



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

Présentée à

L 'UNIVERSITE DE METZ

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

SPECIALITE: GENIE PHYSIQUE ET MECANIQUE

par

Karima AHADUARI

CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA THERMOELASTICITE ET
DE L'ACOUSTOELASTICITE DES MATERIAUX MICROHETEROGENES

Soutenue le 2 Mars 1990 ,devant la commission d'examen:

Président:

M.A.ZAOUI, Professeur, Université de PARIS-NORD

Directeur de thèse:

M.M.BERVEILLER, Professeur, Université de METZ

Rapporteurs:

M.P.LIPINSKI, Maître de conférences, E.N.I de METZ

M.E.SCHNEIDER, Docteur Ingénieur, Université de SAAREBRUK

M.A.ZAREMBOVITCH, Professeur à l'université de PARIS VI

Examineurs:

M.B.HOSTEN, Ch
M.D.ALLIAGA, I

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420347 6

sité de Bordeaux I
ire Central

THESE

Présentée à

L 'UNIVERSITE DE METZ

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

SPECIALITE:GENIE PHYSIQUE ET MECANIQUE

par

Karima AHAOUARI



CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA THERMOELASTICITE ET
DE L'ACOUSTOELASTICITE DES MATERIAUX MICROHETEROGENES

Soutenue le 2 Mars 1990 ,devant la commission d'examen:

Président:

M.A.ZAQUI,Professeur,Université de PARIS-NORD

Directeur de thèse:

M.M.BERVEILLER,Professeur,Université de METZ

Rapporteurs:

M.P.LIPINSKI,Maitre de conférences,E.N.I de METZ

M.E.SCHNEIDER,Docteur Ingénieur,Université de SAAREBRUK

M.A.ZAREMBOVITCH,Professeur à l'université de PARIS VI

Examineurs:

M.B.HOSTEN,Chargé de recherches CNRS,Université de Bordeaux I

M.D.ALLIAGA,Ingénieur Aérospatiale,Laboratoire Central

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv.

19900165

Cote

S/M3 90/7

Loc

Magasin

AVANT-PROPOS

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de METZ (U.A. CNRS 1215).

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur M.BERVEILLER, qui durant toute la durée de ce travail, me fit bénéficier de ses compétences, en assurant la direction de ce travail.

Je désire exprimer ma cordiale reconnaissance et sympathie à Monsieur P.LIPINSKI, Maître de conférences à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de METZ, pour sa participation à ce jury. Ses compétences Scientifiques et sa constante disponibilité furent pour moi d'une aide précieuse.

Que Monsieur A.ZAOUI, Professeur à l'Université de PARIS-NORD, trouve ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté de présider ce travail, ainsi que Messieurs ALLIAGA, SCHNEIDER, ZAREMBOVITCH et HOSTEN pour leur participation au jury.

Enfin, je ne saurais oublier dans ces remerciements tous mes collègues et camarades du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux qui, à divers titres, m'ont permis de mener à bien cette étude dans une bonne ambiance.

A mes parents, à Ismaël
A toute ma famille
A mes amis

PLAN GENERAL

CHAPITRE - I -

INTRODUCTION

- I.1 Généralités sur les composites
- I.2 Bibliographie

CHAPITRE -II-

MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE LINEAIRE
DES MATERIAUX COMPOSITES

- II.1 Introduction
- II.2 Position du problème
- II.3 Loi de comportement locale
- II.4 Propriétés thermoélastiques effectives
- II.5 Tenseurs de localisation des déformations
 - II.5.1 Equation intégrale
 - II.5.2 Approximation autocohérente (à un site)
- II.6 Tenseurs de localisation des contraintes
- II.7 Conclusion
- II.8 Bibliographie

CHAPITRE -III-

METHODES DE CALCUL DES PROPRIETES THERMOELASTIQUES
EFFECTIVES DES MATERIAUX COMPOSITES

- III.1 Introduction
- III.2 Description du composite

III.3 Méthode de calcul analytique (cas d'un composite isotrope à renforts sphériques)

a) Expression de λ^{eff} et μ^{eff}

b) Expression de β^{eff} et α^{eff}

III.4 Méthode numérique (cas général)

a) Test de convergence

III.5 Confrontation des deux méthodes (cas d'un matériau isotrope à renforts sphériques)

III.6 Bibliographie

CHAPITRE -IV-

COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES ET
EXPERIMENTAUX

IV.1 - Introduction

IV.2 - Confrontation à l'experimentation

IV.2.1 - Cas d'un polycristal d'Aluminium

a-Description du matériau

b-Choix des paramètres de modélisation

c-Comparaison des résultats du modèle aux résultats expérimentaux

IV.2.2 - Cas des composites biphasés

1°) Cas du composite (Al-Sic)

a-Description du matériau et choix des paramètres de modélisation

b-Comparaison des résultats du modèle aux résultats expérimentaux

2°) Cas du composite (Al-Al₂O₃)

a-Description du matériau et choix des paramètres de modélisation

b-Comparaison des résultats du modèle aux résultats expérimentaux

IV.2.3 - Conclusion

IV.3 - Influence des paramètres de modélisation sur le comportement thermoélastique des composites

IV.3.1 - composite première classe

a-Description

b-Evolution des caractéristiques thermoélastiques effectives

IV.3.2 - Composite seconde classe

a-Description

b-Evolution des caractéristiques thermoélastiques effectives

IV.4 - Conclusion

IV.5 - Bibliographie

CHAPITRE - V -

MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE

NON LINEAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES

V.1 Introduction

V.2 Loi de comportement élastique non linéaire locale

V.3 Propriétés élastiques effectives non linéaires

V.4 Equation intégrale

V.5 Approximation autocohérente (à un site)

V.6 Calcul numérique des modules élastiques non linéaires des matériaux composites

V.7 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

V.7.1 Cas d'un polycristal d'Aluminium

V.7.2 Cas d'un composite Al-Al₂O₃

V.8 Conclusion

CHAPITRE - VI -

CONCLUSION GENERALE

CHAPITRE - 1 -

INTRODUCTION

I.1 Généralités sur les composites

I.2 Bibliographie

I.1 Généralités sur les composites

Les composites s'imposent dans tous les secteurs où les progrès technologiques nécessitent de combiner des propriétés (mécaniques, thermiques, diélectriques,.....) que ne possède individuellement aucun matériau .

Les fibres sont en général des composés de matériaux dont les liaisons interatomiques sont fortes et stables. On cite:

- l'oxyde d'aluminium
- le carbure de silicium
- l'oxyde de silicium

qui sont caractérisés par leurs légèreté, rigidité et leurs dureté. Toutefois , ce type de matériaux casse facilement et c 'est pour cette raison d 'ailleurs que leurs utilisation comme matériau de structure est très limitée.

Pour remédier à ce problème , ces fibres sont intégrées dans une matrice faite d'un autre matériau ; cette matrice lie entre elles les fibres et assure la solidité de l 'ensemble.

La résistance mécanique et la rigidité d'un composite dépendent avant tout du matériau du renfort , mais la matrice apporte ses propres qualités .

Trois catégories de matériaux composites sont à distinguer selon la nature de la matrice:

-Les matrices organiques (température d'utilisation limitée à $(200 \div 300 \text{ }^{\circ}\text{C})$ formées à partir de résines organiques thermoplastiques ou thermodurcissables.

-les matrices vitro-céramiques et céramiques employées dans des applications à hautes température.

-les matrices métalliques ,à base principalement d 'alliage de magnésium , d'aluminium ou de titane , sont utilisées à moyennes températures:

- jusqu'à $300 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pour l'aluminium et le magnésium
- jusqu'à $500 \div 600 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pour le titane

Dans ce travail on s'intéresse surtout aux composites à matrice métallique. Les renforts utilisés dans ce genre de composites sont de trois types : [1]

- des filaments continus de gros diamètre ($100 \text{ à } 200 \text{ }\mu\text{m}$)
- des fibres multibrins de diamètre ($7 \text{ à } 20 \text{ }\mu\text{m}$)
- des whiskers (diamètre mois d'un μm - longueur quelques centaines de μm)

Une description plus détaillé de ces renforts a été donnée par Rocher [2] .

La mise en oeuvre des renforts fibreux au sein d' une matrice métallique se fait grossièrement de deux manières:

- dans le premier cas ,une préforme est réalisée à partir des fibres puis imprégnée à l'aide de l'alliage liquide.
- dans le second cas ,le renfort fibreux est d'abord imprégné

par le métal liquide et le demi produit ainsi obtenu est utilisé ensuite pour réaliser , par compression à chaud , des formes massives.

Dans les deux cas , divers paramètres influencent le comportement des matériaux composites :

- la fraction volumique
- la morphologie
- l'orientation et la nature

des composants (fibres et matrice).

C'est pour cela , que les spécialistes de la conception peuvent choisir avec une certaine liberté , à la fois la composition et la structure interne des matériaux.

Cependant , pour répondre à un cahier de charge bien défini , il est nécessaire de connaître l'influence de chaque paramètre définissant le matériau sur son comportement .Ceci n'est toutefois possible que sur des bases théoriques solides qui permettent de prévoir l'effet de chaque variable sur les performances du produit.

Comme les matériaux composites sont examinés en tant que matériaux hétérogènes , on pourra alors considérer que les progrès qui ont eu lieu dans ce domaine sont à la base du développement des méthodes utilisées pour étudier le comportement des composites. Ainsi grâce à l'étude de l'"hétérogénéité élémentaire" faite par Eshelby [3] ,et au-delà des modèles simples de Voigt [4],Reuss [5] et Hill [6] ,se sont développées des méthodes statistiques systé-

matiques qui font intervenir l'ensemble des fonctions de corrélations des constantes élastiques des constituants (Kröner [7]). Des méthodes intermédiaires ont été développées par (Kröner [8], Berveiller et Zaoui [9]). Ces méthodes fournissent des résultats exacts dans le cas des milieux parfaitement désordonnés (Kröner [7]) ; elles sont constituées par les modèles autocohérents. Dans la première partie de ce travail , on utilisera le modèle autocohérent à un site pour déterminer les propriétés thermo-élastiques effectives d'un matériau composite à matrice métallique. Ces propriétés sont :

- les modules élastiques
- les coefficients de dilatation thermique
- les tenseurs de localisation des contraintes (déformations) mécaniques et thermiques.

Certains travaux expérimentaux portant sur les matériaux composites ([10],[11]) ont pour objectif, la mesure des vitesses de propagation des ondes ultrasonores , afin d'en déduire les contraintes internes .Ceci n'est cependant possible que si les constantes élastiques du troisième ordre du matériau étudié sont connues.

Dans la deuxième partie, nous proposons donc une méthode de calcul de ces coefficients , méthode qui consiste à adapter le modèle self-consistent au cas de l'élasticité non linéaire .

I.2 Bibliographie

- [1] R.Naslain, Introduction au matériaux composites vol.2 :
matrices métalliques et céramiques (R . Naslain ,ed)
chap 13 ,pp 213-262 ,CNRS-IMC,BORDEAUX ,1985.
- [2] J.P.ROCHER,"Elaboration et caractérisation de matériaux
composites a matrice d'alliage léger obtenus selon une
technique proche de la fonderie " , Thèse d 'état
(BORDEAUX).
- [3] Eshelby.J.D,1961 "Elastic inclusions and inhomogeneities"
progress in solid Mechanics 2 , editet by I.N.Sneddon and
R.Hill ,North Holland,Amsterdam,pp 98-140.
- [4] Voigt W.,1889,"Über die beziehung zurischen den beiden
elastizitäts konstanten isotroper körper " ,Wied ,Ann ,
Vol.38 ,1889,pp.573-587.
- [5] Reuss A. ,1929 , " Berechnung der fliessgrenze von
mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für
einkristall " ,Z.ang.Math.Mech.,1929,vol.9,pp.49-58.
- [6] Hill R.,1965,J.Mech.phys.Solids 13,89.
- [7] Kröner E.,1980,"Graded and perfect disorder in random media
elasticity",J.of Engng.Mech.Division,vol.EM5,1980,pp.889-914
- [8] Kröner E. ,1958 ,3Berechnung der elastischen konstanten des
vielkristalles aus den konstanten des einkristalls",Z.Phys,
Vol.157,1958,pp.504-518.
- [9] Berveiller M.,Zaoui A.,1980,"Méthodes self-consistantes en
mécanique des solides hétérogènes" ,15° colloque du groupe
français de rhéologie .Comportement Rhéologique et structure
des matériaux,1980,pp.175-199
- [10] Schneider E. , Lee D. , Razvi S. , Salama K. , 1987,"Non
destructive characterization of metal matrix composites",

poc.of the 16 thesymposium on non destructive Evalution,
San Antonio,USA.

[11] Schneider E.,1988 ,Communication personnelle.

CHAPITRE -II-
MODELISATION DU COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE LINEAIRE
DES MATERIAUX COMPOSITES

- II.1 Introduction
- II.2 Position du problème
- II.3 Loi de comportement locale
- II.4 Propriétés thermoélastiques effectives
- II.5 Tenseurs de localisation des déformations
 - II.5.1 Equation intégrale
 - II.5.2 Approximation autocohérente (à un site)
- II.6 Tenseur de localisation de contraintes
- II.7 Conclusion
- II.8 Bibliographie

II.1 Introduction

Les matériaux composites utilisés comme éléments de structure dans les domaines de haute technologie (les industries aérospatiales, automobile ,...) sont soumis dans de nombreux cas à des sollicitations thermiques (turboréacteur (1000°) , statoréacteurs à combustion supersonique (1750°) , cône de missile.....).

Les constituants de ces composites ne se dilatent pas de la même manière (tableau II.1).

Cette différence dans les coefficients de dilatation thermique, engendre des contraintes thermiques qui peuvent conduire à une plastification ou une rupture totale. Ceci justifie la nécessité de déterminer le comportement thermoélastique des composites à partir des caractéristiques des fibres et de la matrice.

Une critique des théories prévoyant le comportement thermoélastique des composites à fibres unidirectionnelles a été faite par C.C. Chamis et al [1]; dans son travail il a brièvement rappelé les différentes méthodes utilisées pour étudier les composites à fibres unidirectionnelles , et a comparé les résultats obtenus par ces méthodes aux résultats expérimentaux.

On peut alors considérer que le problème des composites à fibres longues comme partiellement résolu.

Cependant , l'étude des composites à fibres courtes pose de nombreuses difficultés liées à la diversité des paramètres

Matériaux	Coefficients de dilatation thermique $\alpha \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$
Cellulose naturelle (bois,coton,papier) -phénolique	7.10^{-6}
plyster HT	35.10^{-6}
Kermel Nomex	20.10^{-6}
Acrylique	28.10^{-6}
Dérivés cellulosiques (nayonne,viscose)	50.10^{-6}
Téflon	30.10^{-6}
Aciers	10.10^{-6}
Alliages d'Aluminium	23.10^{-6}
Cuivres et alliages	20.10^{-6}
Alliages Nickel Cobalt	13.10^{-6}
Alliages titane Tartale , Niobium	8.10^{-6}

Tableau II.1

Coefficients de dilatation thermiques de
quelques matériaux.

caractérisant ces matériaux-(forme,orientation,répartition,....)

Celles ci ne proviennent pas de la formulation du problème thermoélastique ,mais plutôt des méthodes de calculs utilisées pour déterminer le comportement de ces matériaux.

Ainsi les composites à renforts sphériques ont été étudiés par Kerner [2] , Levin [3] , Scharpery [4] et Budiansky [5].

En utilisant une approche variationnelle ,Rosen et Hashin [6] ont adapté le modèle de Levin (concernant les composites à deux constituants) au cas d 'un composite anisotrope.

Laws[7] a déterminé le comportement thermoélastique des composites anisotropes en se basant sur l'approximation autocohérente de Hill [24].

Pour les composites à fibres courtes unidirectionnelles Nomura et Chou [8] se sont basés sur la méthode du tenseur de Green pour trouver l'expression des modules thermoélastiques effectifs sous forme de développement en séries.

Le travail actuel porte sur l'amélioration des méthodes et outils de calculs permettant une meilleure prédiction du comportement effectif des matériaux composites.

On introduira tout d'abord la loi de comportement thermomécanique locale et les tenseurs localisation mécaniques et thermiques reliant la déformation totale locale à la température (supposée uniforme) et à la déformation macroscopique imposées.

Par l 'intermédiaire des relations de moyenne usuelles , on en déduit le comportement global à partir du procédé d 'homogénéi-

sation classique.

Dans le cas des milieux microhétérogènes et macrohomogènes , les tenseurs localisations sont établis à partir d'une équation intégrale obtenue en introduisant un milieu homogène fictif dans les équations de champ et de comportement . L'équation intégrale est résolue par une approximation autocohérente.

II.2 Position du problème

Le but de ce chapitre est de déterminer les propriétés thermo-élastique des matériaux composites , considérés comme matériaux macrohomogènes et microhétérogènes.

Soit un milieu infini de volume (V) (fig(II.1)) macrohomogène et microhétérogène initialement non contraint (sans contraintes internes thermiques ou plastiques). Ce milieu subit une variation de température (θ) et est en équilibre sous l'action d'une contrainte Σ ou d'une déformation E (macroscopique) , imposée sur la frontière, il est nécessaire d'établir la relation entre Σ , E et θ et de prédire les phénomènes de localisation des contraintes.



figure (II.1): représentation du volume (V)

II.3 Loi de comportement locale

En thermoélasticité linéaire , interviennent deux phénomènes caractéristiques coexistants dans le matériau:

- l'un de nature élastique
- l'autre de nature thermique

La déformation totale (ϵ) dans ce cas, est la superposition de deux composantes:

- ϵ^e : déformation due au phénomène élastique
- ϵ^{th} : déformation thermique ($\epsilon_{ij}^{th} = \alpha_{ij} \theta$) ($i, j=1, 2, 3$)

ou

α_{ij} est le tenseur de dilatation thermique

et

θ : variation de température

donc:
$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{th}$$

Dans ce chapitre on tiendra compte des hypothèses suivantes:

- 1-la température du milieu étudié est uniforme (domaine thermostatique ou thermoélastostatique [9])
- 2-nous négligeons les phénomènes d'inertie
- 3-nous nous plaçons dans le cadre d'un comportement linéaire contrainte-déformation
- 4-l'état de déformation du solide, évolue dans le domaine pré-plastique (pas de plasticité)
- 5-les coefficients d'élasticité (du second ordre) c_{ijkl} sont indépendants de la température absolue .

les hypothèses (2,3,4,5) forment ce qu'on appelle les hypothèses de petites perturbations (H.P.P). Dans ces conditions seule la relation de Duhamel-Newmann ,qui traduit la rigidité élastique du matériau suffit pour décrire son comportement local.

La loi locale de conservation de l'énergie et l'inégalité de Clausius-Duhem permettent d'exprimer la contrainte sous la forme.

$$\sigma_{ij} = \partial \phi / \partial \epsilon_{ij} \quad (II.1)$$

où ϕ est l'énergie libre volumique de Helmholtz.

Dans le cadre des (H.P.P) les valeurs (ϵ_{ij}) et (θ) sont petites (et nulles à l'état de référence).

Ainsi le développement de l'énergie libre volumique (ϕ) au voisinage de ($\epsilon_{ij} = 0$) et ($\theta = 0$) en série des (ϵ_{ij}) et (θ) (en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2)

$$\phi = \phi_0 + 1/2 c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \theta + \dots \quad (II.2)$$

Où ϕ_0 est l'énergie libre volumique à l'état de référence.

Nous en déduisons d'après (II.1) la loi de comportement thermo-élastique reliant la contrainte (σ) à la déformation totale (ϵ) et à la température θ :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} - \beta_{ij} \theta \quad (II.3)$$

β_{ij} étant les coefficients de contraintes thermiques.

Un raisonnement analogue utilisant l'énergie libre de Gibbs [9], conduit à la loi de comportement :

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta$$

où

s_{ijkl} sont les composantes du tenseur de complaisances et
 α_{ij} les composantes du tenseur de dilatation thermiques.

La relation (II.3) s'écrit donc d'une façon équivalente en introduisant les coefficients de dilatation thermique (α_{ij}) :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} \theta) \quad (II.4).$$

Cette forme de loi de comportement est valable en tout point r du milieu. On s'en servira pour déterminer le comportement élastique global des milieux thermoélastiques infinis microhétérogènes et macrohomogènes.

II.4 Propriétés thermoélastiques effectives

En un point r du milieu, la loi de comportement local s'écrit sous la forme:

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) \epsilon_{kl}(r) - \beta_{ij}(r) \theta \quad (II.5)$$

ou par dualité en introduisant le tenseur de complaisances locale $s(r)$:

$$\epsilon_{ij}(r) = s_{ijkl}(r) \sigma_{kl}(r) + \alpha_{ij}(r) \theta \quad (II.6).$$

Le comportement thermoélastique global du milieu microhétérogène et macrohomogène reliant les contraintes Σ , la déformation E et la température θ s'écrit sous la forme:

$$\Sigma_{ij} = [c_{ijkl}^{eff}] E_{kl} - \alpha_{ij}^{eff} \theta \quad (II.7)$$

ou de façon équivalente:

$$\Sigma_{ij} = [c_{ijkl}^{eff}] E_{kl} - \beta_{ij}^{eff} \theta \quad (II.8)$$

$$E_{ij} = S_{ijkl}^{eff} \Sigma_{kl} + \alpha_{ij}^{eff} \theta \quad (II.9)$$

S_{ijkl}^{eff} , $[c_{ijkl}^{eff}]$, α_{ij}^{eff} , β_{ij}^{eff} sont les propriétés effectives

du milieu homogène équivalent (M.H.E).Celui ci est défini comme étant le milieu homogène dont le comportement est le même que le comportement macroscopique du matériau microhétérogène considéré. Les coefficients effectifs définis précédemment vérifient les relations :

$$[L^{eff}]^{-1} = S^{eff} \quad \text{et} \quad \beta^{eff} = [L^{eff}] \alpha^{eff} \quad (II.10).$$

Puisque le milieu vérifie les hypothèses de Hill (i.e pas de forces volumiques ,le milieu subit de faibles déformations,taille de l'hétérogénéité est petite par rapport à la taille du milieu), on peut alors définir le volume (V) global du milieu en tant que volume représentatif (au sens statistique) et on lui associe la valeur moyenne volumique notée ($\overline{\quad}$) .

Les contraintes et les déformations Σ et E sont alors reliés aux grandeurs locales correspondantes par les relations de moyennes usuelles de Hill-Mandel :

$$\Sigma_{ij} = 1/V \int \sigma_{ij}(r) dV = (\overline{\sigma_{ij}(r)}) \quad (II.11)$$

et

$$E_{ij} = 1/V \int \epsilon_{ij}(r) dV = (\overline{\epsilon_{ij}(r)}) \quad (II.12)$$

Afin de décrire le comportement global à partir de la micro-structure du matériau ,deux relations de localisation reliant les grandeurs locales aux quantités macroscopiques correspondantes sont introduites (Laws [7]):

$$\sigma_{ij}(r) = B_{ijkl}(r) \Sigma_{kl} + b_{ij}(r) \Theta \quad (II.13)$$

$$\epsilon_{ij}(r) = A_{ijkl}(r) E_{kl} + a_{ij}(r) \Theta \quad (II.14)$$

Les tenseurs a , A , B et b ne sont pas indépendants du fait des relations (II.9), (II.6), (II.5) et (II.8).

En passant aux valeurs moyennes, il est évident que:

$$\overline{A} = I, \quad \overline{a} = 0$$

$$\overline{B} = I, \quad \overline{b} = 0$$

où I désigne le tenseur unité d'ordre 4.

En portant (II.8) dans (II.13), on obtient:

$$\sigma_{ij}(r) = B_{ijkl}(r) [\epsilon_{klmn}^{eff} E_{mn} - \beta_{ij}^{eff} \Theta] + b_{ij}(r) \Theta \quad (II.15)$$

et à partir de (II.5)

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}(r) = & c_{ijkl}^{-1}(r) B_{klmn}(r) [\epsilon_{mnpq}^{eff} E_{pq} \\ & - c_{ijkl}^{-1}(r) [B_{klmn}(r) \beta_{mn}^{eff} - b_{kl}(r) - \beta_{kl}(r)] \Theta \end{aligned} \quad (II.16)$$

En comparant cette relation avec (II.14), on a donc les relations suivantes :

$$A_{ijkl}(r) = c_{ijmn}^{-1}(r) B_{mnpq}(r) [\epsilon_{pqkl}^{eff} \quad (II.17)$$

$$a_{ij}(r) = - c_{ijmn}^{-1}(r) [B_{mnpq}(r) \beta_{pq}^{eff} - b_{mn}(r) - \beta_{mn}(r)] \quad (II.18)$$

La détermination du comportement thermoélastique macroscopique se ramène alors au calcul de ϵ^{eff} et β^{eff} (ou α^{eff}), à partir de $c(r)$, $\beta(r)$ (ou $\alpha(r)$), des tenseurs localisation A et a et des relations de moyenne (II.11) et (II.12).

On a à partir de (II.5) et (II.14)

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) [A_{klmn}(r) E_{mn} + a_{kl}(r) \theta] - \beta_{ij}(r) \theta \quad (II.19)$$

soit à partir de (II.11)

$$\Sigma_{ij} = \overline{(c_{ijkl}(r) A_{klmn}(r))} E_{mn} + \overline{(c_{ijkl}(r) a_{kl}(r) - \beta_{ij}(r))} \theta \quad (II.20)$$

par comparaison avec (II.8) on obtient:

$$c_{ijmn}^{eff} = \overline{c_{ijkl}(r) A_{klmn}(r)} \quad (II.21)$$

$$\beta_{ij}^{eff} = - \overline{(c_{ijkl}(r) a_{kl}(r) - \beta_{ij}(r))} \quad (II.22)$$

la formulation duale permettra de déterminer S^{eff} et α^{eff} .

A partir de (II.6) et (II.13) on a:

$$\epsilon_{ij}(r) = S_{ijkl}(r) [B_{klmn}(r) \Sigma_{mn} + b_{kl}(r) \theta] + \alpha_{ij}(r) \theta \quad (II.23)$$

soit à partir de (II.12)

$$E_{ij} = \overline{s_{ijkl}(r) B_{klmn}(r)} \Sigma_{mn} + \overline{(s_{ijkl}(r) b_{kl}(r) + \alpha_{ij}(r))} \theta \quad (II.24)$$

par comparaison avec (II.9), on obtient:

$$S_{ijmn}^{eff} = \overline{s_{ijkl}(r) B_{klmn}(r)} \quad (II.25)$$

$$\alpha_{ij}^{eff} = \overline{s_{ijkl}(r) b_{kl}(r) + \alpha_{ij}(r)} \quad (II.26)$$

on pourra remarquer qu'il serait faux d'écrire que la déformation macroscopique thermique est la moyenne des déformations microscopiques :

$$\text{soit } E_{ij}^{th} \neq \overline{\alpha_{ij}(r)} \quad \Theta$$

par contre d'après (II.26)

$$E_{ij}^{th} = \overline{(s_{ijkl}(r) b_{kl}(r) + \alpha_{ij}(r))} \quad \Theta \quad (\text{II.27})$$

le terme $\overline{s_{ijkl}(r) b_{kl}(r)}$ traduit les interactions thermo-élastiques entre les constituants du milieu.

On obtient une autre formulation plus intéressante de β^{eff} (ou α^{eff}) à partir des relations analogues à celles de Levin [3]. (Pour les détails concernant cette méthode se référer à l'annexe (A1)).

Reprenons les relations (A1.8) et (A1.9)

$$\alpha_{ij}^{eff} = \overline{B_{klij}(r) \alpha_{kl}(r)}$$

$$\beta_{ij}^{eff} = \overline{A_{ijkl}(r) \beta_{kl}(r)}$$

ces expressions et les relations (II.21) et (II.25) montrent que les coefficients effectifs ne dépendent que des propriétés locales et des tenseurs de localisation mécaniques A et B.

Dans notre cas , les propriétés locales sont invariables en fonction de la température . Il en est de même des tenseurs effectifs.

Les tenseurs localisations (A ou B) et les tenseurs effectifs

peuvent être alors déduits en considérant simplement le problème isotherme. Cependant pour déterminer les tenseurs de localisation de contraintes et déformation thermiques, il faut tenir compte de la température.

Connaissant le comportement local, défini par les tenseurs c (ou s) et β (ou α), il ne reste qu'à définir les tenseurs localisations A et a pour en déduire les modules effectifs.

Plusieurs méthodes sont possibles ([10], [11], [12]), elle constituent néanmoins toutes une approximation de l'équation intégrale qui sera présentée dans le paragraphe suivant.

II.5 Tenseurs de localisation des déformations

On déterminera les tenseurs localisation de déformation mécaniques (A) et thermiques (a), à partir de l'équation intégrale qu'on résoudra ensuite en utilisant l'approximation autocohérente à un site.

II.5.1 Equation intégrale

La démarche générale consiste à considérer le milieu hétérogène comme un milieu continu à microstructure devant satisfaire :

-les équations d'équilibre (en absence des forces volumiques)

$$\sigma_{ij,j}(r) = 0 \quad (II.28)$$

-les relations de comportement

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) \epsilon_{kl}(r) - \beta_{ij}(r) \theta \quad (II.29)$$

-les relations cinématiques

$$\epsilon_{ij}(r) = 1/2 (u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r)) \quad (II.30).$$

En tenant compte de (II.30) et de la symétrie de (c) [$c_{ijkl} = c_{jikl} =$

$c_{ijlk} = c_{jilk}$] l'équation (II.29) devient:

$$\sigma_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) u_{k,l}(r) - \beta_{ij}(r) \theta \quad (II.31).$$

Les relations (II.31) et (II.28) nous permettent d'écrire:

$$[c_{ijkl}(r) u_{k,l}(r) - \beta_{ij}(r) \theta]_{,j} = 0 \quad (II.32).$$

En introduisant un milieu homogène (sans microstructure) de

coefficients thermoélastiques c_{ijkl}^0 et β_{ij}^0 tel que:

$$c_{ijkl}(r) = c_{ijkl}^0 + \delta c_{ijkl}(r) \quad (II.33)$$

$$\beta_{ij}(r) = \beta_{ij}^0 + \delta \beta_{ij}(r)$$

l'équation (II.32) s'écrit alors:

$$c_{ijkl}^0 u_{k,l,j}(r) + [\delta c_{ijkl}(r) u_{k,l}(r) - (\beta_{ij}^0 + \delta \beta_{ij}(r)) \theta]_{,j} = 0 \quad (II.34)$$

ou

$$c_{ijkl}^0 u_{k,l,j}(r) + [\delta c_{ijkl}(r) u_{k,l}(r) - \delta \beta_{ij}(r) \theta]_{,j} = 0$$

avec $\beta^0 = c^0 \alpha^0$ et $\beta = c \alpha$

Considérons la partie entre crochets comme étant des forces fictives ($f_i(r)$) tel que :

$$f_i(r) = [\delta c_{ijkl}(r) u_{k,l}(r) - \delta \beta_{ij}(r) \theta]_{,j} \quad (II.35)$$

La résolution de (II.34) est obtenue en utilisant la technique du tenseur de Green [$G_{km}(r-r')$] d'un milieu infini (de constantes

élastiques c^0). Ce tenseur traduit le déplacement dans la direction (k) en un point r du milieu , quand une force unitaire $f_i = \delta_{im} \delta(r - r')$ est appliquée en un point r' dans la direction m . δ_{im} étant le symbole de Kronecker et $\delta(r-r')$ la distribution de Dirac .

