THESE

Présentée

A l'Université de METZ

pour obtenir le grade de

Docteur De L'Université De Metz

Spécialité Mathématiques

Par

Nabiha BEN AMAR

SUJET

Produits* et Déformations Quantifications Strictes

Soutenue le 14 Février 1992

Devant la Commission d'Examen

Professeur	Didier ARNAL	Président de Jury
Professeur	Jean Claude CORTET	Rapporteur
Professeur	Jean LUDWIG	Rapporteur
Professeur	Michel CHIPOT	Examinateur
Professeur	Ezddine SALHI	Examinateur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé sous la direction scientifique des professeurs Didier ARNAL et Jean Claude CORTET. Ils ont toujours été disponibles pour me guider dans mes recherches. C'est avec un grand plaisir que je leur exprime toute ma gratitude et mes remerciements les plus sincères. Leurs nombreuses suggestions leurs conseils et leurs encouragements sont à l'origine des résultats présentés dans cette thèse.

Monsieur Jean LUDWIG a bien voulu accepter d'être rapporteur de mon Jury de thèse. J'ai ainsi pu profiter de son savoir faire par les précieuses remarques qu'il m'a faites. Je voudrais qu'il en soit remercié.

Monsieur Ezddine SALHI de la faculté des sciences à Sfax a si gentiment accepté d'être membre de jury de cette thèse. Je lui exprime sincèrement ma reconaissance .

Monsieur Michel CHIPOT m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de thèse. Je voudrais qu'il accepte mes remerciments les plus sincères.

J'exprime aussi ma reconnaissance à ma famille, mes amis et tous ceux qui m'ont encouragée à réaliser ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

L'un des problèmes importants en mathématiques est la construction et la classification des classes de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G, c'est-à-dire la détérmination du dual unitaire $\hat{G}$ de G. Lorsque G est nilpotent connexe et simplement connexe, ce problème a été entièrement résolu par A. A. Kirillov par l'introduction des méthodes des orbites. Plus précisément, il a montré qu'il existe une bijection entre l'ensemble $\underline{\mathbf{g}}^\star \setminus G$ des orbites de la représentation coadjointe de G dans le dual $\underline{\mathbf{g}}^\star$ de $\underline{\mathbf{g}}$ et le dual unitaire $\hat{G}$ de G, ([1],[2]). Cette correspondance est très explicite:
Etant donnée une orbité O dans le dual $\underline{\mathbf{g}}^\star$, de l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}$, on choisit $\xi_0 \in O$ et une sous-algèbre subordonnée maximale $\underline{\mathbf{h}}$ de $\underline{\mathbf{g}}$, c'est à dire une sous-algèbre telle que:

$$< \xi_0, [\underline{\mathbf{h}}, \underline{\mathbf{h}}] >= 0$$

et maximale avec cette propriété. Comme G est connexe et simplement connexe, l'application exponentienlle est un difféomorphisme entre $\underline{\mathbf{g}}$ et G, ainsi $H = exp\underline{\mathbf{h}}$ est le sous-groupe analytique correspondant à $\underline{\mathbf{h}}$ et la formule:

$$\chi_0[expX] = e^{i(\xi_0(X))} \qquad (X \in \underline{\mathbf{h}})$$

définit un caractère de ce groupe, on induit alors cette représentation de dimension un de H à G et on obtient la représentation unitaire associée à O:

$$\Pi^O = \underset{H \uparrow G}{ind}\, \chi_{\xi_0}$$

Cette méthode des orbites est apparue à l'usage comme un outil fondamental dans la détermination de $\hat{G}$ pour un groupe G quelconque. En fait, elle a été généralisée au cas des groupes résolubles de type I par Auslander et Kostant [3] puis généraux par Pukanszky [4], enfin à un gros ensemble de $\hat{G}$ pour les groupes quelconques par Duflo [5] et Khalgui [6].

La méthode des orbites, comme Kirillov l'avait déjà remarqué dans [1] est très proche de la méthode de quantification géométrique de Kostant et Souriau ([1],[7], [8]). Dans cette dernière méthode, on se propose de quantifier un système dynamique classique représenté par une variété symplectique (M, W) en considérant des espaces de sections de fibrés complexes sur M (les états du système quantique) et des opérateurs agissant sur ces espaces (les observables du système quantique).

Il y a une quinzaine d'années, une nouvelle méthode de quantification a été introduite par Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer, il s'agit de la quantification par déformation [9]. Dans cette théorie, on conserve l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur la variété M comme ensemble d'observables et on modifie leur structure d'algèbre par déformation.

Dés le début de cette nouvelle théorie, il est apparu qu'on pouvait l'utiliser en analyse harmonique pour construire et décrire les représentations unitaires de groupes de Lie. En fait il a été proposé un programme de construction et de déscription du dual unitaire $\hat{G}$ d'un groupe de Lie G à partir de l'étude des déformations de l'algèbre des fonctions C^∞ sur le dual $\underline{\mathbf{g}}^\star$.

Rappelons d'abord ce qu'est un produit $\star$ sur une variété de Poisson:

Définition 0-1:

Soit M une variété de Poisson différentiable munie d'un crochet de Poisson $\{,\}$ et soit $E = (C^\infty(M), \nu)$ l'espace des séries formelles en le paramètre (dans $\mathbb{C}$) ν avec des coefficients dans $C^\infty(M)$. Un produit $\star$ sur $C^\infty(M)$ est défini par une application bilinéaire:

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \ni (u,v) \longmapsto u \star_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} Q_r(u,v) \in E(C^\infty(M), \nu)$$

où

(i) Q_r *est un opérateur bidifférentiel sur* $C^\infty(M)$ *(d'ordre maximal* $r (r > 1)$ *en chaque argument) nul sur les constantes.*

(ii) $Q_0(u,v) = u.v, Q_1(u,v) = \{u,v\}$

(iii) Q_r *est symétrique (resp anti-symétrique) en* (u,v) *si* r *est pair (resp impair).*

(iv) $\sum_{r+s=t} (r!s!)^{-1} Q_r(Q_s(u,v),w) = \sum_{r+s=t} (r!s!)^{-1} Q_r(u, Q_s(v,w))$ $(r,\ s > 0,\ t=1,2...)$.

$\star_\nu$ étendu à E fait de cet espace une algèbre associative d'unité 1 et

$$[u,v]_\star = \sum_{r>0} \frac{\nu^{2r}}{(2r+1)!} Q_{2r+1}(u,v) = \frac{1}{2\nu}(u \star_\nu v - v \star_\nu u)$$

en fait une algèbre de Lie déformée de $(C^\infty(W), \{,\})$.

Le premier exemple est le produit $\star$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2n}$. Si $\{u,v\} = \Lambda^{ij}\partial_i u \partial_j v$ On pose $P^n(u,v) = \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_n j_n}\ \partial^n_{i_1 \dots i_n} u \partial^{j_1 \dots j_n}_n v$ $(n \geq 1)$ et $u \star_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} p^r(u,v)$ $(P^0(u,v) = u \cdot v)$ est un produit $\star$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On a d'abord cherché à reconstruire, à l'aide du produit $\star$ sur une orbite O de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie nilpotent, la représentation de Kirillov Π^O associée à O. Ceci a été réalisé par D. Arnal et J. C. Cortet en premiers temps dans le cas des groupes nilpotents connexes et simplement connexes ([11], [12]): rappelons birèvement leurs travaux:

Dans une première étape, ils considèrent une orbite O de la représentation coadjointe de G, O admet des cartes de Darboux globales:

$$W \longrightarrow \mathbb{R}^{2k} \qquad \xi \longmapsto (p,q)$$

telles que chaque X de $\underline{\mathbf{g}}$ s'écrive sur O:

$$\tilde{X}(\xi) = < X, \xi > = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(q)p_i + \alpha_0(q) \quad \text{où} \quad \alpha_j(q) \in \mathbb{R}[q_{j+1}, \dots q_k]$$

Transportant le produit $\star$ de Moyal de $\mathbb{R}^{2k}$ sur O, ils obtiennent une structure associative sur E, espace des séries formelles en ν à coefficients dans $C^\infty(O)$ telle que:

$$\frac{1}{2\nu}(\tilde{X} \star \tilde{Y} - \tilde{Y} \star \tilde{X}) = [X,\tilde{}Y] \quad \forall X, Y \in \underline{\mathbf{g}}$$

Alors l'application:

$$d\rho : \underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}} \longrightarrow (E) \quad d\rho(X,Y)U = \frac{1}{2\nu}(\tilde{X} \star U - U \star \tilde{Y})$$

est une représentation de $\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}$ dans $C^\infty(O)$. Dans ce cas, on peut fixer la valeur de ν en $-i$ et donner un sens non formel au produit $\star$ si u et v sont deux fonctions de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ défini sur O par la carte globale considérée. $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ est alors stable par $d\rho$ qui s'exponentie en une représentation ρ de $G \times G$ unitaire dans $L^2(O)$ et il existe une transformation unitaire Φ de $L^2(O)$ sur l'espace $HS(H^o)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur l'espace H^o de Π^o telle que:

$$\Phi(\rho(x,y)U) = \Pi^O(x)\Phi(U)\Pi^O(y^{-1}) \quad \forall U \in L^2(O); \quad x, y \in G$$

Cette construction se fait à équivalence près, C'est à dire qu'on peut changer de carte de Darboux, de produit $\star$ et de réalisation explicite de Π^O
Dans une deuxième étape, ils ont cherché à recoller ces structures associatives, de façon à construire une représentation de $G \times G$ intégrale directe de $\Pi^O \otimes \Pi^{O^\star}$ et une formule:

$$\int_{g^\star/G}^{\oplus} \Pi^O \otimes \Pi^{O^\star} \quad d\mu(O) \quad \simeq \quad R \otimes L$$

où R et L sont les représentations régulières de G sur $L^2(G)$. Ils retrouvent ainsi la formule de Plancherel pour G sous la forme d'une transformation intégrale très semblable à la transformation de Fourier usuelle.

Ces études ont été ensuite généralisées dans le cas des groupes compacts ([13], [14], [15]) et dans le cas des groupes exponentiels [16]. Notons bien que le recollement se fait trivialement uniquement sur l'ouvert de Zariski Ω dense dans $\underline{\mathbf{g}}$.

Cette méthode fait apparaître les opérateurs des représentations Π^O comme des fonctions vivant directement sur l'orbite O, qui est un objet géométrique plus naturel que l'espace H^o, défini dans la méthode des orbites comme espace de sections polarisées, de carré intégrable d'un fibré en droite sur O.

Beaucoup de produits $\star$ considérés sont uniquement formels. Mais il est clair que seuls les produits non formels peuvent être vraiment utiles dans tous les problèmes d'analyse. Si on veut utiliser des produits $\star$ non formels, il apparaît essentiel de savoir en quel sens $u \star_\nu v$ tend vers $u \cdot v$ et $[u,v]_{\star_\nu}$ tend vers $\{u,v\}$ lorsque ν tend vers 0.

Ceci n'avait pas été étudié avant Rieffel qui a introduit pour décrire ces questions la notion de déformation quantification stricte, dans laquelle la question de convergence est bien précisée [17].

Définition 0-2:

Soit M une variété C^∞, et soit $C^\infty(M)$ l'algèbre associative des fonctions C^∞ sur M à valeurs complexes munie d'un crochet de Poisson $\{,\}$. Soit A une sous-algèbre de $C^\infty(M)$ stable par le crochet de Poisson et contenue dans l'algèbre des fonctions C^∞ tendant vers 0 à l'infini. Une déformation quantification stricte de A dans la direction de $\{,\}$, est la donnée d'un intervalle I de nombres réels contenant 0, avec pour tout $\hbar \in I$, un produit associatif $\star_\hbar$, une involution $*_\hbar$ et une C^*-norme $\| \quad \|_\hbar$ sur A, qui sont pour $\hbar = 0$, le produit usuel, l'involution donnée par la conjugaison complexe et la norme sup tels que:

1- Pour toute f dans A, la fonction $\hbar \mapsto \|f\|_\hbar$ soit continue.

2- Pour toutes f, g dans A, $\|\dfrac{f \star_\hbar g - g \star_\hbar f}{i\hbar} - \{f,g\}\|_\hbar$ converge vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0.

Si on note $\bar{A}_\hbar$ la C^*-algèbre obtenue en complètant A pour la norme $\| \quad \|_\hbar$ alors la condition 1) est équivalente à dire que la famille $\{\bar{A}_\hbar\}$ avec A détermine un champ continu de C^*-algèbres.

Notons que pour les déformations quantifications strictes, $f \star_\hbar g$ est bien une fonction en $\hbar$ et non pas une série formelle en $\hbar$ avec des coefficients qui sont des fonctions. Rieffel a donné des exemples de déformations strictes, dont les plus intéressants sont:
Le premier exemple est fait sur les tores, en fait il a montré que les tores non-commutatifs (de Connes) peuvent être vus comme des déformations quantifications strictes des tores ordinaires [17].
Le second exemple est une déformation sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ (ensemble des fonctions de Schwartz sur le dual d'une algèbre de Lie nilpotente) [18]. Cette déformation constitue la version convergente de la partie verticale du produit $\star$ construit pour un groupe de Lie plus général sur son espace cotangent $T^\star G$ [19] et coincide avec le produit $\star$ donné par Lugo [20]. Ce produit $\star$ présente l'avantage d'être défini sur tout $\underline{\mathbf{g}}^\star$, seulement il n'est pas tangentiel en général. Donc on ne peut pas le restreindre aux orbites coadjointes et par suite on ne peut pas l'utiliser pour la construction des représentations irréductibles d'un groupe de Lie G correspondant à son algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}$.

Notre travail ici consiste à déterminer deux types de résultats:
Pour les tores non-commutatifs $\mathbf{T}^{2p}$: on a étudié les structures et les propriétés de ces algèbres munies du produit $\star$ de Rieffel. En particulier on a déterminé leur spectre, leur centre et le type de leurs représentations factorielles. Un tore non- commutatif $\mathbf{T}^{2p}$ est un produit $\star$ de Moyal défini sur $\mathbf{T}^{2p}$ muni d'une 2-forme symplectique à coefficients constants telle que le crochet de Poisson correspondant s'écrive dans les variables usuelles de $\mathbf{T}^{2p}$:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{p} -\theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i+p}}$$

Ce produit est très proche de celui de Moyal sur $\mathbb{R}^{2p}$ mais le théorème d'unicité de représentation des relations de commutation qui dit que la représentation régulière gauche de $L^1(\mathbb{R}^{2p}, \star)$ dans L^2 engendre un facteur de type I_∞, n'est en général plus vrai dans le cas d'un tore non -commutatif. En effet la structure de $L^1(\mathbf{T}^{2p}, \star)$ et de l'algèbre de Von Neumann engendrée par sa représentation régulière gauche dépend de la rationalité ou l'irrationalité des θ_i. On obtient en fait différentes classes d'algèbres.

Ensuite, on a généralisé la construction faite sur les tores à $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^p$ permettant ainsi la définition d'une déformation quantification sur $(\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^p)$ et la construction de facteurs de type $I_\infty, II_1 \mathrm{et} II_\infty$ [21].

Pour les algèbres de Lie nilpotentes $\underline{\mathbf{g}}$ on a cherché à construire un produit $\star$ qui soit défini sur tout le dual $\underline{\mathbf{g}}^\star$ de $\underline{\mathbf{g}}$, convergent (c'est à dire donné par une formule intégrale qui est beaucoup mieux adaptée que la série formelle pour l'utilisation en analyse) et tangentiel c'est à dire peut se restreindre sans ambiguité aux orbites coadjointes et être utilisé pour la théorie des représentations des groupes.
Une telle construction a été réalisée ici [22] dans le cas des algèbres de Lie nilpotentes spéciales. On a défini un produit $\star$ sur les algèbres des fonctions de Schwartz et des fonctions polynômiales par déformation de la formule de Rieffel, en effet au lieu d'identifier dans cette formule le groupe de Lie et son algèbre par l'application exponentielle, on le fait au moyen d'un nouveau difféomorphisme ϕ. Ce difféomorphisme qui est un produit d'exponentiels sera notre "nouvelle application exponentielle". Puis on considère, comme a fait Rieffel la convolution des fonctions sur le groupe. Le produit $\star$ qu'on obtient présente l'avantage par rapport à celui de Rieffel qu'il est tangentiel.

Ensuite on a défini la transformée de Fourier adaptée et on a relié ceci à la représentation unitaire du groupe de Lie correspondant.

Plus précisemment cette thése a été organisée comme suit:

Chapitre I :

Dans ce chapitre on rappelle les propriétés des produits croisés, en effet le produit $\star$ donné par Rieffel sur les tores non commutatifs est un produit croisé; donc pour pouvoir étudier la structure de ces algèbres déformées et le type des représentations considérées, on utilise les propriétés des produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe [23].

Chapitre II :

Dans ce chapitre on étudie des déformations quantifications strictes sur les tores et les groupes abéliens connexes. Or la première condition de la définition d'une déformation quantification stricte est équivalente à dire qu'on obtient un champ continu de C^*-algèbres. Donc dans la première section on commence par définir les champs continus de C^*-algèbres et en donner certaines propriétés.

Dans la deuxième section on rappelle les travaux de Rieffel: il a montré que les tores non-commutatifs d'Alain Connes peuvent être considérés comme une déformation quantification stricte des tores ordinaires.

Dans la troisième section, on construit un produit $\star$ sur les variétés symplectiques $C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ comme produit croisé de $L^1(\mathbb{Z}^p)$ par $\mathbb{Z}^p$. Puis on étudie la structure des algèbres obtenues. On s'intéresse aussi bien à l'étude des C^*-algèbres qu'à celle des algèbres de Von Neumann engendrées par les représentations $\star$ régulières. On trouve que la structure de ces algèbres déformées dépend essentiellement du mode d'action de $\mathbb{Z}^p$ sur $L^1(\mathbb{Z}^p)$ c'est à dire s'il agit régulièrement ou librement ou régulièrement et librement à la fois. On prouve qu'on obtient 3 grandes classes de C^*algèbres $\bar{A}_\theta$ dépendant essentiellement de la rationalité où l'irrationalité des coefficients θ_i qui apparaîssent dans la structure de Poisson:

$$\sum_{i=1}^{p} -\theta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i+p}}$$

On démontre en fait les théorèmes:

<u>**Théorème 2-15:**</u>

Si θ_i est irrationnel pour tout $i = 1, \ldots, p$, alors le centre de $\bar{A}_\theta$ est réduit aux fonctions constantes.
S'il existe certains θ_i rationnels, alors le centre de $\bar{A}_\theta$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}^{2p}$ périodiques en la $i^{\underline{\text{ème}}}$ et la $(i+p)^{\underline{\text{ème}}}$ variables pour tout i tel que θ_i soit rationel. La période étant la même pour la $i^{\underline{\text{ème}}}$ et la $(i+p)^{\underline{\text{ème}}}$ variables et est égale à $\frac{1}{q_i}$ si $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$, p_i et q_i sont des entiers premiers entre eux. En particulier si pour tout $i = 1, \ldots, p, \theta_i$ est entier, alors $\bar{A}_\theta$ est commutative.

<u>**Théorème 2-17:**</u>

Si θ_i est rationnel pour tout $i = 1, \ldots, p, \bar{A}_\theta$ est liminaire, n'est pas simple et son spectre est le tore de dimension p : $\mathbf{T}^p$ muni de sa topologie usuelle.
Si θ_i est irrationnel pour tout $i = 1, \ldots, p, \bar{A}_\theta$ est simple et antiliminaire.
S'il existe i et j dans $\{1, \ldots, p\}$ tel que θ_i soit rationnel et θ_j soit irrationnel, alors $\bar{A}_\theta$ est antiliminaire et n'est pas simple.

Ensuite, on démontre que la structure de l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation régulière de $\bar{A}_\theta$ dépend également de la rationalité ou de l'irrationalité des θ_i. En effet si tous les θ_i sont rationnels, il est clair que cette représentation est de type I car $\bar{A}_\theta$ est liminaire. Alors que si tous les θ_i sont irrationnels, on a prouvé le théorème suivant:

<u>**Théorème 2-19:**</u>

La représentation $\star$ régulière gauche de $\bar{A}_\theta$ est factorielle de type II_1 et c'est l'unique représentation $\star$ factorielle de type II_1 de $\bar{A}_\theta$(à quasi-équivalence près).

Enfin dans la dernière section on construit des produits $\star$ convergents sur les groupes abéliens connexes $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^p$ munis d'une forme symplectique invariante. En supposant que le radical $rad\underline{t}$ de la réstriction de la forme au tore soit un tore, on montre que la représentation régulière est soit factorielle de type I_∞ ou II_1 ou II_∞, soit n'est pas factorielle dépendant de n, p et de la dimension de $rad\underline{t}$.

Chapitre III :

On commence par rappeler la structure de Poisson canonique sur le dual $\underline{g}^\star$ d'une algèbre de Lie $\underline{g}$ qu'on notera $\{,\}$ (Cette structure dite encore structure de Poisson linéaire provient de la structure d'algèbre de Lie sur $\underline{g}$).Puis on transfère cette structure à $\underline{g}$ par transformée de Fourier.

Dans la deuxième et la troisième section on traîte le cas d'une algèbre de Lie quelconque. On étudie la déformation construite par Rieffel dans ce cas. Il a montré que la convolution des fonctions à support compact dans un voisinage de l'élément neutre de $\underline{g}$ difféomorphe à un voisinage de l'élément neutre e dans le groupe de Lie G assocé à $\underline{g}$, fournit en fait une déformation quantification de $C_c^\infty(\underline{g})$ dans la direction de $-(2\pi)^{-1}\{,\}$.

La section 4 de ce chapitre est consacrée aux algèbres de Lie nilpotentes. On rappelle la paramétrisation des orbites coadjointes dûe à Michèle Vergne. Ensuite, on reprend la définition du produit $\star$ de Moyal sur les orbites coadjointes ainsi que le travail d'Arnal et Cortet pour recoller ces produits $\star$ dans le but de la construction d'un produit $\star$ tangentiel défini sur un ouvert dense dans $\underline{g}^\star$ [11].

Puis, on cite le produit $\star$ défini par Rieffel sur $\mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ [18], on montre qu'il coincide avec le produit donné par Lugo et qu'il constitue la version convergente de la partie verticale du produit $\star$ construit par Gutt [19] dans le cas d'un groupe de Lie quelconque sur son espace cotangent $T^\star G$.

Dans la cinquième section on s'intéresse aux algèbres de Lie nilpotentes spéciales. On commence par citer le produit $\star$ formel défini par Arnal, Cahen et Gutt [24] dans ce cas. Puis on construit un produit $\star$ défini sur $S(\underline{g}) \oplus \mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ (où $S(\underline{g})$ désigne l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\underline{g}^\star$) convergent, tangentiel et gradué. Plus précisément on montre le théorème:

Théorème 3-23:

Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie nilpotente spéciale de dimension n et soit $\underline{g}_i$ une suite croissante d'idéaux de $\underline{g}$ et $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ une base de $\underline{g}$ telle que $X_i \in \underline{g}_i \setminus \underline{g}_{i-1}$. Le produit $\star$, $\star_\hbar^i$ défini sur $S(\underline{g}_i) \oplus \mathcal{S}(\underline{g}_i^\star)$ par:

$$f \star_\hbar^i g(z) = \int_{\underline{g}_i \times \underline{g}_i} \hat{f}(X)\hat{g}(Y) e^{2i\pi < \phi_i^{-1}(\phi_i(X)\cdot\phi_i(Y)), z>} dX dY$$

$$\text{où} \quad \phi_i(Y) = e^{\frac{\hbar}{2} y_i X_i} e^{\frac{\hbar}{2} y_{i-1} X_{i-1}} \dots e^{\frac{\hbar}{2} y_1 X_1} e^{\frac{\hbar}{2} y_1 X_1} \dots e^{\frac{\hbar}{2} y_i X_i}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$ est différentiel, gradué et est tangentiel sur l'ouvert de Zariski Ω. En plus, si on définit avec ce produit, une involution et une norme sur $\mathcal{S}(\underline{g}_i{}^\star)$ par

$$f^*(X) = \bar{f}(X)$$

et $\| f \|_\hbar$ est la norme de $\hat{f}$ dans $C^*(G_\hbar^i)$, alors cette structure fournit une déformation quantification stricte de $\mathcal{S}(\underline{g}_i^\star)$ dans la direction de $(-2\pi)^{-1}\{\ \}_i$ où $\{\ \}_i$ désigne le crochet de Poisson linéaire sur $\mathcal{S}(\underline{g}_i^\star)$.

On vérifie que la réstriction de ce produit $\star$ à $S(\underline{g})$ constitue la version convergente du produit défini dans [24].

Enfin on définit l'application exponentielle $\star$ et la transformée de Fourier adaptée et on étudie sa relation avec la représentation unitaire du groupe de Lie G déterminée par Kirillov.

I - PRELIMINAIRES: RAPPELS SUR LES PRODUITS CROISES

Les produits $\star$ qu'on va considérer dans le chapitre suivant sont des produits croisés d'une algèbre commutative par un groupe discret, donc on va commencer par rappeler certaines propriétés des produits croisés qui seront utiles pour l'étude de la structure des algèbres déformées du chapitre suivant.

I-1- PRODUITS CROISES D'UNE C*-ALGEBRE PAR UN GROUPE DISCRET:

Soit G un groupe discret d'élément neutre e, opèrant dans une C^*-algèbre séparable A. On note $s \cdot a$ le transformé de a dans A par s dans G.

Soit $L^1(G, A)$ l'algèbre de Banach involutive obtenue en considérant sur l'espace de banach des applications sommables de G dans A:

$$\text{le produit(1)} \quad (EF)_s = \sum_{t \in G} E_t \quad t \cdot F_{t^{-1}s}$$

$$\text{et l'involution(2)} \quad (F^*)_s = sF^*_{s^{-1}}$$

Dans la suite on identifiera $L^1(G, A)$ avec le produit tensoriel $A \bar{\otimes} L^1(G)$ où $\bar{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété pour la norme L^1 de sorte que pour $a \in A$ et $s \in G$, ε_s est l'application caractéristique de $\{s\}$ dans G et $A \bar{\otimes} \varepsilon_s$ est l'application de G dans A nulle partout, sauf en s où elle vaut a.
Nous identifierons A avec la sous-algèbre de Banach involutive de $L^1(G, A)$ image de A par l'isomorphisme $a \longmapsto a \otimes \varepsilon_e$ de A dans $L^1(G, A)$.

On note $\mathcal{A}$ l'algèbre de Von Neumann enveloppante de A et l'on identifie le plus souvent A avec son image canonique dans $\mathcal{A}$. Si ρ est une représentation de A, on note $\bar{\rho}$ le prolongement canonique de ρ en une représentation normale de $\mathcal{A}$, on sait que si ρ est non dégénérée $\bar{\rho}(\mathcal{A})$ est l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\rho(A)$.
On fait opérer G par transports de structures dans la famille des représentations de A; G opère ainsi dans $\hat{A}$ (l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de A) et $\overset{\frown}{A}$ (l'ensemble des classes de quasi-équivalence des représentations factorielles de A).
On munira $\overset{\frown}{A}$ de la topologie image réciproque de la topologie de $PrimA$ par l'application canonique:$\tau \longmapsto ker\tau$ de $\overset{\frown}{A}$ sur $PrimA$.

Définition 1-1:

Si G opère dans une algèbre de Von Neumann $\mathcal{B}$, nous dirons que G opère ergodiquement dans $\mathcal{B}$ si les scalaires sont les seuls éléments G-invariants dans le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{B}$.

Définition 1-2:

On dit qu'une mesure μ sur $\overset{\frown}{A}$ est G-ergodique si μ est G-quasi-invariante non nulle et si toute partie borélienne G-invariante de $\overset{\frown}{A}$ est soit μ-négligeable soit de complémentaire μ-négligeable.

Proposition 1-3: [23]

Les propriètés suivantes sont équivalentes:

1) G opère ergodiquement dans $\bar{\rho}(\mathcal{A})$

2) La classe de mesures sur $\widehat{A}$ associée à ρ (cf. [26] 8.4) est G-ergodique.

Définition 1-4:

Si G opère dans une algèbre de Von Neumann, $\mathcal{B}$ de centre $\mathcal{Z}$, nous dirons que G opère presque librement dans $\mathcal{B}$ si pour tout $s \neq e$ dans G et pour tout projecteur central non nul $p \in \mathcal{Z}$ il existe un projecteur central non nul $q \in \mathcal{Z}$ tel que $q \leq p$ et $(s \cdot q)q = 0$.

Définition 1-5:

On dit que G opère librement dans $\widehat{A}$ si tout $\tau \in \widehat{A}$est de stabilisateur trivial dans G.

Proposition 1-6: [23]

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) G opère presque librement dans $\mathcal{A}$.

2) G opère librement dans $\widehat{A}$.

Définition 1-7:

On appelle C^*-algèbre produit croisé (ou simplement produit croisé) de A par G et l'on note $C^*(G, A)$ la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(G, A)$.

Soit B une algèbre de Banach involutive. Supposons que le groupe discret G opère dans B. Soient A la C^*-algèbre enveloppante de B et $\mathcal{A}$ l'algèbre de Von Neumann enveloppante de A. Par fonctiorialité, G opère dans A et $\mathcal{A}$ et on montre [23] que $C^*(G, B)$ est isomrphe à $C^*(G, A)$.

Définition 1-8:

Soit ρ une représentation non-dégénérée de A dans un espace hibertien H. On appelle représentation de $C^*(G, A)$ régulière induite par ρ et l'on note $Ind\rho$ la représentation de $C^*(G, A)$ induite par la représentation ρ de $(\{e\}, A)$. On note $\tilde{H}$ l'espace de $Ind\rho$ et ρ la réstriction de $Ind\rho$ à A.

Définition 1-9:

On appelle norme réduite sur $L^1(G, A)$, la norme définie pour toute $F \in L^1(G, A)$ par

$$\| F \|_r = sup_\rho \{ \| (Ind_\rho)(F) \| \quad / \rho \quad \text{représentation de} A \}$$

On appelle produit croisé réduit de A par G, la C^*-algèbre, notée $C_r^*(G, A)$, complétée de $L^1(G, A)$ pour la norme réduite.

Théorème 1-10: [23]

Si G est moyenable, on a:

$$C^*(C, A) = C_r^*(G, A)$$

I-2 ETUDE DES PRODUITS CROISES:

Dans la suite on va supposer que A soit commutative et que G soit dénombrable et commutatif,car c'est le cas qui nous intéresse dans le chapitre suivant. Donc, dans ce qui suit en va identifier $\hat{A}$ avec $\widehat{A}$ et $\hat{A}_{tr}$ car toutes les représentations factorielles de A sont de type I et sont traçables ([26] 9-1).

proposition 1-11:

Soit $\hat{A}_s$ l'ensemble des τ dans $\hat{A}$ tels que $s\tau = \tau$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
i) A est une sous-C^*-algèbre commutative maximale dans $C^*(G, A)$.
ii) Pour tout $s \in G - \{e\}, \hat{A}_s$ est sans point intérieur dans $\hat{A}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{F}$ la transformation de Gelfand de A. Soit $R \in C^*(G, A)$. Alors R commute à A si et seulement si l'on a $R_s sa = aR_s$ quels que soient $a \in A, s \in G$. Donc A est une sous-algèbre commutative maximale dans $C^*(G, A)$ si et seulement si pour tout $s \in G - \{e\}$ 0 est le seul élément $b \in A$ tel que $bs \cdot a = ab$ pour tout $a \in A$ ou encore si et seulement si, pour tout $s \in G - \{e\}, 0$ est le seul élément $b \in A$ tel que:

$$(\mathcal{F}b)(\tau)(\mathcal{F}a)(s^{-1} \cdot \tau) = (\mathcal{F}a)(\tau)(\mathcal{F}b)(\tau)$$

quels que soient $a \in A, \tau \in \hat{A}$. La proposition se démontre alors facilement.

Proposition 1-12: [23]

Soit ρ une représentation de A.
i) La classe d'équivalence de $Ind\rho$ ne dépend que de l'orbite par G de la classe d'équivalence de ρ.
ii) Posons $I = Ker\tilde{\rho} = \bigcap_{s \in G} sKer\rho$
Le noyau de $Ind\rho$ dans $C^*(G, A), KerInd_\rho$ est donné par:

$$KerInd_\rho = \{R \in C^*(G, A) \quad \text{tels que} \quad R_s \in I \quad \text{pour tout} \quad s \in G\}$$

Proposition 1-13:[23]

Supposons que G opère librement dans $\hat{A}$.
L'application $Ind : \mathcal{T} \longmapsto Ind\mathcal{T}$ est un homéomorphisme de l'espace topologique quotient $\hat{A} \setminus G$ sur le sous-espace $Ind(\hat{A} \setminus G)$ de $C^*(G, A)^\wedge$.

Définition 1-14:

Une C^*-algèbre est dite simple si elle n'a pas d'idéaux bilatères fermés non triviaux.

Théorème 1-15:

Si G opère librement dans $\widehat{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes:
i) $C^*(G,A)$ est simple
ii) A n'a pas d'idéaux bilatères fermés G-invariants non triviaux.

Démonstration :

On a i)$\Longrightarrow$ ii) puisque, si I est un idéal bilatère fermé G-invariant non trivial de A,

$$S(I) = \{R \in C^*(G,A) \quad \text{tels que} \quad R_s \in I \quad \text{pour tout} \quad s \in G\}$$

est un idéal bilatère fermé évidemment non trivial de $C^*(G,A)$. Pour montrer que ii)$\Longrightarrow$ i), on commence par prouver que si π est une représentation de $C^*(G,A)$ et $\rho = \pi/A$, on a $\| \pi(R) \| \geq Sup_{s\in G} \| \rho(R_s) \|$ pour tout $R \in C^*(G,A)$ et à fortiori, $Ker\pi \subset (Ker\rho)$ [23]. On en déduit que π est une représentation injective de $C^*(G,A)$ si et seulement si ρ est une représentation injective de A.

supposons maintenant que la condition ii) soit vérifiée. Alors toute représentation G-invariante non nulle de A est injective. Donc toute représentation non nulle de $C^*(G,A)$ est injective. Cela prouve qu'on a i).

Définition 1-16 :

On dit que G opère régulièrement dans $\hat{A}$ si toutes les G-orbites sont discrètes dans $\hat{A}$.

Notons par G_τ le stabilisateur de $\tau \in \hat{A}$ dans G.

Théorème 1-17 :

Supposons que G opère régulièrement dans $\hat{A}$ et que l'application $\tau \mapsto G_\tau$ soit continue. Soit τ dans $\hat{A}$ et soit ρ une représentation irréductible de A dans un espace hilbertien H_ρ.
L'application qui à toute représentation irréductible V de G_τ fait correspondre la représentation π de (G,A) induite par la représentation $(I_{H\rho} \otimes V, \rho \otimes I_{H_V})$ de (G_τ, A) définit un homéomorphisme de $\bigcup_{\tau\in\hat{A}} C^*(G_\tau)^\wedge$ sur $C^*(G,A)^\wedge$.

Démonstration :

On va donner uniquement un chemin de preuve. (Pour la démonstration complète voir [23]). On montre dans une première étape que le commutant de l'image de la représentation induite par une représentation (L,ω) de (G_τ, A) est isomorphe au commutant de l'image de (L,ω). En particulier, π et $(I_{H\rho} \otimes V, \rho \otimes I_{H_V})$ sont en même temps irréductibles dans ce cas.

Si l'on définit de même V' et π', alors π' est équivalente à π si et deulement si V' est équivalente à V. Donc l'application du théorème est injective.

Maintenant soit π une représentation irréductible de $C^*(G,A)$. Soit $\rho = \pi/A, \rho$ est de type I_n pour un certain cardinal n. Comme G opère régulièrement dans $\hat{A}$,on montre que la classe de mesures sur $\hat{A}$ assocée à ρ est concentrée sur une G-orbite $\mathcal{T}$ et que ρ a pour classe d'équivalence $n(\bigoplus_{\tau\in\mathcal{T}} \tau)$[23].Soit τ un élément de $\mathcal{T}$. Pour $\omega = n\rho_\tau$ on montre ([23] 3.10) qu'il existe alors une application L telle que $\sigma = (L, n\rho_\tau)$ soit une représentation de (G_T, A) et que π soit équivalente à la représentation de $C^*(G,A)$ induite par σ. Donc l'application du théorème est surjective. Enfin pour la continuité voir [25] th. 2.1.

