374

THÈSE PRÉSENTÉE A l' UNIVERSITÉ DE METZ

pour l'obtention du

DOCTORAT DE L' UNIVERSITÉ DE METZ

en Mathématiques.

Par : Nelly ANDRE.

Titre de la thèse :

SUR L'UNICITE DE PROBLEMES QUASILINEAIRES ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPROXIMATIONS NUMERIQUES.

Soutenue publiquement le 9 Décembre 1993.

Devant le jury composé de :

MM.

D. ARNAL	**Professeur à l'université de Metz.**
G. BOUCHITTE	**Professeur à l'université de Toulon et du Var. Rapporteur.**
A. BRILLARD	**Professeur à l'université de Mulhouse. Rapporteur.**
M. CHIPOT	**Professeur à l'université de Metz. Directeur de thèse.**
M. FILA	**Professeur à l'université de Bratislava.**

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Chipot qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance.

Je voudrais remercier G. Bouchitté et A. Brillard ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie D. Arnal et M. Fila qui m' ont fait l'honneur de participer au jury.

C'est également avec plaisir que je remercie le département de Mathématiques et d'Informatique de l'université de Metz et tous ses membres qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

Enfin, je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apportés leur contribution et leur aide de près ou de loin et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail, ni surtout ma famille qui a su faire preuve de patience et m'apporter son soutien.

Table des matières

Introduction

Dans la première partie de ce travail, nous nous sommes proposés de compléter les résultats de M. Chipot et G. Michaille sur l'unicité des solutions de l'équation quasilinéaire elliptique suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{0.1}$$

dans laquelle Ω désigne un ouvert borné de $\mathbf{R}^n, n \geq 1$, $a(x,u)$ une fonction de Carathéodory telle que

$$0 < \alpha \leq a(x,u) \leq \beta \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega, \quad \forall u \in \mathbf{R},$$

où α et β sont deux constantes strictement positives et où $f \in H^{-1}(\Omega),\ g \in H^1(\Omega)$.

On s'est attaché à donner des conditions simples et aisément vérifiables, et à fournir un contre-exemple dans le cas où celles ci ne sont pas vérifiées.

Dans la deuxième partie, on s'est interessé au problème "approché" déduit de (0.1) en remplaçant $H^1(\Omega)$ par un espace d'éléments finis V_0^h, dans des cas où la solution de (0.1) est unique.

Aprés avoir étudié la convergence des solutions approchées vers la solution unique de (0.1) dans le cas général, on a étudié l'unicité de la solution approchée dans des cas simples et classiques en dimension 1 et 2. Dans chacun des cas, on a fourni des contre-exemples lorsque les conditions obtenues n'étaient pas remplies.

Dans la troisième partie, on s'est intéressé aux solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \left(a(u_1, ..., u_n)u_i'\right)' = f_i \quad \text{dans} \quad I =]a, b[\quad \forall i = 1, 2, ., n \\ u_i \in H^1(]a, b[\\ u_i(a) = A_i \quad \text{et} \quad u_i(b) = B_i, \end{cases} \tag{0.2}$$

où les f_i sont des distributions de $H^{-1}(]a, b[)$ et les a_i des fonctions continues qui vérifient

$$0 < \alpha \leq a_i \leq \beta,$$

et, en particulier, à leur unicité.

On remarquera que, en dehors de quelques cas vérifiant des conditions draconiennes, il n'y a en général pas unicité. Des contre-exemples sont donnés pour les cas où l'unicité peut tomber en défaut.

Certains résultats qui sont donnés ici ont été obtenus en collaboration avec M. Chipot.

L'essentiel des chapitres 1 et 2 est traité dans $[A.C_1]$ et $[A.C_2]$.

Notations

D'une manière générale, pour simplifier les notations et lorsqu'il n'y aura aucun risque de confusion, on notera :

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f$$

On utilisera les notations habituelles pour les espaces de Sobolev : $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ et pour l'espace dual $H^{-1}(\Omega)$.

Les autres notations seront définies au fur et à mesure de leur apparition.

A REMARK ON UNIQUENESS

FOR QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

N. André & M. Chipot
Université de Metz
Département de Mathématiques
Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01
(FRANCE)

1. Introduction

Let Ω be a bounded open subset of $\mathbf{R}^n, n \geq 1$. Assume that $a(x,u)$ is a Carathéodory function satisfying

$$0 < \alpha \leq a(x,u) \leq \beta \ \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad \forall u \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

where α, β are two positive constants. For $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ we would like to consider here the problem

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.2}$$

We use the summation convention and we refer to [G.T.] or [K.S.] for the definition of the Sobolev spaces used throughout the paper.

First, under the above assumptions, using a fixed point argument of Schauder type, it is very easy to show that (1.2) admits a solution (see for instance [C.M.]). We would like to investigate here the question of uniqueness. More precisely we would like to prove the following result :

THEOREM 1 : Assume that for some positive constant C one has

$$|a(x,u) - a(y,u)| \leq C|x-y| \quad \forall u \in \mathbf{R}, \ \forall x, \ y \in \Omega \tag{1.3}$$

or

$$|a(x,u) - a(x,v)| \leq C|u-v| \quad \forall u, \ v \ \in \mathbf{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{1.4}$$

then the problem (1.2) has a unique solution ($|\ |$ denotes the usual euclidean norm in $\mathbf{R}^p$). If (1.3), (1.4) fail then uniqueness can fail even if

$$u \to a(x,u)$$

is Hölder continuous of any order.

Remark 1.1 : Loosely speaking uniqueness holds if and only if either

$$|\nabla_x a(x,u)| \quad \text{or} \quad \frac{\partial a(x,u)}{\partial u}$$

are uniformly bounded.

This kind of problems were considered before by several authors (see [C.C], [C.M.], [M.], [T.]), however, even in this simple case the picture was not yet complete. In particular, no counterexample seems to be known. Moreover, uniqueness in the case (1.3) was established only under the additional assumption that $u \to a(x,u)$ was Hölder continuous of order larger than 1/2.

2. The proof of uniqueness

Let us first consider the case where (1.3) holds. Then set

$$A(x,s) = \int_0^s a(x,t)dt \tag{2.1}$$

If $u \in H^1(\Omega)$ then it is clear that

$$A(x,u(x)) \in H^1(\Omega). \tag{2.2}$$

Moreover, in the distributional sense one has :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A(x,u) = a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \int_0^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt. \tag{2.3}$$

Then let us prove :

PROPOSITION 2.1 : Assume that (1.3) holds, then (1.2) has a unique solution.

Proof : Let us denote by u, v two solutions of (1.1). By subtraction we get

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x,v)\frac{\partial v}{\partial x_i}) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega. \tag{2.4}$$

But thanks to (2.3) this reads also :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x,u)-A(x,v))-\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt\right)=0 \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{2.5}$$

If f is a function we denote by $[f>0]$ the set defined by

$$[f>0]=\{x\in\Omega \mid f(x)>0\}$$

and we use similar notation for $[0<f\leq\epsilon]$.

Then we have

LEMMA 2.1 : For any $\xi\in C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{[u-v>0]}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x,u)-A(x,v))-\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt\right]\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\,dx=0. \tag{2.6}$$

Let us postpone for the time being the proof of this lemma. Then, integrating by parts in (2.6) we obtain (recall that $A(x,u)-A(x,v)\in H_0^1(\Omega)$)

$$\int_{[u-v>0]}A(x,u)-A(x,v)\ \frac{\partial^2\xi}{\partial x_i^2}+\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt\ \frac{\partial\xi}{\partial x_i}\,dx=0$$

which reads also

$$\int_{[u-v>0]}\int_{v(x)}^{u(x)}\left[a(x,t)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i^2}+\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\right]dtdx=0. \tag{2.7}$$

Then, choosing $\xi=e^{\gamma x_1}$ in (2.7), we have for γ large enough and by (1.3)

$$a(x,t)\frac{\partial^2\xi}{\partial x_i^2}+\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\geq e^{\gamma x_1}(\gamma^2\alpha-C\gamma)>0 \tag{2.8}$$

and then in order for (2.7) to hold, $[u-v>0]$ must have a measure 0. This leads to $u\leq v$ and reversing the role of u and v to $u=v$.

Proof of the lemma : Let us denote by $(\ )^+$ the positive part of a function, by min[,] the minimum of two functions. Remark then that for $\xi\in C^1(\overline{\Omega})$, $\epsilon>0$

$$\min\left[\frac{(A(x,u)-A(x,v))^+}{\epsilon},1\right].\xi\in H_0^1(\Omega).$$

Thus, multiplying (2.5) by the above function and integrating over Ω we deduce (for simplicity we set below $A(x,u)=A(u)$),

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(A(u)-A(v))-\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt\right]\min\left[\frac{(A(u)-A(v))^+}{\epsilon},1\right]\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\,dx=$$

$$= - \int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} [\frac{\partial}{\partial x_i}(A(u)-A(v)) - \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i} dt] \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{A(u)-A(v)}{\epsilon})\ \xi\ dx. \quad (2.9)$$

Let us denote by χ_A the characteristic function of the set A. By (1.1) one has

$$[0 < u - v] = [0 < A(u) - A(v)].$$

So, when $\epsilon \to 0$

$$\min[\frac{(A(u)-A(v))^+}{\epsilon}, 1] \to \chi_{[0<u-v]} \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

It follows, by the Lebesgue convergence theorem, that the first integral in (2.9) converges toward

$$\int_{[0<u-v]} [\frac{\partial}{\partial x_i}(A(u)-A(v)) - \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i} dt]\ \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\ dx.$$

Now, we claim that for $\xi \ge 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} [\frac{\partial}{\partial x_i}(A(u)-A(v)) - \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i} dt] \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{A(u)-A(v)}{\epsilon})\xi\ dx \ge 0.$$

Indeed, this integral reads also

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} |\nabla(A(u)-A(v))|^2 \xi\ dx -$$

$$\int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i} dt \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{A(u)-A(v)}{\epsilon})\xi\ dx \ge$$

$$- \int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i} dt \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{A(u)-A(v)}{\epsilon})\xi\ dx \ge$$

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_{[0<A(u)-A(v)\le\epsilon]} \int_{v(x)}^{u(x)} |\nabla a(x,t)| dt |\nabla(A(u)-A(v))| \xi\ dx. \quad (2.10)$$

Now, by (1.3) one has for some constant C

$$\int_{v(x)}^{u(x)} |\nabla a(x,t)| dt \le C(u(x) - v(x)).$$

Moreover, when $u \ge v$ one has

$$\alpha(u(x) - v(x)) \le \int_{v(x)}^{u(x)} a(x,t) dt = A(u) - A(v).$$

Hence on $[0 < A(u) - A(v) \le \epsilon]$

$$\int_{v(x)}^{u(x)} |\nabla a(x,t)| dt \le \frac{C}{\alpha}(A(u) - A(v)) \le \frac{C}{\alpha}\epsilon$$

and the last integral in (2.10) is bounded from below by

$$-\frac{C}{\alpha}\int_{[0<A(u)-A(v)\leq\epsilon]}|\nabla(A(u)-A(v))|\;\xi\;dx$$

which goes to 0 with ϵ.
Collecting the above results and letting $\epsilon\to 0$ in (2.9) we obtain for $\xi\in C^1(\overline{\Omega}),\xi\geq 0$

$$\int_{[u-v>0]}[\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x,u)-A(x,v))-\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt]\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\;dx\leq 0.$$

Changing ξ into $M-\xi$ for M large enough such that $M-\xi\geq 0$ leads to (2.6) for any $\xi\in C^1(\overline{\Omega})$.

Let us now turn to the case where (1.4) holds. In fact, we would like to use here a slightly more general assumption. Indeed let us set

$$\omega_a(t)=\sup_{x\in\Omega,\ |u-v|\leq t}|a(x,u)-a(x,v)| \tag{2.11}$$

and let us assume

$$\int_{0+}\frac{ds}{\omega_a(s)}=+\infty. \tag{2.12}$$

Clearly if (1.4) holds one has

$$\omega_a(t)\leq Ct$$

and (2.12) holds.

Then we have :

PROPOSITION 2.2 : Assume that (2.11), (2.12) hold, then (1.2) has a unique solution.

Proof : Let us denote again by u, v two solutions of (1.1). Then for $\epsilon>0$ let us set

$$F_\epsilon \quad = \quad \begin{cases}\displaystyle\int_\epsilon^x\frac{ds}{\omega(s)^2} & \text{when } x\geq\epsilon,\\ 0 & \text{when } x<\epsilon,\end{cases} \tag{2.13}$$

where for the sake of simplicity we have set $\omega_a=\omega$. From (2.4), multiplying by

$$F_\epsilon(u-v)\in H_0^1(\Omega) \tag{2.14}$$

and integrating by parts, we get

$$\int_\Omega(a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-a(x,v)\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}F_\epsilon(u-v)\;dx=0. \tag{2.15}$$

This can be rewritten as

$$\int_\Omega a(x,u)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}F_\epsilon(u-v)\,dx = -\int_\Omega (a(x,u)-a(x,v))\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}F_\epsilon(u-v)\,dx. \quad (2.16)$$

From (2.13) we deduce

$$\begin{aligned}\int_{[u-v>\epsilon]} a(x,u)\frac{|\nabla(u-v)|^2}{\omega^2(u-v)}\,dx &= -\int_{[u-v>\epsilon]} \frac{(a(x,u)-a(x,v))}{\omega^2(u-v)}\frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(u-v)\,dx \\ &\le \int_{[u-v>\epsilon]} \frac{\omega(u-v)}{\omega^2(u-v)}|\nabla v||\nabla(u-v)|\,dx \\ &= \int_{[u-v>\epsilon]} |\nabla v|\frac{|\nabla(u-v)|}{\omega(u-v)}\,dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hence by (1.1) and the Cauchy-Schwarz inequality we obtain

$$\alpha\int_{[u-v>\epsilon]}\frac{|\nabla(u-v)|^2}{\omega^2(u-v)}\,dx \le [\int_{[u-v>\epsilon]}|\nabla v|^2\,dx]^{\frac{1}{2}}\cdot[\int_{[u-v>\epsilon]}\frac{|\nabla(u-v)|^2}{\omega^2(u-v)}\,dx]^{\frac{1}{2}}$$

from which it follows

$$\int_{[u-v>\epsilon]}\frac{|\nabla(u-v)|^2}{\omega^2(u-v)}\,dx \le \frac{1}{\alpha^2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

Set

$$G_\epsilon = \begin{cases}\displaystyle\int_\epsilon^x \frac{ds}{\omega(s)} & \text{when } x\ge\epsilon, \\ 0 & \text{when } x<\epsilon.\end{cases}$$

Then the above inequality reads

$$\int_\Omega |\nabla G_\epsilon(u-v)|^2\,dx \le \frac{1}{\alpha}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

Hence, by the Poincaré Inequality (see [B.K.S.] for a similar argument), for some positive constant C

$$\int_\Omega |G_\epsilon(u-v)|^2\,dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx.$$

Letting ϵ go to 0 we deduce by (2.12) that

$$u\le v$$

and the result follows by exchanging the role of u and v.

So, we have established the part of Theorem 1 regarding uniqueness. Let us turn now to the second part of this theorem.

3. A class of counterexamples

We are going to construct one dimensional counterexamples. So, for $\Omega = (a_1, a_2)$ we will consider the problem

$$\begin{cases} -(a(x,u)u')' = f & \text{in} \quad \Omega \\ u(a_1) = A_1 \quad , & u(a_2) = A_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

where a_1, a_2, A_1, A_2 are constants. Let us prove :

PROPOSITION 3.1 : Assume that (1.3), or (2.11), (2.12) fail, then (1.2) or (3.1) may have several solutions even if $u \to a(x,u)$ is Hölder continuous of any order γ, $\gamma \in (0,1)$ i.e. even if

$$|a(x,u) - a(x,v)| \leq C|u-v|^\gamma \quad \forall u, \ v \ \in \mathbf{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Proof : Let ω be a nondecreasing, continuous function such that

$$\omega(0) = 0 \ , \ \ \omega(t) > 0 \ \ \ \forall t > 0 \ , \ \ \int_{0+} \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty, \tag{3.3}$$

$$\frac{\omega(t)}{t} \quad \text{is non increasing.} \tag{3.4}$$

We are going to construct a counterexample to uniqueness of the type of (3.1) with an a having a modulus of continuity ω_a equivalent to ω.