G_{km} est défini par :

$$c^0_{ijkl} G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0 \quad (II.36)$$

Pour un milieu infini de volume (V) la solution de (II.34) s'écrit:

$$u_m(r) = u^0_m + \int_V G_{mi}(r-r') f_i(r') dV' \quad (II.37)$$

En tenant compte de (II.35) , on a:

$$u_m(r) = u^0_m + \int_V G_{mi}(r-r') [\delta c_{ijkl}(r') u_{k,l}(r') - \delta \beta_{ij}(r') \theta]_{,j} dV' \quad (II.38)$$

En intégrant par parties :

$$u_m(r) = u^0_m - \int_V G_{mi,j}(r-r') [\delta c_{ijkl}(r') u_{k,l}(r') + \delta \beta_{ij}(r') \theta] dV' \quad (II.39)$$

La déformation totale s'obtient en tenant compte de:

$$G_{mi,j'} = \frac{dG_{mi}(r-r')}{dx'_{j'}} = - \frac{dG_{mi}(r-r')}{dx_j} = - G_{mi,j} \quad (II.40)$$

donc finalement:

$$\epsilon_{mn}(r) = \epsilon^0_{mn} + \int_V \Gamma_{mnkl}(r-r') [\delta c_{kl ij}(r') \epsilon_{ij}(r') - \delta \beta_{kl}(r') \theta] dV' \quad (II.41)$$

avec

ϵ^0 est la déformation du milieu homogène soumis au même chargement que le milieu hétérogène et

$$\Gamma_{mnk}(\underline{r}-\underline{r}') = 1/2 \left[G_{mk,nl}(\underline{r}-\underline{r}') + G_{nk,lm}(\underline{r}-\underline{r}') \right] \quad (II.41)'$$

L'équation intégrale (II.41) inclue celle de Dedrichs et Zeller [11] pour un milieu élastique hétérogène [$\beta(\underline{r}) \neq 0$].

Elle est aussi en accord avec les résultats établis par Berveiller et Zaoui [16]. Sa solution permet de calculer les tenseurs localisation A et a . La complexité d'une telle équation nécessite le recours à des simplifications ou approximations conduisant à tout un ensemble de modèles ([13] , [14] , [15]). Parmi ceux ci nous développons l'approche autocohérente qui a l'avantage d'être relativement performante et générale , tout en ne nécessitant que des moyens de calculs limités.

II.5.2 Approximation autocohérente (à un site)

Cette approximation est développée dans le cas des milieux granulaires . Elle a été appliquée aux polycristaux par Hershey [15] et Kröner [16]. Elle consiste à faire un choix particulier du tenseur C^0 et β^0 et remplace les interactions entre une hétérogénéité particulière (l'inclusion) et le milieu réel environnant par celles entre une inclusion et le milieu homogène équivalent (qui a les propriétés C^{eff} et β^{eff}) considéré comme

matrice à comportement anisotrope.

Cette méthode a été élargie au cas de plusieurs sites par Fassi-
fehri et al. [17]. Pour des comportements élastoplastiques, en
transformations finies, la méthode autocohérente a été proposée
par Lipinski et Berveiller [18]. On se limitera dans ce chapitre au
cas de la thermoélasticité linéaire et à l'approximation auto-
cohérente à un site. On tiendra compte de cette approximation (C^0
 $= C^{eff}$ et $\beta^0 = \beta^{eff}$) pour résoudre l'équation (II.41) et avoir
ainsi une expression significative des tenseurs A et a .

Reprenons l'équation (II.41)

$$\epsilon_{mn}(r) = \epsilon_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnkl}(r-r') \left[\delta c_{kl} \epsilon_{ij}(r') - \delta \beta_{kl} \theta \right] dV'$$

Pour résoudre cette équation intégrale (dans le cas d'un milieu
granulaire), nous faisons appel à une approximation qui consiste
à prendre la déformation (totale) dans chaque inclusion comme
étant la moyenne volumique de $\epsilon(r)$ (dans l'inclusion).

On négligera l'hétérogénéité dans l'inclusion, qui apparaît dans
certains cas [19].

Le champ de déformation en un point (r) du matériau prend alors
la forme suivante:

$$\epsilon_{ij}(r) = \sum_{I=1}^N \epsilon_{ij}^I Y^I(r) \quad (II.42)$$

N étant le nombre total des grains du milieu granulaire.

De même, $\sigma(r)$, $\delta c(r)$ et $\delta\beta(r)$ s'écrivent sous la forme:

$$\sigma(r) = \sum_{I=1}^N \sigma^I Y^I(r)$$

$$\delta c(r) = \sum_{I=1}^N \delta c^I Y^I(r) \quad (II.43)$$

$$\delta\beta(r) = \sum_{I=1}^N \delta\beta^I Y^I(r)$$

avec

$$Y^I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin V_I \\ 1 & \text{si } r \in V_I \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \delta c^I = c^I - c^{\text{eff}}, \quad \delta\beta^I = \beta^I - \beta^{\text{eff}}$$

En introduisant (II.42) et (II.43) dans (II.41), nous obtenons :

$$\epsilon_{ij}(r) = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{I=1}^N \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') \left[\delta c_{klmn}^I \epsilon_{mn}^I - \delta\beta_{kl}^I \theta \right] Y^I(r') dV' \quad (II.44)$$

$$\text{or} \quad \int_V \Gamma(r-r') Y^I(r') dV' = \int_{V^I} \Gamma(r-r') dV'$$

V^I représente le volume de l'inclusion ou du grain I.

Donc :

$$\epsilon_{ij}(r) = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{I=1}^N \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r-r') \left[\delta c_{klmn}^I \epsilon_{mn}^I - \delta\beta_{kl}^I \theta \right] dV' \quad (II.45)$$

En utilisant la relation suivante traduisant la moyenne volumique de $\epsilon(r)$ dans l'inclusion :

$$\epsilon^I_{ij} = 1/V^I \int_V \epsilon^I_{ij}(r) dV \quad (II.46)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon^I_{ij} = \epsilon^0_{ij} + \sum_{J=1}^N \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{ijkl}(r-r') [\delta c^J_{klmn} \epsilon^J_{mn}] dV' \\ - \sum_{J=1}^N \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{ijkl}(r-r') [(\delta \beta^J_{kl}) \Theta] dV' \end{aligned} \quad (II.47)$$

En posant :

$$T^{IJ} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma(r-r') dV'$$

l'équation (II.47) se transforme en :

$$\epsilon^I_{ij} = \epsilon^0_{ij} + \sum_{J=1}^N T^{IJ}_{ijkl} \left[\delta c^J_{klmn} \epsilon^J_{mn} - \delta \beta^J_{kl} \Theta \right] \quad (II.48)$$

En supposant que c^I et β^I sont connus , le système d'équations (II.48), pour un milieu granulaire est un système d'équations avec un nombre infini d'inconnues ϵ^I .

Il est possible d'approximer les solutions de ce système en considérant l'interaction de chaque grain (ou inclusion) avec ses premiers voisins et en remplaçant le reste du milieu par le (M.H.E) dont le comportement est identique au comportement global macroscopique du milieu granulaire. Ce comportement est formulé par les modules élastiques effectifs ϵ^{eff} et β^{eff} .

Une approximation raisonnable est celle où on néglige dans (II.48) la contribution des termes :

$$\sum_{J=1}^N 1/V^I \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{ijkl}(r-r') [\delta c_{klmn}^J \epsilon_{mn}^J - \delta \beta_{kl}^J \theta] dV'$$

pour des grains (où inclusions) (J) différentes de (I), puisque T^{IJ} est composé de deux termes ,l'un proportionnel à $(1 / R^3)$ et l'autre à $(1 / R^5)$ (R étant la distance entre les inclusions I et J).

Cependant , pour tenir compte de l'interaction entre l'inclusion principale (I) et les inclusions voisines (J),il faut considérer l'approximation à N sites qui ne sera pas développée ici [17]

On se limite ici ,à l'approximation autocohérente à un site ,dans laquelle toutes les inclusions (J) différentes de (I) sont remplacées par le (M.H.E).

Dans ce cas l'équation intégrale (II.48) se transforme en:

$$\epsilon_{ij}^I = \epsilon_{ij} + T_{ijkl}^{II} [\delta c_{klmn}^I \epsilon_{mn}^I - \delta \beta_{kl}^I \theta] \quad (II.49)$$

avec :

$$T^{II} = 1/V^I \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(r-r') dV' \quad (II.49)'$$

Par définition pour le choix $C^0 = C^{eff}$ et $\beta^0 = \beta^{eff}$, ϵ^0 est égale à la déformation totale macroscopique , et les tenseurs A^I et a^I pour le grain où l'inclusion (I) s'écrivent :(en comparant(II.49) à (II.14))

$$A^I = [I - T^{II} \delta c^I]^{-1} \quad (II.50)$$

$$a^I = A^I T^{II} [\beta^{eff} - \beta^I] \quad (II.51)$$

Si (f^I) est la fraction volumique des grains (ou des inclusions) (I) , A^I et B^I les tenseurs localisation de déformation et de contraintes relatifs à chaque constituant (I) , les relations (II.21), (II.25), (A1.8) et (A1.9) deviennent:

$$\epsilon_{ijmn}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I C_{ijkl}^I A_{klmn}^I \quad (II.52)$$

$$S_{ijmn}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I S_{ijkl}^I B_{klmn}^I \quad (II.53)$$

$$\alpha_{ij}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I B_{klij}^I \alpha_{kl}^I \quad (II.54)$$

$$\beta_{ij}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I \beta_{kl}^I A_{ijkl}^I \quad (II.55)$$

II.6 Tenseur de localisation de contraintes

Quand on chauffe, ou lorsqu'on charge extérieurement un matériau microhétérogène, on crée des contraintes locales (thermique ou mécanique), pouvant entraîner la plastification et parfois la rupture du matériau.

Il est donc intéressant de connaître les tenseurs de concentration de contraintes thermiques et mécaniques, dans la mesure où ceux ci nous permettent de déduire à partir des chargements appliqués aux matériaux, les contraintes locales ou microscopiques.

Les tenseurs de concentration de contraintes mécaniques (B^I) et

thermiques (b^I) dans chaque grain (ou inclusion) peuvent être déduits des formules (II.17) et (II.18) qu'on rappelle ici:

$$A_{ijkl}(r) = c_{ijmn}^{-1}(r) B_{mnpq}(r) \epsilon_{pqkl}^{eff}$$

$$a_{ij}(r) = -c_{ijmn}^{-1}(r) [B_{mnpq}(r) \beta_{pq}^{eff} - b_{mn}(r) - \beta_{mn}(r)]$$

Pour un milieu granulaire la déformation totale dans le grain (I) s'écrit (brièvement):

$$\epsilon^I = A^I E + a^I \theta \quad (II.56)$$

de même la contrainte dans le grain (I) s'exprime sous la forme:

$$\sigma^I = B^I \Sigma + b^I \theta \quad (II.57)$$

Or la déformation et la contrainte dans l'inclusion s'écrivent:

$$\epsilon^I = 1/V^I \int_{V^I} \epsilon(r) dV \quad (II.58)$$

$$\sigma^I = 1/V^I \int_{V^I} \sigma(r) dV$$

D'autre part en un point r du milieu granulaire:

$$\epsilon(r) = A(r) E + a(r) \theta \quad (II.59)$$

$$\sigma(r) = B(r) \Sigma + b(r) \theta$$

En introduisant (II.59) dans (II.58) on obtient:

$$\epsilon^I = 1/V^I \int_{V^I} A(r) dV E + 1/V^I \int_{V^I} a(r) dV \theta \quad (II.60)$$

et

$$\sigma^I = 1/V^I \int_{V^I} B(r) dV \Sigma + 1/V^I \int_{V^I} b(r) dV \theta$$

En comparant (II.60) à (II.56) et (II.57) on a:

$$A^I = 1 / V^I \int_{V^I} A(r) dV \quad \text{et} \quad a^I = 1 / V^I \int_{V^I} a(r) dV \quad (\text{II.61})$$

et

$$B^I = 1 / V^I \int_{V^I} B(r) dV \quad \text{et} \quad b^I = 1 / V^I \int_{V^I} b(r) dV \quad (\text{II.62})$$

Et d'après (II.17), (II.61):

$$A^I = 1 / V^I \int_{V^I} C^{-1}(r) B(r) C^{\text{eff}} dV \quad (\text{II.63})$$

Donc :

$$A^I = [C^I]^{-1} B^I C^{\text{eff}} \quad (\text{II.64})$$

et le tenseur concentration de contraintes mécanique B^I s'écrit:

$$B^I = C^I A^I [C^{\text{eff}}]^{-1} \quad (\text{II.65})$$

De même d'après (II.18) et (II.61):

$$a^I = - [C^I]^{-1} [B^I \beta^{\text{eff}} - b^I - \beta^I] \quad (\text{II.66})$$

et

$$b^I = C^I a^I + C^I A^I \alpha^{\text{eff}} - C^I \alpha^I \quad (\text{II.67})$$

ou encore en tenant compte de (II.51):

$$b^I = C^I [A^I (\alpha^{\text{eff}} + T^{II} (\delta \beta^I) \alpha^I)] \quad (\text{II.68})$$

On remarque que les tenseurs de concentration de contraintes et de déformations, dépendent tous directement et indirectement (par le biais du tenseur d'interaction T^{II}) des propriétés

thermoélastiques effectives.

Il est donc nécessaire de donner une expression explicite de T^{II} pour pouvoir ainsi déterminer les caractéristiques thermoélastiques globales du matériau et les tenseurs de localisation des contraintes et des déformations.

Cependant la présence du tenseur de Green (G) dans l'expression de T^{II} rend le calcul complexe dans le cas d'un milieu anisotrope. Les solutions proposées sont surtout numériques. Ainsi pour l'inclusion ellipsoïdale Kneer[20] a proposé une méthode numérique de calcul de T^{II} , qui consiste à utiliser la transformée de Fourier du tenseur de Green (G) et à intégrer dans l'espace de k (conjugue de r). Ceci a été repris par Mura [21], Laws [22] et Ghahremani [23] et Fassi-Fehri [17]. Les détails du calcul de T^{II} ne seront pas repris ici mais seront par contre rappelés dans l'annexe(A2).

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donnée les expressions générales des propriétés thermoélastiques effectives d'un matériau hétérogène. Par la suite, on proposera une méthode de résolution de l'équation (II.52) qui se transforme en tenant compte de (II.50) en:

$$[^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I c^I [I - T^{II} (C^I - [^{eff})]^{-1}$$

La résolution de cette équation nous permettra de déterminer les constantes élastiques effectifs $[^{eff}$ et ensuite les coefficients de dilatation thermiques α^{eff} .

II.8 BIBLIOGRAPHIE

- [1] C.C.Chamis,G.P.Sendecky,"critique on theories predicting thermoelastic properties of fibrous composites " , J.Composites Materials.vol 2.No 3,July 1968.p332.
- [2] E.H.Kerner ,proc.Phys.Soc.69B.808(1956)
- [3] V.M.Levin,Mekh.Tverd.tela 1.88 (1967)
- [4] R.A.Sharpery,J.Comp.Mat.2.380 (1968)
- [5] B.Budiansky,J.Comp.Mat.2.380 (1968)
- [6] B.W.Rosen and Hashin,INT.J.Engng Sci.8.157(1970)
- [7] N.Laws,J.Mech.Phys.Solids 21,9(1973)
- [8] S.Nomura and T.W.Chou,J.Comp.Mat.14,120(1980)
- [9] M.Buisson , "sur les lois constitutives des matériaux thermoélastiques hétérogènes",Thèse,1984,METZ
- [10] E.Kröner 15^e colloque du G.F.R (1981)
- [11] P.H.Dedrichs ,R.Zeller,phys.stat.sol.(b)55-831(1973)
- [12] Tsu-Wai Chou and Seiichi Nomura,proceedings of the third international conférence of composite materials , Paris , August,1980.
- [13] Z.Hashin et S.Strickmann ,J.Mech phys,Solids.
- [14] M.Berveiller ,A.Zaoui"Méthodes self consistantes en mécanique des solides hétérogènes " , 15^e colloque du G . F . R ,Paris pp175-199,(1980)
- [15] A.V.Hershey J.Appl.Mech,21,236(1954)
- [16] E.Kröner Z.Phys.151,504(1958)
- [17] O.Fassi.Fehri " Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope-application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité ".Thèse de doctorat d'état (METZ).
- [18] Lipinski P.,Berveiller M.,"Elastoplasticity of microin-homogeneous metals at large strains ,int.J.plasticity , Vol.5 ,PP.149-172,1989.
- [19] H.Bouaouine,thèse d'Etat ,Université de Metz (1988)

- [20] G.Kneer,Phs.stat.sol,9(1965)
- [21] T.Mura,Phys.Stat.Sol.,15,(1973)
- [22] N.Laws ,J.Elasticity ,(1977)
- [23] F.Gharhremani,Mech.Res.Comm,4,89-91,(1977)
- [24] R.Hill , J.Mech.Phys.Solids ,13, 89 ,(1965).

CHAPITRE -III-

METHODES DE CALCUL DES PROPRIETES THERMOELASTIQUES

EFFECTIVES DES MATERIAUX COMPOSITES

III.1 Introduction,

III.2 Description du composite

III.3 Méthode de calcul analytique (cas d'un composite isotrope
à renforts sphériques)

a) Expression de λ^{eff} et μ^{eff}

b) Expression de β^{eff} et α^{eff}

III.4 Méthode numérique (cas général)

a) Test de convergence

III.5 Confrontation des deux méthodes (cas d'un matériau isotrope
à renforts sphériques)

III.6 Bibliographie

III.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré essentiellement au calcul des caractéristiques thermoélastiques des matériaux composites . On étudiera d'abord le composite à renforts sphériques (isotrope) et on abordera ensuite un cas plus général .

III.2 Description du composite

Le composite peut être décrit à partir d'un matériau hétérogène constitué d'une matrice et de renforts.

Selon la nature de ses renforts ; c'est à dire leurs propriétés thermoélastiques, il peut être considéré comme un matériau biphasé (ex: Al-Sic) , triphasé (2D-Sic-Sic/AS7G06),.....

La matrice est en général un polycristal monophasé dont les propriétés C^M et α^M peuvent être éventuellement anisotrope si le monocristal est anisotrope et lorsqu'une texture cristallographique existe [1] .

Les propriétés thermoélastiques des renforts sont décrites par les tenseurs C^I et α^I . Ces renforts sont représentés par l'intermédiaire d'inclusions ellipsoïdales de révolution , de paramètres de forme (c) et (a) . Cette représentation est l'une des plus générales puisqu'en faisant varier a et c on peut avoir des renforts sphériques ($a=c$) , fibres longues (c très supérieur à a) et des inclusions sous forme de plaquettes (c très petit par rapport à a) .

Les axes principaux des renforts sont orientés par rapport à un repère fixe par 3 angles d'Euler.

Selon leurs formes et leurs orientations, les renforts sont regroupés dans différentes classes, ce qui permet de tenir compte d'une texture d'orientation des inclusions liée au procédé d'élaboration ou de transformation.

III.3 Méthode de calcul analytique (cas d'un composite isotrope à renforts sphériques)

Dans ce cas, les propriétés thermoélastiques des constituants se réduisent aux constantes rassemblées dans le tableau (III.1).

	Matrice	Renforts
coefficients de Lamé	λ^M, μ^M	λ^I, μ^I
Coefficients de dilatation thermiques	α^M	α^I

Tableau (III.1): Propriétés thermoélastiques des constituants isotropes du composite

Le matériau contient des inclusions, caractérisées par les constantes isotrope élastiques C^I et thermiques α^I (ou β^I) tel que:

$$C_{ijkl}^I = \lambda^I \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^I (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (III.1)$$

et

$$\alpha_{ij}^I = \alpha^I \delta_{ij} \quad (III.2)$$

les constantes de la matrice supposée isotrope s'écrivent aussi de la même manière:

$$C_{ijkl}^M = \lambda^M \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^M (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (III.3)$$

et

$$\alpha_{ij}^M = \alpha^M \delta_{ij} \quad (III.4)$$

Nous nous proposons de chercher les solutions $[^{eff}(\lambda^{eff}, \mu^{eff})]$ et α^{eff} du milieu homogène équivalent telles que:

$$[_{ijkl}^{eff} = \lambda^{eff} \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^{eff} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (III.5)$$

et

$$\alpha_{ij}^{eff} = \alpha^{eff} \delta_{ij} \quad (III.6)$$

on pourra remarquer qu'on peut déterminer α^{eff} à partir de β^{eff} puisqu'on a:

$$\beta_{ij}^{eff} = [_{ijkl}^{eff} \alpha_{kl}^{eff} \quad (III.7)$$

et donc en tenant compte de (III.5) :

$$\beta_{ij}^{eff} = (3 \lambda^{eff} + 2 \mu^{eff}) \alpha^{eff} \delta_{ij} \quad (III.8)$$

ou en introduisant une constante β^{eff} :

$$\beta_{ij}^{eff} = \beta^{eff} \delta_{ij} \quad (III.9)$$

avec

$$\beta^{eff} = (3\lambda^{eff} + 2\mu^{eff}) \alpha^{eff}$$

de plus le milieu est soumis à une contrainte Σ_{ij} à l'infini créant une déformation uniforme E_{ij} .

Les tenseurs de concentration de déformations, peuvent être déduits analytiquement à partir de la solution d'Eshelby [2].

D'après le résultat établi par Eshelby [2], on a:

$$\epsilon_{ij}^I = E_{ij} + S_{ijkl} \epsilon_{kl}^P \quad (III.10)$$

où

* ϵ^P est la déformation plastique fictive de l'inclusion inhomogène qui conduit aux mêmes contraintes et déformations totales que celles de l'inclusion hétérogène.

* S_{ijkl} est le tenseur d'Eshelby.

Pour une sphère (c'est le cas ici) on a : [2]

$$\epsilon_{ij}^P = B E_{ij} + 1/3 (A - B) E_{kk} \delta_{ij} \quad (III.11)$$

avec:

$$A = \frac{(K^I - K^{eff})}{[(K^{eff} - K^I) p^{eff} - K^{eff}]} \quad (III.12)$$

et

$$B = \frac{(\mu^I - \mu^{eff})}{[(\mu^{eff} - \mu^I) q^{eff} - \mu^{eff}]}$$

où le module de compressibilité K est donnée par :

$$K = 1/3 (3 + 2 \mu)$$

p et q sont données par (dans le cas d'une inclusion :

$$p = 1/3 (1+v)/(1-v)$$

$$q = 2/15 (4-5v)/(1-v)$$

on peut alors écrire pour une inclusion (I) sphérique et inhomogène:

$$\epsilon_{ij}^I = M^I E_{ij} + 1/3 (N^I - M^I) E_{kk} \delta_{ij} \quad (III)$$

M^I et N^I étant définis par:

$$M^I = 1 + p B$$

$$N^I = 1 + q A$$

par conséquent le tenseur localisation de déformation reliant la déformation totale dans l'inclusion (ϵ^I) à la déformation macroscopique s'exprime en fonction de M et N de la manière suivante:

$$A_{ijkl}^I = (M^I I_{ijkl} + (N^I - M^I) / 3 \delta_{kl} \delta_{ij}) \quad (III.17)$$

où le tenseur identité (I_{ijkl}) est défini par:

$$I_{ijkl} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

a) Expression de λ^{eff} et μ^{eff}

Pour pouvoir décrire le tenseur ϵ^{eff} il suffit de déterminer λ^{eff} et μ^{eff} .

D'après (III.1) :

$$\lambda^{\text{eff}} = \epsilon_{1122}^{\text{eff}} \quad \text{et} \quad \mu^{\text{eff}} = \epsilon_{1212}^{\text{eff}} \quad (\text{III.18})$$

de (II.52) nous déduisons:

$$\epsilon_{1212}^{\text{eff}} = C_{1212}^M + f^I (C_{12mn}^I - C_{12mn}^M) A_{mn12}^I \quad (\text{III.19})$$

et puisque les seules composantes C_{12mn} non nuls sont C_{1212} et

C_{1221} on peut alors écrire:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1212}^{\text{eff}} &= C_{1212}^M + f^I (C_{1212}^I - C_{1212}^M) A_{1212}^I \\ &\quad + f^I (C_{1221}^I - C_{1221}^M) A_{2112}^I \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

donc:

$$\mu^{\text{eff}} = \mu^M + f^I \mu^I (A_{1212}^I + A_{2112}^I) \quad (\text{III.21})$$

on a alors d'après (III.17) :

$$A_{1212}^I = A_{2112}^I = M^I$$

et

$$M = 1/2 \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}} - (\mu^{\text{eff}} - \mu^I) p^{\text{eff}}} \quad (\text{III.22})$$

on obtient à partir de (III.21) et (III.22) l'expression suivante:

$$\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M} = 1 + f^I (\mu^I - \mu^M) \frac{\mu^{\text{eff}} / \mu^M}{\mu^{\text{eff}} - (\mu^{\text{eff}} - \mu^I) q^{\text{eff}}} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant le même procédé qu'auparavant on trouve l'expression de λ^{eff} suivante:

$$\lambda^{eff} = 1 + f^I (\delta \lambda^{IM} + 2/3 \delta \mu^{IM}) \frac{K^{eff}}{K^{eff} - (K^{eff} - K^I) p^{eff}} \quad (III.24)$$

$$-2/3 f^I \delta \mu^{IM} \frac{\mu^{eff}}{\mu^{eff} - (\mu^{eff} - \mu^I) q^{eff}}$$

où $\delta \lambda^{IM} = \lambda^I - \lambda^M$ et $\delta \mu^{IM} = \mu^I - \mu^M$

les relations (III.23) et (III.24) sont des équations de second degré en μ^{eff} et λ^{eff} (pour $v^I=0.2$ et $v^M=0.2$). Leurs résolution permet de calculer μ^{eff} pour une fraction volumique de renforts donnée et ensuite pour un composite dont les propriétés des constituants sont:

$E_{matrice}$	$= 3.6 \text{ GPa}$	$v_{matrice}$	$= 0.2$
E_{fibres}	$= 360 \text{ GPa}$	v_{fibres}	$= 0.2$

on regroupe les différentes valeurs de (μ^{eff}) et de (λ^{eff}) en fonction de la fraction volumique des renforts (f^I) dans le tableau (III.2).

f^I	μ^{eff}_{GPa}	λ^{eff}_{GPa}
0	1.5	1
0.1	1.86	1.24
0.2	2.45	1.63
0.3	3.57	2.37
0.4	6.24	4.15
0.5	14.96	9.95
0.6	35.87	23.87
0.7	62.86	41.97
0.8	91.47	60.94
0.9	120.61	80.39
1	150	100

tableau III.2 : variation de μ^{eff} et λ^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des renforts sphériques du carbone.

b) Expression de β^{eff} et de α^{eff}

Reprenons l'équation (II.55):

$$\beta_{ij}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I \beta_{kl}^I A_{ijkl}^I$$

Elle se transforme dans notre cas (i.e inclusions sphériques a comportement isotrope dans une matrice isotrope) en:

$$\beta_{ij}^{eff} = \beta_{kl}^M + f^I (\beta_{kl}^I - \beta_{kl}^M) A_{ijkl}^I$$

et en tenant compte de (III.17) on a:

$$\beta_{ij}^{eff} = \beta_{ij}^M + f^I (\beta_{kl}^I - \beta_{kl}^M) (M^I I_{ijkl} + \frac{N^I - M^I}{3} \delta_{kl} \delta_{ij})$$

ou de façon équivalente d'après (III.9):

$$\beta_{ij}^{eff} = \left[\beta^M + f^I N^I (\beta^I - \beta^M) \right] \delta_{ij} \quad (III.25)$$

donc :

$$\beta^{eff} = \beta^M + f^I N^I (\beta^I - \beta^M) \quad (III.26)$$

et les β vérifiant les relation suivantes:

$$\beta^I = (3\lambda^I + 2\mu^I) \alpha^I$$

$$\beta^M = (3\lambda^M + 2\mu^M) \alpha^M$$

$$\beta^{eff} = (3\lambda^{eff} + 2\mu^{eff}) \alpha^{eff}$$

donc α^{eff} peut être déduit de β^{eff} , λ^{eff} et μ^{eff} à partir de la relation:

$$\alpha^{eff} = \frac{\beta^{eff}}{3\lambda^{eff} + 2\mu^{eff}} \quad (III.27)$$

En utilisant les valeurs de μ^{eff} et λ^{eff} rassemblées dans le tableau (II) on regroupe les valeurs de β^{eff} et α^{eff} pour différentes valeurs de (f^I) correspondant au même composite que celui décrit précédemment et dont les coefficients de dilatation thermique des constituants sont:

$\alpha^{matrice}$	$= 5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
α^{fibre}	$= 0.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

f^I	$\alpha^{eff} 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\beta^{eff} 10^{-6} \text{ [GPa.} ^\circ\text{C}^{-1}]$
0	5	30
0.1	4.10	30.56
0.2	3.23	31.69
0.3	3.36	33.69
0.4	1.54	38.52
0.5	0.91	54.33
0.6	0.64	92.34
0.7	0.56	141.45
0.8	0.53	193.48
0.9	0.51	246.51
1	0.50	300

tableau III.3 : variation de α^{eff} et β^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des renforts sphériques du carbone

Les résultats analytiques ainsi obtenus seront comparés par la suite aux résultats numériques obtenus par la méthode qu'on exposera par la suite.

III.4 Méthode numérique (cas général)

Contrairement à la méthode analytique exposée précédemment, celle-ci est valable dans le cas le plus général du composite:

- forme des inclusions ellipsoïdale
- orientation des fibres quelconque
- comportement local anisotrope

On peut éventuellement tenir compte de la texture cristallographique.

On déterminera d'abord les coefficients élastiques effectifs à partir de l'équation (II.52) qu'on écrira d'une manière plus détaillée :

$$[_{ijkl}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I C_{ijmn}^I \left[I_{mnkl} - T_{mnpq}^{II}([_{pqkl}^{eff}) (C_{pqkl}^I - [_{pqkl}^{eff}) \right]^{-1} \quad (III.28)$$

ensuite, connaissant ces propriétés on en déduit α^{eff} (ou β^{eff}) à partir des relations (II.54) et (II.55)

on pourra remarquer que la relation (III.28), est une équation implicite en $([_{ijkl}^{eff})$; puisque ce tenseur figure dans les deux membres de l'égalité. Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode d'iteration, qui consiste en général à partir d'une solution approchée pour aboutir ensuite à la solution réelle.

