T H E S E

Présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

SPECIALITE MATHEMATIQUES

par

Benjamin CAHEN

STAR REPRESENTATIONS INDUITES

Soutenue le 30 septembre 1992 devant la Commission d'Examen

M. FLATO	Président Rapporteur
D. ARNAL	Directeur de Recherche
S. GUTT	Rapporteur
J. LUDWIG	Examinateur
J. RAWNSLEY	Rapporteur
A. ROUX	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Didier ARNAL qui m'a guidé avec gentillesse tout au long de la réalisation de cette thèse, me faisant ainsi bénéficier de sa compétence, de sa grande disponibilité et de son enthousiasme communicatif.

Je remercie Simone GUTT et Jean LUDWIG d'avoir montré un interêt constant pour ce travail et de m'avoir apporté leur aide pour résoudre certaines difficultés techniques.

Je remercie Michel CAHEN d'avoir eu la bienveillance de s'interesser à ce travail durant le séjour que j'ai effectué, à son initiative, à l'Université Libre de Bruxelles en Juin 1990.

Je remercie André ROUX qui m'a incité à entreprendre ce travail et m'a toujours prodigué ses encouragements.

Je suis conscient de l'honneur que me fait Moshé FLATO en acceptant de présider ce Jury et je l'en remercie sincèrement.

Je remercie John RAWNSLEY d'avoir bien voulu être membre du Jury et rapporteur.

Je remercie Hédi BENAMOR et Emmanuel TSENKOS qui m'ont initié au maniement du "TEX", ainsi que Sylvie MAGIPINTO pour sa participation au travail de dactylographie.

Je remercie enfin toute l'équipe du Département de mathématiques de l'Université de Metz, l'ambiance sympathique qui y règne ayant beaucoup contribué à me permettre de concilier activités d'enseignement et de recherche.

A mes parents

Introduction

1. Soit G un groupe de Lie connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$.

La méthode des orbites (Duflo, Kirillov, Kostant) se propose de donner une description du dual unitaire $\hat{G}$ du groupe G (ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G) à partir des orbites coadjointes de G, l'action coadjointe de $g \in G$ sur $\xi \in \mathfrak{g}^*$ étant donnée par:

$$< g.\xi, X >=< \xi, Adg^{-1}X > \qquad X \in \mathfrak{g} .$$

Cette méthode est directement inspirée du cas abélien où les représentations unitaires irréductibles de G sont des caractères, c'est à dire des représentations de dimension un.

Si par exemple G est le groupe additif $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ s'identifient à $\mathbb{R}^n$, l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G devient l'identité et tout caractère χ de G est du type:

$$\chi(expX) = e^{i<\xi,X>} \qquad X \in \mathfrak{g}$$

pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$, ce qui détermine une bijection entre $\hat{G}$ et $\mathfrak{g}^*$. D'autre part, les caractères de G permettent de construire la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ (outil essentiel de l'analyse harmonique euclidienne!), isométrie de $L^2(G)$ dans $L^2(\mathfrak{g}^*)$ définie par:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathfrak{g}} e^{i<\xi,X>}\varphi(expX)dX \tag{1}$$

où $\xi \in \mathfrak{g}^*$ et φ est une fonction continue à support compact sur G.

Si G est le tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ alors $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ s'identifient également à $\mathbb{R}^n$, l'application exponentielle devient la surjection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{T}^n$ et il faut remplacer dans ce qui précède $\mathfrak{g}^*$ par l'ensemble des éléments ξ de $\mathfrak{g}^*$ entiers c'est à dire tels que:

$$expX \longmapsto e^{i<\xi,X>}$$

définisse effectivement un caractère de G, ce qui équivaut alors à:

$$\xi \in \mathbb{Z}^n$$

et la transformation de Fourier est unitaire entre $L^2(G)$ et $L^2(\mathbb{Z}^n)$. Toutes ces remarques s'étendent au cas d'un groupe abélien quelconque i.e. du type $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$.

La tentative de généraliser immédiatement cette construction au cas où le groupe G n'est plus abélien échoue bien sûr, ne serait-ce que parce que, pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$, l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}$:

$$X \longmapsto i < \xi, X >$$

n'est en général pas une représentation de dimension un de $\mathfrak{g}$, la propriété:

$$(2) \qquad i < \xi, [X,Y] >= i < \xi, X > i < \xi, Y > -i < \xi, Y > i < \xi, X >= 0$$

n'étant pas vérifiée, ce qui, puisque:

$$< \xi, [X,Y] >=< X^-(\xi), Y >$$

où:

$$X^-(\xi) = \frac{d}{dt}(exp(-tX).\xi)|_{t=0}$$

équivaut au fait que l'orbite coadjointe de ξ n'est plus réduite à $\{\xi\}$ comme dans le cas abélien.

D'où les idées de base de la méthode des orbites que nous rappelons ici pour simplifier dans le cas - historiquement le premier abordé [22] - où le groupe G est nilpotent (connexe) simplement connexe:

1) remplacer le point $\xi \in \mathfrak{g}^*$ par son orbite $O(\xi)$

2) introduire une sous algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, appelée polarisation, contenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(\xi)$ du stabilisateur $G(\xi)$ de ξ et maximale pour la propriété:

$$< \xi, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] >= 0$$

3) remarquer que l'orbite $O(\xi)$ est entière, c'est à dire telle que pour:

$$(X_1, X_2, ..., X_k) \in \mathfrak{g}(\xi)^k$$

l'égalité:

$$expX_1.expX_2...expX_k = 1$$

entraine:

$$e^{i<\xi, X_1+X_2+...+X_k>} = 1$$

ce qui est bien une propriété de l'orbite et non du seul point ξ, et que l'on peut donc exponentier la représentation de $\mathfrak{h}$:

$$X \longmapsto i < \xi, X >$$

en un caractère χ, uniquement déterminé par ξ, du groupe $H = exp\mathfrak{h}$.

4) induire unitairement χ à G pour obtenir une représentation unitaire irréductible π_O de G dont la classe d'équivalence ne dépend que de l'orbite $O = O(\xi)$.

On obtient ainsi une bijection entre $\hat{G}$ et l'ensemble $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites coadjointes de G, la bijection réciproque étant donnée par la "formule du caractère de Kirillov": pour toute représentation unitaire irréductible π de G il existe une unique orbite coadjointe O telle que:

$$(3) \qquad Tr\pi(\varphi) = \int_O (F\varphi)(\xi) d\mu_O(\xi)$$

où:

.φ est une fonction de classe C^∞ à support compact sur G et:

$$(F\varphi)(\xi) = \int_{\mathfrak{g}} \varphi(expX)e^{i<\xi,X>}dX$$

pour $\xi \in \mathfrak{g}^*$ (dX désignant la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{g}$).

.on a posé:

$$\pi(\varphi) = \int_G \pi(g)\varphi(g)dg$$

pour $\pi \in \hat{G}$ (dg désignant la mesure de Haar de G), l'application:

$$\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$$

où:

$$\hat{\varphi} : \pi \longmapsto \pi(\varphi)$$

pouvant alors être considérée comme une généralisation de la transformation de Fourier euclidienne.

.ω_O désignant la 2-forme symplectique naturelle de l'orbite O:

$$(\omega_O)_\xi(X^-(\xi), Y^-(\xi)) =< \xi, [X,Y] >$$

pour $\xi \in O$,$X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}$,
$d\mu_O$ est la mesure définie sur O par:

$$d\mu_O = \frac{1}{N!}\omega_O^N \quad (2N = dimO)$$

Introduisant la mesure dm définie sur $\hat{G} \simeq \mathfrak{g}^*/G$ par:

$$\int_{\mathfrak{g}^*} f(\xi)d\xi = \int_{\mathfrak{g}^*/G} (\int_O f_{|O}(\xi)d\mu_O(\xi))dm(O)$$

où $d\xi$ est la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{g}^*$,
on peut déduire de la "formule du caractère "précédente la formule de Plancherel de G[32]:

$$\int_{\mathfrak{g}^*/G} Tr\pi_O(\varphi)dm(O) = \varphi(e)$$

qui s'écrit également:

$$\int_G |\varphi(g)|^2 dg = \int_{\mathfrak{g}^*/G} \|\pi_O(\varphi)\|_{HS}^2 dm(O)$$

Des résultats analogues ont été obtenus pour d'autres classes de groupes, en particulier dans le cas résoluble (Auslander et Kostant), compact (Kirillov) ou encore semi-simple

(Duflo, Gutkin) au prix de certaines complications dans le programme de construction des représentations à partir des orbites coadjointes (introduction de polarisations $\mathfrak{h}$ complexes, considération de tous les caractères χ du stabilisateur $G(\xi)$ de différentielle $i\xi$) et dans la "formule du caractère", dans laquelle il faut généralement se restreindre aux fonctions φ à support "assez petit"(i.e. inclus dans un voisinage donné de l'identité), et corriger $\varphi \circ exp$ par un facteur j^{-1} où:

$$j(X) = Det(\frac{sh(adX/2)}{adX/2}) \quad X \in \mathfrak{g} .$$

2. Une nouvelle version de la méthode des orbites a été proposée à la suite des travaux de F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnérowicz, D.Sternheimer [8] et C.Fronsdal [14] sur la quantification par déformation.

L'idée est de remplacer dans la relation (2) le produit usuel des fonctions sur l'orbite coadjointe O par un produit associatif noté $*$ tel que, pour tout X et Y de $\mathfrak{g}$:

$$(2') \qquad i\tilde{X} * i\tilde{Y} - i\tilde{Y} * i\tilde{X} = i[X,\tilde{Y}]$$

$\tilde{X}$ désignant la fonction définie sur O par $X \in \mathfrak{g}$:

$$\tilde{X}(\xi) = < \xi, X > \ .$$

Remarquons que, notant $\{\ \}$ le crochet de Poisson associé à la structure symplectique de O introduite plus haut, la relation (2') s'écrit:

$$i\tilde{X} * i\tilde{Y} - i\tilde{Y} * i\tilde{X} = i\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}.$$

Un tel produit associatif peut être obtenu à partir d'un produit$*$ sur l'orbite O [8], c'est à dire d'une déformation formelle du produit usuel de $C^\infty(O)$, de la forme:

$$(4) \qquad u * v = u.v + \hbar\{u, v\} + \sum_{n \geq 2} \hbar^n C_n(u, v)$$

où $u * v$ est une série formelle en $\hbar$ à coefficients dans $C^\infty(O)$, et pour $n \geq 2$, C_n est un opérateur bidifférentiel nul sur les constantes tel que:

$$C_n(u, v) = (-1)^n C_n(v, u).$$

En effet si le produit $*$ considéré est de plus covariant:

$$C_{2n+1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0 \quad X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}$$

et si la série (4) converge pour $\hbar = \frac{1}{2i}$, au moins pour $u = \tilde{X}$ et $v = \tilde{Y}$, on obtiendra bien la relation (2').

Une fois introduit un tel produit associatif, les étapes suivantes consistent, de façon très schématique, d'une part à retrouver la (ou les) représentation(s) π de G attachée(s) à O par la méthode des orbites traditionnelle en extrayant de $(C^\infty(O),*)$ une sous algèbre $\mathcal{A}$ contenant les fonctions $\tilde{X}(X \in \mathfrak{g})$ et admettant une (ou des) représentation(s) T telle(s) que:

$$d\pi(X) \circ T(f) = T(i\tilde{X} * f)$$

pour $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathcal{A}$, et d'autre part à définir une application E_O de G dans un espace de fonctions ou de distributions sur O vérifiant au moins formellement:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}E_O(exptX) &= E_O(exptX) * i\tilde{X} \\ E(1) &= 1 \end{cases}$$

et possédant la propriété:

$$E_O(g) * E_O(g') = E_O(g.g')$$

pour g et g' éléments de G, le produit associatif $*$ étant éventuellement supposé étendu aux distributions.

L'application E_O appelée exponentielle* ou encore représentation* de G permet de généraliser de façon très naturelle la notion de transformée de Fourier euclidienne en introduisant la transformation de Fourier adaptée $\mathcal{E}_O$:
si φ est une fonction C^∞ à support compact sur G, $\mathcal{E}_O(\varphi)$ est la fonction ou la distribution sur O définie par:

$$\mathcal{E}_O(\varphi) = \int_G \varphi(g)E_O(g)dg.$$

La "formule du caractère" prend alors la forme très simple:

$$Tr\pi_O(\varphi) = \int_G \mathcal{E}_O(\varphi)d\mu_O$$

et de plus on obtient une transformation de Fourier globale $\mathcal{E}$ en notant $\mathcal{E}(\varphi)$, pour φ fonction C^∞ à support compact sur G, la fonction ou la distribution définie sur le dual entier de $\mathfrak{g}$ (i.e. la réunion des orbites coadjointes entières de G) par:

$$\mathcal{E}(\varphi)\mid_O = \mathcal{E}_O(\varphi).$$

La transformation $\mathcal{E}$ permet, comme nous le verrons ultérieurement sur des exemples précis de donner une écriture particulièrement élégante de la formule de Plancherel de G.

Dans le cas où le groupe G est nilpotent simplement connexe, ou plus généralement exponentiel, D.Arnal et J.C.Cortet ont donné une réalisation de ce "programme*" [5],[6] en utilisant:

1) l'existence sur l'espace symplectique $(\mathbb{R}^{2k}, \sigma)$ où:

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} dx_j \wedge dx_{j+k}$$

d'un produit $*$ en quelque sorte canonique appelé produit $*$ de Moyal (voir par exemple [8]) et défini par:

$$u * v = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!} \nu^r \Lambda^{i_1 j_1} \ldots \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1 .. i_r} u \partial_{j_1 .. j_r} v$$

pour u et v appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$, Λ désignant le 2-tenseur associé à σ.

2) le fait que chaque orbite coadjointe O de G admette dans ce cas une carte globale $\Psi : \mathbb{R}^{2k} \longmapsto O$ telle que:

a) Ψ est un difféomorphisme symplectique, c'est à dire tel que: $\Psi^*(\omega_O) = \sigma$.

b) pour $X \in \mathfrak{g}$ la fonction $\tilde{X} \circ \Psi$ est, lorsque $(x_{k+1}, .., x_{2k})$ est fixé, un polynôme en les variables $x_1, x_2, ..., x_k$ de degré au plus égal à 1.

Alors l'application Ψ permet de transporter sur O le produit associatif obtenu à partir du produit $*$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$ (en posant $\nu = \frac{1}{2i}$) ce qui donne un produit associatif sur O vérifiant la relation (2').

3. Une alternative à la démarche précédente consiste à commencer plutôt par définir un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite coadjointe O, c'est à dire une correspondance linéaire bijective $f \longmapsto A_f$ entre une classe $\mathcal{A}$ de fonctions sur O appelées symboles et une classe d'opérateurs telle que, pour $X \in \mathfrak{g}$, la fonction $\tilde{X}$ soit un symbole, et:

$$A_{\tilde{X}} = \frac{1}{i} d\pi(X) \tag{5}$$

π désignant une représentation de G associée à O et l'égalité précédente signifiant qu'il existe un sous espace dense de l'espace de la représentation π sur lequel pour tout $X \in \mathfrak{g}$ les opérateurs $A_{\tilde{X}}$ et $\frac{1}{i} d\pi(X)$ soient définis et coïncident.

Remarquons que, partant d'un tel calcul symbolique, il est possible de retrouver un produit associatif sur $\mathcal{A}$ en posant pour f_1 et f_2 éléments de $\mathcal{A}$:

$$A_{f_1 * f_2} = A_{f_1} \circ A_{f_2} \tag{6}$$

ce produit $*$ vérifiant alors la relation (2') d'après (5).

Un exemple important de tel calcul symbolique est le suivant:
Le (célèbre) calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^{2k}$ est la correspondance $f \longmapsto W_f$ définie par:

$$W_f(u)(y) = \int\int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} e^{i(p,q)} f(y + \frac{p}{2}, q) u(y + p) dp dq$$

où u est une fonction C^∞ nulle à l'infini sur $\mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$, dp et dq sont des mesures de Lebesgue convenablement normalisées de $\mathbb{R}^k$ et $(\, , \,)$ est le produit scalaire habituel de $\mathbb{R}^k$.

Le produit associatif sur $\mathbb{R}^{2k}$ obtenu à partir du calcul de Weyl par (6) coïncide en fait avec le produit associatif sur $\mathbb{R}^{2k}$ déduit du produit $*$ de Moyal ([8] par exemple).

Il n'est donc pas surprenant que, dans le cas où G est nilpotent, on obtienne un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite coadjointe O en transportant le calcul de Weyl à l'aide de la carte Ψ introduite plus haut [40],[7].

Un autre exemple important est l'utilisation du calcul symbolique de Berezin sur une variété kahlerienne [11],[30] par D.Arnal, M.Cahen et S.Gutt dans le but de définir les représentations $*$ associées aux représentations unitaires irréductibles d'un groupe semi-simple compact connexe et aux représentations de la série discrète holomorphe d'un groupe semi-simple [3],[4].

4. Le présent travail propose une construction de calcul symbolique adapté, dans le cas où G est semi-simple, au dessus des orbites coadjointes O associées à la série principale de G.

Le point de départ est le paramétrage d'un ouvert dense de l'orbite O par le produit $T^*N \times O'$ où T^*N est le fibré cotangent d'un groupe nilpotent N et O' une orbite coadjointe d'un groupe compact.

Ce paramétrage est un symplectomorphisme pour les structures symplectiques usuelles de ces variétés. La construction du calcul symbolique au dessus de O utilise alors d'une part le calcul symbolique de Berezin mentionné plus haut au dessus de O', et d'autre part un calcul symbolique sur T^*N qui apparait en fait comme une généralisation du calcul de Weyl. Par ailleurs, ce calcul symbolique sur T^*N définit un produit associatif qui coïncide avec le produit associatif obtenu à partir du produit $*$ construit par S.Gutt sur le fibré cotangent d'un groupe de Lie [16]. Le calcul symbolique $f \longmapsto A_f$ ainsi obtenu au dessus de O est symétrique, i.e. pour tout symbole f:

$$A_f^* = A_{\bar{f}}$$

et induit une isométrie de l'espace des symboles de carré intégrable sur O dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt d'un espace de Hilbert.

Ce calcul symbolique permet de retrouver les représentations unitaires de G associées à l'orbite O (ici une famille finie de représentations appartenant à la série principale de G) et, pour chacune de ces représentations, de définir une représentation $*$ et une transformée de Fourier adaptées associées.

Dans le cas où G est par exemple un groupe complexe, la transformation de Fourier globale alors obtenue réalise une isométrie entre $L^2(G)$ et un espace de fonctions de carré intégrable définies sur le dual entier de G.

5. Les orbites coadjointes d'un groupe produit semi direct $G = V \times_\sigma K$ où V est un espace vectoriel réel, K un groupe de Lie connexe et $\sigma : K \longrightarrow GL(V)$ ont été décrites par J.H.Rawnsley [33].

On dira que G est un groupe de Poincaré généralisé lorsque K est semi-simple non compact et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K admet une décomposition de Cartan $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}$

telle que:

$$dim(\mathfrak{p}) = dimV - 1$$

Dans ce cas, une orbite coadjointe O de G dont le "petit groupe" [33],[35] est un sous groupe compact maximal de K peut être paramétrée par le produit $T^*Z \times O'$ où Z est un K espace homogène difféomorphe à $\mathbb{R}^k$ et O' une orbite coadjointe du "petit groupe".

Il est alors possible d'utiliser ce paramétrage pour construire comme au paragraphe précédent un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite O supposée entière.
Toutefois, la situation est ici plus délicate (Z n'étant pas un groupe), et du coup la construction obtenue est moins heureuse, bien que là aussi le calcul symbolique obtenu permette de définir une représentation $*$ et une transformée de Fourier adaptée associées à la représentation unitaire (irréductible) de G attachée à l'orbite O.

I.Calcul symbolique au dessus d'une orbite coadjointe d'un groupe semi-simple

1.Préliminaires-notations.

Dans tout ce chapitre, G est un groupe de Lie réel connexe semi-simple non compact de centre fini. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, θ une involution de cartan de G dont on notera également θ la différentielle et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée. On note K le sous groupe connexe (compact) de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{a}$ une sous algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$, M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K et $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. On peut décomposer $\mathfrak{g}$ en sous espaces poids relativement à $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \sum_{\lambda \in \Delta} \mathfrak{g}_\lambda$$

où:

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \quad [H, X] = \lambda(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\} \quad \text{pour} \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*$$

et:

$$\Delta \; = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus (0) / \mathfrak{g}_\lambda \neq (0)\} \,.$$

On choisit un ordre sur Δ et on pose :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\lambda > o} \mathfrak{g}_\lambda \qquad \bar{\mathfrak{n}} = \sum_{\lambda < o} \mathfrak{g}_\lambda \,.$$

On note A le sous groupe connexe (abélien) de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, N et $\bar{N}$ les sous groupes connexes (nilpotents) de G d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{n}$ et $\bar{\mathfrak{n}}$.

Toutes ces notations sont très classiques : voir [37] par exemple.

2.Paramétrage d'un ouvert dense d'une orbite coadjointe de G.

La forme de Killing β de $\mathfrak{g}$ permettant d'identifier $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}$, il est indifférent de parler d'orbites adjointes ou coadjointes de G.

Posons $\xi_0 = \xi_1 + \xi_2$ où ξ_1 est un élément régulier de $\mathfrak{a}$ (i.e. $\lambda(\xi_1) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \Delta$) et $\xi_2 \in \mathfrak{m}$.

Soit $O(\xi_0)$ l'orbite de ξ_0 sous l'action de G. Les faits suivants sont bien connus [37] :

1) Si $\xi \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ est tel que $\det(ad\ \xi|_{\mathfrak{n}}) \neq 0$, alors l'application $z \longmapsto Ad\ z.\ \xi - \xi$ est un difféomorphisme de N dans $\mathfrak{n}$.

