



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Laboratoire de Recherche en Informatique de Metz

# THESE

présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

(mention Sciences)

SPECIALITE INFORMATIQUE

par

Ahmed ZIDNA



"CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES

CARREAUX TROUES"

soutenue devant la commission d'examen

Messieurs:

- Y. GARDAN ( directeur de thèse ) : professeur à l'Université de Metz  
C. ROGER ( rapporteur ) : professeur à l'Université de Lyon  
A. ROUX ( examinateur ) : professeur à l'Université de Metz  
H. SCHAE BEN ( examinateur ) : de la société Basys à Aachen  
M. VERON ( rapporteur ) : professeur à l'Université de Nancy

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1990 0405
Cote	S/M3 30/18
Loc	Magasin

## Remerciement

Je remercie Monsieur Yvon Gardan, qui m'a accueilli dans son laboratoire, pour l'intérêt et la confiance avec lesquels il a toujours suivi l'évolution de ce travail. Aussi lui suis je redevable des heures exaltantes qui ont jalonné cette recherche.

A Claude Roger professeur de l'Université de Lyon et Michel Veron professeur à l'Université de Nancy et directeur du laboratoire d'automatique et de commande numérique, qui ont aimablement accepté d'en être les rapporteurs, j'exprime toute ma gratitude.

A Helmut Schaeben de la société Basys à Aix la chapelle et André Roux de l'Université de Metz qui ont accepté d'examiner cette thèse je réitère ma gratitude et mon amitié.

Je dois témoigner que telle qu'elle est, cette thèse n'aurait pas vu le jour sans l'atmosphère stimulante d'un groupe où les interactions sont constantes.

je remercie vivement Dominique et Myriam qui ont eu l'amabilité de lire ce manuscrit et pour leurs conseils avisés.

Les techniciennes, pour la bonne humeur constante au cours de ce travail.

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

#### CHAPITRE I

I.1. <u>INTRODUCTION</u> .....	7
I.2. <u>COURBES DE BEZIER</u> .....	10
I.2.1. GENERALITES .....	10
I.2.2. UTILITE DES FORMES PARAMETRIQUES.....	10
I.2.3. COURBE DE BEZIER .....	11
I.2.4. CONSEQUENCE.....	11
I.2.5. COURBE DE BEZIER CUBIQUE .....	12
I.2.6. ANALYSE DES POLYNOMES DE BERNSTEIN.....	13
I.3. <u>ELEVATION ET DIMINUTION DU DEGRE D'UNE COURBE DE BEZIER</u> .....	13
I.3.1. ELEVATION DU DEGRE.....	13
I.3.2. DIMINUTION DU DEGRE.....	14
I.4. <u>ECRITURE D'UN POLYNOME DANS LA BASE DE BERNSTEIN</u> .....	15
I.5. <u>CALCUL D'UNE COURBE DE BEZIER-ALGORITHME DE DE CASTELJAU</u> .....	16
I.5.1. INTRODUCTION.....	16
I.5.2. LE SCHEMA DE HORNER .....	16
I.5.3. EVALUATION D'UNE COURBE EN UNE SUITE ARITHMETIQUE.....	16
I.5.4. ALGORITHME DE DE CASTELJAU.....	17
I.6. <u>COURBE B.SPLINE</u> .....	18
I.6.1. INTRODUCTION.....	18
I.6.2. ANALYSE DES FONCTIONS MELANGES.....	20
I.6.3. CONSEQUENCE SUR LES COURBES B.SPLINE .....	21
I.6.4. EVALUATION D'UNE B.SPLINE - ALGORITHME DE COX-DE BOOR.....	22
I.6.5. SUBDIVISION D'UNE B.SPLINE.....	23
I.6.6. DERIVATION .....	24
I.6.7. CONCLUSION .....	25
I.7. <u>REPRESENTATION DE SURFACE</u> .....	26
I.7.1. INTRODUCTION.....	26
I.7.2. CARREAUX DE BEZIER.....	26
I.7.3. EVALUATION D'UN CARREAU DE BEZIER.....	26
I.7.4. PRATIQUE DE LA MISE DANS LA BASE DE BERNSTEIN D'UN CARREAU DE BEZIER .....	27
I.7.5. REPRESENTATION D'UNE BEZIER TRIANGULAIRE.....	28
I.7.6. PRATIQUE DE LA MISE DANS LA BASE DE BERNSTEIN D'UNE BEZIER TRIANGULAIRE .....	29
I.7.7. EVALUATION D'UNE BEZIER TRIANGULAIRE.....	30
I.7.8. SURFACES B.SPLINES.....	30

I.8. <u>COURBES ET SURFACES DE BEZIER RATIONNELLES</u> .....	32
I.8.1. INTRODUCTION.....	32
I.8.2. DEFINITION DES COURBES DE BEZIER RATIONNELLES.....	32
I.8.3. INFLUENCE DES COEFFICIENTS DE PONDERATION .....	34
I.8.4. SURFACES DE BEZIER RATIONNELLES.....	34
I.8.5. REPRESENTATION D'UN CYLINDRE PAR UNE BEZIER RATIONNELLE.....	34
I.9. <u>RACCORDEMENT</u> .....	40
I.10. <u>CALCUL D'INTERSECTION</u> .....	41
I.11. <u>CONCLUSION</u> .....	42

## CHAPITRE II

II.1. <u>PREMIERE PARTIE: INTERPOLATION PAR UNE COURBE</u> .....	44
II.1.1. INTRODUCTION.....	44
II.1.2. INTERPOLATION.....	45
II.1.3. INTERPOLATION PAR UNE COURBE DE BEZIER.....	46
II.1.4. INTERPOLATION PAR UNE B.SPLINE.....	48
II.1.5. DONNEES INADEQUATES-DEFICIENCE DU RANG .....	50
II.1.6. CONCLUSION .....	52
II.2. <u>DEUXIEME PARTIE: INTERPOLATION PAR UNE SURFACE</u> .....	57
II.2.1. INTRODUCTION.....	57
II.2.2. INTERPOLATION PAR UN CARREAU DE BEZIER.....	57
II.2.3. CONCLUSION.....	59

## CHAPITRE III

III.1. <u>INTRODUCTION</u> .....	62
III.2. <u>PRESENTATION DU PROBLEME</u> .....	63
III.3. <u>PREMIERE PROPOSITION</u> .....	68
III.3.1. TECHNIQUE D'AFFICHAGE.....	68
III.3.2. ETUDE DE $P(S_i(t))$ .....	69
III.3.3. CONCLUSION .....	70
III.4. <u>DEUXIEME PROPOSITION</u> .....	73
III.4.1. SCHEMA D'ETUDE.....	73
III.4.2. TECHNIQUE D'AFFICHAGE.....	77
III.4.3. CONCLUSION .....	78

III.5. <u>TROISIEME PROPOSITION</u> .....	80
III.5.1. INTERPOLATION PAR UNE SPLINE CUBIQUE.....	80
III.5.2. TRANSFORMATION DANS LA BASE DE BERNSTEIN.....	82
III.5.3. ECRITURE D'UNE SPLINE EN FONCTION DES PARAMETRES U ET V DU DOMAINE.....	83
III.5.4. TECHNIQUE D'AFFICHAGE.....	83
III.5.5. CONCLUSION.....	83
III.6. <u>QUATRIEME PROPOSITION</u> .....	85
III.7. <u>CONCLUSION</u> .....	87
<hr/> <b><u>CAPITRE IV</u></b>	
IV.1. <u>INTRODUCTION</u> .....	89
IV.2. <u>INTERACTION GLOBALE DU MODELE PAR LES BEZIER</u> .....	89
IV.2.1. DEFINITION D'UNE DROITE DE BALAYAGE.....	89
IV.2.2. CONTROLE DE LA DEFORMATION A L'AIDE DE L'ALGORITHME DE DE CASTELJAU ET D'UNE DROITE.....	91
IV.2.3. CONTROLE DE LA DEFORMATION A L'AIDE DE L'ALGORITHME DE DE CASTELJAU ET DE DEUX DROITES DE BA LAYAGE.....	92
IV.3. <u>INTERACTION DU MODELE PAR LES SPLINES</u> .....	92
IV.4. <u>INTERET DU MODELE PAR LES B.SPLINES POUR L'INTERACTION</u> .....	93
IV.5. <u>CONCLUSION</u> .....	93
<hr/> <b><u>CONCLUSION</u></b> .....	100
<hr/> <b><u>ANNEXES</u></b>	
<b><u>ANNEXE 1</u></b> INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE COURBE DE BEZIER.....	105
<b><u>ANNEXE 2</u></b> APPROCHE D'UN POINT DE $IR^3$ PAR UN POINT D'UNE COURBE OU D'UN CARREAU DE BEZIER.....	114
<b><u>ANNEXE 3</u></b> EXEMPLE D'EVALUATION D'ERREUR.....	123
<b><u>ANNEXE 4</u></b> SECTION D'UNE SURFACE PARAMETRIQUE PAR UNE SURFACE ALGEBRIQUE.....	125
<b><u>ANNEXE 5</u></b> UTILITE DES CARREAUX RESTREINTS POUR LA MODELISATION DES SOLIDES.....	131
<b><u>ANNEXE 6</u></b> DEFINITION D'OBJETS TROUES PAR EXTRUSION.....	133
<hr/> <b><u>BIBLIOGRAPHIE</u></b> .....	134

# ***INTRODUCTION***

Les objets du monde industriel ont souvent des formes gauches. Leur représentation informatique doit permettre d'effectuer des calculs et procéder à des manipulations des informations telle que la modification de la forme.

La représentation d'objets réels du point de vue leurs propriétés géométriques est une modélisation géométrique. C'est donc une partie de la modélisation d'un objet ne prenant en compte que sa forme.

Au cours d'une conception, il est fréquent d'introduire des algorithmes complexes pour effectuer des opérations entre surfaces. Il a fallu donc trouver une représentation de surfaces adaptée à ce genre d'opérations: l'intersection , le raccordement etc.....

Il y a différentes manières pour représenter une surface:

- \* la représentation fonctionnelle  $z = f(x,y)$ : qui ne peut représenter les tangentes verticales et qui n'est pas adaptée au problème d'interpolation.

- \* la représentation implicite  $f(x,y,z) = 0$ , cette famille présente l'avantage d'être une famille fermée; certains systèmes utilisent les formes implicites de degré 2, malheureusement pour représenter une surface complexe, il faut recourir à une forme de degré supérieur.

- \* la représentation polygonale: utilisée dans un grand nombre d'application telle que la simulation et consiste à approcher une surface par des facettes quasi-planes, on utilise aussi la triangulation pour les approximations de surfaces.

- \* la représentation paramétrique: la plus courante, dans cette représentation on peut représenter les tangentes verticales, leur avantage se trouve accru car elles sont invariantes par les transformations affines,  $p(u,v)$  peut être, une Bézier , une B.spline polynômiale ou une B.spline rationnelle non uniforme(Nurbs).

Les avantages de la forme paramétrique et son adaptation au calculs numériques nous incitent à utiliser cette représentation pour modéliser les courbes et surfaces.

Lors d'une conception, des cas pratiques peuvent présenter des modèles géométriques complexes. Un exemple concret qui inspirera notre travail par la suite, est la création d'une fenêtre ou d'un toit ouvrant dans une carrosserie.

Notre approche du problème sera définie par étapes, ainsi:

Dans le premier chapitre, on rappelle les fonctions de Bernstein-Bézier et les fonctions B-splines qui sont la base de la modélisation des surfaces dans de nombreux systèmes.

Nous montrons par l'exemple du cylindre, la capacité des Bézier ( respectivement les B.splines ) rationnelles à représenter exactement les quadriques.

Dans le deuxième chapitre, une première partie traite le problème d'interpolation par une courbe de Bézier ou par une B-spline. Autrement dit, comment faire passer une courbe de Bézier respectivement une B-spline par des points donnés. Ces points seront supposés répartis uniformément sur la courbe ou répondant à des hypothèses similaires.

La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'interpolation par une surface de Bézier, autrement dit, comment faire passer une surface de Bézier par des points donnés. Nous insistons sur le fait que ces points doivent être arrangés logiquement comme un réseau rectangulaire, mais qu'il n'existe pas de restriction sur leur position dans l'espace.

Dans le troisième chapitre on étudiera un exemple pratique: "soient un cylindre et un carreau de Bézier approchés par des facettes planes; on désire définir l'objet résultant de la différence de ces deux objets".

Le modèle géométrique défini doit présenter "un trou" à l'intérieur, ce qui correspond à un carreau de Bézier troué. La difficulté réside essentiellement dans la modélisation de la restriction.

Le fait que les polynômes de polynômes sont des polynômes est l'idée qui s'impose pour la représentation de carreaux restreints.

Trois approches, dont on comparera les avantages et les inconvénients seront proposées. Ces approches ne forment qu'un cas particulier d'un modèle plus général.

Enfin, on s'intéresse dans le dernier chapitre à l'utilisation interactive de ces modèles pour la modélisation des carreaux restreints.

A noter que les problèmes de base sont volontairement sortis en annexes pour faciliter la lecture.

# ***CHAPITRE 1***

## ***REPRESENTATION DES COURBES ET DES SURFACES***

## 1.1. Introduction

De nombreux types de courbes et de surfaces peuvent être représentées par leurs équations tels que le cylindre, la sphère..... . Cependant, dans le cas des courbes et des surfaces gauches très utiles pour la conception de formes dans de nombreux domaines tels que l'automobile et l'aéronautique; il a été nécessaire de déterminer une représentation qui permet à l'utilisateur d'effectuer toutes les opérations en conception et en fabrication telles que l'intersection ou le raccordement.

On était donc amené à chercher des représentations économiques en données et facilitant les traitements désirés. Ces représentations doivent présenter des qualités fondamentales.

- *Le contrôle local de la forme de la surface.*
- *Le lissage.*
- *La continuité.*

Dans ce chapitre, nous introduisons des modèles qui répondent à ces exigences et qui sont utilisés dans de divers domaines de fabrication et de modélisation. Nous abordons les modèles des courbes, puis leurs correspondants surfaciques.

## 1.2 Courbes de Bézier

### 1.2.1. Généralités

Les courbes et les surfaces de Bézier constituent un des premiers essais de création d'une définition à la fois souple et intuitive d'une surface pour la *C.A.O (conception assistée par ordinateur)* . Elles ont été développées dans le cadre de plusieurs systèmes de C.A.O dont *UNISURF* chez *Renault*.

Elles sont intéressantes dans le sens qu'elles fournissent un contexte convenable dans lequel on peut introduire l'idée de division et de retouche [BEZ 86].

### 1.2.2. Utilité des formes paramétriques

En général, dans un système de C.A.O, les courbes ou surfaces ne peuvent être exprimées par des équations du type  $Y = f(X)$  ; en effet:

\* La forme d'un objet peut avoir des tangentes verticales, ce qui posera des problèmes avec une représentation par une fonction  $Y=f(X)$ .

\* Dans un système C.A.O, on peut avoir à manipuler des courbes fermées, dès lors, elles ne peuvent pas être représentées par une fonction ordinaire du type  $Y=f(X)$ .

Pour toutes ces raisons, on utilisera la forme paramétrique pour représenter les courbes et les surfaces. Ainsi une courbe plane sera représentée par les deux équations suivantes:

$$\begin{cases} X = U(t) \\ Y = V(t) \end{cases}$$

Dans le cas d'une courbe de  $\mathbb{R}^3$  on a:

$$\begin{cases} X = U(t) \\ Y = V(t) \\ Z = W(t) \end{cases}$$

### 1.2.3. Courbe de Bézier

Une courbe de Bézier de degré  $n$  est définie de la façon suivante:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) \quad \text{avec } u \text{ dans } [0,1]$$

dans laquelle les points  $P_i$  sont les points de contrôle, et les  $B_i^n(u)$  sont les polynômes de Bernstein tels que:

$$B_i^n(u) = C_n^i (1-u)^{n-i} u^i$$

Les  $B_i^n(u)$  vérifient les propriétés suivantes:

#### a) Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-u)^{n-i} u^i = [(1-u)+u]^n = 1$$

#### b) Positivité

Pour  $u$  dans  $[0, 1]$

$$B_i^n(u) \geq 0$$

En effet  $(1-u)$  et  $u$  sont deux quantités positives.

#### c) Récurtivité

$$B_i^n(u) = (1-u) B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u)$$

### 1.2.4. Conséquence

#### \* Propriétés de l'enveloppe convexe

Il résulte immédiatement des deux premières propriétés qu'une courbe de Bézier est située à l'intérieur de l'enveloppe convexe dont les sommets sont les points de contrôle.

#### \* Invariance par les translations

La translation d'une même quantité des points de contrôle n'altère pas la forme d'une courbe de Bézier. En effet, soient  $t=(dx,dy,dz)$  le vecteur de déplacement;  $P(u)$  la courbe de Bézier définie par les  $P_i$  et  $P_t(u)$  la courbe de Bézier définie par les  $P_i+t$ .

$$P_t(u) = \sum_{i=0}^n (P_i + t) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) + t \sum_{i=0}^n B_i^n(u) = P(u) + t$$

Ainsi on peut, soit déplacer par translation les points de contrôle et ensuite, calculer les points de la courbe qu'ils définissent, soit calculer directement la courbe et ensuite déplacer par translation tous les points qui sont situés sur elle, et le résultat est identique.

**\*-Invariance par les rotations et les changements d'échelle**

On peut faire effectuer une rotation à une courbe sans changer sa forme spécifique. Supposons qu'on fasse subir aux points de contrôle une rotation définie par un angle A. Soit R la matrice réalisant cette rotation; soit P(u) la courbe définie par les points P<sub>i</sub>; soit P<sub>r</sub>(u) la courbe définie par les points RP<sub>i</sub>.

$$P_r(u) = \sum_{i=0}^n (R P_i) B_i^n(u) = R \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) = R.P(u)$$

Ainsi on peut effectuer une rotation aux points de contrôle et calculer ensuite les points de la courbe qu'ils définissent ou calculer d'abord les points de la courbe d'origine et de leur faire effectuer la même rotation.

Un raisonnement semblable établit que la forme d'une courbe de Bézier n'est pas affectée par un changement d'échelle des coordonnées des points de contrôle, le même résultat sera obtenu si nous appliquons le changement d'échelle aux points de la courbe initiale.

**\*-Remarque:**

On démontre que les polynômes de Bernstein de degré n sont une base pour les polynômes de degré n.

**1.2.5. Courbe de Bézier cubique**

Les cubiques, comme leurs noms l'indiquent sont de degré 3; elles sont utiles et faciles à manipuler. A travers cette classe particulière de courbes, nous étudions et analysons les fonctions de Bernstein et leur rôle important dans l'interactivité des courbes de Bézier. Les courbes de Bézier cubiques sont représentées par:

$$\begin{aligned} P(u) &= P_0 B_0^3(u) + P_1 B_1^3(u) + P_2 B_2^3(u) + P_3 B_3^3(u) \\ &= (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3 \end{aligned}$$

On a évidemment:

$$P(0) = P_0 \text{ et } P(1) = P_3.$$

C'est à dire que le premier et le dernier point de contrôle sont situés sur la courbe.

## 1.2.6 Analyse des polynômes de Bernstein

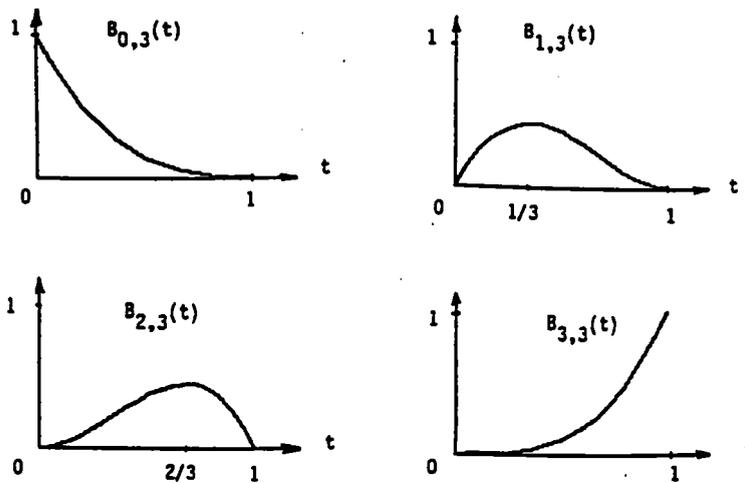


fig I.1 variation des polynômes de Bernstein dans le cas d'une cubique

Chacune des courbes représente l'influence que chaque point de contrôle exerce sur la courbe pour chacune des valeurs paramétriques  $u$ . On peut constater ce qui suit:

- \* le premier point de contrôle  $P_0$  qui correspond à la fonction  $B_{0,3}(u)$  exerce le plus d'influence quand  $u=0$ , puisqu'à ce moment, elle vaut 1. En fait, la position des trois autres points de contrôle n'a aucune importance pour  $u=0$  car leur fonction de Bernstein associée vaut 0.
- \* le dernier point de contrôle  $P_3$  qui correspond à la fonction de Bernstein  $B_{3,3}(u)$  a un comportement symétrique à celui du point  $P_0$  lorsque  $u=1$  cette fois.
- \* les points de contrôle intérieurs  $P_1, P_2$ , également symétriques l'un de l'autre, ont le plus d'influence sur la courbe lorsque  $u=1/3$  et  $u=2/3$  respectivement.

Il faut remarquer que les fonctions de Bernstein ne sont jamais nulles, excepté pour les valeurs  $u=0$  et  $u=1$ . Cela signifie que la localisation de n'importe quel point de contrôle aura une influence sur la position finale de la totalité de la courbe de Bézier.

### 1-3 Elévation et diminution du degré d'une courbe de Bézier

#### 1.3.1 Elévation du degré

Pour augmenter la flexibilité d'une courbe de Bézier, on augmente son degré. Une courbe de Bézier de degré  $n$  de polygone de contrôle  $(P_0, \dots, P_n)$  peut aussi s'écrire comme une courbe de Bézier de degré  $n+1$  de polygone de contrôle  $(P'_0, \dots, P'_{n+1})$ ; il suffit de prendre:

$$P'_0 = P_0 ; P'_{n+1} = P_n ;$$

$$P'_i = (i/(n+1)) P_{i-1} + (1 - i/(n+1))P_i \text{ pour } i= 1.....n$$

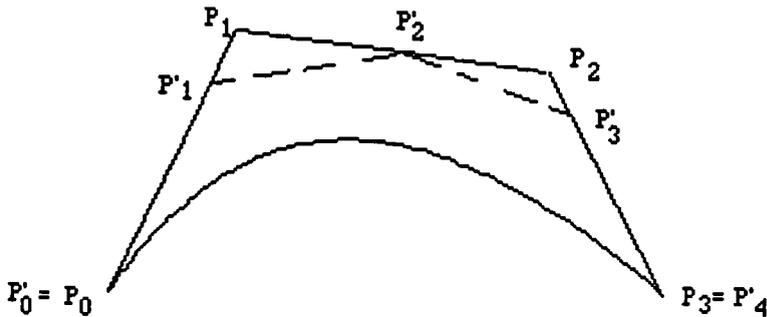


fig I.2 Définition d'un nouveau polygone de contrôle P' à partir de l'ancien polygone P.

Remarque:

L'augmentation du degré d'une courbe de Bézier est une notion virtuelle, La nouvelle famille de Bernstein n'est plus libre mais génératrice.

I.3.2 Diminution du degré

Soit une courbe de Bézier de degré  $n+1$  de polygone de contrôle  $(P'_0, \dots, P'_{n+1})$ . Une condition suffisante pour qu'elle puisse s'écrire aussi comme une courbe de Bézier de degré  $n$  de polygone de contrôle  $(P_0, \dots, P_n)$  est que la différence progressive d'ordre  $n+1$

$$\Delta^{n+1} P_0 = 0$$

Il suffit de prendre alors:

$$P_0 = P'_0 ; P_i = ((n+1)/(n+1-i)) P'_i - (i/(n+1-i))P_{i-1} \text{ pour } i=1.....n$$

Rappel:

la différence progressive d'ordre  $r$  de  $P_i$  est définie de la façon suivante:

$$\Delta^r P_i = \Delta^{r-1} P_{i+1} - \Delta^{r-1} P_i$$

$$\Delta^1 P_i = P_{i+1} - P_i ; \Delta^0 P_i = P_i$$

Remarque:

une cubique dont les tangentes aux extrémités se rencontrent en un point  $p^*$  tel que:

$$p_1 = (p_0 + 2p^*)/3 \quad \text{et} \quad p_2 = (p_3 + 2p^*)/3$$

n'est autre qu'un arc de parabole, en effet, la différence progressive d'ordre 3 de  $P_0$  est nulle.

**I.4 Ecriture d'un polynôme dans la base de Bernstein**

Soit un polynôme  $P(u)$  qu'on souhaite écrire dans la base de Bernstein, on a:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) \quad , \quad P(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$$

Les formules de changement de la base canonique à la base de Bernstein permettent de calculer les  $P_i$ , soit:

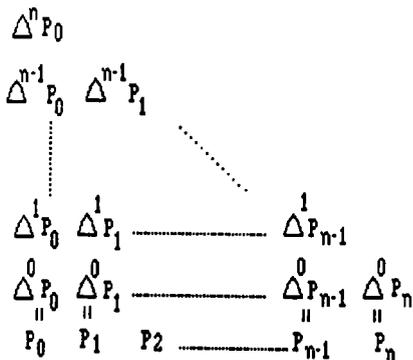
$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{C_k^i}{C_n^i} a_i \quad \text{pour } k=0, \dots, n$$

D'après cette expression, le calcul des  $P_k$  nécessite d'importantes opérations, Il est donc plus avatageux d'utiliser la méthode suivante:

On dérive  $k$  fois les deux expressions de  $P(u)$  et on se place à l'origine  $u=0$ . Nous obtenons:

$$\Delta^k P_0 = \frac{a_k}{C_n^k} \quad k=0, \dots, n$$

Nous déterminons alors les  $P_k$  par le schéma suivant:



avec la relation :

$$\Delta^r P_i = \Delta^r P_{i+1} + \Delta^{r+1} P_{i+1} \quad i=1, \dots, n \quad \text{et} \quad r=0, \dots, n$$

Ce qui nécessite  $n$  divisions et  $n(n+1)/2$  additions, si l'on omet les calculs nécessaires pour les  $C_n^k$ .

## Remarque

Dans les mêmes conditions, le calcul des  $P_k$  à l'aide de la première méthode nécessite  $(n+1)(n+2)/2$  additions, autant de multiplications, autant de divisions. Pour un degré élevé la conversion d'une base à l'autre s'induit d'erreur qui peuvent fausser certains résultats comme on le verra par la suite (ANNEXE 3).

### I-5 Calcul d'une courbe de Bézier - Algorithme de De Casteljaou

#### I.5.1 Introduction

Soit une courbe paramétrique plane définie dans  $[0,1]$  par :

$$P : [0, 1] \text{ -----} > \mathbb{R}^2$$
$$u \text{ -----} > (x(u), y(u))$$

La modélisation de cette courbe nécessite son évaluation en une série de paramètres de  $[0,1]$ .

#### I.5.2 Le schéma de Horner

Le schéma de Horner est un moyen simple pour évaluer un polynôme. Par exemple, si on prend la cubique :

$$p(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$$

Au lieu d'un calcul direct de  $p(u)$ , on le met sous une forme appropriée :

$$p(u) = [(au + b)u + c]u + d$$

Ce qui réduit le nombre d'opérations à 3 additions et 3 multiplications. Et plus généralement l'évaluation d'un polynôme de degré  $n$  en un paramètre  $u$  nécessite  $n$  additions et  $n$  multiplications.

#### I.5.3 Evaluation d'une courbe en une suite arithmétique

Il existe une autre méthode, appelée, méthode des différences progressives pour évaluer un polynôme en une série de paramètres formant une suite arithmétique strictement croissante dans  $[0,1]$  ; elle consiste à déduire la valeur  $p((i+1)/n)$  à partir de celle de  $p(i/n)$ .

En effet si  $p(u)$  est de degré 1, soit  $p(u) = cu + d$  ; l'ensemble des points  $p_i$  de ce segment de droite tel que  $p(i/n) = p_i$  peut être calculé aisement, car la différence  $p_{i+1} - p_i$  est constante et est égale à  $c/n$ .

Le calcul de  $p_0 = p(0)$  induit celui de  $p_i$ . Ce dernier nécessitant une seule addition.

Pour une cubique :

$$p(u) = au^3 + bu^2 + cu + d$$

on a la suite des différences progressives:

$$P_{i+1} - P_i = d_{1,i} = (3i^2 + 3i + 1) a/n^3 + (2i + 1) b/n^2 + c/n$$

$$d_{1,i+1} - d_{1,i} = d_{2,i} = 6(i + 1) a/n^3 + 2 b/n^2$$

$$d_{2,i+1} - d_{2,i} = d_{3,i} = 6 a/n^3$$

Et l'on calcule aisement pour  $i=0$ , les valeurs  $p_0, d_1, d_2, d_3$  :

$$p_0 = p(0) = d$$

$$d_1 = a/n^3 + b/n^2 + c/n$$

$$d_2 = 6a/n^3 + 2 b/n^2$$

$$d_3 = 6 a/n^3$$

Le calcul de  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , nécessite ainsi 3 additions formulées ainsi.:

$$P_{i+1} <----- P_i + d_1$$

$$d_1 <----- d_1 + d_2$$

$$d_2 <----- d_2 + d_3$$

Et plus généralement, l'évaluation d'un polynôme de degré  $n$  à l'aide des différences progressives nécessite  $n$  additions.

Cependant, la méthode des différences progressives peut induire une représentation erronée de la courbe, si la suite de paramètres est mal choisie. Pour réduire le pourcentage d'erreur, on procède à une subdivision de la courbe au point  $1/2$ .

#### I.5.4 Algorithme de De Casteljaou

L'algorithme de De Casteljaou permet de calculer une courbe de Bézier. Ces calculs sont effectués pour  $t$  dans  $[0, 1]$ , car dans ce cas, nous manipulons des combinaisons linéaires convexes, ce qui est un facteur de stabilité [CAST 87].

Si  $(P_0, \dots, P_n)$  est le polygone de contrôle de  $P(t)$  alors, on a:

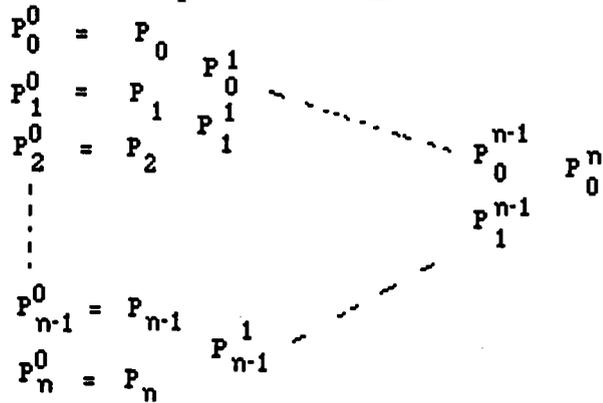
1) Pour  $i=0, \dots, n$  faire  $P_i^0 = P_i$

2) Pour  $j=1, \dots, n$  faire  
 pour  $i=0, \dots, n-j$  faire

$$P_i^j = (1-t) P_i^{j-1} + t P_{i+1}^{j-1}$$

3)  $P(t) = P_0^n$

Le schéma classique est le suivant:



En plus de la valeur  $P(t)$ , cet algorithme donne la valeur de toutes les dérivées en ce point:

$$P^{(j)}(t) = \frac{n!}{(n-j)!} \Delta^j P_0^{n-j}$$

Ainsi, on remarque que la dérivée d'ordre  $j$  n'utilise que les points de la  $j$ ème colonne; par exemple:

$$P''(t) = n(n-1)(P_2^{n-2} - 2P_1^{n-2} + P_0^{n-2})$$

Pour  $n=3$ , on a :

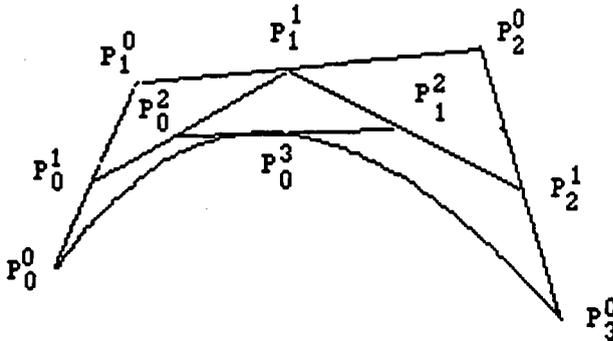


fig I.3 Evaluation d'une cubique à l'aide de l'algorithme de De Casteljaou.

L'algorithme de De Casteljaou permet de subdiviser une courbe de Bézier en 2 courbes de Bézier de polygones de contrôle respectifs  $P_0^0, P_0^1, P_0^2, P_0^3$  et  $P_0^3, P_1^2, P_2^1, P_3^0$ .

## 1.6 Courbes B.Spline

### 1.6.1 Introduction

Les courbes B-spline ont été introduites par FERGUSON chez Boeing. Dans le même temps C.de BOOR et W.GORDON étudiaient ces courbes chez GENERAL MOTORS.

GORDON ET RIESENFELD étaient les premiers à montrer que les courbes B.spline sont une généralisation des courbes de Bézier [BOO 72] [COX 82] [BOH 85].

