THESE

Présentée
A l'Université de Metz
pour obtenir le grade de

Docteur de L'Université de Metz
Spécialité Mathématiques

Par

Mohsen MASMOUDI

Produits star sur les variétés de Poisson

Soutenue le 7 Avril 1992

Devant la commission d'examen

Didier ARNAL	Président du jury
Lionel BERARD BERGERY	Examinateur
Claude ROGER	Rapporteur
André ROUX	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères à D. Arnal, qui a su au cours de ces dernières années, me guider, m'encourager et me faire confiance.

Je voudrais remercier A. Roux et C. Roger qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également L. Berard Bergery qui m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont encouragé à réaliser ce travail.

A mes parents,
à ma femme,
à mes enfants,
et à mes frères et soeurs.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Existe-il des structures d'algèbre ou d'algèbre de Lie sur V ? Si oui ces structures sont-elles équivalentes? Si on munit l'ensemble des structures d'algèbre ou d'algèbre de Lie sur V d'une topologie, un point A_0 donné de cet ensemble est il rigide c'est à dire existe -il un voisinage de ce point qui ne contient que des structures équivalentes à A_0 ? Une manière d'aborder ces questions est de partir d'une structure A_0 sur V et d'essayer de la déformer, c'est à dire d'introduire l'espace V_ν des séries formelles en ν à coefficients dans V et de chercher l'existence et l'éqivalence de structures du type:

$$A_\nu = A_0 + \nu A_1 + \nu^2 A_2 + ...$$

du même type que A_0. Cette idée a été développée par Gerstenhaber [11]. A. Nijenhius et R. Richardson [26] ont posé des questions analogues en géometrie différentielle: Un espace topologique donné peut-il être muni d'une structure de variété différentiable?...

Rappelons très rapidemant quelques définitions de cette théorie des déformations. Soit V un espace vectoriel sur ~~corps~~ $\mathbb{K}$. Considérons $M(V) = \oplus_{p\geq -1} M^p(V)$ l'espace vectoriel gradué des applications multilinéaires sur V et notons par $A(V) = \oplus_{p\geq -1} A^p(V)$ son image par l'opérateur d'antisymétrisation . $M(V)$ et $A(V)$ peuvent être muni de deux structures d'algèbre de Lie respectives Δ et $[,]$ telles que l'ensemble des solutions de l'équation de déformation

$$A\Delta A = 0 \qquad A \in M^1(V)$$

(respectivement

$$[A, A] = 0 \qquad A \in A^1(V))$$

soit l'ensemble des structures d'algèbres associatives sur V (respectivement l'ensemble des structures d'algèbres de Lie sur V).
Considérons V_ν l'espace des series formelles à coéficient dans V.

Définition
Une application multilinéaire sur V_ν est dite formelle si et seulement si il existe une suite $(A_r)_{r\geq 0}$ d'éléments de $M^a(V)$telle que: $\forall\ x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)} \in V_\nu$.

$$A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \sum_{r+s_0+...+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, ..., x_{s_a}^{(a)}).$$

Définition
Une déformation formelle d'une structure d'algèbre ou d'algèbre de Lie A sur V est une structure d'algèbre associative ou de Lie A_ν sur V_ν telle que:
1- A_ν est formelle,
2- $(A_\nu)_0 = A$.

Nous ne nous poserons pas ici le problème de la convergence de ces séries et nous resterons au niveau formel.

Dans [5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A.Lichnerowicz et D. Sternheimer ont proposé une formulation de la mécanique quantique utilisant cette théorie. En effet, la mécanique classique est bien décrite par l'algèbre des observables: les fonctions C^∞ sur l'espace des phases M. M est de façon naturelle une variété symplectique donc l'algèbre des observables est à la fois une algèbre associative et une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson. Le problème de la quantification d'un système classique est celui de construire un modèle mathématique pour le système quantique satisfaisant le " principe de correspondance " c'est à dire tel que si l'on suppose le quantum d'action " nul " ou " infinément petit ", on retrouve le système classique de départ. Dans [5] les auteurs traduisent cette problèmatique en utilisant la théorie des déformations. Plus précisément, ils traduisent le principe de correspondance en imposant que les espaces des observables classiques respectivement quantiques coïncident et que cet espace commun soit muni, dans le cas quantique, d'une structure d'algèbre associative formelle $\star$ avec $\hbar$ ou un multiple comme paramètre de déformation telle que $\star$ soit une défomation du produit usuel et

$$\frac{1}{2\nu}(u \star v - v \star u)$$

soit une déformation du crochet de Poisson. Ils ont donc introduit la notion de produit-star, déformation formelle de la multiplication de $C^\infty(M)$ pilotée par le crochet de Poisson. Depuis les questions d'existence et d'équivalence de produits-star sur les variétés symplectiques ont été largement étudiées. M. Gerstenhaber [11] avait montré que les problèmes de déformation sont liés à des problèmes de cohomologie. J. Vey, A. Lichnerowicz, O.M. Neroslavski et A.T. Vlassov ont montré l'existence de produits-star sur M si $b_3(M) = 0$. S.Gutt et A. Lichnerowicz ont déterminé les cohomologies de Chevalley et de Hochschild associées à ce problème[12]. P.B.A Lecomte et M. De Wilde ont repris ces calculs [14] et ont prouvé [15] l'exitence d'une déformation formelle du crochet de Poisson solution d'une équation dans le sous-espace des éléments formels de $A(V_\nu)$. Ils ont déduit alors l'existence d'un produit-star sur une variété symplectique quelconque. Ils ont étudié à la fin de leur article les problemes d'équivalences. En 1988 H. Omori, Y Maeda et A. Yoshioka ont proposé une deuxième démonstration de l'existence de produit-star en recollant des produits-star construits sur les ouverts d'un recouvrement de la variété [21]. Cette dernière démonstration a été simplifiée par P.B.A Lecomte et M. De Wilde dans [16]. Elle a été écrite d'une façon encore plus élémentaire par D. Arnal J. Ludwig et moi même dans [4].

Par ailleurs, à partir de l'étude des transformations canoniques, A. Lichnerowicz fut amené à introduire la notion de variété de Poisson[18] comme généralisation contravariante de celle de variété symplectique. Une structure de Poisson est définie sur une variété différentiable par un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ vérifiant $[\Lambda, \Lambda] = 0$ au sens du crochet de Schouten [28]. Si le rang de Λ est constant la variété de Poisson sera dite régulière. Dans ce cas Λ détermine sur la variété un feuilletage symplectique. Dans [19] A. Lichnerowicz généralise la notion de produits-star sur les variétés de Poisson. Cette généralisation est possible et représente le cadre naturel de ces déformations car l'existence d'une structure d'algèbre de Lie locale sur l'espace des fonctions C^∞ sur une variété différentiable est équivalent à l'existence d'une structure de Poisson sur cette variété. Dans le même article il définit les produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière. Ce sont les produits-star qui se restreignent au feuilles symplectiques.

Signalons qu'un exemple fondamental de variété de Poisson est le dual $\mathfrak{g}^*$ d'une algèbre de Lie, les feuilles symplectiques sont alors les orbites de la représentation coadjointe. Nos résultats permettent de prouver l'existence, sur l'ouvert dense des feuilles ~~de~~ de dimension maximale, d'un produit-star qui se restreint à chaque feuille, objet essentiel dans l'analyse harmonique par déformation. Puisqu'on connait des exemples où aucun produit-star sur $\mathfrak{g}^*$ entier peut se restreindre aux feuilles [33], ce résultat est dans ce cas le meilleur possible.

Finalement, les méthodes de quantification gèomètrique sont très fructueuses lorsqu'elles sont appliquées à la construction de représentations unitaires de groupes de Lie G, groupes de symètrie du système. Les produits-star sont aussi très utilisés en analyse harmonique. Pour ce faire, on cherche à construire sur les orbites W de la représentation coadjointe de G, qui sont des variétés symplectiques, des produits-star covariants [2] c'est à dire tels que, pour tout X et Y dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, on ait

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}_*\tilde{Y} - \tilde{Y}_*\tilde{X}) = [X,\tilde{}Y] = \{\tilde{X},\tilde{Y}\}$$

où $\tilde{X}$ est l'élément de $C^\infty(W)$ défini par

$$\tilde{X}(\xi) =< \xi, X > \quad \forall \xi \in W.$$

Dès qu'un tel produit-star est donné, on peut en effet construire une représentation de G [3]. La condition de covariance est un problème de déformation relative portant sur une sous-algèbre de Lie de dimension finie de $C^\infty(W)$ qui n'est pas aisé à traduire en termes de condition sur des opérateurs différentiels.

Dans la première partie de ce travail, nous avons essayé de généraliser les idées et les techniques de P.B.A Lecomte et M. De Wilde [15] [16] concernant les variétés symplectiques pour établir deux démonstrations différentes de l'existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière. Dans la deuxième partie, j'ai détaillé les travaux fait par D. Arnal J. Ludwig et moi même dans [4]. Dans ce dernier article on propose une démonstration plus élémentaire de l'existence de produits-star sur une variété symplectique et on prouve l'existence de produits-star covariants sur une orbite de la représetation coadjoite d'un groupe de Lie connexe, si celle ci admet une polarisation réelle [7]. Plus précisément ce travail est divisé en cinq chapitres:

Chapitre I

Dans les deux premiers paragrapes de ce chapitre j'ai rappelé quelques définitions et propositions de base de la théorie des déformations. La notion de symbole a été définie dans le paragraphe 3. Dans le paragraphe 4 on a défini les variétés de Poisson et les variétés de Poisson régulières et on a rappelé quelques propriétés dues à A. Lichnerowicz de ces dernières variétés, enfin on a défini la notion de tangentialité pour les applications multilinéaires d'un produit de fibrés vectoriels sur ces variétés dans un autre. Dans le paragraphe 5 on a essayé de rassembler les définitions et les propriétés des produits-star sur les variétés de Poisson.

Chapitre II

Dans ce chapitre on a commencé par généraliser quelques résultats concernant l'équivalence des produits-star et des produits-star faibles au cas d'une variété de Poisson régulière. On a obtenu:

Théorème: II-1-1
Tout produit-star faible tangentiel M_ν est tangentiellement équivalent à un produit-star tangentiel M'_ν.
Plus précisément il existe un élément tangentiel de $(M^0(N))_\nu$:

$$T_\nu = (1 + \nu^2 p(\nu^2))id$$

où p est une série formelle à valeur dans I:

$$p(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^k \qquad a_k \in I$$

tel que

$$M_\nu = T^*_\nu(M'_\nu).$$

Après avoir défini les outils ρ^*, $\mathbb{B}$ et ∂'', on établit quelques unes de leurs propriétés qui vont être utiles pour généraliser la première démonstration de l'existence de produits-star sur les variétés symplectiques. En particulier, on a

Proposition: I-4-3
Les deux assertions suivantes sont vraies:
(i) $\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M)) \subset \mathbb{B}$,
(ii) $A_{loc,t,nc}(N) = \rho^*(\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N))$.

A la fin des ce chapitre on a calculé les trois premiers groupes de cohomologie de Chevalley tangentielle d'une variété de Poisson régulière:

Théorème: II-4-2
Soit Γ une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de (M, Λ). Alors,
(i) Tout 1- cocycle différentiel est 1- différentiel,
(ii) Tout 2- cocycle C tangentiel et différentiel $n - c$ s'ecrit sous la forme:

$$C = aS^3_\Gamma + C_1 + \partial B$$

où $a \in I$, C_1 est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et $B \in A^0_{diff,t,nc}(N)$.

Théorème: II-4-3
Supposons que $rg\ \Lambda = 2n > 2$.
Soit Γ une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage. alors, tout 3-cocycle différentiel $n - c$ et tangentiel C s'écrit sous la forme:

$$C = S^3_\Gamma \wedge L_X + \lambda(T^2_\Gamma - C'_1) + C_1 + \partial B.$$

où $X \in L_t$,$\lambda \in I$, C_1' est une 3-cochaine 1-différentielle tangentielle n-c, C_1 est un 3- cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et B est une 2- cochaine différentielle tangentielle n-c. Plus précisément, pour que λT_Γ^2 ($\lambda \neq 0$) apparaîsse dans la décomposition d'au moins un 3-cocycle différentiel tangentiel n-c, il faut et il suffit qu'il existe un λ dans I tel que $\lambda\mu^*(\tau)$ soit un cobord.

Chapitre III

A l'aide des outils introduits dans le chapitre II, on a pu construire une application Θ_Λ^τ qui a les mêmes propriétés que celle construite dans le cas symplectique [15] et qui laisse en plus stable le sous espace des éléments tangentiels de $A_{loc,nc}(N)$. On a donc pu énoncé comme dans le cas symplectique la proposition suivante

Proposition: III-2-1

L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu) = 0. \qquad (*)$$

admet une solution unique L_ν telle que

$L_0 = P,\ L_1 = \rho^*(T) + \partial E \quad T \in Z^2_{loc,t,nt}(\wedge(\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M),\ E \in A^0_{loc,t,nc}(N)$ *et* $L_2 = \frac{-1}{2}(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) + aS_\Gamma^3,\ a \in I$. *De plus,*

(i) cette solution est une déformation formelle tangentielle de P,

(ii) si $a = 0$ et $E = 0$ cette déformation est 1-différentielle,

(iii) si $L_1 = 0$ alors $\forall k \geq 1,\ L_{2k+1} = 0$. De plus $L_\nu' = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_{2k}$ est l'unique solution de l'équation:

$$(2\nu D_\nu + id)L_\nu' + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu', L_\nu') = 0,$$

avec $L_0' = P,\ L_1' = aS_\Gamma^3$.

Comme dans le cas symplectique on a pu déduire de cette propsition deux propositions interessantes:

Proposition: III-2-3

Toute déformation formelle tangentielle d'ordre $k \geq 0$ de (N, P) s'étend à une déformation formelle tangentielle de (N, P).

Proposition: III-3-1

Tout produit-star tangentiel ou produit-star faible tangentiel d'ordre $2k$ ($k \geq 2$) est prolongeable en un produit-star tangentiel ou un produit-star faible tangentiel.

Ceci achève la preuve de l'existence.

Chapitre IV

La deuxième démonstration d'existence de produits-star sur une variété symplectique consiste a recoller des produits-star construits sur des ouverts U_α, domaines de cartes de Darboux et formant un recouvrement contractile de la variété. Ce recollement est possible si on montre l'existence d'une famille $T_{\alpha\beta}$ d'isomorphismes entre ces produits-star vérifiant

$$T_{\alpha\beta}^{-1} = T_{\beta\alpha},$$

et

$$T_{\alpha\beta} \circ T_{\beta\gamma} \circ T_{\gamma\alpha} = id.$$

Dans ce chapitre on montre que cette méthode se généralise sans beaucoup de difficultés aux variétés de Poisson régulières et on obtient essentiellement:

Théorème: IV-4-1
Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement contractile de M tel que les U_α soient les domaines de cartes adaptées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. Alors, il existe une collection d'applications tangentielles:

$$T_\alpha : N_\nu(U_\alpha) \to N_\nu(U_\alpha),$$

telle que $T_\alpha - id$ soit formel, differentiel, tangentiel et n-c et telle que

$$T_\alpha^* M_\alpha = T_\beta^* M_\beta,$$

sur chaque intersection non vide $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.
Donc, si on définit M_ν sur M par

$$M_\nu = T_\alpha^* M_\alpha \qquad \text{sur } U_\alpha,$$

alors M_ν sera un produit-star tangentiel sur (M, Λ).

Chapitre V

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, on a rappelé la définition des produits-star covariants sur une orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie. Dans le deuxième paragraphe, on a proposé une autre démonstration de l'existence de produits-star sur une variété symplectique. En s'inspirant des travaux de N.V. Pedersen [27] et dans le but de l'utiliser dans la démonstration finale on a établi:

Théoreme: V-3-1 [4]
Soit $W = G/G_{\xi_0}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ de dimension $2n$. Supposons qu'il existe une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en ξ_0. Alors, il existe un recouvrement de W par des cartes de Darboux (U_i, φ_i) tel que pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\tilde{X}/_U$ s'écrit sous la forme:

$$\tilde{X}/_U(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q).$$

où

$$\varphi_i(\xi) = (p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$$

et $\alpha_0, ..., \alpha_n$ sont des fonctions C^∞ en q.
De plus, ces ouverts apparaissent comme des ouverts d'un fibré affin L au dessus de G/H.

Si $\mathfrak{h}$ satisfait la condition de Pukanszky, alors $(\varphi_i(U_i))_i$ recouvre le fibré affin L en entier.

Enfin, dans le dernier paragraphe de ce chapitre on a prouvé le théorème suivant.

Théorème: V-4-1

Soit G un groupe de Lie connexe et soit $W = G/G_{\xi_0}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en ξ_0. Alors, il existe un produit-star covariant sur W.

I- GENERALITES

Dans ce chapitre, on précise les notions et les notations que nous allons utiliser. Il s'agit de notions classiques dues à Gerstenhaber, Lichnerowicz, Lecomte et De Wilde, les notations sont essentiellement de Lecomte et De Wilde [15].

1- Algèbres de Lie graduées associées à un espace vectoriel

a- Algèbre de Lie graduée

Définition: I-1-1

Une algèbre graduée du type $\mathbb{Z}$ *est un espace vectoriel gradué du type* $\mathbb{Z}$, $E = \oplus_{n\in \mathbb{Z}} E^n$ *muni d'une application bilinéaire:*

$$\circ : E \times E \to E,$$

vérifiant:

$\forall n, p \in \mathbb{Z}$

$$E^n \circ E^p \subset E^{n+p}.$$

Définition: I-1-2

Une algèbre de Lie graduée du type $\mathbb{Z}$ *est une algèbre graduée du type* $\mathbb{Z}$, $(E, \circ)$ *vérifiant:*

(i) $\forall A \in E^a$, $\forall B \in E^b$

$$A \circ B = (-1)^{ab+1} B \circ A.$$

(ii) $\forall A \in E^a$, $\forall B \in E^b$, $\forall C \in E^c$, *on a*

$$(-1)^{ac} A \circ (B \circ C) + (-1)^{ba} B \circ (C \circ A) + (-1)^{cb} C \circ (A \circ B) = 0.$$

" Identité de Jacobi graduée ".

Remarque: I-1-1

Cette définition n'est valable que dans le cas où E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2 et 3. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est égale à 2, la définition sera changée et si elle est égale à 3 il faut ajouter à la définition:

(iii) $\forall A \in E$, $\quad (A \circ A) \circ A = 0.$

Dans la suite, on ne considère que des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique différente de 2 et on note en général les éléments homogènes de E par des lettres majuscules et leur degré par les lettres minuscules correspondantes.

Proposition: I-1-1

Soit $(E,.)$ une algèbre graduée du type $\mathbb{Z}$ vérifiant une des deux conditions suivantes.
(i) . est associative.
(ii) $\forall A \in E^a, \forall B \in E^b, \forall C \in E^c$, on a

$$A.(B.C) - (A.B).C = (-1)^{bc}(A.(C.B) - (A.C).B).$$

Alors, l'espace vectoriel gradué E muni du produit $[,]$ défini par

$$[A,B] = A.B - (-1)^{ab}B.A, \ \forall A \in E^a, \forall B \in E^b,$$

est une algèbre de Lie graduée.

Démonstration

Dans le cas (ii) l'identité de Jacobi graduée peut se déduire de la façon suivante. La condition (ii) peut s'écrire sous la forme:

$$(-1)^{ac}(A.B).C - (-1)^{(a+b)c}(A.C).B = (-1)^{ac}A.[B,C],$$

de même on a

$$(-1)^{ba}(B.C).A - (-1)^{(b+c)a}(B.A).C = (-1)^{ba}B.[C,A],$$

$$(-1)^{cb}(C.A).B - (-1)^{(c+a)b}(C.B).A = (-1)^{cb}C.[A,B].$$

En considérant la somme de ces trois relations, on aura

$$(-1)^{ac}[A,B].C + (-1)^{ab}[B,C].A + (-1)^{bc}[C,A].B$$

$$= (-1)^{ac}A.[B,C] + (-1)^{ba}B.[C,A] + (-1)^{cb}C.[A,B].$$

Soit encore,

$$(-1)^{ac}(A.[B,C] - (-1)^{a(c+b)}[B,C].A) + (-1)^{ba}(B.[C,A] - (-1)^{b(c+a)}[C,A].B)$$

$$+(-1)^{cb}(C.[A,B] - (-1)^{c(a+b)}[A,B].C) = 0.$$

D'où le résultat.
Dans le cas ou le corps est de caractéristique 3, si A est dans E^a avec a pair alors:

$$[A,A] = 0,$$

si non

$$[A,A] = 2A.A,$$

et la condition (ii) écrite pour $A = B = C$ sera

$$[A,A] = 0.$$

b- Algèbres de Lie graduées associées à un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0. On note $M^a(V)$ l'espace des applications (a+1)-linéaires de V dans V. L'opérateur d'antisymétrisation α sur $M^a(V)$ est défini par:
$\forall A \in M^a(V), \forall x_o, ..., x_a \in V,$

$$\alpha(A)(x_0, ..., x_a) = \frac{1}{(a+1)!} \sum_{\sigma \in P_{a+1}} sign\sigma A(x_{\sigma(0)}, ..., x_{\sigma(a)}).$$

où P_{a+1} est le groupe des permutations de $\{0, ..., a\}$ et $sign\sigma$ désigne la signature de σ.
On note $A^p(V)$ l'espace $\alpha(M^p(V))$.
Considérons les deux espaces vectoriels gradués:

$$M(V) = \oplus_{p \geq -1} M^p(V) \quad \text{et} \quad A(V) = \oplus_{p \geq -1} A^p(V).$$

Dans [26], Nijenhuis et Richardson ont pu munir les deux espaces $M(V)$ et $A(V)$ de structures d'algèbre de Lie respectives Δ et $[,]$ telles que l'ensemble des solutions de l'équation de déformation

$$A \Delta A = 0, \qquad A \in M^1(V),$$

(respectivement,

$$[A, A] = 0, \qquad A \in A^1(V) \;),$$

soit l'ensemble des structures d'algèbres associatives sur V (respectivement l'ensemble des structures d'algèbres de Lie sur V).

L'application

$$\Delta : \; M(V) \times M(V) \to M(V)$$

est définie par
$\forall A \in M^a(V), \forall B \in M^b(V)$

$$A \Delta B = i(B)A + (-1)^{ab+1} i(A)B.$$

où
$i(B)A = 0$ si $A \in M^{-1}(V)$,
$i(B)A(x_0, ..., x_{a+b}) = \sum_{k=0}^{a} (-1)^{kb} A(x_0, ..., B(x_k, ..., x_{k+b}), ..., x_{a+b})$, si $A \in M^a(V)$ avec $a > -1$ et $B \in M^b(V)$.

L'application:

$$[,] : \; A(V) \times A(V) \to A(V)$$

est définie par
$\forall A \in A^a(V), \forall B \in A^b(V),$

$$[A, B] = \frac{(a+b+1)!}{(a+1)!(b+1)!} \alpha(A \Delta B).$$

Le fait que $(M(V),\Delta)$ soit une algèbre de Lie, et par suite que $(A(V),[,])$ soit une algèbre de Lie, est une conséquence directe de la proposition I-1-1 et du lemme suivant

Lemme: I-1-1
$\forall A \in M^a(V), \forall B \in M^b(V), \forall C \in M^c(V)$, on a

$$i(i(C)B)A - i(C)i(B)A = (-1)^{bc}(i(i(B)C)A - i(B)i(C)A).$$

Proposition: I-1-2
(i) Si β est une (b+1)-forme sur V , γ est une (c+1)-forme sur V et x, y sont deux éléments de V, alors on a

$$[\beta \otimes x, \gamma \otimes y] = (\gamma \wedge i(y)\beta) \otimes x + (-1)^{cb+1}(\beta \wedge i(x)\gamma) \otimes y.$$

En particulier, si $A \in A(V)$ et $x \in V$, alors $[A, x]$ est le produit intérieur $i(x)A$.
(ii) Si $A \in M^0(V) = A^0(V)$ et si $B \in M^b(V)$ ou $A^b(V)$, alors on a
$\forall x_0, ..., x_b \in V,$

$$A \circ B(x_0, ..., x_b) = A(B(x_0, ..., x_b)) - \sum_{i=0}^{b} B(x_0, ..., A(x_i), ..., x_b),$$

où $\circ$ désigne Δ ou $[,]$.
Il en résulte que $A \to A \circ B$ est l'extension naturelle de l'action adjointe de A sur $M^0(V)$.
(iii)
$*$ Si $A \in M^1(V), ona$

$$A\Delta A(x, y, z) = 2(A(A(x, y), z) - A(x, A(y, z)))$$

$*$ Si $A \in A^1(V), ona$

$$[A, A](x, y, z) = 2(A(A(x, y), z) + A(A(y, z), x) + A(A(z, x), y)).$$

En particulier (V, A) est une algèbre associative si et seulement si $A\Delta A = 0$ et une algèbre de Lie si et seulement si $A \in A^1(V)$ et $[A, A] = 0$.

c- Cohomologie associée à une algèbre de Lie graduée.

Proposition: I-1-3
Soit $(E, \circ)$ une algèbre graduée et soit F un idéal gradué de E (i.e. un sous-espace gradué vérifiant $E \circ F \subset F$ et $F \circ E \subset F$). Notons π la projection canonique de E sur $E/_F$. Alors, il existe une unique structure d'algèbre graduée sur $E/_F$ telle que π soit un homomorphisme d'algèbres graduées.
Si de plus $(E, \circ)$ est une algèbre de Lie graduée, alors cette structure définit sur $E/_F$ une structure d'algèbre de Lie graduée.

Proposition: I-1-4

Soit $(E, \circ)$ une algèbre de Lie graduée du type $\mathbb{Z}$ et soit $A \in E^1$ tel que l'on ait

$$A \circ A = 0.$$

Alors l'application,

$$\partial_A : \; E \to E$$

$$B \in E^b \mapsto (-1)^b A \circ B,$$

est homogène de degré 1 et vérifie
$(i) \partial_A \circ \partial_A = 0,$
$(ii) \forall B \in E, \forall C \in E^c,$

$$\partial_A(B \circ C) = (-1)^c(\partial_A B) \circ C + B \circ (\partial_A C).$$

Il en résulte que $\circ$ induit, sur l'espace de cohomologie $H(E, \partial_A) = {ker\partial_A}/{im\partial_A}$, une structure d'algèbre de Lie graduée.

Démonstration

Les deux égalités vérifiées par ∂_A sont des conséquences directes de l'identité de Jacobi graduée. De (ii) on déduit que $ker\partial_A = Z(E, \partial_A)$ est une sous-algère de Lie graduée de E et que $im\partial_A = B(E, \partial_A)$ est un idéal de $Z(E, \partial_A)$. La deuxième partie de la proposition est donc une conséquence de la proposition I-1-3.

Si $E = M(V)$ et $A \in M^1(V)$ est tel que $A \Delta A = 0$, alors l'opérateur de cohomologie ∂_A est l'opérateur de cohomologie de Hochschild de l'algèbre associative (V, A).

Si $E = A(V)$ et $A \in A^1(V)$ est tel que $[A, A] = 0$, alors l'opérateur de cohomologie ∂_A est l'opérateur de cohomologie de Chevalley de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie (V, A).

2- Déformation formelle

a- Applications multilinéaires formelles

Soit V un espace vectoriel. On note par V_ν l'espace des séries formelles:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k x_k \qquad (x_k \in V).$$

Définition: I-2-1

Un élément A_ν de $M^a(V_\nu)$ est dit formel si et seulement si il existe une suite $(A_r)_{r\geq 0}$ d'éléments de $M^a(V)$telle que l'on ait
$\forall\ x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)} \in V_\nu,$

$$A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \sum_{r+s_0+...+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, ..., x_{s_a}^{(a)}).$$

A_r est appelé la composante d'ordre r de A_ν. On notera dans la suite:

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

.

Proposition: I-2-1

Un élément A_ν de $M^a(V_\nu)$ est formel si et seulement si on a

$$\nu A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}) = A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., \nu x_\nu^{(i)}, ..., x_\nu^{(a)}),$$

pour tout $i \leq a$ et $x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}$ dans V_ν.

Démonstration

Il est clair que la condition est necessaire.
Soit A_ν un élément de $M^a(V_\nu)$ vérifiant la condition de la proposition. Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on définit l'élément A_r de $M^a(V)$ par
$\forall\ x_0, ..., x_a \in V,$

$$A_r(x_0, ..., x_a) = (A_\nu(x_0, ..., x_a))_r,$$

(la composante d'ordre r de la série $A_\nu(x_0, ..., x_a)$).

Soit k un élément de$\mathbb{N}$ et soit $x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}$ (a+1)-éléments de V_ν alors on a

$$(A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}))_k = (A_\nu(\sum_{s_0=0}^{k} \nu^{s_0} x_{s_0}^{(0)}, ..., \sum_{s_a=0}^{k} \nu^{s_a} x_{s_a}^{(a)}))_k = \sum_{r+s_0+...+s_a=k} A_r(x_{s_0}^{(0)}, ..., x_{s_a}^{(a)}).$$

Corollaire: I-2-1

Si $A_\nu, A_\nu^{(0)}, ..., A_\nu^{(a)}$ sont des éléments respectifs de $M^a(V_\nu), M^{p_0}(V_\nu), ..., M^{p_a}(V_\nu)$ $(a, p_0, ..., p_a \in \mathbb{N} \cup \{-1\})$ formels, alors l'élément de $M^{p_0+\cdots+p_a}(V_\nu)$

$$A_\nu(A_\nu^{(0)}(...), ..., A_\nu^{(a)}(...))$$

est aussi formel.

Proposition: I-2-2

Si $T_\nu \in M^0(V_\nu)$ est une application formelle, alors l'application $id + \nu T_\nu$ est bijective et on a

$$(id + \nu T_\nu)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k.$$

En particulier, si la première composante T_0 d'un élément formel T_ν de $M^0(V_\nu)$ est bijective, alors l'aplication T_ν est bijective, et si $T_0^{-1}T_\nu = id + \nu T'_\nu$ alors on a

$$T_\nu^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T'^k_\nu T_0^{-1}.$$

Remarque: I-2-1

On peut considérer la série formelle

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k,$$

car pour x_ν dans V_ν, la i^{eme} composante de $\nu^k T_\nu^k(x_\nu)$ est nulle pour $k > i$ et par suite celle de

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu)$$

est égale à

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s (T_\nu^s(x_\nu))_{i-s}.$$

Démonstration

Soit T_ν comme dans la première partie de la proposition. Pour déduire le résultat il suffit de remarquer que puisque T_ν est formelle, pour tout x_ν dans V_ν, la i^{eme} composante de

$$(1 + \nu T_\nu)(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu))$$

est égale à celle de

$$(1 + \nu T_\nu)(\sum_{k=0}^{i} (-1)^k \nu^k T_\nu^k(x_\nu)),$$

qui est égale à celle de x_ν.
La deuxième partie de la proposition est simple à vérifier.

D'aprés la définition, l'ensemble des éléments formels de $M^p(V_\nu)$ ou de $A^p(V_\nu)$ s'identifie naturellement à $(M^p(V))_\nu$ ou $(A^p(V))_\nu$.

Proposition: I-2-3

$(M(V))_\nu$ et $(A(V))_\nu$ sont des sous-algèbres de Lie graduées respectives de $(M(V_\nu),\Delta)$ et $(A(V_\nu),[,])$.
De plus, si

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

est un élément de $(M(V))_\nu$ ou de $(A(V))_\nu$ et si $\circ$ désigne Δ ou $[,]$, alors on a

$$(A_\nu \circ A_\nu)_k = \sum_{i+j=k} A_i \circ A_j.$$

Démonstration

D'après le corollaire I-2-1 $(M(V))_\nu$ et $(A(V))_\nu$ sont stables par Δ et $[,]$.

b- Déformation formelle

Définition: I-2-2

Soit (V,A) une algèbre associative ou de Lie.

(i) Une déformation formelle A_ν de (V,A) est une structure d'algèbre associative ou de Lie sur V_ν telle que
1- A_ν ~~est~~ soit formelle,
2- $(A_\nu)_0 = A$.

(ii) Une déformation formelle d'ordre k $(k \in \mathbb{N})$ A_ν de (V,A) est un élément formel de $M(V_\nu)$ ou de $A(V_\nu)$ tel que

$$(A_\nu \Delta A_\nu)_l = 0 \quad \forall\ l \leq k.$$

ou

$$([A_\nu, A_\nu])_l = 0 \quad \forall\ l \leq k.$$

Remarque: I-2-2

Une déformation d'ordre k de (V,A) induit sur $V_\nu/_{\nu^{k+1}V_\nu}$ une structure d'algèbre associative ou de Lie.

