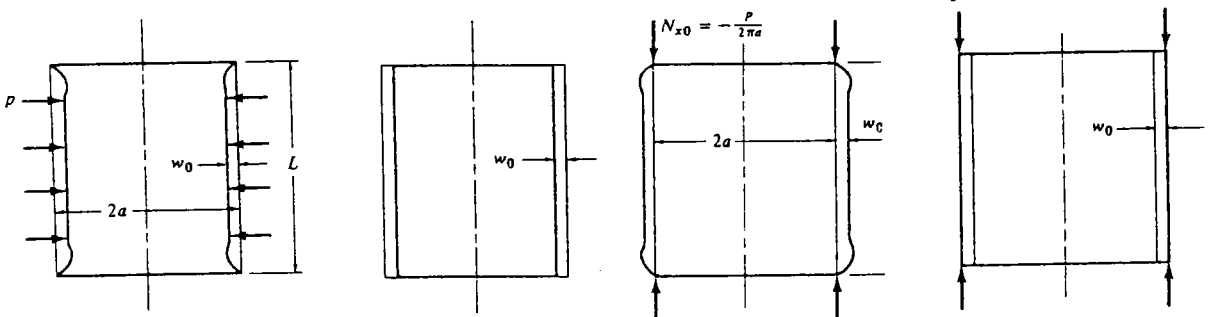


Fig. I-11 Effets des rotations précritiques aux bords retenues ou négligées suivant les différents chargements.

L'influence de cette déformation sur le flambage du cylindre est analysée par plusieurs auteurs [B12], [S10], [G3], [T2], [Y2]. Sur la figure fig.I-12, [Y3], on voit bien l'influence du préflambage non linéaire pour les Z petits. Il est clair que le préflambage a une influence plus marquée pour les coques cylindriques courtes ($Z < 100$).

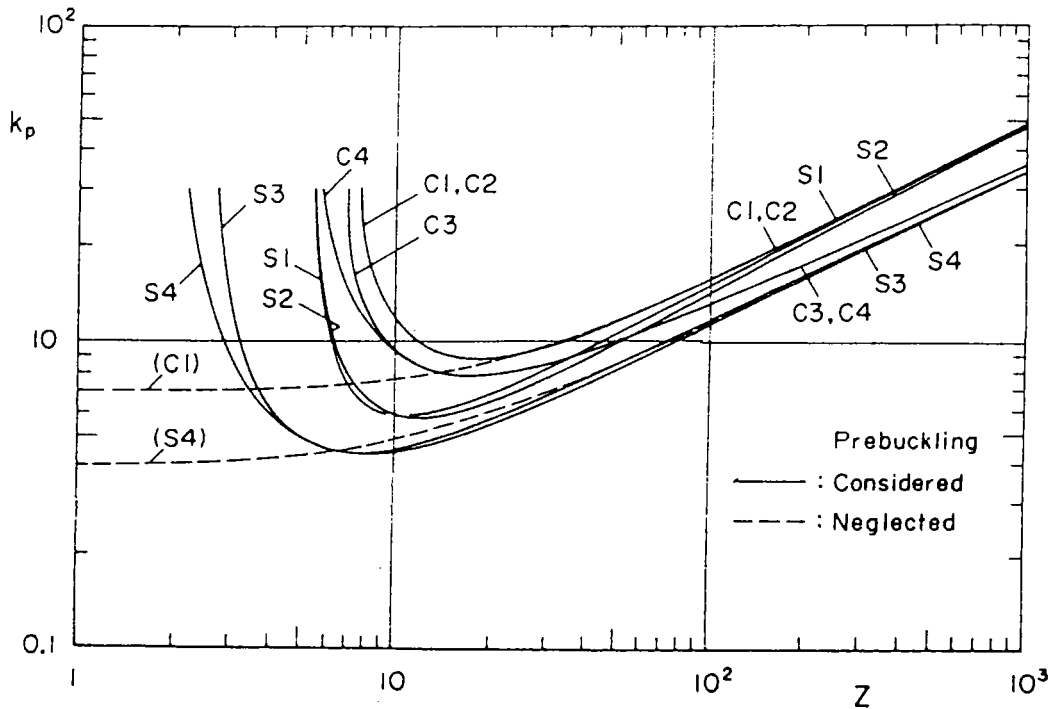


Fig. I-12 Influence du préflambage pour les différentes conditions aux limites dans le cas de la pression latérale.

I-2-3-3-1-c Influence des imperfections

Il y a actuellement un accord quasi général entre tous les chercheurs sur le fait que les imperfections géométriques initiales sont les principales causes de la discordance entre la théorie classique et les expériences. Flügge (1932) fut l'un des premiers à essayer de trouver une corrélation entre les charges expérimentales et celle prévues par la théorie pour le flambement des coques cylindriques axialement comprimées. La plus grande contribution aidant à la compréhension du rôle des imperfections géométriques a été donnée par Von-Karman -Tsien [V3] et par Donnell -Wan [D6]. La figure fig. I-13 montre que la charge critique est considérablement réduite en présence des imperfections géométriques initiales dans le cas du cylindre sous compression axiale. Sous chargement axial, le cylindre présente alors une grande sensibilité aux imperfections.

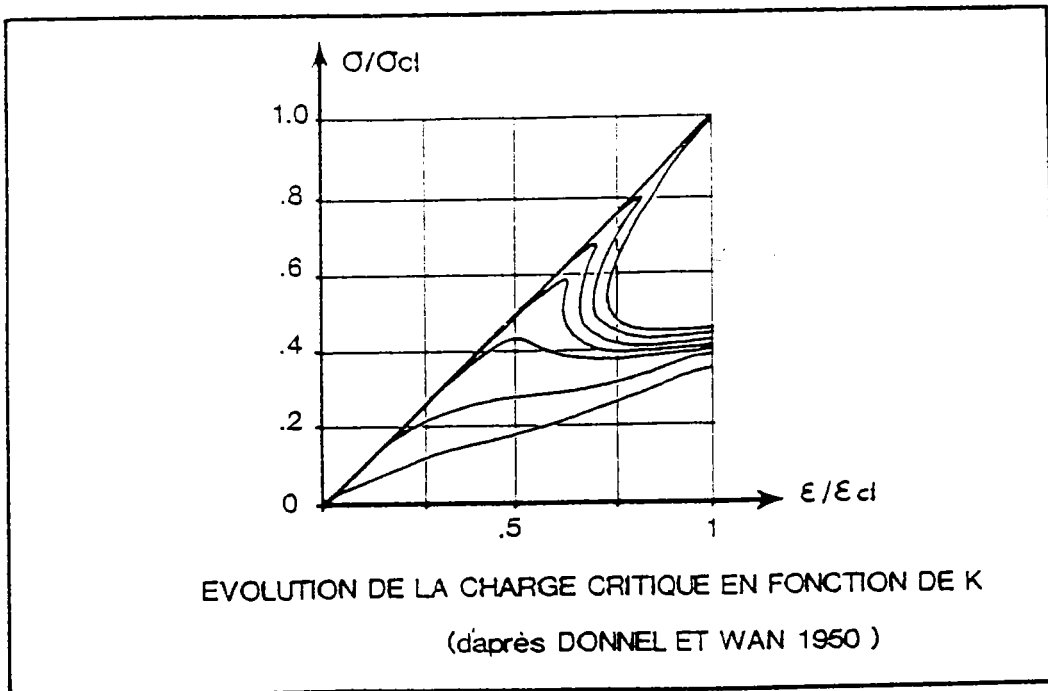


Fig. I-13 influence des imperfections dans le cas de la compression

Les coques cylindriques sous pression externe ou latérale présentent une sensibilité modérée aux imperfections initiales (μ) comme le montre la figure fig. I-14 [V2], [D4].

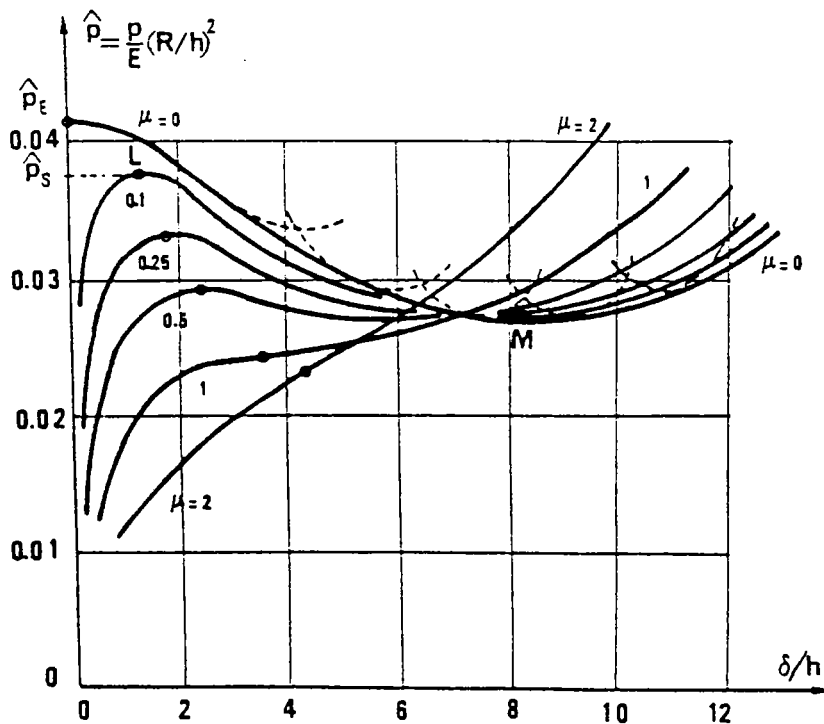


Fig. I-14 influence des imperfections dans le cas de la pression

Une confirmation de la prépondérance de l'influence des imperfections initiales a été donnée par Koiter [K5-6-7-8]. Selon lui - comme on l'a déjà vu - le problème de la stabilité et celui de la sensibilité d'une structure aux imperfections nécessitent d'examiner l'état d'équilibre au voisinage immédiat du point de bifurcation dans le domaine post-critique. En développant une méthode asymptotique au voisinage du point critique, Koiter détermine une relation entre la pression critique et l'amplitude des imperfections, tout en définissant un facteur "b" de sensibilité aux imperfections. Pour le cylindre sous pression externe, cette relation de réduction de charge [H1] est :

$$\left[1 - \frac{P_m}{P_c} \right]^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b} \left| \frac{a_0}{h} \right| \frac{P_m}{P_c} \quad (K)$$

où a_0 est l'amplitude des imperfections initiales, b est le facteur de sensibilité aux imperfections, P_c et P_m sont les chargements critique et maximum.

En tenant compte de l'effet des déformations précritiques de flexion axisymétrique, Hutchinson[H2] donne une relation asymptotique entre P_m et a_0 :

$$\left[1 - \frac{P_m}{P_c} \right]^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{-3b} I_1 \left| \frac{a_0}{h} \right| \quad (H)$$

où I_1 est un paramètre correspondant à la prise en compte des déformations précritiques de flexion.

Les figures fig. I-15-a et fig. I-15-b montrent une comparaison entre les deux formules asymptotiques et le calcul numérique non-linéaire fait par Yamaki [Y3] dans le cas de pression externe. Elles montrent aussi que les prédictions de la charge critique (K-H) restent valables pour des imperfections "très" petites.

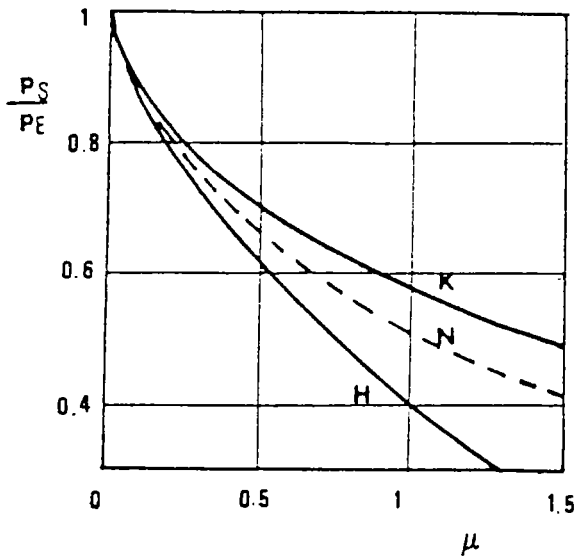


Fig. I-15-a

Dégradation de la charge critique en fonction de l'amplitude des imperfections initiales

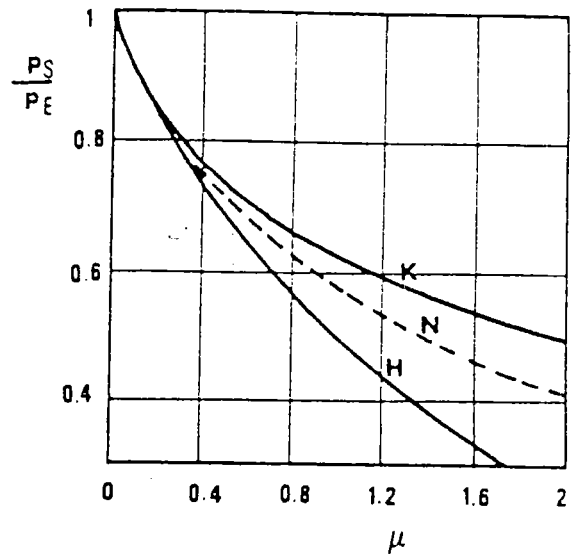


Fig. I-15-b

Une étude similaire est faite par Amazigo, Budiansky, Carrier et Faster [A4], [A5], [B16]. D'autres études analytiques ou numériques sont faites sur l'influence du défaut sur le flambage du cylindre [T1], [A7], [A8], [J2].

Une étude asymptotique et numérique est faite par Abdelmoula, Damil et Potier-Ferry [A1] [A2] en prenant en compte l'influence de défauts localisés près d'une génératrice et de défauts modaux. L'approximation d'un mode quasi-inextensionnel permet d'obtenir des formules simples de réduction de la charge critique. Dans le cas du défaut modal par exemple, ils obtiennent une formule analytique de réduction de charge pour des cylindres sous pression externe (pour $Z > 500$) pour les deux familles de C. L. :

$$\begin{cases} \frac{P_m}{P_c} = 1 - 4.7511 \left(\frac{1-\nu^2}{Z} \right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{h} \right)^{2/3} & \text{si } N_x = 0 \\ \frac{P_m}{P_c} = 1 - 5.3452 \left(\frac{1-\nu^2}{Z} \right)^{1/3} \left(\frac{a_0}{h} \right)^{2/3} & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

(I-2 21)

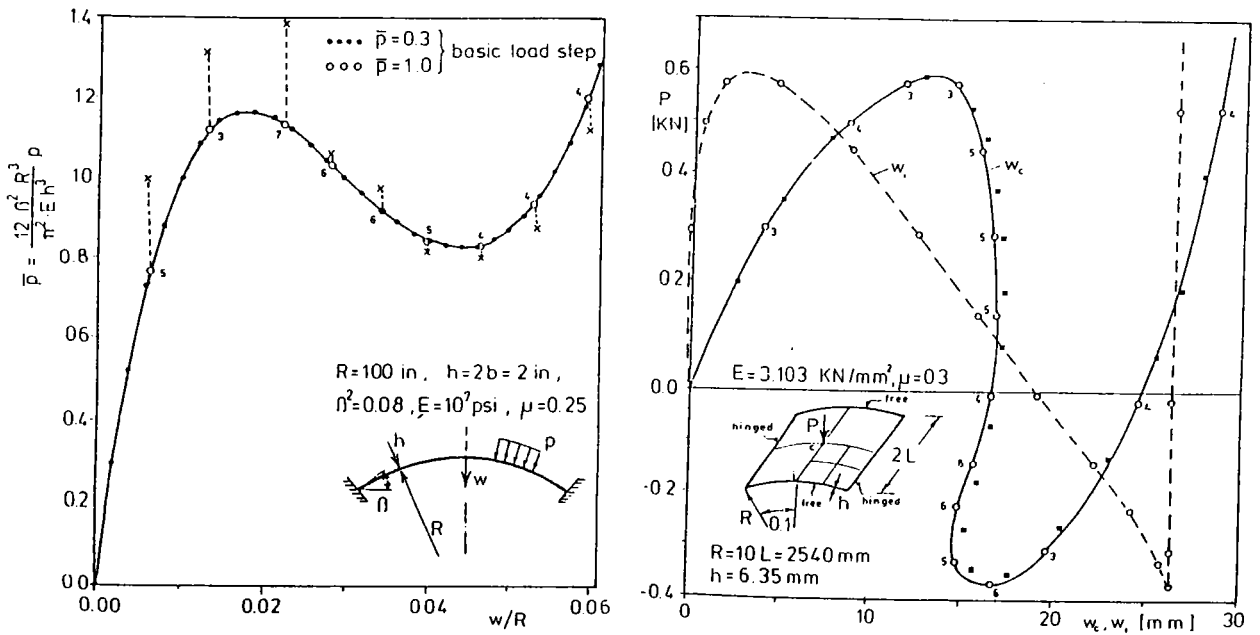
I-2-3-3-2 POST-FLAMBAGE

Pour la plupart des structures minces, il est impératif d'examiner l'évolution de leur déformation en fonction du chargement. Pour cela, la détermination de la seule charge critique n'est pas suffisante, mais il est d'une grande importance de clarifier leur comportement post-critique. La raison principale est, d'une part de mieux estimer l'effet des imperfections - pratiquement inévitables -, d'autre part de mieux évaluer le chargement sécuritaire supportable par la structure. Le comportement de post-flambage se détermine par la résolution de problèmes non-linéaires. Un grand nombre d'auteurs ont développé des méthodes de résolution de ces problèmes qui sont généralement des méthodes asymptotiques ou des méthodes itératives.

Pour l'étude du post-flambage initial, la méthode la plus populaire est la méthode asymptotique, introduite de manière originale, par Koiter dans sa thèse de doctorat (1945) [K5]. Cette approche originale de Koiter a été développée de manière similaire par différents chercheurs Budiansky - Hutchinson [B14], Budiansky [B15], Budiansky - Amazigo [B16], et Potier-Ferry [P6]. Pour une bibliographie bien détaillée sur la théorie du post-flambage, on renvoie à l'article de Hutchinson-Koiter [H1] et celui de Simitses [S12]. L'avantage de ces méthodes asymptotiques est qu'elles permettent de déterminer analytiquement les branches bifurquées. Comme ces développements asymptotiques sont faits au voisinage du point critique, cela permet de mieux prédire la charge critique, mais la zone de validité des branches bifurquées ainsi obtenues est limitée. Comme les développements asymptotiques proposés par ces auteurs ne sont pas faciles à manipuler, ils se restreignent généralement à l'ordre 2. Cela réduit beaucoup la zone de validité de la solution obtenue.

Les autres méthodes permettant de déterminer le post-flambage des structures sont les méthodes numériques itératives. On les trouve dans la plupart des codes de calcul des structures. Dans le processus général de résolution pour ces méthodes, on distingue deux aspects fonctionnels. Le premier concerne le choix d'une méthode de résolution dans une itération (méthodes de Newton - Raphson (N-R), N-R modifiée, quasi-Newton ...). Le second aspect concerne plus spécifiquement les stratégies de pilotage (charge imposée, déplacement imposé, longueur d'arc imposé ...) [C2], [C3], [R3], [R4].

Ces méthodes permettent de déterminer point par point la courbe charge-déplacement durant le processus post-critique. Ainsi elles permettent de déterminer les branches bifurquées loin du point critique. L'exemple classique auquel se réfèrent souvent les auteurs, la figure fig.I-16 [R2], montre qu'à l'aide de ces méthodes (N-R) on peut déterminer point par point la courbe charge-déplacement.



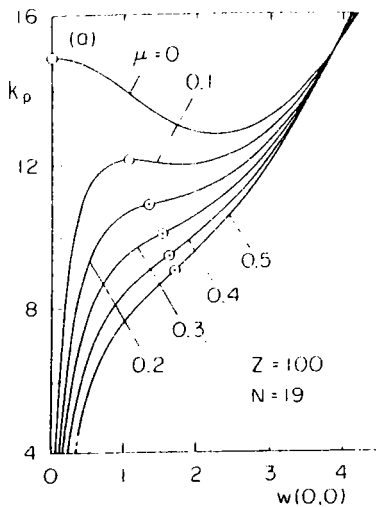
Arche circulaire sous pression

Coque cylindrique sous charge concentrée

Fig. I-16 Courbe charge-déplacement par une méthode itérative

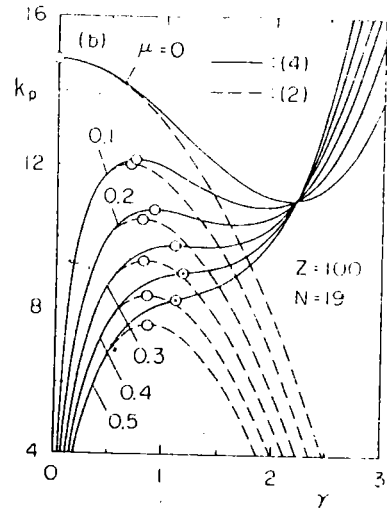
L'inconvénient de ces méthodes itératives est que la solution obtenue n'est pas analytique (point par point), elles nécessitent un "grand" temps de calcul CPU, et sont difficiles à piloter automatiquement.

La figure fig. I-17 [Y3] ci-après, montre une comparaison entre la solution donnée par une méthode itérative et un développement asymptotique de Yamaki à l'ordre 2 et 4. Cette figure montre d'une part la validité du développement asymptotique à l'ordre 2 au voisinage du point critique et d'autre part l'amélioration par l'ordre 4 de la validité de la solution obtenue par ce développement asymptotique.



Résultats de l'analyse itérative

Fig. I-17 Post-flambage initial de la coque cylindrique sous pression



Résultats asymptotiques

Donc pour déterminer le post-flambage initial par une méthode asymptotique, on doit disposer d'un développement maniable permettant de déterminer facilement les ordres supérieurs.

I-2-4 CONCLUSION

L'étude des branches bifurquées développée jusqu'ici est limitée au voisinage du point de bifurcation ou du point limite. Ce développement est lié aux paramètres a , a_0 et $(\lambda - \lambda_c)$ qui sont "très" petits. Cela conduit à négliger les termes d'ordre supérieur et à se limiter à une approximation d'ordre 2. Cette approximation nous a permis de déterminer le début du post-flambage et de voir clairement les différents types de bifurcation ainsi que la sensibilité aux imperfections. Généralement les auteurs des méthodes asymptotiques se limitent aux développements d'ordre 2 à cause de la complexité de leurs développements aux ordres supérieurs. Cela réduit beaucoup la validité des résultats ainsi prédits.

Notre but est de déterminer, non seulement le post-flambage initial au voisinage très proche du point critique, mais la totalité de la branche bifurquée aussi loin que possible du point de flambage. Pour cela on va développer dans les chapitres suivants une méthode asymptotique-numérique qui permettra d'utiliser, et de manière simple, les informations des termes d'ordre supérieur négligés jusqu'à présent. Avant cela, nous allons introduire les fondements mathématiques de base nécessaires au développement de cette méthode.

CHAPITRE II

FORMULATION EN OPERATEURS ET BIFURCATION SIMPLE

II-0 ORIENTATIONS

II-1 ANALYSE DES POINTS DE BIFURCATION ET JUSTIFICATIONS MATHEMATIQUES POUR LES COQUES DE DONNELL

II-1-0 Introduction

II-1-1 Ellipticité de l'énergie de déformation

II-1-2 Formulation opérationnelle de l'équation d'équilibre

II-1-2-a Formulations en opérateurs

II-1-2-b Opérateur tangent

II-1-3 Réduction de Lyapunov-Schmidt

II-1-4 Branches bifurquées

II-1-5 Conclusion

II-2 EXPLICITATION A LA POUTRE D'EULER

II-2-0 Introduction

II-2-1 Formulation du problème

II-2-2 Réduction de Lyapunov-Schmidt

II-2-3 Développement asymptotique et numérique

II-2-4 Conclusion

II-0 ORIENTATION

Dans le chapitre précédent nous avons rappelé la modélisation des coques cylindriques et nous avons adopté le modèle de Donnell pour sa simplicité analytique. Nous avons aussi rappelé les notions de base de la stabilité élastique tout en mettant l'accent sur la bifurcation instable. Ce qui est généralement le cas pour les coques cylindriques.

Dans ce chapitre, nous introduisons une formulation en opérateurs de l'équation d'équilibre permettant d'étudier le comportement post-critique de la coque. Cette formulation nous permet d'utiliser les résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts. Par la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, on ramène la résolution de l'équation d'équilibre à un espace de dimension finie. Comme on se restreint à la bifurcation simple, cet espace est choisi de dimension 1. Ainsi on obtient les branches bifurquées sous forme de séries entières au voisinage du point critique.

Cette formulation en opérateurs et ce développement en séries nous permettront de développer, dans le chapitre III, la méthode asymptotique-numérique. Avant cela, j'explicite les différentes étapes à suivre sur l'exemple de la poutre élastique. Le post-flambage initial de la poutre est alors obtenu par la résolution de problèmes linéaires.

II-1 ANALYSE DES POINTS DE BIFURCATION ET JUSTIFICATIONS MATHÉMATIQUES POUR LES COQUES DE DONNELL

II-1-0. INTRODUCTION

Dans ce paragraphe, on rappelle le résultat d'ellipticité de l'énergie de déformation élastique linéaire. Ce résultat nous permet de définir une norme équivalente à la norme de l'espace des déplacements admissibles. On va introduire une formulation opérationnelle en opérateur de l'équation d'équilibre permettant d'utiliser les résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts. La méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt nous permet de nous ramener à un problème algébrique sur un espace de dimension finie. Les branches bifurquées sont alors déterminées sous forme de séries entières au voisinage du point critique.

II-1-1 ELLIPTICITE DE L'ENERGIE DE DEFORMATION

Dans cette section, nous considérons le modèle linéaire des coques minces. On rappelle un résultat essentiel, démontré de manière détaillée par Bernadou-Ciarlet [B6], qui est l'ellipticité de l'énergie de déformation. De cette étude, il a été déduit un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème linéaire. Ce résultat est démontré dans le cas du modèle linéaire de Koiter qui est plus général que celui de Donnell.

L'ellipticité du modèle linéaire de coques a été étudié par différents auteurs, on pourra notamment se rapporter à Rougée [R5], Coutris [C6]. Dans l'article de Bernadou-Oden [B7], on trouve un théorème d'existence de coques peu profondes se basant sur le modèle non-linéaire de Donnell (ou Koiter simplifié), sur le résultat de l'ellipticité précédent et sur la théorie des opérateurs pseudo-monotones.

En se restreignant au modèle linéaire de Donnell, on pose $\Gamma^{NL} = 0$. L'énergie potentielle totale est alors donnée par:

$$P[\lambda, U] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Gamma^L C_m \Gamma^L + {}^t K C_b K] d\Omega - \lambda P_d(U)$$

$$= \frac{1}{2} a(U, U) - f(U) \quad (\text{II-1 } 1)$$

où $\frac{1}{2}a(U, U)$ représente l'énergie de déformation de la structure associée au champ de déplacement U admissible et $a(.,.)$ est une forme quadratique.

On note aussi par " a " la forme bilinéaire symétrique associée. $f(U)$ représente l'énergie potentielle des charges extérieures associée au même champ de déplacement U . f est une forme linéaire. L'espace des déplacements admissibles V défini au §I-1 est:

$$V = \{ U \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \text{ tel que } U \text{ vérifie les conditions aux limites } \}$$

En utilisant l'inégalité de Korn et le lemme du mouvement rigide [D3], on définit à l'aide du vecteur déplacement et des tenseurs linéaires de déformations et de courbures deux normes équivalentes à la norme de V . A l'aide de ces deux normes, on démontre que la forme bilinéaire " a " est V -elliptique et continue [B6]. Cela entraîne que l'application suivante:

$$U \in V \quad \longrightarrow \quad \left[\frac{1}{2} a(U, U) \right]^{1/2} \quad (\text{II-1 } 2)$$

définit une norme équivalente à la norme de V .

Dans la suite, on utilisera cette norme $\| \cdot \|_a$ associée à la forme bilinéaire V -elliptique " a ".

La configuration d'équilibre minimise - au moins localement - l'énergie potentielle totale $P[\lambda, U]$ sur l'espace des déplacements admissibles V , on a alors le problème suivant :

$$(I) \quad \begin{cases} \text{Trouvez } U \in V \text{ minimisant} \\ P[U, \lambda] = \frac{1}{2} a(U, U) - f(U) \end{cases}$$

ou encore, comme la forme bilinéaire " a " est symétrique, la formulation équivalente

$$(II) \quad \begin{cases} \text{Trouvez } v \in V \text{ tel que} \\ a(U, v) = f(U) \quad \forall U \in V \end{cases}$$

<u>Théorème d'existence et d'unicité</u>

Le problème variationnel (I) (ou II) admet une solution unique

Ce théorème se démontre à l'aide des résultats précédents et du théorème de Lax-Milgram. Pour une démonstration bien détaillée de ces résultats on renvoie à [B6].

II-1-2 FORMULATION OPERATIONNELLE DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

Notre but est d'étudier le flambage et le post-flambage des coques cylindriques. Pour cela, on doit tenir compte de la partie non-linéaire du tenseur de déformation, $\Gamma = \Gamma^L + \Gamma^{NL}$, faute de quoi on retrouverait la théorie linéaire de coques pour laquelle tout flambement est exclu.

Tout en restant dans le cadre des coques de Donnell, on va introduire dans ce paragraphe, une algèbre fonctionnelle facile à manipuler pour l'étude du post-flambage des coques. On verra qu'on pourra utiliser pour cela les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle. Cette étude est basée sur l'énergie potentielle $P[\lambda, U]$.

$$\begin{aligned} P[\lambda, U] &= P_1[\lambda, U] + P_2[\lambda, U] + P_3[\lambda, U] + P_4[\lambda, U] \\ &= -f(U) + \frac{1}{2} a(U, U) + P_3[\lambda, U] + P_4[\lambda, U] \end{aligned} \quad (\text{II-1 } 3)$$

où $\frac{1}{2} a(U, U) - f(U)$ représente l'énergie de déformation linéaire et des charges extérieures, et les $P_i[\lambda, U]$ sont donnés au chapitre précédent.

A l'équilibre on a : $\delta P[\lambda, U] = 0$.

$$\delta P[\lambda, U] = a(U, \delta U) - f(\delta U) + \delta P_3[\lambda, U] + \delta P_4[\lambda, U] = 0$$

II-1-2-a FORMULATION EN OPERATEURS

La prise en compte de la partie non-linéaire Γ^{NL} a introduit des formulations intégrales supplémentaires par rapport au cas linéaire. La formulation en opérateurs de ces formes variationnelles nous permettra de nous ramener à une algèbre facile à manipuler. Pour cela on met $\delta P_3[\lambda, U]$ et $\delta P_4[\lambda, U]$ sous forme opérationnelle.

$$\delta P_3 [\lambda, U] = \int_{\Omega} \Gamma^L (\delta U) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL} (U, U) d\Omega + 2 \int_{\Omega} \Gamma^L (U) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL} (U, \delta U) d\Omega$$

$\delta P_3 [\lambda, U]$ définit une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz-Frechet [B11], il existe un opérateur, qu'on note B, continu de V dans V tel que :

$$\delta P_3 [\lambda, U] = \langle B U, \delta U \rangle \quad (\text{II-1 4})$$

L'opérateur B, ainsi défini, est un opérateur homogène d'ordre 2. D'autre part :

$$\delta P_4 [\lambda, U] = 2 \int_{\Omega} \Gamma^{NL} (U, U) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL} (U, \delta U) d\Omega$$

De même, $\delta P_4 [\lambda, U]$ permet d'introduire un opérateur cubique qu'on note C, défini par :

$$\delta P_4 [\lambda, U] = \langle C U, \delta U \rangle \quad (\text{II-1 5})$$

C ainsi défini est un opérateur homogène de degré 3.

A la forme bilinéaire a on associe un opérateur A V-elliptique défini par:

$$a (U, \delta U) = \langle A U, \delta U \rangle \quad (\text{II-1 6})$$

Comme f est une forme linéaire continue, l'équation d'équilibre peut alors se mettre sous la forme :

$$\delta P [\lambda, U] = \langle A U, \delta U \rangle - \langle f, \delta U \rangle + \langle B U, \delta U \rangle + \langle C U, \delta U \rangle = 0$$

Comme la forme bilinéaire "a" définit une norme équivalente à la norme de V, en prenant le produit scalaire associé à A on obtient:

Pour tout δU fonction test admissible

$$\delta P [\lambda, U] = 0 \quad (\text{II-1 7-a})$$

$$\Leftrightarrow \langle U, \delta U \rangle_A - \langle f, \delta U \rangle_A + \langle B U, \delta U \rangle_A + \langle C U, \delta U \rangle_A = 0$$

On rappelle le cadre fonctionnel suivant :

- 1- V est un espace de Hilbert
- 2- $P[\lambda, U]$ est une fonctionnelle analytique réelle définie sur $R \times V$
- 3- On identifie V et son dual V' , de sorte à assimiler $P'[\lambda, U]$ à un élément de V grâce à la formule :

$$\delta P[\lambda, U] = \langle P'[\lambda, U], \delta U \rangle_A$$

De plus $P'[\lambda, U]$ est une fonction analytique de $R \times V$ dans V .

Théorème II-1

Sous ce cadre, l'équation d'équilibre $\delta P[\lambda, U] = 0$ peut être ramenée à l'équation fonctionnelle suivante :

$$F[\lambda, U] = U + B U + C U - f = 0 \quad (\text{II-1 7-b})$$

où F est un opérateur de non-linéarité d'ordre 3 défini sur $R \times V$ à valeur dans V

II-1-2-b OPERATEUR TANGENT

Le problème d'équilibre $\delta P[\lambda, U] = 0$ est alors ramené à l'étude du problème de bifurcation à un paramètre, $F[\lambda, U] = 0$. Soit U_0 une solution particulière pour $\lambda = \lambda_0$. On note par F_T l'opérateur tangent à F en (λ_0, U_0) et par B et C les opérateurs bilinéaire et trilinéaire symétriques associés à B et à C respectivement.

$$\begin{aligned} F_T(\lambda_0, U_0) &= I + 2 B(U_0, \cdot) + 3 C(U_0, U_0, \cdot) \\ &= I + K \end{aligned} \quad (\text{II-1 8})$$

$$\text{où } K = 2 B(U_0, \cdot) + 3 C(U_0, U_0, \cdot)$$

Les points de bifurcations (λ_0, U_0) , où cette solution rencontre une autre solution, sont caractérisés par le fait que l'opérateur tangent F_T soit singulier, c'est-à-dire qu'il existe un U non nul tel que :

$$F_T(\lambda_0, U_0) \cdot U = (I + K) \cdot U = 0$$

On est donc ramené à étudier le noyau de l'opérateur $(I + K)$. Pour cela, on va déterminer les propriétés de l'opérateur K .

Propriété II-1

Les opérateurs quadratique B et cubique C sont faiblement continus.

Démonstration :

Soit (U_n) une suite convergeant faiblement vers U dans l'espace de Hilbert V . On montre facilement que:

* $\Gamma^L(U_n)$ converge faiblement vers $\Gamma(U)$.

En effet : la suite $U_n = (u_n, v_n, w_n)$ converge faiblement vers $U = (u, v, w)$ dans V donc les suites dérivées $u_{n,1}, u_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,2}$ et w_n convergent faiblement vers $u_{,1}, u_{,2}, v_{,1}, v_{,2}$ et w respectivement dans $L^2(\Omega)$. D'où $\Gamma^L(U_n)$ converge faiblement vers $\Gamma^L(U)$.

* $\Gamma^{NL}(U_n, U_n)$ converge fortement vers $\Gamma^{NL}(U, U)$.

En effet : par définition de $\Gamma^{NL}(U_n, U_n)$ dans le cadre de Donnell, cette quantité ne dépend que de la suite w_n qui est définie, et converge faiblement vers w dans $H^2(\Omega)$. Or l'injection de $H^2(\Omega)$ dans $W^{1,4}(\Omega)$ est compacte (Théorème de Rellich) [D3]. Donc w_n converge fortement vers w dans $W^{1,4}(\Omega)$. Les suites $w_{n,1}$ et $w_{n,2}$ convergent fortement vers $w_{,1}$ et $w_{,2}$ dans $L^4(\Omega)$, par conséquent $\Gamma^{NL}(U_n, U_n)$ converge fortement vers $\Gamma^{NL}(U, U)$ dans $L^2(\Omega)$. Or le produit de dualité entre une suite fortement convergente et une suite faiblement convergente est convergent. Donc

$$\begin{aligned} \langle B U_n, X \rangle &= \int_{\Omega} \Gamma^L(X) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL}(U_n, U_n) d\Omega \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \Gamma^L(U_n) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL}(U_n, X) d\Omega \end{aligned}$$

converge vers $\langle B U, X \rangle$ pour tout X à cause de la convergence forte de $\Gamma^{NL}(U_n, U_n)$ et de $\Gamma^{NL}(U_n, X)$. D'où l'opérateur B est faiblement continu.

De même l'opérateur C vu que:

$$\langle C U_n, X \rangle = 2 \int_{\Omega} \Gamma^{NL}(U_n, X) \cdot C_m \cdot \Gamma^{NL}(U_n, U_n) d\Omega$$

converge vers $\langle C U, X \rangle$ pour tout X . $\square$

Propriété II-2

L'opérateur $K = 2 B (U_0, \cdot) + 3 C (U_0, U_0, \cdot)$ est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact.

Démonstration :

L'opérateur K provient de la dérivée seconde de la fonctionnelle analytique énergie potentielle $P [\lambda, U]$ qui est une forme bilinéaire symétrique, K est alors un opérateur auto-adjoint. La compacité de K provient de la faible continuité des opérateurs B et C . $\square$

La détermination des branches bifurquées se ramène à l'étude du noyau de l'opérateur non-inversible F_T , donc à l'étude du noyau de $(I + K)$, où K est un opérateur compact. Pour cela, on va utiliser les résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts. Cette théorie spectrale est développée dans plusieurs ouvrages d'analyse [D3], [B11]. Pour la résolution de l'équation $U + K U = f$, où K est un opérateur compact, le théorème de l'alternative de Fredholm, dû à Riesz-Fredholm, est ici d'une grande utilité.

En appliquant cette alternative au problème :

$$F_T (\lambda_0, U_0).U = (I + K).U = 0 \text{ on obtient :}$$

* soit $F_T (\lambda_0, U_0) = (I + K)$ est inversible alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique branche de solution de $F (\lambda, U) = 0$ au voisinage de (λ_0, U_0) . Donc pas de points de bifurcation.

* soit $F_T (\lambda_0, U_0)$ est non-inversible, alors l'équation $F_T (\lambda_0, U_0). U = (I + K).U = 0$ a n solutions linéairement indépendantes. D'où le noyau $\mathcal{N}$ de l'opérateur $F_T = (I + K)$ est un espace vectoriel fermé de dimension n . De plus l'image $R (I + K)$ de l'opérateur $(I + K)$ est un fermé et plus précisément $R (I + K) = \text{noyau } (I + K)^\perp$.

II-1-3 REDUCTION DE LYAPUNOV-SCHMIDT

La méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt permet de remplacer un ensemble large et compliqué d'équations par un "petit" système d'équations contenant l'information essentielle concernant la bifurcation. Le principe de cette réduction est alors de réduire l'équation $F[\lambda, U] = 0$, définie sur un espace de dimension infinie V , à une équation sur un espace de dimension finie.

Comme on cherche les points de bifurcation, on suppose que l'opérateur F_T est non-inversible. D'après ce qui précède, le noyau N de F_T , qui est dans ce cas non réduit à $\{0\}$, est de dimension finie.

Sachant que N est un espace vectoriel fermé et comme dans un espace de Hilbert tout fermé admet un supplémentaire topologique, on peut poser:

$$V = N \oplus N^\perp \quad \text{où } N^\perp \text{ désigne l'orthogonal de } N$$

En introduisant de nouvelles variables on obtient:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + \varepsilon \\ U = \vartheta + w \end{cases} \quad \text{où } \vartheta \in N \text{ et } w \in N^\perp \quad (\text{II-1 } 9)$$

Selon la terminologie de Thompson et Hunt [P2], les composantes de ϑ sont les variables actives alors que celles de w (une infinité !) sont les variables passives. En utilisant ce changement de variables, l'équation d'équilibre $\langle F(\lambda, U), \delta U \rangle = 0$ se décompose en deux équations:

$$\begin{cases} \langle F(\lambda, \vartheta + w), \delta \vartheta \rangle = 0 & \forall \vartheta \in N \quad (\text{II-1 } 10-a) \\ \langle F(\lambda, \vartheta + w), \delta w \rangle = 0 & \forall w \in N^\perp \quad (\text{II-1 } 10-b) \end{cases}$$

L'équation auxiliaire (II-1 10-b) permettra de déterminer w en fonction de λ et de ϑ . En injectant w dans l'équation (II-1 10-a), définie sur l'espace N de dimension finie, on déterminera ϑ par n équations algébriques.

Soit P l'opérateur de projection orthogonale sur $N^\perp$ ($I - P$ est l'opérateur de projection sur N). Il est clair que l'opérateur P est linéaire, continu, et que P commute avec l'opérateur F_T ($F_T \circ P =$

$P \circ F_T$). D'après l'alternative de Fredholm la dérivée de Fréchet $\frac{DF}{Dw}$

$(\lambda_0, U_0) = P \circ F_T$ est continûment inversible sur $\mathcal{N}^\perp$ [P5], [R2].

D'où, d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation auxiliaire $\langle F(\lambda, \vartheta + w), \delta w \rangle = 0$ admet une solution unique $w(\vartheta, \lambda)$ dans $\mathcal{N}^\perp$ pour (w, ϑ, λ) voisins de $(0, 0, \lambda_c)$. La fonction $w(\vartheta, \lambda)$ est analytique à cause de l'analyticité de l'énergie potentielle $P[\lambda, U]$.

En reportant $w(\vartheta, \lambda)$ dans l'équation (II-1 10-a), on obtient l'équation de bifurcation:

$$\langle F(\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)), \delta \vartheta \rangle = 0 \quad \forall \vartheta \in \mathcal{N}$$

Les solutions ϑ de cette équation sont les points stationnaires de la fonctionnelle $P[\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)]$.

(En effet :

$$\begin{aligned} P'[\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)] \left[1 + \frac{Dw}{D\vartheta} \right] \delta \vartheta &= F[\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)] \left[1 + \frac{Dw}{D\vartheta} \right] \delta \vartheta \\ &= F[\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)] \delta \vartheta \end{aligned}$$

$$\text{car } F[\lambda, \vartheta + w(\vartheta, \lambda)] \left[\frac{Dw}{D\vartheta} \delta \vartheta \right] = 0 \quad \text{d'après (II-1 10-b))}$$

On s'est alors ramené à un problème algébrique :

Trouver les points stationnaires d'une fonction définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{N}$ de dimension finie.

II-1-4 BRANCHES BIFURQUEES

La méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt nous a permis de ramener le problème du post-flambage de la coque cylindrique à un espace $\mathcal{N}$ de dimension finie qui est généralement de dimension 1 ou 2. On se restreint dans toute la suite à l'étude de la bifurcation simple. Pour cela on suppose que l'espace $\mathcal{N}$ est de dimension 1 engendré par U_1 .

(II-1 11)

$$\begin{cases} U = \vartheta + w & \vartheta \in \mathcal{N} \text{ et } w \in \mathcal{N}^\perp \\ \quad = a U_1 + w & U_1 \perp w \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$, est l'amplitude de la projection de U sur le mode U_1 .

Comme la solution fondamentale $U_0(\lambda_c)$ est ramenée à 0, ϑ est nul, ce qui entraîne que w l'est aussi. La solution $w(\vartheta, \lambda)$ de (II-10-b) est analytique donc on peut écrire $w(\vartheta, \lambda) = a w_1(a, U_1, \lambda)$ avec w_1 une fonction analytique.

En développant en séries de Taylor $F(\lambda, \vartheta)$ au voisinage de $(\lambda_c, 0)$, on montre [P5] qu'on peut poser:

$$w(\vartheta, \lambda) = a^2 w_2(a, U_1) + (\lambda - \lambda_c) a w_3(a, U_1, \lambda) .$$

où $w_2(., .)$ et $w_3(., ., .)$ sont des fonctions analytiques.

Pour la représentation de la branche bifurquée, on énonce un théorème qui a été démontré de manière détaillée dans un cadre plus général dans [P5].

Rappelons que nous sommes toujours dans le cadre fonctionnel introduit précédemment.

