THESE DE MATHEMATIQUES

PRODUITS STAR
ET
REPRESENTATIONS DES GROUPES DE LIE

Présentée .par Hamid ZAHIR

Soutenue le décembre 1991 devant la commission d'examen

Professeur	**M. FLATO**	**Président**
Professeur	**M. CAHEN**	**Rapporteur externe**
Professeur	**J. LUDWIG**	**Rapporteur interne**
Professeur	**A. PIARD**	**Rapporteur externe**
Professeur	**D. ARNAL**	**Dirécteur de recherche**

Classification A.M.S. 20C . 22. 58.

Hamid ZAHIR
UNIVERSITE DE METZ
U.F.R. M.I.M. "D.M.I."
Ile du Saulcy
57045 METZ CEDEX 01 FRANCE

A la mémoire de ma grand - mère
A mes parents
A Julien et Sylvie

Je tiens à exprimer ici toute ma gratitude au Professeur D. ARNAL qui a toujours été disponible pour me guider dans mes recherches, tout d'abord en m'initiant à la théorie des produits-$*$, puis pour les idées fructueuses qu'il m à prodiguées en vue de la réalisation de ce travail.

Par l'occasion qui m'est offerte de travailler avec lui, et par ses nombreux conseils, le Professeur M.CAHEN m'a beaucoup fait profiter de son expérience. Qu'il ait en plus accepté d'être rapporteur de cette thése est pour moi une récompense. Je voudrais qu'il sache combien je lui suis reconnaissant.

Je voudrais remercier le Professeur J. LUDWIG qui s'est intéressé à ce travail et pour les remarques judicieuses qu'il m'a apportées tant au niveau de la réalisation de ce travail qu'au niveau de sa rédaction. Je suis heureux qu'il ait accepté d'être rapporteur.

Je remercie vivement le professeur M. FLATO pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Que toutes celles et tous ceux qui m'ont aidé dans cette étape de mon itinéraire trouvent ici le témoignage de ma gratitude

INTRODUCTION

. Soit G un groupe de Lie connexe, $\underline{\mathbf{g}}$ son algèbre de Lie, $\underline{\mathbf{g}}^*$ le dual de $\underline{\mathbf{g}}$, le problème de la détermination de l'ensemble $\hat{G}$ des représentations unitaires et irréductibles de G est en général difficile. On dispose cepedant de procédés systématiques qui, pour certaines classes de groupes, sont exhaustifs ou "presque exhaustifs".

. Il s'agit essentiellement de la méthode des orbites imaginée par Kirillov [23] pour les groupes nilpotents, généralisée par Auslander et Kostant [24] d'une part, Pukanszky [29] d'autre part aux groupes résolubles enfin par Duflo [16] et Khalgui [22] aux groupes algébriques. Cette méthode consiste à construire, à partir d'une orbite W de la représentation coadjointe de G, une ou plusieurs classes d'équivalence de représentations unitaires et irréductibles de G, en induisant de façon unitaire ou holomorphe une représentation "simple" de dimension finie d'un sous groupe D fermé de G.

. Cette méthode est très proche de la procédure de quantification géométrique d'un système mécanique classique. Rappelons brièvement cette théorie due à Kostant et Souriau. L'objet fondamental d'un système classique est l'espace des phases qui est une variété symplectique C^∞ (notée W), les observables physiques sont des fonctions réelles C^∞ sur W et un état physique est un point de W ou, plus généralement, une mesure de probabilité sur W. L'évolution du système est décrite par un champ de vecteurs hamiltoniens X_H dont la fonction génératrice H est l'énergie du système. L'évolution d'une quantité physique φ est donnée par l'équation:

$$\frac{d}{dt}\varphi = \{H, \varphi\}$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Poisson sur $C^\infty(W)$.
Un groupe G est un groupe de symétrie du système s'il agit sur W par des transformations canoniques.

. Dans la mécanique quantique, le rôle de l'espace des phases est assuré par un espace projectif $\mathbf{P}(V)$ où V est un espace de Hilbert, les observables physiques sont des opérateurs autoadjoints sur V. L'évolution du système est donnée par un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires sur V de la forme :

$$U(t) = e^{\frac{ith}{2\pi}A}.$$

où h est la constante de Planck et A un opérateur autoadjoint. L'évolution de la quantité B est alors donnée par l'équation

$$\frac{dB}{dt} = \frac{ih}{2\pi}\,[A, B] \qquad ([\ ,\ ] \text{ est le crochet des opérateurs}).$$

Un groupe G est un groupe de symétrie du système s'il agit sur V par des transformations unitaires.

. La construction de modéles quantiques repose sur le principe de correspondance qui affirme que chaque modèle quantique peut être construit à partir d'un modèle classique "correspondant"; la mise en oeuvre de ce processus est ce qu'on appelle la quantification.

. La méthode de quantification géométrique suit le shéma suivant :

. Partons de l'espace des phases W du système classique qui est une variété symplectique pour une 2-forme symplectique ω.

. Si φ est un observable classique, on lui associe un opérateur $\hat{\varphi}$ (observable quantique) tel que :
la correspondance : $\varphi \longmapsto \frac{2\pi}{ih}\hat{\varphi}$ soit (au moins pour un sous espace d'observables) un homomorphisme d'algèbres de Lie:

$$\widehat{\{\varphi_1, \varphi_2\}} = \frac{2\pi}{ih} [\hat{\varphi_1}, \hat{\varphi_2}] \tag{1}$$

et

$$\hat{1} = Id_V. \tag{2}$$

. L'idée de base de cette méthode est la correspondance :

$$\varphi \longmapsto \frac{ih}{2\pi} X_\varphi = \hat{\varphi},$$

qui vérifie la relation (1), mais pas (2). On lui apporte donc une correction en posant:

$$\hat{\varphi} = \frac{ih}{2\pi} X_\varphi + \varphi + \alpha(X_\varphi), \tag{3}$$

où α est une 1-forme sur W. (2) est alors vérifiée et la condition (1) est équivalente à $d\alpha = \omega$; ω doit donc être exacte.

. En général, ω n'est pas exacte et on doit remplacer l'espace des fonctions sur W par un espace de sections d'un fibré en droites L au dessus de W, ce qui n'est possible que si la classe de cohomologie de Rham de $2\pi\omega$ est, lorsqu'elle est vue dans la cohomologie de Cech, une classe entière. Les seules variétés (W, ω) quantifiables sont donc les variétés possédant cette propriété.

. Supposons que (W, ω) soit quantifiable. Alors l'application $\varphi \longmapsto \hat{\varphi}$ est une représentation de $C^\infty(W)$ dans l'espace $\Gamma(L)$ des sections du fibré L au dessus de W. Cependant on ne retrouve pas la quantification usuelle, l'espace $\Gamma(L)$ est "trop grand"; on doit se restreindre à un sous espace.

Considérons l'exemple $W = T^*(N)$, où N est une variété connexe C^∞. La quantification usuelle consiste à prendre pour V l'espace $L^2(N)$ sur lequel chaque fonction sur W dépendant seulement de la projection sur N ("fonction des seules variables q") agit par la multiplication ordinaire et les fonctions dépendant localement linéairement des variables de la fibre ("variables p") agissent comme des champs de vecteurs. On peut donc quantifier toute fonction affine en ces variables p.

En choisissant la distribution lagrangienne F engendrée par la fibration canonique de $T^*(N)$ et en ne considérant que les sections du fibré L polarisées par F, c'est à dire annulées par la dérivée covariante par un champ quelconque de F, on retrouve un espace isomorphe à un espace de fonctions sur N, comme V. On dira alors qu'une fonction φ est quantifiable si $\hat{\varphi}$ laisse cet espace de sections stable.

La quantification géométrique d'un système quelconque est une généralisation de cette construction.

En particulier, on est amené à considérer des polarisations que nous appellerons géométriques F, c'est à dire des distributions lagrangiennes complexes et intégrables: en chaque point ξ de W, F_ξ est un sous-espace de $T_\xi(W)^{\mathbb{C}}$ et à se restreindre aux sections annulées par la dérivée covariante par tout champ de F. Pour être complet, nous exposerons cette méthode au chapitre I.

. Revenons maintenant au problème initial.

. Soit W une orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie G, connexe et simplement connexe. L'action de G sur W engendre une représentation de $\underline{\mathbf{g}}$ dans l'espace des champs de vecteurs sur W:

$$X \longmapsto X^- \qquad \text{où} \quad (X^- f)(\xi) = \frac{d}{dt} f(exp\ -tX.\xi)|_{t=0}. \tag{4}$$

Les X^-_ξ engendrent $T_\xi W$, la 2-forme canonique ω sur W est définie par:

$$\omega_\xi(X^-, Y^-) = <\xi, [X, Y]>, \qquad \forall X, Y \in \underline{\mathbf{g}}. \tag{5}$$

Cette 2-forme est bien définie et invariante par G. Elle fait de W une variété symplectique. Les fonctions:

$$\tilde{X} : \ \xi \longmapsto <\xi, X> \qquad (X \in \underline{\mathbf{g}})$$

sont des fonctions hamiltonniennes des champs X^-. Elles vérifient:

$$\{\tilde{X},\ \tilde{Y}\} = \ \widetilde{[X,\ Y]}.$$

. Notons $G(\xi_0)$ le stabilisateur d'un point ξ_0 de W et $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ son algèbre de Lie. La condition que W soit quantifiable (la 2-forme ω est entière) est équivalente au fait qu'il existe (au moins) un homomorphisme:

$$\chi : \ G(\xi_0) \longrightarrow \mathbb{C} \ - \{0\}$$

de différentielle:

$$X \longmapsto 2i\pi < \xi_0, X >, \quad X \in \underline{\mathbf{g}}(\xi_0). \tag{6}$$

Si cette condition est satisfaite, on dira que W est entière.

. Une façon de construire une polarisation géométrique F sur W est la suivante:

Soit $\underline{\mathbf{h}}$ une sous algèbre de $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$, isotrope maximale pour la forme bilinéaire sur $\underline{\mathbf{g}}$:

$$B_\xi(X,Y) =< \xi, [X,Y] >$$

contenant $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ et stable par $G(\xi_0)$. Une telle sous algèbre est appelée une "polarisation algébrique" en ξ_0. Ces polarisations algébriques existent "presque toujours" (voir [22], par exemple). Prenons pour $F_{g\xi_0}$ le sous espace de $T_{g\xi_0}(W)^{\mathbb{C}}$ engendré par les vecteurs $(AdgX)^-|_{g\xi_0}$ où X décrit $\underline{\mathbf{h}}$. Par construction, F est une polarisation géométrique G-invariante et les fonctions $\tilde{X}$ sont quantifiables.

Une fois la quantification achevée, on obtient une représentation naturelle de $\underline{\mathbf{g}}$, puis de G dans un espace de Hilbert, cette représentation est en général irréductible.

Cette méthode a donné entre autres les résultats génériques suivants :

<u>Théorème</u> [24]:

Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe résoluble de type I (c'est à dire toute orbite W de la coadjointe est ouverte dans son adhérence et est entière), alors toutes les représentations irréductibles de G sont obtenues par la construction ci-dessus, à partir des orbites de la représentation coadjointe de G. A chaque orbite W, on fait correspondre une famille de représentations irréductibles de G paramétrée par les caractères du groupe fondamental $\pi_1(W)$.

En particulier, si G est résoluble exponentiel (en particulier s'il est nilpotent), alors toute orbite de la représentation coadjointe de G dans $\underline{\mathbf{g}}^*$ est homéomorphe à un espace euclidien, G est de type I et $\hat{G}$ est en bijection avec $\underline{\mathbf{g}}^*/G$.

<u>Théorème</u> (Borel-Weil-Bott) [35]:
Toute représentation unitaire et irréductible d'un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe s'obtient par quantification d'une orbite entière dans $\underline{\mathbf{g}}^*$. Cette méthode détermine une bijection entre l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G et l'ensemble des orbites entières dans $\underline{\mathbf{g}}^*$.

Notons que Duflo [16] et Khalgui [22] ont généralisé cette méthode à de gros ensembles de représentations d'un groupe de Lie algébrique quelconque.

. Par ailleurs, on connaît une autre méthode de quantification: la quantification par déformation [8]. Décrivons-la d'abord dans le cas plat, où W est $\mathbb{R}^{2k}$ et $\omega = \sum dp \wedge dq$.

On sait que la quantification usuelle de ce cas peut s'obtenir en utilisant la transformée de Weyl. Soit u une fonction sur $\mathbb{R}^{2k}$ dont la transformée de Fourier $\tilde{u}$ est C^{∞} et à support compact. Posons:

$$B(u) = \int_{\mathbb{R}^{2k}} \tilde{u}(\xi, \eta)\ exp\ i(\xi P + \eta Q)\ d\xi d\eta \tag{7}$$

où P et Q sont les opérateurs d'impulsion $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ et de position q agissant sur $L^2(\mathbb{R}^k)$. On obtient ainsi un opérateur $B(u)$ de $L^2(\mathbb{R}^k)$. D'autre part, si Λ est le 2-tenseur qui définit le crochet de Poisson ($\{u,v\} = \Lambda^{ij}\partial_i u \partial_j v$), on pose:

$$P^r(u,v) = \Lambda^{i_1 j_1} ... \Lambda^{i_r j_r} \partial_{i_1 ... i_r} u \partial_{j_1 ... j_r} v. \tag{8}$$

La composition $B(u)_\circ B(v)$ peut s'écrire $B(w)$ où:

$$w \overset{\text{not}}{=} u_* v = uv + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\nu^r}{r!} P^r(u,v) \tag{9}$$

si $\nu = \frac{\hbar}{2i}$. La série convergeant simplement et dans l'espace des distributions tempérées. De même, $\frac{1}{2\nu}$ fois le commutateur de $B(u)$ et $B(v)$ s'écrit $B(w)$ où:

$$w \overset{\text{not}}{=} [u,v]_* = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2\nu)^{2r+1}}{(2r+1)!} P^{2r+1}(u,v). \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) définissent une déformation de la structure canonique d'algèbre associative et de Lie de $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2k})$. On appellera respectivement ces déformations produit et crochet de Moyal.

Par analogie, on posera:

Définition:

Soit N une algèbre associative et de Lie de fonctions pour un crochet de Poisson. Un produit-$*$ est une déformation formelle de N, c'est à dire, une application de $N \times N$ vers l'espace $E(N,\nu)$ des séries formelles en ν à coefficients dans N:

$$u * v = \sum_{r \geq 0} \nu^r C^r(u,v)$$

ayant les propriétés:

i) $*$ prolongé à $E(N,\nu)$ est associative,
ii) $C^0(u,v) = uv$,
iii) $C^1(u,v) = \{u,v\}$,
iv) $C^r(u,v) = (-1)^r\ C^r(v,u)$,
v) $C^r(1,v) = C^r(v,1) = 0,\ r > 1$,
vi) les C^r sont des opérateurs bilinéaires.

Si les C^r sont tous bidifférentiels, on dira que le produit-$*$ est différentiel. Dans la suite, on s'intéressera à des produits-$*$ non formels, définis en général par des formules intégrales pour une valeur particulière du paramètre formel ν. Les conditions (iii) et (iv) impliquent que:

$$[u,v]_* = \frac{1}{2\nu}(u*v - v*u)$$

est une déformation formelle du crochet de Poisson. (v) et (vi) assurent que 1 reste l'unité de la structure associative et que $*$ est distributif par rapport à l'addition. Si ν est "imaginaire pur", $u \longmapsto \bar{u}$ est une involution de l'algèbre associative obtenue.

<u>**Théorème**</u> [13]:

Sur toute variété symplectique W, il existe des produits-$*$ différentiels et formels.

. La quantification d'un système mécanique classique apparaît alors comme une déformation (formelle ou non) de la structure d'algèbre involutive associative et de Lie de l'ensemble des observables ($C^\infty(W)$ ou d'une de ses sous algèbre $\mathcal{A}$) du système classique. Les observables et les états du système ne changent pas de nature, c'est seulement la structure de leur ensemble qui se modifie. Le formalisme hilbertien usuel apparaît dans les représentations de cette algèbre involutive.

Comme pour la quantification géométrique, cette méthode de quantification par déformation permet de construire beaucoup de représentations unitaires et irréductibles d'un groupe de Lie G connexe et simplement connexe.

On procéde de la façon suivante:

. Soit W une orbite de la représentation coadjointe du groupe G, $\mathcal{A}$ un sous espace de $C^\infty(W)$ stable par un produit-$*$ non formel qu'on suppose covariant, c'est à dire tel que:

$$[\tilde{X},\tilde{Y}]_* = \{\tilde{X},\tilde{Y}\} \ (= \widetilde{[X,Y]}) \quad \forall X,Y \in \underline{\mathbf{g}}. \tag{11}$$

Suivant les idées de Fronsdal [17], on suppose que:

i) $\overline{u * v} = \overline{v} * \overline{u} \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{A}$,

ii) $\int_W u * \overline{v}\, d\xi$ est un produit scalaire sur $\mathcal{A}$ ($d\xi$ est une mesure G-invariante sur W),

iii) La représentation ℓ de $\underline{\mathbf{g}}$ dans $\mathcal{A}$ définie par :

$$\ell(X)u = i\,\tilde{X} * u \qquad (X \in \underline{\mathbf{g}}) \tag{12}$$

est intégrable (i.e: il existe une représentation notée E_W de G dont la différentielle est ℓ). On posera alors:

$$E_W(g)(u) = E_W(g) * u \qquad (13).$$

. Généralement $E_w(g)$ peut être vue comme une distribution sur W définie par:

$$< E_w(g), u >= \int_W E_W(g^{-1}) * u \, d\xi. \qquad (14).$$

Formellement, on peut écrire:

$$E_W(exp\ tX) = exp *\ it\tilde{X} \qquad \forall X \in \underline{\mathbf{g}} \tag{15}$$

et on verra que dans de nombreux cas, cette équation a un sens précis, non formel. Pour toutes ces raisons, on posera:

<u>Définition</u>:

E_W est la représentation-$*$ ou l'exponentielle-$*$ associée à l'orbite W.

. Soit maintenant T une représentation de l'algèbre involutive $(\mathcal{A}, *)$, par exemple une sous représentation de la représentation régulière de $\mathcal{A}$ sur elle-même, munie du produit scalaire $\int u * \overline{v}\ d\xi$. S'il existe une représentation π de G telle que:

$$T(E_W(g) * u) = \pi(g)_\circ T(u), \tag{16}$$

π sera dite associée à l'exponentielle-$*$.

. Un procédé pour obtenir un tel résultat est de prendre une sous représentation de la représentation régulière gauche dans $\mathcal{A}$ dont l'espace portant V est défini par:

$$V = \{u \in \mathcal{A} \text{ tel que } u * f = f(\xi_0)u \quad \forall f \in \mathcal{B}\} \tag{17}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous espace bien choisi de $\mathcal{A}$. V est alors stable par ℓ et π est son exponentielle. Un tel choix est appelé par Fronsdal une polarisation-$*$. Lorsque W est une orbite de la représentation coadjointe admettant une polarisation algébrique $\underline{\mathbf{h}}$ en ξ_0, on peut choisir pour $\mathcal{B}$, l'ensemble des $\tilde{X}$, pour X dans $\underline{\mathbf{h}}$.

. D'autre part, pour de nombreuses classes de groupes, si φ est une fonction de $C_c^\infty(G)$, on définit une fonction ou une distribution $\mathcal{E}(\varphi)$ sur W par:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_G \varphi(g) E_W(g^{-1})\ dg \qquad (dg \text{ est la mesure de Haar de } G). \tag{18}$$

$\mathcal{E}(\varphi)$ sera appelée la transformée de Fourier adaptée de φ et bien sûr on a:

$$\mathcal{E}(\varphi \times \psi) = \mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\psi), \tag{19}$$

si $\times$ est le produit de convolution dans $C_c^\infty(G)$.

. La distribution χ_W définie sur $C_c^\infty(G)$ par:

$$\chi_W(\varphi) = \int_W \mathcal{E}(\varphi)(\xi)\ d\xi \tag{20}$$

est, lorsqu'elle existe, le caractère associé à $\mathcal{E}$ et à W.

. L'avantage de cette transformée de Fourier adaptée est qu'elle associe aux fonctions φ de $C_c^\infty(G)$ des fonctions ou des distributions sur $\underline{\mathbf{g}}^*$, qui sont des objets plus "naturels" que les champs d'opérateurs usuels.

. Un autre avantage est une formule du caractère plus simple, en effet: si on veut écrire une telle formule avec la transformation de Fourier usuelle entre $\underline{\mathbf{g}}$ et $\underline{\mathbf{g}}^*$, on doit multiplier φ par j^{-1} avant de calculer sa transformée de Fourier, où j est la fonction

$$j(exp\ X) = \left[det\ \frac{sh\ ad\frac{X}{2}}{ad\frac{X}{2}}\right]^{1/2}.$$

Ici, cette fonction n'apparaît pas, la trace de $\pi(\varphi)$, dans les cas étudiés est l'intégrale de la transformée de Fourier adaptée de φ sur l'orbite W associée à π.

. De même, si φ est un coefficient ou un "paquet de coefficients" de représentations irréductibles de G, sa transformée de Fourier n'est en général pas supportée par les orbites coadjointes correspondantes, même dans le cas nilpotent. Par contre sa transformée de Fourier adaptée est portée par les orbites [6].

. Ce programme introduit par C. Fronsdal, [17], a été réalisé par D. Arnal et J.C. Cortet, dans [3] dans le cas où G est un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe:

Pour chaque orbite W de la représentation coadjointe, on peut définir des produits-$*$ non formels covariants sur $L^2(W)$. Ces produits admettent une et une seule représentation fidèle irréductible (à équivalence près) et ces représentations, du type décrit ci-dessus, permettent de retrouver la représentation π^W de G associée par Kirillov à l'orbite W.

De plus, si G est de dimension n et ses orbites de dimension $2k$, on sait [34] qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$, dense dans $\underline{\mathbf{g}}^*$, G invariant, de la forme $\mathcal{O} \simeq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^{2k}$ où $\mathcal{V}$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{R}^{n-2k}$ tel que toute orbite W de $\mathcal{O}$ soit difféomorphe à $\{\lambda\} \times \mathbb{R}^{2k}$, avec $\lambda \in \mathcal{V}$. La transformée de Fourier adaptée $\mathcal{E}$ est bien définie sur $\mathcal{O}$ [2]. $\mathcal{E}$ est définie sur l'espace $\mathcal{S}(G)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur G et est à valeur dans $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$. Elle apparait comme une déformation de la transformée de Fourier usuelle sur $\mathbb{R}^n$, et son expression est la suivante:
pour φ dans $\mathcal{S}(G)$, $\xi = (\lambda, p, q) \in \mathcal{O}$, $(\lambda \in \mathcal{V}$, $(p,q) \in \mathbb{R}^{2k})$,

$$\mathcal{E}(\varphi)(\xi) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} e^{-ia(X,\xi)}\ \varphi(expX)dX \tag{21}$$

et

$$\varphi(expX) = \int_{\mathcal{O}} e^{ia(X,\xi)}\mathcal{E}(\varphi)(\xi)d\xi \tag{22}$$

où $a(X,\xi)$ est une fonction réelle polynomiale en X, p et q, rationnelle en λ, admettant des pôles en dehors de $\mathcal{V}$. $\mathcal{E}$ se prolonge en un opérateur unitaire de $L^2(G)$ sur $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)$

et permet de retrouver la mesure de Plancherel de G. Toute cette construction s'étend au cas des groupes exponentiels [4] et au cas du groupe $\widetilde{E(2)}$, revêtement universel de $E(2) = SO(2) \times \mathbb{R}^2$ mais on associe alors une famille de représentations à chaque orbite de $\mathcal{O}$ (voir [5]).

. Dans le cas où G est un groupe de Lie compact, ce programme a été réalisé par D. Arnal, M. Cahen et S. Gutt dans [7] en utilisant la procédure de déquantification définie par Wildberger [37]. Il s'agit d'un calcul symbolique qui associe aux opérateurs de l'espace d'une représentation irréductible π^λ de G (le paramètre λ est ici un poids dominant donc par une extension naturelle un point de $\underline{\mathbf{g}}^*$) des fonctions sur l'orbite coadjointe W^λ de λ. En effet l'espace de π^λ est un espace de sections holomorphes d'un fibré L_λ en droites au dessus de W^λ munie d'une structure de variété kählerienne invariante compatible avec le choix d'une chambre de Weyl contenant λ. On utilise alors une méthode d'états cohérents et un calcul symbolique de Berezin (voir par exemple [30] et [10]). Ce calcul revient à définir un nouveau produit, dit produit-$*$ de Berezin, sur l'espace des symboles. Avec ce produit, on construit une représentation-$*$ E_λ associée à l'orbite W^λ et une transformation de Fourier adaptée. Cette construction s'étend au cas des représentations de la série discrète holomorphe d'un groupe semi-simple.

Nous avons cherché à établir deux types de résultats:

1- Dans le cas d'un groupe de Lie G nilpotent : nous avons étudié les propiétés de régularité et de densité pour la transformée de Fourier adaptée du type de celles de la transformée de Fourier usuelle. Nous voyons cette transformation comme une déformation de la transformée de Fourier usuelle et cherchons à la rendre aussi efficace que cette dernière.

Nos résultats montrent que cette transformation de Fourier naturelle entre G et $\underline{\mathbf{g}}^*$ est continue de $\mathcal{S}(G)$ dans $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$ munis de leurs topologies usuelles. Ce qui éclaire bien la grande régularité de la partie régulière $\mathcal{V}$ de $\hat{G}$ vu comme $\underline{\mathbf{g}}^*_{/G}$.

D'autre part, pour passer à des transformées de Fourier de distributions par transposition, il est nécessaire d'étudier la densité de l'image de $\mathcal{S}(G)$ par $\mathcal{E}$ dans $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$. C'est ce que nous faisons dans la partie III.

2-Dans le cas où G est compact:

- Pour que la théorie puisse s'étendre au cas de groupes quelconques, il est nécessaire d'unifier les deux constructions (celle du cas G nilpotent et celle du cas G compact) puisque les deux produits-$*$ utilisés sur les orbites de la représentation coadjointe sont de nature complètement différente. C'est ce que nous ferons dans la partie IV, en définissant un produit-$*$ de Moyal sur les espaces hermitiens symétriques.

- Nous nous sommes aussi intéressés à la description de la représentation régulière d'un groupe G compact en quantifiant par déformation $T^*(G)$. Nous décrivons $T^*(G)$ comme une variété de Stieffel. Il existe dans la littérature deux produits-$*$ sur ce type de variété. Ils sont tous deux covariants. Nous les avons donc étudiés dans l'optique de leur utilisation pour décrire la représentation régulière de G et montré que l'un d'eux permet bien de réaliser cette représentation, tandis que l'autre n'est pas adapté à ce type de problème.

Plus précisément, ce travail sera présenté de la façon suivante:

. Dans le chapitre I, on rappellera en détail les principes de la quantification géométrique et ceux de la méthode des orbites. On mettra en lumière les liens entre ces deux méthodes. Ensuite, on réalisera explicitement la méthode des orbites pour un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe.

Cette méthode donne bien sûr tout $\hat{G}$ à l'aide de représentations induites unitaires, associées à des polarisations algébriques réelles des orbites W de la représentation coadjointe de G. On verra qu'il n'existe en général pas de polarisation géométrique kählerienne G-invariante sur W et parallèlement qu'on ne peut pas réaliser $\hat{G}$ au moyen de représentations induites totalement holomorphes. Cependant, il existe des polarisations géométriques kähleriennes F non invariantes.

. Dans le chapitre II, on décrira la quantification par déformation des orbites de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie nilpotent et on montrera qu'elle permet de reconstruire explicitement $\hat{G}$, en utilisant pour chaque orbite une polarisation géométrique kählerienne non invariante. On rappelera la construction de la transformée de Fourier adaptée $\mathcal{E}$ dans le cas nilpotent.
Comme notre but est d'abord d'étudier les propriétés de régularité de cette transformation, on montrera alors que $\mathcal{E}$ s'écrit:

$$\Big(\mathcal{E}(\varphi)\Big)(\xi) = \int_{\mathbf{g}} e^{-ia(X,\xi)}\varphi(expX)dX$$

et:

$$\mathcal{E}^{-1}(f)(expX) = \int_{\mathbf{g}^*} e^{ia(X,\xi)}f(\xi)d\xi.$$

Puis on donnera une formule intégrale explicite de la fonction a (polynomiale en X rationnelle en ξ) sous la forme:

$$a(X,p,q,\lambda) = \int_0^1 \tilde{X}\Big(p, \psi(exp\ t\bar{X}(0,\phi^{-1}(q),\lambda)),\lambda\Big)dt \tag{22}$$

($\bar{X}$, ϕ et ψ sont définis dans les propositions (II, 2 , 2) et (II, 2, 3)).

. Dans le chapitre III, on utilisera ce résultat pour démontrer certaines propriétés de $\mathcal{E}$, entre-autres.

Théorème:

Lorsqu'on munit $\mathcal{S}(G)$ *et* $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$ *de leurs topologies usuelles, l'application:*

$$\mathcal{E} : \mathcal{S}(G) \longrightarrow C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(p,q)\Big)$$

est continue.

Ce résultat est essentiel pour une analyse de Fourier sur les distributions au moyen de $\mathcal{E}$. Au passage, on montrera une propriété importante dans cette analyse de Fourier qui est la suivante:
Si $A_{p,q}$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $(p,q) \in \mathbb{R}^{2k}$, indépendants de $\lambda \in \mathcal{V}$ sur $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(p,q))$, alors il existe un opérateur différentiel A_x sur $C_c^\infty(G)$ à coefficient polynomiaux en $x \in G$ (G étant muni de la carte exponentielle) tel que:

$$A_{p,q}\mathcal{E}(\varphi)(p,q,\lambda) = \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda)\mathcal{E}(A_x\varphi) \qquad \text{(la somme est finie).} \tag{23}$$

Puis on s'intéressera à l'image de $\mathcal{S}(G)$ par $\mathcal{E}$ dans $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$. On introduira l'hypothèse (H):

$$(H) \qquad \begin{cases} \text{si } P(x) \text{ est un polynôme en } x, \text{ alors il existe} \\ \text{un opérateur différentiel } A_{\lambda,p,q} \text{ sur } C^\infty(\mathcal{O}) \text{ à coefficients} \\ \text{polynomiaux en } p,q \text{ et rationnels en } \lambda \text{ tel que :} \\ \qquad \mathcal{E}\Big(P(x)\varphi\Big) = A_{\lambda,p,q}\mathcal{E}(\varphi), \end{cases}$$

et on montrera que:

Théorème

Si l'hypothèse (H) *est vraie pour* G, $\mathcal{E}\Big(\mathcal{S}(G)\Big)$ *est dense dans* $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$.

. L'hypothèse (H) apparait comme une hypothèse technique dans la démonstration du théorème plus précisèment, elle permet d'établir une réciproque du résultat (23) cité plus haut. On s'est donc intéressé à déterminer de grandes classes de groupes G pour laquelle elle est vérifiée, on en construit un certain nombre. En fait, nous faisons la conjecture suivante:

Conjecture:

L'hypothèse (H) *est vérifiée pour tout groupe nilpotent connexe et simplement connexe.*

. On a vu que les produits-$*$ utilisés dans la théorie des représentations des groupes compacts sont de nature très différentes que ceux utilisés pour les groupes nilpotents.

Dans le but de trouver un formalisme commun à ces deux théories de déformations, on construit, dans la quatrième partie un produit-$*$ dit de Moyal sur les espaces symétriques hermitiens et compacts.

En effet, sur les orbites de la coadjointe d'un groupe de Lie nilpotent, on a vu qu'il n'y a pas de structure kählerienne G-invariante, donc on ne peut pas construire de produit-$*$ de Berezin sauf dans certain cas, dont celui du groupe de Heisenberg. Pour ce dernier, on construit le produit-$*$ de Berezin sur les orbites de sa représentation coadjointe. L'opérateur d'entrelacement entre les deux produits-$*$ (celui de Moyal et celui de Berezin) est précisement $e^{\frac{1}{4}\Delta}$ où Δ est l'opérateur de Laplace sur l'orbite. On donnera une interprétation géométrique de cet opérateur, qui fait intervenir la symétrie géodesique autour de chaque point de W. Une telle symétrie avait été envisagée par Moreno [27] et Unterberger [32].
Puis on étendra cet entrelacement aux espaces symétriques hermitiens compacts, ce qui permettra de définir un produit de Moyal sur ces espaces donc en particulier sur les orbites des groupes de Lie compacts simplement connexes. On finira ce chapitre par l'exemple de S^2 (la sphère dans $\mathbb{R}^3$), pour qui, comme pour tout espace symétrique de rang 1, l'opérateur d'entrelacement des deux produits-$*$ est une fonction de Δ que l'on calcule.

. Dans le chapitre V, on construit la représentation-$*$ régulière d'un groupe compact G réalisé comme sous groupe de $GL(V)$, où V est un espace vectoriel réel de dimension n. $T^*(G)$ (le fibré cotangent de G) peut être décrit comme une orbite de la représentation coadjointe du groupe produit semi-direct de G avec $(n-1)$ exemplaires de V, munie de sa structure symplectique canonique. On étudiera des produits-$*$ proposés l'un par A. Lichnérowicz [25], l'autre par S. Gutt [19] sur cette variété. Le produit-$*$ de S. Gutt nous a semblé plus approprié que celui de Lichnérowicz pour notre problème. On montrera qu'il admet en fait une représentation intégrale et qu'il permet de décrire agréablement la représentation régulière de G.

I RAPPELS

. Dans ce chapitre on rappellera les principes de la quantification géométrique, ceux de la méthode des orbites et les liens entre ces deux méthodes puis on réalisera la méthode des orbites pour un ensemble dense d'orbites génériques de la représentation coadjointe d'un groupes de Lie nilpotent connexe et simplement connexe. On donnera ensuite un exemple de groupe de Lie nilpotent G, où les orbites génériques de la représentation coadjointe n'admettent pas de polarisation, qui soit à la fois kälherienne et G-invariante.

(I, 1) QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

.Soit (W,ω) une varieté symplectique. Dans cette partie, on décrira le processus de la quantification géométrique de W. On traitera en détail le cas holomorphe où on a une polarisation kälherienne et on peut définir des états cohérents, ensuite on regardera le cas où il existe un groupe de Lie agissant transitivement sur W.

1 PRÉQUANTIFICATION [24]

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le cadre naturel de cette première étape de la quantification géométrique est la construction d'un fibré en droites complexes au dessus de W. Décrivons ces objets:

On considère un fibré linéaire complexe $\pi : L \longrightarrow W$, et une connexion ∇ sur L. Pour tout champ de vecteurs X sur W, ∇_X est une application linéaire de l'espace des sections $\Gamma(L)$ de L dans lui-même telle que:

$$\nabla_X(\varphi.s) = \varphi\nabla_X s + (X\varphi)s,$$

pour toute fonction φ C^∞ sur W et toute section s dans $\Gamma(L)$. La courbure R de ∇ est une 2-forme complexe sur W, définie par :

$$R(X,Y).s = [\nabla_X,\nabla_Y]s - \nabla_{[X,Y]}s.$$

(X et Y sont des champs de vecteurs sur W et s est dans $\Gamma(L)$).

. Notons L_0 l'ensemble $L - \{\text{section nulle}\}$. Il existe alors une unique 1-forme complexe α sur L_0 (α est la 1-forme de connexion de∇) telle que :

i) $\nabla_X s = 2i\pi < s^*\alpha, X > .s$, pour tout champ de vecteurs X sur W et toute section s.

ii) $\pi^*R = 2i\pi d\alpha$.

. Afin de définir un produit scalaire sur l'espace des sections, on introduit une structure hermitienne sur L:

Une structure hermitienne h sur L est une fonction sur l'ensemble des couples (q, q') dans $L \times L$ tels que $\pi(q) = \pi(q')$, telle que h induit une structure d'espace de Hilbert sur chaque fibre $L_x = \pi^{-1}(x)$, ici x décrit W. L'évaluation de h définit sur $\Gamma(L) \times \Gamma(L)$ la fonction:

$$h(s, s')_x = h\big(s(x), s'(x)\big),$$

si s et s' sont dans $\Gamma(L)$. h sera dite une structure hermitienne α-invariante, si pour tout champ de vecteurs X sur W, et toute section s, s' dans $\Gamma(L)$:

$$Xh(s, s') = h(\nabla_X.s, s') + h(s, \nabla_X.s').$$

On construit un produit scalaire sur $\Gamma(L)$ en posant:

$$(s, s') = \int_W h\big(s(x), s'(x)\big) d\mu(x),$$

où $d\mu(x)$ est la mesure de Liouville sur W. Notons $\mathcal{H}(L)$ le complété de l'espace des sections s dans $\Gamma(L)$ telles que:

$$\|s\|^2 = \int_W h\big(s(x), s(x)\big) d\mu(x) < \infty.$$

Pour la norme ainsi définie, $\mathcal{H}(L)$ est un espace de Hilbert.

Proposition (I, 1, 1) [24]

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure hermitienne h α-invariante est que la 1-forme réelle $2i\pi(\alpha - \overline{\alpha})$ sur L soit exacte. Dans ce cas, h est unique à une constante positive près et satisfait:

$$2i\pi(\alpha - \overline{\alpha}) = d\log h.$$

La courbure $\frac{R}{2i\pi}$ est alors une 2-forme réelle, dont la classe dans la cohomologie de Cech est à valeurs entières.

. Notons (L, α, h) un fibré linéaire au dessus de W muni d'une 1-forme de connexion α et d'une structure hermitienne α-invariante h. Soit $\mathcal{L}(W)$ l'ensemble de ces fibrés. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}(W)$ par:

$$(L_1, \alpha_1, h_1) \sim (L_2, \alpha_2, h_2)$$

s'il existe un difféomorphisme $\tau : (L_1) \longrightarrow (L_2)$ qui envoie fibre à fibre, est linéaire sur chaque fibre et tel que:

$$\tau^*\alpha_2 = \alpha_1 \quad , \quad h_2{}_\circ\tau = h_1 \quad \text{et} \quad \pi_2{}_\circ\tau = \pi_1.$$

Dons ce cas $R_1 = R_2$, la courbure d'un tel fibré ne dépend donc que de sa classe d'équivalence. Soit $\mathcal{L}(W,\omega)$ l'ensemble des classes d'équivalences des fibrés (L,α,h) dans $\mathcal{L}(W)$ de courbure $R = 2i\pi\omega$.

<u>Définition</u> (I, 1, 2)

On dira que (W,ω) est préquantifiable, si $\mathcal{L}(W,\omega)$ n'est pas vide.

Rappelons que l'idée de la formulation de la mécanique hamiltonienne est d'associer à chaque fonction φ dans $C^\infty(W)$ un champ de vecteurs hamiltonien X_φ tel que:

$$i(X_\varphi)\omega = d\varphi.$$

(on sait que $i(X)\omega$ est la 1-forme sur W définie par: $i(X)\omega(Y) = \omega(X,Y)$ pour tout champ de vecteurs Y sur W).

. Si on note $\mathcal{U}(W,\omega)$ l'ensemble des champs de vecteurs X tels que la 1-forme $i(X)\omega$ soit exacte, par construction, l'application :

$$\begin{aligned} j : C^\infty(W) &\longrightarrow \mathcal{U}(W,\omega) \\ \varphi &\longmapsto X_\varphi \end{aligned}$$

est surjective et $Ker j$ est réduit à l'espace des fonctions constantes sur W. La suite :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C^\infty(W) \xrightarrow{\ j\ } \mathcal{U}(W,\omega) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

est donc une suite exacte d'algèbres de Lie.