Proposition 1-18:

Soit $\mathcal{T}$ une G-orbite dans $\hat{A}$ de stabilisateur nul dans G.Ind$\mathcal{T}$ est une classe de représentations irréductibles traçables de $C^*(G,A)$ si et seulement si $\mathcal{T}$ est discrète dans $\hat{A}$.

I-3 PRODUITS CROISES D'UNE ALGEBRE DE VON NEUMANN PAR UN GROUPE :

Soit $\mathcal{B}$ une W^*-algèbre de centre $\mathcal{Z}$ dans la quelle G opère par automorphismes.

Définition 1-19:

On appelle W^*-algèbre produit croisé de $\mathcal{B}$ par G et l'on note $W^*(G,\mathcal{B})$ la W^*-algèbre engendrée par l'image de la représentation de $(G,\mathcal{B})$ réguilière induite par $id_{\mathcal{B}}$.

Pour $s \in G$, on note $\mathcal{Z}^s$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$ ensemble des $x \in \mathcal{B}$ tels que $bx = xs \cdot b$ pour tout $b \in \mathcal{B}$.

Théorème 1-20:

Si G opère presque librement et ergodiquement dans $\mathcal{B}$,$W^*(G,\mathcal{B})$ est un facteur.

Démonstration :

Soit R un élément de $W^*(G,\mathcal{B})$. Dire que R commute à $\mathcal{B}$ est équivalent à dire que $R_s \in \mathcal{Z}^s$ pour tout $s \in G$. Or le fait que G opère presque librement dans $\mathcal{B}$ implique que pour tout $s \in G - \{0\}$ on a $\mathcal{Z}^s = 0$. (voir [23]).
D'autre part R commute à ε_t pour tout $t \in G$ est équivalent à dire que pour tous $s, t \in G$:

$$tR_s = (\varepsilon_t R)_{ts} = (R\varepsilon_t)_{ts} = R_{tst^{-1}}$$

.
En particulier, si R commute au ε_t, R_e est un élément G-invariant de B. Comme G opère ergodiquement alors $R_e = \lambda\varepsilon_e$. Donc $W^*(G,B)$ est un facteur.

Proposition 1-21:

Soit t une trace normale fidèle semi-finie G-invariante sur $\mathcal{B}$. Pour tout $R \in W^*(G,\mathcal{B})^+$, posons $\tilde{t}(R) = t(R_e)$. Alors $\tilde{t}$ est une trace normale fidèle semi-finie sur $W^*(G,\mathcal{B})^+$ prolongeant t sur $\mathcal{B}^+$. En outre $\tilde{t}$ est finie si et seulement si t est finie.

Démonstration :

Posons $\mathcal{R} = W^*(G,\mathcal{B})$. Soit t une trace normale fidèle G-invariante sur $\mathcal{B}^+$. Pour $R \in \mathcal{R}$ on a:

$$\begin{aligned}\tilde{t}(R^*R) &= t(\sum_{s\in G} s\cdot(R^*_{s^{-1}}R_{s^{-1}})) = \sum_{s\in G} t(s\cdot(R^*_{s^{-1}}R_{s^{-1}})) = \sum_{s\in G} t(R^*_s R_s) \\ &= \sum_{s\in G} t(R_s R^*_s) = t(\sum_{s\in G} R_s R^*_s) = \tilde{t}(RR^*)\end{aligned}$$

Donc, $R \longmapsto R_e$ étant linéaire positive normale et fidèle [23], $\tilde{t}$ est bien une trace normale fidèle sur $\mathcal{R}^+$ qui prolonge t sur $\mathcal{B}^+$ et qui est finie si et seulement si t est finie. Si, en outre, t est semi-finie, Id est limite ultraforte d'opérateurs dans $\mathcal{B}^+$ traçables pour t à fortiori, Id est alors limite ultraforte d'opérateurs dans $\mathcal{R}^+$ traçables pour $\tilde{t}$ et $\tilde{t}$ est semi-finie.

Théorème 1-22:

Soit A une C^*-algèbre séparable commutative. Supposons que le groupe G opère librement dans $\hat{A}$. Il existe une bijection de l'ensemble des mesures normées diffuses G-invariantes G-ergodiques sur $\hat{A}$ sur l'ensemble des classes de quasi-équivalence des représentations factorielles de type II_1 de $C^*(G, A)$.

Démonstration :

On va donner un chemin de preuve (Pour la démonstration cf. [23]).

Soit μ une mesure diffuse G-invariante, G-ergodique sur $\hat{A}$ et soit ρ_μ la représentation de A définie par:

$$\rho_\mu = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \tau d\mu(\tau) \qquad \text{(cf [26] 8-6-3)}$$

et $\pi_\mu = Ind\rho_\mu$. On montre que $Ind\rho_\mu$ est factorielle de type II et qu'elle est de type finie si et seulement si μ est bornée.On vérifie que si l'on définit de même μ' et π'_μ alors π'_μ est quasi-équivalente à π_μ si et seulement si μ et μ' sont des mesures proportionnelles sur $\hat{A}$.

Ensuite, on considère une représentation factorielle π de $C^*(G, A)$ de type II_1, on pose $\rho = \pi/A$. On montre que ρ est une représentation factorielle traçable G-invariante de A. Soit T une trace normale finie sur le facteur engendré par π et $t = T/\bar{\rho}(\mathcal{A})$. Soit f la trace semi-fine semi-continue inférieurement G-invariante et G-ergodique sur A^+ définie par (ρ, t) ([26] 6.4.2) et ρ_f la représentation associée à f ([26] 6.6.4). On montre que π est quasi-équivalente à $\pi_f = Ind\rho_f$

Enfin, il y a une correspondance entre l'ensemble des mesures G-invariantes, G-ergodiques sur $\hat{A}$ et l'ensemble des traces semi-finies semi-continues inférieurement G-ergodiques sur $\hat{A}$. Cette correspondance est donnée par:

$$f_\mu(a) = \int_{\hat{A}} \lambda_\tau(a) d\mu(I) \qquad \text{pour tout} \quad a \in A^+$$

où λ_τ désigne le caractère normalisé associé à τ ([23] 1.26).

II - DEFORMATIONS QUANTIFICATIONS STRICTES ET STRUCTURES DES ALGEBRES DEFORMEES

Les déformations qu'on va considérer dans ce chapitre sont des déformations strictes; or si on considère une déformation quantification stricte sur une algèbre A et si on note $\bar{A}_\hbar$ la C^*-algèbre obtenue en complétant A pour la norme $\| \quad \|_\hbar$, la première condition de la définition d'une déformation quantification stricte est exactement équivalente à dire que la famille $\{\bar{A}_\hbar\}$ avec A vue comme une *-algèbre des sections de cette famille détermine un champ continu de C^*-algèbres. Donc on va commencer par définir les champs continus de C^*-algèbres et en donner certaines propriétés.

<u>II-1 CHAMPS CONTINUS DE C*-ALGEBRES:</u>

<u>Définition 2-1</u> :

Soit T un espace topologique. Un champ continu E d'espaces de Banach sur T est une famille $\big(E(t)\big)_{t\in T}$ d'espaces de Banach, munie d'un ensemble $\Gamma \subset \prod\limits_{t\in T} E(t)$ de champs de vecteurs tel que:

(i) Γ est un sous-espace vectoriel complexe de $\prod\limits_{t\in T} E(t)$.

(ii) Pour tout $t \in T$, l'ensemble des $x(t)$, où $x \in \Gamma$, est partout dense dans $E(t)$.

(iii) Pour tout $x \in \Gamma$, la fonction $t \longmapsto \| x(t) \|$ est continue.

(iv) Soit $x \in \prod\limits_{t\in T} E(t)$ un champ de vecteurs; si pour tout $t \in T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x' \in \Gamma$ tel que $\| x(t) - x'(t) \| \leq \varepsilon$ sur un voisinage de t, alors $x \in \Gamma$.

<u>Définition 2-2:</u>

Soit T un espace topologique. Un champ continu de C^*-algèbres sur T est un champ continu $\big((A(t)), A\big)$ d'espaces de Banach sur T, chaque $A(t)$ étant muni d'une multiplication et d'une involution qui en fait une C^*-algèbre et A étant stable pour la multiplication et l'involution.

On définit de même des champs semi-continus de C^*-algèbres.

Dans la suite, pour toute C^*-algèbre A, on note $M(A)$ l'algèbre des multiplicateurs de A et pour tout espace localement compact Ω, on note $C_0(\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur Ω tendant vers 0 à l'infini.

<u>Définition 2-3:</u>

Soit $\{A_\omega\}$ un champ de C^*-algèbres sur un espace localement compact Ω et A une C^*-algèbre (pour la norme sup) des sections de $\{A_\omega\}$. On dit que A est maximale si:

1) L'application π_ω de A dans chaque A_ω est surjective.

2) Pour tout $a \in A$, l'application $\omega \longmapsto \| \pi_\omega(a) \|$ est semi continue supérieurement et tend vers 0 à l'infini sur Ω.

3) Le produit usuel de tout élément de A par tout élément de $C_0(\Omega)$ est dans A.

Proposition 2-4:

Soit A une C^*-algèbre, et soit C une C^*-algèbre du centre de $M(A)$. Soit Ω un espace localement compact tel que $C = C_0(\Omega)$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, notons I_ω l'idéal des éléments de C qui s'annulent en ω, soit $J_\omega = AI_\omega$ et soit $A_\omega = A/J_\omega$. Si on note π_ω l'homomorphisme de A dans A_ω, alors pour tout $a \in A$ la fonction $\omega \longmapsto \| \pi_\omega(a) \|$ est semi-continue supérieurement et par suite le champ de C^*-algèbres sur Ω, $\{A_\omega\}$ est semi-continu supérieurement. Si $A = C \cdot A$ alors A est identifiée avec l'algèbre maximale de sections de $\{A_\omega\}$ par l'application $\omega \longmapsto \| \pi_\omega(a) \|$.

Démonstration:

Etant donné $a \in A$, $\omega_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la norme quotient il existe une somme finie $t = \sum_i f_i a_i$ avec $f_i \in I_{\omega_0}$ et $a_i \in A$ telle que $\| \pi_{\omega_0}(a) \| \geq \| a - t \| - \varepsilon$. Soit $g \in C$ tels que $\| g \| \leq 1$, $g \equiv 1$ dans un voisinage N de ω_0, et que gf_i soient suffisamment petits de telle façon que $\| gt \| < \varepsilon$. Alors:

$$\| \pi_{\omega_0}(a) \| \geq \| a - t \| - \varepsilon \geq \| g(a - t) \| - \varepsilon \geq \| ga \| - 2\varepsilon = \| a - (1 - g)a \| - 2\varepsilon$$

Comme $1 - g$ est dans I_ω pour $\omega \in N$, on obtient:

$$\| \pi_{\omega_0}(a) \| \geq \| \pi_\omega(a) \| - 2\varepsilon \quad \text{pour} \quad w \in N$$

D'où la semi-continuité supérieure.

II.1.1 - Champs "provenant" des cocycles:

On va montrer maintenant comment construire un champ de C^*-algèbres à partir de la donnée d'un champ de 2-cocycles sur un groupe discret G. Supposons que les cocycles prennent des valeurs dans le groupe des éléments unitaires du centre de l'algèbre des multiplicateurs de A qu'on note $UZM(A)$. Notons $C_0(\Omega, A)$ la C^*-algèbre des fonctions continues sur Ω à valeurs dans A tendant vers 0 à l'infini.

Définition 2-5

Nous appelons champ continu sur Ω de cocycles de G, toute fonction σ sur $G \times G \times \Omega$ à valeurs dans $UZM(A)$ telle que:

1) Si on fixe $\omega \in \Omega$ alors σ est un cocycle normalisé sur G, c'est à dire,

$$\sigma(x, yz; \omega)\sigma(y, z; \omega) = \sigma(xy, z; \omega)\sigma(x, y; \omega)$$

pour tous x, y, $z \in G$ et

$$\sigma(x, e; \omega) = 1 = \sigma(e, x; \omega)$$

où e désigne l'élément neutre de G.

2) Si on fixe x,y $\in G$, alors σ est continue sur Ω $(UZM(A)$ étant munie de la topologie de la convergence simple)

3) Pour tout $f \in C_\infty(\Omega, A)$ la fonction

$$(x,y) \longmapsto f(\cdot)\sigma(x,y;\cdot)$$

de $G \times G$ dans $C_\infty(\Omega, A)$ est mesurable.

Soit l'algèbre définie comme suit: on choisit une mesure de Haar à gauche sur G. Pour $\Phi, \Psi \in L^1(G, C_0(\Omega, A))$ on définit le produit:

$$(\Phi \star \Psi)(x) = \int \Phi(y)\Psi(y^{-1}x)\sigma(y, y^{-1}x;\cdot)dy$$

et l'involution:

$$\Phi^*(x) = \Phi(x^{-1})^* \sigma(x, x^{-1};\cdot)^* \Delta(x^{-1})$$

où Δ est la fonction module sur G. On notera la *-Algèbre de Banach obtenue par $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$.

Pour $\omega \in \Omega$ soit I_ω l'idéal (dans $C_0(\Omega)$) des fonctions s'annulant en ω et soit J_ω l'idéal correspondant de $C_0(\Omega, A)$. Donc σ prend ses valeurs dans $UZM(J_\omega)$, et exactement comme ci-dessus on peut former $L^1(G, J_\omega, \sigma)$ qui sera un idéal fermé de $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$. Soit σ_ω le cocycle $\sigma(\cdot,\cdot,\omega)$ à valeurs dans $UZM(A)$, on peut définir également $L^1(G, A, \sigma_\omega)$ de noyau $L^1(G, J_\omega, \sigma)$ tel que $L^1(G, A, \sigma_\omega)$ possède la norme quotient correspondante.

Soit $C^*(G, \Omega, A, \sigma)$ la C^*-algèbre enveloppente de $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$. On définit de la même manière les C^*-algèbres $C^*(G, J_\omega, \sigma)$ et $C^*(G, A, \sigma\omega)$.

Rieffel montre dans [27] que:

$$C^*(G, J_\omega, \sigma) = C^*(G, \Omega, A, \sigma)I_\omega.$$

Proposition 2-6:

Avec les notations ci-dessus, soit σ un champ continu (sur Ω) de cocycles sur un groupe discret moyenable G. Alors le champ de C^*-algèbres $\{C^*(G, A, \sigma\omega)\}$ sur Ω, est semi continu supérieurement.

Démonstration:

Comme $C^*(G, J_\omega, \sigma) = C^*(G, \Omega, A, \sigma)I_\omega$, il suffit d'appliquer la proposition 2-4.

Maintenant on désire avoir un résultat analogue pour la semi-continuité inférieure. Avec les mêmes notations que ci-dessus on choisit une représentation fidèle de A dans un espace de Hilbert H, et une mesure de Borel positive sur Ω de support Ω, et on considère la représentation fidèle correspondante, P, de $C_0(\Omega, A)$ sur $L^2(\Omega, A)$. On peut induire cette représentation en une représentation de $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$. La complétion pour la C^*-norme correspondante donne par définition la C^*-algèbre réduite $C^*_r(G, \Omega, A, \sigma)$, or comme G est moyenable, cette C^*-algèbre est égale à $C^*(G, \Omega, A, \sigma)$. On définit la représentation (U, μ) de $(G, C_0(\Omega, A))$ sur $L^2(G, L^2(\Omega, H))$ par:

$$(U_y\eta)(x) = P(\sigma(x^{-1}, y))\eta(y^{-1}x)$$

$$\big(\mu(a)\eta\big)(x) = P(a)\eta(x)$$

Pour $x, y \in G$ et $a \in A$. Si on Définit Q par:

$$Q(\Phi)\eta = \int \mu(\Phi(y))U_y\eta dy$$

pour $\Phi \in L^1(G, \Omega, A, \sigma)$, Q définit une représentation $\star$ de $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$ (la représentation induite). Soit Q_ω la représentation correspondante de $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$ ou $C^*(G, \Omega, A, \sigma)$ sur $L^2(G, H)$ obtenue par des formules analogues à celles ci-dessus mais évaluée en ω.

Théorème 2-7:

Soit σ un champ continu (sur Ω) de cocycles sur un groupe discret moyenable G. Alors le champ de C^*-algèbres $\{C_r^*(G, A, \sigma\omega)\}$ sur Ω, est continu.

Démonstration:

On montre tout d'abord que pour tout $\Phi \in L^1(G, \Omega, A, \sigma)$, la fonction $\omega \longmapsto Q_\omega(\Phi)$ est continue pour la topologie forte des opérateurs sur $L^2(G, H)$. Il suffit de montrer ceci pour $\Phi \in L_c^\infty(G, \Omega, A)$, l'espace des fonctions bornées mesurables à support compact sur G à valeurs dans $C_0(\Omega, A)$ car il est dense dans $L^1(G, \Omega, A, \sigma)$. Soit $\xi \in L^2(G, H)$, et $\omega_0 \in \Omega$. Pour un x fixé dans G, quand ω converge vers ω_0 la fonction

$$y \longmapsto \mu(\Phi(y, \omega))P\big(\sigma(x^{-1}, y, \omega)\big)\xi(y^{-1} \cdot x)$$

converge simplement vers la fonction correspondante pour ω_0, et est dominée par la fonction $y \longmapsto \| \Phi(y) \|_\infty \| \xi(y^{-1} \cdot x) \|$ dans $L^2(G)$. Ainsi, en appliquant le théorème de la convergence dominée, $\big(Q_\omega(\Phi)\xi\big)(x)$ converge vers $\big(Q_{\omega_0}(\Phi)\xi\big)(x)$ pour tout x dans G. Mais ces fonctions sont à leur tour dominées par la fonction $\| \Phi(\cdot) \|_\infty \times \| \xi \|$ qui est dans $L^2(G)$, où $\times$ désigne la convolution ordinaire sur G. Ainsi, en appliquant de nouveau le théorème de la convergence dominée, on montre que $Q_\omega(\Phi)\xi$ converge dans $L^2(G, H)$ vers $Q_{\omega_0}(\Phi)\xi$. Donc $Q_\omega(\Phi)$ converge vers $Q_{\omega_0}(\Phi)$ pour la topologie forte des opérateurs. Mais comme la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie forte ceci implique que $\omega \longmapsto \| Q_\omega(\Phi) \|$ est semi-continue inférieurement. On conclut la démonstration du théorème en appliquant la proposition précédente.

Remarque 2-8:

Si $A = \mathbb{C}$, on a la formulation universelle des résultats ci-dessus. Soit $\Gamma = \Gamma_G$ l'ensemble des cocycles sur G à valeurs dans $\mathbf{T}$ (les nombres complexes de module 1). On suppose que Γ soit muni de la topologie de la convergence simple. Alors l'application $\sigma \longmapsto A_\sigma$ pour $\sigma \in \Gamma$ est un champ continu de C^*-algèbres sur Γ, où A_σ est la C^*-algèbre du groupe G déformée par σ.

II-1-2 Champs "provenant" des actions:

Dans cette partie on construit des champs de C^*-algèbres à partir de champs continus d'actions d'un groupe sur un champ de C^*-algèbres. Ici on ne suppose plus que G soit discret car on voudrait appliquer cette construction à des cas plus généraux (voir III-4).

Définition 2-9:

Soit G un groupe localement compact. On appelle champ semi-continu supérieurement d'actions de G sur les C^*-algèbres, la donnée d'un champ semi-continu supérieurement $\{A_\omega\}$ de C^*-algèbres sur un espace localement compact Ω, avec une C^*-algèbre de sections maximale A, des applications π_ω, et d'une action α de G sur A qui laisse stable tous les noyaux K_ω des π_ω et par suite induit une action sur chaque A_ω. Si $\{A_\omega\}$ est continu, alors on dit que le champ d'actions est continu.

Théorème 2-10:

Soit α un champ semi-continu supérieurement d'actions de G sur le champ $\{A_\omega\}$ de C^*-algèbres. Pour tout $\Phi \in L^1(G, A)$ et tout $\omega \in \Omega$, soit $\| \Phi \|_\omega$ la norme de Φ dans la C^*-algèbre produit croisé $C^*(G, A_\omega; \alpha)$. Alors la fonction $\omega \longmapsto \| \Phi \|_\omega$ est semi-continue supérieurement et par suite $\{C^*(G, A_\omega; \alpha)\}$ est un champ semi-continu supérieurement de C^*-algèbres sur Ω. En plus, $C^*(G, A, \alpha)$ est identifiée avec la C^*-algèbre des sections maximale de ce champ.

Démonstration:

Pour $\omega \in \Omega$, notons comme précédemment I_ω l'idéal de $C_\infty(\Omega)$ des fonctions s'annulant en ω. On a $K_\omega = I_\omega A$. Maintenant il est clair des hypothèses que les éléments de $C_\omega(\Omega) \subseteq M(A)$ sont invariants sous l'action α. Par suite:

$$C^*(G, K_\omega; \alpha) = I_\omega C^*(G, A; \alpha)$$

donc

$$C^*(G, A_\omega; \alpha) = C^*(G, A; \alpha)/I_\omega \quad C^*(G, A; \alpha)$$

On conclut le théorème par application de la proposition 2-4.

II-2 DEFORMATIONS QUANTIFICATIONS STRICTES SUR LES TORES:

Définition 2-11: [28]

Le tore non-commutatif de dimension d qu'on notera $\bar{A}_\theta$ est la C^*-algèbre universelle engendrée par d opérateurs unitaires $\{U_i\}_{1 \leq i \leq d}$ qui satisfont la relation suivante:

$$U_k U_j = exp(2i\pi\theta_{jk}) U_j U_k$$

où $\{\theta_{jk}\}$ est une matrice antisymétrique réelle.

Rieffel a montré [17] que les tores non-commutatifs sont des déformations quantifications strictes des tores ordinaires.

Soit $\mathbf{T}^d$ le tore ordinaire de dimension d identifié avec $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Z}^d$, et soit $A = C^\infty(\mathbf{T}^d)$ l'ensemble des fonction C^∞ sur $\mathbf{T}^d$. Soit G le groupe $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbf{T}^d$) agissant sur A par translation avec l'action correspondante de l'algèbre de Lie $L \cong \mathbb{R}^d$. Pour $i = 1, \dots d$

notons par X_i le champ de vecteur sur $\mathbf{T}^d$ correspondant à la différentiation dans la $i^{\underline{\text{ème}}}$ direction. Les structures de Poisson G-invariantes sur $\mathbf{T}^d$ sont de la forme:

$$\Lambda = -\pi^{-1} \sum_{j<k} \theta_{jk} X_j \wedge X_k$$

où $\{\theta_{jk}\}$ est une matrice antisymétrique réelle et le facteur π^{-1} est introduit pour simplifier certains calculs ultérieurs. θ sera aussi considérée comme une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ quand il sera convenable de le faire. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^d$ de masse totale 1.

Pour obtenir la déformation quantification stricte correspondante, on prend la transformée de Fourier sur A comme on fait pour obtenir le produit de Moyal [9] qui est une déformation quantification de $M = \mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure de Poisson standard. Soit e la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par: $e(t) = exp(2\pi i t)$. Pour $f \in C^\infty(\mathbf{T}^d)$ on définit sa transformée de Fourier, $\hat{f}$, sur $\mathbb{Z}^d$ par:

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbf{T}^d} \bar{e}(n \cdot x) f(x) d\mu(x)$$

où $n \cdot x$ est le produit intérieur dans $\mathbb{R}^d$. Il est clair que la transformée de Fourier envoie $C^\infty(\mathbf{T}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ = l'ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{Z}^d$. En plus, le produit usuel est transformé en un produit de convolution, l'involution devient $\hat{f}^*(n) = \bar{\hat{f}}(-n)$, la mesure de Lebesque μ, devient une évaluation en 0 et la translation par $c \in \mathbb{R}^d$ est transformée en une multiplication par $n \longmapsto e(n \cdot c)$. Alors l'opérateur X_j correspond à la multiplication par $2i\pi n_j$ et donc , le crochet de Poisson est donné pour Φ, $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ et $n \in \mathbb{Z}^d$, par:

$$\begin{aligned}\{\Phi, \Psi\}(n) &= 4\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j,k} \theta_{jk} m_j \Phi(m)(n_k - m_k)\Psi(n-m) \\ &= 4\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \Phi(m)\Psi(n-m)\theta(m,n)\end{aligned}$$

où $\theta(m,n) = \sum_{j,k} \theta_{jk} m_j (n_k - m_k)$.
Comme θ est une forme antisymétrique, $\theta(m,m) = 0$. On choisit comme intervalle I de la définition 0-2 tout $\mathbb{R}$, et pour tout $\hbar \in I$, on définit un bicaractère $\sigma_\hbar$ sur $\mathbb{Z}^d$ par

$$\sigma_\hbar(m,n) = e\big(\hbar\theta(m,n)\big)$$

Puis on pose:

$$(\Phi \star_\hbar \Psi)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \Phi(m)\Psi(n-m)\sigma_\hbar(m,n)$$

Comme $\sigma_\hbar$ est antisymétrique il est convenable de poser:

$$\Phi^{*_\hbar}(n) = \bar{\Phi}(-n)$$

que nous noterons Φ^* car elle ne dépend pas de $\hbar$.

La fonction τ définie par $\tau(\Phi) = \Phi(0)$ est une trace sur $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ pour $\star_\hbar$ et on a:

$$\tau\big(\Phi \star_\hbar \Psi^*\big) = \big\langle \Phi, \Psi \big\rangle$$

où $\big\langle \quad , \quad \big\rangle$ est le produit usuel sur $L^2(\mathbb{Z}^d)$, indépendant de $\hbar$. En effet:

$$\begin{aligned}\tau(\Phi \star_\hbar \Psi^*) &= \big(\Phi \star_\hbar \Psi^*\big)(0)\\ &= \sum_m \Phi(m)\Psi^*(-m)\\ &= \sum_m \Phi(m)\bar{\Psi}(m)\\ &= \big\langle \Phi, \Psi \big\rangle\end{aligned}$$

Pour tout $\hbar \in \mathbb{R}$, soit $\pi_\hbar$ la représentation régulière de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ sur $L^2(\mathbb{Z}^d)$. Chaque $\pi_\hbar$ est fidèle sur $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ en fait: si $\pi_\hbar(\Phi)\Psi = 0$ pour tout $\Psi \in L^2(\mathbb{Z}^d)$, en particulier pour $\Psi = \Phi^*$ on a $\Phi \star_\hbar \Phi^*(0) = 0$. Or

$$\begin{aligned}\Phi \star_\hbar \Phi^*(0) &= \tau(\Phi \star_\hbar \Phi^*)\\ &= \big\langle \Phi, \Phi \big\rangle \quad .\\ &= \parallel \Phi \parallel_{L^2}\end{aligned}$$

donc $\Phi = 0$. Alors on pose $\parallel \Phi \parallel_\hbar = \parallel \pi_\hbar \parallel$.

Il est clair que si on complète ces algèbres $A_{\hbar\theta}$ on obtient les tores non-commutatifs correspondants $\bar{A}_{\hbar\theta}$ [28].

On doit maintenant montrer les conditions de la définition 0-2. On va commencer par la deuxième condition, car c'est bien celle là qui caractèrise une déformation quantification. Pour tout Φ, $\Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ et tout $\hbar \in \mathbb{R}$ soit:

$$\Delta_\hbar = \big(\Phi \star_\hbar \Psi - \Psi \star_\hbar \Phi\big)/i\hbar - \{\Phi, \Psi\}.$$

On montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\Delta_\hbar(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \Phi(m)\Psi(n-m)\big[\big(\sigma_\hbar(m,n) - \sigma_\hbar(n,m)\big)/i\hbar - 4\pi\theta(m,n)\big]$$

Notons par $F_\hbar(m,n)$ l'expression entre crochets. Un calcul simple montre qu'il existe une constante K telle que:

$$|\big(e^{it} - e^{-it}\big)/it - 2| \leq K|t|$$

pour tout nombre réel t. Et par suite

$$F_\hbar(m,n) \leq K'|\hbar||\theta(m,n)|^2$$

où $K' = K(2\pi)^2$. D'autre part, il existe une constante M tel que:

$$|\theta(m,n)| \leq M|m||n|,$$

où $|\quad|$ désigne la norme Euclidienne sur $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$. Ainsi:

$$\begin{aligned}|\Delta_\hbar(n)| &\leq \sum_m |\Phi(m)||\Psi(n-m)||F_\hbar(m,n-m)| \\ &\leq \sum_m |\Phi(m)||\Psi(n-m)|\hbar K"|m|^2|n-m|^2\,, \\ &= hK"(|\cdot|^2|\Phi|(\cdot))\times(|\cdot|^2|\Psi|(\cdot))(n)\end{aligned}$$

où $K" = K'M^2$ et $\times$ désigne la convolution ordinaire des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$. Comme $|\cdot|^2|\Phi|(\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ et similairement pour Ψ, leur convolution est dans $L^1(\mathbb{Z}^d)$. Mais comme la norme L^1 domine toutes les normes $\|\quad\|_\hbar$, on a:

$$\| \Delta_\hbar \|_\hbar \leq hK" \| |\cdot|^2|\Phi|(\cdot) \|_{L^1} \| |\cdot|^2\Psi(\cdot) \|_{L^1}$$

Il s'ensuit que $\| \Delta_\hbar \|_\hbar$ tend vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0 et la condition 2) est ainsi démontrée.

La condition 1) de la définition 1-2 est une conséquence de la remarque 2-8: dans la situation présente on prend $G = \mathbb{Z}^d$. Comme l'application $\hbar \longmapsto \sigma_\hbar$ est continue de $\mathbb{R}$ dans Γ, il s'ensuit que $\{\bar{A}_{\theta\hbar}\}$ est un champ continu de C^*-algèbres.

Théorème 2-12:

Soit θ une matrice anti-symétrique qui définit une structure de Poisson Λ sur $\mathbf{T}^d$:

$$\Lambda = -\pi^{-1}\sum_{j<k}\theta_{jk}X_j \wedge X_k$$

Pour tout réel $\hbar$, soit $\bar{A}_{\theta\hbar}$ la C^*-algèbre obtenue en complétant (pour la norme $\|\quad\|_\hbar$) $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$ muni du produit:

$$(\Phi \star_\hbar \Psi)(n) = \sum_m \Phi(m)\Psi(n-m)\sigma_\hbar(m,n)$$

de l'involution $\Phi^{*_\hbar}(n) = \bar{\Phi}(-n)$ et de la norme $\| \Phi \|_\hbar = \| \pi_\hbar(\Phi) \|$
Alors la famille $\{\bar{A}_{\theta\hbar}\}$ fournit une déformation quantification pour $C^\infty(\mathbf{T}^d)$ dans la direction de Λ.

Remarquons que tout tore non-commutatif peut être obtenu par une succession de produits croisés par action du groupe $\mathbb{Z}$, commençant par l'action triviale de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$. Donc, une manière pour étudier les tores non-commutatifs consiste à utiliser les propriétés des produits croisés.

II-3 STRUCTURE DES TORES NON-COMMUTATIFS:

Dans cette section, on s'intéresse aux variétés symplectiques $\mathbf{T}^{2p}$ car les produits $\star$ sont essentiellement définis sur les variétés symplectiques. On va construire des produits $\star$ sur $C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ en suivant la méthode de Rieffel, mais, au lieu de considérer la transformée de Fourier usuelle, on va définir la transformée de Fourier symplectique de façon à faire apparaître la déformation quantification par une formule semblable à celle existant dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$.
On étudie ensuite en détail la structure des algèbres obtenues et leurs représentations.

1 - Construction des produits $\star$:

On définit la transformée de Fourier symplectique pour $u \in C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ par:

$$(Fu)(k,r) = \int_{\mathbf{T}^{2p}} u(a,q)e^{2i(ar-qk)}\frac{dqda}{(2\pi)^{2p}}$$

où $k,\, r \in \mathbb{Z}^p$ et $a, q \in \mathbf{T}^p$.
On considère aussi sur $\mathbf{T}^{2p}$ la 2-forme symplectique Ω:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} -\theta_i X_i \wedge X_{i+p}$$

où $\theta_i \in \mathbb{R}$ pour tout i.

Pour construire un produit $\star$ sur $\mathbf{T}^{2p}$, on va former le produit croisé de $L^1(\mathbb{Z}^p)$ muni du produit de convolution usuel par $\mathbb{Z}^p$ pour l'action définie par:

$$(m_1,\ldots,m_p)f(n_1,\ldots,n_p) = e^{4i\hbar(\sum_{i=1}^p \theta_i m_i n_i)}f(n_1,\ldots,n_p)$$

où $f \in L^1(\mathbb{Z}^p)$; $m=(m_1,\ldots,m_p)\in \mathbb{Z}^p$, $n=(n_1,\ldots,n_p)\in \mathbb{Z}^p$ et $\hbar \in \mathbb{R}$.
Le produit dans $L^1(\mathbb{Z}^p, L^1(\mathbb{Z}^p))$ est donné par:

$$(\Phi \star_\hbar \Psi)(n) = \sum_{m\in \mathbb{Z}^p} \Phi(m) \times m \cdot \Psi(n-m)$$

où $\times$ désigne la convolution usuelle sur $L^1(\mathbb{Z}^p)$ et l'involution par:

$$\Phi^*(n) = n \cdot \left[(\Phi(-n))^*\right]$$

Un calcul simple montre que:

$$(\Phi \star_\hbar \Psi)(n^1)(n^2) = \sum_{m^1,m^2\in \mathbb{Z}^p} \Phi(m^1)(m^2)\Psi(n^1-m^1)(n^2-m^2)e^{4i\hbar\left(\sum_{i=1}^p \theta_i m_i^1(n_i^2-m_i^2)\right)}$$

où $n^1 = (n_1^1, \ldots, n_p^1); n^2 = (n_1^2, \ldots, n_p^2); m^1 = (n_1^1, \ldots, m_p^1); m^2 = (n_1^2, \ldots, m_p^2) \in \mathbb{Z}^p$ et que:

$$\Phi^*(n^1)(n^2) = e^{4i\hbar(\sum_{i=1}^p \theta_i n_i^1 n_i^2)}\overline{\Phi(-n^1)(-n^2)}$$

Considérons maintenant l'application A de $L^1(\mathbb{Z}^p, L^1(\mathbb{Z}^p))$ dans $L^1(\mathbb{Z}^{2p})$ définie par:

$$\big(A(\Phi)\big)(n^1, n^2) = e^{-2i\hbar \sum_{i=1}^p \theta_i n_i^1 n_i^2}\Phi(n^1)(n^2)$$

où $L^1(\mathbb{Z}^{2p})$ est muni du produit et de l'involution suivants:

$$(F \star_\hbar G)(n_1, \ldots, n_{2p}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{2p}} F(m)G(n-m)e^{2i\hbar \sum_{i=1}^p \theta_i(m_i n_{p+i} - n_i m_{p+i})}$$

et $F^*(n) = \overline{F(-n)}$ pour tous $F, G \in L^1(\mathbb{Z}^{2p})$ où $n = (n_1, \ldots, n_{2p})$; $m = (m_1, \ldots, m_{2p})$

On vérifie facilement que pour tous Φ, Ψ dans $L^1(\mathbb{Z}^p, L^1(\mathbb{Z}^p))$ on a:

$$A(\Phi \star_\hbar \Psi) = A(\Phi) \star_\hbar A(\Psi) \qquad \text{et} \qquad A(\Phi^*) = \big(A(\Phi)\big)^*$$

Donc A est un isomorphisme de $L^1(\mathbb{Z}^p, L^1(\mathbb{Z}^p))$ sur $L^1(\mathbb{Z}^{2p})$.