Set

$$\theta(s) = \int_0^s \frac{ds}{\omega(s)}. \tag{3.5}$$

Then, θ is a one-to-one mapping from $[0,T]$ into $[0,\theta(T)]$ for any $T > 0$. Let us denote by θ^{-1} its inverse. One has clearly

$$\frac{d\theta^{-1}}{dy}(y) = \omega(\theta^{-1}(y)) \quad \forall y > 0. \tag{3.6}$$

Let u be a smooth increasing function defined on (a_1, a_2), and such that $u(a_1) = A_1 < A_2 = u(a_2)$. Then, let us define v by

$$v = \begin{cases} u + \theta^{-1}(x - a_1) & \text{in a neighbourhood of } a_1, \\ u + \theta^{-1}(a_2 - x) & \text{in a neighbourhood of } a_2, \end{cases} \tag{3.7}$$

v being smooth and such that

$$v > u \quad , \quad v' > 0 \ \text{ on } (a_1, a_2). \tag{3.8}$$

It is clear that such a definition is always possible. Now, let us define $a(x,u)$ by setting

$$a(x,u) = \begin{cases} 1 \quad \text{if } \; x \notin (a_1,a_2), \\ 1 \quad \text{if } \; x \in (a_1,a_2) \; \text{ and if } \; u \leq u(x), \\ \dfrac{u'(x)}{v'(x)} \quad \text{if } \; x \in (a_1,a_2) \; \text{ and if } \; u \geq v(x), \\ \delta + (1-\delta)\dfrac{u'(x)}{v'(x)} \quad \text{if } \; x \in (a_1,a_2) \; \text{ and if } \; u = \delta u(x) + (1-\delta)v(x). \end{cases} \tag{3.9}$$

It is clear that a defined that way is continuous in both variables x, u (note that $u'(a_1) = v'(a_2)$, $u'(a_2) = v'(a_2)$). Moreover, (1.1) holds.

From this choice of a one has obviously

$$a(x,v)v' = a(x,u)u' = u' \quad \text{on } (a_1,a_2) \tag{3.10}$$

so that u and v are both solution to (3.1) with $f = -u''$.

Now, for t small enough, there exists x close to a_1 or a_2 such that $|u(x) - v(x)| = t$, then by (3.9),

$$\begin{aligned} a(x,u(x)) - a(x,v(x)) &= 1 - \frac{u'(x)}{v'(x)} \\ &= \frac{v'(x) - u'(x)}{v'(x)}. \end{aligned}$$

But, in the neighbourhood of a_1 or a_2 one has (for instance for a_1, and by (3.6))

$$(v-u)' = \omega(\theta^{-1}(x-a_1)) = \omega(v-u) \tag{3.11}$$

and thus,

$$a(x,u(x)) - a(x,v(x)) = \frac{1}{v'(x)}\,\omega(v(x)-u(x)) = \frac{1}{v'(x)}\,\omega(t).$$

So, for t small and for some constant C

$$\omega_a(t) \geq C\omega(t),$$

hence

$$\int_{0+} \frac{ds}{\omega_a(s)} \leq \frac{1}{C}\int_{0+} \frac{ds}{\omega(s)}$$

and (2.12) fails. Of course, one can show that (1.3) fails as well.

In the case where (3.4) holds, let us now prove that, for some constant C, one has also

$$\omega_a(t) \leq C\omega(t). \tag{3.12}$$

For that, remark that if P denotes the projection of $\mathbf{R}$ onto $[u(x), v(x)]$ i.e. if

$$P(y) = \begin{cases} u(x) & \text{if } y \leq u(x), \\ y & \text{if } y \in [u(x), v(x)], \\ v(x) & \text{if } y \geq v(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

then, by definition of a one has

$$a(x, y) = a(x, P(y)). \tag{3.14}$$

So, if we prove that

$$|a(x, z) - a(x, z')| \leq C\omega(|z - z'|) \quad \forall z,\ z' \ \in [u(x), v(x)], \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{3.15}$$

we will have (3.12) since from (3.14) it will follow

$$\begin{aligned} |a(x, u) - a(x, v)| &= |a(x, P(u)) - a(x, P(v))| \\ &\leq C\omega(|P(u) - P(v)|) \\ &\leq C\omega(|u - v|) \quad \forall u,\ v\ \in \mathbf{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.16}$$

To prove (3.15) consider for $\delta, \delta' \in [0, 1]$

$$z = \delta u(x) + (1 - \delta)v(x) \quad , \quad z' = \delta' u(x) + (1 - \delta')v(x). \tag{3.17}$$

From (3.9) one has

$$a(x, z) - a(x, z') = (\delta - \delta')[1 - \frac{u'(x)}{v'(x)}] \tag{3.18}$$

and

$$z - z' = (\delta - \delta')(u(x) - v(x)). \tag{3.19}$$

So, for x outside of neighbourhoods of a_1 and a_2 one has

$$\begin{aligned} |a(x, z) - a(x, z')| &= |z - z'||1 - \frac{u'(x)}{v'(x)}|/|u - v| \\ &\leq C|z - z'|. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Let us fix some $t_0 > 0$. Since by (3.4) the function $\frac{\omega(t)}{t}$ is non increasing, one has

$$\frac{\omega(t)}{t} \geq \frac{\omega(t_0)}{t_0} \quad \forall t \leq t_0 \tag{3.21}$$

hence for some constant C

$$\omega(t) \geq Ct \quad \forall t \leq t_0. \tag{3.22}$$

It then follows frow (3.20) that

$$|a(x,z) - a(x,z')| \leq C'\omega(|z-z'|). \tag{3.23}$$

C' depends of course of the neigbourhoods of a_1, a_2 considered. Note also that a being bounded we need only to establish (3.23) for small values of $|z-z'|$. Now, in the neighbourhood of a_1 or a_2, by (3.11), (3.18) one has

$$\begin{aligned}
|a(x,z) - a(x,z')| &= |\delta - \delta'|\left|\frac{(v'-u')}{v'}\right| \\
&= |\delta - \delta'|\frac{\omega(v-u)}{v'} \\
&= \frac{1}{v'}\frac{|z-z'|}{v-u}\omega(v-u) \\
&= \frac{1}{v'}\omega(|z-z'|)\frac{|z-z'|}{\omega(|z-z'|)}\frac{\omega(v-u)}{v-u}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Using (3.4) and the fact that $|z-z'| \leq v-u$ we derive

$$|a(x,z) - a(x,z')| \leq \frac{1}{v'}\omega(|z-z'|).$$

So, combining this with (3.23), we get for some constant C

$$|a(x,z) - a(x,z')| \leq C\omega(|z-z'|) \tag{3.25}$$

and (3.12) follows.

In particular, when

$$\omega(t) = t^\gamma, \qquad \gamma \in (0,1)$$

(note that for such an ω (3.3), (3.4) hold) (3.16) reads

$$|a(x,u) - a(x,v)| \leq C|u-v|^\gamma \quad \forall u,\ v\ \in \mathbf{R}, \text{ a.e. } x \in \Omega$$

which is (3.2). This completes the proof of proposition 3.1.

Remark 3.1 : When in (1.2) $g = 0$, it is still possible to produce examples of non uniqueness. For instance consider the construction we just made on $(a_1, a_2) = (-1, 0)$ and with $0 = A_1 < A_2$. Then, symetrise u and v on $(0,1)$. It is clear that we are producing that way a counterexample to uniqueness on $(-1,1)$ with homogeneous boundary data i.e. with $g = 0$.

4. Concluding remarks

In fact the Theorem 1 can also be rephrased into a comparison principle. More precisely we have :

THEOREM 1' : Assume that for some positive constant C one has

$$|a(x,u)-a(y,u)|\leq C|x-y| \quad \forall u\in\mathbf{R},\ \forall x,\ y\in\Omega \tag{1.3}$$

or

$$|a(x,u)-a(x,v)|\leq C|u-v| \quad \forall u,\ v\ \in\mathbf{R},\ \text{a.e. } x\in\Omega. \tag{1.4}$$

Let us denote by u_1, u_2 the solution to (1.2) corresponding respectively to the data (f_1, g_1), (f_2, g_2), then if

$$f_1\leq f_2 \quad , \quad g_1\leq g_2$$

one has

$$u_1\leq u_2.$$

($f_1 \leq f_2$ is for instance taken in the H^{-1} or in the measures sense).

Proof : In the case where (1.3) holds, (2.5) becomes

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x,u_1)-A(x,u_2))-\int_{u_2(x)}^{u_1(x)}\frac{\partial a(x,t)}{\partial x_i}dt\Big)\leq 0 \qquad \text{in} \quad \Omega.$$

So, one can establish (2.6) (with u, v replaced by u_1, u_2) as in section 2 and conclude the same way that $u_1 \leq u_2$.

In the case where (1.4) holds, since

$$F_\epsilon(u_1-u_2)\in H_0^1(\Omega) \quad , \quad F_\epsilon(u_1-u_2)\geq 0,$$

(2.16) becomes

$$\int_\Omega a(x,u_1)\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}F_\epsilon(u_1-u_2)\,dx\leq -\int_\Omega(a(x,u_1)-a(x,u_2))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}F_\epsilon(u_1-u_2)\,dx$$

and the proof is the same.

The situation is quite different for the problem

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big)+\lambda(x)u=f & \text{in} \quad \Omega,\\ u-g\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

where $\lambda(x)$ is a positive function. Here uniqueness can hold even when both (1.3), (1.4) fail. We refer the reader to [A.], [A.C.].

With a similar technique uniqueness and nonuniqueness results are also available for more general nonlinear problems as for instance variational inequalities associated to nonlinear operators of the type considered here (see [C.M.], [M.]), or systems (see [A.], [C.F.M.]).

It is also possible to consider the parabolic analogue of our problem i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \;\; t \in (0,T) \quad , \quad u(.,0) = u_0. \end{cases}$$

In this situation uniqueness may also hold even if (1.3), (1.4) fail (see [Ar.], [C.R.], [R.]).

CHAPITRE 2

Unicité des solutions approchées.

Dans ce chapitre on s'interessera aux solutions approchées du problème:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u).\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f, \\ u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et où $a(x,u)$ est une fonction de Carathéodory Lipschitzienne en x et u vérifiant

$$0 < \alpha \le a(x,u) \le \beta, \quad \text{presque partout sur } \Omega,\ \forall u \in R. \tag{2.2}$$

et

$$\exists k \text{ tel que } |a(x,v) - a(x,u)| \le k.|u-v| \quad \forall u,v \in R \tag{2.3}$$

On sait que (2.1) admet une solution unique u_0(c.f. chapitre 1).

On se propose de mettre en évidence deux phénomènes. D'une part le problème approché correspondant à (2.1) peut avoir plusieurs solutions, mais d'autre part lorsque la taille du maillage est petite celles ci sont confondues et l'unicité est rétablie.

On travaillera tout d'abord en dimension 1 puis sur des éléments de Lagrange de type P_1 ou Q_1.

2.1 Résultats préliminaires.

On suppose dans cette partie que Ω est un ouvert borné de R^n, $n \ge 1$.
On désigne par V_0^h, $h > 0$ un sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ et l'on suppose que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad \exists w_h \in V_0^h \text{ telle que } w_h \to w \text{ quand } h \to 0. \tag{2.4}$$

On dit que $v_h \in V_0^h$ est solution de (2.1) dans V_0^h si et seulement si:

$$\int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla w = < f, w > \forall w \in V_0^h. \tag{2.5}$$

$< \, , \, >$ désigne la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On a alors

Théorème 2.1

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et si a est une fonction de Carathéodory vérifiant (2.2) et (2.3) alors il existe une solution u_h de l'équation (2.5)

Démonstration du théorème 2.1

Soit $v \in V_0^h$, grâce au théorème de Lax-Milgram, on sait qu'il existe un unique u solution de

$$\begin{cases} \int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla w \, dx = < f, w > \qquad \forall w \in V_0^h \\ u \in V_0^h. \end{cases} \tag{2.6}$$

$H_0^1(\Omega)$ et V_0^h sont munis de la norme :

$$||v||^2 = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx = ||\nabla v||_2^2 \tag{2.7}$$

où $| \ |$ est la norme euclidienne et $| \ |_2$ la norme usuelle de $L^2(\Omega)$. De plus, $|| \ ||_*$ désigne la norme duale dans $H^{-1}(\Omega)$.

En prenant $w = u$ dans (2.6), on obtient grace à (2.2)

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \int_\Omega a(x,v)\nabla u \cdot \nabla u \, dx = < f, u > \leq ||f||_* ||u||.$$

Donc

$$||u|| \leq \frac{||f||_*}{\alpha}. \tag{2.8}$$

Donc l'application

$$v \rightarrow T(v) = u$$

envoie la boule $B(0, \frac{||f||_*}{\alpha})$ de V_0^h sur elle-même. De plus, il est facile de montrer que T est continue. Donc, d'après le théorème du point fixe de Brouwer,(cf.[$G.T$]) (2.5) admet une solution.

On va maintenant regarder de quelle façon convergent ces solutions approchées.

Théorème 2.2

Soit $(v_h)_h$ une "suite" de solutions dans V_0^h, alors v_h tend vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$

On commence par démontrer le lemme suivant:

Lemme 2.1

La "suite" v_h tend faiblement vers u_0 dans $H_0^1(\Omega)$.

Démonstration du lemme 2.1

En prenant $w = v_h$ dans (2.5), on a:

$$\int_\Omega a(x, v_h).| \bigtriangledown v_h|^2 =< f, v_h >$$

or

$$\alpha \| \bigtriangledown v_h\|_2^2 \leq \int_\Omega a(x, v_h).| \bigtriangledown v_h|^2$$
$$< f, v_h >\leq C(f).\| \bigtriangledown v_h\|_2.$$

Donc, pour une certaine constante C on a

$$\| \bigtriangledown v_h\|_2 \leq C, \tag{2.9}$$

et v_h est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que la "suite" des v_h converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction v.

Soit w une fonction de $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $(w_h)_h$ où $w_h \in V_0^h$ qui tend vers w dans H_0^1. D'autre part

$$\int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown w = \int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown w_h + \int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown (w - w_h)$$
$$=< f, w_h > + \int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown (w - w_h).$$

Or, d'après (2.9)

$$| \int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown (w - w_h)| \leq \beta \| \bigtriangledown (w - w_h)\|_2.\| \bigtriangledown v_h\|_2$$
$$\leq C'.\| \bigtriangledown (w - w_h)\|_2.$$

Donc cette intégrale tend vers 0 quand h tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega a(x, v_h). \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown (w - w_h) = 0 \tag{2.10}$$

$$< f, w_h >\to< f, w > \text{ quand } h \to 0. \tag{2.11}$$

On obtient donc

$$\int_\Omega a(x, v_h) \bigtriangledown v_h. \bigtriangledown w \longrightarrow< f, w > . \tag{2.12}$$

On a

$$\int_\Omega a(x,v).\nabla v.\nabla w = \int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla w$$
$$+\int_\Omega (a(x,v)-a(x,v_h)).\nabla v_h.\nabla w + \int_\Omega a(x,v).\nabla(v-v_h).\nabla w. \tag{2.13}$$

Quitte à extraire à nouveau une sous suite, on peut supposer que $(v_h - v) \to 0$ presque partout sur Ω.

La fonction a étant continue $a(x,v_h) - a(x,v) \to 0$ presque partout.