Décrivons maintenant ce qu'est la préquantification de (W,ω):

La préquantification de (W,ω) est la donneé de l'analogue de cette suite en terme de groupes. Plus précisément :

Soit, pour $i = 1,2$, un élément (L_i,α_i,h_i) de $\mathcal{L}(W,\omega)$ et $\tau : (L_1)_0 \longrightarrow (L_2)_0$ un difféomorphisme de fibrés. Il existe alors un difféomorphisme unique $\check{\tau}$ de W, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (L_1)_0 & \xrightarrow{\ \tau\ } & (L_2)_0 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ W & \xrightarrow{\ \check{\tau}\ } & W \end{array}$$

soit commutatif (les deux fibrés L_i sont équivalents si $\check{\tau} = Id_W$).

Notons $E(L,\alpha,h)$ le groupe engendré par les difféomorphismes de fibrés τ de L_0 vers lui même. Et soit $D_L(W)$ l'ensemble des difféomorphismes $\check{\tau}$ de W définis par un τ de $E(L,\alpha,h)$. Si τ appartient à $E(L,\alpha,h)$ alors $\check{\tau}^*\omega = \omega$. $D_L(W)$ est donc un sous groupe du groupe des difféomorphismes symplectiques de W qui ne dépend en fait que de la classe de L.

La correspondance $\tau \xrightarrow{j'} \check{\tau}$ est surjective par construction. On montre que, si S^1 est l'ensemble des constantes de module 1, $Kerj' \simeq S^1$. Par conséquent la suite :

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow E(L,\alpha,h) \xrightarrow{j'} D_L(W) \longrightarrow 1 \tag{2}$$

est une suite exacte. Elle est l'analogue de la suite (1) dans le sens suivant:

Si τ appartient à $E(L,\alpha,h)$ et s à $\Gamma(L)$, on pose:

$$\tau s = \tau_o s_o \check{\tau}^{-1}.$$

Alors on a:

<u>Théorème</u> (I, 1, 3) [24]

Si φ est une fonction C^∞ sur W, et σ_t le groupe à un paramétre local qu'engendre X_φ, si x est un point de W, σ_t est un difféomorphisme local défini au voisinage de chaque point pour des petites valeurs de t tel que:

$$\{\varphi,\psi\}(x) = X_\varphi\psi(x) = \frac{d}{dt}\psi_o\sigma_t(x)\mid_{t=0}$$

pour tout ψ de $C^\infty(W)$, alors il existe un unique relévement local τ_t de σ_t dans $E(L,\alpha,h)$ tel que $\check{\tau}_t = \sigma_t$ et pour toute section s:

$$\delta(\varphi)s = \frac{d}{dt}(\tau_t s)_{|t=0} = \nabla_{X_\varphi} s + 2i\pi\varphi s.$$

Puisque $E(L,\alpha,h)$ agit canoniquement sur $\Gamma(L)$, δ est une représentation de l'algèbre de Lie $(C^\infty(W),\{\ \})$ sur $\Gamma(L)$. Si φ est réelle et h est α-invariante, $\delta(\varphi)$ est un opérateur antisymétrique non partout défini sur $\Gamma(L)$.

2 <u>POLARISATION</u>

. Supposons que (W,ω) soit une variété préquantifiable. Comme on l'a vu dans l'introduction, l'espace $\Gamma(L)$ n'est pas l'espace des états quantiques usuels. On doit donc le réduire en introduisant des polarisations.

<u>Définition</u> (I, 1, 4)

Une polarisation géométrique de (W,ω) est la donnée d'un sous fibré F de $T^{\mathbb{C}}(W)$, c'est à dire d'un sous espace F_x de $T_x(W)^{\mathbb{C}}$ pour tout x de W tel que:

i) $\omega(X,Y)(x) = 0$ *pour tout* X, Y *dans* F_x
ii) $dim_{\mathbb{C}}\ F_x = \frac{1}{2} dim W$
iii) $-i\omega_x(X,\overline{X}) \geq 0$ *pour tout* X *dans* F_x
iv) Si X *et* Y *sont des champs tels que* X_x *et* Y_x *appartiennent à* F_x *alors* $[X,Y]_x$ *appartient à* F_x

. Soit F une polarisation géométrique de (W,ω), on pose :

$$B(W) = \{\varphi \in C^\infty \quad \text{telle que } X\varphi = 0 \quad \forall X \in F\}.$$

Par le $i)$ de la définition précédente $\{\varphi,\psi\} = 0$ pour tout φ et ψ dans $B(W)$.
Considérons l'ensemble:

$$C_F^\infty(W) = \{\varphi \in C^\infty \quad \text{telle que} \quad \{\varphi,\psi\} \in B(W) \quad \forall \psi \in B(W)\}.$$

Il est clair que les fonctions φ de $C_F^\infty(W)$ sont telles que $[X_\varphi, X]$ appartient à F pour tout X de F. On dira dans ce cas que φ préserve la polarisation géométrique F. Par conséquent, si $\mathcal{U}(W,\omega,F)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens sur W dont le crochet de Lie préserve F, la suite:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow C_F^\infty(W) \longrightarrow \mathcal{U}(W,\omega,F) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

est une suite exacte d'algèbres de Lie. Pour avoir l'analogue de la suite (3) en termes de groupe, posons:

$$D_L(W,F) = \{\sigma \in D_L(W) \quad \text{tel que } \sigma_* F = F\},$$

et

$$E(L,\alpha,h,F) = \{\tau \in \ E(L,\alpha,h) \quad \text{tel que} \quad \check{\tau}_* F = F\}.$$

Avec les notations précédentes la suite:

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow E(L,\alpha,h,F) \longrightarrow D_L(W,F) \longrightarrow 1 \tag{4}$$

est alors une suite exacte de groupes. $E(L,\alpha,h,F)$ agit canoniquement dans l'espace des sections par $s \longmapsto \tau_\circ s_\circ \check{\tau}^{-1}$, cette action laisse l'espace:

$$\Gamma_F(L) = \{s \in \Gamma(L) \quad \text{telle que} \quad \nabla_X.s = 0, \quad \forall X \in F\}$$

invariant. Cet espace est appelé l'espace des sections polarisées. On obtient donc une représentation δ de $C_F^\infty(W)$ dans $\Gamma_F(L)$:

$$\delta(\varphi)s = \nabla_{X_\varphi} s + 2i\pi\varphi s.$$

. L'espace des états quantiques noté $\mathcal{H}_F(L)$ est le complété de l'espace des éléments s de $\Gamma_F(L)$ verifiant:

$$\| s \|^2 = \int_W h\big(s(x),s(x)\big) d\mu(x) < \infty$$

Notons que cette construction ne nous donne pas la quantification de toutes les fonctions C^∞ sur W: on ne sait construire $\delta(\varphi)$ dans $\mathcal{H}_F(L))$ que pour des observables (des éléments de $C^\infty(W)$) préservant la polarisation.
Dans ce qui suit, nous allons traiter un cas important qui est le cas des polarisations kähleriennes où on peut quantifier aussi des fonctions C^∞ sur W qui ne préservent pas la polarisation, en utilisant une méthode d'états cohérents.

3 LE CAS HOLOMORPHE

a) Polarisation kälherienne

Définition (I, 1, 5)

Une polarisation F de (W, ω) sera dite kälherienne, si $F \cap \overline{F} = \{0\}$.

. Dans ce cas $F \oplus \overline{F} = T(W)^{\mathbb{C}}$ puisque $dim_{\mathbb{C}} F_x = \frac{1}{2} dim W$. Il existe alors une seule structure complexe J, qui admet comme valeur propre i (resp $-i$) sur F (resp $\overline{F}$). J est intégrable puisque F est involutive (voir *iii* de la définition). D'autre part, pour tout X et Y de $T(W)^{\mathbb{C}}$,

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y),$$

ce qui entraîne que $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ est une métrique kälherienne. Il est clair que, si W est munie de cette structure complexe, le fibré L est un fibré holomorphe, $\Gamma_F(L)$ est l'espace des sections holomorphes. L'évaluation en un point étant continue pour la norme de $\mathcal{H}_F(L)$, les éléments de cet espace de Hilbert sont tous des sections holomorphes et $\delta(\varphi)$ pour φ dans $C^\infty_F(W)$ est un opérateur antiadjoint sur $\mathcal{H}_F(L)$.

b) Etats cohérents [31]

. La quantification des fonctions φ ne préservant pas la polarisation F (qu'on suppose kälherienne) impose une modification de l'opérateur $\delta(\varphi)$, pour qu'il opère sur $\mathcal{H}_F(L)$. Pour cela, on introduit une projection sur $\mathcal{H}_F(L)$ par la méthode des états cohérents. Plus précisément:

. Soit $\pi : L \longrightarrow W$ le fibré de la quantification géométrique construit plus haut. Le fait que, dans la quantification holomorphe, l'évaluation des sections est continue s'écrit:

Si q appartient à L_0 et si s est une section holomorphe de L, on pose:

$$s\big(\pi(q)\big) = \tilde{s}(q)q.$$

L'application $s \longrightarrow \tilde{s}(q)$ est alors une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{H}_F(L)$. Et par le théorème de Riesz, il existe un élémemt e_q de $\mathcal{H}_F(L)$, appelé état cohérent, tel que:

$$\tilde{s}(q) = < s, e_q > .$$

. Supposons qu'il existe une section s_0 de L qui ne prend pas la valeur 0 sur un ouvert U dense de W. A chaque point x de U, on associe l'élément $e_x = e_{s_0(x)}$. L'ensemble $\{e_x \in \mathcal{H}_F(L), \quad x \in U\}$ forme ce qu'on appelle, un système d'états cohérents sur W.

Fixons s_0. Si s est une section de L, on lui associe une fonction $\tilde{s}$ sur U par:

$$s(x) = \tilde{s}(x)s_0(x).$$

s est holomorphe si et seulement si $\tilde{s}$ l'est. Comme $\pi(s_0(x)) = x$, alors:

$$\begin{aligned}\tilde{s}(x) = < s, e_x > &= \int_U h(s(y), e_x(y))d\mu(y)\\ &= \int_U \tilde{s}(y)\overline{\tilde{e_x}(y)}h(s_0(y), s_0(y))d\mu(y)\\ &= \int_U \tilde{s}(y)\overline{< e_x, e_y >}h(s_0(y), s_0(y))d\mu(y).\end{aligned}$$

On voit donc apparaître un noyau reproduisant:

$$K(x, y) = \overline{< e_x, e_y >}h(s_0(y), s_0(y)).$$

On pose alors:

$$(\delta'(\varphi)s)(x) = \int_U (\widetilde{\delta(\varphi)s})(y)K(x, y)d\mu(y).$$

Par construction, $\delta'(\varphi)s$ est holomorphe même si $\delta(\varphi)s$ ne l'est pas. $\delta'(\varphi)$ agit donc sur $\mathcal{H}_F(L)$ (il n'est pas nécessairement partout défini).

4 ACTION D'UN GROUPE DE LIE

.Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{g}$, agissant sur W. Notons cette action σ_W.

Définition (I, 1, 6)

On dira que (W, ω) est un G-espace symplectique ou que l'action de G est symplectique si la 2-forme symplectique ω est G-invariante.
On dira que l'action de G est fortement symplectique sur W, si elle est symplectique et si $\sigma_{W*}(\underline{g})$ est contenu dans l'espace des champs hamiltoniens sur W.
On dira que l'action est fortement hamiltonienne, s'il existe un morphisme d'algèbres de Lie $X \longmapsto \tilde{X}$ de $\underline{g}$ dans $C^\infty(W)$ tel que $\sigma_{W*}(X) = X_{\tilde{X}}$ pour tout X de $\underline{g}$.

. Soit (W, ω) un espace G-symplectique, l'image de σ_W est donc une partie de $D_L(W)$. Cherchons à relever σ_W en une action σ_L du groupe G dans L de façon à rendre le diagrame suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & E(L, \alpha, h) & \longrightarrow & DL(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \nwarrow \sigma_L & \uparrow \sigma_W & & \\ & & & & & & G & & \end{array}$$

Pour cela on a vu dans la proposition (I, 1, 1) qu'il faut déjà que la classe $[\omega]$ de la forme ω vue dans la cohomologie de Cech soit entière.

<u>Thèorème</u> (I, 1, 7) [24]

Supposons que (W,ω) est un espace G-symplectique tel que $[\omega]$ soit entière et soit $[(L,\alpha,h)]$ un élément de $\mathcal{L}(W,\omega)$.
Alors, σ_W peut être relevée d'une manière C^∞ en $\sigma_L : G \longrightarrow E(L,\alpha,h)$, si et seulement si l'action de G est fortement hamiltonnienne (donc s'il existe un morphisme d'algèbres de Lie λ de $\underline{\mathbf{g}}$ vers $C^\infty(W)$.
Lorsqu'elle existe, σ_L est uniquement détérminée par la relation

$$d\sigma_L = \delta_\circ\lambda.$$

. Si les conditions du théorème ci-dessus sont vérifiées pour (W,ω), on dit que W est préquantifiée de façon G-invariante. Dans ce cas, G agit sur $\Gamma(L)$ par:

$$(gs)(x) = \sigma_L(g)s\big(\sigma_W(g^{-1})x\big).$$

Prenons une polarisation géométrique F sur W. Si cette polarisation est G-invarinte, alors G opère sur $\mathcal{H}_F(L)$. Si de plus F est une polarisation kälherienne et e_q $(q \in L)$ sont les états cohérents de L, construits ci-dessus. On a alors:

<u>Proposition</u> (I, 1, 8) [31]

> *1) $e_{cq} = \overline{c}^{-1}e_q$ pour tout nombre complexe c non nul,*
> *2) $ge_q = e_{\sigma_L(g)q}$ pour tout g dans G.*

C'est cette dernière proprieté qui est à l'origine du nom d'états cohérents donné aux sections e_q: si G est un groupe d'évolution, les évolutions classique et quantique des états e_q coïncident.

(I, 2) <u>LA MÉTHODE DES ORBITES</u>

. Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe, $\underline{\mathbf{g}}$ son algèbre de Lie, $\underline{\mathbf{g}}^*$ le dual de $\underline{\mathbf{g}}$ et W une orbite de la représentation coadjointe de G dans $\underline{\mathbf{g}}^*$. On veut construire une (ou des) représentation(s) unitaire(s) et irréductible(s) π de G associée(s) à l'orbite W par la méthode des orbites évoquée dans l'introduction. Pour cela:

. On choisit un point ξ_0 dans W. On note:

$$\underline{\mathbf{g}}(\xi_0) = \{X \in \underline{\mathbf{g}} \quad \text{tels que} \quad <\xi_0, [X,.]>= 0\}$$

$$G(\xi_0) = \{g \in G \quad \text{tels que} \quad g\xi_0 = \xi_0\}.$$

$G(\xi_0)$ est alors le stabilisateur de ξ_0, c'est un sous groupe de Lie fermé de G d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$. La restriction de la forme $2i\pi <\xi_0,.>$ à $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ est un caractère de $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$.

Cherchons à exponentier ce caractère en un caractère unitaire de $G(\xi_0)$:

<u>Définition</u> (I, 2, 1)

ξ_0 est dit entier si et seulement si il existe un caractère unitaire χ_{ξ_0} de $G(\xi_0)$ tel que:

$$d\chi_{\xi_0} = 2i\pi < \xi_0, . > .$$

. Dans le cas où $G(\xi_0)$ est connexe, il existe un voisinage de l'élément neutre dans $G(\xi_0)$, difféomorphe à un voisinage V de 0 dans $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ par l'application exp, et qui engendre $G(\xi_0)$.

. Dans le cas où $G(\xi_0)$ n'est pas connexe, soit $G(\xi_0)_0$ sa composante connexe de l'élément neutre, $G(\xi_0)'$ le sous groupe des commutateurs dans $G(\xi_0)$, on pose:

$$G(\xi_0)^{ab} = G(\xi_0)/G(\xi_0)' \quad , \quad \alpha : G(\xi_0) \longrightarrow G(\xi_0)^{ab}.$$

D'après ([9], chap.III), ξ_0 est alors entier si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:
i) il existe un homomorphisme $\chi_0 : G(\xi_0)_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $d\chi_0 = 2i\pi < \xi_0, . >_{|\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)}$,
ii) il existe un homomorphisme $\tilde{\chi}_0 : G(\xi_0)_0 \longrightarrow G(\xi_0)_0/G(\xi_0)' \cap G(\xi_0)_0$, tel que:

$$\chi_0 = \tilde{\chi}_0 \circ \alpha_{|G(\xi_0)_0}$$

<u>Remarque</u> (I, 2, 2)

Si un point ξ_0 de W est entier, tout point de W l'est. Ce qui signifie que cette condition porte sur l'orbite W et non sur un point ξ_0 particulier de W. Si cette condition est remplie, on dira donc que W est entière

. Supposons W entière et choisissons un caractère χ, c'est une représentation de dimension 1 de $G(\xi_0)$. On pose:

$$\pi = \underset{G(\xi_0)\uparrow G}{ind}\, \chi$$

Cette représentation induite π n'est pas irréductible en général (sauf si G est abélien). On va donc agrandir $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ dans $\underline{\mathbf{g}}$ et chercher à prolonger la forme $2i\pi < \xi_0, . >$ à une sous algèbre $\underline{\mathbf{h}}$ de $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$, tout en lui imposant de rester un caractère de cette algèbre (c'est à dire que l' on cherchera $\underline{\mathbf{h}}$ telle que $< \xi_0, [\underline{\mathbf{h}}, \underline{\mathbf{h}}] >= 0$).

On dira qu'une telle sous algèbre $\underline{\mathbf{h}}$ est subordonnée à ξ_0. Bien sûr, si on prend un autre point $\xi = g\xi_0$ de W (g est un point de G), $Ad(g)\underline{\mathbf{h}}$ est alors une sous algèbre subordonnée à ξ.

Définition (I, 2, 3)

Si $\underline{\mathbf{h}}$ *est une sous algèbre subordonnée en* ξ_0 *et de codimension* $\frac{1}{2}dimW$*, alors on dira que* $\underline{\mathbf{h}}$ *est une polarisation algébrique en* ξ_0.

Thèorème (I, 2, 4) [14]

Pour chaque ξ *dans* $\underline{\mathbf{g}}^*$ *si* $\underline{\mathbf{g}}$ *est résoluble, ou pour les éléments réguliers de* $\underline{\mathbf{g}}^*$ *au sens de [14] dans le cas général, il existe une sous algèbre* $\underline{\mathbf{h}}$ *de* $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$*, telle que :*

i) $\underline{\mathbf{h}} + \overline{\underline{\mathbf{h}}}$ *est une sous algèbre de* $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$,

ii) $Ad(G(\xi))\underline{\mathbf{h}} \subset \underline{\mathbf{h}}$,

iii) $\underline{\mathbf{h}}$ *est isotrope maximale pour la forme bilinéaire définie sur* $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$ *par:*

$$\omega(X,Y) = <\xi, [X,Y]>,$$

iv) $\underline{\mathbf{h}}$ *est positive, c'est à dire:*

$$i < \xi, [X,\overline{X}] > \geq 0 \quad \forall X \in \underline{\mathbf{h}}.$$

.Soit ξ_0 un élément entier de $\underline{\mathbf{g}}^*$, W son orbite et $\underline{\mathbf{h}}$ une polarisation algébrique en ξ_0. On pose $\underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{g}} \cap \underline{\mathbf{h}}$, on appelle D_0 le sous groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{d}}$ et D l'ensemble $G(\xi)D_0$. D est alors un sous groupe de Lie fermé de G et le caractère χ s'étend d'une manière unique en un caractère (notè aussi χ) de D, dont la différentielle est la forme $2i\pi < \xi_0, . >$.

Considèrons la représentation induite holomorphe:

$$\pi = \underset{D\uparrow G}{Hol}\ \chi.$$

Elle se réalise ([9], chap. V) dans l'espace des fonctions C^∞ sur G à support compact modulo D et vérifiant:

$$f(dg) = \Delta_{G,D}(d)^{-\frac{1}{2}}\chi(d)f(g) \quad (g \in G,\ d \in D), \tag{5}$$

où $\Delta_{G,D}$ représente $|detAd_{D\backslash G}(d)|$,

$$\|f\|^2 = \int_{D\backslash G} |\ f\ |^2 d\mu_{G,D} < \infty \tag{6}$$

où $d\mu_{G,D}$ est une mesure semi-invariante sur $D \setminus G$, définie par:

$$\int_G \varphi(g)dg = \int_{D\backslash G}\int_D \varphi(dg)\Delta_{G,D}(d)d(d)d\mu$$

pour toute fonction φ continue, à support compact et:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}f(exp - tXg) = (i < \xi_0, X > -\frac{1}{2}Tr_{\underline{h}\backslash\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}}\ ad(X)f(g)) \quad \forall X \in \underline{\mathbf{h}}, \tag{7}$$

où on a noté un peu abusivement:

$$\frac{d}{dt}f(exp - t(X_1 + iX_2)g) = \frac{d}{dt}f(exp - tX_1g) + i\frac{d}{dt}f(exp - tX_2g).$$

Remarquons que si X est réel, la relation (7) est une conséquence de la relation (5).

Notons $\mathcal{H}(\chi, \underline{\mathbf{h}})$ le complété pour la norme (6) de l'espace des fonctions C^∞ sur G verifiant (5) , (6) et (7), la représentation π se réalise alors sur $\mathcal{H}(\chi, \underline{\mathbf{h}})$ par :

$$\Big(\pi(g')f\Big)(g) = f(gg'),$$

elle est unitaire et irréductible.

(I, 3) LIENS ENTRE LA MÉTHODE DES ORBITES ET LA QUANTIFI- -CATION GÉOMÉTRIQUE

. Soit W une orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe G, d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}$. Si X est dans $\underline{\mathbf{g}}$, on pose:

$$(X^- f)(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(exp - tX\xi) \quad \text{et} \quad \tilde{X}(\xi) = < X, \xi > .$$

Pour tout ξ dans W, l'ensembe $\{X^-_{|_\xi}, \quad X \in \underline{\mathbf{g}}\}$ engendre $T_\xi(W)$. Et la 2-forme

$$\omega_\xi(X^-, Y^-) = < \xi, [X,Y] >,$$

est une 2-forme symplectique G-invariante.

. Nous allons comparer les différentes étapes de la quantification géométrique, et la méthode des obites sur W:

1. Préquantification - Intégralité

Le premier pas de la méthode des orbites est la donnée d'un caractère χ de $G(\xi_0)$ le stabilisateur de ξ_0, de différentielle $2i\pi < \xi_0, . >$ sur l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}(\xi_0)$ de $G(\xi_0)$. Le premier pas de la quantification gémétrique, est la donnée d'un fibré linéaire avec connexion au dessus de W de courbure $2i\pi\omega$. Dans ce cas, on a vu que W est préquantifiable de façon G-invariante, c'est à dire qu'on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(W) & \longrightarrow & \mathcal{U}(W, \beta_{\xi_0}) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \nwarrow \lambda & \uparrow d\sigma_W & & \\ & & & & & & \underline{\mathbf{g}} & & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & S^1 & \longrightarrow & E(L, \alpha) & \longrightarrow & D_L(W, \beta_{\xi_0}) & \longrightarrow & 1 \\ & & & & & \nwarrow \sigma_L & \uparrow \sigma_W & & \\ & & & & & & G & & \end{array}$$

avec: $\quad d\sigma_L(X) = (\delta_\circ \lambda)(X) \quad$ et $\quad \lambda(X) = \tilde{X}.$

En fait ces deux notions sont équivalentes, et on a:

Théorème (I, 3, 1) [24]

Soit ξ_0 dans W. Alors ξ_0 est entier si et seulement si W est préquantifiable de façon G-invariante.

2 Polarisation

. Soit $\underline{\mathbf{h}}$ une polarisation algébrique en ξ_0 dans $\underline{\mathbf{g}}$. On peut, à partir de $\underline{\mathbf{h}}$, construire une polarisation géométrique $F \subset T(W)^{\mathbb{C}}$, G-invariante sur W.

Proposition (I, 3, 2)

Soit $\underline{\mathbf{h}}$ une polarisation algébrique en ξ_0. Il existe alors une unique polarisation (complexe) F, G-invariante telle que:

$$F_{\xi_0} = > X^-_{|_{\xi_0}},\ X \in \underline{\mathbf{h}} < .$$

Preuve

Par construction, F_{ξ_0} est un sous espace isotrope maximal de $T_{\xi_0}(W)^{\mathbb{C}}$. Posons:

$$F_{g\xi_0} = > (AdgX)^-_{|_{g\xi_0}},\ X \in \underline{\mathbf{h}} < .$$

Ceci est bien défini, car $Ad\big(G(\xi_0)\big)\underline{\mathbf{h}} \subset \underline{\mathbf{h}}$. Ce sous-espace est aussi isotrope maximal. La distribution F est G-invariante par construction, et elle est intégrable:
Si X et Y sont dans $\underline{\mathbf{h}}$, on a :

$$[X^-, Y^-]_{|_{\xi_0}} = \frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \big(Ad(exptX)Y\big)^-_{|_{\xi_0}} \in F_{\xi_0}.$$

Et par construction, ceci se transporte en tout point ξ de W.

(I, 4) CAS D' UN GROUPE DE LIE NILPOTENT.

Si G est un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, la méthode des orbites permet de décrire tout le dual unitaire de G. On va le faire ici pour un ensemble dense d'orbites génériques, afin d'avoir une expression rationnelle de la mesure de Plancherel. Cette construction due à Kirillov et Dixmier, utilise des polarisations réelles ([23], [15]). On verra dans la quatrième partie qu'on peut parfois utiliser des polarisations kälheriennes. Cependent ceci n'est généralament pas possible: on donnera à la fin de ce paragraphe un exemple de groupe de lie nilpotent G dont aucune des orbites génériques de la représentation coadjointe n'admet de polarisation qui soit à la fois kälherienne et G-invariante.

1 Orbites de la représentation coadjointe

. Soit $\underline{g}$ une algèbre de Lie de dimension n. On pose:

$$C^1(\underline{g}) = [\underline{g}, \underline{g}], ..., C^k(\underline{g}) = [\underline{g}, C^{k-1}(\underline{g})].$$

On dit que $\underline{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, s'il existe un entier m tel que:

$$C^m(\underline{g}) \neq 0 \quad \text{et} \quad C^{m+1}(\underline{g}) = 0.$$

Fixons une telle algèbre, il existe alors une suite d'ideaux de $\underline{g}$:

$$\{0\} = \underline{g}_0 \subset \underline{g}_1 \subset ... \subset \underline{g}_n = \underline{g} \quad \text{avec} \quad dim\underline{g}_i = i.$$

Une telle suite est dite une suite de Jordan-Hölder d'idéaux. D'autre part, si $\underline{t}(s)$ est l'algèbre des matrices triangulaire d'ordre s, on peut raliser $\underline{g}$ comme une sous algèbre de Lie de $\underline{t}(s)$ pour un certain s grâce au théorème d'Ado.(voir par exemple Bourbaki, Algèbres de Lie, Chapitre I).

Soit G l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\underline{g}$ on sait que l'application $exp : \underline{g} \longrightarrow G$ est un difféomorphisme global. Le produit de G s'écrit alors:

$$expX expY = expZ(X, Y)$$

où $Z(X, Y)$ est une fonction polynomiale. L'action adjointe de G dans $\underline{g}$ s'écrit:

$$Ad(expX)Y = e^{adX}Y \quad \text{où} \quad ad(X)Y = [X, Y].$$

Soit ξ un point du dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$, l'action coadjointe de G dans $\underline{g}^*$ s'écrit:

$$< g.\xi, X > = < \xi, Adg^{-1}.X > \quad \forall X \in \underline{g}, \forall g \in G.$$

.Soit $\mathcal{U}(\underline{g})$ (respectivement $S(\underline{g})$) l'algèbre enveloppante (respectivement l'algèbre symétrique) de $\underline{g}$. $S(\underline{g})$ s'identifie à l'ensemble des fonctions polynômiales sur $\underline{g}^*$, qui est une algèbre de Lie pour le crochet de Poisson $\{\ ,\ \}$. Notons $I(\underline{g})$ l'anneau des polynômes G-invariants sur $\underline{g}^*$, c'est à dire:

$$P \in I(\underline{g}) \Longleftrightarrow (X^- P)(\xi) = \frac{d}{dt} P(exp - tX\xi)_{|_{t=0}} = \{\tilde{X}, P\} = 0, \quad \forall X \in \underline{g}$$

et $J(\underline{g})$ le corps des fractions rationnelles invariantes sur $\underline{g}^*$. $J(\underline{g})$ est le corps des fractions de $I(\underline{g})$.

Les orbites de la représentation coadjointe de G dans $\underline{g}^*$ sont des variétés algébriques qui se prêtent à une paramétrisation agréable:

Théorème (I, 4, 1) [34]

Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\underline{g}$ et de dimension n. Alors il existe un entier $k < n$, un ouvert de Zariski G-invariant $\mathcal{O} \subset \underline{g}^*$, $2k$ fonctions rationnelles p_j, q_j $(j = 1, ..., k)$ définies sur $\mathcal{O}$, $n - 2k$ fonctions rationnelles λ_m $(m = 1, ..., n - 2k)$ G-invariantes sur $\mathcal{O}$ et un ouvert de Zariski $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-2k}$ tels que:

i) l'application: $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{V} \times \mathbb{R}^{2k}$ qui à ξ associe $\big(\lambda(\xi), p(\xi), q(\xi)\big)$ est un difféomorphisme,

ii) chaque orbite $W_\lambda \subset \mathcal{O}$ est, par cette application, difféomorphe à $\{\lambda\} \times \mathbb{R}^{2k}$,

iii) pour tout X dans $\underline{g}$ et ξ dans $\mathcal{O}$

$$< X, \xi >= \tilde{X}(\lambda, p, q) = \sum_{k=1}^{k} \alpha_j(\lambda, q) p_j + \alpha_o\ (\lambda, q),$$

où $\alpha_j(\lambda, q) \in \mathbb{R}(\lambda)\ [q_{j+1}, ..., q_k]$.

. La démonstration de ce théorème se fait par récurence sur la dimension de $\underline{g}$, en remontant une suite de Jordan-Hölder de $\underline{g}$, et en étudiant les deux cas possibles du passage de $\underline{g}_i$ à $\underline{g}_{i+1}$ [14]:

<u>1^{er} **Cas**</u>

$I(\underline{g}_{j+1}) \not\subset S(\underline{g}_j)$ alors $I(\underline{g}_j) \subset I(\underline{g}_{j+1})$ et il existe λ dans $I(\underline{g}_{j+1}) - I(\underline{g}_j)$ tel que:

$$\lambda_{r_{j+1}} = \alpha . \tilde{X}_{j+1} + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha \in I(\underline{g}_j), \quad \beta \in S(\underline{g}_j).$$

On prend donc comme nouvelle paramétrisation (p', q', λ') :

$$p' = p \quad , \quad q' = q \quad , \quad \lambda' = (\lambda, \lambda_{j+1})$$

i.e.: l'orbite de G_j dans $\underline{g}_j^*$ n'a pas augmenté de dimension mais on a un invariant $\lambda_{r_{j+1}}$ de plus ($\mathcal{V}^j$ est strictement inclus dans $\mathcal{V}^{\ j+1}$).

<u>2^{eme} **Cas**</u>

$I(\underline{g}_{j+1}) \subset S(\underline{g}_j)$ alors $I(\underline{g}_{j+1}) \subset I(\underline{g}_j)$ et il existe Y dans $I(\underline{g}_j) - I(\underline{g}_{j+1})$ tel que :

$$\{\tilde{X}_{j+1}, Y\} = Z \quad , \quad Z \in I(\underline{g}_{j+1}) \quad \text{et} \quad Z \neq 0.$$

On pose:

$$p_{k_{j+1}} = \tilde{X}_{j+1}, \quad p'_i = exp - q_{k_{j+1}} ad_{\{,\}}(\tilde{X}_{j+1}) p_i$$
$$q_{k_{j+1}} = Y Z^{-1}, \quad q'_i = exp - q_{k_{j+1}} ad_{\{,\}}(\tilde{X}_{j+1}) q_i$$

si $ad_{\{,\}}(f)g = \{f,g\}$. On a donc un invariant Y de moins ($\mathcal{V}^{\,j+1} \subset \mathcal{V}^j$) et la dimension de l'orbite a augmenté de 2. On démontre que les trois propriétés du théorème sont vraies dans les deux cas [34].

. Maintenant, si W est une orbite de la représentation coadjointe de G, W est alors une variété symplectique, si elle est munie de la 2-forme canonique:

$$\omega_\xi(X^-,Y^-) =<\xi,[X,Y]>= \{\tilde{X},\tilde{Y}\}_\xi = \widetilde{[X,Y]}_\xi,$$

ceci pour tout X, Y dans $\underline{\mathbf{g}}$, et ξ dans W. La 2-forme ω_ξ s'ecrit dans la carte donnée par le théorème précédent :

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} dp_i \wedge dq_i$$

2 Méthode des orbites

. Soit ξ dans $\mathcal{O}$. Puisque $G(\xi) = exp\underline{\mathbf{g}}(\xi)$ est connexe et simplement connexe, toute orbite dans $\underline{\mathbf{g}}^*$ est entière. Considérons le paramétrage (p,q,λ) de l'ouvert $\mathcal{O} \simeq \mathbb{R}^{2k} \times \mathcal{V}$ donné par le théorème (I, 4, 1) et notons $W^{\,\lambda}$ l'orbite d'un point $\xi_0 = (0,0,\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{V}$.

Si on pose :

$$\underline{\mathbf{h}} = \{X \in \underline{\mathbf{g}} \quad \text{tel que} \quad \tilde{X}(\lambda,p,0) = \tilde{X}(\lambda,0,0)\},$$

$\underline{\mathbf{h}}$ est alors une sous algèbre de $\underline{\mathbf{g}}$ isotrope maximale en ξ_0 pour la forme bilinéaire induite par ω_{ξ_0} sur $\underline{\mathbf{g}}$. On définit un caractère χ_λ sur $\underline{\mathbf{h}}$ par:

$$\chi_\lambda(X) = 2i\pi < \xi_0, X > \quad \text{si} \quad X \in \underline{h},$$

qu'on exponentie à $H = exp\ \underline{\mathbf{h}}$ en posant :

$$\chi_\lambda(expX) = e^{i<\xi_0,X>}.$$

La méthode des orbites associe à W la représentation induite unitaire:

$$\pi^\lambda = \underset{H\uparrow G}{ind}\, \chi.$$

π^λ se réalise dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ telles que:

1) $\tilde{f}(gh) = \chi_\lambda(h^{-1})\ \tilde{f}(g)$

2) $\int_{G/H} |f(g)|^2\ dg < +\infty$

par:

$$(\pi^\lambda(g)\ \tilde{f})\ (g') = \tilde{f}(g^{-1}g').$$

Soit $X_1, ..., X_k$ une base coexponentielle de $\underline{\mathbf{h}}$ dans $\underline{\mathbf{g}}$,tout élément g de G se décompose d'une manière unique en:

$$g = g_0 \; h_0 \quad \text{avec} \quad h_0 \in H \text{ et } g_0 = expt_1 X_1 ... expt_k X_k \quad (t_1, .., t_k) \in \mathbb{R}^k.$$

A toute fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{H}$, on associe alors une fonction

$$f : G/H \to \mathbb{C}$$

définie par:

$$f(g_0) = \tilde{f}(g_0).$$

π se réalise donc sur $L^2(G/H) \simeq L^2(\mathbb{R}^k)$ puisque $(G/H) = exp\mathbb{R}X_1 ... exp\mathbb{R}X_k$.

Proposition (I, 4, 2) [1]

Pour tout X de $\underline{\mathbf{g}}$, si $\tilde{X}(p, q, \lambda) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(\lambda, q).p_j + \alpha_0(\lambda, q)$ et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^k)$,

$$(\pi^{\lambda}(expX)f)(t) = exp(i \int_0^1 \alpha_0(expsX^- t)ds) f(expX^- t),$$

où $t \in \mathbb{R}^k \simeq G/H$ et X^- est le champ canonique de vecteurs sur G/H:

$$X^- = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) \frac{\partial}{\partial t_j}.$$

En particulier, on en déduit:

$$\pi^{\lambda}(X) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) \frac{\partial}{\partial t_j} + i\alpha_0(t).$$

La démonstration se fait par induction par étage, en suivant la suite de Jordan-Hölder.

Théorème (I, 4, 3) [23]

On a une correspondance bijective entre l'ensemble des orbites de la représentation coadjointe de G et l'ensemble des classes de représentations unitaires et irréductibles de G. L'orbite W^{λ} associée à une représentation π^{λ} est caractérisée par la formule du caractère:

$$Tr\, \pi^{\lambda}(\varphi) = \int_{W_{\lambda}} (\mathcal{F}\varphi)\; (\xi)\; d\mu(\xi)$$

où φ est une fonction C^∞ à décroissance rapide sur G, $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier usuelle entre G identifié à $\underline{\mathbf{g}}$ et $\underline{\mathbf{g}}^*$, $d\mu(\xi)$ est la mesure de Liouville sur l'orbite W^λ ($d\mu(\xi) = \frac{dp.dq}{(2\pi)^k}$ si $\xi = (p, q, \lambda)$), enfin $\pi^\lambda(\varphi)$ est l'opérateur à trace défini sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ par:

$$\pi^\lambda(\varphi)\ u = \int_G \varphi(g)\pi^\lambda(g)u\ dg.$$

Rappelons aussi que:

Théorème (I, 4, 4) [28]

i) Pour toute fonction φ dans $\mathcal{S}(G)$, $\pi^\lambda(\varphi)$ est un opérateur borné,

ii) si $\times$ est le produit de convolution sur G, alors, pour tout couple de fonctions φ, ψ dans $\mathcal{S}(G)$,

$$\pi^\lambda(\varphi \times \psi) = \pi^\lambda(\varphi)_\circ\pi^\lambda(\psi),$$

iii) si $\varphi^*(g) = \overline{\varphi(g^{-1})}$ alors $\pi^\lambda(\varphi^*) = (\pi^\lambda(\varphi))^*$,

iv) si u est dans $L^2(\mathbb{R}^k)$ et φ dans $\mathcal{S}(G)$ alors $\pi^\lambda(\varphi)u$ est un vecteur C^∞ de plus l'ensemble des vecteurs C^∞ de π^λ noté $\left(L^2(\mathbb{R}^k)\right)^\infty$ coïncide avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$,

v) On a la formule d'inversion de Plancherel:

$$\varphi(e) = \int_{\mathcal{V}} Tr\ (\pi^\lambda(\varphi))\ r(\lambda)d\lambda$$

où la fonction rationnelle $r(\lambda)$ sur $\mathcal{V}$ est définie de la façon suivante:
si dg ($= exp^*dX$) est la mesure de Haar de G, sa duale pour la transformée de Fourier est notée $d\xi$ (c'est une mesure de Lebesgue) et elle se décompose en:

$$d\xi = d\mu_\lambda(\xi)r(\lambda)d\lambda.$$

3 Un contre exemple

Ici, on va donner un exemple d'une algèbre de lie nilpotente $\underline{\mathbf{g}}$ dont les orbites générique n'admettent pas de polarisation F, qui soit à la fois kälherienne et G-invariante.
En effet, soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Lie nilpotente, engendrée par $\{X_0, X_1, X_2, Y\}$ avec:

$$[Y, X_i] = X_{i-1} \quad , \quad i > 0, \quad , \quad [Y, X_0] = [X_i, X_j] = 0.$$

Soit W l'orbite du point $(\lambda, 0, 0, 0)$ ($\lambda \neq 0$), alors:

$$\tilde{X}_{0|_W} = \lambda, \quad \text{et} \quad 2\tilde{X}_0\tilde{X}_2 - (\tilde{X}_1)^2{}_{|_W} = 0$$

Donc, $dimW = 2$ et on a :

$$\tilde{X}_0 = \lambda, \quad \tilde{X}_1 = \lambda q, \quad \tilde{X}_2 = \lambda \frac{q^2}{2}, \quad \tilde{Y} = p.$$

Si F était une polarisation sur W telle que $F \cap \overline{F} = \{0\}$, pour tout point de coordonées (λ, p, q) de W, on aurait:

$$F = > a(p,q)\partial_p + b(p,q)\partial_q < \quad \text{avec} \quad a(p,q).\overline{b}(p,q) - \overline{a}(p,q).b(p,q) \neq 0 \quad \forall p,q.$$

Supposons que F soit G-invariante, alors puisque l'action de ${X_2}^-$ est $-q\partial_p$, il doit exister une fonction complexe β de la variable t telle que, pour toute fonction C^∞ f sur W,

$$\big(a(p+tq,q)\partial_p + b(p+tq,q)\partial_q\big) f_{|_{(p+tq,q)}} = \beta(t)\big(a(p,q)\partial_p + b(p,q)\partial_q\big) f(p+tq,q).$$

Donc:

Si $f(p,q) = p$, alors au point $q = 0$ on doit avoir:

$$a(p,0) = \beta(t)\big(a(p,0) + tb(p,0)\big). \tag{1}$$

Si $f(p,q) = q$, alors au point $q = 0$ on doit avoir:

$$b(p,0) = \beta(t)b(p,0). \tag{2}$$

Et donc, β est constante et 'egale à 1 car b n'est jamais nulle, par conséquent la première équation est impossible.

