



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE de METZ

# THESE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

presentee a l'universite de Metz

par

**RADHI ABDELMOULA**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

## **FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES DEFAUTS**

soutenue publiquement le 12 JUIN 1989 devant la commission d'examen composee de :

**C.FRESSENGEAS**

**J.F. JULLIEN**            **Rapporteur**

**G.MAUGIN**              **Rapporteur**

**M.POTIER-FERRY**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420316 2

**Laboratoire de Physique et Mecanique des Materiaux**

**U. A. au CNRS n 1215**

**Faculte des sciences Ile du saulcy 57045 Metz Cedex 01**

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE de METZ

# THESE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

presentee a l'universite de Metz

par

**RADHI ABDELMOULA**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

**FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION  
INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES DEFAUTS**

soutenue publiquement le 12 JUIN devant la commission d'examen composee de :

**C.FRESSENGEAS**

**J.F. JULLIEN** Rapporteur

**G.MAUGIN** Rapporteur

**M.POTIER-FERRY**

**C.STOLZ**

**N.WAECKEL**

Laboratoire de Physique et Mecanique des Materiaux

U. A. au CNRS n 1215

Faculte des sciences Ile du saulcy 57045 Metz Cedex 01

10 MAI 1990

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

UNIVERSITE de METZ

# THESE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

presentee a l'universite de Metz

par

RADHI ABDELMOULA

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE  
-METZ

N° inv.	19890265
Cote	S/M3 89/13
Loc	Magasin

## FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES DEFAUTS

soutenue publiquement le 12 JUIN devant la commission d'examen composee de :

C.FRESSENGEAS

J.F. JULLIEN

Rapporteur

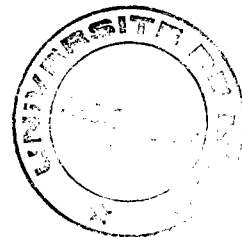
G.MAUGIN

Rapporteur

M.POTIER-FERRY

C.STOLZ

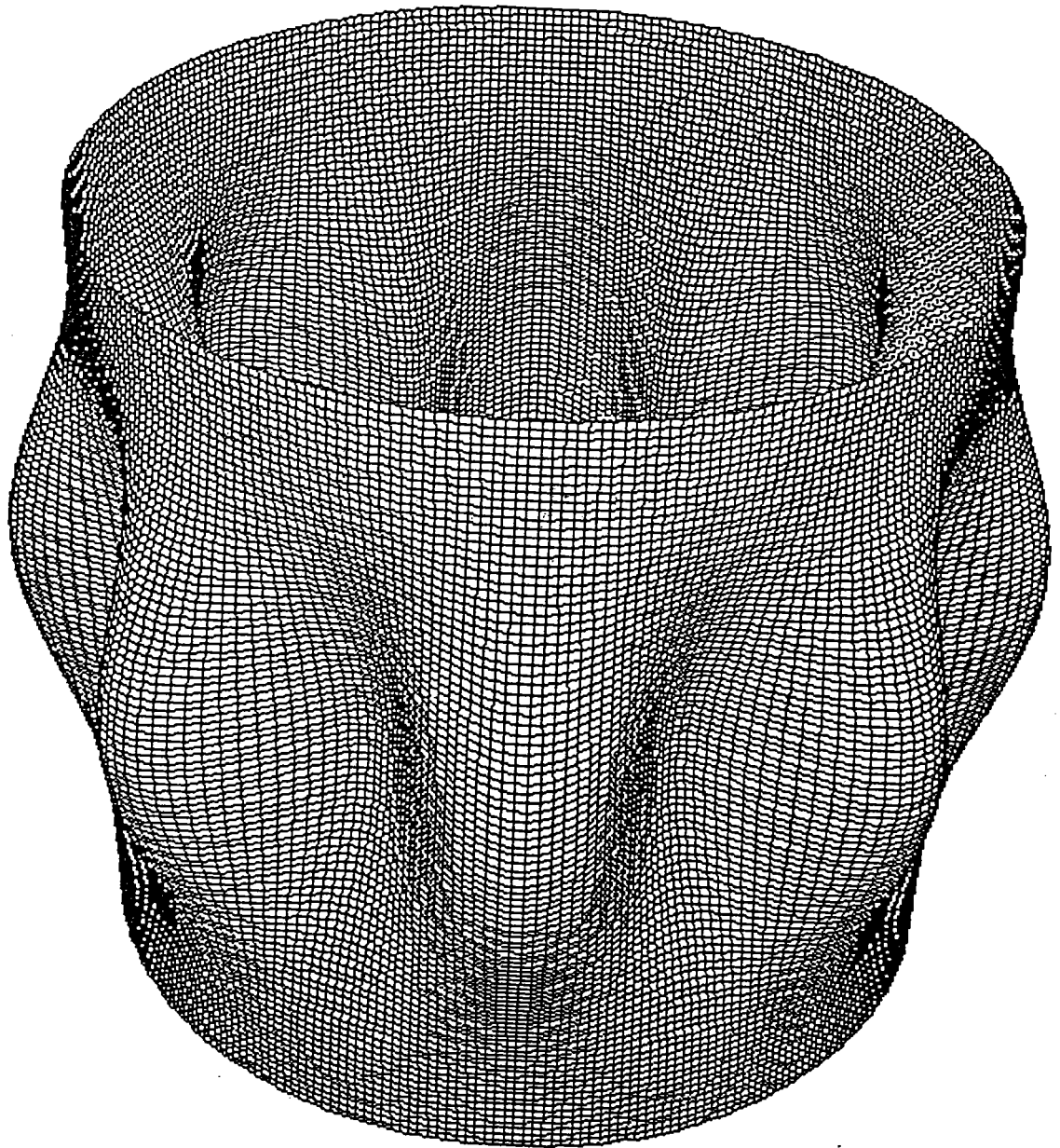
N.WAECKEL



Laboratoire de Physique et Mecanique des Materiaux

U. A. au CNRS n 1215

Faculte des sciences Ile du saulcy 57045 Metz Cedex 01



*Ce travail a été réalisé à l'université de Metz, au sein du groupe calcul des structures au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, sous la direction de Monsieur Michel Potier-Ferry.*

*Ma reconnaissance va d'abord à Michel, qui, par ses efforts patients et sa totale disponibilité, m'a permis de mener à bien cette thèse. Grâce à son enthousiasme et sa foi en la recherche en mécanique, qu'il a su me faire partager, j'ai toujours trouvé auprès de lui des conditions exceptionnelles de recherche. Puisse ce mémoire lui apporter toute satisfaction, ce serait pour moi la meilleure manière de lui témoigner ma gratitude.*

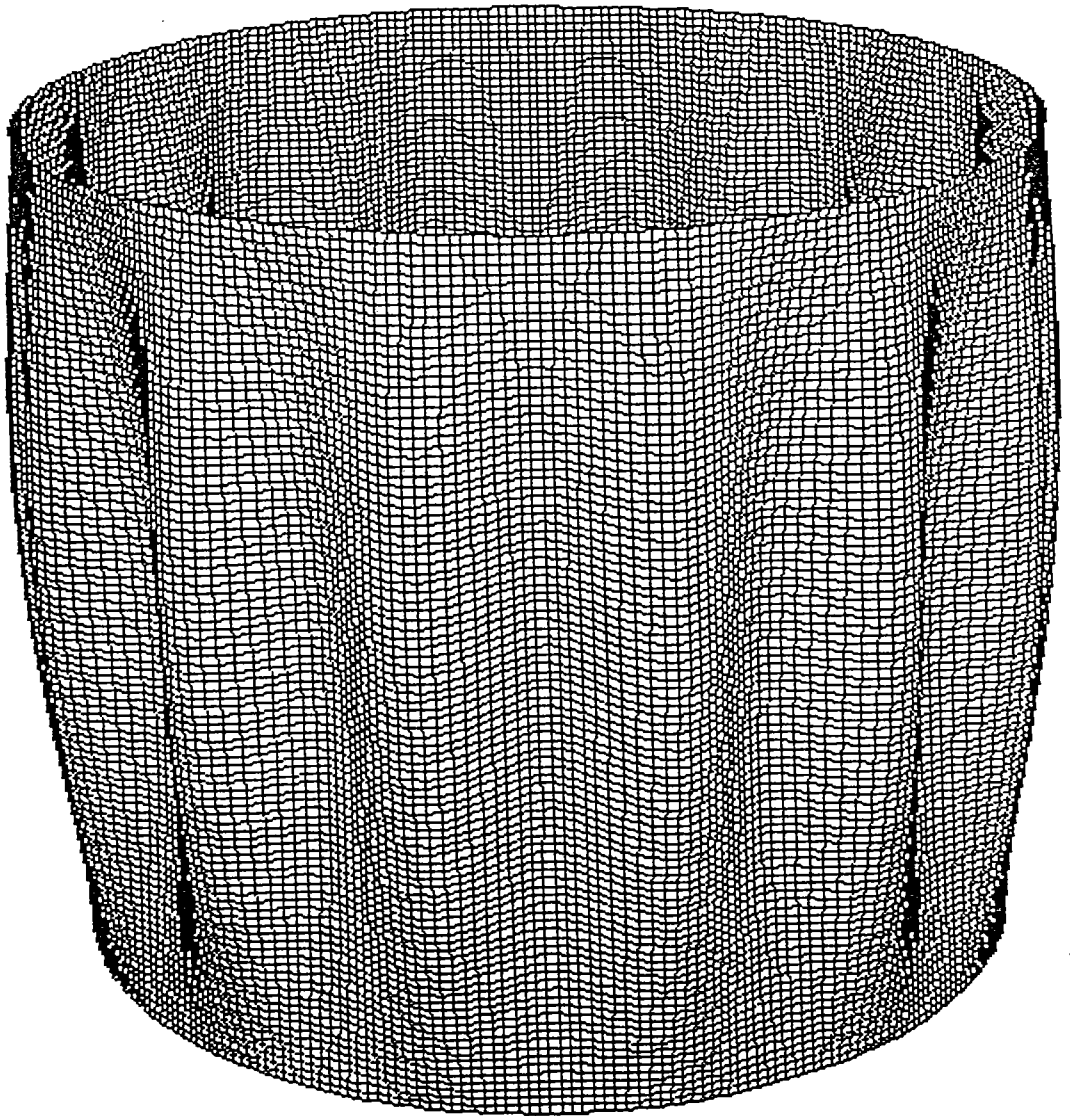
*Monsieur le Professeur J.F.Jullien m'a fait l'honneur d'être à la fois rapporteur et président du jury; je l'en remercie vivement.*

*Qu'il me soit permis de remercier également Monsieur le Professeur G.Maugin d'avoir accepté d'être rapporteur.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur C.Fressengeas et Messieurs N.Waeckel et C.Stolz pour leur participation au jury.*

*Que tous mes collègues et amis du laboratoire trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements, en particulier, N.Damil, B.Cochelin et J-C.Grandidier pour les fructueuses discussions que j' ai pu avoir avec eux.*

*Enfin je remercie Madame Marcelet et Lili Sténo d'avoir supporté la frappe de ce travail.*



# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I : Rappels

- I.1. Exemples élémentaires des bifurcations et d'instabilités
  - I.1.1. Modèle élémentaire de flambage
    - I.1.1.a. Points de bifurcation
    - I.1.1.b. Points limites
  - I.1.2. Effets des imperfections
  
- I.2. Théorie classique du post-flambage
  - I.2.1. Rappels de stabilité élastique
  - I.2.2. Critère de l'énergie
  - I.2.3. Réduction de Lyapunov et Schmidt
  - I.2.4. Bifurcation à partir de la courbe fondamentale
  - I.2.5. Influence des défauts géométriques
  - I.2.6. Exemple : poutre sur une fondation élastique
  
- I.3. Théorie de bifurcation cellulaire
  - I.3.1. Les limites de la théorie classique du post-flambage
  - I.3.2. Conséquence de l'équation d'amplitude
  - I.3.3. Application au problème modèle de la poutre
  
- I.4. Modèles des coques cylindriques
  - I.4.1. Hypothèses et approximations
  - I.4.2. Coques de Donnell
  
- I.5. Couche limite et perturbation singulière
  - I.5.1. Un exemple de couche limite en mécanique des fluides
  - I.5.2. Un exemple de perturbation singulière
  - I.5.3. Conclusion en vue d'une application aux problèmes de flambage des coques sous pression

### CHAPITRE II : Effets des conditions aux limites sur le flambage élastique des coques cylindriques sous pression

- II.1. Introduction
- II.2. Calcul des pressions de flambage par des méthodes heuristiques
  - II.2.1. Première dérivation des équations approchées. Origine mathématique de la couche limite
  - II.2.2. Dérivation des équations approchées à partir de l'hypothèse d'un mode inextensionnel
  - II.2.3. Influence des conditions aux limites sur le mode de flambage



## II.3. Calcul des pressions de flambage par une méthode asymptotique

II.3.1. Présentation de la méthode asymptotique: application au problème de flambage des coques sous pression .

II.3.2. Développement intérieur

II.3.3. Développement asymptotique du mode dans la couche limite

II.3.4. Traitement des conditions aux limites

II.3.5. Expression analytique des courbes de stabilité neutre

II.3.6. Formes des courbes de stabilité neutre

II.3.7. Limite de validité et précision des formules approchées

II.3.8. Discussion

## II.4. Cas des faibles nombres d'onde $n$

## II.5. Conclusions

II.5.1. Formules de dimensionnement

II.5.2. Extensions et perspectives

## CHAPITRE III : Calcul du post-flambage des coques cylindriques sous pression

III.1. Diverses méthodes de calcul de l'influence des défauts

III.2. Etude de l'équation d'amplitude : calcul de réduction de la charge critique

III.3. Calcul des coefficients de l'équation d'amplitude

III.3.1. Valeur asymptotique de  $b$

III.3.1.a. Cas de la condition aux limites  $N_x = W = 0$

III.3.1.b. Cas de la condition aux limites  $U = W = 0$

III.3.2. Calcul de  $b$  par éléments finis

III.3.3. Calcul du coefficient de modulation  $\gamma$

III.4. Expression asymptotique de l'équation d'amplitude

III.5. Calcul de la réduction de la charge critique à partir de l'équation d'amplitude

III.5.1. Cas d'un défaut modal

III.5.2. Cas d'un défaut localisé

III.6. Conclusion

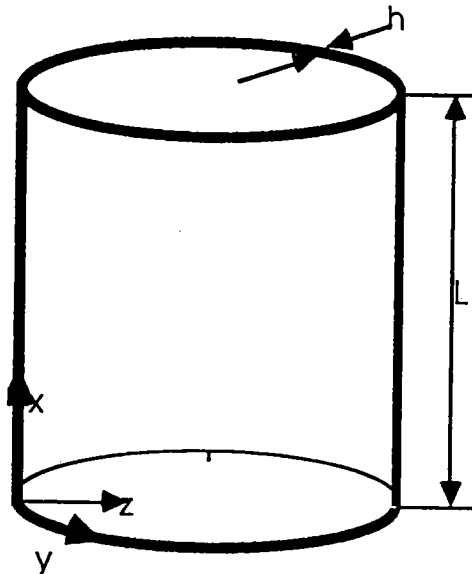
## CHAPITRE IV : Conclusion générale

## TABLE DES ANNEXES

1. Adimensionnalisation
2. Analyse asymptotique à l'intérieur de la coque
3. Analyse asymptotique dans la couche limite  
exemple de la solution avant flambage
4. Analyse asymptotique dans la couche limite appliquée  
aux équations du flambage (rotations avant flambage  
négligées)
5. Analyse asymptotique dans la couche limite appliquée  
aux équations du flambage en tenant compte des  
rotations avant flambage
6. Analyse asymptotique à l'intérieur des coques longues  
(faible nombre d'onde)
7. Calculs de flambage par éléments finis
8. Calculs de post-flambage par éléments finis
9. Calcul analytique du post-flambage avec défaut localisé

NOTATIONSVariables physiques

U	déplacement axial
V	déplacement circonférentiel
W	déplacement radial ou mode de flambage
X	coordonnée axiale
Y	coordonnée circonférentielle

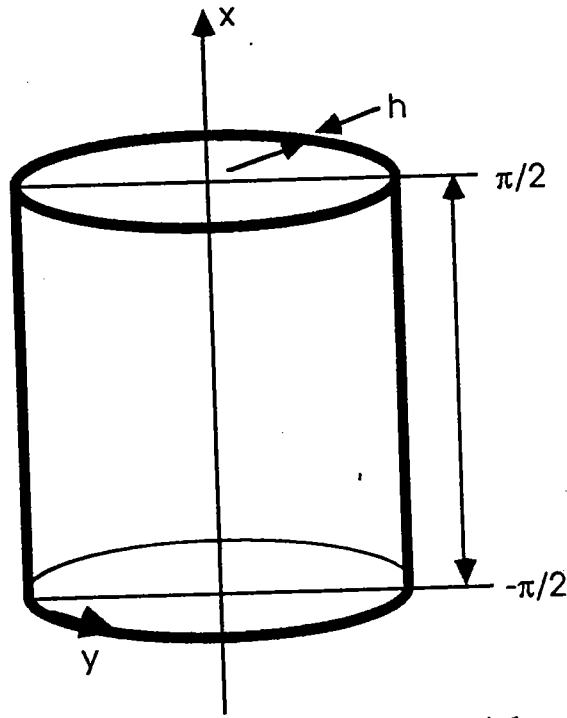


L	longueur de la coque
R	rayon de la coque
h	épaisseur de la coque
F	fonction de la contrainte
$N_x$	contrainte axiale
$N_y$	contrainte circonférentielle
$N_{xy}$	contrainte de cisaillement
$M_x$	moment suivant x
$M_y$	moment suivant y
$M_{xy}$	moment de torsion
P	pression
n	nombre d'onde circonférentielle (entier)
E	module de Young
$\nu$	coefficient de Poisson

Variables sans dimension

x  
y

coordonnée axiale  
coordonnée circonférentielle



u  
v  
w  
 $n_x$   
 $n_y$   
 $n_{xy}$   
 $m_x$   
 $m_y$   
 $m_{xy}$   
f

déplacement axial  
déplacement circonférentiel  
déplacement radial ou mode de flambage  
contrainte axiale  
contrainte circonférentielle  
contrainte de cisaillement  
moment suivant x  
moment suivant y  
moment de torsion  
fonction de contrainte

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1-\nu^2}$$

paramètre de Batdorf

$$\eta = \frac{\Pi}{12^{1/4} \sqrt{Z}}$$

paramètre géométrique équivalent au paramètre de Batdorf et qui est petit pour les coques très minces ou longues

$$\lambda = \frac{3^{5/4}}{2} \frac{P}{E} \frac{(R/h)^2}{\eta} \sqrt{1-\nu^2}$$

paramètre de pression

$$\lambda^* = 12 \frac{PR^3(1-\nu^2)}{Eh^3}$$

paramètre de pression

$$K = \frac{nL}{\Gamma R}$$

nombre d'ondes circonférentielles

$$k = K\sqrt{\eta}$$

nombre d'ondes circonférentielles

$$k^* = \frac{KR}{L}$$

nombre d'ondes circonférentielles

### Notations liées à la théorie du post-flambage

$$b = \frac{-\alpha_{30}}{\alpha_{11}}$$

a	facteur de sensibilité aux défauts
a <sub>0</sub>	amplitude du mode de flambage
a <sub>1</sub>	amplitude du défaut réparti
w <sub>1</sub>	amplitude du défaut localisé
$\tilde{w}_1$	défaut localisé
$\tilde{w}_1$	défaut localisé
$\gamma$	coefficient de modulation d'amplitude
$\lambda', \lambda''$	dérivées première et seconde de la courbe de stabilité neutre

Conditions aux limites étudiées ( C : clamped S : simply supported )

$$C1 : U = V = W = W_{,x} = 0, \quad S1 : W = W_{,xx} = U = V = 0$$

$$C2 : W = W_{,x} = U = N_{xy} = 0, \quad S2 : W = W_{,xx} = U = N_{xy} = 0$$

$$C3 : W = W_{,x} = N_x = V = 0, \quad S3 : W = W_{,xx} = N_x = V = 0$$

$$C4 : W = W_{,x} = N_x = N_{xy} = 0, \quad S4 : W = W_{,xx} = N_x = N_{xy} = 0$$

## INTRODUCTION

La théorie des structures minces (coques, plaques...) est utilisée dans la modélisation de nombreuses structures industrielles. On rencontre ces structures dans les domaines nucléaires, aéronautiques et aérospatiaux mais également pour certaines constructions mécaniques et civiles (plates-formes pétrolières marines, boîtes de conserves...). Du fait de l'importance de ces structures, des recherches sont menées depuis le début du siècle dans le but d'étudier la stabilité des coques cylindriques sous divers types de chargement.

Cependant les premières solutions analytiques sont limitées à certains types de conditions aux limites et de chargements [36]. Le développement des ordinateurs et des méthodes numériques a permis de construire des logiciels en vue de résoudre le problème de stabilité c'est-à-dire de calculer la charge et le mode de flambage théorique avec une bonne précision et sans restriction [4] [35] [39] [11]. Toutes ces études numériques montrent l'effet important des conditions aux limites et le rôle qu'elles peuvent jouer sur la valeur et l'aspect de la charge de flambage et du mode de flambage.

Dans les années 1930-40, on a constaté un écart entre les observations expérimentales et les résultats théoriques de la stabilité linéaire. Une idée a germé : cette différence était due à l'effet des imperfections. En 1945 Koiter dans sa thèse [20] a développé la théorie générale du post-flambage des structures élastiques. Il a établi que les imperfections et les non-linéarités peuvent réduire d'une façon significative la charge critique. Il a ainsi expliqué les différences observées entre la théorie linéaire et l'expérience. Plus tard, des variantes de l'approche de Koiter ont été développées sans que les fondements de sa théorie soient modifiés [8] [10]. Cette théorie est à la base de nombreuses applications [9] [39] [5]. Elle consiste à déterminer les coefficients de l'équation non linéaire qui gouverne l'évolution de l'amplitude  $a$  du mode de flambage en fonction de la charge. En l'absence de défauts et en première approximation, les effets non-linéaires sont pris en compte par le seul coefficient  $b$  reliant l'incrément de charge et l'amplitude :

$$\lambda - \lambda_c = ba^2 + 0(a^3)$$

Après introduction d'un défaut d'amplitude  $a_0$ , pour les structures sensibles aux défauts, cette théorie permet aussi de calculer la réduction de charge critique :

$$\frac{\lambda}{\lambda_c} = 1 - c \frac{a_0^{2/3}}{a_0} + 0(a_0)$$

La théorie de Koiter n'a pourtant pas résolu d'une façon définitive le problème des imperfections dans les coques. Ainsi dans le cas des coques en compression axiale, il existe une large différence entre la théorie et l'expérience [37] [38]. La charge de flambage expérimentale dépasse de 15 à 60% la charge de Koiter donnée par la formule ci-dessus. Il serait donc nécessaire dans ce cas de pousser plus loin les développements asymptotiques. Par contre dans le cas de la pression externe, la théorie de Koiter est relativement satisfaisante. Cela est dû à une moindre sensibilité de cette sollicitation aux imperfections initiales. La réduction de la charge critique calculée à partir de cette théorie est alors en assez bon accord avec l'expérience.

Une analyse récente en post-flambage des structures à grand rapport d'aspect a élargi le domaine d'application de la théorie non-linéaire de Koiter et a permis d'étudier un flambage cellulaire, c'est-à-dire des modes de flambage à peu près périodiques [28] [12] [13]. Un autre avantage de cette théorie est de permettre une meilleure prise en compte des défauts géométriques et de leur influence sur la charge de flambage notamment pour les défauts localisés [2] [3] [30]. Les premiers développements de cette méthode ont été utilisés dans les problèmes de mécanique des fluides [24] [31].

Dans cette thèse l'analyse du flambage cellulaire est appliquée à l'étude des coques cylindriques sous pression.

L'objectif est d'obtenir à l'aide des méthodes mathématiques des expressions simples de la pression de flambage utiles au dimensionnement du flambage des coques sous pression. Nous utiliserons pour cela : les perturbations singulières, la théorie de la bifurcation et les échelles multiples. Les formules proposées tiennent compte des conditions aux limites et des défauts géométriques de formes diverses. Cette étude comprend deux parties : une étude linéaire et une non linéaire.

Le premier chapitre est une présentation des principales théories et méthodes qui seront utilisées par la suite.

Le deuxième chapitre consiste à analyser le rôle des conditions aux limites sur le mode et la charge de flambage. Divers auteurs [34] [38] ont remarqué le rôle prépondérant de la condition axiale et la faible influence de la condition sur la rotation (encastrement ou appui simple). Notre approche consiste à utiliser une méthode asymptotique pour comprendre et clarifier les effets de conditions aux limites sur le mode de flambage. Nous avons montré l'existence d'une couche limite qui peut modifier fortement la pression de flambage. On se ramène ainsi à l'étude d'un problème de perturbation singulière. Le petit paramètre de perturbation est surtout lié à la géométrie de la coque. C'est l'inverse du paramètre de Batdorf :

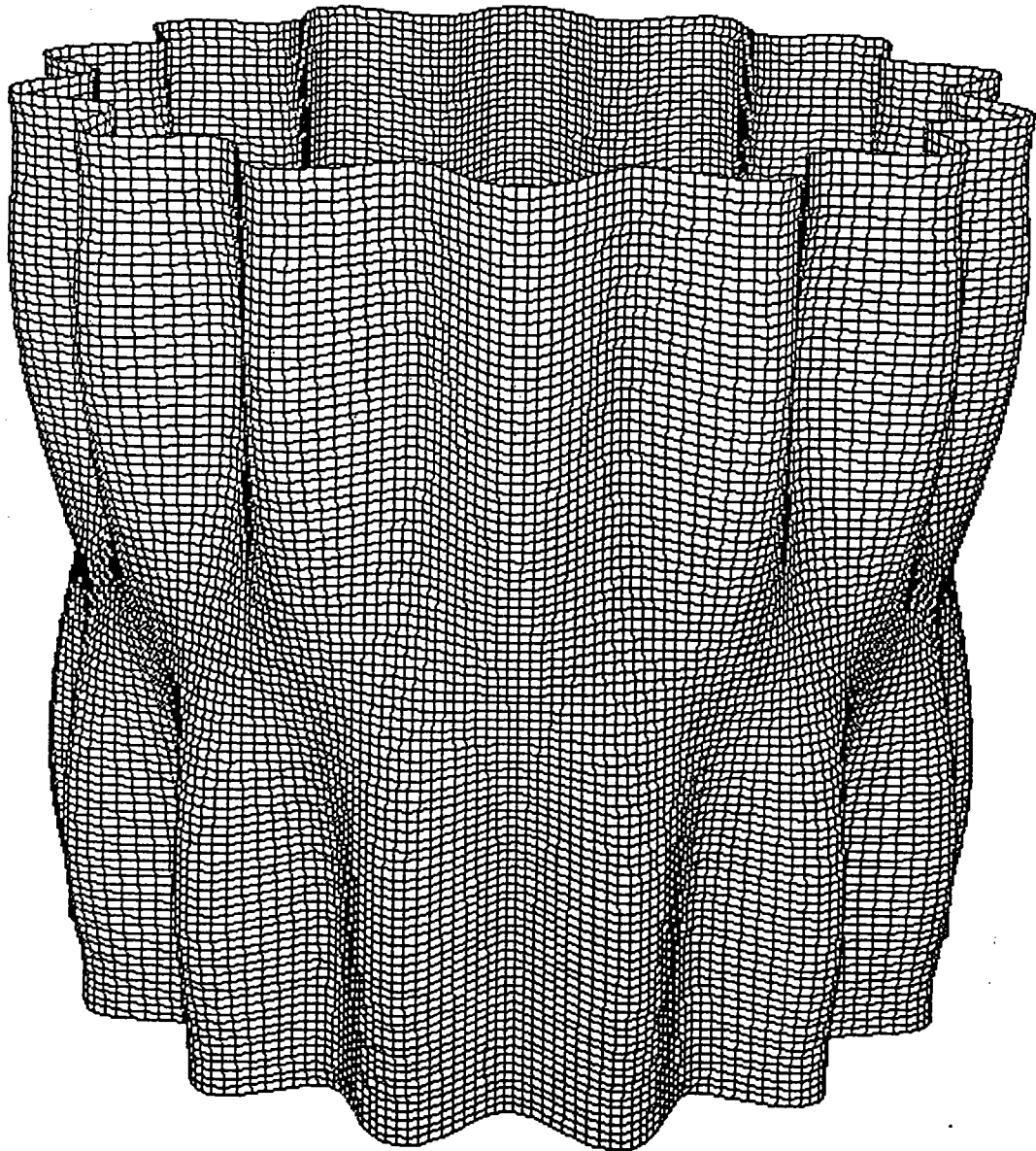
$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1-\nu^2}$$



Ceci nous a permis d'expliquer le rôle paradoxal des conditions aux limites. Nous avons aussi obtenu des expressions simples de charge de flambage pour différentes conditions aux limites.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème non linéaire. Nous utilisons ici les théories connues du post-flambage ainsi que les résultats analytiques du chapitre précédent. Pour cela nous avons calculé la valeur des coefficients de l'équation d'amplitude pour différentes conditions aux limites en fonction d'un paramètre géométrique de la coque. L'équation d'amplitude proposée tient compte de la modulation d'amplitude et généralise donc l'équation de Koiter. La réduction de la charge critique causée par un défaut localisé et un défaut réparti se déduit facilement.

Tout au long de ce travail nous avons confronté le calcul numérique "exact" et la méthode asymptotique afin de tester la validité des résultats analytiques.



# CHAPITRE I

## RAPPELS

## I.1. Exemples élémentaires des bifurcations et d'instabilités

Dans les théories d'instabilité, en particulier le flambage, des modèles très simples peuvent illustrer certaines caractéristiques essentielles de systèmes structurels plus compliqués.

Nous allons tout d'abord étudier des modèles simples afin de définir les concepts de base : point de bifurcation, point limite, stabilité, sensibilité aux défauts. Au deuxième paragraphe, nous aborderons la théorie générale que nous illustrerons par l'exemple d'une poutre sur une fondation élastique.

### I.1.1. Modèle élémentaire de flambage

#### I.1.1.a. Points de bifurcation [10]

Il s'agit d'une barre rigide verticale de longueur  $L$  dont l'extrémité supérieure est soumise à une force de module constant, qui reste dans la direction verticale (charge conservative). A la base, un ressort élastique exerce un moment de rappel  $f(a)$  non linéaire :

$$f(a) = K_1 a + K_2 a^2 + K_3 a^3 + \dots$$

$$K_1 > 0$$

(1-1)

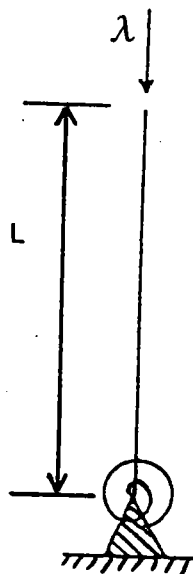


Fig 1-1 :

L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$I \frac{d^2 a}{dt^2} + f(a) - \lambda L \sin a = 0 \quad (1-2)$$

A l'équilibre la branche fondamentale  $a = 0$  est une solution de l'équation (1-2) qui perd sa stabilité à la charge critique :

$$\lambda_c = \frac{K_1}{L} \quad (1-3)$$

Dans le plan  $(a, \lambda)$  le point  $(0, \lambda_c)$  est un point de bifurcation (charge critique d'Euler). On détermine l'évolution de la structure après flambage, qui est caractérisée par les coefficients,

$$C_2 = \frac{K_2}{L}, \quad C_3 = \frac{K_3}{L} + \frac{\lambda_c}{6};$$

Après développement en  $a$  et en  $\lambda - \lambda_c$ , l'équation d'équilibre s'écrit :

$$-(\lambda - \lambda_c) a + C_2 a^2 + C_3 a^3 + \text{t.o.s.} = 0 \quad (1-4)$$

où les termes d'ordre supérieur (t.o.s.) s'écrivent sous la forme:

$$\text{t.o.s.} = 0 (a^4) + 0 (a^3 (\lambda - \lambda_c))$$

L'énergie potentielle de la branche bifurquée s'écrit :

$$P(a, \lambda) = L \left\{ -(\lambda - \lambda_c) \frac{a^2}{2} + C_2 \frac{a^3}{3} + C_3 \frac{a^4}{4} + \text{t.o.s.} \right\} \quad (1-5)$$

En envisageant 3 cas  $C_2 \neq 0, C_3 = 0$ ,  $C_2 = 0, C_3 > 0$ ,  $C_2 = 0, C_3 < 0$ , nous retrouvons les 3 types de comportement du post-flambage (Fig.1-2 et 1-3).

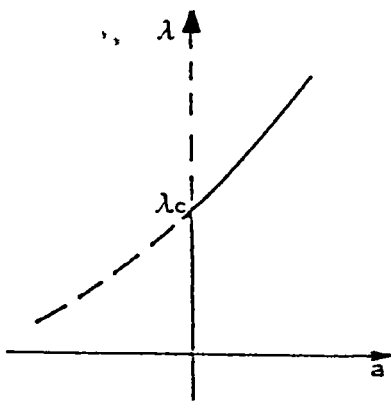


Fig 1-2-a

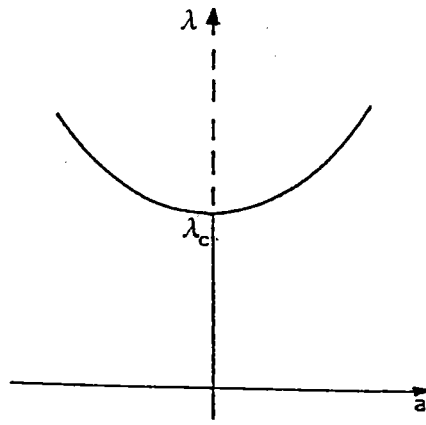


Fig 1-2-b

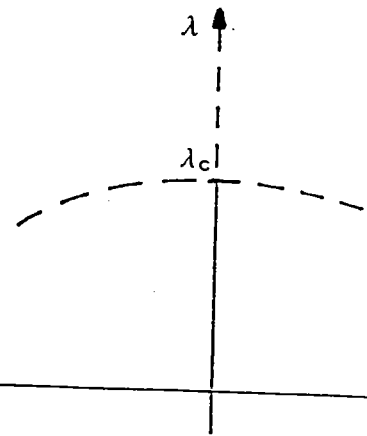


Fig 1-2-c

Fig 1-2 Courbe amplitude -charge pour les différents cas de points de bifurcation

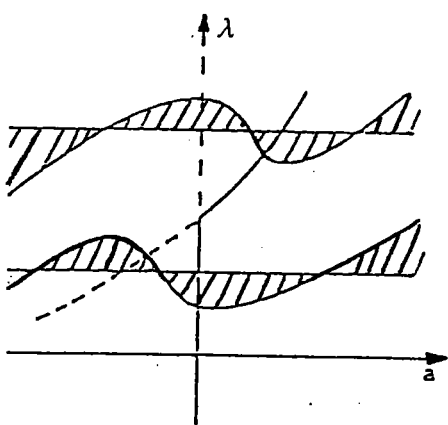


Fig 1-3-a

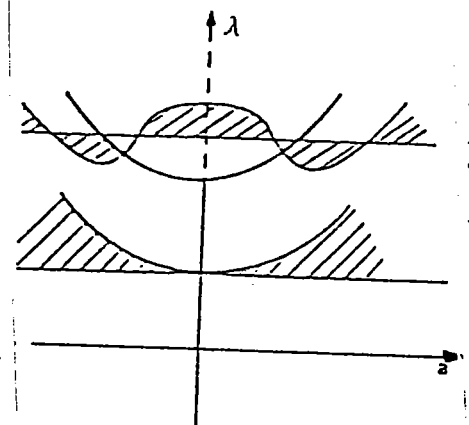


Fig 1-3-b

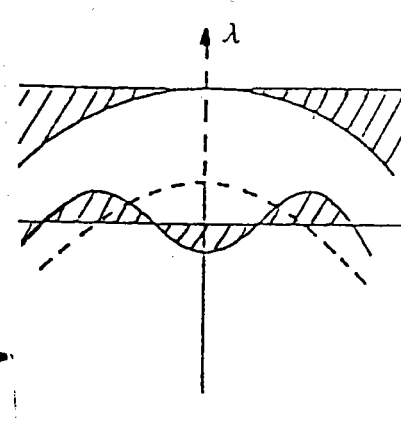


Fig 1-3-c

Fig 1-3: Energie potentielle avant et apres la charge critique

Les figures 1-2-a et 1-3-a concernent des structures non symétriques, celles-ci sortent du cadre général de ce travail. Nous ne traiterons donc pas ce cas par la suite.

Les figures 1-2-b et 1-3-b représentent le comportement typique d'une plaque en compression. La branche bifurquée est un état d'équilibre stable. On note que l'énergie potentielle (1-5) est invariante par l'opérateur de symétrie  $S$  tel que :

$$Sa = -a$$

(1-6)

et que la bifurcation est accompagnée par une rupture de symétrie du système (fig. 1-4)

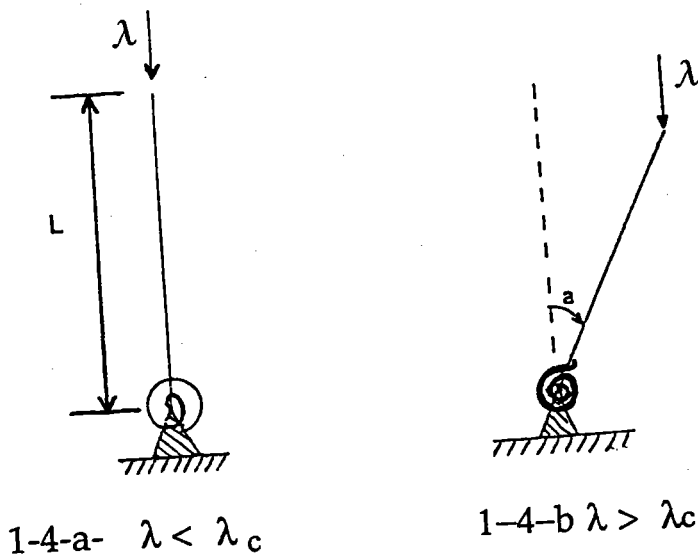


Fig1-4 :

- 1-4-a - la structure est symétrique par rapport à l'axe x  
 1-4-b - rupture de symétrie, la poutre est déviée dans l'une des 2 directions +a ou -a

Les figures 1-2-c et 1-3-c décrivent les deux phases d'équilibre d'une coque mince ayant une symétrie de révolution sous l'action d'un chargement de révolution - ex : pression, compression axiale...  
 Un premier équilibre dit fondamental apparaît et possède les mêmes propriétés de symétrie que le chargement jusqu'au point de bifurcation où la coque prend une forme flambée en perdant cette symétrie. Ce deuxième équilibre est instable et après un processus dynamique, on peut atteindre une configuration finale différente de la configuration symétrique.

#### I.1.1.b. Point limite

Pour bien étudier ce cas nous allons introduire la notion de point limite. Pour cela on considère un deuxième modèle [29] (Fig. 1-5)

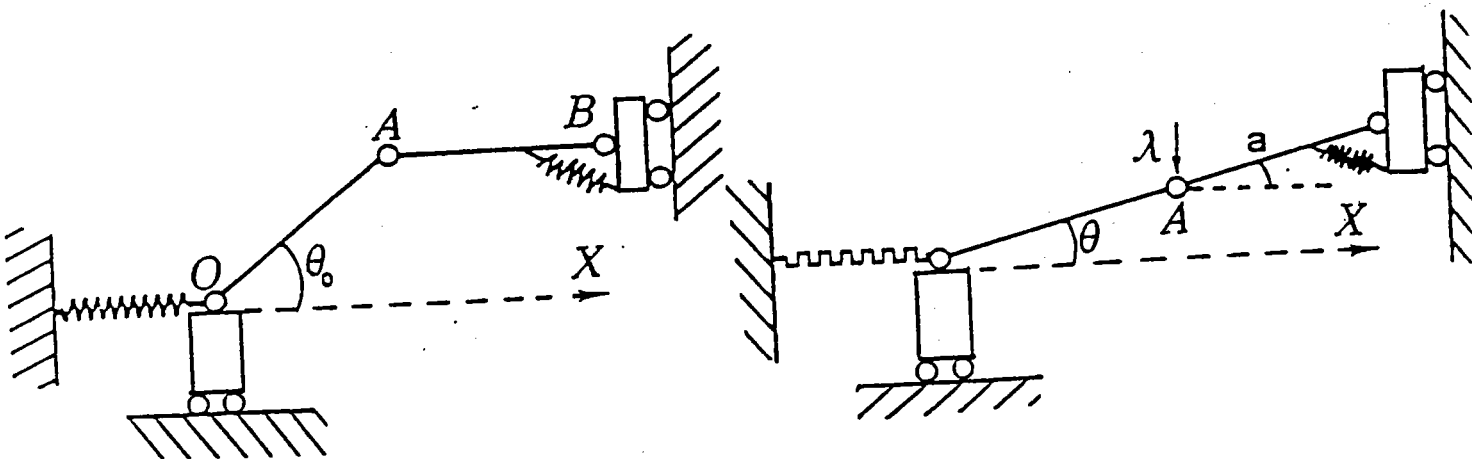


Fig 1-5 : Modèle de l'arc

Un arc est modélisé par deux structures rigides  $OA = 1$  et  $OB = L$ .  
L'énergie potentielle s'écrit :

$$P(\lambda, a, \Theta) = \frac{Ka^2}{2} + \frac{k}{2} (\Delta l)^2 \lambda l \sin \Theta \quad (1-7)$$

$$\Delta l(a, \Theta) = 1 (\cos \Theta_0 - \cos \Theta) + L (1 - \cos \Theta) \quad (1-8)$$

La structure est symétrique par rapport à  $Ax$  :

$$P(a, \Theta) = P(-a, \Theta)$$

Un état d'équilibre symétrique ( $a=0$ ) peut être obtenu en cherchant les extréma de  $P(\lambda, a, \theta)$  par rapport à  $\theta$  ce qui conduit à l'équation :

$$\lambda = kl (\sin \Theta - \cos \Theta_0 \text{ tang } \Theta) \quad (1-9)$$

L'étude de la stabilité montre qu'il y a deux points limites, un maximum et un minimum sur cette courbe d'équilibres symétriques (Fig. 1-6). Le point où la charge atteint sa valeur maximale ( $\theta_m, \lambda_m$ ) est tel que

$$\cos \Theta_m = (\cos \Theta_0)^{1/3}, \text{ soit } \Delta l_m = -1 (\cos \Theta_0^{1/3} - \cos \Theta_0) \quad (1-10)$$

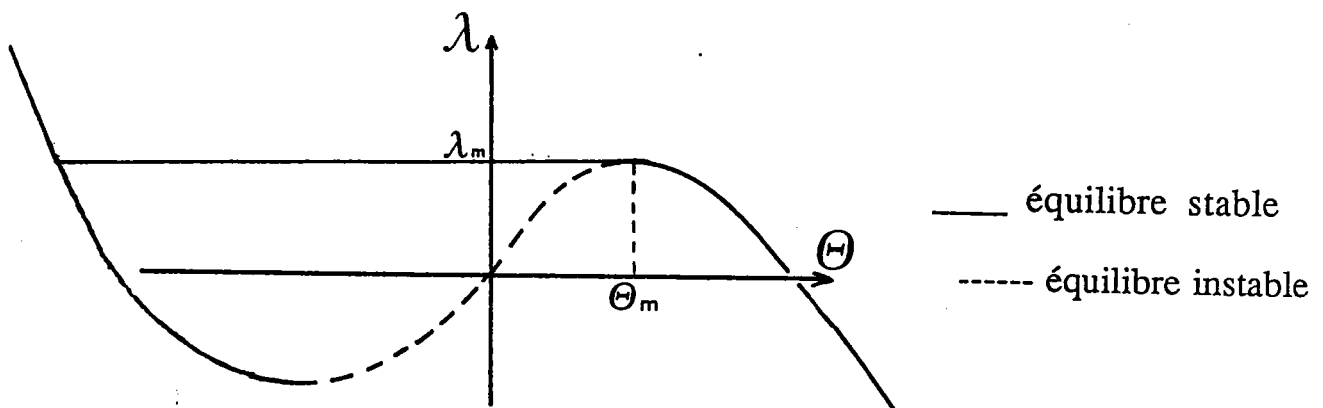


Fig 1-6



Pour  $\lambda$  inférieur à  $\lambda_m$ , il existe un seul équilibre unique stable. La structure atteint le point limite en :

$$\lambda = \lambda_m(\Theta_m)$$

On conclut que pour des structures symétriques il y a une perte de stabilité en un point limite s'il n'y a pas de rupture de symétrie et un point de bifurcation symétrique dans le cas de rupture de symétrie. La présence de défauts fait disparaître en général la symétrie. Dans ce cas on assiste à une perte de stabilité en un point limite au lieu d'un point de bifurcation (Fig. 1-7) [29].

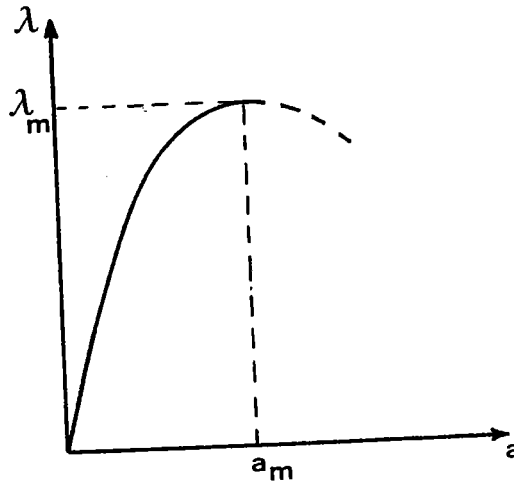


Fig 1-7

### I.1.2. Effets des imperfections

Les structures réelles ne sont jamais parfaites et ne satisfont plus exactement à des propriétés de symétrie. On reprend le modèle de la barre (eq. 1-2) et on introduit des imperfections de module  $a_0$  petit. Après troncature des termes d'ordre supérieurs, on obtient l'équation :

$$-(\lambda - \lambda_c) a + C_3 a^3 - \lambda_c a_0 = 0$$

(1-11)

On remarque (Fig. 1-8) que l'imperfection initiale  $a_0$  transforme le point de bifurcation en un point limite et deux branches distinctes apparaissent.

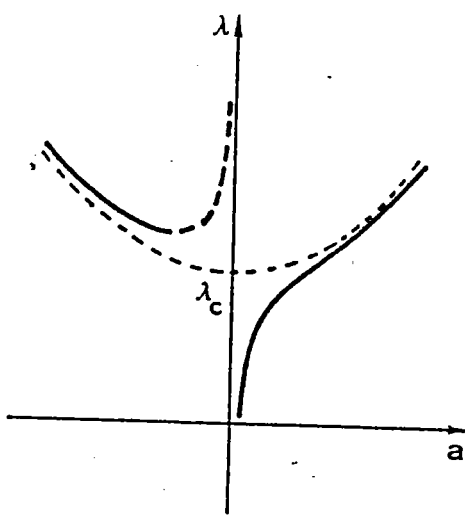


Fig 1-8-a : Symétrique stable

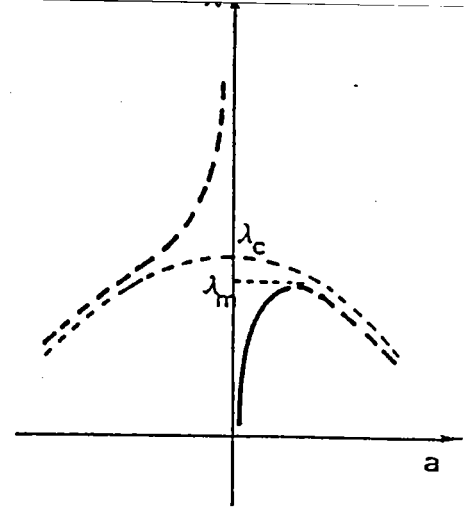


Fig 1-8-b : Symétrique instable

Fig 1-8 : Branches d'équilibre avec imperfection

Pour le cas de la figure 1-8-b il existe une charge maximale  $\lambda_m$  de la solution fondamentale définie à partir de l'équation :

$$\frac{d\lambda}{da} = 0 \quad \text{en } \lambda = \lambda_m \quad (1-12)$$

ce qui conduit à :

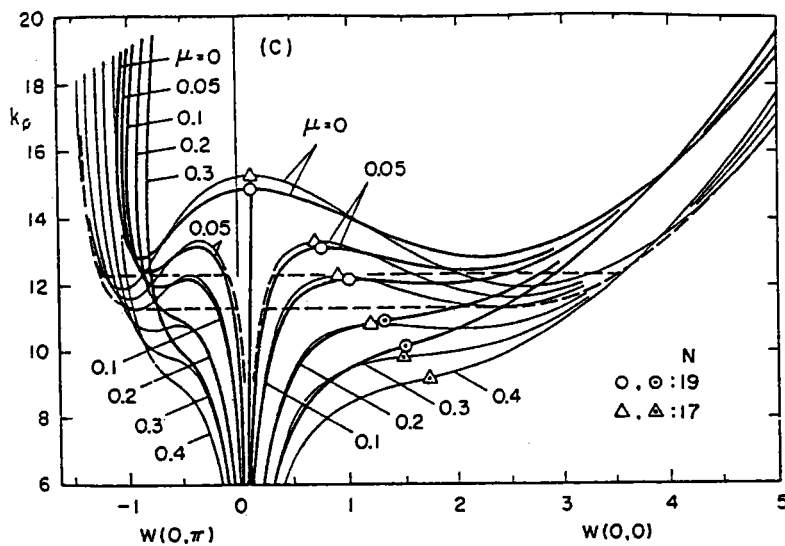
$$3 C_3 a^2 - (\lambda_m - \lambda_c) = 0 \quad (1-13)$$

et qui correspond à une réduction de la charge critique donnée par :

$$\lambda_c - \lambda_m = 3 \left( \lambda_c \frac{a_0}{2} \right)^{2/3} C_3^{2/3} \quad (1-14)$$

Par contre dans le cas de la figure 1-8-a la structure n'est pas sensible aux défauts.

A partir de l'équation (1-14) on remarque que la charge maximale diminue quand  $a_0$  augmente. Sur la figure 1-9 [39], on a présenté l'influence de l'amplitude du défaut sur la réduction de la charge critique dans le cas des coques sous pression. Ces courbes ont été obtenues à partir des développements (analogue à 1-11) tronqués à un ordre supérieur au développement 1-11. On remarque, que plus l'amplitude de l'imperfection est importante, plus la partie instable de la branche bifurquée diminue. Les points limites se rapprochent puis disparaissent. Ceci n'est pas pris en compte dans les formules de réduction de la charge critique de type 1-14 que nous utiliserons.



Effect of initial imperfections on the typical postbuckling behaviors of the clamped cylindrical shell under hydrostatic pressure :  $Z = 100$ ,  $R/h = 405$ ,  $\nu = 0.3$ .

Fig1-9

## I.2 Théorie classique du post-flambage

On rappelle tout d'abord dans ce paragraphe la théorie générale du post-flambage dite de Koiter [20]. Après on reprend le modèle classique du flambage élastique d'une poutre sur une fondation, notamment dans le but de présenter la méthode qui sera utilisée par la suite.

### I.2.1 Rappels de stabilité élastique

L'énergie potentielle  $P$  d'une structure élastique soumise à une charge conservative  $\lambda$  peut être exprimée comme fonction des déplacements  $U$  et  $\lambda$ . On suppose que cette fonctionnelle est dérivable autant de fois qu'il est nécessaire, de telle sorte que le développement de Taylor au voisinage d'un état fondamental  $U^F$  s'écrit :

$$P(\lambda, U + U^F) = P_0(U^F) + P_1(\lambda, U^F, U) + P_2(\lambda, U^F, U) + P_3(\lambda, U^F, U) \dots \quad (1-15)$$

où  $P_n$  est une application  $n$ -linéaire symétrique. Tout équilibre est solution de l'équation variationnelle :

$$\begin{cases} \delta P = P_1(\lambda, U^F, \delta U) + P_{11}(\lambda, U^F, U, \delta U) + P_{21}(\lambda, U^F, U, \delta U) + \dots = 0 \\ \forall \delta U \text{ admissible} \end{cases} \quad (1-16)$$

La dérivée en  $U$  de  $P_n(\lambda, U)$  est une fonctionnelle homogène de degré  $n-1$  en  $U$  et linéaire en  $\delta U$  soit :

$$\delta P_n = P_{n-1,1}(\lambda, U, \delta U)$$

De la même manière, nous pouvons ainsi calculer la dérivée seconde  $\delta^2 P(\lambda, U, \delta U, \delta U) \dots$  etc.

### I.2.2. Critère de l'énergie

Un état d'équilibre  $U$  est dit stable s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle (théorème de Lejeune-Dirichlet) soit :

$$\begin{cases} \delta P^2(\delta U, \delta U) > 0 \\ \forall \delta U \text{ admissible} \end{cases}$$

et instable si :

$$\exists \delta U \neq 0 \text{ admissible tel que } \delta^2 P(\delta U, \delta U) < 0 \quad (1-17)$$

Si on suppose qu'il existe un équilibre fondamentale  $U^F$  on a :

$$\begin{cases} P_1(\lambda, U^F, \delta U) = 0 \\ \forall \delta U \text{ admissible} \end{cases} \quad (1-18)$$

Alors la limite de stabilité est caractérisée par l'existence d'un  $U_1$  non nul tel que :

$$\begin{cases} \exists U_1 \neq 0, \delta P_2 = P_{11}(\lambda_c, U^F, U_1, \delta U) = 0 \\ \forall \delta U \text{ admissible} \end{cases} \quad (1-19)$$

$U_1$  mode de flambage

### I.2.3. Réduction de Lyapunov et Schmidt

Dans le cadre de ce travail nous supposons qu'il existe un seul mode  $U_1$  vérifiant (1-19). Un calcul général pour un mode multiple est détaillé dans [29].

On suppose aussi l'existence de la branche fondamentale  $U^F$  vérifiant (1-19). La solution du problème non-linéaire s'écrit dans l'espace des champs cinématiquement admissibles :

$$U = a U_1 + V \quad V \in \vartheta \quad (1-20)$$

où  $\vartheta$  est un espace complémentaire au vecteur propre  $U_1$  (Fig.1-10).

La réduction de Lyapunov et Schmidt consiste à minimiser l'énergie potentielle pour le sous espace  $\vartheta$  :

$$\begin{aligned} \text{Min } P(aU_1 + V, \lambda) \\ V \in \vartheta, \end{aligned} \quad (1-21)$$

puis à reporter la solution  $V$  en fonction de  $a$  et  $\lambda$  dans l'énergie potentielle .

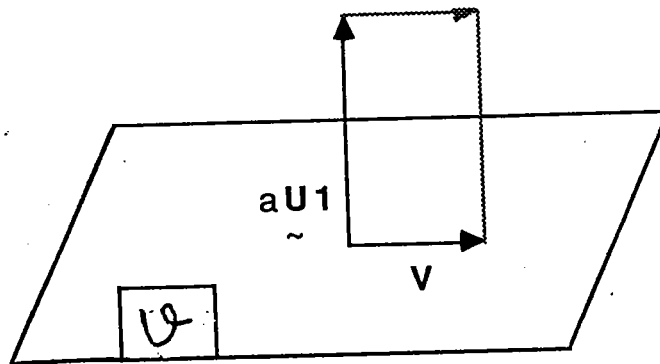


Fig 1-10

#### I.2.4. Bifurcation à partir de la courbe fondamentale

La théorie de bifurcation permet d'établir la courbe de solutions au voisinage de la stabilité neutre. Cette branche peut être recherchée sous la forme d'un développement en puissance de l'amplitude  $a$  [26], [27], [29] :

$$\lambda - \lambda_c = a \lambda_1 + a^2 \lambda_2 + \dots \quad (1-22)$$

$$U = a U_1 + a^2 U_2 + a^3 U_3 + \dots \quad (1-23)$$

; En faisant les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, on peut déterminer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  [29] :

$$\lambda_1 = -3 \frac{P_3(U_1)}{2 \frac{dP_2}{d\lambda} [U_1]} \quad (1-24)$$

Dans les applications aux plaques et aux coques, en raison des propriétés de symétrie, on a presque toujours  $\lambda_1 = 0$ . Dans ce cas, l'allure de la courbe bifurquée est donnée par le terme suivant dont l'expression est :

$$\lambda_2 = 2 \frac{P_4(U_1) - P_2(U_2)}{\frac{dP_2}{d\lambda} (U_1)} \quad (1-25)$$

où  $U_2$  est solution d'un problème variationnel sur le sous espace  $\mathfrak{V}$

$$\delta \{ P_2(V) + P_{21}(U_1, V) \} = 0 \quad (1-26)$$

### 1.2.5. Influence des défauts géométriques

Les coques minces sont en général sensibles aux défauts, en particulier les défauts géométriques initiaux. Cela signifie que la charge critique avec défaut notée  $\lambda_m$  est inférieure à la charge critique de la même coque sans défaut  $\lambda_c$  caractérisée par (1-19) (Fig. 1-11).

La prise en compte de ces défauts est donc nécessaire pour estimer la résistance de la structure. Pour une coque avec un défaut quelconque, soumise à un chargement extérieur, il existe un point de charge maximale sur la courbe d'équilibre (Fig. 1-11). Lorsque cette charge est atteinte, il y a un phénomène de claquage.