Remarquons que cette construction est exactement analogue à la construction du produit de Moyal sur $\mathbb{R}^{2n}$ par produit croisé de $L^1(\mathbb{R}^n)$ par $\mathbb{R}^n$. Rappelons l'expression intégrale de ce produit $\star$:

$$u \star v = F^{-1}\big(Fu \times_\sigma Fv\big) \qquad \text{pour tous} \quad u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \qquad \text{où}$$

$$(Fu)(k, r) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} u(p, q)e^{2i(pr - qk)}\frac{dpdq}{\pi^n}$$

$$\text{et} \quad u \times_\sigma v(k, r) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} u(k_1, r_1)v(k - k_1, r - r_1)e^{-2i(k_1 r - k r_1)}\frac{dk_1 dr_1}{\pi^n}$$

Notons également que le produit $\star$ sur $C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ qu'on vient de construire admet comme le produit de Moyal sur $\mathbb{R}^{2n}$ un développement formel:

$$u \star_\hbar v = \sum_{r \geq 0} \frac{h^r}{r!}\left(\frac{1}{2i}\right)^r P^r(u, v)$$

où $P(u, v)$ est le crochet de Poisson défini par la 2-forme Ω et qu'on notera $\{,\}$. En effet il est clair que le crochet de Poisson est donné pour F, G dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^{2p})$ et $n \in \mathbb{Z}^{2p}$ par:

$$\{F, G\} = -4\sum_{i=1}^p \theta_i F(m)G(n-m)(m_{i+p}n_i - n_{i+p}m_i)$$

D'autre part on a pour tous u, $v \in C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$:

$$
\begin{aligned}
((Fu)\star_\hbar(Fv))(n) &= \sum_{m\in \mathbb{Z}^{2p}} (Fu)(m)(Fv)(n-m)e^{2i\hbar\sum_{i=1}^{p}\theta_i(m_i n_{p+i}-n_i m_{p+i})} \\
&= \sum_{m\in \mathbb{Z}^{2p}}\sum_{r\geq 0}\frac{(2ih)^r}{r!}\Big[\sum_{i=1}^{r}\theta_i(m_i n_{p+i}-n_i m_{p+i})\Big]^r(Fu)(m)(Fv)(n-m) \\
&= \sum_{m\in \mathbb{Z}^{2p}}\sum_{r\geq 0}\frac{(2ih)^r}{r!}\sum_{l=0}^{r}C_r^l(-1)^{r-l}\Big(\sum_{i=1}^{p}\theta_i m_i n_{p+1}\Big)^l\Big(\sum_{i=1}^{p}\theta_i n_i m_{p+1}\Big)^{r-l}\times \\
&\qquad\times (Fu)(m)(Fv)(n-m) \\
&= \sum_{m\in \mathbb{Z}^{2p}}\sum_{r\geq 0}\frac{(2ih)^r}{r!}\sum_{l=0}^{r}C_r^l(-1)^{r-l}\theta_{i_1}\dots\theta_{i_r}F(\partial^l_{x_{i_1}\dots x_{i_l}}\partial^{r-l}_{x_{p+i_{l+1}}\dots x_{p+i_r}}u)(m)\times \\
&\qquad\times F(\partial^l_{x_{p+i_1}\dots x_{p+i_l}}\partial^{r-l}_{x_{i_{l+1}}\dots x_{i_r}}v)(n-m)
\end{aligned}
$$

D'où on obtient :

$$F^{-1}(Fu\star_\hbar Fv) = \sum_{r\geq 0}\frac{\hbar^r}{r!}\Big(\frac{1}{2i}\Big)^r P^r(u,v).$$

On montre facilement comme dans le paragraphe II-2 que la représentation $\star$ régulière gauche $\pi_\hbar$ de $C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ sur $L^2(\mathbf{T}^{2p})$ est fidèle et on pose donc $\| u \|_\hbar = \| \pi_\hbar(u) \|$. Il est clair que la C^*-algèbre enveloppante est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}^{2p}$: $\mathcal{C}(\mathbf{T}^{2p})$. Par une démonstration analogue à celle du paragraphe II-2 on montre qu'on a ainsi une déformation quantification stricte de $C^\infty(\mathbf{T}^{2p})$ dans la direction de $\{,\}$.

D'après le chapitre I, il est clair que $\mathcal{C}(\mathbf{T}^{2p})$ muni de ce produit $\star$ est isomorphe à $C^*(\mathbb{Z}^p, A)$ où A est la C^*-algèbre enveloppante de $L^1(\mathbb{Z}^p)$.

Dans ce qui suit on va étudier la structure de la C^*-algèbre obtenue pour $h = \frac{\pi}{2}$ et on la notera $\bar{A}_\theta$. On identifiera $L^1(\mathbb{Z}^p, A)$ avec $A\bar{\otimes}L^1(\mathbb{Z}^p)$ où $\bar{\otimes}$ désigne le produit tensoriel complété pour la norme L^1. On va aussi identifier A avec son image dans $L^1(\mathbb{Z}^p, A)$ par l'isomorphisme $a \longmapsto a\otimes\varepsilon_0$ où ε_0 est la fonction caractéristique du singleton 0.

Notons que comme A est commutative, elle est postliminaire et par suite toutes les représentations factorielles de A sont de type I et sont traçables ([26]-9-1). D'où $\widehat{A} = \hat{A} = \hat{A}_{tr}$. Remarquons aussi comme $A = C^*(\mathbb{Z}^p)$ (la C^*-algèbre du groupe $\mathbb{Z}^p$) alors $\hat{A}$ est égal à $\hat{\mathbb{Z}}^p$ et est donc identifié avec $\mathbf{T}^p$.

2 - Structure des C*-algèbres:

Lemme 2-13:

Soit π une représentation irréductible de A alors il existe $\varphi \in \big([0,1[\big)^p$ tel que $\forall f \in A$, $\pi(f) = \hat{f}(\varphi)I$; où $\hat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f et I désigne l'identité. De plus φ ne dépend que de la classe d'équivalence de π.

Démonstration:

Soit π une représentation irréductible de A. Comme A est commutative $\pi(A)$ est inclus dans son commutant $\big(\pi(A)\big)'$. Or ce commutant se réduit aux scalaires donc pour tout f dans A il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\pi(f) = \alpha I$. Soit $\alpha_k = \pi(\varepsilon_k)$ où $k \in \mathbb{Z}^p$. On a

$$(\varepsilon_k \times \varepsilon_j) = \sum_m \varepsilon_k(m)\varepsilon_j(n-m) = \varepsilon_j(n-k) = \varepsilon_{j+k}(n)$$

Donc

$$\alpha_{k+j}I = \pi(\varepsilon_k \times \varepsilon_j) = \pi(\varepsilon_k)\pi(\varepsilon_j) = \alpha_k\alpha_j I$$

et

$$\varepsilon_k^*(n) = \overline{\varepsilon_k(-n)} = \varepsilon_{-k}(n)$$

or $\pi(\varepsilon_k^*) = \pi(\varepsilon_k)^*$ d'où $\alpha_{-k} = \bar{\alpha}_k$ Par suite: $\alpha_k\bar{\alpha}_k = \alpha_k\alpha_{-k} = \alpha_0 = 1, \qquad |\alpha_k| = 1$
Donc il existe $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p) \in \big([0,1[\big)^p$ tels que:

$$\begin{cases} \alpha_{(1,0,\ldots,0)} = e^{-2i\pi\varphi_1} \\ \alpha_{(0,1,\ldots,0)} = e^{-2i\pi\varphi_2} \\ \vdots \\ \alpha_{(O,0,\ldots,1)} = e^{-2i\pi\varphi_p} \end{cases}$$

Il s'ensuit que $\alpha_k = e^{-2i\pi k\varphi}$ Soit maintenant $f \in A$ on a:

$$\pi(f) = \pi\big(\sum_k f(k)\varepsilon_k\big) = \sum_k f(k)\pi(\varepsilon_k) = \sum_k f(k)e^{-2i\pi k\varphi}I = \hat{f}(\varphi)I$$

Soit π' une autre représentation irréductible de A dans un espace H_π, telle que π' soit équivalente à π. Donc il existe un isomorphisme Φ de H_π dans H'_π tel que $\pi'(f) = \Phi(\pi(f))$ pour tout f dans A. D'où: $\hat{f}(\varphi')I_{H\pi'} = \Phi\big(\hat{f}(\varphi)I_{H_\pi} = \hat{f}(\varphi)\Phi(I_{H_\pi})$. Donc $\hat{f}(\phi') = \hat{f}(\phi)$ $\forall \quad f \in A$ et par suite $\varphi = \varphi' + \ell$ où $\ell \in \mathbb{Z}$ or φ et $\varphi' \in [0,1[$ alors $\varphi = \varphi'$.

Proposition 2-14:

Si θ_i est irrationnel pour tout $i = 1, \ldots, p$ alors $\mathbb{Z}^p$ opère librement et non régulièrement dans $\hat{A}$.
Si θ_i est rationnel pour tout $i = 1, \ldots, p$ alors $\mathbb{Z}^p$ opère régulièrement et non librement dans $\hat{A}$.
S'il existe i et $j \in \{1, \ldots, p\}$ tels que θ_i soit rationnel et θ_j soit irrationnel, alors $\mathbb{Z}^p$ opére non librement et non régulièrement dans $\hat{A}$.

Démonstration:

Soit $\tau \in \hat{A}$ et soit $\varphi \in ([0,1[)^p$ tel que pour toute représentation irréductible de classe τ et pour tout $f \in A$ on ait $\pi(f) = \hat{f}(\varphi)I$. Le stabilisateur de τ dans $\mathbb{Z}^p$ est:

$$\mathbb{Z}^p_\tau = \{k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p \quad \text{tel que} \quad k \cdot \tau = \tau\}$$

On a: $(k\tau)f = \tau(-k \cdot f) = -\hat{kf}(\varphi)I$ Or $(-kf)(n) = e^{-2i\pi \sum_{i=1}^p \theta_i k_i n_i} f(n)$
D'où on montre facilement que:

$$(k\tau)f = \hat{f}(\varphi + k \cdot \theta)I \quad \text{où} \quad k\theta = (\theta_1 k_1, \ldots, \theta_p k_p)$$

Donc:
$\mathbb{Z}^p_\tau = \{k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p \quad \text{tel que} \quad (k\tau)f = \tau f \quad \forall \ f \in A\}$
$= \{k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p \quad \text{tel que} \quad \hat{f}(\varphi + k\theta) = \hat{f}(\varphi) \quad \forall \ f \in A\}$
$= \{k = (k_1, \cdots k_p) \in \mathbb{Z}^p \text{telqu'il existe } l = (l_1, \cdots l_p) \in \mathbb{Z}^p \text{ t.q } k_1\theta_1 = l_1, \cdots k_p\theta_p = l_p\}$
D'autre part l'orbite de τ est :

$$O_\tau = \{k\tau, k \in \mathbb{Z}^p\} = \{k\varphi, k \in \mathbb{Z}^p\}$$
$$= \{(\varphi_1 + k_1\theta_1, \ldots, \varphi_p + k_p\theta_p), (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p\}$$

Par conséquent on voit que $\mathbb{Z}^p_\tau$ est indépendant de τ et si tous les θ_i sont irrationnel il est clair que $\mathbb{Z}^p_\tau = \{0\}$ et que O_τ est dense dans $\hat{A}$. Par contre si $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$ avec p_i, $q_i \in \mathbb{Z}^*$ et p_i et q_i sont premiers entre eux pour tout $i = 1, \ldots, p$ alors $\mathbb{Z}^p_\tau = q_1 \mathbb{Z} \times \ldots q_p \mathbb{Z}$. Dans ce cas

$$O_\tau = \{(\varphi_1 + k_1\theta_1, \ldots, \varphi_p + k_p\theta_1); k_i = 0, 1, \ldots, q_i - 1\}$$

Donc O_τ est finie. Montrons que O_τ est discrète. Comme A est commutative, $\hat{A}$ est un T_0-espace et les points de $\hat{A}$ sont des fermés. Donc le complémentaire d'un point φ dans l'orbite: $O'_\tau = O\tau - \{\varphi\}$ est un fermé car c'est une réunion finie de fermés. Le complémentaire de O'_τ dans $\hat{A}$ est un ouvert O de $\hat{A}$ et on a $O \cap O_\tau = \{\varphi\}$. D'où $\{\varphi\}$ est un ouvert de O_τ. Par suite O_τ est un espace topologique discret. Enfin s'il existe i et $j \in \{1, \ldots, p\}$ tels que θ_i soit rationnel et θ_j soit irrationnel, il est clair que O_τ n'est pas discrète et que $\mathbb{Z}^p_\tau \neq \{0\}$ car $\{0\} \times \ldots q_i \mathbb{Z} \times \ldots \{0\} \subset \mathbb{Z}^p_\tau$.

Théorème 2-15:

Si θ_i est irrationnel pour tout $i = 1, \ldots, p$, alors le centre de $\bar{A}_\theta$ est réduit aux fonctions constantes.
S'il existe certains θ_i rationnels, alors le centre de $\bar{A}_\theta$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}^{2p}$ périodiques en la $i^{\underline{\text{ème}}}$ et la $(i+p)^{\underline{\text{ème}}}$ variables pour tout i tel que θ_i soit rationel. La période étant la même pour la $i^{\underline{\text{ème}}}$ et la $(i+p)^{\underline{\text{ème}}}$ variables et est égale à $\frac{1}{q_i}$ si $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$, p_i et q_i sont des entiers premiers entre eux. En particulier si pour tout $i = 1, \ldots, p, \theta_i$ est entier, alors $\bar{A}_\theta$ est commutative.

Démonstration:

Si tous les θ_i sont irrationnels, $\mathbb{Z}^p$ opère librement dans $\hat{A}$, par suite pour tout $s \in \mathbb{Z}^p - \{0\}$, $\hat{A}_s = \emptyset$. D'autre part comme $\mathbb{Z}^p$ est moyenable $C_r^*(\mathbb{Z}^p, A) = C^*(\mathbb{Z}^p, A)$. Donc en appliquant la proposition 1-10 on déduit que A est une sous C^*-algèbre commutative maximale de $\bar{A}_\theta$. Par suite le centre de $\bar{A}_\theta$ est inclus dans A. Notons $\mathcal{Z}$ ce centre et soit $b \otimes \varepsilon_0$ un élément de $\mathcal{Z}$. $b \otimes \varepsilon_0$ commute en particulier avec $\varepsilon_0 \otimes a$ pour tout a dans $L^1(\mathbb{Z}^p)$. Or un calcul simple montre que:

$$(b \otimes \varepsilon_0) \star_\hbar (\varepsilon_0 \otimes a)(m)(n) = b(n)a(m)$$

et

$$(\varepsilon_0 \otimes a) \star_\hbar (b \otimes \varepsilon_0)(m)(n) = a(m)b(n)e^{2i\pi(\sum_{i=1}^{p} \theta_i m_i n_i)}$$

Donc pour que $b \otimes \varepsilon_0$ commute avec $\varepsilon_0 \otimes a$ pour tout a il faut que $b(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^p - \{0\}$ ou encore $b = \lambda\varepsilon_0$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. D'autre part il est clair que $\lambda\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_0$ commute avec $\bar{A}_\theta$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Par suite le centre de $C^*(\mathbb{Z}^p, A)$ est réduit aux multiples scalaires de l'unité et en revenant dans $\bar{A}_\theta$ par transformée de Fourier on voit que le centre est l'ensemble des fonctions constantes.

Il est facile de voir que $\bar{A}_\theta$ est isomorphe au produit tensoriel:

$$A_{\theta_1} \bar{\otimes} A_{\theta_2} \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} A_{\theta_p}$$

où A_{θ_i} est la C^*-algèbre produit croisé de B (la C^*-algèbbre enveloppante de $L^1(\mathbb{Z})$) par $\mathbb{Z}$ muni du produit:

$$(f \star_\hbar g)(n_1, n_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} f(m_1, m_2)g(n_1 - m_1, n_2 - m_2)e^{2ih\theta_i[m_1 m_2 - n_1 n_2]}$$

Si$\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$, commençons tout d'abord par chercher le centre dans A_{θ_i}.

Montrons dans une première étape que si F est un élément du centre de A_{θ_i} alors $F(m)(n) = 0$ si m ou n n'appartient par à $q_i\mathbb{Z}$. Supposons que $F = f \otimes g$ où $f \in B$ et $g \in L^1(\mathbb{Z})$. Un calcul simple montre que:

$$F \star_\hbar (\varepsilon_s \otimes \varepsilon_0)(m)(n) = g(m)f(n-s)e^{2i\pi\theta_i sm}$$

et que

$$(\varepsilon_s \otimes \varepsilon_0) \star_\hbar F(m)(n) = g(m)f(n-s)$$

Donc pour que F commute à $\varepsilon_s \otimes \varepsilon_0 \quad \forall \quad s \in \mathbb{Z}$ il faut que $g(m) = 0 \quad \forall \quad m \notin q_i\mathbb{Z}$. De même on montre facilement que pour que F commute à $\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_t \forall \quad t \in \mathbb{Z}$ il faut que $f(n) = 0 \quad \forall \quad n \notin q_i \mathbb{Z}$. Par suite $F(m)(n) = 0$ si m ou $n \notin q_i \mathbb{Z}$. Comme $B \otimes L^1(\mathbb{Z})$ est dense dans $C^*(\mathbb{Z}, B)$, on montre par passage à la limite qu'une condition nécessaire pour qu'un élément F de $C^*(\mathbb{Z}, B)$ soit dans son centre est que $F(m)(n) = 0$ si m ou $n \notin q_i \mathbb{Z}$.

D'autre part, on vérifie facilement que tous les $\varepsilon_{s_0}\otimes\varepsilon_{t_0}$ avec s_0 et t_0 appartenant à $q_i\ \mathbb{Z}$ commutent avec $\varepsilon_s\otimes\varepsilon_t$ pour tous s, t dans $\mathbb{Z}$. Par passage à la limite on montre que la C^*-algèbre produit croisé $C^*(q_i\ \mathbb{Z}, C^*(q_i\ \mathbb{Z}))$ est dans le centre de $C^*(\ \mathbb{Z}, \mathcal{B})$. Donc ce centre est exactement $C^*(q_i\ \mathbb{Z}, C^*(q_i\ \mathbb{Z}))$. Et en revenant dans le tore par transformée de Fourier on voit que le centre de A_{θ_i} est l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}^2$ périodiques en les 2 variables de (même) période $\frac{1}{q_i}$. On conclut ainsi la preuve du théorème.

Définition 2-16:

1) Une C^*-algèbre A est dite liminaire si pour toute représentation irréductible π de A et pour tout $x \in A$, $\pi(x)$ est compact.

2) Une C^*-algèbre A est dite postliminaire si toute C^*-algèbre quotient non nulle de A possède un idéal bilatère fermé liminaire non nul.

3) Une C^*-algèbre est dite antiliminaire si elle ne possède aucun idéal bilatère fermé liminaire non nul.

Théorème 2-17:

Si θ_i est rationnel pour tout $i = 1, \ldots, p, \bar{A}_\theta$ est liminaire, n'est pas simple et son spectre est le tore de dimension p : $\mathbf{T}^p$ muni de sa topologie usuelle.
Si θ_i est irrationnel pour tout $i = 1, \ldots, p, \bar{A}_\theta$ est simple et antiliminaire.
S'il existe i et j dans $\{1, \ldots, p\}$ tel que θ_i soit rationnel et θ_j soit irrationnel, alors $\bar{A}_\theta$ est antiliminaire et n'est pas simple.

Démonstration:

Supposons θ_i rationnel pour tout $i = 1, \ldots, p$. Pour montrer que $\bar{A}_\theta$ est liminaire il suffit de montrer que toute représentation irréductible de $\bar{A}_\theta$ est de dimension finie car en dimension finie l'ensemble des opérateurs sur un espace de Hilbert H est égale à l'ensemble des opérateurs compacts sur H: $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}_c(H)$. Soit donc π une représentation irréductible de $\bar{A}_\theta$ et τ une représentation irréductible de A. Comme $\mathbb{Z}^p$ opère régulièrement dans A, d'après le théorème 1-17, on déduit qu'il y a une bijection entre $C^*(\ \mathbb{Z}^p_\theta)\hat{}$ et $\hat{\bar{A}}_\theta$ où $\mathbb{Z}^p_\theta$ désigne le stabilisateur commun de tous les τ dans $\hat{A}$. Par suite il existe une représentation irréductible V de $\mathbb{Z}^p_\theta$ tel que π soit équivalente à la représentation induite par $\left(I_{H_{\rho_\tau}} \otimes V, \rho_\tau \otimes I_{H_V}\right)$. D'après ce qui précéde concernant les représentations induites des produits croisés, on déduit que π/A a pour classe d'équivalence $(\bigoplus_{\tau' \in \mathcal{T}} \tau') \otimes I_{H_V}$ où $\mathcal{T}$ est la $\mathbb{Z}^p$-orbite de τ et l'espace de π s'identifie à $\bigoplus_{\tau' \in \mathcal{T}} H_{\rho'_\tau} \otimes H_V$. Or H_V et H_{ρ_τ}, sont de dimension 1. En effet, comme $\mathbb{Z}^p_\theta$ et A sont commutatifs, toutes leurs représentations irréductibles sont de dimension 1, donc la dimension de H_π est égale au cardinal de $\mathcal{T}$: $|\mathcal{T}|$ or ce cardinal est fini; en fait $|\mathcal{T}| = \prod_{i=1}^p q_i$ où $\theta_i = \frac{p_i}{q_i}$ avec p_i et q_i premiers entre eux.

Le spectre de $\bar{A}_\theta$ est homéomorphe à $C^*(\ \mathbb{Z}^p_\theta)\hat{}$ car A est commutative séparable et l'application $\tau \longmapsto \mathbb{Z}^p_\tau$ est continue (voir [25]). Or $C^*(\ \mathbb{Z}^p_\theta)^\wedge = \hat{\mathbb{Z}}^p_\theta = \mathbf{T}^p$ muni de sa topologie usuelle.

Supposons maintenant que tous les θ_i soient irrationnels. $\mathbb{Z}^p$ opère librement dans $\widehat{A}$

donc pour montrer que $\bar{A}_\theta$ est simple il suffit de montrer que A n'a pas d'idéaux bilatères fermés $\mathbb{Z}^p$-invariants non triviaux (voir théorème 1-15). Supposons que I soit un tel idéal et soit $\hat{I} = \{\hat{f}, f \in I\}$. Soient f un élément non nul de I et $\varphi \in \mathbf{T}^p$. Il existe $k_0 \in \mathbb{Z}^p$ tel que $k_0 \hat{\cdot} f(\varphi) \neq 0$ en effet pour $k \in \mathbb{Z}^p, k \hat{\cdot} f(\theta) = \hat{f}(\varphi - k \cdot \theta)$ et comme $\varphi - k\varphi$ décrit un dense dans $\mathbf{T}^p$ quand k varie, si $k \hat{\cdot} f(\varphi)$ était nul pour tout k dans $\mathbb{Z}^p$, $\hat{f}$ serait nulle. $k_0 \hat{\cdot} f$ étant une fonction continue donc il existe un ouvert U_{k_0} contenant φ tel que $k_0 \hat{\cdot} f(\psi) \neq 0 \quad \forall \quad \psi \in U_{k_0}$.
On recouvre ainsi $\mathbf{T}^p$ par des ouverts U_k tels que $\forall \quad \psi \in U_k$ on ait $k \hat{\cdot} f(\psi) \neq 0$. Comme $\mathbf{T}^p$ est compact, on peut en extraire un nombre fini d'ouverts recouvrant $\mathbf{T}^p$, soient $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$. On considère une partition de l'unité sur $\mathbf{T}^p$: $\phi_{k_1}, \ldots, \phi_{k_n}$ des fonctions C^∞ à supports compacts contenus réspectivement dans $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ telles que $\phi_{k_1} + \ldots \phi_{k_n} = I$.
Soit $g \in C(\mathbf{T}^p)$;

$$g = \sum_{j=1}^{n} \phi_{k_j} g = \sum_{j=1}^{n} h_{k_j} k_j \hat{\cdot} f$$

où h_{k_j} est la fonction continue sur $\mathbf{T}^p$ définie par $h_{k_j} = \phi_{k_j} \frac{1}{k_j \hat{\cdot} f} g$ sur U_{k_j} et nulle en dehors de U_{k_j}
Comme I est $\mathbb{Z}^p$-invariant alors il est clair que $g \in \hat{I}$. D'où $\hat{I} = C(\mathbf{T}^p)$ et par suite $I = A$.

Supposons maintenant θ_i rationnel et θ_j irrationnel pour certains i, j dans $\{1, \ldots, p\}$. Alors A_{θ_i} est liminaire et son spectre est donc homéomorphe à $PrimA_{\theta_i}$. Mais ce spectre est aussi homéomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}_{\theta_i}$ où $\mathbb{Z}_{\theta_i}$ est le stabilisateur commun de tous les τ dans $\hat{B}$. Par suite A_{θ_i} posséde un nombre infini d'idéaux bilatères fermés non triviaux et il en est de même pour $\bar{A}_\theta$ qui n'est donc pas simple.

Montrons que dans cas $\bar{A}_\theta$ est antiliminaire. Pour ceci il suffit de montrer que A_{θ_j} est antiliminaire car si on considère une représentation π_j de A_{θ_j} de type II et une représentation π_i de $\bar{A}_{\theta_i}$ de type I pour tout $i \neq j$. Alors $\pi_1 \otimes \pi_2 \ldots \pi_p$ serait une représentation de A_θ de type II.

Maintenant pour montrer que A_{θ_j} est antiliminaire il suffit de prouver que pour tout R non nul dans A_{θ_j}, il existe une représentation irréductible non traçable π de A_{θ_j} telle que $\pi(R) \neq 0$ car si on a ceci et on suppose que A_{θ_j} possède un idéal I bilatère fermé liminaire non nul, I contiendrait un R non nul et pour cet R il existe une représentation irréductible non traçable π de A_{θ_j} tel que $\pi(R) \neq 0$ donc $\pi(I)$ serait $\neq 0$. D'après [26] 2-11-3, la réstriction de π à I est irréductible, donc $\pi(I) \subset \mathcal{L}_c(H_\pi)$. D'où $\pi(A_{\theta_j}) \supset \mathcal{L}_c(H_\pi)$ ([26] 4-1-10) et π serait alors traçable ([26] 6-7-5). Or π n'est pas traçable car la $\mathbb{Z}$-orbite de π est de stabilisateur nul et n'est pas discréte (voir la proposition 1-18). Soit R non nul dans A_{θ_j}, il existe $s \in \mathbb{Z}$ et $\tau \in \hat{B}$ tel que $R(s) \notin Ker\tau$. Toute représentation π de classe $IndT$ où T est la $\mathbb{Z}$-orbite de τ est bien irréductible non traçable et tel que $\pi(R) \neq 0$ puisqu'on a $Ker\pi = S(\bigcap_{\sigma \in T} Ker\sigma)$.

Remarques 2-18:

1) Si tous les θ_i sont irrationnels on a d'après la proposition 1-13: L'application

Ind : $\mathcal{T} \longmapsto Ind\mathcal{T}$ *est homéomorphisme de l'espace topologique quotient* $\hat{A}/\mathbb{Z}^p$ *sur le sous-espace* $Ind(\hat{A}/\mathbb{Z}^p)$ *de* $\hat{\bar{A}}_\theta$ *où* $Ind\mathcal{T}$ *est la classe de quasi-équivalence de représentations de* $\bar{A}_\theta$ *associée à* $\mathcal{T}$.

2) Si tous les θ_i *sont irrationnels, toute représentation de* $\bar{A}_\theta$ *est fidèle.*

3) Si tous les θ_i *sont irrationnels* $Prim\bar{A}_\theta = \{0\}$ *et donc* $\hat{\bar{A}}_\theta$ *est muni de la topologie grossière.*

3 - Structure des algèbres de Von Neumann:

Notons que si tous les θ_i sont rationnels, toutes les représentations de $\bar{A}_\theta$ de type I car $\bar{A}_\theta$ est liminaire. Dans la suite on va s'intéresser aux types des représentations de $\bar{A}_\theta$ lorsque tous les θ_i sont irrationnels. On prouve alors le théorème suivant:

Théorème 2-19:

La représentation $\star$ *régulière gauche de* $\bar{A}_\theta$ *est factorielle de type* II_1 *et c'est l'unique représentation* $\star$ *factorielle de type* II_1 *de* $\bar{A}_\theta$ *(à quasi-équivalence près).*

Démonstration:

L'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation $\star$ régulière gauche de $\bar{A}_\theta$ est en effet la W^*-algèbre produit croisé $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{Z}^p$ où $\mathcal{A}$ est l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de A sur $L^2(\mathbf{T}^p, \mu)$, μ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^p$. Mais il est facile de voir que $\mathcal{A} = L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$ (ensemble des fonctions μ-mesurables essentiellement bornées sur $\mathbf{T}^p$) en fait il est clair que $\mathcal{A}$ est incluse dans $L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$, d'autre part on sait que $L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$ est une algèbre des Von Neumann commutative maximale de $\mathcal{L}(L^2(\mathbf{T}^p, \mu))$ (Cf [30]). D'où il y a égalité.

Maintenant comme A est séparable et comme $\mathbb{Z}^p$ opère librement dans $\widehat{A}$, en appliquant la proposition 1-6 on déduit que $\mathbb{Z}^p$ opère presque librement sur $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative maximale de $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$. Donc pour montrer que $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ est un facteur il suffit de montrer que $\mathbb{Z}^p$ opère ergodiquement dans $\mathcal{A}$ (Cf 1-20). Pour ceci on va montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^p$ est $\mathbb{Z}^p$-ergodique. Soit E une partie μ-mesurable de $\mathbf{T}^p$ telle que $\mu((E \cup s \cdot E) - (E \cap s \cdot E)) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{Z}^p$. Montrons que $\mu(E) = 0$ ou $\mu(\mathbf{T}^p - E) = 0$. Soit χ_E la fonction caractéristique de E. Alors $\chi_E \in L^2(\mathbf{T}^p, \mu)$. Comme $\{\Phi_n(\xi) = e^{2i\pi n\xi}\}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est un système orthonormal complet de $L^2(\mathbf{T}^p, \mu)$,

$$\chi_E(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{2i\pi n\xi} \quad \text{avec} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty.$$

On a:

$$\begin{aligned}\chi_E(s \cdot \xi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{2i\pi n(\xi + s\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{2i\pi n\xi} e^{2i\pi ns\theta} \\ &= \chi_E(\xi) \qquad \text{dans} L^2(\mathbf{T}^p, \mu)\end{aligned}$$

Donc $\lambda_n e^{2i\pi ns\theta} = \lambda_n \ (s \in \mathbf{T}^p)$
Par suite $\lambda_n = 0$ pour $n \neq 0$ d'où $\mu(E) = 0$ ou $\mu(\mathbf{T}^p - E) = 0$.

Considérons maintenant la trace fidèle φ_0 définie sur $\mathcal{A}$ par:

$$\varphi_0(f) = \int_{\mathbf{T}^p} f(\xi)d\mu \qquad \forall f \in \mathcal{A}^+$$

L'invariance de μ par $\mathbb{Z}^p$ entraîne l'invariance de φ_0 par $\mathbb{Z}^p$. La trace φ_0 est normale, car si (f_α) est une famille filtrante croissante de fonctions positives dans $L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$ de borne supérieure $f \in L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$ (au sens de la relation d'ordre naturel dans $L^\infty(\mathbf{T}^p, \mu)$), on sait que $\varphi_0(f)$ est la borne supérieure de $\varphi_0(f_\alpha)$. Comme $\mu(\mathbf{T}^p) = 1$, il est clair que φ_0 est finie. Alors la trace φ_1 définie sur $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ par $\varphi_1(R) = \varphi_0(R(0))$ est fidèle, normale et finie (voir le proposition 1-21). Ainsi $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ est un facteur fini. Pour conclure il suffit de prouver que $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ n'est pas discret. Or si on pose

$$S_n = \chi_{\left([0,\frac{1}{2^n}[\right)^p}$$

alors les S_n définissent des projecteurs strictement décroissants de $\mathcal{A}$ tels que $\varphi_0(S_n) < +\infty$. Les $\Psi(S_n)$ où Ψ est l'injection canonique de $\mathcal{A}$ dans $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ forment une suite strictement décroissante E_n de projecteurs de $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ tels que $\varphi_1(E_n) < +\infty$. Donc $W^*(\mathbb{Z}^p, \mathcal{A})$ n'est pas continue (Cf [30] 8-prop 3).

Pour achever la démonstration du théorème, notons que d'après le théorème 1-22, l'application $\mu \longmapsto Ind\rho_\mu$ où ρ_μ est la représentation régulière gauche de A sur $L^2(\mathbf{T}^p, \mu)$ est bijective de l'ensemble des mesures normalisées, $\mathbb{Z}^p$-invairantes, $\mathbb{Z}^p$-ergodiques μ sur $\mathbf{T}^p$ dans l'ensemble des classes de quasi-équivalence des représentations factorielles de type II_1 de $\bar{A}_\theta$. Mais il y a une seule mesure normalisée, $\mathbb{Z}^p$-invariante et $\mathbb{Z}^p$-ergodique sur $\mathbf{T}^p$.

II-4 DEFORMATION QUANTIFICATION SUR UN GROUPE CONNEXE ABELIEN:

Dans la section précédente, on a trouvé que l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de $\bar{A}_\theta$ est un facteur de type II_1. D'autre part, on sait que dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit de Moyal, l'algèbre de Von Neumann correspondante est un facteur de type I_∞ [16]. On connaît aussi l'exemple du cylindre $\mathbf{T}\times \mathbb{R}$ pour le quel la représentation régulière gauche engendre une algèbre de Von Neumann qui n'est pas un facteur [31].

On sait que tout groupe de Lie connexe abélien est de la forme $\mathbf{T}^p \times\mathbb{R}^n$. Dans cette partie, on va définir des déformations quantifications sur ceux de ces groupes qui sont munis d'une structure symplectique invariante et étudier le type des algèbres obtenues lorsque ce sont des facteurs.

Soit $G = \mathbf{T}^p \times\mathbb{R}^n$ avec $p+n$ pair. Une forme symplectique ω sur G est caractérisée par sa valeur ω_0 sur l'espace tangent à $\mathbf{T}^p \times\mathbb{R}^n$ à l'origine. Soit $\underline{\mathbf{g}}$ cet espace, $\underline{\mathbf{g}}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^p \times\mathbb{R}^n$. Soit $\underline{\mathbf{t}}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{T}^p$. ω est une forme bilinéaire non-dégénérée antisymétrique sur $\underline{\mathbf{g}}$. Notons par $\underline{\mathbf{t}}^{\perp}$ l'orthogonal (pour ω_0) de $\underline{\mathbf{t}}$ dans $\underline{\mathbf{g}}$ et par $rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}})$ l'espace $\underline{\mathbf{t}} \cap \underline{\mathbf{t}}^{\perp}$. Alors on peut écrire:

$$\underline{\mathbf{t}} = \underline{\mathbf{t}}' \perp rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}}), \underline{\mathbf{t}}^{\perp} = rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}}) \perp \mathbf{V}$$

où $\perp$ désigne la somme directe orthogonale des sous-espaces.
Et enfin, on a la décomposition suivante:

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{t}}' \perp (rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}}) \oplus V') \perp V.$$

Maintenant la réstriction de ω_0 à $\underline{\mathbf{t}}' \perp V$ est non dégénérée, alors (voir [32]) ils existe k sous-espaces hyperboliques de dimension 2 soient $P_1, \ldots P_k$ dans $\underline{\mathbf{g}}$ tels que:

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{t}}' \perp V \perp P_1 \perp \ldots \perp P_k.$$

Ainsi on voit que

$$dim\underline{\mathbf{g}} = dim\underline{\mathbf{t}} + dim\underline{\mathbf{t}}^{\perp} = dim\underline{\mathbf{t}}' + 2dim(rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}})) + dimV$$

et $dimV' = dim(rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}}))$. Maintenant, il est toujours possible de choisir $\underline{\mathbf{t}}'$ de telle manière que son exponentiel soit un tore $\mathbf{T}^{p-k}$ dans $\mathbf{T}^{p}$. $V' \perp V$ est un sous-espace de dimension n et l'application exponentielle est un isomorphisme de $V' \perp V$ sur $exp(V' \perp V)$. On l'identifie avec $\mathbb{R}^n$. Enfin on fait l'hypothèse suivante:

$$(H_1) \qquad exp(rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}})) \quad \text{est un tore} \quad \mathbf{T}^k dans\ \mathbf{T}^p$$

ainsi $p-k$ et $n-k$ sont pairs et ω_0 a la forme:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

où

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{\frac{p-k}{2}} -\theta_i \quad dx_i \wedge dx_{i+\frac{p-k}{2}}$$

est une forme symplectique sur $\mathbf{T}^{p-k}$ (voir [32]).

$$\omega_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{k} Y_i \wedge Z_i$$

(Y_i) étant une base de $rad(\omega_0/\underline{\mathbf{t}})$ tel que $exp(Y_i) = 1$ pour tout i,
(Z_i) étant une base de V' et:

$$\omega_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\frac{n-k}{2}} U_i \wedge U_{i+\frac{n-k}{2}}$$

(U_i) étant une base de $\mathbb{R}^{n-k}$.