Proposition: I-2-4

Soit (V,A_0) une algèbre associative ou de Lie. Une application formelle bilinéaire

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i A_i$$

est une déformation formelle d'ordre k de A_0 si et seulement si on a

$$2\partial_{A_0} A_i = J_i \quad \forall\ i \leq k.$$

où

$$J_i = \sum_{r+s=i \ r,s\neq 0} A_r \Delta A_s. \quad ou \quad J_i = \sum_{r+s=i \ r,s\neq 0} [A_r, A_s].$$

De plus dans ce cas on a

$$\partial_{A_0} J_{k+1} = 0.$$

Démonstration

On notera par $\circ$ le produit Δ ou $[,]$. Sachant que pour tout B dans $M^1(V)$ ou $A^1(V)$ on a

$$\partial_{A_0} B = -A_0 \circ B,$$

on déduit facilement que

$$\forall \ i \leq k \quad (A_\nu \circ A_\nu)_i = J_i - 2\partial_{A_0} A_i,$$

d'où le résultat.
D'autre part d'aprés l'identité de Jacobi graduée pour toute application formelle A_ν on a

$$A_\nu \circ (A_\nu \circ A_\nu) = 0$$

Or, si A_ν est une défomation formelle d'ordre k de A_0, la composante d'ordre $i \leq k$ de $(A_\nu \circ A_\nu)$ est nulle et donc la composante d'ordre $k+1$ de

$$A_\nu \circ (A_\nu \circ A_\nu)$$

est égale à

$$2A_0 \circ (\sum_{i+j=k+1} A_i \circ A_j) = 2A_0 \circ J_{k+1} = 2\partial_{A_0} J_{k+1}.$$

Car d'aprés l'identité de Jacobi graduée écrite pour A_0, A_0, A_{k+1} on a

$$A_0 \circ (A_0 \circ A_{k+1}) = A_0 \circ (A_{k+1} \circ A_0) = 0.$$

Supposons qu'on ait construit une déformation formelle d'ordre k

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i A_i$$

d'un élément A_0 vérifiant

$$A_0 \circ A_0 = 0.$$

On considére

$$J_{k+1} = \sum_{i+j=k+1 \ i,j\neq 0} A_i \circ A_j.$$

D'après la proposition précédente, J_{k+1} est un cocycle pour ∂_{A_0}. Si ce cocycle est un cobord on peut choisir A_{k+1} dans $M^1(V)$ ou $A^1(V)$ tel que

$$2\partial_{A_0} A_{k+1} = J_{k+1}.$$

Et donc $A_\nu + \nu^{k+1} A_{k+1}$ sera une déformation formelle d'ordre $k+1$ de A_0. Il en résulte donc que l'obstruction au prolongement d'une déformation à l'ordre $k+1$ est la classe de cohomologie de J_{k+1} pour ∂_{A_0}. Remarquons que A_{k+1} est déterminé à un cocycle près et que le fait que J_{k+2} soit un cobord ou non (donc la possibilité de prolonger cette déformation à l'ordre $k+2$ ou non) peut dépendre du choix de A_{k+1}.

c- Equivalence entre déformations formelles

Soit V un espace vectoriel. On note $G_\nu(V)$ le groupe formé par les éléments de $(M^0(V))_\nu$ de premier terme égal à l'identité

$$G_\nu(V) = \{T_\nu \in (M^0(V))_\nu / (T_\nu)_0 = id\}.$$

Pour T_ν dans $G_\nu(V)$ et A_ν dans $(M^a(V))_\nu$, on note $T_\nu^* A_\nu$ l'action naturelle de $G_\nu(V)$ sur $(M(V))_\nu$:
$\forall\ x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)} \in V_\nu$

$$T_\nu^* A_\nu(x_\nu^{(0)}, ..., x_\nu^{(a)}) = T_\nu A_\nu(T_\nu^{-1}(x_\nu^{(0)}), ..., T_\nu^{-1}(x_\nu^{(a)})).$$

Remarquons que

$$(T_\nu^* A_\nu)_0 = (A_\nu)_0.$$

Définition: I-2-3

Soient A_ν et A'_ν deux déformations formelles d'une algèbre associative ou de Lie (V, A_0).

(i) A_ν et A'_ν sont dites équivalentes si et seulement s'il existe T_ν dans $G_\nu(V)$ tel que

$$A_\nu = T_\nu^* A'_\nu$$

(ii) A_ν et A'_ν sont dites équivalentes jusqu'à l'ordre k pour un certain k dans$\mathbb{N}$ si et seulement s'il existe T_ν dans $G_\nu(V)$ tel que

$$(A_\nu)_i = (T_\nu^* A'_\nu)_i \quad \forall\ i \leq k.$$

Proposition: I-2-5
Soient

$$A_\nu = \sum_{i=0}^{k+1} \nu^i A_i \quad et \quad A'_\nu = \sum_{i=0}^{k+1} \nu^i A'_i$$

deux déformatins formelles d'une algèbre associative ou de Lie (V, A_0) *équivalentes jusqu'à un ordre* k. *Il existe donc* T_ν *dans* $G_\nu(V)$ *tel que*

$$(A_\nu)_i = (T^*_\nu A'_\nu)_i \quad \forall \ i \leq k.$$

Posons

$$A''_{k+1} = (T^*_\nu A'_\nu)_{k+1}.$$

Alors, si $A_{k+1} - A''_{k+1}$ *est un cobord pour* ∂_{A_0}, A_ν *et* A'_ν *sont équivalentes jusqu'à l'ordre* $k+1$.

Démonstration
Supposons qu'il existe B dans $M^0(V)$ tel que

$$A_{k+1} - A''_{k+1} = \partial_{A_0} B.$$

D'aprés la proposition I-2-2 on a

$$(1 + \nu^{k+1} B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \nu^{(k+1)i} B^i.$$

Il est clair que

$$((1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu)_i = (A_\nu)_i \quad \forall \ i \leq k,$$

et que

$$((1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu)_{k+1} = A_{k+1} + B \circ A_0,$$

($\circ$ désigne Δ ou $[,]$).
On a donc

$$(1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu = A_\nu + \nu^{k+1} B \circ A_0$$

jusqu'à l'ordre $(k+1)$.
Mais on a

$$B \circ A_0 = -\partial_{A_0} B = A''_{k+1} - A_{k+1}$$

et par suite

$$(1 + \nu^{k+1} B)^* A_\nu = A'_\nu$$

jusqu'à l'ordre $(k+1)$.

Remarque: I-2-3
$A_{k+1} - A''_{k+1}$ est un cocycle car on a

$$A_\nu \circ A_\nu - T^*_\nu(A'_\nu) \circ T^*_\nu(A'_\nu) = 0 \quad (*).$$

Sachant que

$$\forall\ i \leq k \quad (A_\nu)_i = (T_\nu^*(A'_\nu))_i$$

la composante d'ordre $k+1$ du premier membre de (*) est égale à

$$\partial_{A_0}(A_{k+1} - A''_{k+1}).$$

3- Connexions et opérateurs différentiels

Soit M une variété différentiable connexe à base dénombrable de dimension n. On désigne par N l'espace des fonctions C^∞ sur M. On note $H(M)$ l'espace des champs de vecteur sur M et par $\wedge^p(M)$ l'espace des p-formes sur M. On pose

$$\wedge(M) = \oplus_{p\in \mathbb{N}} \wedge^p(M).$$

a- Applications locales et symboles

Soient $E^1, ..., E^p$ et F, (p + 1)-fibrés vectoriels sur M de fibres respectifs $E_0^1, ..., E_0^p$et F_0. On note $\Gamma(E^i)$ (respectivement $\Gamma(F)$) l'espace des sections C^∞ sur E^i (respectivement sur F).

Définition: I-3-1 [31]
Une application multilinéaire

$$C\ :\ \Gamma(E^1) \times ... \times \Gamma(E^p) \to \Gamma(F)$$

est dite locale si et seulement si on a
$\forall\ s_i \in \Gamma(E^i)$

$$Supp\ C(s_1, ..., s_p) \subset \bigcap_{i=1}^{p} Supp\ s_i,$$

où $Supp\ s$ désigne le support de s.

Théorème: I-3-1 (Peetre) [31]
Si

$$C\ :\ \Gamma(E^1) \times ... \times \Gamma(E^p) \to \Gamma(F)$$

est une application multilinéaire locale, alors C est localement un opérateur multidifférentiel:
Si (U, φ)est une carte de M avec $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ et U relativement compact, et si on se donne une trivialisation de $E^1, ..., E^p$ et F sur U, alors:
$\forall\ s_i \in \Gamma(E^i)$

$$C(s_1, ..., s_p)/x = \sum A_{\alpha_1,...,\alpha_p,x}(D_x^{\alpha_1}\ \overline{s}_1, ..., D_x^{\alpha_p}\ \overline{s}_p),$$

où $\overline{s}_i$ est l'expression locale de s_i et $A_{\alpha_1,...,\alpha_p,x}$ est une application p-linéaire de $E_0^1 \times ... \times E_0^p$ dans F_0. De plus cette somme est finie.

Définition: I-3-2 [31]

Une application locale C est dite k-différentielle si et seulement si pour tout ouvert relativement compact U, l'opérateur différentiel associé à C ne fait apparaitre que des dérivés d'ordre au plus k. Elle sera dite différentielle si elle est k-différentielle pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Si C est locale on définit l'ordre total r_C de C, sur un certain U, comme étant le maximun des $|\alpha_1| + ... + |\alpha_p|$ tel que

$$x \mapsto A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,x}$$

n'est pas identiquement nulle sur U.

Il est bien connu [31][15] que si C est locale et d'ordre total r_C sur un certain U, l'application définie par

$\forall x \in U$

$$\sigma_{C,x}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{|\alpha_1|+\dots+|\alpha_p|=r_C} (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_p)^{\alpha_p} A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,x} \qquad \xi_i \in T_x^* M.$$

est intrinsèque et appelée le symbole total de C.

On définit de la même façon l'ordre lexicographique $\overline{r}_C$ d'une application locale C comme étant le plus grand dans l'ordre lexicographique des p-uplets $(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_p|)$ vérifiant

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_p| = r_C,$$

et

$$x \mapsto A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,x}$$

n'est pas identiquement nulle sur U.

Le symbole lexicographique de C, $\overline{\sigma}_C$ est défini par

$\forall x \in U$, $\forall \xi_1, \dots, \xi_p \in T_x^* M$

$$\overline{\sigma}_{C,x}(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{(|\alpha_1|,\dots,|\alpha_p|)=\overline{r}_C} (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_p)^{\alpha_p} A_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,x}.$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura aucune ambiguité, on omettra d'indiquer le point en lequel le symbole est considéré.

Remarques: I-3-1

(i) pour les applications différentielles, le symbole est défini globalement sur la variété M.

(ii) Une application p-linéaire k-différentielle est d'ordre total au plus pk.

Exemples

(i) Soit T un p-tenseur contravariant non nul sur M, définissons l'application C de $N \times ... \times N$ dans N par
$\forall u_1, ..., u_p \in N$

$$C(u_1, ..., u_p) = T(du_1, ..., du_p).$$

Alors C est 1-différentielle d'ordre total p et on a
$\forall \xi_1, ..., \xi_p \in \Lambda^1(M)$,

$$\sigma_C(\xi_1, ..., \xi_p) = T(\xi_1, ..., \xi_p).$$

De même on a

$$\overline{r}_C = (1, ..., 1) \quad et \quad \overline{\sigma}_C = \sigma_C.$$

(ii) La différentielle extérieure est un opérateur 1-différentiel d'ordre total 1 et de symbole défini par
$\forall \xi \in \Lambda^1(M)$, $\forall \omega \in \Lambda^p(M)$,

$$\sigma_d(\xi)(\omega) = \xi \wedge \omega.$$

(iii) Le crochet de Lie de l'algèbre des champs de vecteurs de M est un opérateur 1-différentiel de $H(M) \times H(M) \to H(M)$ d'ordre total 1 et de symbole défini par
$\forall \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^1(M), \forall X_1, X_2 \in H(M)$,

$$\sigma_{[,]}(\xi_1, \xi_2)(X_1, X_2) = < X_1, \xi_2 > X_2 - < X_2, \xi_1 > X_1.$$

Cas particulier

Considérons le cas $E^1 = ... = E^p = F = M \times \mathbb{R}$, $M \times \mathbb{R}$ étant le fibré trivial. Dans ce cas une section C^∞ est un élément de N. De plus, dans ce cas $E_0^1 = ... = E_0^p = F_0 = \mathbb{R}$ et donc $A_{\alpha_1,...,\alpha_p,x}$ sera définie par la donnée de $A_{\alpha_1,...,\alpha_p,x}(1, ..., 1)$ et on peut donc l'identifier à un élément de $\mathbb{R}$, σ_C sera alors un polynôme en $\xi_1, ..., \xi_p$ à coefficients dans N.

On étend la notion de symbole comme suit Si r est plus petit ou égal à l'ordre total d'une application locale C, on définit le symbole d'ordre r sur un ouvert Ucomme précédement si non le symbole d'ordre r sera l'application identiquement nulle. De la même façon on définit le symbole lexicographique d'ordre $\overline{r}$.

Proposition: I-3-1

Soit C une application p-linéaire locale et soient $A_1, ..., A_p$, p applications a_i-linéaires locales telles que la composition

$$C(A_1(...), ..., A_p(...))$$

ait un sens. Alors, le symbole d'ordre $r_C + r_{A_1} + ... + r_{A_p}$ de l'application déduite de cette composition est

$$\sigma_C(\xi_1 + ... + \xi_{a_1}, ..., \xi_{a_1+...+a_{p-1}+1} + ... + \xi_{a_1+...+a_p})$$

$$\neq \prod_{i=1}^{p} \sigma_{A_i}(\xi_{a_1+...+a_{i-1}+1}, ..., \xi_{a_1+...+a_i}).$$

le symbole lexicographique est obtenu par la même formule en remplaçant σ_C et σ_{A_i} par le symbole lexicographique correspondant.

b- Connexions sur M

Soit Γ une connexion sur M. On note par ∇ la dérivé covariante associée à Γ. On désigne par $V_p(M)$ (respectivement $V^p(M)$) l'espace des p-tenseurs covariants sur M (respectivement l'espace des p-tenseurs contravariants sur M).

On définit

$$\nabla : V_p(M) \to V_{p+1}(M)$$

par

$$\nabla T(X_1, ..., X_{p+1}) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} \nabla_{X_i} T(X_1, ..., \hat{i}, ..., X_{p+1}),$$

où

$$\nabla_X T(X_1, ..., X_p) = X(T(X_1, ..., X_p)) - \sum_{i=1}^{p} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_p).$$

Il est clair que ∇^p envoie N sur $V_p(M)$ et que son symbole est donné par

$$(\xi_1, ..., \xi_p) \mapsto \xi_1 \vee ... \vee \xi_p$$

où $\vee$ désigne le tenseur de complète symétrisation.

Il en résulte qu'un élément k-différentiel C de $M^0(N)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$C(u) = \sum_{p=0}^{\infty} < T_p, \nabla^p u >, \qquad \forall u \in N,$$

avec $T_p \in V^p(M)$.

De même, un élément C différentiel de $M^p(N)$ s'écrit sous la forme

$$C(u_0, ..., u_p) = \sum_{k_0, ..., k_p} < T_{k_0, ..., k_p}, \nabla^{k_0} u_0 \otimes ... \otimes \nabla^{k_p} u_p >$$

où $T_{k_0,...,k_p}$ est un $k_0 + ... + k_p$ - tenseur contravariant symétrique par rapport à tous les arguments $(k_0 + ... + k_i) + j \quad j \in \{1, ..., k_{i+1}\}$ ([15] [19]).

Dans la suite, on notera par $M_{loc}(N)$, $M_{diff}(N)$, $M_{nc}(N)$, $M_{loc,nc}(N), ...$ ou $A_{loc}(N)$, $A_{diff}(N)$, $A_{nc}(N)$, $A_{loc,nc}(N), ...$ les sous espaces de $M(N)$ ou $A(N)$ des éléments locaux, différentiels, nuls sur les constantes, locaux et nuls sur les constantes,... .

4- Variété de Poisson et opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière

a- Variété de Poisson

Soit M une variété différentiable de dimension m. Soient E et E' deux espaces vectoriels. On note par $\wedge^r(E,E')$ l'espace des applications r-linéaires alternées de E dans E' et on pose

$$\wedge(E,E') = \oplus_{r\geq 0} \wedge^r (E,E').$$

On définit l'application

$$\rho^* : \wedge(\wedge^1(M),N) \rightarrow A_{nc}(N),$$

par:
$\forall T \in \wedge^r(\wedge^1(M),N)$,

$$\rho^*(T)(u_1,...,u_r) = T(du_1,...,du_r), \qquad \forall u_1,...,u_r \in N.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que le sous espace gradué de $A_{nc}(N)$ formé des éléments qui sont images des tenseurs contravariants sur M, i.e les éléments de $A_{loc,nc}(N)$ vérifiant
$\forall u_0,u_1,...,u_r \in N$,

$$C(u_0u_1,u_2,...,u_r) = u_0C(u_1,u_2,...,u_r) + u_1C(u_0,u_2,...,u_r)$$

est une sous algèbre de $(A(N),[,])$. De même, il n'est pas difficile de voir que la restriction de ρ^* au sous espace des tenseurs contravariants sur M est un isomorphisme. Il en résulte que ρ^* induit sur le sous espace gradué des tenseurs contravariants sur M une structure d'algèbre de Lie graduée qu'on note toujours par $[,]$. On retrouve ainsi le crochet de Schouten sur les tenseurs [28]. En effet si A est un r-tenseur et B est un s-tenseur, alors $[A,B]$ est un $(r+s+1)$-tenseur qui peut être défini de la maniere suivante
Pour toute $(r+s+1)$ forme fermée β on a

$$i([A,B])\beta = (-1)^{s(r+1)}i(A)di(B)\beta + (-1)^r i(B)di(A)\beta,$$

(voir [19]).

Définition: I-4-1
Une structure de Poisson est définie sur M par la donnée d'un 2-tenseur contravariant Λ vérifiant

$$[\Lambda,\Lambda] = 0.$$

Elle est dite régulière si Λ est de rang constant $2n$. Dans ce cas $q = m - 2n$ est appelé la codimension de la variété de Poisson.

La donnée d'une structure de Poisson Λ sur M induit sur N une structure d'algèbre de Lie définie par
$\forall u,v \in N$,

$$\{u,v\} = P(u,v) = \Lambda(du,dv).$$

Inversement, une structure d'algèbre de Lie locale

$$\{,\} : N \times N \to N,$$

vérifiant

$$\{uv, w\} = u\{v, w\} + v\{u, w\} \quad \forall u, v, w \in N,$$

définit sur M une structure de Poisson.

Les variétés de Poisson régulières ont été introduites par A. Lichnerowicz dans [18] comme généralisation naturelle des variétés symplectiques. En effet, considérons une variété symplectique (M, F), F étant une 2-forme fermée de rang $2n$. On note

$$\mu : TM \to T^*M,$$

l'isomorphisme de fibrés vectoriels défini par:

$$\mu(X) = -i(X)F, \qquad \forall X \in TM.$$

On note ρ l'isomorphisme inverse de μ.

Les isomorphismes μ et ρ s'étendent aux fibrés tensoriels. Si on note par Λ le 2-tenseur contravariant image de F par ρ alors on a:

$$[\Lambda, \Lambda] = 0.$$

Une variété de Poisson régulière (M, Λ) admet un feuilletage [19] en variétés symplectiques de dimension $2n$, les feuilles étant les variétés intégrales maximales. Ces variétés possedent la propriété énoncée dans le théorème suivante:

Théorème: I-4-1 [19]

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière. Alors M admet des atlas de cartes canoniques ou naturelles dans lesquelles les seules composantes non nulles de Λ sont:

$$\Lambda^{i,i+n} = -\Lambda^{i+n,i} = 1 \ , \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Ces cartes seront dites de Darboux ou adaptées au feuilletage (ou adaptées tout court l'orsqu'il n'y a pas d'ambiguité).

Exemple de variété de Poisson.

Un exemple simple de variété de Poisson non régulière est fourni par la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie: Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on note par $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Considérons le 2-tenseur Λ de $\mathfrak{g}^*$ défini par $\forall \xi \in \mathfrak{g}^*$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$,

$$\Lambda_\xi(X, Y) = < \xi, [X, Y] >$$

On vérifit facilement que, compte tenu de l'identité de Jacobi sur $\mathfrak{g}$, le 2-tenseur Λ détermine sur $\mathfrak{g}^*$ une structure de Poisson dont les feuilles symplectiques sont les orbites de la représentation de G dans $\mathfrak{g}$.

La donnée d'une structure de Poisson Λ sur M permet de définir un morphisme

$$\rho \ : \ \wedge^1(M) \to H(M),$$

$$\omega \mapsto i(\omega)\Lambda.$$

Ce morphisme s'étend en une application de $\wedge(H(M), \wedge(M))$ dans $\wedge(\wedge^1(M), \wedge(M))$.
Dans la suite on posera

$$\mu^* = \rho^* \circ \rho',$$

où ρ' est la restriction de ρ à $\wedge(H(M), N)$.

Définition: I-4-2
Soit u un élément de N. On appelle champ de vecteur hamiltonien associé à u, le champ

$$H_u = \rho(du) = [\Lambda, u].$$

b- Connexions sur une variété de Poisson régulière.

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière. Soit Γ une connexion sans torsion sur M. Considérons la 1-forme de connexion associée à Γ:

$$\omega_j^i = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{j,k}^i dx^k.$$

Définition: I-4-3 [19]
Γ est dite adaptée au feuilletage si et seulement si dans toute carte adaptée on a

$$\Gamma_{i,k}^a = 0,$$

pour tout $a > 2n$, $i \leq 2n$ et $k \in \{1, ..., m\}$.

Soit ∇ la dérivation covariante associée à Γ.

Définition: I-4-4
Γ est dite de Poisson si et seulement si:

$$\nabla\Lambda = 0.$$

Les deux propositions suivantes on été établies par A.lichnerowicz dans [19].

Proposition: I-4-1
Toute connexion de Poisson est adaptée au feuilletage.

Proposition: I-4-2
Sur toute variété de Poisson régulière, il existe des connexions de Poisson. Par restriction à une feuille, une telle connexion définit une connexion symplectique sur la feuille.

c- Opérateurs tangentiels sur une variété de Poisson régulière

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière et soit Γ une connexion adaptée au feuilletage. Notons par ∇ la dérivation covariante associée à Γ. Soit C une application r-linéaire de N dans N, alors d'aprés (I-3) pour tout ouvert relativement compact, domaine d'une carte adaptée U, il existe une famille de tenseurs contravariants $T_{k_1,\dots,k_r}$ symétrique par rapport aux indices $(k_1 + \dots + k_i) + j \quad j \in \{1, \dots, k_{i+1}\}$ telle que:

$$C(u_1, \dots, u_r) = \sum_{k_1,\dots,k_r} < T_{k_1,\dots,k_r}, \nabla^{k_1} u_1 \otimes \dots \otimes \nabla^{k_r} u_r > .$$

Définition: I-4-5 [19]
C est dite tangentielle si et seulement si dans tout ouvert relativement compact domaine d'une carte adaptée U, les tenseurs $T_{k_1,\dots,k_r}$ sont tangentiels, c'est-à-dire sont des sections convenables des puissances tensorielles de $T\mathcal{F}$. $T\mathcal{F}$ étant le sous-fibré vectoriel de TM défini par les vecteurs tangents aux feuilles.

Cette définition est indépendante du choix de la connexion adaptée au feuilletage Γ, comme le prouve le lemme suivant

Lemme: I-4-1
Soit Γ une connexion adaptée au feuilletage, alors dans toute carte adaptée $(U, x^1, \dots, x^m)$, les composantes tangentielles $\nabla_{i_1,\dots,i_r} u$ de la dérivé covariante d'un élément u dans N sur U ne s'exprime qu'en termes des dérivés partielles tangentielles:

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{i_h}} u \qquad h \leq r, \quad i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Soient $E^1, \dots, E^r$ et F (r+1)-fibrés vectoriels sur Mde fibres respectifs $E_0^1, \dots, E_0^r$ et F_0 admettant des bases respectives $(e_i^1)_{i\in I^1}, \dots, (e_i^r)_{i \in I^r}$ et $(f_j)_{j\in J}$.
Soit C une application r-linéaire locale de $\Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^r)$ dans $\Gamma(F)$.
Soit U un ouvert relativement compact domaine d'une carte adaptée, alors il existe une famille d'applications r-linéaires $(C_j)_{j\in J}$ de $\Gamma(E^1) \times \dots \times \Gamma(E^r)$ dans N telle que l'on ait $\forall s_i \in \Gamma(E^i)$,

$$C(s_1, \dots, s_r)/_U = \sum_{finie} C_j(s_1, \dots, s_r) f_j.$$

Donc si pour tout $i_1 \in I^1, ..., i_r \in I^r$ et $u_1, ..., u_r \in N$ on pose

$$C_j^{i_1,...,i_r}(u_1, ..., u_r) = C_j(u_1 e^1_{i_1}, ..., u_r e^r_{i_r}),$$

alors on a

$$C(s_1, ..., s_r) = \sum_{finie} \sum_{i_1 \in I_0^1, ..., i_r \in I_0^r} C_j^{i_1,...,i_r}(s_1^{i_1}, ..., s_r^{i_r}) f_j,$$

où

$$s_k = \sum_{i_k \in I_0^k} s_k^{i_k} e^k_{i_k}.$$

Définition: I-4-6
C est dite tangentielle si et seulement si pour tout $j \in J$ et $i_1 \in I^1, ..., i_r \in I^r$, l'appliction $C_j^{i_1,...,i_r}$ est tangentielle.

Remarque: I-4-1
Il est évident que cette définition ne dépend pas du choix des bases des fibres.

5- Produit-star et déformations de l'algèbre de Lie de Poisson sur une variété de Poisson

a- Définitions et propriétés

Soit (M, Λ) une variété de Poisson ($\Lambda \neq 0$). L'espace N des fonctions C^∞ sur M est muni d'une structure d'algèbre associative définie par le produit habituel m et d'une structure d'algèbre de Lie définie par le crochet de Poisson P. On note par I le centre de l'algèbre de Poisson (N, P): les éléments de I sont les fonctions f satisfaisant à

$$\{u, f\} = 0 \quad \forall u \in N,$$

ce qui peut s'écrire

$$H_u f = 0 \quad \forall u \in N,$$

où H_u est le champ de vecteur hamiltonien associé à u(cf définition I-4-2). On les appellera donc les fonctions invariantes de N ou les invariants.

Sachant que $m\Delta P = 0$ (P est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild de (N, m)) la définition suivante a un sens.

Définition: I-5-1
Un produit-star faible est une déformation formelle M_ν de m de la forme

$$M_\nu = m + \nu P + \sum_{k \geq 2} \nu^k M_k$$

vérifiant

(i) $M_k(u,v) = (-1)^k M_k(v,u), \qquad \forall u,v \in N,$
(ii)M_k *est local,*
(iii) M_k *est nulle sur les constantes (n-c) pour* k *impair.*
Il sera dit produit-star si et seulement si M_k *est n-c pour tout* k *plus grand ou égal à 2.*

Dans ce paragraphe, on se propose de généraliser quelques résultats proposés dans [15] dans le cas symplectique concernant les produits-star faibles.

Proposition: I-5-1
Si M_ν *est un produit-star faible, alors on a*

$$M_{2k} = M'_{2k} + a_k m \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

où
$a_k \in I$ *et* $M'_{2k} \in M^1_{loc,nc}(N)$.

La démonstration de cette proposition utilise le lemme suivant

Lemme I-5-1
Soit A *un élément de* $M^1_{loc}(N)$ *alors:*
(i) $m\Delta A$ *est n-c si et seulement si* $A = A' + am$ *avec* $a \in N$ *et* $A' \in M^1_{loc,nc}(N)$.
(ii) $P\Delta A = 0$ *si et seulement si il existe* $a \in I$ *tel que* $A = am$.

Démonstration du lemme I-5-1
(i) On a
$\forall u,v,w \in N$

$$m\Delta A(u,v,w) = A(u,v)w - uA(v,w) + A(uv,w) - A(u,vw) \quad (*)$$

Si $A = A' + am$ alors on a

$$m\Delta A(u,v,w) = A'(u,v)w - uA'(v,w) + A'(uv,w) - A'(u,vw)$$

et donc si A' est n-c , il en ait de même de $m\Delta A$.
Inversement si $m\Delta A$ est n-c on définit A' par

$$A'(u,v) = A(u,v) - uvA(1,1).$$

En prenant $u = v = 1$ dans $(*)$, on aura

$$A(1,1)w - A(1,w) = 0,$$

et donc

$$A'(1,w) = 0.$$

De même, en prenant $v = w = 1$ dans $(*)$ on aura

$$A'(u,1) = 0.$$

(ii) Il s'agit de montrer que si $P\Delta A = 0$, alors A est d'ordre zéro et donc de la forme

$$A = am$$

avec $a \in N$.
Supposons que A est d'ordre (r_0, r_1) sur un ouvert relativement compact quelconque de M et notons par σ le symbole lexicographique d'ordre (r_0, r_1) de A sur cet ouvert. D'après la proposition I-3-1, le symbole lexicographique de $P\Delta A$ est le terme de plus haut degré dans l'ordre lexicographique en (ξ_1, ξ_1, ξ_3)de la quantité suivante

$$\begin{aligned}
&\Lambda(\xi_1+\xi_2,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2) - \Lambda(\xi_1,\xi_2+\xi_3)\sigma(\xi_2,\xi_3) \\
&+\Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1+\xi_2,\xi_3) - \Lambda(\xi_2,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2+\xi_3) \\
&= \Lambda(\xi_1,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2) + \Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1+\xi_2,\xi_3) + \Lambda(\xi_2,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2) \\
&-\Lambda(\xi_1,\xi_2+\xi_3)\sigma(\xi_2,\xi_3) - \Lambda(\xi_2,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2+\xi_3).
\end{aligned}$$

* Supposons que $r_1 > 1$, alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2),$$

on aura donc $\sigma = 0$ ce qui est absurde.
* Supposons que $r_1 = 1$, alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1,\xi_3)\sigma(\xi_1,\xi_2) + \Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1,\xi_3).$$

En prenant $\xi_2 = \xi_3$ on aura

$$\Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1,\xi_2) = 0,$$

ce qui n'est pas possible.
On a donc nécessairement $r_1 = 0$.
* Supposons que $r_0 \geq 1$ alors ce terme est

$$\Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1,\xi_3),$$

ce qui est absurde aussi.
On a donc $(r_0, r_1) = (0, 0)$ et par suite il existe $a \in N$ tel que:

$$A = am.$$

D'autre part pour tout u, v dans N on a

$$P\Delta A(u, v, 1) = 0,$$

et donc

$$P(u, av) = aP(u, v) \qquad \forall u, v \in N,$$

et par suite:

$$a \in I.$$

Démonstration de la proposition I-5-1
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $p < k$ il existe $a_p \in I$ tel que

$$M_{2p} = M'_{2p} + a_p m,$$

avec

$$M'_{2p} \in M^1_{loc,nc}(N).$$

Du fait que la composante d'ordre $2k$ de $M_\nu \Delta M_\nu$ est nulle, on déduit que $m \Delta M_{2k}$ est n-c et donc d'aprés le I-5-1, il existe a_k dans N tel que

$$M_{2k} = M'_{2k} + a_k m,$$

avec

$$M'_{2k} \in M^1_{loc,nc}(N).$$

D'autre part en calculant la composante d'ordre $(2k+1)$ de $M_\nu \Delta M_\nu$ on déduit que $P \Delta M_{2k}$ est n-c. On aura donc

$$(P \Delta a_k m)(u, v, 1) = P(u, a_k v) - a_k P(u, v) = 0 \qquad \forall u, v \in N,$$

et par suite

$$a_k \in I.$$

Soit

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_k$$

un produit-star faible, alors,

$$P_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_{2k+1}$$

est une déformation formelle de (N, P). En effet, puisque la composante d'ordre $2k+2$ de $M_\nu \Delta M_\nu$ est nulle, on a

$$\sum_{i+j=k} (M_{2i+1} \Delta M_{2j+1}) + \sum_{i+j=k+1} (M_{2i} \Delta M_{2j}) = 0.$$

Il suffit alors de remarquer, que si A et B sont des éléments symétriques de $M^1(N)$, on a

$$\alpha(A \Delta B) = 0.$$

On a aussi:

$$P_\nu = \frac{1}{\lambda} \alpha(M_\lambda)/_{\nu=\lambda^2},$$

car

$$\alpha(M_{2i+1}) = M_{2i+1},$$

et

$$\alpha(M_{2i}) = 0.$$

On dira que P_ν dérive de M_ν.

b- Cohomologie de Hochschild de (N, m)

On note par δ l'opérateur de cohomologie de Hochschild correspondant à m. On a donc
$\forall A \in M^a(N)$,

$$\delta(A) = (-1)^a m\Delta A.$$

Il est simple de voir que les sous-espaces $M_{loc}(N)$, $M_{loc,nc}(N)$, $M_{diff}(N)$ et $M_{diff,nc}(N)$ sont stables par δ. On note par $\tilde{H}_{loc}(N)$, $\tilde{H}_{loc,nc}(N)$, $\tilde{H}_{diff}(N)$ et $\tilde{H}_{diff,nc}(N)$ les groupes de cohomologie de Hochschild associés à ces espaces vectoriels.