Dans notre cas on prendra comme solution approchée la solution de Voigt ($A_{ijkl}^I = I_{ijkl}$) :

$$[_{o}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I C^I \quad (III.29)$$

- Après on calcul le $[_1^{eff}$ tel que :

$$[_1^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I C^I \left[I - T^{II}([_o^{eff}) (C^I - [_o^{eff}) \right]^{-1} \quad (III.30)$$

- puis :

$$[_2^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I C^I \left[I - T^{II}([_1^{eff}) (C^I - [_1^{eff}) \right]^{-1} \quad (III.31)$$

-ensuite $[_3^{eff}, \dots, [_{n-1}^{eff}, [_n^{eff}$ jusqu'à ce que :

$$[_{n-1}^{eff} \approx [_n^{eff} \quad (III.32)$$

Avec :

$$[C]_{n}^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I [C]^I \left[I - T^I ([C]_{n-1}^{eff}) ([C]^I - [C]_{n-1}^{eff}) \right]^{-1} \quad (III.33)$$

chaque calcul constitue ce qu'on appelle une itération. Pour vérifier l'égalité $[C]_{n-1}^{eff} \sim [C]_n^{eff}$; on calcul après chaque itération les $F (n , n-1)$:

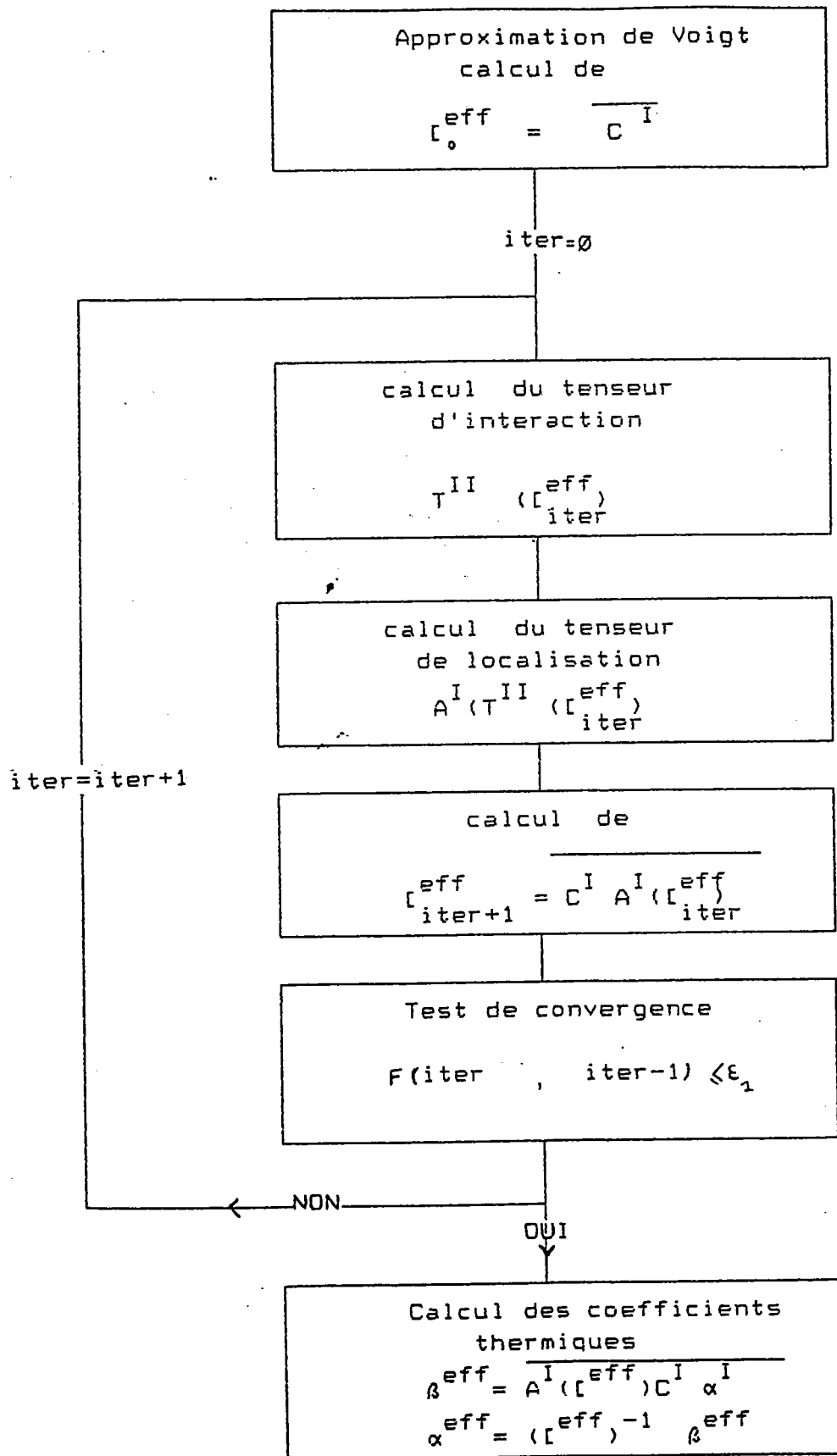
$$F (n , n-1) = \frac{ [([C]_{ijkl}^{eff(n)} \cdot [C]_{ijkl}^{eff(n)})^{1/2} - ([C]_{ijkl}^{eff(n-1)} \cdot [C]_{ijkl}^{eff(n-1)})^{1/2}] }{ ([C]_{ijkl}^{eff(n)} \cdot [C]_{ijkl}^{eff(n)})^{1/2} } \quad (III.34)$$

On compare F à une valeur (ϵ_1) qu'on impose. Si $(F \leq \epsilon_1)$ on arrête le calcul et on retient le dernier $[C]_n^{eff}$ calculé. Sinon on continue le calcul jusqu'a ce que le test $(F \leq \epsilon_1)$ soit vérifié. α^{eff} est ensuite calculée directement à partir de la relation:

$$\alpha^{eff} = \sum_{I=1}^N f^I [B]^I ([C]^{eff}) \alpha^I$$

Les données nécessaires à la résolution numérique se présente de la manière suivante (l'indice I désigne les inclusions ou la matrice):

paramètres géométriques	la forme donnée par les trois demi axes de l'ellipsoïde a^I, b^I, c^I	l'orientation donnée par les trois angles d'Euler $\Gamma^I, \beta^I, \tau^I$
paramètres physiques	tenseur d'ordre 4 des constantes élastiques C^I	tenseur d'ordre 2 des coefficients de dilatation α^I thermique
paramètre de precision	ϵ_1	



algorithme N ° 1 : détermination des propriétés effective
thermoélastiques du matériau composit
à matrice métallique .

a) Test de convergence

Pour nous assurer de la méthode itérative utilisée pour la résolution numérique de l'équation (III.28) , on vérifie la convergence de $([_{1313}^{eff})$ en représentant la variation de la composante $([_{1313}^{eff})$ en fonction du nombre d'itérations dans le cas du composite (Al - SiC) pour une fraction volumique de SiC $(f^{SiC} = 0.25)$ (fig III.1).

Avec:

$$E^{Al} = 70000 \text{ MPa}$$

$$v^{Al} = 0.3$$

$$E^{SiC} = 70000 \text{ MPa}$$

$$v^{SiC} = 0.27$$

pour des inclusions de (SiC) unidirectionnelles de forme ellipsoïdale de rapport de forme $(c/a = 7)$.

On remarque qu'entre la 1^o et 3^o itération il y 'a eu une forte décroissance de $[_{1313}^{eff}$. Mais au delà de la 4^o itération cette variation diminue. Et a partir de la 7^o itération $[_{1313}^{eff}$ garde pratiquement la même valeur. Donc elle converge bien après un certain nombre d'iteration vers une valeur qui peut être considérée comme étant sa valeur réelle.

On peut facilement vérifier qu'il en est de même des autres composantes.

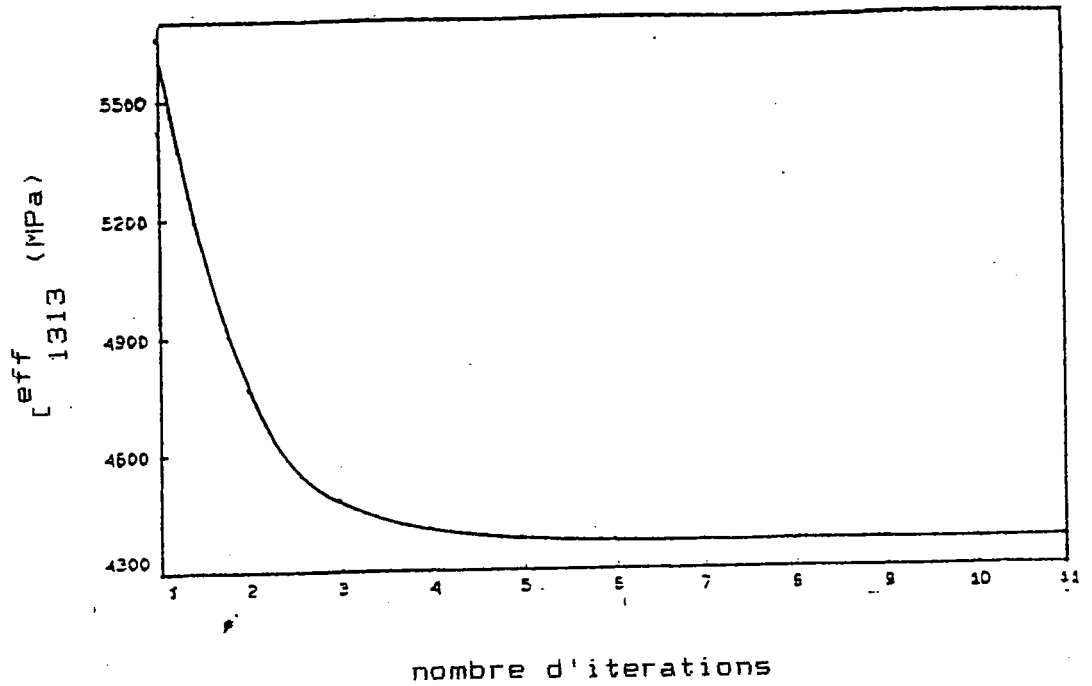


fig (III.1): évolution de la composante $[1313]_{eff}$ en fonction du nombre d'itérations.

III.5 Confrontation des deux méthodes (cas d'un matériau isotrope à renforts sphériques)

On fait le calcul numérique pour le même matériau que celui pris dans le calcul analytique.

Les figures (III.2, III.3, III.4, III.6) représentent respectivement la variation des modules effectifs du composite suivants:

- module de cisaillement μ^{eff}
- coefficient de lamé λ^{eff}
- coefficient de dilatation thermique α^{eff}
- coefficient de contraintes thermique β^{eff}

Sont reportés sur ces figures les résultats obtenus par la méthode analytique précédente et les résultats numériques obtenus par la méthode d'itération.

On remarque que dans tous les cas les courbes correspondant aux résultats numériques sont confondues avec celles obtenues à partir des calculs analytiques. Les calculs numériques sont donc vérifiés dans le cas des composites isotropes à renforts sphériques par la méthode analytique développée ici à partir de la solution d'Eshelby [2] de l'inclusion hétérogène.

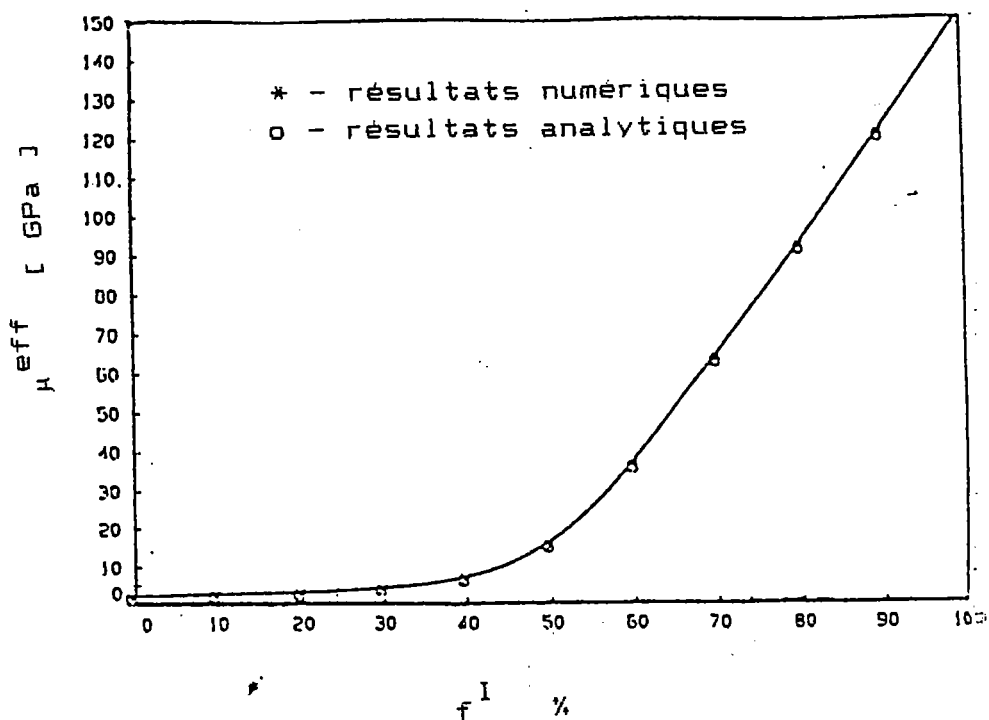


fig (III.2): évolution du module de cisaillement effectif μ^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des fibres.

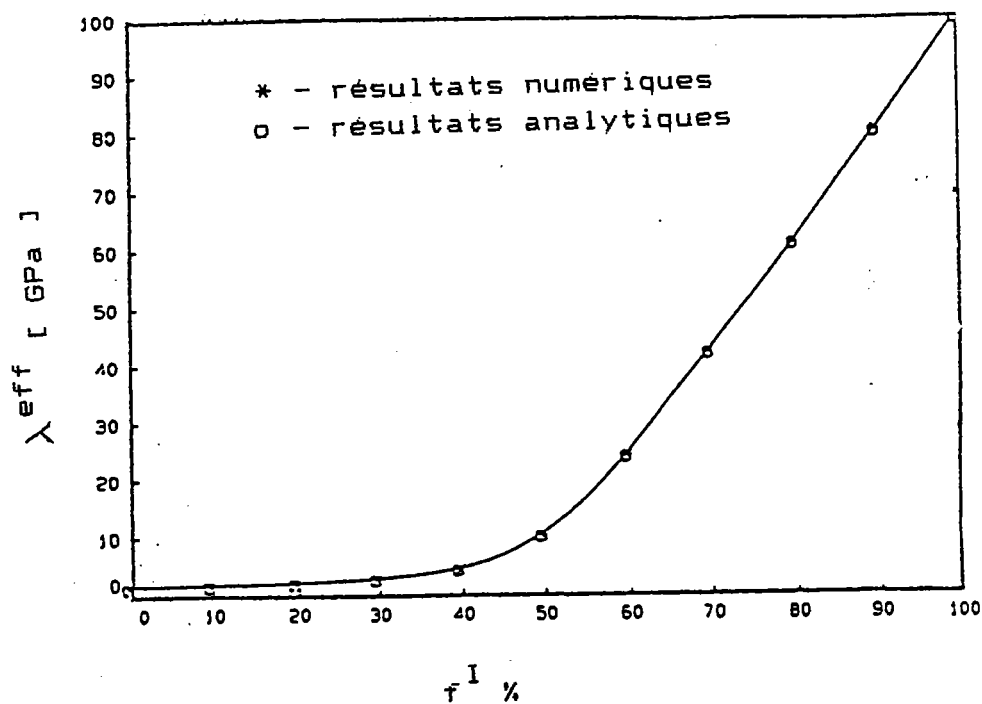


fig (III.3): évolution du coefficient de lamé λ^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des fibres.

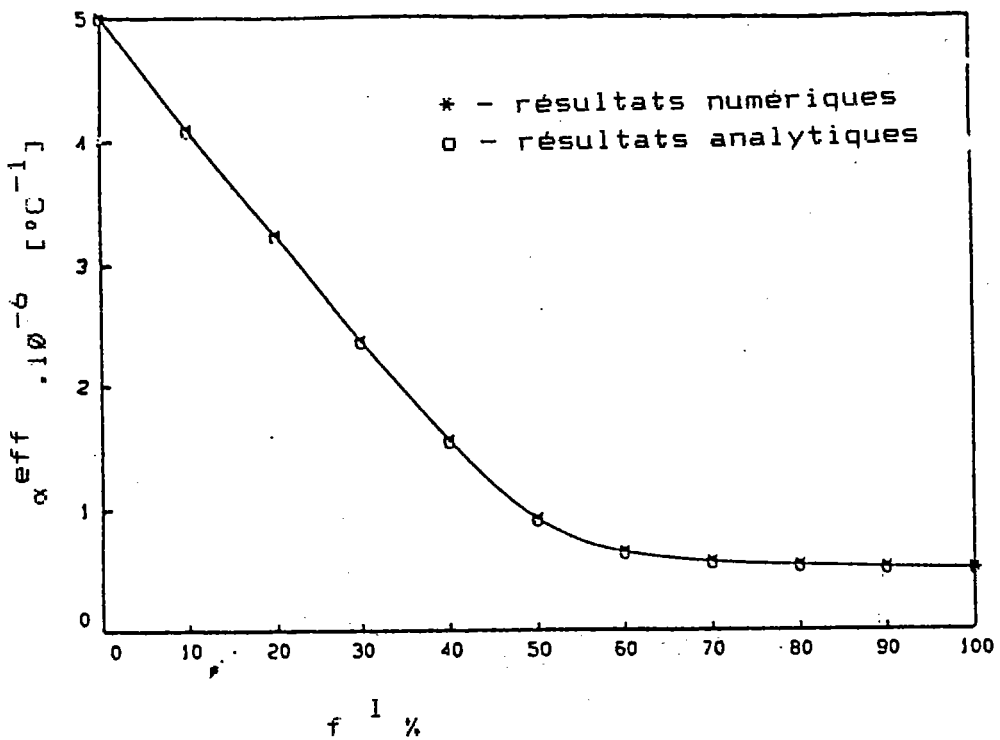
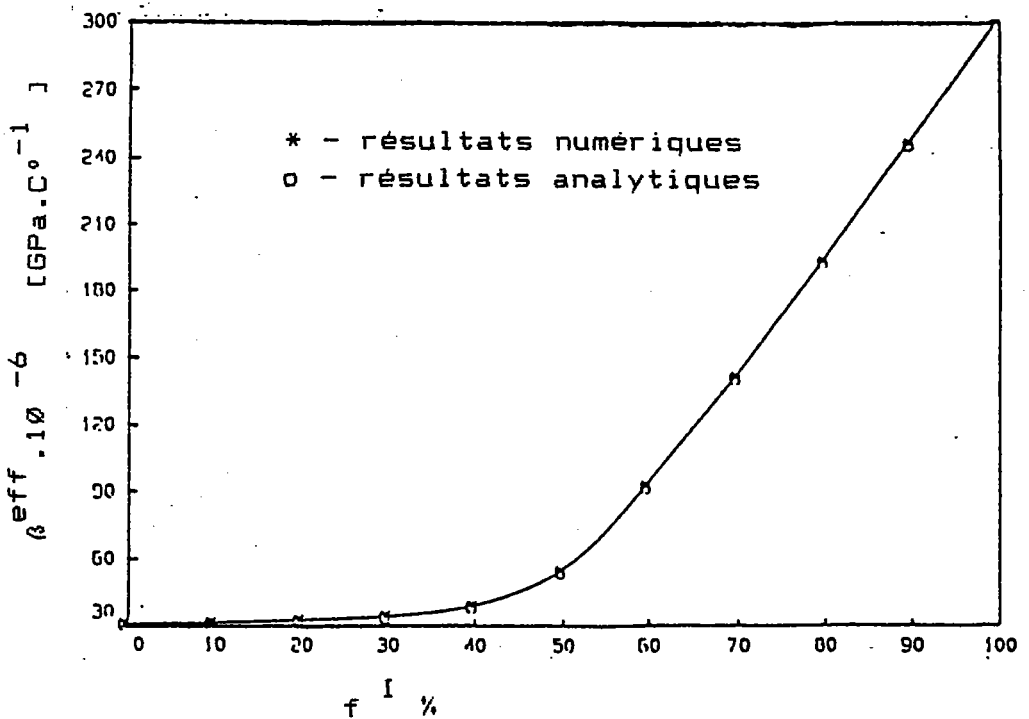


fig (III.4): évolution du coefficient de dilatation thermique effectif α^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des fibres.



figure(III.5): évolution du coefficient effectif β^{eff} en fonction de la fraction volumique (f^I) des fibres.

III.6 BIBLIOGRAPHIE

- [1] K.Ahaouari,P.Lipinski,M.Berveiller,"Evaluation des effets de la texture cristallographique induite sur les variations des constantes élastiques et variables d'endommagement",C.R.Acad. Sci.Paris,t 306 ,Série II,p.1063-1066,1988.
- [2] J.D.Eshelby,"Elastic inclusions and inhomogeneities in progress in solid Mechanics " Vol.2.(edited by I.N.Sneddon and R.Hill) ,PP 89-140.NORTH-HOLLAND AMSTERDAM(1961)
- [3] M.Berveiller ,A.Zaoui ,15^{ème} colloque du groupe Francais de Rhéologie.

CHAPITRE -IV-

COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES ET EXPERIMENTAUX

IV.1 - Introduction

IV.2 - Confrontation à l'experimentation

IV.2.1 - Cas d'un polycristal d'Aluminium

a-Description du matériau

b-Choix des paramètres de modélisation

c-Comparaison des résultats du modèle aux
résultats expérimentaux

IV.2.2 - Cas des composites biphasés

1°) Cas du composite (Al-Sic)

a-Description du matériau et choix des paramètres de
modélisation

b-Comparaison des résultats du modèle aux résultats
expérimentaux

2°) Cas du composite (Al-Al₂O₃)

a-Description du matériau et choix des paramètres de
modélisation

b-Comparaison des résultats du modèle aux résultats
expérimentaux

IV.2.3 - Conclusion

IV.3 - Influence des paramètres de modélisation sur le comportement thermoélastique des composites

IV.3.1 - composite première classe

a-Description

b-Evolution des caractéristiques thermoélastiques
effectives

IV.3.2 - Composite seconde classe

a-Description

b-Evolution des caractéristiques thermoélastiques
effectives

IV.4 - Conclusion

IV.5 - Bibliographie

IV.1 - Introduction

Le but de ce chapitre est de valider dans un premier temps , le modèle évoqué précédemment (self-consistent à un site) dans des cas autres que les composites isotropes à renforts sphériques. Ceci sera fait en comparant des résultats obtenus par ce modèle, pour différents types de matériaux avec des résultats expérimentaux .Ensuite , pour un matériau bien défini , on étudiera l'influence de certains paramètres (forme , l'orientation et la fraction volumique des fibres) sur le comportement global du matériau.

Les caractéristiques thermoélastiques, sont déterminés expérimentalement par plusieurs méthodes regroupées dans deux grandes catégories:

- 1° - méthodes destructives classiques basées sur des essais statiques ou dynamiques.
- 2° - méthodes non destructives (rayons X , ultrasons).

On s'intéresse surtout à la méthode d'ultrasons, puisque dans notre cas, la quasi-totalité des résultats expérimentaux utilisés a été obtenue à l'aide de cette méthode.
cette méthode est donnée par Johnson [1].

IV.2 - Confrontation à l'expérimentation:

IV.2.1 cas d'un polycristal d'Aluminium

a-description du matériau :

Le matériau (polycristal monophasé) traité ici ,correspond a un cas étudié expérimentalement par Jhonson et al [1].

Dans ce cas ,les propriétés des monocristaux ont été déduites des mesures ultrasonores effectuées par Thomas [2] et sont reportées dans le tableau (IV.1).

C	coefficients élastiques du second ordre (10^2 GPa)
C_{11}	1.0675 ± 0.0005
C_{12}	0.604 ± 0.008
C_{44}	0.2834 ± 0.004

Tableau IV.1 : constantes élastiques du second ordre de l'Al à 25°C d'après Thomas [2].

Le matériau est laminé et présente ainsi une certaine anisotropie due à la texture cristallographique. Les figures de pôle correspondantes d'après Johnson et al [1] sont les suivantes:

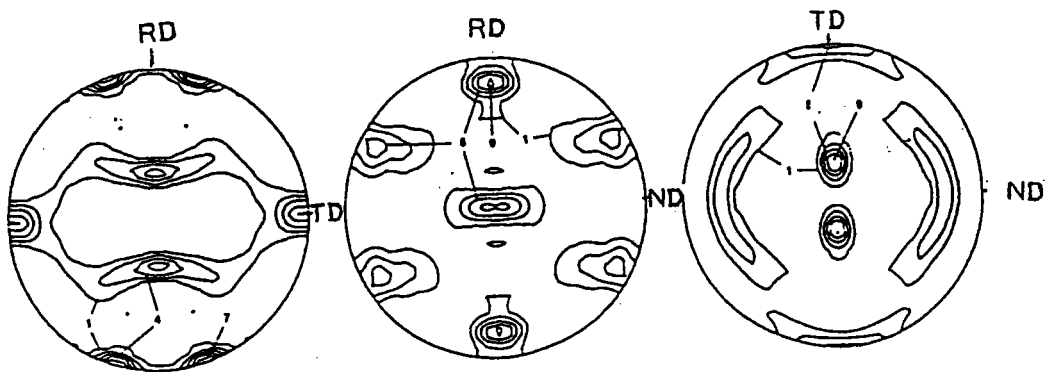


fig IV.1 : figures de pôles $\{2\ 2\ 2\}$ du polycristal d'Al

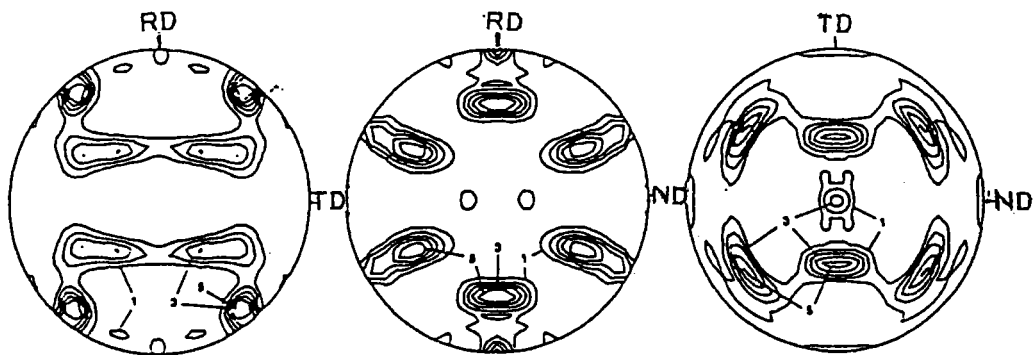


fig IV.2 : figures de pôles $\{2\ 0\ 0\}$ du polycristal d'Al

- RD, TD et ND : représentent les axes principaux d'orthotropie.

Sur chaque figure sont reportées , trois figures de pôle correspondant à des mesures faites pour trois orientations différentes de l'échantillon.

b-Choix des paramètres de modélisation:

Pour le calcul self-consistent ,il est nécessaire de choisir le nombre de grains décrivant l'édifice polycristallin.Un choix convenable est celui qui correspondrai à un temps de calcul minimum sans perte d'information statistique.Différents tests ont permis de limiter à 100 le nombre de grains. Ceux ci possèdent tous la même forme (sphérique).

Une orientation cristallographique correspondant à des figures de pôles similaires à (IV.1) et (IV.2) précédentes,a été déterminée en utilisant le modèle autocohérent à un site adapté à l'élastoplasticité [3].

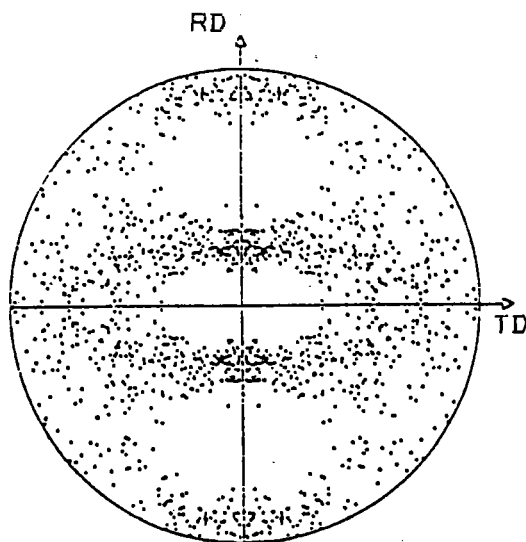


fig (IV.1)':figure de pôles {222} du polycristal d'Al calculée [3] pour le laminage.

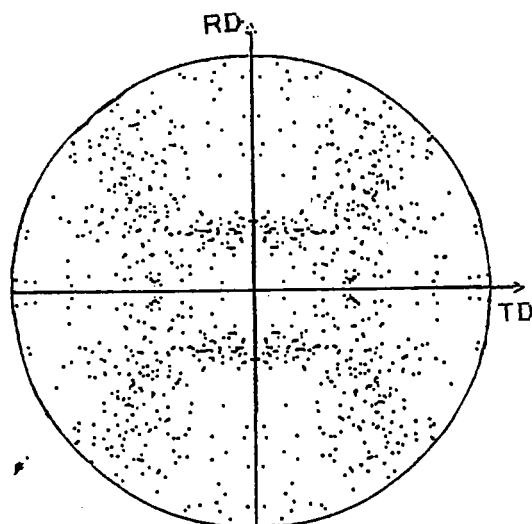


fig (IV.2) : figure de pôles $\{200\}$ du polycristal d'Al
calculée [3] pour le laminage.

c-Comparaison des résultats du modèle aux résultats :

expérimentaux :

Le choix des paramètres de modélisation étant fait ,on calcul les coefficients effectifs du polycristal d'Al à partir du modèle autocohérent à un site en utilisant l'équation (III.28). Les résultats du modèle correspondent bien aux mesures expérimentales fig (IV.3).

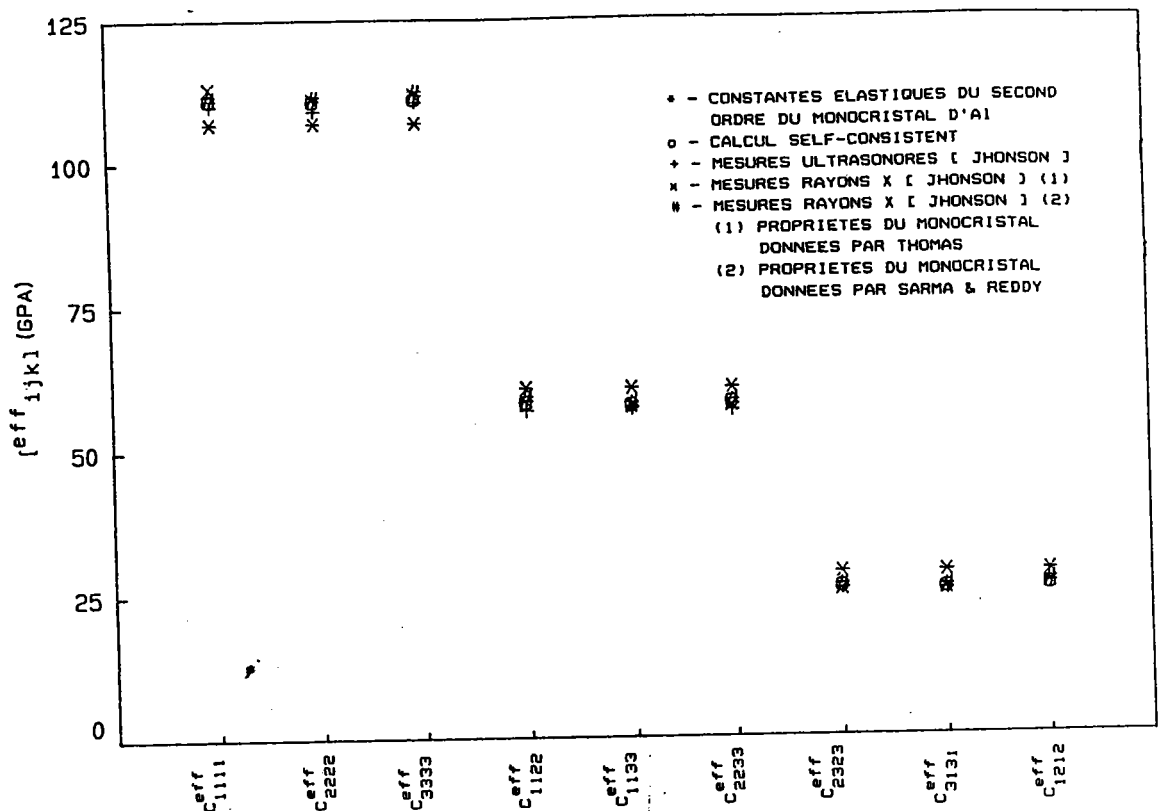


fig (IV.3) : modules élastiques du second ordre obtenus par différentes méthodes.

Sur cette figure sont reportées d'une part : les constantes élastiques du second ordre du monocristal d'Al [*], les mesures expérimentales faites par Jhonson (Ultrasonores [+], Rayons X (propriétés du monocristal données par Thomas [2], [x]), Rayons X (propriétés du monocristal données par Sarma et Reddy [8], [#]) et d'autre part les résultats du modèle(o).

Pour toutes les composantes du tenseur des coefficients élastiques représentées sur la figure (IV.3) , on observe des prédictions relativement satisfaisantes, puisque les résultats obtenus par les différentes méthodes expérimentales coïncident ou presque avec les résultats du modèle.