Dans un cadre tout différent, celui des groupes G compacts semi-simples, on peut décrire le dual unitaire de G au moyen cette fois d'induites holomorphes: les orbites sont des variétés kälheriennes et l'espace des sections polarisées admet un système d'états cohérents. Tout ceci sera développé dans la quatrième partie.

II QUANTIFICATION PAR DÉFORMATION D'UNE ORBITE DE LA COADJOINTE D'UN GROUPE DE LIE NILPOTENT ET TRANSFOR-MÉE DE FOURIER ADAPTÉE

. Gardons les notations précédentes. Soit G un groupe de Lie nilpotent, réel, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{g}}$ et $\underline{\mathbf{g}}^*$ le dual de $\underline{\mathbf{g}}$.

. Rappellons que:

- La représentation coadjointe de G dans $\underline{\mathbf{g}}^*$ est définie par :

$$< g\xi, X > = < \xi, Adg^{-1}X >, \quad \forall X \in \underline{\mathbf{g}}, \quad \forall \xi \in \underline{\mathbf{g}}^* \quad , \quad \forall g \in G.$$

- Si W est une orbite de cette représentation, W est alors une sous variété de $\underline{\mathbf{g}}^*$, l'application: $X \longrightarrow X_\xi^-$ de $\underline{\mathbf{g}}$ vers $T_\xi(W)$, où X^- est le champs de vecteurs défini par :

$$(X^- f)(\xi) = \frac{d}{dt} f(exp - tX\xi)_{|t=0}$$

est surjective.

- Il existe une structure symplectique sur W donnée par la 2-forme symplectique:

$$\omega_\xi(X^-, Y^-) = < \xi, [X, Y] >, \quad \forall X \in \underline{\mathbf{g}}, \quad \forall \xi \in \underline{\mathbf{g}}^*.$$

Et pour tout X dans $\underline{\mathbf{g}}$, il existe une fonction $\tilde{X}$ sur W définie par $\tilde{X}(\xi) = < \xi, X >$, telle que:

$$d\tilde{X} = -i(X^-)\omega \quad \text{et} \quad \{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = X^- \tilde{Y}_{|\xi} = < \xi, [X, Y] >,$$

ce qui caractérise le crochet de poisson sur $C^\infty(W)$.

. On munit W d'une paramétrisation particulière (dite carte adaptée)

Définition (II, 0, 1)

Un difféomorphisme $c : W \longrightarrow \mathbb{R}^{2k}$, noté: $\xi \longrightarrow (p, q)$ est une carte adaptée, s'il vérifie:

i) $\omega_{c^{-1}(p,q)} = \sum_{j=1}^{k} dp_j \Lambda dq_j,$

ii) les fonctions (p_j, q_j) $(j = 1, .., k)$ sont polynomiales en les variables

$$x_j(\xi) = < X_j, \xi >,$$

ici $\{X_j, j = 1, .., k\}$ est une base de $\underline{\mathbf{g}}$, *iii) Pour tout X dans $\underline{\mathbf{g}}$, la fonction $\tilde{X}$ s'écrit:*

$$\tilde{X}_{\circ}c^{-1}(p,q)\overset{not}{=}\tilde{X}(p,q)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(q).p_j+\alpha_0(q) \quad \text{avec} \quad \alpha_j\in \mathbb{R}[q_{j+1},..,q_k].$$

. On montre dans [1] qu'il existe toujours des cartes adaptées sur W. Remarquons aussi que le théorème (I, 4, 1) donne une carte adaptée pour toute orbite W, contenue dans un ouvert $\mathcal{O}$ dense et G-invariant de $\underline{\mathbf{g}}^*$.

. Le premier pas de la quantification par déformation de W est de définir un produit-$*$ sur W. On réalise ceci sur une carte adaptée, en transportant le produit-$*$ de Moyal depuis $\mathbb{R}^{2k}$ sur W. Le produit-$*$ obtenu est covariant (proposition (II, 1, 4)). On peut donc construire une représentation-$*$ E_W, puis une représentation unitaire et irréductible π_c^W de G, associée à l'orbite W et qui dépend de la carte c.

. On restreindra ce produit-$*$ de Moyal sur un espace convenable, qui est l'espace $\mathcal{S}(W)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur W. Ceci permet une construction canonique des représentations unitaires et irréductibles de G construites au paragraphe précédent par la théorie de Kirillov.

. Le plan de ce chapitre est le suivant :

1 - On définira le produit-$*$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$, on donnera une formule integrale de ce produit-$*$. Par une carte adaptée c, on transporte ce produit-$*$ sur W et on montrera qu'il est covariant.

2 - On définira une structure de $\underline{\mathbf{g}}$-module sur $\mathcal{S}(W)$ à partir de laquelle on déduit une représentation-$*$ E_W.

3 - Grâce à la structure d'algèbre de $(\mathcal{S}(W),*)$, on a une représentation ℓ de $(\mathcal{S}(W),*)$ définie par:

$$\ell(u)v=u*v \quad (u,\ v\in\mathcal{S}(W)),$$

qui n'est pas irréductible et, par une polarisation-$*$ kälherienne (non invariante), on construit une représentation T irréductible et fidèle de $(\mathcal{S}(W),*)$, dans un espace de Hilbert isomorphe à $L^2(\mathbb{R}^k)$. Sur cet espace, on construit une représentation π^W de G unitaire, irréductible qui coïncide avec celle de Kirillov et telle que T entrelace E_W et π^W.

4 - Par le théorème (I, 4, 1), on définit le produit-$*$ de Moyal sur un ouvert G-invariant $\mathcal{O}$, dense de $\underline{\mathbf{g}}^*$, puis une transformèe de Fourier adaptée $\mathcal{E}$:

$\mathcal{E}$ est définie sur $\mathcal{S}(G)$ à valeur dans l'espace $C^\infty\Big(\mathcal{V},\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$ des fonctions C^∞ sur $\mathcal{V}$ à valeur dans $\mathcal{S}$ ($\mathbb{R}^{2k}$). On montera que:

pour f dans $\mathcal{S}(G)$, ξ $(=(\lambda,p,q))$ dans $\mathcal{O}$ (λ dans $\mathcal{V}$ et (p,q) dans $\mathbb{R}^{2k}$),

$$\mathcal{E}(f)(\xi)=\int_{\underline{\mathbf{g}}} e^{-ia(X,\xi)}\ f(expX)\ dX$$

et

$$f(expX) = \int_{\mathcal{O}} e^{ia(X,\xi)}\mathcal{E}(f)(\xi)\, d\xi,$$

où $a(X,\xi)$ est une fonction réelle polynomiale en X, p, q, rationnelle en λ, admettant des pôles en dehors de $\mathcal{V}$.

(II. 1) PRODUIT-$*$

Soit (p_j, q_j) $(j = 1, ..., k)$ un système de coordonnées de $\mathbb{R}^{2k}$. Notons par $\beta = \sum_j^k dp_j \wedge dq_j$ la 2-forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2k}$ avec:

$$\beta(\xi,\xi') = \sum_{j=1}^{k}(p_j\, q'_j - p'_j q_j) \quad \text{où} \quad \xi = (p,q), \quad \xi' = (p',q').$$

Si on pose:

$$\partial_j u = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial p_j} \; si\ j \leq k \\ \dfrac{\partial u}{\partial q_{j-k}} \; si\ k < j \leq 2k, \end{cases}$$

le crochet de Poisson de u et v dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ est alors:

$$\{u,v\} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} - \frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} \right) = \Lambda^{i,j}\partial_i u.\partial_j v.$$

On pose:

$$P^r(u,v) = \Lambda^{i_1 j_1}....\Lambda^{i_r j_r}\partial_{i_1...i_r}u.\ \partial_{j_1...j_r}v.$$

P^r est un opérateur bidifférentiel nul sur les constantes.

Définition (II, 1, 1)

Pour u et v dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2k})$,

$$u *_\lambda v = uv + \sum_{r>o} \frac{(-\lambda)^r}{r!} P^r(u,v)$$

définit un produit-$*$ sur $\mathbb{R}^{2k}$ appelé produit-$*$ de Moyal.

Remarque (II, 1, 2)

De la définition précédente, on voit immédiatement que:

$$q_j * u = q_j u + \lambda \frac{\partial u}{\partial p_j} \quad , \; u * q_j = q_j u - \lambda \frac{\partial u}{\partial p_j}$$
$$p_j * u = p_j u - \lambda \; \frac{\partial u}{\partial q_j} \quad , \; u * p_j = p_j u + \lambda \; \frac{\partial u}{\partial p_j}.$$

Rappelons (voir l'introduction) que le produit-$*$ de Moyal est lié à la transformation de Weyl. Il admet donc une écriture sous forme intégrale. Plus précisément:

Si on désigne par F la transformée de Fourier symplectique sur $\mathbb{R}^{2k}$

$$F(u)\;(\zeta) = (2\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{i\beta(\zeta,\zeta')} u(\zeta')\; d\zeta'$$

et par $\times_\beta$ le produit de convolution symplectique sur $\mathbb{R}^{2k}$ défini par :

$$(u \times_\beta v)\;(\zeta) = (2\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{-i\beta(\zeta,\zeta')} u(\zeta')\; v(\zeta - \zeta')\; d\zeta',$$

on a:

Proposition (II, 1, 3) [20] [26]

Si $\mathcal{S}$ ($\mathbb{R}^{2k}$) est l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^{2k}$ et si u et v appartiennent à $\mathcal{S}$ ($\mathbb{R}^{2k}$),

i) $F_\circ F = Id_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})}$.

ii) $F(u) \; \times \; F(v) = F(uv)$ *($\times$ est la convolution usuelle).*

iii) $(\mathcal{S}(\;\mathbb{R}^{2k}) \times_\beta)$ *est une algèbre associative et involutive pour la conjugaison (ie:* $\overline{u_* v} = \overline{v}_* \overline{u}$*).*

iv) Si on pose :

$$u \,_*\, v = F(F(u) \times_\beta F(v)),$$

alors:

$$(u \,_*\, v)(\zeta) = (2\pi)^{-2k} \int_{\mathbb{R}^{2k}} \int_{\mathbb{R}^{2k}} u(\zeta')v(\zeta'')\; e^{i[\beta(\zeta,\zeta'')+\beta(\zeta'',\zeta')+\beta(\zeta',\zeta)]}\; d\zeta' d\zeta''.$$

v) Si la transformée de Fourier de u et de v est à support compact, alors la série:

$$\sum_{n \geq 0} (\frac{-i}{2})^n \frac{1}{n!} P^n(u,v)$$

converge simplement et dans $\mathcal{S}'$ $(\mathbb{R}^{2k})$ vers $u_* v$, $\Big(\mathcal{S}'$ $(\mathbb{R}^{2k})$ est le dual topologique de $\mathcal{S}$ $(\mathbb{R}^{2k})\Big)$

. On peut étendre ce produit-$*$ aux cas où u ou v est un polynôme en (p,q) par:

$$u_* v = \sum_{n\geq 0} (\frac{-i}{2})^n \frac{1}{n!} P^n(u,v) \quad \text{(la somme est finie).}$$

. Maintenant, si W est une orbite de G dans $\underline{\mathbf{g}}^*$, et si c est une carte adaptée de W, on définit $\mathcal{S}(W)$ comme étant l'espace des fonctions u sur W tel que $u \circ c^{-1}$ est dans $\mathcal{S}$ $(\mathbb{R}^{2k})$.

<u>Proposition</u> (II, 1, 4)

i) Le produit-$*$ de Moyal sur $\mathbb{R}^{2k}$, transporté sur W par c, définit un produit-$*$ sur W qui est G-covariant.

ii) Si u et v sont dans $\mathcal{S}(W)$ alors:

$$\int_W (u * v)\ (\xi)\ d\xi = \int_W u(\xi)v(\xi)\ d\xi.$$

iii) $\mathcal{S}(W)$ est indépendant du choix de la carte adaptée c.

<u>Preuve</u>

i) Si X est un élément de $\underline{\mathbf{g}}$, la fonction $\tilde{X}(\xi) =< \xi, X >$ est un polynme de degré 1 en p. Donc, pour tout X et Y dans $\underline{\mathbf{g}}$,

$$P^r(\tilde{X},\tilde{Y}) = 0 \quad \text{si} \quad r > 1$$

car P^r est un opérateur bidifférentiel où apparaît dans chacun des termes une dérivation en p d'ordre au moins deux sur $\tilde{X}$ ou $\tilde{Y}$. Ceci entraîne que :

$$\tilde{X} * \tilde{Y} = \tilde{X}\tilde{Y} - \frac{i}{2}\{\tilde{X},\tilde{Y}\}.$$

D'où:

$$\tilde{X} * \tilde{Y} - \tilde{Y} * \tilde{X} = -i\{\tilde{X},\tilde{Y}\}.$$

La preuve de $ii)$ résulte du calcul suivant:

$$\begin{aligned}\int_W (u * \overline{v})(\xi)d\xi &= \pi^k F(u * \overline{v})(0) = \pi^k\big(F(u) \times_\beta F(\overline{v})\big)(0)\\ &= \int_W F(u)(\xi)F(\overline{v})(-\xi)d\xi = \int_W F(u)(\xi)\overline{F(v)}(\xi)d\xi\\ &=< F(u), F(v) >_{L^2(W)} =< u, v >_{L^2(W)} = \int_W u(\xi)\overline{v}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

iii) découle directement du fait que tout changement de carte $(p,q) \longmapsto (p',q')$ entre deux cartes adaptées est polynomial et d'inverse polynomial.

Q.E.D

(II. 2) ACTION DU GROUPE G

. On garde les notations précédentes et on fixe une carte adaptée c de W.

Si X est dans $\underline{\mathbf{g}}$ et u dans $\mathcal{S}(W)$, on pose:

$$L(X)u = i\tilde{X} * u, \quad R(X)u = -iu * \tilde{X}, \quad D(X)u = i(\tilde{X} * u - u * \tilde{X}).$$

Proposition **(II, 2, 1)**

i) Pour chaque X dans $\underline{\mathbf{g}}$, les opérateurs $L(X)$, $R(X)$, $D(X)$, sont antisymétriques pour le produit scalaire dans $L^2(W, \frac{dp.dq}{(2\pi)^k})$.
ii) $((\mathcal{S}(W), *)$ est un $\underline{\mathbf{g}}$-module pour chacune des applications L, R et D.

Preuve

i) Soient u et v dans $\mathcal{S}(W)$. Alors:

$$\begin{aligned} < L(X)u, v > &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_W (i\tilde{X} * u * \overline{v})(\xi) \quad d\xi = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_W (\overline{v} * i\tilde{X} * u)(\xi) \quad d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_W (u * \overline{\overline{i\tilde{X}} * v})(\xi) \quad d\xi =< u, L(-X)v > . \end{aligned}$$

De même pour R et D.

ii) En effet, dans l'algèbre $End(\mathcal{S}(W))$ on a pour Xet Y dans $\underline{\mathbf{g}}$:

$$\begin{aligned} (L(X)_\circ L(Y) - L(Y)_\circ L(X))u &= -(\tilde{X} * \tilde{Y} - \tilde{Y} * \tilde{X}) * u \\ &= i\{\tilde{X}, \tilde{Y}\} * u = L([X,Y])u. \end{aligned}$$

De même pour R et D.

Q.E.D

. On cherche à exponentier ces trois actions de $\underline{\mathbf{g}}$ dans $\mathcal{S}(W)$, au groupe G. Faisons-le pour L, le cas de R et D est tout à fait similaire.

<u>Pour L</u>:

On va d'abord donner une expression de $L(X)u$ pour u dans $\mathcal{S}(W)$ et X dans $\underline{\mathbf{g}}$:

$$L(X)u = i\tilde{X} \ * U = i\sum_{r\geq o} \frac{(-i)^r}{2^r r!} P^r(\tilde{X} \ , u).$$

Et:

$$P^r(\tilde{X}, u) = \sum_{\substack{a=(a_1,\dots,a_k)\\|a|=r}} \frac{(-1)^r r!}{a_1!\dots a_k!} \frac{\partial^r \tilde{X}^r}{(\partial q_1)^{a_i}\dots(\partial q_k)^{a_k}} \frac{\partial^r u}{(\partial p_i)^{u_i}\dots(\partial p_k)^{a_k}}$$

$$+\sum_{t=1}^{k} r \sum_{\substack{a=(a_1,\dots,a_k)\\|a|=r-1}} \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{a_1!\dots a_k!} \frac{\partial^r \tilde{X}^r}{(\partial q_1)^{a_i}\dots(\partial q_k)^{a_k}\partial p_t} \frac{\partial^r u}{(\partial q_t)(\partial p_i)^{a_i}\dots(\partial p_k)^{a_k}}$$

Mais

$$\tilde{X}(p,q) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(q)p_j + \alpha_o(q) \quad \text{avec} \quad \alpha_j \in \mathrm{I\!R}[q_{j+1}, \dots, q_k].$$

Ce qui entraîne que:

$$L(X)u = \sum_{j=1}^{k}\sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{(a_1\dots a_k)\\|a|=r}} \frac{(i)^{r+1}}{2^r a_1!\dots a_k!} \frac{\partial^r \alpha_j(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\dots(\partial q_k)^{a_k}} p_j \frac{\partial^r u}{(\partial p_1)^{a_1}\dots(\partial p_k)^{a_k}}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{(a_1,\dots a_k)\\|a|=r-1}} \frac{(i)^{r-1}}{2^r a_1!\dots a_k!} \frac{\partial^{r-1} \alpha_j(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\dots(\partial q_k)^{a_k}} \frac{\partial^r u}{\partial q_j(\partial p_1)^{a_1}\dots(\partial p_k)^{a_k}}$$

$$+ i\sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{(a_1,\dots,a_k)\\|a|=r}} \frac{(i)^{r}}{2^r a_1!\dots a_k!} \frac{\partial^r \alpha_o(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\dots(\partial q_k)^{a_k}} \frac{\partial^r u}{(\partial p_1)^{a_1}\dots(\partial p_k)^{a_k}}.$$

. Si on désigne la transformée de fourier usuelle partielle par rapport aux variables $p = (p_1, .., p_k)$ par $\mathcal{F}_p$, on a:

$$\mathcal{F}_p(p_j u)\ (x,q) = i\ \frac{\partial}{\partial x_j}\ \mathcal{F}_p(u)\ (x,q)$$

et

$$\mathcal{F}_p\ \left(\frac{\partial}{\partial p_j}u\right)\ (x,q) = i\ x_j\ \mathcal{F}_p(u)\ (x,q).$$

Alors :
$\mathcal{F}_p\ (L(X)u)\ (x,q) =$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r\geq 0}\sum_{\substack{(a_1\ldots a_k)\\|a|=r}} \frac{(-1)^{r+1}}{a_1!\ldots a_k!}\,\frac{\partial^r \alpha_j(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\ldots(\partial q_k)^{a_k}}\left(\frac{x_1}{2}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{x_k}{2}\right)^{a_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\,\mathcal{F}_p(u)\,(x,q)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{r\geq 1}\sum_{\substack{(a_1\ldots a_k)\\|a|=r-1}} \frac{(-1)^{r-1}}{a_1!\ldots a_k!}\,\frac{\partial^{r-1} \alpha_j(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\ldots(\partial q_k)^{a_k}}\left(\frac{x_1}{2}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{x_k}{2}\right)^{a_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\,\mathcal{F}_p(u)\,(x,a)$$

$$+\ i\sum_{r\geq 0}\sum_{\substack{(a_1\ldots a_k)\\|a|=r}} \frac{(-1)^{r}}{a_1!\ldots a_k!}\,\frac{\partial^r \alpha_o(q)}{(\partial q_1)^{a_1}\ldots(\partial q_k)^{a_k}}\left(\frac{x_1}{2}\right)^{a_1}\ldots\left(\frac{x_k}{2}\right)^{a_k}\,\mathcal{F}_p(u)\,(x,q)$$

$$=\left(-\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(q-\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(q-\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial q_j}+i\alpha_o\left(q-\frac{x}{2}\right)\right)\mathcal{F}_p(u)(x,a)$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(q-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_j}\right)+i\alpha_o\left(q-\frac{x}{2}\right)\right)\mathcal{F}_p(u)(x,q).$$

. Posons:

$$\begin{aligned}\widetilde{L(X)} &= \mathcal{F}_p{}_\circ L(X)_\circ \mathcal{F}_p^{-1} = \bar{X}+i\alpha_0\left(q-\frac{x}{2}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(q-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\right)+i\alpha_0\left(q-\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

On a alors:

<u>Proposition</u> (II, 2, 2) [3]

$\bar{X}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^{2k}$. Son flot est:

$$g(t) = exp t\bar{X}(x,q) = \left(\overline{p}_{i,t},\overline{q}_{i,t}\right)$$

avec

$$\overline{p_{k,t}} = x_k - t\alpha_k \quad , \ \overline{q}_{k,t} = q_k + \frac{t\alpha_k}{2}$$

et, par induction,

$$\begin{aligned}\overline{p}_{i,t} &= x_i - \int_0^t \alpha_i\left(\overline{q}_{j,s}-\frac{1}{2}\,\overline{p}_{j,s}\right)ds \quad (i<j)\\ \overline{q}_{i,t} &= q_i + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_i\left(\overline{q}_{j,s}-\frac{1}{2}\,\overline{p}_{j,s}\right)ds \quad (i<j).\end{aligned}$$

Preuve

On cherche ϕ :IR $\longrightarrow$ IR^{2k} telle que:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \overline{X}_{|_{\phi(t)}} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(q - \frac{x}{2})(-\partial_{x_j} + \frac{1}{2}\partial_{q_j}) \quad \text{et} \quad \phi(0) = (x, q).$$

Posons:

$$x_j\big(\phi(t)\big) = y_j(t), \quad q_j\big(\phi(t)\big) = z_j(t).$$

Alors:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{dy_j}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j}_{|_{\phi(t)}} + \frac{dz_j}{dt}\frac{\partial}{\partial q_j}_{|_{\phi(t)}}$$

avec:

$$\frac{dy_j}{dt} = \alpha_j\big(z(t) - \frac{y(t)}{2}\big) \quad \text{et} \quad y_j(0) = x_j.$$

Puisque α_k est une constante, on a:

$$y_k(t) = -t\alpha_k + x_k \quad \text{et} \quad z_k(t) = \frac{t}{2}\alpha_k + q_k.$$

D'où:

$$\frac{dy_{k-1}}{dt}(t) = -\alpha_{k-1}\big(z_k(t) - \frac{y_k(t)}{2}\big) \quad \text{et} \quad y_{k-1}(0) = x_{k-1}.$$

Ce qui entraîne que:

$$y_{k-1}(t) = x_{k-1} - \int_0^t \alpha_{k-1}\big(z_k(s) - \frac{y_k(s)}{2}\big)ds.$$

De même pour z_{k-1}. Et, par itération, on a prouvé la proposition.

Q.E.D

Théorème **(II, 2, 3)** [3]

Soit $X \in \underline{\mathbf{g}}$. Alors, pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathrm{IR}^{2k})$, l'équation :

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, q) = \Big(\widetilde{L(X)}_{\circ}F\Big)\ (t, x, q)$$

avec la condition au bord $F(0, x, q) = u(x, q)$, admet une unique solution:

$$F(t, x, q) = expi \int_0^t \alpha_0\Big(\psi(exp\ s\overline{X}(x, q))\Big)dsu\Big(expt\ \overline{X}(x, q)\Big).$$

où la fonction ψ :IR^k $\times$IR^k $\longrightarrow$IR^k est définie par $\psi(p, q) = q - \frac{p}{2}$.

Et si on pose :

$$\Big(W(t,X)u\Big)(x,q) = F(t,x,q),$$

on définit ainsi un opérateur sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$ qui admet une unique extension unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^{2k})$.

Preuve

. De l'expression de $\widetilde{L(X)}$ $(= \bar{X}+i\alpha_0(q-\frac{x}{2}))$ et d'après la proposition précédente, $F(t,x,q)$ vérifie l'equation différentielle $(*)$, et on a bien

$$F(0,x,q) = u(x,q).$$

L'unicité de F découle de l'unicité de la solution d'une équation différentielle avec condition initiale.

D'autre part, si u est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^{2k})$, alors:

$$\|W(t,X)u\|^2_{L^2(W)} = \int_W \mid u(exp t\overline{X}(x,q) \mid^2 \frac{dxdq}{(2\pi)^k}.$$

Mais, comme l'application $(x,q) \longmapsto exp t\overline{X}(x,q)$ est de Jacobien 1 (proposition (II, 2, 2)), alors:

$$\|W(t,X)u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2},$$

ce qui montre que $W(t,X)$ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^{2k})$.

Q.E.D

L'application $t \longmapsto W(t,X)u$ de $\mathbb{R}$ vers $L^2(\mathbb{R}^{2k})$ étant continue, et puisque:

$$W(t_1+t_2,X)u = W(t_1,X)_\circ W(t_2,X)u,$$

alors $W(t,X)$ est un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^{2k})$ qui admet comme générateur infinitésimal $\mathcal{F}_{x\circ}\widetilde{L(X)}_\circ\mathcal{F}_x^{-1}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$.

Posons:

$$U(t,X) = \mathcal{F}_{x\circ}^{-1} W(t,X)_\circ\mathcal{F}_x.$$

On a alors:

Proposition (II, 2, 4) [3]

Pour tout X dans $\underline{\mathbf{g}}$, il existe un unique groupe à un paramètre unitaire $U(t,X)$ sur $L^2(W)$ tel que:

1) $\mathcal{S}(W)$ est inclus dans le domaine du générateur de $U(t,X)$ et stable sous $U(t,X)$.
2) Sur $\mathcal{S}(W)$, on a:

$$\frac{d}{dt}U(t,X)_{|_{t=0}} = L(X).$$

3) Il existe une unique représentation unitaire L de G dans $L^2(W_\lambda)$ telle que, sur $\mathcal{S}(W_\lambda)$,

$$\frac{d}{dt}\ L(exptX)_{|_{t=0}} = L(X), \quad (X \in \underline{\mathbf{g}}).$$

Corollaire (II, 2, 5) [2]

Pour u dans $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R}^{2k})$, et X dans $\underline{\mathbf{g}}$:

$$\mathcal{F}_p\ \Big(L(exptX)u\Big)(x,q) = expi\int_0^t\ \alpha_0\Big(\psi(exp - s\overline{X}(x,q))\Big)\ ds.(\mathcal{F}_p u)\Big(exp - t\bar{X}(x,q)\Big).$$

Définition (II, 2, 6)

Pour g dans G et u dans $\mathcal{S}(W)$, on définit la représentation-$*$ E_W par:

$$E_W(g) * u = L(g)u.$$

Comme, par définition,

$$\big(\ell(X)u\big) * v = \ell(X)\big(u * v\big),$$

alors:

$$\big(L(g)u\big) * v = L(g)\big(u * v\big).$$

D'autre part, r et D ont les mêmes propriétés que ℓ, on définira donc de même les représentations $L(g)$ et $D(g)$ de G dans $\mathcal{S}(W)$ et on posera:

$$R(g)u = u * E_W(g^{-1}) \quad D(g) = E_W(g) * u * E_W(g^{-1}).$$

Enfin, par construction,

$$u * R(g)v = R(g)\big(u * v\big)$$

et $D(g)$ est un automorphisma de $(\mathcal{S}(W), *)$.

(II, 3) POLARISATION-$*$

. Fixons une carte adaptée c, considérons les deux représentations régulières ℓ et r de $\mathcal{S}(W)$ définies par:

$$\ell(u)v = u * v, \qquad r(u)v = v * u.$$

On a vu que, pour g dans G et u dans $\mathcal{S}(W)$,

$$\ell(E_W(g) * u) = L(g)_\circ \ell(u).$$

Enfin, il est clair que si V est un sous-espace de $\mathcal{S}(W)$ ℓ-invariant, alors V est G-invariant. On va maintenant chercher V tel que la restriction de ℓ à V soit irréductible.
Si on pose $\Omega = 2^k \, \overline{e}^{\frac{p^2+q^2}{2}}$, on a alors:

Proposition **(II, 3, 1)** [3]

i) $\Omega \in \mathcal{S}(W)$, $\overline{\Omega} = \Omega$, $F\Omega = \Omega$, $\|\Omega\|_{L^2} = 1$ *et* $\Omega * \Omega = \Omega$,

ii) $\ell(u)$ *et* $r(u)$ *sont des opérateurs bornés pour la norme de* $L^2(\mathbb{R}^{2k}, \frac{dpdq}{(2\pi)^k})$,

iii) $r(\Omega)L^2\ (W)$ *est* ℓ*-invariant.*

Preuve

i) S'obtient par un calcul direct.

ii) si u et v sont dans $\mathcal{S}(W)$, alors:

$$\begin{aligned}
\|\ell_u(v)\|^2_{L^2} &= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W (u*v)\overline{(u*v)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W u*v*\overline{v}*\overline{u}d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W u(v*\overline{v}*\overline{u})d\xi = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W (v*\overline{v}*\overline{u})ud\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W (v*\overline{v})(\overline{u}*u)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W F(v*\overline{v})(\xi)F(\overline{u}*u)(-\xi)d\xi \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^k}\int_W |F(\overline{u}*u)|(\xi)|F(v*\overline{v})|(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned}
|F(v*\overline{v})(\xi)| &= |F(v)\times_\beta F(\overline{v})(\xi)| \\
&\leq (\pi)^{-k}[\int_W |F(v)(\xi)|^2 d\xi]^{\frac{1}{2}}[\int_W |F(v)(\xi)|^2 d\xi]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\ell_u(v)\|^2_{L^2} \leq c^{te}\|v\|^2_{L^2}.$$

De même pour r.

iii) Soit v dans $r(\Omega)L^2(W)$. Il existe alors u dans $L^2(W)$ telle que $v = u * \Omega$, et donc si v' est dans $\mathcal{S}(W)$,

$$\ell(v')v = v' * v = (v' * u) * \Omega = r(\Omega)(v' * u)$$

Ceci est vrai pour tout v' dans $\mathcal{S}(W)$. De plus $r(\Omega)L^2(W)$ est non vide, il contient Ω.

Q.E.D

<u>Proposition</u> (II, 3, 2) [3]

Pour $l = (l_1, ..., l_k)$ dans $\mathbb{N}^k$, on pose:

$$\Omega_l = *_{j=1}^{k}(p_j + iq_j)^{*l_j} * \Omega \frac{1}{2^{\frac{|l|}{2}}(l!)^{1/2}}.$$

On a alors:

i) $\Omega_l \in L^2(W)$ et $\Omega_l * \overline{\Omega_m} = \delta_{l,m}$,

ii) le système $\{\Omega_l * \overline{\Omega}_m,\ l$ et m dans $\mathbb{N}^k\}$ est une base hilbertienne de $L^2(W)$,

iii) le système $\{\Omega_l,\ l \in \mathbb{N}^k\}$ est orthonormé dans $L^2(W)$ et maximal dans $r(\Omega)L^2(W)$,

iv) à équivalence près, il existe une seule représentation T de $(\mathcal{S}(W), *)$ qui est fidèle et irréductible; essentiellement T est la réstriction de ℓ à $r(\Omega)L^2(W)$.

<u>Remarques (II, 3, 3)</u> [2]

1) Considérons les fonctions de Hermite dans $L^2(\mathbb{R}^k)$:

$$h_l(x) = \frac{(-i)^{|l|}}{(l!2^{|l|}\pi)^1/2}\ e^{\frac{x^2}{2}}\ \frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\ e^{-x^2}, \qquad l \in \mathbb{N}^k.$$

$\{h_l,\ l \in \mathbb{N}^k\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^k)$ et si on pose :

$$\mathcal{U} : r(\Omega)L^2(W) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^k),$$
$$\Omega_l \longmapsto h_l,$$

$\mathcal{U}$ est un isomorphisme. Par conséquent T se réalise sur $L^2(\mathbb{R}^k)$ de la façon suivante: si $u \in \mathcal{S}(W),\ f \in L^2(\mathbb{R}^k)$,

$$\Big(T(u)\ f\Big)(t) = \Big(\Big(\mathcal{U}_\circ l(u)_\circ \mathcal{U}^{-1}\Big) f\Big)(t).$$

De plus, puisque :

$$(p_j + iq_j) * \Omega_l = \big(2(l_j + 1)\big)^{\frac{1}{2}}\Omega_{l+[j]} \quad et \quad (p_j - iq_j) * \Omega_l = \big(2l_j\big)^{\frac{1}{2}}\Omega_{l-[j]}$$

alors:

$$\mathcal{U}(q_j * \Omega_m)(\zeta) = \zeta_j\ h_m\ (\zeta) \quad et \quad \mathcal{U}(p_j * \Omega_m) = -i\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\ h_m(\zeta).$$

2) Soit S la transformation sur $\mathcal{S}(W)$ définie par :

$$(Su)(t,s) = (\mathcal{F}_p u)(t-s, \frac{s+t}{2}).$$

Alors:

$$S(u*v)(p,q) = (2\pi)^{\frac{-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} Su(p,t)Sv(t,q)dt.$$

De plus, si f est dans $L^2(\mathbb{R}^k)$,

$$\Big(T(u)f\Big)(t) = \int_W (S\ u)(t,s)\ f(s)\ ds.$$

3) La construction précédente correspond à un choix d'une polarisation (complexe) kälherienne non invariante en général. En effet soit $F = > \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\quad,\quad j = 1,..,k <$, où $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$ est le champ hamiltonien associé à la fonction $z_j = p_j + iq_j$. Considérons l'ensemble:

$$K = \{u \in \mathcal{S}(W) \quad \text{telle que} \quad u * z_j = z_j(\xi_0)u \quad \forall j = 1,..,k\}.$$

Comme $c^{-1}(0,0) = \xi_0$, l'équation $u * z_j = z_j(\xi_0)u$ s' ecrit:

$$u * (p_j + iq_j) = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,..,k$$

et admet donc comme solution $u(p,q) = f(p+iq)e^{-(p^2+q^2)}$. Par conséquent:

$$K = r(\Omega)L^2(W),$$

puisque parmi les vecteurs $\Omega_l * \overline{\Omega}_m$, les seuls qui sont dans K sont les Ω_l.

. D'autre part, si on choisit une polarisation algébrique réelle en $\xi_0 = c^{-1}(0,0)$ par exemple l'algèbre $\underline{\mathbf{h}} \subset \underline{\mathbf{g}}$ définie en (I, 4, 2), alors la polarisation-$*$ est l'espace:

$$\begin{aligned} V &= \{u \in \mathcal{S}(W) \quad \backslash \quad u * \tilde{X} = 0 \quad (X \in \underline{\mathbf{h}})\} \\ &= \{u \in \mathcal{S}(W) \quad \backslash \quad u * q_j = 0 \quad (j = 1,..k)\}. \end{aligned}$$

Donc les fonctions u de V sont les fonctions de la forme:

$$u = f(q)e^{-2ipq}$$

où $f(q)$ est C^∞ en q. On obtient donc des fonctions qui ne sont pas dans $L^2(W)$.

. Maintenant, soit $(T, \mathcal{H})$ la représentation fidèle, unitaire et irréductible de $(\mathcal{S}(W), *)$. Il existe une représentation unitaire unique π de G dans $\mathcal{H}$ telle que:

$$T(E_W(g) * u) = \pi(g)_\circ T(u) \quad \forall g \in G \text{ et } \forall u \in \mathcal{S}(W).$$

Alors:

$$T(E_W(g) * u * E_W(g'^{-1})) = \pi(g)_\circ T(u)_\circ \pi(g'^{-1}).$$

<u>Proposition</u> (II, 3, 4) [2]

La représentation π de G définie cidessus coïncide avec la représentation unitaire et irréductible π^W associée à l'orbite W par la méthode des orbites de Kirillov.

Preuve

Considérons la réalisation de $(T, \mathcal{H})$ donnée dans la remarque (II, 3, 3):

$$\mathcal{H} = L^2(\mathrm{I\!R}^k), \quad T(u)f = (\mathcal{U}_\circ \ell_\circ \mathcal{U})f.$$

Soit $\{h_l \ , \ l \in \mathrm{I\!N}^k\}$ la base de $L^2(\mathrm{I\!R}^k)$, formée par les fonctions de Hermite h_l.
a) Puisque:

$$x_j h_l(x) = \frac{-i\sqrt{2}}{2}(l_j+1)^{\frac{1}{2}} h_{l+[j]} + \frac{i\sqrt{2}}{2}(l_j)^{\frac{1}{2}} h_{l-[j]} = \mathcal{U}(q_j * \Omega_l)$$

et comme $q_j * q_i = q_j q_i$ pour tout i et j, alors, pour tout polynome $\alpha(q)$ en q, on a:

$$\mathcal{U}\big(\alpha(q) * \Omega_l\big) = \alpha(x) h_l(x).$$

b) Puisque $\mathcal{U}(p_j * \Omega_m) = -i\frac{\partial}{\partial x_j} \ h_m(x)$ et, si $m \neq j$, on voit que:

$$\mathcal{U}(p_j * q_m * \Omega_m) = -i x_m \frac{\partial}{\partial x_j} \ h_m(x).$$

D'où, si X appartient à $\underline{\mathbf{g}}$ et

$$\tilde{X}(p,q) = \sum_{j=1}^{k} \ \alpha_j(q) p_j + \alpha_0(q)$$

et si u appartient à $L^2(W)$ et

$$u = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \Omega_l * \overline{\Omega}_m,$$

a) et b) entraînent que:

$$\begin{aligned} T\big(L(X)u\big).h_n &= \mathcal{U}\big(i\tilde{X} * (u * \Omega_n)\big) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \mathcal{U}(\tilde{x} * u * \Omega_l * \overline{\Omega}_m * \Omega_n) \\ &= \sum_{l} i\alpha_{l,n} \mathcal{U}[\sum_{j=1}^{k} \big(\alpha_j(q)p_j + \alpha_0(q)\big) * \Omega_l] \\ &= [\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + i\alpha_0(x)] T(u) h_n = [\pi^W(X)_\circ T(u)] h_n. \end{aligned}$$

En effet, on a vu dans la proposition (I, 4, 2) que:

$$\pi^W(X) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + i\alpha_0(x).$$

. Maintenant, si π' est une représentation de G vérifiant la relation

$$T[L(g)u] = \pi'(g)_{\circ}T(u),$$

alors, pour Ω_l, on a:

$$T[L(g)\Omega_l]h_0 = [\pi'(g)_{\circ}\mathcal{U}](\Omega_l) = \pi'(g)h_l,$$

donc:

$$\pi'(g) = \pi(g) = \pi^W(g).$$

Q.E.D

<u>Remarque</u> (II, 3, 5) [2]

. *Considérons la représentation unitaire de $G \times G$ réalisée dans $L^2(W)$ par:*

$$(L \otimes R)(g_1, g_2)u = L(g_1)_{\circ}R(g_2)u$$

où:

$$L(X)u = i\tilde{X} * u, \quad R(X)u = -iu * \tilde{X} \quad X \in \underline{\mathbf{g}}.$$

Vu les expressions de $L(X)$ et de $R(X)$ données dans le corolaire (II, 2, 5) qui sont des opérateurs différentiels à coefficients polynomaux en (p, q), alors une fonction u de $L^2(W)$ est un vecteur C^∞ de $L \otimes R$ si et seulement si Du appartient à $L^2(W)$, pour tout opérateur differentiel D à coefficients polynomaux, ce qui est équivalent à dire que u est dans $\mathcal{S}(W)$ ou encore que, si:

$$u = \sum_{l,m} \alpha_{l,m}\Omega_l * \overline{\Omega}_m,$$

la suite $(\alpha_{l,m})$ est à décroissance rapide: pour tout polynome Q de deux variables:

$$sup|Q(l, m)\alpha_{l,m}| < \infty.$$

. Enfin dans toute la construction précédente on a supposé la carte adaptée c fixée, mais:

<u>Proposition</u> (II, 3, 6) [2]

Deux cartes adaptées distinctes définissent deux structures d'algèbres isomorphes sur $\mathcal{S}(W)$.