La formulation des courbes B-spline est semblable à celle des courbes de Bézier. La différence fondamentale réside dans la formulation des fonctions pondérantes. L'équation d'une courbe B.spline est:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^k(u)$$

où les  $P_i$  sont les  $n+1$  points de contrôle, et les  $N_i^k(u)$  sont les fonctions pondérantes qui ont les propriétés suivantes:

a) Partition de l'unité

$$\sum_{i=0}^n N_i^k(u) = 1 \quad \text{Pour tout } u \text{ dans } [u_{k-1}, u_{n+1}[$$

b) Positivité

$$N_i^k(u) \geq 0 \quad \text{pour tout } u$$

c) Continuité

$$N_i^k(u) \text{ est de classe } C^{k-2}$$

d) Un support local

$$N_i^k(u) = 0 \quad \text{si } u \text{ n'appartient pas à } [u_i, u_{i+k}[$$

e) Récurtivité

$$N_i^k(u) = \frac{(u - u_j)}{(u_{j+k-1} - u_j)} N_i^{k-1}(u) + \frac{(u_{j+k} - u)}{(u_{j+k} - u_{j+1})} N_{i+1}^{k-1}(u)$$

où

$$N_i^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \text{ appartient à } [u_i, u_{i+1}[ \\ 0 & \text{si } u \text{ n'appartient pas à } [u_i, u_{i+1}[ \end{cases}$$

Puisque dans cette formule, les dénominateurs peuvent être nuls, on adopte la convention  $0/0=0$ .

L'ordre  $k$  de la courbe est toujours un entier compris entre 2 et  $n+1$ .

Les valeurs  $u_i$  sont les éléments d'un vecteur appelé vecteur des noeuds. Un vecteur noeud est tout simplement une suite croissante de valeurs  $u_i$ .

L'ordre  $k$  de la courbe est reflété dans le vecteur noeud car il faut spécifier des noeuds de multiplicité  $k$  aux deux extrémités du vecteur. Par exemple, si l'on considère 5 points de contrôle ( $n=4$ ) alors une courbe B.spline d'ordre  $k=3$  utilisera le vecteur nodal suivant: (0 0 0 1 2 3 3 3).

Les valeurs de  $u_i$  indiquent également l'intervalle dans lequel peut varier le paramètre  $u$ . Contrairement aux courbes de Bézier où  $u$  variait entre 0 et 1; avec les B.spline le paramètre  $u$  peut varier dans l'intervalle  $[0, u_{\max}]$ , où  $u_{\max}$  est la valeur maximale des éléments du vecteur nodal.

Dans le cas où il n'y a aucun point de contrôle multiple, la valeur  $u_{\max}$  est donnée par la relation  $u_{\max} = n - k + 2$ .

Le vecteur nodal U peut se calculer aisément comme suit:

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq k-1 \\ i-k+1 & \text{si } k \leq i \leq n+1 \\ n-k+2 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+k \end{cases}$$

\*- Remarques

1. Dans ce cas le vecteur nodal U est dit quasi-uniforme.
2. Les courbes B.spline qui sont une généralité des courbes de Bézier ont toutes leurs propriétés.

I.6.2 Analyse des fonctions mélanges

Les fonctions mélanges sont la clé du comportement des courbes B.splines. Supposons que l'on ait 6 points de contrôle (  $n=5$  ), et que l'ordre k soit égal à 3.

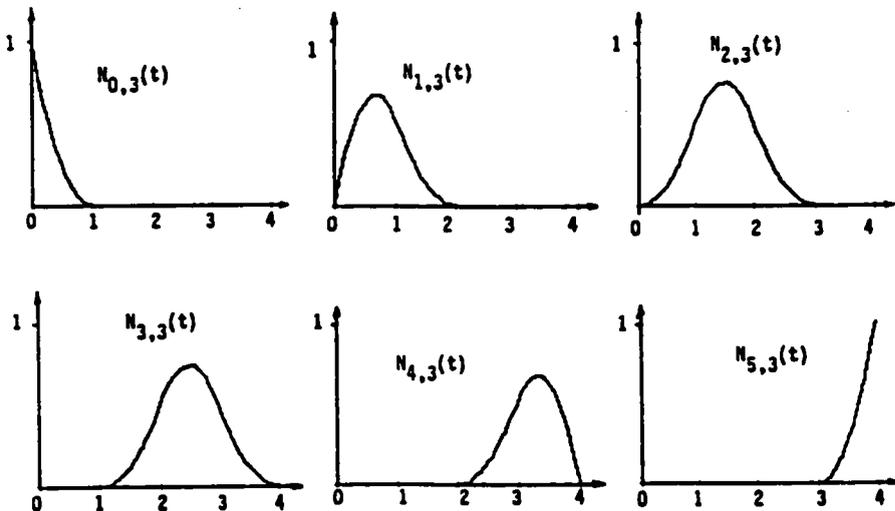


fig I.4 Fonctions mélanges dans le cas  $n=5$  et  $k=3$   
le vecteur nodal est égal à ( 000123444)

Dans cet exemple, le point de contrôle  $P_0$  influence la courbe uniquement dans l'intervalle  $[0,1]$  car la fonction  $N_{0,3}(t)$  est nulle pour toute autre valeur du paramètre t. Le point de contrôle  $P_1$  influence la forme de la courbe uniquement dans l'intervalle  $[0,2]$  car la fonction  $N_{1,3}(t)$  est nulle pour toute autre valeur du paramètre t. Le point  $P_2$  influence la forme de la courbe uniquement dans l'intervalle  $[0,3]$  car la fonction mélange  $N_{2,3}(t)$  est nulle pour toute autre valeur du paramètre t ,etc...

On remarque dans cet exemple que trois fonctions mélanges au plus sont différentes de zéro pour n'importe quel valeur de t. Ainsi, il y'a au plus 3 points de contrôle sur les 6 qui exercent une influence locale sur la forme de la courbe.

Voici un autre exemple dans lequel  $n=3$  et  $k=2$ .

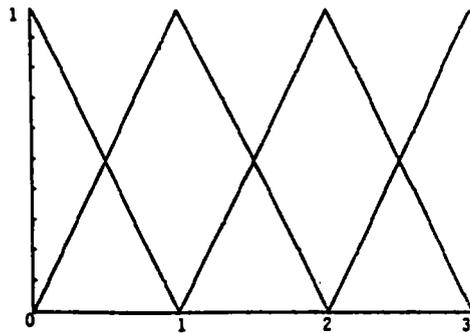


fig I.5 Fonctions mélanges dans le cas  $n=3$  et  $k=2$   
le vecteur nodal est égal à (001233)

### 1.6.3 Conséquence sur les courbes B.Spline

1- Le contrôle de la courbe est local. En effet la base des B.splines est non globale. Chaque sommet affecte la forme de la courbe dans un intervalle donné.

2- La base B.spline permet de changer l'ordre de la courbe sans changer le nombre de sommets du polygone. Cela est avantageux car une courbe d'ordre élevé est plus difficile à contrôler et à calculer avec précision. En général, les B.splines d'ordre 4 sont suffisantes pour un grand nombre d'applications. Nous le verrons par la suite dans le chapitre 3.

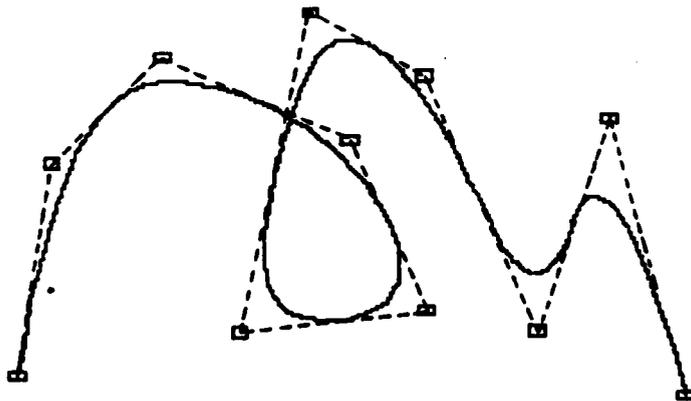


fig I.6 exemple d'une courbe B.spline d'ordre 3

3- Si l'ordre de la courbe est égal au nombre de sommets du polygone, alors la courbe B.spline obtenue est identique à la courbe de Bézier correspondante.

4- Les B.splines permettent de créer des courbes avec des points anguleux, il suffit pour cela d'introduire des sommets multiples. On peut le faire avec les Bézier mais dans ce cas toute la courbe est altérée à cause du contrôle global.

5- Au plus le degré de la spline diminue, au plus la courbe se rapproche du polygone, inversement au plus le degré de la courbe augmente, au plus la courbe est "tendue" entre les points extrêmes.

#### 1.6.4 Evaluation d'une B.spline - algorithme de Cox-De Boor

soit  $P(u)$  une courbe B.spline d'ordre  $k$  associée aux valeurs nodales  $u_i$   $i=0, \dots, n+k$ , d'après la propriété du support local, seuls les  $k$  points de contrôle  $P_{j-k+1}, P_{j-k+2}, \dots, P_j$  interviennent pour définir le segment  $[u_j, u_{j+1}[$ ; ainsi pour  $u$  appartenant à cet intervalle, il est nécessaire de calculer les nombres:

$$N_i^k(u) \text{ pour } i=j-k+1, \dots, j$$

pour évaluer:

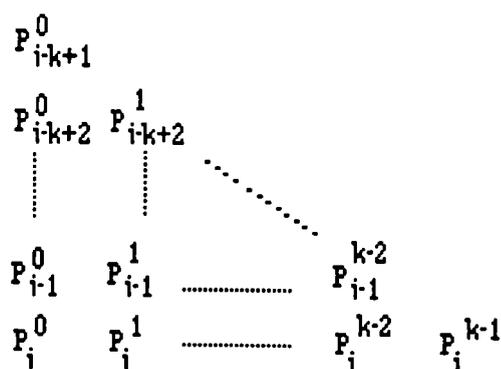
$$P(u) = \sum_{i=j-k+1}^j P_i N_i^k(u)$$

L'algorithme de Cox - De Boor qui est une généralisation de l'algorithme de De Casteljaou pour les Bézier permet d'évaluer les B.splines par interpolation linéaire de la manière suivante[BOO 72] :

$$P_i^0 = P_i$$

$$P_i^j = \frac{u - u_i}{u_{i+k-j} - u_i} P_i^{j-1} + \frac{u_{i+k-j} - u}{u_{i+k-j} - u_{i-1}} P_{i-1}^{j-1}$$

Soit le triangle:



On a alors:

$$P(u) = P_i^{k-1}$$

### I.6.5 Subdivision d'une B.spline

Soit  $P(u)$  une B.spline d'ordre  $k$  associée à  $n+1$  points de contrôle, on suppose que  $k$  est compris entre 2 et  $n+1$ , on a:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^k(u)$$

Soit  $t$  une valeur nodale de multiplicité 1 telle que  $t$  appartient à  $[u_{k-1}, u_{n+1}[$ , alors il existe un entier  $i_0$  compris entre  $k-1$  et  $n+1$  tel que  $t = u_{i_0}$ , on a alors:

$$P(t) = \sum_{i=i_0-k+1}^{i_0-1} P_i N_i^k(t)$$

Pour subdiviser  $P(t)$  en  $t$ , il suffit d'insérer cette valeur nodale  $k-2$  fois dans la table des noeuds. Les points de contrôle qui résultent de cette subdivision sont évalués à l'aide de l'algorithme de Cox-De Boor [BOH 84] de la façon suivante:

Initialisation:

$$\text{Pour } i=i_0-k+1 \dots i_0-1 \quad P_i^k = P_i$$

Récurrence:

Pour  $r=2 \dots k-1$

Pour  $i=i_0-r+1 \dots i_0-1$

$$P_i^r = \frac{u_{i_0} - u_i}{u_{i+r} - u_i} P_i^{r+1} + \frac{u_{i+r} - u_{i_0}}{u_{i+r} - u_i} P_{i-1}^{r+1}$$

$$\text{On a: } P_{i_0-1}^2 = P(u_{i_0})$$

Résultat: On obtient deux courbes B.splines:

à gauche :

$i_0$  points de contrôle:

$$P_0 \dots P_{i_0-k} \cdot P_{i_0-k+1}^k \dots P_{i_0-1}^2$$

les valeurs nodales sont:

$$v_0 = u_0, v_1 = u_1, \dots, v_{i_0} = u_{i_0}, v_{i_0+1} = \dots, v_{i_0+k-1} = u_{i_0}$$

à droite :

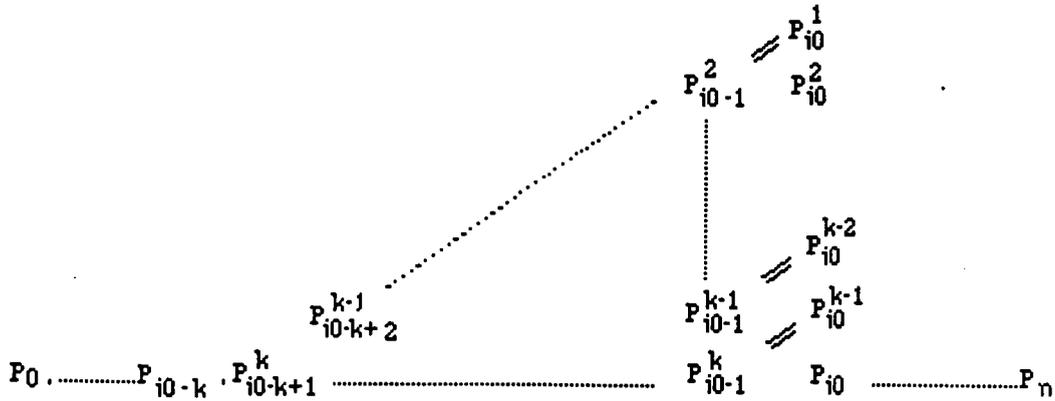
$n+k-i_0$  points de contrôle:

$$P_{i_0-1}^2 \dots P_{i_0-1}^k \cdot P_{i_0} \dots P_n$$

les valeurs nodales sont:

$$w_0 = w_1 = \dots = w_{k-1} = u_{i_0}, w_k = u_{i_0+1}, w_{k+1} = u_{i_0+2}, \dots, w_{n-i_0+2k} = u_n$$

On retrouve les valeurs des points de contrôle dans le schéma:



Remarque importante:

Si l'on procède à k-2 insertions de toutes les valeurs nodales  $u_i$  telles que  $i = k, \dots, n$ , on obtient ainsi la décomposition de la B.spline en n-k+2 courbes de Bézier.

1.6.6 Dérivation

Soit une B.spline définie comme précédemment, On veut calculer les dérivées d'ordre 0 à k-1 en  $u$  tel que  $u$  appartient  $[u_{i0}, u_{i0+1}[$ , on a:

$$P(u) = \sum_{i=i0-k+1}^{i0} P_i N_i^k(u)$$

La dérivée d'ordre r est donnée par la formule suivante:

$$P^{(r)}(u) = (k-1)(k-2)\dots(k-r) \sum_{i=i0-(k-r)+1}^{i0} P_i^{(r)} N_i^{(k-r)}(u)$$

les  $P_i^{(r)}$  sont définis de la façon suivante:

Initialisation:

pour  $i = i0-k+1, \dots, i0$

$$P_i^{(0)} = P_i$$

Récurrence1:

pour  $r=1, \dots, k-1$

pour  $i=i0-(k-r)+1, \dots, i0$

$$P_i^{(r)} = \frac{P_i^{(r-1)} \cdot P_{i-1}^{(r-1)}}{u_{i+k-r} - u_i}$$

Récurrance2:

pour  $r=1 \dots\dots\dots k-1$   
 pour  $i=i_0-k+1 \dots\dots\dots i_0-k+r$

$$P_i^{(r)} = P_i^{(r-1)} + (u - u_{i_0+r-(k-1)}) P_{i+1}^{(r)}$$

Résultat: la dérivée d'ordre r est donnée par:

$$P^{(r)}(u) = (k-1)(k-2)\dots\dots\dots(k-r) P_{i_0+r-(k-1)}^{k-1}$$

Remarque importante:

Une B.spline d'ordre k est une polynômiale de degré k-1 sur chaque intervalle  $[u_{i_0}, u_{i_0+1}[$  pour  $i_0$  compris entre k et n; ainsi si l'on calcule les dérivées d'ordre 0 à k-1 en  $u_{i_0}$ , on peut déterminer ce polynôme grâce à la formule de Taylor [BOH 84]. La transformation dans la base de Bernstein permet d'avoir la courbe de Bézier correspondante.

Le calcul des dérivées aux points nodales permet la décomposition d'une B.spline en courbes de Bézier.

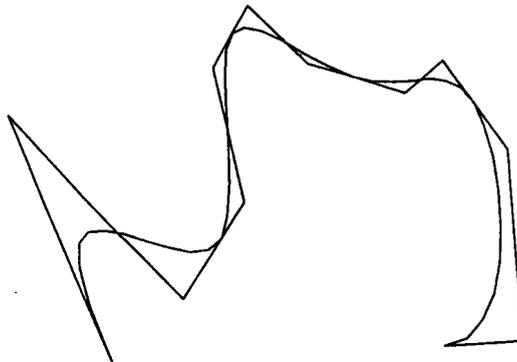


fig I.7 Décomposition d'une B.spline en courbes de Bézier

1.6.7 conclusion

Lorsque l'on compare les courbes de Bézier et les B.spline, on constate que le déplacement de n'importe lequel des points de contrôle modifie la totalité de la courbe de Bézier, alors qu'une propriété particulière des courbes B.spline est la localisation des déformations. Ce qui signifie qu'en déplaçant un seul point de contrôle, on ne modifie qu'une portion de la courbe d'ensemble.

## 1.7 Représentation de surfaces

### 1.7.1. introduction

Les quadriques, malgré leur degré peu élevé et la facilité des calculs qu'elles fournissent, notamment, pour l'intersection de deux quadriques qui peut être prévue à l'avance sont incapables de représenter toutes les formes.

On a eu donc recours aux surfaces polynômiales dont la forme n'appartient pas à la famille des quadriques. Leur représentation paramétrique est de la forme:

$$P(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) \text{ avec } u \text{ et } v \text{ dans } D$$

D étant un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Au couple  $(u, v)$  de D est associé un point de la surface de coordonnées  $(x,y,z)$ . Ces surfaces sont prises souvent comme des distorsions de plans rectangulaires. Par la suite D sera tout le temps égal au carré unité.

En effet sous la forme paramétrique, elles sont plus adaptées à des algorithmes tels que l'intersection et la division.

Il est cependant possible de les représenter par leur forme implicite  $f(x,y,z) = 0$ . Malheureusement elle est de degré élevé pour être mise en pratique [ SED 84].

Une surface paramétrique de degré n en u et m en v admet une forme implicite de degré 2.n.m, ce qui pour une cubique 3x3 entraîne un degré égal à 18.

Malgré l'avantage des surfaces polynômiales, elles ne peuvent qu'approcher les quadriques. Ce qui nous amène à considérer les surfaces polynômiales rationnelles qui peuvent les représenter d'une manière exacte.

### 1.7.2. Carreaux de Bézier

Les carreaux de Bézier sont définies à l'aide des courbes de Bézier. Nous prenons le produit tensoriel de deux courbes de Bézier soit:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \text{ avec } 0 \leq u,v \leq 1$$

Les polynômes de Bernstein  $B_i^n(u)$  et  $B_j^m(v)$  ne sont pas nécessairement de même degré.

Les démonstrations à propos de l'invariance par rapport aux translations, aux rotations et aux changements d'échelles, sont immédiatement transposables aux surfaces de Bézier.

### 1.7.3. Evaluation d'un carreau de Bézier

L'algorithme de De Casteljau, comme pour les courbes permet de calculer en un point  $(u,v)$  la valeur d'une surface de Bézier de polygone de contrôle  $(P_{ij})_{i=0,\dots,n,j=0,\dots,m}$ . En effet, si l'on note  $\text{Cast} ( P_0, P_1, \dots, P_n, t )$  la procédure qui permet de calculer une courbe de Bézier en t, alors l'algorithme de De Casteljau pour un carreau de Bézier s'énonce [FIO 89]:

Données :  $(P_{ij})_{i=0, \dots, n, j=0, \dots, m}$  ;  
 $(u, v)$  dans  $[0, 1]^2$

Première étape

pour  $i = 0 \dots \dots \dots n$   
 on calcule  $P_{i*} = \text{Cast}(P_{i0}, P_{i1}, \dots, P_{im}, v)$

Seconde étape

on calcule  $\text{Cast}(P_{0*}, P_{1*}, \dots, P_{n*}, u)$

Résultat

$P(u, v) = P_{0*}^n$

La droite qui passe par  $P_{0*}^{n-1}$ ,  $P_{1*}^{n-1}$  et  $P_{0*}^n$  est une tangente. La permutation des rôles tenus par  $u$  et  $v$  permet de trouver une autre tangente, la droite passant par  $P_{*0}^{m-1}$ ,  $P_{*1}^{m-1}$  et  $P_{*0}^m$ ; et par conséquent le plan tangent à la surface de Bézier en  $(u, v)$ .

Comme pour les courbes l'algorithme de De Casteljau nous permet de subdiviser un carreau de Bézier en quatre sous carreaux de Bézier. Ceci en utilisant l'algorithme de De Casteljau par rapport à  $u$  et ensuite par rapport à  $v$  [LAN 80].

1.7.4 Pratique de la mise dans la base de Bernstein d'un carreau de Bézier

Soit le polynôme  $x(u, v)$  tel que:

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} u^i v^j$$

Dans la base de Bernstein, il s'écrit:

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

Pour transformer le polynôme  $x(u, v)$  de la base canonique à la base de Bernstein, on décompose les monômes  $u^i$  ( $i=0, \dots, n$ ), et  $v^j$  ( $j=0, \dots, m$ ) respectivement dans  $B_i^n(u)$  ( $i=0, \dots, n$ ) et  $B_j^m(v)$  ( $j=0, \dots, m$ ) en utilisant la méthode de transformation pour une courbe; ensuite on effectue les produits  $u^i v^j$ .

Une autre méthode consiste à écrire  $x(u, v)$  comme un polynôme en  $v$  dont les coefficients sont des polynômes en  $u$ ; on transforme chaque facteur dans la base de Bernstein correspondante et on effectue les produits qui résultent.

La troisième méthode consiste à généraliser la méthode utilisée pour les courbes.

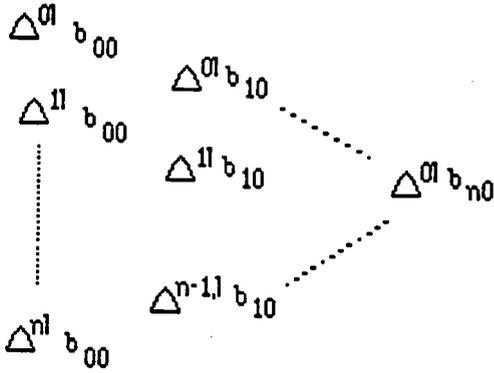
On dérive  $k$  fois par rapport à  $u$  et  $l$  fois par rapport à  $v$  l'expression de  $x(u, v)$  et en nous plaçant en  $(u, v) = (0, 0)$ , on obtient:

$$\Delta^{kl} b_{00} = \frac{a_{kl}}{C_n^k C_m^l}$$

où  $\Delta^{kl} b_{ij} = \Delta_1^k (\Delta_2^l b_{ij}) = \Delta_2^l (\Delta_1^k b_{ij})$

L'indice 1 (resp 2) indique que la différence est prise relativement au premier (resp au second) indice; on a alors les schémas suivants.

Pour  $l = 0 \dots \dots \dots m$ , les schèmes:



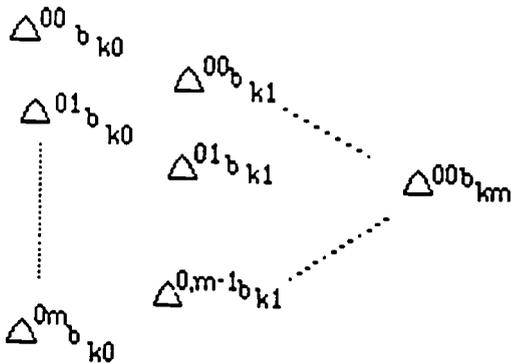
obtenus à partir de la relation :

$$\Delta^{il} b_{i+1,0} = \Delta^{i+1,l} b_{i0} - \Delta^{i,l} b_{i0}$$

permettent de connaître les:

$$\Delta^{0l} b_{k0} \quad \text{pour } k=0 \dots \dots \dots n \\ l=0 \dots \dots \dots m$$

Pour  $k=0 \dots \dots \dots n$ , les schèmes:



obtenus à partir de la relation:

$$\Delta^{0l} b_{kl} = \Delta^{0,l+1} b_{k,l-1} + \Delta^{0l} b_{k,l-1}$$

permettent de connaître les :

$$\Delta^{00} b_{kl} = b_{kl}$$

### 1.7.5 Représentation d'une Bézier triangulaire

Pour les besoins de la conception on est souvent amené à considérer des Bézier triangulaires. Un point P est repéré dans ce cas par ses coordonnées barycentriques (a,b,c) [FIO 89].

Notons:

$$\Delta_n = \{ (i,j,k) \mid i,j,k \text{ dans } \mathbb{N}, i+j+k=n \}$$

Soient un réseau triangulaire de points  $P_{i,j,k}$  tel que :  $i + j + k = n$ . On définit une surface de Bézier triangulaire de degré  $n$ :

$$P(a,b,c) = \sum_{i,j,k} P_{ijk} B_{ijk}^n(a,b,c) \quad (i,j,k) \text{ dans } \Delta_n$$

dans laquelle:

$$B_{ijk}^n(a,b,c) = \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$$

Remarque:

pour  $a+b+c=1$  et  $(i,j,k)$  dans  $\Delta_n$  on a:  $\sum_{i,j,k} B_{ijk}^n(a,b,c) = 1$

### I.7.6 Pratique de la mise dans la base de Bernstein d'une Bézier triangulaire

Pour cela, il suffit de remarquer que:

$$a^i b^j c^k = \frac{i!j!k!}{n!} B_{ijk}^n(a,b,c)$$

Exemple

soit une surface polynômiale définie par :

$$\begin{aligned} x(u,v) &= u^2 + v^2 \\ y(u,v) &= u - v \\ z(u,v) &= uv \end{aligned}$$

posons  $a = u$  ,  $b = v$  et  $c = 1 - u - v$  ; alors on a :

$$\begin{aligned} x(u,v) &= a^2 + b^2 \\ y(u,v) &= (a - b)(a + b + c) = a^2 - b^2 + ac - bc \\ z(u,v) &= ab \end{aligned}$$

On cherche  $P_{ijk}$  tel que :

$$P(a,b,c) = \sum_{i,j,k} P_{ijk} B_{ijk}^2(a,b,c) \quad (i,j,k) \text{ dans } \Delta_2$$

on a:

$$P_{200} = (1, 1, 0) \quad P_{020} = (1, -1, 0) \quad P_{002} = (0, 0, 0)$$

$$P_{110} = (0, 0, 1/2) \quad P_{101} = (0, 1/2, 0) \quad P_{011} = (0, -1/2, 0)$$

### 1.7.7 Evaluation d'une Bézier triangulaire

L'algorithme de De Casteljau dans le cas triangulaire repose sur la relation récurrente suivante:

$$B_{i,j,k}^n(a,b,c) = a B_{i-1,j,k}^{n-1}(a,b,c) + b B_{i,j-1,k}^{n-1}(a,b,c) + c B_{i,j,k-1}^{n-1}(a,b,c)$$

et s'intitule:

**Initialisation** :  $P_{ijk}^n = P_{ijk}$  pour  $i,j,k$  tel que :  $i+j+k=n$

```

Pour l = 1.....n
  pour i=0.....n-1
    pour j=0.....n-i-1
      k = n-i-j-1
       $P_{i,j,k}^l = a P_{i+1,j,k}^{l-1} + b P_{i,j+1,k}^{l-1} + c P_{i,j,k+1}^{l-1}$ 

```

**résultat** :  $P(a, b, c) = P_{000}^n$

Le plan passant par  $P_{100}^{n-1}$ ,  $P_{010}^{n-1}$ ,  $P_{001}^{n-1}$  et  $P_{000}^n$  est le plan tangent.

### 1.7.8 Surfaces B.splines

On définit une surface B.spline d'ordre  $k$  ( $2 \leq k \leq n+1$ ) selon  $u$  et d'ordre  $l$  ( $2 \leq l \leq m+1$ ) selon  $v$ , de réseau de contrôle  $(P_{ij})$   $i=0, \dots, n$  et  $j=0, \dots, m$  de la façon suivante:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v) \quad \text{avec } (u,v) \text{ dans } U \times V$$

où  $U$  et  $V$  sont les vecteurs nodaux, qui dans le cas d'une B.spline quasi-uniforme sont tels que :

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq k-1 \\ i-k+1 & \text{si } k \leq i \leq n+1 \\ n-k+2 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+k \end{cases}$$

et

$$v_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq l-1 \\ j-l+1 & \text{si } l \leq j \leq m+1 \\ m-l+2 & \text{si } m+1 \leq j \leq m+l \end{cases}$$

Toutes les propriétés des courbes B.spline se généralisent aisément aux surfaces, on a :

1- Pour  $(u,v)$  dans le pavé  $[u_{i0}, u_{i0+1}[ \times [v_{j0}, v_{j0+1}[$  où  $i0$  est compris entre  $k-1$  et  $n+1$ , et  $j0$  est compris entre  $l-1$  et  $m+1$ ; au plus un réseau  $k \times l$  influence dans ce

pavé, d'où le caractère local des B.spline, et plus précisément on a:

$$P(u,v) = \sum_{i=i_0-k+1}^{i_0} \sum_{j=j_0-l+1}^{j_0} P_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v)$$

La portion de surface définie sur ce pavé est incluse dans l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle  $(P_{ij})$   $i=i_0-k+1, \dots, i_0$  et  $j=j_0-l+1, \dots, j_0$ , d'où la propriété de l'enveloppe convexe.

2- Sur chaque pavé la surface est de degré  $(k-1) \times (l-1)$ , à la limite lorsque  $k=n+1$  et  $l=m+1$ , on obtient un carreau de Bézier de degré  $n \times m$ .

3- Les surfaces B.spline sont invariantes par les transformations affines.

Remarque:

Les algorithmes permettant l'évaluation, l'insertion de valeurs nodales et la subdivision dans le cas d'une courbe B.spline se généralisent au cas des surfaces B.spline; ainsi pour l'évaluation d'une surface B.spline en  $(u,v)$ , on applique l'algorithme de Cox-De Boor suivant les directions  $u$  et puis  $v$  ou inversement.

## 1.8 Courbes et surfaces de Bézier rationnelles

### 1.8.1 Introduction

Les raisons pour les quelles, on a introduit les formes rationnelles pour représenter les courbes et surfaces sont essentiellement :

- leur capacité à représenter un nombre important de formes, en effet elles introduisent une notion plus locale, celle des coefficients de pondération des points de contrôle eux même. une modification d'un coefficient entraine une variation de l'influence du point de contrôle qui lui correspond.
- Contrairement aux surfaces polynomiales, elles permettent de représenter exactement les quadriques.
- Les surfaces rationnelles sont une généralité des surfaces non rationnelles, et par conséquent, elles ont toutes leurs propriétés

Pour simplifier on étudie les Bézier rationnelles [TIL 85] [ PIE 86] [ FIO 89]:

### 1.8.2 Définition des courbes de Bézier rationnelles

Soient deux applications H et T définies de la façon suivante:

$$\begin{array}{ll}
 H : \mathbb{R}^4 \text{ -----} > \mathbb{R}^3 & T : \mathbb{R}^3 \text{ -----} > \mathbb{R}^4 \\
 (x,y,z,t) \text{ -----} > (x/t, y/t, z/t) & (x,y,z) \text{ -----} > (x,y,z,1)
 \end{array}$$

Soient  $(P_i)_{i=0, \dots, n}$  un réseau de points de contrôle de  $\mathbb{R}^3$ , dont chaque point de contrôle est pondéré par un coefficient de pondération  $h_i$ .