2) $\bar{N}.N.M.A$ est un ouvert dense de G, son complémentaire dans G étant une réunion finie de sous variétés de G de dimensions strictement inférieures à $dim\ \mathfrak{g}$.

D'autre part, on a :

Lemme 1.

Le stabilisateur de ξ_0 dans G est : $G(\xi_0) = M(\xi_2).A$ où $M(\xi_2)$ désigne le stabilisateur de ξ_2 dans M.

Preuve: partant de la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \bar{\mathfrak{n}}$, on vérifie sans peine que l'algèbre de Lie de $G(\xi_0)$ est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\xi_0) &= \{X \in \mathfrak{g}/[X, \xi_0] = o\} \\ &= \quad \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(\xi_2) \end{aligned}$$

où $\mathfrak{m}(\xi_2)$ désigne l'algèbre de Lie de $M(\xi_2)$.

Soit alors B le normalisateur de $\mathfrak{g}(\xi_0)$ dans G.
Si $g = k \exp X$ appartient à B avec k dans K et X dans $\mathfrak{p}$ (exp désignant bien sûr l'application exponentielle), alors $\theta(g) = k \exp(-X)$ appartient à B et $\theta(g)^{-1}g = \exp(2X)$ également.
Donc $ad(2X)$, diagonalisable, de mêmes sous espaces propres que $e^{ad(2X)} = Ad \exp(2X)$, normalise $\mathfrak{g}(\xi_0)$.
En particulier: $[X, \xi_0]$ appartient à $\mathfrak{g}(\xi_0) = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}(\xi_2)$, d'où :

$$X \in (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \exp(2X) \in A.$$

Ainsi $\exp X$ appartient au suos groupe A de B, donc $B = (B \cap K).A$ et, comme $G(\xi_0) \subset B$: $G(\xi_0) = (G(\xi_0) \cap K).A$
Soit alors k un élément de $G(\xi_0) \cap K$; $Ad\ k$ laisse stable $\mathfrak{g}(\xi_0)$ et $\mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{g}(\xi_0) \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ et k appartient au normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. D'autre part : $Ad\ k.\xi_0 = \xi_0$ d'où $Ad\ k.\xi_1 = \xi_1$. Comme ξ_1 est supposé régulier on a donc : $k \in M$, ce qui termine.

La proposition suivante donne un paramétrage d'un ouvert dense de l'orbite $O(\xi_0)$ par $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}} \times O(\xi_2)$ où $O(\xi_2)$ désigne l'orbite de ξ_2 sous l'action de M et peut être identifiée à l'aide de β à une orbite coadjointe de M.

Ce paramétrage avait déjà été utilisé du reste par M. Duflo pour établir une "formule du caractère" dans le cas semi-simple [12].

Proposition 1.

L'application:

$$\Psi : (y, Z, \varphi) \longmapsto Ad\ y(\xi_1 + \varphi + \theta(Z))$$

est un difféomorphisme de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}} \times O(\xi_2)$ dans un ouvert dense $\tilde{O}(\xi_0)$ de l'orbite $O(\xi_0)$.

Preuve: d'après la remarque préliminaire 2), $\tilde{O}(\xi_0) = Ad(\bar{N}.N.M.A).\xi_0$ est un ouvert dense de $O(\xi_0)$.

Soit alors:

$$\xi = Ad(y\ z\ m\ a).\xi_0$$

où $y \in \bar{N}$, $z \in N$, $m \in M$ et $a \in A$.
On a :

$$\xi = Ad\ y\ Ad\ z\ Ad\ m.\xi_0$$

et comme:

$$\det\big(ad(Ad\ m.\xi_0)|_{\mathfrak{n}}\big) = \det(ad\ \xi_0|_{\mathfrak{n}}) \neq 0\ ,$$

on peut écrire d'après la remarque préliminaire 1) :

$$\xi = Ad\ y\big(Ad\ m.\xi_0 + \theta(Z)\big) \quad \text{où} \quad Z \in \bar{\mathfrak{n}}$$

soit encore:

$$\xi = Ad\ y\big(\xi_1 + Ad\ m.\xi_2 + \theta(Z)\big)\ .$$

D'autre part l'injectivité de l'application Ψ se déduit du lemme 1 et la régularité de Ψ est une conséquence immédiate de la proposition 2 suivante.

Proposition 2.

Notons respectivement Ω et ω les 2-formes symplectiques naturelles des orbites $O(\xi_0)$ et $O(\xi_2)$ et identifions $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ au fibré cotangent $T^*\bar{N}$ par :

$$< (y,Z), \frac{d}{dt}\exp(tY)y\Big|_{t=0} >= \beta\big(\theta(Z), Ad\ y^{-1}Y\big) \quad \text{où} \quad y \in \bar{N},\quad Z \in \bar{\mathfrak{n}},\quad Y \in \bar{\mathfrak{n}}\ .$$

Si λ désigne la 1- forme de Liouville de $T^*\bar{N}$, alors :

$$\Psi^*\big(\Omega|_{\bar{O}(\xi_0)}\big) \quad = \quad -d\lambda \otimes \omega\ .$$

Preuve: ce résultat peut se vérifier par un calcul direct :

1) (Calcul de $d\lambda$) Soient Y et T deux éléments de $\bar{\mathfrak{n}}$.
Notons w le champ défini sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}} \simeq T^*\bar{N}$ par:

$$w(y,Z) = \frac{d}{dt}\big(\exp(tY)y, Z + tT\big)\Big|_{t=0}\ .$$

Alors:

$$\begin{aligned}\lambda_{(y,Z)}\big(w(y,Z)\big) &=< (y,Z), \frac{d}{dt}\exp(tY)y\Big|_{t=0}> \\ &= \beta\big(\theta(Z), Ad\ y^{-1}Y\big).\end{aligned}$$

Définissant de même le champ w' à partir de (Y',T') on a :

$$\begin{aligned}w'\big(\lambda(w)\big)(y,Z) &= \frac{d}{dt}\beta\Big(Ad(\exp(tY')y)\theta(Z+tT'), Y\Big)\Big|_{t=0} \\ &= \beta\big(Ad\ y\ \theta(Z), [Y,Y']\big) + \beta\big(Ad\ y\ \theta(T'), Y'\big).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\lambda([w,w'])(y,Z) = -\beta\big(\theta(Z), Ad\ y^{-1}[Y,Y']\big).$$

D'où :

$$d\lambda_{(y,Z)}\big(w(y,Z), w'(y,Z)\big) = \beta\big(Ad\ y\ \theta(T), Y'\big) - \beta\big(Ad\ y\ \theta(T'), Y\big) - \beta\big(Ad\ y\ \theta(Z), [Y,Y']\big).$$

2) (Calcul de $\Psi^*(\Omega) = \Omega'$) Soient Y et T deux éléments de $\bar{\mathfrak{n}}$ et ϕ un élément de $\mathfrak{m}$. Notons W le champ défini sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}} \times O(\xi_2)$ par:

$$W(y, Z, \varphi) = \frac{d}{dt}(\exp(tY)y, Z + tT,\ \exp(t\phi)\varphi)\Big|_{t=0} .$$

Le champ W se transporte par l'application Ψ en un champ $\tilde{W}$ défini sur $\tilde{O}(\xi_0)$ par :

$$\begin{aligned}
\tilde{W}\big(\Psi(y, Z, \varphi)\big) &= \frac{d}{dt} Ad(\exp\ tY\ y)\big(\xi_1 + (\exp\ t\phi)\varphi + \theta(Z + tT)\big)\Big|_{t=0} \\
&= Ad\ y\big([\phi, \varphi] + \theta(T)\big) + [Y, \Psi(y, Z, \varphi)].
\end{aligned}$$

Pour tout Z dans $\bar{\mathfrak{n}}$ privé d'une réunion finie d'hyperplans, on peut trouver U dans $\mathfrak{a}$ tel que :

$$[U, \theta(Z)] = \theta(T) - [\phi, \theta(Z)] .$$

Posons:

$$V = \phi + U .$$

On obtient alors :

$$\tilde{W}\big(\Psi(y, Z, \varphi)\big) = [Ad\ y\ V + Y, \Psi(y, Z, \varphi)].$$

Définissant de même un champ W' à partir de (Y', T', ϕ') puis U' et V' comme ci dessus, on a :

$$\begin{aligned}
\Omega'_{(y,Z,\varphi)}\big(w(y, Z, \varphi), w'(y, Z, \varphi)\big) &= \Omega_{\Psi(y,Z,\varphi)}\Big(\tilde{W}\big(\Psi(y, Z, \varphi)\big), \tilde{W}'\big(\Psi(y, Z, \varphi)\big)\Big) \\
&= \beta\big(\Psi(y, Z, \varphi), [AdyV + Y, AdyV' + Y']\big).
\end{aligned}$$

Soit encore:

$$\begin{aligned}
\Omega'_{(y,Z,\varphi)}\big(W(y, Z, \varphi), W'(y, Z, \varphi)\big) &= \beta\big(\Psi(y, Z, \varphi), [Y, Y']\big) \\
&+ \beta\big(\Psi(y, Z, \varphi), [Ad\ y\ V, Y']\big) \\
&+ \beta\big(\Psi(y, Z, \varphi), [Y, Ad\ y\ V']\big) \\
&+ \beta\big(\Psi(y, Z, \varphi), Ad\ y\ [V, V']\big).
\end{aligned}$$

Notant respectivement (1), (2), (3), (4) les termes précédents, on a :

$$\begin{aligned}
(1) &= \beta(\xi_1 + \varphi + \theta(Z), Ad\ y^{-1}[Y, Y']) = \beta\big(\theta(Z), Ad\ y^{-1}[Y, Y']\big) \\
(2) &= \beta\big(\xi_1 + \varphi + \theta(Z), [V, Ad\ y^{-1}Y']\big) \\
&= -\beta\big([V, \xi_1 + \varphi + \theta(Z)], Ad\ y^{-1}Y'\big) \\
&= -\beta\big([\phi, \varphi] + \theta(T), Ad\ y^{-1}Y'\big) \\
&= -\beta\big(\theta(T), Ad\ y^{-1}Y'\big).
\end{aligned}$$

De même :

$$(3) = \beta\big(\theta(T'), Ad\ y^{-1}Y\big) .$$

Enfin :

$$(4) = \beta(\xi_1 + \varphi + \theta(Z), [V, V']) = \beta(\xi_1 + \varphi + \theta(z), [\phi, \phi']) = \beta(\varphi, [\phi, \phi'])$$

car:

$$[V, V'] = [\phi + U, \phi' + U'] = [\phi, \phi'] \,.$$

D'où :

$$\Omega'_{(y,Z,\varphi)}(W(y, Z, \varphi), W'(y, Z, \varphi)) = \beta(Ad\ y\ \theta(Z), [Y, Y']) + \beta(Ad\ y\ \theta(T'), Y)$$

$$-\beta(Ad\ y\ \theta(T), Y') + \beta(\varphi, [\phi, \phi']).$$

Ceci prouve que Ω' est $-d\lambda \otimes \omega$ donc achève la preuve de la proposition 2 et, par suite, de la proposition 1.

3.Représentations associées aux orbites.

3.1 Le groupe M n'est en général pas connexe mais s'écrit : $M = Z'M_0$ où M_0 est la composante connexe de l'identité dans M et Z' un sous groupe fini du centre de M [27]. Par suite, si $\sigma \in \hat{M}$ alors $\sigma|_{M_0} \in \hat{M}_0$.

Inversement, $\sigma_0 \in \hat{M}_0$ étant donnée, l'ensemble des représentations σ de $\hat{M}$ telles que $\sigma|_{M_0} = \sigma_0$ est une famille finie $(\sigma_\chi)_\chi$ paramétrée par l'ensemble des caractères χ de Z' satisfaisant à la condition de compatibilité:

$$\chi_{|Z' \cap M_0} = \sigma_{0|Z' \cap M_0} \,.$$

On peut par ailleurs toujours supposer que les représentations σ_χ sont toutes réalisées dans le même espace, celui de σ_0.

3.2 Ce qui suit est essentiellement une version géométrique du théorème de Borel-Weyl-Bott (voir [37] par exemple).

Supposons que l'élément ξ_2 de $\mathfrak{m}$ du paragraphe 2 soit de plus choisi régulier c'est à dire tel que le stabilisateur $M_0(\xi_2)$ soit un tore maximal de M_0. On peut alors considérer, $\mathfrak{m}(\xi_2)$ désignant l'algèbre de Lie de $M_0(\xi_2)$, le système de racines $\Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}(\xi_2)^{\mathbb{C}})$ et l'ordonner en choisissant une chambre de Weyl dans $i\mathfrak{m}(\xi_2)^*$. Posons:

$$\Lambda = i\beta(\xi_2, .) \in i\mathfrak{m}(\xi_2)^*$$

et supposons que Λ soit analytiquement intégral, c'est à dire exponentiable en un caractère de $M(\xi_2)$, et dominant relativement à $\Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}(\xi_2)^{\mathbb{C}})$, c'est à dire dans la fermeture de la chambre de Weyl considérée.

Alors, Λ permet de définir une représentation σ_0 unitaire irréductible de M_0 réalisée dans l'espace de dimension finie E des sections holomorphes du fibré:

$$p: \quad L = M_0 \times_{e^\Lambda} \mathbb{C}/M_0(\xi_2) \longrightarrow M_0/M_0(\xi_2)$$

où $M_0/M_0(\xi_2)$ s'identifie à l'orbite $O(\xi_2)$.

Plus précisement, l'action de M_0 sur L étant définie par:

$$m'[m,u] = [m'm,u]$$

où $m \in M_0$, $m' \in M_0$, $u \in \mathbb{C}$ et où $[m,u] \in L$ désigne la classe d'équivalence:

$$\{(mh, (e^\Lambda)^{-1}(h)u) \quad h \in M_0(\xi_2)\} \ ,$$

on a:

$$\big(\sigma_0(m)s\big)\ (\varphi) = m.\ s(Ad\, m^{-1}\ \varphi) \quad m \in M_0 \quad \varphi \in O(\xi_2) \quad s \in E\ .$$

A partir de la structure hilbertienne de L donnée par :

$$< [m,u],[m,u'] >= u.\bar{u'} \quad m \in M_0 \quad u \in \mathbb{C} \quad u' \in \mathbb{C}\ ,$$

on définit la structure hilbertienne de E :

$$< s, s' >= \int_{O(\xi_2)} < s(\varphi), s'(\varphi) > d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi) \qquad s \in E, s' \in E$$

où:

$$d\mu_{O(\xi_2)} = \frac{1}{r!}\omega^r \quad \left(r = \frac{1}{2}\dim\ O(\xi_2)\right)$$

est la mesure de Liouville de $O(\xi_2)$.

3.3 Si σ_χ appartient à $\hat{M}$ est telle que $\sigma_\chi|_{M_0}$ soit la représentation σ_0 précédente et si $\nu = \beta(\xi_1,.)$ (avec les notations du paragraphe 2) appartient à $\mathfrak{a}^*$, on considère alors la représentation induite unitaire:

$$\tilde{\pi}_\chi = \mathrm{Ind}\,{}_{MAN}^{G}(\sigma_\chi \otimes \exp(i\nu) \otimes 1)\ .$$

Rappelons que $\tilde{\pi}_\chi$ peut être réalisée dans H complété de l'espace suivant:

$$\{F:\ K \longmapsto E \text{ continue } \ F(km) = \sigma_\chi(m)^{-1}F(k) \ \ \forall k \in K, \forall m \in M\}$$

pour la norme:

$$\| F \|^2 = \int_K \| F(k) \|^2\, dk$$

où dk désigne bien sûr la mesure de Haar de K et E est l' espace de σ_χ i.e. l'espace de σ_0.

Dans cette réalisation, on a:

$$\big(\tilde{\pi}_\chi(g)F\big)(k) = e^{-(\rho+i\nu)\log \tilde{a}(g^{-1}k)} F\big(\tilde{k}(g^{-1}k)\big) \quad g \in G \quad k \in K \ ,$$

où $\tilde{a}$ désigne la "projection" sur A dans la décomposition d'Iwasawa de G:

$$G = KAN$$

et $\rho \in \mathfrak{a}^*$ est la demi-somme des racines positives.

L'ensemble des représentations $\tilde{\pi}_\chi$ de $\hat{G}$ lorsque ν décrit $\mathfrak{a}^*$ et σ_χ décrit $\hat{M}$ est la série principale de G.

D'autre part, χ décrivant l'ensemble des caractères de Z' vérifiant la condition du 3.1, $(\tilde{\pi}_\chi)_\chi$ est la famille des représentations de G associées à l'orbite $O(\xi_0)$ par la "méthode des orbites" de même que $(\tilde{\sigma}_\chi)_\chi$ est la famille des représentations de M associées à l'orbite $O(\xi_2)$: voir, par exemple, [12].

3.4 En fait, on utilisera surtout ici une réalisation "non compacte" [25],[37] de la série principale de G : soit $L^2(\bar{N}, E)$ l'espace de Hilbert complété de l'espace :

$$\{\phi : \bar{N} \longmapsto E \text{ continue, à support compact}\}$$

pour la norme:

$$\| \phi \|^2 = \int_{\bar{N}} \| \phi(y) \|^2 \ dy$$

dy étant la mesure de Haar de $\bar{N}$.

On note π_χ la représentation de G d'espace $L^2(\bar{N}, E)$ définie par:

$$\big(\pi_\chi(g)\phi\big)(y) = e^{-(\rho+i\nu)\log\ a(g^{-1}y)} \sigma_\chi\big(m(g^{-1}y)\big)^{-1} \ \ \phi\big(\bar{n}(g^{-1}y)\big)$$

avec la notation :

$$g = \bar{n}(g)m(g)a(g)n(g) \qquad \text{où} \qquad \bar{n}(g) \in \bar{N}, m(g) \in M, a(g) \in A, n(g) \in N \ .$$

Alors π_χ est unitairement équivalente à $\tilde{\pi}_\chi$, l'opérateur d'entrelacement étant l'isométrie I : $H \longrightarrow L^2(\bar{N}, E)$ définie par:

$$\big(I(F)\big)(y) = e^{-(i\nu+\rho)\left(\log\ \tilde{a}(y)\right)} F\big(\tilde{k}(y)\big)$$

où $\tilde{a}$ et $\tilde{k}$ sont les "projections" respectives sur A et K dans la décomposition d'Iwasawa de G.

3.5 (Calcul de $d\pi_\chi$) On aura besoin plus loin de connaître l'expression de la différentielle $d\pi_\chi$ de la représentation π_χ ; le calcul se fait au moyen du lemme suivant:

Lemme 2.

Soient $P_{\mathfrak{a}}, P_{\mathfrak{m}}, P_{\mathfrak{n}}$ et $P_{\bar{\mathfrak{n}}}$ les projections relatives à la décomposition:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \oplus \bar{\mathfrak{n}} .$$

Alors si $X \in \mathfrak{g}$ et $y \in \bar{N}$ on a :

$$\frac{d}{dt} a(\exp\ tX\ y)\Big|_{t=0} = P_{\mathfrak{a}}(Ad\, y^{-1} X)$$

$$\frac{d}{dt} m(\exp\ tX\ y)\Big|_{t=0} = P_{\mathfrak{m}}(Ad\, y^{-1} X)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathfrak{n}}(\exp\ tX\ y)\Big|_{t=0} = (Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\, y^{-1}\ X))^{+}(y)$$

avec la notation :

$$\frac{d}{dt} \exp\ tW\ g\Big|_{t=0} = W^{+}(g) \quad W \in \mathfrak{g} \quad g \in G.$$

Preuve:

Soit:

$$\varphi :\ \bar{N} \times M \times A \times N \longrightarrow \bar{N}.M.A.N$$

l'application définie par:

$$(y, m, a, n) \longmapsto y.m.a.n$$

et soient Y, U, H et Z des éléments de, respectivement, $\bar{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$.
Si y appartient à $\bar{N}$, on a, e désignant l'élément neutre de G :

$$\begin{aligned}(T_{(y,e,e,e)}\varphi)(Y^{+}(y), U, H, Z) &= \frac{d}{dt} exptY.y.exptU.exptH.exptZ\Big|_{t=0} \\ &= \big(Y + Ad\ y(U + H + Z)\big)^{+}(y).\end{aligned}$$

D'où l'on déduit, en posant $X = Y + Ad\ y(U + H + Z)$:

$$\big(T_y\ a\big)\big(X^{+}(y)\big) = H = P_{\mathfrak{a}}(Ad\, y^{-1} X)$$

$$\big(T_y\ m\big)\big(X^{+}(y)\big) = U = P_{\mathfrak{m}}(Ad\, y^{-1} X)$$

$$\big(T_y \bar{n}\ \big)\big(X^{+}(y)\big) = Y^{+}(y) = \big(Ad\ y P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\, y^{-1} X)\big)^{+}(y)\ .$$

On obtient alors immédiatement :

Lemme 3.

La différentielle de la représentation π_χ est donnée, dans notre réalisation, par:

$$\begin{aligned}(d\pi_\chi(X)\phi)(y) &= (\rho + i\nu)\big(P_{\mathfrak{a}}(Ad\, y^{-1} X)\big)\phi(y) \\ &\quad + d\sigma_0\big(P_{\mathfrak{m}}(Ad\, y^{-1} X)\big)\phi(y) \\ &\quad - T_y\ \phi\big(Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\, y^{-1} X)^{+}\big)(y)\end{aligned}$$

où X est un élément de $\mathfrak{g}$, y de $\bar{N}$ et ϕ est un vecteur différentiable de π_χ.

La preuve du lemme précédent résulte directement de l'écriture de π_χ donnée plus haut et du lemme 2. Il est alors clair que l'espace des fonctions ϕ de classe C^∞ à support compact dans $\bar{N}$ est inclus dans l'espace des vecteurs différentiables de π_χ et on remarque que l'expression de $d\pi_\chi$ sur cet espace ne dépend pas de χ. L'espace des vecteurs C^∞ de π_χ dépend de χ par le choix des "conditions au bord" provenant de la "compactification" du fibré trivial $\bar{N} \times E \longrightarrow \bar{N}$ en $K \times_\sigma E/M \longrightarrow K/M$.