Utilisant (2.9)

$$|\int_\Omega (a(x,v)-a(x,v_h)).\nabla v_h.\nabla w| \leq 2.C.|((a(x,v)-a(x,v_h)).|\nabla w|)|_2, \tag{2.14}$$

or

$$|(a(x,v)-a(x,v_h))|.|\nabla w|^2 \leq (2\beta)^2.|\nabla w|^2 \in L^1(\Omega)$$

et

$$|(a(x,v)-a(x,v_h))|^2.|\nabla w| \to 0 \text{ presque partout}$$

et donc (2.14) tend vers 0 avec h. On sait d'autre part que :

$$\nabla v_h \rightharpoonup \nabla v \text{ dans } (L^2)^n \tag{2.15}$$

d'où

$$\int_\Omega a(x,v).\nabla(v-v_h).\nabla w \to 0. \tag{2.16}$$

On a donc montré que (cf (2.13), (2.14) et (2.15)) que :

$$\int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla w \longrightarrow \int_\Omega a(x,v).\nabla v.\nabla w \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{2.17}$$

donc, d'après (2.12)

$$\int_\Omega a(x,v).\nabla v.\nabla w = < f, w > \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Donc $v = u_0$ la solution unique de l'équation (2.1) et comme v_h a une unique valeur d'adhérence faible le lemme est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la démonstration du théorème 2.2

et de montrer que la convergence est en fait forte.

Démonstration du théorème 2.2

D'après la compacité de l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on a:

$$v_h \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \tag{2.19}$$

$$v_h \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{2.20}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,v_h).|\nabla(v_h-u_0)|^2 &= \int_\Omega a(x,v_h).|\nabla v_h|^2 \\ &+ \int_\Omega a(x,v_h).|\nabla u_0|^2 - 2.\int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla u_0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

De (2.20) et (2.5) on déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_\Omega a(x,v_h).|\nabla v_h|^2 &= \lim_{h\to 0} < f, v_h > \\ &= < f, u_0 > \\ &= \int_\Omega a(x,u_0).|\nabla u_0|^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

D'autre part les seules valeurs d'adhérence possibles pour

$$\int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla u_0 \text{ et } \int_\Omega a(x,v_h).|\nabla u_0|^2 \tag{2.23}$$

sont toutes deux

$$\int_\Omega a(x,u_0).|\nabla u_0|^2. \tag{2.24}$$

En effet si ces quantités convergent on peut extraire de v_h une sous suite telle que

$$v_h \to u_0 \text{ presque partout.}$$

On en déduit alors d'après le théorème de convergence dominée que :

$$a(x,v_h).\nabla u_0 \to a(x,u_0).\nabla u_0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$a(x,v_h).|\nabla u_0|^2 \to a(x,u_0).|\nabla u_0|^2 \text{ dans } L^1(\Omega).$$

Comme

$$\nabla v_h \rightharpoonup \nabla u_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible}$$

(2.24) est bien la seule valeur limite possible pour (2.23) et de (2.21) et (2.22) on déduit

$$\lim_{h\to 0}\int_\Omega a(x,v_h).|\nabla(u_0-v_h)|^2 = 0. \tag{2.25}$$

Le théorème découle alors de l'inégalité

$$\alpha.\|\nabla(u_0-v_h)\|_2^2 \le \int_\Omega a(x,v_h).|\nabla(v_h-u_0)|^2.$$

2.2 le cas particulier de la dimension 1

Soit $\Omega =]a, b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$. On considère u solution du problème

$$\begin{cases} -\Big(a(x,u)u'\Big)' = f \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.26}$$

On suppose Ω divisé en n sous intervalles -i.e. on considère une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < ...... < a_{n-1} < a_n = b. \tag{2.27}$$

On pose

$$h = \max_{i=1..n} (a_i - a_{i-1}) \tag{2.28}$$

On désigne alors par V_0^h le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ défini par

$$\begin{aligned} V_0^h = \{v \quad \Omega \to R \text{ continues, } v(a) = v(b) = 0, \\ v \text{ est affine sur }]a_{i-1}, a_i[\quad \forall i = 1, 2...n-1\}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Il est clair que V_0^h est un sous-espace de dimension finie $n-1$ de $H_0^1(\Omega)$ dont une base est constituée par les fonctions w_i définies par

$$w_i \in V_0^h \quad , \quad w_i(a_j) = \delta_{i,j} \quad \forall i = 1, ..., n-1, \ \forall j = 0, ..., n. \tag{2.30}$$

$H_0^1(\Omega)$ est muni de la norme

$$||u|| = |u'|_2$$

et $H^{-1}(\Omega)$ de la norme duale $|| \ \ ||_*$.

On a la propriété de monotonie suivante :

Théorème 2.3

Soient $f_1, \ f_2 \in H^{-1}(\Omega)$ vérifiant

$$f_1 \le f_2 \tag{2.31}$$

au sens de $H^{-1}(\Omega)$. On suppose de plus que a vérifie (2.2) et (2.3) et que

$$h^{\frac{1}{2}} < \frac{\alpha^2}{k||f_2||_*} \tag{2.32}$$

où k désigne la constante dans (2.3). Alors, si $u_{i,h}$, $i = 1,2$ sont solutions de

$$\begin{cases} \int_\Omega a(x, u_{i,h}) u'_{i,h} v' \, dx = < f_i, v > \qquad \forall v \in V_0^h, \\ u_{i,h} \in V_0^h \end{cases} \tag{2.33}$$

on a

$$u_{1,h} \leq u_{2,h}. \tag{2.34}$$

Démonstration du théorème 2.3

En procédant de la même façon que pour obtenir (2.8), on obtient pour $i = 1,2$

$$||u_{i,h}|| = |u'_{i,h}|_2 \leq \frac{||f_i||_*}{\alpha}. \tag{2.35}$$

De plus, si $u_{1,h}$, $u_{2,h}$ désignent les solutions de (2.33), par soustraction on obtient

$$\int_\Omega a(x, u_{1,h}) u'_{1,h} v' \, dx - \int_\Omega a(x, u_{2,h}) u'_{2,h} v' \, dx = < f_1 - f_2, v > \qquad \forall v \in V_0^h.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x, u_{1,h})(u_{1,h} - u_{2,h})' v' \, dx = &\int_\Omega (a(x, u_{2,h}) - a(x, u_{1,h})) u'_{2,h} v' \, dx \\ &+ < f_1 - f_2, v > \qquad \forall v \in V_0^h. \end{aligned} \tag{2.36}$$

En posant

$$w_h = u_{1,h} - u_{2,h} \tag{2.37}$$

et en utilisant (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x, u_{1,h}) w'_h v' \, dx &\leq \int_\Omega |a(x, u_{2,h}) - a(x, u_{1,h})| |u'_{2,h}| |v'| \, dx + < f_1 - f_2, v > \\ &\leq \int_\Omega k |u_{2,h} - u_{1,h}| |u'_{2,h}| |v'| \, dx + < f_1 - f_2, v > \\ &\leq \int_\Omega k |w_h| |u'_{2,h}| |v'| \, dx + < f_1 - f_2, v > \qquad \forall v \in V_0^h. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Si maintenant on désigne par v la fonction de V_0^h définie par

$$v(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } w_h(a_i) > 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.39}$$

Il est clair que, $v \geq 0$ et par la définition de la positivité au sens de $H^{-1}(\Omega)$ et en utilisant

(2.31) on a

$$< f_1 - f_2, v > \leq 0. \tag{2.40}$$

(2.38) entaine alors

$$\int_\Omega a(x, u_{1,h}) w_h' v' \, dx \leq k \int_\Omega |w_h| |u_{2,h}'| |v'| \, dx. \tag{2.41}$$

Considérons un intervalle (a_{i-1}, a_i). Sur un tel intervalle on a

$$v' = 0 \tag{2.42}$$

sauf si

$$w_h(a_{i-1}) > 0 \text{ et } w_h(a_i) \leq 0 \quad \text{ou} \quad w_h(a_{i-1}) \leq 0 \text{ et } w_h(a_i) > 0. \tag{2.43}$$

Maintenant si (a_{i-1}, a_i) est un intervalle vérifiant (2.43) on a, grâce à (2.39)

$$w_h' v' = \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{(a_i - a_{i-1})^2} > 0.$$

D'où utilisant (2.2), (2.41) et (2.42) on déduit

$$\alpha \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{(a_i - a_{i-1})^2} \, dx \leq k \sum_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} |w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})| |u_{2,h}'| |v'| \, dx$$

où la sommation est étendue aux i vérifiant (2.43). On obtient alors

$$\alpha \sum_i \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{a_i - a_{i-1}} \leq k \sum_i \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{a_i - a_{i-1}} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |u_{2,h}'| \, dx. \tag{2.44}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.35) on a

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} |u_{2,h}'| \, dx \leq |u_{2,h}'|_2 (a_i - a_{i-1})^{\frac{1}{2}} \leq \frac{||f_2||_*}{\alpha} h^{\frac{1}{2}}$$

et (2.44) devient

$$\alpha \sum_i \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{a_i - a_{i-1}} \leq \frac{k ||f_i||_* h^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \sum_i \frac{|w_h(a_i) - w_h(a_{i-1})|}{a_i - a_{i-1}}.$$

En utilisant (2.32), on obtient une contradiction si l'ensemble des i vérifiant (2.43) n'est pas vide, on a donc

$$w_h = u_{1,h} - u_{2,h} \leq 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.3.

Il en découle immédiatement

Théorème 2.4

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et a une fonction de Carathéodory vérifiant (2.2), (2.3). Alors si

$$h^{\frac{1}{2}} < \frac{\alpha^2}{k||f||_*}$$

où k est la constante de (2.3), (2.5) a une solution unique.

Ce résultat est optimal en ce sens que l'on peut montrer

Théorème 2.5

Sous les hypothèses du théorème 2.2 et si h n'est pas supposé petit le problème approché (2.5) correspondant à (2.26) peut avoir plusieurs solutions.

Démonstration du théorème 2.5

Supposons $\Omega =]0,1[$ et

$$a_i = i.h = \frac{i}{n} \qquad \forall i = 0, 1, ..., n.$$

Notons $u_i' = (u(a_i) - u(a_{i-1})).n$ la pente de u sur $[a_{i-1}, a_i]$ et $u_i = u(a_i)$. Soit w_i, $i = 1, ...n-1$, la base de V_0^h définie en (2.30).

Pour tout i on doit avoir

$$\int_0^1 a(x,u).u_i'.w_i' = < f, w_i > = f_i. \tag{2.45}$$

C'est à dire

$$\left(\int_{a_{i-1}}^{ai} a(x,u).dx\right).u_i'.n - \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} a(x,u).dx\right).u_{i+1}'.n = f_i.$$

En écrivant que u appartient à V_0^h et en posant

$$\int_{a_{i-1}}^{ai} a(x,u).dx = \lambda_i^u$$

on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \lambda_1^u.u_1' - \lambda_2^u.u_2' = \frac{f_1}{n} \\ \lambda_2^u.u_2' - \lambda_3^u.u_3' = \frac{f_2}{n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1}^u.u_{n-1}' - \lambda_n^u.u_n' = \frac{f_{n-1}}{n} \\ u_1' + u_2' + \dots\dots + u_n' = 0. \end{cases}$$

Or

$$\begin{aligned} \lambda_i^u &= \int_{a_{i-1}}^{ai} a(x,u)dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 a(\frac{t+i-1}{n}, u_i + u_i'.\frac{t}{n})dt. \end{aligned}$$

Soit ϕ une fonction définie sur $[0,1]$ et telle que:

$$\begin{cases} \phi(0) = \phi(1) = 1 \\ \phi'(0) = \phi'(1) = 0 \qquad \phi \in C^\infty(0,1) \\ \int_0^1 \phi = \frac{1}{2} \\ 1 \geq \phi(x) \geq \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soit $u \in V_0^h$ définie par $u_0 = u_n = 0$, $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ réels strictement positifs donnés.

Nous construisons à partir de u une fonction a de la façon suivante :

pour $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ on pose $t = n.(x - \frac{i-1}{n})$ et

$$a(x,z) = \begin{cases} 1 \text{ pour } z \leq u(x) \\ \phi(t) \quad \text{pour } z \geq 2.u(x) \\ \mu + (1-\mu).\phi(t) \text{ pour } z = \mu.u(x) + (1-\mu).2.u(x) \in [u(x), 2.u(x)]. \end{cases}$$

Il est clair que $a(x,z) \in [\frac{1}{3}, 1]$.

D'autre part la fonction a est continue car u est continue, ϕ est continue et $\phi(0) = \phi(1) = 1$.

Montrons que a est même Lipschitzienne en x et en z.

On commence par le vérifier pour z. En effet pour $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ on a

$$\frac{\partial}{\partial z}a(x,z) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial z}a(x,z) = \frac{\phi(t)-1}{u(x)}.$$

Si $x \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $\; i = 2,..,n-1$ alors $u(x) \geq \inf_{1\leq i\leq n-1} u_i > 0$ donc pour $x \in [\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}]$

$$|\frac{\partial}{\partial z}a(x,z)| \leq \frac{1}{\inf_{1\leq i\leq n-1} u_i}$$

et $\frac{\partial}{\partial z}a(x,z)$ est borné. Reste à voir les cas où $x \in [0, \frac{1}{n}]$ ou $x \in [\frac{n-1}{n}, 1]$.

Si, par exemple, $x \in [0, \frac{1}{n}]$ alors $u(x) = n.x.u_1$ et $t = n.x$; d'où

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial}{\partial z}a(x,z)| &= |\frac{\phi(t)-1}{u(x)}| \\
&= |\frac{\phi(t)-1}{t.u_1}| \\
&= |\frac{\phi(t)-\phi(0)}{t.u_1}| \\
&\leq \frac{\max_{[0,1]}|\phi'(t)|}{u_1}
\end{aligned}$$

d'après le théorème des accroissements finis. Procédant de façon similaire sur $[\frac{n-1}{n}, 1]$, on achève de montrer que a est Lipschitzienne en z.

Pour montrer que a est Lipschitzienne en x on remarque que

pour $z < u(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}a(x,z) = 0$$

pour $z > 2.u(x), x \in]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[$

$$\frac{\partial}{\partial x}a(x,z) = \phi'(n.(x - \frac{i-1}{n})).n.$$

Donc dans ces deux cas $|\frac{\partial}{\partial x}a(x,z)|$ est borné. Si maintenant

$$z = \mu.u(x) + (1-\mu).2.u(x) \quad \mu \in]0,1[\tag{2.46}$$

alors

$$\frac{\partial}{\partial x}a(x,z) = \mu' - \mu'.\phi(t) - \mu.\phi'(t).\frac{dt}{dx} \tag{2.47}$$

où
$$\frac{dt}{dx} = n,$$
et
$$z = \mu.u(x) + (1-\mu).2.u(x) = 2.u(x) - \mu.u(x).$$
D'où
$$\mu = 2 - \frac{z}{u(x)}$$
$$\mu' = \frac{z.u'(x)}{u(x)^2}$$
et on a donc
$$\frac{\partial}{\partial x}a(x,z) = \frac{z.u'(x)}{(u(x))^2}.(1-\phi(t)) - \mu.\phi'(t).n.$$
On sait que $|u'(x)|$est bornée ainsi que $|\phi'(t)|$ donc sur toute partie où $u(x) > m > 0$ $\frac{\partial}{\partial x}a(x,z)$ est bornée . Si maintenant u tend vers 0, par exemple quand x tend vers 0, (le cas x tendant vers 1 se traitant de manière similaire) alors
$$\frac{1-\phi(t)}{u(x)^2} = \frac{1-\phi(t)}{(t.u_1)^2} = \frac{\phi(t)-\phi(0)}{(t.u_1)^2}. \tag{2.48}$$
Or d'après le développement de Taylor de ϕ en 0
$$\phi(t) - \phi(0) = \frac{t^2}{2}.\phi''(\theta t).$$
D'où en combinant ceci avec (2.47) et (2.48) on a encore $|\frac{\partial}{\partial x}a(x,z)|$ borné dans ce cas.