Preuve

Soit c' une autre carte adaptée et $*'$, Ω'_l les objets définis par la carte c'. On pose:

$$\varphi(\Omega_l * \overline{\Omega}_m) = \Omega'_l * \overline{\Omega}'_m.$$

Alors φ est un opérateur unitaire de $L^2(W)$ sur lui-même et si u s'écrit:

$$u = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \Omega_l * \overline{\Omega}_m,$$

u est dans $\mathcal{S}(W)$ si et seulement si la suite $(\alpha_{l,m})$ est à décroissance rapide. Donc $\varphi(\mathcal{S}(W)) = \mathcal{S}(W)$.

Et puisque:

$$(\Omega_l * \overline{\Omega}_m) * (\Omega_{l'} * \overline{\Omega}_{m'} = \delta_{l',m} \Omega_l * \overline{\Omega}_{m'} \quad \text{et} \quad \overline{\Omega_l * \overline{\Omega}_m} = (\Omega_m * \overline{\Omega}_l),$$

alors φ est l'isomorphisme recherché:

$$\varphi(u * v) = \varphi(u) *' \varphi(v) \quad \text{et} \quad \varphi(\overline{u}) = \overline{\varphi(u)}.$$

Q.E.D

(II, 4) TRANSFORMÉE DE FOURIER ADAPTÉE

Considérons la carte C, donnée par le théorème (I, 4, 1). C est une carte adaptée pour un ensemble $\mathcal{O}$, G-invariant, dense dans $\underline{\mathbf{g}}^*$. Posons $C(\xi) = (\lambda, p, q)$ et notons W^λ l'orbite du point $C^{-1}(\lambda, 0, 0)$.

Définition (II, 4, 1)

Pour u et v dans $C^\infty(\mathcal{O})$, on pose:

$$(u * v)(p, q, \lambda) = (u_{|W^\lambda} * v_{|W^\lambda})(p, q) = u.v + \sum_{r \geq 1} (\frac{-i}{2})^r \frac{1}{r!} P^r(u_{|W^\lambda}, v_{|W^\lambda}).$$

Ceci définit un produit-$*$ sur $\mathcal{O}$, qu'on appellera produit de Moyal sur $\mathcal{O}$.

Remarque(II, 4, 2)

1) Si $u_{|W^\lambda}$ et $v_{|W^\lambda}$ sont dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$, alors $(u * v)_{|W^\lambda}$ converge et est dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$.

2) Ce produit-$*$ est tangentiel. Cette propriété signifie que $u * v_{|W^\lambda}$ ne dépend que de $u_{|W^\lambda}$ et de $v_{|W^\lambda}$. En particulier, pour toute fonction f G-invariante sur $\mathcal{O}$, $f * u = u * f = fu$, puisque f est constante sur chaque orbite W^λ.

. Soit $(\pi^\lambda, \mathcal{H})$ la représentation unitaire et irréductible de G associée à l'orbite W^λ. Notons $\mathcal{H}_\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation π^λ, et $HS(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$. On pose pour A dans $HS(\mathcal{H})$ et (g_1, g_2) dans $G \times G$:

$$\rho^\lambda(g_1, g_2)A = \pi^\lambda(g_1)_\circ A_\circ \pi^\lambda(g_2^{-1}).$$

ρ^λ est une représentation unitaire de $G \times G$ dans $HS(\mathcal{H})$, notons $HS(\mathcal{H})_\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de ρ^λ.

D'autre part, soit $(T^\lambda, \mathcal{H})$ la réalisation de la représentation de $\big(\mathcal{S}(W^\lambda), *\big)$ définie dans la proposition (II, 3, 2), on a alors:

<u>Proposition</u> (II, 4, 3)

i) Pour u dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$:

$$Tr\ (T^\lambda(u)) = \int_{W^\lambda} u(p,q)\ \frac{dpdq}{(2\pi)^k},$$

ii) T^λ est une transformation unitaire de $L^2(W_\lambda)$ dans $HS(\mathcal{H})$ en particulier:

$$\| T^\lambda(u) \|_{HS} = \| u \|_{L^2(W_\lambda)},$$

iii) Si $(L \otimes R)^\lambda$ est la représentation de $G \times G$ dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$ définie plus haut, alors pour u dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$:

$$T^\lambda\Big((L \otimes R)^\lambda(g_1, g_2)u\Big) = \rho^\lambda(g_1, g_2)T^\lambda(u).$$

<u>Preuve</u>:

i) Soit u dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$. Posons:

$$u = \sum_{l,m} \alpha_{l,m}\ \Omega_l * \overline{\Omega}_m.$$

Alors

$$Tr(T^\lambda(u)\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} < T^\lambda(u)h_n, h_n > .$$

Et puisque:

$$T^\lambda(u)h_n = \mathcal{U}\ell(u)\mathcal{U}^{-1}h_n = \mathcal{U}(u * \Omega_n),$$

on a:

$$Tr\Big(T^\lambda(u)\Big) = \sum_n \sum_{l,m} \alpha_{l,m} < \Omega_l * \overline{\Omega}_m * \Omega_n, \Omega_n > .$$

Mais:

$$\overline{\Omega}_m * \Omega_n = \delta_{m,n}\Omega \quad \text{et} \quad \Omega_l * \Omega = \Omega_l.$$

Donc :

$$Tr\Big(T^\lambda(u)\Big) = \sum_n \sum_{l,m} \alpha_{l,m} < \Omega_l, \Omega_n > \delta_{m,n} = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \int_{W_\lambda} \Omega_l * \overline{\Omega}_m \, \frac{dpdq}{(2\pi)^k}$$
$$= \int_{W_\lambda} u(p,q) \, \frac{dpdq}{(2\pi)^k}.$$

ii) On a bien sûr:

$$\|T^\lambda(u)\|^2_{HS} = Tr\Big(T^\lambda(u)_\circ T^\lambda(u)^*\Big) = Tr\Big(T^\lambda(u)_\circ T^\lambda(\overline{u})\Big)$$
$$= Tr\Big(T^\lambda(u * \overline{u})\Big) = \int_{W_\lambda} (u * \overline{u})(p,q) \, \frac{dpdq}{(2\pi)^k}$$
$$= \int_{W_\lambda} |u(p,q)|^2 \, \frac{dpdq}{(2\pi)^k} = \| \, u \, \|^2_{L^2(W_\lambda)}$$

et il est facile de voir que T^λ a une image dense dans HS, en utilisant les fonctions h_n.

iii) Si u est dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$, alors u est un vecteur C^∞ de $(L \otimes R)^\lambda$ et on a:

$$T^\lambda\Big((L \otimes R)^\lambda(g_1, g_2)u\Big) = T^\lambda\Big((L_\lambda(g_1)_\circ R_\lambda(g_2)u\Big) = \pi^\lambda(g_1)_\circ T^\lambda(u)_\circ \pi^\lambda(g_2^{-1})$$
$$= \rho^\lambda(g_1, g_2) T^\lambda(u).$$

Q.E.D.

<u>Corollaire</u> (II, 4, 4)

u appartient à $\mathcal{S}(W^\lambda)$ si et seulement si $T^\lambda(u)$ appartient à $HS(\mathcal{H})_\infty$.

. Maintenant, soit f dans l'espace $\mathcal{S}(G)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur G, l'opérateur $\pi^\lambda(f)$ défini dans (I, 4, 3) est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}$. De plus par construction $\pi^\lambda(f)$ est un vecteur C^∞ de ρ^λ.

Donc $(T^\lambda)^{-1}\big(\pi^\lambda(f)\big)$ est un vecteur C^∞ de $(L \otimes R)^\lambda$, il est donc dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$.

<u>Définition</u> (II, 4, 5)

Pour f dans $\mathcal{S}(G)$, on pose :

$$\mathcal{E}(f)_{|_{W^\lambda}} = \Big((T^\lambda)^{-1}_\circ \pi^\lambda\Big) f.$$

Alors $\mathcal{E}(f)$ est une fonction sur $\mathcal{O}$ telle que pour tout λ dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}(f)_{|_{W^\lambda}}$ est dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$. On appellera cette fonction $\mathcal{E}(f)$ la Transformée de Fourier adaptée de f. On notera $\mathcal{E}(f)_\lambda$ la restriction $\mathcal{E}(f)_{|_{W^\lambda}}$ de $\mathcal{E}(f)$ à W^λ.

Proposition (II, 4, 6)

i) Soit f et f' dans $\mathcal{S}(G)$. Si on désigne par $(\times)$ le produit de convolution défini par :

$$(f \times f')(g) = \int_G f(gg'^{-1})\, f'(g')dg',$$

on a alors:

$$\mathcal{E}(f \times f') = \mathcal{E}(f) * \mathcal{E}(f').$$

ii) Si on note par $\check{f}$ la fonction $\check{f}(g) = \overline{f(g^{-1})}$, alors:

$$\mathcal{E}(\check{f}) = \overline{\mathcal{E}(f)}.$$

Preuve

i) Puisque $*$ est un produit-$*$ tangentiel sur $\mathcal{O}$, il se restreint aux orbites. Il suffit donc de vérifier la formule ci-dessus pour la restriction aux orbites W_λ, lorsque λ décrit $\mathcal{V}$. En effet, on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(f \times f')_{|W_\lambda} &= (T^\lambda)^{-1} \left(\pi^\lambda(f \times f')\right) = (T^\lambda)^{-1} \left(\pi^\lambda(f)_\circ \pi^\lambda(f')\right) \\
&= (T^\lambda)^{-1} \left(\pi^\lambda(f)\right) \; * \; (T^\lambda)^{-1} \left(\pi^\lambda(f')\right) \\
&= \mathcal{E}(f)_{|W_\lambda} \; * \; \mathcal{E}(f')_{|W_\lambda}.
\end{aligned}$$

ii) Ce résultat découle de:

$$\begin{aligned}
T^\lambda(\mathcal{E}(\check{f})) &= \pi^\lambda(\check{f}) = \left(\pi^\lambda(f)\right)^* \\
&= \left(T^\lambda(\mathcal{E}(f)\right)^* = T^\lambda(\overline{\mathcal{E}(f)}.
\end{aligned}$$

Q.E.D

. On peut donner une formule intégrale de cette transformée de Fourrie adaptée, qui généralise le cas abélien, plus précisement:

Théorème (II, 4, 7) [2]

1) Il existe une fonction réelle $a(X, \xi)$ sur $\underline{\mathbf{g}} \times \mathcal{O}$, qui, si $\mathcal{O}$ est identifié à $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^{2k}$, est polynomiale en X, p et q, rationnelle en λ, régulière sur $\mathcal{V}$, et telle que :

$$\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} (f_\circ exp)\;(X)\; e^{-ia(X,p,q,\lambda)}dX$$

et

$$f(expX) = \int_{\mathcal{O}} e^{ia(X,p,q,\lambda)}\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda)r(\lambda)\; \frac{dpdq}{(2\pi)^k}d\lambda,$$

2) $\mathcal{E}(f)$ est C^∞ sur $\mathcal{O}$.

Preuve

Dans le théorème, les mesures dX, $d\xi$, dg sont normalisées de la façon suivante:

$$d(expX) = exp^* d(X) \quad , \quad d\xi = r(\lambda)\frac{dpdq}{(2\pi)^k} d\lambda$$

et la transformée de Fourier usuelle entre $(L^2(\underline{\mathbf{g}}, dX)$ et $(L^2(\underline{\mathbf{g}}^*, d\xi)$ est unitaire. $r(\lambda)d\lambda$ est alors la mesure de Plancherel (voir la proposition(I, 4, 4)). Rappelons qu'en effet la formule de Plancherel s'écrit:

$$\begin{aligned} f(expX) = (L_{(exp-X)}f)\ (e) &= \int_{\mathcal{V}} r(\lambda) Tr\Big(\pi^\lambda(L_{(exp-X)}f)\Big)\ d\lambda \\ &= \int_{\mathcal{V}} r(\lambda) Tr\Big(\pi^\lambda(exp-X)_\circ \pi^\lambda(f)\Big)\ d\lambda. \end{aligned}$$

Mais:

$$\begin{aligned} Tr\Big(\pi^\lambda(exp-X)_\circ\ \pi^\lambda(f)\Big) &= Tr\Big(\pi^\lambda(exp-X)_\circ\ T^\lambda\Big(\mathcal{E}(f)\Big)\Big) \\ &= Tr\Big(T^\lambda\Big(L(exp-X)\mathcal{E}(f)\Big)\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2k}} \Big(L(exp-X)\mathcal{E}(f)\Big)\ (p,q,\lambda)\ \frac{dpdq}{(2\pi)^k}. \end{aligned} \tag{1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(expX) &= \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbb{R}^{2k}} r(\lambda).\Big(L(exp-X)\mathcal{E}(f)\Big)(p,q,\lambda)\ \frac{dpdq}{(2\pi)^k}\ d\lambda \\ &= \int_{\mathcal{V}} r(\lambda) \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{F}_p\ \Big(L(exp-X)\mathcal{E}(f)\Big).(0,q,\lambda)\ \frac{dq}{(2\pi)^{k/2}}\ d\lambda. \end{aligned}$$

D'aprés le corollaire (II, 2, 5), on peut écrire ceci sous la forme:

$$\begin{aligned} f(expX) = \int_{\mathcal{V}} r(\lambda) \int_{\mathbb{R}^k} expi \int_0^1 \alpha_0\Big(\psi(exps\overline{X}(0,q,\lambda))\Big)ds \\ \Big(\mathcal{F}_p\mathcal{E}(f)\Big)\Big(exp\overline{X}(0,q,\lambda)\Big)\ \frac{dq}{(2\pi)^{k/2}} d\lambda, \end{aligned}$$

si $\tilde{X} = \sum_{j\geq 1}\ \alpha_j\ (q)\ p_j + \alpha_0(q)$.
Avec les notations de la proposition (II, 2, 2), on en déduit:

$$expt\overline{X}(x,q) = \Big(\overline{p}_{i,t}, \overline{q}_{i,t}\Big)_{i=1,\dots,k}$$

où:

$$\overline{p_j} = -\int_0^1 \alpha_j\Big(\psi(exps\overline{X}(0,q,\lambda)\Big)ds, \quad \overline{q_j} = q_j - \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_j\Big(\psi(exps\overline{X}(0,q,\lambda)\Big)ds.$$

Et alors :

$$f(expX) = \int_{\mathcal{V}} r(\lambda)\int_{\mathbb{R}^{2k}} expi\int_0^1 \alpha_0\Big(\psi(exps\overline{X}(O,q,\lambda))\Big)ds$$

$$.exp - i < \overline{p}, p > \mathcal{E}(f)(p,\overline{q},\lambda)\frac{dpdq}{(2\pi)^{k/2}}d\lambda.$$

Donc:

$$f(expX) = \int_{\mathcal{V}} r(\lambda)\int_{\mathbb{R}^{2k}} expi\int_0^1 \Bigg[\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\Big(\psi(exps\overline{X}(0,q,\lambda))\Big)p_j$$

$$+\alpha_0\Big(\psi(exps\overline{X}(0,q,\lambda))\Big)\Bigg]ds\mathcal{E}(f)\ (p,\overline{q},\lambda)\frac{dpdq}{(2\pi)^{k/2}}d\lambda.$$

Vu l'expression de $\overline{q}$, le changement de variable $q \longmapsto \phi(q) = \overline{q}$ a 1 comme jacobien (voir proposition (II, 2, 2)), ce qui entraîne que:

$$f(expX) = \int_{\mathcal{V}}\int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{i\int_O^1 \tilde{X}\left(p,\psi(exps\overline{X}(0,\phi^{-1}(q)),\lambda),\lambda\right)ds}\mathcal{E}(f)\ (p,q,\lambda)r(\lambda)\frac{dpdq}{(2\pi)^{k/2}}d\lambda.$$

Et donc, la fonction $a(X,p,q,\lambda)$ définie par:

$$a(X,p,q,\lambda) = \int_0^1 \tilde{X}\Big(p,\psi(exps\overline{X}(0,\phi^{-1}(q),\lambda)),\lambda\Big)ds$$

est polynomiale en X, p et q, rationnelle en λ et régulière sur $\mathcal{O}$.

. D'autre part, pour tout λ fixé dans $\mathcal{V}$, on pose:

$$\Psi_f(p,q) = \int_{\mathfrak{g}} f(expX)e^{-ia(X,p,q,\lambda)}dX.$$

La fonction Ψ_f est C^∞, bornée sur W^λ puisque la fonction a est polynomiale en X, p, q. Mais pour l et m dans $\mathbb{N}^k$:

$$< \Psi_f, \Omega_l * \overline{\Omega}_m >_{|_{L^2(W^\lambda)}} = \int_{\mathfrak{g}} f(expX)\overline{\int_{W^\lambda} e^{ia(X,p,q,\lambda)}\Omega_l * \overline{\Omega}_m\frac{dpdq}{(2\pi)^k}}dX.$$

Mais d'après le calcul (1) plus haut, si u est dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$:

$$\int_{W^\lambda} (L(exp - X)u)(p,,q,\lambda)\frac{dpdq}{(2\pi)^k} = TrT^\lambda(L(exp - X)u).$$

Donc:

$$< \Psi_f, \Omega_l * \overline{\Omega}_m >_{L^2(W^\lambda)} = \int_{\mathbf{g}} f(expX)\overline{Tr[T^\lambda(L(exp-X)\Omega_l * \overline{\Omega}_m)]}dX$$
$$= \int_{\mathbf{g}} f(expX)\overline{Tr[(\pi^\lambda(exp-X)_\circ T^\lambda(\Omega_l * \overline{\Omega}_m)]}dX.$$

Or:

$$Tr[\pi^\lambda(L(exp-X)_\circ T^\lambda(\Omega_l * \overline{\Omega}_m)] = \sum_n < T^\lambda(\Omega_l * \overline{\Omega}_m)h_n, \pi^\lambda(expX)h_n >_{L^2(\mathbb{R}^k)}$$
$$= \sum_n < \mathcal{U}(\Omega_l * \overline{\Omega}_m * \Omega_n), \pi^\lambda(expX)h_n >_{L^2(\mathbb{R}^k)}$$
$$= \sum_n \delta_{m,n} < h_l, \pi^\lambda(expX)h_n >_{L^2(\mathbb{R}^k)}$$
$$=< h_l, \pi^\lambda(expX)h_m >_{L^2(\mathbb{R}^k)}$$
$$=< h_l, \pi^\lambda(expX)h_m >_{L^2(\mathbb{R}^k)} .$$

D'où :

$$< \Psi_f, \Omega_l * \overline{\Omega}_m >_{L^2(W^\lambda)} = \int_{\mathbf{g}} f(expX) < \pi^\lambda(expX)h_m, h_l > dX$$

$$=< \pi^\lambda(f)h_m, h_l >=< T^\lambda(\mathcal{E}(f)_\lambda)h_m, h_l >$$

(2)

$$=< (\mathcal{U}_\circ \ell(\mathcal{E}(f)_\lambda)_\circ \mathcal{U}^{-1})h_m, h_l >=< \ell(\mathcal{E}(f)_\lambda)\Omega_m, \Omega_l >$$
$$=< \mathcal{E}(f)_\lambda * \Omega_m, \Omega_l >= \int_{W^\lambda} \mathcal{E}(f)_\lambda * \Omega_m * \overline{\Omega}_l \frac{dpdq}{(2\pi)^k}$$
$$= \int_{W^\lambda} \mathcal{E}(f)_\lambda \overline{\Omega_l * \overline{\Omega}_m} \frac{dpdq}{(2\pi)^k} =< \mathcal{E}(f)_\lambda, \Omega_l * \overline{\Omega}_m > .$$

On a donc bien $\Psi_f = \mathcal{E}(f)_\lambda$.

2) Evidemment:

$$\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) = \int_{\mathbf{g}} (foexp)\ (X)\ e^{-ia(X,p,q,\lambda)}dX$$

est C^∞ en (p,q,λ) sur $\mathcal{O}$ puisque la fonction a est polynomiale en X et $f \in \mathcal{S}(G)$.

Q.E.D

III PROPRIÉTÉS DE $\mathcal{E}$

Dans le chapitre précédent, on a vu que la transformation $\mathcal{E}$ s'écrit:

$$\Big(\mathcal{E}(f)\Big)(\xi) = \int_{\mathbf{g}} e^{-ia(X,\xi)} f(expX)dX$$

et

$$\mathcal{E}^{-1}(\varphi)(expX) = \int_{\mathbf{g}^*} e^{ia(X,\xi)} \varphi(\xi)d\xi.$$

où la fonction a est polynomiale en X, rationnelle en ξ, régulière sur $\mathcal{O}$.
Si G est abélien, $a(X,\xi)$ est $< \xi, X >$ et on retrouve la transformée de Fourier usuelle. $\mathcal{E}$ apparaît ainsi comme une déformation de la transformée de Fourier abélienne. Il est donc naturel de voir ce qu'il advient de la régularité de $\mathcal{E}$ et de la densité de l'image de $\mathcal{S}(G)$ par $\mathcal{E}$. Par exemple si on veut étendre $\mathcal{E}$ à des espaces de distributions, on a besoin de propriétés de régularité et de densité.

Gardons les notations précédentes. Dans la première partie de ce chapitre on va établir certaines proprietés de régularité de $\mathcal{E}$, entre autres:

$$\mathcal{E} : \mathcal{S}(G) \to C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$$

est continue. Dans la deuxième partie, on s'intéressera à la densité de l'image de $\mathcal{S}(G)$ dans $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$.

(III, 1) RÉGULARITÉ DE $\mathcal{E}$

Théorème (III,1 ,1)

Si on munit $\mathcal{S}(G)$ et $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$ de leurs topologies usuelles, alors l'application:

$$\mathcal{E} : \mathcal{S}(G) \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$$

est continue.

Avant de démontrer le théorème, on va établir quelques résultats préliminaires qui ont un interêt en soi:

Fixons λ et notons $\mathcal{E}(f)_\lambda$ la restriction de $\mathcal{E}(f)$ à W^λ. Soit ρ^λ la représentation de $G \times G$ dans $HS(L^2(\mathbb{R}^k))$, définie dans la proposition (II, 4, 3):

$$\rho^\lambda(g_1, g_2)A = \pi^\lambda(g_1)_\circ A_\circ \pi^\lambda(g_2)^{-1}$$

si g_1, g_2 sont dans G et A dans $HS(L^2(\mathbb{R}^k))$.

On construit une représentation de $G\times G$ qu'on notera encore ρ^λ sur $L^2(\mathbb{R}^{2k})$, considéré comme espace des noyaux des opérateurs de $HS(L^2(\mathbb{R}^k))$ par :

$$\rho^\lambda(g_1,g_2)K[A]=K\left[\rho^\lambda(g_1,g_2)A\right]$$

si $K[A]$ est le noyau de l'opérateur A de $HS((L^2(\mathbb{R}^k))$.

Considérons la représentation $(L\otimes R)^\lambda$ de $G\times G$ dans $L^2(W^\lambda)$ définie par:

$$(L\otimes R)^\lambda\ (g_1,g_2)u=L_\lambda(g_1)_\circ\ R_\lambda(g_2)u\quad (u\in L^2(W^\lambda)\quad (g_1,g_2)\in G\times G).$$

Notons (P,Q) $(P\in\mathbb{R}^k, Q\in\mathbb{R}^k)$ un point de $\mathbb{R}^{2k}$. Une fonction K de $L^2(\mathbb{R}^{2k})$ est donc fonction de P et de Q. Nous noterons également $(\pi^\lambda)_P$ (resp. $(\pi^\lambda)_Q$) l'action du groupe G sur les fonctions K qui se déduit par opération de la représentation π^λ sur les variables P seulement (resp. Q seulement), alors on a:

<u>Proposition</u> (III, 1, 2)

1) Si K est dans L^2 $(\mathbb{R}^{2k})$, alors:

$$(\rho^\lambda(\ g_1,\ g_2).K)(P,Q)=\pi_P^\lambda(\ g_1)_\circ\overline{\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{k}}(P,Q),$$

pour tout g_1, g_2 dans G et (P,Q) de $\mathbb{R}^{2k}$.

2) ρ^λ et $(L\otimes R)^\lambda$ sont unitairement équivalentes et pour tout u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et g_1, g_2 dans G:

$$K\left[T^\lambda(L\otimes R)^\lambda(\ g_1,\ g_2).u)\right]=\rho^\lambda(\ g_1,\ g_2).K\left[T^\lambda(u)\right],$$

<u>Preuve</u>

Soit A dans $HS(L^2(\mathbb{R}^k))$, $K(P,Q)$ son noyau dans L^2 $(\mathbb{R}^{2k})$, u et v deux fonctions dans L^2 $(\mathbb{R}^k)$, alors:

$$\begin{aligned}
<(\rho^\lambda(\ g_1,\ g_2)A)u,v> &=< A\ \circ\pi^\lambda(g_2^{-1})u,\pi^\lambda(g_1^{-1})v>\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}K(P,Q)(\pi_Q^\lambda(\ g_2^{-1})u)(Q)\overline{(\pi_P^\lambda(\ g_1^{-1})v)(P)}dPdQ\\
&=\int_{\mathbb{R}^k}<\pi_Q^\lambda(\ g_2^{-1})u,\overline{K}(P,.)>\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_1^{-1})v)(P)}dP\\
&=\int_{\mathbb{R}^k}<\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{K})},\overline{u}>\overline{(\pi_P^\lambda(\ g_1^{-1})v)(P)}dP\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{K})}u(Q)\overline{(\pi_P^\lambda(\ g_1^{-1})v)}(P)dPdQ\\
&=\int_{\mathbb{R}^k}<\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{K})},\ (\pi_P^\lambda(\ g_1^{-1})v>u(Q)dQ\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\pi_P^\lambda(\ g_1)\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{K})}(P,Q)u(Q)\overline{v}(P)dPdQ\\
&=<\int_{\mathbb{R}^k}(\pi_P^\lambda(g_1).\overline{(\pi_Q^\lambda(\ g_2)\overline{K})}(.,Q)u(Q)dQ,v>.
\end{aligned}$$

Donc:

$$K[\rho^{\lambda}(g_1, g_2)A] = \pi_P^{\lambda}(g_1)\left(\overline{\pi_Q^{\lambda}(g_2)\overline{K}[A]}\right).$$

2) Les espaces de réalisation de ρ^{λ} et $(L \otimes R)^{\lambda}$ sont isomorphes à L^2 $(\mathbb{R}^{2k})$. Et puisque:

$$\begin{aligned}\rho^{\lambda}(g_1, g_2)T^{\lambda}(u) &= \pi^{\lambda}(g_1)_{\circ}T^{\lambda}(u)_{\circ}\pi^{\lambda}(g_2^{-1}) = T^{\lambda}(L_{\lambda}(g_1)_{\circ}R_{\lambda}(g_2)u)\\ &= T^{\lambda}((L \otimes R)^{\lambda}u).\end{aligned}$$

et que:

$$\rho^{\lambda}(g_1, g_2)K[A] = K[\rho^{\lambda}(g_1, g_2)A],$$

on a alors l'entrelacement annoncé.

Q.E.D

Remarque (III, 1, 3)

Soit L_g (resp R_g), la représentation réguliere gauche (resp droite) de G dans $L^2(G)$ définie par:

$$(L_g f)(g') = f(g^{-1}g), \quad (R_g(f))(g') = f(g'g)), \quad (g \in G, \quad f \in L^2(G)).$$

Puisque:

$$\begin{aligned}T^{\lambda}(L_{\lambda}(g)\mathcal{E}(f)_{\lambda}) &= \pi^{\lambda}(g)_{\circ}T^{\lambda}(\mathcal{E}(f)_{\lambda}) = \pi^{\lambda}(g)\ {}_{\circ}\pi^{\lambda}(f) = \pi^{\lambda}(L_g f)\\ &= T^{\lambda}(\mathcal{E}(L_g f)_{\lambda}),\end{aligned}$$

et que T^{λ} est une représentation fidéle, alors :

$$L_{\lambda}(g)\mathcal{E}(f)_{\lambda} = \mathcal{E}(L_g f)_{\lambda}, \quad R_{\lambda}(g)\mathcal{E}(f)_{\lambda} = \mathcal{E}(R_g f)_{\lambda}.$$

Donc, si g_1 et g_2 sont dans G et f dans $L^2(G)$) et si nous notons $\tau(g_1, g_2)$ l'opérateur $L_{g_1} \circ R_{g_2}$, alors:

$$L_{\lambda}(g_1)_{\circ}R_{\lambda}(g_2)\mathcal{E}(f)_{\lambda} = \mathcal{E}(L_{g_1 \circ}R_{g_2} f)_{\lambda} = \mathcal{E}\big(\tau(g_1, g_2)f\big)_{\lambda}.$$

Donc $\mathcal{E}_{\lambda}$ entrelace les deux représentations τ et $(L \otimes R)^{\lambda}$ de $G \times G$ dans $\mathcal{S}(G)$ et $\mathcal{S}(W^{\lambda})$.

Proposition (III, 1, 4)

Si $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en P et Q sur L^2 $(\mathbb{R}^{2k})$, alors:

$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda)\rho^{\lambda}(V_i, V_j) \quad (\text{somme finie}),$$

où V_i, V_j sont des éléments de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$ de $\underline{\mathbf{g}}$ et $a_{i,j}(\lambda)$ est une fonction rationnelle sur $\mathcal{V}$ admettant des pôles en dehors de $\mathcal{V}$.

Preuve

On prouve ceci par récurrence sur la dimension de $\underline{\mathbf{g}}$.
Si $dim\underline{\mathbf{g}} = 1$, c'est evident. Supposons que l'assertion soit vraie pour $dim\underline{\mathbf{g}} \leq n-1$. Soit:

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{n}} \supset \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{n-1}} \supset \dots \supset \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{0}} = \{0\}$$

une suite d'ideaux de $\underline{\mathbf{g}}$, $\{X_i \in \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}} - \underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i-1}}, i = 1, ..., n\}$ une base de $\underline{\mathbf{g}}$. On notera les objets contruits sur $\underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}$ par un exposant (i). Soit $\pi : \underline{\mathbf{g}}^*_{\mathbf{n}} \longrightarrow \underline{\mathbf{g}}^*_{\mathbf{n-1}}$, la projection canonique, $I(\underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}})$ l'anneau des polynômes invariants sur $\underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}$, $S(\underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}})$ l'algèbre symétrique de $\underline{\mathbf{g}}_{\mathbf{i}}$.

Deux cas sont alors possibles: [14]

1^{er} cas:

$I(\underline{\mathbf{g}}_n) \not\subset S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$, alors $I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_n)$ et il existe γ dans $I(\underline{\mathbf{g}}_n) - I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$ tel que:

$$\gamma = \alpha X_n + \beta \quad \alpha \in I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}), \quad \beta \in S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}) \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0.$$

Dans ce cas, on pose:

$$\mathcal{O}^n = \pi^{-1}(\mathcal{O}^{n-1}) \cap \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^*_n \backslash \alpha(\xi) \neq 0\}$$

et:

$$\lambda^{(n)} = (\lambda^{(n-1)}, \gamma), \quad p^{(n)} = p^{(n-1)}, \quad q^{(n)} = q^{(n-1)}.$$

L'espace de réalisation des représentaions $\pi^{\lambda^{(n)}}$ est le même que celui de $\pi^{\lambda^{(n-1)}}$. Donc tout opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $(p^{(n)}, q^{(n)})$ sur L^2 $(\mathbb{R}^{k_n})$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $(p^{(n-1)}, q^{(n-1)})$ sur L^2 $(\mathbb{R}^{k_{n-1}})$ $(k_n = k_{n-1})$. L'hypothèse de recurrence permet alors de conclure.

$2^{\text{ième}}$ cas:

$I(\underline{\mathbf{g}}_n) \subset S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$, alors $I(\underline{\mathbf{g}}_n) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$ et il existe une fonction Y dans $I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}) - I(\underline{\mathbf{g}}_n)$ tel que:

$$\{\tilde{X}_n, Y\} = Z \neq 0, \quad Z \in I(\underline{\mathbf{g}}_n).$$

On choisit Y tel que $\mathcal{O}^{(n-1)} \cap \{\xi \backslash Y(\xi) = 0\}$ ne soit pas vide. Si $\lambda^{(n-1)}$ est une fonction rationnelle invariante sur $\underline{\mathbf{g}}_{n-1}$, la fonction:

$$\lambda^{(n)}(\xi) = \lambda^{(n-1)} \circ \pi(exp - \frac{Y(\xi)}{Z(\xi)} X_n \xi)$$

est rationnelle invariante sur $\underline{\mathbf{g}}_n$ et identiquement nulle si $\lambda^{(n-1)}$ est la fonction Y. On pose:

$$\mathcal{O}^{(n)} = \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^*_n \backslash \pi(exp - \frac{Y(\xi)}{Z(\xi)} X_n \xi) \in \mathcal{O}^{(n-1)} \quad \text{et} \quad Z(\xi) \neq 0\}$$

et

$$p_{k_n}^{(n)} = \tilde{X}_n, \quad q_{k_n}^{(n)} = \frac{Y}{Z}, \quad p_i^{(n)} = p_{io}^{(n-1)} exp - \frac{Y}{Z}X_n, \quad q_i^{(n)} = q_{io}^{(n-1)} exp - \frac{Y}{Z}X_n.$$

Par construction, $\mathcal{O}^{(n)}$ est un ouvert de Zariski invariant, $\mathcal{V}^{(n)}$ est l'image de $\mathcal{O}^{(n)}$ par les applications $\lambda^{(n)}$ et, avec ces notations,

$$\pi_n^{\lambda^{(n)}} = Ind_{G_{n-1}\uparrow G_n}\ \pi^{\lambda^{(n-1)}}$$

se réalise dans $L^2(\mathbb{R}, L^2\ (\mathbb{R}^{k_{n-1}}))$ qui est isomorphe à $L^2\ (\mathbb{R}^{k_n})$, puisque $k_n = k_{n-1} + 1$ de la façon suivante:

$$(\pi^{\lambda^{(n)}}(xexpsX_n)\varphi)(u,t) = (\pi^{\lambda^{(n-1)}}(expuX_nxexp - uX_n)\varphi)(u+s,t), \qquad (*)$$

si x est dans G_{n-1}, (s,u) dans $\mathbb{R}^2$, t dans $\mathbb{R}^{k_{n-1}}$ et φ dans $L^2\ (\mathbb{R}^{k_n})$.
D'où :
a) pour $s = 0$:

$$(\pi^{\lambda^{(n)}}(x)\varphi)(u,t) = (\pi^{\lambda^{(n-1)}}(expuX_nxexp - uX_n)\varphi)(u,t).$$

Maintenant soit σ l'opération de symétrisation complète de $S(\mathbf{g}_n)$ dans $\mathcal{U}(\mathbf{g}_n)$, avec la convention $\sigma(X) = -iX$ si X est dans $\mathbf{g}_n$, alors pour $Y \in I(\mathbf{g}_{n-1})$, $\sigma(Y)$ est central dans $\mathcal{U}(\mathbf{g}_{n-1})$ et $\pi^{\lambda^{(n-1)}}(\sigma(Y))$ est scalaire et prend la valeur $Y(\lambda)$. D'où:

$$\begin{aligned}(\pi^{\lambda^{(n)}}(\sigma(Y))\varphi)(u,t) &= (\pi^{\lambda^{(n-1)}}(\sigma(Ad(expuX_n)Y))\varphi)(u,t) = \pi^{\lambda^{(n-1)}}(\sigma(Y+uZ)\varphi)(u,t)\\ &= (Y(\lambda^{(n-1)}) + uZ(\lambda^{(n-1)}))\varphi(u,t) = uZ(\lambda^{(n)})\varphi(u,t)\end{aligned}$$

car $Y(\lambda^{(n-1)})$ est par construction nul et $Z(\lambda^{(n-1)})$ est $Z(\lambda^{(n)})$.

b) Si on pose $x = 1$, puis on dérive par rapport à s au point $s = 0$ la formule (*), on obtient:

$$(d\pi^{\lambda^{(n)}}(X_n)\varphi)(u,t) = \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,t).$$

D'autre part, on a vu que:

$$\rho^{\lambda^{(n)}}(V_i, V_j)K(P,Q) = (\pi^{\lambda^{(n)}})_P(V_i)\overline{(\pi^{\lambda^{(n)}})_Q(V_j)\overline{K}}(P,Q),$$

pour tout V_i, V_j dans $\mathcal{U}(\mathbf{g}_n)$ et K dans $L^2\ (\mathbb{R}^{2k_n})$ et que tout opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en les variables $(P,\ Q)$ peut s'écrire sous la forme:

$$D_{P,Q} = \sum_{i,j} D_P^i{}_\circ D_Q^j,$$

où D_P^i (resp D_Q^j) est un opérateur différentiel à coefficient polynomiaux en les variables P seulement (resp Q seulement). De a) et b) on déduit:

La multiplication par P_{k_n} (resp Q_{k_n}) est donneé par:

$$P_{k_n}K(P,Q) = Z^{-1}(\lambda^{(n)})\rho^{\lambda^{(n)}}((\sigma(Y),0)K(P,Q),$$

$$Q_{k_n}K(P,Q) = Z^{-1}(\lambda^{(n)})\rho^{\lambda^{(n)}}((0,\sigma(Y))K(P,Q).$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial P_{k_n}}K(P,Q) = \rho^{\lambda^{(n)}}(X_n,0)K(P,Q),$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_{k_n}}K(P,Q) = \rho^{\lambda^{(n)}}(0,X_n)K(P,Q).$$

. Il reste à exprimer les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux dans les variables restantes. Mais si on pose:

$$P = (P', P_{k_n}), \quad Q = (Q', Q_{k_n}),$$

l'hypothèse de recurrence entraîne que, avec des notations évidentes :

$$(D_{P',Q'}K)(P,Q) = \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda^{(n-1)})(\pi^{\lambda^{(n-1)}})_P(V_i)\overline{(\pi^{\lambda^{(n-1)}})_Q(V_j)\overline{K}}(P,Q)$$

où V_i et V_j sont dans $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$. Donc:

$$(D_{P',Q'}K)(P,Q) =$$

$$= \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda^{(n)})(\pi^{\lambda^{(n)}})_P(exp - Q_{k_n}adX_n(V_i))\overline{(\pi^{\lambda^{(n)}})_Q(exp - Q_{k_n}adX_n(V_j)\overline{K}}(P,Q)$$

$$= \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda^{(n)})\rho^{\lambda^{(n)}}\Big[\sum_{r\geq 0}\frac{(-1)^r}{r!}\Big(\frac{\sigma(Y)}{\sigma(Z)}\Big)^r(adX_n)^r(V_i), \sum_{s\geq 0}\frac{(-1)^s}{s!}\Big(\frac{\sigma(Y)}{\sigma(Z)}\Big)^s(adX_n)^s(V_j)\Big].$$

et on achève la démonstration en remplaçant la multiplication par P_{k_n} ou Q_{k_n} par son expression calculée plus haut en fonction de $\rho^{\lambda^{(n)}}$.