On distingue notamment deux types de défauts géométriques [38]

- défauts modaux                      Fig. 1-12
- défauts localisés                    Fig. 1-13

Depuis la thèse de Koiter [20], les défauts ou "imperfections" sont intro-

duits comme des perturbations dans l'énergie potentielle en faisant les deux hypothèses suivantes :

- l'amplitude du défaut est assez petite
- l'espace vectoriel des modes de flambage (défini en (1-19)) est de dimension finie

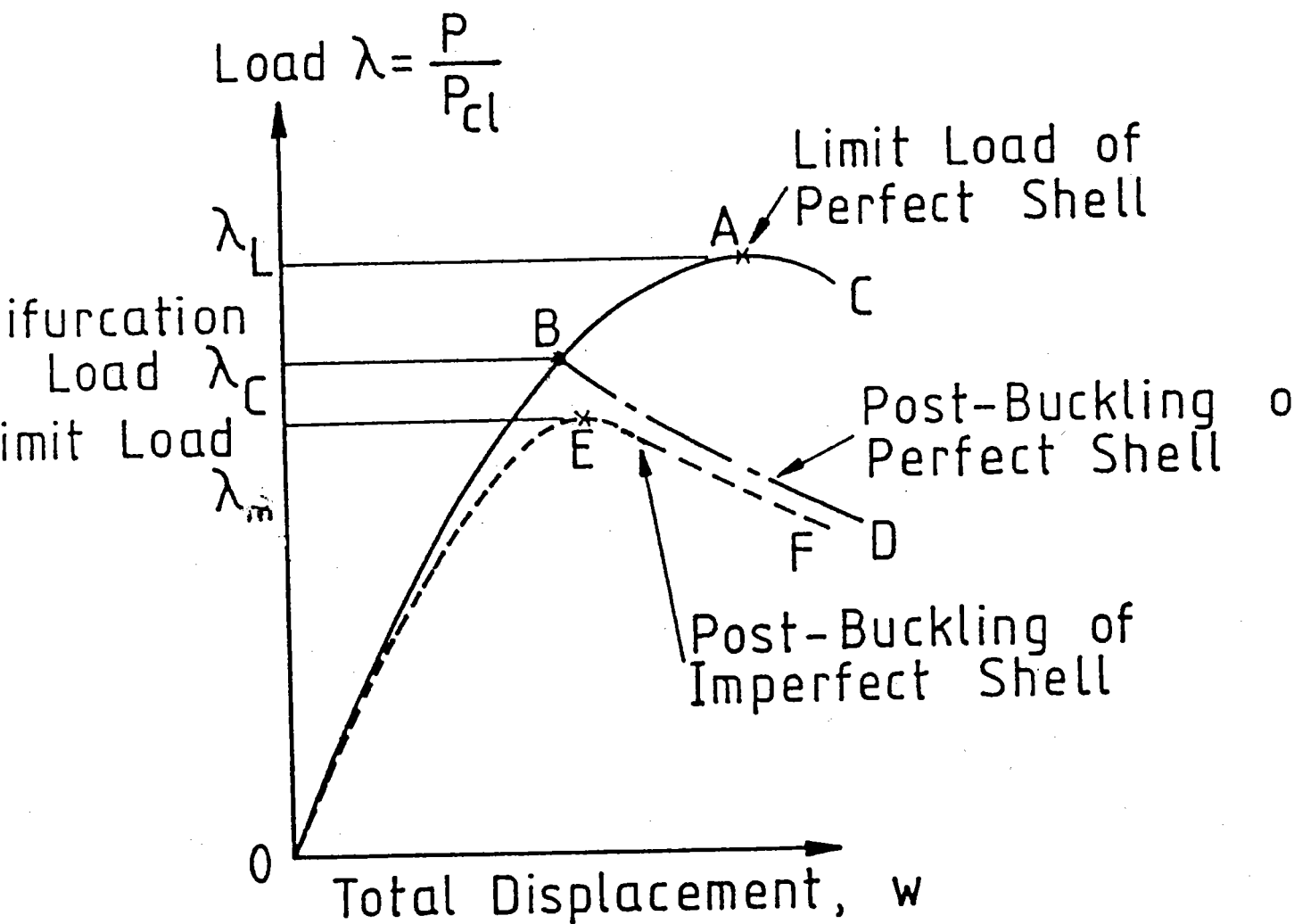


Fig 1-11 : Point de bifurcation et point limite calculés à partir d'une analyse non linéaire.[5]

OBA : trajet fondamental axisymétrique (sans défauts)

BD : branche bifurquée et rupture de symétrie (sans défauts)

OEF : trajet réel avec une charge maximale  $\lambda_m$  inférieure à  $\lambda_c$  à cause des défauts .

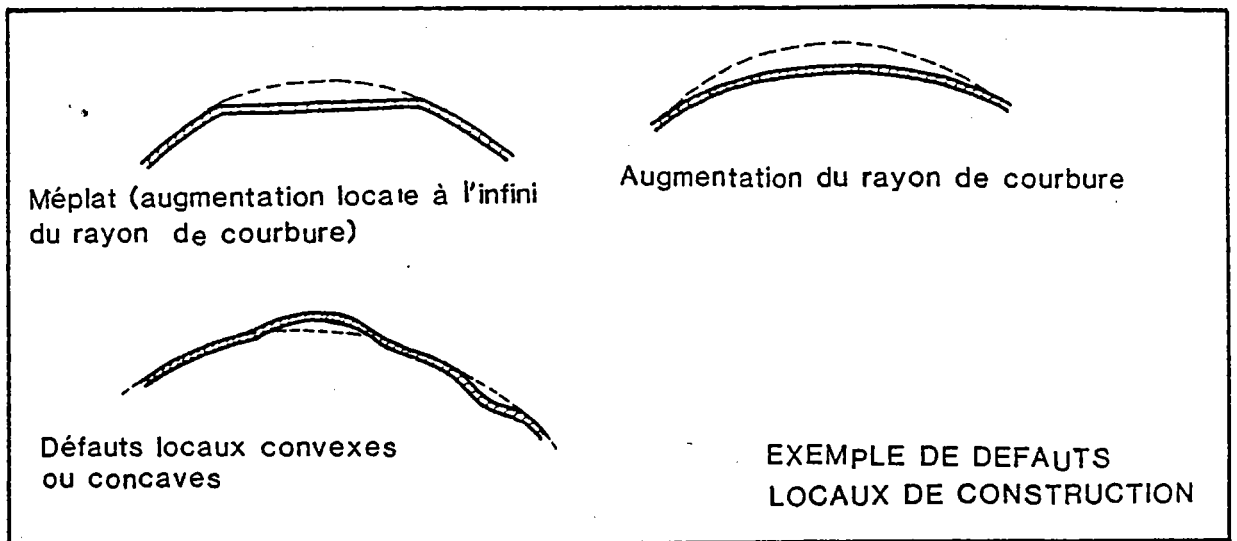


Fig 1-12 : Défauts modaux [38]

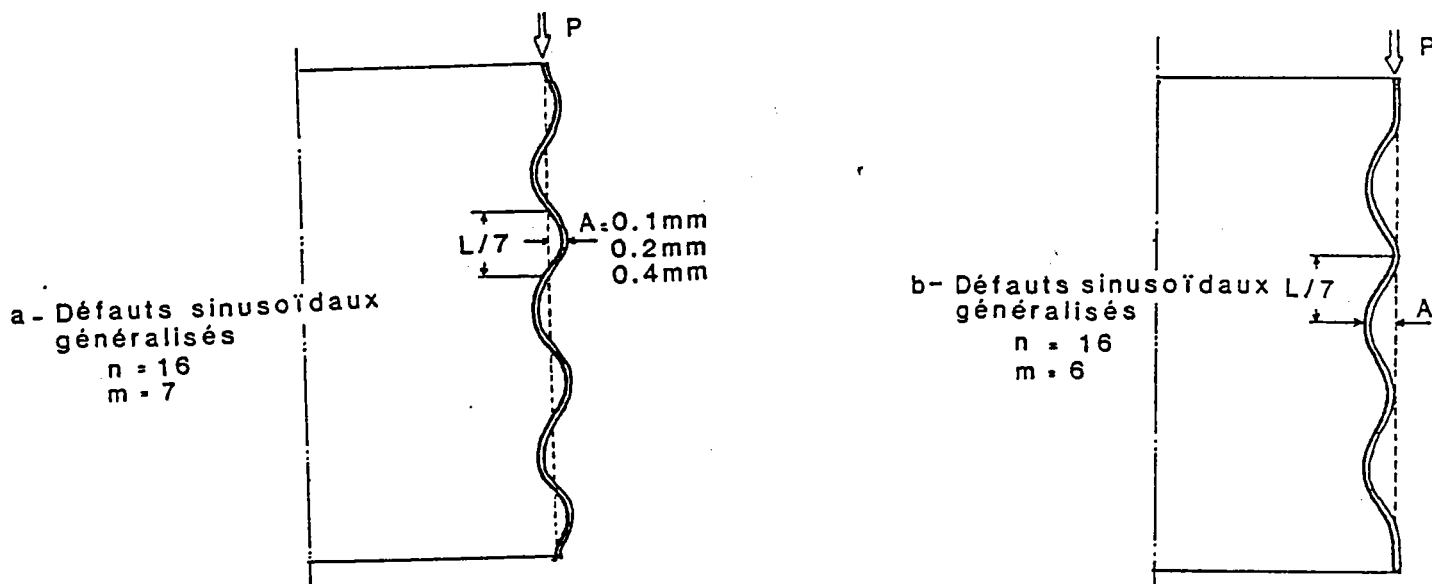


Fig 1-13 : Défauts localisés [38]

On considère donc la fonctionnelle  $P^*(U, \lambda, a_0)$  où  $a_0$  est un paramètre de perturbation qui représente l'amplitude du défaut, en sorte que

$$P^*(\lambda, U, 0) = P(\lambda, U) \quad (1-27)$$

Développons cette fonctionnelle par rapport au défaut :

$$P^*(\lambda, U, 0) = P(\lambda, U) + a_0 Q(U) + \text{t.o.s.} \quad (1-28)$$

où

$$\text{t.o.s.} = 0 (a_0^2 U + \lambda a_0 U)$$

Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe 2.3, la réduction de



Lyapunov et Schmidt s'applique de la même manière que précédemment. On montre que l'amplitude du mode est reliée à la charge  $\lambda$  et à l'amplitude du défaut par l'équation [29]:

$$\alpha_{30} a^3 + \alpha_{11} a (\lambda - \lambda_c) + \beta a_0 = 0 \quad (1-29)$$

$$\alpha_{11} = 2 \frac{dP_2}{d\lambda} (U_1)$$

$$\alpha_{30} = 4 (P_4 (U_1) - P_2 (U_2))$$

$$\beta = Q_1 (\lambda_c, U_1)$$

(1-30)

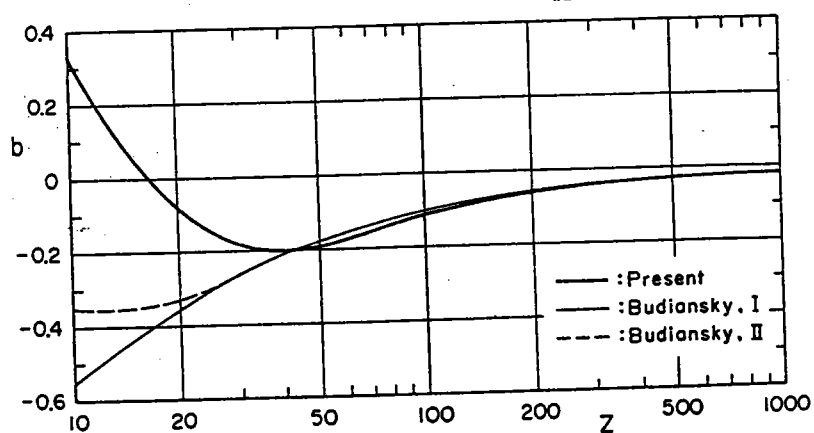
On retrouve une équation analogue à (1-13) avec des coefficients faciles à calculer dès que l'on connaît le mode.

Le critère de l'énergie nous permet d'affirmer que  $\alpha_{11}$  est négatif pour les coques. Mises à part quelques exceptions (Fig.1-14) [39],  $\alpha_{30}$  est négatif.

En l'absence de défaut, il existe donc un point de bifurcation symétrique instable, comme représenté à la figure 1-2-c.

Avec un défaut, la charge de flambage correspond au maximum de la courbe  $\lambda_m$ , qui a la même allure qu'à la figure 1-8-b. Raisonnant comme au paragraphe 1-1-2, on en déduit que la réduction de la charge critique est, en première approximation, donnée par la formule :

$$\lambda_c - \lambda_m = 3 \left( \frac{\beta a_0}{2} \right)^{2/3} \frac{\alpha_{30}^{1/3}}{\alpha_{11}} \quad (1-31)$$



Imperfection sensitivity factor  $b$  for the cylindrical shells under hydrostatic pressure.

Fig 1-14 : La valeur de  $b = -\alpha_{30}/\alpha_{11} > 0$  exprime la sensibilité aux défauts de la coque. Pour  $Z < 10$ ; la coque n'est plus sensible aux défauts (voir 1-8-a aussi) [39]

### I.2.6. Exemple : poutre sur une fondation élastique [2] [28]

On considère une poutre flexible de rigidité à la flexion  $EI$ , soumise à une force axiale  $F$ . Le déplacement latéral  $U(x)$  est guidé par une fondation élastique qui produit une force de rappel par unité de longueur (Fig. 1-15)

$$f(x) = K_1 U - K_3 U^3 \quad (1-32)$$

On note  $a_0$  l'amplitude du défaut géométrique et  $U_0(x)$  la forme de ce défaut.

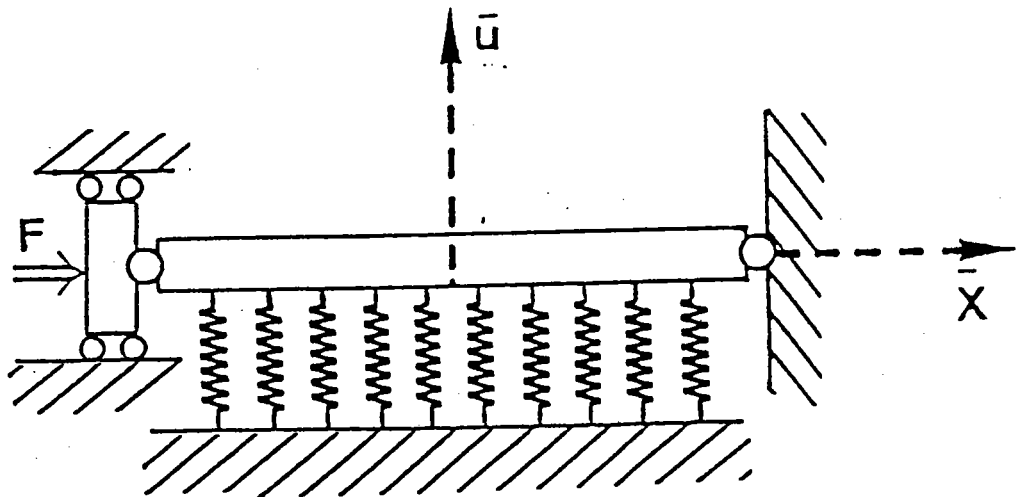


Fig 1-15 : Poutre sur une fondation élastique.

Après adimensionnalisation convenable, l'énergie potentielle s'écrit :

$$P^*(U, \lambda, a_0) = \int_0^L \left\{ \frac{U''^2}{2} - \lambda \frac{U'^2}{2} + \frac{U^2}{2} - \frac{U^4}{4} - \lambda a_0 U_0' U' \right\} dx \quad (1-33)$$

On peut donc la mettre sous la forme (1-28)

$$P^* = P_2 + P_4 + a_0 Q(U) \quad (1-34)$$

En rendant stationnaire l'énergie,  $\delta P^* = 0$ , on obtient l'équation d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 U}{dx^4} + \lambda_c \frac{d^2 U}{dx^2} + U - U^3 + \lambda a_0 \frac{d^2 U_0}{dx^2} = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right. \quad (1-35)$$

D'après le critère de l'énergie appliqué au problème sans défauts le mode de flambage est solution de l'équation (1-35) linéarisée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 U_1}{dx^4} + \lambda_c \frac{d^2 U_1}{dx^2} + U_1 = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right. \quad (1-36)$$

Pour simplifier la présentation, on ne tient pas compte des conditions aux limites (poutre de longueur infinie), que l'on remplace par une condition de périodicité.

On cherche un mode sous la forme :

$$U_1(x) = \cos qx \quad (1-37)$$

d'où la courbe de stabilité neutre :

$$\lambda = q^2 + \frac{1}{q^2} \quad (1-38)$$

qui admet pour minimum dans le plan  $(q-\lambda)$ . Le point critique est  $q_c = 1$ ,  $\lambda_c = 2$ .

En appliquant les formules 1-30 on trouve :

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{L} \int_0^L U_1^2 dx = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_{30} = -\frac{4}{L} \int_0^L \frac{U_1^4}{4} dx = -\frac{3}{8}$$

$$\beta = -\frac{\lambda_c}{L} \int_0^L U_1^2 dx = -\frac{\lambda_c}{2}$$

(1-39)

d'où la réduction de la charge critique (Fig. 1-16) [5] :

$$\lambda_c - \lambda_m = \left( \frac{9\lambda_c a_0}{4} \right)^{2/3}$$

(1-40)

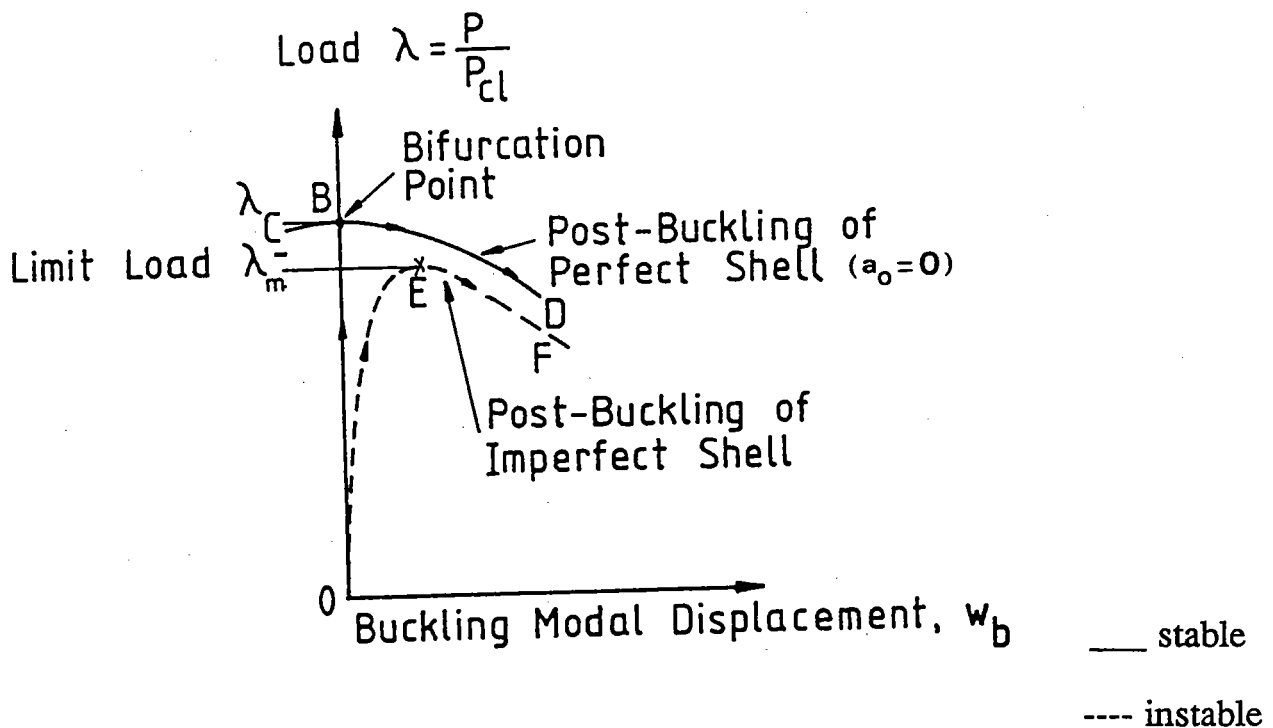


Figure 1-16 : Amplitude du mode en fonction de la charge.

### I.3. Théorie de bifurcation cellulaire

#### I.3.1. Les limites de la théorie classique du post-flambage

La théorie classique de Koiter consiste à chercher des solutions pour une longueur d'onde  $q$  donnée, soit pour un nombre fini de modes (en pratique un petit nombre). Pour des domaines infinis (longueur de la poutre dans l'exemple précédent) il existe un nombre infini de modes, donc un spectre continu de longueurs d'onde.

Dans ses travaux expérimentaux Boucif [6] a étudié le flambage d'une plaque encadrée de longueur  $L$  supposée grande. Il a remarqué que le mode de flambage n'est pas exactement périodique et qu'il y a une forte modulation d'amplitude aux bords, dans une région dont la longueur est de l'ordre de  $1/\sqrt{\lambda - \lambda_c}$  (Figures (1-17) et (1-18)).

Ce phénomène n'est pas explicable par la théorie classique. Au premier ordre soit l'équation 1-29, la forme de la solution d'équilibre ne varie pas avec la charge. La théorie de bifurcation cellulaire, qui est une extension de la théorie de Koiter, rend compte de la modulation d'amplitude et permet dans le cas des plaques, de sélectionner des longueurs d'onde [12]. Dans le cas des coques ou plus précisément quand il s'agit d'une bifurcation symétrique instable, elle nous permet, d'une part d'expliquer le phénomène de localisation [29] observé expérimentalement après claquage (Fig. 1-19 [17], et 1-20), d'autre part de calculer la réduction de la charge critique causée par des défauts localisés [2] [3] [30].

On notera que cette théorie n'est valable que pour des domaines infinis, ou pour des nombres d'ondes suffisamment grands. Supposons pour fixer les idées que le mode de flambage d'un cylindre soit un mode 15 et que le défaut soit en mode 16. La théorie des bifurcations cellulaires prend en considération tous les modes voisins du mode critique (Fig. 1-21) et fait peu de distinction entre eux, alors que dans la théorie classique seul le défaut en mode 15 est pris en considération. De cette manière, on obtient une interaction entre modes voisins et on peut expliquer la modulation d'amplitude.

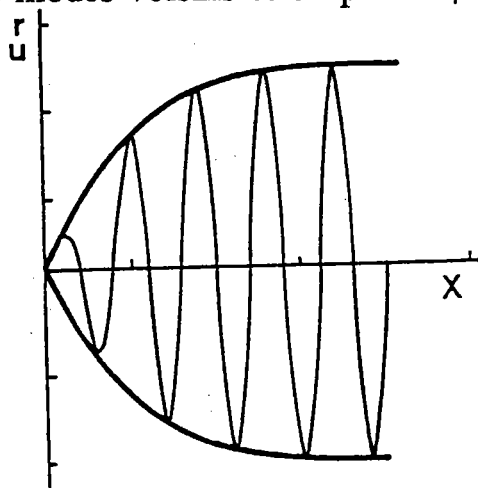
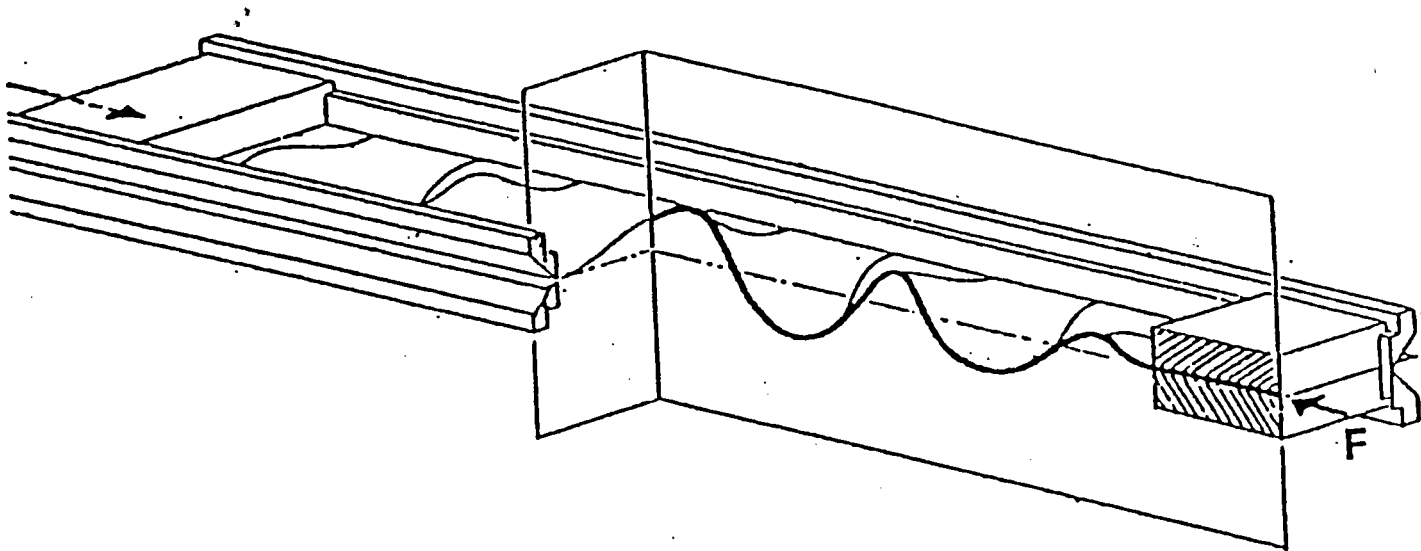


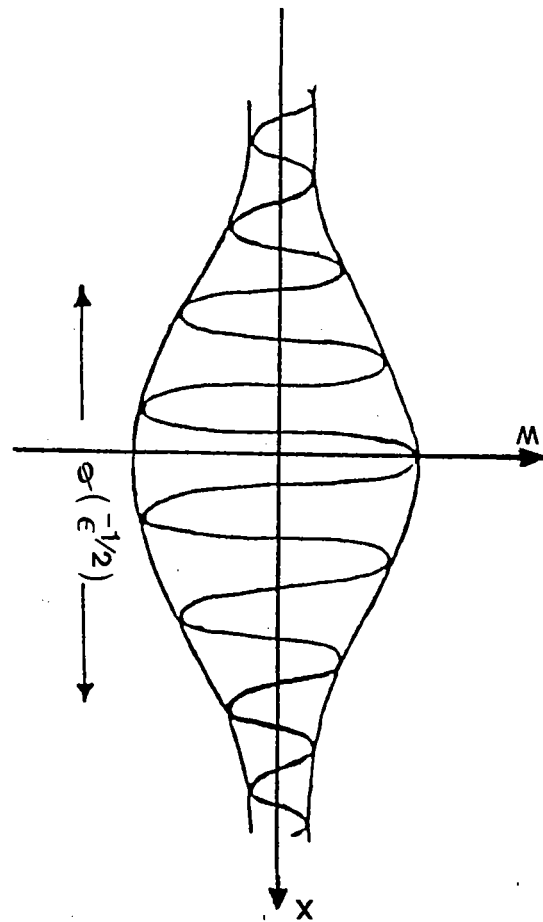
fig 1-17 modulation de l'amplitude



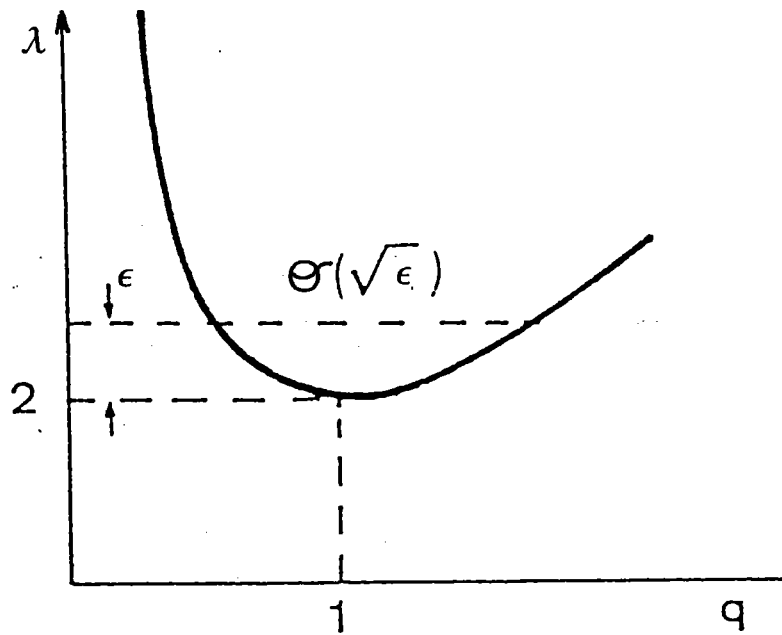
1-18 Plaque encastée modulation d'amplitude



$l = 425 \text{ mm}$

1-19 : phénomène de localisation  
observe dans les coques cylindriques

1-20 : mode de flambage localisé



1-21 : prise en compte de tous les modes voisins au mode critique

### I.3.2. Conséquence de l'équation d'amplitude

La technique de calcul est la méthode d'échelle multiple qui consiste à utiliser deux nouvelles variables, dans notre cas une variable lente  $X = \sqrt{\epsilon}x$  et une variable rapide  $\xi = x(q_c + \epsilon^{1/2}q_1 + \epsilon^{3/2}q_2 + \dots)$  où  $\epsilon$  est un petit paramètre qui désigne l'écart par rapport à la charge critique \*. On développe la solution sous la forme :

$$U(x) = U(X, \xi) = \epsilon^{1/2} U_1(X, \xi) + \epsilon U_2(X, \xi) + \epsilon^{3/2} U_3(X, \xi) + \dots$$

où

$$U_1 = A_1(X) \exp i \xi + C.C.$$

$$U_2 = A_2(X) \exp i \xi + C.C.$$

$$U_3 = A_3(X) \exp i \xi + (\dots) \exp 3i\xi + C.C.$$

(1-41)

où apparaissent des amplitudes complexes lentement variable qui généralisent l'amplitude  $a(x)$  de la théorie classique éq.1-29, 1-30. La première amplitude  $A_1(X)$  satisfait l'équation :

\*

Dans le cas d'une bifurcation sous critique, on pose  $\epsilon = \lambda_c - \lambda$ , et  $\epsilon = \lambda - \lambda_c$  pour une bifurcation surcritique.

$$\gamma \frac{d^2 A_1}{dX^2} + \alpha_{11} A_1 + \alpha_{30} |A_1|^2 A_1 = 0 \quad (1-42)$$

Les coefficients  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_{30}$  sont calculés par la théorie classique (eq. 1-29 et 1-30), et on montre [13] que le dernier coefficient  $\gamma$  est relié à la courbure de la courbe de stabilité neutre au point critique:

$$\frac{\gamma}{\alpha_{11}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \lambda}{dq^2} \quad (1-43)$$

### I.3.3. Application au problème modèle de la poutre

A partir des équations 1-38, 1-39, et 1-43, on déduit le terme de modulation d'amplitude. Après arrangement, l'équation d'amplitude s'écrit :

$$4 A_1''(x) - A_1 + 3 |A_1|^2 A_1 = 0 \quad (1-44)$$

On retrouve ainsi la même équation, de type Landau-Ginzbourg, que dans [2]. L'avantage de 1-43 est qu'elle nous évite le grand calcul par la méthode d'échelle multiple pour trouver le terme de modulation.

## I.4. Modèles des coques cylindriques

### I.4.1. Hypothèses et approximations

On se propose dans ce travail d'étudier le flambage des coques cylindriques soumises à des efforts de pression.

On suppose qu'au cours du chargement la charge reste statique et conservative.

Dans la théorie des coques minces, les équations de Koiter et Sanders [21] [22] [25], furent les équations les plus générales et les plus complètes. Mais vu la complexité de ces équations, les études analytiques sont généralement faites avec une approximation dite de Donnell, qui donne souvent des résultats précis [32], [39].

Rappelons brièvement les hypothèses géométriques faites dans le cadre de ces deux théories qui entrent dans le cadre des petites déformations et rotations modérées. On rappellera également les équations complètes des coques de Donnell.



Soient  $X_0, Y_0, Z_0$  les coordonnées curvilignes d'un point avant déformation, et

$$U = Ue_1 + Ve_2 + We_3 \quad (1-45)$$

le champ de déplacement de la surface moyenne ( $z = 0$ ) (Fig.1- 22).

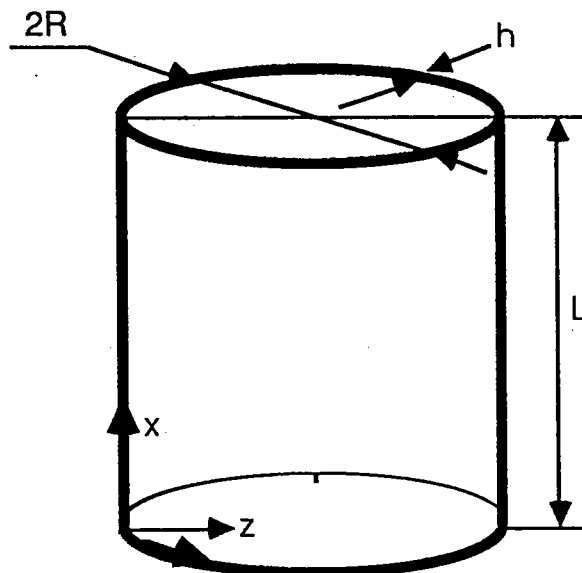


Fig 1-22

Pour des faibles épaisseurs  $h$ , les coordonnées  $X, Y, Z$  après déformation peuvent être définies à partir du champ de déplacement  $U$  par :

$$X = X_0 + U + \beta_x Z$$

$$Y = Y_0 + V + \beta_y Z$$

$$Z = Z_0 + W ; \quad Z \leq \frac{h}{2}$$

(1-46)

où  $\beta_x, \beta_y$  sont les rotations des fibres respectivement autour d'axes parallèles à  $oy$  et  $ox$  :

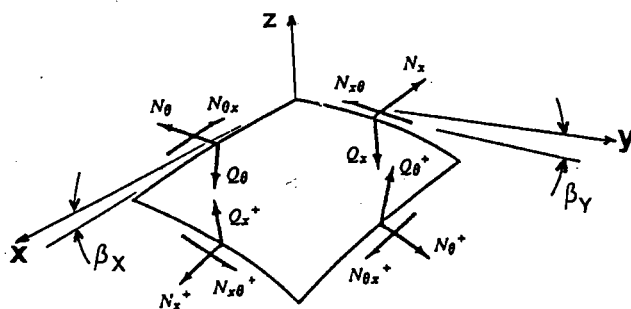


Fig 1-23: Rotation  $\beta_x$  et  $\beta_y$

, Le tenseur de déformation de Green-Lagrange  $\gamma$  est défini par

$$\begin{aligned} dU &= \nabla U \cdot dX \\ \gamma &= \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T + \nabla U \nabla U) \end{aligned} \quad (1-47)$$

Précisons que dans le cadre des petites déformations et rotations modérées, le gradient du déplacement est supposé petit, mais on ne néglige pas les carrés de certaines rotations,  $(U_{,Y} - V_{,X})/2$ ,  $W_{,Y} + V/R$  ... par rapport aux déformations linéarisées.

A partir de l'hypothèse de la conservation de la normale à la surface moyenne (ou l'hypothèse de Love-Kirchoff) on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \beta_X &= -W_{,X} \\ \beta_Y &= -(W_{,Y} + \frac{V}{R}) \end{aligned} \quad (1-48)$$

Avec ces approximations et hypothèses, le tenseur de déformation de la surface moyenne et le tenseur de courbure s'écrivent sous la forme suivante, ce qui définit le modèle de coque de Koiter et Sanders [39]:

$$\begin{aligned} \gamma_X &= U_{,X} + \frac{1}{2} W_{,X}^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{U_{,Y} - V_{,X}}{2} \right)^2 \\ \gamma_Y &= V_{,Y} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2} (W_{,Y} + V/R)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{W_{,Y} - V_{,X}}{2} \right)^2 \\ \gamma_{XY} &= \frac{U_{,Y} + V_{,X}}{2} + \frac{1}{2} W_{,X} (W_{,Y} + V/R) \\ \kappa_X &= -W_{,XX} \\ \kappa_Y &= -(W_{,YY} + \frac{V_{,Y}}{R}) \\ \kappa_{XY} &= -[W_{,XY} + \frac{1}{4R} (3V_{,X} - U_{,Y})] \end{aligned} \quad (1-49)$$

### I.4.2. Coques de Donnell

L'approximation de Donnell suppose de plus que les déplacements varient assez rapidement avec la coordonnée circonférentielle, ce qui entraîne l'omission dans l'expression (1-48) de la déformation  $V/R$  et des termes en  $(U_{,Y} - V_{,X})/2$ .

Les tenseurs de déformation  $\gamma$  et de courbure  $\kappa$  s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\gamma_X &= U_{,X} + \frac{1}{2} W_{,X}^2 \\ \gamma_Y &= V_{,Y} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2} W_{,Y}^2 \\ \gamma_{XY} &= \frac{U_{,Y} + V_{,X}}{2} + \frac{1}{2} W_{,X} W_{,Y} \\ \kappa_X &= - W_{,XX} \\ \kappa_Y &= - W_{,YY} \\ \kappa_{XY} &= - W_{,XY}\end{aligned}$$

(1-50)

On définit les contraintes et les moments résultant dans l'épaisseur de la coque agissant le long de  $X = c^{te}$ , et  $Y = c^{te}$  comme indiqué à la figure 1-24. Ils vérifient les équations d'équilibre [39] :

$$N_{\alpha\beta,\beta} = 0 \quad (1-51-a)$$

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \frac{N_Y}{R} + N_X W_{,XX} + 2N_{XY} W_{,XY} + N_Y W_{,YY} + P = 0 \quad (1-51-b)$$

$\alpha, \beta$  varient de 1 à 2

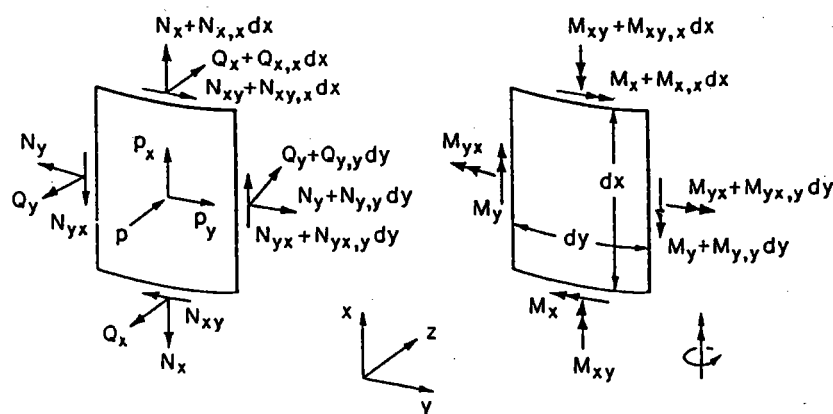


Fig. 1-24 : Forces et moments agissant sur un élément de la coque.

, Pour une coque élastique homogène et isotrope, les lois de comportement sont :

$$N_X = J (\gamma_X + \nu \gamma_Y) ; N_Y = J (\gamma_Y + \nu \gamma_X) ; N_{XY} = J \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \gamma_{XY}$$

où

$$J = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (\text{rigidité à l'extension})$$

(1-52)

$$M_X = D (\kappa_X + \nu \kappa_Y) ; M_{XY} = D (\kappa_Y + \nu \kappa_X) ; M_{XY} = M_{YX} = D (1-\nu^2) \kappa_{XY}$$

où

$$D = \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \quad (\text{rigidité à la flexion})$$

(1-53)

En l'absence des forces de volume il existe une fonction de contrainte définie à partir de :

$$N_X = F_{,YY} ; N_Y = F_{,XX} ; N_{XY} = -F_{,XY}$$

(1-54)

A partir de 1-51-a ,1-52 et 1-54 on peut éliminer les déplacements  $U_\alpha$  et en déduire l'équation de compatibilité :

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F + \frac{W_{,XX}}{R} = -\frac{[W,W]}{2}$$

(1-55)

En tenant compte de 1-51-a 1-53 et 1-54 l'équation des moments (1-51-b) s'écrit :

$$D \Delta^2 W - \frac{F_{,XX}}{R} - [W,F] - P = 0$$

où

$$[P,S] = P_{,XX} S_{,YY} + S_{,XX} P_{,XX} - 2 P_{,XY} S_{,XY}$$

(1-56)

On appelle équilibre fondamental ou préflambage la solution axisymétrique des équations 1-55 et 1-56. Dans cet état fondamental les déplacements et les contraintes vérifient donc :

$$N_{X,X}^F = 0$$

$$DW_{,XXXX}^F - \frac{N_Y^F}{R} - N_X^F W_{,XX}^F - p = 0$$

(1-57)

Le flambage induit un équilibre différent de l'état fondamental où les déplacements sont fonction des variables  $x$  et  $y$ . Les déplacements  $U, V, W$  à partir de l'état fondamental s'écrivent :

$$N_{X,X} + N_{XY,Y} = 0$$

$$N_{XY,X} + N_{Y,Y} = 0$$

$$N_X = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ U_{,X} + W_{,X}^F W_{,X} + \frac{1}{2} W_{,X}^2 + \nu \left( V_{,Y} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2} W_{,Y}^2 \right) \right]$$

$$N_Y = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ V_{,Y} - \frac{W}{R} + \frac{1}{2} W_{,Y}^2 + \nu \left( U_{,X} + W_{,X}^F W_{,X} + \frac{1}{2} W_{,X}^2 \right) \right]$$

$$N_{XY} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ U_{,Y} + V_{,X} + W_{,X}^F W_{,Y} + W_{,X} W_{,Y} \right]$$

(1-58)

$$D\Delta^2 W - \frac{F_{,XX}}{R} - W_{,XX}^F F_{,YY} - F_{,YY}^F W_{,XX} - F_{,XX}^F W_{,YY} - 2[F,W] = 0$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 F + \frac{W_{,XX}}{R} + W_{,XX}^F W_{,YY} = - W_{,XX} W_{,YY}$$

(1-59)

Si on fait une approximation "hypothèse de membrane" pour l'état de pré-flambage (c'est-à-dire en négligeant les déformations dues à la flexion), la fonctionnelle (mixte) caractéristique de 1-59 s'écrit :

$$L = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{D}{2} (\Delta W)^2 - \frac{1}{2Eh} (\Delta F)^2 - \frac{1}{2} [F^F, W] - \frac{1}{R} F_{,XX} W \right\} d\Omega$$

$$- \iint_{\Omega} \frac{1}{2} [F, W] W d\Omega$$

$$\Omega = [0, L] \times [0, 2\pi R[$$

où

$$F^F = \frac{PR}{2} \left( \frac{\alpha X^2}{2} + Y^2 \right)$$

(1-60)

En fonction de l'état de chargement, pression latérale ou pression hydrostatique,  $\alpha$  prend respectivement les valeurs 0 ou 1 (Fig. 1-24).

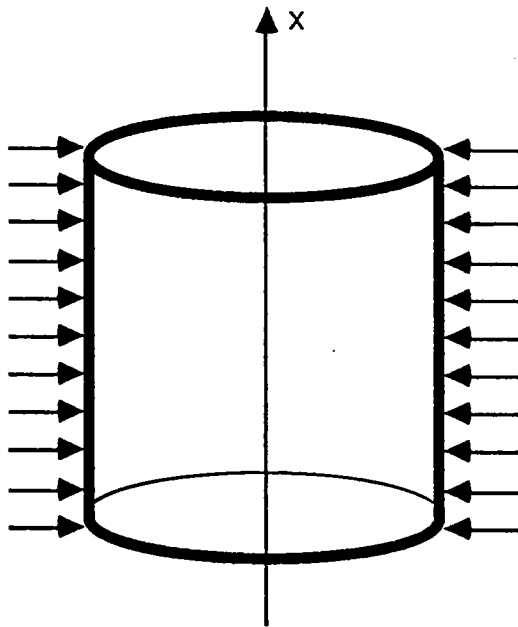


Fig.1- 25-a :  $\alpha = 0$  pression latérale

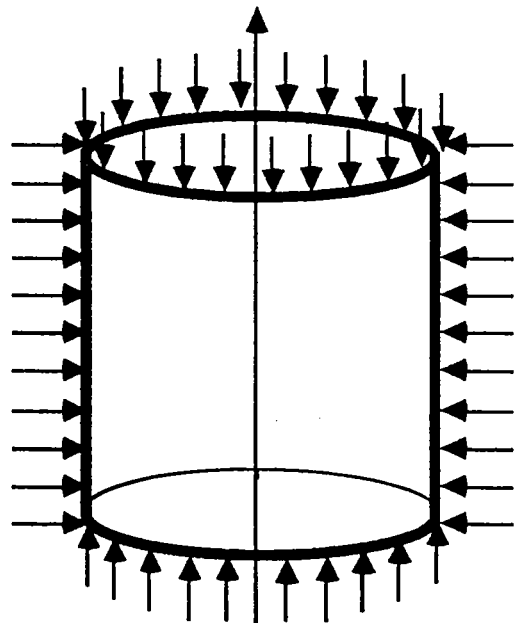


Fig.1-25-b :  $\alpha = 1$  pression hydrostatique

## I.5. Couche limite et perturbation singulière

La solution analytique d'un problème de mécanique est en général très difficile, voire impossible à obtenir. Ceci est dû à la complexité des équations ou des conditions aux limites. Pour la résolution, on peut donc faire appel à des méthodes mathématiques permettant d'obtenir une solution approximative ou asymptotique.

Nous allons citer un cas particulier d'équation différentielle où la dérivée d'ordre supérieur est en facteur d'un petit paramètre, on dit qu'il s'agit d'un problème de perturbation singulière. Les équations de Navier-Stokes sont un bon exemple de ce cas, où le petit paramètre est égal à l'inverse du nombre de Reynolds  $Re$ .

### I.5.1. Un Exemple de couche limite en mécanique des fluides

Considérons un écoulement de fluide autour d'un obstacle (Fig. 1-26).

Loin de l'obstacle, on peut assimiler le fluide à un fluide parfait de vitesse  $U$  non nulle. Les conditions aux limites sur l'obstacle imposent que la vitesse soit nulle à la paroi. Cette condition est impossible à satisfaire en fluides parfaits. Pour des grandes valeurs du nombre de Reynolds, il existe une petite zone située au voisinage des bords où la vitesse varie rapidement de façon à satisfaire la condition d'adhérence. C'est cette zone de variations rapides qu'on appelle couche limite.

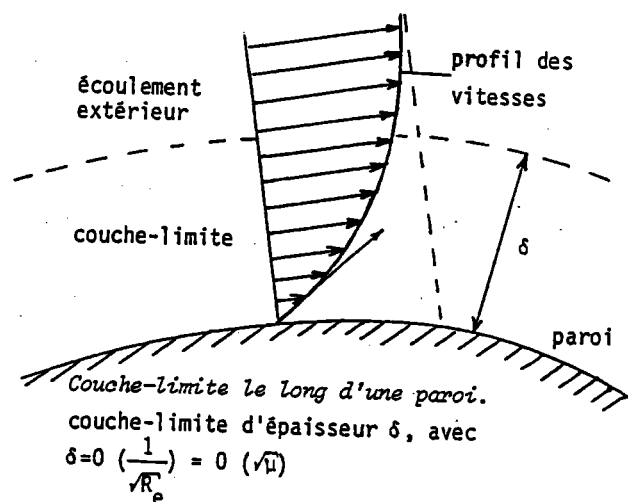


Fig.1- 26:

### I.5.2. Un exemple de perturbation singulière

Soit  $\eta$  un petit paramètre positif. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\eta U''(x) + U(x) = 1 & , \quad x \in [-1,1] \\ U(-1) = U(1) = 0 \end{cases} \quad (1-61)$$

La solution de cette équation est :

$$U(x,\eta) = 1 - \frac{e^{\frac{x-1}{\sqrt{\eta}}} + e^{-\frac{x+1}{\sqrt{\eta}}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\eta}}}} \quad (1-62)$$

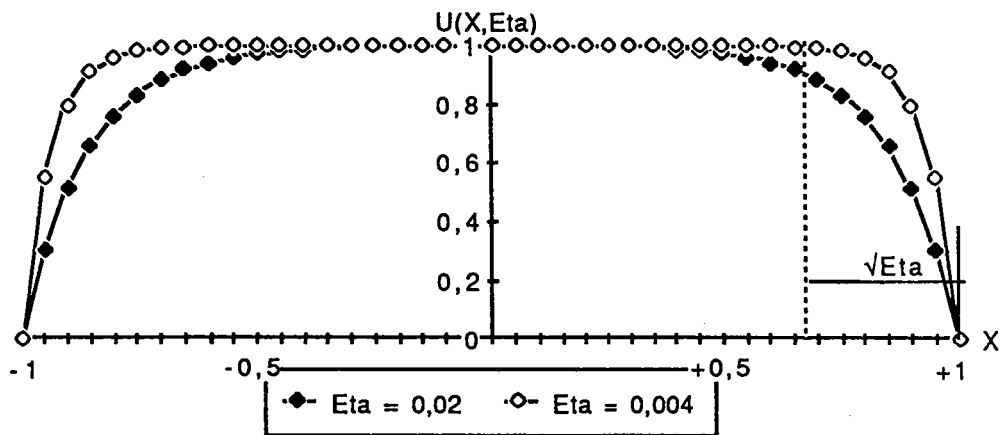


Fig. 1-27

Sur la figure 1-27 on voit que loin des bords, on a une solution qui est quasiment constante et égale à 1. Près des bords on a une variation rapide dans une couche limite d'épaisseur  $\sqrt{\eta}$ .

Oublions pour l'instant cette solution exacte, et essayons de chercher une solution approximative sous forme de série entière en  $\eta$ . Nous allons montrer qu'un développement asymptotique classique en puissances de  $\eta$  ne permet pas d'avoir une solution qui converge vers la solution exacte. Soit le développement :

$$U_i(x,\eta) = U_{i0}(x) + \eta U_{i1}(x) + \eta^2 U_{i2}(x) + \dots \quad \eta \ll 1 \quad (1-63)$$



En injectant le développement 1-63 dans l'équation 1-61, on obtient une série entière en  $\eta$ . En annulant tous les termes on obtient :

$$\begin{aligned} U_{10}(x) &= 1 \\ U_{10}''(x) + U_{11}(x) &= 0 \quad , \quad \text{d'où} \quad U_{11}(x) = 0 \\ U_{1n-1}''(x) + U_{1n}(x) &= 0 \quad , \quad \dots \quad U_{1n}(x) = 0 \end{aligned} \tag{1-64}$$

La solution (1-64) s'écrit alors

$$U_i(x, \eta) = 1 \tag{1-65}$$

Pour  $\eta$  petit la solution 1-65 est proche de la solution exacte, sauf au voisinage des points  $-1$  et  $+1$  où la solution exacte varie rapidement de façon à satisfaire les conditions aux limites (Fig. 1-28). Donc la solution approchée (1-65) n'est valable que loin des bords. On appellera cette solution, solution intérieure. Pour cela on fait un changement de variable de façon à ce que la dérivée d'ordre supérieur de (1-61) ne disparaisse pas dans la première équation. On cherche alors un deuxième développement valable au voisinage des bords. Près de  $1$  on pose :

$$\xi = \frac{1-x}{\sqrt{\eta}} \tag{1-66}$$

Selon la méthode asymptotique, on suppose que  $\xi$  varie de  $0$  (bord) à l'infini (fin de la couche limite) [23]. Ecrivons le développement dans la couche limite sous la forme :

$$U_r(\xi, \eta) = U_{r0}(\xi) + \eta U_{r1}(\xi) + \eta^2 U_{r2}(\xi) + \dots \tag{1-67}$$

Injectons 1-67 dans 1-61 On obtient au premier ordre :

$$\begin{aligned} -U_{r0}''(\xi) + U_{r0}(\xi) &= 1 \\ U_{r0}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1-68}$$

La solution bornée de (1-68) s'écrit :

$$U_{r0}(x) = 1 - \exp\left(\frac{1-x}{\sqrt{\eta}}\right) \quad (1-69)$$

On appellera cette solution, solution rapide ou solution dans la couche limite par analogie avec la mécanique des fluides . De la même manière, on peut calculer la deuxième couche limite située au voisinage de -1. La solution approchée s'écrit :

$$U_{app} \approx 1 - \exp\left(\frac{1-x}{\sqrt{\eta}}\right) \quad (1-70)$$

L'erreur entre les solutions, exacte et approchée, est petite, de l'ordre de  $\exp(-1/\sqrt{\eta})$

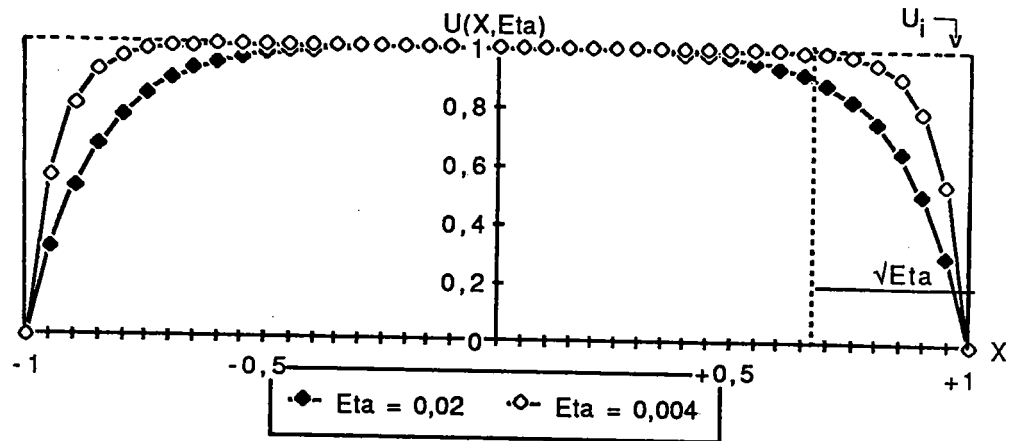



Fig 1-28

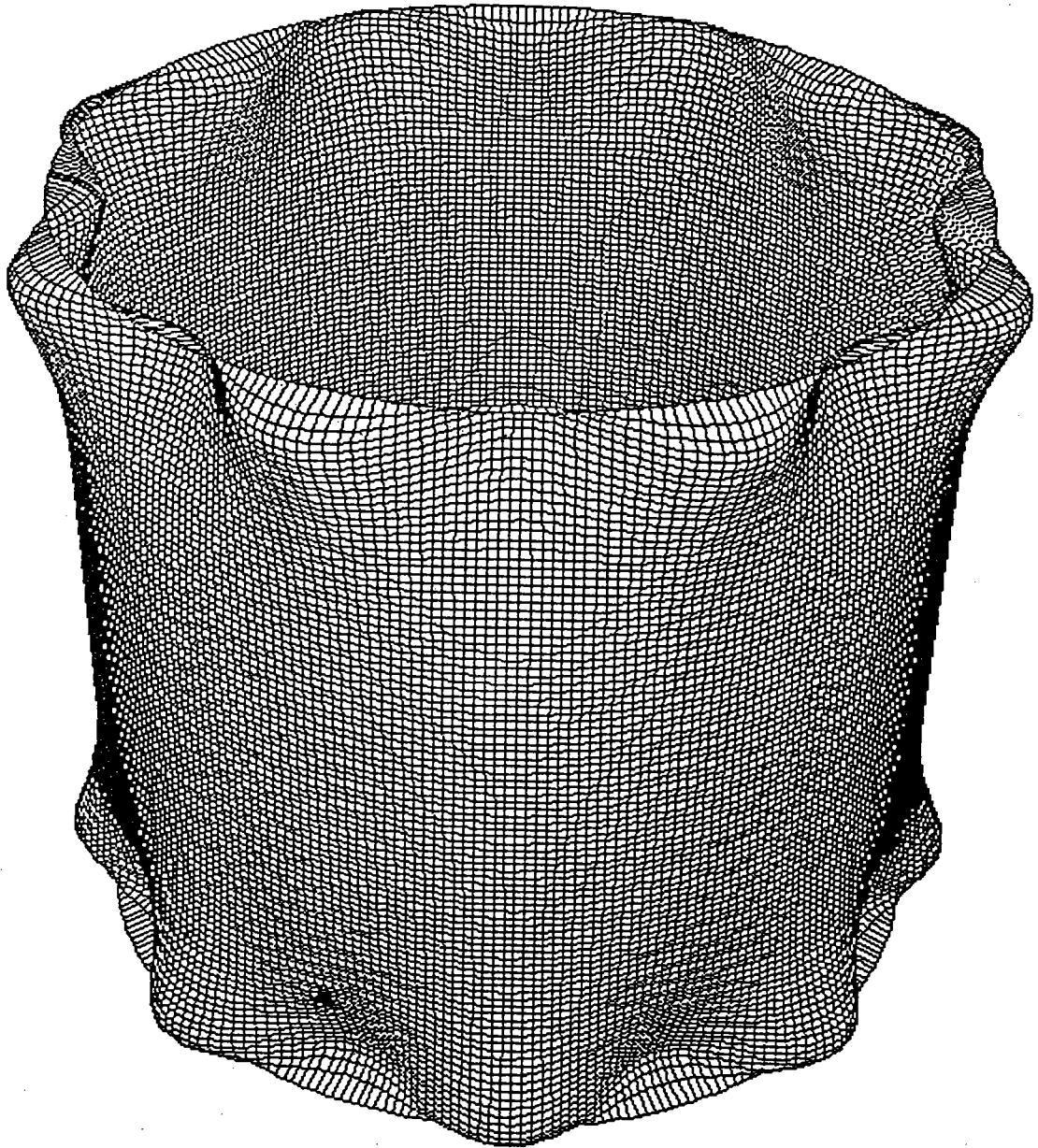
### I.5.3. Conclusions en vue d'une application aux problèmes de flambage des coques sous pression

Pour le problème de perturbations singulières la solution approchée est la somme de deux développements en série. Le premier développement est valable assez loin des bords, il ne tient pas compte de toutes les conditions aux limites du problème. Le deuxième traduit un comportement localisé, il est valable au voisinage des bords. Toutes les conditions aux limites sont donc prises en compte.

Nous verrons que pour les coques minces (caractérisées par le paramètre de Batdorf  $Z$  assez grand), le calcul de la pression critique et du mode de flambage se ramène à un problème de perturbation singulière. Le petit paramètre est équivalent à  $1/\sqrt{Z}$ . Loin des bords la solution intérieure correspond à une approximation inextensionnelle. Ceci correspond au fluide parfait dans le problème d'écoulement autour d'un obstacle.

Nous dressons un tableau qui permet de faire la correspondance entre les exemples I.5.1. , I.5.2. et le problème des cylindres sous pression.