Soit $f \in H^{-1}(0,1)$ qui vérifie
$$\int_0^1 a(x,u).u_i'.w_i' =< f, w_i > \quad \forall i = 1, ..., n-1. \tag{2.49}$$
Plus précisement, posons
$$f = -(a(x,u(x)).u'(x))' \quad \forall x \in]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[.$$
Il est clair que $f \in H^{-1}(0,1)$ puisque $a(x,u(x)).u'(x)$ est une fonction continue par morceaux.

On vérifie alors sans peine que u et $v = 2.u$ sont alors solutions de (2.5).

En effet
$$\lambda_i^u = \int_{a_{i-1}}^{ai} a(x,u).dx = \frac{1}{n}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_i^v &= \int_{a_{i-1}}^{ai} a(x,v).dx \\
&\int_0^1 a(\frac{t+i-1}{n}, 2.u(\frac{t+i-1}{n})).\frac{dt}{n} \\
&= \frac{1}{n}.\int_0^1 \phi(t).dt \\
&= \frac{1}{2n}.
\end{aligned}
$$

De plus $v' = 2.u'$, donc $\lambda_i^u = \lambda_i^v$ et

$$
\int_0^1 a(x,u).u_i'.w_i' = \int_0^1 a(x,v).v_i'.w_i'
$$

pour tout $i = 1,..,n-1$, ce qui termine.

2.3 Cas particuliers en dimension 2

2.3.1 Eléments finis de Lagrange de type P_1

Dans cette partie Ω désigne un ouvert polygonal borné de $\mathbf{R}^2$. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et si $a(x,u)$ est une fonction de Carathéodory Lipschitzienne en u on sait qu'il existe une unique solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u).\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.50}$$

On la notera u_0.

On suppose Ω divisé en n triangles T_i suffisamment "réguliers", -i.e. tous les angles $\theta_{i,j}$ $(j = 1, 2, 3)$ de ces triangles vérifient

$$0 < \delta \leq \theta_{i,j} \leq \kappa < \frac{\pi}{2} \tag{2.51}$$

et les diamètres h_i vérifient

$$\max_i h_i = h,$$

h étant la taille du maillage.

On désigne par V_0^h le sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ défini par

$$V_0^h = \{v : \Omega \to R, \text{ continue}, v(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega, \ \ v \text{ affine sur } T_i \ \ \forall i = 1, .., n\}.$$

On a alors

Théorème 2.6

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, a est une fonction de Carathéodory vérifiant (2.2) et Lipschitzienne en u (vérifiant (2.31)), et si de plus $|\nabla u_0|^2$, où u_0 est l'unique solution de (2.1), est équiintégrable, c'est à dire qu'il existe une fonction ϵ telle que

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0 \quad , \quad \int_K |\nabla u_0|^2 \leq \epsilon(h) \quad \forall K \in \tau_h, \tag{2.52}$$

alors pour h assez petit la solution de (2.4) est unique.

Ce résultat est optimal dans le sens où l'on peut montrer :

Théorème 2.7

Sous les hypothèses du théorème 2.6 et si h n'est plus supposé petit le problème approché (2.4) correspondant à (2.50) peut avoir plusieurs solutions.

Démonstration du théorème 2.6

Supposons que u_h et v_h soient deux solutions de (2.4). On a donc :

$$\int_\Omega a(x,u_h).\nabla u_h.\nabla w = \int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla w \quad \forall w \in V_0^h. \tag{2.53}$$

On note a_i les sommets des triangles et on choisit $\phi \in V_0^h$ de la façon suivante :

$$\phi(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } (u_h - v_h)(a_i) > 0 \\ \\ 0 \text{ si } (u_h - v_h)(a_i) \leq 0. \end{cases}$$

Reprenant $w = \phi$ dans (2.53), on obtient

$$\sum_i \int_{T_i} a(x,u_h).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi - \sum_i \int_{T_i} (a(x,v_h) - a(x,u_h)).\nabla v_h.\nabla \phi = 0. \tag{2.54}$$

On notera

$$I_1^i = \int_{T_i} a(x,u_h).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi$$

et

$$I_2^i = \int_{T_i} (a(x,v_h) - a(x,u_h)).\nabla v_h.\nabla \phi.$$

Les seuls triangles sur lesquels $\nabla\phi \neq 0$ et donc éventuellement I_1^i et $I_2^i \neq 0$ sont ceux sur lesquels $(u_h - v_h)$ prend à la fois des valeurs strictement positives et négatives ou nulles.

On va montrer que $I_1^i \geq 0 \ \ \forall i$ et que pour h assez petit I_2^i est négligeable devant I_1^i.

Pour cela on démontre d'abord un lemme.

Soit $T = (A_1A_2A_3)$ un triangle "régulier", dont les angles θ_i vérifient (2.51), alors pour un certain τ on a :

$$0 < \tau \leq cos(\theta_i) \leq 1 - \tau, \tag{2.55}$$

de plus, si on note l le plus grand des côtés de T, il existe $t > 0$ ne dépendant que de δ et κ tel que

$$\frac{|A_iA_j|}{l} \geq t. \tag{2.56}$$

lemme 2.2

Si on note λ_i les fonctions affines sur T telles que $\lambda_i(A_j) = \delta_{i,j}$ pour $i = 1, 2, 3$ et j =1, 2, 3, alors

$$\nabla\lambda_i . \nabla \lambda_j \leq -\frac{\tau}{l^2} \quad \text{pour } i \neq j \tag{2.57}$$

et

$$\frac{1}{l} \leq |\nabla \lambda_i| \leq \frac{m}{l} \text{ où } m \text{ ne dépend que de } \delta \text{ et } \kappa. \tag{2.58}$$

Démonstration du lemme 2.2

Sans perte de généralité, on peut poser $i = 1$ et $j = 2$. on pose de plus $\overrightarrow{A_3A_1} = \mu$ et $\overrightarrow{A_3A_2} = \nu$, $\delta \leq (\mu \hat{,} \nu) = \theta_3 \leq \kappa$

On note μ_1 et ν_1 les vecteurs directement perpendiculaires à μ et ν de norme 1.

$$\nabla\lambda_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1.\nu}$$

où $\mu_1.\nu > 0$. (On note par un point le produit scalaire entre deux vecteurs.)

$$\nabla\lambda_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1.\mu}$$

où $\nu_1.\mu < 0$

$$\nabla\lambda_1 . \nabla \lambda_2 = \frac{\mu_1.\nu_1}{(\mu_1.\nu).(\nu_1.\mu)}$$

En utilisant la définition de μ_1 etν_1 et (2.55) on obtient $\mu_1.\nu_1 = \frac{\mu.\nu}{|\nu|.|\mu|} = cos(\mu, \nu) > \tau$ et donc

$$\nabla\lambda_2 . \nabla \lambda_1 < 0$$

et

$$|\nabla \lambda_2 . \nabla \lambda_1| \geq cos(\mu, \nu).\frac{1}{|\nu|.|\mu|} \geq \frac{\tau}{|\nu|.|\mu|} \geq \frac{\tau}{l^2}.$$

Ce qui démontre (2.57).

On a de plus

$$|\nabla \lambda_1| = \frac{1}{|\mu|.sin(\theta_1)} \geq \frac{1}{l}$$

et, en utilisant (2.56),

$$|\nabla \lambda_1| \leq \frac{t}{l.sin\delta}.$$

$\frac{t}{sin\delta}$ ne dépend que de δ et κ, on a donc (2.58) ce qui termine la démonstration du lemme.

Soit T_i un triangle sur lequel $\phi \neq 0$ donc où $(u_h - v_h)$ est à la fois > 0 et ≤ 0. On note On note (A, B, C) ses sommets et h_i son diamètre.

Pour arriver au résultat on commence par minorer l'intégrale I_1^i et par démontrer le

lemme 2.3

En notant a, b, c les valeurs de $(u_h - v_h)$ aux sommets de T_i on a :

$$I_1^i = I_1 > K(|a| + |b| + |c|) \tag{2.59}$$

où K est indépendante de h et de T_i.

Démonstration du lemme 2.3.

On commence par étudier $\nabla(u_h - v_h). \nabla \phi$.

Sur T_i $\phi \neq 0$ donc on peut supposer que $a > 0$. Il y a alors deux cas possibles : ou bien $a > 0$, $b \leq 0$ et $c \leq 0$, et $\phi = \lambda_A$ ou bien $a > 0$ $b > 0$ et $c \leq 0$, et $\phi = \lambda_A + \lambda_B$

-Commençons par le premier de ces cas. Les triangles sont supposés "réguliers", ils vérifient (2.51), on peut leur appliquer le lemme 2.3 et donc il existe m tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{h_i}. \leq |\nabla \lambda_A| \leq \frac{m}{h_i} \\ \frac{1}{h_i} \leq |\nabla \lambda_B| \leq \frac{m}{h_i} \\ \frac{1}{h_i} \leq |\nabla \lambda_C| \leq \frac{m}{h_i}, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla(u_h - v_h). \nabla \phi &= \nabla(a.\lambda_A + b.\lambda_B + c.\lambda_C). \nabla \lambda_A \\ &= a|\nabla .\lambda_A|^2 + b. \nabla \lambda_B. \nabla \lambda_A + c \nabla \lambda_A. \nabla \lambda_C \\ &\geq \frac{\tau}{h_i^2}(|a| + |b| + |c|). \end{aligned} \tag{2.60}$$

-Regardons maintenant le deuxième cas.

Dans ce cas on se ramène au cas précédent en remarquant que $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$ et donc

$$\begin{aligned} \nabla(u_h - v_h). \nabla \phi &= \nabla(u_h - v_h).(\nabla\lambda_A + \nabla\lambda_B) \\ &= - \nabla \lambda_C. \nabla (u_h - v_h) \\ &= -a \nabla \lambda_A. \nabla \lambda_C - b \nabla \lambda_B. \nabla \lambda_C - c(\nabla\lambda_C)^2 \\ &\geq \frac{\tau}{h_i^2}.(|a| + |b| + |c|). \end{aligned}$$

Utilisant (2.2) et (2.60), on obtient

$$I_1 \geq \alpha \frac{\tau}{h_i^2}.(|a| + |b| + |c|) \int_{T_i} dx.$$

T_i vérifie (2.51), il existe donc une constante M ne dépend que de δ et κ telle que

$$\int_{T_i} dx \geq M.h_i^2.$$

Reprenant (2.60), on obtient

$$I_1 \geq \alpha.\tau.M.(|a| + |b| + |c|). \tag{2.61}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 2.4, en posant $K = \alpha\tau.M$ ne dépendant que de δ et κ.

On majore maintemant I_2^i. Plus précisément on a :

Lemme 2.4

En reprenant les notation du lemme précédant il existe une fonction $\epsilon(h)$ telle que

$$\begin{cases} I_2 < \epsilon(h)(|a| + |b| + |c|) \\ \epsilon(h) \to 0 \text{ quand } h \text{ tend vers 0 indépendamment de } T_i, \end{cases} \tag{2.62}$$

h étant la taille du maillage.

Démonstration du lemme 2.4

On sait que a est de Lipschitzienne en u et que $|\bigtriangledown \phi|$ est constant sur T_i, on peut donc écrire que

$$|I_2| \leq k.|\bigtriangledown \phi| \int_{T_i} |(u_h - v_h)|.|\bigtriangledown v_h|.$$

D'après (2.58) on a aussi

$$|\bigtriangledown \phi| \leq \frac{m}{h_i}.$$

$(u_h - v_h)$ s'annule sur T_i donc,

$$|u_h - v_h| \leq |\bigtriangledown (u_h - v_h)|.h_i.$$

Et donc

$$|I_2| \leq k.m.|\bigtriangledown (u - v)|. \int_{T_i} |\bigtriangledown v|. \tag{2.63}$$

∇v_h est dans $L^2(\Omega)$, grace à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{T_i} |\nabla v_h| \leq \left(\int_{T_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.64}$$

Etant donné la définition de T_i, on a

$$\left(\int_{T_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq h_i.$$

On sait que $u_h - v_h = a\lambda_A + b\lambda_B + c\lambda_C$, en utilisant (2.58) on obtient

$$|\nabla (u_h - v_h)| \leq \frac{m}{h_i}(|a| + |b| + |c|).$$

On obtient donc

$$|I_2| \leq k.m^2.(|a| + |b| + |c|)\left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Pour obtenir la majoration souhaitée, il suffit maintenant de montrer que :

$$\left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1(h_i)$$

où $\epsilon_1(h_i) \to 0$ quand $h_i \to 0$ indépendamment de T_i.

Remarque :

Grâce à l'inégalité de Hôlder, (2.52) est vérifiée par exemple, si on a un résultat de régularité de type Meyers (cf.[Me] ou [G]), c'est à dire si :

$$|\nabla u_0| \in L^p(\Omega)$$

pour un certain $p > 2$. On peut aisément montrer que (2.52) est vérifié si :

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad f_0 \in L^{\frac{p}{2}}, \quad f_i \in L^p(\Omega) \ \ \forall i = 1, ..., n, \quad p > 2.$$

On va maintenant utiliser le théorème 2.2 et (2.52) pour montrer que

$$\left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1(h_i)$$

Où $\epsilon_1(h_i)$ ne dépend pas de T_i.

Pour cela on utilise l'inégalité triangulaire.

$$\left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{T_i} |\nabla (v_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{T_i} |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.65}$$

En utilisant (2.52), on obtient

$$\left(\int_{T_i} |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon'(h_i) \tag{2.66}$$

Il est clair que $\epsilon'(h_i) < \epsilon'(h)$ (où h est la taille du maillage) et que $\epsilon'(h)$ ne dépend pas de T_i. On a de plus

$$\left(\int_{T_i} |\nabla (v_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |\nabla (v_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on a vu dans le théorème 2.2 que

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla (v_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quand } h \to 0,$$

h étant la taille du maillage. On a donc bien

$$\left(\int_{T_i} |\nabla (v_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_2(h)$$

où $\epsilon_2(h) \to 0$ quand $h \to 0$, indépendamment de T_i. En reportant cette inégalité et (2.66) dans (2.65), on obtient

$$\left(\int_{T_i} |\nabla v_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1(h) \tag{2.67}$$

où $\epsilon_1(h)$ est indépendant de T_i. On a donc bien

$$I_2 < \epsilon(h)(|a| + |b| + |c|)$$

où $\epsilon(h)$ ne dépend que de h. Ce qui termine la démonstration du lemme.

On peut terminer la démonstration du théorème 2.5 en regroupant (2.59) et (2.62), ce qui donne

$$\int_{T_i} \left(a(x,u).\nabla u - a(x,v).\nabla v\right).\nabla \phi \geq (|a| + |b| + |c|).(K - \epsilon(h))$$

où K ne dépend pas de h.

Pour h assez petit $K - \epsilon(h) > 0$, or d'après (2.54) $\sum_i (I_1^i + I_2^i) = 0$ donc sur les triangles où $u_h - v_h$ s'annule

$$(|a| + |b| + |c|) = 0$$

donc $u_h = v_h$ sur ces T_i, et de proche en proche la solution est unique. Ce qui termine la démonstration du théorème 2.5.

On va maintenant montrer que si h n'est pas suffisamment petit, il se peut que le problème approché admette plusieurs solutions et démontrer ainsi le théorème 2.7.

Démonstration du théorème 2.7

Soit $\Omega = T_0$ un triangle équilatéral de côté 1 et M_h une subdivision de T_0 en triangles équilatéraux T_i de côté h. On notera V_0^n le sous espace vectoriel des fonctions continues, de Ω dans $\mathbf{R}$ affines sur les triangles T_i, comme dans la partie précédente.