Théorème II-2

L'équation $F(\lambda, U) = 0$ possède une solution fondamentale ($U = 0, \lambda = \lambda_c$) tel que l'opérateur tangent $F_T(\lambda_c, 0)$ soit non inversible. On suppose que :

- a) Le noyau $\mathcal{N}$ de $F_T(\lambda_c, 0)$ est de dimension 1
- b) U_1 étant un élément non nul de $\mathcal{N}$ tel que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \lambda} F_T(\lambda_c, 0) . U_1; U_1 \right\rangle \neq 0 \quad (\text{II-1 12})$$

Alors il existe une seule branche bifurquée représentable sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = a U_1 + a^2 U_2 + \dots \\ \lambda = \lambda_c + a^k C_k + a^{k+1} C_{k+1} + \dots \\ \langle U_1, U_n \rangle = 0 \quad \text{pour } n > 1 \end{array} \right. \quad (\text{II-1 13})$$

L'hypothèse (II-1 12) est primordiale, vu qu'elle est indispensable pour le calcul des C_k . On verra dans la suite qu'elle est satisfaite.

Pour l'étude de la stabilité de la solution bifurquée, il a été montré par plusieurs auteurs [K5], [B16], [P5], que dans le cas des

coques cylindriques, la solution fondamentale est stable pour $\lambda < \lambda_c$ et instable pour $\lambda > \lambda_c$. Par ailleurs la solution bifurquée est instable pour $\lambda < \lambda_c$ et stable pour $\lambda > \lambda_c$. C'est le principe d'échange de stabilité au voisinage du point de bifurcation.

Pour la prise en compte des imperfections, on ajoute à l'énergie potentielle du système parfait une énergie potentielle additionnelle dépendant en outre d'un petit paramètre mesurant la grandeur des imperfections. Pour l'utilisation de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt dans ce cas, on n'a besoin que des propriétés variationnelles de l'énergie potentielle du système parfait [P5]. On fera ultérieurement une étude détaillée du post-flambage des coques cylindriques sous pression avec imperfections.

II-1-5 CONCLUSION

On a vu que, sous le modèle des coques de Donnell, on peut appliquer la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt pour déterminer les branches bifurquées. Il a été montré [P5] que les plaques de Von Karman remplissent aussi les conditions d'application de cette méthode.

En se basant sur cette méthode de réduction, on développera dans le chapitre III une méthode asymptotique-numérique. Cette méthode nous permettra de connaître analytiquement le post-flambage initial des structures rentrant dans ce cadre.

Le paragraphe suivant fait l'objet de l'application de cette méthode à la poutre d'Euler.

II-2 EXPLICITATION A LA POUTRE D'EULER

II-2-0 INTRODUCTION

Dans ce paragraphe on étudie le post-flambage initial de la poutre d'Euler élastique en appui simple. On ramène la résolution du problème non-linéaire d'équilibre à celle d'une succession de problèmes linéaires. Pour cela, on va mettre en application les différentes étapes rencontrées au paragraphe II-1. Ainsi le comportement post-critique de la poutre sera déterminé par la résolution de problèmes linéaires. On utilise un système de *calcul formel* pour développer et résoudre les équations différentielles obtenues. Ainsi cet exemple pourra servir comme modèle, surtout dans le cas des fortes non-linéarités.

II-2-1 FORMULATION DU PROBLEME

Le comportement du post-flambage de la poutre d'Euler a été étudié par plusieurs auteurs. Vu que cet exemple est élémentaire, mais non trivial, il sert généralement pour l'application de la théorie générale du post-flambage. On va l'utiliser comme une application de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt.



On considère une poutre avec un appui simple, soumise à un chargement conservatif p ; on note $\lambda = \frac{P}{EI}$ un paramètre de charge, x la longueur d'arc de la poutre déformée et $U(x)$ l'angle de rotation de la poutre autour de la section. On suppose que la longueur L de la poutre est $L = 1$. L'équation d'équilibre statique, [B16] est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda \sin U = 0 \\ \frac{dU}{dx}(0) = \frac{dU}{dx}(1) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-2 } 1)$$

On définit l'espace des déplacements admissibles V par:

$V = \{ U \in H^2(]0,1[) , \frac{dU}{dx}(0) = \frac{dU}{dx}(1) = 0 \}$ qu'on munit du produit scalaire de $L^2(]0,1[)$ qu'on note $\langle , \rangle$.

On pose $F[\lambda, U] = \frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda \sin U = 0$

$U \equiv 0$ est une solution fondamentale de l'équation $F[\lambda, U]U = 0$.

On note par $D_U F[\lambda, 0]$, la partie linéaire de l'opérateur F (qui est sa dérivée de Frechet en $U = 0$). $D_U F[\lambda, 0] = \frac{d^2}{dx^2} + \lambda$

$U = 0$ est la seule solution de $D_U F[\lambda, 0] = 0$ vérifiant les conditions aux limites si $\lambda \neq n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Si $\lambda = n^2 \pi^2$ alors $U = a \cos(n\pi x)$, $a \in \mathbb{R}$ est une solution admissible. La valeur critique du chargement λ (qui est la plus petite) est $\lambda_c = \pi^2$.

On note par L l'opérateur linéaire $D_U F(\lambda_c, 0) = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2$ qui est l'opérateur tangent de $F[\lambda, U]$ au point $(\pi^2, 0)$.

L est un opérateur linéaire continu et auto-adjoint sur V ayant pour noyau l'espace vectoriel $\mathcal{N}$ de dimension 1 engendré par $\{\cos \pi x\}$. On décompose $F[\lambda, U]$ en une partie linéaire et une partie non-linéaire.

$$F[\lambda, U] = L.U + (-\pi^2 U + \lambda \sin U) = 0 \quad (\text{II-2 } 2)$$

$$= L.U + \tilde{F}(\lambda, U) = 0$$

où $\tilde{F}[\lambda, U]$ représente la partie non-linéaire de $F[\lambda, U]$.

II-2-2 REDUCTION DE LYAPUNOV-SCHMIDT

On décompose l'espace de Banach V , en $V = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}^\perp$, $\mathcal{N}^\perp = \text{Image}(L)$
 Soit $U_1 \in \mathcal{N}$ un mode propre de L , on peut poser comme précédemment:

$$\begin{cases} U = a U_1 + w \\ \lambda = \lambda_c + \epsilon \end{cases} \quad (\text{II-2 } 3)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathcal{N}^\perp$

En notant par P l'opérateur de projection sur $\mathcal{N}^\perp$, on peut décomposer l'équation (II-2 2) en deux équations sur $\mathcal{N}$ et sur $\mathcal{N}^\perp$.

$$(I-P) \circ \tilde{F}(\lambda, a U_1 + w) = 0 \quad (\text{II-2 } 4\text{-a})$$

$$LW + P \circ \tilde{F}(\lambda, a U_1 + w) = 0 \quad (\text{II-2 } 4\text{-b})$$

Pour l'équation auxiliaire (II-2 4-b), l'opérateur L opère sur l'espace de Banach $\mathcal{N}^\perp = \text{Image}(L)$ où il est inversible. D'après le théorème de Banach [B11], L est continûment inversible sur $\mathcal{N}^\perp$. D'où d'après le théorème de fonctions implicites, l'équation (II-2 4-b) admet une solution unique $w(\lambda, a)$ au voisinage de $(\lambda_c, 0)$ qui est analytique. En injectant $w(\lambda, a)$ dans (II-2 4-a), on obtient une simple équation algébrique qui est l'équation de bifurcation.

$$(I-P) \circ \tilde{F}(\lambda, a U_1 + w(\lambda, a)) = 0 \quad (\text{II-2 } 5)$$

II-2-3 DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE ET NUMERIQUE

Pour la détermination asymptotique des branches bifurquées, on utilise le théorème II-2.

L'opérateur tangent $F_T[\lambda_c, 0] = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2$ est non inversible et admet un noyau $\mathcal{N}$ de dimension 1 engendré par U_1 .

On a aussi $\frac{\partial}{\partial \lambda} F_T[\lambda_c, 0] = I$, d'où $\langle \frac{\partial}{\partial \lambda} F_T[\lambda, 0] U_1; U_1 \rangle \neq 0$

D'après le théorème précédent, il existe alors une seule branche bifurquée représentable sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \lambda_c + a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + \dots \\ U = a U_1 + a^2 U_2 + \dots \\ \langle U_1, U_n \rangle = 0 \text{ pour } n > 1 \end{array} \right. \quad (\text{II-2 } 6)$$

où a est un paramètre scalaire donné par $a = \frac{\langle U, U_1 \rangle}{\langle U_1, U_1 \rangle}$

Les $U_i \in \mathcal{N}^\perp$, pour $i \geq 2$, sont déterminés à l'aide de l'équation (II-2 4-b) et les coefficients λ_k à l'aide de l'équation de bifurcation (II-2 4-a). En injectant le développement (II-2 6) dans l'équation non-linéaire (II-2 2), on se ramène à la résolution d'une succession de problèmes linéaires à chaque ordre de a .

Ordre 1

À l'ordre 1 on retrouve le problème spectral de l'opérateur L

$$L.U_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \pi^2 \right) U_1 = 0 \text{ ayant pour solution dans } V,$$

$$U_1(x) = \cos(\pi x)$$

Ordre 2 $L.U_2 + \lambda_1 U_1 = 0$

Pour déterminer λ_1 , on fait le produit scalaire de cette équation avec le mode propre U_1 .

$$\langle L.U_2, U_1 \rangle + \lambda_1 \langle U_1, U_1 \rangle = 0$$

Comme l'opérateur L est auto-adjoint, $\langle L.U_2, U_1 \rangle = \langle U_2, L.U_1 \rangle = 0$.

On a alors $\lambda_1 = 0$. Donc on a une bifurcation symétrique. U_2 est alors solution de $L.U_2 = 0$.

Comme $U_2 \in \mathcal{N}^\perp$ on a $U_2 = 0$.

Par la même démarche, on détermine les U_i et les λ_i pour les ordres supérieurs. À l'aide du système du calcul formel MAPLE [C7], on peut déterminer et résoudre facilement les équations différentielles correspondant aux ordres supérieurs. Afin de clarifier les différentes étapes à suivre, je vais expliciter ces démarches pour les ordres suivants.

Ordre 3 $LU_3 - \frac{1}{6} \lambda_c U_1^3 + \lambda_2 U_1 = 0$

En faisant la projection sur $\mathcal{N}$ on obtient :

$$-\frac{1}{6}\lambda_c \langle U_1^3, U_1 \rangle + \lambda_2 \langle U_1, U_1 \rangle = 0 \text{ d'où } \lambda_2 = \frac{2}{6}\lambda_c \langle U_1^3, U_1 \rangle = \frac{\pi^2}{8}$$

On a alors une bifurcation symétrique stable ($\lambda_2 > 0$).

En résolvant cette équation différentielle, et en tenant compte des conditions aux limites et de la condition d'orthogonalité $\langle U_3, U_1 \rangle = 0$

on obtient : $U_3(x) = -\frac{1}{192} \cos(3\pi x)$

Ordre 4

$$L U_4 + \lambda_3 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_1 (U_3 - \frac{1}{6} U_1^3) + \lambda_c (-\frac{1}{2} U_2 U_1^2) = 0$$

Ce qui mène après simplifications à : $L U_4 + \lambda_3 U_1 = 0$

d'où par le même procédé on obtient : $\lambda_3 = 0$ et $U_4 = 0$

Ordre 5

$$L U_5 + \lambda_4 U_1 + \lambda_2 [U_3 - \frac{1}{6} U_1^3] + \lambda_c [\frac{1}{120} U_1^5 - \frac{1}{2} U_3 \cdot U_1^2] = 0$$

d'où:

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{5}{512} \pi^2 \\ U_5 = \frac{1}{20480} \cos 5\pi x - \frac{1}{4096} \cos 3\pi x \end{cases}$$

Pour les ordres supérieurs, on peut continuer les développements de la même manière. Comme mon but est de clarifier les différentes démarches qu'on va suivre pour développer et appliquer la méthode asymptotique aux plaques et aux coques, je me restreins, pour ce problème, aux ordres inférieurs. Ainsi on obtient une solution analytique du post-flambage initial de la poutre sous la forme:

(II-2 7)

$$\begin{cases} \lambda = \pi^2 + \frac{\pi^2}{8} a^2 + \frac{5\pi^2}{512} a^4 + \frac{21\pi^2}{32768} a^6 + \dots \\ U(x) = a \cos \pi x + a^3 \left[\frac{1}{192} \cos 3\pi x \right] + a^5 U_5(x) + \dots \end{cases}$$

Le principal avantage de cette méthode est d'avoir développé séparément les chargements λ et le déplacement U au voisinage du point critique. Cela permet, via la condition de solvabilité, de déterminer λ_p et U_p de manière récursive. Ainsi le développement des ordres supérieurs se fait de manière simple.

Sur la figure II-1, on présente les prédictions de la solution suivant les ordres 2, 4 et 6 obtenues par troncature de la série (II-2 7). L'ordre 2 correspond à la prédiction de Budiansky [B16]. On voit clairement que les ordres supérieurs améliorent successivement les solutions ainsi prédites.

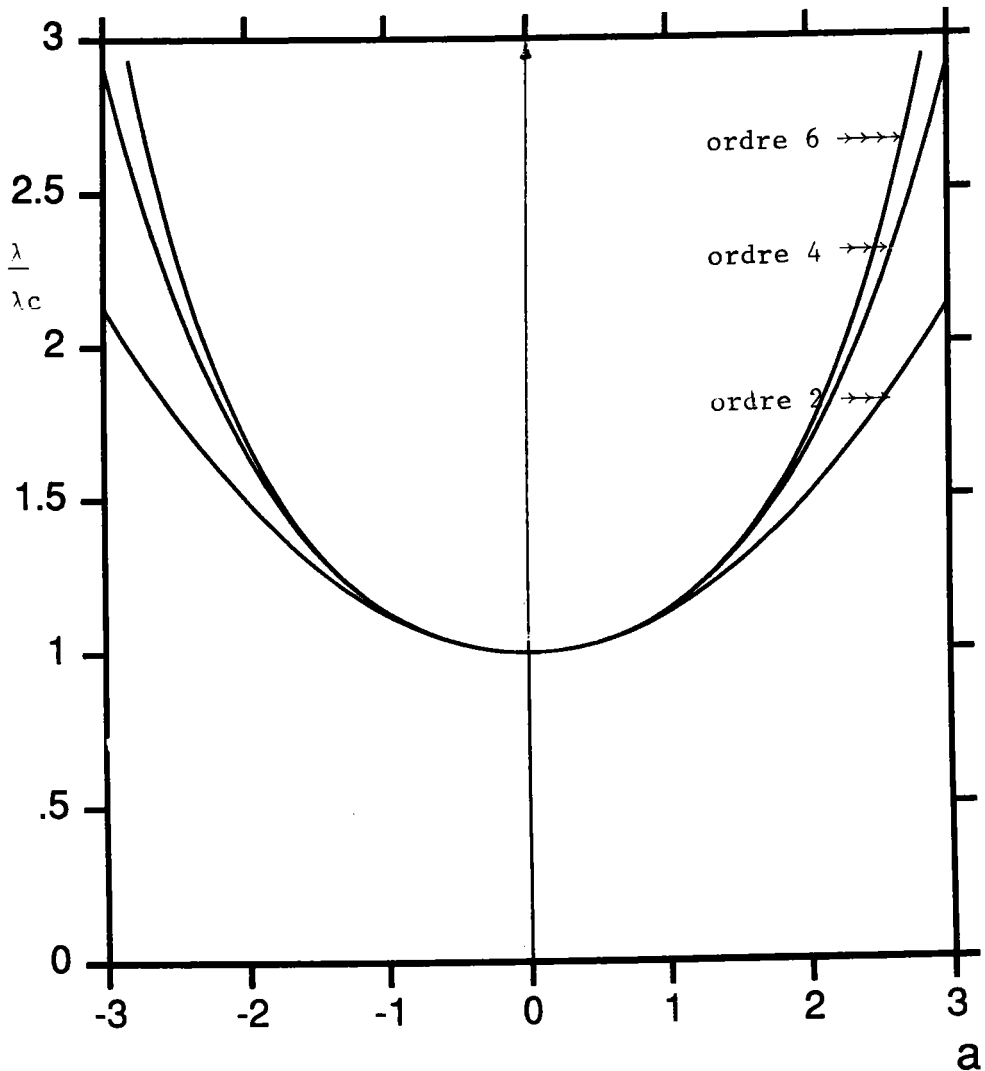


Fig. II-1 Chargement $\frac{\lambda}{\lambda_c}$ en fonction de a aux ordres 2, 4, et 6

Amélioration de la solution par les ordres supérieurs

II-2-4 CONCLUSION

Cet exemple nous a permis de voir comment on peut déterminer le post-flambage initial d'une structure rentrant dans le cadre fonctionnel défini en résolvant des problèmes linéaires. Tous ces problèmes ont la même partie linéaire et on n'a à former que le second membre pour les différents ordres. Nous avons vu aussi que le calcul formel peut être utilisé pour la résolution de tels problèmes et surtout pour les développements fiables des ordres supérieurs. Nous suivrons les mêmes étapes de calculs pour développer et appliquer la méthode asymptotique numérique dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

DEVELOPPEMENT DE LA METHODE ASYMPTOTIQUE- NUMERIQUE ET APPLICATION AUX COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES

III-0 ORIENTATION

III-1 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE ASYMPTOTIQUE NUMERIQUE

III-1-0 INTRODUCTION

III-1-1 FORMULATION EN OPERATEURS DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

III-1-1-a Equation d'équilibre en formulation mixte

III-1-1-b Perturbation de la solution fondamentale

III-1-2 DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

III-1-2-a Réduction de Lyapunov-Schmidt et développement asymptotique

III-1-2-b Passage du problème non-linéaire aux problèmes linéaires

III-1-2-c Passage du problème mixte au problème en déplacement

III-1-2-d Relaxation du problème en déplacement

III-1-3 TABLEAU DE SYNTHESE

III-2 FORMULATION OPERATIONNELLE UNIDIMENSIONNELLE

III-2-0 INTRODUCTION

III-2-1 DECOMPOSITION EN SERIES DE FOURIER

III-2-2 DECOMPOSITION HARMONIQUE DE $V(P)$

III-2-2-a Adaptation aux ordres inférieurs

III-2-2-b Ordres supérieurs

III-2-3 PASSAGE DE 2D à 1D

III-2-3-a Formulations monodimensionnelles

III-2-3-b Problèmes linéaires 1D

III-2-3-c Problèmes en déplacement 1D

III-2-4 REALISATION NUMERIQUE

III-2-5 CONCLUSION

III-3 APPLICATION AU FLAMBAGE ET POST-FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES

III-3-1 ETUDE DU FLAMBAGE DU CYLINDRE

III-3-1-a Réalisation numérique

III-3-1-b Flambage du cylindre

III-3-1-b- α Cylindre sous pression

III-3-1-b- β Cylindre sous compression axiale

III-3-2 ETUDE DU POST-FLAMBAGE DU CYLINDRE SOUS PRESSION EXTERNE

III-3-2-a Réalisation numérique

III-3-2-b Branches bifurquées

III-3-2-b- α Convergence vers la branche solution

III-3-2-b- β Rayon de convergence

III-3-3 CONCLUSION

III-4 PRISE EN COMPTE DU PREFLAMMAGE

III-4-0 Introduction

III-4-1 Problème de préflambage

III-4-2 Flambage et post-flambage avec préflambage

III-4-2-a Flambage du cylindre sous pression ou compression avec préflambage

III-4-2-b Post-flambage du cylindre sous pression avec préflambage

III-4-3 Conclusion

III-5 CONCLUSION

III-0 ORIENTATION

L'étude de la stabilité des structures minces nécessite non seulement la détermination du chargement critique, mais aussi celle du comportement post-critique. Comme l'utilisation des ces structures en industrie et la capacité des calculateurs sont en expansion, des codes de calcul efficaces sont nécessaires. Pour cela un grand nombre de travaux ont été et sont encore consacrés à ce sujet. Ainsi, différentes méthodes ont été développées, de types itératives -prédiction-correction- ou de types asymptotiques.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode asymptotique-numérique permettant d'étudier, de manière simple, le comportement post-critique initial des structures minces - poutres plaques et coques-. On présente une formulation en opérateurs de l'équation d'équilibre très maniable pour les développements asymptotiques. Le développement en série du déplacement et du chargement nous ramène à la résolution d'une série de problèmes linéaires. Pour les coques de révolution, l'utilisation des éléments finis 1D réduit considérablement le temps CPU. Pour cela, on introduit une formulation en opérateur 1D opérationnelle avec la décomposition en harmoniques. Ainsi, on se ramène à la résolution de problèmes linéaires récurrents faciles à mettre en oeuvre.

Nous appliquons ici cette méthode à l'étude du flambage et du post-flambage initial des coques cylindriques sous pression. Ayant pour but d'appliquer ce concept à différentes configurations, nous présentons une variante de cette méthode permettant la prise en compte du préflambage non-linéaire. Le post-flambage des coques cylindriques avec préflambage est ainsi étudié.

III-1 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE

III-1-0 INTRODUCTION

Nous allons utiliser la fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner permettant de ramener l'équation d'équilibre à une formulation variationnelle quadratique. En introduisant une formulation en opérateurs bien adaptée et en se basant sur l'analyse théorique présentée au chapitre II, on développe une méthode asymptotique numérique. Le développement de cette méthode pour la poutre sur fondation élastique a été décrit par Damil et Potier-Ferry [D1]. Avec la collaboration de B. Cochelin nous avons adapté cette méthode aux plaques et aux coques cylindriques [A12-13]. Nous présentons ici les différentes étapes de cette méthode et son adaptation aux coques de révolution.

III-1-1 FORMULATION EN OPERATEURS DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

L'étude de l'équilibre de la structure est généralement faite à partir de l'énergie potentielle totale. Cette fonctionnelle est de non-linéarité d'ordre 4 en déplacement. L'utilisation de la formulation mixte permet de réduire l'ordre de cette non-linéarité et conduit à une formulation variationnelle quadratique. La formulation en opérateurs de cette équation variationnelle mène à une algèbre facile à manipuler.

III-1-1-a EQUATIONS D'EQUILIBRE EN FORMULATION MIXTE

L'énergie potentielle totale de la structure est donnée par :

$$P [\lambda, u_\alpha, w] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \Gamma : C_m : \Gamma + \frac{1}{2} K : C_b : K \right\} d\Omega - \lambda P_d(u_\alpha, w) \quad (\text{III-1 1})$$

où K est le tenseur de changement de courbure linéaire en (u_α, w) .
 $\Gamma(u_\alpha, w) = \Gamma^L(u_\alpha, w) + \Gamma^{NL}((u_\alpha, w), (u_\alpha, w))$ tenseur de déformation. Γ^L est linéaire et Γ^{NL} est quadratique en (u_α, w) .

$$<< \mathcal{L}.U, \delta U >> = \int_{\Omega} \left\{ N : \delta \Gamma^L + (\Gamma^L - C_m^{-1} N) : \delta N + K : C_b : \delta K \right\} d\Omega \quad (\text{III-1 } 7\text{-a})$$

$$<< Q(U, U), \delta U >> = \int_{\Omega} \left\{ \Gamma^{NL}(U, U) : \delta N + N : \delta \Gamma^{NL}(U, U) \right\} d\Omega \quad (\text{III-1 } 7\text{-b})$$

$$<< \lambda f, \delta U >> = \lambda \delta Pd(u_{\alpha}, w) \quad (\text{III-1 } 7\text{-c})$$

On désigne aussi par $Q(.,.)$ l'opérateur bilinéaire symétrique associé :

$$<< Q(U^1, U^2), \delta U >> = \int_{\Omega} \left\{ \Gamma^{NL}(U^1, U^2) : \delta N + N^1 : \Gamma^{NL}(U^2, \delta U) + N^2 : \Gamma^{NL}(U^1, \delta U) \right\} d\Omega \quad (\text{III-1 } 7\text{-d})$$

On en déduit que l'équation d'équilibre d'une coque peut s'écrire sous la forme de l'équation opérationnelle suivante :

$$\mathcal{L}.U + Q(U, U) = \lambda f \quad (\text{III-1 } 8)$$

Il est évident que cette formation variationnelle mixte est équivalente à la formulation en déplacement introduite au paragraphe (II-1 2). En effet, il suffit de remplacer N par $C_m(\Gamma^L + \Gamma^{NL})$. Ceci permettra d'appliquer les résultats du chapitre II.

III-1-1-b PERTURBATION DE LA SOLUTION FONDAMENTALE EQUILIBRE ADJACENT

Soit $U^0(\lambda)$ une solution fondamentale de l'équation d'équilibre (III-1 8) :

$$\mathcal{L}.U^0(\lambda) + Q(U^0(\lambda), U^0(\lambda)) = \lambda f \quad (\text{III-1 } 9)$$

$U^0(\lambda)$ représente la configuration d'équilibre avant le flambage. Pour déterminer la configuration d'équilibre adjacent, on introduit comme nouvel inconnu l'écart à la solution fondamentale [K6-7], [A6], [Y3]:

$$U^1 = U - U^0(\lambda) \quad (\text{III-1 } 10)$$

En injectant cette décomposition dans l'équation (III-1 8) et en tenant compte de (III-1 9), on obtient l'équation vérifiée par U^1 :

$$\mathcal{L}U^1 + 2 Q(U^0(\lambda), U^1) + Q(U^1, U^1) = 0 \quad (\text{III-1 11})$$

Ainsi on s'est ramené à la résolution simultanée des deux équations (III-1 9) et (III-1 11) pour déterminer le pré-flambage, le flambage et le post-flambage de la structure. La prise en compte du pré-flambage non-linéaire (résolution de l'équation (III-1 9)) sera faite ultérieurement.

Dans ce chapitre, on néglige le pré-flambage en déplacement, et on suppose qu'il est linéaire en contrainte. Cela est rigoureusement exact pour les plaques en compression axiale et est une approximation usuelle pour les coques cylindriques sous pression [B3], [B12], [Y3].

$$U^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda N_{\alpha\beta}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-1 12})$$

où λ est le paramètre de charge.

On cherche à déterminer le vecteur U^1 solution de l'équation (III-1 11) qu'on note aussi U pour alléger l'écriture. En injectant alors (III-1 12) dans (III-1 7) et en tenant compte du fait que $\Gamma^{NL}(U^0, U) = 0$ et $\delta \Gamma^{NL}(U, U) = 2 \Gamma^{NL}(U, \delta U)$, U est alors solution de l'équation variationnelle suivante:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ N : \delta \Gamma^L + (\Gamma^L - C_m^{-1} : N) : \delta N + K : C_b : \delta K \} d\Omega \\ & + \lambda \int_{\Omega} N^0 : \delta \Gamma^{NL}(U, U) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \{ \Gamma^{NL}(U, U) : \delta N + N : \delta \Gamma^{NL}(U, U) \} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-1 13})$$

Pour faciliter encore plus la manipulation de ces équations, on introduit les opérateurs linéaires L et L' [A12-13] définis par:

$$\begin{aligned}
\langle\langle L.U, \delta U \rangle\rangle = & \int_{\Omega} \left\{ N : \delta \Gamma^L + (\Gamma^L - C_m^{-1} N) : \delta N + K : C_b : \delta K \right\} d\Omega \\
& + \lambda_c \int_{\Omega} N^0 : \delta \Gamma^{NL} (U, U) d\Omega
\end{aligned}
\tag{III-1 14-a}$$

$$\langle\langle L'.U, \delta U \rangle\rangle = \int_{\Omega} N^0 : \delta \Gamma^{NL} (U, U) d\Omega
\tag{III-1 14-b}$$

Finalement l'équation d'équilibre (III-1 13) se met sous la forme de l'équation variationnelle opérationnelle suivante :

$$\langle\langle L.U, \delta U \rangle\rangle + (\lambda - \lambda_c) \langle\langle L'.U, \delta U \rangle\rangle + \langle\langle Q(U, U), \delta U \rangle\rangle = 0$$

$$\forall \delta U \text{ admissible.}
\tag{III-1 15-a}$$

Suivant les différentes étapes, on a ramené le problème variationnel $\delta P[\lambda, u_\alpha, w] = 0$, de non-linéarité cubique en déplacement au problème équivalent (III-1 15) de non-linéarité quadratique en contrainte et en déplacement. La notation en opérateurs ainsi introduite mène à une algèbre facile à manipuler pour les développements asymptotiques.

III-1-2 DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

La formulation mixte nous a permis de se ramener à la résolution d'un problème de non-linéarité quadratique gouvernant une large classe de modèles de plaques et de coques.

$$L.U + (\lambda - \lambda_c) L'.U + Q(U, U) = 0
\tag{III-1 15-b}$$

Cette formulation en opérateurs s'adapte favorablement aux développements asymptotiques.

III-1-2-a REDUCTION DE LYAPUNOV-SHMIDT ET DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

Les résultats développés au chapitre II permettent de ramener la résolution du problème (III-1 15-a) à celle d'un problème bien posé sur un espace vectoriel de dimension 1. Les branches bifurquées sont obtenues à l'aide d'un développement asymptotique. Pour appliquer ces résultats on pose:

$$F[\lambda, U] = L.U + (\lambda - \lambda_c) L'.U + Q(U, U) = 0 \quad (\text{III-1 } 16)$$

Le vecteur $U = 0$ est une solution fondamentale du problème. L'opérateur tangent associé à F au point $(\lambda_c, 0)$ est :

$$F_T[\lambda_c, U = 0] = L \quad (\text{III-1 } 17)$$

On suppose que le noyau N de l'opérateur L est de dimension 1 (bifurcation simple). On note $V(1)$ un vecteur engendrant ce noyau. On rappelle qu'un tel vecteur est appelé *mode de flambage*.

Pour $\lambda = \lambda_c$, il existe alors une branche bifurquée rencontrant la solution fondamentale au point $(\lambda, U) = (\lambda_c, 0)$. Notre but est de déterminer cette branche bifurquée aussi loin que possible du point de bifurcation. Pour cela, on va utiliser le théorème II-2.

On vérifie que:

$$\ll \frac{\partial}{\partial \lambda} F_T[\lambda_c, 0] \cdot V(1), V(1) \gg \neq 0 \quad (\text{III-1 } 18)$$

$$\text{car } \frac{\partial}{\partial \lambda} F_T[\lambda_c, 0] = L' \text{ et } \ll L'.V(1), V(1) \gg \neq 0$$

En effet : $\ll L.V(1), V(1) \gg = \ll \mathfrak{L}.V(1), V(1) \gg + \lambda_c \ll L'.V(1), V(1) \gg = 0$. Or $\ll \mathfrak{L}.V(1), V(1) \gg > 0$, ($\mathfrak{L}$ représente l'énergie de déformation qui est définie-positive) $\Rightarrow \ll L'.V(1), V(1) \gg \neq 0$. D'après le théorème II, il existe alors une seule branche bifurquée représentable sous la forme : (III-1 19)

$$\left\{ \begin{array}{l} U = a V(1) + a^2 V(2) + a^3 V(3) + \dots = \sum_{n \geq 1} a^n V(n) \\ \lambda = \lambda_c + a t(1) + a^2 t(2) + a^3 t(3) + \dots = \lambda_c + \sum_{n \geq 1} a^n t(n) \end{array} \right.$$

où les vecteurs $V(n)$ pour $n \geq 2$ sont dans l'espace vectoriel orthogonal à N ($N = \text{vect}\{V(1)\}$).

$$\langle\langle V(1); V(n) \rangle\rangle = 0 \text{ pour tout } n \geq 2 \quad (\text{III-1 } 20)$$

Le paramètre "a" représente l'amplitude de la projection de U sur le mode de flambage $V(1)$.

La représentation de la branche bifurquée sous forme du développement en série (III-1 19) est usuel en théorie de la bifurcation [K5-7], [H1], [B15-16], [P2-6].

Le but de cette analyse est de déterminer comment le déplacement varie en fonction du chargement λ durant le post-flambage. Le fait de développer U et λ en fonction du paramètre "a", mène à une algèbre facile à manipuler pour le calcul de $V(p)$ et de $t(p)$ aux ordres supérieurs.

Le principe de cette méthode asymptotique est de déterminer successivement les vecteurs $V(p)$ et les coefficients $t(p)$ jusqu'à un ordre n donné. Le calcul des vecteurs $V(p)$ se fera par résolution des problèmes linéaires et celui des coefficients $t(p)$ par la résolution de problèmes algébriques.

III-1-2-b PASSAGE DU PROBLEME NON-LINEAIRE AUX PROBLEMES LINEAIRES

Par utilisation des méthodes asymptotiques, on ramène la résolution du problème non-linéaire à celle d'une succession de problèmes linéaires. Cela s'obtient par injection du développement asymptotique dans l'équation non-linéaire et par extraction de problème correspondant à chaque ordre.

En effet, en injectant le développement (III-1 19) dans l'équation variationnelle non-linéaire (III-1 15), on obtient à chaque ordre de a les problèmes linéaires suivants [A10-13] :

A l'ordre 1 (a)

$$\langle\langle L. V(1), \delta U \rangle\rangle = 0 \quad (\text{III-1 } 21-a)$$

à l'ordre 2 (a^2) on a :

$$\begin{cases} \langle L.V(2), \delta U \rangle = -t(1) \langle L'.V(1), \delta U \rangle \\ \quad - \langle Q[V(1), V(1)], \delta U \rangle \\ \langle V(2), V(1) \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III-1 21-b})$$

Pour $p \geq 3$ on obtient :

$$\begin{cases} \langle L.V(p), \delta U \rangle = - \sum_{r=1}^{p-1} t(r) \langle L'.V(p-r), \delta U \rangle \\ \quad - \sum_{r=1}^{p-1} \langle Q[V(r), V(p-r)], \delta U \rangle \\ \langle V(p), V(1) \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III-1 21-c})$$

On va voir que les vecteurs $V(p)$ et les coefficients $t(p)$ se calculent de manière récurrente. Pour la résolution de ces problèmes linéaires, la condition d'orthogonalité (III-1 20) est primordiale. On verra plus loin sa prise en considération.

Pour déterminer les coefficients $t(p)$, on utilise la propriété auto-adjointe de l'opérateur L et la propriété (III-1 18) $\langle L'.V(1), V(1) \rangle \neq 0$. En remplaçant δU par $V(1)$ dans les équations variationnelles (III-1 21-b) et (III-1 21-c) et en tenant compte du fait que $\langle L.V(p), V(1) \rangle = \langle V(p), L.V(1) \rangle = 0$ on obtient que (III-1 21-b) mène à :

$$t(1) = - \frac{\langle Q[V(1), V(1)], V(1) \rangle}{\langle L'.V(1), V(1) \rangle} \quad (\text{III-1 22-a})$$

et (III-1 21-c) mène à : (III-1 22-b)

$$t(p-1) = \frac{-1}{\langle L'.V(1), V(1) \rangle} \left[\sum_{r=1}^{p-2} t(r) \langle L'.V(p-r), V(1) \rangle + \sum_{r=1}^{p-1} \langle Q[V(r), V(p-r)], V(1) \rangle \right]$$

Pour déterminer les vecteurs $V(p)$, on a à construire à chaque ordre p le second membre qu'on note $F(p)$. Ce second membre est formé par des vecteurs $V(q)$ et des coefficients $t(q)$ pour q variant de 1 à $(p-1)$. Sous forme compacte, l'équation (III-1 21-c) s'écrit :

$$\begin{cases} \ll L. V(p), \delta U \gg = \ll F(p), \delta U \gg \quad \forall \delta U \\ \ll V(p), V(1) \gg = 0 \quad \text{pour } p > 1 \end{cases} \quad (\text{III-1 } 23)$$

Tous les problèmes à l'ordre p , déterminant $V(p)$, ont la même partie linéaire, ce qui nécessite pour les déterminer une seule inversion de matrice. Toute la difficulté analytique est alors concentrée dans la construction du second membre $F(p)$.

III-1-2-c PASSAGE DU PROBLEME LINEAIRE MIXTE AU PROBLEME EN DEPLACEMENT

La formulation mixte nous a permis de réduire l'ordre de la non-linéarité de l'équation d'équilibre. Après avoir ramené la résolution de ce problème non-linéaire à celle des problèmes linéaires en $V(p)$, on va découpler les déplacements et les contraintes correspondantes à l'ordre p . Cela nous permet d'utiliser la méthode classique des éléments finis *en déplacements*. On note :

$$V(p) = \begin{Bmatrix} \bar{V}(p) \\ N(p) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{vecteur déplacement à l'ordre } p \\ \text{vecteur contrainte à l'ordre } p \end{array}$$

où (III-1 24)

$$\bar{V}(p) = \begin{Bmatrix} u_{\alpha}(p) \\ w(p) \end{Bmatrix}$$

Le second membre $F(p)$ peut être explicité en utilisant les équations (III-1 21-c), (III-1 14-b) et (III-1 7-d) sous la forme :

$$\begin{aligned} \ll F(p), \delta U \gg = \int_{\Omega} \left\{ - \sum_{r=1}^{p-1} 2t(r) N^{\circ} : \Gamma^{NL} (V(p-r), \delta U) + \right. \\ \left. - \sum_{r=1}^{p-1} [\Gamma^{NL} (V(r), V(p-r)) : \delta N + \right. \\ \left. N(r) : \Gamma^{NL} (V(p-r), \delta U) + N(p-r) : \Gamma^{NL} (V(r), \delta U)] \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III-1 } 25)$$

On peut encore le décomposer en variation de contrainte et variation de déplacement.

$$<< F(p), \delta U >> = << F^N(p), \delta N >> + << \bar{F}^U(p), \delta \bar{U} >> \quad (\text{III-1 26-a})$$

où

$$<< F^N(p), \delta N >> = \int_{\Omega} \left\{ - \sum_{r=1}^{p-1} \Gamma^{NL} (V(r), V(p-r)) : \delta N \right\} d\Omega \quad (\text{III-1 26-b})$$

$$<< \bar{F}^U(p), \delta \bar{U} >> = \int_{\Omega} - 2 \sum_{r=1}^{p-1} [(t(r).N^0 + N(r)) : \Gamma^{NL}(V(p-r), \delta \bar{U})] d\Omega \quad (\text{III-1 26-c})$$

d'où

$$\begin{aligned} << L V(p), \delta U >> &= \int_{\Omega} \left\{ N : \delta \Gamma^L + (\Gamma^L - C_m^{-1} N) : \delta N + K : C_b : \delta K \right. \\ &\quad \left. + \lambda_c N^0 : \delta \Gamma^{NL} (U, U) \right\} d\Omega \\ &= << F^N(p), \delta N >> + << \bar{F}^U(p), \delta \bar{U} >> \end{aligned} \quad (\text{III-1 27})$$

En prenant $\delta u_{\alpha} = \delta w = 0$ et $\delta N \neq 0$ on obtient la loi de comportement à l'ordre p .

(III-1 28)

$$\begin{aligned} N(p) &= C_m [\Gamma^L(p) - F^N(p)] \\ &= C_m \left[\Gamma^L(p) + \sum_{r=1}^{p-1} \Gamma^{NL} (V(r), V(p-r)) \right] \end{aligned}$$

En remplaçant $N(p)$ par sa valeur (III-1 28) dans l'équation (III-1 27), on obtient un problème en déplacement uniquement.

$$\begin{cases} \langle\langle \bar{L} \cdot \bar{V}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{F}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle & \text{(III-1 29-a)} \\ \langle\langle \bar{V}(p), \bar{V}(1) \rangle\rangle = 0 & \text{pour } p > 1 \end{cases} \quad \text{(III-1 29-b)}$$

$$\begin{aligned} \text{où : } \langle\langle \bar{L} \cdot \bar{V}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle &= \int_{\Omega} (\Gamma^L : C_m : \delta \Gamma^L + K : C_b : \delta K) d\Omega \\ &+ \lambda_c \int_{\Omega} N^0 : \delta \Gamma^{NL} d\Omega \end{aligned} \quad \text{(III-1 29-c)}$$

et

$$\langle\langle \bar{F}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle = \langle\langle F_{(p)}^U, \delta \bar{U} \rangle\rangle + \int_{\Omega} C_m : F_{(p)}^N : \delta \Gamma^L d\Omega \quad \text{(III-1 29-d)}$$

III-1-2-d RELAXATION DU PROBLEME EN DEPLACEMENT

Les vecteurs déplacements $\bar{V}(p)$ sont les solutions du problème variationnel défini par les équations (III-1 29)

$$\langle\langle \bar{L} \cdot \bar{V}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle = \langle\langle \bar{F}(p), \delta \bar{U} \rangle\rangle \quad \forall \delta \bar{U} \quad \text{(III-1 30)}$$

Après discrétisation par éléments finis de ce problème on obtient, en utilisant les notations habituelles de la mécanique-numérique [Z1],[B3],[B4],[D5], le problème matriciel suivant :

$$[K_e + \lambda_c K_g] \cdot \{\bar{V}(p)\} = \{\bar{F}(p)\} \quad \text{(III-1 31)}$$

où $[K_e]$ est la matrice de rigidité élastique et $[K_g]$ est la matrice de rigidité géométrique, $\{\bar{V}(p)\}$ est le vecteur déplacement aux noeuds et $\{\bar{F}(p)\}$ est le second membre exprimé aux noeuds. La matrice $[K_e + \lambda_c K_g]$ est la matrice de rigidité tangente au point de bifurcation. On a à l'ordre 1 :

$$[K_e + \lambda_c K_g] \cdot \{\bar{V}(1)\} = 0$$

Cette matrice est singulière, donc le problème (III-1 31) n'est pas résoluble directement. La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous permet de prendre en compte la condition d'orthogonalité

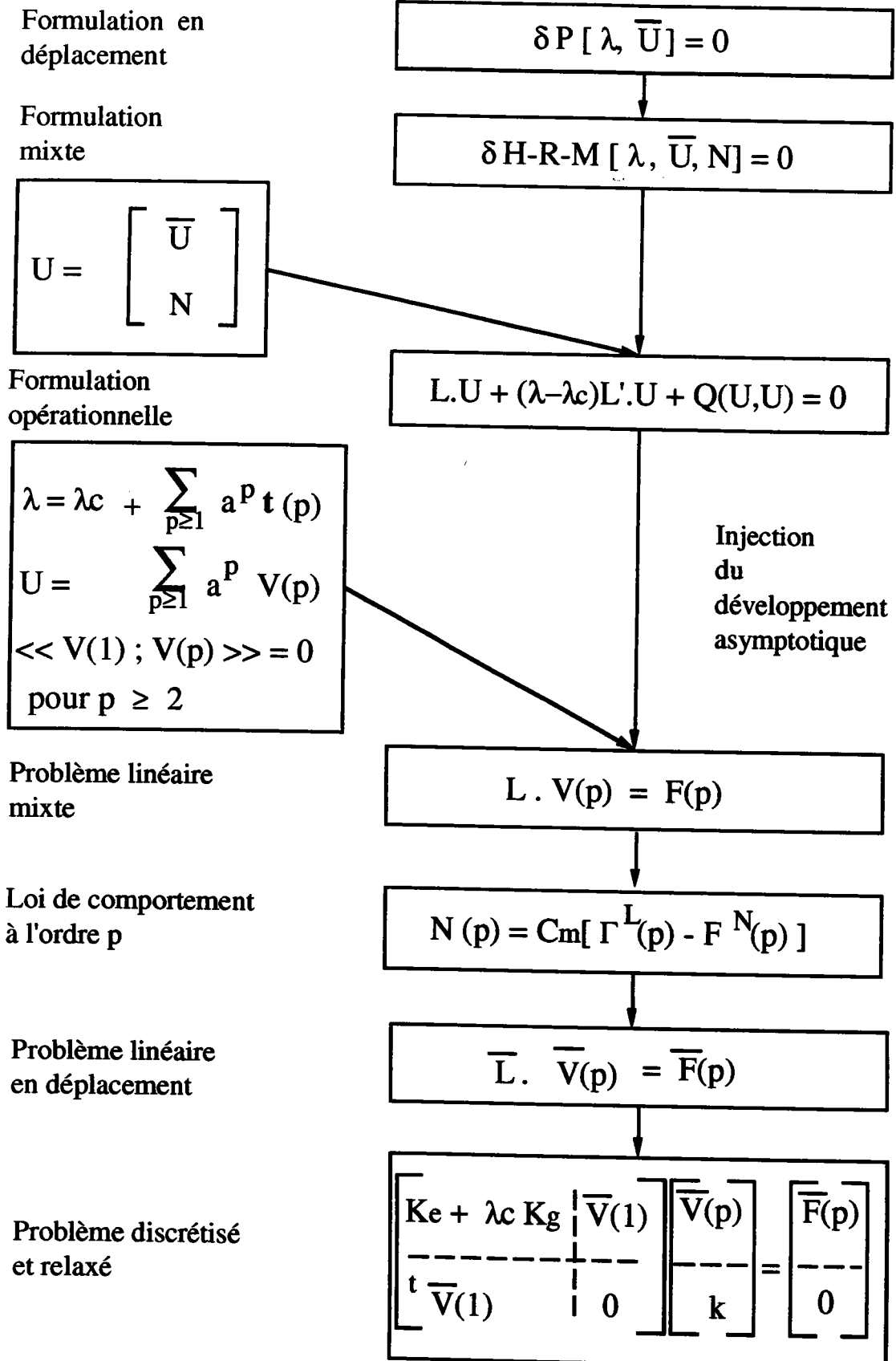
(III-1 29-b) et d'obtenir un problème global symétrique et inversible se formulant de la façon suivante :

(III-1 32)

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{Ke} + \lambda c \text{ Kg} & \bar{\text{V}}(1) \\ \hline {}^t \bar{\text{V}}(1) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \bar{\text{V}}(p) \\ \hline k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{\text{F}}(p) \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

où k est le multiplicateur de Lagrange introduit comme un "intermédiaire" nécessaire de calcul. Ainsi on s'est ramené à la résolution d'un problème inversible. Comme tous les vecteurs $\bar{\text{V}}(p)$ ont la même matrice de rigidité globale, il suffit de l'inverser une seule fois pour déterminer tous ces vecteurs.