A l'aide de l'application T, on définit une courbe de Bézier polynomiale dans  $\mathbb{R}^4$  par:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n h_i T(P_i) B_i^n(u) \quad \text{avec } u \text{ dans } [0,1]$$

Une courbe de Bézier rationnelle est alors définie dans  $\mathbb{R}^3$  de la façon suivante:

$$R(u) = H(P(u)) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n h_i B_i^n(u)} \sum_{i=0}^n h_i P_i B_i^n(u) \quad \text{avec } u \text{ dans } [0,1]$$

On remarque que la courbe rationnelle peut être notée simplement sous la forme habituelle:

$$R(u) = \sum_{i=0}^n P_i R_i^n(u) \quad \text{où} \quad R_i^n(u) = \frac{h_i B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n h_i B_i^n(u)}$$

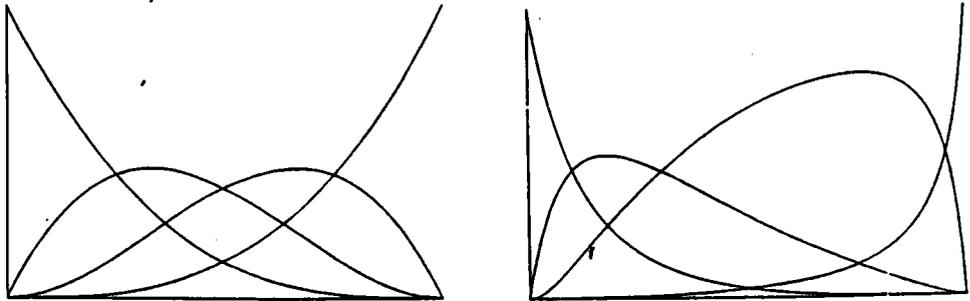


fig I.8 Fonctions de base d'une cubique polynômiale (a) et d'une rationnelle avec  $(h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 3, 7, 1)$  (b)

Les polynômes  $R_i^n(u)$  forment une base des fonctions rationnelles

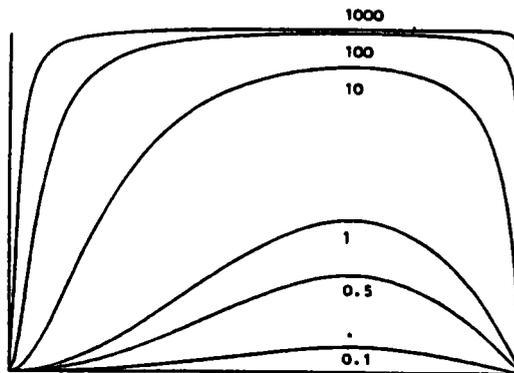


fig I.9 La fonction de base  $R_2^3(u)$  pour différentes valeurs de  $h_2$   
( $h_0 = h_1 = h_3 = 1$ )

Ils ont les propriétés suivantes:

1 - ils sont une généralisation des polynômes de Bernstein, en effet :

$$R_i^n(u) = B_i^n(u) \quad \text{si pour tout } i \quad h_i = 1$$

2 - Partition de l'unité:

$$\sum_{i=0}^n R_i^n(u) = 1$$

3 - Positivité:

Si  $h_0 > 0$ ,  $h_n > 0$  et  $h_i \geq 0$  pour tout  $i=1, \dots, n-1$  alors:

$$R_i^n(u) \geq 0$$

Sous ces contraintes une Bézier rationnelle est contenue dans son enveloppe convexe.

**1.8.3 Influence des coefficients de pondération**

- 1)  $R_i^n(u) = 0$  si  $h_i = 0$
- 2)  $R_i^n(u) \rightarrow 1$  quand  $h_i$  tend vers l'infini
- 3)  $R_i^n(u) \rightarrow 0$  quand  $h_j$  tend vers l'infini avec  $j \neq i$  et  $u$  dans  $[0,1]$

Une des conséquence notoire de ces propriétés est que la Bézier rationnelle dans ce dernier cas est contenue dans l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle  $(P_j)_{j=0, \dots, i-1, i+1, \dots, n}$

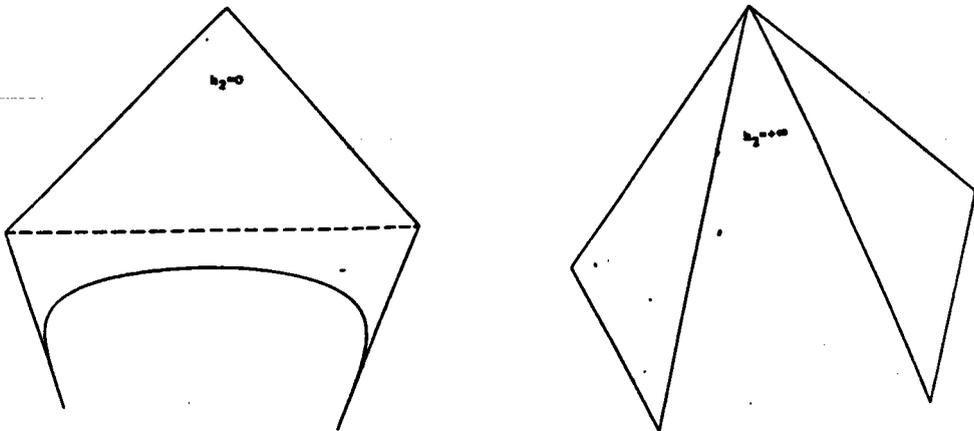


fig I.10 Influence des poids nuls (a) et infini (b)

Si  $h_i$  tend vers l'infini, la courbe se réduit à une ligne polygonale formée des deux segments  $[P_0, P_i]$  et  $[P_i, P_n]$

**1.8.4 Surface de Bézier rationnelle**

Les résultats pour une surface sont similaires à celle des courbes.

Si l'on considère un réseau de points de contrôle  $(P_{ij})_{i=0, \dots, n, j=0, \dots, m}$  de  $\mathbb{R}^3$  dont chaque point de contrôle est associé à un point de pondération  $h_{ij}$ . On définit alors, à l'aide de l'application T un carreau de Bézier dans  $\mathbb{R}^4$  par:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{ij} T(P_{ij}) B_i^n(u) B_j^m(v)$$

Un carreau de Bézier rationnelle est alors défini de la façon suivante:

$$R(u,v) = H(P(u,v)) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m h_{ij} P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

que l'on peut écrire sous la forme:

$$R(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_{ij}^{n,m}(u,v) \quad \text{où} \quad B_{ij}^{n,m}(u,v) = \frac{h_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)}{\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m h_{lk} B_l^n(u) B_k^m(v)}$$

Et l'on a les propriétés suivantes:

- 1)  $B_{ij}^{n,m}(u,v) = B_i^n(u) B_j^m(v)$  si  $h_{ij} = 1$  pour tout  $(i,j)$
- 2)  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{ij}^{n,m}(u,v) = 1$
- 3)  $B_{ij}^{n,m}(u,v) \geq 0$  si  $h_{00} \cdot h_{0m} \cdot h_{n0} \cdot h_{nm}$  sont strictement positifs et  $h_{ij} \geq 0$

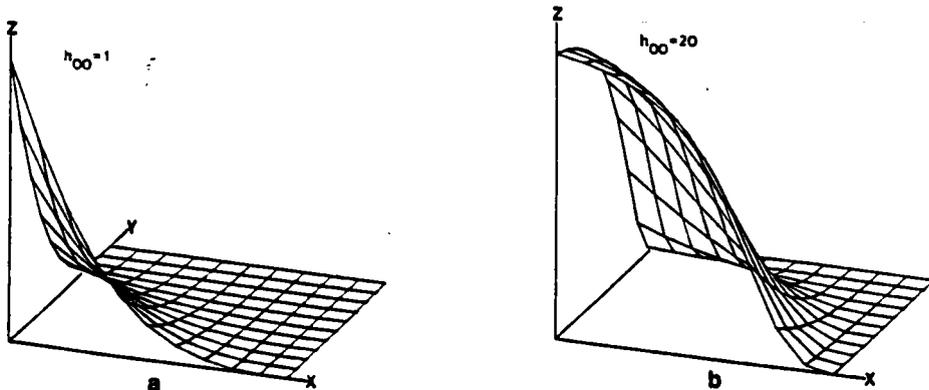


fig I.11 La fonction de base  $R_{00}^{33}(u)$  pour différentes valeurs de  $h_{00}$  ( $h_{ij} = 1$  pour  $(i,j) \neq (0,0)$ )

### 1.8.5 Représentation d'un cylindre par une Bézier rationnelle

Soit le cylindre  $C$  de rayon 1 centré en  $O(0,0,0)$ , d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h=1$ ; un paramétrage du cylindre unité est:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = v \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t \text{ dans } [0, 2\pi] \\ v \text{ dans } [0, 1] \end{cases}$$

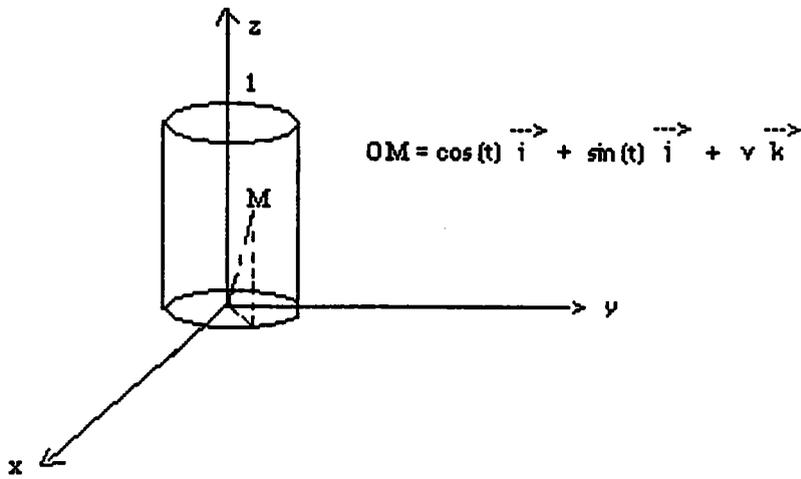


fig I.12 Repérage d'un point du cylindre

Pour  $t$  dans l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , posons  $u = \text{tg}(t/2)$

soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1 \cdot u^2}{1 + u^2} \\ y = \frac{2uv}{1 + u^2} \\ z = v \end{array} \right. \quad \text{avec } u \text{ et } v \text{ dans } [0, 1]$$

Soient en coordonnées homogènes  $(X, Y, Z, W)$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 1 \cdot u^2 \\ Y = 2u \\ Z = v(1 + u^2) \\ W = 1 + u^2 \end{array} \right. \quad \text{avec } u \text{ et } v \text{ dans } [0, 1]$$

L'expression ci-dessus est une représentation du quart du cylindre  $C$ , on cherche le réseau des points de contrôle correspondant tel que:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 h_{ij} T(P_{ij}) B_i^2(u) B_j^1(v)$$

La méthode de transformation de la base canonique à la base de Bernstein permet l'écriture de  $u^i$  ( $i=0, \dots, 2$ ) et  $v^j$  ( $j=0, \dots, 1$ ) dans la base  $B_i^2(u)$  ( $i=0, \dots, 2$ ) et  $B_j^1(v)$  ( $j=0, \dots, 1$ ); ensuite, on effectue les produits  $u^i v^j$ .

\*  $1 - u^2$

$$a_0 = 1 \quad b_0 = \Delta^0 b_0 = 1$$

$$a_1 = 0 \quad \Delta^1 b_0 = 0$$

$$a_2 = -1 \quad \Delta^2 b_0 = -1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 0$$

$$\Delta^1 b_1 = -1$$

d'où :

$$1 - u^2 = B_0^2(u) + B_1^2(u)$$

\*  $2u$

$$a_0 = 0 \quad b_0 = \Delta^0 b_0 = 0$$

$$a_1 = 2 \quad \Delta^1 b_0 = 1$$

$$a_2 = 0 \quad \Delta^2 b_0 = 0$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 2$$

$$\Delta^1 b_1 = 1$$

d'où :

$$2u = B_1^2(u) + 2 B_2^2(u)$$

\*  $1 + u^2$

$$a_0 = 1 \quad b_0 = \Delta^0 b_0 = 1$$

$$a_1 = 0 \quad \Delta^1 b_0 = 0$$

$$a_2 = 1 \quad \Delta^2 b_0 = 1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 2$$

$$\Delta^1 b_1 = 1$$

d'où :

$$1 + u^2 = B_0^2(u) + B_1^2(u) + 2 B_2^2(u)$$

\*  $v$

$$a_0 = 0 \quad b_0 = \Delta^0 b_0 = 1$$

$$a_1 = 1 \quad \Delta^1 b_0 = 0$$

$$b_1 = 1$$

d'où :

$$v = B_1^2(v)$$

Si l'on note  $P_{ij} = (b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^3, b_{ij}^4)$  ; il vient alors :

$b_{ij}^1$	$i=0$	$i=1$
$i=0$	1	1
$i=1$	1	1
$i=2$	0	0

$$X(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 b_{ij}^1 B_i^2(u) B_j^1(v)$$

$b_{ij}^2$	$j=0$	$j=1$
$i=0$	0	0
$i=1$	1	1
$i=2$	2	2

$$Y(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 b_{ij}^2 B_i^2(u) B_j^1(v)$$

$b_{ij}^3$	$j=0$	$j=1$
$i=0$	0	1
$i=1$	0	1
$i=2$	0	1

$$Z(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 b_{ij}^3 B_i^2(u) B_j^1(v)$$

$b_{ij}^4$	$j=0$	$j=1$
$i=0$	1	1
$i=1$	1	1
$i=2$	2	2

$$W(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 b_{ij}^4 B_i^2(u) B_j^1(v)$$

Finalement :

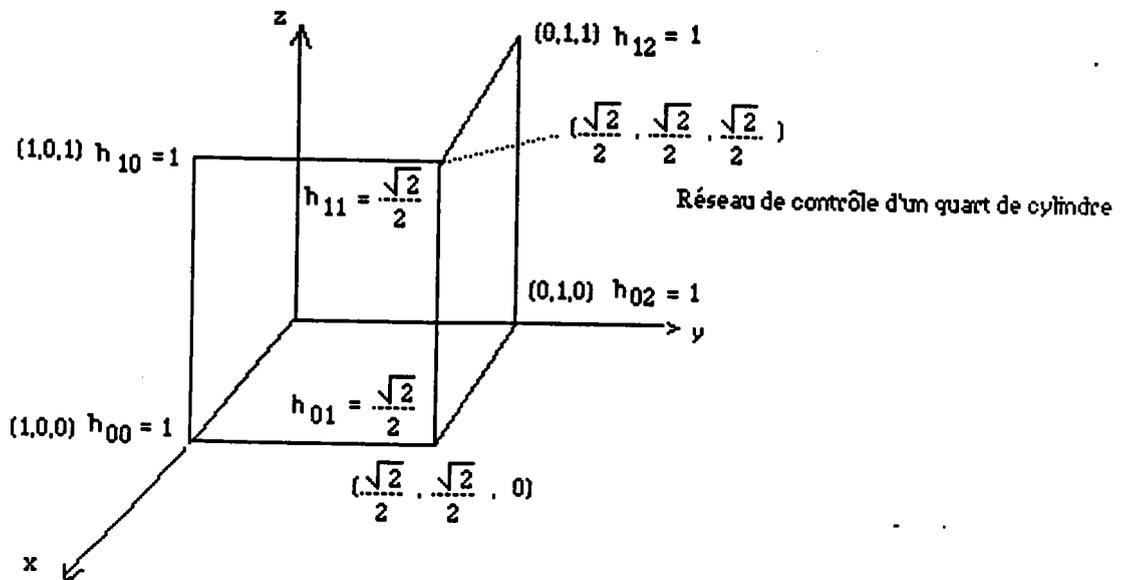
$P_{ij}$	$j=0$	$j=1$
$i=0$	(1,0,0,1)	(1,0,1,1)
$i=1$	(1,1,0,1)	(1,1,1,1)
$i=2$	(0,2,0,2)	(0,2,2,2)

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 P_{ij} B_i^2(u) B_j^1(v)$$

Le premier quadrant du cylindre associé à des coefficients de pondération compris entre 0 et 1 admet pour réseau rectangulaire:

$P_{ij}^x$	$j=0$	$j=1$
$i=0$	((1,0,0), 1)	((1,0,1), 1)
$i=1$	(a,a,0,a)	(a,a,a,a)
$i=2$	((0,1,0), 1)	((0,1,1), 1)

où la dernière coordonnée représente le coefficient de pondération et  $a = \sqrt{2}/2$



I.13 Réseau de contrôle du quart du cylindre

Pour obtenir le réseau de contrôle de la moitié du cylindre on procède à une symétrie par rapport au plan  $xOz$ ; soit  $H_1$  la matrice associée, on a:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le cylindre entier sera défini par une symétrie du réseau de contrôle obtenu par rapport au plan  $yOz$ , soit  $H_2$  la matrice associée, on a:

$$H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D'une façon générale, grâce aux propriétés d'invariance par transformation affine, On peut calculer le réseau de contrôle d'un cylindre quelconque à partir de celui du cylindre unité.

## 1.9 Raccordement

### Raccordement de courbes

Etant données, deux courbes de Bézier de même degré  $n$  et de polygones de contrôle respectifs  $(P_0 \dots P_n)$  et  $(P'_0 \dots P'_n)$ . Une condition suffisante pour que ces deux courbes se raccordent  $C^k$  en  $P_n$  et  $P'_0$  est :

$$\Delta^i P_{n-i} = \Delta^i P'_0 \quad \text{pour } i=0 \dots k$$

#### Remarque

La condition de raccord  $C^0$  s'écrit :  $P_n = P'_0$ .

La condition de raccord  $C^1$  s'écrit:  $P_n - P_{n-1} = P'_1 - P'_0$ .

La condition de raccord  $C^2$  s'écrit:  $P_n - 2P_{n-1} + P_{n+1} = P'_2 - 2P'_1 + P'_0$   
dans le cas où les deux courbes sont de degrés respectifs  $n$  et  $m$ , on a:

La condition de raccord  $C^1$  s'écrit:  $n(P_n - P_{n-1}) = m(P'_1 - P'_0)$ .

La condition de raccord  $C^2$  s'écrit:

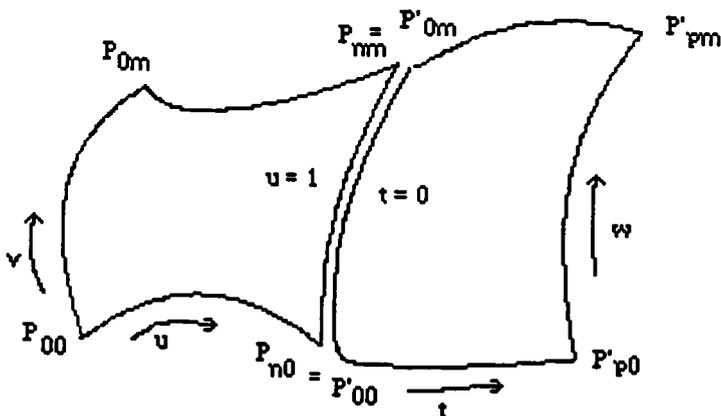
$$n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n+1}) = m(m-1)(P'_2 - 2P'_1 + P'_0)$$

### Raccordement entre carreaux

Soient  $C_0$  et  $C_1$  deux carreaux de Bézier définis par leurs polygones de contrôle  $(P_{ij})_{i=0 \dots n, j=0 \dots m}$  et  $(P'_{ij})_{i=0 \dots p, j=0 \dots m}$ ; le raccordement d'ordre 0 de  $C_0$  et  $C_1$  consiste à ce que les deux isoparamétriques  $u=1$  de  $C_0$  et  $t=0$  de  $C_1$  coïncident, on dit que les carreaux sont jointifs ou qu'il y'a simple contact [ VER 73].

Cela s'exprime par la relation :

$$P_{ni} = P'_{0i} \quad \text{pour } i=0 \dots m$$



Le raccordement d'ordre 1 fait intervenir en plus du simple contact une ligne de point de contrôle de chaque réseau de part et d'autres de l'isoparamétrique de raccord.

On a les conditions de raccord tangentiel suivantes:

$$P_{ni} = P'_{oi} \quad \text{pour } i=0, \dots, m$$

$$n(P_{ni} - P_{(n-1)i}) = p(P'_{li} - P'_{oi}) \quad \text{pour } i=0, \dots, m$$

Le raccordement du second ordre fait intervenir en plus du simple contact deux lignes de points de contrôle de chaque réseau de part et d'autres de l'isoparamétrique de raccord, et l'on a les conditions de raccordement d'ordre 2:

$$\text{pour } i=0, \dots, m$$

$$P_{ni} = P'_{oi}$$

$$n(P_{ni} - P_{(n-1)i}) = p(P'_{li} - P'_{oi})$$

$$n(n-1)(P_{ni} - 2P_{(n-1)i} + P_{(n-2)i}) = p(p-1)(P'_{2i} - 2P'_{li} + P'_{oi})$$

### 1.10 Calcul d'intersection

L'un des gros problèmes de la C.A.O est le calcul d'intersection entre surfaces. Plusieurs méthodes ont été élaborées dans ce sens:

1- On utilise la méthode de subdivision pour approcher les surfaces par des facettes planes. Les segments résultants de l'intersection entre facettes sont ainsi recollés de manière à approcher la courbe intersection [HOU 85]. Une méthode afin d'optimiser le nombre d'opérations, et qui repose sur l'idée qu'un petit carreau peut être représenté par un degré moindre consiste à subdiviser les carreaux jusqu'à ce qu'on ait des carreaux de degré total 2, et l'on procède par la suite à l'intersection entre carreaux de degré 2 [MIC 91].

2- Une deuxième méthode consiste à résoudre un système d'équations polynômiales à plusieurs variables, les solutions sont déterminées soit en utilisant la méthode de la résolvante [SED 84], soit la méthode de Newton.

3- Dans le cas d'une section d'une surface paramétrique finie par une surface analytique spécifiée par son équation implicite  $f(x,y,z) = 0$ ; on a une représentation précise de la courbe intersection dans le domaine paramétrique de la forme  $F(u,v) = 0$  [FAR 85].

On établit la liste et le nombre des branches ouvertes ou fermées qui forment la courbe intersection à l'aide des points caractéristiques de la section (ANNEXE 4).

## **I.11 CONCLUSION**

Il est clair que les B.splines quasi-uniformes qui sont une généralité des Bézier offrent un modèle de surfaces bien adapté à l'interaction, et ont un pouvoir de représentation de formes libres important. Leur caractère local est très utile lors d'une conception.

On peut augmenter la multiplicité d'un point de contrôle ou d'une valeur nodale, cette dernière opération se fait au dépend de la flexibilité de la surface.

Les B.splines rationnelles nécessitent plus de calculs à cause de la quatrième composante qu'elles font intervenir; elles généralisent les B.splines polynômiales, et permettent en plus de représenter les quadriques de manière exacte, de moduler la valeur des points de contrôle à l'aide des poids, ce qui leur confère encore plus de possibilités de modélisation de formes que ces dernières.

## ***CHAPITRE 2***

### ***INTERPOLATION A L'AIDE DES MODELES PARAMETRIQUES***

## II.1 PREMIERE PARTIE : INTERPOLATION PAR UNE COURBE

### II.1.1 Introduction

Soit le problème: " Etant donnés  $n+1$  points  $Q_0, \dots, Q_n$  dans  $\mathbb{R}^3$ , on désire définir une courbe à partir de ces points ".

Cette courbe doit répondre à certaines conditions, en général on lui impose de passer par ces points et c'est donc une interpolation, ou bien de les approcher, et c'est une approximation, dans ce cas la courbe ne passe pas nécessairement par ces points.

Dans la suite on ne considère le problème que pour les courbes de Bézier et les B.splines.

#### a) La méthode directe d'approximation

Les points  $Q_0, \dots, Q_n$  peuvent être pris comme des points de contrôle d'une courbe de Bézier ou d'une B.spline et l'on aura:

$$\text{Pour une Bézier} \quad P(u) = \sum_{i=0}^n Q_i B_i^n(u)$$

$$\text{Pour une B-spline} \quad P(u) = \sum_{i=0}^n Q_i N_i^k(u)$$

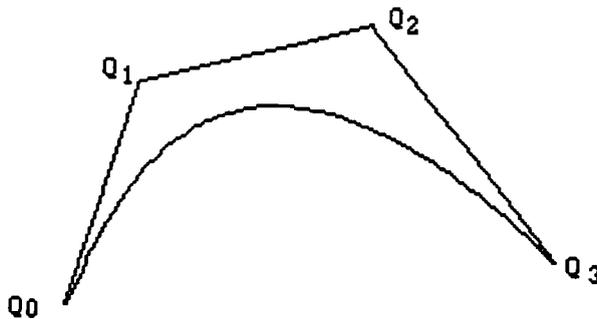


fig II.1 Approximation d'une courbe par son polygone de contrôle

Un courbe de Bézier constitue un moyen naturel d'approximation; c'est une approche relativement grossière de son polygone de contrôle.

Une B.spline est aussi une approximation de son polygone de contrôle. Cependant dans ce cas, en diminuant l'ordre on aura une meilleure approximation, car la courbe tend vers son polygone de contrôle, et au contraire, en l'augmentant à la limite, on aura une approximation semblable à celle de Bézier.

Dans le cas d'une B.spline, il est possible d'affiner l'approximation en augmentant la multiplicité des valeurs nodales, cela s'effectue au dépend d'une certaine flexibilité.

Il est intéressant de noter qu'avec une B.spline rationnelle, les poids liés aux points de contrôle jouent un rôle important pour une meilleure approximation.

b) Lissage par la méthode des moindres carrées

On se donne une suite de paramètres  $u_0, \dots, u_n$  associée aux points  $Q_0, \dots, Q_n$  et on cherche les points de contrôle  $P_0, \dots, P_n$  de la courbe  $P(u)$  de Bézier ou B-spline qui minimisent la quantité:

$$E = \sum_{i=0}^n \| P(u_i) - Q_i \|^2$$

c) Interpolation

Comme auparavant, on se fixe une suite de paramètres  $u_0, \dots, u_n$  associée aux points  $Q_0, \dots, Q_n$ , et on cherche les points de contrôle  $P_0, \dots, P_n$  tels que la courbe  $P(u)$  passe par les points  $Q_i$  en  $u_i$   $i=0, \dots, n$ .

Tolérance

On dit que la courbe  $P(u)$  répond à une tolérance  $T$  si:

$$E = \sup_{i=0, \dots, n} \| P(u_i) - Q_i \| \leq T$$

Autrement dit, l'écart le plus important entre la courbe et un point de passage en un paramètre  $u_i$  doit être inférieur à  $T$ .

On définit aussi l'écart quadratique:

$$E_q = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{i=0}^n \| P(u_i) - Q_i \|^2 \right)^{1/2}$$

qui permet de mesurer l'erreur moyenne effectuée sur un point [ DAN 89].

Dans le cadre de notre travail, on ne s'intéressera désormais qu'au problème lié à l'interpolation .

**II.1.2. Interpolation**

On se propose de déterminer le polygone caractéristique d'une courbe de Bézier (ou d'une B-spline) sachant que cette dernière passe par un certain nombre de points.

Pour cela, on fixe le degré  $n$  de la courbe et on attribue à chaque point de passage une valeur paramétrique  $u_i$ .

Dans un premier temps, on proposera une courbe de Bézier de degré  $n$  avec des valeurs paramétriques formant une suite arithmétique de raison  $1/n$  comprise entre 0 et 1.

Dans un deuxième temps, on proposera une courbe B.spline avec des valeurs paramétriques calculées à l'aide de la méthode dite " méthode de la ligne brisée " .

Quant au vecteur des noeuds  $U$ ; il sera d'abord choisi uniforme, ensuite, il sera dépendant des valeurs paramétriques  $u_j$ .

\* Remarques

1- Il est utile de noter qu'il existe plusieurs façons de choisir les paramètres et le vecteur des noeuds  $U$ . On verra par la suite, comment choisir les paramètres pour obtenir une meilleure courbe d'interpolation.

2- Le nombre de points de passage  $m$  étant arbitraire, on envisage les trois cas suivants:

\* 1-cas  $n=m$

Dans ce cas, la solution est immédiate.

\* 2-cas  $m < n$

Sous sa forme polynômiale, une courbe de Bézier est telle que:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n b_i u^i$$

Dans ce cas, on peut attribuer une valeur nulle aux coefficients  $b_i$  dont le rang est compris entre  $m+1$  et  $n$ , ce qui nous ramène au cas précédent [BEZ 86].

\* 3-cas  $m > n$

Dans ce cas, il n'y a pas de solution exacte. Dans ce qui suit, on se restreint au cas où le nombre de points de passage est égal au nombre de points de contrôle.

### II.1.3. Interpolation par une courbe de Bézier

soient  $n+1$  points de passage  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ . Cherchons  $n+1$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$  tels que la courbe de Bézier associée passe par les points  $Q_i$ .

On a:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) \quad \text{avec } u \text{ dans } [0,1]$$

Quel que soit  $i=0, \dots, n$ ,  $Q_i$  appartient à  $P(u)$  si et seulement si, il existe  $u_i$  de  $[0,1]$  tel que:

$$P(u_i) = Q_i$$

D'après ce qui précède on a:  $P_0=Q_0$  et  $P_n=Q_n$ .

En attribuant aux points de passage des valeurs paramétriques formant une suite arithmétique de raison  $1/n$ , on a:

$$P(u_j) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u_j) = Q_j \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n$$

soit:

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i (1-u_j)^{n-i} u_j^i P_i = Q_j - [(1-u_j)^n P_0 + u_j^n P_n] \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n$$

On a ainsi un système d'équations linéaire à  $n-1$  équations et  $n-1$  inconnues.

Pour  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  et  $Q_j = (x'_j, y'_j, z'_j)$ , le système en  $x$  s'écrit:

$$\begin{pmatrix} C_n^1 (1-u_1)^{n-1} u_1 & \dots & C_n^{n-1} (1-u_1) u_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^1 (1-u_{n-1})^{n-1} u_{n-1} & \dots & C_n^{n-1} (1-u_{n-1}) u_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_{n-1} (1-u_{n-1}) x_0 - u_{n-1}^n x_n \\ \vdots \\ x'_1 - (1-u_1) x_0 - u_1^n x_n \end{pmatrix}$$

Soit  $A$  la matrice carrée  $(n-1)(n-1)$  associée au système linéaire ci-dessus, et soit  $\text{Det } A$  son déterminant, on a:

$$\text{Det } A = C_n^1 \dots C_n^{n-1} (1-u_1) u_1 \dots (1-u_{n-1}) u_{n-1} \text{Det} \begin{pmatrix} (1-u_1)^{n-2} & \dots & u_1^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ (1-u_{n-1})^{n-2} & \dots & u_{n-1}^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } A = C_n^1 \dots C_n^{n-1} (1-u_1) u_1 \dots (1-u_{n-1}) u_{n-1} \prod_{1 \leq i < k \leq n-1} (u_k - u_i)$$

La matrice  $A$  est inversible, en effet:

Pour  $k > i$ ,  $u_k > u_i$ , et par conséquent  $\text{Det } A$  est non nul. Ainsi les points de contrôle sont définis d'une manière unique.

**\*Remarque**

La méthode utilisée pour calculer les valeurs paramétriques  $u_j$  est valable si la courbure varie relativement peu et si les points de passage  $Q_i$  sont à peu près également espacés [BEZ 86].

**II.1.4. Interpolation par une B.spline**

a) Paramétrage par la méthode de la ligne brisée, le vecteur nodal est uniforme

Comme précédemment, on s'intéresse à faire passer une courbe B.spline d'ordre  $k$  par  $n+1$  points de passage  $Q_i$  donnés.

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^k(u) \quad \text{où les } (P_i)_{i=0, \dots, n} \text{ sont les points de contrôle}$$

Soit  $U$  le vecteur des noeuds associé à  $P(u)$  et défini de manière uniforme:

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq k-1 \\ i-k+1 & \text{si } k \leq i \leq n+1 \\ n-k+2 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+k \end{cases}$$

On a alors:

$$U = ( \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ fois}}, \underbrace{1, 2, \dots, n-k+2}_{k \text{ fois}}, \dots, n-k+2, \dots, n-k+2 )$$

Soient  $\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n$  les valeurs paramétriques attribuées aux points de passage  $Q_i$ .

On a:

$Q_i$  est un point de  $P(u)$  si et seulement si il existe  $\hat{u}_i$  dans  $[u_{k-1}, u_{n+1}]$  tel que:

$$P(\hat{u}_i) = Q_i$$

D'après ce qui précède,  $\hat{u}_0 = u_{k-1}$  et  $\hat{u}_n = u_{n+1}$ .

Les  $n-1$  autres valeurs paramétriques de  $\hat{u}_i$  sont telles que:

$$\frac{\|\Delta Q_i\|}{\Delta \hat{u}_i} = \text{constante} \quad \text{où } \|\Delta Q_i\| = \|Q_{i+1} - Q_i\| \text{ et } \Delta \hat{u}_i = \hat{u}_{i+1} - \hat{u}_i$$

$\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$

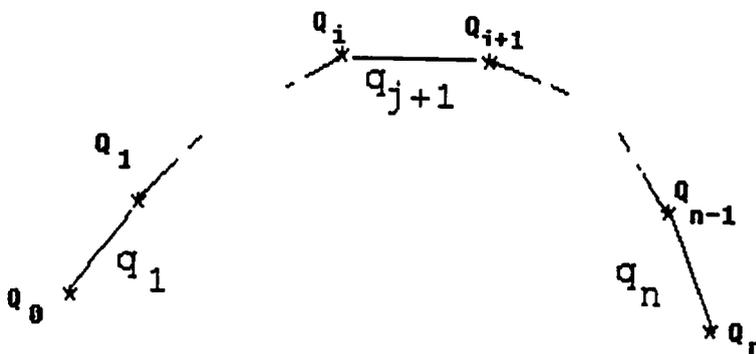


fig II.2 ligne brisée dont les sommets sont les points de passage.