Soit $u = u_h$ une solution du problème approché (2.4), on a alors

$$\sum_i \int_{T_i} a(x,u) \bigtriangledown u . \bigtriangledown w = \sum_i \bigtriangledown u . \bigtriangledown w . \int_{T_i} a(x,u) \quad \forall w \in V_0^h \tag{2.69}$$

car $\bigtriangledown u$ et $\bigtriangledown w$ sont constants sur T_i $\forall i$.

On définit une fonction ϕ sur T_0 de la façon suivante :

ϕ est une fonction C^∞ invariante par les isométries conservant ∂T_0 telle que

$$\begin{cases} \phi = 1 \text{ sur } \partial T_0, \quad 1 \geq \phi \geq \frac{1}{4} \text{ sur } T_0 \\ |\bigtriangledown \phi| = 0 \text{ sur } \partial T_0 \\ \int_{T_0} \phi = \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{cases} \tag{2.70}$$

Soit $u \in V_0^h$ une fonction telle que $u_i = u(a_i) > 0$ dès que $a_i \notin \partial\Omega$. (2.71)

On construit alors à partir de cet u une fonction a de la façon suivante.

Sur chaque triangle T_i, on construit une bijection continue de T_i dans T_0 qui à chaque sommet de T_i associe un sommet de T_0 et qui a $x \in T_i$, barycentre des sommets de T_i affectés des coefficients $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ associe $y = y(x) \in T_0$ barycentre des sommets correspondants de T_0 affectés des même coefficients. On pose alors

$$a(x,z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \leq u(x) \\ \\ \phi(y) \text{ si } z \geq 2.u(x) \\ \\ \mu + (1-\mu).\phi(y) \text{ si } z = \mu.u(x) + (1-\mu).2.u(x) \in [u(x), 2.u(x)]. \end{cases} \tag{2.72}$$

Il est alors évident que

$$\int_{T_i} a(x,u) = \frac{\sqrt{3}}{4}.h^2 \quad \forall i$$

et d'après (2.72) que

$$\begin{aligned} \int_{T_i} a(x,2u) &= h^2.\int_{T_0} \phi(x)dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}.h^2. \end{aligned}$$

Si on pose $v = 2.u$; on sait que : $\nabla v = 2.\nabla u$, et on obtient

$$\sum_i \nabla v.\nabla w.\int_{T_i} a(x,v) = \sum_i \nabla u.\nabla w.\int_{T_i} a(x,u) \quad \forall w \in V_0^h.$$

De plus

$$g: \quad w \longrightarrow \sum_i \int_{T_i} a(x,u) \nabla u.\nabla w$$

est une forme linéaire sur V_0^h.

$$(w,f) \longrightarrow \int_\Omega f.w$$

est un produit scalaire sur V_0^h, or V_0^h est de dimension finie donc il existe un f dans V_0^h tel que

$$g(w) = \int_\Omega f.w.$$

Pour cet f, u et v sont solutions de (2.4).

Il est clair que a est continue et que $\frac{1}{4} \leq a(x,u) \leq 1 \ \ \forall (x,u)$, il reste à voir que a

est bien Lipschitzienne en x et z.

On commence par montrer que a est Lipschitzienne en z.

Pour $x \in T_i$ on a

$$\frac{\partial}{\partial z} a(x,z) = 0$$

ou

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial z} a(x,z) = \frac{\phi(y) - 1}{u(x)} \geq -\frac{1}{u(x)}.$$

Grace à (2.71) on voit que sur tout triangle T_i ne touchant pas $\partial\Omega$, $u(x)$ est minoré par une constante $m > 0$ et donc $\frac{\partial}{\partial z} a(x,z)$ est borné sur T_i.

Il reste à considérer les autres triangles T_i où u n'est pas identiquement nulle, mais où u s'annule.

On sait que u est affine sur T_i et u est strictement positive en l'un des sommets, donc pour une certaine constante m :

$$u(x) > m.d(x, \partial T_i).\frac{1}{h}.$$

En utilisant (2.70), on obtient

$$1 - \phi(y) \leq \sup_{T_0} | \nabla \phi|.(d(y, \partial T_0))$$

or

$$d(x, \partial T_i).\frac{1}{h} = d(y, \partial T_0).$$

En utilisant les deux dernières formules on obtient

$$\begin{aligned} |\frac{\partial}{\partial z} a(x,z)| &= \frac{1 - \phi(y)}{u(x)} \\ &\leq \sup_{T_0} | \nabla \phi|.\frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Ce qui prouve que dans ce cas aussi $\frac{\partial}{\partial z} a(x,z)$ est borné.

On a donc montré que u est Lipschitzienne en z. Il reste à le faire pour x.

On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Pour montrer que a est Lipschitzienne en x on remarque que pour $z < u(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a(x,z) = 0 \quad \forall i = 1, 2$$

et que pour $z > 2.u(x), x \in T_i$

$$|\frac{\partial}{\partial x_i}a(x,z)| = |\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y(x)).\frac{\partial y_i(x)}{\partial x_i}| \leq \frac{C}{h}.$$

Donc dans ces deux cas $\frac{\partial}{\partial x}a(x,z)$ est borné. Si maintenant

$$z = \mu.u(x) + (1-\mu).2.u(x) \quad \mu \in [0,1], \tag{2.74}$$

alors en utilisant (2.72) et en dérivant a par rapport à x_i, $i = 1, 2$, on obtient avec la convention des indices répétés :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}a(x,z) = \frac{\partial \mu}{\partial x_i}(1-\phi(y)) + \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(y).\frac{\partial y_j}{\partial x_i}.(1-\mu) \tag{2.75}$$

où

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \text{ sont } O(\frac{1}{h}) \text{ fixés par la forme du triangle.} \tag{2.76}$$

En dérivant (2.74) par rapport a x_i ,on obtient:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\mu.u(x) + (2-\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) = 0$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mu = \frac{1}{u(x)}.(2-\mu).\frac{\partial}{\partial x_i}u(x). \tag{2.77}$$

$|2-\mu| \leq 2$, u est une fonction affine sur T_i, donc il existe C tel que

$$|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)| \leq C,$$

et donc

$$(2-\mu).\frac{\partial}{\partial x_i}u(x) \text{est bornée sur } T_i.$$

Si $x \in T_i$, T_i ne touchant pas ∂T_0 alors $u(x)$ est minoré par une constante strictement positive d'où $\frac{\partial \mu}{\partial x_i}$ est borné ; les autres termes de $\frac{\partial}{\partial x_i}a(x,z)$ sont eux aussi majorés donc $\frac{\partial}{\partial x_i}a(x,z)$ est bornée sur T_i.

On suppose maintenant $x \in T_i$, T_i touchant le bord de Ω. on a :

$$|\mu - 1| < 1 \quad \text{et que} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) = \frac{\partial \phi}{\partial y_2}(y) \text{ sont bornés sur } T_0.$$

En utilisant (2.73), (2.75) et (2.77) on obtient que $\frac{\partial}{\partial x_i}a(x,z)$ est borné sur les triangles du bord.

On a donc montré que a est Lipschitzienne en x, ce qui termine la démonstration du théorème 2.6.

2.3.2 Eléments finis de Lagrange de type Q_1

Dans cette partie Ω désigne un rectangle de $\mathbf{R}^2$. Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et si $a(x,u)$ est une fonction de Carathéodory Lipschitzienne en u on sait qu'il existe une unique solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x,u).\frac{\partial u}{\partial x_i}) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.80}$$

On la notera u_0

On suppose Ω divisé en n carrés C_i de côté h. On désigne par V_0^h le sous espace de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ défini par

$$V_0^h = \{v : \Omega \to R, \text{ continue}, v(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega, \ v|_{C_i} \in Q_1 \ \ \forall i = 1, ...n\}$$

où Q_1 désigne l'espace des polynomes définis par

$$Q_1 = \{a + bx + cy + dxy\}$$

On a alors

Théorème 2.8

Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, a est une fonction de Carathéodory vérifiant (2.2) et Lipschitzienne en u (vérifiant (2.31)), uniformément continue en x,et si de plus $|\nabla u_0|$, où u_0 est l'unique solution de (2.1), vérifie (2.52), c'est à dire qu'il existe une fonction ϵ telle que

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0 \quad , \quad \int_K |\nabla u_0|^2 \leq \epsilon(h) \quad \forall K \in \tau_h,$$

alors pour h assez petit la solution de (2.4) est unique.

Démonstration du théorème 2.8

Pour la démonstration on utilise à peu près la même technique que pour le théorème 2.6.

Supposons que u_h et v_h soient deux solutions de (2.4). On a alors

$$\int_\Omega a(x,u_h).\nabla u_h.\nabla w = \int_\Omega a(x,v_h).\nabla v_h.\nabla w \quad \forall w \in V_0^h. \tag{2.82}$$

On note a_i les sommets des carrés C_i et on choisit $\phi \in V_0^h$ de la façon suivante :

$$\phi(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } (u_h - v_h)(a_i) > 0 \\ \\ 0 \text{ si } (u_h - v_h)(a_i) \leq 0. \end{cases} \tag{2.83}$$

Reportant $w = \phi$ dans (2.82), on obtient

$$\sum_i \int_{C_i} \Big(a(x,u_h).\nabla u_h - a(x,v_h)).\nabla v_h \Big) \nabla \phi = 0. \tag{2.84}$$

Les seuls carrés sur lesquels $\nabla\phi \neq 0$ et $\int_{C_i} \Big(a(x,u_h).\nabla u - a(x,v_h)).\nabla v_h \Big) \nabla \phi$ est éventuellement non nulle sont ceux sur lesquels $(u_h - v_h)$ prend des valeurs strictement positives et d'autres négatives ou nulles.

Dans chaque carré C_i où $(u_h - v_h)$ s'annule on note x_i un point où $(u_h - v_h)$ s'annule et $u_i = u_h(x_i)$. On peut alors décomposer (2.84) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{C_i} \Big(a(x,u_h).\nabla u_h - a(x,v_h)).\nabla v_h \Big) \nabla \phi = \sum_i \Big(\int_{C_i} & a(x_i,u_i).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi \\ & + \int_{C_i} (a(x,u_i) - a(x_i,u_i)).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi \\ & + \int_{C_i} (a(x,u_h) - a(x,u_i)).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi \\ & + \int_{C_i} (a(x,u_h) - a(x,v_h)).\nabla v_h.\nabla \phi \Big). \end{aligned} \tag{2.85}$$

On note

$$I_1^i = \sum_i \Big(\int_{C_i} a(x_i,u_i).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi$$

$$I_2^i = \int_{C_i} (a(x,u_i) - a(x_i,u_i)).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi$$

$$I_3^i = \int_{C_i} (a(x,u_h) - a(x,u_i)).\nabla (u_h - v_h).\nabla \phi$$

et enfin

$$I_4^i = \int_{C_i} (a(x,u_h) - a(x,v_h)).\nabla v_h.\nabla \phi.$$

On va démontrer que si $u_h - v_h$ n'est pas identiquement nulle sur C_i alors I_1^i est strictement positive et que pour h assez petit les trois autres intégrales sont négligeables devant I_1^i. Pour cela on a besoin de faire quelques calculs préliminaires.

Calculs préliminaires

Soit C l'un des carrés de côté h, S_1, S_2, S_3, S_4 ses sommets et $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ les fonctions de base de V_0^h telles que $p_i(S_j) = \delta_{i,j}$.

Soit $p = \sum_i a_i.p_i$.

On va calculer différents $\nabla p. \nabla p_i$, on peut donc supposer que C est le carré $\{(0,0);(h,0);(h,h);(0,h)\}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{h^2}.(h-x).(h-y) & \nabla p_1 &= \frac{1}{h^2}\Big((y-h),(x-h)\Big) \\
p_2 &= \frac{1}{h^2}.(x).(h-y) & \nabla p_2 &= \frac{1}{h^2}\Big((h-y),(-x)\Big) \\
p_3 &= \frac{1}{h^2}.(x).(y) & \nabla p_3 &= \frac{1}{h^2}\Big((y),(x)\Big) \\
p_4 &= \frac{1}{h^2}.(h-x).(y) & \nabla p_4 &= \frac{1}{h^2}\Big((-y),(h-x)\Big).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

En utilisant (2.86) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_C \nabla p. \nabla p_1 =& \frac{1}{h^4}\int_C a_1(y-h)^2 - a_1(x-h)^2 - a_2(h-y)^2 - a_2x.(x-h) \\
&+ a_3x.(x-h) + a_3y.(y-h) - a_4y.(y-h) - a_4(h-x)^2 dx.dy.
\end{aligned}$$

Et comme

$$\int_C (x^2 - xh)dx.dy = -\frac{1}{6}h^4 \quad \text{et} \quad \int_C (x-h)^2 dx.dy = \frac{1}{3}h^4$$

on obtient

$$\int_C \nabla p_i. \nabla p_i = \frac{2}{3} \quad \forall i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\int_C \nabla p_1. \nabla p_2 = \int_C \nabla p_1. \nabla p_4 = \int_C \nabla p_2. \nabla p_3 = \int_C \nabla p_3. \nabla p_4 = -\frac{1}{6}$$

et

$$\int_C \nabla p_1. \nabla p_3 = \int_C \nabla p_2. \nabla p_4 = -\frac{1}{3}.$$

On obtient donc

$$\int_C \nabla p . \nabla p_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{3}a_3 - \frac{1}{6}a_4. \tag{2.87}$$

Toujours en utilisant (2.86), on obtient

$$\int_C \nabla p . \nabla p_2 = -\frac{1}{6}a_1 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{1}{6}a_3 - \frac{1}{3}a_4 \tag{2.88}$$

et

$$\int_C \nabla p . \nabla p_3 = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 + \frac{2}{3}a_3 - \frac{1}{6}a_4 \tag{2.89}$$

et

$$\int_C \nabla p . \nabla p_4 = -\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{6}a_3 + \frac{2}{3}a_4 \tag{2.90}$$

et enfin en reprenant les quatres inégalités précédentes

$$\int_C \nabla p . \nabla p = \frac{1}{6}\Big((a_1-a_2)^2+2(a_1-a_3)^2+(a_1-a_4)^2+(a_2-a_3)^2+2.(a_2-a_4)^2+(a_3-a_4)^2\Big). \tag{2.91}$$

Comme

$$\frac{2}{3} = \Big(\int_C |\nabla p_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

on a

$$\begin{aligned}\Big(\int_C |\nabla \sum_i a_i.p_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_i |a_i| \Big(\int_C |\nabla p_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_i |a_i|.\end{aligned} \tag{2.92}$$

Ensuite on s'occupe successivement des quatres intégrales I_j^i. On commence par minorer I_1^i et pour cela par montrer le lemme :

Lemme 2.5

Pour tout carré C_i où $(u_h - v_h)$ s'annule, on a:

$$I_1^i = \int_{C_i} a(x_i, u_i). \nabla (u_h - v_h). \nabla \phi \geq K\Big(\int_{C_i} |\nabla (u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.93}$$

Démonstration du lemme 2.5

Sur ce carré $a(x_i, u_i)$ est une constante supérieure à α et $(u_h - v_h) = \sum_i a_i.p_i$

et en utilisant (2.92) on obtient

$$\left(\int_{C_i} |\nabla(u_h - v_h)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_i |a_i|.$$

On sait que $\phi \neq 0$ sur C_i on peut donc supposer que $(u_h - v_h)(S_1) > 0$

Il y a alors plusieurs cas, on peut avoir

ou bien

$$(u_h - v_h) \leq 0 \text{ en } S_i \text{ pour } i \neq 1 \tag{2.94}$$

ou bien

$$(u_h - v_h) \leq 0 \text{ en } S_3 \text{ et } S_4 \tag{2.95}$$

ou bien $(u_h - v_h) \leq 0$ en S_2 et S_3 (on se ramène au cas précédent par rotation)

ou bien

$$(u_h - v_h) \leq 0 \text{ en } S_2 \text{ et } S_4 \tag{2.96}$$

ou bien $(u_h - v_h) \leq 0$ en S_3 seulement (on se ramène alors au premier cas en remarquant que:

$\nabla(u_h - v_h). \nabla \phi = \nabla(-u_h + v_h). \nabla(1 - \phi)$ et en échangeant S_1 et S_3)

ou bien $(u - v) \leq 0$ en S_2 ou S_4 seulement (on se ramène au cas précédent).