TABLEAU DE SYNTHESE



Différentes étapes de la méthode asymptotique-numérique

Sur ce tableau de synthèse, on décrit les différentes étapes de la méthode asymptotique numérique. La formulation variationnelle mixte nous permet de réduire l'ordre de non-linéarité de l'équation d'équilibre, en nous ramenant à une équation fonctionnelle quadratique. Après injection du développement asymptotique de la branche bifurquée dans cette équation d'équilibre, on se ramène à la résolution d'une succession de problèmes linéaires. Ces problèmes linéaires mixtes se découplent aisément en des problèmes linéaires en déplacement et contraintes correspondantes. Après relaxation du problème en déplacement avec la condition d'orthogonalité, on se ramène à des problèmes bien posés. Après discrétisation par éléments finis 2D, on peut établir un programme de résolution numérique permettant de déterminer les branches bifurquées de toutes les structures rentrant dans le cadre prédéfini.

III-2 FORMULATION OPERATIONNELLE UNIDIMENSIONNELLE

III-2-0 INTRODUCTION

La méthode asymptotique-numérique décrite précédemment peut être directement applicable aux coques en utilisant la méthode des éléments finis 2D. Mais l'utilisation d'une telle discrétisation nécessite beaucoup de temps CPU. Comme dans cette étude on s'intéresse spécifiquement aux coques cylindriques, la symétrie de révolution de ces coques permet l'utilisation des séries de Fourier. Cette technique de séparation de variables ramène l'étude de la coque à celle de sa génératrice. Je vais adapter cette technique à l'analyse asymptotique développée précédemment. Cela permet de se ramener à des problèmes linéaires unidimensionnels qu'on résout par la méthode des éléments finis 1D.

III-2-1 DECOMPOSITION EN SERIES DE FOURIER

Pour les coques de révolution, la résolution du modèle complet peut se réduire en une série de problèmes beaucoup plus simples. La technique repose sur une analyse de Fourier de la dépendance azimutale des champs de déplacements et de contraintes dans la coque. Les variables indépendantes peuvent être séparées, et le problème analytique bidimensionnel peut se réduire à un modèle numérique monodimensionnel. Cela permet de ramener l'étude de l'équilibre de la coque, établie sur sa surface moyenne, à sa génératrice avec la réduction du volume de calcul qui en découle.

Dans cette étude, on considère une coque cylindrique mince de rayon R , de longueur L et d'épaisseur h . On note par U_1 , U_2 et W les déplacements axial, circonférentiel et radial respectivement Fig.I-2. La dépendance en "y" sera éliminée en supposant que les déplacements $U_1(u,y)$, $U_2(x,y)$ et $W(x,y)$ sont donnés respectivement par $u^1_n(x)\sin n\frac{y}{R}$, $u^2_n(x)\cos n\frac{y}{R}$, $w(x)\sin n\frac{y}{R}$ ou par $u^1_n(x)\cos n\frac{y}{R}$, $u^2_n(x)\sin n\frac{y}{R}$, $w_n(x)\cos n\frac{y}{R}$. On décompose de la même manière les contraintes résultantes. Cette décomposition est usuelle en mécanique des structures pour les coques de révolution [B13] [B17] [Z1].

L'injection de ces décompositions dans l'équation d'équilibre mène à une algèbre en fonctions cosinus et sinus lourde à manipuler. Pour cela, on préfère la décomposition en série de Fourier complexe. Cela mène à considérer des fonctions à valeurs complexes et à remplacer le produit scalaire par un produit hermitien. Les formes bilinéaires $\langle\langle L.U, \delta U \rangle\rangle$, $\langle\langle L'.U, \delta U \rangle\rangle$ et trilinéaire $\langle\langle Q(U,U), \delta U \rangle\rangle$ se ramènent à des formes sesquilinéaires. On note le vecteur mixte $V(x,y)$ comme une pure harmonique d'ordre n par :

$$V(x,y) = 2 \left\{ \begin{array}{c} u_1(x) \\ i u_2(x) \\ w(x) \\ n_{11}(x) \\ n_{22}(x) \\ i n_{12}(x) \end{array} \right\} e^{i \frac{n y}{R}} \quad (\text{III-2 } 1)$$

$V(x,y)$ est défini par l'harmonique n et par le vecteur unidimensionnel $v(x)$:

(III-2 2)

$$v(x) = \{ u_1(x), i u_2(x), w(x), n_{11}(x), n_{22}(x), i n_{12}(x) \}$$

On obtient la décomposition réelle précédente en prenant

$$\frac{1}{4} [V(x,y) + \overline{V(x,y)}] \quad (\text{III-2 } 3)$$

où $\overline{V(x,y)}$ est le complexe conjugué de $V(x,y)$.

III-2-2 DECOMPOSITION HARMONIQUE DES VECTEURS $V(P)$

Le développement asymptotique de la partie III-1 nous a permis de ramener le problème non-linéaire d'équilibre à une succession de problèmes linéaires bidimensionnels. En utilisant la séparation des variables précédentes, on peut se ramener à la résolution de problèmes linéaires monodimensionnels. Avant d'appliquer cette technique aux calculs des $V(p)$, on va décomposer ces problèmes linéaires suivant chacune des harmoniques formant le vecteur $V(p)$. Cette étape intermédiaire nous permettra de déterminer, de manière claire, les problèmes linéaires unidimensionnels à résoudre.

Or $V(0,2)$ est le conjugué de $V(2,0)$, donc la détermination de $V(2)$ revient à la résolution numérique des deux équations en $V(2,0)$ et $V(1,1)$.

Ordre 3

En utilisant les décompositions précédentes de $V(1)$, de $V(2)$ et (III-1 21-c) on obtient :

$$\begin{aligned} L.V(3) &= -t(2)L'.V(1) - 2Q(V(1), V(2)) \\ &= - [t(2) L'.V(1,0) + t(2) L'.V(0,1) + 2 Q(V(1,0), V(2,0)) \\ &\quad + 2 Q(V(1,0), V(1,1)) + 2 Q(V(1,0), V(0,2)) \\ &\quad + 2 Q(V(0,1), V(2,0)) + 2 Q(V(0,1), V(1,1)) \\ &\quad + 2 Q(V(0,1), V(0,2))] \end{aligned} \quad (\text{III-2 12})$$

Détermination de $t(2)$

En faisant le produit hermitien de l'équation (III-2 12) avec $V(1,0)$ et en suivant les démarches précédentes pour déterminer $t(1)$ on obtient :

$$t(2) = -2 \frac{<< Q(V(1,0), V(1,1)), V(1,0) >> + << Q(V(0,1), V(2,0)), V(1,0) >>}{<< L'.V(1,0), V(1,0) >>}$$

Détermination de $V(3)$

On décompose $V(3)$ suivant les harmoniques $3n, n, -n, -3n$:

$$V(3) = V(3,0) + V(2,1) + V(1,2) + V(0,3)$$

où (III-2 14)

$$\begin{aligned} L.V(3,0) &= -2Q(V(1,0), V(2,0)) \\ L.V(2,1) &= -t(2) L'.V(1,0) - 2Q(V(1,0), V(1,1)) - 2Q(V(0,1), V(2,0)) \\ L.V(1,2) &= -t(2) L'.V(0,1) - 2Q(V(0,1), V(1,1)) - 2Q(V(1,0), V(0,2)) \\ L.V(0,3) &= -2Q(V(0,1), V(0,2)) \end{aligned}$$

La détermination de $V(3)$, revient à la résolution des quatre équations. Or $V(0,3)$ et $V(1,2)$ sont les conjugués respectifs de $V(3,0)$ et $V(2,1)$. On n'a alors à résoudre numériquement que les deux équations déterminant $V(3,0)$ et $V(2,1)$.

III-2-2-b ORDRES SUPERIEURS

Pour déterminer les $V(p)$ et les $t(p)$ aux ordres supérieurs, on suit les mêmes étapes décrites précédemment.

Ordre p pour $p \geq 3$

Les vecteurs $V(p)$ et les coefficients $t(p)$ se déterminent de manière récurrente à partir des descriptions précédentes et de l'équation :

$$L.V(p) = - \sum_{r=1}^{p-1} t(r) L'.V(p-r) - \sum_{r=1}^{p-1} Q(V(r), V(p-r))$$

Proposition III-1

Le vecteur mixte $V(p)$ se décompose suivant les harmoniques sous la forme :

$$V(p) = \sum_{j=0}^p V(p-j, j) \quad (\text{III-2 15-a})$$

où: $V(p-j, j)$ est une harmonique pure d'ordre $(p-2j)n$
 $V(p-j, j)(x, y) = v(p-j, j)(x) e^{i(p-2j)ny/R}$

Les vecteurs $V(p-j, j)$ sont les solutions des problèmes linéaires suivants :

$$L.V(p-j, j) = - \sum_{k=0}^{E[\frac{p-3}{2}]} t(2k+2) L'.V(p-k-1-j, j-k-1) - \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{k=0}^q Q[V(q-k, k), V(p-q-j+k, j-k)] \quad (\text{III-2 15-b})$$

avec la convention $V(p, q) = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$

Cette proposition nous permet de déterminer les vecteurs $V(p)$ à tous les ordres. Pour les coefficients $t(p)$, on a la proposition suivante :

Proposition III-2

Les coefficients $t(p)$ sont donnés par :

$$t(2p+1) = 0 \quad (\text{III-2 16})$$

$$t(2p) = - \frac{1}{\langle\langle L'.V(1,0), V(1,0) \rangle\rangle} \left[\sum_{r=0}^{p-2} t(2r+2) \langle\langle L'.V(p-r, p-r-1), V(1,0) \rangle\rangle + 2 \sum_{r=1}^p \sum_{s=0}^r \langle\langle Q[V(r-s, s), V(p+1-r+s, p-s)], V(1,0) \rangle\rangle \right]$$

Pour la démonstration de ces propositions, on renvoie à l'annexe A.

III-2-3 PASSAGE DE 2D A 1D

A l'aide de l'étape intermédiaire précédente et de la décomposition de Fourier, on peut clairement déterminer les problèmes linéaires 1D à résoudre.

III-2-3-a Formulations monodimensionnelles

Un des avantages de la formulation en opérateurs introduite précédemment est la souplesse avec laquelle on peut lui adapter la décomposition de Fourier.

Aux opérateurs bidimensionnels L , L' et Q on peut associer des opérateurs monodimensionnels $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{q}$.

Pour définir ces opérateurs, on note par $V(x, y)$, $V'(x, y)$ et $V''(x, y)$ des vecteurs d'harmoniques pures d'ordre k , k' et k'' respectivement. On pose:

$$L.V(x, y) = [\mathcal{L}_k . v(x)] e^{iky/R}$$

$$L'.V(x, y) = [\mathcal{L}'_k . v(x)] e^{iky/R} \quad (\text{III-2 } 17)$$

$$Q(V(x, y), V'(x, y)) = \mathcal{q}_{k, k'} (v(x), v'(x)) e^{i(k+k')y/R}$$

On a ainsi déterminé les opérateurs linéaires $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}'_k$ et bilinéaire symétrique $\mathcal{q}_{k, k'}$ agissant sur des fonctions à unique variable x .

A l'aide de l'orthogonalité du système $\{ e^{iky/R} \}$ sur $[0, 2\pi R]$, on obtient les formulations variationnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \langle\langle L.V, V' \rangle\rangle &= 0 & \text{si } k \neq k' \\ \langle\langle L'.V, V' \rangle\rangle &= 0 & \text{si } k \neq k' \\ \langle\langle Q(V, V'), V'' \rangle\rangle &= 0 & \text{si } k + k' \neq k'' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle\langle L.V; V' \rangle\rangle &= \langle \mathcal{L}_k . v; v' \rangle & \text{si } k = k' \\ \langle\langle L'.V; V' \rangle\rangle &= \langle \mathcal{L}'_k . v; v' \rangle & \text{si } k = k' \\ \langle\langle Q(V, V'); V'' \rangle\rangle &= \langle \mathcal{q}_{k, k'}(v; v'); v'' \rangle & \text{si } k + k' = k'' \end{aligned} \quad (\text{III-2 } 18)$$

Par définition des opérateurs L , L' et Q , on peut considérer $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}'_k$ et $\mathcal{q}_{k, k'}$ comme des opérateurs réels agissant sur des vecteurs mixtes à valeurs réelles. Cela revient à considérer les vecteurs $v(x)$ de la forme :

(III-219)

$${}^t v(x) = \{ u_1(x), u_2(x), w(x), n_{11}(x), n_{22}(x), n_{12}(x) \}$$

Le complexe i , multiplicateur de $u_2(x)$ et de $n_{12}(x)$, est éliminé par le produit hermitien. On l'élimine alors dans la définition de $v(x)$ et on considère $\langle ; \rangle$ comme le produit scalaire usuel défini sur $[0, L]$. Par ces notations, on se ramène à des formulations variationnelles unidimensionnelles définies sur des fonctions à valeurs réelles. A noter aussi que cette notation réelle de $v(x)$ permet d'avoir la symétrie $v(p, q)(x) = v(q, p)(x)$.

III-2-3-b Problème linéaire 1D

En utilisant les notations précédentes, on va formuler les équations linéaires permettant de déterminer les vecteurs $V(p)$.

Calcul des vecteurs $v(p - j, j)(x)$.

Ordre1

A l'ordre 1 on a à résoudre l'équation (III-2 7), qui se ramène à l'équation 1D en $v(1,0)(x)$:

$$L_n \cdot v(1,0)(x) = 0 \quad (\text{III-2 20})$$

Ordre2

On a : $t(1) = 0$

$$\text{et } V(2) = v(2,0)(x) e^{2iny/R} + v(1,1)(x) + v(0,2)(x) e^{-2iny/R} \quad (\text{III-2 21})$$

où:

$$\begin{cases} L_{2n} \cdot v(2,0)(x) &= -q_{n,n} [v(1,0)(x), v(1,0)(x)] \\ L_0 \cdot v(1,1)(x) &= -2q_{n,-n} [v(1,0)(x), v(0,1)(x)] \\ L_{-2n} \cdot v(0,2)(x) &= -q_{-n,-n} [v(0,1)(x), v(0,1)(x)] \end{cases}$$

Ordre3

En ramenant l'équation (III-2 13) donnant $t(2)$ à la formulation 1D, on obtient :

(III-2 22-a)

$t(2) =$

$$-2 \frac{\langle q_{n,0} [v(1,0), v(1,1)], v(1,0) \rangle + \langle q_{-n,2n} [v(0,1), v(2,0)], v(1,0) \rangle}{\langle L'_n v(1,0), v(1,0) \rangle}$$

et le vecteur mixte $V(3)$ est donné par :

$V(3) = \sum_{j=0}^3 v(3-j, j)(x) e^{i(3-j)ny/R}$ où les $v(3-j, j)$ sont des solutions de :

(III-2 22-b)

$$L_{3n} \cdot v(3,0)(x) = -2 q_{n, 2n} [v(1,0), v(2,0)]$$

$$L_n \cdot v(2,1)(x) = -t(2) L'_n v(1,0) - 2 q_{n, 0} [v(1,0), v(1,1)] \\ - 2 q_{-n, 2n} [v(0,1), v(2,0)]$$

$$L_{-n} \cdot v(1,2)(x) = -t(2) L'_{-n} \cdot v(0,1) - 2 q_{-n, 0} [v(0,1), v(1,1)] \\ - 2 q_{n, -2n} [v(1,0), v(0,2)]$$

$$L_{-3n} \cdot v(0,3)(x) = -2 q_{-n, -2n} [v(0,1), v(0,2)]$$

Ordre p

Suivant la proposition (III-1), $V(p)$ est somme de $(p + 1)$ vecteurs:

$$V(p) = \sum_{j=0}^p V(p-j, j) = \sum_{j=0}^p v(p-j, j)(x) e^{i(p-2j)ny/R}$$

où les vecteurs $v(p-j, j)(x)$ sont des solutions de l'équation:

$$L_{p-2j} \cdot v(p-j, j)(x) = - \sum_{k=1}^{E[\frac{p-1}{2}]} t(2k) L'_{p-2j} \cdot v(p-j-k, j-k) \\ - \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{s=0}^r q_{r-2s, p-2j-r+2s} [v(r-s, s), v(p-j-r+s, j-s)]$$

avec la convention que $v(p, q) = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$ (III-2 23-a)

La condition de symétrie $v(p, q) = v(p, q)$ permet de résoudre seulement $\frac{p+1}{2}$ problèmes pour déterminer $V(p)$.

La proposition (III-2) donne aussi le coefficient $t(2p)$ qu'on détermine en formulation 1D par : (III-2 23-b)

$$t(2p) = \frac{-1}{\langle \mathbf{l}'_n v(1,0), v(1,0) \rangle} \left[\sum_{r=1}^{p-1} t(2r) \langle \mathbf{l}'_n . v(p+1-r, p-r), v(1,0) \rangle + 2 \sum_{r=1}^p \sum_{s=0}^r \langle \mathbf{q}_{r-2s, 1-r+2s} [v(r-s, s), v(p+1-r+s, p-s)], v(1,0) \rangle \right]$$

III-2-3-c Problèmes en déplacement 1D

Après avoir formulé les équations linéaires monodimensionnelles, on va découpler les déplacements et les contraintes afin d'utiliser la méthode des éléments finis 1D classique. On note

$$v(p-j, j) = \begin{cases} \overline{v}(p-j, j) & \text{déplacements 1D à l'ordre } p \\ n(p-j, j) & \text{contraintes 1D à l'ordre } p \end{cases}$$

où

$$\overline{v}(p-j, j) = \begin{Bmatrix} u_\alpha(p-j, j) \\ w(p-j, j) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-2 24})$$

On adopte pour la suite les notations suivantes:

$f(p-j, j)$: second membre 1D correspondant à $v(p-j, j)$

γ^L et γ^{NL} les tenseurs de déformation linéaire et non-linéaire et k le tenseur de courbure unidimensionnels.

La condition d'orthogonalité 2D $\langle\langle V(p), V(1) \rangle\rangle = 0$ devient :

$$\langle \overline{v}(p-j, j); \overline{v}(1,0) \rangle = 0 \quad \text{si} \quad p - 2j = 1 \quad (\text{III-2 25})$$

La résolution du problème en déplacement 2D $\langle\langle \mathbf{L} \overline{V}(p), \delta \overline{U} \rangle\rangle = \langle\langle \overline{F}(p), \delta \overline{U} \rangle\rangle$ est alors équivalente à celle des problèmes 1D suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } j = 0, p \\ \langle \bar{l}_{p-2j} \cdot \bar{v}(p-j, j), \delta \bar{u} \rangle = \langle \bar{f}(p-j, j), \delta \bar{u} \rangle \\ \langle \bar{v}(p-j, j), \bar{v}(1, 0) \rangle = 0 \quad \text{si } p - 2j = 1 \end{array} \right.$$

(III-2 26)

où

$$\begin{aligned} \langle \bar{l}_{p-2j} \cdot \bar{v}(p-j, j), \delta \bar{u} \rangle = & \int_0^L ({}^t\gamma^L(p-j, j) : C_m : \delta \gamma^L + {}^t k(p-j, j) : C_b : \delta k) dx \\ & + \lambda_c \int_0^L n^0 : \delta \gamma^{NL} dx \end{aligned}$$

et le second membre est donné par :

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}(p-j, j), \delta \bar{u} \rangle = & -2 \sum_{k=0}^{(p-3)/2} t(2k+2) \int_0^L n^0 : \gamma^{NL} [v(p-k-j-1, j-k-1), \delta \bar{u}] dx \\ & - \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{m=0}^1 \int_0^L {}^t\gamma^L : C_m : \gamma^{NL} [v(l-m, m), v(p-l-j+m, j-m)] \\ & - \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{m=0}^1 \int_0^L 2n(l-m, m) : \gamma^{NL} [v(p-l-j+m, j-m), \delta \bar{u}] \end{aligned}$$

La contrainte unidimensionnelle correspondant à $v(p-j, j)$ est donnée par :

$$n(p-j, j) = C_m [\gamma^L(p-j, j) + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{s=0}^1 \gamma^{NL}(v(l-s, s), v(p-l-j+s, j-s))]$$

(III-2 27)

La résolution numérique des problèmes linéaires 1D (III-2 26) permet de déterminer les composantes harmoniques du vecteur

$\bar{V}(p)$ à chaque ordre p .

III-2-4 REALISATION NUMERIQUE

Après avoir déterminé les problèmes en déplacement, on va décrire brièvement les différentes étapes de résolution. Le passage de 2D à 1D permet de nous ramener à la génératrice du cylindre. Cela nous permet d'utiliser les éléments finis de poutre les plus simples. On approxime les déplacements axial u_1 et circonférentiel u_2 par interpolation de Lagrange et le déplacement radial w par interpolation d'Hermite.

Ordre 1

A l'ordre 1, on a à déterminer le mode de flambage $v(1,0)(x)$, solution du problème matriciel suivant:

$$[k_e(n) + \lambda_c k_g(n)] \cdot \{\bar{v}(1,0)\} = 0 \quad (\text{III-2 } 28)$$

où $[k_e]$ et $[k_g]$ sont les matrices de rigidité 1D élastique et géométrique, n est le nombre d'ondes circonférentielles.

La résolution de ce problème de valeurs propres permet de déterminer la charge critique λ_c , qui est la plus petite valeur propre, le mode propre correspondant $\{\bar{v}(1,0)\}$ et le nombre d'onde critique donnant la plus petite valeur propre. La contrainte $n(1,0)$ correspondant à $\bar{v}(1,0)$ s'obtient par la formule (III-2 27).

Ordre 2

A l'ordre 2, on a à déterminer les vecteurs $\bar{v}(2,0)$ et $\bar{v}(1,1)$ solutions des équations :

$$\langle \bar{L}_{2n} \bar{v}(2,0), \delta \bar{u} \rangle = \langle \bar{f}(2,0); \delta \bar{u} \rangle$$

$$\langle \bar{L}_0 \bar{v}(1,1), \delta \bar{u} \rangle = \langle \bar{f}(1,1); \delta \bar{u} \rangle$$

Après discrétisation par éléments finis on obtient le problème matriciel suivant :

$$[k_e(2n) + \lambda_c k_g(2n)] \cdot \{\bar{v}(2,0)\} = \{\bar{f}(2,0)\} \quad (\text{III-2 } 29)$$

$$[k_e(0) + \lambda_c k_g(0)] \cdot \{\bar{v}(1,1)\} = \{\bar{f}(1,1)\}$$

où n est le nombre d'ondes critique déterminé précédemment.

Après avoir calculé $\overline{v}(2,0)$ et $\overline{v}(1,1)$, on détermine facilement les contraintes correspondantes $n(2,0)$ et $n(1,1)$.

A noter que seule la matrice de rigidité tangente $[k_e(n) + \lambda_c k_g(n)]$ associée à l'harmonique pure n est singulière. Les différentes matrices de rigidité associées à l'harmonique $j.n$ pour $j \neq 1$ sont inversibles. Le problème (III-2 29) se résout alors sans avoir recours à la relaxation.

Ordre p

On a vu que pour déterminer $\overline{V}(p)$, on doit calculer $\frac{(p+1)}{2}$ vecteurs $\overline{v}(p-j,j)$ (x) qui sont des solutions des équations matricielles :

$$[k_e((p-2j)n) + \lambda_c k_g((p-2j)n)] \{ \overline{v}(p-j,j) \} = \{ \overline{f}(p-j,j) \} \quad (\text{III-2 } 30)$$

Ce problème matriciel est inversible sauf dans le cas où $p-2j = 1$. Dans ce cas la relaxation de ce problème par la condition d'orthogonalité 1D

$$\langle \overline{v}(p-j,j), \overline{v}(1,0) \rangle = 0 \quad \text{avec } p-2j = 1$$

mène au problème bien posé: (III-2 31)

$$\left[\begin{array}{c|c} ke(p-2j) + \lambda_c \cdot kg(p-2j) & \overline{v}(1,0) \\ \hline {}^t \overline{v}(1,0) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \overline{v}(p-j,j) \\ \hline k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \overline{f}(p-j,j) \\ \hline 0 \end{array} \right]$$

On détermine alors facilement les vecteurs $\overline{v}(p-j,j)(x)$ après inversion de ces problèmes.

Finalement, la détermination des termes de la série (III-1 19) jusqu'à l'ordre p nécessite l'assemblage de $(p+1)$ matrices correspondantes aux opérateurs 1D $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_n, \dots, \mathcal{L}_{pn}$. Chaque vecteur $V(p)$ nécessite:

- l'assemblage de $p/2 + 1$ seconds membres
- La résolution de $p/2 + 1$ problèmes 1D en utilisant les matrices précédemment assemblées et stockées.

Ainsi on a établi un code d'élément finis 1D permettant de déterminer les vecteurs $v(p-j,j)$ pour tout ordre p donné. La détermination des coefficients $t(p)$ se fait de manière simple par la formule (III-2 23-b).

III-2-5 CONCLUSION

Les paragraphes III-1 et III-2 font l'objet du développement de la méthode asymptotique numérique pour les structures ayant ou non une symétrie de révolution. Durant cette présentation on a présenté les différentes étapes pour ramener la résolution de l'équation non-linéaire d'équilibre à celle d'une succession de problèmes linéaires. Comme tous ces problèmes linéaires ont la même matrice de rigidité, cette résolution nécessite alors une seule inversion de matrice. Cela nous permet un gain considérable en temps de calcul.

Pour les coques de révolution, la décomposition en harmoniques ramène l'étude de l'équation d'équilibre, établie sur la surface moyenne, à celle de la génératrice de la coque. Cette séparation de variables permet de décomposer la matrice de rigidité globale et les vecteurs $V(p)$ en petites matrices et petits vecteurs associés à chaque harmonique. Le choix de la troncature de la série asymptotique à l'ordre p nécessite l'inversion et le stockage de $(p+1)$ petites matrices.

Cela nous permet d'établir un code de calcul d'éléments finis 1D permettant de déterminer le post-flambage initial des coques de révolution avec la réduction du volume de calcul qui en découle.

III-3 APPLICATION AU FLAMBAGE ET POST-FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES PARFAITES

III-3-1 FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES

Avant de passer à la résolution des équations déterminant les branches bifurquées, nous allons décrire brièvement la résolution numérique du problème de flambage. On donne quelques résultats numériques du flambage du cylindre sous pression externe, pression latérale ou compression axiale.

III-3-1-a Réalisation numérique

La détermination de la charge critique et du mode de flambage revient à la résolution numérique de l'équation :

$$\langle\langle L \cdot V(1,0), \delta U \rangle\rangle = 0$$

Suivant les étapes décrites précédemment, on se ramène à la résolution du problème unidimensionnel en déplacement :

$$\langle \bar{l}_n \cdot \bar{v}(1,0)(x) ; \delta \bar{u} \rangle = 0$$

où n désigne le nombre d'ordre circonférentiel.

Après la discrétisation par éléments finis de la génératrice, on obtient le problème matriciel :

$$[k_e(n) + \lambda_c k_g(n)] \{\bar{v}(1,0)\} = 0$$

où $[k_e(n) + \lambda_c k_g(n)]$ est la matrice de rigidité tangente

et $\{\bar{v}(1,0)\}$ le vecteur déplacement aux noeuds. Ainsi on s'est ramené à la résolution d'un problème de valeurs propres.

Il est bien connu que ces matrices de rigidité sont des matrices symétriques et bandes (via un assemblage adapté), mais de "grande" taille. Ce qui nécessite des algorithmes de résolution bien appropriés. Comme la charge critique de flambage correspond à la plus petite valeur propre, on peut utiliser des algorithmes de problèmes spectraux permettant de déterminer uniquement les plus petites valeurs propres et les modes correspondants. Nous utilisons ici la méthode des itérations de sous-espace, qui est l'une des méthodes les plus adaptées à ce genre de problèmes. Pour une

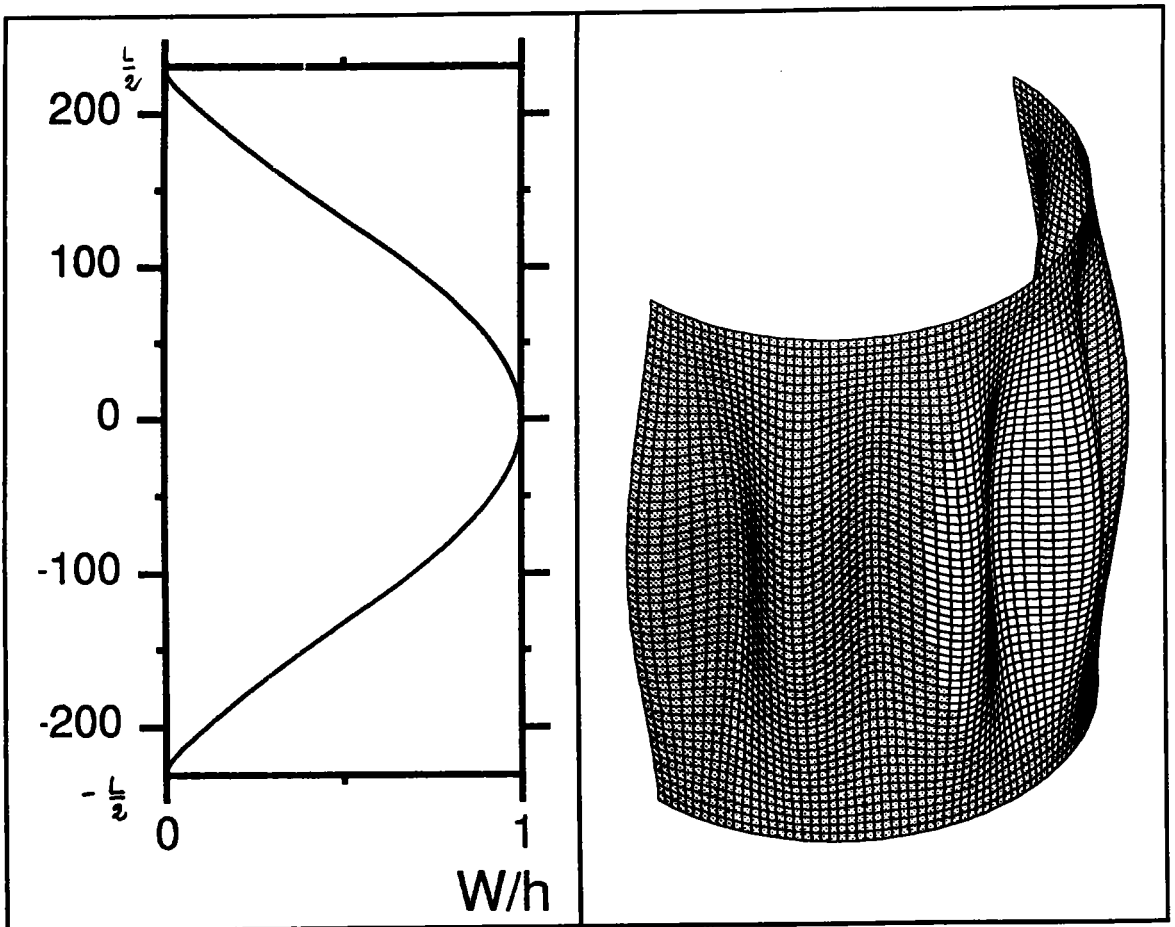
description détaillée de cette méthode, on renvoie à [B3] [C8]. Ainsi on a établi un code de calcul des éléments finis 1D permettant de déterminer les charges critiques et les modes associés pour les différents types de chargements et de conditions aux limites.

III-3-1-b Flambage du cylindre

On considère un cylindre élastique homogène et isotrope de rayon R , de longueur L et d'épaisseur h . E désigne le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. On prend pour ces résultats $R/h = 405$ et $\nu = 0.3$.

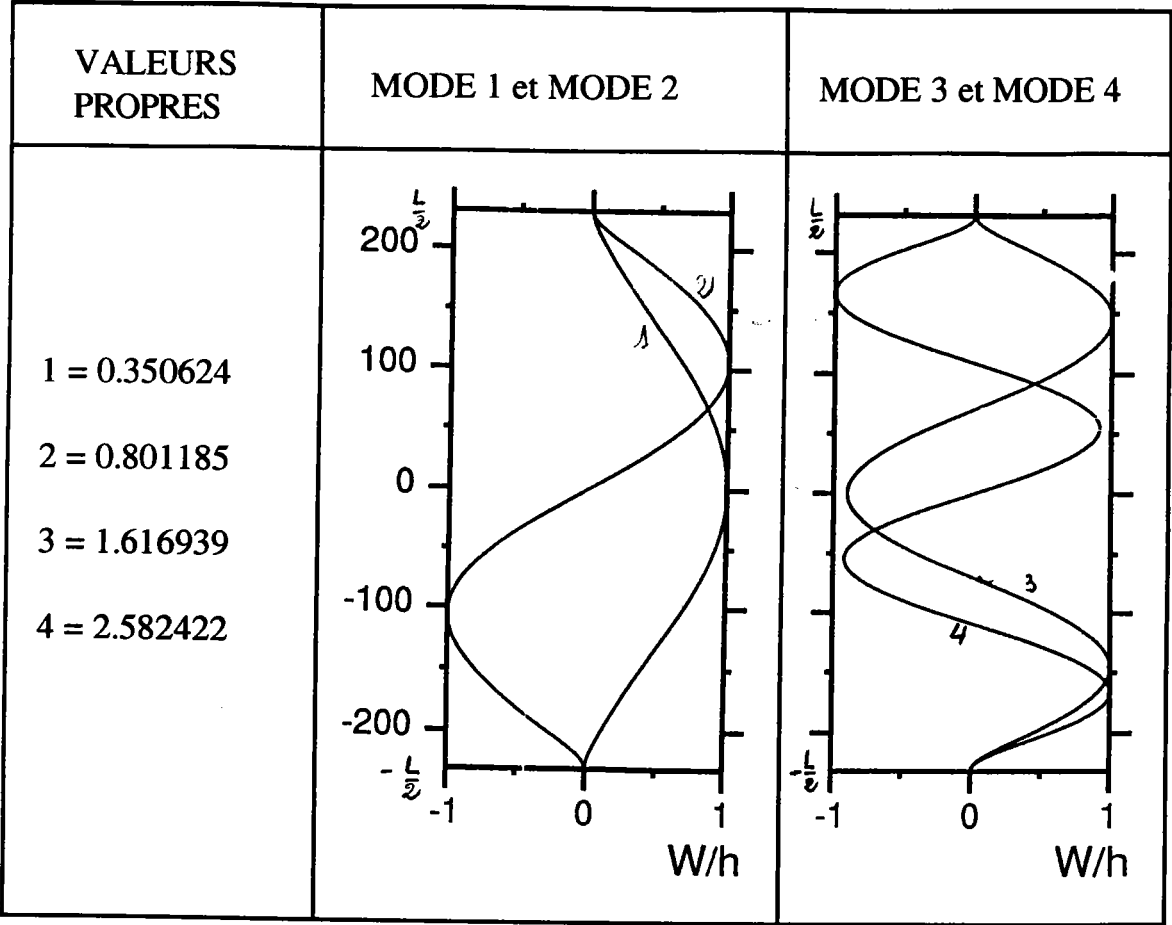
III-3-1-b-1 Cylindre sous pression

On suppose que la coque est soumise à une pression externe P . On dresse ici quelques résultats numériques de charges critiques et de modes de flambage.



Pression externe C. L. C1 $R/h = 405$, $L/R = 1.1376$, $Z = 500$
 nombre d'ondes $n = 13$ et $P_c = 0.350624$

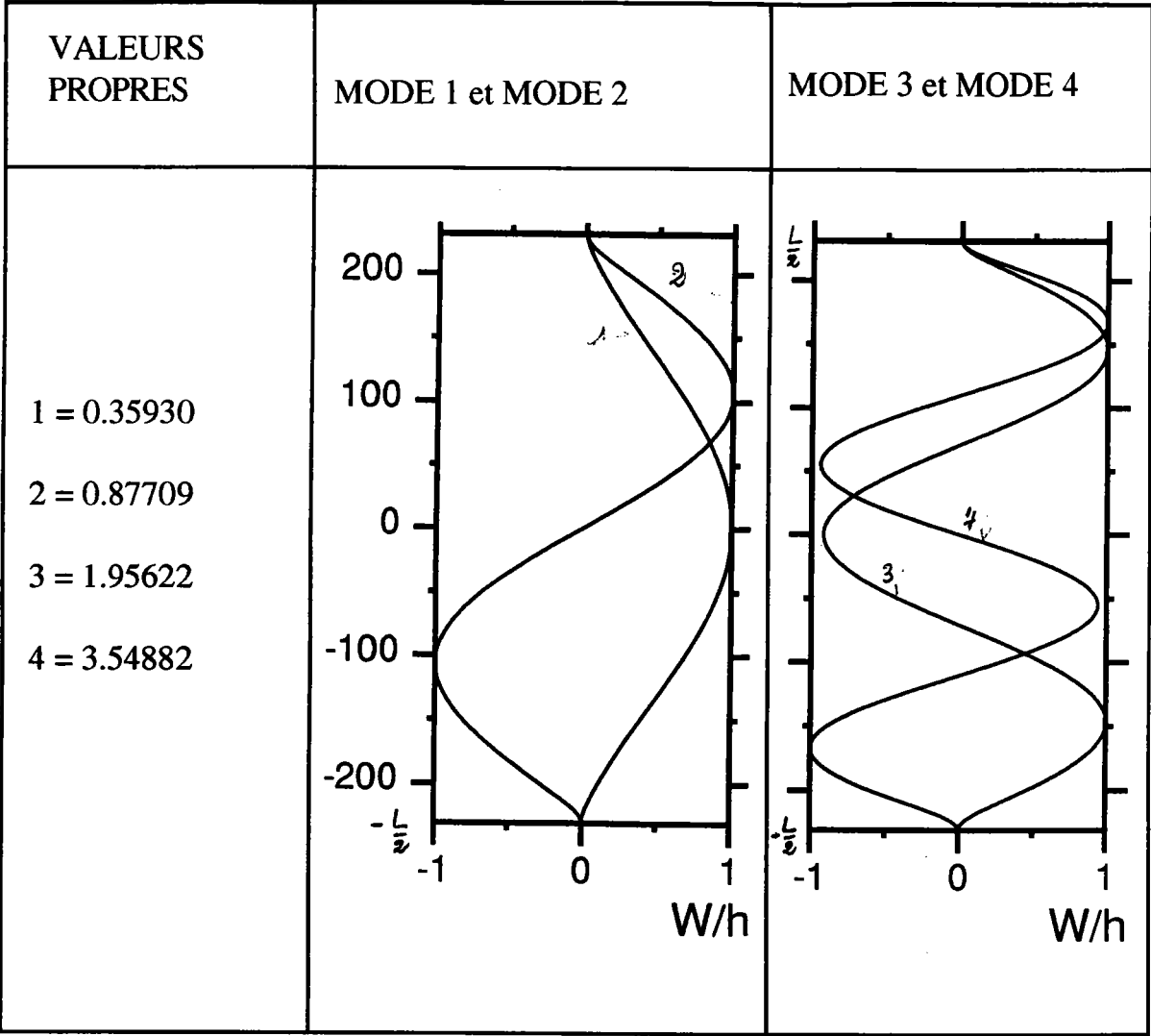
Fig. III-1 Mode de flambage 1D et 2D



Pression externe C. L. C1, $R/h = 405$, $L/R = 1.1376$, $Z = 500$, $n = 13$
Fig. III-2 Premiers modes de flambage et charges associées

Ce code de calcul permet de déterminer les premiers modes propres et les charges correspondantes. Les résultats numériques ainsi obtenus ont été validés avec les résultats de [S9], [B13], [A6], [A1], [Y2-3].

Sur la figure III-1, on présente le mode de flambage sur la génératrice du cylindre et sur le demi-cylindre dans le cas de la pression externe et de la condition aux limites d'encastrement C1. Sur la figure III-2, on dresse les quatre premiers modes de flambage et les charges (valeurs propres) associées.



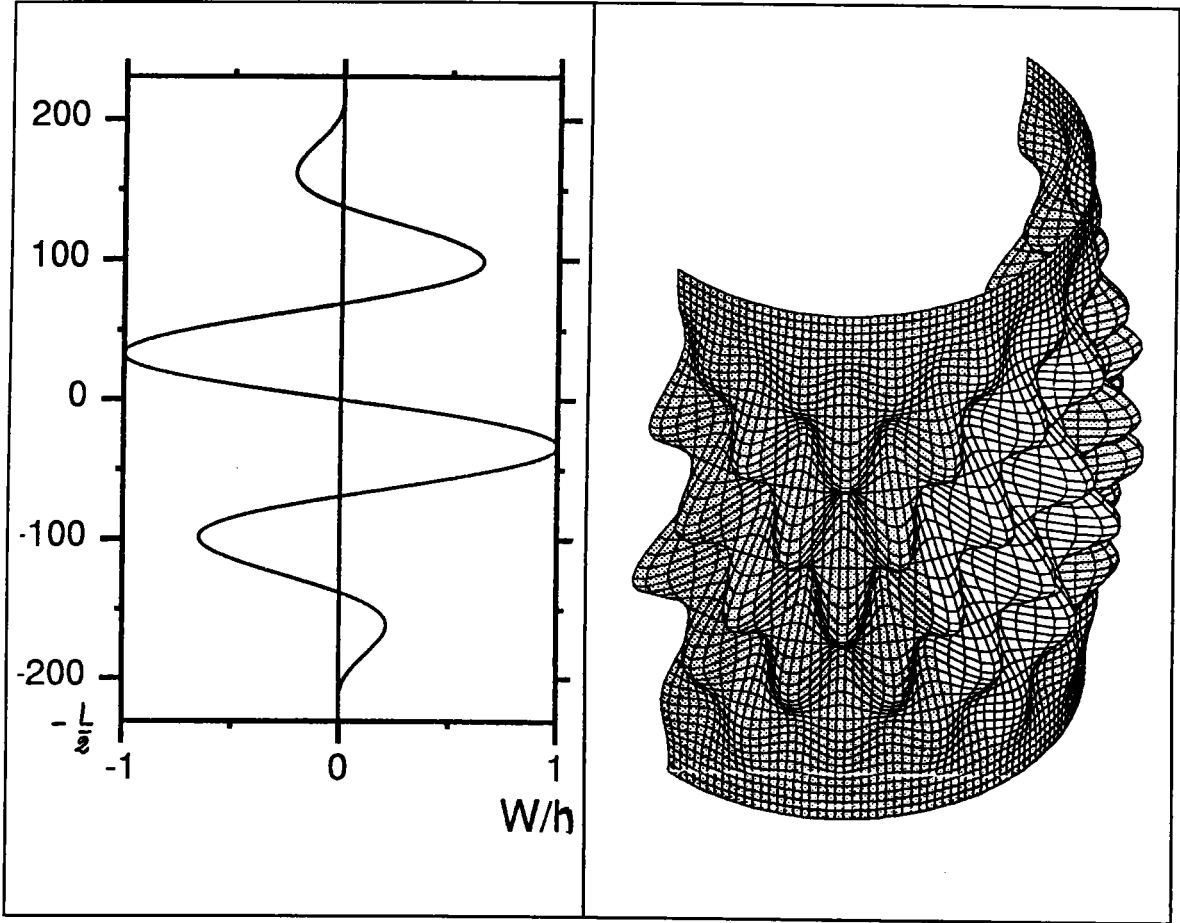
Pression latérale C. L. C1, $R/h = 405$, $L/R = 1.1376$, $Z = 500$, $n = 13$
Fig. III-3 Premiers modes de flambage et charges associées

Cette figure présente les quatre modes de flambage et charges associées dans le cas de la pression latérale et la condition aux limites d'encastrement C1.

Dans ces deux cas de pression externe et latérale, on remarque qu'il y a un grand écart entre la première charge critique et les suivantes. Cela nous permet d'étudier le post-flambage du cylindre sous ce type de chargement, en utilisant la bifurcation simple et la méthode asymptotique-numérique décrite précédemment.