Exemple	Petit paramètre	Solutions intérieures	Solution dans la couche limite
I-5-1	$\frac{1}{Re}$	Fluide parfait	
I-5-2	$h$	Equation 1-65	Equation 1-69
Cylindre sous pression	$\frac{1}{\sqrt{Z}}$	Approximation inextensionnelle	Equation 2-50



## CHAPITRE II

### EFFET DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE FLAMBAGE ELASTIQUE DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION

## II.1. Introduction

Le comportement en flambage d'une coque cylindrique sans défauts dépend du chargement et des conditions aux limites. En pression externe ou en torsion les modes de flambage ne sont périodiques que dans la direction circonférentielle avec une variation beaucoup plus rapide dans cette direction que dans la direction axiale (Fig. 2-1). En compression le mode a un aspect différent et il a généralement la forme en points de diamants (Fig. 2-2).

En pression externe le calcul de la charge critique pour une coque cylindrique a été fait numériquement dans [35] pour différentes conditions aux limites. Cette étude a montré le rôle important de la condition aux limites axiale (déplacement  $U = 0$ , ou contrainte  $N_x = 0$ ). Ce comportement est tout à fait différent de celui des structures planes, où la condition sur la rotation (appui ou encastrement) joue le rôle le plus important.



Fig 2-1 Coque sous pression

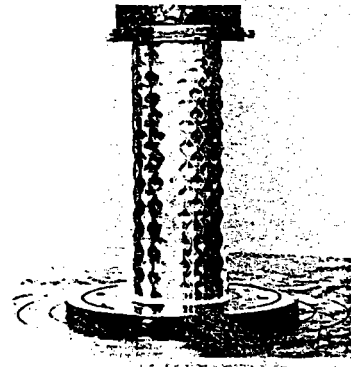


Fig 2-2 Coque en compression axiale

Les caractéristiques géométriques des coques cylindriques peuvent être décrites par le paramètre de Batdorf

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2}$$

Dans ses travaux numériques, Yamaki [39] a montré que le paramètre de pression  $PRL^2/Eh^3$  et le nombre d'ondes circonférentiel  $nL/R$  évoluent respectivement comme  $Z^{1/2}$ , et  $Z^{1/4}$  pour  $Z$  assez grand, et tendent chacun vers une valeur asymptotique qui dépend seulement de la condition aux limites axiale ( $U = 0$  ou  $N_x = 0$ ) (Fig. 2-3). Lorsque  $Z$  diminue, les effets des autres conditions aux limites ( $V$  ou  $N_{xy} = 0$ ,  $W_{,x}$  ou  $W_{,xx} = 0$ ) s'amplifient.

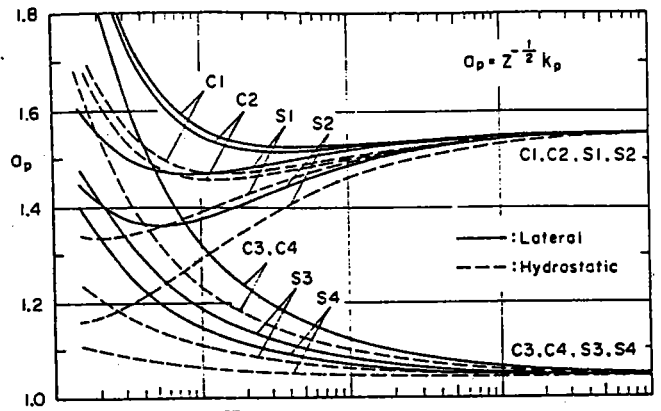
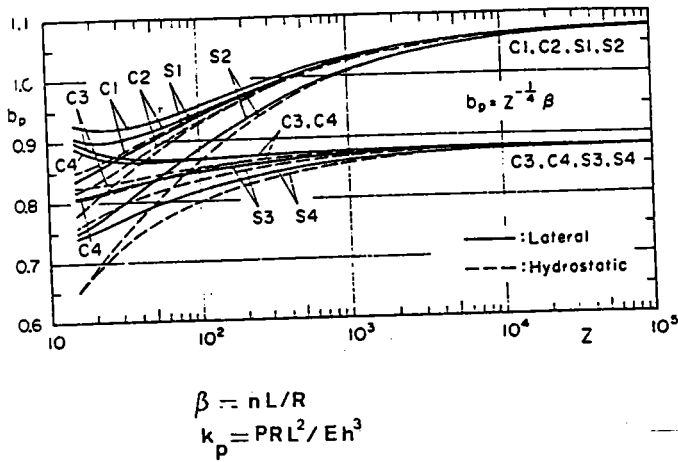
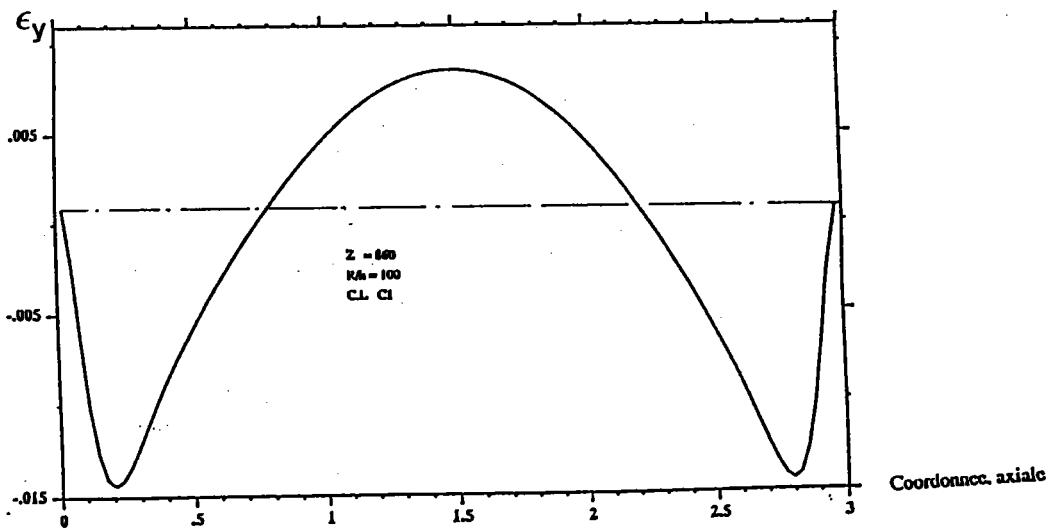


Fig 2-3:

On remarque bien, que sauf pour des coques assez épaisses ( $Z \leq 100$ ) il existe 2 familles de courbes, l'une relative à la condition aux limites axiale  $U = 0$  (C1, C2, S1, S2), l'autre à la condition  $N_x = 0$  (C3, C4, S3, S4).

Cependant, à notre connaissance, il n'y a qu'un seul travail [37] dans lequel les auteurs ont tenté d'expliquer le rôle paradoxal de la condition aux limites axiale. Ils font pour cela certaines approximations qui reviennent à l'hypothèse classique d'un mode inextensionnel dans la direction azimutale [36]. Cette approximation est justifiée par le fait que pour les coques très minces ( $R/h \gg 1$ , ou  $Z \gg 1$ ) la rigidité de membrane est grande devant la rigidité de flexion, donc les déformations de membrane sont très petites. Toutefois, on ne trouve pas dans ce travail d'explication claire du rôle des conditions aux limites. On retrouve aussi ce comportement inextensionnel dans le flambage d'un anneau circulaire sous pression externe [7] p. 138. L'approximation du mode inextensionnel réduit de 8 à 4 l'ordre de dérivation par rapport à la variable axiale dans le système d'équations caractérisant le mode. Il y a donc une perte de conditions aux limites, ce qui montre bien qu'il existe une couche limite (Fig. 2-4).

Fig 2-4 : Variation de la déformation  $\epsilon_y$  le long de l'axe de la coque.

Les résultats obtenus par un calcul numérique en éléments finis sont présentés à la (Fig. 2-5). Pour la rotation  $W'$ , on distingue deux zones AA' et OA plus A'O'.

### Zone AA'

Située assez loin des bords, où la courbe varie d'une façon assez régulière.

On définit le mode intérieur comme étant l'extrapolation à partir du point A et A' jusqu'aux bords de la partie intérieure. Il ne vérifie donc pas les mêmes conditions aux limites que le mode exact.

### Zone OA, O'A'

On constate un effet de bords (phénomène de couche limite, caractérisé par sa variation rapide).

On appellera cette partie couche limite par analogie avec la mécanique des fluides.

On utilisera donc la théorie des perturbations singulières (ch. 1 § 5) pour définir avec précision les notions de mode intérieur et de couche limite. Ceci nous permettra de faire la distinction entre les conditions aux limites exactes et les conditions aux limites sur le mode intérieur.

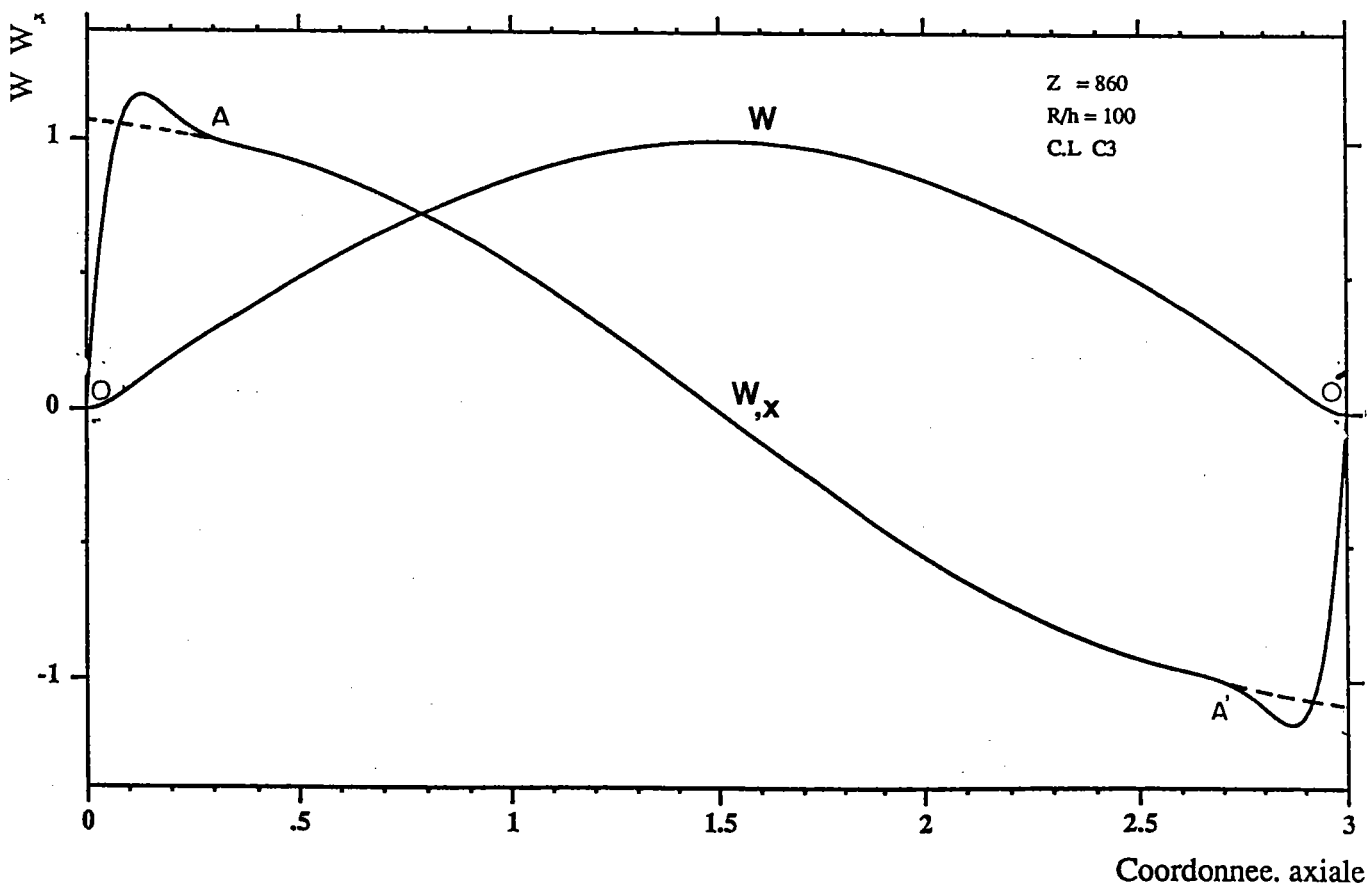


Fig 2-5 : Mode et rotation de flambage : distinction entre le mode intérieur et le mode exact.



- Pour bien visualiser la nature de la couche limite, on pourra comparer la rotation  $W'$  dans le cas de la condition aux limites S3 (Fig. 2-6), où le mode est en sinus (c'est donc un cas particulier sans couche limite) avec l'une des sept autres conditions aux limites (voir par ex. fig. 2-5).

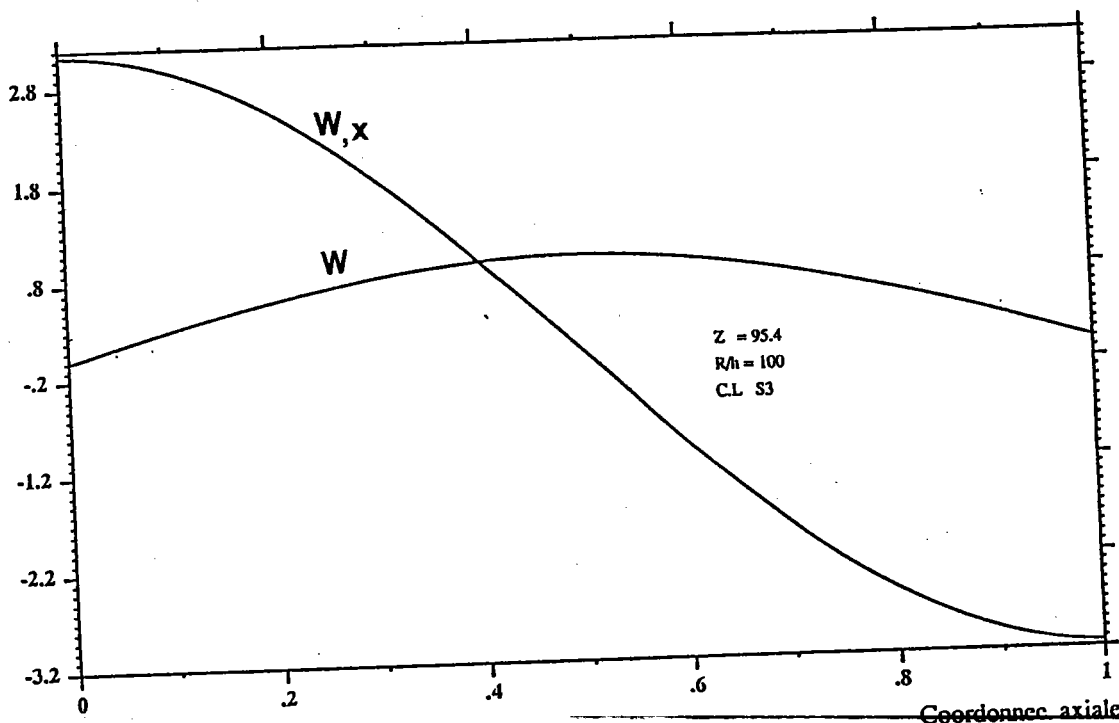


Fig 2-6 : Mode et rotation de flambage pour la condition aux limites S3.

L'idée que nous exploiterons est de considérer  $1/Z$  comme petit paramètre, ce qui induit une perturbation singulière dans les équations. La méthode utilisée consiste à faire un développement asymptotique comme au ch. 1 § 5.

Ceci permet de justifier l'approximation inextensionnelle, d'expliquer et de clarifier le rôle paradoxal des conditions aux limites, enfin de donner des formules explicites de la pression de flambage pour les différentes conditions aux limites.

## II.2. Calcul des pressions de flambage par des méthodes heuristiques

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord chercher les équations et les conditions aux limites caractérisant le mode intérieur, ainsi que les conditions aux limites qu'il vérifie. Après avoir expliqué l'origine de la couche limite, nous allons pouvoir établir l'équation différentielle du mode intérieur. Nous montrerons dans ce cadre comment, avec l'approximation inextensionnelle, on pourra relier la condition aux limites axiale à la rotation du mode intérieur. Ceci nous permettra d'avoir, en première approximation, deux classes de conditions aux limites. Nous calculerons,

- dans chacun de ces deux cas, le mode de flambage et la courbe de stabilité neutre correspondante.

### II.2.1. Première dérivation des équations approchées. Origine mathématique de la couche limite

En théorie de Donnell sans préflambage (cf. annexe 1), le mode de flambage  $w(x,y)$ ,  $f(x,y)$  est solution des équations :

$$\begin{cases} \Delta^2 w - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{4}{3^{3/4}} \frac{\lambda}{\eta} \left( \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \Delta^2 f + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

+ conditions aux limites

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

(2-1)

où  $f$  est la fonction de contrainte. On rappelle que :

$$\frac{1}{\eta^2} = Z \frac{\sqrt{12}}{\Pi^2} \approx 0.351 Z.$$

On remarque l'influence prépondérante des termes de couplage dus à la courbure. L'usage est souvent de chercher des solutions de 2-1 sous la forme de produits de sinus, sans considérer les conditions aux limites (ce mode est exact seulement pour la condition aux limites S3). C'est notamment ainsi que l'on obtient la formule classique en compression. Le mode de flambage ainsi obtenu varie beaucoup plus en  $y$  qu'en  $x$  : voir [7] et fig. 2-1. Ceci suggère l'analyse approchée suivante : négligeons  $\partial/\partial x$  devant  $\partial/\partial y$  sauf pour les deux termes de couplage. Cela donne :

$$\frac{\partial^4 w_{oi}}{\partial y^4} - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 f_{oi}}{\partial x^2} + \frac{4\lambda_o}{3^{3/4}\eta} \frac{\partial^2 w_{oi}}{\partial y^2} = 0 \quad *$$

$$\frac{\partial^4 f_{oi}}{\partial y^4} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 w_{oi}}{\partial x^2} = 0$$

(2-2)

Or le système approché (2-2) n'est plus que d'ordre 4 par rapport à  $\partial/\partial x$ , alors que le système exact (2-1) est d'ordre 8. On n'aura donc besoin que de deux conditions aux limites au lieu de 4 (sur chaque bords) normalement. Cette perte de conditions aux limites est le signe qu'il existe une couche limite au voisinage des bords, où le mode varie rapidement. Donc les équations (2-2) ne gouvernent que le comportement du mode à l'intérieur de la coque, à l'exclusion des couches limites.

En cherchant des solutions de la forme :  $w_{oi}(x,y) = w_{oi}(x) \exp(iKy)$ , on déduit à partir de (2-2) que  $w_{oi}$  est solution de :

$$w_{oi}^{(4)}(x) + (\eta^4 K^8 - \frac{4}{3^{3/4}} \lambda_o \eta^3 K^6) w_{oi}(x) = 0$$

(2-3)

Il reste à chercher les deux conditions aux limites satisfaites par la solution intérieure  $w_{oi}(x,y)$ . Le lien entre les conditions aux limites pour le mode exact  $w(x,y)$  et le mode intérieur  $w_{oi}(x,y)$  n'est pas simple. On admettra que la condition sur la flèche est conservée (Fig. 2-5) ce qui veut dire que :

$$w(\pm \frac{\Pi}{2}, y) = 0 \text{ implique } w_{oi}(\pm \frac{\Pi}{2}, y) = 0$$

(2-4)

Supposons maintenant que la contrainte axiale  $N_x$  soit nulle aux bords ce qui est équivalent à :

$$f_{,yy}(y, \pm \frac{\Pi}{2}) = 0$$

(2-5)

---

\* Notation  $(w,f)_{oi}$  : o signifiant premier ordre  
i signifiant intérieur.

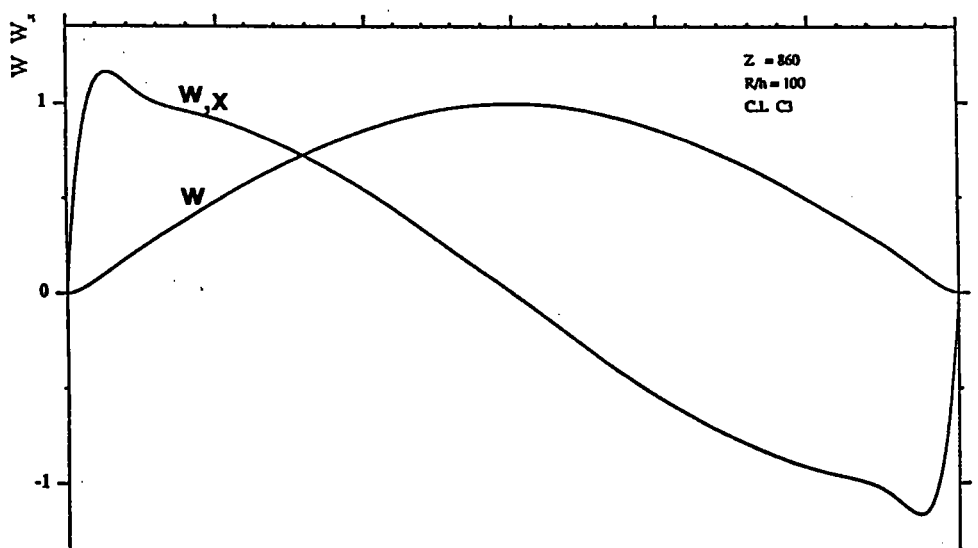
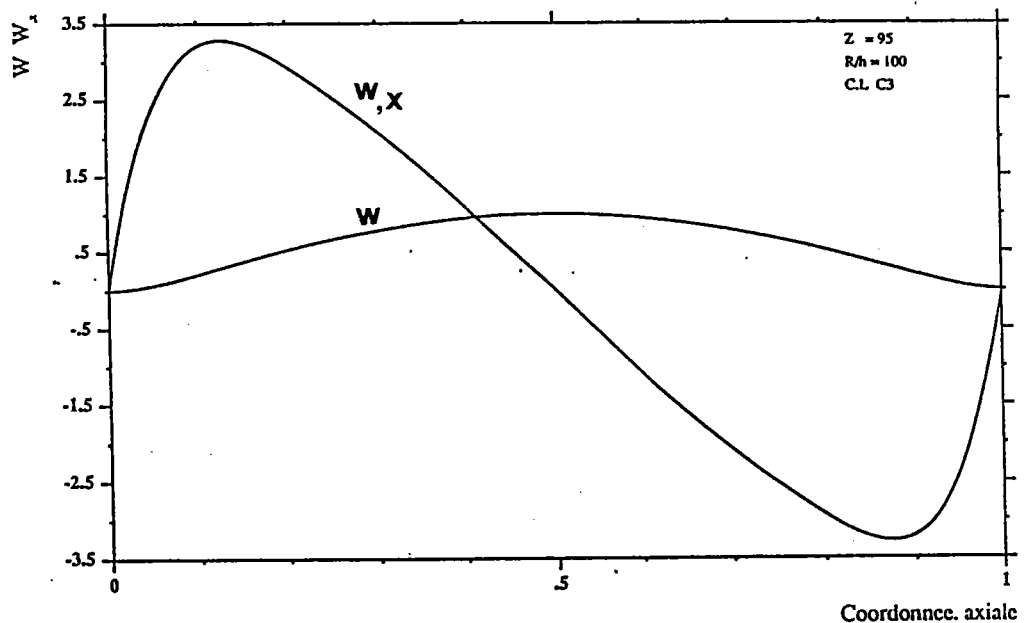
Admettons pour l'instant que ceci soit valable aussi pour  $f_{oi}$ . A partir de la deuxième équation 2-2, on en déduit une seconde condition aux limites pour  $w_{oi}$  :

$$\frac{\partial^2 w_{oi}}{\partial x^2} (\pm \Pi/2, y) = 0$$

(2-6)

Le mode intérieur  $w_{oi}(x,y)$  est donc parfaitement déterminé pour toutes les conditions aux limites qui annulent la flèche et la contrainte axiale aux bords (C3, C4, S3, S4).

Les figures 2-7 montrent d'ailleurs que pour cette classe de conditions aux limites la couche limite est bien visible. Si on prolonge de façon naturelle la rotation exacte  $w'$ , la pente du prolongement est à peu près nulle aux bords. C'est ainsi qu'on obtient une représentation graphique du mode intérieur. Ces résultats numériques confirment donc que la solution intérieure satisfait bien les conditions 2-4 et 2-6.



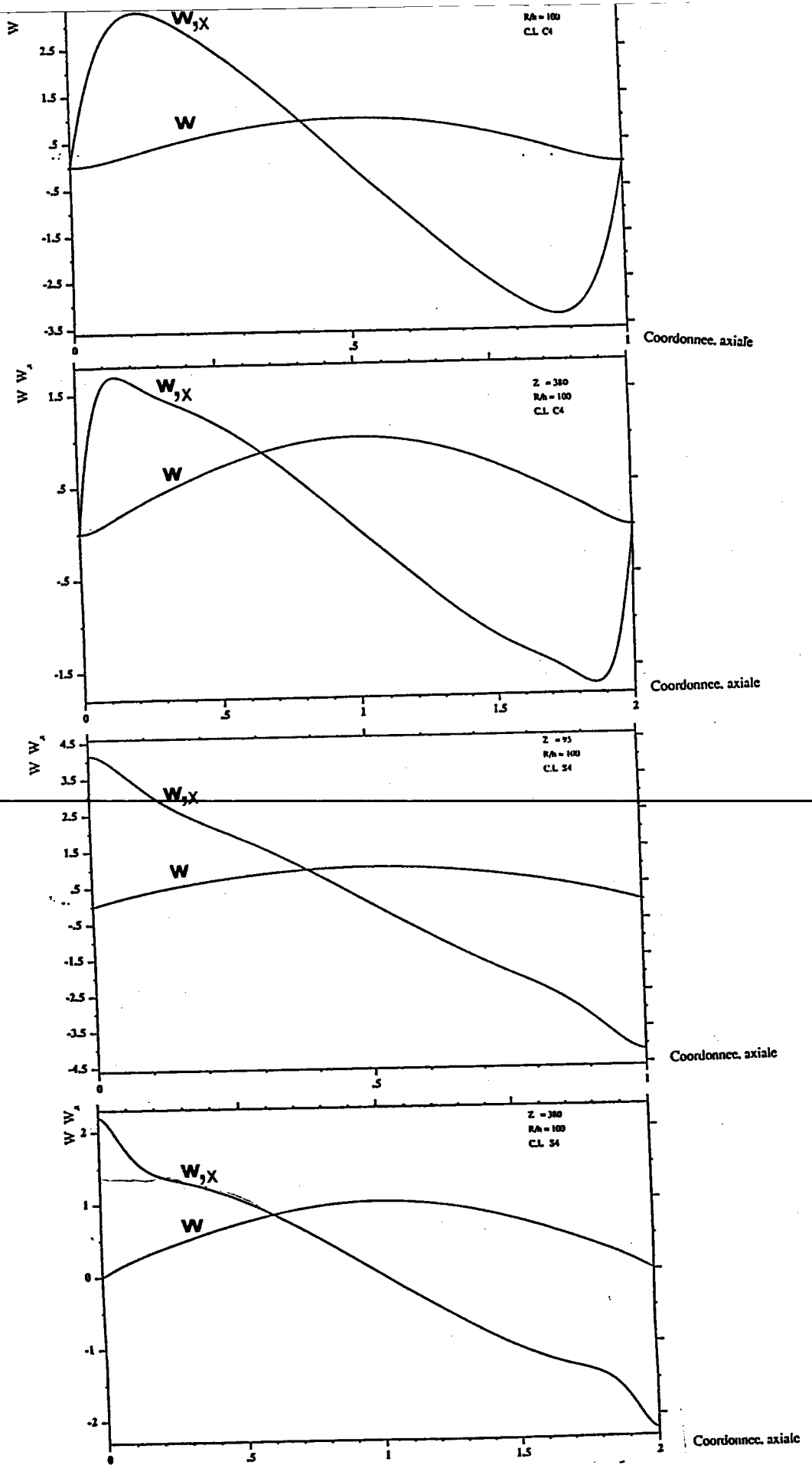


Fig 2-7 : Mode et rotation de flambage le long de la coque pour les conditions aux limites S3, S4, C3, C4.

### II.2.2. Dérivation des équations approchées à partir de l'hypothèse d'un mode inextensionnel

En partant de l'hypothèse d'un mode inextensionnel, nous pourrions exprimer le déplacement intérieur axial en fonction de la rotation. Cette hypothèse d'un mode inextensionnel se traduit par les deux conditions suivantes :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_{oi}}{\partial y} - \frac{w_{oi}}{\eta^2} \approx 0 \quad (2-7)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_{oi}}{\partial y} + \frac{\partial v_{oi}}{\partial x} \approx 0 \quad (2-8)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 u_{oi}}{\partial y^2} = -\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial w_{oi}}{\partial x} \quad (2-9)$$

Ceci montre le lien entre le déplacement axial et la rotation du mode intérieur. Ce résultat peut aussi être obtenu par un principe variationnel [1], en rendant stationnaire la fonctionnelle caractéristique du problème (2-2)

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (\partial_y^2 w_{oi})^2 - (\partial_y^2 f_{oi})^2 - \frac{2}{\eta^2} w_{oi} \partial_x^2 f_{oi} - \frac{4}{3^{3/4}} \lambda_o (\partial_y w_{oi})^2 \right\} d\Omega \quad (2-10)$$

La condition sur le mode exact  $U = 0$  entraîne la condition aux limites suivante pour la solution intérieure:

$$\frac{\partial w_{oi}}{\partial x} \left( \pm \frac{\Pi}{2}, y \right) = 0 \quad (2-11)$$

A celle-ci on rajoute la condition aux limites sur la flèche :

$$w_{oi} \left( \pm \frac{\Pi}{2}, 0 \right) = 0$$

(2-12)

L'équation 2-3 et les conditions aux limites 2-11 et 2-12 déterminent en première approximation le mode intérieur pour le cas de conditions aux limites  $U = W = 0$ , soit  $(C1, C2, S1, S2)$ . Sur les figures 2-8 on a présenté pour cette classe de conditions aux limites, le mode et la rotation exacts. On voit bien que la rotation  $w'$  peut être prolongée dans la couche limite ce qui donne une représentation graphique du mode intérieur. Les calculs numériques confirment donc que la solution intérieure satisfait bien les conditions aux limites (2-11), (2-12).

Pour résumer, le mode intérieur est en première approximation, solution de l'équation 2-3, il satisfait les conditions aux limites 2-4 et 2-6 pour le cas  $N_x = W = 0$  et les conditions 2-11 et 2-12 pour le cas  $U = W = 0$ . Le paradoxe sur les conditions aux limites est donc levé. Dans le cadre de cette approximation au premier ordre, les conditions aux limites en  $U$  et  $W$  sont, au premier ordre, les seules à influencer sur la solution intérieure.

Dans le paragraphe 3, nous expliquerons en détail les effets de toutes les conditions aux limites et nous confirmerons qu'au premier ordre, certaines agissent sur le mode intérieur alors que d'autres n'ont d'effet que sur la couche limite et le second ordre.

Z = 380  
R/h = 100  
C.L. C1

$W$   $W_x$

1

$w$

0

$w_x$

-1

0

.5

1

1.5

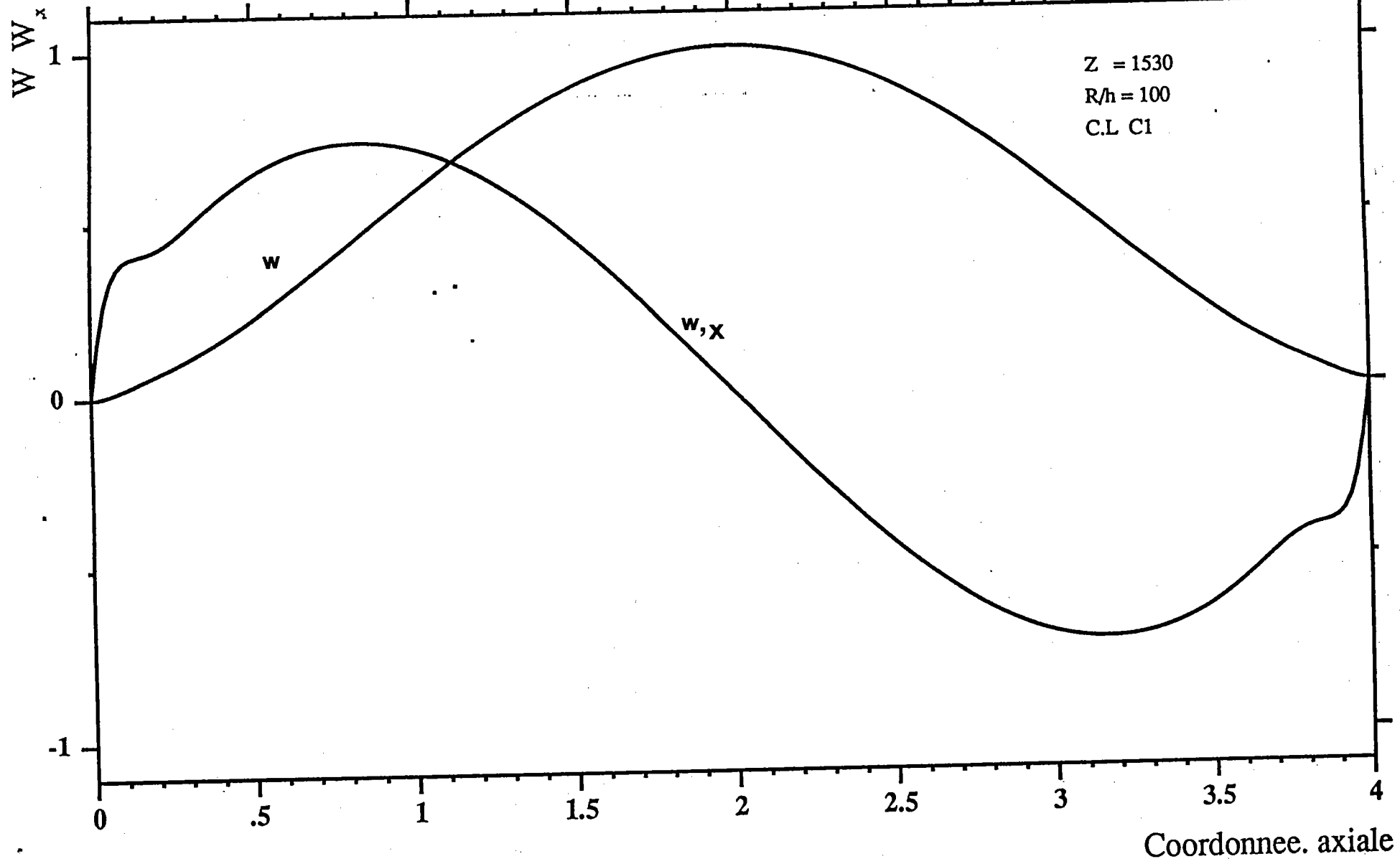
2

2.5

3

Coordonnee. axiale





W W<sub>x</sub>

Z = 860  
R/h = 100  
C.L S1

.8

w

-.2

w<sub>x</sub>

-1.2

0

.5

1

1.5

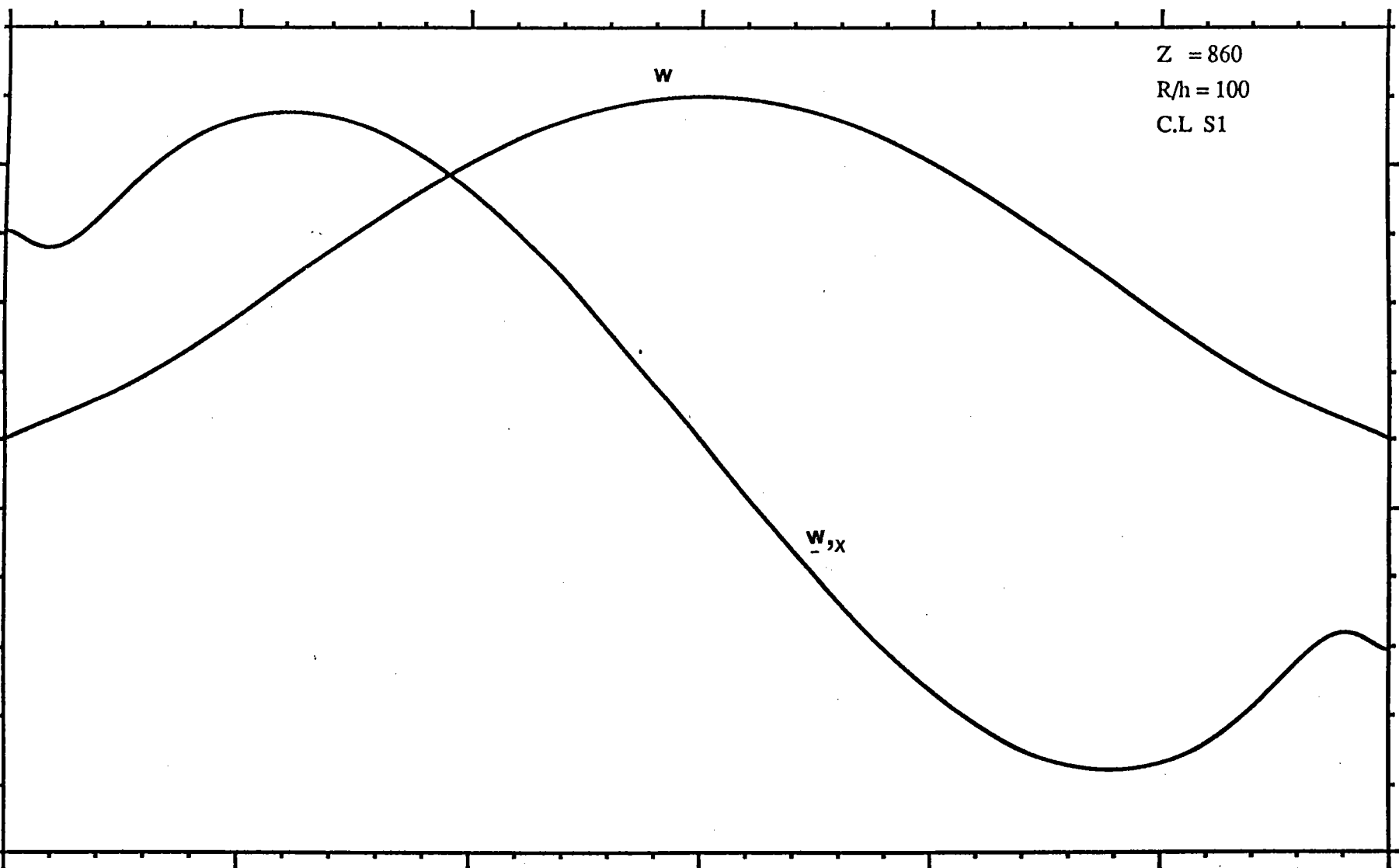
2

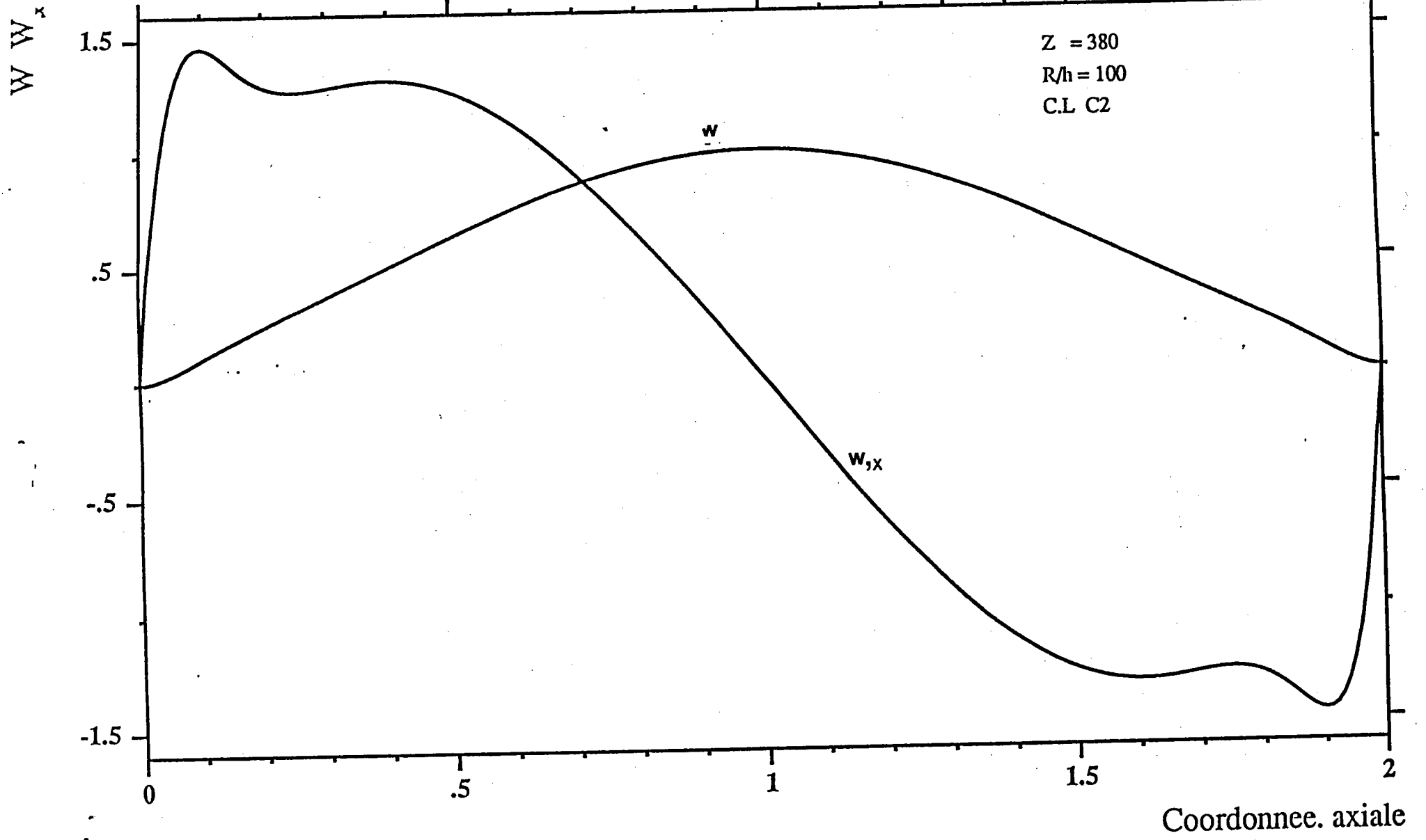
2.5

3

Coordonnee. axiale

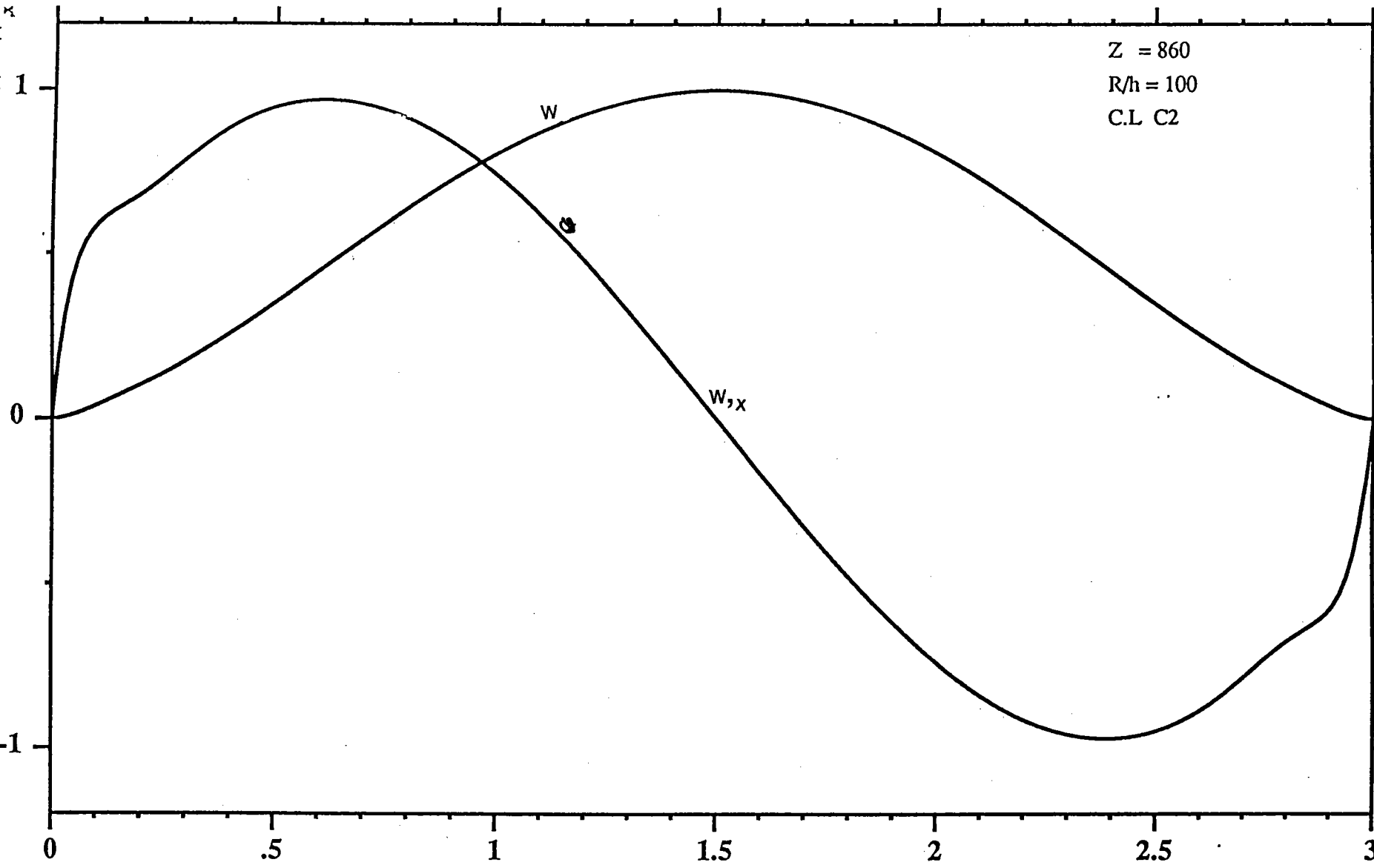
54 C





Z = 860  
R/h = 100  
C.L C2

W W<sup>x</sup>



Coordonnee. axiale

548

$W$   $W_x$

$Z = 860$   
 $R/h = 100$   
C.L. S2

1

0

-1

$W$

$W_x$

0

.5

1

1.5

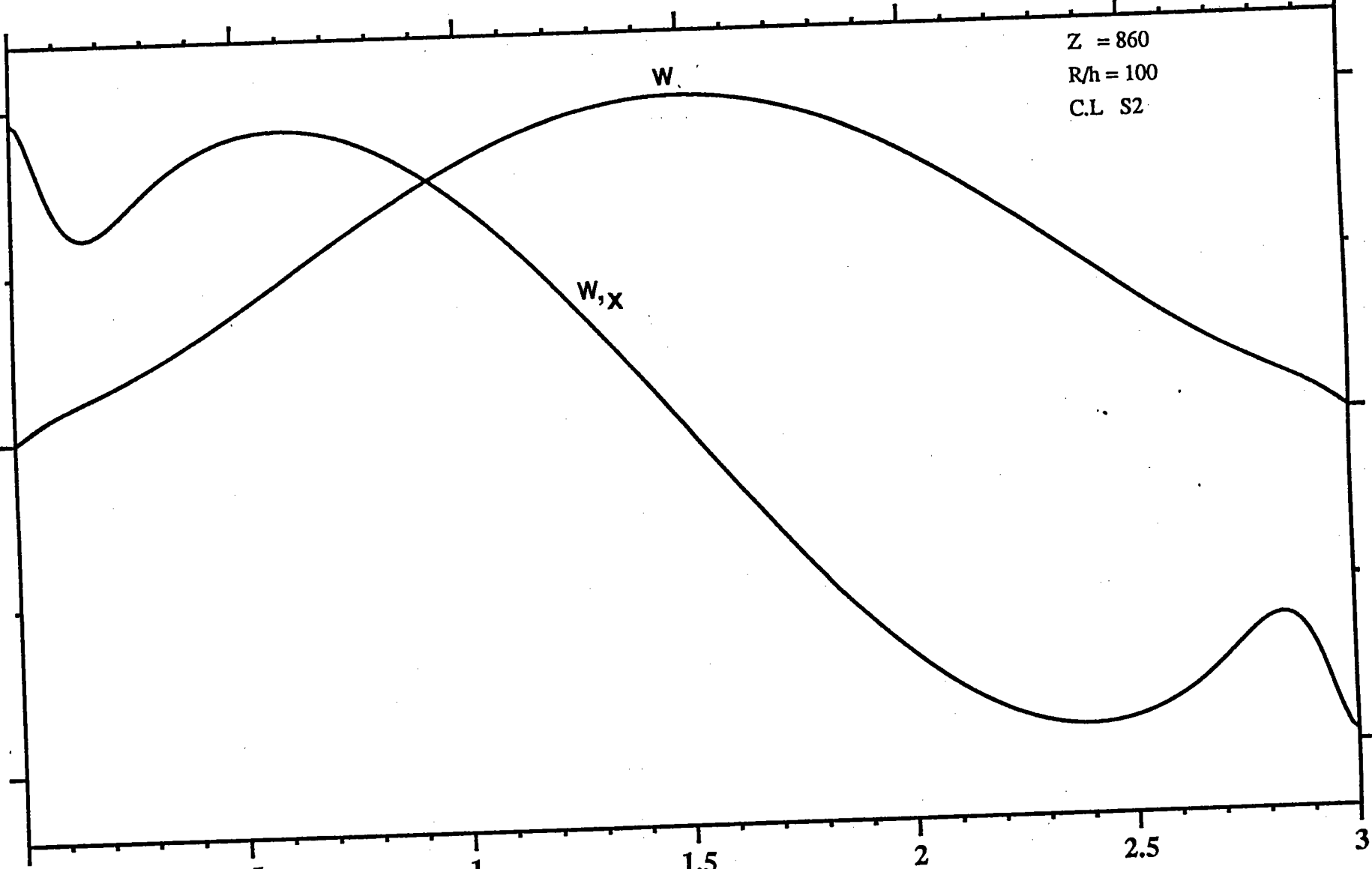
2

2.5

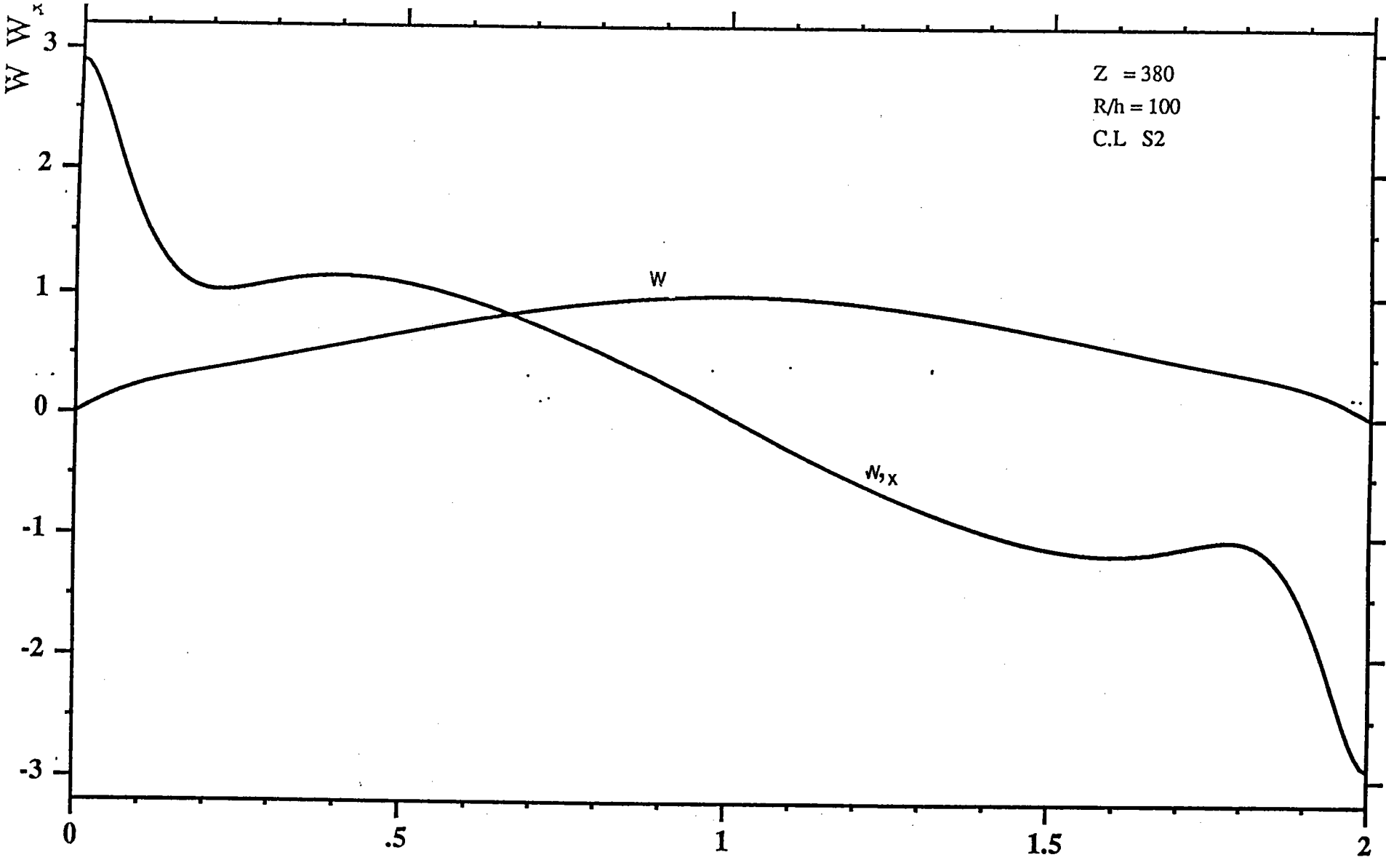
3

Coordonnee. axiale

54

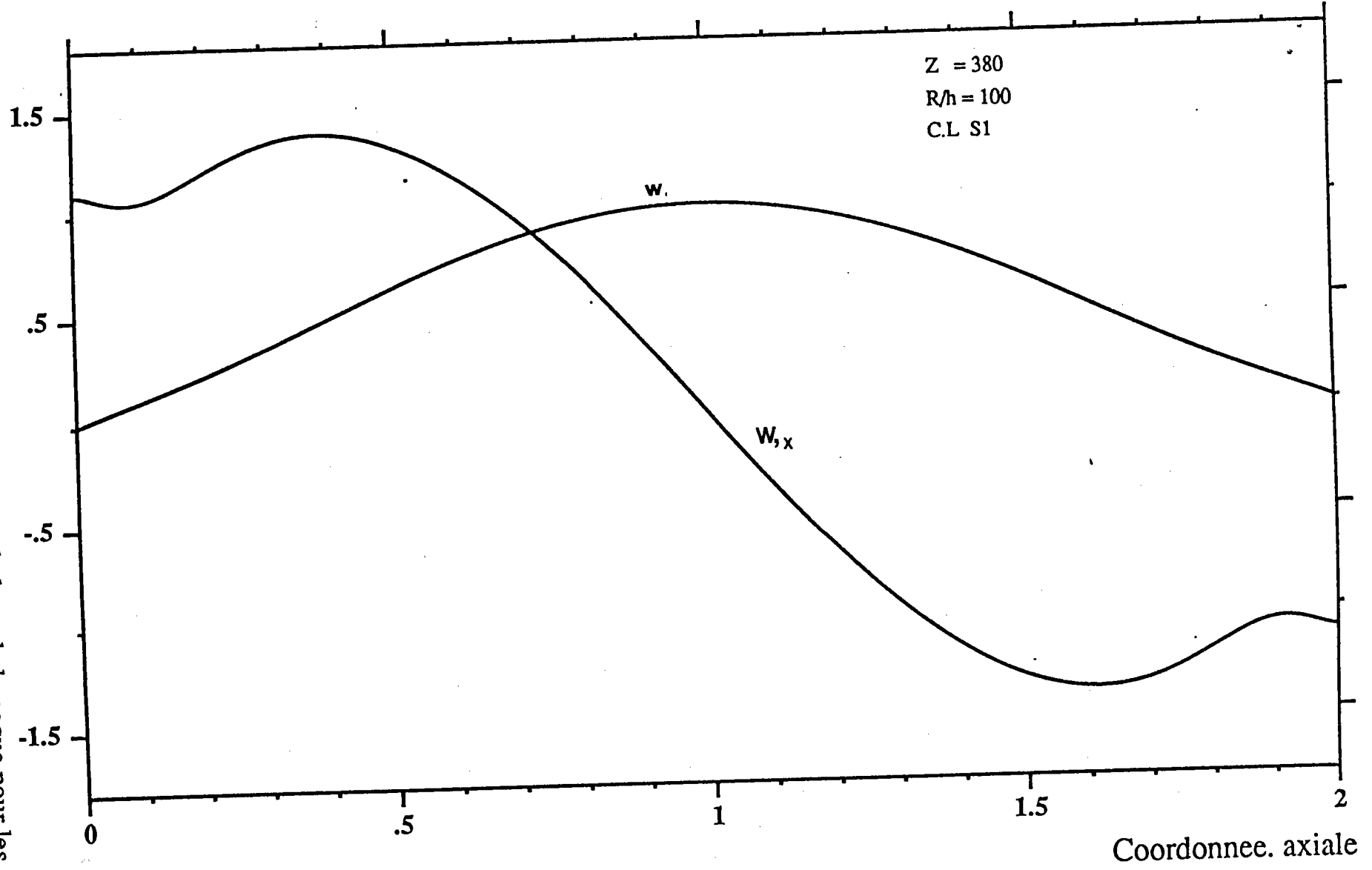


Z = 380  
R/h = 100  
C.L S2



Coordonnee. axiale

Fig 2-8 : Mode et rotation de flambage le long de la coque pour les conditions aux limites C1, S1, S2, C2.