Q.E.D

Proposition (III, 1, 5)

Si A est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en (p,q), indépendant de λ sur $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$, pour chaque λ de $\mathcal{V}$ il existe alors un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux $\mathcal{A}^\lambda$ sur $L^2(\mathbb{R}^{2k})$, tel que:

$$K\left[T^\lambda(Au)\right] = \mathcal{A}^\lambda K\left[T^\lambda(u)\right]$$

pour tout $u \in C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$.

Preuve

Soit u une fonction de $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$, alors on peut l'écrire:

$$u(p,q,\lambda) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)\Omega_l * \overline{\Omega}_m,$$

avec $\alpha_{l,m}$ dans $C^\infty(\mathcal{V})$ et pour chaque λ fixé, la suite $(\alpha_{l,m}(\lambda))$ est à décroissance rapide en (l,m).
Fixons λ dans $\mathcal{V}$, si $\mathcal{U}$ est l'application de la remarque (II, 3, 3):

$$\begin{aligned}(T^\lambda(u)h_n)(\xi) &= \mathcal{U}(u * \Omega_n)(\xi) = \mathcal{U}\Big(\sum_{l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)\Omega_l * \overline{\Omega}_m * \Omega_n\Big)(\xi)\\ &= \sum_{l} \alpha_{l,n}(\lambda)h_l(\xi) = \Big(\sum_{l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)h_l(\xi)\Big)\int_{\mathbb{R}^k} h_n(\eta)\overline{h}_m(\eta)d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)h_l(\xi)\overline{h}_m(\eta)h_n(\eta)d\eta,\end{aligned}$$

ce qui entraîne:

$$K[T^\lambda(u)](\xi,\eta) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)\mathcal{U}(\Omega_l)(\xi)\mathcal{U}(\overline{\Omega}_m)(\eta).$$

D'autre part, on sait que $\pi^\lambda(\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}}))$ est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynoniaux sur $L^2(\mathbb{R}^k)$, donc tout opérateur différentiel A à coefficients polynomiaux en $(p,\ q)$ s'écrit d'aprés la remarque (II, 1, 2):

$$Au = \sum_{i,j} P_i^* * u * Q_j^*$$

où P_i^* et Q_j^* sont des polynômes $*$ en $(p,\ q)$. D'après la remarque (II, 3, 3),

$$\mathcal{U}(q_j * \Omega_m)(\xi) = \xi_j h_m(\xi) \text{ et } \mathcal{U}(p_j * \Omega_m)(\xi) = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} h_m(\xi)$$

Alors:

$$\begin{aligned}K[T^\lambda(Au)](\xi,\eta) &= \sum_{i,j,l,m} \alpha_{l,m}(\lambda)\ \mathcal{U}(P_i^* * \Omega_l)(\xi)\ \mathcal{U}(\overline{\Omega}_m * Q_j^*)(\eta)\\ &= \sum_{l,m} \alpha_{l,m}(D_\xi.h_l)(\xi)(D_\eta \overline{h}_m)(\eta)\\ &= (D_\xi \circ D_\eta)K\big[T^\lambda(u)\big](\xi,\eta) = \mathcal{A}^\lambda K\big[T^\lambda(u)\big](\xi,\eta),\end{aligned}$$

où D_ξ (resp D_η) est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en ξ (resp η).

Q.E.D

Corollaire (III, 1, 6)

Si A est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $(p,\ q)$, indépendant de λ sur $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}))$, alors:

$$Au(p,q,\lambda) = \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda)\big((L\otimes R)^\lambda(V_i, V_j)u\big)(p,q,\lambda)$$

où V_i, V_j sont dans $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$ et $a_{i,j}(\lambda)$ est une fonction rationnelle sur $\mathcal{V}$ admettant des pôles en dehors de $\mathcal{V}$ et la somme est finie.
En particulier, il existe des opérateurs différentiels $A_{x,i,j}$ à coefficients polynomiaux sur G muni de la carte exponentielle tels que:

$$A_{p,q}\mathcal{E}(f) = \sum_{i,j} a_{i,j}(\lambda)\mathcal{E}(A_{x,i,j}f)$$

et la somme est finie.

Cette propriété est en un certain sens la généralisation du résultat suivant bien connu: la transformée de Fourier abélienne transforme un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en un opérateur du même type.

Démonstration du théorème (III, 1, 1)

On considère sur $C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{S}(p,q))$, la famille des semi-normes:

$$\mathcal{P}(u) = \mathcal{P}_{r,D_{p,q},D_\lambda,K}(u) = \sup_{\lambda\in K}\sup_{p,q}\left|(1+p^2+q^2)^r D_{p,q}(D_\lambda u)(p,q,\lambda)\right|,$$

où K est un compact de $\mathcal{V}$, $D_{p,q}$, D_λ sont des opérateurs différentiels à coefficients constants dans les variables λ, p et q. Si on écrit:

$$\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} (f_\circ exp)\ (X)\ e^{-ia(X,p,q,\lambda)}dX,$$

un calcul direct donne l'estimation:

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}(f)) \leq C\sum_{i,j}\sup_{\lambda\in K}\sup_{p,q}\left|(1+p^2+q^2)^M D^i_{p,q}\mathcal{E}(R_j(X)f)(p,q,\lambda)\right|,$$

ici, M est un entier, $D^i_{p,q}$ un opérateur différentiel à coefficients constants et R_j un polynome sur $\underline{\mathbf{g}}$. Le corollaire (III, 1, 6) entraîne que:

$$(1+p^2+q^2)^M D^i_{p,q}\mathcal{E}(f) = \sum_{i',j'} a_{i',j'}(\lambda)(L\otimes R)^\lambda(V'_i, V'_j)\mathcal{E}(f).$$

Et d'après la remarque (III, 1, 3), si X est un élément de $\underline{\mathbf{g}}$:

$$\mathcal{E}(X^- f) = L_\lambda(X)\mathcal{E}(f), \quad \mathcal{E}(X^+ f) = R_\lambda(X)\mathcal{E}(f)$$

où les opérateurs X^-, X^+ sont définis par:

$$X^- f_{|g} = \frac{d}{dt} f(exp - tXg)_{|t=0}, \qquad X^+ f_{|g} = \frac{d}{dt} f(gexptX)_{|t=0}.$$

Ils sont à coefficients polynomiaux en $x = expX$, puisque le produit sur G est une fonction polynomiale.
Il existe donc un entier m et un opérateur différentiel D_x coefficients polynomiaux en $x \in G$ tel que:

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}(f)) \leq C'\mathcal{Q}(f),$$

avec:

$$\mathcal{Q}(f) = \sup_{x \in G} |(1 + x^2)^m D_x f|.$$

Q.E.D

Proposition **(III, 1, 7)**

$\mathcal{E}$ se prolonge en une transformation unitaire entre $L^2(G)$ et $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)$ qui entrelace les représentations τ et $\int^{\oplus}(L \otimes R)^\lambda r(\lambda)d\lambda$ de $G \otimes G$ dans $L^2(G)$ et $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)$ ($r(\lambda)$ a été définie en (I) et donne la mesure de Plancherel). $\mathcal{E}$ est une isométrie entre les espaces $L^2(G)^\infty$ et $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)^\infty$ des vecteurs C^∞ de ces deux représentations.

Preuve

La formule de Plancherel [28] pour G décompose l'espace $L^2(G)$ portant la représentation τ de $G \otimes G$ en une intégrale directe $\int^{\oplus} HS(\mathcal{H}_\lambda) r(\lambda)d\lambda$ où chaque $HS(\mathcal{H}_\lambda)$ porte la représentation ρ^λ de $G \otimes G$. On a vu que $HS(\mathcal{H}_\lambda)$ peut être identifié à $L^2(W^\lambda)$ (proposition (II, 1, 2)) et qu'avec ces identifications, la formule de Plancherel s'éscrit:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}(f)\|^2_{L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)} &= \int_{\mathcal{V}} \|(T^\lambda)^{-1}(\pi^\lambda(f))\|^2_{L^2(W)} r(\lambda)d\lambda = \int_{\mathcal{V}} \|\pi^\lambda(f))\|^2_{HS(L^2(W))} r(\lambda)d\lambda \\ &= \int_{\mathcal{V}} Tr(\pi^\lambda(f)_\circ \pi^\lambda(f)^*) r(\lambda)d\lambda = \|f\|^2_{L^2(G)}.\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ s'etend donc en une transformation unitaire entre $L^2(G)$ et $\int_{\mathcal{V}}^{\oplus} L^2(W^\lambda) r(\lambda)d\lambda$ qui est $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)$. $\mathcal{E}$ entrelace donc τ et $\int^{\oplus}(L \otimes R)^\lambda r(\lambda)d\lambda$ et est une isométrie entre les espaces $L^2(G)^\infty$, $L^2(\underline{\mathbf{g}}^*)^\infty$ de vecteurs C^∞ de ces représentations.

Q.E.D

Tous ces résultats sont bien sûr des généralisations du cas de la transformée de Fourier abélienne.

(III, 2) L'IMAGE DE L' ESPACE DE SCHWARTZ DE G PAR $\mathcal{E}$

On garde les notations précédentes. Considérons la suite des idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$:

$$\{0\} \subset \underline{\mathbf{g}}_1 \subset \dots \subset \underline{\mathbf{g}}_n = \underline{\mathbf{g}} \quad (\dim \underline{\mathbf{g}}_i = i).$$

L'ensemble $\{X_i \backslash X_i \in \underline{\mathbf{g}}_i - \underline{\mathbf{g}}_{i-1} \quad , i = 1, .., n\}$ est une base de $\underline{\mathbf{g}}$ et tout éléments g de G s'écrit :

$$g = exp \sum_{i=1}^{n} x_i \ X_i.$$

Choisissons $(x_1, ..., x_n)$ comme coordonnées sur G. On va montrer que $\mathcal{E}\Big(\mathcal{S}(G)\Big)$ est dense dans $C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(p,q)\Big)$ sous l'hypothèse (H) suivante sur la paramétrisation de l'ouvert $\mathcal{O} \subset \underline{\mathbf{g}}^*$:

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } i = 1, ..., n, \text{ il éxiste un opérateur différentiel} \\ \text{en les variables } \lambda, p, q \text{ noté } \mathcal{A}^i_{\lambda,p,q}, \text{ à coefficient rationnels} \\ \text{en } \lambda, \text{ polynomiaux en } p, q \text{ tel que :} \\ \qquad \mathcal{E}(x_i f) = \mathcal{A}^i_{\lambda,p,q} \mathcal{E}(f). \end{array} \right.$

Notre approche consiste à montrer que $\mathcal{E}\Big(\mathcal{S}(G)\Big)$ contient l'espace $C_c^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big)$ des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathcal{V}$ à valeurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$.

<u>Proposition</u> (III, 2 ,1)

Sous l'hypothèse (H), si A_x est un opérateur différentiel à coefficient polynomiaux sur G alors :
Il existe un opérateur différentiel $\mathcal{A}_{\lambda,p,q}$ à coefficients polynomiaux en p, q rationnels en λ tel que :

$$\mathcal{E}\ (A_x . f) = \mathcal{A}_{\lambda,p,q} \mathcal{E}(f).$$

Preuve

Soit X^- le champ de vecteurs sur G défini par:

$$(X^- f)\ (g) = \ \frac{d}{dt}\ f(exp - tXg)_{|_{t=0}},\ \text{si} f \in \ C^\infty(G).$$

Alors:

$$X_1^- = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad X_j^- = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l<j} p_l(x_n, ..., x_{l+1})\frac{\partial}{\partial x_l} \quad \text{pour} \quad j = 1, ..., n,$$

où p_l est un polynôme. Mais puisque (remarque (II, 1, 2)):

$$p_j \ * \ u = p_j\ u - \frac{i}{2}\ \frac{\partial u}{\partial q_j} \quad , \ q_j \ * \ u = q_j\ u + \frac{i}{2}\ \frac{\partial u}{\partial p_j},$$

et si on écrit:

$$\tilde{X}_j(p, q, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \ \alpha_i\ (X_j, q, \lambda)p_i + \alpha_0(X_j, q, \lambda),$$

alors :

$$\mathcal{E}(X_j^- f) = i\tilde{X}_j * \mathcal{E}(f) = B^j_{\lambda,p,q}\mathcal{E}(f),$$

où $B^j_{\lambda,p,q}$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $(p,\ q)$, rationnels en λ, et par récurrence sur j, il existe des polynômes $p'_j(x)$ et des opérateurs différentiels $B'^j_{\lambda,p,q}$ à coefficients polynomiaux en p, q et rationnels en λ tels que:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}f\Big) &= \mathcal{E}(X_j^- f) - \sum_{i<j} \mathcal{E}\Big(p_i(x_n, ..., x_{i+1})\frac{\partial}{\partial x_i}f\Big) \\ &= B'^j_{\lambda,p,q}\ \mathcal{E}(p'_j(x_n, ... x_{i+1})f),\end{aligned}$$

ceci pour tout $j = 1, ..., n$. Le résultat découle alors de l'hypothèse (H).

Q.E.D

Proposition (III, 2, 2)

On suppose l'hypothèse (H) vérifiée. Soit α une fonction C^∞ à support compact sur $\mathcal{V}$, on pose pour X dans $\underline{\mathbf{g}}$, s et n dans $\mathbb{N}^k$:

$$\psi(expX) = \int_{\mathcal{O}} \ e^{ia(X,p,q,\lambda)}\alpha(\lambda)\ \Omega_s \ * \ \overline{\Omega}_m\ r(\lambda)d\lambda\ \frac{dpdqd\lambda}{(2\pi)^k}.$$

ψ est alors dans $\mathcal{S}(G)$.

Preuve

Remarquons que ψ est une fonction C^∞ bornnée sur G. On va montrer que ψ appartient à $L^2(G)$ et que $D\psi$ appartient à $L^2(G)$ pour tout opérateur différentiel D à coefficients polynomiaux.

1 Soit φ un élément de $\mathcal{S}(G)$ alors:

$$< \psi, \varphi >_{L^2(G)} = \int_G \overline{\varphi(expX)} \left(\int_{\mathcal{V}\times \mathbb{R}^{2k}} \varepsilon^{ia(X,p,q,\lambda)} \alpha(\lambda) r(\lambda) \Omega_s * \overline{\Omega}_m d\lambda \frac{dpdq}{(2\pi)^k} \right) dX.$$

Or d'aprés les calculs (1) et (2) dans la preuve du théorème (II, 4, 7):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2k}} e^{ia(X,p,q,\lambda)} \Omega_s * \overline{\Omega}_m \frac{dpdq}{(2\pi)^k} &= \int_{W^\lambda} L(exp - X) \Omega_s * \overline{\Omega}_m \frac{dpdq}{(2\pi)^k} \\ &= Tr\Big(T^\lambda\big(L(exp - X)\Omega_s * \overline{\Omega}_m\big)\Big) \\ &= < h_s, \pi^\lambda(expX) h_m >_{L^2(\mathbb{R}^k)} .\end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}< \psi, \varphi >_{L^2(G)} &= \int_G \overline{\varphi(expX)} \left(\int_G \alpha(\lambda) r(\lambda) < h_s, \pi^\lambda(expX) h_m >_{L^2(\mathbb{R}^k)} d\lambda \right) dX \\ &= \int_{\mathcal{V}} \alpha(\lambda) r(\lambda) \overline{\left(\int_G \varphi(expX) < \pi^\lambda(expX) h_m, h_s >_{L^2(\mathbb{R}^k)} \right)} dX d\lambda \\ &= \int_{\mathcal{V}} \alpha(\lambda) r(\lambda) \overline{< \pi^\lambda(\varphi) h_m, h_s >_{L^2(\mathbb{R}^k)}} d\lambda.\end{aligned}$$

Mais d'aprés le calcul (2) dans la preuve du théorème (II, 4, 7):

$$< \pi^\lambda(\varphi) h_m, h_s > = < \mathcal{E}(\varphi)_\lambda, \Omega_s * \overline{\Omega}_m > .$$

Et alors :

$$< \psi, \varphi >_{L^2(G)} = \int_{\mathcal{V}} \alpha(\lambda) r(\lambda) < \Omega_s * \overline{\Omega}_m \, \mathcal{E}(\varphi)_\lambda > d\lambda$$

$$= < \alpha(\lambda) \Omega_s * \overline{\Omega}_m, \mathcal{E}(\varphi) >_{L^2(\mathcal{O})} .$$

D'où :

$$| < \psi, \varphi >_{L^2(G)} | \leq \|\mathcal{E}(\varphi)\|_{L^2(\mathcal{O})} \|\alpha \Omega_s * \overline{\Omega}_m\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$\leq C_\psi \|\varphi\|_{L^2(G)},$$

puisque $\mathcal{E}$ est unitaire et $\alpha(\lambda)$ est à support compact dans $\mathcal{V}$. La forme linéaire $\varphi \longmapsto < \psi, \varphi >$ est donc continue sur $L^2(G)$, et par le théorème de Riesz, ψ est dans $L^2(G)$.

<u>**2**</u> Soit φ dans $\mathcal{S}(G)$. On remarque que si A_x est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux en $x = expX$, l'adjoint A_x^* de A_x est aussi un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux, et alors si D est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux, le même calcul que dans <u>**1**</u> entraîne que:

$$| < D\,\psi, \varphi >_{L^2(G)} | = | < \psi, D^*\varphi >_{L^2(G)} | = | < \alpha(\lambda)\Omega_s * \overline{\Omega}_m, \mathcal{E}(D^*\varphi)_\lambda > |.$$

Et, par la proposition (III, 2, 1), on a:

$$\begin{aligned} | < D\psi, \varphi >_{L^2(G)} | &= | < A_{\lambda,p,q}\mathcal{E}(\varphi),\ \alpha(\lambda)\Omega_s * \overline{\Omega}_m >_{L^2(\mathcal{O})} | \\ &= | < \mathcal{E}(\varphi),\ A_{\lambda,p,q}\alpha(\lambda)\ \Omega_s * \overline{\Omega}_m >_{L^2(\mathcal{O})} | \\ &\leq C_{D\psi}\|\varphi\|_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

$D\psi$ est donc dans $L^2(G)$, et finalement ψ est un élément de $\mathcal{S}(G)$.

Q.E.D

<u>**Théorème**</u> **(III, 2 , 3)**

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe. Supposons que l'hypothèse (H) est vérifiée. Alors :

$$\mathcal{E}\Big(\mathcal{S}(G)\Big) \quad \textit{est dense dans} \quad C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})\Big).$$

<u>**Preuve**</u>

Soit E l'espace $C_c^\infty(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$. Par la proposition (II, 2, 2), $E \subset \mathcal{E}\Big(\mathcal{S}(G)\Big)$. Comme $C_c^\infty(\mathcal{V})$ est dense dans $C^\infty(\mathcal{V})$ et que $C^\infty(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k})$ est dense dans son complété, on a alors le théorème, puisque: [32]

$$C^\infty(\mathcal{V})\ \hat{\otimes}\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2k}) = C^\infty\Big(\mathcal{V}, \mathcal{S}(p,q)\Big).$$

Q.E.D

. Bien sûr l'hypothèse (H) est vérifiée dans le cas abélien. D'autre part, si on reprend la construction des variables λ, p, q on peut déterminer $\mathcal{E}(x_n f)$ dans tous les cas. Avec les notations précédentes:

Proposition (III, 2, 4)

Soit

$$\{0\} = \underline{\mathbf{g}}_0 \subset \dots \subset \underline{\mathbf{g}}_n = \underline{\mathbf{g}}$$

la suite des idéaux donnée précédemment,

$$\pi : \underline{\mathbf{g}}_n^* \longrightarrow \underline{\mathbf{g}}_{n-1}^*$$

la projection canonique et f un élément de $\mathcal{S}(G)$. Alors:
. Si dim W^λ = dim $W^{\pi(\lambda)}$, il existe α dans $C^\infty(\mathcal{V})$ telle que:

$$\mathcal{E}(x_n f)(p,q,\lambda) = -i\alpha(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda_r}\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) \qquad (\lambda \in \mathcal{V}).$$

. Si dim W_λ =dim $W_{\pi(\lambda)} + 2$,

$$\mathcal{E}(x_n f) = -i\frac{\partial}{\partial p_k}\mathcal{E}(f).$$

Preuve

Soit $(p,\ q,\ \lambda)$ (resp. $(p',\ q',\ \lambda')$) la paramétrisation des orbites de G_n dans $\underline{\mathbf{g}}_n^*$ (resp de G_{n-1} dans $\underline{\mathbf{g}}_{n-1}$).
On a deux possibilités :

1^er^ **cas**:

$I(\underline{\mathbf{g}}_n) \not\subset\ S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$,alors $I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_n)$ et il existe λ_r dans $I(\underline{\mathbf{g}}_n) - I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$ tel que:

$$\lambda_r = \alpha\ \tilde{X}_n\ +\ \beta \quad \Big(\alpha \in I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}),\ \beta \in\ S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})\Big)$$

et $(p,\ q) = (p',\ q')$, $\lambda = (\lambda',\ \lambda_r)$.
En utilisant la construction de (II) de la fonction a, pour tout X dans $\underline{\mathbf{g}}$:

$$a(X,p,q,\lambda) = \int_o^1\ \tilde{X}\Big(p,\psi\Big(exptX̄\big(0,\phi^{-1}(q),\lambda\big),\lambda\Big)\Big)dt$$

et comme

$$\tilde{X}(p,q,\lambda) = \tilde{X}' + x_n\tilde{X}_n = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j(X',q',\lambda')p'_j + \alpha_0(X',q',\lambda') + x_n(\lambda_r - \beta)\alpha^{-1},$$

avec X' dans $\underline{\mathbf{g}}_{n-1}$, on obtient:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial \lambda_r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial \lambda_r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial \lambda_r}(X,p,q,\lambda) = \alpha^{-1} x_n.$$

Donc:

$$\mathcal{E}(x_n f) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} \alpha \, \frac{\partial}{\partial \lambda_r} \, a(X,p,q,\lambda) e^{-ia(X,p,q,\lambda)} \, f(expX) dX \; = \; -i\alpha(\lambda) \frac{\partial \mathcal{E}(f)}{\partial \lambda_r}.$$

$\underline{2^{\text{ième}}\text{ cas}}$:

$I(\underline{\mathbf{g}}_n) \subset S(\underline{\mathbf{g}}_{n-1})$, il existe alors Y dans $I(\underline{\mathbf{g}}_{n-1}) - I(\underline{\mathbf{g}}_n)$ tel que:

$$\{\tilde{X}_n, Y\} = Z, \quad Z \in I(g_n), \quad Z \neq 0 \quad \text{sur} \quad \underline{\mathbf{g}}^*.$$

On pose :

$$p_k = \tilde{X}_n, \quad q_k = YZ^{-1}, \quad p_i = exp - q_k \; ad \; \tilde{X}_n p_i', \quad q_i = exp - q_k ad \; \tilde{X}_n q_i'.$$

Et puisque:

$$\tilde{X}(p,q,\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(X,q,\lambda) \, p_j + \alpha_0(X,q,\lambda),$$

avec $\alpha_k = x_n$ et $\frac{\partial \alpha_j}{\partial p_k} = 0$, alors:

$$\frac{\partial a}{\partial p_k}(X,p,q,\lambda) = x_n.$$

Et finalement

$$\mathcal{E}(x_n f) = -i \, \frac{\partial \mathcal{E}(f)}{\partial p_k}.$$

Q.E.D

Malheureusement, on ne peut pas poursuivre cette récurrence pour déterminer directement $\mathcal{E}(x_j f)$ pour $j < n$ afin de prouver (H) en toute généralité.

(III, 3) Exemples

Dans ce paragraphe on donnera des exemples où l'hypothèse (H) est vérifiée.

1 L'algèbre de Heisenberg

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Heisenberg, notons les éléments X de $\underline{\mathbf{g}}$:

$$X = x_1X_1 + x_2X_2 + x_3X_3 \quad \text{avec} \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad X_1 \text{central}$$

et les éléments ξ de $\underline{\mathbf{g}}^*$

$$\xi = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 \quad \text{avec} < f_i, X_j >= \delta_{i,j},$$

l'ouvert $\mathcal{O}$ de $\underline{\mathbf{g}}^*$ du théorème (I, 4, 1) est défini par:

$$\mathcal{O} = \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^* \text{ tel que } \xi_1 \neq 0\}$$

et on a:

$$\tilde{X}_1(p,q,\lambda) = \xi_1 = \lambda, \quad \tilde{X}_2(p,q,\lambda) = \lambda q, \quad \tilde{X}_3(p,q,\lambda) = p.$$

D'où:

$$\tilde{X}(p,q,\lambda) = x_3 p + \lambda x_2 q + \lambda x_1 = -a(X,p,q,\lambda).$$

Puisque, pour f dans $S(G)$:

$$\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) = \int_{\underline{\mathbf{g}}} e^{-ia(X,p,q,\lambda)} f(\exp X) dX,$$

on obtient alors:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(x_1 f)(p,q,\lambda) &= \Big(\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{i}{\lambda} q \frac{\partial}{\partial q}\Big)\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) \\
\mathcal{E}(x_2 f)(p,q,\lambda) &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial q}\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda) \\
\mathcal{E}(x_3 f)(p,q,\lambda) &= \frac{\partial}{\partial p}\mathcal{E}(f)(p,q,\lambda)
\end{aligned}$$

et (H) est vérifiée.

2 L'algèbre $\underline{\mathbf{g}}_{5,4}$

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Lie nilpotente engendrée par : $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ avec les relations de commutations:

$$[X_4, X_3] = X_1, \quad [X_5, X_3] = X_2, \quad [X_5, X_4] = -X_3.$$

L'appellation $\underline{\mathbf{g}}_{5,4}$ est due à Dixmier et cette algèbre est le contre-exemple classique pour des questions similaires.

On définit l'ouvert $\mathcal{O} \subset \underline{\mathbf{g}}^*$ par:

$$\mathcal{O} = \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^* \text{ tel que } \xi_1\xi_2 \neq 0 \quad (\xi_i =< \xi, X_i >)\}$$

et on a:

$$\tilde{X}_1 = \lambda_1, \quad \tilde{X}_2 = \lambda_2, \quad \tilde{X}_3 = \lambda_1 q, \quad \tilde{X}_4 = p, \quad \tilde{X}_5 = \lambda_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}p - \frac{\lambda_1}{2}q^2.$$

Un calcul direct montre que:

$$a(X,p,q,\lambda) = -\tilde{X}(p,q,\lambda) + \frac{\lambda_2}{12}x_4x_5 + \frac{\lambda_1}{24}x_5x_4^2 + \frac{\lambda_2^2}{24\lambda_1}x_5^3.$$

On a finalement:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\, a(X,p,q,\lambda) &= x_5 \\
\frac{\partial}{\partial p}\, a(X,p,q,\lambda) &= x_4 + \lambda_2 x_5 \\
\frac{\partial}{\partial q}\, a(X,p,q,\lambda) &= \lambda_1 x_3 - \frac{\lambda_1}{2}x_5 \\
\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\, a(X,p,q,\lambda) &= x_2 + \frac{p}{\lambda_1}.x_5 + \frac{\lambda_2}{12}x_5^3 + \frac{1}{12}x_4x_5 \\
\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\, a(X,p,q,\lambda) &= x_1 + qx_3 + \frac{1}{24}x_4^2x_5 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}px_5 \\
&\quad - \frac{1}{24}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 x_5^3.
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathcal{E}(x_5f)$ puis $\mathcal{E}(x_4f)$,..,$\mathcal{E}(x_1f)$ en inversant un système triangulaire, on obtient ainsi des fonctions du type $A_{\lambda,p,q}\mathcal{E}(f)$. Ce qui montre que (H) est vérifiée avec le même argument que pour l'algèbre de Heisenberg.

3 <u>Algèbre super-spéciale</u>

On étudie ici une classe d'algèbres de Lie appelée "super-spéciale" où l'hypothèse (H) est vérifiée. De plus, toute algèbre de Lie nilpotente peut être plongée dans une certaine algèbre super-spéciale.

<u>Construction</u>

On se donne un entier n et pour $1 \leq i \leq j \leq n$, on notera:

. $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ avec $E_{i,j} = (a_{k,\ell})$ où $a_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$

. $\underline{\mathbf{t}}(n)$ l'espace des matrices engendrées par $\{E_{i,j} \quad, 1 \leq i < j \leq n\}$.

On définit un ordre total sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par:

$$(i,j) \leq (k,\ell) \quad \text{si} \quad (i \leq k) \quad \text{ou} \quad (i = k \text{ et } j \geq \ell).$$

Soit B le vecteur $(B_1, \ldots, B_n)$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (B_k appartient à $\mathbb{R}^{n-k+1}$). On pose, pour $1 \leq i \leq j \leq n$,

$$X_{i,j} = (B_1, \ldots, B_n)$$

où $B_s = 0$ si $s \neq i$ et $B_i = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le "1" est à la $(j-i+1)$ième place. Si A est dans $\underline{\mathbf{t}}(n)$, on définie par récurrence:

$$A_1 = A, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A_{i-1} \end{pmatrix}.$$

Notons (A, B) la matrice :

$$(A,B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & & \ldots & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 & B_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_n & B_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace:

$$\underline{\mathbf{g}} = \{(A,B) \text{ tel que } A \in \underline{\mathbf{t}}(n), B \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}\}$$

est une algèbre de Lie nilpotente de dimension n^2, avec le crochet:

$$[(A,B),(A',B')] = ([A,A'], A_1B_1' - A_1'B_1, \ldots, A_nB_n' - A_n'B_n). \tag{3.1}$$

D'où les relations de commutation sur la base $\{E_{i,j}, X_{k,l}\}$ de $\underline{\mathbf{g}}$:

$$[(0, X_{k,\ell})(0, X_{r,s})] = (0,0) \tag{3.2}$$

$$[(E_{r,s}0)(0, X_{k,i})] = \begin{cases} (0, X_{k,r}) & \text{si } s = i \text{ et } r \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$[(E_{r,s},0),(E_{k,i},0)] = \begin{cases} (E_{r,i},0) & \text{si } s = k \text{ et } r \neq i \\ -(E_{k,s},0) & \text{si } r = i \text{ et } s \neq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.4}$$

Remarques

1) Si $(r,s) \leq (k,\ell)$ alors:

$$(k,s) \leq (r,s) \text{ et } (r,\ell) \leq (r,s)$$

2) Puisque $\underline{\mathbf{t}}(n)$ est la sous algèbre des matrices $(A,0)$ de $\underline{\mathbf{g}}$, toute algèbre de Lie nilpotente est une sous algèbre d'une certaine algèbre super-spéciale.

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq i < j \leq n$, on appelle:

$\underline{\mathbf{g}}_{i,i}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\{(0, X_{k,k})$ pour $k \leq i\}$,

$\underline{\mathbf{g}}_{i,j}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\{(0, X_{k,s})$ pour $(k,s) \geq (i,j)\}$

$\underline{\mathbf{g}}'_{i,j}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\{(E_{k,s}, 0)$ et $(0, B)$ avec $(k,s) \leq (i,j)\}$.

Ceci etant posé, vu les exprèssions (3.2), (3.3) et (3.4), la suite:

$$\begin{aligned}\{0\} &\subset \underline{\mathbf{g}}_{1,1} \subset \underline{\mathbf{g}}_{2,2} \subset \cdots \subset \underline{\mathbf{g}}_{n,n} \subset \underline{\mathbf{g}}_{n-1,n} \subset \underline{\mathbf{g}}_{n-2,n-1} \subset \underline{\mathbf{g}}_{n-2,n} \\ &\subset \underline{\mathbf{g}}_{n-3,n-2} \subset \underline{\mathbf{g}}_{n-3,n-1} \subset \underline{\mathbf{g}}_{n-3,n} \subset \cdots\cdots \subset \underline{\mathbf{g}}_{1,n} \subset \underline{\mathbf{g}}'_{1,n} \subset \cdots \\ &\subset \underline{\mathbf{g}}'_{1,2} \subset \underline{\mathbf{g}}'_{2,n} \subset \cdots \subset \underline{\mathbf{g}}'_{2,3} \subset \cdots \subset \underline{\mathbf{g}}'_{n-1,n} = \underline{\mathbf{g}}\end{aligned} \tag{3.5}$$

est une suite d'idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$ qu'on notera, pour simplifier les notations,

$$\{0\} \subset \underline{\mathbf{g}}_1 \subset \cdots \subset \underline{\mathbf{g}}_{n^2} = \underline{\mathbf{g}}.$$

On pose:

$$\tilde{X}_s(\xi) = \tilde{E}_{i,j}(\xi) = < (E_{i,j}, 0), \xi > \quad \text{si} \quad s > \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\tilde{X}_s(\xi) = \tilde{X}_{i,j}(\xi) = < (0, X_{i,j}), \xi > \quad \text{si} \quad s \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

et si (i,j) est le s-ième indice dans la suite (3.5).

L'ensemble $\mathcal{O} \subset \underline{\mathbf{g}}^*$ est alors:

$$\mathcal{O} = \{\xi \in \underline{\mathbf{g}}^* \quad \text{tel que} \quad \tilde{X}_i(\xi) \neq 0, \ i = 1, \ldots, n^2\},$$

$\mathcal{V}$ est inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O} \simeq \mathcal{V} \times \mathbb{R}^{n(n-1)}$

<u>Proposition</u> (III ,3 ,1)

Avec les notations précédentes, la paramétrisation de l'ouvert $\mathcal{O}$ donnée par le théorème (I, 4, 1) admet la propriété suivante:
Si on pose:

$$d_1 = 1, \ d_2 = 2, \ \ldots, \ d_n = n, \quad c_k = n+1, \ c_{k-1} = n+2, \ \ldots, \ c_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\ell_1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \ \ell_2 = \frac{n(n+1)}{2} + 2, \ \ldots, \ \ell_k = n^2$$

et:

$$Z_{d_i} = \lambda_i, \quad Z_{c_i} = q_i, \quad Z_{\ell_i} = p_i,$$

alors, pour $i = 1, \ldots, n^2$,

$$\tilde{X}_i(\lambda, p, q) = \tilde{X}_i(Z) = Z_i f_i(Z_d) + g_i(Z_1, \ldots, Z_{i-1}),$$

où f_i est une fonction rationnelle régulière sur $\mathcal{V}$ et g_i est une fonction polynomiale en les variables Z_c, Z_ℓ rationnelle en Z_d et régulière sur $\mathcal{O}$.

Preuve

Elle se fait par récurrence sur $m = \dim \underline{\mathbf{g}}$, en remontant la suite (3.5):

- $\underline{\mathbf{g}}_{1,n}$ est commutative alors on pose pour $j = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$:

$$\tilde{X}_j = Z_{d_j}.$$

- Pour $\underline{\mathbf{g}}'_{1,n}$, on a:

$$I(\underline{\mathbf{g}}'_{1,n}) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{1,n}) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{1,n} \in I(\underline{\mathbf{g}}_{1,n}) - I(\underline{\mathbf{g}}'_{1,n}).$$

D'autre part :

$$[\tilde{E}_{1,n}, \tilde{X}_{1,n}] = \tilde{X}_{1,1}$$

qui est central.
On pose alors:

$$Z_{\ell_1} = \tilde{E}_{1,n} \quad \text{et} \quad Z_{c_1} = \tilde{X}_{1,n} Z_{d_1}^{-1}$$

Z_{d_j} a été défini plus haut pour $j = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2} - 1$.
- Supposons maintenant que la proposition soit vraie pour $\underline{\mathbf{g}}_i$, $i < m$ et soit:

$$Z' = (Z'_d, Z'_c, Z'_\ell)$$

les éléments de la proposition pour $\underline{\mathbf{g}}_{m-1}$. Alors:

$$I(\underline{\mathbf{g}}_m) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{m-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n-1,n} \in I(\underline{\mathbf{g}}_{m-1}) - I(\underline{\mathbf{g}}_m).$$

En particulier:

$$[\tilde{X}_m, \tilde{X}_{n-1,n}] = \tilde{X}_{n,n}$$

qui est central. On pose alors:

$$\begin{aligned} Z_{\ell_k} &= \tilde{X}_m = \tilde{E}_{n-1,n}, \quad Z_{c_k} = \tilde{X}_{n-1,n}(\tilde{X}_{n,n})^{-1} \\ Z_i &= \exp -Z_{c_k} ad_{s(\underline{\mathbf{g}})} \tilde{X}_m Z'_i \quad \text{pour} \quad i \neq c_k \quad \text{et} \quad i \neq \ell_k. \end{aligned}$$

Maintenant, on va écrire $\tilde{X}_i(Z)$ dans les nouvelles coordonnées $Z = (Z_d, Z_c, Z_\ell)$, mais l'hypothèse de récurrence entraîne que:

$$\tilde{X}_i(Z') = Z'_i f_i(Z'_d) + g_i(Z'_1, \ldots, Z'_{i-1}) \quad \text{avec} \quad \tilde{X}_1(Z') = Z'_1.$$

D'où:

$$Z_i' = \tilde{X}_i f_i'(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d) + g_i'(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{i-1})$$

où f_i' et g_i' sont des fonctions rationnelles en $\tilde{X}_{d_i}$ polynomiales en $\tilde{X}_{c_i}, \tilde{X}_{\ell_i}$.

Finalement:

Si $i < c_k$ alors Z_i est dans $I(\underline{g})$ donc $Z_i = Z_i'$,

Si $i > c_k$ alors $[\tilde{X}_m, Z_i'] = Q_i(Z_1', \dots, Z_{i-1}')$, où Q_i est une fonction rationnelle en Z_d', polynomiale en Z_c', Z_ℓ'.
Puisque $\exp -Z_{c_k} ad_{s(g)} \tilde{X}_m Z_i'$ est polynomiale, alors:

$$Z_i = Z_i' + h_i(Z_i', \dots, Z_{i-1}') \quad \text{et} \quad Z_1 = Z_1'.$$

Ce qui entraîne:

$$Z_i' = Z_i + h_i'(Z_1, \dots, Z_{i-1}),$$

avec h_i' rationnelle en Z_d, polynomiale en Z_c, Z_ℓ et donc:

$$\tilde{X}_i(Z) = Z_i f_i''(Z_d) + g_i''(Z_1, \dots, Z_{i-1}).$$

Q.E.D

<u>Proposition</u> (III, 3, 2)

Avec les notations précédentes et pour $m = n^2$,

$$a(X, Z) = \sum_{i=1}^{m} x_i Z_i f_i(Z_d) + \sum_{(a_1, \dots, a_m)} x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} f_{a_1 \dots a_m}(Z),$$

si:

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i X_i \quad \text{et} \quad f_{a_j, \dots, a_m}(Z) = g(Z_1, \dots, Z_{j-1}),$$

avec g rationnelle en Z_d polynomiale en Z_c, Z_ℓ.