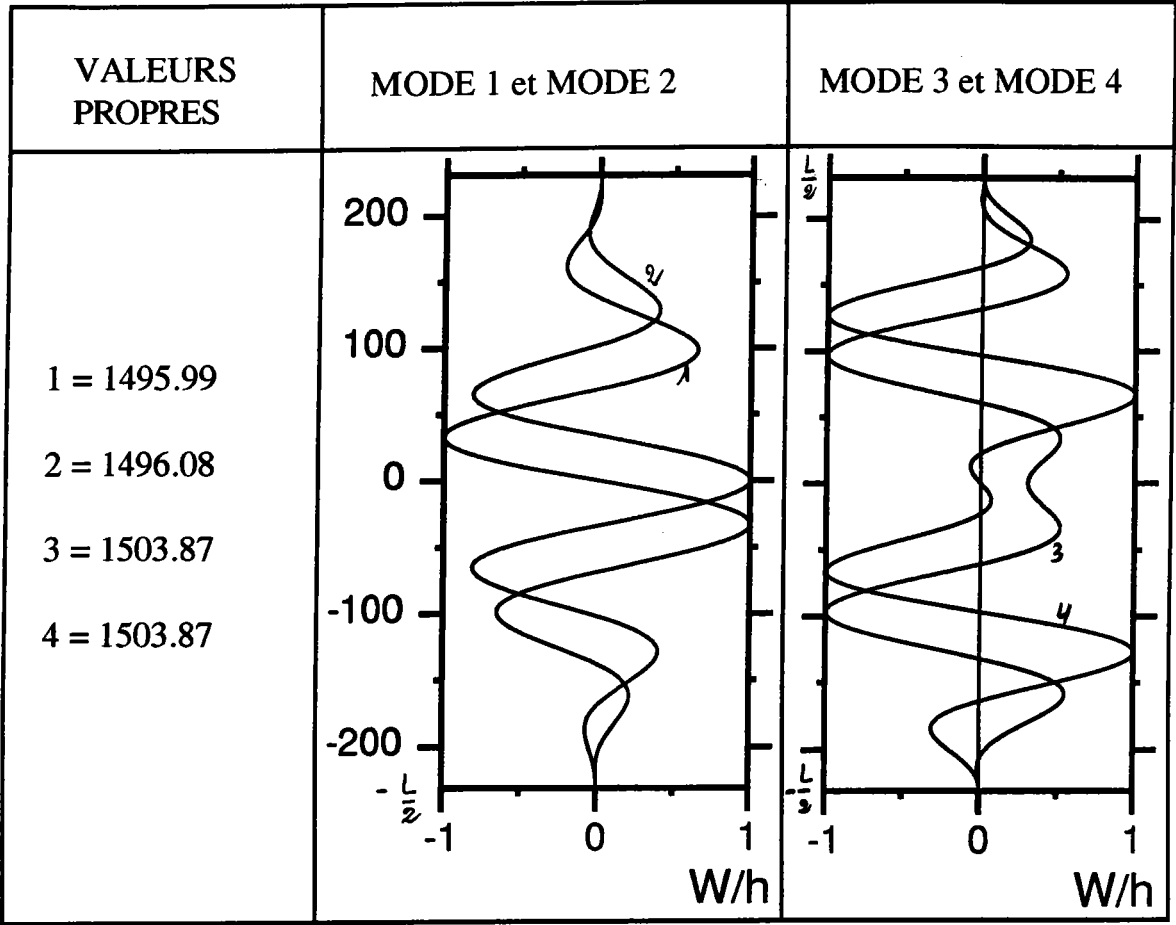
III-3-1-b-2 Cylindre sous compression axiale

On suppose que le cylindre est soumis a une compression axiale σ . On donne des résultats numériques des premiers modes de flambage dans le cas des conditions aux limites C1 et S2.



Compression axiale C. L. C1, $R/h = 405$, $L/R = 1.1376$, $Z = 500$,
 $n = 18$ $\sigma_c = 1495.99$
 Fig. III-4 mode de flambage 1D et 2D

Cette figure présente le mode de flambage sur la génératrice et sur le demi-cylindre dans le cas de la compression axiale et la condition aux limites d'encastrement C1. On voit qu'il y a une différence fondamentale entre les modes de flambage sous les deux types de chargement de pression et de compression.



Compression axiale C. L. C1, $R/h = 405$, $L/R = 1.137$, $Z = 500$ $n = 18$
Fig.III-5 Les premiers modes de flambage et charges associées

Sur la figure III-5, on dresse les quatre premières charges critiques et les modes correspondants dans le cas de la compression axiale et de la condition aux limites C1.

On remarque, pour ce type de chargement que les premières valeurs propres sont très voisines ainsi que les modes propres associés. Dans le cas de la condition aux limites S2, le mode de flambage a une forme particulière Fig. III-6, mais les valeurs propres restent très proches. Cela induit une forte interaction entre les modes de flambage associés à ce type de chargement.

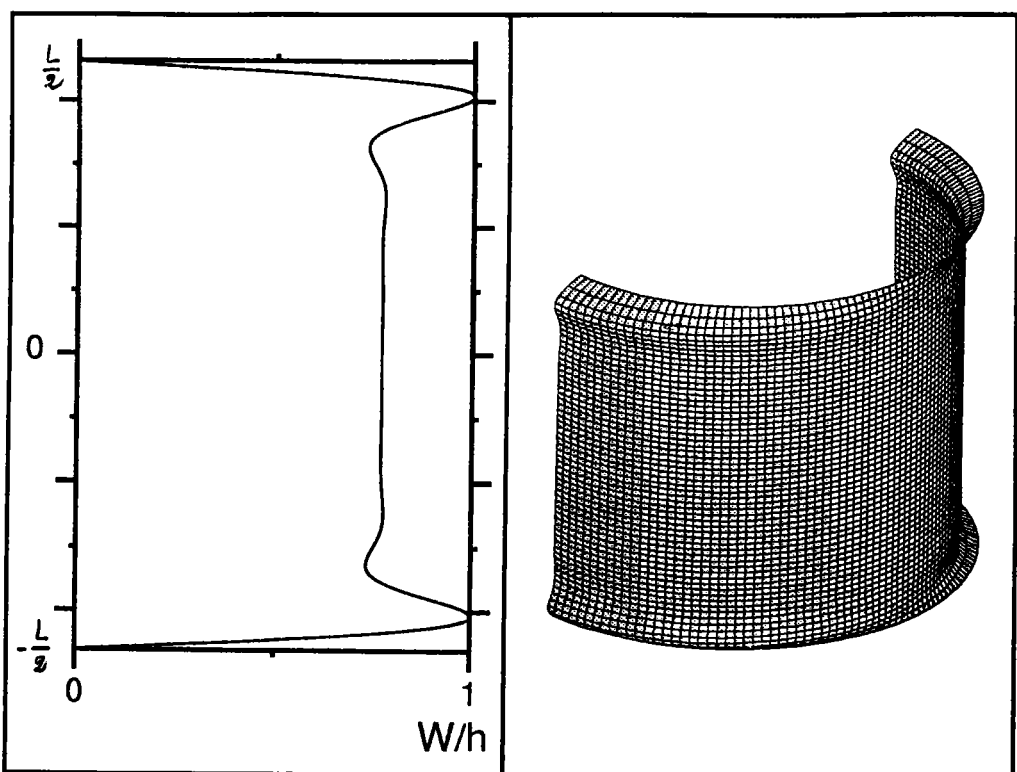


Fig. III-6 Compression axiale, C. L. S2, $Z = 500$ $n = 1$ $\sigma_c = 747.88$

VALEURS PROPRES	MODE 1 et MODE 2	MODE 3 et MODE 4
1 = 747.88 2 = 1501.478 3 = 1513.538 4 = 1520.003		

Compression axiale, C. L. S2, $R/h = 405$, $L/R = 1.137$ $Z = 500$ $n = 1$
Fig.III-7 Les premiers modes de flambage et charges associées

Il est connu que la théorie classique du post-flambage de Koiter nécessite que les modes de flambage soient suffisamment distincts et de nombre fini [P5-6]. Cette théorie n'est donc pas applicable pour l'étude du post-flambage du cylindre sous ce type de chargement. Pour l'étude de ce genre de problèmes, la théorie du post-flambage cellulaire est la plus adaptée. Cette théorie permet la prise en compte de l'interaction des modes de flambage voisins. Pour une bibliographie complète sur ce sujet, on renvoie au livre [W2] et à [P6], [D2].

Comme dans le développement de cette méthode, on s'est restreint, jusqu'à présent, à la bifurcation simple, on ne tiendra pas compte de l'interaction des modes. Cela nous permet d'étudier le comportement post-critique des plaques moins élancées et des cylindres sous pression rentrant dans ce cadre.

III-3-2 ETUDE DU POST-FLAMBAGE DU CYLINDRE SOUS PRESSION EXTERNE

L'étude de l'état des structures minces au voisinage du flambage est d'une grande importance. Pour cela la détermination de la charge critique seule n'est pas suffisante en général, mais il est nécessaire de clarifier le comportement du post-flambage, qui est le comportement de la structure après le flambage. Pour les coques cylindriques sous pression ou compression, on a vu au chapitre (I-2-3-3) qu'on obtient une bifurcation avec une chute de rigidité. Cela induit une apparition d'un chargement minimal et une sensibilité aux imperfections. Les raisons principales de l'étude du comportement post-critique sont de mieux estimer la charge critique, surtout en présence des imperfections, et de déterminer le chargement sécuritaire que peut supporter la structure. Dans ce chapitre, on néglige les imperfections et on utilise la méthode asymptotique-numérique décrite précédemment pour déterminer les courbes charge-déplacement de l'état post-critique du cylindre sous pression externe.

III 3-2-a Réalisation numérique

Après avoir calculé la charge critique λ_c et le mode de flambage $v(1,0)$ correspondant, on va déterminer les vecteurs $v(p)$ et les coefficients $t(p)$ de la série (III-1 19). On a réalisé un code de calcul d'éléments finis permettant de résoudre ces problèmes. Ce code nécessite :

- Les paramètres géométriques du cylindre (R, L, h)
- Les paramètres du matériau (E et ν dans le cas isotrope)
- Les conditions aux limites
- L'ordre de troncature de la série entière.

Le seul paramètre, spécifique à la méthode qu'on fixe à l'avance, est l'ordre auquel on veut arrêter la série entière (III-1 19).

Pour un ordre p choisi, on calcule les $(p+1)$ matrices de rigidité tangentes suivantes.

Pour $j = 0, p$

$$[k_e(p - 2j)n + \lambda_c k_g(p - 2j)n]$$

et si $p-2j = 1$

$$\begin{bmatrix} k_e(n) + \lambda_c k_g(n) & | & \bar{v}(1,0) \\ \hline t_{\bar{v}(1,0)}^- & | & 0 \end{bmatrix}$$

Ces matrices de rigidité tangentes sont symétriques et définies positives. On les décompose par la méthode de factorisation de Cholesky, [B3] et on les stocke.

On détermine au fur et à mesure les vecteurs $V(q)$ pour q variant de 2 à p .

Comme $V(q) = \sum_{j=0}^q v(q-j,j)$ et $v(q-j,j) = v(j,q-j)$

on a besoin de résoudre $(E(\frac{q}{2}) + 1)$ problèmes linéaires déterminant

$v(q-j,j)$ pour $j=0$ à $E(\frac{q}{2})$. Ces vecteurs $v(q-j,j)$ correspondent aux

matrices $[k_e (q-2j)n + \lambda_c k_g (q-2j)n]$ stockées précédemment. On résout ces systèmes linéaires par la méthode de Cholesky. Cette méthode se compare très favorablement aux autres méthodes de résolution de systèmes linéaires.

Le calcul des coefficients $t(p)$ s'obtient facilement par la formule (III-2 23).

III-3-2-b Branches bifurquées

Les branches bifurquées sont données par les séries entières

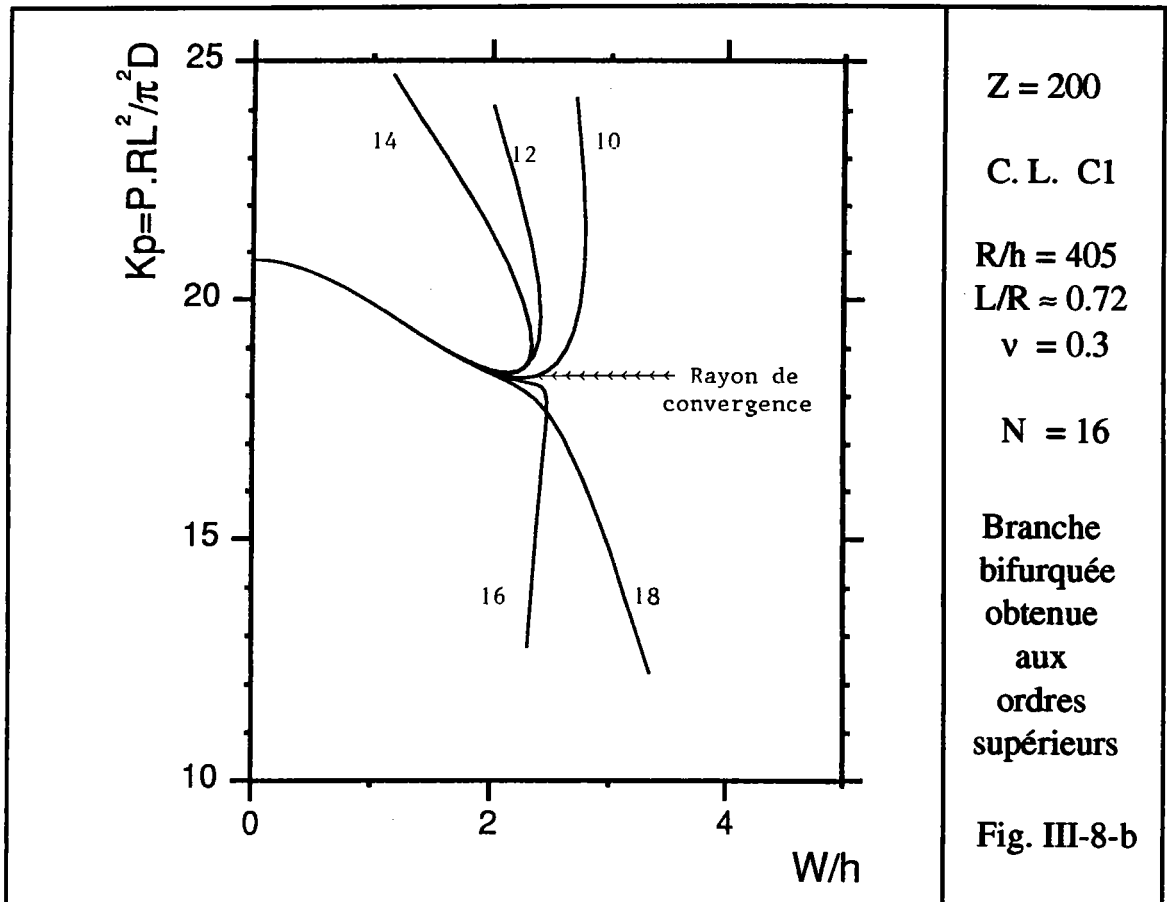
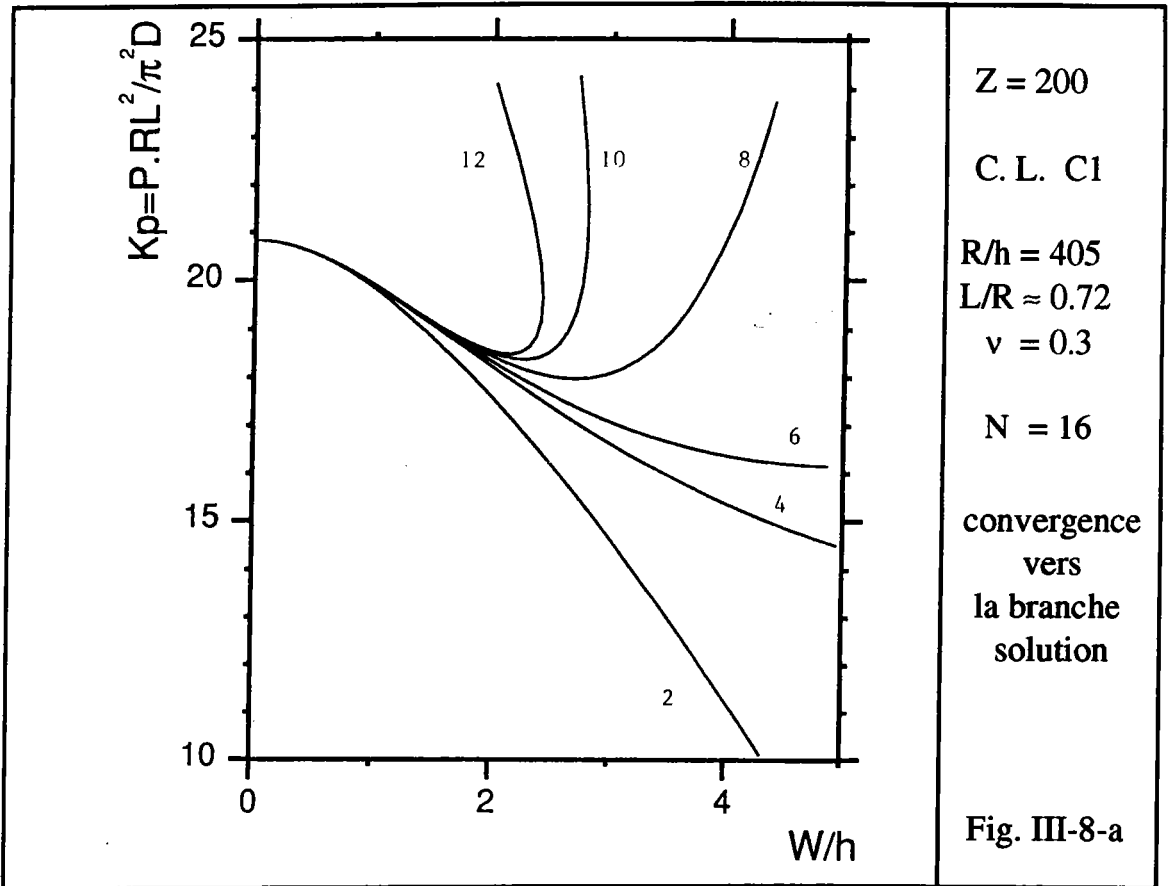
$$\begin{cases} U = a V(1) + a^2 V(2) + \dots & = \sum_{n \geq 1} a^n V(n) \\ \lambda = \lambda_c + at(1) + a^2 t(2) + \dots & = \lambda_c + \sum_{n \geq 1} a^n t(n) \end{cases}$$

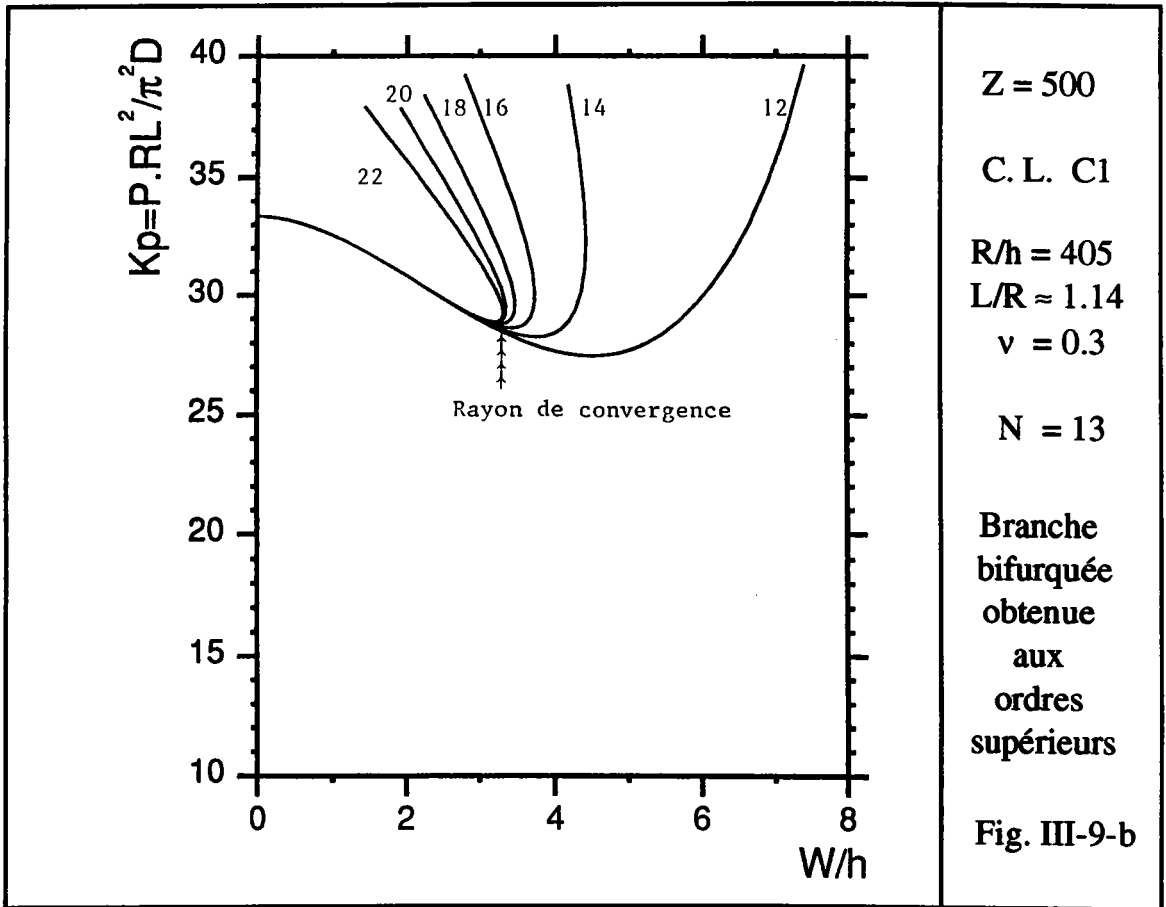
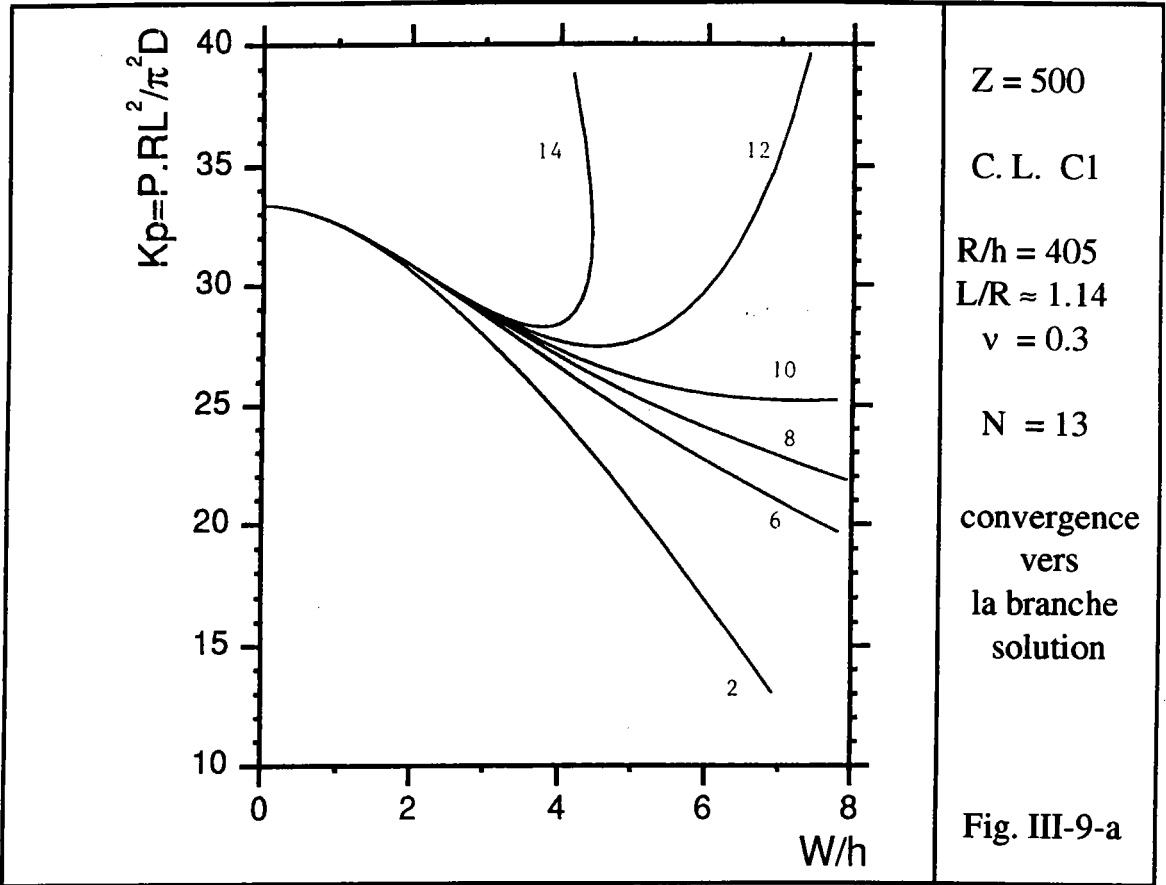
Comme la géométrie du cylindre est caractérisée par le paramètre de Batdorf Z ($Z = \sqrt{1 - \nu^2} \frac{L^2}{Rh}$), nous avons déterminé les branches bifurquées pour différentes valeurs de Z . Les figures suivantes présentent la convergence de ces séries vers la branche solution.

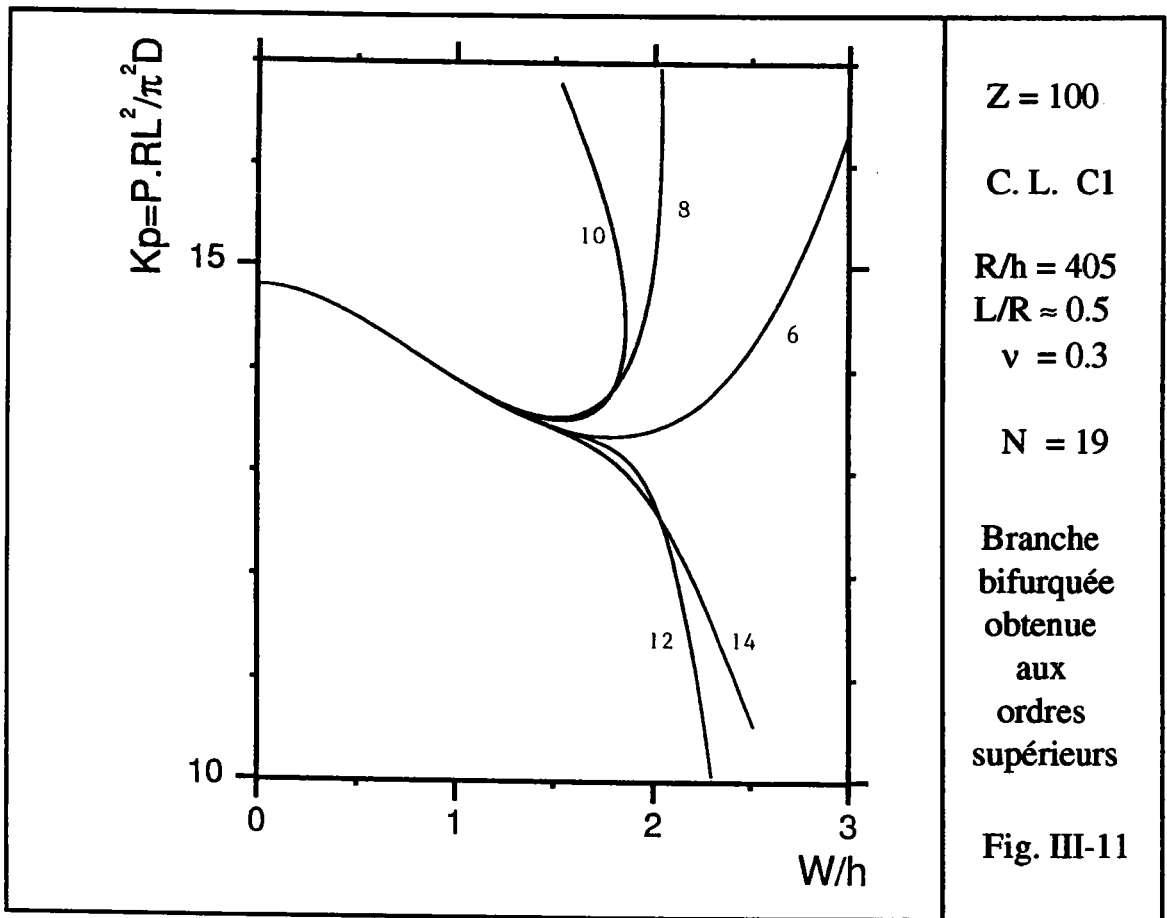
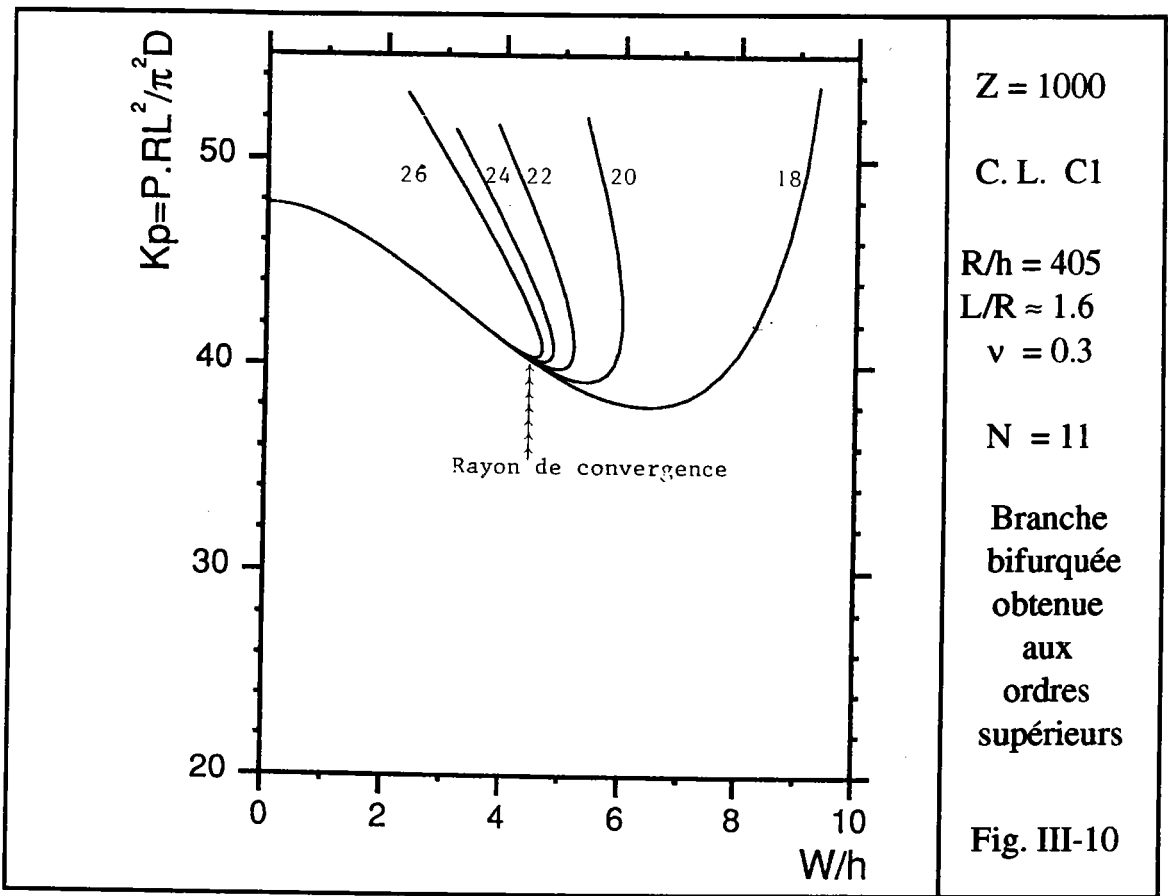
III-3-2-b- α Convergence vers la branche solution

Comme dans cette étude on a négligé le préflambage en déplacement, on va présenter les courbes charge-déplacement pour $Z > 100$. (pour $Z > 100$, le préflambage en déplacement est usuellement négligé dans le cas de la pression). L'étude de l'influence du préflambage sera faite ultérieurement.

Sur les figures suivantes, on représente le paramètre de charge K_p en fonction de la déflexion latérale w rapportée à l'épaisseur h . Ces courbes correspondent à différentes troncatures de la série asymptotique pour différentes valeurs de Z .







Les figures III-8-a, et 9-a montrent une amélioration successive de la solution obtenue suivant les ordres de troncature de la série. On améliore alors considérablement les solutions de l'ordre deux, données par les approximations classiques du post-flambage. Les figures III-8-b, 9-b, 10 et 11 montrent la portion de la branche solution obtenue aux ordres supérieurs. Pour $Z = 200$, on détermine la branche bifurquée jusqu'à $w/h = 2$, pour $Z = 500$, jusqu'à $w/h = 3$ et pour $Z = 1000$ (cylindre long) jusqu'à $w/h = 4,5$. On remarque qu'au delà d'une certaine limite, qui correspond au rayon de convergence, les séries polynomiales tronquées divergent. Cela limite la zone de validité des résultats ainsi prédits. Ce rayon de convergence est fonction du paramètre de Batdorf Z caractérisant la géométrie de la coque.

Ainsi on obtient analytiquement le post-flambage initial de la coque cylindrique sous pression sans aucun paramètre de contrôle.

Pour une comparaison des résultats obtenus par cette méthode asymptotique et ceux obtenus par la méthode itérative de Newton-Raphson, nous présentons sur la figure III-12 une application à la plaque chargée dans son plan [A12-13].

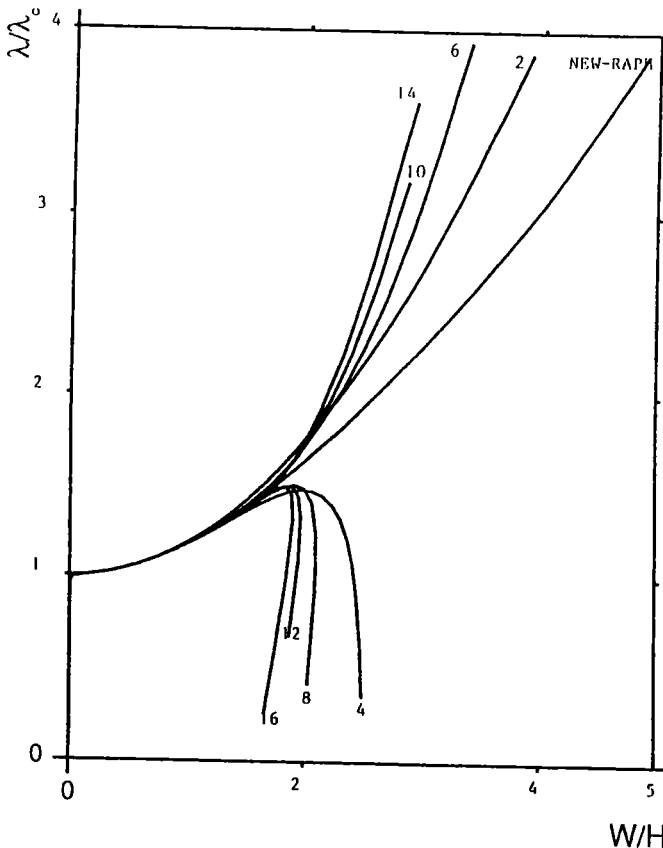


Fig. III-12-a

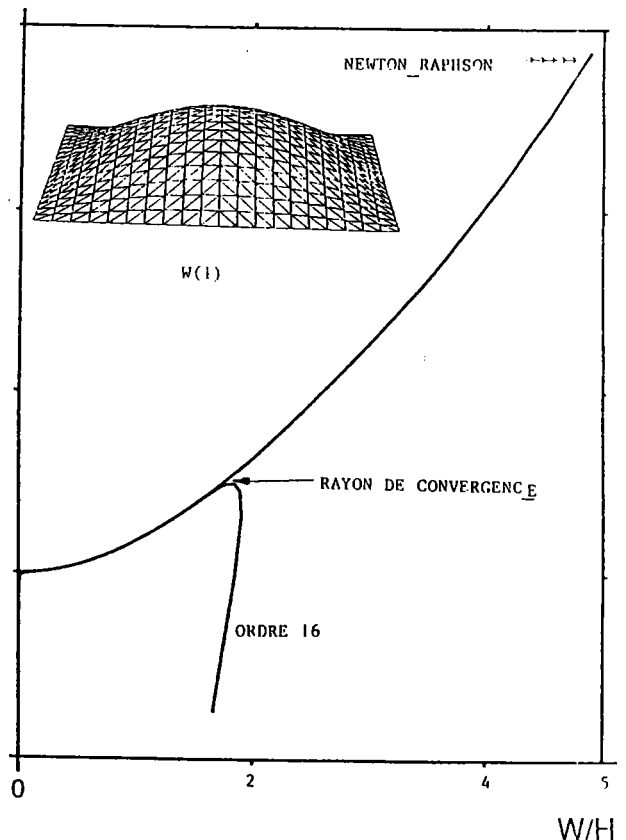


Fig. III-12-b

Branche bifurquée de la plaque chargée dans son plan obtenue par la méthode asymptotique et par la méthode de Newton-Raphson.

Sur la figure III-12, on présente le comportement post-critique d'une plaque rectangulaire chargée dans son plan. La branche bifurquée est déterminée par la méthode itérative de Newton-Raphson (solution "exacte") et par cette méthode asymptotique-numérique [A12-13].

Pour la détermination de la branche bifurquée dans ce cas, on suit les mêmes étapes décrites au paragraphe III-1. Sur la figure III-12-a, on présente la branche bifurquée obtenue à différents ordres de troncature de la série. On remarque qu'on peut déterminer la branche bifurquée de la plaque jusqu'à $\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1,4$ et $\frac{w}{h} = 1,6$. Sur la

figure III-12-b, on détermine la solution à l'aide de méthode itérative de Newton-Raphson. Cette méthode permet de déterminer la totalité de la branche bifurquée mais nécessite un grand temps de calcul C.P.U. Les deux solutions coïncident parfaitement jusqu'au rayon de convergence de la méthode asymptotique.

III-3-2-b- β Rayon de convergence

Le développement asymptotique du chargement et du déplacement est fait au voisinage du point critique en fonction du paramètre "a". Pour des petites valeurs de a, les solutions asymptotiques-numériques convergent vers la branche solution. Mais au-delà d'une valeur critique de a, les séries polynomiales tronquées se séparent de la solution et divergent indépendamment de l'ordre de la troncature. Cette valeur critique de a correspond au rayon de convergence de la série qui est visiblement clair dans les différents cas de structures étudiés. Cette limitation de la zone de convergence est très fréquente dans les méthodes asymptotiques.

Dans le cas des plaques, on a fait différents tests pour voir la variation de ce rayon de convergence [A12-13]. En faisant varier les conditions aux limites (articulation, encastrement, libre), la forme de la plaque (rectangulaire, circulaire) et le chargement, le rayon de convergence ne varie pas de manière significative.

Dans le cas du cylindre sous pression, on remarque que cette zone de convergence augmente avec le paramètre géométrique Z

III-4 PRISE EN COMPTE DU PREFLAMMAGE

III-4-0 INTRODUCTION

Par l'approche statique de problèmes de bifurcation, on cherche à déterminer si différentes configurations de la structure existent sous un chargement donné. En augmentant le chargement, la relation entre le paramètre de charge et le déplacement correspondant définit un chemin fondamental. Le point de bifurcation est défini par la non-unicité de ce chemin fondamental au voisinage des solutions d'équilibre.

La technique de perturbation introduite par Koiter [K5] et retravaillée par Budiansky [B16] permet de déterminer les autres solutions d'équilibre au voisinage de la solution fondamentale. Typiquement, le déplacement du préflambage est négligé dans cette procédure, comme c'est le cas pour certaines structures. Mais il y a des exemples techniques importants pour lesquels négliger les déplacements de préflambage mène à des erreurs. Thompson [T3] et Kerr et Soifer [K11] ont démontré que même la linéarisation de la solution fondamentale mène à des résultats erronés pour certaines structures. L'approche la plus désirable est alors la prise en compte du préflambage non-linéaire, mais cela rend les équations d'équilibre plus complexes. Fich [F2] a généralisé le travail de Budiansky sans avoir à négliger ou à linéariser le préflambage en utilisant une méthode d'itérations progressive pour la résolution.

D'autres auteurs comme Masur et Schreyer [M1], Glaum, Belytschko et Masur [G2] ont développé une méthode incorporant directement les effets du préflambage dans le problème de flambage. Cette méthode utilise le développement de l'état du préflambage en série entière du paramètre de charge, par conséquent le degré de précision dépend du nombre de termes retenus.

Dans ce paragraphe, on présente une variante de la méthode asymptotique-numérique permettant la prise en compte du préflambage non-linéaire. Cela nous permettra de déterminer la branche fondamentale non-linéaire et le point de bifurcation sur cette branche en résolvant des problèmes linéaires. Cette méthode a différentes applications dans la recherche de valeurs propres, surtout en vibration. On se restreindra dans ce chapitre à l'étude du flambage et post flambage du cylindre en prenant en compte le préflambage non-linéaire.

III-4-1 Problème de préflambage

Dans l'étude des problèmes de flambage du cylindre, il est habituel de supposer que la déformation du préflambage est constante ou nulle. Cela mène à supposer que les bords du cylindre sont libres jusqu'au moment de flambage; pourtant, durant le processus de flambage les bords sont retenus (encastrement ou articulation). Pratiquement, les conditions aux bords sont les mêmes durant les processus de préflambage et de flambage, et il apparaît au voisinage de ces bords des déformations et des contraintes non uniformes avant le flambage. Les effets des déformations de préflambage sur la stabilité du cylindre ont été étudiés par plusieurs chercheurs sous différents chargements [S10] [F1] [A6] [Y1-2-3].

Dans ce paragraphe, on va décrire une variante de la méthode asymptotique-numérique permettant la prise en compte du préflambage non-linéaire.

Dans l'étude faite aux paragraphes précédents, j'ai négligé le préflambage en déplacement. Pour en tenir compte, on doit résoudre les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathfrak{I}(U^0) + Q(U^0, U^0) = \lambda f \\ \mathfrak{I}(U) + 2 Q(U^0, U) + Q(U, U) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-4 1})$$

$$U^0 = \begin{Bmatrix} u^0 \\ N^0 \end{Bmatrix} \text{ représente le préflambage.}$$

où $\mathfrak{I}$, Q et f sont donnés par (III-1 7-a-b-c)

Avant d'étudier le flambage et le post-flambage, on va expliciter les équations du préflambage.

$$<< \mathfrak{I}(U^0), \delta U >> + << Q(U^0, U^0), \delta U >> = << \lambda f, \delta U >>. \quad (\text{III-4 2})$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} {}^t \delta N : [\Gamma^L(u^0) - C_m^{-1} N^0] + {}^t \delta K : C_b : K(u^0) + {}^t \delta \Gamma^L : N^0 + \int_{\Omega} {}^t \delta N : \Gamma^{NL}(u^0, u^0) + 2 {}^t \Gamma^{NL}(u^0, \delta u) : N^0 = \int_{\Omega} \lambda f \delta u$$

En absence de toute imperfection dans la géométrie et le matériau de la coque ainsi que dans le chargement, la déformation de préflambage est axisymétrique. C'est-à-dire que les composantes du vecteur déplacement sont :

$$u^o = \begin{cases} u^o = u^o(x) \\ v^o = 0 \\ w^o = w^o(x) \end{cases} \quad (\text{III-4 } 3)$$

Cela mène avec les conditions aux limites [Y1-2-3], [A6], [B2] à :

$$\begin{cases} N^o_x = c^{te} \\ N^o_y = \nu N^o_x - \frac{E h}{R} w^o \end{cases} \quad (\text{III-4 } 4)$$

On suppose que le cylindre est soumis à une force de compression axiale $F = 2 \pi R \lambda \sigma h$ et à une pression uniforme latérale ou externe λP où λ est un paramètre de charge, σ est la contrainte de compression et P est la pression. On obtient alors :

$$\begin{cases} N^o_x = - \lambda \sigma h - \varepsilon \frac{P R}{2} \lambda \\ N^o_y = \nu N^o_x - \frac{E h}{R} w^o \end{cases} \quad (\text{III-4 } 5)$$

où $\varepsilon = 1$ ou 0 pour une pression externe ou latérale.

En remplaçant les contraintes N^o_x et N^o_y dans (III-4 2) on obtient une équation en déplacement latéral w^o seulement, soit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[D w^{o,xx} \delta w_{,xx} + \frac{E h}{R^2} w^o \delta w \right] dw + \\ & \lambda \int_{\Omega} \left[-\sigma h w^{o,x} - \varepsilon \frac{P R}{2} w^{o,x} \right] \delta w_{,x} dw = \\ & \lambda \int_{\Omega} \left[P - \nu \frac{\sigma h}{R} - \nu \varepsilon \frac{P}{2} \right] dw \end{aligned} \quad (\text{III-4 } 6)$$

la solution w^o de cette équation traduit le comportement de la coque avant le flambage.