### II.2.3. Influence des conditions aux limites sur le mode de flambage

L'approximation du mode intérieur et les conditions aux limites 2-4, 2-6 ou 2-11, 2-12 permettent d'avoir une première approximation de la courbe de stabilité neutre. Pour les conditions aux limites :  $N_x = W = 0$ , on a vu que le mode intérieur satisfait les équations :

$$\begin{cases} w_{oi}^{(4)} + \left( \eta^4 K^8 - \frac{4}{3^{3/4}} \lambda_o \eta^3 K^6 \right) w_{oi} = 0 \\ w_{oi}(\pm \Pi/2) = w_{oi}''(\pm \Pi/2) = 0 \end{cases} \quad (2-13)$$

La fonction propre correspondant à la plus petite valeur propre  $\lambda_o$  s'écrit :

$$w_{oi}(x) = A \cos x \quad (2-14)$$

La courbe de stabilité neutre  $\lambda_o$  en fonction de  $K$  est :

$$\lambda_o = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{1}{\eta^3 K^6} + \eta K^2 \right) \quad (2-15)$$

On rappelle que la condition de périodicité dans la direction azimutale impose que le nombre d'onde  $K$  soit de la forme :

$$K = \frac{nL}{\Pi R} \quad (2-16)$$

où le nombre entier  $n$  est le nombre d'harmoniques. En cherchant le minimum de 2-15 par rapport à  $K$  sans tenir compte de la périodicité, on trouve le nombre d'ondes  $K_{oc}$  et la charge critique  $\lambda_{oc}$  suivants :

$$K_{oc} = \frac{3^{1/8}}{\sqrt{\eta}}, \quad \lambda_{oc} = 1 \quad (2-17)$$

Pour les conditions aux limites  $U = W = 0$ , le mode intérieur satisfait les équations :



$$\begin{cases} w_{oi}^{(4)} + (\eta^4 K^8 - \frac{4}{3^{3/4}} \lambda_o \eta^3 K^6) w_{oi} = 0 \\ w_{oi}(\pm \Pi/2) = w'_{oi}(\pm \Pi/2) = 0 \end{cases} \quad (2-18)$$

La fonction propre correspondant à la plus petite valeur propre  $K$  s'écrit :

$$w_{oi}(x) = A \cos r x + B \cos h r x \quad (2-19)$$

où  $r$  est la plus petite solution de :

$$\text{tang}(r \frac{\Pi}{2}) + \tanh(r \frac{\Pi}{2}) = 0 \quad \text{soit } r = 1.505619 \quad (2-20)$$

D'où la courbe de stabilité neutre  $\lambda_o(K)$ ,

$$\lambda_o = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{r^4}{\eta^3 K^6} + \eta K^2 \right) \quad (2-21)$$

En cherchant le minimum de 2-21 par rapport à  $K$  sans tenir compte de la périodicité, on trouve le nombre d'onde critique  $K_{oc}$  et la charge critique suivants :

$$K_{oc} = \frac{\sqrt{r} 3^{1/8}}{\sqrt{\eta}}, \quad \lambda_{oc} = r \quad (2-22)$$

Les relations 2-17 et 2-22 montrent que le nombre d'onde azimutal  $K$  est de l'ordre de  $1/\sqrt{\eta}$  soit  $Z^{1/4}$ , alors que la charge critique est égale à 1. ou 1.505619. Ce résultat confirme l'hypothèse faite sur le mode intérieur, soit négliger la variation axiale  $\partial/\partial x$  par rapport à la variation azimutale  $\partial/\partial y$ . Ceci explique pourquoi, dans le développement asymptotique exact paragraphe 3, nous poserons :

$$k = K \sqrt{\eta} \quad \text{soit } k = 0 \quad (1) \quad (2-23)$$

Sur les tableaux 2-1 à 2-8, on a présenté la charge critique exacte et approchée (équation 2-15 ou 2-21), en cherchant le minimum par rapport au nombre d'onde entier  $n$ .

Ces résultats montrent que la charge approchée est précise pour des  $Z$  grands. On remarque que la valeur de  $Z$  à partir de laquelle la précision devient bonne, dépend des conditions aux limites.

C.L. S3 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.1473 (11)	1.00285 (12)	0.1259
0.60	34.3418	1.1210 (10)	1.00184 (11)	0.1063
0.75	53.6591	1.0982 (9)	1.00001 (10)	0.0894
1.00	95.3939	1.0721 (8)	1.00801 (9)	0.0598
1.50	214.6363	1.0489 (7)	1.00076 (7)	0.0459
2.00	381.5757	1.0340 (6)	1.00285 (6)	0.0301
3.00	858.5453	1.0239 (5)	1.00001 (5)	0.0234
4.00	1526.3027	1.0441 (4)	1.04355 (4)	0.0005
5.00	2384.8480	1.0230 (4)	1.00561 (4)	0.0170
6.00	3434.1811	1.0976 (4)	1.07793 (4)	0.0179
7.00	4674.3021	1.0515 (3)	1.05316 (3)	0.0016
8.00	6105.2109	1.0095 (3)	1.00285 (3)	0.0066
9.00	7726.9075	1.0179 (3)	1.00801 (3)	0.0097
10.00	9539.3920	1.0546 (3)	1.04369 (3)	0.0103

C.L. C3 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.4449 (12)	1.00285 (12)	0.3059
0.60	34.3418	1.3521 (11)	1.00184 (11)	0.2590
0.75	53.6591	1.2725 (10)	1.00001 (10)	0.2141
1.00	95.3939	1.2030 (8)	1.00801 (9)	0.1621
1.50	214.6363	1.1411 (7)	1.00076 (7)	0.1230
2.00	381.5757	1.0947 (6)	1.00285 (6)	0.0839
3.00	858.5453	1.0641 (5)	1.00001 (5)	0.0602
4.00	1526.3027	1.0805 (4)	1.04355 (4)	0.0342
5.00	2384.8480	1.0461 (4)	1.00561 (4)	0.0387
6.00	3434.1811	1.1134 (4)	1.07793 (4)	0.0319
7.00	4674.3021	1.0732 (3)	1.05316 (3)	0.0187
8.00	6105.2109	1.0260 (3)	1.00285 (3)	0.0226
9.00	7726.9075	1.0307 (3)	1.00801 (3)	0.0220
10.00	9539.3920	1.0653 (3)	1.04369 (3)	0.0203

C.L. S4 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.0515 (10)	1.00285 (12)	0.0463
0.60	34.3418	1.0454 (9)	1.00184 (11)	0.0417
0.75	53.6591	1.0363 (9)	1.00001 (10)	0.0350
1.00	95.3939	1.0260 (8)	1.00801 (9)	0.0176
1.50	214.6363	1.0281 (7)	1.00076 (7)	0.0266
2.00	381.5757	1.0149 (6)	1.00285 (6)	0.0119
3.00	858.5453	1.0124 (5)	1.00001 (5)	0.0123
4.00	1526.3027	1.0243 (4)	1.04355 (4)	0.0188
5.00	2384.8480	1.0172 (4)	1.00561 (4)	0.0114
6.00	3434.1811	1.0958 (4)	1.07793 (4)	0.0163
7.00	4674.3021	1.0381 (3)	1.05316 (3)	0.0145
8.00	6105.2109	1.0034 (3)	1.00285 (3)	0.0005
9.00	7726.9075	1.0150 (3)	1.00801 (3)	0.0069
10.00	9539.3920	1.0528 (3)	1.04369 (3)	0.0087

C.L. C4 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.4340 (11)	1.00285 (12)	0.3007
0.60	34.3418	1.3501 (11)	1.00184 (11)	0.2580
0.75	53.6591	1.2725 (10)	1.00001 (10)	0.2141
1.00	95.3939	1.2019 (8)	1.00801 (9)	0.1613
1.50	214.6363	1.1260 (7)	1.00076 (7)	0.1112
2.00	381.5757	1.0940 (6)	1.00285 (6)	0.0833
3.00	858.5453	1.0628 (5)	1.00001 (5)	0.0590
4.00	1526.3027	1.0801 (4)	1.04355 (4)	0.0338
5.00	2384.8480	1.0445 (4)	1.00561 (4)	0.0372
6.00	3434.1811	1.1115 (4)	1.07793 (4)	0.0302
7.00	4674.3021	1.0732 (3)	1.05316 (3)	0.0187
8.00	6105.2109	1.0252 (3)	1.00285 (3)	0.0218
9.00	7726.9075	1.0297 (3)	1.00801 (3)	0.0211
10.00	9539.3920	1.0637 (3)	1.04369 (3)	0.0189

C.L. S2 R/H=100				
L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. ler ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.1322 (10)	1.50570 (15)	0.3299
0.60	34.3418	1.1579 (10)	1.50888 (14)	0.3031
0.75	53.6591	1.1891 (9)	1.51070 (12)	0.2704
1.00	95.3939	1.2488 (8)	1.51532 (11)	0.2135
1.50	214.6363	1.3230 (7)	1.51652 (9)	0.1463
2.00	381.5757	1.3621 (7)	1.53737 (8)	0.1287
3.00	858.5453	1.4194 (6)	1.51070 (6)	0.0643
4.00	1526.3027	1.4266 (5)	1.54333 (5)	0.0818
5.00	2384.8480	1.5059 (5)	1.52661 (5)	0.0137
6.00	3434.1811	1.4684 (4)	1.57447 (4)	0.0722
7.00	4674.3021	1.4668 (4)	1.50586 (4)	0.0266
8.00	6105.2109	1.5264 (4)	1.53737 (4)	0.0072
9.00	7726.9075	1.6211 (4)	1.61961 (4)	0.0009
10.00	9539.3920	1.5506 (3)	1.64631 (3)	0.0617

C.L. C2 R/H=100				
L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. ler ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.5245 (12)	1.50570 (15)	0.0123
0.60	34.3418	1.4639 (11)	1.50888 (14)	0.0307
0.75	53.6591	1.4245 (10)	1.51070 (12)	0.0605
1.00	95.3939	1.4046 (9)	1.51532 (11)	0.0788
1.50	214.6363	1.4116 (8)	1.51652 (9)	0.0744
2.00	381.5757	1.4209 (7)	1.53737 (8)	0.0819
3.00	858.5453	1.4495 (6)	1.51070 (6)	0.0422
4.00	1526.3027	1.4558 (5)	1.54333 (5)	0.0601
5.00	2384.8480	1.5163 (5)	1.52661 (5)	0.0068
6.00	3434.1811	1.4913 (4)	1.57447 (4)	0.0557
7.00	4674.3021	1.4783 (4)	1.50586 (4)	0.0187
8.00	6105.2109	1.5317 (4)	1.53737 (4)	0.0037
9.00	7726.9075	1.6241 (4)	1.61961 (4)	0.0027
10.00	9539.3920	1.5691 (3)	1.64631 (3)	0.0492

C.L. S1 R/H=100				
L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. ler ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.2891 (11)	1.50570 (15)	0.1680
0.60	34.3418	1.2919 (11)	1.50888 (14)	0.1679
0.75	53.6591	1.3068 (10)	1.51070 (12)	0.1560
1.00	95.3939	1.3338 (9)	1.51532 (11)	0.1361
1.50	214.6363	1.3805 (8)	1.51652 (9)	0.0985
2.00	381.5757	1.4037 (7)	1.53737 (8)	0.0952
3.00	858.5453	1.4423 (6)	1.51070 (6)	0.0474
4.00	1526.3027	1.4528 (5)	1.54333 (5)	0.0623
5.00	2384.8480	1.5141 (5)	1.52661 (5)	0.0083
6.00	3434.1811	1.4913 (4)	1.57447 (4)	0.0557
7.00	4674.3021	1.4767 (4)	1.50586 (4)	0.0197
8.00	6105.2109	1.5308 (4)	1.53737 (4)	0.0043
9.00	7726.9075	1.6231 (4)	1.61961 (4)	0.0021
10.00	9539.3920	1.5713 (3)	1.64631 (3)	0.0477

C.L. C1 R/H=100				
L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. ler ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.5533 (12)	1.50570 (15)	0.0307
0.60	34.3418	1.4920 (11)	1.50888 (14)	0.0113
0.75	53.6591	1.4498 (10)	1.51070 (12)	0.0420
1.00	95.3939	1.4231 (9)	1.51532 (11)	0.0648
1.50	214.6363	1.4201 (8)	1.51652 (9)	0.0679
2.00	381.5757	1.4279 (7)	1.53737 (8)	0.0767
3.00	858.5453	1.4528 (6)	1.51070 (6)	0.0399
4.00	1526.3027	1.4606 (5)	1.54333 (5)	0.0566
5.00	2384.8480	1.5174 (5)	1.52661 (5)	0.0061
6.00	3434.1811	1.4959 (4)	1.57447 (4)	0.0525
7.00	4674.3021	1.4798 (4)	1.50586 (4)	0.0176
8.00	6105.2109	1.5325 (4)	1.53737 (4)	0.0032
9.00	7726.9075	1.6241 (4)	1.61961 (4)	0.0027
10.00	9539.3920	1.5746 (3)	1.64631 (3)	0.0456

Tableaux 2-1 à 2-8 - Comparaison entre la valeur asymptotique  $\lambda_0$  et exacte

## II.3. Calcul des pressions de flambage par une méthode asymptotique

### II.3.1. Présentation de la méthode asymptotique: application au problème de flambage des coques sous pression

Les calculs que nous avons présentés aux paragraphes précédents sont basés sur des approximations posées a priori . Il est intéressant de disposer d'une méthode systématique qui prouve toutes les hypothèses faites et permet de trouver avec plus de détail et de précision les solutions analytiques du problème 2-1. C'est l'objet de ce paragraphe. Nous utiliserons pour cela la méthode asymptotique rappelée dans le chapitre I paragraphe 5.

La technique consiste à considérer  $\eta$  comme petit paramètre et à faire un développement des déplacements et de la pression  $\lambda$  en :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \eta + \lambda_2 \eta^2 + \dots \quad (2-24)$$

où

$$\eta = \frac{\Pi}{12^{1/4} \sqrt{Z}}$$

Pour les déplacements nous ferons appel à la méthode de perturbation singulière. Nous faisons donc deux développements :

- a) un développement de la solution intérieure, qui sera valable assez loin des bords
- b) un développement d'une solution localisée au voisinage d'un bord, ce qui traduit une couche limite.

Le raccord est ici très facile puisque la linéarité du problème étudié nous permet de superposer les deux développements.

### II.3.2. Développement intérieur

L'objet est de déterminer une approximation des déplacements à l'intérieur de la coque. Nous faisons donc un développement asymptotique des déplacements en puissances de  $\eta$  (ch. 1 § 5). Nous utiliserons pour cela les équations d'équilibre en déplacement. D'après les résultats du paragraphe précédent, le nombre d'onde  $K$  est de l'ordre  $1/\sqrt{\eta}$ . Nous définissons donc un nombre  $k$  qui sera d'ordre unité :

$$K = \frac{k}{\sqrt{\eta}} \quad (2-25)$$

Les déplacements  $u, v, w$  figurant dans les équations d'équilibre n'ont pas les mêmes ordres de grandeur en  $\eta$ . Etant donné que ces déplacements sont solutions d'un problème aux valeurs propres, on peut choisir a priori un déplacement azimutal tel que :

$$v = 0(1) \quad (2-26)$$

Les autres ordres de grandeur peuvent être déterminés par exemple à partir de 2-7 et 2-8. On obtient

$$u = 0(\sqrt{\eta}) \quad , \quad v = 0(1) \quad , \quad w = 0(\eta^{3/2}) \quad (2-27)$$

On va ensuite développer le mode en puissance de  $\eta$ , en cherchant des solutions harmoniques dans la direction azimutale :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\eta} \left\{ U_{i0} + \eta U_{i1}(x) + \dots \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\ v &= i \left\{ V_{i0} + \eta V_{i1}(x) + \dots \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\ w &= \eta^{3/2} \left\{ W_{i0} + \eta W_{i1}(x) + \dots \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \end{aligned} \quad (2-28)$$

Si on néglige pour l'instant le préflambage, les équations de Donnell en déplacement s'écrivent :

$$\begin{aligned}
u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} v_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xy} - \frac{\nu w_{,x}}{\eta^2} &= 0 \\
v_{,yy} + \left\{ \frac{1+\nu}{2} v_{,xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{,xy} \right\} - \frac{w_{,y}}{\eta^2} &= 0 \\
\Delta^2 w + \frac{1}{\eta^4(1-\nu^2)} \{w - \eta^2(v_{,y} + \nu u_{,x})\} + \frac{4\lambda}{3^{3/4}} \{\alpha w_{,xx} + w_{,yy}\} &= 0
\end{aligned}$$

(2-29)

$$\text{où } \Delta = (\partial_x^2 + \partial_y^2).$$

En reportant les développements (2-24), (2-28) dans (2-29), nous obtenons les résultats suivants (voir annexe 2) :

### Premier ordre

$$U_{io}(x) = \frac{W'_{io}(x)}{k^2}$$

(2-30)

$$V_{io}(x) = -\frac{W_{io}(x)}{k}$$

(2-31)

$$W_{io}^{(4)}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_0}{3^{3/4}} k^6 \right) W_{io}(x) = 0$$

(2-32)

### Second ordre

$$U_{i1}(x) = \frac{W'_{i1}(x)}{k^2} + \frac{2+\nu}{k^4} W_{io}'''(x)$$

(2-33)

$$V_{i1}(x) = -\frac{W_{i1}(x)}{k} + \nu \frac{W_{io}''(x)}{k^3}$$

(2-34)

$$\begin{aligned}
 W_{ii}^{(4)}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_o k^6}{3^{3/4}} \right) W_{ii}(x) &= \frac{4\lambda_1 k^6}{3^{3/4}} W_{io}(x) \\
 + (2k^6 - \alpha \lambda_o k^4 \frac{2}{3^{3/4}}) W_{io}''(x) &= \frac{2}{k^2} W_{io}^{(6)}(x)
 \end{aligned}$$

(2-35)

A propos de ces équations, on peut faire les remarques suivantes :

1) Les équations 2-31, 2-32 montrent qu'au premier ordre, soit pour une coque très mince, le mode de flambage est sans glissement dans les directions  $x$ ,  $y$ , et sans allongement dans la direction  $y$  : il s'agit d'un mode avec une déformation moyenne quasiment axiale (Fig.2-4). Nous justifions ainsi l'hypothèse du mode inextensionnel (eq. 2-7 et 2-8).

2) L'équation 2-32 est identique à l'équation 2-3 qui avait été obtenue à partir des équations 2-1 et par un argument un peu plus rustique. Elle a été complétée par des équations en  $u$ ,  $v$ , et par des équations au second ordre.

### II.3.3. Développement asymptotique du mode dans la couche limite

La couche limite est un phénomène localisé aux voisinages des bords, à décroissance rapide, traduisant l'effet des conditions aux limites. Pour les coques minces (soit pour des grandes valeurs de  $Z$ ) l'exemple le plus simple de ce type de comportement est la solution du préflambage. Un calcul de couche limite pour cette solution axisymétrique a été fait dans l'annexe 3 (Fig A3-1). Nous allons maintenant calculer pour le mode de flambage la solution rapide sur toute l'épaisseur de la couche limite. Toute solution des équations du mode 2-29 est combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\begin{aligned}
 u(x,y) &= u \exp(rx) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 v(x,y) &= v \exp(rx) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 w(x,y) &= w \exp(rx) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)
 \end{aligned}$$

(2-36)

Nous obtenons l'équation :

$$r^4 + (k^2 - r^2 \eta)^4 - \frac{4\lambda}{3^{3/4}} (k^2 - \frac{\alpha}{2} r^2 \eta) (r^2 \eta - k^2)^2 = 0$$

(2-37)

qui admet huit racines. Quatre de ces racines se retrouvent à partir de l'approximation du mode intérieur (eq. 2-32) c'est-à-dire  $\eta \ll 1$ , ce qui conduit à :

$$r^4 + k^8 - \frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}} = 0$$

(2-38)

On note que ces solutions sont de l'ordre de 1. Entre l'équation exacte 2-37 et l'équation approchée 2-38, il y a donc 4 conditions aux limites qui ont été perdues.

Ces quatre racines permettent de rendre compte des couches limites : deux pour la couche en  $x = -\pi/2$ , deux pour la couche en  $x = +\pi/2$ . L'examen de l'équation (2-37) montre que le produit des huit racines est de l'ordre de  $1/\eta^4$ . Pour  $\eta \ll 1$ , les quatre solutions dans la couche limite s'écrivent alors sous la forme :

$$r = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \sigma = 0 \quad (1)$$

(2-39)

Ainsi, dans la couche limite, les variations dans le sens axial sont les plus rapides alors que c'est l'inverse à l'intérieur. Ecrivons le développement de la solution rapide au voisinage de  $x = -\pi/2$ . On pose :

$$\xi = \frac{x + \pi/2}{\eta}$$

(2-40)

La première idée est de les écrire de la même façon que la solution intérieure en remplaçant seulement la variable lente  $x$  par la variable rapide  $\xi$ . Nous avons fait cela pour les huit types de conditions aux limites introduits à la p.7. Nous avons trouvé que dans tous les cas, le premier ordre s'annulait. Cela signifie qu'avec ces conditions limites, la correction de couche limite concerne plus la pente que la flèche elle-même (voir Fig.2-5).

Nous supposons donc a priori un développement de la solution rapide qui est décalé d'un cran par rapport à la solution intérieure :



$$\begin{aligned}
 u &= \eta^{3/2} \{ U_{r1}(\xi) + \eta U_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 v &= i\eta \{ V_{r1}(\xi) + \eta V_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 w &= \eta^{5/2} \{ W_{r1}(\xi) + \eta W_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2-41}$$

Reportant dans 2-29, on obtient les résultats suivants :

### Premier ordre

$$\begin{aligned}
 U_{r1}''(\xi) - k \frac{(1+v)}{2} V_{r1}'(\xi) - v W_{r1}'(\xi) &= 0 \\
 V_{r1}''(\xi) &= 0 \\
 W_{r1}^{(4)}(\xi) + \frac{1}{1-v^2} (W_{r1}(\xi) + k V_{r1}(\xi) - v U_{r1}'(\xi)) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2-42}$$

### Second ordre

$$\begin{aligned}
 U_{r2}''(\xi) - k \frac{1+v}{2} V_{r2}'(\xi) - v W_{r2}'(\xi) &= k^2 \frac{1-v}{2} U_{r1}(\xi) \\
 \frac{1-v}{2} V_{r2}''(\xi) - k W_{r1}(\xi) &= -\frac{1+v}{2} k U_{r1}'(\xi) \\
 W_{r2}^{(4)}(\xi) + \frac{1}{1-v^2} (W_{r2}(\xi) + k V_{r2}(\xi) - v U_{r2}'(\xi)) &= \left(2k^2 - \frac{2\alpha \lambda_0}{3^{3/4}}\right) W_{r1}''(\xi)
 \end{aligned}
 \tag{2-43}$$

Ne retenant que les solutions décroissant rapidement pour  $\xi \rightarrow \infty$ , (couche limite pour  $x = -\pi/2$ ). La solution du premier ordre vérifie :

$$W_{r_1}^{(4)}(\xi) + W_{r_1}(\xi) = 0 \quad (2-44)$$

$$W_{r_1}(\xi) = E_1 \exp(-\sigma \xi) + \text{C.C.}, \quad \sigma = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$V_{r_1}(\xi) = 0$$

$$U_{r_1}(\xi) = -v [\sigma E_1 \exp(-\sigma \xi) + \text{C.C.}] \quad (2-45)$$

où  $E_1$  est une constante complexe, et C.C désigne le complexe conjugué. Les quatre racines  $r_1, -r_1, r_2, -r_2$  dans la couche limite sont alors :

$$r_1 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\eta}$$

$$r_2 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\eta} \quad (2-46)$$

On obtient le même comportement de couche limite et les mêmes valeurs de  $r$  pour la solution axisymétrique (voir annexe 3). Les résultats d'un calcul en élément finis visualisent bien ce comportement (fig 2-9).

En tenant compte de 2-45 les équations 2-43 s'écrivent :

$$W_{r_2}^{(6)}(\xi) + W_{r_2}''(\xi) = 4 \left( \frac{\alpha \lambda_0}{2.3^{3/4}} - k^2 \right) W_{r_1}(\xi)$$

$$V_{r_2}''(\xi) = (2+v) k W_{r_1}(\xi)$$

$$U_{r_2}'''(\xi) - v W_{r_2}''(\xi) = k^2 (2v+1) W_{r_1}(\xi)$$

(2-47)

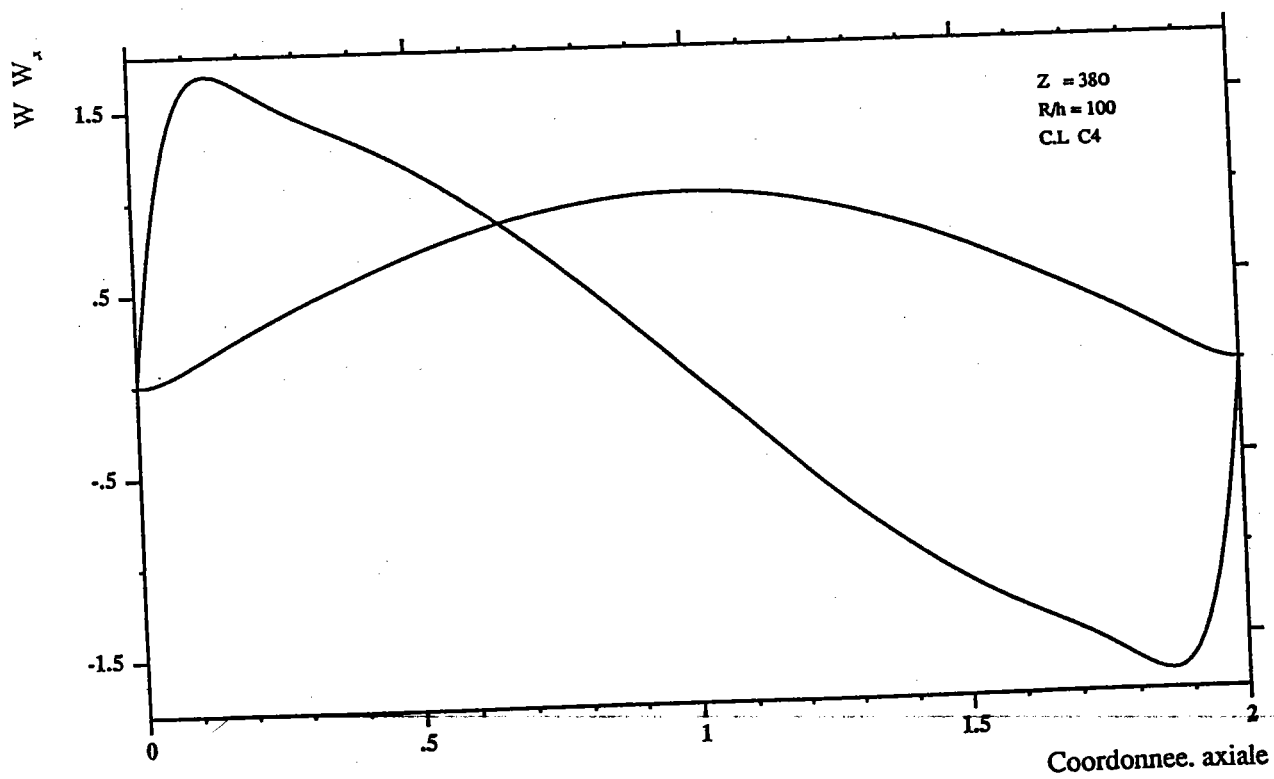
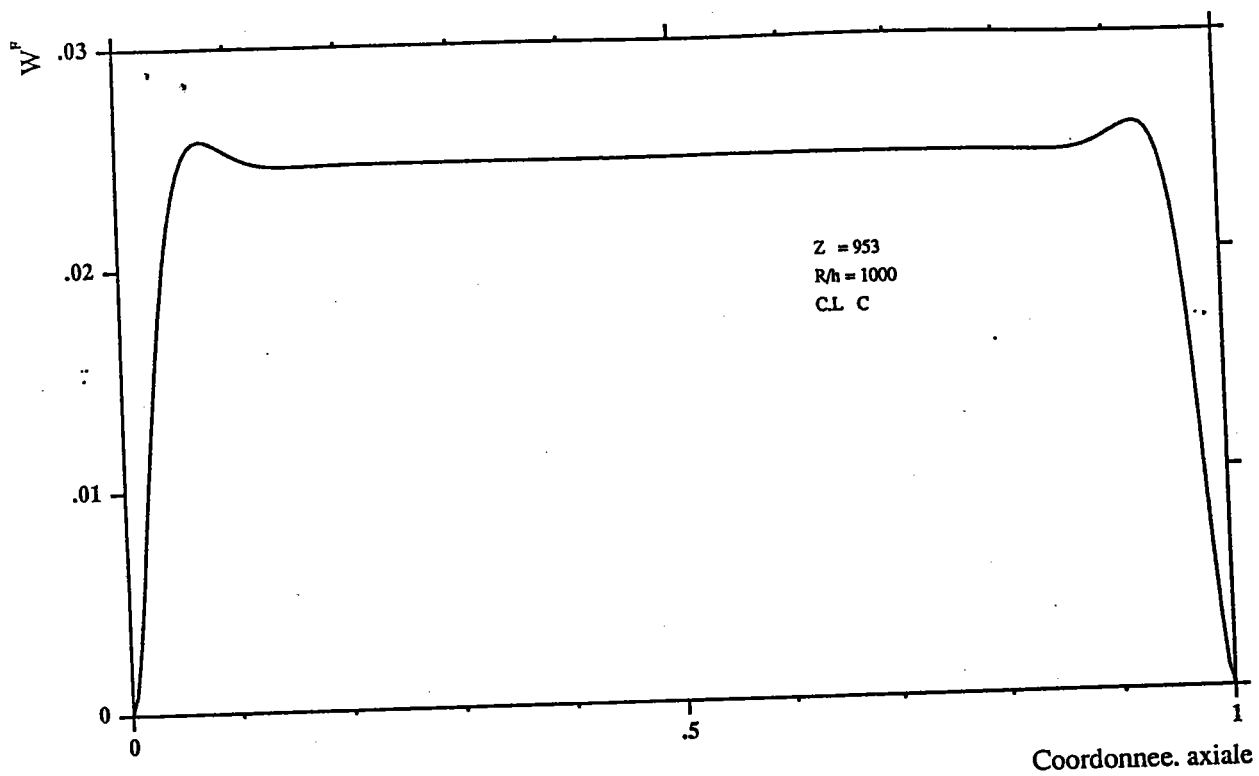


Fig 2-9 couches limites de la solution fondamentale et du mode de flambage

### II.3.4. Traitement des conditions aux limites

Comme il s'agit d'un problème linéaire, la solution dans la couche limite  $x = -\pi/2$  est la somme de la solution variant lentement en  $x$  (ou solution intérieure) et de celle qui varie rapidement :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\eta} \exp \frac{iky}{\sqrt{\eta}} \left[ \frac{W'_{io}(x)}{k^2} + \eta (U_{i1}(x) + U_{r1}(\xi) + \eta^2 (U_{2i}(x) + U_{2r}(\xi)) + 0 (\eta^3)) \right] \\ v &= \exp \frac{iky}{\sqrt{\eta}} \left[ -\frac{W'_{io}(x)}{k} + \eta V_{i1}(x) + \eta^2 (V_{i2}(x) + V_{r2}(\xi)) + 0 (\eta^3) \right] \\ w &= \eta^{3/2} \exp \frac{ik}{\sqrt{\eta}} \left[ W_{io}(x) + \eta (W_{i1}(x) + W_{r1}(\xi) + \eta^2 (W_{i2}(x) + W_{r2}(\xi)) + 0 (\eta^3)) \right] \end{aligned} \quad (2-48)$$

où  $U_{i1}$ ,  $V_{i1}$ ,  $W_{i1}$ , et  $U_{r1}$ ,  $W_{r1}$  sont respectivement déterminés à partir de 2-33 à 2-35 et 2-42. Comme la variable axiale  $x$  intervient à la fois dans le développement intérieur et dans le développement dans la couche limite, la dérivée par rapport à  $x$  s'écrit :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2-49)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} u_{,x} &= \sqrt{\eta} \exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}} \left[ \frac{W''_{io}(x)}{k^2} + U'_{r1}(\xi) + \eta (U'_{i1}(x) + U'_{r2}(\xi)) + 0 (\eta^2) \right] \\ v_{,x} &= \exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}} \left[ -\frac{W'_{io}(x)}{k} + \eta (V'_{i1}(x) + V'_{r2}(\xi)) + 0 (\eta^2) \right] \\ w_{,x} &= \eta^{3/2} \exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}} \left[ W'_{io}(x) + W'_{r1}(\xi) + \eta (W'_{i1}(x) + W'_{r2}(\xi)) + 0 (\eta^2) \right] \\ w_{,xx} &= \eta^{3/2} \exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}} \left[ \frac{1}{\eta} W''_{r1}(\xi) + W''_{io}(x) + W''_{r2}(\xi) + \eta (W''_{i1}(x) + W''_{r3}(\xi)) + 0 (\eta^2) \right] \end{aligned} \quad (2-50)$$

D'où les contraintes : (voir annexe 4)

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}}}{1-v^2} \left[ \frac{-v}{\sqrt{\eta}} (k V_{io}(x) + W_{io}(x)) + \sqrt{\eta} \frac{W''_{io}(x)}{k} + \right. \\ &\quad \left. \eta^{3/2} (W''_{i1}(x) + \frac{2W_{io}^{(4)}}{k^2} + k^4 (E_1 \sigma^2 + C.C.)) + 0 (\eta^2) \right] \end{aligned}$$

$$n_{xy} = \frac{1+\nu}{2} \exp \frac{(iky)}{\sqrt{\eta}} [kU_{i0} + V'_{i0}(x) + \eta (W''_{i0}(x) - k^4 (E_1 \bar{\sigma} + C.C.)) + 0(\eta^2)] \quad (2-51)$$

Dans le tableau si-dessous, on a écrit les développements des conditions aux limites pour  $U, V, W, W_x, N_x, N_{xy}$  en  $x=-\pi/2$ . C'est équivalent au procédé de raccord de deux types de solution, bien connu en théorie des développements asymptotiques.

Condition aux limites	Premier terme	Second terme
$N_x = 0^{**}$	en $\eta^{-1/2}$ 0	en $\eta^{1/2}$ $W''_{i0}(-\pi/2) = 0$
$N_x y = 0$	en $\eta^0$ 0	en $\eta$ $W'''_{i0}(-\pi/2) - k^4 (E_1 \bar{\sigma} + C.C.) = 0$
$U = 0$	en $\eta^{1/2}$ $W'_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W'_{i1}(-\pi/2)/k^2 + (\nu+2)W'''_{i0}(-\pi/2)/k^4 - \nu(E_1 \bar{\sigma} + C.C.) = 0$
$V = 0$	en $\eta^0$ $W_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta$ $-W_{i1}(-\pi/2)/k + \nu W''_{i0}(-\pi/2)/k^3 = 0$
$W = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta^{5/2}$ $W_{i1}(-\pi/2) + (E_1 + C.C.) = 0$
$W_x = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W'_{i0}(-\pi/2) - (E_1 \bar{\sigma} + C.C.) = 0$	*inutile
$W_{xx} = 0$	en $\eta^{1/2}$ $(E_1 \bar{\sigma}^2 + C.C.) = 0,$ $(E_1 = \bar{E}_1)$	*inutile

\*\* Dans le cas de la condition aux limites  $N_x=0$ , on a besoin du troisième terme du développement d'ordre  $\eta^{3/2}$ . Ce dernier s'écrit :

$$W''_{i1}(-\pi/2) + 2W^{(4)}_{i0}(-\pi/2)/k^2 + k^4 (E_1 \bar{\sigma}^2 + C.C.) = 0$$

\* Dans certains cas il n'est pas utile de pousser le développement au second ordre pour obtenir l'expression de  $\lambda_1$ .

### II.3.5. Expression analytique des courbes de stabilité neutre

Le premier terme  $\lambda_0$  du développement de  $\lambda$  (eq. 2-24) est déterminé en cherchant la solution de 2-32 et des conditions aux limites sur  $W_0$ . D'après le tableau ci-dessus, les conditions aux limites  $N_x = W = 0$  entraînent

$$W_{io}(\pm \Pi/2) = W''_{io}(\pm \Pi/2) = 0 \quad (2-52)$$

$$\lambda_0(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \quad (2-53)$$

alors que les conditions  $U = W = 0$  aboutissent à :

$$W_{io}(\pm \Pi/2) = W'_{io}(\pm \Pi/2) = 0 \quad (2-54)$$

$$\lambda_0(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \quad (2-55)$$

où  $r$  est une solution de :

$$\text{tang} \left( r \frac{\Pi}{2} \right) + \tanh \left( r \frac{\Pi}{2} \right) = 0 \quad (2-56)$$

Nous retrouvons ainsi les résultats du paragraphe 2 (équations 2-15 et 2-21).

Le terme correctif  $\lambda_1$  est déterminé en imposant une condition de solvabilité sur l'équation 2-35. Ces calculs nécessitent la connaissance des quatre conditions aux limites imposées sur chaque bord.

Les différentes expressions de  $\lambda_1$  en fonction des 8 conditions aux limites s'écrivent :

\* Cas C1 ( $U = V = W = W_{,x} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2.493 - 1.2717\alpha + \frac{18.506 v^2}{k^6} - \frac{51.53 + 38.71v + 6.406\alpha}{k^8} \right\} \quad (2-57)$$

\* Cas S1 ( $U = V = W = W_{,xx} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2.493 - 1.2717\alpha + \frac{9.253v^2}{k^6} - \frac{51.53+38.71v+6.406\alpha}{k^8} \right\} \quad (2-58)$$

\* Cas C2 ( $U = N_{xy} = W = W_{,x} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2.493 - 1.2717\alpha + \frac{25.9-6.406\alpha}{k^8} - \frac{20.25}{k^{10}} \right\} \quad (2-59)$$

\* Cas S2 ( $U = N_{xy} = W = W_{,xx} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2.493 - 1.2717\alpha + \frac{25.9-6.406\alpha}{k^8} - \frac{40.5}{k^{10}} \right\} \quad (2-60)$$

\* Cas C3 ( $N_x = V = W = W_{,x} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2 - \alpha + \frac{1.80}{k^2} - \frac{2+\alpha}{k^8} \right\} \quad (2-61)$$

\* Cas S3 ( $N_x = V = W = W_{,xx} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2 - \alpha - \frac{2+\alpha}{k^8} \right\} \quad (2-62)$$

\* Cas C4 ( $N_x = N_{xy} = W = W_{,x} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2 - \alpha + \frac{0.90}{k^2} + \frac{1.8}{k^6} - \frac{2+\alpha}{k^8} - \frac{0.90}{k^{10}} \right\} \quad (2-63)$$

\* Cas S4 ( $N_x = N_{xy} = W = W_{,xx} = 0$ )

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4} \left\{ 2 - \alpha - \frac{2+\alpha}{k^8} - \frac{1.80}{k^{10}} \right\} \quad (2-64)$$

.. II.3.6. Forme des courbes de stabilité neutre

Les figures 2-10 à 2-14 montrent l'approximation de la courbe de stabilité neutre donnée par les formules 2-24, 2-55 et 2-57 - notées  $\lambda_{\text{asym}}$  - et comparée à la courbe exacte dans le cas des conditions aux limites C1 et pour  $Z = 858, 1073, 1236, 1526$ .

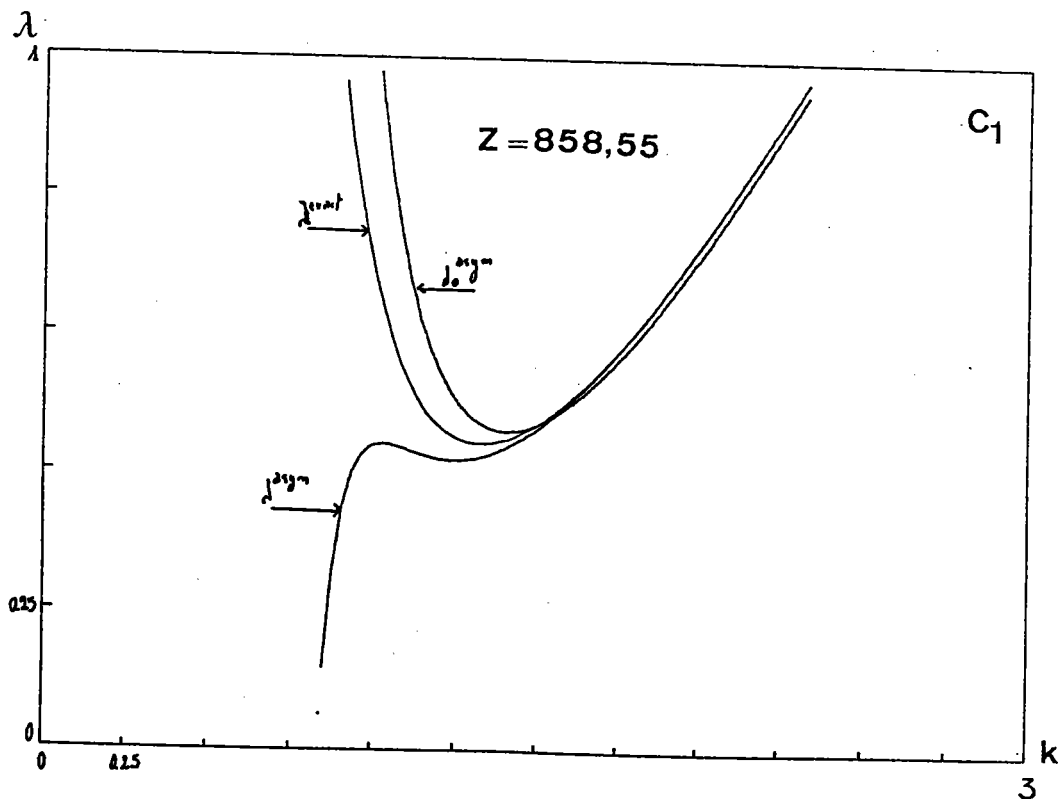
Les figures 2-15 à 2-21 montrent l'évolution de la courbe de stabilité neutre approchée,  $\lambda^{\text{asym}}$ , en fonction de  $Z$  et pour diverses conditions aux limites (C2, S2, C3, S3, C4, S4).

Sur ces figures, on constate :

\* Pour un grand nombre d'onde  $k$ , les formules asymptotiques sont très bonnes, notamment celle au second ordre.

\* Pour  $k$  tendant vers zéro,  $\lambda^{\text{asym}}(k)$  tend vers  $-\infty$  alors que, bien sûr, la courbe exacte tend vers  $+\infty$ . Donc pour  $k$  petit, cette formule au second ordre est mauvaise. Sur les figures 2-11 à 2-21, on voit que la courbe asymptotique a bien un minimum (que l'on cherche), mais aussi un maximum parasite dû aux approximations faites. Notons que ce comportement, certes désagréable, n'est pas anormal puisque les hypothèses d'ordre de grandeur faites a priori ne sont pas valables pour  $k$  petit.

\* La région où la formule asymptotique  $\lambda^{\text{asym}}$  est mauvaise est d'autant plus grande que  $Z$  est petit. Ce comportement est aussi attendu puisque la condition  $\eta \ll 1$  n'est plus remplie.





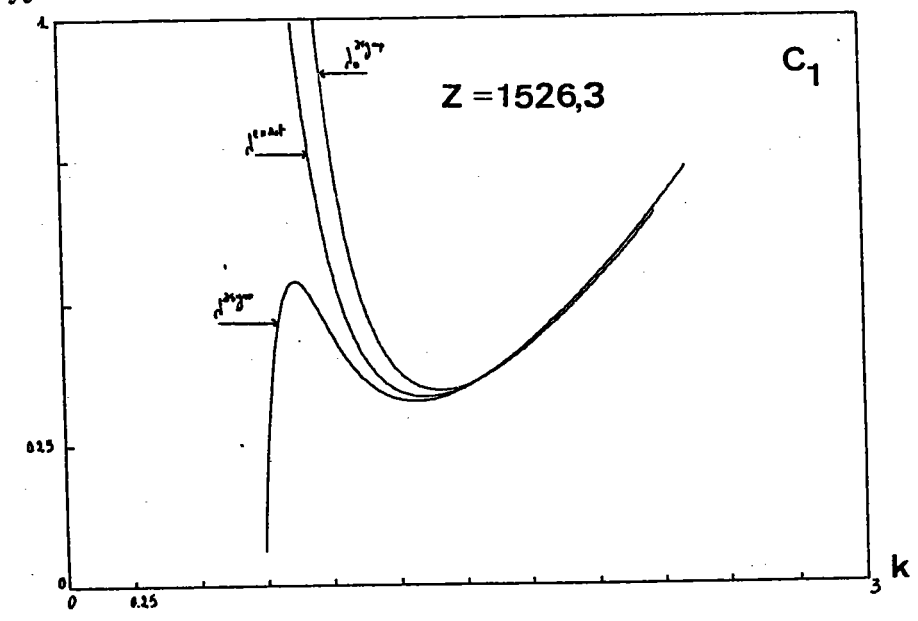
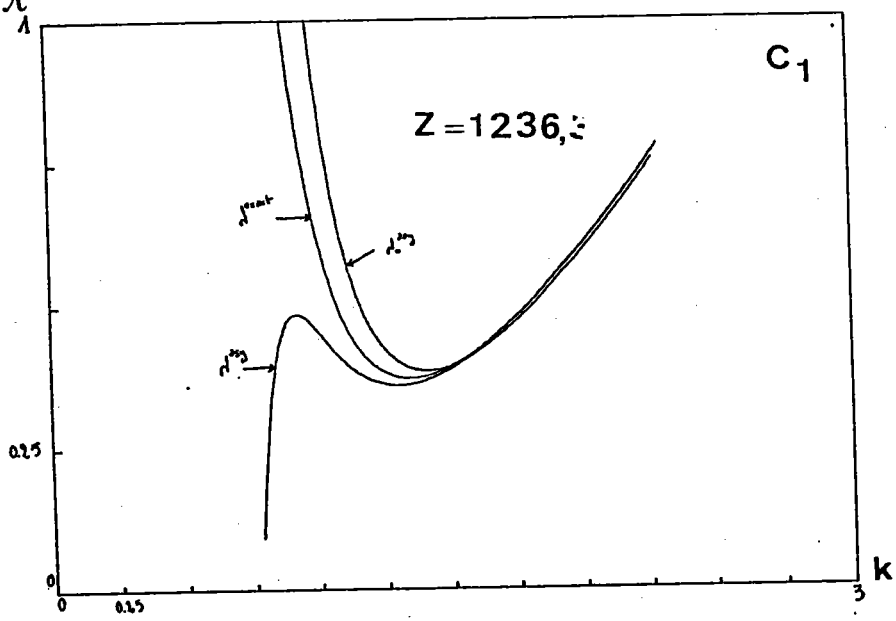
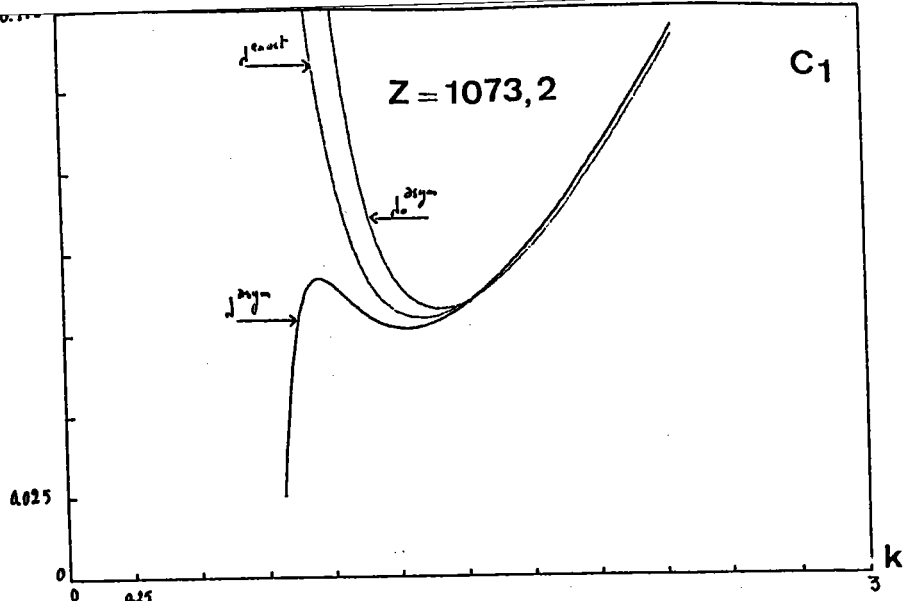
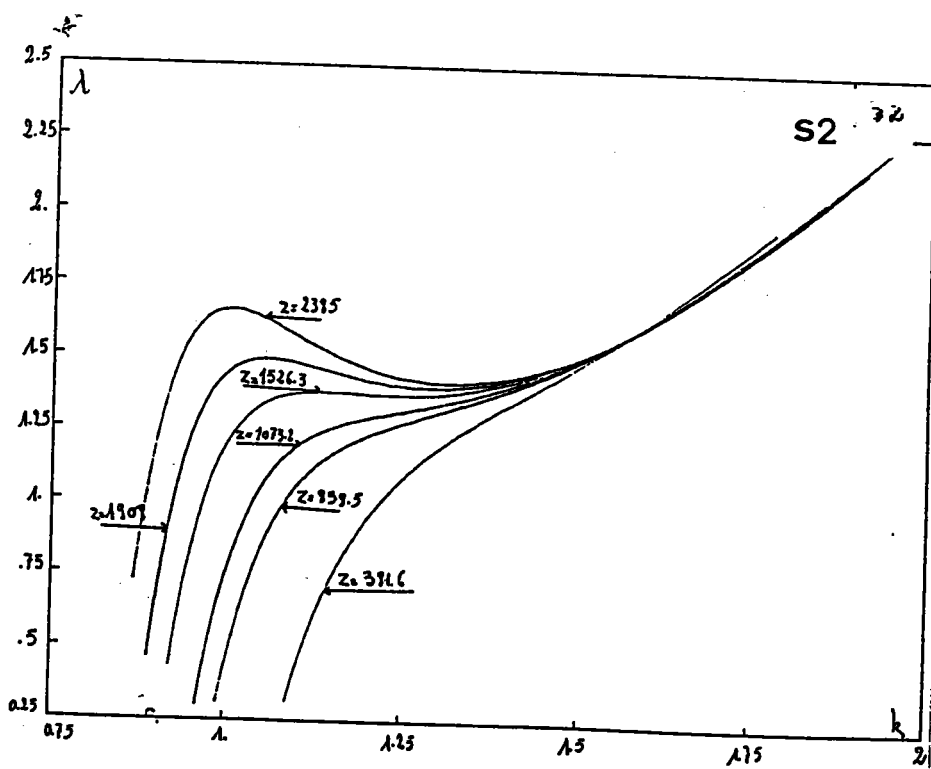
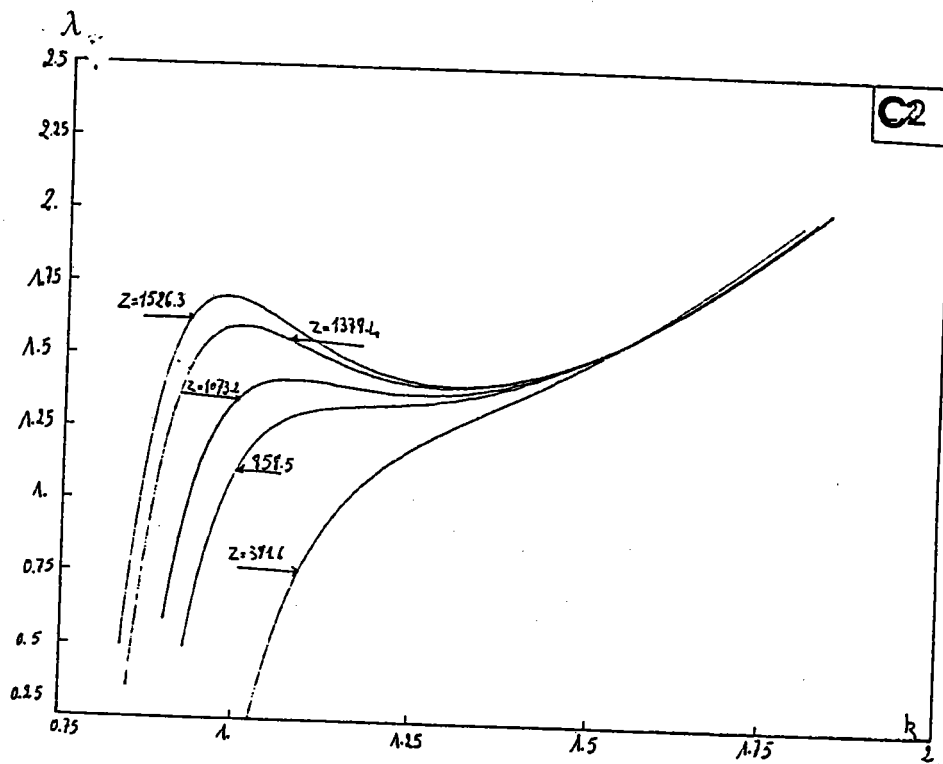
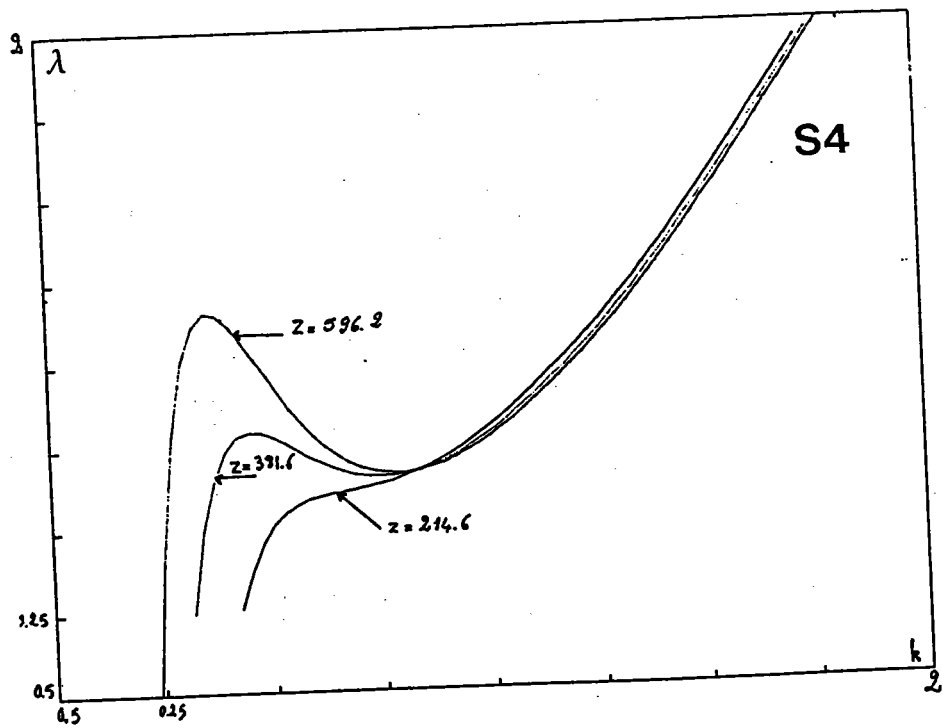
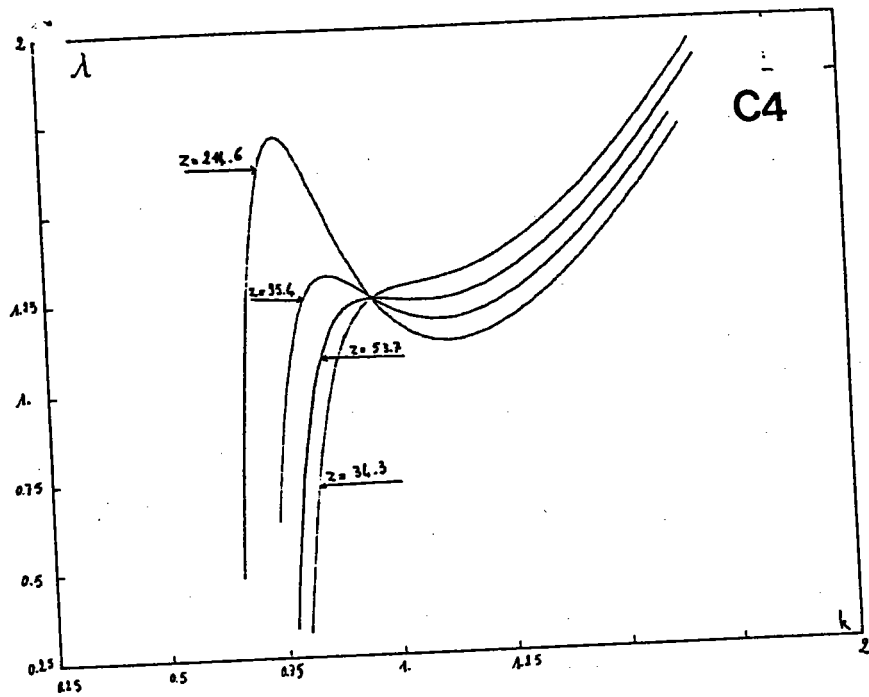


Fig 2-10 à 2-14 comparaison entre les courbes de stabilite neutre asymptotique et exact pour la condition aux limites C1





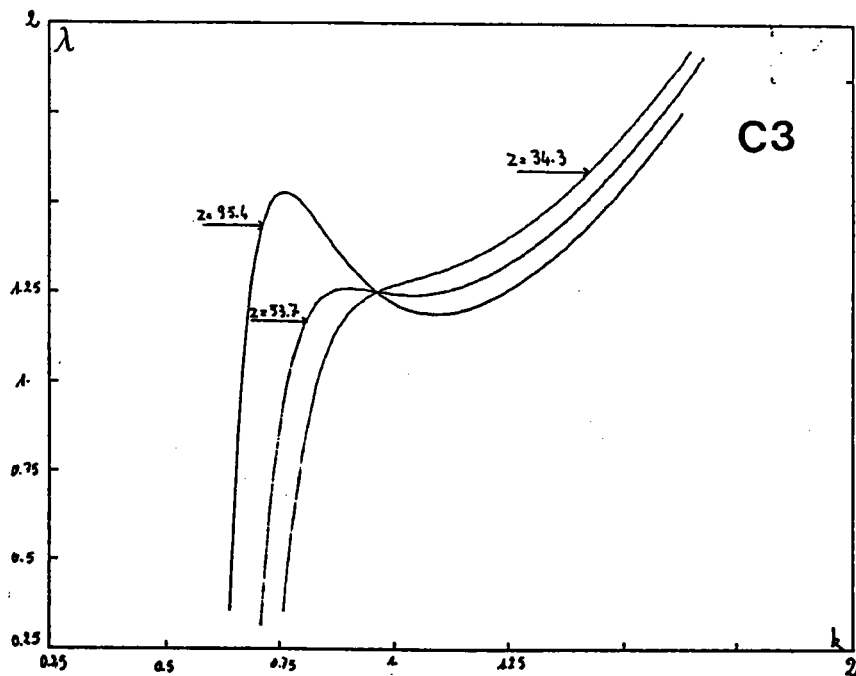
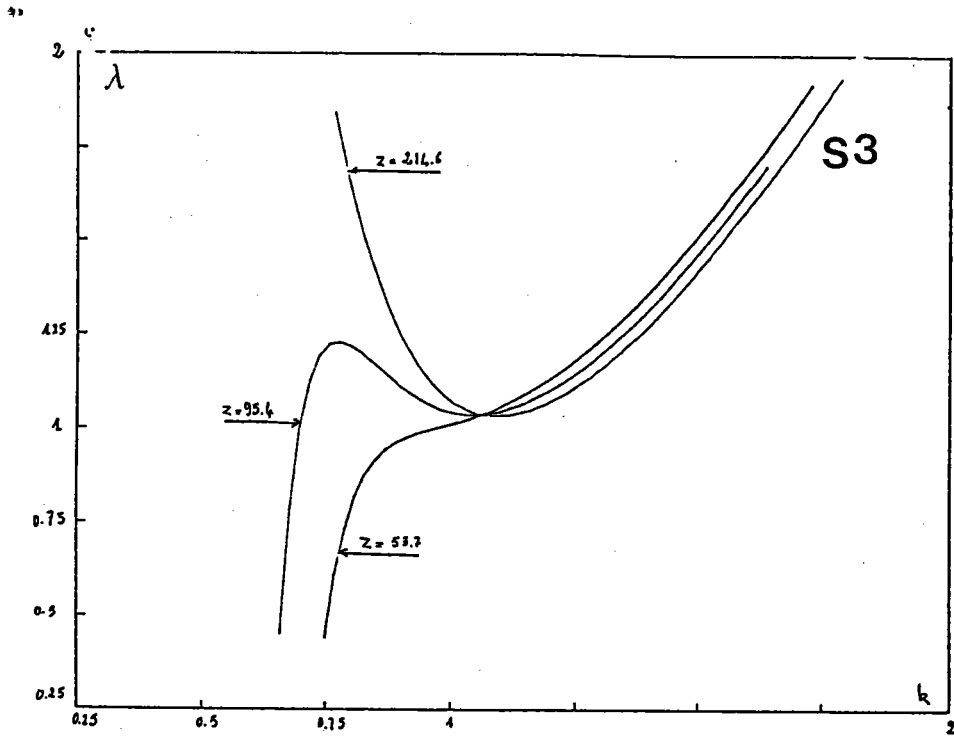


Fig 2-15 à 2-21 - comparaison entre les courbes de stabilité neutre asymptotique et exacte pour les conditions aux limites C2,S2,C3,S3,C4,S4.