La description de ces groupes est due à J. Vey [19]. En effet il a obtenu le théorème suivant

Théorème: I-5-1
L'espace $\tilde{H}^p_{diff}(N)$ est isomorphe à l'espace des p-tenseurs contravariants alternés sur M.

Remarque: I-5-1
La cohomologie de Hochschild est définie sur une variété différentiable quelconque, mais si cette variété est paracompacte le théorème sera vrai pour $\tilde{H}^p_{loc}(N)$ aussi.

Les deux propositions suivantes permettent de déduire le symbole de A à partir de celui de δA lorsque A est dans $M^0_{diff}(N)$ ou $M^1_{diff}(N)$.

Proposition: I-5-2 [6] [15]
Soit A un élément de $M^0_{diff}(N)$, si δA est d'ordre $s > 1$ alors A est d'ordre s et on a

$$\sigma_A(\xi) = \frac{-1}{s}\overline{\sigma}_{\delta A}(\xi, \xi).$$

Démonstration
Supposons que l'ordre de A est $s > 1$, alors le symbole d'ordre s de δA est défini par

$$\sigma_{\delta A}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_A(\xi_1) - \sigma_A(\xi_1 + \xi_2) + \sigma_A(\xi_2) \quad (*).$$

Il est clair qu'en développant $\sigma_A(\xi_1 + \xi_2)$, les termes d'ordre $(s, 0)$ et $(0, s)$ se simplifient et que le symbole lexicographique de δA d'ordre $(s-1, 1)$ est égal à

$$\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_2)/_{t=0} \quad (**).$$

Si l'ordre de δA est plus petit que s alors de (*) on déduit que $\sigma_A = 0$ ce qui est absurde. D'autre part, en prenant $\xi_1 = \xi_2$ dans (**) on aura

$$\sigma_A(\xi) = \frac{-1}{s}\overline{\sigma}_{\delta A}(\xi, \xi).$$

Proposition: I-5-3 [6] [15]

Soit A un élément de $M^1_{diff,nc}(N)$ d'ordre (r_0, r_1), alors,

(i) Si $r_1 > 1$, δA est d'ordre au plus $(r_0, r_1 - 1, 1)$. De plus si $\overline{\sigma}_{\delta A}$ est le symbole de δA correspondant à cet ordre, on a

$$\overline{\sigma}_A(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{r_1}\overline{\sigma}_{\delta A}(\xi_1, \xi_2, \xi_2).$$

(ii) Si $r_1 = 1$ et si δA est d'ordre plus petit que $(r_0 - 1, 1, 1)$, il existe un élément T de $M^0_{diff,nc}(N)$ tel que $A - \delta A$ soit d'ordre plus petit que $(r_0, 1)$.

Démonstration

Le symbole d'ordre $r_0 + r_1$ de δA est donné par

$$\sigma_A(\xi_2, \xi_3) - \sigma_A(\xi_1 + \xi_2, \xi_3) + \sigma_A(\xi_1, \xi_2 + \xi_3) - \sigma_A(\xi_1, \xi_2).$$

Si $r_>1$, en développant $\sigma_A(\xi_1, \xi_2 + \xi_3)$, on déduit que les termes d'ordre $(r_0, r_1, 0)$ se simplifient et que les termes d'ordre $(r_0, r_1 - 1, 1)$ sont

$$\frac{d}{dt}\overline{\sigma}_A(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3)/_{t=0}.$$

En prenant $\xi_2 = \xi_3$ on déduit la premiere partie de propositrion.

Si $r_1 = 1$, on vérifit facilement que les termes d'ordre $(r_0, 1, 0)$ se simplifient de même ceux d'ordre $(r_0, 0, 1)$ et que le symbole d'ordre $(r_0 - 1, 1, 1)$ est donné par

$$-\frac{d}{dt}\overline{\sigma}_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3)/_{t=0} + \frac{d}{dt}D(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3)/_{t=0} \quad (*)$$

où D est le terme d'ordre $(r_0 - 1, 2)$ de σ_A. Il est facile de voir que

$$\frac{d}{dt}D(\xi_1, \xi_2 + t\xi_3)/_{t=0}$$

est symétrique en ξ_2, ξ_3.

Supposons que δA soit d'ordre plus petit que $(r_0 - 1, 1, 1)$ alors (*) sera égal à zéro et par suite

$$-\frac{d}{dt}\overline{\sigma}_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3)/_{t=0}$$

sera aussi symetrique en ξ_2, ξ_3.

Soit T un élément de $M^0_{diff,nc}(N)$ de symbole

$$\sigma_A(\xi_1, \xi_1).$$

Le symbole de δT est égal à

$$-\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_1 + t\xi_2)/_{t=0} = -\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_2, \xi_3)/_{t=0}/_{\xi_3=\xi_1} - \sigma_A(\xi_1, \xi_2)$$

$$= -\frac{d}{dt}\sigma_A(\xi_1 + t\xi_1, \xi_2)/_{t=0} - \sigma_A(\xi_1, \xi_2) = -(r_0 + 1)\sigma_A(\xi_1, \xi_2).$$

Il en résulte que $A + \frac{1}{r_0+1}\delta T$ est d'ordre plus petit que $(r_0, 1)$.

c- L'invariant cohomologique universel d'une structure de Poisson

Soit (M, Λ) une variété de Poisson. L'opérateur de cohomologie de Chevalley ∂ correspondant à la représentation adjointe de (N, P) est défini par
$\forall A \in A^a(N)$,

$$\partial A = (-1)^a [P, A].$$

Cet opérateur laisse stable les sous-espaces de $A(N)$ $A_{loc}(N)$, $A_{loc,nc}(N)$, $A_{diff}(N)$ et $A_{diff,nc}(N)$.

Soit Γ une connexion linéaire sans torsion de M. Considérons la 2-cochaine S^3_Γ de (N, P), définie localement, dans toute carte (U, φ) $(\varphi = (x^1, ..., x^m))$par:
$\forall u, v \in N$

$$S^3_\Gamma(u, v)/_U = -\Lambda^{k,l}(L(H_u)\Gamma)^r_{s,k}(L(H_v)\Gamma)^s_{r,l}$$

où L désigne la dérivation de Lie.

En utilisant les propriétés de la dérivation de Lie, un calcul direct nous prouve que S^3_Γ est un cocycle de Chevalley.

Dans [19] A. Lichnerowicz a prouvé que ce cocycle est un invariant de la structure de Poisson de la variété et qu'il n'est jamais exact. Voici ses résultats proposés à ce propos avec leur preuves sans calcul explicite.

Proposition: I-5-4

La 2-classe β de cohomologie, élément de $H^2_{diff}(N)$ (deuxième groupe de cohomologie de Chevalley associé à $A_{diff(N)}$), définie par le 2-cocycle S^3_Γ est indépendante du choix de la connexion Γ.

Démonstration

Soient Γ et Γ' deux connexions sans torsion et notons T le 2-tenseur définissant leur différence. Alors un calcul direct prouve que

$$S^3_{\Gamma'} - S^3_\Gamma = \partial(A_{T,\Gamma} + \frac{1}{2}B_T)$$

où $A_{T,\Gamma}$et B_T sont les deux éléments de $A^0_{diff}(N)$ définis par

$$A_{T,\Gamma}(u)/_U = -\Lambda^{k,l}T^r_{s,k}(L(H_u)\Gamma)^s_{r,l}.$$

$$B_T(u)/_U = -\Lambda^{k,l}T^r_{s,k}(L(H_u)T)^s_{r,l},$$

Théorème I-5-1

Sur toute variété de Poisson (M,Λ), la 2-classe β de cohomologie, l'élément de $H^2_{diff}(N)$ défini par les 2-cocycles S^3_Γ, est un invariant toujours $\neq 0$ de la structure de Poisson Λ.

Démonstration

Supposons tout d'abord que (M,Λ) est régulière et que Γ est une connexion de Poisson. Considérons une carte adaptée (U,φ) ($\varphi = (x^1,...,x^m)$). Puisque $\Gamma^a_{i,k} = 0$ pour $a > 2n$, on a

$$L(H_u)\Gamma^a_{i,k} = 0 \qquad \forall a > 2n,\ \forall u \in N.$$

Il en résulte que S^3_Γ peut s'ecrire sur U,

$$S^3_\Gamma(u,v)/_U = -\Lambda^{k,l}(L(H_u)\Gamma)^i_{j,k}(L(H_v)\Gamma)^j_{i,l} \qquad k,l,i,j \leq 2n,$$

et ne fait intervenir que les connexions symplectiques sur les feuilles induites par Γ. D'autre part d'aprés [12], on peut écrire

$$S^3_\Gamma(u,v)/_U = \Lambda^{k_1,l_1}\Lambda^{k_2,l_2}\Lambda^{k_3,l_3}(L(H_u)\Gamma)_{k_1,k_2,k_3}(L(H_v)\Gamma)_{l_1,l_2,l_3},$$

où $L(H_u)\Gamma$ est vu comme un 3-tenseur complètement symétrique.

Dans ce cas S^3_Γ est tangentielle de type $(3,3)$.

Dans [18] A. Lichnerowicz a établi que si A est un endomorphisme local de N tel que ∂A soit une 2-cochaine s-différentielle, A est nécessairement un opérateur différentiel d'ordre s. Par suite si S^3_Γ était exact, il serait le cobord d'un opérateur différentiel d'ordre 3, or un tel cobord n'est jamais de type $(3,3)$.

Si (M,Λ) est non régulière, on désigne par $2n$ le rang maximum de Λ. Soient U et U' deux domaines de M tels que $\overline{U} \subset U'$ et Λ^n est partout $\neq 0$ sur U'. La restriction $\Lambda_{\overline{U}}$ de Λ à $\overline{U}$ définit sur $\overline{U}$ une structure de variété de Poisson régulière.

Supposons que S^3_Γ est exact, il existe alors un opérateur différentiel A sur N tel que $S^3_\Gamma = \partial A$.

Si u et v sont deux fonctions C^∞ sur $\overline{U}$, alors on peut les prolonger sur M et on a

$$S^3_\Gamma(u,v)/_{\overline{U}} = (\{A(u),v\} + \{u,A(v)\} - A(\{u,v\})/_{\overline{U}} \quad (*).$$

Si $A_{\overline{U}}$ est la restriction de A à $\overline{U}$, et $\Gamma_{\overline{U}}$ la restriction de Γ à $\overline{U}$ alors d'aprés (*) on a

$$S^3_{\Gamma_{\overline{U}}} = \partial A_{\overline{U}} \quad \text{sur} \quad \overline{U},$$

ce qui contredit la première partie de la démonstration.

II- PRODUITS-STAR TANGENTIELS ET DEFORMATIONS TANGENTIELLES DE L'ALGEBRE DE LIE DE POISSON SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière de dimension m. On suppose que les feuilles sont de dimension $2n$ et de codimension q, on a alors $m = 2n + q$. Les notations sont celles de I. On indexera les sous-ensembles formés par les éléments tangentiels par la lettre t.

1- Définitions et propriétés

Définition: II-1-1
Une application formelle sur N,

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k A_k$$

est dite tangentielle si et seulement si pour tout $k \geq 0$, A_k est tangentielle.

En particulier, puisque la multiplication m et le crochet de Poisson P sont tangentiels, un produit-star faible

$$m + \nu P + \sum_{k\geq 2} \nu^k M_k$$

est dit tangentiel si et seulement si pour tout $k \geq 2$, M_k est tangentielle, et une déformation formelle de P

$$P + \sum_{k\geq 1} \nu^k P_k$$

est dite tangentielle si et seulement si pour tout $k \geq 1$, P_k est tangentielle.

Définition: II-1-2
Soit A_0 une application 2-linéaire de N dans N tangentielle définissant sur N une structure d'algèbre associative ou de Lie.

Deux déformations formelles tangentielles équivalentes de A_0 A_ν et A'_ν sont dites tangentiellement équivalentes si et seulement si l'opérateur d'équivalence T_ν est tangentiel.

Théorème: II-1-1
Tout produit-star faible tangentiel M_ν est tangentiellement équivalent à un produit-star tangentiel M'_ν.

Plus précisément, il existe un élément tangentiel de $(M^0(N))_\nu$

$$T_\nu = (1 + \nu^2 p(\nu^2))id,$$

où p est une série formelle à valeurs dans I

$$p(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^k \qquad a_k \in I,$$

tel que

$$M_\nu = T_\nu^*(M'_\nu).$$

Démonstration

Soit $M_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i M_i$ un produit-star faible tangentiel et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe un produit-star tangentiel d'ordre $2(k-1)$, $\sum_{i=0}^{2(k-1)} \nu^i M'_i$ et $(k-1)$ éléments de I $b_1, ..., b_{k-1}$ tels que la relation

$$M_\nu = (1 + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \nu^{2i}) \sum_{i=0}^{2(k-1)} \nu^i M'_i \quad (*)$$

soit vraie jusqu'à l'ordre $2(k-1)$.

D'après la proposition I-5-1, il existe $c_k \in I$ et $A_k \in M^1_{loc,nc}(N)$ tels que

$$M_{2k} = c_k m + A_k.$$

Remarquons que, puisque M_{2k} et m sont tangentielles, A_k est nécessairement tangentielle.

Posons

$$M'_{2k-1} = M_{2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} b_i M'_{2k-2i-1},$$

$$M'_{2k} = A_k - \sum_{i=1}^{k-1} b_i M'_{2k-2i},$$

$$b_k = c_k.$$

M'_{2k-1} et M'_{2k} sont manifestement tangentielles. On vérifie sans beaucoup de difficulté que

$$\sum_{i=1}^{2k} \nu^i M'_i$$

est un produit-star tangentiel d'ordre $2k$ et que la relation

$$M_\nu = (1 + \sum_{i=1}^{k} b_i \nu^{2i}) \sum_{i=0}^{2k} \nu^i M'_i$$

est vraie jusqu'à l'ordre $2k$. Sachant que la relation (*) est évidente pour $k = 2$ on a prouvé l'existence d'un produit-star tangentiel M_ν et d'une suite d'éléments de I $(b_k)_{k\geq 1}$ tels que:

$$M_\nu = (1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \nu^{2i}) M'_\nu.$$

Notons $(1+\sum_{i=1}^{\infty} a_i\nu^{2i})$ l'inverse de $(1+\sum_{i=1}^{\infty} b_i\nu^{2i})$.

Sachant que I est une sous-algèbre de (N,m) et que $a_1=-b_1$ et pour tout $k\geq 2$, a_k s'exprime d'une façon polynômiale en a_i $(i<k)$ et b_i $(i\leq k)$, on déduit que a_k est dans I pour tout $k\geq 1$. Posons

$$T_\nu=(1+\sum_{i=1}^{\infty} a_i\nu^{2i})id.$$

En remarquant que M'_ν est tangentiel, donc I-bilinéaire, on voit facilement que

$$M_\nu=T^*_\nu(M'_\nu).$$

2- Cohomologie De Hochschild tangentielle de (N,m)

m étant tangentiel, l'opérateur de Hochschild laisse stable le sous-espace des éléments tangentiels de $M_{loc}(N)$.

Pour étudier l'existence des produits-star Tangentiels sur les variétés de Poisson régulières on aura besoin d'une version tangentielle du théorème de Vey en dimensions 2 et 3. A. Lichnerowicz a étudié cette question dans [19] et il a démontré d'une façon explicite la proposition suivante

Proposition: II-2-1
Pour $k=2$ ou 3, les espaces de cohomologie de Hochschild tangentielle $\tilde{H}^k_{diff,t}(N)$ sont isomorphes aux espaces des k-tenseurs contravariants antisymétriques tangentiels.

Mais comme dans le cas général puisque la variété est supposée paracompacte, cette proposition reste vraie pour $\tilde{H}^k_{loc,t}(N)$ et $\tilde{H}^k_{loc,t,nc}(N)$.

3- Le terme M_2 d'un produit-star tangentiel

Le terme M_2 d'un produit-star tangentiel doit être local tangentiel n-c verifiant

$$-\delta M_2+P\Delta P=0.$$

Le symbole de $P\Delta P$ est égal à

$$2\Lambda(\xi_1,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_3) \quad (*)$$

$(*)$ est le symbole de δT si le symbole de T est égal à

$$4\big(\Lambda(\xi_1,\xi_2)\big)^2.$$

De la proposition I-5-3, on déduit que, quitte à le corriger par un cobord, on peut choisir M_2 tel que son symbole soit

$$4\big(\Lambda(\xi_1,\xi_2)\big)^2.$$

Soit Γ une connexion de Poisson sur (M, Λ). Introduisons l'opérateur P_Γ^2 défini sur chaque domaine U d'une carte adaptée par

$$P_\Gamma^2(u,v)/_U = \Lambda^{ik}\Lambda^{jl}\nabla_{ij}u\nabla_{kl}v \quad (u, v \in N).$$

P_Γ^2 est manifestement tangentiel.

Comme dans le cas symplectique on a la proposition suivante

Proposition: II-3-1
Le terme M_2 d'un produit-star tangentiel d'ordre au moins 2 est de la forme

$$M_2 = \frac{1}{2}P_\Gamma^2 + \delta T,$$

où Γ est une connexion de Poisson sur (M, Λ) et T est un élément de $M^0_{loc,t,nc}(N)$.

Démonstration
Soit (U, φ) une carte adaptée. Rappelons que $\nabla_{ij}u$ est la composante d'ordre (i,j) de $\nabla^2 u$ dans la base $(dx_r \otimes dx_s)_{r,s\in\{1,\dots,m\}}$.
Considérons le 4-tenseur contravariant Λ^2 défini par

$$(\Lambda^2)^{i_1\, i_2\, i_3\, i_4} = \Lambda^{i_1\, i_3}\Lambda^{i_2\, i_4}.$$

Alors P_Γ^2 peut s'écrire sous la forme

$$P_\Gamma^2(u,v) = < \Lambda^2, \nabla^2 u \otimes \nabla^2 v >,$$

et par suite on a

$$\begin{aligned}\delta P_\Gamma^2(u,v,w) &= u.P_\Gamma^2(v,w) + P_\Gamma^2(u,vw) - w.P_\Gamma^2(u,v) - P_\Gamma^2(uv,w)\\ &= -2 < \Lambda^2, \nabla^2 u \otimes (\nabla v \vee \nabla w) - (\nabla u \vee \nabla v) \otimes \nabla^2 w >,\end{aligned}$$

où $\vee$ désigne le tenseur de symétrisation.
D'autre part, Γ étant de Poisson, on a

$$P(u,v) = < \Lambda, \nabla u \otimes \nabla v > .$$

Et donc

$$P\Delta P(u,v,w)/_U = 2\Big(P\big(P(u,U),w\big) - P\big(u, P(v,w)\big)\Big)/_U$$

$$= 2\Lambda^{ij}\nabla_i(\Lambda^{kl}\nabla_k u\nabla_l v)\nabla_j w - 2\Lambda^{ij}\nabla_i u\nabla_j(\Lambda^{kl}\nabla_k v\nabla_l w).$$

Or, Γ est sans torsion, et par suite

$$\nabla_{ij}u = \frac{1}{2}(\nabla_i\nabla_j u + \nabla_j\nabla_i u)$$

on déduit donc que

$$P\Delta P = \frac{1}{2}\delta P_\Gamma^2.$$

Soit

$$M_\nu = m + \nu P + \nu^2 M_2$$

un produit-star tangentiel d'ordre 2. D'après la proposition I-2-4, $2P\Delta M_2$ est un cocycle pour la cohomologie de Hochschild tangentielle. Puisque M_2 est symetrique $\alpha(P\Delta M_2) = 0$ donc $P\Delta M_2$ est un cobord et par suite on peut étendre M_ν à l'ordre 3. Pour pouvoir l'etendre à l'ordre 4, on doit choisir M_3 tel que $2P\Delta M_3 + M_2\Delta M_2$ soit un cobord. Puisqu'il est un cocycle pour qu'il soit un cobord il faut et il suffit que

$$\alpha(P\Delta M_3 + M_2\Delta M_2) = 0,$$

soit

$$[P, M_3] = 0,$$

et par suite M_3 est un cocycle pour la cohomologie de Chevalley tangentielle.

4- Cohomologie de Chevalley tangentielle de (N, P)

a- Définitions et propriétés

L'opérateur de cohomologie de Chevalley ∂ correspondant à la représentation adjointe de (N, P) est défini par
$\forall A \in A^a(N)$,

$$\partial A = (-1)^a [P, A].$$

On pourra vérifier facilement que $A_{loc,t,nc}(N)$ est stable par ∂. On notera $H_{loc,t,nc}(N)$ le groupe de cohomologie de Chevally correspondant à $A_{loc,t,nc}(N)$. Dans la suite, on notera par $H_t(M)$ l'espace des champs de vecteur sur M tangents aux feuilles.

Nontons ∂' l'opérateur de cobord de Chevalley-Eilenberg [10] associé à la représentation de $H(M)$ définie par la dérivée de Lie sur l'espace $\wedge(M)$ des formes C^∞ sur M. On a donc

$$\partial' C(X_0, \ldots\ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i L_{X_i} C(X_o, \ldots, \hat{i}, \ldots, X_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C([X_i, X_j], \ldots, \hat{i}, \ldots, \hat{j}, \ldots),$$

où

$$L_X = i_X d + d i_X$$

et $\hat{i}$ indique l'omission du champ de vecteur X_i.

On établit comme dans le cas symplectique [15] la proposition suivante

Proposition : II-4-1
$\forall C \in \wedge\big(H(M), N\big)$

$$(\mu^* \circ \partial')(C) = (\partial \circ \mu^*)(C).$$

Démonstration
Il suffit de remarquer que si C est dans $\wedge^p\big(H(M), N\big)$, on a $\forall\ u_0, ..., u_{p-1} \in N$

$$\mu^*(C)(u_0, ..., u_{p-1}) = C(H_{u_0}, ..., H_{u_{p-1}})$$

et que pour tout u dans N, on a

$$L_{H_u}\Lambda = 0.$$

Dans la proposition suivante on montre que tout vecteur tangent aux feuilles est image par ρ d'une forme sur M.

Proposition: II-4-2
Soit X un élément de $H_t(M)$, alors il existe ω dans $\wedge^1(M)$ telle que

$$X = \rho(\omega).$$

Démonstration
Soient $(U, x^1, ..., x^m)$ et $(U', y^1, ..., y^m)$ deux cartes naturelles de M telles que $U \cap U' \neq \emptyset$
On a

$$X/_U = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad et \quad X/_{U'} = \sum_{i=1}^{2n} X_i' \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Considérons les deux formes

$$\omega_U = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{\chi_n(i)+1} X_{s(i)} dx^i,$$

et

$$\omega_{U'} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^{\chi_n(i)+1} X'_{s(i)} dy^i,$$

où χ_n est la fonction caractéristique de $\{1, ..., n\}$ et $s(i) = \begin{cases} i+n & si \quad i \leq n \\ i-n & si \quad i > n \end{cases}$.
ω_U et $\omega_{U'}$ sont deux formes définies respectivement sur U et U' telles que

$$\rho(\omega_U) = X/_U \quad et \quad \rho(\omega_{U'}) = X/_{U'}.$$

De plus si

$$dy^i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} dx^j \quad sur \quad U \cap U',$$

alors des relations:

$$\sum_{i=1}^{2n} X_i dx^i = \sum_{i=1}^{2n} X'_i dy^i \quad sur \quad U \cap U',$$

et

$$\sum_{j=1}^{2n} (-1)^{\chi_n(j)} f_{k,j} f_{r,s(j)} = \Lambda(dy^k, dy^r) = \begin{cases} (-1)^{\chi_n(k)} & si\ r = s(k) \\ 0 & si\ non \end{cases},$$

on déduit directement que

$$\omega_U = \omega_{U'} \quad sur \quad U \cap U'.$$

Pour établir le théorème d'existence de produit-star tangentiel, en généralisant la méthode utilisée dans [15] dans le cas symplectique, on aura besoin de décrire les espaces de cocycles

$$Z^p_{loc,t,nc}(N) = \{A \in A^{p-1}_{loc,t,nc}(N) \ / \ \partial A = 0\}$$

pour $p \leq 3$. Pour les variétés de Poisson, cette description ne se fait plus à l'aide de μ^* et les espaces de cocyle de $\wedge_{loc}(H(M), \wedge(M))$ pour ∂' comme dans le cas symplectique mais à l'aide de ρ^* et les espaces de cocyles d'un sous-espace de $\wedge_{loc,t}(\wedge^1(M), N)$ pour un opérateur de cobord ∂" qu'on définera ultérieurement.

On pose

$$\mathbb{B} = \rho\Big(\wedge(H(M), \wedge(M))\Big)$$

et on définit sur $\mathbb{B}$ un opérateur de cohomologie ∂" par
$\forall T \in \mathbb{B}$ si $T = \rho(C)$, alors

$$\partial\text{"}T = \rho(\partial' C).$$

Cette définition est indépendante du choix de C car, si C et C' sont deux éléments de $\wedge^p(H(M), \wedge(M))$ tels que

$$C\big(\rho(\omega_1), ..., \rho(\omega_p)\big) = C'\big(\rho(\omega_1), ..., \rho(\omega_p)\big)$$

pour tout $\omega_1, ..., \omega_p$ dans $\wedge^1(M)$, alors

$$\partial' C\big(\rho(\omega_1), ...\rho(\omega_{p+1})\big) = \partial' C'\big(\rho(\omega_1), ...\rho(\omega_{p+1})\big),$$

pour tout $\omega_1, ..., \omega_{p+1}$ dans $\wedge^1(M)$.

Défintion: II-4-1 [19]

Nous dirons qu'une 1-forme ω est transverse si et seulement si elle est nulle sur les champs de vecteurs tangents aux feuilles.

On note $\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M))$ l'espace des applications multilinéaires locales tangentielles de $\wedge^1(M)$ dans $\wedge(M)$ nulles sur les formes transverses. On a alors la proposition suivante

Proposition: II-4-3

Les deux assertions suivantes sont vraies.

(i) $\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M)) \subset \mathbb{B}$,

(ii) $A_{loc,t,nc}(N) = \rho^*(\wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N))$.

Démonstration

(i) On choisit un sous-espace supplémentaire de $H_t(M)$ dans $H(M)$ et on l'appelle V.

Soit T un élément de $\wedge^p_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), \wedge(M))$. Du fait que T est nulle sur les formes transverses, l'application C définie par

$$C(X_1, ..., X_p) = \begin{cases} T(\omega_1, ..., \omega_p) & si\ \ \forall i\ X_i \in H_t(M)\ \ et\ \ \rho(\omega_i) = X_i \\ 0 & \text{si un des } X_i \text{ est dans } V \end{cases}$$

est bien définie. De plus on a bien

$$T = \rho(C).$$

(ii) On note par:

$$\begin{aligned} V_1 &: \text{l'espace des 1-formes exactes} \\ V_2 &: \text{l'espace des 1-formes transverses} \end{aligned}$$

et par V_3 un supplémentaire de $V_1 + V_2$ dans $\wedge^1(M)$.

Soit C un élément de $A^p_{loc,t,nc}(N)$. On définit l'application T par

$$T(\omega_0, ..., \omega_p) = \begin{cases} C(u_0, ..., u_p) & \text{si } \forall\ i\ \omega_i = du_i \\ 0 & \text{si un des } \omega_i \text{ est dans } V_2 \cup V_3. \end{cases}$$

Cette construction est possible car si du est transverse alors u est invariant et par suite $C(u, ...) = 0$ car C est tangentiel n-c. Il est bien clair que $T \in \wedge_{loc,t,nt}(\wedge^1(M), N)$ et que $\rho^*(T) = C$.

b- Autre façon de définir S^3_Γ.

On peut construire le cocycle de Vey S^3_Γ d'une manière intrinsèque: Soit Γ une connexion linéaire et notons par ∇ sa dérivation covariante. On note par $L_X\nabla$ la dérivée de lie de ∇ dans la direction de X:

$$(L_X\nabla)(Y, Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y[X, Z].$$

Considérons l'application

$$\Phi_\Gamma\ :\ H(M) \times H(M) \to \wedge^2(M),$$

définie par

$$\Phi_\Gamma(X_0, X_1)(Y_0, Y_1) = \frac{1}{2} tr[L_{X_0}\nabla(Y_0).L_{X_1}\nabla(Y_1) - L_{X_0}\nabla(Y_1)L_{X_1}\nabla(Y_0)].$$

On a alors la proposition suivante

Proposition: II-4-4 [15] [24] [19] [22]

(i) Φ_Γ est un cocyle non exacte de $\Big(\wedge(H(M),\wedge(M)),\partial'\Big)$

(ii) le symbole total de Φ_Γ est donné par

$$\sigma_\Phi \ (\xi_0,\xi_1)(X_0,X_1) = tr(X_0 \otimes \xi_0.X_1 \otimes \xi_1).\xi_0 \wedge \xi_1.$$

(iii) Si on se limite à des connexions Γ sans torsion, la classe de cohomologie $[\Phi_\Gamma]$ est indépendante de la connexion choisie.

(iv) Si Γ est adaptée au feuilletage $\rho(\Phi_\Gamma)$ est tangentiel.

Définissons l'application locale S^3_Γ sur N^2 par

$$S^3_\Gamma(u,v) =< \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma)(du,dv) >=< \Lambda, \Phi_\Gamma(H_u,H_v) > .$$

Un calcul direct de ∂S^3_Γ prouve que

$$(\partial S^3_\Gamma)(u_0,u_1,u_2) = - < \Lambda, (\partial'\Phi_\Gamma)(H_{u_0},H_{u_1},H_{u_2}) > \quad (*).$$

De la relation $(*)$ on déduit directement les résultats énoncés dans la proposition I-5-4 et le théorème I-5-1. De même, de la relation $(*)$ on déduit facilement que le symbole de S^3_Γ est défini par

$$\sigma_{S^3}(\xi_0,\xi_1) = \big(\Lambda(\xi_0,\xi_1)\big)^3.$$

Enfin rappelons la construction de l'opérateur T^2_Γ qui sera utile pour déterminer les 3-cocyles de Chevalley tangentiels sur M. On note par A^∇ l'opérateur différentiel de $H(M)$ dans les champs d'endomorphismes de TM défini par

$$A^\nabla \ : \ X \mapsto [Y \to \nabla_Y X].$$

Définissons l'application

$$T_\Gamma \ : \ H(M)^3 \to N,$$

par

$$T_\Gamma(X,Y,Z) = \frac{1}{3!} \underset{X,Y,Z}{S} tr A^\nabla(X)\{[A^\nabla(Y),A^\nabla(Z)] + 3R(Y,Z)\},$$

où S désigne la somme sur les permutations circulaires de X,Y,Z et R est le tenseur de courbure de Γ. Considérons l'application

$$T^2_\Gamma \ : \ N^3 \to N,$$

définie par

$\forall u,v,w \in N$

$$T^2_\Gamma(u,v,w) = T_\Gamma(H_u,H_v,H_w).$$

Proposition:II-4-5 [15] [24] [19] [22]

(i) l'application T_Γ est une 3- cochaine de $\Big(\wedge(H(M),\wedge(M)),\partial'\Big)$, dont le cobord est la 4-forme fermée τ donnée par

$$\tau(X_0,X_1,X_2,X_3)=\frac{1}{8}\sum_a \varepsilon_a trR(X_{a_0},X_{a_1})R(X_{a_2},X_{a_3}).$$

(ii) le symbole de T_Γ est donné par

$$\sigma_T\ (\xi_0,\xi_1,\xi_2)(X_0,X_1,X_2)=tr(X_0\otimes\xi_0.X_1\otimes\xi_1.X_2\otimes\xi_2).$$

(iii) la classe de cohomologie de Rham de τ est indépendante de la connexion choisie.
(iv) le symbole total de la 3-cochaine T_Γ^2 est donné par

$$\sigma_{T^2}(\xi_0,\xi_1,\xi_2)=-\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2).$$

(v) Si Γ est adaptée au feuilletage, alors $\rho(T_\Gamma)$ et T_Γ^2 sont tangentiels.

c- Calcul de $H^1_{loc,t,nc}(N)$,$H^2_{loc,t,nc}(N)$ et $H^3_{loc,t,nc}(N)$

Dans ce sous-paragraphe on se propose de calculer les 3 premiers groupes de cohomologie de Chevalley tangentiel de (N,P). La méthode utilisée pour calculer ces groupes de cohomologie est celle utilisée par D. Arnal, P. Lecomte, M. De Wilde, S. Gutt et D. Melotte pour calculer les espaces de cohomologie de Chevalley dans le cas symplectique et dans le cas où M est le dual d'une algèbre de Lie munie de la structure de variété de Poisson déduite de la représentation coadjointe.

Par une récurence basée sur l'ordre lexicographique et l'ordre total on corrige successivement un cocycle en lui soustrayant un cobord ou un cocycle de type connu de façon à diminuer son ordre. Aprés un nombre fini de corrections, on est ramené à un cocycle d'ordre au plus 1.