Bien que la faible anisotropie de l'Al est un facteur qui est favorable pour la comparaison des résultats théoriques et expérimentaux ,ce cas a été traité car il sera repris par la suite pour les constantes élastiques du troisième ordre.

IV.2.2 Cas des composites biphasés

On s'intéresse surtout aux composites à matrice d'Aluminium qui présente d'intéressantes caractéristiques :

- faible densité
- bonne résistance vis à vis de corrosion
- aptitude au durcissement structural
- conductivité thermique et électrique élevée
- mise en oeuvre aisée ,due au bas point de fusion et à l'aptitude à la déformation plastique
- prix modéré.

Toutefois , son emploi pour certaines applications peut être limité par :

- sa faible rigidité (module d'young 70 GPa)
- sa faible tenue à la fatigue
- une chute très brutale de ses caractéristiques mécaniques dès 200°C.

Pour ces raisons , l'Al est une matrice de choix pour recevoir des renforts mécaniquement performants (module d'Young 400 GPa).

Deux types de composites de ce genre ont été étudiés:

-le composite constitué d'une matrice d 'Al et des renforts de carbure de silicium (SiC) qu'on notera (Al-SiC).

-et un autre constitué également d'une matrice d'Al et des renforts d'alumine (Al_2O_3) qu'on notera (Al - Al_2O_3).

1°) Cas du composite (Al-SiC)

a-Description du matériau et choix des paramètres de modélisation

Le matériau composite à matrice métallique envisagé , correspond à un cas étudié expérimentalement par Schneider et al [4].

La matrice est un 'alliage d'Al (8091) , dont la composition est reportée dans le tableau (III.2)

constituants de l'alliage							
Alliage (8091)	Si	Fe	Cu	Mg	Zr	Li	Al
	0.02	0.01	1.90	0.80	0.11	2.70	reste

Tableau IV.2 : composition chimique de l'alliage d'aluminium (8091)

Cette matrice contient des fractions volumiques variables de SiC. Dans ce cas les propriétés de la matrice et des renforts ont été également déduites par des mesures d'ultrasons effectuées par Schneider et al [4] et sont rassemblées dans le Tableau (III.3)

	Module d'Young (GPa)	rapport de Poisson
matrice d'aluminium	77.5	0.3
renforts de Sic	430	0.3

Tableau IV.3 :propriétés élastiques de la matrice d'Al et des renforts de Sic d'après les résultats de Schneider et al [4].

Le matériau est extrudé et présente ainsi une légère anisotropie due à l'orientation morphologique des renforts.

D'après les indications fournies par Schneider , les renforts de Sic ont une forme légèrement allongée dans la direction de l'extrusion et leur répartition spatiale n'est pas aléatoire mais est constituée par un alignement de particules.Cet effet ne peut pas être pris en compte dans un modèle autocohérent à un site.

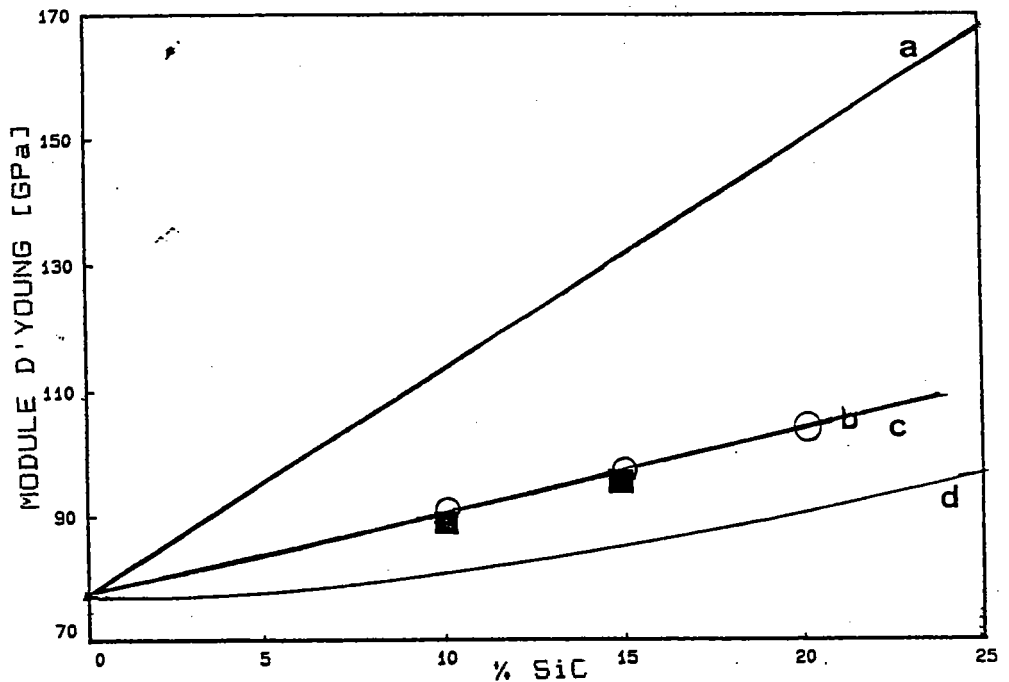
Pour le calcul numérique , les renforts ont été considérés tous de la même forme (ellipsoïde de rapport de forme $c/a = 5$) et orientées dans la même direction (direction de l'extrusion).

b-Comparaison des résultats du modèle aux résultats expérimentaux

Pour le cas étudié le module d 'Young (E) n'est pas le même dans toutes les directions.L'expression de son inverse dans la direction $\vec{l}$ de composantes (l_1, l_2, l_3) dans le repère macroscopique est donnée en fonction des complaisances (s) par la formule suivante [5]:

$$\begin{aligned}
 1/E = & \quad 1_1^4 s_{11} + 2 \quad 1_1^2 \quad 1_2^2 s_{12} + 2 \quad 1_1^2 \quad 1_3^2 s_{13} + 2 \quad 1_1^2 \quad 1_2 \quad 1_3 s_{14} + \\
 & 2 \quad 1_1^3 \quad 1_3 s_{15} + 2 \quad 1_1^3 \quad 1_2 s_{16} + 1_2^4 s_{22} + 2 \quad 1_2^2 \quad 1_3^2 s_{23} + 2 \quad 1_2^3 \quad 1_3 s_{24} + \\
 & 2 \quad 1_1^2 \quad 1_2 \quad 1_3 s_{25} + 2 \quad 1_1 \quad 1_2^3 s_{26} + 1_3^4 s_{33} + 2 \quad 1_2 \quad 1_3^3 s_{34} + 2 \quad 1_1 \quad 1_3^3 s_{45} + \\
 & 2 \quad 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3^2 s_{36} + 1_2^2 \quad 1_3^2 s_{44} + 2 \quad 1_1 \quad 1_2 \quad 1_3^2 s_{45} + 2 \quad 1_1 \quad 1_2^2 \quad 1_3 s_{46} + 1_1^2 \quad 1_3^2 s_{55} + \\
 & 2 \quad 1_1^2 \quad 1_2 \quad 1_3 s_{56} + 1_1^2 \quad 1_2^2 s_{66}
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

Ceci nous a permis de déduire les valeurs du module d'Young dans la direction transverse (perpendiculaire à la direction de l'extrusion) (figure IV.4).



fig(IV.4) : Comparaison des valeurs du module d'Young transversal calculé (O) avec les mesures expérimentales (■) de Schneider et al.[4] et les résultats déduits des modèles de Voigt (a) et Reuss(d).

Sur cette figure sont reportés à la fois les mesures expérimentales (■), les résultats du modèle (O) et les courbes obtenues par le modèle de Voigt (a) et le modèle de Reuss (d).

Pour des faibles fractions volumiques (f^I) de SiC, le module d'Young (E), croît très lentement avec f^I et les valeurs calculées par les différentes approches sont pratiquement les mêmes.

Ceci s'explique assez facilement puisque dans ces conditions, le matériau est presque homogène et le module d'Young est peu différent de celui de la matrice.

Cependant au-delà de 5% de SiC, E croît relativement vite et la différence entre les valeurs calculées par les différentes méthodes est très grande. L'évolution des modules effectifs (ou leurs inverse) est gouvernée par des relations linéaires en f^I dans le cas de Voigt (Reuss). Cette évolution est modifiée par les tenseurs concentration de contraintes (ou déformation) dans le cas du modèle autocohérent.

On pourra aussi remarquer que le calcul fait à partir du modèle autocohérent à 1 site non isotrope ($c/a = 5$) correspond bien aux mesures expérimentales. Les prédictions sont donc relativement satisfaisantes.

2°) Cas du composite (Al - Al₂O₃) :

a-Description du matériau et choix des paramètres de modélisation

Etudié également par Schneider et al [6], le matériau composite

envisagé ici, est formé d'une matrice d'Al et des renforts d' Al_2O_3

Les micrographies optiques de ce composite sont représentées sur la figure (III.5). Elles montrent que la répartition des renforts d' Al_2O_3 n'est pas aléatoire dans l'espace, mais plutôt dans le plan (1,2).

On pourra faire les constatations suivantes:

1-les renforts ont une forme ellipsoïdale de rapport de forme variable (en général > 7).

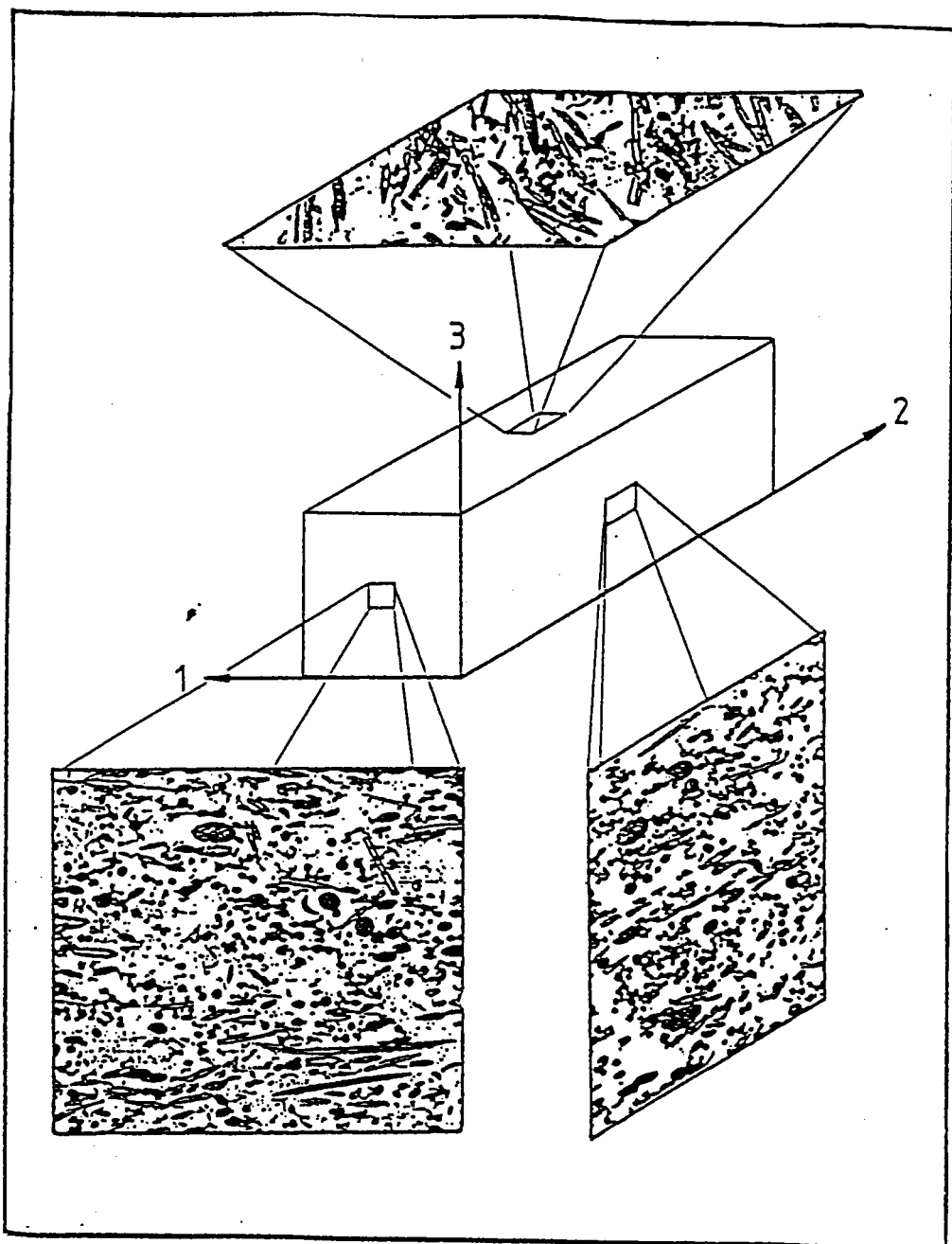
2-dans le plan (1,2), les fibres sont orientées d'une manière aléatoire.

3-dans le plan (1,3) et (3,2), en plus des renforts elliptiques on voit apparaître des formes sphériques, qui correspondraient à la projection des fibres ellipsoïdales dans les plans (1,2) et (3,2).

Les propriétés thermoélastiques de la matrice d'Al et des fibres d' Al_2O_3 sont reportées dans le tableau (IV.4)

	Module d'Young (GPa)	Rapport de poisson	Coefficient de dilatation thermique ($^{\circ}C^{-1}$)
matrice d'aluminium	75	0.33	24.10^{-6}
renforts d' Al_2O_3	390	0.24	5.10^{-6}

Tableau (IV.4): propriétés thermoélastiques de la matrice d'Al et des renforts d' Al_2O_3 d'après Schneider et al. [6].



fig(IV.5): Micrographies d'un échantillon du composite

Al-Al₂O₃ étudié.

b) Comparaison des résultats du modèle aux résultats
expérimentaux :

La modélisation d'un tel matériau est assez difficile. Trois classes de matériaux ont été étudiées:

1°-les fibres ont la même orientation (parallèle à l'axe 1) et la même forme ($c/a=10$).

2°-les fibres ont la même forme ($c/a=10$), mais leur répartition est aléatoire dans l'espace

3°-les fibres sont réparties aléatoirement dans le plan (1,2) et elles ont la même forme.

Le tableau (IV.5) regroupe les différentes valeurs des modules d'Young calculés pour les trois classes de matériaux et les valeurs expérimentales, obtenues par mesures d'ultrasons.

En ce qui concerne les résultats expérimentaux, les modules d'Young sont donnés sous la forme E_{ij} ($i, j=1, 3$). L'indice (i) correspond à la direction de propagation de l'onde mesurée, et (j) à sa direction de polarisation.

Pour les résultats numériques, le calcul du module d'Young (E_i) dans les différentes directions (i) a été fait à partir de la relation (IV.1).

		Fraction volumique d'Al ₂ O ₃ (FI)			
		Module d'Young	11%	24%	30%
Résultats expérimentaux		E ₁₂	90.2	104.2	107.0
		E ₁₃	89.4	102.3	101.6
		E ₂₁	90.2	105.6	107.0
		E ₂₃	88.9	103.2	102.7
		E ₃₁ = E ₃₂	88.0	100.0	103.7
Résultats numériques	1° cas	E ₁	105.0	147.0	165.0
		E ₂ = E ₃	88.0	109.0	119.0
	2° cas	E ₁	96.0	123.0	137.0
		E ₂	95.0	118.0	132.0
		E ₃	92.0	112.0	123.0
	3° cas	E ₁ = E ₂	96.0	123.0	137.0
		E ₃	92.0	112.0	123.0

Tableau (IV.5) : évolution du module d'Young (E) en fonction de la fraction volumique (f^I) de l' Al_2O_3 .

Pour chacune des fractions volumiques (11% ,24% et 30%) , les résultats sont représentés respectivement sur les figures (IV.6), (IV.7) et (IV.8). Sur ces figures on voit apparaitre les résultats expérimentaux [*], les résultats numériques (1°cas [o], 2°cas [+], 3°cas [x]).

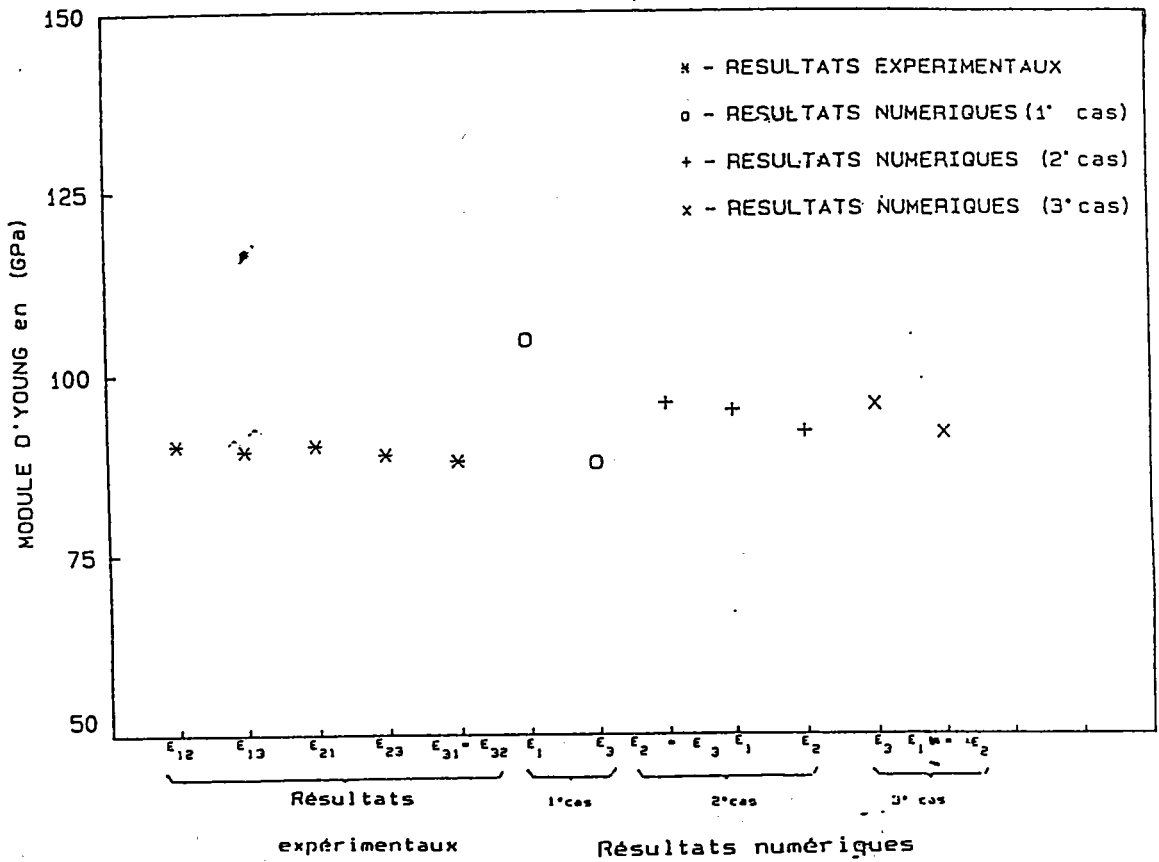


figure (IV.6) : modules d'Young du composite Al- Al_2O_3
($f^I = 11\%$)

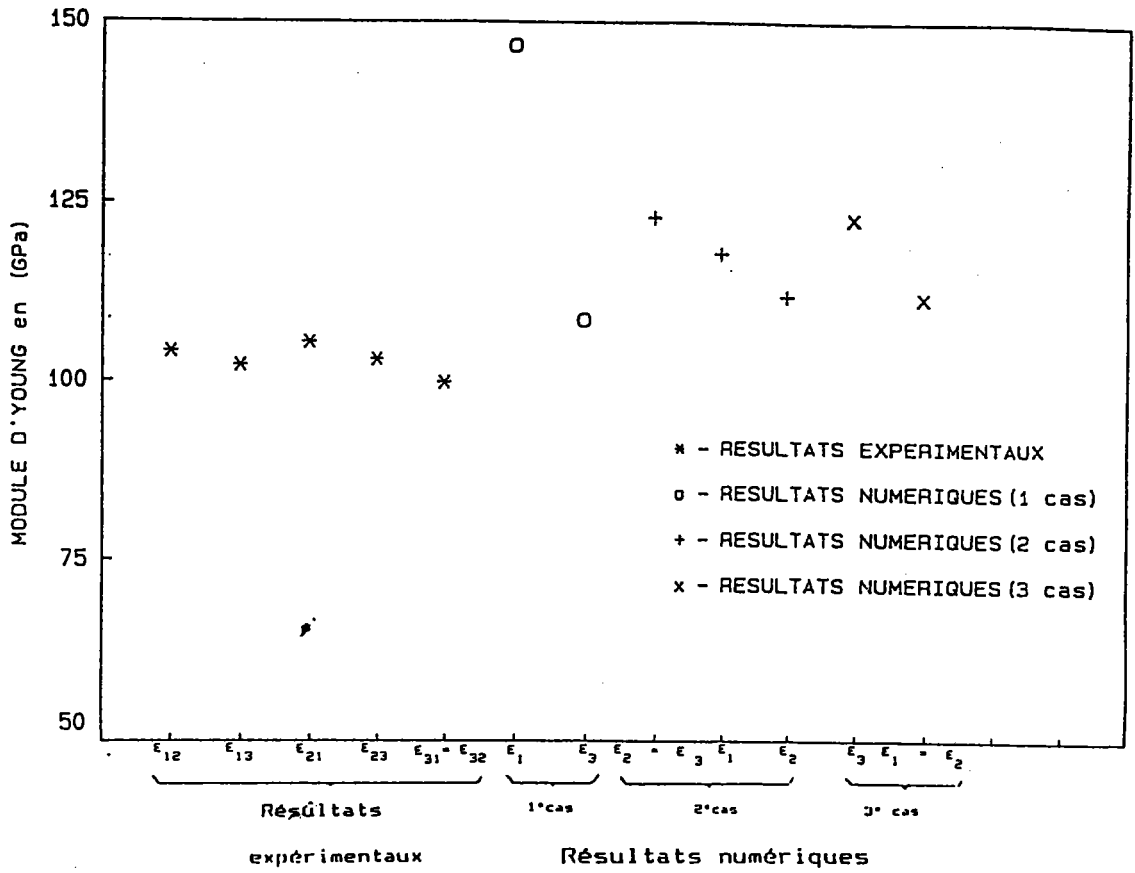


figure (IV.7) : modules d'Young du composite Al-Al₂O₃
($f^1 = 24\%$)

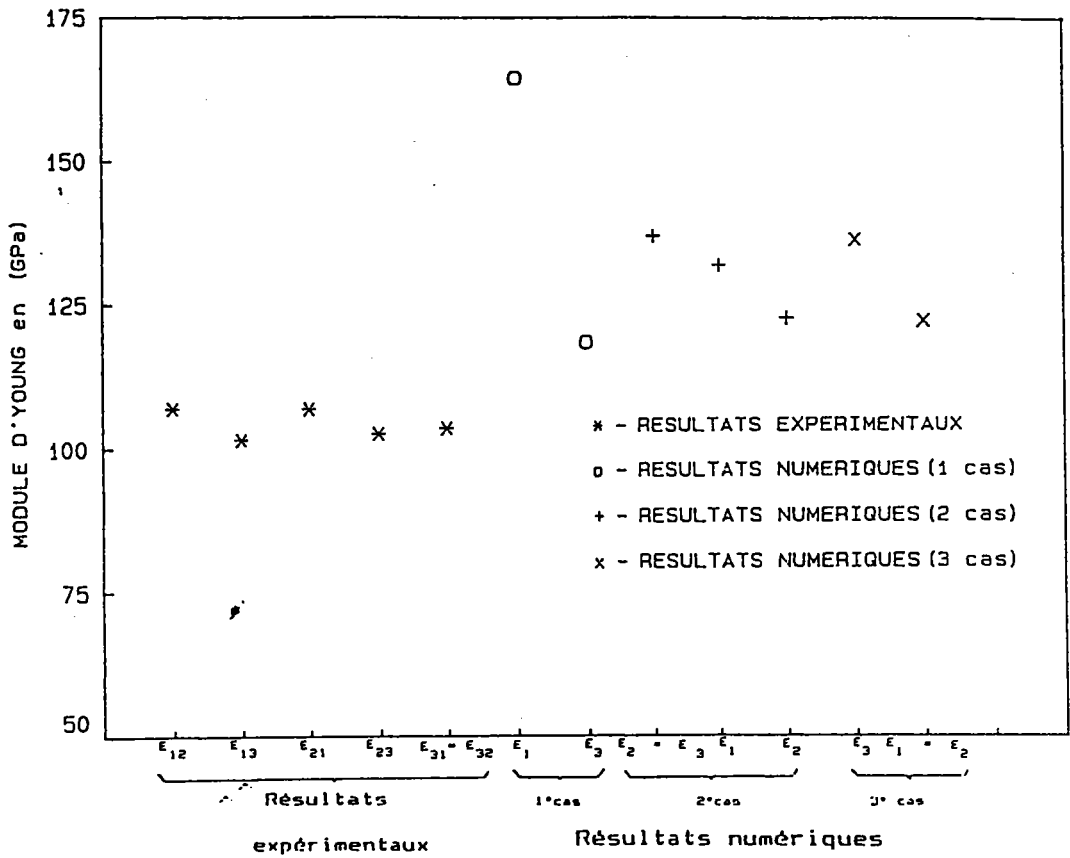


figure (IV.8) : modules d'Young du polycristal Al-Al₂O₃
 ($f^I = 30\%$)

Les résultats expérimentaux , ainsi que les résultats théoriques respectent bien la loi d'évolution du module d'Young en fonction de la fraction volumique observée précédemment pour l'Al-Sic. Selon cette loi le module d'Young augmente avec la fraction volumique de l' Al_2O_3 .

L'écart entre les modules d'Young dans les différentes directions est relativement faible pour les petites fractions volumiques f^I d' Al_2O_3 . Cependant au-delà de 11% cette différence augmente avec (f^I) et devient significative. Ceci s'explique assez facilement, puisque pour les résultats expérimentaux ($f^I \approx 30\%$) la fraction volumique inclue aussi la proportion de la porosité dans le composite.

On remarque que les résultats numériques obtenus pour la classe 3 sont les plus proches des valeurs expérimentales mais, légèrement supérieur. On choisit alors cette classe de matériaux (3) pour calculer les coefficients de dilatation thermique (α^{eff}) à partir de la relation (II.54).

L'évolution des coefficients (α^{eff}) en fonction de la fraction volumique des renforts d' Al_2O_3 est représentée sur la figure (IV.9).

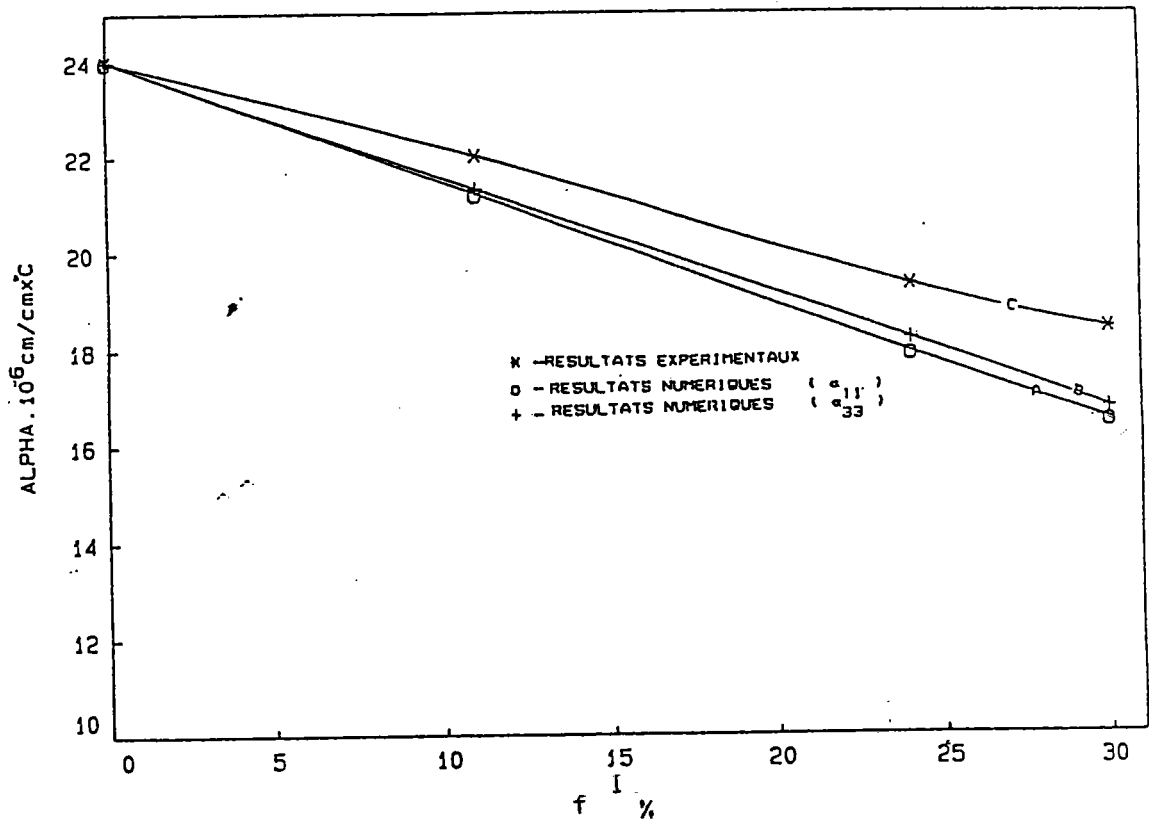


figure (IV.9): évolution du coefficient de dilatation thermique de $(\text{Al} - \text{Al}_2\text{O}_3)$ en fonction de la fraction volumique des fibres.

En ce qui concerne les résultats numériques A et B qui représentent respectivement, la composante (α_{11} ou α_{22}) et la composante α_{33} , on retrouve l'anisotropie observée pour les modules d'Young (tableau IV.5, 3^e cas).

Si on les compare aux résultats expérimentaux (C), on remarque que l'écart est relativement faible (5% - 10 %).

On peut alors considérer que le modèle utilisé reproduit bien le comportement thermique réel du matériau étudié.

IV.2.3-Conclusion :

Bien qu'on observe un écart plus au moins important entre les résultats expérimentaux et numériques, pour les trois types de matériaux traités précédemment, on peut considérer que ces résultats sont en très bon accord avec l'ensemble des observations expérimentales.

Cette différence entre les résultats obtenus, par les diverses méthodes utilisées pour l'évaluation des caractéristiques thermo-élastiques linéaires des matériaux hétérogènes, peut être essentiellement due à deux choses:

1°-le modèle autocohérent à un site, ne tient pas compte de la répartition spatiale des particules et donc des interactions discrètes entre elles.

2°-les informations sur les échantillons utilisées dans les essais expérimentaux, ne sont pas toujours suffisantes pour modéliser le matériau.

Une modélisation parfaite n'est donc possible qu'avec une description adéquate du matériau.

IV.3 - Influence des paramètres de modélisation sur le comportement thermoélastique des composites

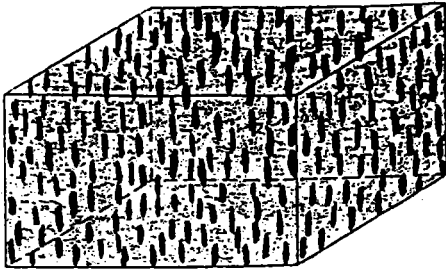
Le matériau choisi pour cette étude, est un composite formé d'une matrice d'aluminium et de renforts de carbures de silicium. Les propriétés thermoélastiques sont données dans le tableau (IV.5) [7].