4.Calcul symbolique au dessus de l'orbite $O(\xi_2)$

Dans le but de construire un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite $O(\xi_0)$ on peut commencer, compte tenu du "paramétrage" de $O(\xi_0)$ utilisé, par construire un calcul symbolique adapté au dessus de l'orbite $O(\xi_2)$. On dispose alors du calcul symbolique de Berezin [3],[11],[30] dont on rappelle ici la définition et les principales propriétés.

On reprend les notations des paragraphes précédents.

Pour tout $q \in L \setminus \{\text{section nulle}\}$, on définit $\ell_q \in E^*$ par:

$$s(p(q)) = \ell_q(s)q \quad s \in E \ ,$$

puis $e_q \in E$ par:

$$\ell_q(s) = < s, e_q > \quad s \in E.$$

Si A est un opérateur de E, on définit une fonction $\check{A}$ sur $O(\xi_2)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, appelée symbole de A, par:

$$\check{A}(\varphi) = \frac{< A\ e_q, e_q >}{< e_q, e_q >} n, \quad \varphi \in O(\xi_2) \quad q \in p^{-1}\{\varphi\} \setminus \{0\} \ .$$

Cette définition a bien un sens car :

$$e_{uq} = \bar{u}^{-1} e_q \quad \text{pour} \quad u \in \mathbb{C}^*, q \in L \setminus \{\text{section nulle}\} \ .$$

Proposition 3. ([11] par exemple)

1) L'application $A \longmapsto \check{A}$ est un isomorphisme de l'espace $\mathcal{L}(E)$ des opérateurs de E dans l'espace des symboles.

2) (symétrie du calcul symbolique) Si A^* est l'opérateur adjoint de A, alors:

$$\check{A^*} = \overline{\check{A}}.$$

3) (invariance du calcul symbolique) Si $m \in M$ et $\varphi \in O(\xi_2)$, alors:

$$\check{A}(Ad\ m\ \varphi) = \widecheck{\left(\sigma_\chi(m)^{-1} \circ A \circ\ \sigma_\chi(m)\right)}(\varphi).$$

4) ("formule du caractère") Pour $A \in \mathcal{L}(E)$:

$$Tr\ A = \varepsilon \int_{O(\xi_2)} \breve{A} d\mu_{O(\xi_2)}$$

où ε est une constante liée à l'orbite $O(\xi_2)$.

Preuve:

1) Le "symbole double" $\tilde{A}$ défini dans un voisinage de la diagonale de $O(\xi_2) \times O(\xi_2)$ par :

$$\tilde{A}(\varphi, \varphi') = \frac{< Ae_q, e_{q'} >}{< e_q, e_{q'} >} \quad \text{où} \quad q \in p^{-1}\{\varphi\} \setminus \{0\},\ q' \in p^{-1}\{\varphi'\} \setminus \{0\},\ < e_q, e_{q'} > \neq 0$$

est une fonction holomorphe en φ et antiholomorphe en φ' donc déterminée par sa restriction à la diagonale:

$$\tilde{A}(\varphi, \varphi) = \breve{A}(\varphi).$$

D'autre part pour s dans E, φ dans $O(\xi_2)$ et q dans $p^{-1}\{\varphi\} \setminus \{0\}$, on a:

$$\begin{aligned}
(As)(\varphi) &= < As, e_q > q \\
&= < s, A^* e_q > q \\
&= \int_{O(\xi_2)} < s(\varphi'), (A^* e_q)(\varphi') > q \ \ d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi') \\
&= \int_{O(\xi_2)} < e_{q'}, A^* e_q >< s(\varphi'), q' > q \ \ d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi').
\end{aligned}$$

Or:

$$< e_{q'}, A^* e_q > = < Ae_{q'}, e_q > = \tilde{A}(\varphi', \varphi) < e_{q'}, e_q >$$

pour, q étant fixé, tout φ' tel que $< e_{q'}, e_q > \neq 0$ ($q' \in p^{-1}(\varphi') \setminus \{0\}$), i.e. pour tout φ' n'appartenant pas à une partie discrète donc finie de $O(\xi_2)$.

Donc:

$$(As)(\varphi) = \int_{O(\xi_2)} \tilde{A}(\varphi', \varphi) < s(\varphi'), q' >< e_{q'}, e_q > \ d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi')$$

ce qui montre que l'opérateur A est déterminé par $\tilde{A}$ donc par $\breve{A}$.

3) Il suffit de vérifier le résultat pour $m \in M_0$, ce qui vient de la propriété suivante de σ:

$$e_{m.q} = \sigma_0(m)(e_q), \quad m \in M_0, \quad q \in L.$$

4) Soit (s_k) une base orthomormée de E ; on a :

$$\begin{aligned}
Tr\ A &= \sum_k < As_k, s_k > \\
&= \sum_k \int_{O(\xi_2)} < (As_k)(\varphi), s_k(\varphi) > d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi) \\
&= \sum_k \int_{O(\xi_2)} << As_k, e_q > q, < s_k, e_q > q > d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi) \\
&= \sum_k \int_{O(\xi_2)} < s_k, A^* e_q >< e_q, s_k >< q, q > d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi) \\
&= \int_{O(\xi_2)} < e_q, A^* e_q >< q, q > d\mu_{O(\xi_2)}(\varphi) \\
&= \varepsilon \int_{O(\xi_2)} \breve{A}\ d\mu_{O(\xi_2)}
\end{aligned}$$

car la fonction $\varepsilon =< e_q, e_q >< q, q >$ est invariante par M_0 donc constante sur $O(\xi_2)$.

Proposition 4.

Soient φ *appartenant à* $O(\xi_2)$ *et* X *appartenant à* $\mathfrak{m}$, *alors :*

$$\widecheck{d\sigma_X(X)} = i\beta(X, \varphi).$$

Preuve:

D'après la proposition 3.3) on a:

$$\widecheck{d\sigma_0(X)}(Ad\ m\ \varphi) = d\sigma_0(Ad\ m^{-1}X)(\varphi) \tag{1}$$

où $m \in M_0$, $X \in \mathfrak{m}$, $\varphi \in O(\xi_2)$.

Il suffit alors de montrer que :

$$d\sigma_0(X)\ (\xi_2) = i\ \beta(X, \xi_2) \quad X \in \mathfrak{m} \tag{2}$$

Or (2) est déjà vérifiée pour $X \in \mathfrak{m}(\xi_2)$ car on a:

$$(\sigma_0(m)e_q)(\xi_2) = e^{\Lambda}(m)e_q(\xi_2)$$

pour $m \in M(\xi_2)$, $q \in L$.

D'autre part, en dérivant (1) on obtient :

$$\widecheck{d\sigma_X[\xi_2, X]}(\xi_2) = 0 \quad X \in \mathfrak{m}\ .$$

Comme $ad\ \xi_2(\mathfrak{m})$ est l'orthogonal de $\mathfrak{m}(\xi_2)$ dans $\mathfrak{m}$ pour la restriction de β à $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, (2) est vérifiée pour tout $X \in \mathfrak{m}$.

5.Calcul symbolique au dessus de l'orbite $O(\xi_0)$.

5.1 Un symbole au dessus de $O(\xi_0)$ sera ici une fonction $f: O(\xi_0) \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $(y, Z) \in \bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$, la fonction $\varphi \longmapsto (f \circ \Psi)(y, Z, \varphi)$ soit un symbole dans le calcul symbolique de Berezin au dessus de $O(\xi_2)$, symbole dont on notera $\hat{f}(y, Z)$ l'opérateur de E associé. Soit f un symbole tel que $\hat{f}: \bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}} \to \mathcal{L}(E)$ soit de classe C^∞ et polynomiale en Z. On dira alors que le symbole f est polynomial en Z. Pour un tel symbole, on définira un opérateur A_f par son action sur l'espace $C_0^\infty(\bar{N}, E)$ des fonctions $\phi: \bar{N} \to E$ de classe C^∞, nulles à l'infini (c'est à dire telles que $\phi \circ \exp : \bar{\mathfrak{n}} \to E$ soit nulle à l'infini, l'application exponentielle exp étant un difféomorphisme de $\bar{\mathfrak{n}}$ sur $\bar{N}$).
L'action de A_f sur ϕ est donnée par la formule intégrale suivante:

$$(1) \qquad (A_f\phi)(y) = \int\int_{\bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{n}}} e^{i(T,Z)} \hat{f}(y \ \exp\ \frac{T}{2}, Z)\phi(y\ \exp\ T) dT dZ$$

où (,) désigne le produit scalaire de $\bar{\mathfrak{n}}$ défini par:

$$(T, Z) = \beta(T, \theta(Z)) \quad T \in \bar{\mathfrak{n}} \quad Z \in \bar{\mathfrak{n}}.$$

Dans cette formule, dZ (ainsi que dT) est la mesure de Lebesgue sur $\bar{\mathfrak{n}}$ normalisée comme suit:
soit (E_k) une base de $\bar{\mathfrak{n}}$ orthonormale pour (,) ; posons:

$$Z = \sum_k Z_k E_k$$

alors:

$$dZ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} dZ_1\ dZ_2 ... dZ_n$$

où n est la dimension de $\bar{\mathfrak{n}}$.

Remarquons que la formule intégrale (1) constitue une généralisation à un produit $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ (avec $\bar{N}$ nilpotent) du traditionnel calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
On obtient alors, par analogie avec le calcul de Weyl (voir [36] par exemple):

Lemme 4.
Soit u une fonction de classe C^∞ sur $\bar{N}$ et Z^α le monôme $Z_1^{\alpha_1} Z_2^{\alpha_2} ... Z_n^{\alpha_n}$ où α est le multiindice $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ de $\mathbb{N}^n$, alors la formule intégrale (1) associe au symbole f défini par:

$$(f \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = u(y) Z^\alpha$$

l'opérateur différentiel invariant à gauche A_f défini par:

$$(A_f\phi)(y) = \Big(-\frac{1}{i}\Big)^{|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^{\alpha}[u(y \ \exp \ \frac{T}{2}) \ \phi(y \ \exp \ T)]\Big|_{T=0}$$

où:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^{\alpha} = \Big(\frac{\partial}{\partial T_1}\Big)^{\alpha_1}\Big(\frac{\partial}{\partial T_2}\Big)^{\alpha_2}......\Big(\frac{\partial}{\partial T_n}\Big)^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \ .$$

Preuve:

En effet, on a, pour $\phi \in C_0^\infty(\bar{N}, E)$:

$$\begin{aligned}(A_f\phi)(y) &= \int\int e^{i(T,Z)}u(y \ \exp \ \frac{T}{2})Z^{\alpha} \ \phi(y \ \exp \ T)dTdZ \\ &= \int\int \Big(\frac{1}{i}\Big)^{|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^{\alpha}(e^{i(T,Z)})u(y \ \exp \ \frac{T}{2})\phi(y \ \exp \ T)dTdZ.\end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$(A_f\phi)(y) = \int\int e^{i(T,Z)}\Big(-\frac{1}{i}\Big)^{|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^{\alpha}(u(y \ \exp \ \frac{T}{2})\phi(y \ \exp \ T))dTdZ.$$

D'où le résultat, en utilisant la formule d'inversion de Fourier.

Remarque:

On déduit du lemme précédent l'expression de l'opérateur A_f dans deux cas particuliers importants :

1) si f est tel que:

$$(f \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = u(y)$$

alors:

$$(A_f\phi)(y) = u(y)\phi(y)$$

2) si f est tel que:

$$(f \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = \big(v(y), Z\big)$$

où $v : \bar{N} \longrightarrow \bar{\mathfrak{n}}$ est C^∞ alors:

$$\begin{aligned}(A_f\phi)(y) &= \sum_k \Big(-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial T_k}\Big)\Big((E_k, v(y \ \exp \ \frac{T}{2}))\phi(y \ \exp \ T)\Big)\Big|_{T=0} \\ &= -\frac{1}{i}\Big[\frac{d}{dt}\sum_k\Big(E_k, v(y \ \exp \ \frac{t}{2}E_k)\Big)\Big|_{t=0}\phi(y) + \frac{d}{dt}\phi(y \ \exp \ t \ v(y))\Big|_{t=0}\Big].\end{aligned}$$

5.2 On se propose de montrer ici que la formule intégrale (1) permet d'étendre le calcul symbolique à une classe de symboles non polynomiaux en Z.

Dans ce but, on introduit le vocabulaire suivant : on dira qu'une fonction u de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ dans $\mathbb{C}$ est de type $\mathcal{S}$ (respectivement de type L^1, L^2) si la fonction $\tilde{u}$ définie par: $\tilde{u}(Y, Z) = u(\exp\ Y, Z)$ est un élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{n}})$ (respectivement de $L^1(\bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{n}})$, de $L^2(\bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{n}})$ où $\bar{\mathfrak{n}} \times \bar{\mathfrak{n}}$ est muni de la mesure de Lebesgue $dTdZ$ du paragraphe 5.1) .
On définit de même les fonctions de type $\mathcal{S}, L^1, L^2$ de $\bar{N} \times \bar{N}$ dans $\mathbb{C}$.

Ces définitions s'étendent à des fonctions de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ ou $\bar{N} \times \bar{N}$ dans un espace vectoriel de dimension finie.

Remarquons par ailleurs que, l'application exponentielle étant un difféomorphisme de $\bar{\mathfrak{n}}$ sur $\bar{N}$ qui transforme la mesure de Lebesgue de $\bar{\mathfrak{n}}$ en la mesure de Haar de $\bar{N}$, dire qu'une fonction de $\bar{N} \times \bar{N}$ dans $\mathbb{C}$ est par exemple de type L^1 revient à dire que cette fonction est intégrable pour la mesure de Haar produit sur $\bar{N} \times \bar{N}$.

On dira enfin qu'un symbole f est de type $\mathcal{S}$, L^1 ou L^2 si c'est le cas de la fonction $\hat{f}$ de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Remarquons aussi qu'un symbole f est de type L^2 si on a:

$$\int\int_{\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}} \|\hat{f}(y, Z)\|_2^2 \, dydZ < +\infty$$

où $\|\hat{f}(y, Z)\|_2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de $\hat{f}(y, Z) \in \mathcal{L}(E)$ et dy la mesure de Haar de $\bar{N}$: en effet, si $\hat{f}(y, Z)$ a pour matrice $\left(\hat{f}_{ij}(y, Z)\right)_{i,j}$ dans une base hilbertienne de E, alors :

$$\|\hat{f}(y, Z)\|_2^2 = \sum_{i,j} |\hat{f}_{i,j}(y, Z)|^2 \ .$$

L'espace des symboles de type L^2 est d'ailleurs un espace de Hilbert que l'on notera $\mathcal{A}$, la norme de cet espace étant donné par:

$$\|f\|^2 = \int\int_{\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}} \|\hat{f}(y, Z)\|_2^2 \, dydZ.$$

Notons log le difféomorphisme réciproque de exp et posons, pour $t \in \bar{N}$:

$$t^{1/2} = \exp(\frac{1}{2}\ \log\ t)$$

Posons également pour f symbole de type $\mathcal{S}$:

$$(\Im \hat{f})(y, T) = \int_{\bar{\mathfrak{n}}} e^{i(T,Z)} \hat{f}(y, Z) dZ \qquad y \in \bar{N} \quad T \in \bar{\mathfrak{n}}$$

$$K_f(y, t) = (\Im \hat{f})\left(y(y^{-1}t)^{1/2}, \log(y^{-1}t)\right) \quad y \in \bar{N} \quad t \in \bar{N}$$

On a alors :

Lemme 5.

Soit f un symbole ; il y a équivalence entre :

i) f est de type $\mathcal{S}$

ii) $\Im\hat{f}$ est de type $\mathcal{S}$

iii) K_f est de type $\mathcal{S}$.

Et dans ce cas , on a:

$$\|f\|^2 = \int\int_{\bar{N}\times\bar{N}} \|K_f(y,t)\|_2^2 \; dy \; dt.$$

Preuve:

L'équivalence i)$\Leftrightarrow$ ii) provient d'une propriété bien connue de la transformée de Fourier usuelle de $\mathbb{R}^n$.

L'équivalence ii)$\Leftrightarrow$ iii) découle du fait que l'application

$$(y,t) \longmapsto \big(y(y^{-1}t)^{1/2}, \log(y^{-1}t)\big)$$

est un difféomorphisme "polynomial" et d'inverse "polynomial" de $\bar{N}\times\bar{N}$ sur $\bar{N}\times\bar{\mathfrak{n}}$.

Enfin, la dernière égalité se vérifie au moyen de changements de variables et de la formule de Plancherel de $\bar{N}$ qui s'écrit ici:

$$\|f\|^2 = \int\int_{\bar{N}\times\bar{\mathfrak{n}}} \|\Im\hat{f}(y,T)\|_2^2 \; dy \; dT.$$

On peut alors énoncer la :

Proposition 5.

1) La formule intégrale (1) permet de définir une isométrie $f \longmapsto A_f$ de l'espace des symboles de type $\mathcal{S}$, sous espace dense de l'espace hilbertien $\mathcal{A}$, dans l'espace $\mathcal{L}_2\big(L^2(\bar{N},E)\big)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $L^2(\bar{N},E)$, laquelle se prolonge en une isométrie bijective de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}_2\big(L^2(\bar{N},E)\big)$.

2)(formule d'inversion)

Pour un symbole f de type $\mathcal{S}$, on a:

$$\hat{f}(y,Z) = \int_{\bar{N}} e^{-i(T,Z)} K_f\Big(y \; \exp\Big(-\frac{1}{2}T\Big), y \; \exp\Big(\frac{1}{2}T\Big)\Big) dT.$$

3) (symétrie du calcul symbolique)

Pour $f \in \mathcal{A}$, on a:

$$A_f^* = A_{\bar{f}}.$$

Preuve:

1) Partant de la formule intégrale (1) on peut écrire pour tout symbole f de type $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}(A_f\phi)(y) &= \int_{\bar{\mathfrak{n}}}(\Im\hat{f})\Big(y\ \exp\Big(\frac{T}{2}\Big),T\Big)\phi(y\ \exp\ T)dT\\ &= \int_{\bar{N}}(\Im\hat{f})(y\ t^{\frac{1}{2}},\log t)\phi(y\ t)dt\\ &= \int_{\bar{N}}\ K_f(y,t)\phi(t)dt.\end{aligned}$$

Et en appliquant le théorème de Mercer à l'opérateur $A_f A_f^*$ on obtient :

$$\|A_f\|_2^2 = Tr(A_f A_f^*) = \int\int_{\bar{N}\times\bar{N}} \|K_f(y,t)\|_2^2\ dydt = \|f\|^2.$$

2) D'après la définition de K_f on a, pour f symbole de type $\mathcal{S}$:

$$K_f(\ yt^{-1/2}, yt^{1/2}) = (\Im\hat{f})(y,\log\ t)$$

pour $y \in \bar{N}$, $t \in \bar{N}$.
D'où le résultat d'après la formule d'inversion de Fourier.

3) Il suffit d'établir l'égalité pour tout symbole f de type $\mathcal{S}$, ce qui se déduit de 2) et du fait que le noyau L de A_f^* est donné par:

$$L(y,t) = K_f(t,y)^*.$$

Remarques.

Il résulte de la proposition 2 que si $d\mu$ désigne la mesure de Liouville de l'orbite $O(\xi_0)$ alors on a, à une constante multiplicative près:

$$\Psi^*\big(d\mu|_{\tilde{O}(\xi_0)}\big) = dy\ dZ\ d\mu_{O(\xi_2)}$$

où $d\mu_{O(\xi_2)}$ est la mesure de Liouville de l'orbite $O(\xi_2)$.

Par suite les symboles de type L^1 (respectivement de type L^2) sont les symboles intégrables (respectivement de carré intégrable) pour la mesure $d\mu$.

Si le symbole f de $\mathcal{A}$ est alors de type L^1 et tel que l'opérateur A_f soit à trace, on a :

$$Tr\ A_f = \int Tr\ K_f(y,y)\ dy = \int Tr\Big(\int \hat{f}(y,Z)dZ\Big)dy = \varepsilon\int(f\circ\Psi)(y,Z,\varphi)dydZ\ d\mu_{O(\xi_2)}$$

d'après la proposition 3.
Il existe donc une constante C telle que:

$$Tr\ A_f = C\int_{O(\xi_0)} f\ \ d\mu.$$

On supposera dans toute la suite que la mesure $d\mu$ est remplacée par la mesure $Cd\mu$, de sorte que la constante C disparaisse de la formule précédente.

6. Calcul symbolique et représentations $(\pi_X)_X$.

Revenant à notre problème, on veut montrer ici que le calcul symbolique sur l'orbite $O(\xi_0)$ construit au paragraphe précédent est adapté à la description des représentations π_X associées à l'orbite $O(\xi_0)$ au sens donné dans l'introduction.

Proposition 6.

Soit X un élément de $\mathfrak{g}$ et $\tilde{X}$ la fonction définie sur l'orbite $O(\xi_0)$ par $X \in \mathfrak{g}$:

$$\tilde{X}(\xi) = \beta(X, \xi) \quad \xi \in O(\xi_0).$$

Alors $\tilde{X}$ est un symbole "polynomial en Z" et l'opérateur $A_{\tilde{X}}$ est, avec les notations des paragraphes précédents, donné par:

$$(A_{\tilde{X}}\phi)(y) = \frac{1}{i}\big[(i\nu + \rho)(P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\phi(y) + d\sigma_0(P_{\mathfrak{m}}(Ad\ y^{-1}X)\phi(y)$$

$$-T_y\phi(Ad\ yP_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X))^+(y)\big] \quad .$$

pour toute fonction ϕ de $C_0^\infty(\bar{N}, E)$.