Mais commençons par décrire rapidement les étapes de la démonstration d'une proposition (énoncée et démontrée en [33].[24]) qui va fournir une description assez restrictive du symbole principal d'un cocycle tangentiel et par suite elle va permettre de réduire le nombre d'étapes de cette récurrence.

Plaçons-nous dans un domaine d'une carte adaptée U. Pour tout x dans U, on appelle V le sous-espace de T_x^*M engendré par les vecteurs $\big(dx^i(x)\big)_{i\in\{1,\dots,2n\}}$. En tout point $x\in U$, Λ est non dégénéré et donc symplectique sur V, on note $sp(V)$ l'algèbre de Lie symplectique correspondante.

Il est bon de remarquer qu'en tout point de U le symbole d'une cochaine tangentielle est un polynôme en ξ_i avec ξ_i dans V. Les démonstrations des deux propositions suivantes sont données en [24].

Proposition: II-4-6

Si μ désigne l'opérateur de dualité associé à Λ, les endomorphismes $\mu(\xi)\otimes\xi\quad(\xi\in V)$ de V engendrent l'algèbre $sp(V)$.

Proposition: II-4-7

Tout polynôme homogène de degré 2 en $\xi_1 .... \xi_s$ ($\xi_i \in V$) antisymétrique et à valeurs dans un espace vectoriel E s'identifie à une application $s-$linéaire antisymétrique sur $sp(V)$ à valeurs dans E.

La représentation naturelle (V, ρ) du groupe linéaire général $GL(V)$:

$$\rho(A) \ : \ \xi \mapsto A(\xi)$$

s'etend à l'espace des polynômes sur V noté $P(V)$, par l'homomorphisme de groupe de Lie $\overline{\rho}$ défini par la relation

$$\big(\overline{\rho}(A)P\big)(\xi_1, ..., \xi_s) = P\big(A^{-1}(\xi_1), ..., A^{-1}(\xi_s)\big).$$

La représentation correspondante $\overline{\rho}_*$ de l'algèbre de Lie $gl(V)$ de $GL(V)$ et par suite de la sous-algèbre $sp(V)$, est définie par

$$\overline{\rho}_*(A)(P) = \frac{d}{dt}\overline{\rho}\ (exptA)P/_{t=o}.$$

Dans le cas particulier où A est l'application $\mu(\xi) \otimes \xi$ on obtient

$$\overline{\rho}_*\big(\mu(\xi) \otimes \xi\big)P(\xi_1, ..., \xi_s) = \sum_{i=1}^{s} \Lambda(\xi_i, \xi)\xi D_{\xi_i} P(\xi_1, ..., \xi_s),$$

(voir II-5-3 pour la notation $\xi D_{\xi_i} P(\xi_1, ..., \xi_s)$).

Pour la cohomologie de Chevalley-Eilenberg associée à la représentation $\big(P(V), \overline{\rho}_*\big)$ de $sp(V)$, une $p-$cochaine est une application $p-$linéaire antisymétrique de $sp(V)$ dans $P(V)$. L'opérateur de cobord associé à cette cohomologie Δ est défini par

$$\Delta C(A_0, ..., A_p) = \sum_{i=0}^{p} \ (-1)^i \overline{\rho}_*(A_i) C(A_0, ..., \hat{i}, ...A_p)$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C([A_i, A_j], ..., \hat{i}, ..., \hat{j}, ...),$$

où [ ] désigne le commutateur des endomorphismes de V.

Maintenant considérons une $p-$cochaine de Chevalley tangentielle nulle sur les constantes d'ordre lexicographique

$$(r_0, ..., r_{k_1 -1}, 2, ..., 2, \underset{(k_2)}{1}, ..., 1).$$

D'après la proposition II-4-6 pour $x \in U$, $\xi_{k_2}, ...\xi_{p-1} \in V$ fixés, le symbole lexicographique $\overline{\sigma}_C$ peut être vu comme étant l'évaluation en $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$ ($k_i \le i < k_2$) d'une cochaine de $sp(V)$ à valeurs dans l'espace des polynômes en $\xi_0, ..., \xi_{k_1 -1}$ qu'on note toujours par $\overline{\sigma}_C$.

Un calcul direct nous prouve la proposition suivante

Propsotion: II-4-8 [24]
Si C est un cocycle tangentiel n-c non 1-différentiel d'ordre lexicographique:

$$(r_0, ..., r_{k_1-1}, 2, ..., 2, \underset{(k_2)}{1}, ...1),$$

alors on a

$$\overline{\sigma}_{\partial C} = \pm \Delta \overline{\sigma}_C.$$

L'algèbre $sp(V)$, est simple et on a d'après [9],

$$Ker\Delta = P_{in} \otimes C_{in} \oplus im\Delta,$$

où P_{in} est l'espace des polynômes invariants par l'action du groupe $Sp(V)$ et C_{in} l'espace des cochaines scalaires invariantes sur $sp(V)$.

D'autre part d'après [30], un élément de P_{in} ou de C_{in} évalué en des A_i de la forme $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$ est un polynôme en $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$.

Notons P l'ensemble des polynômes en $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$ de degré > 2 en chaque ξ_i, C l'ensemble des polynômes en $\Lambda(\xi_i, \xi_j)$ de degré 2 en chaque ξ_i et Q l'ensemble des fonctions en x et ξ_i, C^∞ en x et polynômiales en ξ_i et de degré ≤ 1 en chaque ξ_i.

Notons $P \otimes C \otimes Q$ l'enveloppe linéaire des polynômes

$$(\xi_0, ..., \xi_{p-1}) \mapsto a(\xi_{\varepsilon(0)}, ..., \xi_{\varepsilon(i)})\ b(\xi_{\varepsilon(i+1)}, ..., \xi_{\varepsilon(j)})\ c(\xi_{\varepsilon(j+1)}, ..., \xi_{\varepsilon(p-1)})$$

où $a \in P$, $b \in C$ et $c \in Q$ et ε est une permutation de $\{0, ..., p-1\}$.
On a alors, comme dans le cas symplectique la proposition suivante

Proposition II-4-9 [24][33]
Soit C un cocycle de Chevalley tangentiel $n-c$ alors C peut s'écrire sous la forme

$$C = C' + \partial E',$$

où E' est une cochaine tangentielle $n-c$ et C' un cocyle tangentiel $n-c$ d'ordre au plus égal à celui de C, dont le symbole total appartient à $P \otimes C \otimes Q$.

Démonstration
Si $\overline{\sigma}_C$ est de degré au plus 1 en chaque ξ_i il n'y a rien à démontrer.
Si C est d'ordre

$$(r_0, ..., r_{k_1-1}, 2, ..., 2, \underset{(k_2)}{1}, ..., 1) \quad (r_{k_1-1} > 2),$$

on a vu que pour $x \in U$, $\xi_{k_2}, ..., \xi_{p-1} \in V$ fixés $\overline{\sigma}_C$ peut être vu comme étant l'évaluation en $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i (k_1 \leq i < k_2)$ d'une cochaine de $sp(V)$ à valeurs dans l'espace des polynômes en $\xi_0, ..., \xi_{k_1-1}$. Mais puisque C est un cocycle et d'après la proposition (II-4-7), cette cochaine est un élément de $ker\Delta$. Donc pour $x, \xi_{k_2}, ..., \xi_{p-1}$ fixés il existe un élément P de $P_{in} \otimes C_{in}$ et une cochaine E de $sp(V)$ tels que:

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0, ..., \xi_{p-l}) = (P + \Delta E)(\mu(\xi_{k_1}) \otimes \xi_{k_1}, ..., \mu(\xi_{k_2-1}) \otimes \xi_{k_2-1}).$$

Maintenant il suffit de corriger C par le cobord d'une cochaine tangentielle dont le symbole est égal à l'évaluation de la cochaine E en $\mu(\xi_i) \otimes \xi_i$ (Pour les ξ_i convenables $k_1 \leq i < k_2$).

Sachant la forme des éléments de $P_{in} \otimes C_{in}$ et en faisant varier $\xi_{k_2}, ..., \xi_{p-1}$ on déduit le résultat par récurence. Enfin remarquons que si l'ordre de C ne contient pas des 1 ou des $r_i > 2$ la démonstration reste la même et s'il ne contient pas des 2, $\overline{\sigma}_C$ sera vu comme une 0-cochaine de $sp(V)$.

Etablissons un lemme classique:

Lemme II-4-1

Un p-cocycle tangentiel $n - c$ ne peut être d'ordre lexicographique $(r_0, ..., r_{p-1})$ avec $r_{p-1} > 3$.

Démonstration

Remarquons que d'après la proposition I-3-1 et puisque Λ est bilinéaire, le symbole total d'ordre $r_0 + ... + r_{p-1} + 2$ de ∂C est donné par

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, ..., \xi_p) = \sum_{i<j} (-1)^j \Lambda(\xi_i, \xi_j)[\sigma_C(...., \underset{(i)}{\xi_i + \xi_j}, .\hat{j}..)$$

$$\sigma_C(...., \underset{(i)}{\xi_j}, .\hat{j}..) - \sigma_C(....\hat{j}....)] \quad (*).$$

Supposons que $r_{p-1} > 3$. En considérant les termes d'ordre $(r_0, ..., r_{p-1} - 1, 3)$ dans (*) et sachant que C est un cocycle on aura

$$\Lambda(\xi_{p-1}, \xi_p) \; \frac{1}{2} \; \frac{d^2}{dt^2} \; (\overline{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{p-1} + t\xi_p))/_{t=0} = 0,$$

ce qui est absurde car ceci veut dire que $\overline{\sigma}_C = 0$.

Notons par L_t la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles X vérifiant

$$L_X \Lambda = 0$$

et par L^* celle des champs hamiltoniens et posons

$$L_t = L^* \oplus L_S.$$

Le lemme suivant est utile pour la description des 2-cocycles tangentiels $n - c$.

Lemme: II-4-2
Si le symbole total d'un cocycle tangentiel C est de la forme

$$f.\Lambda(\xi_0,\xi_1)^3,$$

alors f est dans I.

(Remarquons qu'il n'y a pas de différence entre symbole total et symbole lexicographique dans ce cas).

Démonstration
Pour $i \in \{1,...,2n\}$ on note par $[i]$ le 2n-uplet $(0,...,\underset{(i)}{1},0..)$ et on définit s par

$$s[i] = \begin{cases} [i+n] & si \ \ i \leq n \\ [i-n] & si \ \ i > n \end{cases}$$

χ_n désigne toujours la fonction caractéristique de $\{1,...,n\}$. Ainsi, avec ces notations, si on se place dans le domaine d'une carte adaptée U, on a

$$\Lambda(\xi_0,\xi_1) = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{\chi_n(i)+1}\xi_0^{[i]}\xi_1^{s[i]}.$$

Il existe un opérateur différentiel sur U,D_U d'ordre total au plus 5 tel que pour tout u_0, u_1 dans N et x dans U, on ait

$$C(\bar{u}_0,\bar{u}_1)/_U(x) = \sum_{\substack{|\alpha|=3\\|\beta|=3}} C_{\alpha,\beta}(x)D_x^{\alpha}\bar{u}_0 D_x^{\beta}\bar{u}_1 + D_U(\bar{u}_0,\bar{u}_1)(x)$$

plus précisément $C_{\alpha,\beta}$ est le produit de f par un entier, et si $\alpha_0 = 3[1]$ et $\beta_0 = 3s[1] = 3[n+1]$ alors:

$$C_{\alpha_0,\beta_0} = f.$$

Pour tout u_0, u_1, u_2 dans N et x dans U on a

$$\partial C(\bar{u}_0,\bar{u}_1,\bar{u}_2)/_U(x) =$$

$$\underset{u_0,u_1,u_2}{S}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_n(i)+1}D_x^{[i]}\Big(\sum_{\substack{|\alpha|=3\\|\beta|=3}} C_{\alpha,\beta}D^{\alpha}\bar{u}_0\ D^{\beta}\bar{u}_1 + D_U(\bar{u}_0,\bar{u}_1)\Big)D_x^{s[i]}\bar{u}_2$$

$$-\sum_{|\alpha|=|\beta|=3} C_{\alpha,\beta}(x)D_x^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_n(i)+1}D^{[i]}\bar{u}_0 D^{s[i]}\bar{u}_1\Big)D_x^{\beta}\bar{u}_2$$

$$-D_U\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\chi_n(i)+1}D^{[i]}\bar{u}_0 D^{s[i]}\bar{u}_1,\bar{u}_2\Big)(x) = 0 \quad (**)$$

Soit $k \in \{1,...,2n\}$, en considérant les termes d'ordre $(\alpha_0,\beta_0,s[k])$ en u_0,u_1,u_2 dans $(**)$ on aura

$$D_x^{[k]}C_{\alpha_0\beta_0} = D_x^{[k]}f = 0 \quad \forall x \in U.$$

et par suite $f \in I$.

Théorème: II-4-2 [22]
Soit Γ une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de (M, Λ) alors:
(i) Tout 1- cocycle différentiel est 1- différentiel.
(ii) Tout 2- cocycle C tangentiel et différentiel $n-c$ s'ecrit sous la forme:

$$C = aS^3_\Gamma + C_1 + \partial B,$$

où $a \in I$, C_1 est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et $B \in A^0_{diff,t,nc}(N)$.

Démonstration
(i) Soit C un 1-cocycle différentiel quelconque, on a alors,

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \xi_1) = -\Lambda(\xi_0, \xi_1)\big(\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) - \sigma_C(\xi_0) - \sigma_C(\xi_1)\big) = 0.$$

Remarquons que puisqu'on n'a pas supposé C tangentiel, ξ_0 et ξ_1 sont des éléments quelconques de $T^*_x M$.

Mais puisque le polynôme $\Lambda(\xi_0, \xi_1)$ n'est pas identiquement nul, on a

$$\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) = \sigma_C(\xi_0) + \sigma_C(\xi_1) \quad \forall \xi_0, \xi_1 \in T^*_x M.$$

Ceci n'est possible que si σ_C est un polynôme de degré 1 en chacunes de ses variables.

(ii) Soit C un cocycle différentiel tangentiel d'ordre (r_0, r_1). Vu l'antisymétrie de C, on a toujours $r_0 \geq r_1$.

D'après la proposition II-4-8, quitte à corriger C par un cobord, on peut supposer que son symbole total est dans $P \otimes C \otimes Q$. En particulier son symbole lexicographique sera dans $P \otimes C \otimes Q$. Mais comme tout élément de P ou de C est un polynôme à au moins 2 arguments, $\overline{\sigma}_C$ est soit un élément de P soit un élément de Q. Dans ce dernier cas le cocycle est 1-différentiel. D'autre part d'après le lemme II-4-1, $r_1 \leq 3$.

- Si $r_1 = 3$, alors $r_0 = 3$ et $\overline{\sigma}_C$ est de la forme:

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1) = a\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3,$$

avec $a \in N$. Mais d'après le lemme II-4-2, $a \in I$ et pa suite $\overline{\sigma}_C$ coincide avec le symbole du cocycle tangentiel n-c aS^3_Γ. Donc $C - aS^3_\Gamma$ sera un cocycle d'ordre total < 6.

- Si $r_1 = 2$, alors les seuls éléments possibles de C sont de la forme

$$b\Lambda(\xi_0, \xi_1)^2,$$

qui ne peuvent pas être le symbole d'une cochaine antisymétrique puisqu'ils sont symétriques en ξ_0, ξ_1.

Le lemme suivant est utile pour la description des 3- cocycle tangentiels $n-c$.

et par suite $f \in I$.

Théorème: II-4-2 [22]
Soit Γ une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage de (M, Λ) alors:
(i) Tout 1- cocycle différentiel est 1- différentiel.
(ii) Tout 2- cocycle C tangentiel et différentiel $n-c$ s'ecrit sous la forme:

$$C = aS_\Gamma^3 + C_1 + \partial B,$$

où $a \in I$, C_1 est un 2-cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et $B \in A^0_{diff,t,nc}(N)$.

Démonstration
(i) Soit C un 1-cocycle différentiel quelconque, on a alors,

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0, \xi_1) = -\Lambda(\xi_0, \xi_1)(\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) - \sigma_C(\xi_0) - \sigma_C(\xi_1)) = 0.$$

Remarquons que puisqu'on n'a pas supposé C tangentiel, ξ_0 et ξ_1 sont des éléments quelconques de T_x^*M.

Mais puisque le polynôme $\Lambda(\xi_0, \xi_1)$ n'est pas identiquement nul, on a

$$\sigma_C(\xi_0 + \xi_1) = \sigma_C(\xi_0) + \sigma_C(\xi_1) \quad \forall \xi_0, \xi_1 \in T_x^*M.$$

Ceci n'est possible que si σ_C est un polynôme de degré 1 en chacunes de ses variables.

(ii) Soit C un cocycle différentiel tangentiel d'ordre (r_0, r_1). Vu l'antisymétrie de C, on a toujours $r_0 \geq r_1$.

D'après la proposition II-4-8, quitte à corriger C par un cobord, on peut supposer que son symbole total est dans $P \otimes C \otimes Q$. En particulier son symbole lexicographique sera dans $P \otimes C \otimes Q$. Mais comme tout élément de P ou de C est un polynôme à au moins 2 arguments, $\overline{\sigma}_C$ est soit un élément de P soit un élément de Q. Dans ce dernier cas le cocycle est 1-différentiel. D'autre part d'après le lemme II-4-1, $r_1 \leq 3$.

- Si $r_1 = 3$, alors $r_0 = 3$ et $\overline{\sigma}_C$ est de la forme:

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0, \xi_1) = a\Lambda(\xi_0, \xi_1)^3,$$

avec $a \in N$. Mais d'après le lemme II-4-2, $a \in I$ et pa suite $\overline{\sigma}_C$ coincide avec le symbole du cocycle tangentiel n-c aS_Γ^3. Donc $C - aS_\Gamma^3$ sera un cocycle d'ordre total < 6.

- Si $r_1 = 2$, alors les seuls éléments possibles de C sont de la forme

$$b\Lambda(\xi_0, \xi_1)^2,$$

qui ne peuvent pas être le symbole d'une cochaine antisymétrique puisqu'ils sont symétriques en ξ_0, ξ_1.

Le lemme suivant est utile pour la description des 3- cocycle tangentiels $n-c$.

Lemme: II-4-3

(i) Si le symbole d'un 3-cocycle tangentiel $n-c$ est de la forme

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Lambda(\xi_0,\xi_1)^3 < X, \xi_2 > \quad X \in H_t(M),$$

alors X est dans L_t.

(ii) Si le symbole d'un 3 cocycle tangentiel $n-c$ est de la forme

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \lambda\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2),$$

alors λ est dans I.

Démonstration

Afin de simplifier les calculs, faisons la remarque suivante : si on se place dans le domaine d'une carte adaptée et si on associe à chaque cochaine C tangentielle $n-c$ un polynôme P_C obtenu à partir de l'expression locale de C en remplaçant $D_x^{\alpha_i}u_i$ par $\xi_i^{\alpha_i}$, alors un calcul direct nous prouve que le polynôme associé à ∂C s'obtient par la formule

$$P_{\partial C}(\xi_0,....,\xi_p) = \sum_{i<j}(-1)^j\Lambda(\xi_i,\xi_j)[P_C(....,\xi_i \underset{(i)}{+} \xi_j, ..., \hat{j}....)$$

$$-P_C(.....,\underset{(i)}{\xi_j}, ...\hat{j}....) - P_C(.....,\hat{j},...)]$$

$$+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i < i(\xi_i)\Lambda, dP_C(....,\hat{i},....) > .$$

où dP_C est le polynôme obtenu en dérivant les coefficients de P_C.

Dans le cas $p=3$, cette formule s'écrit

$$P_{\partial C}(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \Lambda(\xi_0,\xi_1+\xi_2+\xi_3)P_C(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$-\Lambda(\xi_1,\xi_0+\xi_2+\xi_3)P_C(\xi_0,\xi_2,\xi_3) + \Lambda(\xi_2,\xi_0+\xi_1+\xi_3)$$

$$P_C(\xi_0,\xi_1,\xi_3) - \Lambda(\xi_3,\xi_0+\xi_1+\xi_2)P_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$$

$$-\Lambda(\xi_0,\xi_1)P_C(\xi_0+\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \Lambda(\xi_0,\xi_2)P_C(\xi_0+\xi_2,\xi_1,\xi_3)$$

$$-\Lambda(\xi_0,\xi_3)P_C(\xi_0+\xi_3,\xi_1,\xi_2) + \Lambda(\xi_1,\xi_2)P_C(\xi_0,\xi_1+\xi_2,\xi_3)$$

$$-\Lambda(\xi_1,\xi_3)P_C(\xi_0,\xi_1+\xi_3,\xi_2) - \Lambda(\xi_2,\xi_3)P_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2+\xi_3)$$

$$+ < i(\xi_0)\Lambda, dP_C(\xi_1,\xi_2,\xi_3) > - < i(\xi_1)\Lambda, dP_C(\xi_0,\xi_2,\xi_3) >$$

$$+ < i(\xi_2)\Lambda, dP_C(\xi_0,\xi_1,\xi_3) > - < i(\xi_3)\Lambda, dP_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) > \quad (*)$$

(i) Notons par D_1 les éléments d'ordre (3,2,1) et par D_2 les éléments d'ordre (4,1,1) de P_C.

En considérant les termes d'ordre (3,3,1,1,) de $(*)$ on déduit que

$$-\Lambda(\xi_2,\xi_0)D_1(\xi_1,\xi_0,\xi_3) + \Lambda(\xi_2,\xi_1)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$$

$$+\Lambda(\xi_3,\xi_0)D_1(\xi_1,\xi_0,\xi_2)-\Lambda(\xi_3,\xi_1)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$$
$$-\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d^2}{dt^2}D_2(\xi_0+t\xi_1,\xi_2,\xi_3)/_{t=0}-\Lambda(\xi_0,\xi_2)D_1(\xi_1,\xi_0,\xi_3)$$
$$+\Lambda(\xi_0,\xi_3)D_1(\xi_1,\xi_0,\xi_2)+\Lambda(\xi_1,\xi_2)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$$
$$-\Lambda(\xi_1,\xi_3)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_2)+<i(\xi_2)\Lambda,d<X,\xi_3>\Lambda(\xi_0,\xi_1)^3>$$
$$-<i(\xi_3)\Lambda,d<X,\xi_2>\Lambda(\xi_0,\xi_1)^3>=0.$$

Soit

$$-\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d^2}{dt^2}D_2(\xi_0+t\xi_1,\xi_2,\xi_3)/_{t=0}+\Lambda(\xi_0,\xi_1)^3$$
$$\big(<i(\xi_2)\Lambda,d<X,\xi_3>>-<i(\xi_3),d<X,\xi_2>\big)=0.$$

Mais en considérant les termes d'ordre (4,2,1,1) de (*) on aura :

$$\Lambda(\xi_2,\xi_0)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_3)+\Lambda(\xi_2,\xi_1)D_2(\xi_0,\xi_1,\xi_3)$$
$$-\Lambda(\xi_3,\xi_0)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_2)-\Lambda(\xi_3,\xi_1)D_2(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$$
$$+\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d}{dt}D_2(\xi_0+t\xi_1,\xi_2,\xi_3)/_{t=0}$$
$$+\Lambda(\xi_0,\xi_2)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_3)-\Lambda(\xi_0,\xi_3)D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$$
$$\Lambda(\xi_1,\xi_2)D_2(\xi_0,\xi_1,\xi_3)-\Lambda(\xi_1,\xi_3)D_2(\xi_0,\xi_1,\xi_2)=0.$$

Soit

$$\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d}{dt}D_2(\xi_0,t\xi_1,\xi_2,\xi_3)/_{t=0}=0.$$

D'ou,

$$D_2\equiv 0.$$

Et par suite on a

$$<i(\xi_2)\Lambda,d<X,\xi_3>>-<i(\xi_3)\Lambda,d<X,\xi_2>>=0,$$

et donc

$$X\in L_t.$$

En effet, d'après la formule énoncée au début de la démonstration du lemme, X est dans L_t si et seulement si

$$-\Lambda(\xi_0,\xi_1)(<X,\xi_0+\xi_1>-<X,\xi_1>-<X,\xi_0>)$$
$$+<i(\xi_0)\Lambda,d<X,\xi_1>>-<i(\xi_1)\Lambda,d<X,\xi_0>>$$
$$=<i(\xi_0)\Lambda,d<X,\xi_1>>-<i(\xi_1)\Lambda,d<X,\xi_0>>=0.$$

(ii) Notons par D_3 les termes d'ordre (2,2,1) de P_C. En considérant les termes d'ordre (2,2,2,1) dans $(*)$ on aura

$$-\Lambda(\xi_3,\xi_0)D_3(\xi_1,\xi_2,\xi_0)+\Lambda(\xi_3,\xi_1)D_3(\xi_0,\xi_2,\xi_1)$$

$$-\Lambda(\xi_3,\xi_2)D_3(\xi_0,\xi_1,\xi_2)-\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0+\xi_1,\xi_2,\xi_3)_{/t=0}$$

$$+\Lambda(\xi_0,\xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0+t\xi_2,\xi_1,\xi_3)_{/t=0}-\Lambda(\xi_0,\xi_3)D_3(\xi_1,\xi_2,\xi_0)$$

$$+\Lambda(\xi_1,\xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0,\xi_1+t\xi_2,\xi_3)_{/t=0}$$

$$+\Lambda(\xi_1,\xi_3)D_3(\xi_0,\xi_2,\xi_1)-\Lambda(\xi_2,\xi_3)D_3(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$$

$$-<i(\xi_3)\Lambda,d\lambda(\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2))>=0.$$

Soit

$$-\Lambda(\xi_3,d\lambda)\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2)-\Lambda(\xi_0,\xi_1)$$

$$\frac{d}{dt}D_3(\xi_0+t\xi_1,\xi_2,\xi_3)_{/t=0}+\Lambda(\xi_0,\xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0+t\xi_2,\xi_1,\xi_3)_{/t=0}$$

$$+\Lambda(\xi_1,\xi_2)\frac{d}{dt}D_3(\xi_0,\xi_1+t\xi_2,\xi_3)_{/t=0}=0.$$

Maintenant, pour ξ_3 fixé on peut voir D_3 comme une cochaine de $sp(V)$ et l'équation devient

$$-\Lambda(\xi_3,d\lambda)\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2)+\nabla D_3(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=0$$

Mais comme C_{in} est en somme directe avec $im\nabla$ on aura

$$\Lambda(\xi_3,d\lambda)=0,$$

et donc

$$\lambda\in I.$$

Théorème: II-4-3

Supposons que $rg\ \Lambda=2n>2$.

Soit Γ une connexion linéaire sans torsion adaptée au feuilletage. Alors, tout 3-cocycle différentiel $n-c$ et tangentiel C s'écrit sous la forme:

$$C=S^3_\Gamma\wedge L_X+\lambda(T^2_\Gamma-C'_1)+C_1+\partial B,$$

où $X\in L_t$,$\lambda\in I$, C'_1 est une 3-cochaine 1-différentielle tangentielle n-c, C_1 est un 3- cocycle 1-différentiel tangentiel n-c et B est une 2- cochaine différentielle tangentielle n-c.

Plus précisément pour que λT^2_Γ ($\lambda\neq 0$) apparaisse dans la décomposition d'au moins un 3-cocycle différentiel tangentiel n-c il faut et il suffit qu'il existe un λ dans I tel que $\lambda\mu^*(\tau)$ soit un cobord.

Remarque: II-4-1

Si $\mu^*(\tau)$ est un cobord alors pour tout λ dans I, $\lambda\mu^*(\tau)$ est un cobord. Mais il se peut qu'il existe un λ dans I tel que $\lambda\mu^*(\tau)$ soit un cobord sans que $\mu^*(\tau)$ soit un cobord. En effet, il suffit de considérer les deux exemples suivant

(i) Soit M_1 une variété symplectique telle que $\mu^*(\tau_1)$ est un cobord et M_2 une autre telle que $\mu^*(\tau_2)$ n'est pas un cobord. Pour la variété de Poisson $M=]0,1[\times(M_1\cup M_2)$, $\mu^*(\tau)$ n'est

pas un cobord bien que, si on consdère la fonction invariante λ qui vaut 1 sur $]0,1[\times M_1$ et 0 sur $]0,1[\times M_2$, alors $\lambda\mu^*(\tau)$ est un cobord.
(ii) Soit M' une variété symplectique connexe telle que $\mu^*(\tau')$ n'est pas un cobord, et soit U un ouvert contractile de M. Considérons la variété de Poisson

$$M = (M' \times \mathbb{R})\backslash(M'\backslash U)\times]-\infty,0].$$

Pour M, $\mu^*(\tau)$ n'est pas un cobord bien que, si λ désigne la fonction invariante qui vaut 1 sur $U\times]-\infty,0]$ et 0 sur $M'\times]0,\infty[$ alors $\lambda\mu^*(\tau)$ est un cobord.

Démonstration du Théorème II-4-2

Rappelons qu'on effectue une récurence basée sur l'ordre total et l'ordre lexicographique et que d'après la proposition II-4-8, on peut supposer que $\overline{\sigma}_C$ est dans $P\otimes C\otimes Q$. D'autre part rappelons la formule

$$\sigma_{\partial C}(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \Lambda(\xi_0,\xi_1+\xi_2+\xi_3)\sigma_C(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$
$$-\Lambda(\xi_1,\xi_0+\xi_2+\xi_3)\sigma_C(\xi_0,\xi_2,\xi_3) + \Lambda(\xi_2,\xi_0+\xi_1+\xi_3)$$
$$\sigma_C(\xi_0,\xi_1,\xi_3) - \Lambda(\xi_3,\xi_0+\xi_1+\xi_2)\sigma_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$$
$$-\Lambda(\xi_0,\xi_1)\sigma_C(\xi_0+\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \Lambda(\xi_0,\xi_2)\sigma_C(\xi_0+\xi_2,\xi_1,\xi_3)$$
$$-\Lambda(\xi_0,\xi_3)\sigma_C(\xi_0+\xi_3,\xi_1,\xi_2) + \Lambda(\xi_1,\xi_2)\sigma_C(\xi_0,\xi_1+\xi_2,\xi_3)$$
$$-\Lambda(\xi_1,\xi_3)\sigma_C(\xi_0,\xi_1+\xi_3,\xi_2) - \Lambda(\xi_2,\xi_3)\sigma_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2+\xi_3) \quad ({}^*_*).$$

Supposons que C est d'ordre (r_0,r_1,r_2). Par le lemme 6-1 on peut supposer que $r_2\leq 3$.

a) si $r_2=3$ alors ξ_2 est l'un des arguments d'un polynôme élément de P. Puisque les éléments de P sont des polynômes en $\Lambda(\xi_i,\xi_j)$ avec $i<j$, ceci n'est possible que si $\overline{\sigma}_C$ est dans P. Vu que $\overline{\sigma}_C$ est homogène en ξ_0,ξ_1 et ξ_2 et que $r_0\geq r_1\geq r_2$, les seuls éléments possibles sont des multiples par des fonctions de

$$\alpha(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Lambda(\xi_0,\xi_1)^p\Lambda(\xi_0,\xi_2)^3 \quad (p\geq 3),$$

ou de

$$\beta(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Lambda(\xi_0,\xi_1)^p\Lambda(\xi_0,\xi_2)^2\Lambda(\xi_1,\xi_2) \quad (p\geq 2).$$

(i) $\overline{\sigma}_C = \lambda.\alpha$.

Notons par D le terme d'ordre $(p+3,p-1,4)$ de σ_C. Ce terme peut être non nul car pour des raisons de symétrie en ξ_1,ξ_2, $p>3$. D'autre part, d'après la proposition II-4-8 D est dans P.

En cherchant les termes d'ordre $(p+3,p-1,3,3)$ dans $({}^*_*)$ on aura

$$\frac{1}{2}\Lambda(\xi_1,\xi_2)\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1+t\xi_2,\xi_3)_{/t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1,\xi_3)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1+t\xi_3,\xi_2)/_{t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_2,\xi_3)\frac{d^2}{dt^2}$$
$$D(\xi_0,\xi_1,\xi_2+t\xi_3)_{/t=0} = 0 \quad (***)$$

Puisque $rg\ \Lambda = 2n > 2$, on peut choisir $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ linéairement indépendants. Le premier terme de (***) vaut

$$\frac{p(p-1)}{2}\lambda.\Lambda(\xi_1,\xi_2)\Lambda(\xi_0,\xi_1)^{p-2}\Lambda(\xi_0,\xi_2)^2\Lambda(\xi_0,\xi_3)^3,$$

et c'est le seul monôme de ce type dans (***). Puisque $p > 3$, on déduit que

$$\lambda = 0,$$

et par suite:

$$\overline{\sigma}_C = 0.$$

(ii) Si $\overline{\sigma}_C = \lambda.\beta$.