	Module d'Young (daN/mm ²)	Rapport de poisson	Coefficient de dilatation thermique (°C ⁻¹)
matrice d'aluminium	7 000	0.3	21.10 ⁻⁶
Sic	70 000	0.27	4.10 ⁻⁶

Tableau (IV.5): propriétés thermoélastiques de la matrice
d'Al et des renforts de Sic d'après Jarry
[7].

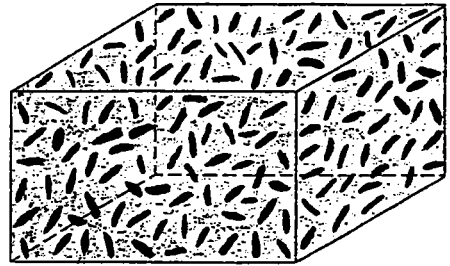
Deux classes de matériaux composites (Al-SiC) ont été étudiées.
On les représente de la manière suivante sur la figure (IV.10):

première classe



(a)

seconde classe



(b)

figure (IV.10): représentation des échantillons du composite
(Al-SiC) étudiés.

(a): composite à fibres alignées

(b): composite à fibres réparties
aléatoirement dans l'espace.

IV.3.1- composite première classe: (fig (IV.10), (a))

a) Description

Il s'agit d'un composite biphasé, contenant des fibres parallèles
ayant toutes le même comportement thermoélastique représenté pour

chaque fibre (I), par les constantes élastiques (C^I) et les coefficients de dilatation thermique (α^I) .

De plus , ces fibres ont toutes la même forme ellipsoïdale de paramètre de forme a,b,c (figure IV.11).

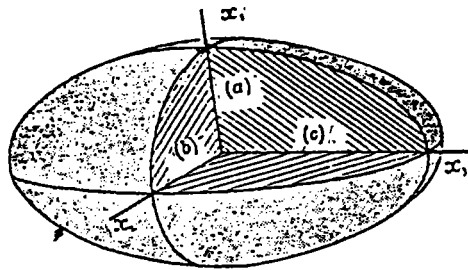


figure (IV.11): représentation d'une fibre de Sic.

Les propriétés thermoélastiques dépendent de la fraction volumique des renforts (f^I) et du rapport de forme (c/a).

On discutera l'influence de chaque paramètre (c/a et f^I) sur le comportement thermoélastique effectif de ce composite et sur les tenseurs localisation de contraintes thermiques et mécaniques.

On rappelle que, les coefficients thermoélastiques effectifs (ϵ^{eff} et α^{eff}), relie les contraintes (Σ) aux déformations (E) macroscopiques par la relation :

$$\Sigma_{ij} = [_{ijkl}^{eff} (E_{kl} - \alpha_{kl}^{eff} \Theta)$$

et que les tenseurs localisation de contraintes mécaniques (B^I) et thermiques (b^I) relatifs à chaque fibre (I), interviennent dans les relations de localisation de la manière suivante:

$$\sigma_{ij}^I = B_{ijkl}^I \Sigma_{kl} + b_{ij}^I \Theta$$

où

σ^I : contrainte locale (dans la fibre I)

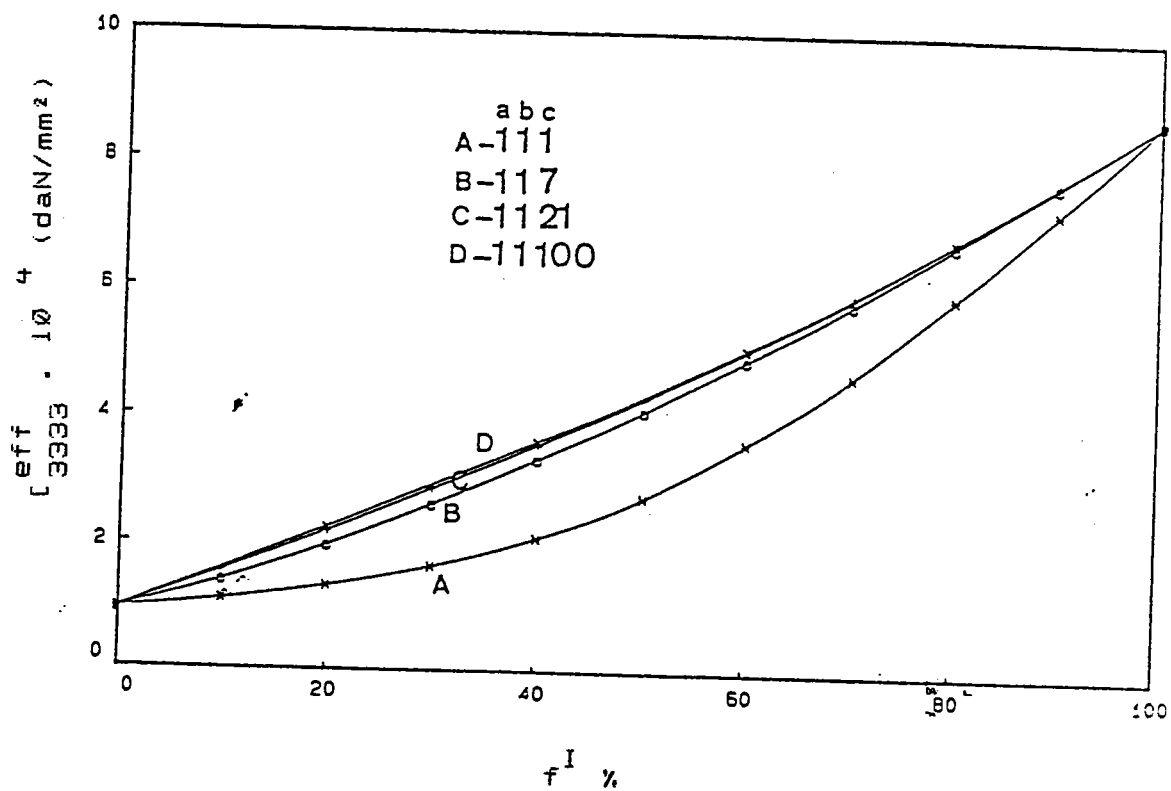
b) Evolution des caractéristiques thermoélastiques effectives

Les figures (IV.12), (IV.13), (IV.14) et (IV.15) représentent respectivement l'évolution des composantes $[_{3333}^{eff}$, α_{33}^{eff} , $[_{1111}^{eff}$ et α_{11}^{eff} des propriétés thermoélastiques effectives du composite en fonction de la fraction volumique (f^I) des renforts pour les différents rapports de forme c/a (1,7,21,100).

Dans cette représentation l'axe allongé (c) est parallèle à l'axe 3 du repère dans lequel sont décrites les propriétés mécaniques. Comme attendu, la variation de $[_{3333}^{eff}$, α_{33}^{eff} , $[_{1111}^{eff}$ et α_{11}^{eff} avec (f^I) et le rapport de forme c/a est forte, mais la sensibilité à c/a s'affaiblit lorsque c/a > 10.

On pourra aussi remarquer, que pour une fraction volumique donnée, la différence observée (entre les coefficients effectifs calculés pour des sphères et des ellipsoïdes) est plus accentuée pour les composantes $[_{3333}^{eff}$ et α_{33}^{eff} . Ceci s'explique assez facilement, puisque les fibres sont toutes parallèles à l'axe 3.

Les observations précédentes sont étroitement liées au phénomène de localisation de contraintes.



figure(IV.12):évolution de la composante $[3333]^{eff}$ avec la fraction volumique f^I des renforts .Cas des renforts parallèles.

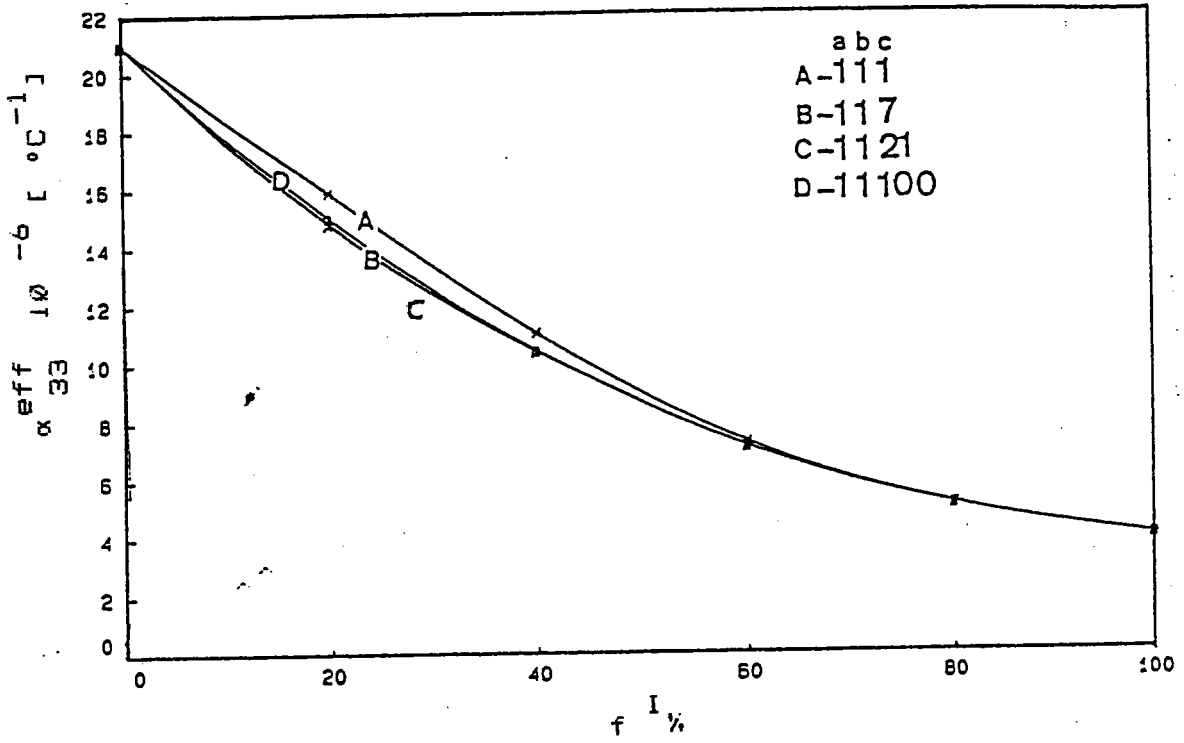


figure (IV.13): évolution de la composante α_{33}^{eff} du tenseur des coefficients de dilatation thermique avec la fraction volumique f^I . Cas des renforts parallèles.

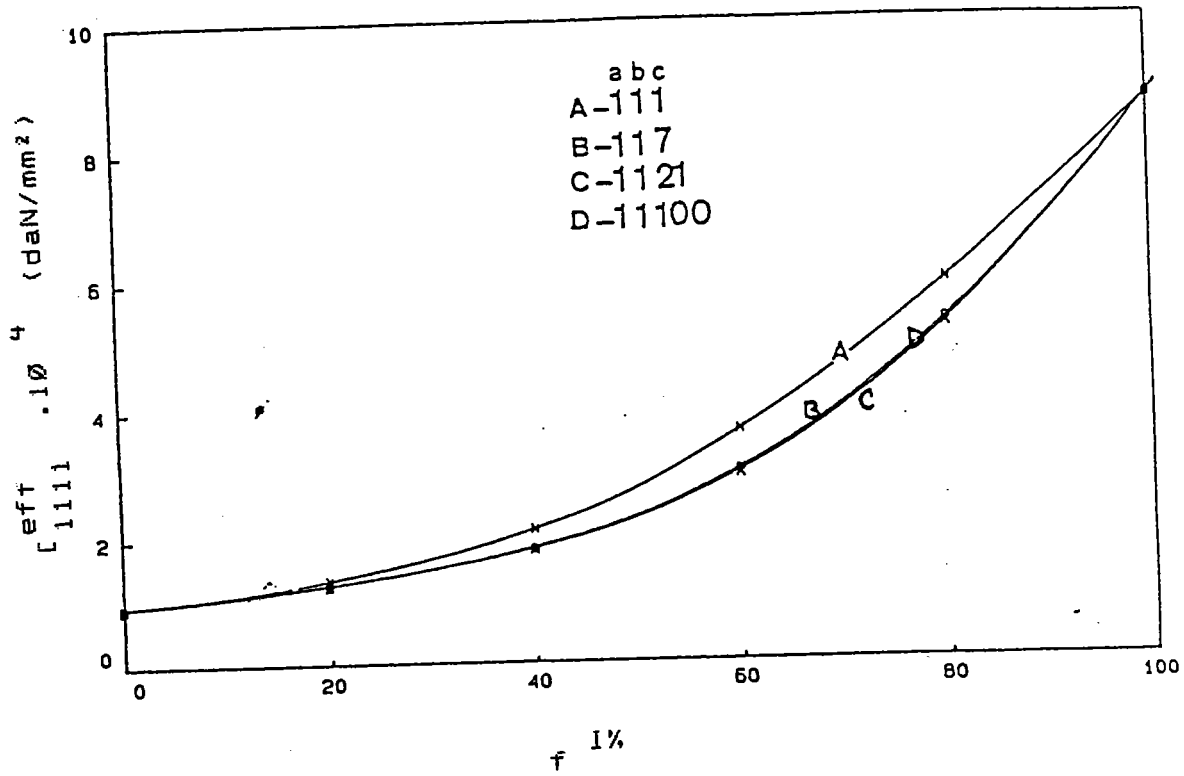


Figure (IV.14): évolution de la composante $[L_{1111}]^{eff}$ avec la fraction volumique f^1 des renforts. Cas des renforts parallèles.

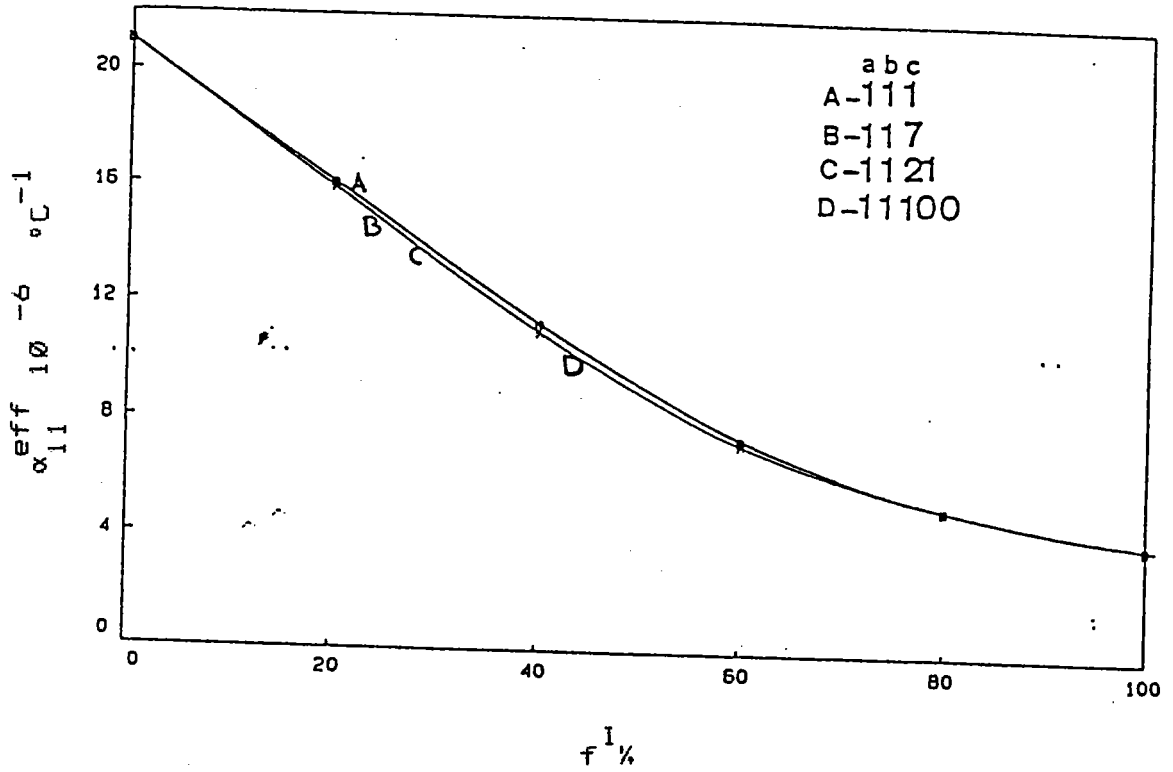
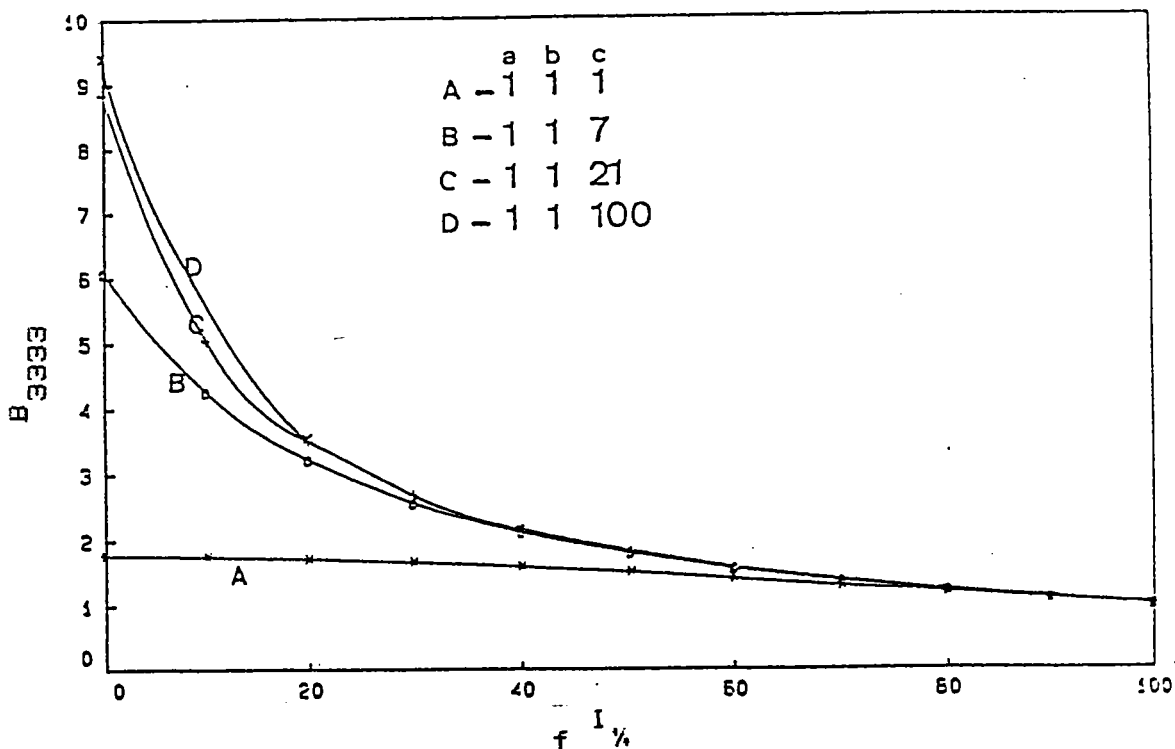


Figure (IV.15): évolution de la composante α_{11}^{eff} du tenseur de dilatation thermique avec la fraction volumique f^I . Cas des renforts parallèles.

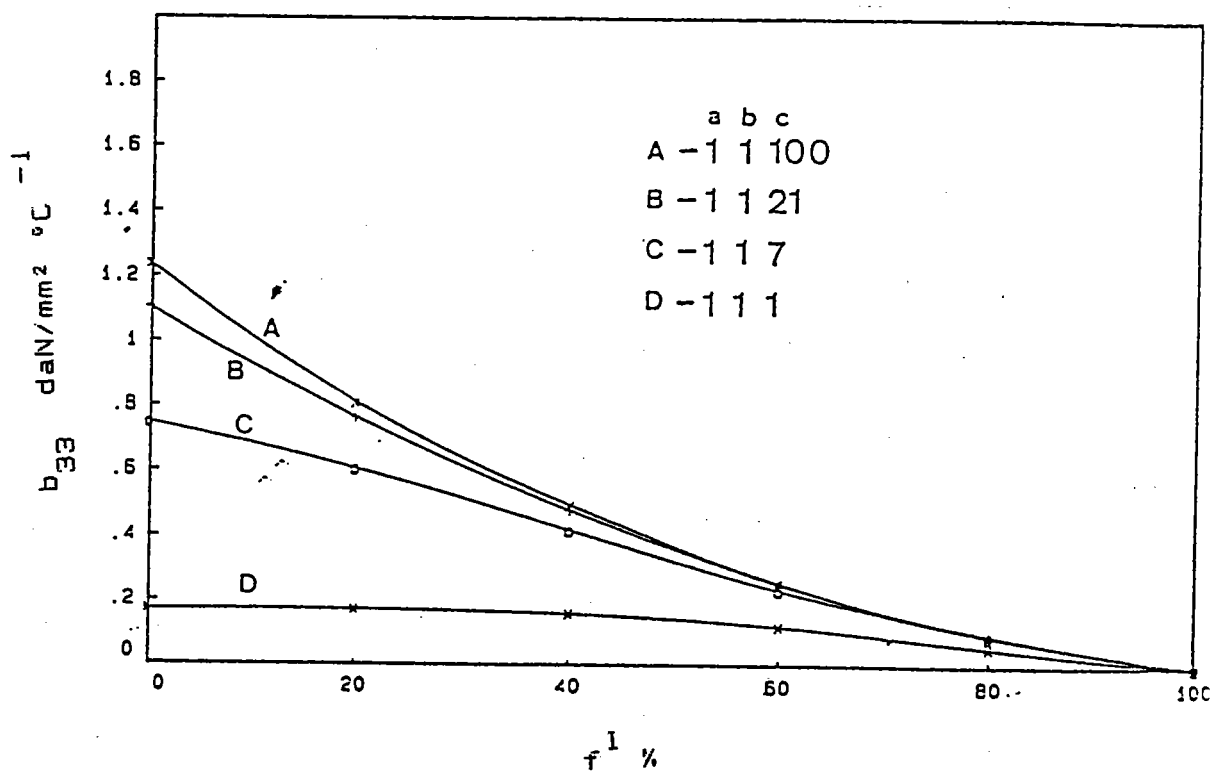
Sur les figs (IV.16) et (IV.17) on représente respectivement l'évolution de la composantes B_{3333} du tenseur localisation des contraintes mécanique et de la composante b_{33} du tenseur localisation de contraintes thermique dans les fibres, en fonction de la fraction volumique f^I et des différents rapports de formes c/a .

Dans les deux cas (fig (IV.16) et fig (IV.17)), on observe une très forte concentration de contrainte dépendant notamment de de la forme des renforts, particulièrement lorsque la fraction volumique de ceux-ci est inférieure à 20 %. Ceci est du à la diminution de l'hétérogénéité du milieu quand f^I augmente.

Dans la matrice, les tenseurs localisation ont évidemment une évolution inverse.



Figure(IV.16):évolution avec f^I de la composante B_{3333} du tenseur localisation des contraintes (mécanique) dans les renforts parallèles de de forme (a,b,c).



Figure(IV.17):évolution avec f^1 de la composante b_{33} du tenseur localisation des contraintes (thermique) dans les renforts parallèles de forme (a,b,c).

IV.3.2 - Composite seconde classe: (fig(IV.10), (b))

a) Description :

Il s'agit cette fois-ci d'un composite dont les propriétés thermo-élastiques des constituants sont également données par le tableau (IV.5). Cependant, les renforts ne sont pas parallèles comme dans le cas précédent mais orientés de manière différente.

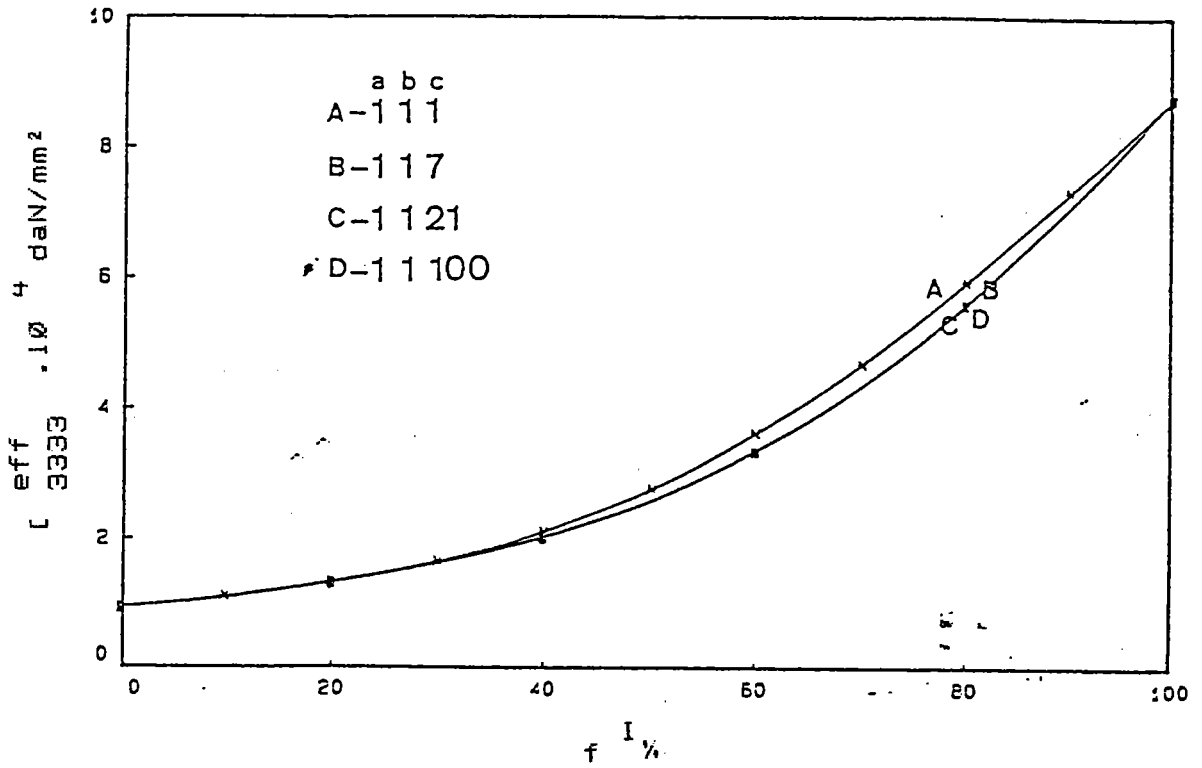
Les fibres sont représentées par des inclusions (ellipsoïdes) de paramètres (a, b, c) . L'ensemble de ces fibres est discrétisé en 100 inclusions de même rapport de forme c/a mais dont l'orientation est aléatoire.

b) Evolution des caractéristiques thermoélastiques effectives

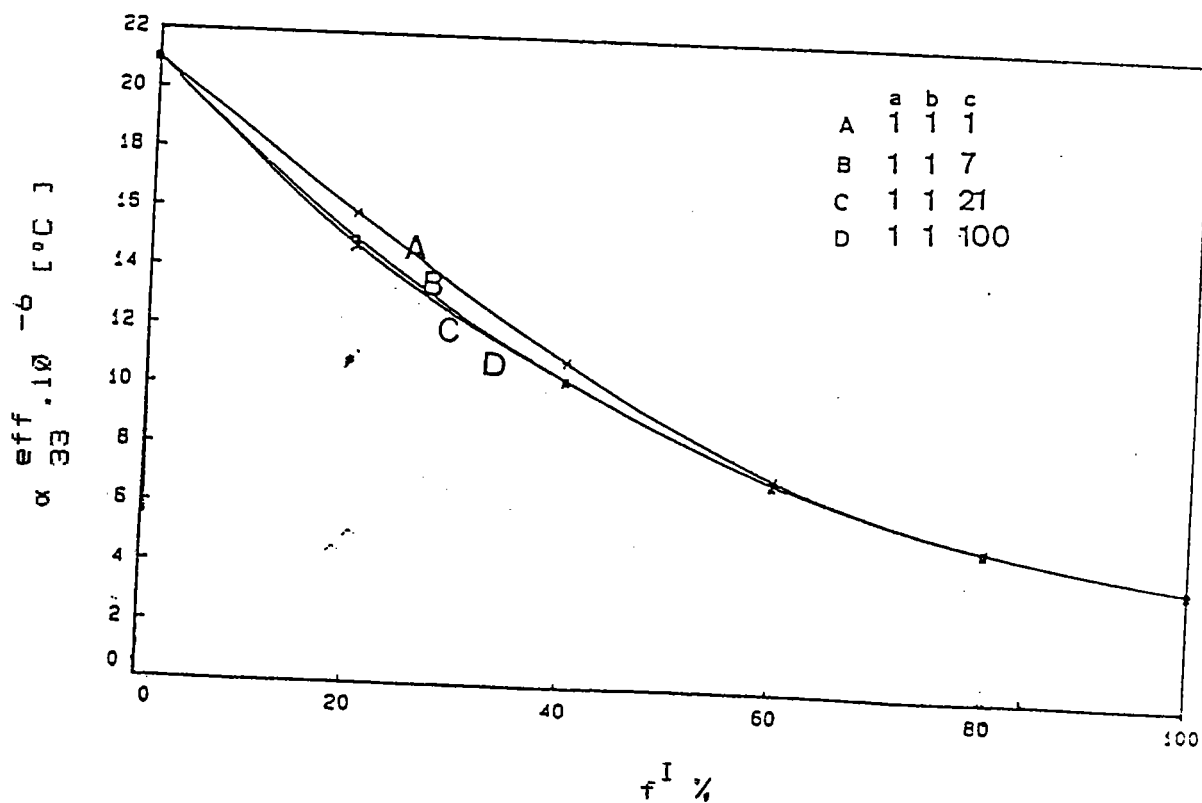
On devrait s'attendre dans ce cas, à ce que l'anisotropie apparue dans le cas précédent à cause de l'orientation des fibres disparaisse. C'est ce qui a été observé sur les figures (IV.18) et (IV.19).

La fig(IV.18) représente l'évolution de ϵ_{33}^{eff} en fonction de f^I pour différents rapports de forme c/a et la fig (IV.19) décrit l'évolution de α_{33}^{eff} . Dans les deux cas, la sensibilité à la fraction volumique est forte et le comportement effectif est quasisotrope mais légèrement différent du composite à renforts sphériques.

Dans ce cas également, les tenseurs localisation thermomécaniques ont été calculés pour les renforts mais leur représentation est difficile puisqu'ils dépendent de la classe de fibres envisagée.



Figure(IV.18):évolution de $[3333]^{\text{eff}}$ avec f^I pour des renforts de forme variable (a,b,c) et d'orientation aléatoire.



Figure(IV.19): Evolution de α_{33}^{eff} avec f^I pour des renforts de forme variable (a,b,c) et d'orientation aléatoire.

IV.4 - Conclusion

D'après les résultats obtenus dans ce chapitre ,on peut conclure que le modèle self consistant à un site est assez performant pour déterminer le comportement thermoélastique linéaire des composites en tenant compte de la fraction volumique ,de la forme et de l'orientation des renforts.Ce modèle nous a aussi permis de déterminer les concentrations de contraintes dans les fibres et leur évolution en fonction de la fraction volumique et de la forme.

Jusqu'a présent on a restreint notre travail au domaine thermoélastique linéaire.Par la suite on abordera le domaine élastique non linéaire pour déterminer les constantes élastiques effectives élastiques de troisième ordre.