Preuve:

On a :

$$\begin{aligned}(\tilde{X} \circ \Psi)(y, Z, \varphi) &= \beta\Big(Ad\ y(\xi_1 + \varphi + \theta(Z)), X\Big) \\ &= \beta\big(\xi_1 + \varphi + \theta(Z), Ad\ y^{-1}X\big) \\ &= \beta\big(\xi_1, P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\big) + \beta\big(\varphi, P_{\mathfrak{m}}(Ad\ y^{-1}X)\big) + \beta\big(\theta(Z), P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X)\big).\end{aligned}$$

D'après la proposition 4 et la remarque consécutive au lemme 4, il vient :

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{X}}\phi(y) = \beta\big(\xi_1, P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\big)\phi(y) + \frac{1}{i}\ d\sigma_0\big(P_{\mathfrak{m}}(Ad\ y^{-1}X)\big)\phi(y) \\ + \frac{1}{i}\Big[\frac{d}{dt}\sum_k (E_k, P_{\bar{\mathfrak{n}}}\big(Ad\ \exp(\frac{t}{2}E_k)Ad\ y^{-1}X)\big)\Big|_{t=0}\phi(y) \\ + \frac{d}{dt}\phi\big(y\ \exp(-tP_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X))\big)\Big|_{t=0}\Big].\end{aligned}$$

Le deuxième terme à l'intérieur des crochets s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi\Big(y\ \exp(-t\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X))y^{-1}y\Big)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\phi\Big(\exp(-t\ Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X))y\Big)\Big|_{t=0} \\ &= -T_y\phi\big(Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X)\big)^+(y).\end{aligned}$$

Et le premier terme intérieur aux crochets s'écrit :

$$\sum_k \Big(E_k,\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}\big(\frac{1}{2}[E_k, Ad\ y^{-1}X]\big)\Big)\phi(y) = -\frac{1}{2}\sum_k \Big((P_{\bar{\mathfrak{n}}}\ \circ\ ad(Ad\ y^{-1}X))(E_k), E_k\Big)\phi(y)$$
$$= -\frac{1}{2}\ Tr\big(P_{\bar{\mathfrak{n}}}\ \circ ad(Ad\ y^{-1}X)\big|_{\bar{\mathfrak{n}}}\big)\phi(y).$$

Pour terminer, on a alors besoin de calculer :

$$\ell(Y) = \frac{1}{2}\ Tr\ (P_{\bar{\mathfrak{n}}} \circ ad\ Y|_{\bar{\mathfrak{n}}})$$

pour un élément Y de $\mathfrak{g}$.

Mais si Y appartient à $\bar{\mathfrak{n}}$, l'endomorphisme $P_{\bar{\mathfrak{n}}} \circ ad\ Y|_{\bar{\mathfrak{n}}} = ad\ Y|\bar{\mathfrak{n}}$ est nilpotent donc $\ell(Y)$ s'annule.

Si Y appartient à $\mathfrak{n}$, les éléments de $ad\ Y(\mathfrak{g}_\lambda)$ n'ont pas de composante selon $\mathfrak{g}_\lambda$ pour chaque $\lambda < 0$ d'où $\ell(Y) = 0$.

Si Y appartient à $\mathfrak{m}$ alors $P_{\bar{\mathfrak{n}}} \circ ad\ Y|_{\bar{\mathfrak{n}}}$ est $ad\ Y|_{\bar{\mathfrak{n}}}$ car $[\mathfrak{m}, \bar{\mathfrak{n}}] \subset \bar{\mathfrak{n}}$ et, comme $ad\ Y$ est antisymétrique pour (,), on a encore: $\ell(Y) = 0$.

Enfin si $Y \in \mathfrak{a}$:

$$\ell(Y) = \frac{1}{2}\ Tr\ (ad\ Y|_{\bar{\mathfrak{n}}}) = \frac{1}{2}\sum_{\lambda<0}\lambda(Y) = -\rho(Y).$$

On déduit de ces calculs l'expression de $A_{\tilde{X}}$:

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{X}}\phi)(y) &= \beta\big(\xi_1, P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\big)\phi(y) + \frac{1}{i}\ d\sigma_0\big(P_{\mathfrak{m}}(Ad\ y^{-1}X)\big)\phi(y)\\
&+ \frac{1}{i}\Big[\rho\Big(P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\Big)\phi(y) - T_y\phi\big(Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X)\big)^+(y)\Big]\\
&= \frac{1}{i}\Big[(i\nu+\rho)\big(P_{\mathfrak{a}}(Ad\ y^{-1}X)\big) + d\sigma_0\big(P_{\mathfrak{m}}(Ad\ y^{-1}X)\big)\phi(y)\\
&- T_y\phi\big(Ad\ y\ P_{\bar{\mathfrak{n}}}(Ad\ y^{-1}X)\big)^+(y)\Big].\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

Compte tenu du lemme 3, on obtient alors l'égalité formelle suivante valable au moins sur l'espace des fonctions de $C^\infty(\bar{N}, E)$ à support compact :

$$A_{\tilde{X}} = \frac{1}{i}\ d\pi_\chi(X) \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Pour préciser davantage en va introduire, un sous espace commun aux domaines des opérateurs $A_{\tilde{X}}$ et $d\pi_\chi(X)$ où $X \in \mathfrak{g}$.

Soit D_χ l'espace des fonctions ϕ qui sont des vecteurs K-finis de la représentation π_χ (i.e. telles que $\pi_\chi(K).\phi$ engendre un sous espace de dimension finie).

En utilisant l'opérateur d'entrelacement I du paragraphe 3.3, on remarque que les éléments de D_χ sont du type:

$$\phi(y) = e^{-(i\nu+\rho)\ \log\ \tilde{a}(y)} F\big(\tilde{k}(y)\big)$$

où la fonction F est un vecteur K-fini de la représentation $\tilde{\pi}_\chi$.

Il est possible de déduire du théorème de Peter-Weyl la caractérisation suivante des vecteurs K-finis de la représentation $\tilde{\pi}_\chi$:

Si $\delta \in \hat{K}$ est une représentation d'espace V^δ, on obtient en décomposant $\delta|_M$:

$$V^\delta = \bigoplus_{\sigma \in J_\delta} V^\delta_\sigma \quad \text{(somme hilbertienne)}$$

où J_δ est une partie finie de $\hat{M}$ et où la restriction de $\delta|_M$ à V^δ_σ est un multiple de $\sigma \in \hat{M}$. Alors les vecteurs K-finis de $\tilde{\pi}_\chi$ sont les combinaisons linéaires finies de fonctions F du type :

$$F(k) = p_{\delta,\sigma_\chi}\big(\delta(k)^{-1}v\big) \quad k \in K$$

où $\delta \in \hat{K}$ est telle que $[\delta|_M : \sigma_\chi] > 0$, où $v \in V^\delta_{\sigma_\chi}$, et où p_{δ,σ_χ} désigne la projection orthogonale de V^δ sur $V^\delta_{\sigma_\chi}$ dans la somme directe précédente.

Ainsi, on peut construire l'espace D_χ directement à partir de la donnée de χ, et les éléments ϕ de D_χ sont des fonctions de classe C^∞, ce qui pouvait être également déduit de [31].

Compte tenu de l'écriture des fonctions ϕ de D_χ donnée plus haut, l'inclusion de D_χ dans $C_0^\infty(\bar{N}, E)$ sera une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 6.

Soit H la fonction de classe C^∞ définie par:

$$H(y) = \log\ \tilde{a}(y) \quad y \in \bar{N}.$$

Alors la fonction:

$$y \longmapsto e^{-\rho\left(H(y)\right)}$$

est nulle à l'infini.

Preuve: elle se fait en plusieurs étapes :

1) Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ notons H_λ l'élément de $\mathfrak{a}$ tel que $\lambda = \beta(H_\lambda, .)|_{\mathfrak{a}}$.
Alors en posant:

$$(\lambda, \nu) = \beta(H_\lambda, H_\nu),$$

on définit un produit scalaire sur $\mathfrak{a}^*$et, pour toute racine positive λ, on a :

$$(\rho, \lambda) > 0$$

(voir [25] p 94 ou [34] V,15 par exemple).

2) Soit y un point de $\bar{N}$; si $H(y)$ est nul, alors: $y = e$.

En effet, supposons que $y = kn$ avec $y \in \bar{N}$, $k \in K$, $n \in N$.
On munit $\mathfrak{g}$ du produit scalaire :

$$< X, Y >= -\beta(X, \theta(Y))$$

qui est K-invariant.
Dans une base de $\mathfrak{g}$ relative à la décomposition:

$$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$$

et orthonormale pour $<,>$, $Ad\ y$ a une matrice unipotente inférieure, $Ad\ n$ une matrice unipotente supérieure et $Ad\ k$ une matrice orthogonale.
De l'égalité: $Ad\ y = Ad\ k\ \ Ad\ n$ on tire alors: $Ad\ y = id$.
Autrement dit, y appartient au centre de G, donc à K, donc à $K \cap \bar{N}$ qui est $\{e\}$.

3) Soit y un point de $\bar{N}$; si $\rho(H(y))$ est nul, alors $y = e$.

En effet d'après [21]p 438, on peut écrire:

$$H(y) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j\ H_{\lambda_j}$$

où les λ_j sont les racines simples et où : $a_j \geq 0 \quad j = 1, 2...\ell$.
Comme:

$$\rho(H(y)) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j \rho(H_{\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{\ell} a_j(\rho, \lambda_j),$$

il est clair d'après 1) que $\rho(H(y)) = 0$ entraine $a_j = 0$ pour $j = 1, 2...\ell$ donc $H(y) = 0$ et $y = e$.

4) Soit $(E_\lambda)_{\lambda<0}$ une base de $\bar{\mathfrak{n}}$ telle que $E_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$ et $\|\ \|$ la norme de $\bar{\mathfrak{n}}$ définie par:

$$\|\sum_{\lambda<0} y_\lambda E_\lambda\|^2 = \sum_{\lambda<0} y_\lambda^2.$$

On pose, pour $y \in \bar{N}$: $\|y\| = \|\log\ y\|$.
Remarquons que si $y = \exp\ Y$ où $Y = \sum_{\lambda<0} y_\lambda E_\lambda$ et si $a = \exp\ H$ où $H \in \mathfrak{a}$ alors:

$$aya^{-1} = \exp(Ad\ a.Y)$$

et:

$$Ad\ a\ Y = Ad(\exp\ H)Y = \sum_{\lambda<0} e^{\lambda(H)} y_\lambda\ E_\lambda.$$

Soit alors H_0 fixé dans $\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a}/\lambda(H) > 0 \; \forall \lambda > 0\}$.
Pour tout $y \in \bar{N}$ tel que $\|y\| > 1$ il existe un unique réel positif $t(y)$ tel que :

$$\| \exp\big(t(y)H_0\big) \; y \; \exp\big(-t(y)H_0\big) \| = 1.$$

Cela découle simplement du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$h(t) = \; \| \exp(t \; H_0) \; y \; \exp(-t \; H_0) \|^2 = \sum_{\lambda < 0} \; e^{2t\lambda(H_0)} y_\lambda^2.$$

De plus, si on pose:

$$\lambda_0(H_0) = \min_{\lambda<0} \lambda(H_0)$$

on remarque que: $\varphi(t) > 1$ dès que: $t < \frac{ln\|y\|}{-\lambda_0(H_0)}$ ce qui montre que:

$$t(y) \geq \frac{ln\|y\|}{-\lambda_0(H_0)} \; .$$

D'après le lemme 85 [19] p 101 on a :

$$\exp \rho\Big(H\big(\exp(t(y)H_0)y \; \exp(-t(y)H_0)\big)\Big) \leq 1 + \; \exp\Big(-\frac{1}{2}t(y) \; \beta(H_0) + \rho\big(H(y)\big)\Big)$$

où:

$$\beta(H_0) = \min_{\lambda>0} \; \lambda(H_0) \; > 0.$$

Posant enfin:

$$m = \inf_{\|y\|=1} \; \rho\big(H(y)\big)$$

on obtient:

$$(e^m - 1)e^{\frac{1}{2} \; t(y)\beta(H_0)} \leq e^{\rho\left(H(y)\right)}.$$

Comme $m > 0$, d'après 3), on a:
si $\|y\| \to \infty$ alors $t(y) \to +\infty$ et $\rho\big(H(y)\big) \to +\infty$, ce qui termine.

On vient ainsi d'établir la:

Proposition 7.

L'espace D_χ est un sous espace vectoriel de $C_0^\infty(\bar{N}, E)$ et on a :

$$A_{\tilde{X}}|_{D_\chi} = \frac{1}{i} \; d\pi_\chi(X)|_{D_\chi} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Ce résultat montre que le calcul symbolique permet de retrouver la famille $(\pi_\chi)_\chi$ de représentations associées à l'orbite $O(\xi_0)$. En effet, pour tout χ, l'application $\chi \longmapsto A_{i\tilde{X}}|_{D_\chi}$

est une représentation de $\mathfrak{g}$ par des opérateurs antisymétriques laquelle s'intègre d'après [13] par exemple, en une unique représentation unitaire de G, la représentation π_χ.

Exemple:

Dans le cas où $G = SL(2, \mathbb{R})$, posons:

$$K = SO(2)$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \quad t > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie engendrée par:

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutation habituelles:

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_1, e_3] = e_2 \qquad [e_2, e_3] = -e_1.$$

La forme de Killing permettant d'identifier $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}^*$ est donnée par:

$$\beta(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3).$$

Soit $\nu \in \mathbb{R}$; $\xi_1 = \frac{\nu}{4}e_1$ définit une représentation de $\mathfrak{a} = \mathbb{R}.e_1$:

$$H \longmapsto i\beta(\frac{\nu}{4}e_1, H)$$

qui s'exponentie en un caractère de A:

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \longmapsto t^{i\nu}.$$

Ici, $M = \{Id, -Id\}$ et $\hat{M}$ est réduit à deux éléments $(\chi_\epsilon)_{\epsilon=0,1}$ définis par:

$$\chi_\epsilon(-Id) = (-1)^\epsilon.$$

Par suite, à l'orbite coadjointe de $\xi_0 = \xi_1 + \xi_2 = \frac{\nu}{4}e_1$, est associé un couple $(\pi_{\nu,\epsilon})_{\epsilon=0,1}$ de représentations unitaires de $SL(2, \mathbb{R})$, irréductibles à l'exception de $\pi_{0,1}$[25], réalisées, comme $\bar{N}$ s'identifie à $\mathbb{R}$, dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ par:

$$(\pi_{\nu,\epsilon}\phi)(y) = sgn(-by + d)^\epsilon|-by + d|^{-1-i\nu}\phi(\frac{ay - c}{-by + d})$$

où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\phi \in L^2(\mathbb{R})$.

D'autre part, D_{χ_0} est l'espace engendré par la famille $(\phi_{2m})_{m\in\mathbb{Z}}$ et D_{χ_1} est l'espace engendré par la famille $(\phi_{2m+1})_{m\in\mathbb{Z}}$ où, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\phi_n(y) = (1+y^2)^{-1-i\frac{\nu}{2}} e^{inArctany}.$$

Le calcul symbolique -ici le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$- permet alors via la proposition précédente de retrouver les représentations $(d\pi_{\nu,\epsilon}, D_{\chi_\epsilon})$ définies par:

$$\begin{aligned}
d\pi(e_3)\phi_n &= \frac{1}{2} in\phi_n \\
d\pi(e_1)\phi_n &= \frac{1}{4}\big((1+i\nu+n)\phi_{n+2} + (1+i\nu-n)\phi_{n-2}\big) \\
d\pi(e_2)\phi_n &= \frac{1}{4i}\big((1+i\nu+n)\phi_{n+2} - (1+i\nu-n)\phi_{n-2}\big).
\end{aligned}$$

7.Calculs symboliques et produits associatifs.

7.1 On dispose, sur l'espace des symboles du calcul de Berezin au dessus de l'orbite $O(\xi_2)$, d'un produit associatif noté $*'$ obtenu simplement à l'aide de la composition des opérateurs de E:

$$\check{A} \;*'\; \check{B} = \widecheck{AB} \qquad A \in \mathcal{L}(E) \quad B \in \mathcal{L}(E).$$

Les propriétés du calcul de Berezin (propositions 3 et 4) donnent immédiatement lieu à des propriétés correspondantes du produit $*'$:

1) (symétrie du produit $*'$) Si a et b sont des symboles de Berezin, alors:

$$\overline{a *' b} = \overline{b} *' \overline{a}$$

2) (M invariance de $*'$) Si a est un symbole et m appartient à M, on définit un symbole a_m par:

$$a_m(\varphi) = a(Ad\, m^{-1}\varphi) \quad \varphi \in O(\xi_2)$$

Alors, pour les symboles a et b et tout m de M:

$$a_m *' b_m = (a *' b)_m.$$

3) (covariance de $*'$) Notons, pour $X \in \mathfrak{m}$, $\tilde{X}$ la fonction définie sur $O(\xi_2)$ par :

$$\tilde{X}(\varphi) = \beta(\varphi, X).$$

Alors $\tilde{X}$ est un symbole et, pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathfrak{m}$, on a:

$$i\tilde{X} *' i\tilde{Y} - i\tilde{Y} *' i\tilde{X} = i[\widetilde{X,Y}].$$

7.2 On définit de la même manière un produit associatif noté $*$ sur l'espace des symboles au dessus de l'orbite $O(\xi_0)$ polynomiaux en Z, introduits au paragraphe 5.1.

De même que le produit associatif "de Berezin" $*'$ (propriété 3) ci dessus, ce produit associatif est covariant.

Par restriction du produit associatif $*$ aux symboles indépendants de la variable φ, on obtient un produit asssociatif que l'on notera également $*$ sur l'espace des fonctions u:

$$(y, Z) \longmapsto u(y, Z)$$

de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^∞ et polynomiales en la variable Z, ce produit étant alors associé au calcul symbolique $u \longmapsto B_u$ défini par la formule intégrale:

$$(2) \qquad (B_u\psi)(y) = \int\int_{\bar{\mathfrak{n}}\times\bar{\mathfrak{n}}} e^{i\langle T,Z\rangle} u(y \ \exp\frac{T}{2}, Z)\psi(y \ \exp\ T)dTdZ$$

où $\;y \in \bar{N}\;$ et $\;\psi \in C_0^\infty(\bar{N})$.

7.3 Pour tout symbole f au dessus de $O(\xi_0)$ on peut écrire:

$$(f \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = \sum_{\text{finie}} u_k(y, Z)a_k(\varphi)$$

où, pour tout k, a_k est un symbole de Berezin et u_k une fonction sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$.

Remarquons que le symbole f est polynomial en Z si tous les u_k sont polynomiaux en Z.

Soient alors les symboles f et g polynomiaux en Z définis par :

$$(f \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = u(y, Z)a(\varphi) \quad \text{et} \quad (g \circ \Psi)(y, Z, \varphi) = v(y, Z)b(\varphi).$$

En passant aux opérateurs associés, on obtient:

$$((f * g) \circ \Psi)(y, Z) = (u * v)(y, Z).(a *' b)(\varphi)$$

Ainsi, le produit associatif $*$ au dessus de $O(\xi_0)$ peut être interprété comme étant le "produit" du produit associatif défini sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ par (2) et du produit de Berezin au dessus de $O(\xi_2)$.

7.4 On va à présent donner une interprétation du produit associatif précédent sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ en utilisant le produit étoile construit par S. Gutt sur le fibré cotangent d'un groupe de Lie [18] donc en particulier sur le fibré cotangent $T^*\bar{N}$ supposé identifié à $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ comme au paragraphe 2.

On reprend les notations utilisées au paragraphe 5.1 ; de plus, si Y appartient à $\bar{\mathfrak{n}}$, on note $\tilde{Y}$ l'opérateur différentiel invariant à gauche défini par:

$$(\tilde{Y}\psi)(y) = \frac{d}{dt}\psi(y \ \exp\ tY)\Big|_{t=0}.$$

λ l'application de complète symétrisation qui associe à tout élément $Y_1Y_2...Y_m$ de l'algèbre symétrique de $\bar{\mathfrak{n}}$ l'opérateur différentiel:

$$\lambda(Y_1Y_2...Y_m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma} \tilde{Y}_{\sigma(1)}\tilde{Y}_{\sigma(2)}...\tilde{Y}_{\sigma(m)}$$

et $\tilde{\lambda}$ l'isomorphisme linéaire de l'algèbre des polynômes en $Z_1, Z_2...Z_n$ dans l'algèbre enveloppante de $\bar{\mathfrak{n}}$ défini par :

$$\tilde{\lambda}(Z_{j_1}\ Z_{j_2}...Z_{j_m}) = \lambda(E_{j_1}\ E_{j_2}...E_{j_m}).$$

Enfin, on notera également Z^α la fonction C^∞ sur $(\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}})$ définie par:

$$(y, Z) \longmapsto Z^\alpha.$$

Le produit étoile de S.Gutt, noté ici $*_s$, est alors caractérisé par :

i) $Z^\alpha *_s Z^\beta = \sum_{r=0}^{|\alpha|+|\beta|} (i\ \hbar)^r\ \tilde{\lambda}^{-1}\big(\tilde{\lambda}(Z^\alpha)\circ\tilde{\lambda}(Z^\beta)\big)_{|\alpha|+|\beta|-r}$

où l'indice indique que l'on prend la composante homogène de degré $|\alpha| + |\beta| - 1$ au sens de la graduation usuelle de l'algèbre enveloppante de $\bar{\mathfrak{n}}$.

ii) pour $u \in C^\infty(\bar{N})$ et $v \in C^\infty(\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}})$:

$$u(y) *_s v(y, Z) = \sum_{r\geq 0} \frac{1}{r!}\Big(-\frac{i\hbar}{2}\Big)^r \sum_{i_1...i_r} (\tilde{E}_{i_1}...\tilde{E}_{i_r}u)(y)(Z_{i_1}...Z_{i_r}v)(y, Z)$$

la sommation étant effectuée sur tous les $(i_1...i_r)$ et Z_k désignant aussi la dérivée d'une fonction de $Z = \sum_j Z_jE_j$ par rapport à la variable Z_k.