Notons par D_1 les termes d'ordre $(p+1, p+2, 3)$ et par D_2 les termes d'ordre $(p+1, p+1, 4)$ dans σ_C. On a donc:

$$D_1(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = -\overline{\sigma}_C(\xi_1,\xi_0,\xi_2) = -\lambda\Lambda(\xi_1,\xi_0)^p\Lambda(\xi_1,\xi_2)^2\Lambda(\xi_0,\xi_2).$$

Cherchons les termes d'ordre $(p+1, p+1, 3, 3)$ dans $(^*_*)$.

Si $p > 2$ ces termes sont

$$\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0,\xi_2)\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0+t\xi_2,\xi_1,\xi_3)_{/t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_0,\xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0+t\xi_3,\xi_1,\xi_2)_{/t=0} + \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1,\xi_2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}D_1(\xi_0,\xi_1+t\xi_2,\xi_3)_{/t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_1,\xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}D_1(\xi_0,\xi_1+t\xi_3,\xi_2)_{/t=0} - \frac{1}{2}\Lambda(\xi_2,\xi_3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}D_2(\xi_0,\xi_1,\xi_2+t\xi_3)_{/t=0}(****)$$

Si $p = 2$ il faut ajouter

$$-\frac{1}{2}\Lambda(\xi_0,\xi_1)\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0+t\xi_1,\xi_2,\xi_3)/_{t=0}.$$

Cherchons le coefficient du monôme

$$\Lambda(\xi_0,\xi_1)^{p-2}\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_0,\xi_3)^2\Lambda(\xi_1,\xi_2)^2\Lambda(\xi_1,\xi_3).$$

En prenant $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ linéairement indépendants, dans les deux cas ce monôme n'apparaît qu'en développant le premier teme de (****) avec un coefficient égal à $\frac{1}{2}\lambda p(p-1)$ et le 4^{eme} terme avec un coefficient égal à $-\frac{1}{2}(-\lambda)(-1)^{p-2}p(p-1)$ On aura donc

$$\lambda\frac{p(p-1)}{2}(1+(-1)^p) = 0.$$

Si $\lambda \not\equiv 0$ alors p est impair et par suite $\Lambda(\xi_0,\xi_1)^{p+2}$ est antisymétrique. Il peut être donc le symbole d'une 2-cochaine tangentielle, plus précisément si B est une 2-cochaine tangentielle n-c de symbole

$$\frac{2\lambda}{(p+2)(p+1)}\Lambda(\xi_0,\xi_1)^{p+2},$$

alors le symbole lexicographique de ∂B est $\overline{\sigma}_C$.

b) Commençons par traiter le cas $r_2 = 1$ avant celui $r_2 = 2$.

Si $r_2 = 1$, alors C est ou bien 1-différentiel ou bien $\overline{\sigma}_C$ est de la forme:

$$\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) = \Lambda(\xi_0,\xi_1)^p < X, \xi_2 > \quad (p \geq 2),$$

où X est un élément de $H_t(M)$.

Pour des raisons de symétrie en ξ_0 et ξ_1, p est impair. D'autre part si on suppose que $r_1 > 3$ $(p > 3)$, alors en considérant les termes d'ordre $(p, p_1, 3, 1)$ dans $(^*_*)$, on aura

$$\frac{1}{2}\Lambda(\xi_1,\xi_2)\frac{d^2}{dt^2}\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1+t\xi_2,\xi_3)_{/t=0} = 0.$$

Il en résulte donc que $p = 3$. Mais, d'après le lemme II-4-3, X est dans L_t. Dans ce cas $\overline{\sigma}_C$ coincide avec le symbole du cocycle tangentiel n-c $S^3_\Gamma \wedge L_X$.

c) $r_2 = 2$

Dans ce cas il n'est pas difficile de voir que $\overline{\sigma}_C$ ne peut être que de la forme

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_C(\xi_0,\xi_1,\xi_2) &= \lambda\Lambda(\xi_0,\xi_1)\Lambda(\xi_0,\xi_2)\Lambda(\xi_1,\xi_2)\\ &= \lambda\sigma_{T^2}(\xi_0,\xi_1,\xi_2).\end{aligned}$$

Mais, pour que le symbole de λT^2_Γ coincide avec celui d'un 3-cocycle tangentiel il faut et il suffit qu'il existe une 3-cochaine tangentielle C'_1 d'ordre $< (2,2,2)$ telle que

$$\partial(\lambda T^2_\Gamma - C'_1) = 0,$$

soit

$$\lambda\partial\mu^*(T_\Gamma) = \partial C'_1,$$

ou encore et d'après la proposition II-4-1,

$$\lambda\mu^*(\partial' T_\Gamma) = \lambda\mu^*(\tau) = \partial C'_1.$$

Mais, cette égalité implique que C'_1 est 1-differentielle car τ est une 4-forme.

Maintenant, si au lieu de considérer les cochaines différentielles tangentielles, on considère les cochaines locales tangentielles, localement les résultats seront identiques et un simple raisonnement de globalisation comme celui de [24] prouve la proposition suivante

Proposition: II-4-10

Pour $k \leq 3$:

$$H^k_{loc,t,nc}(N,\partial) \simeq H^k_{diff,t,nc}(N,\partial).$$

Dans la suite on note $T(M)$ l'espace des tenseurs contravariants antisymétriques sur M et par $T_t(M)$ le sous-espace des éléments tangentiels de $T(M)$.

D'aprés les théoremes II-4-2 et II-4-3 et les propositions II-4-1 et II-4 et vu la définition de ∂'', on a la proposition suivante :

Proposition II-4-11

$$Z^1_{loc,t,nc}(N,\partial) = \rho * \Big(Z^1_{loc,t,nt}((\Lambda^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M) \Big)$$

$$Z^2_{loc,t,nc}(N,\partial) = \Big(\rho * (Z^2_{loc,t,nt}((\Lambda^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)) + B^2_{loc,t,nc}(N,\partial) \Big) \oplus I\ S^3_\Gamma$$

$$Z^3_{loc,t,nc}(N,\partial) = \Big(\rho * (Z^3_{loc,t,nt}((\Lambda^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)) + B^3_{loc,t,nc}(N,\partial) \Big) \oplus S^3_\Gamma \wedge L_S.$$

5- Le terme M_3 d'un produit star tangentiel.

Soit Γ une connexion de Poisson.

Proposition: II-5-1

Tout produit-star tangentiel d'ordre 3 est de la forme

$$m + \nu P + \nu^2(\frac{1}{2}P^2_\Gamma + \delta B) + \nu^3(\frac{1}{3!}S^3_\Gamma + \partial B + \rho^*(T))$$

où B est dans $M^0_{loc,t,nc}(N) = A^0_{loc,t,nc}(N)$ et T est un 2-tenseur contravariant tangentiel sur M.

Ce produit-star est prolongeable à l'ordre 4 si et seulement si T est un cocycle (pour ∂'').

Démonstration

Rappelons que le terme M_2 d'un produit-star tangentiel est de la forme $\frac{1}{2}P^2_\Gamma + \delta B$ où B est dans $M^0_{loc,t,nc}(N)$.

Le terme M_3 d'un produit-star tangentiel doit être tel que

$$P\Delta M_2 + m\Delta M_3 = 0.$$

D'une part un calcul direct prouve que

$$\frac{1}{3!}m\Delta S^3_\Gamma + \frac{1}{2}P\Delta P^2_\Gamma = 0.$$

Et d'autre part on a

$$m\Delta\partial B + P\Delta\delta B = -(m\Delta[P,B] + P\Delta(m\Delta B)) = 0$$

Il en résulte donc que

$$m\Delta(\frac{1}{3!}S^3_\Gamma + \partial B) + P\Delta M_2 = 0$$

et par suite

$$m\Delta(M_3 - \frac{1}{3!}S_\Gamma^3 + \partial B) = 0.$$

Donc, $M_3 - \frac{1}{3!}S_\Gamma^3 + \partial B$ est un cocycle de Hochschild tangentiel, il est donc de la forme $\rho^*(T)$. T est un tenseur contravariant tangentiel. On a vu que ce produit-star est prolongeable à l'ordre 4 si et seulement si M_3 est un cocycle de Chevalley et donc, si et seulement si T est un cocycle.

6- Relations entre produit-star tangentiel et déformation formelle tangentielle de (N, P)

Soit

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_k,$$

un produit-star tangentiel alors,

$$P_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k M_{2k+1}$$

est une déformation formelle tangentielle de (N, P). En effet, puisque pour tout k dans $\mathbb{N}$ la composante d'ordre $(2k+2)$ de $M_\nu \Delta M_\nu$ est nulle on a

$$\sum_{i+j=k} (M_{2i+1}\Delta M_{2j+1}) + \sum_{i+j=k+1} (M_{2i}\Delta M_{2j}) = 0.$$

Mais, puisque pour tout i, M_{2i} est symétrique, alors

$$\alpha(M_{2i}\Delta M_{2j}) = 0.$$

P_ν peut s'écrire aussi sous la forme

$$P_\nu = \frac{1}{\lambda}\alpha(M_\lambda)/_{\nu=\lambda^2}.$$

On dira que P_ν dérive de M_ν.

Proposition: II-6-1
Une déformatioon formelle ne peut dériver qu'au plus d'un produit-star tangentiel faible, i.e. l'application

$$M_\nu \mapsto \frac{1}{\lambda}\alpha(M_\lambda)/_{\nu=\lambda^2}$$

est injective.

Démonstration
Soit P_ν une déformation formelle tangentielle de (N, P). Supposons que P_ν dérive de deux produits-star tangentiels faibles M_ν et M'_ν.

Posons

$$A_\nu = M'_\nu - M_\nu$$

alors, on a

$$A_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^{2k} A_k.$$

Il s'agit de démontrer que: $A_\nu = 0$.
On a la relation suivante:

$$2M_\nu \Delta A_\nu + A_\nu \Delta A_\nu = M'_\nu \Delta M'_\nu - M_\nu \Delta M_\nu = 0 \quad (*).$$

Supposons que $A_\nu \neq 0$. Soit A_k le premier terme non nul de A_ν.
La relation $(*)$ écrite à l'ordre $2k+1$ devient

$$P \Delta A_k = 0.$$

Donc, d'après la proposition I-4-2, il existe a_k dans I tel que

$$A_k = a_k m.$$

D'autre part en considérant les termes d'ordre $2k+3$ de (*) on aura

$$P \Delta A_{k+1} + a_k M_3 \Delta m = 0.$$

Mais,

$$(M_\nu \Delta M_\nu)_3 = 2(m \Delta M_3 + P \Delta M_2) = 0.$$

Donc,

$$P \Delta (A_{k+1} - a_k M_2) = 0.$$

Et par suite, et toujours d'après la proposition I-4-2 il existe a_{k+1} dans I tel que

$$A_{k+1} = a_k M_2 + a_{k+1} m.$$

Maintenant l'équation $(*)$ écrite à l'ordre $2k+2$ devient:

$$2 a_k m \Delta M_2 = 0.$$

Or,

$$m \Delta M_2 = -P \Delta P \neq 0,$$

donc,

$$a_k = 0.$$

Ce qui est absurde car on a supposé que $A_k \neq 0$. D'où le résultat.

Proposition: II-6-2
Une déformation formelle tangentielle

$$L_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_k,$$

de (N, P) *dérive d'un produit-star tangentiel faible si et seulement si on a*

$$L_1 = \frac{1}{3!} S_\Gamma^3 + \rho^*(T) + \partial E,$$

où Γ *est une conexion de Poisson,* T *est dans* $Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)$ *et* E *est dans* $A^0_{loc,t,nc}(N)$.

Démonstration
On reprend la méthode de [15].
Les remarques suivantes sont utiles pour la démonstration:
Pour tout A et B dans $M^1(N)$.
(i) $A\Delta B(u, v, w)$ est symétrique en u, w si l'une des deux applications A et B est symétrique et l'autre est antisymétrique.
(ii) $A\Delta B(u, v, w)$ est antisymétrique en u, w si les applications A et B sont toutes les deux symétriques ou antisymétriques.
Soit L_ν une déformation formelle de P de premier terme $L_1 = \frac{1}{3!} S_\Gamma^3 + \rho^*(T) + \partial E$. Nous savons déja que $m + \nu P + \nu^2(\frac{1}{2} P_\Gamma^2 + \delta E) + \nu^3 L_1$ est un produit-star tangentiel d'ordre 3.
Supposons que pour un certain $k \geq 2$ on a pu construire un produit-star faible tangentiel d'ordre $2k$, $M_\nu = \sum_{i=0}^{2k} \nu^i M_i$ tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i < k.$$

Considérons:

$$A_{2k+1} = (M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+1} = \sum_{i+j=2k+1, i,j\neq 0} M_i \Delta M_j.$$

A_{2k+1} est un cocycle de la cohomologie de Hochschild tangentielle tel que

$$\alpha(A_{2k+1}) = 0.$$

Il est donc un cobord et par suite, il existe C_{2k+1} dans $M^1_{loc,t}(N)$ tel que:

$$A_{2k+1} = 2\delta C_{2k+1}.$$

Mais d'aprés (i), on peut choisir C_{2k+1} antisymétrique et par suite $M'_\nu = M_\nu + \nu^{2k+1} C_{2k+1}$ sera un produit-star faible tangentiel d'ordre $2k+1$. Il existe donc R dans $T_t(M)$ tel que

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = \rho^*(R).$$

Or,

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = [\sum_{i=0}^{k} \nu^{2i+1} L_i, \sum_{i=0}^{k} \nu^{2i+1} L_i] - 2\partial C_{2k+1}.$$

Puisque on a

$$[L_\nu, L_\nu] = 0,$$

alors,

$$\alpha((M'_\nu \Delta M'_\nu)_{2k+2}) = 2\partial(L_k - C_{2k+1}).$$

Donc R est un cobord. Il existe donc T' dans $T_t(M)$ tel que

$$R = \partial''(T').$$

$C_{2k+1} - L_k - \rho^*(T')$ est un cocycle de la cohomologie de Chevalley tangentielle. Sachant la forme de M_3, on peut écrire la formule suivante:

$$C_{2k+1} = L_k + aM_3 + \rho^*(T) + \partial E.$$

où $a \in I$, $T \in T_t(M)$ et $E \in A^0_{loc,t,nc}(N)$.
On vérifie bien que

$$M_\nu + \nu^{2k-2} 2am + \nu^{2k}(aM_2 + \delta E) + \nu^{2k+1} L_k$$

est un produit-star faible tangentiel d'ordre $2k+1$ tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

Maintenant supposons que pour un certain $k \geq 1$ on a pu construire un produit-star faible tangentiel $M_\nu = \sum_{i=0}^{2k+1} \nu^i M_i$ tel que:

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

Alors,

$$\alpha((M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+2}) = ([L_\nu, L_\nu])_k = 0,$$

et par suite il existe M_{2k+2} dans $M^1_{loc,t}(N)$ tel que

$$(M_\nu \Delta M_\nu)_{2k+2} = \sum_{i+j=2k+2, i,j\neq 0} M_i \Delta M_j = 2\delta M_{2k+2}.$$

D'après (ii) on peut choisir M_{2k+2} symétrique et par suite $M_\nu + \nu^{2k+2} M_{2k+2}$ sera un produit-star faible tangentiel d'ordre $2k+2$ tel que

$$M_{2i+1} = L_i \quad \forall i \leq k.$$

7- Produit-star de Moyal

Supposons que la variété de Poisson régulière (M, Λ) est plate alors il existe un produit-star tangentiel sur M appelé produit-star de Moyal. En effet, si Γ est une connexion de

Poisson plate sur M et ∇ sa dérivation covariante, alors on peut munir M d'une carte adaptées globale $(M, x^1, ..., x^m)$ telle que

$$\nabla_i(u) = \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Définissons les opérateurs différentiels $P^{(k)}$ sur M par

$$P^{(k)}(u,v) = \sum_{i_1,...,i_k,j_1,...,j_k} \Lambda^{i_1,j_1}...\Lambda^{i_k,j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} ... \frac{\partial u}{\partial x^{i_k}} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} ... \frac{\partial v}{\partial x^{j_k}}.$$

Alors on a la proposition suivante

Proposition: II-7-1 (Produit-star de Moyal) [32]
L'application formelle

$$M_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} P^{(k)},$$

définie sur la variété de Poisson régulière plate (M, Λ) *un produit-star tangentiel appelé produit-star de Moyal.*

Démonstration
Il suffit de remarquer que

$$P^{(k+1)} = P.P^{(k)}$$

où . désigne le produit habituel des opérateurs différentiels sur M.

III- UNE PREMIERE DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIELS SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière. On conserve les notations de II.

1- L'application Θ_Λ^τ

Considérons
$$\tau : A_{loc,nc}(N) \to \wedge_{loc}(\wedge^1(M), N)$$
un inverse à droite de ρ^* sur $\wedge_{loc}(\wedge^1(M), N)$.

Soit (U, φ) $\varphi = (x^1, ..., x^m)$ une carte adaptée contractile de M. Soit F_U la 2-forme définie sur U par
$$F_U = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dx^{i+n}.$$
F_U étant fermée et U contractile, il existe donc une 1-forme sur U, ω_U telle que
$$F_U = d\omega_U \qquad sur\ U.$$
Remarquons que ω_U est caractérisée par la relation
$$P/_U = \partial\rho(\omega_U).$$
On définit l'application
$$\Theta_\Lambda^\tau : A_{loc,nc}(N) \times A_{loc,nc}(N) \to A_{loc,nc}(N),$$
par
$\forall A \in A_{loc,nc}(N)$, $\forall B \in A^b_{loc,nc}(N)$,
$$\Theta_\Lambda^\tau(A,B)/_U = \rho^* i(\omega_U)\tau([A,B]) - (-1)^b[\rho^* i(\omega_U)\tau(A), B] - [A, \rho^* i(\omega_U)\tau(B)].$$
Cette définition a un sens car elle ne dépend pas du choix de ω_U. En effet si U et U' sont deux domaines de deux cartes adaptées contractiles alors sur $U \cap U'$ on a
$$\partial\rho(\omega_U) = \partial\rho(\omega_{U'}),$$
et par suite si x_0 est un élément de $U \cap U'$ il existe un voisinage de x_0, U'' domaine d'une carte adaptée et un élément v de N tels que
$$\omega_U - \omega_{U'} = dv \qquad sur\ U'',$$
et donc on aura
$$(\Theta_\Lambda^\tau(A,B)/_U - \Theta_\Lambda^\tau(A,B)/_{U'})/_{U''} = i(v)[A,B] - (-1)^b[i(v)A, B] - [A, i(v)B] = 0$$

d'aprés l'identité de Jacobi sur l'algèbre de Lie $(A(N), [,])$.

La proposition suivante est simple à démontrer.

Proposition: III-1-1
Soient $A \in A^a_{loc,nc}(N)$, $B \in A^b_{loc,nc}(N)$ et $C \in A^c_{loc,nc}(N)$ alors on a
(i) $\Theta^\tau_\Lambda(A,B) \in A^{a+b-1}_{loc,nc}(N)$,
(ii) $\Theta^\tau_\Lambda(A,B) = (-1)^{ab+1}\Theta^\tau_\Lambda(B,A)$,
(iii) $S_{a,b,c}(-1)^{ac}(\Theta^\tau_\Lambda([A,B],C) - [A,\Theta^\tau_\Lambda(B,C)]) = 0$,
où $S_{a,b,c}$ désigne la somme cyclique sur toutes les permutations cycliques de $\{a,b,c\}$.

On construit à partir de Θ^τ_Λ, l'opérateur

$$D^\tau : A_{loc,nc}(N) \to A_{loc,nc}(N)$$

$$A \mapsto \Theta^\tau_\Lambda(A,P).$$

La proposition suivante est utile pour établir quelques propriétés de D^τ.

Proposition: III-1-2
Soit (U,φ) $\varphi = (x^1,...,x^m)$ une carte adaptée de M et soit ω une 1-forme définie sur U telle que $d\omega = F_U$. Alors on a
(i) $\forall u \in N$

$$[\rho(\omega), H_u] = H_{\rho(\omega)(u)} - H_u,$$

(ii) Si $T \in \mathbb{B} \cap \wedge^r(\wedge^1(M),N)$ et $T = \rho(C)$,

$$L_{\rho(\omega)}\rho^*(T) = \rho^*(\rho(L_{\rho(\omega)}C)) - r\rho^*(T),$$

(iii) $\forall u,v \in N$,

$$L_{\rho(\omega)}F_U(H_u,H_v) = -F_U(H_u,H_v) = -\Lambda(du,dv),$$

(iv)

$$L_{\rho(\omega)} \circ \partial = \partial \circ L_{\rho(\omega)} - \partial.$$

Démonstration
(i) Pour tout X tangent aux feuilles on a

$$F_U(H_{\rho(\omega)(u)},X) = -d(\rho(\omega)(u))(X) = -L_{\rho(\omega)}du(X)$$

$$= L_{\rho(\omega)}i(H_u)F_U(X) = F_U([\rho(\omega),H_u],X) + L_{\rho(\omega)}F_U(H_u,X).$$

Or,

$$L_{\rho(\omega)}F_U = di(\rho(\omega))F_U = F_U.$$

Puisque tous les champs de vecteur apparus dans les égalités précédentes sont tangents aux feuilles on en déduit directement le résultat.

(ii) Conséquence directe de (i).
(iii) Il suffit de remarquer que

$$L_{\rho(\omega)}P = -P.$$

Proposition: III-1-3
Soit τ un inverse à droite de ρ^* tel que

$$\tau(A_{loc,t,nc}(N)) = \wedge_{loc,t,nt}(\wedge(M), N),$$

et soient (U, φ) $\varphi = (x^1, ..., x^m)$ une carte adaptée de M et ω une 1-forme définie sur U telle que $d\omega = F_U$. Alors, on a
$\forall A \in A^a_{loc,t,nc}(N)$,

$$D^\tau(A) = -(a+1)A + \rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial)A.$$

Démonstration
Pour tout $A \in A^a_{loc,t,nc}(N)$, on a

$$D^\tau(A) = \rho^* i(\omega)\tau([A,P]) + [\rho^* i(\omega)\tau(A), P] - [A, \rho^* i(\omega)\tau(P)].$$

Puisque

$$\tau(P) = \Lambda,$$

on a

$$\rho^* i(\omega)\tau(P) = L_{\rho(\omega)},$$

et par suite,

$$D^\tau(A) = (L_{\rho(\omega)} - \partial\rho^* i(\omega)\tau - \rho^* i(\omega)\tau\partial)A$$
$$= \rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial)A + (L_{\rho(\omega)} - \rho^*\partial'' i(\omega)\tau - \rho^* i(\omega)\partial''\tau)\rho^*(\tau(A)).$$

Or si

$$\tau(A) = \rho(C),$$

on a

$$(L_{\rho(\omega)} - \rho^*\partial'' i(\omega)\tau - \rho^* i(\omega)\partial''\tau)\rho^*(\tau(A))$$
$$= \rho^* \circ \rho(L_{\rho(\omega)}(C) - \partial' i(\rho(\omega))C - i\rho(\omega)\partial' C) - (a+1)A = -(a+1)A.$$

Grâce aux outils qu'on a introduit ($\mathbb{B}, \rho$,...), nous pouvons maintenant construire, comme dans le cas symplectique [15], un τ particulier afin de simplifier D^τ.

Proposition: III-1-4
Il existe un inverse à droite de ρ^*, τ tel que

$$\tau(A_{loc,t,nc}(N)) = \wedge_{loc,t,nt}(\wedge(M), N),$$

et vérifiant:

(i) $\tau \circ \rho^* = id$ sur $T(M)$ l'espace des tenseurs contravariants antisymétriques sur M,

(ii) $\rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$ sur $Z^p_{loc,t,nc}(N,\partial)$ pour $p \leq 3$ et sur $B_{loc,t,nc}(N,\partial)$,

(iii) $\rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = -id$ sur IS^3_Γ et sur $S^3_\Gamma \wedge L_S$.

Démonstration

On reprend la méthode de [15].

Pour $p = 1$ ou $p > 3$, on décompose $A^{p-1}_{loc,t,nc}(N)$ de la façon suivante

$$A^{p-1}_{loc,t,nc}(N) = \rho^*(T_t(M)) \oplus \rho^*(\partial'' E) \oplus \rho^*(F),$$

où $T_t(M)$ est l'espace des tenseurs tangentiels et E et F sont tels que

$$\rho^*(B^p_t(M)) \oplus \rho^*(\partial'' E) = \rho^*(B^p_{loc,t,nt}((\wedge^1(M), N), \partial'')),$$

$B^p_t(M)$ étant l'image de $T^{p-1}_t(M)$ par ∂''.

Considérons:

Ψ : un inverse à droite de $\rho^* : E \to \rho^*(E)$,

σ: un inverse à droite de $\partial : \rho^*(E) \to \partial(\rho^*(E))$,

τ_2 : un inverse à droite de $\rho^* : F \to \rho^*(F)$.

Pour $p = 2$ ou $p = 3$ on remplace successivement $\rho^*(F)$ par $IS^3_\Gamma \oplus \rho^*(F')$ ou $(S^3_\Gamma \wedge L_S) \oplus \rho^*(F')$.

Dans ces cas on choisit

$$\tau_2(S^3_\Gamma) =< \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma) >,$$

et on pose

$$\tau_2(aS^3_\Gamma) = a\tau_2(S^3_\Gamma) \quad \forall a \in I,$$

et

$$\tau_2(S^3_\Gamma \wedge L_X) =< \Lambda, \rho(\Phi_\Gamma) > \wedge L_X \quad \forall X \in S.$$

On définit donc τ par

* l'inverse de $\rho^* : T_t(M) \to \rho^*(T_t(M))$ sur $\rho^*(T_t(M))$,
* $\partial'' \circ \Psi \circ \sigma$ sur $\rho^*(\partial''(E))$,
* τ_2 sur $\rho^*(F)$.

Proposition: III-1-5

Si τ est comme dans la proposition III-1-4, alors l'application D^τ vérifit les propriétés suivantes

(i) $D^\tau \circ \partial = \partial \circ D^\tau - \partial$,

(ii) $D^\tau + k.id = 0$ sur $B^k_{loc,t,nc}(N,\partial)$ pour tout $k \geq 1$,

(iii) $D^\tau + id = 0$ sur $Z^1_{loc,t,nc}(N,\partial)$,

(iv) $(D^\tau + 2.id)(D^\tau + 3.id) = 0$ sur $Z^2_{loc,t,nc}(N,\partial)$,

(v) $(D^\tau + 3.id)(D^\tau + 4.id) = 0$ sur $Z^3_{loc,t,nc}(N,\partial)$,

(vi) $(D^\tau + id)^2 = 0$ sur $A^0_{loc,t,nc}(N)$,

(vii) $(D^\tau + 2.id)^2(D^\tau + 3.id) = 0$ sur $A^1_{loc,t,nc}(N)$,

$(D^\tau + 2.id)^2 = 0$ sur $A^1_{1-diff,t,nc}(N)$,

(viii) $(D^\tau + 3.id)^2(D^\tau + 4.id) = 0$ *sur* $A^2_{loc,t,nc}(N)$,
$(D^\tau + 3.id)^2 = 0$ *sur* $A^2_{1-diff,t,nc}(N)$.

Démonstration
(i) D'aprés la proposition III-1-1 pour tout A dans $A_{loc,nc}(N)$ on a

$$2\Theta^\tau_\Lambda([A,P],P) - [A,\Theta^\tau_\Lambda(P,P)] - 2[P,\Theta^\tau_\Lambda(P,A)] = 0.$$

Sachant que $\Theta^\tau_\Lambda(P,P) = D^\tau(P) = -2P$, cette relation devient

$$D^\tau \circ \partial(A) - \partial \circ D^\tau(A) + \partial(A) = 0.$$

(ii) Il suffit de remarquer que sur $B_{loc,t,nc}(N,\partial)$, $\rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$ sur tout ouvert U et pour toute 1-forme ω sur U vérifiant $d\omega = F_U$.
(iii) D'aprés la proposition II-4-11 on a

$$Z^1_{loc,t,nc}(N,\partial) = \rho^*((Z^1_{loc,t,nt}((\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)).$$

Mais si U et ω sont comme dans (ii), alors $\rho^* i(\omega)(\partial''\tau - \tau\partial) = 0$ sur $\rho^*((Z^1_{loc,t,nt},\partial'') \cap T_t(M))$.
(iv) (v) Toujours d'aprés la proposition II-4-11 on a

$$Z^2_{loc,t,nc}(N,\partial) = \rho^*((Z^2_{loc,t,nt}(\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)) + B^2_{loc,t,nc}(N,\partial) \oplus IS^3_\Gamma.$$

Et,

$$Z^3_{loc,t,nc}(N,\partial) = \rho^*((Z^3_{loc,t,nt}(\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)) + B^3_{loc,t,nc}(N,\partial) \oplus (S^3_\Gamma \wedge L_S).$$

Or,
$D^\tau + 2.id = 0$ sur $\rho^*((Z^2_{loc,t,nt}(\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M))$,
$D^\tau + 3.id = 0$ sur IS^3_Γ et sur $\rho^*((Z^3_{loc,t,nt}(\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M))$,
$D^\tau + 4.id = 0$ sur $S^3_\Gamma \wedge L_S$.
(vi) (vii) (viii) D'après (i) et (ii) sur $A^p_{loc,t,nc}(N)$ on a

$$\partial \circ (D^\tau + (p+1).id) = (D^\tau + (p+2).id) \circ \partial = 0,$$

et donc

$$(D^\tau + (p+1).id)(A^p_{loc,t,nc}(N)) \subset Z^{p+1}_{loc,t,nc}(N,\partial),$$

et par suite (vi), (vii) et (viii) seront des conséquences directes de (iii), (iv) et (v).

2- Existence de déformations formelles tangentielles de (N,P)

Définition: III-2-1
Une déformation formelle d'ordre k de P est dite la directrice d'une déformation formelle de P, L_ν si et seulement si elle est égale à L_ν jusqu'à l'ordre k.

Si V est un espace vectoriel on note par D_ν l'application:

$$D_\nu : V_\nu \to V_\nu$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k u_k \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} k\nu^{k-1} u_k.$$

Proposition: III-2-1

L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_\nu, L_\nu) = 0 \qquad (*)$$

admet une solution unique L_ν telle que:

$L_0 = P$, $L_1 = \rho^*(T) + \partial E$ $T \in Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)$, $E \in A^0_{loc,t,nc}(N)$ *et* $L_2 = \frac{-1}{2}(D^\tau + id)\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) + aS^3_\Gamma$, $a \in I$.

(i) Cette solution est une déformation formelle tangentielle de P.

(ii) Si $a = 0$ et $E = 0$, cette déformation est 1-différentielle.

(iii) Si $L_1 = 0$ alors $\forall k \geq 1$, $L_{2k+1} = 0$. De plus $L'_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k L_{2k}$ est l'unique solution de l'équation

$$(2\nu D_\nu + id)L'_\nu + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L'_\nu, L'_\nu) = 0$$

$L'_0 = P$, $L'_1 = aS^3_\Gamma$.

Démonstration

Nos résultats précédents permettent de suivre la méthode de [15]

a) L'équation $(*)$ est vérifiée à l'ordre 0 et 1. En effet,

à l'ordre 0:

$$L_0 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_0, L_0) = P + \frac{1}{2}D^\tau(P) = 0,$$

à l'ordre 1:

$$2L_1 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_0, L_1) + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_0)$$

$$= (D^\tau + 2.id)L_1 = (D^\tau + 2.id)(\rho^*(T)) + (D^\tau + 2.id)(\partial E) = 0,$$

car

$$D^\tau + 2.id = 0,$$

sur $Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M), N), \partial'') \cap T_t(M)$ et sur $B^2_{loc,t,nc}(N, \partial)$.

b) Le terme L_2 doit être tel que

$$(D^\tau + 3.id)L_2 + \frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(L_1, L_1) = 0.$$

Il est simple de voir que, puisque $\rho^*(T)$ est 1-différentiel, $\frac{1}{2}\Theta_\Lambda^\tau(\rho^*(T), \rho^*(T))$ est 1-différentiel. Or sur $A^1_{1-diff,t,nc}(N)$ on a

$$(D^\tau + 3.id)(D^\tau + id) + id = (D^\tau + 2.id)^2 = 0.$$

Et par suite

$$\frac{1}{2}\Theta^{\tau}_{\Lambda}(\rho^*(T),\rho^*(T)) = -(D^{\tau}+3.id)(D^{\tau}+id)\frac{1}{2}\Theta^{\tau}_{\Lambda}(\rho^*(T),\rho^*(T)).$$

Désignons par A la quantité $\rho^*(T)$ ou ∂E. Il s'agit de montrer que

$$\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E) = -(D^{\tau}+3.id)(D^{\tau}+id)\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E).$$

En effet en écrivant cette relation pour $\rho^*(T)$ et ∂E, et en considérant la somme avec la relation précédente on aura

$$(D^{\tau}+3.id)L_2 + \frac{1}{2}\Theta^{\tau}_{\Lambda}(L_1,L_1) = 0,$$

avec

$$L_2 = \frac{1}{2}(D^{\tau}+id)\Theta^{\tau}_{\Lambda}(L_1,L_1).$$

Mais puisque pour tout a dans I, $(D^{\tau}+3.id)(aS^3_{\Gamma}) = 0$ la relation reste vraie si on ajoute à L_2 aS^3_{Γ}.