Après discrétisation de la génératrice du cylindre par éléments finis, on obtient en notation matricielle le système suivant :

$$[K_0 + \lambda K_1] \{w^o\} = \{\lambda F_1\} \quad (\text{III-4 } 7)$$

où les matrices $[K_0]$ et $[K_1]$ correspondent aux opérateurs K_0 et K_1 donnés par :

$$<< K_0 w^0, \delta w >> = \int_{\Omega} \left[D w^0_{,xx} \delta w_{,xx} + \frac{E h}{R^2} w^0 \delta w \right] d w \quad (\text{III-4 7-a})$$

$$<< K_1 w^0, \delta w >> = \int_{\Omega} \left[-\sigma h w^0_{,x} - \varepsilon \frac{P R}{2} w^0_{,x} \right] \delta w_{,x} d w \quad (\text{III-4 7-b})$$

$$<< K_1 w^0, \delta w >> = \int_{\Omega} \left[-\sigma h w^0_{,x} - \varepsilon \frac{P R}{2} w^0_{,x} \right] \delta w_{,x} d w$$

Le second membre F_1 est : (III-4 7-c)

$$<< F_1, \delta w >> = \int \left\{ P - v \frac{\sigma h}{R} - v \varepsilon \frac{P}{2} \right\} \delta w d w$$

Ce système permet de déterminer w^0 en fonction de λ . Pour la détermination des dérivées de w^0 par rapport à λ , il suffit de dériver le système (III-4 7). La dérivée $\frac{d}{d\lambda} w^0(\lambda) = w^{0'}(\lambda)$ est alors

solution de :

$$[K_0 + \lambda K_1] \{w^{0'}(\lambda)\} + [K_1] \{w^0(\lambda)\} = \{F_1\} \quad (\text{III-4 8})$$

Les valeurs de $w^0(\lambda)$ et de $w^{0'}(\lambda)$ seront utiles pour la résolution des problèmes de flambage et post-flambage. Le chargement critique λ_c correspondant au point de bifurcation sera déterminé par le problème de flambage.

III-4-2 Flambage et post-flambage avec préflambage

Pour l'étude du comportement critique et post-critique avec le préflambage U^0 , on a à résoudre :

$$\mathfrak{L}.U + 2Q(U^0, U) + Q(U, U) = 0$$

On note par $\mathfrak{L}^0$ l'opérateur dépendant de $U^0(\lambda)$ par :

$$\mathfrak{L}^0.U = \mathfrak{L}.U + 2Q(U^0(\lambda), U) \quad (\text{III-4 9-a})$$

$\mathfrak{L}^0$ dépend de manière non-linéaire de λ . En faisant le développement de Taylor au voisinage de λ_c on obtient :

$$\mathfrak{F}^0(\lambda).U = \mathfrak{F}^0(\lambda_c).U + (\lambda - \lambda_c) \mathfrak{F}^{0'}(\lambda_c).U + O((\lambda - \lambda_c)^2)$$

$$\text{où } \mathfrak{F}^{0'}(\lambda_c). = 2Q(U^{0'}(\lambda_c), \dots) \quad (\text{III-4 9-b})$$

En utilisant cette approximation on obtient : (III-4 10)

$$\mathfrak{F}^0(\lambda_c).U + (\lambda - \lambda_c) \mathfrak{F}^{0'}(\lambda_c).U + Q(U, U) = 0$$

on retrouve la même forme de formulation en opérateur que précédemment.

On suppose encore ici que l'opérateur tangent $\mathfrak{F}^0$ admet un noyau de dimension 1 et engendré par V_1 . On a de même que précédemment:

$$\langle\langle \mathfrak{F}^{0'}(\lambda_c).V_1, V_1 \rangle\rangle \neq 0$$

Cela nous permet d'utiliser le théorème II donnant les branches bifurquées sous forme de séries entières. On a alors à résoudre :

$$\mathfrak{F}^0 U + \varepsilon \mathfrak{F}^{0'} U + Q(U, U) = 0$$

(III-4 11)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \lambda - \lambda_c = \sum_{n \geq 1} a^n t(n) \\ U = V^0 + \sum_{n \geq 1} a^n V(n) \\ \langle\langle V(1), V(n) \rangle\rangle = 0 \quad \text{pour } n > 1 \end{array} \right.$$

La résolution de ce problème se ramène à celle des problèmes linéaires suivants :

$$\mathfrak{F}^0.V(1) = 0$$

$$\mathfrak{F}^0.V(2) + Q(V(1), V(1)) = 0$$

Pour $p \geq 3$

(III-4 12)

$$\mathfrak{F}^0.V(p) + \sum_{r=0}^{p-3} t_{r+2} \mathfrak{F}^{0'}.V(p-r-2) + \sum_{r=1}^{p-1} Q(V(r), V(p-r)) = 0$$

La résolution de ces problèmes linéaires permettra de déterminer les branches bifurquées.

III-4-2-a Flambage du cylindre sous pression ou compression avec préflambage.

L'étude du flambage dans ce cas se ramène à la résolution de l'équation:

$$\langle\langle \bar{x}^0 \cdot V(1), \delta U \rangle\rangle = 0 \quad (\text{III-4 } 13)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} {}^1\delta N [\Gamma^L - C_m^{-1} N] + {}^1\delta K S^{-f} K + {}^1\delta \Gamma^L N + \\ \int_{\Omega} 2 {}^1\delta N \Gamma^{NL} (U^0, U) + 2 {}^1N \Gamma^{NL} (U^0, \delta U) + \\ \int_{\Omega} {}^1N^0 \delta \Gamma^{NL} (U, U) = 0$$

On suit les mêmes démarches que celles décrites au paragraphe III-2. La contrainte N correspondant à V(1) est donnée par :

$$N = C_m [\Gamma^L + 2 \Gamma^{NL} (u^0, U)] \quad (\text{III-4 } 14)$$

et le problème en déplacement est :

$$(\text{III-4 } 15)$$

$$\langle\langle \bar{x}^0 \cdot \bar{V}(1) \delta \bar{U} \rangle\rangle = \int_{\Omega} [{}^1\delta \Gamma^L C_m \Gamma^L + {}^1\delta K C_b K] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} [2 {}^1\Gamma^L C_m \Gamma^{NL} (U^0, \delta U) + 2 {}^1\Gamma^{NL} (U^0, \delta U) C_m \Gamma^L + \\ 4 {}^1\Gamma^{NL} (U^0, \delta U) C_m \Gamma^{NL} (U^0, U)] d\Omega \\ + \int_{\Omega} {}^1N^0 \delta \Gamma^{NL} (U, U) d\Omega = 0$$

Cette équation dépend du préflambage w^0 et de la dérivée $w^0_{,x}$ (N^0 dépend de w^0 et de $w^0_{,x}$) qui doivent être déterminés par l'équation du préflambage en fonction de λ .

En faisant la même décomposition de Fourier qu'au paragraphe III-2, on se ramène à un problème unidimensionnel sur la génératrice du cylindre. Après discrétisation par éléments finis 1D, on obtient le problème matriciel suivant :

$$[k_T(\lambda)] \cdot \{\bar{V}(1)\} = 0 \quad (\text{III-4 } 16)$$

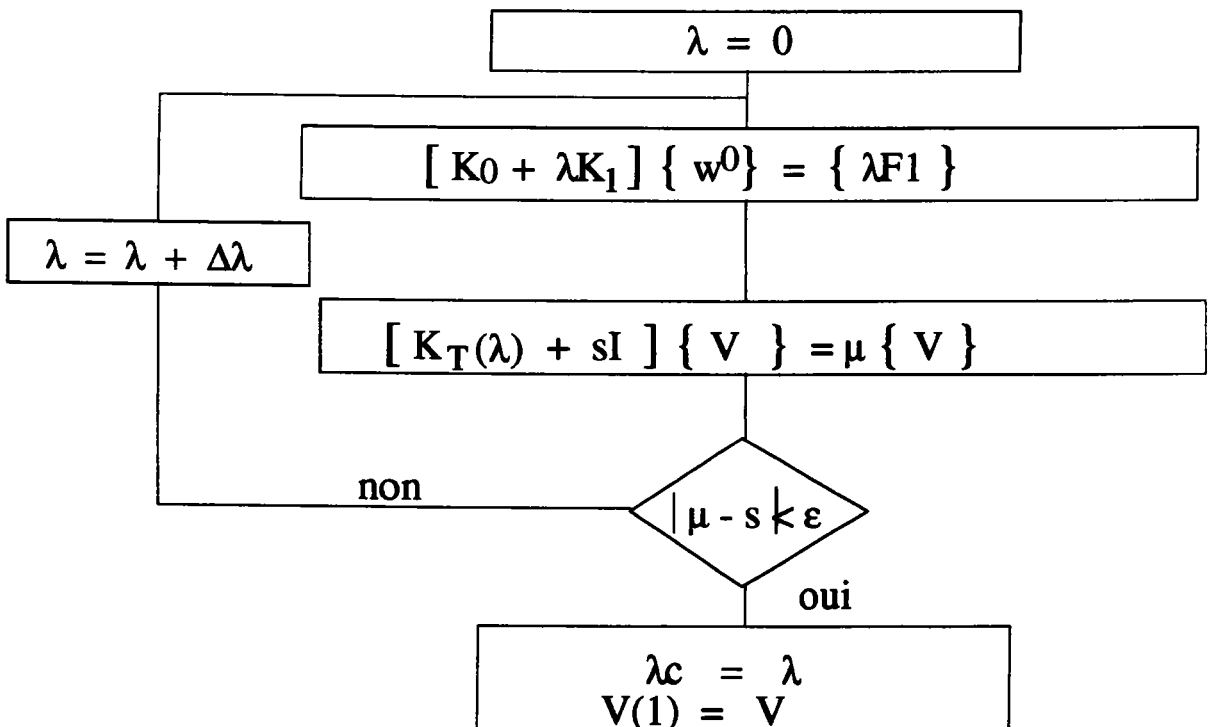
Cette matrice de rigidité tangente dépend de w^0 , de w^0_x et de λ . On cherche à déterminer les paramètres de charges pour lesquels cette matrice devient singulière. Afin de pouvoir utiliser les techniques de calcul des valeurs propres, j'introduis une translation du problème sous la forme :

$$[k_T(\lambda) + sI] \cdot \{\bar{V}_1\} = \mu \{\bar{V}_1\} \quad (\text{III-4 } 17)$$

Pour s fixé, on cherche à déterminer le paramètre λ pour lequel la valeur propre μ du problème translaté soit égale à s . Cette valeur de λ rend singulière la matrice de rigidité tangente k_T .

Cette procédure de translation de valeurs propres est d'un usage considérable pour les problèmes spectraux. Elle est très usuelle pour accélérer la convergence des algorithmes numériques associés à ces problèmes. Comme la plupart de ces algorithmes sont faits pour les matrices définies positives, cette technique permet aussi de rendre toutes les valeurs propres positives [B3].

ALGORITHME de RESOLUTION



Cet algorithme nous permet de déterminer la branche fondamentale $w^0(\lambda)$ et le point de bifurcation sur cette branche correspondant au point singulier de la matrice de rigidité tangente $k_T(\lambda)$. Ainsi on peut déterminer la charge et le mode de flambage de la coque tout en tenant compte du préflambage.

L'influence du préflambage sur le flambage du cylindre a été étudiée par différents auteurs [S10], [F1], [A6], [Y1-2-3]. Ces différentes études ont montré que pour le cas de chargement de pression externe ou latérale, cette influence est négligeable pour les cylindres longs ($Z > 100$). Mais pour les cylindres courts ($Z < 50$), on doit tenir compte de la déformation du préflambage pour l'étude de leur stabilité.

En théorie linéaire des membranes, le préflambage est obtenu en négligeant la flexion dans les équations d'équilibre. Dans le cas de la pression on obtient :

$$w^{0\text{mem}}(\lambda) = \lambda \frac{PR^2}{Eh} \left(1 - \frac{1}{2} \nu \epsilon \right)$$

Le déplacement radial est constant en tout point de la coque. Cette approche est usuelle lorsqu'on néglige le préflambage.

Le préflambage non-linéaire est déterminé par la résolution de l'équation (III-4 7). Pour les coques cylindriques sous pression, l'influence du préflambage est aiguë au bord de la coque. On présente des résultats numériques obtenus par l'algorithme précédent dans le cas de la pression externe.

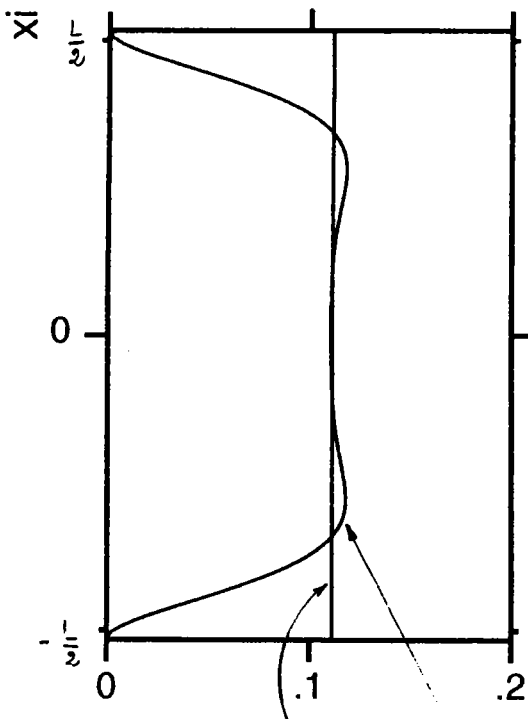


Fig. III-13-a $w^{0\text{mem}}$ et w^0
Préflambage W^0 et mode de flambage W
 $Z = 100$ le shift $s = 1$

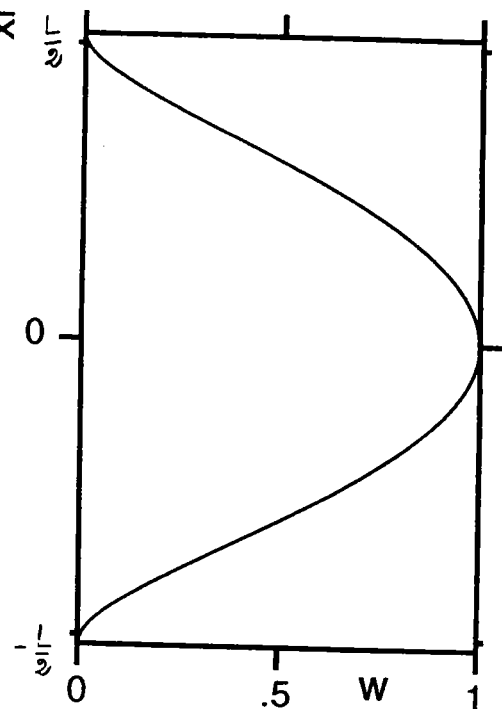


Fig. III-13-b mode w
Press. exte. C.L. C1
 $\mu = 1.0000059$ $P_c = 0.07949399$

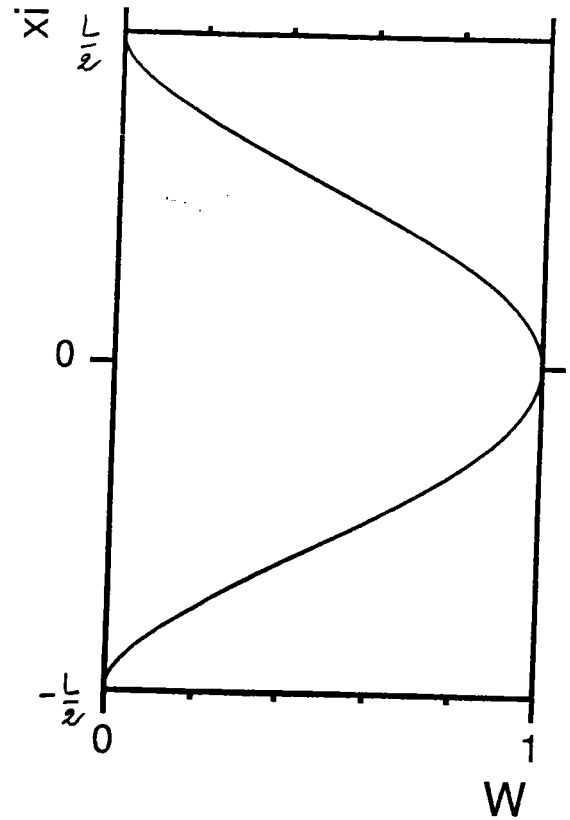
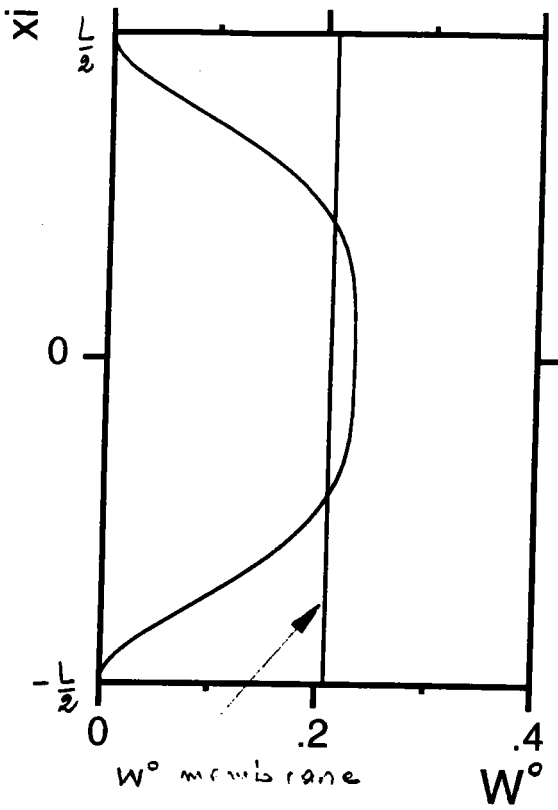


Fig. III-14-a w^{mem} et w°
Préflambage W° et mode de flambage W
 $Z = 30$ $n = 23$ le shift $s = 1$

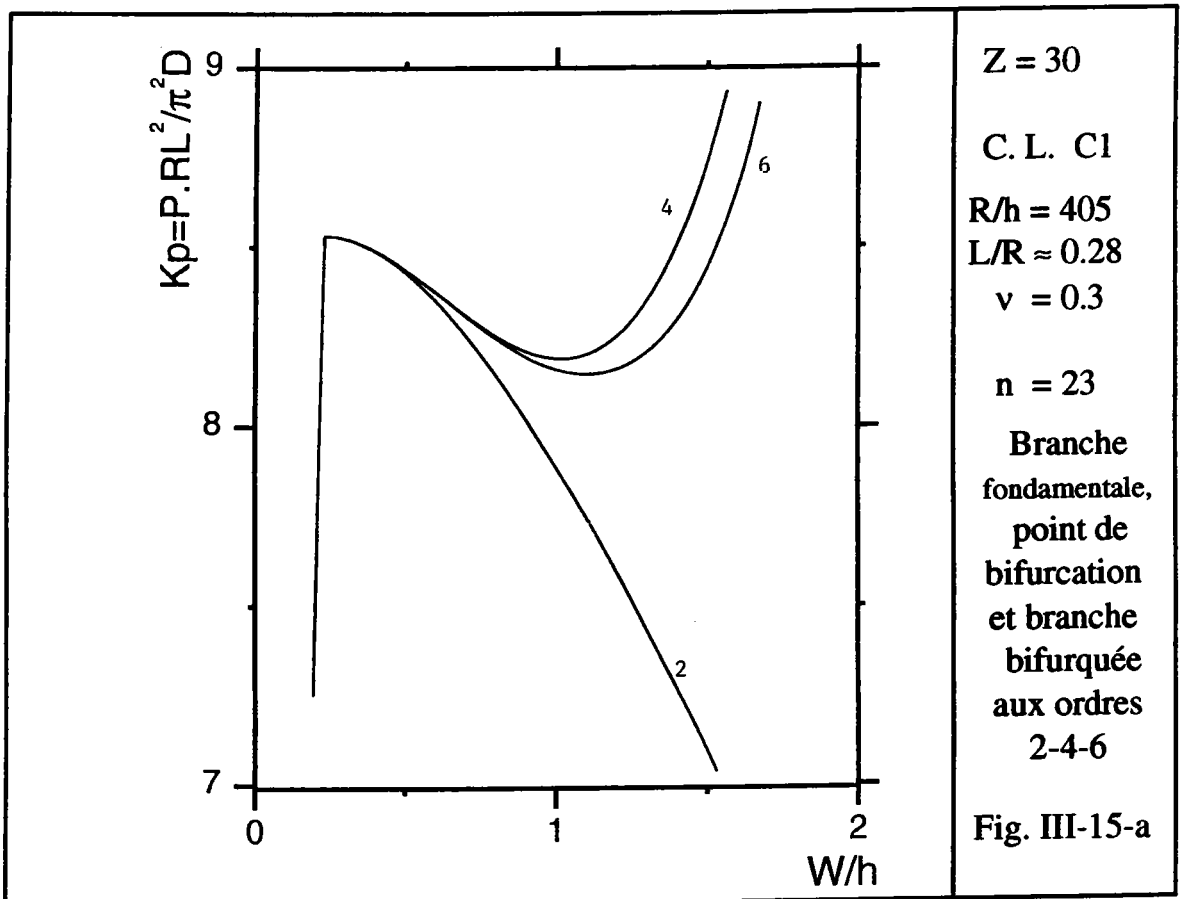
Fig. III-14-b mode w
Press. exte. C.L. C1
 $\mu = 1.00018$ $P_c = 0.149487$

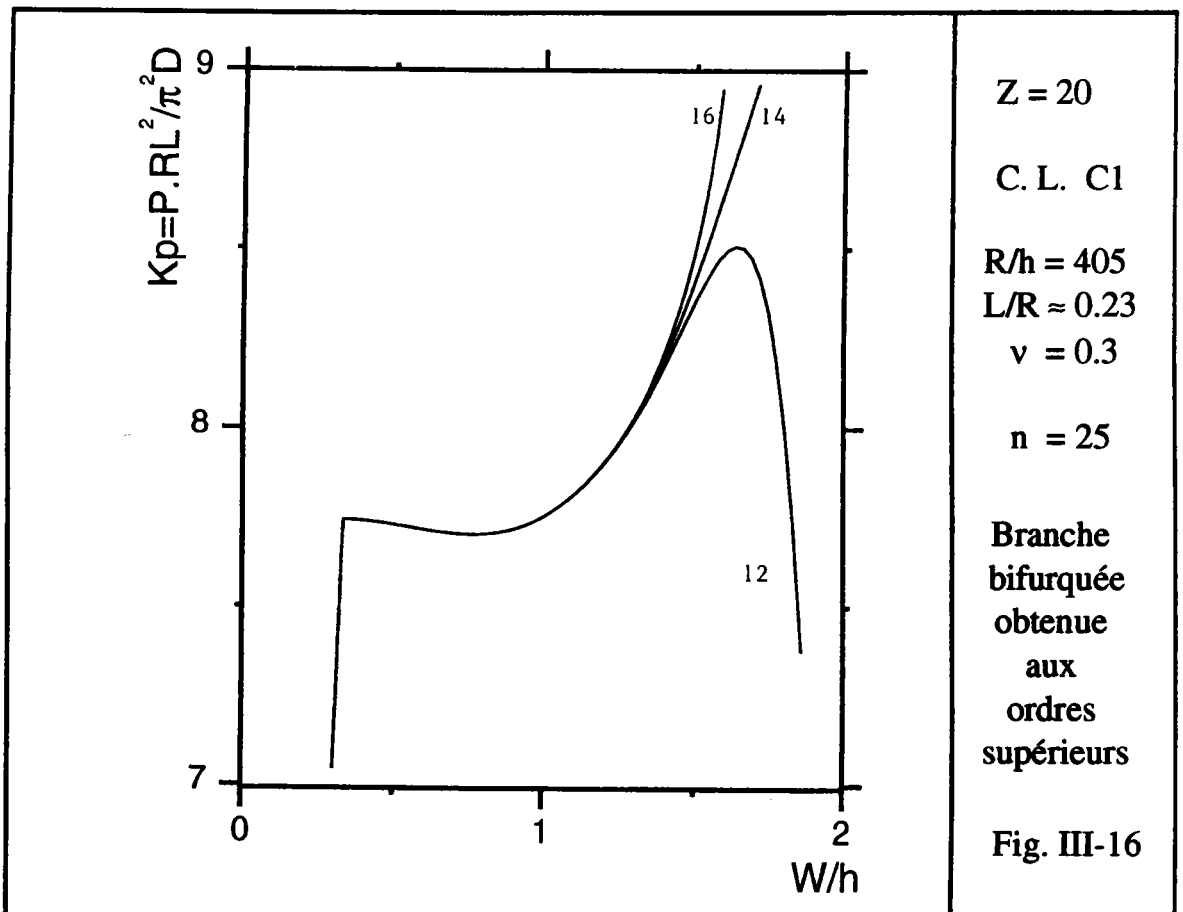
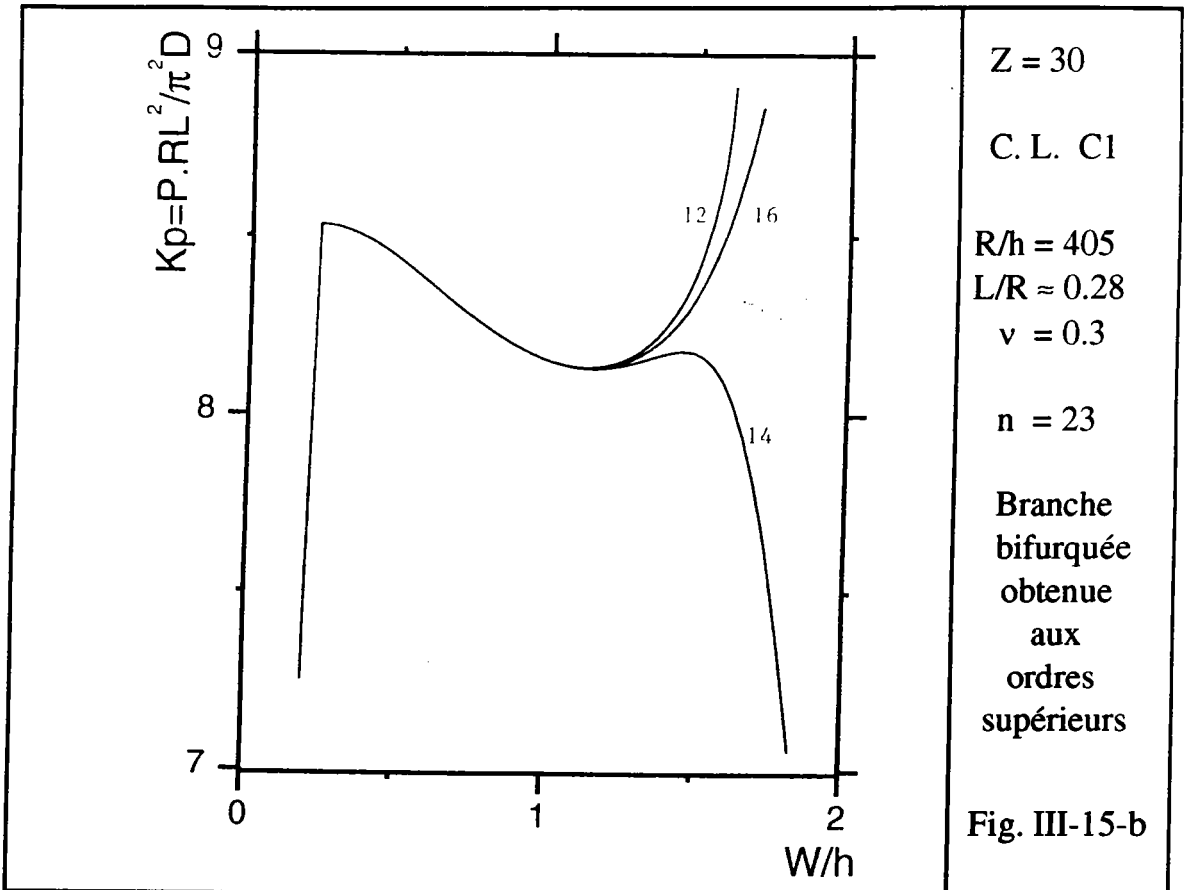
Sur les figures III-13-a et 14-a, on présente le préflambage $w^{\text{mem}}(\lambda_c)$ et $w^{\circ}(\lambda_c)$ pour $Z = 100$ et $Z = 30$. On note que plus Z est grand plus w^{mem} coïncide avec w° dans le cas de la pression externe ou latérale sauf au voisinage des bords [Y1]. Sur les figures III-13-b et 14-b, on présente les modes de flambage et les charges critiques associées obtenues par l'algorithme précédent. Les résultats numériques ainsi obtenus sont en bon accord avec les résultats numériques de Yamaki [Y1-2-3].

III-4-2-b Post-flambage du cylindre sous pression externe avec préflambage

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment on peut déterminer la charge critique de flambage et le mode correspondant tout en tenant compte du préflambage non-linéaire. Pour la détermination du comportement post-critique de ces coques, on a à résoudre les problèmes linéaires (III-4 12). Comme la formulation en opérateur est la même que celle développée au paragraphe III-1 dans le cas sans préflambage, on va suivre ici les étapes de résolution. En utilisant la décompositoon en harmoniques, on se ramène à la résolution de problèmes linéaires 1D nécessitant l'inversion de petites matrices de rigidité.

On présente ici quelques résultats numériques montrant l'influence du préflambage et le comportement critique et post-critique des coques cylindriques sous pression externe pour $Z = 20$ et $Z = 30$.





Sur la figure III-15-a , on présente la branche fondamentale, qui est presque linéaire dans le cas de la pression, le point de bifurcation et la branche bifurquée à l'ordre 2, 4 et 6. Les figures III-15-b et III-16 montrent le comportement post-critique prédit par les ordres supérieurs pour $Z=30$ et $Z=20$. On remarque que la zone de convergence de la série asymptotique contient une grande part de la branche bifurquée. Ainsi pour les Z petits (cylindres courts), on peut déterminer la totalité du post-flambage initial et en particulier le minimum de la branche bifurquée

III-4-3 CONCLUSION

La maniabilité de cette méthode asymptotique-numérique nous a permis de prendre en compte le préflambage non-linéaire. Sachant que, dans le cas de la pression, le préflambage n'influe de manière significative que pour les cylindres courts ($Z < 100$), nous avons fait des tests pour $Z = 30$ et $Z = 20$. On a déterminé le point de bifurcation sur la branche fondamentale ainsi que le comportement post-critique.

Sur les figures III-15 et III-16, on remarque que la chute de rigidité pour les cylindres courts est petite. Cela réduit la robustesse de la non-linéarité de la branche bifurquée. Pour cette raison, la zone de convergence des séries asymptotiques contient une grande part de la branche bifurquée. Ainsi on arrive à déterminer le minimum de la branche de post-flambage. Ce minimum joue un rôle fondamental en industrie vu qu'il permet de déterminer le chargement sécuritaire que peut supporter la structure.

III-5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons décrit les différentes étapes de la méthode asymptotique numérique. Nous l'avons adapté aux coques de révolution en se basant sur la décomposition en harmoniques. Le principe de cette méthode est de calculer numériquement deux séries donnant le déplacement et le chargement en fonction de l'amplitude du mode de flambage. En utilisant la fonctionnelle mixte d' Hellinger-Resner, l'équation d'équilibre se ramène à une équation variationnelle quadratique. La formulation en opérateurs introduite permet de manier facilement les développements asymptotiques. Nous avons établi d'un code d'éléments finis 1D qui permet de déterminer un grand nombre de termes des séries. Ainsi on a déterminé le post-flambage initial de la coque cylindrique sous pression externe.

En comparaison avec d'autres méthodes asymptotiques et itératives classiques, cette méthode a les avantages suivants :

- La maniabilité pour la détermination des ordres supérieurs. La formulation en opérateur permet de mettre sous une forme récurrente simple les équations associées aux ordres supérieurs. Ainsi leur résolution numérique est facile à mettre en oeuvre.

- La réduction du temps de calcul. Le problème non-linéaire est transformé en une série de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. La résolution nécessite alors une seule inversion de matrice pour chaque harmonique. Le temps de calcul est du même ordre qu'une étape de la méthode de Newton-Raphson (voir [A13] pour quelques tests).

- La branche de solutions est déterminée analytiquement. A l'opposé des méthodes itératives déterminant la branche bifurquée point par point, une formule explicite de la solution est obtenue.

- L'automatisation de la procédure de calcul.

Le seul paramètre à choisir est l'ordre de troncature des séries. La zone de validité de la solution est analysée a-posteriori.

- La facilité d'adaptation à différents problèmes.

Dans ce chapitre nous avons pris en compte le cas d'un préflambage non-linéaire. Nous verrons plus loin l'introduction de termes supplémentaires dus aux défauts.

La prise en compte du préflambage non-linéaire par une variante de cette méthode montre qu'on peut facilement l'adopter à d'autres problèmes.

Les applications présentées montrent que cette méthode permet de compléter l'analyse du flambage linéaire d'une manière automatique et à faible coût.

Cette méthode serait beaucoup plus séduisante si le rayon de convergence pouvait être étendu. Cela sera l'objet du chapitre IV.

CHAPITRE IV

AMELIORATION DE LA CONVERGENCE

IV-0 INTRODUCTION

IV-1 PROCEDURE DE REORGANISATION

IV-1-a Réorganisation de la représentation de la fonction vectorielle $U(a)$

IV-1-b Réorganisation de la représentation de la fonction scalaire $\lambda(a)$

IV-2 ADAPTATION AUX COQUES DE REVOLUTION

IV-2-a Définition du produit hermitien en formulation 1D

IV-2-b Procédure d'orthogonalisation

IV-2-c Représentation de $\lambda(a)$ en formulation 1D

IV-3 APPLICATIONS

IV-3-a Cas des plaques

IV-3-b Cas des coques cylindriques

IV-4 CONCLUSION

IV-0 INTRODUCTION

Les approximants de Padé sont de plus en plus utilisés à l'heure actuelle, dans de nombreux domaines aussi divers que l'analyse numérique, la mécanique, la physique théorique ... Leur utilisation est fréquente surtout pour l'accélération de la convergence et pour les études locales au voisinage des singularités.

Les fractions continues furent utilisées depuis les travaux d'Euler. Différents auteurs, comme Jacobi, Cauchy, Frobenius, ... ont utilisé ces approximations dans différents domaines. Les approximants de Padé ont été développés et arrangés sous forme de table dans la thèse de Padé 1892. Une analyse des mémoires de Padé est présentée dans la thèse [S13]. On y trouve l'analyse des recherches de Padé qui se rapportent aux fractions continues ainsi que celles de certains de ses contemporains. Les approximants de Padé sont présentés de façon approfondie dans les livres [B20], [G4], [B19] et [D8]. Pour une utilisation variée dans les problèmes non-linéaires, on se réfère à [C10].

L'utilisation des approximants de Padé est liée à la notion de convergence de ces derniers. La détermination des critères de convergence est souvent un problème délicat. Ce sujet ne sera pas traité de manière rigoureuse dans ce travail.

L'utilisation des méthodes asymptotiques permet de représenter les solutions par des développements en séries entières au voisinage d'un certain point. Cette approximation a malheureusement des limites indésirables pour les calculs pratiques, vu que ces séries ont un rayon de convergence qui est généralement fini.

Comme on cherche à connaître ces fonctions en dehors du disque de convergence, un des moyens les plus performants est l'utilisation des approximants de Padé. Cela revient à approximer la fonction par un rapport de deux polynomes.

Donnons une présentation brève de ce concept. On considère une fonction $f(x)$ développable en série entière donnée par:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad (\text{IV } 1)$$

où les coefficients c_n sont connus.

Un approximant de Padé, qu'on note $P[L,M]$ est donné par la fraction rationnelle suivante :

$$P[L,M] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \dots b_M x^M} \quad (\text{IV } 2)$$

Les coefficients a_i et b_i sont déterminés à l'aide des coefficients c_i en demandant que l'approximant soit équivalent à $f(x)$ jusqu'à l'ordre $L+M+1$:

$$f(x) - P[L,M] = O(x^{L+M+1}) \quad (\text{IV } 3)$$

Cela nous ramène à la résolution d'un système linéaire permettant de déterminer les coefficients a_i et b_i . Cette démarche est présentée dans les ouvrages [G4] et [B19-20].

Voici un exemple illustrant l'utilité des approximants de Padé.

On considère une fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1 + x/2}{1 + 2x}}$

Le développement de Taylor de $f(x)$ au voisinage de 0 a un rayon de convergence induit par la singularité au point $x = -0.5$, ce qui limite la zone de validité de ce développement. A l'aide des coefficients de la série associée à $f(x)$, on détermine les approximants de Padé. Ces derniers permettent de déterminer une très bonne approximation de la fonction $f(x)$ bien au-delà de la zone de convergence de la série.

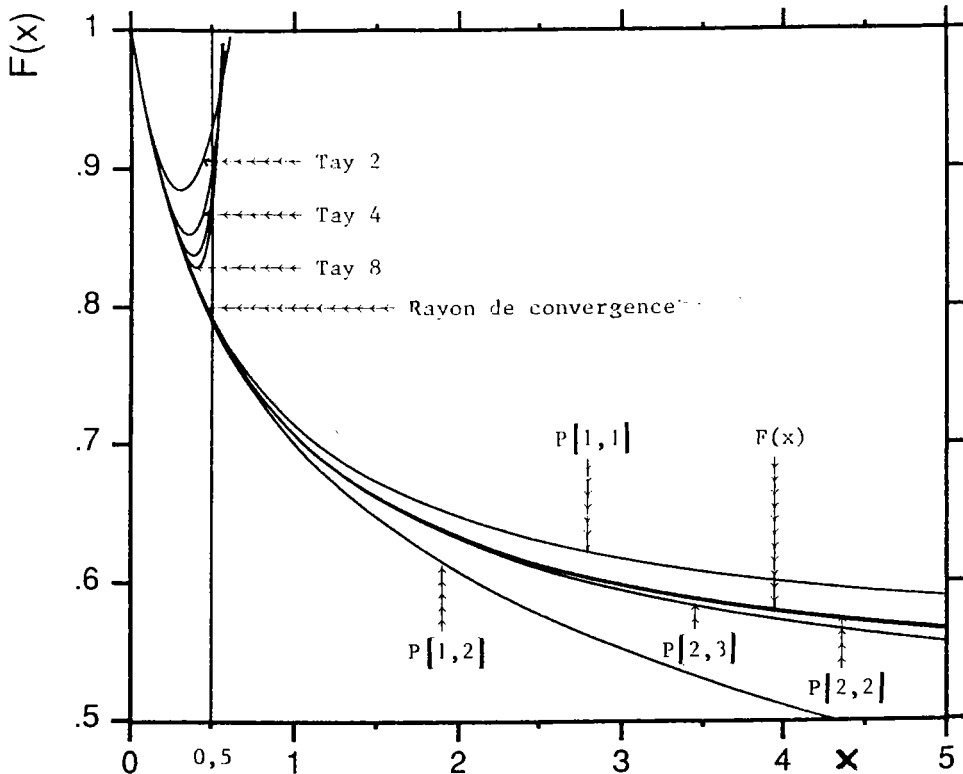


Fig. IV 1 Amélioration de la convergence des développements de Taylor de $f(x)$ par les approximants de Padé

Le calcul des approximants de Padé se fait de manière simple. On donne ici $P[1,1]$ et $P[2,2]$.

$$P[1,1] = \frac{1 + 7x/8}{1 + 13x/8}$$

$$P[2,2] = \frac{1 + 17x/8 + 61x^2/64}{1 + 23x/8 + 121x^2/64}$$

Sur cet exemple simple, on voit que les approximants de Padé permettent d'augmenter considérablement la zone de convergence. Comme on connaît explicitement la fonction $f(x)$ et les coefficients de la série associée, le choix des approximants de Padé est facilité.

L'application de la méthode asymptotique-numérique aux plaques et aux coques cylindriques décrite au chapitre III, montre que ce développement asymptotique a un rayon de convergence. Cela pourrait être pénalisant pour l'application de cette méthode. Or il est possible de réorganiser les séries entières obtenues pour les remplacer par des approximants de Padé.

Dans ce chapitre nous allons décrire la procédure de réorganisation que nous proposons et son adaptation aux coques de révolution. On présentera une application de cette technique aux plaques et aux coques cylindriques.

IV-1 PROCEDURE DE REORGANISATION

Nous avons déjà vu que, pour une grande classe de problèmes de poutres, de plaques, et de coques, les équations d'équilibre peuvent se mettre sous forme d'une équation fonctionnelle avec une non-linéarité quadratique:

$$L.U + (\lambda - \lambda_c) L'.U + Q(U,U) = 0 \quad (IV\ 4)$$

Nous avons présenté au chapitre III une méthode permettant de calculer la branche bifurquée à partir de $(U, \lambda) = (0, \lambda_c)$ sous forme de séries:

$$\begin{cases} \lambda - \lambda_c = \sum_{i \geq 1} a^i t(i) \\ U = \sum_{i \geq 1} a^i V_i \\ \langle\langle V_i, V_1 \rangle\rangle = 0 \text{ pour } i \geq 2 \end{cases} \quad (IV\ 5)$$

Ainsi on obtient le développement en séries d'une fonction scalaire $\lambda(a)$ et d'une fonction vectorielle $U(a)$ dont on connaît numériquement les coefficients.

IV-1-a Réorganisation de la représentation de la fonction vectorielle $U(a)$

Les développements du chapitre III nous ont permis de déterminer numériquement les vecteurs V_i et les coefficients $t(i)$ jusqu'à un ordre p choisi. Les vecteurs V_i pour $i > 1$ sont dans l'orthogonal du noyau $\mathcal{N}$ de l'opérateur L . Ce noyau est engendré par le vecteur V_1 . Mais les vecteurs V_i ne sont pas forcément orthogonaux entre eux. Nous proposons d'orthogonaliser ces vecteurs à l'aide de la procédure de Gram-Schmidt. Pour cela on pose:

$$V_1^\perp = V_1 \quad (IV-6)$$

$$\begin{aligned}
 V_2^\perp &= V_2 - \frac{\langle V_2, V_1^\perp \rangle}{\langle V_1^\perp, V_1^\perp \rangle} V_1^\perp \\
 V_3^\perp &= V_3 - \frac{\langle V_3, V_1^\perp \rangle}{\langle V_1^\perp, V_1^\perp \rangle} V_1^\perp - \frac{\langle V_3, V_2^\perp \rangle}{\langle V_2^\perp, V_2^\perp \rangle} V_2^\perp \\
 V_p^\perp &= V_p - \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\langle V_p, V_j^\perp \rangle}{\langle V_j^\perp, V_j^\perp \rangle} V_j^\perp
 \end{aligned}$$

Ainsi on obtient une base orthogonale formée par les vecteurs $V_p^\perp$.

En posant
$$\alpha_{p,j} = \frac{\langle V_p, V_j^\perp \rangle}{\langle V_j^\perp, V_j^\perp \rangle} \quad (\text{IV-7})$$

on obtient :

$$V_p = V_p^\perp + \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{p,j} V_j^\perp \quad (\text{IV-8})$$

En remplaçant les V_i par leurs valeurs en fonction de $V_j^\perp$ dans le développement asymptotique (IV 5), on obtient une nouvelle représentation de la solution comme étant une combinaison linéaire des vecteurs $V_j^\perp$. Les coefficients de ces vecteurs sont des fonctions scalaires que l'on connaît par leurs séries de Taylor.

$$\begin{aligned}
 U &= a V_1^\perp + & (\text{IV-9}) \\
 & a^2 V_2^\perp \left[1 + \sum_{k \geq 1} a^k \alpha_{k+2,2} \right] \\
 & a^3 V_3^\perp \left[1 + \sum_{k \geq 1} a^k \alpha_{k+3,3} \right] \\
 & + \dots \\
 & a^p V_p^\perp \left[1 + \sum_{k \geq 1} a^k \alpha_{k+p,p} \right] \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Après avoir déterminé numériquement les coefficients $\alpha_{i,j}$, on obtient à chaque ordre j une série entière du paramètre a :

$$1 + \sum_{k \geq 1} a^k \alpha_{k+j,j} \quad (\text{IV-10})$$

On approxime cette série par un approximant de Padé qu'on note par : $P_j[L_j, M_j]$.

Finalement on obtient une approximation simple de la fonction vectorielle $U(a)$ après introduction des approximants de Padé. Elle s'écrit sous la forme: (IV-11)

$$U(a) = \sum_{j \geq 1} a^j P_j[L_j, M_j] V_j^\perp$$

IV-1-b Réorganisation de la représentation de la fonction scalaire $\lambda(a)$

Il est possible également d'introduire des approximants de Padé pour la série $\lambda(a)$. Mais il est apparu plus performant [C9] de ne pas faire d'approximations supplémentaires et de recalculer la fonction scalaire $\lambda(a)$ en faisant une projection de l'équation sur un certain vecteur, par exemple le mode de flambage V_1 .

$$<<L.U; V_1>> + (\lambda - \lambda_c) <<L'.U; V_1>> + <<Q(U,U); V_1>> = 0$$

Comme l'opérateur L est auto-adjoint et $L.V_1 = 0$ on obtient :

$$\lambda - \lambda_c = - \frac{<<Q(U,U), V_1>>}{<<L'.U, V_1>>} \quad (IV-12)$$

En remplaçant U par la formule (IV-11) on obtient :

(IV-13)

$$\lambda - \lambda_c = - \frac{\sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq 1} a^{p+q} P_p[L_p, M_p] P_q[L_q, M_q] <<Q(V_p^\perp, V_q^\perp), V_1>>}{\sum_{m \geq 1} a^m P_m[L_m, M_m] <<L'.V_m^\perp, V_1>>}$$

Le vecteur déplacement $U(a)$ et le paramètre de charge $\lambda(a)$ sont alors donnés par les représentations rationnelles (IV 11) et (IV 13). Le calcul des vecteurs $V_j^\perp$, des coefficients $\alpha_{i,j}$ et des approximants de Padé $P_j[L_j, M_j]$ nécessite peu de temps de calcul et peut être automatisé. Seuls les ordres L_j, M_j pour chaque approximant sont à choisir.