Il reste donc trois cas à considérer.

-Si (2.94) est vérifié

alors $(u_h - v_h) = \sum_i a_i.p_i$ où $a_1 > 0$ et $a_i \leq 0$ pour $i > 1$ $\phi = p_1$.

En utilisant (2.86), (2.87), (2.88) et (2.89) on obtient

$$\int_{C_i} \nabla(u_h - v_h). \nabla p_1 = \frac{2}{3}a_1 - \frac{1}{6}a_2 - \frac{1}{3}a_3 - \frac{1}{6}a_4 \geq \frac{1}{6}(\sum_i |a_i|)$$
$$\geq \frac{1}{6}\left(\int_{C_i} |\nabla(u_h - v_h)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

-Si (2.95) est vérifié alors

$(u_h - v_h) = \sum_i a_i.p_i$ où $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et $a_i \leq 0$ $\forall i > 2$ et $\phi = p_1 + p_2$.

En utilisant (2.86), (2.87), (2.88) et (2.89) on obtient

$$\int_{C_i} \nabla(u_h - v_h). \nabla (p_1 + p_2) = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{2}a_4 \geq \frac{1}{2}(\sum_i |a_i|)$$
$$\geq \frac{1}{2}\Big(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

-Enfin si (2.96) est véifié alors

$(u_h - v_h) = \sum_i a_i.p_i$ où $a_1 > 0$,$a_3 > 0$, $a_2 \leq 0$ et $a_4 \leq 0$ et $\phi = p_1 + p_3$.

En utilisant (2.86), (2.87), (2.88) et (2.89) on obtient

$$\int_{C_i} \nabla(u_h - v_h). \nabla (p_1 + p_3) = \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3 - \frac{1}{3}a_4 \geq \frac{1}{3}(\sum_i |a_i|)$$
$$\geq \frac{1}{3}\Big(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

En posant $K = \frac{1}{6}$ on obtient bien l'inégalité (2.93), ce qui démontre le lemme.

On majore en suite $|I_3^i|$ en montrant le lemme suivant :

Lemme 2.6

Sur tout carré C_i

$$|I_2^i| \leq \epsilon(h)\Big(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.97}$$

où $\epsilon(h) \to 0$ quand h tend vers 0, et ce indépendamment de C_i.

Démonstration du lemme 2.6

On sait que a est uniformément continue en x, il existe donc une fonction $\epsilon \geq 0$, nulle en 0, croissante et continue en 0 telle que :

$$|(a(x, u_i) - a(x_i, u_i))| \leq \epsilon(\|x - x_i\|) \leq \epsilon(2h).$$

En utilisant (2.92) on obtient

$$| \int_{C_i} (a(x, u_i) - a(x_i, u_i)). \nabla (u_h - v_h). \nabla \phi|$$

$$\leq \epsilon(2h). \left(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \left(\int_{C_i} | \nabla \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C.\epsilon(2h). \left(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et cela démontre le lemme 2.6.

Il faut maintenant majorer $|I_3^i|$.Pour cela on démontre plus précisément

Lemme 2.7

Sur tout triangle C_i

$$|I_3^i| \leq \epsilon_1(h). \left(\int_{C_i} | \nabla (u_h - v_h)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.98}$$

où $\epsilon_1(h) \to 0$ quand h tend vers 0, indépendamment de C_i.

Démonstration du lemme 2.7

On sait que la fonction a est de Lipschitz en u, donc

$|a(x, u_i) - a(x, u)| \leq k.|u_h - u_i|$.

La fonction u_h sur C_i est une fonction du second degré donc elle est dans $C^2(C_i)$,on peut donc écrire

$$\begin{aligned} |u_h(x) - u_i| &\leq |x - x_i|. \max_{C_i} | \nabla u_h| \\ &\leq 2.h. \max_{C_i} | \nabla u_h|. \end{aligned} \tag{2.99}$$

On va maintenant majorer $\max_{C_i} | \nabla u|$ en fonction de $\left(\int_{C_i} | \nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

On peut supposer que le carré C_i est en fait le C des calculs préliminaires.

En utilisant (2.86), on a

$$| \nabla u_h(x, y)|^2 = \frac{1}{h^4}. \Big((a_1 - a_2).(y - h) + (a_3 - a_4)y \Big)^2 + \Big((a_1 - a_4).(x - h) + (a_3 - a_2).x \Big)^2.$$

En utilisant le fait que $(A + B)^2 \leq 2.(A^2 + B^2)$ et que $|x - h| \leq h$ et $|y - h| \leq h$

on obtient:

$$\sup_{C_i} |\nabla u_h| \leq \frac{\sqrt{2}}{h}.\Big((a_1-a_2)^2+(a_3-a_4)^2+(a_1-a_4)^2+(a_3-a_2)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Grace à (2.91) on obtient:

$$\sup_{C_i} |\nabla u_h| \leq \frac{K}{h}.\Big(\int_{C_i} |\nabla u_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.100}$$

En combinant (2.92) appliqué à ϕ, (2.99) et (2.100) on obtient

$$\begin{aligned}
&|\int_{C_i}(a(x,u_i)-a(x,u_h)).\nabla(u_h-v_h).\nabla\phi| \\
&\qquad\leq 2K.\Big(\int_{C_i}|\nabla u_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\int_{C_i}\nabla(u_h-v_h).\nabla\phi \\
&\qquad\leq 2K.\Big(\int_{C_i}|\nabla u_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i}|\nabla(u_h-v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i}|\nabla\phi|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leq 4.K.\Big(\int_{C_i}|\nabla u_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i}|\nabla(u_h-v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

car

$$\Big(\int_{C_i}|\nabla\phi|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_1^4\Big(\int_{C_i}|\nabla p_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2.$$

Pour obtenir le lemme il suffit de démontrer que:

$$\Big(\int_{C_i}|\nabla u_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1'(h)$$

où $\epsilon_1'(h) \to 0$ quand h tend vers 0, indépendamment de C_i. On procède comme dans le cas des triangles en utilisant la solution u_0 de (2.80), qui vérifie (2.52). On remarque cette fois encore que grâce à l'inégalité de Hölder, (2.52) est vérifiée par exemple, si on a un résultat de régularité de type Meyers (cf.[Me] ou [G]), c'est à dire si :

$$|\nabla u_0| \in L^p(\Omega)$$

pour un certain $p > 2$. On peut aisément montrer que (2.52) est vérifié si :

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad f_0 \in L^{\frac{p}{2}}, \quad f_i \in L^p(\Omega) \;\; \forall i=1,...,n, \quad p>2.$$

On utilise l'inégalité triangulaire pour écrire

$$\left(\int_{C_i} |\nabla u_h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{C_i} |\nabla (u_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{C_i} |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.101}$$

On sait que

$$\left(\int_{C_i} |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon'(h)$$

où $\epsilon'(h)$ est indépendant de C_i. On a vu dans le théorème 2.2 que

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla (u_h - u_0)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

En reprenant (2.101), on obtient

$$\left(\int_{C_i} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_1'(h)$$

où $\epsilon_1'(h) \to 0$ indépendamment de C_i.

Le lemme 2.7 est ainsi démontré.

Il reste $|I_4^i|$ à majorer. On le fait dans le lemme suivant.

Lemme 2.8

Sur tout carré C_i

$$|I_4^i| \leq \epsilon_2(h).\left(\int_{C_i} |\nabla (u_h - v_h)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.102}$$

où $\epsilon_2(h) \to 0$ quand h tend vers 0, indépendamment de C_i.

Démonstration du lemme 2.8

On utilise le même principe que dans la démonstration du lemme 2.7. En écrivant que u est Lipschitzienne, il vient

$$\begin{aligned} |a(x,u_h) - a(x,v_h)| &\leq k.|u_h(x) - v_h(x)| \\ &\leq |x - x_i|.\max_{C_i} |\nabla (u_h - v_h)| \\ &\leq 2.h.\max_{C_i} |\nabla (u_h - v_h)| \end{aligned} \tag{2.103}$$

car $(u_h - v_h)$ s'annule en x_i.

En utilisant les mêmes résultats que ceux qui ont permis de montrer le lemme 2.7, on obtient:

$$|\bigtriangledown(u_h - v_h)| \leq \frac{K}{h}.\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown(u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{2.104}$$

et

$$\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown v_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_3(h)$$

où $\epsilon_3(h) \to 0$ indépendamment de C_i. En utilisant (2.92) appliqué à ϕ, (2.103) et (2.104) on obtient

$$\begin{aligned}
|I_3^i| &\leq 2h.\frac{K}{h}.\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown(u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\int_{C_i} |\bigtriangledown(v_h).\bigtriangledown\phi| \\
&\leq 2K\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown(u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown v_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown\phi|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 4K\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown(u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown v_h|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \epsilon_2(h).\Big(\int_{C_i} |\bigtriangledown(u_h - v_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui fournit le résultat du lemme 2.8.

Pour obtenir le résultat du thèorème il suffit de regrouper les résultats des 4 lemmes.

Sur chaque carré C_i où $(u_h - v_h)$ s'annule on a:

$$\int_{C_i}\Big(a(x,u).\bigtriangledown u_h - a(x,v_h)).\bigtriangledown v_h\Big)\bigtriangledown\phi \geq \Big(\int_{C_i}(\bigtriangledown(u_h - v_h))^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(K - \epsilon(h) - \epsilon_1(h) - \epsilon_2(h)\Big)$$

K ne dépendant pas de h, ni les ϵ de C_i, cette intégrale est strictement positive pour h assez petit sur tout C_i où $\bigtriangledown(u_h - v_h)$ n'est pas nul.
On sait (cf (2.84)) que

$$\sum_i \int_{C_i}\Big(a(x,u_h).\bigtriangledown u - a(x,v_h)).\bigtriangledown v_h\Big)\bigtriangledown\phi = 0,$$

donc pour h assez petit, $\bigtriangledown(u_h - v_h)$ est nul sur tous les carrés où $(u_h - v_h)$ s'annule donc la solution approchée est unique, ce qui termine la démonstration du théorème 2.7.

Remarque:

Pour h pas assez petit, il se peut qu'il n'y ait pas unicité, en effet on peut toujours construire un exemple sur le même modèle que celui qui illustre le théorème 2.6.

CHAPITRE 3

Existence et unicité dans le cas des systèmes

Dans ce chapitre on se propose d'étudier les solutions de systèmes du type

$$\begin{cases} -\big(a_i(u_1,...,u_n)u_i'\big)' = f_i \quad \text{dans} \quad I =]a,b[\quad \forall i = 1,2,.,n, \\ u_i \in H^1(]a,b[) \quad \forall i = 1,2,.,n, \\ u_i(a) = A_i \quad \text{et} \quad u_i(b) = B_i \quad \forall i = 1,2,.,n, \end{cases} \tag{3.1}$$

où les f_i sont des distributions de $H^{-1}(]a,b[)$ et les a_i des fonctions continues qui vérifient

$$0 < \alpha \leq a_i \leq \beta. \tag{3.2}$$

On notera u le n^{uplet} $(u_1....u_n)$.

On commence par démontrer l'existence de solutions dans le cas général; puis on étudie l'unicité de celles ci. Il n'y a en fait que peu de cas où l'on peut espérer l'unicité, si ce n'est dans le cas où les f_i sont nulles.

3.1 Existence d'une solution

On utilise le théorème du point fixe de Schauder pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1:

Le problème (3.1) admet toujours au moins une solution faible dans $\Big(H^1(I)\Big)^n$.

Démonstration du théorème 3.1

Soit $v = (v_1, ...v_n)$ une fonction de $(L^2(I))^n$et $u_{i,0}$ des fonctions régulières vérifiant $u_{i,0}(a) = A_i$ et $u_{i,0}(b) = B_i$.

On cherche une fonction $u = (u_1, .., u_n)$ dont les composantes u_i sont solutions de :

$$\begin{cases} -\Big((a_i(v).u_i'\Big)' = f_i \text{ dans } \quad I, \\ u_i - u_{i,0} \in H_0^1(I). \end{cases} \tag{3.3}$$

$\forall i = 1,..,n,\quad u_i - u_{i,0}$ est donc solution de :

$$\begin{cases} -\Big((a_i(v).(u_i - u_{i,0})'\Big)' = f_i + (a_i(v).u_{i,0})' \text{ dans } \quad I \\ u_i - u_{i,0} \in H_0^1(I). \end{cases} \tag{3.4}$$

On remarque que, à i fixé

$$(\omega_i, \xi_i) \quad \to \quad \int_I a_i(v)\omega_i'.\xi_i'$$

est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H_0^1(I)$

$$\xi_i \quad \to \; < f_i, \xi_i > - \int_I a_i(v).u_{i,0}'.\xi_i'$$

est une forme linéaire continue sur $H_0^1(I)$ donc, d'aprés le théorème de Lax-Milgram, il existe une unique solution faible de (3.4) dans $H_0^1(I)$ il existe donc une unique fonction $u = (u_1, ..., u_n) = T(v) \in (H^1(I))^n$ solution de (3.3).

On notera $\|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$ où $|u_i|$ désigne la norme habituelle dans $H_1(I)$

Il faut maintenant montrer que $\|u\|$ est bornée indépendamment de v.

On prend $\xi_i = u_i - u_{i,0} \in H_0^1(I)$, on a donc, en utilisant (3.4)

$$\int_I a_i(v).(u_i' - u_{i,0}')^2 = < f_i, (u_i - u_{i,0}) > - \int_I a_i(v).u_{i,0}'.(u_i' - u_{i,0}') \quad \forall i = 1,..,n.$$

On sait de plus $u_i - u_{i,0} \in H_0^1(\Omega)$ (cf (3.4)) donc que $|u_i' - u_{i,0}'|_{L^2} \geq C.|u_i - u_{i,0}|_{H^1}$, où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de I.

En utilisant (3.2) on a donc, pour tout i, la majoration suivante :

$$\begin{aligned} C.\alpha|u_i - u_{i,0}|^2 &\leq \alpha \int_I (u_i' - u_{i,0}')^2 \\ &\leq \beta|u_i - u_{i,0}|.|u_{i,0}| + \|f_i\|_*.|u_i - u_{i,0}| \\ &\leq (\|f_i\|_* + \beta|u_{i,0}|)|u_i - u_{i,0}|. \end{aligned}$$

$\|\;\|_*$ désigne comme précédemment la norme de dual fort dans $H^{-1}(I)$.

Ce qui donne

$$|u_i - u_{i,0}| \leq \frac{1}{C.\alpha}(\|f_i\|_* + \beta|u_{i,0}|) \quad \forall i = 1,2,.,n,$$

$$\leq K_i$$

où K_i ne dépend pas de v. On obtient donc en posant $u_0 = (u_{i,0})$

$$\|u - u_0\| \leq \sum_i K_i = K, \tag{3.5}$$

où K ne dépend pas de v. D'où d'après l'inégalité de Poincaré

$$|T(v) - u_0|_{(L^2(\Omega))^n} \leq C$$

où C est une certaine constante. On désigne alors par $B(u_0, C)$ la boule de centre u_0 et de rayon C dans $(L^2(\Omega))^n$. Il est clair que cette boule est un convexe fermé de $(L^2(\Omega))^n$. De plus T est une application de $B(u_0, C)$ dans elle même et (cf.(3.5) et le fait que l'injection canonique de $(H_0^1(\Omega))^n$ dans $(L^2(\Omega))^n$ est compacte (voir [$R.T$]), $T(B(u_0, C))$ est précompact dans $(L^2(\Omega))^n$. Si T est continue, T a un point fixe d'aprés le théorème du point fixe de Schauder (cf. [$G.T$]).