D'aprés la proposition III-1-1 on a

$$\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E) = \partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(E,A) + D^{\tau}([E,A]) + [D^{\tau}(A),E]) + [A,D^{\tau}(E)].$$

Dans les deux cas on a $D^{\tau}(A) = -2A$. Et par suite on aura

$$\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E) = \partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(E,A) - (D^{\tau}+3.id)([A,E]) + [(D^{\tau}+id)(E),A]).$$

$(D^{\tau}+id)(E)$ est un cocycle car $\partial(D^{\tau}+id)(E) = (D^{\tau}+2.id)(\partial E) = 0$, il est donc 1-différentiel. Par suite $[(D^{\tau}+id)(E),A]$ est ou bien un cobord si $A=\partial E$ ou bien un cocycle 1-différentiel si $A=\rho^*(T)$. Dans les deux cas, $(D^{\tau}+2.id)([(D^{\tau}+id)(E),A]) = 0$ de même $(D^{\tau}+2.id)(\partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,E)) = 0$ et donc on peut écrire la relation

$$\partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,E) - [(D^{\tau}+id)(E),A] = (D^{\tau}+3.id)(\partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,E) - [(D^{\tau}+id)(E),A]),$$

et par suite on aura la relation

$$\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E) = (D^{\tau}+3.id)(\partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,E) - [(D^{\tau}+id)(E),A] - [A,E]).$$

Finalement on a

$$(D^{\tau}+2.id)^2(\Theta^{\tau}_{\Lambda}(A,\partial E)) = 0,$$

car $(D^{\tau}+2.id)^2(D^{\tau}+3.id) = 0$ sur $A^1_{Loc,t,nc}(N)$. En utilisant le fait que $(D^{\tau}+3.id)(D^{\tau}+id)+id = (D^{\tau}+2.id)^2$, on déduit le résultat.

D'autre part, on vérifie bien que L_2 est le deuxième terme d'une déformation formelle de P. En effet d'aprés la proposition III-1-1 on a

$$\partial\Theta^{\tau}_{\Lambda}(L_1,L_1) = -D^{\tau}([L_1,L_1]) + 2[D^{\tau}(L_1),L_1] = -(D^{\tau}+4.id)([L_1,L_1]).$$

Cette formule peut s'écrire sous la forme

$$(D^\tau + 4.id)([L_1, L_1]) - 2\partial L_2 = 0,$$

car

$$-2\partial L_2 = \partial(D^\tau + 1)(\Theta^\tau_\Lambda(L_1, L_1)) = (D^\tau + 2.id)(\partial\Theta^\tau_\Lambda(L_1, L_1) = -\partial\Theta^\tau_\Lambda(L_1, L_1).$$

Mais on a

$$[L_1, L_1] = [\rho^*(T), \rho^*(T)] + \partial([2\rho^*(T) + \partial E, E].$$

Donc,

$$(D^\tau + 3.id)([L_1, L_1]) = 0.$$

Et par suite, la relation devient

$$[L_1, L_1] - 2\partial L_2 = 0.$$

c) L'équation (*) admet une solution unique si on se donne L_1 et L_2. En effet supposons que $L_\nu = \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i L_i$ est une solution d'ordre $k-1$ $(k > 2)$ alors a l'ordre k l'équation s'écrit

$$(D^\tau + (k+1).id)(L_k) + \frac{1}{2}(\sum_{i+j=k\ i,j\neq 0} \Theta^\tau_\Lambda(L_i, L_j)) = 0 \quad (**).$$

Mais puisque $(D^\tau + 2.id)^2(D^\tau + 3.id) = 0$ sur $A^1_{loc,t,nc}(N)$ alors pour tout p différent de 2 et 3 $(D^\tau + p.id)$ est inversible sur $A^1_{loc,t,nc}(N)$ et par suite l'équation $(**)$ admet une solution unique dans $A^1_{loc,t,nc}(N)$.

d) La solution est une déformation formelle de P.En effet supposons que c'est vrai jusqu'a l'ordre $k-1$ $(k > 2)$.

On a

$$(\nu D_\nu + 2.id)([L_\nu, L_\nu]) = 2[(\nu D_\nu + id)(L_\nu), L_\nu] = -[\Theta^\tau_\Lambda(L_\nu, L_\nu), L_\nu]$$
$$= -\Theta^\tau_\Lambda([L_\nu, L_\nu], L_\nu) \ (***)$$

car, on a

$$[\Theta^\tau_\Lambda(L_\nu, L_\nu), L_\nu] - \Theta^\tau_\Lambda([L_\nu, L_\nu], L_\nu) = 0.$$

Sachant que, pour $i < k$ $([L_\nu, L_\nu])_i = 0$, le terme d'ordre k de $(***)$ est

$$(D^\tau + (k+2).id)(([L_\nu, L_\nu])_k) = 0,$$

puisque $(D^\tau + (k+2).id)$ est inversible sur $A^2_{loc,t,nc}(N)$, on aura

$$([L_\nu, L_\nu])_k = 0.$$

e) Si $a = 0$ et $E = 0$, alors L_ν est dans $A^1_{1-diff,nc}(N_\nu)$. Pour prouver cette assaertion il suffit de remarquer que si A et B sont 1-différentiels alors $[A, B]$ et $\Theta^\tau_\Lambda(A, B)$ sont 1-différentiels.

f) Si $L_1 = 0$, alors $L_{2k+1} = 0$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Supposons que cette assertion soit vraie jusqu'à l'ordre $k-1$ pour un certain $k \geq 2$. L'équation $(*)$ écrite à l'ordre $2k+1$ devient

$$(D^\tau + (2k+2).id)(L_{2k+1}) + \frac{1}{2}(\sum_{i+j=2k+1 \ i,j\neq 0} \Theta^\tau_\Lambda(L_i, L_j)) = 0.$$

Sachant que si la somme de deux entiers est impair alors un de ces entiers est impair on déduit

$$(D^\tau + (2k+2).id)(L_{2k+1}) = 0,$$

et par suite

$$L_{2k+1} = 0.$$

Maintenant il est clair que $L'_\nu = \sum_{k=0}^\infty \nu^k L_{2k}$ est solution de l'équation

$$(2\nu D_\nu + id)L'_\nu + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L'_\nu, L'_\nu) = 0,$$

$L'_0 = P,\ L'_1 = aS^3_\Gamma$.

Définition: III-2-2
Une déformation (multi-parametrée) de P est une série formelle:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \nu^\alpha L_\alpha, \quad \nu = (\nu_1, ..., \nu_p),$$

définissant une structure d'algèbre de Lie sur l'espace N_ν des series formelles

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^p} \nu^\alpha u_\alpha, \quad u_\alpha \in N.$$

On pose

$$\nu D_\nu = \sum_{i=1}^p \nu_i D_{\nu_i}$$

et on note par $(e_1, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

La démonstration de la proposition suivante se déduit facilement de celle de la proposition précédente.

Prposition: III-2-2
L'équation

$$(\nu D_\nu + id)L_\nu + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L_\nu, L_\nu) = 0$$

admet une solution unique L_ν telle que
$L_0 = P,\ L_{e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i$

$(T_i \in Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M),\ E_i \in A^0_{loc,t,nc}(N))$ *et* $L_{e_i+e_j} = \frac{-1}{2}(2-\delta_{ij})(D^\tau + id)\Theta^\tau_\Lambda(L_{e_i}, L_{e_j}) + a_{ij}S^3_\Gamma, \quad (a_{ij} \in I)$.

(i) Cette solution est une déformation formelle tangentielle de P.

(ii) Si pour tout i,j $a_{ij} = 0$ *et* $E_i = 0$, *cette déformation est 1-différentielle.*

De même l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

admet une solution unique telle que

$L_{0,0} = P,\ L_{e_i,0} = a_i S^3_\Gamma \quad (a_i \in I)$

$L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i \quad (T_i \in Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M),\ E_i \in A^0_{loc,t,nc}(N))$ *et* $L_{0,e_i+e_j} = \frac{-1}{2}(2-\delta_{ij}(D^\tau + id)\Theta^\tau_\Lambda(L_{0,e_i}, L_{0,e_j}) + a_{ij}S^3_\Gamma, \quad (a_{ij} \in I)$.

Proposition: III-2-3

Toute déformation formelle tangentielle d'ordre $k \geq 0$ *de* (N,P) *s'étend à une déformation formelle tangentielle de* (N,P).

Démonstration

Soit $L_\nu = \sum_{i=0}^\infty \nu^i L_i$ une déformation formelle tangentielle de (N,P) jusqu'à l'ordre k.

L_1 étant un cocycle tangentiel, il est de la forme

$$L_1 = \rho^*(T_1) + \partial E_1 + a_1 S^3_\Gamma,$$

où $T_1 \in Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)$, $E_1 \in A^0_{loc,t,nc}(N)$ et $a_1 \in I$.

Considérons la solution $L^{(1)}_{\mu,\nu}$ de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

telle que $L_{1,0} = a_1 S^3_\Gamma$ et $L_{0,1} = \rho^*(T_1) + \partial E_1 \quad \mu,\nu \in \mathbb{R}$ Alors $L^{(1)}_\nu = L^{(1)}_{\nu,\nu}$ est une déformation formelle de P telle que: $L^{(1)}_1 = L_1$. Par suite $L_2 - L^{(1)}_2$ est de la forme

$$L_2 - L^{(1)}_2 = \rho^*(T_2) + \partial E_2 + a_2 S^3_\Gamma,$$

où $T_2 \in Z^2_{loc,t,nt}((\wedge^1(M),N),\partial'') \cap T_t(M)$, $E_2 \in A^0_{loc,t,nc}(N)$ et $a_2 \in I$.

Considérons maintenant la solution $L^{(2)}_{\mu,\nu}$ de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0$$

telle que: $L_{e_i,0} = a_i S^3_\Gamma$ et $L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i \quad (i = 1,2)$ et $\mu,\nu \in \mathbb{R}^2$. Alors il est simple de vérifier que $L^{(2)}_\nu = L_{(\nu,\nu^2),(\nu,\nu^2)}$ est une déformation formelle tangentielle de P égale à L_ν jusqu'à l'ordre 2.

Supposons qu'on ait construit de cette façon $a_1, ..., a_{k-1}, T_1, ..., T_{k-1}, E_1, ..., E_{k-1}$ et $L^{(k-1)}_\nu$, alors on a

$$L_k - L^{(k-1)}_k = \rho^*(T_k) + \partial E_k + a_k S^3_\Gamma.$$

Par suite si on considere la solution $L^{(k)}_{\mu,\nu}$ de l'équation

$$(2\mu D_\mu + \nu D_\nu + id)L_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\Theta^\tau_\Lambda(L_{\mu,\nu}, L_{\mu,\nu}) = 0,$$

telle que $L_{e_i,0} = a_i S^3_\Gamma$ et $L_{0,e_i} = \rho^*(T_i) + \partial E_i \quad (i = 1, ..., k)$ et $\mu, \nu \in \mathbb{R}^k$. Alors $L^{(k)}_\nu = L_{(\nu,\nu^2,...,\nu^k),(\nu,\nu^2,...,\nu^k)}$ est une déformation formelle tangentielle de P égale à L_ν jusqu'à l'ordre k.

3-Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière.

Proposition: III-3-1

Tout produit-star tangentiel ou produit-star faible tangentiel d'ordre $2k$ $(k \geq 2)$ est prolongeable en un produit-star tangentiel ou un produit-star faible tangentiel.

Démonstration

a) Soit M_ν un produit-star faible tangentiel d'ordre $2k$ alors $L_\nu = \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i M_{2i+1}$ est une déformation formelle tangentielle de P d'ordre $k-1$. Elle est donc prolongeable en une déformation formelle de P, L'_ν. Mais nous savons que L'_ν dérive d'un produit-star faible tangentiel M'_ν et que M'_ν est égal à $M_\nu + a\nu^{2k-2}(m + \nu^2 M_2) + \nu^{2k}\delta E \quad (a \in I)$ jusqu'à l'ordre $2k$. Pour un choix convenable de a et E, $(id - a\nu^{2k-2})(id - \nu^{2k}E)^* M'_\nu$ coincide avec M_ν jusqu'à l'ordre $2k$.

b) Soit M_ν un produit-star tangentiel d'ordre $2k$. D'après a) il est prolongeable en un produit-star faible tangentiel, mais ce dernier est équivalent à un produit-star tangentiel égal à M_ν jusqu'à l'ordre $2k$.

IV - UNE DEUXIEME DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE PRODUITS-STAR TANGENTIELS SUR UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE

Soit (M, Λ) une variété de Poisson régulière [19] de dimension $2n + q$ $(n, q \in \mathbb{N})$, $(n > 0)$.

On va maintenat donner une seconde preuve de l'existence de produits star tangentiels sur M en suivant la méthode de De Wilde et Lecomte [16] qui est une simplification des idées de Maeda, Omori et Yoshioka [21] qui consistent à recoller des produits star locaux équivalents à ceux de Moyal définis sur des domaines de cartes contractiles.

1 - Définitions et propriétés

Soit (U, φ) une carte adaptée de (M, Λ).

Définitions: IV-1-1
Soit x_0 un point de U. On définit sur U le champ de vecteur ξ_{x_0} par

$$\xi_{x_0} = \sum_{i=1}^{2n} (x - x_0)^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Définition: IV-1-2
Pour x_0 dans U on définit l'appliction θ^{x_0} sur $N_\nu(U)$ par

$$\theta^{x_0} = -2id + 4\nu D_\nu + L_{\xi_{x_0}}.$$

On définit enfin sur U le crochet de Moyal P_ν comme dans le chapitre précédent par

$$P_\nu = \sum_r \frac{\nu^r}{r!} P^{(2r+1)}.$$

Proposition: IV-1-1
θ^{x_0} est une dérivation de $(N_\nu(U), P_\nu)$.

Démonstration
Il suffit de remarquer que, pour tout u et v de $N(U)$,

$$P^{(2k+1)}(L_{\xi_{x_0}}(u), v) + P^{(2k+1)}(u, L_{\xi_{x_0}}(v)) = L_{\xi_{x_0}} P^{(2k+1)}(u, v) + 2(2k+1) P^{(2k+1)}(u, v).$$

Proposition: IV-1-2
Si $H_t^1(U) = 0$ alors l'espace des dérivations tangentielles de $(N_\nu(U), P_\nu)$ est la somme de $I(U)\theta^{x_0}$ et de l'espace des dérivations intérieures.

Démonstration

On reprend la méthode de [16]

Soit D une dérivation tangentielle de $(N_\nu(U), P_\nu)$. Un raisonnement semblable à celui du cas symplectique [17] montre qu'il existe a_ν dans l'espace $I_\nu(U)$ des séries formelles à coefficients dans $I(U)$ et une dérivation formelle tangentielle,

$$D' = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k D'_k,$$

tels que

$$D = D' + a_\nu \circ D,$$

où $\circ$ désigne le produit de séries formelles.

En effet,

U étant non compact, l'algèbre de Lie $(N_\nu(U), P_\nu)$ est toujours égale à son idéal dérivé. On note $Ent\ P_\nu$ l'ensemble des éléments T de $M^0_{loc,t}(N_\nu(U))$ vérifiant

$$T(P_\nu(u_\nu, v_\nu)) = P_\nu(T(u_\nu), v_\nu) = P_\nu(u_\nu, T(v_\nu)) \qquad \forall u_\nu, v_\nu \in N_\nu(U).$$

Il est simple de voir que pour tout T et T' dans $Ent\ P_\nu$, $[D,T]$ est dans $Ent\ P_\nu$ et $[T,T']$ s'annule sur l'idéal dérivé de $N_\nu(U)$ et par suite sur $N_\nu(U)$. De plus, puisque $\nu 1$ est dans $Ent\ P_\nu$, pour tout T de $Ent\ P_\nu$, on a

$$T(\nu u_\nu) = \nu T(u_\nu) \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U),$$

donc T est formel. Maintenant, il n'est pas difficile de prouver que, si A est une application tangentielle de $N(U)$ dans $N(U)$ vérifiant

$$A(P(u,v)) = P(T(u), v) = P(u, T(v)) \quad \forall u, v \in N(U),$$

alors il existe c dans $I(U)$ tel que

$$A = c.id.$$

Donc une démonstration par récurence prouve que, si $T = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k T_k$ est un élément de $Ent\ P_\nu$, alors il existe une suite d'éléments de $I(U)$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$T_k = a_k.id \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc, si on pose $a_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k a_k$, alors on a

$$T(u_\nu) = a_\nu \circ u_\nu \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U).$$

En particulier, il existe a_ν dans $I_\nu(U)$ tel que

$$D(\nu u_\nu) - \nu D(u_\nu) = a_\nu \circ u_\nu \quad \forall u_\nu \in N_\nu(U),$$

d'où le résultat.

Remarquons que $D(1)$ est dans $I_\nu(U)$. Donc quitte à remplacer D par $D - D(1)\theta^{x_0}$, on peut supposer que les D'_k sont n-c.

Pour tout u, v dans $N(U)$, on a

$$D(P_\nu(u,v)) = P_\nu(D(u),v) + P_\nu(u,D(v)) \quad (*).$$

En considérant les termes d'ordre 0 de (*) on a

$$D_0(\{u,v\}) + a_0\frac{1}{3!}P^{(3)}(u,v) = \{D_0(u),v\} + \{u,D_0(v)\}.$$

$P^{(3)}$ n'étant pas un cocycle exact pour la cohomologie de Chevalley tangentielle, on en déduit que a_0 est nul et que D_0 est un cocycle de Chevalley tangentiel n-c, mais puisque $H^1_t(U) = 0$, alors D_0 est un cobord et par suite il existe f_0 dans $N(U)$ telle que

$$D_0(u) = \{f_0, u\} \quad \forall u \in N(U).$$

En considérant les termes d'ordre 1 de (*) on a

$$\begin{aligned} D_1(\{u,v\}) + a_1\frac{1}{3!}P^{(3)}(u,v) + D_0(\frac{1}{3!}P^{(3)}(u,v)) =& \frac{1}{3!}P^{(3)}(D_0(u),v) + \frac{1}{3!}P^{(3)}(u,D_0(v)) \\ &+ \{D_1(u),v\} + \{u,D_1(v)\}. \end{aligned}$$

Mais puisque

$$D_0(\frac{1}{3!}P^{(3)}(u,v)) = \frac{1}{3!}P^{(3)}(D_0(u),v) + \frac{1}{3!}P^{(3)}(u,D_0(v)),$$

on voit que $a_1 = 0$ et que D_1 est un cocycle de Chevalley.

Maintenant, le résultat final se déduit facilement d'une démonstration par récurrence.

2- L'algèbre $I(U)\theta^{x_0} \oplus N_\nu(U)$.

Soit $N_\nu(U)$ l'espace des séries formelles en nu à coefficients dans $N(U)$. On définit sur l'espace $A_{\nu,x_0}(U) = I(U)\theta^{x_0} \oplus N_\nu(U)$ le crochet suivant

$$[\lambda\theta^{x_0} + u_\nu, \mu\theta^{x_0} + v_\nu] = \lambda\theta^{x_0}(v_\nu) - \mu\theta^{x_0}(u_\nu) + P_\nu(u_\nu, v_\nu) \quad (u_\nu, v_\nu \in N_\nu(U)\ ,\ \lambda, \mu \in I(U)).$$

$A_{\nu,x_0}(U)$ muni de ce crochet est une algèbre de Lie, et si y_0 est un autre élément de U, $A_{\nu,x_0}(U)$ est équivalente à $A_{\nu,y_0}(U)$. En effet, puisque

$$L_{\xi_{x_0}} = L_{\xi_{y_0}} + ad_\nu \rho_{x_0 - y_0},$$

où

$$\rho_u(x) = \sum_{i=1}^{n}(u^i x^{i+n} - u^{i+n} x^i),$$

l'application

$$\begin{aligned} J_{y_0,x_0} : A_{\nu,x_0}(U) &\longrightarrow A_{\nu,y_0}(U) \\ \lambda\theta^{x_0} + u_\nu &\longmapsto \lambda\theta^{y_0} + u_\nu + \lambda\rho_{x_0-y_0} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

D'autre part, $\nu^k N_\nu(U)$ est un idéal de $A_{\nu,x_0}(U)$. On note par $A^{(k)}_{\nu,x_0}(U)$ le quotient $A_{\nu,x_0}(U)/\nu^k N_\nu(U)$.

Proposition: IV-2-1
Le centre de $A_{\nu,x_0}(U)$ est réduit à zéro.

Démonstration
Soit $z = \lambda\theta^{x_0} + u_\nu$ un élément du centre. Soit y_0 un point de U, alors dans $A_{\nu,y_0}(U)$, on a

$$[\theta^{x_0} - \rho_{x_0-y_0}, z] = (-2id + 4\nu D_\nu + L_{\xi_{y_0}})(u_\nu + \lambda\rho_{x_0-y_0}) = 0,$$

c'est à dire, pour $i > 0$:

$$(-2 + 4i + L_{\xi_{y_0}})(u_i) = 0,$$

et donc en particulier

$$u_i(y_0) = 0,$$

et, pour $i = 0$, on a

$$u_0(y_0) = -\lambda(y_0)\rho_{x_0-y_0}(y_0),$$

d'où

$$\forall x \in U, \quad u_0(x) = \lambda(x)\rho_{x_0}(x).$$

Puisque $\theta^{x_0}(u_0) = -u_0$, on a

$$[\lambda\theta^{x_0} + u_0, u_0] = -\lambda u_0 = 0,$$

donc

$$\lambda^2 \rho_{x_0} = 0,$$

et par suite

$$u_0 = 0,$$

car ρ_{x_0} ne dépend que de $x^1, ..., x^{2n}$ et λ ne dépend que de $x^{2n+1}, ..., x^{2n+q}$.

Proposition: IV-2-2
Les dérivations tangentielles de $A_{\nu,x_0}(U)$ sont des dérivations intérieures.

Démonstration
Soit D une dérivation tangentielle de $A_{\nu,x_0}(U)$. D étant $I(u)$-linéaire elle est de la forme

$$D(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu) = (\lambda a + \alpha(u_\nu))\theta^{x_0} + T(u_\nu) + \lambda d_\nu.$$

où a est un élément de $I(U)$, d_ν un élément de $N_\nu(U)$ et

$$\alpha : N_\nu(U) \to I, \quad T : N_\nu(U) \to N_\nu(U).$$

T étant tangentielle.
On a

$$\begin{aligned} D([u_\nu, v_\nu]) =& \alpha(u_\nu)\theta^{x_0}(v_\nu) - \alpha(v_\nu)\theta^{x_0}(u_\nu) + [T(u_\nu), v_\nu] + [u_\nu, T(v_\nu)] \\ =& \alpha([u_\nu, v_\nu])\theta^{x_0} + T([u_\nu, v_\nu]). \end{aligned}$$

Puisque $(N_\nu(U), P_\nu)$ est égal à son idéal dérivé, on en déduit que α est identiquement nulle et par suite que T est une dérivation tangentielle de $N_\nu(U)$. On a donc

$$D(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu) = a\lambda\theta^{x_0} + \lambda d_\nu + T(u_\nu).$$

Si on se restreint à un ouvert W inclus dans U tel que $H^1_t(W) = 0$, alors on a

$$T = ad_\nu f^W_\nu + b^W_\nu \theta^{x_0},$$

où f^W_ν appartient à $N_\nu(W)$ et b^W_ν à $I_\nu(W)$.
Mais on a

$$\theta^{x_0}(u_\nu) = [\theta^{x_0}, u_\nu],$$

donc,

$$\begin{aligned} [f^W_\nu, \theta^{x_0}(u_\nu)] + b^W_\nu \theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu)) =& [a\theta^{x_0} + d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}, [f^W_\nu, u_\nu] + b^W_\nu \theta^{x_0}(u_\nu)] \\ =& a\theta^{x_0}(u_\nu) + [d_\nu, u_\nu] + \theta^{x_0}([f^W_\nu, u_\nu]) + \theta^{x_0}(b^W_\nu(\theta^{x_0}(u_\nu)). \end{aligned}$$

Soit encore,

$$\begin{aligned} [f^W_\nu, \theta^{x_0}(u_\nu)] + b^W_\nu \theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu)) =& [a\theta^{x_0} + d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}(f^W_\nu), u_\nu] + [f^W_\nu, \theta^{x_0}(u_\nu)] \\ &+ b^W_\nu(\theta^{x_0}(\theta^{x_0}(u_\nu))) + 4\nu D_\nu(b^W_\nu)\theta^{x_0}(u_\nu). \end{aligned}$$

D'où

$$a\theta^{x_0}(u_\nu) + [d_\nu, u_\nu] + [\theta^{x_0}(f^W_\nu), u_\nu] + 4\nu D_\nu(b^W_\nu)\theta^{x_0}(u_\nu) = 0,$$

ou encore,

$$(a + 4\nu D_\nu(b^W_\nu))\theta^{x_0}(u_\nu) + ad(\theta^{x_0}(f^W_\nu) + d_\nu)(u_\nu) = 0.$$

Pour $u_\nu = \nu$, on obtient

$$a + 4\nu D_\nu(b^W_\nu) = 0.$$

a est donc identiquement nulle et b^W_ν se réduit à b_0 qui est dans $I(W)$. Donc

$$ad(\theta^{x_0}(f^W_\nu) + d_\nu) \equiv 0.$$

Et par suite

$$\theta^{x_0}(f_\nu^W) + d_\nu = k_\nu \quad k_\nu \in I_\nu(W).$$

Enfin on a

$$D/_W = ad_{A_{\nu,x_0}(W)}(a^W\theta^{x_0} + g_\nu^W),$$

avec $a^W = b_0$ et $g_\nu^W = f_\nu^W + k'_\nu$, où k'_ν est un élément de $I_\nu(W)$ vérifiant

$$\theta^{x_0}(k'_\nu) = -k_\nu.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} D/W(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu) =& \lambda d_\nu + ad_\nu f_\nu^W(u_\nu) + b_0\theta^{x_0}(u_\nu) \\ =& \lambda(-\theta^{x_0}(f_\nu^W) + k_\nu) + ad_\nu f_\nu^W(u_\nu) + b_0\theta^{x_0}(u_\nu) \\ =& b_0\theta^{x_0}(u_\nu) - \lambda(-\theta^{x_0}(f_\nu^W + k'_\nu)) + [f_\nu^W + k'_\nu, u_\nu] \\ =& ad_{A_{\nu,x_0}(W)}(a^W\theta^{x_0} + g_\nu^W)(\lambda\theta^{x_0} + u_\nu). \end{aligned}$$

Maintenant, si W_1 et W_2 sont deux ouverts de U tels que $H_t^1(W_1) = H_t^1(W_2) = 0$ alors a^{W_1} et a^{W_2} d'une part, $g_\nu^{W_1}$ et $g_\nu^{W_2}$ d'autre part coïncident sur $W_1 \cap W_2$ et par suite il existe a dans $I(U)$ et g_ν dans $N_\nu(U)$ tels que

$$D = ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(a\theta^{x_0} + g_\nu).$$

3- Les automorphismes principaux tangentiels.

Soient (U, φ_α) et (U, φ_β) deux cartes adaptées de M. On indexe par α les objets correspondants à (U, φ_α): Par exemple on notera

$$\theta_\alpha = \theta^{x_\alpha}, \quad A_{\alpha,\nu,x_\alpha}(U).$$

Notons $N_\nu^{(k)}(U)$, l'espace $N_\nu(U)/\nu^k N_\nu(U)$.

Définition: IV-3-1

Un isomorphisme principal tangentiel d'ordre $k > 0$ de $N_\nu(U)$ ou de $N_\nu^{(k')}(U)$ $(k' > k)$ est un isomorphisme

$$T : (N_\nu(U), P_\alpha) \to (N_\nu(U), P_\beta)$$

ou,

$$T : N_\nu^{(k')}(U) \to N_\nu^{(k')}(U),$$

du type

$$T = id + \nu^k T'_\nu,$$

avec T'_ν formel, local, tangentiel et n-c.

Un raisonnement semblable à celui du cas symplectique ([16]) nous montre que, si $\alpha = \beta$ et si $H^1_t(U) = 0$, T est de la forme

$$T = exp\nu^k ad(u_\nu),$$

pour un certain u_ν de $N_\nu(U)$ ou $N_\nu^{(k')}(U)$.

Définition: IV-3-2

Un isomorphisme principal tangentiel Q d'ordre $k > 0$ de $A_{\alpha,\nu,x_\alpha}(U)$ dans $A_{\beta,\nu,x_\beta}(U)$ ou de $A^{(k')}_{\alpha,\nu,x_\alpha}(U)$ dans $A^{(k')}_{\beta,\nu,x_\beta}(U)$ est un isomorphisme tangentiel tel que

$$Q(\theta_\alpha) = \theta_\beta \quad (modN_\nu(U)) \quad ou \quad (modN_\nu^{(k')}(U)),$$

et tel que $Q/_{N_\nu(U)}$ ou $Q/_{N_\nu^{(k')}(U)}$ soit un isomorphisme principal tangentiel d'ordre k.

Proposition: IV-3-1

Si $H^1_t(U) = 0$, alors tout isomorphisme principal tangentiel d'ordre $k > 0$ de $N_\nu(U)$ (respectivement de $N_\nu^{(k')}(U)$) peut être étendu en un ismorphisme principal tangentiel Q défini par

$$Q : \begin{cases} \theta_\alpha & \mapsto & \theta_\beta + q_\nu \\ u_\nu & \mapsto & T(u_\nu) \end{cases}$$

où q_ν est caractérisé par

$$ad_\beta(q_\nu) = -\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1},$$

et est unique mod $I_\nu(U)$ (resp mod $I_\nu(U) + \nu^k N_\nu(U)$).

Démonstration

Q étant défini comme dans la proposition est un isomorphisme principal tangentiel qui prolonge T si et seulement si pour tout λ, μ dans $I(U)$ et pour tout u_ν, v_ν dans $N_\nu(U)$,

$$Q([\lambda\theta_\alpha + u_\nu, \mu\theta_\alpha + v_\nu]) = [Q(\lambda\theta_\alpha + u_\nu), Q(\mu\theta_\alpha + v_\nu)].$$

Soit

$$\begin{aligned} T(\lambda\theta_\alpha(v_\nu) - \mu\theta_\alpha(u_\nu) + [u_\nu, v_\nu]) =& [\lambda\theta_\beta + \lambda q_\nu + T(u_\nu), \mu\theta_\beta + \mu q_\nu + T(v_\nu)] \\ =& \lambda\theta_\beta(\mu q_\nu + T(v_\nu)) - \mu\theta_\beta(\lambda q_\nu + T(u_\nu)) \\ &+ [q_\nu, \lambda T(v_\nu) + \mu T(u_\nu)] + [T(u_\nu), T(v_\nu)]. \end{aligned}$$

En particulier pour $\lambda = 1$, μ et u_ν nuls, on a

$$ad_\beta(q_\nu)(T(v_\nu)) = -\theta_\beta(T(v_\nu)) + T(\theta_\alpha(v_\nu)).$$

Et donc

$$ad_\beta(q_\nu) = -\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1}.$$

Inversement, $-\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1}$ est une dérivation tangentielle formelle de $(N_\nu(U), P_\beta)$ et puisque $H^1_t(U) = 0$, alors il existe q_ν unique (modulo $I_\nu(U)$) tel que

$$-\theta_\beta + T \circ \theta_\alpha \circ T^{-1} = ad_\beta(q_\nu).$$

Proposition: IV-3-2

Si U est connexe, les automorphismes principaux tangentiels d'ordre k de $A_{\nu,x_0}(U)$ sont de la forme

$$exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu) \qquad (f_\nu \in N_\nu(U), f_i \in I \ pour\ i < k).$$

De plus si $exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu)$ et $exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(g_\nu)$ sont deux automorphismes principaux tangentiels d'ordre k et si

$$exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu) \circ exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(g_\nu) = exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(h_\nu),$$

alors, on a

$$h_\nu = f_\nu + g_\nu \ mod\ \nu^{k+1}.$$

Démonstration

Soit Q un automorphisme principal tangentiel d'ordre k. Donc Q est de la forme

$$Q : \begin{cases} \theta_\alpha & \mapsto \quad \theta_\beta + q_\nu \\ u_\nu & \mapsto \quad u_\nu + \nu^k T_\nu(u_\nu) \end{cases}$$

où T_ν est tangentiel.
Puisque

$$ad_\nu(q_\nu) = (1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1} - \theta^{x_0},$$

alors, on a

$$ad_\nu(q_\nu) \equiv 0 \quad mod\ \nu^{k+1}.$$

En effet soit $u_\nu = \sum_{i \geq 0} \nu^i u_i$ un élément de $N_\nu(U)$. Il est bien clair que pour $i < k$ les termes d'ordre i de

$$(1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu) - \theta^{x_0}(u_\nu),$$

sont nuls. De plus les termes d'ordre k de $(1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu)$ sont $u_k - T_0(u_0)$ et donc ceux de

$$(1 + \nu^k T_\nu) \circ \theta^{x_0} \circ (1 + \nu^k T_\nu)^{-1}(u_\nu),$$

sont

$$\theta^{x_0}(u_k) - \theta^{x_0}(T_0(u_0)) + T_0(\theta^{x_0}(u_0)),$$

et par suite ceux de $ad_\nu(q_\nu)(u_\nu)$ sont

$$-\theta^{x_0}(T_0(u_0)) + T_0(\theta^{x_0}(u_0)) = 0,$$

car ils sont les termes d'ordre k de

$$Q([\theta^{x_0}, u_\nu]) - [Q(\theta^{x_0}), Q(u_\nu)].$$

On déduit donc que

$$\forall\, i \leq k \quad q_i \in I(U).$$

Considérons

$$D : \begin{cases} \theta^{x_0} & \mapsto \quad \theta^{x_0} + \nu^k q_k \\ u_\nu & \mapsto \quad \nu^k T_0(u_\nu) \end{cases}$$

Il est bien clair que D induit une dérivation tangentielle sur $A^{(k)}_{\nu,x_0}(U)$. Il est donc de la forme

$$ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\nu^k q'_k) \quad mod\ \nu^{k+1},$$

et par suite

$$Q = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \nu^k q'_k) \quad mod\ \nu^{k+1},$$

où les c_i sont telles que

$$\theta^{x_0}(\nu^i c_i) = \nu^i q_i,$$

soit encore

$$c_i = (-2+4i)^{-1} q_i.$$

Considérons

$$Q \circ exp - ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \nu^k q'_k)$$

c'est un automorphisme principal tangentiel d'ordre $k+1$. En appliquant de nouveau le même raisonnement et par récurence on déduit l'existence d'une suite $(q'_j)_{j\geq k}$ telle que

$$Q = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \sum_{j=k}^{N} \nu^j q'_j) \quad mod\ \nu^{N+1} \quad \forall N \geq k,$$

et par suite

$$Q = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\sum_{i=1}^{k-1} \nu^i c_i + \sum_{j\geq k} \nu^j q'_j).$$

Si on a

$$expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu) \circ expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(g_\nu) = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(h_\nu),$$

on a

$$\begin{aligned}\theta^{x_0} + [g_\nu, \theta^{x_0}] + [f_\nu, \theta^{x_0}] + \frac{1}{2}[g_\nu, [g_\nu, \theta^{x_0}]] + [f_\nu, [g_\nu, \theta^{x_0}]] + ... = \\ \theta^{x_0} + [h_\nu, \theta^{x_0}] + \frac{1}{2}[h_\nu, [h_\nu, \theta^{x_0}]] + ...\end{aligned},$$

et donc on a

$$g_\nu + f_\nu = h_\nu \qquad mod\ \nu^{k+1},$$

car g_0, ..., g_k, f_0, ..., f_k sont dans $I(U)$.