Réécrivons alors la formule (2) en y introduisant le paramètre de déformation $\hbar$:

$$(2') \qquad (\tilde{B}_u\psi)(y) = \hbar^{-n}\int\int e^{\frac{i}{\hbar}(T,Z)}u(y\ exp\ \frac{T}{2}, Z)\psi(y\ \exp\ T)dTdZ$$

où $y \in \bar{N}$, $\psi \in C_0^\infty(\bar{N})$ et n est la dimension de $\bar{N}$.

Le calcul symbolique $u \longmapsto \tilde{B}_u$ ainsi obtenu associe à la fonction u telle que: $u(y, Z) = w(y)\ Z^\alpha$ où $w \in C^\infty(\bar{N})$ l'opérateur $\tilde{B}_u$ défini par:

$$(\tilde{B}_u\ \psi)(y) = (i\ \hbar)^{|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial T}\Big)^\alpha\big(w(y\ \exp\ \frac{T}{2})\psi(y\ \exp\ T)\big)\Big|_{T=0}$$

comme on le vérifie en procédant de la même manière que pour le lemme 4.
En particulier :

1) si $u(y, Z) = w(y)$ alors $(\tilde{B}_u\psi)(y) = w(y)\psi(y)$
2) si $u(y, Z) = Z^\alpha$ alors $(\tilde{B}_u\psi)(y) = (i\ \hbar)^{|\alpha|}\big(\lambda(E_1^{\alpha_1}\ E_2^{\alpha_2}...E_n^{\alpha_n})\psi\big)(y)$.

La proposition suivante montre que ce calcul symbolique est lié au produit étoile $*_s$:

Proposition 8.

Le calcul symbolique $u \longmapsto \tilde{B}_u$ étant supposé étendu à l'espace des séries formelles $\sum_{r\geq 0} \hbar^r u_r$ (les u_r étant des fonctions sur $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$) on a, si u et v sont des combinaisons linéaires (finies) de fonctions du type $w(y)Z^\alpha$ $(w \in C^\infty(\bar{N})$:

$$\tilde{B}_{u *_s v} = \tilde{B}_u \circ \tilde{B}_v.$$

Preuve:

a) On considère tout d'abord le cas où $u(y,Z) = Z^\alpha$ et $v(y,Z) = Z^\beta$.
Posons:

$$\lambda(E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_1}) \circ \lambda(E_1^{\beta_1}...E_n^{\beta_n}) = \sum_{\gamma \in J} \lambda(E_1^{\gamma_1}...E_n^{\gamma_n})$$

où J est une partie finie de $\mathbb{N}^n$.
L'opérateur:

$$\tilde{B}_u \circ \tilde{B}_v = (i\ \hbar)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\gamma \in J} \lambda(E_1^{\gamma_1}...E_n^{\gamma_n})$$

est alors obtenu à partir du symbole :

$$(i\ \hbar)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\gamma \in J} (i\ \hbar)^{-|\gamma|}\ Z^\gamma = (i\ \hbar)^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{s \geq o} (i\ \hbar)^{-s} \sum_{|\gamma|=s} Z^\gamma$$
$$= \sum_{s\geq 0} (i\ \hbar)^{|\alpha|+|\beta|-s}\ \tilde{\lambda}^{-1}\big(\tilde{\lambda}(Z^\alpha) \circ \tilde{\lambda}(Z^\beta)\big)_s$$

qui est précisément : $u *_s v$.

b) On examine ensuite le cas où $u(y,Z) = u(y)$ et $v(y,z) = Z_{j_1}\ Z_{j_2}...Z_{j_m}$.
On peut écrire :

$$(u\ *_s\ v)(y,Z) = \sum_{r\geq 0} \sum \left(-\frac{i\ \hbar}{2}\right)^r (\lambda(E_{i_1}...E_{i_r})u)(y)\ Z_{i_{r+1}}...Z_{i_m}$$

la sommation étant effectuée sur toutes les partitions de $\{j_1...j_m\}$ en $\{i_1...i_r\}$ et $\{i_{r+1}...i_m\}$.
Par suite:

$$\tilde{B}_{u *_s v}\ (\psi)(y) = \sum_{r\geq 0} \sum \left(-\frac{i\ \hbar}{2}\right)^r (i\ \hbar)^{m-r}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial T_{i_{r+1}}} ...... \frac{\partial}{\partial T_{im}}\right) \left[(\lambda(E_{i_1}...E_{i_r})u)(y\ \exp\ \frac{T}{2})\psi(y\ \exp\ T)\right] |_{T=0}$$
$$= (i\ \hbar)^m \sum_{r\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^r \sum_{\text{partitions en 2 de} \{i_{r+1}...i_m\}} \frac{1}{2^p} \lambda(E_{i_{\alpha_1}}...E_{i_{\alpha_p}})$$
$$\lambda(E_{i_1}...E_{i_r})u(y)\lambda(E_{i_{\alpha_{p+1}}}...E_{i_{\alpha_r}})\psi(y).$$

On remarque alors que la contribution des termes "en $\lambda(E_{i_{\alpha_{p+1}}}...E_{i_{\alpha_r}})\psi(y)$" où $\{i_{\alpha_{p+1}}...i_{\alpha_r}\}$ est fixé différent de $\{j_1...j_m\}$ est nulle.

Par exemple, si l'on considère, pour fixer les idées, les termes "en $\psi(y)$" on obtient:

$$\begin{aligned}
(i\ \hbar)^m \sum\Big(-\frac{1}{2}\Big)^r \frac{1}{2^{m-r}}\big(\lambda(E_{i_{r+1}}...E_{i_m})\lambda(E_{i_1}...E_{i_r})u\big)(y)\psi(y) \\
&= \Big(\frac{i\ \hbar}{2}\Big)^m \sum(-1)^r\big(\lambda(E_{i_{r+1}}...E_{i_m})\lambda(E_{i_1}...E_{i_r})u\big)\psi(y) \\
&= \Big(\frac{i\ \hbar}{2}\Big)^m \sum_{r=0}^{m}(-1)^r \frac{1}{(m-r)!}\ \frac{1}{r!}\ m!\big(\lambda(E_{i_1}...E_{i_m})u\big)(y)\ \psi(y) \\
&= \quad 0 \quad \text{pour} \quad m > 0.
\end{aligned}$$

En définitive, on trouve donc :

$$(\tilde{B}_{u\ *_s\ v}\ \ \psi)(y) = (i\ \hbar)^m\ u(y)\big(\lambda(E_{j_1}...E_{j_m})\psi\big)(y)\ ,$$

ce qui montre bien que:

$$\tilde{B}_{u\ *_s\ v} = \tilde{B}_u\ \circ\ \tilde{B}_v.$$

c) Pour calculer l'opérateur associé à $u *_s v$ où $u(y,Z) = u(y)$ et $v(y,Z) = w(y)Z^\beta$, on procède d'une manière analogue à celle utilisée ci dessus.

Enfin, on passe au cas général de la même manière que dans la preuve du théorème p 256 [18].

Remarques:

1) Le résultat précédent n'est pas véritablement surprenant si l'on pense que le calcul symbolique (2) ou (2') généralise, comme on l'a dit plus haut, le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et que d'autre part le produit étoile $*_s$ généralise le célèbre produit étoile de Moyal sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, lequel est lié au calcul de Weyl [8].

2) Il est intéressant de noter que si l'on considère le calcul symbolique $u \longmapsto C_u$ défini par la formule intégrale:

$$(C_u\psi)(y) = \hbar^{-n}\int\int e^{\frac{i}{\hbar}(T,Z)}u(y,Z)\psi(y\ \ \exp\ T)dTdZ\ ,$$

alors on retrouve les propriétées :

. si $u(y,Z) = u(y)$ on a : $(C_u\ \psi)(y) = u(y)\ \psi(y)$
. si $u(y,Z) = Z^\alpha$ on a : $(C_u\ \psi)(y) = (i\ \hbar)^{|\alpha|}\big(\lambda(E_1^{\alpha_1}...E_n^{\alpha_n})\psi\big)(y)$

Donc on obtient:

$$C_{u\ *_s\ v} = C_u\ \circ\ C_v$$

pour: $u(y,Z) = Z^\alpha$ et $v(y,Z) = Z^\beta$.
Mais cela ne va pas plus loin, comme le montre l'exemple suivant :
supposons que: $u(y,Z) = u(y)$ et $v(y,Z) = Z_k$.

Alors:

$$(u \ *_s \ v)(y,Z) = u(y)Z_k - \frac{i\,\hbar}{2}(\tilde{E}_k u)(y)$$

et $\quad C_{u \ *_s \ v}$ est défini par :

$$(C_{u \ *_s \ v}\ \psi)(y) = i\ \hbar\ u(y)(\tilde{E}_k\ \psi)(y) - \frac{i\,\hbar}{2}(\tilde{E}_k\ u)(y)\ \ \psi(y).$$

D'autre part :

$$(C_u \ \circ \ C_v)\ \psi\ (y) = i\ \hbar\ u(y)(\tilde{E}_k \psi)(y).$$

Ce type de considérations conduit à penser que la formule intégrale (2') est véritablement "la" formule intégrale associée au produit étoile $*_s$.

8.Représentations $*$ de G.

8.1 (Représentations $*$ de M)

Le calcul symbolique de Berezin au dessus de $O(\xi_2)$ permet de définir immédiatement une représentation $*$ de M [3],[14] associée à la représentation σ_χ, à savoir, avec les notations des paragraphes 4 et 7.1, l'application E_χ définie par :

$$E_\chi(m) = \overbrace{\sigma_\chi(m)}^{\vee}\ , \quad m \in M.$$

La propriété:

$$\frac{d}{dt}\ E_\chi(\exp\ tX) = i\tilde{X}\ \ *'\ \ E_\chi(\exp\ tX)$$

montre que l'application E_χ joue le rôle d'une exponentielle pour le produit associatif $*'$ sur l'espace des symboles de Berezin et, de plus, posant pour tout ψ appartenant à $C^\infty(M)$:

$$\mathcal{E}_\chi(\psi) = \int_M \ \psi(m)\ E_\chi(m)\ dm\ ,$$

on obtient une "transformée de Fourier" de M.

Introduisons les notations:

$$(\psi_1 \star \psi_2)(m) = \int_M \psi_1(m\ m'^{-1})\psi_2(m')dm'$$
$$\psi_1^\nu\ (m) = \psi_1\ (m^{-1})$$

pour $\quad \psi_1 \in C^\infty(M) \quad \psi_2 \in C^\infty(M)$.

On a alors:

$$\mathcal{E}_\chi(\psi_1 \star \psi_2) = \mathcal{E}_\chi(\psi_1) *' \mathcal{E}_\chi(\psi_2)$$
$$\mathcal{E}_\chi({\psi_1}^\nu) = \overline{\mathcal{E}_\chi(\psi_1)}.$$

D'autre part l'opérateur:

$$\sigma_\chi(\psi) = \int_M \psi(m)\ \sigma_\chi(m)\ dm \quad (\psi \in C^\infty(M))$$

admettant pour symbole de Berezin $\mathcal{E}_\chi(\psi)$, la formule du caractère de Kirillov prend la forme très simple suivante, cas particulier de la proposition 3:

$$Tr\ \sigma_\chi(\psi) = \epsilon \int_{O(\xi_2)} \mathcal{E}_\chi(\psi)\ d\mu_{O(\xi_2)} \quad \psi \in C^\infty(M).$$

8.2 Pour définir les représentations $*$ de G associées aux représentations π_χ de la série principale de G, on ne peut pas procéder directement comme dans le cas compact, les opérateurs $\pi_\chi(g)$ $(g \in G)$ n'étant alors pas des opérateurs du calcul symbolique i.e. du type A_f où f est un symbole au dessus de $O(\xi_0)$.

On est ainsi amené à considérer plutôt des opérateurs du type $\pi_\chi(g) \circ A_f$ où g appartient à G, f à $\mathcal{A}$ et, s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas exponentiel [6], on définira la représentation $*$ de G associée à π_χ comme une application de G à valeurs dans un espace de distributions au dessus de $O(\xi_0)$.

Dans ce but, on introduit l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ des symboles $f \in \mathcal{A}$ tels que l'opérateur A_f admette un noyau K_f de type $\mathfrak{D}$ i.e. de classe C^∞ à support compact, et on commence par étendre le produit associatif $*$ du paragraphe 7 à des symboles non nécessairement polynomiaux en Z :

Proposition 9.

1) On définit un produit associatif noté également $*$ sur l'espace $\mathcal{A}$ des symboles de type L^2 en posant:

$$A_{f*g} = A_f \circ A_g, \quad f \in \mathcal{A}, \quad g \in \mathcal{A}.$$

En particulier, si les symboles f et g sont de type $\mathcal{S}$ (respectivement appartiennent à $A^{-1}\mathfrak{D}$), alors le symbole $f * g$ est de type $\mathcal{S}$ (resp. appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$).

2) Si f est un symbole polynomial en Z et g appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$ alors la composition des opérateurs permet de définir de même deux symboles $f * g$ et $g * f$ appartenant à $A^{-1}\mathfrak{D}$.

Preuve:

1) découle simplement de la formule de convolution des noyaux ; le noyau K de l'opérateur $A_f \circ A_g$ est obtenu à partir des noyaux respectifs K_f et K_g des opérateurs A_f et A_g par:

$$K(y,z) = \int_{\bar{N}} K_f(y,t)\ K_g(t,z)dt \qquad y \in \bar{N} \quad z \in \bar{N}.$$

2) On remarque en effet que le composé d'un opérateur différentiel, obtenu à partir d'un symbole polynomial en Z, et d'un opérateur à noyau de type $\mathfrak{D}$ est un opérateur à noyau de type $\mathfrak{D}$.

Introduisons à présent des ouverts qui nous seront utiles dans la suite :

D'autre part l'opérateur:

$$\sigma_\chi(\psi) = \int_M \psi(m)\, \sigma_\chi(m)\, dm \quad (\psi \in C^\infty(M))$$

admettant pour symbole de Berezin $\mathcal{E}_\chi(\psi)$, la formule du caractère de Kirillov prend la forme très simple suivante, cas particulier de la proposition 3:

$$Tr\ \sigma_\chi(\psi) = \epsilon \int_{O(\xi_2)} \mathcal{E}_\chi(\psi)\, d\mu_{O(\xi_2)} \quad \psi \in C^\infty(M).$$

8.2 Pour définir les représentations $*$ de G associées aux représentations π_χ de la série principale de G, on ne peut pas procéder directement comme dans le cas compact, les opérateurs $\pi_\chi(g)\quad(g \in G)$ n'étant alors pas des opérateurs du calcul symbolique i.e. du type A_f où f est un symbole au dessus de $O(\xi_0)$.

On est ainsi amené à considérer plutôt des opérateurs du type $\pi_\chi(g) \circ A_f$ où g appartient à G, f à $\mathcal{A}$ et, s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas exponentiel [6], on définira la représentation $*$ de G associée à π_χ comme une application de G à valeurs dans un espace de distributions au dessus de $O(\xi_0)$.

Dans ce but, on introduit l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ des symboles $f \in \mathcal{A}$ tels que l'opérateur A_f admette un noyau K_f de type $\mathfrak{D}$ i.e. de classe C^∞ à support compact, et on commence par étendre le produit associatif $*$ du paragraphe 7 à des symboles non nécessairement polynomiaux en Z :

Proposition 9.

1) On définit un produit associatif noté également $*$ sur l'espace $\mathcal{A}$ des symboles de type L^2 en posant:

$$A_{f*g} = A_f \circ A_g, \quad f \in \mathcal{A}, \quad g \in \mathcal{A}.$$

En particulier, si les symboles f et g sont de type $\mathcal{S}$ (respectivement appartiennent à $A^{-1}\mathfrak{D}$), alors le symbole $f * g$ est de type $\mathcal{S}$ (resp. appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$).

2) Si f est un symbole polynomial en Z et g appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$ alors la composition des opérateurs permet de définir de même deux symboles $f * g$ et $g * f$ appartenant à $A^{-1}\mathfrak{D}$.

Preuve:

1) découle simplement de la formule de convolution des noyaux ; le noyau K de l'opérateur $A_f \circ A_g$ est obtenu à partir des noyaux respectifs K_f et K_g des opérateurs A_f et A_g par:

$$K(y,z) = \int_{\bar{N}} K_f(y,t)\, K_g(t,z) dt \qquad y \in \bar{N} \quad z \in \bar{N}.$$

2) On remarque en effet que le composé d'un opérateur différentiel, obtenu à partir d'un symbole polynomial en Z, et d'un opérateur à noyau de type $\mathfrak{D}$ est un opérateur à noyau de type $\mathfrak{D}$.

Introduisons à présent des ouverts qui nous seront utiles dans la suite :

Lemme 7.
1) Posons, pour $g \in G$: $\mathfrak{U}_g = g\bar{N}MAN \cap \bar{N}$ et:

$$\mathfrak{U} = \{(g,y) \in \ G \times \bar{N} \ /y \in \ \mathfrak{U}_g\}.$$

Alors $\mathfrak{U}_g$ ($g \in G$) est un ouvert dense de $\bar{N}$ dont le complémentaire est de mesure nulle pour la mesure de Haar sur $\bar{N}$, et $\mathfrak{U}$ un ouvert dense de $G \times \bar{N}$ dont le complémentaire a une mesure nulle pour la mesure de Haar sur $G \times \bar{N}$.
2) Soit $g \in G$; l'application $\alpha_g : y \longmapsto \bar{n}(g^{-1}y)$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{U}_g$ dans $\mathfrak{U}_{g^{-1}}$.
3) L'application $\alpha : (g,y) \longmapsto (g, \bar{n}(g^{-1}y))$ est un difféomorphisme de $\mathfrak{U}$ dans:

$$\mathfrak{U}' = \{(g,y) \in \ G \times \bar{N} \ /y \in \ \mathfrak{U}_{g^{-1}}\}.$$

Preuve:
1) provient du fait que $\bar{N}MAN$ est un ouvert dense de G dont le complémentaire est de mesure nulle pour la mesure de Haar de G, laquelle s'écrit alors:

$$dg = e^{2\rho(\log\ n)} d\bar{n}\ dm\ da\ dn.$$

2) L'application $\alpha_g (g \in G)$ est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathfrak{U}_g$, bijective de $\mathfrak{U}_g$ dans $\mathfrak{U}_{g^{-1}}$, la bijection réciproque étant l'application $\alpha_{g^{-1}}$.
3) L'application α est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathfrak{U}$, à valeurs dans $\mathfrak{U}'$; α est une bijection, la bijection réciproque étant l'application : $(g,y) \longmapsto (g, \bar{n}(gy))$ de $\mathfrak{U}'$ dans $\mathfrak{U}$.

Proposition 10.
1) Si f est un élément de $A^{-1}\mathfrak{D}$ et g de G, alors $\pi_\chi(g) \circ A_f$ admet un noyau de type $\mathfrak{D}$.
2) Soit f élément de $A^{-1}\mathfrak{D}$ et ψ de $C_c^\infty(G)$; on note $\pi_\chi(\psi)$ l'opérateur $\int_G \psi(g)\ \pi_\chi(g)dg$; alors, l'opérateur $\pi_\chi(\psi \circ A_f)$ admet un noyau de type $\mathfrak{D}$.

Preuve :
1) Pour f dans $A^{-1}\mathfrak{D}$ et g dans G, l'opérateur $\pi_\chi(g) \circ A_f$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt qui, compte tenu de l'expression de l'opérateur $\pi_\chi(g)$, admet pour noyau la fonction $K(g,.,.)$ définie par :

$$\begin{cases} K(g,y,t) = e^{-(\rho+i\nu)\log\ a(g^{-1}y)} \sigma\big(m(g^{-1}y)\big)^{-1} K_f\big(\bar{n}(g^{-1}y),t\big) & \text{pour } y \in \mathfrak{U}_g, t \in \bar{N} \\ K(g,y,t) = \quad 0 & \text{pour } y \notin \mathfrak{U}_g, t \in \bar{N} \end{cases}.$$

Comme K_f est une fonction de classe C^∞ à support compact de $\bar{N} \times \bar{N}$ dans E, il en est de même de $K(g,.,.)$, d'après le lemme 7.
2) Pour f dans $A^{-1}\mathfrak{D}$ et ψ dans $C_c^\infty(G)$, l'opérateur $\pi_\chi(\psi) \circ A_f$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, admettant le noyau K donné par :

$$K(y,t) = \int_G \psi(g)\ K(g,y,t)dg \quad y \in \bar{N}\ t \in \bar{N}.$$

Le lemme 7 montre alors que $(g, y, t) \longmapsto \psi(g)K(g, y, t)$ est nulle en dehors d'un compact de $G \times \bar{N} \times \bar{N}$ donc K est à support compact, de classe C^∞, par dérivation sous le signe d'intégration.

On munit l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ de la topologie suivante : une suite (f_n) d'éléments de $A^{-1}\mathfrak{D}$ sera dite convergente vers 0 si la suite (K_{f_n}) converge vers 0 dans $\mathfrak{D}$ c'est à dire si tous les K_f ont leurs supports inclus dans un même compact, et convergent uniformément, ainsi que leurs dérivées, vers 0 sur $\bar{N} \times \bar{N}$.
De même, les espaces de symboles de type $\mathcal{S}$, de fonctions de type $\mathcal{S}$ de $\bar{N} \times \bar{N}$ dans E (ou de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ dans E) sont munis des topologies induites par la topologie usuelle de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$.

Définition 1. (représentation $*$ de G associée à π_χ)

Soit $g \in G$; on définit une distribution $E_{\pi_\chi}(g)$ sur l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$, i.e. une forme linéaire continue sur $A^{-1}\mathfrak{D}$ en posant :

$$< E(g), f >= \int_{\mathfrak{N}} Tr\ K_{\pi_\chi(g)\circ\ A_f}(y, y) \quad dy.$$

où $K_{\pi_\chi(g)\circ\ A_f}$ désigne le noyau de l'opérateur $\pi_\chi(g) \circ\ A_f$ dont l'expression a été donnée plus haut.