Les points de passage sont reliés par une ligne brisée dont la longueur est:

$$L = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \|\Delta Q_i\|$$

\*Calcul de la constante c

On a:

$$\begin{aligned} q_1 &= c (\hat{u}_1 - \hat{u}_0) \\ q_2 &= c (\hat{u}_2 - \hat{u}_1) \\ &\vdots \\ q_n &= c (\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre les n égalités, on obtient:

$$\sum_{i=1}^n q_i = c(\hat{u}_n - \hat{u}_0) = c\hat{u}_n$$

soit:

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{\hat{u}_n}$$

Ainsi, on a

$$\text{Pour } i=1 \dots n \quad \hat{u}_i = \frac{q_i}{c} + \hat{u}_{i-1}$$

Et l'on peut déterminer  $\hat{u}_i$  en fonction des  $q_i$ :

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \frac{q_i}{c} + \hat{u}_{i-1} \\ \hat{u}_{i-1} &= \frac{q_{i-1}}{c} + \hat{u}_{i-2} \\ &\vdots \\ \hat{u}_1 &= \frac{q_1}{c} + \hat{u}_0 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre on a:

$$\hat{u}_0 = 0 \text{ et pour } i=1 \dots n \quad \hat{u}_i = \frac{\sum_{j=1}^i q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} \hat{u}_n$$

Ainsi on a un système d'équations linéaires à  $n+1$  équations et  $n+1$  inconnues.

$$\text{pour } i=0 \dots n \quad P(\hat{u}_i) = Q_i$$

soit:

$$\text{pour } i=0 \dots n \quad \sum_{j=0}^n P_j N_j^k(\hat{u}_i) = Q_i$$

Soit A la matrice associée à ce système,

$$A = ( N_j^k(\hat{u}_i) )_{\substack{i=0 \dots n \\ j=0 \dots n}}$$

Cette matrice peut ne pas être inversible à cause du choix des paramètres et du vecteur des noeuds. Ce choix peut mal conditionner la matrice A; en effet, il arrive qu'il existe  $i$  compris entre 0 et  $n$  tel que pour tout  $j$  compris entre 0 et  $n$  on ait:

$$N_i^k(\hat{u}_j) = 0$$

Et l'on aura une colonne de 0.

b) Paramétrage par la méthode de la ligne brisée, le vecteur nodal dépend de ce paramétrage.

Le paramétrage sera tel que:

$$\begin{cases} \hat{u}_0 = 0 \\ \hat{u}_i = \frac{\sum_{j=1}^i q_j}{\sum_{j=1}^n q_j} c \end{cases} \text{ où } c \text{ est une constante de dilatation}$$

Alors que le vecteur des noeuds U sera tel que:

$$\begin{aligned} u_0 &= \dots = u_{k-1} = \hat{u}_0 = 0 \\ u_{i+k} &= \frac{\hat{u}_{i+1} + \dots + \hat{u}_{i+k-1}}{k-1} \quad \text{pour } i=0 \dots n-k \\ u_{n+1} &= \dots = u_{n+k} = \hat{u}_n \end{aligned}$$

Avec ce choix la matrice A est bien conditionnée car l'on a:

$$\begin{aligned} u_0 &= \hat{u}_0 < u_k \\ u_i &< \hat{u}_i < u_{i+k} \quad \text{pour } i=1 \dots n-1 \\ u_n &< \hat{u}_n = u_{n+k} \end{aligned}$$

On montre ainsi que:

$$\text{Pour } j=0 \dots n \quad N_i^k(\hat{u}_j) <> 0$$

Et le théorème de SCHONBERG-WHITNEY montre que A est inversible [ DAN 89].

### \*-Remarque

Cette méthode peut donner satisfaction si la courbure ne varie pas beaucoup, même si les points de passage ne sont pas régulièrement espacés.

### II.1.5 Données inadéquates - déficience du rang

Au cours d'une interpolation, on aimerait ne pas prendre en compte certaines données inadéquates; soit par exemple, le système linéaire:

$$P(\hat{u}_j) = q_i \quad i=0 \dots n$$

Si la j<sup>ème</sup> donnée n'est pas adaptée lors de cette interpolation, on peut l'ignorer et chercher alors  $n$  points de contrôle plutôt que  $n+1$ .

On se place dans le cas où on cherche  $n+1$  points de contrôle à l'aide des  $n$  données; une remédiation à la déficience du rang est donc nécessaire [COX 82] [HAY 86]. Pour cela, on impose des contraintes, dont on présentera les avantages et les inconvénients.

Première contrainte:

On impose la condition :  $P_j = 0$ , autrement dit:

$$g^t P = 0 \quad \text{où } {}^tP \text{ désigne le vecteur transposé de } P = (P_0, \dots, P_n) \text{ et}$$

$$g = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{où la } j^{\text{ème}} \text{ coordonnée est égale à 1.}$$

On aboutit à un système linéaire  $(n+1) \times (n+1)$  stable dans le sens que la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1, mais la B.spline qui résulte ne satisfait pas la propriété de l'invariance par les transformations affines; en effet si l'on translate toutes les données d'un vecteur  $r$ , et on calcule les points de contrôle de la nouvelle B.spline, celle-ci ne sera pas une translation de la première du vecteur  $r$ .

Deuxième contrainte:

On impose la condition :

$$P_{i+1}^{(2)} = 0$$

Sachant que la dérivée de  $P(u)$  est définie par:

$$P^{(r)}(u) = (k-1)(k-2)\dots(k-r) \sum_{i=r}^n P_i^{(r)} N_i^{k-r}(u)$$

dans laquelle:

$$P_i^{(r)} = \frac{P_i^{(r-1)} \cdot P_{i+1}^{(r-1)}}{u_{i+k-r} - u_i}$$

la condition imposée s'écrit:

$$P_{i+1}^{(1)} = P_i^{(1)}$$

soit:

$$\frac{P_{i+1} \cdot P_i}{u_{i+k} - u_{i+1}} = \frac{P_i \cdot P_{i-1}}{u_{i+k-1} - u_i}$$

En développant cette expression, dans laquelle  $P_j$  est une combinaison convexe de  $P_{j-1}$  et  $P_{j+1}$ , on obtient la relation:

$$P_j = (1 - \mu_j)P_{j-1} + \mu_j P_{j+1} \quad \text{où } \mu_j = (u_{j+k} - u_{j+1}) / (u_{j+k} - u_{j+1} + u_{j+k-1} - u_j)$$

d'où l'équation:  $(1 - \mu_j) P_{j-1} - P_j + \mu_j P_{j+1} = 0$

Si l'on considère la même notation que pour la première contrainte, on a:

$$g^T P = 0 \quad \text{avec}$$

$$g = (0, \dots, (1-\mu_j), -1, \mu_j, 0, \dots, 0) \quad \text{où la } j^{\text{ème}} \text{ coordonnée est égale à } -1.$$

Remarque

\* la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice est égale à 1, sauf celle de la  $j^{\text{ème}}$  ligne qui est égale à 0.

\* dans le cas où  $u_{j+k} = \dots = u_j$ , on utilise la relation:

$$P_j = 1/2 (P_{j-1} + P_{j+1})$$

On obtient d'ailleurs, cette relation quand le vecteur nodal est uniforme.

Intérêt et avantages:

\* le choix de  $P_{j+1}^{(r)} = 0$  induit une relation symétrique si  $r$  est pair avec  $0 = < r = < k-1$

\* si l'on déplace toutes les données d'un vecteur  $b$  alors la B.spline qui résulte est une translation de la première de vecteur  $b$ .

\* soit  $u$  dans  $[u_j, u_{j+1}[$ , alors la dérivée seconde est exprimée par:

$$P^{(2)}(u) = (k-1)(k-2) \sum_{i=k+3}^j P_i^{(2)} N_i^{k-2}(u)$$

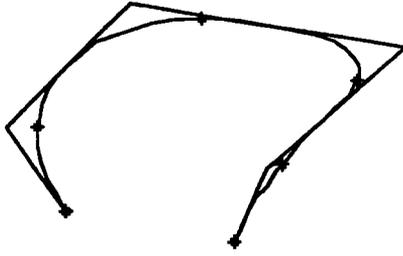
Si l'on impose la contrainte:  $P_i^{(2)} = 0$  pour  $i=j-k+3, \dots, j$ , alors on a:  $P^{(2)}(u) = 0$  pour  $[u_j, u_{j+1}[$ ; soit  $P(u)$  est un segment de droite dans cet intervalle.

Il résulte alors une B.spline d'ordre  $k$  qui contient un segment de droite.

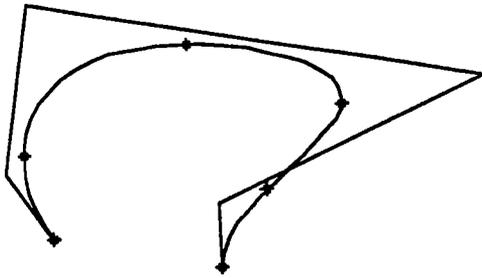
**II.1.6 Conclusion**

Quand on interpole par une B.spline, le nombre de points de contrôle étant égal à celui des points de passage, cependant le degré de cette courbe n'est pas lié au nombre de points de contrôle. A la limite quand l'ordre égale le nombre de points de contrôle on obtient une interpolation de Bézier; dans ce dernier cas, le degré étant important, la courbe entre deux points de passage a une grande zone de liberté à osciller.

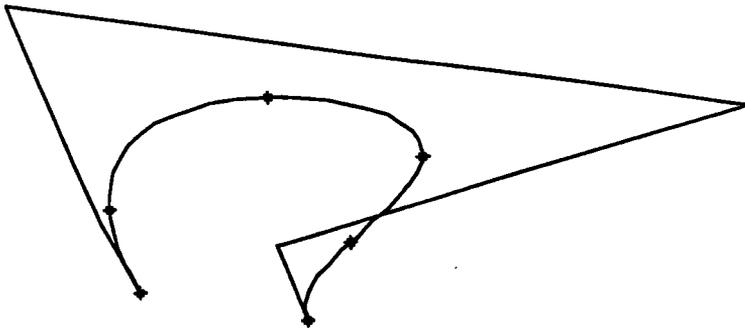
Il est souhaitable d'interpoler par une B.spline non uniforme quand les points de passages ne sont pas régulièrement espacés.



$n = 6$  ,  $k = 3$



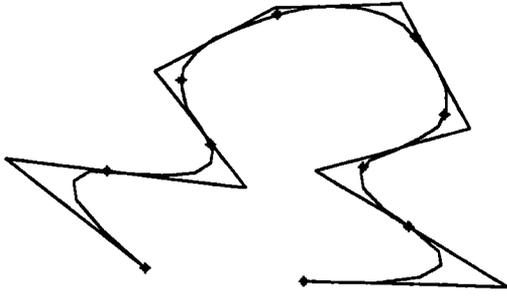
$n = 6$  ,  $k = 4$



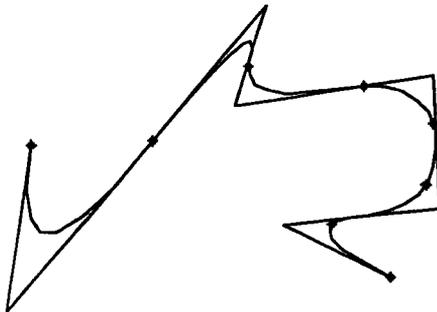
$n = 6$  ,  $k = 5$

### INTERPOLATION PAR UNE B.SPLINE

\* : Points de passage , n est leur nombre , k est l'ordre de la B.spline d'interpolation



$n = 10$  ,  $k = 3$



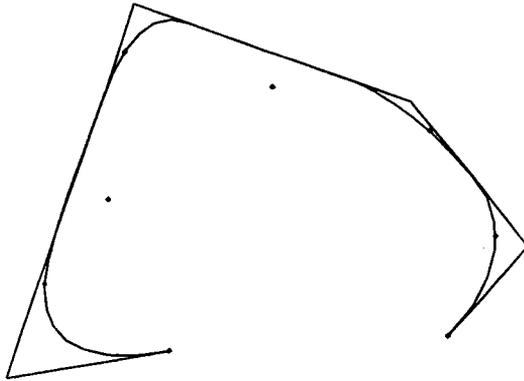
$n = 8$  ,  $k = 3$



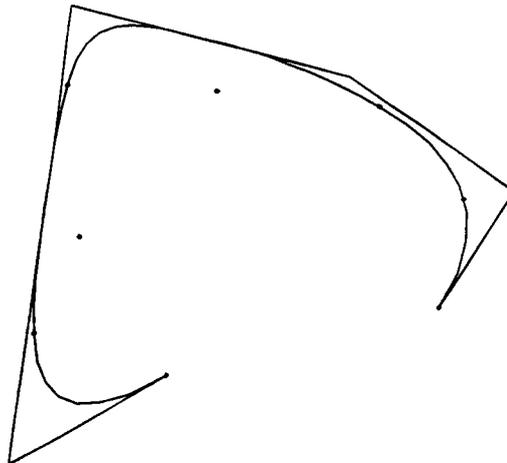
$n = 8$  ,  $k = 4$

### INTERPOLATION PAR UNE B.SPLINE

\* : Points de passage , n est leur nombre , k est l'ordre de la B.spline d'interpolation

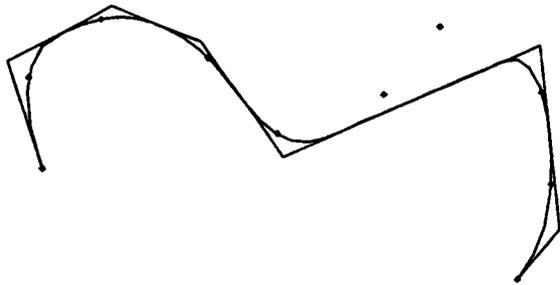


ordre = 3

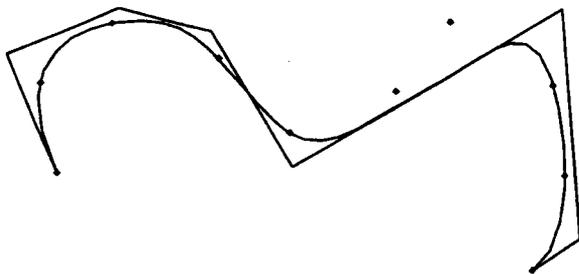


ordre = 4

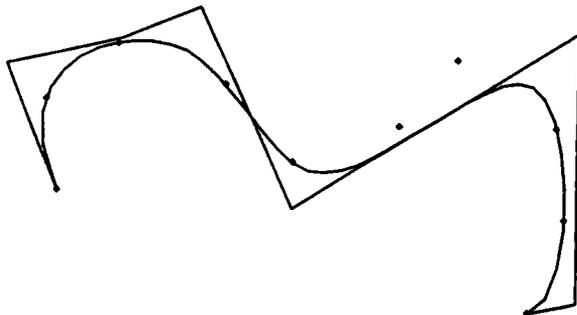
**INTERPOLATION DANS LE CAS DE DONNEES INADEQUATES.  
CES DONNEES SONT REPRESENTES PAR DES ETOILES EN  
DEHORS DE LA COURBE D'INTERPOLATION**



ordre = 3



ordre = 4



ordre = 5

**INTERPOLATION DANS LE CAS DE DONNEES INADEQUATES.  
CES DONNEES SONT REPRESENTES PAR DES ETOILES EN  
DEHORS DE LA COURBE D'INTERPOLATION**

## II.2 DEUXIEME PARTIE: INTERPOLATION PAR UNE SURFACE

### II.2.1. Introduction

Dans ce chapitre, on dispose d'un nuage de points de  $\mathbb{R}^3$ ; et on se propose de faire passer une surface de Bézier par les points du réseau. Dans le cas où le nuage de points est arbitraire, le problème s'avère difficile à traiter.

Dans ce qui suit, on supposera que le réseau est uniforme; autrement dit à chaque point du réseau est attribué un couple de paramètres  $(u_i, v_j)$  tel que:

$$u_i = i/n \quad , \quad v_j = j/m \quad \text{pour } i=0, \dots, n \quad \text{et } j=0, \dots, m$$

$n$  est le nombre de points du réseau choisi selon  $u$ .

$m$  est le nombre de points du réseau choisi selon  $v$ .

#### \*-Remarque

Comme pour les courbes, le choix fait précédemment est valable si la courbure varie relativement peu et si les points sont à peu près régulièrement espacés.

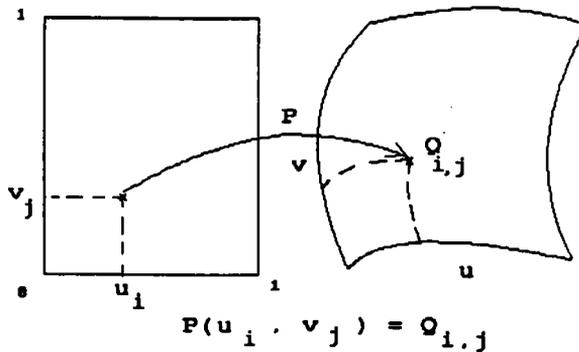


fig II.3 Répartition uniforme des points de passage du carreau de Bézier.

### II.2.2. Interpolation par un carreau de Bézier

Le réseau étant uniforme, les points de passage  $Q_{i,j}$  sont répartis uniformément sur la surface de Bézier. Supposons qu'on ait  $n+1$  points de passage selon  $u$  et  $m+1$  selon  $v$ . La surface de Bézier  $n \times m$  cherchée est telle que:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad \text{avec } 0 \leq u, v \leq 1$$

Cette surface sera définie, si l'on détermine ses points de contrôle. Comme la répartition des points de passage est uniforme on a:

$$Q_{k,l} \text{ est dans } P(u,v) \text{ , si et seulement si, il existe } u_k = k/n \text{ et } v_l = l/m \text{ tels que:}$$

$$P(u_k, v_l) = Q_{k,l}$$

soit le système:

pour  $k=0 \dots n$

pour  $l=0 \dots m$

$$P(u_k, v_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} B_i^n(u_k) B_j^m(v_l) = Q_{k,l}$$

Pour résoudre le système ci-dessus, on procède de la façon suivante:

a) On applique le schéma d'interpolation par une courbe de Bézier à toutes les lignes formées par les points de passage  $Q_{k,l}$  [BOH 84]. On obtient les points de contrôle intermédiaires des courbes de Bézier correspondant à:  $v = v_k$

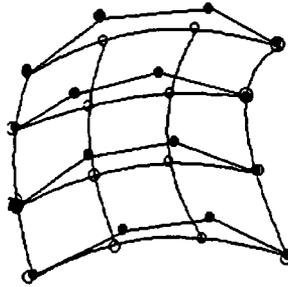


Fig II.4 Schéma d'interpolation ligne par ligne

o : Point de passage, \* : Point de contrôle intermédiaire

b) On applique le schéma d'interpolation par une courbe de Bézier à toutes les colonnes formées cette fois-ci par les points de contrôle intermédiaires; on obtient les points de contrôle  $P_{i,j}$ .

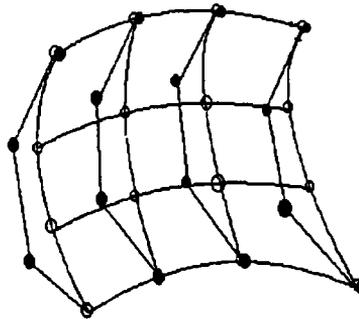


fig II.5 schéma d'interpolation colonne par colonne.

o : Point de contrôle intermédiaire \* : Point de contrôle définitif

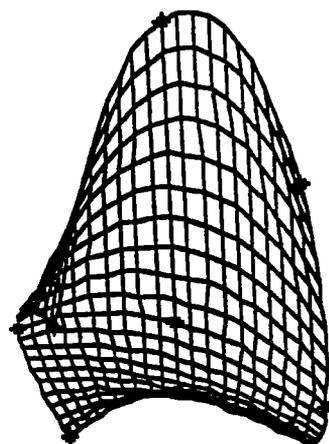
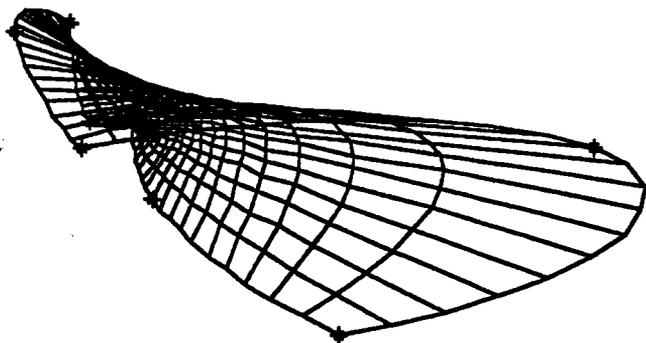
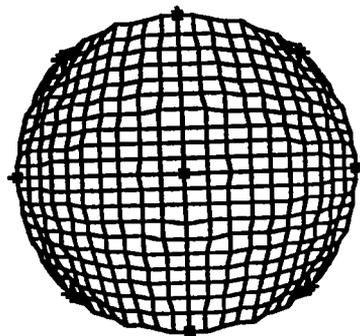
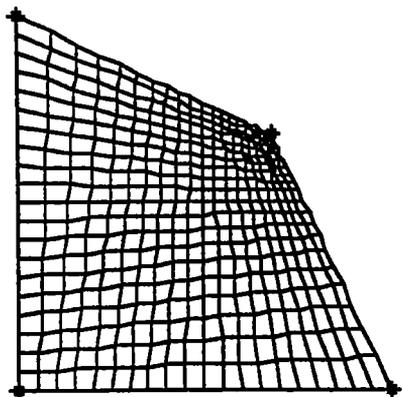
### ***II.2.3 Conclusion***

Quand on interpole par un carreau de Bézier sur des points de passage qui ne sont pas régulièrement espacés, il est évident que ce carreau passera par ces points, mais ailleurs, il peut subir des oscillations non souhaitées. D'autant plus que le degré du carreau est lié au nombre de points de passage, ce qui augmente l'amplitude des oscillations entre les points de passage quand leur nombre est important.

Ne prenant en compte que les contraintes de position, un degré élevé du carreau accroît le degré de liberté à l'oscillation de celui-ci entre les points à interpoler.

Il est donc conseillé d'interpoler par des carreaux de degré petit, par exemple par des cubiques; et d'utiliser plusieurs carreaux de Bézier raccordés entre eux.

La méthode d'interpolation utilisée pour les surfaces B.spline est la même que celle utilisée pour les carreaux de Bézier; comme pour les courbes on peut interpoler par une surface B.spline de degré petit indépendamment du nombre de points de passages, d'où leurs intérêt, surtout quand elles ne sont pas uniformes.



INTERPOLATION PAR UN CARREAU DE BEZIER

## ***CHAPITRE 3***

### ***MODELISATION DES CARREAUX DE BEZIER RESTREINTS***

### **III.1 INTRODUCTION**

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé à partir d'un modèle géométrique, un modèle mathématique dont l'intérêt apparaît de manière évidente dans la visualisation et la création de nouveaux modèles géométriques.

Cette étude a été menée sous des hypothèses restrictives; en effet le nuage de points de passage était choisi d'une manière uniforme.

Malheureusement, des cas plus pratiques peuvent présenter des modèles géométriques plus équivoques. La création d'une fenêtre ou d'un toit ouvrable dans une carrosserie de voiture en est un exemple concret.

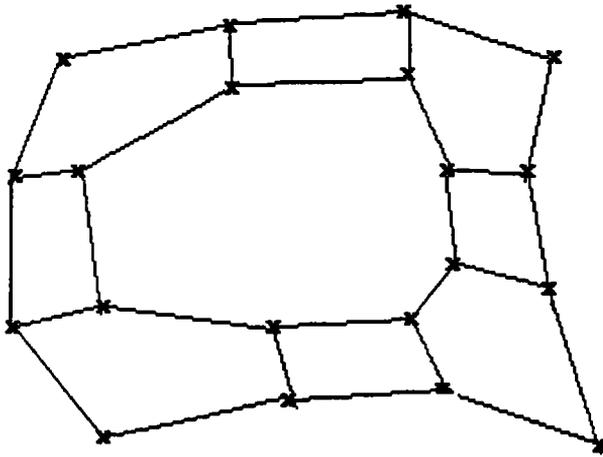


fig III.1 Cas équivoque de modèle géométrique présentant un trou à l'intérieur.  
x : point du modèle géométrique .

Notre but dans ce paragraphe est de trouver un modèle mathématique mieux adapté à ce modèle géométrique. autrement dit, une surface qui passe par les points du nuage et qui présente un trou à l'intérieur.

Le domaine sur lequel est défini le modèle mathématique ne sera pas égal au carré unité  $[0,1]^2$ .

Pour illustrer les différentes approches, on étudie la trace d'un cylindre sur une surface de Bézier; de même on s'intéresse à la création de surfaces ayant plus de quatre bords. Ce dernier cas peut se produire lorsque le cylindre intersecte le carreau de Bézier sur un de ses bords.

Cet exemple n'a pour objectif que de faciliter la présentation sans limiter la généralité du problème posé.

### **III.2 PRESENTATION DU PROBLEME**

Soit C un modèle géométrique, dont un modèle mathématique est un carreau de Bézier.

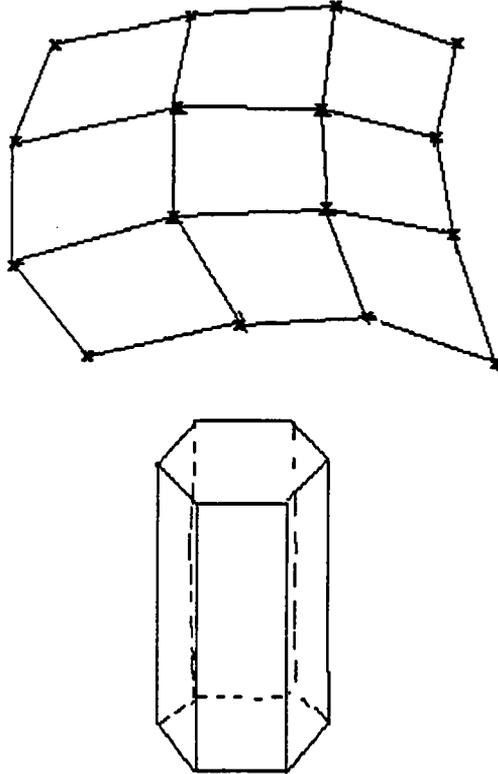


fig III.2 C est un carreau de Bézier approché par des facettes planes et D est un cylindre approché par les limites.

La combinaison de ces deux modèles peut entraîner plusieurs nouveaux modèles plus ou moins intéressants. Supposons que l'on se place dans le cas de la figure ci-dessous.

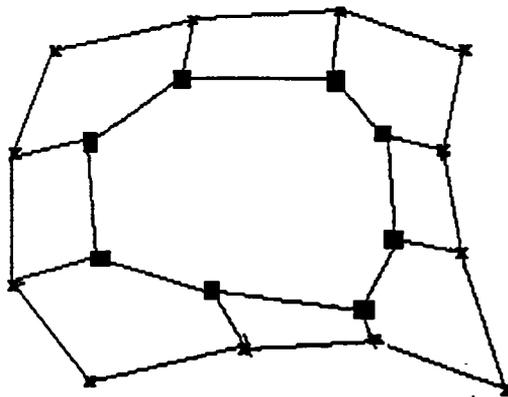


fig III.3 Exemple de modèle géométrique défini à partir de C et D; les points foncés représentent une approximation de la trace de D sur le carreau de Bézier.

Dans ce qui suit, on supposera que les points d'intersection sont connus et définissent le contour interne du trou K, ces points peuvent provenir soit:

- de l'intersection du cylindre sous sa forme Bézier rationnelle et le carreau de Bézier.
- ou bien de la section du cylindre défini par son équation implicite et le carreau de Bézier (ANNEXE 4).

On supposera aussi que leurs coordonnées paramétriques sont connues; dans le cas contraire, on propose un algorithme de subdivision qui approche avec une estimation satisfaisante les coordonnées paramétriques (u,v) d'un point (x,y,z) sur un carreau de Bézier en utilisant l'algorithme de subdivision d'un carreau et la propriété de l'enveloppe convexe. ( ANNEXE 2)

A la suite de cette intersection, le carreau qui était défini sur  $[0,1]^2$  a été restreint. Le plus souvent on considère des carreaux définis, comme distorsions d'un domaine rectangulaire, c'est à dire des carreaux appartenant à la famille des surfaces obtenues par un produit tensoriel.

Soit par exemple la cubique:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i^3(u) B_j^3(v) \quad \text{avec } 0 \leq u, v \leq 1$$

Plusieurs algorithmes tels que les algorithmes de subdivisions sont adaptés à cette famille de surfaces.

Un carreau restreint peut être défini en gardant la représentation initiale et en procédant à des opérations booléennes sur le domaine paramétrique  $[0,1]^2$  [CAS 87] [MIL 86].

Un carreau restreint peut être donc représenté par un arbre CSG 2D. La représentation d'un solide par arbre CSG 3D consiste en des opérations booléennes entre demi-espaces.

Par analogie, la représentation d'un carreau par arbre CSG 2D consiste en des opérations booléennes entre demi-plans.

**EXEMPLE:**

le carré unité étant l'intersection de quatre demi-plans  $H_1, H_2, H_3, H_4$  tels que:

$$H_1 = \left\{ (u,v) \text{ de } \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0 \right\}$$

$$H_2 = \left\{ (u,v) \text{ de } \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0 \right\}$$

$$H_3 = \left\{ (u,v) \text{ de } \mathbb{R}^2 \mid u \leq 1 \right\}$$

$$H_4 = \left\{ (u,v) \text{ de } \mathbb{R}^2 \mid v \leq 1 \right\}$$

Si l'on intersecte le carré unité avec l'espace extérieur limité par une ellipse E telle que:

$$E = \left\{ (u,v) \text{ de } \mathbb{R}^2 \mid \frac{(u-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{v^2}{(1/4)^2} \geq 1 \right\}$$

On obtient le domaine résultant comme le montre la figure ci-dessous:

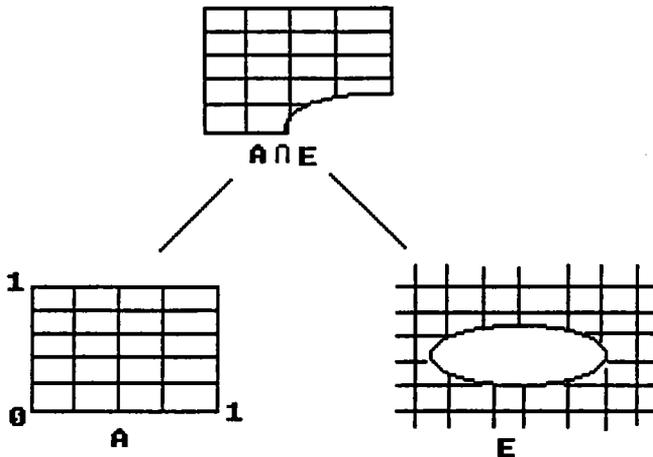


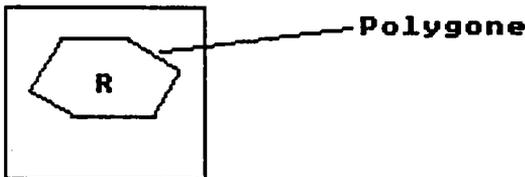
fig III.4 Exemple de domaine aboutissant à un carreau restreint.

Les sommets et segments du domaine restreint peuvent être évalués à partir de l'arbre CSG 2D.

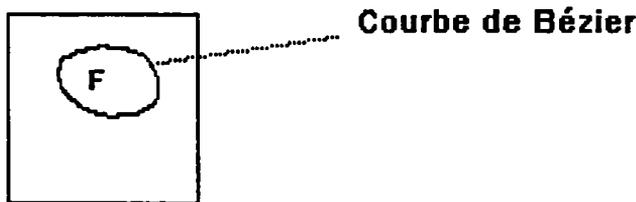
Les limites du carreau restreint seront ainsi calculées à l'aide de la représentation initiale (une cubique). On peut donc créer des carreaux complexes par modification du domaine.

Nous proposons de modéliser le carreau restreint de trois manières différentes:

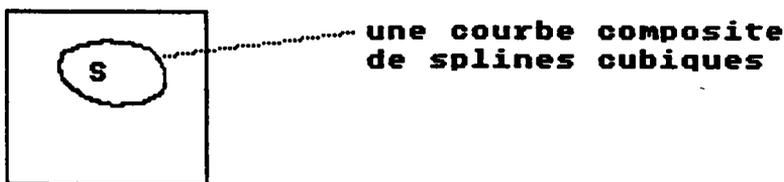
- 1- le domaine paramétrique du carreau restreint sera le carré unité privé de R.