<u>Preuve</u>

. Considérons la suite $\{0\} = \underline{g}_0 \subset \dots \subset \underline{g}_m = \underline{g}$ d'idéaux de $\underline{g}$.

L'ensemble $\{X_i \in \underline{g}_i - \underline{g}_{i-1}, i = 1, .., m\}$ est une base de $\underline{g}$. D'après la proposition précédente, on a:

$$\tilde{X}(Z) = \sum_{i=1}^{m} x_i Z_i f(Z_d) + \sum_{i=1}^{m} x_i g_i(Z_i, \dots, Z_{i-1}), \tag{3.6}$$

si

$$\tilde{X}(Z) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(X,Z) Z_{\ell_j} + \alpha_0(X,Z),$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}(Z_d)[Z_{c_j+1}, \dots, Z_{c_k}]$, alors:

$$\alpha_j(X,Z) = x_{\ell_j} f_{\ell_j}(Z_d) + \sum_{i>\ell_j} x_i g_i(Z_1, \dots, Z_{c_j+1}). \tag{3.7}$$

Calculons la fonction a:

$$a(X,Z) = \int_0^1 \tilde{X}(Z_\ell, \psi(\exp \overline{X}(0, \phi^{-1}(Z_c), Z_d)), Z_d) dt. \tag{3.8}$$

Pour $i = 1, \dots, k = \frac{n^2-n}{2} = \frac{1}{2} \dim W^\lambda$,

$$\psi(Z_\ell, Z_c) = Z_c - \frac{Z_\ell}{2}, \quad \exp \overline{X}(0, Z_c, Z_d) = (\phi_t(Z_\ell), \phi_t(Z_c)),$$

où

$$\phi_t(Z_{c_i}) = Z_{c_i} + \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha_i(\exp s\overline{X}(0, Z_c, Z_d)) ds$$

$$\phi_t(Z_{\ell_i}) = -\int_0^t \alpha_i(\exp \overline{X}(0, Z_c, Z_d)) ds$$

enfin $\phi^{-1}(Z_{c_i}) = \phi_1^{-1}(Z_{c_i})$. Puisque:

$$\psi_i(\exp t\overline{X}(0, \phi^{-1}(Z_c), Z_d)) = \phi^{-1}(Z_{c_i}) + \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_i(\psi(\exp s\overline{X}(0, \phi^{-1}(Z_c), Z_d)) ds$$

et vu l'expression des α_j, (3.7), alors on a:

$$\psi_i(\exp t\overline{X}(0, \phi^{-1}(Z_c), Z_d)) = Z_{c_i} + \sum_{a_{\ell_{i+1}}, \dots, a_m} x_{\ell_{i+1}}^{a_{\ell_{i+1}}} \dots x_m^{a_m} f_i(Z_1, \dots, Z_{c_{i+1}}). \tag{3.9}$$

Finalement, si on remplace les Z_{c_i} dans (3.6) par les $\psi(X,Z)$ de la relation (3.9), on obtient:

$$a(X,Z) = \sum_{i=1}^{m} x_i Z_i f_i(Z_d) + \sum_{a_1, \dots, a_m} x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m} f_{a_1, \dots a_m} Z,$$

où $f_{a_j, \dots, a_m}(Z) = g(Z_1, \dots, Z_{j-1})$. g est donc rationnelle en Z_d, polynomiale en (Z_c, Z_ℓ).
Q.E.D

Proposition (III, 3, 3)

Avec les notations précédentes, pour tout polynôme $Q(x_1, \ldots, x_m) = Q(x)$ sur G, il existe un opérateur différentiel A_Z à coefficients rationnels en Z_d, polynomiaux en Z_c, Z_ℓ tel que:

$$\mathcal{E}(Q(x)f) = A_Z\mathcal{E}(f).$$

Preuve

Il suffit de prouver la proposition pour $Q(x) = x_i$, $i = 1, \ldots, m$. Vu l'expression de $a(X, Z)$ dans la proposition (III, 3, 2), on a:

$$\frac{\partial a(X,Z)}{\partial Z_m} = x_m f_m(Z_d) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \mathcal{E}(f)}{\partial Z_m} = f_m(Z_d)\mathcal{E}(x_m f).$$

Appliquons une récurrence descendante. Supposons que $\mathcal{E}(x_i f))$ soit de la forme $A_Z\mathcal{E}(f)$ pour tout i tel que $i > j$. Alors:

$$\frac{\partial a(X,Z)}{\partial Z_j} = x_j f_j(Z_d) + \sum_{a_{i+1},\ldots,a_m} x_{j+1}^{a_j+1} \ldots x_m^{a_m} f_{a_j+1,\ldots,a_m}(Z_1, \ldots, Z_{j-1}).$$

Ce qui entraîne que:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(f)}{\partial Z_j} = f_j(Z_d)\mathcal{E}(x_j f) + A'_{Z,j}\mathcal{E}(f).$$

Et donc $\mathcal{E}(x_j f)$ a la forme voulue.

Q.E.D.

4 Algèbre de Lie nilpotente à 3 pas

Cette catégorie d'algèbre de Lie nilpotente à été étudiée par Ractlif dans [30].

. Soit H_n le groupe de Heisenberg de dimension $2n+1$, d'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{h}}_n$. Considérons le sous groupe $\mathbf{S}$ du groupe symplectique SP_{2n}:

$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ S & I \end{pmatrix}, \ I \text{ est l'identité, } S \text{ est une matrice symétrique } n \times n \right\},$$

et notons $\underline{\mathbf{s}}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{S}$. Alors le produit semi-direct de $\underline{\mathbf{s}}$ par $\underline{\mathbf{h}}_n$ noté $\underline{\mathbf{sh}}_n$ est une algèbre de Lie nilpotent à 3 pas.
On représente un élément de $\underline{\mathbf{sh}}_n$ par (S, X, Y, Z), où X, Y sont dans $\mathbb{R}^n$, Z dans $\mathbb{R}$ et S est une matrice symétrique $n \times n$, le crochet de Lie s'ecrit:

$$\Big[(S,X,Y,Z),\ (S',X',Y',Z')\Big] = (0,\ 0,\ SX'-S'X,\ XY'-X'Y).$$

On pose:

$B_i = (0,...0,1,0,...0)$, où le 1 est à la $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ place,

$S_{i,j} = (a_{k,l})$ est la matrice $n \times n$ symétrique avec $a_{k,l} = \delta_{i,k}\ \delta_{j,l} + \delta_{i,l}\ \delta_{j,k}$,

$X_i = (0,B_i,0,0)$, $Y_i = (0,0,B_i,0)$, $Z_0 = (0,0,0,1)$ et $E_{i,j} = (S_{i,j},0,0,0)$.

Alors le système $\{Z_0, X_i, Y_i, E_{i,j},\quad 1 \le i \le j \le n\}$ est une base de $\underline{\mathbf{sh}}_n$ avec pour seuls crochets non nuls:

$$[E_{i,j},X_i] = Y_j,\quad [E_{i,j},X_j] = Y_i,\quad [X_i,Y_i] = Z_0.$$

On définit un ordre total sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en posant:

$$(i,j) \le (r,s) \quad \text{si} \quad (i<r) \quad \text{ou} \quad (i=r \text{ et } j \le s).$$

Soit pour $1 \le i \le j \le n$:

$\underline{\mathbf{g}}_0$ l'algèbre de Lie engendrée par Z_0

$\underline{\mathbf{g}}_j$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_{n-i+1}$

$\underline{\mathbf{g}}'_i$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_n, X_1, ..., X_i$

$\underline{\mathbf{g}}_{i,j}$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_n, X_1, ..., X_n, E_{r,s}\quad (i,j) \le (r,s)$.

Alors la suite:

$$\{0\} = \underline{\mathbf{g}}_0 \subset \underline{\mathbf{g}}_1 \subset ... \subset \underline{\mathbf{g}}_n \subset \underline{\mathbf{g}}'_1 ... \subset \underline{\mathbf{g}}'_n \subset \underline{\mathbf{g}}_{1,1} \subset ... \subset \underline{\mathbf{g}}_{n,n} = \underline{\mathbf{g}}$$

est une suite d'idéaux de $\underline{\mathbf{sh}}_n$. Remarquons que:

. $I(\underline{\mathbf{g}}'_1) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_n)$ et $\tilde{Y}_1 \in I(\underline{\mathbf{g}}_n) - I(\underline{\mathbf{g}}'_1)$,

. $I(\underline{\mathbf{g}}'_i) \subset I(\underline{\mathbf{g}}'_{i-1})$ et $\tilde{Y}_i \in I(\underline{\mathbf{g}}'_{i-1}) - I(\underline{\mathbf{g}}'_1)$,

. $I(\underline{\mathbf{g}}'_n) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{1,1})$ avec $\lambda_{1,1} = \tilde{E}_{1,1}\tilde{Z}_0 + \frac{1}{2}\tilde{Y}_1^2 \in I(\underline{\mathbf{g}}_{1,1}) - I(\underline{\mathbf{g}}'_n)$,

. $I(\underline{\mathbf{g}}_{r,s}) \subset I(\underline{\mathbf{g}}_{k,l})$ si $(r,s) \le (k,l)$.

En effet:

$$[X_i,X_j] = 0\ ,\ [X_i,Y_j] = \delta_{i,j}\ Z_0\ ,$$

et pour $j > i$:

$$exp - \frac{Y_i}{Z_0}\ ad(X_i)\frac{Y_j}{Z_0} = \frac{Y_j}{Z_0} \quad , \quad exp - \frac{Y_i}{Z_0}\ ad(X_i)X_j = X_j.$$

On peut alors paramétrer l'ouvert:

$$\mathcal{O} = \{\xi \in \ \underline{\mathbf{g}}^* \quad \text{tel que} \quad Z_0(\xi) \neq 0\}$$

par (λ, p, q), où :

$$\lambda_1 = \tilde{Z}_0,\ q_i = \frac{\tilde{Y}_i}{Z_0},\ p_i = \tilde{X}_i,\ \lambda_{i,j} = \tilde{E}_{i,j}\ \tilde{Z}_0 + \tilde{Y}_i\tilde{Y}_j \text{ si } i \neq j \text{ et } \lambda_{i,i} = \tilde{E}_{i,i}\tilde{Z}_0 + \frac{\tilde{Y}_i^2}{2}. \quad (4.1)$$

Donc, si X appartient à $\underline{\mathbf{sh}}_n$ et X est $z\ Z_0 + \sum_{i=1}^{n} (x_iX_i + y_iY_i) + \sum_{i\leq j} x_{i,j}\ E_{i,j}$, alors la fonction $\tilde{X}$ est:

$$\tilde{X}(p,q,\lambda) = z\lambda_1 + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_1 y_i\ q_i + x_i p_i) + \sum_{i<j} x_{i,j}\frac{(\lambda_{i,j} + q_i q_j)}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i,i}}{\lambda_1}\Big(\lambda_{i,i} + \frac{q_i^2}{2}\Big).$$

Comme dans l'exemple précédent, si on écrit:

$$\tilde{X}(p,q,\lambda) = \sum_{\partial=1}^{k} \alpha_j(X,q,\lambda)p_j + \alpha_0(X,q,\lambda),$$

alors $\alpha_j = x_j$ pour $j = 1, ..., k$, et on obtient:

$$a(X,p,q,\lambda) = \tilde{X}(p,q,\lambda) - \frac{1}{24\lambda_1}\sum_{i=1}^{n} x_{i,i}x_i^2 - \frac{1}{12\lambda_1}\sum_{1<j} x_{i,j}x_ix_j.$$

Proposition (III, 3, 4)

Pour l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{sh}}_n$*, l'hypothèse* (H) *est vérifiée.*

Preuve

Puisque :

$$\frac{\partial a}{\partial p_i}\ (X,p,q,\lambda) = x_i,$$
$$\frac{\partial a}{\partial \lambda_{i,j}}\ (X,p,q,\lambda) = x_{i,j},$$
$$\frac{\partial a}{\partial q_i}\ (X,p,q,\lambda) = \lambda.y_j + \sum_{i\leq j} x_{i,j}\ q_j$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda_1}(X,p,q,\lambda) = z + \sum_{i=1}^{n} y_i q_i - \frac{1}{\lambda_1^2}\left\{ \sum_{i<1} x_{i,j}(\lambda_{i,j} + q_i q_j) \right.$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}\left(\lambda_{i,i} + \frac{q_i^2}{2}\right) - \frac{1}{12} \sum_{i<j} x_{i,j} x_i x_j$$
$$\left. - \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n} x_{i,i}\, x_i^2 \right\},$$

on prouve la proposition avec le même argument que pour les exemples précédents.

Q.E.D

. Maintenant, soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente à 3 pas quelconque avec un centre de dimension 1; dans [30] Ractliff a montrer qu'il existe une injection J de $\underline{\mathbf{g}}$ vers $\underline{\mathbf{sh}}_n$ pour un certain n tel que $J(\underline{\mathbf{g}})$ est un idéal de $\underline{\mathbf{sh}}_n$ et:

$$J(\underline{\mathbf{g}}) + \underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{sh}}_n.$$

Soit V un sous espace de $\underline{\mathbf{s}}$ tel que $\underline{\mathbf{g}} \simeq \mathbf{h}_n + V$ et $\{e_1, ..., e_m\}$ une base de V. On choisit une base $\{e_1, ..., e_{m'}\}$ de $\underline{\mathbf{s}}$ telle que:

$$\{e_1, ... e_m\} \subset \{e_1, ... e_{m'}\}.$$

Donc, si on appelle comme ci-dessus:

- . $\underline{\mathbf{g}}_0$ l'algèbre de Lie engendrée par Z_0
- . $\underline{\mathbf{g}}_i$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_{n-i+1}$
- . $\underline{\mathbf{g}}'_i$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_n, X_1, ..., X_i$
- . $\underline{\mathbf{g}}"_i$ l'algèbre de Lie engendrée par $Z_0, Y_1, ..., Y_n, X_1, ..., X_n, e_1, ... e_i$,

puisque $[\underline{\mathbf{s}}, \underline{\mathbf{s}}]$=0, alors:

$$\{0\} \subset \underline{\mathbf{g}}_0 \subset \underline{\mathbf{g}}_1 \subset ... \subset \underline{\mathbf{g}}_n \subset \underline{\mathbf{g}}'_1 \subset ... \subset \underline{\mathbf{g}}'_n \subset \underline{\mathbf{g}}"_1 ... \subset \underline{\mathbf{g}}"_m = \underline{\mathbf{g}}$$

est une suite d'idéaux de $\underline{\mathbf{g}}$. Et on a donc une paramétrisation (p, q, λ) de $\mathcal{O}$, avec des fonctions invariantes de la forme:

$$\lambda_s = \sum B_{i,j}\ \lambda_{i,j}$$

où $B_{i,j}$ est réel et $\lambda_{i,j}$ sont les fonctions définies dans (4,1).
Finalement la construction de la fonction a sur $\underline{\mathbf{g}}$ en utilisant l'injection J prouve comme précédemment:

<u>proposition</u> (III, 3, 5)

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ une algèbre de Lie nilpotente à 3 pas dont le centre est de dimension 1, alors l'hypothèse (H) est vérifiée.

IV PROUDUIT-* DE MOYAL SUR LES ESPACES SYMÉTRIQUES HERMITIENS

. Dans cette partie, on construit un produit-* dit "de Moyal" sur les espaces symétriques hermitiens. Pour cela, on compare le produit-* de Moyal sur les orbites de la représentation coadjointe du groupe de Heisenberg au produit-* (équivalent) de Berezin sur ces mêmes orbites. Ceci s'explicite bien à l'aide du symbole de la symétrie géodésique. On applique la même transformation sur un espace hermitien symétrique, ce qui s'écrit en fonction du Laplacien dans le cas d'espace de rang 1. Enfin, on calcule explicitement ces transformations pour la sphère usuelle.

(IV, 1) L'exemple du groupe de Heisenberg

. Soit H_{2k+1} le groupe de Heisenberg de dimension $2k+1$, $\underline{\mathbf{h}}_{2k+1}$ son algèbre de Lie et $\{X_1, ..., X_k, Y_1, ..., Y_k, Z\}$ une base de $\underline{\mathbf{h}}_{2k+1}$ avec les relations de commutations:

$$[X_i, Y_j] = \delta_{i,j}\ Z.$$

. La structure des orbites de H_{2k+1} dans $\underline{\mathbf{h}}^*_{2k+1}$ est bien connue. Avec les notations de (I) et (II), on a:

$$\mathcal{O} = \{\xi \in \underline{\mathbf{h}}^*_{2k+1},\ \text{tels que } \tilde{Z}(\xi) \neq 0\} \qquad \mathcal{V} = \mathbb{R}^*.$$

L'orbite W^λ d'un point ξ de $\mathcal{O}$ tel que $\tilde{Z}(\xi) = \lambda$, est paramétrée par:

$$p_j(\xi) = \tilde{X}_j(\xi) \qquad q_j(\xi) = \frac{\tilde{Y}_j(\xi)}{\lambda}.$$

. Soit χ le caractère défini sur le centre $Z(H_{2k+1})$ de H_{2k+1}, par:

$$\chi(exp\ cZ) = e^{ic\lambda}.$$

. D'après le théorème de Stone et Von Neumann, il existe, à équivalence près, une et une seule représentation unitaire irréductible de H_{2k+1} telle que sa restriction à $Z(H_{2k+1})$ soit un multiple de χ. Rappelons qu'on peut obtenir cette représentation de deux manières: soit comme une induite unitaire (on la notera alors π^λ), soit comme un induite holomorphe (on la notera U^λ). Nous allons construire explicitement ces deux représentations et l'opérateur d'entrelacement qui les relie.

Par ailleurs, l'orbite W^λ, munie de sa structure symplectique naturelle ω:

$$\omega_\xi(X^-, Y^-) = - < \xi, [X, Y] >, \quad \forall X, Y \in \underline{\mathbf{h}}_{2k+1},$$

est symplectomorphe à $\mathbb{R}^{2k}$ muni de la 2-forme canonique $dp \wedge dq$. On sait [18] qu'à équivalence près, il n'y a qu'un produit-* sur $(W^\lambda,\ \omega)$: le produit-* de Moyal, déjà introduit, avec toutes ses propriétés en (I) et (II). On notera ici ce produit-* par $*_M$ pour la circonstance. On construira d'autre part le produit-$*$ de Berezin, noté $*_B$ sur W^λ, grâce à l'existence d'une structure kählerienne invariante. Enfin on donnera explicitement l'opérateur d'équivalence et on terminera ce paragraphe en donnant une interprétation géométrique de cet opérateur.

(V, 1, 1) La représentation unitaire induite π^λ

. Soit ξ_0 le point de W^λ de paramètres:

$$p_j(\xi_0) = q_j(\xi_0) = 0.$$

Nous choisissons la polarisation réelle $\underline{\mathbf{h}} \subset \underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{2k+1}}$ en ξ_0:

$$\underline{\mathbf{h}} = > Z, Y_1, ..., Y_k < .$$

π^λ est alors définie par:

$$\pi^\lambda = \operatorname*{Ind}_{exp\underline{\mathbf{h}} \uparrow H_{2k+1}} \chi$$

où χ est le caractère défini sur $exp\underline{h}$ par:

$$\chi\left(exp\ (bY + cz)\right) = e^{ic\lambda}.$$

π^λ se réalise sur $L^2\ (\mathrm{I\!R}^k)$ de la façon suivante:

$$\left(\pi^\lambda\left(exp\ (aX + bY + cz)\right)f\right)(t) = e^{i\lambda[c+bt+\frac{ab}{2}]}\ f(t+a), \qquad \forall f \in L^2\ (\mathrm{I\!R}^k).$$

Les opérateurs infinitésimaux de π^λ sont alors:

$$\begin{array}{lll} \left(\pi^\lambda(X_j)f\right)(t) = & \frac{\partial}{\partial a_j}(\pi^\lambda(exp\ a_jX_j)f)(t)_{|a_j=0} = & \frac{\partial}{\partial t_j}f(t), \\ \left(\pi^\lambda(Y_j)f\right)(t) = & \frac{\partial}{\partial b_j}(\pi^\lambda(exp\ b_jY_j)f)(t)_{|b_j=0} = & i\lambda t_j f(t), \\ \left(\pi^\lambda(Z)f\right)(t) = & \frac{\partial}{\partial c}(\pi^\lambda(exp\ cZ)f)(t)_{|c=0} = & i\lambda f(t). \end{array}$$

(V, 1, 2) **La représentation induite holomorphe U^λ**

Choisissons maintenant une polarisation positive [9] $\underline{\mathbf{h}} \subset \underline{\mathbf{h}}_{\mathbf{2k+1}}{}^{\mathbb{C}}$:

$$\underline{\mathbf{h}} = > Z, X_j + \frac{i}{\lambda}Y_j <^{\mathbb{C}}.$$

La polarisation géométrique sur W^λ qu'elle définit est engendrée par:

$$F_\xi \subset T_\xi(W)^{\mathbb{C}}, \quad \text{avec} \quad F_\xi = > \partial p_j + i\partial q_j <^{\mathbb{C}}.$$

Proposition (IV, 1, 2, 1)

i) Chaque élément g de $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}\Big(g = exp\ (aX + bY + cZ), a, b\ \in\ \mathbb{C}^{\ k}, c \in \mathbb{C}\ \Big)$ s'écrit d'une façon unique sous la forme:

$$g = exp\frac{\alpha}{2i}\ (X - \frac{i}{\lambda}Y)\ exp\ \left[\frac{\beta}{2i}\ (X + \frac{i}{\lambda}Y) + \mu Z\right]$$

où $\alpha = -\lambda b + ia,\ \ \beta = \lambda b + ia,\ \ \mu = c - \frac{\alpha\beta}{4i\lambda}$.

ii) W^λ est isomorphe à $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}/exp\underline{\mathbf{h}}$ et est donc muni d'une structure complexe invariante. Avec cette structure, si nous posons ($z = p + iq$), W^λ est isomorphe à $\mathbb{C}^{\ k}$. Avec ces notations, l'action de $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ sur W^λ est:

$$gz = z + \lambda b - ia, \quad si\ g = exp\ (aX + bY + cZ).$$

Preuve

i) Est un calcul direct dans $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ qui est, par l'application exponentielle, isomorphe à $\underline{\mathbf{h}}^{\mathbb{C}}_{2k+1}$.

ii) On prolonge l'action de $\underline{\mathbf{h}}^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ $\mathbb{C}$ -linéairement. Puisque:

$$X_j^- = \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad Y_j^- = -\lambda\frac{\partial}{\partial p_j},$$

alors:

$$(X_j - \frac{i}{\lambda}Y_j)^- = \frac{\partial}{\partial q_j} + i\frac{\partial}{\partial p_j} = 2i\frac{\partial}{\partial z_j}$$

$$(X_j + \frac{i}{\lambda}Y_j)^- = \frac{\partial}{\partial q_j} - i\frac{\partial}{\partial p_j} = -2i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}.$$

Donc:

$$exp\ \frac{\beta}{2i}(X + \frac{i}{\lambda}Y).z = z \quad \text{et} \quad exp\ \frac{\alpha}{2i}(X - \frac{i}{\lambda}Y).z = z - \alpha.$$

On en déduit que W^λ est isomorphe à $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}/exp\underline{\mathbf{h}}$ et à $\mathbb{C}^{\ k}$ par:

$$exp\ -\frac{z}{2i}(X - \frac{i}{\lambda}Y)\xi_0 \longrightarrow [exp\ -\frac{z}{2i}(X - \frac{i}{\lambda}Y)] \longrightarrow z.$$

Finalement, on montre par un calcul direct que l'action de $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ sur W^λ a la forme annoncée.

Q.E.D

La représentation induite holomorphe U^λ, se réalise dans l'espace $\mathcal{H}$ des sections holomorphes d'un fibré en droites complexes sur W^λ. Plus précisément, nous considérons le fibré principal

$$H^{\mathbb{C}}_{2k+1} \longrightarrow H^{\mathbb{C}}_{2k+1}/exp\underline{\mathbf{h}} \simeq W^\lambda.$$

Nous lui associons le fibré en droites:

$$L \xrightarrow{P} W^\lambda$$

où $L \simeq H^{\mathbb{C}}_{2k+1} \times \mathbb{C} \ / \sim$, et $\sim$ est la relation d'équivalence définie par:

$$(g,z) \sim (g',z') \quad \text{où} \quad [g,z] = [g',z'] \Longleftrightarrow \exists h \in exp\underline{\mathbf{h}} \quad \text{tel que} \quad (g',z') = (gh, \chi(h^{-1})z).$$

Avec:

$$P\Big([g,z]\Big) = [g] = g0.$$

Posons:

$$\sigma(z) = exp \ \ -\frac{z}{2i}(X - \frac{i}{\lambda}Y).$$

σ est une section holomorphe du fibré principal $H^{\mathbb{C}}_{2k+1} \to W^\lambda$; toute section holomorphe s de L s'écrit:

$$s(z) = [\sigma(z), F(z)],$$

où $F(z)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^{\ k}$. Notons Γ l'espace des sections holomorphes de L. Le groupe $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ agit sur Γ par:

$$(gs)(z) = gs(g^{-1}z) \quad \text{si} \quad g[\sigma(z), F(z)] = [g\sigma(z), F(z)].$$

<u>Proposition</u> (IV, 1, 2, 2)

Soit z un point de W^λ et $g = exp\ (aX + bY + cZ)$ un point de $H^{\mathbb{C}}_{2k+1}$ alors il existe un élément $c(g,z)$ de $exp\underline{\mathbf{h}}$ tel que

$$(gs)(z) = [\sigma(z), \chi\Big(c(g,z)\Big)\ F(g^{-1}z)],$$

et

$$c(g,z) = exp\ \frac{\lambda b + ia}{2i}\ (X + \frac{i}{\lambda}\ Y)\ exp[c + \frac{(\lambda b + ia)(2z - \lambda b + ia)}{4i\lambda}]Z.$$

Preuve

En effet:

$$(gs)(z) = [g\sigma(g^{-1}z), F(g^{-1}z)] = [\sigma(z)(\sigma(z))^{-1}g\sigma(g^{-1}.z), F(g^{-1}z)].$$

On pose:

$$c(g,z) = \sigma^{-1}(z)g\sigma(g^{-1}z).$$

Un calcul direct donne alors l'expression de l'élément $c(g,z)$ de $exp\underline{\mathbf{h}}$ et on a:

$$(gs)(z) = [\sigma(z), \chi(c(g,z))F(g^{-1}z)].$$

. Soit $\mathcal{H}_F$ l'espace des fonctions holomorphes f sur W^λ, telles que:

$$\|f\|^2 = \int_{W^\lambda} |f(z)|^2 \, e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \, dzd\bar{z} < +\infty.$$

On définit alors la représentation U^λ de H_{2k+1} sur $\mathcal{H}_F$ par:

$$\Big(U^\lambda\Big(exp\ (aX + bY + cZ)\Big)\ f\Big)(z) = f(z - \lambda b + ia)\ e^{ic\lambda + \frac{1}{4}\ (\lambda b + ia)\ (2z - \lambda b + ia)}.$$

Remarques:

1) U^λ est unitaire si on munit $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}$ du produit scalaire:

$$< f, f' > = \int_{W^\lambda} f(z)\ \overline{f'(z)}\ \bar{e}^{\frac{z\bar{z}}{2}}\ dzd\bar{z}.$$

2) $\mathcal{H}_F$ contient toutes les fonctions polynomiales en z et:

$$< z^l, z^m > = 0 \quad \text{si} \quad l \neq m \text{ dans } \mathbb{N}^k.$$

3) Si f est une fonction polynomiale alors:

$$f(0) = \frac{< f, 1 >}{< 1, 1 >} \quad \text{donc} \quad |f(0)| \leq \frac{\|f\|}{\|1\|}.$$

4) Pour tout z de W^λ :

$$f(z) = \Big(U^\lambda(exp(\ Imz\ X - \frac{Re\ z}{\lambda}\ Y))\ f\Big)\ (0)\ e^{\frac{z\bar{z}}{4}}.$$

En particulier si f est une fonction polynomiale:

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|}{\|1\|}\, e^{\frac{z\bar{z}}{4}}.$$

Ceci entraîne que, si f est dans le complété (pour $\| \ \|$) de l'espace des fonctions polynomiales, on peut trouver une suite de fonctions polynomiales (f_n) qui converge uniformément vers f, sur tout compact $K \subset W^\lambda$. Donc f est holomorphe.

5) Comme toute fonction holomorphe admet un développement en série entière, alors, d'après 2) et 4), le système $\{z^l,\ l \in \mathbb{N}^k\}$ est une base orthogonale de $\mathcal{H}_F$.

. Les générateurs infinitésimaux de la représentation U^λ sont:

$$\begin{aligned}
\Big(U_*^\lambda(X_j)f\Big)(z) &= \Big((i\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{i}{2}z_j)f\Big)(z) \\
\Big(U_*^\lambda(Y_j)f\Big)(z) &= \Big((-\lambda\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\lambda}{2}z_j)f\Big)(z) \cdot \\
\Big(U_*^\lambda(Z)f\Big)(z) &= i\lambda f(z)
\end{aligned}$$

(V, 1, 3) <u>L'entrelacement entre les représentations π^λ et U^λ</u>

Soit $\{h_l,\ l \in \mathbb{N}^k\}$ la base de $L^2(\mathbb{R}^k)$ où h_l est la fonction de Hermite:

$$h_{l_1,\ldots,l_k}(t_1,\ldots,t_k) = i(t_j - \frac{\partial}{\partial t_j})h_{l_1,\ldots,l_j-1,\ldots,l_k}(t_1,\ldots,t_k), \quad h_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},.$$

<u>Proposition</u> (V, 1, 3, 1)

L'application:

$$\tau : L^2(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{H}_F \qquad \tau(h_l) = 2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-\frac{k}{4}} z^l$$

est unitaire. De plus:

$$\Big(U^\lambda(g)\ f\Big)\ (z) = \Big(\Big(\tau_\circ\pi^\lambda(g)_\circ\tau^{-1}\Big)\ f\Big)\ (z).$$

Preuve

Pour $l=(l_1,...,l_k)$ dans $\mathbb{N}^k$, on pose:

$$l-[j]=(l_1,...,l_j-1,...,l_k).$$

Alors:

$$h_l(t)=i(t_j-\frac{\partial}{\partial t_j})h_{l-[j]}(t)=(-i)^{|l|}\prod_{j=1}^{k}(\frac{\partial}{\partial t_j}-t_j)^{l_j}h_0(t).$$

On voit donc, par récurrence sur l, que:

$$(t_j^2-\frac{\partial^2}{\partial t_j^2})h_l=(2l_j+1)h_l.$$

D'autre part, pour chaque j, on a:

$$\begin{array}{llll} \pi_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)= & \frac{\partial}{\partial t_j}-t_j, & \pi_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)= & \frac{\partial}{\partial t_j}+t_j, \\ U_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)= & iz_j, & U_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)= & -2i\frac{\partial}{\partial z_j}. \end{array}$$

Posons:

$$c_0=2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-\frac{k}{4}}.$$

Alors:

$$\begin{aligned}\tau h_l=&(-i)\tau_\circ\pi_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)h_{l-[j]}\\ =&c_0z^l=(-i)U_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)c_0z^{l-[j]}.\\ =&(-i)U_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)_\circ\tau h_{l-[j]}\end{aligned}$$

Donc:

$$\tau_\circ\pi_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)=U_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)_\circ\tau\quad\forall l.$$

Par ailleurs,

$$\pi_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)h_0=U_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)h_0=0.$$

Et par récurrence sur l, on obtient:

$$\begin{aligned}\tau_\circ\pi_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)h_l=&(-i)\tau_\circ\pi_*^\lambda(X_j^2+\frac{1}{\lambda^2}Y_j^2+\frac{i}{\lambda})h_{l-[j]}\\ =&(-i)\Big[-(2(l_j-1)+1)\tau h_{l-[j]}-\tau h_{l-[j]}\Big]\\ =&(-i)\Big[U_*^\lambda(X_j^2+\frac{1}{\lambda^2}Y_j^2)_\circ\tau h_{l-[j]}+\frac{i}{\lambda}U_*^\lambda(Z)_\circ\tau h_{l-[j]}\Big]\\ =&(-i)\Big(U_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)_\circ\tau_\circ\pi_*^\lambda(X_j+\frac{i}{\lambda}Y_j)h_{l-[j]}\Big)\\ =&U_*^\lambda(X_j-\frac{i}{\lambda}Y_j)_\circ\tau h_l.\end{aligned}$$

Enfin, le choix de notre constante donne:

$$\|\tau h_0\|_{\mathcal{H}_F} = c_0\|1\|_{\mathcal{H}_F} = \|h_0\|_2.$$

Et on prouve par récurrence, comme ci-dessus, que τ est unitaire:

$$\|\tau(h_l)\|_{\mathcal{H}_F} = \|h_l\|_2 \qquad \forall l.$$

Q.E.D

(V, 1, 4) Calcul symbolique et produit-$*$ de Berezin sur W^λ

. Soit $L \xrightarrow{P} W^\lambda$ le fibré linéaire défini en 2, s_0 la section (qui ne s'annule pas) de L:

$$s_0(z) = [\sigma(z), 1]$$

où:

$$\sigma(z) = exp - \frac{z}{2i}(X - \frac{i}{\lambda}Y).$$

Comme dans (I, 1), on définit les états cohérents sur W^λ ainsi:

Si s est dans Γ, z dans W^λ et q dans $P^{-1}(z)$, on pose:

$$s(P(q)) = \tilde{s}(q)q.$$

L'application $s \longmapsto \tilde{s}(q)$ est alors une fonctionnelle linéaire continue sur Γ. D'après le théorème de Riesz, il existe une section holomorphe e_q (l'état cohérent) dans Γ telle que:

$$\tilde{s}(q) = < s, e_q > \quad \text{pour tout } s \text{ de } \mathcal{H}_F.$$

Bien entendu, H_{2k+1} agit sur Γ (proposition (IV,1,2,1)) et on a:

$$\forall c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad e_{cq} = \overline{c}^{-1}e_q, \qquad \forall g \in H_{2k+1}, \quad ge_q = e_{gq}.$$

Posons, pour z, u dans W^λ:

$$e_{s_0(z)}(u) = [\sigma(u), \ E_z(u)],$$

E_z est alors dans $\mathcal{H}_F$ et toute section de carré integrable s de L s'écrit:

$$s(z) = [\sigma(z), F(z)] = < F, E_z >_{\mathcal{H}_F} [\sigma(z), 1]$$

et

$$F(z) = < F, E_z >_{\mathcal{H}_F} .$$

Proposition (IV, 1, 4, 1)

1) Pour z et u dans W^λ:

$$E_z(u) = (2\pi)^{-k}e^{\frac{u\bar{z}}{2}}.$$

2) Si $F_{(p,q)}(t) = \tau^{-1}(E_{p+iq})(t)$, alors:

$$F_{p,q}(t) = 2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-\frac{3}{4}k}e^{-\frac{1}{4}(p-iq)^2}e^{-\frac{1}{2}(t-q-ip)^2}.$$

Preuve

1) Calculons E_0. Comme, pour tout f, polynôme de $\mathcal{H}_F$, on a:

$$f(0) = < f, E_0 >,$$

on déduit que:

$$f(0) = < f, E_0 > = \frac{< f, 1 >}{< 1, 1 >}.$$

Donc:

$$E_0 = \|1\|^{-2}_{\mathcal{H}_F} 1 = (2\pi)^{-k}.1.$$

Si $z = p + iq$, d'aprés la proposition (IV, 1, 2, 1):

$$z = g.0 \quad \text{où} \quad g = exp\left(-qX + \frac{p}{\lambda}Y\right).$$

Ce qui implique que:

$$\begin{aligned} gs_0(0) =& g[\sigma(0), 1] = [g, 1] \\ =& [\sigma(z)\sigma^{-1}(z)g, 1] \\ =& [\sigma(z), \chi(c(g, z))1]. \end{aligned}$$

où $c(g, z)$ est donnée dans la proposition (IV, 1, 2, 2), avec:

$$\chi(c(g, z)) = exp\frac{1}{4}(p - iq)(2z - p - iq) = exp\frac{1}{4}z\bar{z}.$$

Donc:

$$gs_0(0) = e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}[\sigma(z), 1] = e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}s_0(z)$$

et comme $e_{cq} = \bar{c}^{-1}e_q$, on a:

$$(a) \qquad e_{gs_0(0)}(u) = e^{-\frac{1}{4}z\bar{z}}e_{s_0(z)}(u) = [\sigma(u), e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}E_z(u)].$$

D'autre part, puisque $e_{gq} = ge_q$:

$$\begin{aligned} e_{gs_0(0)}(u) =& \big(ge_{s_0(0)}\big)(u) = g.[\sigma(g^{-1}u), E_0(g^{-1}u)] \\ =& [g\sigma(g^{-1}u), (2\pi)^{-k}1] = [\sigma(u)c(g, u), (2\pi)^{-k}] \\ =& (2\pi)^{-k}[\sigma(u), \chi(c(g, u))]. \end{aligned}$$

Mais:

$$\chi(c(g, u)) = exp\frac{1}{4}(p - iq)(2u - (p + iq)) = exp(\frac{\bar{z}}{4}(2u - z).$$

Donc:

$$(b) \qquad e_{gs_0(0)}(u) = (2\pi)^{-k}[\sigma(u), exp\frac{\bar{z}}{4}(2u - z)].$$

En identifiant (a) et (b), on obtient:

$$E_z(u) = (2\pi)^{-k} e^{\frac{u\bar{z}}{2}}.$$

2) On a:

$$\begin{aligned} e_{gs_0(0)}(u) =&(ge_{s_0(0)})(u) = [\sigma(u), \chi(c(g,u))E_0(g^{-1}u)] \\ =&[\sigma(u), (U^\lambda(g)E_0)(u)] \end{aligned}$$

et, grâce à la relation (a), on obtient:

$$E_z(u) = e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}(U^\lambda(g)E_0)(u).$$

D'autre part:

$$\tau h_0 = c_0.1 = c_0(2\pi)^k E_0 = 2^{\frac{k}{2}}\pi^{\frac{3}{4}k}E_0,$$

donc:

$$\tau^{-1}E_0 = 2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-\frac{3}{4}k}e^{-\frac{t^2}{2}} = F_{0,0}(t).$$

Par conséquent, pour $z = p + iq = g.0$ avec $g = exp(-qX + \frac{p}{\lambda}Y)$,

$$\begin{aligned} F_{p,q}(t) =&(\tau^{-1}E_z)(t) = \Big(\tau^{-1}(e^{\frac{1}{4}z\bar{z}}U^\lambda(g)E_0\Big)(t) \\ =&e^{\frac{1}{4}p^2+q^2}\big((\pi^\lambda(g)_\circ\tau^{-1}\ ).E_0\big)(t). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit, vu l'expression de π^λ.