Cette définition a bien un sens car la fonction $y \longmapsto K_{\pi_\chi(g)\circ\ A_f}(y, y)$ est en particulier continue à support compact, donc intégrable.
La forme linéaire $E_{\pi_\chi}(g)$ est bien continue pour la topologie de $A^{-1}\mathfrak{D}$: en effet si la suite (f_n) converge vers 0 dans $A^{-1}\mathfrak{D}$, la suite (K_{f_n}) converge vers 0 uniformément sur $\bar{N} \times \bar{N}$, les K_{f_n} ayant leurs supports contenus dans un compact indépendant de n ; le lemme 7 permet d'en déduire que la suite de fonctions $y \longmapsto K_{\pi_\chi(g)\circ\ A_{f_n}}(y, y)$ converge uniformément vers 0 sur $\bar{N}$, donc que $< E_{\pi_\chi}(g), f_n >$ tend vers 0.

Remarques:

1) La définition précédente a été choisie de sorte que, au moins formellement, on aie la propriété:

$$\frac{d}{dt}\ E_{\pi_\chi}\ (\exp\ tX) = E_{\pi_\chi}\ (\exp\ tX) * \quad i\tilde{X}$$

pour tout X dans $\mathfrak{g}$, le produit associatif $*$ étant supposé étendu aux formes linéaires sur $A^{-1}\mathfrak{D}$ par :

$$< D * f,\ h >=< D, f * h > \quad h \in A^{-1}\mathfrak{D}$$

où D désigne une forme linéaire sur $A^{-1}\mathfrak{D}$ et f un symbole tel que $f * h \in A^{-1}\mathfrak{D}$ pour tout $h \in A^{-1}\mathfrak{D}$ (par exemple $f \in A^{-1}\mathfrak{D}$).
2) Supposons que $f \in A^{-1}\mathfrak{D}$ est tel que l'opérateur A_f soit à trace (c'est le cas en particulier si f est une combinaison linéaire finie de symboles du type $h_1 * h_2$ où h_1 et h_2 appartiennent à $A^{-1}\mathfrak{D}$).
Alors, pour chaque g de G, l'opérateur $\pi_\chi(g) \circ A_f$ est également à trace et on a :

$$< E_{\pi_\chi}(g), f >= Tr(\pi_\chi(g) \circ\ A_f)$$

Définition 2.

Soit un symbole f de $\mathcal{A}$ tel que $f * h \in A^{-1}\mathfrak{D}$ pour tout $h \in A^{-1}\mathfrak{D}$. On définit une distribution sur $A^{-1}\mathfrak{D}$, également notée f, en posant :

$$< f, h >= \int_{O(\xi_0)} f * h \ \ d\mu.$$

Le deuxième membre ci dessus est bien défini, tout élément de $A^{-1}\mathfrak{D}$ étant en particulier un symbole de type $\mathcal{S}$, donc de type L^1.

Notons que d'après une remarque du paragraphe 5, on a:

$$< f, h >= Tr\ A_{f*h} = Tr\ (A_f \circ\ A_h)$$

Vérifions à présent la continuité de $h \longmapsto < f, h >$ sur $A^{-1}\mathfrak{D}$. Si (h_n) est une suite de $A^{-1}\mathfrak{D}$ qui converge vers 0, la suite (K_{h_n}) converge vers 0 dans $\mathfrak{D}$ donc dans L^2 et la suite d'opérateurs (A_{h_n}) converge vers 0 pour la norme de Hilbert-Schmidt $\| \ \|_2$; utilisant alors l'égalité:

$$Tr(A_f \circ A_{h_n}) = \frac{1}{4}\|A_f + A_h^*\|_2^2 - \frac{1}{4}\|A_f - A_h^*\|_2^2 + \frac{i}{4}\|A_f + iA_h^*\|_2^2 - \frac{i}{4}\|A_f - iA_h^*\|_2^2$$

on obtient:

$$\lim_n < f, h_n >= 0.$$

Soient 2 formes linéaires D et D' sur $A^{-1}\mathfrak{D}$; on suppose que pour tout h de $A^{-1}\mathfrak{D}$ la forme linéaire $D' * h$ définie plus haut est égale à la forme linéaire obtenue comme dans la définition 2 à partir d'un symbole appartenant à $A^{-1}\mathfrak{D}$ qui sera également noté $D' * h$. On définit alors une forme linéaire $D * D'$ par:

$$< D * D', h >=< D, D' * h > \quad h \in A^{-1}\mathfrak{D}.$$

Proposition 11.

Notons $(A^{-1}\mathfrak{D})'$ l'espace des distributions sur $A^{-1}\mathfrak{D}$; on a :

1) Si $g \in G$ et $f \in A^{-1}\mathfrak{D}$ alors:

$$E_{\pi_\chi}(g) * f = A^{-1}\big(\pi_\chi(g) \circ\ A_f\big) \ \text{ dans } (A^{-1}\mathfrak{D})'.$$

2) Si $g \in G$ et $g' \in G$, alors:

$$E_{\pi_\chi}(g) * \ \ E_{\pi_\chi}(g') = E_{\pi_\chi}(gg').$$

Preuve:
1) En effet, pour $h \in A^{-1}\mathfrak{D}$:

$$< E_{\pi_\chi}(g) * f, h >=< E_{\pi_\chi}(g), f * \ h >= \ Tr\big(\pi_\chi(g) \circ \ A_{f*h}\big)$$

et d'autre part:

$$< A^{-1}\big(\pi_\chi(g) \circ \ A_f\big), h >= \ Tr\big(\pi_\chi(g) \circ \ A_f \ \circ \ A_h\big)$$

2) Pour $h \in \ A^{-1}\mathfrak{D}$, on a:

$$< E_{\pi_\chi}(g) \ * \ E_{\pi_\chi}(g'), h >=< E_{\pi_\chi}(g), E_{\pi_\chi}(g') \ * \ h >$$

où: $E_{\pi_\chi}(g') * \ h$ désigne le symbole associé à $\pi_\chi(g') \ \circ \ A_h$.
D'où:

$$< E_{\pi_\chi}(g) * \ E_{\pi_\chi}(g'), h \ >= \int_{\bar{N}} Tr \ K_{\pi_\chi(g)\circ\pi_\chi(g')\circ A_h}(y, y) \ dy.$$

D'où le résultat.

Définition 3: (Transformée de Fourier adaptée)

Soit ψ appartenant à $C_c^\infty(G)$; l'opérateur $\pi_\chi(\psi)$ étant de Hilbert-Schmidt [38], on définit un symbole $\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi)$ de $\mathcal{A}$ par:

$$A_{\mathcal{E}_{\pi_\chi(\psi)}} = \pi_\chi(\psi).$$

$\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi)$ sera appelé transformée de Fourier adaptée de ψ.

D'après la proposition 10, si h appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$ alors $\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi) * h$ appartient aussi à $A^{-1}\mathfrak{D}$, si bien que le symbole $\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi)$ permet d'obtenir, comme dans la définition 2, une distribution sur $A^{-1}\mathfrak{D}$:

$$< \mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi), h >= \int_{O(\xi_0)} \mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi) * h \quad d\mu = Tr\big(\pi_\chi(\psi) \circ A_h\big).$$

On obtient alors immédiatement les propriétés suivantes de $\mathcal{E}_{\pi_\chi}$:

Proposition 12.

1) Pour $\psi_1 \in C_c^\infty(G)$ et $\psi_2 \in C_c^\infty(G)$ définissons $\psi_1 \star \psi_2$ et ψ_1^ν comme dans le cas compact (paragraphe 8.1) ; on a :

$$\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi_1) \ * \ \mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi_2) = \mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi_1 \star \psi_2)$$
$$\mathcal{E}\pi_\chi(\psi_1^\nu) = \overline{\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi_1)}.$$

2) Pour $\psi \in C_c^\infty(G)$, on a :

$$\mathcal{E}_{\pi_\chi}(\psi) = \int_G \psi(g) \ E_{\pi_\chi}(g) dg \quad \text{dans} \ \ (A^{-1}\mathfrak{D})'.$$

8.3 Remarque importante:

Si G est un groupe de Lie complexe, alors tout le contenu de ce chapitre reste valable à la seule condition de remplacer la forme de Killing β de $\mathfrak{g}$ par sa partie réelle.

Le groupe M étant dans ce cas connexe abélien [38], l'orbite $O(\xi_2)$ est alors triviale ce qui simplifie le paramétrage de l'orbite $O(\xi_0)$ (on paramétre un ouvert dense de $O(\xi_0)$ par $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$) et la construction du calcul symbolique au dessus de $O(\xi_0)$: l'utilisation du calcul symbolique de Berezin disparait, et on retrouve le calcul symbolique au dessus de $\bar{N} \times \bar{\mathfrak{n}}$ du paragraphe 7.

8.4 Application.

Supposons ici que le groupe G possède une unique classe de sous-algèbres de Cartan. Alors le groupe M est connexe, ce qui implique qu'à chacune de nos orbites O correspond une unique représentation π_O de la série principale, et seules interviennent dans l'écriture de la formule de Plancherel de G les représentations de la série principale [37].

Notons alors $\mathfrak{g}^*_{\text{int}}$ la réunion des orbites condjointes O associées aux représentations de la série principale, et si F est une fonction définie sur $\mathfrak{g}^*_{\text{int}}$ posons :

$$\| F \|^2 = \int \| F_{|O} \|^2 \, dm(O)$$

où dm désigne la mesure de Plancherel lue sur l'ensemble des orbites O identifié à $\hat{G}$ et où:

$$\|F_{|O}\|^2 = \int_O \|F_{|O}\|^2 d\mu_O$$

$d\mu_O$ étant la mesure de Liouville de O.

Définissons enfin $\mathcal{E}(\psi)$ pour $\psi \in C_c^\infty(G)$ par :

$$\mathcal{E}(\psi)_{|O} = \mathcal{E}_{\pi_O}(\psi)$$

Alors, avec ces notations, la formule de Plancherel s'écrit simplement :

$$\int_G |\psi(g)|^2 \, dg = \|\xi(\psi)\|^2$$

i.e. la transformation $\mathcal{E}$ construite est unitaire de $L^2(G)$ sur $L^2(\mathfrak{g}^*_{\text{int}})$.

II. Calcul symbolique au dessus d'une orbite coadjointe d'un produit semi direct

1.Préliminaires.

Les notations suivantes s'inspirent beaucoup de celles de [33] et sont indépendantes de celles du précédent chapitre.

Soit K un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.
On note $k.f$ l'action coadjointe de $k \in K$ sur $f \in \mathfrak{k}^*$.
Soit σ une représentation de K dans un espace vectoriel réel V de dimension finie, et $d\sigma$ la représentation de $\mathfrak{k}$ associée.
On note σ^* la représentation de K dans V^* contragrédiente de σ:

$$< \sigma^*(k)p, v >=< p, \sigma(k^{-1})v >$$

où $k \in K$, $p \in V^*$ et $v \in V$.
On obtient, par dérivation:

$$< d\sigma^*(A)p, v >= - < p, d\sigma(A)v >$$

pour $A \in \mathfrak{k}$.
On note alors, si v appartient à V et p à V^*, $v \wedge p$ l'élément de $\mathfrak{k}^*$ défini par:

$$< v \wedge p, A >=< p, d\sigma(A)v > .$$

On utilisera parfois s'il n'y a pas risque de confusion les notations $k.v$, $k.p$, $A.v$ et $A.p$ à la place de, respectivement: $\sigma(k)v$, $\sigma^*(k)p$, $d\sigma(A)v$ et $d\sigma^*(A)p$.

Soit alors G le groupe produit semi direct $V \times K$ dont la loi est donnée par:

$$(v, k).(v', k') = (v + \sigma(k)v', kk').$$

G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'identifie, en tant qu'espace vectoriel, à $V \oplus \mathfrak{k}$.
On identifie également $\mathfrak{g}^*$ à $V^* \oplus \mathfrak{k}^*$ en posant:

$$< (p, f), (a, A) >=< p, a > + < f, A >$$

pour $p \in V^*$, $a \in V$, $f \in \mathfrak{k}^*$ et $A \in \mathfrak{k}$.

Lemme 1.

1) (crochet de Lie de $\mathfrak{g}$) Soient $X = (a, A)$ et $Y = (b, B)$ deux éléments de $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{k}$.

Alors:

$$[X,Y] = (d\sigma(A)b - d\sigma(B)a, [A,B]).$$

2) (action coadjointe de $\mathfrak{g}$) L'action coadjointe de $(v,k) \in G$ sur $(p,f) \in \mathfrak{g}^* = V^* \oplus \mathfrak{k}^*$ est donnée par:

$$(v,k).(p,f) = (\sigma^*(k)p, k.f + v \wedge \sigma^*(k)p).$$

Preuve:
1) Remarquant que:

$$exp(tX) = (\int_0^s \sigma(exp(rA))adr, exp(tA)) \ ,$$

on obtient:

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(exp(tX)exp(sY) - exp(sY)exp(tX)) \mid_{t=s=0} \\ &= (d\sigma(A)b - d\sigma(B)a, [A,B])\end{aligned}$$

2) Soient $g = (v,k)$ un élément de G et $X = (a,A)$ un élément de $\mathfrak{g}$.
Formant $gexp(tX)g^{-1}$, on trouve:

$$\begin{aligned}Adg(X) &= \frac{d}{dt}(gexp(tX)g^{-1}) \mid_{t=0} \\ &= (\sigma(k^{-1})a + \sigma(k^{-1})d\sigma(A)v, Adk^{-1}A).\end{aligned}$$

Ecrivant alors pour $\xi = (p,f)$ dans $\mathfrak{g}^*$:

$$< Ad^*g.\xi, X > = < \xi, Adg^{-1}A) >,$$

on obtient:

$$< Ad^*g.\xi, X > = < \sigma^*(k)p, a > + < k.f + v \wedge \sigma^*(k)p, A >$$

Pour $p \in V$, on pose:

$$K_p = \{k \in K \quad \sigma^*(k)p = p\}.$$

K_p est un sous groupe de K d'algèbre de Lie:

$$\mathfrak{k}_p = \{A \in \mathfrak{k} \quad d\sigma^*(A)p = 0\}.$$

Si on introduit l'application τ_p de $\mathfrak{k}$ dans V^* telle que:

$$\tau_p(A) = -d\sigma^*(A)p, \quad A \in \mathfrak{k},$$

il est clair que:

$$Ker\tau_p = \mathfrak{k}_p.$$

D'autre part, l'application transposée de τ_p est l'application τ_p^* de V^{**}, canoniquement identifié à V, dans $\mathfrak{k}^*$ définie par:

$$\begin{aligned} < \tau_p^*(v), A > &= < v, \tau_p(A) > \\ &=- < d\sigma^*(A)p, v > \\ &= < v \wedge p, A > . \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\tau_p^*(v) = v \wedge p.$$

Notons alors $\mathfrak{k}_p^0$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}_p$ dans $\mathfrak{k}^*$; on a:

$$\tau_p^*(V) \subset \mathfrak{k}_p^0$$

et:

$$\begin{aligned} dim \tau_p^*(V) &= dim \tau_p(\mathfrak{k}) \\ &= dim \mathfrak{k} - dim Ker \tau_p(\mathfrak{k}) \\ &= dim \mathfrak{k} - dim \mathfrak{k}_p \end{aligned}$$

Donc:

$$\mathfrak{k}_p^0 = \tau_p^*(V).$$

Dans [33], J.Rawnsley associe à toute orbite coadjointe O du groupe G le fibré $\mathcal{F}$ obtenu de la façon suivante:
si (p_0, f_0) est un point de O, $\mathcal{F}$ est le fibré associé au fibré principal de base:

$$Z_{p_0} = \{\sigma^*(k)p_0 \quad k \in K\}$$

d'espace total K (dont la fibre au dessus du point p_0 de Z_{p_0} est K_{p_0}) par l'action de K_{p_0} sur l'orbite coadjointe Y_{p_0} de $f_0 \mid_{\mathfrak{k}_{p_0}} \in \mathfrak{k}_{p_0}^*$.
$\mathcal{F}$ est donc un fibré de base Z_{p_0}, de fibre type Y_{p_0}, la fibre au dessus d'un point p de Z_{p_0} s'identifiant à l'orbite Y_p de $f_0 \mid \mathfrak{k}_p$ sous l'action coadjointe de K_p, groupe conjugué de K_{p_0}.
$\mathcal{F}$ ne dépend que de l'orbite O (pas de l'élément (p_0, f_0) de O considéré) et, inversement, la donnée de $\mathcal{F}$ détermine O.
On dispose d'une "projection" de O dans l'espace total de $\mathcal{F}$, l'application α telle que:

$$\alpha(p, f) = f \mid_{\mathfrak{k}_p} .$$

Déterminons les "fibres" ou "lignes de niveaux" de l'application α:
si:

$$\alpha(p, f) = \alpha(p', f')$$

alors:

$$p = p'$$

et

$$f\mid_{\mathfrak{k}_p} = f'\mid_{\mathfrak{k}_p}.$$

Donc:

$$f' - f \in \mathfrak{k}_p^0 = \tau_p^*(V)$$

et il existe $v \in V$ tel que:

$$f' = f + v \wedge p.$$

D'où:

$$(p, f') = (p, f + v \wedge p) = (v, e).(p, f).$$

Les fibres de α sont donc les orbites, dans O, de V considéré comme un sous groupe de G. Si $\varphi \in Y_p$, choisissons $f \in \mathfrak{k}^*$ tel que $f \mid \mathfrak{k}_p = \varphi$; alors:

$$\alpha(p, f) = \varphi$$

et les éléments de la fibre $\alpha^{-1}(\varphi)$ sont du type $(p, f + f')$ avec $f' \in \mathfrak{k}_p^0$.
Remarquons d'autre part que si $p = \sigma^*(k)p_0$, alors:

$$K_p = kK_{p_0}k^{-1}$$

d'où:

$$\mathfrak{k}_p = Adk.\mathfrak{k}_{p_0}$$

et:

$$\mathfrak{k}_p^0 = Ad^*k.\mathfrak{k}_{p_0}^0.$$

On peut alors avoir l'idée d'introduire un "paramétrage" de l'orbite coadjointe O par $Z_{p_0} \times \mathfrak{k}_{p_0}^0 \times Y_{p_0}$, à condition qu'il soit possible de définir sur chaque "fibre" $\alpha^{-1}(\varphi)$ une "origine naturelle" permettant de considérer $\alpha^{-1}(\varphi)$ comme un espace affine d'espace vectoriel associé $\mathfrak{k}_p^0$.
Dans le cadre où l'on va désormais se placer, cette condition sera automatiquement satisfaite, et, de plus, $\mathfrak{k}_p^0$ s'identifiera à un hyperplan de V.

Dans toute la suite, K sera un groupe de Lie connexe semi-simple non compact de centre fini et on supposera que, pour p_0 fixé dans V^*:

1) K_{p_0} est un sous groupe compact maximal de K conduisant à une décomposition de Cartan de $\mathfrak{k}$:

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{p_0} \oplus \mathfrak{p}$$

2) l'orbite $Z = \{\sigma^*(k)p_0 \quad k \in K\}$ est de codimension 1 dans V^*.

Ces hypothèses étant vérifiées pour les orbites de masse carrée positive du groupe de Poincaré, on dira, si ces conditions sont réalisées, que G est un groupe de Poincaré généralisé et que O est une orbite de masse carrée positive.

L'application $(T,h) \longmapsto (expT)h$ est alors un difféomorphisme de $\mathfrak{p} \times K_{p_0}$ dans K [37], ce qui implique immédiatement que exp réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{p}$ dans son image $exp\mathfrak{p}$, et que l'application $k \longmapsto \sigma^*(k)p_0$ est un difféomorphisme de $exp\mathfrak{p}$ dans l'orbite Z. Pour $p \in Z$, on note $M(p)$ l'unique élément de $exp\mathfrak{p}$ tel que:

$$d\sigma^*(M(p))p_0 = p.$$

Remarquons que, pour $p \in Z$ et $k \in K_{p_0}$, on a:

$$M(k.p) = kM(p)k^{-1}.$$

Compte tenu de ce qui précéde, l'hypothèse 2) ci dessus peut s'écrire:

$$dim\ \tau^*_{p_0}(V) = dim\ \mathfrak{k} - dim\ \mathfrak{k}_{p_0} = dim\ Z = dim\ V - 1\ ,$$

ce qui équivaut à:

$$dim\ Ker\tau^*_{p_0}(V) = 1.$$

Comme p_0 n'est pas nul (sinon on aurait: $K_{p_0} = K$!), l'espace:

$$V_{p_0} = \{v \in V / < p_0, v >= 0\}$$

est un hyperplan de V.

Lemme 2.