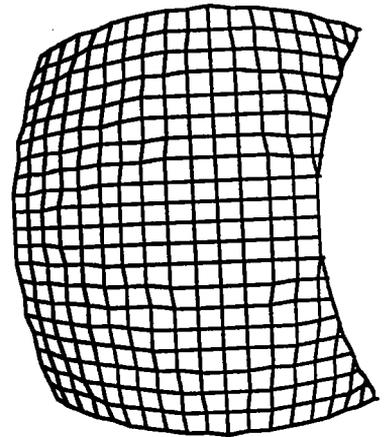
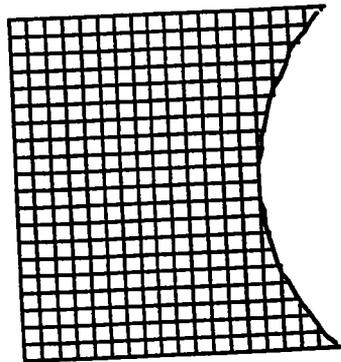
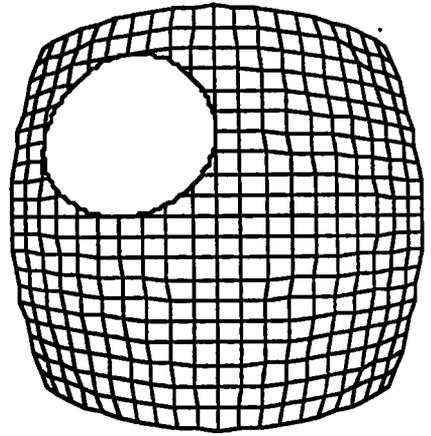
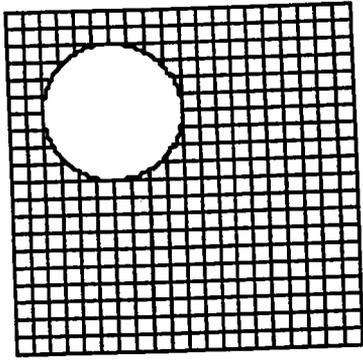
- 2- le domaine paramétrique du carreau restreint sera le carré unité privé de F.



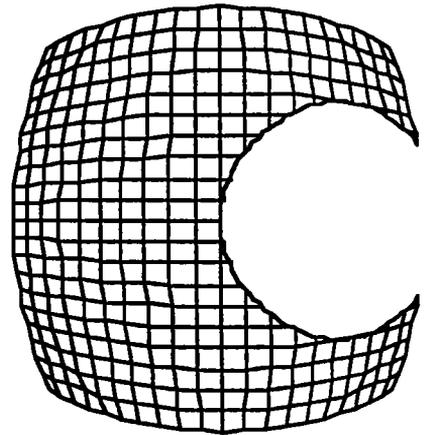
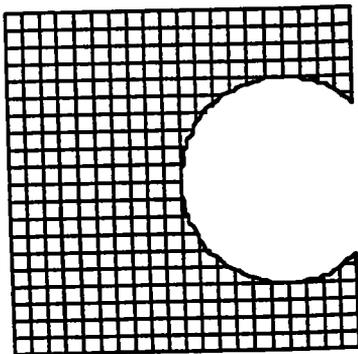
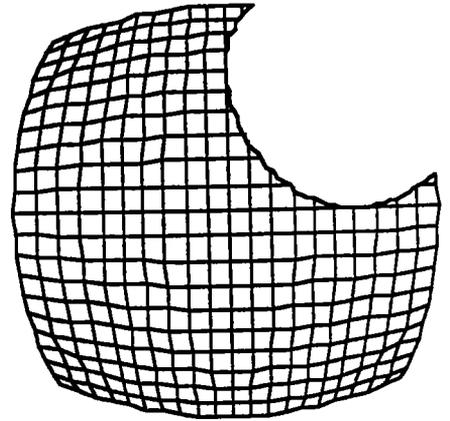
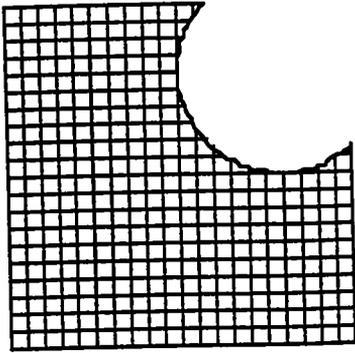
- 3- le domaine paramétrique du carreau restreint sera le carré unité privé de S



**Remarque importante:** ces trois propositions n'offrent qu'un cas particulier d'un modèle où le contour est une B.spline.



CREATION DE CARREAU DE BEZIER RESTREINT PAR DES OPERATIONS  
BOOLEENNES DANS LE PLAN



**CREATION DE CARREAU DE BEZIER A CINQ BORDS PAR DES  
OPERATIONS BOOLEENNES DANS LE PLAN.**

### III.3 PREMIERE PROPOSITION

On peut considérer comme modèle mathématique du modèle géométrique (C-D):

$P(u, v)$  avec  $(u, v)$  dans  $[0, 1]^2 - R$

$R$  désigne le polygone fermé plein limité par les segments  $[A_i, A_{i+1}]$ .  $A_i$  a pour coordonnées paramétriques  $(u_i, v_i)$ .

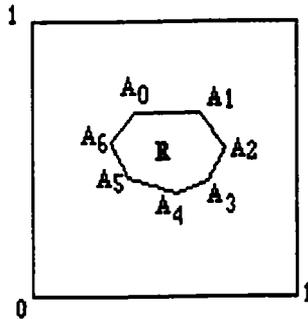


fig III.5 Domaine paramétrique représentant le domaine de restriction du modèle mathématique de la première proposition.

#### III.3.1 Technique d'affichage

Cette technique repose essentiellement sur l'intersection d'une droite et d'un segment. La droite a pour équation soit  $u=u_0$ , soit  $v=v_0$ , et le segment sera de la forme  $s_i = [A_i, A_{i+1}]$ .

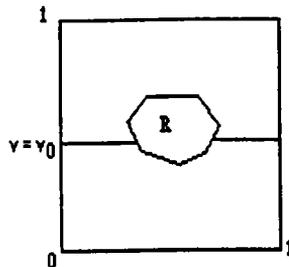


fig III.6 Intersection d'une droite horizontale  $v=v_0$  avec le contour du polygone  $R$ .

Soit la droite  $v=v_0$

On calcule l'intersection de cette droite avec  $S_i$  ( $i=0\dots p$ ),  $p$  étant le nombre de sommets du polygone  $R$ .

Soit  $s_i$  le  $i^{\text{ème}}$  segment du polygone  $R$ ,  $s_i$  a pour équation paramétrique :

$$s_i(t) = ( u_i(t) , v_i(t) )$$

avec  $t$  dans  $[0, 1]$

où :

$$u_i(t) = (1-t)u_i + tu_{i+1}$$

et

$$v_i(t) = (1-t)v_i + tv_{i+1}$$

Premier cas:  $v_i = v_{i+1}$

Dans ce cas le segment  $s_i$  est parallèle à  $v = 0$  et on a:

$$s_i(t) = (u_i(t), v_i)$$

\* Si  $v_i$  est différent de  $v_0$ , la droite d'équation  $v=v_0$  ne rencontre pas le segment  $s_i$ .

\* Si  $v_i$  est égal à  $v_0$ , la droite  $v=v_0$  est le support du segment  $s_i$ .

Deuxième cas:  $v_i < > v_{i+1}$

Dans ce cas  $v_i(t) = v_0$  ssi  $t = (v_0 - v_i) / (v_{i+1} - v_i)$

\* Si  $t$  n'appartient pas à  $[0, 1]$  alors la droite  $v=v_0$  ne rencontre pas le segment  $s_i$ .

\* Si  $t$  appartient  $[0, 1]$  alors la droite  $v=v_0$  rencontre le segment  $s_i$  et on calcule  $u_i(t)$ .

### III.3.2 Etude de $P(s_i(t))$

Soit  $P(u, v)$  le carreau de Bézier et  $s_i(t)$  l'équation du segment  $[A_i, A_{i+1}]$ . La courbe  $P(s_i(t))$  est une courbe tracée sur le carreau de Bézier.

#### Proposition

Soit  $f(t) = (u(t), v(t))$  avec  $u(t_0) = u_0$  et  $v(t_0) = v_0$ .

Si  $f'(t_0)$  est différent de 0 et si le point  $P(u_0, v_0)$  est régulier autrement dit le rang de  $dP(u_0, v_0) = 2$ , alors le point  $P(u_0, v_0)$  est régulier de  $P(f(t))$ .

En effet on a:

$$(P \circ f)'(t_0) = P_u(u_0, v_0)u'(t_0) + P_v(u_0, v_0)v'(t_0)$$

#### Application

Soit  $s(t) = (u(t), v(t))$

avec  $u(t) = u_0 + t(u_1 - u_0)$

$v(t) = v_0 + t(v_1 - v_0)$

$t$  appartient à  $[0, 1]$

On a:  $s(0) = (u_0, v_0)$  et  $s'(0) = (u_1 - u_0, v_1 - v_0)$

Remarquons que  $s'(0)$  est différent de  $(0,0)$ .

Si  $P(u_0, v_0)$  est un point régulier du carreau de Bézier alors, la courbe tracée  $P(s(t))$  admet en  $(u_0, v_0)$  la tangente:

$$P(u_0, v_0) + \text{IR}((u_1 - u_0)P_u(u_0, v_0) + (v_1 - v_0)P_v(u_0, v_0))$$

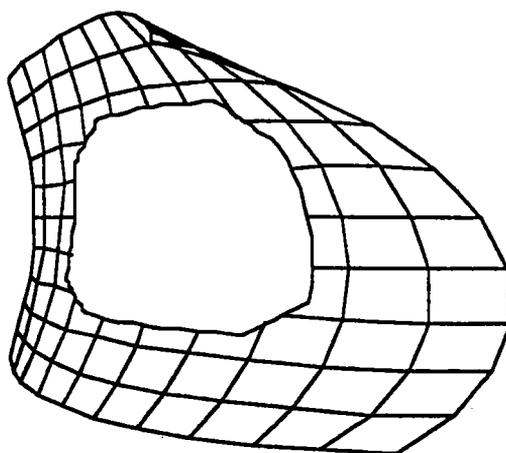
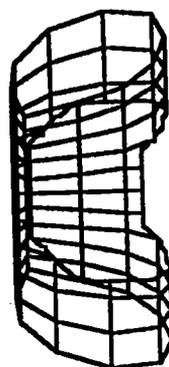
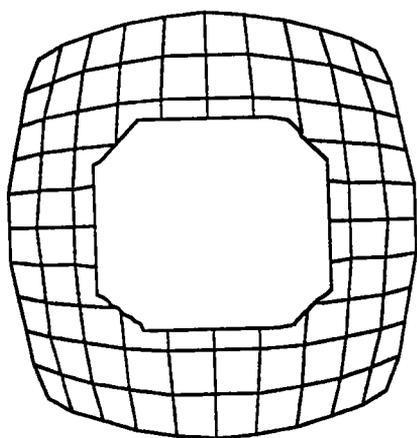
Cette droite est incluse dans le plan tangent au carreau de Bézier en  $(u_0, v_0)$ .

#### Remarque

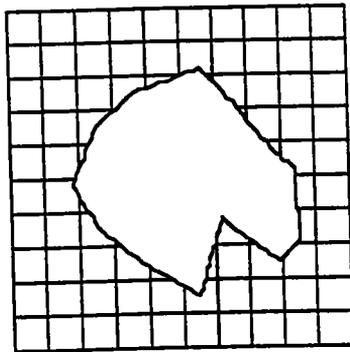
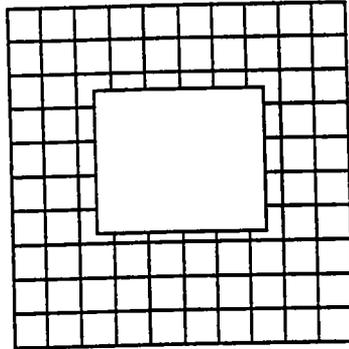
Lorsque  $u(t) = u_0$  resp  $v(t) = v_0$ , la courbe  $P(s(t))$  admet en  $(u_0, v_0)$  une tangente dirigée par  $P_u(u_0, v_0)$  respectivement  $(P_v(u_0, v_0))$ . Dans ce cas  $P(s(t))$  est une ligne isoparamétrique du carreau de Bézier.

### III.3.3 Conclusion

Ce modèle est simple et intuitif, puisqu'il repose sur une approche par des segments dont le traitement se trouve simplifié pour beaucoup d'opérations. Cependant, l'approche du contour n'est pas toujours esthétique. Ce modèle peut être adapté à des interactions locales car si l'on modifie un sommet du polygone, ce dernier sera modifié localement.



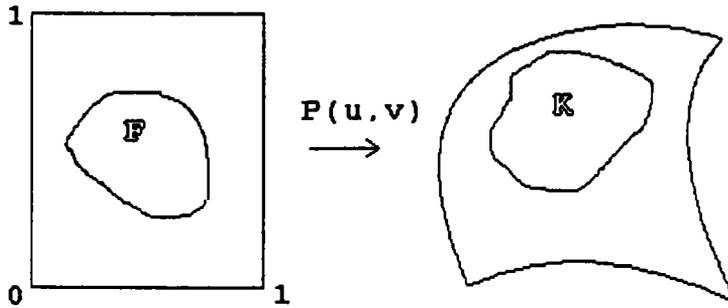
**DEFINITION DE NOUVEAUX MODELES GEOMETRIQUES A PARTIR DU  
MODELE PAR LES SEGMENTS**



**DEFINITION DE NOUVEAUX MODELES GEOMETRIQUES A PARTIR DU  
MODELE PAR LES SEGMENTS**

### III.4 DEUXIEME PROPOSITION

On peut considérer le carreau de Bézier restreint au carré unité privé d'un ensemble  $F$  dont la frontière est une courbe de Bézier comme modèle mathématique du modèle géométrique (C-D).



$P(u, v)$  avec  $(u, v)$  dans  $[0, 1]^2 - F$

fig III.7 La restriction du carreau de Bézier au domaine  $[0, 1]^2 - F$  représente le modèle mathématique de la deuxième proposition, la frontière de  $F$  étant plus régulière.

#### III.4.1 schéma d'étude

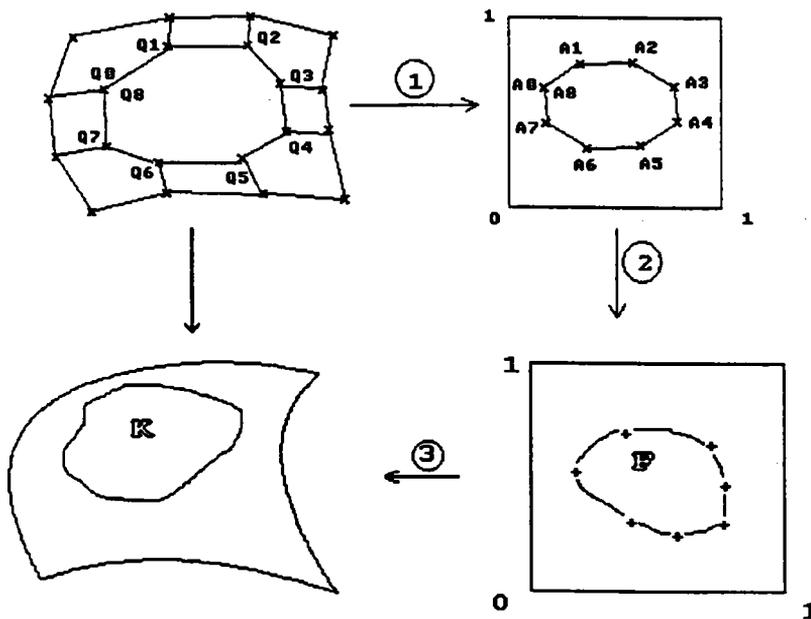


fig III.8 Schéma montrant les étapes à suivre pour la définition du modèle mathématique de la deuxième proposition.

Dans la figure ci-dessus, les points qui définissent le contour du trou sont les points  $Q_i$ .

Le chemin 1 nous permet d'avoir le polygone plan dans le carré unité et dont les sommets  $A_i(u_i, v_i)$  représentent les coordonnées paramétriques des points  $Q_i$ .

On a:  $A_i(u_i, v_i); Q_i = P(u_i, v_i) = P(A_i)$ .

Dans le chemin 2, on cherche la courbe de Bézier fermée qui passe par les points  $A_i$  et qui limite le domaine  $F$  du carré unité.

Le chemin 3, nous permet d'afficher l'image de  $[0, 1]^2 - F$  par  $P$ .

a) Etude du chemin 1

C étant un carreau de Bézier, on a:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_i^n(u) B_j^m(v) \quad \text{avec } 0 \leq u, v \leq 1$$

Supposons que le contour du trou soit défini par  $p+1$  points  $Q_0, \dots, Q_p$  tels que:

$$Q_i = P(u_i, v_i) \quad \text{pour } i=0, \dots, p$$

Précisons que les points  $Q_i$  sont pris de façon à former un contour fermé comme le montre la figure ci-dessous, il en résulte immédiatement que  $Q_0 = Q_p$ .

Dans le carré unité; les points  $A_0, A_1, \dots, A_p$  de coordonnées  $(u_0, v_0), (u_1, v_1), \dots, (u_p, v_p)$  forment un polygone et on a:  $A_0 = A_p$ .

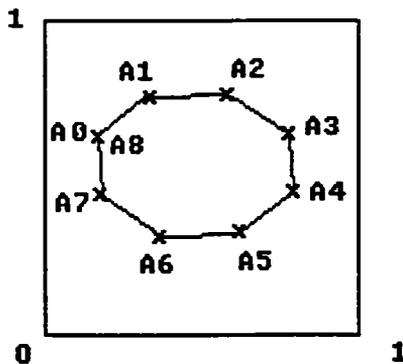


fig III.9 Première étape: considération des coordonnées paramétriques des points qui définissent le contour.

b) Etude du chemin 2

On considère les points  $A_i (i=0, \dots, p)$ , comme étant des points de passage d'une courbe de Bézier de degré  $p$ . Soit  $B(t)$  cette courbe, on a:

$$B(t) = \sum_{i=0}^p B_i B_i^p(t) \quad \text{avec } t \text{ dans } [0,1]$$

où les  $B_i (i=0, \dots, p)$  sont les points de contrôle de cette courbe.  $B(t)$  est une courbe de Bézier fermée et plane, elle est contenue en général dans le carré unité. Soit  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $B_i$ ; on écrit:

$$B(t) = (u(t), v(t)) = \left( \sum_{i=0}^p x_i B_i^p(t) , \sum_{i=0}^p y_i B_i^p(t) \right) \quad \text{avec } t \text{ dans } [0,1]$$

Soit l'application:

$$B : [0,1] \text{ ----- } > [0,1] \times [0,1]$$

$$t \text{ ----- } > (u(t), v(t))$$

On suppose qu'à chaque point  $A_i$  est affectée une coordonnée paramétrique  $t_i = i/p$ . On déterminera les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des points de contrôle de la courbe  $B(t)$  grâce aux systèmes linéaires suivants:

$$\begin{cases} u(t_i) = u_i & i=0, \dots, p \\ t_i = i/p \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v(t_i) = v_i & i=0, \dots, p \\ t_i = i/p \end{cases}$$

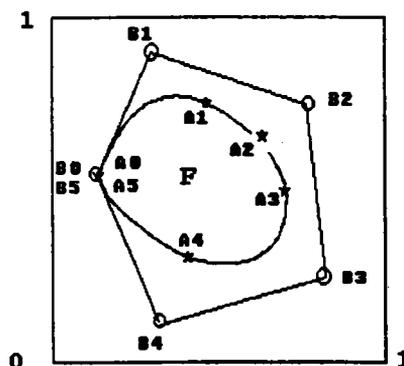


fig III.10 Deuxième étape: Schéma représentant une courbe de Bézier  $B(t)$  avec son polygone caractéristique.  $B(t)$  est obtenue par interpolation sur les points  $A_i$ .

F désigne la portion du carré limitée par la courbe de Bézier  $B(t)$ .

### c) Forme algébrique

A l'aide de la méthode de la résolvante[SED 84], on peut passer de la représentation paramétrique de  $F$  à la représentation algébrique; le contour est alors exprimé par une équation de la forme:  $F(u,v) = 0$ .

### d) Classification d'un point par rapport au domaine

Dans le cas où le contour est exprimé par son équation algébrique  $F(u,v) = 0$ ; celui-ci partitionne le plan en deux parties d'équations respectives  $F(u,v) > 0$ ,  $F(u,v) < 0$

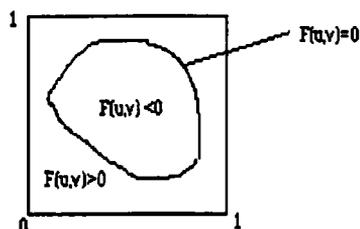


fig III.11 : Classification d'un point par rapport au domaine, le contour interne déterminé par son équation  $F(u,v) = 0$ .

Un point  $A$  de coordonnées  $(u_0, v_0)$  est facilement classé par rapport au domaine selon qu'on ait  $F(u_0, v_0) < 0$  ou bien  $F(u_0, v_0) > 0$ , avec un traitement spécial pour les points qui sont proches du contour.

Dans le cas où le contour est exprimé par sa représentation paramétrique, on utilise la règle suivante:

Un point  $A$  est à l'extérieur du domaine si une demi-droite d'origine  $A$  rencontre le bord du domaine un nombre pair de fois, il est à l'intérieur si le nombre d'intersection de cette demi-droite et le bord est impair.

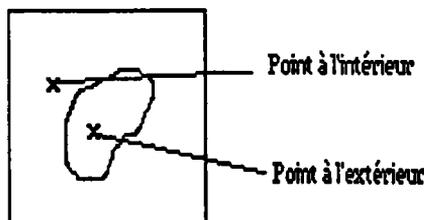


fig III.12 : Classification d'un point par rapport au domaine, le contour interne déterminé par son équation paramétrique  $(u(t), v(t))$ .

### e) Etude du chemin 3

Soit  $K$  l'image de  $F$  par l'application  $P$ . L'image de  $[0,1]^2 - F$  est le carreau de Bézier privé de  $K$ , ainsi:

$$P(u,v) \text{ avec } (u,v) \text{ dans } [0,1]^2 - F$$

est un modèle mathématique de (C-D).

Remarque: le bord de  $K$  passe par les points  $Q_i$  et est l'image d'une courbe de Bézier.

### III.4.2 Technique d'affichage

Le modèle mathématique défini précédemment permet de créer et de visualiser de nouveaux modèles géométriques. La technique d'affichage de ces modèles consiste à un affichage des isoparamétriques.

On peut utiliser pour cela l'algorithme de Lane-Riesenfeld qui calcule l'intersection entre une courbe et une droite. On propose un algorithme qui traite le même problème mais de manière différente. Une comparaison entre les deux algorithmes a été réalisée (ANNEXE 1).

#### a) Affichage d'une isoparamétrique $v=cste$

On fait varier le paramètre  $v$  dans l'intervalle  $[0,1]$  avec un pas constant  $h$ , soit par exemple  $h=1/n$ ; On calcule pour  $j=0\dots n$  l'intersection de la droite  $v = v_j$  avec la courbe  $B(t)=(u(t),v(t))$ . Ce qui revient à résoudre l'équation  $v(t) = v_j$  avec  $t$  dans  $[0,1]$ . Deux cas peuvent se présenter:

1- Cas: L'équation  $v(t)=v_j$  n'a pas de solutions réelles dans  $[0,1]$ .

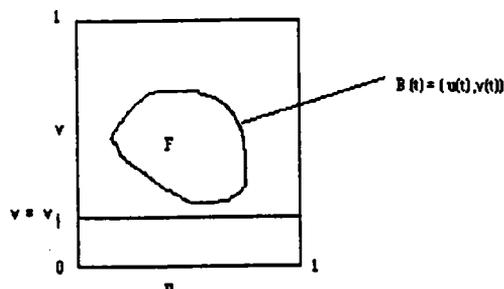


fig III.13 Cas où la droite  $v=v_j$  ne rencontre pas le contour de  $F$ .

Dans ce cas la droite  $v = v_j$  ne rencontre pas la courbe  $B(t)$  et l'on affichera la courbe:

$$P(u, v_j) \text{ pour } u \text{ dans } [0,1]$$

2- Cas: L'équation  $v(t)=v_j$  a des solutions réelles dans  $[0,1]$

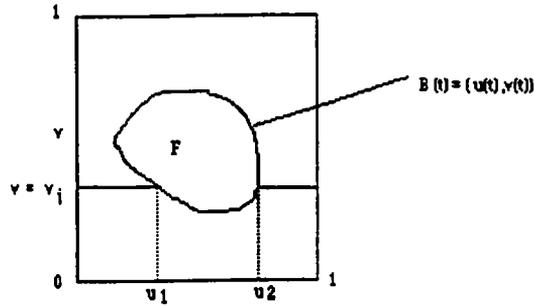


fig III.14 schéma représentant l'intersection de la droite  $v=v_j$  avec le contour de  $F$ .

Soient  $t_1, \dots, t_k$  les  $k$  solutions de l'équation  $v(t) = v_j$ , on a:

$$v(t_1) = v(t_2) = \dots v(t_k) = v_j.$$

On calcule ensuite pour  $i=0, \dots, k$  et pour  $t_i$  dans  $[0,1]$  la valeur de  $u_i = u(t_i)$ .

Supposons qu'en les ordonnant dans l'ordre croissant on ait:  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_k$ ,

dans ce cas, on affiche les restrictions de la courbe de Bézier aux intervalles:

$$[0, u_1], [u_2, u_3], \dots, [u_k, 1].$$

### Remarque

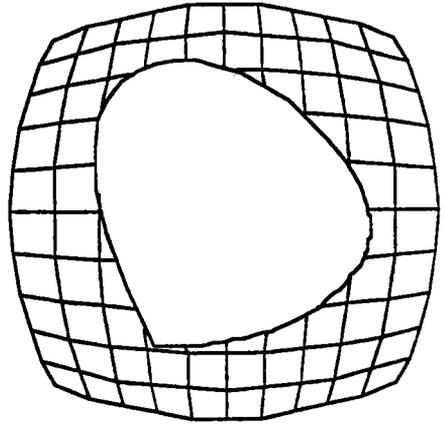
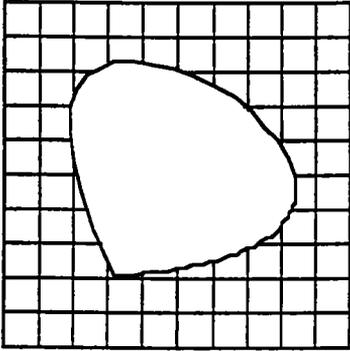
On évitera les cas litigieux, en particulier quand il y a contact sans pénétration du segment dans le trou en considérant une droite parallèle à une distance inférieure au pas d'affichage.

### b) Affichage d'une isoparamétrique $u=cste$

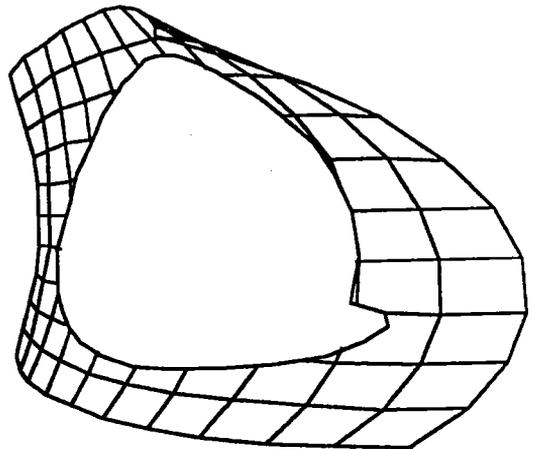
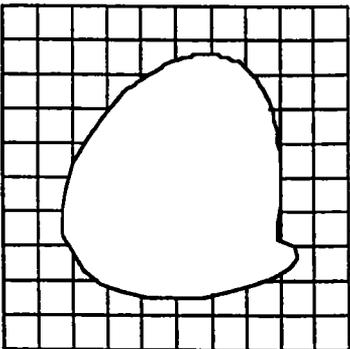
Le procédé utilisé précédemment est valable pour afficher des courbes ou des restrictions de courbes verticales.

### III.4.3 Conclusion

Ce modèle repose essentiellement sur l'interpolation par une courbe de Bézier dans le domaine paramétrique et se trouve approximatif à cause des erreurs induites par une interpolation à l'aide d'une courbe de degré élevé. Cependant ce modèle est satisfaisant si la liste des points n'est pas importante. Dans ce cas, vu le caractère global des courbes de Bézier, l'interaction est globale ce qui n'est pas souhaitable. Par la suite, dans le chapitre IV on propose une démarche pour mieux localiser la modification.



Le contour interne est une courbe de Bézier obtenue par interpolation sur 4 points dans le domaine paramétrique

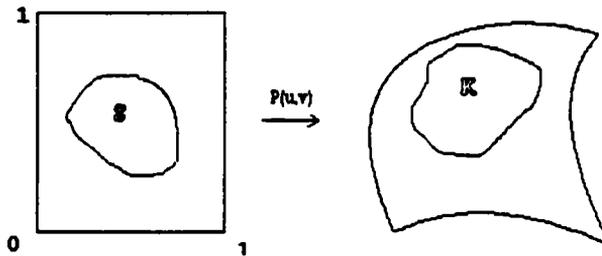


Le contour interne est une courbe de Bézier obtenue par interpolation sur 5 points dans le domaine paramétrique

**DEFINITION DE NOUVEAUX MODELES GEOMETRIQUES A PARTIR DU  
MODELE PAR LES BEZIER**

### III.5 TROISIEME PROPOSITION

On peut considérer le carreau de Bézier restreint au carré unité privé d'un ensemble  $S$  dont la frontière est une courbe composites de splines cubiques comme modèle mathématique du modèle géométrique (C-D).



$$P(u, v) \text{ avec } (u, v) \text{ dans } [0, 1]^2 - S$$

fig III.15 La restriction du carreau de Bézier au domaine  $[0, 1]^2 - S$  avec  $S$  une spline composite, représente le modèle mathématique de la troisième proposition.

#### III.5.1 Interpolation par une spline cubique fermée

soient  $A_0, A_1, \dots, A_n$ ,  $n+1$  points de  $[0, 1]^2$  disposé de façon à former un contour fermé ( $A_0 = A_n$ ). On veut faire passer une courbe par ces points.

En général, lorsqu'on veut modéliser une courbe de grande longueur, il est préférable de joindre plusieurs arcs de courbes entre eux. On associe à la courbe un vecteur nodal, dont les éléments correspondent aux points de jonctions des arcs [BAR 87].

Les valeurs nodales seront choisies en fonction de la distance des points  $A_i$ .

Soient  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$  les valeurs nodales telles que:  $u_i < u_{i+1}$  pour tout  $i$ .

La courbe est définie de la façon suivante:

$$P : [u_0, \dots, u_n] \text{ ----- } \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$u \text{ ----- } \rightarrow P(u)$$

avec :

$$P(u) = P_i \left( \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \quad \text{pour } u \text{ dans } [u_i, u_{i+1}[$$

Chaque segment  $P_i(u)$   $i=1, \dots, n-1$  est représenté par une polynôme cubique:

$$P_i : [0, 1] \text{-----} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \text{-----} \rightarrow P_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3$$

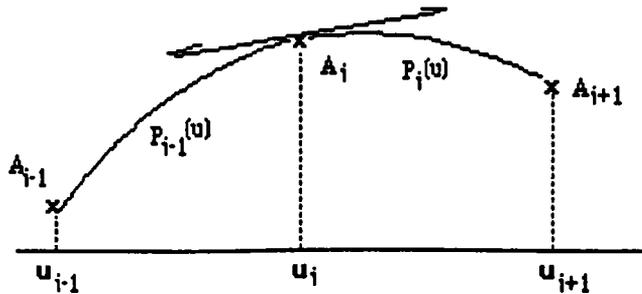


fig IV.16 condition de raccord de deux segments

Si  $A_i$  a pour coordonnées  $(x_i, y_i)$  et  $X_i(u)$  désigne la première composante du  $i^{\text{ème}}$ , segment alors les contraintes de position pour les splines cubiques s'expriment par:

$$X_i(u_i) = x_i \quad \text{soit} \quad a = x_i \quad (1)$$

$$X_i(u_{i+1}) = x_{i+1} \quad \text{soit} \quad a_i + b_i + c_i + d_i = x_{i+1} \quad (2)$$

Les points de raccord partagent les conditions aux dérivées du premier et du second ordre. Ces conditions doivent être les mêmes de part et d'autre d'un noeud sans imposer de valeurs.

Soient les dérivées  $D_i$  à l'extrémité de chaque segment  $P_i(u)$ ; on a:

$$X'_i \left( \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} \right)_{u=u_i} = D_i \quad \text{soit} \quad b_i = (u_{i+1} - u_i) D_i \quad (3)$$

de même:

$$X'_i \left( \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} \right)_{u=u_{i+1}} = D_{i+1} \quad \text{soit} \quad b_i + 2c_i + 3d_i = (u_{i+1} - u_i) D_{i+1} \quad (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent d'avoir les équations:

$$\begin{aligned} a_i &= x_i \\ b_i &= (u_{i+1} - u_i) D \\ c_i &= 3(x_{i+1} - x_i) - (u_{i+1} - u_i)(2D_i + D_{i+1}) \quad (5) \\ d_i &= 2(x_i - x_{i+1}) + (u_{i+1} - u_i)(D_i + D_{i+1}) \end{aligned}$$



### III.5.3 Ecriture d'une spline cubique en fonction des paramètres u, v du domaine

Il est possible de décrire une cubique par son équation implicite à l'aide de la méthode de la résultante, soit  $R(u,v) = 0$ , cette équation, on a:

$$R(u,v) = \begin{vmatrix} a_0 \cdot u & b_0 & c_0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 \cdot u & b_0 & c_0 & d_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \cdot u & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 \cdot v & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 \cdot v & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cdot v & b_1 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

$R(u, v) = 0$  est de degré 3 en u et 3 en v.