Lemme: IV-3-1
Soit

$$S = exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu) \quad et \quad T = exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(g_\nu)$$

où f_ν et g_ν sont dans $N_\nu(U)$ et f_0, g_0 dans $I(U)$. Alors on a

$$S \circ T = exp\ ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(h_\nu),$$

pour un certain h_ν de $N_\nu(U)$.

Démonstration
D'aprés la proposition précédente, on a

$$expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu) \circ expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(g_\nu) = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(f_\nu + g_\nu) \quad mod\ \nu.$$

Supposons qu'on puisse construire $R = expad_{A_{\nu,x_0}(U)}(h_\nu)$ tel que $S \circ T$ et R induisent le même automorphisme tangentiel sur $A^{(k)}_{\nu,x_0}(U)$ pour un certain $k \geq 1$. Alors on a

$$S \circ T \circ R^{-1}(\alpha) = \alpha + \varphi(\alpha) \qquad \forall \alpha \in A_{\nu,x_0}(U),$$

où

$$\varphi : A_{\nu,x_0}(U) \to \nu^k N_\nu(U).$$

Par construction, φ induit une dérivation sur $A^{(k+1)}_{\nu,x_0}(U)$. Elle est donc de la forme

$$\varphi = ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\nu^k h'_k) \quad mod\ \nu^{k+1},$$

donc

$$S \circ T \circ R^{-1} = ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(\nu^k h'_k) \quad mod\ \nu^{k+1},$$

et par suite

$$S \circ T = ad_{A_{\nu,x_0}(U)}(h_\nu + \nu^k h'_k) \quad mod\ \nu^{k+1}.$$

4- Existence de produits-star tangentiels sur une variété de Poisson régulière

Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement contractile de M tel que les U_α soient les domaines de cartes adaptées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$. On note M_α le produit de Moyal dans la carte U_α,

$$M_\alpha = \sum_{r \geq 0} \frac{\nu^r}{r!} P^{(r)}.$$

Théorème: IV-4-1
Il existe une collection d'applications tangentielles

$$T_\alpha : N_\nu(U_\alpha) \to N_\nu(U_\alpha),$$

telle que $T_\alpha - id$ soit formel, differentiel, tangentiel et n-c et telle que

$$T_\alpha^* M_\alpha = T_\beta^* M_\beta,$$

sur chaque intersection non vide $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.
Et donc si on définit M_ν sur M par

$$M_\nu = T_\alpha^* M_\alpha \qquad sur\ U_\alpha,$$

alors M_ν sera un produit-star tangentiel sur (M, Λ).

Démonstration
Fixons un ordre total sur A et notons $U_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta \cap \ldots \cap U_\gamma$ qui est, par hypothèse, contractile.
Si $U_{\alpha\beta}$ n'est pas vide, M_α et M_β sont tangentiellement équivalents sur $U_{\alpha\beta}$ [19]. Il existe donc

$$R_{\alpha\beta} = id + \nu^2 T'_{\alpha\beta,\nu^2}$$

où $T'_{\alpha\beta,\nu^2}$ est formel, différentiel, tangentiel, n-c, tel que

$$R_{\alpha\beta} : (N_\nu(U_{\alpha\beta}), M_\beta) \to (N_\nu(U_{\alpha\beta}), M_\alpha)$$

soit un isomorphisme [19]. Donc $T_{\alpha\beta} = id + \nu T'_{\alpha\beta,\nu}$ est un isomorphisme de $(N_\nu(U_{\alpha\beta}), P_\beta)$ dans $(N_\nu(U_{\alpha\beta}), P_\alpha)$.

Pour tout α dans A on fixe un x_α dans U_α et on pose

$$A_\alpha(U_\alpha) = A_{\nu,x_\alpha}(U_\alpha).$$

On choisit $T_{\alpha\beta}$ pour $\alpha < \beta$ et on définit $T_{\beta\alpha}$ par

$$T_{\beta\alpha} = T_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Puisque $T_{\alpha\beta}$ est un isomorphisme principal tangentiel d'ordre 1 il peut être prolonger en un isomorphisme principal tangentiel d'ordre 1

$$Q_{\alpha\beta} : A_\beta(U_{\alpha\beta}) \to A_\alpha(U_{\alpha\beta}).$$

Posons encore

$$Q_{\beta\alpha} = Q_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Si $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$, alors

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma}Q_{\gamma\alpha}$$

est un automorphisme principal tangentiel d'ordre 1 de $A_\alpha(U_{\alpha\beta\gamma})$. D'apres la proposition IV-3-2, $Q_{\alpha\beta\gamma}$ est de la forme

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = exp\ ad_{A_\alpha}(q_{\alpha\beta\gamma}).$$

où

$$q_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i q^i_{\alpha\beta\gamma} \quad q^0_{\alpha\beta\gamma} \in I(U_{\alpha\beta\gamma}).$$

Il sagit de montrer que $q^1_{\alpha\beta\gamma}$ est complètement antisymétrique en α, β, γ. Pour tout δ dans A, puisque

$$[Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}), u_\nu] = Q_{\alpha\beta}([q_{\beta\gamma\delta}, Q_{\beta\alpha}(u_\nu)] \quad \forall u_\nu \in A_\alpha(U_\alpha),$$

alors on a

$$Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma\delta}Q_{\beta\alpha} = exp\ ad_{A_\alpha}(Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta})).$$

D'autre part on a

$$Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma\delta}Q_{\beta\alpha}Q_{\alpha\beta\delta}Q^{-1}_{\alpha\gamma\delta}.$$

Donc d'apres la proposition IV-3-2 on a

$$q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}) + q_{\alpha\beta\delta} - q_{\alpha\gamma\delta} \quad mod\ \nu^2.$$

Mais puisque

$$Q_{\alpha\beta}(q_{\beta\gamma\delta}) = q_{\beta\gamma\delta} \quad mod\ \nu^2,$$

on a

$$q^0_{\alpha\beta\gamma} = q^0_{\beta\gamma\delta} + q^0_{\alpha\beta\delta} - q^0_{\alpha\gamma\delta}$$

et

$$q^1_{\alpha\beta\gamma} = q^1_{\beta\gamma\delta} + q^1_{\alpha\beta\delta} - q^1_{\alpha\gamma\delta} \ (*).$$

Puisque $Q_{\alpha\beta\alpha} = id$ on a: $q^1_{\alpha\beta\alpha} = 0$. Si on pose $\delta = \alpha$ dans $(*)$ on a

$$q^1_{\alpha\beta\gamma} = q^1_{\beta\gamma\alpha}.$$

De plus $Q^{-1}_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\gamma\beta}$, donc

$$q^1_{\alpha\beta\gamma} = -q^1_{\alpha\gamma\beta}.$$

On a aussi $Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\gamma\alpha}Q_{\beta\alpha}$ et donc

$$q^1_{\alpha\beta\gamma} = q^1_{\beta\gamma\alpha}.$$

Il en résulte que $q_{\alpha\beta\gamma}$ est antisymétrique en α, β, γ.

Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ une partition de l'unité localement finie subordonnée à $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. On a

$$q^1_{\alpha\beta\gamma} = s^1_{\beta\gamma} + s^1_{\alpha\beta} - s^1_{\alpha\gamma},$$

où

$$s^1_{\alpha\beta} = \sum_{\mu\in A} \varphi_\mu q^1_{\alpha\beta\mu}.$$

Remarquons que $s^1_{\alpha\beta}$ est antisymétrique en $\alpha\beta$.
On définit $Q^1_{\alpha\beta}$ par

$$Q^1_{\alpha\beta} = exp\ ad_{A_\alpha}(-\frac{\nu}{2}s^1_{\alpha\beta}) \circ Q_{\alpha\beta} \circ exp\ ad_{A_\alpha}(\frac{\nu}{2}s^1_{\beta\alpha}).$$

On a bien

$$Q^1_{\beta\alpha} = (Q^1_{\alpha\beta})^{-1},$$

et

$$Q^1_{\alpha\beta\gamma} = exp\ ad_{A_\alpha}(q'_{\alpha\beta\gamma}),$$

où

$$q'_{\alpha\beta\gamma} = q_{\alpha\beta\gamma} + \nu(s^1_{\beta\alpha} + s^1_{\alpha\gamma} + s^1_{\gamma\beta}) \quad mod\ \nu^2.$$

Et donc on a

$$q'_{\alpha\beta\gamma} \in I_\nu(U_{\alpha\beta\gamma}) \quad mod\ \nu^2.$$

Et par suite $Q^1_{\alpha\beta\gamma}$ est un automorphisme principal tangentiel (car on a modifié $Q_{\alpha\beta}$ par $exp\ ad_{A_\alpha}(.)$ qui est tangentiel) d'ordre 2.
Par récurrence on peut construire une famille d'isomorphismes tangentiels d'ordre $k+1$, $Q^k_{\alpha\beta}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad Q^k_{\alpha\beta} = Q^{k+1}_{\alpha\beta} \quad mod\ \nu^{k+1}.$$

On définit $Q'_{\alpha\beta}$ par

$$Q'_{\alpha\beta} = Q^k_{\alpha\beta} \quad mod\ \nu^{k+1} \ \forall k \in \mathbb{N},$$

et on considère la restriction $T'_{\alpha\beta}$ de $Q'_{\alpha\beta}$ à $N_\nu(U_{\alpha\beta})$. On a donc construit ainsi une famille d'isomorphismes tangentiels telle que

$$T'_{\alpha\beta}T'_{\beta\alpha} = id,$$

et

$$T'_{\alpha\beta}T'_{\beta\gamma}T'_{\gamma\alpha} = id.$$

Posons

$$S_{\alpha,\nu} = \sum_{\mu\in A} \varphi_\mu T'_{\mu\alpha}.$$

Alors

$$S_{\alpha,\nu} = id + \nu S'_{\alpha,\nu},$$

où $S'_{\alpha,\nu}$ est formel différentiel n-c et tangentiel et on a

$$T'_{\alpha\beta} = S^{-1}_{\alpha,\nu} S_{\beta,\nu},$$

et donc

$$(S^{-1}_{\beta,\nu})^* P_\beta = (S^{-1}_{\alpha,\nu})^* P_\alpha \quad sur\ U_{\alpha\beta}.$$

Soit encore

$$(S^{-1}_{\beta,\nu^2})^* M_\beta = (S^{-1}_{\alpha,\nu^2})^* M_\alpha \quad sur\ U_{\alpha\beta}.$$

V- PRODUIT-STAR COVARIANT SUR LES ORBITES D'UNE ALGEBRE DE LIE

1- Définitions

Soit G un groupe de Lie réel connexe et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Notons par $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^*$ par la représentation coadjointe

$$G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

$$(g, \xi) \mapsto g.\xi = \xi \circ Ad_{g-1}.$$

$\mathfrak{g}^*$ est munie d'une structure de Poisson par la donnée du 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ défini par

$$\Lambda_\xi(X, Y) =< \xi, [X, Y] > \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Soit $W = G/_{G_{\xi_0}}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ (G_{ξ_0} étant le stabilisateur de ξ_0 dans G). La 2-forme F déduite de la restriction de Λ définit sur W une structure de variété symplectique

$$F(X^*, Y^*)(\xi) =< \xi, [X, Y] > \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \xi \in W,$$

où X^* est le champ de vecteur fondamental associé à X défini par

$$X^*(\xi) = \frac{d}{dt}(exp - tX.\xi)/_{t=0} = \xi \circ ad(X).$$

Définition: V-1-1 [2]
Un produit-star sur W est dit covariant si et seulement si, pour tout X, Y de $\mathfrak{g}$,

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X}_*\tilde{Y} - \tilde{Y}_*\tilde{X}) = [X,\tilde{Y}] = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = \Lambda(d\tilde{X}, d\tilde{Y}),$$

où $\tilde{X}$ est l'élément de $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ défini par

$$\tilde{X}(\xi) =< \xi, X > \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Cette notion est essentielle si l'on veut utiliser le star produit sur l'orbite pour construire des représentations de G. En effet, dès qu'elle est remplie, l'application de $\mathfrak{g}$ dans l'espace des dérivations de $*$ définie par

$$X \mapsto \frac{1}{2\nu}(\tilde{X} * . - . * \tilde{X}),$$

est une représentation de $\mathfrak{g}$ qui peut d'ailleurs toujours être intégrée au groupe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'utilisation de star produits en analyse harmonique passe donc toujours par la définition de star produits covariants sur des orbites de la représentation coadjointe.

2- Existence de produits-star sur une variété symplectique

La preuve de [16], [20] d'existence de produits star sur une variété symplectique par recollement de produits chacun équivalent à celui de Moyal sur un ouvert contractile, peut être exprimée de façon élémentaire (c'est à dire en évitant les calculs de la cohomologie de Chevalley de la première partie) en utilisant la cohomologie de Čech de la variété. Nous allons exposer ici cette façon de voir les choses d'abord parce qu'elle permet de trouver de manière naturelle les premières conditions nécessaires d'existence de star produit ($H^3(W) = 0$) [25], ensuite parce qu'elle nous permettra de prouver l'existence de star produit covariant dans la seconde partie du chapitre.

Théorème: V-2-1 [4]
Soit (M,F) une variété symplectique telle que $H^3_{\check{C}ech}(M) = 0$, alors il existe en produit-star sur M.

Démonstration
On se donne un recouvrement contractile localement fini $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de M tel que chaque U_α est le domaine d'une carte de Darboux, et, pour tout r dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$U_{\alpha_1\dots\alpha_r} = U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots\dots \cap U_{\alpha_r}.$$

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Supposons que sur chaque U_α il existe un produit-star $*_\alpha$

$$u *_\alpha v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_{r,\alpha}(u,v),$$

tel que pour tout α, β dans A sur $U_{\alpha,\beta}$ on ait

$$C_{r,\alpha} = C_{r,\beta} \quad \forall r < 2k \qquad (*).$$

On note par C_r l'opérateur globalement défini sur M dont la restriction à chaque U_α est $C_{r,\alpha}$ et on cherche à modifier les produits-star $*_\alpha$ sur chaque U_α pour que la relation (*) soit vraie jusqu'à l'ordre $2k+2$. Sur $U_{\alpha\beta}$, $C_{2k,\beta} - C_{2k,\alpha}$ est un cocycle de Hochschild symétrique il est donc un cobord . Il existe donc une application linéaire de C^∞ $(U_{\alpha\beta})$ dans $C^\infty(U_{\alpha\beta})$, $A_{\alpha\beta}$ telle que pour chaque u, v de $C^\infty(U_{\alpha\beta})$,on ait

$$C_{2k,\beta}(u,v) - C_{2k,\alpha}(u,v) = \delta A_{\alpha,\beta}(u,v) = uA_{\alpha\beta}(v) - A_{\alpha\beta}(uv) + A_{\alpha\beta}(u)v.$$

$C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta} - \partial A_{\alpha\beta}$ est alors aussi un cocycle de Hochschild mais antisymétrique. Il existe donc une 2-forme $\omega_{\alpha\beta}$ [12] telle que pour chaque u, v, on ait

$$(C_{2k+1,\alpha} - C_{2k+1,\beta} - \partial A_{\alpha\beta})(u,v) = \omega_{\alpha\beta}(H_u, H_v).$$

En écrivant la relation de Jacobi pour les crochets déformés

$$[u,v]_{*_\alpha} = \frac{1}{2\nu}(u *_\alpha v - v *_\alpha u),$$

et

$$[u,v]'_{*_\beta} = \frac{1}{2\nu} \exp -\nu^{2k} A_{\alpha\beta}\big(\exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(u) *_\beta \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(v)$$
$$- \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(v) *_\beta \exp \nu^{2k} A_{\alpha\beta}(u)\big),$$

on en déduit

$$d\omega_{\alpha\beta} \quad (H_u, H_v, H_w) = 0 \quad \forall u, v, w \in C^\infty(U_{\alpha\beta}).$$

La 2-forme $\omega_{\alpha\beta}$ est donc fermée et il existe un champ de vecteur $X_{\alpha\beta}$ sur $U_{\alpha\beta}$, tel que

$$\omega_{\alpha\beta}(H_u, H_v) = \partial L_{X_{\alpha\beta}}(u,v) \qquad \forall u, v \in C^\infty(U_{\alpha\beta}).$$

On pose

$$H_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + L_{X_{\alpha\beta}}.$$

On a

$$\delta H_{\alpha\beta} = \delta A_{\alpha\beta} = C_{2k,\beta} - C_{2k,\alpha}$$

et

$$\partial H_{\alpha\beta} = \partial A_{\alpha\beta} + \partial L_{X_{\alpha\beta}} = C_{2k+1,\beta} - C_{2k+1,\alpha}.$$

Donc, on peut modifier les 2 produits-star $*_\alpha$ et $*_\beta$ sur $U_{\alpha\beta}$ pour les faire coïncider jusqu'à l'ordre $2k+1$ inclus.
Choisissons $H_{\alpha\beta}$ pour $\alpha < \beta$ et $H_{\beta\alpha} = -H_{\alpha\beta}$.
Posons alors

$$H_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\beta} + H_{\beta\gamma} + H_{\gamma\alpha}.$$

On définit ainsi sur $U_{\alpha\beta\gamma}$ un objet totalement antisymètrique en $\alpha\beta\gamma$ tel que

$$\delta H_{\alpha\beta\gamma} = \delta H_{\alpha\beta} + \delta H_{\beta\gamma} + \delta H_{\gamma\alpha} = 0 \quad (**),$$

et

$$\partial H_{\alpha\beta\gamma} = \partial H_{\alpha\beta} + \partial H_{\beta\gamma} + \partial H_{\gamma\alpha} = 0 \quad (***).$$

De $(**)$, on déduit que $H_{\alpha\beta\gamma}$ est un champ de vecteur et de $(***)$, on déduit qu'il est hamiltonien. Il existe donc une fonction $h_{\alpha\beta\gamma}$ telle que

$$H_{\alpha\beta\gamma}(u) = \partial h_{\alpha\beta\gamma}(u) = \{h_{\alpha\beta\gamma}, u\} \quad \forall u \in C^\infty(U_{\alpha\beta\gamma}).$$

Cette fonction $h_{\alpha\beta\gamma}$ est déterminée à une constante prés. On la choisit pour $\alpha < \beta < \gamma$ et pour les autres possibilités, on choisit $h_{\alpha\beta\gamma}$ complètement antisymétrique en $\alpha\beta\gamma$.
On a enfin par construction

$$H_{\alpha\beta\gamma} - H_{\alpha\beta\delta} + H_{\alpha\gamma\delta} - H_{\beta\gamma\delta} = 0 \qquad \text{sur} \quad U_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Donc il existe une constante $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ telle que

$$h_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\delta} + h_{\alpha\gamma\delta} - h_{\beta\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

On peut alors considérer la donnée des $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ comme une 3-cochaine de Čech: elle est complètement antisymétrique et par construction on a

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} - c_{\alpha\beta\delta\varepsilon} + c_{\alpha\gamma\delta\varepsilon} - c_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = 0.$$

C'est donc un 3-cocycle et puisque $H^3_{\check{C}ech}(M)$ est nul, il existe une 2-cochaine $d_{\alpha\beta\gamma}$ telle que

$$c_{\alpha\beta\gamma\delta} = d_{\alpha\beta\gamma} - d_{\alpha\beta\delta} + d_{\alpha\gamma\delta} - d_{\beta\gamma\delta}.$$

On remplace alors les fonctions $h_{\alpha\beta\gamma}$ par

$$g_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta\gamma} - d_{\alpha\beta\gamma}.$$

On a toujours pour tout α, β, γ dans A:

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial g_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{sur} \quad U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Mais de plus, on a

$$g_{\alpha\beta\gamma} - g_{\alpha\beta\delta} + g_{\alpha\gamma\delta} - g_{\beta\gamma\delta} = 0,$$

ce qui nous permet de définir

$$s_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma\in A} \psi_\gamma g_{\alpha\beta\gamma} \qquad \text{sur} \quad U_{\alpha\beta},$$

où ψ_α est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α). Par construction, ces fonctions vérifient, pour tout α, β, γ dans A,

$$g_{\alpha\beta\gamma} = s_{\alpha\beta} + s_{\beta\gamma} + s_{\gamma\alpha} \qquad \text{sur} \quad U_{\alpha\beta\gamma}.$$

Donc si on pose

$$G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \partial s_{\alpha\beta},$$

on a

$$\delta G_{\alpha\beta} = \delta H_{\alpha\beta},$$
$$\partial G_{\alpha\beta} = \partial H_{\alpha\beta},$$

et

$$G_{\alpha\beta} + G_{\beta\gamma} + G_{\gamma\alpha} = 0.$$

Cette relation nous permet de définir sur chaque U_α l'opérateur différentiel

$$K_\alpha = \sum_{\gamma \in A} G_{\alpha\gamma}\psi_\gamma.$$

Ces opérateurs sont tels que pour tout α, β de A,

$$G_{\alpha\beta} = K_\beta - K_\alpha \qquad \text{sur } U_{\alpha\beta}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} C_{2k,\alpha} - \delta K_\alpha &= C_{2k,\beta} - \delta H_{\alpha\beta} - \delta K_\alpha \\ &= C_{2k,\beta} - \delta(G_{\alpha\beta} + K_\alpha) \\ &= C_{2k,\beta} - \delta K_\beta \\ C_{2k+1,\alpha} - \partial K_\alpha &= C_{2k+1,\beta} - \partial K_\beta. \end{aligned}$$

Donc, si on pose sur chaque U_α

$$\begin{aligned} u *'_\alpha v &= \exp \nu^{2k} K_\alpha \big(\exp -\nu^{2k} K_\alpha(u) * \exp \nu^{2k} K_\alpha(v)\big) \\ &= \sum_{r \geq o} \nu^r C'_{r,\alpha}(u,v) \quad \forall u, v \in C^\infty(U_\alpha), \end{aligned}$$

on a quel que soit α, β,

$$C'_{r,\alpha} = C'_{r,\beta} \quad \forall \quad r < 2k+2.$$

Ce qui achève la preuve, par induction sur r.

Théorème: V-2-2 [4]
Soit (M, F) une variété symplectrique, alors il existe un produit-star sur M.

Démonstration
Conservons les notations de la démonstration précédente. En particulier partons des produits star $*_\alpha$ sur chaque U_α, coïncidant jusqu'à l'ordre k. La donné de $*_\alpha$ permet de définir une application linéaire

$$\Phi_\alpha : C^\infty(U_\alpha)/\mathbb{R} \rightarrow Der(*_\alpha),$$

(où Der $(*_\alpha)$ désigne l'ensemble des dérivations de $(N_\nu(U_\alpha), *_\alpha)$ par

$$\Phi_\alpha(f)(u) = \frac{1}{2\nu}(f *_\alpha u - u *_\alpha f).$$

On considère l'ensemble C_α des champs conforme sur U_α:

$$C_\alpha = \{\xi_\alpha / \ L_{\xi_\alpha} F = F \quad \text{sur} \quad U_\alpha\}.$$

Cet ensemble est un espace affine d'espace vectoriel directeur $C^\infty(U_\alpha)/_{\mathbb{R}}$, puisque si ξ_α et ξ'_α sont deux tels champs, le champs $\xi'_\alpha - \xi_\alpha$ est hamiltonien

$$L_{\xi'_\alpha - \xi_\alpha} F = 0,$$

et il existe une fonction f, définie à une constante prés, telle que

$$\xi'_\alpha - \xi_\alpha = H_f.$$

Fixons un point d'origine et des coordonnées canoniques (x^i) dans U_α et considérons le champ:

$$\xi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad = \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r},$$

($2n$ est la dimension de M). ξ est un champ conforme.
D'autre part, soit g une fonction C^∞ sur U_α alors la seule solution C^∞ de l'équation

$$L_\xi \varphi + (2p-1)\varphi = g \quad (p > 0)$$

est

$$\varphi(r) = 2\int_0^1 s^{4p-3} g(sr) ds.$$

Si ξ' est un autre champ conforme, on a

$$\begin{aligned} L_{\xi'}\varphi + (2p-1)\varphi &= L_\xi \varphi + (2p-1)\varphi + \{f, \varphi\} \\ &= g - \partial\varphi(f). \end{aligned}$$

On suppose donc que, pour chaque U_α, on se donne, en plus du produit star $*_\alpha$, une application affine

$$D_\alpha : \quad C_\alpha \to Der(*_\alpha)$$

telle que

$$1) \ D_\alpha(\xi_\alpha) = \nu D_\nu + L_{\xi_\alpha} + \sum_{r>0} D_\alpha^{2r}\ (\xi_\alpha)$$

$$2) \ \ D_\alpha(\xi_\alpha + H_f) = D_\alpha(\xi_\alpha) + \Phi_\alpha(f).$$

On va prolonger simultanément le recollement des $*_\alpha$ et la définition des D_α.
Remarquons que ces hypotheses imposent déjà que, si $\xi_{\alpha\beta}$ est conforme sur $U_{\alpha\beta}$,

$$D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r>0} \nu^{2r}(D_\beta^{2r}(\xi_{\alpha\beta}) - D_\alpha^{2r}(\xi_{\alpha\beta}))$$

est à l'ordre $2k$ près une dérivation de $*_\alpha$ ou $*_\beta$,i.e.,

$$\sum_{2s+t=r}(D_\beta^{2s}-D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(C_t(u,v)) =$$
$$C_t((D_\beta^{2s}-D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(u),v)+C_t(u,(D_\beta^{2s}-D_\alpha^{2s})(\xi_{\alpha\beta})(v))$$

(Dans cette formule, C_t désigne soit $C_{t,\alpha}$ soit $C_{t,\beta}$). Pour $r=2$, on trouve

$$\delta(D_\beta^2-D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta})=0$$

et pour $r=3$, on obtient

$$\partial(D_\beta^2-D_\alpha^2)(\xi_{alpha\beta})=0.$$

Il existe donc une fonction $f_{\alpha\beta}^2$ dans $C^\infty(U_{\alpha\beta})$ telle que

$$(D_\beta^2-D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta})=\partial f_{\alpha\beta}^2.$$

Remarquons que $f_{\alpha\beta}^2$ ne dépend pas de $\xi_{\alpha\beta}$ car, si $\xi'_{\alpha\beta}$ est un autre champ conforme sur $U_{\alpha\beta}$, alors

$$(D_\beta^2-D_\alpha^2)(\xi'_{\alpha\beta})=(D_\beta^2-D_\alpha^2)(\xi_{\alpha\beta}).$$

On peut donc écrire

$$(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})=\nu^2\ \Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^2)+\nu^4D_1^4(\xi_{\alpha\beta})+\ldots.$$

Supposons que pour un certain $t<k$ on ait pu écrire $(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})$ sous la forme:

$$(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})=\sum_{r=1}^{t-1}\nu^{2r}\ \Phi_\alpha\ (f_{\alpha\beta}^{2r})+\nu^{2t}D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta})+\nu^{2t+2}\ D_{t-1}^{2t+2}\ (\xi_{\alpha\beta})+\ldots\ldots$$

avec des fonctions $f_{\alpha\beta}^{2r}$ ne dépendant pas de $\xi_{\alpha\beta}$, pour tout $r<t$. En écrivant que

$$(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})-\sum_{r=1}^{t-1}\nu^{2r}\Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r})$$

est une dérivation à l'ordre $2k$ près de $*_\alpha$ et $*_\beta$, on obtient

$$\partial D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta})=\delta D_{t-1}^{2t}(\xi_{\alpha\beta})=0$$

et donc il existe $f_{\alpha\beta}^{2t}$ dans $C^\infty(U_{\alpha\beta})$ telle que

$$(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})=\sum_{r=1}^{t}\nu^{2r}\Phi_\alpha(f_{\alpha\beta}^{2r})+\nu^{2t+2}D_t^{2t+2}(\xi_{\alpha\beta})+\ldots$$

Le raisonnement ci-dessus nous prouve que $f_{\alpha\beta}^{2t}$ ne dépend pas de $\xi_{\alpha\beta}$. Il en résulte que $(D_\beta-D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta})$ est de la forme

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta}) = \sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r}\Phi_\alpha(f^{2r}_{\alpha\beta}) + \nu^{2k} D^{2k}_{\alpha\beta} + ...$$

Maintenant,

$$D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - \exp -\nu^{2k} H_{\alpha\beta} \circ D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) \circ \exp \nu^{2k} H_{\alpha\beta},$$

si $H_{\alpha\beta}$ sont les opérateurs différentiels introduits plus haut, est une dérivation à l'ordre $2k+2$ près de $*_\alpha$. On a donc:

$$D^{2k}_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - D^{2k}_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - (L_{\xi_{\alpha\beta}} H_{\alpha\beta} + 2kH_{\alpha\beta}) = \left[-\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r}\Phi_\alpha(f^{2r}_{\alpha\beta})\right]_{2k} + \partial g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}).$$

où $\left[-\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r}\Phi_\alpha(f^{2r}_{\alpha\beta})\right]_{2k}$ désigne les termes d'ordre $2k$ de $\left[-\sum_{r=1}^{k-1} \nu^{2r}\Phi_\alpha(f^{2r}_{\alpha\beta})\right]$ et $g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta})$ est un élément de $C^\infty(U_{\alpha\beta})$ qui, cette fois, peut dépendre de $\xi_{\alpha\beta}$.
Précisément, si on change $\xi_{\alpha\beta}$ en $\xi_{\alpha\beta} + H_f$, on a

$$\begin{aligned} D^{2k}_\alpha(\xi_{\alpha\beta} + H_f) =& D^{2k}_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\alpha}(f,\cdot), \\ D^{2k}_\beta(\xi_{\alpha\beta} + H_f) =& D^{2k}_\beta(\xi_{\alpha\beta}) + C_{2k+1,\beta}(f,\cdot) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D^{2k}_\alpha(\xi_{\alpha\beta} + H_f) -& D^{2k}_\beta(\xi_{\alpha\beta} + H_f) - (L_{\xi_{\alpha\beta}+H_f} H_{\alpha\beta} + 2kH_{\alpha\beta}) = \\ & D^{2k}_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - D^{2k}_\beta(\xi_{\alpha\beta}) - (L_{\xi_{\alpha\beta}} H_{\alpha\beta} + 2kH_{\alpha\beta}) - \partial H_{\alpha\beta}(f,.) - L_{H_f} H_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \partial g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) &= \partial g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}) - (\partial H_{\alpha\beta})(f,.) - \{f, H_{\alpha\beta}\} + H_{\alpha\beta}(\{f,\cdot\}) \\ &= \partial\big(g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta}) + H_{\alpha\beta}(f)\big). \end{aligned}$$