1) $V^* = \tau_{p_0}(\mathfrak{k}) \oplus \mathbb{R}.p_0$
2) $V = V_{p_0} \oplus Ker\tau^*_{p_0}$

Preuve:
1) Comme $dim\tau_{p_0}(\mathfrak{k}) = dimV - 1$, il suffit de montrer que p_0 n'appartient pas à $\tau_{p_0}(\mathfrak{k})$. Supposons qu'il existe A dans $\mathfrak{k}$ tel que:

$$d\sigma^*(A)p_0 = p_0.$$

On peut toujours supposer que A appartient à $\mathfrak{p}$ et, pour tout B de $\mathfrak{k}_{p_0}$, on a:

$$d\sigma^*([A,B])p_0 = d\sigma^*(A)d\sigma^*(B)p_0 - d\sigma^*(B)p_0.$$

D'où:

$$[A,B] \in \mathfrak{k}_{p_0}$$

et comme d'autre part:

$$[A,B] \in \mathfrak{p}$$

car:

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_{p_0}] \subset \mathfrak{p},$$

on obtient:

$$[A,B] = 0.$$

Soit β la forme de Killing de $\mathfrak{k}$.
Pour $B \in \mathfrak{k}_{p_0}$ et $C \in \mathfrak{p}$, on a:

$$\beta(B,[A,C]) = \beta([B,A],C) = 0.$$

Alors $[A,C]$, orthogonal pour β à tout $B \in \mathfrak{k}_{p_0}$, appartient à $\mathfrak{p}$.
D'autre part, comme $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}_{p_0}$, on a:

$$[A,C] \in \mathfrak{k}_{p_0}.$$

Donc:

$$[A,C] = 0.$$

Ainsi A appartient au centre de $\mathfrak{k}$, donc $A = 0$ et $p_0 = 0$, ce qui est une contradiction.
2) Comme:

$$dim\ V_{p_0} = dim\ V - 1$$

et:

$$dim\ Ker\tau^*_{p_0}(V) = 1,$$

il suffit de vérifier que:

$$V_{p_0} \cap Ker\tau^*_{p_0} = (0).$$

Soit alors v appartenant à V tel que $< p_0, v >$ et $v \wedge p_0$ soient nuls.
Alors, pour tout A de $\mathfrak{k}$:

$$< d\sigma^*(A)p_0, v >= 0.$$

D'après 1), on obtient: $v = 0$.

Si φ est un point de $\mathfrak{k}^*_{p_0}$, on note également φ l'unique prolongement de φ à $\mathfrak{k}$ identiquement nul sur $\mathfrak{p}$.On obtient ainsi une injection linéaire de $\mathfrak{k}^*_{p_0}$ dans $\mathfrak{k}^*$ compatible avec l'action coadjointe de K_{p_0}.

Soit $O(\xi_0)$ l'orbite coadjointe du point $\xi_0 = (p_0, \varphi_0)$ de $\mathfrak{g}^*$ où φ_0 est dans $\mathfrak{k}^*_{p_0}$.
On va paramétrer $O(\xi_0)$ par $Z \times V_{p_0} \times O(\varphi_0)$ où $O(\varphi_0)$ désigne l'orbite de φ_0 sous l'action coadjointe de K_{p_0}.

Proposition 1:

L'application:

$$\Psi : (p, v, \varphi) \longmapsto (p, M(p).(\varphi + v \wedge p_0))$$

est un difféomorphisme de $Z \times V_{p_0} \times O(\varphi_0)$ *dans* $O(\xi_0)$.

Preuve:

1) Ψ est injective: en effet, si:

$$\Psi(p, v, \varphi) = \Psi(p', v', \varphi')$$

alors:

$$p = p'$$

et:

$$\varphi - \varphi' = (v' - v) \wedge p_0$$

Comme $\varphi - \varphi'$ s'annule sur $\mathfrak{p}$, et $(v' - v) \wedge p_0$ s'annule sur $\mathfrak{k}_{p_0}$, $(v' - v) \wedge p_0 = 0$, ce qui, puisque $v' - v$ appartient à V_{p_0}, implique $v' = v$.

2) Ψ est surjective:

Remarquons tout d'abord que pour $k \in K$, $v \in V$ et $p \in V^*$:

$$k.(v \wedge p) = \sigma(k)v \wedge \sigma^*(k)p.$$

Soit alors $\xi = (w, k).\xi_0$ un élément de $O(\xi_0)$.

On peut écrire ξ sous la forme $\Psi(p, v, \varphi)$ où $p = \sigma^*(k)p_0$, $\varphi = M(p)^{-1}k.\varphi_0$ et où v est le projeté de $\sigma(M(p))^{-1}w$ sur V_{p_0} parallèlement à $Ker\tau^*_{p_0}$, d'où le résultat.

3) Le stabilisateur de ξ_0 dans G est $Ker\tau^*_{p_0} \times K_{p_0,\varphi_0}$ où K_{p_0,φ_0} est le stabilisateur de φ_0 dans K_{p_0}. D'où:

$$dimO(\xi_0) = dimZ + dimV_{p_0} + dimO(\varphi_0).$$

Par suite, et compte tenu de l'action de G sur l'orbite, il suffit pour pouvoir conclure que Ψ est un difféomorphisme de vérifier que l'application linéaire tangente de Ψ au point $(p_0, 0, \varphi_0)$ est injective, ce qui se fait aisément.

Remarque 1:

La forme de Killing β de $\mathfrak{k}$ permet d'identifier $\mathfrak{k}^*$ à $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}^*_{p_0}$ à $\mathfrak{k}_{p_0}$. L'injection de $\mathfrak{k}^*_{p_0}$ dans $\mathfrak{k}^*$ introduite plus haut correspond alors à l'injection canonique de $\mathfrak{k}_{p_0}$ dans $\mathfrak{k}$, et l'espace $\mathfrak{k}^0_{p_0} = \tau^*_{p_0}(V)$ s'identifie à $\mathfrak{p}$.

2.Représentations.

$O(\xi_0)$ désignant toujours l'orbite coadjointe de $\xi_0 = (p_0, \varphi_0)$ où p_0 est un point de V^* qui satisfait aux hypothèses du paragraphe précédent, on supposera de plus que la restriction de $i\varphi_0$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{p_0,\varphi_0}$ du stabilisateur K_{p_0,φ_0} de φ_0 dans K_{p_0} définit une forme Λ analytiquement intégrable - dominante sur $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}_{p_0,\varphi_0}$ qui peut alors être considérée d'après le théorème de Borel-Weyl-Bott comme le plus haut poids d'une représentation unitaire inéductible ρ de K_{p_0} réalisée dans l'espace E des sections holomorphes du fibré en droites complexes $L = K_{p_0} \times_{e^\Lambda} \mathbb{C}/K_{p_0,\varphi_0}$ au dessus de l'orbite coadjointe $O(\varphi_0) \subset \mathfrak{k}^*_{p_0}$ comme au paragraphe 3.2 du chapitre I.

On forme alors la représentation unitaire de G:

$$\pi = \mathrm{Ind}^G_{V \times K_{p_0}}(e^{i<p_0,.>} \otimes \rho).$$

La représentation π est réalisée dans l'espace de Hilbert H complété de l'espace des fonctions $\phi : Z \longrightarrow E$ de classe C^∞ à support compact pour la norme:

$$\|\phi\|^2 = \int_Z < \phi(p), \phi(p) > d\mu(p)$$

où $< \, , \, >$ désigne le produit hilbertien de E et où $d\mu$ est une mesure K-invariante de Z (on montrera plus loin l'existence d'une telle mesure):

$$\big(\pi(w,k)\phi\big)(p) = e^{i<p,w>}\rho\big(M(p)^{-1}k\ M(k^{-1}p)\big)\phi(k^{-1}p)$$

pour $(w,k) \in G \; , \; p \in Z$.

La représentation π peut également être obtenue en utilisant la construction exposée dans [35] ou le procédé de quantification géométrique des orbites $O(\varphi_0)$ et $O(\xi_0)$ donné dans [33].

D'autre part, d'après un résultat de Mackey [35], la représentation π est irréductible car la représentation ρ l'est.

La différentielle de la représentation π est donnée par :

$$\big(d\pi(w,A)\phi\big)(p) = i < p,w > \phi(p) + d\rho\big(L(p,A)\big)\phi(p) - T_p\phi(A.p)$$

où $(w,A) \in \mathfrak{g} \; , \; p \in Z$ et avec la notation:

$$L(p,A) = \frac{d}{dt}(M(p)^{-1}\ \exp(tA)\ M\big(\exp(-tA)p\big)\Big|_{t=0}.$$

L'application L de $Z \times \mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{k}_{p_0}$ ainsi définie est linéaire en sa deuxième variable et possède d'intéressantes propriétés de symétrie qui seront utilisées au paragraphe suivant.

Proposition 2.

i) Pour $p \in Z$ et $A \in \mathfrak{k}$:

$$L\big(M(p)^{-1}A\big)\ ,\ Ad\ M(p)^{-1}A\big) = L(p,A).$$

ii) Pour $p \in Z$ et $A \in \mathfrak{p}$:

$$L\big(M(p)^{-1}p_0\ ,\ -A\big) = L(p,A).$$

Preuve : Notons θ le difféomorphisme $(T,h) \longmapsto (exp\ T)h$ de $\mathfrak{p} \times K_{p_0}$ dans K, pr_2 la projection canonique de $\mathfrak{p} \times K_{p_0}$ sur K_{p_0} et posons:

$$\tilde{pr}_2 = pr_2 \circ \theta^{-1}.$$

Si $X \in \mathfrak{k}$ (respectivement $X \in \mathfrak{k}_{p_0}$), notons X^+ le champ invariant à droite sur K (respectivement sur K_{p_0}) associé.
Utilisant l'expression bien connue de la différentielle de l'application exp, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{(T,k)}\theta\ \ (S, U^+\ (k)) &= \frac{d}{dt}\ exp(T+tS)\ exp(tU)\ h\Big|_{t=0} \\ &= \left[e^{ad\ T}\Big(\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}.S\ +\ U\Big)\right]^+ (exp\ T.h) \end{aligned}$$

où $(T,k) \in \mathfrak{p} \times K_{p_0}$, $S \in \mathfrak{p}$ et $U \in \mathfrak{k}_{p_0}$.
D'où , différentiant l'application $\tilde{pr}_2 \circ \theta = pr_2$:

$$T_{expT.h}\ \tilde{pr}_2\Big(Ad\ exp\ T\Big(\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}.S+U\Big)\Big)^+(expT.h) = U^+(h).$$

En particulier pour $expT = M(p)$ et $h = e$, on trouve :

$$T_{M(p)}\ \tilde{pr}_2\quad\Big(Ad\ M(p)\ \Big(\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}.S+U\Big)\Big)^+(M(p)) = U.$$

Cette dernière égalité va nous permettre de calculer $L(p,A)$ $(p \in Z\ ,\ A \in \mathfrak{k})$.
En effet remarquant que, pour k dans K:

$$M(p)^{-1}\ k\ M(k^{-1}\ p) = \tilde{pr}_2\big(k^{-1}M(p)\big)^{-1}$$

on a d'une part:

$$L(p,A) = \frac{d}{dt}\tilde{pr}_2\big(exp(-tA)M(p)\big)^{-1}\Big|_{t=o} = (T_{M(p)}\tilde{pr}_2)\Big(A^+\big(M(p)\big)\Big)$$

et d'autre part, si T est fixé dans $\mathfrak{p}$, pour tout $A' \in \mathfrak{k}$, il existe un unique couple (S,U) appartenant à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{k}_{p_0}$ tel que :

$$A' = \frac{1-e^{ad\ T}}{ad\ T}.S\ +\ U$$

En effet cette égalité s'écrit:

$$A' = \frac{sh\ ad\ T}{ad\ T}.S\ + \frac{1-ch\ ad\ T}{ad\ T}.S+U$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} pr_{\mathfrak{p}}(A') = \frac{sh\ ad\ T}{ad\ T}.S \\ pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}(A') = \frac{1-ch\ ad\ T}{ad\ T}S+U \end{cases}$$

où $pr_{\mathfrak{p}}$ et $pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}$ sont les projections respectives de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{k}_{p_0}$.
Soit encore :

$$\begin{cases} S = \frac{ad\ T}{sh\ ad\ T}.pr_{\mathfrak{p}}(A') \\ U = pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}(A')\ +\ th(\frac{1}{2}\ ad\ T)pr_{\mathfrak{p}}(A'). \end{cases}$$

Ainsi, on trouve, si $M(p) = expT$:

$$L(p,A) = pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}\big(Ad\ M(p)^{-1}.A\big) + th\Big(\frac{1}{2}\ ad\ T\Big)\ pr_{\mathfrak{p}}\ \big(Ad\ M(p)^{-1}A\big).$$

En écrivant:

$$A = pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}(A) + pr_{\mathfrak{p}}(A)$$

et

$$Ad\ M(p)^{-1} = Ad\ exp(-T) = e^{-ad\ T} = -sh(ad\ T) + ch(ad\ T)\ ,$$

on obtient aussi:

$$L(p,A) = pr_{\mathfrak{k}_{p_0}}(A) - th\ \Big(\frac{1}{2}\ ad\ T\Big) pr_{\mathfrak{p}}(A)\ .$$

La propriété ii) résulte immédiatement de cette dernière expression de $L(p, A)$ pour $A \in \mathfrak{p}$ et la propriété i) des deux expressions de $L(p, A)$ pour $A \in \mathfrak{k}$.

Remarque 2.

La méthode utilisée dans la preuve de la proposition précédente permet également de trouver l'expression de la mesure invariante de Z dans la carte $T \longmapsto expT.p_0$ de Z. Notons en effet pr_1 la projection canonique de $\mathfrak{p} \times K_{p_0}$ sur $\mathfrak{p}$ et posons $\tilde{pr}_1 = pr_1 \circ \theta^{-1}$. L'action de k de K sur Z induit une action $T \longmapsto \tilde{pr}_1(k\ .exp\ T)$ de k sur $\mathfrak{p}$ dont on va calculer le jacobien $J_k(T)$.

Posant $k.expT = expT'.h$ où $T' \in \mathfrak{p}$ et $h \in K_{p_0}$, on obtient pour V dans $\mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{pr}_1\big(k.exp(T+tV)\big)\Big|_{t=0} &= (T_{k.expT}\tilde{pr}_1)\Big[Ad\ k.expT\Big(\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}\ V\Big)\Big]^+(k\ exp\ T)\\
&= (T_{expT'.h}\tilde{pr}_1)\Big[e^{ad\ T'}\ Ad\ h\Big(\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}\ V\Big)\Big]^+(expT'.h)\\
&= \frac{ad\ T'}{sh\ ad\ T'}\ pr_{\mathfrak{p}}\Big(Ad\ h.\frac{1-e^{-ad\ T}}{ad\ T}\ V\Big)\\
&= \frac{ad\ T'}{sh\ ad\ T'}\ Ad\ h.\frac{sh\ ad\ T}{ad\ T}\ V\ .
\end{aligned}$$

D'où, posant:

$$\delta(T) = Det\Big(\frac{sh\ ad\ T}{ad\ T}\big|_{\mathfrak{p}}\Big),$$

on trouve :

$$J_k(T) = \delta(T')^{-1}\ \delta(T) \quad \text{où} \quad T' = \tilde{pr}_1(k\ exp\ T).$$

Par suite, l'image réciproque par l'application $T \longmapsto exp\ T.p_0$ de la mesure K- invariante de Z est la mesure $\delta(T)dT$ où dT désigne la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{p}$ ce qui est bien le résultat donné dans [20] par exemple.

3.Calculs symboliques.

3.1 Au dessus de l'orbite $O(\varphi_0)$, on considère le calcul symbolique de Berezin qui a été introduit au paragraphe 4 du chapitre 1 où l'on a donné ses principales propriétés. Rappelons que ce calcul associe à tout opérateur A de E une fonction $\check{A}$ sur $O(\varphi_0)$ appelée symbole, l'application $A \longmapsto \check{A}$ étant alors un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans l'espace des symboles.

En particulier si $X \in \mathfrak{k}_{p_0}$, le symbole de l'opérateur $d\rho(X)$ est la fonction $i\tilde{X}$ où $\tilde{X}$ désigne la fonction définie sur $O(\varphi_0)$ par:

$$\tilde{X}(\varphi) = < \varphi, X > .$$

Cette propriété montre que le calcul symbolique permet de retrouver $d\rho$ donc, puisque ici le groupe compact considéré, K_{p_0}, est connexe, de retrouver ρ.

3.2 Un symbole au dessus de l'orbite $O(\xi_0)$ est ici une fonction $f : O(\xi_0) \longmapsto \mathbb{C}$ telle que, pour tout (p,v) de $Z \times V_{p_0}$, la fonction $\varphi \longmapsto (f \circ \Psi)(p,v,\varphi)$ soit un symbole du calcul de Berezin au dessus de $O(\varphi_0)$, symbole dont on note $\hat{f}(p,v)$ l'opérateur de E associé.

Etant donné un symbole f au dessus de $O(\xi_0)$, on définit, lorsque cela a un sens, un opérateur A_f par la formule intégrale suivante qui utilise une "dualité" entre $\mathfrak{p}$ et V_{p_0} :

(1) $(A_f\phi)(p) =$

$$\int\int_{\mathfrak{p}\times V_{p_0}} e^{i<T,v>} \hat{f}(p,v)\rho\Big(M(p)^{-1} expTM\big(exp(-T)p\big)\Big)\phi\big(M(p)expT\ p_0\big)\ \delta(T)^{\frac{1}{2}} dT\ dv$$

où :

. $p \in Z$ et ϕ est une fonction de Z dans E

. on a posé pour T dans $\mathfrak{p}$ et v dans V_{p_0}:

$$< T, v > = < v \wedge p_0, T > .$$

. dT et dv sont des mesures de Lebesgue de $\mathfrak{p}$ et V_{p_0} convenablement normalisées et δ désigne la fonction sur $\mathfrak{p}$ introduite dans la Remarque 2 ; on a en particulier : $\delta(0) = 1$ et $T_0\ \delta = 0$.

La formule (1) permet d'associer à tout symbole f polynomial en v, c'est à dire tel que la fonction $f \circ \Psi$ soit de classe C^∞ et polynomiale en la variable v, un opérateur A_f agissant sur l'espace des fonctions $\phi\ Z \longrightarrow E$ de classe C^∞ à support compact.
En particulier, en utilisant la même méthode que pour le lemme 4 du chapitre 1, on obtient le résultat suivant:

Lemme 3.

1) Si f est un symbole tel que $f \circ \Psi$, donc $\hat{f}$, soit indépendant de la variable v, on a :

$$(A_f\ \phi)(p) = \hat{f}(p, .)\ \phi(p) \quad pour \quad p \in Z \quad et \quad \phi \in C^\infty(Z, E)$$

2) Si f est un symbole tel que : $(f \circ \Psi)(p,v,\varphi) =< u(p), v >$ où u est une fonction C^∞ de Z dans $\mathfrak{p}$, on a :

$$(A_f\ \phi)(p) = -\frac{1}{i}\Big[d\rho\Big(L(p,u(p))\Big)\ \phi(p) + (T_p\ \phi)\big(M(p).u(p).p_0\big)\Big]$$

pour $p \in Z$ et $\phi \in C_c^\infty(Z,E)$.

On peut alors énoncer la propriété principale de ce calcul symbolique :

Proposition 3.

Si X appartient à $\mathfrak{g}$, notons $\tilde{X}$ la fonction définie sur $O(\xi_0)$ par: $\tilde{X}(\xi) =< \xi, X >$. Alors $\tilde{X}$ est un symbole polynomial en v et:

$$A_{\tilde{X}}\ \phi = \frac{1}{i}\ d\pi(X)\phi$$

pour $\phi \in C_c^\infty(Z,E)$.

Preuve:

Soit $X = (w, B)$ un élément de $\mathfrak{g}$.
Posant:

$$B' = Ad\ M(p)^{-1}B = B_1 + B_2$$

où $B_1 \in \mathfrak{k}_{p_0}$ et $B_2 \in \mathfrak{p}$, on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{X} \circ \Psi)(p,v,\varphi) &=< p,w > + < M(p).(\varphi + v \wedge p_0), B > \\ &=< p,w > + < \varphi, B_1 > + < v, B_2 >\end{aligned}$$

Remarquons d'autre part que:

$$M(p).(B_2.p_0) = M(p).(B'.p_0) = B.(M(p).p_0) = B.p.$$

D'où, en utilisant le lemme 3 puis la proposition 2 :

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{X}}\ \phi)(p) &=< p,w > + \frac{1}{i}d\rho(B_1)\phi(p) - \frac{1}{i}\left[d\rho(L(p,B_2))\phi(p) + (T_p\phi)\big(M(p).(B_2.p_0)\big)\right] \\ &= \frac{1}{i}\Big[i < p,w > + d\rho\Big(L\big(M(p)^{-1}\ p_0, B_1\big)\Big)\phi(p) \\ &+ d\rho\Big(L\big(M(p)^{-1}p_0, B_2\big)\Big)\phi(p) - T_p\phi(B.p)\Big] \\ &= \frac{1}{i}\Big[i < p,w > + d\rho\Big(L\big(M(p)^{-1}\ p_0, B'\big)\Big)\phi(p) - T_p\phi(B.p)\Big] \\ &= \frac{1}{i}\left[i < p,w > + d\rho(L(p,B))\phi(p) - T_p\phi(B.p)\right] \\ &= \frac{1}{i}\big(d\pi(X)\phi\big)(p).\end{aligned}$$

De même qu'au chapitre 1, le calcul symbolique s'étend à la classe des symboles de "carré intégrable" :

Proposition 4.

La formule intégrale (1) permet de définir une isométrie bijective de l'espace de Hilbert $\mathcal{A}$ complété de l'espace des symboles f continus à support compact pour la norme

$$\|f\|^2 = \int\int_{Z\times V_{p_0}} \|\hat{f}(p,v)\|_2^2 \, d\mu(p)dv$$

dans l'espace $\mathcal{L}_2(H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H.

Preuve:

Soit f un symbole continu à support compact; on pose :

$$(\mathfrak{F}\hat{f})(p,T) = \int_{V_{p_0}} e^{i<T,v>} \hat{f}(p,v) \, dv.$$

La formule intégrale (1) s'écrit pour $\phi \in C_c(Z,E)$:

$$(A_f\phi)(p) = \int_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{F}\hat{f})(p,T)\rho\Big(M(p)^{-1}exp\ T\ M\big(exp(-T)p\big)\Big)\phi\big(M(p)exp\ T\ p_0\big) \quad \delta(T)^{\frac{1}{2}}\ dT.$$

A l'aide des changements de variables successifs $q' = exp\ T.p_0$ et $q = M(p).q'$, on obtient :

$$(A_f\phi)(p) = \int_Z K_f(p,q)\ \phi(q)\ d\mu(q)$$

où l'on a posé :

$$K_f(p,q) = (\mathfrak{F}\hat{f})(p, log\ M(p)^{-1}q)\ \rho(p,q)\ \delta\big(log\ M(p)^{-1}q\big)^{-1/2}$$

la notation $log\ q$ désignant, pour $q \in Z$, l'élément de $\mathfrak{p}$ tel que $exp(log\ q) = M(q)$ et la notation $\rho(p,q)$ étant évidente.