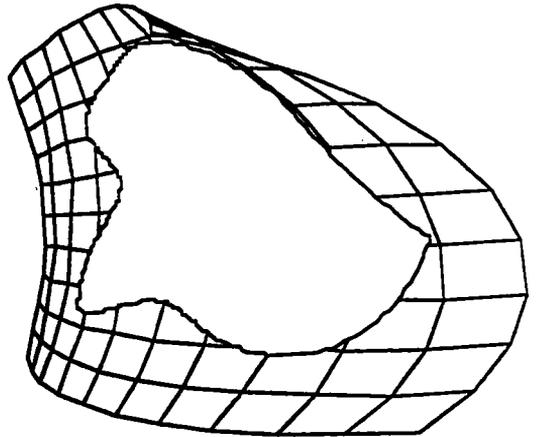
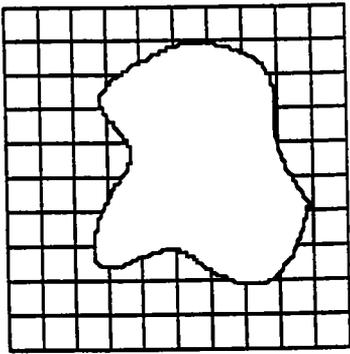
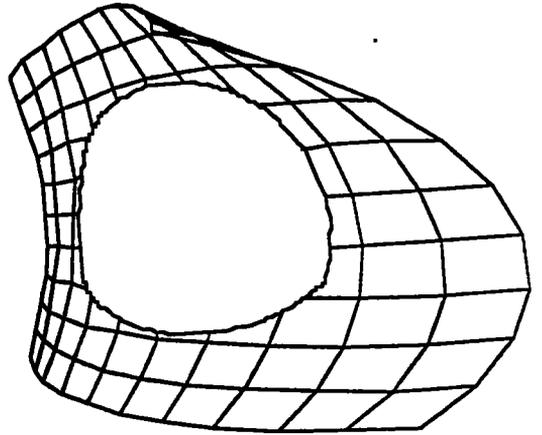
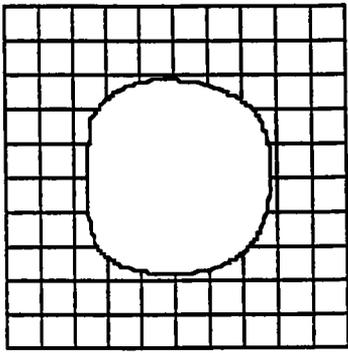
### III.5.4 Technique d'affichage

Elle consiste comme pour la deuxième proposition à intersecter une droite et une courbe composite; l'avantage est que l'intersection se fait entre une droite et plusieurs cubiques séparément.

### III.5.5 Conclusion

Ce modèle utilise des fonctions simples, les splines cubiques, qui ont une souplesse suffisante et dont le prix des calculs correspondants n'est pas très élevé, et s'avèrent valables pour n'importe quelle taille de la liste de points. Il est plus simple de générer des points sur des cubiques élémentaires que générer ceux d'une courbe globale d'ordre supérieur. De plus les splines cubiques ont moins tendance aux oscillations qu'une spline d'ordre supérieur.

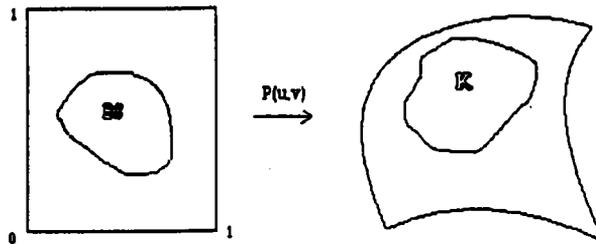
Leur utilisation simplifie certaines opérations, par exemple l'intersection courbe-droite. Cependant si l'on modifie une donnée  $A_i$ , la déformation se répercute sur toute la spline, tout en diminuant le long de la courbe; on dit alors que le comportement des splines est discipliné.



**DEFINITION DE NOUVEAUX MODELES GEOMETRIQUES A PARTIR DU  
MODELE PAR LES SPLINES**

### III.6 QUATRIEME PROPOSITION

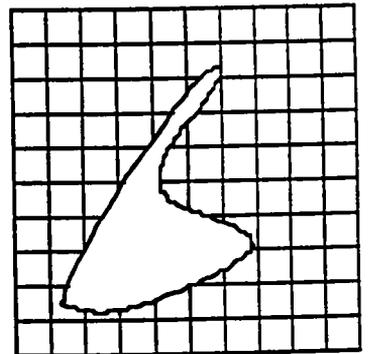
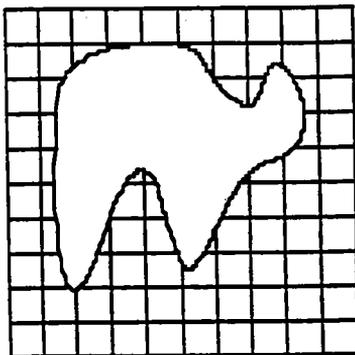
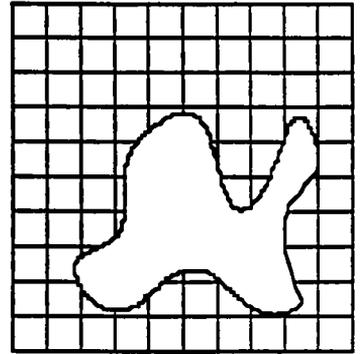
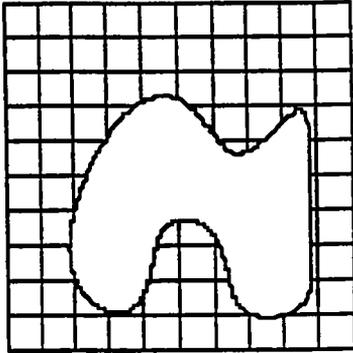
On peut considérer le carreau de Bézier restreint au carré unité privé d'un ensemble BS dont la frontière est une courbe B.spline comme modèle mathématique du modèle géométrique (C-D).



$P(u,v)$  avec  $(u,v)$  dans  $[0,1]^2 - BS$

fig III.17 La restriction du carreau de Bézier au domaine  $[0,1]^2 - BS$  avec BS une B.spline représente un modèle mathématique plus général.

Dans cette proposition, le modèle obtenu généralise celui des autres propositions, en effet avec une B.spline d'ordre 2 on obtient un polygone, soit le premier modèle approché par les segments; dans le cas où la B.spline est d'ordre maximal égal au nombre de points de contrôle, on obtient une Bézier, soit le second modèle. Le cas des splines naturelles représente un cas particulier des B.splines d'ordre 4. Le modèle par les B.splines s'offre à une interaction meilleure dans le sens qu'il présente une uniformité dans la définition contrairement au splines naturelles.



DEFINITION DE NOUVEAUX MODELES GEOMETRIQUES A PARTIR DU  
MODELE PAR LES B.SPLINES

### **III.7 CONCLUSION**

Quatre solutions ont été proposées afin de modéliser les carreaux de Bézier restreints.

la première consiste à restreindre le carreau au carré unité privé d'un ensemble limité par un polygone R, ce modèle présente l'inconvénient d'être irrégulier.

la seconde le restreint au carré unité privé d'un ensemble limité par une courbe de Bézier, le degré lié au nombre de points de contrôle d'une Bézier induit l'inconvénient de ce modèle.

la troisième proposition le restreint au carré unité privé d'un ensemble de frontière une courbe composite de splines, et offre l'avantage des splines, malheureusement on n'a pas une définition globale du contour.

Il apparaît de manière évidente que le modèle par les B.splines cubiques présente plus d'intérêt dans le sens qu'il présente l'avantage d'être approprié pour une interaction locale; comme on le verra dans le chapitre 4.

# ***CHAPITRE 4***

## ***MODELE ADAPTE A L'INTERACTION***

## IV.1 Introduction

On peut considérer les modèles proposés dans le chapitre précédent comme un outil de modélisation des carreaux restreints, qui permet au concepteur de procéder à des modifications interactives. Notre but est de montrer la capacité de chacun des modèles à l'interaction. On étudie principalement le cas du modèle par les Bézier et on propose une procédure pour limiter les déformations, le cas des splines cubiques qui se prêtent mal à l'interaction, enfin le cas des B.splines qui sont bien adaptés à l'interaction.

On peut procéder à deux sortes de modifications:

- \* soit modifier un point de contrôle du carreau de Bézier.
- \* soit modifier un point de contrôle du contour interne.

Il est intéressant de noter que la première modification induit un changement global du carreau restreint et que cette déformation sera locale si l'on considère une surface B.spline.

## IV.2 Interaction globale du modèle par les Bézier

La modification d'un point de contrôle du contour interne modifie la totalité de sa forme, cela présente un inconvénient pour l'utilisateur qui souhaite une modification locale de la surface. Notre but est de contrôler cette déformation et de localiser son effet.

### IV.2.1 Définition d'une droite de Balayage

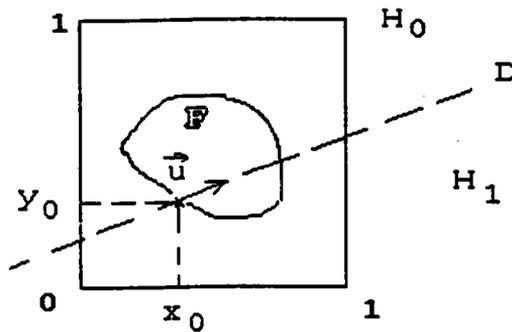
Soit  $f(t)$ , la courbe de Bézier plane de degré  $p$ .  $f(t)$  détermine le bord interne du modèle et s'écrit:

$$f(t) = (u(t), v(t)) = \left( \sum_{i=0}^p x_i B_i^p(t) , \sum_{i=0}^p y_i B_i^p(t) \right)$$

avec  $t \in [0,1]$

$f(t)$  étant fermée, on a :  $(x_0, y_0) = (x_p, y_p)$ . Soit  $D$  la droite passant par  $(x_0, y_0)$  et dirigée par le vecteur  $u(a, b)$ .

$$D : \begin{cases} u(t) = x_0 + at \\ v(t) = y_0 + bt \end{cases}$$



IV.1 Définition d'une droite de balayage qui coupe le contour

D peut s'écrire sous la forme :  $b(u(t) - x_0) - a(v(t) - y_0) = 0$

Ainsi, les points d'intersection de la droite D et de la courbe  $f(t)$  vérifient l'équation:

$$\sum_{i=0}^p [b(x_i - x_0) - a(y_i - y_0)] B_i^p(t) = 0 \quad (1)$$

### Remarques

1) Si tous les points de contrôle de  $f(t)$  sont tels que:

$$b(x_i - x_0) - a(y_i - y_0) = 0$$

c'est à dire les vecteurs  $(a,b)$  et  $(x_i - x_0, y_i - y_0)$  sont colinéaires alors dans ce cas, le polygone de contrôle a pour support la droite D, par conséquent la courbe est incluse dans D et l'intervalle  $[0,1]$  est égal à l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2) Si tous les points de contrôle sont tels que:

$$b(x_i - x_0) - a(y_i - y_0) < 0$$

alors dans ce cas, ils appartiennent à l'un des demi-plans  $H_0$  ou  $H_1$ , si la quantité  $-bx_0 + ay_0$  est négative, ils sont dans  $H_1$ , dans le cas contraire, ils sont dans  $H_0$ . L'équation (1) n'a donc pas de solutions.

On procède de la même façon, si tous les points de contrôle sont tels que:

$$b(x_i - x_0) - a(y_i - y_0) > 0$$

3) Le cas où on peut avoir une ou plusieurs solutions se produit quand l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle rencontre la droite D. On appliquera par la suite l'algorithme de De Casteljaou pour résoudre cette équation, La subdivision sera choisie d'une manière judicieuse (ANNEXE 1).

#### IV.2.2 Contrôle de la déformation à l'aide de l'algorithme de De Casteljau et d'une droite D

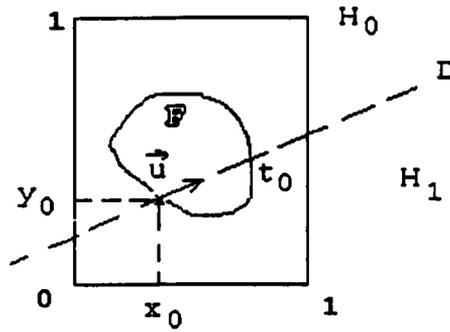


fig IV. 2 La subdivision en  $t_0$  du contour afin de localiser la déformation dans les demi-plans  $H_0$  et  $H_1$

Soient  $t_0, t_1, \dots, t_p$  les solutions de l'équation (1) telles que  $t_i$  soit différent de 0 et de 1.

Supposons que  $t_0$  est la plus petite valeur des  $t_i$ . A l'aide de l'algorithme de De Casteljau, on divise  $f(t)$  en  $t=t_0$ . Il en résulte deux courbes de Bézier.

$f_0(t)$  associée au polygone de contrôle  $b^0$

$f_1(t)$  associée au polygone de contrôle  $b^1$

#### Conséquence

Si  $\text{Env}(b^0)$  est une partie de  $H_0$ , et que l'on modifie un des points de contrôle de  $f_0(t)$  dans  $H_0$ , On ne modifiera le modèle qu'au dessus de l'isoparamétrique  $P(D)$ .

De même, si  $\text{Env}(b^1)$  forme une partie de  $H_1$ , et que l'on modifie un des points de contrôle de  $f_1(t)$  dans  $H_1$ , On ne modifie le modèle qu'en dessous de l'isoparamétrique  $P(D)$ .

#### Remarques

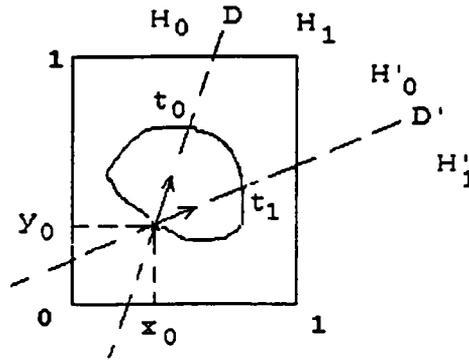
1) Dans ces modifications, on évitera de déplacer le point de division et les points de contrôle extrêmes.

2) Si  $f(t)$  est une cubique, la modification de l'un des deux points de contrôle interne entrave la continuité de la tangente au point de subdivision. Cependant, on peut toujours élever le degré de cette courbe.

### IV.2.3 Contrôle de la déformation à l'aide de De Casteljau et de deux droites de Balayages

Soient deux droites  $D$  et  $D'$  passant par  $(x_0, y_0)$  et ayant pour vecteur directeur  $u(a, b)$  et  $v(a', b')$ .

Soient  $H_0$  et  $H_1$  les deux demi-plans limités par  $D$ ,  $H'_0$  et  $H'_1$  les deux demi-plans limités par  $D'$  comme le montre la figure ci-dessous:



IV.3 Définition de deux droite de balayages  $D_0$  et  $D_1$   
le contour est divisé en trois parties

Soient  $b^0$  et  $b^1$  les deux polygones de contrôle résultants de la division de  $f(t)$  en  $t=t_0$ . Soient  $f_0(t)$  et  $f_1(t)$  les courbes de Bézier associées.

Si  $t_1$  est tel que  $f_1(t_1)$  appartient à  $H_1$ , on subdivise  $f_1(t)$  en  $t_1$ .

Soient  $b^{1,0}$  et  $b^{1,1}$  les deux polygones résultants de cette subdivision.

Si  $Env(b^{1,0})$  est contenue dans le demi-plan  $H_1$  respectivement dans le demi-plan  $H'_0$ ; On peut faire varier un des points de contrôle dans la partie commune à  $H_1$  et  $H'_0$ , on affectera uniquement la partie conique du modèle limitée par  $P(D)$  et  $P(D')$ .

### IV.3 Interaction du modèle par les splines

Il est intéressant de noter dans ce cas, qu'un déplacement d'un point de contrôle de la  $i^{\text{ème}}$  spline entrave les conditions de tangence aux extrémités soit avec la  $(i-1)^{\text{ème}}$  spline, soit avec la  $(i+1)^{\text{ème}}$  spline. Un moyen pour remédier à ce problème consiste à augmenter le degré jusqu'à 4, soit, 5 points de contrôle, on ne peut déplacer par la suite que le point de contrôle médian; et pour assurer les conditions de raccord jusqu'à l'ordre 2 entre les splines il faut augmenter le degré jusqu'à 6, on ne peut dans ces conditions déplacer que le point de contrôle médian.

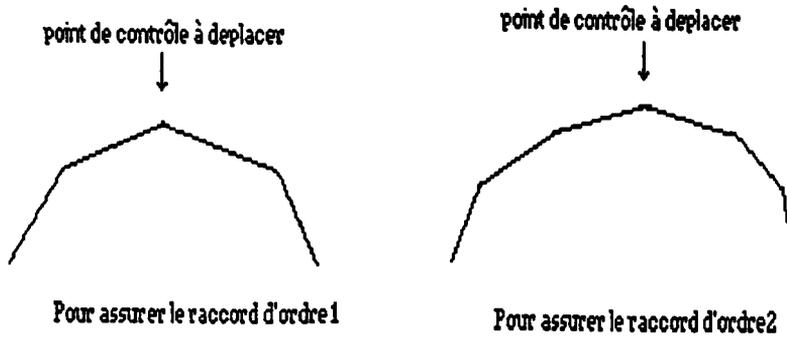


fig IV.4 Conditions pour assurer la continuité d'ordre 1 et 2 dans le cas des splines.

Cette restriction présente l'inconvénient fondamental du modèle par les splines.

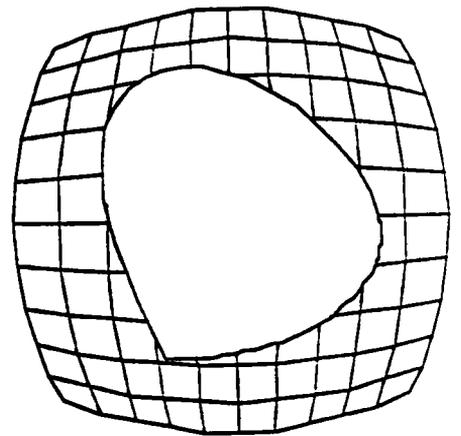
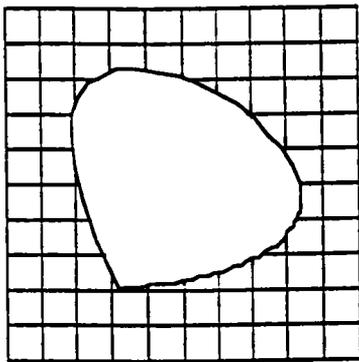
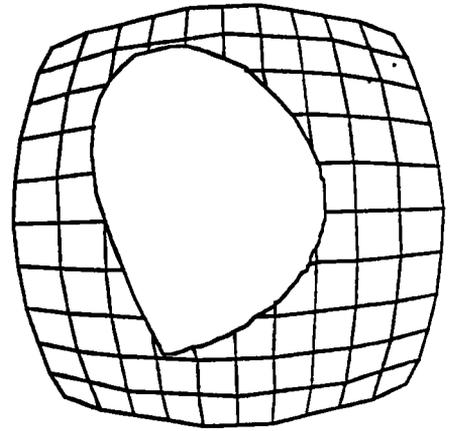
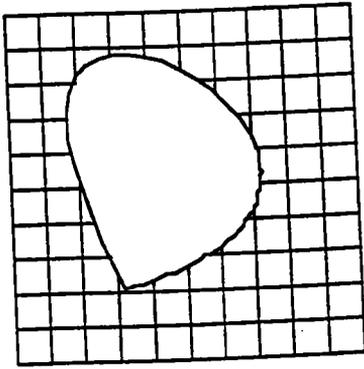
#### **IV.4 Intérêt du modèle par les B.splines pour l'interaction**

Contrairement aux splines cubiques qui sont définies par raccordement les B.splines sont définies comme une seule courbe, cette propriété induit l'intérêt du modèle par les B.splines pour l'interaction .

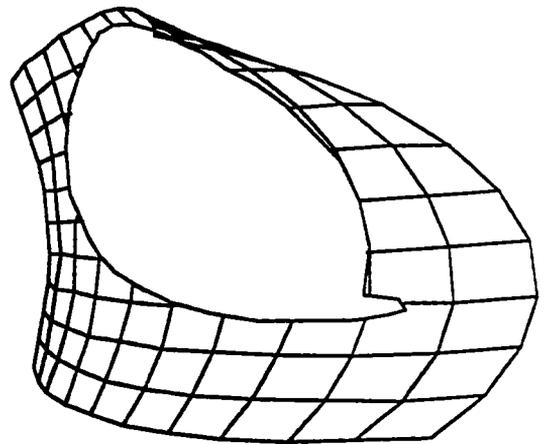
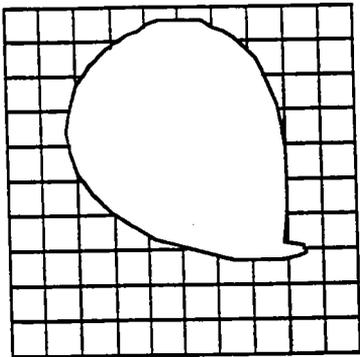
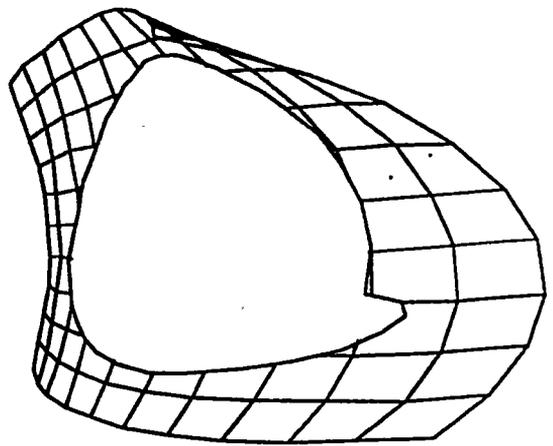
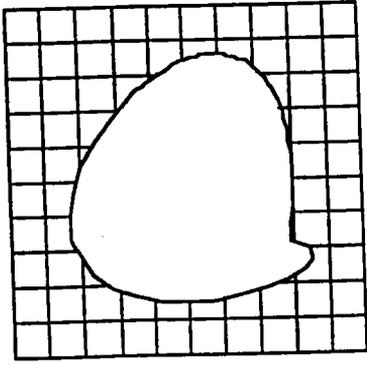
#### **IV.5 Conclusion**

Les modèles proposés offrent une nouvelle définition de points de contrôle ceux de l'espace et ceux dans le domaine paramétrique.

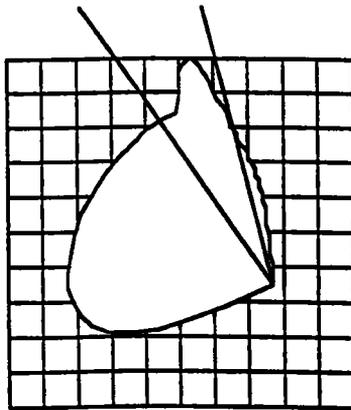
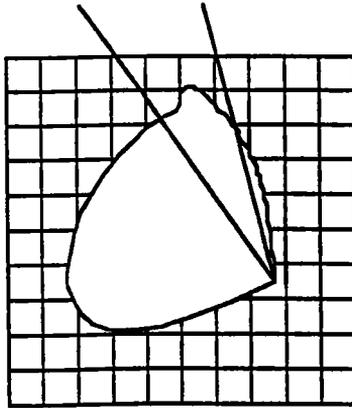
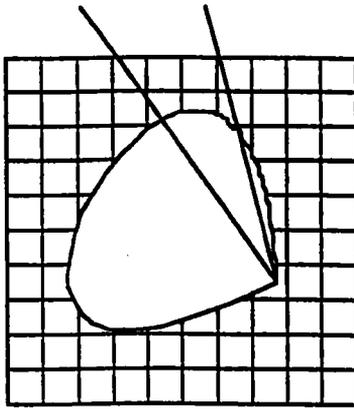
Le modèle par les B.splines est mieux adapté à l'interaction malgré les calculs qu'il nécessite par rapport aux autres modèles, son apport interactif est d'autant plus riche que la variation de l'ordre du contour interne offre la possibilité de définir plusieurs formes de ce dernier les unes plus régulières que les autres, il engendre dans les cas limites le modèle par les Bézier et celui par les segments.



**INTERACTION GLOBALE DU MODELE PAR LES BEZIER .  
ON A MODIFIE UN POINT DE CONTROLE DANS LE DOMAINE  
PARAMETRIQUE , LE CONTOUR INTERNE A CHANGE DE FORME DE  
MANIERE GLOBALE**

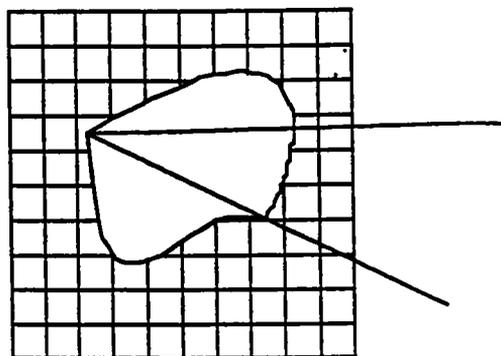
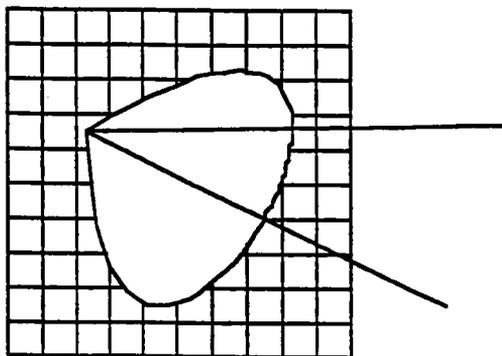


**INTERACTION GLOBALE DU MODELE PAR LES BEZIER .  
ON A MODIFIE UN POINT DE CONTROLE DANS LE DOMAINE  
PARAMETRIQUE , LE CONTOUR INTERNE A CHANGE DE FORME DE  
MANIERE GLOBALE**

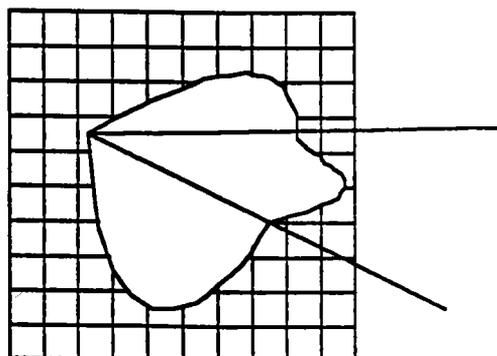
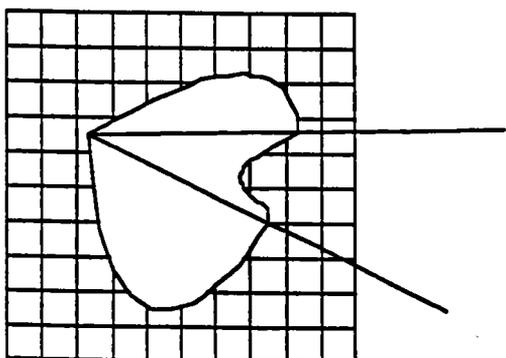


*Seule la partie du milieu du contour qui est modifiée*

**LOCALISATION DE LA MODIFICATION DU MODELE PAR LES BEZIER A  
L'AIDE DE DEUX DROITES DE BALAYAGES QUI INDIQUENT LES VALEURS  
DE SUBDIVISION**



*dernière partie*

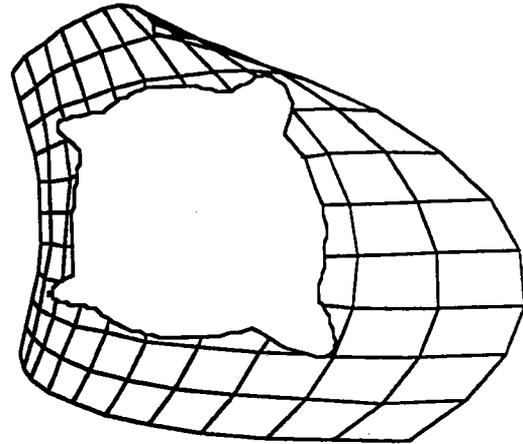
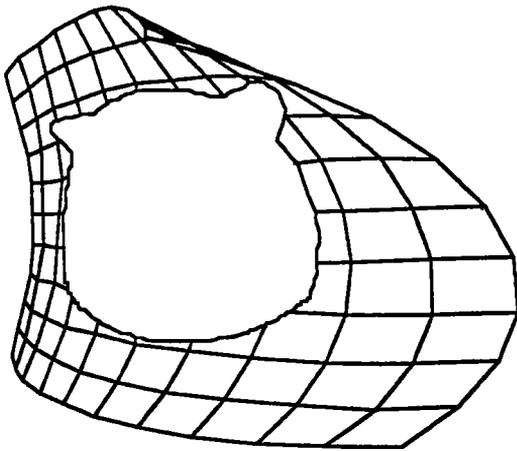
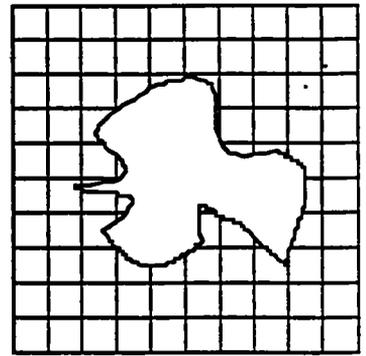
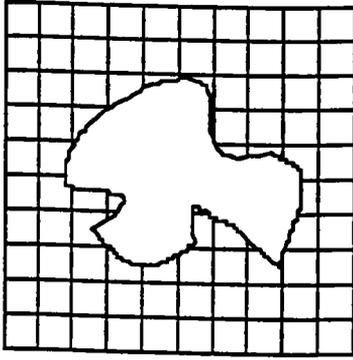


*partie du milieu*

*La partie du contour qui est modifiée est indiquée sous chaque dessin*

**LOCALISATION DE LA MODIFICATION DU MODELE PAR LES BEZIER A  
L'AIDE DE DEUX DROITES DE BALAYAGES QUI INDIQUENT LES VALEURS  
DE SUBDIVISION**





*MODIFICATION DU CONTOUR INTERNE DANS LE MODELE PAR LES  
SPLINES, LES CONDITIONS DE TANGENCE NE SONT PLUS RESPECTEES*

## ***CONCLUSION***

Au travers de l'exemple cylindre/carreau de Bézier, l'étude de la modélisation de carreaux restreints nous a amené à définir trois modèles mathématiques, qui sont un cas particulier d'un modèle plus général. Ces modèles présentent des avantages et des inconvénients qui se résument ainsi:

- Le modèle par les segments est intuitif, les calculs sont simples car on traite des primitives simples qui sont les segments, et qui, de plus est adapté à des déformations locales.

- Le modèle par les Bézier, ne peut être conçu pour des degrés élevés, les inconvénients que présente ce modèle s'induisent de la courbe de Bézier qui forme le contour interne du carreau restreint, son caractère global n'est pas souhaitable.

- Le modèle par les splines est suffisamment souple, dans ce cas, les calculs se trouvent simplifiés par l'utilisation des cubiques, par contre, la définition du contour interne par composition de plusieurs cubiques nuit à l'interactivité.

- Le modèle général par les B.splines présente dans le cas où le contour interne est une B.spline d'ordre 4 tous les avantages du modèle par les splines, son adaptation à l'interaction est induite par la conception du contour par une unique courbe.

Cette étude a été menée sous des hypothèses restrictives illustrées par l'exemple de l'intersection d'un cylindre avec un carreau de Bézier.

Notre supposition a porté sur un ensemble de points ordonnés approchant la courbe intersection, ces points doivent former le contour interne du carreau.

Nous avons proposé un modèle mathématique pour modéliser ce carreau restreint; il est cependant utile de rappeler qu'au cours de cette réalisation, on a eu recours à des méthodes numériques, ainsi plusieurs sources d'erreurs peuvent être spécifiées:

- 1 - Les points eux mêmes sont entachés d'erreurs, puisqu'ils sont le résultat d'une intersection entre facettes, de plus ces dernières sont calculées par subdivision du carreau, et l'erreur n'est pas négligeable.

- 2 - Si les points discrets ne sont définis que par leurs coordonnées cartésiennes, l'algorithme qu'on a proposé n'offre qu'une approximation de leurs coordonnées paramétriques et l'erreur ainsi commise dépend essentiellement des tests de convergence et de coplanarité.

- 3 - Le contour interne résulte de l'interpolation sur ces points et n'est donc qu'une approximation grossière de la courbe réelle.