### II.3.7. Limite de validité et précision des formules approchées

Nous avons testé la validité des formules asymptotiques en comparant avec des résultats numériques pour  $R/h = 100$  et pour les huit cas de conditions aux limites. Les tableaux notés de 2-9 à 2-17 comparent la valeur exacte de la charge critique (exacte après avoir négligé le préflambage), la valeur asymptotique au premier ordre (eq. 2-53 et 2-55) et celle au second ordre (2-57 à 2-64). La recherche du minimum de la fonction  $\lambda_{\text{asym}}(k)$  ne doit pas s'effectuer sur tous les  $k$ , car le minimum serait alors dans la région où l'approximation est mauvaise. Pour calculer la valeur de la charge critique asymptotique, nous avons adopté la procédure suivante. On recherche tout d'abord un nombre d'ondes minimisant  $k_{\text{min}}$ , caractérisé par :

$$\frac{d\lambda_{\text{asym}}}{dk}(k_{\text{min}}) = 0 \quad (2-65)$$

On appelle  $k_{\text{mino}}$  le minimum de la courbe du premier ordre (2-53, ou 2-55), au voisinage de  $k_{\text{mino}}$ . Le développement de Taylor de  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$  s'écrit :

$$\lambda_{\text{asym}}(k_{\text{min}}) = \lambda_0(k_{\text{mino}}) + \frac{1}{2} \lambda_0''(k_{\text{mino}}) (k_{\text{min}} - k_{\text{mino}})^2 + \eta \lambda_1(k_{\text{mino}}) \quad (2-66)$$

D'où

$$\frac{\partial \lambda_{\text{asym}}}{dk}(k_{\text{min}}) = \lambda_0''(k_{\text{mino}}) (k_{\text{min}} - k_{\text{mino}}) + \eta \lambda_1'(k_{\text{mino}}) \approx 0 \quad (2-67)$$

On en déduit une expression asymptotique du  $k_{\text{min}}$ , qui ne conduit pas aux inconvénients évoqués ci-dessus :

$$k_{\text{min}} \approx k_{\text{mino}} - \eta \frac{\lambda_1'(k_{\text{mino}})}{\lambda_0''(k_{\text{mino}})} \quad (2-68)$$

- \* La charge critique est alors obtenue en cherchant le minimum correspondant aux trois nombre d'ondes entiers qui encadrent au plus près le nombre d'ondes  $k_{\min}$ . C'est la charge critique ainsi calculée qui est présentée dans les tableaux 2-9 à 2-17. Pour chaque valeur de Z on a déterminé l'écart entre la valeur de la charge asymptotique et la valeur exacte. On appelle écart l'expression :

$$\left| \frac{\lambda_{\text{exact}} - \lambda_{\text{asym}}}{\lambda_{\text{exact}}} \right|$$

Remarquons que cette comparaison n'a pas été limitée aux grandes valeurs de Z. On s'est écarté ainsi de l'hypothèse Z grand afin d'établir le domaine de validité des formules 2-57 à 2-64. Nous avons constaté que lorsque la force axiale est donnée (C3, S3, C4, S4), le domaine de convergence est beaucoup plus vaste que prévu. Dans les autres cas (S1, C1, S2, C2), la formule au second ordre ne converge que pour des valeurs plus grandes de Z.

## C.L. S3 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.1473 (11)	1.00285 (12)	0.1259	0.98753 (11)	0.1392
0.60	34.3418	1.1210 (10)	1.00184 (11)	0.1063	0.99954 (10)	0.1084
0.75	53.6591	1.0982 (9)	1.00001 (10)	0.0894	1.02023 (9)	0.0710
1.00	95.3939	1.0721 (8)	1.00801 (9)	0.0598	1.03517 (8)	0.0344
1.50	214.6363	1.0489 (7)	1.00076 (7)	0.0459	1.03942 (7)	0.0090
2.00	381.5757	1.0340 (6)	1.00285 (6)	0.0301	1.02799 (6)	0.0058
3.00	858.5453	1.0239 (5)	1.00001 (5)	0.0234	1.02166 (5)	0.0022
4.00	1526.3027	1.0441 (4)	1.04355 (4)	0.0005	1.04145 (4)	0.0025
5.00	2384.8480	1.0230 (4)	1.00561 (4)	0.0170	1.02237 (4)	0.0006
6.00	3434.1811	1.0976 (4)	1.07793 (4)	0.0179	1.09741 (4)	0.0002
7.00	4674.3021	1.0515 (3)	1.05316 (3)	0.0016	1.05051 (3)	0.0009
8.00	6105.2109	1.0095 (3)	1.00285 (3)	0.0066	1.00913 (3)	0.0004
9.00	7726.9075	1.0179 (3)	1.00801 (3)	0.0097	1.01766 (3)	0.0002
10.00	9539.3920	1.0546 (3)	1.04369 (3)	0.0103	1.05447 (3)	0.0001

## C.L. C3 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.4449 (12)	1.00285 (12)	0.3059	1.32232 (11)	0.0848
0.60	34.3418	1.3521 (11)	1.00184 (11)	0.2590	1.32343 (11)	0.0212
0.75	53.6591	1.2725 (10)	1.00001 (10)	0.2141	1.26666 (10)	0.0046
1.00	95.3939	1.2030 (8)	1.00801 (9)	0.1621	1.19342 (8)	0.0080
1.50	214.6363	1.1411 (7)	1.00076 (7)	0.1230	1.13128 (7)	0.0086
2.00	381.5757	1.0947 (6)	1.00285 (6)	0.0839	1.09832 (6)	0.0033
3.00	858.5453	1.0641 (5)	1.00001 (5)	0.0602	1.06667 (5)	0.0024
4.00	1526.3027	1.0805 (4)	1.04355 (4)	0.0342	1.08101 (4)	0.0005
5.00	2384.8480	1.0461 (4)	1.00561 (4)	0.0387	1.04769 (4)	0.0015
6.00	3434.1811	1.1134 (4)	1.07793 (4)	0.0319	1.11500 (4)	0.0014
7.00	4674.3021	1.0732 (3)	1.05316 (3)	0.0187	1.07348 (3)	0.0002
8.00	6105.2109	1.0260 (3)	1.00285 (3)	0.0226	1.02672 (3)	0.0007
9.00	7726.9075	1.0307 (3)	1.00801 (3)	0.0220	1.03155 (3)	0.0008
10.00	9539.3920	1.0653 (3)	1.04369 (3)	0.0203	1.06572 (3)	0.0004

## C.L. S4 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.0515 (10)	1.00285 (12)	0.0463	diverge	div.
0.60	34.3418	1.0454 (9)	1.00184 (11)	0.0417	diverge	div.
0.75	53.6591	1.0363 (9)	1.00001 (10)	0.0350	0.84664 (9)	0.1830
1.00	95.3939	1.0260 (8)	1.00801 (9)	0.0176	0.93484 (8)	0.0889
1.50	214.6363	1.0281 (7)	1.00076 (7)	0.0266	1.00594 (7)	0.0216
2.00	381.5757	1.0149 (6)	1.00285 (6)	0.0119	1.00015 (6)	0.0146
3.00	858.5453	1.0124 (5)	1.00001 (5)	0.0123	1.00653 (5)	0.0058
4.00	1526.3027	1.0243 (4)	1.04355 (4)	0.0188	1.01637 (4)	0.0077
5.00	2384.8480	1.0172 (4)	1.00561 (4)	0.0114	1.01579 (4)	0.0014
6.00	3434.1811	1.0958 (4)	1.07793 (4)	0.0163	1.09521 (4)	0.0005
7.00	4674.3021	1.0381 (3)	1.05316 (3)	0.0145	1.03500 (3)	0.0030
8.00	6105.2109	1.0034 (3)	1.00285 (3)	0.0005	1.00217 (3)	0.0012
9.00	7726.9075	1.0150 (3)	1.00801 (3)	0.0069	1.01423 (3)	0.0008
10.00	9539.3920	1.0528 (3)	1.04369 (3)	0.0087	1.05265 (3)	0.0002

## C.L. C4 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.4340 (11)	1.00285 (12)	0.3007	1.36537 (12)	0.0479
0.60	34.3418	1.3501 (11)	1.00184 (11)	0.2580	1.30654 (11)	0.0323
0.75	53.6591	1.2725 (10)	1.00001 (10)	0.2141	1.25077 (10)	0.0171
1.00	95.3939	1.2019 (8)	1.00801 (9)	0.1613	1.19013 (8)	0.0098
1.50	214.6363	1.1260 (7)	1.00076 (7)	0.1112	1.12407 (7)	0.0017
2.00	381.5757	1.0940 (6)	1.00285 (6)	0.0833	1.09348 (6)	0.0005
3.00	858.5453	1.0628 (5)	1.00001 (5)	0.0590	1.06270 (5)	0.0001
4.00	1526.3027	1.0801 (4)	1.04355 (4)	0.0338	1.08019 (4)	0.0001
5.00	2384.8480	1.0445 (4)	1.00561 (4)	0.0372	1.04464 (4)	0.0002
6.00	3434.1811	1.1115 (4)	1.07793 (4)	0.0302	1.11133 (4)	0.0001
7.00	4674.3021	1.0732 (3)	1.05316 (3)	0.0187	1.07311 (3)	0.0001
8.00	6105.2109	1.0252 (3)	1.00285 (3)	0.0218	1.02551 (3)	0.0003
9.00	7726.9075	1.0297 (3)	1.00801 (3)	0.0211	1.02980 (3)	0.0001
10.00	9539.3920	1.0637 (3)	1.04369 (3)	0.0189	1.06372 (3)	0.0000

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.1322 (10)	1.50570 (15)	0.3299	diverge	div.
0.60	34.3418	1.1579 (10)	1.50888 (14)	0.3031	diverge	div.
0.75	53.6591	1.1891 (9)	1.51070 (12)	0.2704	diverge	div.
1.00	95.3939	1.2488 (8)	1.51532 (11)	0.2135	diverge	div.
1.50	214.6363	1.3230 (7)	1.51652 (9)	0.1463	diverge	div.
2.00	381.5757	1.3621 (7)	1.53737 (8)	0.1287	1.20471 (7)	0.1155
3.00	858.5453	1.4194 (6)	1.51070 (6)	0.0643	1.37665 (6)	0.0301
4.00	1526.3027	1.4266 (5)	1.54333 (5)	0.0818	1.38546 (5)	0.0288
5.00	2384.8480	1.5059 (5)	1.52661 (5)	0.0137	1.50060 (5)	0.0035
6.00	3434.1811	1.4684 (4)	1.57447 (4)	0.0722	1.44314 (4)	0.0172
7.00	4674.3021	1.4668 (4)	1.50586 (4)	0.0266	1.46048 (4)	0.0043
8.00	6105.2109	1.5264 (4)	1.53737 (4)	0.0072	1.52488 (4)	0.0010
9.00	7726.9075	1.6211 (4)	1.61961 (4)	0.0009	1.62091 (4)	0.0001
10.00	9539.3920	1.5506 (3)	1.64631 (3)	0.0617	1.53631 (3)	0.0092

C.L. C2 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.5245 (12)	1.50570 (15)	0.0123	diverge	div.
0.60	34.3418	1.4639 (11)	1.50888 (14)	0.0307	diverge	div.
0.75	53.6591	1.4245 (10)	1.51070 (12)	0.0605	diverge	div.
1.00	95.3939	1.4046 (9)	1.51532 (11)	0.0788	diverge	div.
1.50	214.6363	1.4116 (8)	1.51652 (9)	0.0744	1.14817 (8)	0.1866
2.00	381.5757	1.4209 (7)	1.53737 (8)	0.0819	1.27172 (7)	0.1050
3.00	858.5453	1.4495 (6)	1.51070 (6)	0.0422	1.40413 (6)	0.0313
4.00	1526.3027	1.4558 (5)	1.54333 (5)	0.0601	1.41574 (5)	0.0275
5.00	2384.8480	1.5163 (5)	1.52661 (5)	0.0068	1.50854 (5)	0.0051
6.00	3434.1811	1.4913 (4)	1.57447 (4)	0.0557	1.46790 (4)	0.0157
7.00	4674.3021	1.4783 (4)	1.50586 (4)	0.0187	1.47030 (4)	0.0054
8.00	6105.2109	1.5317 (4)	1.53737 (4)	0.0037	1.52928 (4)	0.0015
9.00	7726.9075	1.6241 (4)	1.61961 (4)	0.0027	1.62308 (4)	0.0006
10.00	9539.3920	1.5691 (3)	1.64631 (3)	0.0492	1.55682 (3)	0.0078

C.L. S1 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.2891 (11)	1.50570 (15)	0.1680	diverge	div.
0.60	34.3418	1.2919 (11)	1.50888 (14)	0.1679	diverge	div.
0.75	53.6591	1.3068 (10)	1.51070 (12)	0.1560	diverge	div.
1.00	95.3939	1.3338 (9)	1.51532 (11)	0.1361	diverge	div.
1.50	214.6363	1.3805 (8)	1.51652 (9)	0.0985	1.16322 (8)	0.1574
2.00	381.5757	1.4037 (7)	1.53737 (8)	0.0952	1.28088 (7)	0.0875
3.00	858.5453	1.4423 (6)	1.51070 (6)	0.0474	1.40584 (6)	0.0253
4.00	1526.3027	1.4528 (5)	1.54333 (5)	0.0623	1.41943 (5)	0.0229
5.00	2384.8480	1.5141 (5)	1.52661 (5)	0.0083	1.50807 (5)	0.0040
6.00	3434.1811	1.4913 (4)	1.57447 (4)	0.0557	1.47166 (4)	0.0132
7.00	4674.3021	1.4767 (4)	1.50586 (4)	0.0197	1.47062 (4)	0.0041
8.00	6105.2109	1.5308 (4)	1.53737 (4)	0.0043	1.52894 (4)	0.0012
9.00	7726.9075	1.6231 (4)	1.61961 (4)	0.0021	1.62268 (4)	0.0002
10.00	9539.3920	1.5713 (3)	1.64631 (3)	0.0477	1.56089 (3)	0.0066

C.L. C1 R/H=100

L/R	Z	EXACT Fc	Asymp. 1er ord Fc	Ecart	Asymp. 2er ord Fc	Ecart
0.50	23.8485	1.5533 (12)	1.50570 (15)	0.0307	diverge	div.
0.60	34.3418	1.4920 (11)	1.50888 (14)	0.0113	diverge	div.
0.75	53.6591	1.4498 (10)	1.51070 (12)	0.0420	diverge	div.
1.00	95.3939	1.4231 (9)	1.51532 (11)	0.0648	diverge	div.
1.50	214.6363	1.4201 (8)	1.51652 (9)	0.0679	1.17473 (8)	0.1728
2.00	381.5757	1.4279 (7)	1.53737 (8)	0.0767	1.28900 (7)	0.0973
3.00	858.5453	1.4528 (6)	1.51070 (6)	0.0399	1.40988 (6)	0.0295
4.00	1526.3027	1.4606 (5)	1.54333 (5)	0.0566	1.42325 (5)	0.0256
5.00	2384.8480	1.5174 (5)	1.52661 (5)	0.0061	1.50964 (5)	0.0051
6.00	3434.1811	1.4959 (4)	1.57447 (4)	0.0525	1.47454 (4)	0.0143
7.00	4674.3021	1.4798 (4)	1.50586 (4)	0.0176	1.47218 (4)	0.0051
8.00	6105.2109	1.5325 (4)	1.53737 (4)	0.0032	1.52985 (4)	0.0017
9.00	7726.9075	1.6241 (4)	1.61961 (4)	0.0027	1.62325 (4)	0.0005
10.00	9539.3920	1.5746 (3)	1.64631 (3)	0.0456	1.56298 (3)	0.0074

Tableaux 2-9 à 2-17- Comparaison entre la valeur asymptotique  $\lambda_0$  et  $t \lambda_1$  avec la charge exacte



Pour mettre en évidence le domaine de validité des formules en fonction de  $Z$ , nous dressons un tableau contenant :

- L'erreur maximum avec la formule au premier ordre pour  $24 < Z < 10000$ .
- La valeur  $Z_0$  par laquelle la courbe au second ordre n'a plus de minimum
- Les valeurs de  $Z$  au-dessus desquelles la formule au second ordre donne une erreur maximum de 3%, puis de 1%.

	1° ordre Erreur max	$Z_0$	Erreur $\leq 3\%$ pour $Z \geq$	Erreur $\leq 1\%$ pour $Z \geq$
C1	8 %	800	850	4600
S1	17 %	900	850	4600
S2	8 %	900	1000	4600
S3	33 %	1500	850	4600
C3	30 %	50	35	50
S3	13 %	70	150	210
C4	30 %	50	50	100
S4	5 %	300	200	850

La formule au second ordre est donc précise (à 3% près) pour  $Z \geq 1000$  avec la condition aux limites  $U=0$ , et pour  $Z \geq 200$  avec  $N_x = 0$ . Dans les autres cas il est préférable d'utiliser la formule au premier ordre, tant que l'erreur ne dépasse pas 10%.

• II.3.8 Discussion :

Jusqu'à présent, nous avons utilisé les équations de Donnell sans tenir compte du préflambage. Plusieurs études ont été faites, notamment dans [32], [39] pour comparer les résultats obtenus à partir de ces équations, et ceux obtenus par des théories réputées plus évoluées (Flügge, Koiter-Sanders). Tous les calculs montrent que les équations de Donnell donnent des résultats de 1 à 3% près, dès que le nombre d'onde  $n$  est supérieur à quatre. Nous avons comparé par un calcul éléments finis les équations de Donnell et de Koiter-Sanders ( pour les conditions aux limites C1, S3. Les résultats sont présentés sur les Tableaux 2-18 à 2-21.

D'après ces résultats, on remarque qu'on distingue 3 cas :

- coques de longueurs modérées, pour lesquelles le nombre d'onde  $n$  est supérieur à quatre
- coques longues, où  $n$  prend les valeurs 4 ou 3
- coques très longues, soit  $n$  égal à 2.

Sur les Tableaux 2-18 et 2-19 nous avons présenté les deux premiers cas, nous remarquons :

- La charge de flambage de Donnell est presque toujours inférieure à celle de Koiter
- L'écart ne dépasse pas les 5% pour  $n$  supérieur ou égal à quatre
- L'écart atteint dans certains cas 10% pour  $n$  inférieur à quatre

L/R*	Z	* DONNELL	*KOITER-SANDERS*	ECART % *
2.00*	.381576E+03	* 1.42807( 7)	* 1.44135( 7)	* 0.00921 *
3.00*	.858545E+03	* 1.45305( 6)	* 1.46940( 6)	* 0.01113 *
4.00*	.152630E+04	* 1.46077( 5)	* 1.49370( 5)	* 0.02205 *
5.00*	.238485E+04	* 1.51754( 5)	* 1.53560( 5)	* 0.01176 *
6.00*	.343418E+04	* 1.49651( 4)	* 1.56305( 4)	* 0.04257 *
7.00*	.467430E+04	* 1.47977( 4)	* 1.52350( 4)	* 0.02870 *
8.00*	.610521E+04	* 1.53278( 4)	* 1.56275( 4)	* 0.01918 *
9.00*	.772691E+04	* 1.62447( 4)	* 1.64572( 4)	* 0.01291 *
10.00*	.953939E+04	* 1.57500( 3)	* 1.74447( 3)	* 0.09715 *
12.00*	.137367E+05	* 1.48911( 3)	* 1.59079( 3)	* 0.06392 *
14.00*	.186972E+05	* 1.52594( 3)	* 1.59114( 3)	* 0.04098 *

Tableau 2 - 18 Condition aux limites C1

L/R*	Z	* DONNELL	*KOITER-SANDERS*	ECART % *
1.00*	.953939E+02	* 1.07217( 8)	* 1.07769( 8)	* 0.00512 *
2.00*	.381576E+03	* 1.03411( 6)	* 1.04474( 6)	* 0.01017 *
3.00*	.858545E+03	* 1.02415( 5)	* 1.04003( 5)	* 0.01528 *
4.00*	.152630E+04	* 1.04447( 4)	* 1.09005( 4)	* 0.04181 *
5.00*	.238485E+04	* 1.02329( 4)	* 1.04693( 4)	* 0.02258 *
6.00*	.343418E+04	* 1.09786( 4)	* 1.11129( 4)	* 0.01208 *
7.00*	.467430E+04	* 1.05210( 3)	* 1.15234( 3)	* 0.08699 *
8.00*	.610521E+04	* 1.01008( 3)	* 1.07787( 3)	* 0.06289 *
9.00*	.772691E+04	* 1.01834( 3)	* 1.06603( 3)	* 0.04474 *
10.00*	.953939E+04	* 1.05500( 3)	* 1.08964( 3)	* 0.03179 *

Tableau 2 - 19 Condition aux limites S3

Tableaux 2-18 et 2-19- Comparaison entre la charge de Koiter-Sanders et Donnell (cas  $n > 2$ )

Le cas des coques très longues est présenté sur les Tableaux 2-20 et 2-21, nous remarquons :

- L'écart est de l'ordre de 20% pour la première valeur de  $\lambda$  où  $n$  est égal à 2. Cet écart diminue au fur et à mesure que  $L/R$  augmente.
- Les ordres de grandeur de la charge de pression qui avaient été obtenus en théorie de Donnell ( $\lambda=1$ , ou 1.5056) ne sont plus respectés quand  $L/R$  augmente.
- L'influence des conditions aux limites diminue pour les grandes valeurs de  $L/R$ .

L/R*	Z	* DONNELL	*KOITER-SANDERS*	ECART % *
25.00*	.596212E+05	* 1.53010( 2)	* 1.93067( 2)	* 0.20748 *
28.00*	.747888E+05	* 1.50227( 2)	* 1.79064( 2)	* 0.16104 *
30.00*	.858545E+05	* 1.51300( 2)	* 1.74879( 2)	* 0.13483 *
35.00*	.116858E+06	* 1.59977( 2)	* 1.74976( 2)	* 0.08572 *
40.00*	.152630E+06	* 1.73497( 2)	* 1.83609( 2)	* 0.05507 *
45.00*	.193173E+06	* 1.89515( 2)	* 1.96647( 2)	* 0.03627 *
50.00*	.238485E+06	* 2.06927( 2)	* 2.12141( 2)	* 0.02458 *
55.00*	.288567E+06	* 2.25165( 2)	* 2.29090( 2)	* 0.01713 *
60.00*	.343418E+06	* 2.43918( 2)	* 2.46946( 2)	* 0.01226 *
70.00*	.467430E+06	* 2.82319( 2)	* 2.84230( 2)	* 0.00673 *

Tableau 2 - 20 Condition aux limites C1

L/R*	Z	* DONNELL	*KOITER-SANDERS*	ECART %
15.00*	.214636E+05	1.08824( 2)	1.44798( 2)	0.24844
18.00*	.309076E+05	1.00694( 2)	1.21711( 2)	0.17268
20.00*	.381576E+05	1.01093( 2)	1.16451( 2)	0.13188
25.00*	.596212E+05	1.10976( 2)	1.18822( 2)	0.06603
30.00*	.858545E+05	1.26411( 2)	1.30908( 2)	0.03435
35.00*	.116858E+06	1.44036( 2)	1.46827( 2)	0.01901
40.00*	.152630E+06	1.62666( 2)	1.64500( 2)	0.01115
45.00*	.193173E+06	1.81809( 2)	1.83069( 2)	0.00688
50.00*	.238485E+06	2.01238( 2)	2.02132( 2)	0.00442
55.00*	.288567E+06	2.20837( 2)	2.21488( 2)	0.00294

Tableau 2 - 21 Condition aux limites S3

Tableaux 2-20 et 2-21 Comparaison entre la charge de Koiter-Sanders et Donnell (cas  $n = 2$ )

Dans le paragraphe 4 nous étudierons le cas des coques longues et très longues en utilisant les équations de Koiter-Sanders. Nous résolvons ce problème par la même méthode asymptotique que dans le paragraphe précédent. Nous verrons qu'elle permet d'expliquer ces résultats.

En ce qui concerne les rotations avant flambage, d'après [39], leur influence sur la charge de pression est négligeable pour  $Z$  supérieur à 50. Dans l'annexe 5 nous avons étudié l'effet de ces rotations sur les développements asymptotiques de la charge de flambage. Les calculs montrent qu'on trouve au second ordre des termes dus au préflambage dans le seul cas où la force axiale est donnée. Ceci est cohérent avec les résultats asymptotiques du paragraphe 2 puisque dans ce cas les formules sont précises pour des  $Z$  supérieurs à 50. Dans le cas où on impose un déplacement axial, il faudra faire un développement au troisième ordre de la pression pour voir l'influence du préflambage.

#### II.4. Cas des faibles nombres d'onde $n$

Nous calculons la charge et le mode de flambage pour des coques longues et très longues avec la méthode asymptotique du paragraphe 2. Nous utiliserons pour cela les équations de Koiter-Sanders (annexe 1). Nous avons restreint le calcul au premier ordre, sans analyser l'effet de couche limite.

Dans le paragraphe 2, nous avons montré que le nombre d'onde azimutal  $K = nL/\pi R$  est de l'ordre de  $1/\sqrt{\eta}$ . Ceci impose que  $n$  soit grand. Pour des faibles nombres d'onde  $n$  ( $n = 4, 3, 2$ ), on pose :

$$K = k^* \frac{L}{R}, \quad k^* = \frac{n}{\pi} = 0(1)$$

(2-69)

On en déduit l'ordre de grandeur de la pression, en injectant 2-69 dans 2-15. On pose alors :

$$\lambda^* = \frac{P R^3 12 (1-\nu^2)}{E h^3}, \quad \lambda^* = 0(1)$$

(2-70)

Les ordres de grandeur sur les déplacements  $u, v, w$ , s'obtiennent par une méthode analogue à celle du paragraphe précédent. On peut choisir a priori

$$v = v^*, \quad v^* = 0(1)$$

$$u = \frac{R}{L} u^*, \quad u^* = 0(1)$$

$$w = \frac{h \Pi^2 w^*}{L \sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad w^* = 0(1)$$

(2-71)

Les équations de Koiter-Sanders en déplacement et sans préflambage s'écrivent :

$$\frac{R^2}{L^2} \partial_x^2 u^* - \frac{1-\nu}{2} k^{*2} A u^* - \frac{1+\nu}{2} k^* B \partial_x v^* + \frac{1-\nu}{24} k^{*2} \frac{\Pi^2 h^2}{R^2} \partial_x w^* - \nu \partial_x w^* = 0$$

(2-72)

$$\frac{R^2}{L^2} \frac{1-\nu}{2} C \partial_x^2 v^* - k^{*2} (1+D) v^* + \lambda^* \frac{D}{\Pi^2} v^* + \frac{1+\nu}{2} \frac{R^2}{L^2} k^* \partial_x u^* - (1-D\lambda^*) k^* w^*$$

$$+ \Pi^2 D \left( \frac{R^2}{L^2} k^* \frac{3-\nu}{2} \partial_x^2 w^* - k^{*3} w^* \right) = 0$$

(2-73)

$$D \Pi^4 \frac{R^4}{L^4} \partial_x^4 w^* + D \Pi^4 k^{*4} w^* - 2D \frac{R^2}{L^2} \Pi^4 k^{*2} \partial_x^2 w^* + D k^{*3} \Pi^2 v^* - \frac{3-\nu}{2} D \frac{R^2}{L^2} \Pi^2 k^* \partial_x^2 v^*$$

$$- \frac{1-\nu}{2} k^{*2} D \frac{R^2}{L^2} \Pi^2 \partial_x u^* + (w^* + k^* \nu - \nu \frac{R^2}{L^2} \partial_x u^*) + \Pi^2 \lambda^* D \left( \alpha \frac{R^2}{L^2} \partial_x^2 w^* - k^{*2} w^* - \frac{1}{\Pi^2} k^* v^* \right) = 0$$

(2-74)

où

$$A = 1 + \frac{h^2}{48R^2} \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\nu} 2\lambda^*\right), \quad B = 1 - \frac{h^2}{48R^2} \left(3 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{1+\alpha}{1+\nu} 2\lambda^*\right)$$

$$C = 1 + \frac{h^2}{48R^2} \left(9 - \frac{1+\alpha}{1-\nu} 2\lambda^*\right), \quad E = 1 - \frac{h^2}{48R^2} \left(3 \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{1+\alpha}{1+\nu} 2\lambda^*\right), \quad D = \frac{h^2}{12R^2}$$

On fait un développement des déplacements en  $R^2/L^2$ .

$$u^* = U_{io}(x) + \frac{R^2}{L^2} U_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} U_{i2}(x) + O\left(\frac{R^6}{L^6}\right)$$

$$v^* = V_{io}(x) + \frac{R^2}{L^2} V_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} V_{i2}(x) + O\left(\frac{R^6}{L^6}\right)$$

$$w^* = w_{io}(x) + \frac{R^2}{L^2} w_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} w_{i2}(x) + O\left(\frac{R^6}{L^6}\right)$$

(2-75)

On remarque que les termes qui ont été négligés dans la cinématique de Donnell sont de l'ordre de  $h^2/R^2$ . Pour les coques de grande longueur ces termes ne sont plus négligeables. Pour en tenir compte, on pose :

$$t = \frac{L^4}{R^4} \frac{h^2}{R^2}, \quad t = 0 \quad (1)$$

(2-76)

En injectant 2-75 dans 2-72 à 2-74, on obtient (voir annexe 6) au premier ordre

$$-\frac{1-\nu}{2} k^{*2} U_{io} - \frac{1+\nu}{2} k^* V_{io,x} - \nu W_{io,x} = 0$$

(2-77)

$$k^* V_{io} + W_{io} = 0$$

(2-78)

$$W_{io}^{(4)} + \frac{h^2}{R^2} \frac{L^4 n^2}{R^4 \Pi^4} \frac{(n^2 - 1)^2}{12(1 - \nu^2)} (n^2 - \lambda_o^*) W_{io} = 0 \quad (2-79)$$

A partir des deux premières équations on déduit :

$$k^{*2} U_{io} = W_{io,x} \quad (2-80)$$

On voit bien que la condition aux limites  $U = 0$  entraîne toujours  $W_{io,x} = 0$ . Donc la forme du mode de flambage reste inchangée par rapport à l'analyse du paragraphe précédent. Etudions le cas où on a une condition aux limites  $N_x = 0$ . Pour cela nous développons l'équation 2-73 au second ordre :

$$-k^{*2} V_{il} - k^* W_{il} = -\frac{1-\nu}{2} V_{io,xx} - \frac{1+\nu}{2} k^* U_{io,x} \quad (2-81)$$

En utilisant 2-78 et 2-80 on obtient :

$$k^* V_{il} + W_{il} = \frac{\nu}{k^{*2}} W_{io,xx} \quad (2-82)$$

Compte tenu du changement (2-71), la condition aux limites  $N_x = 0$  s'écrit :

$$\frac{R^2}{L^2} u^*,_x - \nu(k^* v^* + w^*) = 0 \quad (2-83)$$

Après développement en  $R^2/L^2$  on trouve :

• au premier ordre

$$k^* V_{io} + W_{io} = 0 \quad (2-84)$$

au second ordre

$$U_{io,x} - v (k^* V_{il} + W_{il}) = 0 \quad (2-85)$$

En utilisant 2-80, 2-82 on obtient :

$$W_{io,xx} = 0 \quad (2-86)$$

Ce qui est aussi identique aux résultats du paragraphe précédent.

Nous récapitulons les résultats du premier ordre :

Pour la condition aux limites  $U = W = 0$ , on a :

$$W_{io}(x) = A \cos r x + B \cosh r x, \quad r = 1.50561$$

$$\lambda_o^*(n) = \frac{\frac{r^4}{\Pi^4} \frac{12(1-v^2)}{L^4} \frac{R^4}{h^2} + n^4 (n^2-1)^2}{n^2 (n^2-1)^2} \quad (2-87)$$

La condition aux limites  $N_x = W = 0$ , entraîne :

$$W_{io}(x) = A \cos x$$

$$\lambda_o^*(n) = \frac{\frac{12(1-v^2)}{\Pi^4} \frac{R^4}{L^4} \frac{R^2}{h^2} + n^4 (n^2-1)^2}{n^2 (n^2-1)^2} \quad (2-88)$$



- La charge critique  $\lambda_0^*$  calculée à partir des équations de Donnell (voir équations 2-15 et 2-21) est :

$$\lambda_0^*(n) = \frac{12 (1-\nu^2)}{\Pi^4} \frac{R^4}{L^4} \frac{R^2}{h^2} \frac{r^4}{n^6} + n^2, \quad \text{pour } U = W = 0$$

(2-89)

et

$$\lambda_0^*(n) = \frac{12 (1-\nu^2)}{\Pi^4} \frac{R^4}{L^4} \frac{R^2}{h^2} \frac{1}{n^6} + n^2, \quad \text{pour } N_x = W = 0$$

(2-90)

Pour des coques très longues, soit quand  $L/R$  tend vers l'infini, les expressions des charges critiques 2-87 à 2-88 tendent vers la même valeur  $n^2$ . La pression critique est donc indépendante des conditions aux limites et s'écrit (pour  $n = 2$ ) :

$$P = \frac{4}{R^3} \frac{Eh^3}{12 (1-\nu^2)}$$

(2-91)

Cette indépendance par rapport aux conditions aux limites est le signe d'un nouveau problème de perturbation singulière. En effet l'équation (2-79) s'écrit

$$\frac{R^4}{L^4} W_{io}^{(4)} + \frac{h^2}{R^2} \frac{n^2}{\Pi^4} \frac{(n^2-1)^2}{12(1-\nu^2)} (n^2 - \lambda_0^*) W_{io} = 0$$

(2-92)

Le petit paramètre est donc  $R^4/L^4$ . Il existe donc bien une deuxième couche limite au sein même du mode intérieur  $W_{io}$  solution de 2-79.

Dans les Tableaux 2-22 à 2-23 nous avons comparé la charge exacte  $\lambda^*$  de la cinématique de Koiter-Sanders calculée par éléments finis et asymptotiques au premier ordre (2-87 et 2-88) pour les conditions aux limites S3 et C1. Cette charge asymptotique est précise à partir de  $n$  égal 4 et même plus précise dans la majorité des cas que la charge exacte de Donnell.

L/R*	Z	ASYMPT	KOITER-SANDERS*	ECART %
4.00*	.152630E+04	27.54196( 4)	27.30071( 4)	0.00884
5.00*	.238485E+04	20.72759( 4)	20.97799( 4)	0.01194
6.00*	.343418E+04	18.27989( 4)	18.55729( 4)	0.01495
7.00*	.467430E+04	16.69144( 3)	16.48762( 3)	0.01236
8.00*	.610521E+04	13.50858( 3)	13.49485( 3)	0.00102
9.00*	.772691E+04	11.81468( 3)	11.86433( 3)	0.00418
10.00*	.953939E+04	10.84671( 3)	10.91513( 3)	0.00627
14.00*	.186972E+05	9.48071( 3)	9.53606( 3)	0.00580
15.00*	.214636E+05	9.83653( 2)	9.65948( 2)	0.01833
18.00*	.309076E+05	6.81468( 2)	6.76626( 2)	0.00716
20.00*	.381576E+05	5.84671( 2)	5.82696( 2)	0.00339
25.00*	.596212E+05	4.75641( 2)	4.75788( 2)	0.00031
30.00*	.858545E+05	4.36478( 2)	4.36933( 2)	0.00104
40.00*	.152630E+06	4.11542( 2)	4.11924( 2)	0.00093

Tableau 2-22 Condition aux limites S3

L/R*	Z	ASYMPT	KOITER-SANDERS*	ECART %
6.00*	.343418E+04	27.71588( 4)	26.10467( 4)	0.06172
7.00*	.467430E+04	22.32394( 4)	21.80942( 4)	0.02359
8.00*	.610521E+04	19.70698( 4)	19.57496( 4)	0.00674
9.00*	.772691E+04	18.31425( 4)	18.32392( 4)	0.00053
10.00*	.953939E+04	18.48986( 3)	17.47972( 3)	0.05779
12.00*	.137367E+05	13.57652( 3)	13.28332( 3)	0.02207
14.00*	.186972E+05	11.47029( 3)	11.38839( 3)	0.00719
20.00*	.381576E+05	9.59312( 3)	9.61297( 3)	0.00207
25.00*	.596212E+05	7.88705( 2)	7.71033( 2)	0.02292
28.00*	.747888E+05	6.47029( 2)	6.38577( 2)	0.01324
40.00*	.152630E+06	4.59312( 2)	4.58871( 2)	0.00096
60.00*	.343418E+06	4.11716( 2)	4.11938( 2)	0.00054
70.00*	.467430E+06	4.06324( 2)	4.06521( 2)	0.00048

Tableau 2-23 Cas de la condition aux limites C1

Tableaux 2-22 et 2-23 Comparaison entre la charge asymptotique  $\lambda_0^*$  et exacte calculée par éléments finis.

## II.5. Conclusions

### II.5.1. Formules de dimensionnement

Nous proposons donc deux formules de dimensionnement de la pression critique de flambage sans défauts.

#### Pour un nombre d'ondes n inférieur ou égal à 4

$$P = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2) R^3} \lambda_0^*(n)$$

L'approximation au premier ordre  $\lambda_0^*$  est définie par 2-87 ou 2-88.

#### Pour un nombre d'ondes n supérieur à 4

$$P = \frac{4 \Pi}{[36 (1-\nu^2)]^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right) \lambda_0$$

$\lambda_0=1$  pour la condition aux limites  $N_x=W=0$

$\lambda_0=1.505619$  pour la condition aux limite  $U =W =0$

Dans ce cas, on obtient la pression critique avec une meilleure précision en remplaçant  $\lambda$  par l'une des formules correspondant à la condition aux limites envisagée (2-57 à 2-64).

Toutes les formules que nous proposons sont nouvelles. Dans la bibliographie la seule formule existante correspond aux cas de la condition aux limites classique S3 ( $N_x =W =V= M_x = 0$ ). L'étude du cas  $U = 0$  n'est pas traitée.

Les recommandations de la commission européenne de la construction métallique - ECCS - pour les cylindres sous pression avec défauts consistent à réduire de 50% la charge théorique classique sans défauts [16]. Ces formules empiriques sont très souvent inférieures à la charge expérimentale. Dans le chapitre suivant, nous utiliserons les résultats analytiques du problème linéaire, la théorie non linéaire de Koiter et la cellulaire, pour calculer la réduction de la charge causée par des défauts répartis et localisés.

## II.5.2. Extensions et perspectives

Il est possible d'appliquer la méthode asymptotique du paragraphe précédent pour d'autres types de chargement ou pour des géométries différentes de celle d'un cylindre droit (voir par exemple [14]). En particulier on pourra chercher des formules approchées pour un mode de type compression axiale. Ces modes ne sont plus forcément symétriques par rapport au plan  $x = 0$ , et l'influence des rotations initiales devient non négligeable (Fig.2-22) [39]. On trouve des nombres d'ondes axiaux et azimutaux de même ordre en  $(1/\eta)$ . Cet ordre de grandeur correspond aussi à la solution de la couche limite du préflambage (annexe 4). Au premier ordre les déplacements  $u, v, w$ , dépendent de la solution fondamentale.

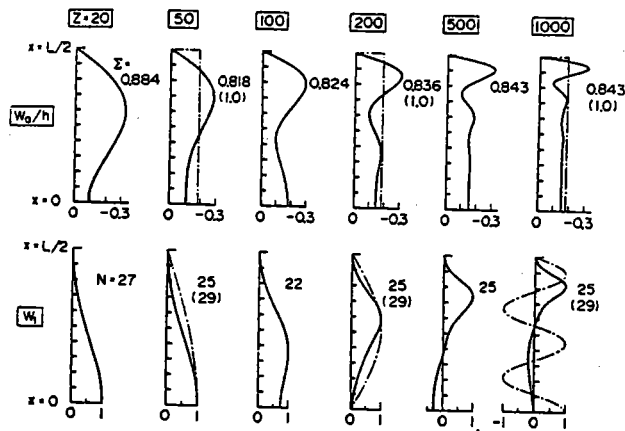


Fig. 2.39b Axial distributions of  $W_0$  and  $W_1$  in case S3.

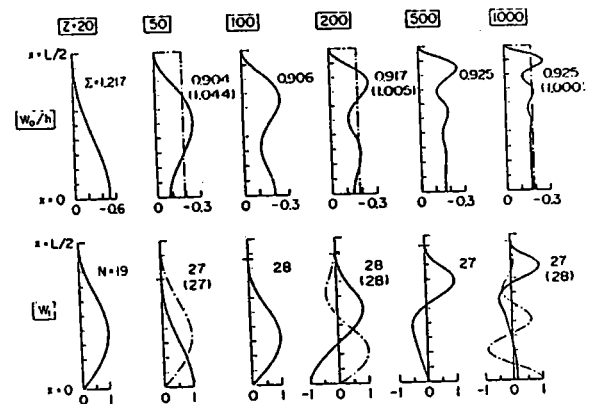


Fig. 2.39a Axial distributions of  $W_0$  and  $W_1$  in case C1.

Fig 2-22 cylindre en compression axiale [39]. - $W_0$  est la flèche avant flambage - $w_1$  le mode - $n$  le nombre d'ondes et  $\Sigma$  le rapport entre la contrainte de flambage avec rotation initiale et celle sans rotation initiale .

D'après Yamaki [39], dans le cas du flambage d'un cylindre sous torsion, les résultats numériques montrent que le paramètre de torsion  $\tau_c L^2 / E \pi^2 h^2$  et le nombre d'ondes circonférentiel  $nL/R$  évoluent respectivement comme  $Z^{3/4}$  et  $Z^{1/4}$  pour  $Z$  assez grand. Ces paramètres tendent chacun vers une valeur asymptotique qui dépend seulement de la condition aux limites axiale (Fig 2-23). Le rapport entre la charge critique pour la condition aux limites  $U = W = 0$  et la condition aux limites  $N_x = W = 0$  tend vers 1.1 pour les grandes valeurs de  $Z$ . (Nous rappelons que dans le cas de la pression, on a le même comportement, et que le rapport est de 1.5 ch. § II.2.3.). La méthode asymptotique utilisée pourrait donc s'appliquer au cas de la torsion.

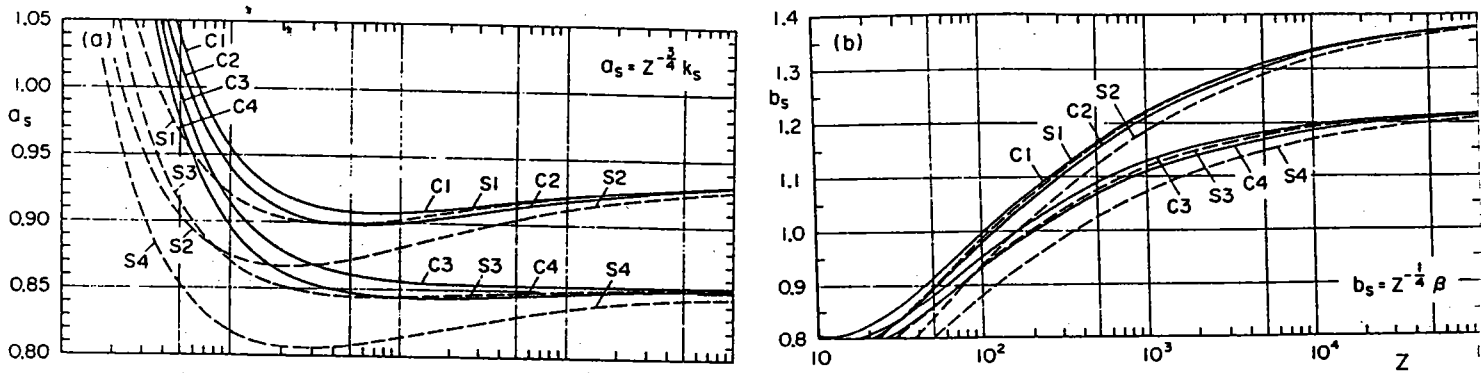
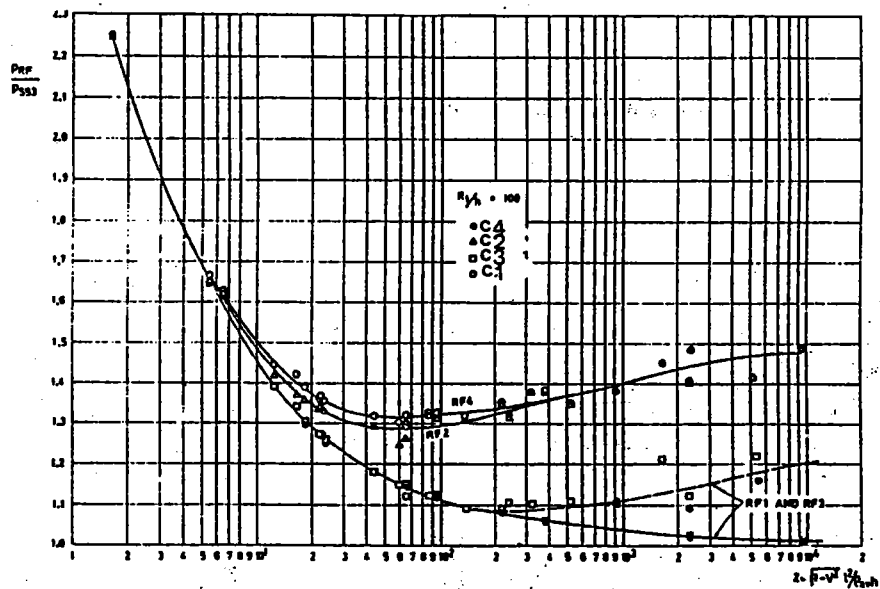


Fig.2-23

D'après les résultats expérimentaux existant dans [40], il semble que la charge critique d'un cylindre rigidifié par des anneaux admet une valeur asymptotique. L'utilisation de la méthode asymptotique devrait donc s'adapter à ce genre de problème.

Dans le cas des coques coniques sous pression, on retrouve le rôle prépondérant de la condition aux limites axiale. Pour les grandes valeurs de  $Z^*$ , le rapport entre les charges critiques pour la condition aux limites  $U = 0$ , et  $N_x = 0$  est voisin de 1.5 [33] [34].

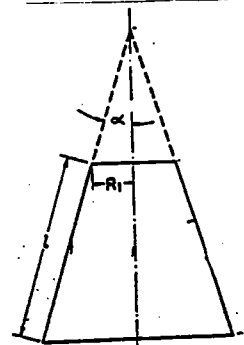


The variation of the ratio of buckling pressures of clamped conical shells to those for corresponding classical simple supported shells as function of  $Z$ .

Fig 2-24

\*

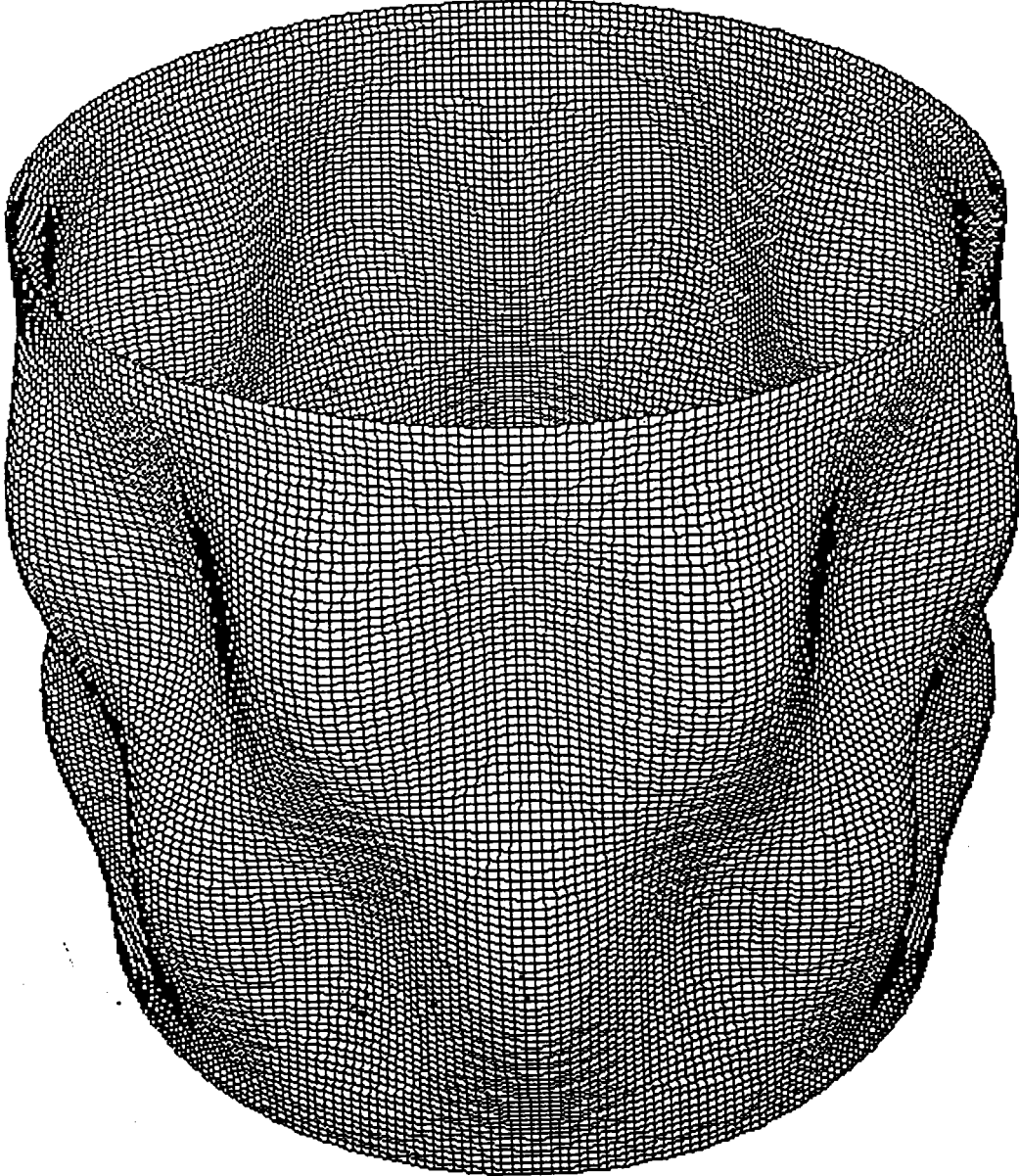
$$Z = \frac{L^2 \sqrt{1-\nu^2}}{l_m h} \quad \text{où} \quad l_m = \frac{R_1 + R_2}{\cos \alpha}$$



Notons aussi que certains auteurs [18] [33] ont examiné l'influence des conditions aux limites sur les vibrations propres d'un cylindre. D'après ces résultats, on obtient qualitativement la même influence des conditions aux limites en vibration et en flambage sous pression.

Dans notre laboratoire des calculs en éléments finis sur les vibrations d'un cylindre ont été réalisés. Ces résultats aboutissent à des modes de vibration qui ont la même allure que les modes de flambage des figures (2-7 et 2-8).

Nous pouvons donc espérer appliquer la méthode asymptotique aux problèmes de vibrations.



## CHAPITRE III

# CALCUL DU POST-FLAMBAGE DES COQUES CYLINDRIQUES SOUS PRESSION



### III.1. Diverses méthodes de calcul de l'influence des défauts

En général la présence des défauts géométriques dans les coques cylindriques conduit à une réduction significative de la charge critique par rapport à une coque parfaite. La théorie générale de post-flambage de Koiter [20] permet de prévoir la sensibilité aux défauts de la structure et de calculer la réduction de la charge critique. Cette théorie non linéaire est efficace pour des défauts qui ont une forme à peu près identique à celle du mode. Selon cette théorie la loi de la réduction s'écrit sous la forme (équation 1-31)

$$1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_c} = \frac{1.89}{\lambda_c} \left( \frac{\beta}{\alpha_{11}} \right)^{2/3} (-b)^{1/3} a_0^{2/3}, \quad b < 0 \quad (3-1)$$

où  $a_0$  est l'amplitude du défaut, supposée petite,  $\beta$  est sa projection sur le mode de flambage et  $\alpha_{11}, \alpha_{30}, b$  sont des coefficients qui dépendent des caractéristiques géométriques de la coque, du type de chargement et des conditions aux limites. La relation (3-1) se déduit de l'équation d'amplitude (équations 1-1 et 1-29) :

$$\alpha_{11} (\lambda - \lambda_c) a + \alpha_{30} a^3 + \beta a_0 = 0$$

$$b = - \frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}} \quad (3-2)$$

Dans le cas où  $b$  est positif la coque n'est plus sensible aux défauts (Fig. 1-14). La branche bifurquée est stable (Fig. 1-2-b).

On trouve dans [9] l'expression de  $b$  pour une coque sous pression en fonction du paramètre de Batdorf  $Z$ , pour la condition aux limites S3 auquel cas le mode de flambage est explicite. Une étude similaire a été faite pour la condition aux limites C1 dans [40].

En ce qui concerne les défauts géométriques localisés, Amazigo-Budiansky-Carrier [2] ont étudié le modèle d'une poutre infinie sur une fondation élastique à réponse non linéaire (ch. § 1-26). Ils ont étudié l'influence d'un défaut localisé sur la charge critique par une méthode asymptotique à deux échelles (ch. § I.3.2.). Les résultats aboutissent à une équation d'amplitude lentement variable qui s'écrit :

$$\gamma A'' + \alpha_{11} (\lambda - \lambda_c) A + \alpha_{30} A |A|^2 + a_0 \beta = 0 \quad (3-3)$$

Cette équation différentielle n'est pas valable dans la région du défaut localisé (supposé localisé autour de  $x = 0$ ), qui induit une discontinuité de la dérivée de l'amplitude :

$$A'(0^+) - A'(0^-) = -C^{te} a_1 \quad (3-4)$$

La réduction de la charge est ici proportionnelle au défaut ,

$$1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_c} = C^{te} a_1 \quad (3-5)$$

On trouve dans ce même article la réduction de la charge sous l'effet d'un défaut modal. Dans ce cas, la théorie de Koiter s'applique, et l'amplitude du défaut réparti intervient à la puissance  $2/3$  .

Pour les coques un problème se pose. La méthode des échelles multiples exige la connaissance de l'expression analytique du mode. Or les conditions aux limites ne permettent pas d'obtenir simplement cette expression. Dans la littérature il existe un seul article de Amazigo-Frazer [3] qui étudie l'influence du défaut localisé pour la condition aux limites la plus simple S3. Le calcul d'Amazigo et Frazer contient une erreur. La loi de la réduction de la charge qu'ils proposent est donc erronée.

Le problème se résume donc aux calculs des coefficients numériques  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{30}$  et de l'équation d'amplitude (3-3) pour des coques sous pression avec différentes conditions aux limites. Pour cela , on utilisera une théorie générale des instabilités cellulaires [13] . On montrera dans le paragraphe 3.2. comment on peut prendre en compte simultanément un défaut modal et un défaut localisé. La charge maximale ainsi obtenue est en général fonction de l'amplitude du défaut modal et de celle du défaut localisé. Nous proposons deux méthodes de calcul des coefficients de l'équation (3-3). D'abord nous utiliserons les modes et les charges critiques qui ont été calculés analytiquement dans le chapitre II. Par la suite les résultats seront validés par un calcul en éléments finis.