Si donc on montre que T est continue, on obtiendra l'existence d'une solution de (3.1).

Soit (v_n) une suite de B qui tend vers v dans $(L^2(\Omega))^n$.

Il faut prouver que $(T(v_n) - u_0)$ tend vers $(T(v) - u_0)$ faiblement dans $(H_0^1(\Omega))^n$ (donc fortement dans $(L^2(\Omega))^n$).
$(T(v_n))$ étant bornée dans $(H_0^1)^n$, il suffit de montrer que $T(v)$ est le seul point d'accumulation de $(T(v_n))$. Soit u l'un de ces points.

Soit (v_{n_k}) une sous suite extraite de (v_n) telle que $T(v_{n_k}) \rightharpoonup u$
On peut donc extraire de (v_{n_k}) une sous suite (v_{n_m}) telle que:

$$\begin{cases} u_{n_m} = T(v_{n_m}) \rightharpoonup u \text{ dans } (H^1)^n \\ v_{n_m}(x) \to v(x) \text{ presque partout dans I.} \end{cases} \tag{3.7}$$

L'ensemble $\{(w_1, ...w_n) \quad w_i \in H^1 \quad w_i - u_{i,0} \in H_0^1 \}$ est fermé et convexe dans $(H^1)^n$ et donc faiblement fermé.

u vérifie donc : $u - u_0 \in (H_0^1(\Omega))^n$.

On sait que

$$\int_I a_i(v_{n_m}).u'_{i,n_m}.\xi'_i = \int_I f_i.\xi_i \quad \forall i = 1,..,n \quad \forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in (H_0^1(\Omega))^n.$$

et que $\forall i = 1,..,n$,

$$\int_I (a_i(v_{n_m})u'_{i,n_m} - a_i(v).u'_i).\xi'_i = \int_I (a_i(v_{n_m}) - a_i(v)).u'_i.\xi'_i + \int_I a_i(v_{n_m})(u'_{i,n_m} - u'_i).\xi'_i \quad (3.9)$$

On sait que a est continue et que pour presque tout x de I, $v_{n_m}(x)$ tend vers $v(x)$ donc $a_i(v_{n_m})$ tend vers $a_i(v)$ presque partout sur I. De plus

$$|a_i(v_{n_m}) - a_i(v)|.|u'_i|.|\xi'_i| \leq 2\beta|u'_i|.|\xi_i| \quad \forall i = 1,..,n.$$

Donc d'après le théorème de convergence domminée de Lebesgue on obtient

$$\int_I (a_i(v_{n_m}) - a_i(v)).u'_i.\xi'_i \rightarrow \quad 0 \quad \forall i = 1,..,n. \qquad (3.10)$$

u_{n_m} tend faiblement vers u dans $(H^1(\Omega))^n$, i.e. $u'_{i,n_m}(x)$ tend vers $u'_i(x)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ de plus, toujours d'après le théorème de convergence domminée de Lebesgue on a

$$a_i(v_{n_m})\xi'_i \rightarrow a_i(v)\xi'_i \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

d'où

$$\int a_i(v_{n_m}).(u'_{i,nm} - u'_i).\xi'_i \quad \rightarrow \quad 0 \quad \forall i = 1,..,n.$$

On obtient donc :

$$\int a_i(v).u'_i.\xi'_i = \int f_i.\xi_i, \quad \forall i = 1,..,n$$

et donc $u = T(v)$

La fonction T est donc une fonction continue. On peut appliquer le théorème du point fixe. Il existe donc une solution, ce qui démontre le théorème.

3.2 Résultats d'unicité.

On peut très bien ne pas avoir unicité de u solution de (3.1) même si les a_i sont très réguliers en effet on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2

Si $a_i(u) = A(u) \quad \forall i = 1, ...n$ et si A est C^∞ en u, le système (3.1) peut avoir plusieurs solutions.

Démonstration du théorème 3.2

On démontre le théorème 3.2 en construisant un contre-exemple.
On prend $n = 2$ et $I = (0,1)$. On montre que le système

$$\begin{cases} -(A(u_1,u_2)u_i')' = f_i \quad \text{sur} \quad]0,1[\quad 0 < \alpha \leq A(u_1,u_2) \leq \beta \\ u_1(0) = a, \quad u_1(1) = b, \quad u_2(0) = a', \quad u_2(1) = b', \end{cases} \tag{3.11}$$

peut avoir plusieurs solutions même si A est C^∞ sur $[a,b]\text{x}R$.

On se donne u_1

$$\begin{cases} u_1 \quad C^\infty \text{ sur } [0,1] \quad \text{à valeurs dans} \quad [a,b] \quad \text{strictement croissante.} \\ u_1(0) = a, \quad u_1(1) = b, \quad u_1' > 0 \quad (u_1 \text{ bijective de } [0,1] \text{ dans } [a,b]). \end{cases} \tag{3.12}$$

On choisit une fonction θ telle que

$$\begin{cases} \theta \quad \text{soit une fonction} \quad C^\infty \text{ sur } [0,1] \quad \text{à valeurs dans } [\tau,1] \text{ où } \tau > \frac{1}{2} \\ \theta(0) = \theta(1) = 1, \\ \theta \text{ est telle que } u_1'(1-\theta) \text{ admette un maximum et un seul sur } [0,1]. \end{cases} \tag{3.13}$$

(Par exemple, dans le cas où u_1' est une constante, il suffira de prendre θ convexe.)

On remarque que $u_1'(1-\theta) \geq 0$.

On choisit maintenant $\psi \in C^\infty$ telle que

$$\begin{cases} \psi \text{ soit une fonction de } [a,b] \text{ dans } R, \\ \psi' \text{ strictement croissante,} \\ \displaystyle\int_0^1 \psi'(u_1(t))u_1'(t)(1-\theta(t))dt = \int_0^1 u_1'(t)(1-\theta(t))dt. \end{cases} \tag{3.14}$$

On peut, par exemple si $a > 0$, choisir $\psi = \frac{1}{2b}x^2 + hx$ et donc $\psi' = \frac{1}{b}x + h$ alors

$$S \ : \ h \rightarrow \int_0^1 (\psi'(u_1(t)) - 1).u_1'(t).(1-\theta(t))dt$$

est une application continue de $[0,1]$ dans R. $S(0) < 0$ et $S(1) > 0$, donc il existe h pour lequel S s'annule. On prendra alors la fonction ψ correspondant à cet h.

On choisit a' et b' en posant $\psi(a) = a'$ $\psi(b) = b'$.

On définit maintenant u_2 à partir des fonctions précédentes.

$$u_2 = \psi(u_1). \tag{3.15}$$

On obtient donc $u_2' = \psi'(u_1)u_1'$ et $u_2(0) = a'$, $u_2(1) = b'$.

On va maintenant construire les fonctions v_1 et v_2 telles que (u_1, u_2), (v_1, v_2) soient solutions de (3.11).

Commençons par v_1. Posons

$$v_1(t) = a + \int_0^t u_1'(t)\theta(t)dt + ct \tag{3.16}$$

où (c.f.(3.12))

$$c = b - a - \int_0^1 u_1'(t)\theta(t)dt = \int_0^1 u_1'(t)(1-\theta(t))dt > 0. \tag{3.17}$$

c est donc positif et on a $v_1(0) = a$ $v_1(1) = b$.

$$v_1'(t) = u_1'(t)\theta(t) + c > 0 \tag{3.18}$$

v_1 est donc strictement croissante et vérifie $v_1(0) = a$ et $v_1(1) = b$.
(v_1 est une bijection de $[0,1]$ dans $[a,b]$).

Quant à v_2, on la définit ainsi, on pose

$$v_2(t) = a' + \int_0^t u_2'(t)\theta(t)dt + et \tag{3.19}$$

où

$$e = b' - a' - \int_0^1 u_2'(t)\theta(t)dt = \int_0^1 u_2'(t)(1 - \theta(t)dt$$

et en utilisant (3.15), on obtient

$$e = \int_0^1 \psi'(u_1(t))u_1'(t)(1 - \theta(t))dt = c. \qquad (3.20).$$

On a donc

$$v_2(0) = a' \quad v_2(1) = b' \text{ et } v_2'(t) = u_2'(t)\theta(t) + c > 0. \tag{3.21}$$

Vérifions que l'on n'a jamais $v_2 = \psi(v_1)$ en dehors de 0 et 1.

Pour cela on étudie les variations de $v_2 - \psi(v_1)$ sur $[0, 1]$. En utilisant (3.21), (3.15) et (3.18)

on obtient

$$\begin{aligned}(v_2(t) - \psi(v_1(t))' =& u_1'(t)\psi'(u_1(t))\theta(t) - \psi'(v_1(t))u_1'(t)\theta(t) \\ =& (\psi'(u_1(t)) - \psi'(v_1(t))u_1'(t)\theta(t).\end{aligned}$$

$u_1' > 0$, $\theta > \tau$ et ψ' est strictement croissante donc la dérivée de $v_2 - \psi(v_1)$ ne s'annule que si $v_1 = u_1$.

$$\begin{aligned}(u_1 - v_1)'(t) =& u_1'(t) - u_1'(t)\theta(t) - c \\ =& u_1'(t)(1 - \theta(t)) - \int_0^1 u_1'(t)(1 - \theta(t))dt\end{aligned}$$

$\int_0^1 u_1'(t)(1 - \theta(t))dt$ est la valeur moyenne de $u_1'(1 - \theta)$ or (cf (3.13)) $u_1'(1 - \theta)$ admet un maximum est un seul donc $u_1' - v_1'$ s'annule exactement

deux fois sur $[0, 1]$,

en 0 $u_1' - v_1' = -c < 0$.

Le tableau de variations de $v_2 - \psi(v_1)$ est donc le suivant:

x	0	δ	γ	β	1
$u'_1 - v'_1$	(-)	0	(+)	0	(-)
$u_1 - v_1$	0	$\searrow$ (-) $\nearrow$	0	$\nearrow$ (+) $\searrow$	0
$(v_2 - \psi(v_1))'$	0	(-)	0	(+)	0
$v_2 - \psi(v_1)$	0		$\searrow$ (-) $\nearrow$		0

$v_2 - \psi(v_1)$ ne s'annule donc qu'en 0 et en 1.

En posant

$$\varphi(z) = v_2(v_1^{-1}(z)) \iff v_2 = \varphi(v_1),$$

on remarque que $\varphi - \psi$ ne s'annule qu'en a et b et que $\varphi - \psi < 0$ sur $]a, b[$.

A partir de ces fonctions on définit A, de telle sorte que $A(v_1(x), v_2(x)) = 1$ et que $A(u_1(x), u_2(x)) = \theta(x)$.

On sait que les fonctions u_1 et u_2 sont strictement croissantes, donc bijectives de $[0, 1]$ dans $[a, b]$ (respectivement $[a', b']$); on peut donc utiliser leur fonctions réciproques.

On définit A pour $z_1 \in [a, b]$ en posant tout d'abord

$$B(z_1, z_2) = \begin{cases} \theta(u_1^{-1}(z_1)) \quad \text{si } z_2 = \psi(z_1), \\ \\ 1 \quad \text{si } z_2 = v_2(v_1^{-1}(z_1)) = \varphi(z_1), \\ \\ (1-t) + t.\theta(u_1^{-1}(z_1)) = 1 - t(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1))) \\ \quad \text{si } z_2 = t\psi(z_1) + (1-t)\varphi(z_1). \end{cases} \tag{3.23}$$

Il est clair que B est continue sur $[a, b]$xR

On pose
$$D = \{(z_1, z_2) \ \mid \ \varphi(z_1) \leq z_2 \leq \psi(z_1) \ \}.$$
On a
$$\tau \leq B(z_1, z_2) \leq 1 \quad \forall (z_1, z_2) \in D.$$
Comme B est continue sur $[a, b]$xR, on peut trouver $\delta > 0$ tel que
$$\frac{\tau}{2} \leq B(z_1, z_2) \leq 2 \quad \forall z = (z_1, z_2), \ dist(z, D) \leq \delta.$$
On peut trouver χ une fonction C^∞ de $[a, b]$xR telle que
$$\chi = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad dist(z, D) \leq \frac{\delta}{3} \\ 0 \quad \text{si} \quad dist(z, D) \geq \frac{\delta}{2} \\ 0 \leq \chi \leq 1 \end{cases}$$

On pose alors
$$A = \chi.B + (1 - \chi)$$
On remarque que pour z tel que $dist(z, D) \geq \frac{\delta}{2}$ alors $A = 1$ et si $dist(z, D) \leq \frac{\delta}{2}$ alors
$$\frac{\tau}{2} \leq inf(B, 1) \leq A \leq sup(B, 1) \leq 2$$
Pour montrer que A est C^∞ sur $[a, b]$xR, il suffit de le vérifier sur B.

Il est clair que (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont solution du système (3.11) dans lequel on pose $f_i = (u'_i.\theta)'$. En effet en utilisant (3.21) et (3.18), on obtient
$$\begin{cases} A(u_1, u_2).u'_i = u'_i.\theta \quad \forall i = 1, 2 \\ A(v_1, v_2).v'_i = v'_i = u'_i.\theta + c \ \ \forall i = 1, 2. \end{cases}$$

On va maintenant montrer que puisque u_1 , ψ et θ sont C^∞ alors B l'est aussi.

On sait (3.12) que $u'_1 > 0$ sur $[0, 1]$ donc u_1^{-1} est aussi C^∞, u_2, v_1, v_2 sont également C^∞ comme composées de ψ, u_1 et θ.
On sait aussi (3.18) que $v'_1 > 0$ sur $[0, 1]$ donc v_1^{-1} est également C^∞ ainsi que φ.

On a défini B par
$$B(z_1, z_2) = B(z_1, t.\psi(z_1) + (1 - t).\varphi(z_1)) = 1 + t.(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1)))$$

où

$$t = \frac{z_2 - \psi(z_1)}{\varphi(z_1) - \psi(z_1)}. \tag{3.25}$$

On a vu que $\varphi - \psi$ est C^∞ sur $[a, b]$ et strictement négatif sur $]a, b[$.

Donc en tout point $z = (z_1, z_2)$ tel que $z_1 \in]a, b[$ il est clair que B est C^∞ .

Le problème ne se pose que lorsque z_1 se rapproche de a ou b.

Etudions, par exemple, B au voisinage de a.

On pose $h_1 = z_1 - a$. On étudie d'abord la dérivée de B par rapport à z_2. On a

$$\frac{\partial B}{\partial z_2} = \frac{\partial t}{\partial z_2}.(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1))) \tag{3.26}$$

où

$$\frac{\partial t}{\partial z_2} = \frac{1}{\varphi(z_1) - \psi(z_1)} \quad \text{avec} \quad \varphi(z_1) = v_2(v_1^{-1}(z_1)). \tag{2.27}$$

On remarque que $\frac{\partial B}{\partial z_2}$ ne dépend que de z_1.