Ces formules peuvent être utilisées directement en utilisant les éléments finis 2D. Ainsi on pourra déterminer les courbes charge-déplacement donnant le comportement post-critique de la structure au-delà du rayon de convergence avec un choix judicieux des approximants de Padé.

IV-2 ADAPTATION DE L'ALGORITHME AUX COQUES DE REVOLUTION

Pour les coques de révolution, nous avons présenté au chapitre III une méthode de résolution utilisant les éléments finis 1D. Ainsi on a calculé les composantes harmoniques de chaque vecteur V_p et les coefficients $t(p)$ pour chaque ordre p . Afin d'utiliser ces résultats, on va définir un produit hermitien utilisant les composantes 1D des vecteurs V_p .

IV-2-a Définition du produit hermitien en formulation 1D

La décomposition en harmoniques de V_p s'écrit sous la forme:

$$V_p = \sum_{j=0}^p V(p-j,j) = \sum_{j=0}^p v(p-j,j)(x) e^{in(p-2j)y/R} \quad (IV-14)$$

On définit un produit hermitien par:

$$\begin{aligned} \langle\langle V_p, V_q \rangle\rangle &= \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \langle v(p-j,j), v(q-k,k) \rangle \int_0^{2\pi R} e^{in[p-2j-(q-2k)]y/R} dy \\ &= \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \langle v(p-j,j), v(q-k,k) \rangle 2\pi R \delta_{p-2j, q-2k} \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

d'où

$$\langle\langle V_p, V_q \rangle\rangle = \begin{cases} \sum_{j=\max(0, \frac{p-q}{2})}^{\min(p, \frac{p+q}{2})} 2\pi R \langle v(p-j,j), v(\frac{p+q}{2}-j, \frac{q-p}{2}+j) \rangle & \text{si } p+q \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } p+q \text{ est impair.} \end{cases} \quad (IV-15)$$

A l'aide de ce produit hermitien on peut calculer $\langle\langle V_p ; V_q \rangle\rangle$ en utilisant les composantes harmoniques 1D $v(p-j,j)(x)$ déterminées numériquement au chapitre III.

IV-2-b Procédure d'orthogonalisation (formulation 1D)

Les vecteurs V_{2p} et V_{2q+1} sont toujours orthogonaux à cause de la symétrie de révolution. Il reste donc à orthogonaliser les vecteurs d'ordre pair entre eux et de même les vecteurs d'ordre impair. Cela conduit à:

$$\alpha_{p,q} = 0 \quad \text{si } p+q \text{ est impair} \quad (\text{IV-16})$$

La base orthogonale est alors donnée par :

$$\begin{aligned} V_1^\perp &= V_1 \\ V_2^\perp &= V_2 \\ V_3^\perp &= V_3 \\ V_4^\perp &= V_4 - \alpha_{42} V_2^\perp \\ V_5^\perp &= V_5 - \alpha_{53} V_3^\perp \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

$$V_p^\perp = V_p - \sum_{k=1}^{\frac{p-2}{2}} \alpha_{p,p-2k} V_{p-2k}^\perp$$

Pour pouvoir utiliser le produit hermitien (IV-15) on va décomposer ces vecteurs $V_p^\perp$ suivant les harmoniques. A l'ordre 4 on obtient:

$$\begin{aligned} V_4^\perp &= \sum_{j=0}^4 V(4-j,j) - \alpha_{42} \sum_{k=0}^2 V(2-k,k) \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \sum_{j=0}^4 V^\perp(4-j,j) \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} V^\perp(4,0) = V(4,0) \\ V^\perp(3,1) = V(3,1) - \alpha_{42} V(2,0) \\ V^\perp(2,2) = V(2,2) - \alpha_{42} V(1,1) \\ V^\perp(1,3) = V(1,3) - \alpha_{42} V(0,2) \\ V^\perp(0,4) = V(0,4) \end{cases}$$

Ainsi on décompose le vecteur $V_4^\perp$ suivant les harmoniques $4n, 2n, 0, -2n, -4n$. De manière générale on obtient la formule suivante:

$$V_p^\perp = \sum_{j=0}^p V^\perp(p-j, j) \quad (\text{IV-18})$$

où

$$V^\perp(p-j, j) = V(p-j, j) - \sum_{k=1}^{\min(j, p-j, \frac{p-1}{2})} \alpha_{p, p-2k} V^\perp(p-j-k, j-k)$$

L'approximation de la fonction vectorielle $U(a)$ s'obtient alors par

$$U(a) = \sum_{j \geq 1} a^j P_j [L_j, M_j] V_j^\perp \quad (\text{IV-19})$$

où les $V_j^\perp$ sont donnés par la formule (IV 18)

IV-2-c Représentation de $\lambda(a)$ en formulation 1D

Pour la détermination de $\lambda - \lambda_c$ à l'aide de la formule (IV-13) on va développer $\langle\langle Q(V_p^\perp, V_q^\perp), V_1 \rangle\rangle$ et $\langle\langle L' \cdot V_m^\perp, V_1 \rangle\rangle$ en utilisant le produit hermitien (IV-15). En prenant l'harmonique n de V_1 , on fait le produit scalaire par $V(1,0) = v(1,0)(x) e^{iny/R}$.
(IV 20)

$$\begin{aligned} * \langle\langle L' \cdot V_k^\perp, V(1,0) \rangle\rangle &= \sum_{j=0}^k \langle\langle L' \cdot V^\perp(k-j, j) ; V(1,0) \rangle\rangle \\ &= \sum_{j=0}^k \langle\langle L' \cdot V^\perp(k-j, j) ; V(1,0) \rangle\rangle \delta_{k-2j, 1} \\ &= \begin{cases} \langle\langle L' \cdot V^\perp(\frac{k+1}{2}, \frac{k-1}{2}) , V(1,0) \rangle\rangle & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

$$* \langle\langle Q(V_p^\perp, V_q^\perp), V(1,0) \rangle\rangle = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \langle\langle Q[V^\perp(p-i, i), V^\perp(q-j, j)] ; V(1,0) \rangle\rangle$$

Sachant que l'harmonique de $Q[V^\perp(p-i, i), V^\perp(q-j, j)]$ est $(p+q)-2(i+j)$ et celle de $V(1,0)$ est 1, on obtient :

(IV 21)

$$\langle\langle Q(V_p^\perp, V_q^\perp); V(1,0) \rangle\rangle =$$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q \langle\langle Q[V^\perp(p-i,i), V^\perp(q-j,j)]; V(1,0) \rangle\rangle \delta_{p+q-2(i+j), 1}$$

Cela mène à :

$$\langle\langle Q(V_p^\perp, V_q^\perp), V(1,0) \rangle\rangle =$$

$$\begin{cases} \sum_{i=\text{Max}(0, \frac{p-q-1}{2})}^{\min(p, \frac{p+q-1}{2})} \langle\langle Q[V^\perp(p-i, i), V^\perp(i+\frac{q-p+1}{2}, -i+\frac{p+q-1}{2})], V(1,0) \rangle\rangle \\ \quad \text{si } p+q \text{ est impair} \\ 0 \quad \text{si } p+q \text{ est pair} \end{cases}$$

Finalement on obtient la formule suivante :

(IV 22)

$$\lambda - \lambda_c = - \frac{\sum_{p \geq 1} \sum_{q \geq 1} a^{p+q} P_p[L_p, M_p] P_q[L_q, M_q] CQ(p, q)}{\sum_{k \geq 1} a^k P_k[L_k, M_k] \cdot CL(k)}$$

où

$$CQ(p, q) = \langle\langle Q(V_p^\perp, V_q^\perp); V(1,0) \rangle\rangle$$

$$CL(k) = \langle\langle L' \cdot V_k^\perp; V(1,0) \rangle\rangle$$

Les coefficients $CQ(p, q)$ et $CL(k)$ sont calculés par (IV 20) et (IV 21)

On note que la différence entre les formules (IV 13) et (IV 22) déterminant $\lambda(a)$ est que dans cette dernière, on calcule les coefficients $CQ(p, q)$ et $CL(k)$ à l'aide des vecteurs unidimensionnels $v(p-j, j)$. Après avoir déterminé ces coefficients, il reste à faire les choix convenables des approximants de Padé définissant $U(a)$ et $\lambda(a)$.

IV-3 APPLICATIONS

Dans le chapitre III, on a décrit la procédure de la méthode asymptotique-numérique permettant de calculer les coefficients $t(p)$ et les vecteurs $V(p)$ à tout ordre p de la série (IV 5). Comme cette série a un rayon de convergence, on va exploiter ces résultats en utilisant les approximants de Padé pour augmenter la zone de validité

L'adaptation de cette technique dans le cas des poutres et des plaques est présentée dans l'article [C9]. Dans ces deux cas de structure, la solution dite exacte, est déterminée par la méthode itérative de Newton-Raphson. Nous analysons la zone de convergence des approximants de Padé, dans ces cas, en comparaison avec la solution "exacte".

Après avoir calculé les coefficients $\alpha_{i,j}$ dans le cas des plaques, on remarque qu'il y a une alternance régulière de signe entre ces coefficients. Cela permet d'avoir des approximants de Padé ayant des singularités éloignées. Par contre dans le cas des coques cylindriques, cette alternance de signe apparaît par groupe de coefficients et est moins régulière. Pour cela, le choix des approximants de Padé dans ce cas devient plus délicat.

IV-3-a Cas des plaques

A l'aide des formules (IV 11) et (IV 13), on détermine la charge et les déplacements avec un choix des approximants de Padé. En tronquant la série (IV 9), à l'ordre $2n$, on choisit la stratégie suivante pour le choix du degré du dénominateur L_j et du numérateur M_j de $P_j[L_j, M_j]$. On choisit L_j et M_j de manière que la fraction rationnelle $a^j P_j[L_j, M_j](a)$ soit équivalente à a ou à a^2 pour les grandes valeurs de a . L'adaptation de cette stratégie au cas des plaques donne des résultats très satisfaisants [C9].

Sur la figure IV-2, on présente la branche bifurquée de la plaque chargée dans son plan. La méthode asymptotique nous permet de déterminer cette branche jusqu'à $w = 2h$ et $\lambda = 1.4\lambda_c$.

Cette limite correspond au rayon de convergence de la série. A l'aide des approximants de Padé, la branche bifurquée est déterminée jusqu'à environ $\lambda = 4 \lambda_c$ et $w = 5h$.

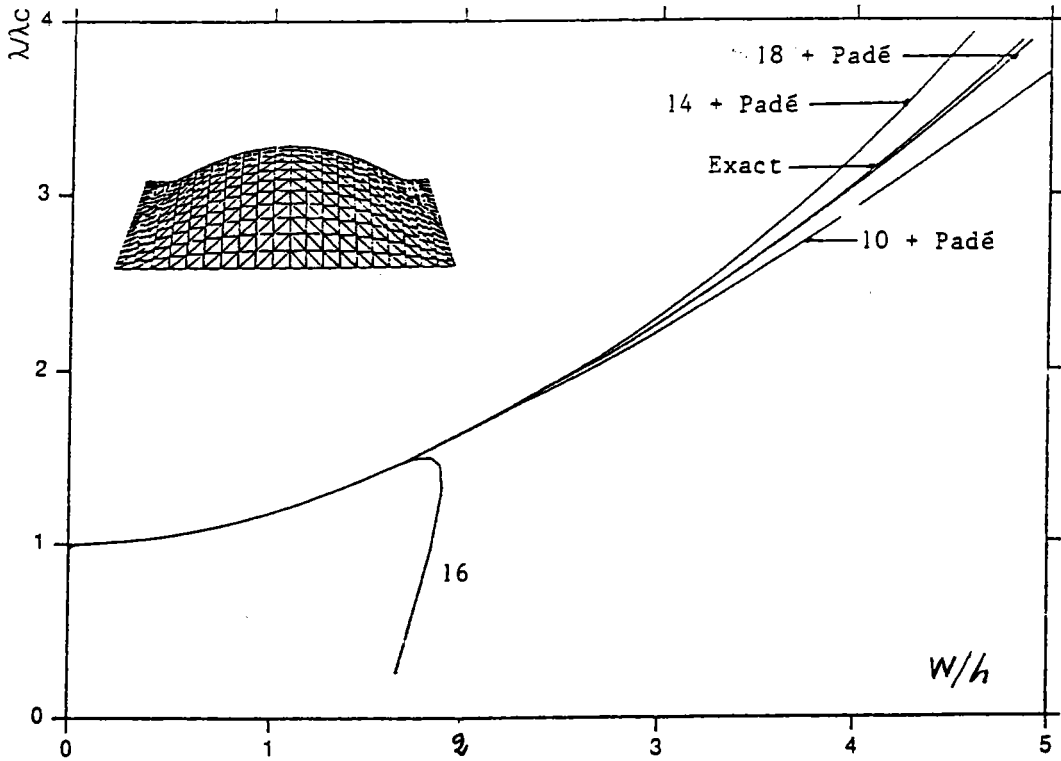


Fig. IV-2 Amélioration de la zone de convergence par les approximants de Padé. Les ordres 10, 14, 18 correspondent aux troncatures de la série (IV-9) en a^{10} , a^{14} , ..., a^{18} .

IV 3-b Cas des coques cylindriques

Le comportement du post-flambage des coques est fondamentalement différent de celui des plaques Fig. I-5 et Fig. I-16-17. La non-linéarité de la branche bifurquée est plus forte que celle observée dans le cas des plaques. Cela rend un peu plus délicat la détermination du comportement post-critique des coques. L'utilisation des éléments finis 2D nécessiterait un assez grand temps de calcul. C'est pour cette raison que l'on utilise la symétrie de révolution pour se ramener aux éléments finis 1D.

L'adaptation de la technique des approximants de Padé aux coques de révolution se fait de manière simple grâce à l'algorithme précédemment décrit.

Nous présentons un exemple de résultats numériques obtenus pour une coque cylindrique sous pression. Dans tous les cas que nous avons testé, tous les approximants de Padé ont une *singularité* au voisinage du rayon de convergence. Sur la figure (IV 3) ci-dessous, on peut constater que l'amélioration que nous avons proposé ne conduit au mieux qu'à une très légère augmentation de la zone de validité de la solution. Sur cet exemple de coque comme sur d'autres exemples testés au laboratoire, la représentation par les approximants de Padé n'apporte donc pas d'amélioration sensible par rapport à la représentation en séries.

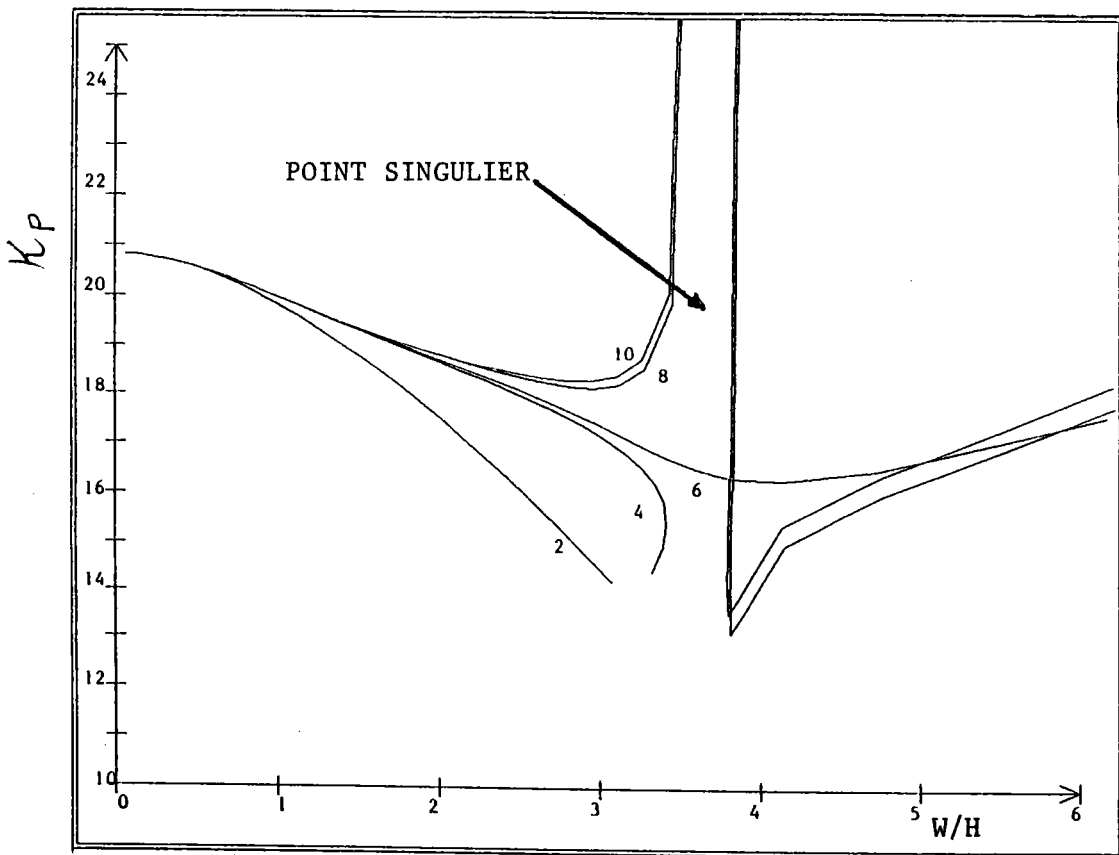


Fig. IV 3 Amélioration de la convergence de la branche bifurquée par les approximants de Padé pour $Z = 200$

Les ordres 2, 4, 6, 8, 10 correspondent aux troncatures de la série (IV-9) en $a^2, a^4, \dots, a^{10}$. On choisit les approximants de Padé qui ont la singularité plus loin pour les différents ordres.

IV-4 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons décrit une procédure permettant d'utiliser la technique des approximants de Padé. Nous avons déterminé une base orthogonale de vecteurs $V_p^\perp$. La fonction vectorielle $U(a)$ est obtenue par une combinaison linéaire des vecteurs $V_p^\perp$ ayant comme coefficients des séries entières scalaires. Nous avons approximé ces séries à l'aide des approximants de Padé. Comme le paramètre de charge $\lambda(a)$ est fonction de $U(a)$, nous avons déterminé une formule simple permettant d'utiliser l'approximation de $U(a)$.

Pour les coques de révolution nous avons donné un produit hermitien permettant d'utiliser les composantes 1D des vecteurs $V(p)$. Après orthogonalisation des vecteurs V_p à l'aide de ce produit hermitien, on obtient une formule donnant $\lambda(a)$ sous la forme d'une fraction rationnelle. Les coefficients de cette fraction sont déterminés à l'aide des résultats numériques 1D.

L'application de cette technique à l'étude du comportement post-critique de la plaque donne des résultats spectaculaires. Une application aux vibrations non-linéaires, testée récemment est aussi très satisfaisante. Mais l'application de cette technique au post-flambage du cylindre ne permet pas l'amélioration espérée. D'autres cas testés récemment le confirment.

Une autre méthode permettant d'utiliser les vecteurs V_p est proposée par Noor-Peter-Anderson [N4-5]. L'idée de cette méthode est de faire une approximation de Rayley-Ritz en utilisant une base réduite construite à partir des vecteurs V_p . Comme la méthode asymptotique-numérique permet de calculer de manière simple un grand nombre de ces vecteurs V_p , l'application de cette méthode sera prochainement testée.

CHAPITRE V

POST-FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES AVEC IMPERFECTIONS GEOMETRIQUES

- V-0 ORIENTATION
- V-1 DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES
 - V-1-0 Introduction
 - V-1-1 Equations opérationnelles
 - V-1-1-a Formulation générale
 - V-1-1-b Formulation sans préflambage et sans contraintes résiduelles
 - V-1-1-c Relations de récurrence
 - V-1-2 Passage de 2D à 1D
 - V-1-2-a Développement des ordres supérieurs
 - V-1-2-b Relation de récurrence 1D
- V-2 RESULTATS NUMERIQUES
 - V-2-0 Introduction
 - V-2-1 Première approximation de la charge limite de flambage
 - V-2-2 Comportement post-critique en présence des imperfections
- V-3 CONCLUSION

V-0 ORIENTATION

Dans le chapitre précédent, j'ai traité le problème de flambage et de post-flambage des coques cylindriques sous pression en négligeant les imperfections. Pour le problème de flambage, la charge critique et le mode correspondant sont solutions d'un problème de valeurs propres associé à l'état d'équilibre adjacent au point de bifurcation. Pour l'étude du problème de post-flambage, nous avons développé une méthode asymptotique-numérique permettant cette étude de manière simple. Par cette étude, les charges critiques de flambage et le comportement post-critique initial semblent être bien étudiés pour les coques cylindriques parfaites.

En pratique, les imperfections sont cependant inévitables et il est d'un grand intérêt de clarifier leur influence sur le chargement critique et sur l'état post-critique de la structure.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude théorique clarifiant l'effet des imperfections initiales de forme modale sur le flambage et le post-flambage des coques cylindriques sous pression. D'un point de vue mathématique, l'introduction des imperfections conduit à un problème de bifurcation perturbée. Cette étude est faite à l'aide de la méthode asymptotique-numérique décrite dans le chapitre précédent. Cette méthode s'adapte facilement pour une telle étude. Ainsi, on se ramène encore à la résolution de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité tangente.

Le passage de 2D à 1D permettant une grande réduction en temps C.P.U. alourdit davantage les développements asymptotiques. L'utilisation des *systèmes de calcul formel* facilite cette tâche et permet d'avoir les relations de récurrence 1D. La résolution de ces problèmes permet d'avoir les relations analytiques déterminant le chargement et les déplacements en fonction de l'amplitude des imperfections.

On donne des résultats numériques de la charge limite pour différentes valeurs de l'amplitude des imperfections " a_0 ". La branche de post-flambage des coques cylindriques sera donnée pour différentes valeurs de Z et de a_0 ainsi que la variation de la charge maximale en fonction de a_0 .

V - 1 DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

V - 1 - 0 INTRODUCTION

L'influence des imperfections est un point crucial pour l'étude de la stabilité des coques cylindriques. Cela a attiré un intérêt intensif depuis les travaux de Donnell (1934). Actuellement, les imperfections géométriques initiales sont acceptées comme l'explication de l'écart entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux. Cette acceptation est principalement due à des travaux utilisant des imperfections spécifiques et montrant la sensibilité de la charge de flambage aux imperfections. Dans ces travaux, différentes manières de prendre en compte les imperfections ont été introduites. Le déplacement latéral W de la coque par rapport à la configuration idéale est écrit sous la forme $W = w^* + w$, où w^* représente l'imperfection initiale et w le déplacement réel. Ainsi Donnell et Wan[D6] (1950) ont effectué un calcul du comportement critique et post-critique du cylindre sous compression axiale en supposant que $w^* = \frac{k-1}{2} w$, où k est le

coefficient d'imperfection. Koiter [K10] dans son étude (1963) a considéré une imperfection initiale proportionnelle au mode axisymétrique: $w^* = A \cos 2\pi x$ où " A " est l'amplitude des imperfections. Ainsi Koiter a introduit une relation asymptotique de réduction de la charge critique en fonction de l'amplitude A . L'analyse asymptotique de Koiter a été reprise par Budiansky et Amazigo [B15] en considérant soit des imperfections axisymétriques localisées de forme modale ou non, soit des imperfections axisymétriques réparties de manière aléatoire en fonction de la coordonnée axiale de la coque. Dans les travaux de Arbocz-Babcock-Sechler [A7-8-9], les imperfections initiales sont représentées par une combinaison d'un mode axisymétrique et d'un mode asymétrique en montrant la nécessité de prendre en compte l'asymétrie dans la forme des défauts.

Ces développements sont résumés sommairement et complétés dans une monographie faite par Yamaki sur le cylindre [Y3]. D'autres auteurs ont étudié le flambage et le post-flambage des coques cylindriques. On trouve une bibliographie complète dans les articles de Hutchinson-Koiter [H1] et Simitsis [S12]. Il résulte de ces études une sophistication accrue des théories non-linéaires qui permettent de prendre en compte certaines formes d'imperfections initiales.

Malgré ces développements théoriques substantiels disponibles, il n'existe que peu de données expérimentales décrivant l'influence des différentes formes d'imperfections Combescure[], Singer[S8], Jullien-Chraïbi[J2]. On cite ici une étude expérimentale de cette influence sur le cylindre sous compression axiale faite par Weackel (thèse) [W1]. Dans ce travail il a été étudié, entre autre, l'influence du défaut modal sinusoïdal généralisé ou localisé, du défaut modal localisé axisymétrique, ou du défaut de construction. Ce travail a montré que l'influence du défaut modal est prépondérante, qu'une imperfection très localisée a peu d'influence et qu'un défaut de forme non modale évolue au cours de la phase précritique vers une forme modale adjacente.

Dans ce chapitre, nous présentons un développement de la méthode asymptotique-numérique pour la prise en compte des imperfections. Nous donnons une formulation générale en opérateurs permettant la prise en compte du préflambage, des défauts géométriques et des contraintes résiduelles. Cette formulation opérationnelle permettra d'étudier l'influence de ces trois paramètres.

Pour la clarté et la simplicité des développements ultérieurs, on se restreint au cas sans préflambage et sans contraintes résiduelles. Cela nous ramène à une formulation variationnelle de l'équation d'équilibre utilisant les mêmes opérateurs précédemment introduits. A l'aide de cette formulation en opérateurs, on adopte en suivant la même procédure que celle décrite par Damil et Potier-Ferry [D1,D2], la méthode asymptotique-numérique aux coques cylindriques avec défaut.

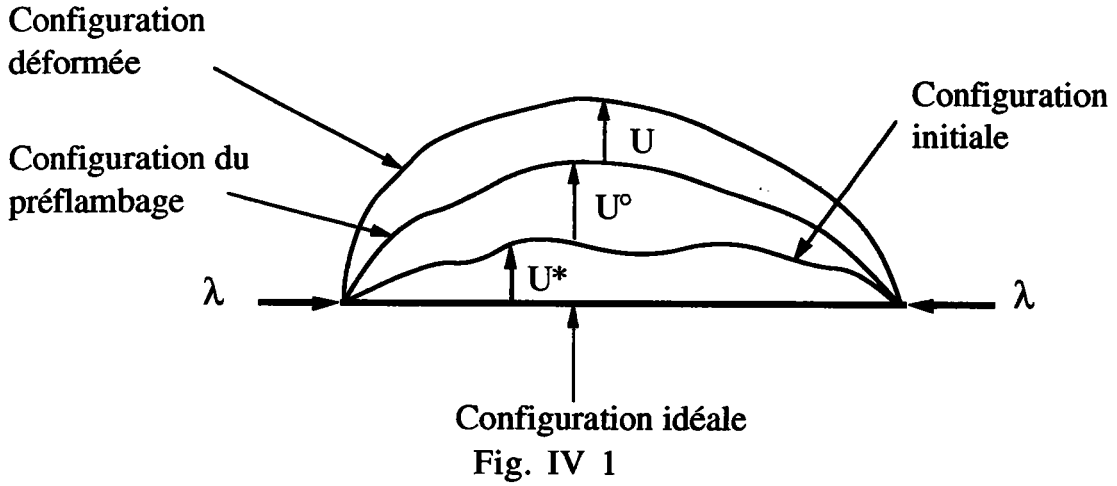
L'équation d'équilibre avec défaut se ramène, comme précédemment, à une succession de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. La prise en compte des imperfections induit un paramètre supplémentaire dans ces équations alourdissant relativement les calculs. Le passage de 2D à 1D introduit, comme déjà vu, un autre paramètre supplémentaire mesurant les ordres harmoniques décomposant chaque vecteur. Cela rend les développements manuels de ces équations aux ordres supérieurs trop fastidieux avec beaucoup de risques d'erreurs. L'utilisation de systèmes de calcul formel, type *Macsyma* ou *Maple*, nous ont permis de développer de manière simple les ordres supérieurs et de déterminer les relations de récurrence nécessaires pour le calcul numérique.

V-1-1 EQUATIONS OPERATIONNELLES

Pour l'étude de l'équilibre de la structure avec imperfection on se base, comme au §III 1, sur la fonctionnelle mixte modifiée H-R-M. L'analyse de la stabilité de cette structure doit tenir compte de la forme actuelle de la coque, mais sa détermination exacte est généralement compliquée. Pour une transparence des effets des imperfections, on décrit une formulation générale tenant compte de la déformation géométrique initiale et de l'état des contraintes.

V-1-1-a Formulation générale

Pour l'étude de l'équilibre de la structure, on se base, comme au §III 1, sur la fonctionnelle mixte modifiée H-R-M. Pour introduire, de manière simple l'influence des imperfections, on utilise une formulation Lagrangienne sur une configuration idéale (et non pas sur la configuration initiale).



On note par U^* l'imperfection géométrique initiale, par U° le déplacement du préflambage par rapport à la configuration initiale et par U le déplacement réel. On pose alors :

$$\begin{cases} U = U^* + U^\circ + U \\ N = N^* + N^\circ + N \end{cases} \quad (V-1-1 \ 1)$$

où U et N sont les vecteurs déplacement et contrainte par rapport à la configuration idéale, N^* contrainte résiduelle et N° la précontrainte. La déformation entre la configuration initiale et la configuration déformée est :

$$\Delta\Gamma = \Gamma(U^* + U^\circ + U) - \Gamma(U^*) \quad (V-1-1 \ 2)$$

$$\begin{cases} \Delta\Gamma^L = \Gamma^L(U^\circ) + \Gamma^L(U) \\ \Delta K = K(U^\circ) + K(U) \\ \Delta\Gamma^{NL} = \Gamma^{NL}(U^\circ, U^\circ) + 2 \Gamma^{NL}(U^\circ, U) + 2 \Gamma^{NL}(U^*, U) + \\ \quad 2 \Gamma^{NL}(U^\circ, U^*) + \Gamma^{NL}(U, U) \end{cases}$$

En introduisant (V-1-1 1) et (V-1-1 2) dans la fonctionnelle mixte H-R-M (III-1 3) et en calculant la variation δ H-R-M on obtient :

$\delta H-R-M = 0$ équivaut à : (V-1-1 3)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} t_{N^0} [\Gamma^L(\delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, \delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^*, \delta U)] - t_{N^0} C_m^{-1} \delta N + t_{\delta K} C_b K(U^0) \\
 & + t_{N^*} [\Gamma^L(\delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, \delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^*, \delta U)] - t_{N^*} C_m^{-1} \delta N \\
 & + t_{\delta N} [\Gamma^L(U^0) + \Gamma^{NL}(U^0, U^0) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, U^*)] + P_d(\delta U) \\
 & \int_{\Omega} t_{\delta N} [\Gamma^L(U) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, U) + 2 \Gamma^{NL}(U^*, U)] - t_{\delta N} C_m^{-1} N \\
 & + t_N [\Gamma^L(\delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, \delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^*, \delta U)] + t_{\delta K} C_b K(U) + 2 t_{N^0} \Gamma^{NL}(U, \delta U) \\
 & + 2 t_{N^*} \Gamma^{NL}(U, \delta U) + t_{\delta N} \Gamma^{NL}(U, U) + 2 t_N \Gamma^{NL}(U, \delta U) = 0
 \end{aligned}$$

On cherche $U^0(\lambda)$, solution du problème avant le flambage en l'absence des défauts ($U^* = 0$). L'équation correspondante s'obtient en posant $U = U^* = N = N^* = 0$ dans l'équation précédente.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} t_{N^0} [\Gamma^L(\delta U) + 2 \Gamma^{NL}(U^0, \delta U)] - t_{N^0} C_m^{-1} \delta N + t_{\delta K} S^f K(U^0) \\
 & + t_{\delta N} [\Gamma^L(U^0) + \Gamma^{NL}(U^0, U^0)] + P_d(\delta U) = 0
 \end{aligned} \quad (V-1-1 4)$$

On obtient alors la même équation du préflambage que celle étudiée au § III-4. Après élimination de cette équation de (V-1-1 3), on obtient l'équation vérifiée par l'incrément (U, N) déterminant le comportement critique et post-critique de la structure.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \{ t_{\delta N} [\Gamma^L(U) - C_m^{-1} N] + t_{\delta K} C_b K + t_{\delta \Gamma^L} N + [- t_{\delta N} C_m^{-1} N^* + t_{\delta \Gamma^L} N^*] \\
 & + 2 [t_{N^0} \Gamma^{NL}(U, \delta U) + t_{\delta N} \Gamma^{NL}(U^0, U) + t_N \Gamma^{NL}(U^0, \delta U)] \\
 & + t_{\delta N} \Gamma^{NL}(U, U) + 2 t_N \Gamma^{NL}(U, \delta U) \\
 & + 2 [t_N \Gamma^{NL}(U^*, \delta U) + t_{\delta N} \Gamma^{NL}(U^*, U) + t_{N^*} \Gamma^{NL}(U, \delta U)] \\
 & + 2 [t_{N^0} \Gamma^{NL}(U^*, \delta U) + t_{\delta N} \Gamma^{NL}(U^0, U^*) + t_{N^*} \Gamma^{NL}(U^0, \delta U)] \\
 & + 2 t_{N^*} \Gamma^{NL}(U^*, \delta U) = 0
 \end{aligned} \quad (V-1-1 5)$$

En utilisant les notations des opérateurs $\mathfrak{L}$ et Q précédemment introduites au paragraphe III-1, on obtient l'équation en opérateur suivante :

$$\mathfrak{L}.U + 2 Q(U^0, U) + Q(U, U) + 2 Q(U^*, U) + F^* = 0 \quad (V-1-1 \ 6)$$

$$\text{où} \quad \langle\langle F^*, \delta U \rangle\rangle = \int_{\Omega} {}^t N^* [- C_m^{-1} \delta N + \delta \Gamma^L + 2 \Gamma^{NL} (U^*, \delta U)] \\ + 2 \langle\langle Q(U^0, U^*), \delta U \rangle\rangle$$

On obtient alors une formulation variationnelle représentant l'énergie potentielle totale du système idéal ($U^*=0$) et une énergie additionnelle dépendant des imperfections.

En notant par $\mathfrak{L}_T$ l'opérateur tangent au point ($U= U^*= 0$), cette équation se met sous la forme:

$$\mathfrak{L}_T.U + Q(U, U) + 2 Q(U^*, U) + F^* = 0 \quad (V-1-1 \ 7)$$

Finalement, on obtient une équation opérationnelle permettant d'étudier l'influence des imperfections géométriques tout en tenant compte du préflambage non-linéaire et des contraintes résiduelles. Cette formulation générale est complexe à étudier (tout au moins en premier temps), mais sera certainement l'objet d'un travail postérieur.

Pour la clarté des développements ultérieurs, on néglige le préflambage et les contraintes résiduelles. Cela nous permettra de nous ramener à une formulation opérationnelle beaucoup plus simple.

V-1-1-b Formulation sans préflambage et sans contraintes résiduelles

Dans ce travail, on se restreint au cas sans préflambage en déplacement et sans contraintes résiduelles. Cela simplifie beaucoup la formulation générale (III-1-1 7) et permet d'utiliser les opérateurs L , L' et Q introduits § III-1.

En posant $U^o = 0$, $N^o = \lambda N^o$ et $N^* = 0$, l'équation (III-1-1 5) devient :

$\delta H-R-M = 0$ équivaut à:

(V-1-1 8)

$$\int_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & {}^t\delta N \left[\Gamma^L(U) - C_M^{-1} N \right] + {}^t\delta K C_b K + {}^t\delta \Gamma^L N \\ & + 2\lambda N^o \Gamma^{NL}(U, \delta U) + \\ & + {}^t\delta N \Gamma^{NL}(U, U) + 2 {}^tN \Gamma^{NL}(U, \delta U) \\ & + 2\lambda N^o \Gamma^{NL}(U^*, \delta U) + \\ & + 2({}^t\delta N \Gamma^{NL}(U^*, U) + {}^tN \Gamma^{NL}(U^*, \delta U) + {}^tN^* \Gamma^{NL}(U, \delta U)) \end{aligned} \right\} d\Omega$$

En utilisant les opérateurs L , L' et Q et on posant $\varepsilon = \lambda - \lambda_c$ cette équation variationnelle se met sous la forme opérationnelle suivante :

(V-1-1 9)

$\begin{aligned} & \langle\langle L.U, \delta U \rangle\rangle + \varepsilon \langle\langle L'.U, \delta U \rangle\rangle + \langle\langle Q(U, U), \delta U \rangle\rangle \\ & + \lambda_c \langle\langle L'.U^*, \delta U \rangle\rangle + \varepsilon \langle\langle L'.U^*, \delta U \rangle\rangle \\ & + 2 \langle\langle Q(U^*, U), \delta U \rangle\rangle = 0 \end{aligned}$
--

Finalement, on se trouve dans le même contexte opérationnel que dans le cas sans défaut et sans préflambage, avec des termes additionnels dépendants du défaut, qu'on décrit avec les opérateurs L' et Q .

Le système idéal ($U^* = 0$) a une solution fondamentale $U = 0$. Pour $\lambda = \lambda_c$, on suppose que la condition nécessaire de bifurcation est réalisée (i.e. l'opérateur tangent L est singulier). On se place à nouveau dans le cadre défini au paragraphe III-2 et on applique la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt. Cela permet de

ramener la résolution du problème (V-1-1 9) à un espace de dimension finie.

On suppose que le noyau $\mathbf{N}$ de l'opérateur L est de dimension 1 (valeur propre simple) et est engendré par le vecteur U_1 . On décompose U comme suit:

$$\begin{cases} U = \eta U_1 + W & \text{où } W \in \mathbf{N}^\perp \\ \varepsilon = \lambda - \lambda_c \end{cases} \quad (\text{V-1-1 10})$$

En appliquant de nouveau le théorème II du chapitre II, on peut décomposer $\varepsilon = \lambda - \lambda_c$ et le vecteur U en séries entières du paramètre η au voisinage de $(\lambda = \lambda_c \text{ et } U=0)$.

Le vecteur U_1 (élément de $\mathbf{N}$) est proportionnel au mode de flambage $V(1)$, on pose alors :

$$U_1 = A V(1) \quad (\text{V-1-1 11})$$

Le paramètre scalaire A représente l'amplitude du mode de flambage. En faisant dépendre U_1 de A , les vecteurs U_n et les coefficients t_n en dépendent automatiquement. On décompose alors le vecteur U et le paramètre de charge λ comme suit:

$$\begin{cases} \varepsilon(\eta, A) = \lambda - \lambda_c = \sum_{n \geq 2} t_n(A) \eta^n \\ U(\eta, A) = \sum_{n \geq 1} U_n(A) \eta^n \\ \langle\langle U_n, U_1 \rangle\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{V-1-1 12})$$

En tenant compte de la condition d'orthogonalité, on obtient que la projection du vecteur U sur le mode de flambage $V(1)$, qu'on note " a ", est donnée par:

$$a = \frac{\langle\langle U, V(1) \rangle\rangle}{\langle\langle V(1), V(1) \rangle\rangle} = \eta A \quad (\text{V-1-1 13})$$

Dans les formules de réduction de charge critique (K) (H) et (I-2 21) explicitées au chapitre I dans le cas de la bifurcation symétrique, on remarque que cette réduction est proportionnelle à $(a_0)^{2/3}$ où a_0

représente l'amplitude des imperfections. Pour cela on choisit le défaut sous la forme:

$$\begin{cases} U^* = a_0 V^* \\ a_0 = \eta^3 \tau^3 \end{cases} \quad (\text{V-1-1 } 14)$$

où V^* et a_0 représentent la forme et l'amplitude des imperfections, τ est un paramètre fictif ($\tau = 1$) introduit pour guider les relations de récurrence.

En introduisant les développements (V-1-1 12) et (V-1-1 14) dans l'équation (V-1-1 9), on se ramène à chaque ordre de η à la résolution des problèmes linéaires suivants :

$$\text{a) } L.U_1 = 0 \quad (\text{V-1-1 } 15)$$

$$\text{b) } L.U_2 + Q(U_1, U_1) = 0$$

$$\text{c) } L.U_3 + t_2 L'.U_1 + 2 Q(U_1, U_2) + \tau^3 \lambda_c L'.V^* = 0$$

$$\text{d) } L.U_4 + t_2 L'.U_2 + t_3 L'.U_1 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + 2\tau^3 Q(V^*, U_1) = 0$$

e) Pour $n \geq 5$

$$L.U_n + \sum_{p=0}^{n-3} t_{p+2} L'.U_{n-p-2} + \sum_{p=1}^{n-1} Q(U_p, U_{n-p}) + \tau^3 t_{n-3} L'.V^* + 2\tau^3 Q(V^*, U_{n-3}) = 0$$

Ainsi, on se ramène encore à la résolution d'une succession de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. En résolvant ce système linéaire, on déterminera les vecteurs $U_n(A)$ et les coefficients $t_n(A)$ pour tout ordre n donné.

V-1-1-c Relations de récurrence en 2D

Pour la détermination des ordres supérieurs, les relations de récurrence sont d'une importance primordiale. Dans ce paragraphe, on va expliciter les équations à résoudre pour les différents ordres en 2D. Ces relations de récurrence nous permettront un passage assez facile de 2D à 1D.

On suppose que le défaut V^* est un défaut modal et on prend $V^* = V(1)$ ($V(1)$ mode de flambage). Les équations (V-1-1 15-a et 15-b) sont les mêmes que dans le cas parfait et le défaut n'intervient qu'à l'ordre 3. Pour la prise en compte de l'effet des imperfections, on introduit une notation indicielle supplémentaire. L'équation (15-a) donnant le mode de flambage et la charge critique, $L.U_1 = 0$ a pour solution:

$$U_1 = A V(1) \stackrel{\text{not}}{=} A V(1,0) \quad (\text{V-1-1 } 16)$$

On remarque ici que la notation indicielle de $V(i,j)$ est différente de celle introduite au chapitre III pour la décomposition suivant les harmoniques. Cette notation permet la prise en compte des imperfections. Ici, l'indice i indique l'ordre de A et l'indice j , l'ordre des imperfections (τ).

Comme nous préférons d'abord développer les équations en 2D, (pour des raisons de clarté et pour une reprise ultérieure de résolution en 2D), la décomposition harmonique sera faite postérieurement.

L'équation (15-b) $LU_2 + Q(U_1, U_1) = 0$ a pour solution:

$$\begin{aligned} U_2 &\stackrel{\text{not}}{=} A^2 V(2,0) \\ \text{où} \quad &-L V(2,0) = Q(V(1,0), V(1,0)) \end{aligned} \quad (\text{V-1-1 } 17)$$

On va suivre les mêmes étapes que celles détaillées au chapitre III pour déterminer les vecteurs U_n et les coefficients t_n .

ORDRE 3Détermination de t_2

On fait le produit scalaire de l'équation (V-1-1 15-c) avec le mode de flambage $V(1,0)$ et on utilise la propriété autoadjointe de l'opérateur L .

$$t_2 \ll L'.U_1, V(1,0) \gg + 2 \ll Q(U_1, U_2); V(1,0) \gg + \tau^3 \lambda_c \ll L'.V^*, V(1,0) \gg = 0$$

En utilisant les notations introduites pour les vecteurs U_1 et U_2 on obtient:

$$t_2 = \frac{-1}{\ll L'.V(1,0), V(1,0) \gg} [2A^2 \ll Q(V(1,0), V(2,0)); V(1,0) \gg + \frac{\tau^3 \lambda_c}{A} \ll L'.V^*, V(1,0) \gg]$$

$$t_2^{\text{not}} = A^2 C(2,0) + \frac{\tau^3}{A} C(-1,3) \quad (\text{V-1-1 } 18)$$

où

$$\begin{cases} C(2,0) = \frac{-2 \ll Q(V(1,0), V(2,0)); V(1,0) \gg}{\ll L'.V(1,0), V(1,0) \gg} \\ C(-1,3) = -\lambda_c \frac{\ll L'.V^*, V(1,0) \gg}{\ll L'.V(1,0), V(1,0) \gg} \end{cases}$$

Comme le défaut géométrique qui influe de manière prépondérante sur le comportement critique et post-critique de la coque cylindrique est le défaut modal $[W1]$, on prend le défaut $V^* = V(1,0)$ ($V(1,0)$ mode de flambage). Cela mène à:

$$C(-1,3) = -\lambda_c$$

Détermination de U_3 .