### III.2. Etude de l'équation d'amplitude : calcul de réduction de la charge critique

Dans ce paragraphe nous déterminons à partir de l'équation d'amplitude la réduction de la charge critique provenant de la présence simultanée de défauts localisés et répartis. On suppose que les amplitudes des défauts et du mode restent suffisamment petites. Soit un paramètre d'imperfection  $r$  qui est d'ordre 1, on pose :

$$a_0 = r a_1^{2/3} \quad (3-6)$$

Si  $r$  est grand (resp. petit), seul le défaut non localisé d'amplitude  $a_0$  (resp. localisé d'amplitude  $a_1$ ) a de l'influence. On notera que, pour que les défauts aient une influence comparable, il est nécessaire que le défaut localisé soit localement beaucoup plus grand Fig (3-1).

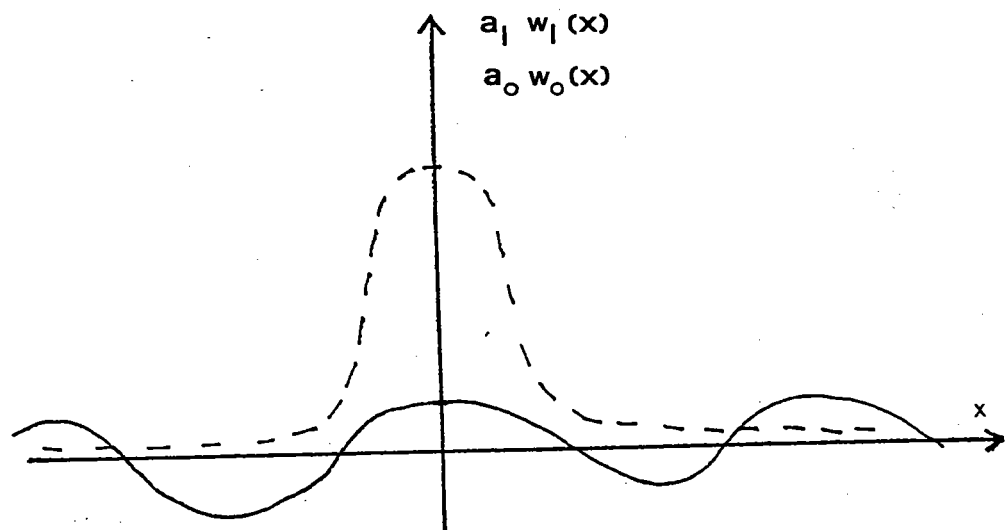


Fig.3-1 : Défaut non localisé (\_\_\_\_\_ ) et défaut localisé (-----). Dans le cas représenté ici, on dira que les deux défauts sont en phase.

Soit l'équation d'amplitude 3-3 qu'on écrit de la forme :

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = f(A, A', a_0) \quad (3-7)$$

cette équation peut se ramener à un système d'équations différentielles du premier ordre en posant :

$$\frac{dA}{dx} = A_2$$

$$\frac{dA_2}{dx} = f(A, A_2, a_0)$$

On appelle plan de phase le plan décrit par les variables  $A, A_2 (= A')$ . A toute solution  $A = h(x)$  de l'équation (3-3), on associe une courbe dans le plan de phase d'équation  $h(x), h'(x)$ ,  $x$  variable.

A partir de cette courbe dans le plan de phase, on peut retrouver la variable d'espace  $x$  (ce qui correspond à la coordonnée azimutale pour les coques) à partir de l'équation :

$$dx = \frac{dA}{A'}$$

En intégrant l'équation 3-3, on trouve l'équation des courbes dans le plan de phase :

$$\gamma A'^2 + 2g(a_0, A, \lambda) = C^{te}$$

où

$$g = \alpha_{30} \frac{A^4}{4} + \alpha_{11} (\lambda - \lambda_c) \frac{A^2}{2} + \beta a_0 A \quad (3-8)$$

On se limitera à des défauts localisés pairs par rapport à l'axe  $Ox$  et on cherchera des solutions ayant la même symétrie. Dans ce cas, on peut montrer facilement que la fonction  $A(x)$  est à valeurs réelles et qu'elle est paire. La condition (3-4) de discontinuité de la dérivée de l'amplitude due au défaut localisé  $a_1$  s'écrira sous la forme :

$$A'(0^+) = -C^{te} \frac{a_1}{2} \quad (3-9)$$

On s'intéresse ici au cas où les coefficients  $\alpha_{11}, \alpha_{30}$  sont négatifs. Sur la figure 3-2, on a présenté les trajectoires dans le plan de phase pour un défaut modal d'amplitude  $a_0$  petite. Les points I, II, III de coordonnées  $(0, R_i)$  correspondent à des solutions périodiques calculables par la théorie classique de Koiter puisque leur amplitude est constante ( $A' = 0$ ).

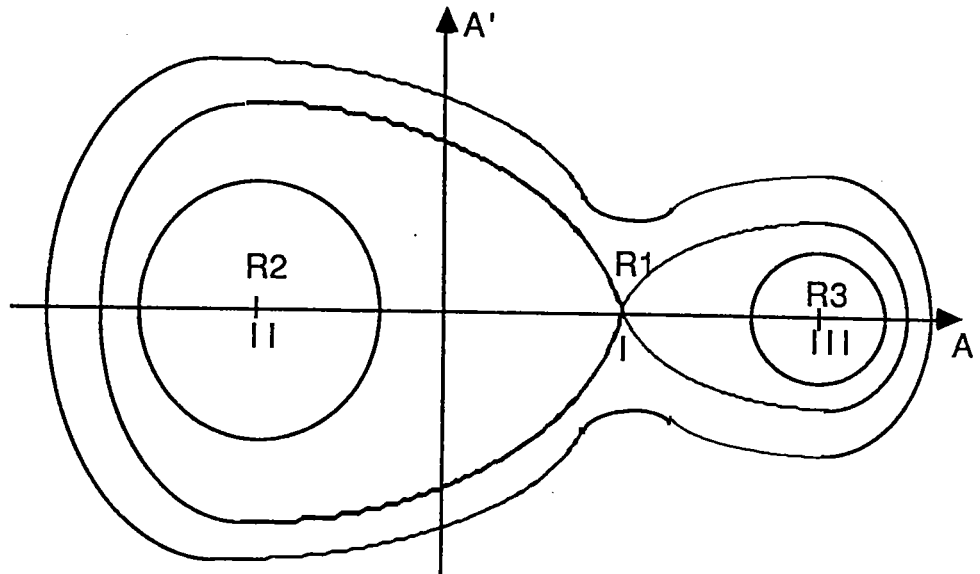


Fig3-2 Portrait de phase

On sélectionne uniquement les courbes présentant un croisement au col I ce qui correspond à des déformées périodiques loin de la région du défaut localisé. Ces courbes apparaissent dans l'espace de phases sous formes d'orbites qui partent et aboutissent au col I avec des tangentes distinctes (orbites homocliniques). Elles tournent autour des points II et III qui sont les points limites de courbes fermées correspondant à des déformées périodiques ( instables au sens dynamique) de la structure. Pour une charge  $\lambda$  et une amplitude du défaut modal  $a_0$  fixé, on a donc deux courbes fermées dans le plan de phase  $A, A'$  qui satisfont (3-8) et qui passent par le col I. Il reste à tenir compte de la condition aux limites 3-9 dans la zone du défaut localisé. Les solutions du problème ainsi complètement posé correspondent à l'intersection de ces deux courbes fermées avec une droite horizontale (Fig. 3-3). Donc pour  $\lambda$  et  $a_0$  fixés, il y a quatre solutions possibles, correspondant aux arcs de courbes  $\overline{AI}, \overline{BI}, \overline{CI}, \overline{DI}$ .

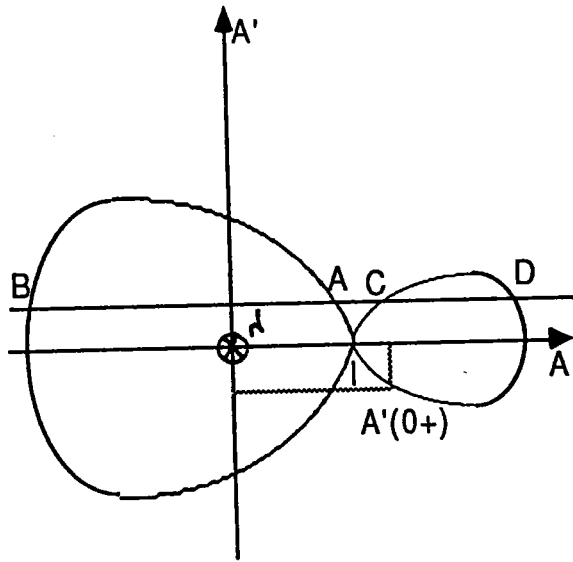


Fig 3-3-a  $A'(0^+) < 0$   
(les deux défauts sont en phase)

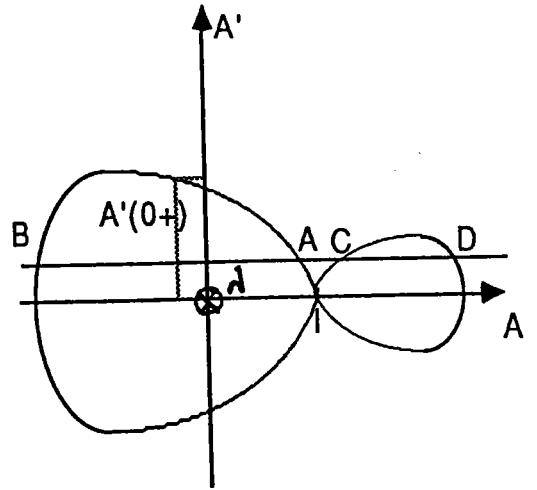


Fig 3-3-b  $A'(0^+) > 0$   
(les deux défauts sont en opposition de phase)

Fig3-3 :solution graphique de l'équation d'amplitude associée à la condition aux limites 3-9

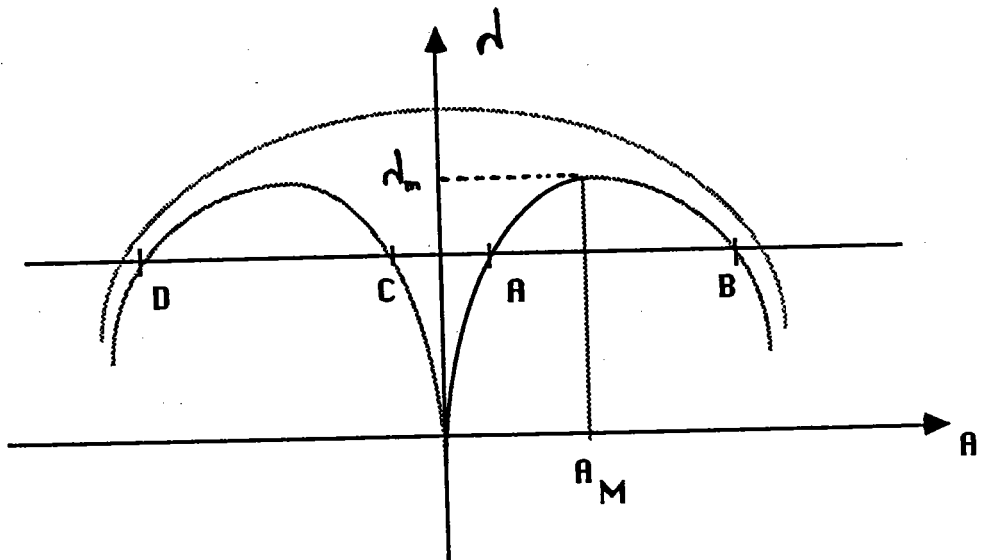


Fig 3-4 influence du défaut dans le plan de  $A, \lambda$

Il est possible que seule la solution correspondant à AI soit stable (Fig. 3.5)

On cherche maintenant comment calculer la valeur maximale de la charge pour des défauts  $a_0$  et  $a_1$  donnés. La droite ABCD reste donc constante et les deux orbites passant par I se déforment. Dans le cas d'un défaut localisé en phase avec le défaut modal (Fig. 3-3-a), la charge maximum est obtenue par confusion des deux points A et B.

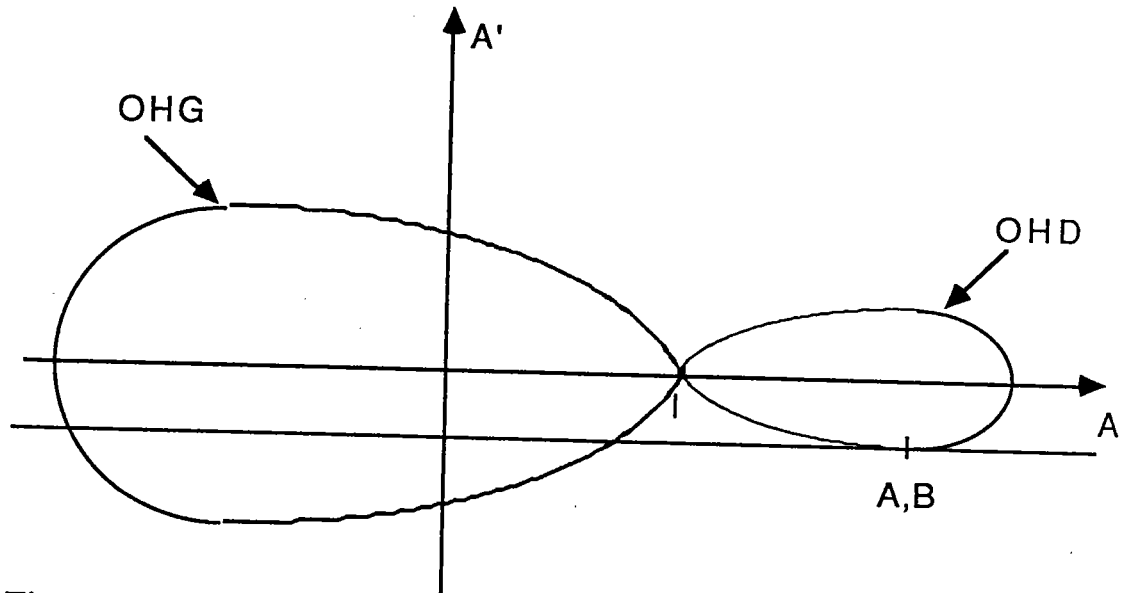


Fig 3-5 : Défauts en phase -portrait de phase lorsque l'on atteint la charge maximale.

L'orbite homoclinique droite (OHD) est donc tangente à la droite ABCD. Cette condition de tangence conduit aisément à la formule de réduction de charge dans le cas de deux défauts en phase :

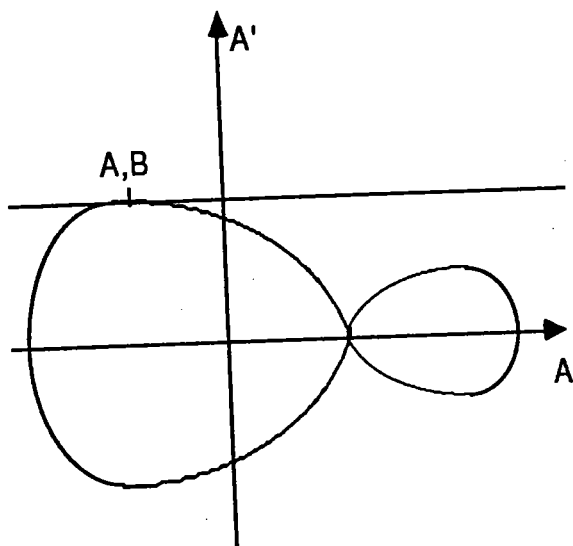
$$\lambda_c - \lambda_m = \frac{(-\alpha_{30})^{1/3}}{(-\alpha_{11})} \frac{(-a_0 \beta)^{2/3} (r^2 + r + 1)}{[r(r+1)]^{2/3}} \quad (3-10)$$

où  $r$  est solution de l'équation algébrique :

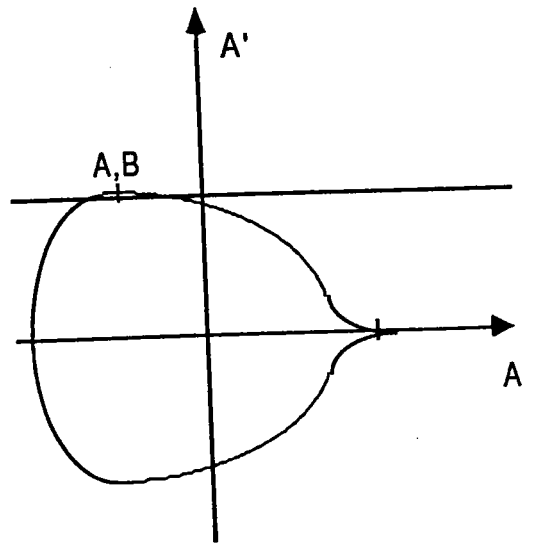
$$(-\gamma) A^2(o^+) = \frac{(-a_0 \beta)^{4/3} (r-1)^3}{(-\alpha_{30})^{1/3} r^{4/3} 2 (r+1)^{1/3}} \quad (3-11)$$

Lorsque les deux défauts sont en opposition de phase (Fig. 3-3b), deux cas

sont possibles. Premièrement, comme le cas de défauts en phase, la droite  $\dot{A}B$  peut devenir tangente à l'orbite homoclinique gauche (OHG) (Fig. 3-6a). Comme précédemment, la réduction de la charge est donnée par les formules 3-10 et 3-11.



3-6-a - Charge maximale fonction de l'amplitude du défaut localisé et réparti .



3-6-b - Disparition de la boucle. Pas d'influence du défaut localisé.

Fig 3-6 Influence du défaut localisé et réparti sur la charge maximale.

Deuxièmement, l'orbite homoclinique droite peut diminuer, puis disparaître, ce qui correspond à la confusion des deux solutions à amplitudes constantes I et III. La charge maximale ainsi obtenue est donnée par la formule classique 1-14 et ne dépend pas du défaut localisé.

Le défaut localisé réduit la charge critique si les deux défauts sont en phase (Fig. 3-5) ou si les deux défauts sont en opposition de phase, mais avec un défaut localisé assez grand (Fig. 3-6-a). En revanche, si les deux défauts sont en opposition de phase avec un défaut localisé assez petit (Fig. 3-6-b), la région du défaut localisé se trouve stabilisée et l'instabilité naît en dehors de cette région. C'est pourquoi dans ce cas le défaut localisé n'a pas d'influence sur la charge critique .

### III.3. Calcul des coefficients de l'équation d'amplitude

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les coefficients  $\gamma$ ,  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{30}$  de l'équation d'amplitude 3-3. Nous commençons tout d'abord par donner l'expression du rapport  $b = -\alpha_{30}/\alpha_{11}$  à l'aide d'une relation asymptotique, puis nous la comparons avec des valeurs numériques calculées par la méthode des éléments finis. Ensuite par un calcul d'échelles multiples nous retrouvons l'expression de  $\gamma$  dans 1-43.



### III.3.1. Valeur asymptotique de b

Nous cherchons ici une expression analytique des coefficients  $\alpha_{30}$ ,  $\alpha_{11}$ . Le coefficient  $\alpha_{30}$  dépend de la solution non linéaire au post-flambage établie en rendant stationnaire la fonctionnelle (1-60) (après adimensionnalisation cf. annexe 1) :

$$\begin{aligned}
 L(\eta, \lambda, w, f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (\Delta w)^2 - (\Delta f)^2 - \frac{2}{\eta^2} f_{,xx} w - \frac{4}{3^{3/4}} \frac{\lambda}{\eta} \left( \frac{\alpha}{2} w_{,x}^2 + w_{,y}^2 \right) \right\} d\Omega \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w, f] w d\Omega \\
 \Omega &= \left[ -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2} \right] \times \left[ 0, 2\pi^2 \frac{R}{L} \right] \\
 \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{3-12}$$

Cette fonctionnelle peut s'écrire comme la somme d'un terme quadratique et d'un terme cubique

$$L = L_2 + L_3 \tag{3-13}$$

En faisant la même approximation que dans le paragraphe II.2.1., c'est à-dire négliger  $\partial/\partial x$  par rapport à  $\partial/\partial y$  sauf dans les termes de courbures, il reste :

$$\begin{aligned}
 L^*(\eta, \lambda, w, f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (\partial_y^2 w)^2 - (\partial_y^2 f)^2 - \frac{2}{\eta^2} f_{,xx} w - \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} (\partial_y w)^2 \right\} d\Omega \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega} [w, f] w d\Omega
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

Remarquons que l'on peut retrouver les équations approchées 2-2 en écrivant  $\delta L^*_2 = 0$ . La variation de  $L^*$  s'écrit :

$$\delta L^* = \delta L^*_2 + \delta L^*_3$$

où

$$\delta L_2^* = \int_{\Omega} \left\{ (\partial_y^2 w)^2 (\partial_y^2 \delta w) - (\partial_y^2 f) (\partial_y^2 \delta f) - \frac{(\partial_x^2 \delta f) w}{\eta^2} - \frac{(\partial_x^2 f) \delta w}{\eta^2} - \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} (\partial_y w) (\partial_y \delta w) \right\} d\Omega$$

$$\delta L_3^* = -\frac{1}{2} \int \{ [w, f] \delta w + [\delta w, f] w + [w, \delta f] w \} d\Omega \quad (3-15)$$

La solution du problème auxiliaire sera notée  $\hat{w}, \hat{f}$ . Compte tenu de l'équation variationnelle de 1-26,  $\hat{w}$  et  $\hat{f}$  sont solutions des équations :

$$\partial_y^4 \hat{w} + \frac{4\lambda_{oc}}{3^{3/4} \eta} \partial_y^2 \hat{w} - \frac{\partial_x^2}{\eta^2} \hat{f} = [w_{oi}, f_{oi}]$$

$$\partial_y^4 \hat{f} + \frac{\partial_x^2 \hat{w}}{\eta^2} = -\frac{1}{2} [w_{oi}, w_{oi}]$$

(3-16)

$$\hat{w}(\pm \Pi/2) = 0, \hat{w}''(\pm \Pi/2) = -\frac{3^{1/4}}{2} \text{ pour les conditions aux limites } N_x(\pm \Pi/2) = w(\pm \Pi/2) = 0$$

$$\hat{w}'(\pm \Pi/2) = \hat{w}'''(\pm \Pi/2) = 0 \text{ pour les conditions aux limites } U(\pm \Pi/2) = w(\pm \Pi/2) = 0$$

En écrivant le mode approché  $w_{oi}, f_{oi}$  (ch. II.2.3.) sous la forme :

$$w_{oi}(x, y) = w_{oi}(x) \cos \frac{ky}{\sqrt{\eta}}$$

$$f_{oi}(x, y) = f_{oi}(x) \cos \frac{ky}{\sqrt{\eta}}$$

(3-17)

On peut donc préciser les équations satisfaites par  $\hat{w}, \hat{f}$  :

$$\partial_y^4 \hat{w} + \frac{4\lambda_{oc}}{3^{3/4}\eta} \partial_y^2 \hat{w} - \frac{\partial_x^2 \hat{f}}{\eta^2} = -\frac{1}{\eta} [ 2k^2 (w_{oi}''(x) f_{oi}(x) + f_{oi}''(x) w_{oi}(x) - w_{oi}'(x) f_{oi}'(x)) \cos \frac{2ky}{\sqrt{\eta}} - 2k^2 (w_{oi}(x) f_{oi}(x))'' ]$$

$$\partial_y^4 \hat{f} + \frac{\partial_x^2 \hat{w}}{\eta^2} = \frac{1}{\eta} [ 2k^2 (w_{oi}''(x) w_{oi}(x) - w_{oi}'(x)^2) \cos \frac{2ky}{\sqrt{\eta}} + k^2 (w_{oi}(x)^2)'' ]$$

+ conditions aux limites

Les solutions de (3-18) sont de la forme : (3-18)

$$\hat{w} = \eta [ w_0(x) + w_2(x) \cos \frac{2ky}{\sqrt{\eta}} ]$$

$$\hat{f} = \eta [ f_0(x) + f_2(x) \cos \frac{2ky}{\sqrt{\eta}} ]$$

Les expressions de  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{30}$  sont : (cf. éq. 1-30, [29]) (3-19)

$$\alpha_{11} = \frac{2dL_2}{d\lambda} (w_{oi}) = -\frac{4}{3^{3/4}} \frac{1}{\eta} \int_{\Omega} (\partial_y w_{oi})^2 d\Omega$$

$$\alpha_{30} = 2L_{21}^* (w_{oi}, w) = - \int_{\Omega} [w_{oi}, f_{oi}] w + [w, f_{oi}] w_{oi} + [w_{oi}, f] w_{oi} ] d\Omega$$

Dans la suite nous normalisons les coefficients  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_{30}$  en divisant par  $\sqrt{\eta} / (\text{mes}(\Omega) k)$ . (3-20)

Ainsi, pour les deux classes de conditions aux limites  $N_x = W = 0$ ,  $U = W = 0$ , on peut calculer en première approximation, la solution non linéaire  $w$ ,  $f$  et les coefficients  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{30}$ .

### III.3.1.a. Cas de la condition aux limites $N_x = w = 0$

Les termes axisymétriques  $w_0$ ,  $f_0$  vérifient les équations :

$$-\partial_x^2 f_o = -2k^2 (w_{oi} f_{oi})''$$

$$\partial_x^2 w_o = k^2 (w_{oi}^2)''$$

(3-21)

$w_2, f_2$  satisfont les équations :

$$\left(16k^4 - \frac{4\lambda_c \cdot 4k^2}{3^{3/4}}\right) w_2 - f_2'' = -2k^2 (w_{oi}'' f_{oi} + f_{oi}'' w_{oi} - 2f_{oi}' w_{oi}')'$$

$$16k^4 f_2 + w_2'' = 2k^2 (w_{oi} w_{oi}'' - w_{oi}'^2)''$$

(3-22)

On en déduit une équation pour  $w_2$  tout seul :

$$w_2^{(4)} + 4\sigma^4 w_2 = 2k^2 (w_{oi} w_{oi}^{(4)} - w_{oi}''^2) + 32k^2 (w_{oi}''^2 + w_{oi} w_{oi}^{(4)} - 2w_{oi}' w_{oi}''')$$

où

$$\sigma^4 = 64k^6 \left(k^2 - \frac{\lambda_c}{3^{3/4}}\right)$$

(3-23)

Au premier ordre, d'après l'analyse du chapitre II, dans le cadre de l'approximation inextensionnelle, les conditions aux limites  $N_x = w = 0$  se traduisent par les conditions  $w = f = 0$ .  
on en déduit d'après (3-16) :

$$w_o = f_o = 0$$

$$w_2 = f_2 = 0 \quad , \quad \text{en } x = \pm \Pi/2$$

(3-24)

On rappelle que le mode  $w_{oi}$  a été normalisé en prenant son maximum égal à 1 :

$$w_{oi}(x,y) = \cos x \cos \frac{ky}{\sqrt{\eta}}$$

(3-25)

Les solutions  $w_o, f_o, w_2, f_2$  écrites en  $k_{oc} = 3^{1/8}, \lambda_{oc} = 1$  sont :

$$w_0(x) = \frac{3^{1/4}}{4} \cos^2 x$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/4}} \cos^2 x$$

$$w_2(x) = \frac{3^{1/4}}{2^5} [ 1 + A \cos h (2^{7/4} x) \cos (2^{7/4} x) + B \sin h (2^{7/4} x) \cos (2^{7/4} x) ]$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{32 \cdot 3^{1/4}} [ 1 + B \sqrt{2} \cos h (2^{7/4} x) \cos (2^{7/4} x) - A \sqrt{2} \sin h (2^{7/4} x) \sin (2^{7/4} x) ]$$

où

$$A = \frac{[\sin h (2^{3/4} \Pi) \sin (2^{3/4} \Pi)] \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos h (2^{3/4} \Pi) \cos (2^{3/4} \Pi)}{[\sin h (2^{3/4} \Pi) \sin (2^{3/4} \Pi)]^2 + [\cos h (2^{3/4} \Pi) \cos (2^{3/4} \Pi)]^2}$$

$$B = -\frac{[\cos h (2^{3/4} \Pi) \cos (2^{3/4} \Pi)] \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin h (2^{3/4} \Pi) \sin (2^{3/4} \Pi)}{[\sin h (2^{3/4} \Pi) \sin (2^{3/4} \Pi)]^2 + [\cos h (2^{3/4} \Pi) \cos (2^{3/4} \Pi)]^2}$$

(3-26)

L'expression de  $\alpha_{30}$  en fonction de  $w_0, f_0, w_2, f_2$  est :

$$\alpha_{30} = -\frac{3^{1/4}}{\Pi} \int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} \left\{ \frac{2w_0}{\sqrt{3}} \cos (2x) + \frac{w_2}{\sqrt{3}} + f_0 \cos (2x) + \frac{f_2}{2} \right\} dx$$

(3-27)

En remplaçant  $w_0, f_0, w_2, f_2$  par leurs expressions données en 3-26, on trouve:

$$\alpha_{30} = \frac{-1}{64 \Pi} \left\{ 17 \Pi + \frac{A3}{2^{3/4}} \left[ A-B - \frac{A+B}{\sqrt{2}} \right] + \frac{A4}{2^{3/4}} \left[ A+B + \frac{A-B}{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

où

$$A3 = \sin h (2^{3/4} \Pi) \cos (2^{3/4} \Pi)$$

$$A4 = \cos h (2^{3/4} \Pi) \sin (2^{3/4} \Pi)$$

(3-28)

d'où la valeur numérique de  $\alpha_{30}$  :

$$\alpha_{30} = -0.2683 \quad (3-29)$$

Le coefficient  $\alpha_{11}$  se calcule à partir de 3-9 et 3-14, on trouve :

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{\eta^2\sqrt{3}} = -\frac{0.5774}{\eta^2} \quad (3-30)$$

Les valeurs de ces coefficients ont été calculées pour  $\lambda_{oc} = 1$  et  $k_{oc} = 3^{1/8}$ , soit sans tenir compte de la condition de périodicité. On en déduit le rapport ,

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}} = \frac{1.324}{Z} \quad (3-31)$$

L'équation d'amplitude sans défaut :

$$\lambda - \lambda_{oc} = -\frac{1.324}{Z} a^2 \quad (3-32)$$

où  $a$  est l'amplitude du mode adimensionnalisé  $w_1$ . L'équation d'amplitude  $A$  de la flèche  $W$  se déduit à partir de l'équation précédente et les relations d'adimensionnement (cf. annexe 1) :

d'où

$$\frac{\lambda}{\lambda_{oc}} = 1 - \frac{15.887 (1-\nu^2)}{\lambda_{oc} Z} \left(\frac{a_0}{h}\right)^2 \quad (3-33)$$

On pose :

$$b_{as} = -\frac{15.887 (1-\nu^2)}{Z} \quad (3-34)$$

Cette valeur asymptotique sera comparée avec la valeur exacte trouvée à partir d'un calcul en éléments finis.

### III.3.1.b. Cas de la condition aux limites $U = W = 0$

Au premier ordre, d'après l'analyse du chapitre II, dans le cadre de l'approximation inextensionnelle, les conditions aux limites  $U = W = 0$  conduisent aux conditions  $w = w_x = 0$ . D'où d'après (3-20) :

$$w_0(x) = w_0'(x) = 0$$

$$w_2(x) = w_2'(x) = 0 \quad , \quad \text{en } x = \pm \Pi/2$$

(3-35)

Le mode de flambage, normalisé en prenant son maximum égal à 1, s'écrit :

$$w_{oi}(x,y) = \left[ \frac{1}{2\left(1 + \frac{\sinh(r\Pi/2)}{\sin(r\Pi/2)}\right)} \cosh(rx) + \frac{1}{2\left(1 + \frac{\sin(r\Pi/2)}{\sinh(r\Pi/2)}\right)} \cos(rx) \right] \cos\left(\frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

(3-36)

$$r = 1.505\ 619$$

A partir des équations 3-21 à 3-23, on déduit les solutions auxiliaires  $w_0(x)$ ,  $f_0(x)$ ,  $w_2(x)$ ,  $f_2(x)$  :

$$w_0(x) = 3^{1/4} r [ A^2 \cosh^2(rx) + B^2 \cos^2(rx) + 2AB \cosh(rx) \cos(rx) ]$$

$$f_0(x) = \frac{-2r}{3^{1/4}} [ A^2 \cosh^2(rx) - B^2 \cos^2(rx) ]$$

$$w_2(x) = \frac{3^{1/4} r}{8} (A^2 + B^2) [ 1 + \alpha \cosh(2^{7/4} rx) \cos(2^{7/4} rx) + \beta \sinh(2^{7/4} rx) \sin(2^{7/4} rx) ] \\ + \frac{AB \cosh(rx) \cos(rx)}{8(1 - 1/2^7)(A^2 + B^2)}$$

$$f_2(x) = \frac{r}{3^{1/4} \cdot 8} [ A^2 - B^2 + 2AB \sinh(rx) \sin(rx) ] - \frac{r(A^2 + B^2)}{3^{1/4} 2^{5/2}} [ \beta \cosh(2^{7/4} rx) \cos(2^{7/4} rx) \\ - \alpha \sinh(2^{7/4} rx) \sin(2^{7/4} rx) ] + \frac{ABr}{4 \cdot 3^{1/4} (2^7 - 1)} [ \sinh(rx) \sin(rx) ]$$

, où

$$A = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\sinh(r\pi/2)}{\sin(r\pi/2)}\right)}$$

$$B = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\sin(r\pi/2)}{\sinh(r\pi/2)}\right)}$$

$$\alpha = \frac{C1 D4 - D2 C2}{D1 D4 - D2 D3}, \quad \beta = \frac{C2 D1 - C1 D3}{D1 D4 - D2 D3}$$

$$C1 = -\frac{2^4 \cosh(r\pi/2) \cos(r\pi/2)}{\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right) (2^7 - 1)} - 1, \quad C2 = -\frac{2^{9/4} (\sinh(r\pi/2) \cos(r\pi/2) - \sin(r\pi/2) \cosh(r\pi/2))}{(2^7 - 1) \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)}$$

$$D1 = \cosh(2^{3/4} r\pi) \cos(2^{3/4} r\pi), \quad D2 = \sinh(2^{3/4} r\pi) \sin(2^{3/4} r\pi)$$

$$D3 = \sinh(2^{3/4} r\pi) \cos(2^{3/4} r\pi) - \cosh(2^{3/4} r\pi) \sin(2^{3/4} r\pi)$$

$$D4 = \sinh(2^{3/4} r\pi) \cos(2^{3/4} r\pi) + \cosh(2^{3/4} r\pi) \sin(2^{3/4} r\pi)$$

(3-37)

On en déduit  $\alpha_{30}$  (calcul analogue à celui du paragraphe précédent)

$$\alpha_{30} = -0.686$$

$$\alpha_{11} = -\frac{0.6893}{\eta^2}$$

(3-38)

L'équation d'amplitude sans défaut de la flèche A s'écrit donc :

$$\frac{\lambda}{\lambda_{oc}} = 1 - \frac{34.067}{\lambda_{oc}} \left(\frac{1-v^2}{Z}\right) \left(\frac{a_0}{h}\right)^2$$

(3-39)

On pose :

$$b_{as} = -\frac{34.067 (1-v^2)}{Z}$$

(3-40)



### III.3.2. Calcul de b par éléments finis

Nous utilisons une méthode d'éléments finis pour calculer les valeurs de b pour différentes conditions aux limites. On comparera ensuite ces résultats avec ceux obtenus dans la paragraphe précédent.

On commence tout d'abord par calculer le mode et la charge de flambage à partir du principe des puissances virtuelles [15], [19] :

$$-\int_{\Omega} (N_{\alpha\beta} \delta \gamma_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) d\Omega + P_{ex} (\delta w) = 0$$

$$\forall \delta u \in C.A.$$

$$\Omega = [0, L] \times [0, 2\pi R [$$

(3-41)

où les déformations moyennes  $\gamma$  et les courbures  $\kappa$  sont définies par les relations 1-48. En utilisant la méthode de l'équilibre adjacent [7] dans 3-41, on aboutit à deux formulations variationnelles (annexe 7).

La première formulation concernant le problème du pré-flambage ou axi-symétrique conduit à la forme intégrale discrétisée suivante :

$$\text{Trouver } W^F \in V_a / [k_F] \{ W^F \} = \{ F \}$$

$$V_a = \{ W \in (H^2(0,1))^2 / W \text{ satisfait les conditions aux limites en déplacements} \}$$

(3-42)

où  $K_F$  matrice de rigidité élastique associée au problème de pré-flambage. Cette matrice dépend du chargement imposé

F vecteur chargement.

Le problème 3-42 a été résolu par la méthode d'éléments finis en utilisant des polynômes cubiques de type d'hermite discrétisé sur le segment 0, L.

La solution du problème de flambage est obtenue à l'aide d'une seconde formulation qui aboutit à la notion de matrice de rigidité tangente  $K_T$  que l'on écrit comme la somme de trois matrices [41] :

$K_e$  : matrice de rigidité élastique

$K_u$  : matrice fonction des déplacements en pré-flambage

$\lambda K_G$  matrice de rigidité géométrique

### III.3.2. Calcul de b par éléments finis

Nous utilisons une méthode d'éléments finis pour calculer les valeurs de b pour différentes conditions aux limites. On comparera ensuite ces résultats avec ceux obtenus dans la paragraphe précédent.

On commence tout d'abord par calculer le mode et la charge de flambage à partir du principe des puissances virtuelles [15], [19] :

$$-\int_{\Omega} (N_{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}) d\Omega + P_{ex} (\delta w) = 0$$

$$\forall \delta u \in C.A.$$

$$\Omega = [0, L] \times [0, 2\pi R] \quad (3-41)$$

où les déformations moyennes  $\gamma$  et les courbures  $\kappa$  sont définies par les relations 1-48. En utilisant la méthode de l'équilibre adjacent [7] dans 3-41, on aboutit à deux formulations variationnelles (annexe 7).

La première formulation concernant le problème du pré-flambage ou axisymétrique conduit à la forme intégrale discrétisée suivante :

$$\text{Trouver } W^F \in V_a / [k_F] \{ W^F \} = \{ F \}$$

$$V_a = \{ W \in (H^2(0,1))^2 / W \text{ satisfait les conditions aux limites en déplacements} \} \quad (3-42)$$

où  $K_F$  matrice de rigidité élastique associée au problème de pré-flambage. Cette matrice dépend du chargement imposé

F vecteur chargement.

Le problème 3-42 a été résolu par la méthode d'éléments finis en utilisant des polynomes cubiques de type d'hermite discrétisé sur le segment 0, L.

La solution du problème de flambage est obtenue à l'aide d'une seconde formulation qui aboutit à la notion de matrice de rigidité tangente  $K_T$  que l'on écrit comme la somme de trois matrices [41] :

- $K_e$  : matrice de rigidité élastique
- $K_u$  : matrice fonction des déplacements en pré-flambage
- $\lambda K_\sigma$  matrice de rigidité géométrique

Le déplacement modal  $U_1 = \{U_1, V_1, W_1\}$  peut s'écrire sous la forme :

$$U_1(x,y) = U_1(x) \exp(iy/R)$$

$$V_1(x,y) = V_1(x) \exp(iy/R)$$

$$W_1(x,y) = W_1(x) \exp(iy/R)$$

(3-43)

Le problème se ramène donc à un calcul unidimensionnel pour chaque nombre entier  $n$  donné. L'approximation éléments finis par des polynômes cubiques de type hermites pour la flèche  $W$  et par des polynômes linéaires pour les déplacements  $U$  et  $V$  permet de résoudre le problème de flambage.

En choisissant des fonctions tests de la forme :

$$\delta U_1(x,y) = \delta U_1(x) \exp(-iy/R)$$

$$\delta V_1(x,y) = \delta V_1(x) \exp(-iy/R)$$

$$\delta W_1(x,y) = \delta W_1(x) \exp(-iy/R)$$

(3-44)

Il se résume à :

$$\text{trouver } U_1 \in U_a / [K_T] \{U_1\} = 0$$

$$U_a = \{V \in (H^2(0,1)) \times (H^1(0,1)) / V \text{ satisfait les conditions aux limites en déplacements}\}$$

(3-45)

Dans toute la suite nous négligerons les déplacements avant flambage, ce qui revient à annuler  $K_U$ , et rendre  $\lambda K_\sigma$  indépendant de  $W^F$ . Le problème 3-45 s'écrit donc :

$$\text{trouver } U_1 \in U_a / [K_e] \{U_1\} = \lambda [K_\sigma] \{U_1\}$$

(3-46)

Le déplacement auxiliaire  $U = \{U, V, W\}$  (solutions du problème 1-26) se résout en deux étapes (voir annexe 8). Ce déplacement s'écrit :

$$U(x,y) = U_0(x) + W_2(x) \exp(2iy/R)$$

$$V(x,y) = V_2(x) \exp(2iy/R)$$

$$W(x,y) = W_0(x) + W_2(x) \exp(2iy/R)$$

(3-47)

Le coefficient  $\alpha_{11}$  se déduit facilement à partir de 3-33. Son expression est:

$$\alpha_{11} = U_1 \cdot K_{\sigma}(n_c) \cdot U_1 \quad (3-53)$$

Le coefficient  $\alpha_{30}$  s'obtient en remplaçant les expressions de  $U_1, U$  par leurs valeurs dans les termes cubiques de l'énergie (voir annexe 8). D'où le rapport  $b$  :

$$b = - \frac{\alpha_{30}}{\alpha_{11}} \quad (3-54)$$

Dans le Tableau 3-1 nous avons comparé les valeurs asymptotiques  $b_{\text{asym}}$  (cf. § III.4.1.) et les valeurs exactes de  $b$  (calculées par la méthode des éléments finis). Pour les conditions aux limites S1, S2, C1, C2, les valeurs exactes de  $b$  sont comparées avec la valeur asymptotique §3-1 (correspondante à la classe de condition aux limites  $N_x = W = 0$ ). Les quatre autres conditions aux limites dans S3, S4, C3, C4, sont comparées avec la valeur asymptotique de  $b$  donnée par l'équation (correspondante à la classe de condition aux limites  $U = W = 0$ ).

Z	53.659	95.394	214.636	381.576	596.212	858.545	1168.576	1931.727
S3	0.746	0.805	0.793	0.890	1.107	0.962	0.845	1.146
C3	0.735	0.942	0.883	0.952	1.148	1.002	0.885	1.167
S4	0.602	0.671	0.705	0.804	0.989	0.899	0.808	1.090
C4	0.727	0.925	0.888	0.959	1.146	1.012	0.896	1.175
C1	0.562	0.623	0.630	0.701	0.844	0.753	1.003	0.859
S1	0.472	0.540	0.576	0.662	0.815	0.732	0.984	0.848
C2	0.526	0.588	0.607	0.677	0.811	0.738	0.965	0.848
S2	0.371	0.492	0.588	0.572	0.703	0.666	0.872	0.798

Tableau 3-1 - comparaison entre les valeurs asymptotiques et exactes de  $b$  ( $b_{\text{ex}} / b_{\text{as}}$ ).  $R/h=100$

III.3.3. Calcul du coefficient de modulation  $\gamma$

La relation générale établie en [13]  $\gamma / \alpha_{11} = \lambda^2 / 2$  peut être vérifiée dans chaque cas par la méthode des échelles multiples. Nous avons effectué cette vérification dans le cas particulier de l'approximation au premier ordre du mode avec comme condition aux limites  $N_X=W=0$  (cf. annexe 9). Après avoir déterminé les courbes de stabilité neutre  $\lambda(n)$  par la méthode des éléments finis pour les huit conditions aux limites, nous avons calculé la courbure  $\lambda''(n)$  et donc  $\gamma$ . Le Tableau 3-2 contient les différentes valeurs de  $\gamma$  correspondantes à chacune des conditions aux limites.

Au premier ordre, la valeur asymptotique de  $\gamma$  est indépendante des conditions aux limites. Sa valeur est :

$$\gamma = 0.7797 \frac{L^2}{\sqrt{Z} R^2}$$

(3-55)

Z	53.659	95.394	214.636	381.576	596.212	858.545	1168.576	1931.727
S3	0.063	0.087	0.103	0.164	0.372	0.250	0.181	0.517
C3	0.038	0.092	0.107	0.169	0.379	0.255	0.185	0.523
S4	0.037	0.057	0.080	0.132	0.282	0.213	0.165	0.447
C4	0.036	0.083	0.105	0.165	0.357	0.251	0.185	0.510
C1	0.051	0.073	0.094	0.141	0.263	0.198	0.501	0.318
S1	0.047	0.068	0.090	0.137	0.257	0.195	0.494	0.315
C2	0.042	0.062	0.085	0.130	0.238	0.188	0.453	0.306
S2	0.027	0.061	0.110	0.103	0.187	0.161	0.365	0.274

Tableau 3-2 -valeur exacte de  $\gamma$  pour différentes conditions aux limites .  
R/h=100

### III.4. Expression asymptotique de l'équation d'amplitude

Nous avons déterminé précédemment par différentes méthodes les coefficients  $b$  et  $\gamma$  de l'équation d'amplitude 3-3. Ces résultats montrent que pour les grandes valeurs de  $Z$ , les relations asymptotiques donnent des valeurs satisfaisantes. Dans ce cas l'équation d'amplitude se détermine à partir des seules conditions aux limites axiale et radiale. Son expression est donnée par :

#### Cas $N_x = W = 0$ aux bords

$$\frac{0.7797 L^2}{\sqrt{Z}} A''(Y) + A(\lambda - \lambda_c) + \frac{15.8898 (1-\nu^2)}{Z} A^3 = -a_0 \quad (3-56)$$

#### Cas $U=W = 0$ aux bords

$$\frac{0.7797 L^2}{\sqrt{Z}} A''(Y) + A(\lambda - \lambda_c) + \frac{34.0672 (1-\nu^2)}{Z} A^3 = -1.5056 a_0 \quad (3-57)$$

### III.5. Calcul de la réduction de la charge critique à partir de l'équation d'amplitude

#### III.5.1. Cas d'un défaut modal

Pour un défaut modal la théorie de Koiter s'applique et la réduction de la charge est donnée par la formule 3-1. Cette relation a été obtenue de deux façons différentes. Pour les grandes valeurs de  $Z$  la réduction de la charge se déduit facilement de l'expression asymptotique de l'équation d'amplitude 3-52 ou 3-53.

#### Cas $N_x = W = 0$ aux bords

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{oc}} = 1 - 4.7512 \left( \frac{1-\nu^2}{Z} \right)^{1/3} \left( \frac{a_0}{h} \right)^{2/3}, \quad \lambda_{oc} = 1. \quad (3-58)$$

3 Cas U=W= 0 aux bords

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{oc}} = 1 - 5.3454 \left( \frac{1-v^2}{Z} \right)^{1/3} \left( \frac{a_0}{h} \right)^{2/3}, \quad \lambda_{oc} = 1.50562$$

(3-59)

La réduction de la charge a été calculée aussi à partir des valeurs de b calculées par éléments finis. Les résultats ainsi obtenus sont présentés dans les tableaux 3-3 et 3-4 . On a distingué respectivement les cas où la réduction de la charge est donnée par la méthode asymptotique et les cas où celle-ci est donnée par la méthode des éléments finis.

	Z	53.659	95.394	214.636	381.576
Nx=					
W=0		0.583	0.655	0.737	0.783
U =					
W=0		0.530	0.612	0.704	0.756
	Z	596.212	858.545	1168.576	1931.727
Nx=					
W=0		0.813	0.834	0.851	0.874
U =					
W=0		0.790	0.814	0.832	0.858

Fig 3-3 -calcul asymptotique au premier ordre de la réduction de la charge causée par un défaut modal .  $a_0/h=0.2$  ;  $R/h=100$

Z	53.659	95.394	214.636	381.576	596.212	858.545	1168.576	1931.727
S3	0.621	0.679	0.757	0.791	0.806	0.836	0.859	0.868
C3	0.623	0.662	0.748	0.786	0.804	0.834	0.856	0.867
S4	0.647	0.698	0.766	0.798	0.814	0.840	0.861	0.870
C4	0.625	0.664	0.747	0.786	0.804	0.834	0.856	0.867
C1	0.612	0.669	0.746	0.783	0.801	0.830	0.832	0.865
S1	0.634	0.684	0.754	0.787	0.803	0.832	0.833	0.865
C2	0.621	0.675	0.749	0.786	0.804	0.832	0.834	0.865
S2	0.663	0.694	0.752	0.797	0.813	0.837	0.839	0.868

Tableau 3-4 -Calcul en éléments finis de la réduction de la charge causée par un défaut modal pour différentes conditions aux limites .  $a_0/h=0.2$  ;  $R/h=100$ .

### III.5.2. Cas d'un défaut localisé

Dans ce cas, nous avons uniquement déterminé la réduction de la charge à partir des équations approchées au premier ordre en se limitant à des grandes valeurs de Z pour la condition aux limites  $N_x = w = 0$  (cf. annexe 9). Dans la région du défaut localisé autour de la région  $Y = 0$  :

$$a_1 \cos x W_1(Y)$$

$$W_1(Y) \rightarrow 0 \text{ si } |Y| \rightarrow \infty$$

(3-60)

l'équation d'amplitude 3-56 n'est pas valable. La discontinuité de la pente de l'amplitude A de la flèche est donnée par :

$$\frac{1.8854 L}{Z^{1/4}} A'(0^+) = -A_1 \tilde{W}_1(k_c)$$

(3-61)

où  $\tilde{W}_1(\cdot)$  désigne la transformée de Fourier de  $W_1(\cdot)$



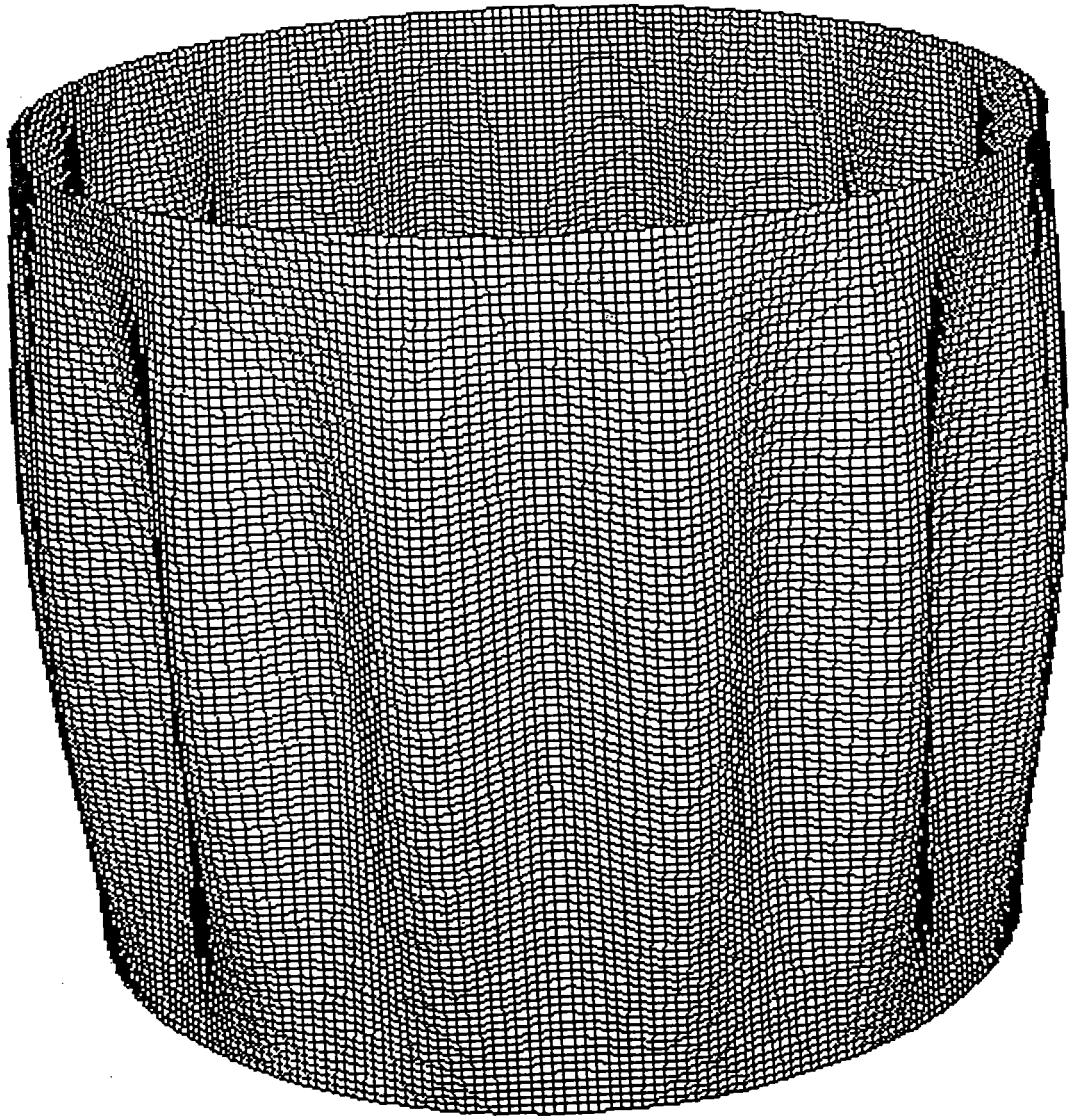
La loi de réduction de la charge s'écrit :

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{oc}} = 1 - 2.64 \left( \frac{1-\nu^2}{Z} \right)^{1/2} \left( \frac{A_1}{h} \right) \left| \widetilde{W}_1(k_c) \right| , \quad \lambda_{oc} = 1 , \quad k_c = 3^{1/8} \quad (3-62)$$

### III.6. Conclusion

Nous avons calculé de deux façons différentes les coefficients de l'équation 3-3, pour une coque cylindrique sous pression. L'objectif de la première méthode était de proposer des formules explicites en vue du dimensionnement au flambage des coques cylindriques sous pression en présence des défauts modaux et localisés. La deuxième méthode a conduit à un procédé de calcul numérique simplifié permettant de remplacer un problème bidimensionnel par plusieurs problèmes unidimensionnels. Ainsi nous pouvons, à partir de la valeur du coefficient  $b$ , calculer la réduction de la charge critique causée par un défaut modal sans se limiter à de grandes valeurs de  $Z$ . Les formules proposées ne sont précises que pour des défauts de faibles amplitudes. En liaison avec d'autres travaux développés au laboratoire, nous envisageons de prolonger ces développements asymptotiques à des ordres supérieurs permettant la prise en compte des défauts de grande amplitude et de formes quelconques. Cette méthode peut être aussi adaptée pour d'autres géométries et d'autres chargements : torsion, charges combinées...

Les calculs numériques qui ont été utilisés sont beaucoup plus rapides que ceux des gros codes, donc plus facilement utilisables pour le dimensionnement.



## CHAPITRE IV

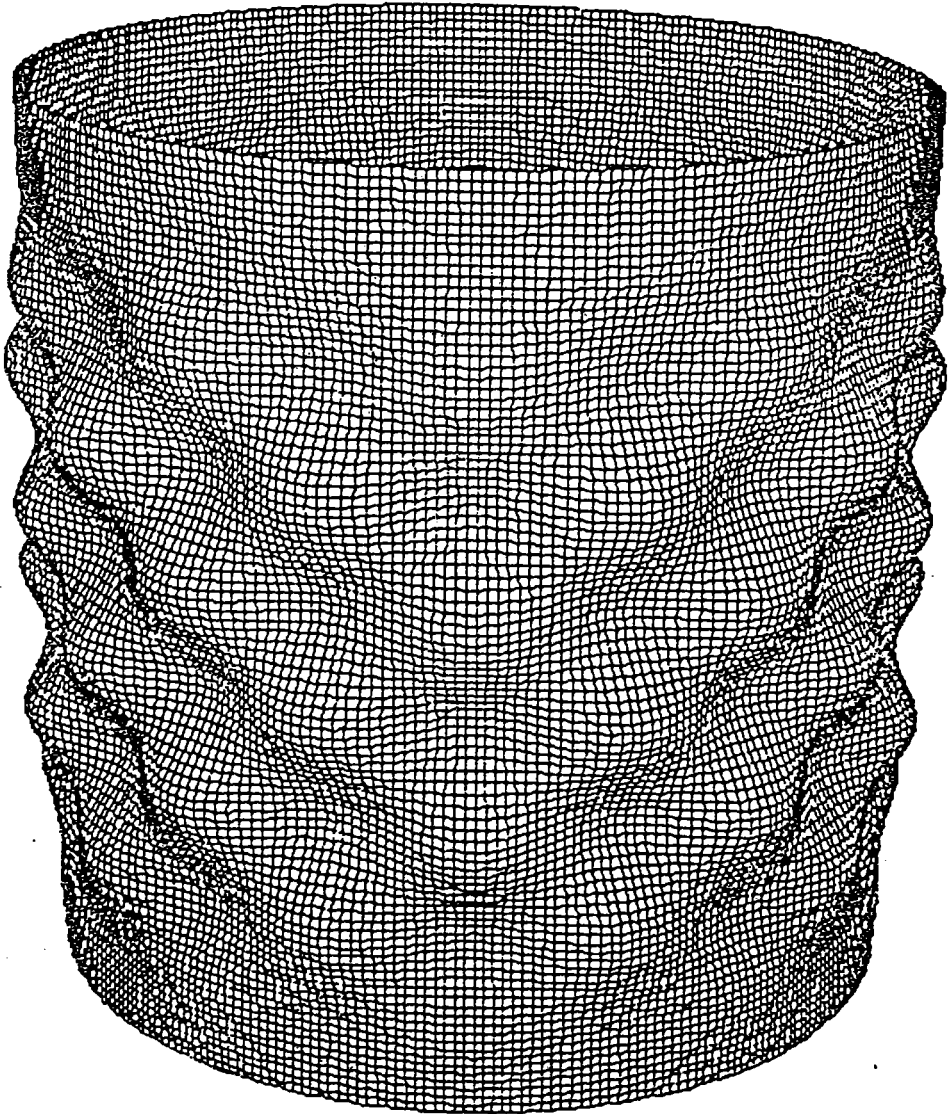
### CONCLUSION GENERALE

Les conditions aux limites et les défauts sont des éléments primordiaux dans le flambage des coques. Ce sont les principaux thèmes de ce travail consacré à l'étude du flambage des coques cylindriques sous pression. A cet effet, nous avons appliqué des méthodes asymptotiques afin d'obtenir des expressions simples, tenant compte des conditions aux limites et des défauts. Ces expressions seront utiles au dimensionnement. L'idée principale consiste à utiliser l'inverse du paramètre géométrique de Batdorf  $Z$  comme petit paramètre. Ceci nous a conduit à clarifier le rôle que peuvent jouer les conditions aux limites sur le mode et la pression de flambage. Nous avons ainsi montré que certaines conditions aux limites n'agissent que sur la couche limite localisée aux bords de la coque, alors que d'autres ont un effet plus important et modifient le mode à l'intérieur de la coque c'est-à-dire loin des bords. Les développements asymptotiques de la charge et du mode de flambage ont été poussés jusqu'au second ordre. Au premier ordre les résultats ont montré que le mode de flambage est sans déformations de membrane. Ce résultat s'explique facilement, car pour les coques très minces, la rigidité de membrane est grande par rapport à celle de flexion. Ce mode est défini par les seules conditions aux limites axiales et radiales. Les autres conditions aux limites (condition sur la rotation et le déplacement circonférentiel) n'interviennent qu'au second ordre du développement. Toutefois, cette formule au second ordre est assez complexe, elle ne conduit à des résultats cohérents que pour  $Z$  assez grand. C'est pourquoi nous conseillons plutôt la formule au premier ordre pour le dimensionnement. Cette méthode a été aussi appliquée pour d'autres modèles mathématiques (prise en compte des déplacements avant flambage, le cas des coques longues soit à faibles nombres d'ondes). L'avantage de la méthode analytique est qu'elle nous permet une meilleure compréhension du comportement de flambage et des facteurs fondamentaux qui l'affectent. Un autre avantage est qu'elle peut simuler avec souplesse et d'assez près les conditions réelles : par exemple la donnée correcte des conditions aux limites, en particulier la prise en compte de la raideur axiale (insert, emboîtement, bride...) [14]. Bien que nous nous soyons limités dans ce travail aux coques cylindriques sous pression, plusieurs arguments [11] [18] [34] [39] [40] montrent que son utilisation pour d'autres coques de révolution et d'autres chargements est possible, ce qui confirme l'intérêt de l'analyse qui a été décrite dans cette thèse.