Soit Λ_0 la structure de Poisson correspondante sur $\mathbf{T}^p \times \mathbb{R}^n$, pour construire un produit$\star$ sur $C^\infty(\mathbf{T}^p \times \mathbb{R}^n)$, dans la direction de Λ_0 on prend la transformée de Fourier symplectique:

$$(Fu)(n,x) = \int_{\mathbf{T}^p \times \mathbb{R}^n} u(\varphi,y) exp2i\Big[\sum_{i=1}^{\frac{p-k}{2}} (\varphi_i n_{i+\frac{p-k}{2}} - n_i \varphi_{i+\frac{p-k}{2}})$$

$$+\sum_{i=1}^{k} (\varphi_{p-k+i} n_{p-k+i} - x_i y_i) + \sum_{i=k+1}^{\frac{k+n}{2}} (y_i x_{i+\frac{n-k}{2}} - x_i y_{i+\frac{n-k}{2}})\Big] \frac{d\varphi dy}{2^p \pi^{n+p}}$$

où $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{Z}^p, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi = (\varphi, \ldots, \varphi_p) \in \mathbf{T}^p$

Dans cette formule on suppose que u soit une fonction C^∞ en les variables φ et y et rapidement décroissante à l'infini en la variable y. Fu est alors dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n$.

Maintenant, considérons l'action de $\mathbb{Z}^{\frac{p+k}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}$ sur$L^1(\mathbb{Z}^{\frac{p-k}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n+k}{2}})$ définie par:

$$(n_1, \ldots, n_{\frac{p+k}{2}}, x_1, \ldots, x_{\frac{n-k}{2}}) \cdot f(m_1, \ldots, m_{\frac{p-k}{2}}, y_1, \ldots, y_{\frac{n+k}{2}}) =$$

$$exp4ih\Big[\sum_{i=1}^{\frac{p-k}{2}} \theta_i n_i m_i + \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k} n_{i+\frac{p-k}{2}} y_i + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\frac{n-k}{2}} n_{i+\frac{p-k}{2}} x_i y_{k+i}\Big] f(m_1, \ldots, m_{\frac{p-k}{2}}, y_1, \ldots, y_{\frac{n+k}{2}})$$

Le produit croisé $L^1(\mathbb{Z}^{\frac{p-k}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n+k}{2}})$ par $\mathbb{Z}^{\frac{p+k}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}$ est identifé à $L^1(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$ munie du produit$\star$:

$$(F_{\star_\hbar} G)(n,x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^p} \int_{\mathbb{R}^n} F(m,y) G(n-m, x-y) \cdot exp2i\hbar\Big[\sum_{i=1}^{\frac{p-k}{2}} \theta_i (m_i n_{i+\frac{p-k}{2}} - n_i m_{i+\frac{p-k}{2}})$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{k} (x_i m_{i+p-k} - y_i n_{i+p-k}) + \frac{2}{\pi}\sum_{i=k+1}^{\frac{k+n}{2}} (x_i y_{i+\frac{n-k}{2}} - y_i x_{i+\frac{n-k}{2}})\Big] dy$$

Théorème 2-20:

Supposons que $p + n \neq 0$. pour toutes F, G dans $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$,

$$\| \frac{(F_{\star_\hbar} G - G_{\star_\hbar} F)}{i\hbar} - \{F, G\} \|_{L^1}$$

converge vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0. En plus, l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation $\star$ régulière gauche de $L^1(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$ est un facteur si et *seulement si $k=0$ et tous les θ_i sont irrationnels. Dans ce cas, ce facteur est de type II_∞ si $p \neq 0$ et $n \neq 0$, de type II_1 si $n=0$ et de type I_∞ si $p=0$.*

Démonstration:

La démonstration de la première assertion du théorème est analogue à celle dans le cas $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^d)$(voir paragraphe II-2). Pour la deuxième partie on rappelle tout d'abord l'expression intégrale du produit de Moyal sur $\mathbb{R}^{n-k}$ [31]: pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-k})$:

$$u \star v = F^{-1}(Fu \times_\sigma Fv)$$

où

$$Fu(\ell, r) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} u_{(p,q)} e^{2i(pr-q\ell)} \frac{dpdq}{\pi^{n-k}}$$

et

$$u \times_\sigma v(\ell, r) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} u(\ell_1, r_1) v(\ell - \ell_1, r - r_1) e^{-2i(\ell_1 r - \ell r_1)} d\ell_1 dr_1.$$

Et c'est en effet un produit croisé de $L^1(\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}})$ par $\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}$ sous l'action:

$$(\ell_1, \ldots, \ell_{\frac{n-k}{2}}) \cdot f(r_1, \ldots, r_{\frac{n-k}{2}}) = e^{+4i \sum_{i=1}^{\frac{n-k}{2}} \ell_i r_i} f(r_1, \ldots, r_{\frac{n-k}{2}}).$$

De même le produit$\star$ de Moyal sur le cylindre de dimension k possède une formule similaire mais maintenant:

$$Fu(\ell, r) = \int_{\mathbf{T}^k \times \mathbb{R}^k} u(p,q) e^{2i(p\ell - qr)} \frac{dqdp}{(2\pi)^k \pi^k}$$

et

$$u \times_\sigma v(\ell, r) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^k} \int_{\mathbb{R}^k} u(\ell_1, r_1) v(\ell - \ell_1, r - r_1) e^{-i(\ell_1 r - \ell r_1)} dr_1$$

On vérifie facilement que c'est aussi un produit croisé de $L^1(\mathbb{R}^k)$ par $\mathbb{Z}^k$ sous l'action:

$$(m_1, \ldots, m_k) f(r_1, \ldots, r_k) = exp^{2i \sum_{i=1}^k m_i r_i} f(r_1, \ldots, r_k).$$

Pour $\hbar = \frac{\pi}{2}$, notons le produit $\star_{\frac{\pi}{2}}$ par $\star$. On a un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach de $L^1(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$ muni du produit $\star_{\frac{\pi}{2}}$ ci dessus sur le produit tensoriel projectif [33]:

$$L^1(\mathbb{Z}^{p-k}) \bar{\otimes}_\pi L^1(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^k) \bar{\otimes}_\pi L^1(\mathbb{R}^{n-k})$$

où $L^1(\mathbb{Z}^{p-k})$ est muni du produit$\star$ défini dans II-3 et $L^1(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^k)$ et $L^1(\mathbb{R}^{n-k})$ sont munie du produit$\star$ de Moyal. En effet, considérons l'application

$$\Phi : L^1(\mathbb{Z}^{p-k}) \otimes L^1(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^k) \otimes L^1(\mathbb{R}^{n-k}) \longrightarrow L^1(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)$$

$$\Phi(u\otimes f\otimes a)(m_1,\cdot\cdot,m_p,x_1,\cdot\cdot,x_n)=u(m_1,\cdot\cdot m_{p-k})f(m_{p-k+1},\cdot\cdot,m_p,x_1,\cdot\cdot x_k)a(x_{k+1},\cdot\cdot x_n)$$

On a:

$$(u_1\otimes f_1\otimes a_1)\star(u_2\otimes f_2\otimes a_2)=(u_1\star u_2)\otimes(f_1\times_\sigma f_2)\otimes(a_1\times_\sigma a_2)$$

D'après [33] (voir p. 438 et 476) l'algèbre $L^1(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$ est isomorphe au produit tensoriel projectif:

$$L^1(\mathbb{Z}^{p-k})\bar{\otimes}_\pi L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)\bar{\otimes}_\pi L^1(\mathbb{R}^{n-k})$$

Maintenant $L^1(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Banach, en effet: si

$$F=\sum_{finie}U_i\otimes f_i\otimes a_i \quad \text{et} \quad G=\sum_{finie}v_j\otimes g_j\otimes b_j$$

alors

$$F\star G=\sum_{i,j}(u_i\star v_j)\otimes(f_i\times_\sigma g_i)\otimes(a_i\times_\sigma b_j)$$

et

$$\begin{aligned}\| F\star G\| &= inf\ \|(u_i\star v_j)\otimes(f_i\times_\sigma g_j)\otimes(a_i\times_\sigma b_j)\|\\ &\leq inf\ \|u_i\star v_j\|\ \ \|f_i\times_\sigma g_i\|\ \ \|a_i\times_\sigma b_j\|\\ &\leq inf\ \|u_i\|\ \ \|f_i\|\ \ \|a_i\|\quad inf\ \|v_j\|\ \ \|g_j\|\ \ \|b_j\|\\ &\leq\|F\|\ \ \|G\|.\end{aligned}$$

Montrons tout d'abord trois lemmes.

Lemme 2-21:

L'algèbre de Von Neumann $\mathcal{B}$ engendrée par la représentation $\star$ régulière gauche de $L^1(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$ est isomorphe à $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\otimes\mathcal{B}_3$ où $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3$ sont les algèbres de Von Neumann engendrées réspectivement par la représentation $\star$ régulière gauche de $L^1(\mathbb{Z}^{p-k})$, celle de $L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)$ et celle de $L^1(\mathbb{R}^{n-k})$.

Démonstration

Soient π_1,π_2 et π_3 les représentations régulière gauches réspectivement de $L^1(\mathbb{Z}^{p-k}),L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)$ et $L^1(\mathbb{R}^{n-k})$ et ρ celle de $L^1(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$. Soient $F=u\otimes f\otimes a$ et $G=v\otimes g\otimes b$ deux éléments de $L^1(\mathbb{Z}^{p-k})\otimes_\pi L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)\otimes_\pi L^1(\mathbb{R}^{n-k})$.

$$F\star G=(u\star v)\otimes(f\times_\sigma g)\otimes(a\times_\sigma b)=(\pi_1(u)\otimes\pi_2(f)\otimes\pi_3(a))(v\otimes g\otimes b)$$

D'où

$$\rho(F)\in\pi_1(L^1(\mathbb{Z}^{p-k}))\otimes\pi_2(L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k))\pi_3(L^1(\mathbb{R}^{n-k}))$$

On a $\|\rho(F)\|\ \ \leq\|f\|_{L^1}$. D'après [30] p. 22, pour tout $F\in L^1(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(F_n)_n$ dans $L^1(\mathbb{Z}^{p-k})\otimes_\pi L^1(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)\otimes_\pi L^1(\mathbb{R}^{n-k})$ tel que F_n tend vers F pour la norme L^1, $\rho(F_n)$ tend vers $\rho(F)$ pour la norme dans le produit tensoriel hilbertien:

$$L^2(\mathbb{Z}^{p-k})\otimes L^2(\mathbb{Z}^k\times\mathbb{R}^k)\otimes L^2(\mathbb{R}^{n-k})\simeq L^2(\mathbb{Z}^p\times\mathbb{R}^n)$$

Donc, $\rho(F)$ est dans l'algèbre de Von Neumann engendrée par l'algèbre involutive d'opérateurs de la forme $R_1 \otimes R_2 \otimes R_3 + S_1 \otimes S_2 \otimes S_3 + \ldots + T_1 \otimes T_2 \otimes T_3$. où $R_1, S_1, \ldots, T_1 \in \mathcal{B}_1; R_2, S_2, \ldots, T_2 \in \mathcal{B}_2$; et $R_3, S_3, \ldots, T_3 \in \mathcal{B}_3$ et cette algèbre de Von Neumann est par définition l'algèbre de Von Neumann produit tensoriel $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$ [30]. Donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$.

Soit maintenant $u \in \pi_1(L^1(\mathbb{Z}^{p-k})) \otimes \pi_2(L^1(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^k)) \otimes \pi_3(L^1(\mathbb{R}^{n-k}))$. on a

$$u = \sum_{finie} \pi_1(u_i) \otimes \pi_2(v_i) \otimes \pi_3(w_i) = \rho(\sum u_i \otimes v_i \otimes w_i) \in \rho(L^1(\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{B}$$

soit $R \otimes S \otimes T \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3$. R, S et T sont des limites faibles réspectivement de $\pi_1(u_n), \pi_2(v_n)$ et $\pi_3(w_n)$ quand n tend vers l'infini. Et on a:

$$< (R \otimes S \otimes T) g_1 \otimes g_2 \otimes g_3, f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 > = < Rg_1, f_1 >< Sg_2, f_2 >< Tg_3, f_3 >$$

En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus on déduit qu'il existe une constante C telle que:

$$\begin{aligned} |< (R \otimes S \otimes T) g_1 \otimes g_2 \otimes g_3, f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 >| &\leq C \, |< g_1, f_2 > \quad < g_2, f_2 > \quad < g_3, f_3 >| \\ &\leq \| g_1 \| \| f_1 \| \| g_2 \| \| f_2 \| \| g_3 \| \| f_3 \| \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}$

Lemme 2-22:

$\mathcal{B}_2$ n'est pas un facteur.

Démonstration:

En effet D. Arnal et J. C. Cortet ont montré dans [31] que le centre de l'algèbre de Von Neumann engendrée par la représentation $\star$ régulière gauche du cylindre de dimension 2 muni du produit $\star$ de Moyal est l'espace des opérateurs I_f, oùf est une fonction essentiellement bornée périodique en la variable p dans$\mathbb{R}$de période 1. Il en est de même pour le cylindre de dimension k mais maintenant le centre est l'ensemble des opérateurs I_f tels que f soit périodique en tous les variables dans $\mathbb{R}^k$.

Lemme 2-23:

$\mathcal{B}_3$ est un facteur de type I_∞.

Démonstration:

On considère la transformation S définie sur $L^2(\mathbb{R}^{n-k})$ par

$$Su(s,t) = \mathcal{F}_p u(t - s, \frac{s+t}{2})$$

où $\mathcal{F}_p$ désigne la transformée de Fourier sur les $\frac{n-k}{2}$ premières variables. Alors on a:

$$S(u \star v)(s,t) = \big((Su) \circ (Sv)\big)(s,t) = \big(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\big)^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}} Su(s,t_1) Sv(t_1,t) dt_1$$

En effet, on peut montrer que le produit de Moyal admet la forme intégrale suivante:
Pour $u, v \in S(\mathbb{R}^{n-k})$:

$$(u \star v)(p,q) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} u(p_1,q_1)v(p_2,q_2)e^{2i(pq_2-p_2q+p_2q_1-p_1q_2+p_1q-pq_1)}\frac{dp_1dq_1dp_2dq_2}{\pi}$$

$= 2^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}} v(p_2,q_2)(\mathcal{F}_p u)(-2(q-q_2),q_1)e^{2ip_2(q_1-q)}\frac{dp_2}{(2\pi)^{\frac{n-k}{2}}} e^{2ip(q_2-q_1)}dq_1dq_2$
$= 2^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}}(\mathcal{F}_p v)(2(q-q_1),q_2)(\mathcal{F}_p u)(2(q_2-q),q_1)e^{2ip(q_2-q_1)}dq_1dq_2$
On pose alors:

$$t_1 - s_1 = 2(q_2 - q) \quad \text{et} \quad \frac{t_1+s_1}{2} = q_1$$

On obtient:

$$\begin{aligned}(u \star v)(p,q) &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}}(Su)(s_1,t_1)(\mathcal{F}v)(2q-t_1-s_1,q+\frac{t_1-s_1}{2})e^{2ip(\frac{t_1-s_1}{2}+q-\frac{t_1+s_1}{2})}dt_1ds_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}}(Su)(s_1,t_1)(Sv)(t_1,2q-s_1)e^{2ip(q-s_1)}dt_1ds_1.\end{aligned}$$

Posons alors $x = 2(q - s_1)$. On a donc:

$$\begin{aligned}(u \star v)(p,q) &= (\frac{1}{2})^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}} e^{ipx} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}}(Su)(q-\frac{x}{2},t_1)(Sv)(t_1,q+\frac{x}{2})dxdt_1 \\ &= (\sqrt{\frac{\pi}{2}})^k \mathcal{F}_p^{-1}[\int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}}(Su)(q-\frac{x}{2},t_1)(Sv)(t_1,q+\frac{x}{2})dt_1](p,q).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}S(u \star v)(s,t) &= [\mathcal{F}_p(u \star v)](t-s,\frac{t+s}{2}) \\ &= (\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}}(Su)(\frac{t+s}{2}-\frac{t-s}{2},t_1)(Sv)(t_1,\frac{t+s}{2}+\frac{t-s}{2})dt_1 \\ &= (\sqrt{\frac{\pi}{2}})^{\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}}(Su)(s,t_1)(Sv)(t_1,t)dt_1\end{aligned}$$

Donc la loi de composition des fonctions Su est la composition des noyaux des opérateurs d'Hilbert Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}})$ et par suite $\mathcal{B}_3$ est isomorphe à $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{\frac{n-k}{2}}))$. (voir [16]).

Pour conclure la démonstration du théorème, notons que le produit tensoriel d'un facteur de type II_1 et un facteur de type I_∞ est un facteur de type II_∞ [34].

Remarque 2-24:

Les groupes de la forme $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^p$ peuvent être vus comme des variétés de Heisenberg. En effet, si on considère le groupe de Heisenberg H_{2k+1} qu'on paramétise par:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_k & z \\ & 1 & & & & y_1 \\ & & \ddots & & 0 & y_2 \\ & 0 & & \ddots & & y_k \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

H_{2k+1} peut être identifié à $\mathbb{R}^{2k+1}$ muni du produit:
$(x_1, \cdot\cdot, x_k, y_1, \cdot\cdot, y_k, z)(x'_1, \cdot\cdot, x'_k, y'_1, \cdot, y'_k, z') = (x_1 + x'_1, \cdot\cdot, y_k + y'_k, z + z' + x_1 y'_1 + \cdot\cdot + x_k y'_k)$.
L'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{h}}_{2k+1}$ de H_{2k+1} peut être paramétisée par:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_k & z \\ & 0 & & & & y_1 \\ & & \ddots & & 0 & y_2 \\ & 0 & & \ddots & & y_k \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$> \mathcal{Z} <$ étant le centre de H_{2k+1}. On quotiente H_{2k+1} par $> \mathcal{Z} <$, l'algèbre obtenue est isomorphe à $\mathbb{R}^{2k}$:

$$H_{2k+1}/ > \mathcal{Z} < \cong \mathbb{R}^{2k}$$

et $\mathbb{R}^{2k}$ est munie d'une forme symplectique σ telle que:

$$\text{si x} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_k & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ & & 0 & & \end{pmatrix} \text{et Y} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ & & & & y_1 \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & & y_k \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors}[X, Y] = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & \sigma(X,Y) \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement $\mathbb{R}^{2k}$ muni de σ permet la reconstruction de $\underline{\mathbf{h}}_{2k+1}$, donc de H_{2k+1}.

Considérons maintenant le sous groupe D de H_{2k+1} des éléments de la forme $(0, \ldots, 0, m_1, \ldots, m_p, z)$ avec les $m_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $0 \leq i \leq p$ et $z \in \mathbb{R}$.Le quotient:

$$(H_{2k+1}/D) = \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^p \quad \text{avec} \quad n + p = 2k.$$

III - DEFORMATION QUANTIFICATION SUR LE DUAL D'UNE ALGEBRE DE LIE

III-1 STRUCTURE DE POISSON CANONIQUE SUR LE DUAL D'UNE ALGEBRE DE LIE

Soit G un groupe de Lie connexe réel, $\underline{\mathbf{g}}$ son algèbre de Lie et $\underline{\mathbf{g}}^\star$ le dual de $\underline{\mathbf{g}}$. Le groupe G agit sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ par l'action coadjointe:

$$G \times \underline{\mathbf{g}}^\star \longrightarrow \underline{\mathbf{g}}^\star$$

$$(g,\xi) \longmapsto g \cdot \xi = \xi \circ Ad\, g^{-1}$$

Si $X \in \underline{\mathbf{g}}$, on note X^* le champ fondamental associé sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$

$$X^*_\xi = \frac{d}{dt} \exp -tX\xi \,|_{t=0}$$

On notera par X aussi bien l'élément de $\underline{\mathbf{g}}$ que la fonction qu'il définit sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ par dualité:

$$\begin{aligned} X :\underline{\mathbf{g}}^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \langle \xi, X \rangle \end{aligned}$$

Sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ on a la structure de Poisson définie par le 2-tenseur Λ 2 fois contravariant:

$$\Lambda_\xi(X^*,Y^*) = \langle \xi, [X,Y] \rangle \qquad \forall X,Y \in \underline{\mathbf{g}}$$

Rappelons que la réstriction de cette structure à une orbite O de G sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ définit une structure symplectique F sur O et l'action de G sur O possède un moment, en fait le champ fondamental X^* sur O est le champ hamiltonien correspondant à la réstriction à O de la fonction X sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$

$$F_\xi(X^*,Y^*) = \langle \xi, [X,Y] \rangle$$
$$i(X^*)F = -dX\,|_O$$

La structure de Poisson sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ induit un crochet de Poisson sur les fonctions C^∞ sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$. En effet étant donné $f \in C^\infty(\underline{\mathbf{g}}^\star)$, sa différentielle $df(\mu)$ en $\mu \in \underline{\mathbf{g}}^\star$ est une fonction linéaire sur l'espace tangent à $\underline{\mathbf{g}}^\star$ en μ. Cet espace est naturellement identifié avec $\underline{\mathbf{g}}^\star$, et son espace vectoriel dual avec $\underline{\mathbf{g}}$. Donc on peut voir $df(\mu)$ comme un élément de $\underline{\mathbf{g}}$. Il définit une fonction linéaire sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ par:

$$\langle df(\mu), \nu \rangle = (d \mid dt)_{|_{t=0}} f(\mu + t\nu)$$

où $\langle\,,\,\rangle$ désigne la dualité entre $\underline{\mathbf{g}}$ et $\underline{\mathbf{g}}^\star$. Donc pour f, g dans $C^\infty(\underline{\mathbf{g}}^\star)$, on définit leur crochet de Poisson par:

$$\{f,g\}(\mu) = \langle [df(\mu), dg(\mu)], \mu \rangle$$

où [,] est le crochet de Lie dans $\underline{\mathbf{g}}$.
Cette structure de Poisson sur $C^{\infty}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$ est aussi appelée structure de Poisson linéaire.

On considère l'algèbre symétrique complexe $S(\underline{\mathbf{g}})$ sur $\underline{\mathbf{g}}$ qu'on identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\underline{\mathbf{g}}^{\star}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Sur cette algèbre on a:

$$\{P,Q\} = [P,Q] \qquad \forall P,Q \in S(\underline{\mathbf{g}})$$

où [,] désigne l'extension naturelle, par dérivation, du crochet de Lie de $\underline{\mathbf{g}}$ à $S(\underline{\mathbf{g}})$.

On peut transférer cette structure de Poisson à $\underline{\mathbf{g}}$ par transformée de Fourier. Pour ceci on va se restreindre à l'espace $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$ des fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$. On note e la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $e(t) = e^{2i\pi t}$. On choisit une mesure de Lebesgue sur $\underline{\mathbf{g}}^{\star}$. Alors pour $f \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$, sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f}$ dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ définie par:

$$\hat{f}(X) = \int_{\underline{\mathbf{g}}^{\star}} \bar{e}(\langle X,\mu\rangle) f(\mu) d\mu$$

pour $X \in \underline{\mathbf{g}}$. On considère la mesure de Plancherel correspondante sur $\underline{\mathbf{g}}$, et on peut donc définir la transformée de Fourier inverse $\Phi^{\vee}$ de $\Phi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ par:

$$\Phi^{\vee}(\mu) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle X,\mu\rangle) \Phi(X) dX$$

On a $(\hat{f})^{\vee} = f$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$.
Si on restreint la structure de Poisson sur $C^{\infty}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$ à $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^{\star})$, alors on peut la ramener par transformée de Fourier à une "structure de Poisson" qu'on notera aussi par { , }, sur l'algèbre $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$. On voudrait obtenir une formule explicite de cette structure.
Pour Φ, $\Psi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ on a:

$$\{\Phi,\Psi\}(X) = \{\Phi^{\vee},\Psi^{\vee}\}^{\wedge}(X) = \int_{\underline{\mathbf{g}}^{\star}} \bar{e}(\langle X,\mu\rangle) \langle [d\Phi^{\vee}(\mu), d\Psi^{\vee}(\mu)],\mu\rangle d\mu$$

Un calcul rapide montre que:

$$\langle d\Phi^{\vee}(\mu),\nu\rangle = \int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle Y,\mu\rangle) 2i\pi \langle Y,\nu\rangle \Phi(Y) dY$$

D'où

$$d\Phi^{\vee} = 2i\pi\big(Y\Phi(Y)\big)^{\vee}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\{\Phi,\Psi\}(X) &= -4\pi^2 \int_{\underline{\mathbf{g}}^{\star}} \bar{e}(\langle X,\mu\rangle) \langle [((Y\Phi(Y))^{\vee}(\mu),(Z\Psi(Z))^{\vee}(\mu)],\mu\rangle d\mu \\
&= -4\pi^2 \int_{\underline{\mathbf{g}}^{\star}} \bar{e}(\langle X,\mu\rangle) \int_{\underline{\mathbf{g}}}\int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle Y+Z,\mu\rangle) \Phi(Y)\Psi(Z) \langle [Y,Z],\mu\rangle dY dZ d\mu \\
&= -4\pi^2 \int_{\underline{\mathbf{g}}^{\star}} \bar{e}(\langle X,\mu\rangle) \int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle Z,\mu\rangle) \Big\langle \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Psi(Z-Y)[Y,Z] dY,\mu\Big\rangle dZ d\mu
\end{aligned}$$

Soit A la fonction sur $\underline{\mathbf{g}}$ définie par:

$$A(Z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Psi(Z-Y)[Y,Z]dY$$

Il est clair que A est dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}})$: l'espace des fonctions de Schwartz sur $\underline{\mathbf{g}}$ à valeurs dans le complexifié de $\underline{\mathbf{g}}$. Maintenant pour toute fonction B dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}})$ calculons la transformée de Fourier inverse de la divergence de B. Soit $\{X_j\}$ une base de $\underline{\mathbf{g}}$. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées de Z dans cette base et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ les coordonnées de μ dans la base duale. Soient $B_1, \ldots, B_n$ les composantes de B et ∂_j la dérivation partielle dans la $j^{\underline{\text{ème}}}$ direction. Une intégration par partie nous donne:

$$\begin{aligned}(divB)^{\vee}(\mu) &= \int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle Z,\mu\rangle) \sum_j (\partial_j B_j)(Z)dZ \\ &= \sum \int_{\underline{\mathbf{g}}} -2i\pi\mu_j e(\langle Z,\mu\rangle) B_j(Z)dZ \\ &= -2i\pi \int_{\underline{\mathbf{g}}} e(\langle Z,\mu\rangle)\langle B(Z),\mu\rangle dZ\end{aligned}$$

Notons que ce résultat est indépendant du choix de la base. En appliquant ceci à l'application A on obtient:

$$\begin{aligned}\{\Phi,\Psi\}(X) &= -2i\pi\Big(\big(divA\big)^{\vee}\Big)^{\wedge}(X) \\ &= -2i\pi div \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Psi(X-Y)[Y,X]dY\end{aligned}$$

Cette formule nous sera bien utile. Cependant on voudrait connaître quelle expression on obtient si on applique la divergence aux termes à l'intérieur du signe intégrale. Pour ceci notons $[Y,X]_j$ la $j^{\underline{\text{ème}}}$ composante de $[Y,X]$ pour la base choisie. On obtient alors:

$$\{\Phi,\Psi\}(X) = -2i\pi \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Big(\sum(\partial_j\Psi)(X-Y)[Y,X]_j + \Psi(X-Y)\partial_j([Y,X]_j)\Big)dY$$

où le deuxième ∂_j est pour la variable X.
Maintenant

$$\begin{aligned}\sum \partial_j([Y,X]_j) &= \sum\big[Y, \partial_j(\sum x_k X_k)\big]_j \\ &= \sum [Y,X_j]_j \\ &= tr(adY)\end{aligned}$$

et pour Z, $W \in \underline{\mathbf{g}}$ on a:

$$\langle Z,(d\Psi)(X)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\right)_{|t=0}\Psi(W+tZ) = \sum(\partial_j\Psi)(W)Z_j$$

D'où la proposition suivante:

Proposition 3-1:
Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie de dimension finie et $\underline{\mathbf{g}}^\star$ son espace dual. La transformée de Fourier du crochet de Poisson sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ est donnée pour Φ, $\Psi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ par:

$$\begin{aligned}\{\Phi,\Psi\}(X) &= -2i\pi div \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Psi(X-Y)[Y,X]dY \\ &= -2i\pi \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Big(\langle [Y,X], d\Psi(X-Y)\rangle + \Psi(X-Y)tr(adY)\Big)dY\end{aligned}$$

Remarquons que si le groupe de Lie G correspondant à $\underline{\mathbf{g}}$ est unimodulaire $tr(adY)=0$ pour tout $Y \in \underline{\mathbf{g}}$ et alors le second terme de crochet de Poisson ci-dessus disparaît.

III - 2 LA STRUCTURE DU GROUPE DEFORME:

Soit exp l'application exponentielle de $\underline{\mathbf{g}}$ dans G et soit U un voisinage ouvert de $0 \in \underline{\mathbf{g}}$ sur lequel exp est un difféomorphisme dans G et tel que $U = -U$. On identifie U avec son image dans G par l'application exponentielle. Si G est un groupe de Lie exponentiel c'est-à-dire exp est un difféomorphisme de $\underline{\mathbf{g}}$ dans G on peut prendre $U = G = \underline{\mathbf{g}}$.
Soit C un voisinage ouvert convexe de $0 \in \underline{\mathbf{g}}$ tel que $C^3 \subseteq U$ dans G (via l'identification de U par son image) et tel que $C = -C$ ($= C^{-1}$ dans G). (Si G est exponentiel on peut prendre $C = G = \underline{\mathbf{g}}$). On notera le produit du groupe dans U obtenu de G par "$\cdot$", et donc si X, $Y \in C, X \cdot Y \in U$. D'autre part on a pour X, $Y \in C$ et $t \in \mathbb{R}$

$$(tX)\cdot(tY) = tX + tY + (\frac{t^2}{2})[X,Y] + 0(t^3)$$

où $0(t^3)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 [35].

Soit $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}$ comme groupe additif mais munie du crochet de Lie $[\,,\,]_\hbar$ défini par:

$$[\,,\,]_\hbar = \hbar[\,,\,]$$

Si $\hbar \neq 0$, alors $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ est isomorphe à $\underline{\mathbf{g}}$, l'isomorphisme naturel $\sigma_\hbar$ de $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ dans $\underline{\mathbf{g}}$ étant défini par: $\sigma_\hbar(X) = \hbar X$.
Soit $G_\hbar$ le groupe de Lie simplement connexe correspondant à $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$. Pour $\hbar = 0$ on prend $G_0 = \underline{\mathbf{g}}$. Pour $\hbar \neq 0$, l'isomorphisme $\sigma_\hbar$ de $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ dans $\underline{\mathbf{g}}$ détermine un isomorphisme de $G_\hbar$ dans G tout en réspectant l'application exponentielle. En particulier, l'application exponentielle est un difféomorphisme sur $U_\hbar = \hbar^{-1}U$ et on l'utilise pour identifier $U_\hbar$ avec son image dans $G_\hbar$. Soit $*_\hbar$ le produit du groupe sur $U_\hbar$ provenant de $G_\hbar$. Alors un calcul simple montre que:

$$X *_\hbar Y = \hbar^{-1}\big((\hbar X)\cdot(\hbar Y)\big)$$

Soit $C_\hbar = \hbar^{-1}C$, alors on a $C_\hbar^3 \subset U_\hbar$ pour le produit $*_\hbar$ et:

$$X *_\hbar Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]_\hbar + 0(\hbar^2)$$

quand $\hbar$ tend vers 0.

Pour former des convolutions, on doit choisir des mesures de Haar à gauche sur le groupe $G_\hbar$. On choisit alors la mesure de Lebesgue sur $\underline{\mathbf{g}}$ comme mesure de Haar sur G_0 et on l'utilise aussi pour tous les $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$. Maintenant on sait que la mesure de Haar sur $G_\hbar$ est reliée à la mesure de Lebesgue sur $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ par la différentielle $d\exp$, de l'application exponentielle. On définit la fonction ω sur $\underline{\mathbf{g}}$ par $\omega(X) = det(d\exp X)$. On peut choisir une mesure de Haar à gauche λ sur G telle que sur U sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\underline{\mathbf{g}}$ soit ω [35].

On peut reprendre la même chose pour tout $\underline{\mathbf{g}}_\hbar$ et son application exponentielle $\exp^\hbar$. D'après le théorème 2-14-3 de [35] on a:

$$d\exp^\hbar X = \sum\left((-1)^n/(n+1)!\right)\left(ad_{\hbar X}\right)^n = d\exp \hbar X$$

Donc si on pose:

$$\omega_\hbar(X) = \omega(\hbar X)$$

$d\lambda_\hbar(X) = \omega_\hbar(X)dX$ est la réstriction sur $U_\hbar$ d'une mesure de Haar de $G_\hbar$. On prend ces $\lambda_\hbar$ comme choix cohérent des mesures de Haar. Remarquons que ces mesures ne sont pas les images de la mesure de Haar sur G par les isomorphismes $\sigma_\hbar^{-1}$; ces derniers sont $\hbar\omega_\hbar(\hbar X)dX$ et ils convergent vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0, alors qu'on voudrait une convergence vers dX. En effet, de la série donnée plus haut, il est clair que ω est une fonction analytique entière sur $\underline{\mathbf{g}}$ et que $\omega(0) = 1$. Ainsi quand $\hbar$ tend vers 0 les $\omega_\hbar$ convergent vers 1 uniformément sur tout compact et alors les $\lambda_\hbar$ convergent vers dX uniformément sur tout compact.

Si $\underline{\mathbf{g}}$ est nilpotente , la matrice de $ad\,X$ est triangulaire strictement supérieure et par suite $\omega \equiv 1$. On obtient donc le fait connu que la mesure de Lebesgue est une mesure de Haar à gauche pour la structure du groupe. En particulier tous les éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ sont intégrables pour la mesure de Haar sur G. Par contre si $\underline{\mathbf{g}}$ est exponentielle (donc résoluble) et n'est pas nilpotente, alors il y a des éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ qui ne sont pas intégrables pour la mesure de Haar. Comme $\underline{\mathbf{g}}$ est supposée exponentielle, les racines de $\underline{\mathbf{g}}$ sont de la forme $\alpha\mu$ où $\mu \in \underline{\mathbf{g}}^\star$ et α est un nombre complexe tel que $Re(\alpha) = 1$ (Théorème 1-2-1 de [36]). Comme $\underline{\mathbf{g}}$ est supposée non nilpotente, l'ensemble E des racines non nulles n'est pas vide. Soit $Y \in \underline{\mathbf{g}}$ tel que $Re(\alpha_\mu(Y)) < 0$ pour un certain $\alpha_\mu \in E$. Soit $g(z)$ la fonction entière définie par $zg(z) = 1 - e^{-z}$. D'après [35] pour $t \in \mathbb{R}$ on a:

$$\omega(tY) = \prod_E g\left(\alpha\mu(tY)\right)$$

De la définition de g on a alors:

$$\begin{aligned}\omega(tY)\prod_E \alpha\mu(Y) &= \prod_E\left(1 - e^{-t\alpha\mu(Y)}\right)\\ &= \sum_{S\subseteq E}(-1)^{|S|}e^{-t\sum_S \alpha_\mu(Y)}\end{aligned}$$

Soit P l'ensemble des α_μ dans E tels que $Re(\alpha\mu(Y)) < 0$. Notons que P n'est pas vide par le choix de Y. Alors:

$$-Re(\sum_P \alpha\mu(Y)) > -Re(\sum_S \alpha\mu(Y))$$

pour tout $S \subseteq E$ avec $S \neq P$. Donc le terme à droite de l'équation ci-dessus possède une exponentielle croissante en t. De ceci on peut construire des éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ qui ne sont pas intégrables pour $\omega(X)dX$.
Enfin, rappelons que la fonction module $\Delta_\hbar$ sur $G_\hbar$ est donnée par:

$$\Delta_\hbar(y) = det(Ad(y)^{-1})$$

D'après le théorème 2-13-2 de [35] on a, pour $X \in C_\hbar$:

$$\Delta_\hbar(X) = e^{-\hbar tr(ad\, X)}$$

En particulier si $\hbar$ tend vers 0, $\Delta_\hbar$ converge vers 1 uniformément sur tout compact de $\underline{\mathbf{g}}$.