On remplace t_2 , U_1 et U_2 par leurs valeurs dans l'équation (V-1-1 15-c) et on obtient :

$$L.U_3 = A^3 [- C(2,0) L'.V(1,0) - 2Q(V(1,0), V(2,0))] + \tau^3 [-\lambda_c L'.V^* - C(-1,3) L'.V(1,0)]$$

d'où

$$U_3 \stackrel{\text{not}}{=} A^3 V(3,0) + \tau^3 V(0,3) \quad (\text{V-1-1 } 19)$$

où

$$\begin{cases} L.V(3,0) = -C(2,0) L.V(1,0) - 2Q(V(1,0), V(2,0)) \\ L.V(0,3) = -\lambda_c L'.V^* - C(-1,3) L'.V(1,0) \end{cases}$$

Avec un défaut modal ($V^* = V(1,0)$) on a $C(-1,3) = -\lambda_c$, d'où:

$$V(0,3) = 0$$

ORDRE 4

$$L.U_4 + t_2 L'.U_2 + t_3 L'.U_1 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + 2\tau^3 Q(V^*, U_1) = 0$$

Détermination de t_3

$$t_2 \langle\langle L'.U_2, V(1,0) \rangle\rangle + t_3 \langle\langle L'.U_1, V(1,0) \rangle\rangle + 2 \langle\langle Q(U_1, U_3); V(1,0) \rangle\rangle + \langle\langle Q(U_2, U_2); V(1,0) \rangle\rangle + 2\tau^3 \langle\langle Q(V^*, U_1), V(1,0) \rangle\rangle = 0$$

A cause de l'orthogonalité induite par la symétrie de révolution cette équation se ramène à:

$$t_3 \langle\langle L'.U_1, V(1,0) \rangle\rangle + 2\tau^3 \langle\langle Q(V^*, U_1), V(1,0) \rangle\rangle = 0$$

Comme V^* est un défaut modal $\langle\langle Q(V^*, U_1), V(1,0) \rangle\rangle = 0$, on obtient:

$$t_3 = 0 \quad (\text{V-1-1 } 20)$$

Détermination de U_4

En remplaçant les t_i et U_i par les notations précédentes on obtient que U_4 est solution de l'équation suivante:

$$\begin{aligned} -L.U_4 &= t_2 L'.U_2 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + 2\tau^3 Q(V^*, U_1) \\ &= A^4 [C(2,0) L'.V(2,0) + 2Q(V(1,0), V(3,0)) + Q(V(2,0), V(2,0))] \\ &\quad + A\tau^3 [C(-1,3) L'.V(2,0) + 2Q(V^*, V(1,0))] \end{aligned}$$

On pose alors en suivant l'ordre de A et de τ

$$U_4 = A^4 V(4,0) + A\tau^3 V(1,3) \quad (\text{V-1-1 } 21)$$

où

$$-L.V(4,0) = C(2,0) L'.V(2,0) + 2Q(V(1,0), V(3,0)) + Q(V(2,0), V(2,0))$$

$$-L.V(1,3) = C(-1,3) L'.V(2,0) + 2Q(V^*, V(1,0))$$

On peut continuer de la même manière à développer les problèmes correspondant aux ordres successifs. En utilisant des relations de récurrence introduites par Damil pour la poutre sur fondation élastique [D1], on peut montrer facilement que les vecteurs U_n et les coefficients t_n se mettent sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = A^n \sum_{0 \leq 2r \leq n-1} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} V(n-3r, 3r) \\ t_n = A^n \sum_{0 \leq 2p \leq n} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} C(n-3r, 3r) \end{array} \right. \quad (\text{V-1-1 } 22)$$

où les vecteurs $V(n-3r, 3r)$ sont les solutions de:

$$-L.V(n-3r, 3r) = \quad (\text{V-1-1 } 23)$$

$$\sum_{p=0}^{n-3} \sum_{2q=\text{Max}(0, 2r-n+p+3)}^{\min(2r, p+2)} C(p+2-3q, 3q) L'.V(n-p-2-3(r-q), 3(r-q))$$

$$+ \Delta^1(r) \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{2j=\text{Max}(0, 2r-n+1+p)}^{\min(2r, p-1)} Q [V(p-3j, 3j) ; V(n-p-3(r-j), 3(r-j))]$$

$$+ 2\Delta^2(r) Q(V^*; V(n-3r, 3r-3)) + \Delta^3(r) C(n-3r, 3r-3) L'.V^*$$

où

$$\Delta^1(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2r = n-1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \Delta^2(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ ou } 2r = n-1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \Delta^3(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les coefficients t_{2n-1} sont nuls à cause de la symétrie de la structure, du chargement et de la prise en compte d'une imperfection modale. Les coefficients $C(2n-3r,3r)$ formant t_{2n} sont donnés par:

(V-1-1 24)

$$\begin{aligned}
 C(2n-3r,3r) = & \frac{-1}{\langle\langle L'.V(1,0), V(1,0) \rangle\rangle} \{ \\
 & \sum_{2p=0}^{2n-3} \sum_{2q=\text{Max}(0, 2r-2n+2p+2)}^{\min(2r,2p+2)} C(2p+2-3q,3q) \langle\langle L'.V(2n-2p-1-3(r-q),3(r-q)); V(1,0) \rangle\rangle \\
 & + \Delta^4(r) \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\text{Max}(0,2r-2n+p)}^{\min(2r,p-1)} \langle\langle Q(V(p-3j,3j); V(2n+1-p-3(r-j),3(r-j)); V(1,0) \rangle\rangle \\
 & + 2\Delta^5(r) \langle\langle Q(V^*, V(2n+1-3r,3r-3)) ; V(1,0) \rangle\rangle \\
 & + \Delta^6(r) C(2n+1-3r,3r-3) \langle\langle L'.V^*; V(1,0) \rangle\rangle \}
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Delta^4(r) = & \begin{cases} 0 & \text{si } r = n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} & \Delta^5(r) = & \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \text{ ou } r = n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
 \text{et } \Delta^6(r) = & \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi à l'aide de ces relations de récurrence, on peut déterminer les vecteurs U_n et les coefficients t_n pour les différents ordres n . En utilisant une discrétisation par éléments finis 2D, on peut se restreindre à ces formules de récurrence et déterminer les vecteurs $V(n-3r,3r)$ et les coefficients $C(2n-3r,3r)$. Mais comme cette résolution par éléments finis en 2D est "très" coûteuse en temps CPU, on va développer un code d'éléments finis 1D. Pour cela, on va décomposer les vecteurs $V(n-3r,3r)$ suivant les harmoniques et déterminer d'abord de manière formelle, les problèmes unidimensionnels correspondants.

V-1-2 PASSAGE DE 2D à 1D

V-1-2-a Développement des ordres inférieurs

Dans le but d'utiliser les éléments finis 1D, on va encore se servir de la décomposition en série de Fourier décrite au chapitre III. Cela nous mène à introduire des indices supplémentaires tenant compte des harmoniques et de l'ordre des imperfections. On va introduire une notation indicielle même aux ordres 1 et 2 qui nous servira dans la suite. On décompose $U_1 = A V(1,0)$ suivant les harmoniques n et $-n$ par:

$$U_1 \stackrel{\text{not}}{=} A [V(1,1,0,0) + V(1,0,1,0)] \quad (V-1-2 \ 1)$$

où les indices $(p, p-k, k, r)$ de $V(p, p-k, k, r)$ sont: p l'ordre du paramètre A , $(p-k, k)$ l'ordre des harmoniques et r l'ordre du défaut. Ainsi le mode de flambage suivant l'harmonique n est noté par $V(1,1,0,0)$. On décompose le défaut $V^*(x, y)$ par :

$$\begin{aligned} V^*(x, y) &= v^*(x) e^{iny/R} + \bar{v}^*(x) e^{-iny/R} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} V(0,1,0,3)(x, y) + V(0,0,1,3)(x, y) \end{aligned} \quad (V-1-2 \ 2)$$

où

$$\begin{aligned} v^*(x) &= v(0,1,0,3)(x) \quad \text{et} \quad \bar{v}^*(x) = v(0,0,1,3)(x) \\ V(0,1,0,3)(x, y) &= v(0,1,0,3)(x) e^{iny/R} \\ V(0,0,1,3)(x, y) &= v(0,0,1,3)(x) e^{-iny/R} \end{aligned}$$

A l'ordre 2 on a alors

$$U_2 \stackrel{\text{not}}{=} A^2 [V(2,2,0,0) + V(2,1,1,0) + V(2,0,2,0)] \quad (V-1-2 \ 3)$$

Les indices de $V(2,2-j,j,0)$ sont définis de manière que : 2 correspond à l'ordre de A^2 , $(2-j, j)$ à la décomposition en harmoniques, et 0 à l'ordre de τ^0 .

ORDRE 3

A l'ordre 3, il y a l'influence des imperfections. Comme on s'est restreint au défaut modal, $U_3 = A^3 V(3,0)$ et $V(0,3) = 0$ avec

$$V(3,0) = A^2 [V(3,3,0,0) + V(3,2,1,0) + V(3,1,2,0) + V(3,0,3,0)]$$

et $t_2(A) = A^2 C(2,0) + \frac{\tau^3}{A} C(-1,3) \quad (V-1-2 \quad 4)$

ORDRE 4

$$L.U_4 + t_2 L'.U_2 + t_3 L'.U_1 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + 2\tau^3 Q(V^*, U_1) = 0$$

Comme on l'a déjà signalé $t_3 = 0$.

Détermination de U_4

$$L.U_4 + A^2 C(2,0) L' U_2 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + \frac{\tau^3}{A} C(-1,3).L' U_2 + 2\tau^3 Q(V^*, U_1) = 0$$

On retrouve une partie correspondant à U_4 sans imperfection et une partie additionnelle correspondant à l'influence des défauts à l'ordre 4. En remplaçant U_1 , U_2 et U_3 par les notations récemment introduites on obtient:

$$-L.U_4 + A^2 C(2,0) L' .U_2 + 2 Q(U_1, U_3) + Q(U_2, U_2) + A\tau^3 C(-1,3) \{ L'.V(2,2,0,0) + L'.V(2,1,1,0) + L'.V(2,0,2,0) \} + 2A\tau^3 \{ Q(V(0,1,0,3), V(1,1,0,0)) + Q(V(0,1,0,3), V(1,0,1,0)) + Q(V(0,0,1,3), V(1,1,0,0)) + Q(V(0,0,1,3), V(1,0,1,0)) \}$$

On obtient alors $U_4 = U_4^{\text{parfait}} + U_4^{\text{défaut}}$ et après la décomposition suivant les harmoniques :

$$U_4^{\text{parfait}} \stackrel{\text{not}}{=} A^4 \sum_{j=0}^4 V(4,4-j,j,0) +$$

$$U_4^{\text{défaut}} \stackrel{\text{not}}{=} A\tau^3 [V(1,2,0,3) + V(1,1,1,3) + V(1,0,2,3)]$$

Finalement U_4 se met sous la forme :

(V-1-2 5)

$$U_4 = A^4 \sum_{0 \leq 2p \leq 3} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3p} \sum_{j=0}^{4-2p} V(4-3p, 4-2p-j, j, 3p)$$

où les $V(4,4-j,j,0)$ sont donnés par les formules associées au cas sans défaut donné au chapitre III et les $V(4-3p,4-2p-j,j,3p)$ sont donnés par :

(V-1-2 6)

- $L.V(1,2,0,3) = C(-1,3) L'.V(2,2,0,0) + 2 Q(V(0,1,0,3) ; V(1,1,0,0))$
- $L.V(1,1,1,3) = C(-1,3) L'.V(2,1,1,0) + 2 Q(V(0,0,1,3), V(1,1,0,0))$
 $+ 2 Q(V(0,1,0,3) ; V(1,0,1,0))$
- $L.V(1,0,2,3) = C(-1,3) L'.V(2,0,2,0) + 2 Q(V(0,0,1,3), V(1,0,1,0))$

En continuant de la même manière, on va déterminer les équations à résoudre pour les ordres ultérieurs.

Le développement de ces calculs devient de plus en plus lourd avec les ordres, cela rend fastidieux le développement manuel des ordres supérieurs. L'utilisation de systèmes de calcul formel, type Macsyma ou Maple [C7], nous a permis de développer les ordres supérieurs de manière très simple.

L'utilisation de ces systèmes dans l'industrie ou dans la recherche permet, à coup sûr d'économiser de façon systématique le temps de l'ingénieur ou du chercheur. Ces systèmes s'occupent de gérer, de manière sûre, les formules trop complexes dont le calcul à la main s'avère trop lourd. Il existe une multitude de systèmes de calcul formel. Ces systèmes ont néanmoins de grandes similarités d'utilisation. Ainsi ces systèmes de calcul symbolique nous ont permis, entre autre, de développer les ordres supérieurs et de déterminer les relations de récurrence associées.

V-1-2-b Relations de récurrence

Pour la résolution numérique de ces problèmes les relations de récurrence sont d'une grande importance, vu qu'elles permettent de faire les calculs numériques jusqu'à l'ordre voulu avec une programmation claire et bien structurée.

A l'aide de la formule de récurrence (V-1-1 22) U_n est donné par :

$$U_p = A^p \sum_{0 \leq 2r \leq p-1} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} V(p-3r, 3r)$$

où les $V(p-3r, 3r)$ sont solutions des problèmes 2D (V-1-1 23). Comme on va utiliser les éléments finis 1D, on décompose $V(p-3r, 3r)$ suivant les harmoniques comme suit:

$$V(p-3r, 3r) = \sum_{j=0}^{p-2r} V(p-3r, p-2r-j, j, 3r) \quad (\text{V-1-2 } 7)$$

Les vecteurs $V(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$ sont associés à l'harmonique $(p-2r-2j)N$ où N est le nombre d'ondes critique.

Pour la détermination des vecteurs $V(p-3r, 3r)$, donc de U_p , pour différents ordres p en utilisant les éléments finis 1D, on doit déterminer les problèmes linéaires associés à chaque $V(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$.

Proposition 1

(V-1-2 8)

Pour $n \geq 3$

$$U_n = A^n \sum_{0 \leq 2r \leq n-1} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} \sum_{j=0}^{n-2r} V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$$

où les vecteurs $V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$ sont les solutions de :

$$-L.V(n-3r, n-2r-j, j, 3r) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\min(\frac{n-3}{2}, r+j-1, n-1-r-j)} \sum_{q=\max(0, r+p-\frac{n-3}{2}, p+1-j, -n+p+1+2r+j)}^{\min(r, p+1)} \\ & C(2p+2-3q, 3q) L'.V(n-2p-2-3(r-q), n-p-1-2r+q-j, j+q-p-1, 3(r-q)) \\ & + \Delta^1(r) \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{2k=\max(0, 2r-n+1+p)}^{\min(p-1, 2r)} \sum_{l=\max(0, j-n+p+2r-2k)}^{\min(j, p-2k)} \\ & Q(V(p-3k, p-2k-l, l, 3k) ; V(n-p-3r+3k, n-p-2r+2k-j+l, j-l, 3(r-k))) \\ & + 2\Delta^2(r) \sum_{k=\max(0, -n+1+2r+j)}^{\min(l, j)} Q(V(0, 1-k, k, 3); V(n-3r, n-1-2r-j+k, j-k, 3r-3)) \\ & + \Delta^3(r) \text{conv}(\frac{1+n}{2} -r-j, \frac{1-n}{2} +r+j) C(n-3r, 3r-3) L'.V(0, \frac{1+n}{2} -r-j, \frac{1-n}{2} +r+j, 3) \end{aligned}$$

avec la convention

$$\text{conv}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les $\Delta^i(r)$ sont donnés dans (V-1-1 23) et (V-1-1 24).

Pour les coefficients t_n à cause de la symétrie on a $t_{2n+1} = 0$

Proposition 2

(V-1-2 9)

$$t_{2n} = A^{2n} \sum_{0 \leq r \leq n} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} C(2n-3r, 3r)$$

où les $C(2n-3r, 3r)$ sont donnés par :

$$C(2n-3r, 3r) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{< L'.V(1,1,0,0), V(1,1,0,0) >} < \left\{ \sum_{2p=0}^{2n-3} \sum_{q=\text{Max}(0, r+p-n+1)}^{\min(r, p+1)} \right. \\ & C(2p-3q+2, 3q) L'.V(2n-2p-1, 3(r-q), n-p-r+q, n-p-r+q-1, 3(r-q)) \\ & + \Delta^4(r) \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\text{max}(0, 2r-2n+p)}^{\min(2r, p-1)} \sum_{k=\text{max}(0, -n+r-1+p-2j)}^{\min(n-r, p-2j)} \\ & Q[V(p-3j, p-2j-k, k, 3j), V(2n-p+1-3(r-j), n+1-p-r+2j+k, n-r-k, 3(r-j))] \\ & + 2\Delta^5(r) \sum_{j=\text{Max}(0, r-n)}^{\min(1, n-r)} Q[V(0, 1-j, j, 3); V(2n-3r+1, n-r+j, n-r-j, 3r-3)] + \\ & \left. + \Delta^6(r) C(2n+1-3r, 3r-3) L'.V(0, 1, 0, 3) \right\} ; V(1, 1, 0, 0) > \end{aligned}$$

La démonstration de ces deux propositions est technique et sera faite dans l'annexe B.

Ces deux propositions nous permettent d'avoir clairement les problèmes 1D à résoudre à chaque ordre du développement asymptotique. Grâce à ces relations de récurrence, on établit un programme de résolution numérique bien structuré permettant d'effectuer ces calculs pour tout ordre. Ainsi, on établit un code de calcul d'éléments finis 1D facile à mettre en oeuvre pour l'étude de ce type de problèmes.

V-2 RESULTATS NUMERIQUES

V-2-0 INTRODUCTION

Dans le chapitre III, on a vu que la coque cylindrique idéale perd sa stabilité au point de bifurcation. La charge critique de bifurcation est atteinte au point d'intersection entre la branche fondamentale, "branche pré-critique", et la branche post-critique. Une structure, réelle, avec imperfection, perd sa stabilité au *point limite*. Comme ces imperfections sont inévitables, la détermination de ce point limite est d'une grande importance.

L'écart entre la charge critique et la charge limite - *réduction de la charge critique* - détermine le degré de la sensibilité de la structure aux imperfections qui est dû à un comportement post-critique instable. Cette réduction de la charge a été prédite par différents auteurs dont le pionnier fut Koiter. Pour la compréhension de l'évolution de la déformation de la structure après ce chargement limite, la détermination du comportement post-critique est aussi cruciale.

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats numériques clarifiant l'influence des imperfections de forme modale sur la réduction de la charge critique. On donne une formule de réduction de la charge critique facile à mettre en oeuvre. L'étude du comportement du post-flambage initial est aussi fait pour différentes valeurs d'amplitudes des imperfections.

V-2-1 Première approximation de la charge limite de flambage

La différence prononcée entre la charge de bifurcation et la charge de flambage expérimentale pour les coques cylindriques justifie la sensibilité de cette structure aux imperfections. Il est alors primordial de déterminer des relations liant la charge de bifurcation et la charge limite de flambage pour de telles structures. Pour cela, différents auteurs ont introduit des relations de réduction de la charge critique [K5], [H1], [B14-16], [A2].

Pour la détermination de la charge limite de flambage, ces auteurs tronquent le développement asymptotique de la charge et du déplacement à l'ordre 2.

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_c + a^2 C(2,0) + \frac{a_0}{a} C(-1,3) \\ U = a U_1 + a^2 U_2 \end{cases}$$

(V-2 1)

Le point limite en chargement λ_m est donné par $\frac{d\lambda}{da} = 0$. Ainsi on obtient une relation de réduction de la charge critique liant la charge de bifurcation λ_c , la charge limite λ_m et l'amplitude de l'imperfection a_0 .

(V-2 2)

$$\lambda_m - \lambda_c = 3 C(2,0)^{(1/3)} \left(\frac{a_0 C(-1,3)}{2} \right)^{(2/3)}$$

Comme dans le cas des coques le comportement post-critique initial est instable le coefficient $C(2,0)$ est négatif. Cela mène à:

(V-2 3)

$$\lambda_c - \lambda_m = 3|C(2,0)|^{(1/3)} \cdot \left(\frac{a_0 C(-1,3)}{2} \right)^{(2/3)}$$

où les coefficients $C(2,0)$ et $C(-1,3)$ sont donnés par (V-1 18).

Il a été confirmé expérimentalement [W1], que c'est le défaut géométrique de forme modale qui influe de manière prépondérante sur le comportement critique de la coque cylindrique. En prenant un défaut modal ($V^* = V(1,0)$) on obtient $C(-1,3) = -\lambda_c$, d'où cette relation devient :

(V-2 4)

$$\lambda_c - \lambda_m = 3|C(2,0)|^{(1/3)} \left(\frac{\lambda_c}{2} \right)^{(2/3)} a_0^{(2/3)}$$

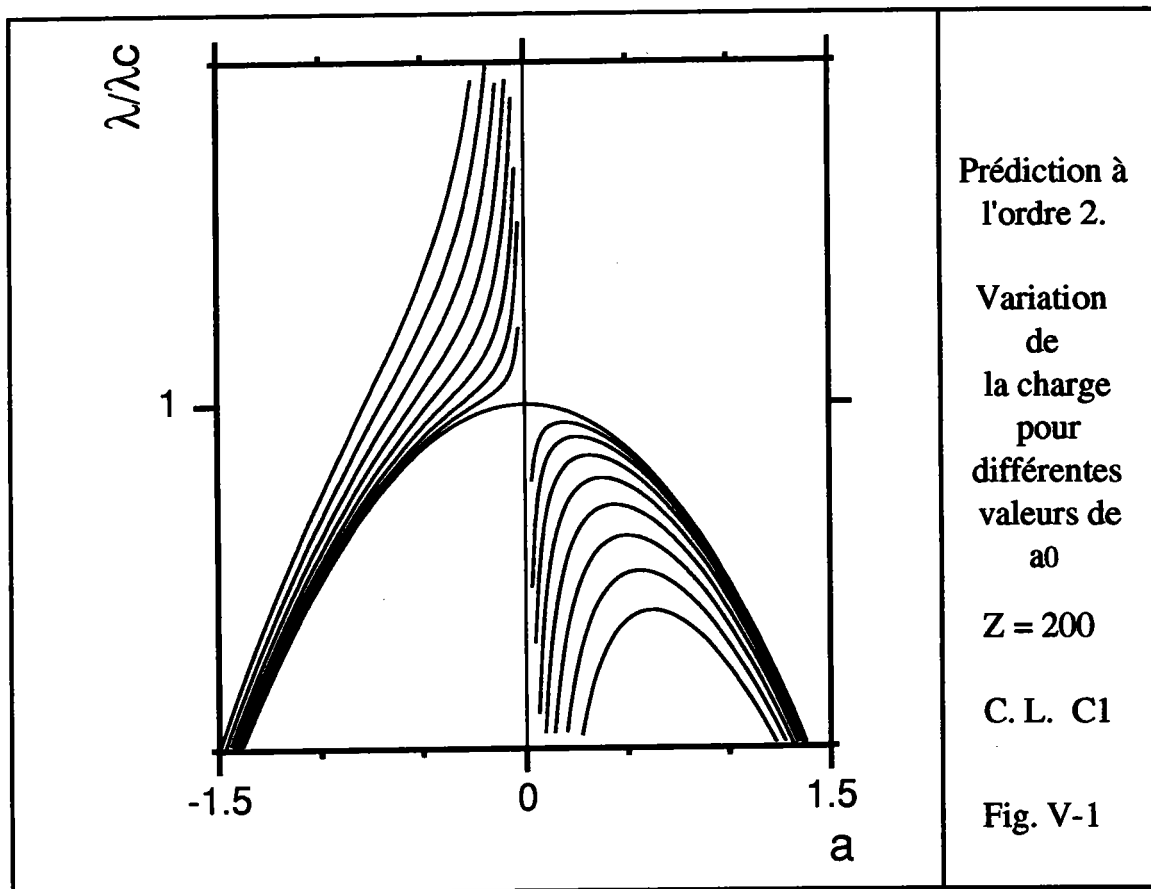
Cette relation permet alors d'avoir, de manière très simple, la charge limite de flambage en fonction de l'amplitude des imperfections a_0 . Comme le seul coefficient à déterminer est $C(2,0)$, donné par (V-1 18), cette relation pourra aisément intégrer tous les codes de calcul d'éléments finis.

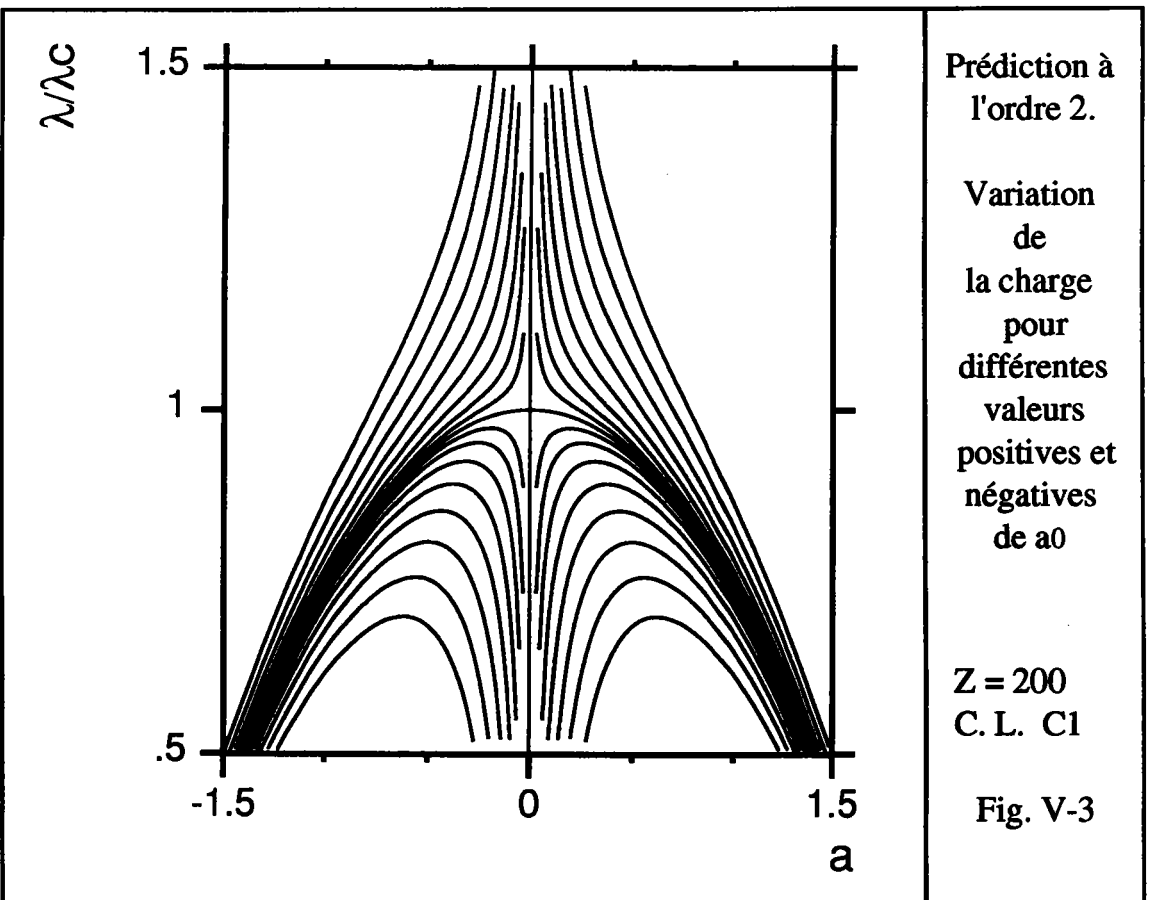
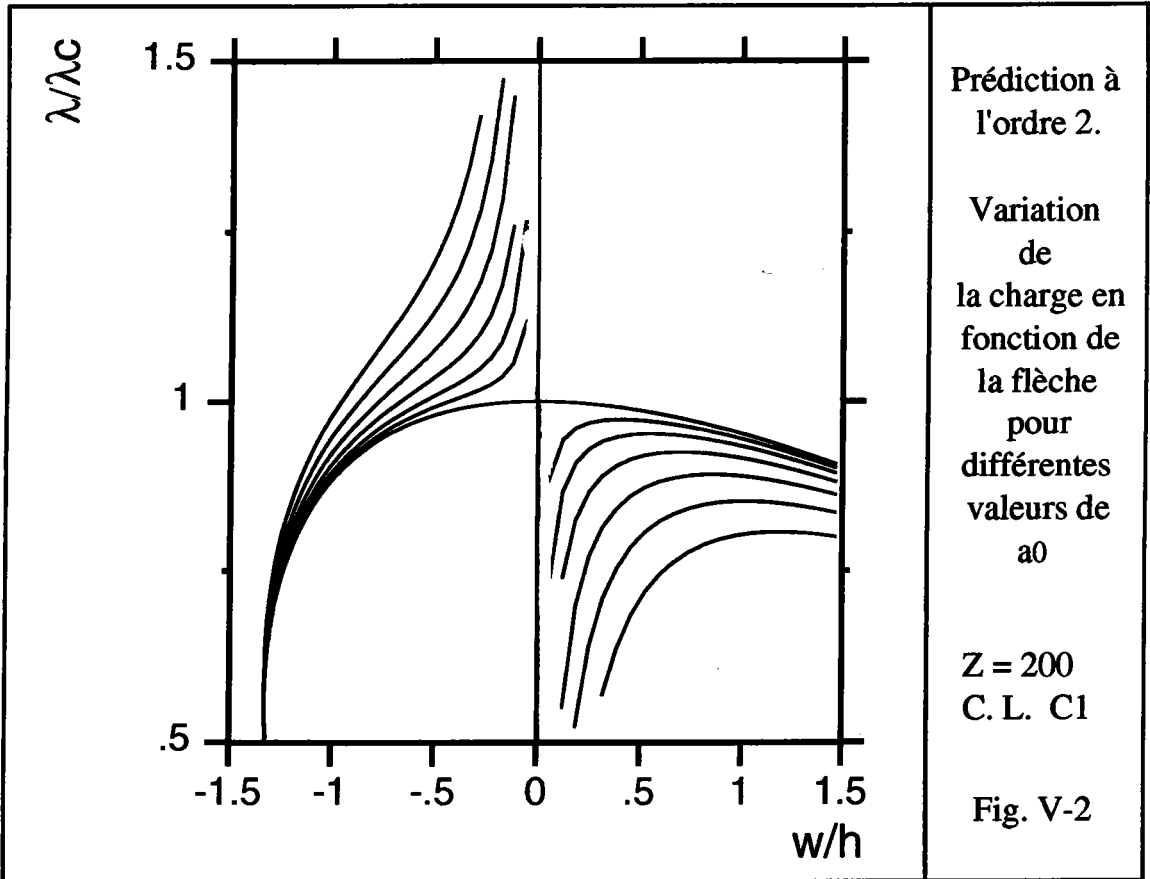
V-2-2 Comportement post-critique en présence des imperfections

V-2-2-a Prédiction asymptotique à l'ordre 2

L'arrêt du développement asymptotique à l'ordre 2 permet non seulement de déterminer la charge limite mais aussi d'avoir une assez bonne information sur le comportement post-critique. Sur les figures suivante on présente le comportement post-critique prédit par l'ordre 2 pour différentes valeurs de l'amplitude des imperfections a_0

Sur les figures ci-après V-1, V-2 et V-3, on présente la prédiction à l'ordre 2 du comportement du post-flambage de la coque cylindrique sous pression externe. En présence des imperfections on a un flambage par point limite. Ce point limite, qui correspond à la charge maximale, diminue en fonction de l'amplitude des imperfections.





V-2-2-b Prédiction asymptotique aux ordres supérieurs

Le développement asymptotique à l'ordre 2 permet de déterminer l'influence des imperfections sur le comportement post-critique, mais la validité de cette prédiction est très limitée au voisinage du point critique. Le développement des ordres supérieurs permet d'améliorer considérablement cette prédiction. Pour cela on a à déterminer les vecteurs $V(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$ et les coefficients $C(n-3r, 3r)$ formant U_n et t_n .

La détermination des vecteurs $V(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$ revient à la résolution des problèmes linéaires:

$$L.V(p-3r, p-2r-j, j, 3r) = F(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$$

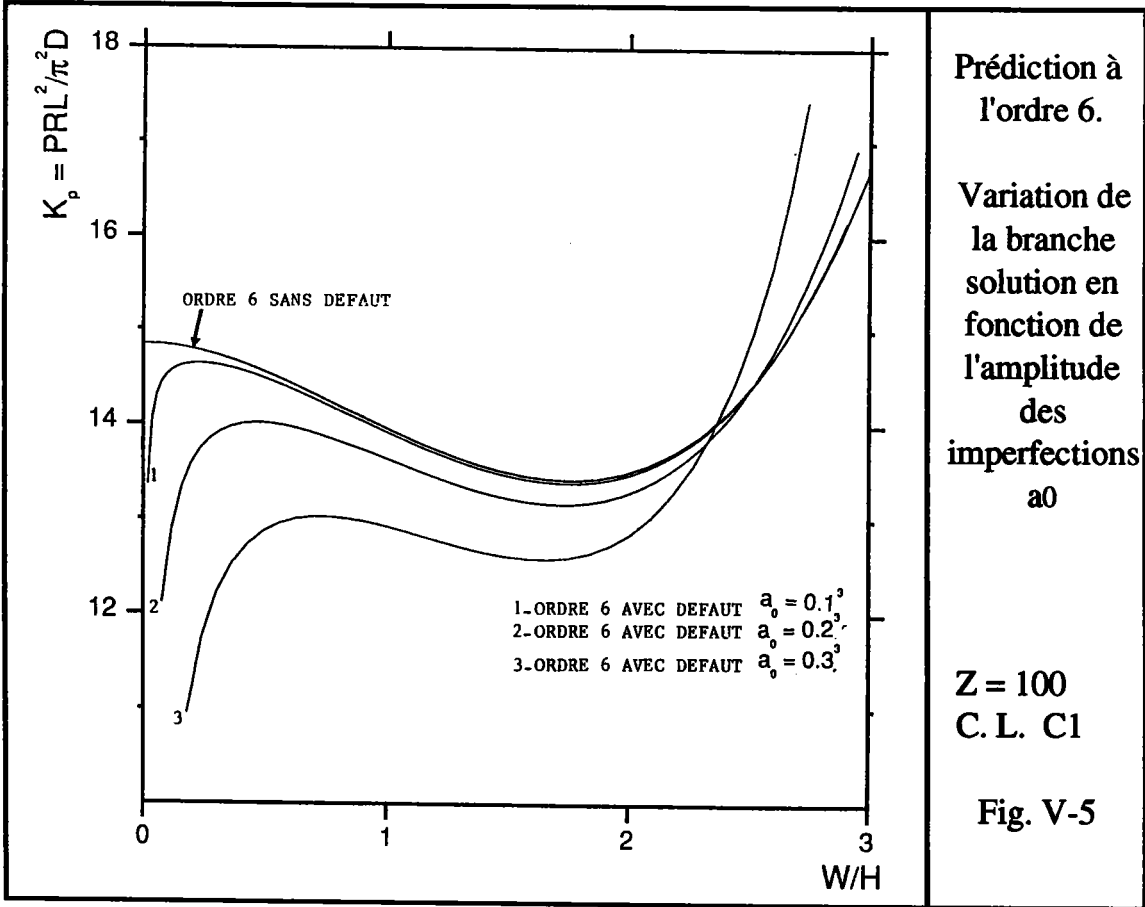
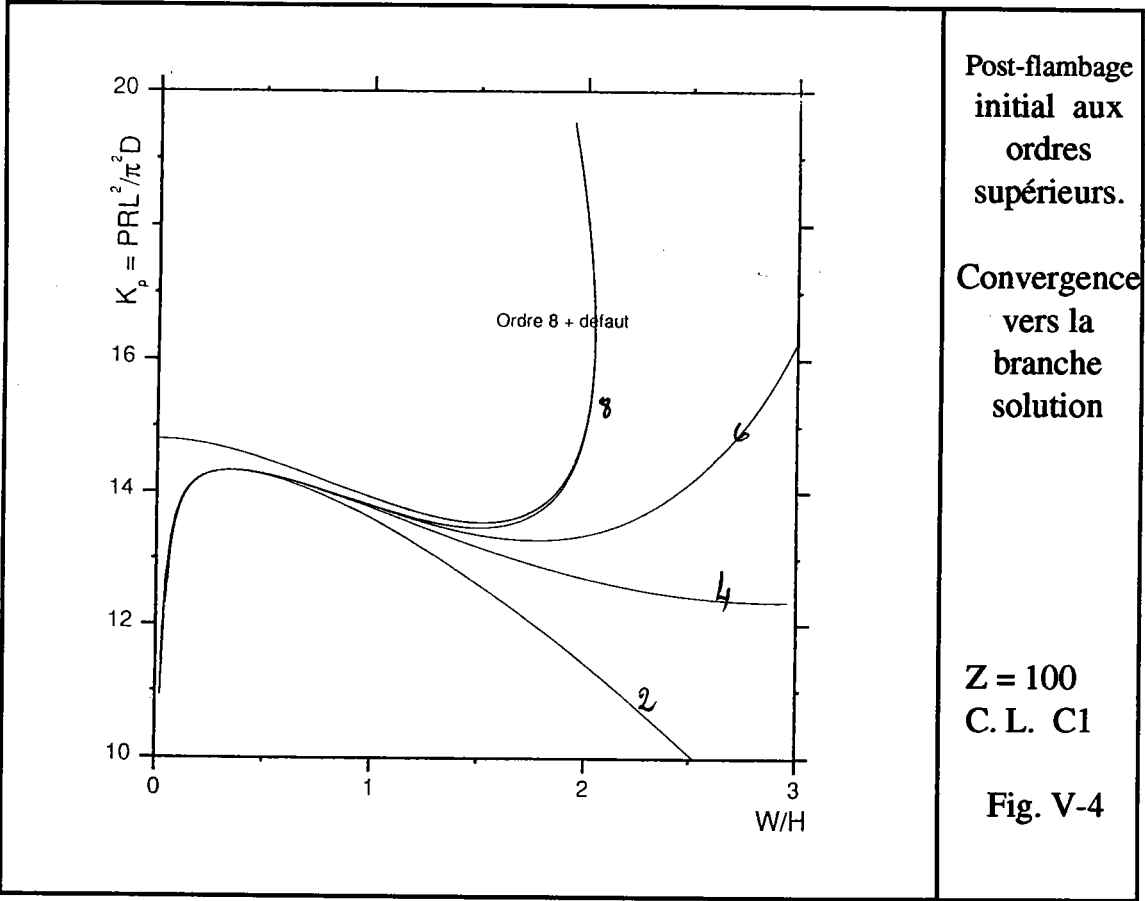
ou en notations 1D

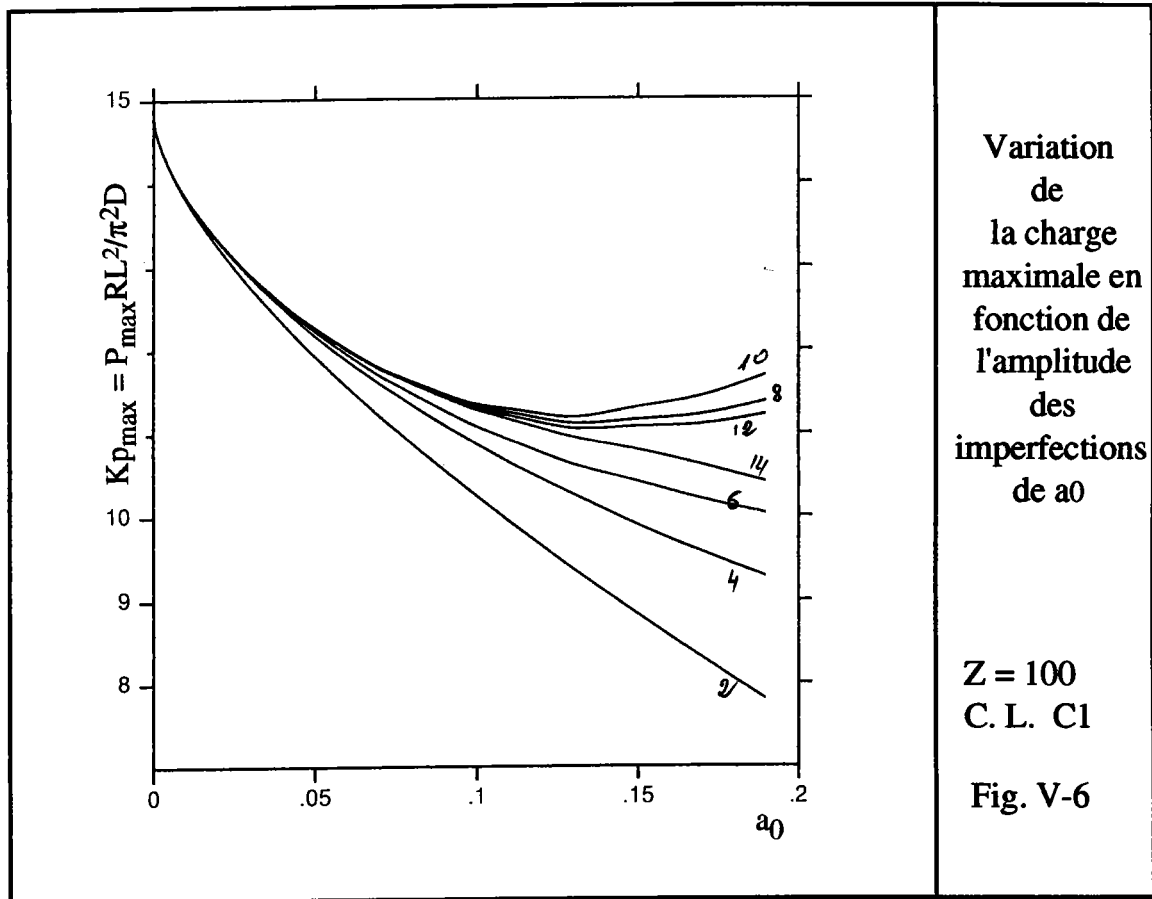
$$L_{p-2r-2j}.v(p-3r, p-2r-j, j, 3r) = f(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$$

où $f(p-3r, p-2r-j, j, 3r)$ est le second membre associé à l'harmonique $(p-2r-2j)$.

La différence algorithmique avec le cas sans défaut est : la multitude d'indices et la complexité du second membre. Comme ces indices sont gérés par des relations de récurrence et le second membre est formé par les mêmes opérateurs que dans le cas parfait, les étapes de résolution numérique sont les mêmes que celles décrites au chapitre III. Les coefficients $C(n-3r, 3r)$ sont donnés par les équations algébriques (V-1-2 9). La résolution numérique des équations (V-1-2 8) et (V-1-2 9) permet de déterminer les vecteurs $U(p)$ et les coefficients $t(p)$ pour tout ordre p . On peut alors de la même manière que dans le cas sans défaut, déterminer le chargement et le déplacement prédit par les ordres supérieurs pour différentes valeurs de l'amplitude des imperfections.

Sur les figures suivantes, on présente le comportement post-critique prédit par les ordres supérieurs de la coque cylindrique sous pression avec une imperfection géométrique modale. Ce comportement est déterminé pour différentes valeurs de l'amplitude des imperfections.





La figure V-4 présente la convergence vers la branche solution pour une amplitude de défaut a_0 fixe. On note que les ordres supérieurs améliorent davantage la prédiction de l'ordre 2. Sur la figure V-5, on présente la variation de la solution obtenue à l'ordre 6 en fonction de l'amplitude des imperfections. Sur la figure V-6, on présente la charge maximale en fonction de a_0 . On note l'amélioration nette de la prédiction de l'ordre 2.

Ces figures montrent que la méthode asymptotique-numérique semble permettre d'obtenir une bonne approximation de la charge maximum jusqu'à une amplitude des imperfections $a_0 \approx 0.1$. Ce qui correspond à une réduction de la charge critique d'environ 25 %.

V 3 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude asymptotique du problème de bifurcation perturbée décrivant le comportement critique et post-critique de la coque cylindrique. La formulation en opérateurs introduite, nous a permis de réaliser cette étude à n'importe quel ordre de troncature de la série asymptotique.

L'utilisation de systèmes de calcul formel Macsyma ou Maple nous a permis la mise en place des relations de récurrence permettant de traiter ce problème assez complexe, à cause de l'introduction des imperfections et de la décomposition en harmoniques. Ainsi, nous avons établi un code de calcul d'éléments finis 1D, facile à utiliser. Cela nous a permis de déterminer la variation de la réduction de la charge critique en fonction de l'amplitude des imperfections et de déterminer le comportement du post-flambage initial de la coque cylindrique sous pression.

En utilisant les mêmes techniques, il sera possible de traiter par la méthode asymptotique-numérique les problèmes dépendant de plusieurs paramètres (chargement, défaut, variation de forme de la structure, ...). Malgré tout, les résultats obtenus ne permettent pas de résoudre complètement les problèmes réels où l'on aimerait traiter des défauts de l'ordre de l'épaisseur de la coque ($a_0 = 0.5$) et des réduction de charges critiques d'au moins 50 %.