On a également :

$$\begin{aligned}
Tr(A_f\ A_f^*) &= \int\int_{Z\ \times\ Z} Tr\ K_f(p,q)\ K_f(p,q)^* \ \ d\mu(p)\ \ d\mu(q) \\
&= \int\int_{Z\times Z} Tr\Big(\mathfrak{F}\hat{f}(p, log\ M(p)^{-1}q)\mathfrak{F}\hat{f}(p,\ log\ M(p)^{-1}q)^*\Big)\ \delta\big(log\ M(p)^{-1}q\big)^{-1} d\mu(p)d\mu(q) \\
&= \int\int_{Z\ \times\ \mathfrak{p}} Tr(\mathfrak{F}\hat{f}(p,T)\ \mathfrak{F}\hat{f}(p,T)^*)\ d\mu(p)\ dT.
\end{aligned}$$

On voit ainsi la raison d'être du facteur $\delta(T)^{\frac{1}{2}}$ dans la formule intégrale (1). Utilisant la formule de Plancherel pour la transformée de Fourier partielle $\mathfrak{F}$, on trouve :

$$\|A_f\|_2^2 = \int\int_{Z\ \times\ V_{p_0}} \|\hat{f}(p,v)\|_2^2\ d\mu(p)\ dv.$$

Par suite A_f est un opérateur de Hilbert Schmidt de H et $\|A_f\|_2 = \|f\|$. La proposition en résulte.

Remarque 3.

L'action de G sur l'orbite $O(\xi_0)$ peut s'écrire, à travers le paramétrage Ψ :

$$(w,k).\Psi(p,v,\varphi) = \Psi(k.p, h.v + v', h.\varphi)$$

où:

$$h = M(k.p)^{-1}\ k\ M(p) \in\ K_{p_0}$$

et où v' est le projeté de $M(k.p)^{-1}w$ sur V_{p_0} dans la somme directe:

$$V = V_{p_0} \oplus Ker\ \tau^*_{p_0}.$$

On peut en déduire que la mesure $d\mu(p)\ dv\ d\varphi$ où $d\varphi$ désigne la mesure de Liouville de $O(\varphi_0)$ est l'image par Ψ de $d\xi$, mesure G invariante de l'orbite $O(\xi_0)$.

Remarque 4.

Si le symbole f est tel que l'opérateur A_f soit à trace et que la fonction $\hat{f}$ soit intégrable, on obtient de même qu'au paragraphe 5 du chapitre 1 en utilisant la remarque précédente :

$$Tr\ A_f = \int_{O(\xi_0)} f(\xi)\ d\xi.$$

4.Applications.

Tout comme au chapitre 1, le calcul symbolique construit au paragraphe précédent peut être utilisé pour définir une représentation $*$ de G associée à la représentation π, ainsi qu'une transformée de Fourier adaptée.

La composition des opérateurs dans $\mathcal{L}_2(H)$ permet de définir un produit associatif noté $*$ sur l'espace $\mathcal{A}$.
Notons $A^{-1}\mathfrak{D}$ l'espace des symboles f de $\mathcal{A}$ tels que l'opérateur A_f admette un noyau K_f de classe C^∞ à support compact. La formule de convolution des noyaux montre que l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ est stable pour le produit $*$.

Lemme 4.

1) Si f appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$ et g à G, l'opérateur $\pi(g) \circ A_f$ admet un noyau de classe C^∞ à support compact.

2) Si f appartient à $A^{-1}\mathfrak{D}$ et ψ à $C_c(G)$, l'opérateur $\pi(\psi) \circ A_f$ admet un noyau de classe C^∞ à support compact.

Preuve:

En effet $\pi(g) \circ A_f$ admet pour noyau, si $g = (w, k)$:

$$K(p,q) = e^{i<p,w>}\rho(M(p)^{-1}\ k\ M(k^{-1}.p))\ K_f(k^{-1}.p,q)$$

Et, pour $\psi \in C_c(G)$, l'opérateur $\pi(\psi) \circ A_f$ admet pour noyau :

$$K'(p,q) = \int\int_{V\times K} \psi(w,k)\ e^{i<p,w>}\rho(M(p)^{-1}k\ M(k^{-1}\ p))K_f(k^{-1}\ p,q)\ dw\ dk$$

qui est bien à support compact, puisque la fonction: $(w,k,p,q) \longmapsto \psi(w,k)\ K_f(k^{-1}\ p,q)$ l'est.

Définitions.

1) (Représentation $*$ de G associée à π) Pour $g \in G$ soit $E(g)$ la distribution de l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ définie par:

$$< E(g), f > \int_Z Tr\ K_{\pi(g)\circ A_f}\ (p,p)\ d\mu(p)$$

où $K_{\pi(g)\circ A_f}$ désigne le noyau de l'opérateur $\pi(g) \circ A_f$.

2) Soit f un élément de $A^{-1}\mathfrak{D}$. On note également f la distribution de l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ définie par

$$< f, h >= Tr(A_f \circ A_k).$$

3) (Transformée de Fourier adaptée) Pour $\psi \in C_c(G)$ soit $\mathcal{E}(\psi)$ la distribution sur l'espace $A^{-1}\mathfrak{D}$ définie par :

$$< \mathcal{E}(\psi), f >= Tr(\pi(\psi) \circ A_f).$$

Comme dans le chapitre précédent, on obtient avec les mêmes arguments:

Proposition 5.

1) Si g appartient à G et f à $A^{-1}\mathfrak{D}$, la distribution $E(g)*f$ sur $A^{-1}\mathfrak{D}$ est la distribution définie par la fonction de $A^{-1}\mathfrak{D}$, symbole de l'opérateur $\pi(g) \circ A_f$.

2) Pour g et g' éléments de G : $E(g) * E(g') = E(gg')$.

3) Pour ψ_1 et ψ_2 éléments de $C_c(G)$:

$$\mathcal{E}(\psi_1) * \mathcal{E}(\psi_2) = \mathcal{E}(\psi_1\ \star\ \psi_2).$$

4) Pour ψ *dans* $C_c(G)$ *:*

$$\mathcal{E}(\psi) = \int_G \psi(g)\; E(g)\; dg.$$

/

5.Un exemple : le groupe de Poincaré.

On considère ici le produit semi direct $G = V \times K$ où $K = SL(2,\mathbb{C})$ agit sur $V = \mathbb{R}^4$ via le recouvrement $SL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow SO(3,1)$ [29]

5.1 Identifications.

V étant rapporté à sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) on identifie V^* à V au moyen de la forme bilinéaire K-invariante sur V définie par:

$$< p, p' >= -p_1\, p_1' - p_2\, p_2' - p_3\, p_3' + p_4\, p_4'.$$

Les éléments de $\mathfrak{k} = sl(2,\mathbb{C}) \simeq so(3,1)$ sont des matrices du type :

$$\begin{pmatrix} B & u \\ {}^t u & o \end{pmatrix} \quad B \in so(3) \quad u \in \mathbb{R}^3.$$

Il est bien connu que $so(3)$ s'identifie à $\mathbb{R}^3$ par l'isomorphisme:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{pmatrix}$$

le crochet de Lie de $so(3)$ correspondant alors au produit vectoriel usuel de $\mathbb{R}^3$.

De même, $\mathfrak{k}$ s'identifie à l'espace des 2-vecteurs $\wedge^2 V$ par l'application

$$u \wedge w \longmapsto A_{u\wedge w}$$

où $A_{u\wedge w}$ est l'élément de $\mathfrak{k}$ défini par:

$$A_{u\wedge w}.v =< w, v > u- < v, u > w.$$

La forme bilinéaire de V induit une forme bilinéaire sur $\wedge^2 V$:

$$< p \wedge q, p' \wedge q' >=< p, q' >< p', q > - < p, p >< q, q >$$

laquelle correspond à la forme de Killing de $\mathfrak{k}$ et permet d'identifier $\mathfrak{k}^*$ à $\mathfrak{k}$.

Notons que :

$$< v \wedge p,\ u \wedge w >=< p, A_{u\wedge w} v >,$$

ce qui montre que le 2-vecteur $v \wedge p$ correspond bien à l'élément de $\mathfrak{k}^*$ noté $v \wedge p$ au paragraphe 1.

Enfin l'action coadjointe de K est donnée par l'action naturelle de K sur $\wedge^2 V$:

$$k.(u \wedge w) = k.u\ \wedge\ k.w.$$

5.2 Orbites.

L'orbite coadjointe de G considérée ici est celle de $\xi_0 = (p_0, \varphi_0)$ où $p_0 = e_4$ et $\varphi_0 = ne_1 \wedge e_2$, $2n \in \mathbb{N}^*$ (orbite de masse carrée positive et de spin n dans la terminologie de [35]).

Le "petit groupe" K_{p_0} est alors $SU(2)$, Z est l'hyperboloïde

$$\{p \in \mathbb{R}^4 / < p, p >= 1 \quad p_4 > 0\},$$

V_{p_0} est le sous espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et on a $Ker\ \tau^*_{p_0} = \mathbb{R}.e_4$.
Les hypothèses du paragraphe 1 sont vérifiées et la décomposition de Cartan de $\mathfrak{k}$ est donnée par $\mathfrak{k}_{p_0} = su(2) \simeq so(3) \simeq \wedge^2 V_{p_0}$ et $\mathfrak{p} \simeq \{v \wedge e_4 / v \in V\}$, les éléments de $\mathfrak{p}$ s'exponentiant en des "transformations de Lorentz pures".

Enfin l'orbite $O(\varphi_0)$ s'identifie à la sphère S^2_n de rayon n de l'espace vectoriel ayant pour base canonique $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$, laquelle sphère s'identifie à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par la projection stéréographique de pôle φ_0.

L'action coadjointe de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$ s'écrit alors :

$$z \longmapsto \frac{\alpha z + \beta}{-\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}.$$

Notons aussi que : $K_{p_0, \varphi_0} = SU(1)$.

5.3 Calcul de Berezin au dessus de $O(\varphi_0)$.

On considère ici le fibré $L : SU(2) \times_\chi \mathbb{C}/SU(1) \longrightarrow O(\varphi_0)$, χ étant le caractère de $SU(1)$ défini par :

$$\chi \begin{pmatrix} e^{i\theta} & o \\ o & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = e^{2in\theta}.$$

Trivialisant L à l'aide de la section s_0 donnée par :

$$s_0(z) = \left[(1 + z\bar{z})^{-1|_2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ -\bar{z} & 1 \end{pmatrix}, (1 + z\bar{z})^{-n} \right],$$

on identifie l'espace des sections holomorphes de L à l'espace des polynômes $f(z)$ de degré inférieur ou égal à $2n$ muni du produit hilbertien :

$$< f_1, f_2 >= \int_{\mathbb{C}} f_1(z)\ \overline{f_2(z)}\ \ (1 + z\bar{z})^{-2n}\ d\nu(z)$$

où:

$$d\nu(z) = -\frac{2in}{(1+z\bar{z})^2}\ dz\ d\bar{z}$$

est "la" mesure invariante de l'orbite $O(\varphi_0)$.

Pour $0 \leq j \leq 2n$ notons s_j la section définie par $s_j(z) = z^j\ s_0(z)$ et posons: $d_j =< s_j, s_j >^{-1/2}$. Alors $(d_j\ s_j)_j$ est une base orthonormée de E.

Avec les notations du paragraphe 4 du du chapitre 1, on a :

Proposition 6.

1) Les "états cohérents" e_q sont donnés par :

$$e_{s_0(z)}(t) = \varepsilon(1+\bar{z}\ t)^{2n}\ s_0(z).$$

2) Si l'opérateur A de E a pour matrice (a_{ij}) dans la base (s_j) alors :

$$\check{A}(z) = (1+z\bar{z})^{-2n} \sum_{i,j} C_{2n}^j\ a_{ij}\ z^i \bar{z}^j.$$

3) La composition des opérateurs de E permet de définir un produit associatif noté $*'$ sur l'espace des symboles au dessus de $O(\varphi_0)$.
Plus précisement, si e_{ij} désigne le symbole défini par :

$$e_{ij} = z^i\ \bar{z}^j(1+z\bar{z})^{-2n}$$

on a :

$$e_{ij} \quad *' \quad e_{kl} = \frac{\delta_{jk}}{C_{2n}^j}\ e_{il}.$$

4) La représentation ρ est donnée par:

$$(\rho(h).f)(z) = (\bar{\beta}z + \alpha)^{2n}\ f(h^{-1}.z)$$

où $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2)$ *et* $f \in E$.

5) On définit une représentation $*$ de $SU(2)$ associée à ρ (voir le paragraphe 8 du chapitre 1) en posant :

$$E_\rho(h) = \check{\widehat{\rho(h)}}$$

pour $h \in SU(2)$. *Alors :*

$$E_\rho\ (h)\ (z) = (1+z\bar{z})^{-2n}(\bar{\alpha}z\bar{z} + \bar{\beta}z - \beta\bar{z} + \alpha)^{2n}$$

si $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

Preuve:

1) Ecrivant :

$$s_j(z) =< s_j, e_{s_0(z)} > s_0(z),$$

on obtient :

$$z^j =< s_j, e_{s_0(z)} >$$

D'où :

$$e_{s_0(z)} = \sum_j d_j^2 \; \bar{z}^j \; s_j$$

et:

$$< e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >= \sum_j d_j^2 \; (z\bar{z})^j.$$

D'autre part :

$$< e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >= \varepsilon < s_0(z), s_0(z) > .$$

D'où:

$$\sum_j d_j^2 (z\bar{z})^j = \varepsilon (1 + z\bar{z})^{2n} \quad \text{et} \quad d_j^2 = \varepsilon \; C_{2n}^j.$$

En revenant à l'expression précédente de $e_{s_0(z)}$ on trouve :

$$e_{s_0(z)}(t) = \sum_j \varepsilon \; C_{2n}^j \; \bar{z}^j \; s_j(t) = \varepsilon (1 + \bar{z} \; t)^{2n} \; s_0(z).$$

2) Soit E_{ij} l'opérateur de E défini par : $E_{ij} \; s_k = \delta_{kj} \; s_i$.
Comme:

$$e_{s_0(z)} = \sum_k d_k^2 \; \bar{z}^k \; s_k$$

on a :

$$< E_{ij} \; e_{s_0(z)} \; , \; e_{s_0(z)} >=< d_j^2 \; \bar{z}^j \; s_i \; , \; \sum_k d_k^2 \; \bar{z}^k \; s_k >= d_j^2 \; z^i \; \bar{z}^j = \varepsilon C_{2n}^j \; z^i \; \bar{z}^j.$$

D'où :

$$\check{E}_{ij}(z) = (1 + z\bar{z})^{-2n} C_{2n}^j \; z^i \; \bar{z}^j.$$

Le résultat en découle.
Enfin, 3) 4) 5) se vérifient sans difficultés.

Remarquons que, partant de 2), on peut retrouver l'égalité :

$$Tr \; A = \varepsilon \int \check{A}(z) \; d\nu(z)$$

pour $A \in \mathcal{L}(E)$.

En particulier en prenant pour A l'opérateur identité on obtient :

$$\varepsilon = \frac{2n+1}{\int d\nu(z)}.$$

5/4 Les symboles au dessus de $O(\xi_0)$ sont les fonctions f de $O(\xi_0)$ dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$(f \circ \Psi)(p, v, z) = (1 + z\bar{z})^{-2n} \sum_{0 \leq i,j \leq 2n} C_{2n}^{j}\; f_{ij}(p, v) z^{i} \bar{z}^{j}.$$

La formule intégrale (1) définissant le calcul symbolique n'est pas véritablement plus simple dans ce cas particulier. Signalons toutefois que la fonction δ est donnée par :

$$\delta(T) = \left(\frac{sh\|u\|}{\|u\|}\right)^2$$

où T appartient à $\mathfrak{p}$ et s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & u \\ {}^t u & 0 \end{pmatrix}$ et où $\|u\|$ est la norme euclidienne de $u \in \mathbb{R}^3$.

Les résultats des paragraphes 3 et 4 précédents s'appliquent alors et permettent en particulier de définir un produit associatif $*$ sur l'espace $\mathcal{A}$ des symboles f tels que:

$$\int\int \|\left(f_{ij}(p, v)\right)_{ij}\|_2^2 \; d\mu(p)\; dv < +\infty$$

la mesure invariante sur Z étant ici :

$$d\mu(p) = \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{p_4}$$

et donc de définir une représentation $*$ de G associée à la représentation π.

Références

[1] D. Arnal "The * exponential" in M. Cahen and M. Flato (eds) "Quantum Theories and Geometry" Kluwer Academic Publishers, 1988 .

[2] D. Arnal, B. Cahen, M. Cahen et S. Gutt "Une classe d'orbites coadjointes qui sont symplectomorphes à un fibré cotangent" C.R.Acad.Sci.Paris, t 312, Série I (1991) p.127-130.

[3] D. Arnal, M. Cahen and S. Gutt "Representation of compact Lie groups and Quantization by deformation" Acad. Royale de Belgique Bull. de la classe des Sc. 3^{ieme} série t. LXXIV, 45 (1988) p.123-141.

[4] D. Arnal, M. Cahen and S. Gutt "* exponential and holomorphic discrete series" preprint U.L.B, 1988.

[5] D. Arnal and J.C Cortet "Nilpotent fourier Transform and Applications" Lett. Math. Phys 9 (1985) p.25-34.

[6] D. Arnal et J.C Cortet "Représentations * des groupes exponentiels" J. of Funct. Anal 92,1 (1990) p.103-135.

[7] D. Arnal et J.C Cortet " La notion de * produit et ses applications aux représentations de groupes" Conférence aux Journées Relativistes, Angers 1979.

[8] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnevowicz and D. Sternheimer "Deformation Theory and Quantization" Ann. of Physics 110 (1978) p.61-151.

[9] P. Bernat et al. "Représentations des groupes de Lie résolubles" Dunod, Paris 1972.

[10] B. Cahen "Représentations * associées à la série principale d'un groupe de Lie semi-simple" Preprint Université de Metz (soumis pour publication à Bull. Soc. Math. Fr.).

[11] M. Cahen, S. Gutt and J. Rawnsley "Quantization of Kähler manifolds I : geometric interpretation of Berezin's quantization "J. of Geometry and Physics 7,1 (1990) p.45-62.

[12] M. Duflo "Fundamental-series representations of a semi simple Lie group" Funct. Anal. and Appl. 4,2 (1970) p.38-42.

[13] M. Flato et al. "Simple facts about analytic vectors and integrability" Ann. scient. Ec. Norm. Sup 4^{ieme} série t5 (1972) p.423-434.

[14] C. Fronsdal "Some ideas about Quantization" Reports on Math. Physics 15,1 (1978) p.111-145.

[15] V. Guillemin and S. Sternberg "Symplectic techniques in physics" Camb. Univ. Press.

[16] E.A. Gutkin "Representations of the principal series of a complex semi simple Lie group" Funct. Anal and Appl. 4,2 (1970) p.32-37.

[17] S. Gutt "Some aspects of deformation theory and quantization" in M. Cahen and M. Flato (eds) "Quantum Theories and Geometry" Kluwer Acad. Publ. 1988.

[18] S. Gutt "An explicit * product on the cotangent bundle of a Lie group" Lett. Math. Phys 7(1983) p.249-258.

[19] Harish-Chandra "Discrete series for semi simple Lie groups II" Acta Math. 116 (1967) p. 1-111.

[20] S. Helgason "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces" Acad. Press.

[21] S. Helgason "Groups and Geometric Analysis" Acad. Press 1984.

[22] A.A. Kirillov "Eléments de la théorie des représentations" Ed. Mir, 1974.

[23] A.A. Kirillov "Method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups" Funct. Anal and Appl 2,1 (1968) p.96-98.

[24] A.A. Kirillov "The characters of unitary representations of Lie groups" Funct. Anal and 2,2 (1968) p.40-55.

[25] A. W. Knapp "Representation theory of semi simple groups. An overview based on examples" Princeton Math. Series 36, 1986.

[26] B. Kostant "Quantization and Unitary Representations" in Lect. Notes Math. 170 Springer 1970.

[27] C. Moore "Compactifications of symmetric Spaces" Amer. J. Math 86 (1964) p.201-218.

[28] C. Moreno and P. Ortega-Navarro "* products on $D^1(\mathbb{C})$, S^2 and related spectral analysis" Lett. Math. Phys. 7 (1983) p.181-193.

[29] M.A. Naimark "Les représentations linéaires du groupe de Lorentz" Dunod 1962.

[30] A. Perelomov "Generalized Coherent States and Their Applications" Springer-Verlag.

[31] N. S Poulsen "On C^∞- Vectors and Intertwining Bilinear Forms for Representations of Lie Groups " J. of Funct. Anal 9 (1972) p.87-120.

[32] L. Pukanszky "Leçons sur les représentations des groupes" Dunod, Paris. 1967

[33] J.H. Rawnsley "Representations of a semi-direct product by quantization" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78 (1975) p.345-350.

[34] J. P. Serre " Algèbres de Lie semi simples complexes" Benjamin, New York 1966.

[35] D. J. Simms "Lie groups and quantum mechanics" Lect. Notes. Math 52 Springer 1968.

[36] A. Voros "An Algebra of Pseudodifferential Operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics" J. of Funct. Anal. 29 (1978) p.104-132.

[37] N.R. Wallach "Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces" Dekker, New York 1973.

[38] G. Warner "Harmonic Analysis on semi simple Lie Groups I,II" Springer 1972.

[39] N.J. Wildberger "On the Fourier transform of a compact semi simple Lie group" Preprint Univ Toronto, Canada.

[40] N.J. Wildberger "Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups" Invent. Math. 98 (1989) p.281-292.

Table des matières