Malgré ces inconvénients, la modélisation de carreaux restreints offre un cadre plus général de la définition de carreaux, l'interactivité se trouve accrue puisque l'on considère deux définitions de points de contrôle:

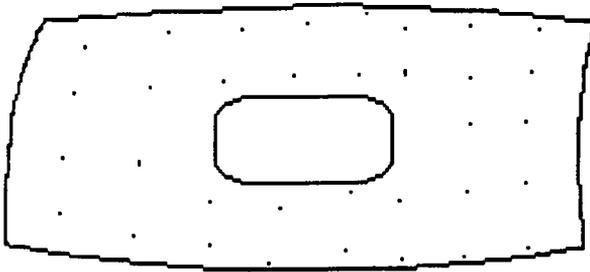
- Les points de contrôle du carreau de Bézier.
- Les points de contrôle du contour interne dans le domaine de définition du modèle Bézier

Cette définition reste cohérente avec les opérations effectuées sur les carreaux obtenus par produit tensoriel; ainsi l'intersection de deux carreaux restreints nécessite deux étapes:

- On intersecte les carreaux comme s'ils étaient définis sur le carré unité, le résultat est un ensemble contenant la courbe intersection.
- On élimine les parties inutiles en les classifiant par rapport au domaine.

Ces travaux peuvent être utiles, en particulier dans deux situations:

1- étant donné un objet existant, un toit de voiture par exemple, la numérisation ( par palpeur ) de cet objet donne des points comme le montre la figure ci-dessous.



Pour manipuler interactivement ce modèle, il est intéressant d'en déduire un modèle mathématique basé sur des carreaux restreints. Cependant, dans la mesure où nous avons supposé connu le modèle mathématique du carreau non restreint de départ, il faudrait résoudre le cas où nous ne disposons pas de modèle mathématique. On peut envisager par exemple, un remplissage par interpolation linéaire sur les points qui forment le contour interne; ensuite, on définit un modèle mathématique à partir du réseau complété.

2- étant donnés deux objets modélisés avec des facettes gauches ( modèle B.rep: Boundary representation ) , toute opération booléenne entre ces deux objets nécessite la mise en oeuvre de carreaux restreints. Notre approche permet d'obtenir un modèle mathématique sans résoudre directement le problème délicat d'intersection entre surfaces gauches.

En effet, on peut envisager les étapes suivantes:

- a - facettisation des deux objets.
- b - opérations booléennes sur les facettes planes, ces opérations sont non triviales, mais dont la solution est connue; le résultat est un solide approché par des facettes planes.
- c - à partir de ce résultat, on reconstitue des carreaux restreints, ce qui aboutit à un modèle mathématique manipulable.

Il est évident que notre approche n'est pas parfaite à cause des erreurs de calculs, notamment pour reconstruire les bords des carreaux restreints, de même, il ne faut pas négliger la difficulté à ordonner les points après la deuxième étape.(ANNEXE5)

Il est intéressant de noter que la notion de carreaux restreints est particulièrement utile pour représenter des objets extrudés.(ANNEXE 6)

Notre objectif est donc d'étendre à terme l'étude menée sur les carreaux restreints dans un modèle solide.

# *ANNEXES*

## ANNEXE 1

### *INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE COURBE DE BEZIER PLANE*

#### I- INTRODUCTION

L'intersection de deux courbes repose essentiellement sur l'algorithme de De Casteljau [CAST 85].

On subdivise les deux courbes au point médian, jusqu'à ce que les polygones de contrôle qui correspondent se réduisent à un segment de droite.

De nombreux algorithmes ont été élaborés dans ce sens, dont l'algorithme de Lane-Riesenfeld.

Dans ce qui suit, on propose un algorithme dans lequel la subdivision ne se fait pas forcément au point médian, et on étudie de manière comparative les avantages et les inconvénients de l'un et de l'autre.

#### II- ALGORITHME DE LANE-RIESENFELD

Soient  $P(t)$  et  $Q(t)$  deux courbes de Bézier planes de polygones de contrôle respectifs  $P = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  et  $Q = (Q_0, Q_1, \dots, Q_m)$ .

L'algorithme de Lane-Riesenfeld [LAN 80] permet de trouver de manière récursive les points d'intersection de ces deux courbes selon la procédure suivante.

PROCEDURE    *Intersect\_Courbe\_Courbe* ( P , n , Q , m ) ;

( \* Données : deux courbes de Bézier de polygones de contrôle respectifs P et Q,  
                  et de degré respectifs n et m \* ) ;

( \* Sortie : les points d'intersection de ces deux courbes \* ) ;

DEBUT

Si l'enveloppe convexe du polygone P ne rencontre pas  
celle du polygone Q.

Alors il n y a pas d'intersection  
(\* une courbe est incluse dans l'enveloppe convexe de  
son polygone de contrôle \* )

Sinon

debut

Si les polygones de contrôle P et Q sont assimilés aux  
segments de droite [P<sub>0</sub> , P<sub>n</sub>] et [Q<sub>0</sub> , Q<sub>m</sub>]

Alors on intersecte les segments [P<sub>0</sub> , P<sub>n</sub>] et [Q<sub>0</sub> , Q<sub>m</sub>]

Sinon

debut

On subdivise la courbe P(t) au point médian  
(\* le résultat de cette subdivision sont  
deux polygones de contrôle R et S \*)

On subdivise la courbe P(t) au point médian  
(\* le résultat de cette subdivision sont  
deux polygones de contrôle T et U \*)

On appelle quatre fois la procédure  
*Intersect\_Courbe\_Courbe*

*Intersect\_Courbe\_Courbe* ( R , n , T , m )

*Intersect\_Courbe\_Courbe* ( R , n , U , m )

*Intersect\_Courbe\_Courbe* ( S , n , T , m )

*Intersect\_Courbe\_Courbe* ( S , n , U , m )

fin

fsi

fin

fsi

FIN

Il est clair que si l'une des deux courbes  $P(t)$  ou  $Q(t)$  est une droite, il est inutile de subdiviser cette dernière.

La procédure adaptée à l'intersection d'une droite et d'une courbe s'intitule:

PROCEDURE    *Intersect\_Courbe\_Droite* (  $P$  ,  $n$  ,  $D$  ) ;

( \* *Données* : une courbe de Bézier de polygone de contrôle  $P$  et de degré  $n$  , et une droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  \* )

( \* *Sortie* : les points d'intersection de la courbe et de la droite \* )

DEBUT

Si    *l'enveloppe convexe du polygone  $P$  ne rencontre pas  $D$*

Alors    *il n'y a pas d'intersection*

Sinon

debut

Si        *le polygone de contrôle  $P$  est assimilé au segment de droite  $[P_0, P_n]$*

Alors    *on intersecte les segments  $[P_0, P_n]$  et  $D$*

Sinon

debut

*On subdivise la courbe  $P(t)$  au point médian  
( \* le résultat de cette subdivision sont deux polygones de contrôle  $R$  et  $S$  \* )*

*On appelle deux fois la procédure  
*Intersect\_Courbe\_Droite*.*

**Intersect\_Courbe\_droite* (  $R$  ,  $n$  ,  $D$  )*

**Intersect\_Courbe\_Droite* (  $S$  ,  $n$  ,  $D$  )*

fin

fsi

fin

fsi

FIN

**III- PROPOSITION D'ALGORITHME DANS LE CAS DE L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE COURBE**

Soit une courbe de Bézier plane et fermée:  $f(t) = (x(t), y(t))$  avec  $t$  dans  $[0, 1]$

Soit une droite  $D$  d'équation :  $ax + by + c = 0$  avec  $a, b$  et  $c$  des réels

Pour que la droite rencontre la courbe de Bézier  $f(t)$ , il faut au moins qu'elle rencontre l'enveloppe convexe de cette dernière.

Un point commun à  $D$  et à  $f(t)$  vérifie l'équation en  $t$ :

$$(1) \quad ax(t) + by(t) + c = 0$$

Si  $f(t)$  s'écrit:

$$f(t) = (x(t), y(t)) = \left( \sum_{i=0}^p x_i B_i^p(t), \sum_{i=0}^p y_i B_i^p(t) \right)$$

l'équation (1) s'écrit:

$$\sum_{i=0}^p (ax_i + by_i + c) B_i^p(t) = 0$$

Posons  $p_i = ax_i + by_i + c$ ; soit à résoudre l'équation:

$$\sum_{i=0}^p p_i B_i^p(t) = 0$$

**Remarque**

Le segment unité étant une courbe de Bézier de degré 1, peut être écrit comme une courbe de Bézier de degré  $p$ , ceci par augmentation du degré  $p$ .

Pour un intervalle quelconque  $I = [u_0, u_1]$

$$s(t) = (1-t)u_0 + tu_1$$

Si  $t_i$  représente un point de contrôle de  $I$ , après augmentation du degré jusqu'à  $p$ ,  $t_i$  est tel que:

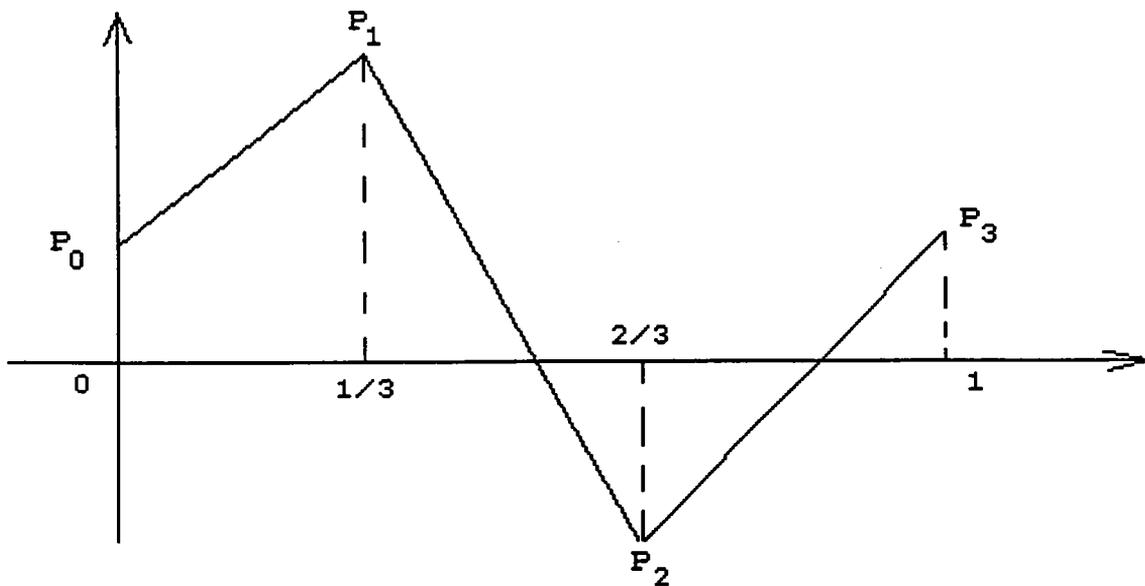
$$t_i = u_0 + i/p(u_1 - u_0)$$

Si  $I = [0, 1]$ , on a:  $t_i = i/p$  pour  $i=0, \dots, n$

on forme ainsi une courbe de Bézier non paramétrique plane dont les points de contrôle sont de la forme  $(i/p, p_i)$ .

Cette courbe sera le plus près du  $i^{\text{ème}}$  point de contrôle en  $i/n$ .

Exemple: cas d' une cubique :



Le nombre d'intersection d'une droite avec une courbe de Bézier est au plus égal au nombre d'intersections de cette droite avec l'enveloppe convexe formée par les points de contrôle.

On situe chaque segment du polygone de contrôle par rapport à la droite  $y=0$ .

Si  $p_i * p_{i+1} > 0$ , le segment  $[p_i, p_{i+1}]$  est soit au dessus, soit en dessous de la droite  $y=0$ , dans le cas contraire, le segment traverse cette droite.

### Principe de la méthode

On situe tous les segments du polygone P par rapport à  $y=0$ ,

- \* Si aucun ne rencontre cette droite, alors il n'y a pas de solutions,
- \* Si le polygone P rencontre une seule fois la droite  $y=0$ , alors, il y a une seule solution qu'on calcule avec la méthode dichotomique.
- \* Si le polygone rencontre plusieurs fois la droite  $y=0$ , alors on subdivise celui-ci pour ramener le problème à l'un des deux cas qui précèdent.

On propose une procédure Proc, qui sépare et calcule d'une manière récursive les points d'intersection d'une droite avec une courbe de Bézier plane.

**PROCEDURE PROC** (  $P$  ,  $n$  , liste ) ;

(\* Données : un polygone de contrôle d'une courbe de Bézier non paramétrique de degré  $n$  \*)

(\* Sortie : une liste des racines correspondants aux points d'intersection de la courbe avec la droite  $D$  \*)

**DEBUT**

On regarde la position des segments du polygone  $P$  par rapport à  $y=0$   
(\* si  $p_i * p_{i+1} < 0$  alors le segment  $[p_i, p_{i+1}]$  rencontre  $y=0$ ,  
sinon il est soit au dessus, soit en dessous de  $y=0$  \*)

Si le polygone  $P$  ne rencontre pas la droite  $y=0$

Aors il n'y a pas de solutions

Sinon si le polygone  $P$  rencontre une seule fois la droite  $y=0$

Alors il y a une solution qu'on calcule avec la méthode dichotomique,  
et on enregistre la solution dans la liste.  
(\* On transforme  $p(t)$  de la base de Bernstein à la base canonique \*)

Sinon  
debut

soit  $[p_i, p_{i+1}]$  est le premier segment qui rencontre la droite  $y=0$ ; on subdivise la courbe  $p(t)$  en  $t=(i+1)/n$ , on obtient deux courbes  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  de polygones de contrôle  $P_1$  et  $P_2$   
(\* On utilise l'algorithme de De Casteljaou \*)

On appelle la procédure **PROC** ( $P_1$  ,  $n$  , liste1 )  
On transforme le contenu de liste1 dans l'intervalle  $[0, (i+1)/n]$

On appelle la procédure **PROC** ( $P_2$  ,  $n$  , liste2 )  
On transforme le contenu de liste2 dans l'intervalle  $[(i+1)/n, 1]$

On concatène les deux listes liste1 et liste2

fin

fsi

**FIN**

#### IV - AVANTAGES ET INCONVENIENTS

Les deux algorithmes ont deux points en commun:

- Ils utilisent l'algorithme de De Casteljaou .
- Ils sont récursifs.

L'algorithme de Lane-Riesenfeld est un moyen simple pour calculer l'intersection droite-courbe ou courbe-courbe et se généralise simplement aux surfaces.

Cependant, l'algorithme qu'on propose peut s'avérer efficace pour deux raisons essentielles.

- L'utilisation de l'algorithme de De Casteljaou n'est pas excessive, car, on s'arrête dès qu'on a un polygone qui ne rencontre qu'une seule fois la droite  $y=0$ . De plus il est utilisé pour une composante.

- Il converge rapidement au moins pour un degré non élevé ( $n \leq 8$ ), car on utilise une méthode telle que la dichotomie ou la tangente après avoir isolé la racine.

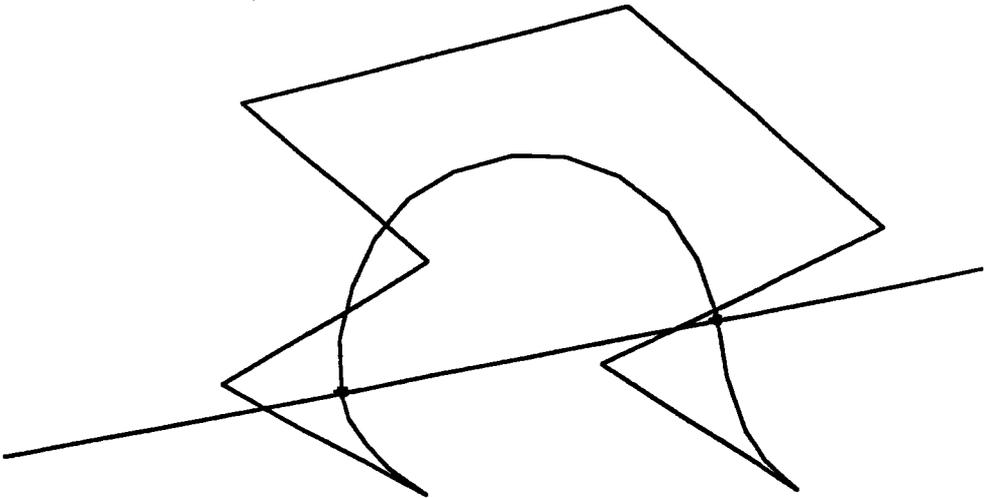
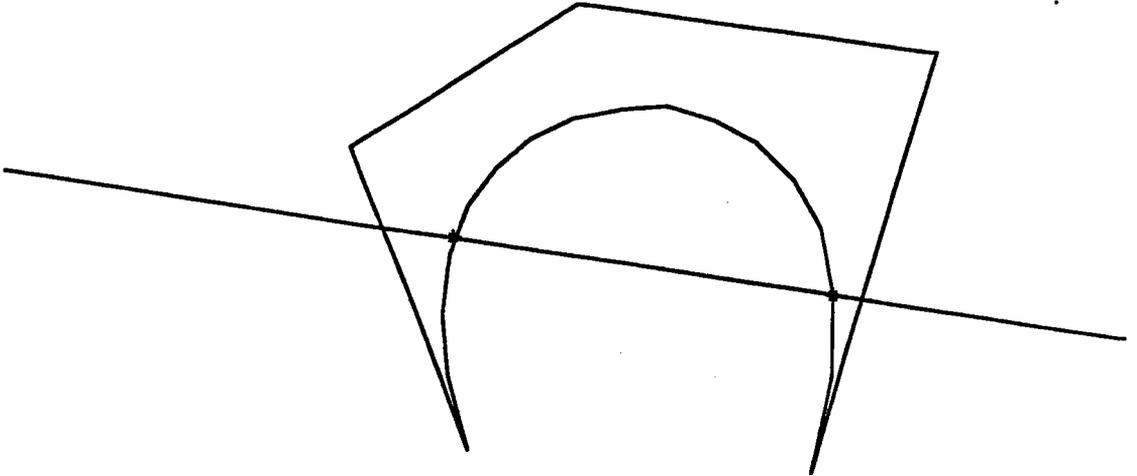
Malheureusement, il présente un inconvénient important pour des degrés élevés ( $n > 8$ ), cela est dû en particulier à la transformation de la base de Bernstein à la base canonique du polynôme  $p(t)$  (ANNEXE 3); en effet si les  $a_i$  désignent les coefficients dans la base canonique :

le calcul de  $a_0$  nécessite 0 opération

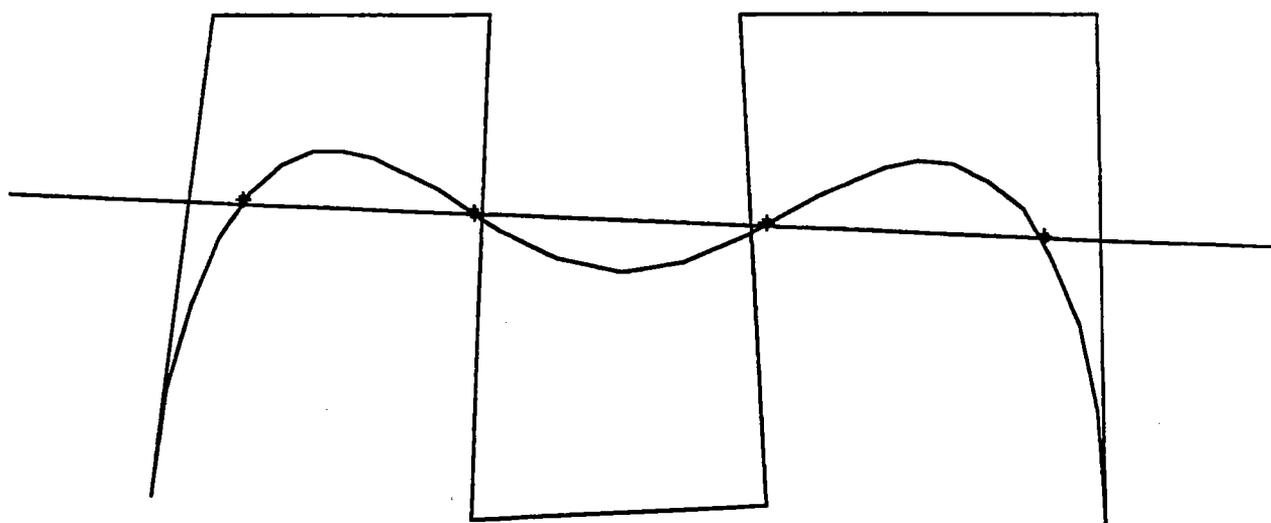
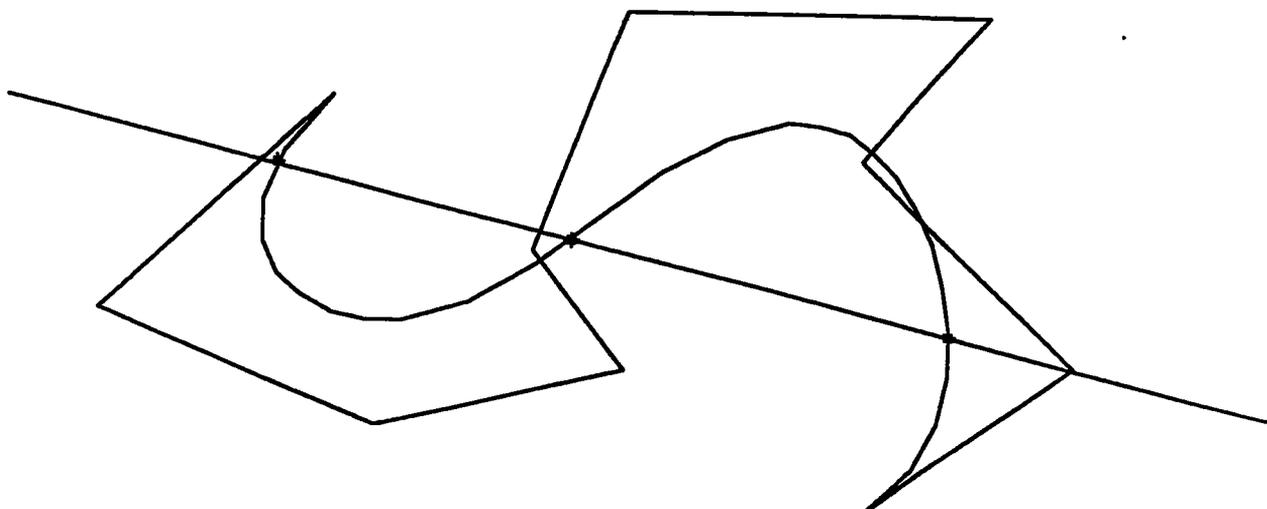
le calcul de  $a_1$  nécessite 1 opération

le calcul de  $a_n$  nécessite  $n(n-1)/2$  opérations.

Ainsi, dans la première base on a:  $p(1) = p_n$  et dans la seconde base  $p(1)$  est égal à la somme des  $a_i$ . L'erreur est donc maximale pour  $t=1$  et par conséquent le calcul d'une intersection proche de 1 peut s'avérer erroné.



***CALCUL D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE COURBE DE BEZIER  
APRES SEPARATION DES RACINES A L'AIDE DE DE CASTELJAU***



***CALCUL D'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE COURBE DE BEZIER  
APRES SEPARATION DES RACINES A L'AIDE DE DE CASTELJAU***

## ANNEXE 2

### APPROCHE D'UN POINT DE $IR^3$ PAR UN POINT D'UNE COURBE OU D'UN CARREAU DE BEZIER

#### I- INTRODUCTION

Dans la modélisation, contrairement au problème direct, qui est évoqué dans le chapitre I, on a souvent besoin de calculer le paramètre  $u$  respectivement (les paramètres  $u, v$ ) d'un point d'une courbe respectivement (d'une surface) ou plus exactement proche de celles-ci; c'est le problème inverse de l'évaluation d'une courbe respectivement d'une surface.

#### II- APPROCHE D'UN POINT DU PLAN PAR UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Pour simplifier, on étudie ce problème dans le cadre des courbes de Bézier planes. Soit  $q(x_0, y_0)$  un point du plan et  $p(u) = (x(u), y(u))$  une courbe de Bézier plane, alors  $u$  est solution de:

$$x(u) = x_0 \quad \text{et} \quad y(u) = y_0$$

Pour calculer  $u$ , on propose deux méthodes dont on cite les avantages et inconvénients.

##### II-1- Première méthode: Distance minimale

Approcher un point du plan par un point d'une courbe revient à calculer la distance minimale de ce point à cette courbe [MOR 85], en effet :

Un point  $q$  est dit à  $\epsilon$  près un point de la courbe ssi :

$$\text{il existe } u \text{ dans } [0,1] \text{ tel que } d(p(u), q) < \epsilon$$

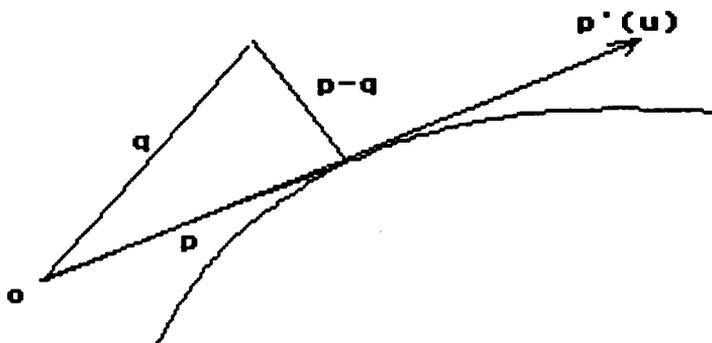
dans ce cas le paramètre  $u$ , lorsqu'il existe est appelé le paramètre à  $\epsilon$  près de  $q$ .

Soit  $p(u)$  une courbe de Bézier plane de degré  $n$  et  $q$  un point du plan, la distance minimale de  $q$  à  $p(u)$  est définie par :

$$d_{\min} = d^2(p(u), q)$$

soit par dérivation :

$$(p(u) - q) \cdot p'(u) = 0 \quad (1)$$



L'équation (1) peut s'écrire plus simplement :

$$p(u) \cdot p'(u) = 0 \quad (2)$$

dans cette relation  $p(u)$  est la courbe de Bézier dont le polygone de contrôle a subi une translation de vecteur  $q$ .

A l'aide des composantes de  $p(u)$  (2) s'écrit :

$$x(u) \cdot x'(u) + y(u) \cdot y'(u) = 0 \quad (3)$$

Trouver le paramètre  $u$  revient à calculer les racines d'un polynôme de degré  $2n - 1$ .

### Remarques

1 - L'équation (3) peut avoir 0 ou plusieurs solutions; dans le premier cas, le point  $q$  peut être approché par  $p(0)$  si  $d(p(0), q)$  est inférieure à  $d(p(1), q)$ ; par  $p(1)$  dans le cas contraire.

dans le second cas on sélectionne le paramètre qui réalise la distance minimale.

2 - Pour une cubique, l'équation (3) est de degré 5. quand  $n$  augmente le degré de (3) augmente, et cela présente l'inconvénient des polynômes de degré élevé.

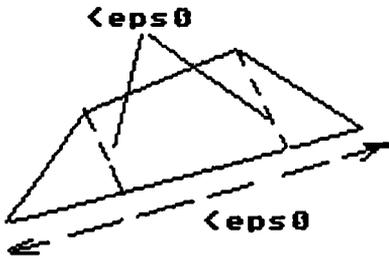
### II-2 - Deuxième méthode: Utilisation de l'enveloppe convexe

Soient, comme précédemment un point  $q$  et une courbe de Bézier  $p(u)$  dans le plan. On veut approcher  $q$  par un point de cette courbe.

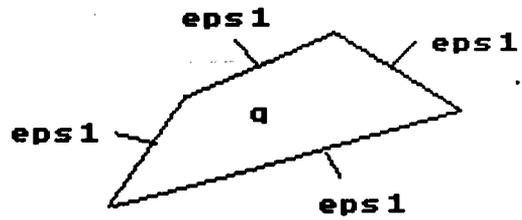
L'idée est de subdiviser la courbe de Bézier récursivement au point médian jusqu'à ce que soient réalisées les deux conditions suivantes.

a - Le polygone de contrôle est à  $\epsilon_0$  près un segment de droite de longueur inférieure ou égale à  $\epsilon_0$ .

b - Le point  $q$  est à  $\epsilon_1$  contenu dans l'enveloppe convexe du polygone de contrôle.



**première condition**



**deuxième condition**

Quand ces deux conditions sont réalisées , le paramètre  $u$  se calcule de la façon suivante:

On calcule la distance de  $q$  à chaque sommet du réseau de contrôle, soit  $P_{i_0}$  le point de contrôle qui réalise la distance minimale, or  $P_{i_0}$  a le plus d'influence sur la courbe en  $i_0/n$  , puisque la  $i_0$ ème fonction de Bernstein atteint son maximum en  $i_0/n$ . On affecte alors au point  $q$  le paramètre  $i_0/n$ .

La deuxième méthode se résume dans la procédure `recherche_param_courbe` ci-dessous:

PROCEDURE Recherche\_Param\_Courbe ( P , n , x , y , u )

(\* Données : Une courbe de Bézier de degré n de polygone de contrôle P,  
et un point du plan (x,y) \* )

(\* Sortie : Le paramètre u du point (x,y) \* )

DEBUT

Si le polygone P est assimilé au segment de droite  $[P_0, P_n]$

Aors le paramètre de q sera approché par le paramètre du point  
de contrôle le plus proche.

(\* u est alors le paramètre de q \*)

Sinon

debut

On subdivise la courbe  $p(t)$  au point médian

(\* Soient alors  $P_1, P_2$  les deux polygones résultants de  
cette subdivision \*)

Si (x,y) appartient à l'enveloppe convexe formée par  $P_1$

alors

On appelle la procédure Recherche\_Param\_Courbe  
( $P_1, n, x, y, u$ ) et on transforme dans  $[0, 1/2]$

Sinon si

(x,y) appartient à l'enveloppe convexe formée par  $P_2$

alors

On appelle la procédure Recherche\_Param\_Courbe  
( $P_2, n, x, y, u$ ) et on transforme dans  $[1/2, 1]$

fsi

fin

fsi

FIN

### II- 3 - AVANTAGES ET INCONVENIENTS

La première méthode repose essentiellement sur la résolution d'une équation polynômiale de degré  $2n-1$  si la courbe de Bézier est de degré  $n$ , et l'on remarque que pour une Bézier de degré 5, le polynôme dont on cherchera les racines est de degré 9. le risque d'erreur dû au degré élevé est important.

Par contre, la deuxième méthode est beaucoup plus précise, puisqu'il s'agit de la décomposition du polygone de contrôle à l'aide de l'algorithme de De Casteljaou , ce dernier présente l'avantage d'être stable. Cependant cette méthode ne donne entière satisfaction que si le point  $q$  est près de la courbe. Cette propriété résulte de la convergence du polygone de contrôle vers la courbe et se traduit par le choix d'un  $\epsilon$  assez petit.

### III - APPROCHE D'UN POINT DE $\mathbb{R}^3$ PAR UN POINT D'UN CARREAU DE BEZIER

Soit un carreau de Bézier  $C$  défini par son polygone de contrôle  $P$  de degré  $n$ .

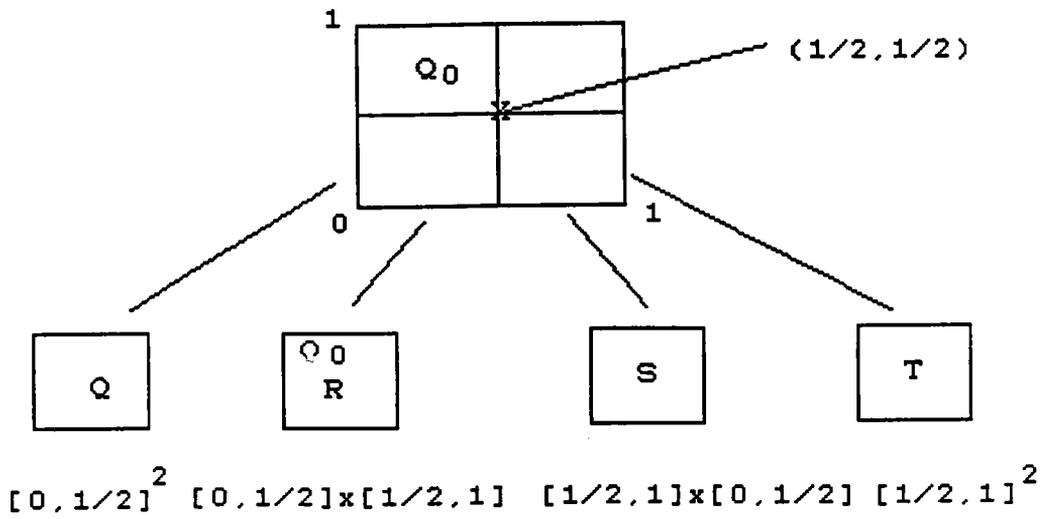
Soit un point  $Q(x_0, y_0, z_0)$  de  $C$  , il existe alors  $(u_0, v_0)$  dans  $[0, 1]^2$  tel que l'on ait:

$$P(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

Un point  $Q$  de  $\mathbb{R}^3$  est à  $\epsilon$  près un point du carreau  $C$  si et seulement si :

$$\text{il existe } u, v \text{ dans } [0, 1] \text{ tel que } d(p(u, v), q) < \epsilon$$

On subdivise le polygone de contrôle  $P$  au point  $(1/2, 1/2)$ . Soient  $Q, R, S$  et  $T$  les quatre polygones de contrôle qui résultent de cette division. On teste si le point  $Q_0$  est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de  $Q$  respectivement  $R, S$  et  $T$ . D'une manière récursive, on subdivise ceux qui contiennent  $Q_0$ , ainsi de proche en proche on localise les coordonnées paramétriques, lorsqu'on estime que le polygone de contrôle qui contient  $Q_0$  est suffisamment plan.