IV.5 BIBLIOGRAPHIE

- [1] Johnson , G.C and Springer , W.C .A comparison of measured and predicted second-and third-order elastic constants of a textured aggregate.Int.J.Solids structures ,Vol.25.N°6,pp.609-619,1989.
- [2] Thomas,J.F.,Jr.Third-order elastic constants of aluminum.Phys. Rev.175,955-962.
- [3] Corvasce F.,Krier J.,Lipinski P.,Berveiller M.,"Anisotropie du comportement élastoplastique induite en grandes déformations plastiques",23^e colloque du G.F.Rheologie,Bordeaux ,oct 88.
- [4] Schneider E.,Lee D.,Razvi S. , Salama K. - " Non destructive characterization of metal-matrix-composites", Proc of the 16th symposium on non destructive evaluation,San Antonio,USA,1987.
- [5] J.F.Nye,traduction de la première édition (1957) de l'ouvrage publié en langue anglaise sous le titre:"Physical properties of crystals"par the clarendon press,oxford.
- [6] Schneider E.,1989,communication personnelle.
- [7] Jarry Ph.,1987,communication personnelle.
- [8] V.P.N Sarma and P.J.Reddy , 1972 ,"third order elastic constants of aluminium",Phys.stat.Sol.(a)10,563

CHAPITRE - V -

MODELISATION DU COMPORTEMENT ELASTIQUE --- NON LINEAIRE DES MATERIAUX COMPOSITES ---

V.1 Introduction

V.2 Loi de comportement élastique non linéaire locale

V.3 Propriétés élastiques effectives non linéaires

V.4 Equation intégrale

V.5 Approximation autocohérente (à un site)

V.6 Calcul numérique des modules élastiques non linéaires des
matériaux composites

V.7 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

V.7.1 Cas d'un polycristal d'Aluminium

V.7.2 Cas d'un composite Al-Al₂O₃

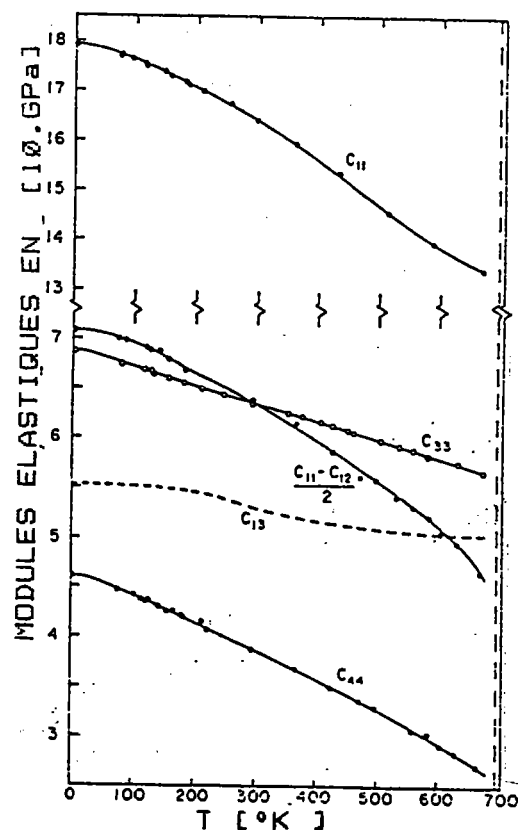
V.8 Conclusion

V.1 Introduction

Dans les chapitres précédents , on a déterminé les propriétés effectives des composites en se basant sur une loi de comportement thermoélastique linéaire.

Les constantes élastiques effectives déterminées ainsi, ne varient pas avec les conditions extérieures (contraintes appliquées , variation de température,...) et représentent ce qu'on appelle les constantes élastiques effectives du deuxième ordre . Cependant, pour plusieurs matériaux et sous certaines conditions , ces constantes élastiques varient . Parmi ces conditions on cite:

-la variation de la température figure (V.1)



figure(V.1): variation des constantes élastiques du Zinc en fonction de la température T [1].

-la variation des contraintes appliquees figure (V.2)

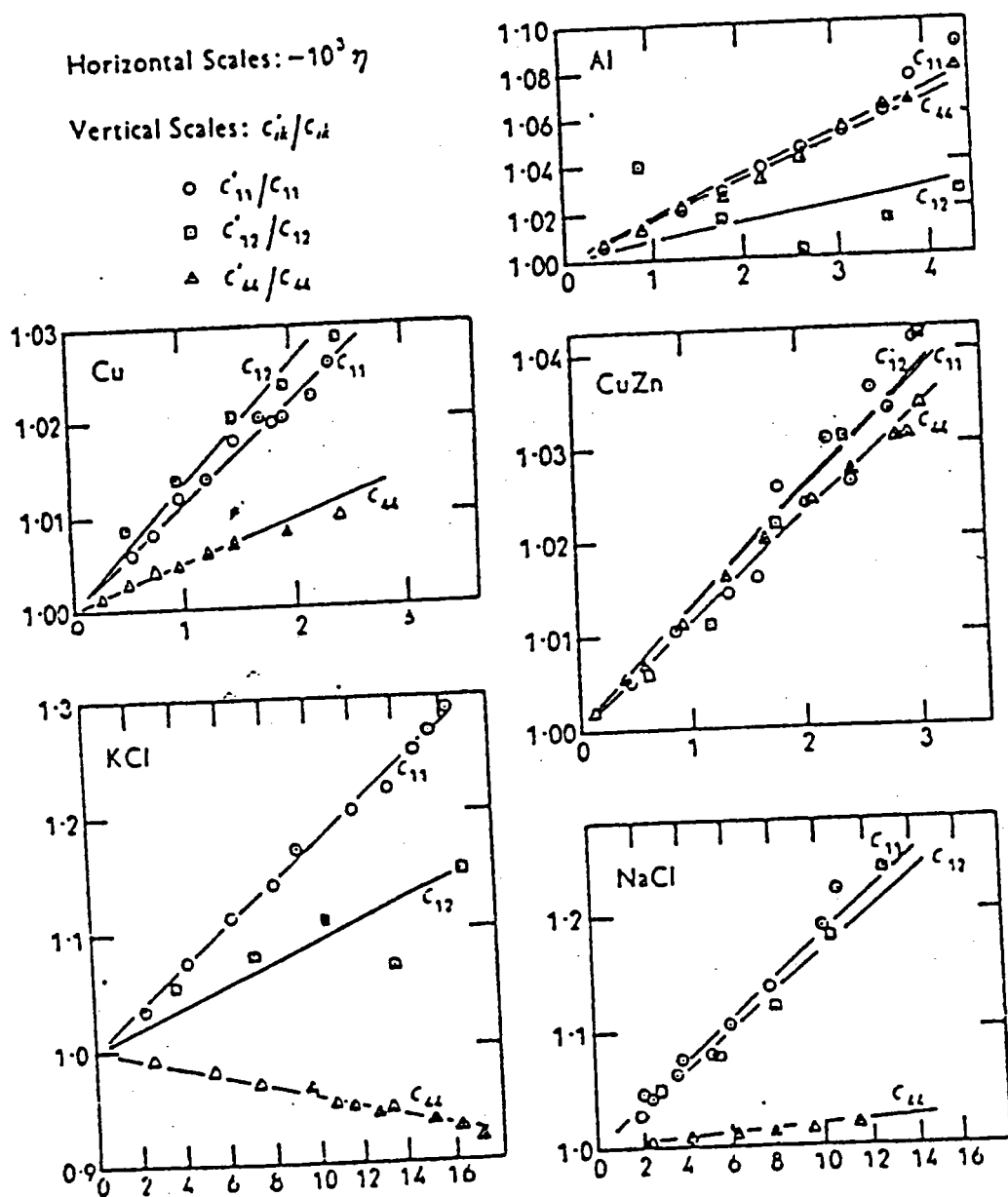


figure (V.2): effet de la pression sur les constantes élastiques de : Al,Cu,CuZn,KCl,NaCl [2]
 η défini par: $V / V_0 = (1+2\eta)^{3/2}$
 V :volume sous pression et V_0 :Volume initial
 C' : constantes élastiques sous pression
 C :constantes élastiques initiales.

La loi de comportement élastique linéaire ,ne permet pas de tenir compte de ces phénomènes .Il est donc nécessaire d'utiliser des lois de comportements adaptées a chaque situation.

Dans notre travail , on s'intéresse à la variation des constantes élastiques avec les contraintes appliquées .

Une description adéquate de ce phénomène est donnée par la loi de comportement élastique non linéaire,où en plus des constantes élastiques du deuxième ordre ,interviennent celles du troisième ordre.

Outre l'intérêt scientifique , la détermination des constantes élastiques du troisième ordre est nécessaire dans les techniques utilisant l'Acoustoélasticité .Celle ci est utilisée notamment pour la détermination des contraintes internes et résiduelles.

Pour les matériaux homogènes , l'Acoustoélasticité est couramment utilisée et donne des résultats relativement satisfaisants[3],[4].

Cependant , dans le cas des matériaux hétérogènes (polycristaux, composites,...) l'utilisation de cette méthode est assez compliquée et nécessite un grand nombre de mesures pour déterminer les caractéristiques élastiques.

L'objectif de notre travail est non pas de remplacer les méthodes de mesures expérimentales par une méthode théorique , mais plutôt d'accompagner le travail de l'expérimentateur en lui fournissant une méthode de calcul numérique lui permettant de déterminer le comportement élastique non linéaire (constantes du deuxième et troisième ordre) des matériaux hétérogènes à partir des caracté-

ristiques mécaniques des composants de ce matériau.

Dans un premier temps ,on introduira la notion de l'élasticité non linéaire et on précisera la loi de comportement locale qui sera utilisée ensuite pour déterminer le comportement effectif global des matériaux hétérogènes à partir du modèle autocohérent à un site.

Pour valider le modèle utilisée,on compare ensuite les résultats numériques (Self-consistent à 1 site) aux résultats expérimentaux obtenus par les mesures ultrasonores de Johnson [11] et Schneider [12].

V.2 Loi de comportement élastique non linéaire locale

Les constituants des matériaux composites utilisés dans les domaines de haute technologie ,ont en général un comportement élastique non linéaire décrit d'une part,par les constantes élastiques du deuxième ordre et d'autre part,par les constantes élastiques du troisième ordre.Cependant,ces constantes diffèrent d'un matériau à un autre. Il est donc intéressant de déterminer une loi de comportement élastique non linéaire effective décrivant le comportement global du composite.

Pour cela ,introduisons d'abord la loi de comportement élastique non linéaire locale ,qui est l'équation de base pour cette classe de problèmes.

La loi de Hooke généralisée (élastique linéaire) qu'on rappelle ici , traduit une relation linéaire entre les composantes du

tenseur des contraintes (σ_{ij}) et celui des déformations (ϵ_{ij}).

Elle s'écrit :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (V.1)$$

Les constantes (c_{ijkl}) sont appelées constantes élastiques du second ordre. Elles permettent d'exprimer l'énergie de déformation élastique (ϕ) sous forme quadratique en (ϵ).

$$\phi = 1/2 \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (V.2)$$

Cependant cette loi ne permet pas d'expliquer le comportement élastique non linéaire manifesté par certains matériaux ([5] , [2] , [6]).

Dans ce contexte Lazarus [2] , en utilisant la technique de " chargements dynamiques " a constaté que les modules élastiques des matériaux cubiques tels que ; KCl , NaCl , CuZn , Cu et l'Al varient linéairement avec la pression .

Des mesures similaires ont été faites par Daniels [6] sur le Cu, Ag et l'Au.

Les résultats sont reportés dans le tableau (V.1). Dans ce tableau sont regroupées les valeurs expérimentales correspondant à la variation des constantes élastiques :

$$1/3 (c_{11} + 2 c_{12}) , 1/2 (c_{11} - c_{12}) \text{ et } c_{44}$$

désignées par M en fonction de la pression p à température constante θ .

matériau	module (M)	$(d \ln M / d p)_\theta$ $\times 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$	ref
KCl	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	2.61 3.16 -0.74	[2]
NaCl	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	2.46 2.53 0.21	[2]
CuZn	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	0.38 0.4 0.32	[2]
Cu	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	0.28 0.24 0.11	[2]
Cu	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	0.41 0.25 0.31	[6]
Ag	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	0.6 0.42 0.50	[6]
Au	$1/3 (c_{11} + 2c_{12})$ $1/2 (c_{11} - c_{12})$ c_{44}	0.39 0.30 0.425	[6]

tableau (V.1): variation des constantes élastiques
en fonction de la pression.

La formulation générale décrivant le phénomène précédent a été faite par Murnaghan [7] et Birch [8].

Hearmon [9] a expliqué le comportement élastique non linéaire de la manière suivante:

les composantes (σ_{ij}) du tenseur de contraintes sont données par des fonctions polynomiales des composantes (ϵ_{ij}) du tenseur des déformations élastiques.

Une meilleure approximation que (V.1) est obtenue en introduisant dans le second membre de (V.2), les termes de degrés supérieurs.

Si on se limite au troisième ordre, l'énergie de déformation élastique s'écrit alors:

$$\phi = 1/2 \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} + 1/6 \epsilon_{ij} c_{ijklmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} \quad (V.3)$$

Les (c_{ijklmn}) sont les composantes d'un tenseur du sixième ordre contenant 729 composantes parmi lesquelles 56 sont indépendantes pour un matériau triclinique [9].

Birch [8] a présenté la contribution des termes de troisième ordre de l'énergie de déformation sous la forme :

$$\phi_3 = \sum c_{pqr} \tau_p \tau_q \tau_r \quad (V.4)$$

p, q et r prennent des valeurs de 1 à 6 avec la condition $p \leq q \leq r$, la convention de sommation n'est pas appliquée.

Les relations entre les (τ) et les (ϵ) s'écrivent:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \epsilon_{11} & , & & \tau_2 &= \epsilon_{22} & , & & \tau_3 &= \epsilon_{33} \\ \tau_4 &= \epsilon_{23} & , & & \tau_5 &= \epsilon_{13} & , & & \tau_6 &= \epsilon_{12} \end{aligned} \quad (V.5)$$

Pour les matériaux cubiques, les seuls coefficients indépendants

de (C_{pqr}) sont:

$$C_{111}, C_{112}, C_{113}, C_{144} \quad (V.6)$$

$$C_{155}, C_{166}, C_{123}, C_{456}$$

Si le matériau est isotrope, l'expression générale de ces coefficients est donnée en notation tensorielle en fonction des trois constantes de Murnaghan (l, m, n) telles que [10]:

$$\begin{aligned} C_{ijklrs} = & (l) [\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{rs}] + (m) [\delta_{ij} (\delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr}) + \\ & \delta_{kl} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{jr} \delta_{is}) + \delta_{rs} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il})] + \\ & (n) [\delta_{ik} (\delta_{jr} \delta_{ls} + \delta_{lr} \delta_{js}) + \delta_{jl} (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kr}) + \\ & \delta_{il} (\delta_{jr} \delta_{ks} + \delta_{js} \delta_{kr}) + \delta_{jk} (\delta_{ir} \delta_{ls} + \delta_{is} \delta_{lr})] \quad (V.7) \end{aligned}$$

On pourra remarquer qu'on a les égalités suivantes:

$$l = C_{112233}, \quad m = C_{112323}, \quad n = C_{231312} \quad (V.8)$$

Les autres coefficients sont des combinaisons linéaires de l, m et n .

Finalement, la loi de comportement élastique non linéaire s'obtient en dérivant le potentiel élastique ϕ par rapport à la déformation ϵ :

$$\sigma_{ij} = \partial \phi / \partial \epsilon_{ij}$$

donc d'après la relation (V.3)

$$\sigma_{ij} = (C_{ijkl} + C_{ijklmn} \epsilon_{mn}) \epsilon_{kl} \quad (V.9)$$

qui représente la loi de comportement élastique non linéaire locale, supposée valable en tout point r du milieu étudié.

V.3 Propriétés élastiques effectives non linéaires

On se propose de déterminer le comportement élastique macroscopique non linéaire d'un milieu microhétérogène et macrohomogène, dont les caractéristiques locales (constantes élastiques, forme, taille et fraction volumique des constituants) sont connues.

Le comportement élastique non linéaire d'un tel milieu étant défini par les coefficients effectifs élastiques du deuxième ordre ($C^{2(eff)}$) et du troisième ordre ($C^{3(eff)}$), la résolution du problème énoncé précédemment consisterait donc à déterminer ces coefficients.

Considérons un volume (V) soumis à un chargement mécanique défini par le tenseur de contraintes macroscopiques (Σ) ou (déformation E) et le taux de contraintes correspondant $\dot{\Sigma}$ ou (déformation $\dot{E}$).

On suppose que la transformation du milieu est purement élastique.

En un point r du volume (V) la relation (V.9) de la loi de comportement non linéaire peut être écrite en notation matricielle:

$$\sigma_i(r) = [C_{ij}^2(r) + C_{ijk}^3(r) \epsilon_k(r)] \epsilon_j(r) \quad (V.10.a)$$

ou par dualité :

$$\epsilon_i(r) = [S_{ij}^2(r) + S_{ijk}^3(r) \sigma_k(r)] \sigma_j(r) \quad (V.10.b)$$

où

- C^2, C^3 et S^2, S^3 représentent respectivement, les rigidités et les complaisances du deuxième et troisième ordre.

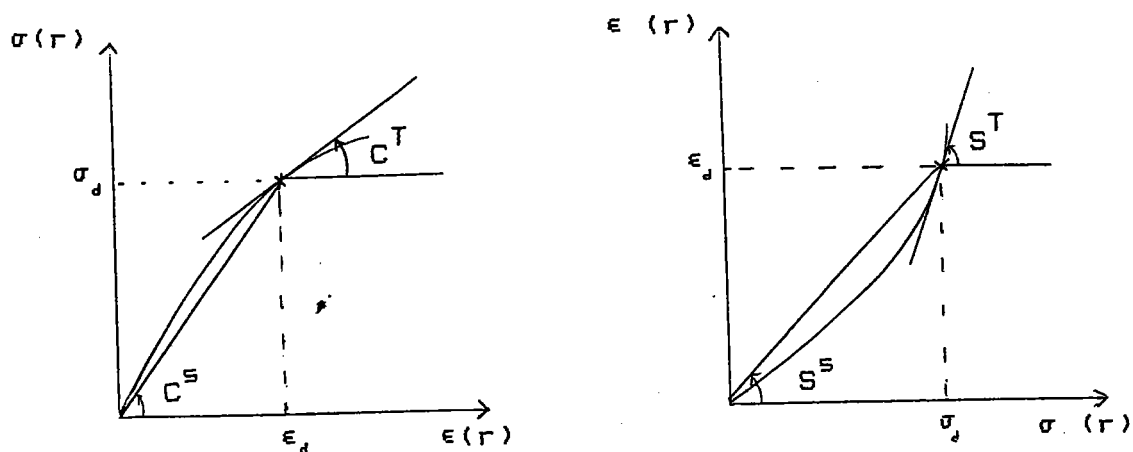


figure (V.3): représentation des modules sécants
 $[C^S(\epsilon_d) , S^S(\sigma_d)]$ et tangents
 $[C^T(\epsilon_d) , S^T(\sigma_d)]$.

Si on introduit les modules sécants suivants (figure (V.3)) :

$$C_{ij}^S(\epsilon(r)) = [C_{ij}^2(r) + C_{ijk}^3(r) \epsilon_k(r)] \quad (V.11.a)$$

$$S_{ij}^S(\sigma(r)) = [S_{ij}^2(r) + S_{ijk}^3(r) \sigma_k(r)] \quad (V.11.b)$$

les relations (V.10.a) et (V.10.b) précédentes s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(r) &= C_{ij}^S(\epsilon(r)) \epsilon_j(r) \\ \epsilon_i(r) &= S_{ij}^S(\sigma(r)) \sigma_j(r) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (V.12.a) \\ (V.12.b) \end{aligned}$$

La formulation en vitesse des équations (V.12.a) et (V.12.b) est la suivante :

$$\dot{\sigma}_i(r) = [C_{ij}^2(r) + 2 C_{ijk}^3(r) \epsilon_k(r)] \dot{\epsilon}_j(r) \quad (V.13.a)$$

ou :

$$\dot{\epsilon}_i(r) = [S_{ij}^2(r) + 2 S_{ijk}^3(r) \sigma_k(r)] \dot{\sigma}_j(r) \quad (V.13.b)$$

ce qui permet d'introduire les modules tangents élastiques (fig(V.3)) :

$$C_{ij}^T(\epsilon(r)) \text{ et } S_{ij}^T(\sigma(r))$$

tel que :

$$C_{ij}^T(\epsilon(r)) = [C_{ij}^2(r) + 2C_{ijk}^3(r) \epsilon_k(r)] \quad (V.14.a)$$

$$S_{ij}^T(\sigma(r)) = [S_{ij}^2(r) + 2S_{ijk}^3(r) \sigma_k(r)] \quad (V.14.b)$$

donc :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_i(r) &= C_{ij}^T(\epsilon(r)) \dot{\epsilon}_j(r) \\ \dot{\epsilon}_i(r) &= S_{ij}^T(\sigma(r)) \dot{\sigma}_j(r) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (V.15.a) \\ (V.15.b) \end{aligned}$$

Les propriétés effectives du milieu sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_i &= [s^{(eff)}_{ij}(E)] E_j \\ \text{et} \\ E_i &= S^{(eff)}_{ij}(\Sigma) \Sigma_j \end{aligned} \right] \quad \begin{aligned} (V.16.a) \\ (V.16.b) \end{aligned}$$

$$a) \left[\begin{aligned} [s^{(eff)}_{ij}] &= [s^{2(eff)}_{ij}] + [s^{3(eff)}_{ijk}] E_k \\ S^{(eff)}_{ij} &= S^{2(eff)}_{ij} + S^{3(eff)}_{ijk} \Sigma_k \end{aligned} \right] \quad \begin{aligned} (V.17.a) \\ (V.17.b) \end{aligned}$$

sont les modules sécants effectifs du milieu homogène équivalent défini dans la première partie de ce chapitre.

b) $[s^{2(eff)}_{ij}]$ et $S^{2(eff)}_{ij}$ étant respectivement les composantes des tenseurs de rigidité et de complaisance effectives du deuxième ordre.

$[s^{3(eff)}_{ijk}]$ et $S^{3(eff)}_{ijk}$ les même composantes du troisième ordre.

On pourra remarquer qu'il suffit de calculer $[s^{(eff)}]$ pour avoir la totalité des propriétés effectives élastiques.

Pour un milieu vérifiant les hypothèses de Hill (§.II.4) les déformations (E) et les contraintes (Σ) sont reliées aux grandeurs locales correspondantes par les relations de moyenne usuelles:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_i &= \overline{\sigma_i(r)} \\ E_i &= \overline{\epsilon_i(r)} \end{aligned} \right] \quad \begin{aligned} (V.18.a) \\ (V.18.b) \end{aligned}$$

les relations de localisation reliant les grandeurs locales

aux quantités macroscopiques s'écrivent sous la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i(r) &= B_{ij}(r) \Sigma_j \\ \epsilon_i(r) &= A_{ij}(r) E_j \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (V.19.a) \\ (V.19.b) \end{aligned}$$

Les tenseurs de localisation de déformation $A(r)$ et de contraintes $B(r)$ dépendent éventuellement de Σ et de E et sont liés par la relation qui sera démontrée par la suite.

En portant (V.16.a) dans (V.19.a) on a:

$$\sigma_i(r) = B_{ij}(r) [C_{jk}^{s(eff)} E_k] \quad (V.20)$$

et à partir de (V.12.a) on peut écrire:

$$\epsilon_i(r) = [C_{ij}^s]^{-1} B_{jk} [C_{kl}^{s(eff)} E_l] \quad (V.21)$$

par identification avec (V.19.b) on a:

$$A_{ij}(r) = [C_{il}^s]^{-1} B_{lk} [C_{kj}^{s(eff)}] \quad (V.22)$$

Le calcul des modules sécants élastiques effectifs $[C^{s(eff)}]$ sera effectué à partir du tenseur localisation A et des relations de moyenne (V.18.a) et (V.18.b).

On a à partir de (V.10.a) et (V.19.b):

$$\sigma_i(r) = [C_{ij}^2(r) + C_{ijk}^3(r) A_{kl}(r) E_l] A_{jn}(r) E_n \quad (V.23)$$

soit à partir de (V.18.a)

$$\Sigma_i = \overline{C_{ij}^2(r) A_{jn}(r)} E_n + \overline{C_{ijk}^3 A_{kl}(r) A_{jn}(r)} E_l E_n \quad (V.24)$$

par comparaison avec (V.16.a) on a:

$$[C_{in}^{s(eff)}] = \overline{C_{ij}^2(r) A_{jn}(r)} + \overline{C_{ijk}^3(r) A_{kl}(r) A_{jn}(r)} E_l \quad (V.25)$$

et en tenant compte de (V.17.a)

$$C_{in}^{2(eff)} = \overline{C_{ij}^2(r) A_{jn}(r)} \quad (V.26)$$

$$C_{iln}^{3(eff)} = \overline{C_{ijk}^3(r) A_{kl}(r) A_{jn}(r)} \quad (V.27)$$

Les modules effectifs sécants $S^{s(eff)}$ sont déterminés de manière analogue .

On a à partir de (V.10.b) et (V.19.a):

$$\epsilon_i(r) = \left[S_{ij}^2(r) + S_{ijk}^3(r) B_{kl}(r) \Sigma_1 \right] B_{jn}(r) \Sigma_n \quad (V.28)$$

soit à partir de (V.18.b) :

$$E_i = \overline{S_{ij}^2(r) B_{jn}(r)} \Sigma_n + \overline{S_{ijk}^3 B_{kl}(r) B_{jn}(r)} \Sigma_1 \Sigma_n \quad (V.29)$$

par comparaison avec (V.16.b) on a:

$$S_{in}^{s(eff)} = \overline{S_{ij}^2(r) B_{jn}(r)} + \overline{S_{ijk}^3(r) B_{kl}(r) B_{jn}(r)} \Sigma_1 \quad (V.30)$$

et en tenant compte de (V.17.b)

$$S_{in}^{2(eff)} = \overline{S_{ij}^2(r) B_{jn}(r)} \quad (V.31)$$

$$S_{inl}^{3(eff)} = \overline{S_{ijk}^3(r) B_{kl}(r) B_{jn}(r)} \quad (V.32)$$

Les modules effectifs déterminés ainsi , peuvent être calculés connaissant les propriétés élastiques locales C^2 (ou S^2), C^3 (ou S^3).

et les tenseurs localisation de déformation A.

Par ailleurs, la démarche utilisée pour ce calcul, peut être généralisée à des constantes élastiques d'ordre plus élevé.

Supposons que la loi de comportement local en un point r est défini par l'expression suivante :

$$\sigma_{ij}(r) = \left[C_{ijkl}^2(r) + C_{ijklmn}^3(r) \epsilon_{mn}(r) + C_{ijklmnpq}^4(r) \epsilon_{mn}(r) \epsilon_{pq}(r) + \dots \right. \\ \left. \dots + C_{ijklmnpq..rs}^n(r) \epsilon_{mn}(r) \epsilon_{pq}(r) \dots \epsilon_{rs}(r) \right] \epsilon_{kl}(r)$$

$C_{ijklmn..pq}^n$ sont les composantes des tenseurs d'ordre (2n).

Les modules sécants locaux s'écrivent alors :

$$C_{ijkl}^s(r) = \left[C_{ijkl}^2(r) + C_{ijklmn}^3(r) \epsilon_{mn}(r) + C_{ijklmnpq}^4(r) \epsilon_{mn}(r) \epsilon_{pq}(r) + \dots \right. \\ \left. \dots + C_{ijklmnpq..rs}^n(r) \epsilon_{mn}(r) \epsilon_{pq}(r) \dots \epsilon_{rs}(r) \right]$$

en tenant compte des relations de localisation (V.19.b) et de moyenne (V.18.a), on peut écrire la contrainte macroscopique sous la forme:

$$\Sigma_{ij} = \left[\overline{C_{ijkl}^2(r) A_{klpq}(r)} + \overline{C_{ijklmn}^3(r) A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) E_{rs}} + \right. \\ \overline{C_{ijklmntu}^4(r) A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) A_{tuvw}(r) E_{rs} E_{vw}} + \dots \\ \left. + C_{ijklmntu...yz}^n A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) \dots A_{yzgh}(r) E_{rs} \dots E_{gh} \right] E_{pq}$$

par comparaison avec (V.16.a) on a:

$$C_{ijpq}^{s(eff)} = \left[\frac{C_{ijkl}^2(r) A_{klpq}(r)}{C_{ijklmn}^3(r) A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) E_{rs}} + \frac{C_{ijklmntu}^4(r) A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) A_{tuvw}(r) E_{rs} E_{vw}}{C_{ijklmntu...yz}^n A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) \dots A_{yzgh}(r) E_{rs} \dots E_{gh}} + \dots \right]$$

et les coefficients élastiques effectifs d'ordre n :

$$C_{ijpq..gh}^{n(eff)} = C_{ijklmntu...yz}^n A_{klpq}(r) A_{mnrs}(r) \dots A_{yzgh}(r)$$

Une formulation duale permet d'exprimer les complaisances effectives sous la forme:

$$S_{ijpq}^{s(eff)} = \left[\frac{S_{ijkl}^2(r) B_{klpq}(r)}{S_{ijklmn}^3(r) B_{klpq}(r) B_{mnrs}(r) \Sigma_{rs}} + \frac{S_{ijklmntu}^4(r) B_{klpq}(r) B_{mnrs}(r) B_{tuvw}(r) \Sigma_{rs} \Sigma_{vw}}{S_{ijklmntu...yz}^n B_{klpq}(r) B_{mnrs}(r) \dots B_{yzgh}(r) \Sigma_{rs} \dots \Sigma_{gh}} + \dots \right]$$

et les coefficients élastiques effectifs d'ordre n ($S^{n(eff)}$) :

$$S_{ijpq..gh}^{n(eff)} = S_{ijklmntu...yz}^n B_{klpq}(r) B_{mnrs}(r) \dots B_{yzgh}(r)$$

Les modules effectifs ainsi déterminés , peuvent être calculés connaissant les propriétés élastiques locales C^2 (ou S^2), C^3 (ou S^3), C^n (ou S^n) et les tenseurs localisation de déformation A .

Une forme explicite de A sera déduite par la suite , à partir de l'équation intégrale qui sera résolue en utilisant le modèle auto-cohérent à un site. On se limitera à l'ordre 3.

V.4 Equation intégrale

En chaque point r du milieu hétérogène considéré doivent être vérifiées: les équations d'équilibre , les relations cinématiques et les relations de comportement (V.12.a) . Ceci nous permet d'écrire pour un niveau de déformation donné:

$$\left[C_{ijkl}^S(\epsilon, r) u_{k,l}(r) \right]_{,j} = 0 \quad (V.33)$$

On introduit un milieu homogène de modules élastiques sécants $[S_{ijkl}^0(\epsilon^0)]$ tel que:

$$C_{ijkl}^S(r) = [S_{ijkl}^0(\epsilon^0)] + \delta C_{ijkl}^S(r) \quad (V.34)$$

avec ϵ^0 : déformation totale du milieu homogène fictif soumis au même chargement que le milieu hétérogène.

L'équation (V.33) se transforme en:

$$[S_{ijkl}^0(\epsilon^0) u_{k,l}(r)] + \left[\delta C_{ijkl}^S(\epsilon, r) \epsilon_{kl} \right]_{,j} = 0 \quad (V.35)$$

Si on considère la partie entre crochets comme étant des forces fictives $f_i(r)$, la résolution de cette équation s'obtient en uti-

lisant le tenseur de Green $G(r-r')$ d'un milieu infini de modules élastiques sécants $[S^0(\epsilon^0)]$.

La solution de (V.35) pour un milieu de volume (V) s'écrit sous la forme:

$$u_m(r) = u_m^0 + \int_V G_{mi}(r-r') [\delta C_{ijkl}^S(\epsilon, r') \epsilon_{kl}(r')]_{,j} dV' \quad (V.36)$$

L'intégration par partie et les conditions aux limites nous donnent finalement l'expression de la déformation élastique en un point r du milieu (V) qui s'écrit en fonction du tenseur Γ , défini au chapitre II [(II.41)'] et de la déformation ϵ^0 du milieu homogène soumis au même chargement que le milieu hétérogène, de la manière suivante:

$$\epsilon_{mn}(r) = \epsilon_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnkl}(r-r') [\delta C_{kli}^S(\epsilon, r') \epsilon_{ij}(r')] dV' \quad (V.37)$$

avec Γ dépendant de ϵ^0 par l'intermédiaire de $[S^0(\epsilon^0)]$

et $\delta C^S = C^S(\epsilon) - [S^0(\epsilon^0)]$.