Q.E.D

Définition **(IV, 1, 4, 2)** [10]

. *Posons* $e_z = e_{s_0(z)}$. *Si* A *est un opérateur borné sur* H_F, *on définit son symbole (au sens de Berezin) comme étant la fonction* $\widehat{A}$ *sur* W:

$$\widehat{A}(z) = \frac{< A\ e_z, e_z >}{< e_z, e_z >}.$$

On définit aussi:

$$\tilde{A}(z,u) = \frac{< A\ e_z, e_u >}{< e_z, e_u >}.$$

$\widehat{A}$ admet un seul developpement $\tilde{A}$ au voisinage de la diagonale qui soit antiholomorphe en la première variable et holomorphe en la seconde variable. La donnée de $\widehat{A}$ est donc équivalente à celle de $\tilde{A}$. D'autre part on peut écrire l'opérateur A à partir de la fonction $\tilde{A}$ comme un opérateur à noyau [12]:

$$(A.\varphi)(z) = (2\pi)^k \int_{\mathbb{C}^k} \varphi(u)\tilde{A}(u,z) e^{\frac{u(\bar{z}-\bar{u})}{2}} du d\bar{u}.$$

On a donc une correspondance bijective entre l'espace des opérateurs bornés $\mathcal{L}(\mathcal{H}_F)$ et l'espace $\widehat{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ des symboles. Ce dernier espace est dense dans $C^\infty\ (W^\lambda)$.

Définition (IV, 1, 4, 3) [10]

Si A *et* B *sont deux opérateurs sur* H_F, *on pose :*

$$(\widehat{A} \underset{B}{*} \widehat{B})\ (z) = \widehat{A_\circ B}\ (z).$$

On définit ainsi un produit-$*$ sur l'espace des symboles des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_F$ qui sont des fonctions C^∞ sur W.

Remarques

i) La formule intégrale de ce produit-$*$ s'écrit [12]:

$$(\widehat{A}\ *_B \widehat{B})\ (z) = (2\pi)^{3k}\ e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} \int_{W^\lambda} \tilde{B}(z,u)\ \tilde{A}(u,z)\ e^{\frac{z\bar{u}}{2}} e^{-\frac{u\bar{u}}{2}} du d\bar{u}.$$

ii) Si $\widehat{A}$ *et* $\widehat{B}$ *sont des fonctions polynomiales, alors* $\widehat{A}\ *_B \widehat{B}$ *est aussi une fonction polynomiale.*

(IV, 1, 5) Lien entre le produit-$*$ de Moyal et celui de Berezin

. On va construire l'opérateur d'équivalence entre ces deux produits-$*$. H_{2k+1} est évidemment un groupe de Lie nilpotent et son orbite W^λ est isomorphe à $\mathbb{R}^{2k}$. Nous gardons donc les notations des parties (II) et (III).
Soit T^λ la réalisation de la représentation de $(\mathcal{S}(W^\lambda), *_M)$ définie en (II, 3 , 3). Si u est dans $\mathcal{S}(W^\lambda)$ alors $T^\lambda(u)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mathbb{R}^k) = \tau^{-1}(\mathcal{H}_F)$.

Proposition (IV, 1, 5, 1)

. *Si u appartient à $\mathcal{S}(W^\lambda)$, alors, avec les notations précédentes:*

$$\widehat{T^\lambda(u)}(p,q) = \left(e^{\frac{1}{4}\Delta}u\right)(p,q)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace.

Preuve:

On a:

$$\widehat{T^\lambda(u)}(p,q) = \frac{< T^\lambda(u)F_{p,q}, F_{p,q} >}{< F_{p,q}, F_{p,q} >}.$$

mais:

$$< F_{p,q}, F_{p,q} >=< \tau^{-1}(E_z), \tau^{-1}(E_z) >= E_z(z) = (2\pi)^{-k}e^{-\frac{z\bar{z}}{2}} = (2\pi)^{-k}e^{-\frac{p^2+q^2}{2}}.$$

D'autre part l'opérateur $T^\lambda(u)$ est un opérateur a noyau S (voir la remarque (II, 3, 3)), donc:

$$\begin{aligned}
< T^\lambda(u)F_{p,q}, F_{p,q} > &= \int_{\mathbb{R}^k} T^\lambda(u)F_{p,q}(t)\overline{F_{p,q}(t)}dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{2k}} S(u)(t,s)F_{p,q}(s)\overline{F_{p,q}(t)}dtds \\
&= 2^{-\frac{3}{2}k}\pi^{-2k}\int_{\mathbb{R}^{2k}} S(u)(t,s)e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}e^{\frac{1}{2}(p^2-q^2)}e^{ip(s-t)}e^{q(s+t)}dsdt.
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables:

$$x = t - s, \quad y = \frac{t+s}{2},$$

alors:

$$\begin{aligned}
\widehat{T^\lambda(u)}(p,q) &= 2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-k}\int_{\mathbb{R}^{2k}} \mathcal{F}_p(u)(x,y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+4y^2)}e^{-ipx}e^{-q^2)}e^{2qy}dxdy \\
&= 2^{-\frac{k}{2}}\pi^{-k}\int_{\mathbb{R}^{2k}} \mathcal{F}_p(u)(x,y)e^{-ipx}e^{-(y-q)^2}e^{-\frac{1}{4}x^2}dxdy \\
&= 2^{-k}\pi^{-\frac{3}{2}k}\int_{\mathbb{R}^{3k}} u(t,y)e^{ix(t-p)}e^{-(y-q)^2}e^{-\frac{1}{4}x^2}dxdydt.
\end{aligned}$$

En écrivant u sous la forme $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(u))$ et en développant $\mathcal{F}^{-1}(u)$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\widehat{T^{\lambda}(u)}(p,q) &= 2^{-2k}\pi^{\frac{5k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{5k}} \mathcal{F}(u)(a,b)e^{-iat}e^{-iby}e^{ix(t-p)}e^{-(y-q)^2}e^{\frac{-x^2}{4}}\,dxdydtdadb \\
&= 2^{\frac{-3k}{2}}\pi^{2k} \int_{\mathbb{R}^{4k}} \mathcal{F}(u)(a,b)e^{-iat}e^{-iby}e^{-(y-q)^2}\,dydadbdt \\
&\quad . \int_{\mathbb{R}^{k}} e^{\frac{-x^2}{4}}e^{ix(t-p)}\frac{dx}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}}.
\end{aligned}$$

Or:

$$\int_{\mathbb{R}^{k}} e^{\frac{-x^2}{4}}e^{ix(t-p)}\frac{dx}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} = \mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(t-p) = e^{-(t-p)^2}.$$

Donc:

$$\widehat{T^{\lambda}(u)}(p,q) = 2^{-\frac{3k}{2}}\pi^{-2k} \int_{\mathbb{R}^{4k}} \mathcal{F}(u)(a,b)e^{-iat}e^{-iby}e^{-(t-p)^2}e^{-(y-q)^2}\,dtdydadb$$

$$= 2^{\frac{-3k}{2}}\pi^{-2k} \int_{\mathbb{R}^{4k}} \mathcal{F}(u)(a,b)e^{-ia(t-p)}e^{-ib(y-q)}e^{-(t-p)^2}e^{-(y-q)^2}e^{-i(ap+bq)}\,dtdydadb.$$

Mais:

$$\int_{\mathbb{R}^{k}} e^{-(t-p)^2}e^{-ia(t-p)}\frac{dt}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} = 2^{-\frac{k}{2}}e^{-\frac{a^2}{4}},$$

de même pour les termes en y, on obtient alors:

$$\begin{aligned}
\widehat{T^{\lambda}(u)}(p,q) &= (2\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^{2k}} \mathcal{F}(u)(a,b)e^{-iap}e^{-ibq}e^{\frac{-(a)^2}{4}}e^{\frac{-b^2}{4}}\,dadb \\
&= \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(u).e^{-\frac{b^2+a^2}{4}}\Big)(p,q) = (e^{\frac{1}{4}\Delta}.u)(p,q).
\end{aligned}$$

Q.E.D

<u>Théorème</u> (IV, 1, 5, 2)

Si u et v sont dans $C_c^{\infty}(W^{\lambda})$, alors :

$$e^{\frac{1}{4}\Delta}(u *_M v) = e^{\frac{1}{4}\Delta}u *_B e^{\frac{1}{4}\Delta}v.$$

Preuve

Puisque :

$$T^\lambda(\widehat{u *_M v}) = T^\lambda(\widehat{u) \circ T\lambda}(v) = \widehat{T\lambda(u)} *_B \widehat{T\lambda(v)},$$

le résultat découle de la proposition (IV, 5,1 , 2). Q.E.D

(IV, 1, 6) Interprétation géométrique de l'operateur $e^{\frac{1}{4}\Delta}$:

. On va donner une interprétation géométrique de l'opérateur d'équivalence $e^{\frac{1}{4}\Delta}$, en suivant la méthode d'Unterberger et de Moreno [33], [27].

Soit G l'extension de H_{2k+1} par $\mathbb{Z}_2$:

$$G = \mathbb{Z}_2 \times_\rho H_{2k+1} = \{(\varepsilon, h), \ \varepsilon = \pm 1, \ h \in H_{2k+1}\},$$

où :

$$\rho(\varepsilon)\ h = \rho(\varepsilon)\ exp\ (aX + bY + cZ) = exp\ (\varepsilon(aX + bY) + cZ).$$

La multiplication de G est alors:

$$(\varepsilon, g)\ (\varepsilon', g') = (\varepsilon\varepsilon', g\rho(\varepsilon)\ g') \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon, g) = (1, g)\ (\varepsilon, 1).$$

En considérant l'action du groupe G sur W^λ définie par:

$$(1, g)\ (p, q) = g.(p, q) \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon, 1)\ (p, q) = \varepsilon\ .(p, q),$$

on définit une représentations de G sur $\mathcal{H}_F$, qui est une extension de la représentation U^λ, par:

$$\Big(U^\lambda(\varepsilon, g)\ f\Big)\ (z) = e^{ic\lambda + \frac{\lambda b + ia}{4}(2z - \lambda b + ia)} f(\varepsilon(z - \lambda b + ia)).$$

. Maintenant, si θ_z est la symétrie géodésique autour du point $z = p + iq$ de W^λ, alors θ_z s'écrit comme un élément de G:

$$\theta_z\ (p' + iq') = 2p - p' + i(2q - q') = \Big(-1, exp(-2qX + \frac{2p}{\lambda}\ Y)\Big)\ (p' + iq').$$

et donc l'opérateur A_z sur $\mathcal{H}_F$ associé à cet élément est défini par:

$$(A_z f)(u) = \Big(U^\lambda(\theta_z)\ f\Big)\ (u) = e^{\bar{z}(u-z)} f(-u + 2z).$$

Proposition (IV, 1, 6, 1)

Si $\widehat{A}_z$ est le symbole au sens de Berezin de A_z, alors:

$$\widehat{A}_z\ (u) = e^{-|z-u|^2}.$$

Preuve:

On a:

$$\widehat{A}_z\ (u) = \frac{< A_z e_u, e_u >}{< e_u, e_u >}.$$

Mais:

$$\begin{aligned} < A_z e_u, e_u > = < U^{\lambda}(\theta_z) e_u, e_u > &= \Big(U^{\lambda}(\theta_z) e_u\Big)(u) \\ &= c e_u(-u+z) e^{\bar{z}(u-z)} \\ &= c e^{-z\bar{z}+u\bar{z}+\bar{u}z-\frac{u\bar{u}}{2}} \end{aligned}$$

et:

$$< e_u, e_u > = c e^{\frac{u\bar{u}}{2}}.$$

Donc:

$$\widehat{A}_z\ (u) = e^{-|z-u|^2}.$$

Q.E.D

Proposition (IV, 1, 6, 2)

Si f est dans $\mathcal{H}_F$, alors:

$$\int_{W^{\lambda}} f(z)\ \widehat{A}_z(u)\ dz d\bar{z}\ =\ \Big(e^{\frac{1}{4}\Delta}\ f\Big)\ (u).$$

Preuve

En effet:

$$\begin{aligned} \int_{W^{\lambda}} f(z)\ \widehat{A}_z(u)\ dz d\bar{z}\ &=\ \int_{W^{\lambda}} f(z)\ e^{-|z-u|^2}\ dz d\bar{z} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\mathcal{F}(f) e^{-\frac{|z|^2}{2}}\Big)(u) \\ &= \Big(e^{\frac{1}{4}\Delta} f\Big)(u). \end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition.

Q.E.D

Si on pose alors:

$$\Phi(f)(u)\ =\ \int_{W^{\lambda}} f(z)\ \widehat{A}_z(u)\ dz d\bar{z},$$

on a:

$$\Phi\big(u_{*_M} v\big)\ =\ \big(\Phi(u)\big)_{*_B}\big(\Phi(v)\big).$$

(IV, 2) ESPACES HERMITIENS SYMÉTRIQUES COMPACTS

Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe, soit $\underline{\mathbf{g}}$ son algèbre de Lie. Chaque orbite W de la représentation coadjointe de G est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2k}$. Nous pouvons donc considérer W comme une orbite d'un groupe de Heisenberg "externe" et réaliser sur W la construction précédente. Nous savons que le produit-$*$ de Moyal $*_M$ sur W n'est plus invariant mais seulement covariant:

$$i\tilde{X}_{*_M} i\tilde{Y} - i\tilde{Y}_{*_M} i\tilde{X} = i\widetilde{[X,Y]}, \quad \forall X,\ Y \in \underline{\mathbf{g}}.$$

Considérons maintenant la construction du produit-$*$ de Berezin $*_B$ sur W, muni de la structure complexe définie ci-dessus. Les "états cohérents" ne sont plus réellement cohérents sous l'action de G mais seulement sous l'action du groupe de Heisenberg "externe". De plus, la propriété de covariance n'est en général pas vérifiée pour le produit-$*$ de Berezin. Il est donc impossible de relier à ce produit-$*$ une construction raisonnable de représentations de G.

. Nous concluons de ces remarques, que le bon objet pour écrire l'analyse harmonique des groupes de Lie nilpotents (ou même exponentiels [4]), est le produit-$*$ de Moyal. D'autre part, pour les groupes compacts, les seules constructions de représentations-$*$ connues utilisent le produit-$*$ de Berezin. Dans cette partie, nous allons donner une définition d'un produit-$*$ de Moyal sur des orbites coadjointes de tels groupes, en généralisant la réalisation géométrique de l'opérateur d'équivalence étudiée ci-dessus pour $\mathbb{R}^{2k}$ (voir [27]). Il sera ainsi possible de construire une théorie unifiée des représentations-$*$ pour les cas exponentiels et compacts semi-simples.

Rappelons d'abord les constructions connues pour les groupes de Lie compacts semi-simples.

Soit G/K un espace hermitien symétrique compact. Nous pouvons supposer G/K irreductible, le cas général se déduisant de ce cas particulier par produit. Nous choisissons donc G simple et compact, connexe et simplement connexe, K est alors le centralisateur d'un tore de G ([21]). Notons o le point K de G/K.On peut alors définir un calcul symbolique et un produit-$*$ de Berezin sur l'espace des symboles sur G/K ([31], [7]). Tout d'abord, on construit un fibré en droites complexes L_λ sur G/K. Pour cela, on choisit une chambre de Weil dans le dual de l'algèbre de Lie du tore dont K est le centralisateur et on exponentie un poids entier de cette chambre, prolongé trivialement à l'algèbre de Lie $\underline{\mathbf{k}}$ de K, pour obtenir un caractère λ de K.

. Soit Γ_λ l'espace des sections holomorphes de L_λ. On définit les états cohérents e_q (q dans $L \setminus \{$ section nulle $\}$), les symboles et le produit-$*$ de Berezin comme dans (IV, 1). Le théorème de Borel-Bott nous dit alors que Γ_λ est de dimension finie et que l'action de G sur cet espace définit une représentation unitaire irréductible π^λ, de poids dominant λ ([35], par exemple). G agit donc sur l'espace V_λ des symboles des opérateurs sur Γ_λ.

. La symétrie géodésique θ_z, autour d'un point z de G/K est définie par un élément de G, que nous noterons aussi θ_z. Soit $A_z^\lambda = \pi^\lambda(\theta_z)$ l'opérateur correspondant sur Γ_λ et $\widehat{A_z^\lambda}$ son symbole.

Definition [27]

Soit f un symbole dans V_λ, on pose:

$$\left(\Phi^\lambda\left(f\right)\right)(u) = \int_{G/K} f(z)\ \widehat{A_z^\lambda}\ (u)\ \mu(z)$$

où μ est une mesure invariante sur G/K, qui sera normalisée plus tard.

Sur chaque V_λ, on définit le produit-$*$ de Moyal $*_M^\lambda$ par:

$$\Phi^\lambda(f_{*_M^\lambda}f') \ = \ \Phi^\lambda(f)_{*_B}\Phi^\lambda(f').$$

Lemme (IV, 2, 1)

Pour chaque z et u de G/K, on a:

$$\widehat{A_z^\lambda}\ (u) = \widehat{A_u^\lambda}\ (z).$$

Preuve

Fixons u, pour chaque z dans un voisinage géodésique $\mathcal{U}$ de u, il existe un point v dans $\mathcal{U}$ tel que:

$$\theta_v z = u.$$

Soit s_0 une section de L qui ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. Alors:

$$\widehat{A_z^\lambda}\ (u) = \frac{< A_z^\lambda\ e_{s_0(u)}, e_{s_0(u)} >}{< e_{s_0(u)}, e_{s_0(u)} >} = \frac{< A_z^\lambda\ e_{s_0(\theta_v z)}, e_{s_0(\theta_v z)} >}{< e_{s_0(\theta_v z)}, e_{s_0(\theta_v z)} >}.$$

Mais:

$$e_{s_0(\theta_v z)} = \theta_v . e_{(\theta_v^{-1} s_0)(z)} = \pi^\lambda(\theta_v)(e_{s_0'(z)})$$

où:

$$s_0' = (\theta_v^{-1} s_0)(z)$$

et:

$$\pi^\lambda(\theta_v\theta_z\theta_v) = \pi^\lambda(\theta_{\theta_v z}) = \pi^\lambda(\theta_u) = A_u^\lambda.$$

Donc:

$$\widehat{A_z^\lambda}(u) = \frac{< A_u^\lambda\ e_{s_0(z)}, e_{s_0)z)} >}{< e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >} = \widehat{A_u^\lambda}(z).$$

Comme G/K est connexe et $\widehat{A_z^\lambda}\ (u)$ est analytique en z, l'égalité ci-dessus est vraie sur tout G/K.

Q.E.D

Lemme (IV, 2, 2)

Soit L_g l'action régulière gauche de l'élément g de G dans $L^2(G/K)$, alors:

$$L_g(V^\lambda) \subset V^\lambda \qquad et \qquad L_g{}_\circ\Phi^\lambda = \Phi^\lambda{}_\circ L_g.$$

Preuve:

.Soit z un point de G/K et g_z un élément de G tel que $g_z o = z$. Puisque:

$$A_z^\lambda = \pi^\lambda(g_z)_\circ A_o^\lambda{}_\circ \pi^\lambda(g_z^{-1}),$$

alors, pour tout g de G,

$$\pi^\lambda(g)_\circ A_z^\lambda{}_\circ \pi^\lambda(g^{-1}) = \pi^\lambda(g_{g.z})_\circ A_o^\lambda{}_\circ \pi^\lambda(g_{gz}^{-1}) = A_{g.z}^\lambda.$$

D'où:

$$\widehat{A_{gz}^\lambda}(u) = \widehat{A_z^\lambda}\ (g^{-1}u).$$

Maintenant, par définition:

$$\begin{aligned}(\Phi^\lambda{}_\circ L_g\ F)\ (u) &= \int_{G/K} F(g^{-1}\ z)\ \widehat{A_z^\lambda}\ (u)\ \mu(z)\\ &= \int_{G/K} F(z)\ \widehat{A_{gz}^\lambda}\ (u)\ \mu(z).\\ &= \int_{G/K} F(z)\ \widehat{A_z^\lambda}\ (g^{-1}.u)\ \mu(z).\end{aligned}$$

Q.E.D

Corollaire (IV, 2, 3)

Si le rang de l'espace symétrique G/K est un, alors Φ^λ est une fonction ϕ du Laplacien Δ sur G/K.

Preuve

Dans ce cas, les composantes isotypiques de la représentation régulière L sur $L^2(G/K)$ sont de multiplicité un et contiennent seulement des fonctions C^∞. D'autre part, l'espace des opérateurs différentiels invariants sur G/K est l'espace des polynômes en Δ. Ces composantes sont donc séparées par Δ ([21]). Le corollaire découle donc du lemme précédent.

. Maintenant, on peut identifier l'espace G/K avec l'orbite W de la représentation coadjointe d'un multiple de λ de telle façon que le symbole de l'opérateur $\pi^\lambda(X)$ soit, pour tout X de $\underline{\mathbf{g}}$, la fonction $\tilde{X} =< X,. >$ sur l'orbite W. Le produit-$*$ de Berezin est alors covariant sur W. D'autre part, puisque G est simple, l'espace des fonctions $\tilde{X}$, pour X dans $\underline{\mathbf{g}}$ est invariant sous la représentation L et irréductible. Si, de plus, G est de rang 1, cet espace est une composante isotypique de L et il existe donc une constante C_λ telle que:

$$\Phi(\tilde{X}) = C_\lambda \tilde{X}, \quad \forall X \in \underline{\mathbf{g}}.$$

On peut alors choisir la normalisation de la mesure μ de telle façon que C_λ soit égale à 1

Proposition **(IV, 2, 4)**

.Pour un bon choix de la mesure μ, le produit $*$ de Moyal est covariant:

$$i\tilde{X}_{*_M} i\tilde{Y} - i\tilde{Y}_{*_M} i\tilde{X} \;=\; i[X,\tilde{}Y], \quad \forall X,\, Y \in \underline{\mathbf{g}}.$$

Un exemple:

.Soit $\mathbf{S}^2$ la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$. On sait que $\mathbf{S}^2$ est l'espace symétrique hermitien $SU(2)/K$ où:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \ \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbf{S}^2$ est aussi une variété kählérienne, si on l'identifie à $SL(2, \mathbb{C})/H$ où:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \ c, d \in \mathbb{C}\ ,\ d \neq 0 \right\}.$$

On choisit comme carte de $\mathbf{S}^2$ la projection stéréographique:

$$\mathbf{S}^2 \setminus \{\text{pôle nord}\} \longrightarrow \mathbb{C}\ .$$

La structure complexe de $\mathbf{S}^2$ est, dans cette carte, la structure complexe usuelle de $\mathbb{C}$.

Soit g un élément de $SL(2,\mathbb{C})$. L'action de g sur $\mathbf{S}^2$ s'écrit dans la carte:

$$g.z = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et } z \in \mathbb{C}, \quad cz+d \neq 0.$$

Les fibrés holomorphes en droites complexes sur $\mathbf{S}^2$ sont paramétrés par $\mathbb{N}$ et sont trivialisés sur notre carte ainsi:
Pour chaque m de $\mathbb{N}$, on définit le caractère χ de H par:

$$\chi \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = d^{-m}$$

et le fibré L_m par:

$$L_m = SL_2(\mathbb{C}) \times_\chi \mathbb{C} \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})/H.$$

Toute section holomorphe s de L_m s'écrit alors dans notre carte:

$$s(z) = [\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F(z)]$$

où F est une fonction polynomiale de degré au plus m en z. En particulier, on notera s_0 la section définie par la fonction F constante, égale à 1.
Notons Γ_m l'espace de ces sections holomorphes. $SU(2)$ agit ainsi sur Γ_m qu'on identifie à l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus m:

$$\left(\pi^m(g)\, F\right)(z) = (\alpha + \bar{\beta} z)^m\, F\left(\frac{\bar{\alpha} z - \beta}{\bar{\beta} z + \alpha}\right), \quad \text{si} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

On munit Γ_m du produit scalaire invariant:

$$< F, F' > = \int_{\mathbb{C}} F(z)\, \overline{F'(z)}\, h(z) \mu$$

où:

$$h(z) = (1 + z\bar{z})^{-m} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{i}{2\pi} \frac{du \wedge d\bar{u}}{(1+u\bar{u})^2}.$$

(μ est la mesure normalisée de $\mathbf{S}^2$).

Les états cohérents sur L_m sont alors:

$$e_{s_0(z)}(u) = \left[\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_z(u)\right].$$

<u>Proposition</u> (IV, 2, 5)

$$E_z(u) = (m+1)(1+\bar{z}u)^m.$$

Preuve:

Le cacul se fait comme dans le cas du groupe de Heisenberg, le résultat est dans [7] et [37].

. Soit u un point de notre carte, posons:

$$g_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+u\bar{u})^{\frac{1}{2}}} & \frac{u}{(1+u\bar{u})^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-\bar{u}}{(1+u\bar{u})^{\frac{1}{2}}} & \frac{1}{(1+u\bar{u})^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix},$$

g_u est alors dans $SU(2)$ et $g_u o = u$.

Si θ_z est la symétrie géodésique sur $\mathbf{S}^2$ autour du point z, on aura:

$$\theta_z(u) = g_z\ \theta_0\ g_z^{-1}.u \ = \frac{2z - u(1-z\bar{z})}{2\bar{z}u + (1-z\bar{z})}.$$

Proposition (IV, 2, 6)

θ_z est définie comme un élément de $SU(2)$:

$$\theta_z \ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\alpha = i \ \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}$, $\qquad \beta = 2i \ \frac{z}{z\bar{z}+1}$.

D'autre part, si A_z^m désigne $\pi^m(\theta_z)$, alors:

$$\widehat{A_z^m}(u) = (-i)^m \left[\frac{2(\bar{z}u + \bar{u}z) + (1-z\bar{z})(1-u\bar{u})}{(1+u\bar{u})^m(1+z\bar{z})}\right]^m.$$

Preuve

L'écriture de θ_z comme un élément de $SU(2)$ est un simple calcul utilisant la section trivialisante de notre carte.

D'autre part:

$$\widehat{A_z^m}(u) = \widehat{\pi^m(\theta_z)}(u) = \frac{< \pi^m(\theta_z)e_z, e_u >}{< e_z, e_u >}$$
$$= \frac{\pi^m(\theta_z)E_z(u)}{E_z(u)}$$

et l'expression de $\widehat{A_z^m}(u)$ découle de celles de π^m et de E_z.

Q.E.D

. Notons $e_j(z)$ la section $z^j\ s_0(z) = [\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ z^j]$. Le système $\{e_j, j = 0, ..., m\}$ est alors une base de Γ_m et:

Lemme (IV, 2, 7)

.Si V_m est l'espace des symboles des opérateurs sur Γ_m, alors :

i) $\{\widehat{P}^m_{e_i,e_j}(z) = \frac{1}{m+1}\frac{z^j\bar{z}^i}{(1+z\bar{z})^m} \quad i,j=1,...,m\}$ *est une base de* V_m.

ii) $SU(2)\times SU(2)$ *agit sur* V_m *par:*

$$(g,g')\,\widehat{P}^m_{e_i,e_j}(z) = \widehat{P}^m_{ge_i,g'e_j}(z)$$

et le vecteur de plus haut poids de cette représentation irréductible est $\widehat{P}^m_{e_0,e_m}$.

Preuve

i) Soit s un élément de Γ_m, si on pose:

$$P^m_{e_i,e_j}(s) = < s, e_i > e_j,$$

alors $\{P^m_{e_i,e_j},\ i,j=0,...,m\}$ est une base de $\mathcal{L}(\Gamma_m)$, et:

$$\begin{aligned}\widehat{P^m_{e_i,e_j}}(z) =& \frac{< P^m_{e_i,e_j}\ e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >}{< e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >}\\ =& \frac{< e_{s_0(z)}, e_i >< e_j, e_{s_0(z)} >}{< e_{s_0(z)}, e_{s_0(z)} >}\\ =& \frac{1}{m+1}.\frac{z^j\bar{z}^i}{(1+z\bar{z})^m}\end{aligned}$$

puisque:

$$e_i(z) \ = < e_i, e_{s_0(z)} > \quad \text{et} \quad h(z) \ = < s_0(z), s_0(z) > .$$

ii) Comme:

$$\begin{aligned}((g,g')P^m_{e_i,e_j})(s) \ =& (g'P^m_{e_i,e_j}g^{-1})(s)\\ =& < s, ge_i > g'e_j \ = \ P^m_{ge_i,g'e_j},\end{aligned}$$

et

$$ge_j = e^{i(m-2j)\varphi}e_j,$$

si $g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi}\end{pmatrix}$ et $g' = \begin{pmatrix} e^{i\varphi'} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi'}\end{pmatrix}$ alors on voit que :

$$(g,g')\widehat{P^m_{e_s,e_r}} = e^{i[m-2s)\varphi-(m-2r)\varphi']}\widehat{P^m_{e_s,e_r}},$$

ce qui prouve le lemme.

. Maintenant, la représentation régulière de $SU(2)$ sur V_m se décompose en somme de représentations irréductibles:

$$\sum_{k=0}^{m} D_k,$$

par construction $\widehat{P}^k_{e_0,e_k}$ est un vecteur de poids dominant dans V_m, c'est donc le poids dominant de D_k, unique à un multiple scalaire près. De plus le laplacien Δ sur $\mathbf{S}^2$ s'écrit:

$$\Delta = (1+u\bar{u})^2 \frac{\partial}{\partial_u}\frac{\partial}{\partial_{\bar{u}}}.$$

On a donc:

$$(\Delta \widehat{P}^k_{e_0,e_k})(z) \;=\; -k(k+1)\; \widehat{P}^k_{e_0,e_k}(z).$$

Enfin:

Proposition (IV, 2, 8)

La transformation Φ^m a la forme suivante:

$$\Phi^m|_{D_k} \;=\; \alpha(m,k) Id|_{D_k}$$

avec:

$$\alpha(m,k) \;=\; \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad k > m \text{ ou } m-k \text{ impair} \\ 2^k(-i)^{m+1}\dfrac{m!}{(m+k+1)!}\dfrac{(\frac{m+k}{2})!}{(\frac{m-k}{2})!} \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Puisque Φ^m commute avec L et donc scalaire sur chaque D_k:

$$(\Phi^m \widehat{P}^k_{e_0,e_k})(z) = \alpha(m,k)\; \widehat{P}^k_{e_0,e_k}(z),$$

alors, pour $z = 1$, on a:

$$\begin{aligned}(\Phi^m \widehat{P}^k_{e_0,e_k})(1) &= \frac{1}{k+1}\frac{(-i)^m(m+1)}{2\pi}\sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}^p_m \int_{\mathbb{C}} \frac{z^{p+k}\;\bar{z}^{m-p}}{(1+z\bar{z})^{k+m+2}}dzd\bar{z} \\ &= \frac{i(-i)^m}{2\pi(k+1)}\int_{\mathbb{C}} \mathrm{C}_m^{\frac{m-k}{2}}\;\frac{(z\bar{z})^{\frac{m+k}{2}}}{(1+z\bar{z})^{m+k+2}}\; dzd\bar{z} \\ &= \frac{(-i)^{m+1}}{(k+1)(m+k+1)!}\frac{(\frac{m+k}{2})!}{(\frac{m-k}{2})!}.\end{aligned}$$

Mais:

$$\widehat{P}^k_{e_0,e_k}(1) = \frac{k}{2^k(k+1)}$$

ce qui nous donne le résultat.

On déduit finalement de ce qui précède l'expression de la fonction ϕ telle que Φ^m soit $\phi(\Delta)$:

$$\phi = \psi_\circ\omega$$

où:

$$\omega(\Delta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-4\Delta^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \psi(k) = \alpha(m,k).$$

V REPRÈSENTATION-$*$ RÉGULIERE DES GROUPES DE LIE COMPACTS

. Dans cette partie, on construit la représentation-$*$ régulière d'un groupe de Lie compact G. On montrera qu'on peut toujours réaliser G comme un sous-groupe de $SO(V)$ où V est un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$.

. On réalise le fibré cotangent $T^*(G)$ de G comme une orbite O, de la coadjointe du groupe produit semi-direct de G avec $V_n = V \times ... \times V$ n fois . A partir d'un produit-$*$ sur $T^*(G)$, on construit la représentation-$*$ associée à l'orbite O. Puis, on en déduit la représentation-$*$ régulière du groupe G.

. Sur $T^*(G)$, deux produits-$*$ ont été construits, l'un par A. Lichnerowicz, l'autre par S. Gutt. Dans cette partie, on utilisera le produit-$*$ de S. Gutt, les polarisations naturelles de celui de A. Lichnerowicz définissent en effet un espace de fonctions polarisées réduit à 0.

(V, 1) Rappel sur les groupes compacts

1) G étant un groupe de Lie compact, soit T un tore maximal dans G, $\underline{\mathbf{t}}$ son algèbre de Lie, $\underline{\Delta}$ le système des racines de la complexifiée $\underline{\mathbf{g}}^{\mathbb{C}}$ de $\underline{\mathbf{g}}$ par rapport à $\underline{\mathbf{t}}^{\mathbb{C}}$ et $D(\underline{\mathbf{g}})$ le diagramme:

$$D(\underline{\mathbf{g}}) = \{H \in \underline{t} \ \text{ tel que } \ \alpha(H) \in 2i\pi\ \mathbb{Z}, \ \text{ pour un certain } \ \alpha \in \underline{\Delta}\}$$

. Notons $\underline{\mathbf{t}}_r = \underline{\mathbf{t}} - D(\underline{\mathbf{g}})$ et fixons une composante P_0 de $\underline{t}_r$ telle que $0 \in \overline{P}_0$.

Si on pose :

$$\mathcal{C} = Ad(G)P_0$$

où Ad est l'action adjointe de G, alors [21], l'application :

$$\begin{aligned} G/T \times P_0 &\longrightarrow G_r \\ (gT, H) &\longmapsto gexpHg^{-1} \end{aligned}$$

est une bijection sur son image qui sera appelé G_r l'ensemble des points réguliers dans G. G_r est dense dans G. Par construction, l'application $exp : \mathcal{C} \longrightarrow G_r$ est bijective.

. Pour X fixé dans $\mathcal{C}$, soit:

$$D_X = \left\{Y \in \mathcal{C} \ \text{ tel que } \ exp - XexpY \notin G_r\right\}$$
$$D'_X = \left\{Y \in \mathcal{C} \ \text{ tel que } \ exp - YexpX \notin G_r\right\}$$
$$\mathcal{C}_X = \mathcal{C} - D_X \quad , \quad \mathcal{C}'_X = \mathcal{C} - D'_X.$$

D'après ce qui précède, les applications:

$\psi(X,.) : \mathcal{C}_X \longrightarrow \mathcal{C}$ et $\psi(.,X) : \mathcal{C}'_X \longrightarrow \mathcal{C}$ où $\psi(X,Y) = exp - XexpY$ sont des injections à image dense. De plus:

$$\psi(X,Y) = -\psi(Y,X) \quad \text{si } Y \in \mathcal{C}_X \cap \mathcal{C}'_X.$$

2) Soit G un groupe compact connexe et réel, $\underline{\mathbf{g}}$ son algèbre de Lie. On a $\underline{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{z}} \oplus \underline{\mathbf{s}}$ où $\underline{\mathbf{s}} = [\underline{\mathbf{g}}, \underline{\mathbf{g}}]$ et $\underline{\mathbf{z}}$ est le centre de $\underline{\mathbf{g}}$. Posons $dim\underline{\mathbf{z}} = p$.

Soit G' la composente de l'identité dans le groupe des automorphismes linéaires sur $\underline{\mathbf{s}}$ et $\tilde{G}'$ son revétement universel. Le centre Z de $\tilde{G}'$ est alors un sous groupe fini. Si $CardZ = r$, considérons le tore $T = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ et un sous groupe cyclique E d'ordre r de ce tore. Si on désigne par G" le groupe produit de $\tilde{G}'$ par p exemplaires de T, et par N le sous groupe $E_1....E_pZ$ de G" chaque E_i est une copie de E, il existe alors (voir par exemple le livre de Pontryagin, section 64 exemple 106), un sous groupe fini central H de G tel que G/H soit de la forme $G"/_N$.

Soit $\chi_i : T \longrightarrow \mathbb{C}$ le caractère $\chi_i(x) = e^{2i\pi rx}$ de T_i, alors $\oplus_{i=1}^p \chi_i \oplus Ad$ est une représentation fidéle de $G"/_N$. Mais on sait (voir par exemple: Hochschild 'Structure des groupes de Lie'), que pour tout h dans H, il existe une représentation π_h de dimension finie telle que $\pi_h(h) \neq Id$. La représentation

$$\rho = \oplus_{i=1}^p \chi_i \oplus Ad \oplus \sum_{h \in H} \pi_h$$

est donc une représentation fidéle de G sur un espace de dimension fini V. Comme G est un groupe de Lie compact, il existe alors une forme quadratique sur V invariante par G, il s'ensuit que $\rho(G)$ est un sous groupe compact de $O(V)$, donc de $SO(V)$ puisque G est connexe.

(V, 2) <u>Réalisation de $T^*(G)$ comme une orbite de $G \times V_n$</u>

On garde les notations précédentes. Soit $V_m = V \times ... \times V$ m fois, G agit alors sur V_m par:

$$g(e_1, ..., e_m) = (ge_1, ..., ge_m), \quad e_i \in V \text{ et } g \in G.$$

Notons O_m l'orbite d'un point $(e_1, ..., e_m)$ dans V_m sous G.

<u>Lemme</u> (V, 2, 1)

Si $m = n$ et $\{e_1, ..., e_n\}$ un système libre de V alors O_n est isomorphe à G.

<u>Preuve</u>

Soit $(e_1, ..., e_{n+1})$ une base de V. Si g appartient au le stabilisateur $G(e_1, .., e_n)$ de $(e_1, ..., e_n)$, alors $ge_i = e_i$ pour $i = 1, ..., n$, mais puisque g est dans $SO(V)$, alors g stabilise $> e_1, ..., e_n <^{\perp}$ et son orientation donc e_{n+1} d'où $g = Id$. Et par conséquant :

$$O_n \simeq G/G(e_1, ..., e_n) \simeq G. \qquad Q.E.D$$

. Considérons le groupe produit semi-direct $G \times V_n$ qu'on réalise matriciellement par :

$$G \times V_n = \{(g, Y_1, ..., Y_n) = \begin{pmatrix} g & 0 & Y_1 \\ & & \\ 0 & g & Y_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Le produit dans $G \times V_n$ sécrit :

$$(g, Y_1, ..., Y_n)(g', Y_1', ..., Y_n') = (gg', gY_1' + Y_1, ..., gY_n' + Y_n).$$

L'action adjointe de $G \times V_n$ est donnée par :

$$Ad(g, Y_1, ..., Y_n)(X, T_1, ..., T_n) = \Big[AdgX, -(AdgX)Y_1 + gT_1, ..., -(AdgX)Y_n + gT_n\Big].$$

Par conséquent, si $(\xi, \eta_1, ..., \eta_n)$ sont les coordonnées sur la base dual de $\underline{\mathbf{g}}^* \times V_n^*$ alors:

$$Ad^*(g, Y_1, ..., Y_n)(\xi, \eta_1, ..., \eta_n) = (\xi', \eta_1', ..., \eta_n')$$

où

$$\xi' = g\xi + \sum_{i=1}^{n} g\eta_i \wedge Y_i \quad , \quad \eta_i' = g\eta_i$$

la forme $\eta \wedge Y$ etant définie sur $\underline{\mathbf{g}}$ par:

$$< \eta \wedge Y, X > = < \eta, XY > \quad (XY \text{ est l'action de } \underline{\mathbf{g}} \text{ dans} V).$$

. Si $\{e_1, ..., e_n\}$ un système libre de V. Prenons le point $(0, e_1, ..., e_n)$ dans $\underline{\mathbf{g}}^* \times V_n$. Notons O l'orbite de ce point sous $G \times V_n$.

<u>Proposition</u> (V, 2, 2)

O est symplectomorphe à $T^*(G)$.