On va montrer que $\frac{\partial B}{\partial z_2}$ admet un développement de Taylor à l'ordre n $\quad (\forall n \in N.)$

En remarquant que $v_1'(0) > 0$ on obtient $(v_1^{-1})'(a) = \dfrac{1}{v_1'(0)}$. Ecrivons le développement de Taylor de φ en a. Cela est possible car ψ et φ sont C^∞.

$$\begin{aligned}
\varphi(z_1) = v_2(v_1^{-1}(z_1)) &= v_2\big((v_1^{-1}(a)) + h_1.(v_1^{-1})'(a) + \,....... + o(h_1^n)\big) \text{ pour tout n de } \mathbb{N}* \\
&= v_2\Big(\ 0 + \frac{h_1}{v_1'(0)} + \,...... + o(h_1^n)\Big) \\
&= a' + v_2'(0).\frac{h_1}{v_1'(0)} + \,......o(h_1^n)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Ecrivons maintenant celui de ψ (C^∞) en a.

$$\psi(z_1) = a' + h_1.\psi'(a) + \,....... + o(h_1^n).$$

On obtient donc

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) = \left(\frac{v_2'(0)}{v_1'(0)} - \psi'(a)\right).h_1 + \,...... + o(h_1^n). \tag{3.29}$$

On va maintenant montrer que le coefficient a_1 de h_1 n'est pas nul.

$$\begin{aligned}\frac{v_2'(0)}{v_1'(0)} - \psi'(a) &= \frac{\psi'(a).u_1'(0)+c}{u_1'(0)+c} - \psi'(a)\\ &= \frac{1}{u_1'(0)+c}.\Big(\psi'(a).u_1'(0)+c-\psi'(a).u_1'(0)-c.\psi'(a)\Big)\\ &= \frac{c}{u_1'(0)+c}.(1-\psi'(a)).\end{aligned} \tag{3.30}$$

On sait que ψ' est strictement croissante d'aprés (3.14) on sait que

$$\psi'(a).\int_0^1 u_1'(1-\theta) < \int_0^1 \psi'(u_1).u_1'(1-\theta)$$

$$< \int_0^1 u_1'(1-\theta),$$

où $u_1'(1-\theta) \geq 0$ non identiquement nul sur $]0,1[$, donc $\psi'(a) < 1$ et grâce à (3.30)

$$\frac{v_2'(0)}{v_1'(0)} - \psi'(a) > 0. \tag{3.31}$$

On a donc

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) = h_1.(a_1 + ... + o(h_1^{n-1}))$$

Où

$$a_1 = \frac{c}{u_1'(0)+c}.(1-\psi'(a)) \neq 0$$

.

On s'interesse maintenant au développement de $\theta(u_1^{-1})$. Il est possible d'écrire ce développement car θ et u_1^{-1} sont C^∞ sur $[a,b]$.

$$\begin{aligned}1-\theta(u_1^{-1}(z_1)) &= 1-\theta\big(u_1^{-1}(a) + h_1.(u_1^{-1})'(a) + ... + o(h_1)^n\big)\\ &= 1-1+b_1.h_1 + ... + o(h_1^n).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Donc

$$\frac{\partial B}{\partial z_2} = \frac{b_1}{a_1} + \gamma_1 h_1 + ... + o(h_1^n)$$

où le premier coefficient est bien défini.

On obtient enfin que $\dfrac{\partial B}{\partial z_2}$ est C^∞ sur $[a,b]$xR.

Il faut maintenant calculer $\frac{\partial B}{\partial z_1}$. En dérivant (3.23) par rapport à z_1 on obtient

$$\frac{\partial B}{\partial z_1} = \frac{\partial t}{\partial z_1}(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1)) - t\frac{\partial}{\partial z_1}(\theta(u_1^{-1}(z_1)). \tag{3.33}$$

En dérivant maintenant (3.25) on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial z_1} &= \frac{-\psi'(z_1)}{\varphi(z_1) - \psi(z_1)} - \frac{(z_2 - \psi(z_1).(\varphi'(z_1) - \psi'(z_1))}{\left(\varphi(z_1) - \psi(z_1)\right)^2} \\ &= \frac{-\psi'(z_1)}{\varphi(z_1) - \psi(z_1)} - t.\frac{\varphi'(z_1) - \psi'(z_1)}{\varphi(z_1) - \psi(z_1)}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

En reportant (3.32) et (3.34) dans (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial z_1} = &- \frac{\psi'(z_1).\left(b_1.h_1 + ... + o(h_1^n)\right)}{a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)} \\ &- t.\frac{(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1)).(\varphi'(z_1) - \psi'(z_1))}{a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)} \\ &- t\frac{\partial}{\partial z_1}\theta(u_1^{-1}(z_1)).\end{aligned}$$

On pose

$$B_1 = -\frac{\psi'(z_1).\left(b_1.h_1 + ... + o(h_1^n)\right)}{a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)}$$

et

$$B_2 = \frac{(1 - \theta(u_1^{-1}(z_1)).\varphi'(z_1) - \psi'(z_1)}{a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)} + \frac{\partial}{\partial z_1}\theta(u_1^{-1}(z_1)).$$

On remarque que B_1 et B_2 ne dépendent que de z_1.

B_1 ne pose pas de problème car $a_1 = \dfrac{(1 - \psi'(a)).c}{u_1'(0)) + c} \neq 0$ et donc

$$B_1 = -\psi'(z_1).(\frac{a_1}{b_1} + ... + o(h_1^n))$$

est n fois dérivable en z_1 (et indépendant de z_2).

En remarquant que $\frac{\partial h_1}{\partial z_1} = 1$ $(h_1 = z_1 - a)$ et en dérivant (3.32) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\theta(u_1^{-1}(z_1)) = -b_1 + ... + o(h_1^n).$$

Grace à (3.29),on sait que

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) = a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)$$

où $h_1 = z_1 - a$, ce qui donne en dérivant :

$$\varphi'(z_1) - \psi'(z_1) = a_1 + b_1'.h_1 + ... + o(h_1^n). \tag{3.35}$$

Reprenant (3.32) on étudie le terme B_2 :

$$B_2 = \frac{B_2'}{a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ...o(h_1^n)}$$

$$B_2' = \Big[(b_1.h_1 + ... + o(h_1^n)).(a_1 + c_1'.h_1 + ...o(h_1^{n-1})$$

$$+(-b_1 + ... + o(h_1^n)).(a_1.h_1 + a_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n))\Big].$$

Dans B_2', le terme en h_1 disparait. On a en effet:

$$(-a_1 b_1 + a_1 b_1).h_1 + c_2.h_1^2 + ... + o(h_1^n)$$

où le premier coefficient éventuellement non nul est celui de h_1^2

En utilisant (3.29) et (3.25) on voit que le terme $t.B_2$ peut s'écrire

$$\frac{(z_2 - \psi(z_1)).(c_2 + ... + o(h_1^n))}{a_1^2 + a_1'.h_1 + ...o(h_1^n)}, \text{ un terme lui aussi n fois dérivable en } z_1 \text{ et} z_2. \tag{3.36}$$

On sait que $\frac{\partial B}{\partial z_1} = B_1 + t.B_2$ donc $\frac{\partial B}{\partial z_1}$ est lui aussi C^∞.

La fonction A est donc une fonction C^∞ en a des variables z_1 et z_2 sur $[a, b]$xR.

Au voisinage de (b, b') on peut reprendre les mêmes calculs.

En effet $\int_0^1 \psi'(u_1 - .(1-\theta).u_1' = \int_0^1 (1-\theta).u_1'$ et ψ' étant strictement décroissante ,

on utilisera $\psi'(b) > 1$.

Et la démonstration sera ainsi terminée.

3.3 Cas particulier où les fonctions f_i sont toutes nulles

Théorème 3.3

Dans le cas où les $a_i(u_1...u_n)$ sont indépendantes de i, i.e. $a_i(u_1...u_n) = a(u)$, la solution du problème (3.1) est unique.

Il est nécessaire de supposer que les $a_i(u_1...u_n)$ sont indépendantes de i car dans le cas contraire on a le théorème suivant

Théorème 3.4

Si les $a_i(u_1...u_n)$ ne sont pas indépendantes de i, il n'y a pas forcément unicité de la solution de (3.1).

Démonstration du théorème 3.3

Dans le cas où $a_i(u_1...u_n) = a(u)$, (3.1) devient

$$\left(a(u_i...u_n).u_i'\right)' = 0 \quad \forall i = 1, 2...n, \tag{3.37}$$

c'est à dire :

$$a(u_1...u_n).u_i' = C_i \quad \forall i = 1, 2...n. \tag{3.38}$$

On sait que $a(u) \geq \alpha > 0$ (cf.(3.2)) donc on peut écrire

$$u_i' = \frac{C_i}{a(u)} \tag{3.39}$$

et en intégrant

$$\begin{aligned} B_i - A_i &= u_i(b) - u_i(a) \\ &= C_i. \int_a^b \frac{dx}{a(u)}. \end{aligned}$$

Il existe des constantes $(k_1, .., k_n)$ non toutes nulles telles que

$$\sum_1^n k_i(B_i - A_i) = 0$$

où les k_i ne dépendent que des conditions aux bornes. En remarquant que:

$$\int_a^b \frac{dx}{a(u)} \geq (b-a).\frac{1}{\beta} \neq 0,$$

on voit que les constantes $k_1, ..., k_n$ non toutes nulles vérifient $\sum_1^n k_i(C_i) = 0$.

On obtient donc:

$$a(u).\sum_1^n k_i(u_i') = 0 \text{ c'est à dire : } \sum_1^n k_i(u_i') = 0.$$

Il existe donc un i pour lequel

$$u_i' = \sum_{j \neq i} k_j'(u_j')$$

et donc

$$u_i = \sum_{j \neq i} k_j'(u_j) + c_i \qquad (3.40)$$

où les $k_j' = \frac{k_j}{k_i}$ ne dépendent que des conditions aux bornes.

On termine la démonstration par récurrence sur n.

-Si n=1 :

(3.37) devient $(a(u).u')' = 0$. En posant

$$U(x) = \int_0^{u(x)} a(s)ds$$

on obtient $U' = a(u).u'$ et donc $U'' = 0$, U étant fixée en a et b, U est unique et u aussi. Ce qui fournit le résultat pour n=1.

-Si le résultat est vrai pour un système à (n-1) inconnues,

on sait (3.40) que l'une des fonctions est combinaison linéaire des autres ,on peut donc supposer que $u_n = \sum_1^{n-1} k_i.u_i + c$ où les coefficients k_i ne dépendent que des conditions aux bornes.

a est donc uniquement fonction des (n-1) premières fonctions . En posant:

$$b(u_1...u_{n-1}) = a(u_1...u_{n-1}, \sum_1^{n-1} k_i u_i + c)$$

on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} (b(u_1, ..., u_{n-1})u_i')' = 0 \quad \text{sur} \quad [a,b] \quad \forall i \leq n-1 \\ (b(u_1, ..., u_{n-1})u_n')' = 0 \\ u_i(a) = A_i \quad \text{et} \quad u_i(b) = B_i. \end{cases}$$

D'aprés l'hypothèse de récurrence, les (n-1) premières solutions sont uniques.

b ne dépend pas de u_n donc la dernière équation admet une solution unique, elle aussi.

Et cela termine la démonstration de théorème 3.3.

On passe maintenant à la démonstration du théorème 3.4 en donnant un exemple dans lequel $(a,b) = (0,1)$ et $n = 2$

Démonstration du théorème 3.4

On considère le système suivant:

$$(1)\begin{cases} (a_i(u_1,u_2)u_i')' = 0 \text{ sur }]0,1[\quad 0 < \alpha \leq a_i(u_1,u_2) \leq \beta \\ u_i(0) = B_i \quad u_i(1) = B_i' \quad \text{où} \quad B_i' > B_i. \end{cases} \tag{3.41}$$

On choisira u_i et v_i $(i = 1,2)$, deux fonctions qui ont la même dérivée en 0 et 1. C'est à dire u_i $(i = 1,2)$ des fonctions C^1 strictement croissantes telles que

$$u_i(0) = B_i \quad u_i(1) = B_i'.$$

On note

$$u_i'(0) = r_i > 0 \quad u_i'(1) = r_i' > 0 \tag{3.42}$$

et v_i $(i = 1,2)$ des fonctions C^1 strictement croissantes telles que

$$\begin{cases} v_i(0) = B_i \quad v_i(1) = B_i' \\ v_i'(0) = r_i \quad v_i'(1) = r_i' \\ u_1 < v_1 \text{ sur }]0,1[\\ u_2 > v_2 \text{ sur }]0,1[. \end{cases} \tag{3.43}$$

u_1 et v_1 sont strictement croissantes, donc ce sont deux bijections de $[0,1]$ dans $[B_1, B_1']$

Sur $]0,1[$, $u_1(x) < v_1(x)$ donc sur $]B_1, B_1'[$, on a $u_1^{-1}(t) > v_1^{-1}(t)$. Donc

$\forall x \in]B_1, B_1'[$ on a

$$v_2(v_1^{-1}) < v_2(u_1^{-1}) < u_2(u_1^{-1}) \tag{3.44}$$

On sait de plus, par définition que les fonctions u'_i sont minorées par une constante strictement positive .

On va définir les fonctions a_i $(i = 1, 2)$ en utilisant les fonctions u_i et v_i $(i = 1, 2)$. Soit a_i défini de la façon suivante: pour $i = 1, 2$. Si $y \in [v_2(v_1^{-1}(x)), u_2(u_1^{-1}(x))]$ on posera (pour $x \in]B_1, B'_1[$)

$$t = t(y) = \frac{y - v_2(v_1^{-1}(x)}{u_2(u_1^{-1}(x)) - v_2(v_1^{-1}(x))} \in [0, 1]$$

$$a_i(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{u'_i(u_1^{-1}(B_1))} = \frac{1}{u'_i(0)} \text{ pour } x \leq B_1 \\ \frac{1}{u'_i(u_1^{-1}(B'_1))} = \frac{1}{u'_i(1)} \text{ pour } x \geq B'_1 \\ \frac{1}{u'_i(u_1^{-1}(x))} \text{ pour } y \geq u_2(u_1^{-1}(x)) \\ \frac{1}{v'_i(v_1^{-1}(x))} \text{ pour } y \leq v_2(v_1^{-1}(x)) \\ t.\frac{1}{v'_i(v_1^{-1}(x))} + (1-t).\frac{1}{u'_i(u_1^{-1}(x))} \\ \text{pour } y \in [v_2(v_1^{-1}(x)), u_2(u_1^{-1}(x))], y = t.v_2(v_1^{-1}(x)) + (1-t).u_2(u_1^{-1}(x)). \end{cases}$$

les fonctions a_i sont continues sur tout intervalle de la forme $(C, D)\text{x}R$ où $B_1 < C < D < B'_1$ car les fonctions u'_i, v'_i, u_1^{-1} et v_1^{-1} sont continues en x.
On sait de plus que $u'_i(u_1^{-1}(B_1)) = v'_i(v_1^{-1}(B_1)) = u'_i(0)$ et que $u'_i(u_1^{-1}(B'_1)) = v'_i(v_1^{-1}(B'_1)) = u'(1)$, les fonctions a_i sont donc continues partout.

On vérifie aisément que

$$a(u_1, u_2).u'_i = 1 = a(v_1, v_2).v'_i.$$

Les couples (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont solutions du systéme (3.40). Ce qui termine la démonstration.

REFERENCES

[A.] N. André : Thesis, University of Metz, (1993).

[A.C.] N. André, M. Chipot : A remark on uniqueness for quasilinear elliptic equations. Proceedings of the Banach Center, to appear.

[Ar.] M. Artola : Sur une classe de problèmes paraboliques quasilinéaires. Bollettino UMI, (6), 5-B, (1986), p. 51-70.

[B.K.S.] H. Brezis, D. Kinderlehrer and G. Stampacchia : Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue. C.R. Acad. Sc. Paris Série A 287, (1978), p. 711-714.

[C.] P. G. Ciarlet : The finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland, Amsterdam, (1987).

[C.C.] J. Carrillo, M. Chipot : On nonlinear elliptic equations involving derivative of the nonlinearity. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 100 A, (1985), p. 281-294.

[C.M.] M. Chipot, G. Michaille : Uniqueness results and monotonicity properties for the solution of some variational inequalities. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, 16, 1 (1989), p. 137-166.

[G.] M. Giaquinta : Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems Princeton University Press, (1983), Princeton.

[G.T.] D. Gilbarg, N.S. Trudinger : Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer Verlag, Berlin, (1985).

[K.S.] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia: An Introduction to Variational Inequalities. Academic Press, (1980), New York.

[Me.] N. G. Meyers : An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), 17, (1963), p. 189-206.

[M.] G. Michaille : Thesis, University of Metz, (1988).

[T.] N.S. Trudinger : On the comparison principle for quasilinear divergence structure equations. Arch. Rat. Mech. Anal. (57), (1974), p. 128-133.