La solution de cette équation par l'approximation autocohérente à un site nous permet de calculer le tenseur localisation de déformation A .

V.5 Approximation autocohérente (à un site)

Cette approximation consiste à faire un choix particulier du tenseur $[S^0(\epsilon^0)]$ et remplacer les interactions entre une hétérogénéité particulière (l'inclusion) et le milieu réel environnant par celles entre une inclusion et le milieu homogène équivalent

de modules élastiques sécants ($\epsilon^{s(eff)}$).

Les hypothèses de moyenne sur les propriétés locales dans chaque inclusion nous permettent d'écrire:

$$\begin{aligned}\epsilon(r) &= \sum_{I=1}^N \epsilon^I Y^I(r) \\ \delta C^S(r) &= \sum_{I=1}^N \delta C^{S(I)} Y^I(r)\end{aligned}\quad (V.38)$$

$$\sigma(r) = \sum_{I=1}^N \sigma^I Y^I(r)$$

L'équation intégrale se met alors sous la forme:

$$\epsilon_{ij}(r) = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{I=1}^N \int \Gamma_{ijkl}(r-r') [\delta C_{klmn}^{S(I)} \epsilon_{mn}^I] dV' \quad (V.39)$$

et la déformation dans une inclusion I peut s'écrire :

$$\epsilon_{ij}^I = \epsilon_{ij}^0 + \sum_{J=1}^N T^{IJ} [\delta C_{klmn}^{S(J)} \epsilon_{mn}^J] \quad (V.40)$$

avec

N : le nombre total des inclusions du milieu

et

$$T^{IJ} = 1 / V^I \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma(r-r') dV'$$

Dans l'approximation autocohérente à un site, toutes les inclusions (J) différentes de I sont remplacées par le (M.H.E), l'équation (V.40) se transforme donc en:

$$\epsilon_{ij}^I = \epsilon_{ij}^0 + T_{ijkl}^{II} [\delta C_{klmn}^{S(I)} \epsilon_{mn}^I]$$

Par définition pour $[S^0(\epsilon^0) = [S^{(eff)}]$, $\epsilon^0 = E$, on peut écrire donc, la relation précédente sous la forme:

$$\epsilon_{ij}^I = E_{ij} + T_{ijkl}^{II} [\delta C_{klmn}^{S(I)} \epsilon_{mn}^I] \quad (V.41)$$

Par comparaison avec (V.19.b) le tenseur localisation de déformation dans l'inclusion I s'écrit :

$$A^I = [I - T^{II} \delta C^{S(I)}]^{-1} \quad (V.42)$$

où

$$\delta C^{S(I)} = C^{S(I)} - [S^{(eff)}]$$

L'équation (V.25) s'écrit alors pour un milieu granulaire:

$$[\epsilon_{in}^{S(eff)}] = \sum_{I=1}^N f^I [C_{ij}^{2(I)} A_{jn}^I ([\epsilon_{in}^{S(eff)}]) + C_{ijk}^{3(I)} A_{kl}^I ([\epsilon_{in}^{S(eff)}]) A_{jn}^I ([\epsilon_{in}^{S(eff)}]) E_1] \quad (V.)$$

La résolution de cette équation nous permet de déterminer les modules élastiques effectifs sécants $[S^{(eff)}]$ et en même temps les coefficients $[C^{3(eff)}]$ d'un matériau granulaire microhétérogène et macrohomogène.

V.6 Calcul numérique des modules élastiques non linéaires des matériaux composites [13]

Le matériau composite est décrit au (§ III.2), mais cette fois ci les propriétés élastiques des constituants du composite sont données par les constantes du deuxième et du troisième ordre ($C^{2(I)}$ et $C^{3(I)}$).

La relation (V.43), à partir de laquelle sont déterminés les modules élastiques sécants non linéaires, est une équation implicite en $[\epsilon^{s(eff)}]$.

Pour résoudre cette équation on procède de la manière suivante :

pour une déformation totale (macroscopique) nulle ($E_0 = 0$), on fait un premier calcul des modules sécants élastiques, qui se réduisent dans ce cas aux coefficients élastiques effectifs du deuxième ordre, on peut donc écrire:

$$\text{pour } E_0 = 0 \quad [\epsilon_0^{s(eff)}(E_0)] = [\epsilon^{2(eff)}]$$

ensuite, pour une déformation totale ($E = E_0 + \Delta E$), on calcule par la méthode itérative les modules sécants effectifs, en utilisant comme solution approchée de départ les $[\epsilon_0^{s(eff)}(E)] = [\epsilon_0^{s(eff)}(E_0)]$ calculée avec E_0 .

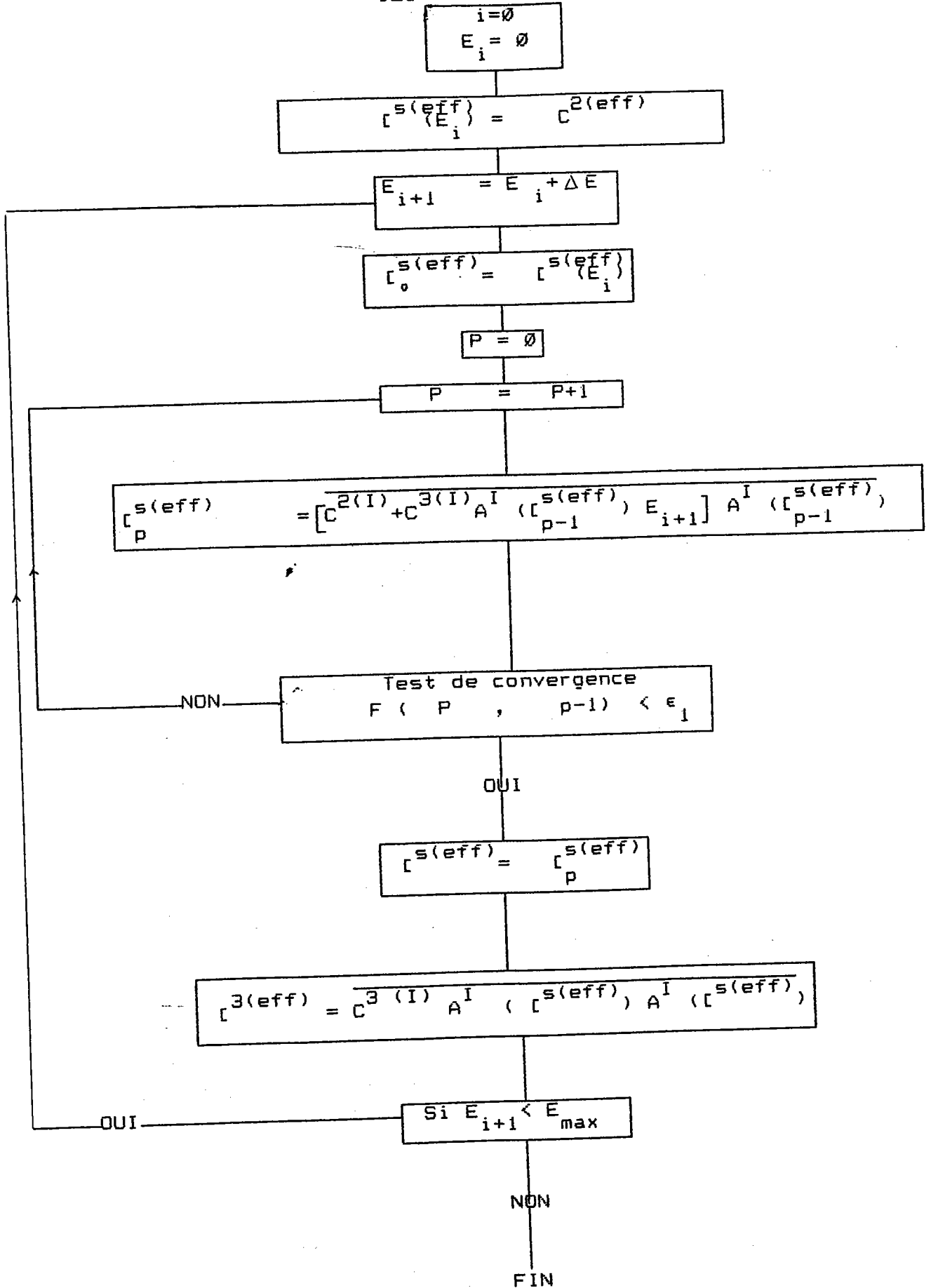
$[\epsilon^{3(eff)}]$ est ensuite calculé directement à partir de la relation :

$$[\epsilon_{iln}^{3(eff)}] = C_{ijk}^{3(I)} A_{kl}^I([\epsilon^{s(eff)}]) A_{jk}^I([\epsilon^{s(eff)}])$$

Pour calculer les modules sécants effectifs correspondants à un niveau i de déformation, on prend comme solution approchée de départ, les modules sécants effectifs calculés pour le niveau $i-1$.

L'algorithme (N°2) correspond au calcul numérique des modules sécants effectifs pour plusieurs niveaux de déformations.

Les données nécessaires à cette résolution sont reportées dans le tableau (V.2).



algorithme N°2: détermination des propriétés effectives élastiques non linéaires des matériaux composites.

paramètres géométriques	forme donnée par les trois demi axes de l'ellipsoïde $\begin{matrix} I & I & I \\ a & , b & , c \end{matrix}$	orientation donnée les trois angles d'Euler $\begin{matrix} I & I & I \\ \Gamma & , \beta & , \tau \end{matrix}$
paramètres physiques	tenseur d'ordre 4 des constantes élastiques du deuxième ordre $\begin{matrix} I(2) \\ C \end{matrix}$	tenseur d'ordre 6 des constantes élastiques du troisième ordre $\begin{matrix} I(3) \\ C \end{matrix}$
paramètres utiles	précision ϵ_1	déformation de départ $E_{\min}$ déformation maximale $E_{\max}$ incrément de déformation ΔE Fonction test F

Tableau (V.2) : données nécessaires à la résolution de l'équation (V.43).

V.7 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Peu de mesures expérimentales reliant les propriétés élastiques non linéaires des constituants à celles du milieu hétérogène existent dans la littérature. D'après Johnson, seules ses résultats et ceux de Schneider ont été publiés. Nous les utilisons ici pour comparer les calculs aux expériences.

Deux types de matériaux seront traités ici:

- les polycristaux d'Al (étudiés par Johnson [11])
- les composites $\text{Al-Al}_2\text{O}_3$ (étudiés par Schneider [12])

V.7.1 Cas d'un polycristal d'Aluminium

Le matériau étudié ici, est le même que celui qui a été décrit au (§ IV.2.1). Ses constantes élastiques du deuxième ordre sont celles qui sont données dans le tableau (IV.1) qu'on rappelle ici:

C	coefficients élastiques du second ordre (10^2 GPa)
C_{11}	1.0675 ± 0.0005
C_{12}	0.604 ± 0.008
C_{44}	0.2834 ± 0.004

Tableau IV.1: constantes élastiques du second ordre de l'Al à 25°C.

Les constantes élastiques du troisième ordre du monocristal d'Al sont données dans le tableau (V.3) suivant :

C	constantes élastiques du troisième ordre (10^2 GPa)
C_{111}	-10.76
C_{112}	-3.15
C_{123}	0.36
C_{144}	-0.32
C_{166}	-3.40
C_{456}	-0.30

Tableau V.3 : constantes élastiques du troisième ordre du monocristal d'AL à 25°C d'après Thomas [4]

Pour vérifier notre calcul , on représente l'évolution des constantes élastiques effectives du troisième ordre.

Les figures (V.3), (V.4) et (V.5) représentent respectivement la variation des constantes élastiques effectives du troisième ordre $C_{111}^{(eff)}$, $C_{112}^{(eff)}$ et $C_{123}^{(eff)}$ avec la déformation.

Comme attendu, les constantes élastiques effectives du troisième ordre sont indépendantes de la déformation.

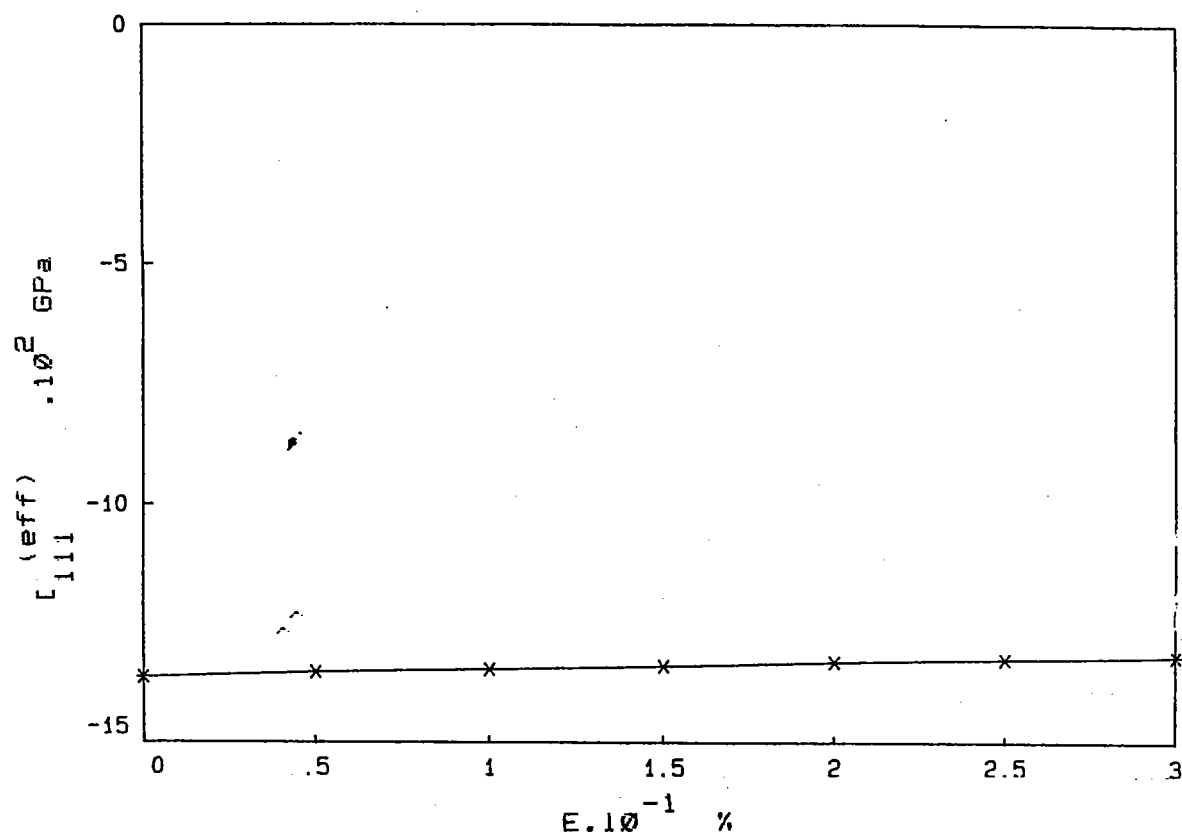


figure V.3 : évolution de $[111]^{(eff)}$ en fonction de la déformation

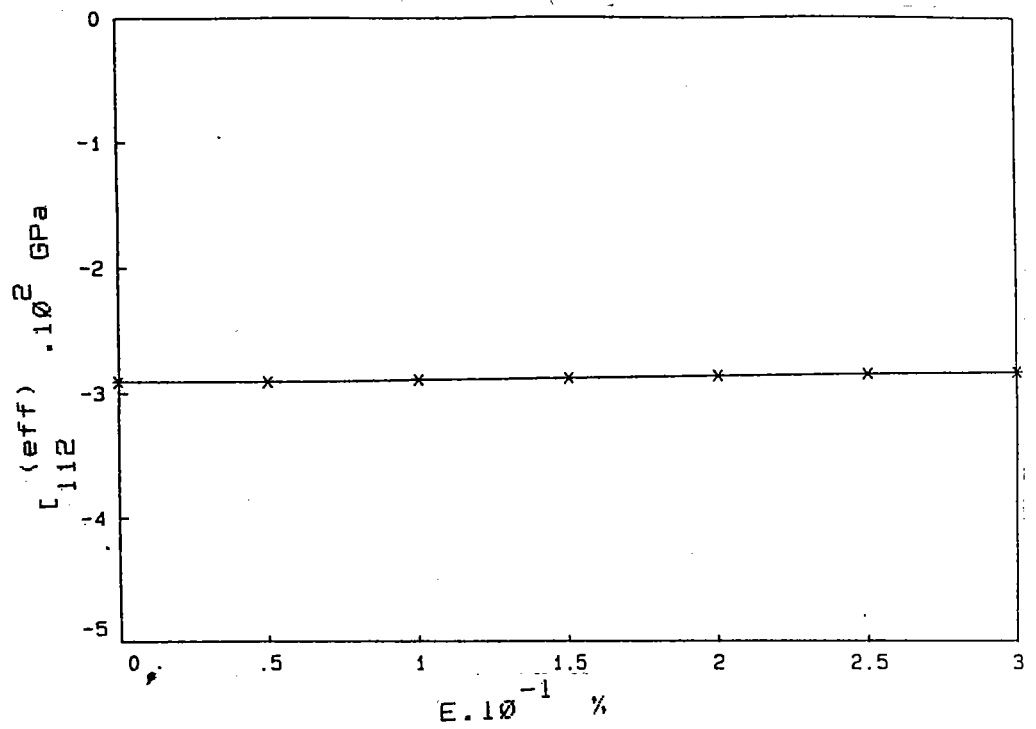


figure V.4 : évolution de $L_{112}^{(eff)}$ en fonction de la déformation

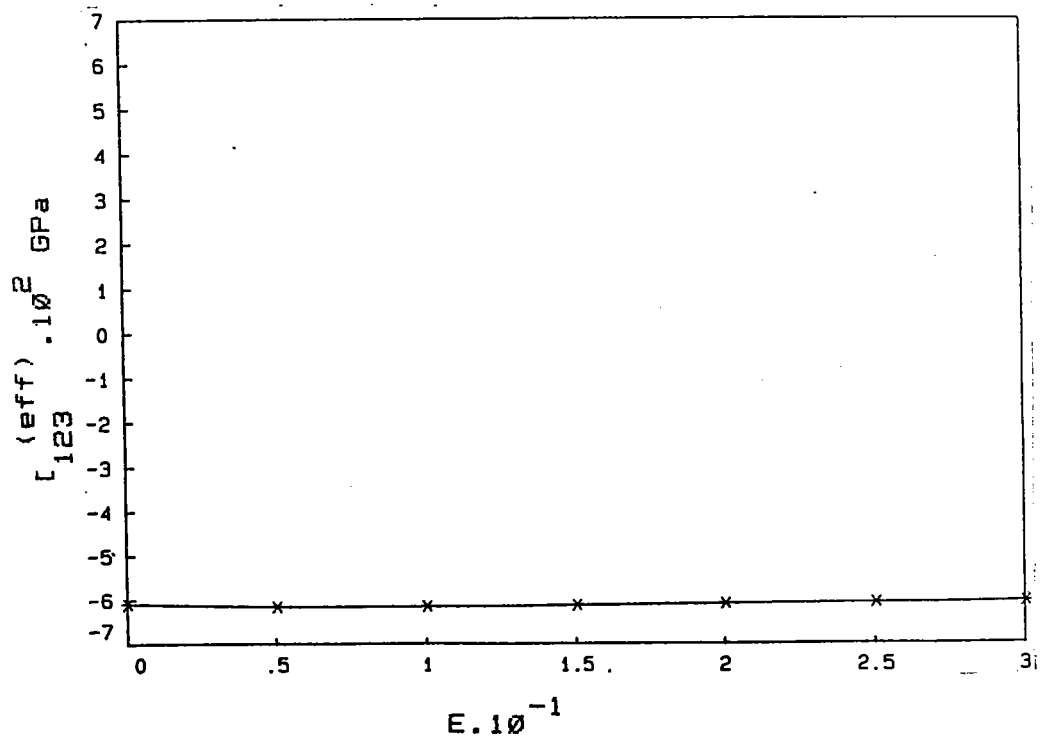


figure V.5 : évolution de $L_{123}^{(eff)}$ en fonction de la déformation

Sur la figure (V.6) sont reportées à la fois : les constantes élastiques du troisième ordre du polycristal d'Al , obtenues par :

- les mesures expérimentales faites par Jhonson [11]

1 - [o] (mesures ultrasonores)

2 - [+] et [x] (mesures par rayons X , obtenues en utilisant les propriétés du monocristal déterminées respectivement par Sarma et Reddy [3] et Thomas [4]).

- les résultats du modèle [*]

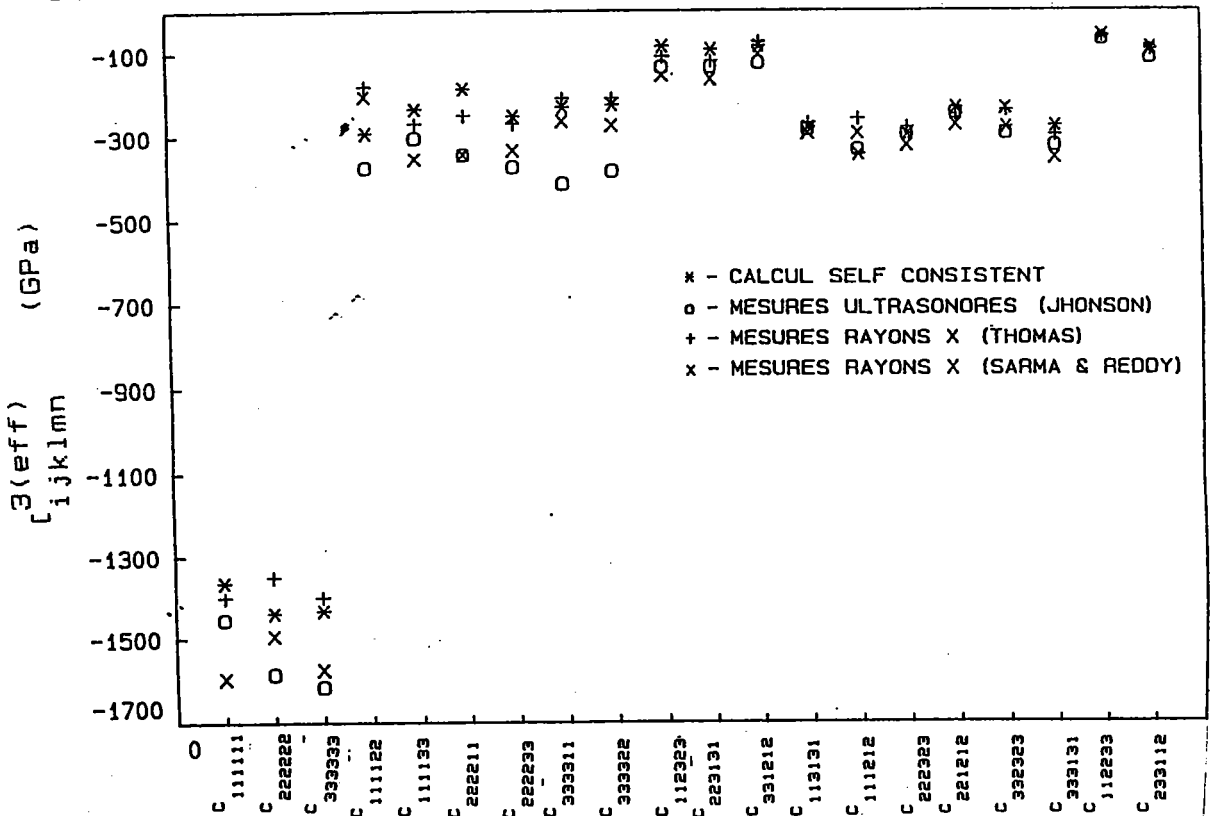


figure (V.6): constantes élastiques du troisième ordre du polycristal de l'Al .

On pourra remarquer que pour toutes les composantes représentées sur la figure (V.6), les résultats expérimentaux et les résultats du modèle ne sont pas très éloignés. Les prédictions du modèle sont donc relativement satisfaisantes.

V.7.2 Cas du composite Al-Al₂O₃

Le matériau étudié ici est décrit dans le § IV.2.2, ses constantes élastiques sont regroupées dans le tableau (V.4) suivant:

	E (GPa)	ν	l (GPa)	m (GPa)	n (GPa)
Al	75	0.33	-300	-400	-400
Al ₂ O ₃	390	0.24	200	-650	-1020

Tableau V.4 : caractéristiques élastiques de la
matrice d'Al et des renforts d' Al₂O₃
d'après Schneider [12].

D'après les résultats obtenus en élasticité linéaire , ce matériau est anisotrope (les modules d'Young varient en fonction de la direction).Cependant, les résultats expérimentaux nous ont été fournis sous la forme suivante:

$$l_{ij} , m_{ij} \text{ et } n_{ij} \quad (i \text{ et } j = 1 \text{ à } 3)$$

qui représentent les trois constantes de Murnaghan ,obtenues par les mesures des variations des vitesses de propagation des ondes ultrasonores.Les indices (ij) correspondent à des mesures faites pour des ondes propagées dans la direction i et polarisées dans la direction j.

Le calcul self consistant nous permet d'obtenir les constantes élastiques effectives du troisième ordre sous forme de tenseur de 729 composantes ,qui se réduisent dans le cas d'un matériau isotrope aux trois constantes de Murnaghan $l^{eff} = l_{123}^{eff}$, $m^{eff} = l_{144}^{eff}$ et $n = l_{456}^{eff}$.Un premier calcul a été fait , en considérant que les renforts d' Al_2O_3 sont sphériques.

Les résultats obtenus sont reportés sur les figures (V.7) , (V.8) et (V.9) .Ces figures représentent respectivement la variation de l^{eff} , m^{eff} et n^{eff} en fonction de la fraction volumique d' Al_2O_3 .

Sur la figure (V.7) sont reportées :

1- les mesures expérimentales

$$l_{12} [o], l_{13} [+], \text{ et } (l_{31} , l_{32}) [x]$$

2- les résultats numériques du modèle [*]

Sur la figure (V.8) sont reportées :

1- les mesures expérimentales

m_{12} et m_{13} [O] , m_{32} et m_{31} [+]

2- les résultats numériques du modèle [*]

Sur la figure (V.9) sont reportées :

1- les mesures expérimentales

n_{12} [O] , n_{13} [+], n_{31} et n_{32} [X]

2- les résultats numériques du modèle [*]

En ce qui concerne les résultats obtenus par le modèle self-consistent ,on peut faire les constatations suivantes:

- la constante élastique effective du troisième ordre m^{eff} diminue mais vite (avec la fraction volumique de l' Al_2O_3) que n^{eff} , cependant cette variation pour $11\% < f^I < 30\%$ est faible et ne dépasse pas 11% pour les deux composantes.

-la composante l^{eff} , croit légèrement avec la fraction volumique, cette variation ne dépasse pas 1% pour ($11\% < f^I < 30\%$).

En ce qui concerne les résultats expérimentaux ,le sens de variation des constantes l_{ij}^{eff} , m_{ij}^{eff} et n_{ij}^{eff} dépend des directions de propagation et de polarisation des ondes ultrasonores.

On pourra aussi remarquer que les valeurs des constantes élastiques du troisième ordre obtenues par notre modèle sont en général inférieures aux valeurs obtenues par les mesures expérimentales .

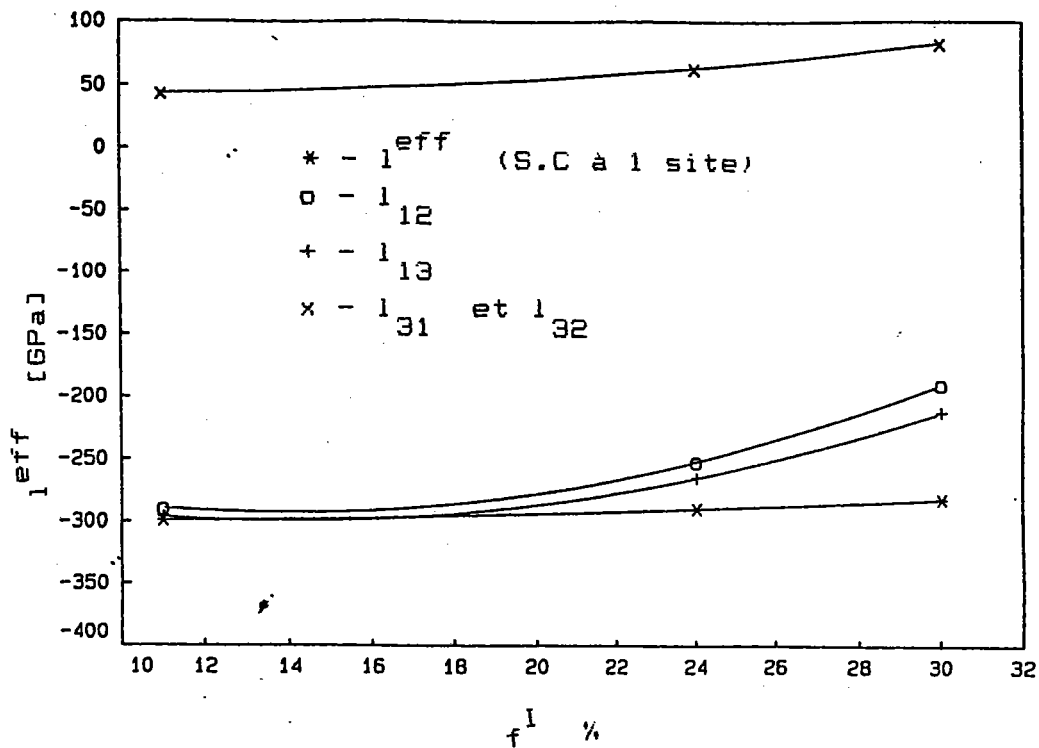


Figure V.7 : évolution de l^{eff} en fonction de la fraction volumique f^I .

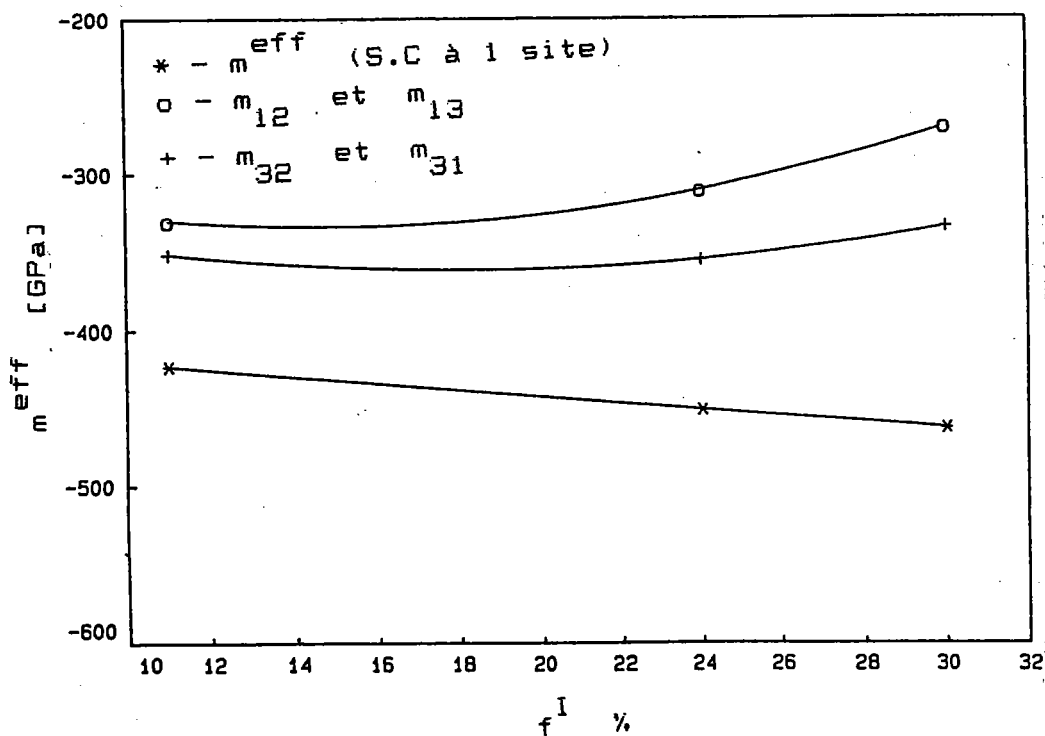


Figure V.8 : évolution de m^{eff} en fonction de la fraction volumique f^I .