On choisira donc un $\xi_{\alpha\beta}$ pour chaque $U_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$), un $g^{2k}_{\alpha\beta}$ pour ce $\xi_{\alpha\beta}$ et on posera

$$g^{2k}_{\alpha\beta}(\xi_{\alpha\beta} + H_f) = g^{2k}_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta}(f) \quad \forall f \in C^\infty(U_{\alpha\beta}).$$

Si $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ est un champ conforme sur $U_{\alpha\beta\gamma}$, on aura alors

$$(D_\beta - D_\alpha)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_\gamma - D_\beta)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + (D_\alpha - D_\gamma)(\xi_{\alpha\beta\gamma}) = 0.$$

Ceci implique par induction que

$$f^2_{\alpha\beta} + f^2_{\beta\gamma} + f^2_{\gamma\alpha} = c^2_{\alpha\beta\gamma} \quad \in \mathbb{R}$$

.
.

$$f_{\alpha\beta}^{2(k-1)} + f_{\beta\gamma}^{2(k-1)} + f_{\gamma\alpha}^{2(k-1)} = c_{\alpha\beta\gamma}^{2(k-1)} \quad \in \mathbb{R}$$

et donc

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} H_{\alpha\beta\gamma} + 2kH_{\alpha\beta\gamma}) = \partial g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}).$$

Mais on a vu que $H_{\alpha\beta\gamma}$ est de la forme $\partial h_{\alpha\beta\gamma}$ et on a

$$-(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} \partial h_{\alpha\beta\gamma} + 2k\partial h_{\alpha\beta\gamma}) = -\partial(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}} h_{\alpha\beta\gamma} + (2k-1)h_{\alpha\beta\gamma}).$$

Donc, si $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ est la solution C^∞ de l'equation

$$-\big(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}\varphi + (2k-1)\varphi\big) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}),$$

on aura

$$\partial\big(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) + (2k-1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma})\big) = 0,$$

où

$$L_{\xi_{\alpha\beta\gamma}}(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) + (2k-1)(\varphi_{\alpha\beta\gamma} - h_{\alpha\beta\gamma}) = c'_{\alpha\beta\gamma}.$$

La seule solution C^∞ de cette équation est constante, donc

$$H_{\alpha\beta\gamma} = \partial\varphi_{\alpha\beta\gamma}.$$

Mais $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$ ne dépend pas du choix de $\xi_{\alpha\beta\gamma}$ puisque, si on considère un autre champ conforme $\xi'_{\alpha\beta\gamma} = \xi_{\alpha\beta\gamma} + H_f$ on a l'équation

$$-\big(L_{\xi'_{\alpha\beta\gamma}}\varphi + (2k-1)\varphi\big) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi'_{\alpha\beta\gamma}) = g_{\alpha\beta\gamma}^{2}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + H_{\alpha\beta\gamma}(f).$$

Soit encore

$$-\big(L_{\xi'_{\alpha\beta\gamma}}\varphi + (2k-1)\varphi\big) - \{f,\varphi\} = g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma}) + \{\varphi_{\alpha\beta\gamma}, f\},$$

dont une solution C^∞ est bien sûr: $\varphi = \varphi_{\alpha\beta\gamma}$ et c'est la seule.
Maintenant, pour tout champ conforme $\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sur $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$,

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) = g_{\alpha\beta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\gamma\alpha}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}).$$

Donc,

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) - g_{\alpha\beta\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) + g_{\alpha\gamma\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) - g_{\beta\gamma\delta}^{2k}(\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}) = 0$$

et, par construction, si

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \varphi_{\alpha\beta\delta} + \varphi_{\alpha\gamma\delta} - \varphi_{\beta\gamma\delta},$$

alors

$$\left(L_{\xi_{\alpha\beta\gamma\delta}}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}+(2k-1)\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}\right)=0 \quad \left(\begin{smallmatrix}**\\ **\end{smallmatrix}\right).$$

Donc la seule solution C^∞ de $\left(\begin{smallmatrix}**\\ **\end{smallmatrix}\right)$ est zéro.
Mais alors on est ramené à la fin de la preuve précédente puisque

$$H_{\alpha\beta\gamma}=\partial\varphi_{\alpha\beta\gamma},$$

et

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}=0.$$

On pose donc commme ci-dessus

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta} &= \sum_\gamma \varphi_{\alpha\beta\gamma}\ \psi_\gamma \quad \text{sur} \quad U_{\alpha\beta} \\ G_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta}-\partial s_{\alpha\beta} \\ K_\alpha &= \sum_\gamma G_{\alpha\gamma}\psi_\gamma \end{aligned}$$

et on change les produits-star en

$$\begin{aligned} u *'_\alpha v &= \exp \nu^{2k}K_\alpha\ (\exp -\nu^{2k}K_\alpha u *_\alpha \exp -\nu^{2k}K_\alpha v) \\ &= \sum_{r\geq 0} \nu^r C'_{r,\alpha}(u,v). \end{aligned}$$

Alors on a

$$C'_{2k,\alpha}=C'_{2k,\beta},$$

et

$$C'_{2k+1,\alpha}=C'_{2k+1,\beta}.$$

Enfin, on pose

$$D'_\alpha(\xi_\alpha)=\exp\nu^{2k}\ K_\alpha\circ D_\alpha(\xi_\alpha)\circ\exp-\nu^{2k}\ K_\alpha,$$

et on a poussé la recurrence à l'ordre $k+1$. Ce qui achève la preuve du thérème.

3- Parametrisation des orbites de la représentation coadjointe

Soit G un groupe de Lie connexe. On garde les notations de 1 et on rappelle d'abord des constructions de Pedersen [27]. Pour tout ξ dans $\mathfrak{g}^*$, on définit la forme bilinéaire

$$B_\xi\ :\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\rightarrow\mathbb{R}$$

par

$$B_\xi(X,Y) = <\xi,[X,Y]> \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Soit ξ_0 un élément de $\mathfrak{g}^*$ et soit $W = G/_{G_{\xi_0}}$ l'orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ passant par ξ_0. Supposons qu'il existe une polarisation réelle en ξ_0 (c'est à dire qu'il existe une sous-algèbre $Ad(G_{\xi_0})$-invariante $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}$ soit un sous-espace isotrope maximal pour B_{ξ_0}). Soit H_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On pose

$$H = G_{\xi_0}.H_0,$$

H et H_0 sont deux sous-groupes fermés de G.

Pour tout point $\xi = g.\xi_0$ de W, on note

$$\mathfrak{h}_\xi = Ad(g)(\mathfrak{h}),$$

et

$$H_\xi = g.H.g^{-1}.$$

Considérons

$$F_\xi = \{X^*_\xi, X \in \underline{h}_\xi\}.$$

F_ξ est une polarisation géométrique invariante de W, pour tout s dans G, si on note $\gamma(s)$ l'application de W dans W définie par:

$$\gamma(s)(\xi) = s.\xi,$$

alors on a:

$$\gamma(s)_*F_\xi = F_{s.\xi}.$$

Le sous-groupe H définit une structure de fibré sur $W = G/_{G_{\xi_0}}$ de base $G/_H$:

$$\begin{aligned} \Pi \ : W = G/_{G_{\xi_0}} &\to G/_H \\ g.\xi_0 &\mapsto g.H \end{aligned}$$

(si $g.\xi_0 = g'.\xi_0$ alors $g^{-1}g'$ est dans G_{ξ_0} et par suite dans H.)

Les fibres sont difféomorphes à $H/_{G_{\xi_0}} \simeq H.\xi_0$. En effet, la fibre passant par $\xi = s.\xi_0$ est

$$L(\xi) = \{s.h.\xi_0/h \in H\}.$$

En particulier $\mathfrak{h}_\xi = \mathfrak{h}_{\xi'}$ si ξ et ξ' sont dans la même fibre, on le notera parfois par $\mathfrak{h}_{\Pi(\xi)}$.

On considère les deux sous-espaces de $C^\infty(W)$

$$\mathcal{E}^0_F(W) = \{\varphi \in C^\infty(W)/\varphi(s.h.\xi) = \varphi(s.\xi) \quad \forall s \in G \quad \text{et} \quad \forall h \in H\},$$

et

$$\mathcal{E}^1_F(W) = \{\varphi \in C^\infty(W)/\{\varphi, f\} \in \mathcal{E}^0_F(W) \quad \forall f \in \mathcal{E}^0_F(W)\}.$$

Remarques: V-3-1

(i) Le crochet de Poisson de deux éléments de $\mathcal{E}_F^1(W)$ est dans $\mathcal{E}_F^1(W)$ car celui-ci est le normalisateur pour le crochet de Poisson de $\mathcal{E}_F^0(W)$. On appelle parfois le sous espace $\mathcal{E}_F^1(W)$ l'espace des fonctions (géométriquement) quantifiables sur W.

(ii) F_ξ étant invariante, on peut montrer que, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, la restriction de $\tilde{X}$ à W qu'on note toujours $\tilde{X}$ est dans $\mathcal{E}_F^1(W)$

Soit $\mathfrak{m}$ un suplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \qquad \text{(en tant qu'espaces vectoriels)},$$

et soit $X_1, ..., X_n$ une base de $\mathfrak{m}$ contenant n éléments, si $2n = dim\ W$. Considérons

$$O_\mathfrak{m} = \{\xi \in W / X_1, ..., X_n \text{ soient linéairement indépendants modulo } \mathfrak{h}_\xi\},$$

alors on a les deux lemmes suivants

Lemme: V-3-1 [27]
$O_\mathfrak{m}$ est un ouvert $F-$invariant de W.

Lemme: V-3-2 [27]
Si on note $(G/_H)_\mathfrak{m}$ l'image de $O_\mathfrak{m}$ par Π, alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi\ :\ O_\mathfrak{m} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times (G/_H)_\mathfrak{m} \\ \xi &\mapsto (<\xi, X_1>, ..., <\xi, X_n>, \Pi(\xi)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n \times (G/_H)_\mathfrak{m}$.

De plus l'image de $(G/_H)_\mathfrak{m}$ est égal à $\mathbb{R}^n \times (G/H)_\mathfrak{m}$ si et seulement si $\mathfrak{h}$ satisfait la condition de Pukanszky.

Soit (V, τ), $\tau = (x^1, ..., x^n)$, une carte de $G/_H$ telle que

$$V \subset (G/_H)_\mathfrak{m}.$$

Considérons $U = \Pi^{-1}(V)$. On définit alors les fonctions $t_1, ..., t_n$ et $q_1, ..., q_n$ sur U par

$$\begin{aligned} t_i(\xi) &= <\xi, X_i> \\ q_i(\xi) &= x^i(\Pi(\xi)) \end{aligned}$$

pour tout i de 1 à n et tout point ξ de U.

Lemme: V-3-3 [27]
Si $\sigma = (t_1, ..., t_n, q_1, ..., q_n)$, alors (U, σ) est une carte de $O_\mathfrak{m}$.

Il est bien évident qu'on peut définir $\mathcal{E}_F^0(O)$ et $\mathcal{E}_F^1(O)$ pour chaque ouvert O de W.

Lemme: V-3-4 [27]
On a

$$\mathcal{E}_F^0(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) / \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = 0 \ \ \forall i \in \{1, ..., n\}\}$$
$$\mathcal{E}_F^1(U) = \{\varphi \in C^\infty(U) / \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j} = 0 \ \ \forall i, j \in \{1, ..., n\}\}.$$

Lemme: V-3-5 [27]
Tout élément φ de $\mathcal{E}_F^1(U)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \tilde{X}_i/_U + \varphi_0.$$

où $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$ sont des éléments de $\mathcal{E}_F^0(U)$.
En particulier, pour tout X de $\mathfrak{g}$, il existe α_0, α_1,..., α_n dans $\mathcal{E}_F^0(U)$ tels que

$$\tilde{X}/_U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i + \alpha_0.$$

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de zéro dans $\mathfrak{h}$ tel que l'application exp soit un difféomorphisme (de $\mathcal{V}$ dans un ouvert de H_0). Définissons l'application

$$\chi \ : \exp \mathcal{V} \to \mathbb{C} \ ,$$

par

$$\chi(\exp X) = e^{<\xi_0, X>}.$$

Soit G_0 un ouvert de G de la forme $\exp \mathcal{U} . \exp \mathcal{V}$. Considérons

$$E = \{\varphi \ : G_0 \to \mathbb{C} \ /\varphi(x.h) = \chi(h^{-1})\varphi(x) \quad \forall x \in G_0, \forall h \in \exp \mathcal{V} \text{ tels que } x.h \in G_0\}.$$

Posons

$$V_0 = G_0/_H.$$

Remarquons qu'à toute application C^∞

$$f \ : V_0 \to \mathbb{C}$$

(qu'on peut voir comme élément de $\mathcal{E}_F^0(U)$), on peut associer un élément φ de E en posant

$$\varphi(\exp X. \exp Y) = \chi(\exp -Y) f(\exp X.H).$$

On définit localement un objet ρ (une représentation locale de G) de la façon suivante Pour tout a et x de G_0 tels que $a^{-1}x$ soit encore dans G_0 et pour tout φ dans E, on définit $(\rho(a)\varphi)(x)$ par

$$(\rho(a)\varphi)(x) = \varphi(a^{-1}x).$$

Si a, b et x sont dans G_0 et tels que ab, $(ab)^{-1}x$ et $a^{-1}x$ appartiennent à G_0, alors on a

$$(\rho(ab)\varphi)(x) = (\rho(a) \circ \rho(b)\varphi)(x).$$

On a aussi, si h et x sont assez près de l'identité

$$\varphi(xh) = \varphi(xhx^{-1}.x) = \chi(h^{-1})\varphi(x).$$

Pour tout h dans $\exp \mathcal{V} \cap (x^{-1}. \exp \mathcal{V}.x)$, on pose:

$$\chi_x(xhx^{-1}) = \chi(h^{-1}).$$

On a

$$(\rho(xh^{-1}x^{-1})\varphi)(x) = \varphi(xhx^{-1}x) = \varphi(xh) = \chi_x(xhx^{-1})\varphi(x) = \chi(h^{-1})\varphi(x).$$

Définissons maintenant $d\rho(X)$ sur E par

$$d\rho(X)\varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(exp - tX.x)/_{t=0}.$$

Remarquons que $d\rho(X)\varphi$ est défini en tout point x de G_0 et pour tout X dans $\mathfrak{g}$, que cette fonction appartient à E et qu'on a bien

$$d\rho([X,Y]) = d\rho(X) \circ d\rho(Y) - d\rho(Y) \circ d\rho(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

$d\rho$ est une représentation de $\mathfrak{g}$. Calculons cette représentation sur $C^\infty(V)$. Soit X dans $\mathfrak{h}$. Puisque

$$\varphi(\exp tX.x) = \chi(\exp -tX)\varphi(x) = e^{-t<\xi_0,X>}\varphi(x),$$

alors on a

$$(d\rho(Ad_x(-X))\varphi)(x) =< \xi_0, -X > \varphi(x).$$

Donc si $Y = Ad_x(-X)$ est dans $\mathfrak{h}_{x.\xi_0}$, on a

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) =< \xi_0, Ad_{x^{-1}}Y > \varphi(x) =< \xi, Y > \varphi(x) \quad (\xi = x.\xi_0).$$

Mais si on écrit Y sous la forme $\tilde{Y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tilde{X} + \alpha_0$, alors on a

$$\alpha_i(\Pi(\xi)) = 0 \qquad \forall i > 0.$$

En effet,

$$Y_\xi^*(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Pi(\xi))X_i^*(u) = 0,$$

soit

$$\alpha_i(\Pi(\xi)) = 0 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\},$$

car les X_i^* engendrent l'espace tangent en $\Pi(\xi)$ à $G/_H$. Donc, on a

$$\tilde{Y}(\xi) = \alpha_0(\Pi(\xi))$$

et par suite

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) = \alpha_0(\Pi(\xi))\varphi(x).$$

Maintenant si Y est dans $\mathfrak{m} => X_1, ..., X_n <$, alors, on a

$$\tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{X}_i \qquad \text{avec} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

donc,

$$(d\rho(Y)\varphi)(x) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp -tY.\Pi(\xi))/_{t=0} = Y_\xi^*(\varphi)(x).$$

Notons $Diff^1(V)$ l'espace des opérateurs différentiels d'ordre au plus 1 sur V et définissons l'application

$$\delta \ : \mathcal{E}_F^1(U) \to Diff^1(V),$$

par

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i^* + \beta_0$$

si

$$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0.$$

Le fait que $d\rho$ soit une représentation nous permet de généraliser à notre situation le résultat suivant de Pedersen

Proposition: V-3-1 [27]
L'application δ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Démonstration
Soient

$$u = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0 \quad \text{et} \quad v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \tilde{X}_i + \gamma_0$$

deux éléments de $\mathcal{E}_F^1(U)$. Alors,

$$\{u,v\} = \{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i + \beta_0, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \tilde{X}_j + \gamma_0\}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\beta_i (X_i^* \gamma_j) \tilde{X}_j + \beta_i \gamma_j X_i^*(\tilde{X}_j) - \gamma_j (X_j^* \beta_j) \tilde{X}_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i^* \gamma_0 - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j^* \beta_0.$$

On a

$$\delta(u) \circ \delta(v)\varphi = (\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i^* + \beta_0)(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j (X_j^* \varphi) + \gamma_0 \varphi)$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i (X_i^* \gamma_j) X_j^* \varphi + \beta_i \gamma_j (X_i^* . X_j^* \varphi) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_0 X_i^* \varphi$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i^* \gamma_0 . \varphi + \sum_{j=1}^{n} \beta_0 \gamma_j X_j^* \varphi + \beta_0 \gamma_0 \varphi.$$

Donc,

$$(\delta(u) \circ \delta(v) - \delta(v) \circ \delta(u))\varphi$$

est égal à

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\beta_i (X_i^* \gamma_j) X_j^* - \gamma_j (X_j^* \beta_i) X_i^* + \beta_i \gamma_j [X_i, X_j]^*)\varphi + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_0 X_i^* \varphi - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \beta_0 X_j^* \varphi$$
$$+ (\sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i^* \gamma_0 - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j^* \beta_0)\varphi + \sum_{j=1}^{n} \beta_0 \gamma_j X_j^* \varphi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \beta_i X_i^* \varphi,$$

c'est à dire à

$$\delta(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_0 \tilde{X}_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \beta_0 \tilde{X}_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i (X_i^* \gamma_0) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (X_j^* \beta_0) + \sum_{j=1}^{n} \beta_0 \gamma_j \tilde{X}_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_0 \beta_i \tilde{X}_i)\varphi$$
$$+ \delta(\sum_{i,j=1}^{n} (\beta_i (X_i^* \gamma_j) \tilde{X}_j - \gamma_j (X_j^* \beta_i) \tilde{X}_i))\varphi + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \gamma_j [X_i, X_j]^* \varphi.$$

Puisque $[X_i, \tilde{X}_j]$ est dans $\mathcal{E}_F^1(U)$, on a

$$\delta([X_i, \tilde{X}_j]) = d\rho([X_i, X_j]) = d\rho(X_i) \circ d\rho(X_j) - d\rho(X_j) \circ d\rho(X_i)$$
$$= \delta(\tilde{X}_i) \circ \delta(\tilde{X}_j) - \delta(\tilde{X}_j) \circ \delta(\tilde{X}_i).$$

D'autre part, on a

$$\delta(\sum_{i,j=1}^{n} \beta_i\gamma_j[X_i,\tilde{X}_j]) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i\gamma_j\delta([X_i,\tilde{X}_j])$$

car β_i et γ_j sont dans $\mathcal{E}_F^0(U)$. On en déduit

$$\delta(u)\circ\delta(v) - \delta(v)\circ\delta(u) = \delta(\{u,v\}).$$

Le fait que δ est surjective est évident. D'autre part si $\delta(u) = 0$, alors on a

$$\beta_i(\Pi(\xi)) = 0 \quad \forall i \geq 0, \quad \forall \xi \in U$$

u est donc nul.

Théorème: V-3-1 [4]

Soit $W = G/_{G_{\xi_0}}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ de dimension $2n$. Supposons qu'il existe une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en ξ_0. Alors il existe un recouvrement de W par des cartes de Darboux $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ tel que
pour tout X dans $\mathfrak{g}$, $\tilde{X}/_{U_\alpha}$ s'écrit sous la forme

$$\tilde{X}/_{U_\alpha}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(q)p_j + \alpha_0(q),$$

où

$$\varphi_\alpha(\xi) = (p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n),$$

et α_0,..., α_n sont des fonctions C^∞ dépendant seulement des variables q.

De plus ces ouverts apparaissent comme des ouverts d'un fibré affin L au dessus de $G/_H$.

Si $\mathfrak{h}$ satisfait la condition de Pukanszky, alors $(\varphi_\alpha(U_\alpha))_\alpha$ recouvre le fibré affin L en entier.

Démonstration

Considérons une carte (U, σ) autour de ξ_0 comme dans le lemme V-3-2 alors pour tout i dans $\{1, ..., n\}$, $\frac{\partial}{\partial t_i}$ est un élément de $Diff^1(V)$. Notons p_i l'image de cet élément par l'application inverse de δ

$$p_i = \delta^{-1}(\frac{\partial}{\partial t_i}).$$

$(U, (p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n))$ est une carte de W autour de ξ_0 telle que

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0.$$

Si u est un élément de $\mathcal{E}_F^1(U)$, alors

$$u(\xi) = \delta^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\frac{\partial}{\partial t_i} + \alpha_0(t)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(q)p_i + \alpha_0(q).$$

En particulier pour chacune des fonctions $\tilde{X}$.

Cette construction peut se faire autour d'un élément quelconque de W. On a donc un atlas de telles cartes sur W.

Maintenant, si on se place dans une intersection $U \cap U'$, on a un changement de cartes

$$q \mapsto q' = \Psi(q) \quad p \mapsto p' = \Theta(p, q).$$

Mais p' est dans $\mathcal{E}_F^1(U \cap U')$ comme p, donc

$$p' = \sum_{i=1}^{n} A_i(q) p_i + A_0(q).$$

Les fonctions

$$(p, q) \mapsto (p', q')$$

définissent alors un fibré affin L au dessus de $G/_H$ et W. apparaît comme un ouvert de ce fibré.

La fin de la démonstration est une conséquence directe du lemme V-3-2.

4- Existence de produit-star covariant

Soit $W = G/_{G_{\xi_0}}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ de dimension $2n$ admettant une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en ξ_0. Considérons un ouvert U de W qui est le domaine d'une carte de l'atlas défini dans le théorème V-3-1.

Définition: V-4-1

Soit

$$T \ : N(U) \times ... \times N(u) \to N(u)$$

une application r-linéaire. On dira que T possède la propriété P_k pour k dans $\mathbb{N}$ si et seulement si:

$$T(u_1, ..., u_r) \in C^\infty(q)^{d_1 + ... + d_r - k}[p] \quad \forall (u_1, ..., u_r) \in C^\infty(q)^{d_1}[p] \times ... \times C^\infty(q)^{d_r}[p],$$

où $C^\infty(q)^d[p]$ est l'espace des fonctions C^∞ sur U polynômiales en p de degré inférieur ou égél à d.

Si t désigne le plus grand des k tels que T possede P_k, on dira que T est d'ordre t.

Lemme: V-4-1

Soit $T = \sum T_{\alpha_1, ..., \alpha_r} D^{\alpha_1} \otimes ... \otimes D^{\alpha_r}$ une application r-linéaire différentielle alors T est d'ordre t si et seulement si, pour tous les multi-indices α_1,..., α_r, on a

$$T_{\alpha_1, ..., \alpha_r} \in C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j - t}[p]$$

(si $\alpha_i = (\alpha_i^1, ..., \alpha_i^n, ..., \alpha_i^{2n})$).

Démonstration

Supposons que T soit d'ordre t et supposons qu'il existe α_1,..., α_r tel que

$$T_{\alpha_1,...,\alpha_r} \notin C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^r \sum_{j=i}^n \alpha_i^j - t}[p].$$

Appelons $(\alpha_{0,1}, ..., \alpha_{0,r})$ le plus petit (pour l'ordre lexicographique) des $2rn-$uplets vérifiant la propriété précédente et considérons les fonctions u_1,..., u_r définies par

$$u_k(p,q) = p_1^{\alpha_{0,k}^1} ... p_n^{\alpha_{0,k}^n} . q_1^{\alpha_{0,k}^{n+1}} ... q_n^{\alpha_{0,k}^{2n}}.$$

Alors, on a

$$T(u_1, ..., u_r) = T_{\alpha_{0,1},...,\alpha_{0,r}} \notin C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \alpha_{0,i}^j - t}[p],$$

ce qui contredit le fait que T est d'ordre t. La réciproque est évidente.

Proposition: V-4-1

Rappelons que δ désigne l'opérateur de cohomologie de Hochschild. Soit T une application linéaire de $N(U)$ dans $N(U)$ différentielle, n-c et telle que δT soit d'ordre t. Alors, quitte a la corriger par un cocycle, T est d'ordre t.

Démonstration

Soit $T = \sum_\alpha T_\alpha D^\alpha$ comme dans la proposition et supposons que T ne soit pas d'ordre d'ordre t. Il existe alors α tel que:

$$T_\alpha \notin C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^n \alpha^i - t}[p].$$

Si $|\alpha| = 1$ alors $T_\alpha D^\alpha$ est un cocycle, on peut donc le retrancher de T.

Supposons maintenant qu'il existe α tel que

$$T_\alpha \notin C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^n \alpha^i - t}[p] \quad \text{et} \quad |\alpha| \neq 1.$$

Appelons α_0 le plus grand des $2n$-uplets vérifiant cette propriété, et i_0 le plus petit des entiers tel que

$$\alpha_0^{i_0} \neq 0.$$

Alors le coefficient des termes d'ordre $(\alpha_0 - [i_0], [i_0])$ dans δT est

$$T_{\alpha_0} \notin C^\infty(q)^{\sum_{i=1}^n \alpha_0^i - t}[p],$$

ce qui contredit le fait que δT est d'ordre t.

Définition: V-4-2

Soit $A_\nu = \sum_{k\geq 0} \nu^k A_k$ une application r-linéaire formelle de $N_\nu(U) \times ... \times N_\nu(U)$ dans $N_\nu(U)$, A_ν est dite correcte si et seulement si pour tout k dans$\mathbb{N}$, A_k est d'ordre au plus k.

Théorème: V-4-1 [4]
Soit G un groupe de Lie connexe et soit $W = G/_{G_{\xi_0}}$ une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ admettant une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ en ξ_0. Alors il existe un produit-star covariant sur W.

Démonstration
Remarquons tout d'abord que si un produit-star sur W est correct, il sera covariant, puisque les fonctions $\tilde{X}$ sont affines dans les variables p.

La démonstration de ce théorème reste identique à celle du théorème V-2-2. En effet il suffit de considérer un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ de W comme dans le théorème V-3-1 et de choisir une partition de l'unité ψ_α ne dépendant que des variables q subordonnée à ce recouvrement et de faire les remarques suivantes

i) On peut choisir les produit-star $(*_\alpha)$ corrects car ceux de Moyal dans les variables p et q le sont.

ii) On peut choisir $A_{\alpha\beta}$ correcte de même que $L_{X_{\alpha\beta}}$ et par suite $H_{\alpha\beta}$ sera correcte.

iii) On peut imposer à $D_\alpha(\xi_\alpha)$ d'être correcte, mais puisque $H_{\alpha\beta}$ est correcte, alors:

$$D_\alpha(\xi_{\alpha\beta}) - \exp -\nu^{2k} H_{\alpha\beta} \circ D_\beta(\xi_{\alpha\beta}) \circ \exp \nu^{2k} H_{\alpha\beta}$$

sera encore correcte.

iv) Puisque la partition de l'unité est fonction des seuls q, K_α sera correcte et par suite $*'_\alpha$ et $D'_\alpha(\xi_\alpha)$ seront aussi corrects.

REFERENCES

[1] D. Arnal *Differential Cohomology of $C^\infty(G^*)$* Journ. of Geometry and Physics, Vol 4, p. 439-467 (1987)

[2] D. Arnal, J.C. Cortet, P. Molin et G. Pinczon *Covariance and Geometrical invariance in $\star$ quantization* J. Math. Phys. 24 (2) p. 276-283 (1983).

[3] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt *Representation of compact Lie groups and Quantisation by deformation* Acad. Royale de Belgique LXXIV 45 ,p. 123-141 (1988)

[4] D. Arnal J. Ludwig et M. Masmoudi *Covariant star-products* a paraitre

[5] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer " *Deformation and Quantization*" Ann. of Phys. 111 p. 61-151 (1978)

[6] R. Berger "*Cohomologie différentiable des algèbres de polynomes, de leur localisées ou de leur complétées et des variétés*" Public. Univ. Lyon 5/A (1982).

[7] J. Dixmier Les algèbres enveloppantes Gauthier-Villars,Paris (1972)

[8] M. Cahen, M. De Wilde et S. Gutt Local cohomology of the algebra of C^* functions on a connected manifold Letters in Mathematical Physics, p. 157-167 (1980)

[9] P. Cartier *Théorie des algèbres semi-simples* Exp. Séminaire Sophus Lie, Ecole Normale Supérieure, Paris 1954-1955

[10] C. Chevalley et S. Eilenberg *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebra* Trans of the American Math. Soc 63, p.85-124 (1948)

[11] M. Gerstenhaber *On the deformations of rings and algebras* Ann. of Math., 79, p. 59-103 (1964).

[12] S. Gutt *Déformations formelles de l'algèbre des fonctions différentiables sur une variété symplectique*, Thèse, Université de Bruxelles;

[13] S. Gutt *An explicit $\star$-product on the cotangent bundle to a Lie group* Lett. Math. Phys. 7 p. 249-258 (1983).

[14] M. De Wilde, S. Gutt et P.B.A. Lecomte *A propos des deuxième et troisième espaces de cohomologie de l'algèbre de Lie de Poisson d'une variété symplectique* Ann. Inst. H. Poincaré, Vol.40,1, p.77-83 (1984).

[15] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star-products, existence, equivalence, derivations.* NATO ASI Series, C247, p.897-960 (1988)
et
M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star-product and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifold* Lett. Math. Phys. 7, p. 487-496

(1983).

[16] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star products revisited* Preprint Université de Liège.

[17] M. De Wilde et P.B.A. Lecomte *Existence of star-products on exact symplectic manifolds* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35,2, p.117-143 (1985).

[18] A. Lichnerowicz *Les variétés de Poisson et leurs algèbred de Lie associées* J. of Diff. Geom . p.253-300 (1977)

[19] A. Lichnerowicz *Variétés de Poisson et feuilletages* . Ann. Fac. Toulouse p. 195-262 (1982)

[20] A. Lichnerowicz *Sur les algèbres formelles assiciées par déformation a une variété symplectique* Ann. di Matem, t123,p.287-330 (1980).

[21] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka "*Weyl manifolds and deformation quantization*" To be published in Advances in Mathematics.

[22] M. Masmoudi *Tangential formal deformation of the Poisson bracket and tangential star-product on a regular Poisson manifold* (a paraitre) ,J.G.P

[23] M. Masmoudi *Une deuxième démonstration de l'existence de produits-star tangentiel sur une varété de Poisson régulière* (a paraitre) Cont. Aca. Des. Scien

[24] D. Melotte *Cohomologie de Chevalley associée aux variétés de Poisson* thèse Université de Liege (1988-1989)

[25] O.M. Neroslavsky et A.T. Vlassov "*Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique*" C.R. Acad. SC. Paris, Serie I, 292 p. 71-73 (1981)

[26] A. Nijenhuis et R. Richardson *Deformation of Lie algebra structures* J. of Math. and Mechanics, 17, p.89-105 .(1967)

[27] N.V. Pedersen *On the symplectic structure of coadjoint orbits of (solvable) Lie groups and applications, I* Math. Annalen 281 p. 633-669 (1988).

[28] J.A. Schouten*On the differential operators of first order in tensor calculs* Conv. Int. Geom. Diff. Italia (1953).

[29] J. Vey *Déformation du crochet de Poisson sur une variété symplectique* Comment. Math. Helv. 50, p. 421-454 (1975).

[30] H. Weyl *The classical groups, their invariants and representations* Princeton Math . (1946).

[31] J. Peetre *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels* Math Scandinavica,8, p. 116-120.

[32] J.E. Moyal, Proceedings Cambridge Philosophical Society145, p.99 (1949).

[33] D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt *Deformations on coadjoint orbits* J.G.P Vol 3 n. 3 (1986).