III - 3 CAS D'UNE ALGEBRE DE LIE QUELCONQUE:

On voudrait considèrer $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^*)$ avec le produit usuel des fonctions, prendre la transformée de Fourier pour obtenir $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$, transférer $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ à chaque $G_\hbar$ par l'application exponentielle pour définir la convolution correspondante vue comme une déformation de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^*)$. Mais il y a deux obstacles pour ce programme. Le plus important c'est que l'application exponentielle n'est pas une bijection en général, et on ne peut définir la convolution que sur un ouvert de G difféomorphe à un voisinage de 0 dans $\underline{\mathbf{g}}$. Le deuxième c'est que même si l'application exponentielle est bijective de telle façon que $\underline{\mathbf{g}}$ et $G_\hbar$ peuvent êre identifiés, il existe des éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ qui ne sont pas intégrables pour la mesure de Haar (à moins que $\underline{\mathbf{g}}$ soit nilpotente). C'est uniquement dans le cas où $\underline{\mathbf{g}}$ est nilpotente qu'on peut faire tout ce programme. Pour surmonter le second obstacle on va se restreindre à l'espace $C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$ des fonctions C^∞ à support compact sur $\underline{\mathbf{g}}$. La réstriction à $C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$ tient aussi compte du premier obstacle en ce sens que les supports de deux éléments fixés Φ et Ψ de $C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$ sont contenus dans $C_\hbar$ pour tout $\hbar$ suffisamment petit de telle façon que leur convolution $\Phi \star_\hbar \Psi$ soit définie.

Dans la définition suivante $P_\hbar$ et $Q_\hbar$ vont jouer le rôle de $C_c^\infty(U_\hbar)$ et $C_c^\infty(C_\hbar)$ réspectivement. Remarquons que $C_c^\infty(U_\hbar)$ et $C_c^\infty(C_\hbar)$ sont plongées dans $C_c(G_\hbar)$. Donc on peut les munir des C^*-normes provenant de la C^*-algèbre du groupe $C^*(G_\hbar)$ ou de la C^*-algèbre réduite du groupe $C_r^*(G_\hbar)$.

Définition 3-2:

Soit A une algèbre commutative munie d'une C^*-norme et d'un crochet de Poisson $\{,\}$. On appelle déformation quantification de A par plongements partiels, dans la direction de $\{,\}$, un intervalle ouvert I de nombres réels centré en 0, avec pour tout $\hbar \in I$, une C^*-algèbre $A_\hbar$, des sous-espaces linéaires $P_\hbar \supseteq Q_\hbar$ de A, et un plongement $j_\hbar$ de $P_\hbar$ dans $A_\hbar$ tels que:

1) A_0 soit la C^*-complétion de A, j_0 étant l'application inclusion et $P_0 = Q_0 = A$.
2) $P_{-\hbar} = P_\hbar$ et $Q_{-\hbar} = Q_\hbar$.
3) Si $|\hbar| \leq |\hbar_0|$ alors $P_\hbar \supseteq P_{\hbar_0}$ et $Q_\hbar \supseteq Q_{\hbar_0}$.
4) Pour tout $a \in A$, il existe $\hbar \neq 0$ tel que $a \in Q_\hbar$.
5) Si a, $b \in Q_\hbar$, il existe un élément unique, $a \star_\hbar b$ dans $P_\hbar$ tel que $j_\hbar(a) j_\hbar(b) = j_\hbar(a \star_\hbar b)$.
6) Pour tous a, $b \in A$

$$\| \, (a \star_\hbar b - b \star_\hbar a)/ih - \{a, b\} \, \|_\hbar$$

converge vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0, où $\| \quad \|_\hbar$ désigne la norme sur $A_\hbar$.
7) Pour tout $a \in A$ la fonction $\hbar \longmapsto \| \, a \, \|_\hbar$ est semi-continue inférieurement pour les $\hbar$ tels que $a \in Q_\hbar$.

Théorème 3-3:

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie sur les nombres réels de dimension finie, et soit $\{,\}$ le crochet de Poisson sur l'algèbre de convolution $A = C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$ qui est la transformée de Fourier du crochet de Poisson usuel sur $\underline{\mathbf{g}}^*$ provenant de la structure d'algèbre de Lie de $\underline{\mathbf{g}}$. Avec les notations précédentes soient $P_\hbar = C_c^\infty(U_\hbar)$ et $Q_\hbar = C_c^\infty(C_\hbar)$ avec leur prolongement dans $C_r^*(G_\hbar)$ pour $\hbar \in \mathbb{R}$. Alors cette structure est une déformation quantification de A par plongements partiels, dans la direction de $-(2\pi)^{-1}\{,\}$.

Démonstration:

Soient Φ, $\Psi \in C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$. Considérons les $\hbar$ suffisamment petits pour que les supports de Φ et Ψ soient contenus dans $C_\hbar$. Donc on peut définir leur convolution par:

$$(\Phi \star_\hbar \Psi)(X) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(Y)\Psi(Y^{-1} *_\hbar X)\omega_\hbar(Y)dY$$

Notons que si $\Phi(Y)$ et $\Psi(Y^{-1} *_\hbar X)$ sont non nuls tous les deux, alors on doit avoir Y et $Y^{-1} *_\hbar X$ dans $C_\hbar$. Donc X doit être dans $C_\hbar^2$ (en utilisant $*_\hbar$ comme produit). Or pour X, Z, $W \in C_\hbar$,

$$X *_\hbar Z *_\hbar W = \hbar^{-1}\big((\hbar X)\cdot(\hbar Z)\cdot(\hbar W)\big) \quad \text{est dans} \quad U_\hbar \quad \text{car} \quad C^3 \subseteq U$$

Ainsi, pour $X \in C_\hbar^2$ l'intégrale est bien définie. Donc si on considère que l'intégrale est nulle si $Y^{-1} *_\hbar X$ n'est pas définie, on voit qu'on a une fonction définie sur $C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$. Après un changement de variables on obtient:

$$\begin{aligned}\Big((\Phi \star_\hbar \Psi)(x) - (\Psi \star_\hbar \Phi)(x)\Big)/\hbar &= \frac{1}{\hbar}\int \Phi(-Y)\Psi(Y *_\hbar X)\Delta_\hbar(Y)^{-1}\omega_\hbar(Y)dY \\ &\quad - \int \Psi(X *_\hbar Y)\Phi(-Y)\omega_\hbar(Y)dY \\ &= \int \Big(D_1(X,Y)\Delta(Y)^{-1} + D_2^\hbar(X,Y) - D_3^\hbar(X,Y)\Big)\omega_\hbar(Y)dY\end{aligned}$$

où

$$D_1^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)\big(\Psi(Y *_\hbar X) - \Psi(Y + X)\big)/\hbar$$

$$D_2^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)\Big(\Psi(Y+X)(\Delta_\hbar^{-1}(Y)-1)\Big)/\hbar$$

$$D_3^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)(\Psi(X *_\hbar Y) - \Psi(X+Y))/\hbar$$

On a:

$$Y *_\hbar X = Y + X + \frac{1}{2}\hbar[Y,X] + \hbar^2 R(\hbar, X, Y)$$

où R est une fonction continue. Soit

$$M(\hbar, X, Y) = (\frac{1}{2})[Y,X] + \hbar R(\hbar, X, Y)$$

Si on écrit la formule de Taylor pour la fonction Ψ en $Y+X$ on obtient:

$$\Psi(Y *_\hbar X) = \Psi(Y+X) + \hbar\big\langle M(\hbar,X,Y), d\Psi(Y+X)\big\rangle$$
$$+ (\frac{\hbar^2}{2})(d^2\Psi)(Y+X+\tau\hbar M(\hbar,X,Y))\big(M(\hbar,X,Y), M(\hbar,X,Y)\big)$$

où τ est un nombre réel dans l'intervalle $[0,1]$, dépendant de $\hbar$, X et Y.
D'où:

$$D_1^\hbar(X,Y) - \Phi(-Y)\langle(\frac{1}{2})[Y,X], (d\Psi)(Y+X)\rangle = \hbar\Phi(-Y)\big\langle R(\hbar,X,Y), d\Psi(Y+X)\big\rangle$$
$$+ (\frac{\hbar}{2})\Phi(-Y)d^2(\Psi)(X+Y+\tau\hbar M(\hbar,X,Y)) \cdot \big(M(\hbar,X,Y), M(\hbar,X,Y)\big)$$

Comme $d^2\Psi$, R et M sont continues, donc bornées sur les ensembles compacts, il est clair que $D_1^\hbar(X,Y)$ converge vers $\Phi(-Y)\langle\frac{1}{2}[Y,X], d\Psi(Y+X)\rangle$ quand $\hbar$ tend vers zéro uniformément sur les ensembles compacts sur $C_\hbar \times C_\hbar^2$.

Maintenant comme $\Delta_\hbar$ et $\omega_\hbar$ convergent vers 1 uniformément sur tout compact, il s'ensuit:

$$D_1^\hbar(X,Y)\Delta_\hbar(Y)^{-1}\omega_\hbar(Y)$$

converge uniformément sur tout compact vers

$$\Phi(-Y)\big\langle(\frac{1}{2})[Y,X], d\Psi(Y+X)\big\rangle$$

On montre de même que $D_3^\hbar(X,Y)\omega_\hbar(Y)$ converge uniformément sur tout compact vers

$$\Phi(-Y)\big\langle(\frac{1}{2})[X,Y], d\Psi(X+Y)\big\rangle$$

Enfin, il est clair que $D_2^\hbar(X,Y)$ converge uniformément sur tout compact vers:

$$\Phi(-Y)\Psi(Y+X)tr(ad\,Y)$$

Par suite il en est de même pour $D_2^{\hbar}(X,Y)\omega_\hbar(Y)$. Comme l'intégrale est nulle sur le complémentaire du support de Φ, il s'ensuit que:

$$\Big((\Phi \star_\hbar \Psi)(X) - (\Psi \star_\hbar \Phi)(X)\Big)/i\hbar$$

converge uniformément sur tout compact vers

$$\frac{1}{i}\int \Phi(-Y)\Big(\langle [Y,X],(d\Psi)(X+Y)\rangle + \Psi(X+Y)tr(adY)\Big)dY$$

quand h tend vers zéro.

En comparant avec l'expression du crochet de Poisson obtenue dans la proposition 3-1, on conclut que: $\Big((\Phi \star_\hbar \Psi)(X) - (\Psi \star_\hbar \Phi)(X)\Big)/i\hbar$ converge uniformément sur tout compact vers $-(2\pi)^{-1}\{\Phi,\Psi\}$.

Pour Φ et Ψ données, et si $\hbar$ varie dans un intervalle compact, il est clair qu'il existe un ensemble compact qui contient les supports de tous les $\Phi \star_\hbar \Psi$. Et comme on a la convergence uniforme montrée ci-dessus il s'ensuit que:

$$\big(\Phi \star_\hbar \Psi - \Psi \star_\hbar \Phi\big)/i\hbar$$

converge vers $-(2\pi)^{-1}\{\Phi,\Psi\}$ pour la limite inductive des topologies et par suite aussi pour la norme L^1 pour dX. Il en est de même pour

$$\omega_\hbar\big(\Phi \star_\hbar \Psi - \Psi \star_\hbar \Phi\big)/i\hbar.$$

Comme la norme L^1 pour $\omega_\hbar(X)dX$ domine les normes de $C^*(G_\hbar)$ et $C_r^*(G_\hbar)$, alors si on note ces normes par $\|\ \ \|_\hbar$ on a:

$$\|\ \big(\Phi \star_\hbar \Psi - \Psi \star_\hbar \Phi\big)/i\hbar + (2\pi)^{-1}\{\Phi,\Psi\}\ \|_\hbar$$

converge vers zéro quand $\hbar$ tend vers zéro. On a ainsi vérifié la propriété 6) de la définition 3-2. Les propriétés de 1) à 5) sont clairs vues nos hypothèses.

Enfin pour montrer la propriété 7) on va utiliser comme indiqué les normes des C^*-algèbres réduites des groupes $C_r^*(G_\hbar)$. Ces normes sont données par les représentations régulières gauches sur $L^2(G_\hbar)$. On va commencer par montrer qu'on a continuité en tout $\hbar_0 \neq 0$ (et ceci est aussi vraie pour les normes de $C^*(G_\hbar)$). Soit $\Phi \in C_c^\infty(C_{\hbar_0})$ dans ce qui suit on ne considère que les $\hbar$ pour lesquels $\Phi \in C_c^\infty(C_\hbar)$. Φ détermine la mesure $\Phi(X)\omega_\hbar(X)dX$ sur $G_\hbar$. Si on fait passer les mesures finies de $G_\hbar$ sur G par $\sigma_\hbar$ on obtient en particulier un isomorphisme isométrique d'algèbres de $L^1(G_\hbar)$ sur $L^1(G)$ et donc un isomorphisme des C^*-algèbres correspondantes. Un calcul simple montre que l'image de $\Phi(X)\omega_\hbar(X)dX$ est $\hbar^{-1}\Phi(\hbar^{-1}X)\omega(X)dX$, donc $\|\ \Phi\ \|_\hbar = \|\ \hbar^{-1}\Phi(\hbar^{-1}X)\ \|_1$ où 1 veut dire $\hbar = 1$. Maintenant quand $\hbar$ tend vers $\hbar_0$, il est clair que $\hbar^{-1}\Phi(\hbar^{-1}X)$ converge uniformément vers $\hbar_0^{-1}\Phi(\hbar_0^{-1}X)$ avec des supports inclus dans un ensemble compact fixé, et par suite on a aussi convergence dans $L^1(G)$ et dans $C^*(G)$. Ainsi $\| \Phi \|_\hbar$ converge vers $\| \Phi \|_{\hbar_0}$.

Montrons maintenant la semi-continuité inférieure en $\hbar = 0$. on notera la norme dans $L^2(G_\hbar)$ correspondante à la mesure de Haar $\omega_\hbar(X)dX$ par $\| \quad \|_2^\hbar$. Soient $\Phi \in C_c^\infty(\underline{\mathrm{g}})$ et $\varepsilon > 0$. Alors on peut trouver $\xi \in C_c^\infty(\underline{\mathrm{g}})$ tel que $\| \xi \|_2^0 = 1$ et $\| \Phi \times \xi \|_2^0 \geq \| \Phi \|_0 - \varepsilon$ où $\times$ désigne la convolution usuelle des fonctions. Par arguments similaires à ceux-ci dessus on peut montrer que $\Phi \star_\hbar \xi$ converge vers $\Phi \times \xi$ uniformément quand $\hbar$ tend vers zéro avec des supports contenus dans un ensemble compact fixé. Alors, de la même manière $|\Phi \star_\hbar \xi|^2 \omega_\hbar$ converge vers $|\Phi \times \xi|^2$ et $\| \Phi \star_\hbar \xi \|_2^\hbar$ converge vers $\| \Phi \times \xi \|_2^0$.
Ainsi pour $\hbar$ suffisamment petit:

$$\| \Phi \star_\hbar \xi \|_2^\hbar \geq \| \Phi \times \xi \|_2^0 - \varepsilon$$

et

$$\| \xi \|_2^\hbar \leq \| \xi \|_2^0 + \varepsilon = 1 + \varepsilon$$

D'où:

$$\| \Phi \|_\hbar (1 + \varepsilon) \geq \| \Phi \|_\hbar \| \xi \|_2^\hbar \geq \| \Phi \times \xi \|_2^\hbar \geq \| \Phi \times \xi \|_2^0 - \varepsilon \geq \| \Phi \|_0 - 2\varepsilon$$

Donc

$$\| \Phi \|_\hbar \geq (\| \Phi \|_0 - 2\varepsilon)/(1 + \varepsilon)$$

D'où la semi-continuité inférieure désirée.

III-4 CAS DES ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES:

1 - Généralités:

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n et soit

$$\underline{\mathbf{g}}_0 = \{0\} \subset \underline{\mathbf{g}}_1 \subset \ldots \subset \underline{\mathbf{g}}_n = \underline{\mathbf{g}}$$

une suite croissante d'idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$ tels que dim $\underline{\mathbf{g}}_i = i$. On choisit une base $\{X_i, \quad i \leq n\}$ de $\underline{\mathbf{g}}$ telle que $X_i \in \underline{\mathbf{g}}_i \setminus \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$ pour tout i. M. Vergne a montré dans [37] que:
(i) Il existe un ouvert de Zariski Ω de $\underline{\mathbf{g}}^\star$, G-invariant (où G est le groupe adjoint), dense, contenu dans l'ensemble des points dont l'orbite (sous G) est de dimension maximale.
(ii) Il existe $2k$ fonctions rationnelles $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ des variables X_i où $X_i(\xi) = \langle X_i, \xi \rangle$ $(i \leq n)$, régulières sur Ω.
(iii) Il existe $r = n - 2k$ fonctions polynômiales $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ des variables $X_i \quad (i \leq n)$.
(iv) Il existe un ouvert de Zariski $U \subset \mathbb{R}^{n-2k}$ tel qu'on ait les propriétés suivantes:
a) Ω est difféomorphe à $U \times \mathbb{R}^{2k}$ par l'application: A

$$\xi \in \Omega \longmapsto (\lambda(\xi), p(\xi), q(\xi))$$

b) Il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des orbites dans Ω et U.

$$L \in U \longleftrightarrow O^L = \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^\star \quad / \lambda(\xi) = L\}$$

c) Toute orbite dans Ω admet une carte de Darboux globale définie par les p et les q

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0 \quad ; \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$$

d) Toute fonction rationnelle invariante sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ peut s'écrire de manière unique comme fonction rationnelle de λ sur $\mathbb{R}^{n-2k}$; en particulier Ω est défini comme $\{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^\star \quad / \mu(\xi) = 0\}$ où μ est un polynôme invariant.
e) Pour tout $X \in \underline{\mathbf{g}}$, $\langle X, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{k} a_j(q,\lambda) p_j + a_0(q,\lambda)$ où $a_j (j = 0, \ldots, k)$ est une fonction polynômiale de $q_{j+1}, \ldots, q_k$ avec des coefficients qui sont des fonctions rationnelles de λ dont le dénominateur est une puissance de μ.

Remarques:

La démonstration se fait par récurrence sur n en distinguant deux cas. On note $\Omega^{(i)}, p_j^{(i)}, q_j^{(i)}, \lambda_a^{(i)}$ $(1 \leq j \leq k_i ; 1 \leq a \leq i - 2k_i)$ les éléments définis en (i), (ii) et (iii) ci-dessus à l'étape $\underline{\mathbf{g}}_i$ et π_i la projection canonique de $\underline{\mathbf{g}}_i$ sur $\underline{\mathbf{g}}_{i-1}$.
1) Le cas où $I(\underline{\mathbf{g}}_i) \not\subset S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$, où $I(\underline{\mathbf{g}}_i)$ désigne l'algèbre des polynômes sur $\underline{\mathbf{g}}_i^\star$ invariants par l'action de G. Alors $I(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_i)$.
En plus il existe un élément $Z_i \in I(\underline{\mathbf{g}}_i)$ tel que:

$$Z_i = \alpha X_i + \beta \qquad (0 \neq \alpha \in I(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}) \cap I(\underline{\mathbf{g}}) \quad , \quad \beta \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}))$$

La dimension maximale des orbites dans $\underline{g}^\star$, d_n est égale à d_{n-1}.

On définit:

$$p_j^{(i)} = p_j^{(i-1)} \circ \pi_i \quad ; \quad q_j^{(i)} = q_j^{(i-1)} \circ \pi_i \quad ; \quad (1 \leq j \leq k_i \quad ; \quad 2k_i = d_i)$$

$$\lambda_a^{(i)} = \lambda_a^{(i-1)} \circ \pi_i \quad ; \quad (1 \leq a \leq i-1-d_i) \quad ; \quad \lambda_{i-d_i}^{(i)} = Z_i$$

et l'ouvert $\Omega^{(i)} = \pi_i^{-1}(\Omega^{(i-1)}) \cap \{\xi \in \underline{g}^\star \quad / \alpha(\xi) \neq 0\}$

2) Le cas où $I(\underline{g}_i) \subset S(\underline{g}_{i-1})$, alors on démontre que $I(\underline{g}_i) \subset I(\underline{g}_{i-1})$.

De plus il existe $\lambda_{c_i} \in I(\underline{g}_{i-1}) \setminus I(\underline{g}_i)$ tel que $\{X_i, \lambda_{c_i}\} = \mu$ où $0 \neq \mu \in I(\underline{g}_i) \cap I(\underline{g})$. La dimension maximale d_i des orbites dans $\underline{g}_i^\star$ est égale à $d_{i-1} + 2$. On définit:

$$p_{k_i}^{(i)} = X_i \qquad\qquad q_{k_i}^{(i)} = \frac{\lambda}{\mu} c_i$$

$$\varphi : \underline{g}_i^\star \longrightarrow \underline{g}_{i-1}^\star \qquad\qquad \xi \longmapsto \pi_i(exp[q_{k_i}^{(i)}(\xi) X_i] \cdot \xi)$$

$$\Omega^{(i)} = \varphi^{-1}(\Omega^{(i-1)}) \cap \{\xi \in \underline{g}_i^\star \quad \mu(\xi) \neq 0\}$$

$$p_j^{(i)} = p_j^{(i-1)} \circ \varphi \quad , \quad q_j^{(i)} = q_j^{(i-1)} \circ \varphi \qquad (1 \leq j < k_i)$$

$$\lambda_a^{(i)} = \lambda_a^{(i-1)} \circ \varphi \qquad\qquad (1 \leq a \leq i-2-d_{i-1})$$

Notons que φ est définie uniquement si $\mu \neq 0$.

Définition 3-4:

Un produit $\star$ sur $S(\underline{g})$ est dit covariant si pour tout X et Y dans $\underline{g}$:

$$\frac{1}{i\hbar}(X \star Y - Y \star X) = [X, Y]$$

Un produit $\star$ sur $S(\underline{g})$ est dit gradué si:

$$\forall r, p, q \in \mathbb{N} \qquad \forall (P, Q) \in S^p \times S^q \quad , \quad C_r(P, Q) \in S^{p+q-r}$$

où S^p désigne l'espace des polynômes homogènes de degré p.

Définition 3-5:

Soit Ω un ouvert G-invariant de $\underline{g}^\star$ et soit N une sous-algèbre associative de $C^\infty(\Omega)$ stable par le crochet de Poisson. Un produit $\star$ sur N est dit tangentiel si pour toute orbite O de G, contenue dans Ω et pour tout u, v dans N, tels que $u_{|O} = v_{|O}$ on a:

$$(u \star f)_{|O} = (v \star f)_{|O} \qquad \forall f \in N$$

autrement dit le produit $\star$ peut se restreindre sans ambiguité sur toute orbite dans Ω.

Soit $N^G = \{f \in N \quad / \quad f(g\cdot\xi) = f(\xi) \quad , \quad \forall g \in G, \quad \forall \xi \in \underline{\mathbf{g}}^\star\}$ l'espace des fonctions G-invariantes. Si $\star$ est un produit $\star$ tangentiel et si $u \in N^G$ et $v \in N$ alors:

$$(u \star v)_{|_O} = u \cdot v_{|_O}$$

Notons que $u_{|_O}$ est une constante.
La réciproque n'est pas évidente. Elle est vrai dans le cas où Ω est régulier et O est définie par les équations $\{f(\xi) = \lambda \quad , \quad f \in N^G\}$.
Si les orbites de la représentation coadjointe définissent un feuilletage de Ω, dire que le produit $\star$ est tangentiel est équivalent à dire que les opérateurs bidifférentiels sont tangentiels aux feuilles symplectiques.

Proposition 3-6:
Soit $\underline{\mathbf{g}}$ nilpotente. Supposons qu'il existe un produit $\star$ sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$, défini sur $S(\underline{\mathbf{g}})$ tel que

$$a \star P = aP \qquad \text{pour tout} \quad a \in I(\underline{\mathbf{g}})$$

Alors ce produit$\star$ est tangentiel sur l'ouvert Ω.

Démonstration:

Soit $L \in U$ et soit O^L une orbite dans $\underline{\mathbf{g}}^\star$ définie par $\lambda(\xi) = L$. Soit P un élément de $S(\underline{\mathbf{g}})$ s'annulant sur O^L, alors (d'après (c))

$$P = f(\lambda, p, q)$$

où f est une fonction polynômiale en p et q avec des coefficients qui sont des fonctions rationnelles de λ, définie sur Ω et s'annulant pour $\lambda = L$ c'est-à-dire:

$$P(\lambda, P, Q) = \sum_{I,J} \frac{a_{I,J}(\lambda)}{b_{I,J}(\lambda)} P^I Q^J$$

$$I = (i_1, \ldots, i_k) \quad ; \quad i_r \in \mathbb{N} \quad (1 \le r \le k) \quad ; \quad P^I = p_1^{i_1} \cdots p_k^{i_k}$$
$$J = (j_1, \ldots, j_k) \quad ; \quad j_r \in \mathbb{N} \quad (1 \le r \le k) \quad ; \quad Q^I = q_1^{i_1} \cdots q_k^{i_k}$$

et $a_{I,J}$ (resp. $b_{I,J}$) sont des fonctions polynômiales telles que $a_{I,J}(L) = 0$ (resp. $b_{I,J}$ ne s'annule pas sur Ω).
De cette construction on voit que:

$$(P^I Q^J)(\xi) = \frac{1}{d_{I,J}(\xi)} P_{I,J}(\xi)$$

où $P_{I,J}(\xi) \in S(\underline{\mathbf{g}})$ et $d_{I,J}(\xi) \in S(\underline{\mathbf{g}})$ et ne s'annule pas sur Ω. Si on définit:

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \prod_{I,J} (d_{I,J}(\xi) \cdot b_{I,J}(\xi)) P \\ &= \sum_{K,L} (\lambda(\xi)) P_{K,L}(\xi) \prod_{(I,J) \neq (K,L)} d_{I,J}(\xi) \cdot b_{I,J}(\lambda(\xi)) \end{aligned}$$

R est un élément de $S(\underline{\mathbf{g}})$.
Le produit $\star$ de R par un élément quelconque Q de $S(\underline{\mathbf{g}})$ est:

$$R \star Q = \prod_{I,J} \big(d_{I,J}(\xi) \cdot b_{I,J}(\lambda(\xi))\big) P \star Q$$

(En utilisant les hypothèses et (d)). En développant on obtient:

$$R \star Q = \sum_{K,L} a_{K,L}(\lambda(\xi)) \Big(\prod_{(I,J) \neq (K,L)} d_{I,J} b_{I,J}(\lambda(\xi)) \Big) P_{K,L} \star Q$$

En utilisant de nouveau les hypothèses, (d) et le fait que $d_{I,J} \in I(\underline{\mathbf{g}})$.
Ainsi par réstriction à O^L:

$$\Big[\prod_{I,J} \big(d_{I,J}(\xi) \cdot b_{I,J}(\lambda(\xi))\big)\Big]_{|O^L} \cdot (P \star Q)_{|O^L} = \sum_{K,L} a_{K,L}(\lambda(\xi)) \times$$

$$\times \prod_{(I,J) \neq (K,L)} d_{I,J}(\xi) \cdot b_{I,J}(\lambda(\xi))_{|O^L} \, (P_{K,L} \star Q)_{|O^L} = 0$$

car $a_{I,J}(L) = 0$. Le coefficient entre crochet étant une constante non nulle sur O^L. On en déduit:

$$(P \star Q)_{|O^L} = 0$$

et $\star$ est tangentiel.

2 - Produit $\star$ de Moyal sur les orbites:

Soit O une orbite dans $\underline{\mathbf{g}}^\star$ sous l'action de G. On rappelle qu'il existe un difféormorphisme c : $O \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$; $c(\xi) = (p_i, q_i)$; $i = 1, \dots k$ tel que la forme symplectique Λ_ξ sur O s'écrit dans cette carte:

$$\Lambda_\xi = \sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i$$

c est appelé carte adaptée. On commence par rappeler le produit $\star$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$. Si

$$\{u, v\} = \Lambda^{ij} \partial_i u \partial_j v$$

On pose:

$$P^n(u, v) = \Lambda^{i_1 j_1} \dots \Lambda^{i_n j_n} \partial^n_{i_1 \dots i_n} u \partial^n_{j_1 \dots j_n} v \quad (n \geq 1)$$

et

$$u \star v = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} P^r(u, v)$$

où $P^0(u,v) = u \cdot v$, est un produit $\star$ sur $\mathbb{R}^{2k}$ qu'on peut considérer aussi sur notre orbite O car O est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2k}$.

Ce produit $\star$ admet une formule intégrale. En effet:

Définition 3-7:

Soit β la 2-forme symplectique $\sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i$ sur $\mathbb{R}^{2k}$. Soient u, v deux éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$ on pose:

$$(u \star v)(\xi) = \pi^{-2k} \iint u(\xi')v(\xi")e^{2i[\beta(\xi,\xi")+\beta(\xi",\xi')+\beta(\xi',\xi)]}\, d\xi' d\xi"$$

où $\xi = (p,q)$, $d\xi = dpdq$.

Proposition 3-8: (Hansen, Maillard)

Supposons que les transformées de Fourier de u et v soient à supports compacts, alors la série:

$$\sum_{n\geq 0} (-\frac{i}{2})^n \frac{1}{n!} P^n(u,v)$$

converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2k})$ vers $u \star v$.

Démonstration:

On définit la transformée de Fourier symplectique:

$$(Fu)(\xi) = \pi^{-k} \int e^{2i\beta(\xi,\xi')} u(\xi')\, d\xi'$$

alors $F(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, $F \circ F = Id_{\mathcal{S}}$ et on a:

$$F(u \star v)(\xi) = \pi^{-k} \int e^{-2i\beta(\xi,\xi')} (Fu)(\xi')(Fv)(\xi - \xi')\, d\xi'$$

(cette formule prouve que $u \star v$ appartient à $\mathcal{S}$)$\cdot$ Si Fu et Fv sont à supports compacts:

$$F(u \star v)(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-2i)^n}{n!} \pi^{-k} \int [\beta(\xi,\xi')]^n (Fu)(\xi')(Fv)(\xi - \xi')d\xi'$$

Mais

$$p_j Fu = \frac{i}{2} F(\partial_{q_j} u) \quad ; \quad q_j Fu = -\frac{i}{2} F(\partial_{p_j} u)$$

alors

$$F(u \star v)(\xi) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-2i)^n}{4^n n!} \pi^{-k} \int \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} \Lambda^{i_1 j_1} \ldots \Lambda^{i_n j_n}\, F(\partial_{i_1 \ldots i_n} u)(\xi') F(\partial_{j_1 \ldots j_n} v)(\xi - \xi')d\xi'$$

On vérifie que:

$$\pi^{-k} \int (Fu)(\xi')F(v)(\xi - \xi')d\xi' = F(u \cdot v)(\xi)$$

Théorème 3-9: (Kastler)

A équivalence unitaire près, $\mathcal{S}(O,\star)$ admet une et une seule représentation $\star$ irréductible et fidèle.

Théorème 3-10 :[11]

Deux cartes adaptées différentes, définissent deux structures d'algèbres isomorphes sur $\mathcal{S}(O)$.

3 - Produit $\star$ sur un ouvert dense de $\underline{g}^\star$(produit $\star$ d'Arnal et Cortet):

On voudrait bien "recoller" les produits $\star$ construits sur les orbites pour construire un produit $\star$ sur l'ouvert Ω dense dans $\underline{g}^\star$.
Grâce à la paramétrisation globale des orbites qu'on a donnée au début de cette section, on définit:

$$(u \star v)(p, q, \lambda) = (u_{|_{O^\lambda}} \star v_{|_{O^\lambda}})(p, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{\nu^n}{n!} P^n(u_{|_{O^\lambda}}, v_{|_{O^\lambda}})$$

O^λ étant l'orbite $A^{-1}(\mathbb{R}^{2k} \times \{\lambda\})$, et $\star$ est le produit $\star$ de Moyal défini sur O^λ. Cette formule est valable pour u, v deux fonctions telles que $u_{|_{O^\lambda}} \in \mathcal{S}(O^\lambda)$ ($\nu = -\frac{i}{2}$) ou $u_{|_{O^\lambda}}$ est polynômiale en p et q.

Proposition 3-11 [11]:
1) Le produit $\star$ construit ci-dessus est tangentiel.
2) $S(\underline{g}) \star S(\underline{g}) \subset \mathcal{R}(\underline{g})$ où $\mathcal{R}(\underline{g})$ désigne l'espace des fonctions rationnelles sur $\underline{g}$.
Ce produit $\star$ n'est en général pas défini sur $S(\underline{g})$.

Contre exemple:

L'algèbre $\underline{g}_{5,4}$ est une algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension 5 qu'on peut décrire dans une base X_i ($1 \leq i \leq 5$) par les seuls crochets non nuls:

$$[X_5, X_3] = X_1 \quad ; \quad [X_4, X_3] = X_2 \quad ; \quad [X_5, X_4] = -2X_3$$

Soit $\underline{g}_i$ l'algèbre de Lie engendrée par $(X_1, \ldots, X_i)$. La chaine $\underline{g}_i$ est une chaine croissante d'idéaux de $\underline{g}$. Si $i \leq 3$, l'algèbre $\underline{g}_i$ est abélienne et les orbites sont réduites aux points. En particulier $I(\underline{g}_3) = S(\underline{g}_3)$. Il est clair que $I(\underline{g}_4) \subset I(\underline{g}_3)$ car X_3 n'est pas une fonction invariante sur $\underline{g}_4^\star$; d'où on est dans le deuxième cas du procédure de la récurrence donné au début de cette section et $d_4 = 2$. On choisit:

$$\lambda_{c_4} = X_3 \quad \text{donc} \quad \mu = X_2 \quad \text{et} \quad p_1^{(4)} = X_4 \; ; \; q_1^{(4)} = \frac{X_3}{X_2} \; ; \; \lambda_1^{(4)} = X_1 \; ; \; \lambda_2^{(4)} = X_2$$

D'autre part $I(\underline{g}_4) \subset I(\underline{g}_5)$, donc on est dans le premier cas du procédure de la récurrence et $d_5 = 2$. On choisit $Z = \alpha X_5 + \beta$ comme polynôme invariant, on vérifie qu'une solution est:

$$\alpha = X_2 \quad ; \quad \beta = -X_3^2 - X_1 X_4$$

On obtient:

$$p_1^{(5)} \underset{not}{=} p = X_4 \quad ; \quad q_1^{(5)} \underset{not}{=} q = \frac{X_3}{X_2}$$

$$\lambda^{(5)} \underset{not}{=} \lambda_1 = X_1 \qquad ; \qquad \lambda_2^{(5)} \underset{not}{=} \lambda_2 = X_2$$

$$\lambda_3^5 \underset{not}{=} \lambda_3 = X_2X_5 - X_3^2 - X_1X_4$$

On calcule $X_5 \star X_5^2$ avec $X_5 = \lambda_2 q^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}p + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$

$$X_5 \star X_5^2 = X_5^3 + \frac{\nu^2}{2!}C_2(X_5, X_5^2)$$

$$C_2(X_5, X_5^2) = 2\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} = 2\frac{X_1^2}{X_2} \notin S(\underline{\mathbf{g}})$$

En fait dans le cas de $\underline{\mathbf{g}}_{5,4}$ il n'existe pas de produit $\star$ défini sur $S(\underline{\mathbf{g}})$ différentiel (c'est-à-dire tel que les coefficients C_r soient des opérateurs bidifférentiels) et tangentiel sur Ω (voir [24]).

Pour $f \in \mathcal{S}(G)$ et $\lambda \in U$ on définit:

$$\Pi^\lambda(f) = \int_G f(g)\Pi^\lambda(g)\, dg$$

où Π^λ est la représentation Π^{O^λ}.
On notera par T^λ la représentation unitaire irréductible et fidèle de $\mathcal{S}(O^\lambda, \star)$. On définit la transformée de Fourier nilpotente par:

Définition 3-12:

Pour $f \in \mathcal{S}(G)$ on pose:

$$\theta(f)_{|_{O^\lambda}} = \Big((T^\lambda) \circ \Pi^\lambda\Big)(f)$$

$\theta(f)$ est une fonction sur Ω telle que $\theta f_{|_{O^\lambda}}$ est dans $\mathcal{S}(O^\lambda)$ pour tout λ dans U. θ est appelée transformée de Fourier nilpotente.