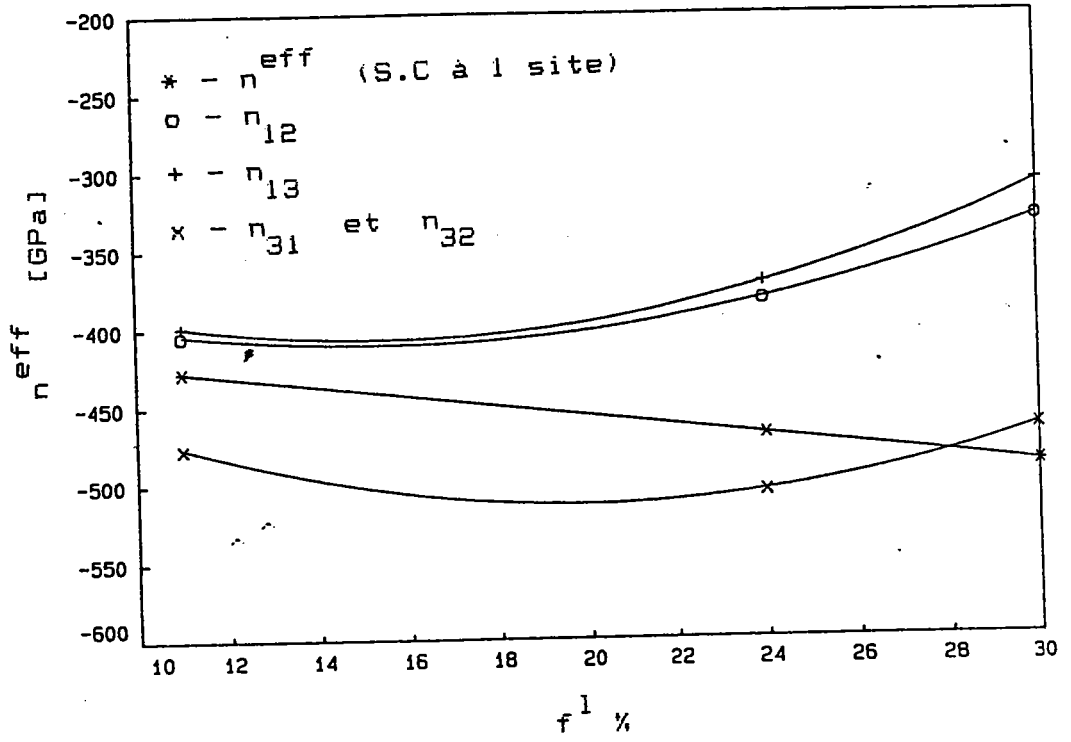


Figure V.9 : évolution de n^{eff} en fonction de la fraction volumique f^I .

On étudiera par la suite ,l'influence du rapport de forme c/a des renforts d' Al_2O_3 sur quelques composantes des tenseurs élastiques du troisième ordre du composite (Al- Al_2O_3).

Le calcul self-consistent a été fait pour des fibres unidirectionnelles de rapports de forme c/a .

Les résultats sont représentés sur les figures (V.10) , (V.11) et (V.12).

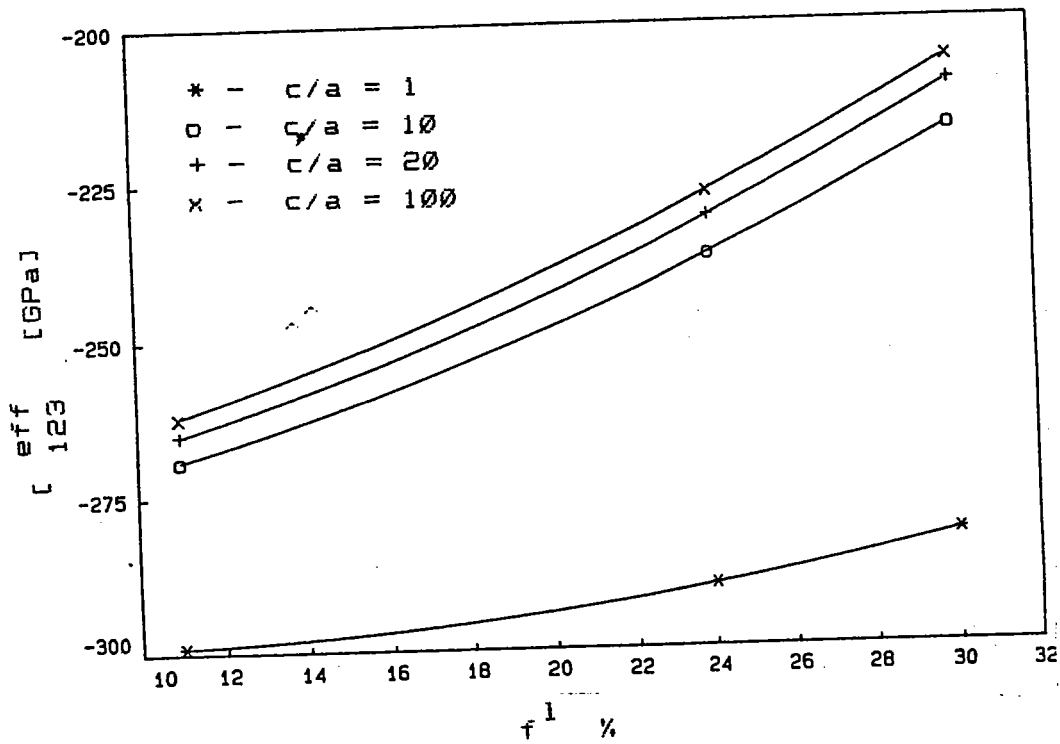


Figure V.10 : variation de $[C_{123}]^{eff}$ ($[C_{123}]^{eff}$ pour $c/a = 1$) en fonction de la fraction volumique de l' Al_2O_3 pour différentes valeurs de c/a .

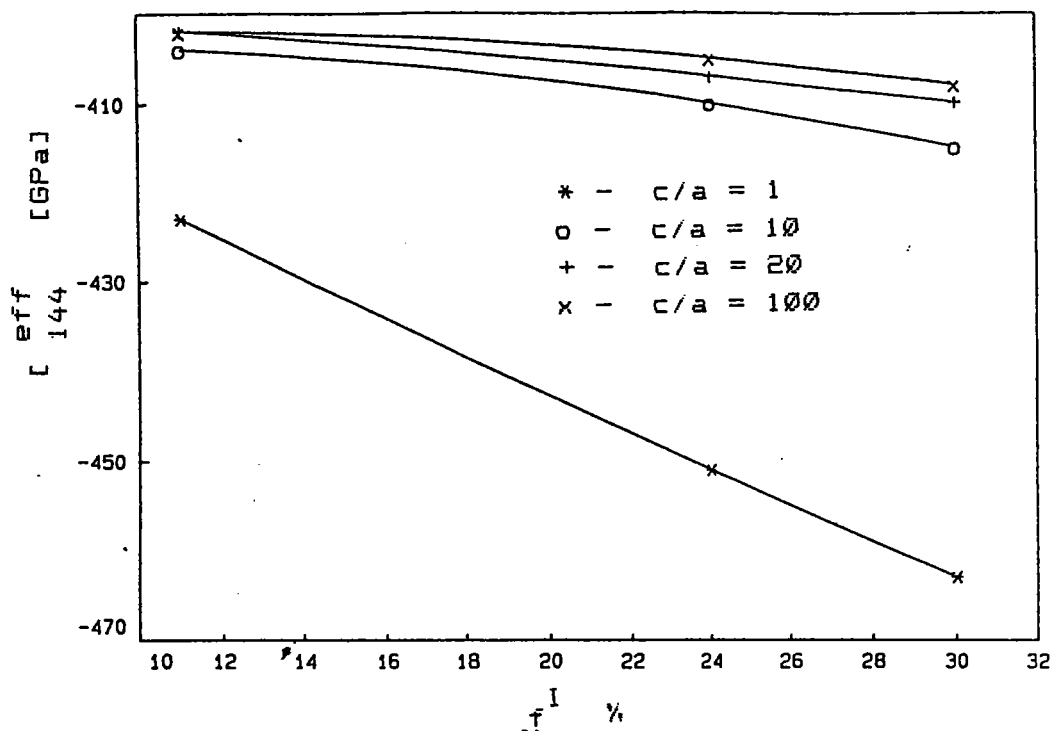


Figure V.11 : variation de $[144]^{eff}$ (m^{eff} pour $c/a=1$) en fonction de la fraction volumique de l' Al_2O_3 pour différentes valeurs de c/a .

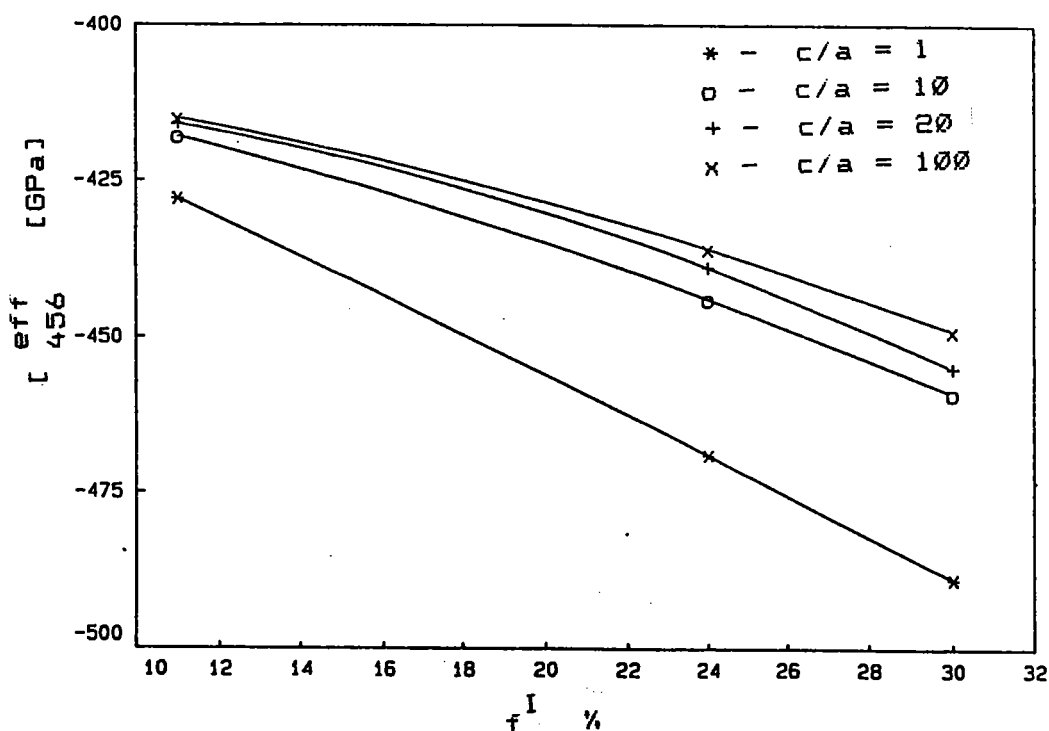


Figure V.12 : variation de $[456]^{eff}$ (n^{eff} pour $c/a=1$) en fonction de la fraction volumique de l' Al_2O_3 pour différentes valeurs de c/a .

Ces figures représentent respectivement la variation des composantes $[\epsilon_{123}^{eff}]$, $[\epsilon_{144}^{eff}]$ et $[\epsilon_{456}^{eff}]$ pour les différentes valeurs de c/a (en fonction de la fraction volumique de l' Al_2O_3).

Sur chacune des figures sont reportées les résultats du modèle pour les rapports de forme suivants:

$$c/a = 1 [*] , c/a = 10 [o] , c/a = 20 [+] , c/a = 100 [x]$$

On peut faire les remarques suivantes:

- 1 - les composantes $[\epsilon_{144}^{eff}]$ et $[\epsilon_{456}^{eff}]$ diminuent quand f^1 augmente ,
tandis que $[\epsilon_{123}^{eff}]$ augmente.
- 2 - la sensibilité à f^1 diminue quand c/a augmente.
- 3 - les valeurs des trois composantes obtenues dans le cas du composite à renforts sphériques sont les plus faibles. Ceci explique la différence entre les résultats expérimentaux et numériques observés sur les figures (V.7), (V.8) et (V.9).

V.8 Conclusion

Le comportement élastique non linéaire des matériaux microhétérogènes et macrohomogènes a été déterminé en utilisant le modèle autocohérent à un site. Ceci nous a permis d'évaluer leurs constantes élastiques du troisième ordre en tenant compte de la microstructure du matériau. Une première application a été faite sur un polycristal d'Aluminium laminé. Ceci a donné des résultats relativement satisfaisants par rapport à l'expérimentation.

La deuxième application a été faite sur un composite $Al-Al_2O_3$.

Les résultats obtenus par le modèle (pour $c/a=1$) sont du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux , mais légèrement inférieurs. Cette différence est essentiellement due au fait que le matériau étudié expérimentalement n'est pas tout à fait isotrope mais ,présente plutôt une anisotropie due à la forme des renforts(Ceci a été confirmé par l'étude de l'influence du rapport de forme sur les constantes élastique effectives du troisième ordre) et à leur répartition spatiale. Par ailleurs ,on sait que les constantes élastiques du troisième ordre sont connues avec peu de précision (de l'ordre de 30 % [11]).

V.9 Bibliographie

- [1] H.B.Huntington , Rensselaer Polytechnic Institute,Troy,New York , "The Elastic constants of crystals",p320.
- [2] Lazarus,D.1949a,Phys.Rev,76,545.
- [3] V.P.N Sarma and P.J.Reddy , 1972," third order Elastic constants of aluminium",Phys.stat.Sol.(a)10,563
- [4] J.F.Thomas ,JR.,1968,Physical Review,175,3.
- [5]P.W.Bridgman , " physics of high pressure " . G .Bel and sons , London,1946.
- [6]W.B.Daniels , ph.D.dissertation ,case Institute of Technology, Cleveland,ohio,1967
- [7]F.D.Murnaghan,"finite deformations of an elastic solid",Wiley New york.(1951)
- [8]F.Birch,Phy.rev.71,809(1947)
- [9]R.F.S.Hearmon,"the elastic constants of anisotropic materials" physics section , forest products research Laboratory , princes risborough,January 27,1956,p 323
- [10] R. El Guerjouma et al.,23ème G.F.R de bordeaux,10,pp.3-10,1988
- [11] Johnson,G.C and Springer,W.C.A comparaison of measured and predicted Secod - and third- order elastic constants of a textured aggregate.Int.J.Solids structures,Vol.25.N°6,pp.609-619,1989.
- [12] E.Schneider communication personnelle
- [13] K.Ahaouari,P.lipinski,M.Berveiller et E.Schneider , "Comportement élastique non linéaire des composites à matrice métallique",9ème congrès de mécanique (METZ 1989).

CHAPITRE - VI -

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, on a proposé un cadre général permettant de déterminer les propriétés thermoélastiques linéaires ou non linéaires (élastique) des matériaux microhétérogènes et macrohomogènes à partir

- des propriétés des constituants
- de la microstructure du matériau.

La démarche générale utilise les méthodes modernes d'homogénéisation et de localisation introduisant un milieu homogène de référence.

En considérant le matériau comme étant un milieu continu à microstructure, on aboutit en plus des relations de moyennes usuelles à une équation intégrale qui décrit les interactions entre les constituants eux mêmes et celle entre les constituants et chargement extérieur. La solution exacte de cette équation intégrale permettrait de prendre en compte toute la microstructure du matériau. Cependant, cette solution exacte est difficile à atteindre car elle nécessiterait la connaissance de tout le milieu.

Pour résoudre l'équation intégrale nous avons donc utilisé et développé l'approximation autocohérente à un site, qui d'après Kröner est exacte dans le cas des milieux parfaitement désordonnés.

L'outil ainsi développé permet, avec des moyens de calculs relativement limités, d'obtenir, de manière qualitative mais également

quantitative (dans beaucoup de cas) une bonne évaluation des propriétés thermomécaniques des matériaux composites.

Cette évaluation peut être utilisée à la fois par les spécialistes du calcul de structures pour dimensionner les pièces mécaniques et par les architectes des nouveaux matériaux. Ceux ci, en utilisant les calculs développés, peuvent à priori, déterminer l'influence des paramètres microstructuraux usuels sur le comportement global.

Si le cadre de la thermoélasticité linéaire était déjà plus ou moins connu, le présent travail constitue cependant une généralisation dans la mesure où il permet de décrire n'importe quelle anisotropie macroscopique. Le couplage thermomécanique développé ici, pourrait être étendu à d'autres type de problèmes (retrait du béton) .

Le développement de la méthode générale au cas de l'élasticité non linéaire est à notre connaissance la première approche dans ce domaine. Outre l'intérêt purement scientifique, cette approche constitue un outil indispensable au développement des techniques de contrôle non destructif que constitue l'application de l'acoustoélasticité à la détermination des contraintes internes et résiduelles.

Pour des matériaux à élasticité non linéaire (composite à matrice organique) pour lesquels la non linéarité peut être importante, les calculs précédents permettent une meilleur approche du com-

portement effectif macroscopique.

Certes la méthodologie proposée peut encore être perfectionnée (emploi d'un schéma à sites multiples) mais ,les calculs et programmes développées constituent un outil qui peut d'ores et déjà rendre des services en bureau d'étude et dans la conception des nouveaux matériaux.

ANNEXE - A1 -

RELATIONS DE LEVIN

Nous considérons deux chargements thermomécaniques du même matériau:

-pour un premier chargement ,on impose $\Theta = (\Theta^1) = \emptyset$ et $\Sigma = (\Sigma^1) \neq \emptyset$

-pour le second ,on a $\Theta = (\Theta^2) \neq \emptyset$ et $\Sigma = (\Sigma^2) = \emptyset$

les deux chargement vérifient les relations suivantes:

premier chargement

deuxième chargement

$$\left[\begin{array}{l} \Theta = \Theta^1 = \emptyset, \Sigma = \Sigma^1 \\ \sigma^1 = B \Sigma^1 \\ \epsilon^1 = s \sigma^1 = s B \Sigma^1 \\ E^1 = \frac{1}{s B} \Sigma^1 \end{array} \right. \quad (A1.0) \quad \left[\begin{array}{l} \Theta = \Theta^2 \neq \emptyset, \Sigma = \Sigma^2 = \emptyset \\ \sigma^2 = b \Theta \\ \epsilon^2 = s b \Theta + \alpha \Theta \\ E^2 = \alpha^{eff} \Theta^2 \end{array} \right.$$

nous combinons les deux problèmes en étudiant l'intégrale

$$I_1 = \int_V \sigma_{ij}^1(r) \epsilon_{ij}^2(r) dV \quad (A1.1)$$

qui devient par l'intermédiaire des relations

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{équilibre des moments})$$

et

$$\epsilon_{ij}^2 = 1/2 (u_{i,j}^2 + u_{j,i}^2) \quad (\text{compatibilité})$$

ou $u_{i,j}$ le gradient de déplacement total

$$\int_V \sigma_{ij}^1(r) u_{i,j}^2(r) dV \quad (A1.2)$$

par intégration par parties ,on a:

$$I_1 = \int_V \{ [\sigma_{ij}^1(r) u_i^2(r)]_{,j} - \sigma_{ij,j}^1(r) u_i^2(r) \} dV \quad (A1.3)$$

à partir des relations d'équilibre en volume ($\sigma_{ij,j}^1(r) = \emptyset$) et

les conditions aux limites $\sigma_{ij}^1 n_j = \Sigma_{ij}^1 n_j$ (n_j étant la normale

à la surface extérieure) on a:

$$I_1 = \int_V \sigma_{ij}^1(r) \epsilon_{ij}^2(r) dV = \sum_{ij}^1 E_{ij}^2 V \quad (A1.4)$$

$$\text{ou} \quad E_{ij}^2 = 1/V \int_V \epsilon_{ij}^2(r) dV$$

un résultat analogue peut être obtenu pour l'intégrale

$$I_2 = \int_V \sigma_{ij}^2(r) \epsilon_{ij}^1(r) dV \quad (A1.5)$$

mais puisque $\Sigma^2 = \emptyset$, on a : $I_2 = \emptyset$

En utilisant (II.13), (II.14) dans (II.32) et (II.33)

l'expression

$$\int_V b_{ij}(r) s_{ijkl}(r) B_{klmn}(r) dV \quad (A1.6)$$

s'annule.

L'intégrale I_1 réécrite à partir de (A1.3) et de (A1.6) donne :

$$I_1 = \sum_{kl}^1 \Theta^2 \int B_{ijkl}(r) [s_{ijmn}(r) b_{mn}(r) + \alpha_{ij}(r)] dV \quad (A1.7)$$

Et puisque le tenseur (s_{ijkl}) est symétrique par rapport aux paires (ij) et (kl) , on a à partir de (A1.7), (A1.6) et (A1.4)

$$\alpha_{kl}^{eff} = \frac{B_{ijkl}(r) \alpha_{ij}(r)}{B_{ijkl}(r)} \quad (A1.8)$$

et d'après (II.10), (II.17) et (A1.8) on a :

$$\beta_{ij}^{eff} = \frac{\beta_{kl}(r) A_{ijkl}(r)}{\beta_{kl}(r)} \quad (A1.9)$$

ANNEXE - A2 -

Détermination de T^{II}

Reprenons l'équation (II.36):

$$C_{ijkl}^0 G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0$$

elle montre qu'il ya une relation entre le tenseur de Green G et les modules élastiques du milieu homogène équivalent c^0 .

Par la suite, on utilisera la transformée de fourier de G et on integrera dans l'espace des $\vec{k}$ (conjugué de $\vec{r}$), pour avoir une forme maléable de T^{II}.

Cas général

Le transformée de Fourier de G sera définie par:

$$\tilde{G}_{km}(\vec{k}) = \int G_{km}(\vec{r}) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (A2.1)$$

et sa transformée de Fourier inverse :

$$G_{km}(\vec{r}) = 1 / 8\pi^3 \int \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (A2.2)$$

Dans un repère (R) quelconque les vecteurs $\vec{k}$ et $\vec{r}$ peuvent être représentés en fonction de leurs composantes respectives (k_1, k_2, k_3) et (x_1, x_2, x_3) .

Le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{r}$ s'écrit donc en fonction de ces composantes sous la forme:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \quad (A2.3)$$

(A2.2) se transforme en tenant compte de (A2.3) en :

$$G_{km,1}(\vec{r}) = 1 / 8\pi^3 \int \tilde{G}_{km}(\vec{k}) (-ik_1) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (A2.4)$$

et

$$G_{km,1j}(\vec{r}) = 1 / 8\pi^3 \int -k_1 k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \quad (A2.5)$$

de plus la transformée de Fourier de la fonction de Dirac est donnée par :

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r}) d\vec{r} = 1 \quad (A2.6)$$

et la transformée inverse :

$$\delta(\vec{k}) = 1/8 \pi^3 \int e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (A2.7)$$

En tenant compte de (A2.5) et (A2.7), l'équation (II.36) rappelée précédemment prend la forme :

$$C_{ijkl}^0 1/8 \pi^3 \int -k_1 k_j \tilde{G}_{km} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} + \delta_{im} 1/8 \pi^3 \int e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} = 0 \quad (A2.8)$$

ce qui permet d'écrire :

$$C_{ijkl}^0 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) k_1 k_j = \delta_{im} \quad (A2.9)$$

or:

$$T_{klmj}^{II} = -1/2 [G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') - G_{lm,kj}(\vec{r}-\vec{r}')] = t_{(kl)mj}^{II} \quad (A2.10)$$

avec

$$t_{klmj}^{II} = - \int_{V^I} \int_{V^I} G_{km,lj}(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' d\vec{r} \quad (A2.11)$$

et d'après (A2.5) on a:

$$t_{klmj}^{II} = \int_{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} 1/8\pi^3 k'_l k'_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r}' d\vec{r} \quad (A2.12)$$

Cas Où l'inclusion I est sphérique

Dans le repère R^I d'origine O (centre de l'inclusion sphérique), ayant pour axes les trois diamètres orthogonaux de la sphère (1) les composantes du vecteur $\vec{k}$, s'écrivent en fonction ses cosinus directeurs $(X_j)_{j=1,3}$ et de son module k de la manière suivante:

$$\forall j=1,2,3 \quad k_j = k X_j \quad (A2.13)$$

avec

$$X_1 = \sin \theta \cos \phi, \quad X_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad X_3 = \cos \theta \quad (A2.14)$$

k, θ, ϕ coordonnées sphériques de $\vec{k}$, et tel que :

$$k = |\vec{k}| \in [0, +\infty], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]$$

alors (A2.9) s'écrit :

$$C_{ijkl}^0 X_l X_j (k^2 \tilde{G}_{ik}) = \delta_{im} \quad (A2.15)$$

en posant

$$C_{ijkl}^0 X_l X_j = M_{ik} \quad (A2.16)$$

alors (A2.15) devient :

$$M_{ik} (k^2 \tilde{G}_{km}) = \delta_{im} \quad (A2.17)$$

ou encore

$$k^2 \tilde{G}_{km} = (M_{km})^{-1} \quad (A2.18)$$

Puisque le tenseur M ne dépend que de la direction de $\vec{k}$, c'est - à - dire des angles fixant cette direction, le tenseur $(k^2 \tilde{G}_{km})$ lui même dépend uniquement de ces angles θ et ϕ .

et comme l'élément de volume $d\vec{k}$ s'écrit :

$$d\vec{k} = k^2 \sin \theta d\theta d\phi dk \quad (A2.19)$$

les composantes du tenseur t^{II} s'écrivent sous la forme intégrale suivante :

$$t_{klmj}^{II} = 1/8 \pi^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} X_l X_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\phi \int_0^{+\infty} k^2 dk \int_{V^I} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \int_{V^I} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (A2.20)$$

Si on choisit l'axe x_3 suivant $\vec{k}$ et l'origine O au centre de l'inclusion I (supposée de rayon a) on a:

$$\int_{V^I} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = 4\pi/k^3 [\sin(ak) - ak \cos(ak)] \quad (A2.21)$$

de plus

$$\int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} = \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (A2.22)$$

on a alors:

$$t_{klmj}^{II} = 2/\pi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} X_1 X_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{(\sin ka - ak \cos ak)^2}{k^4} dk \quad (A2.23)$$

L'intégrale portant sur $|\vec{k}|$ est convergente au voisinage de 0 et de l' $+\infty$, un calcul par la méthode des intégrales trigonométriques ou la méthode des résidus nous permet d'écrire:

$$\int_0^{+\infty} (\sin ak - ak \cos ak)^2 dk/k^4 = \pi/6 a^3 \quad (A2.24)$$

et alors:

$$t_{klmj}^{II} = a^3/3 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} X_1 X_j (k^2 \tilde{G}_{km}) d\varphi \quad (A2.25)$$

où $(k^2 \tilde{G}_{km})$ est obtenue à partir de (A2.18).

finalement T^{II} pour une inclusion sphérique est :

$$T_{klmj}^{II} = a^3/6 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} (X_1 X_j k^2 \tilde{G}_{km} + X_k X_j k^2 \tilde{G}_{lm}) d\varphi \quad (A2.26)$$

Cas où l'inclusion I est ellipsoïdale

L'ellipsoïde I est définie par ses trois demi-axes a_1 , b_1 , c_1 (a_1 le plus grand). Le passage de l'inclusion sphérique de rayon a_1 à I se fait par le changement de variable suivant:

$$\begin{matrix} \vec{r} \\ R^I \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} \vec{R} \\ R^I \end{matrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} x_1 \\ \frac{a_1}{b_1} x_2 \\ \frac{a_1}{c_1} x_3 \end{matrix}$$

et

(A2.27)

$$\begin{matrix} \vec{k} \\ R^I \end{matrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{matrix} \vec{K} \\ R^I \end{matrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} x_1 \\ \frac{b_1}{a_1} k_2 \\ \frac{c_1}{a_1} k_3 \end{matrix}$$

ou R^I est le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde I.

Le changement de variable précédent est donc tel que:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{K} \cdot \vec{R} \quad (A2.28)$$

par ailleurs, on peut représenter le changement effectué par les formules de passage suivantes :

$$\forall i=1,2,3 \quad k_i = \Phi_{it} K_t \text{ avec } (\Phi_{it}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1/c_1 \end{bmatrix} \quad (A2.29)$$

$$\forall j=1,2,3 \quad x_j = \Omega_{js} K_s \text{ avec } (\Omega_{js}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1/a_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1/a_1 \end{bmatrix} \quad (A2.30)$$

en ce qui concerne les éléments de volumes on a:

$$d\vec{r} = \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} \quad \text{et} \quad d\vec{k} = \frac{a_1^2}{b_1 c_1} d\vec{K} \quad (A2.31)$$

En notant V_I^t le volume de V_I transformé et V_K^t l'espace de $\vec{k}$ transformé, l'expression (A2.112) du tenseur t_{klmj}^{II} dans le cas

d'une inclusion ellipsoïdale s'écrit :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_I^t} \int_{V_I^t} \int_{V_{\vec{k}}^t} \Phi_{lt}^k \Phi_{jt}^k \Phi_{\mu}^k \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} d\vec{R}' d\vec{k} \quad (A2.26)$$

$\tilde{G}_{km}(\vec{k})$ étant défini cette fois ci par les relations qu'on déduit de (II.36) et (A2.27) :

$$C_{ijkl}^0 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) K_t \Phi_{lt}^k \Phi_{jt}^k = \delta_{im} \quad (A2.33)$$

et en posant

$K_t = K X_t$ où K est le module de $\vec{k}$ et X_t les cosinus directeurs tels que :

$$\begin{aligned} X_1 &= \sin \theta \cos \varphi \\ X_2 &= \sin \theta \sin \varphi \\ X_3 &= \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{alors si } [C_{ijkl}^0 \Phi_{lt}^k \Phi_{jt}^k X_t X_\mu] = M_{ki} \quad (A2.34)$$

et à partir de (A2.33) :

$$K^2 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) = M_{km}^{-1} \quad (A2.35)$$

on déduit de (A2.32) :

$$t_{klmj}^{II} = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_I^t} \int_{V_I^t} \int_{V_{\vec{k}}^t} K^2 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) X_t \Phi_{lt}^k X_\mu \Phi_{jt}^k e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} \frac{b_1 c_1}{a_1^2} d\vec{R} d\vec{R}' d\vec{k}$$

V_I^t est la sphère de rayon a_1 dont le centre est celui de l'ellipsoïde I ; on peut donc pour intégrer sur $\vec{R}$, $\vec{R}'$ et $|\vec{k}|$ utiliser le résultat obtenu pour une inclusion sphérique (A2.25) et obtenir :

$$t_{klmj}^{II} = a_1 b_1 c_1 / 3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} k^2 \tilde{G}_{km} x_t \Phi_l t_\mu \Phi_{j\mu} d\phi \quad (A2.36)$$

La composante T_{klmj}^{II} est obtenue , en posant la partie symetrique de t_{klmj}^{II} tel que:

$$T_{klmj}^{II} = 1/2 [t_{klmj}^{II} + t_{lkmj}^{II}] \quad (A2.37)$$