Nous avons aussi analysé l'influence des défauts localisés et répartis sur la charge de flambage. En ce qui concerne les défauts répartis nous avons appliqué la théorie de Koiter pour calculer la réduction de la charge. Des formules analytiques ont été proposées et vérifiées à partir de calculs en éléments finis. A propos des défauts localisés nous avons appliqué la théorie de la bifurcation cellulaire. Celle-ci suppose que l'amplitude du mode de flambage est variable, ce qui permet de simuler une modulation de l'amplitude. Dans la région du défaut localisé, l'instabilité peut donc s'amplifier. La formule proposée de réduction de la charge est fonction du paramètre  $Z$  et des conditions aux limites. Cette formule, limitée à

, l'approximation inextensionnelle, a été établie pour la première fois sous cette forme.

En collaboration avec d'autres travaux [13], il est envisageable à partir d'un code d'éléments finis de calculer sans approximations la réduction de la charge critique causée par un défaut localisé pour différentes conditions aux limites. Ces calculs devraient permettre de vérifier la formule proposée de réduction de la charge critique. Nous avons l'intention d'appliquer cette théorie à d'autres structures, à des défauts localisés de formes diverses et d'étudier l'interaction entre les défauts localisés et répartis.



# BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABDELMOULA, R. and M. POTIER FERRY. Buckling of cylindrical shells with a large Bartdorf Parameter, ECCS colloquium on stability of plate and shell structures, Ghent University, 6-8 April 1987.
- [2] AMAZIGO, J.C., BUDIANSKY, B. and G.F. CARRIER. Asymptotic Analysis of the Buckling of imperfect columns on non linear foundations. *Int. J. Solids Struct.*, 6 (1970) p 1341-1356.
- [3] AMAZIGO, J.C. and W.B. FRASER. Buckling under external pressure of cylindrical shells with dimple shaped initial imperfections. *Int. J. Solids Struct.*, 7 (1971) p 883-900.
- [4] ALMROTH, B.O. Influence of edge Conditions on the stability of axially compressed cylindrical shells, *AIAA Journal*, Vol.4 N°1, p 134-140 (1960).
- [5] ARBOCZ, J. Post-buckling behaviour of structures numerical techniques for more complicated structures. In *Buckling and post-buckling. Lectures Notes in physics.* p 83-142. Springer-Verlag (1985).
- [6] BOUCIF, M. Sélection expérimentale de la longueur d'onde dans l'instabilité élastique de flambement de plaques minces, Thèse de 3è cycle, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.
- [7] BRUSH, D.O. and B.O. ALMROTH. Buckling of bars, plates and shells. Mac Graw Hill, New York, (1975).
- [8] BUDIANSKY, B. and J.W. HUTCHINSON. Dynamic Buckling of Imperfection-Sensitive Structures, *Proc. Int. Congr. Appl. Mech.* XI, Springer-Verlag Berlin 1966, 636-651.
- [9] BUDIANSKY, B. and J.C. AMAZIGO. Initial Post - Buckling Behavior of cylindrical shells under external pressure. *J. Math. and Phys.*, vol.47, (1968), p 223-235.
- [10] BUDIANSKY, B. Theory of Buckling and post Buckling behaviour of elastic structures, *advances in App. Mech.*, 14 (1974), p 1-65



- [11] BUSHNELL, D. Computerized buckling analysis of shells. Martinus Nijhoff Publishers Group (1985).
- [12] DAMIL, N. and M. POTIER FERRY. Wavelength selection in the post-Buckling of long rectangular plate. *Int. J. Solids Structures*, 22 (1986) p 551-526.
- [13] DAMIL, N. and M. POTIER FERRY. Amplitudes equations in Cellular instabilities.
- [14] DEBANEH, N. Flambage de coques de révolution à méridienne brisée sous pression latérale externe, Thèse de Doctorat, INSA Lyon (1988).
- [15] DUVAUT, G. and J.L. LIONS: Equations et inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris (1972).
- [16] ECCS Technical Committee 8 - Structural instability : European Recommendations for steel Construction : Buckling of shells (1984).
- [17] ESSLINGER, M. and B. GEIER. Calculated post-buckling loads as lower limits for buckling loads of thin-walled circular cylinders. *Buckling of structures* (Ed. B. Budiansky) (1976), p 274-290. Springer-Verlag.
- [18] FORSBERG, K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells, *AIAA Journal*, Vol.2, N°12, p 2150-2157.
- [19] GERMAIN, P. *Mécanique des Milieux Continus*. Masson, Paris (1973).
- [20] KOITER, W.T. On the stability of elastic equilibrium. Thesis, Delft (1945). English translations : Nasa techn. Transl. F10, 833 (1967).
- [21] KOITER, W.T. On the non linear theory of thin shells. *Proc. Net. Akad. Wet. B* 69 (1966) p 1-54.
- [22] KOITER, W.T. and J.G. SIMMONDS. Foundations of shell theory. *Proceedings of the 13th IUTAM Congress*. Springer, Berlin (1973) p 150-176.
- [23] NAYFEH, A.H. *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, New York. London. Sydney. Toronto.(1976)

- [24] NEWELL, A.C. and J.A. WHITEHEAD. Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 38 (1969) p 279-403.
- [25] NIORDSON FRITHIOF, I. *Shell theory*, North-Holland (1985).
- [26] POTIER FERRY, M. Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel, *J. Mécanique*, 17 (1978) p 579-608.
- [27] POTIER FERRY, M. On mathematical foundations of elastic stability theory. *Archives of Rational Mechanic Analysis*. t.78 (1981) p 301-320.
- [28] POTIER FERRY, M. Amplitude modulation, phase modulation and localization of buckling patterns. In "Collapse", J. M. T. Thompson, G.W. Hunt (Eds), Cambridge Univ. Press, Cambridge (1983) p 149-159.
- [29] POTIER FERRY, M. Foundations of elastic post-buckling theory. In *Buckling and post-buckling. Lectures Notes in physics*. p 1-82. Springer-Verlag (1985).
- [30] POTIER FERRY, M. Influence des défauts sur le flambage des coques. Rapport de contrat EDF - SEPTEN (1986).
- [31] SEGEL, L.A. Distant sidewall cause slow amplitude modulation of cellular convection, *J. Fluid Mech.*, 38 (1969) p 203-224.
- [32] SIMITSES, G.J. and M. ASWANI. Buckling of thin cylinders under uniform lateral loading. *J. of applied mechanics* (1974) p 827-829.
- [33] SINGER, J. and A. ROSEN. The influence of Boundary Conditions on the Buckling of Stiffened Cylindrical Shells (Ed. B. Budiansky) (1976) p 227-251. Springer-Verlag.
- [34] SINGER, J., BARUCH, M. and J. REICHENTHAL. Influence of in plane Boundary Conditions on the Buckling of clamped conical Shells (1970).
- [35] SOBEL, L.H. Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subjected to lateral and axial pressure. *AIAA Journal*, 2 (1964) p 1437-1440.
- [36] TIMOSHENKO, S. and J.M. GERE. "Theory of elastic stability", Mac Grawhill (1961).

- [37] VON SCHNELL, W. and DARMSTADT. Einfluss der Randverwölbung auf die Beulwerte von zylinderschalen unter Manteldruck, Der Stahlbau, 6 (1965) p 187-190.
- [38] WAECKEL, N. Imperfections géométriques initiales et instabilités de structures minces. Doctorat d'Etat ès sciences, INSA Lyon (1984).
- [39] YAMAKI, N. Elastic stability of circular cylindrical shells. North-Holland, Amsterdam (1984).
- [40] YAMAMOTO, Y. Buckling of stiffened cylindrical shells under external pressure. XVII Congrès International de Mécanique Théorique et Appliquée. Grenoble (1988).
- [41] ZIENKIEWICZ, O.C. "The finite element method", Mc Grawhill, London. (1977).

# ANNEXES

## ANNEXE 1

Dans cette annexe nous rappelons l'adimensionnalisation utilisées dans les chapitres II et III

Variables sans dimensionAdimensionnalisation des déplacements

Nous notons respectivement  $u$ ,  $v$ ,  $w$  les déplacements axiaux, azimutaux et radiaux, sans dimension. Nous posons :

$$U = \frac{\Pi h^2}{12 (1-\nu^2) L} u$$

$$V = \frac{\Pi h^2}{12 (1-\nu^2) L} v$$

$$W = \frac{h}{\sqrt{12 (1-\nu^2)}} w$$

Adimensionnalisation des coordonnées

Nous adimensionnalisons les coordonnées en sorte que  $x$  et  $y$  varient entre les valeurs suivantes :

$$-\frac{\Pi}{2} \leq x \leq \frac{\Pi}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq \frac{2\Pi^2 R}{L}$$

$$x = \frac{\Pi X}{L} \quad , \quad y = \frac{\Pi Y}{L}$$

Adimensionnalisation de la charge

Nous utilisons deux paramètres de charge sans dimension  $\lambda$ ,  $\lambda^*$  proportionnels à la pression ( $\lambda^*$  est utilisée dans le cas des coques longues).

$$\lambda = \frac{3^{5/4}}{2} \frac{P}{E} \frac{(R/h)^2}{\eta} \sqrt{1-\nu^2}$$

$$\lambda^* = 12 \frac{PR^3 (1-\nu^2)}{E h^3}$$

### Adimensionnalisation des nombres d'ondes circonférentielles

Nous notons  $n$  le nombre d'harmoniques circonférentielles (entier). Diverses mesures adimensionnelles  $K$ ,  $k$ ,  $k^*$  du nombre d'ondes sont utilisées dans le texte.

$$K = \frac{nL}{\Pi R}$$

$$k = K \sqrt{\eta}$$

$$k^* = K \frac{R}{L}$$

### Adimensionnalisation de la fonction de contrainte

$$F = \frac{E h^3}{12 (1-\nu^2)} f$$

### Adimensionnalisation des moments

Nous notons respectivement  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  les moments de flexion suivant  $x$ ,  $y$  et de torsion, sans dimension. Nous posons :

$$M_x = \frac{E h^4 \Pi^2}{[12 (1-\nu^2)]^{3/2} L^2} m_x$$

$$M_y = \frac{E h^4 \Pi^2}{[12 (1-\nu^2)]^{3/2} L^2} m_y$$

$$M_{XY} = \frac{E h^4 \Pi^2}{12^{3/2} (1+\nu) \sqrt{1-\nu^2} L^2} m_{xy}$$

### Loi de comportement en membrane

La loi de comportement liant les contraintes aux déformations adimensionnalisées s'écrit :

$$n_x = \frac{1}{1-\nu^2} \left[ u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} + \nu \left( v_{,y} - \frac{w}{\eta^2} + \frac{w_{,y}^2}{2} \right) \right]$$

$$n_y = \frac{1}{1-\nu^2} \left[ v_{,y} - \frac{w}{\eta^2} + \frac{w_{,y}^2}{2} + \nu \left( u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2} \right) \right]$$

$$n_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \right]$$

### Loi de comportement en flexion

La loi de comportement liant les moments aux courbures adimensionnalisées s'écrit :

#### En théorie de Donnell

$$m_x = - (w_{,xx} + \nu w_{,yy})$$

$$m_y = - (w_{,yy} + \nu w_{,xx})$$

$$m_{xy} = - w_{,xy}$$

#### En théorie de Koiter-Sanders

$$m_x = - \left[ w_{,xx} + \nu \left( w_{,yy} + \frac{h}{R \sqrt{1-\nu^2}} v_{,y} \right) \right]$$

$$m_y = - \left[ w_{,yy} + \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}} v_{,y} + \nu w_{,xx} \right]$$

$$m_{xy} = - \left[ w_{,xy} + \frac{h}{4R\sqrt{12(1-\nu^2)}} (3v_{,x} - u_{,y}) \right]$$

### Adimensionnalisation des équations des coques de Donnell

#### \* Equations d'équilibre

$$n_{\alpha\beta,\beta} = 0$$

$$n_{\alpha\beta} = \frac{1}{1-\nu^2} \{ (1-\nu^2) \gamma_{\alpha\beta} + \nu (\text{trace } \gamma) \delta_{\alpha\beta} \}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}}{2} + \frac{w_{,\alpha} w_{,\beta}}{2} - \frac{w}{\eta^2} \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2}$$

$$\Delta^2 w - \frac{ny}{\eta^2} - n_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta^3} = 0$$

#### \* Equation de compatibilité

$$\Delta^2 f + \frac{1}{\eta^2} w_{,xx} + \frac{[w, w]}{2} = 0$$

$$\text{où } [P.S] = P_{,xx} S_{,yy} + P_{,yy} S_{,xx} - 2 P_{,xy} S_{,xy}$$

On peut construire une fonctionnelle caractéristique de l'équation de compatibilité et la dernière équation d'équilibre :

$$L = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (\Delta w)^2 - (\Delta f)^2 - \frac{2}{\eta^2} f_{,xx} w - \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} \left( \frac{\alpha}{2} w_{,x}^2 + w_{,y}^2 \right) \right\} d\Omega$$

$$- 1/2 \int [w, f] w d\Omega$$

$$\Omega = [-\Pi/2, \Pi/2] \times \left[ 0, \frac{2\Pi^2 R}{L} \right]$$



Après linéarisation et en négligeant les termes de préflambage, les équations d'équilibre de Koiter-Sanders en déplacement s'écrivent :

$$\partial_x^2 u + \frac{1-\nu}{2} A \partial_y^2 u + \frac{1+\nu}{2} B \partial_x \partial_y v - \frac{1-\nu}{4\sqrt{3}} \frac{h}{R} (1-\nu^2) \partial_y^2 \partial_x w - \frac{\nu \partial_x w}{\eta^2} = 0$$

$$\frac{1-\nu}{2} C \partial_x^2 v + (1+D) \partial_y^2 v + \lambda^* \frac{DL^2}{\Pi^2 R^2} v + \frac{1+\nu}{2} E \partial_x \partial_y u - (1-D\lambda^*)$$

$$+ \frac{h}{R} (3-\nu) \frac{(1-\nu^2)^{1/2}}{4\sqrt{3}} \partial_x^2 \partial_y w + \frac{(1-\nu^2)^{1/2}}{2\sqrt{3}} \frac{h}{R} \partial_y^3 w = 0$$

$$\Delta^2 w + \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h}{R} (\partial_y^3 v + \frac{3-\nu}{2} \partial_x^2 \partial_y v - \frac{1-\nu}{2} \partial_x \partial_y^2 u) + \frac{1}{\eta^4 (1-\nu^2)} [w - \eta^2 (\nu \partial_x u + \partial_y v)]$$

$$+ \frac{\lambda^* L^2}{\Pi^2 R^2} (\alpha \partial_x^2 w + \partial_y^2 w + \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{h}{R} \partial_y v) = 0$$

$$A = 1 + \frac{h^2}{48R^2} (1 - \frac{1+\alpha}{1-\nu} 2\lambda^*), \quad B = 1 - \frac{h^2}{48R^2} (3 \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{1+\alpha}{1+\nu} 2\lambda^*)$$

$$C = 1 + \frac{h^2}{48R^2} (9 - \frac{1+\alpha}{1-\nu} 2\lambda^*), \quad E = 1 - \frac{h^2}{48R^2} (3 \frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{1+\alpha}{1+\nu} 2\lambda^*), \quad D = \frac{h^2}{12R^2}$$

## ANNEXE 2

Dans cette annexe nous déterminons les équations que vérifient les trois premiers termes du développement asymptotique des déplacements  $u_i, v_i, w_i$  à l'intérieur de la coque

En théorie de Donnell, et en négligeant le pré-flambage, les équations du mode de flambage s'écrivent :

$$\partial_x^2 u + \frac{1-\nu}{2} \partial_y^2 u + \frac{1+\nu}{2} \partial_x \partial_y v - \frac{\nu}{2} \partial_x w = 0 \quad (\text{A2-1})$$

$$\partial_y^2 v + \left[ \frac{1-\nu}{2} \partial_x^2 v + \frac{1+\nu}{2} \partial_x \partial_y u \right] - \partial_y \frac{w}{\eta^2} = 0 \quad (\text{A2-2})$$

$$\Delta^2 w + \frac{1}{\eta^4 (1-\nu^2)} [w - \eta^2 (\partial_y v + \nu \partial_x u)] + \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} \left[ \frac{\alpha}{2} \partial_x^2 w + \partial_y^2 w \right] = 0 \quad (\text{A2-3})$$

Avant d'effectuer le développement asymptotique, on va modifier l'équation de la flèche A2-3, compte tenu des deux premières équations.

En dérivant A2-3 par rapport à  $y$ , puis en multipliant par  $\eta^2 (1-\nu^2)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \eta^2 (1-\nu^2) [\partial_y \partial_x^4 w + \partial_y^5 w + 2\partial_x^2 \partial_y^3 w] + \frac{1}{\eta^2} \partial_y w - \partial_y^2 v - \nu \partial_x \partial_y u \\ & + \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} (1-\nu^2) \left[ \frac{\alpha}{2} \partial_x^2 \partial_y w + \partial_y^3 w \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-4})$$

On ajoute A2-4 et A2-2, puis on dérive deux fois par rapport à  $y$ . On obtient :

$$\frac{1}{2(1+\nu)} [\partial_x^2 \partial_y^2 v + \partial_x \partial_y^3 u] + \eta^2 [\partial_y^3 \partial_x^4 w + \partial_y^7 w + 2\partial_x^2 \partial_y^5 w + \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} (\frac{\alpha}{2} \partial_x^2 \partial_y^3 w + \partial_y^5 w)] = 0 \quad (\text{A2-5})$$

Ensuite on calcule la combinaison  $\partial_y(\text{A2-1}) - \nu \partial_x(\text{A2-2})$  :

$$\partial_y^3 u + \partial_y^2 \partial_x v = -(\nu+2) \partial_x^2 \partial_y u + \nu \partial_x^3 v \quad (\text{A2-6})$$

On dérive A2-6 par rapport à x

$$\partial_y^3 \partial_x u + \partial_y^2 \partial_x^2 v = - (v+2) \partial_x^3 \partial_y u + v \partial_x^4 v \quad (\text{A2-7})$$

On reporte A2-7 dans A2-5, après dérivation par rapport à y on arrive à une équation du 8ème ordre :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(1+v)} [ - (v+2) \partial_x^3 \partial_y^2 u + v \partial_x^4 \partial_y v ] + \eta [ \frac{4\lambda}{3^{3/4}} ( \frac{\alpha}{2} \partial_x^2 \partial_y^4 w + \partial_y^6 w ) ] \\ & + \eta^2 [ \partial_y^4 \partial_x^4 w + \partial_y^8 w + 2 \partial_x^2 \partial_y^6 w ] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-8})$$

Sous cette forme, il est clair que l'on a un problème de perturbation singulière pour  $\eta$  petit.

On va ensuite développer le mode en puissance de  $\eta$ , puis chercher des solutions harmoniques dans la direction circonférentielle. D'après l'analyse faite au § I.5.2., le développement en dehors de la couche limite peut se mettre sous la forme suivante, le nombre d'onde  $k$  étant de l'ordre de l'unité :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\eta} [ U_{i0}(x) + \eta U_{i1}(x) + \dots ] \exp \left( \frac{iky}{\sqrt{\eta}} \right) \\ v &= i [ V_{i0}(x) + \eta V_{i1}(x) + \dots ] \exp \left( \frac{iky}{\sqrt{\eta}} \right) \\ w &= \eta^{3/2} [ W_{i0}(x) + \eta W_{i1}(x) + \dots ] \exp \left( \frac{iky}{\sqrt{\eta}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A2-9})$$

En injectant le développement A2-9 dans le système d'équations A2-1, A2-2 et A2-8, on trouve les résultats suivants :

### Premier ordre

$$\frac{1-v}{2} k^2 U_{i0}(x) + \frac{1+v}{2} k V_{i0}'(x) + v W_{i0}'(x) = 0$$

$$k V_{i0}(x) + W_{i0}(x) = 0$$

$$\frac{1}{2(1+v)} [ (v+2) k^2 U_{i0}''(x) - v k V_{i0}^{(4)}(x) ] + [ k^8 - \frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}} ] W_{i0}(x) = 0$$

(A2-10)

Après arrangement, on obtient :

$$U_{io}(x) = \frac{W'_{io}(x)}{k^2}$$

$$V_{io}(x) = -\frac{W_{io}(x)}{k}$$

$$\partial_x^4 W_{io}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_o k^6}{3^{3/4}} \right) W_{io}(x) = 0$$

(A2-11)

### Second ordre

$$\frac{1-\nu}{2} k^2 U_{il}(x) + \frac{1+\nu}{2} k V'_{il}(x) + \nu W'_{il}(x) = U''_{io}(x)$$

$$k V_{il}(x) + W_{il}(x) = \frac{1-\nu}{2} \frac{V''_{io}(x)}{k} + \frac{1+\nu}{2} U'_{io}(x)$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} \left[ (\nu+2) k^2 U'''_{il}(x) - \nu k V^{(4)}_{il}(x) \right] + \left[ k^8 - \frac{4\lambda_o k^6}{3^{3/4}} \right] W_{il}(x) =$$

$$\left( 2k^6 - \frac{2\alpha}{3^{3/4}} \lambda_o k^4 \right) W''_{io}(x) + \frac{4\lambda_1 k^6}{3^{3/4}} W_{io}(x)$$

(A2-12)

En tenant compte des équations A2-11, et après arrangement on trouve :

$$U_{il}(x) = \frac{W'_{il}(x)}{k^2} + \frac{(\nu+2)}{k^4} W'''_{io}(x)$$

$$V_{il}(x) = -\frac{W_{il}(x)}{k} + \nu \frac{W''_{io}(x)}{k^3}$$

$$W^{(4)}_{il}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_o k^6}{3^{3/4}} \right) W_{il}(x) = \frac{4\lambda_1}{3^{3/4}} k^6 W_{io}(x) + \left( 2k^6 - \frac{2\alpha\lambda_o}{3^{3/4}} k^4 \right) W''_{io}(x) - \frac{2}{k^2} W^{(6)}_{io}$$

(A2-13)

**Troisième ordre**

$$\frac{1-\nu}{2} k^2 U_{i2}(x) + \frac{1+\nu}{2} k V_{i2}'(x) + \nu W_{i2}'(x) = U_{i1}''(x)$$

$$k V_{i2}(x) + W_{i2}(x) = \frac{1-\nu}{2} \frac{V_{i1}''(x)}{k} + \frac{1+\nu}{2} U_{i1}'(x)$$

$$\frac{1}{2(1+\nu)} [(v+2)k^2 U_{i2}''(x) - \nu k V_{i2}^{(4)}(x)] + [k^8 - \frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}}] W_{i2}(x) = \frac{4k^6}{3^{3/4}} (\lambda_1 W_{i1}(x) + \lambda_2 W_{io}(x))$$

$$+ 2k^6 W_{i1}''(x) - \frac{2}{3^{3/4}} \alpha [\lambda_0 k^4 W_{i1}''(x) + \lambda_1 k^4 W_{io}''(x)] - k^4 W_{io}^{(4)}(x)$$

En tenant compte des équations A2-13, et après arrangement on trouve :

$$U_{i2}(x) = \frac{W_{i2}'(x)}{k^2} + \frac{(v+2)}{k^4} W_{i1}'''(x) + \frac{W_{io}^{(5)}}{k^6} (2v+3)$$

$$V_{i2}(x) = -\frac{W_{i2}(x)}{k} + \frac{1}{k^3} [\nu W_{i1}''(x) + \frac{(2v+1)}{k^2} W_{io}^{(4)}(x)]$$

$$W_{i2}^{(4)}(x) - (\frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}} - k^8) W_{i2}(x) = \frac{-2}{k^2} W_{i1}^{(6)}(x) + 2k^4 (k^2 - \frac{\lambda_0 \alpha}{3^{3/4}}) W_{i1}''(x)$$

$$+ \frac{4\lambda_1 k^6}{3^{3/4}} W_{i1}(x) - \frac{3}{k^4} W_{io}^{(8)}(x) - k^4 W_{io}^{(4)}(x) - \frac{2\lambda_1 \alpha k^4}{3^{3/4}} W_{io}''(x) + \frac{4\lambda_2 k^6}{3^{3/4}} W_{io}(x)$$

( A 2 - 1 5 )

## ANNEXE 3

Dans cette annexe nous étudions un exemple de couche limite. Il s'agit de la déformation axisymétrique d'un cylindre sous pression. Par comparaison avec un calcul par éléments finis, nous étudions les conditions dans lesquelles l'analyse asymptotique s'applique.

Pour le problème axisymétrique les déplacements et les contraintes résultantes ne dépendent que de la variable  $x$ . Les équations d'équilibre (voir annexe 1) s'écrivent :

$$n_{x,x}^F = 0$$

$$\frac{d^4}{dx^4} w^F - \frac{n_y^F}{\eta^2} - n_x^F w_{,xx}^F - \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta^3} = 0$$

+ conditions aux limites

(A3-1)

La première équation nous permet de montrer que  $n_x^F$  est constant. On pose alors :

$$n_x^F = -\frac{\alpha}{2} \frac{4\lambda}{3^{3/4} \eta} \quad \alpha = 1, \text{ ou } 0$$

(A3-2)

qui est la contrainte axiale axisymétrique du cylindre sous pression. À partir de la loi de comportement on en déduit :

$$n_y^F = -\frac{\alpha}{2} \frac{2\alpha\nu}{3^{3/4}} \frac{\lambda}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} w^F(x)$$

(A3-3)

La solution fondamentale vérifie donc une équation différentielle linéaire d'ordre 4 :

$$\eta^4 \frac{d^4 w^F}{dx^4} + \eta^3 \frac{2\alpha\lambda}{3^{3/4}} \frac{d^2 w^F}{dx^2} + w^F(x) = \frac{4\lambda\eta}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right)$$

+ conditions aux limites

(A3-4)

Les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme :

$$w^F(x) = e^{rx}$$

(A3-5)

$$\eta^4 r^4 + \eta^3 \frac{2\alpha\lambda r^2}{3^{3/4}} + 1 = 0$$

(A3-6)

L'équation A3-6 admet quatre solutions,  $r_1, -r_1, r_2, -r_2$  :

$$r_1 = \frac{-1}{\eta\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}\right)^{1/2} + i \frac{1 - \left(\frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}\right)^2}{1 - \frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}} \right]$$

$$r_2 = \frac{-1}{\eta\sqrt{2}} \left[ \left(1 - \frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}\right)^{1/2} + i \frac{1 - \left(\frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}\right)^2}{1 - \frac{\alpha\lambda\eta}{3^{3/4}}} \right]$$

(A3-7)

La solution générale de A3-4 s'écrit donc :

$$w^F(x) = \frac{4\lambda\eta}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) + \sum_{i=1}^4 A_i e^{r_i x}$$

(A3-8)

On cherche maintenant une approximation de la solution A3-8. Pour des petites valeurs de  $\eta$ , les 4 racines A3-7 traduisent une variation rapide localisée aux bords de la coque dans une couche limite d'épaisseur  $L\eta$ . Dans la région des  $x$  négatifs, au voisinage du bord on peut approcher la solution exacte A3-8 en faisant un développement limité en  $\eta$  de  $r_1, r_2$ . La partie à variation rapide de l'équation A3-8 s'écrit alors :

$$w_{r_0}^F(x) = E_0 \exp - \frac{(x + \Pi/2)(1+i)}{\eta\sqrt{2}} + \bar{E}_0 \exp - \frac{(x + \Pi/2)(1-i)}{\eta\sqrt{2}} \quad (\text{A3-9})$$

La constante  $E_0$  est déterminée à partir des conditions aux limites.

Loin des bords on peut négliger les effets de la couche limite (Fig. A3-1). Le déplacement à l'intérieur s'écrit donc :

$$w_i^F = \frac{4\lambda\eta}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) \quad (\text{A3-10})$$

Comme il s'agit d'un problème linéaire, la solution dans la couche limite  $x \approx -\pi/2$  est la somme de la solution intérieure A3-10 et de celle qui varie rapidement A3-9. L'approximation de la solution fondamentale s'écrit donc sous la forme :

$$w^F(\xi) = \frac{4\lambda}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) \eta \{ 1 + W_{r_0}^F(\xi) + \eta W_{r_1}^F(\xi) + 0(\eta^2) \} \quad (\text{A3-11})$$

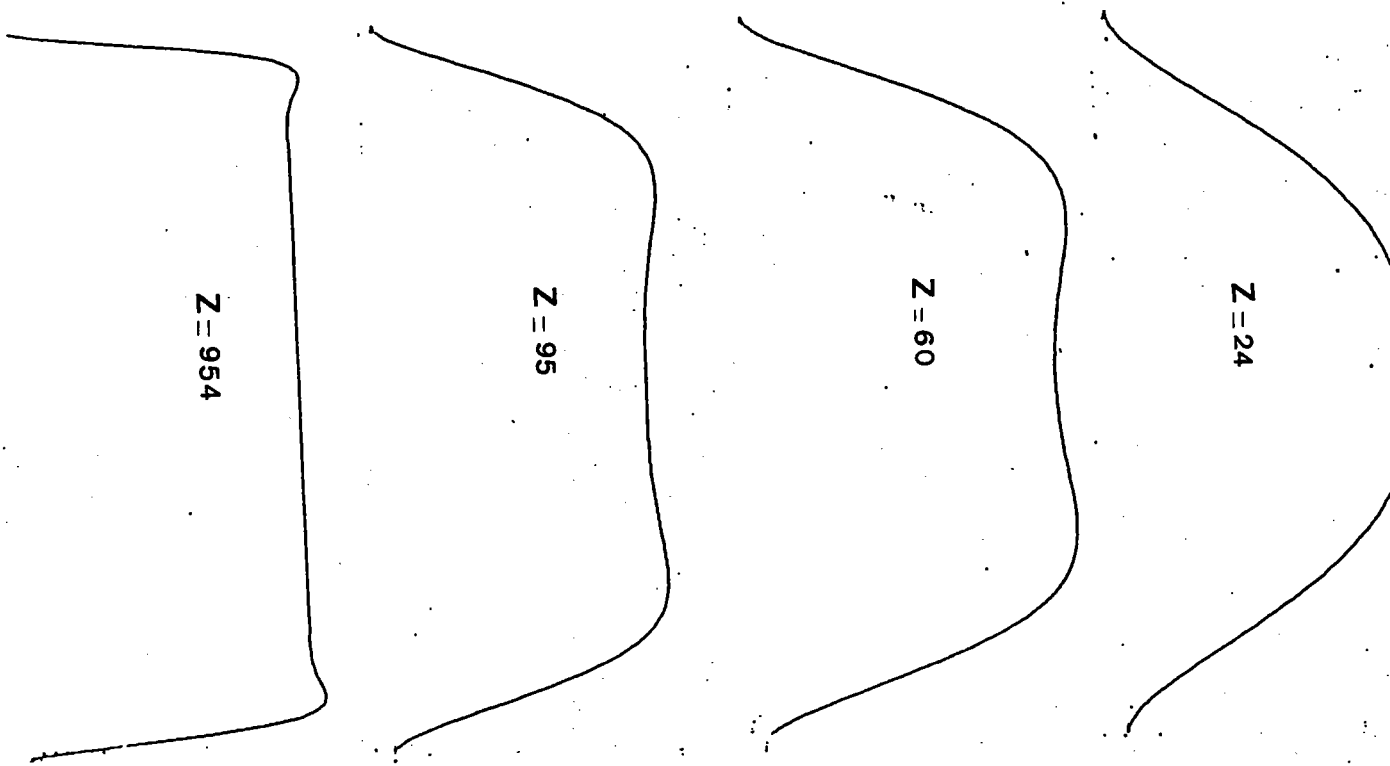
où

$$\xi = \frac{x + \Pi/2}{\eta}$$

Les fonctions  $W_{r_i}^F(\xi)$  tendent vers zéro quand  $\xi$  tend vers l'infini (fin de la couche limite). A partir de A3-3 et A3-10 on déduit la contrainte circulaire dans la couche limite :

$$n_y^F(\xi) = \frac{-4\lambda}{\eta 3^{3/4}} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) [ W_{r_0}^F(\xi) + \eta W_{r_1}^F(\xi) + \dots ] \right\} \quad (\text{A3-12})$$





L'approximation A3-10 est :

Très bonne

bonne

moins bonne

à éviter

Fig A3-1

## ANNEXE 4

Dans cette annexe nous déterminons le mode de flambage dans la couche limite et nous calculons la courbe de stabilité neutre pour différentes conditions aux limites. Nous négligeons ici la rotation avant flambage.

Pour étudier les huit cas des conditions aux limites (cf. notation) on aura besoin des développements dans la couche limite des quantités  $u$ ,  $n_x$ ,  $v$ ,  $n_{xy}$ ,  $w$ ,  $w_x$ ,  $w_{xx}$ .

Les développements de  $U$ ,  $V$ ,  $W$  ont été écrits sous la forme (cf. § II.3.2.)

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\eta} \left\{ U_{i0}(x) + \eta [ U_{i1}(x) + U_{r1}(\xi) ] + \eta^2 [ U_{i2}(x) + U_{r2}(\xi) ] + 0(\eta^3) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\ v(x) &= \sqrt{\eta} \left\{ V_{i0}(x) + \eta [ V_{i1}(x) + V_{r1}(\xi) ] + \eta^2 [ V_{i2}(x) + V_{r2}(\xi) ] + 0(\eta^3) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\ w(x) &= \eta^{3/2} \left\{ W_{i0}(x) + \eta [ W_{i1}(x) + W_{r1}(\xi) ] + \eta^2 [ W_{i2}(x) + W_{r2}(\xi) ] + 0(\eta^3) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A4-1})$$

Les développements des dérivées premières et secondes de  $w$  sont calculés à partir de celui de  $w$  :

$$w_x = \eta^{3/2} \left\{ W'_{i0}(x) + W'_{r1}(\xi) + \eta (W'_{i1}(x) + W'_{r2}(\xi)) + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \quad (\text{A4-2})$$

$$w_{xx} = \eta^{3/2} \left\{ \frac{1}{\eta} W''_{r1}(\xi) + W''_{i0}(x) + W''_{r2}(\xi) + \eta (W''_{i1}(x) + W''_{r3}(\xi)) + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \quad (\text{A4-3})$$

Les contraintes  $n_x$  et  $n_{xy}$  s'écrivent en fonction de  $u$ ,  $v$ ,  $w$

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{1}{1-\nu^2} \left[ u_{,x} + \nu \left( v_{,y} - \frac{w}{\eta^2} \right) \right] \\ n_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} [ v_{,x} + u_{,y} ] \end{aligned} \quad (\text{A4-4})$$

A partir de A4-1 et A4-2, les développements de  $n_x$  et  $n_{xy}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 n_x &= \frac{1}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{\nu}{\sqrt{\eta}} [kV_{io}(x) + W_{io}(x)] + \sqrt{\eta} [U'_{io}(x) + U'_{r1}(\xi) - \nu (kV_{i1}(x) + W_{i1}(x) + W_{r1}(\xi))] \right. \\
 &+ \eta^{3/2} [U'_{i1}(x) + U'_{r2}(\xi) - \nu (kV_{i2}(x) + W_{i2}(x) + kV_{r2}(\xi) + W_{r2}(\xi))] + 0(\eta^2) \left. \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 n_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ V'_{io}(x) + kU_{io}(x) + V'_{r1}(\xi) + \eta [V'_{i1}(x) + kU_{i1}(x) + V'_{r2}(\xi) + kU_{r1}(\xi)] \right. \\
 &+ 0(\eta^2) \left. \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)
 \end{aligned} \tag{A4-5}$$

On rappelle que la solution intérieure et la solution rapide vérifient les équations suivantes (cf. annexe 4 et § II.3.3.).

### Solution intérieure

$$k V_{io}(x) + W_{io}(x) = 0$$

$$k U_{io}(x) + V'_{io}(x) = 0$$

$$k V_{i1}(x) + W_{i1}(x) = \frac{\nu}{k^2} W''_{io}(x)$$

$$k U_{i1}(x) + V'_{i1}(x) = \frac{2(1+\nu)}{k^3} W'''_{io}(x)$$

$$k V_{i2}(x) + W_{i2}(x) = \frac{1}{k^2} \left[ \nu W''_{i1}(x) + \frac{(2\nu+1)}{k^2} W^{(4)}_{io} \right]$$

(A4-6)

### Solution rapide

$$U'_{r1}(\xi) - \nu W_{r1}(\xi) = 0$$

$$U'_{r2}(\xi) - \nu W_{r2}(\xi) = (1+2\nu) k^2 [E_1 \bar{\sigma}^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.]$$

$$U_{r1}(\xi) = -\nu [E_1 \bar{\sigma} \exp(-\sigma\xi) + C.C.]$$

$$V_{r1}(\xi) = 0$$

$$W_{r1}(\xi) = E_1 \exp(-\sigma\xi) + C.C.$$

$$V_{r2}(\xi) = k(2+\nu) \bar{\sigma}^2 [E_1 \bar{\sigma}^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.] , \quad \sigma^4 + 1 = 0$$

(A4-7)

En utilisant A4-6 et A4-7 les développements A4-1, A4-2, A4-3 et A4-5 se simplifient. On obtient :

$$u(x) = \sqrt{\eta} \left\{ \frac{\dot{W}_{io}(x)}{k^2} + \eta \left[ \frac{\dot{W}_{il}(x)}{k^2} + \frac{(v+2)W_{io}''(x)}{k^4} - v(E_1 \bar{\sigma} \exp(-\sigma\xi) + C.C.) \right. \right. \\ \left. \left. + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$v(x) = \left\{ -\frac{W_{io}(x)}{k} + \eta \left[ -\frac{W_{il}(x)}{k} + \frac{vW_{io}''(x)}{k^3} \right] + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$W(x) = \eta^{3/2} \left\{ W_{io}(x) + \eta \left[ W_{il}(x) + E_1 \exp(-\sigma\xi) + C.C. \right] + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$W_{,x}(x) = \eta^{3/2} \left\{ \dot{W}_{io}(x) - [E_1 \sigma \exp(-\sigma\xi) + C.C.] + 0(\eta) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$W_{,xx}(x) = \eta^{3/2} \left\{ \frac{1}{\eta} [E_1 \sigma^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.] + 0(1) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$n_x = \left\{ \sqrt{\eta} \frac{W_{io}''(x)}{k^2} + \eta^{3/2} \left[ W_{il}''(x) + \frac{2W_{io}^{(4)}(x)}{k^2} + k^4 (E_1 \bar{\sigma}^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.) \right] + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

$$n_{xy} = \left\{ \eta \left[ \frac{W_{io}'''(x)}{k^3} - k (E_1 \bar{\sigma} \exp(-\sigma\xi) + C.C.) \right] + 0(\eta^2) \right\} \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right)$$

(A4-8)

On dresse un tableau récapitulatif présentant les développements des conditions aux limites de  $U$ ,  $N_x$ ,  $V$ ,  $N_{xy}$ ,  $W$ ,  $W_x$ ,  $W_{xx}$  jusqu'à l'ordre nécessaire pour calculer les deux premiers termes du développement de  $\lambda$ . A cause de la symétrie seules les conditions aux limites au bord inférieur de la coque, soit en  $x = -\pi/2$ , sont écrites.

Condition aux limites	Premier terme	Second terme
$N_x = 0$ **	en $\eta^{-1/2}$ 0	en $\eta^{1/2}$ $W''_{i0}(-\pi/2) = 0$
$N_{xy} = 0$	en $\eta^0$ 0	en $\eta$ $W'''_{i0}(-\pi/2) - k^4(E_1\bar{\sigma} + C.C) = 0$
$U = 0$	en $\eta^{1/2}$ $W'_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W'_{ii}(-\pi/2)/k^2 + (v+2)W'''_{i0}(-\pi/2)/k^4 - v(E_1\bar{\sigma} + C.C) = 0$
$V = 0$	en $\eta^0$ $W_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta$ $-W_{ii}(-\pi/2)/k + vW''_{i0}(-\pi/2)/k^3 = 0$
$W = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W_{i0}(-\pi/2) = 0$	en $\eta^{5/2}$ $W_{ii}(-\pi/2) + (E_1 + C.C) = 0$
$W_{,x} = 0$	en $\eta^{3/2}$ $W'_{i0}(-\pi/2) - (E_1\bar{\sigma} + C.C) = 0$	*inutile
$W_{,xx} = 0$	en $\eta^{1/2}$ $(E_1\bar{\sigma}^2 + C.C) = 0,$ $(E_1 = \bar{E}_1)$	*inutile

\*\* Dans le cas de la condition aux limites  $N_x = 0$ , on a besoin du troisième terme du développement d'ordre  $\eta^{3/2}$ . Ce dernier s'écrit :

$$W''_{ii}(-\pi/2) + 2W^{(4)}_{i0}(-\pi/2)/k^2 + k^4(E_1\bar{\sigma}^2 + C.C) = 0$$

\* Dans certains cas il n'est pas utile de pousser le développement au second ordre pour obtenir l'expression de  $\lambda_1$ .

Ensuite on va calculer les deux premiers termes du développement de la charge critique :

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \eta^2 + 0 (\eta^3) \quad (\text{A4-9})$$

On part des deux équations donnant les deux premiers termes du développement de W (annexe 2)

$$W_{io}^{(4)}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}} \right) W_{io}(x) = 0 \quad (\text{A4-10})$$

$$W_{il}^{(4)}(x) + \left( k^8 - \frac{4\lambda_0 k^6}{3^{3/4}} \right) W_{il}(x) = \frac{4\lambda_1 k^6}{3^{3/4}} W_{io}(x) + 2k^4 \left( k^2 - \frac{\alpha\lambda_0}{3^{3/4}} \right) W_{io}''(x) - \frac{2}{k^2} W_{io}^{(6)}(x) \quad (\text{A4-11})$$

A partir du tableau récapitulatif on voit bien que les seules conditions aux limites  $N_x = W = 0$  ou  $U = W = 0$  aux bords définissent parfaitement  $\lambda_0$  et  $W_{io}(x)$ .

Pour la condition aux limites  $N_x = W = 0$ , on a trouvé (cf. § II.2.3.)

$$W_{io}(x) = A \cos r x$$

$$\lambda_0(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \quad , \quad r = 1 \quad (\text{A4-12})$$

Pour la condition aux limites  $U = W = 0$ , on a trouvé (cf. § II.2.3.)

$$w_{io}(x) = C \left( \sin \frac{r\pi}{2} \cosh r x + \sinh \frac{r\pi}{2} \cos r x \right)$$

$$\lambda_0(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \quad , \quad r = 1.505619 \quad (\text{A4-13})$$

Déterminons le second terme de la charge critique  $\lambda_1$ , pour cela on écrit A4-11 sous la forme:

$$L_1(W_{i1}) = L_2(W_{i0})$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les opérateurs ci-dessous :

$$\begin{aligned} L_1(W_{i1}) &= W_{i1}^{(4)} - r^4 W_{i1} \quad , \quad r = 1 \text{ ou } 1.505619 \\ L_2(W_{i0}) &= \frac{4\lambda_1 k^6}{3^{3/4}} W_{i0} + 2k^4 \left( k^2 - \frac{\alpha\lambda_0}{3^{3/4}} \right) W_{i0}^{(2)} - \frac{2}{k^2} W_{i0}^{(6)} \end{aligned} \quad (A4-14)$$

On introduit une forme bilinéaire symétrique  $\langle \rangle$  définie par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f g \, dx \quad (A4-15)$$

La condition de solvabilité de l'équation A4-11 aboutit à l'expression suivante de  $\lambda_1$  :

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4k^6} \left[ \frac{\langle L(W_{i1}), W_{i0} \rangle}{\langle W_{i0}, W_{i0} \rangle} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - 3^{3/4} \frac{\langle W_{i0}^{(2)}, W_{i0} \rangle}{\langle W_{i0}, W_{i0} \rangle} \left[ 1 - \frac{(2 + \alpha/2) \lambda_0}{3^{3/4} k^2} \right] \quad (A4-16)$$

Calculons  $\langle L(W_{i1}), W_{i0} \rangle$

$$\langle L(W_{i1}), W_{i0} \rangle = \langle W_{i1}^{(4)}(x) + W_{i0}(x) \rangle - r^4 \langle W_{i1}(x), W_{i0}(x) \rangle \quad (A4-17)$$

Après intégrations par parties on trouve :

$$\langle L(W_{i1}), W_{i0} \rangle = \left[ W_{i1}^{(3)} W_{i0} - W_{i1}^{(2)} W_{i0}' + W_{i1}' W_{i0}'' - W_{i1} W_{i0}^{(3)} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (A4-18)$$

Etant donné que toutes les conditions aux limites étudiées imposent une flèche nulle au bord, on a toujours :

$$W_{io} (+\Pi/2) = W_{io} (-\Pi/2) = 0 \quad (\text{A4-19})$$

L'expression de  $\lambda_1$  se simplifie donc :

$$\lambda_1 = \frac{3^{3/4}}{4k^6} \frac{[-W_{il}'' W_{io}' + W_{il}' W_{io}'' - W_{il} W_{io}''']}{\langle W_{io}', W_{io}' \rangle} \frac{\Pi/2}{-\Pi/2} - 3^{3/4} \frac{\langle W_{io}'', W_{io}' \rangle}{\langle W_{io}', W_{io}' \rangle} \left\{ 1 - \frac{(2+\alpha/2) \lambda_o}{3^{3/4} k^2} \right\} \quad (\text{A4-20})$$

#### A - Cas des conditions aux limites C1, S1, C2, S2

Cette famille de conditions aux limites satisfait les conditions  $U = W = 0$  aux bords. On a donc :

$$\lambda_o = \frac{3^{3/4}}{4k^6} \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \quad (\text{A4-21})$$

$$w_{io}(x) = C \left( \sin \frac{r\pi}{2} \cosh rx + \sinh \frac{r\pi}{2} \cos rx \right) \quad (\text{A4-22})$$

On rappelle que  $r$  est solution de l'équation :

$$\sin \frac{r\pi}{2} \cosh \frac{r\pi}{2} + \sinh \frac{r\pi}{2} \cos \frac{r\pi}{2} = 0 \quad (\text{A4-23})$$

la plus petite valeur de  $r$  qui vérifie A4-22 est :

$$r = 1.505619$$



L'expression :

$$3^{3/4} \frac{\langle W''_{io}, W_{io} \rangle}{\langle W_{io}, W_{io} \rangle} \left\{ 1 - \frac{(2+\alpha/2) \lambda_o}{3^{3/4} k^2} \right\} \quad (\text{A4-24})$$

qui figure dans  $\lambda_1$  reste inchangée pour toutes ces conditions aux limites et s'écrit :

$$3^{3/4} r^2 \beta \left\{ 1 - \frac{(2+\alpha/2) \lambda_o}{3^{3/4} k^2} \right\} \quad (\text{A4-25})$$

où

$$\beta = 1 - \frac{2 \left( \Pi + \frac{\sin r\Pi}{r} \right)}{\Pi \left( 1 + \frac{\sin^2 r\Pi/2}{\text{sh}^2 r\Pi/2} \right)}$$

L'expression

$$\frac{3^{3/4} \left[ -W''_{il} W'_{io} + W'_{il} W''_{io} - W_{il} W''_{io} \right]^{-\Pi/2}}{4k^2 \langle W_{io}, W_{io} \rangle} \quad (\text{A4-26})$$

est déterminée en tenant compte des deux autres conditions aux limites qui n'ont pas été prises en compte jusqu'à maintenant.

Conditions aux limites S2,  $W = W_{xx} = N_{xy} = U = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$W = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_1(-\Pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0$$

$$W_{xx} = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } E_1 = \bar{E}_1$$

$$N_{xy} = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W'''_{io}(-\Pi/2) = k^4 (E_1 \bar{\sigma} + \bar{E}_1 \sigma)$$

$$U = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } \frac{W'_{il}}{k^2}(-\Pi/2) + \frac{(\nu+2)}{k^4} W'''_{io}(-\Pi/2) = \nu (\bar{\sigma} E_1 + \sigma \bar{E}_1)$$

(A4-27)

Les expressions de  $W_1(-\pi/2)$  et de  $W'_1(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$W_{i1}(-\pi/2) = -\frac{\sqrt{2}}{k^4} W_{io}'''(-\pi/2)$$

$$W'_{i1}(-\pi/2) = \frac{-2}{k^2} W_{io}'''(-\pi/2)$$

(A4-28)

Le développement A4-9 de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 + \frac{X1}{k^2} \right) + \frac{X2}{k^8} + \frac{X3}{k^{10}} - 4r^2 \beta \eta \right]$$

où

$$X1 = r^2 \beta (2 + \alpha/2) \eta$$

$$X2 = -\frac{16r^5 \operatorname{sh} r \Pi}{\Pi \left( 1 + \frac{(\operatorname{sh} r \Pi/2)^2}{(\sin r \Pi/2)^2} \right)} \eta$$

$$X3 = -\frac{16r^6 \sqrt{2} (\operatorname{sh} r \Pi/2)^2}{\Pi \left( 1 + \frac{(\operatorname{sh} r \Pi/2)^2}{(\sin r \Pi/2)^2} \right)} \eta$$

(A4-29)

Condition aux limites S1.  $W = W_{xx} = U = V = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$W = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W_1(-\pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0$$

$$W_{xx} = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } E_1 = \bar{E}_1$$

$$V = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } \frac{V}{k^2} W_{io}''(-\pi/2) = W_{i1}(-\pi/2)$$

$$U = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } \frac{W'_{i1}}{k^2}(-\pi/2) + \frac{(v+2)}{k^4} W_{io}'''(-\pi/2) = v(\bar{\sigma}E_1 + \sigma\bar{E}_1)$$

(A4-30)

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et de  $W'_{i1}(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$W_{i1}(-\pi/2) = \frac{\nu}{k^2} W''_{io}(-\pi/2)$$

$$W'_{i1}(-\pi/2) = -\frac{(\nu+2)}{k^2} W'''_{io}(-\pi/2) - \frac{\nu^2}{\sqrt{2}} W''_{io}(-\pi/2)$$
(A4-31)

Le développement de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 + \frac{X1}{k^2} \right) + \frac{X4}{k^6} + \frac{X5}{k^8} - 4r^2 \beta \eta \right]$$

où

$$X4 = \frac{16 \nu^2 r^4 (\text{ch } r \Pi/2)^2}{\sqrt{2} \Pi \left( 1 + \frac{(\text{sh } r \Pi/2)^2}{(\sin r \Pi/2)^2} \right)} \eta$$

$$X5 = -\frac{16 (1+\nu) r^5 \text{sh } (r \Pi)}{\Pi \left( 1 + \frac{(\text{sh } r \Pi/2)^2}{(\sin r \Pi/2)^2} \right)} \eta$$
(A4-31)

Condition aux limites C2,  $W = W_x = U = W_{xy} = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$W = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0$$

$$W_x = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W'_{io}(-\pi/2) = \sigma E_1 + \bar{\sigma} \bar{E}_1$$

$$U = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } \frac{W'_{i1}}{k^2}(-\pi/2) + \frac{(\nu+2)}{k^4} W'''_{io}(-\pi/2) = \nu (\bar{\sigma} E_1 + \sigma \bar{E}_1)$$

$$N_{xy} = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W''_{io}(-\pi/2) = k^4 (E_1 \bar{\sigma} + E_1 \bar{\sigma})$$
(A4-32)

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W'_{i1}(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$\begin{aligned} W_{i1}(-\Pi/2) &= \frac{-1}{\sqrt{2} k^4} W''_{io}(-\Pi/2) \\ W'_{i1}(-\Pi/2) &= \frac{-2}{k^2} W''_{io}(-\Pi/2) \end{aligned} \quad (A4-33)$$

Le développement de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 + \frac{X1}{k^2} \right) + \frac{X2}{k^8} + \frac{X3}{2k^{10}} - 4r^2 \beta \eta \right] \quad (A4-34)$$

Condition aux limites C1,  $W = W_x = U = V = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$\begin{aligned} W = 0 \text{ en } -\Pi/2 &\text{ entraîne } W_{i1}(-\Pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0 \\ W_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 &\text{ entraîne } W'_{io}(-\Pi/2) = \sigma E_1 + \bar{\sigma} \bar{E}_1 \\ U = 0 \text{ en } -\Pi/2 &\text{ entraîne } \frac{W'_{i1}(-\Pi/2)}{k^2} + \frac{(v+2)}{k^4} W''_{io}(-\Pi/2) = v (\bar{\sigma} E_1 + \sigma \bar{E}_1) \\ V = 0 \text{ en } -\Pi/2 &\text{ entraîne } \frac{v}{k^2} W''_{io}(-\Pi/2) = W_{i1}(-\Pi/2) \end{aligned} \quad (A4-35)$$

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W'_{i1}(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$\begin{aligned} W_{i1}(-\Pi/2) &= \frac{v}{k^2} W''_{io}(-\Pi/2) \\ W'_{i1}(-\Pi/2) &= -v^2 \sqrt{2} W''_{io}(-\Pi/2) - \frac{(v+2)}{k^2} W'''_{io}(-\Pi/2) \end{aligned} \quad (A4-36)$$

Le développement de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{r^4}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 + \frac{X1}{k^2} \right) + \frac{X5}{k^8} + \frac{X4}{2k^6} - 4r^2 \beta \eta \right] \quad (\text{A4-37})$$

### B - Cas des conditions aux limites C3, S3, C4, S4

Cette famille de conditions aux limites satisfait les conditions  $N_x = W = 0$  aux bords. On a donc :

$$\lambda_o = \frac{3^{3/4}}{4k^6} \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right)$$

$$W_{io}(x) = A \cos x \quad (\text{A4-38})$$

On déduit que :

$$- 3^{3/4} \frac{\langle W''_{io}, W_{io} \rangle}{\langle W_{io}, W_{io} \rangle} \left\{ 1 - \frac{(2+\alpha/2) \lambda_o}{4k^2} \right\} = 3^{3/4} \left\{ \frac{(2+\alpha/2)}{4k^2} \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \right\} \quad (\text{A4-39})$$

L'expression A4-39 qui figure dans  $\lambda_1$  reste inchangée pour toutes les conditions aux limites telles que  $N_x = W = 0$ .

### Condition aux limites S3, $N_x = W = W_{xx} = V = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W''_{i1}(-\pi/2)$ .

$$N_x = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W''_{i1}(-\pi/2) + k^4 (E_1 - \bar{E}_1) = 0$$

$$W = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0$$

$$W_{xx} = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } E_1 = \bar{E}_1$$

$$V = 0 \text{ en } -\pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\pi/2) = 0$$

(A4-40)

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W_{i1}''(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$W_{i1}(-\Pi/2) = W_{i1}''(-\Pi/2) = 0 \quad (\text{A4-41})$$

On remarque que la couche limite est nulle dans ce cas ( $E_1 = 0$ ). Ce résultat est attendu puisque le mode est en sinus. Un calcul simple montre que les termes d'ordre supérieur  $E_2, E_3, \dots$  du développement dans la couche limite sont également nuls.