<u>Preuve</u>

$$T^*(G) = \Big\{(g, \alpha) \text{ avec } g \in G \text{ et } \alpha \in T_g^*(G)\Big\} \simeq G \times \underline{\mathbf{g}}^*.$$

Tout d'abord l'application :

$$O \longrightarrow T^*(G)$$

$$\Big(\alpha, g(e_1, ..., e_n)\Big) \longmapsto (g, \alpha)$$

est bijective, vu le lemme précédent.

D'autre part, soit λ la 1-forme de Liouville sur $T^*(G)$:

$$\lambda_{(g,\alpha)}(X,T)=\alpha(X) \quad \text{si } X\in \underline{\mathbf{g}} \text{ et } T\in \underline{\mathbf{g}}^*$$

alors:

$$d\lambda_{(g,\alpha)}\Big((X,T),(X',T')\Big)=(X,T)\lambda_{(g,\alpha)}(X',T')-(X',T')\lambda_{(g,\alpha)}(X,T) \\ -\lambda_{(g,\alpha)}\Big([(X,T),(X',T')]\Big).$$

Remarquons que :

1) Si X est dans $\underline{\mathbf{g}}$, on peut voir $(X,0)$ comme un champ de vecteurs sur $G\times\underline{\mathbf{g}}^*$ et la fonction $(X,0)^\sim$ sur l'orbite est définie par:

$$(X,0)^\sim_{(g,\alpha)}=<(X,0),\Big(\alpha,g.(e_1,...,e_n)\Big)>=\alpha(X)=\lambda_{(g,\alpha)}\big((X,0)\big).$$

2) Si $Y\in T^*_g(G)$ vu comme un vecteur tangent à la fibre de $T^*(G)$ en (g,α), on a:

$$\lambda_{(g,\alpha)}(0,Y)=0.$$

. Soit ω la 2-forme symplectique sur O :

$$\omega\Big((X,Y),(X',Y')\Big)=\{(X,Y)^\sim,(X',Y')^\sim\}$$

où $\{,\}$ est le crochet de poisson sur O.

On va montrer que:

$$\omega_{(g,\alpha)}=d\lambda_{(g,\alpha)}.$$

En effet, il suffit de voir que :

$$a)d\lambda_{(g,\alpha)}\Big((X,0),(X',0)\Big)=(X',0).\alpha(X)-(X,0).\alpha(X')+\alpha\Big([X,X']\Big) \\ =\{(X,0)^\sim,(X',0)^\sim\}_{(g,\alpha)}=\omega_{(g,\alpha)}\Big((X,0),(X',0)\Big).$$

$$b)d\lambda_{(g,\alpha)}\Big((X,0),(0,Y)\Big)=(0,Y).\alpha(x)-(X,0).\lambda_{(g,\alpha)}(0,Y)+\lambda_{(g,\alpha)}\Big([(X,0),(0,X)]\Big) \\ =(0,Y).(X,0)^\sim=\{(X,0)^\sim,(0,Y)^\sim\}_{(g,\alpha)},$$

puisque $\Big[(X,0)^\sim,(0,Y)^\sim\Big]=(0,X.Y)^\sim$.

c)

$$d\lambda_{(g,\alpha)}\Big((0,Y),(0,Y')\Big)=0=\omega_{(g,\alpha)}\Big((0,Y),(0,Y')\Big),$$

puisque $\Big[(0,Y),(0,Y')\Big]=0$.

(V, 3) L'induite unitaire

On choisit la polarisation algébrique réel $\underline{\mathbf{h}} = \{0\} \times V_n$, et on définit un caractère χ sur $\underline{\mathbf{h}}$ par:

$$\chi(0, v_1, v_2, ..., v_n) = i\sum_{j=1}^{n} < e_j, v_j > \quad \Big((v_1, ..., v_n) \in V_n \text{ et } (e_1, ..., e_n) \text{ dans } V_n^* \text{ fixé}\Big).$$

On exponentie χ au sous groupe $H = \{I\} \times V_n$ par :

$$\chi(I, v_1, ..., v_n) = e^{i\sum_{j=1}^{n} <e_j, v_j>}.$$

L'induite unitaire

$$\pi = \underset{H\uparrow G\times V_n}{ind} \chi$$

se réalise alors sur l'espace :

$$\mathcal{H} = \Big\{F : G \times V_n \longmapsto \mathbb{C} \quad \text{avec} \begin{cases} 1) F(h.A) = \chi(h)F(A) \text{ si } h \in H \\ 2) \int_{H\backslash G\times V_n} |F(A)|^2 dA < \infty \end{cases}\Big\}$$

par, si A et A' sont dans $G \times V_n$

$$\Big(\pi(A).F\Big)(A') = F(A'A).$$

Or, ${}_H \backslash G \times V_n$ est canoniquement isomorphe à G. Considérons en effet la section τ :

$$\tau : G \longrightarrow G \times V_n, \quad g \longmapsto (g, 0, ..., 0).$$

Alors à chaque F de $\mathcal{H}$ on associe une fonction f sur G définie par:

$$f(g) = F\Big(\tau(g)\Big) \quad \forall g \in G.$$

Donc π se réalise sur $L^2(G)$, pour f dans $L^2(G)$, $(g, Y_1, ..., Y_n)$ dans $G \times V_n$ et g' dans G on aura:

$$\Big(\pi(g, Y_1, ..., Y_n)f\Big)(g') = \chi(I, g'^{-1}Y_1, ..., g'^{-1}Y_n)f(g'g).$$

Les générateurs infinitésimaux de π sont:

$$\text{si } X \in \underline{\mathbf{g}} \quad \Big(\pi(X,0)f\Big)(g') = \frac{d}{dt} f(g' exptX)_{|_{t=0}}$$

$$\text{si } Y \in V_n \quad \Big(\pi(0,Y)f\Big)(g') = \chi(I, g'^{-1}Y)f(g')$$

Remarquons que l'on peut écrire:

$$\chi(I, g^{-1}.Y) = i\sum_{j=1}^{n} < e_j, g^{-1}.Y_j >= i\sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j(ge_i) = i\tilde{Y}(g) \quad (Y = (Y_1, ..., Y_n)).$$

Donc $\pi((0, Y)^{\sim})$ est la multiplication par une fonction qui ne dépend que des variables de la base G du fibré $T^*(G)$.

(V, 4) Représentation-*

. Soit $\mathcal{C}$ l'ouvert de $\underline{\mathbf{g}}$ défini dans (V,1).

Définition (V, 4, 1):

Soit f une fonction C^∞ à support compact sur $T^*(G)$ et φ une fonction de $L^2(G)$, on pose:

$$(A_f\varphi)(g) = \int_{\mathcal{C}}\int_{\underline{\mathbf{g}}^*} e^{i\alpha(X)} f(gexp\frac{X}{2}, \alpha)\varphi(gexpX)dXd\alpha.$$

Ainsi défini, A_f est un opérateur linéaire sur $L^2(G)$.

Notons par B l'ensemble des fonctions de $C^\infty\Big(T^*(G)\Big)$, telle que la transformée de Fourier partielle de f par rapport à la variable dans la fibre $(\mathcal{F}_\alpha f)$ ait un support k compact et inclu dans $(G \times \mathcal{C})$

Proposition (V, 4, 2)

Si f est dans B alors

i) A_f est un opérateur de Hilbert Schmidt sur $L^2(G)$ et on a une estimation:

$$||A_f||_{HS} \leq C(k)||f||_{L^2}$$

($C(k)$ est une constante qui dépend de k)

ii) L'adjoint de l'opérateur A_f est $A_f^* = A_{\overline{f}}$.

iii) $TrA_f = \int_{T^*(G)} f(g, \alpha)dgd\alpha$.

Preuve

i) Soit f un élément de B, et φ une fonction de $L^2(G)$:

$$\begin{aligned}(A_f\varphi)(g) &= \int_C\int_{\underline{g}^*} e^{i\alpha(X)} f(gexp\frac{X}{2},\alpha)\varphi(gexpX)dX\,d\alpha \\ &= \int_C (\mathcal{F}_\alpha f)(gexp\frac{X}{2},X)\varphi(gexpX)dX\end{aligned}$$

Si $\Delta(X)dX$ est une mesure de Haar invariante à gauche sur $exp\ \mathcal{C}$, on pose:

$$\Phi_f(g,expX) = (\mathcal{F}_\alpha f)(gexp\frac{X}{2},X)\Delta(X)^{-1}.$$

Φ_f est C^∞ sur $G\times G$, et à support compact inclus dans $G\times exp\ \mathcal{C}$.

Alors si dg est la mesure de Haar sur G on a:

$$\begin{aligned}(A_f\varphi)(g) &= \int_C \Phi_f(g,expX)\varphi(gexpX)\Delta(X)dx \\ &= \int_G \Phi_f(g,g')\varphi(gg') \\ &= \int_G \Phi_f(g,g^{-1}g')\varphi(g')dg'.\end{aligned}$$

Donc A_f est un opérateur de noyau $K_f(g,g') = \Phi_f(g,g^{-1}g')$.

D'où :

$$\begin{aligned}||A_f||^2_{HS} &= \int_{G\times G}\left|K_f(g,g')\right|^2 dgdg' = \int_{G\times G}\left|\Phi_f(g,g^{-1}g')\right|^2 dgdg' \\ &= \int_G\int_G\left|\Phi_f(g,g')\right|^2 dgdg' \\ &= \int_G\int_C\left|\Phi_f(g,expY)\right|^2\Delta(Y)dY\,dg \\ &= \int_G\int_C\left|(\mathcal{F}_\alpha f)(gexp\frac{Y}{2},Y)\right|^2\Delta^{-1}(Y)dY\,dg.\end{aligned}$$

Mais , comme $f\in B$, $(\mathcal{F}_\alpha f)$ est à support compact k dans $G\times\mathcal{C}$, ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}||A_f||^2_{HS} &\le C(k)\int_G\int_C\left|(\mathcal{F}_\alpha f)(gexp\frac{Y}{2},Y)\right|^2 dY\,dg \\ &\le C(k)\int_{G\times\underline{g}}\left|(\mathcal{F}_\alpha f)(g,Y)\right|^2 dY\,dg = constante||f||^2_{L^2},\end{aligned}$$

puisque $\Delta(Y)$ est bornée sur la projection de k sur $\mathcal{C}$.

ii) Si $K_f(g,g')$ est le noyau de l'opérateur A_f, alors l'adjoint A_f^* de A_f a comme noyau:

$$\overline{K}_f(g',g) = \overline{\Phi}_f(g', g'^{-1}g).$$

. Posons $g = expX, g' = expY$ avec X et Y dans $\mathcal{C}$ tels que ${g'}^{-1} g \in exp\ \mathcal{C}$, alors :

$$g^{-1}g' \in exp\ \mathcal{C} \quad \text{ et } \quad g^{-1}g' = exp\psi(X,Y).$$

Donc :

$$\overline{K}_f(g',g) = (\overline{\mathcal{F}_\alpha f})\Big(g' exp\frac{\psi(Y,X)}{2}, \psi(X,Y)\Big)\Delta\Big(\psi(Y,X)\Big)^{-1}.$$

Mais:

$$(\overline{\mathcal{F}_\alpha f})(g,X) = (\mathcal{F}_\alpha \overline{f})(g,-X) \text{ et } \psi(Y,X) = -\psi(X,Y).$$

Alors:

$$\begin{aligned}\overline{K}_f(g',g) &= (\mathcal{F}_\alpha \overline{f})\Big(g exp\frac{\psi(X,Y)}{2}, \psi(X,Y)\Big)\Delta\Big(\psi(X,Y)\Big)^{-1} \\ &= \Phi_{\overline{f}}\Big(g, exp\psi(X,Y)\Big) = \Phi_{\overline{f}}(g, g^{-1}g') \\ &= K_{\overline{f}}(g,g').\end{aligned}$$

D'où

$$(A_f)^* = A_{\overline{f}}.$$

iii) Se déduit du fait que le noyau de A_f est continu donc que

$$\begin{aligned}TrA_f &= \int_G K_f(g,g)dg = \int_G \Phi_f(g,I)dg \\ &= \int_G (\mathcal{F}_\alpha f)(g,0)dg = \int_{T^*(G)} f(g,\alpha)dgd\alpha.\end{aligned}$$

Q.E.D

. Maintenant, si f est dans B, la formule :

$$||A_f||_{HS}^2 = Tr(A_f \circ A_{\overline{f}})$$

définit un produit scalaire dans B par :

$$< f, f' >= Tr(A_f \circ A_{\overline{f'}}).$$

Notons L_*^2 le complété de B pour cette norme.

<u>**Proposition**</u> **(V, 4, 3)**

L'application A qui à f associe A_f est une bijection de L_*^2 sur l'espace $HS\Big(L^2(G)\Big)$ des opérateurs de Hilbert Schmidt sur $L^2(G)$).

Preuve

D'une part, l'injectivité découle du fait que :

$$||A_f||^2_{HS} = ||f||^2_{L^2_*}.$$

D'autre part, soit $\kappa \subset \kappa' \subset \mathcal{C}$, deux compacts, ρ_κ une fonction C^∞ telle que :

$$\rho_\kappa(X) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X \in \kappa \\ 0 & \text{si} \quad X \in \mathcal{C} \setminus \kappa' \end{cases}$$

et $0 \leq \rho_\kappa(X) \leq 1$.

Si A est un opérateur dans $HS\Big(L^2(G)\Big)$, de noyau K, on définit la fonction f_κ dans B par:

$$(\mathcal{F}_\alpha f_\kappa)(gexp\frac{X}{2}, X) = K(g, gexpX)\Delta(X)\rho_\kappa(X) \qquad (\text{si } X \in \kappa' \quad , 0 \text{ ailleurs}),$$

et donc le noyau:

$$K_{f_\kappa}(g, g') = \Phi_{f_\kappa}(g, g^{-1}g').$$

Si $g^{-1}g'$ s'écrit $expX$, avec X dans $\mathcal{C}$, alors $g' = gexpX$, et:

$$K_{f_\kappa}(g, g') = (\mathcal{F}_\alpha f_\kappa)(gexp\frac{X}{2}, X)\Delta^{-1}(X) = K(g, gexpX)\rho_\kappa(X) = K(g, g')\rho_\kappa(X).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\int_{G\times G} \Big|(K - K_{f_\kappa})(g, g')\Big|^2 dgdg' = \\
&\int_G dg\Big[\int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \Big|K(g, gexpX) - K(g, gexpX)\rho_\kappa(X)\Big|^2 \Delta(X)dX\Big] \\
&\leq \int_G \int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \Big|K(g, gexpX)\Big|^2 \Big|(1 - \rho_\kappa(X))\Big|^2 \Delta(X)dXdg \\
&\leq \int_G \int_{\mathcal{C}\setminus\kappa} \Big|K(g, gexpX)\Big|^2 \Delta(X)dXdg \\
&\leq \int_G \int_{exp(\mathcal{C}\setminus\kappa)} \Big|K(g, g')\Big|^2 dgdg'.
\end{aligned}$$

Maintenant si κ_n est une suite de compacts dans $\mathcal{C}$ tel que $\kappa_n \subset \kappa_{n+1}$ et $\cup\kappa_n = \mathcal{C}$, alors la suite $K_{f_{\kappa_n}}$ converge vers K dans $L^2(G \times G)$. ce qui entraîne que f_{κ_n} est une suite de Cauchy dans B. Elle converge donc dans L^2_* vers une certaine fonction f et $K = K_f$.

Q.E.D

Définition **(V, 4, 4)**

S f et f' sont deux éléments de L^2_*, on pose :

$$A_{f*f'} = A_f \circ A'_f.$$

Ce qui définit un produit associatif dans L^2_*. On va montrer que ce produit est celui associé au produit-$*$ défini par S. Gutt sur $T^*(G)$ dans [19]. Rappelons la définition de ce produit-$*$:

Soit $\underline{\mathbf{g}}$ l'algèbre de Lie de G, $S(\underline{\mathbf{g}})$ l'algèbre symétrique de $\underline{\mathbf{g}}$ et $U(\underline{\mathbf{g}})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{\mathbf{g}}$.

- Si P et $Q \in S(\underline{\mathbf{g}})$, alors:

$$P * Q = \sigma^{-1}\Big(\sigma(P).\sigma(Q)\Big)$$

Où σ est l'application de complète symétrisation de $S(\underline{\mathbf{g}})$ dans $U(\underline{\mathbf{g}})$.

- Si f, f'sont des fonctions de G seulement, on a:

$$f * f' = ff'.$$

- Si f est dans $C^\infty(G)$, f' dans $C^\infty(T^*(G))$ et τ est la projection canonique $T^*(G) \longrightarrow G$ alors:

$$\tau^*(f) * f' = \tau^*(f)f' + \sum_{r \geq 0} \frac{(-\lambda)^r}{r!} \tau^*(X_{i_1}...X_{i_r} f) Z_{i_1}...Z_{i_r} f',$$

où les X_i sont des champs de vecteurs sur G et les Z_i sont des champs de vecteurs verticaux de $T^*(G)$ tels que $\omega(Zi, Xj) = \delta_{i,j}$.

Il existe alors un et un seul produit associatif formel sur $T^*(G) \simeq G \times \underline{\mathbf{g}^*}$ qui vérifie ces trois relations.

Proposition **(V, 4, 5)**

On peut étendre la tansformation A à $L^2_* \oplus (\underline{\mathbf{g}} \times V_n)$ d'une façon unique en posant:

$$A_{\tilde{X}} = -i\pi(X) \quad \forall X \in \underline{\mathbf{g}} \times V_n.$$

Preuve

Il suffit de montrer que la relation qui définit A_f peut être étendue aux éléments d'une base de $\underline{\mathbf{g}} \times V_n$.

Si X_j est un élément de $\underline{\mathbf{g}}$, on notera le nombre $(X,0)^{\sim}(g,\alpha)$ par $\tilde{X}(g,\alpha)$. Alors

$$\tilde{X}_j = \alpha_j,$$

donc si φ est C^∞ sur (G) et si supp φ est un compact inclus dans $gexp\, \mathcal{C}$, posons

$$\phi(x) = \varphi(gexp \sum_j x_j X_j)$$

alors ϕ est une fonction C^∞ à support compact dans$\mathbb{R}^m$ et:

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{X}_j}\varphi)(g) &= \int_C \int_{\underline{\mathbf{g}}^*} e^{i\alpha(X)} \alpha_j \varphi(gexpX) dX d\alpha \\ &= \int_{g^*} \alpha_j (\mathcal{F}\phi)(\alpha) d\alpha.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(A_{\tilde{X}_j}\varphi)(g) &= \overline{\mathcal{F}}\Big(\alpha_j(\mathcal{F}\phi)\Big)(0) = -i\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\Big|_{x=0} . \\ &= -i\Big(\pi(X)\varphi\Big)(g)\end{aligned}$$

De même, si $(0,Y)$ est un élément de $\{0\} \times V_n \subset \underline{\mathbf{g}} \times V_n$, alors la fonction $(0,Y)^{\sim}$ que nous notons $\tilde{Y}$ est une fonction des variables de G seulement. Mais si φ' est une fonction des variables de G seulement et φ a les mêmes propriétés que ci-dessus alors:

$$(A_{\varphi'}\varphi)(g) = \int_{\underline{g}^*} \mathcal{F}(\phi'\phi)(\alpha) d\alpha = \overline{\mathcal{F}}\Big(\mathcal{F}(\phi'\phi)\Big)(0)$$

où on a posé:

$$\phi'(x) = \varphi'(gexp\frac{X}{2}) \text{ et } \phi(x) = \varphi(gexpX).$$

Ce qui entraîne que:

$$(A_{\varphi'}\varphi)(g) = \varphi'(g)\varphi(g).$$

Et, vu l'expression de $\pi((0,Y))$, (voir (V, 3)) on a:

$$(A_{\tilde{Y}}\varphi)(g) = -i\Big(\pi\big((0,Y)\big)\varphi\Big)(g).$$

Q.E.D

Remarque (V, 4, 6)

1) $*$ "est" le produit de S. Gutt [19]. Puisque (proposition précédente), le prolongement de la transformation A à $L^2_* \oplus \underline{\mathbf{g}} \times V_n$ définit un produit associatif sur un sous-espace de $L^2_* \otimes S(\underline{\mathbf{g}})$ tel que:

- Si P et Q sont dans $S(\underline{\mathbf{g}})$, alors:

$$P * Q = \sigma^{-1}\Big(\sigma(P)\sigma(Q)\Big)$$

Où σ est la symétrisation de $S(\underline{\mathbf{g}})$ dans $U(\underline{\mathbf{g}})$. ceci se démontre par induction en utilisant A et le fait que π est une représentation de $\mathcal{U}(\underline{\mathbf{g}})$.

- Si f est f' sont des fonctions C^∞ des variables de G seulement

$$f * f' = ff',$$

d'après la preuve ci-dessus.

- Un calcul simple en utilisant la transformation A et la proposition précédente montre que la troisième condition du produit-$*$ de S Gutt est vérifiée.

2) Rappelons que A. Lichnerowicz dans [25] avait défini un produit-$*$ sur $T^*(G)$ de la façon suivante:

On considère G comme une sous variété de$\mathbb{R}^{n+1} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}^{n+1}$, n fois, donc $T^*(G)$ se réalise comme une sous variété de E:

$$E = (\mathbb{R}^{n+1} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}^{n+1}).$$

Soient $\{q_1, ..., q_n\}$, $\{p_1, ..., p_n\}$ deux systèmes libres de$\mathbb{R}^{n+1}$, $\rho_i > 0$, $\sigma_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ et, $\nu_{i,j}$ $(i, j = 1, ..., n)$ des nombres réels, on définit des transformations linéaires sur E par :

$$\begin{aligned}
q'_1 &= \rho_1 q_1 \\
q'_2 &= \rho_2.(q_2 + \gamma_{2,1}q_1) \\
&\ldots \\
q'_n &= \rho_n(q_n + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{q,i}q_i) \\
p'_n &= \rho_n^{-1}(p_n + \sum_{i=1}^{n} \nu_{n,i}p_i) \\
p'_{n-1} &= \rho_{n-1}^{-1}(p_{n-1} + \sigma_{n-1,n}p_n + \sum_{i=1}^{n} \nu_{n-1,i}q_i) \\
&\ldots. \\
p'_1 &= \rho_1^{-1}(p_1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{1,i}p_i + s\sum_{i=1}^{n} \nu_{1,i}q_i).
\end{aligned}$$

Si on impose $dp \wedge dq = dp' \wedge dq'$ on définit alors un groupe G_0 engendré par ces transformations qui agit sur E en préservant la structure symplectique et la connexion plate de E. De plus, l'espace des orbites de E sous G_0 est isomorphe à $T^*(G)$. On considère donc le fibré principal $\pi : E \longrightarrow T^*(G)$ de groupe structurel G_0 et le produit-$*$ de Moyal usuel $*_M$ sur E. Alors on pose, pour f et f' des fonctions C^∞ sur $T^*(G)$:

$$\pi^* f *_M \pi^* f' = \pi^*(f * f')$$

Ce produit-$*$ posséde une polarisation-$*$ réelle naturelle:

$$\{f \text{ tels que } f * q_i = 0 \ \forall i\}.$$

Malheuresement cette polarisation-$*$ est réduite à 0. C'est pourquoi on ne considèrera pas ici le produit-$*$ de Lichnerowicz.

3) Notons que ces deux produits-$*$ (celui de S Gutt et celui de A. lichnerowicz) sont différents (voir [11]).

Soit f dans L^2_* et γ un élément de $G \times V_n$. $\pi(\gamma)$ est alors un opérateur unitaire, ce qui entraîne que $\pi(\gamma)\circ A_f$ est dans $HS\Big(L^2(G)\Big)$. Ainsi de l'action de $G \times V_n$ dans $HS\Big(L^2(G)\Big)$, on déduit une action de $G \times V_n$ dans L^2_*, notée $E(\gamma) \ *$.

Définition (V, 4, 7)

Pour γ dans $G \times V_n$ et f dans L^2_* :

$$A_{E(\gamma)*f} = \pi(\gamma)\circ A_f.$$

Proposition (V, 4, 8)

Les relations suivantes sont vérifiées:

i) $E(\gamma^{-1}) = \overline{E(\gamma)}$

ii) $\frac{d}{dt}\Big(E(exp t\Gamma) * f\Big)\Big|_{t=0} = i\tilde{\Gamma} * f \qquad \forall\, \Gamma \in \underline{\mathbf{g}} \times V_n, \ \forall f \in B.$

Preuve

i) Résulte des égalités suivantes:

$$A_{E(\gamma^{-1})*f} = \pi(\gamma^{-1}) \circ A_f = \pi(\gamma)^* \circ A_f = \Big(A_f^* \circ \pi(\gamma)\Big)^*$$
$$= A^*_{\overline{f} * E(\gamma)} = A_{\overline{\overline{f} * E(\gamma)}} = A_{\overline{E(\gamma)} * f}.$$

ii) Si f est dans B, A_f est de Hilbert-Schmidt et est un vecteur C^∞ pour la représentation de G sur $HS(L^2(g))$ définie par $(\gamma, A) \longrightarrow \pi(\gamma)_\circ A$. Donc f est un vecteur C^∞ pour la représentation $E(\gamma)*$ et:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_{E(exptΓ)*f}|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big(\pi(expt\Gamma)_\circ A_f\Big)\Big|_{t=0} = \pi(\Gamma)_\circ A_f \\ &= A_{i\tilde{\Gamma}*f} = A_{\frac{d}{dt}(E(expt\Gamma)*f)}|_{t=0}\end{aligned}$$

Q.E.D

. D'autre part, on peut définir $E(\gamma)$ comme une distribution sur B. Plus précisément, à partir du produit scalaire sur B défini précédemment, on définit une forme bilinéaire réelle sur B par:

$$<< f, f' >>= Tr(A_{f\circ} A_{f'}), \quad (\text{si } f \quad \text{et } f' \text{ sont dans } B).$$

Avec les notations précédentes, on a:

$$<< f, f' >> = \int_{G\times G} K_f(g, g')K_{f'}(g', g)dgdg'$$

$$= \int_{G\times G} \Phi_f(g, g^{-1}g')\Phi_{f'}(g', g'^{-1}g)dgdg'.$$

Le changement de variable $g^{-1}g' = g"$ entrîne que:

$$<< f, f' >> = \int_{G\times G} \Phi_f(g, g")\Phi_{f'}(gg", g"^{-1})dgdg"$$

$$= \int_{G\times C} (\mathcal{F}_\alpha f)(gexp\frac{X}{2}, X)(\mathcal{F}_\alpha f')(gexp\frac{X}{2}, -X)\Delta(-X)dgdX$$

$$= \int_{G\times C} (\mathcal{F}_\alpha f)(g, X)\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}}(g, X)\Delta(-X)^{-1}dgdX.$$

Rappelons que Δ est définie par :

$$\int_G f(g)dg = \int_C f(expX)\Delta(X)dX.$$

Si f' est une fonction de B, $\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}}(g, X)\Delta(-X)^{-1}$ est un élément de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions C^∞ à support compact inclus dans $G \times C$ et réciproquement. On identifie donc les duaux de ces deux espaces en disant qu'une forme T sur B est une distribution sur B (un élément de B') si et seulement s'il existe une distribution S de $\mathcal{D}'$ telle que:

$$< T, f >_B = < S, \overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}} \Delta(-X)^{-1} >_{\mathcal{D}} \quad \forall f \in B.$$

En particulier toute fonction f de B définit une distribution T_f sur B par:

$$< T_f, f' >_B = << f, f' >> = < (\mathcal{F}_\alpha f), \overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f'}} \Delta(-X)^{-1} >_{\mathcal{D}} .$$

– Si $X \in \mathcal{C}$, la distribution $E(expX)$ existe et s'écrit alors:

$$< E(expX), f >_B = Tr\big(\pi(expX)_\circ A_f\big).$$

Or, le noyau $K_{X,f}$ de l'opérateur $\pi(expX)_\circ A_f$ est

$$K_{X,f}(g, g') = K_f(gexpX, g').$$

Donc :

$$< E(expX), f >_B = \int_G K_{X,f}(g, g)dg = \int_G K_f(gexpX, g)dg$$

$$= \int_G \Phi_f(gexpX, exp - X)dg$$

$$= \int_G (\mathcal{F}_\alpha)(gexp\frac{X}{2}, -X)\Delta(-X)^{-1}dg = \int_G (\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}})(g, X)\Delta(-X)^{-1}dg$$

$$= < 1_G \otimes \delta_X, (\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}})\Delta(-X)^{-1} >_{\mathcal{D}} .$$

Ce que l'on écrira formellement:

$$E(expX) = \mathcal{F}_\alpha(1_G \otimes \delta_X) = 1_G \otimes e^{i\alpha(X)} = 1_G \otimes e^{i\tilde{X}}.$$

– De même si $Y \in \{0\} \times V_n$, la distribution $E(expY)$ existe et s'écrit alors:

$$< E(expY), f > = Tr\big(\pi(Y)_\circ A_f\big) \quad \forall f \in B.$$

puisque, si φ est une fonction de $L^2(G)$

$$\Big(\pi(Y)_\circ A_f\varphi\Big)(g) = e^{i\tilde{Y}}(A_f\varphi)(g).$$

Ce qui entraîne que le noyau $K_{Y,f}$ de l'opérateur $\pi(Y)_\circ A_f$ est:

$$K_{Y,f}(g, g') = e^{i\tilde{Y}} K_f(g, g').$$

Et alors

$$< E(expY), f > = \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} K_f(g,g)dg = \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} \Phi_f(g,1)dg$$

$$= \int_G e^{i\tilde{Y}(g)} (\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}}(g,0)dg =<< e^{i\tilde{Y}} \otimes \delta_0, (\overline{\mathcal{F}_\alpha \overline{f}})\Delta(-X)^{-1} >> .$$

Ce qui implique :

$$E(expY) = \mathcal{F}_\alpha\big(e^{i\tilde{Y}} \otimes \delta_0(\alpha)\big) = e^{i\tilde{Y}(g)} \otimes 1_{\underline{\mathbf{g}}^*}.$$

<u>Remarque</u> (V, 4, 9)

. *On peut définir le produit-$*$ d'une distribution T de B' par une fonction f de B en posant:*

$$< T * f, f' >_B =< T, f * f' >_B \quad \forall f' \in B$$

quand ceci a un sens. En particulier si $T = exp\Gamma$, $(\Gamma \in \underline{\mathbf{g}} \oplus V_n)$, la formule ci-dessus a un sens car:

$$< E(exp\Gamma) * f, f' >_B = Tr\Big(\pi(exp\Gamma)_\circ A_{f\circ} A_{f'}\Big) = Tr(A_{E(exp\Gamma)*f\circ} A_{f'})$$

$$=<< E(exp\Gamma) * f, f' >> .$$

Ce qui montre que les deux définitions de E coïncident.

(V, 5) <u>Transformée de Fourier adaptée</u>

Soit φ dans $C_c^\infty(G \times V_n)$ alors d'après [36] l'opérateur:

$$\pi(\varphi) = \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)\pi(\gamma)d\gamma$$

est un opérateur de Hilbert Schmidt sur $L^2(G)$ qui est l'espace de la réalisation de π. Si on pose:

$$\pi(\varphi) = A_{\mathcal{E}(\varphi)}$$

on définit ainsi une transformation :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : C_c^\infty(G \times V_n) &\longrightarrow L^2_* \\ \varphi &\longmapsto \mathcal{E}(\varphi) \end{aligned}$$

Proposition (V, 5, 1)

Pour φ et φ' dans $C_c^\infty(G \times V_n)$ on a :

i) $$\mathcal{E}(\varphi \times \varphi') = \mathcal{E}(\varphi) * \mathcal{E}(\varphi') \qquad (\text{où } \times \text{ est le produit de convolution})$$

ii) $$\mathcal{E}(\check{\varphi}) = \overline{\mathcal{E}(\varphi)} \qquad \left(\check{\varphi}(\gamma) = \overline{\varphi(\gamma^{-1})}\right)$$

iii) $$Tr\pi(\varphi) = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi)d\mu \qquad (\text{où } d\mu \text{ une mesure invariante sur } T^*(G))$$

iv) *Si on pose* $< \mathcal{E}(\varphi), f >= Tr\left(\pi(\varphi)_\circ A_f\right)$, *pour* $f \in B$ *on définit une distribution qui au sens des distributions peut s'écrire:*

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma)E(\gamma)d\gamma.$$

Preuve

i) Est une conséquence des définitions puisque:

$$\pi(\varphi \times \varphi') = A_{\mathcal{E}(\varphi\times\varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi)\circ}A_{\mathcal{E}(\varphi')} = A_{\mathcal{E}(\varphi)*\mathcal{E}(\varphi')}$$

ii) Découle de la relation

$$\pi(\varphi^v) = \pi(\varphi)^* = A_{\overline{\mathcal{E}(\varphi)}}.$$

iii) La proposition (V,4,2) nous prmet en effet d'écrire:

$$Tr\pi(\varphi) = TrA_{\mathcal{E}(\varphi)} = \int_{T^*(G)} \mathcal{E}(\varphi)d\mu.$$

iv) Si on pose $< \mathcal{E}(\varphi), f >= Tr\left(\pi(\varphi)_\circ A_f\right)$, et si $\{\varphi_n\}$ est une base de $L^2(G)$ alors:

$$\begin{aligned}< \mathcal{E}(\varphi), f >= \sum_n < \pi(\varphi)_\circ A_f\varphi_n, \varphi_n >&= \sum_n \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma) < \pi(\gamma) \circ A_f, \varphi_n, \varphi_n > d\gamma \\ &= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma) \sum_n < \pi(\gamma)_\circ A_f\varphi_n, \varphi_n > d\gamma \\ &= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma) Tr\left(\pi(\gamma) \circ A_f\right) d\gamma \\ &= \int_{G\times V_n} \varphi(\gamma) < E(\gamma), f > d\gamma.\end{aligned}$$

. Maintenant si on se restreint à G, π coïncide avec la représentation régulière droite de G (voir la preuve de la proposition (V, 4, 5)), on a donc obtenu ici une représentation-$*$ associée à la représentation régulière droite de G.

Remarque (V, 5, 2)

Pour obtenir la représentation régulière gauche de G il suffit de changer la définition de l'opérateur A_f comme suit :

$$(A_f\varphi)(g) = \int_C \int_{\mathfrak{g}^*} e^{-i\alpha(X)} f(exp - \frac{x}{2}g, \alpha)\varphi(exp - Xg)dXd\alpha.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ARNAL "$*$-product and representations of Nilpotent Groups", Pac J of Math, 113, 285 (1984).

[2] D. ARNAL "$*$ products and representations of nilpotent groups" preprint I.C.T.P. (Trieste, nov. 1986).

[3] D. ARNAL, J.C. CORTET "$*$ product in the method of orbits for nilpotent groups", J. Geom. and Phys. 2, 2, p.85-116 (1985).

[4] D. ARNAL, J.C. CORTET J.of funct. anal. vol92 $n°$ 1, p.103-135 (1990).

[5] D. ARNAL, J.C. CORTET L.M.P 20 p.141-149 (1990).

[6] D. ARNAL ,S. GUTT . C.R. Acad. Sc. Paris t. 306 série I (1988).

[7] D. ARNAL, M. CAHEN, S. GUTT "Representation of compact Lie groups and Quantisation by deformation" Acad. Royale de Belg. Bull. de la classe des Sc. 3$^{\text{ème}}$ série t. LXXIV 45 (1988 p. 123-141.

[8] F. BAYEN and al. "Deformation theory and quantization I, II" Ann. of Physics 111 p.61-110 (1978).

[9] BERNAT "Représentations des groupes de Lie" Monographie de la société Mathématique de France. Dunod Paris (1972).

[10] F.A. BEREZIN "Quantization" Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R. 38, 5 (1974); Math. U.S.S.R. Izvetija 8, 5, p. 1109-1165, (1974).

see also:

.F.A. BEREZIN "Quantization in complex symmetric spaces" Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R. 39, 2 (1975); Math. U.S.S.R. Izvetija 9, 2 (1975) p. 341-379.

[11] M , CAHEN (editeur): S. GUTT Actes du colloque 'Quantum Theory and Geometry Math.'

[12] M. CAHEN, S.GUTT, J. RAWNSLEY "Quantization of Kähler manifolds I: Geometric interpretation of Berezin's quantization" J. Geom. and Phys. (under press).

[13] M.DE WILDE, P. LECOMTE "Formal deformations of the Poisson Lie algebra of a symplectic manifold and star product, existence, equivalence, derivation". NATO ASI Series, C 247, p 897-960 (1988).

[14] J. DIXMIER "Les Algèbres enveloppantes", Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[15] J. DIXMIER "Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents II", Bull. Soc. Math. France, 85, p. 325 - 388 (1957).

[16] M.DUFLO "Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie" Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., t. 10, p. 265 - 288 (1977).

See also

[Duflo] M.DUFLO Construction de gros ensembles de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie quelconque (Cours d'été du C.I.M.E, Cortona, 1980)

[17] C. FRONSDAL "Remarks on quantization" Reports on Mathematical Physics 15,1, p. 111-145 (1978).

[18] S. GUTT Thèse Université Libre de Bruxelles (1980)

[19] S. GUTT Lett. Math. Phy. 7, 249 (1983).

[20] F. HANSEN "Quantum Mechanics in the Phase Space" Rep. Math. Phy.,20, (1984).

[21] S. HELGASON "Differential Geometry, Lie groups and symmertric Spaces" Academic Press (New- york) (1978)

[22] M.S. KHALGUI "Caractères des groupes de Lie", J. Funct. Anal., t. 47, p. 64 - 77 (1982).

see also:M.S. KHALGUI "Extension des représentations des groupes de Lie construites par M. Duflo."

[23](3) A. KIRILLOV "Eléments de la théorie des représentations" Editions MIR Moscou (1974).

[24] B. KOSTANT "On certain unitary Representations which arise from a Quantization Theory" Lect. Notes in Math., 170, 237 (1970).

[25] A. LICHNEROWICZ "Construction of twisted product for cotangent bundles of classical groups and Stiefel manifolds" L. M. P. 2 133-143 (1977).

[26] J. M. MAILLARD C. R. Acad. Sci. Paris I, 2, 35 (1984).

[27] C. MORENO, P. ORTEGA-NAVARRO "Deformations of the algebra of functions on hermitian symmetric spaces resulting from quantization" Ann. Inst. Henri Poincaré vol. XXXVIII, n 3 (1983),p. 215-241.

[28] PUKANSZKY "Leçons sur les représentations des groupes" Dunod 1967

[29] PUKANSZKY "On the character and the Plancherel Formula of nilpotent groups" J. Funct. Anal., 1, p. 255-280 (1967).

[30] G. RATCLIFF "A 3-steps nilpotent group" J. Funct. Anal., 62, p. 38 -64 (1985)

[31] J. RAWNSLEY "Coherent states and Kähler manifold" J. Math. Oxford 2, 28 p. 403-441 (1977).

[32] F. TRÉVES "Topological spaces, Distributions and Kernels". Academic Press INC (1967)

[33] A. UNTERBERGER "Quantification de certains espaces hermitiens symétriques" Séminaire Goulaouic-Schwartz (1979/80), exposé 16.

[34] M. VERGNE "La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente" Bull. Soc. Math. France 100 p.301 - 335 (1972).

[35] N. WALLACH "Symplectic Geometry and Fourier Analysis" Math. Sc. Press (1977)

[36] G.WARNER "Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie groups I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New-york (1972).

[37] N. WILDBERGER "On the Fourier transform of a compact semi-simple Lie group" preprint Université de Toronto, Toronto, Ontario, Canada (1987).

TABLE DE MATIÈRE