Les résultats précédemment obtenus avec le même développement asymptotique pour la poutre sur fondation élastique [D1-2] donnait une zone de validité comparable. Il semble qu'il faudrait, soit compléter cette méthode asymptotique par une méthode de Ritz, soit utiliser un développement asymptotique d'une forme un peu différente.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons présenté une étude de problème de bifurcation et de bifurcation perturbée décrivant le comportement critique et post-critique des coques cylindriques. Pour cette étude, nous avons décrit une méthode asymptotique-numérique facile à mettre en oeuvre.

Dans les deux premiers chapitres, nous avons rappelé les notions générales de la stabilité élastique. Nous avons introduit une formulation en opérateurs de l'équation d'équilibre permettant d'utiliser les résultats classiques de la théorie spectrale des opérateurs compacts. Les branches solutions du problème de bifurcation sont alors représentables sous forme de séries entière au voisinage du point critique.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les différentes étapes du développement de la méthode asymptotique-numérique. Le principe de cette méthode est de calculer numériquement deux séries donnant le déplacement et le chargement en fonction de l'amplitude du mode du flambage. Le problème non-linéaire de l'équilibre se ramène alors à une séquence de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. La décomposition en harmoniques, nous a permis de nous ramener à des problèmes monodimensionnels nécessitant l'inversion de petites matrices associés à chaque harmonique. Ainsi, nous avons établi un code de calcul d'éléments finis 1D permettant de déterminer un grand nombre de termes des séries.

La décomposition en harmoniques permet une réduction considérable en temps de calcul en réduisant la dimension du problème. Cette technique est souvent utilisée pour la résolution de problèmes périodiques. Elle nous sera alors d'une grande utilité pour la résolution des problèmes 2D ou 3D de vibrations non-linéaire.

La prise en compte des imperfections introduit un paramètre supplémentaire dans les développements. Avec la décomposition en harmoniques, cela rend les développements complexes. Le calcul formel nous a permis de faire fonctionner les procédures asymptotiques pour ces problèmes complexes. Ceci montre, que l'on pourrait appliquer cette méthode pour de nombreux problèmes, par exemple, traiter des problèmes dépendant de plusieurs paramètres.

Les applications présentées montrent qu'on peut déterminer, de manière automatique, une grande partie des branches bifurquées. Le comportement du post-flambage initial de la coque cylindrique parfaite sous pression est alors déterminé. En tenant compte des imperfections (défaut modal), une bonne estimation de la réduction de la charge critique est donnée. Le comportement post-critique initial de la coque cylindrique pour différentes amplitudes des imperfections est présenté.

Malgré tout, les développements en séries présentés ont un rayon de convergence. Cela limite la zone de validité de la solution ainsi prédite.

Comme on calcule une représentation analytique des branches de solutions, les moyens d'amélioration de convergence peuvent être facilement adoptés. L'utilisation des approximants de Padé améliorent spectaculairement, le domaine de convergence dans le cas des plaques. L'application de cette technique aux coques cylindriques ne permet pas l'amélioration espérée. L'adaptation d'autres moyens, comme la technique de la base réduite sont envisagées.

Nous rappelons les *principaux avantages* de cette méthode.

- La réduction du temps de calcul.

Nous avons transformé le problème non-linéaire en une série de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. La résolution nécessite alors une seule inversion de matrice.

- Les branches de solutions sont déterminées analytiquement. Cela permet de déterminer la branche solution pour différentes amplitudes des imperfections sans aucun calcul supplémentaire. Le retraitement des séries par les techniques d'amélioration de convergence est ainsi facilité.
- L'automatisation de la procédure de calcul.
- La facilité d'adaptation à différents problèmes. La résolution de problèmes dépendant de deux paramètres (charge et amplitude des défauts, chapitre V) est un exemple élustrant cette possibilité.

Dans les perspectives, nous visons l'amélioration des performances de cette méthode et l'extension de son champ d'application dans les domaines suivants :

- Vibrations non-linéaires, instabilité dynamique avec applications aux problèmes d'interaction fluide-structure.
- Etude des non-linéarités fortes: Plasticité, contact,...
- Etude des structures à grandes déformations.
- Sensibilité de la réponse d'une structure à divers paramètres, notamment le changement de forme.

ANNEXE A

1-A Relation de recurrence pour les $V(p-j,j)$

On décompose $V(p)$ suivant les harmoniques par :

$$V(p) = \sum_{j=0}^p V(p-j,j)$$

où

$$V(p-j,j)(x,y) = v(p-j,j)(x) e^{i(p-2j)ny/R}$$

On va tenir compte implicitement de cette séparation de variables de $V(p-j,j)(x,y)$ en développant les problèmes linéaires associés à $V(p-j,j)$.

$$L V(p) = - \sum_{r=1}^{p-1} t(r) L'.V(p-r) - \sum_{r=1}^{p-1} Q(V(r), V(p-r))$$

à cause de la symétrie de révolution on a $t_{2p+1} = 0$, d'où :

$$\sum_{r=1}^{p-1} t(r) L' V(p-r) = \sum_{2r=2}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-2r} t(2r) L'.V(p-2r-k,k)$$

En faisant un changement de variables $r+k = j$ on se ramène à :

$$= \sum_{2r=2}^{p-1} \sum_{j=r}^{p-r} t(2r) L'.V(p-r-j, j-r).$$

En introduisant une convention $V(i,j) = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &= \sum_{2r=2}^{p-1} \sum_{j=0}^p t(2r) L'.V(p-r-j, j-r). \\ &= \sum_{j=0}^p \sum_{2r=2}^{p-1} t(2r) L'.V(p-r-j, j-r). \end{aligned}$$

En faisant la même démarche on obtient

$$\sum_{r=1}^{p-1} Q(V(r), V(p-r)) = \sum_{j=0}^p \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{k=0}^q Q[V(q-k,k), V(p-q-j+k, j-k)]$$

Comme $L.V(p) = \sum_{j=0}^p L.V(p-j,j)$, les problèmes associés à chaque vecteur $V(p-j,j)$ sont donnés par :

$$L.V(p-j,j) = - \sum_{2r=2}^{p-1} t(2r) L'.V(p-r-j, j-r) - \sum_{q=1}^{p-1} \sum_{k=0}^q Q [V(q-k,k), V(p-q-j+k, j-k)]$$

avec la convention $V(p,q) = 0$ si $p < 0$ ou $q < 0$.

2-A Relation de récurrence pour les coefficients $t(p)$.

Pour déterminer les coefficients $t(p)$, on va définir un produit hermitien tenant compte de la décomposition en harmoniques.

Soient les vecteurs $V(p-j,j) (x,y) = v(p-j,j)(x) e^{in(p-2j)y/R}$
 $V(q-k,k) (x,y) = v(q-k,k)(x) e^{in(q-2k)y/R}$

On définit le produit hermitien $<< \ , \ >>$ par :

$$\begin{aligned} << V(p-j,j), V(q-k,k) >> &= \int_0^L \int_0^{2\pi R} V(p-j,j) \cdot \overline{V(q-k,k)} \, dx \, dy \\ &= \int_0^L v(p-j,j)(x) \overline{v(q-k,k)(x)} \int_0^{2\pi R} e^{in[p-2j-(q-2k)]y/R} \, dy \, dx \\ &= \delta_{p-2j,q-2k} 2\pi R \int_0^L v(p-j,j)(x) \overline{v(q-k,k)(x)} \, dx \end{aligned}$$

$$\text{où } \delta_{p-2j,q-2k} = \begin{cases} 1 & \text{si } p-2j = q-2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On se ramène alors au produit hermitien 1D qu'on note $< \ , \ >$.

$$<< V(p-j,j) ; V(q-k,k) >> = \delta_{p-2j,q-2k} < v(p-j,j), v(q-k,k) >.$$

Pour rester le plus long temps en 2D, on tient compte implicitement de la décomposition en harmoniques en posant:

$$<< V(p-j,j) ; V(q-k,k) >> = \delta_{p-2j,q-2k} << V(p-j,j), V(q-k,k) >>.$$

En tenant compte de la décomposition en harmoniques et en utilisant ce produit hermitien, on montre facilement que $t(2p+1) = 0$.

Il reste alors à déterminer les relations de récurrence donnant $t(2p)$.

A l'ordre $2p + 1$ on a:

$$\begin{aligned} L.V(2p+1) + \sum_{r=0}^{p-1} t(2r+2) L'.V(2p-2r-1) + \sum_{k=1}^{2p} Q[V(k), V(2p-k+1)] \\ L.V(2p+1) + t(2p) \cdot L'.V(1) + \sum_{r=0}^{p-2} t(2r+2) L'.V(2p-2r-1) \\ + \sum_{k=1}^{2p} Q[V(k), V(2p-k+1)] = 0 \end{aligned}$$

Pour déterminer $t(2p)$, on fait le produit hermitien de cette équation générale avec $V(1,0) = v(1,0)(x) e^{iny/R}$.

$$\begin{aligned} << L.V(2p+1), V(1,0) >> + t(2p) << L'.V(1), V(1,0) >> + \\ &\sum_{r=0}^{p-2} t(2p+2) << L'.V(2p-k-1), V(1,0) >> + \\ &\sum_{k=1}^{2p} << Q[V(k), V(2p-k+1)], V(1,0) >> = 0 \end{aligned}$$

Comme l'opérateur L est auto-adjoint on a :

$$* \quad << L.V(2p+1), V(1,0) >> = << V(2p+1), L.V(1,0) >> = 0$$

car $V(1,0)$ est le mode de flambage ($L.V(1,0) = 0$).

Comme $V(1) = V(1,0) + V(0,1)$, l'utilisation du produit hermitien prédéfini entraîne que :

$$* \quad t(2p) << L'.V(1) ; V(1,0) >> = t(2p) << L'.V(1,0) ; V(1,0) >>$$

$$\begin{aligned} * \quad &\sum_{r=0}^{p-2} t(2r+2) << L'.V(2p-2r-1), V(1,0) >> = \\ &= \sum_{r=0}^{p-2} \sum_{k=0}^{2p-2r-1} t(2r+2) << L'.V(2p-2r-1-k,k); V(1,0) >> \delta_{2p-2r-2k-1, 1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{p-2} t(2r+2) \ll L'.V(p-r, p-r-1) ; V(1,0) \gg$$

Comme l'opérateur Q est symétrique on obtient:

$$\sum_{k=1}^{2p} Q(V(k), V(2p-k+1)) = 2 \sum_{k=1}^p Q(V(k), V(2p-k+1))$$

$$\begin{aligned} * \quad & \sum_{k=1}^{2p} \ll Q(V(k), V(2p-k+1)) ; V(1,0) \gg = \\ & 2 \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{2p-k+1} \ll Q[(V(k-j, j), V(2p-k+1-i, i)); V(1,0) \gg \delta_{2p+1-2(j+i), 1} \\ & = 2 \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k \ll Q[V(k-j, j), V(p+1-k+j, p-j)]; V(1,0) \gg \end{aligned}$$

Finalement, comme $\ll L'.V(1,0), V(1,0) \gg \neq 0$, on obtient la formule de récurrence donnant $t(2p)$.

$$t(2p) = - \frac{1}{\ll L'.V(1,0), V(1,0) \gg} \left[\sum_{r=0}^{p-2} t(2r+2) \ll L'.V(p-r, p-r-1) ; V(1,0) \gg \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=1}^p \sum_{j=0}^k \ll Q[V(k-j, j), V(p+1-k+j, p-j)]; V(1,0) \gg \right.$$

$$t(2p+1) = 0$$

Annexe B

Relation de récurrence dans le cas des défauts

1-B Relation de recurrence pour les vecteurs $V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$

D'après la relation de récurrence en 2D on a :

$$U_n = A_n \sum_{0 \leq 2r \leq n-1} \left(\frac{\tau}{A} \right)^{3r} V(n-3r, 3r)$$

Pour le passage de 2D à 1D on va décomposer le vecteur $V(n-3r, 3r)$ suivant les harmoniques. Pour cela on pose :

$$V(n-3r, 3r) = \sum_{j=0}^{n-2r} V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$$

où

l'indice $(n-2r-j, j)$ définit les harmoniques décomposants $V(n-3r, 3r)$.

$$L.V(n-3r, 3r) = \sum_{j=0}^{n-2r} L.V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$$

On cherche alors à déterminer les équations à résoudre pour déterminer les vecteurs $V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$. Cela revient à décomposer suivant les harmoniques $n-2r-2j$ le second membre de la formule de récurrence (V-1-1 23). Pour la clarté de l'exposé, on va traiter terme à terme l'équation (V-1-1 23)

$$(1) \quad L'.V(n-2p-2-3(r-q), 3(r-q)) = \sum_{k=0}^{n-2p-2-2(r-q)} L'.V(n-2p-2-3(r-q), n-2p-2-2(r-q)-k, k, 3(r-q)).$$

Pour se ramener à l'harmonique $n-2r-2j$ on fait le changement de variables suivant:

$$n-2p-2-2(r-q)-2k = n-2r-2j \quad \text{d'où } j = p+k+1-q$$

$$\text{d'où } \sum_{2p=0}^{n-3} \sum_{2q=\text{Max}(0, 2r-n+2p+3)}^{\min(2r, 2p+2)} C(2p+2-3q, 3q) L'.V(n-2p-2-3(r-q), 3(r-q))$$

$$= \sum_{2p=0}^{n-3} \min_{2q=\text{Max}} C(2p+2-3q, 3q) \sum_{j=p+1-q}^{n-p-1-2r+q} L'.V(n-2p-2-3(r-q), n-p-1-2r+q-j, j+q-p-1, 3(r-q))$$

$$= \sum_{2p=0}^{n-3} \min_{2q=\text{Max}} \sum_{j=p+1-q}^{n-p-1-2r+q} C(2p+2-3q, 3q) L'.V(., ., ., .)$$

on utilise la convention $V(*, i, j, *) = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$.

$$= \sum_{2p=0}^{n-3} \min_{2q=\text{Max}} \sum_{j=0}^{n-2r} C(2p+2-3q, 3q) L'.V(., ., ., .)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-2r} \sum_{2p=0}^{n-3} \sum_{2q=\text{Max}(0, 2r-n+2p+3)}^{\min(2r, 2p+2)} C(2p+2-3q, 3q) L'.V(., ., ., .)$$

$$\begin{aligned} j+q-p-1 &\geq 0 &\Rightarrow q &\geq p+1-j \\ n-p-1-2r+q-j &\geq 0 &\Rightarrow q &\geq -n+p+1+2r+j \end{aligned}$$

d'où

$$Q_1 = \text{Max} \left(0, r+p-\frac{n-3}{2}, p+1-j, -n+p+1+2r+j \right) \leq q \leq \min(r, p+1) = Q_2$$

$$p+1-j \leq r \quad \text{et} \quad -n+p+1+2r+j \leq r$$

$$\text{d'où } 0 \leq p \leq \min \left(\frac{n-3}{2}, r+j-1, n-1-r-j \right) = P_1$$

Finalement

$$(1) = \sum_{j=0}^{n-2r} \left\{ \sum_{p=0}^{P_1} \sum_{q=Q_1}^{Q_2} C(2p+2-3q, 3q) L'.V(n-2p-2-3(r-q), n-p-1-2r+q-j, j+q-p-1, 3(r-q)) \right\}$$

En développant $Q [V(p-3k, 3k) ; V(n-p-3r+3k, 3r-3k)]$

suivant les harmoniques on obtient :

$$\begin{aligned} &Q [V(p-3k, 3k) ; V(n-p-3r+3k, 3r-3k)] = \\ &= \sum_{l=0}^{p-2k} \sum_{m=0}^{n-p-2r+2k} Q [V(p-3k, p-2k-l, 1, 3k) ; V(n-p-3r+3k, n-p-2r+2k-m, m, 3(r-k))] \end{aligned}$$

Pour avoir un rangement suivant les harmoniques $(n-2r-2j)$ on fait le changement de variables :

$$p-2k-2l+n-p-2r+2k-2m = n-2r-2j \quad \text{d'où} \quad l+m=j$$

En faisant les mêmes démarches qu'avant pour permuter les signes Σ on obtient :

$$\begin{aligned} (2) \quad \Delta^1(r) & \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{2k=\max(0, 2r-n+1+p)}^{\min(2r, p-1)} Q [V(p-3k, 3k), V(n-p-3r+3k, 3r-3k)] \\ &= \sum_{j=0}^{n-2r} \Delta^1(r) \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{2k=\max(0, 2r-n+1+p)}^{\min(p-1, 2r)} \sum_{l=\max(0, j-n+p+2r-2k)}^{\min(j, p-2k)} \\ & \quad Q [V(p-3k, p-2k-l, l, 3k) ; V(n-p-3r+3k, n-p-2r+2k-j+l, j-l, 3(r-k))] \end{aligned}$$

Pour le terme $L'.V^*$, on a pris un défaut modal qu'on note

$$V^* = V(0, 1, 0, 3) + V(0, 0, 1, 3).$$

$$* \quad L'.V^* = \sum_{k=0}^1 L' V(0, 1-k, k, 3)$$

$$\text{on pose } 1 - 2k = n - 2r - 2j \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1-n}{2} + r + j$$

d'où

$$L.V^* = \sum_{j=-r-\frac{1-n}{2}}^{\frac{1+n}{2}-r} L' V\left(0, \frac{1+n}{2}-r-j, \frac{1-n}{2}+r+j, 3\right)$$

En utilisant la convention $V(*, i, j, *) = 0$ si $i < 0$ ou $j < 0$.

$$L.V^* = \sum_{j=0}^{n-2r} L'.V\left(0, \frac{1+n}{2}-r-j, \frac{1-n}{2}+r+j, 3\right)$$

Pour retirer la convention et avoir les indices entier on pose :

$$\text{conv}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < 0 \text{ ou } j < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Imp}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

d'ou finalement :

$$(3) \Delta^3(r) C(n-3r, 3r-3) L.V^* = \sum_{j=0}^{n-2r} \left\{ \Delta^3(r) C(n-3r, 3r-3) \right. \\ \left. \left[\text{Imp}(n). \text{conv} \left(\frac{1+n}{2} - r - j, \frac{1-n}{2} + r + j \right) \right] L.V \left(0, \frac{1+n}{2} - r - j, \frac{1-n}{2} + r + j, 3 \right) \right\}$$

* Pour le terme $Q(V^*, V(n-3r, 3r-3))$ on obtient

$$Q(V^*, V(n-3r, 3r-3)) = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^{n-1-2r} Q[V(0, 1-k, k, 3), V(n-3r, n-1-2r-l, 1, 3(r-1))]$$

$$\text{on pose } n-2r-2j = n-1-2r-2l+1-2k \Rightarrow l = j-k$$

$$= \sum_{k=0}^1 \sum_{j=k}^{n-1-2r+k} Q[V(0, 1-k, k, 3), V(n-3r, n-1-2r-j+k, j-k, 3(r-1))]$$

En utilisant les mêmes convention et démarche que précédemment on obtient :

$$(4) 2\Delta^2(r) Q(V^*, V(n-3r, 3r-3)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n-2r} \left\{ 2\Delta^2(r) \sum_{k=\text{Max}(0, -n+1+2r+j)}^{\min(1, j)} Q[V(0, 1-k, k, 3), V(n-3r, n-1-2r-j+k, j-k, 3(r-1))] \right\}$$

Finalement on obtient:

$$L.V(n-3r, 3r) = \sum_{j=0}^{n-2r} L.V(n-3r, n-2r-j, j, 3r) \\ = (1) + (2) + (3) + (4) = \sum_{j=0}^{n-2r} (\text{résultat})$$

Ce résultat correspond au second membre associé à chaque vecteur $V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$ pour chaque harmonique $n-2r-2j$

□□□

2B Démonstration de la relation de récurrence pour les coefficients $C(2n-3r, 3r)$

On cherche à déterminer la relation de récurrence donnant les coefficients $C(2n-3r, 3r)$ en utilisant la décomposition en harmoniques. Cela mène à exploiter les résultats numériques des vecteurs 1D $V(n-3r, n-2r-j, j, 3r)$. Pour cela, on va décomposer chaque terme de la relation de récurrence (V-1-1 24)

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \sum_{2p=0}^{2n-3} \sum_{2q=\max(0, 2r-2n+2p+2)}^{\min(2r, 2p+2)} C(2p+2-3q, 3q) \sum_{j=0}^{2n-2p-1-2(r-q)} \\
 & \ll L' V(2n-2p-1-3(r-q), 2n-2p-1-2(r-q)-j, j, 3(r-q)) , V(1,0) \gg \\
 & = \sum_{2p=0}^{2n-3} \sum_{2q=\max(0, 2r-2n+2p+2)}^{\min(2r, 2p+2)} C(2p+2-3q, 3q) \sum_{j=0}^{2n-2p-1-2(r-q)} \delta_{2n-2p-1-2(r-q)-2j, 1} \\
 & \quad \ll L'.V(.), V(1,0) \gg
 \end{aligned}$$

Changement de variables.

$$2n-2p-1-2(r-q)-2j = 1 \quad \Rightarrow \quad j = n-p-r+q-1$$

$$\begin{aligned}
 2n-2p-1-2(r-q)-j &= 2n-2p-1-2(r-q)-n+p+r-q+1 \\
 &= n-p-r+q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{2p=0}^{2n-3} \sum_{2q=\max(0, 2r-2n+2p+2)}^{\min(2r, 2p+2)} C(2p+2-3q, 3q) \\
 & \quad \ll L'.V(2n-2p-1-3(r-q), n-p-r+q, n-p-r+q-1, 3(r-q)) ; V(1,0) \gg
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\max(2r-2n+p, 0)}^{\min(2r, p-1)} \ll Q[V(p-3j, 3j), V(2n+1-p-3(r-j), 3(r-j))], V10 \gg$$

$$= \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\max(0, 2r-2n+p)}^{\min(2r, p-1)} \sum_{k=0}^{p-2j} \sum_{l=0}^{2n+1-p-2(r-j)}$$

$$\ll Q(V(p-3j, p-2j-k, k, 3j), V(2n+1-p-3(r-j), 2n+1-p-2(r-j)-l, l, 3(r-j))), V(1,0) \gg.$$

Posons

$$\begin{aligned} p-2j-2k+2n+1-p-2(r-j)-2l &= 1 \\ -2k+2n-2r-2l &= 0 \quad \Rightarrow \quad l = n-r-k \end{aligned}$$

$$= \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\max(0,2r-2n+p)}^{\min(2r,p-1)} \sum_{k=0}^{p-2j} \ll Q[V(p-3j, p-2j-k, k, 3j) ;$$

$$V(2n+1-p-3(r-j), n+1-p-r+2j+k, n-r-k, 3(r-j))] ; V(1,0) \gg$$

Injection de la convention

$$\text{on a } 0 \leq l \leq 2n+1-p-2r+2j \quad \Rightarrow \quad -2n-1+p+2r-2j \leq -l \leq 0$$

$$n-r-2n-1+p+2r-2j \leq n-r-l \leq n-r \quad \text{d'où } -n+r-1+p-2j \leq k \leq n-r$$

d'où on a :

$$\dots (6) = \sum_{p=1}^{2n} \sum_{2j=\max(0,2r-2n+p)}^{\min(2r,p-1)} \sum_{k=\max(0,-n+r-1+p-2j)}^{\min(p-2j,n-r)}$$

$$<< Q(V(p-3j, p-2j-k, k, 3j); V(2n+1-p-3(r-j), n+1-p-r+2j+k, n-r-k, 3(r-j)); V(1,0) >>$$

$$\dots (7) C(2n+1-3r, 3r-3) << L'.V^*, V(1,0) >> =$$

$$C(2n+1-3r, 3r-3) << L'.V(0,1,0,3), V(1,1,0,0) >>$$

$$\dots (8) << Q(V^*, V(2n+1-3r, 3r-3)), V(1,0) >> =$$

$$\ll Q(V^*, V(2n-2-3(r-1), 3(r-j)) ; V(1,0) \gg$$

$$= \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^{2n-2-2(r-1)=2n-2r} \ll Q(V(0,1-j,j,3), V(2n+1-3r, 2n-2r-k, k, 3r-3); V10 \gg$$

$$\begin{aligned} 1-2j+2n-2r-2k &= 1 \quad \Rightarrow \quad 2j = 2n-2r-2k \\ &\Rightarrow \quad k = n-r-j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^1 \ll Q[V(0,1-j,j,3), V(2n+1-3r, n-r+j, n-r-j, 3r-3)] , V(1,0) \gg$$

$$\text{or } 0 \leq k \leq 2n-2r \quad \Rightarrow \quad -n+r \leq j \leq n-r$$

on obtient :

$$(8) = \sum_{j=\text{Max}(0, -n+r)}^{\min(1, n-r)} \ll Q \ V(0, 1-j, j, 3) ; V(2n+1-3r, n-r+j, n-r-j, 3r-3), V(1, 0) \gg$$

Finalemant en additionnant (5) + (6) + (7) + (8), on obtient la relation de récurrence cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

- [A1] ABDELMOULA R. "Flambage des coques cylindriques sous pression, influence des conditions aux limites et des défauts". Thèse, Université de Metz, 1989.
- [A2] ABDELMOULA R., DAMIL N. and POTIER-FERRY M. "Influence of distributed and localized imperfections on the buckling of cylindrical shells under external pressure". Int. J. Solids Structures Vol. 29, n° 1, pp. 1-25, 1992.
- [A3] ADAMS R.A. " Sobolev spaces". Acad. Press, New York, 1975.
- [A4] AMAZIGO J.C., BUDIANSKY B. and CARRIER. G.F. "Asymptotic analysis of the buckling of imperfect columns on nonlinear elastic foundations". Int. J. Solids Struct. 6 (1970) p 1341-1356.
- [A5] AMAZIGO, J.C. and FRASER. W.B. "Buckling under external pressure of cylindrical shells with dimple shaped initial imperfections". Int. J. Solids Struct, 7 (1971) p. 883-900.
- [A6] ALMROTH, B.O. "Influence of edge conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells", AIAA Journal, Vol.4 N° 1, p 134-140 (1960).
- [A7] ARBOCZ, J., BABCOCK C.D. " The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells". J. of Appl. Mech, march,1969, pp. 28-38.
- [A8] ARBOCZ, J., SECHLER, E.E. " On the buckling of axially compressed imperfect cylindrical shells" J. of Appl. Mechanics, 41, 1974, pp. 737-743.
- [A9] ARBOCZ, J. "Post-buckling behaviour of structures numerical techniques for more complicated structures". In Buckling and post-buckling, Lectures Notes in Physics. p 83-142. Springer-Verlag (1985).
- [A10] AZRAR L. COCHELIN B. DAMIL N. and POTIER-FERRY M. "Asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches" In European conference on new adv. in comp. struc. mech. 1990 pp. 747-754.
- [A11] AZRAR L. COCHELIN B. DAMIL N. and POTIER-FERRY M. " Calcul non-linéaire par une méthode asymptotique-numérique.. Application au post-flambage des structures minces". 10^{ème} congrès Français de mécanique, Paris, vol. 2, pp. 113-116, 1991.
- [A12] AZRAR L. COCHELIN B. DAMIL N. and POTIER-FERRY M. "An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches". In new adv. in comp. struc. mech. ed. by Ladeveze P. and Zienkiewicz, Elsevier, 1992, pp. 117-131.

- [A13] AZRAR L. COCHELIN B. DAMIL N. and POTIER-FERRY M. "An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells". Numerical Methods in Engineering, pp. 607-614, Ch. Hirsch et al (Editors), 1992, Elsevier Science Publishers.
- [A14] AZRAR L. and POTIER-FERRY M. "Post-buckling of imperfect structures by an asymptotic-numerical method".in Numerical methods in engineering 92, Ch. Hirsch et al. (editors) 1992 pp. 607-617, Elsevier Science Publishers
- [B1] BAKER G.A. and GRAVES-MORRIS P. "Padé Approximants, Part I: Basic Theory". Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 13, Addison-Wesley Publi. Company, 1981.
- [B2] BATDORF S.B. "A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells". NACA Rep. 874 (1947).
- [B3] BATHE K.J. "Finite element procedures in engineering analysis" Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1982
- [B4] BATOZ J.L., DHATT G. & FAFARD M. "Algorithmes de calcul automatique des configurations pré et post-flambement des structures", Actes du troisième colloque. Tendance actuelles en calcul de structures, Bastia, 6-8 nov. 1985, pp 129-143.
- [B5] BATOZ J.L. & DHATT G. "Modélisation des structures par éléments finis". vol. 1-2-3-4, Hermès, Paris, 1990.
- [B6] BERNADOU, M. & CIARLET, P.G. "Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter". Comp. Meth. Appl. Sci. Eng. Lecture Notes in economic and mathematical systems Vol. 134, pp 89-136, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [B7] BERNADOU, M. & ODEN, J.T. "An existence theorem for a class of nonlinear shallow shell problems", J. Math. pures et Appl. 60, 1981, pp. 285-308.
- [B8] BERNADOU, M. & DUCATEL, Y. , "Approximation of circular cylindrical shell by Clough-Johnson flat plate finite elements". Rapports de recherche n° 335 INRIA, Sept. 1984.
- [B9] BERNADOU, M. & LALANNE, B. , "Flambement linéaire d'une coque mince élastique de forme générale". Rapports de recherche n° 1435 INRIA, Mai 1991.
- [B10] BESSELING, J.F., "Post-buckling and nonlinear analysis by the finite element methods as a supplement to a linear analysis", ZAAM, Vol.55, n° 4, pp 3-16, 1975.
- [B11] BREZIS H. "Analyse fonctionnelle théorie et applications". Masson, Paris 1983.

- [B12] BRUSH, D.O. and ALMROTH, B.O. "Thin shell buckling analysis a general expression for the second variation of the strain energy". Proceed 4th. U.S. NAT 1962.
- [B13] BRUSH, D.O. and B.O. ALMROTH. "Buckling of bars, plates and shells" MacGraw-Hill, New York, 1975.
- [B14] BUDIANSKY, B. and J.W. HUTCHINSON. "Dynamic Buckling of Imperfection-Sensitive Structures". Proc. Int. Congr. Appl. Mech. XI, Springer-Verlag Berlin 1966, pp. 636-651.
- [B15] BUDIANSKY, B. and J.C. AMAZIGO. "Initial post-buckling behaviour of cylindrical shells under external pressure". J. Math. and Phys., vol.47, 1968, pp 223-235.
- [B16] BUDIANSKY, B. "Theory of Buckling and post-buckling behaviour of elastic structures", advances in App. Mech., 14 1974, p 1-65.
- [B17] BUSHNELL, D. "Computerized buckling analysis of shells" Martinus Nijhoff Publishers, (1985).
- [B18] BREZZI, F. FORTIN M. "Mixed and hybrid finite element methods" Springer-Verlag 1991.
- [B19] BAKER, G.A. and GRAVES-MORRIS P. "Padé approximants", Part I, II, Encyclopedia of mathematics and its applications, V13, Addison-Wesley Publishing compagny 1981.
- [B20] BREZINSKI C. "Padé type approximation and general orthogonal polynomials", Birkhauser Verlag, 1980, ISNM 50.

- [C1] CHOW S.N., HALE J.K., MALLET-PARET J. " Applications of generic bifurcation". Arch. rat. mech. anal I, 59 pp 159-188, 1975. et II 62, pp. 209-235, 1976
- [C2] CRISFIELD, M.A. "Numerical analysis of structures". cha. 7 of Developpements in thin walled Structures-1, Ed. Rholes and Walker , Appl. Sci. Pub. pp 235-284, 1981
- [C3] CRISFIELD, M.A., "An arc-length method including line searches and accelerations", Int. J. for Num. Meth. in Engin., Vol. 19, pp. 1269-1289, 1983.
- [C4] CROUZEIX M. and RAPPAZ J. "On numerical approximation in bifurcation theory". Masson, Springer-Verlag , Paris, 1990.
- [C5] CONNOR, J.J. & MORIN, N., "Perturbation techniques in the analysis of geometrically nonlinear shells". Proc. of Symp. on High Speed Comp. of Elastic Structures, Liege. 1970.
- [C6] COUTRIS N. "Contribution à la théorie linéaire des coques minces". Thèse de Doctorat d' Etat, Paris VI, 1980.
- [C7] CHAR B.W. and all " Maple V: Language reference manual" Waterloo Maple Publishing, Springer-Verlag New-York, 1991.
- [C8] CHATELIN F. "Valeurs propres de matrices", Masson, Paris 1988.

- [C9] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M. "Computation of nonlinear problems by using asymptotic-numerical method and pade approximants: application to elastic structures" soumis à Int. j. Num. Meth. Eng.
- [C10] CUYT A. "Nonlinear numerical methods and rational approximations", 1988, Reidel Publishing Compagny, Holland.
- [D1] DAMIL, N. & POTIER-FERRY, M., "A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures". Int. J. Engng. Sci., Vol. 28, n° 9, pp. 943-957, 1990.
- [D2] DAMIL, N. "De la théorie de la bifurcation au calcul des structures", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Hassan II, Casablanca Maroc, 1990.
- [D3] DAUTRAY R.& LIONS J.L. " Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques" CEA, Masson, Paris 1984.
- [D4] DEBBANEH, N. "Flambage de coques de révolution à méridienne brisée sous pression latérale externe", Thèse de Doctorat, INSA, Lyon 1988.
- [D5] DHAT G. et TOUZOT G. "Une présentation de la méthode des éléments finis". Maloine S.A. éditeur, 1984.
- [D6] DONNELL L.H. and WAN C.C. "Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression". J. of Appl. Mech., 1950, pp. 73-83.
- [D7] DONNELL L.H. " Beams, plates and shells" Mc Graw-Hill, New-York, 1976, pp. 325-358.
- [D8] DROUX A. et INGELANDT P.V. "Polynomes orthogonaux et approximants de Padé", 1987, Editions Technip, Paris.
- [E1] ESSLINGER, M. and B. GEIER. "Calculated post-Buckling loads as lower limits for buckling loads of thin-walled circular cylinders". Buckling of structures (Ed. B. Budiansky), pp. 274-290. Springer-Verlag. London (1977).
- [F1] FISCHER, G. "Influence of boundary conditions on stability of thin-walled cylindrical shells under axial load and internal pressure". AIAA J., Vol. 3, (1965). pp. 736-738.
- [F2] FITCH J.R. " The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load" Int. J. Solids Structures, 1968, Vol. 4, pp. 421-446.
- [F3] FLUGGE W. " Stress in shells", 2 nd Ed. , Berlin, Springer-Verlag, 1973.

- [F4] FORSBERG, K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells, AIAA Journal, Vol. 2, N° 12, p 2150-2157.
- [G1] GALLAGHER, R.H. , 1974, "Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis". Int. Conf. on Comp. Method in nonl. Mech. , Austin, Texas, 1974.
- [G2] GLAUM, I.W, BELYTSCHKO, T. & MASUR. E.F., "Buckling of structures with finite prebuckling deformations-a perturbation FEA", International Journal Solids and Structures, Vol. 11, pp 1023-1033, 1975.
- [G3] GORMAN, D.J. and EVAN-IWANOWSKI, R.M. "An analytical and experimental investigation of the effects of large prebuckling deformations on the buckling of clamped thin-walled circular cylindrical shells subjected to axial loading and internal pressure". Devel. in theo. and appl. mech., 4, 1970, pp. 415-426.
- [G4] GILEWICZ, J. "Approximants de Padé", Lecture notes in mathematics 667, Springer Verlag-Heidelberg, 1979.
- [H1] HUTCHINSON J.W.& KOITER W.T. "Postbuckling theory" Appl. mech. rev. , vol. 23, 1970, pp. 1353-1366.
- [H2] HUTCHINSON J.W.& FRAVENTHAL J. C. " Elastic postbuckling behavior of stiffened and barreled cylindrical shells" Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. E-36, 1969, pp. 784-790.
- [I1] IOOSS, G. & JOSEPH, D.D. "Elementary stability and bifurcation theory". Springer-Verlag, Paris, 1990.
- [I2] IMBERT J.F. "Analyse des structures par éléments finis". 2ème edition, Cepadues Editions, Toulouse, 1984.
- [J1] JONES R. M. "Mechanics of composite materials", Hemisphere Publishing Corporation, New-York, 1975.
- [J2] JULLIEN J.F., CHRAIBI S. " Flambage de coques cylindriques provoqué par l'evolution des défauts géométriques due a des sollicitations thermiques cycliques", Rapport de synthèse, INSA, 1986.
- [K1] KABORE A. "Flambage de coques cylindriques raidies sous pression latérale externe". Thèse, Lyon1, 1985.
- [K2] KEENER J.P., KELLER H.B. "Perturbed bifurcation theory " Arch. rat. mech.anal 50 pp 159-175, 1973.
- [K3] KEENER J.P. "Perturbed bifurcation theory at multiple eigenvalues". Arch. rat. mech. anal, 56 pp 348-366, 1974.

- [K4] KELLER H.B. & LANGFORD W.F. "Iterations, perturbations and multiplicities for nonlinear bifurcation problems". Arch. rat. mech. anal , 48 pp. 83-108, 1972.
- [K5] KOITER, W.T. "On the stability of elastic equilibrium". Thesis, Delft Univ. (1945). English translation, Nasa techn. Transl. F10, 833 (1967).
- [K6] KOITER, W.T. " A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells" Proc.of the IUTAM Symposium on the theory of thin elastic shells, Delft, April 1967, pp. 2099-2101.
- [K7] KOITER, W.T. "On the nonlinear theory of thin elastic shells". Proc.Ned. Akad. Wet. B 69 1966 p 1-54.
- [K8] KOITER, W.T. and SIMMONDS J.G. "Foundations of shell theory". Proceedings of the 13th IUTAM Congress. Springer, Berlin (1973) p 150-176.
- [K9] KOUHIA, R. & MIKKOLA, M., 1989, "Tracing the equilibrium path beyond simple critical points", International Journal of Numerical Methods in Engineering", Vol. 28, pp 2923-2941, 1989.
- [K10] KOITER, W.T. "The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression" Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B(66) 1963, pp. 265-279.
- [K11] KERR A AND SOIFER M, "The linearisation of the prebuckling state and its effect on the determined instability loads" J. Appl. Mech. pp. 775-783, 1969.
- [L1] LOVE A.E.H. " A treatise on the mathematical theory of elastisity", 4th Ed. Dover Publication, New-York 1927.
- [M1] MASUR, E.F. & SCHREYER, H.L., "A second order approximation to the problem of elastic instability", Proc. Symp. Theory of Shells, Donnell Anniv. Vol., Univ. of Texas, Houston pp 231-249, 1967.
- [N1] NAYFEH, A.H. "Perturbation Methods". John Wiley & Sons, New York. London. Sydney. Toronto. (1973).
- [N2] NECAS, J. "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson et Cie, Paris 1967.
- [N3] NIORDSON F. I. "Shell theory", Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, 1985.
- [N4] NOOR, A.K. & PETERS, J.M., "Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures", AIAA Journal, Vol. 18, n° 4, pp 455-462, 1980.

- [N5] NOOR, A.K. & PETERS, J.M., "Recent advances in reduction methods for instability analysis for structures" *Computer & structures*, V16 pp. 67-80, 1983.
- [N6] NOOR, A.K. & ANDERSEN, C.M., 1991, "Hybrid analytical technique for the nonlinear analysis of curved beams", In *Nonlinear Computational Mechanics State of art*, P. Wriggers & Wagner Eds, Springer-Verlag, 1991.
- [P1] PAUMIER J.C. RAO B. "Qualitative and quantitative analysis of buckling of shallow shells" *Eur. J. Mech., A/Solids*, 8, n°6 pp. 461-489, 1989.
- [P2] POTIER-FERRY, M. "Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel", *J. Mécanique*, 17, (1978) p 579-608.
- [P3] POTIER-FERRY, M. "Perturbed bifurcation theory". *J. Diff. Equat.*, 33, 1979, pp. 112-146.
- [P4] POTIER-FERRY, M. "On the mathematical foundations of elastic stability theory". *Arch. Rat. Mech. Anal.* t. 78, 1982, p 55-72.
- [P5] POTIER-FERRY, M. "Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique". Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie Paris VI, 1978.
- [P6] POTIER-FERRY, M. "Foundations of elastic post-buckling theory". In *Buckling and Post-buckling. Lectures Notes in physics*. 288, p 1-82, Springer-Verlag, 1985.
- [R1] RABIER, P. "Etude locale des problèmes non-linéaires perturbés", *J. Math. pures et appl.*, 4, 1982, pp 311-343.
- [R2] RABIER, P. "Topics in one-parameter bifurcation problems". Tata Institute, Lecture Notes, Springer, 1985.
- [R3] RAMM, E., "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points". In *Nonlin. F. El. Anal. in Str. Mech.*, Springer Verlag, Berlin, pp 68-89, 1981.
- [R4] RIKS, E., "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", *Int. J. of Solids and Struc.*, Vol. 15, pp 529-551, 1979.
- [S1] SANDERS, J.L. "An improved first approximation theory for thin shells". NASA Report 24 1959.
- [S2] SANDERS, J.L. "nonlinear theories for thin shells", *Quart. Appl. Math.*, 21, 1963, pp. 21-36.
- [S3] SATHER D. "Branching of solutions of an equation in Hilbert space" *Arch. rat. mech. anal* 36 pp 47-64, 1970.

- [S4] SATTINGER, D.H., "Transformation groups and bifurcation at multiple eigenvalues", Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 79, n° 4, 1973.
- [S5] SIMITSES, G.J, SHAW D. and SHEINMAN L. "Stability of cylindrical shells by various nonlinear shell theories". ZAMM, Z. Angew. Math. u. Mech. 65 , 1985, 3, 159-166.
- [S6] SIMITSES, G.J. and M. ASWANI. "Buckling of thin cylinders under uniform lateral loading". J. of appl. mech. (1974) p. 827-829.
- [S7] SIMITSES, G.J., SHAW, D. and SHEINMAN, I. " Stability of cylindrical shells by various nonlinear shell theories" ZAMM Z. Angew. Math. u. Mech. 65, 1985, 3, 159-166.
- [S8] SINGER, J. and A. ROSEN. "The influence of Boundary Conditions on the Buckling of Stiffened Cylindrical Shells" (Ed. B. Budiansky) (1976) p 227-251. Springer-Verlag.
- [S9] SOBEL, L.H. "Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subject to lateral and axial pressure". AIAA Journal, 2 (1964) p 1437-1440.
- [S10] STEIN, M. "The influence of prebuckling deformations and stresses on the buckling of perfect cylinders". NASA TR R-190 (1964).
- [S11] SOONG T.C. "Buckling of cylindrical shell under pressure by using Sanders' theory". AIAA J., 1967, pp. 1049-1052.
- [S12] SIMITSES, G.J. "Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: A review" Appl. Mech. Rev. V39 n°10 1986.
- [S13] SADAKA R. "Le travail de Padé et ses contemporains. Analyse, ramification et prolongement". Thèse, Lille, 1983.
- [T1] TENNYSON, R.C., and MUGGERIDGE D.B. " Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression" AIAA J. Vol. 7, 11, 1969.
- [T2] TENNYSON, R.C., BOOTON M. and CHAN, K.H. "Buckling of short cylinders under combined loading". Jour. of Appl. Mech. Vol. 45, 1978, pp. 574-578.
- [T3] THOMPSON, J.M.T. & WALKER, A.C., "The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems", Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4, pp 757-768, 1968.
- [V1] VAN DYKE, M. , 1984, "Computer-Extended Series", Ann. Rev. Fluid. Mech. , Vol. 16, pp 287-309, 1984.
- [V2] VOLMIR, A.S. "Stability of elastic systems". Trans. into English by the clearinghouse for federal Sci. and Tech. Infor. A.D. 628 508, Moscow. (1963).

- [V3] VON KARMAN T. and TSIEN H.S. "The buckling of thin cylindrical shells under axial compression". j. Aero. scie. vol. 8 pp. 303-312, 1941.
- [V4] VON SCHNELL, W. and DARMSTADT. "Einfluss der Randverwölbung auf die Beulwerte von zylinderschalen unter Manteldruck". Der Stahlbau, 6,1965 pp, 187-190.
- [W1] WAECKEL, N. "Imperfections géométriques initiales et instabilités de structures minces". Doctorat d'Etat, INSA Lyon, (1984).
- [W2] WESFREID,J. and ZALESKI, S. Callular structures in instability problems, Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin) 1984.
- [Y1] YAMAKI, N. "Influence of prebuckling deformations on the buckling of circular cylindrical shells under external pressure" Rep. Inst. High sp. Mech., Japan, Vol. 21 (1970), p. 81-104.
- [Y2] YAMAKI, N. and KODAMA, S. "Buckling of circular cylindrical shells under compression".
 Repport 1: Solutions based on the Donnell type equations neglecting prebuckling edge rotations, Rep. Inst. High speed Mech., Japan, Vol. 23 (1971).pp. 99-142.
 Repport 3: Solutions bases on the Donnell type equations considering prebuckling edge rotations,... Vol. 25 (1972).pp. 99-141.
- [Y3] YAMAKI, N. "Elastic stability of circular cylindrical shells". North-Holland, Amsterdam (1984).
- [Y4] YAMAMOTO, Y. "Buckling of stiffened cylindrical shells under external pressure". XVII Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée. Grenoble (1988).
- [Z1] ZIENKIEWICZ, O.C. "The finite element method", Mc Grawhill, London (1977).