L'expression de  $\lambda$  se déduit à partir de A4-41 et A4-39. On trouve :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 - \frac{(2+\alpha/2)\eta}{k^2} \right) + 4\eta \right] \quad (\text{A4-42})$$

Condition aux limites C3,  $N_x = W = W_x = V = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$N_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}''(-\Pi/2) + k^4 (E_1 - \bar{E}_1) = 0$$

$$W = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\Pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 = 0$$

$$W_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}'(-\Pi/2) + (E_1 \sigma + E_1 \bar{\sigma}) = 0$$

$$V = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\Pi/2) = 0$$

(A4-43)

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W_{i1}''(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$W_{i1}(-\Pi/2) = 0$$

$$W_{i1}''(-\Pi/2) = k^4 \sqrt{2}$$

(A4-44)

L'expression de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 - \frac{(2+\alpha/2)\eta}{k^2} \right) + 4\eta \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{2}\Pi k^2} \right) \right] \quad (\text{A4-45})$$

Condition aux limites S4,  $N_x = W = W_{xx} = N_{xy} = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$\begin{aligned} N_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}''(-\Pi/2) + k^4 (E_1 - \bar{E}_1) &= 0 \\ W = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i1}(-\Pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 &= 0 \\ W_{xx} = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } E_1 = \bar{E}_1 & \\ N_{xy} = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{i0}'''(-\Pi/2) - k^4 (E_1 \bar{\sigma} + \bar{E}_1 \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A4-46})$$

Les expressions de  $W_{i1}(-\pi/2)$  et  $W_{i1}''(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$\begin{aligned} W_{i1}''(-\Pi/2) &= 0 \\ W_{i1}(-\Pi/2) &= \frac{\sqrt{2}}{k^4} \end{aligned} \quad (\text{A4-47})$$

L'expression de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \left( 1 - \frac{(2+\alpha/2)\eta}{k^2} \right) + 4\eta \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{\Pi k^{10}} \right) \right] \quad (\text{A4-48})$$

, Condition aux limites C4,  $N_x = W = W_x = N_{xy} = 0$

A partir du tableau récapitulatif on déduit :

$$\begin{aligned}
 N_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{ii}''(-\Pi/2) + k^4 (E_1 - \bar{E}_1) &= 0 \\
 W = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{ii}(-\Pi/2) + E_1 + \bar{E}_1 &= 0 \\
 W_x = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{io}'(-\Pi/2) - (E_1 \sigma + E_1 \bar{\sigma}) &= 0 \\
 N_{xy} = 0 \text{ en } -\Pi/2 \text{ entraîne } W_{io}'''(-\Pi/2) - k^4 (E_1 \bar{\sigma} + \bar{E}_1 \sigma) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A4-49}$$

Les expressions de  $W_{ii}(-\pi/2)$  et  $W_{ii}''(-\pi/2)$  sont obtenues à partir des données ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 W_{ii}''(-\Pi/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (k^4 + 1) \\
 W_{ii}(-\Pi/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{k^4} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{A4-50}$$

L'expression de  $\lambda$  s'écrit donc :

$$\lambda(k) = \frac{3^{3/4}}{4} \left[ \frac{1}{k^6} + k^2 \right] \left[ 1 - \frac{(2+\alpha/2)\eta}{k^2} \right] + \eta \left[ 1 + \frac{\sqrt{2}}{\Pi} \left( \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^6} - \frac{1}{2k^{10}} \right) \right]
 \tag{A4-51}$$



## ANNEXE 5

Dans cette annexe nous étudions l'influence du pré-flambage sur la charge de flambage.

Nous démontrerons que cette influence intervient sur le troisième terme du développement de la partie rapide du mode de flambage.

Dans le cas où on impose une contrainte axiale nulle aux bords, la rotation avant flambage modifie le terme  $\lambda_1$  du développement du paramètre de pression  $\lambda$ .

En théorie de Donnell, les équations d'équilibre du mode de flambage, compte tenu du pré-flambage, s'écrivent :

$$u_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{,yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{,xy} - \frac{\nu w_{,x}}{\eta^2} + \{w_{,xx}^F w_{,x} + w_{,x}^F w_{,xx} + \frac{1-\nu}{2} w_{,x}^F w_{,yy}\} = 0$$

$$v_{,yy} + \left\{ \frac{1+\nu}{2} v_{,xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{,xy} \right\} - \frac{w_{,y}}{\eta^2} + \frac{1-\nu}{2} w_{,xx}^F w_{,y} + \frac{1+\nu}{2} w_{,x}^F w_{,xy} = 0$$

$$\Delta^2 w + \frac{1}{\eta^4(1-\nu^2)} \{w-\eta^2(v_{,y} + \nu u_{,x} + \nu w_{,x}^F w_{,x})\} + \frac{2\lambda\alpha}{3^{3/4}\eta} \{w_{,xx} + \nu w_{,yy}\} \\ + \frac{w^F}{\eta^2} w_{,yy} + \frac{1}{\eta^2(1-\nu^2)} [\nu w-\eta^2(v v_{,y} + u_{,x} + w_{,x}^F w_{,x})] w_{,xx}^F = 0$$

$$\text{où } \Delta^2 = (\partial_x^2 + \partial_y^2).$$

(A5-1)

La solution fondamentale se développe sous la forme (voir annexe 2) :

$$w^F(\xi) = \frac{4\lambda\eta}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) \{1 + W_0^F(\xi) + \eta W_1^F(\xi) + \eta^2 W_2^F(\xi) + O(\eta^3)\}$$

(A5-2)

Nous étudions l'influence de  $W^F(\xi)$  sur le mode de flambage dans la couche limite. Pour cela, nous développons (comme dans II.3.3.) la solution rapide sous la forme :

$$\begin{aligned}
 u &= \eta^{3/2} \{ U_{r1}(\xi) + \eta U_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 v &= i\eta \{ V_{r1}(\xi) + \eta V_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right) \\
 w &= \eta^{5/2} \{ W_{r1}(\xi) + \eta W_{r2}(\xi) + \dots \} \exp\left(i \frac{ky}{\sqrt{\eta}}\right)
 \end{aligned}$$

(A5-3)

Ensuite nous reportons les développements A5-2 et A5-3 dans le système A5-1. On obtient les résultats suivants :

### Premier ordre

$$U_{r1}''(\xi) - k \frac{(1+v)}{2} V_{r1}'(\xi) - v W_{r1}'(\xi) = 0$$

$$V_{r1}''(\xi) = 0$$

$$W_{r1}^{(4)}(\xi) + \frac{1}{1-v^2} (W_{r1}(\xi) + k V_{r1}(\xi) - v U_{r1}'(\xi)) = 0$$

(A5-4)

On voit donc que les termes de pré-flambage n'interviennent pas au premier ordre.

### Second ordre

$$U_{r2}''(\xi) - k \frac{1+v}{2} V_{r2}'(\xi) - v W_{r2}'(\xi) = k^2 \frac{1-v}{2} U_{r1}(\xi) - \frac{4\lambda_0}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha v}{2}\right) (W_0^F(\xi) W_{r1}(\xi))'$$

$$V_{r2}''(\xi) = k(2+v) W_{r1}(\xi)$$

$$W_{r2}^{(4)}(\xi) + \frac{1}{1-v^2} (W_{r2}(\xi) + k V_{r2}(\xi) - v U_{r2}'(\xi)) = \left(2k^2 - \frac{2\alpha\lambda_0}{3^{3/4}}\right) W_{r1}''(\xi)$$

$$+ \frac{4\lambda_0(1-\frac{\alpha v}{2})}{3^{3/4}(1-v^2)} [U_{r1}'(\xi) - v W_{r1}(\xi)] W_0^{F''}(\xi)$$

(A5-5)

La prérotation a donc un effet sur les seconds termes du développement de la solution rapide du mode de flambage.

En utilisant les résultats du premier ordre, après arrangement, on obtient

$$U'_{r2}(\xi) - \nu W_{r2}(\xi) = k^2 (2\nu+1) [E_1 \bar{\sigma}^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.] + \frac{4\lambda_0}{3^{3/4}} \left(1 - \frac{\alpha\nu}{2}\right) (W_0^F(\xi) W_{r1}'(\xi))$$

$$V_{r2}(\xi) = (2+\nu) k [E_1 \bar{\sigma}^2 \exp(-\sigma\xi) + C.C.]$$

$$W_{r2}^{(6)}(\xi) + W_{r2}''(\xi) = 4 \left( \frac{\alpha \lambda_0}{2 \cdot 3^{3/4}} - k^2 \right) (E_1 \exp(-\sigma\xi) + C.C.) - \frac{4\lambda_0 \nu (1 - \frac{\alpha\nu}{2})}{3^{3/4} (1 - \nu^2)} (W_0^F(\xi) W_{r1}'(\xi))' = 0$$

(A5-6)

Etudions maintenant l'influence de la prérotation sur le deuxième terme  $\lambda_1$ . A partir du développement de  $n_x$  (première équation du système A4-5), on remarque que le terme en facteur de  $\eta^{3/2}$  dépend de la solution rapide du second ordre. Ce terme intervient dans le calcul de  $\lambda_1$  pour la condition aux limites  $N_x = 0$ . Dans les autres cas, les termes du deuxième ordre de la solution rapide n'interviennent pas dans le calcul de  $\lambda_1$ . La prise en compte de la prérotation modifie donc le développement de  $n_x$  à l'ordre  $\eta^{3/2}$ . Calculons cette nouvelle valeur. A l'ordre  $\eta^{3/2}$ , la condition aux limites  $N_x = 0$  en  $x$  égale à  $-\Pi/2$  s'écrit :

$$U'_{i1}(-\frac{\Pi}{2}) + U'_{r2}(0) - \nu [k V_{i2}(-\frac{\Pi}{2}) + W_{i2}(-\frac{\Pi}{2}) + k V_{r2}(0) + W_{r2}(0)] = 0$$

(A5-7)

A partir de la première équation de A5-6 et des équations du mode intérieur (cf. annexe 4), A5-7 s'écrit :

$$W_{i1}''(-\frac{\Pi}{2}) + \frac{2}{k^2} W_{i0}^{(4)}(-\frac{\Pi}{2}) + k^4 [E_1 \bar{\sigma}^2 + C.C.] + \frac{4\lambda_0 (1 - \frac{\alpha\nu}{2})}{3^{3/4} (1 - \nu^2)} k^2 [W_0(0) W_{r1}(0)]' = 0$$

(A5-8)

A propos de l'équation A5-8, on fait les remarques suivantes :

- Dans la couche limite, la solution axisymétrique (pré-flambage) influe sur le mode de flambage, comme le montrent les équations A5-6 et A5-8. Ce résultat est dû à ce que les épaisseurs des couches limites sont du même ordre c'est-à-dire de l'ordre de  $\eta$ .
- Suivant les cas ( $N_x = 0$  ou  $U = 0$ ), la couche limite peut modifier le second ou le troisième terme du développement de la charge critique par rapport au petit paramètre  $\eta$ .

## ANNEXE 6

Dans cette annexe nous étudions le cas des coques longues telles que le nombre d'ondes du mode de flambage est assez petit. Nous déterminons les équations que vérifient les premiers termes du développement asymptotique à l'intérieur de la coque. Nous utilisons pour cela la cinématique de Koiter-Sanders.

On part des trois équations d'équilibre en théorie de Koiter-Sanders (Annexe 1). On fait le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} u &= \frac{R}{L} u^* \\ v &= v^* \\ w &= \frac{h \Pi^2 w^*}{L \sqrt{12(1-\nu^2)}} \\ y^* &= \frac{L}{R} y \end{aligned} \tag{A6-1}$$

La première étape consiste à éliminer  $w^* - \partial_{y^*} v^*$  de la troisième équation d'équilibre à partir de la deuxième, puis dériver deux fois par rapport à  $y^*$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{2} \left[ \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* + \partial_{y^*}^3 \partial_x u^* + \frac{h^2}{16R^2} (3 \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* - \partial_x \partial_{y^*}^3 u^*) \right] + \frac{h^2 L^2}{12R^2} \left[ \partial_{y^*}^4 v^* + \lambda^* \partial_{y^*}^3 w^* \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^*}{\Pi^2} \partial_{y^*}^2 v^* + \Pi^4 \partial_{y^*}^7 w^* + \lambda^* \Pi^2 \partial_{y^*}^5 w^* + \lambda^* \partial_{y^*}^4 v^* + \Pi^2 \partial_{y^*}^6 v^* + \Pi^2 \partial_{y^*}^5 w^* \right] \\ & + \frac{h^2 \Pi^2}{12R^2} \left[ \frac{3-\nu}{2} \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + 2 \Pi^2 \partial_x^2 \partial_{y^*}^5 w^* + \lambda^* \alpha \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + \frac{3-\nu}{2} \partial_{y^*}^4 \partial_x^2 v^* - \frac{1-\nu}{2} \partial_{y^*}^5 \partial_x u^* \right. \\ & \left. - \frac{(1+\alpha)}{4} (\partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* - \partial_{y^*}^3 \partial_x u^*) \right] + \frac{h^2 \Pi^4}{12L^2} \partial_{y^*}^3 \partial_x^4 w^* = 0 \end{aligned} \tag{A6-2}$$

Ensuite on dérive la première équation par rapport à  $y^*$  et on multiplie la deuxième par  $v$ , puis on calcule la différence. On obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1-v}{2} (\partial_x \partial_{y^*}^3 u^* + \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^*) &= \frac{h^2}{48R^2} \left\{ \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* \left[ \frac{3+5v}{2} + \lambda^* (1+\alpha) - \partial_x \partial_{y^*}^3 u^* [(1-v)-(1+\alpha)2\lambda^*] \right] \right. \\ &+ 4v\lambda^* \partial_x^2 \partial_{y^*} w^* + \frac{4v}{\Pi^2} \lambda^* \partial_x^2 v^* + 2(1+v)\Pi^2 \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + 2v(3-v) \frac{R^2 \Pi^2}{L^2} \partial_x^4 \partial_{y^*} w^* \\ &+ \frac{3vR^2}{L^2} \partial_x^4 v^* \left[ \frac{3(1-v)}{2} - (1+\alpha) \frac{\lambda^*}{3} \right] + \frac{3vR^2}{L^2} \partial_x^3 \partial_{y^*} u^* \left( (1+\alpha) \frac{\lambda^*}{3} - \frac{1-v}{2} \right) \left. \right\} \\ &- \frac{R^2}{L^2} \left[ \frac{(1-v)(2+v)}{2} \partial_x^3 \partial_{y^*} u^* - \frac{v(1-v)}{2} \partial_x^4 v^* \right] \end{aligned}$$

(A6-3)

Enfin on soustrait membre à membre A6-2 et A6-3 puis on multiplie par  $L^2/R^2$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{48R^2} \left\{ \frac{3(1-v)}{2} [\partial_x \partial_{y^*}^3 u^* - 3 \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^*] + \Pi^2 (1+\alpha) [\partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* - \partial_x \partial_{y^*}^3 w^*] \right. \\ - 4 \Pi^2 \left[ \frac{3-v}{2} \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + 2 \Pi^2 \partial_x^2 \partial_{y^*}^5 w^* + \lambda^* \alpha \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + \frac{3-v}{2} \partial_{y^*}^4 \partial_x^2 v^* - \frac{1-v}{2} \partial_{y^*}^5 \partial_x u^* \right. \\ \left. - \Pi^2 \frac{R^2}{L^2} \partial_{y^*}^3 \partial_x^4 w^* \right] \frac{L^2}{R^2} - \frac{4L^4}{R^4} (\partial_{y^*}^4 v^* + \lambda^* \partial_{y^*}^3 w^* + \frac{\lambda^*}{\Pi^2} \partial_{y^*}^2 v^* + \Pi^4 \partial_{y^*}^7 w^* + \\ \left. \lambda^* \Pi^4 \partial_{y^*}^5 w^* + \lambda^* \partial_{y^*}^4 v^* + \Pi^2 \partial_{y^*}^6 v^* + \Pi^2 \partial_{y^*}^5 w^*) \right\} = \frac{h^2 L^2}{48R^2 R^2} \left\{ \partial_x^2 \partial_{y^*}^2 v^* \left[ \frac{3+5v}{2} \right. \right. \\ \left. + \lambda^* \Pi^2 (1+\alpha) \right] - \frac{\partial_x \partial_{y^*}^3 u^*}{2} [(1-v) - 2\lambda^* (1+\alpha)] + 4v\lambda^* \partial_x^2 \partial_{y^*} w^* + \frac{4v\lambda^*}{\Pi^2} \partial_x^2 v^* \\ \left. + 2(1+v)\Pi^2 \partial_x^2 \partial_{y^*}^3 w^* + \frac{R^2}{L^2} [2v\Pi^2(3-v) \partial_x^4 \partial_{y^*} w^* + 3v \partial_x^4 v^* (3 \frac{1-v}{2} - \frac{(1+\alpha)\lambda^*}{3}) \right. \\ \left. + 3v \partial_x^3 \partial_{y^*} u^* (\frac{(1+\alpha)\lambda^*}{3} - \frac{1-v}{2}) \right] - \frac{1-v}{2} [(2+v) \partial_x^3 \partial_{y^*} u^* - v \partial_x^4 v^*] \end{aligned}$$

(A6-4)

En faisant un développement des déplacements  $u, v, w$  en  $R^2/L^2$  et en cherchant des solutions harmoniques dans la direction azimutale :

$$u^* = \left\{ U_{i0}(x) + \frac{R^2}{L^2} U_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} U_{i2}(x) + \dots \right\} \exp(ik^*y^*)$$

$$v^* = \left\{ V_{i0}(x) + \frac{R^2}{L^2} V_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} V_{i2}(x) + \dots \right\} \exp(ik^*y^*)$$

$$w^* = \left\{ W_{i0}(x) + \frac{R^2}{L^2} W_{i1}(x) + \frac{R^4}{L^4} W_{i2}(x) + \dots \right\} \exp(ik^*y^*)$$

(A6-5)

On obtient au premier ordre :

$$\frac{1-\nu}{2} [(2+\nu)k^* \partial_x U_{i0} - \nu \partial_x^4 V_{i0}] = \frac{t}{12} [k^{*4} V_{i0} - \lambda^* k^{*3} W_{i0}$$

$$- \frac{\lambda^*}{\pi^2} k^{*2} V_{i0} - \pi^4 k^{*7} W_{i0} + \lambda^* \pi^2 k^{*5} W_{i0} +$$

$$\lambda^* k^{*4} V_{i0} - \pi^2 k^{*6} V_{i0} + \pi^2 k^{*5} W_{i0} - \frac{1-\nu}{2} k^{*2} U_{i0}$$

$$+ k^* \frac{1+\nu}{2} V_{i0} - \nu \partial_x W_{i0} = 0$$

$$- k^{*2} V_{i0} - k^* W_{i0} = 0$$

(A6-6)

## ANNEXE 7

Dans cette annexe nous donnons l'expression des matrices de rigidité élastique  $K_e^e$  et géométrique  $\lambda K_\sigma^e$  élémentaire. Le mode et la charge de flambage sont déterminés en cherchant la plus petite valeur propre et le vecteur propre associé des matrices globales  $K_o$  et  $\lambda K_\sigma$ . La cinématique utilisée est celle de Koiter-Sanders.

Le problème d'équilibre élastique de la coque sous pression revient à chercher les points stationnaires de l'énergie potentielle totale de la structure.

Cette énergie s'écrit sous la somme de deux fonctionnelles  $P_d, P_e$ . L'énergie de déformation élastique  $P_d$  fonction des déplacements  $U, V, W$  s'écrit:

$$P_d = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi R} (N_X \gamma_X N_Y \gamma_Y + 2N_{XY} \gamma_{XY} + M_X \kappa_X + M_Y \kappa_Y + 2M_{XY} \kappa_{XY}) dx dy \quad (A7-1)$$

L'expression de  $N_{\alpha\beta}, \gamma_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, \kappa_{\alpha\beta}$  a été donnée dans le chapitre 1. Sous l'hypothèse de charge conservative et en négligeant les forces de volume, le potentiel des forces extérieures  $P_e$  peut être exprimé sous la forme :

$$P_e = - \int_0^L \int_0^{2\pi R} p w dx dy + \text{Termes de bords} \quad (A7-2)$$

L'énergie totale  $P$  s'écrit donc :

$$P = P_d + P_e \quad (A7-3)$$

La solution fondamentale est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_0^L \{ N_X^F (\delta U_X + W_X^F \delta W_X) - N_Y^F \frac{\delta W}{R} - M_X^F \delta W_{XX} \} dx = \int_0^L p W dx \quad (A7-4)$$



Les contraintes résultantes sont :

$$N_X^F = -\alpha \frac{PR}{2}$$

$$N_Y^F = \nu N_X^F - Eh \frac{W^F}{R}$$

(A7-5)

où

$\alpha$  vaut 0 (resp. 1) dans le cas de la pression latérale (resp. hydrostatique).  
Le mode de flambage est solution de l'équation variationnelle :

$$\int_0^L \int_0^{2\pi R} \{ N_X^F \delta\gamma_X + N_Y^F \delta\gamma_Y + 2N_{XY}^F \delta\gamma_{XY} + M_X^F \delta\kappa_X + M_Y^F \delta\kappa_Y + 2M_{XY}^F \delta\kappa_{XY} \} dx dy$$

$$= - \int_0^L \int_0^{2\pi R} \{ N_X^F [ W_{,X} \delta W_{,X} + \frac{1}{4} (V_{,X} - U_{,Y}) (\delta V_{,X} - \delta U_{,Y}) ]$$

$$+ N_Y^F [ (W_{,Y} + V/R) (\delta W_{,Y} + \frac{\delta V}{R}) + \frac{(U_{,Y} - V_{,X})}{4} (\delta U_{,Y} - \delta V_{,X}) ] \} dx dy$$

(A7-6)

où

$$\delta\gamma_X = \delta U_{,X} + W_{,X}^F \delta W_{,X}$$

$$\delta\gamma_Y = \delta V_{,Y} - \frac{\delta W}{R}$$

$$\delta\gamma_{XY} = \delta U_{,Y} + \delta V_{,X} + W_{,X}^F (\delta W_{,Y} + \frac{\delta V}{R})$$

$$\delta\kappa_X = -\delta W_{,XX}$$

$$\delta\kappa_Y = -(\delta W_{,YY} + \frac{\delta V_{,Y}}{R})$$

$$\delta\kappa_{XY} = -[\delta W_{,XY} + \frac{1}{4R} (3\delta V_{,X} - \delta U_{,Y})]$$

(A7-9)

En cherchant des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= U(x) \exp\left(i \frac{n}{R} Y\right) \\ V(X,Y) &= i V(x) \exp\left(i \frac{n}{R} Y\right) \\ W(X,Y) &= W(x) \exp\left(i \frac{n}{R} Y\right) \end{aligned}$$

(A7-10)

et par le choix suivant de la fonction test :

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U \exp\left(-i \frac{n}{R} Y\right) \\ \delta V &= -i \delta V \exp\left(-i \frac{n}{R} Y\right) \\ \delta W &= \delta W \exp\left(-i \frac{n}{R} Y\right) \end{aligned}$$

(A7-11)

La formulation A7-6 s'écrit après intégration par rapport à Y.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left\{ N_X \delta \gamma_X + N_Y \delta \gamma_Y + 2N_{XY} \delta \gamma_{XY} + M_X \delta \kappa_X + M_Y \delta \kappa_Y + 2M_{XY} \delta \kappa_{XY} \right\} 2\pi R dx \\ &= - \int_0^L \left\{ N_X^F \left[ W_{,X} \delta W_{,X} + \frac{1}{4} \left( V_{,X} - \frac{n}{R} U \right) \left( \delta V_{,X} - \frac{n}{R} \delta U \right) \right] \right. \\ & \quad \left. N_Y^F \left[ \left( \frac{n}{R} W + V/R \right) \left( \frac{n}{R} \delta W + \frac{\delta V}{R} \right) + \frac{1}{4} \left( V_{,X} - \frac{n}{R} U \right) \left( \delta V_{,X} - \frac{n}{R} \delta U \right) \right] \right\} 2\pi R dx \end{aligned}$$

(A7-12)

L'approximation par éléments finis des déplacements U, V, W consiste à faire une interpolation de la forme :

$$U = \langle N(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$V = \langle N(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix}$$

$$W = \langle N_W(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_{1,X} \\ W_2 \\ W_{2,X} \end{Bmatrix}$$

(A7-13)

- \* sur chaque élément de longueur  $l_e$ . Les fonctions  $N(\xi)$  (resp.  $N_w(\xi)$ ) sont des polynômes d'interpolation linéaires (resp. d'Hermite) écrits sur l'élément de référence et  $\{ U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_{1x}, W_2, W_{2x} \}$  les variables modales.

Ces fonctions sont :

$$N(\xi) = \left\langle \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\rangle$$

$$N_w(\xi) = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle$$

où

$$N_1 = \frac{(1-\xi)^2(2+\xi)}{4}, \quad N_2 = (1-\xi^2)(1-\xi)\frac{l_e}{8}, \quad N_3 = \frac{(1+\xi)^2(2+\xi)}{4}, \quad N_4 = \frac{(\xi^2-1)(\xi+1)l_e}{8}$$

(A7-14)

La forme intégrale élémentaire de A7-11 sur un élément de référence s'écrit :

$$\int_{-1}^1 {}^t[q]^e [B^T] [D] [B] [q]^e \frac{l_e}{2} d\xi = \int_{-1}^1 {}^t[q]^e [E^T] (D_1 + D_2) [E] [q]^e \frac{l_e}{2} d\xi$$

on pose :

$$[K_e] = [B]^T [D] [B], \quad \lambda[K_\sigma] = [F]^T (D_1 + D_2) [F]$$

(A7-15)

où

$$\begin{bmatrix}
 \frac{-1}{l_e} & 0 & \frac{2}{l_e} W^F(\xi) N_1(\xi) & \frac{2}{l_e} W^F(\xi) N_2(\xi) & \frac{1}{l_e} & 0 & \frac{2}{l_e} W^F(\xi) N_3(\xi) & \frac{2}{l_e} W^F(\xi) N_4(\xi) \\
 0 & \frac{-n}{R} \left(\frac{1-\xi}{2}\right) & \frac{-N_1(\xi)}{R} & \frac{-N_2(\xi)}{R} & 0 & \frac{-n}{R} \left(\frac{1+\xi}{2}\right) & \frac{-N_3(\xi)}{R} & \frac{-N_4(\xi)}{R} \\
 \frac{n}{R} \left(\frac{1-\xi}{2}\right) \frac{-1}{l_e} + W^F(\xi) \frac{(1-\xi)}{2R} & \frac{n}{R} N_1 W^F(\xi) & \frac{n}{R} N_2 W^F(\xi) & \frac{n}{R} \left(\frac{1+\xi}{2}\right) & \frac{1}{l_e} \left(\frac{1+\xi}{2}\right) W^F(\xi) N_3 W^F(\xi) & N_4 W^F(\xi) \\
 0 & 0 & \frac{-4}{l_e^2} N_1(\xi) & \frac{-4}{l_e^2} N_2(\xi) & 0 & 0 & \frac{-4}{l_e^2} N_3(\xi) & \frac{-4}{l_e^2} N_4(\xi) \\
 0 & \frac{1-\xi}{2R} & \frac{n^2}{R^2} N_1(\xi) & \frac{n^2}{R^2} N_2(\xi) & 0 & \frac{n}{R} \left(\frac{1+\xi}{2}\right) & \frac{n^2}{R^2} N_3(\xi) & \frac{n^2}{R^2} N_4(\xi) \\
 \frac{n}{R} \frac{1-\xi}{4R} & \frac{3}{2R l_e} & \frac{-4n}{l_e R} N_1(\xi) & \frac{-4n}{l_e R} N_2(\xi) & \frac{n}{R} \frac{1+\xi}{4R} & \frac{-3}{2R l_e} & \frac{-4n}{l_e R} N_3(\xi) & \frac{-4n}{l_e R} N_4(\xi)
 \end{bmatrix}$$

$$E_h / 1 - v^2 = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 v & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1-v & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & h^2/12 & v h^2/12 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & v h^2/12 & h^2/12 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi) & N_2(\xi) & 0 & 0 & N_3(\xi) & N_4(\xi) \\ 0 & 0 & \frac{2}{l_c} N_1'(\xi) & N_2'(\xi) & 0 & 0 & \frac{2}{l_c} N_3'(\xi) & \frac{2}{l_c} N_4'(\xi) \end{bmatrix}$$

$$D_1 = N_x^F \begin{bmatrix} \frac{n^2}{4R^2} & 0 & \frac{-n}{4R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-n}{4R} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = N_y^F \begin{bmatrix} \frac{n^2}{4R^2} & 0 & \frac{-n}{4R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 & \frac{n}{R^2} & 0 \\ \frac{-n}{4R} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{R^2} & 0 & \frac{n^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ W_{1,x} \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ W_{2,x} \end{bmatrix}$$

Les modes et les valeurs propres que nous avons calculés ont été restreints à un état fondamental de membrane. Ceci revient à annuler les termes de pré-flambage ( $W'_F(\xi) = 0$ ) dans la matrice B et à simplifier les contraintes fondamentales A7-5 sous la forme classique :

$$\begin{aligned} N_X^F &= -\alpha \frac{PR}{2} \\ N_Y^F &= -PR \end{aligned}$$

(A7-16)

## ANNEXE 8

Dans cette annexe nous déterminons la matrice et le second membre du problème linéaire qui permet d'obtenir la solution numérique  $U, V, W$  du problème auxiliaire 1-26.

Ensuite nous établirons l'expression des coefficients  $\alpha_{30}$  et  $\alpha_{11}$ .

Pour le calcul numérique, nous utilisons comme dans l'annexe 7 la cinématique de Koiter-Sanders. Les déplacements auxiliaires  $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$ , solutions du problème variationnel 1-26, sont les points stationnaires de la fonctionnelle mixte suivante :

$$L = \int_{\Omega} \left\{ N_{\alpha\beta} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{W}{R} \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \frac{W^F_{,\beta}}{2} + \frac{1}{2} \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \frac{W^F_{,\alpha}}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\beta 2} \right) + \frac{1}{8} (U_{1,2} - V_{,1})^2 \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{N^F_{\alpha\beta}}{2} \left[ \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\beta 2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (U_{,2} - V_{,1})^2 \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{e^*(n)}{h} + \frac{1}{2} M : K \right\} d\Omega + \text{termes de bords}$$

$$\Omega = [0, L] \times [0, 2\pi R [$$

(A8-1)

où

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{U_{\alpha,\beta} + U_{\beta,\alpha}}{2}, \text{ tenseur de déformation linéarisé}$$

$N$  : tenseur des contraintes résultantes

$M, K$  : respectivement les tenseurs des moments et des courbures

$e^*(N)$  : énergie de déformation de membrane en fonction des contraintes résultantes

$\frac{1}{2} M:K$  énergie de déformation de flexion.

La fonctionnelle A8-1 peut s'écrire comme la somme d'un terme quadratique et d'un terme cubique :

$$L = L_2 + L_3$$

(A8-2)

$$L_2 = \int \left\{ N_{\alpha\beta} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{W}{R} \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \frac{W_{,\beta}^F}{2} + \frac{1}{2} \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\beta 2} \right) W_{,\alpha}^F \right] \right. \\ \left. + \frac{N_{\alpha\beta}^F}{2} \left[ \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\beta 2} \right) + \frac{1}{4} (U_{,2} - V_{,1})^2 \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{h} e^* + \frac{1}{2} M:K \right\} d\Omega$$

$$L_3 = \int_{\Omega} \left[ \left( W_{,\alpha} + \frac{U}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \left( W_{,\beta} + \frac{U}{R} \delta_{\beta 2} \right) + \frac{1}{4} (U_{,2} - V_{,1})^2 \delta_{\alpha\beta} \right] \frac{1}{2} N_{\alpha\beta} d\Omega$$

La solution auxiliaire  $\hat{U} = \{ \hat{U}, \hat{V}, \hat{W} \}$  est donc solution du problème variationnel suivant :

$$L_{11}(\hat{U}, \delta\hat{U}) + L_{21}(U^1, \delta\hat{U}) = 0$$

(A8-3)

où

$U^1 = \{ U^1, V^1, W^1 \}$  est le mode de flambage qui peut s'écrire comme suit :

$$U^1(X, Y) = U^1(X) \frac{[\exp(\frac{i n Y}{R}) + C.C.]}{2}$$

$$V^1(X, Y) = i V^1(X) \frac{[\exp(\frac{i n Y}{R}) + C.C.]}{2}$$

$$W^1(X, Y) = W^1(X) \frac{[\exp(\frac{i n Y}{R}) + C.C.]}{2}$$

(8-4)

En reportant les valeurs de  $L_2$  et  $L_3$  dans l'équation A8-3 on obtient :

$$\int_{\Omega} \left\{ [ \varepsilon_{\alpha\beta}(\hat{\delta U}_{,\alpha}) - \frac{\delta\hat{W}}{R} \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \frac{1}{2} W_{,\beta}^F (\delta\hat{W}_{,\alpha} + \frac{\delta\hat{U}}{R} \delta_{\alpha 2}) + \frac{1}{2} W_{,\alpha}^F (\delta\hat{W}_{,\beta} + \frac{\delta\hat{U}}{R} \delta_{\beta 2}) ] \right. \\ \left. + \frac{N_{\alpha\beta}^F}{2} \left[ \left( \hat{W}_{,\alpha} + \frac{\hat{U}}{R} \delta_{\alpha 2} \right) (\delta\hat{W}_{,\beta} + \frac{\delta\hat{U}}{R} \delta_{\beta 2}) + \left( \hat{W}_{,\beta} + \frac{\hat{U}}{R} \delta_{\beta 2} \right) (\delta\hat{W}_{,\alpha} + \frac{\delta\hat{U}}{R} \delta_{\alpha 2}) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\hat{U}_{,2} - \hat{V}_{,1}) (\delta\hat{U}_{,2} - \delta\hat{V}_{,1}) \delta_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} \right\} d\Omega =$$



$$-\int_{\Omega} \left\{ N_{\alpha\beta}^1 \left[ \left( W_{,\alpha}^1 + \frac{U^1}{R} \delta_{\alpha 2} \right) (\delta \hat{W}_{,\beta} + \frac{\delta \hat{U}_{\beta}}{R} \delta_{\beta 2}) + \frac{(U_{,2}^1 - V_{,1}^1)}{4} \delta (\hat{U}_{,2} - \hat{V}_{,1}) \delta_{\alpha\beta} \right] \right\} d\Omega$$

(A8-5)

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial e^*}{\partial N} (\hat{N}_{\alpha\beta}) &= \varepsilon_{\alpha\beta} (\hat{U}_{,\alpha}) - \frac{\hat{W}}{R} \delta_{\alpha 2} \delta_{\beta 2} + \frac{1}{2} W_{,\alpha}^F \left( \hat{W}_{,\beta} + \frac{\hat{U}_{\beta}}{R} \delta_{\beta 2} \right) + \frac{1}{2} W_{,\beta}^F \left( \hat{W}_{,\alpha} + \frac{\hat{U}_{\alpha}}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( W_{,\alpha}^1 + \frac{U^1}{R} \delta_{\alpha 2} \right) \left( W_{,\beta}^1 + \frac{U^1}{R} \delta_{\beta 2} \right) + \frac{1}{8} (U_{,2}^1 - V_{,1}^1)^2 \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

(A8-6)

On rappelle que l'énergie de déformation élastique s'écrit de la forme :

$$e^*(N) = \frac{1}{2E} [ (1+\nu) N : N - \nu (\text{tr } N)^2 ]$$

(A8-7)

A partir de A8-5 et A8-6 on déduit l'expression de N :

$$N = C \gamma ; \quad \gamma = \gamma^L + \gamma^{NL} ; \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{pmatrix}$$

(8-8)

où

$$\begin{aligned} \gamma_X^L &= \hat{U}_{,X} + W_{,X}^F \hat{W}_{,X} ; & \gamma_X^{NL} &= \frac{1}{2} (W_{,X}^1)^2 + \frac{1}{8} (U_{,Y}^1 - V_{,X}^1)^2 \\ \gamma_Y^L &= \hat{V}_{,Y} - \frac{\hat{W}}{R} ; & \gamma_Y^{NL} &= \frac{1}{2} \left( W_{,Y}^1 + \frac{V^1}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} (U_{,Y}^1 - V_{,X}^1)^2 \\ \gamma_{XY}^L &= \frac{\hat{U}_{,Y} + \hat{V}_{,X}}{2} ; & \gamma_{XY}^{NL} &= \frac{W_{,X}^1}{2} (W_{,Y}^1 + V^1/R) \end{aligned}$$

Ensuite on reporte A8-7 dans l'équation A8-4. On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ M_X \delta K_X + M_Y \delta K_Y + 2M_{XY} \delta K_{XY} + N_X^L [\delta \hat{U}_X + W_X^F \delta \hat{W}_X] \right. \\
 & N_Y^L [\delta \hat{V}_Y - \frac{\delta \hat{W}}{R}] + N_{XY}^L [\delta \hat{U}_Y + \delta \hat{V}_X + W_X^F (\delta \hat{W}_Y + \frac{\delta \hat{V}}{R})] + \\
 & N_X^F [\hat{W}_X \delta \hat{W}_X + \frac{1}{4} (\hat{U}_Y - \hat{V}_X) (\delta \hat{U}_Y - \delta \hat{V}_X)] + N_Y^F [(\hat{W}_Y + \frac{\hat{V}}{R}) (\delta \hat{W}_Y + \frac{\delta \hat{V}}{R}) + \\
 & \frac{1}{4} (\hat{U}_Y - \hat{V}_X) (\delta \hat{U}_Y - \delta \hat{V}_X)] \left. \right\} d\Omega = - \int_{\Omega} \left\{ N_X^1 [W_X^1 \delta \hat{W}_X + \frac{U_Y^1 - V_X^1}{4} (\delta \hat{U}_Y - \delta \hat{V}_X)] \right. \\
 & + N_Y^1 [(W_Y^1 + \frac{V^1}{R}) (\delta \hat{W}_Y + \frac{\delta \hat{V}}{R}) + \frac{U_Y^1 - V_X^1}{4} \delta (\hat{U}_Y - \hat{V}_X)] + \\
 & N_{XY}^1 [W_X^1 (\delta \hat{W}_Y + \frac{\delta \hat{V}}{R}) + (W_Y^1 + \frac{V^1}{R}) \delta \hat{W}_X] + N_X^{NL} [\delta \hat{U}_X + W_X^F \delta \hat{W}_X] \\
 & \left. + N_Y^{NL} [\delta \hat{V}_Y - \frac{\delta \hat{W}}{R}] + N_{XY}^{NL} [\delta \hat{U}_Y + \delta \hat{V}_X + W_X^F (\delta \hat{W}_Y + \frac{\delta \hat{V}}{R})] \right\} d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{A8-9}$$

où

$$N^L = C \gamma^L \quad N^{NL} = C \gamma^{NL}$$

L'équation A8-9 contient deux termes. Le premier terme a été déjà rencontré dans la résolution du problème linéaire qui consiste à chercher le mode et la valeur propre  $K_U = \lambda K_{\sigma}$  (équation A7-6). Le second terme est nouveau et est fonction de la solution fondamentale et du mode de flambage.

La solution de l'équation A8-9 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \hat{U} &= U_0(x) + U_2(x) \left[ \frac{\exp(\frac{2inY}{R}) + C.C.}{2} \right] \\
 \hat{V} &= i V_2(x) \left[ \frac{\exp(\frac{2inY}{R}) + C.C.}{2} \right] \\
 \hat{W} &= W_0(x) + W_2(x) \left[ \frac{\exp(\frac{2inY}{R}) + C.C.}{2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A8-10}$$

- La résolution de l'équation A8-9 se fait en deux étapes.  
La partie axisymétrique se résout en choisissant une fonction test de la forme :

$$\begin{aligned}\hat{\delta U} &= \hat{\delta U}(x) \\ \hat{\delta V} &= 0 \\ \hat{\delta W} &= \hat{\delta W}(x)\end{aligned}$$

(A8-11)

Avec le choix de fonction test A8-11, la forme intégrale discrète du premier terme de A8-9 s'obtient en remplaçant  $n$  par 0 dans les matrices  $K_u$  et  $K_\sigma$ . Le second terme compte tenu de A8-4 et après intégration par rapport à  $y$  s'écrit :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \int_0^L \{ & N_X^1 W_{,X}^1 \delta W_{,X} + N_{XY}^1 \left( \frac{n}{R} W^1 + V^1 \right) \delta W_{,X} + N_X^{NL} (\delta U_{,X} + W_{,X}^F \delta W_{,X}) \\ & - N_Y^{NL} \frac{\delta W}{R} \} 2 \Pi R dX\end{aligned}$$

(A8-12)

où

$$\begin{bmatrix} N_X^{NL} \\ N_Y^{NL} \end{bmatrix} = \frac{E h}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ 1 & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} [ W_{,X}^1 + \left( \frac{n/R U^1 - V_{,X}^1}{2} \right)^2 ] \\ \frac{1}{4} [ \left( \frac{n}{R} W^1 + \frac{V^1}{R} \right)^2 + \left( \frac{n/R U^1 - V_{,X}^1}{2} \right)^2 ] \end{bmatrix}$$

Les déplacements  $\hat{U}_2(x)$ ,  $\hat{V}_2(x)$ ,  $\hat{W}_2(x)$  en  $\exp(2inY/R)$  qui figurent dans l'équation A8-9 s'obtiennent en choisissant une fonction test de la forme :

$$\begin{aligned}\hat{\delta U} &= \hat{\delta U}(x) \exp\left(-\frac{2inY}{R}\right) \\ \hat{\delta V} &= \hat{\delta V}(x) \exp\left(-\frac{2inY}{R}\right) \\ \hat{\delta W} &= \hat{\delta W}(x) \exp\left(-\frac{2inY}{R}\right)\end{aligned}$$

(A8-13)

Avec le choix de fonction test A8-13, la forme intégrale discrète du premier terme de A8-9 s'obtient en remplaçant  $n$  par  $2n$  dans les matrices  $K_u$  et  $K_\sigma$ . L'expression du second membre s'écrit après intégration par rapport à  $y$  :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \left\{ \frac{N_X^1}{4} \left[ W_{,X}^1 \delta W_{,X} + \frac{\left( \frac{n}{R} U^1 - V_{,X}^1 \right)}{4} \left( \frac{2n}{R} \delta U - \delta V_{,X} \right) \right] \right. \\
& \frac{N_Y^1}{4} \left[ \left( \frac{n}{R} W^1 + \frac{V^1}{R} \right) \left( \frac{2n}{R} \delta W + \frac{\delta V}{R} \right) + \frac{\left( \frac{n}{R} U^1 - V_{,X}^1 \right) \left( \frac{2n}{R} \delta U - \delta V_{,X} \right)}{4} \right] + \\
& \frac{N_{XY}^1}{4} \left[ W_{,X}^1 \left( \frac{2n}{R} \delta W + \frac{\delta V}{R} \right) - \left( \frac{n}{R} W^1 + \frac{V^1}{R} \right) \delta W_{,X} \right] + \\
& N_X^{NL} \left[ \delta U_{,X} + W_{,X}^F \delta W_{,X} \right] - N_Y^{NL} \left[ \frac{2nV}{R} + \frac{\delta W}{R} \right] + N_{XY}^{NL} \left[ \frac{2n}{R} \delta U + \delta V_{,X} \right. \\
& \left. + W_{,X}^F \left( \frac{2n}{R} \delta W + \frac{\delta V}{R} \right) \right] \Big\} 2 \pi R dx
\end{aligned}$$

(A8-14)

où

$$\begin{bmatrix} N_X^{NL} \\ N_Y^{NL} \\ N_{XY}^{NL} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \left[ (W_{,X}^1)^2 - \left( \frac{\frac{n}{R} U^1 - V_{,X}^1}{2} \right)^2 \right] \\ -\frac{1}{8} \left[ \left( \frac{n}{R} W^1 + \frac{V^1}{R} \right) + \left( \frac{\frac{n}{R} U^1 - V_{,X}^1}{2} \right)^2 \right] \\ W_{,X}^1 \left[ \frac{\frac{n}{R} W^1 + \frac{V^1}{R}}{8} \right] \end{bmatrix}$$

On se ramène ainsi à la résolution de deux problèmes linéaires qui consistent à calculer les déplacements axisymétriques et en  $\exp(2inY/R)$  de l'équation A9-10.

On va ensuite déduire les expressions des coefficients  $\alpha_{11}$  et  $\alpha_{30}$ . Ces coefficients sont définis à partir de : [29]

$$\alpha_{11} = \frac{d}{d\lambda} L_2(U^1)$$

$$\alpha_{30} = 2 L_{21}(U^1, \hat{U})$$

(A8-15)

A partir de l'équation A8-2,  $\alpha_{11}$  s'exprime comme suit :

$$\alpha_{11} = \frac{d}{d\lambda} \int_{\Omega} \frac{N_{\alpha\beta}^F}{2} \left[ (W_{,\alpha}^1 + \frac{U^1}{R} \delta_{\alpha 2}) (W_{,\beta}^1 + \frac{U^1}{R} \delta_{\beta 2}) + \frac{1}{4} (U_{,Y}^1 - V_{,X}^1)^2 \delta_{\alpha\beta} \right] d\Omega \quad (\text{A8-16})$$

En faisant l'approximation d'un état de pré-flambage linéaire, on peut approcher les contraintes  $N_X^F$ ,  $N_Y^F$  de la forme (cf. § II.5.1 et A7-5)

$$\begin{aligned} N_X^F &= -\alpha \lambda h \sigma^{PR} \\ N_Y^F &= -\lambda h \sigma^{PR} \end{aligned}$$

où

$$\sigma^{PR} = \frac{4 \Pi E}{[36 (1-\nu^2)]^{3/4}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2} \left(\frac{R}{L}\right) \left(\frac{L}{h}\right) \quad (\text{A8-17})$$

$\lambda$  étant la valeur propre. L'expression de  $\alpha_{11}$  s'obtient donc en remplaçant  $N_X^F$  (resp.  $N_Y^F$ ) par  $-\alpha h \sigma^{PR}$  (resp.  $-h \sigma^{PR}$ ) dans la matrice de rigidité géométrique puis calculer l'intégrale :

$$\alpha_{11} = {}^t q^1 K_{\sigma} (n_c) \cdot q^1 \quad (\text{A8-18})$$

$K_{\sigma}$  : matrice de rigidité globale intégrée sur tout le domaine  $[0,L] \times [0,2\Pi R]$

$q^1$  : déplacements modaux du mode de flambage

$n_c$  : nombre d'onde critique.

Le coefficient  $\alpha_{30}$  s'obtient après avoir remplacé le mode de flambage  $U^1$  et les déplacements auxiliaires  $\hat{U}$  par leur valeur dans le terme cubique  $L_{21}$  (équation A8-14). Il suffit alors de calculer l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_{30} = & \int_0^L \int_0^{2\pi R} \left\{ [W_{,X}^1]^2 + \frac{1}{4} (U_{,Y}^1 - V_{,X}^1)^2 \right\} \hat{N}_X + \left[ (W_{,Y}^1 + \frac{V^1}{R})^2 + \frac{1}{4} (U_{,Y}^1 - V_{,X}^1)^2 \right] \hat{N}_Y \\ & + 2 \hat{N}_{XY} \left[ (W_{,Y}^1 + \frac{V^1}{R}) W_{,X}^1 \right] + 2 \left[ W_{,X}^1 \hat{W}_{,X} + \frac{U_{,Y}^1 - V_{,X}^1}{4} (\hat{U}_{,Y} - \hat{V}_{,X}) \right] N_X^1 \\ & + 2 \left[ (W_{,Y}^1 + \frac{V^1}{R}) (\hat{W}_{,Y} + \frac{\hat{V}}{R}) + \frac{U_{,Y}^1 - V_{,X}^1}{4} (\hat{U}_{,Y} - \hat{V}_{,X}) \right] N_Y^1 + \\ & 2 \left[ W_{,X}^1 (\hat{W}_{,Y} + \frac{\hat{V}}{R}) + \hat{W}_{,X} (W_{,Y}^1 + \frac{V^1}{R}) \right] N_{XY}^1 \} dx dy \end{aligned}$$

(A8-19)

## ANNEXE 9

Dans cette annexe nous calculons la réduction de la charge critique causée par un défaut localisé.

Ensuite nous vérifions la relation  $\gamma/\alpha_{11} = \lambda''/2$ .

On se limite ici à l'approximation du mode inextensionnel et nous étudions le cas de la condition aux limites  $N_x = W = 0$ .

Nous utilisons pour cela la méthode des échelles multiples décrites au § I-3-1.

Les équations de compatibilité et des moments en théorie de Donnell (en tenant compte des défauts) s'écrivent :

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\eta^2 \partial x^2} = -\frac{[w, w]}{2} - [w, w_0]$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f}{\eta^2 \partial x^2} + \frac{4\lambda}{3^{3/4}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = [w, f] + [w_0, f] - \frac{4\lambda_c}{3^{3/4} \eta} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

(A9-1)

où

$$[P.S] = P_{,xx} S_{,yy} + P_{,yy} S_{,xx} - 2S_{,xy} P_{,xy}$$

Le mode de flambage et l'équation de la courbe de stabilité neutre pour la condition aux limites  $N_x = W = 0$  s'écrivent :

$$w = \frac{1}{2} \cos x \left[ a \exp\left(\frac{ik_c y}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right]$$

$$\lambda = \frac{3^{3/4}}{4} \left( \frac{1}{k^6} + k^2 \right) \quad k_c = 3^{1/8}, \lambda_c = 1$$

(A9-2)

On considère un défaut localisé s'écrivant de la façon suivante :

$$w_0 = a_1 \cos x w_1(y)$$

où la fonction  $w_1(y)$  satisfait la condition :

$$w_1(y) < M e^{-\alpha y} \quad , \quad (\alpha, M) > 0 \quad (A9-3)$$

On introduit une nouvelle variable lente  $z$  définie par :

$$z = \varepsilon y \quad (A9-4)$$

où

$$\varepsilon^2 = \frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c}$$

La fonction de contrainte  $f$  et la flèche  $w$  sont fonctions des trois variables indépendantes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . La dérivée par rapport à  $y$  s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \quad (A9-5)$$

On en déduit facilement les dérivées d'ordre supérieur  $\partial^2/\partial y^2$ ,  $\partial^3/\partial y^3$ . Ensuite, on développe  $w$ ,  $f$  et  $\lambda$  en  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \dots \\ f &= \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \\ \frac{\lambda}{\lambda_c} a_1 &= \varepsilon^2 B_2 + \varepsilon^3 B_3 - \dots \quad * \end{aligned} \quad (A9-6)$$

En injectant les développements A9-6 dans le système A9-1 on obtient.

### Premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial y^4} f_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\eta^2 \partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 f_1}{\eta^2 \partial x^2} + \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (A9-7)$$

---

\* On peut montrer que le premier terme  $B_1$  (facteur de  $\varepsilon$ ) dans le développement de  $\lambda/\lambda_c a_1$  est nul.



» Second ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial y^4} f_2 + \frac{\partial^2 w_2}{\eta^2 \partial x^2} &= -\frac{[w_1, w_1]}{2} - 4 \frac{\partial^3}{\partial y \partial z} f_1 \\ \frac{\partial^4}{\partial y^4} w_2 - \frac{\partial^2 f_2}{\eta^2 \partial x^2} + \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} &= -4 \frac{\partial^3}{\partial y \partial z} w_1 \\ -\frac{8 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} w_1 + [w_1, f_1] - \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} B_2 w_1''(y) \cos x & \end{aligned} \quad (\text{A9-8})$$

Les solutions respectives des systèmes A9-7 et A9-8 s'écrivent :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} \cos x \left[ a_1(z) \exp\left(\frac{ik_c y}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] \\ f_1 &= \frac{1}{2} \frac{\cos x}{k^4} \left[ a_1(z) \exp\left(\frac{ik_c y}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] \end{aligned} \quad (\text{A9-9})$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \eta \left\{ \left[ a_2(z) \exp\left(\frac{2iky}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] \cos x + h_2(y) \cos x + w_0(x) \right. \\ &+ \frac{w_2}{4}(x) \left[ a_1(z)^2 \exp\left(\frac{2iky}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] + \frac{1}{2} p(x) \left[ a_1'(z) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) - a_1'(z) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \right] \left. \right\} \\ f_2 &= \eta \left\{ \left[ a_2(z) \exp\left(\frac{2iky}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] \frac{\cos x}{2k^4} + g_2(y) \cos x + f_0(x) \right. \\ &+ \frac{f_2(x)}{4} \left[ a_1^2(z) \exp\left(\frac{2iky}{\sqrt{\eta}}\right) + \text{C.C.} \right] + \frac{1}{2} Q(x) \left[ a_1'(z) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) - a_1'(z) \exp\left(\frac{iky}{\sqrt{\eta}}\right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (\text{A9-10})$$

Cherchons maintenant les équations que vérifient les fonctions figurant dans A9-10. Pour cela on reporte A9-10 dans A9-8. Pour les fonctions  $w_0$ ,  $f_0$ ,  $w_2$ ,  $f_2$  on retrouve les équations établies dans le § III.3.1.a . Les fonctions  $h_2(y)$ ,  $g_2(y)$ ,  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont définies par :

$$\begin{aligned}
 g_2^{(4)}(y) - \frac{h_2(y)}{\eta^2} &= 0 \\
 h_2^{(4)}(y) + \frac{g_2(y)}{\eta^2} + \frac{4\lambda_c}{3^{3/4}\eta} h_2''(y) &= -\frac{4B_2\lambda_c}{3^{3/4}\eta} w_1''(y)
 \end{aligned}
 \tag{A9-11}$$

$$P(x) = A \cos x$$

$$Q(x) = B \cos x$$

$$k^4 B - A = \frac{4i}{3^{1/8}} \eta^{3/2}$$

$$\tag{A9-12}$$

Le défaut localisé induit une discontinuité des différents termes  $w_m, f_m$  ainsi que de leurs dérivées dans la région du défaut localisé. Notons par :

$$[f(o)] = f(o^+) - f(o^-)$$

la discontinuité d'une fonction  $f$  au point  $y = o$ .

La transformée de Fourier définie par :

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp\left(\frac{i\omega y}{\sqrt{\eta}}\right) dy$$

$$\tag{A9-13}$$

appliquée au système A9-11 en tenant compte de la discontinuité en  $y=0$  s'écrit :

$$\omega^4 g_2 - h_2 = [g_2]''' - i\omega [g_2]'' - \omega^2 [g_2]' + i\omega^3 [g_2] = \alpha$$

$$g_2 + h_2 \omega^4 \left(1 - \frac{4\lambda_c}{3^{3/4}\omega^2}\right) = [h_2]''' - i\omega [h_2]'' - \omega^2 [h_2]' + i\omega^3 [h_2]$$

$$+ \frac{4\lambda_c}{k^6} ([h_2]' - i\omega [h_2]) + \frac{4B_2\lambda_c}{k^6} \omega^2 W_1 \sim \beta$$

$$\tag{A9-14}$$

Le déterminant  $\Delta$  du système A9-14 s'écrit :

$$\Delta = \omega^8 \left(1 - \frac{4}{k^6 \omega^2}\right) + 1 \quad (\text{A9-15})$$

On remarque que pour  $\omega = +$  ou  $- k_c$  le déterminant  $\Delta$  est nul. Ecrivons les solutions de A9-14

$$g_2(\omega) = \frac{\alpha \left(\omega^4 - \frac{4\omega^2}{k^6}\right) + \beta}{\Delta}$$

$$h_2(\omega) = \frac{\omega^4 \beta - \alpha}{\Delta} \quad (\text{A9-16})$$

La condition nécessaire pour que  $h_2$  et  $g_2$  soient bornés en  $\omega = \pm k_c$  est :

$$\omega^4 \beta = \alpha \quad \text{en } \omega = \pm k_c \quad (\text{A9-17})$$

Cherchons l'expression des quantités qui figurent dans  $\alpha$  et  $\beta$ . Pour cela on écrit que la flèche  $w$  et la fonction de contrainte  $f$  ainsi que leurs dérivées par rapport à  $y$  et  $z$  sont continues. Ce qui se traduit par :

$$w_2$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 w_1}{\partial^2 y \partial z}$$

$$f_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^3 f_2}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 f_1}{\partial y \partial z}$$

(A9-18)

qui sont des fonctions continues.

On obtient respectivement les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  :

$$\alpha = 2 ik^3 B [\dot{\bar{a}}_1] - \frac{4i}{k} [\dot{\bar{a}}_2] + 2k^6 \left( \frac{[\dot{a}_1]}{3} + [\dot{\bar{a}}_1] \right)$$

$$\beta = 2 ik^3 A [\dot{\bar{a}}_1] - 4 ik^3 [\dot{\bar{a}}_2] + \omega^2 ([\dot{a}_1] + 3 [\dot{\bar{a}}_1])$$

$$+ \frac{2}{k^6} (-2 ikA [\dot{\bar{a}}_1] + 2 ik [\dot{\bar{a}}_2] - [\dot{a}_1] - [\dot{\bar{a}}_1]) + \frac{4 B_2 \lambda_c \omega^2}{k^6} \tilde{W}_1$$

(A9-19)

On reporte A9-19 dans A9-17 et on remplace  $B_2$  par sa valeur à partir de A9-6, on obtient :

$$3^{3/4} [\dot{\bar{a}}_1] = - \frac{\lambda_i}{\lambda_c} a_1 \tilde{w}_1 (-k_c)$$

(A9-20)

La charge maximale est obtenue à partir des relations 3-10 et 3-11 en faisant tendre  $r$  vers l'infinie:

$$\begin{aligned}
\partial_y^4 w_3 - \frac{\partial_x^2 f_3}{\eta^2} + \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \partial_y^2 w_2 = & -6 \eta \partial_y^2 \partial_z^2 w_1 + \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \partial_y^2 w_1 \\
- \frac{4 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \frac{\partial_z^2 w_1}{\eta} - 4 (\partial_z \partial_y^3 w_2 + \frac{2 \lambda_c}{3^{3/4} \eta} \partial_z \partial_y w_2) + \frac{[w_1, f_2]}{\eta} \\
+ \frac{[w_2, f_1]}{\eta} + \frac{2}{\eta} (\partial_y \partial_z w_1 \partial_x^2 f_1 - \partial_x \partial_z w_1 \partial_x \partial_y f_1 + \\
\partial_y \partial_z f_1 \partial_x^2 w_1 - \partial_x \partial_z f_1 \partial_x \partial_y w_1)
\end{aligned}
\tag{A9-31}$$

Appelons respectivement  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  les seconds membres de A9-30 A9-31 :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 = \frac{a_1''(z)}{\eta} \left[ \frac{6}{k^2} + 4 ik^3 Q(x) \right] + \text{termes non linéaires} \\
\Omega_2 = \frac{a_1''(z)}{\eta} \left[ 6 k^2 + 4 ik P(x) \left( k^2 - \frac{2}{3^{3/4}} \right) \right] - \frac{4 k^2 a_1(z)}{3^{3/4} \eta^2} + \text{termes non linéaires.}
\end{aligned}
\tag{A9-32}$$

Les termes séculaires s'éliminent en écrivant / :

$$\Omega_2 k^4 - \Omega_1 = 0
\tag{A9-33}$$

En injectant A9-32 dans A9-33 en tenant compte de A9-12 et A9-2, nous obtenons :

$$2.3^{3/4} a_1''(y) + a_1 (\lambda - \lambda_c) = 0$$

A partir de l'équation de la courbe de stabilité neutre A9-2, on peut bien vérifier la relation A9-29.