Proposition 3-13:

Soient f et f' dans $\mathcal{S}(G)$:

$$(f \times f')(g) = \int_G f(gg'^{-1})f'(g')dg'$$

Alors:

$$\theta(f \times f') = \theta(f) \star \theta(f')$$

Démonstration:

La fonction $(g, g') \longmapsto gg'$ étant polynômiale sur G, $\mathcal{S}(G) \times \mathcal{S}(G)$ est dans $\mathcal{S}(G)$. En plus par définition on a:

$$\Pi^\lambda(f \times f') = \Pi^\lambda(f) \circ \Pi^\lambda(f')$$

d'où

$$\theta(f \times f') = (T^\lambda)^{-1} \circ \Pi^\lambda(f \times f') = (T^\lambda)^{-1}\Pi^\lambda(f) \star (T^\lambda)^{-1}\Pi^\lambda(f') = \theta(f) \star \theta(f')$$

En effet $\theta(\mathcal{S}(G))$ contient uniquement des fonctions C^∞ sur Ω.

D. Arnal et J. C. Cortet ont donné une expression explicite de θ dans [8].

Théorème 3-14:

1) Il existe une fonction réelle $a(X, \xi)$, polynômiale en X, rationnelle dans $\underline{\mathbf{g}}^\star$ et régulière sur Ω telle que:

$$\theta(f)(\xi) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} (f \circ exp)(X) e^{ia(X,\xi)}\, dX$$

$$(f \circ exp)(X) = \int_\Omega e^{-ia(X,\xi)} (\theta f)(\xi)\, dX$$

2) $\theta(f)$ est une fonction C^∞ sur Ω.

Notons que le produit de Moyal est défini uniquement sur l'ouvert de Zariski Ω. Dans le paragraphe suivant on donne un autre produit $\star$ défini sur toute $\underline{\mathbf{g}}^\star$.

4 - Produit $\star$ de Rieffel, Lugo et Gutt:

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente. Identifions $\underline{\mathbf{g}}$ avec son groupe de Lie simplement connexe G par l'application exponentielle. On notera par "$\cdot$" la structure du groupe de Lie sur $\underline{\mathbf{g}}$. Rappelons que la mesure de Lebesgue dX est une mesure de haar pour "$\cdot$". Pour tout $\hbar \in \mathbb{R}^*$, on définit une structure de groupe de Lie $*_\hbar$ sur $\underline{\mathbf{g}}$, par:

$$X *_\hbar Y = \hbar^{-1}\Big((\hbar X) \cdot \hbar(Y)\Big)$$

et pour $\hbar = 0$,on pose $\qquad X *_0 Y = X + Y$

On notera $\underline{\mathbf{g}}$ munie de cette structure de groupe par $G_\hbar$. Pour $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ on notera leur convolution sur $G_\hbar$ par $\Phi \times_\hbar \Psi$.

Théorème 3-15:

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente, et soit $\{\,,\,\}$ le crochet de Poisson linéaire correspondant sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ pour tout $\hbar \in \mathbb{R}$on définit un produit, une involution et une norme sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ comme suit:
pour $f, g \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$,

$$f \star_\hbar g = \left(\hat{f} \times_\hbar \hat{g}\right)^\vee$$

$$f^*(X) = \bar{f}(X)$$

$$\| f \|_{\hbar} = \textit{norme de} \hat{f} \quad \textit{dans} \quad C^*(G_{\hbar})$$

Alors cette structure fournit une déformation quantification stricte de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ dans la direction de $-(2\pi)^{-1}\{\,,\,\}$.

<u>Démonstration:</u>

La démonstration de la deuxième propriété de la définition d'une déformation quantification stricte est une version simplifiée de la démonstration qu'on va donner dans le théorème 3-23.

Montrons maintenant la propriété 1) c'est-à-dire que pour tout $\Phi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ la fonction $\hbar \longmapsto \| \Phi \|_{\hbar}$ est continue. Dans la section précédente on a montré que pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\underline{\mathbf{g}})$ cette fonction est semi-continue inférieurement pour la norme de $C_r^*(G)$. Mais tout groupe nilpotent est moyenable [38] donc $C_r^*(G) = C^*(G)$. D'autre part pour $\underline{\mathbf{g}}$ nilpotente, où $\omega \equiv 1$ et tous les éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ sont intégrables pour la mesure de Haar, il est clair que la démonstration de la section précédente reste valable pour tous les éléments de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$. Ainsi on a la semi-continuité inférieure.

On va démontrer la semi-continuité supérieure par induction sur la dimension n de $\underline{\mathbf{g}}$. Si $n = 1$ alors $\underline{\mathbf{g}}$ est abélienne et $\underline{\mathbf{g}}_{\hbar} = \underline{\mathbf{g}}$ pour tout $\hbar$, alors la déformation est constante et la continuité est évidente. Supposons que la semi-continuité supérieure soit connue pour toute algèbre de Lie nilpotente de dimension $n-1$.
Notons que la base adaptée choisie précédemment est aussi une base adaptée pour $\underline{\mathbf{g}}_{\hbar}$ pour tout $\hbar$. Soit $\underline{\tilde{\mathbf{g}}} = \underline{\mathbf{g}}_{n-1}$ l'idéal engendré par $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Quand on voit $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}$ comme sous-algèbre de $\underline{\mathbf{g}}_{\hbar}$ on la note $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}_{\hbar}$. Soit K la sous-algèbre de dimension 1 engendrée par X_n. Alors il est bien connu que $\underline{\mathbf{g}}$ est un produit semi-direct de $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}$ et K où K opère sur $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}$ par l'action adjointe (voir [35]). Similairement, chaque $\underline{\mathbf{g}}_{\hbar}$ est un produit semi direct de $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}_{\hbar}$ et de K par l'action adjointe correspondante.
Notons par $\tilde{G}_{\hbar}$ l'algèbre $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}$ munie de la structure du groupe de Lie $\star_{\hbar}$. Alors chaque $G_{\hbar}$ est un produit semi-direct de $\tilde{G}_{\hbar}$ avec K où l'action $\alpha^{\hbar}$ de K sur $\tilde{G}_{\hbar}$ est définie par

$$\alpha^{\hbar}_W(X) = W \star_{\hbar} X \star_{\hbar} W^{-1}$$

pour $W \in K$ et $X \in \underline{\tilde{\mathbf{g}}}$. Maintenant la famille d'algèbres $\{\underline{\tilde{\mathbf{g}}}\}$ est obtenue de $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}_{\hbar}$ de la même manière que $\{\underline{\mathbf{g}}_{\hbar}\}$ est obtenue de $\underline{\mathbf{g}}$.
Ainsi d'après l'hypothèse d'induction $\left\{C^*(\tilde{G}_{\hbar})\right\}$ est un champ semi-continu supérieurement car la dimension de $\underline{\tilde{\mathbf{g}}}$ est $n-1$. D'après ce qu'on a vu dans la section II-1, l'algèbre maximale A des sections de ce champ est obtenue en considèrant sur $C_c(\mathbb{R} \times \underline{\tilde{\mathbf{g}}})$ le produit:

$$(\Phi \star \Psi)(\hbar, X) = \int_{\underline{\tilde{\mathbf{g}}}} \Phi(\hbar, Y)\Psi(\hbar, Y^{-1} \star_{\hbar} X)\, dY$$

et l'involution:

$$\Phi^*(\hbar, X) = \bar{\Phi}(\hbar, -X)$$

Et en complétant cette algèbre pour la norme:

$$\| \Phi \| = \sup_{\hbar} \| \Phi(\hbar, \cdot) \|_{\hbar}$$

L'algèbre $C_0(\mathbb{R})$ opère sur A comme algèbre des multiplicateurs par:

$$(\eta\Phi)(\hbar, X) = \eta(\hbar)\Phi(\hbar, X)$$

pour $\eta \in C_0(\mathbb{R})$ et $\Phi \in C_c(\mathbb{R} \times \tilde{\underline{\mathbf{g}}})$.
Alors d'après la section II-1, la semi-continuité supérieure de ce champ est équivalente à: pour tout $\hbar$, le noyau de l'homomorphisme naturel de A dans $C^*(\tilde{G}_{\hbar})$ est égal à $I_{\hbar}A$ où $I_{\hbar}$ est l'idéal dans $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions qui s'annulent en $\hbar$.
On définit une action α de K sur A par

$$(\alpha_W\Phi)(\hbar, X) = \Phi(\hbar, \alpha^{\hbar}_{-W}(X))$$

Quand on étend cette action à l'algèbre des multiplicateurs de A, elle laisse invariants tous les éléments de $C_0(\mathbb{R})$. En particulier, elle envoie $I_{\hbar}A$ dans lui même. Donc $\{C^*(\tilde{G}_{\hbar})\}$, A et α forment un champ semi-continu supérieurement d'actions sur les C^*-algèbres (définition 2-9). Par suite en utilisant le théorème 2-10, on déduit que le champ d'algèbres produits croisées, $\{C^*(K, C^*(\tilde{G}_{\hbar}), \alpha^{\hbar})\}$ est semi-continu supérieurement avec $C^*(K, A, \alpha)$ comme C^*-algèbre maximale des sections. Mais l'une des raisons essentielles de l'étude des C^*-algèbres produits croisés est que la C^*-algèbre d'un produit semi-direct de groupes est donnée par la C^*-algèbre produit croisé correspondante (voir [39]). Dans notre cas, on a:

$$\{C^*(K, C^*(\tilde{G}_{\hbar}), \alpha^{\hbar})\} \cong C^*(G_{\hbar})$$

Il en résulte que $\{C^*(G_{\hbar})\}$ est semi-continu supérieurement.

Les déformations quantifications sont reliées aux produits $\star$ par des développements asymptotiques plus précisément:

Proposition 3-16:

Soient f et g dans $S(\underline{\mathbf{g}}^*)$ tels que $\hat{f}$ et $\hat{g}$ soient à supports compacts, alors $f \star_{\hbar} g$ admet un développement en série formelle en $\hbar$:

$$f \star_{\hbar} g = \sum_{k \geq 0} \frac{\hbar^k}{k!} C_k(f, g)$$

convergeant simplement et dans l'espace des distributions $S'(\underline{\mathbf{g}}^*)$. Cette série est un produit $\star$. En plus on a les propriétés suivantes:
1) $\int f \star_{\hbar} g = \int f \cdot g$
2) $\overline{g \star_{\hbar} f} = \bar{f} \star_{\hbar} \bar{g}$

Démonstration:

Si z appartient à $\underline{\mathbf{g}}^\star$, on a:

$$f \star_\hbar g(z) = \left(\hat{f} \star_\hbar \hat{g}\right)^\vee(z)$$
$$= \int_{\underline{\mathbf{g}}\times\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(X)\hat{g}(Y)e^{2i\pi\left\langle X *_\hbar Y, z\right\rangle} dX dY$$

On pose:

$$Exp\left\langle X *_\hbar Y - X - Y, z\right\rangle = 1 + \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq k \\ k+1-\alpha\leq\beta\leq k}} \hbar^k a_{\alpha\beta k}(z) X^\alpha Y^\beta$$

où: $X^\alpha = (x_1)^{\alpha_1}\dots(x_n)^{\alpha_n}$, $Y^\beta = (y_1)^{\beta_1}\dots(y_n)^{\beta_n}$

$\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{N}^n$.

Comme $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont à supports compacts, X et Y restent dans un compact donné et la série ci-dessus converge absolument. Alors la série suivante:

$$f \star_\hbar g = fg + \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq k \\ k+1-\alpha\leq\beta\leq k}} \hbar^k \frac{a_{\alpha\beta k}(z)}{(2i\pi)^k} D^\alpha f \cdot D^\beta g$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1}\dots\partial z_n^{\alpha_n}}$ et $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_n}}{\partial z_1^{\beta_1}\dots\partial z_n^{\beta_n}}$ converge dans l'espace des distributions tempérées.
On trouve que:

$$C_0(f,g) = fg \quad \text{et} \quad C_k(f,g) = \sum_{\substack{1\leq\alpha\leq k \\ k+1-\alpha\leq\beta\leq k}} k! \frac{a_{\alpha\beta k}}{2i\pi^k} D^\alpha f \cdot D^\beta g$$

$C_k(f,g)$ est, pour tout entier positif k, un opérateur bidifférentiel sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ d'ordre maximal k dans chaque argument s'annulant sur les constantes. En particulier:

$$C_1(f,g)(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}\times\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(X)\hat{g}(Y)e^{2i\pi\left\langle X+Y,z\right\rangle} i\pi\left\langle [X,Y], z\right\rangle dX dY$$

d'où $C_1(f,g) = \frac{1}{4i\pi}\{f,g\}$. (Remarquons que si on pose $\nu = \frac{1}{4i\pi}$ et on considère le développement de $f \star_\hbar g$ en ν on aurait $C_1'(f,g) = \{f,g\}$).
Maintenant posons:

$$X *_\hbar Y - X - Y = \sum_{\ell=1}^{\infty} \hbar^\ell b_\ell(X,Y)$$

On montre que: $b_\ell(X,Y) =$

$$\sum_{\substack{m=1 \\ \sum p_i+q_i=\ell \\ p_i+q_i>0}}^{\ell} \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{[X^{p_1}Y^{q_1}\cdot\cdot X^{p_m}Y^{q_m}X]}{p_1!q_1!\dots p_m!q_m!} + \sum_{\substack{m=0 \\ \sum p_i+q_i=\ell \\ p_i+q_i>0 \\ p_{m+1}\geq 0}}^{\ell} \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{[X^{p_1}Y^{q_1}\cdot\cdot Y^{q_m}X^{p_{m+1}}Y]}{p_1!q_1!\dots q_m!p_{m+1}!}$$

où $[X_1 \dots X_m] = \frac{1}{m}\Big[X_1[\dots[X_{m-1}, X_m]\Big]$ (voir [21]).
Un calcul direct montre que:

$$f \star_\hbar g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \int_{\mathbf{g}\times\mathbf{g}} \hat{f}(X)\hat{g}(Y)e^{2i\pi\langle X+Y,z\rangle}\Big[\sum_{n=1}^{k}\frac{(2i\pi)^n}{n!}\Big\langle \sum_{i_1+\dots+i_n=k} b_{i_1}\dots b_{i_n}, z\Big\rangle\Big]\, dX dY$$

Maintenant b_ℓ est symétrique (resp. anti-symétrique) en (X,Y) si ℓ est pair (resp. impair) en effet:

$$X *_\hbar Y = \hbar^{-1}\big((\hbar X)\cdot(\hbar Y)\big) = -\hbar^{-1}\big((-\hbar X)\cdot(-\hbar Y)\big)$$

car

$$\left(e^{\hbar X}\cdot e^{\hbar Y}\right)^{-1} = e^{-\left((\hbar X)\cdot(\hbar Y)\right)} = e^{-\hbar Y}e^{-\hbar X} = e^{\left((-\hbar Y)\cdot(-\hbar X)\right)}$$

Donc si on pose $X *_\hbar Y = \sum_{m=0}^{\infty} h^{m-1}H_m(X,Y)$ avec H_m un polynôme de degré m on aurait:

$$H_m(X,Y) = -H_m(-Y,-X) = -(-1)^m H_m(Y,X) = (-1)^{m+1}H_m(Y,X)$$

Par conséquent: $\sum_{i_1+\dots+i_n=k} b_{i_1}\dots b_{i_n}$ est symétrique (resp. anti-symétrique) en (X,Y) si k est pair (resp. impair). D'où $C_k(f,g) = (-1)^k C_k(g,f)$.

Enfin pour la propriété (iv) de la définition d'un produit $\star$ remarquons que la série:

$$f \star_\hbar g = \sum_{k\geq 0}\frac{\hbar^k}{k!}C_k(f,g)$$

converge uniformément sur tout compact car elle converge simplement et la série de ses dérivées converge uniforément sur tout compact.
Donc la série:

$$\sum_{r\geq 0}\frac{\hbar^r}{r!}Q_r(f \star_\hbar g, U)$$

où $U \in \mathcal{S}(\mathbf{g}^\star)$ et $\hat{U}$ est à support compact, converge uniformément sur tout compact.

Maintenant la propriété 1) est claire et pour démontrer la propriété 2) calculons $\bar{f} \star_\hbar \bar{g}$:

$$\begin{aligned}
\bar{f} \star_\hbar \bar{g}(z) &= \int_{\mathbf{g}\times\mathbf{g}} \hat{\bar{f}}(X)\hat{\bar{g}}(Y)e^{2i\pi\langle X *_\hbar Y, z\rangle}\, dX dY \\
&= \int_{\mathbf{g}\times\mathbf{g}} \overline{\hat{f}}(X)\overline{\hat{g}}(Y)e^{2i\pi\langle -X *_\hbar -Y, z\rangle}\, dX dY \\
&= \int_{\mathbf{g}\times\mathbf{g}} \overline{\hat{f}}(X)\overline{\hat{g}}(Y)e^{2i\pi\langle -(Y *_\hbar X), z\rangle}\, dX dY \\
&= \overline{\int_{\mathbf{g}\times\mathbf{g}} \hat{f}(X)\hat{g}(Y)e^{2i\pi\langle (Y *_\hbar X), z\rangle}\, dX dY} \\
&= \overline{g \star_\hbar f(z)}
\end{aligned}$$

Remarquons que ce produit $\star$ a été défini par Lugo dans [20] comme suit:

Soient f, g deux fonctions de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)\times\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ (ou dans $S(\underline{\mathbf{g}})\times\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ ou dans $S(\underline{\mathbf{g}})\times S(\underline{\mathbf{g}})$), où $S(\underline{\mathbf{g}})$ est l'espace des fonctions polynômiales sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$, alors:

$$\Big\langle (g\star f(z), \Phi(z)\Big\rangle = \Big\langle \hat{f}(Y), \langle \hat{g}(X), \hat{\Phi}(X\cdot Y)\rangle\Big\rangle$$

On vérifie facilement que ce produit coincide sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ avec le produit de Rieffel avec $\hbar = 1$, en effet:

$$\begin{aligned}\Big\langle \hat{f}(Y), \langle \hat{g}(X), \hat{\Phi}(X\cdot Y)\rangle\Big\rangle &= \int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(Y)\int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{g}(X)\hat{\Phi}(X\cdot Y)\,dX\,dY\\ &= \int_{\underline{\mathbf{g}}}\int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{g}(X)\hat{f}(X^{-1}Z)\hat{\Phi}(Z)\,dX\,dZ\\ &= \int_{\underline{\mathbf{g}}} (\hat{g}\times\hat{f})(Z)\hat{\Phi}(Z)\,dZ\\ &= \langle \hat{g}\times\hat{f}, \hat{\Phi}\rangle\end{aligned}$$

d'où $g\star f = (\hat{g}\times\hat{f})^\vee$.

Ce produit $\star$ constitue aussi la version convergente de la partie verticale d'un produit $\star$ construit par Gutt sur l'espace cotangent d'un groupe de Lie quelconque T^*G dans [19] comme suit:

Soit $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$ l'algèbre enveloppante universelle de $\underline{\mathbf{g}}$ et soit σ la bijection linéaire définie par symétrisation:

$$\sigma : S(\underline{\mathbf{g}}) \longrightarrow \mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}}) \qquad \sigma(X_{i_1}\dots X_{i_p}) = \frac{1}{p!}\sum_{S\in\mathcal{P}_p} X_{i_{S(1)}}\circ\dots\circ X_{i_{S(p)}}$$

où $X_{i_k}\in\underline{\mathbf{g}}$, $\mathcal{P}_p$ est le groupe de pérmutation de p éléments et $\circ$ désigne le produit dans $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$.

Si $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}}) = \oplus_{\ell=0}^{\infty}\sigma(S^\ell) = \oplus_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{U}^\ell$ où S^ℓ désigne l'espace des polynômes homogènes de degré ℓ, on note par u_ℓ la $\ell^{\underline{\text{ème}}}$ composante de u dans $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$. On définit alors, pour P dans S^p et Q dans S^q:

$$P\star Q = \sum_{r=0}^{\infty}(2\lambda)^r\sigma^{-1}\left[(\sigma(P)\circ\sigma(Q))\right]_{p+q-r}$$

où $\lambda\in\mathbb{C}$. Gutt a démontré que ce produit $\star$ est totalement détérminé par l'expression de $X\star Q$ où X appartient à $\underline{\mathbf{g}}$. On rappelle que les constantes de la structure de $\underline{\mathbf{g}}$ C_{ij}^k sont définies par $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$.

Proposition 3-17:

Soit X dans $\underline{\mathbf{g}}$ et Q dans $S(\underline{\mathbf{g}})$ on a:

$$X\star Q = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-2\lambda)^r}{r!}B_r X_{m_r} C_{jj_1}^{m_1}\dots C_{m_{r-1}j_r}^{m_r}(\partial_j X)(\partial^r_{j_1\dots j_r}Q)$$

où B_r est le $r^{\underline{\text{ème}}}$ nombre de Bernouilli et les C_{ij}^k sont les constantes de structure de $\underline{\mathbf{g}}$. En plus cette formule détermine un unique produit $\star$ sur $S(\underline{\mathbf{g}})$.

Démonstration:

Pour $X, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ dans $\underline{\mathbf{g}}$,on a d'après [40]:

$$X \cdot \langle X_{i_1} \dots X_{i_k} \rangle = \langle X X_{i_1} \dots X_{i_k} \rangle + \sum_{r=1}^{k} \frac{(-1)^r}{r!} B_r \times$$
$$\times \sum_{\{j_1 \dots j_r\} \subset \{i_1 \dots i_k\}} \left\langle \left[[-[X, X_{j_1}] \dots], X_{j_r} \right], X_{i_1} \dots \check{X}_{j_1} \dots \check{X}_{j_r} \dots X_{i_k} \right\rangle$$

où $\check{}$ désigne l'omission. Il en résulte que:

$$X \star X_{i_1} \cdot\cdot X_{i_k} + \sum_{r=1}^{k} \frac{(2r)^r(-1)^r B_r}{r!} \sum_{\{j_1 \dots j_r\} \subset \{i_1 \dots i_k\}} \left\{ \cdot\cdot \{X, X_{j_1}\}, \cdot\cdot, X_{j_r} \right\} X_{i_1} \dots \check{X}_{j_1} \cdot\cdot \check{X}_{j_r} \cdot\cdot X_{i_k}$$

d'où si $Q = X_{i_1} \dots X_{i_k}$

$$C_r(X, Q) = \frac{(-2)^r}{r!} B_r X_{m_r} C_{j j_1}^{m_1} C_{m_1 j_2}^{m_2} \dots\dots C_{m_{r-1} j_r}^{m_r} (\partial_j X)(\partial_{j_1 \dots j_r}^r Q)$$

Maintenant on peut procéder par induction grâce à l'associativité:
Si $P = X_{j_1} \dots X_{j_{k'}}$

$$\langle X_{j_1} \dots X_{j_{k'}} \rangle = \frac{1}{k'} \sum_{\ell=1}^{k'} X_{j_\ell} \cdot \langle X_{j_1} \dots \check{X}_{j_\ell} \dots X_{j_{k'}} \rangle$$

d'où

$$\begin{aligned} X_{j_1} \dots X_{j_{k'}} \star Q &= \frac{1}{k'} \sum_{\ell=1}^{k'} (X_{j_\ell} \star X_{j_1} \dots \check{X}_{j_\ell} \dots X_{j_{k'}}) \star Q \\ &= \frac{1}{k'} \sum_{\ell=1}^{k'} X_{j_\ell} \star \left[(X_{j_1} \dots \check{X}_{j_\ell} \dots X_{j_{k'}}) \star Q \right] \end{aligned}$$

On en déduit la formule de récurrence:

$$C_r(P, Q) = \frac{1}{k'} \sum_{\ell=1}^{k'} \sum_{s=0}^{r} C_{r-s} \Big(X_{j_\ell}, C_s(X_{j_1} \dots \check{X}_{j_\ell} \dots X_{j'_k}, Q) \Big)$$

Pour démontrer que le produit de Gutt coincide avec le produit de Lugo-Rieffel on va calculer $X \star_\hbar f$ pour le produit de Rieffel:

Théorème 3-18:
Soit $X_i (1 \le i \le n)$ une base de $\underline{\mathbf{g}}$ et soit f dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ ou $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ on a:

$$X_i \star_\hbar f = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} \frac{\hbar^k}{(2i\pi)^k} X_{m_k} C_{ij_1}^{m_1} C_{m_1 j_2}^{m_2} \dots C_{m_{k-1} j_k}^{m_k} \partial_{j_1 \dots j_k}^k f$$

Donc le produit $\star$ dans [19] coincide avec le produit $\star$ de Lugo-Rieffel (avec $\lambda = \frac{\hbar}{4i\pi}$).

Démonstration:

Soit f dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ tel que $\hat{f}$ soit à support compact, on a:

$$\begin{aligned}\langle X_i \star_\hbar f, \Phi \rangle &= \Big\langle \hat{f}(Y) \langle \hat{X}_i(X), \hat{\Phi}(X *_\hbar Y) \rangle \Big\rangle \\ &= \Big\langle \hat{f}(Y), \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\Phi}(X *_\hbar Y) \Big\rangle\end{aligned}$$

On rappelle la formule de Campbell-Hausdorff (voir [41])

$$\begin{aligned}X *_\hbar Y = & \sum_{\substack{m\geq 0 \\ p_i+q_i>0}} \hbar^{(\sum_1^m p_i + q_i)} \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{[X^{p_1} Y^{q_1} \dots Y^{q_m} X]}{p_1! \dots q_m!} \\ & + \sum_{\substack{m\geq 0 \\ p_i+q_i>0 \\ p_{m+1}\geq 0}} \hbar^{(\sum_1^m p_i+q_i)+p_{m+1}} \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{[X^{p_1} \dots Y^{q_m} X^{p_{m+1}} Y]}{p_1! \dots q_m! p_{m+1}!}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (X \star_\hbar Y)_{|X=0} = \sum_{\substack{m\geq 0 \\ p_i+q_i>0}} \frac{(-1)^m}{m+1} \hbar^{(\sum_1^m q_i)} \frac{[Y^{\sum q_i} X_i]}{q_1! \dots q_m!} +$$

$$+ \sum_{\substack{m\geq 0 \\ q_i>0}} \frac{(-1)^m}{m+1} \hbar^{((\sum_1^m q_i)+1)} \frac{[Y^{\sum q_i} X_i Y]}{q_1! \dots q_m!} + \sum_{\substack{m\geq 1 \\ q_i>0}} \frac{(-1)^m}{m+1} \hbar^{(\sum_1^{m-1} q_i)} \frac{[Y^{\sum_1^{m-1} q_i} X_i Y]}{q_1! \dots q_m!}$$

Un calcul simple montre que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} (X *_\hbar Y)_{|X=0} = & \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} \hbar^k [Y^k X_i] + \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} \hbar^{k+1} [Y^k X_i Y] \\ & + \sum_{k\geq 0} \hbar^{k+1} \frac{B_{k+1}^{(2)} - B_{k+1}}{(k+1)!} [Y^k X_i Y]\end{aligned}$$

où B_k^2 est $k^{\underline{\text{ème}}}$ nombre de Bernouilli généralisé défini par:

$$\frac{U^2}{(e^U - 1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k^{(2)} U^k}{k!}$$

On a la relation de récurrence (voir [42]):

$$B_k^{(2)} = (1-k)B_k - kB_{k-1}$$

Alors:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(X *_\hbar Y)_{|X=0} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!}\hbar^k (adY)^k X_i$$

D'où:

$$\langle X_i \star_\hbar f, \Phi \rangle = \frac{1}{2i\pi} \langle \hat{f}(Y), \hat{\Phi}'(Y) \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!}\hbar^k (adY)^k X_i \rangle$$

Ainsi:

$$X_i \star_\hbar f = -\frac{1}{2i\pi}\Big(\hat{f}'(Y) \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!}\hbar^k (adY)^k X_i\Big)^\vee$$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{B_k}{k!} \frac{\hbar^k}{(2i\pi)^k} X_{m_k} C_{ij_1}^{m_1} C_{m_1 j_2}^{m_2} \dots C_{m_{k-1} j_k}^{m_k} \partial_{j_1 \dots j_k}^k f$$

Définition 3-19:

Soit G un groupe de Lie, et soit α une action de G sur une variété M qui préserve la structure de Poisson. On dit qu'une déformation quantification stricte de A (Supposons que l'action correspondante α de G sur $C^\infty(M)$ envoie A dans lui-même) est invariante sous l'action α si:

1) Pour tout $\hbar \in I$ et $x \in G$, l'opérateur α_x sur A est un automorphisme $\star$ pour $\star_\hbar$, $*_\hbar$ et $\|\ \|_\hbar$.

2) Pour tout $f \in A$ et $\hbar \in I$ l'application $x \longmapsto \alpha_x(f)$ est une fonction C^∞ sur G, pour la norme $\|\ \|_\hbar$.

3) Il y a une action α de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G sur A qui est obtenue par dérivations $\star$ de A pour $\star_\hbar$ et $*_\hbar$, telle que pour $X \in \underline{g}$ et $f \in A$

$$\alpha_X(f) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\, \alpha_{exp(tX)}(f)$$

(en considérant la norme $\|\ \|_\hbar$).

Soit $Ad^\star$ la représentation coadjointe de G sur $\underline{g}^\star$. Il est bien connu que $Ad^\star$ préserve le crochet de Poisson linéaire. On voudrait bien étudier l'invariance de la déformation quantification qu'on a vue sur $\mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ sous l'action coadjointe.

L'action $Ad^\star$ de G sur $\underline{g}^\star$ donne une action sur $\mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ qu'on notera aussi $Ad^\star$. La transformée de Fourier, α, de cette action sur $\mathcal{S}(\underline{g})$ est donnée par:

$$\big(\alpha_x(\Phi)\big)(X) = \Phi\big(Adx^{-1}(X)\big)$$

L'action $Ad^\star$ de G sur $\mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ donne une action infinitésimale de $\underline{g}$ sur $\mathcal{S}(\underline{g}^\star)$ qu'on notera $ad^\star$ (voir [36]). Cette action est donnée par:

$$\big(ad^\star X(f)\big)(\mu) = -\big\langle df(\mu), adX^\star X(\mu)\big\rangle$$

Cette action préserve bien sûr le crochet de Poisson en ce sens que:

$$\{ad^\star X(f), g\} + \{f, ad^\star X(g)\} = ad^\star X(\{f, g\})$$

L'action infinitésimale $d\alpha$ correspondante à α est donnée par:

$$(d\alpha_Z \Phi)(X) = -\langle ad\, Z(X), d\Phi(X)\rangle$$

et elle est la transformée de Fourier de l'action infinitésimale $ad^\star$.

Proposition 3-20: [18]
Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente. Alors la déformation quantification stricte définie sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ dans le théorème 3-15 est invariante sous l'action $Ad^\star$ de G sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$.

Remarquons que le produit $\star$ de Lugo-Rieffel est covariant car $B_k = 0$ pour tout k impair supérieur ou égal à trois. Il est gradué mais il n'est pas tangentiel en général.

Contre exemple:
Soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Lie nilpotente de base $(X_0, X_1, \ldots, X_k, Y)$ vérifiant les relations de commutation:

$$[Y, X_i] = X_{i-1} \quad (i \geq 1) \quad ; \quad [Y, X_0] = 0 \quad ; \quad [X_i, X_j] = 0 \quad ; \quad i, j = 0, 1, \ldots k$$

Les orbites non triviales de la représentation coadjointe sont de dimension deux. Soit ξ_0 la fonction définie sur le dual $\underline{\mathbf{g}}^\star$ de $\underline{\mathbf{g}}$ par X_0. ξ_0 est invariante. Soient $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \eta)$ les fonctions associées à la base $(X_0, X_1, \ldots, X_k, Y)$. L'orbite du point $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \eta)$ est donnée par:

$$\Big\{\Big(\xi_0, \xi_1 + s\xi_0, \cdot\cdot, \xi_k + s\xi_{k-1} + \cdot\cdot \frac{s^k}{k!}\xi_0, \eta - t_k\xi_{k-1} - \cdot\cdot (\sum_{j=1}^{k} \frac{t_j s^{j-1}}{j!})\xi_0\Big), s, t_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdot\cdot, k\Big\}$$

Les orbites génériques ($\xi_0 \neq 0$) sont caractérisées par k fonctions rationnelles ρ_i définies par:

$$\rho_0 = \xi_0 \,,\ \rho_2 = \xi_2 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\xi_1}{\xi_0}\Big)^2 \xi_0 \,, \ldots \rho_k = \xi_k - \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)}\Big(\frac{\xi_1}{\xi_0}\Big)^{k-i} \rho_i - \frac{1}{k!}\Big(\frac{\xi_1}{\xi_0}\Big)^k \xi_0$$

D'après la formule obtenue à la fin de la démonstration du théorème 3-18, on voit qu'on a en particulier pour cette algèbre de Lie:

$$X_i \star_\hbar f = \sum_{k=0}^{i} \frac{B_k}{k!} \frac{\hbar^k}{(2i\pi)^k} X_{mk} \frac{\partial^k f}{(\partial y)^k}$$

pour tout $0 \leq i \leq k$ et f dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ ou $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$.En particulier on a:

$$
\begin{aligned}
X_0 \star_\hbar f &= X_0 f \\
X_1 \star_\hbar f &= X_1 f - \frac{1}{2\times 2i\pi} X_0 \frac{\partial f}{\partial y} \\
X_2 \star_\hbar f &= X_2 f - \frac{1}{2\times 2i\pi} X_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(2i\pi)^2} X_0 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}
\end{aligned}
$$

$X_2X_0 - \frac{1}{2}X_1^2$ est un polynôme invariant sur une orbite donnée et on a:

$$
\begin{aligned}
C_2(X_2X_0, f) &= \frac{1}{2}C_2(X_2, C_0(X_0, f)) + \frac{1}{2}C_0(X_0, C_2(X_2, f)) \\
&= \frac{1}{12}\frac{1}{(2i\pi)^2} X_0^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}
\end{aligned}
$$

et

$$
C_2(\frac{1}{2}X_1^2) = \frac{1}{2}C_1(X_1, C_1(X_1, f)) = \frac{1}{8}\frac{1}{(2i\pi)^2} X_0^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}
$$

$\star_\hbar$ n'est pas tangentiel car

$$
C_2(X_2X_0 - \frac{1}{2}X_1^2, f) = -\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{(2i\pi)^2} X_0^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \neq 0
$$

Remarquons que l'algèbre $\underline{\mathbf{g}}_{5,4}$ définie à la suite de la proposition 3-11 fournit aussi un exemple d'algèbre de Lie sur laquelle $\star_\hbar$ n'est pas tangentiel puisque le produit $\star_\hbar$ est différentiel or on a vu que sur $\underline{\mathbf{g}}_{5,4}$ il n'y a pas de produit $\star$ définie sur $S(\underline{\mathbf{g}})$ différentiel et tangentiel.

III-5 ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES SPECIALES:

On a vu qu'il est impossible, sur le dual d'une algèbre de Lie nilpotente générale, de définir partout un produit $\star$ tangentiel et différentiel. La classe des algèbres nilpotentes spéciales est en fait une classe des algèbres pour laquelle une telle construction est possible.

Définition 3-21

Une algèbre de Lie nilpotente est spéciale si elle contient un idéal $\underline{m}$ abélien de codimension k où $2k$ est la dimension maximale des orbites du groupe adjoint G dans $\underline{\mathbf{g}}^\star$.

Exemples :

1) L'algèbre des matrices $2m \times 2m$ strictement triangulaires supérieures; l'idéal $\underline{m}$ a pour dimension m^2 et est composé des matrices A telles que $A_{ik} = 0$ si $i > n$ ou $k < n$.

2) L'algèbre de dimension $k+2$ et de base $\{X_0, X_1, \ldots, X_k, Y\}$ qui satisfait les relations de commutation:

$$[Y, X_i] = X_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, k) \quad \text{et} \quad [Y, X_0] = 0$$

tous les autres crochets sont nuls.

Remarquons que les algèbres nilpotentes spéciales sont étudiées par Corwin et Greenleaf [43].