Dans la figure ci-dessus, après une première division, le point  $Q_0$  se trouve dans R, le changement de repère s'effectue dans le domaine correspondant.

Quand les deux conditions, de convexité et de coplanarité sont satisfaites, on approche les paramètres du point  $(x,y,z)$  par les paramètres du point de contrôle le plus proche, ceci pour les mêmes raisons citées précédemment pour une courbe.

PROCEDURE Rech\_Param\_Surf ( P , n , m , x , y , z , u , v ) ;

(\* Données : un carreau de Bézier de polygone de contrôle P et de degré  $n \times m$   
et un point Q de coordonnées cartésiennes ( x , y , z ) \*

(\* Sortie : les paramètres ( u , v ) de ce point \*) ;

DEBUT

Si le polygone de contrôle est suffisamment plan , et de dimensions négligeables

Alors les paramètres du point (x,y,z) sont approchées par les paramètres du point de contrôle le plus proche

Sinon

Debut

On subdivise le carreau P en quatre carreaux de polygones de contrôle  $P_1 , P_2 , P_3 , P_4$

Si le point Q appartient à l'enveloppe convexe de  $P_1$

Alors

On appelle la procédure Rech\_Param\_Surf (  $P_1 , n, m, x, y, z, u, v$  )

On transforme dans  $[0, 1/2] \times [0, 1/2]$

Si le point Q appartient à l'enveloppe convexe de  $P_2$

Alors

On appelle la procédure Rech\_Param\_Surf (  $P_2 , n, m, x, y, z, u, v$  )

On transforme dans  $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$

Si le point Q appartient à l'enveloppe convexe de  $P_3$

Alors

On appelle la procédure Rech\_Param\_Surf (  $P_3 , n, m, x, y, z, u, v$  )

On transforme dans  $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$

Si le point Q appartient à l'enveloppe convexe de  $P_4$

Alors

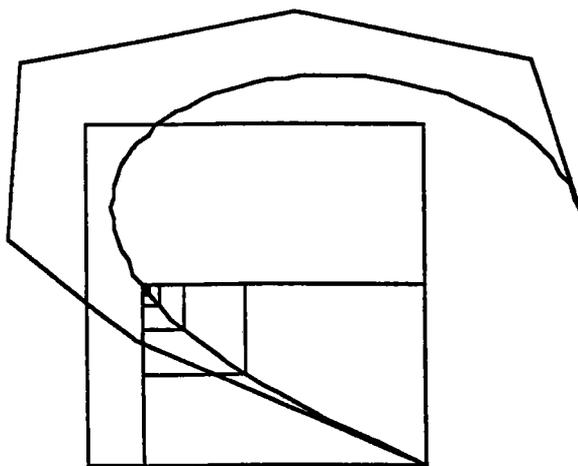
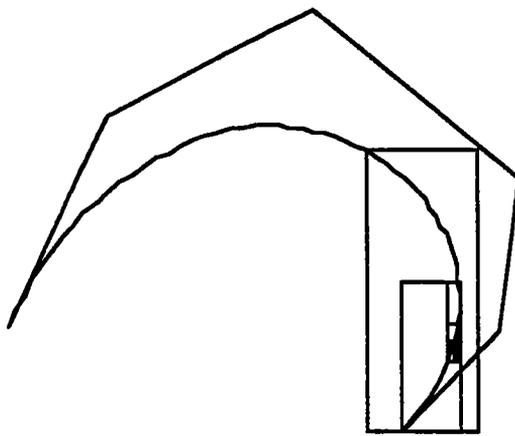
On appelle la procédure Rech\_Param\_Surf (  $P_4 , n, m, x, y, z, u, v$  )

On transforme dans  $[1/2, 1] \times [1/2, 1]$

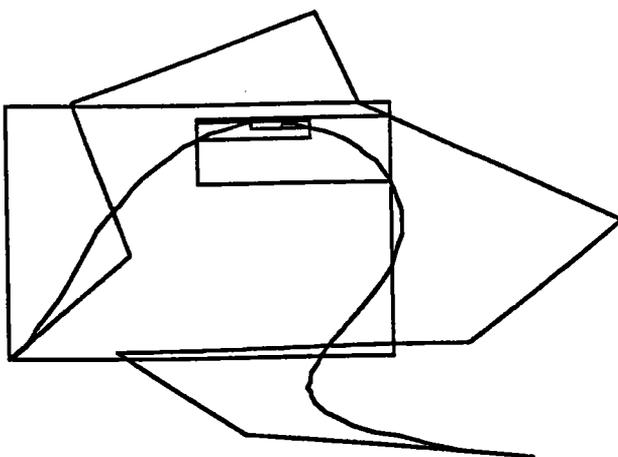
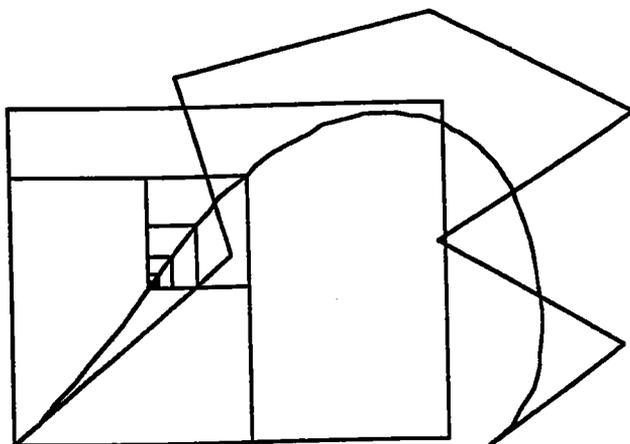
Fin

Esi

FIN



***CALCUL DES COORDONNEES PARAMETRIQUES D'UN POINT PAR  
SUBDIVISION DICHOTOMIQUE DE LA COURBE***



***CALCUL DES COORDONNEES PARAMETRIQUES D'UN POINT PAR  
SUBDIVISION DICHOTOMIQUE DE LA COURBE***

### ANNEXE 3

#### EXEMPLE D'EVALUATION DE L'ERREUR

L'algorithme qui traite le problème d'intersection d'une droite et d'une courbe proposé dans l'annexe 1 nécessite la conversion de la base de Bernstein à la base canonique, ceci peut induire des résultats erronés pour des degrés élevés; on se propose de traiter le problème de propagation de l'erreur [KEN 87].

Soit alors un réseau de points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , dont chaque point est entaché d'une erreur  $e_j$ , et soit  $e = \max e_j$ .

Si les coefficients de  $P(u)$  dans la base canonique sont  $a_i$ , alors on a:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(u) \quad , \quad P(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$$

$$a_i = C_n^i \Delta^i P_0$$

dans laquelle :

$$\Delta^i P_0 = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} C_i^j P_j$$

Soit  $r_i$  l'erreur commise pour calculer  $a_i$ :

$$r_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} C_i^j e_j$$

en majorant  $r_i$ , on obtient:

$$|r_i| \leq \sum_{j=0}^i C_i^j |e_j| = 2^i e$$

Inversement, le calcul des  $P_i$  se fait à partir des coefficients  $a_i$  selon la relation:

$$P_i = \sum_{j=0}^n \frac{i^{[j]}}{j!} \Delta^j P_0 \quad \text{où} \quad i^{[j]} = i(i-1)\dots(i-j+1)$$

Soit alors l'erreur  $e_j$  en fonction de  $r_j$ :

$$e_j = \sum_{i=0}^n \frac{i^{[j]}}{j!} r_i$$

D'où :

$$e_j \leq \sum_{i=0}^n \frac{i^{[j]}}{j!} |r_i| \leq \sum_{i=0}^n \frac{i^{[j]}}{j!} 2^i e$$

Le rapport entre l'erreur commise sur  $e_j$  et l'erreur maximale est alors majoré:

$$\frac{e_j}{e} \leq \sum_{i=0}^n \frac{i^{[j]}}{j!} 2^i = \frac{2^n}{n!} i^n + O(i^{n+1})$$

Conséquence:

le calcul de  $a_0$  nécessite 0 opération

le calcul de  $a_1$  nécessite 1 opération

le calcul de  $a_n$  nécessite  $n(n-1)/2$  opérations.

Ainsi, dans la base de Bernstein on a:  $p(1) = p_n$ , et dans la base canonique  $p(1)$  est égal à la somme des  $a_j$ . L'erreur est donc maximale pour  $u=1$  et par conséquent le calcul d'une intersection proche de 1 peut s'avérer erroné.

## ANNEXE 4

### SECTION D'UNE SURFACE PARAMETRIQUE PAR UNE SURFACE ALGEBRIQUE

#### I. Rappel sur les courbes algébriques planes

Soit C une courbe plane définie dans le carré unité  $[0,1]^2$  par  $F(u,v)=0$  [RAM 81] .

#### Définition

Soit  $m_0(u_0, v_0)$  un point de C.

\*  $m_0$  est régulier si la différentielle de f en  $m_0$  notée  $df_{m_0}$  est non nulle.

\*  $m_0$  est singulier si  $df_{m_0}$  est nulle.

$df_{m_0}$  est l'application linéaire définie par:

$$(u, v) \text{ ----- } \rightarrow (u - u_0) F_u(u_0, v_0) + (v - v_0) F_v(u_0, v_0)$$

Où  $F_u$  respectivement  $F_v$  désigne la dérivée de F par rapport à u respectivement la dérivée de F par rapport à v.

#### Remarque

$m_0$  est un point singulier ssi:  $F(u_0, v_0) = F_u(u_0, v_0) = F_v(u_0, v_0) = 0$

#### Equation de la tangente en un point régulier

Soit  $m_0$  un point régulier de C, la tangente à la courbe en ce point a pour équation:

$$(u - u_0) F_u(u_0, v_0) + (v - v_0) F_v(u_0, v_0) = 0$$

dont un vecteur directeur est  $(-F_v, F_u)$ .

### Remarque

\* Si  $F_v(u_0, v_0) = 0$ , la tangente en  $m_0$  est parallèle à l'axe  $u = 0$ .

\* Si  $F_u(u_0, v_0) = 0$ , la tangente en  $m_0$  est parallèle à l'axe  $v = 0$ .

### Point d'inflexion

Soit  $F(u, v) = 0$  une fonction de classe  $CP$  ( $p > 1$ ). Pour que  $m_0(u_0, v_0)$  de la courbe  $C$  soit un point d'inflexion il faut et il suffit que ses coordonnées  $(u_0, v_0)$  vérifient  $H(u_0, v_0) = 0$  avec :

$$H = (F_u)^2 \cdot F_{uv} - F_{uv}(F_{uu} + F_{vv}) + (F_v)^2 \cdot F_{uv}$$

$H$  est appelée la hessienne de  $F$ , elle peut s'écrire:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & F_u & F_v \\ F_v & F_u^2 & F_{uv} \\ F_u & F_{uv} & F_v^2 \end{vmatrix}$$

### Etude de la courbe au voisinage d'un point singulier

Soit  $m_0$  un point singulier de la courbe  $C$  définie par  $F(u, v) = 0$ , on a:

$$F_u(u_0, v_0) = F_v(u_0, v_0) = 0$$

Soit la forme quadratique  $Q_{m_0}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par:

$$Q_{m_0}(h, k) = r h^2 + 2 shk + t k^2$$

avec  $r = F_u^2(u_0, v_0)$   $s = F_{uv}(u_0, v_0)$  et  $t = F_v^2(u_0, v_0)$

On démontre que:

1-  $Q_{m_0}$  est non dégénérée et définie ( $rt - s^2 > 0$ ),  $m_0$  est un point isolée de  $C$ .

2-  $Q_{m_0}$  est non dégénérée, mais non définie ( $rt - s^2 < 0$ ),  $m_0$  est un noeud simple à tangentes distinctes.

3-  $Q_{m_0}$  est dégénérée ( $rt - s^2 = 0$ ), dans ce cas  $m_0$  est en général un point de rebroussement de première espèce.

Farouki s'est basé sur le théorème ci-dessous pour déterminer, si les points d'intersection d'une droite et de la courbe  $F(u, v) = 0$  sont réguliers ou singuliers et dans ce dernier cas, la nature de ces points (point isolé, noeud, point de rebroussement).

## Théorème

Soit C la courbe d'équation  $F(u,v)=0$  et D la droite d'équation:

$$\begin{aligned} & A + R \vec{u} \\ \text{Où} \quad & A = 0 + a \vec{i} + b \vec{j} \\ & \vec{u} = m \vec{i} + n \vec{j} \end{aligned}$$

On pose:  $W(t) = F(a+mt, b+nt)$

$W(t)=0$  est appelée "l'équation au t de C et D".

Soit  $t_0$  une racine de  $W(t)$ , et soit  $m_0$  le point commun correspondant de C et D.

1-  $t_0$  est racine simple de  $W(t)$  si et seulement si  $m_0$  est un point régulier de C et D distincte de la tangente en  $m_0$  à C.

2-  $t_0$  est racine au moins double de  $W(t)$  si et seulement si  $m_0$  est un point singulier de C, ou un point régulier de C en lequel la tangente est D.

3- Si  $m_0$  est un point double de C en lequel la quantité  $rt-s^2$  est différente de 0, alors  $t_0$  est racine au moins triple de  $W(t)=0$  si et seulement si D est l'une des deux tangentes en  $m_0$  à C (ce qui implique  $rt-s^2 < 0$ ).

Si l'on prend  $A(u_0, v_0)$  un point appartenant à la courbe C. l'équation paramétrique de D est:

$$u(t) = u_0 + mt$$

$$v(t) = v_0 + nt$$

On utilise le développement en série de Taylor au voisinage de 0.

$$W(t) = W(0) + tW'(0) + (t^2/2)W''(0) + \dots + (t^p/p!)W^{(p)}$$

$$W(0) = F(u_0, v_0) = 0.$$

-  $t=0$  est une racine simple de  $W(t)$  car  $(u_0, v_0)$  appartient à C. la droite D rencontre C en  $p-1$  autres points que 0 sauf si  $W'(0)=0$ , auquel cas 0 est une racine au moins double.

On a:

$$W'(0)=0 \text{ ssi } m F_u(u_0, v_0) + n F_v(u_0, v_0) = 0.$$

Ceci est vrai quand  $(m, n)$  et  $(-F_v, F_u)$  sont colinéaires, autrement dit quand la droite D coïncide avec la tangente à la courbe en  $(u_0, v_0)$ .

- Si  $F_u(u_0, v_0) = F_v(u_0, v_0) = 0$ , alors  $t=0$  est une racine double, la droite D rencontre la courbe en  $p-2$  autres points sauf si  $W''(0)=0$ , auquel cas  $t=0$  est une racine au moins triple.

On a:

$$W''(0) = 0 \text{ ssi } m^2 F_u^2(u_0, v_0) + 2mn F_{uv}(u_0, v_0) + n^2 F_v^2(u_0, v_0)$$

et l'on pose:

$$r = F_u^2(u_0, v_0) \quad s = F_{uv}(u_0, v_0) \quad t = F_v^2(u_0, v_0)$$

L'étude précédente montre que:

1- On a un point isolé si  $rt - s^2 > 0$ . L'équation quadratique homogène en  $(m, n)$  admet deux racines distinctes complexes et conjuguées.

2- On a un point double à tangentes distinctes dont l'une est la droite D si  $rt - s^2 < 0$ . L'équation en  $(m, n)$  admet deux racines réelles distinctes.

3- On a un point de rebroussement de première espèce si  $rt - s^2 = 0$ . L'équation en  $(m, n)$  admet deux racines réelles qui coïncident.

## II. Section d'une surface paramétrique par une surface algébrique

Si l'on considère le carreau de Bézier C de degré  $n \times m$  sous sa forme polynômiale:

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

et une surface algébrique de degré  $p$  ayant une équation de la forme  $f(x, y, z) = 0$

la combinaison de ces deux équations aboutit à l'équation de la courbe intersection dans l'espace paramétrique du carreau de Bézier. On obtient une équation polynômiale de la section en  $u$  et  $v$ , soit:

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} u^i v^j = 0$$

où  $N$  est le degré en  $u$  et est égal à  $p \cdot n$  et  $M$  est le degré en  $v$  et est égal à  $p \cdot m$ .

Et l'on peut remarquer que la complexité de la forme  $F(u, v)$  présente un inconvénient, car, si on perturbe un des coefficients  $a_{ij}$ , on risque de changer complètement la topologie de la section. Cependant cette écriture présente un avantage important car on peut déterminer simplement les singularités de la courbe section [FAR 85].

FAROUKI dans ses travaux détermine un ensemble de points pour caractériser cette section. Cet ensemble comprend:

- 1 - les extrémités de chaque courbe ouverte
- 2 - au moins un point sur chaque courbe fermée
- 3 - tous les points singuliers tels que: les points doubles, de rebroussement

L'ensemble des points caractéristiques qui résulte permet ainsi de morceler la section en plusieurs branches. Dans chaque branche la tangente varie entre 0 et au plus 90 degrés, de même chaque branche peut être exprimée localement par  $v = f(u)$  ou  $u = g(v)$

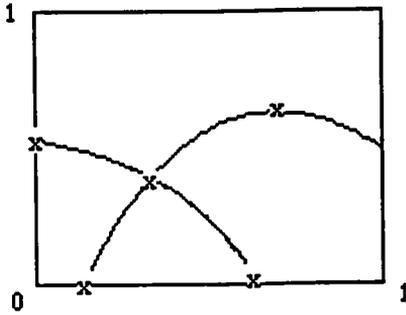


fig Exemple de points caractéristiques de la courbe  $F(u,v) = 0$   
ces points partagent la courbes en 5 branches monotones

Points du bord

Ces points sont de la forme  $(u_i, 0)$  ,  $(u_i, 1)$  ,  $(0, v_i)$  ,  $(1, v_i)$  et résultent des équations:

$$F(u,0) = 0 \quad , \quad F(u,1) = 0 \quad , \quad F(0,v) = 0 \quad \text{et} \quad F(1,v) = 0$$

et l'on remarque que si  $F(u,v)$  est de degré  $(M, N)$  en  $(u,v)$ , il y a au plus  $N$  points le long de  $u = 0$  respectivement  $u = 1$  ; de même il y a au plus  $N$  points le long  $v = 0$  respectivement  $v = 1$ .

Points où la tangente est parallèle aux axes

Ces points résultent de l'équation:

$$F(u,v) = F_u(u,v) = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad F(u,v) = F_v(u,v) = 0 \quad (2)$$

Remarque: la méthode de la résultante qui consiste à ramener une équation de plusieurs variables à une équation d'une variable permet de résoudre ces deux équations.

Si  $F$  est de degré  $(M,N)$  en  $(u,v)$  alors  $F_u$  est de degré  $(N-1,M)$  et  $F_v$  est de degré  $(N,M-1)$  en  $(u,v)$  , à l'aide de la méthode de la résultante on aura au plus  $2MN - M$  solutions pour l'équation (1) et  $2MN - N$  solutions pour l'équation (2).

Ainsi pour une section d'une cubique par un plan on a:  $M = N = 3$  et on peut avoir 15 solutions pour chacune des équations. Pour une section de la cubique par une quadrique on a:  $M = N = 6$ , et l'on peut avoir 66 solutions.

Points singuliers

Il résultent de l'équation:

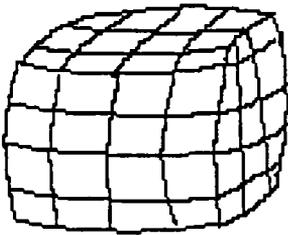
$$F(u,v) = F_u(u,v) = F_v(u,v) = 0$$

Puisque  $F_u$  est de degré  $(N-1, M)$  et  $F_v$  de degré  $(N, M-1)$  en  $(u, v)$ , alors il y a au plus  $2MN - M - N + 1$  points singuliers. La multiplicité d'un point singulier dépend des dérivées d'ordre supérieur, si l'une des dérivées secondes n'est pas nulle alors on a un point singulier de multiplicité 2, si toutes les dérivées secondes sont nulles et l'une des dérivées d'ordre 3 ne l'est pas alors la multiplicité est de 3.

## ANNEXE 5

### UTILITE DES CARREAUX RESTREINTS POUR LA MODELISATION DES SOLIDES

On considère un cube déformé et un cylindre, modélisés par des surfaces gauches, et on s'intéresse au solide résultant de l'intersection de ces deux objets; le cube est formés de six faces  $S_i$  ( $i=0.....6$ ) et le cylindre de 3 faces  $C_i$  ( $i= 1.....3$ ).



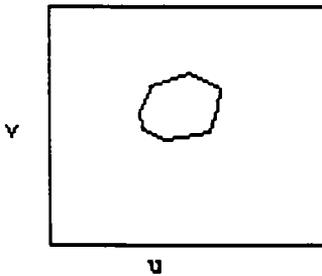
S est un cube déformé



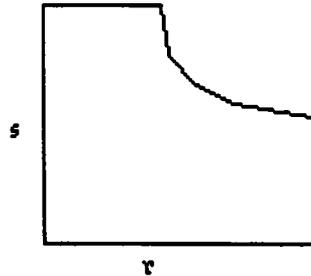
C est un cylindre

1) on facettise les deux objets.

2) on intersecte chaque face  $S_i$  du cube avec celles du cylindre, le résultat de l'intersection de  $S_1$  et  $C_1$  par exemple est une suite de points ordonnés pour laquelle on détermine les coordonnées paramétriques dans le domaine de  $S_1$  et celui de  $C_1$ .



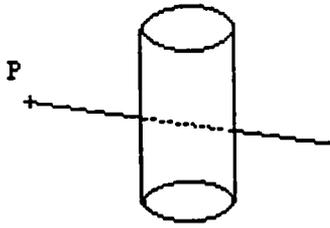
Domaine de  $S_1$



Domaine de  $C_1$

On interpole sur les coordonnées paramétriques des points d'intersections des deux faces  $S_1$  et  $C_1$ ; on partitionne ainsi chaque domaine en deux parties, dont l'une va constituer la partie utile qu'il faut conserver.

Pour ce faire, on procède de la façon suivante: on définit un point  $A(u,v)$  du domaine de  $S_1$ , On calcule le point  $P = S_1(u,v)$  et on classifie ce dernier par rapport au cylindre



Si le point  $P$  n'appartient pas au cylindre, alors la partie utile du domaine de  $S_1$  qu'il faut conserver est celle qui ne contient pas  $A$ .  
Le même processus sera utilisé pour déterminer la partie utile du domaine de  $C_1$ .

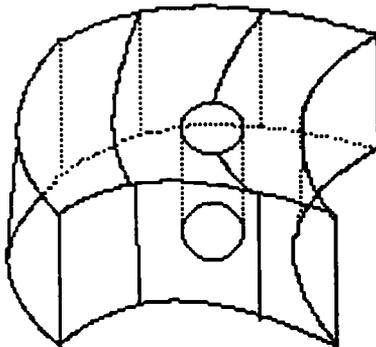
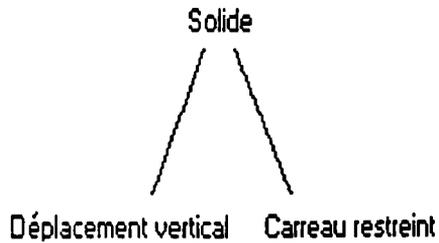
## ANNEXE 6

### DEFINITION D'OBJETS TROUES PAR EXTRUSION

On peut définir des objets extrudés par le déplacement d'un générateur le long d'une trajectoire [MIN 90]. Un générateur peut être:

- de dimension 1 : une droite ou une courbe
- de dimension 2: une surface
- ou de dimension 3 : un volume

Exemple:    générateur : carreau troué    ,    trajectoire : un déplacement vertical



Définition d'un solide troué par extrusion, le générateur étant un carreau restreint

# ***BIBLIOGRAPHIE***

- [BAL 78] A.A. BALL  
 "A simple specification of the parametric cubic segment"  
 vol 10, no 3, mai 1978
- [BAR 87] Richard H.BARTELS, John C.BEATY, Brian A.BARSKY,  
 "B.splines", Mathématiques et C.A.O. , Volume 6,  
 Editions Hermès, Paris,1987.
- [BEC 86] James M.BECK, Rida T.FAROUKI, John K.BARSKY  
 "Surfaces Analysis Methods"  
 IEEE CGA, Décembre, 1986
- [BEZ 86] Pierre BEZIER,  
 "Courbes et surfaces", Mathématiques et C.A.O. ,Volume 6,  
 Editions Hermès, Paris,1986.
- [BOH 84] Wolfgang BÖHM, Gérard FARIN, Jürgen KAHMANN,  
 "A survey of curve and surface methods in CAGD ",  
 Computer Aided Geometric Design ,Volume1, Numéro 1,  
 1984, 1-60
- [BOO 72] Carl DE BOOR,  
 "On calculating with B.splines", Journal of  
 approximation theory, Volume 6 , 50-62, 1972
- [BOO 78] Carl DE BOOR  
 "A practical guide to splines",  
 Editions Springer Verlag, New-York , 1978
- [CAR 82] Wayne E.CARLSON  
 "An algorithm and Data Structure for 3D objet synthesis using  
 Surfaces Patch Intersections " , ACM, Computer Graphics,  
 Juillet , 1982,
- [CAS 87] Malcom S.CASALE,  
 "Free-Form Solid Modeling with trimmed  
 surface patches", IEEE CGA, Janvier 1987
- [CAST 85] Paul DE CASTELJAU,  
 "Formes à pôles", Mathématiques et C.A.O.,  
 volume 2, Editions Hermès, Paris,1985
- [CHI 83] Hiroaki CHIYOKURA, Fumihiko KIMURA  
 "Design of Solids with Free-Form-Surfaces"  
 Computer Graphics, vol 17, no 3, juillet, 1983

- [ COO 87] S.A. COONS,  
 "Méthode matricielle", Mathématiques et C.A.O, Volume5,  
 éditions Hermès, Paris, 1987
- [COQ 87] Sabine COQUILLART  
 " A Control-Point-Based Sweeping Technique"  
 IEEE, Computer Graphics and Applications, 1987
- [COX 82] M.G.COX,  
 "Practical Spline Approximation " in Topics in Numerical Analysis,  
 Editions Tunner, Peter.R. 1982.
- [DAN 89] Marc.DANIEL,  
 "Modélisation de courbes et surfaces par des B.splines.  
 Application à la conception assistée par ordinateur et à  
 la visualisation de formes",  
 Thèse de l'université de Nantes,1989
- [DON 86] R. DONY  
 " Graphisme scientifique sur microordinateur. calcul des parties  
 cachées" , Edition Masson , 1986.
- [DOK 90] Tor DOKKEN,  
 " Surface Représentation",  
 Revue internationale de C.F.A.O et d'infographie Vol ,no 2,  
 Editions Hermès, Paris, 1990
- [FAR 85] R.T FAROUKI  
 "The characterization of parametric surface sections"  
 Corporate Research and Developement, Generalelectric  
 Compagny, Schenectady, New york 12345, october 1985
- [FIO 89] J.C.FIOROT , P.JEANNIN ,  
 "Courbes et surfaces rationnelles applications"  
 à la C.A.O.,Editions Masson, 1989
- [FOL 82] J.D.FOLEY, A.VAN DAM,  
 "Fundamental of Interactive Computer Graphics",  
 Tome1, Editions Addison Wesley, 1982,
- [GAR 83] Yvon. GARDAN, Michel. LUCAS,  
 "Techniques graphiques interactives et C.A.O".  
 Editions Hermès, Paris 1983
- [GAR 85] Yvon. GARDAN,  
 " Méthode de base " , Mathématiques et C.A.O., Volume1,  
 Editions Hermès, Paris 1985

- [GAR 87] Yvon. GARDAN,  
 "La C.F.A.O. introduction techniques et mise en  
 oeuvre", Editions Hermès,  
 Paris, 1987, 2<sup>ème</sup> édition.
- [GAR 90] Yvon. GARDAN, Ahmed ZIDNA,  
 "Modélisations de faces trouées par des carreaux de Bézier restreints"  
 note interne LRI METZ
- [GIA 88] Henri GIAUME,  
 Seminaire : " La modélisation des surfaces",  
 Journée du 21 Juin, Paris, Hermès 1988,
- [GOL 85] R.N.GOLDMAN,  
 "The method of Resolvants: A technique for the implicitization,  
 inversion, and intersection of non planar parametric rational  
 cubics curves",  
 Computer Aided Geometric Design, Vol2, 1985
- [HAY 86] J.G.HAYES,  
 "Fitting Surfaces Data", The mathematics of Surfaces II, IMA  
 Conference On Surfaces, Editions R.R.Martin, Cardiff,  
 Septembre 1986.
- [HOS 78] Mamoru HOSAKA, Fumihiko KIMURA,  
 "Synthesis Methods of Curves and Surfaces in Interactive CAD",  
 Interactive Techniques in computer Aided Design, IEEE Computer  
 Society, 1978, pp 151-156,
- [HOS 80] Mamoru HOSAKA, Fumihiko KIMURA,  
 "A Theory and Methods for Three Dimensionl Free Form Shape  
 Construction" , Journal of Information Processing, Vol 3 , Numéro 3,  
 1980, pp 140-151,
- [HOS 84] Mamoru HOSAKA, Fumihiko KIMURA,  
 " Non-Four-Sided Patch expressions with Control points",  
 Computer Aided Geometric Design 1, 1984, pp 75-86,
- [HOU 85] Elisabeth G.HOUGHTON, robert F. EMNETT,  
 James D.FACTOR, Chaman , L.SABHARWAL,  
 "Implementation of a divide and conquer method for intersection of  
 paramétric surfaces",  
 Computer Aided Geometric Design, vol 2, 1985
- [KAI 82] James KAJIYA  
 "Ray tracing parametric patches "  
 Computer Graphics , vol 10, no 3 , 1982, pp 245-254

- [KEN 87] KEN-ICHI-KANATANI,  
 "Errors of the Incremental Method for curves"  
 ACM transactions on graphics  
 vol 6, no 2 , Avril 1987.
- [LAN 80] Jeffrey M.LANE and Richard F.RIESENFELD,  
 "A theoretical development for the computer generation and display  
 of piecewise polynomial surfaces", IEEE, 1980
- [LEO 88] J-C LEON  
 " Modélisation de courbes et surfaces à l'aide de fonctions B.spline"  
 Journée du 25 Janvier 1988, édition Hermès.
- [LEV 87] Joshua zev LEVIN  
 "Mathematical Models for determining the intersections of  
 quadric surfaces"
- [MIC 91] Dominique MICHEL,  
 "Thèse de l'université de Metz" ( à paraître )
- [MIL 86] James R.MILLER ,  
 "Sculptured Surfaces in Solid Models: Issues and Alternative  
 approaches ", IEEE CGA, Décembre 1986
- [MIN 91] Christain MINICH,  
 "Thèse de l'université de Metz "(à paraître )
- [MOR 85] Michael E.MORTENSON,  
 "Geometric Modeling ", Editions John Wiley and Sons, 1985.
- [NEW 79] NEWMAN, SPROULL,  
 "Principes of Interactive Computer Graphics", Editions Mac Graw  
 Hill 1979 (2<sup>ème</sup> édition )
- [PER 88] B.PEROCHE, J.ARGENCE, D.GHAZANFARPOUR, D.MICHELUCCI,  
 " La synthèse d'images "  
 éditions Hermès, Paris, 1988
- [PIE 86] Leslie.PIEGL.  
 " A Geometric Investigation of The Rational Bézier Scheme of  
 Computer Aided Design". Computer IN Industry, Volume 7,  
 pp 401-410, Editions Elsevier Science Publishers B.V. 1986.
- [PIE 89] Leslie.PIEGL  
 " A menagerie of Rational B.spline Circles"  
 IEEE, Computer Graphics and Applications

- [RAM 81] E.RAMIS, C.DESCHAMPS, J.ODOUX,  
"Application de l'analyse à la géométrie",  
Cours de mathématiques spéciales, Volume 5, Masson ,1981
- [ROC 87] A.ROCWOOD,  
"A Generalised Scanning technique for display of parametrically  
defined surfaces" , IEEE, 1987
- [ROG 76] D.F. ROGERS, J.A. ADAMS,  
"Mathematical Element for Computer Graphics"  
Editions Mc,Graw Hill, New York,1976.
- [SAD 74] M.M. SADEGHI, S.S. GOULD  
"A Comparaison of two parametric surface patch methods"  
vol 6 , no 4 , Octobre
- [SED 84] SEDERBERG, ANDERSON, GOLDMAN,  
" Implicit représentation of curves and surfaces"  
Computer Vision and Image processing 28, 1984
- [TIL 83] Wayne TILLER,  
"Rational B.splines for curve and surface representation"  
IEEE CGA, septembre 1983
- [VER 73] Michel.VERON,  
" Modélisation de courbes et de surfaces "  
journée du 25 janvier 1988, edition Hermès.
- [VER 73] Michel.VERON,  
"Contribution à l'étude des surfaces numériques UNISURF.  
Conditions de raccordement", Thèse de Doctorat D'état,  
Université NANCY I, 1973