Si $\underline{\mathbf{g}}$ est une algèbre spéciale de dimension n, on choisit une suite croissante d'idéaux $\underline{\mathbf{g}}_i$ telle que $\underline{\mathbf{g}}_{n-k} = \underline{m}$. Donc pour tout $i \leq n-k, I(\underline{\mathbf{g}}_i) = S(\underline{\mathbf{g}}_i)$ et les orbites sont réduites à des points, en plus si $n-k < i \leq n, I(\underline{\mathbf{g}}_i) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$ et la dimension maximale des orbites est $d_i = 2(i+k-n)$.

Bien sûr, pour utiliser les produits$\star$ pour la construction des représentations irréductibles du groupe de Lie G correspondant à $\underline{\mathbf{g}}$, on a besoin de restreindre le produit$\star$ aux orbites coadjointes. Comme le produit$\star$ étudié dans la section précédente n'est pas tangentiel, il n'est pas utile pour ces questions. Dans cette section, on donne un produit$\star$ formel et tangentiel défini sur tout le dual d'une algèbre de Lie nilpotente spéciale quelconque. Ce produit$\star$ a été construit par Arnal, Cahen, et Gutt. Puis on définit un produit$\star$ convergent et tangentiel défini aussi sur tout $\underline{\mathbf{g}}^\star$ pour les mêmes algèbres, par déformation de la formule de Rieffel en utilisant une "nouvelle appplication exponentielle" plus précisément au lieu d'utiliser l'application exponentielle, on définit un isomorphisme Φ entre $\underline{\mathbf{g}}$ et G qui est en fait un produit d'exponentiels. On trouve que ces deux produits $\star$ coincident.

1 - Produit $\star$ formel:

Ce protuit $\star$ est construit par Arnal Cahen et Gutt dans [24].

Proposition 3-22

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente spéciale de dimension n. Il existe un produit$\star$ sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ défini sur $S(\underline{\mathbf{g}})$, différentiel, gradué et tangentiel sur l'ouvert de Zariski Ω.

Démonstration

Ce produit $\star$ se construit par récurrence à partir de la donnée de la chaîne croissante d'idéaux $\underline{\mathbf{g}}_i$ et d'une base adaptée $\{X_j; 1 \leq j \leq n\}$ de $\underline{\mathbf{g}}$ telle que $X_i \in \underline{\mathbf{g}}_i \backslash \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$. On pose sur $S(\underline{\mathbf{g}}_i)$:

$$P \star_i Q = PQ \quad \text{si} \quad P, Q \in S(\underline{\mathbf{g}}_i), \quad i \leq n-k$$

$$P \star_i Q = \sum_{\ell=0}^{\infty} \nu \ell \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(-1)^m}{m!(\ell-m)!} (D_i)^m \partial_i^{\ell-m} P \star_{i-1} (D_i)^{\ell-m} \partial_i^m Q$$

si $P, Q \in S(\underline{\mathbf{g}}_i)$, $\quad n-k < i \leq n$ où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$ et D_i est l'unique dérivation de $\star_{i-1}$ dans $S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$:

$$D_i(P \star_{i-1} Q) = (D_i P) \star_{i-1} Q + P \star_{i-1} D_i Q$$

telle que:
$\bullet D_i = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{2k} D_{2k}^{(i)}$.
$\bullet D_0^i = \{X_i, \cdot\}$.
$\bullet D_{2k}^{(i)}$ est un opérateur différentiel sur $\underline{\mathbf{g}}_{i-1}^\star$, à coefficients polynomiaux, s'annulant sur les constantes et sur les fonctions linéaires et envoyant S^p dans S^{p-2k}.
$\bullet D_i$ est étendue à $S(\underline{\mathbf{g}}_i)$ (et donc à $C^\infty(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$) en posant $D_i(X_i P) = (D_i P) X_i$
$\bullet \star_{i-1}$ est étendu à $S(\underline{\mathbf{g}}_i)$ (et donc à $C^\infty(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$) en posant $X_i \star_{i-1} P = X_i \cdot P$, pour tout $P \in S(\underline{\mathbf{g}}_i)$.

Supposons que $\star_{i-1}$ soit connu sur $\underline{\mathbf{g}}_{i-1}^\star$, satisfaisant toutes les hypothèses de la proposition (ce qui est vrai si $i-1 \leq n-k$) et cherchons à définir la série D_i. On connaît $D_0^{(i)}$, supposons connu $D_{2j}^{(i)}$ pour $j = 0, 1, \ldots, \ell$ tels que l'équation:

$$(1) \qquad D_i(P \star_{i-1} Q) = (D_i P) \star_{i-1} Q + P \star_{i-1} (D_i Q) \quad (P, Q \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}))$$

soit satisfaite jusqu'à l'ordre $2\ell + 1$. Posons alors:

$$P \star' Q = exp - tD'(exp\, tD' P \star_{i-1} exp\, tD' Q) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

où $D' = \sum_{j=0}^{2\ell} \nu^{2j} D_{2j}^i$
$exp\, tD'$ a un sens car le coefficient de chaque puissance de ν est une somme finie de termes. En plus $\star'$ est un produit associatif, si on dérive sa définition par rapport à t, il vient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(P \star' Q) = exp - tD' \left[-D'(exp\, tD' P \star_{i-1} D' exp\, tD' Q) + (D' exp\, tD' P \star_{i-1} exp\, tD' Q) \right.$$
$$\left. + (exp\, tD' P \star_{i-1} D' exp\, tD' Q) \right]$$

Donc les termes d'ordres $0, 1, \ldots, 2\ell + 1$ de $\star'$ coincident avec ceux de $\star_{i-1} \cdot C'_{2\ell+2}$ et $C_{2\ell+2}^{i-1}$ diffèrent d'un cocycle et à cause de la parité, ce cocycle est un cobord:

$$C'_{2\ell+2} = C_{2\ell+2}^{i-1} - \tilde{\delta} D_{2\ell+2}^{(i)}$$

et comme modulo les termes d'ordre $2\ell+3$,

$$exp\, t(D' + \nu^{2\ell+2} D^{(i)}_{2\ell+2}) = exp\, tD' \circ exp\, t\nu^{2\ell+2} D^{(i)}_{2\ell+2}$$

On a à l'ordre $2\ell+3$ près:

$$\begin{aligned} P \star'' Q &= exp - t(D' + \nu^{2\ell+2} D^{(i)}_{2\ell+2})\big[exp\, t(D' + \nu D^{(i)}_{2\ell+2})P \star_{i-1} exp\, t(D' + \nu D^{(i)}_{2\ell+2})Q\big] \\ &= P \star_{i-1} Q \end{aligned}$$

en dérivant en $t=0$, on trouve que $D' + \nu D^{(i)}_{2\ell+2}$ est une solution de (1) jusqu'à l'ordre $2\ell+2$.

Maintenant, $D^{(i)}_{2\ell+2}$ est complètement déterminé si on lui impose en plus la nulleté sur les constantes et sur les fonctions linéaires,

$$D^{(i)}_{2\ell+2}(X_j) = 0 \qquad \forall j = 1, \ldots, i-1$$

Alors à l'ordre $2\ell+3$, le coefficient de $P \star'' Q$ diffère de celui de$P \star_{i-1} Q$ par une expression de la forme:

$$A(P,Q) = C''_{2\ell+3}(P,Q) - C^{i-1}_{2\ell+3}(P,Q) = \sum \alpha_{abc} D^a_{2m} C^{i-1}_r (D^b_{2n}P, D^c_{2s}Q)$$

où

$$\alpha_{abc} \in \mathbb{R}, \quad D^a_{2m} = \prod_j (D^{(i)}_{2m_j})^{a_j}, \qquad a = (a_j), \quad m = (m_j)$$

et si $\quad 2ma = 2\sum_j m_j a_j, \quad 2ma + 2nb + 2sc + r = 2\ell + 3.\quad$ r est donc nécessairement impair et A est un 2-cocycle impair. Donc:

$$A(P,Q) = \sum A^{i_1 i_2} \partial_{i_1} P \partial_{i_2} Q.$$

où

$$A^{i_1 i_2} = A(X_{i_1}, X_{i_2}) = \sum \alpha_{abc} D^a_{2m} C_r (D^b_{2n} X_{i_1}, D^c_{2s} X_{i_2})$$

est nul par construction puisque le seul terme non nul de $D^b_{2n}X_i$, est $D^{b_0}_0 X_{i_1} \in \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$ et que $C_r(X_i, X_j)$ est nul si r est supérieur ou égal à 3, il ne reste donc que:

$$D^a_{2m} C_1 (D^{b_0}_0 X_{i_1}, D^{c_0}_0 X_{i_2}) = D^a_{2m}\big([D^{b_0}_0 X_{i_1}, D^{c_0}_0 X_{i_2}]\big)$$

où $2ma + 1 = 2\ell + 3 \quad$ c'est à dire $\quad ma = l + 1 > 0$. Mais $D^a_{2m} Z$ est nul si $Z \in \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$, finalement A est identiquement nul et $\star''$ coincide avec $\star_{i-1}$ jusqu'à l'ordre $2\ell+3$, on a donc (1) jusqu'à l'ordre $2\ell+3$ en posant:

$$D_i = D^{(i)}_0 + \nu^2 D^{(i)}_2 + \ldots \nu^{2\ell+2} D^{(i)}_{2\ell+2} + \cdots$$

(1) est par suite vraie à tout ordre. On remarque que si $D_2^{(i)}P,\ldots,D_{2\ell}^{(i)}P$ sont nuls pour tout P de $S(\underline{m})$, il en est de même pour $D_{2\ell+2}^{(i)}P$ puisque (1) implique alors:

$$X_jD_{2\ell+2}^{(i)}P - D_{2\ell+2}^{(i)}(X_jP) = 0 \qquad \forall P \in S(\underline{m}), \forall j \leq n-k.$$

On prolonge $\star_{i-1}$ et D_i à $\underline{\mathbf{g}}_i^\star$, on définit $\star_i$, un calcul direct montre que $\star_i$ est associatif:

$$(P\star_i Q)\star_i R = \sum_{\ell=0}^{\infty}\nu^\ell \sum_{m=0}^{\ell}\frac{(-1)^m}{m!(\ell-m)!}D_i^m\partial_i^{\ell-m}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\nu^j\sum_{n=0}^{j}\frac{(-1)^n}{n!(j-n)!}D_i^n\partial_i^{j-n}P$$
$$\star_{i-1}D_i^{j-n}\partial_i^nQ\Big)\star_{i-1}D_i^{\ell-m}\partial_i^mR$$

$$= \sum_{\ell,j,n,m}\nu^{\ell+j}\frac{(-1)^{m+n}}{m!(\ell-m)!n!(j-n)!}D_i^m\partial_i^{\ell-m}\big(D_i^n\partial_i^{j-n}P\star_{i-1}D_i^{j-n}\partial_i^nQ\big)\star_{i-1}D_i^{\ell-m}\partial_i^mR$$

Mais par construction , pour tous $P,Q\in S(\underline{\mathbf{g}}_i)$

$$\partial_i(P\star_{i-1}Q) = (D_iP)\star_{i-1}Q + P\star_{i-1}(D_iQ)\partial_i(P\star_{i-1}Q)$$
$$\partial_i(P\star_{i-1}Q)(\partial_iP)\star_{i-1}Q + P\star_{i-1}\partial_iQ, \qquad D_i\circ\partial_i = \partial_i\circ D_i$$

On a donc:

$$(P\star_i Q)\star_i R = \sum_{\ell,j,n,m}\nu^{\ell+j}\frac{(-1)^{m+n}}{m!n!(\ell-m)!(j-n)!}\sum_{p=0}^{\ell-m}\sum_{q=0}^{m}C_{\ell-m}^pC_m^qD_i^{q+n}\partial_i^{j-n+p}P$$
$$\star_{i-1}D_i^{j-n+m-q}\partial_i^{n+\ell-m-p}Q\star_{i-1}D_i^{\ell-m}\partial_i^mR$$

$$= \sum_{\ell,j,n,m,p,q}\nu^{\ell+j}\frac{(-1)^{m+n}}{n!(j-n)!p!q!(\ell-m-p)!(m-q)!}D_i^{q+n}\partial_i^{j-n+p}P\star_{i-1}D_i^{j-n+m-q}D_i$$
$$\partial_i^{n+\ell-m-p}Q\star_{i-1}D_i^{\ell-m}D_i^mR$$

On pose:

$$q+n=r \quad , \quad j+q+p=s \quad , \quad p=p$$

$$n=n \quad , \quad \ell-(p+q)=t \quad , \quad m-q=u$$

donc

$$0\leq r\leq s \quad , \quad 0\leq u\leq t \quad , \quad 0\leq n\leq r \quad , \quad 0\leq p\leq s-r$$

L'application:

$$\Phi(q,\ell,n,j,p,m)\longmapsto(r,s,p,n,t,u)$$

est une bijection entre les ensembles considérés. Donc:

$$(P \star_i Q) \star_i R = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{s} \nu^s \frac{(-1)^r}{r!(s-r)!} D_i^r \partial_i^{s-r} P \star_{i-1} [\sum_{t=0}^{\infty} \nu^t \sum_{u=0}^{t} \sum_{n=0}^{r} \sum_{p=0}^{s-r}$$

$$\frac{(-1)^u}{u!(t-u)!} \frac{r!}{n!(r-n)!} \frac{(s-r)!}{(s-r-p)!p!} D_i^{(s-r-p)+u} \partial_i^{t-u+n} Q \star_{i-1} D_i^{p+t-u} \partial_i^{u+r-n} R]$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \nu^s \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(s-r)!} D_i^r \partial_i^{s-r} P \star_{i-1} D_i^{s-r} \partial_i^r (Q \star_i R)$$

$$= P \star_i (Q \star_i R)$$

Supposons que $\star_{i-1}$ soit gradué et soit $P \in S^p, Q \in S^q$,on suppose aussi que $D_{2j}^{(i)}$ envoie S^p dans S^{p-2j} $\forall p$, $\forall j = 0, \dots, \ell$ (c'est vrai si $j = 0$).
Alors:

$$\tilde{\partial} D_{2\ell+2}^{(i)}(P, Q) = (C'_{2\ell+2} - C_{2\ell+2}^{i-1})(P, Q) = \sum \alpha_{abc} D_{2m}^a C_r^{i-1}(D_{2n}^b P, D_{2s}^c Q)$$

où $2ma + 2nb + 2sc + r = 2\ell + 2$
donc:

$$\tilde{\partial} D_{2\ell+2}^{(i)}(P, Q) \in S^{p+q-(2\ell+2)}$$

et la solution unique choisie à notre équation satisfait par construction:

$$D_{2\ell+2}^{(i)}(S^p) \subset S^{p-(2\ell+2)}$$

ceci est vrai sur $\underline{\mathbf{g}}_{i-1}^\star$ donc par prolongement sur $\underline{\mathbf{g}}_i^\star$, alors:

$$C_r^{(i)}(P, Q) = \sum_{\ell=0}^{r} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s}{s!(\ell-s)!} \sum_{\substack{a,b \quad t.q \\ 2ma=s \\ 2nb=\ell-s}} \alpha_{ab} C_{r-\ell-2ma-2nb}(D_{2m}^a \partial_i^{\ell-s} P, D_{2n}^b \partial_i^s Q)$$

est dans S^{p+q-r}. Parsuite $\star_i$ est gradué.
Vérifions que la formule:

$$P \star_i Q : \sum_{\ell=0}^{\infty} \nu \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(-1)^m}{m!(\ell-m)!} (D_i)^m \partial_i^{l-m} P \star_{i-1} (D_i)^{\ell-m} \partial_i^m Q$$

définit un produit $\star$.
Il est clair que:

$$C_0^{(i)}(P, Q) = P.Q$$

$$C_1^{(i)}(P, Q) = \{P, Q\}_i = \{P, Q\}_{i-1} + \partial_i P D_i Q - D_i P \partial_i Q$$

où $\{\, ,\, \}_r$ désigne le crochet de Poisson sur $S(\underline{\mathbf{g}}_r)$ étendu à $S(\underline{\mathbf{g}})$.

$$C_r^{(i)}(P,Q) = (-1)^r C_r^{(i)}(Q,P).$$

$$P \star_i Q = P \star_{i-1} Q \quad \text{pour tout} \quad P, Q \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}).$$

En particulier $u \star_i v = u \cdot v$ si u et v appartiennent à $S(\underline{m})$.
Si $Q \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$:

$$\begin{aligned} X_i \star_i Q &= X_i Q + \nu\{X_i, Q\} + \nu^3 D_2^{(i)} Q + \dots \\ &= X_i Q + \nu D_i Q \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il faut démontrer que le produit$\star_i$ est tangentiel sur Ω:
Soit $a \in I(\underline{\mathbf{g}}_i) \subset S(\underline{m})$ alors:

$$a \star_i P = \sum_{\ell=0}^{\infty} \nu^\ell \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (D^{(i)})^\ell a \star_{i-1} \partial_i^\ell P.$$

Pour montrer que ce produit$\star$ est tangentiel, il suffit de montrer que $D^{(i)} a = \{X_i, a\} = 0$ (car a est invariant).
On va démontrer que pour tout $u \in S(\underline{m})$, $\quad D^{(i)} u = \{X_i, u\}$. On va procéder par induction sur le degré de u. Pour le degré 0 et 1. Ceci est vrai par construction. Pour $X_j \in \underline{m}$ et $u \in S^\ell(\underline{m})$:

$$\begin{aligned} D^{(i)}(X_j \cdot u) &= D^{(i)}(X_j \star_{i-1} u) \\ &= D^{(i)} X_j \star_{i-1} u + X_j \star_{i-1} D^{(i)} u. \\ &= \{X_i, X_j\} \star_{i-1} u + X_j \star_{i-1} \{X_i, u\} \cdot \\ &= \{X_i, X_j\} u + X_j \{X_i, u\} \\ &= \{X_i, X_j u\} \end{aligned}$$

Donc $a \star_i P = a \star_{i-1} P$ et par induction sur $i, a \star_i P = aP$ ce qui prouve d'après la proposition 3-6, que $\star$ est tangentiel.

<u>Contre exemple :</u>

Le produit $\star$ formel défini dans le proposition précèdente est différent de celui d'Arnal-Cortet comme le montre l'exemple suivant: soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Lie nilpotente spéciale dont une base $(Z, Y_1, Y_2, Y_3, X_1, X_2, X_3)$ vérifie les relations de commutation:

$$[X_1, Y_1] = Z, \quad [X_2, Y_2] = Z, \quad [X_3, Y_3] = Y_2, \quad [X_3, Y_2] = Y_1 \quad \text{et} \quad [X_3, Y_1] = Z$$

les autres crochets sont nuls.
la paramétrisation de M. Vergne au début de cette section s'écrit dans ce cas:

$$\lambda_{c1} = Y_1; \quad \mu_1 = Z; \quad p_1 = X_1; \quad q_1 = \frac{Y_1}{Z}$$

$$\lambda_{c2} = Y_2; \quad \mu_2 = Z; \quad p_2 = X_2; \quad q_2 = \frac{Y_2}{Z}$$

$$\lambda_{c3} = Y_3; \quad \mu_3 = Y_2; \quad p_3 = X_3; \quad q_3 = \frac{Y_3}{Y_2}$$

$$\lambda = Z$$

si on note $\star_{AC}$ le produit d'Arnal et Cortet, et $\star_7$ le produit $\star$ sur $\underline{\mathbf{g}}$ défini dans la proposition précédente, un calcul simple montre que

$$X_3 \star_{AC} Q = X_3 Q + \nu\{X_3, Q\}$$

pour tout $Q \in S(\underline{\mathbf{g}})$ car $P^n(X_3, Q) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
D'autre part si on reprend les mêmes notations que celles de la démonstration de la proposition précédente, on a:

$$X_3 \star_7 Q = X_3 Q + \nu D_7 Q$$

où D_7 est une dérivation de $\star_6$.
pour montrer que $\star_{AC}$ est différent de $\star_7$, il suffit de montrer que $\{X_3, \cdot\}$ n'est pas une dérivation de $\star_6$.
Posons $Y_3 = \mu$. On a:

$$\begin{aligned}\{X_3, \cdot\} &= Y_2 \frac{\partial}{\partial Y_3} + Y_1 \frac{\partial}{\partial Y_2} + Z \frac{\partial}{\partial Y_1} \\ &= \lambda q_2 \frac{\partial}{\partial \mu} + q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_1}\end{aligned}$$

Soit $u = \mu$ et $v = p_2$, un calcul direct montre que

$$\{X_3, u \star_6 v\} = \{X_3, uv\} = \lambda q_2 p_2$$

et que:

$$\{X_3, u\} \star_6 v + u \star_6 \{X_3, v\} = \lambda q_2 p_2 - \nu\lambda$$

Donc $\{X_3, \cdot\}$n'est pas une dérivation de $\star_6$.

2 - Produit $\star$ convergent:

Dans cette partie, on montre que le produit$\star$ sur les algèbres nilpotentes spéciales défini dans le paragraphe précédent fournit une déformation quantification stricte.
Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente spéciale de dimension n et soit $\underline{\mathbf{g}}_i$ une suite croissante d'idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$ et $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ une base de $\underline{\mathbf{g}}$ telle que $X_i \in \underline{\mathbf{g}}_i \backslash \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on identifie $\underline{\mathbf{g}}_i$ avec son groupe simplement connexe par l'isomorphisme:

$$\underline{\mathbf{g}}_i \longrightarrow G^i$$

$$Y \longmapsto \phi(Y) = e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i} e^{\frac{\hbar}{2}y_{i-1}X_{i-1}} \dots e^{\frac{\hbar}{2}y_1 X_1} e^{\frac{\hbar}{2}y_1 X_1} \dots e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i}$$

où y_i désigne le $j^{\underline{\text{ème}}}$ coordonnée de Y. Dans la suite, $G^i_\hbar$ désignera le groupe correspondant à $\underline{\mathbf{g}}_i$ muni du produit $*^i_\hbar$:

$$X *^i_\hbar Y = \phi_i^{-1}(\phi_i(X) \cdot \phi_i(Y))$$

et φ_i l'application:

$$\underline{\mathbf{g}}_i \longrightarrow \underline{\mathbf{g}}_i \qquad Y \longmapsto \varphi_i(Y) = (exp^{-1} \circ \phi_i)(Y)$$

Remarquons que le produit dans l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}_i$ peut s'écrire aussi:

$$X *^i_\hbar Y = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(X) \cdot \varphi_i(Y))$$

<u>**Théorème 3 - 23**</u> :

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente spéciale de dimension n et soit $\underline{\mathbf{g}}_i$ une suite croissante d'idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$ et $\{X_j, 1 \leq j \leq n\}$ une base de $\underline{\mathbf{g}}$ telle que $X_i \in \underline{\mathbf{g}}_i \setminus \underline{\mathbf{g}}_{i-1}$. Le produit $\star$, $\star^i_\hbar$ défini sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$ par:

$$f \star^i_\hbar g(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_i \times \underline{\mathbf{g}}_i} \hat{f}(X)\hat{g}(Y) e^{2i\pi < \phi_i^{-1}(\phi_i(X)\cdot\phi_i(Y)), z>} dX\, dY$$

$$\text{où} \quad \phi_i(Y) = e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i} e^{\frac{\hbar}{2}y_{i-1}X_{i-1}} \dots e^{\frac{\hbar}{2}y_1 X_1} e^{\frac{\hbar}{2}y_1 X_1} \dots e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$ est différentiel, gradué et est tangentiel sur l'ouvert de Zariski Ω(voir la définition donnée à la page 62 pour donner un sens à cette formule lorsque f et g sont des polinomes).
En plus, si on définit avec ce produit, une involution et une norme sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$ par

$$f^*(X) = \bar{f}(X)$$

et $\| f \|_\hbar$ est la norme de $\hat{f}$ dans $C^*(G^i_\hbar)$, alors cette structure fournit une déformation quantification stricte de $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$ dans la direction de $-(2\pi)^{-1}\{\,\}_i$ où $\{\,\}_i$ désigne le crochet de Poisson linéaire sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$.

<u>Démonstration</u>

La formule dans le théorème définit clairement un produit associatif car:

$$f \star^i_\hbar g = (\hat{f} \times^i_\hbar \hat{g})^\vee$$

où $\times^i_\hbar$ désigne la convolution des fonctions sur $G^i_\hbar$;
Une démonstration analogue à celle de la proposition 3-16 prouve cette formule définit un produit$\star$.
Pour démontrer la première partie du théorème, il suffit de montrer que ce produit$\star$ coincide avec le produit$\star$ formel dans la proposition précédente.

Démontrons tout d'abord trois lemmes:

Lemme 3-24:

Pour Y dans $\underline{\mathbf{g}}_{i-1}$ et z dans $\underline{\mathbf{g}}^\star_{i-1}$, on pose:

$$Y^t = \varphi_{i-1}^{-1}(e^{adtX_i}\varphi_{i-1}(Y))$$

Si f est dans $S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$ on définit:

$$f_i^t(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_{i-1}} \hat{f}(Y)e^{2i\pi<Y^t,z>}dy$$

alors:

$$Dif = \frac{d}{dt}f_i^t\ |_{t=0}, \qquad \forall f \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$$

Démonstration :

L'application $t \longmapsto Y^t$ est un groupe à paramètre, en effet:

$$\begin{aligned} Y^{t+s} &= \varphi_{i-1}^{-1}(e^{ad(t+s)X_i}\varphi_{i-1}(Y)) \\ &= \varphi_i^{-1}(e^{adtX_i}\varphi_{i-1}(\varphi_i^{-1}(e^{adsX_i}\varphi_{i-1}(Y)))) \\ &= (Y^s)^t. \end{aligned}$$

D'autre part, on montre facilement que:

$$X^t *_\hbar^{i-1} Y^t = (X *_\hbar^{i-1} Y)^t$$

En fait:

$$\begin{aligned} X^t *_\hbar^{i-1} Y^t &= \varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(X^t)\cdot\varphi_{i-1}(Y^t)) \\ &= \varphi_{i-1}^{-1}(e^{ad\,tX_i}\varphi_{i-1}(X)\cdot e^{ad\,tX_i}\varphi_{i-1}(Y)) \\ &= \varphi_{i-1}^{-1}(e^{ad\,tX_i}(\varphi_{i-1}(X)\cdot\varphi_{i-1}(Y))) \\ &= \varphi_{i-1}^{-1}(e^{ad\,tX_i}\varphi_{i-1}(X *_\hbar^{i-1} Y)) \\ &= (X *_\hbar^{i-1} Y)^t. \end{aligned}$$

Si on pose $Y' = Y^t$ alors on aura $dY' = dY$. En effet on peut montrer en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff que:

$$\varphi_{i-1}(Y) = \hbar Y + \sum_{\substack{i_1>0 \\ m_i>n-k}} \alpha^m_{i_1,j_1,k'}\hbar^{2k'+1}y_{m_1}\dots y_{m_{2k'}}y_{i_1}X_{j_1}$$

où $m = (m_1,\dots,m_{2k'})$; $j_1 < sup\{i_1,m_1,\dots,m_{2k'}\}$ et $\alpha^n_{i_1,j_1,k'} \in \mathbb{R}$
Donc $d\varphi_{i-1}(Y)$ est une matrice $i-1\times i-1$ triangulaire inférieure $(a_{\ell j})$ avec $a_{\ell\ell} = \hbar$ pour tout $1 \le \ell \le i-1$ et $(d\varphi_{i-1}^{-1})(z)$ est aussi une matrice $i-1\times i-1$ triangulaire inférieure $(b_{\ell j})$ avec $b_{\ell\ell} = \hbar^{-1}$ pour tout $1 \le \ell \le i-1$.

Ainsi:

$$f_i^t(z) = \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(Y^{-t}) e^{2i\pi<Y,z>} dY$$

Maintenant on montre que:

$$f_i^t \star_\hbar^{i-1} g_i^t = (f \star_\hbar^{i-1} g)_i^t.$$

On a:

$$\begin{aligned}
(f_i^t \star_\hbar^{i-1} g_i^t)^\wedge(Y) &= \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}_i^t(X)\hat{g}_i^t(X^{-1} *_\hbar^{i-1} Y) dX \\
&= \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(X^{-t})\hat{g}(X^{-1} *_\hbar^{i-1} Y)^{-t} dX \\
&= \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(X^{-t})\hat{g}((X^{-1})^{-t} *_\hbar^{i-1} Y^{-t}) dX. \\
&= \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(X')\hat{g}((X')^{-1} *_\hbar^{i-1} Y^{-t}) dX'. \\
&= (f \star_\hbar^{i-1} g)^\wedge(Y^{-t}) \\
&= (f \star_\hbar^{i-1} g)_i^{t\wedge}(Y)
\end{aligned}$$

Donc l'application $f \longmapsto \frac{d}{dt} f_i^t(z)_{|_{t=0}}$ est une dérivation de $(S(\mathbf{g}_{i-1}), \star_\hbar^{i-1})$, et:

$$\frac{d}{dt} f_i^t(z)_{|_{t=0}} = \sum_s \hbar^s D^s f.$$

Il est clair que $D^{2s+1} f = 0$ pour tout s car:

$$\frac{d}{dt} f_i^t(z)|_{t=0} = 2i\pi \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(y) < d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(Y)) ad X_i \varphi_{i-1}(Y), z > e^{2i\pi<Y,z>} dY$$

et $(d\varphi_{i-1}(\cdot))^{-1}$ et $\varphi_{i-1}(\cdot)$ ne contiennent que des puissances impaires en $\hbar$. Un calcul direct montre que:

$$D^o f(z) = 2i\pi \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(y) \sum C_{ij}^q y_j z_q e^{2i\pi<y,z>} dY$$

et

$$\begin{aligned}
D^{2\ell'} f = 2i\pi \int_{\mathbf{g}_{i-1}} \hat{f}(Y) \sum_{\ell=1}^{i-1} \Big[\sum_{q=1}^{\ell-1} \Big(a_{q\ell}^{\ell'-1} \sum C_{ij}^q y_j + \sum_{k'+k''+1=\ell'} a_{q\ell}^{k''} \alpha_{i_1,j_1 k'}^m y_{m_1} \dots y_{m_{2k'}} y_{i_1} C_{ij_1}^q \Big) \\
+ \sum \alpha_{i_1,j_1,\ell'}^m y_{m_1} \dots y_{m_{2\ell'}} y_{i_1} C_{ij_1}^\ell \Big] z_\ell e^{2i\pi<Y,z>} dY.
\end{aligned}$$

où $a_{q\ell}^{k"} = \beta_{q\ell}^j y_{j_1} \dots y_{j_{2k"+2}}$, $\quad j = (j_1, \dots, j_{2k"+2})$ et $\beta_{q\ell}^j \in \mathbb{R}$

Ainsi $D^o = \{X_i, \cdot\}$ et $D^{2\ell}$ envoie $\mathcal{S}^p$ dans$\mathcal{S}^{p-2\ell'}$, s'annule sur les constantes et sur les fonctions linéaires. Comme la dérivation D_i définie dans [24] est l'unique vérifiant ces propropiétés, on a:

$$D_i f = \frac{d}{dt} f_i^t|_{t=0} \qquad \forall f \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})$$

.

Lemme 3-25:

Soit $f \in S(\underline{\mathbf{g}}_i) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)$, alors on a:

$$X_i \star_\hbar^i f(z) = X_i f + \frac{\hbar}{2} \int_{\underline{\mathbf{g}}_i} \hat{f}(Y) < d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(\vec{Y})) ad X_i \varphi_{i-1}(\vec{Y}), z > e^{2i\pi<Y,z>} dY$$

et pour tout $j < i$:

$$X_j \star_\hbar^i f(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_i} \hat{f}(Y) < d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(\vec{Y}))(exp(-ad\frac{\hbar}{2} y_i X_i)(\hbar X_j)\varphi_{i-1}(\vec{Y})), z > e^{2i\pi<Y,z>} dY$$

où $\vec{Y} = Y - y_i X_i$
En particulier si $f \in S(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}^\star)$ on a:

$$X_i \star_\hbar^i f = X_i f + \frac{\hbar}{4i\pi} D_i f$$

et pour tout $j < i$

$$X_j \star_\hbar^i f = X_j \star_\hbar^{i-1} f$$

Ainsi ce produit$\star$ coincide avec celui d'Arnal, Cahen et Gutt avec $\nu = \frac{\hbar}{4i\pi}$.

Démonstration :

On a:

$$\phi_i(X)\phi_i(Y) = e^{\frac{\hbar}{2}(x_i+y_i)X_i} e^{-\frac{\hbar}{2}y_i x_i} e^{\varphi_{i-1}(\vec{X})} e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i} e^{\frac{\hbar}{2}x_i X_i} e^{\varphi_{i-1}(\vec{Y})} e^{-\frac{\hbar}{2}x_i X_i} e^{\frac{\hbar}{2}(x_i+y_i)X_i}$$

L'application $\Psi : t \longmapsto e^{-\frac{\hbar}{2}y_i X_i} e^{t\varphi_{i-1}(\vec{X})} e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i}$ est un groupe à un paramètre donc $\Psi(t) = e^{tz}$, où

$$z = \frac{\partial \Psi}{\partial t}|_{t=0} = e^{-\frac{\hbar}{2}y_i X_i} \varphi_{i-1}(\vec{X}) e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i}$$

On montre facilement que:

$$z = e^{-ad\frac{\hbar}{2}y_i X_i}(\varphi_{i-1}(\vec{X}))$$

D'où

$$e^{-\frac{\hbar}{2}y_i X_i} e^{\varphi_{i-1}(\vec{X})} e^{\frac{\hbar}{2}y_i X_i} = exp\big(e^{-ad\frac{\hbar}{2}y_i X_i}(\varphi_{i-1}(\vec{X}))\big)$$

On montre de même que

$$e^{\frac{\hbar}{2}x_i X_i} e^{\varphi_{i-1}(\vec{Y})} e^{-\frac{\hbar}{2}x_i X_i} = exp\big(e^{ad\frac{\hbar}{2}x_i X_i}(\varphi_{i-1}(\vec{Y}))\big)$$

Donc:

$$\phi_i(X)\cdot\phi_i(Y) = e^{\frac{\hbar}{2}(x_i+y_i)X_i} exp\big(e^{-ad\frac{\hbar}{2}y_iX_i}(\varphi_{i-1}(\vec{X}))\cdot e^{ad\frac{\hbar}{2}x_iX_i}(\varphi_{i-1}(\vec{Y}))\big)e^{\frac{\hbar}{2}(x_i+y_i)X_i}$$

et

$$X\star_\hbar^i Y = \varphi_{i-1}^{-1}\big[(e^{-ad\frac{\hbar}{2}y_iX_i}(\varphi_{i-1}(\vec{X})))\cdot(e^{-ad\frac{\hbar}{2}x_iX_i}(\varphi_{i-1}(\vec{Y})))\big] + (x_i+y_i)X_i$$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(X *_\hbar^i Y)_{|X=0} = X_i + (d\varphi_{i-1}^{-1})(\varphi_{i_1}(\vec{Y}))ad\frac{\hbar}{2}X_i(\varphi_{i-1}(\vec{Y}))$$

et pour tout $j<i$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(X *_\hbar^i Y)\,|_{X=0} = X_i + (d\varphi_{i-1}^{-1})(\varphi_{i-1}(\vec{Y}))(exp(-ad\frac{\hbar}{2}y_iX_i)(\hbar X_j)\varphi_{i-1}(\vec{Y}))$$

Soit $f\in\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i^\star)\oplus\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_i)$.
Par démonstration analogue à celle du théorème 3-18, on prouve que:

$$X_i\star_\hbar^i f(z) = X_i f + \frac{\hbar}{2}\int_{\underline{\mathbf{g}}_{i-1}} \hat{f}(Y)\big\langle d\varphi_{i-1}^{-1}(\phi_{i-1}(Y))adX_i\varphi_{i-1}(Y), z\big\rangle e^{2i\pi<Y,z>}dY$$

et que pour tout $j<i$

$$X_j\star_\hbar^i f(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_{i-1}} \hat{f}(Y)\big\langle d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(Y))(exp(-ad\frac{\hbar}{2}y_iX_i)(\hbar X_j)\varphi_{i-1}(Y)), z\big\rangle e^{2i\pi<Y,z>}dY$$

En particulier si $f\in\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_{i-1})\oplus\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}_{i-1}^\star)$, comme f ne dépend pas de y_i on a:

$$X_i\star_\hbar^i f = X_i f + \frac{\hbar}{4i\pi}\frac{d}{dt}f_i^t{}_{|t=0}$$

et pour tout $j<i$:

$$X_j\star_\hbar^i f(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_{i-1}} \hat{f}(Y)\big\langle d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(Y))((\hbar X_j)\cdot\varphi_{i-1}(Y)), z\big\rangle e^{2i\pi<Y,z>}dY$$

D'autre part on a:

$$\partial x_j(X *_\hbar^{i-1} Y)_{|X=0} = d\varphi_{i-1}^{-1}(\varphi_{i-1}(Y))(Y))(\hbar X_j\cdot\varphi_{i-1}(Y))$$

d'où

$$X_j\star_\hbar^{i-1} f = X_j\star_\hbar^i f.$$

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème, il suffit de remarquer que le produit $\star_\hbar^i$ coincide ainsi sur les fonctions polynômiales avec le produit $\star$ dans [24] et comme les cochaînes C_r^i de ce produit sont des opérateurs bidifférentiels, il sont totalement déterminés par leurs valeurs sur les polynômes.

Maintenant, on va montrer que ce produit$\star$ sur $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^*)$ fournit une déformation quantification stricte.
On commence par démontrer la deuxième propriété de la définition d'une déformation quantification stricte, car c'est celle-là qui caractérise les déformations quantifications. Rappelons que comme $\underline{\mathbf{g}}$ est nilpotente, le deuxième terme du crochet de Poisson obtenu à la proposition 3-1 est nul. Soient Φ et Ψ deux fonctions dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$. On définit la fonction $\theta_\hbar$ dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ par:

$$\theta_\hbar(X) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} \Phi(-Y)\Big(\Psi(Y *_\hbar X) - \Psi(X *_\hbar Y))/\hbar - \big\langle [Y,X], d\Psi(X+Y)\big\rangle\Big) dY$$

On doit montrer que $\| \theta_\hbar \|_\hbar$ converge vers 0 quand $\hbar$ tend vers 0. Comme les C^*-normes $\| \ \|_\hbar$ sont toutes dominées par la norme L^1, il suffit de montrer que $\theta_\hbar$ tend vers zéro pour la norme L^1. En applicant le théorème de Fubini, il suffit de montrer que le terme à l'intérieur de l'intégrale comme fonction sur $\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}$ tend vers zéro pour la norme $L^1(\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}})$. Posons:

$$D_1^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)\big((\Psi(Y *_\hbar X) - \Psi(X+Y))/\hbar - (\frac{1}{2})\big\langle [Y,X], d\Psi(X+Y)\big\rangle\big)$$

et

$$D_2^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)\big((\Psi(X *_\hbar Y) - \Psi(X+Y))/\hbar - (\frac{1}{2})\big\langle [X,Y], d\Psi(X+Y)\big\rangle\big)$$

On a:

$$D_1^\hbar(X,Y) = \hbar F_1^\hbar + \frac{\hbar}{2} F_2^\hbar$$

où

$$F_1^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)\big\langle R(\hbar,X,Y), d\Psi(X+Y)\big\rangle$$

$$F_2^\hbar(X,Y) = \Phi(-Y)(d^2\Psi)(X+Y+\tau\hbar M(\hbar,X,Y)) \cdot \big(M(\hbar,X,Y), M(\hbar,X,Y)\big)$$

où

$$Y *_\hbar X = Y + X + \frac{\hbar}{2}[Y,X] + \hbar^2 R(\hbar,X,Y)$$

$$M(\hbar,X,Y) = \frac{1}{2}[Y,X] + \hbar R(\hbar,X,Y)$$

et τ est un nombre réel dans l'intervalle [0,1] dépendant de $\hbar, X$ et$Y$ Ainsi il suffit de montrer que $F_1^\hbar$ et $F_2^\hbar$ sont bornés pour la norme L^1 indépendamment de $\hbar$ pour $|\hbar| \leq 1$. Comme $\underline{\mathbf{g}}$ est nilpotente, on montre facilement que R et M sont deux fonctions polynômiales en toutes leurs variables. Donc on peut développer R comme polynôme en $\hbar$:

$$R(\hbar,X,Y) = \sum_{k=0}^{d} \hbar^k R_k(X,Y)$$

où chaque R_k est un polynôme en X et Y à valeur dans $\underline{\mathbf{g}}$.

Comme $\Psi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$, alors toutes les composantes de $d\Psi$ (dans n'importe quelle base) sont dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ et par suite tous les termes:

$$\Phi(-Y)\langle R_k(X,Y),(d\Psi)(X+Y)\rangle$$

sont dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}\times\underline{\mathbf{g}})$. Pour $|h|\leq 1$ on a:

$$|F_1^\hbar(X,Y)| \leq \sum|\Phi(-Y) < R_k(X,Y), d\Psi(X+Y) > |$$

Ainsi la norme L^1 de $F_1^\hbar$ est uniformément bornée. Maintenant pour montrer que la norme L^1 de $F_2^\hbar$ est aussi uniformément bornée, on développe M comme polynôme en $\hbar$:

$$M(\hbar,X,Y) = \sum_{k=0}^{\ell} \hbar^k M_k(X,Y)$$

Il est clair qu'il suffit de dominer chacun des termes de la forme:

$$(A) \qquad \Phi(-Y)(d^2\Psi)(X+Y+\tau\hbar M(\hbar,X,Y))(M_j(X,Y),M_k(X,Y))$$

Pour une base donnée, les composantes de $d^2\Psi$ sont dans $\mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$, et les composantes de M_j et M_k sont polynômiales. Donc (A) est une somme de termes de la forme:

$$\Phi(-Y)\theta(X+Y+\tau\hbar M(\hbar,X,Y))P(X,Y)$$

où $\theta \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$ et P est un polynôme à valeurs scalaires. Pour simplifier les notations, on fait le changement de variables $(Y,X) \longmapsto (X-Y,Y)$ qui a pour déterminant 1 et donc ne change pas la norme L^1. D'après la formule de Campbell-Baker-Hausdorff, $M(\hbar,X,Y)$ reste inchangé, alors que P change en un autre polynôme que nous notons encore P. Ainsi il suffit de prouver le lemme suivant:

<u>**Lemme 3-26:**</u>

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension n. On suppose qu'on a défini sur $\underline{\mathbf{g}}$ une loi de groupe de la forme:

$$X *_\hbar Y = X+Y+\hbar M(\hbar,X,Y)$$

où M est une fonction polynômiale dont la $l^{\underline{\text{ème}}}$ composante ne dépend que des variables $x_{\ell+1},\ldots,x_n,y_{\ell+1},\ldots y_n$ et $\hbar$. Soit $P(X,Y)$ un polynôme à valeurs scalaires et Φ et $\theta \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$.
Alors les normes L^1 des fonctions:

$$(X,Y) \longmapsto \Phi(Y)\theta(X+\tau(\hbar,X,Y)\hbar M(\hbar,X,Y))P(X,Y)$$

sont uniformément bornées indépendamment du choix de la fonction mesurable τ de $\mathbb{R}\times\underline{\mathbf{g}}\times\underline{\mathbf{g}}$ dans $[0,1]$ et de $\hbar$ avec $|\hbar|\leq 1$.

Démonstration :

Soit $\{X_\ell\}$ une base de $\mathfrak{g}$. On notera les coordonnées de $X \in \mathfrak{g}$ dans cette base par $x_1, \ldots, x_n$ et similairement pour Y. On notera la $\ell^{\text{ème}}$ composante de $M(\hbar, X, Y)$ par $m_\ell(\hbar, X, Y)$. Soit α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\alpha(r) = 1 + r^2$ et β la fonction définie sur $\mathfrak{g}$ par $\beta(X) = \Pi\alpha(x_\ell)^{-d_\ell}$. On verra comment choisir les entiers positifs d_ℓ suivant le polynôme P et la structure de $\mathfrak{g}$. Notons que $\beta(X)^{-1}$ est un polynôme positif, et donc comme $\theta \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$, il existe une constante c tel que $|\theta(X)| \leq c\beta(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Ainsi il suffit de montrer que les normes L^1 des fonctions:

$$\Phi(Y)\beta(X + \tau(\hbar, X, Y)\hbar M(\hbar, X, Y))P(X, Y)$$

sont uniformément bornées indépendamment du choix de τ et de $\hbar$ avec $|\hbar| \leq 1$. Maintenant pour tout entier positif d et tout nombre réel m, la fonction:

$$t \longmapsto \alpha(r + tm)^{-d} = (1 + (r + tm)^2)^{-d}$$

prend sa valeur maximale pour $t \in [-1, 1]$, lorsque $r + tm$ tend vers 0.
Si $|r| \leq |m|$ alors ce maximum vaut 1 et est atteint lorsque $r + tm = 0$. Si $|r| \geq |m|$, ce maximum est atteint en $t = 1$ ou $t = -1$. Par conséquent pour $|r| \geq |m|$ on a:

$$\alpha(r + tm)^{-d} \leq \alpha(r + m)^{-d} + \alpha(r - m)^{-d}$$

pour tout t avec $|t| \leq 1$. Mais pour $r \in [0, |m|]$, l'un des deux termes à droite prend sa valeur minimale en $r = 0$ et cette valeur est $\alpha(m)^{-d}$ et similairement sur $[-|m|, 0]$; Ainsi si on multiplie les termes à droite par $\alpha(m)^d$ le résultat est toujours ≥ 1 sur $[-|m|, |m|]$. Il en résulte que:

$$\alpha(r + tm)^{-d} \leq \alpha(m)^d(\alpha(r + m)^{-d} + \alpha(r - m)^{-d})$$

pour tout r et tout t avec $|t| \leq 1$.
Maintenant on applique ceci aux coordonnées de β on trouve:

$$\beta(X + \tau(\hbar, X, Y)\hbar M(\hbar, X, Y)) \leq \Pi\alpha(m_\ell(\hbar, X, Y))^d\ell \times \Big(\alpha(x_\ell + m_\ell(\hbar, X, Y))^{-d_\ell} + \\ + \alpha(x_\ell - m_\ell(\hbar, X, Y))^{-d_\ell}\Big)$$

Ce dernier terme est à son tour somme de termes de la forme:

$$\gamma_\varepsilon(\hbar, X, Y) = \Pi\alpha(m_\ell(\hbar, X, Y))^{d_\ell}\alpha(x_\ell + \varepsilon_\ell m_\ell(\hbar, X, Y))^{-d_\ell}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Donc il suffit de montrer qu'il existe une borne uniforme pour les normes L^1 des fonctions:

$$\Phi(Y)\gamma_\varepsilon(\hbar, X, Y)P(X, Y)$$

indépendamment de $\hbar$ avec $|\hbar| \leq 1$. Pour obtenir cette borne uniforme, on utilise de nouveau le fait que $\mathfrak{g}$ est nilpotente et on choisit une base adaptée $\{X_\ell, 1 \leq \ell \leq n\}$ telle que l'espace $\underline{\mathbf{g}}_\ell$ engendré par $X_1, \ldots, X_\ell$ soit un idéal de $\underline{\mathbf{g}}$ et que $[\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{g}}_\ell] \subseteq \underline{\mathbf{g}}_{\ell-1}$ pour tout ℓ. Par conséquent m_ℓ est un polynôme en $x_{\ell+1}, \ldots, x_m, y_{\ell+1}, \ldots, y_m$ et $\hbar$ pour tout ℓ. Maintenant pour intégrer la fonction:

$$|\Phi(Y)\gamma_\varepsilon(\hbar, X, Y)P(X, Y)|$$

on va procéder à l'intégration variable par variable en commençant par x_1: La première intégration est donc:

$$|\Phi(Y)| \int \alpha(m_1(\hbar, X, Y))^{d_1} \alpha(x_1 + \varepsilon_1 m_1(\hbar, X, Y))^{-d_1} \gamma_\varepsilon^2(\hbar, X, Y) \, |P(X, Y)| \, dx_1$$

où pour tout q:

$$\gamma_\varepsilon^q(\hbar, X, Y) = \prod_{\ell=q}^{n} \alpha(m_\ell(\hbar, X, Y))^{d_\ell} \alpha(x_\ell + \varepsilon_\ell m_\ell(\hbar, X, Y))^{-d_\ell}$$

Or on a vu qu'aucun des m_ℓ ne dépend de x_1. Donc on peut faire le changement de variables $x \longmapsto x_1 - \varepsilon_1 m_1(\hbar, X, Y)$. On obtient:

$$|\Phi(Y)| \alpha(m_1(\hbar, X, Y))^{d_1} \gamma_\varepsilon^2(\hbar, X, Y) \int \alpha(x_1)^{-d_1} \, |P(X - \varepsilon_1 m_1 X_1, Y)| \, dx_1$$

Il est clair maintenant qu'on doit choisir d_1 suffisamment grand pour que l'intégrale converge. Comme m_1 ne dépend pas de x_1, ce choix de d_1 va dépendre essentiellement de la puissance la plus grande de x_1 dans le polynôme $P(X, Y)$. Comme m_1 est polynômiale, il en est de même pour $\alpha(m_1(\hbar, X, Y))^{d_1}$ et le résultat de cette intégration est dominé par une certaine somme de valeurs absolues de fonctions polynômiales en $x_2, \ldots, x_n, Y$ et $\hbar$. Si on développe tous ces polynômes en puissances de $\hbar$ et poser $|\hbar| \leq 1$, il est clair qu'il suffit de traîter les différents coefficients des puissances de $\hbar$ séparément. On obtient donc une expression similaire à celle avec laquelle on a commencé mais ne dépendant plus de x_1. Ainsi la deuxième intégration en x_2 a la forme:

$$|\Phi(Y)| \, \alpha(m_2(\hbar, X, Y))^{d_2} \gamma_\varepsilon^3(\hbar, X, Y) \int \alpha(x_2 + \varepsilon_2 m_2(\hbar, X, Y))^{-d_2} \, |P_2(X, Y)| \, dx_2$$

où P_2 est l'un des coefficients polynômiales obtenus ci-dessus dépendant non seulement de P mais aussi de m_1 donc de la structure de $\underline{\mathbf{g}}$. Comme m_2 ne dépend pas de x_2, on fait le changement de variables $x_2 \longmapsto x_2 - \varepsilon_2 m_2$. On trouve que d_2 doit être choixi suffisamment grand pour que:

$$\alpha(x_2)^{-d_2} |P_2(x_2 - \varepsilon_2 m_2 X_2, x_3, \ldots, x_n, Y)|$$

soit intégrable, ce qui dépend uniquement de la plus grande puissance de x_2 dans $P_2(X, Y)$ donc de P et de m_1. Notons que m_2 et donc $\alpha(m_2)^{d_2}$ sont polynômiales dépendant uniquement de $x_3, \ldots, x_n, Y$ et $\hbar$. Le résultat de l'intégration est ainsi dominé par une certaine somme de valeurs absolues de polynômes en ces variables. De nouveau on les développe en puissances de $\hbar$ et on traîte séparément les différents coefficients. On continue ce procédé pour les différents x_ℓ, en choisissant à chaque étape le d_k correspondant. On trouve après la dernière intégration en x_n une fonction de la forme:

$$|\Phi(Y)|\,|P_n(Y)| \text{pour un certain polynôme} P_n$$

Mais cette fonction est évidemment intégrable car $\Phi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}})$. Ceci achève la démonstration du lemme et par suite de la propriété 2) de la déformation quantification stricte.

Le même argument que celui du théorème 3-15 prouve la continuité de la fonction $\hbar \longmapsto \| \Psi \|_\hbar$ pourtout $\Psi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$. Le théorème est ainsi démontré.

Les produit $\star$ définis sur les algèbres de Lie nilpotentes spéciales dans le théorème précédent seront dits produits $\star$ spéciaux.

Remarque:

La formule obtenue du produit $*^n_\hbar$ dans $\underline{\mathbf{g}}$:

$$X *^n_\hbar Y = \varphi_{n-1}^{-1}\Big[\big(e^{-ad\frac{\hbar}{2}y_nX_n}(\varphi_{n-1}(\vec{X}))\big)\cdot\big(e^{ad\frac{\hbar}{2}x_nX_n}(\varphi_{n-1}(\vec{Y}))\big)\Big] + (x_n+y_n)X_n$$

$$\text{où} \quad \vec{X} = X - x_nX_n \quad \text{et} \quad \vec{Y} = Y - y_nX_n$$

sera une "correction" de la formule de Campbell-Hausdorff correspondant à notre "nouvelle" application exponentielle ϕ_n.

En particulier si la dimension maximale des orbites coadjointe est égale à 2, c'est le cas par exemple de l'algèbre de dimension n de base $\{X_1,\ldots,X_{n-1},Y\}$ qui satisfait les relations de commutation:

$$[Y,X_i] = X_{i-1} \quad (i=2,\ldots,n-1) \quad \text{et} \quad [Y,X_1]=0$$

tous les autres crochets sont nuls. La "nouvelle" formule de Campbell-Hausdorff s'écrit:

$$X *_\hbar Y = e^{ad\frac{\hbar}{2}y_nX_n}X + e^{-ad\frac{\hbar}{2}x_nX_n}Y$$

.

3 - Equivalence des produits $\star$ spéciaux:

Définition 3-27:

Deux produits $\star$ (resp. produits $\star$ tangentiels) $\star$ and $\star'$ sur une variété de Poisson sont équivalents (resp. tangentiellement equivalents) s'il existe une serie formelle:

$$T = Id + \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^r T^r$$

où Id désigne l'identité et les T^r sont des opérateurs differentiels (resp. differentiels et tangentiels) s'annulant sur les constantes tels que:

$$T(u \star v) = T(u) \star' T(v).$$

Proposition 3-28:

Etant donnés deux choix de chaines croissantes d'idéaux $\underline{\mathbf{u}}_i$ et $\underline{\mathbf{m}}_i$ dans $\underline{\mathbf{g}}$. Soit $\star$ (resp. $\star'$) le produit $\star$ défini sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ comme dans le théorème précédent correspondant à $\underline{\mathbf{u}}_i$ (resp. $\underline{\mathbf{m}}_i$), alors $\star$ et $\star'$ sont tangentiellement équivalents et ils sont équivalents au produit $\star$ de Rieffel-Gutt-Lugo.

Démonstration:

Soit ϕ (resp ϕ') l'application ϕ_n correspondante à $\underline{\mathbf{u}}_i$ (resp $\underline{\mathbf{m}}_i$). On a:

$$X *' Y = \phi'^{-1}(\phi'(X) \cdot \phi'(Y))$$

donc

$$(\phi'^{-1} \circ \phi)(X) *' (\phi'^{-1} \circ \phi)(Y) = \phi'^{-1}(\phi'(X) \cdot \phi'(Y))$$

et

$$(\phi'^{-1} \circ \phi)(X) *' (\phi'^{-1} \circ \phi)(Y) = (\phi'^{-1} \circ \phi)(X * Y)$$

Ainsi pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$

$$\begin{aligned}
(\hat{f}(\phi^{-1} \circ \phi'))^\vee \star' (\hat{g}(\phi^{-1} \circ \phi'))^\vee &= \int_{\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(\phi^{-1} \circ \phi')(X) \hat{g}(\phi^{-1} \circ \phi')(Y) e^{2i\pi \left\langle X *' Y, z \right\rangle} dX dY \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(X') \hat{g}(Y') e^{2i\pi \left\langle \phi'^{-1} \circ \phi(X') *' \phi'^{-1} \circ \phi(Y') \right\rangle} dX' dY' \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(X') \hat{g}(Y') e^{2i\pi \left\langle \phi'^{-1} \circ \phi(X' * Y'), z \right\rangle} dX' dY' \\
&= \left(f \hat{\star} g(\phi^{-1} \circ \phi') \right)^\vee
\end{aligned}$$

Si on pose: $T(u) = (\hat{u}(\phi_\circ^{-1}\phi'))^\vee$ pour $u \in S(\underline{\mathbf{g}}) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$
on obtient : $Tf \star' Tg = T(f \star g) \quad \forall f, g \in S(\underline{\mathbf{g}}) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$
$T - Id$ est développable en série d'opérateurs tangentiels; soit $f \in S(\underline{\mathbf{g}}) \oplus \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ telle que $\hat{f}$ soit à support compact.

$$\begin{aligned}
Tf(z) &= \int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(Y) e^{2i\pi < \phi'^{-1} \circ \phi(Y), z>} dy \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(Y) e^{2i\pi <Y,z>} e^{2i\pi \left\langle \sum \hbar^{2k'} \beta^j_{k',i_1} y_{j_1} \cdots y_{j_{2k'+1}} X_{i_1}, z \right\rangle} dY \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}} \hat{f}(Y) e^{2i\pi <Y,z>} \left(1 + \left\langle \sum \hbar^{2k'} \gamma^{j,\ell}_{k',i} y_{j_1} \ldots y_{j_{2k'+1}} X_{i_1} \ldots X_{i\ell}, z \right\rangle dY \right. \\
&= f + \sum \hbar^{2k'} \gamma^{j,\ell}_{k',i} \frac{\partial^{2k'+\ell} f}{\partial y_{j_1} \ldots \partial y_{j_{2k'+\ell}}} z_{i_1} \ldots z_{i_\ell} \\
&= f + \sum_{r=0}^{\infty} \hbar^{2r} T^r f
\end{aligned}$$

où β^j_{k',i_1} et $\gamma^{j,l}_{k',i}$ sont des nombres réels. Si P est un polynôme invariant, P est dans $S(\underline{\mathbf{g}}_{n-k})$. D'où $TP = P$ car il existe au moins un indice j_q tel que $j_q > n-k$. Les opérateurs T^r sont alors tangentiels car les feuilles symplectiques sont des espaces affines définis par $\{P(z) = constante, \quad P \in I(\underline{\mathbf{g}})\}$.

III- 6 TRANSFORMEE DE FOURIER ADAPTEE:

Définissons maintenant la transformée de Fourier adaptée qui est l'outil fondamental dans l'utilisation des produits $\star$ en analgyse harmonique.

Définition 3-29:

La transformée de Fourier adaptée ξ est l'application de l'espace $C^\infty_c(G)$ des fonctions à support compact sur G dans l'espace des fonctions sur $\underline{\mathbf{g}}^\star$ définie par:

$$\xi(f)(z) = \int_G f(g)E(g)(z)\,dg$$

où $E(e^{\hbar X})(z)(= e^{\star 2i\pi <X,z>})$ est l'application exponentielle $\star$ sur $\underline{\mathbf{g}}$ c'est à dire $E(exp\,tY)\star u$ est la solution à l'instant t de:

$$\frac{d}{dt}U(t) = (2i\pi Y \star U)(t)\text{avec} \quad U(0) = u \in \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$$

$\xi(f)$ peut être vue comme distribution, si on pose:

$$< \xi(f), u >= \int_G \int_{\underline{\mathbf{g}}^\star} f(g)(E(g)\star u)(z)\,dgdz$$

Proposition 3-30:

Soit f dans $C^\infty_c(G)$; alors

$$\xi(f)(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} (f \circ \phi)(X)e^{2i\pi<X,z>}\,dX$$

où ϕ est l'application ϕ_n définie dans la section précédente.

Cette formule relie la transformée de Fourier adaptée à la transformation usuelle. On voit qu'il suffit de remplacer l'application exponentielle usuelle entre $\underline{\mathbf{g}}$ et G par l'application ϕ pour passer de la transformation de Fourier usuelle à la transformée de Fourier adaptée.

Démonstration:

Soit

$$\xi'(f)(z) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} (f_\circ\phi)(X)e^{2i\pi<X,z>}\,dX$$

Il est clair que$\xi'(\mathcal{S}(G)) = \mathcal{S}(\underline{\mathbf{g}}^\star)$ et que

$$\xi'(f \times_\hbar g) = \xi'(f) \star_\hbar \xi'(g)$$

où $\star_\hbar$ désigne le produit $\star^n_\hbar$ et $\times_\hbar$ est la convolution des fonctions sur $C_c^\infty(G)$, ($\underline{\mathbf{g}}$ étant munie du produit $*^n_\hbar$). Donc pour tout $Y \in \underline{\mathbf{g}}$, on a:

$$iY \star_\hbar f = \xi'\big(\xi'^{-1}(iY) \times_\hbar \xi'^{-1}(f)\big)$$

Pour $Y = X_j$, on a:

$$\begin{aligned}
\int_{\underline{\mathbf{g}}} \xi'^{-1}(Y)(\phi(X)) f(\phi(X)) dX &= \int_{\underline{\mathbf{g}}}\int_{\underline{\mathbf{g}}^*} Y(z) e^{-2i\pi<X,z>} f(\phi(X))\, dX\, dz \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}}\int_{\underline{\mathbf{g}}^*} e^{-2i\pi<X,z>} \big(\frac{-i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_\circ\phi)(X)\big)\, dX\, dz \\
&= \frac{-i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}(f \circ \phi)(0)
\end{aligned}$$

D'où:

$$\int_G \xi'^{-1}(Y)(x) f(x)\, dx = \frac{-i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}(f_\circ\phi)(0)$$

et

$$\begin{aligned}
\langle \xi'^{-1} \times_\hbar g, f\rangle &= \langle g(y) < \xi'^{-1}(Y)(x), f(x \cdot y) > \rangle \\
&= \int_G \big(\frac{i}{2\pi} X_j^{-1} g\big)(y) f(y)\, dx
\end{aligned}$$

pour tous f, g dans $C_c^\infty(G)$ où

$$X_j^{-1} f = \frac{d}{dt} f(exp - tX_j)$$

Ainsi:

$$\big(\xi'^{-1}(iY) \times_\hbar g\big)(\phi(X)) = \frac{-1}{2\pi}(X_j^{-1} g)(\phi(X))$$

et:

$$\big(\xi'^{-1}(exp \star itY) \times_\hbar g\big)(\phi(X)) = g\big(\frac{-1}{2\pi} exp - tY \cdot \varphi(X)\big)$$

En particulier pour $X = 0$, et comme g est à support compact:

$$\int_G \xi'^{-1}(exp \star -itY)(x) g(x^{-1})\, dx = g\big(\frac{-1}{2\pi} exp^{tY}\big)$$

Comme ξ' est une transformation unitaire il vient:

$$\int_{\underline{\mathbf{g}}^*} exp \star -itY(z)(\xi' v)(z)\, dz = v(e^{tY})$$

où v est définie par $v(x) = g(\frac{-1}{2\pi}x)$ Pour $t = 2\pi$, on obtient:

$$v = \xi^{-1}(\xi'(v))$$

D'où

$$\xi = \xi'$$

La transformée de Fourier adaptée est reliée à la représentation unitaire Π^O associée à une orbite O dans $\underline{\mathbf{g}}^\star$. Rappelons que Π^O peut se réaliser dans $L^2(\mathbb{R}^k)$ en effet il existe une transformation unitaire S de $L^2(O)$ dans l'espace des opérateurs d'Hilbert Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ définie par:

$$Su(s,t) = \mathcal{F}_p u(t-s, \frac{s+t}{2}) \text{où} \quad \mathcal{F}_p u(p,q) = \int_{\mathbb{R}^k} u(x,q) e^{-2i\pi xp}\, dx \quad (s,t,p,q \in \mathbb{R}^k)$$

<u>**Théorème 3-31 :**</u>

Soit f dans $C_c^\infty(G)$ et g dans $L^2(O)$, alors:

1) $\Pi^O(f)g(t) = \int_O K(t,\tau)g(\tau)\, d\tau$ où

$$K(s,t) = \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f(e^{-t_k X_n} e^{-t_{k-1} X_{n-1}} \ldots e^{-t_1 X_{n-k+1}} m e^{s_1 X_{n-k+1}} \ldots e^{s_k X_n}) e^{2i\pi <m,\ell_0>}\, dm$$

$t = (t_1, \ldots, t_k)$ et $s = (s_1, \ldots, s_k)$

2) K et $\xi(f)$ sont reliés par $\xi(f) = S^{-1}(K)$.

<u>Démonstration:</u>

La première partie du théorème est une conséquence immédiate de la construction faite par Pukanszky ([45] p. 115). Montrons la deuxième partie. On a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_p u(x,q) &= K(q - \frac{x}{2}, q + \frac{x}{2}) \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f\Big(e^{-\frac{x_k}{2} X_n} e^{-q_k X_n} e^{-\frac{x_{k-1}}{2} X_{n-1}} e^{-q_{k-1} X_{n-1}} \ldots \\
&\quad e^{-\frac{x_1}{2} X_{n-k+1}} e^{-q_1 X_{n-k+1}} m e^{q_1 X_{n-k+1}} e^{-\frac{x_1}{2} X_{n-k+1}} \ldots e^{q_k X_n} e^{-\frac{x_k}{2} X_n}\Big) e^{2i\pi <m,\ell_0>} dm \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f(\eta_q(m)) e^{2i\pi <m,\ell_0>}\, dm
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^k$, considérons l'application ψ:

$$\begin{aligned}
\psi : &\underline{\mathbf{g}}_{n-k} \longrightarrow \underline{\mathbf{g}} \\
&m \longmapsto e^{-\frac{x_k}{2} X_n} e^{-\frac{x_{k-1}}{2} X_{n-1}} \ldots e^{-\frac{x_1}{2} X_{n-k+1}} m e^{-\frac{x_1}{2} X_{n-k+1}} \ldots e^{-\frac{x_k}{2} X_n}
\end{aligned}$$

Soit $m' = (\psi^{-1} \circ \eta_q)(m)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_p u(x,q) &= \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f(\psi(m')) e^{2i\pi\left\langle (\eta_q^{-1} \circ \psi)(m'), \ell_0 \right\rangle} \, dm' \\
&= \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f(\psi(m')) e^{2i\pi\left\langle m', (\eta_q^{-1} \circ \psi)^*(\ell_0) \right\rangle} \, dm'
\end{aligned}
$$

Donc:

$$
\begin{aligned}
u(p,q) &= \int_{\mathbb{R}^k} (\mathcal{F}_p u)(x,q) e^{2i\pi x p} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\underline{\mathbf{g}}_{n-k}} f(\psi(m')) e^{2i\pi\left(<m', (\eta^{-1} \circ \psi)^*(\ell_0)> + px \right)} \, dm' dx
\end{aligned}
$$

Soient p et q définis comme suit: étant donné $z \in O$, on pose:

$$
z = (\eta_q^{-1} \circ \psi)^*(\ell_0) - p_1 X_{n-k+1}^* \cdots - p_k X_n^*
$$

où $< X_j^*, X_j >= 1$ et $< X_j^*, X_k >= 0$ si $k \neq j$. Alors:

$$
\begin{aligned}
u(p,q) &= \int_{\underline{\mathbf{g}}} f(\phi(Y)) e^{2i\pi <Y,\ell>} \, dY \\
&= \xi(f)(p,q)
\end{aligned}
$$

où $Y = m' - x_1 X_{n-k+1} \cdots - x_k X_n$ et $\ell = (p,q)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. Kirillov: "Unitary representations of the nilpotent Lie groups", (in Russian) USP. Math Nank, 17 (1962) p. 57 - 110.

[2] A. A. Kirilov: "Elements of the theory of representations", Springer Verlag (Berlin) 1976.

[3] L. Auslander, B. Kostant: "Quantization and unitary representations of solvable Lie groups", Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) p. 692-695.

[4] L. Pukanszky: "On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups", Journal of Funct. Analy., 1 (1967) p. 255-280.

[5] M. Duflo: "Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie", Ann. SC. EC. Nom. Sup., 10 (1977) p. 265-288.

[6] M. S. Khalgui: "Caractères des groupes de Lie", J. Funct. Anal., 47 (1982) p. 64-77.

[7] B. Kostant: "On certain unitary representation which arise from a quantization theory", Lec. note in Math., (1970) p. 170-237.

[8] J. M. Souriau: "Structure des systèmes dynamiques", Dunod (Paris), 1970.

[9] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer: "Deformation theory and quantization", I, II, Ann. of Phys. 111 (1978), p. 61-151.

[10] C. Fronsdal: "Remarks on quantization", Rep. on Math. Phys., 15 (1978), p. 111-145.

[11] D. Arnal and J. C. Cortet: "$\star$-products in the method of orbits for nilpotent groups", Journal of Geometry and Physics, 2 (1985), p. 83-116.

[12] D. Arnal and J. C. Cortet: "Nilpotent Fourier transform and applications", letters in mathematical physics, 9 (1985), p. 25-34.

[13] M. Wildberger: "On the Fourier transform for compact group", preprint Ontario (1986).

[14] D. Arnal, M. Cahen, S. Gutt: "Representations of compact Lie groups and quantization by deformation", Académie des Sciences de Belgique, 45 (1988), p. 123-141.

[15] C. Moreno, letters in mathematical physics, 12 (1986), p. 217.

[16] D. Arnal and J. C. Cortet: "Représentations $\star$ des groupes exponentiels", J. Funct. Anal. Vol. 92, N° 1 (1990), p. 103-135.

[17] M. A. Rieffel: "Deformation quantization of Heisenberg manifolds", Comm. Math. Phys., 122 (1989), p. 531-562.

[18] M. A. Rieffel: "Lie group convolution algebras as deformation quantizations of linear Poisson structures", American Journal of Mathematics, 112 (1990), p. 657-686.

[19] S. Gutt: "An explicit $\star$-product on the cotangent bundle of a Lie group", letters in mathematical physics, 7 (1983), p. 249-258.

[20] V. Lugo: "An associative algebra of functions on the orbits of nilpotent Lie groups", letters in mathematical physics, 5 (1981), p. 509-516.

[21] N. Ben Amar: "Structures of algebras obtained by $\star$deformation", preprint université de Metz.

[22] N. Ben Amar: "Tangential deformations on the dual of nilpotent special Lie algebras" preprint Université of Metz.

[23] G. Zeller-Meir: "Produit croisé d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes", J. Math pures et appl., 47 (1968), p. 101-239.

[24] D. Arnal, M. Cahen, S. Gutt: "Deformation on coadjoint orbits", Journal of Geometry and Physics, 3 (1986), p. 327-351.

[25] J. Glimm: "Families of induced representations", Pacific J. Math., 12 (1962), p. 885-911.

[26] J. Dixmier: "Les C^*-algèbres et leurs représentations", Gauthier-Villars, Paris (1964).

[27] M. A. Rieffel: "Continuous fieds of C^*-algebras coming from group cocycles and actions", Math. Ann., 283 (1989), p. 631-643.

[28] M. A. Rieffel: "Projective modules over higher-dimensional non commutative tori". Can. J. Math., 2(1988), p. 257-338.

[29] A. Connes: "C^*-algèbres et géométrie différentielle", C. R. Acad. Sci. Paris, 290, p. 599-604.

[30] J. Dixmier: "Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien", Gauthier-Villars, Paris (1969).

[31] D. Arnal and J. C. Cortet: "Star representation of the Euclidien two-dimensional group E(2)", letters in mathematical physics, 20 (1990), p. 141-149.

[32] E. Artin: "Algèbre géométrique", Gauthier-Villard, Paris (1962).

[33] F. Trèves: "Topological vector spaces, distributions and kernels", Academic press, New-York (1967).

[34] S. Sakai: "C^*-algebras and W^*-algebras", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971).

[35] V. S. Varadarajan: "Lie groups, Lie algebras and their representations", Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

[36] P. Bernat et al: "Représentations des groupes de Lie résolubles", Monographies Soc. Math. France, 4, (Dunod, Paris, 1972).

[37] M. Vergne: "La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente", Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), p. 301-335.

[38] J. P. Pier: "Amenable locally compact groups", Wiley , New York, 1984.

[39] P. Green: "The local structure of twisted covariance algebras", Acta. Math, 140 (1978), p. 191-250.

[40] J. Dixmier: "Algèbres enveloppantes", Gauthier-Villars, Paris (1974).

[41] R. Godement: "Introduction à la théorie des groupes de Lie", Tome 2. Publications mathématiques de l'université de Paris VII.

[42] W. Magnus, F. Oberbettinger, R. P. Soni: "Formulas and theorems for special functions of mathematical physics", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York, 1966.

[43] Corwin, Greenleaf: "Fourier transforms of smooth functions on certain nilpotent Lie groups", J. Funct. Anal. 37 (1980), p. 203-217.

[44] D. Arnal: "$\star$-products and representations of nilpotent groups", Pacific Journal of Mathematics, 114 N° 2 (1984), p. 285-308.

[45] L. Pukauszky: "Leçons sur les représentations des groupes". Dunod, Paris 1967.